

Pontificia Universidad Católica del Perú
Escuela de Posgrado



PONTIFICIA
**UNIVERSIDAD
CATÓLICA**
DEL PERÚ

Curva polar de una foliación asociada a sus raíces aproximadas

Tesis para Optar el Grado de Doctora en Matemática

Autor

Nancy Edith Saravia Molina

Asesor

Percy Fernández Sánchez

Co-Asesor

Evelia García Barroso

Jurado

Nuria Corral Pérez

Rogério Mol Santos

Rudy Rosas Bazán

Lima - Perú

Setiembre - 2018



CURVA POLAR DE UNA FOLIACIÓN ASOCIADA A SUS RAÍCES APROXIMADAS ¹

Nancy Saravia Molina ²

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Escuela de Posgrado, de la PUCP, como parte de los requisitos para obtener el grado académico de Doctor en Matemática

Miembros de Jurado:

Dr Rudy Rosas Bazán (Presidente)

Dr. Percy Fernández Sánchez (Segundo miembro)

Dr Rogerio Mol Santos (Tercer miembro)

Dra. Evelia García Barroso (Cuarto miembro)

Dra. Nuria Corral Pérez (Quinto miembro)

Lima - Perú
setiembre - 2018

¹Version final con las correcciones del jurado, gracias a sus comentarios y observaciones que mejoraron notablemente esta memoria.

²Agradecer las becas Marco Polo y al Programa de Apoyo a la Investigación para Estudiantes en Posgrado (PAIP), que me permitieron realizar las estancias de investigación para el desarrollo de la tesis mediante el proyecto 2014-0009.

Resumen de Tesis

Nancy Saravia Molina

Doctorado en Matemáticas

CURVA POLAR DE UNA FOLIACIÓN ASOCIADA A SUS RAÍCES APROXIMADAS

Las foliaciones no dicríticas de segundo tipo fueron caracterizadas por Mattei - Salem [Ma-Sa] en término de su multiplicidad y de su unión de separatrices. En este trabajo de tesis, damos otra caracterización a las foliaciones no dicríticas de segundo tipo con el polígono de Newton de la foliación y el de su unión de separatrices.

De otro lado, Loray [Lo] enuncia una caracterización para un tipo de foliaciones con singularidades cuspidales que tienen la misma resolución que su unión de separatrices, sin embargo Fernández, Mozo y Neciosup [F-Mo-N] encuentran una imprecisión en la caracterización debido a que la condición es necesaria pero no suficiente. Lo que hacemos en este trabajo es caracterizar a dicha familia de foliaciones cuando son de segundo tipo y damos condiciones necesarias y suficientes cuando son de tipo curva generalizada en términos de su orden pesado.

Finalmente, generalizamos el resultado de García Barroso y Gwoździewicz [GB-G1] a foliaciones, esto es, descomponemos la curva polar de una foliación curva generalizada asociada a sus raíces aproximadas. Dicha descomposición viene expresada en función del tipo topológico de la separatriz de la foliación.

Dedicatoria

Dedicado:

a mi madre y a mi hija, con mucho amor y agradecimiento.

A mi madre Esther por creer que lo lograría, por apoyarme siempre y por cuidar a mi hija cuando debía viajar, haciéndome sentir que todo estaría bien.

A mi hija Flavia, por entender a su corta edad que mamá debía viajar a estudiar y por todo el cariño sincero que me brinda lo que me motiva para seguir adelante.





Agradecimientos

Agradezco a los directores de este trabajo, al Dr. Percy Fernández Sánchez por su inmensa paciencia, dedicación y haber compartido conmigo largas horas de trabajo a lo largo de la tesis doctoral. A la Dra. Evelia García Barroso quién tuvo la idea que ha dado lugar al trabajo de tesis que presento. Agradecerle a Evelia de manera muy especial por haberme permitido trabajar con ella, por tomar como suyas mis dudas, por su incansable trabajo sin importarle feriados, por no haberme permitido tirar la toalla cuando se me presentaban las adversidades y por todo el apoyo recibido durante el desarrollo de este trabajo, en las estancias de investigación que realicé en la Universidad de La Laguna.

A la profesora Nuria Corral, por haberme permitido trabajar con ella durante la estancia de investigación que realicé en la Universidad de Catabria. Agradecerle también por sus observaciones y sugerencias que ayudaron a mejorar este trabajo. Asimismo a los profesores Rudy Rosas y Jorge Mozo, por sus valiosos aportes que permitieron mejorar considerablemente algunos temas tratados en el desarrollo de la tesis.

A mis padres, por motivarme siempre a seguir adelante y no dejarme vencer. Por haber hecho que la distancia no sea un obstáculo entre nosotros, por su amor y apoyo que me brindan. A Manuel, mi esposo por sus palabras de aliento, por hacer las veces de mamá cuando debía viajar y haberme permitido seguir con mis estudios aunque eso haya significado estar lejos.

A todas aquellas personas que estaban pendiente de mi, acompañandome en este largo viaje, que a veces parecía no tener final. A Hernán por siempre haber estado presente y haberme levantado las veces que caía. A Lenin y a Carlos, por haberme apoyado con las gráficas. Gracias a todos por sus palabras de aliento las cuales convertí en fuerzas para vencer las adversidades propias de una tesis doctoral.

Agradecer también, las becas Marco Polo y al Programa de Apoyo a la Investigación para Estudiantes en Posgrado (PAIP), que me permitieron realizar las estancias de investigación para el desarrollo de la tesis mediante el proyecto 2014-0009.



Índice general

Introducción	4
Introducción	5
1. Nociones básicas	10
1.1. Curvas analíticas planas	10
1.1.1. Exponentes y pares característicos, semigrupo	17
1.1.2. Contacto y multiplicidad de intersección	21
1.1.3. Raíces aproximadas	25
1.2. Foliaciones	29
1.2.1. Explosión en un punto	31
1.2.2. Comportamiento de una foliación por explosiones	33
1.2.3. Curvas generalizadas	39
1.2.4. Polígono de Newton de una foliación	44
2. Foliaciones de segundo tipo	51
2.1. Foliación no dicrítica de segundo tipo	51
2.2. Números de intersección polar	57
2.3. Caracterización en términos del polígono de Newton de una foliación de segundo tipo	59
2.4. Singularidades cuspidales	62
3. Curvas polares de una foliación respecto a las raíces aproximadas caracte- rísticas de su separatriz	73
3.1. Propiedades de la imagen inversa de una foliación	73
3.2. Formas iniciales pesadas	78
3.3. Resultados preliminares sobre polares	80

3.4. Descomposición de la curva polar de una foliación 93

A. Geometría Plana 104

Conclusiones 106



Introducción

Este trabajo desarrolla elementos de la teoría polar local de foliaciones holomorfas en el plano complejo. Nos enfocamos en el estudio de las foliaciones de segundo tipo, dichas foliaciones son una extensión de la familia de las foliaciones de tipo curva generalizada y en el estudio de la curva contacto entre una foliación de tipo curva generalizada con una separatriz irreducible y una foliación hamiltoniana dada por una raíz aproximada de la separatriz.

El primer resultado de este trabajo es una caracterización para las foliaciones de segundo tipo no dicríticas en términos de su polígono de Newton. Cabe mencionar que las foliaciones de segundo tipo no dicrítica fueron estudiadas por Mattei y Salem [Ma-Sa], los autores dan una caracterización de las foliaciones de segundo tipo en término de la multiplicidad de su conjunto de separatrices formales. Como consecuencia de nuestro primer resultado, se caracterizan las foliaciones con singularidades cuspidales de segundo tipo en término de su orden pesado. Además se dan condiciones necesarias y suficientes para que una foliación de este tipo sea curva generalizada, esta caracterización se da en términos de su orden pesado. Las foliaciones con singularidades cuspidales fueron estudiadas por Loray en [Lo].

Nuestro segundo resultado es el teorema de descomposición de la curva polar (curva de contacto) de una foliación de tipo curva generalizada, con lo cual se generaliza a foliaciones los resultados de [GB-G1]. El teorema de descomposición de la polar de una curva plana irreducible respecto a $x = 0$ es un trabajo realizado por Merle [Mer]. Lo interesante de dicha descomposición es que solo depende del tipo topológico de la curva irreducible $f(x, y)$ y además lo determina. El resultado de Merle ha sido extendido a foliaciones por Rouillé en su tesis doctoral. La curva polar de una curva con varias ramas fue estudiada por García Barroso [GB] y extendida al caso de foliaciones por Corral [Co1]. En 2013, García Barroso y Gwoździewicz [GB-G1], generalizan el resultado de Merle para morfismos (g, f) siendo g una raíz aproximada de la curva irreducible dada por $f(x, y) = 0$.

Detallaremos el contenido del trabajo de tesis:

En el Capítulo 1 revisamos los conceptos y propiedades de curvas analíticas planas, así como las propiedades de su k -raíz aproximada.

Definimos foliaciones holomorfas y estudiamos el comportamiento de una foliación por explosiones. Describimos a las foliaciones de tipo curva generalizada y sus principales resultados dados por Camacho, Lins Neto y Sad [C-L-S]. En este mismo capítulo definimos el polígono de Newton de una foliación y enunciamos la siguiente proposición dada por Rouillé.

Proposición. [R2, Proposition 2.0.19] Sean ω_1 y ω_2 dos foliaciones curvas generalizadas no dicríticas con el mismo conjunto de separatrices. Entonces se tiene $\mathcal{N}(\omega_1) = \mathcal{N}(\omega_2)$.

Como consecuencia inmediata de esta Proposición se tiene el siguiente corolario.

Corolario B. Sean ω curva generalizada y \mathcal{C}_f una ecuación reducida de su conjunto de separatrices. Entonces se cumple $\mathcal{N}(\omega) = \mathcal{N}(df)$.

En este capítulo nos preguntamos si el recíproco del Corolario B se cumple y la respuesta la da el siguiente ejemplo:

Ejemplo C. La foliación dada por $\omega = ((b-1)xy - y^3)dx + (xy - bx^2 + xy^2)dy$ donde $-b, 1-b \notin \mathbb{Q}^+$, tiene como conjunto de separatrices a $\mathcal{C}(\mathcal{F}) = xy(x-y)$. Observamos que los polígonos $\mathcal{N}(\omega)$ y $\mathcal{N}(f)$ son iguales, pero la foliación no es de tipo curva generalizada, pues en su reducción de singularidades aparece un punto silla nodo.

Deducimos del Ejemplo C que hay foliaciones que tienen el mismo polígono que su unión de separatrices pero no son foliaciones de tipo curva generalizada. Es una pregunta abierta caracterizar las foliaciones que tienen el mismo polígono de Newton que su unión de separatrices. Demostraremos en el siguiente capítulo que son las foliaciones llamadas de **segundo tipo**.

En el Capítulo 2 presentamos nuestros primeros resultados. En dicho capítulo describimos las foliaciones de segundo tipo no dicríticas estudiadas por Mattei y Salem. En el caso no dicrítico dichas foliaciones también fueron estudiadas por Cano, Corral y Mol [CF-Co-Mol] y en el caso dicrítico por Genzmer y Mol [Ge-Mol].

Del Corolario B se sabe que para foliaciones de tipo curva generalizada el polígono de Newton de la foliación y su separatriz coinciden. Sin embargo el Ejemplo C muestra que esta propiedad no caracteriza las foliaciones curva generalizada. Presentamos nuestro primer resultado caracterizando las foliaciones cuyo polígono de Newton coincide con el polígono de su unión de separatrices, estas foliaciones son las llamadas de segundo tipo no dicrítica.

Teorema. 2.3.6 Sean \mathcal{F}_ω foliación no dicrítica y $\widehat{\mathcal{C}(\mathcal{F})}$ su conjunto de separatrices formales. Entonces \mathcal{F}_ω es de segundo tipo si y solo si $\mathcal{N}(\omega) = \mathcal{N}(f)$ donde $f = 0$ es una ecuación reducida de $\widehat{\mathcal{C}(\mathcal{F})}$.

En el capítulo 2 también estudiamos las singularidades cuspidales. Loray [Lo] enuncia una caracterización para un tipo de foliaciones que tienen la misma resolución que su conjunto de separatrices. Dicho resultado es enunciado en la siguiente proposición.

Proposición. [Lo, Proposition, pag.163] Para $\Delta(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$, la 1- forma del tipo

$$\omega = d(y^p - x^q) + \Delta(x, y)(pxdy - qydx)$$

admite la misma resolución que $d(y^p - x^q)$ si y solo si se tiene

$$\text{ord}_{(p,q)}(\Delta) > \frac{pq - p - q}{\text{mcd}(p, q)}.$$

Según F. Loray, la foliación dada en la Proposición tiene la misma resolución de que su conjunto de separatrices $\mathcal{C}(\mathcal{F}) : y^p - x^q = 0$ si y solo si $\text{ord}_{(p,q)}(\Delta) > \frac{pq - p - q}{\text{mcd}(p,q)}$. Sin embargo, Fernández, Mozo y Neciosup [F-Mo-N], encuentran una imprecisión en la caracterización originalmente propuesta. Dichos autores muestran que la condición es suficiente pero no necesaria. Enunciamos nuestro segundo resultado, el cual indica cuándo la familia de foliaciones estudiada por Loray es de segundo tipo.

Teorema. Sean $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $\mathcal{F}_{\omega_{p,q,\Delta}}$ no dicrítica. La foliación $\mathcal{F}_{\omega_{p,q,\Delta}}$ donde $\Delta(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ es de segundo tipo, si y solo si, $\text{ord}_{(p,q)}\Delta \geq \frac{pq - p - q}{\text{mcd}(p,q)}$.

Como consecuencia directa de este Teorema se tiene el siguiente resultado

Proposición. Sean $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $\mathcal{F}_{\omega_{p,q,\Delta}}$ no dicrítica. Si la foliación $\mathcal{F}_{\omega_{p,q,\Delta}}$ donde $\Delta(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ es de tipo curva generalizada, entonces $\text{ord}_{(p,q)}\Delta \geq \frac{pq - p - q}{\text{mcd}(p,q)}$.

Se obtiene una caracterización con estas foliaciones cuando son de tipo curva generalizada para el caso p y q coprimos, obteniendo el siguiente resultado

Proposición. Sean $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ coprimos. La foliación $\mathcal{F}_{\omega_{p,q,\Delta}}$ es de tipo curva generalizada, si y solo si $\text{ord}_{(p,q)}\Delta(x, y) > pq - p - q$.

El Capítulo 3 está dedicado a presentar el tercer resultado de la tesis. En este último capítulo definimos la polar de una foliación y demostramos algunas propiedades que involucran la parte inicial pesada de la foliación.

Dada una foliación $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$, definimos la imagen inversa de ω por F_l como

$$F_l^*(\omega) := A^*(\bar{x}, \bar{y})d(\bar{x}^{n_1 \cdots n_{l-1}}) + B^*(\bar{x}, \bar{y})d(\bar{y} + \bar{T}_l(\bar{x})),$$

donde $A^* = (A \circ F_l)$, $B^* = (B \circ F_l)$ y $\bar{T}_l(\bar{x}) = T_l(y_C(\bar{x}^{n_1 \cdots n_{l-1}}))$ para $T_l(y_C(x))$ una $\frac{\beta_l}{\beta_0}$ -truncación de la parametrización $y_C(x)$.

Sea $\mathcal{C}_f : f = 0$ una rama plana con exponentes característicos $(\beta_0, \dots, \beta_g)$.

Si $f = 0$ es la separatriz de la foliación ω , definimos la curva polar de ω asociada a la raíz aproximada $f^{(k)}$ de f , para f irreducible, como

$$\mathcal{P}_\omega^{(k)} := A(x, y)f_y^{(k)}(x, y) - B(x, y)f_x^{(k)}(x, y) = 0.$$

La imagen inversa de la polar de ω respecto de $f^{(k)}$ es

$$F_l^*\left(\mathcal{P}_\omega^{(k)}\right) = A^*(\bar{x}, \bar{y})\left(f_y^{(k)}\right)^*(\bar{x}, \bar{y}) - B^*(\bar{x}, \bar{y})\left(f_x^{(k)}\right)^*(\bar{x}, \bar{y}).$$

Obtenemos la siguiente proposición que nos indica qué sucede con las foliaciones después de haber ramificado, dicha proposición juega un papel importante en la prueba de nuestro resultado principal del tercer capítulo.

Proposición. 3.3.1 *Sean las foliaciones curvas generalizadas $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ y $\eta = d(f^{(k)})$ que tienen a $f = 0$ y $f^{(k)} = 0$ como separatrices respectivamente, entonces*

$$F_l^*(\omega) \wedge F_l^*(\eta) = n_1 \cdots n_{l-1} \bar{x}^{n_1 n_2 \cdots n_{l-1} - 1} \left(F_l^*\left(\mathcal{P}_\omega^{(k)}\right) \right).$$

Recordemos que el polígono de Newton depende de coordenadas y estamos interesados en saber lo que sucede con el polígono de Newton de $F_l^*\omega$, obteniendo el siguiente lema.

Lema. 3.1.5 *El polígono de Newton $\mathcal{N}(F_l^*\omega)$ tiene un lado compacto de inclinación $\frac{m_l}{n_l}$ y altura e_{l-1} . Además dicho lado es el lado principal de $\mathcal{N}(F_l^*\omega)$.*

El siguiente lema será enunciado en el capítulo 3 (página 90) y nos dice cómo es la parte inicial pesada de las foliaciones ramificadas.

Lema. 3.3.3 *Sea $0 \leq k \leq g - 1$. Para $\nu = \frac{m_l}{n_l}$ con $l \geq k + 2$, se cumple*

$$In_\nu\left(F_l^*(\omega) \wedge F_l^*(df^{(k)})\right) = \left(\sum_{i+\nu j=c_l} \bar{\theta} \mathcal{B}_{ij} \bar{x}^{c_l^{(k)} - 1 + i} \bar{y}^{j-1} \right) d\bar{x} \wedge d\bar{y},$$

donde $\bar{\theta} = -a_{\beta_{k+1}} \theta^{(k)} c_l^{(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $c_l^{(k)} = \rho_l^{(k)} + \frac{\beta_{k+1}}{\beta_0} (n_1 \cdots n_{l-1})$, siendo $\rho_l^{(k)}$ como en (3.20). Además

$$\text{ord}_\nu \left(\text{In}_\nu \left(F_l^*(\omega) \wedge F_l^* \left(df^{(k)} \right) \right) \right) = c_l + c_l^{(k)} - 1 - \nu,$$

donde $c_l = \text{ord}_\nu(\text{In}_\nu F_l^*(\omega))$.

En la siguiente proposición precisaremos información del polígono de Newton de $\mathcal{N} \left(F_l^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right) \right)$.

Proposición 0.0.1. Sean $0 \leq k \leq g-1$ y $\nu = \frac{m_l}{n_l}$ con $l \geq k+1$. La recta que contiene a los puntos del soporte de $\text{In}_\nu \left(F_l^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right) \right)$ tiene ecuación

$$\mathcal{L}_l^{(k)} : i + \nu j = c_{k,l} - \nu, \quad \text{para } l \geq k+2$$

y

$$\mathcal{L}_l^{(k)} : i + \nu j = c_l + \rho_l^{(k)} - n_1 \cdots n_k, \quad \text{para } l = k+1$$

donde $c_{k,l} := c_l + c_l^{(k)} - n_1 \cdots n_{l-1}$, siendo $c_l = \text{ord}_\nu(\text{In}_\nu F_l^*(\omega))$ y $c_l^{(k)} = \text{ord}_\nu \left(\text{In}_\nu F_l^* \left(df^{(k)} \right) \right)$ y $\rho_l^{(k)}$ como en (3.20).

Tenemos todas las herramientas necesarias para mostrar nuestro resultado principal sobre descomposición de la curva polar de una foliación asociada a las raíces aproximadas de su separatriz, cuando ésta es irreducible, el cual enunciamos a continuación.

Teorema. 3.4.1 Sean $\mathcal{F} : \omega = 0$ y $\mathcal{G} : df^{(k)} = 0$ foliaciones curvas generalizadas que tienen a f y $f^{(k)}$ como separatrices respectivamente. La curva polar $\mathcal{P}_\omega^{(k)}$ tiene $\text{mult} \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right) \geq n + n_1 \cdots n_k - 2$ y se descompone como

$$\mathcal{P}_\omega^{(k)} = \Gamma^{(k+1)} \cdots \Gamma^{(g)},$$

donde los factores $\Gamma^{(l)}$ no son necesariamente irreducibles y x es co-primo con el producto $\Gamma^{(k+2)} \cdots \Gamma^{(g)}$. Además

- $\text{cont}(\gamma, C) = \frac{\beta_l}{n}$ para γ raíz de $\Gamma^{(l)}$, $k+2 \leq l \leq g$.
- $\text{mult}(\Gamma^{(l)}) = n_1 \cdots n_{l-1} (n_l - 1)$, $k+2 \leq l \leq g$.
- $\text{mult}(\Gamma^{(k+1)}) \geq n_1 \cdots n_k (n_{k+1} + 1) - 2$ y $\text{ord}(\gamma) \leq \frac{\beta_{k+1}}{n}$ para γ raíz de Newton-Puiseux de $\Gamma^{(k+1)}$.

Capítulo 1

Nociones básicas

En este capítulo, de carácter introductorio, damos nociones de curvas analíticas planas y de foliaciones holomorfas locales en el plano complejo, necesarios para el desarrollo de este trabajo.

1.1. Curvas analíticas planas

Denotemos por $\mathbb{C}[[x, y]]$ el anillo de series de potencias formales en dos variables con coeficientes en \mathbb{C} y $\mathbb{C}\{x, y\}$ el subanillo de $\mathbb{C}[[x, y]]$ formado por series de potencias que convergen en un entorno de $0 \in \mathbb{C}^2$. Una serie convergente define una función holomorfa en un entorno del $0 \in \mathbb{C}^2$ y recíprocamente, toda función holomorfa admite localmente una representación única como serie de potencias en $0 \in \mathbb{C}^2$.

Sea $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ una serie convergente. Toda serie de potencias convergente f se escribe como suma de polinomios homogéneos, llamados **componentes homogéneas** de f , esto es, tenemos $f(x, y) = \sum_k f_k(x, y)$, donde $f_k(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ es homogéneo de grado k , o es el polinomio nulo.

Se denomina **forma inicial de f** a su componente homogénea de menor grado. El **orden** de f , denotado por $\text{ord}(f)$, se define como el grado de su forma inicial. Por convención, cuando $f(x, y)$ es idénticamente nula, ponemos $\text{ord}(f) = \infty$.

Definición 1.1.1. Sea $U \subset \mathbb{C}^2$ un abierto. Decimos que $f : U \rightarrow \mathbb{C}^2$ es **analítica compleja u holomorfa** en $a \in U$ si coincide en un entorno de a con una serie de potencias convergente. Diremos que f es analítica en U si lo es en todo punto de U .

Definición 1.1.2. Un **germen de curva analítica compleja** en el origen de \mathbb{C}^2 es dado por los ceros de una función analítica $f(x, y)$ definida en un entorno del origen. Lo

escribiremos

$$(\mathcal{C}_f, 0) = \{f(x, y) = 0\}.$$

En lo que sigue representaremos el germen de curva $(\mathcal{C}_f, 0)$ simplemente por \mathcal{C}_f .

Obsérvese que $\mathbb{C}\{x, y\}$ es isomorfo al anillo de gérmenes de funciones holomorfas en un punto $a \in \mathbb{C}^2$.

Ejemplo 1.1.3. La curva $\mathcal{C}_f : (y^2 - x^3)^2 - x^5y = 0$ define un germen de curva analítica.

Notemos que un producto $u \cdot f$ determina el mismo germen de curva analítica que f cuando u no se anula en un entorno del origen (y por consiguiente representa una unidad de $\mathbb{C}\{x, y\}$). Por otro lado, sabemos que $\mathbb{C}\{x, y\}$ es un dominio de factorización única, y si tenemos

$$f = f_1^{r_1} f_2^{r_2} \cdots f_l^{r_l},$$

donde los f_i son irreducibles y $r_i \in \mathbb{N}$, entonces el germen $\mathcal{C}_f : f = 0$ coincide con el germen $f_1 \cdot f_2 \cdots f_l = 0$, de donde obtenemos la descomposición

$$\mathcal{C}_f = \mathcal{C}_{f_1} \cup \mathcal{C}_{f_2} \cup \cdots \cup \mathcal{C}_{f_l}.$$

Llamaremos **rama analítica** a todo germen de curva analítica $\mathcal{C}_f : f = 0$, donde f es irreducible como elemento de $\mathbb{C}\{x, y\}$. Así, todo germen de curva analítica es unión de ramas analíticas. Dado que ya hemos definido el orden de una serie analítica de potencias, podemos definir la **multiplicidad del germen de una curva analítica** \mathcal{C}_f como el orden de f que no depende de la ecuación tomada pues $\text{ord}(f) = \text{ord}(uf)$. Diremos que el germen de curva es **regular** en el origen si su multiplicidad es igual a uno. Si la multiplicidad es mayor que uno, diremos que el germen de curva es **singular** en el origen.

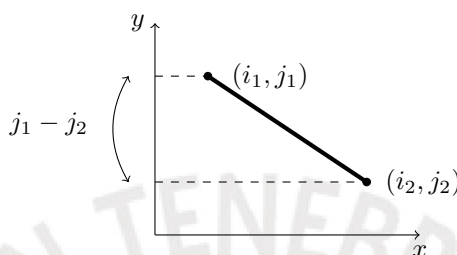
Decimos que la recta $ax + by = 0$ es **recta tangente** en el origen a la curva $\mathcal{C}_f : f = 0$ si es un factor lineal de su forma inicial.

Definición 1.1.4. Dos gérmenes de curvas \mathcal{C}_f y \mathcal{C}_g son **transversales**, si sus rectas tangentes son distintas.

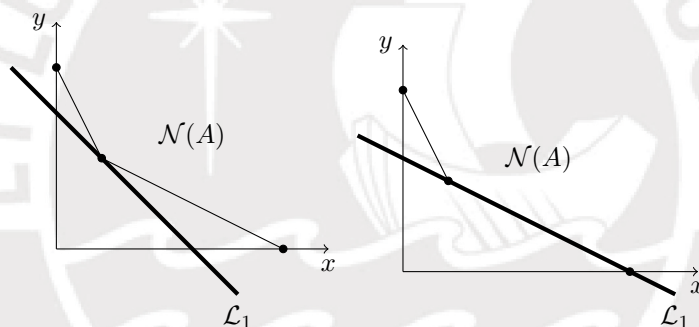
En este trabajo, vamos a considerar que $x = 0$ es transversal a \mathcal{C}_f .

Sea $A \subseteq \mathbb{N}^2$. Denotamos por $\mathcal{D}(A)$ a la envolvente convexa de $(A + \mathbb{R}_{\geq 0}^2)$, donde $+$ denota la suma de Minkowski, y por $\mathcal{N}(A)$ al borde de $\mathcal{D}(A)$.

Si L es un lado del polígono $\mathcal{N}(A)$, denotamos por \mathcal{L} a la recta del plano que contiene dicho lado. Diremos que la recta \mathcal{L} tiene *inclinación* ν si $\frac{-1}{\nu}$ es su pendiente. Llamamos *inclinación del lado* L de $\mathcal{N}(A)$ a la inclinación de la recta \mathcal{L} que contiene a L . Si L es un lado compacto de $\mathcal{N}(A)$ de extremos (i_1, j_1) e (i_2, j_2) con $j_1 > j_2$ llamamos la altura del lado de L a $j_1 - j_2$.



Decimos que una recta \mathcal{L}_1 es *recta de apoyo* de $\mathcal{N}(A)$ si $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{N}(A) \neq \emptyset$ y $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{L}_1^+$ (ver Apéndice A).



Obsérvese que la intersección de una recta de apoyo de $\mathcal{N}(A)$ con dicho polígono contiene a un único vértice de $\mathcal{N}(A)$ o bien a todo un lado del mismo.

Observaciones 1.1.5. Si el polígono $\mathcal{N}(A)$ corta a los ejes coordenados, tenemos que

1. los ejes coordenados son rectas de apoyo de $\mathcal{N}(A)$.
2. Si $\mathcal{N}(A)$ tiene lados compactos, entonces la recta de apoyo de mayor inclinación finita es la que contiene al lado compacto del polígono $\mathcal{N}(A)$ que interseca al eje x .

Dado un germen de curva analítica $\mathcal{C}_f : f = 0$ donde $f(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j \in \mathbb{C}\{x, y\}$, el *soporte* de \mathcal{C}_f , denotado por $Sop(f)$, se define como

$$Sop(f) := \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : a_{ij} \neq 0\}.$$

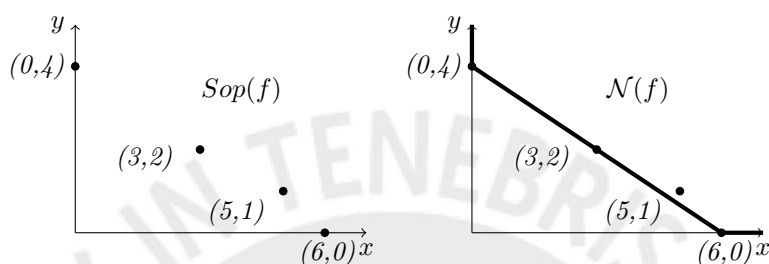
El *polígono de Newton* de \mathcal{C}_f , denotado por $\mathcal{N}(f)$ es $\mathcal{N}(Sop(f))$, es decir es el borde de $\mathcal{D}(Sop(f))$. Observemos que $\mathcal{N}(f) = \mathcal{N}(uf)$ para todo $u \in \mathbb{C}\{x, y\}$, siempre que

$u(0,0) \neq 0$.

Ejemplo 1.1.6. El soporte de $\mathcal{C}_f : (y^2 - x^3)^2 - x^5y = 0$ es

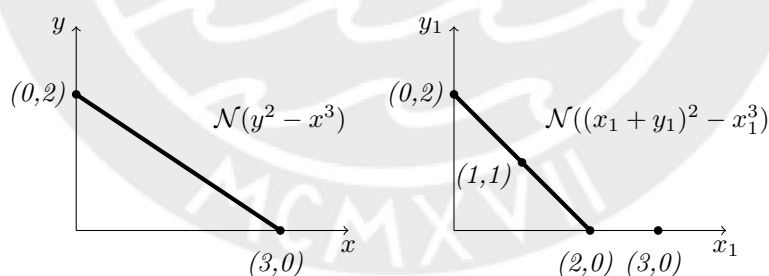
$$\text{Sop}(f) = \{(0,4), (3,2), (6,0), (5,1)\},$$

y lo dibujamos en la siguiente figura, así como su polígono de Newton.



El polígono de Newton de una curva depende de las coordenadas como demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1.7. Para el germen de curva $\mathcal{C}_f : y^2 - x^3 = 0$, tenemos que su soporte es $\text{Sop}(f(x,y)) = \{(3,0), (0,2)\}$. Si hacemos el cambio de coordenadas $x = x_1$ e $y = x_1 + y_1$ el soporte del germen de curva en las nuevas coordenadas es $\text{Sop}(f(x_1, y_1)) = \{(3,0), (0,2), (1,1), (2,0)\}$. Concluimos que los polígonos $\mathcal{N}(y^2 - x^3)$ y $\mathcal{N}((x_1 + y_1)^2 - x_1^3)$ no son iguales como muestra la siguiente figura:



Sean $\tau \in \mathbb{Q}^+$ y $\mathcal{C}_f : f(x,y) = 0$, donde $f(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij}x^i y^j \in \mathbb{C}\{x,y\}$. Dotamos a las variables x e y de los pesos $w(x) = 1$ y $w(y) = \tau$. Definimos el τ -orden pesado del germen de curva \mathcal{C}_f como $\text{ord}_\tau(f) = \min\{i + \tau j : a_{ij} \neq 0\}$ y la τ -parte inicial pesada de f por $\text{In}_\tau(f) = \sum_{i+\tau j = \text{ord}_\tau(f)} a_{ij}x^i y^j$. Obsérvese que el 1-orden pesado es el orden usual introducido en la página 10.

Ejemplo 1.1.8. Para el germen de curva $\mathcal{C}_f : (y^2 - x^3)^2 - x^5y = 0$ y $\tau = \frac{3}{2}$, tenemos

$$\text{In}_\tau f = (y^2 - x^3)^2 \quad \text{y} \quad \text{ord}_\tau f = 6.$$

Dado $f(x, y) = a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x) \in \mathbb{C}\{x\}[y]$, con $a_0(0) \neq 0$ y $n > 0$, se denomina **transformación de Tschirnhaus** de $f(x, y)$, al polinomio $f\left(x, z - \frac{a_1(x)}{na_0(x)}\right) \in \mathbb{C}\{x\}[z]$, siendo z una nueva variable.

Propiedad 1.1.9. Sea $f(x, y) = a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x) \in \mathbb{C}\{x\}[y]$, con $a_0(0) \neq 0$ y $n > 0$. La transformación de Tschirnhaus de $f(x, y)$ es de la forma

$$f\left(x, z - \frac{a_1(x)}{na_0(x)}\right) = a_0(x)z^n + b_2(x)z^{n-2} + \cdots + b_n(x),$$

donde $b_j(x) \in \mathbb{C}\{x\}$, $j = 2, \dots, n$.

Definición 1.1.10. Sea $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ de orden n . Decimos que f es **regular de orden m** con respecto a la variable x , si $f(x, 0)$ es divisible por x^m mas no por x^{m+1} .

Diremos que f es **regular en x** , cuando f es regular con respecto a x de orden $n = \text{ord}(f)$.

Definición 1.1.11. Sea $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$. Decimos que f es un **polinomio de Weierstrass** en y , si

$$f(x, y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x) \in \mathbb{C}\{x\}[y],$$

donde $n \geq 1$ y $\text{ord}(a_i) \geq i$, para $i = 1, \dots, n$.

Observación 1.1.12. Sean f polinomio de Weierstrass y f_x, f_y sus derivadas.

- $f_x(x, y) = a'_1(x)y^{n-1} + \cdots + a'_{n-1}(x)y + a'_n(x)$ de donde $\text{mult}(f_x) \geq n - 1$.
- $f_y(x, y) = ny^{n-1} + a_1(x)(n-1)y^{n-2} + \cdots + a_{n-1}(x)$, así $\text{mult}(f_y) = n - 1$.

Por tanto, $\text{mult}(f_x) \geq \text{mult}(f_y)$.

Teorema 1.1.13 (Teorema de preparación de Weierstrass). [HA, Theorem 2.4] Sea $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ regular en y de orden $m \geq 1$. Entonces, existen una unidad $u \in \mathbb{C}\{x, y\}$ y $a_i(x) \in \mathbb{C}\{x\}$, $i = 1, \dots, m$ tales que

$$f(x, y).u(x, y) = y^m + a_1(x)y^{m-1} + a_2(x)y^{m-2} + \cdots + a_m(x)$$

es un polinomio de Weierstrass.

Denotamos $\mathbb{C}\{x\}^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}\{x^{1/n}\}$ el **anillo de series de potencias fraccionarias** con coeficientes en \mathbb{C} . Si $\gamma(x) \in \mathbb{C}\{x\}^*$, existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ de modo que $\gamma(x) = \sum_i a_i x^{i/n}$. Llamamos **orden** de $\gamma(x)$ a $\text{ord}(\gamma) := \min\{i/n : a_i \neq 0\}$.

Teorema 1.1.14 (Teorema de Newton). [HA, Theorem 3.8] Sea $f(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ tal que $f(0, 0) = 0$ y $f(0, y) \neq 0$. Entonces existe $\gamma(x) \in \mathbb{C}\{x\}^*$ con $\gamma(0) = 0$ tal que

$$f(x, \gamma(x)) = 0 \in \mathbb{C}\{x\}^*.$$

La demostración original del teorema de Newton es constructiva y en ella el polígono de Newton juega un papel fundamental.

Diremos que $y(x) \in \mathbb{C}\{x\}^*$ es **raíz de Newton-Puiseux** del germen de curva $\mathcal{C}_f : f(x, y) = 0$ si $f(x, y(x)) = 0$. Denotemos por $Zer(f)$ al conjunto de las raíces de Newton-Puiseux de \mathcal{C}_f .

Al aplicar el Teorema de preparación de Weierstrass (Teorema 1.1.13) a $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ obtenemos que $f = u \cdot f^*$, para cierto $f^* \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ polinomio de Weierstrass y u una unidad de $\mathbb{C}\{x, y\}$. Para el estudio que realizamos aquí es indiferente considerar la serie f o su polinomio de Weierstrass asociado f^* .

Lema 1.1.15. [CH, Lemme 8.4.2] Sea $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ un polinomio de Weierstrass de orden n con raíces de Newton-Puiseux $y_1(x), \dots, y_n(x) \in \mathbb{C}\{x\}^*$. El polígono de Newton $\mathcal{N}(f)$ tiene tantos lados compactos como elementos tiene el conjunto $\{\text{ord}(y_i(x))\}_{i=1}^n$. Por cada lado compacto L de inclinación μ y altura j , existen j raíces de Newton-Puiseux $y_i(x)$ de f de orden μ y de la forma

$$y_i(x) = a_i x^\mu + \eta_i(x),$$

con $\text{ord}(\eta_i(x)) > \mu$ y $a_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Teorema 1.1.16. (Puiseux)[CH, Théorème 8.6.1] Sea \mathcal{C}_f un germen de curva irreducible con multiplicidad n . Si $y(x) = \sum_{i \geq n} a_i x^{i/n}$ es una raíz de Newton-Puiseux de la rama \mathcal{C}_f y ε es una raíz primitiva n -ésima de la unidad, entonces

$$y_j(x) := y(\varepsilon^j x) = \sum_{i \geq n} a_i \varepsilon^{ij} x^{i/n},$$

son todas las raíces de Newton-Puiseux de \mathcal{C}_f donde $j \in \{1, \dots, n\}$.

El teorema de Newton afirma que existe una raíz de Newton-Puiseux, y el teorema de Puiseux nos dice cómo obtenerlas todas en el caso de una curva irreducible. Si $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ es irreducible, por el Teorema de preparación de Weierstrass y el Teorema 1.1.16 podemos escribir

$$f(x, y) = u(x, y) \prod_{j=1}^n \left(y - (y(\varepsilon^j x)) \right),$$

donde $u \in \mathbb{C}\{x, y\}$ satisface $u(0, 0) \neq 0$, $y(x) \in \text{Zer}(f)$ y ε es una raíz primitiva n -ésima de la unidad. Si hacemos $x = t^n$, donde t es una nueva variable, la raíz de Newton-Puiseux $y(x) = \sum_{i \geq n} a_i x^{i/n}$ de \mathcal{C}_f se puede escribir como serie de potencias enteras en t de la forma

$$\begin{cases} x(t) = t^n \\ y(t) = \sum_{i \geq n} a_i t^i, \end{cases}$$

que denominaremos *parametrización de Puiseux* del germen de curva \mathcal{C}_f .

Ejemplo 1.1.17. El germen de curva $\mathcal{C}_f : (y^2 - x^3)^2 - x^5 y = 0$ es irreducible y sus raíces de Newton-Puiseux son

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{7}{4}} - \frac{1}{64}x^{\frac{9}{4}} + \dots, \\ y_2(x) &= x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{7}{4}} + \frac{1}{64}x^{\frac{9}{4}} + \dots, \\ y_3(x) &= -x^{\frac{3}{2}} - \frac{i}{2}x^{\frac{7}{4}} - \frac{i}{69}x^{\frac{9}{4}} + \dots, \\ y_4(x) &= -x^{\frac{3}{2}} + \frac{i}{2}x^{\frac{7}{4}} + \frac{i}{64}x^{\frac{9}{4}} + \dots. \end{aligned}$$

Por tanto la parametrización de Puiseux de \mathcal{C}_f determinada por $y_1(x)$ es

$$\begin{cases} x(t) = t^4 \\ y(t) = t^6 + \frac{1}{2}t^7 - \frac{1}{64}t^9 + \dots. \end{cases}$$

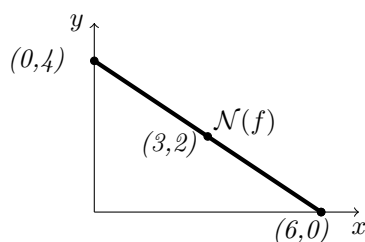
Como consecuencia del Lema 1.1.15 y del Teorema 1.1.16 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.1.18. Si \mathcal{C}_f es un germen de curva irreducible en $\mathbb{C}\{x, y\}$, su polígono de Newton $\mathcal{N}(f)$ tiene un solo lado compacto.

Demostración. Por hipótesis \mathcal{C}_f es irreducible, por tanto todas las raíces de Newton-Puiseux de \mathcal{C}_f tienen el mismo orden, así el polígono de $\mathcal{N}(f)$ tiene un solo lado compacto de inclinación dicho orden y de altura $\text{ord}(f)$. \square

El recíproco del Corolario 1.1.18 no es verdad, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1.19. Si consideramos el germen de curva $\mathcal{C}_f : (y^2 - x^3)^2 = 0$, notamos que su polígono de Newton $\mathcal{N}(f)$ tiene un solo lado compacto sin ser la curva \mathcal{C}_f irreducible.



Sea \mathcal{C}_f un germen de curva irreducible y supongamos que la inclinación del lado compacto de $\mathcal{N}(f)$ es ν y que $i + \nu j = c$ es la recta que lo contiene. Por convexidad de $\mathcal{N}(f)$ podemos expresar

$$f(x, y) = \sum_{i+\nu j=c} a_{ij}x^i y^j + \sum_{i+\nu j>c} a_{ij}x^i y^j. \quad (1.1)$$

1.1.1. Exponentes y pares característicos, semigrupo

Sea \mathcal{C}_f un germen de curva plana. Salvo que se especifique lo contrario, supondremos de ahora en adelante que $x = 0$ es transversal a \mathcal{C}_f . Sea $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = \left(t^n, \sum_{i \geq n} a_i t^i \right)$ una parametrización de Puiseux del germen de curva \mathcal{C}_f . Llamamos **exponentes característicos** de \mathcal{C}_f a la sucesión $(\beta_0, \dots, \beta_g) \subseteq \mathbb{N}$ tal que:

- $\beta_0 = \text{mult}(\mathcal{C}_f) = n$ (multiplicidad de \mathcal{C}_f en el origen).
- $\beta_1 = \min\{i : a_i \neq 0, i \not\equiv 0 \pmod n\}$.
- Sea $e_1 = \text{mcd}(n, \beta_1)$.
 - Si $e_1 = 1$ entonces $g = 1$ y los exponentes característicos de \mathcal{C}_f son (n, β_1) .
 - Si $e_1 > 1$, llamamos $\beta_2 = \min\{i : a_i \neq 0, i \not\equiv 0 \pmod{e_1}\}$.
- Sea $e_2 = \text{mcd}(e_1, \beta_1)$.
 - Si $e_2 = 1$ entonces los exponentes característicos de \mathcal{C}_f son (n, β_1, β_2) , en caso contrario continuamos con el proceso.

Definimos $e_i = \text{mcd}(e_{i-1}, \beta_i)$ para $i \geq 1$ y $e_0 = n$, este proceso es finito porque la sucesión $(e_i)_i$ es estrictamente decreciente.

- La sucesión $(\beta_0, \dots, \beta_g)$ es definida por inducción donde $\beta_{j-1} = \min\{i : a_i \neq 0, i \not\equiv 0 \pmod{e_{j-2}}\}$.

De la definición de exponentes característicos del germen de curva \mathcal{C}_f podemos escribir toda raíz de Newton-Puiseux de la rama \mathcal{C}_f de la siguiente forma:

$$y_{\mathcal{C}}(x) = \sum_{j \in (n)} a_j x^{\frac{j}{n}} + a_{\beta_1} x^{\frac{\beta_1}{n}} + \sum_{\substack{j \in (e_1) \\ \beta_1 < j < \beta_2}} a_j x^{\frac{j}{n}} + a_{\beta_2} x^{\frac{\beta_2}{n}} + \sum_{\substack{j \in (e_2) \\ \beta_2 < j < \beta_3}} a_j x^{\frac{j}{n}} + \dots + \sum_{j \geq \beta_g} a_j x^{\frac{j}{n}}, \quad (1.2)$$

donde $a_j \in \mathbb{C}$ y $a_{\beta_i} \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq g$.

Llamamos **pares característicos** de \mathcal{C}_f al conjunto $\{(m_i, n_i)\}$ con $i = 1, \dots, g$ definido por:

- $\text{mcd}(m_i, n_i) = 1$.
- $n_i = \frac{e_{i-1}}{e_i}$ y $m_i = \frac{\beta_i}{e_i}$, siendo $e_i = \text{mcd}(\beta_0, \dots, \beta_i)$.

Se concluye que $n = n_1 \cdots n_g$ y $\frac{\beta_i}{n} = \frac{m_i}{n_1 \cdots n_i}$ para $i \in \{1, \dots, g\}$.

Propiedad 1.1.20. *Los exponentes característicos y los pares característicos son datos equivalentes.*

Demostración. Si conocemos los exponentes característicos, tenemos

$$\beta_i = \text{mín}\{j : a_j \neq 0, j \not\equiv 0 \pmod{e_{i-1}}\} \text{ y } e_i = \text{mcd}(\beta_0, \dots, \beta_i),$$

para todo $i \in \{1, \dots, g\}$. Por tanto podemos hallar $m_i = \frac{\beta_i}{e_i}$ y $n_i = \frac{e_{i-1}}{e_i}$ para todo $i \in \{1, \dots, g\}$.

De manera similar, por definición de pares característicos tenemos $m_i = \frac{\beta_i}{e_i}$ y $n_i = \frac{e_{i-1}}{e_i}$ para todo $i \in \{1, \dots, g\}$. Además $\frac{\beta_i}{n} = \frac{m_i}{n_1 \cdots n_i}$ con $n = n_1 \cdots n_g$ de donde

$$\beta_i = m_i n_{i+1} \cdots n_g,$$

para todo $i \in \{1, \dots, g\}$, y $\beta_0 = n_1 \cdots n_g$. □

Ejemplo 1.1.21. *Retomamos el Ejemplo 1.1.17. El germen de curva $\mathcal{C}_f : (y^2 - x^3)^2 - x^5 y = 0$ tiene exponentes característicos $(\beta_0, \beta_1, \beta_2) = (4, 6, 7)$, y pares característicos $(m_1, n_1) = (3, 2)$ y $(m_2, n_2) = (7, 2)$.*

Definición 1.1.22. *Las curvas irreducibles \mathcal{C}_f y \mathcal{C}_g tienen el mismo tipo topológico (o son equisingulares) si y solo si, son topológicamente equivalentes, es decir existen vecindades abiertas $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ del origen y un homeomorfismo $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}'$, tal que:*

$$\phi(\mathcal{C}_f \cap \mathcal{U}) = \mathcal{C}_g \cap \mathcal{U}'.$$

Teorema 1.1.23 ([B] - [Z]). *Dos curvas analíticas planas irreducibles son equisingulares si y solo si tienen los mismos exponentes característicos (o equivalentemente si tienen los mismos pares característicos).*

Ejemplo 1.1.24. *Los gérmenes de curvas $\mathcal{C}_f : (y^2 - x^3)^2 - x^5 y = 0$ y $\mathcal{C}_g : (y^2 - x^3)^2 - x^6 y = 0$ tienen exponentes característicos $(4, 6, 7)$ y $(4, 6, 9)$ respectivamente. Por el Teorema 1.1.23 concluimos que \mathcal{C}_f y \mathcal{C}_g no tienen el mismo tipo topológico.*

Definición 1.1.25. Llamamos *semigrupo de valores* de una curva analítica plana irreducible \mathcal{C}_f al conjunto

$$\Gamma(\mathcal{C}_f) := \{\text{ord}_t g(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) : g \in \mathbb{C}\{x, y\} \setminus \{0\} \text{ y } f \text{ no divide a } g\},$$

donde $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ es una parametrización de Puiseux \mathcal{C}_f .

Obsérvese que $\Gamma(\mathcal{C}_f)$ es un semigrupo pues $0 = \text{ord}_t u(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ para toda unidad $u(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ y además $\text{ord}_t g_1 g_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = \text{ord}_t g_1(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) + \text{ord}_t g_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$.

Teorema 1.1.26. [HA, Theorem 6.12] Sea \mathcal{C}_f una curva analítica plana irreducible con exponentes característicos $(\beta_0 = n, \beta_1, \dots, \beta_g)$. El semigrupo $\Gamma(\mathcal{C}_f)$ admite un sistema minimal de generadores $\{\bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_g\}$ donde

- $\bar{\beta}_0 = \beta_0 = n$;
- $\bar{\beta}_1 = \beta_1$;
- $\bar{\beta}_i = n_{i-1} \bar{\beta}_{i-1} + \beta_i - \beta_{i-1}$ para todo $i = 2, \dots, g$, donde $e_i = \text{mcd}(\beta_i, e_{i-1})$ para $i = 2, \dots, g$ y $n_i = \frac{e_i - 1}{e_i}$.

Ejemplo 1.1.27. Retomamos el Ejemplo 1.1.21. El sistema minimal de generadores del semigrupo de valores del germen de curva $\mathcal{C}_f : (y^2 - x^3)^2 - x^5 y = 0$ es $\{4, 6, 13\}$.

Propiedad 1.1.28. [Z, Theorem 3.9] Se cumple que

$$e_{i-1} = \text{mcd}(\beta_0, \dots, \beta_{i-1}) = \text{mcd}(\bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_{i-1}),$$

para todo $i = 1, \dots, g$.

Demostración. Por definición de exponentes característicos $e_{i-1} = \text{mcd}(\beta_0, \dots, \beta_{i-1})$. Probaremos por inducción que $e_{i-1} = \text{mcd}(\bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_{i-1})$.

- Para $i = 2$, usando el Teorema 1.1.26, tenemos

$$\text{mcd}(\bar{\beta}_0, \bar{\beta}_1) = \text{mcd}(\beta_0, \beta_1) = e_1.$$

- Supongamos que se cumple para $i = h$, esto es, $e_h = \text{mcd}(\bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_h)$.
- Probaremos para $i = h + 1$:

$$\begin{aligned} \text{mcd}(\bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_h, \bar{\beta}_{h+1}) &= \text{mcd}(\text{mcd}(\bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_h), \bar{\beta}_{h+1}) \\ &= \text{mcd}(e_h, \bar{\beta}_{h+1}) \\ &= \text{mcd}(e_h, n_h \bar{\beta}_h + \beta_{h+1} - \beta_h) \\ &= \text{mcd}(e_h, \beta_{h+1}) \\ &= e_{h+1}. \end{aligned}$$

En las igualdades anteriores, hemos asumido $\text{mcd}(e_h, n_h \overline{\beta_h} + \beta_{h+1} - \beta_h) = \text{mcd}(e_h, \beta_{h+1})$, lo cual es verdad, pues como ideales en \mathbb{Z} se tiene que $(e_h, n_h \overline{\beta_h} + \beta_{h+1} - \beta_h) = (e_h, \beta_{h+1})$.

□

Dada la expresión (1.2) y el Teorema 1.1.16 podemos determinar los posibles valores de los órdenes de la diferencia de dos raíces de Newton-Puiseux distintas de la rama \mathcal{C}_f .

Lema 1.1.29. [GB, Lemme 1.1.1] Sean $\mathcal{C}_f : f = 0$ el germen de una curva irreducible de multiplicidad n y exponentes característicos $(n = \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_g)$, ζ una raíz n -ésima de la unidad y $y_j(x)$ una raíz de Newton-Puiseux de \mathcal{C}_f . Entonces

1. $\text{ord}_x(y_j(x) - y_j(\zeta x)) \geq \frac{\beta_1}{\beta_0}$.
2. Si $y_j(x) \neq y_j(\zeta x)$ y $\text{ord}_x(y_j(x) - y_j(\zeta x)) > \frac{\beta_i}{\beta_0}$ entonces $\text{ord}_x(y_j(x) - y_j(\zeta x)) \geq \frac{\beta_{i+1}}{\beta_0}$ para todo $i \in \{1, \dots, g-1\}$.
3. $\{\text{ord}_x(y_j(x) - y_j(\zeta x))\} = \left\{ \frac{\beta_i}{\beta_0} : 1 \leq i \leq g \right\}$, donde ζ recorre el conjunto de las raíces n -ésimas de la unidad.

Lema 1.1.30. [GB, Corollaire 1.1.1] Sea $\mathcal{C}_f : f = 0$ el germen de una curva irreducible con exponentes característicos $(n = \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_g)$. Entonces

$$\# \left\{ y_j(x) \in \text{Zer}(f) : \text{ord}_x(y_j(x) - y_j(\zeta x)) = \frac{\beta_i}{\beta_0} \right\} = (n_i - 1)n_{i+1} \cdots n_g,$$

donde $y_j(x) \neq y_j(\zeta x)$ y ζ es raíz n -ésima de la unidad.

Sea A un conjunto. Para cualesquiera $a_1, \dots, a_r \in A$ escribimos $\langle a_1, \dots, a_r \rangle$ para denotar a la sucesión formada por los a_i pero sin orden. Además denotamos

$$\langle \underbrace{a_1, \dots, a_1}_{m_1}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{m_2}, \dots, \underbrace{a_r, \dots, a_r}_{m_r} \rangle = \langle a_1 : m_1, \dots, a_r : m_r \rangle$$

Como consecuencia de Lema 1.1.30, tenemos la siguiente propiedad.

Propiedad 1.1.31. Sean $\mathcal{C}_f : f = 0$ el germen de una curva irreducible con exponentes característicos $(n = \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_g)$, y $y_i(x) \in \text{Zer}(f)$. Entonces

$$\begin{aligned} & \langle \text{ord}(y_1(x) - y_i(x)), \dots, \text{ord}(y_{i-1}(x) - y_i(x)), \text{ord}(y_{i+1}(x) - y_i(x)), \dots, \text{ord}(y_n(x) - y_i(x)) \rangle \\ &= \langle \frac{\beta_1}{\beta_0} : e_0 - e_1, \dots, \frac{\beta_g}{\beta_0} : e_{g-1} - e_g \rangle. \end{aligned}$$

1.1.2. Contacto y multiplicidad de intersección

Sean \mathcal{C}_f y \mathcal{C}_g dos gérmenes de curvas planas irreducibles, con multiplicidades m y n respectivamente. Consideremos $\{y_i(x)\}_{i=1}^n$ y $\{z_j(x)\}_{j=1}^m$ las raíces de Newton-Puiseux de \mathcal{C}_f y \mathcal{C}_g respectivamente.

Definimos **contacto** entre \mathcal{C}_f y \mathcal{C}_g al número

$$\text{cont}(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g) = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \{\text{ord}_x(y_i(x) - z_j(x))\} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}.$$

Observación 1.1.32. De la definición de contacto se tiene $\text{cont}(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g) = \text{cont}(\mathcal{C}_g, \mathcal{C}_f)$.

Ejemplo 1.1.33. Del Ejemplo 1.1.17, tenemos que $\mathcal{C}_f : (y^2 - x^3)^2 - x^5y = 0$, tiene como raíces de Newton-Puiseux

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{7}{4}} - \frac{1}{64}x^{\frac{9}{4}} + \cdots, \\ y_2(x) &= x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{7}{4}} + \frac{1}{64}x^{\frac{9}{4}} + \cdots, \\ y_3(x) &= -x^{\frac{3}{2}} - \frac{i}{2}x^{\frac{7}{4}} - \frac{i}{69}x^{\frac{9}{4}} + \cdots, \\ y_4(x) &= -x^{\frac{3}{2}} + \frac{i}{2}x^{\frac{7}{4}} + \frac{i}{64}x^{\frac{9}{4}} + \cdots. \end{aligned}$$

Consideremos el germen de curva $\mathcal{C}_g : y^2 - x^3 = 0$ con raíces de Newton-Puiseux $z_1 = x^{\frac{3}{2}}$ y $z_2 = -x^{\frac{3}{2}}$. Observamos que

$$\text{cont}(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g) = \text{cont}(\mathcal{C}_g, \mathcal{C}_f) = \frac{7}{4}.$$

Para calcular el contacto entre dos ramas, no hace falta comparar todas las raíces de Newton-Puiseux de la rama \mathcal{C}_f con todas las raíces de Newton-Puiseux de la rama \mathcal{C}_g . El siguiente lema garantiza que podemos fijar una raíz de Newton-Puiseux de la rama \mathcal{C}_f y compararla con todas las raíces de Newton-Puiseux de la rama \mathcal{C}_g .

Lema 1.1.34. [GB, Lemme 1.2.3] Sea $y(x)$ raíz de Newton-Puiseux fija de $\mathcal{C}_f : f = 0$, entonces

$$\text{cont}(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g) = \max_{1 \leq j \leq m} \{\text{ord}_x(y(x) - z_j(x))\},$$

donde $\{z_j(x)\}_{j=1}^m$ es el conjunto de raíces de Newton-Puiseux de \mathcal{C}_g .

Sean $\{y_i(x)\}_{i=1}^n$, $\{z_j(x)\}_{j=1}^m$ y $\{w_l(x)\}_{l=1}^q$ las raíces de Newton-Puiseux de las ramas \mathcal{C}_f , \mathcal{C}_g y \mathcal{C}_h respectivamente. El siguiente lema, es conocido como la **desigualdad triangular**.

Lema 1.1.35. [GB, Lemme 1.2.4] Sean $y(x), z(x), w(x) \in \mathbb{C}\{x\}^*$. Entonces

$$\text{ord}(y(x) - z(x)) \geq \min\{\text{ord}(y(x) - w(x)), \text{ord}(w(x) - z(x))\}.$$

Además si $\text{ord}(y_i(x) - w_l(x)) \neq \text{ord}(w_l(x) - z_j(x))$ entonces se cumple la igualdad.

Definición 1.1.36. Sean \mathcal{C}_f y \mathcal{C}_g dos gérmenes de curvas cualesquiera. Definimos la **multiplicidad de intersección** de \mathcal{C}_f y \mathcal{C}_g en el origen, como

$$(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g)_0 = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(f, g)},$$

donde (f, g) denota el ideal de $\mathbb{C}\{x, y\}$ generado por f y g .

Podemos también denotar $(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g)_0$ como $(f, g)_0$.

Proposición 1.1.37. [HA, Theorem 4.17] Sean \mathcal{C}_f un germen de curva irreducible y \mathcal{C}_g un germen de curva cualquiera. Entonces

$$(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g)_0 = \text{ord}_t(g(\gamma(t))),$$

donde $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ es una parametrización de la rama \mathcal{C}_f .

Obsérvese que si \mathcal{C}_f es un germen de curva irreducible entonces su semigrupo $\Gamma(\mathcal{C}_f)$ es el conjunto de multiplicidades de intersección de \mathcal{C}_f con cualquier otro germen de curva \mathcal{C}_g tal que f no divida a g .

Teorema 1.1.38. [HA, Theorem 4.14] Sean $\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g$ y \mathcal{C}_h gérmenes de curvas, Φ un automorfismo de $\mathbb{C}\{x, y\}$ y $u, v \in \mathbb{C}\{x, y\}$ unidades. Entonces la multiplicidad de intersección verifica las siguientes propiedades:

1. $(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g)_0 < \infty$ si y solo si f y g son primos en $\mathbb{C}\{x, y\}$,
2. $(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g)_0 = (\mathcal{C}_g, \mathcal{C}_f)_0$.
3. $(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_{gh})_0 = (\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g)_0 + (\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_h)_0$,
4. $(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g)_0 = 1$, si y solo si, f y g son transversales, y \mathcal{C}_f y \mathcal{C}_g son lisas.
5. $(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g - \mathcal{C}_{hf})_0 = (\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g)_0$.
6. $(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g)_0 = (\mathcal{C}_{\Phi(f)}, \mathcal{C}_{\Phi(g)})_0 = (\mathcal{C}_{uf}, \mathcal{C}_{vg})_0$.

Teorema 1.1.39. [HA, Theorem 4.17] Sean $f, g \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ dos polinomios de Weierstrass. Entonces

$$(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g)_0 = \text{ord}_x(\text{Result}_y(f, g)),$$

donde $\text{Result}_y(f, g)$ denota la y -resultante de f y g .

Proposición 1.1.40. Sean \mathcal{C}_f y \mathcal{C}_g gérmenes de curvas. Entonces

$$(f(x^m, y + \alpha(x^m)), g(x^m, y + \alpha(x^m)))_0 = m \cdot (f(x, y), g(x, y))_0,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ y toda serie $\alpha(x) \in \mathbb{C}\{x\}$.

Demostración. Empezaremos demostrando la proposición para $\alpha(x) = 0$. Sean $f^*(x, y) := f(x^m, y)$ y $g^*(x, y) := g(x^m, y)$. De la Proposición 1.1.39 tenemos que

$$\begin{aligned} (f^*, g^*)_0 &= \text{ord}_y \text{Result}_y(f^*, g^*) = \text{ord}_y \text{Result}_y(f(x^m, y), g(x^m, y)) \\ &\stackrel{(a)}{=} \text{ord}_y (\text{Result}_y(f(x, y), g(x, y)))|_{x^m} = m \cdot \text{ord}_y \text{Result}_y(f, g) = m \cdot (f, g)_0, \end{aligned}$$

donde la igualdad (a) se tiene pues la resultante es invariante por cambio de base (ver [Te]).

Para demostrar el caso general, observamos que $(x, y) \rightarrow (x^m, y + \alpha(x^m))$ es la composición de $E, F : \mathbb{C}\{x, y\} \rightarrow \mathbb{C}\{x, y\}$ donde $E(x, y) = (x^m, y)$ y $F(x, y) = (x, y + \alpha(x))$, siendo F un automorfismo. Por tanto concluimos la prueba aplicando el sexto apartado del Teorema 1.1.38 y el caso particular ya demostrado en esta proposición. \square

El siguiente teorema generaliza el cuarto apartado del Teorema 1.1.38.

Teorema 1.1.41. [HA, Theorem 4.18] Sean \mathcal{C}_f y \mathcal{C}_g gérmenes de curvas. Entonces

$$(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g)_0 \geq \text{mult}(\mathcal{C}_f) \cdot \text{mult}(\mathcal{C}_g),$$

y se cumple la igualdad, si y solo si, f y g son transversales.

La proposición siguiente relaciona el contacto entre dos ramas con su multiplicidad de intersección.

Proposición 1.1.42. [HA, Theorem 8.4] Sean \mathcal{C}_f y \mathcal{C}_g dos gérmenes de curvas irreducibles planas. Sean $(\beta_0, \dots, \beta_g)$ los exponentes característicos de \mathcal{C}_f , $\{\bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_g\}$ sistema minimal de generadores del semigrupo $\Gamma(\mathcal{C}_f)$ y sea α un número racional tal que $\beta_q \leq \alpha < \beta_{q+1}$. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

1. $\text{cont}(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g) = \frac{\alpha}{\text{mult}(\mathcal{C}_f)}$.
2. $\frac{(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g)_0}{\text{mult}(\mathcal{C}_g)} = \frac{\bar{\beta}_q}{n_1 \cdots n_{q-1}} + \frac{\alpha - \beta_q}{n_1 \cdots n_q}$.

Sean \mathcal{C}_f una rama y W un rama plana de multiplicidad uno en el origen. Denotemos:

$$\delta_0(W, \mathcal{C}_f) := \frac{(W, \mathcal{C}_f)_0}{\text{mult}(\mathcal{C}_f)},$$

y

$$\delta_0(\mathcal{C}_f) := \max_{W \text{ lisa}} \{\delta_0(W, \mathcal{C}_f)\}.$$

Definición 1.1.43. Sea W un germen de curva plana lisa en el origen. Decimos que W tiene **contacto maximal** con \mathcal{C}_f en el origen si

$$\delta_0(W, \mathcal{C}_f) = \delta_0(\mathcal{C}_f).$$

Consideremos el germen de una curva irreducible dada por $\mathcal{C}_f : f(x, y) = 0$ donde $f(x, y) = \sum_{ij} a_{ij} x^i y^j$ con $\text{ord}(f) = n$. Recordemos que si $x = 0$ es transversal a $f = 0$, entonces del Teorema 1.1.41 se tiene

$$(f, x)_0 = (\text{ord} f) \cdot (\text{ord} x) = (\text{ord} f) \cdot (1) = \text{ord} f,$$

por tanto $(f, x)_0 = \text{ord} f$. Como f y x son irreducibles, usando la Proposición 1.1.37, tenemos que $(f, x)_0$ coincide con sustituir en x una parametrización de Puiseux de \mathcal{C}_f .

Por tanto si $(x(t), y(t))$ es una parametrización de Puiseux del germen de curva irreducible \mathcal{C}_f entonces el $\text{ord}_t x(t) = \text{ord} f$. Después de un cambio de coordenadas, si fuera necesario, podemos suponer que $y = 0$ verifica $(f, y)_0 = \beta_1$. Así toda raíz de Newton-Puiseux de $\mathcal{C}_f : f = 0$ es dada por

$$y_{\mathcal{C}}(x) = a_{\beta_1} x^{\frac{\beta_1}{n}} + \sum_{\substack{j \in (e_1) \\ \beta_1 < j < \beta_2}} a_j x^{\frac{j}{n}} + a_{\beta_2} x^{\frac{\beta_2}{n}} + \cdots + \sum_{j \geq \beta_g} a_j x^{\frac{j}{n}}, \quad (1.3)$$

donde $a_j \in \mathbb{C}$ y $a_{\beta_i} \neq 0$, $1 \leq j \leq g$.

La curva \mathcal{C}_f tiene una raíz de Newton-Puiseux de la forma (1.3) es equivalente a que el polinomio de Weierstrass asociado a f no tenga término de grado $n - 1$ (transformación de Tschirnhaus), donde n es el orden de f . Se tiene el siguiente resultado.

Corolario 1.1.44. *Sea \mathcal{C}_f una rama plana con exponentes característicos $(\beta_0, \dots, \beta_g)$. El contacto maximal de una curva lisa W con \mathcal{C}_f es*

$$\delta_0(\mathcal{C}_f) = \frac{\beta_1}{\beta_0}.$$

Sean $z(x) = \sum_{i \geq n} a_i x^{i/n} \in \mathbb{C}\{x\}^*$, y $p \in \mathbb{Q}^+$. La p -truncación de $z(x)$ es

$$T_p(z(x)) = \sum_{n \leq i < p} a_i x^{i/n}. \quad (1.4)$$

Por abuso de notación, una $\frac{\beta_l}{\beta_0}$ -truncación de $y_{\mathcal{C}}(x)$ dada en (1.3) es denotada por

$$T_l(x) := T_{\frac{\beta_l}{\beta_0}}(y_{\mathcal{C}}(x)) = a_{\beta_1} x^{\frac{\beta_1}{n}} + \sum_{\substack{j \in (e_1) \\ \beta_1 < j < \beta_2}} a_j x^{\frac{j}{n}} + a_{\beta_2} x^{\frac{\beta_2}{n}} + \cdots + \sum_{\substack{j \in (e_{l-1}) \\ \beta_{l-1} < j < \beta_l}} a_j x^{\frac{j}{n}}, \quad (1.5)$$

es decir, fijado el exponente característico $\frac{\beta_l}{\beta_0}$ consideramos la suma de los términos de $y_{\mathcal{C}}(x)$ con exponentes menores a $\frac{\beta_l}{\beta_0}$.

Observación 1.1.45. Es inmediato que $\text{ord}(y_{\mathcal{C}}(x) - T_l(x)) = \frac{\beta_l}{\beta_0}$.

Ejemplo 1.1.46. Retomemos el Ejemplo 1.1.17 y consideramos la raíz de Newton-Puiseux $y_{\mathcal{C}}(x) = x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{7}{4}} - \frac{1}{64}x^{\frac{9}{4}} + \dots$ de la curva $\mathcal{C}_f : (y^2 - x^3)^2 - x^5y = 0$ cuyos exponentes característicos son $(4, 6, 7)$. Se tiene que la $\frac{\beta_2}{\beta_0}$ -truncación de $y_{\mathcal{C}}(x)$ es $T_2(x) = x^{\frac{3}{2}}$.

1.1.3. Raíces aproximadas

Lema 1.1.47. ([A-M, Lemma 4.4]) Sea A un dominio integral. Si $f(y) \in A[y]$ es mónico de grado d y p es invertible en A y divide a d , entonces existe un único polinomio mónico $g(y) \in A[y]$ tal que el grado de $f - g^p$ es menor que $d - \frac{d}{p}$.

Daremos la definición de **raíz aproximada** como consecuencia del Lema 1.1.47.

Definición 1.1.48. El único polinomio mónico del Lema 1.1.47 es llamado **p -ésima raíz aproximada** de f .

Definición 1.1.49. Sea $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ un polinomio de Weierstrass irreducible tal que la curva $\mathcal{C}_f : f(x, y) = 0$ tiene exponentes característicos $(\beta_0, \dots, \beta_g)$. Se llama **k -ésima raíz aproximada característica** de f , y la denotaremos $f^{(k)}$, a la e_k -ésima raíz aproximada de f , donde $e_k = \text{mcd}(\beta_0, \dots, \beta_k)$.

Ejemplo 1.1.50. Retomemos el Ejemplo 1.1.46. El germen de curva $\mathcal{C}_f : (y^2 - x^3)^2 - x^5y = 0$ tiene como 0- raíz aproximada característica a $f^{(0)} = y$ y como 1-raíz aproximada característica a $f^{(1)} = y^2 - x^3$.

Proposición 1.1.51. [A-M, Proposition 4.6] Sea $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ un polinomio de Weierstrass irreducible tal que la curva \mathcal{C}_f tiene exponentes característicos $(\beta_0, \dots, \beta_g)$. La k -ésima raíz aproximada característica $f^{(k)}$ de f verifica:

- El polinomio $f^{(k)}$ es irreducible y los exponentes característicos de la curva $\mathcal{C}^{(k)} : f^{(k)}(x, y) = 0$ son $(\frac{\beta_0}{e_k}, \dots, \frac{\beta_k}{e_k})$.
- El y -grado de $f^{(k)}$ es igual a $\frac{\beta_0}{e_k}$, $\text{cont}(f, f^{(k)}) = \frac{\beta_{k+1}}{\beta_0}$ y $(f, f^{(k)})_0 = \overline{\beta_{k+1}}$, donde $\{\overline{\beta_0}, \overline{\beta_1}, \dots, \overline{\beta_g}\}$ es el sistema minimal de generadores del semigrupo $\Gamma(\mathcal{C}_f)$.

En este trabajo consideraremos

$$f(x, y) = \prod_{i=1}^n (y - \gamma_i(x)) \quad (1.6)$$

un polinomio de Weierstrass irreducible con exponentes característicos $(\beta_0, \dots, \beta_g)$, que admite una raíz de Newton-Puiseux de la forma (1.3), es decir, que f no tiene término de grado $n - 1$. Por tanto el grado de $f - y^n = n - 2 < n - 1$ y concluimos que $f^{(0)} = y$.

Podemos escribir la k -ésima raíz aproximada característica de f como

$$f^{(k)}(x, y) = \prod_{j=1}^m (y - \delta_j(x)), \quad (1.7)$$

donde $Zer(f^{(k)}) = \{\delta_j(x)\}_{j=1}^m$, siendo $n = me_k$, $m = n_1 \cdots n_k$, y $e_k = \text{mcd}(\beta_0, \dots, \beta_k)$.

Sea $\gamma(x) = \sum_i a_i x^{\frac{i}{n}} \in \mathbb{C}[[x]]^*$ una serie de Puiseux. El soporte de $\gamma(x)$ es dado por

$$\text{Sop}(\gamma) := \left\{ \frac{i}{n} : a_i \neq 0 \right\}.$$

Propiedad 1.1.52. [GB-G3, Property 4.5] Sean \mathcal{C}_f y \mathcal{C}_g gérmenes de curvas planas irreducibles. Si $q = \text{cont}(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g)$ es un exponente característico de \mathcal{C}_f y existe $\zeta(x)$ una raíz de Newton-Puiseux de \mathcal{C}_g tal que $q \in \text{Sop}(\zeta)$, entonces q es un exponente característico de \mathcal{C}_g .

De la Propiedad 1.1.52 podemos afirmar que el exponente $\frac{\beta_{k+1}}{\beta_0}$ no aparece en ninguna raíz de Newton-Puiseux de $\mathcal{C}^{(k)} : f^{(k)}(x, y) = 0$, pues si apareciera sería un exponente característico de $f^{(k)}$ y no lo es pues por la Proposición 1.1.51 tenemos que los exponentes característicos de $f^{(k)}$ son $\left(\frac{\beta_0}{e_k}, \dots, \frac{\beta_k}{e_k}\right)$. Por tanto toda raíz de Newton-Puiseux de $\mathcal{C}^{(k)}$, con $k \geq 1$, se expresa por

$$\delta_{\mathcal{C}^{(k)}}(x) = \sum_{j \in \left(\frac{\beta_0}{e_k}\right)} b_j x^{\frac{j}{e_k}} + b_{\frac{\beta_1}{e_k}} x^{\frac{\beta_1}{e_k}} + \sum_{\substack{j \in \left(\frac{e_1}{e_k}\right) \\ \frac{\beta_1}{e_k} < j < \frac{\beta_2}{e_k}}} b_j x^{\frac{j}{e_k}} + \cdots + b_{\frac{\beta_k}{e_k}} x^{\frac{\beta_k}{e_k}} + \sum_{\frac{\beta_k}{e_k} < j < \frac{\beta_{k+1}}{e_k}} b_j x^{\frac{j}{e_k}} + \sum_{j > \frac{\beta_{k+1}}{e_k}} b_j x^{\frac{j}{e_k}},$$

donde $b_j \in \mathbb{C}$ y $b_{\frac{\beta_i}{e_k}} \neq 0$; es decir

$$\delta_{\mathcal{C}^{(k)}}(x) = \sum_{j \in \left(\frac{\beta_0}{e_k}\right)} b_j x^{\frac{j}{e_k}} + b_{\frac{\beta_1}{e_k}} x^{\frac{\beta_1}{e_k}} + \sum_{\substack{j \in \left(\frac{e_1}{e_k}\right) \\ \frac{\beta_1}{e_k} < j < \frac{\beta_2}{e_k}}} b_j x^{\frac{j}{e_k}} + \cdots + b_{\frac{\beta_k}{e_k}} x^{\frac{\beta_k}{e_k}} + \sum_{\frac{\beta_k}{e_k} < j < \frac{\beta_{k+1}}{e_k}} b_j x^{\frac{j}{e_k}} + \sum_{j > \frac{\beta_{k+1}}{e_k}} b_j x^{\frac{j}{e_k}}. \quad (1.8)$$

Aplicando la Proposición 1.1.51, se sabe que $\text{cont}(f, f^{(k)}) = \frac{\beta_{k+1}}{\beta_0}$. Fijada $y_{\mathcal{C}}(x)$, como en (1.3), raíz de Newton-Puiseux de \mathcal{C}_f y aplicando el Lema 1.1.34 existe una raíz de Newton-Puiseux de $\mathcal{C}^{(k)}$ que tras reordenación, si fuera necesaria, podemos suponer que es $\delta_1(x)$ tal que

$$\text{ord}_x(\delta_1(x) - y_{\mathcal{C}}(x)) = \frac{\beta_{k+1}}{\beta_0}. \quad (1.9)$$

Por tanto

$$\delta_1(x) = a_{\beta_1} x^{\frac{\beta_1}{n}} + \sum_{\substack{j \in (e_1) \\ \beta_1 < j < \beta_2}} a_j x^{\frac{j}{n}} + \cdots + a_{\beta_k} x^{\frac{\beta_k}{n}} + \sum_{\substack{j \in (e_k) \\ \beta_k < j < \beta_{k+1}}} a_j x^{\frac{j}{n}} + \sum_{j > \frac{\beta_{k+1}}{e_k}} b_j x^{\frac{j e_k}{n}} \quad (1.10)$$

de manera que $T_{k+1}(x) = T_{k+1}(y_C(x)) = T_{k+1}(\delta_1(x))$.

Además $\mathcal{C}^{(k)} : f^{(k)} = 0$ es un germen de curva irreducible, y aplicando el Lema 1.1.29 y la Proposición 1.1.51, obtenemos, para $k \geq 1$,

$$\left\{ \text{ord}_x(\delta_1(x) - \delta_j(x)), 2 \leq j \leq \frac{\beta_0}{e_k} \right\} = \left\{ \frac{\beta_i}{\beta_0} \right\}_{i=1}^k. \quad (1.11)$$

Fijada $y_C(x) \in \text{Zer}(f)$ obsérvese que $\delta_1(x)$ es única pues si existiera otra raíz de Newton-Puiseux $\delta_i(x)$ de $\mathcal{C}^{(k)}$ que verifique (1.9) se tendría, usando desigualdad triangular, que $\text{ord}(\delta_1(x) - \delta_i(x)) \geq \frac{\beta_{k+1}}{\beta_0}$ lo cual contradice (1.11).

Denotaremos

$$Z_i^{(k)} := \left\{ \delta_j(x) \in \text{Zer}(f^{(k)}) : \text{ord}_x(\delta_j(x) - y_C(x)) = \frac{\beta_i}{\beta_0} \right\}$$

para $1 \leq i \leq k$ y $2 \leq j \leq m = \frac{\beta_0}{e_k}$. Usando (1.11), tenemos

$$\begin{aligned} Z_i^{(k)} &:= \left\{ \delta_j(x) \in \text{Zer}(f^{(k)}) : \text{ord}_x(\delta_j(x) - y_C(x)) = \frac{\beta_i}{\beta_0} \right\} \\ &= \left\{ \delta_j(x) \in \text{Zer}(f^{(k)}) : \text{ord}_x(\delta_j(x) - \delta_1(x)) = \frac{\beta_i}{\beta_0} \right\}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Estamos interesados en saber el valor de $\text{ord}_x(\delta_j(x) - T_l(x))$ para $j \in \{1, \dots, m\}$ y $l \in \{1, \dots, g\}$, siendo $T_l(x)$ como en (1.5).

Lema 1.1.53. *Sea $1 \leq k < g$. Si $i \in \{1, \dots, k\}$, $\delta_j(x) \in Z_i^{(k)}$ y $l \in \{1, \dots, k\}$ entonces*

$$\text{ord}_x(\delta_j(x) - T_l(x)) = \begin{cases} \frac{\beta_i}{\beta_0}, & i < l \\ \frac{\beta_l}{\beta_0}, & i \geq l. \end{cases}$$

Demostración. Aplicando (1.12) y la Observación 1.1.45, se tiene

$$\begin{aligned} \text{ord}_x(\delta_j(x) - T_l(x)) &\geq \min\{\text{ord}_x(\delta_j(x) - y_C(x)), \text{ord}_x(y_C(x) - T_l(x))\} \\ &= \min\left\{ \frac{\beta_i}{\beta_0}, \frac{\beta_l}{\beta_0} \right\}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Notemos que $i, l \in \{1, \dots, k\}$, por lo que será necesario analizar los siguientes casos:

- Si $i < l$, usando (1.13) se tiene $\text{ord}_x(\delta_j(x) - T_l(x)) = \frac{\beta_i}{\beta_0}$.

- Si $i > l$, usando (1.13) tenemos $\text{ord}_x(\delta_j(x) - T_l(x)) = \frac{\beta_l}{\beta_0}$.
- Si $i = l$, tenemos $\text{ord}_x(\delta_j(x) - y_{\mathcal{C}}(x)) = \frac{\beta_l}{\beta_0}$, además $\text{ord}_x(y_{\mathcal{C}}(x) - T_l(x)) = \frac{\beta_l}{\beta_0}$.

Podemos expresar

$$\begin{aligned} y_{\mathcal{C}}(x) &= a_{\beta_1} x^{\frac{\beta_1}{\beta_0}} + \cdots + a_{\beta_l} x^{\frac{\beta_l}{\beta_0}} + \cdots + \sum_{j \geq \beta_g} a_j x^{\frac{j}{\beta_0}} = T_l(x) + \sum_{j \geq \beta_l} a_j x^{\frac{j}{\beta_0}}, \text{ donde} \\ T_l(x) &= a_{\beta_1} x^{\frac{\beta_1}{\beta_0}} + \cdots + \sum_{\substack{j \in (e_{l-1}) \\ \beta_{l-1} < j < \beta_l}} a_j x^{\frac{j}{\beta_0}} \text{ y} \\ \delta_j(x) &= T_l(x) + \sum_{j \geq \frac{\beta_l}{e_k}} b_j x^{\frac{j e_k}{\beta_0}}. \end{aligned}$$

Además $a_{\beta_l} \neq b_{\beta_l}$, y $b_{\beta_l} \neq 0$ pues $\frac{\beta_l}{\beta_0}$ es exponente característico de $\delta_j(x)$. Por tanto concluimos que $\text{ord}_x(\delta_j(x) - T_l(x)) = \frac{\beta_l}{\beta_0}$.

De otro lado, usando (1.9) y la Observación 1.1.45 tenemos

$$\text{ord}_x(\delta_1(x) - T_l(x)) \geq \min \left\{ \frac{\beta_l}{\beta_0}, \frac{\beta_{k+1}}{\beta_0} \right\} = \frac{\beta_l}{\beta_0},$$

así $\text{ord}_x(\delta_1(x) - T_l(x)) = \frac{\beta_l}{\beta_0}$ pues $l < k + 1$.

□

Lema 1.1.54. Sea $1 \leq k < g$. Si $i \in \{1, \dots, k\}$, $\delta_j(x) \in Z_i^{(k)}$ y $l = k + 1$ entonces

$$\text{ord}_x(\delta_j(x) - T_l(x)) = \begin{cases} \frac{\beta_i}{\beta_0}, & j \in \{2, \dots, m\} \\ \tau, & \tau > \frac{\beta_{k+1}}{\beta_0}, j = 1 \end{cases}$$

donde $\tau \in \mathbb{Q}^+$.

Demostración. Sea $i \in \{1, \dots, k\}$ y $j \in \{2, \dots, m\}$. De (1.12) tenemos $\text{ord}_x(\delta_j(x) - y_{\mathcal{C}}(x)) = \frac{\beta_i}{\beta_0}$. Usando la Observación 1.1.45, se cumple $\text{ord}_x(y_{\mathcal{C}}(x) - T_{k+1}(x)) = \frac{\beta_{k+1}}{\beta_0}$, y aplicando la desigualdad triangular tenemos $\text{ord}_x(\delta_j(x) - T_{k+1}(x)) = \frac{\beta_i}{\beta_0}$.

Usando (1.9) y Observación 1.1.45 tenemos

$$\text{ord}_x(\delta_1(x) - T_{k+1}(x)) \geq \min \left\{ \frac{\beta_{k+1}}{\beta_0}, \frac{\beta_{k+1}}{\beta_0} \right\},$$

aplicando la Propiedad 1.1.52 concluimos que $\text{ord}_x(\delta_1(x) - T_l(x)) = \tau$ para cierto $\tau \in \mathbb{Q}^+$ con $\tau > \frac{\beta_{k+1}}{\beta_0}$. □

Lema 1.1.55. Sea $1 \leq k < g$. Si $i \in \{1, \dots, k\}$, $\delta_j(x) \in Z_i^{(k)}$ y $l > k + 1$ entonces

$$\text{ord}_x(\delta_j(x) - T_l(x)) = \begin{cases} \frac{\beta_i}{\beta_0} & \text{si } j \in \{2, \dots, m\} \\ \frac{\beta_{k+1}}{\beta_0} & \text{si } j = 1. \end{cases}$$

Demostración. Hemos elegido $\delta_1(x)$ tal que $\text{ord}_x(\delta_1(x) - y_C(x)) = \frac{\beta_{k+1}}{\beta_0}$ y sabemos que $\text{ord}_x(y_C(x) - T_l(x)) = \frac{\beta_l}{\beta_0}$. Aplicando la desigualdad triangular tenemos que $\text{ord}_x(\delta_1(x) - T_l(x)) = \frac{\beta_{k+1}}{\beta_0}$, pues $l > k + 1$. Usando los mismos argumentos que en el Lema 1.1.54 se cumple que $\text{ord}_x(\delta_j(x) - T_l(x)) = \frac{\beta_j}{\beta_0}$. \square

1.2. Foliaciones

Para presentar la noción de foliación singular, introduciremos algunos conceptos básicos.

Definición 1.2.1. Una *variedad compleja de dimensión n* será una variedad topológica M , junto con un atlas holomorfo $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$, esto es

- i) Cada U_i es un abierto de M y los U_i forman un cubrimiento abierto de M , es decir $M = \bigcup_{i \in I} U_i$.
- ii) Cada $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i \subseteq \mathbb{C}^n$, donde V_i es un abierto de \mathbb{C}^n , es un homeomorfismo, y si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, la aplicación $\varphi_{ij} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$ definida por $\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ es un biholomorfismo.

Un foliación es una variedad diferenciable y se puede describir por formas y por campos vectoriales. Las nociones básicas de formas y campos vectoriales pueden ser revisadas en [C-N].

Definición 1.2.2. Una 1-forma diferencial ω es integrable si y sólo si el producto exterior $\omega \wedge d\omega = 0$.

Definición 1.2.3. Sea M una variedad compleja de dimensión $n \geq 2$. Una **foliación holomorfa singular de codimensión uno** en M es un objeto \mathcal{F} dado por las colecciones $\{\omega_i\}_{i \in I}$, $\{U_i\}_{i \in I}$ y $\{g_{ij}\}_{U_i \cap U_j \neq \emptyset}$ que cumplen

- i) Cada $\{U_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento abierto de M , esto es $M = \bigcup_{i \in I} U_i$.
- ii) La 1-forma diferencial holomorfa ω_i es integrable no idénticamente nula en U_i .
- iii) g_{ij} es una función holomorfa no nula en $U_i \cap U_j$.
- iv) Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ entonces $\omega_i = g_{ij}\omega_j$ en $U_i \cap U_j$.

Para cada forma ω_i consideramos el conjunto singular dado por

$$S_i := \text{Sing}(\omega_i) = \{p \in U_i : \omega_i(p) = 0\}.$$

Es claro que S_i es un subconjunto analítico de U_i . De (iii) y (iv) depende la igualdad $S_i \cap U_j = S_j \cap U_i$. Así la unión $\bigcup_{i \in I} S_i$ define un subconjunto analítico S de M el cual será denotado por $Sing(\mathcal{F})$ y será llamado el **conjunto singular** de \mathcal{F} .

Dada la 1- forma diferencial $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ con $A, B \in \mathbb{C}\{x, y\}$, las series A y B son los **coeficientes de ω** . Denotamos por \mathcal{F}_ω el **germen de foliación analítica singular** definida por ω y asumiremos en todo momento que los coeficientes de ω no tienen factores comunes.

Decimos que una **foliación formal** $\widehat{\mathcal{F}}_\omega$ en \mathbb{C}^2 es definido por una 1-forma formal dado por $\widehat{\omega} = \widehat{A}(x, y)dx + \widehat{B}(x, y)dy$, donde $\widehat{A}, \widehat{B} \in \mathbb{C}[[x, y]]$. Decimos que $(x, y) = (0, 0)$ es singularidad de $\widehat{\mathcal{F}}_\omega$ si $\{\widehat{A} = 0, \widehat{B} = 0\} = \{(0, 0)\}$.

La **multiplicidad del germen de foliación \mathcal{F}_ω** , será denotada por $\text{mult}(\omega)$ y definida como $\text{mult}(\omega) = \min\{\text{ord}(A), \text{ord}(B)\}$. De manera similar se define la multiplicidad para una foliación formal $\widehat{\mathcal{F}}_\omega$.

Observación 1.2.4. *Haciendo un cambio lineal de coordenadas, siempre se puede conseguir que los órdenes de los coeficientes de la foliación A y B sean iguales.*

- Si $\text{ord}(A) > \text{ord}(B)$ el cambio de coordenadas es dado por $x = u$ e $y = v - u$.
- Si $\text{ord}(A) < \text{ord}(B)$ el cambio de coordenadas es dado por $x = v - u$ e $y = v$.

Ejemplo 1.2.5. *El germen de foliación \mathcal{F}_ω , dado por $\omega = -3x^2dx + 2ydy$ tiene $\text{mult}(\omega) = \min\{2, 1\} = 1$. Al hacer el cambio de coordenadas $x = u$ e $y = v - u$, obtenemos $\eta = (2u - 2v - 3u^2)du + (2v - 2u)dv$, donde $\text{mult}(\eta) = \min\{1, 1\} = 1$.*

Considerando $\nu := \text{mult}(\omega)$, definimos el **cono tangente de la foliación** como $C_T(x, y) = xA_\nu(x, y) + yB_\nu(x, y)$, donde A_ν y B_ν son los coeficientes de la foliación ω de orden ν .

Una **solución** del germen de la foliación \mathcal{F}_ω dada por la 1- forma $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ en el origen es una curva $(x(t), y(t)) \in \mathbb{C}\{t\}^2$ tal que $x(0) = y(0) = 0$ y

$$A(x(t), y(t))x'(t) + B(x(t), y(t))y'(t) = 0.$$

Si $f : N \rightarrow M$ es un morfismo diferenciable entre las variedades analíticas N y M , y ω define una foliación \mathcal{F}_ω sobre M , denotaremos $f^*\mathcal{F}_\omega$ la foliación sobre N definida por $f^*\omega$. Esta foliación es **imagen inversa** de \mathcal{F}_ω .

Definición 1.2.6. Sea \mathcal{F}_ω el germen de foliación dado por 1-forma holomorfa en el origen de \mathbb{C}^2 . Decimos que el germen de una curva \mathcal{C}_f es **invariante** por \mathcal{F}_ω si

$$\omega \wedge df = f \cdot \eta,$$

donde η es una 2-forma, (i.e. $\eta = gdx \wedge dy$, con $g \in \mathbb{C}\{x, y\}$). Si \mathcal{C}_f es irreducible diremos que es **separatriz convergente** de \mathcal{F}_ω .

De manera análoga definimos una **separatriz formal** para $\widehat{\mathcal{F}}_\omega$ dado por la 1-forma formal $\widehat{\omega} = \widehat{A}(x, y)dx + \widehat{B}(x, y)dy$ como el germen de curva invariante irreducible formal $\widehat{\mathcal{C}}_f$ tal que $\widehat{\omega} \wedge d\widehat{f} = \widehat{f} \cdot \widehat{\eta}$ donde $\widehat{\eta} = \widehat{g}dx \wedge dy$, con $\widehat{g} \in \mathbb{C}[[x, y]]$.

Observación 1.2.7. Toda parametrización de una curva invariante \mathcal{C}_f de la foliación $\mathcal{F}_\omega : \omega = 0$ es solución de $\omega = 0$.

Ejemplo 1.2.8. La foliación $\omega = d(y^6 - x^3) + axy(6xdy - 3ydx)$ con $a \in \mathbb{C}$ tiene a $\mathcal{C}_f : y^6 - x^3 = 0$ como curva invariante, pues $\omega \wedge df = (y^6 - x^3)(-18axy)dx \wedge dy$.

La foliación $\omega = d(y^6 - x^3) + axy(6xdy - 3ydx)$ con $a \in \mathbb{C}$ fue estudiada por Fernández, Mozo y Neciosup [F-Mo-N] y es un contraejemplo para el resultado dado por Loray [Lo, Proposition, Pag. 163], como veremos en el Ejemplo 2.4.1.

Ejemplo 1.2.9. La foliación $\omega = ((b-1)xy - y^3)dx + (xy - bx^2 + xy^2)dy$ con $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tiene como curva invariante a $\mathcal{C}_f : xy(x-y) = 0$, pues $\omega \wedge df = xy(x-y)(3bx - 3y^2 - x - y)dx \wedge dy$.

Teorema 1.2.10. [C-S1, Theorem Pag.579] Toda foliación singular en $(\mathbb{C}^2, 0)$ admite al menos una separatriz.

1.2.1. Explosión en un punto

Una explosión centrada en $0 \in \mathbb{C}^2$ es una variedad que contiene al proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ y quitando el proyectivo es biholomorfa a $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Esta variedad será descrita a continuación.

Empezamos considerando $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 = U_0 \cup U_1$, donde

$$U_j = \{[x_0 : x_1] : x_j \neq 0\}, j = 0, 1,$$

y definimos los homeomorfismos (**parametrizaciones**)

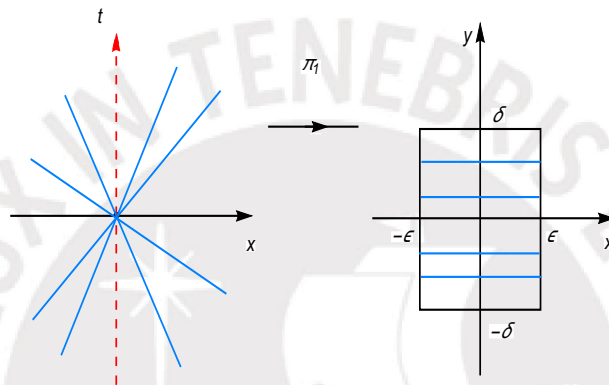
$$\begin{array}{ccc} \phi_0 : \mathbb{C} & \rightarrow & U_0 \\ t & \rightarrow & [1 : t] \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \phi_1 : \mathbb{C} & \rightarrow & U_1 \\ s & \rightarrow & [s : 1]. \end{array}$$

Sea $\pi_1 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ la aplicación dada por

$$\pi_1(x, t) = (x, xt),$$

aquí reemplazamos $x = x$ e $y = xt$. Observemos que en estas coordenadas tenemos las propiedades siguientes:

- $\pi_1^{-1}(0, 0) = \{(0, t) : t \in \mathbb{C}\}$.
- $\pi_1(\mathbb{C}^2) = (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}) \cup \{(0, 0)\}$.
- $\pi_1 : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ es un biholomorfismo (esto es, π_1 es biyectiva, holomorfa y su inversa π_1^{-1} también es holomorfa) con inversa $\pi_1^{-1}(x, y) = \left(x, \frac{y}{x}\right)$.



Notamos que el punto $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ es reemplazado por la recta $\{x = 0\}$. Si consideramos $t = cx$ con $c \in \mathbb{C}$ tenemos que $y = \frac{t}{x} = c$, como $c \neq \infty$ no podemos considerar $x = 0$. Por tanto, no podemos cubrir el eje t por π_1 (es decir para que cada punto del eje t tenga preimagen bajo una función del tipo π_1). Para cubrir tal recta consideramos la representación local de π_2 en las coordenadas (s, y) dadas por $\pi_2(s, y) = (sy, y)$; en este caso $x = sy$ e $y = y$. En las coordenadas (s, y) se tienen propiedades similares para π_2 a las dadas a π_1 por las coordenadas (x, t) .

Cuando se trabaja en las coordenadas (s, y) no cubrimos la recta $\{y = 0\}$. Para cubrir todo \mathbb{C}^2 (es decir para que cada punto de \mathbb{C}^2 tenga preimagen bajo una función del tipo π_1, π_2) necesitamos pegar el plano xt con el plano sy , identificando así la recta $\{x = 0\}$ con la recta $\{y = 0\}$, para ello procedemos de la siguiente manera.

Definamos $\tilde{\mathbb{C}}^2 = \tilde{U}_0 \cup \tilde{U}_1$, donde

$$\tilde{U}_0 := \{(x, y, [p]) \in \mathbb{C}^2 \times U_0 : y = \phi_0^{-1}([p])x\} \subseteq \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1,$$

$$\tilde{U}_1 := \{(x, y, [p]) \in \mathbb{C}^2 \times U_1 : x = \phi_1^{-1}([p])y\} \subseteq \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1,$$

con (U_i, ϕ_i) , $i = 0, 1$ parametrizaciones de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ y las funciones

- $\tilde{\varphi}_0 : \tilde{U}_0 \rightarrow \mathbb{C}^2$ donde $\tilde{\varphi}_0(x, y, [p]) = (x, \phi_0^{-1}([p]))$,

- $\tilde{\varphi}_1 : \tilde{U}_1 \rightarrow \mathbb{C}^2$ donde $\tilde{\varphi}_0(x, y, [p]) = (\phi_1^{-1}([p]), y)$,
- $\tilde{\varphi}_0^{-1} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \tilde{U}_0$ donde $\tilde{\varphi}_0^{-1}(x, t) = (x, tx, \phi_0(t))$,
- $\tilde{\varphi}_1^{-1} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \tilde{U}_1$ donde $\tilde{\varphi}_1^{-1}(s, y) = (sy, y, \phi_1(s))$.

Observamos que se tiene

$$\tilde{U}_0 \cap \tilde{U}_1 = \mathbb{C}^2 \times (U_0 \cap U_1), \quad \tilde{\varphi}_0(\tilde{U}_0 \cap \tilde{U}_1) = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \text{ y } \tilde{\varphi}_1(\tilde{U}_0 \cap \tilde{U}_1) = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C},$$

además

$$\begin{aligned} (\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_0^{-1})(x, t) &= \tilde{\varphi}_1(x, tx, \phi_0(t)) = (\phi_1^{-1}(\phi_0(t)), tx) = \left(\frac{1}{t}, tx\right), \\ (\tilde{\varphi}_0 \circ \tilde{\varphi}_1^{-1})(s, y) &= \tilde{\varphi}_0(sy, y, \phi_1(s)) = (sy, \phi_0^{-1}(\phi_1(s))) = \left(sy, \frac{1}{s}\right). \end{aligned}$$

De esta manera $\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_0^{-1} : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ y $\tilde{\varphi}_0 \circ \tilde{\varphi}_1^{-1} : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ son holomorfas. Por tanto $\left\{(\tilde{U}_0, \tilde{\varphi}_0), (\tilde{U}_1, \tilde{\varphi}_1)\right\}$ es un atlas de dimensión dos sobre $\tilde{\mathbb{C}}^2$ y $\tilde{\mathbb{C}}^2$ es una variedad compleja de dimensión dos, llamada **explosión en el origen**.

Observemos que $\tilde{\mathbb{C}}^2 \subseteq \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, luego existen dos proyecciones naturales

$$\begin{array}{ccc} \phi : \tilde{\mathbb{C}}^2 & \rightarrow & \mathbb{C}^2 & & E : \tilde{\mathbb{C}}^2 & \rightarrow & \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \\ (p, [p]) & \rightarrow & \pi(p, [p]) = p & & (p, [p]) & \rightarrow & E(p, [p]) = [p] \end{array}$$

de donde $\pi \circ \tilde{\varphi}_0^{-1} = \pi_1$ y $\pi \circ \tilde{\varphi}_1^{-1} = \pi_2$. De lo expuesto anteriormente se tiene que $\pi^{-1}(0, 0) = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ el cual es llamado **divisor excepcional** y $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ es un biholomorfismo.

En general la explosión de una variedad compleja M de dimensión dos en un punto p es la variedad compleja \tilde{M} que se obtiene reemplazando en M el punto p por $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Así se construye \tilde{M} conteniendo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ y una aplicación analítica π , tal construcción generaliza lo hecho antes para $M = \mathbb{C}^2$ y $p = (0, 0)$.

1.2.2. Comportamiento de una foliación por explosiones

Consideremos un germen de foliación \mathcal{F}_ω generado por una 1-forma $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ con $\text{mult}(\omega) = \nu$, así podemos expresar $\omega = (A_\nu + A_{\nu+1} + \dots)dx + (B_\nu + B_{\nu+1} + \dots)dy$, donde A_i, B_i son polinomios homogéneos en $\mathbb{C}[x, y]$ de grado i . Sea $\pi : M \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ la explosión en el origen, siendo M una variedad compleja. La forma diferencial $\pi^*\omega$ define una foliación $\pi^*\mathcal{F}_\omega$ sobre M . En la carta \tilde{U}_0 de coordenadas (x, t) , la 1-forma $\pi^*\omega = A(x, xt)dx + B(x, xt)d(xt)$ se escribe como

$$x^\nu[(A_\nu(1, t) + tB_\nu(1, t) + xC_1(x, t))dx + x(B_\nu(1, t) + xC_2(x, t))dt], \quad (1.14)$$

donde $C_1 = A_{\nu+1}(1, t) + tB_{\nu+1}(1, t) + \dots$ y $C_2 = B_{\nu+1}(1, t) + xB_{\nu+2}(1, t) + \dots$.

Tenemos dos situaciones posibles

1. Si $xA_\nu(x, y) + yB_\nu(x, y) \neq 0$ tiene sentido hablar de $\widehat{\omega} = \frac{\pi^*\omega}{x^\nu}$, objeto que llamaremos **transformado estricto de ω** y que define la foliación $\pi^*\mathcal{F}_\omega$. Sobre el divisor $\mathcal{D} = \pi^{-1}(0)$, los puntos singulares de la foliación, es decir $Sing(\pi^*\mathcal{F}_\omega) \cap \mathcal{D} \cap \widetilde{U}_0$, vienen dados por $A_\nu(1, t) + tB_\nu(1, t) = 0$. En tal caso $\mathcal{D} \setminus Sing(\pi^*\mathcal{F}_\omega)$ es una hoja de la foliación $\pi^*\mathcal{F}_\omega$, y llamaremos **no dicrítica** a esta explosión. .
2. Si $xA_\nu(x, y) + yB_\nu(x, y) = 0$ debemos tener $B_\nu(1, y) \neq 0$ y el transformado estricto de la foliación está definido por $\widehat{\omega} = \frac{\pi^*\omega}{x^{\nu+1}}$ el cual define la foliación $\pi^*\mathcal{F}_\omega$. Fuera de $B_\nu(1, y) = 0$, el divisor es transversal a la foliación: por cada uno de sus puntos p pasa una hoja F_p lisa, transversal a D . Su proyección es una separatriz lisa de la foliación \mathcal{F}_ω . Dentro de los puntos que satisfacen $B_\nu(1, y) = 0$ se tienen puntos singulares y puntos de tangencia. Por tanto, la foliación tiene infinitas separatrices y la explosión es llamada **dicrítica** .

Observaciones 1.2.11.

1. Consideraremos $(\mathcal{C}_{f_j})_{j=1}^r$ el conjunto de todas las separatrices de la foliación no dicrítica $\mathcal{F}_\omega : \omega = 0$. A cada separatriz \mathcal{C}_{f_j} le corresponde $f_j = 0$ irreducible con $f_j \in \mathbb{C}\{x, y\}$. Denotemos por $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ a la unión $\bigcup \mathcal{C}_{f_j}$ de todas las separatrices de la foliación \mathcal{F}_ω , que de ahora en adelante llamaremos **unión de separatrices convergentes de \mathcal{F}_ω** . Y por $\widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{F})$ a la **unión de separatrices formales de $\widehat{\mathcal{F}}_\omega$** .
2. La ecuación $f = f_1 \cdots f_r = 0$ será llamada **ecuación reducida de $\mathcal{C}(\mathcal{F})$** .

Sea \mathcal{F}_ω un germen de foliación en $(\mathbb{C}^2, 0)$ definido por la 1- forma $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$. El **campo de vectores dual** asociado es $X = B(x, y)\frac{\partial}{\partial x} - A(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$. Decimos que el origen $(x, y) = (0, 0)$ es una **singularidad simple o reducida** de \mathcal{F}_ω si la **matriz asociada a la parte lineal del campo**

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial B(0,0)}{\partial x} & \frac{\partial B(0,0)}{\partial y} \\ -\frac{\partial A(0,0)}{\partial x} & -\frac{\partial A(0,0)}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

tiene dos autovalores $\lambda \neq \mu$, $\mu \neq 0$ y tales que $\frac{\lambda}{\mu} \notin \mathbb{Q}^+$.

En [C-S2, Pag. 40] se tiene que si el origen es una singularidad simple de \mathcal{F}_ω , existen coordenadas locales (x, y) tales que

$$\omega = (\lambda x dy - \mu y dx) + \omega_1,$$

donde los coeficientes de ω_1 son de orden ≥ 2 . Podría suceder que

1. $\lambda\mu \neq 0$ y $\frac{\lambda}{\mu} \notin \mathbb{Q}^+$ en cuyo caso diremos que la singularidad es **no degenerada** o

2. $\lambda\mu = 0$ y $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ en cuyo caso diremos que la singularidad es de tipo **silla nodo**.

Observación 1.2.12. 1. Las singularidades simples son invariantes o estables por explosiones (ver [Br1][Pag. 14]).

2. Cuando la singularidades de una foliación son simples o reducidas, se dice que la **foliación es reducida**.

Cuando la singularidad es de tipo silla nodo, bajo un cambio formal de coordenadas, la singularidad es dada por una 1-forma del tipo (ver [C-S2, Pag. 66])

$$-y^{p+1}dx + (1 + \lambda y^p)xdy \quad \text{con } p \geq 1 \text{ y } \lambda \in \mathbb{C} \quad (1.16)$$

La **separatriz fuerte** de una foliación con singularidad de tipo silla nodo es una curva analítica invariante cuya tangente en el punto singular P es el autoespacio asociado al autovalor no nulo de la matriz dada en (1.15). Caso contrario hablaremos de **separatriz débil**.

Ejemplo 1.2.13. La foliación $\omega = -y^{p+1}dx + (1 + \lambda y^p)xdy$ con $p \geq 1$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tiene una singularidad de tipo silla nodo. Su campo asociado es

$$X = (1 + \lambda y^p)x \frac{\partial}{\partial x} + y^{p+1} \frac{\partial}{\partial y}. \quad (1.17)$$

La matriz asociada a la parte lineal del campo es

$$DX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

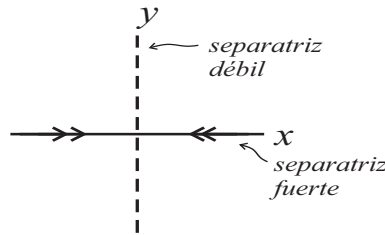
Los autovalores de dicha matriz son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 0$ por lo que la singularidad $(0, 0)$ es de tipo silla nodo. El autoespacio asociado al autovalor no nulo $\lambda = 1$ es

$$(DX - \lambda I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de donde resulta $y = 0$. Por tanto, podemos concluir que si $\widehat{\mathcal{F}}_\omega$ es una foliación con singularidad de tipo silla nodo, el germen de curva $\{y = 0\}$ es su separatriz fuerte y el germen de curva $\{x = 0\}$ es su separatriz débil.

Observaciones 1.2.14.

1. Si reducimos la singularidad de una foliación, cada punto de tipo no degenerado que no sea una esquina siempre aporta una separatriz. Mientras que en el caso que la singularidad sea de tipo silla podría aportar a lo más una separatriz (ver [C-S2, Pag. 68]).



2. Para cualquier separatriz G asociamos el punto $\tau(G) \in \mathcal{D}$ (donde \mathcal{D} es el divisor) a través del cual pasa la transformada estricta de G . La separatriz G es de tipo Briot y Bouquet (ver [L-H]) si y solo si $\tau(G)$ es o bien de tipo singularidad no degenerada o silla nodo.

A continuación enunciamos el teorema de reducción de singularidades para una foliación.

Teorema 1.2.15. [S, Pag. 248-269] Sea \mathcal{F}_ω un germen de foliación sobre $(\mathbb{C}^2, 0)$. Existe un morfismo

$$\pi : M \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0),$$

composición de un número finito de explosiones de puntos tal que

1. El divisor excepcional $\mathcal{D} = \pi^{-1}(0)$ es una hipersuperficie con cruzamientos normales.
2. La restricción de π a $M \setminus \mathcal{D}$ es biholomorfo sobre $\mathcal{U} \setminus \{0\}$, donde \mathcal{U} es un entorno del origen en el cual está definida \mathcal{F}_ω .
3. En todo punto no singular del transformado estricto $\pi^*\mathcal{F}_\omega$ de \mathcal{F}_ω por π , toda componente del divisor excepcional es o bien invariante por la foliación, o no invariante por la foliación en este caso diremos que es **transversa a la foliación**. En este último caso, decimos que la componente del divisor es una **componente dicrítica** de \mathcal{D} por \mathcal{F}_ω .
4. Todo punto singular $p \in M$ de $\pi^*\mathcal{F}_\omega$ es simple y no está contenido en componentes dicríticas.

A la aplicación π la llamamos **reducción de singularidades** de \mathcal{F}_ω .

De ahora en adelante $\pi : M \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ representa el proceso de reducción de singularidades o desingularización de \mathcal{F}_ω , obtenido por una secuencia finita de explosiones puntuales teniendo $\mathcal{D} = \pi^{-1}(0) = \bigcup_{j=1}^n D_j$ como divisor excepcional, formado por una unión finita de líneas proyectivas con cruzamientos normales (esto es que localmente están descritas por

una o dos curvas regulares y transversales). En este proceso, todas las separatrices de \mathcal{F}_ω son suaves, disjuntas y transversas a $D_j \subset \mathcal{D}$, ninguna de ellas pasa a través de una esquina (intersección de dos divisores).

Decimos que $\pi : M \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ es **reducción mínima** de singularidades de una foliación es una reducción con el número mínimo de explosiones que reduce a la foliación.

Definición 1.2.16. Una singularidad de una foliación es **dicrítica** si en proceso de reducción de singularidades surge una componente dicrítica. Decimos que una foliación es dicrítica si tiene una singularidad dicrítica. Caso contrario la foliación será no dicrítica.

Proposición 1.2.17. [C-L-S, Pag.158 y Pag.165] Una foliación no dicrítica tiene un número finito de separatrices y una foliación dicrítica tiene un número infinito de separatrices.

Ejemplo 1.2.18. Dada la foliación $\omega = ((b-1)xy - y^3)dx + (xy - bx^2 + xy^2)dy$ con $-b, 1-b \notin \mathbb{Q}^+$, estudiaremos su reducción de singularidades. Haciendo una explosión, tenemos

- en la carta (x, t) : consideramos $y = xt$.

$$\begin{aligned}\pi^*\omega &= ((b-1)x^2t - x^3t^3)dx + (x^2t - bx^2 + x^3t^2)(tdx + xdt) \\ &= (-x^2t + x^2t^2)dx + (x^3t - bx^3 + x^4t^2)dt,\end{aligned}$$

de donde

$$\widehat{\omega} = \frac{\pi^*\omega}{x^2} = (-t + t^2)dx + (xt - bx + x^2t^2)dt, \quad (1.18)$$

las singularidades de (1.18) son $(0, 0)$ y $(0, 1)$. El campo asociado a $\widehat{\omega}$ es dado por

$$X = (xt - bx + x^2t^2)\frac{\partial}{\partial x} - (-t + t^2)\frac{\partial}{\partial t}.$$

La matriz asociada a la parte lineal del campo es

$$DX = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

el cociente de autovalores de la matriz es $\alpha = -b \notin \mathbb{Q}^+$. Por tanto la singularidad $(0, 0)$ es una singularidad reducida. Para analizar lo que sucede con la singularidad $(0, 1)$ debemos hacer una traslación. Para ello consideramos $x = x, t = \tilde{t} + 1$ y reemplazamos en (1.18), de donde obtenemos

$$\begin{aligned}\widehat{\omega} &= (-\tilde{t} + 1) + (\tilde{t} + 1)^2 dx + (x(\tilde{t} + 1) - bx + x^2(\tilde{t} + 1)^2)d(\tilde{t} + 1) \\ &= (\tilde{t}^2 + \tilde{t})dx + (x - bx + x\tilde{t} + x^2\tilde{t}^2 + 2x^2\tilde{t} + x^2)d\tilde{t},\end{aligned}$$

el campo asociado es

$$X = (x - bx + x\tilde{t} + x^2\tilde{t}^2 + 2x^2\tilde{t} + x^2) \frac{\partial}{\partial x} - (\tilde{t}^2 + \tilde{t}) \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$$

La matriz asociada a la parte lineal del campo es

$$DX = \begin{pmatrix} 1 - b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la singularidad $(0,0)$ es reducida, pues el cociente de autovalores de la matriz es $\alpha = 1 - b \notin \mathbb{Q}^+$.

- En la carta (s, y) : consideramos $x = sy$.

$$\begin{aligned} \pi^*\omega &= ((b - 1)sy^2 - y^3)(sdy + yds) + (sy^2 - bs^2y^2 + sy^3)dy \\ &= ((b - 1)sy^3 - y^4)ds + (sy^2 - s^2y^2)dy, \end{aligned}$$

de donde

$$\hat{\omega} = \frac{\pi^*\omega}{y^2} = ((b - 1)sy - y^2)ds + (s - s^2)dy, \tag{1.19}$$

el campo asociado a (1.19) es dado por

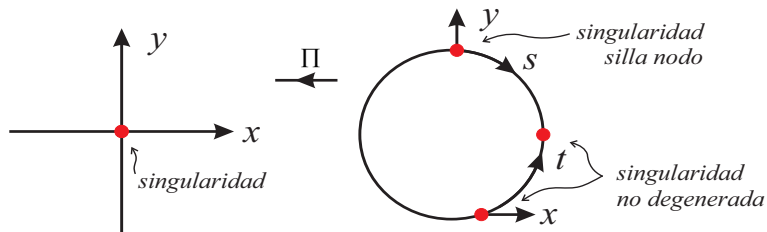
$$X = (s - s^2) \frac{\partial}{\partial s} - ((b - 1)sy - y^2) \frac{\partial}{\partial y}$$

La matriz asociada a la parte lineal del campo es

$$DX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la singularidad $(0,0)$ es de tipo silla nodo.

Analizando la reducción de singularidades aparece una singularidad de tipo silla nodo si $-b$ y $1 - b \notin \mathbb{Q}^+$.



1.2.3. Curvas generalizadas

C. Camacho, A. Lins Neto y P. Sad ([C-L-S, Chapter II]) muestran que existe un tipo de foliaciones, que llamaremos *curvas generalizadas*, para las cuales la reducción de singularidades coincide con la desingularización de su unión de separatrices.

Definición 1.2.19. Una foliación \mathcal{F}_ω se dice que es *curva generalizada no dicrítica* si en su reducción de singularidades no aparecen componentes dicríticas ni puntos silla nodo.

Ejemplo 1.2.20. La foliación $\omega = ((b-1)xy - y^3)dx + (xy - bx^2 + xy^2)dy$ con $-b, 1-b \notin \mathbb{Q}^+$ dada en el Ejemplo 1.2.18 no es de tipo curva generalizada, pues en su reducción de singularidades aparece un punto silla nodo.

Si una foliación es curva generalizada, existe una relación directa entre la multiplicidad de la foliación y su unión de separatrices.

Teorema 1.2.21. [C-L-S, Theorem 3] Sea \mathcal{F}_ω una foliación curva generalizada no dicrítica y sea $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ su unión de separatrices. Entonces $\text{mult}(\omega) = \text{mult}(\mathcal{C}(\mathcal{F})) - 1$.

En general, si \mathcal{F}_ω es foliación no dicrítica se tiene

$$\text{mult}(\omega) \geq \text{mult}(\mathcal{C}(\mathcal{F})) - 1 \quad (1.20)$$

como se puede observar en [Br1, Pag. 534].

Ejemplo 1.2.22. La foliación no dicrítica $\omega = (xy + y^2)dx - x^2dy$ tiene como unión de separatrices a $\mathcal{C}(\mathcal{F}) = xy$. Observamos que $\text{mult}(\omega) = 2 \geq \text{mult}(\mathcal{C}(\mathcal{F})) - 1 = 1$ y del Teorema 1.2.21 se concluye que la foliación no es de tipo curva generalizada.

Ejemplo 1.2.23. Analicemos la reducción de singularidades de la foliación definida por la uno forma

$$\omega = d(y^6 - x^3) + axy(6xdy - 3ydx) \text{ con } a \in \mathbb{C}^*.$$

Para ello, usaremos el número de explosiones necesarios para desingularizar $y^6 - x^3 = 0$.

- La primera explosión la haremos en la carta (s_1, y) donde $x = s_1y$, lo cual resulta $y^3 - s_1^3 = 0$.
- La segunda explosión la haremos en la carta (s_1, t_2) , considerando $y = s_1t_2$ de donde $t_2^3 - 1 = 0$.

Observamos que la curva se desingulariza con dos explosiones que al aplicarlo sobre la foliación resulta

- En la carta (s_1, y)

$$\frac{\pi^*\omega}{y^2} = (-3s_1^2y - 3as_1y^2)ds_1 + (-3s_1^3 + 3as_1^2y + 6y^3)dy$$

- En la carta (s_1, t_2)

$$\frac{\pi^*\omega}{s_1^3} = (-6t_2 + 6t_2^4)ds_1 + (-3s_1 + 3as_1t_2 + 6s_1t_2^3)dt_2$$

Las singularidades son $(s_1, t_2) = (0, 0), (0, 1), (0, \zeta), (0, \zeta^2)$ donde ζ es raíz primitiva de $t_2^3 = 1$. El campo asociado a la foliación es

$$X = (-3s_1 + 3as_1t_2 + 6s_1t_2^3)\frac{\partial}{\partial s_1} + (6t_2 - 6t_2^4)\frac{\partial}{\partial t_2}.$$

Luego

$$DX = \begin{pmatrix} -3 + 3at_2 + 6t_2^3 & 3as_1 + 18s_1t_2^2 \\ 0 & 6 - 24t_2^3 \end{pmatrix}$$

- En $m_0 = (0, 0)$ resulta $DX = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ así la singularidad $(0, 0)$ es no degenerada pues $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$.
- En $m_1 = (0, 1)$ resulta $DX = \begin{pmatrix} 3 + 3a & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}$ de donde $\lambda_2 = -\frac{1+a}{6}$.
- En $m_2 = (0, \zeta)$ resulta $DX = \begin{pmatrix} 3 + 3a\zeta & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}$ de donde $\lambda_3 = -\frac{1+a\zeta}{6}$.
- En $m_3 = (0, \zeta^2)$ resulta $DX = \begin{pmatrix} 3 + 3a\zeta^2 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}$ de donde $\lambda_4 = -\frac{1+a\zeta^2}{6}$.

Observemos que

- m_1 no es reducida si $-\frac{1+a}{6} = r \in \mathbb{Q}_{>0} \leftrightarrow a = -6r - 1$.
- m_2 no es reducida si $-\frac{1+a\zeta}{6} = r \in \mathbb{Q}_{>0} \leftrightarrow a = (-6r - 1)\zeta^2$.
- m_3 no es reducida si $-\frac{1+a\zeta^2}{6} = r \in \mathbb{Q}_{>0} \leftrightarrow a = (-6r - 1)\zeta$.

Luego, m_0 es reducida y m_1, m_2, m_3 son reducidas si

$$a \notin \{-(6r + 1)\zeta/r \in \mathbb{Q}_{>0} \text{ y } \zeta^3 = 1\}.$$

Obsérvese que si $a = -1, -\zeta^2, -\zeta$ se tiene que m_1, m_2, m_3 son sillanodos respectivamente con separatriz fuerte contenida en el divisor, si una de las singularidades m_1, m_2, m_3 es un sillanodo las otras singularidades son no degeneradas. También observe que si

$$a \in \{-(6r + 1)\zeta/r \in \mathbb{Q}_{>0} \text{ y } \zeta^3 = 1\},$$

entonces una de las singularidades m_1, m_2, m_3 no es reducida, digamos m_j , en este caso $\lambda_j \in \mathbb{Q}_{>0}$, $\lambda_k \notin \mathbb{Q}_{>0}$ con $k \neq j$. Si se tiene el caso que $\lambda_j \in \mathbb{Q}_{>0} - (\frac{1}{\mathbb{N}} \cup \mathbb{N})$ (singularidad tipo Siegel), la foliación es dicrítica. Si $\lambda_j \in \frac{1}{\mathbb{N}} \cup \mathbb{N}$ (singularidad tipo Dulac resonante) aparecerá, luego de un número finito de explosiones, una silla nodo en la intercepción del último con el penúltimo divisor en su reducción de singularidades.

Concluimos que la foliación $\omega = d(y^6 - x^3) + axy(6xdy - 3ydx)$ tiene la misma reducción de singularidades que la foliación definida por la uno forma $d(y^6 - x^3)$ si tenemos la condición $a \notin \{-(6r+1)\zeta/r \in \mathbb{Q}_{>0} \text{ y } \zeta^3 = 1\}$. Si además tenemos la condición $a^3 \neq -1$ la foliación es curva generalizada.

Ejemplo 1.2.24. La foliación $\omega = ((b-1)xy - y^3)dx + (xy - bx^2 + xy^2)dy$ con $-b, 1-b \notin \mathbb{Q}^+$ tiene como curva invariante a $\mathcal{C}_f : xy(x-y) = 0$ (ver Ejemplo 1.2.9). Del análisis de la reducción de singularidades de la foliación afirmamos que la foliación es no dicrítica (ver Ejemplo 1.2.18). El conjunto de todas las separatrices $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ es $xy(x-y)$, caso contrario $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ tendría al menos cuatro componentes, en particular $\text{mult}(\mathcal{C}(\mathcal{F})) \geq 4$ de donde $\text{mult}(\omega) = 2 \geq \text{mult}(\mathcal{C}(\mathcal{F})) - 1 > 2$, lo cual es una contradicción.

Teorema 1.2.25. [C-L-S, Theorem 2] Sea \mathcal{F}_ω una foliación curva generalizada no dicrítica y sea $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ su unión de separatrices. Entonces \mathcal{F}_ω y $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ tienen la misma reducción de singularidades.

El siguiente ejemplo muestra que puede existir una foliación y su unión de separatrices que tienen la misma reducción de singularidades pero la foliación no es de tipo curva generalizada, concluyendo de esta manera que el recíproco del Teorema 1.2.25 no es verdad.

Ejemplo 1.2.26. La foliación $\omega = ((b-1)xy - y^3)dx + (xy - bx^2 + xy^2)dy$ con $-b, 1-b \notin \mathbb{Q}^+$ se desingulariza después de una explosión al igual que su conjunto de separatrices $\mathcal{C}(\mathcal{F}) = xy(x-y)$. Pero sabemos del Ejemplo 1.2.20 que dicha foliación no es curva generalizada.

El **número de Milnor de una foliación** $\mathcal{F}_\omega : \omega = 0$, dada por la 1-forma $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ con singularidad aislada en el origen, se denota por $\mu(\omega)$ y se define como la multiplicidad de intersección en el origen de los coeficientes de la 1-forma, es decir

$$\mu(\omega) = (A, B)_0. \quad (1.21)$$

El siguiente teorema resulta muy útil cuando deseamos saber si una foliación es curva generalizada o no. Supongamos que $\mathcal{F}_\omega : \omega = 0$ posee un número finito de separatrices y sea \mathcal{C}_f la ecuación reducida de la unión de sus separatrices.

Teorema 1.2.27. [C-L-S, Theorem 4] Sea $\mathcal{F}_\omega : \omega = 0$ una foliación no dicrítica, entonces $\mu(\omega) \geq \mu(df)$ y la igualdad se cumple si y solo si \mathcal{F}_ω es de tipo curva generalizada.

Como consecuencia del teorema anterior, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 1.2.28. *Sea $\mathcal{C}_f : f = 0$ una curva. La foliación $\mathcal{F}_\omega : \omega = df$ tiene como unión de separatrices a $\mathcal{C}_f : f = 0$ y \mathcal{F}_ω es de tipo curva generalizada.*

Para la foliación $\mathcal{F}_\omega : \omega = 0$ y $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ parametrización de alguna curva \mathcal{C}_g , definimos

$$\gamma^*\omega := A(x(t), y(t))x'(t)dt + B(x(t), y(t))y'(t)dt.$$

Lema 1.2.29. [R2, Lemme 3.7] *Sean ω_1, ω_2 dos 1-formas de tipo curva generalizada no dicríticas con la misma unión de separatrices. Dada una curva $\gamma(t)$ se verifica*

$$\text{ord}_t \gamma^* \omega_1 = \text{ord}_t \gamma^* \omega_2.$$

Demostración. Si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ es parametrización de una separatriz de ω_1 y ω_2 , entonces se tiene $\omega_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0 = \omega_2(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ y concluimos el lema. Supongamos por tanto que $\gamma(t)$ no es parametrización de ninguna separatriz de ω_1 y ω_2 . En este caso la prueba la haremos por inducción sobre el número mínimo de explosiones necesarias para desingularizar la foliación ω_1 (o ω_2).

1. Si el número de explosiones es $n = 0$ tenemos que las foliaciones ω_1, ω_2 son reducidas. Para mostrar el lema cuando la foliación ω_1, ω_2 son reducidas, nos apoyaremos en la siguiente igualdad $\text{ord}(\gamma^* \omega_1) = \text{ord}(\gamma^* df)$ que pasamos a mostrar. En efecto, si la foliación ω_1 de tipo curva generalizada es reducida, se puede expresar en coordenadas (x, y) en la forma (ver [Ma-Mou, Pag. 519])

$$\omega_1 = (-\lambda_1 y + \dots)dx + (\lambda_2 x + \dots)dy, \quad \text{con } \lambda_1 \lambda_2 \neq 0 \text{ y } \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}^+.$$

Además la ecuación reducida de la unión de separatrices $\mathcal{C}_f : f = 0$ de ω_1 y ω_2 es dada por la forma $f(x, y) = xy$.

Consideremos una parametrización γ de la curva \mathcal{C}_f , dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (at^p + t^p n_1(t), bt^q + t^q n_2(t))$, con $\text{ord}(n_i(t)) \geq 1$ y $n_i(t) \in \mathbb{C}\{t\}$ para $i = 1, 2$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} \gamma^* \omega_1 &= (-\lambda_1(bt^q + t^q n_2(t)) + \dots)d(at^p + t^p n_1(t)) \\ &+ (\lambda_2(at^p + t^p n_1(t)) + \dots)d(bt^q + t^q n_2(t)) \\ &= [\lambda_1(bt^q + t^q n_2(t))(-apt^{p-1} - pt^{p-1}n_1(t) - t^p n_1'(t)) \\ &+ \lambda_2(at^p + t^p n_1(t))(qbt^{q-1} + qt^{q-1}n_2(t) + t^q n_2'(t)) + \dots]dt \\ &= [ab(\lambda_2 q - \lambda_1 p)t^{p+q-1} + t^{p+q} \alpha(t)]dt, \end{aligned}$$

con $\alpha(t) \in \mathbb{C}\{t\}$. Como $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \notin \mathbb{Q}^+$, se tiene $\lambda_2 q - \lambda_1 p \neq 0$ y por tanto $\text{mult}(\gamma_1^* \omega) = p + q - 1$. De otro lado como

$$df = ydx + xdy,$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
\gamma^* df &= (bt^q + t^q n_2(t))d(at^p + t^p n_1(t)) + (at^p + t^p n_1(t))d(bt^q + t^q n_2(t)) \\
&= [(bt^q + t^q n_2(t))(apt^{p-1} + pt^{p-1} n_1(t) + t^p n_1'(t)) \\
&\quad + (at^p + t^p n_1(t))(qbt^{q-1} + qt^{q-1} n_2(t) + t^q n_2'(t))]dt \\
&= [ab(p+q)t^{p+q-1} + t^{p+q}\beta(t)]dt,
\end{aligned}$$

con $\beta(t) \in \mathbb{C}\{t\}$. Así $\text{mult}(\gamma^* df) = p + q - 1$, es decir $\text{ord}_t(\gamma^* \omega_1) = \text{ord}_t(\gamma^* df)$. Ahora para ω_2 , que es foliación de tipo curva generalizada reducida, por un razonamiento análogo se obtiene $\text{ord}_t(\gamma^* \omega_2) = \text{ord}_t(\gamma^* df)$, de ello concluimos la igualdad $\text{ord}_t(\gamma^* \omega_1) = \text{ord}_t(\gamma^* \omega_2)$.

2. Ahora abordaremos el lema cuando las foliaciones ω_1, ω_2 no son reducidas, es decir $n > 0$. Supongamos por hipótesis inductiva que $\text{ord}(\tilde{\gamma}^* \tilde{\omega}_1) = \text{ord}(\tilde{\gamma}^* \tilde{\omega}_2)$, donde $\tilde{\omega}_i$ es el transformado estricto de ω_i para $i = 1, 2$, y $\tilde{\gamma}$ es el transformado estricto de la curva γ . Escogemos las coordenadas de tal manera que $x = 0$ no esté en el cono tangente de γ . Parametricemos γ por

$$\begin{cases} x(t) &= t^n \\ y(t) &= \sum_{i \geq n} a_i t^i. \end{cases}$$

Hacemos una explosión en el origen en la carta $E : (x, t) \rightarrow (x, xt)$. Para las foliaciones curvas generalizadas no dicríticas $\omega_1 = A_1(x, y)dx + B_1(x, y)dy$ y $\omega_2 = A_2(x, y)dx + B_2(x, y)dy$ con multiplicidades m_1 y m_2 respectivamente, tenemos

$$\begin{aligned}
E^* \omega_1 &= A_1(x, xt)dx + B_1(x, xt)d(xt) \\
&= (A_1(x, xt) + tB_1(x, xt))dx + xB_1(x, xt)dt \\
&= x^{m_1} \tilde{\omega}_1.
\end{aligned}$$

De manera similar tenemos $E^* \omega_2 = x^{m_2} \tilde{\omega}_2$. Del Teorema 1.2.21, se cumple $\text{mult}(\omega_1) = \text{mult}(df) = \text{mult}(\omega_2)$. Para $i = 1, 2$, tenemos

$$\begin{aligned}
\gamma^* \omega_i &= (E \circ \tilde{\gamma})^* \omega_i = \tilde{\gamma}^*(E^* \omega_i) \\
&= \tilde{\gamma}^*(x^{m_i} \tilde{\omega}_i) = x(t)^{m_i} \tilde{\gamma}^* \tilde{\omega}_i,
\end{aligned}$$

de donde se logra

$$\begin{aligned}
\text{ord}_t \gamma^* \omega_i &= \text{ord}_t(x(t)^{m_i} \tilde{\gamma}^* \tilde{\omega}_i) \\
&= \text{mult}(x(t))\text{mult}(\tilde{\omega}_i) + \text{ord}_t \tilde{\gamma}^* \tilde{\omega}_i.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Usando la hipótesis inductiva, la igualdad $\text{mult}(\omega_1) = \text{mult}(\omega_2)$ y reemplazando en la ecuación (1.22) se concluye que $\text{ord}(\gamma^* \omega_1) = \text{ord}(\gamma^* \omega_2)$.

□

Observación 1.2.30. Consideramos una foliación $\mathcal{F}_\omega : \omega = 0$ y $\mathcal{C}_f : f = 0$ la ecuación reducida de la unión de las separatrices. El Lema 1.2.29 se puede aplicar a ω y a df .

1.2.4. Polígono de Newton de una foliación

Dada una 1-forma $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ con $A, B \in \mathbb{C}\{x, y\}$ definimos el **soporte** de ω como

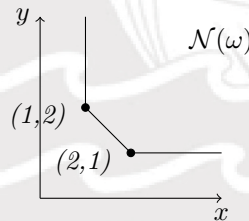
$$\text{Sop}(\omega) = \text{Sop}(xA) \cup \text{Sop}(yB).$$

Si escribimos $\omega = \sum_{i,j} \omega_{ij}$ donde $\omega_{ij} = A_{ij}x^{i-1}y^j dx + B_{ij}x^i y^{j-1} dy$, entonces

$$\text{Sop}(\omega) = \{(i, j) : (A_{ij}, B_{ij}) \neq (0, 0)\}.$$

Sea $\mathcal{F}_\omega : \omega = 0$ un germen de foliación dada por la 1-forma ω , llamamos **polígono de Newton** de ω , y lo denotaremos $\mathcal{N}(\mathcal{F}_\omega) = \mathcal{N}(\omega)$ al borde de $\mathcal{D}(\text{Sop}(\omega))$ (ver página 11).

Ejemplo 1.2.31. La foliación $\omega = (xy + y^2)dx - x^2 dy$ tiene como soporte a $\text{Sop}(\omega) = \{(2, 1), (1, 2)\} \cup \{(2, 1)\}$ y su polígono de Newton es dado por



Decimos que un punto $(i, j) \in \text{Sop}(\omega)$ es **contribución** de B si $(i, j) \in \text{Sop}(yB)$. De manera similar un punto $(i, j) \in \text{Sop}(\omega)$ es contribución de A si $(i, j) \in \text{Sop}(xA)$.

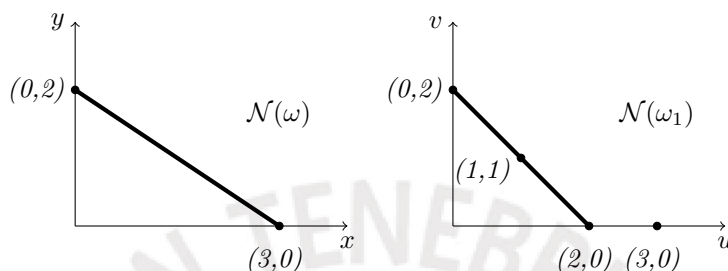
Dado un número racional $\nu \in \mathbb{Q}^+$, definimos la ν -**forma inicial pesada** de ω , como

$$\text{In}_\nu(\omega) := \sum_{i+\nu j = \text{ord}_\nu(\omega)} \omega_{ij}, \quad (1.23)$$

donde $\text{ord}_\nu(\omega) = \min\{i + \nu j : \omega_{ij} \neq 0\}$ el ν -**orden pesado** de ω .

Además si $\eta = G(x, y)dx \wedge dy$, definimos la ν -**forma inicial pesada** de η , como la ν -forma inicial pesada de $G(x, y)$. El ν -**orden inicial pesado** de η es por definición el ν -orden inicial pesado de $G(x, y)$.

Ejemplo 1.2.32. La foliación $\omega = -3x^2 dx + 2y dy$, tiene su soporte dado por $\text{Sop}(\omega) = \{(3, 0)\} \cup \{(0, 2)\}$. Si hacemos el cambio de coordenadas $x = u$ e $y = u + v$ obtenemos $\omega_1 = (-3u^2 + 2u + 2v)du + (2u + 2v)dv$, así el soporte de la foliación en las nuevas coordenadas es $\text{Sop}(\omega) = \{(3, 0), (0, 2), (1, 1)\} \cup \{(2, 0)\}$. Concluimos que los polígonos $\mathcal{N}(\omega)$ y $\mathcal{N}(\omega_1)$ no son iguales como muestra la siguiente figura.



Observaciones 1.2.33.

1. El polígono de Newton depende de coordenadas, por eso es necesario tener presente en qué coordenadas estamos trabajando.
2. Para $\mathcal{C}_f : f = 0$ y $\mathcal{F} : df = 0$, notamos que $\text{Sop}(df) = \text{Sop}(f)$ por tanto $\mathcal{N}(df) = \mathcal{N}(f)$.

Considerando \mathcal{C}_f un germen de curva irreducible y ν la inclinación del único lado compacto del polígono $\mathcal{N}(f)$. Dicha curva puede ser expresada como la ecuación (1.1).

Lema 1.2.34. Sea $f(x, y) = \sum_{i+\nu j=c} a_{ij} x^i y^j + \sum_{i+\nu j>c} a_{ij} x^i y^j \in \mathbb{C}\{x, y\}$. Se cumple

$$\text{In}_\nu(df(x, y)) = d(\text{In}_\nu f(x, y)).$$

Demostración. Dado que $f(x, y) = \sum_{i+\nu j=c} a_{ij} x^i y^j + \sum_{i+\nu j>c} a_{ij} x^i y^j$ entonces $\text{In}_\nu f(x, y) =$

$\sum_{i+\nu j=c} a_{ij} x^i y^j$. Así

$$\begin{aligned} d(\text{In}_\nu f(x, y)) &= d\left(\sum_{i+\nu j=c} a_{ij} x^i y^j\right) \\ &= \sum_{i+\nu j=c} i a_{ij} x^{i-1} y^j dx + \sum_{i+\nu j=c} j a_{ij} x^i y^{j-1} dy. \end{aligned} \quad (1.24)$$

De otro lado

$$\begin{aligned} df(x, y) &= \left(\sum_{i+\nu j=c} i a_{ij} x^{i-1} y^j + \sum_{i+\nu j>c} i a_{ij} x^{i-1} y^j \right) dx + \\ &\quad \left(\sum_{i+\nu j=c} j a_{ij} x^i y^{j-1} + \sum_{i+\nu j>c} j a_{ij} x^i y^{j-1} \right) dy, \end{aligned}$$

de donde

$$\text{In}_\nu df(x, y) = \sum_{i+\nu j=c} ia_{ij}x^{i-1}y^j dx + \sum_{i+\nu j=c} ja_{ij}x^i y^{j-1} dy. \quad (1.25)$$

De (1.24) y (1.25) se concluye el lema. \square

El método de Newton para la búsqueda de soluciones para curvas fue generalizado a foliaciones por J. Cano [CJ]. En este trabajo se observa que el polígono de Newton de la foliación juega un papel fundamental.

En curvas, si L es un lado compacto de $\mathcal{N}(f)$ con inclinación τ , entonces existe una raíz de $f = 0$ de la forma

$$y = cx^\tau + \dots, \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

donde c es raíz de cierto polinomio determinado por f . Además el número de raíces de Newton-Puiseux de orden τ es igual a la altura del lado L (la altura de L es la longitud de su proyección sobre el eje vertical).

Sin embargo, la propiedad descrita en el párrafo anterior no es válida cuando buscamos soluciones de ecuaciones del tipo $\omega = 0$, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.35. [Co1, Pág.32] Si consideramos la foliación \mathcal{F}_ω definida por

$$w = 4xydx + (y - 2x^2)dy,$$

observamos que su polígono de Newton, tiene un lado L de inclinación 2. Sin embargo \mathcal{F}_ω tiene una única separatriz dada por $y = 0$. Recordemos que la parametrización de una separatriz es solución de la foliación.

J. Cano [CJ, Section 3] da un criterio para elegir en cada paso del algoritmo el lado correcto del polígono de Newton de forma que sea posible encontrar una solución de $w = 0$. Para ello introduce la noción de **lado principal**.

Definición 1.2.36. [CJ, Corollary 1] Sea L un lado compacto de $\mathcal{N}(\omega)$ de inclinación ν , con vértices (α_1, β_1) y (α_2, β_2) donde $\beta_1 \geq \beta_2$. Decimos que L es un **buen lado** si

- $B_{\alpha_1\beta_1} \neq 0$ y $-\frac{A_{\alpha_1\beta_1}}{B_{\alpha_1\beta_1}} \notin \mathbb{Q}_{\geq\nu} = \{r \in \mathbb{Q} : r \geq \nu\}$
- $A_{\alpha_2\beta_2} + \nu B_{\alpha_2\beta_2} \neq 0$.

Si $\{y = 0\}$ no es separatriz de ω y si L es el buen lado de mayor inclinación de $\mathcal{N}(\omega)$ entonces decimos que L es el **lado principal** de ω .

Sea la aplicación $E(\bar{x}, \bar{y}) = (E_1(\bar{x}, \bar{y}), E_2(\bar{x}, \bar{y}))$. Definimos la **imagen inversa de** $A \in \mathbb{C}\{x, y\}$ **con respecto a** E como

$$E^*(A)(\bar{x}, \bar{y}) := (A \circ E)(\bar{x}, \bar{y}). \quad (1.26)$$

Si ahora consideramos la foliación $\mathcal{F}_\omega : \omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0$ definimos la **imagen inversa de** ω **con respecto a** E como

$$E^*(\omega) := E^*(A)(\bar{x}, \bar{y})d(E_1(\bar{x}, \bar{y})) + E^*(B)(\bar{x}, \bar{y})d(E_2(\bar{x}, \bar{y})). \quad (1.27)$$

Lema 1.2.37. [R2, Lemme 3.9] *Sea $\mathcal{F}_\omega : \omega = 0$ una 1-forma de tipo curva generalizada. Si la recta $\{x = 0\}$ no está en el cono tangente de ω y si $F(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}^m, \bar{y})$, con $m \in \mathbb{N}$ entonces la imagen inversa de ω con respecto a F dada por $F^*(\omega)$ es de tipo curva generalizada.*

Proposición 1.2.38. [CJ, Proposition 1] *Si $\{x = 0\}$ e $\{y = 0\}$ no son separatrices de ω , entonces $\mathcal{N}(\omega)$ tiene un lado principal y solo uno. Si el lado principal tiene inclinación ν , entonces ω tiene una separatriz parametrizada por*

$$y = cx^\nu + \xi(x) \text{ donde } c \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ y } \text{ord}_x \xi(x) > \nu.$$

Si $\nu = \frac{p_1}{q_1}$ con $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}^+$ y $\text{mcd}(p_1, q_1) = 1$ y si E es la aplicación dada por

$$E(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}^{q_1}, \bar{y} + c\bar{x}^{p_1})$$

entonces o bien $\bar{y} = 0$ es separatriz de $E^*(\omega)$ o bien $\mathcal{N}(E^*(\omega))$ tiene un lado principal de inclinación τ con $\tau > p_1$.

Sea $F_l : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por

$$F_l(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}^{n_1 n_2 \cdots n_{l-1}}, \bar{y} + \bar{T}_l(\bar{x})), \quad (1.28)$$

donde $\bar{T}_l(\bar{x}) := T_l(y_{\mathbb{C}}(\bar{x}^{n_1 n_2 \cdots n_{l-1}}))$ es dada por la ecuación (1.5). El siguiente lema nos dice cual es el lado principal de $F_l^*(\omega)$.

Sea (m_l, n_l) el l -ésimo par característico de la única separatriz irreducible de \mathcal{F}_ω .

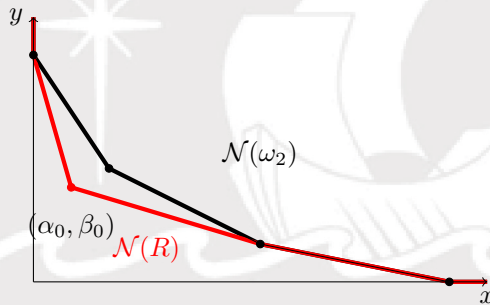
Lema 1.2.39. [R2, Lemme 4.3] *Sea \mathcal{F}_ω una foliación con separatriz irreducible. La recta de apoyo del polígono $\mathcal{N}(F_l^*(\omega))$ con inclinación $\frac{m_l}{n_l}$, es la recta con mayor inclinación y contiene a su lado principal.*

Las foliaciones curvas generalizadas tienen un comportamiento muy parecido al de su separatriz, pues tienen la misma reducción de singularidades. También sucede esto en lo referido al polígono de Newton, como veremos en el siguiente teorema el cual mostraremos usando técnicas de Rouillé .

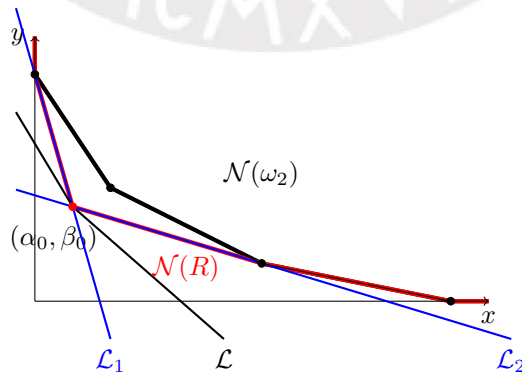
Proposición 1.2.40. [R2, Proposition 3.8] Sean ω_1 y ω_2 dos foliaciones curvas generalizadas no dicríticas con el mismo conjunto de separatrices. Entonces se tiene $\mathcal{N}(\omega_1) = \mathcal{N}(\omega_2)$.

Demostración. Por reducción al absurdo mostraremos que $Sop(\omega_1) \subset \mathcal{D}(Sop(\omega_2))$. Para ello supongamos que existe $(\alpha_0, \beta_0) \in Sop(\omega_1)$ tal que $(\alpha_0, \beta_0) \notin \mathcal{D}(Sop(\omega_2))$. De $Sop(\omega_2) \subseteq Sop(\omega_2) \cup \{(\alpha_0, \beta_0)\}$ pasamos a $\mathcal{D}(Sop(\omega_2)) \subset \mathcal{D}(Sop(\omega_2) \cup \{(\alpha_0, \beta_0)\})$.

Sea $R := Sop(\omega_2) \cup \{(\alpha_0, \beta_0)\}$. Como $\mathcal{D}(R)$ es convexo y $(\alpha_0, \beta_0) \notin Sop(\omega_2)$ se tiene que (α_0, β_0) es un vértice de $\mathcal{N}(R)$, pues si (α_0, β_0) no lo fuera, se tendría $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathcal{D}(Sop(\omega_2))$ y hemos supuesto que no. Obsérvese que sin pérdida de generalidad se puede asumir que (α_0, β_0) es un vértice de $\mathcal{D}(Sop(\omega_1))$.



Sean \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 las dos rectas del plano que pasan por (α_0, β_0) y que contienen a los lados de $\mathcal{N}(R)$ adyacentes a dicho vértice. Denotemos por λ_j a la inclinación de \mathcal{L}_j donde suponemos sin pérdida de generalidad que $\lambda_1 < \lambda_2$. Las rectas \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 son rectas de soporte de $\mathcal{N}(R)$, de donde se logra $\mathcal{D}(R) \subseteq \mathcal{L}_j^+$ (ver Apéndice A) para $j \in \{1, 2\}$.



Por la Proposición A.0.1, cualquier recta \mathcal{L} que pasa por (α_0, β_0) con inclinación $\lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[$ está contenida en $(\mathcal{L}_1^- \cap \mathcal{L}_2^+) \cup (\mathcal{L}_1^+ \cap \mathcal{L}_2^-)$. \mathcal{L} es recta de apoyo de $\mathcal{N}(R)$. Además

como $Sop(\omega_2) \subset R$ se tiene $\mathcal{D}(Sop(\omega_2)) \subset \mathcal{D}(R)$ y dado que $(\alpha_0, \beta_0) \notin \mathcal{D}(Sop(\omega_2))$, de donde concluimos que $\mathcal{D}(Sop(\omega_2))$ no intersecta a ninguna recta contenida en $(\mathcal{L}_1^- \cap \mathcal{L}_2^+) \cup (\mathcal{L}_1^+ \cap \mathcal{L}_2^-)$.

La región $(\mathcal{L}_1^- \cap \mathcal{L}_2^+) \cup (\mathcal{L}_1^+ \cap \mathcal{L}_2^-)$ contiene infinitas rectas. Consideremos $\mathcal{L} : qx + py = q\alpha_0 + p\beta_0$ de inclinación $\lambda = \frac{p}{q} \in]\lambda_1, \lambda_2[$ con p y q primos entre sí, de manera que

- la recta \mathcal{L} contenga al punto (α_0, β_0) ,
- $qA_{\alpha_0\beta_0} + pB_{\alpha_0\beta_0} \neq 0$, donde $A_{\alpha_0\beta_0}$ y $B_{\alpha_0\beta_0}$ son los coeficientes de ω_1 .
- $\mathcal{L} \cap Sop(\omega_1) = \{(\alpha_0, \beta_0)\}$.

De lo anterior se obtiene

$$\mathcal{D}(R) \subseteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / qx + py \geq c\},$$

donde $c = q\alpha_0 + p\beta_0$ y por ende se satisface $\mathcal{D}(Sop(\omega_2)) \subseteq \{(x, y) / qx + py > c\}$.

Sea $\gamma(t)$ la curva parametrizada por $(x(t), y(t)) = (t^q, t^p)$. Se tiene

$$\begin{aligned} \gamma^*\omega_1 &= \omega_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= (A_{\alpha\beta} t^{q(\alpha-1)} t^{p\beta} q t^{q-1} + B_{\alpha\beta} t^{q\alpha} t^{p(\beta-1)} p t^{p-1} + \dots) dt \\ &= ((qA_{\alpha\beta} + pB_{\alpha\beta}) t^{q\alpha+p\beta-1} + \dots) dt. \end{aligned}$$

Como $Sop(\omega_1) \cap \mathcal{L} = \{(\alpha_0, \beta_0)\}$ y $qA_{\alpha_0\beta_0} + pB_{\alpha_0\beta_0} \neq 0$, tenemos

$$\text{mult}(\gamma^*\omega_1) \leq q\alpha_0 + p\beta_0 - 1 = c - 1. \quad (1.29)$$

Al tenerse $\mathcal{D}(Sop(\omega_2)) \subset \{(x, y) / qx + py > c\}$ para todo $(\alpha, \beta) \in Sop(\omega_2)$ concluimos $\alpha q + p\beta > c$, y con ello también

$$\text{mult}(\gamma^*\omega_2) > c - 1. \quad (1.30)$$

Usando (1.29) y (1.30) se obtiene

$$\text{mult}(\gamma^*\omega_2) > \text{mult}(\gamma^*\omega_1),$$

lo que contradice el Lema 1.2.29. De este modo obtenemos $Sop(\omega_1) \subset \mathcal{D}(Sop(\omega_2))$.

Por el mismo argumento se tiene que $Sop(\omega_2) \subset \mathcal{D}(Sop(\omega_1))$, lo que conduce a $\mathcal{D}(Sop(\omega_1)) = \mathcal{D}(Sop(\omega_2))$, de donde concluimos $\mathcal{N}(\omega_1) = \mathcal{N}(\omega_2)$. \square

Como caso particular de la Proposición 1.2.40, podemos establecer el siguiente corolario.

Corolario 1.2.41. *Sean ω curva generalizada no dicrítica y \mathcal{C}_f una ecuación reducida de su unión de separatrices. Entonces se cumple $\mathcal{N}(\omega) = \mathcal{N}(df)$.*

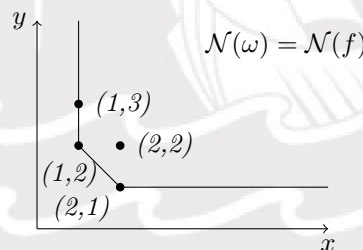
Demostración. Basta aplicar la Proposición 1.2.40 a ω y df . \square

Observaciones 1.2.42.

1. Del Corolario 1.2.41 y de la Observación 1.2.33, concluimos la igualdad $\mathcal{N}(\omega) = \mathcal{N}(df) = \mathcal{N}(f)$, para toda foliación ω curva generalizada no dicrítica con unión de separatrices $f = 0$.
2. Si el germen de curva \mathcal{C}_f es irreducible, por Corolario 1.1.18, su polígono de Newton $\mathcal{N}(f)$ tiene un único lado compacto. Si la foliación ω tiene una sola separatriz irreducible \mathcal{C}_f tenemos que el polígono $\mathcal{N}(\omega)$ tiene también un solo lado compacto.

El siguiente ejemplo muestra que el polígono de una foliación y su unión de separatrices pueden ser iguales pero la foliación no es curva generalizada.

Ejemplo 1.2.43. La foliación dada por $\omega = ((b-1)xy - y^3)dx + (xy - bx^2 + xy^2)dy$ con $-b, 1-b \notin \mathbb{Q}^+$ tiene como unión de separatrices a $\mathcal{C}(\mathcal{F}) = xy(x-y)$, según lo mostramos en el Ejemplo 1.2.24. Observamos que los polígonos $\mathcal{N}(\omega)$ y $\mathcal{N}(f)$ son iguales, como podemos observar en el siguiente gráfico.



Del Ejemplo 1.2.18 sabemos que la foliación ω no es de tipo curva generalizada.

Del ejemplo anterior se observa que hay foliaciones que tienen el mismo polígono que su unión de separatrices pero no son foliaciones de tipo curva generalizada. Es una pregunta abierta ¿Qué foliaciones tienen el mismo polígono de Newton que su unión de separatrices? Demostraremos en el siguiente capítulo que dichas foliaciones son las llamadas de **segundo tipo**.

Foliaciones de segundo tipo

Las foliaciones de segundo tipo fueron estudiadas por Mattei y Salem en [Ma-Sa]. Los autores muestran que las foliaciones de segundo tipo no dicríticas tienen la misma reducción de singularidades que su conjunto de separatrices formales. Posteriormente dichas foliaciones fueron estudiadas por Cano, Corral y Mol en [CF-Co-Mol] en el caso no dicrítico y por Genzmer y Mol en el caso dicrítico en [Ge-Mol], dichos autores dan una caracterización como veremos más adelante. En este capítulo se da otra caracterización de las foliaciones de segundo tipo no dicríticas en término del polígono de Newton de la foliación y el de su unión de separatrices. También se caracteriza las foliaciones con singularidades cuspidales cuando son de segundo tipo en términos del orden pesado. Además mediante el orden pesado se dan condiciones necesarias y suficientes para que dicha foliación sea curva generalizada.

2.1. Foliación no dicrítica de segundo tipo

Sea \mathcal{F}_ω una foliación no dicrítica y consideremos la reducción mínima de singularidades $\pi : M \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ de \mathcal{F}_ω . Tenemos el transformado estricto de la foliación dada por $\mathcal{F}'_\omega = \pi^*\mathcal{F}_\omega$ y $\mathcal{D} = \pi^{-1}(0)$.

Definición 2.1.1. *Un punto singular p del tipo silla nodo de \mathcal{F}' es **silla nodo tangente** si la curva invariante débil esta contenida en \mathcal{D} . Caso contrario diremos que la singularidad p es una **silla nodo transversa**.*



Silla nodo transverso



Silla nodo tangente

Definición 2.1.2. La foliación \mathcal{F}_ω es de **segundo tipo** respecto al divisor \mathcal{D} si ningún punto singular de \mathcal{F}'_ω es de tipo silla nodo tangente.

Observaciones 2.1.3.

1. De la definición de una foliación \mathcal{F}_ω de segundo tipo se observa que en su reducción de singularidades cuando aparecen sillanodos ellas no son esquinas (intersección de dos divisores) y la separatriz fuerte que pasa por la silla nodo está contenida en el divisor.
2. Notemos que toda foliación de tipo curva generalizada es foliación de segundo tipo, pero lo recíproco no es verdad, como se muestra el siguiente ejemplo.

Del Ejemplo 1.2.20 se sabe que la foliación $\omega = ((b-1)xy - y^3)dx + (xy - bx^2 + xy^2)dy$ con $-b, 1-b \notin \mathbb{Q}^+$ no es de tipo curva generalizada, pues en su reducción de singularidades aparece un punto silla nodo. Sin embargo, dicha foliación es de segundo tipo, ya que el punto silla nodo que aparece no es una esquina y la separatriz fuerte asociada a dicha singularidad está contenida en el divisor.

Ejemplo 2.1.4. Retomemos el Ejemplo 1.2.13. La foliación con singularidad de tipo silla nodo $\omega = -y^{p+1}dx + (1 + \lambda y^p)xdy$ con $p \geq 1$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ es una foliación de segundo tipo respecto al divisor $\{y = 0\}$, pero no lo es respecto al divisor $\{x = 0\}$.

Proposición 2.1.5. Las singularidades de una foliación de segundo tipo son invariantes por explosiones.

Demostración. Supongamos que ya hemos reducido las singularidades de la foliación, es decir las singularidades son simples. Si las singularidades son no degeneradas sabemos que son estables por explosiones. (ver Observación 1.2.12). Si las singularidades fueran sillanodos con separatriz fuerte contenida en el divisor $y = 0$, analizando su reducción de singularidades, se tiene

1. En la carta (x, t) consideramos $\pi(x, t) = (x, xt)$, así

$$\frac{\pi^*\omega}{x} = (-t^{p+1}x^p + (1 + \lambda x^p t^p)t)dx + (1 + (\lambda t^p x^p)xt)dt, \quad (2.1)$$

la singularidad se da en $(0, 0)$. El campo asociado a la parte lineal de la foliación dada en (2.1) es

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} - t \frac{\partial}{\partial t},$$

y la matriz asociada a dicho campo es

$$DX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

El cociente de autovalores de la matriz (2.2) es $\lambda = -1 \notin \mathbb{Q}^+$. Por tanto la singularidad $(0, 0)$ es no degenerada.

2. En la carta (s, y) consideramos $\pi(s, y) = (sy, y)$, así

$$\frac{\pi^*\omega}{y} = -y^{p+1}ds + (-sy^p + (1 + \lambda y^p)s)dy, \quad (2.3)$$

cuya singularidad es $(0, 0)$. El campo asociado a la parte lineal de la foliación dada en (2.3) es $X = s \frac{\partial}{\partial s} + 0 \frac{\partial}{\partial y}$, cuya matriz asociada al campo es

$$DX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

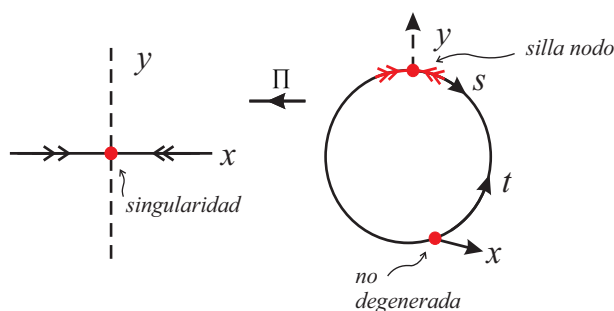
y los autovalores son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 0$, de esta manera el origen es silla nodo. Veamos si la separatriz fuerte está contenida en el divisor. El autoespacio asociado al autovalor no nulo

$$(DX - \lambda I) \begin{pmatrix} s \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es $y = 0$, de esta manera la separatriz fuerte está contenida en el divisor. Por tanto, podemos concluir que \mathcal{F}_ω es una foliación de segundo tipo.

De lo anterior se concluye que es estable por explosión.

□



Supongamos que el campo vectorial X asociado a la foliación \mathcal{F}_ω es

$$X = \lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y} + \dots$$

La parte lineal de X es $\lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y}$. Si $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = n \in \mathbb{N}^*$, entonces el campo es analíticamente equivalente a un campo de la forma (ver [Lo, Pag. 154])

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + (ny + x^n) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Ejemplo 2.1.6 (Dulac). La foliación \mathcal{F}_ω dada por la 1-forma

$$\omega = (ny + x^n)dx - xdy$$

no es una foliación de segundo tipo, como veremos al analizar su reducción de singularidades. Si se realizan $n - 1$ explosiones escritas en coordenadas locales como $\pi(x, y) = (x, x^{n-1}t)$, tenemos que

$$\frac{\pi^*\omega}{x^{n-1}} = (x + t)dx - xdt, \tag{2.5}$$

que tiene como singularidad el origen. El campo asociado a la foliación dada en (2.5) es

$$X = -x \frac{\partial}{\partial x} - (x + t) \frac{\partial}{\partial t}.$$

El cociente de los autovalores de la matriz asociada al campo es $\lambda = 1 \in \mathbb{Q}^+$, así el origen es una singularidad no reducida. Denotemos $\omega_1 = \frac{\pi^*\omega}{x^{n-1}}$ y hagamos otra explosión.

1. En la carta (x, t_1) consideramos $\pi(x, t_1) = (x, xt_1)$, así

$$\frac{\pi^*\omega_1}{x} = dx - xdt_1,$$

notamos que la foliación no tiene singularidad.

2. En la carta (s_1, t) consideramos $\pi(s_1, t) = (s_1t, t)$, así

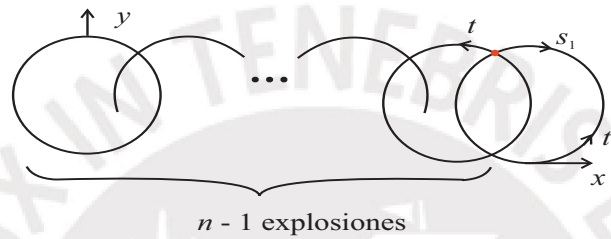
$$\frac{\pi^*\omega_1}{t} = (s_1t + t)ds_1 + s_1^2dt,$$

cuya singularidad es $(0, 0)$ y la matriz asociada al campo con parte lineal $X = 0 \frac{\partial}{\partial s_1} - t \frac{\partial}{\partial t}$ es

$$DX = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sus autovalores son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$. De esta manera la singularidad es una silla nodo.

Concluimos así que la foliación no es de segundo tipo pues la silla nodo que aparece es esquina.

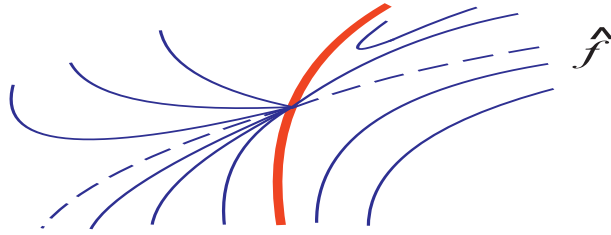


Sea $\widehat{\mathcal{C}}_f$ una curva formal de ecuación reducida $f = 0$ en el origen. Denotemos por \mathcal{G}_f la foliación definida por $df = 0$. Con frecuencia comparamos invariantes de una foliación no dicrítica \mathcal{F}_ω con la foliación no dicrítica \mathcal{G}_f , donde $f = 0$ es una ecuación reducida del conjunto de separatrices $\widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{F})$.

Ejemplo 2.1.7. La foliación de Euler $\omega = (y - x)dx + x^2dy$ es de segundo tipo respecto al divisor $x = 0$. Dicha foliación tiene sola una separatriz convergente $x = 0$ y buscamos otra separatriz de la forma $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Consideremos $\gamma(t) = \left(t, \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n \right)$, así

$$\begin{aligned} \gamma^* \omega &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n - t + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n+1} \right) dt \\ &= (a_1 - 1)t + (a_2 + a_1)t^2 + \dots + (a_{n+1} + n a_n)t^{n+1} + \dots \end{aligned} \tag{2.6}$$

como $\gamma^* \omega = 0$ obtenemos $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = -n a_n$. De donde resulta que $y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! x^{n+1}$ es separatriz formal no convergente. Concluimos de esta manera que la foliación dada por ω tiene dos separatrices una analítica y la otra formal.



Teorema 2.1.8. [Ma-Sa, Théoreme 3.1.9] Sea \mathcal{F}_ω una foliación no dicrítica y consideremos \mathcal{G}_f donde $f = 0$ es una ecuación reducida de $\widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{F})$. Considerando la mínima reducción de singularidades $\pi : (M, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ de \mathcal{F}_ω . Entonces

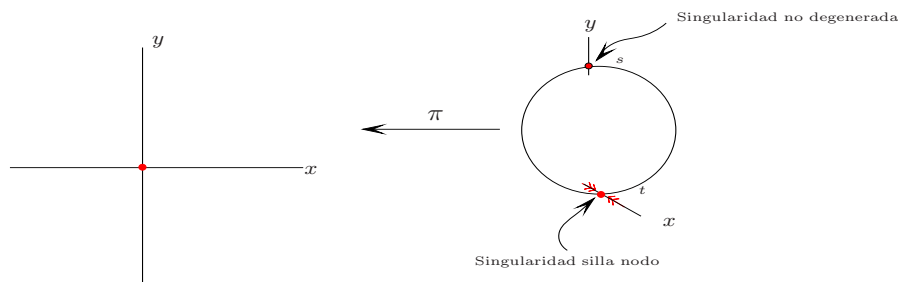
1. π es una reducción de singularidades de $\widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{F})$. Además si \mathcal{F}_ω es de segundo tipo entonces π es la mínima reducción de singularidades de $\widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{F})$.
2. $\text{mult}(\omega) \geq \text{mult}(\mathcal{G}_f)$ y la igualdad se cumple si y solo si \mathcal{F}_ω es de segundo tipo.

La caracterización de las foliaciones de segundo tipo dada en el Teorema 2.1.8 no es cierto si solo se consideran separatrices convergentes, como se puede apreciar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.9. Del Ejemplo 2.1.7 se sabe que la foliación de segundo tipo $\omega = (y - x)dx + x^2dy$ tiene como unión de separatrices $\widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{F}) = x(y - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! x^{n+1})$, donde $x = 0$ es separatriz convergente y $y - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! x^{n+1} = 0$ es separatriz formal no convergente. Aplicando el Teorema 2.1.8, tendríamos que $1 = \text{mult}(\omega) = \text{mult}(df) = 0$, si solo consideramos la separatriz convergente, llegando a la conclusión que se debe considerar las separatrices formales.

El recíproco del primer apartado del Teorema 2.1.8 no es cierto, es decir si la reducción de singularidades de la foliación y el de su unión de separatrices coinciden no garantiza que la foliación sea de segundo tipo, como se aprecia en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.10. La foliación $\omega = (xy + y^2)dx - x^2dy$ tiene como unión de separatrices a $\mathcal{C}(\mathcal{F}) = xy$. Además la foliación y su unión de separatrices se desingularizan después de una explosión pero la foliación no es de segundo tipo debido a que la separatriz fuerte que pasa por la singularidad de tipo silla nodo no está contenida en el divisor. Obsérvese también que $\text{mult}(\omega) = 2 \neq 1 = \text{mult}(df)$.



Otra caracterización de las foliaciones de segundo tipo en términos de su grafo dual es dada por Mattei y Salem en [Ma-Sa, Théoreme 3.1.9].

2.2. Números de intersección polar

En esta parte presentaremos otra caracterización de foliaciones no dicríticas de segundo tipo debido al trabajo de [CF-Co-Mol] en términos de curvas polares.

Sea \mathcal{F} un germen de foliación singular en $(\mathbb{C}^2, 0)$. La **curva polar** $P_{(a:b)}^{\mathcal{F}}$ de \mathcal{F} con respecto a $(a : b) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ es dada por $\omega \wedge (bdx - ady) = 0$. La definición de curva polar también tiene sentido para foliaciones formales.

Fijada una curva formal $\widehat{\mathcal{C}}_f$ invariante por \mathcal{F} , existe un conjunto abierto de Zariski no vacío $U_{\widehat{\mathcal{C}}_f} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ tal que para cualquier $(a : b) \in U_{\widehat{\mathcal{C}}_f}$ la curva polar $P_{(a:b)}^{\mathcal{F}}$ no tiene ramas comunes con $\widehat{\mathcal{C}}_f$ y el tipo de equisingularidad de $P_{(a:b)}^{\mathcal{F}} \cup \widehat{\mathcal{C}}_f$ es independiente de $(a : b) \in U_{\widehat{\mathcal{C}}_f}$ (ver [Co1, Teorema 6.1.3]).

Una curva formal Υ en $(\mathbb{C}^2, 0)$ es $\widehat{\mathcal{C}}_f$ -**tipo polar genérico** si y solo si $\Upsilon \cup \widehat{\mathcal{C}}_f$ es equisingular a $P_{(a:b)}^{\mathcal{F}} \cup \widehat{\mathcal{C}}_f$ para $(a : b) \in U_{\widehat{\mathcal{C}}_f}$.

Obsérvese que si Υ, Υ' son curvas formales $\widehat{\mathcal{C}}_f$ -tipo polar genérico, entonces $(\Upsilon, \widehat{\mathcal{C}}_f)_0 = (\Upsilon', \widehat{\mathcal{C}}_f)_0$, donde $(\Upsilon, \widehat{\mathcal{C}}_f)_0$ denota la multiplicidad de intersección.

Recordemos que $\mu(\mathcal{F})$ denota el número de Milnor de \mathcal{F} .

Definición 2.2.1. El $\widehat{\mathcal{C}}_f$ - **número de intersección polar** es la multiplicidad de intersección $(\Upsilon, \widehat{\mathcal{C}}_f)_0$, para cualquier Υ curva formal $\widehat{\mathcal{C}}_f$ - tipo polar genérico y será denotado por $p_0(\mathcal{F}, \widehat{\mathcal{C}}_f)$.

Proposición 2.2.2. [CF-Co-Mol, Proposition 2] Sea \mathcal{F} una foliación no dicrítica. Entonces

$$p_0(\mathcal{F}, \widehat{\mathcal{C}(\mathcal{F})}) \leq \mu(\mathcal{F}) + \text{mult}(\mathcal{F}),$$

y la igualdad se cumple si y solo si \mathcal{F} es de segundo tipo.

Observación 2.2.3. Del Teorema 2.1.8 y de la Proposición 2.2.2, tenemos

$$p_0(\mathcal{F}, \widehat{\mathcal{C}(\mathcal{F})}) = \mu(\mathcal{F}) + \text{mult}(\widehat{\mathcal{C}(\mathcal{F})}) - 1 \quad (2.7)$$

para una foliación \mathcal{F} no dicrítica de segundo tipo. Aplicando la ecuación (2.7) para la foliación Hamiltoniana \mathcal{G}_f dada por $df = 0$, donde $f = 0$ es una ecuación reducida de $\widehat{\mathcal{C}(\mathcal{F})}$, obtenemos que

$$p_0(\mathcal{F}, \widehat{\mathcal{C}(\mathcal{F})}) - p_0(\mathcal{G}_f, \widehat{\mathcal{C}(\mathcal{F})}) = \mu(\mathcal{F}) - \mu(\mathcal{G}_f) = \mu(\mathcal{F}) - \mu(\widehat{\mathcal{C}(\mathcal{F})}) \geq 0. \quad (2.8)$$

En particular, una foliación no dicrítica \mathcal{F} de segundo tipo es de tipo curva generalizada si y solo si

$$p_0(\mathcal{F}, \widehat{\mathcal{C}(\mathcal{F})}) = p_0(\mathcal{G}_f, \widehat{\mathcal{C}(\mathcal{F})}).$$

Observemos que $p_0(\mathcal{F}, \widehat{\mathcal{C}(\mathcal{F})}) = p_0(\mathcal{G}_f, \widehat{\mathcal{C}(\mathcal{F})}) \Leftrightarrow \mu(\mathcal{F}) = \mu(\mathcal{G}_f)$, y aplicando Teorema 1.2.27 resulta inmediato que \mathcal{F} sea de tipo curva generalizada si y solo si $\mu(\mathcal{F}) = \mu(\mathcal{G}_f)$.

Denotemos por $\mathcal{B}(C)$ el conjunto de componentes irreducibles de C . El siguiente teorema da una caracterización de las foliaciones de segundo tipo no dicríticas mediante el número de intersección polar.

Teorema 2.2.4. [CF-Co-Mol, Theorem 2] Consideremos una foliación no dicrítica \mathcal{F} en $(\mathbb{C}^2, 0)$ y una curva invariante $C \subset \widehat{\mathcal{C}(\mathcal{F})}$. Para cualquier rama $B \in \mathcal{B}(C)$, tenemos

$$p_0(\mathcal{G}_f, B) \leq p_0(\mathcal{F}, B),$$

donde $f = 0$ es una ecuación reducida de C . Además las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Existe $B \in \mathcal{B}(C)$ tal que $p_0(\mathcal{G}_f, B) \leq p_0(\mathcal{F}, B)$.
2. La foliación \mathcal{F} es de segundo tipo con $C = \widehat{\mathcal{C}(\mathcal{F})}$.

Finalmente, si \mathcal{F} es de segundo tipo con $C = \widehat{\mathcal{C}(\mathcal{F})}$, una separatriz $B \in \mathcal{B}(\widehat{\mathcal{C}(\mathcal{F})})$ es de tipo Briot y Bouquet si y solo si $p_0(\mathcal{G}_f, B) = p_0(\mathcal{F}, B)$.

2.3. Caracterización en términos del polígono de Newton de una foliación de segundo tipo

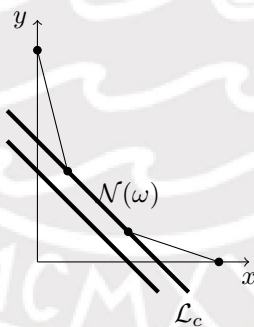
En el capítulo 1, habíamos observado que si la foliación es de tipo curva generalizada entonces el polígono de Newton de la foliación y el de su unión de separatrices coinciden, sin embargo esta propiedad no caracteriza a las foliaciones curvas generalizadas. A continuación probaremos que las foliaciones no dicríticas que tienen el mismo polígono de Newton que su unión de separatrices son las foliaciones de segundo tipo.

Sean $\widehat{\mathcal{C}(\mathcal{F})}$ la unión de separatrices formales de la foliación no dicrítica \mathcal{F}_ω y $f = 0$ una ecuación reducida de $\widehat{\mathcal{C}(\mathcal{F})}$.

Lema 2.3.1. *Sea la foliación no dicrítica \mathcal{F}_ω . Si $\mathcal{N}(\omega) = \mathcal{N}(f)$ entonces \mathcal{F}_ω es de segundo tipo.*

Demostración. Consideremos la foliación \mathcal{F}_ω dada por $\omega = \sum_{i,j} A_{ij}x^{i-1}y^j dx + \sum_{i,j} B_{ij}x^i y^{j-1} dy$ de donde $\text{Sop}(\omega) = \{(i, j) / (A_{ij}, B_{ij}) \neq 0\}$. Como $\text{mult}(\omega) = \min\{\text{ord}(A), \text{ord}(B)\}$ existe $(i_0, j_0) \in \mathbb{N}^2$ tal que $\text{mult}(\omega) = i_0 + j_0 - 1$. Definimos $\mathcal{L}_c : i + j = c + 1$ con c un entero positivo y observamos que

$$\text{mult}(\omega) = \min \{c / \mathcal{L}_c \cap \mathcal{N}(\omega) \neq \emptyset\}.$$



De esta manera

$$\begin{aligned} \text{mult}(\omega) &= \min \{c / \mathcal{L}_c \cap \mathcal{N}(\omega) \neq \emptyset\} \\ &= \min \{c / \mathcal{L}_c \cap \mathcal{N}(df) \neq \emptyset\} \\ &= \text{mult}(df). \end{aligned} \tag{2.9}$$

De (2.9) y del segundo apartado del Teorema 2.1.8 concluimos el lema. □

Como consecuencia del Lema 2.3.1 y del Teorema 2.1.8 concluimos que si $\mathcal{N}(\omega) = \mathcal{N}(f)$ entonces la foliación ω y su conjunto de separatrices $\widehat{\mathcal{C}(\mathcal{F})}$ tienen la misma resolución.

En la siguiente proposición generalizamos el Lema 1.2.29 a foliaciones de segundo tipo.

Proposición 2.3.2. Sean \mathcal{F} la foliación de segundo tipo no dicrítica dada por la 1-forma ω y $\widehat{\mathcal{C}(\mathcal{F})} : f = 0$ su unión de separatrices formales. Dada una curva γ se verifica

$$\text{ord}_t \gamma^* \omega = \text{ord}_t \gamma^* df.$$

Demostración. Consideremos $(x(t), y(t))$ una parametrización de la curva γ . Si la curva γ es separatriz de ω y df entonces $\omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0 = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ y concluimos la proposición en tal caso. Supongamos ahora que $\gamma(t)$ no es parametrización de ninguna separatriz de ω y df . La prueba la haremos por inducción sobre el número de explosiones n necesarias para desingularizar la foliación.

1. Si el número de explosiones es $n = 0$ tenemos que las foliaciones ω y df son reducidas.
 - a) Si la foliación ω es reducida y no es una silla nodo, es decir es una foliación de tipo curva generalizada. Del Lema 1.2.29 se obtiene el resultado.
 - b) Si la foliación ω es reducida y es silla nodo, podemos considerar la forma formal de la silla nodo dada por la ecuación (1.16), la cual bajo un cambio de coordenadas se puede expresar como (ver [C-S2, Pag. 66])

$$\omega = x(1 + \lambda y^p) dy - y^{p+1} dx, \quad (2.10)$$

y la ecuación reducida de su unión de separatrices formales es dada por $f = xy$. Consideremos una parametrización de la curva γ dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (t^a n_1(t), t^b n_2(t))$, con a, b enteros positivos y $n_i(t)$ unidades de $\mathbb{C}[[t]]$ para $i = 1, 2$. Tenemos

$$\begin{aligned} \gamma^* \omega &= t^a n_1(t) (1 + \lambda (t^b n_2(t))^p) d(t^b n_2(t)) - (t^b n_2(t))^{p+1} d(t^a n_1(t)) \\ &= t^a n_1(t) (1 + \lambda t^{pb} (n_2(t))^p) (bt^{b-1} n_2(t) + t^b n_2'(t)) dt \\ &\quad - t^{pb+b} (n_2(t))^{p+1} (at^{a-1} n_1(t) + t^a n_1'(t)) dt \\ &= [bt^{a+b-1} n_1(t) n_2(t) + t^{a+b} n_1(t) n_2'(t) \\ &\quad + t^{a+b+pb-1} n_1(t) (n_2(t))^{p+1} (\lambda b - a) \\ &\quad + \lambda t^{a+b+pb} n_1(t) (n_2(t))^p n_2'(t) - t^{a+b+pb} n_1'(t) (n_2(t))^{p+1}] dt, \end{aligned}$$

de donde $\text{mult}(\gamma^* \omega) = a + b - 1$. De otro lado

$$df = y dx + x dy,$$

obteniendo

$$\begin{aligned} \gamma^* df &= t^b n_2(t) d(t^a n_1(t)) + t^a n_1(t) d(t^b n_2(t)) \\ &= t^b n_2(t) (at^{a-1} n_1(t) + t^a n_1'(t)) dt \\ &\quad + t^a n_1(t) (bt^{b-1} n_2(t) + t^b n_2'(t)) dt \\ &= [t^{a+b-1} n_1(t) n_2(t) (a + b) + t^{a+b} (n_1'(t) n_2(t) + n_1(t) n_2'(t))] dt, \end{aligned}$$

así $\text{mult}(\gamma^*df) = a + b - 1$. Por tanto, si ω es reducida con singularidad de tipo silla nodo, entonces $\text{ord}_t(\gamma^*\omega) = \text{ord}_t(\gamma^*df)$.

2. Ahora abordaremos la demostración de la proposición cuando las foliaciones ω y df no son reducidas. Supongamos que $n > 0$ y por hipótesis inductiva se cumple que

$$\text{ord}_t\tilde{\gamma}^*\tilde{\omega} = \text{ord}_t\tilde{\gamma}^*\tilde{df},$$

donde $\tilde{\gamma}$ es el transformado estricto de γ y $\tilde{\omega}$ es el transformado estricto de ω . Consideremos E la explosión en el origen $(x, y) = (0, 0)$ dado por $E : (x, t) = (x, xt)$,

$$\begin{aligned} E^*\omega &= A_1(x, xt)dx + B_1(x, xt)d(xt) \\ &= (A_1(x, xt) + tB_1(x, xt))dx + xB_1(x, xt)dt \\ &= x^{m_1}\tilde{\omega}, \end{aligned}$$

donde m_1 es la multiplicidad de ω . Denotaremos por $\tilde{\gamma}(t)$ la parametrización del transformado estricto $\tilde{\gamma}$ de la curva γ . Tenemos

$$\begin{aligned} \gamma^*\omega &= (E \circ \tilde{\gamma})^*\omega = \tilde{\gamma}^*(E^*\omega) \\ &= \tilde{\gamma}^*(x^{m_1}\tilde{\omega}) = x(t)^{m_1}\tilde{\gamma}^*\tilde{\omega}, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \text{ord}_t\gamma^*\omega &= \text{ord}_t(x(t)^{m_1}\tilde{\gamma}^*\tilde{\omega}) \\ &= \text{mult}(x(t))\text{mult}(\tilde{\omega}) + \text{ord}_t\tilde{\gamma}^*\tilde{\omega}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Como la foliación ω es de segundo tipo tenemos que $\text{mult}(\omega) = \text{mult}(df)$ dicho resultado se debe a Mattei y Salem, usando la hipótesis inductiva y reemplazando en la ecuación (2.11) se muestra que $\text{ord}_t\gamma^*\omega = \text{ord}_t\gamma^*df$, lo que concluye la prueba de la proposición.

□

La Proposición 1.2.40 también ha sido probado por [CF-Co-Mol], es consecuencia de la caracterización dada en Corollary 1. Usando la Proposición 2.3.2 y como caso particular de la Proposición 1.2.40, podemos establecer el siguiente corolario.

Corolario 2.3.3. Sean \mathcal{F}_ω una foliación de segundo tipo no dicrítica y \mathcal{C}_f una ecuación reducida de su unión de separatrices formales. Entonces se cumple $\mathcal{N}(\omega) = \mathcal{N}(df)$.

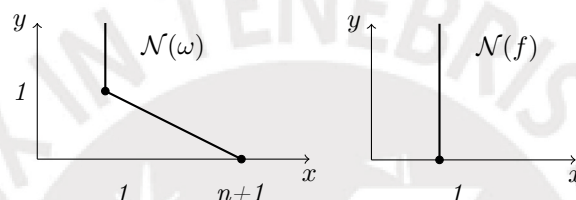
Demostración. En la prueba de la Proposición 1.2.40 se usa fuertemente que la foliación ω tenga la misma reducción de singularidades que su unión de separatrices formales y que $\text{mult}(\omega) = \text{mult}(df)$ lo cual se cumple debido a que ω es de segundo tipo (ver Teorema 2.1.8). Por tanto podemos hacer un razonamiento análogo a lo hecho en la prueba de la Proposición 1.2.40 y aplicando la Proposición 2.3.2 se concluye el corolario. □

Como consecuencia del Corolario 2.3.3 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.3.4. Sean \mathcal{F}_{ω_1} y \mathcal{F}_{ω_2} dos foliaciones de segundo tipo no dicríticas con la misma unión de separatrices formales, entonces $\mathcal{N}(\omega_1) = \mathcal{N}(\omega_2)$.

Si la foliación no es de segundo tipo, el polígono de la foliación y el de su unión de separatrices no coinciden necesariamente.

Ejemplo 2.3.5. Del Ejemplo 2.1.6 se sabe que la foliación \mathcal{F}_ω dada por $\omega = (ny + x^n)dx - xdy$ con $n \geq 1$ no es una foliación de segundo tipo. Además dicha foliación tiene como su unión de separatrices a $\mathcal{C}(\mathcal{F}) : x = 0$. Observamos que $\text{Sop}(\omega) = \{(1, 1), (n + 1, 0)\}$ y $\text{Sop}(f) = \{(1, 0)\}$, de donde concluimos que tienen diferentes polígonos.



Con el siguiente teorema determinamos una nueva caracterización de las foliaciones de segundo tipo no dicríticas a través de su polígono de Newton.

Teorema 2.3.6. Sean \mathcal{F}_ω foliación no dicrítica y $f = 0$ una ecuación reducida de $\widehat{\mathcal{C}(\mathcal{F})}$. Entonces \mathcal{F}_ω es de segundo tipo si y solo si $\mathcal{N}(\omega) = \mathcal{N}(f)$.

Demostración. Es consecuencia inmediata del Corolario 2.3.3 y el Lema 2.3.1. \square

En este trabajo, no estudiamos las foliaciones de segundo tipo dicríticas, sin embargo podemos mencionar lo siguiente: las foliaciones dicríticas tienen un número infinito de separatrices, por lo que una de las dificultades para trabajar con estas foliaciones es la elección de un conjunto finito de estas separatrices. La solución es usar una ecuación balanceada de separatrices, concepto que fue introducido por Genzmer en [Ge, Definition 2.3]. Las foliaciones dicríticas de segundo tipo fueron estudiadas y caracterizada por [Ge, Proposition 2.6] en término de su multiplicidad. Posteriormente fueron estudiadas por [Ge-Mol, Proposition 4.5] quienes dan otra caracterización de estas foliaciones en términos del exceso polar. El lector interesado en este tipo de foliaciones puede revisar los artículos citados.

2.4. Singularidades cuspidales

En esta sección vamos a estudiar las foliaciones cuspidales y daremos una caracterización de estas. Dicha caracterización la daremos cuando las foliaciones sean de segundo tipo.

Las foliaciones cuspidales son inspiradas en las foliaciones nilpotentes. Un germen de foliación \mathcal{F}_ω en $(\mathbb{C}^2, 0)$ se llama *nilpotente* si está generado por un campo de vectores X con parte lineal nilpotente (esto es, la matriz asociada a la parte lineal del campo es nilpotente) y no nula. El resultado más significativo sobre las singularidades nilpotentes fue dado por F. Takens en 1974 [Ta, Pag. 55]. Dicho resultado indica que, formalmente, podemos expresar el campo X en la forma

$$X = (y + a(x))\frac{\partial}{\partial x} + b(x)\frac{\partial}{\partial y}, \quad (2.12)$$

donde $a(x), b(x)$ son series formales y $\text{ord}(a), \text{ord}(b) \geq 2$. La forma del campo dada en (2.12) se denomina *forma normal de Takens*. Consideremos $n := \text{ord}(b) + 1 \geq 3$ y $m := \text{ord}(a) \geq 2$. La foliación que define el campo X dado en (2.12) es

$$\omega = -b(x)dx + (y + a(x))dy.$$

Haciendo un cambio de coordenadas (ver [Mo, Pag. 83]), se obtiene

$$\omega = \frac{1}{2}d(x^n + y^2) + \tilde{a}(x)dy,$$

donde $\tilde{a}(x)$ es una serie formal. Luego, formalmente, toda foliación con singularidad nilpotente se encuentra generada por una 1-forma del tipo

$$d(y^2 + x^n) + x^m u(x)dy, \quad (2.13)$$

donde $u(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ y $u(0) \neq 0$. Las singularidades nilpotentes han sido estudiadas por muchos autores. En el proceso de reducción de singularidades se consideran tres casos $2m > n$, $2m = n$ y $2m < n$.

1. D. Cerveau y R. Moussu [Ce-Mou] estudian las formas dadas en (2.13) cuando $2m > n$, $u(0) \neq 0$ y $u(x) \in \mathbb{C}[[x]]$. En este caso, la foliación tiene una curva invariante analíticamente equivalente a $y^2 - x^n = 0$. En el estudio de estas foliaciones, es interesante escribir explícitamente la foliación teniendo exactamente a $y^2 - x^n = 0$ como separatriz. D. Cerveau y R. Moussu [Ce-Mou, Pag. 478] muestran que estas foliaciones pueden ser definidas por la 1-forma holomorfa

$$\omega = d(y^2 - x^n) + A(x, y)(nydx - 2xdy), \quad (2.14)$$

donde $A \in \mathbb{C}\{x, y\}$.

2. R. Meziani [Me] estudia el caso $n = 2m$, dicho autor considera $n = 2k$ y haciendo k explosiones se obtienen los divisores $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_k$. Los puntos singulares sobre \mathcal{D}_k corresponden a las raíces del polinomio

$$u^2 + \frac{\alpha}{2}u + 1 = 0, \quad (2.15)$$

Meziani distingue los siguientes casos

- Si $\alpha \neq \pm 4$ y si $\alpha \notin \{\pm 2(\sqrt{r} + 1/\sqrt{r}), r \in \mathbb{Q} \cap]0, 1]\}$, la foliación dada en (2.13) es formalmente conjugada a la foliación de tipo curva generalizada

$$\omega = d(y^2 + x^{2n_1}) + f(x, y)(n_1 y dx - x dy), f \in \mathcal{M}_2,$$

donde $f(x, y) = x^{n_1-1}(\alpha + x l_1(x)) + y g(x, y)$, $l_1 \in \mathcal{O}_1$, $g \in \mathcal{O}_2$ y $\alpha \in (\mathbb{C} - \mathbb{Q}i) \cup (\mathbb{Q} \cap]-2, 2])i$ (ver [Me, Pag. 68]).

- Si $\alpha = \pm 4$, la foliación dada en (2.13) vía un cambio de coordenadas se puede escribir como

$$\omega = y dy + g(x, y)(n_1 y dx - x dy),$$

donde $g(x, y) = x^{n_1-1} l_1(x) + y f(x, y)$, $f_1 \in \mathcal{O}_2$, $l_1 \in \mathcal{O}_1$ y $l_1(0) \neq 0$. En dicha foliación aparece una silla nodo cuya separatriz es transversal al divisor, por tanto dicha foliación no es de segundo tipo.

El caso en que $\alpha \in \{\pm 2(\sqrt{r} + 1/\sqrt{r}), r \in \mathbb{Q} \cap]0, 1]\}$ fue estudiado por [Me-Sad], en este caso la foliación dada en (2.13) puede ser:

- Dicrítica y en cuyo caso se expresa por la siguiente 1-forma

$$\omega = d(y^2 + x^{2p}) + f(x, y)(p y dx - x dy),$$

donde $f(x, y) = a x^{p-1} l(x) + y g(x, y)$, $g \in \mathbb{C}\{x, y\}$, $l \in \mathbb{C}\{x\}$, $l(0) = 1$ y $a = r i$ con $r \in \mathbb{Q} \cap]-\infty, 2[$, (ver [Me-Sad, Pag. 145]).

- No-dicrítica, en este caso aparece una silla nodo en una esquina en su resolución de singularidades, por tanto dicha foliación no es de segundo tipo.

3. En el caso $2m < n$ aparece una única silla nodo tras la reducción de singularidades. Esta silla nodo puede tener:

- Dos separatrices convergentes, este caso es estudiado por M. Berthier, R. Meziანი y P. Sad [Be-Me-Sa] cuando la silla-nodo que aparece admite dos separatrices analíticas, en este caso la foliación es conjugada a

$$\omega = d(y^2 + x^{2p}) + f(x, y)(p y dx - x dy),$$

donde $f(x, y) = 2i x^{p-1}(1 + l(x)) + y g(x, y)$, $g \in \mathbb{C}\{x, y\}$, $l \in \mathbb{C}\{x\}$ con $lg \neq 0$, dicha foliación resulta siendo de segundo tipo (ver [Be-Me-Sa, Pag. 361]).

- Cuando la silla nodo sólo tiene una separatriz analítica y la otra separatriz es formal, la foliación es de segundo tipo, este caso es estudiado por E. Stróżyńska [St].

Las singularidades nilpotentes fueron generalizadas a *singularidades cuspidales* por Loray, como veremos a continuación. Dados $p, q \in \mathbb{N}^*$, definimos el *grado pesado* de un monomio y el *orden pesado* de una serie como

$$\text{grado}_{(p,q)}(x^i y^j) = \frac{ip + jq}{\text{mcd}(p, q)} \quad \text{y}$$

$$\text{ord}_{(p,q)} \left(\sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j \right) = \text{mín} \left\{ \text{grado}_{(p,q)}(x^i y^j) : a_{i,j} \neq 0 \right\}.$$

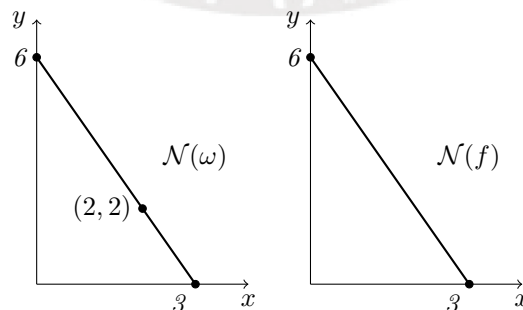
Según F. Loray, una *foliación con singularidades cuspidales* es dada por

$$\omega_{p,q,\Delta} := d(y^p - x^q) + \Delta(x, y)(pxdy - qydx), \quad (2.16)$$

con $\Delta(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$. Para Loray, la foliación $\omega_{p,q,\Delta}$ con singularidad cuspidal y $d(y^p - x^q)$ tienen la misma resolución de singularidades si y solo si $\text{ord}_{(p,q)}(\Delta) > \frac{pq-p-q}{\text{mcd}(p,q)}$. Fernández, Mozo y Neciosup [F-Mo-N], encuentran un imprecisión en la caracterización originalmente propuesta por Loray. Dichos autores mencionan que la condición es suficiente pero no necesaria, como se desprende del siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4.1. *Del Ejemplo 1.2.23 se sabe que la foliación $\omega = d(y^6 - x^3) + axy(6xdy - 3ydx)$ con $a \notin \{-(6r+1)\zeta/r \in \mathbb{Q}_{>0} \text{ y } \zeta^3 = 1\}$, tiene la misma resolución que la foliación $d(y^6 - x^3) = 0$ pero la función $\Delta(x, y) = axy$ satisface $\text{ord}_{(6,3)}\Delta = 3$, valor que no verifica la relación $\text{ord}_{(6,3)}\Delta > \frac{pq-p-q}{\text{mcd}(p,q)} = 3$.*

Obsérvese también que en este caso la foliación ω tiene como curva invariante a $\mathcal{C}(\mathcal{F}) : y^6 - x^3 = 0$ pues $\omega \wedge df = 18axy(y^6 - x^3)$, además $\text{mult}(\omega) = 2 = \text{mult}(df)$ de donde concluimos que dicha foliación es de segundo tipo y tiene como su conjunto de separatrices a la curva $\mathcal{C}(\mathcal{F}) : y^6 - x^3 = 0$. Además el polígono de Newton de la foliación y el de su conjunto de separatrices coinciden.



Observación 2.4.2. *Las foliaciones cuspidales son foliaciones nilpotentes cuando $p = 2$ (ver (2.14)).*

Lema 2.4.3. Si $\mathcal{F}_{\omega_{p,q,\Delta}} : \omega_{p,q,\Delta} = 0$ es una foliación no dicrítica, entonces $\mathcal{C}(\mathcal{F}_{\omega_{p,q,\Delta}}) = y^p - x^q$ es su unión de separatrices.

Demostración. La foliación $\mathcal{F}_{\omega_{p,q,\Delta}}$ tiene como curva invariante a $\mathcal{C}_f : y^p - x^q = 0$ puesto que satisface $\omega_{p,q,\Delta} \wedge df = (y^p - x^q)(-pq\Delta(x,y))dx \wedge dy$. Además

$$\text{mult}(\omega_{p,q,\Delta}) = \min\{q - 1, p - 1, \alpha + 1\}, \quad (2.17)$$

donde $\alpha = \text{ord}(\Delta)$.

1. Si consideramos $p < q$, la multiplicidad de la curva es $\text{mult}(\mathcal{C}_f) = p$. Si suponemos que la curva \mathcal{C}_f no es la única separatriz de la foliación, se tendría $\text{mult}(\mathcal{C}(\mathcal{F}_{\omega_{p,q,\Delta}})) > p$. Usando (2.17), se tiene que

$$\text{mult}(\omega_{p,q,\Delta}) = \min\{p - 1, \alpha + 1\},$$

al aplicar (1.20) se tienen dos posibilidades:

- Podría ocurrir que $p - 1 = \text{mult}(\omega_{p,q,\Delta}) \geq \text{mult}(\mathcal{C}(\mathcal{F}_{\omega_{p,q,\Delta}})) - 1 > p - 1$, lo cual es una contradicción.
- Si $\alpha + 1 = \text{mult}(\omega_{p,q,\Delta}) \geq \text{mult}(\mathcal{C}(\mathcal{F}_{\omega_{p,q,\Delta}})) - 1 > p - 1$ y como $\alpha + 1 \leq p - 1$, llegamos a otra contradicción.

La unión de separatrices es por tanto $\mathcal{C}(\mathcal{F}_{\omega_{p,q,\Delta}}) = y^p - x^q$.

2. El mismo razonamiento se sigue si $p > q$ o si $p = q$. De donde se concluye que $\mathcal{C}(\mathcal{F}_{\omega_{p,q,\Delta}}) = y^p - x^q$.

□

Proposición 2.4.4. Sean $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $\mathcal{F}_{\omega_{p,q,\Delta}}$ no dicrítica. Si $\text{ord}_{(p,q)}\Delta(x,y) \geq \frac{pq-p-q}{d}$ con $d = \text{mcd}(p,q)$ entonces la foliación $\omega_{p,q,\Delta}$ es de segundo tipo, donde $\Delta(x,y) \in \mathbb{C}\{x,y\}$.

Demostración. La prueba la haremos considerando que $p < q$, un razonamiento análogo prueba la proposición para $q < p$ y $p = q$. Como $\text{ord}_{(p,q)}\Delta(x,y) \geq \frac{pq-p-q}{d}$ se tiene $i_0 \frac{p}{d} + j_0 \frac{q}{d} \geq \frac{pq-p-q}{d}$ para $i_0 + j_0 = \text{ord}\Delta$. Haciendo uso que $p < q$ se obtiene

$$i_0 \frac{q}{d} + j_0 \frac{q}{d} > i_0 \frac{p}{d} + j_0 \frac{q}{d} \geq \frac{pq-p-q}{d},$$

de donde $i_0 + j_0 > p - 1 - \frac{q}{p} > p - 2$, así $\alpha = \text{ord}\Delta \geq p - 1$. Usando (2.17) se tiene que $\text{mult}(\omega_{p,q,\Delta}) = p - 1$ y de Lema 2.4.3 se sabe que $\text{mult}(df) = p - 1$ para $\mathcal{C}(\mathcal{F}_{\omega_{p,q,\Delta}}) : y^p - x^q = 0$. Por tanto, $\text{mult}(\omega_{p,q,\Delta}) = \text{mult}(df)$ de donde se concluye que la foliación $\omega_{p,q,\Delta}$ es de segundo tipo. □

Proposición 2.4.5. Sean $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $\mathcal{F}_{\omega_{p,q,\Delta}} : \omega_{p,q,\Delta} = 0$ no dicrítica. Si $\mathcal{F}_{\omega_{p,q,\Delta}}$ es de segundo tipo entonces $\text{ord}_{(p,q)}\Delta(x, y) \geq \frac{pq-p-q}{d}$ para $d = \text{mcd}(p, q)$.

Demostración. Del Lema 2.4.3 se sabe que la foliación $\omega_{p,q,\Delta}$ tiene como unión de se-paratrices a $\mathcal{C}(\mathcal{F}_{\omega_{p,q,\Delta}}) = y^p - x^q$. La recta que contiene al único lado compacto del polígono de Newton $\mathcal{N}(df)$ tiene como ecuación a $\mathcal{L} : \frac{p}{d}i + \frac{q}{d}j = \frac{pq}{d}$. Como $\omega_{p,q,\Delta}$ es de segundo tipo, usando el Teorema 2.3.6 se tiene que $\mathcal{N}(\omega_{p,q,\Delta}) = \mathcal{N}(f)$. Por tanto, dicha recta \mathcal{L} también contiene al único compacto del polígono de $\mathcal{N}(\omega_{p,q,\Delta})$, es decir para todo $(a, b) \in \text{Sop}(\omega_{p,q,\Delta})$ se debe cumplir que $a\frac{p}{d} + b\frac{q}{d} \geq \frac{pq}{d}$. Al considerar $\Delta(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij}x^i y^j \in \mathbb{C}\{x, y\}$, podemos escribir

$$\omega_{p,q,\Delta} = \left(-qx^{q-1} - q \sum_{i,j} a_{ij}x^i y^{j+1} \right) dx + \left(py^{p-1} + p \sum_{i,j} a_{ij}x^{i+1} y^j \right) dy.$$

Obtenemos que $\text{Sop}(\omega_{p,q,\Delta}) = \{(q, 0), (i+1, j+1)\} \cup \{(0, p)(i+1, j+1)\}$ con $(i, j) \in \text{Sop}(\Delta)$. Para $(i+1, j+1) \in \text{Sop}(\omega_{p,q,\Delta})$ se tiene $(i+1)\frac{p}{d} + (j+1)\frac{q}{d} \geq \frac{pq}{d}$ de donde se logra que $\text{ord}_{(p,q)}\Delta(x, y) = i\frac{p}{d} + j\frac{q}{d} \geq \frac{pq-p-q}{d}$. \square

Teorema 2.4.6. Sean $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $\mathcal{F}_{\omega_{p,q,\Delta}}$ no dicrítica. La foliación $\mathcal{F}_{\omega_{p,q,\Delta}}$ donde $\Delta(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ es de segundo tipo, si y solo si, $\text{ord}_{(p,q)}\Delta \geq \frac{pq-p-q}{d}$.

Demostración. Es consecuencia directa de las Proposiciones 2.4.4 y 2.4.5. \square

Como consecuencia del Teorema 2.4.6, se tienen los siguientes resultados.

Proposición 2.4.7. Sean $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $\mathcal{F}_{\omega_{p,q,\Delta}}$ no dicrítica. La foliación $\mathcal{F}_{\omega_{p,q,\Delta}}$ tiene la misma reducción de singularidades que $d(y^p - x^q)$, si y solo si, $\text{ord}_{(p,q)}\Delta \geq \frac{pq-p-q}{d}$.

Demostración. Si $\text{ord}_{(p,q)}\Delta \geq \frac{pq-p-q}{d}$, usando Teorema 2.4.6 tenemos que $\mathcal{F}_{\omega_{p,q,\Delta}}$ es de segundo tipo y al aplicar Teorema 2.1.8 concluimos que $\mathcal{F}_{\omega_{p,q,\Delta}}$ y $d(y^p - x^q)$ tienen la misma reducción de singularidades.

De otro lado, consideremos que $\mathcal{F}_{\omega_{p,q,\Delta}}$ y $d(y^p - x^q)$ tienen la misma reducción de singularidades. La curva $f(x, y) = y^p - x^q$ con $p > q$ se desingulariza haciendo

$$E : (x, y) = (u^n v^{\frac{p}{d}}, u^m v^{\frac{q}{d}}), \quad (2.18)$$

tal que $mp - nq = d$ con $d = \text{mcd}(p, q)$ y $m, n \in \mathbb{N}^*$. Al aplicar el cambio de coordenadas (2.18) a la foliación

$$\omega_{p,q,\Delta} = (-qx^{q-1} - qy\Delta(x, y))dx + (py^{p-1} + px\Delta(x, y))dy,$$

observamos que

$$\begin{aligned} E^*\omega_{p,q,\Delta} &= [u^{nq-1}v^{\frac{pq}{d}}(-nq + mp u^{mp-nq}) + dv^{\frac{pq}{d}}u^{nq-1}(u^{m+n-nq}v^{\frac{p+q-pq}{d}}E^*(\Delta(x,y)))]du \\ &+ [\frac{pq}{d}u^{nq}v^{\frac{pq}{d}-1}(-1 + u^{mp-nq})]dv, \end{aligned} \quad (2.19)$$

factorizando en (2.19) el factor $u^{nq-1}v^{\frac{pq}{d}-1}$, donde resulta

$$\frac{E^*\omega}{u^{nq-1}v^{\frac{pq}{d}-1}} = v(-nq + mp u^d + \tilde{\Delta}(u,v))du + \frac{pq}{d}u(u^d - 1)dv,$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(u,v) &= dE^*(\Delta(x,y))u^{m+n-nq}v^{\frac{p+q-pq}{d}} \\ &= \sum_{i,j} da_{ij}u^{ni+mj+m+n-nq}v^{\frac{pi+qj+p+q-pq}{d}}. \end{aligned}$$

Las singularidades de la foliación son $(0,0)$ y $(\zeta^j,0)$ donde ζ es raíz primitiva de $u^d = 1$.

El campo asociado a la foliación es

$$X = \frac{pq}{d}(u^d - 1)u \frac{\partial}{\partial u} - v(-nq + mp u^d + \tilde{\Delta}(u,v)) \frac{\partial}{\partial v},$$

y la matriz asociada a dicho campo es

$$DX = \begin{pmatrix} -\frac{pq}{d} + \frac{(d+1)pq}{d}u^d & 0 \\ * & nq - mp u^d - \tilde{\Delta}(u,v) - v \frac{\partial \tilde{\Delta}(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

1. En $(0,0)$ se tiene que $DX = \begin{pmatrix} -\frac{pq}{d} & 0 \\ * & nq \end{pmatrix}$, de donde se obtiene $\lambda_0 = -\frac{p}{nd} \notin \mathbb{Q}^+$.

Por tanto la singularidad $(0,0)$ es no degenerada.

2. Si $u^d = 1$ y $v = 0$ se tiene que $DX = \begin{pmatrix} pq & 0 \\ * & -d - \tilde{\Delta}(\zeta^j,0) \end{pmatrix}$, como la foliación ya debe estar reducida, podría suceder que

- $-d - \tilde{\Delta}(\zeta^j,0) = 0$, de donde $\tilde{\Delta}(\zeta^j,0) = -d$, en cuyo caso la singularidad es de tipo silla nodo.
- $-d - \tilde{\Delta}(\zeta^j,0) = -a$, de modo que $\lambda = \frac{pq}{-a} \notin \mathbb{Q}^+$, en este caso la singularidad es de tipo no degenerada.

De (2) concluimos que $\text{ord}_v \tilde{\Delta} \geq 0$, así $pi + qj + p + q \geq 0$ para algún (i,j) . Por tanto $\text{ord}_{(p,q)} \Delta(x,y) \geq \frac{pq-p-q}{d}$ para algún $(i,j) \in \Delta$.

□

Observación 2.4.8. De (2), se observa

- Si $\tilde{\Delta}(\zeta^j, 0) = -d$, la singularidad es de tipo silla nodo y además $\text{ord}_v \tilde{\Delta} = 0$, así $pi + qj + p + q = 0$ para algún (i, j) . Por tanto $\text{ord}_{(p,q)} \Delta(x, y) = \frac{pq-p-q}{d}$ para algún $(i, j) \in \Delta$.
- Si $-d - \tilde{\Delta}(\zeta^j, 0) = -a$, la singularidad es de tipo no degenerada. Observemos que en este caso podría suceder que $\tilde{\Delta}(\zeta^j, 0) = 0$, de donde $\text{ord}_v \tilde{\Delta} > 0$. Por tanto $\text{ord}_{(p,q)} \Delta(x, y) > \frac{pq-p-q}{d}$ para algún $(i, j) \in \Delta$.

Proposición 2.4.9. Sean $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $\mathcal{F}_{\omega_{p,q,\Delta}}$ no dicrítica. Si la foliación $\mathcal{F}_{\omega_{p,q,\Delta}}$ donde $\Delta(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ es de tipo curva generalizada, entonces $\text{ord}_{(p,q)} \Delta \geq \frac{pq-p-q}{d}$.

Demostración. Es consecuencia directa del Teorema 2.4.6. □

Observación 2.4.10. Observamos que si $\mathcal{F}_{\omega_{p,q,\Delta}}$ es de tipo curva generalizada, no necesariamente implica que $\text{ord}_{(p,q)} \Delta > \frac{pq-p-q}{d}$, como veremos en el Ejemplo 2.4.15.

Con la finalidad de caracterizar a la foliación $\mathcal{F}_{\omega_{p,q,\Delta}}$ no dicrítica, cuando es de tipo curva generalizada, usaremos el índice de Gomez-Mont-Seade-Verjovsky. En [Br1, pág 532] se define el índice de Gomez-Mont-Seade-Verjovsky denotado por $GSV(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ donde $\mathcal{F} : \omega = 0$ y $\mathcal{C} : f = 0$ es la ecuación reducida de sus separatrices. Si consideramos $g\omega = hdf + f\eta$, donde h, g son funciones, η es una 1-forma, h y f son primos, se define

$$GSV(\mathcal{F}, \mathcal{C}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{C}} \frac{d(\frac{h}{g})}{\frac{h}{g}}.$$

Para $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ y $\mathcal{C} : f = 0$ separatriz irreducible, se tiene

$$GSV(\mathcal{F}, \mathcal{C}) = \text{ord}_t \left(\frac{B}{f_y}(\gamma(t)) \right),$$

donde $\gamma(t)$ es parametrización de \mathcal{C} . Enunciaremos algunos resultados importantes sobre el índice $GSV(\mathcal{F}, \mathcal{C})$.

Proposición 2.4.11. [Br1, Proposition 6] Si \mathcal{F} es no dicrítica y $\mathcal{C} : f = 0$ es la ecuación reducida de sus separatrices, entonces $GSV(\mathcal{F}, \mathcal{C}) \geq 0$.

Proposición 2.4.12. [Br1, Proposition 7] Sean \mathcal{F} no dicrítica y $\mathcal{C} : f = 0$ la ecuación reducida de sus separatrices. Si \mathcal{F} es una foliación curva generalizada, entonces $GSV(\mathcal{F}, \mathcal{C}) = 0$.

En [Ca-Le, pág 674] se completa la caracterización de las foliaciones curvas generalizadas en términos del índice $GSV(\mathcal{F}, \mathcal{C})$.

Teorema 2.4.13. [Ca-Le, Théorème 3.3] Sean \mathcal{F} no dicrítica y $\mathcal{C} : f = 0$ la ecuación reducida de sus separatrices. Si $GSV(\mathcal{F}, \mathcal{C}) = 0$ entonces \mathcal{F} es una foliación curva generalizada.

La siguiente proposición nos da una condición necesaria y suficiente sobre el orden pesado de $\Delta(x, y)$ para garantizar que la foliación $\omega_{p,q,\Delta}$ sea de tipo curva generalizada.

Proposición 2.4.14. Sean $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ coprimos. La foliación $\omega_{p,q,\Delta}$ es de tipo curva generalizada, si y solo si $\text{ord}_{(p,q)}\Delta(x, y) > pq - p - q$.

Demostración. Consideremos $\omega_{p,q,\Delta} = (-qx^{q-1} - qy\Delta)dx + (py^{p-1} + px\Delta)dy$, $f = y^p - x^q$ y $\gamma(t) = (t^p, t^q)$ una parametrización de f . Así

$$\begin{aligned} GSV(\mathcal{F}, \mathcal{C}) &= \text{ord}_t \left(\frac{py^{p-1} + px\Delta}{py^{p-1}}(t^p, t^q) \right) \\ &= \text{ord}_t \left(1 + \frac{t^p \Delta(t^p, t^q)}{t^{q(p-1)}} \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde $\Delta(t^p, t^q) = \sum_{ij} a_{ij} t^{pi+qj}$. Observemos que

$$GSV(\mathcal{F}, \mathcal{C}) = 0, \quad \text{si y solo si } \text{ord}_t \left(1 + \frac{t^p \Delta(t^p, t^q)}{t^{q(p-1)}} \right) = 0,$$

lo que es equivalente a que $\text{ord}_{p,q}\Delta > pq - p - q$. De Teorema 2.4.13 concluimos que $\mathcal{F}_{p,q,\Delta}$ es de tipo curva generalizada, si y solo si $\text{ord}_{p,q}\Delta > pq - p - q$. □

En el caso p y q no coprimos, una de las implicaciones de la Proposición 2.4.14 no se cumple. Observamos que $\text{ord}_{(p,q)}\Delta > \frac{pq-p-q}{d}$ no es condición suficiente para que $\mathcal{F}_{p,q,\Delta}$ sea curva generalizada, lo que es equivalente decir, si $\text{ord}_{(p,q)}\Delta = \frac{pq-p-q}{d}$ la $\mathcal{F}_{p,q,\Delta}$ es curva generalizada, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4.15. En el Ejemplo 1.2.23 se observa que la foliación

$$\omega = d(y^6 - x^3) + axy(6xdy - 3ydx) \quad \text{con } a \in \mathbb{C}^*,$$

tiene $\text{ord}_{(p,q)}\Delta = 3 = \frac{pq-p-q}{d}$, donde $p = 6, q = 3$ y $d = 3$. Y al hacer la resolución de dicha foliación se observa que es de tipo curva generalizada cuando $a \in \{-(6r+1)\zeta/r \in \mathbb{Q}_{>0} \text{ y } \zeta^3 = 1\}$, y $a^3 \neq -1$.

Para el caso p y q no coprimos, analizaremos si $\text{ord}_{(p,q)}\Delta > \frac{pq-p-q}{d}$ es condición necesaria para que $\mathcal{F}_{p,q,\Delta}$ sea curva generalizada. Empezaremos estudiando qué sucede cuando $d = 2 = \text{mcd}(p, q)$. Consideremos $\mathcal{C} : f = f_1 f_2$ y

$$g\omega = hd(f_1 f_2) + f_1 f_2 \eta$$

de donde $g\omega = hf_2df_1 + f_1(f_2\eta + hdf_2)$ ó $g\omega = hf_1df_2 + f_2(f_1\eta + hdf_1)$. Para $C_i = f_i$, se tiene

$$\begin{aligned} GSV(\mathcal{F}, C_1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial C_1} \frac{d(\frac{hf_2}{g})}{\frac{hf_2}{g}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial C_1} \frac{d(\frac{h}{g})}{\frac{h}{g}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial C_1} \frac{df_2}{f_2} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial C_1} \frac{d(\frac{h}{g})}{\frac{h}{g}} + (f_1, f_2)_0. \end{aligned}$$

De manera análoga, $GSV(\mathcal{F}, C_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial C_2} \frac{d(\frac{h}{g})}{\frac{h}{g}} + (f_2, f_1)_0$. De donde

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial C_1 \cup \partial C_2} \frac{d(\frac{h}{g})}{\frac{h}{g}} = GSV(\mathcal{F}, C_1) + GSV(\mathcal{F}, C_2) - 2(f_1, f_2)_0.$$

Por tanto (ver [Br1, pág 532]),

$$GSV(\mathcal{F}, \mathcal{C}) = GSV(\mathcal{F}, C_1) + GSV(\mathcal{F}, C_2) - 2(f_1, f_2)_0. \quad (2.21)$$

Para $d = 2 = \text{mcd}(p, q)$, se tiene

$$y^p - x^q = \prod_{i=1}^2 (y^{\frac{p}{2}} - \zeta^i x^{\frac{q}{2}}), \quad \text{con } \zeta^2 = 1.$$

Sean $C_i : f_i(x, y) = (y^{\frac{p}{2}} - \zeta^i x^{\frac{q}{2}})$ y $\gamma_i(t) = (t^{\frac{p}{2}}, A_i t^{\frac{q}{2}})$ con $A_i^{\frac{p}{2}} = \zeta^i$ una parametrización de C_i . Además

$$\begin{aligned} (f_1, f_2)_0 &= \text{ord}_t(f_1(\gamma_2(t))) = \text{ord}_t(f_1(t^{\frac{p}{2}}, A_2 t^{\frac{q}{2}})) \\ &= \text{ord}_t(A_2^{\frac{p}{2}} t^{\frac{pq}{4}} - \zeta t^{\frac{pq}{4}}) = \text{ord}_t(t^{\frac{pq}{4}}(1 - \zeta)) = \frac{pq}{4}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Recordemos que $\omega_{p,q,\Delta} = (-qx^{q-1} - qy\Delta)dx + (py^{p-1} + px\Delta)dy$, así

$$\begin{aligned} GSV(\mathcal{F}, C_1) &= \text{ord}_t \left(\frac{(py^{p-1} + px\Delta(x,y))(y^{\frac{p}{2}} - x^{\frac{q}{2}})}{py^{p-1}} (t^{\frac{p}{2}}, A_1 t^{\frac{q}{2}}) \right) \\ &= \text{ord}_t \left(\left(1 + \frac{x\Delta(x,y)}{y^{p-1}}\right) (y^{\frac{p}{2}} - x^{\frac{q}{2}}) (t^{\frac{p}{2}}, A_1 t^{\frac{q}{2}}) \right) \\ &= \text{ord}_t \left(t^{\frac{pq}{4}} (\zeta - 1) + \frac{(\zeta - 1)}{A_1^{p-1}} t^{\frac{p}{2} + \frac{q}{2} - \frac{pq}{4}} \Delta(t^{\frac{p}{2}}, A_1 t^{\frac{q}{2}}) \right). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Si consideramos $\text{ord}_{(p,q)}\Delta > \frac{pq-p-q}{2}$, de (2.23) se tendría que $GSV(\mathcal{F}, C_1) = \frac{pq}{4}$. De manera similar resulta que $GSV(\mathcal{F}, C_2) = \frac{pq}{4}$. Haciendo uso de (2.22) y reemplazando en (2.21) se tiene que $GSV(\mathcal{F}, \mathcal{C}) = 0$, lo que es equivalente a que $\omega_{p,q,\Delta}$ sea de tipo curva generalizada cuando $d = 2$.

Para $d = 3 = \text{mcd}(p, q)$, se tiene

$$GSV(\mathcal{F}, C_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial C_1} \frac{d(\frac{hf_2f_3}{g})}{\frac{hf_2f_3}{g}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial C_1} \frac{d(\frac{h}{g})}{\frac{h}{g}} + (f_1, f_2)_0 + (f_1, f_3)_0,$$

de manera similar

$$GSV(\mathcal{F}, \mathcal{C}_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{C}_2} \frac{d(\frac{h}{g})}{\frac{h}{g}} + (f_2, f_1)_0 + (f_2, f_3)_0,$$

$$GSV(\mathcal{F}, \mathcal{C}_3) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{C}_3} \frac{d(\frac{h}{g})}{\frac{h}{g}} + (f_3, f_1)_0 + (f_3, f_2)_0,$$

de donde resulta que

$$GSV(\mathcal{F}, \mathcal{C}) = GSV(\mathcal{F}, \mathcal{C}_1) + GSV(\mathcal{F}, \mathcal{C}_2) + GSV(\mathcal{F}, \mathcal{C}_3) - 2(f_1, f_2)_0 - 2(f_1, f_3)_0 - 2(f_2, f_3)_0. \quad (2.24)$$

Consideremos $y^p - x^q = \prod_{i=1}^3 (y^{\frac{p}{3}} - \zeta^i x^{\frac{q}{3}})$, con $\zeta^3 = 1$, $\mathcal{C}_i : f_i(x, y) = (y^{\frac{p}{3}} - \zeta^i x^{\frac{q}{3}})$ y $\gamma_i(t) = (t^{\frac{p}{3}}, A_i t^{\frac{q}{3}})$ con $A_i^{\frac{p}{3}} = \zeta^i$ una parametrización de \mathcal{C}_i . Además

$$\begin{aligned} (f_1, f_2) &= \text{ord}_t(f_1(\gamma_2(t))) = \text{ord}_t(f_1(t^{\frac{p}{3}}, A_2 t^{\frac{q}{3}})) \\ &= \text{ord}_t(A_2^{\frac{p}{3}} t^{\frac{pq}{9}} - \zeta t^{\frac{pq}{9}}) = \text{ord}_t(t^{\frac{pq}{9}}(1 - \zeta)) = \frac{pq}{9}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} GSV(\mathcal{F}, \mathcal{C}_1) &= \text{ord}_t \left(\frac{(py^{p-1} + px\Delta(x, y))(y^{\frac{p}{3}} - \zeta^2 x^{\frac{q}{3}})(y^{\frac{p}{3}} - x^{\frac{q}{3}})}{py^{p-1}} (t^{\frac{p}{3}}, A_1 t^{\frac{q}{3}}) \right) \\ &= \text{ord}_t \left(\left(1 + \frac{x\Delta(x, y)}{y^{p-1}} \right) (y^{\frac{p}{3}} - \zeta^2 x^{\frac{q}{3}})(y^{\frac{p}{3}} - x^{\frac{q}{3}}) (t^{\frac{p}{3}}, A_1 t^{\frac{q}{3}}) \right) \\ &= \text{ord}_t \left(t^{\frac{2pq}{9}} (A_1^{\frac{p}{3}} - \zeta^2) (A_1^{\frac{p}{3}} - 1) + \frac{(A_1^{\frac{p}{3}} - \zeta^2)(A_1^{\frac{p}{3}} - 1)}{A_1^{p-1}} \Delta(t^{\frac{p}{3}}, A_1 t^{\frac{q}{3}}) t^{\frac{p}{3} + \frac{q}{3} - \frac{pq}{9}} \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Si consideramos $\text{ord}_{(p,q)} \Delta > \frac{pq-p-q}{3}$, de (2.26) se tendría que $GSV(\mathcal{F}, \mathcal{C}_1) = \frac{2pq}{9}$. Análogamente $GSV(\mathcal{F}, \mathcal{C}_2) = GSV(\mathcal{F}, \mathcal{C}_3) = \frac{2pq}{9}$. Haciendo uso de (2.25) y reemplazando en (2.24) se tiene que $GSV(\mathcal{F}, \mathcal{C}) = 0$, lo que es equivalente a que $\omega_{p,q,\Delta}$ sea de tipo curva generalizada cuando $d = 3$.

En general, cuando $\mathcal{C} : f = f_1 \cdots f_d$, se tiene

$$GSV(\mathcal{F}, \mathcal{C}) = \sum_{i=1}^d GSV(\mathcal{F}, \mathcal{C}_i) - 2 \sum_{\substack{i \neq j \\ i=1}}^N (f_i, f_j), \quad (2.27)$$

donde $N = \binom{d}{2}$, $GSV(\mathcal{F}, \mathcal{C}_i) = \frac{(d-1)pq}{d^2}$, $(f_i, f_j) = \frac{pq}{d^2}$. Por tanto, de (2.27) se tiene

$$GSV(\mathcal{F}, \mathcal{C}) = 0, \quad (2.28)$$

de donde se obtiene la siguiente proposición.

Proposición 2.4.16. Sean $\mathcal{F}_{p,q,\Delta}$ no dicrítica y $\text{ord}_{(p,q)} \Delta > \frac{pq-p-q}{d}$, entonces $\mathcal{F}_{p,q,\Delta}$ es de tipo curva generalizada.

Curvas polares de una foliación respecto a las raíces aproximadas características de su separatriz

El teorema de descomposición de la polar de una curva plana irreducible respecto a $x = 0$ es un trabajo realizado por Merle [Mer]. Lo interesante de dicha descomposición es que solo depende del tipo topológico de la curva irreducible $f(x, y)$. El resultado de Merle ha sido extendido a foliaciones por Rouillé en su tesis doctoral. La curva polar de una curva con varias ramas fue estudiada por García Barroso [GB] y extendida al caso de foliaciones por Corral [Co1]. En 2013, García Barroso y Gwoździwicz [GB-G1], generalizan el resultado de Merle para morfismos (g, f) siendo g una raíz aproximada de la curva irreducible dada por $f(x, y) = 0$. En este capítulo se estudia la curva de contacto entre una foliación con separatriz aislada y una foliación hamiltoniana dada por una raíz aproximada de la separatriz, de esta forma generalizaremos los resultados de P. Rouillé [R2]. Para ello estudiaremos el polígono de Newton de una 1-forma holomorfa, con la finalidad de calcular el orden de contacto entre la separatriz de una foliación curva generalizada no dicrítica y sus curvas polares respecto a las raíces aproximadas características de su separatriz, obteniendo la descomposición de la curva contacto, de esta manera se generaliza a foliaciones los resultados de [GB-G1].

3.1. Propiedades de la imagen inversa de una foliación

Consideremos la rama analítica $\mathcal{C}_f : f = 0$ con exponentes característicos $(\beta_0, \dots, \beta_g)$, y $n_i = \frac{\text{mcd}(\beta_0, \dots, \beta_{i-1})}{\text{mcd}(\beta_0, \dots, \beta_i)}$. Sea $l \in \{1, \dots, g\}$ y recordemos (ver (1.28)) que definimos la

aplicación $F_l : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ como

$$F_l(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}^{n_1 n_2 \cdots n_{l-1}}, \bar{y} + \bar{T}_l(\bar{x})), \quad (3.1)$$

donde $\bar{T}_l(\bar{x}) := T_{\frac{\beta_l}{\beta_0}}(y_{\mathcal{C}}(\bar{x}^{n_1 n_2 \cdots n_{l-1}}))$ es dada a partir de la ecuación (1.5).

Dada una foliación $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$, la imagen inversa de ω con respecto a F_l (ver Página 47) es

$$F_l^*(\omega) := A^*(\bar{x}, \bar{y})d(\bar{x}^{n_1 \cdots n_{l-1}}) + B^*(\bar{x}, \bar{y})d(\bar{y} + \bar{T}_l(\bar{x})), \quad (3.2)$$

donde $A^* := F_l^*(A) = (A \circ F_l)$ y $B^* := F_l^*(B) = (B \circ F_l)$.

Lema 3.1.1. [R2, Lemme 4.2] La imagen inversa de la foliación $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ con respecto a F_l es

$$F_l^*(\omega) = \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{y})d\bar{x} + \mathcal{B}(\bar{x}, \bar{y})d\bar{y},$$

donde $\mathcal{A}(\bar{x}, \bar{y}) = (n_1 \cdots n_{l-1} \bar{x}^{n_1 \cdots n_{l-1}-1} A^*(\bar{x}, \bar{y}) + B^*(\bar{x}, \bar{y}) \bar{T}'_l(\bar{x}))$ y $\mathcal{B}(\bar{x}, \bar{y}) = B^*(\bar{x}, \bar{y})$.

Demostración. De (3.2) tenemos

$$\begin{aligned} F_l^*(\omega) &= A^*(\bar{x}, \bar{y})d(\bar{x}^{n_1 \cdots n_{l-1}}) + B^*(\bar{x}, \bar{y})d(\bar{y} + \bar{T}_l(\bar{x})) \\ &= n_1 \cdots n_{l-1} A^*(\bar{x}, \bar{y}) \bar{x}^{n_1 \cdots n_{l-1}-1} d\bar{x} + B^*(\bar{x}, \bar{y}) (d\bar{y} + \bar{T}'_l(\bar{x}) d\bar{x}) \\ &= (n_1 \cdots n_{l-1} \bar{x}^{n_1 \cdots n_{l-1}-1} A^*(\bar{x}, \bar{y}) + B^*(\bar{x}, \bar{y}) \bar{T}'_l(\bar{x})) d\bar{x} + B^*(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}, \end{aligned}$$

donde $\bar{T}'_l(\bar{x})$ es la derivada de $\bar{T}_l(\bar{x})$ respecto de \bar{x} . Tomando

$\mathcal{A}(\bar{x}, \bar{y}) := (n_1 \cdots n_{l-1} \bar{x}^{n_1 \cdots n_{l-1}-1} A^*(\bar{x}, \bar{y}) + B^*(\bar{x}, \bar{y}) \bar{T}'_l(\bar{x}))$ y $\mathcal{B}(\bar{x}, \bar{y}) := B^*(\bar{x}, \bar{y})$ concluimos el lema. \square

Lema 3.1.2. [Do, Proposition 5] Sea $g(x, y) = \sum_{ij} a_{ij} x^i y^j \in \mathbb{C}\{x, y\}$, entonces

$$d(F_l^*(g)) = F_l^*(dg).$$

Lema 3.1.3. Sea $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ una foliación curva generalizada que tiene como ecuación reducida de su unión de separatrices a $\mathcal{C}_h : h = 0$ y $x = 0$ no está en el cono tangente de $h = 0$. Entonces la foliación $F_l^*(\omega)$ tiene como unión de separatrices a la curva $F_l^*(h) = 0$.

Demostración. Como $h = 0$ es la unión de separatrices de ω , por definición tenemos que $dh \wedge \omega = h \cdot \eta_1$, donde $\eta_1 = g(x, y)dx \wedge dy$ es una 2- forma, para cierta $g(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$. En particular $(Bh_x - Ah_y)dx \wedge dy = dh \wedge \omega = h \cdot \eta_1 = h \cdot g dx \wedge dy$ y tenemos que

$$Bh_x - Ah_y = h \cdot g. \quad (3.3)$$

De los Lemas 3.1.2 y 3.1.1 se tiene que

$$\begin{aligned} d(F_l^*(h)) &= F_l^*(dh) \\ &= \left(n_1 \cdots n_{l-1} \bar{x}^{n_1 \cdots n_{l-1}-1} (h_x)^*(\bar{x}, \bar{y}) + (h_y)^*(\bar{x}, \bar{y}) \bar{T}_l'(\bar{x}) \right) d\bar{x} + (h_y)^*(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Usando (3.4), Lema 3.1.1, la definición de imagen inversa de una serie con respecto a F_l^* (ver Página 47) y (3.3) tenemos

$$\begin{aligned} d(F_l^*(h)) \wedge F_l^*(\omega) &= F_l^*(dh) \wedge F_l^*(\omega) \\ &= n_1 \cdots n_{l-1} \bar{x}^{n_1 \cdots n_{l-1}-1} F_l^*(Bh_x - Ah_y) d\bar{x} \wedge d\bar{y} \\ &= n_1 \cdots n_{l-1} \bar{x}^{n_1 \cdots n_{l-1}-1} F_l^*(h.g) d\bar{x} \wedge d\bar{y} \\ &= F_l^*(h)\eta_2, \end{aligned} \quad (3.5)$$

para $\eta_2 = n_1 \cdots n_{l-1} \bar{x}^{n_1 \cdots n_{l-1}-1} F_l^*(g) d\bar{x} \wedge d\bar{y}$. Afirmamos que $F_l^*(h) = 0$ es la unión de separatrices de $F_l^*(\omega)$, pues de lo contrario se tendría que $\mathcal{S} = \mathcal{C}_{g_1} \cup \mathcal{C}_{F_l^*(h)}$ es la unión de separatrices de $F_l^*(\omega)$, para cierto $g_1 \in \mathbb{C}\{x, y\}$. Dado que F_l es una aplicación propia, usando [Gu-Ro, Theorem Pag. 162] se tiene que $F_l(\mathcal{S} \setminus \{0\})$ es un conjunto analítico de ω en $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Usando el Teorema de Remmert-Stein [Gu-Ro][Theorem Pag. 169] se concluye que $\mathcal{C}_{F_l(g_1)} \cup \mathcal{C}_h$ es la unión de separatrices de ω lo cual es una contradicción y concluimos el lema. \square

El siguiente lema generaliza [R2, Lemme 3.9].

Lema 3.1.4. *Sea $\mathcal{F} : \omega = 0$ una foliación curva generalizada cuya ecuación reducida de su unión de separatrices es $f = 0$. Si $x = 0$ no está en el cono tangente de $f = 0$, entonces $F_l^*(\omega)$ es foliación curva generalizada.*

Demostración. Del Teorema 1.2.27 sabemos que $\mu(\omega) = \mu(df)$. Usando ese mismo teorema y el Lema 3.1.3 bastará demostrar que $\mu(F_l^*(\omega)) = \mu(F_l^*(df))$, para concluir el lema. Del Lema 3.1.1 tenemos

$$F_l^*(df) = \left(n_1 \cdots n_{l-1} \bar{x}^{n_1 \cdots n_{l-1}-1} (f_x)^*(\bar{x}, \bar{y}) + (f_y)^*(\bar{x}, \bar{y}) \bar{T}_l'(\bar{x}) \right) d\bar{x} + (f_y)^*(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}.$$

Aplicando la definición del número de Milnor de una foliación y los apartados quinto y tercero del Teorema 1.1.38 se tiene

$$\begin{aligned} \mu(F_l^*(df)) &= \left(n_1 \cdots n_{l-1} \bar{x}^{n_1 \cdots n_{l-1}-1} (f_x)^*(\bar{x}, \bar{y}) + (f_y)^*(\bar{x}, \bar{y}) \bar{T}_l'(\bar{x}), (f_y)^*(\bar{x}, \bar{y}) \right)_0 \\ &= \left(n_1 \cdots n_{l-1} \bar{x}^{n_1 \cdots n_{l-1}-1} (f_x)^*(\bar{x}, \bar{y}), (f_y)^*(\bar{x}, \bar{y}) \right)_0 \\ &= (n_1 \cdots n_{l-1} - 1) \left(\bar{x}, (f_y)^*(\bar{x}, \bar{y}) \right)_0 + \left((f_x)^*(\bar{x}, \bar{y}), (f_y)^*(\bar{x}, \bar{y}) \right)_0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Como $x = 0$ no está en el cono tangente de df , entonces x no divide a la forma inicial de f_y , así obtenemos $\text{ord}_y(f_y(0, y)) = \text{ord}_y(f_y(x, y))$. De la Observación 1.1.12 se puede concluir que $\text{mult}(df) = \text{ord}_y(f_y(x, y))$ y,

$$\left(\bar{x}, (f_y)^*(\bar{x}, \bar{y}) \right)_0 = \text{ord}_{\bar{y}}(f_y)^*(0, \bar{y}) = \text{ord}_{\bar{y}} f_y(0, \bar{y}) = \text{ord}_y f_y(0, y) = \text{mult}(df), \quad (3.7)$$

donde $(f_y)^* = F_l^*(f_y)$ (imagen inversa de f_y con respecto a F_l). Además aplicando la Proposición 1.1.40 tenemos

$$\left((f_x)^*(\bar{x}, \bar{y}), (f_y)^*(\bar{x}, \bar{y}) \right)_0 = (n_1 \cdots n_{l-1}) \left(f_x, f_y \right)_0 = (n_1 \cdots n_{l-1}) \mu(df). \quad (3.8)$$

Reemplazando (3.7) y (3.8) en (3.6), resulta

$$\mu(F_l^*(df)) = (n_1 \cdots n_{l-1} - 1) \text{mult}(df) + (n_1 \cdots n_{l-1}) \mu(df). \quad (3.9)$$

De manera similar

$$F_l^* \omega = \left(n_1 \cdots n_{l-1} \bar{x}^{n_1 \cdots n_{l-1} - 1} A^*(\bar{x}, \bar{y}) + B^*(\bar{x}, \bar{y}) \bar{T}'_l(\bar{x}) \right) d\bar{x} + B^*(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y},$$

de donde

$$\begin{aligned} \mu(F_l^* \omega) &= \left(n_1 \cdots n_{l-1} \bar{x}^{n_1 \cdots n_{l-1} - 1} A^*(\bar{x}, \bar{y}) + B^*(\bar{x}, \bar{y}) \bar{T}'_l(\bar{x}), B^*(\bar{x}, \bar{y}) \right)_0 \\ &= \left(n_1 \cdots n_{l-1} \bar{x}^{n_1 \cdots n_{l-1} - 1} A^*(\bar{x}, \bar{y}), B^*(\bar{x}, \bar{y}) \right)_0 \\ &= (n_1 \cdots n_{l-1} - 1) \left(\bar{x}, B^*(\bar{x}, \bar{y}) \right)_0 + \left(A^*(\bar{x}, \bar{y}), B^*(\bar{x}, \bar{y}) \right)_0 \\ &= (n_1 \cdots n_{l-1} - 1) \text{mult}(\omega) + (n_1 \cdots n_{l-1}) \mu(\omega). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dado que ω es curva generalizada, tenemos que $\text{mult}(\omega) = \text{mult}(df)$ y $\mu(\omega) = \mu(df)$. De (3.9) y (3.10) concluimos el lema. \square

Rouillé demostró el Lema 3.1.4 en el caso particular de $\bar{T}'_l(\bar{x}) = 0$. El siguiente lema completa [R2, Lemme 4.3].

Lema 3.1.5. *El polígono $\mathcal{N}(F_l^*(\omega))$ tiene un lado compacto de inclinación $\frac{m_l}{n_l}$ y altura e_{l-1} . Además dicho lado es el de mayor inclinación de $\mathcal{N}(F_l^*(\omega))$ entre todos los lados compactos y este es el lado principal.*

Demostración. Supondremos sin pérdida de generalidad que $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ es el polinomio de Weierstrass asociado a la unión de separatrices de ω . Usando el Lema 1.2.39 se tiene que el polígono $\mathcal{N}(F_l^* \omega)$ tiene un lado compacto de inclinación $\frac{m_l}{n_l}$ y este es su lado principal. Probaremos que la altura de dicho lado compacto de inclinación $\frac{m_l}{n_l}$ es e_{l-1} . La idea para mostrar el lema es hacer uso de Observaciones 1.2.42, para ello hallaremos la

altura de $\mathcal{N}(F_l^* f)$, donde $\mathcal{C}_f : f = 0$ es la separatriz irreducible de la foliación $\mathcal{F} : \omega = 0$. Expresemos $f(x, y) = \prod_{i=1}^n (y - y_i(x))$, donde $y_i(x)$ son las raíces de f . Fijemos el exponente característico $\frac{\beta_l}{\beta_0}$ y consideremos la aplicación $F_l(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}^{n_1 \cdots n_{l-1}}, \bar{y} + \bar{T}_l(\bar{x}))$, donde $\bar{T}_l(\bar{x}) = T_l(\bar{x}^{n_1 \cdots n_{l-1}})$. Sea

$$F_l^* f(\bar{x}, \bar{y}) = \prod_{i=1}^n (\bar{y} - (\bar{y}_i(\bar{x}) - \bar{T}_l(\bar{x}))), \quad (3.11)$$

donde $\bar{y}_i(\bar{x}) = y_i(\bar{x}^{n_1 \cdots n_{l-1}})$. Recordemos que de la Observación 1.1.45 y el Lema 1.1.29 tenemos

$$\text{ord}(y_C(x) - T_l(x)) = \frac{\beta_l}{\beta_0} \text{ y } \text{ord}(y_i(x) - y_C(x)) = \frac{\beta_s}{n}, \text{ para cierto } s \in \{1, \dots, g\}. \quad (3.12)$$

Para $s < l$, usando desigualdad triangular, se obtiene $\text{ord}(y_i(x) - T_l(x)) = \frac{\beta_s}{n}$. Si consideramos $s = l$, tenemos $\text{ord}(y_C(x) - T_l(x)) = \text{ord}(y_i(x) - y_C(x)) = \frac{\beta_l}{n}$, aplicando desigualdad triangular se consigue $\text{ord}(y_i(x) - T_l(x)) = \frac{\beta_l}{n}$ pues los coeficientes que acompañan al término $x^{\frac{\beta_l}{n}}$ en las series y_i y y_C son distintos. Para $s > l$, tenemos $\text{ord}(y_C(x) - T_l(x)) = \frac{\beta_l}{n} < \frac{\beta_s}{n} = \text{ord}(y_i(x) - y_C(x))$, y aplicando desigualdad triangular se tiene $\text{ord}(y_i(x) - T_l(x)) = \frac{\beta_l}{n}$.

Por tanto, tenemos $\text{ord}(y_i(x) - T_l(x)) \leq \frac{\beta_l}{n}$ de donde

$$\text{ord}(\bar{y}_i(\bar{x}) - \bar{T}_l(\bar{x})) \leq \frac{m_l}{n_l}. \quad (3.13)$$

Estamos interesados en hallar,

$$\sharp \left\{ \bar{y}_i(\bar{x}) : \text{ord}(\bar{y}_i(\bar{x}) - \bar{T}_l(\bar{x})) < \frac{m_l}{n_l} \right\}. \quad (3.14)$$

Para dar respuesta a (3.14), nos apoyaremos en las propiedades de una curva analítica irreducible.

Consideremos

$$A := \left\{ \bar{y}_i(\bar{x}) : \text{ord}(\bar{y}_i(\bar{x}) - \bar{T}_l(\bar{x})) < \frac{m_l}{n_l} \right\},$$

y

$$B := \left\{ y_j(x) : \text{ord}(y_C(x) - y_j(x)) < \frac{\beta_l}{n} \right\},$$

donde $y_C(x)$ es la raíz fijada de \mathcal{C}_f tal que $\text{ord}(y_C(x) - T_l(x)) = \frac{\beta_l}{n}$.

Mostraremos que $\sharp A = \sharp B$. En efecto, sea $y_j(x) \in B$, así $\text{ord}(y_C(x) - y_j(x)) < \frac{\beta_l}{n}$, de donde $\text{ord}(\bar{y}_C(\bar{x}) - \bar{y}_j(\bar{x})) < \frac{m_l}{n_l}$. Además $\text{ord}(\bar{y}_C(\bar{x}) - \bar{T}_l(\bar{x})) = \frac{m_l}{n_l}$, usando desigualdad

triangular se obtiene que $\text{ord}(\overline{y}_j(\overline{x}) - \overline{T}_l(\overline{x})) < \frac{m_l}{n_l}$, así $\overline{y}_j(\overline{x}) \in A$. Hemos mostrado que para cada $y_j(x) \in B$ existe $\overline{y}_j(\overline{x}) \in A$, por tanto $\sharp B \leq \sharp A$. De manera similar, sea $\overline{y}_j(\overline{x}) \in A$, así $\text{ord}(\overline{y}_j(\overline{x}) - \overline{T}_l(\overline{x})) < \frac{m_l}{n_l}$, de donde $\text{ord}(y_j(x) - T_l(x)) < \frac{\beta_l}{n}$. Además $\text{ord}(y_C(x) - T_l(x)) = \frac{\beta_l}{n}$, usando desigualdad triangular se obtiene que $\text{ord}(y_C(x) - y_j(x)) < \frac{\beta_l}{n}$, por tanto $y_j(x) \in B$, lo que muestra que $\sharp A \leq \sharp B$.

Se tiene

$$\sharp B = \sum_{i=1}^{l-1} \sharp \left\{ y_j(x) : \text{ord}(y_j(x) - y_C(x)) = \frac{\beta_i}{\beta_0} \right\}$$

y de la Propiedad 1.1.31 concluimos que $\sharp A = \sharp B = e_0 - e_{l-1}$. Además el número de raíces de $F_l^*(f)$ es $n = e_0$, así que el número de raíces que tienen orden mayor o igual a $\frac{m_l}{n_l}$ es e_{l-1} .

Notemos que e_{l-1} es la altura del lado compacto del polígono $\mathcal{N}(F_l^*(f))$ que tiene inclinación $\frac{m_l}{n_l}$. Como $F_l^*(f)$ es la unión de separatrices de la foliación curva generalizada $F_l^*\omega$, y usando Proposición 1.2.40, se obtiene que $\mathcal{N}(F_l^*f) = \mathcal{N}(F_l^*\omega)$ de donde concluimos que la altura del lado compacto de $\mathcal{N}(F_l^*\omega)$ con inclinación $\frac{m_l}{n_l}$ es también e_{l-1} . □

En [R2, Lemme 4.3] Rouillé afirma que el lado de mayor inclinación de $\mathcal{N}(F_l^*(\omega))$ es lado principal y determina explícitamente su inclinación, sin embargo no determina su altura.

3.2. Formas iniciales pesadas

Sean \mathcal{F} y \mathcal{G} foliaciones singulares definidas por las 1-formas $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ y $\eta = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ respectivamente. Estamos interesados en describir la curva dada por el contacto entre estas dos foliaciones, esto es, la curva definida por $\omega \wedge \eta$, que admite la ecuación

$$A(x, y)Q(x, y) - B(x, y)P(x, y) = 0.$$

Un caso particular es la curva polar $P_{(a:b)}^{\mathcal{F}}$ introducida en la Sección 2.2.

Usando las notaciones dadas en la Subsección 1.2.4, probaremos el siguiente lema.

Lema 3.2.1. *Si $\nu \in \mathbb{Q}^+$ y $\text{In}_\nu(\omega) \wedge \text{In}_\nu(\eta) \neq 0$, entonces $\text{In}_\nu(\omega \wedge \eta) = \text{In}_\nu(\omega) \wedge \text{In}_\nu(\eta)$. Además $\text{ord}_\nu(\text{In}_\nu(\omega \wedge \eta)) = \text{ord}_\nu(\text{In}_\nu(\omega)) + \text{ord}_\nu(\text{In}_\nu(\eta)) - 1 - \nu$.*

Demostración. Consideremos $\omega = \sum_{ij} \omega_{ij}$, $\eta = \sum_{rs} \eta_{rs}$ donde

$$\begin{aligned} \omega_{ij} &= A_{ij}x^{i-1}y^j dx + B_{ij}x^i y^{j-1} dy, \quad y \\ \eta_{rs} &= P_{rs}x^{r-1}y^s dx + Q_{rs}x^r y^{s-1} dy, \end{aligned}$$

donde $i, j, r, s \in \mathbb{N}$ y $A_{ij}, B_{ij}, P_{rs}, Q_{rs} \in \mathbb{C}$. Tenemos

$$\begin{aligned}\omega_{ij} \wedge \eta_{rs} &= (A_{ij}x^{i-1}y^j Q_{rs}x^r y^{s-1} - B_{ij}x^i y^{j-1} P_{rs}x^{r-1}y^s) dx \wedge dy \\ &= (A_{ij}Q_{rs} - B_{ij}P_{rs})x^{i+r-1}y^{j+s-1}dx \wedge dy.\end{aligned}$$

Si $A_{ij}Q_{rs} - B_{ij}P_{rs} \neq 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}\text{ord}_\nu(\omega_{ij} \wedge \eta_{rs}) &= (i+r-1) + \nu(j+s-1) \\ &= (i+\nu j) + (r+\nu s) - 1 - \nu \\ &= \text{ord}_\nu(\omega_{ij}) + \text{ord}_\nu(\eta_{rs}) - 1 - \nu.\end{aligned}$$

De (1.23) se tiene $\text{In}_\nu(\omega) = \sum_{i+\nu j=\text{ord}_\nu(\omega)} \omega_{ij}$ y de manera similar $\text{In}_\nu(\eta) = \sum_{r+\nu s=\text{ord}_\nu(\eta)} \eta_{rs}$

es la suma de 1-formas que tienen el mismo ν -orden pesado. Como $\text{In}_\nu(\omega) \wedge \text{In}_\nu(\eta) \neq 0$, entonces

$$\text{In}_\nu(\omega \wedge \eta) = (\text{In}_\nu(\omega) \wedge \text{In}_\nu(\eta)),$$

de donde observamos que

$$\text{ord}_\nu(\text{In}_\nu(\omega \wedge \eta)) = \text{ord}_\nu(\text{In}_\nu \omega) + \text{ord}_\nu(\text{In}_\nu \eta) - 1 - \nu.$$

□

Consideremos una foliación $\mathcal{F} : \omega = 0$ curva generalizada que tiene una única separatriz $\mathcal{C} : f = 0$ y que además es irreducible. Del Corolario 1.2.28 tenemos que $\mathcal{G} : d(f^{(k)}) = 0$ es foliación curva generalizada. Además $\mathcal{G} : d(f^{(k)}) = 0$ tiene a $f^{(k)} = 0$ como única separatriz siendo $f^{(k)}$ la k -ésima raíz aproximada característica de f con $0 \leq k \leq g-1$ (ver Definición 1.1.49).

El siguiente ejemplo nos indica que no siempre podemos aplicar el Lema 3.2.1.

Ejemplo 3.2.2. Sea la curva $\mathcal{C}_f : f = (y^2 - x^3)^2 - x^6y$ con exponentes característicos $(4, 6, 9)$ y raíces aproximadas $f^{(0)} = y$ y $f^{(1)} = y^2 - x^3$. La foliación curva generalizada dada por

$$\begin{aligned}\omega &= (-x^7y + x^7 - 6x^5y - 2x^4y^2 + 6x^5 + xy^4 - 6x^2y^2)dx \\ &\quad + (-x^6y^2 + x^6y - x^6 - 2x^3y^3 + y^5 - 4x^3y + 4y^3)dy,\end{aligned}$$

tiene a la curva \mathcal{C}_f como única separatriz. Además $df^{(0)} = dy$, $df^{(1)} = -3x^2dx + 2ydy$.

Para $\frac{\beta_2}{\beta_0} = \frac{9}{4}$, tenemos

$$\text{In}_{\frac{9}{4}}(\omega) = 6x^5dx, \quad \text{In}_{\frac{9}{4}}(df^{(0)}) = dy \quad \text{y} \quad \text{In}_{\frac{9}{4}}(df^{(1)}) = -3x^2dx,$$

así

$$\text{In}_{\frac{9}{4}}(\omega) \wedge \text{In}_{\frac{9}{4}}(df^{(0)}) = 6x^5dx \wedge dy,$$

pero

$$\operatorname{In}_{\frac{9}{4}}(\omega) \wedge \operatorname{In}_{\frac{9}{4}}(df^{(1)}) = 0.$$

En este último caso no podemos aplicar el Lema 3.2.1. Sin embargo podemos aplicarlo, por ejemplo, a sus respectivas imágenes inversas con respecto a $F_2(\bar{x}, \bar{y}) := (\bar{x}^2, \bar{y} + \bar{x}^3)$ y a $\nu = \frac{\beta_2}{e_1} = \frac{9}{2}$ puesto que

$$\begin{aligned} F_2^*(\omega) &= (8\bar{x}^9\bar{y}^2 + 2\bar{x}^3\bar{y}^4 + 3\bar{x}^2\bar{y}^5 + 8\bar{x}^6\bar{y}^3 + 12\bar{x}^{11}\bar{y}^2 - 12\bar{x}^{11}\bar{y} - 2\bar{x}^{15}\bar{y} - 2\bar{x}^{18} - 15\bar{x}^{14} \\ &+ 24\bar{x}^5\bar{y}^2 - 30\bar{x}^{20} - 3\bar{x}^{14}\bar{y}^2 + 15\bar{x}^5\bar{y}^4 - 6\bar{x}^{17}\bar{y} + 12\bar{x}^2\bar{y}^3 + 24\bar{x}^8\bar{y}^3)d\bar{x} \\ &+ (-\bar{x}^{12}\bar{y}^2 - 2\bar{x}^{15}\bar{y} - \bar{x}^{18} - \bar{x}^{12} + 8\bar{x}^6\bar{y}^3 + 4\bar{x}^9\bar{y}^2 + \bar{y}^5 + 5\bar{x}^3\bar{y}^4 + 8\bar{x}^6\bar{y} + 4\bar{y}^3 \\ &+ 12\bar{x}^3\bar{y}^2)d\bar{y}. \end{aligned}$$

Además $F_2^*(df^{(0)}) = 3\bar{x}^2d\bar{x} + d\bar{y}$ y $F_2^*(df^{(1)}) = 6\bar{x}^2\bar{y}d\bar{x} + 2(\bar{y} + \bar{x}^3)d\bar{y}$, de donde

$$\begin{aligned} \operatorname{In}_{\nu}(F_2^*(\omega)) &= (-15\bar{x}^{14} + 24\bar{x}^5\bar{y}^2)d\bar{x} + 8\bar{x}^6\bar{y}d\bar{y}, \\ \operatorname{In}_{\nu}(F_2^*(df^{(0)})) &= 3\bar{x}^2d\bar{x}, \\ \operatorname{In}_{\nu}(F_2^*(df^{(1)})) &= 6\bar{x}^2\bar{y}d\bar{x} + 2\bar{x}^3d\bar{y}. \end{aligned}$$

Luego

$$\operatorname{In}_{\nu}(F_2^*(\omega)) \wedge \operatorname{In}_{\nu}(F_2^*(df^{(0)})) = -48\bar{x}^8\bar{y}d\bar{x} \wedge d\bar{y}$$

y

$$\operatorname{In}_{\nu}(F_2^*(\omega)) \wedge \operatorname{In}_{\nu}(F_2^*(df^{(1)})) = -30\bar{x}^{17}d\bar{x} \wedge d\bar{y}.$$

Por tanto aunque no pudimos aplicar el Lema 3.2.1 a las foliaciones ω y $df^{(1)}$, si lo hemos podido aplicar a sus imágenes inversas con respecto a F_2 . Tendremos esto presente en el resto del capítulo.

3.3. Resultados preliminares sobre polares

Consideremos la rama analítica $\mathcal{C}_f : f = 0$ con exponentes característicos $(\beta_0, \dots, \beta_g)$. Recordemos que $n_i = \frac{\operatorname{mcd}(\beta_0, \dots, \beta_{i-1})}{\operatorname{mcd}(\beta_0, \dots, \beta_i)}$. Podemos considerar, sin pérdida de generalidad, que f es un polinomio de Weierstrass. Sea $f^{(k)}$ la k -ésima raíz aproximada característica de f , donde $0 \leq k \leq g - 1$.

Sea ω una foliación curva generalizada que tiene como única separatriz irreducible a \mathcal{C}_f . Definimos la *curva polar de ω con respecto a la raíz aproximada característica $f^{(k)}$* como la curva de ecuación

$$\mathcal{P}_{\omega}^{(k)}(x, y) := A(x, y)f_y^{(k)}(x, y) - B(x, y)f_x^{(k)}(x, y) = 0. \quad (3.15)$$

Según (1.26) la *imagen inversa de la polar* de ω respecto de $f^{(k)}$ es

$$F_l^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right) (\bar{x}, \bar{y}) = A^*(\bar{x}, \bar{y}) \left(f_y^{(k)} \right)^* (\bar{x}, \bar{y}) - B^*(\bar{x}, \bar{y}) \left(f_x^{(k)} \right)^* (\bar{x}, \bar{y}), \quad (3.16)$$

donde $l \in \{1, \dots, g\}$.

Proposición 3.3.1. Sean las foliaciones curvas generalizadas $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ y $d(f^{(k)}) = f_x^{(k)}dx + f_y^{(k)}dy$ que tienen a $f = 0$ y $f^{(k)} = 0$ como separatrices respectivamente, entonces

$$F_l^*(\omega) \wedge F_l^*(df^{(k)}) = n_1 \cdots n_{l-1} \bar{x}^{n_1 n_2 \cdots n_{l-1} - 1} \left(F_l^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right) \right) d\bar{x} \wedge d\bar{y},$$

donde $l \in \{1, \dots, g\}$.

Demostración. Aplicando el Lema 3.1.1 a las foliaciones ω y $df^{(k)}$ respectivamente, tenemos $F_l^*(\omega) = \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{y})d\bar{x} + \mathcal{B}(\bar{x}, \bar{y})d\bar{y}$ y $F_l^*(df^{(k)}) = \mathcal{C}(\bar{x}, \bar{y})d\bar{x} + \mathcal{D}(\bar{x}, \bar{y})d\bar{y}$, donde

$$\mathcal{C}(\bar{x}, \bar{y}) = \left(n_1 \cdots n_{l-1} \bar{x}^{n_1 \cdots n_{l-1} - 1} \left(f_x^{(k)} \right)^* (\bar{x}, \bar{y}) + \left(f_y^{(k)} \right)^* (\bar{x}, \bar{y}) \bar{T}'_l(\bar{x}) \right)$$

y

$$\mathcal{D}(\bar{x}, \bar{y}) = \left(f_y^{(k)} \right)^* (\bar{x}, \bar{y}).$$

De esta manera

$$\begin{aligned} F_l^*(\omega) \wedge F_l^*(df^{(k)}) &= \left(n_1 \cdots n_{l-1} \bar{x}^{n_1 \cdots n_{l-1} - 1} A^* + B^* \bar{T}'_l \right) \left(f_y^{(k)} \right)^* \\ &\quad - \left(n_1 \cdots n_{l-1} \bar{x}^{n_1 \cdots n_{l-1} - 1} \left(f_x^{(k)} \right)^* + \left(f_y^{(k)} \right)^* \bar{T}'_l \right) B^* d\bar{x} \wedge d\bar{y} \\ &= n_1 \cdots n_{l-1} \bar{x}^{n_1 n_2 \cdots n_{l-1} - 1} \left(A^* \left(f_y^{(k)} \right)^* - B^* \left(f_x^{(k)} \right)^* \right) d\bar{x} \wedge d\bar{y} \\ &= n_1 \cdots n_{l-1} \bar{x}^{n_1 n_2 \cdots n_{l-1} - 1} \left(F_l^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right) \right) d\bar{x} \wedge d\bar{y}. \end{aligned}$$

□

Sea $\nu = \frac{m_l}{n_l}$, con $l \in \{1, \dots, g\}$ donde $m_l = \frac{\beta_l}{e_l}$ y $n_l = \frac{e_{l-1}}{e_l}$. Estamos interesados en hallar $\text{In}_\nu \left(F_l^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right) \right)$. La estrategia será aplicar la Proposición 3.3.1. Para ello necesitamos conocer $\text{In}_\nu F_l^*(\omega)$ y $\text{In}_\nu \left(F_l^* \left(df^{(k)} \right) \right)$. Podemos escribir

$$\text{In}_\nu F_l^*(\omega) = \sum_{i+\nu j=c_l} \mathcal{A}_{ij} \bar{x}^{i-1} \bar{y}^j d\bar{x} + \sum_{i+\nu j=c_l} \mathcal{B}_{ij} \bar{x}^i \bar{y}^{j-1} d\bar{y}, \quad (3.17)$$

donde $c_l = \text{ord}_\nu(\text{In}_\nu F_l^*(\omega))$ y $\mathcal{A}_{ij}, \mathcal{B}_{ij} \in \mathbb{C}$. Denotaremos por \mathcal{L}_l la recta de apoyo del polígono de Newton de $F_l^*(\omega)$ de inclinación ν , es decir

$$\mathcal{L}_l : i + \nu j = c_l. \quad (3.18)$$

De otro lado para calcular $\text{In}_\nu(F_l^*(df^{(k)}))$, vamos a analizar qué sucede con $\text{In}_\nu(F_l^*(f^{(k)}))$ y luego aplicaremos los Lemas 1.2.34 y 3.1.2.

Recordemos que $\text{cont}(f, f^{(k)}) = \frac{\beta_{k+1}}{n}$ y que $\text{ord}_x(y_C(x) - \delta_1(x)) = \frac{\beta_{k+1}}{n}$ (ver igualdad (1.9)).

Estudiaremos primero el caso $k \geq 1$. Usando ecuación (1.7), podemos expresar

$$\begin{aligned} F_l^*(f^{(k)}) &= \prod_{j=1}^m (\bar{y} - (\bar{\delta}_j(\bar{x}) - \bar{T}_l(\bar{x}))) \\ &= (\bar{y} - (\bar{\delta}_1(\bar{x}) - \bar{T}_l(\bar{x}))) \prod_{i=1}^k \left(\prod_{\delta_j \in Z_i^{(k)}} (\bar{y} - (\bar{\delta}_j(\bar{x}) - \bar{T}_l(\bar{x}))) \right), \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde $\bar{\delta}_j(\bar{x}) = \delta_j(\bar{x}^{n_1 \cdots n_{l-1}})$, $Z_i^{(k)} = \left\{ \delta_j \in \text{Zer} f^{(k)} : \text{ord}_x(\delta_j(x) - y_C(x)) = \frac{\beta_i}{\beta_0} \right\}$ para $i \in \{1, \dots, k\}$ y $j \in \{2, \dots, m\}$.

Además de (1.10) tenemos

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_1(\bar{x}) &= a_{\beta_1} \bar{x}^{\frac{\beta_1}{n}(n_1 \cdots n_{l-1})} + \sum_{\substack{j \in (e_1) \\ \beta_1 < j < \beta_2}} a_j \bar{x}^{\frac{j}{n}(n_1 \cdots n_{l-1})} + \dots + a_{\beta_k} \bar{x}^{\frac{\beta_k}{n}(n_1 \cdots n_{l-1})} + \\ &+ \sum_{\substack{j \in (e_k) \\ \beta_k < j < \beta_{k+1}}} a_j \bar{x}^{\frac{j}{n}(n_1 \cdots n_{l-1})} + \sum_{j > \frac{\beta_{k+1}}{e_k}} b_j \bar{x}^{\frac{j e_k}{n}(n_1 \cdots n_{l-1})}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \bar{T}_l(\bar{x}) &= a_{\beta_1} \bar{x}^{\frac{\beta_1}{n}(n_1 \cdots n_{l-1})} + \sum_{\substack{j \in (e_1) \\ \beta_1 < j < \beta_2}} a_j \bar{x}^{\frac{j}{n}(n_1 \cdots n_{l-1})} + a_{\beta_2} \bar{x}^{\frac{\beta_2}{n}(n_1 \cdots n_{l-1})} + \dots + \\ &+ \sum_{\substack{j \in (e_{l-1}) \\ \beta_{l-1} < j < \beta_l}} a_j \bar{x}^{\frac{j}{n}(n_1 \cdots n_{l-1})}. \end{aligned}$$

Aplicando el Lema 1.1.30 a $f^{(k)} = 0$ y de la igualdad (1.12), se tiene

$$\#Z_i^{(k)} = (n_i - 1)n_{i+1} \cdots n_k,$$

para $i \in \{1, \dots, k\}$. Denotemos por

$$\rho_l^{(k)} := \left(\sum_{i=1}^k \left(\#Z_i^{(k)} \frac{\beta_i}{\beta_0} \right) \right) (n_1 \cdots n_{l-1}) = \left(\sum_{i=1}^k (n_i - 1)n_{i+1} \cdots n_k \frac{\beta_i}{\beta_0} \right) (n_1 \cdots n_{l-1}), \quad (3.20)$$

donde $l \in \{k+1, \dots, g\}$. Dado que la suma vacía es cero tenemos que $\rho_l^{(0)} = 0$.

Consideremos ahora el caso $k = 0$. Como $f^{(0)}(x, y) = y$, entonces $df^{(0)}(x, y) = dy$. Luego

$$F_l^*(f^{(0)}) = F_l^*(y) = \bar{y} + \bar{T}_l(\bar{x}) \quad (3.21)$$

y

$$F_l^*(df^{(0)}) = d(\bar{y} + \bar{T}_l(\bar{x})) = \bar{T}_l'(\bar{x})d\bar{x} + d\bar{y}, \quad (3.22)$$

donde $\bar{T}_l(\bar{x}) = T_{\frac{\beta_l}{\beta_0}}(y_C(\bar{x}^{n_1 n_2 \dots n_{l-1}}))$.

Lema 3.3.2. Sea $0 \leq k \leq g-1$. Para $\nu = \frac{m_l}{n_l}$ con $l \geq k+2$, se cumple

$$\text{In}_\nu \left(F_l^* \left(df^{(k)} \right) \right) = a_{\beta_{k+1}} \theta^{(k)} c_l^{(k)} \bar{x}^{c_l^{(k)}-1} d\bar{x},$$

donde $c_l^{(k)} = \rho_l^{(k)} + \frac{\beta_{k+1}}{\beta_0}(n_1 \dots n_{l-1})$, siendo $\rho_l^{(k)}$ como en (3.20), $\theta^{(0)} = 1$ y $\theta^{(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ para $1 \leq k \leq g-1$. En particular $\text{ord}_\nu(\text{In}_\nu(F_l^*(df^{(k)}))) = c_l^{(k)}$.

Demostración. Supongamos en primer lugar que $1 \leq k \leq g-1$. Usando el Lema 1.1.55, obtenemos que $\text{ord}(\bar{\delta}_j(\bar{x}) - \bar{T}_l(\bar{x})) = \frac{\beta_j}{\beta_0}(n_1 \dots n_{l-1})$ para $2 \leq j \leq m$ y $\text{ord}(\bar{\delta}_1(\bar{x}) - \bar{T}_l(\bar{x})) = \frac{\beta_{k+1}}{\beta_0}(n_1 \dots n_{l-1})$. Reemplazando en (3.19), resulta

$$\begin{aligned} \text{In}_\nu(F_l^*(f^{(k)})) &= \text{In}_\nu((\bar{y} - (\bar{\delta}_1(\bar{x}) - \bar{T}_l(\bar{x})))) \text{In}_\nu \left(\prod_{i=1}^k \left(\prod_{\delta_j \in Z_i^{(k)}} (\bar{y} - (\bar{\delta}_j(\bar{x}) - \bar{T}_l(\bar{x}))) \right) \right) \\ &= a_{\beta_{k+1}} \bar{x}^{\frac{\beta_{k+1}}{\beta_0}(n_1 \dots n_{l-1})} \theta^{(k)} \bar{x}^{\rho_l^{(k)}}, \end{aligned}$$

donde $\rho_l^{(k)} = \left(\sum_{i=1}^k \left(\#Z_i^{(k)} \frac{\beta_i}{\beta_0} \right) \right) (n_1 \dots n_{l-1})$ y $\theta^{(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Por tanto $\text{In}_\nu(F_l^*(f^{(k)})) = a_{\beta_{k+1}} \theta^{(k)} \bar{x}^{\rho_l^{(k)}}$, donde $c_l^{(k)} = \rho_l^{(k)} + \frac{\beta_{k+1}}{\beta_0}(n_1 \dots n_{l-1})$.

Así $d(\text{In}_\nu F_l^*(f^{(k)})) = a_{\beta_{k+1}} \theta^{(k)} c_l^{(k)} \bar{x}^{c_l^{(k)}-1} d\bar{x}$. Aplicando los Lemas 3.1.2 y 1.2.34 obtenemos

$$\text{In}_\nu F_l^*(df^{(k)}) = d(\text{In}_\nu(F_l^*(f^{(k)}))) = a_{\beta_{k+1}} \theta^{(k)} c_l^{(k)} \bar{x}^{c_l^{(k)}-1} d\bar{x}, \quad (3.23)$$

y $\text{ord}_\nu(\text{In}_\nu F_l^*(df^{(k)})) = c_l^{(k)}$.

Estudiemos a continuación el caso $k = 0$. De la ecuación (3.22), se tiene que

$$F_l^*(df^{(0)}) = \left(a_{\beta_1} \frac{\beta_1}{n} (n_1 \dots n_{l-1}) \bar{x}^{\frac{\beta_1}{n}(n_1 \dots n_{l-1})-1} + \dots \right) d\bar{x} + d\bar{y}$$

de donde $\text{Sop}(F_l^* df^{(0)}) = \left\{ \left(\frac{\beta_1}{n} (n_1 \dots n_{l-1}), 0 \right) \right\} \cup \{(0, 1)\}$. Observamos que

- Para $\left(\frac{\beta_1}{n}(n_1 \cdots n_{l-1}), 0\right)$, se tiene $\frac{\beta_1}{n}(n_1 \cdots n_{l-1}) + \frac{m_l}{n_l} \cdot 0 = \frac{\beta_1}{n}(n_1 \cdots n_{l-1})$.
- Para $(0, 1)$, se tiene $0 + \frac{m_l}{n_l} \cdot 1 = \frac{m_l}{n_l}$.

Analizamos cual de ambos valores es el menor. Por hipótesis tenemos que $l \geq 2$. Por tanto

$$\frac{\beta_l}{n} = \frac{m_l}{n_1 \cdots n_l} > \frac{\beta_1}{n}$$

de donde

$$\frac{m_l}{n_l} > \frac{\beta_1}{n}(n_1 \cdots n_{l-1}),$$

luego

$$\text{In}_\nu \left(F_l^* \left(df^{(0)} \right) \right) = \left(a_{\beta_1} \frac{\beta_1}{n} (n_1 \cdots n_{l-1}) \bar{x}^{\frac{\beta_1}{n}(n_1 \cdots n_{l-1})-1} \right) d\bar{x}, \quad (3.24)$$

$$\text{y } \text{ord}_\nu \left(\text{In}_\nu F_l^* \left(df^{(0)} \right) \right) = \frac{\beta_1}{n} (n_1 \cdots n_{l-1}).$$

□

Lema 3.3.3. Sea $0 \leq k \leq g-1$. Para $\nu = \frac{m_l}{n_l}$ con $l \geq k+2$, se cumple

$$\text{In}_\nu \left(F_l^*(\omega) \wedge F_l^* \left(df^{(k)} \right) \right) = \left(\sum_{i+\nu j=c_l} \bar{\theta} \mathcal{B}_{ij} \bar{x}^{c_l^{(k)}-1+i} \bar{y}^{j-1} \right) d\bar{x} \wedge d\bar{y},$$

donde $\bar{\theta} = -a_{\beta_{k+1}} \theta^{(k)} c_l^{(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $c_l^{(k)} = \rho_l^{(k)} + \frac{\beta_{k+1}}{\beta_0} (n_1 \cdots n_{l-1})$, siendo $\rho_l^{(k)}$ como en (3.20). Además

$$\text{ord}_\nu \left(\text{In}_\nu \left(F_l^*(\omega) \wedge F_l^* \left(df^{(k)} \right) \right) \right) = c_l + c_l^{(k)} - 1 - \nu,$$

donde $c_l = \text{ord}_\nu(\text{In}_\nu F_l^*(\omega))$.

Demostración. De la ecuación (3.17) para $\nu = \frac{m_l}{n_l}$, podemos considerar la parte inicial pesada

$$\text{In}_\nu F_l^*(\omega) = \sum_{i+\nu j=c_l} \mathcal{A}_{ij} \bar{x}^{i-1} \bar{y}^j d\bar{x} + \sum_{i+\nu j=c_l} \mathcal{B}_{ij} \bar{x}^i \bar{y}^{j-1} d\bar{y},$$

donde $c_l = \text{ord}_\nu(\text{In}_\nu F_l^*(\omega))$. Además, del Lema 1.2.39 tenemos que $\mathcal{B}_{ij} \neq 0$ para ciertos i, j ya que por definición de lado principal, la foliación $F_l^*(\omega)$ tiene contribución de \mathcal{B} .

Usando el Lema 3.3.2, se tiene

$$\text{In}_\nu \left(F_l^* \left(df^{(k)} \right) \right) = a_{\beta_{k+1}} \theta^{(k)} c_l^{(k)} \bar{x}^{c_l^{(k)}-1} d\bar{x}, \quad (3.25)$$

donde $\theta^{(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces de (3.17) y (3.25) obtenemos

$$\operatorname{In}_\nu F_l^*(\omega) \wedge \operatorname{In}_\nu \left(F_l^* \left(df^{(k)} \right) \right) = \left(\sum_{i+\nu j=c_l} \bar{\theta} \mathcal{B}_{ij} \bar{x}^{c_l^{(k)}-1+i} \bar{y}^{j-1} \right) d\bar{x} \wedge d\bar{y},$$

donde $\bar{\theta} := -a_{\beta_{k+1}} \theta^{(k)} c_l^{(k)} \neq 0$.

Por tanto $\operatorname{In}_\nu F_l^*(\omega) \wedge \operatorname{In}_\nu \left(F_l^* \left(df^{(k)} \right) \right) \neq 0$, y aplicando el Lema 3.2.1, obtenemos

$$\operatorname{In}_\nu \left(F_l^*(\omega) \wedge F_l^* \left(df^{(k)} \right) \right) = \left(\sum_{i+\nu j=c_l} \bar{\theta} \mathcal{B}_{ij} \bar{x}^{c_l^{(k)}-1+i} \bar{y}^{j-1} \right) d\bar{x} \wedge d\bar{y},$$

y

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}_\nu \left(\operatorname{In}_\nu \left(F_l^*(\omega) \wedge F_l^* \left(df^{(k)} \right) \right) \right) &= \operatorname{ord}_\nu \left(\operatorname{In}_\nu F_l^*(\omega) \right) + \operatorname{ord}_\nu \left(\operatorname{In}_\nu F_l^* \left(df^{(k)} \right) \right) - 1 - \nu \\ &= c_l + c_l^{(k)} - 1 - \nu. \end{aligned}$$

□

Lema 3.3.4. Sea $0 \leq k \leq g-1$. Para $\nu = \frac{m_l}{n_l}$ con $l = k+1$, se cumple

$$\operatorname{In}_\nu F_l^* \left(df^{(k)} \right) = a^{(k)} \rho_l^{(k)} \bar{x}^{\rho_l^{(k)}-1} \bar{y} d\bar{x} + a^{(k)} \bar{x}^{\rho_l^{(k)}} d\bar{y},$$

donde $\rho_l^{(k)} = \left(\sum_{i=1}^k \left(\# Z_i^{(k)} \frac{\beta_i}{\beta_0} \right) \right) (n_1 \cdots n_{l-1})$, $a^{(0)} = 1$ y $a^{(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ para $1 \leq k \leq g-1$.

En particular $\operatorname{ord}_\nu \left(\operatorname{In}_\nu F_l^* \left(df^{(k)} \right) \right) = \rho_l^{(k)} + \nu$.

Demostración. Supongamos en primer lugar que $1 \leq k \leq g-1$. Usando el Lema 1.1.54, obtenemos que $\operatorname{ord}(\bar{\delta}_j(\bar{x}) - \bar{T}_l(\bar{x})) = \frac{\beta_i}{\beta_0} (n_1 \cdots n_{l-1})$ para $2 \leq j \leq m$, $1 \leq i \leq k$ y $\operatorname{ord}(\bar{\delta}_1(\bar{x}) - \bar{T}_l(\bar{x})) = \tau (n_1 \cdots n_{l-1})$, con $\tau > \frac{\beta_{k+1}}{\beta_0}$. Reemplazando en (3.19), resulta

$$\begin{aligned} \operatorname{In}_\nu \left(F_l^* \left(f^{(k)} \right) \right) &= \operatorname{In}_\nu \left((\bar{y} - (\bar{\delta}_1(\bar{x}) - \bar{T}_l(\bar{x}))) \operatorname{In}_\nu \left(\prod_{i=1}^k \left(\prod_{\delta_j \in Z_i^{(k)}} (\bar{y} - (\bar{\delta}_j(\bar{x}) - \bar{T}_l(\bar{x}))) \right) \right) \right) \\ &= a^{(k)} \bar{x}^{\rho_l^{(k)}} \bar{y}, \end{aligned}$$

donde $\rho_l^{(k)} = \left(\sum_{i=1}^k \left(\# Z_i^{(k)} \frac{\beta_i}{\beta_0} \right) \right) (n_1 \cdots n_{l-1})$ y $a^{(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Por tanto $d \left(\operatorname{In}_\nu \left(F_l^* \left(f^{(k)} \right) \right) \right) = a^{(k)} \rho_l^{(k)} \bar{x}^{\rho_l^{(k)}-1} \bar{y} d\bar{x} + a^{(k)} \bar{x}^{\rho_l^{(k)}} d\bar{y}$. Aplicando los Lemas 3.1.2 y 1.2.34 obtenemos

$$\operatorname{In}_\nu F_l^* \left(df^{(k)} \right) = d \left(\operatorname{In}_\nu \left(F_l^* \left(f^{(k)} \right) \right) \right) = \left(a^{(k)} \rho_l^{(k)} \bar{x}^{\rho_l^{(k)}-1} \bar{y} d\bar{x} + a^{(k)} \bar{x}^{\rho_l^{(k)}} d\bar{y} \right) \quad (3.26)$$

y $\operatorname{ord}_\nu \left(\operatorname{In}_\nu \left(F_l^* \left(df^{(k)} \right) \right) \right) = \rho_l^{(k)} + \nu$.

Estudiamos a continuación el caso $k = 0$. De la ecuación (3.22), se tiene que $F_l^*(df^{(0)}) = d(\bar{y} + \bar{T}_l(\bar{x}))$. Para $l = 1$, observamos que $\bar{T}_1(\bar{x}) = 0$, así $F_1^*(df^{(0)}) = d(\bar{y})$. Por tanto $In_\nu F_1^*(df^{(0)}) = d\bar{y}$ y se observa que $\text{ord}_\nu(In_\nu F_1^*(df^{(0)})) = \nu$. Se concluye el lema teniendo en cuenta que $\rho_l^{(0)} = 0$ y $a^{(0)} = 1$. \square

Lema 3.3.5. Sea $0 \leq k \leq g - 1$. Para $\nu = \frac{m_l}{n_l}$ con $l = k + 1$, se cumple

$$In_\nu \left(F_l^*(\omega) \wedge F_l^*(df^{(k)}) \right) = \left(\sum_{i+\nu j=c_l} a^{(k)} (\mathcal{A}_{ij} - \rho_l^{(k)} \mathcal{B}_{ij}) \bar{x}^{i+\rho_l^{(k)}-1} \bar{y}^j \right) d\bar{x} \wedge d\bar{y},$$

donde $\rho_l^{(k)} = \left(\sum_{i=1}^k \left(\#Z_i^{(k)} \frac{\beta_i}{\beta_0} \right) \right) (n_1 \cdots n_{l-1})$, $a^{(0)} = 1$ y $a^{(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ para $1 \leq k \leq g - 1$.

Además

$$\text{ord}_\nu \left(In_\nu \left(F_l^*(\omega) \wedge F_l^*(df^{(k)}) \right) \right) = c_l + \rho_l^{(k)} - 1,$$

donde $c_l = \text{ord}_\nu(In_\nu F_l^*(\omega))$.

Demostración. Del Lema 3.1.1 tenemos que $F_l^*(\omega) = \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{y})d\bar{x} + \mathcal{B}(\bar{x}, \bar{y})d\bar{y}$. Para $\nu = \frac{m_l}{n_l}$ consideremos la parte inicial pesada

$$In_\nu F_l^*(\omega) = \sum_{i+\nu j=c_l} \mathcal{A}_{ij} \bar{x}^{i-1} \bar{y}^j d\bar{x} + \sum_{i+\nu j=c_l} \mathcal{B}_{ij} \bar{x}^i \bar{y}^{j-1} d\bar{y}, \quad (3.27)$$

donde $c_l = \text{ord}_\nu(In_\nu F_l^*(\omega))$; y donde la recta de apoyo del polígono de Newton de $F_l^*(\omega)$ y de inclinación ν tiene ecuación $\mathcal{L}_l : i + \nu j = c_l$, siendo $c_l = \text{ord}_{\bar{x}}(\mathcal{A}(\bar{x}, 0))$. Por tanto podemos afirmar que para algún $(i_0, j_0) \in \mathcal{L}_l \cap \text{Sup}(F_l^*(\omega))$ se tiene que $\mathcal{A}_{i_0 j_0} \neq 0$ y $\mathcal{B}_{i_0 j_0} = 0$.

Por otra parte, usando el Lema 3.3.4, se tiene

$$In_\nu \left(F_l^*(df^{(k)}) \right) = a^{(k)} \rho_l^{(k)} \bar{x}^{\rho_l^{(k)}-1} \bar{y} d\bar{x} + a^{(k)} \bar{x}^{\rho_l^{(k)}} d\bar{y}, \quad (3.28)$$

donde $a^{(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $\rho_l^{(k)}$ como en (3.20). Entonces de (3.27) y (3.28) obtenemos

$$In_\nu(F_l^*(\omega)) \wedge In_\nu \left(F_l^*(df^{(k)}) \right) = \left(\sum_{i+\nu j=c_l} a^{(k)} (\mathcal{A}_{ij} - \rho_l^{(k)} \mathcal{B}_{ij}) \bar{x}^{i+\rho_l^{(k)}-1} \bar{y}^j \right) d\bar{x} \wedge d\bar{y}$$

Afirmamos que $In_\nu F_l^*(\omega) \wedge In_\nu F_l^*(df^{(k)}) \neq 0$, pues $\mathcal{A}_{i_0 j_0} \neq 0$ y $\mathcal{B}_{i_0 j_0} = 0$ y aplicando Lema 3.2.1, obtenemos

$$In_\nu \left(F_l^*(\omega) \wedge F_l^*(df^{(k)}) \right) = \left(\sum_{i+\nu j=c_l} a^{(k)} (\mathcal{A}_{ij} - \rho_l^{(k)} \mathcal{B}_{ij}) \bar{x}^{i+\rho_l^{(k)}-1} \bar{y}^j \right) d\bar{x} \wedge d\bar{y},$$

y

$$\begin{aligned} \text{ord}_\nu \left(\text{In}_\nu \left(F_l^*(\omega) \wedge F_l^*(df^{(k)}) \right) \right) &= \text{ord}_\nu \left(\text{In}_\nu F_l^*(\omega) \right) + \text{ord}_\nu \left(\text{In}_\nu F_l^*(df^{(k)}) \right) - 1 - \nu \\ &= c_l + \rho_l^{(k)} - 1. \end{aligned}$$

□

Como consecuencia de los Lemas 3.3.3 y 3.3.5, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.3.6. Sean $0 \leq k \leq g-1$ y $\nu = \frac{m_l}{n_l}$ con $l \geq k+1$. La recta que contiene a los puntos del soporte de $\text{In}_\nu \left(F_l^*(\omega) \wedge F_l^*(df^{(k)}) \right)$ tiene ecuación

$$\mathcal{L}_1 : i + \nu j = c_l + c_l^{(k)} - 1 - \nu, \quad \text{para } l \geq k+2,$$

y

$$\mathcal{L}_2 : i + \nu j = c_l + \rho_l^{(k)} - 1, \quad \text{para } l = k+1,$$

donde $c_l = \text{ord}_\nu \left(\text{In}_\nu F_l^*(\omega) \right)$ y $c_l^{(k)} = \rho_l^{(k)} + \frac{\beta_{k+1}}{\beta_0} (n_1 \cdots n_{l-1})$, siendo $\rho_l^{(k)}$ como en (3.20).

Proposición 3.3.7. Sean $0 \leq k \leq g-1$ y $\nu = \frac{m_l}{n_l}$ con $l \geq k+1$. Si

$$\text{In}_\nu F_l^*(\omega) = \sum_{i+\nu j=c_l} \mathcal{A}_{ij} \bar{x}^{i-1} \bar{y}^j d\bar{x} + \sum_{i+\nu j=c_l} \mathcal{B}_{ij} \bar{x}^i \bar{y}^{j-1} d\bar{y}$$

entonces

$$\text{In}_\nu \left(F_l^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right) \right) = \sum_{i+\nu j=c_l} \bar{\theta} \mathcal{B}_{ij} \bar{x}^{c_l^{(k)}+i-(n_1 \cdots n_{l-1})} \bar{y}^{j-1}, \quad \text{para } l \geq k+2 \quad (3.29)$$

y

$$\text{In}_\nu \left(F_l^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right) \right) = \left(\sum_{i+\nu j=c_l} a^{(k)} (\mathcal{A}_{ij} - \rho_l^{(k)} \mathcal{B}_{ij}) \bar{x}^{i+\rho_l^{(k)}-n_1 \cdots n_k} \bar{y}^j \right), \quad \text{para } l = k+1; \quad (3.30)$$

donde $\bar{\theta}, a^{(0)} = 1, a^{(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ para $1 \leq k \leq g-1$, $c_l = \text{ord}_\nu \left(\text{In}_\nu F_l^*(\omega) \right)$ y $c_l^{(k)} = \rho_l^{(k)} + \frac{\beta_{k+1}}{\beta_0} (n_1 \cdots n_{l-1})$, siendo $\rho_l^{(k)}$ como en (3.20).

Demostración. De la Proposición 3.3.1 se sabe que

$$F_l^*(\omega) \wedge F_l^*(df^{(k)}) = n_1 \cdots n_{l-1} \bar{x}^{n_1 \cdots n_{l-1}-1} \left(F_l^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right) \right) d\bar{x} \wedge d\bar{y},$$

así

$$\text{In}_\nu \left(F_l^*(\omega) \wedge F_l^*(df^{(k)}) \right) = \text{In}_\nu \left(n_1 \cdots n_{l-1} \bar{x}^{n_1 \cdots n_{l-1}-1} \left(F_l^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right) \right) d\bar{x} \wedge d\bar{y} \right). \quad (3.31)$$

Supongamos que $l \geq k + 2$. Del Lema 3.3.3 y reemplazando en (3.31) se tiene que

$$\begin{aligned} \text{In}_\nu \left(F_l^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right) \right) &= \sum_{i+j\nu=c_l} \bar{\theta} \mathcal{B}_{ij} \bar{x}^{c_l^{(k)}-1+i-(n_1 \cdots n_{l-1})} \bar{y}^{j-1} \\ &= \sum_{i+j\nu=c_l} \bar{\theta} \mathcal{B}_{ij} \bar{x}^{c_l^{(k)}+i-(n_1 \cdots n_{l-1})} \bar{y}^{j-1}. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que $l = k + 1$. Del Lema 3.3.5 y reemplazando en (3.31) obtenemos

$$\text{In}_\nu \left(F_l^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right) \right) = \left(\sum_{i+\nu j=c_l} a^{(k)} (\mathcal{A}_{ij} - \rho_l^{(k)} \mathcal{B}_{ij}) \bar{x}^{i+\rho_l^{(k)}-n_1 \cdots n_k} \bar{y}^j \right).$$

□

Observaciones 3.3.8. Dado que $a^{(0)} = 1$, $\rho_1^{(0)} = 0$ y el producto vacío es igual a uno, tenemos que para $k = 0$ la igualdad (3.30) se reduce a

$$\text{In}_\nu \left(F_l^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(0)} \right) \right) = \sum_{i+\nu j=c_l} \mathcal{A}_{ij} \bar{x}^{i-1} \bar{y}^j.$$

La Proposición 3.3.7 nos permite determinar puntos en el polígono de Newton de $F_l^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right)$ a partir de puntos en el polígono de Newton de $F_l^* (\omega)$. Más concretamente:

Observaciones 3.3.9.

1. Si $l \geq k + 2$ y (i, j) es un punto de $\mathcal{N} \left(F_l^* (\omega) \right)$ con $\mathcal{B}_{ij} \neq 0$ entonces $(c_l^{(k)} + i - (n_1 \cdots n_{l-1}), j - 1)$ es un punto de $\mathcal{N} \left(F_l^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right) \right)$.
2. Si $l = k + 1$ y (i, j) es un punto de $\mathcal{N} \left(F_l^* (\omega) \right)$ con $\mathcal{A}_{ij} - \rho_l^{(k)} \mathcal{B}_{ij} \neq 0$ entonces $(i + \rho_l^{(k)} - n_1 \cdots n_k, j)$ es un punto de $\mathcal{N} \left(F_l^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right) \right)$.

En la siguiente proposición precisaremos información del polígono de Newton de $\mathcal{N} \left(F_l^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right) \right)$.

Proposición 3.3.10. Sean $0 \leq k \leq g - 1$ y $\nu = \frac{m_l}{n_l}$ con $l \geq k + 1$. La recta que contiene a los puntos del soporte de $\text{In}_\nu \left(F_l^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right) \right)$ tiene ecuación

$$\mathcal{L}_l^{(k)} : i + \nu j = c_{k,l} - \nu, \quad \text{para } l \geq k + 2$$

y

$$\mathcal{L}_l^{(k)} : i + \nu j = c_l + \rho_l^{(k)} - n_1 \cdots n_k, \quad \text{para } l = k + 1$$

donde $c_{k,l} := c_l + c_l^{(k)} - n_1 \cdots n_{l-1}$, siendo $c_l = \text{ord}_\nu (\text{In}_\nu F_l^* (\omega))$ y $c_l^{(k)} = \text{ord}_\nu (\text{In}_\nu F_l^* (df^{(k)}))$ y $\rho_l^{(k)}$ como en (3.20).

Demostración. Supongamos en primer lugar que $l \geq k+2$. Sea (a, b) un punto del soporte de $\text{In}_\nu \left(F_l^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right) \right)$. De la Proposición 3.3.7, igualdad (3.29), existe (i_a, j_b) punto del soporte de $\mathcal{N} \left(F_l^* (\omega) \right)$, tal que

$$a = c_l^{(k)} + i_a - n_1 \cdots n_{l-1} \quad \text{y} \quad b = j_b - 1.$$

Además

$$\begin{aligned} a + \nu b &= (c_l^{(k)} + i_a - n_1 \cdots n_{l-1}) + \nu(j_b - 1) \\ &= (c_l^{(k)} + i_a - n_1 \cdots n_{l-1}) + \nu j_b - \nu \\ &= (i_a + \nu j_b) + (c_l^{(k)} - n_1 \cdots n_{l-1}) - \nu \\ &= c_l + c_l^{(k)} - n_1 \cdots n_{l-1} - \nu \\ &= c_{k,l} - \nu, \end{aligned}$$

donde $c_{k,l} := c_l + c_l^{(k)} - n_1 \cdots n_{l-1}$. Por tanto la recta que contiene a los puntos del soporte de $\text{In}_\nu \left(F_l^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right) \right)$ tiene ecuación

$$\mathcal{L}_l^{(k)} : i + \nu j = c_{k,l} - \nu.$$

Supongamos ahora que $l = k+1$. De la igualdad (3.30) de la Proposición 3.3.7, existe (i_a, j_b) en el soporte de $\mathcal{N} \left(F_l^* (\omega) \right)$ con $\mathcal{A}_{i_a j_b} - \rho_{k+1}^{(k)} \mathcal{B}_{i_a j_b} \neq 0$. Así

$$\begin{aligned} a + \nu b &= (i_a + \rho_{k+1}^{(k)} - n_1 \cdots n_k) + \nu j_b \\ &= (i_a + \nu j_b) + \rho_{k+1}^{(k)} - n_1 \cdots n_k \\ &= c_{k+1} + \rho_{k+1}^{(k)} - n_1 \cdots n_k. \end{aligned}$$

Por tanto, la recta que contiene a los puntos del soporte de $\text{In}_\nu \left(F_l^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right) \right)$, tiene ecuación

$$\mathcal{L}_l^{(k)} : i + \nu j = c_{k+1} + \rho_{k+1}^{(k)} - n_1 \cdots n_k.$$

□

Como consecuencia de la Proposición 3.3.10, tenemos el siguiente corolario

Corolario 3.3.11. Sean $\nu = \frac{m_{k+1}}{n_{k+1}}$ y L el lado compacto de inclinación ν del polígono de Newton de $F_{k+1}^*(\omega)$. Si \mathcal{L}_{k+1} es la ecuación de la recta de apoyo de $\mathcal{N}(F_{k+1}^*(\omega))$ que contiene a L , entonces $\mathcal{N} \left(F_{k+1}^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right) \right)$ tiene una recta de apoyo de ecuación $\mathcal{L}_{k+1}^{(k)}$ de inclinación ν . Además si el polígono de Newton de $F_{k+1}^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right)$ admite lado compacto de inclinación ν sería el de mayor inclinación y estaría contenido en el semiplano $\left(\mathcal{L}_{k+1}^{(k)} \right)^+$.

Demostración. Teniendo en cuenta la Proposición 3.3.10 y la convexidad del polígono de Newton, solo faltaría por demostrar que si el polígono de Newton de $F_{k+1}^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right)$ admite lado compacto de inclinación ν , dicho lado sería el de mayor inclinación.

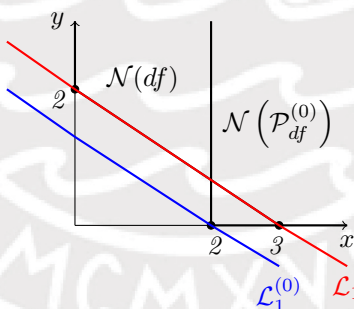
De (3.18) sabemos que la recta de apoyo de inclinación ν del polígono de Newton de $F_{k+1}^*(\omega)$ es $\mathcal{L}_{k+1} : i + j\nu = c_{k+1}$. Del Lema 3.1.5 tenemos que \mathcal{L}_{k+1} contiene al lado principal de $\mathcal{N}(F_{k+1}^*(\omega))$. En particular el lado compacto de mayor inclinación de $\mathcal{N}(F_{k+1}^*(\omega))$ tiene inclinación ν , corta al eje horizontal, de donde se tiene que $\mathcal{B}_{i_0 0} = 0$ y $\mathcal{A}_{i_0 0} \neq 0$.

Además de (3.29) se tiene que $\text{In}_\nu \left(F_l^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right) \right) = \sum_{i+j\nu=c_l} a^{(k)} \left(\mathcal{A}_{ij} - \rho_{k+1}^{(k)} \mathcal{B}_{ij} \right) \bar{x}^{i+\rho_{k+1}^{(k)}-n_1 \cdots n_k} \bar{y}^j$.

Como $\mathcal{A}_{i_0 0} \neq 0$ entonces $(i_0, 0) \in \text{Sop} \left(\text{In}_\nu \left(F_{k+1}^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right) \right) \right)$, así $i_0 = c_{k+1}$. Afirmamos que $(i_0, 0) \in \text{Sop} \left(\text{In}_\nu \left(F_{k+1}^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right) \right) \right)$ para $i_0 = c_{k+1} + \rho_{k+1}^{(k)} - n_1 \cdots n_k$ pues $\mathcal{A}_{i_0 0} - \rho_{k+1}^{(k)} \mathcal{B}_{i_0 0} \neq 0$.

La recta $\mathcal{L}_{k+1}^{(k)}$ corta al eje de las abscisas y es recta de apoyo de inclinación ν de $\mathcal{N} \left(F_{k+1}^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right) \right)$. Por tanto si el polígono de Newton de $F_{k+1}^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right)$ admite lado compacto de inclinación ν , dicho lado sería el de mayor inclinación. \square

Observación 3.3.12. Obsérvese que el polígono de Newton de $F_{k+1}^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right)$ no necesariamente tiene lado compacto de inclinación $\nu = \frac{m_{k+1}}{n_{k+1}}$ como muestra el siguiente ejemplo: si $f(x, y) = y^2 - x^3$ entonces $f^{(0)}(x, y) = y$ y $\mathcal{P}_{df}^{(0)} = -3x^2$. Por tanto el polígono de Newton de df tiene un único lado compacto de inclinación $\nu = \frac{3}{2}$ y está contenida en la recta $\mathcal{L}_1 : i + \nu j = 3$ pero sin embargo el polígono de Newton de $F_1^* \left(\mathcal{P}_{df}^{(0)} \right)$ tiene un único vértice que es el $(2, 0)$ y su recta de apoyo de inclinación ν es $\mathcal{L}_1^{(0)} : i + \nu j = 2$.



Corolario 3.3.13. Sean $0 \leq k \leq g - 1$, $\nu = \frac{m_l}{n_l}$, para $k + 2 \leq l \leq g$ y L el lado compacto de inclinación ν del polígono de Newton de $F_l^*(\omega)$. Si \mathcal{L}_l es la ecuación de la recta de apoyo de $\mathcal{N}(F_l^*(\omega))$ que contiene a L , entonces $\mathcal{N} \left(F_l^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right) \right)$ tiene una recta de apoyo de ecuación $\mathcal{L}_l^{(k)}$ de inclinación ν . Además si el polígono de Newton de $F_l^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right)$ admite lado compacto de inclinación ν estaría contenido en la recta $\left(\mathcal{L}_l^{(k)} \right)^+$.

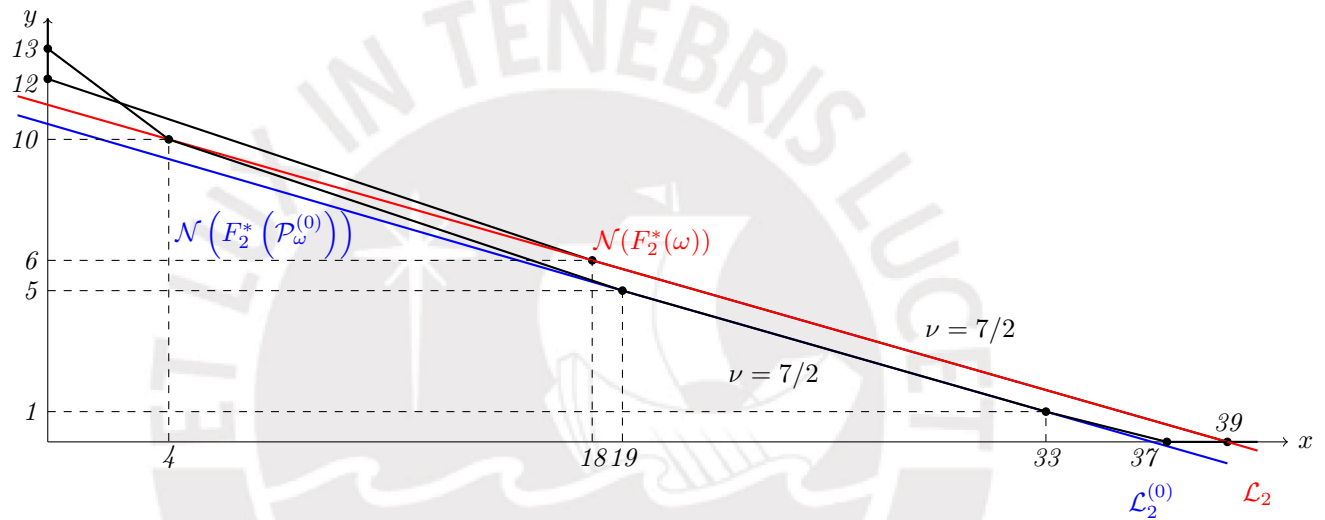
Demostración. Es claro de la Proposición 3.3.10. \square

Observación 3.3.14. Para $\nu = \frac{m_l}{n_l}$ con $k + 2 \leq l \leq g$, no se cumple que el lado compacto de $\mathcal{N} \left(F_l^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right) \right)$ de inclinación ν sea el de mayor inclinación, como se puede apreciar

en el siguiente ejemplo: consideremos la foliación curva generalizada dada por $\omega = df + f\eta$ con $\eta = (x + y)dx + ydy$, la cual tiene como separatriz a la curva irreducible C_f , donde $f = ((y^2 - x^3)^2 - x^5y)^3 - x^{15}y(y^2 - x^3)$, y tiene exponentes característicos $(12, 18, 21, 22)$. Una raíz de Newton-Puiseux de f es

$$y_C(x) = x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{7}{4}} + \frac{1}{4}x^{\frac{11}{6}} + \dots$$

Fijando $\frac{\beta_2}{\beta_0} = \frac{7}{4}$, consideramos $F_2(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}^2, \bar{y} + \bar{x}^3)$, de donde resulta que los polígonos $\mathcal{N}(F_2^*(\omega))$ y $\mathcal{N}(F_2^*(\mathcal{P}_\omega^{(0)}))$ son dados como se muestra a continuación:



Observamos que $\mathcal{N}(F_2^*(\mathcal{P}_\omega^{(0)}))$ tiene un lado compacto de inclinación $\nu = \frac{7}{2}$ pero dicho polígono tiene un lado compacto de inclinación igual a 4.

Lema 3.3.15. Sea (a_1, b_1) el vértice de menor ordenada del lado principal del polígono de Newton $\mathcal{N}(F_l^*(\omega))$, que tiene contribución de $\mathcal{B}(\bar{x}, \bar{y})$. Entonces $b_1 \geq n_l$.

Demostración. Usando el Lema 1.2.39 se tiene que el polígono de Newton $\mathcal{N}(F_l^*(\omega))$ tiene su lado principal contenido en una recta de inclinación $\nu = \frac{m_l}{n_l}$. Como (a_1, b_1) es el vértice de menor ordenada del lado principal del polígono de Newton $\mathcal{N}(F_l^*(\omega))$, que tiene contribución de $\mathcal{B}(\bar{x}, \bar{y})$, entonces $b_1 \neq 0$. El punto $(a_1, b_1) \in \mathbb{N}^2$ pertenece a la recta de ecuación $i + \nu j = c_l$ para cierto $c_l \neq 0$. En particular tenemos que $b_1 = \frac{(c_l - a_1)}{\nu} = \frac{(c_l - a_1)}{m_l} n_l \in \mathbb{N}$, y por tanto $\frac{(c_l - a_1)}{m_l}$ es positivo. Además como n_l y m_l son coprimos entonces $\frac{(c_l - a_1)}{m_l}$ es natural positivo y concluimos el lema. \square

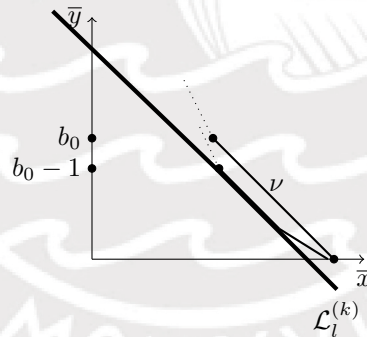
Si \mathcal{N} es un polígono de Newton y $q \in \mathbb{Q}$, denotaremos $\mathcal{N}_{\geq q}$ al polígono de Newton que resulta de eliminar en \mathcal{N} sus lados de inclinación estrictamente menor que q ; y denotaremos

por $\mathcal{N}_{>q}$ al polígono de Newton que resulta de eliminar en \mathcal{N} sus lados de inclinación menor o igual que q .

Recordemos que de la definición de lado principal y del Lema 3.1.5 tenemos que el lado principal de $\mathcal{N}(F_l^*(\omega))$ es el lado compacto de máxima inclinación, que además corta al eje $y = 0$ y su inclinación es $\nu = \frac{m_l}{n_l}$. Por tanto, de los dos vértices de dicho lado principal, el único que tiene contribución de $\mathcal{B}(\bar{x}, \bar{y})$ es el de ordenada no nula.

Proposición 3.3.16. Sean $0 \leq k \leq g - 1$ y $\nu = \frac{m_l}{n_l}$, para $k + 2 \leq l \leq g$. Sea (a_0, b_0) el único vértice del lado principal del polígono de Newton $\mathcal{N}(F_l^*(\omega))$ que tiene contribución de $\mathcal{B}(\bar{x}, \bar{y})$ (es decir el de ordenada no nula). Entonces el vértice de mayor ordenada en el polígono de Newton $\mathcal{N}\left(F_l^*\left(\mathcal{P}_\omega^{(k)}\right)\right)_{\geq \nu}$ tiene ordenada igual a $b_0 - 1$.

Demostración. Del Corolario 3.3.13, se tiene que la recta $\mathcal{L}_l^{(k)}$ es una recta de apoyo del polígono de Newton $\mathcal{N}\left(F_l^*\left(\mathcal{P}_\omega^{(k)}\right)\right)$. Si $\mathcal{N}\left(F_l^*\left(\mathcal{P}_\omega^{(k)}\right)\right)$ tiene lado compacto de inclinación ν entonces estaría contenido en la recta $\mathcal{L}_l^{(k)}$. Del primer apartado de Observaciones 3.3.9 se tiene que si (a_0, b_0) es el vértice de mayor ordenada del lado principal del polígono de Newton $\mathcal{N}(F_l^*(\omega))$ que tiene contribución de $\mathcal{B}(\bar{x}, \bar{y})$, entonces $(a_0 + c_l^{(k)} - n_1 \cdots n_{l-1}, b_0 - 1)$ es el vértice de mayor ordenada del polígono de Newton $\mathcal{N}\left(F_l^*\left(\mathcal{P}_\omega^{(k)}\right)\right)_{\geq \nu}$.



□

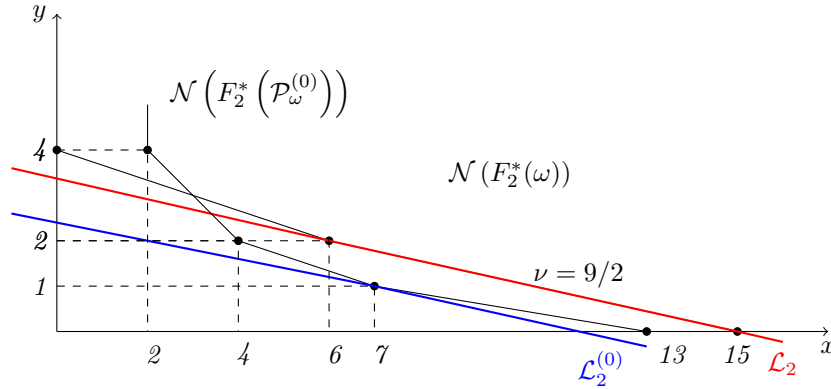
Observación 3.3.17. Consideremos la foliación

$$\omega = (-x^7y + x^7 - 6x^5y - 2x^4y^2 + 6x^5 + xy^4 - 6x^2y^2)dx + (-x^6y^2 + x^6y - x^6 - 2x^3y^3 + y^5 - 4x^3y + 4y^3)dy,$$

que tiene a $f(x, y) = (y^2 - x^3)^2 - x^6y$ como separatriz. La curva \mathcal{C}_f tiene exponentes característicos a $(4, 6, 9)$. Así

$$y\mathcal{C}(x) = x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{9}{4}} - \frac{1}{6}x^{\frac{15}{4}} + \cdots$$

Fijando $\frac{\beta_2}{\beta_0} = \frac{9}{4}$, consideramos $F_2(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}^2, \bar{y} + \bar{x}^3)$. Los polígonos de Newton de $\mathcal{N}(F_2^*(\omega))$ y $\mathcal{N}\left(F_2^*\left(\mathcal{P}_\omega^{(0)}\right)\right)$ son



Observamos que en este caso $\mathcal{N}(F_2^*(\mathcal{P}_\omega^{(0)}))$ no tiene lado compacto de inclinación ν , por tanto $\mathcal{N}(F_2^*(\mathcal{P}_\omega^{(0)}))_{\geq \nu} = \mathcal{N}(F_2^*(\mathcal{P}_\omega^{(0)}))_{> \nu}$.

3.4. Descomposición de la curva polar de una foliación

Recordemos que $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ es un polinomio de Weierstrass irreducible con exponentes característicos $(\beta_0, \dots, \beta_g)$ y $f^{(k)}$, $0 \leq k \leq g - 1$, denota sus raíces aproximadas características. Además denotamos $n_i = \frac{\text{mcd}(\beta_0, \dots, \beta_{i-1})}{\text{mcd}(\beta_0, \dots, \beta_i)}$. Tenemos todas las herramientas necesarias para mostrar el siguiente teorema que generaliza la Proposición 4.1 de [R2].

Teorema 3.4.1. Sean $\mathcal{F} : \omega = 0$ y $\mathcal{G} : df^{(k)} = 0$ foliaciones curvas generalizadas que tienen a \mathcal{C}_f y $\mathcal{C}_{f^{(k)}}$ como separatrices respectivamente. La curva polar $\mathcal{P}_\omega^{(k)}$ tiene $\text{mult}(\mathcal{P}_\omega^{(k)}) \geq n + n_1 \cdots n_k - 2$ y se descompone como

$$\mathcal{P}_\omega^{(k)} = \Gamma^{(k+1)} \cdots \Gamma^{(g)},$$

donde los factores $\Gamma^{(l)}$ no son necesariamente irreducibles y x es co-primo con el producto $\Gamma^{(k+2)} \cdots \Gamma^{(g)}$. Además

- a) $\text{cont}(\mathcal{P}_l, \mathcal{C}_f) = \frac{\beta_l}{n}$ para \mathcal{P}_l componente irreducible de $\Gamma^{(l)}$, $k + 2 \leq l \leq g$.
- b) $\text{mult}(\Gamma^{(l)}) = n_1 \cdots n_{l-1}(n_l - 1)$, $k + 2 \leq l \leq g$.
- c) $\text{mult}(\Gamma^{(k+1)}) \geq n_1 \cdots n_k(n_{k+1} + 1) - 2$ y $\text{ord}(\gamma) \leq \frac{\beta_{k+1}}{n}$ para γ raíz de Newton-Puiseux de $\Gamma^{(k+1)}$.

Demostración. Sean $k + 2 \leq l \leq g$ y $\nu = \frac{m_l}{n_l}$. Del Lema 3.1.5 y Proposición 3.3.16 se obtiene que la altura de $\mathcal{N}(F_l^*(\mathcal{P}_\omega^{(k)}))_{\geq \nu}$ es $e_{l-1} - 1$. Sean $\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_q$ las inclinaciones de $\mathcal{N}(F_l^*(\mathcal{P}_\omega^{(k)}))_{\geq \nu}$ que son mayores a ν para $l \geq k + 2$. Denotemos por L_l el lado compacto

de $\mathcal{N}\left(F_l^*\left(\mathcal{P}_\omega^{(k)}\right)\right)_{\geq \nu}$ de inclinación ν_i . Sea $r \in \{1, \dots, q\}$. Las raíces de Newton-Puiseux de la curva $F_l^*\left(\mathcal{P}_\omega^{(k)}\right)$ correspondientes al lado compacto de $\mathcal{N}\left(F_l^*\left(\mathcal{P}_\omega^{(k)}\right)\right)$ de inclinación ν_r son de la forma

$$\bar{\gamma}_{rs}(\bar{x}) = d_{rs}\bar{x}^{\nu_r} + \varepsilon_{rs}(\bar{x}),$$

con $d_{rs} \neq 0$ y $\text{ord}_{\bar{x}} \varepsilon_{rs}(\bar{x}) > \nu_r$, donde $s = 1, \dots, s_r$, siendo s_r la altura del lado L_r . Para $l \geq k + 2$ definimos $\bar{\Gamma}^{(l)} := \prod_{r=1}^q \prod_{s=1}^{s_r} (\bar{y} - \bar{\gamma}_{rs}(\bar{x}))$.

Del Lema 3.1.3 tenemos que la ecuación reducida de separatrices de $F_l^*(\omega)$ es $F_l^*(f) = 0$. Por el Lema 1.2.39 se sabe que la recta que contiene al lado principal de $\mathcal{N}(F_l^*(\omega))$ es de inclinación $\frac{m_l}{n_l}$. Además como ω es de tipo curva generalizada entonces $F_l^*(\omega)$ también lo es (ver Lema 3.1.4) y aplicando el Corolario 1.2.41 tenemos la igualdad $\mathcal{N}(F_l^*(\omega)) = \mathcal{N}(F_l^*(f))$. Concluimos, del Lema 1.1.15, que las raíces de Newton-Puiseux de $F_l^*(f)$ tienen orden menor o igual que $\frac{m_l}{n_l}$. Además sabemos del Lema 3.1.5 que $F_l^*(f)$ tiene raíces de Newton-Puiseux de $F_l^*(f)$ de orden $\frac{m_l}{n_l}$. Sea $\bar{\mathcal{D}}$ una componente irreducible de $F_l^*(f)$ cuyas raíces de Newton-Puiseux tienen orden $\frac{m_l}{n_l}$. Entonces, como $\nu_r > \frac{m_l}{n_l}$, para todo $r = 1, \dots, q$; toda componente irreducible $\bar{\mathcal{P}}_l$ de $\bar{\Gamma}^{(l)}$ verifica

$$\text{cont}(\bar{\mathcal{D}}, \bar{\mathcal{P}}_l) = \frac{m_l}{n_l}.$$

Volvamos a las coordenadas (x, y) : sean \mathcal{P}_l y $\Gamma^{(l)}$ tales que $\bar{\mathcal{P}}_l = F_l^{-1}(\mathcal{P}_l)$ y $\bar{\Gamma}^{(l)} = F_l^{-1}(\Gamma^{(l)})$. Se tiene

$$\text{cont}(\mathcal{C}_f, \mathcal{P}_l) = \frac{m_l}{n_1 \cdots n_{l-1} \cdot n_l} = \frac{\beta_l}{n}, \quad \text{con } k + 2 \leq l \leq g.$$

La raíces de Newton-Puiseux de la polar $\mathcal{P}_\omega^{(k)}$ con contacto con \mathcal{C}_f mayor o igual a $\frac{\beta_l}{n}$, para $k + 2 \leq l \leq g$, coinciden con las raíces de Newton-Puiseux de $\Gamma^{(k+2)} \cdots \Gamma^{(g)}$. Tenemos que el número de raíces de Newton-Puiseux de la separatriz \mathcal{C}_f que tienen contacto, con la curva polar $\mathcal{P}_\omega^{(k)}$, mayor o igual a $\frac{\beta_l}{n}$ es

$$n_1 \cdots n_{l-1}(e_{l-1} - 1). \tag{3.32}$$

Razonando de manera análoga se tiene que el número de raíces de Newton-Puiseux de la separatriz \mathcal{C}_f que tienen contacto, con la curva polar $\mathcal{P}_\omega^{(k)}$, mayor o igual a $\frac{\beta_{l+1}}{n}$ es

$$n_1 \cdots n_l(e_l - 1). \tag{3.33}$$

De las ecuaciones (3.32) y (3.33) concluimos que el número de raíces de Newton-Puiseux de la separatriz \mathcal{C}_f que tienen contacto, con la curva polar $\mathcal{P}_\omega^{(k)}$, igual a $\frac{\beta_l}{n}$ es

$$n_1 \cdots n_{l-1}(e_{l-1} - 1) - n_1 \cdots n_l(e_l - 1) = n_1 \cdots n_l - n_1 \cdots n_{l-1} = n_1 \cdots n_{l-1}(n_l - 1). \tag{3.34}$$

Por tanto

$$\text{mult} \left(\Gamma^{(l)} \right) = n_1 \cdots n_{l-1} (n_l - 1). \quad (3.35)$$

Por definición de la curva polar, sabemos $\mathcal{P}_\omega^{(k)} = Af_y^{(k)} - Bf_x^{(k)}$, así

$$\begin{aligned} \text{mult} \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right) &= \text{mult} \left(Af_y^{(k)} - Bf_x^{(k)} \right) \\ &\geq \min \left\{ \text{mult} \left(Af_y^{(k)} \right), \text{mult} \left(Bf_x^{(k)} \right) \right\} \\ &= \min \left\{ \text{mult}(A) + \text{mult} \left(f_y^{(k)} \right), \text{mult}(B) + \text{mult} \left(f_x^{(k)} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

De la Observación 1.1.12 podemos concluir que $\text{ord} \left(f_x^{(k)} \right) \geq \text{ord} \left(f_y^{(k)} \right) = n_1 \cdots n_k - 1$. Además $\text{mult}(\omega) = \min\{\text{ord}(A), \text{ord}(B)\} = n - 1$.

Por tanto, de (3.36) se tiene que

$$\text{mult} \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right) \geq n + n_1 \cdots n_k - 2. \quad (3.37)$$

Definimos $\Gamma^{(k+1)} := \frac{\mathcal{P}_\omega^{(k)}}{\Gamma^{(k+2)} \cdots \Gamma^{(g)}}$. Usando las ecuaciones (3.35) y (3.37) se obtiene

$$\begin{aligned} \text{mult} \left(\Gamma^{(k+1)} \right) &= \text{mult} \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right) - \text{mult} \left(\Gamma^{(k+2)} \cdots \Gamma^{(g)} \right) \\ &\geq n + n_1 \cdots n_k - 2 - (n - n_1 \cdots n_{k+1}) \\ &= n_1 \cdots n_k (n_{k+1} + 1) - 2. \end{aligned}$$

Se sabe que $n_i \geq 2$ para todo $i = 1, \dots, g$, así como mínimo $\text{mult} \left(\Gamma^{(k+1)} \right) \geq 1$, lo que indica que $\Gamma^{(k+1)}$ no es una unidad. Las raíces de Newton-Puiseux $\bar{\gamma}$ de $\bar{\Gamma}^{(k+1)}$ corresponden a los lados de $\mathcal{N} \left(F_l^* \left(\mathcal{P}_\omega^{(k)} \right) \right)$ de inclinación menor estricta que $\frac{m_{k+2}}{n_{k+2}}$. Usando el Corolario 3.3.11 se tiene que $\text{ord}(\bar{\gamma}) \leq \frac{m_{k+1}}{n_{k+1}}$ para toda raíz de Newton-Puiseux de $\bar{\Gamma}^{(k+1)}$, de donde se obtiene que $\text{ord}(\gamma) \leq \frac{\beta_{k+1}}{n}$ para toda raíz γ del paquete $\Gamma^{(k+1)}$. □

Ejemplo 3.4.2. Sea $\mathcal{C}_f : (y^2 - x^3)^2 - x^6 y = 0$ una curva irreducible con exponentes característicos (4, 6, 9) y raíces aproximadas $f^{(0)} = y$ y $f^{(1)} = y^2 - x^3$. La curva $\mathcal{C}_f : (y^2 - x^3)^2 - x^5 y = 0$, tiene como raíces de Newton-Puiseux

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{9}{4}} - \frac{1}{64}x^{\frac{15}{4}} + \cdots, \\ y_2(x) &= x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{9}{4}} + \frac{1}{64}x^{\frac{15}{4}} + \cdots, \\ y_3(x) &= -x^{\frac{3}{2}} + \frac{i}{2}x^{\frac{9}{4}} + \frac{i}{64}x^{\frac{15}{4}} + \cdots, \\ y_4(x) &= -x^{\frac{3}{2}} - \frac{i}{2}x^{\frac{9}{4}} - \frac{i}{64}x^{\frac{15}{4}} + \cdots. \end{aligned}$$

Consideremos las siguientes foliaciones curvas generalizadas que tienen a \mathcal{C}_f como única separatriz.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= (-6x^2 y^2 + 6x^5 - 6x^5 y) dx + (4y^3 - 4x^3 y - x^6) dy, \\ \omega_2 &= (-x^7 y^2 + x^7 y - 2x^4 y^3 - 6x^5 y + xy^5 + 6x^5 - 6x^2 y^2) dx + \\ &\quad + (-x^6 y^3 + x^6 y^2 - x^6 - 2x^3 y^4 + y^6 - 4x^3 y + 4y^3) dy. \end{aligned}$$

Para la foliación ω_1 , las curvas polares asociadas son

$$\mathcal{P}_{\omega_1}^{(0)} = -6x^2(x^3y - x^3 + y^2) \quad y \quad \mathcal{P}_{\omega_1}^{(1)} = -3x^5(x^3 + 4y^2),$$

donde $\text{mult}(\mathcal{P}_{\omega_1}^{(0)}) = 4$ y $\text{mult}(\mathcal{P}_{\omega_1}^{(1)}) = 7$.

La curva polar se descompone como

1. $\mathcal{P}_{\omega_1}^{(0)} = \Gamma_1^{(1)}\Gamma_1^{(2)}$, donde $\Gamma_1^{(1)} = -6x^2$ y $\Gamma_1^{(2)} = x^3y - x^3 + y^2$. Las raíces de Newton-Puiseux de $\Gamma_1^{(2)}$ son

$$\begin{aligned} \gamma_{21}(x) &= x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x^{\frac{9}{2}} + \dots, \\ \gamma_{22}(x) &= -x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^{\frac{9}{2}} + \dots. \end{aligned}$$

- Para γ_1 raíz de $\Gamma_1^{(1)}$ tenemos que $\text{cont}(\gamma_1, \mathcal{C}) = 1 < \frac{3}{2} = \frac{\beta_1}{\beta_0}$ pues γ_1 y \mathcal{C} son transversales.
- $\text{cont}(\gamma_{2i}, \mathcal{C}) = \frac{9}{4} = \frac{\beta_2}{\beta_0}$ para $i = 1, 2$. Además

$$\text{mult}(\Gamma_1^{(2)}) = n_1(n_2 - 1) = 2.$$

2. $\mathcal{P}_{\omega_1}^{(1)} = \Gamma_1^{(2)}$, donde $\gamma_1 = -3x^5$ y $\gamma_2 = x^3 + 4y^2$. Las raíces de Newton-Puiseux de γ_2 son

$$\begin{aligned} \gamma_{21}(x) &= \frac{i}{2}x^{\frac{3}{2}} \\ \gamma_{22}(x) &= -\frac{i}{2}x^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

- Para γ_1 raíz de $\Gamma_1^{(2)}$ tenemos que $\text{cont}(\gamma_1, \mathcal{C}) = 1 < \frac{9}{4} = \frac{\beta_2}{\beta_0}$ pues γ_1 y \mathcal{C} son transversales.
- $\text{cont}(\gamma_{2i}, \mathcal{C}) = \frac{3}{2} < \frac{9}{4} = \frac{\beta_2}{\beta_0}$ para $i = 1, 2$.

Obsérvese que este ejemplo nos muestra que no podemos precisar el contacto de las raíces de $\Gamma^{(k+1)}$ con \mathcal{C} sino dar una cota del mismo.

De manera similar para la foliación ω_2 , las curvas polares asociadas son

$$\mathcal{P}_{\omega_2}^{(0)} = -x^7y^2 + x^7y - 2x^4y^3 - 6x^5y + xy^5 + 6x^5 - 6x^2y^2$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\omega_2}^{(1)} &= -2x^7y^3 + 2x^7y^2 - 4x^4y^4 - 12x^5y^2 + 2xy^6 \\ &\quad - 3x^8y^3 + 3x^8y^2 - 6x^5y^4 - 3x^8 + 3x^2y^6 \end{aligned}$$

donde $\text{mult}(\mathcal{P}_{\omega_2}^{(0)}) = 4$ y $\text{mult}(\mathcal{P}_{\omega_2}^{(1)}) = 7$.

La curva polar se descompone como

1. $\mathcal{P}_{\omega_2}^{(0)} = \Gamma_2^{(1)}\Gamma_2^{(2)}$, donde $\Gamma_2^{(1)} = x(-6x+y^3-x^3y^2+\dots)$ y $\Gamma_2^{(2)} = y^2-x^3+\frac{x^8}{6}-\frac{x^9}{64}+\dots$.
Las raíces de Newton-Puiseux de $\Gamma_2^{(1)}$ son $\gamma_1 = x$ y $\gamma_2 = -6x+y^3-x^3y^2+\dots$, donde

- Para γ_i raíz de $\Gamma_2^{(1)}$ tenemos que $\text{cont}(\gamma_i, \mathcal{C}) = 1 < \frac{3}{2} = \frac{\beta_1}{\beta_0}$ pues γ_i y \mathcal{C} son transversales para $i = 1, 2$.

Las raíces de Newton-Puiseux de $\Gamma_2^{(2)}$ son

$$\begin{aligned}\gamma_{21}(x) &= x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x^{\frac{9}{2}} - \frac{1}{12}x^{\frac{13}{2}} + \dots, \\ \gamma_{22}(x) &= -x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^{\frac{9}{2}} + \frac{1}{12}x^{\frac{13}{2}} + \dots.\end{aligned}$$

- $\text{cont}(\gamma_{2i}, \mathcal{C}) = \frac{9}{4} = \frac{\beta_2}{\beta_0}$ para $i = 1, 2$. Además

$$\text{mult}\left(\Gamma_2^{(2)}\right) = n_1(n_2 - 1) = 2.$$

2. $\mathcal{P}_{\omega_2}^{(1)} = \Gamma_2^{(2)} = \gamma_1 \cdot \gamma_2$, donde $\gamma_1 = x y$

$$\gamma_2 = -3x^7y^3 + 3x^7y^2 - 2x^6y^3 + 2x^6y^2 - 6x^4y^4 - 3x^7 - 4x^3y^4 + 3xy^6 - 12x^4y^2 + 2y^6.$$

Las raíces de Newton-Puiseux de γ_2 son

$$\gamma_{21}(x) = \frac{i}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{25i}{384}x^{\frac{7}{2}} + \dots$$

$$\gamma_{22}(x) = -\frac{i}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{25i}{384}x^{\frac{7}{2}} + \dots$$

$$\gamma_{2\alpha}(x) = R(z^4 - 6)x + \left(\frac{3}{32}R(z^4 - 6)^3 - \frac{3}{8}R(z^4 - 6)^3\right)x^2 + \dots,$$

donde $R(z^4 - 6)$ son las raíces de $z^4 = 6$ y $\alpha = 3, 4, 5, 6$.

- Para γ_1 raíz de $\Gamma_2^{(2)}$ tenemos que $\text{cont}(\gamma_1, \mathcal{C}) = 1 < \frac{9}{4} = \frac{\beta_2}{\beta_0}$ pues γ_1 y \mathcal{C} son transversales.
- Para $\gamma_{2\alpha}$ raíz de $\Gamma_2^{(2)}$ tenemos que $\text{cont}(\gamma_{2\alpha}, \mathcal{C}) = 1 < \frac{9}{4} = \frac{\beta_2}{\beta_0}$ pues γ_{2i} y \mathcal{C} son transversales para $\alpha = 3, 4, 5, 6$
- $\text{cont}(\gamma_{2i}, \mathcal{C}) = \frac{3}{2} < \frac{9}{4} = \frac{\beta_2}{\beta_0}$ para $i = 1, 2$.

Ejemplo 3.4.3. Sea $\mathcal{C}_f : ((y^2 - x^3)^2 - x^5y)^3 - x^{15}y(y^2 - x^3) = 0$ una curva irreducible con exponentes característicos (12, 18, 21, 22) y raíces aproximadas $f^{(0)} = y$, $f^{(1)} = y^2 - x^3$ y $f^{(2)} = (y^2 - x^3)^2 - x^5y$. Una de las raíces de Newton-Puiseux de la curva \mathcal{C}_f , es

$$y_1(x) = x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{7}{4}} + \frac{1}{4}x^{\frac{11}{6}} - \frac{1}{48}x^{\frac{23}{12}} + \dots,$$

La foliación curva generalizada

$$\begin{aligned} \omega = & (x^{19}y + x^{18}y^2 + x^{19} - 2x^{18}y + x^{16}y^3 - 2x^{15}y^4 + 18x^{17}y - 6x^{16}y^2 + 6x^{15}y^3 + 6x^{14}y^4 \\ & - 6x^{13}y^5 + 18x^{17} - 51x^{16}y + 48x^{15}y^2 - 30x^{14}y^3 + 15x^{13}y^4 - 3x^{12}y^5 - 15x^{11}y^6 + 3x^{10}y^7 \\ & - 90x^{14}y^2 + 168x^{13}y^3 - 78x^{12}y^4 - 20x^{10}y^6 - 8x^9y^7 + 12x^8y^8 + 180x^{11}y^4 - 198x^{10}y^5 + \\ & + 30x^9y^6 + 15x^7y^8 + 12x^6y^9 - 3x^5y^{10} - 180x^8y^6 + 96x^7y^7 - 6x^4y^{10} - 6x^3y^{11} + 90x^5y^8 \\ & - 15x^4y^9 + xy^{12} + y^{13} - 18x^2y^{10})dx + \\ & (x^{18}y^2 + x^{18}y - 3x^{17}y^2 + 3x^{16}y^3 - 2x^{15}y^4 + x^{18} - 6x^{15}y^3 + 12x^{14}y^4 - 6x^{13}y^5 - 3x^{17} + \\ & + 6x^{16}y - 6x^{15}y^2 + 15x^{12}y^5 - 18x^{11}y^6 + 3x^{10}y^7 - 12x^{15}y + 36x^{14}y^2 - 24x^{13}y^3 - 20x^9y^7 + \\ & + 12x^8y^8 + 60x^{12}y^3 - 90x^{11}y^4 + 18x^{10}y^5 + 15x^6y^9 - 3x^5y^{10} - 120x^9y^5 + 84x^8y^6 - 6x^3y^{11} \\ & + 120x^6y^7 - 27x^5y^8 + y^{13} - 60x^3y^9 + 12y^{11})dy. \end{aligned}$$

tiene a \mathcal{C}_f como única separatriz.

Para la foliación ω , las curvas polares asociadas son

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\omega^{(0)} = & x^{19}y + x^{18}y^2 + x^{19} - 2x^{18}y + x^{16}y^3 - 2x^{15}y^4 + 18x^{17}y - 6x^{16}y^2 + 6x^{15}y^3 + 6x^{14}y^4 \\ & - 6x^{13}y^5 + 18x^{17} - 51x^{16}y + 48x^{15}y^2 - 30x^{14}y^3 + 15x^{13}y^4 - 3x^{12}y^5 - 15x^{11}y^6 + 3x^{10}y^7 \\ & - 90x^{14}y^2 + 168x^{13}y^3 - 78x^{12}y^4 - 20x^{10}y^6 - 8x^9y^7 + 12x^8y^8 + 180x^{11}y^4 - 198x^{10}y^5 + \\ & + 30x^9y^6 + 15x^7y^8 + 12x^6y^9 - 3x^5y^{10} - 180x^8y^6 + 96x^7y^7 - 6x^4y^{10} - 6x^3y^{11} + 90x^5y^8 \\ & - 15x^4y^9 + xy^{12} + y^{13} - 18x^2y^{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\omega^{(1)} = & -144x^{10}y^6 + 66x^{13}y^4 + 6x^{16}y^2 + 24x^{15}y^3 + 18x^{18}y + 2x^{19}y - 4x^{18}y^2 + 18x^{17}y^2 \\ & - 12x^{16}y^3 + 12x^{15}y^4 - 60x^{14}y^4 + 30x^{13}y^5 - 102x^{12}y^5 - 40x^{10}y^7 + 60x^9y^7 + 111x^7y^8 \\ & - 30x^4y^{10} - 9x^{19} + 3x^{20} + 2y^{14} - 7x^{19}y^2 + 11x^{18}y^3 + 38x^{16}y^4 - 22x^{15}y^5 + 57x^{14}y^5 \\ & - 66x^{13}y^6 - 6x^{12}y^6 - 90x^{11}y^7 + 42x^{10}y^8 - 16x^9y^8 + 69x^8y^9 + 30x^7y^9 + 24x^6y^{10} \\ & - 24x^5y^{11} - 12x^4y^{11} - 12x^3y^{12} + 2xy^{13} + 3x^{20}y^2 - 6x^{17}y^4 - 18x^{17}y^3 + 9x^{12}y^7 \\ & - 9x^7y^{10} + 3x^2y^{13}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\omega^{(2)} = & -38x^{21}y^3 + 36x^{20}y^3 - 126x^{19}y^4 + 132x^{18}y^5 - 47x^{18}y^4 - 147x^{17}y^5 + 298x^{16}y^6 + 56x^{15}y^6 \\ & + 302x^{14}y^7 - 328x^{13}y^8 + 5x^{12}y^8 - 330x^{11}y^9 - 74x^9y^{10} + 192x^8y^{11} + 71x^6y^{12} - 28x^3y^{14} \\ & + 5x^{22}y^3 - 4x^{23}y + 19x^{22}y^2 - 10x^{19}y^5 - 17x^{22}y + 14x^{21}y^2 + 28x^{19}y^3 - 84x^{16}y^5 - x^{24} \\ & + 140x^{13}y^7 - 140x^{10}y^9 + 84x^7y^{11} - x^{24}y - 7x^{23}y^2 + 35x^{20}y^4 - 42x^{17}y^6 - 155x^{15}y^7 \\ & + 15x^{14}y^8 + 78x^{12}y^9 - 15x^9y^{11} + 180x^{10}y^{10} - 48x^7y^{12} - 55x^5y^{13} + 5x^4y^{14} + 6x^2y^{15} \\ & + 4y^{16} - 6x^{23} - 48x^{20}y^2 + 114x^{17}y^4 - 60x^{14}y^6 - 28x^4y^{13} + 4xy^{15}. \end{aligned}$$

La curva polar se descompone como

1. $\mathcal{P}_\omega^{(0)} = \Gamma^{(1)}\Gamma^{(2)}\Gamma^{(3)}$, donde $\Gamma^{(1)} = y^3 + \frac{x^3}{27} + \frac{x^2y}{3} + xy^2 + \dots$, $\Gamma^{(2)} = y^2 - x^3$ y $\Gamma^{(3)} = y^8 - 4x^3y^6 + 6x^6y^4 - 2x^5y^5 + \dots$. Las raíces de Newton-Puiseux de $\Gamma^{(1)}$ son

$$\begin{aligned}\gamma_{11}(x) &= \frac{18}{18^{2/3}}x^{2/3} - \frac{1}{3}x + \frac{2}{18^{4/3}}x^{4/3} + \dots, \\ \gamma_{12}(x) &= -\frac{9(1+\sqrt{3}i)}{18^{2/3}}x^{2/3} - \frac{1}{3}x + \frac{(-1+\sqrt{3}i)}{18^{4/3}}x^{4/3} + \dots, \\ \gamma_{13}(x) &= -\frac{9(-1+\sqrt{3}i)}{18^{2/3}}x^{2/3} - \frac{1}{3}x - \frac{(1+\sqrt{3}i)}{18^{4/3}}x^{4/3} + \dots,\end{aligned}$$

tenemos que $\text{cont}(\gamma_{1i}, \mathcal{C}) = \frac{2}{3} < \frac{\beta_1}{\beta_0}$ para $i = 1, 2, 3$. Además

$$\text{mult}(\Gamma^{(1)}) = 3 \geq (n_1 + 1) - 2 = 1.$$

Las raíces de Newton-Puiseux de $\Gamma^{(2)}$ son $\gamma_{21}(x) = x^{3/2}$ y $\gamma_{22}(x) = -x^{3/2}$, para γ_{21} se tiene que $\text{cont}(\gamma_{21}, \mathcal{C}) = \frac{7}{4} = \frac{\beta_2}{\beta_0}$. Además

$$\text{mult}(\Gamma^{(2)}) = n_1(n_2 - 1) = 2.$$

Las raíces de Newton-Puiseux de $\Gamma^{(3)}$ son

$$\begin{aligned}\gamma_{31}(x) &= x^{3/2} + \frac{1}{2}x^{7/4} + \frac{1}{4\sqrt{6}}x^{15/8} + \dots, \\ \gamma_{32}(x) &= x^{3/2} + \frac{1}{2}x^{7/4} - \frac{1}{4\sqrt{6}}x^{15/8} + \dots, \\ \gamma_{33}(x) &= x^{3/2} - \frac{1}{2}x^{7/4} - \frac{i}{4\sqrt{6}}x^{15/8} + \dots, \\ \gamma_{34}(x) &= x^{3/2} - \frac{1}{2}x^{7/4} + \frac{i}{4\sqrt{6}}x^{15/8} + \dots, \\ \gamma_{35}(x) &= -x^{3/2} - \frac{i}{2}x^{7/4} + \frac{(1-i)}{8\sqrt{3}}x^{15/8} + \dots, \\ \gamma_{36}(x) &= -x^{3/2} + \frac{i}{2}x^{7/4} - \frac{(1+i)}{8\sqrt{3}}x^{15/8} + \dots, \\ \gamma_{37}(x) &= -x^{3/2} - \frac{i}{2}x^{7/4} - \frac{(1-i)}{8\sqrt{3}}x^{15/8} + \dots, \\ \gamma_{38}(x) &= -x^{3/2} + \frac{i}{2}x^{7/4} + \frac{(1+i)}{8\sqrt{3}}x^{15/8} + \dots,\end{aligned}$$

para γ_{31} se tiene que $\text{cont}(\gamma_{31}, \mathcal{C}) = \frac{11}{6} = \frac{\beta_3}{\beta_0}$. Además

$$\text{mult}(\Gamma^{(3)}) = n_1n_2(n_3 - 1) = 8.$$

2. $\mathcal{P}_\omega^{(1)} = \Gamma^{(2)}\Gamma^{(3)}$, donde $\Gamma^{(2)} = (\gamma_1)(\gamma_2) = y^6 + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)xy^5 + \frac{3}{10}x^3y^4 - 4x^2y^5 + \dots$, donde a_i , $i = 1, 2, 3, 4$ son las raíces de $z^3 + z^4 = 15$ y $\Gamma^{(3)} = y^8 - 4x^3y^6 + 6x^6y^4 - 2x^5y^5 + \dots$. Las raíces de Newton-Puiseux de γ_1 son

$$\gamma_1(x) = xR(z^3 + z^4 - 15),$$

donde $R(z^3 + z^4 - 15)$ son las raíces de $z^3 + z^4 = 15$. Las raíces de Newton-Puiseux de γ_2 son

$$\begin{aligned}\gamma_{21}(x) &= -i\sqrt{\frac{3}{10}}x^{3/2}, \\ \gamma_{22}(x) &= i\sqrt{\frac{3}{10}}x^{3/2},\end{aligned}$$

para γ_{21} se tiene $\text{cont}(\gamma_{21}, \mathcal{C}) = \frac{3}{2} < \frac{\beta_2}{\beta_0}$. Además $\text{mult}(\Gamma^{(2)}) \geq n_1(n_2 + 1) - 2 = 4$.

Las raíces de Newton-Puiseux de $\Gamma^{(3)}$ son

$$\begin{aligned}\gamma_{31}(x) &= x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{7}{4}} + \frac{\sqrt{143}}{53}x^{\frac{15}{8}} + \dots, \\ \gamma_{32}(x) &= x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{7}{4}} - \frac{\sqrt{143}}{53}x^{\frac{15}{8}} + \dots, \\ \gamma_{33}(x) &= x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{7}{4}} + \frac{i\sqrt{143}}{52}x^{\frac{15}{8}} + \dots, \\ \gamma_{34}(x) &= x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{7}{4}} - \frac{i\sqrt{143}}{52}x^{\frac{15}{8}} + \dots, \\ \gamma_{35}(x) &= -x^{\frac{3}{2}} + \frac{i}{2}x^{\frac{7}{4}} + \frac{(1-i)\sqrt{286}}{104}x^{\frac{15}{8}} + \dots, \\ \gamma_{36}(x) &= -x^{\frac{3}{2}} - \frac{i}{2}x^{\frac{7}{4}} - \frac{(1+i)\sqrt{286}}{104}x^{\frac{15}{8}} + \dots, \\ \gamma_{37}(x) &= -x^{\frac{3}{2}} + \frac{i}{2}x^{\frac{7}{4}} - \frac{(1-i)\sqrt{286}}{104}x^{\frac{15}{8}} + \dots, \\ \gamma_{38}(x) &= -x^{\frac{3}{2}} - \frac{i}{2}x^{\frac{7}{4}} + \frac{(1+i)\sqrt{286}}{104}x^{\frac{15}{8}} + \dots,\end{aligned}$$

para γ_{23} se tiene que $\text{cont}(\gamma_{23}, \mathcal{C}) = \frac{11}{6} = \frac{\beta_3}{\beta_0}$. Además

$$\text{mult}(\Gamma^{(3)}) = n_1n_2(n_3 - 1) = 8.$$

3. $\mathcal{P}_\omega^{(2)} = \Gamma^{(3)}$, donde $\Gamma^{(3)} = (\gamma_1)(\gamma_2)(\gamma_3)(\gamma_4) = -38x^{21}y^3 + 36x^{20}y^3 - 126x^{19}y^4 + 132x^{18}y^5 - 47x^{18}y^4 - 147x^{17}y^5 + 298x^{16}y^6 + 56x^{15}y^6 + 302x^{14}y^7 - 328x^{13}y^8 + 5x^{12}y^8 - 330x^{11}y^9 - 74x^9y^{10} + 192x^8y^{11} + 71x^6y^{12} - 28x^3y^{14} + 5x^{22}y^3 - 4x^{23}y + 19x^{22}y^2 - 10x^{19}y^5 - 17x^{22}y + 14x^{21}y^2 + 28x^{19}y^3 - 84x^{16}y^5 - x^{24} + 140x^{13}y^7 - 140x^{10}y^9 + 84x^7y^{11} - x^{24}y - 7x^{23}y^2 + 35x^{20}y^4 - 42x^{17}y^6 - 155x^{15}y^7 + 15x^{14}y^8 + 78x^{12}y^9 - 15x^9y^{11} + 180x^{10}y^{10} - 48x^7y^{12} - 55x^5y^{13} + 5x^4y^{14} + 6x^2y^{15} + 4y^{16} - 6x^{23} - 48x^{20}y^2 + 114x^{17}y^4 - 60x^{14}y^6 - 28x^4y^{13} + 4xy^{15}$.

La raíz de Newton-Puiseux de γ_1 es $\gamma_1(x) = -x$. Las raíces de Newton-Puiseux de γ_2 son

$$\begin{aligned}\gamma_{21}(x) &= -\frac{i}{\sqrt{10}}x^{\frac{3}{2}}, \\ \gamma_{22}(x) &= \frac{i}{\sqrt{10}}x^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

Las raíces de Newton-Puiseux de γ_3 son

$$\begin{aligned}\gamma_{31}(x) &= -x^{\frac{3}{2}} + \frac{\sqrt{858}}{132}x^{\frac{7}{4}} + \dots, \\ \gamma_{32}(x) &= -x^{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{858}}{132}x^{\frac{7}{4}} + \dots, \\ \gamma_{33}(x) &= x^{\frac{3}{2}} - \frac{i\sqrt{858}}{132}x^{\frac{7}{4}} + \dots, \\ \gamma_{34}(x) &= x^{\frac{3}{2}} + \frac{i\sqrt{858}}{132}x^{\frac{7}{4}} + \dots.\end{aligned}$$

Una de las raíces de Newton-Puiseux de γ_4 es

$$\gamma_{41}(x) = \sqrt[9]{15}x^{\frac{13}{9}} + \frac{17(15)^{\frac{8}{9}}}{450}x^{\frac{14}{9}} + \dots,$$

para γ_{33} se tiene que $\text{cont}(\gamma_{23}, \mathcal{C}) = \frac{7}{4} < \frac{\beta_3}{\beta_0}$. Además

$$\text{mult}(\Gamma^{(3)}) \geq n_1n_2(n_3 + 1) - 2 = 14.$$

Obsérvese que este ejemplo nos muestra que no podemos precisar el contacto de las raíces de $\Gamma^{(k+1)}$ con \mathcal{C} sino dar una cota del mismo.

En el siguiente ejemplo observamos que la multiplicidad de la curva polar $\mathcal{P}_\omega^{(k)}$ no la podemos determinar exclusivamente con el tipo topológico de la rama $f(x, y) = 0$ y esto se debe a que en general no podemos controlar la multiplicidad del primer paquete $\Gamma^{(k+1)}$. Vamos a considerar dos foliaciones diferentes ω_1 y ω_2 con la misma separatriz y observaremos que la multiplicidad de $\mathcal{P}_{\omega_1}^{(k)}$ y $\mathcal{P}_{\omega_2}^{(k)}$ son diferentes para $k = 0, 1$.

Ejemplo 3.4.4. Sea $\mathcal{C}_f : (y^2 - x^{11})^2 - x^{17}y = 0$ una curva irreducible con exponentes característicos $(4, 22, 23)$. Consideremos

$$\omega_1 = (x^{23} + x^{22}y + 22x^{21} - x^{18}y - x^{17}y^2 - 17x^{16}y - 2x^{12}y^2 - 2x^{11}y^3 - 22x^{10}y^2 + xy^4 + y^5)dx + (x^{23} - x^{18}y - x^{17} - 2x^{12}y^2 - 4x^{11}y + xy^4 + 4y^3)dy,$$

$$\omega_2 = (x^{27}y - x^{22}y^2 + 22x^{21} - 2x^{16}y^3 - 17x^{16}y - 22x^{10}y^2 + x^5y^5)dx + (x^{22}y^5 - x^{17}y^6 - 2x^{11}y^7 - x^{17} - 4x^{11}y + y^9 + 4y^3)dy,$$

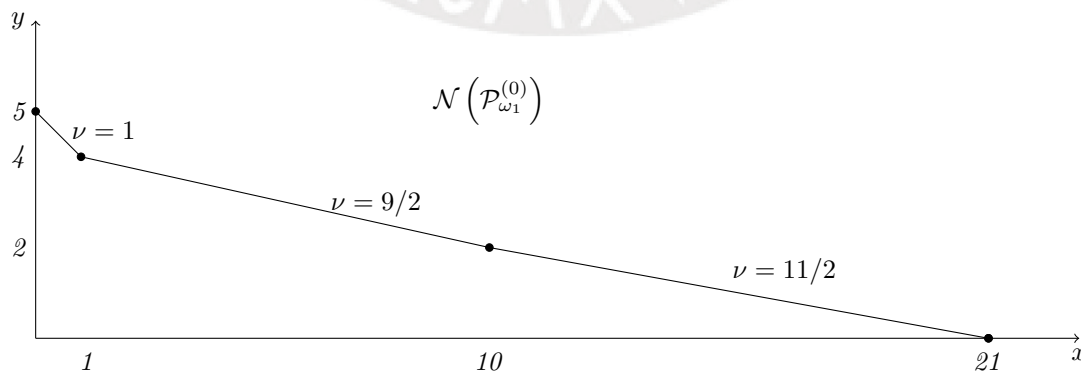
foliaciones que tienen a \mathcal{C}_f como separatriz. Las raíces aproximadas de \mathcal{C}_f son $f^{(0)} = y$ y $f^{(1)} = y^2 - x^{11}$, así

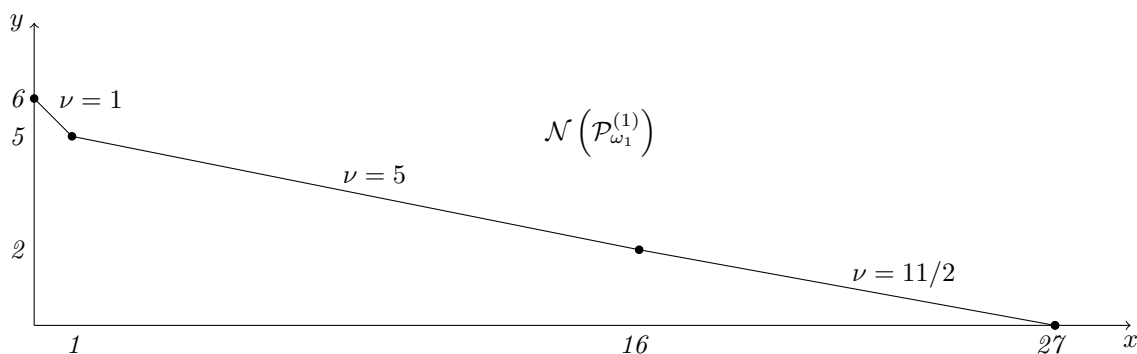
$$\mathcal{P}_{\omega_1}^{(0)} = x^{23} + x^{22}y + 22x^{21} - x^{18}y - x^{17}y^2 - 17x^{16}y - 2x^{12}y^2 - 2x^{11}y^3 - 22x^{10}y^2 + xy^4 + y^5,$$

y

$$\mathcal{P}_{\omega_1}^{(1)} = 11x^{33} - 11x^{28}y - 11x^{27} + 2x^{23}y - 20x^{22}y^2 - 2x^{18}y^2 - 2x^{17}y^3 - 34x^{16}y^2 - 4x^{12}y^3 + 7x^{11}y^4 + 2xy^5 + 2y^6,$$

donde $\text{mult}(\mathcal{P}_{\omega_1}^{(0)}) = 5$ y $\text{mult}(\mathcal{P}_{\omega_1}^{(1)}) = 6$.





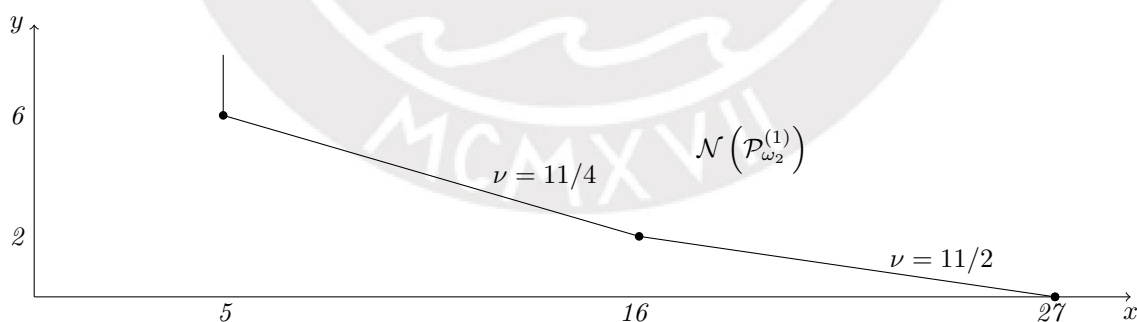
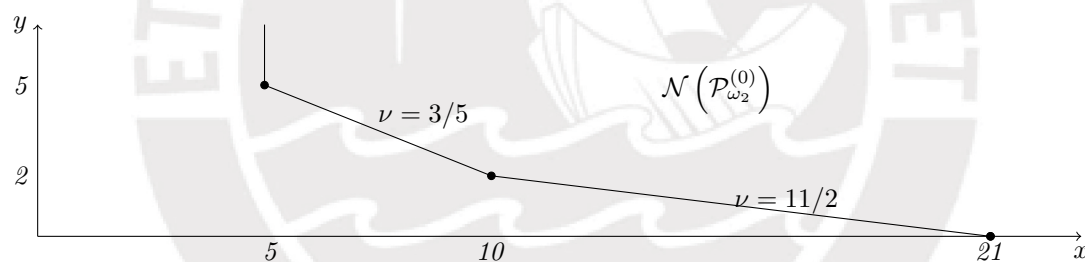
Además

$$\mathcal{P}_{\omega_2}^{(0)} = x^{27}y - x^{22}y^2 + 22x^{21} - 2x^{16}y^3 - 17x^{16}y - 22x^{10}y^2 + x^5y^5$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\omega_2}^{(1)} &= 11x^{32}y^5 - 11x^{27}y^6 + 2x^{27}y^2 - 22x^{21}y^7 - 11x^{27} - 2x^{22}y^3 \\ &\quad - 4x^{16}y^4 + 11x^{10}y^9 - 34x^{16}y^2 + 2x^5y^6, \end{aligned}$$

donde $\text{mult}(\mathcal{P}_{\omega_2}^{(0)}) = 10$ y $\text{mult}(\mathcal{P}_{\omega_2}^{(1)}) = 11$.



Observación 3.4.5. Del ejemplo anterior concluimos que no podemos, haciendo uso exclusivamente del tipo topológico de \mathcal{C}_f , controlar la multiplicidad del primer paquete y por tanto tampoco la de la curva polar. La multiplicidad de $\Gamma^{(i)}$, $k+2 \leq i \leq g$ solo depende del tipo topológico de \mathcal{C}_f ; sin embargo $\Gamma^{(k+1)}$ no.

Observación 3.4.6. La prueba del Teorema 3.4.1 se apoya en resultados donde se usa la expresión (1.7). Uno de los puntos claves es el uso de la aplicación F_l definida en (1.28)

donde interviene la truncación T_l . Ello sugiere que si reemplazamos $f^{(k)} = 0$ por otra rama $g = 0$ que tenga la misma truncación T_l , y verifique las propiedades de la Proposición 1.1.51, entonces el resultado sería también cierto.

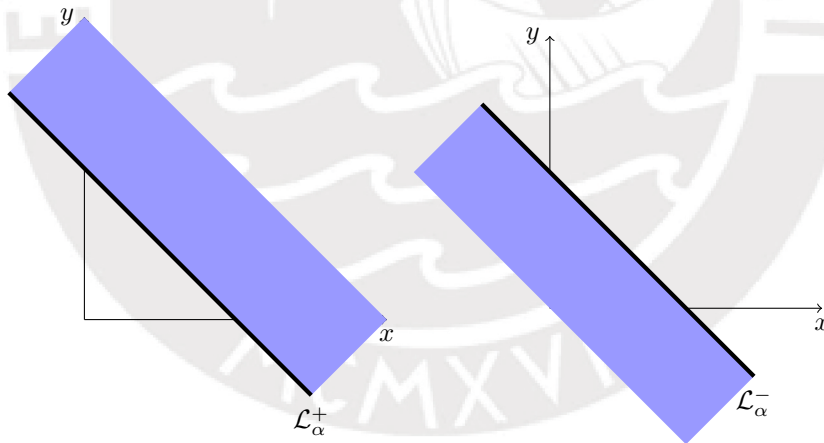


Geometría Plana

Decimos que \mathcal{L} tiene inclinación α si $-\frac{1}{\alpha}$ es la pendiente de \mathcal{L} . Dado $\lambda \in \mathbb{Q}^+$ consideremos la recta $\mathcal{L}_\alpha : x + \alpha y = c$. Denotamos

$$\mathcal{L}_\alpha^+ = \{(x, y) : x + \alpha y \geq c\} \text{ y } \mathcal{L}_\alpha^- = \{(x, y) : x + \alpha y \leq c\}. \quad (1.1)$$

Llamamos a \mathcal{L}_α^+ el hiperplano superior de \mathcal{L}_α y a \mathcal{L}_α^- el hiperplano inferior de \mathcal{L}_α .



Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ con $\lambda_1 < \lambda_2$ y $(a, b) \in \mathbb{Z}_{>0}^2$. Para todo $\lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[$ denotemos por \mathcal{L}_λ la recta de pendiente $-\frac{1}{\lambda}$ y que pasa por (a, b) . La ecuación de la recta es $\mathcal{L}_\lambda : x + \lambda y = a + \lambda b$.

Proposición A.0.1. $\mathcal{L}_\lambda \subseteq (\mathcal{L}_{\lambda_1}^- \cap \mathcal{L}_{\lambda_2}^+) \cup (\mathcal{L}_{\lambda_1}^+ \cap \mathcal{L}_{\lambda_2}^-)$ con $\lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[$.

Demostración. Los puntos de corte de \mathcal{L}_λ con los ejes $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$ son

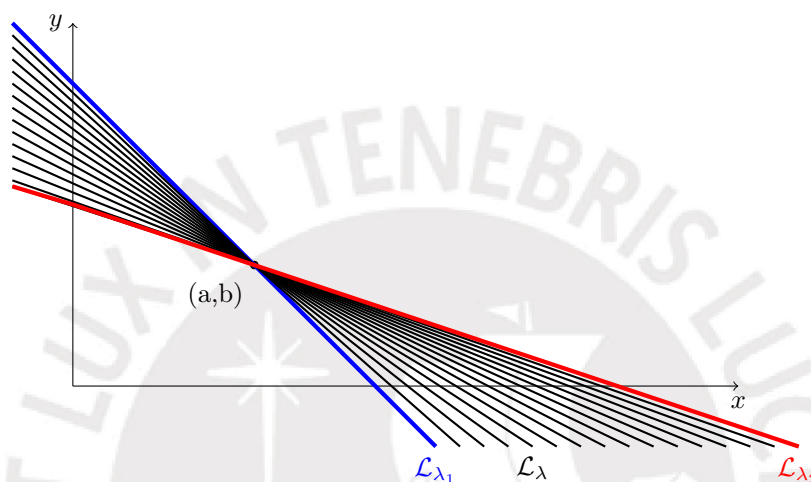
$$\mathcal{L}_\lambda \cap \{x = 0\} = \left\{ \left(0, \frac{a}{\lambda} + b \right) \right\} \text{ y } \mathcal{L}_\lambda \cap \{y = 0\} = \left\{ (a + \lambda b, 0) \right\}.$$

Por otra parte como $\lambda_1 < \lambda_2$ se tiene $a + \lambda_1 b < a + \lambda_2 b$ y $\frac{a}{\lambda_1} + b > \frac{a}{\lambda_2} + b$.

Como $\lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[$, observamos que

$$a + \lambda_1 b < a + \lambda b < a + \lambda_2 b \quad \text{y} \quad \frac{a}{\lambda_2} + b < \frac{a}{\lambda} + b < \frac{a}{\lambda_1} + b,$$

de donde concluimos que $\mathcal{L}_\lambda \subseteq (\mathcal{L}_{\lambda_1}^- \cap \mathcal{L}_{\lambda_2}^+) \cup (\mathcal{L}_{\lambda_1}^+ \cap \mathcal{L}_{\lambda_2}^-)$ como se observa en la siguiente gráfica.



□

Observaciones A.0.2. 1. Como $\lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[$ hay infinitas rectas

$$\mathcal{L}_\lambda \subseteq (\mathcal{L}_{\lambda_1}^- \cap \mathcal{L}_{\lambda_2}^+) \cup (\mathcal{L}_{\lambda_1}^+ \cap \mathcal{L}_{\lambda_2}^-).$$

2. En $(\mathcal{L}_{\lambda_1}^- \cap \mathcal{L}_{\lambda_2}^+)$ hay un número finito de puntos $(c, d) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ donde $c \in [0, a]$ y $d \in [b, \frac{a}{\lambda_1}]$. De manera similar en $(\mathcal{L}_{\lambda_1}^+ \cap \mathcal{L}_{\lambda_2}^-)$ hay un número finito de puntos con coordenadas enteras cuya abscisa varía en $[a, a + \lambda_2 b]$ y ordenada varía en $[0, b]$.

Conclusiones

Resumiremos las principales conclusiones de este trabajo, obtenidas a lo largo del desarrollo del mismo.

Un importante tipo de foliaciones son las foliaciones curvas generalizadas, llamadas así por su comportamiento muy similar, desde el punto de vista topológico y formal, a las curvas analíticas. Rouillé [R1] probó, que para este tipo de foliaciones, el polígono de Newton de la foliación y su separatriz coinciden. Sin embargo, esta propiedad no caracteriza las foliaciones curvas generalizadas. Hemos conseguido caracterizar las foliaciones cuyo polígono de Newton coinciden con el polígono de su separatriz, estas foliaciones son llamadas foliaciones de segundo tipo.

La familia de foliaciones con singularidades cuspidales $\mathcal{F}_{\omega_{p,q,\Delta}}$ estudiadas por Loray, son de segundo tipo, si y solo si, el orden pesado de Δ con respecto a p, q es mayor o igual a $\frac{pq-p-q}{\text{mcd}(p,q)}$. Dicha foliación es curva generalizada si y solo si dicho orden pesado es estrictamente mayor que $\frac{pq-p-q}{\text{mcd}(p,q)}$. Por tanto $\mathcal{F}_{\omega_{p,q,\Delta}}$ admite la misma reducción de singularidades que su conjunto de separatrices $C(\mathcal{F}) = y^p - x^q$ cuando $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Finalmente, las foliaciones no dicríticas curvas generalizadas con separatriz irreducible admiten la descomposición de la curva polar de la foliación asociada a sus raíces aproximadas. Y dado que las foliaciones no dicríticas de segundo tipo con separatriz irreducible son curva generalizada, las mismas también admiten descomposición de su polar. Además sugerimos que si cambiamos la raíz aproximada por otra rama con su mismo tipo topológico y mismo contacto con la separatriz de la foliación también se verifica dicho teorema. Tras el desarrollo de este trabajo nos planteamos algunas preguntas. Mencionamos algunas de ellas:

- Si una foliación \mathcal{F}_ω no dicrítica (o dicrítica) y su unión de separatrices (o ecuación balanceada) tienen la misma reducción de singularidades entonces, ¿qué tipo de foliación es \mathcal{F}_ω ?
- ¿Se puede caracterizar a las foliaciones de segundo tipo dicrítica con su polígono de Newton?
- Generalizar la descomposición de las curvas polares a otras familias de foliaciones.

Bibliografía

- [A-M] S. ABHYANKAR AND T. MOH. *Newton-Puiseux exansions and generalized Tschirnhausen transformation*. I, II, J. Reine Angew. Math., 260.(1973), 47-83; 261 (1973).
- [Be-Me-Sa] M. BERTHIER, R. MEZIANI AND P. SAD. *On the classification of nilpotent singularities*. Bull. Sci. Math. 123 (1999), 351-370.
- [B] K. BRAUNER. *Zur geometrie der funktionen zweier komplxe ver anderlichen*. Alh. Math. Sem. Hamburgo.(1928).
- [Br1] M. BRUNELLA. *Some Remarks on Indices of Holomorphic Vector Fields*. Publicacions Matemàtiques, Vol 41. (1997), 527-544.
- [Br2] M. BRUNELLA. *Birational Geometry of Foliations*. IMPA, monografias. Springer (2010).
- [C-N] C. CAMACHO AND L. NETO. *Introdução a Teoría das Folheações*. 11 Colóquio Brasileiro de Matemática. 1977.
- [C-S1] C. CAMACHO AND P. SAD. *Invariant Varieties Through Singularities of Holomorphic Vector Fields*. Ann. of Math., 115, (1982), 579-595.
- [C-S2] C. CAMACHO AND P. SAD. *Pontos Singulares de Ecuaciones Diferenciales Analíticas*. 16 Coloquio Brasileiro de Matemática, IMPA.(1987).
- [C-L-S] C. CAMACHO, A. LINS NETO AND P. SAD. *Topological Invariants and Equidesingularisation for Holomorphic Vector Fields*. J. Differential Geometry, 20, (1984), pp. 143-174.

- [CJ] J. CANO. *An extension of the Newton-Puiseux polygon construction to give solution of pfaffian form.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble.(1993), 43, 1, 125-142.
- [CF-Co-Mol] F. CANO, N. CORRAL AND R. MOL. *Local polar invariants for plane singular foliations.* arXiv:math/1508.06882.(2015).
- [Ca-Le] V. CAVALIER - D. LEHMANN. *Localisation des résidus de Baum-Bott, courbes généralisées et K-théorie. I. Feuilletages dans C^2 .* Compos. Math. Helv. 76 (2001), no. 4, 665-668.
- [Ce-Mou] D. CERVEAU AND R. MOUSSU. *Groupes d'automorphismes de $(\mathbb{C}, 0)$ et équations différentielles $ydy + \dots = 0$,* Bull. Soc. Math. France 116 (1988) 459-488.
- [Co1] N. CORRAL. *Curvas polares de una foliación singular.* Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid, (2001).
- [Co2] N. CORRAL. *Sur la topologie des courbes polaires de certains feuilletages singuliers.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble.(2003), 53, 3, 787-814.
- [CH] A. CHECINER. *Courbes Algébriques Planes.* Springer Berlin Heidelberg New York.(1978).
- [Do] M. DO CARMO. *Differential Forms and Applications.* Springer Verlag.(2000).
- [Du] H. DULAC. *Solutions d'un Système d'Équations Différentielles dans le Voisinage des Valeurs Singulières.* Bull. Soc. Math. France 40.(1912).
- [F-Mo-N] P. FERNÁNDEZ - J. MOZO - H. NECIOSUP. *On codimension one foliations with prescribed cuspidal separatrix.* J. Differential Equations 256 (2014), 1702-1717.
- [GB] E. GARCÍA BARROSO. *Invariants des singularités de courbes planes et courbure des fibres de Milnor.* Thèse, École Normale Supérieure, LMENS-96-35, 1996.
- [GB-G1] E. GARCÍA BARROSO-J.GWOŹDZIEWICZ. *A discriminant criterion of irreducibility.* Kodai Math. J. (2012), Vol. 35, (2), 403-414.
- [GB-G2] E. GARCÍA BARROSO-J.GWOŹDZIEWICZ. *On the approximate Jacobian Newton diagrams of an irreducible plane curve.* J. Math. Soc. Japan (2013), Vol. 65, (1), 169-182.
-

- [GB-G3] E. GARCÍA BARROSO-J.GWOŹDZIEWICZ. *Decompositions of the higher order polars of plane branches*. ArXiv:1602.01143v1 (2016), 1-15.
- [Ge] Y. GENZMER. *Rigidity for dicritical germ of foliation in \mathbb{C}^2* . Int. Math. Res. Not. IMRN, (19): Art. ID rnm 072, 14, (2007).
- [Ge-Mol] Y. GENZMER-R. MOL. *The Poincaré Problem in the dicritical case*. Preprint. (2015).
- [Gu-Ro] R. GUNNING-H. ROSSI. *Analytic Functions of Several Complex Variables*. Prentice-Hall. (1965).
- [HA] A. HEFEZ. *Irreducible Plane Curve Singularities*. Sixth Workshop at Sao Carlos. (2003), 1-120.
- [Kuo-Lu] T.C.KUO - Y.C. LU. *On Analytic Function Germs of Two Complex Variables*. Topology 16, (1977), 299-310.
- [Lo] F. LORAY. *Réduction formelle des singularités cuspidales de champs de vecteurs analytiques*. J. Differential Equations 158 (1999), 152-173.
- [L-H] L. LOPEZ-HERNANZ. *Summable formal invariant curves of diffeomorphisms*. Ergodic Theory Dynam. Systems, 32, 1 (2012), 211-221.
- [Ma-Mou] J. MATTEI-R. MOUSSU. *Holonomie et intégrale première*. Ann. Scient. Ecole. Norm. Sup 13 (1980), 571-621.
- [Mar-Ra] J. MARTINET - J. RAMIS. *Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre*. Publ. Math. I.H.É. 55 (1982), 63-164.
- [Ma-Sa] J.-F. MATTEI, E. SALEM. *Modules formels locaux de feuilletages holomorphes*. arXiv:math/0402256 (2004).
- [Mer] M. MERLE. *Invariants polaires des courbes planes*. Invent. Math. 41, (1997), 103-111.
- [Me] R. MEZIANI. *Probleme de module pour des equations differentielles dégénérées de $(\mathbb{C}^2, 0)$* . Tesis Doctoral. Université de Rennes I (1992).
- [Me] R. MEZIANI. *Classification analytique d'équations différentielles $ydy + \dots = 0$ et espaces de modules*. Bol. Soc. Brasil Mat. 27 (1996), 23-53.
-

- [Me-Sad] R. MEZIANI - P. SAD. *Singularités nilpotentes et intégrales premières*. Publ. Mat. 51 (2007), 143-161.
- [Mo] J. MOZO. *Clasificación analítica de foliaciones holomorfas singulares*. Monografías del IMCA. 2010.
- [R1] P. ROUILLE. *Sur les polaires des certaines 1-formes*. C. R. Acad. Sci. Paris Série I, Math. 326(1998). no. 6, 677-680.
- [R2] P. ROUILLE. *Théorème de Merle: cas des 1-formes de type courbes généralisées*. Bol. Soc. Mat. (1999). Vol. 30, (3), 293-314.
- [S] A. SEIDENBERG. *Reduction of Singularities of the Differentiable Equation $A dY = B dX$* . Amer. Journal of Math. 90, (1968), P. 248-269.
- [St] E. STRÓZYNA. *The analytic and formal normal form for the nilpotent singularity. The case of case generalized saddle-node* Bull. Sci. Math. 126 (2002), 555-579.
- [Ta] F. TAKENS. *Singularities of vectors fields*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 43 (1974) 47-100.
- [Te] B. TEISSIER. *The hunting of invariants in the geometry of discriminants*. Real and complex singularities (Proc. Ninth Nordic Summer School NAVF Sympos. Math., Oslo, 1976), pp. 565–678. Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1977.
- [Z] O. ZARISKI. *Le problème des modules pour les branches planes*. Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, 1973. Rediton Hermann, 1986.
-

Índice alfabético

- ν -forma inicial pesada, 44
 ν -orden pesado, 44
- curva polar $P_{(a,b)}^{\mathcal{F}}$, 57
singularidad no degenerada, 34
- coeficientes de ω , 30
componentes homogéneas, 10
conjunto singular, 30
cono tangente de la foliación, 30
contacto, 21
contacto maximal, 23
contribución, 44
curva generalizada no dicrítica, 39
curva polar de ω asociada a su raíz aproximada característica $f^{(k)}$, 80
curva regular, 11
curva singular, 11
curvas generalizadas, 39
- desigualdad triangular, 21
divisor excepcional, 33
- ecuación reducida, 34
equisingulares, 18
explosión dicrítica, 34
explosión en el origen, 33
explosión no dicrítica, 34
exponentes característicos, 17
- foliación holomorfa singular de codimensión uno, 29
forma inicial, 10
función analítica, 10
- germen de curva, 10
germen de foliación analítica singular, 30
germen de foliación formal, 30
grado pesado, 65
- imagen inversa, 47, 74
imagen inversa de la polar, 81
imagen inversa de una foliación, 30
invariante, 31
lado principal, 46
- multiplicidad de curva analítica, 11
multiplicidad de intersección, 22
multiplicidad del germen de foliación, 30
- número de intersección polar, 57
número de Milnor de una foliación, 41
- orden pesado, 13, 65
- parametrizaciones de Puiseux, 16
pares característicos, 18
parte inicial pesada, 13
polígono de Newton, 12, 44
polinomio de Weierstrass, 14

- raíz aproximada, 25
- rama analítica, 11
- recta de apoyo, 12
- recta tangente, 11
- rectas transversales, 11
- reducción mínima, 37
- reducción de singularidades, 36
- reducción de singularidades o desingularización, 36
- segundo tipo, 6, 50, 52, 62
- semigrupo de valores, 19
- separatriz convergente o analítica, 31
- separatriz débil, 35
- separatriz formal, 31
- separatriz fuerte, 35
- silla nodo tangente, 51
- silla nodo transversa, 51
- singularidad nilpotente, 63
- singularidad silla nodo, 35
- singularidad simple o reducida, 34
- singularidades cuspidales, 65
- solución de una foliación, 30
- soporte, 12, 44
- tipo polar genérico, 57
- transformación de Tschirnhaus, 14
- truncación, 24
- unión de separatrices convergentes, 34
- unión de separatrices formales, 34
- variedad compleja de dimensión n , 29