

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE POSGRADO



Aspectos geométricos de la teoría de curvas algebraicas

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGISTER EN
MATEMÁTICAS

AUTOR

Mery Enny Egúsquiza Gallo

ASESOR:

Dr. Rudy José Rosas Bazán

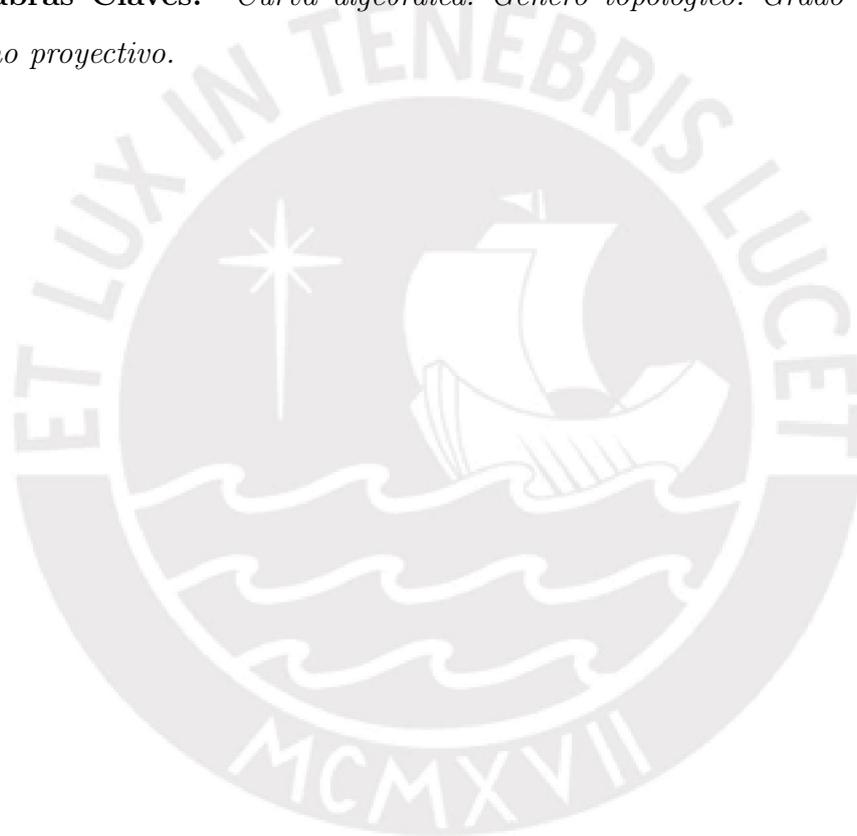
Septiembre

2018

RESUMEN

En el presente trabajo se introduce el concepto de curva algebraica afín y se presenta el proceso de compactificación como curvas algebraicas proyectivas. El objetivo de la tesis es presentar una demostración geométrica de la fórmula “grado género” de una curva lisa. Este teorema relaciona el género topológico de una curva con su grado algebraico.

Palabras Claves: *Curva algebraica. Género topológico. Grado algebraico. Plano proyectivo.*



Egúsqiza Gallo Mery Enny

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Escuela de Posgrado, de la PUCP, como parte de los requisitos para obtener el grado académico de Magister en Matemáticas.

Miembros de Jurado:

Dr. Percy Fernández (presidente)

Dr. Arturo Fernández (miembro)

Dr. Rudy Rosas (asesor)

Lima - Perú

2018

Este trabajo está dedicado a mi padre, Yvan Egúsquiza Espíritu, y a mi madre Mery Gallo Cruz. Gracias, mamá, por tu complicidad y papá por cuidarme siempre... A mis hermanos y a mi pequeño Yerik.



Agradecimientos

Gracias Dios, por poner siempre a las personas correctas en mi camino.
Por orientar el presente trabajo, todos mis agradecimientos para mi guía Rudy Rosas, gracias por tu disposición, paciencia y modo particular de enseñarme tus conocimientos.

A mis queridos amigos por estar siempre a mi lado cuando más los he necesitado, Iris y José María.



Índice general

	Pág
Introducción	1
1. Preliminares y conceptos básicos	2
1.1. Espacios topológicos	2
1.2. La recta proyectiva real	2
1.3. El plano proyectivo real	8
1.4. El plano proyectivo complejo	8
1.5. Algunos conceptos básicos de álgebra	10
1.6. Funciones holomorfas	14
1.7. Conjuntos algebraicos afines	18
1.8. Conjuntos algebraicos proyectivos	23
1.9. Relación entre variedad algebraica afín y variedad algebraica proyectiva	26
2. Automorfismos de \mathbb{CP}^2	32
3. Curvas lisas y puntos al infinito	36
4. Característica de Euler-Poincaré	48
4.1. Campos de vectores en superficies	48
4.2. Género de una superficie	57
4.3. Relación entre género y característica de Euler-Poincaré	60
5. Vectores en \mathbb{CP}^2	62
5.1. Vectores tangentes a una curva proyectiva	62

5.2. Campos holomorfos inducidos por parametrizaciones	65
5.3. Campos meromorfos inducidos por parametrizaciones	72
6. Fórmula grado género	75
Referencias Bibliográficas	80



Introducción

En el presente trabajo nos proponemos estudiar algunos aspectos geométricos de la teoría de curvas algebraicas sobre el espacio proyectivo complejo 2-dimensional \mathbb{CP}^2 . Debemos tener en cuenta que todas las gráficas presentadas sólo son representaciones sencillas para ayudar a la comprensión del trabajo. Iniciamos con una revisión de todos los conceptos básicos que usamos en el desarrollo de la tesis, con el objetivo de que, en la medida de lo posible, el trabajo sea autocontenido. Se presenta la definición de grado de una curva y algunos resultados sobre los automorfismos de \mathbb{CP}^2 . En seguida, se estudian los ejemplos básicos de curvas y se presenta una caracterización de las ecuaciones cúbicas que definen curvas lisas. Se relaciona el concepto de curva afín con el de curva proyectiva por medio del estudio de los puntos al infinito de una curva. El cuarto y quinto capítulo se destinan a presentar las nociones topológicas de género y característica de una superficie. Para finalizar, en el caso de curvas lisas, mostramos que el concepto topológico de género se relaciona con el grado algebraico de una curva por medio de la ecuación $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$.

Capítulo 1

Preliminares y conceptos básicos

En este capítulo presentamos una serie de conceptos y resultados preliminares. Por tratarse de nociones básicas, en algunos casos no desarrollaremos demostraciones.

1.1. Espacios topológicos

Definición 1.1.1. Un espacio topológico es un par (X, τ) , donde X es un conjunto y τ es una familia de subconjuntos de X que verifica las condiciones siguientes:

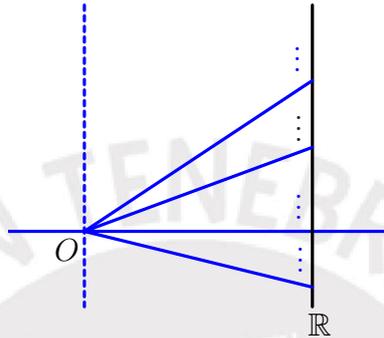
1. $\emptyset \in \tau, X \in \tau$
2. $X_1 \in \tau, X_2 \in \tau$ entonces $X_1 \cap X_2 \in \tau$
3. Dada una familia $\{X_i\}_{i \in I}$ de elementos de τ , entonces $\bigcup_{i \in I} X_i \in \tau$.

Diremos entonces que la familia τ es una topología sobre X y a sus elementos les llamaremos conjuntos abiertos de (X, τ) . Los complementos en X de los conjuntos abiertos son llamados conjuntos cerrados.

1.2. La recta proyectiva real

Sea j el conjunto de rectas que pasa por el origen O , situado en la gráfica adjunta. De la gráfica, se observa que existe una aplicación inyectiva $\varphi : j \rightarrow \mathbb{R}$,

definida como $\varphi(l) = \text{pend}(l)$, donde $l \in \mathcal{J}$ y $\text{pend}(l)$: pendiente de l . Sin embargo, esta no es sobreyectiva, pues no existe un punto en \mathbb{R} que determine dicha recta paralela que pasa por O . Sin embargo, si a \mathbb{R} le agregamos un punto en el infinito, donde se interseca con dicha recta paralela que pasa por O , entonces tendríamos una biyección entre los conjuntos \mathcal{J} y $\mathbb{R} \cup \{\text{punto en el infinito}\}$.

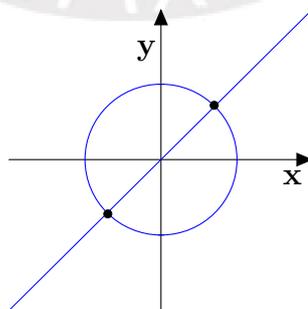


Definimos el conjunto $\mathbb{RP}^1 = \{\text{rectas que pasan por el origen en } \mathbb{R}^2\}$, el cual llamaremos **recta proyectiva** o **espacio proyectivo de dimensión 1**.

Otra manera de ver a \mathbb{RP}^1 es como un cociente de la circunferencia S^1 . Un punto de la circunferencia determina una recta que pasa por el origen. Además, observemos de la gráfica adjunta que el punto antípoda determina la misma recta. Entonces, definamos sobre S^1 la relación siguiente:

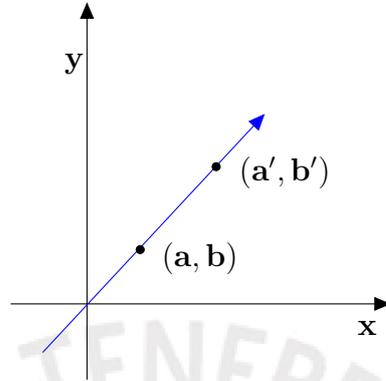
$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \vee x = -y,$$

la cual es de equivalencia.



Ya que \mathbb{RP}^1 es el conjunto de rectas que pasan por el origen, entonces para determinar una de estas rectas sólo necesitamos otro punto, es decir, un par

$(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Sin embargo, observemos que distintos puntos en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ pueden determinar la misma recta en \mathbb{RP}^1 , como se muestra en la figura adjunta.



Observemos que los puntos (a, b) y (a', b') son múltiplos uno del otro. Entonces, definamos la siguiente relación (la cual es de equivalencia) entre dichos puntos como:

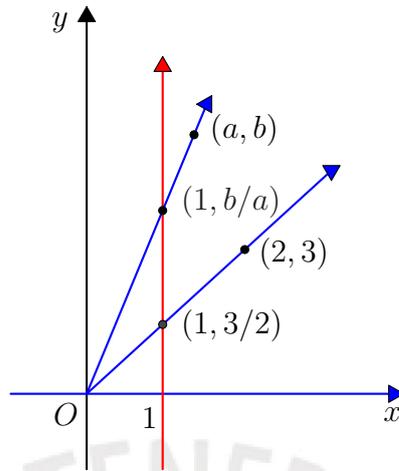
$$(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow \exists t \neq 0 \text{ tal que } (a, b) = t(a', b').$$

A la clase del punto (a, b) se denotará por $[a : b]$. Así, podemos escribir

$$\mathbb{RP}^1 = \frac{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}{\sim} = \{[a : b] : a \neq 0 \vee b \neq 0\}.$$

La notación $[a : b]$ para los puntos de \mathbb{RP}^1 se conoce como **coordenadas homogéneas** en \mathbb{RP}^1 .

Ahora, pensemos en un punto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ con abscisa diferente de cero: por ejemplo $(2, 3)$ define una recta que pasa por el origen, sin embargo dicha recta $[2 : 3]$ tiene muchos representantes: $[2 : 3] = [4 : 6] = [1 : \frac{3}{2}]$. Entre estos representantes existe uno particular, el cual queremos para nuestro modelo, donde la primera coordenada es igual a 1. Si consideramos un punto (a, b) con $a \neq 0$, entonces siempre podemos dividir por a y encontrar el punto equivalente $(1, \frac{b}{a})$.



Geoméricamente, lo que está pasando, como se muestra en la gráfica anterior, es que estamos trazando la recta $x = 1$ (recta roja) y en realidad lo que se tendría es el subconjunto de rectas que pasa por el origen sin considerar el eje y (rectas azules) $U_0 = \{[a_0 : a_1] : a_0 \neq 0\}$ de \mathbb{RP}^1 . Si tomamos un punto diferente del origen en una recta azul, inmediatamente obtenemos un punto en la recta roja; esto quiere decir que existe una biyección entre el conjunto de las rectas azules y la recta roja $\varphi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi_0([a_0 : a_1]) = \frac{a_1}{a_0}.$$

Veamos que φ_0 esté bien definida: sea $[a_0 : a_1] = [b_0 : b_1]$, con $a_0, b_0 \neq 0$, entonces existe $t \neq 0$ tal que $a_0 t = b_0$ y $a_1 t = b_1$, de donde $\frac{b_1}{b_0} = \frac{a_1}{a_0}$. Por otro lado, observemos que el subconjunto U_0 no cubre todo \mathbb{RP}^1 , pues el eje y no está en U_0 . Definamos así $U_1 = \{[a_0 : a_1] : a_1 \neq 0\}$ y de manera análoga tendríamos la biyección $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi_1([a_0 : a_1]) = \frac{a_0}{a_1}.$$

Claramente, tenemos que $\mathbb{RP}^1 = U_0 \cup U_1$.

\mathbb{RP}^1 como espacio topológico

Definamos el conjunto τ de abiertos de \mathbb{RP}^1 de la manera siguiente:

$$\tau = \{A \subset \mathbb{RP}^1 : \varphi_0(A \cap U_0) \text{ y } \varphi_1(A \cap U_1) \text{ son abiertos de } \mathbb{R}\}$$

veamos que (\mathbb{RP}^1, τ) cumpla las condiciones de espacio topológico:

1. El conjunto vacío $\emptyset \in \tau$, pues $\varphi_0(\emptyset) = \emptyset = \varphi_1(\emptyset)$ es un abierto de \mathbb{R} .
2. La recta proyectiva $\mathbb{RP}^1 \in \tau$, pues $\varphi_0(U_0) = \mathbb{R} = \varphi_1(U_1)$.
3. Sean $A, B \in \tau$. Entonces, por definición de τ , $\varphi_0(A \cap U_0)$ y $\varphi_0(B \cap U_0)$ son abiertos de \mathbb{R} . Por ser φ_0 biyección, se tiene que

$$\varphi_0(A \cap B \cap U_0) = \varphi_0(A \cap U_0) \cap \varphi_0(B \cap U_0).$$

Este conjunto es un abierto de \mathbb{R} dado que la intersección de dos conjuntos abiertos en \mathbb{R} es abierto. De igual manera se verifica que $\varphi_1(A \cap B \cap U_1)$ es un abierto de \mathbb{R} . Así $A \cap B \in \tau$.

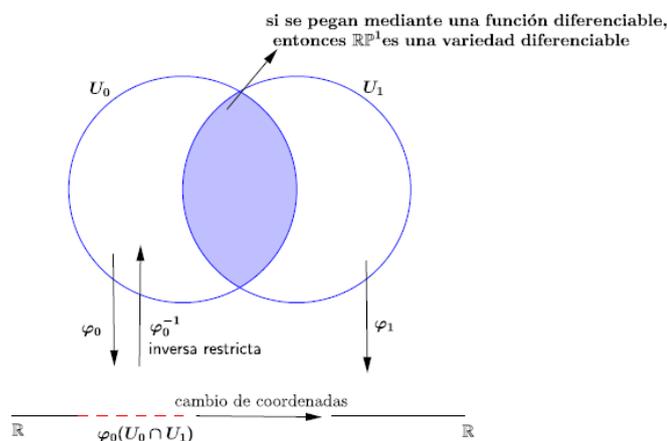
4. Consideremos una familia $\{A_i\}_{i \in I} \subset \tau$. Entonces, por definición de τ , para todo $i \in I$, se tiene que $\varphi_0(A_i \cap U_0)$ es un abierto de \mathbb{R} . Por ser φ_0 biyección tenemos

$$\varphi_0 \left(\bigcup_{i \in I} A_i \cap U_0 \right) = \bigcup_{i \in I} \varphi_0(A_i \cap U_0).$$

Este conjunto es un abierto de \mathbb{R} dado que la unión arbitraria de conjuntos abiertos en \mathbb{R} es abierto. De igual manera se verifica que $\varphi_1 \left(\bigcup_{i \in I} A_i \cap U_1 \right)$ es un abierto de \mathbb{R} . Así $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

Finalmente, τ es una topología sobre \mathbb{RP}^1 .

Antes de continuar, observemos la gráfica adjunta:



mostremos que $\mathbb{R}P^1$ es una variedad diferenciable. Consideremos las aplicaciones $\varphi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$ y veamos que $\langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle$ sea un atlas diferenciable de $\mathbb{R}P^1$, donde $\varphi_0^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow U_0$ es tal que $\varphi_0^{-1}(x) = [1 : x]$. Observemos que

$$U_0 \cap U_1 = \{[a_0 : a_1] : a_0 \neq 0, a_1 \neq 0\},$$

entonces

$$\varphi_0(U_0 \cap U_1) = \left\{ \frac{a_1}{a_0} : a_0 \neq 0, a_1 \neq 0 \right\} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ y } \varphi_1(U_0 \cap U_1) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Luego

$$\varphi_{01} := \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1} : \varphi_0(U_0 \cap U_1) \rightarrow \varphi_1(U_0 \cap U_1)$$

es tal que

$$\varphi_{01}(x) = (\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1})(x) = \varphi_1([1 : x]) = \frac{1}{x} \text{ y es diferenciable.}$$

Ahora, probemos que la función φ_0 es continua. Sea $C \subset \mathbb{R}$ abierto. Demostremos que $\varphi_0^{-1}(C) \subset U_0$ es abierto. Para ello verifiquemos que $\varphi_0(\varphi_0^{-1}(C) \cap U_0)$ y $\varphi_1(\varphi_0^{-1}(C) \cap U_1)$ son abiertos de \mathbb{R} . Ya que $\varphi_0^{-1}(C) \cap U_0 = \varphi_0^{-1}(C)$, entonces $\varphi_0(\varphi_0^{-1}(C) \cap U_0) = \varphi_0(\varphi_0^{-1}(C)) = C$, y este conjunto es un abierto de \mathbb{R} . Por otro lado, tenemos que

$$\varphi_0^{-1}(C) \cap U_1 = \left\{ [a_0 : a_1] : \frac{a_1}{a_0} \in C \setminus \{0\} \right\} = \varphi_0^{-1}(C \setminus \{0\}).$$

Entonces $\varphi_1(\varphi_0^{-1}(C) \cap U_1) = \varphi_1(\varphi_0^{-1}(C) \setminus \{0\}) = \varphi_{01}(C \setminus \{0\})$, y este conjunto es abierto, ya que φ_{01} es continua. Así, tenemos que $\varphi_0^{-1}(C)$ es abierto.

Claramente φ_0^{-1} es continua, pues para todo $U \subset U_0$ abierto, tenemos que $\varphi_0(U) = \varphi_0(U \cap U_0)$ es abierto de \mathbb{R} .

Finalmente φ_0 es homeomorfismo, y de igual manera se verifica para φ_1 .

Así $\mathbb{R}P^1$ es una variedad diferenciable de dimensión 1.

1.3. El plano proyectivo real

Definimos el conjunto $\mathbb{R}P^2 = \{\text{rectas que pasan por el origen en } \mathbb{R}^3\}$, el cual llamaremos **plano proyectivo real** o **espacio proyectivo real de dimensión 2**. De igual manera que antes, definimos la siguiente relación de equivalencia en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ como:

$$(a, b, c) \sim (a', b', c') \Leftrightarrow \exists t \neq 0 \text{ tal que } (a, b, c) = t(a', b', c').$$

Dado $p = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, sea L la recta que pasa por 0 y p . Es fácil ver que la clase de equivalencia $[p] = [(a, b, c)]$ es $L \setminus \{0\}$. De esto observamos que una clase de equivalencia $[(a, b, c)]$ determina una única recta L que pasa por el origen. Recíprocamente, se ve también que toda recta L que pasa por $0 \in \mathbb{R}^3$ determina una clase de equivalencia $[(a, b, c)]$ para algún $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Gracias a esto, podemos identificar los conjuntos $\mathbb{R}P^2$ y $\frac{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}}{\sim}$. Así, de ahora en adelante podemos pensar $\mathbb{R}P^2 = \frac{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}}{\sim}$. Como cada elemento p de $\mathbb{R}P^2$ es ahora una clase $[(a, b, c)]$, por simplicidad escribiremos $p = [a : b : c]$; esta notación se conoce como las **coordenadas homogéneas** de p . Luego, tenemos

$$\mathbb{R}P^2 = \{[a : b : c] : (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\}.$$

1.4. El plano proyectivo complejo

Definición 1.4.1. Decimos que el conjunto $L \subset \mathbb{C}^3$ es una recta compleja si existen elementos $u \in \mathbb{C}^3, v \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ tales que $L = \{u + tv : t \in \mathbb{C}\}$.

Consideremos el plano $P = \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 : b = 1\}$. Cada punto $p \in P$ determina una única recta compleja que pasa por el origen. Definimos el conjunto

$$\mathbb{CP}^2 = \{\text{rectas complejas que pasan por } 0 \in \mathbb{C}^3\},$$

el cual llamaremos **plano proyectivo complejo** o **espacio proyectivo complejo de dimensión 2**.

En analogía con lo hecho anteriormente tenemos $\mathbb{CP}^2 = \frac{\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}}{\sim}$, donde la relación \sim se define por

$$z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ tal que } z_1 = \lambda z_2.$$

Así que, como antes, podemos escribir también

$$\mathbb{CP}^2 = \{[a : b : c] : (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}\},$$

donde $[a : b : c]$ son las **coordenadas homogéneas** en \mathbb{CP}^2 .

\mathbb{CP}^2 como espacio topológico

Consideremos la aplicación proyección

$$\pi : \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{CP}^2$$

tal que $\pi((a, b, c)) = [a : b : c]$. Definamos

$$\tau_1 = \left\{ A \subset \mathbb{CP}^2 : \bigcup_{p \in A} (p - \{0\}) \text{ es abierto en } \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \right\},$$

$$\tau_2 = \{A \subset \mathbb{CP}^2 : \pi^{-1}(A) \text{ es abierto en } \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}\}$$

y probemos que $\tau_1 = \tau_2$. Observe que

$$y \in \pi^{-1}(A) \Leftrightarrow \pi(y) \in A \Leftrightarrow [y] \in A \Leftrightarrow y \in \bigcup_{p \in A} (p - \{0\}).$$

Es decir $\pi^{-1}(A) = \bigcup_{p \in A} (p - \{0\})$. Luego $\pi^{-1}(A)$ es abierto en $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ si y sólo si $\bigcup_{p \in A} (p - \{0\})$ es abierto en $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$, así que $\tau_1 = \tau_2$.

Verifiquemos que (\mathbb{CP}^2, τ_2) cumple las condiciones de espacio topológico:

1. $\emptyset \in \tau_2$, pues $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset = \varphi_1(\emptyset)$ es abierto en $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$.

2. $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \in \tau_2$, pues π es sobreyectiva.
3. Sean $A, B \in \tau_2$. Entonces, por definición, $\pi^{-1}(A)$ y $\pi^{-1}(B)$ son abiertos de $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$. Además, la preimagen cumple $\pi^{-1}(A \cap B) = \pi^{-1}(A) \cap \pi^{-1}(B)$. Este conjunto es abierto en $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ dado que la intersección de dos conjuntos abiertos en $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ es abierto. Así $A \cap B \in \tau_2$.
4. Consideremos una familia $\{A_i\}_{i \in I} \subset \tau_2$. Entonces, por definición, para todo $i \in I$, se tiene que $\pi^{-1}(A_i)$ es abierto en $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$. Además, la preimagen cumple

$$\pi^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \pi^{-1}(A_i).$$

Este conjunto es abierto en $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ dado que la unión arbitraria de conjuntos abiertos en $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ es abierto. Así $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_2$.

Finalmente τ_2 es una topología sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

1.5. Algunos conceptos básicos de álgebra

Para esta sección puede consultar [2].

Definición 1.5.1. Sea D un anillo conmutativo. Definimos un polinomio en una variable X con coeficientes en el anillo D , como la expresión de la forma

$$P = \sum_{i=0}^n a_i X^i,$$

donde los a_i son elementos de D (llamados **coeficientes**).

Si $a_n \neq 0$ diremos que P es un polinomio de **grado** n . Denotamos por $gr(P)$ al grado de P . Al conjunto de todos los polinomios en la variable X con coeficientes en el anillo D , lo denotamos por $D[X]$.

Ejemplo 1.5.2. $\frac{1}{2}X^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}X + 1 \in \mathbb{R}[X]$, $(3 - i)X + 1 \in \mathbb{C}[X]$, ...

Definición 1.5.3. Un polinomio $P \in D[X]$ es homogéneo si todos sus monomios (no nulos) tienen el mismo grado. Consideramos que también el polinomio nulo es homogéneo.

Si P es homogéneo de grado n se tiene la igualdad

$$P(tX) = t^n P(X).$$

Si $P \in D[X]$ y $b \in D$, definimos

$$P(b) = \sum_{i=0}^n a_i b^i.$$

Claramente, $P(b) \in D$.

Ejemplo 1.5.4. Si $P = 3X^2 \in \mathbb{Z}[X]$ y $b = 0$, entonces $P(0) = 0 \in \mathbb{Z}$.

Cada polinomio $P \in D[X]$ origina una función de D en D (llamada función polinómica definida por P). La cual denotaremos por f_P .

$$f_P : D \rightarrow D, \quad f_P(b) = P(b).$$

Observe que, debemos distinguir entre el polinomio, y la función polinómica que origina.

Ejemplo 1.5.5. si $D = \mathbb{Z}_3$, el polinomio $P = X^3 - X$ da origen a la función nula, o sea

$$f_P(b) = 0, \quad \forall b \in \mathbb{Z}_3.$$

De ahora en adelante, agregamos la hipótesis de que el anillo de coeficientes D es un cuerpo, y lo denotaremos, por la letra K .

Definición 1.5.6. Si $P \in K[X]$ es un polinomio y $b \in K$, entonces b es una **raíz** de P si $P(b) = 0$.

Teorema 1.5.7. *Todo polinomio no constante $P \in \mathbb{C}[X]$, tiene alguna raíz en \mathbb{C} , es decir, existe $b \in \mathbb{C}$ tal que $P(b) = 0$.*

Teorema 1.5.8. *Dados dos polinomios $P, S \in K[X]$ con $S \neq 0$, existen únicos polinomios Q (cociente) y R (resto) tales que $P = QS + R$, donde $R = 0$ (polinomio nulo) o $gr(R) < gr(S)$.*

Teorema 1.5.9. *El resto de dividir un polinomio $P \in K[X]$ por $X - b$ ($b \in K$), coincide con el valor del polinomio P evaluado en $X = b$.*

Definición 1.5.10. Si $P \in K[X]$ es un polinomio y $b \in K$ una raíz de P , entonces decimos que la raíz b es de multiplicidad m ($m \in \mathbb{N}$) si P admite la factorización:

$$P(X) = (X - b)^m R(X),$$

donde $R(b) \neq 0$.

Definición 1.5.11. Considere en $K[X]$ el polinomio.

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k.$$

Entonces, definimos el polinomio derivado P' como:

$$P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}.$$

Esta noción de derivada, conserva las propiedades usuales (suma y producto)

$$(P + R)' = P' + R'$$

$$(P \cdot R)' = P' \cdot R + P \cdot R'.$$

Podemos definir, de manera inductiva, la derivada n -ésima $P^{(n)}$ de la siguiente manera:

$$P^{(0)} = P$$

$$P^{(n+1)} = (P^{(n)})'.$$

Teorema 1.5.12. *Sea el polinomio $P \in K[X]$ y sea $b \in K$. Entonces, b es una raíz de P de multiplicidad m si y solo si $P(b) = P'(b) = P^{(2)}(b) = \dots = P^{(m-1)}(b) = 0$, donde $P^{(m)}(b) \neq 0$.*

Dados dos polinomios con coeficientes en un cuerpo K :

$$P = \sum_{i=0}^n a_i X^i, \quad a_n \neq 0 \quad \text{y}$$

$$S = \sum_{i=0}^m b_i X^i, \quad b_m \neq 0,$$

Definición 1.5.13. Sea F un cuerpo de descomposición para PS , así que en $F[X]$ tenemos:

$$P = a_n \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i),$$

$$S = b_m \prod_{j=1}^m (X - \beta_j).$$

La resultante de P y S está definida por

$$R(P, S) = a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j).$$

Observación 1.5.14. $R(P, S)$ pertenece al cuerpo K .

El caso particular más importante de la resultante es cuando $S = P'$. En este caso tenemos:

Teorema 1.5.15. $R(P, P') = 0 \Leftrightarrow P$ tiene raíces múltiples.

Teorema 1.5.16. Sea D dominio de factorización única y considere $P, Q \in D[X]$. Entonces

$$R(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P \text{ y } Q \text{ tienen algún factor común de grado } \geq 1.$$

Sea el polinomio $f \in \mathbb{C}[X, Y]$. Podemos factorizar f como un producto finito $f = \prod g_j^{a_j}$, donde los factores g_j son distintos y no admiten factorizaciones no triviales, y los a_j son enteros positivos. El polinomio f se llama **reducido** si cada a_j es igual a 1.

1.6. Funciones holomorfas

Los conceptos y resultados que se enunciarán a continuación son de carácter general y serán utilizados a lo largo del trabajo. Para mas detalles puede consultar [4] y [7].

Un polidisco abierto (resp. cerrado) en \mathbb{C}^n de centro $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ y poliradio $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$, que será denotado por $\Delta(a; r)$ (resp. $\Delta[a; r]$), es el conjunto definido por

$$\Delta(a; r) = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| < r_j, \forall 1 \leq j \leq n\}$$
$$\text{(resp. } \Delta[a; r] = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| \leq r_j, \forall 1 \leq j \leq n\} \text{)}.$$

Definición 1.6.1. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Decimos que f es holomorfa en $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ si y sólo si existe un polidisco abierto Δ centrado en a tal que la función f tiene una expansión en serie de potencias

$$f(z) = \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty} c_{i_1 \dots i_n} (z_1 - a_1)^{i_1} \cdot \dots \cdot (z_n - a_n)^{i_n},$$

la cual es convergente en todo $z \in \Delta$.

Decimos que f es holomorfa en U si y sólo si f es holomorfa en a , para todo $a \in U$. El conjunto de todas las funciones holomorfas en U será denotado por $\mathcal{O}(U)$.

Para $n = 1$, una función holomorfa puede también ser definida de la manera siguiente:

Definición 1.6.2. Sea U un abierto de \mathbb{C} . Decimos que una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa si, para todo $a \in U$, existe el límite

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

El número complejo $f'(a)$ es llamado derivada de f en a .

A continuación, establecemos algunas propiedades básicas que usaremos a lo largo del trabajo.

Proposición 1.6.3. Sean f y g funciones holomorfas en U y sea $a \in U$. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
2. $(f \cdot g)' = f(a) \cdot g'(a) + f'(a) \cdot g(a)$.
3. Si $g(a) \neq 0$, entonces f/g es holomorfa en a y

$$(f/g)'(a) = [g(a)f'(a) - f(a)g'(a)]/(g(a))^2.$$

Definición 1.6.4. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una aplicación diferenciable, donde $U \subset \mathbb{C}$ es un abierto. Decimos que f es un difeomorfismo sobre $f(U)$, si $f(U)$ es abierto y si $f : U \rightarrow f(U)$ es un homeomorfismo cuya inversa $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$ es diferenciable. En el caso de que f y f^{-1} sean holomorfas, decimos que f es un difeomorfismo holomorfo o un biholomorfismo.

Teorema 1.6.5. (Desigualdad de Cauchy) Sea $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa, $z_0 \in U$ y $\rho > 0$ tal que $D_\rho(z_0) \subset U$. Sea $0 < r < \rho$ y consideremos la serie de potencias que representa $f(z)$ en $D_\rho(z_0) \subset U$, digamos $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(z - z_0)^j$. Entonces se verifica que

$$|a_j| \leq \frac{M(r)}{r^j},$$

donde $M(r) = \sup\{|f(w)| : |w - z_0| = r\}$ y $j \geq 0$.

Teorema 1.6.6. (Teorema de la función implícita) Sea $F : U \subset \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Sea $(x_0, y_0) \in U$ tal que

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Entonces, existen abiertos $V, W \subset \mathbb{C}$ y una función holomorfa $g : V \rightarrow W$ tales que

1. $x_0 \in V, y_0 \in W$
2. En $V \times W$, el conjunto $\{F = 0\}$ coincide con el gráfico de g , es decir

$$F^{-1}(0) \cap V \times W = \text{graf}(g) = \{(x, g(x)) \in \mathbb{C}^2 : x \in V\}.$$

Observación 1.6.7. Sea $h : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ holomorfa. Si $h = (f, g)$, donde $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ son holomorfas, entonces $dh(a) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ es una aplicación lineal compleja (\mathbb{C} -lineal). De esta manera

$$dh(a) \cdot t = (f'(a)t, g'(a)t).$$

Un camino en \mathbb{C} es una aplicación continua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Decimos que γ es un camino cerrado cuando sus extremos coinciden, esto es, $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Un camino $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es C^1 por partes, si existe una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ de $[a, b]$ tal que para todo $i = 1, \dots, n$, $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ es un camino de clase C^1 .

Definición 1.6.8. Decimos que dos caminos cerrados $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow U \subset \mathbb{C}$ son libremente homotópicos en U , si existe una función continua

$$F : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow U$$

tal que:

1. $F(t, 0) = \gamma_0(t)$ y $F(t, 1) = \gamma_1(t)$, para todo $t \in [a, b]$.
2. Para todo $s \in [0, 1]$, $F(a, s) = F(b, s)$.

Diremos que F es una homotopía libre de caminos cerrados.

Teorema 1.6.9. (*Versión homotópica del teorema de Cauchy*) Sea $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Si $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow U \subset \mathbb{C}$ son caminos cerrados libremente homotópicos en U , entonces se verifica que

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Definición 1.6.10. Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ un camino cerrado y $z_0 \notin \gamma([0, 1])$. Entonces, se define el índice de z_0 respecto de γ como el número entero

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Este número puede ser interpretado geoméricamente como “el número de vueltas que el punto $\gamma(t)$ da alrededor de z_0 ”.

Funciones meromorfas

Para mas detalles puede consultar [1].

Definición 1.6.11. Si $a \in U \subset \mathbb{C}$ y si $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$, decimos que f tiene una singularidad aislada en el punto a . Si f se puede definir en a y la función extendida es holomorfa en U , decimos que a es una singularidad evitable.

Teorema 1.6.12. Si $a \in U$ y $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$, entonces ocurre uno de los siguientes casos:

1. f tiene una singularidad evitable en a .
2. Existen $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $a_n \neq 0$, tal que

$$f(z) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{(z-a)^i},$$

tiene una singularidad evitable en a . Bajo esta situación, decimos que f tiene un polo de orden n en a .

3. Si $r > 0$ y $D(a, r) \subset U$, entonces $f(D^*(a, r))$ es denso en \mathbb{C} . Bajo esta situación, decimos que f tiene una singularidad esencial en a .

Observación 1.6.13. De estos resultados previos, se deduce lo siguiente:

$$a \text{ es un polo de } f \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty.$$

Definición 1.6.14. Decimos que una función f es meromorfa en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ si existe un conjunto $\Sigma \subset U$ tal que

1. Σ no tiene puntos de acumulación en U .
2. $U - \Sigma$ es abierto y $f \in \mathcal{O}(U \setminus \Sigma)$.
3. f tiene un polo en cada punto de Σ .

Observación 1.6.15. Si $\Sigma = \emptyset$, entonces $f \in \mathcal{O}(U)$. O sea, las funciones holomorfas son meromorfas.

1.7. Conjuntos algebraicos afines

Para esta sección el lector puede consultar [8]. Consideremos K un cuerpo conmutativo. Sea n un entero positivo. Consideremos el espacio¹ K^n . Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ es un punto en K^n y $P(X_1, \dots, X_n)$ un polinomio, denotaremos $P(x_1, \dots, x_n)$ por $P(x)$.

Definición 1.7.1. Sea S un subconjunto arbitrario de $K[X_1, \dots, X_n]$. Al conjunto

$$V(S) := \{x \in K^n / \forall P \in S, P(x) = 0\}$$

llamaremos conjunto algebraico afín definido por S .

Cuando el conjunto S es finito, escribimos $V(F_1, \dots, F_r)$ en lugar de $V(\{F_1, \dots, F_r\})$.

También, podemos ver a V como una aplicación

$$\{\text{Subconjuntos de } K[X_1, \dots, X_n]\} \rightarrow \{\text{Subconjuntos algebraicos de } K^n\}.$$

Observación 1.7.2.

1. Si $S = \langle 1 \rangle$, entonces $V(\langle 1 \rangle) = \emptyset$.
2. Si $S = \langle 0 \rangle$, entonces $V(\langle 0 \rangle) = K^n$.
3. V es decreciente en el siguiente sentido: si $S \subset I$ entonces $V(I) \subset V(S)$.
4. Si $S \subset K[X_1, X_2, \dots, X_n]$, definimos

$$\langle S \rangle := \left\{ \sum a_i f_i / r \in N, a_i \in K[X_1, X_2, \dots, X_n], f_i \in S \right\},$$

entonces $V(S) = V(\langle S \rangle)$.

5. Dado que K es un dominio de ideales principales, entonces $K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ es noetheriano, es decir, todo ideal es finitamente generado. Sea el ideal $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_r \rangle \in K[X_1, X_2, \dots, X_n]$, entonces tenemos $V(f_1, f_2, \dots, f_r) = V(f_1) \cap \dots \cap V(f_r)$.

¹Lo que sigue es válido en un K -espacio afín n -dimensional, denotado por $A^n(K)$ y es indiferente de la base escogida.

6. Un punto de K^n es un conjunto algebraico afín. Si $a = (a_1, \dots, a_n) \in K^n$, entonces $\{a\} = V(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$.
7. La intersección arbitraria de conjuntos algebraicos afines es un conjunto algebraico afín.
8. Sean I, J ideales de $K[X_1, X_2, \dots, X_n]$, entonces $V(IJ) = V(I) \cup V(J)$.
9. Si f es constante, $V(f)$ es llamado hipersuperficie. En general, Una hipersuperficie es el conjunto solución de una sola ecuación polinomial.

Las observaciones anteriores demuestran que los conjuntos algebraicos afines son los conjuntos cerrados de una topología sobre K^n , que llamaremos topología de Zariski. Cualquier subconjunto X de K^n hereda una topología inducida (otra vez llamada topología de Zariski) cuyos conjuntos cerrados son los conjuntos de la forma $X \cap V(I)$. En particular, si X es un conjunto algebraico afín, entonces los conjuntos cerrados de X son los conjuntos algebraicos afines contenidos en X .

Ideal de un conjunto algebraico afín

Definición 1.7.3. Sea $V \subset K^n$. El conjunto

$$I(V) := \{f \in K[X_1, X_2, \dots, X_n] \mid \forall x \in V, f(x) = 0\}$$

es llamado ideal de V .

Claramente $I(V)$ es un ideal de $K[X_1, X_2, \dots, X_n]$. También, podemos ver a I como una aplicación

$$\{\text{Subconjuntos de } K^n\} \rightarrow \{\text{ideales de } K[X_1, X_2, \dots, X_n]\}.$$

Observación 1.7.4.

1. I es decreciente en el siguiente sentido: si $V \subset Z$ entonces $I(Z) \subset I(V)$.
2. Si Z es un conjunto algebraico afín $V(I(Z)) = Z$.
3. $I(\emptyset) = K[X_1, X_2, \dots, X_n]$.

4. $J \subset I(V(J))$.

Ejemplo 1.7.5. Si $K = \mathbb{R}$, $J = \langle X^2 + Y^2 + 1 \rangle \subset \mathbb{R}[X, Y]$, entonces $V(J) = \emptyset$. Luego $I(V(J)) = \mathbb{R}[X, Y] \neq J$.

Con este ejemplo se quiere dar a notar una dificultad básica cuando K no es algebraicamente cerrado.

Proposición 1.7.6. *Supongamos que K es infinito, entonces $I(K^n) = \{0\}$.*

Demostración. Inducción sobre n ,

■ $n = 1$

Sea $f \in I(K) \subset K[X]$, entonces $f(x) = 0, \forall x \in K$. (*)

Si $f \neq 0$, entonces el número de raíces de f es como máximo el grado de f , es decir, en (*) K sería finito y esto contradice la hipótesis. Por lo tanto $f = 0$.

■ Hipótesis inductiva

Supongamos que la proposición es válida para $n - 1$.

■ Demostremos que $I(K^n) = \{0\}$. Sea $f \in I(K^n)$. Entonces por definición

$$f(x) = 0, \forall x \in K^n. (**)$$

Supongamos que $f \neq 0$ y escribimos

$$f = Q_r(X_1, \dots, X_{n-1})X_n^r + \dots$$

No puede suceder que $r = 0$, pues la variable X_n no estaría, es decir, $f \in K[X_1, X_2, \dots, X_{n-1}]$ y por (**) f se anula en todo K^{n-1} , entonces por hipótesis inductiva $f = 0$ y esto es una contradicción con el hecho de suponer que $f \neq 0$. Entonces, podemos así suponer que $r \geq 1$ y $Q_r(X_1, \dots, X_{n-1}) \neq 0$, luego $Q_r \notin I(K^{n-1})$, es decir, existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in K^{n-1}$ tal que $Q_r(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \neq 0$. Evaluando $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ en f se tiene

$$\tilde{f} = f(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, X_n) = Q_r(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})X_n^r + \dots$$

y así $\tilde{f} \in K[X_n]$. Luego \tilde{f} tiene como máximo r raíces. Como K es infinito, entonces existe $\alpha_n \in K$ tal que $\tilde{f}(\alpha_n) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0$ y esto contradice (**). Así $f = 0$.

□

Proposición 1.7.7. $I(\{(a_1, \dots, a_n)\}) = \langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle$.

Demostración. [⊃] Sea $f \in \langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle$ y coloquemos $a = (a_1, \dots, a_n)$.

Entonces

$$f = (X_1 - a_1)Q_1 + \dots + (X_n - a_n)Q_n, \quad Q_i \in K[X_1, X_2, \dots, X_{n-1}].$$

Evaluando en a se tiene $f(a) = 0$, es decir $f \in I(\{(a_1, \dots, a_n)\})$.

[⊂] Sea $P \in I(\{(a_1, \dots, a_n)\})$, entonces $P(a_1, \dots, a_n) = 0$. Además, por el teorema del algoritmo de la división para polinomios 1.5.8 podemos dividir sucesivamente por términos $(X_i - a_i)$. Así

$$P = (X_1 - a_1)Q_1 + \dots + (X_n - a_n)Q_n + C.$$

Evaluando P en a obtenemos $C = 0$. Entonces $P \in \langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle$. □

Irreducibilidad

Definición 1.7.8. Sea X un espacio topológico no vacío. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Si $X = F \cup G$, donde F y G son conjuntos cerrados en X , entonces $X = F$ ó $X = G$.
2. Si U, V son conjuntos abiertos de X y $U \cap V = \emptyset$, entonces $U = \emptyset$ ó $V = \emptyset$.
3. Cualquier conjunto abierto de X es denso en X .

Bajo cualquiera de estas condiciones decimos que X es irreducible.

Teorema 1.7.9. *Sea Z un conjunto algebraico afín con su topología de Zariski. Entonces*

$$Z \text{ es irreducible} \Leftrightarrow I(Z) \text{ es primo.}$$

Demostración. \Rightarrow) Consideremos $\{fg\} \subset I(Z)$, aplicando V tenemos $V(I(Z)) \subset V(fg)$. Luego

$$Z \subset V(f) \cap V(g) \subset V(f) \cup V(g),$$

entonces

$$Z = (V(f) \cap Z) \cup (V(g) \cap Z).$$

Ya que Z es irreducible, tenemos $Z = V(f) \cap Z$ ó $Z = V(g) \cap Z$. De donde

$$V(I(Z)) = Z \subset V(f) \text{ ó } Z \subset V(g)$$

entonces $\{f\} \subset I(Z)$ ó $\{g\} \subset I(Z)$. Por lo tanto $I(Z)$ es primo.

\Leftarrow) Sean V_1, V_2 conjuntos cerrados en Z tal que $V_1 \cup V_2 = Z$. Supongamos que

$$V_1 \subsetneq Z \text{ y } V_2 \subsetneq Z,$$

entonces

$$I(Z) \subsetneq I(V_1) \text{ y } I(Z) \subsetneq I(V_2).$$

Luego, existen $f_1 \in I(V_1)$, $f_2 \in I(V_2)$ tales que $f_1, f_2 \notin I(Z)$. Por definición tenemos

$$f_1(x) = 0, \forall x \in V_1 \text{ y } f_2(y) = 0, \forall y \in V_2,$$

entonces $f_1 f_2(z) = 0 \forall z \in Z$. Es decir $f_1 f_2 \in I(Z)$ y esto contradice el hecho de que $I(Z)$ sea primo. Por lo tanto $V_1 = Z$ ó $V_2 = Z$. Así Z es irreducible. \square

Corolario 1.7.10. *Supongamos que K es infinito, entonces K^n es irreducible.*

Demostración. Por la proposición 1.7.6 tenemos $I(K^n) = \{0\}$, siendo este un ideal primo, entonces por el teorema 1.7.9 K^n es irreducible. \square

Definición 1.7.11. Sea Z un conjunto algebraico afín no vacío. Podemos escribir Z únicamente de la forma $Z = V_1 \cup \dots \cup V_r$, donde los V_i son conjuntos algebraicos irreducibles y $V_i \not\subset V_j, \forall i \neq j$.

Definición 1.7.12. Una variedad algebraica afín en K^n es un subconjunto algebraico Z irreducible.

1.8. Conjuntos algebraicos proyectivos

De ahora en adelante, consideraremos $K = \mathbb{C}$ y trabajaremos en el anillo de polinomios sobre \mathbb{C} en tres variables.

Sea el polinomio $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$. Observe que F no define una función en \mathbb{CP}^2 , ya que, si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $F(a_0, a_1, a_2)$ podría ser diferente de $F(\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2)$, como se hace notar en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 1.8.1. Considere $F(x, y, z) = yx - z + x$, evaluado en $(1, 2, 3)$ y $(3, 6, 9)$ se tiene

$$F(1, 2, 3) = 0 \neq F(3, 6, 9) = 12.$$

Sin embargo, sí es posible dar una noción de lo que es un cero de F en \mathbb{CP}^2 . Antes de pasar a estudiar lo que es un conjunto algebraico proyectivo, veamos la definición y proposición siguiente:

Definición 1.8.2. Decimos que $p \in \mathbb{CP}^2$ es un cero de F si, para cualquier representante de la clase p , digamos $p = [a]$, $a \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$, se tiene que $F(a) = 0$.

Observemos que, todo $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$ se puede expresar de la forma:

$$F = F_0 + F_1 + \cdots + F_r,$$

donde $r = \text{gr}(F)$ y cada F_i es polinomio homogéneo de grado i , ($i = 0, \dots, r$). Diremos que F_0, \dots, F_r son las componentes homogéneas de F .

Proposición 1.8.3. Sea $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$. Entonces $p \in \mathbb{CP}^2$ es cero de F si y sólo si p es cero de todas las componentes homogéneas de F .

Demostración. \Rightarrow) Supongamos que $p = [a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{CP}^2$, $F(p) = 0$. Entonces $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$,

$$\begin{aligned} F(\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2) = 0 &\Leftrightarrow \lambda^0 F_0(a_0, a_1, a_2) + \cdots + \lambda^r F_r(a_0, a_1, a_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow H(\lambda) = 0. \end{aligned}$$

Además \mathbb{C}^* es infinito, entonces H debe ser el polinomio idénticamente nulo. Luego $F = 0$. Así $F_i(a_0, a_1, a_2) = 0$ para todo $i = 0, \dots, r$.

\Leftarrow) Es inmediato. □

Lo anterior muestra que para poder hablar de propiedades de anulación de elementos de $\mathbb{C}[x, y, z]$ es suficiente considerarlas para polinomios homogéneos.

Definición 1.8.4. Sea T un subconjunto de elementos homogéneos de $\mathbb{C}[x, y, z]$.

$$V(T) := \{p \in \mathbb{CP}^2 : \forall F \in T, F(p) = 0\}$$

decimos que $V(T)$ es el conjunto algebraico proyectivo definido por T .

Si J es el ideal generado por T , donde T es un conjunto finito de polinomios homogéneos, entonces $V(T) = V(J)$.

Ejemplo 1.8.5. Curvas planas proyectivas son definidas por las ecuaciones homogéneas: $y^2z - x^3 = 0$, $x^2 + y^2 - z^2 = 0, \dots$

Observación 1.8.6.

1. El conjunto vacío $\emptyset = V(1)$ y el espacio total $\mathbb{CP}^2 = V(0)$ son conjuntos algebraicos proyectivos.
2. Si $T_1 \subset T_2$ entonces $V(T_2) \subset V(T_1)$.
3. La unión de dos conjuntos algebraicos proyectivos es un conjunto algebraico proyectivo.
4. La intersección de cualquier familia de conjuntos algebraicos proyectivos es un conjunto algebraico proyectivo.

De las observaciones anteriores, definimos la topología de Zariski en \mathbb{CP}^2 tomando como conjuntos abiertos a los complementos de los conjuntos algebraicos proyectivos. Cualquier subconjunto U de \mathbb{CP}^2 hereda una topología inducida (otra vez llamada topología de Zariski) cuyos conjuntos cerrados son los conjuntos de la forma $U \cap V(T)$.

Ideal e irreducibilidad de un conjunto algebraico proyectivo

Definición 1.8.7. Sea V un subconjunto de \mathbb{CP}^2 . El conjunto

$$I(V) := \{F \in \mathbb{C}[x, y, z] : \forall p \in V, F(p) = 0\}$$

es llamado ideal de V (en el sentido de la proposición 1.8.3).

Observación 1.8.8.

1. $I(\mathbb{CP}^2) = \{0\}$.
2. $I(\emptyset) = \mathbb{C}[x, y, z]$.
3. Si $V_1 \subset V_2$ entonces $I(V_2) \subset I(V_1)$.
4. Si Z es un conjunto algebraico proyectivo, entonces $V(I(Z)) = Z$.
5. Si T es un ideal, entonces $T \subset I(V(T))$.

Ejemplo 1.8.9. Si $T = \langle y, x, z \rangle \subset \mathbb{C}[x, y, z]$, entonces $V(T) = \emptyset$. Luego $I(V(T)) = I(\emptyset) = \mathbb{C}[x, y, z] \neq T$.

Definición 1.8.10. Un espacio topológico X es irreducible si no se puede expresar como la unión de dos subconjuntos propios cerrados.

Observación 1.8.11. Un subconjunto Y de X es irreducible si Y es irreducible como espacio topológico con la topología inducida.

Variedad algebraica proyectiva

Definición 1.8.12. Una variedad algebraica proyectiva es un conjunto algebraico proyectivo irreducible en \mathbb{CP}^2 , con la topología inducida.

Ejemplo 1.8.13. Los puntos son variedades algebraicas proyectivas, ya que, claramente son irreducibles y si $p = [a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{CP}^2$, entonces alguna coordenada es no cero, digamos $a_0 \neq 0$ y así podemos asumir que $a_0 = 1$. Se tiene entonces que $V(x_1 - a_1x_0, x_2 - a_2x_0) = \{p\}$.

Teorema 1.8.14. *Sea Z un conjunto algebraico proyectivo en \mathbb{CP}^2 . Entonces*

$$Z \text{ es irreducible} \Leftrightarrow I(Z) \text{ es un ideal primo.}$$

Demostración. Supongamos que $I(Z)$ no es primo. Entonces, existen $f, g \in \mathbb{C}[x, y, z]$ homogéneos tal que $fg \in I(Z)$, pero ni f ni g están en $I(Z)$. Definiendo $Y = V(f) \cap Z$ y $X = V(g) \cap Z$ tenemos entonces que $Y \subsetneq Z$, $X \subsetneq Z$ tal que $Y \cup X = V(fg) \cap Z = Z$, contradiciendo la irreducibilidad de Z . Recíprocamente, supongamos que $Z = Y \cup X$ con $Y \subsetneq Z$ y $X \subsetneq Z$. Sean $f \in I(Y) \setminus I(Z)$ y $g \in I(X) \setminus I(Z)$ homogéneos. Entonces fg es homogéneo y se anula en todo punto de $Y \cup X = Z$, y por lo tanto $fg \in I(Z)$. De modo que $I(Z)$ no puede ser primo. \square

Ejemplo 1.8.15. Ya que $I(\mathbb{CP}^2) = \{0\}$ es un ideal primo, entonces \mathbb{CP}^2 es una variedad algebraica proyectiva.

Definición 1.8.16. Todo conjunto algebraico proyectivo $Z \subset \mathbb{CP}^2$ puede descomponerse como una unión finita $Z = X_1 \cup \dots \cup X_r$ de variedades proyectivas. Si la descomposición es minimal (es decir, si ningún X_i puede eliminarse de ella sin que la unión deje de ser Z), las variedades X_i están unívocamente determinadas, y se denominan componentes irreducibles de Z .

1.9. Relación entre variedad algebraica afín y variedad algebraica proyectiva

Para esta sección puede revisar [3]. Si $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ es un polinomio homogéneo lineal, entonces $V(f)$ es llamado hiperplano. En particular, denotamos el conjunto de ceros de $x_i \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$, por

$$H_i = V(x_i) = \{p \in \mathbb{CP}^2 : x_i(p) = 0\}.$$

Para $i = 0, 1, 2$ definimos el conjunto abierto

$$U_i = \mathbb{CP}^2 - H_i = \{[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{CP}^2 : a_i \neq 0\}.$$

Por ejemplo: para $i = 0$, tenemos

$$U_0 = \mathbb{CP}^2 - H_0 = \{[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{CP}^2 : a_0 \neq 0\}.$$

Si tomamos un elemento $p = [a_0 : a_1 : a_2]$ en \mathbb{CP}^2 , entonces existe $i \in \{0, 1, 2\}$ tal que $a_i \neq 0$, por lo tanto $p \in U_i$. Luego \mathbb{CP}^2 está cubierto por los conjuntos abiertos U_i . A continuación, definimos la aplicación $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^2$ como sigue: si $p = [a_0 : a_1 : a_2] \in U_i$ entonces $\varphi_i(p) = Q$, donde Q es el punto de coordenadas afines $\left(\frac{a_0}{a_i}, \frac{a_1}{a_i}, \frac{a_2}{a_i}\right)$ y donde omitimos la i -ésima coordenada $1 = \frac{a_i}{a_i}$. Claramente φ_i está bien definida.

Antes de enunciar el resultado más importante de esta sección (proposición 1.9.3), es necesario conocer algunas definiciones muy importantes para su prueba.

Definición 1.9.1. Sea $A = \mathbb{C}[y_1, y_2]$, dado $f \in A$ de grado e , definimos la homogeneización de f (con respecto a la variable x_0) como el polinomio $\beta(f) := x_0^e f(x_1/x_0, x_2/x_0)$, el cual es un polinomio homogéneo de grado e en las variables x_0, x_1, x_2 . Así, tenemos una función $\beta : A \rightarrow S^h$, donde S^h denotará el conjunto de elementos homogéneos del anillo $S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$.

Definición 1.9.2. Sea $f^* \in S^h$, definimos la deshomogeneización de f^* (con respecto a la variable x_0) como el polinomio $\alpha(f^*) := f(1, y_1, y_2)$. Por lo tanto, tenemos una función $\alpha : S^h \rightarrow A$.

Para cualquier conjunto algebraico afín V de \mathbb{C}^2 , usando que $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{CP}^2$, la clausura $\bar{V} \subset \mathbb{CP}^2$, en la topología de \mathbb{CP}^2 , se llama **clausura proyectiva de V** y los puntos de $\bar{V} - V$ se llama **puntos al infinito de V** .

El resultado que presentamos a continuación se aplica para cualquier par (U_i, φ_i) , $i = 0, 1, 2$; sin embargo, para hacer la exposición más clara, nos restringimos al par (U_2, φ_2) . Denotaremos $U = U_2$, $\varphi = \varphi_2$ y usaremos las variables (x, y, z) en lugar de (x_0, x_1, x_2) . De esta manera, tenemos

$$U = \{[x : y : 1] : x, y \in \mathbb{C}\},$$

$$\varphi([x : y : 1]) = (x, y).$$

Claramente, podemos identificar $U \simeq \mathbb{C}^2$, así que podemos escribir $U \simeq \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{CP}^2$.

Proposición 1.9.3. *Sea $C \subset \mathbb{CP}^2$ una curva algebraica proyectiva. Entonces $C \cap \mathbb{C}^2$ es una curva algebraica afín. Además, si C está definida por el polinomio homogéneo $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$, entonces $C \cap \mathbb{C}^2$ está definida por la deshomogenización de f . Recíprocamente, si $C \subset \mathbb{C}^2$ es una curva afín, entonces la clausura topológica \overline{C} de C en \mathbb{CP}^2 es una curva algebraica proyectiva. Además, si C está definida por el polinomio $g \in \mathbb{C}[x, y]$, entonces \overline{C} está definida por la homogenización de g .*

Demostración. Si $C \subset \mathbb{CP}^2$ es una curva proyectiva dada por los polinomios homogéneos

$$g_i^*(x, y, z) = 0, \quad 1 \leq i \leq m,$$

entonces $C \cap \mathbb{C}^2$ es la curva afín dada por los polinomios

$$g_i(x, y, 1) = 0, \quad 1 \leq i \leq m,$$

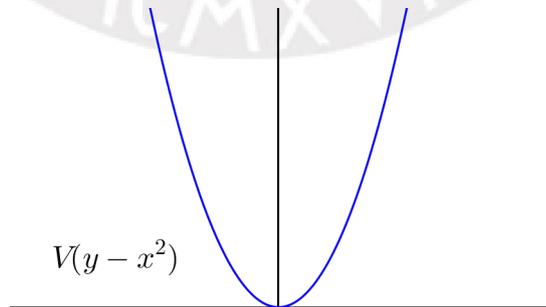
obtenidos al deshomogeneizar los g_i^* con respecto a z usando la función α .

Si $C = V(f) = \{[x : y : z] \in \mathbb{CP}^2 : f(x, y, z) = 0\}$. Consideremos la intersección $C \cap U = C \cap \{[x : y : 1]\}$, que es la deshomogenización respecto a la variable z , y el homeomorfismo $[x : y : z] \xrightarrow{\varphi} (x, y)$ de $C \cap U$ en $C \cap \mathbb{C}^2$.

□

A continuación, enunciamos algunos ejemplos que pueden ser revisados por el lector con mas detalle en [11].

Ejemplo 1.9.4. Sea C la parábola afín definida por $y - x^2 = 0$ en \mathbb{C}^2 .



Su ecuación homogénea $yz - x^2 = 0$ define un conjunto algebraico proyectivo \overline{C} en \mathbb{CP}^2 y la aplicación $[x, y, z] \mapsto (x/z, y/z)$ es un homeomorfismo de $\overline{C} \cap U_z$ en C , donde

$$U_z = \mathbb{CP}^2 - H_z = \{[x : y : z] : z \neq 0\} = \{[x : y : 1] \in \mathbb{CP}^2\}.$$

Notemos que \overline{C} contiene al punto $[0 : 1 : 0]$, obtenido al intersectar con el hiperplano al infinito

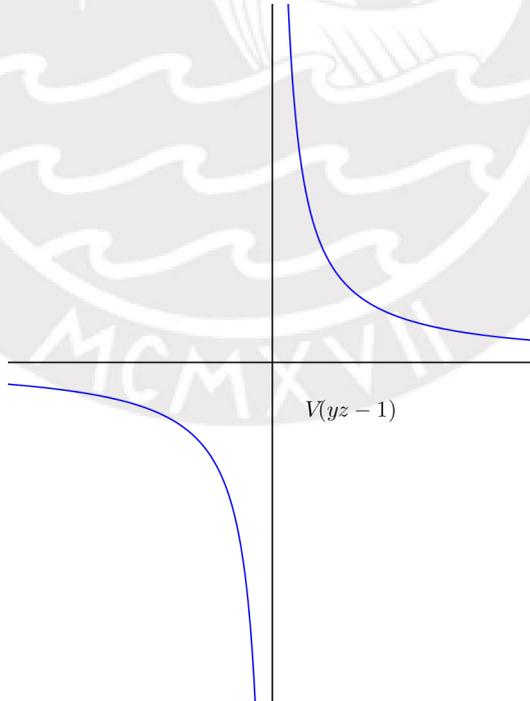
$$\begin{aligned} \overline{C} \cap H_z &= V(yz - x^2) \cap V(z) \\ &= \{[x : y : z] : z = 0, yz = x^2 \Rightarrow x = 0\} \\ &= \{[0 : 1 : 0]\} \end{aligned}$$

y no está en la parábola afín $y = x^2$.

Ejemplo 1.9.5. Para el mismo conjunto algebraico proyectivo $\overline{C} = V(yz - x^2)$, si ahora deshomogeneizamos respecto a la variable x , haciendo $x = 1$, es decir, consideremos la intersección

$$\overline{C} \cap U_x = \overline{C} \cap \{[x : y : z] : x \neq 0\} = \overline{C} \cap \{[1 : y : z]\}$$

obtenemos la ecuación afín $yz - 1 = 0$, que es una hipérbola C' en \mathbb{C}^2 y la aplicación $[x, y, z] \mapsto (y/x, z/x)$ es un homeomorfismo de $\overline{C} \cap \{x \neq 0\}$ en C' .



Notemos ahora que al intersectar \overline{C} con el hiperplano H_x , la intersección

$$\overline{C} \cap H_x = V(yz - x^2) \cap V(x) = \{[0 : y : z] : yz = x^2, x = 0 \Rightarrow yz = 0\}$$

consiste de los puntos de la forma $[0 : y : 0]$ ó $[0 : 0 : z]$, es decir, consiste de los puntos al infinito $[0 : 1 : 0]$ y $[0 : 0 : 1]$ que corresponden a las asíntotas de la hipérbola afín.

De estos ejemplos, observamos que la parábola tiene un único punto al infinito mientras que la hipérbola tiene dos. Es decir, hay un único objeto geométrico proyectivo, cuyas propiedades locales las visualizamos como las cónicas afines usuales.

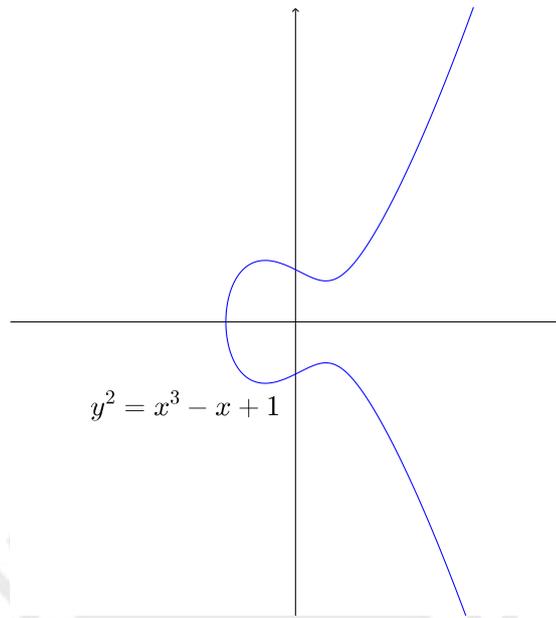
Ejemplo 1.9.6. Considere la variedad proyectiva $Z \subset \mathbb{CP}^2$ definida por el polinomio homogéneo de grado 3

$$y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3.$$

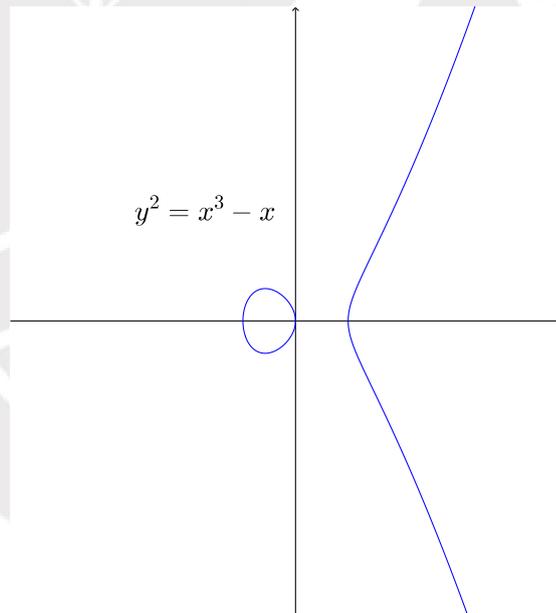
Notemos que al intersectar Z con la recta al infinito $H_z = V(z)$ como de la ecuación que define Z se obtiene $x = 0$ y por lo tanto $y \neq 0$, es decir, se tiene el único punto $[0 : 1 : 0]$ al infinito. Así

$$Z = V(y^2z - x^3 - axz^2 - bz^3) \subset \mathbb{CP}^2$$

consiste de los puntos $[x : y : 1]$ en la curva afín $y^2 = x^3 + ax + b$ y del punto al infinito $[0 : 1 : 0]$. Estas curvas Z se llaman curvas elípticas. La parte real de una curva elíptica $Z \subset \mathbb{CP}^2$ tiene una de las dos formas mostradas en las siguientes figuras.



$$y^2 = x^3 - x + 1$$



$$y^2 = x^3 - x$$

Capítulo 2

Automorfismos de \mathbb{CP}^2

Sea $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}^2$ una carta de \mathbb{CP}^2 definida como en el primer capítulo. En adelante llamaremos a φ carta canónica de \mathbb{CP}^2 .

Consideremos una aplicación \mathbb{C} -lineal invertible (isomorfismo):

$$A : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3.$$

A se representa por una matriz 3×3 con entradas complejas

$$A \simeq \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Definamos la aplicación $\Phi_A : \mathbb{CP}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^2$ de la manera siguiente:

dato $x = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}^3$, defina $\Phi_A([x]) = [A(x)] \in \mathbb{CP}^2$.

- i) Veamos que Φ_A está bien definida: sean $x, y \in \mathbb{C}^3$ tal que $[x] = [y]$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $x = \lambda y$. Luego

$$A(x) = \lambda A(y) \Rightarrow [A(x)] = [A(y)] \Rightarrow \Phi_A([x]) = \Phi_A([y]).$$

- ii) Verifiquemos que Φ_A es inyectiva: sean $x, y \in \mathbb{C}^3$ tal que $\Phi_A([x]) = \Phi_A([y])$, entonces $[A(x)] = [A(y)]$. Luego, existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $A(x) = \lambda A(y)$, y entonces $A(x) = A(\lambda y)$. Luego, ya que A es invertible obtenemos $x = \lambda y$ y entonces $[x] = [y]$. Por lo tanto Φ_A es inyectiva. Además, para todo $[x] \in \mathbb{CP}^2$, existe $[A^{-1}(x)] \in \mathbb{CP}^2$ tal que $\Phi_A([A^{-1}(x)]) = [AA^{-1}(x)] = [x]$. Por lo tanto Φ_A es sobreyectiva.

III) Si $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}^2$ y $\psi : V \rightarrow \mathbb{C}^2$ son cartas canónicas de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, entonces fácilmente se verifica que $\psi \circ \Phi_A \circ \varphi^{-1}$ es holomorfa.

Por lo tanto Φ_A es un automorfismo de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

Observación 2.0.1. Si $A, B : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ son aplicaciones lineales inversas, entonces $\Phi_A, \Phi_B : \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ son automorfismos inversos.

Para obtener resultados posteriores, es necesario conocer la definición siguiente:

Definición 2.0.2. El grado de una curva $C \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ es el mínimo grado posible de un polinomio homogéneo que define a la curva. Denotaremos a este número por $gr(C)$.

Proposición 2.0.3. Sea $C \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ una curva de grado d . Sea $\Phi_A : \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ un automorfismo definido por una aplicación lineal invertible $A : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$. Entonces el conjunto $\Phi_A(C)$ es una curva de grado d .

Demostración. Como Φ_A es difeomorfismo, entonces $\Phi_A(C)$ es difeomorfa a C . Consideremos $C = \{[x : y : z] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2 : f(x, y, z) = 0\}$ donde f es polinomio homogéneo de grado d .

$$\begin{aligned} p \in \Phi_A(C) &\Leftrightarrow p = \Phi_A([x : y : z]), f(x, y, z) = 0 \\ &\Leftrightarrow \Phi_A^{-1}(p) = [x : y : z], f(x, y, z) = 0 \\ &\Leftrightarrow \Phi_{A^{-1}}(p) = [x : y : z], f(x, y, z) = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Sean

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad p = [\bar{x} : \bar{y} : \bar{z}].$$

Entonces $\Phi_{A^{-1}}(p) = [A^{-1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})]$. Luego

$$[x : y : z] = [A^{-1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})] \Leftrightarrow (x, y, z) = \lambda A^{-1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \quad \lambda \neq 0.$$

Reemplazando en la ecuación (2.1) tenemos

$$p \in \Phi_A(C) \Leftrightarrow p = [\bar{x} : \bar{y} : \bar{z}] \text{ y } f(\lambda A^{-1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})) = 0.$$

Como f es homogéneo: $f(\lambda A^{-1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})) = 0 \Leftrightarrow f(A^{-1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})) = 0$. Por lo tanto

$$\Phi_A(C) = \{[\bar{x} : \bar{y} : \bar{z}] \in \mathbb{CP}^2 : f(A^{-1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})) = 0\}.$$

Consideremos

$$g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) := f(A^{-1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})) = f(a_{11}\bar{x} + a_{21}\bar{y} + a_{31}\bar{z}, \dots, a_{13}\bar{x} + a_{23}\bar{y} + a_{33}\bar{z})$$

y

$$h_i(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) := a_{1i}\bar{x} + a_{2i}\bar{y} + a_{3i}\bar{z}, \quad \forall i = 1, 2, 3.$$

Observemos que, los polinomios h_i son homogéneos de grado 1. Luego, ya que f es polinomio homogéneo de grado d , se prueba fácilmente que $f(h_1, h_2, h_3)$ es polinomio homogéneo de grado d . Por lo tanto $g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ es homogéneo de grado d . \square

Definición 2.0.4. Definimos recta proyectiva como el conjunto

$$L = \{[x : y : z] \in \mathbb{CP}^2 : ax + by + cz = 0, (a, b, c) \neq (0, 0, 0)\}.$$

Proposición 2.0.5. Sea L una recta proyectiva. Existe un automorfismo

$$\Phi_A : \mathbb{CP}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^2$$

tal que $\Phi_A(L)$ es la recta del infinito.

Demostración. Supongamos, por ejemplo, que $c \neq 0$ (de manera similar para los otros casos). Entonces la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{c} & \frac{b}{c} & 1 \end{bmatrix}$$

es invertible, pues $\det A = -\frac{1}{c} \neq 0$. Luego, existe $\Phi_A : \mathbb{CP}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^2$ automorfismo definido como $\Phi_A([x : y : z]) = [A(x, y, z)]$. Entonces

$$\begin{aligned} p \in \Phi_A(L) &\Leftrightarrow p = \Phi_A([x : y : z]), [x : y : z] \in L \\ &\Leftrightarrow p = \left[\frac{y}{c} : x : \frac{a}{c}x + \frac{b}{c}y + z \right], \quad ax + by + cz = 0 \\ &\Leftrightarrow p = \left[\frac{y}{c} : x : 0 \right]. \end{aligned}$$

No puede suceder que $y = x = 0$, ya que tendríamos $cz = 0$, de donde $z = 0$, lo cual es absurdo, pues $[x : y : z] \in \mathbb{CP}^2$. Por lo tanto, el conjunto

$$\Phi_A(L) = \left\{ \left[\frac{y}{c} : x : 0 \right] \in \mathbb{CP}^2 : y \neq 0 \vee x \neq 0 \right\}$$

es la recta del infinito. □

Lema 2.0.6. Sean $L_1, L_2 \subset \mathbb{CP}^2$ rectas. Si $p_1 \in L_1, p_2 \in L_2$, entonces existe un automorfismo $\Phi : \mathbb{CP}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^2$ tal que $\Phi(L_1) = L_2$ y $\Phi(p_1) = p_2$.



Capítulo 3

Curvas lisas y puntos al infinito

Como primer paso veamos un ejemplo de cónica. Consideremos la ecuación

$$y - x^2 = 0 \text{ en } \mathbb{C}^2,$$

cuya clausura en \mathbb{CP}^2 es $V(yz - x^2)$. Veamos que V es homeomorfo a S^2 .

Sabemos que la esfera S^2 es homeomorfa a la esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Sea la función $h : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow V$ tal que

$$h(t) = \begin{cases} [t : t^2 : 1] & , t \neq \infty \\ [0 : 1 : 0] & , t = \infty \end{cases}$$

demostramos que h es homeomorfismo:

I) Claramente h es continua en \mathbb{C} , así que analicemos la continuidad en ∞ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [t : t^2 : 1] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{t} : 1 : \frac{1}{t^2} \right] = [0 : 1 : 0] = h(\infty),$$

y entonces h es continua en $\overline{\mathbb{C}}$.

II) Determinemos la inversa de la función h . Consideremos $p \in V$ y encontremos $t \in \overline{\mathbb{C}}$ tal que $h(t) = p$. Si $p \neq [0 : 1 : 0]$, entonces $p = [x : y : 1]$ y tendremos $h(t) = [x : y : 1]$. Como $h(\infty) = [0 : 1 : 0]$, entonces $t \neq \infty$. Luego $[t : t^2 : 1] = [x : y : 1]$ lo que implica $t = x$. Si $p = [0 : 1 : 0]$ entonces $h(t) = p$ implica $t = \infty$. Luego $h^{-1} : V \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ es de la forma siguiente:

$$h^{-1}(p) = \begin{cases} x & , p = [x : y : 1] \\ \infty & , p = [0 : 1 : 0]. \end{cases}$$

III) Veamos que la función h^{-1} es continua. Claramente basta probar la continuidad en p .

$$\lim_{p \rightarrow [0:1:0]} h^{-1}([x : y : 1]) = \lim_{[x:y:1] \rightarrow [0:1:0]} x = \lim_{[t:t^2:1] \rightarrow [0:1:0]} t = \lim_{[\frac{1}{t}:1:\frac{1}{t^2}] \rightarrow [0:1:0]} t$$

cuando $[\frac{1}{t} : 1 : \frac{1}{t^2}] \rightarrow [0 : 1 : 0]$, tenemos $t \rightarrow \infty$, entonces

$$\lim_{p \rightarrow [0:1:0]} h^{-1}(p) = \infty.$$

Por lo tanto h^{-1} es continua.

Finalmente V es homeomorfo a S^2 .

Definición 3.0.1. Sea V una curva proyectiva en \mathbb{CP}^2 . Si

$$U_j = \{[x_0 : x_1 : x_2] : x_j \neq 0\}, \quad j = 0, 1, 2,$$

entonces $V \cap U_j$ está definida por un polinomio $P_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}$, es decir $V \cap U_j = P_j^{-1}(0)$. Decimos que V es lisa si $dP_j(q) \neq 0$, $\forall q \in V \cap U_j$, $\forall j = 0, 1, 2$.

Ejemplo 3.0.2. Consideremos la curva $V = \{[x : y : z] : yz = x^2\}$ en \mathbb{CP}^2 .

a) $V \cap U_0 = \{(y, z) : yz = 1\} = P^{-1}(0)$, donde $P = yz - 1$. Tenemos

$$dP(y, z) = \left(\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z} \right) = (z, y).$$

Entonces $dP(y, z) = 0 \Leftrightarrow (z, y) = (0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Sin embargo $(0, 0) \notin V \cap U_0$, entonces $dP(y, z) \neq 0$, $\forall (y, z) \in V \cap U_0$.

b) $V \cap U_1 = \{(x, z) : z = x^2\} = P^{-1}(0)$, donde $P = z - x^2$. Tenemos

$$dP(x, z) = \left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial z} \right) = (-2x, 1).$$

Entonces $dP(x, z) \neq 0$, $\forall (x, z) \in V \cap U_1$.

c) $V \cap U_2 = \{(x, y) : y = x^2\} = P^{-1}(0)$, donde $P = y - x^2$. Tenemos

$$dP(x, y) = \left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y} \right) = (-2x, 1).$$

Entonces $dP(x, y) \neq 0$, $\forall (x, y) \in V \cap U_2$.

Finalmente V es curva lisa.

Ejemplo 3.0.3. Consideremos la curva $V = \{[x : y : z] : y^2z = x^3\}$ en \mathbb{CP}^2 .

$V \cap U_2 = \{(x, y) : y^2 = x^3\} = P^{-1}(0)$, donde $P = y^2 - x^3$. Tenemos

$$dP(x, y) = (-3x^2, 2y).$$

Entonces $dP(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \in V \cap U_2$. En este caso y sin más detalle por ahora, decimos que $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ es una singularidad de la curva V . Por lo tanto V no es lisa.

Ejemplo 3.0.4. Sea la curva $C = C(a, b) = \{[x : y : z] : y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3\}$ en \mathbb{CP}^2 , donde $a, b \in \mathbb{C}$. Veamos cuando C es lisa. Si $a = b = 0$, C no es lisa, por el ejemplo anterior. Para la carta U_2 , tenemos

$$C \cap U_2 = \{[x : y : 1] : y^2 = x^3 + ax + b\} = P^{-1}(0),$$

donde $P = y^2 - x^3 - ax - b$. Entonces $dP = (-3x^2 - a, 2y)$, lo que implica

$$dP = 0 \Leftrightarrow (2y = 0 \wedge 3x^2 + a = 0).$$

Luego, los puntos críticos de P serán

$$\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}, 0\right), \left(-\sqrt{-\frac{a}{3}}, 0\right).$$

Veamos cuando estos puntos pertenecen a $C \cap U_2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}} - a\sqrt{-\frac{a}{3}} - b = 0 \\ \text{ó} \\ \frac{a}{3}\left(-\sqrt{-\frac{a}{3}}\right) + a\sqrt{-\frac{a}{3}} - b = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{2a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}} + b = 0 \\ \text{ó} \\ \frac{2a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}} - b = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow 4a^3 + 27b^2 = 0.$$

Por lo tanto C tiene alguna singularidad en U_2 si y sólo si $4a^3 + 27b^2 = 0$. Para la carta U_1 , tenemos

$$C \cap U_1 = \{[x : 1 : z] : z = x^3 + axz^2 + bz^3\} = P^{-1}(0),$$

donde $P = x^3 + axz^2 + bz^3 - z$. Entonces $dP = (3x^2 + az^2, 2axz + 3bz^2 - 1)$. Busquemos puntos críticos en $U_1 - U_2 = \{[x : 1 : z] : z = 0\} = \{[x : 1 : 0]\}$. Pero un punto de la forma $(x, 0)$ no puede ser punto crítico, pues $\frac{\partial P}{\partial z}(x, 0) = -1 \neq 0$. Para la carta U_0 , tenemos

$$C \cap U_0 = \{[1 : y : z] : y^2z = 1 + az^2 + bz^3\} = P^{-1}(0),$$

donde $P = 1 + az^2 + bz^3 - y^2z$. Entonces $dP = (-2yz, 2az + zbz^2 - y^2)$. Busquemos puntos críticos en

$$U_0 - (U_1 - U_2) = \{[1 : y : z] : y = 0, z = 0\} = \{[1 : 0 : 0]\}.$$

Observemos que $dP(0, 0) = 0$, pero como $(0, 0) \notin C \cap U_0$, concluimos que C no tiene singularidades en $U_0 - (U_1 - U_2)$.

Proposición 3.0.5. *La curva $C(a, b)$ es lisa si y sólo si $4a^3 + 27b^2 \neq 0$.*

Demostración. Observemos que $\mathbb{C}P^2 = U_2 \cup (U_1 - U_2) \cup (U_0 - U_1 - U_2)$. Por lo visto anteriormente, $C(a, b)$ nunca tiene singularidades en

$$(U_1 - U_2) \cup (U_0 - U_1 - U_2).$$

Luego $C(a, b)$ no tiene singularidades si y sólo si no tiene singularidades en U_2 , es decir, si y sólo si $4a^3 + 27b^2 \neq 0$. \square

Sea C una curva lisa definida por la ecuación $f(x, y) = 0$ en \mathbb{C}^2 , donde $f \in \mathbb{C}[x, y]$.

Definición 3.0.6. Decimos que el vector $v = (a, b) \in \mathbb{C}^2$ es tangente a C en el punto $p = (x_0, y_0) \in C$ si

$$df(p) \cdot v = 0,$$

es decir, si

$$a \frac{\partial f}{\partial x}(p) + b \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0.$$

Definición 3.0.7. Un campo de vectores sobre C es una función

$$X : C \rightarrow \mathbb{C}^2$$

tal que, para todo $p \in C$, el vector $X(p)$ es tangente a C en p , es decir, si

$$df(p) \cdot X(p) = 0 \quad \forall p \in C.$$

Decimos que $p \in C$ es una singularidad del campo X si $X(p) = 0$. Caso contrario, decimos que p es un punto regular.

Ejemplo 3.0.8. (Campo Hamiltoniano)

Dada la curva lisa

$$C = \{f(x, y) = 0\},$$

donde $f \in \mathbb{C}[x, y]$, consideremos la aplicación

$$H : C \rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, y) \rightarrow H(x, y) = \left(-\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right).$$

Veamos que H es un campo de vectores tangentes sobre C . Si $p = (x, y) \in C$, entonces

$$df(p) \cdot H(p) = -\frac{\partial f}{\partial y}(p) \frac{\partial f}{\partial x}(p) + \frac{\partial f}{\partial x}(p) \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0.$$

De hecho, el campo H está definido en todo \mathbb{C}^2 y se conoce como el campo hamiltoniano de la función f .

Ejemplo 3.0.9. Si $f(x, y) = x^2 - y^2 + 1$, entonces el campo

$$X = 2y \frac{\partial}{\partial x} + 2x \frac{\partial}{\partial y}$$

es tangente a la curva $C = \{x^2 - y^2 + 1 = 0\}$. Observemos que $X(0, 0) = 0$, sin embargo $(0, 0) \notin C$. Este campo no tiene singularidades en C .

Proposición 3.0.10. Sea $C = \{f(x, y) = 0\}$ una curva lisa, donde $f \in \mathbb{C}[x, y]$. Entonces, el campo Hamiltoniano $H = \left(-\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x} \right)$ no tiene singularidades en C .

Demostración. Si $H(p) = 0$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0$. Luego p es un punto crítico de f y por lo tanto p no puede pertenecer a C , ya que esta curva es lisa. □

Sea $C = \{f(x, y) = 0\}$ una curva en \mathbb{C}^2 . Expresemos

$$f = f_d + f_{d-1} + \cdots + f_0$$

donde cada f_j es un polinomio homogéneo de grado j ($j = 0, \dots, d$).

Sea \overline{C} la clausura de C en \mathbb{CP}^2 .

Definición 3.0.11. Los puntos al infinito de la curva C definida por el polinomio f en \mathbb{C}^2 son los puntos del conjunto $\overline{C} \setminus C$.

Recordemos que $\overline{C} = \{F(x, y, z) = 0\}$, donde F es la homogeneización de f :

$$F(x, y, z) = f_d(x, y) + f_{d-1}(x, y)z + \cdots + f_0z^d.$$

Los puntos al infinito de C son los puntos de intersección de \overline{C} con la recta del infinito $L_\infty = \mathbb{CP}^2 \setminus \mathbb{C}^2$, ya que $\overline{C} \setminus C = \overline{C} \cap (\mathbb{CP}^2 - \mathbb{C}^2)$. Pero

$$\mathbb{CP}^2 - \mathbb{C}^2 = \{[x : y : z] : z = 0\} = \{[x : y : 0] : x \neq 0 \vee y \neq 0\}.$$

Luego, los puntos al infinito de C son los puntos $[x : y : 0]$ con $x \neq 0 \vee y \neq 0$ tales que

$$F(x, y, 0) = f_d(x, y) = 0. \quad (3.1)$$

El conjunto $L_\infty = \mathbb{CP}^2 \setminus \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{CP}^1$ se expresa como $L_\infty = U \cup V$, donde

$$U = \{[x : 1 : 0], x \in \mathbb{C}\} \quad \text{y} \quad V = \{[1 : y : 0], y \in \mathbb{C}\}.$$

Luego, los puntos al infinito de C que están en U son los puntos $[x : 1 : 0]$ tales que $f_d(x, 1) = 0$. Además $L_\infty - U$ consta de el único punto $p = [1 : 0 : 0]$. Si $f_d(1, 0) = 0$, entonces p también será un punto al infinito de C . Es decir, los puntos al infinito dependen solamente de la parte homogénea de mayor grado del polinomio que define la curva.

Ejemplo 3.0.12. Encontremos los puntos al infinito de la curva

$$C : x^2y - 3xy^2 + 2y^3 + xy + x + y + 2 = 0.$$

La parte homogénea de mayor grado es $f_3 = x^2y - 3xy^2 + 2y^3$. Los puntos al infinito que están en $\{[x : 1 : 0]\}$ son aquellos tales que $f_3(x, 1) = 0$:

$$\begin{aligned}
 x^2 - 3x + 2 &= 0 \\
 (x - 1)(x - 2) &= 0 \\
 x = 1 \vee x = 2.
 \end{aligned}$$

O sea, obtenemos los puntos $p_1 = [1 : 1 : 0]$, $p_2 = [2 : 1 : 0]$. Finalmente, analicemos el único punto de L_∞ no considerado, o sea, el punto $p_3 = [1 : 0 : 0]$:

$$f_3(1, 0) = 0.$$

Luego, los puntos al infinito de C son p_1, p_2 y p_3 .

Ejemplo 3.0.13. Encontremos los puntos al infinito de la curva

$$C : x^2y - 2xy^2 + y^3 + x + y + 1 = 0.$$

La parte homogénea de mayor grado es $f_3 = x^2y - 2xy^2 + y^3$.

$$\begin{aligned}
 f_3(x, 1) &= 0 \\
 (x - 1)^2 &= 0 \\
 x &= 1.
 \end{aligned}$$

Luego, sólo tenemos el punto $[1 : 1 : 0]$ en $\{[x : 1 : 0]\}$. Además $[1 : 0 : 0]$ también es punto al infinito de C , ya que $f_3(1, 0) = 0$.

Ejemplo 3.0.14. Encontremos los puntos al infinito de la curva

$$C : x^3 - 6x^2y + 11xy^2 - 6y^3 + y + 1 = 0.$$

La parte homogénea de mayor grado es $f_3 = x^3 - 6x^2y + 11xy^2 - 6y^3$.

$$\begin{aligned}
 f_3(x, 1) &= 0 \\
 (x - 1)(x - 2)(x - 3) &= 0 \\
 x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3.
 \end{aligned}$$

Luego, obtenemos los puntos $[1 : 1 : 0], [2 : 1 : 0], [3 : 1 : 0]$ en $\{[x : 1 : 0]\}$. Además $[1 : 0 : 0]$ no es punto al infinito de C , ya que $f_3(1, 0) = 1 \neq 0$.

Los ejemplos anteriores ilustran la proposición siguiente:

Proposición 3.0.15. *Una curva de grado d en \mathbb{C}^2 tiene como máximo d puntos al infinito.*

Demostración. Sea $C = \{f(x, y) = 0\}$ una curva en \mathbb{C}^2 de grado d . Expresemos

$$f = f_d + f_{d-1} + \cdots + f_0,$$

donde cada f_i es un polinomio homogéneo de grado i ($i = 0, \dots, d$). La parte homogénea de mayor grado es

$$f_d = a_0x^d + a_1x^{d-1}y + \cdots + a_dy^d, \quad \text{donde } a_0, \dots, a_d \in \mathbb{C}.$$

Como primer caso, supongamos que $a_0 = 0$. Entonces $f_d(x, 1) = a_1x^{d-1} + \cdots + a_d$ es un polinomio de grado $d - 1$, entonces encontramos como máximo $d - 1$ puntos al infinito de C . Además, se cumple $f_d(1, 0) = 0$, por lo que el punto $[1 : 0 : 0]$ es un punto al infinito de C . Así, la curva C tiene como máximo d puntos al infinito.

Segundo caso, supongamos que $a_0 \neq 0$. Entonces $f_d(1, 0) = a_0 \neq 0$, lo que muestra que $[1 : 0 : 0]$ no es un punto al infinito de C . Como $f_d(x, 1) = a_0x^d + a_1x^{d-1} + \cdots + a_d$ es un polinomio de grado d , entonces encontramos como máximo d puntos al infinito de C en $\{[x : 1 : 0]\}$. \square

Definición 3.0.16. Sea C una curva en \mathbb{C}^2 de grado d . Diremos que C está bien presentada si tiene exactamente d puntos al infinito, todos ellos diferentes de $[1 : 0 : 0]$. En este caso, si C está definida por la ecuación afín $f = f_d + f_{d-1} + \cdots + f_0 = 0$, los puntos al infinito son aquellos puntos $[x : 1 : 0]$ tal que $f_d(x, 1) = 0$.

Observación 3.0.17. Si $C = \{F(x, y, z) = 0\}$ está bien presentada, los puntos al infinito son los puntos de las forma $[x : 1 : 0]$ tal que $F(x, 1, 0) = 0$.

Lema 3.0.18. *Considere la curva proyectiva $C = \{G(x, y, z) = 0\}$, donde G es polinomio homogéneo de grado d . Sea $g(x) = G(x, 1, 0) = b_0x^d + b_1x^{d-1} + \cdots + b_d$. Suponga que $b_0 \neq 0$ y $R(g, g') \neq 0$. Entonces C está bien presentada.*

Demostración. Dado que $b_0 \neq 0$, tenemos que $G(x, 1, 0) = b_0x^d + \cdots + b_d$ tiene grado d . La ecuación $g(x) = G(x, 1, 0) = 0$ nos da los puntos al infinito

diferentes de $[1 : 0 : 0]$. Como $R(g, g') \neq 0$, entonces g tiene d raíces diferentes. Luego, obtenemos d puntos diferentes al infinito, todos distintos de $[1 : 0 : 0]$. Como C tiene como máximo d puntos al infinito, concluimos que $[1 : 0 : 0]$ no es punto al infinito y entonces C está bien presentada. \square

Definición 3.0.19. Si $d = gr(C)$ y F es un polinomio homogéneo tal que $C = V(F)$, $gr(F) = d$, entonces decimos que $F = 0$ es una **ecuación reducida** de C .

Definición 3.0.20. El polinomio homogéneo F es **reducido** si sus factores irreducibles son diferentes dos a dos. Equivalentemente: no existe f polinomio homogéneo no constante tal que f^2 divida a F .

Proposición 3.0.21. La ecuación $F = 0$ es ecuación reducida de C si y sólo si $C = V(F)$ y F es polinomio reducido.

Demostración. \Rightarrow) Ya que $F = 0$ es ecuación reducida de C , tenemos que $C = V(F)$. Supongamos que F no es polinomio reducido, entonces existe f polinomio no constante tal que

$$F = f^2h, \quad h \in \mathbb{C}[x, y, z].$$

Luego $V(F) = V(fh)$ y además $gr(fh) < gr(F)$. Esto contradice el hecho que $gr(C) = gr(F)$, ya que $F = 0$ es ecuación reducida de C . Por lo tanto F es polinomio reducido.

\Leftarrow) Supongamos que $F = 0$ no es ecuación reducida de C y como $C = V(F)$, tenemos que

$$gr(F) > gr(C).$$

Entonces existe $H \in \mathbb{C}[x, y, z]$ tal que $C = V(H)$ y $gr(C) = gr(H)$. Luego

$$V(F) = V(H) \quad \wedge \quad gr(F) > gr(H).$$

Es decir, existe $p \in V(F) = V(H)$ tal que el polinomio F admite un factor no constante Q con multiplicidad $m \geq 2$ que cumple $Q(p) = 0$. Esto contradice el hecho que F es polinomio reducido. Por lo tanto $F = 0$ es ecuación reducida de C . \square

Proposición 3.0.22. Si $F = 0$ es ecuación reducida, entonces $F(x, y, 1)$ es polinomio reducido.

Demostración. Consideremos $f(x, y) = F(x, y, 1)$, siendo f la deshomogenización de F con respecto a la variable z . Supongamos que f no es polinomio reducido, entonces existe un factor no constante g tal que

$$f(x, y) = g(x, y)^2 h(x, y), \quad h \in \mathbb{C}[x, y].$$

Observe que $d = gr(f) = 2gr(g) + gr(h)$ y si homogenizamos con respecto a la variable z , tenemos que

$$F(x, y, z) = z^d f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = z^d g^2\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) h\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = \left[z^{gr(g)} g\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)\right]^2 z^{gr(h)} h\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right).$$

Esto es una contradicción, ya que $F = 0$ es ecuación reducida. \square

Proposición 3.0.23. Sea C una curva en \mathbb{CP}^2 . Si $gr(C) = d \in \mathbb{N}$, entonces existe una recta L tal que el número de puntos de intersección de C y L es d . Además, cada punto de intersección es transversal.

Demostración. Tomemos un punto $p \in \mathbb{CP}^2 \setminus C$. Aplicando un automorfismo de \mathbb{CP}^2 , podemos suponer que $p = [0 : 1 : 0]$. Es decir, supongamos que $[0 : 1 : 0] \notin C$. Consideremos $x_0 \in \mathbb{C}$ y definamos la recta

$$L(x_0) = \{[x : y : z] : x = x_0\}.$$

En la parte afín, $L(x_0)$ es la recta $x = x_0$. Procediendo como en los ejemplos anteriores, podemos verificar que $[0 : 1 : 0]$ es el único punto al infinito de $L(x_0)$. Entonces $L(x_0)$ y C no se intersectan en el infinito. Es decir $C \cap L(x_0) \subset \mathbb{C}^2$. Sea $H(x, y, z) = 0$ una ecuación reducida de C , o sea $gr(H) = d$. Observemos que z no divide a H . Caso contrario tendríamos $H(0, 1, 0) = 0$ y entonces $[0 : 1 : 0] \in C$, contradicción. Luego, existe algún monomio en $H(x, y, z)$ que no contiene a z como factor. Así $f(x, y) = H(x, y, 1)$ tiene grado d . Además, por la proposición 3.0.22, $f(x, y)$ será también un polinomio reducido.

$$C \cap L(x_0) = \{(x_0, y) : f(x_0, y) = 0\},$$

probemos que el polinomio $f(x_0, y) \in \mathbb{C}[y]$ tiene grado d . Escribimos

$$f = f_d + f_{d-1} + \cdots + f_0,$$

donde la parte homogénea de mayor grado es

$$f_d(x, y) = a_0 y^d + a_1 x y^{d-1} + \cdots + a_d x^d.$$

Bastará mostrar que $a_0 \neq 0$. Supongamos que $a_0 = 0$. Entonces, como $f_d(0, 1) = 0$, tenemos que $[0 : 1 : 0]$ es punto al infinito de $f = 0$, es decir $[0 : 1 : 0] \in C$, contradicción. Por lo tanto $a_0 \neq 0$, y así $f(x_0, y)$ tiene grado d . Para que $C \cap L(x_0)$ tenga d puntos, basta escoger x_0 de manera que el polinomio $f(x_0, y)$ no tenga raíces múltiples. Sea el conjunto

$$A = \{x_0 \in \mathbb{C} : f(x_0, y) \text{ tiene raíces múltiples}\}$$

queremos probar que $A \neq \mathbb{C}$. Siguiendo el teorema 1.5.15 podemos escribir el conjunto A como

$$A = \{x_0 \in \mathbb{C} : R(f(x_0, y), f'(x_0, y)) = 0\},$$

donde la derivación f' se hace respecto de y .

Para que $A \neq \mathbb{C}$, basta mostrar que $R(f(x_0, y), f'(x_0, y))$ no es nulo para algún $x_0 \in \mathbb{C}$. Supongamos lo contrario: $R(f(x_0, y), f'(x_0, y)) = 0$, para todo $x_0 \in \mathbb{C}$. Recordemos que $R(f, g)$ es un polinomio en los coeficientes de f y g . Luego $R(f(x_0, y), f'(x_0, y))$ es un polinomio $P(x_0)$ en la variable x_0 y entonces tiene que ser el polinomio nulo. Pero, observemos que, si escribimos

$$f(x, y) = a_0(x) + a_1(x)y + \cdots + a_d(x)y^d$$

podemos considerar $f(x, y), f'(x, y) \in \mathbb{C}[x][y]$. Luego $Q = R(f, f') \in \mathbb{C}[x]$. Pero, por supuesto

$$Q(x_0) = P(x_0), \forall x_0 \in \mathbb{C}.$$

Entonces $Q \equiv 0 \in \mathbb{C}[x]$, es decir, $R(f, f') = 0$. Entonces por teorema 1.5.16 se sigue que f y f' tienen un factor común $h \in \mathbb{C}[x][y]$ de grado ≥ 1 irreducible. Entonces, existe $q \in \mathbb{C}[x][y]$ tal que

$$f = hq,$$

y h divide también a

$$f' = h'q + hq'.$$

Como h divide a f' , entonces h divide a $h'q$. Pero, como h no divide a h' pues $gr(h) > gr(h')$, tenemos que h divide a q . Entonces h^2 divide a f , lo que es imposible ya que f es reducido. Por lo tanto $R(f(x_0, y), f'(x_0, y))$ no es nulo para algún $x_0 \in \mathbb{C}$. Luego, existe x_0 tal que $f(x_0, y)$ no tiene raíces múltiples y así $C \cap L(x_0)$ tiene d puntos. \square



Capítulo 4

Característica de Euler-Poincaré

Para este capítulo puede consultar [5] y [6]. Introducimos una invariante numérica llamada característica de Euler.

Euler fue el primero en estudiar al número $\chi(P) = V - A + C$, donde V es el número de vértices, A el número de aristas y C el número de caras de un poliedro $P \subset \mathbb{R}^3$. Como ejemplo, para el cubo tenemos

$$\chi(P) = 8 - 12 + 6 = 2.$$

Después de un largo periodo, Poincaré descubre el verdadero significado del número que Euler encontró y, de ahí en adelante, $\chi(P)$ fue parte central de notables igualdades. Se supo más tarde que el hecho de que el número $V - A + C$ sea constante igual a 2 para todo los poliedros se debe a que estos son todos homeomorfos a la esfera. Así, en nomenclatura moderna se dice que la característica de Euler-Poincaré de la esfera es 2. A continuación, estudiaremos la característica de Euler-Poincaré para cualquier superficie compacta.

4.1. Campos de vectores en superficies

Esta sección puede ser revisada por el lector en [5].

Una **superficie m -dimensional** S en el espacio euclidiano \mathbb{R}^n es un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ tal que cada punto $p \in S$ tiene una vecindad $V \subset S$, imagen de un homeomorfismo $\varphi : V_0 \rightarrow V$, donde $V_0 \subset \mathbb{R}^m$ es un abierto. Diremos

entonces que φ es una parametrización de V , exigiremos que $\varphi : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ sea una aplicación C^∞ . Ejemplos de superficies: la esfera

$$S^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1}; x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{m+1},$$

y el toro

$$T^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3.$$

El **espacio vectorial tangente** a la superficie m -dimensional $S \subset \mathbb{R}^n$ en el punto p es el conjunto $T_p S$, formado por vectores de velocidad $\lambda'(0)$ de caminos diferenciables del tipo $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ tales que $\lambda(0) = p$. El espacio vectorial tangente $T_p S$ es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n que tiene como base a los vectores $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}(x_0)$, donde $x_0 \in V_0, \varphi(x_0) = p$.

Un **campo de vectores tangentes** a la superficie $S \subset \mathbb{R}^n$ es una aplicación $v : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $v(p) \in T_p S$ para todo $p \in S$.

Una **singularidad** del campo v es un punto $p \in S$ donde $v(p) = 0$. La singularidad p se dice **aislada** cuando tiene una vecindad en la que no hay otra singularidad del campo v .

Ya que nuestro objetivo es estudiar las curvas algebraicas en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, en particular de ahora en adelante nos restringiremos al caso de superficies de dimensión 2.

Un campo en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ es una función $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$. Una singularidad del campo F es un punto $p \in U$ tal que $F(p) = 0$. De ahora en adelante, identificamos $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, así que un campo en $U \subset \mathbb{C}$ será una función $F : U \rightarrow \mathbb{C}$. Decimos que el campo F es holomorfo si $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa.

Definición de índice en dimensión 2

Sea $p \in U$ una singularidad aislada del campo continuo F . Sea $\epsilon > 0$ tal que p es la única singularidad de F en $D_\epsilon(p)$. Tomemos $r \in (0, \epsilon)$ y consideremos el camino cerrado

$$\gamma = F(p + re^{i\theta}), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

la imagen por F del círculo $|z - p| = r$. Entonces definimos el **índice** de F en U como

$$\text{Ind}(F, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z}.$$

Buena definición: si tomamos otro $r_1 \in (0, \epsilon)$ y consideramos el camino cerrado

$$\gamma_1(\theta) = F(p + r_1 e^{i\theta}), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

debemos mostrar que

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma} \frac{dz}{z}.$$

Por el teorema 1.6.9 basta mostrar que γ_1 y γ son libremente homotópicos en \mathbb{C}^* . Definamos la aplicación

$$\begin{aligned} H : [0, 2\pi] \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\theta, s) &\longmapsto F(p + (sr_1 + (1-s)r)e^{i\theta}). \end{aligned}$$

H toma valores en \mathbb{C}^* , pues $p + (sr_1 + (1-s)r)e^{i\theta} \neq p$ y $F \neq 0$ en $D_\epsilon(p)$. Entonces, es fácil verificar que H es homotopía libre entre γ_1 y γ en el abierto \mathbb{C}^* .

Si el campo F fuese holomorfo, el índice $\text{Ind}(F, p)$ es el número de ceros de F en el disco $|z - p| < r$, es decir $\text{Ind}(F, p)$ es la multiplicidad de p como cero de F .

Observación 4.1.1. Si F es holomorfa, entonces el índice $\text{Ind}(F, p) \geq 1$.

Ejemplo 4.1.2. El índice $\text{Ind}(F, 0)$ para los campos $F(z) = z$, $F(z) = iz$, $F(z) = z^2$ es 1, 1, 2 respectivamente.

Observación 4.1.3. El número entero (positivo, negativo o nulo)

$$i(F, p) = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{fdg - gdf}{f^2 + g^2},$$

donde C es cualquier círculo de centro p y $F = (f, g)$, es llamado **índice de Kronecker** de la singularidad aislada p del campo F . A continuación, probaremos que el índice de Kronecker $i(F, p)$ es equivalente a $\text{Ind}(F, p)$.

$$\text{Ind}(F, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z},$$

donde

$$\gamma(\theta) = F(\alpha(\theta)), \quad \alpha(\theta) = p + re^{i\theta}, \quad F = f + ig, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \text{Ind}(F, p) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{d(\gamma(\theta))}{\gamma(\theta)} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{d(F(\alpha(\theta)))}{F(\alpha(\theta))} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{d(f(\alpha) + ig(\alpha))}{f(\alpha) + ig(\alpha)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{[d(f(\alpha)) + id(g(\alpha))]}{f^2(\alpha) + g^2(\alpha)} (f(\alpha) - ig(\alpha)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{fd(g(\alpha)) - gd(f(\alpha))}{f^2(\alpha) + g^2(\alpha)} + i \left(-\frac{1}{2\pi} \right) \int_0^{2\pi} \frac{fd(f(\alpha)) + gd(g(\alpha))}{f^2(\alpha) + g^2(\alpha)}. \end{aligned}$$

Como ambas integrales son reales, vemos que la parte imaginaria de $\text{Ind}(F, p)$ será

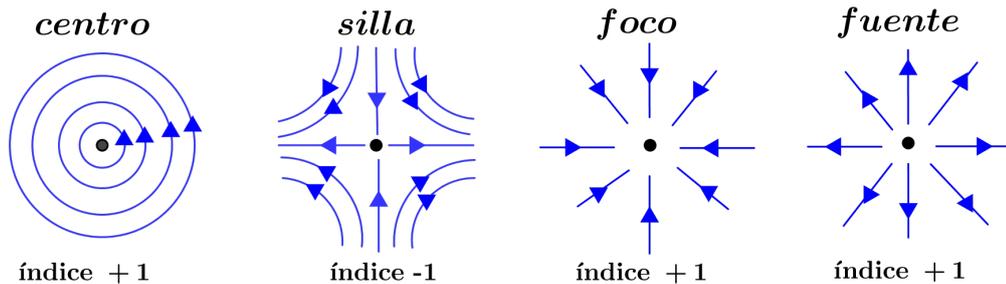
$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{fd(f(\alpha)) + gd(g(\alpha))}{f^2(\alpha) + g^2(\alpha)}.$$

Pero esto debe ser igual a cero, ya que $\text{Ind}(F, p) \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$\begin{aligned} \text{Ind}(F, p) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{fd(g(\alpha)) - gd(f(\alpha))}{f^2(\alpha) + g^2(\alpha)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha} \frac{fd(g(z)) - gd(f(z))}{f^2(z) + g^2(z)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha} \frac{fdg - gdf}{f^2 + g^2}, \end{aligned}$$

donde $\alpha(\theta)$ es el círculo $|z - p| = r$.

La interpretación intuitiva de $\text{Ind}(F, p)$ es el número de vueltas que dá el vector $F(q)$ cuando el punto q describe una pequeña curva en torno a la singularidad p . La figura adjunta muestra algunos ejemplos. En cada caso, el vector del campo es el vector velocidad del camino diseñado.



El índice en superficies

Nuestro propósito ahora será extender la noción de índice para campos en superficies. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ una superficie de dimensión dos y considere un campo continuo X sobre S . Sea $p \in S$ una singularidad de X . Podemos encontrar una parametrización $\varphi: V_0 \rightarrow V$, donde V_0 es un abierto de \mathbb{C} y V es un abierto de S que contiene a p . Como $d\varphi(z)$ es un isomorfismo para todo $z \in V_0$, existe un único campo sobre V_0 , denotado por $\varphi^*(X)$, tal que

$$d\varphi(z) \cdot \varphi^*(X)(z) = X(\varphi(z)), \quad \forall z \in V_0.$$

Entonces, si $z_0 = \varphi^{-1}(p)$, definiremos el índice de X en p como el índice

$$Ind(\varphi^*(X), z_0).$$

Como es de esperarse, esta definición no debe depender de la elección de la parametrización φ , es decir, dada cualquier otra parametrización $\tilde{\varphi}: \tilde{V}_0 \rightarrow \tilde{V}$ con $p \in \tilde{V}$, $\tilde{z}_0 = \tilde{\varphi}^{-1}(p)$, debemos mostrar que

$$Ind(\varphi^*(X), z_0) = Ind(\tilde{\varphi}^*(X), \tilde{z}_0). \quad (4.1)$$

Con este objetivo, demostraremos el siguiente teorema que garantiza que el índice es invariante por difeomorfismos. Sea $h: U_1 \rightarrow U_2$ un difeomorfismo entre abiertos U_1 y U_2 de \mathbb{C} . Sean X_1 y X_2 campos sobre U_1 y U_2 respectivamente, tales que

$$dh(z) \cdot X_1(z) = X_2(h(z)), \quad \forall z \in U_1.$$

Cuando se cumpla la relación anterior diremos que X_2 es la imagen directa de X_1 por el difeomorfismo h y denotaremos

$$X_2 = h_*(X_1).$$

Claramente, un punto $\zeta \in U_1$ es singularidad de X_1 si y solo si $h(\zeta)$ es singularidad de $h_*(X_1)$.

Teorema 4.1.4. *Bajo las condiciones anteriores, suponga que ζ es una singularidad de X_1 . Entonces*

$$Ind(X_1, \zeta) = Ind(h_*(X_1), h(\zeta)).$$

Antes de proseguir con la demostración de este teorema, veamos rápidamente como este implica la buena definición del índice en superficies. Efectivamente, el teorema anterior se puede aplicar al campo $X_1 = \varphi^*(X)$ sobre V_0 y el difeomorfismo $h = \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi$. Con estas elecciones es fácil verificar que

$$h_*(X_1) = \tilde{\varphi}^*(X),$$

así que la ecuación (4.1) se obtiene inmediatamente del teorema 4.1.4.

Demostración del teorema 4.1.4. Para comenzar, se puede probar fácilmente por un cálculo directo que el índice efectivamente no varía si el difeomorfismo h es una traslación. Esta observación nos facilitará mucho los cálculos, ya que nos permitirá suponer que $\zeta = h(\zeta) = 0$, cosa que haremos desde ahora. Como el número

$$Ind(h_*(X_1), 0)$$

está definido como integración de la forma $\frac{dz}{z}$ sobre un camino, grosso modo, este número no debe variar si se “deforma” suavemente el difeomorfismo h —vea el teorema 1.6.9—. De esta manera, si el difeomorfismo h pudiera ser deformado en la aplicación identidad, deberíamos obtener la igualdad

$$Ind(h_*(X_1), \zeta) = Ind(id_*(X_1), 0) = Ind(X_1, h(\zeta)).$$

Esta situación ocurrirá solo si h preserva la orientación del ambiente, hipótesis que podríamos admitir inicialmente. En cualquier caso, veamos primero que h puede ser deformado en el difeomorfismo dado por su derivada y que esto no altera el índice: denote la aplicación derivada $dh(0)$ por A . Para todo $t \in [0, 1]$, defina $H_t: U_1 \rightarrow \mathbb{C}$ como $H_t(z) = \frac{h(tz)}{t}$ si $t \neq 0$, $z \in U_1$; $H_0 = A$. Como h es diferenciable, podemos expresar

$$h(z) = A(z) + |z|\rho(z),$$

donde ρ es continua y $\rho(0) = 0$. Luego

$$H_t(z) = A(z) + |z|\rho(tz)$$

para todo $t \in (0, 1]$, $z \in U_1$. Además, esta expresión de H_t vale incluso para $t = 0$, lo que muestra que $H_t(z)$ es una función continua de $(t, z) \in [0, 1] \times U_1$.

Dicho de otra manera, la familia de difeomorfismos $\{H_t\}$ varía continuamente con $t \in [0, 1]$. Veamos que lo mismo ocurre con la familia de inversas $\{H_t^{-1}\}$. Efectivamente, se deduce fácilmente que $H_t^{-1}(w) = \frac{h^{-1}(tw)}{t}$ si $t \neq 0$ y $H_0^{-1} = A^{-1}$. Luego, la variación continua de la familia $\{H_t^{-1}\}$ se deduce exactamente como en el caso de $\{H_t\}$. Veamos ahora que también la derivada de H_t varía continuamente con $t \in [0, 1]$. Por cálculo directo a partir de la igualdad $H_t(z) = \frac{h(tz)}{t}$, $t \neq 0$ obtenemos

$$dH_t(z) = dh(tz)$$

para todo $t \in (0, 1]$, $z \in U_1$. Además, es fácil ver que esta expresión vale también para $t = 0$, así que, como $h \in C^\infty$, tenemos que $dH_t(z)$ varía continuamente con $(t, z) \in [0, 1] \times U_1$. Ahora, para $t \in [0, 1]$ defina la función

$$\eta(t) = \text{Ind}\left((H_t)_*(X_1), 0\right).$$

Mostremos que esta función es constante. Por la definición de índice tenemos

$$\eta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} \frac{dz}{z},$$

donde γ_t es el camino definido por

$$\gamma_t(s) = (H_t)_*(X_1)(re^{is}), \quad s \in [0, 2\pi],$$

con $r > 0$ pequeño suficiente tal que el disco cerrado de radio r y centro 0 está contenido en $H_t(U_1)$. En principio, el número r depende de t , pero como H_t depende continuamente de $t \in [0, 1]$, se puede tomar r constante que sirva para todo $t \in [0, 1]$. Entonces tenemos

$$\gamma_t(s) = dH_t\left(H_t^{-1}(re^{is})\right) \cdot X_1\left(H_t^{-1}(re^{is})\right).$$

Luego, por las consideraciones hechas anteriormente, es fácil ver que el camino γ_t depende continuamente de $t \in [0, 1]$. Además, como γ_t nunca pasa por el origen, vemos que γ_t , $t \in [0, 1]$ es una homotopía libre de caminos en \mathbb{C}^* . Entonces, por el teorema 1.6.9 deducimos que η es constante. En particular, $\eta(1) = \eta(0)$, así que

$$\text{Ind}(h_*(X_1), 0) = \text{Ind}(A_*(X_1), 0).$$

Remarcamos que la igualdad anterior se obtiene gracias a que pudimos encontrar una deformación (isotopía) entre h y su derivada $A = dh(0)$. De manera análoga, como A es una matriz invertible 2×2 , podemos deformar A en el espacio M de las matrices 2×2 , como detallaremos a continuación. Es un ejercicio conocido (vea por ejemplo el libro de Análisis volumen 2 de E. Lima) que el espacio M es un abierto con dos componentes conexas: la componente M_+ de las matrices con determinante positivo, y la componente M_- de las matrices con determinante negativo. Supongamos primero que $A \in M_+$. Entonces, como M_+ contiene a la matriz identidad, podemos encontrar un camino continuo de matrices

$$\{H_t\}_{t \in [0,1]} \subset M_+$$

tal que $H_0 = \text{id}$, $H_1 = A$. Entonces $\{H_t\}$ define una familia de difeomorfismos y podemos reproducir el argumento que hicimos más arriba y demostrar que

$$\text{Ind}(A_*(X_1), 0) = \text{Ind}(\text{id}_*(X_1), 0) = \text{Ind}(X_1, 0).$$

Luego

$$\text{Ind}(h_*(X_1), 0) = \text{Ind}(A_*(X_1), 0) = \text{Ind}(X_1, 0),$$

lo que demuestra el teorema. En el caso restante, tendremos $A \in M_-$ y entonces podremos encontrar un camino continuo de matrices H_t tal que $H_1 = A$ y

$$H_0 = J := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in M_-.$$

Entonces, análogamente obtendremos que

$$\text{Ind}(A_*(X_1), 0) = \text{Ind}(J_*(X_1), 0).$$

Finalmente, por un cálculo directo del índice usando la fórmula de Kronecker (observación 4.1.3) obtenemos que

$$\text{Ind}(J_*(X_1), 0) = \text{Ind}(X_1, 0),$$

lo que finaliza la demostración del teorema 4.1.4.

Teorema 4.1.5. (Poincaré-Hopf) *Sea S una superficie compacta. Sea F campo en S con singularidades aisladas p_1, \dots, p_k . Entonces el número*

$$\sum_{i=1}^k \text{Ind}(F, p_i) \in \mathbb{Z}$$

no depende del campo, es decir, sólo depende de S .

Este número se conoce como la característica de Euler-Poincaré de S y se denota por $\chi(S)$.

Denotemos a $m(p_i)$ como la multiplicidad de p_i . El resultado anterior, fue demostrado por Poincaré [1885] en dimensión 2 y por Hopf [1926] en las otras dimensiones. Para detalles de la prueba ver [5].

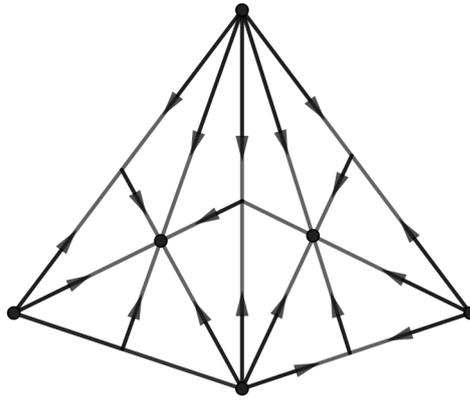
A continuación, relacionamos el número $V - A + C$, calculado por Euler, con el número $\chi(S)$.

Como nuestra intención no es profundizar sobre esto, de manera general y sin entrar en detalles daremos una noción geométrica. Lo expuesto a continuación puede ser revisado por el lector con mas detalle en [6].

Una **triangulación** de un espacio topológico X es una colección de triángulos curvilíneos (imágenes difeomorfas de triángulos del plano) que cubren X , de tal modo que dos de ellos, o no se intersecan, o tienen precisamente un lado en común. Decimos entonces que el espacio X es triangulable.

Un teorema de Whitehead [1940] asegura que toda superficie compacta es un espacio topológico triangulable. Para detalles ver [10].

Ahora bien, consideremos un campo vectorial F sobre S y verifiquemos que la suma de los índices de las singularidades de F es igual a $V - A + C$. Así, cualquiera que sea la triangulación de S , tendremos $\chi(S) = V - A + C$. En vez de definir F explícitamente, daremos sus curvas integrales, devidamente orientadas, lo que viene a ser lo mismo. Subdividimos cada triángulo de S en 6 otros, trazando sus 3 medianas. A continuación, “llenamos” cada triángulo con las líneas integrales del campo. Cada línea integral parte siempre del centro de un elemento de dimensión menor para el centro de un elemento de dimensión mayor: de un vértice para el medio de un lado, de un vértice hacia el centro del triángulo, o del centro de un lado al centro del triángulo. Ver figura adjunta.



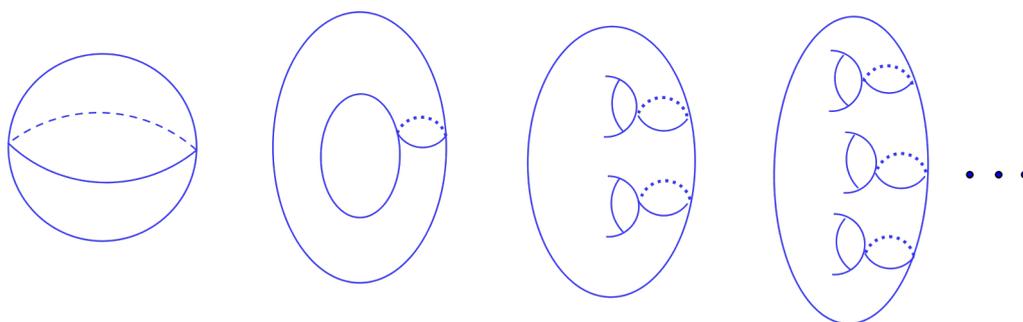
Cada elemento (vértice, arista o cara) “aporta” con una singularidad del campo. El centro de este elemento es un punto singular. Así, el campo F tendrá $V - A + C$ singularidades. Pero sucede que en un vértice las curvas integrales todas salen de aquel punto. En el centro de un triángulo, todas las curvas integrales entran. En cualquiera de estos dos casos, el índice de la singularidad es $+1$ por tratarse de un foco o fuente. En medio de un lado, sin embargo, hay curvas integrales que entran y otras que salen. Se tiene un punto de silla. Entonces el índice de ese punto es -1 . Así, la suma de los índices de las singularidades del campo F es igual a $V - A + C$. Luego, por el teorema de Poincaré-Hopf se tiene la igualdad $\chi(S) = V - A + C$.

4.2. Género de una superficie

Ya que no es nuestro propósito profundizar en cuestiones topológicas, que debe hacerse con cuidado, nos conformaremos con dar una definición intuitiva del género de una superficie compacta y lo denotaremos por g .

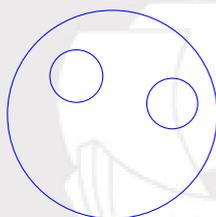
Primero, escribimos el teorema de clasificación de superficies orientables. Puede revisar la prueba en [9].

Teorema 4.2.1. *Toda superficie compacta orientable de dimensión real dos es homeomorfa a uno de los modelos de abajo.*

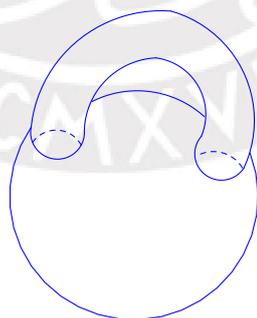


superficies de géneros 0, 1, 2, 3, etc

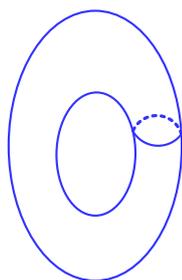
Estas superficies se pueden construir de la manera siguiente: comenzamos con la esfera que por definición tiene género cero. A continuación, recortamos dos discos de la esfera:



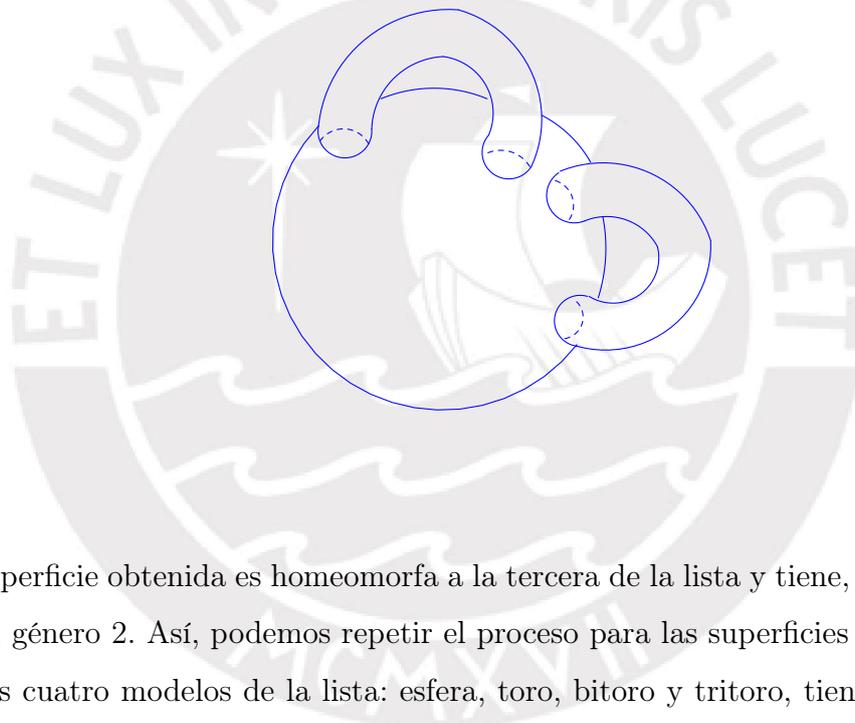
y en seguida, después de retirar estos dos discos, tenemos dos bordes y en su lugar pegamos un cilindro, de donde obtenemos:



“una esfera con una asa”. Esta superficie es homeomorfa a la segunda de la lista:



y decimos por definición que tiene género 1. Ahora repetimos la construcción: recortamos dos discos de la superficie anterior y pegamos en su lugar otro cilindro



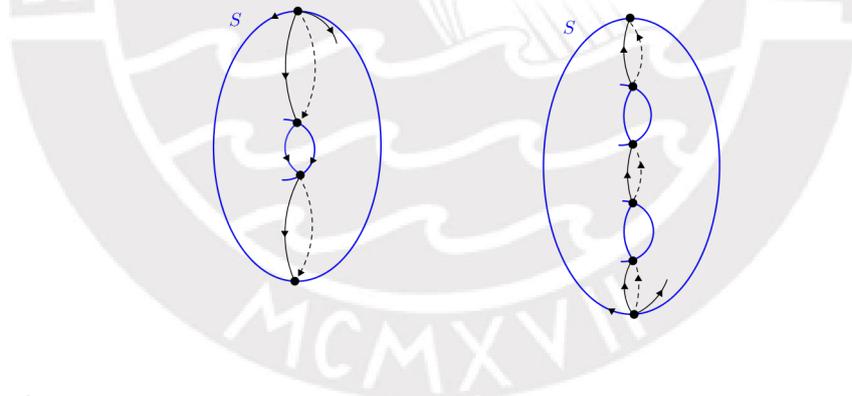
la superficie obtenida es homeomorfa a la tercera de la lista y tiene, por definición, género 2. Así, podemos repetir el proceso para las superficies siguientes. Estos cuatro modelos de la lista: esfera, toro, bitoro y tritoro, tienen géneros 0, 1, 2, 3, respectivamente. Entonces de manera intuitiva podemos decir que el **género** de una superficie es el número de agujeros o de asas que tiene esta superficie.

4.3. Relación entre género y característica de Euler-Poincaré

En esta sección mostraremos que el género y la característica de una superficie compacta orientable S están relacionados por la fórmula siguiente:

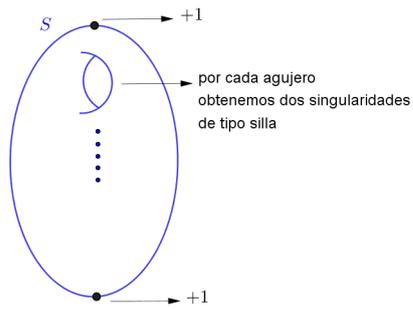
$$\chi(S) = 2 - 2g.$$

Para esto, utilizamos el teorema de Poincaré-Hopf 4.1.5 y la clasificación de superficies 4.2.1. Imaginemos S colocada “verticalmente” en \mathbb{R}^3 y consideremos sobre S el campo vectorial dado por el gradiente de la función altura: la función $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(p) = z$, donde $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. En la gráfica adjunta tenemos las superficies de género 1 y 2 respectivamente, situadas verticalmente en \mathbb{R}^3 . Los puntos señalados en cada figura son las singularidades del gradiente de la función altura. Como sabemos, el vector gradiente es perpendicular, en cada punto a la curva de nivel que pasa por ese punto. En este caso, las curvas de nivel son las intersecciones de S con los planos horizontales.



De la figura anterior, observamos que el toro tiene dos singularidades de tipo nodo y dos singularidades de tipo silla. Entonces, por el teorema de Poincaré-Hopf 4.1.5 tenemos $\chi(S) = +1 + 1 - 1 - 1 = 0$. En el caso del bitoro, observamos que tiene dos singularidades de tipo nodo y cuatro singularidades de tipo silla, por lo que la característica de Euler-Poincaré es $\chi(S) = +1 + 1 - 1 - 1 - 1 - 1 = -2$. En general, obtenemos dos singularidades de tipo $+1$, y por cada “agujero”, dos singularidades de tipo silla. Si hay g agujeros, tenemos $2g$ sillas. Luego

$$\chi(S) = 2g(-1) + 1 + 1 = 2 - 2g.$$



En conclusión, si una superficie compacta S tiene género g , entonces su característica de Euler-Poincaré es igual a $2 - 2g$. Por lo tanto, la esfera tiene característica 2, el toro tiene característica 0 y las demás superficies compactas en \mathbb{R}^3 tienen característica negativa.



Capítulo 5

Vectores en \mathbb{CP}^2

Como \mathbb{CP}^2 es una variedad compleja de dimensión compleja 2, dado $p \in \mathbb{CP}^2$, el conjunto de vectores en $p \in \mathbb{CP}^2$, que es el plano tangente $T_p\mathbb{CP}^2$ a \mathbb{CP}^2 en $p \in \mathbb{CP}^2$, es isomorfo a \mathbb{C}^2 . Un vector en $T_p\mathbb{CP}^2$ tiene un representante en cada carta afín, que se relacionan de la manera siguiente: sean

$$\varphi_1 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^2 \quad \text{y} \quad \varphi_2 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^2,$$

dos parametrizaciones de \mathbb{CP}^2 . Sea $p = \varphi_1(z_1) = \varphi_2(z_2)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^2$. Dados los vectores $v_1 \in T_{z_1}\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{C}^2$, $v_2 \in T_{z_2}\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{C}^2$, estos vectores representan el mismo vector en $T_p\mathbb{CP}^2$ si $d(\varphi_2^{-1}\varphi_1)(z_1) \cdot (v_1) = v_2$.

5.1. Vectores tangentes a una curva proyectiva

Sea $F = 0$ una ecuación reducida de una curva proyectiva \overline{C} , donde F es polinomio homogéneo en $\mathbb{C}[x, y, z]$. Sea $p \in \overline{C}$ y sea $v \in T_p\mathbb{CP}^2$. Sea $\varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^2$ una parametrización afín tal que $p = \varphi(z_0)$, $z_0 \in \mathbb{C}^2$. La curva C define la curva afín $C = \{z \in \mathbb{C}^2 : \varphi(z) \in \overline{C}\}$.

Definición 5.1.1. Decimos que el vector v es tangente a la curva proyectiva \overline{C} en p si el representante de v en $T_{z_0}\mathbb{C}^2$ es un vector tangente a la curva afín C en el punto $z_0 \in \mathbb{C}^2$.

Esta definición no depende de la parametrización φ , es decir, si $v \in T_p\mathbb{CP}^2$ es tangente a \overline{C} cuando se evalúa en la parametrización φ , entonces esto ocurrirá

también si φ se cambia por cualquier otra parametrización.

Recuerde que, el vector $v = (\alpha, \beta)$ es tangente a la curva afín $C = \{f(x, y) = 0\}$ en $(x_0, y_0) \in C$ si cumple la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\beta = 0.$$

Definición 5.1.2. Sea $\bar{C} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ una curva lisa. Un campo de vectores v sobre \bar{C} es una correspondencia que a cada $p \in \bar{C}$ asocia un vector $v(p) \in T_p\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ tangente a \bar{C} en p .

Definición 5.1.3. Sea $C \subset \mathbb{C}^2$ una curva afín lisa. La función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ es parametrización local holomorfa de C si cumple las condiciones siguientes:

1. $f(\Omega) \subset C$.
2. f inyectiva.
3. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^2$ es holomorfa.
4. $df(x) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ es inyectiva $\forall x \in \Omega$. Esto es equivalente a tener lo siguiente: si $f = (f_1, f_2)$, entonces $f'(t) = (f'_1(t), f'_2(t)) \neq 0, \forall t \in \Omega$. Esta condición se resume diciendo que f es regular.

Ejemplo 5.1.4. Sea $C = \{y - 3x - 2 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$. Entonces la función

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$$

definida por $f(t) = (t, 3t + 2)$, es parametrización holomorfa de C .

Definición 5.1.5. Sea $\bar{C} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ curva proyectiva. Decimos que la función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ es parametrización local holomorfa de \bar{C} si cumple las condiciones siguientes:

1. $f(\Omega) \subset \bar{C}$.
2. f inyectiva.
3. Para toda $\varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ parametrización tal que $f(\Omega) \cap \varphi(\mathbb{C}^2) \neq \emptyset$, se tiene que $\varphi^{-1} \circ f$ es parametrización local holomorfa de $\varphi^{-1}(\bar{C})$.

Lo último es equivalente a tener lo siguiente:

- 3'. Para toda $\varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^2$ parametrización tal que $f(\Omega) \cap \varphi(\mathbb{C}^2) \neq \emptyset$, se tiene que $\varphi^{-1} \circ f$ es regular.

Ejemplo 5.1.6. Sea $\overline{C} = \{[x : y : z] / x^2 + y^2 - z^2 = 0\} \subset \mathbb{CP}^2$. La función

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{CP}^2$$

definida por $f(t) = [t^2 - 1 : 2t : t^2 + 1]$, es parametrización holomorfa de \overline{C} . Es claro que f está bien definida, ya que $(t^2 - 1, 2t, t^2 + 1) \neq 0 \forall t$. Además, se verifica fácilmente que $f(\mathbb{C}) \subset \overline{C}$ y que f es inyectiva. Faltaría verificar que $\varphi^{-1} \circ f$ es regular para cada una de las tres parametrizaciones afines canónicas de \mathbb{CP}^2 :

1. Si $\varphi(x, y) = [x : y : 1]$, entonces

$$\varphi^{-1} \circ f(t) = \varphi^{-1}([t^2 - 1 : 2t : t^2 + 1]) = \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \frac{2t}{t^2 + 1} \right), \forall t \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}.$$

De donde

$$(\varphi^{-1} \circ f(t))' = \left(\frac{4t}{(t^2 + 1)^2}, \frac{2 - 2t^2}{(t^2 + 1)^2} \right) \neq 0, \forall t \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}.$$

2. Si $\varphi(u, v) = [u : 1 : v]$, entonces

$$\varphi^{-1} \circ f(t) = \varphi^{-1}([t^2 - 1 : 2t : t^2 + 1]) = \left(\frac{t^2 - 1}{2t}, \frac{t^2 + 1}{2t} \right), \forall t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

De donde

$$(\varphi^{-1} \circ f(t))' = \left(\frac{t^2 + 1}{2t^2}, \frac{t^2 - 1}{2t^2} \right) \neq 0, \forall t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

3. Si $\varphi(r, s) = [1 : r : s]$, entonces

$$\varphi^{-1} \circ f(t) = \varphi^{-1}([t^2 - 1 : 2t : t^2 + 1]) = \left(\frac{2t}{t^2 - 1}, \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} \right), \forall t \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}.$$

De donde

$$(\varphi^{-1} \circ f(t))' = \left(-\frac{2(t^2 + 1)}{(t^2 - 1)^2}, -\frac{4t}{(t^2 - 1)^2} \right) \neq 0, \forall t \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}.$$

5.2. Campos holomorfos inducidos por parametrizaciones

Sea $h : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ una parametrización holomorfa local de la curva afín lisa $C \subset \mathbb{C}^2$. Sea X un campo vectorial holomorfo en Ω . Dado $t \in \Omega$, considere el vector $dh(t) \cdot X(t)$. Estos vectores, para $t \in \Omega$, definen un campo vectorial sobre el conjunto $h(\Omega)$, cuya asignación es

$$h(t) \in h(\Omega) \rightarrow dh(t) \cdot X(t) \in \mathbb{C}^2.$$

Este campo vectorial se denota por $h_*(X)$.

Proposición 5.2.1. *El campo vectorial $h_*(X)$ es tangente a la curva afín C .*

Demostración. Considere $h = (h_1, h_2)$. Como $h(\Omega) \subset C = \{f(x, y) = 0\}$, entonces

$$\begin{aligned} f(h(t)) &= 0 \\ f(h_1(t), h_2(t)) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} h'_1(t) + \frac{\partial f}{\partial y} h'_2(t) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} (h'_1(t)X(t)) + \frac{\partial f}{\partial y} (h'_2(t)X(t)) &= 0. \end{aligned}$$

Luego $h_*(X)(h(t)) = (h'_1(t)X(t), h'_2(t)X(t))$ es tangente a C en $h(t)$. \square

Sea ahora $\bar{C} \subset \mathbb{CP}^2$ curva proyectiva. Sea $h : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \bar{C}$ una parametrización local. Sea X campo sobre Ω . Entonces, de igual manera, podemos definir el campo $h_*(X)$ sobre $h(\Omega)$ como

$$h_*(X)(h(t)) = dh(t) \cdot X(t).$$

En este caso, para cada $t \in \Omega$, se tiene la aplicación

$$dh(t) : \mathbb{C} \rightarrow T_{h(t)}\mathbb{CP}^2.$$

Esta aplicación tiene una expresión explícita si fijamos una parametrización. Esto se puede hacer sólo de manera local, es decir, fijado $t_0 \in U$, podemos encontrar una expresión explícita en una vecindad de t_0 . Esto se hace de la

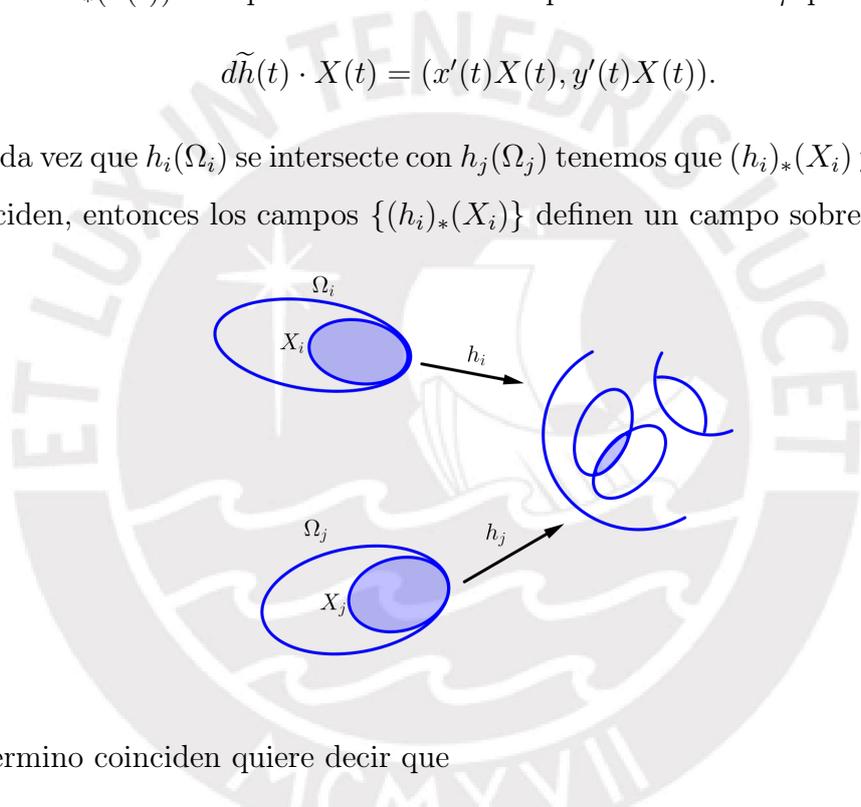
manera siguiente: Como $h(t_0) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2$, existe una parametrización afín canónica φ tal que $h(t_0) \in \varphi(\mathbb{C}^2)$. Además, ya que $\varphi(\mathbb{C}^2)$ es abierto, existe una vecindad Δ de t_0 en \mathbb{C} tal que $h(\Delta) \subset \varphi(\mathbb{C}^2)$. Luego, dado $p \in h(\Delta)$ podemos expresar $p = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. En estas coordenadas (x, y) , la parametrización h viene dada por

$$t \in \Delta \rightarrow \tilde{h}(t) = \varphi^{-1} \circ h(t) = (x(t), y(t)).$$

Entonces, en la parametrización φ , el campo $h_*(X)$ se expresa así: dado $t \in \Delta$, el vector $h_*(h(t))$ se representa en \mathbb{C}^2 vía la parametrización φ por el vector

$$d\tilde{h}(t) \cdot X(t) = (x'(t)X(t), y'(t)X(t)).$$

Si cada vez que $h_i(\Omega_i)$ se interseca con $h_j(\Omega_j)$ tenemos que $(h_i)_*(X_i)$ y $(h_j)_*(X_j)$ coinciden, entonces los campos $\{(h_i)_*(X_i)\}$ definen un campo sobre \bar{C} .



El término coinciden quiere decir que

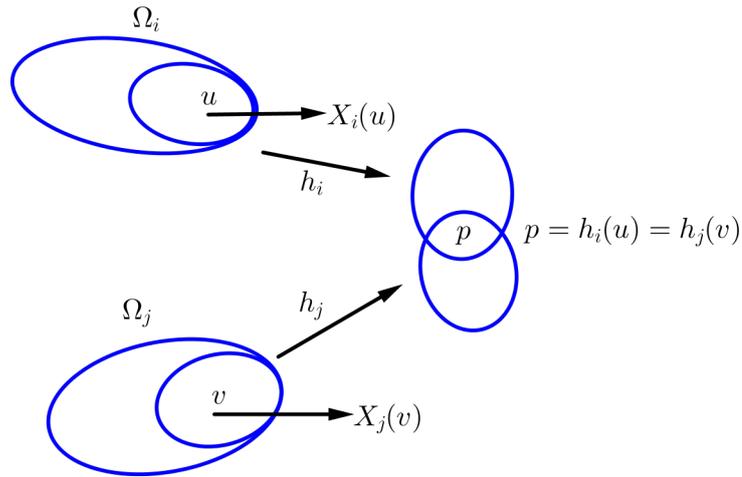
$$(h_i)_*(X_i)(p) = (h_j)_*(X_j)(p), \quad \forall p \in \varphi_i(\Omega_i) \cap \varphi_j(\Omega_j).$$

Esta última igualdad equivale a

$$X_j(v) = d(h_j^{-1} \circ h_i)(u) \cdot X_i(u),$$

es decir

$$X_j(h_j^{-1} \circ h_i(u)) = d(h_j^{-1} \circ h_i)(u) \cdot X_i(u), \quad \forall u \in \varphi_i^{-1}(h_i(\Omega_i) \cap h_j(\Omega_j)).$$



De esta manera, podemos definir lo siguiente:

Definición 5.2.2. Un campo sobre \bar{C} es una colección $\{(\varphi_i, \Omega_i, X_i)\}_{i \in I}$ que cumple las condiciones siguientes:

1. $\varphi_i : \Omega_i \rightarrow \bar{C}$ parametrización
2. $\bar{C} \subset \bigcup_i \varphi_i(\Omega_i)$
3. X_i campo en Ω_i
4. Para cualesquiera $i, j \in I$ tal que $h_i(\Omega_i) \cap h_j(\Omega_j) \neq \emptyset$ vale que $X_j = \Phi_*(X_i)$, donde $\Phi = h_j^{-1} \circ h_i$.

El campo $\{(\varphi_i, \Omega_i, X_i)\}_{i \in I}$ será holomorfo si cada X_i es holomorfo.

Campos sobre una recta

Considere la recta

$$L = \{[x : y : z] \in \mathbb{CP}^2 : ax + by + cz = 0, (a, b, c) \neq (0, 0, 0)\}.$$

Como $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 - \{0\}$, entonces el espacio

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : ax + by + cz = 0\}$$

tiene dimensión compleja 2, pues es núcleo de la función

$\varphi : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\varphi(x, y, z) = ax + by + cz$.

Sea el conjunto $\{u = (u_0, u_1, u_2), v = (v_0, v_1, v_2)\}$ una base de V . Entonces

$$\begin{aligned} f : \mathbb{CP}^1 &\longrightarrow L \\ [s : t] &\longmapsto [su + tv] \end{aligned}$$

está bien definida y es biyección. Se prueba que f es biholomorfo. Entonces, todo campo sobre L se corresponde con un campo sobre \mathbb{CP}^1 . Considere las parametrizaciones de L como sigue

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathbb{C} &\longrightarrow L & \text{y} & & \varphi_2 : \mathbb{C} &\longrightarrow L \\ s &\longmapsto [su + v] & & & t &\longmapsto [u + tv] \end{aligned}$$

claramente $L \subset \varphi_1(\mathbb{C}) \cup \varphi_2(\mathbb{C})$. Tenemos una aplicación de cambio de coordenadas $h = \varphi_2^{-1} \varphi_1$. Entonces, un campo X sobre L es un par de campos X_1 y X_2 sobre \mathbb{C} (plano s y t respectivamente) tal que $X_2 = h_*(X_1)$.

Proposición 5.2.3. *En la situación anterior, si X es holomorfo, entonces X_1 y X_2 son polinomios de grado menor igual a dos. Además, todo polinomio en \mathbb{C} , de grado menor igual a dos, define un campo vectorial sobre L .*

Demostración. Como $X_2 = h_*(X_1)$, tenemos

$$X_2(h(s)) = dh(s) \cdot X_1(s) = h'(s)X_1(s) = -\frac{1}{s^2}X_1(s).$$

Haciendo $t = h(s) = \frac{1}{s}$, tenemos

$$X_2(t) = -t^2 X_1\left(\frac{1}{t}\right), \forall t \in \mathbb{C}^*.$$

Es claro que $-t^2 X_1\left(\frac{1}{t}\right) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$. Pero, como $X_2(t) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, entonces $-t^2 X_1\left(\frac{1}{t}\right)$ debe extenderse holomorficamente a $t = 0$. Luego $-t^2 X_1\left(\frac{1}{t}\right)$ será limitado en una vecindad de 0, esto es

$$\exists M > 0, \varepsilon > 0 \text{ tal que } \left| t^2 X_1\left(\frac{1}{t}\right) \right| \leq M \quad \forall t, |t| \leq \varepsilon.$$

Haciendo $t = \frac{1}{u}$, tenemos

$$\left| \frac{X_1(u)}{u^2} \right| \leq M \quad \forall u, |u| \geq 1/\varepsilon,$$

entonces

$$|X_1(u)| \leq Mu^2 \quad \forall |u| \geq 1/\varepsilon.$$

Expresemos

$$X_1(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + \dots$$

por el teorema de la desigualdad de Cauchy 1.6.5 dado $D = \overline{D}_r(0)$ ($r > 1/\varepsilon$), tenemos

$$|a_n| \leq \frac{\sup_{\overline{D}} |X_1|}{r^n}.$$

Además $\sup_{\overline{D}} |X_1| = \sup_{\partial D} |X_1| \leq Mr^2$, entonces

$$|a_n| \leq \frac{Mr^2}{r^n} \quad \forall r > 1/\varepsilon.$$

Si $r \rightarrow \infty$ se tiene $|a_n| \leq 0 \quad \forall n \geq 3$. Por lo tanto X_1 es un polinomio de grado menor igual a dos. Por otro lado, dado cualquier polinomio $f(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2$ de grado menor igual a dos, definiendo

$$X_1(s) = f(s) \text{ y } X_2(t) = -t^2 f\left(\frac{1}{t}\right) = -a_0t^2 - a_1t - a_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$$

obtenemos un campo X sobre L . Todos los campos sobre L son de esta forma. □

Campos tangentes a cúbicas

Sea la curva lisa

$$\overline{C} = \{y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3\}, \quad 4a^3 + 27b^2 \neq 0.$$

Como ya vimos en el ejemplo 3.0.4, el único punto al infinito de \overline{C} es $\{[0 : 1 : 0]\}$. Consideremos la curva

$$C = \overline{C} - \{[0 : 1 : 0]\} = \{[x : y : 1] / y^2 = x^3 + ax + b\} \subset \mathbb{C}^2,$$

y el campo

$$X : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 \text{ definido por } X(x, y) = (-f_y, f_x),$$

donde $f = y^2 - x^3 - ax - b$. Sabemos que, para cada $p \in C$, el vector $X(p)$ es tangente a C en p , es decir, $Z = X|_C$ es un campo tangente sobre C . Sin embargo, en principio, Z no está definida en $q = [0 : 1 : 0] \in \overline{C}$. Expresemos el campo X en coordenadas que contengan a $q = [0 : 1 : 0]$. Consideremos las coordenadas $\varphi : (u, v) \rightarrow [u : 1 : v] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2$. El cambio de coordenadas de (x, y) a (u, v) es dado por el biholomorfismo

$$h : \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 / y \neq 0\} \rightarrow \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 / v \neq 0\}$$

definido por $(u, v) = h(x, y) = \left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right)$.

$$[x : y : 1] = [u : 1 : v]$$

$$\begin{array}{l} (x, y) \qquad (u, v) \\ [x : y : 1] = [u : 1 : v] \\ \left[\frac{x}{y} : 1 : \frac{1}{y}\right] = [u : 1 : v] \end{array}$$

Sobre el conjunto $U = \{(u, v) / v \neq 0\}$ el campo X tiene la siguiente expresión:

$$Y(u, v) = h_*(X)(x, y) = dh(x, y) \cdot X(x, y), \quad (u, v) = h(x, y).$$

Realizando los cálculos, tenemos

$$dh(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ 0 & -\frac{1}{y^2} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad X = (-2y, -3x^2 - a).$$

Entonces

$$Y = \begin{bmatrix} -2 + \frac{3x^3}{y^2} + \frac{ax}{y^2} \\ \frac{3x^2 + a}{y} \end{bmatrix}.$$

Sabemos además que $y = \frac{1}{v}$, $x = \frac{u}{v}$, luego

$$Y = \left(-2 + \frac{3u^3}{v} + auv, 3u^2 + av^2\right), \quad \forall (u, v) \in \mathbb{C}^2 \text{ tal que } v \neq 0.$$

Expresemos la curva \overline{C} en coordenadas (u, v) como sigue:

$$\begin{aligned}
\bar{C} &= \{y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3\} \cap \{[u : 1 : v]\} \\
&= \{v = u^3 + auv^2 + bv^3\} \\
&= \{g(u, v) = 0\}, \quad g = v - u^3 - auv^2 - bv^3.
\end{aligned}$$

Como $\frac{\partial g}{\partial v}(0, 0) \neq 0$, entonces por el teorema de la función implícita 1.6.6 existe un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, $0 \in \mathbb{C}$ y una función holomorfa $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\tilde{\xi} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad \tilde{\xi}(t) = (t, \xi(t)),$$

es una parametrización de una vecindad $\tilde{\xi}(\Omega)$ de q en \bar{C} . Como \bar{C} interseca $\{v = 0\}$ sólo en el punto $q = (0, 0)$, entonces

$$\tilde{\xi}(\Omega) \setminus \{q\} \subset \{(u, v) : v \neq 0\}.$$

Por lo tanto Y está definido sobre $\tilde{\xi}(\Omega - \{0\})$. El campo Y está representado en $\Omega - \{0\}$ por un campo

$$F : \Omega - \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } Y|_{\tilde{\xi}(\Omega - \{0\})} = \tilde{\xi}_*(F).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
Y(t, \xi(t)) &= (F(t), \xi'(t)F(t)), \\
\left(-2 + \frac{3t^3}{\xi} + a + \xi, 3t^2 + a\xi^2\right) &= (F(t), \xi'(t)F(t)).
\end{aligned}$$

Luego $F(t) = -2 + \frac{3t^3}{\xi} + at\xi$, $t \neq 0$. Recuerde que ξ es holomorfa en $\Omega \subset \mathbb{C}$, así que, cerca de $0 \in \Omega$ tenemos $\xi(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots$. Observe que $a_0 = \xi(0) = 0$, y además recordemos que $g(t, \xi(t)) = 0$, lo que implica que $\xi - t^3 - at\xi^2 - b\xi^3 = 0$. Es decir

$$(a_1t + a_2t^2 + \dots) - t^3 - at(a_1t + a_2t^2 + \dots)^2 - b(a_1t + a_2t^2 + \dots)^3 = 0.$$

Por lo tanto, agrupando y ordenando la ecuación anterior, tenemos

$$a_1t + a_2t^2 + (a_3 - 1 - aa_1^2 - ba_1^3)t^3 + \dots = 0.$$

Lo cual implica que $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$. De esta manera, el campo F queda definido por $F(t) = -2 + \frac{3t^3}{t^3 + \dots} + at\xi(t)$ y se extiende de manera holomorfa a $t = 0$. Luego, el campo $X|_C$ se extiende a un campo \bar{X} sobre \bar{C} tal que $\bar{X}(q) \neq 0$. Por lo tanto \bar{X} sobre \bar{C} no tiene singularidades, entonces la característica de Euler-Poincaré $\chi(\bar{C})$ es 0 y, la curva \bar{C} tiene género igual a 1. Así, la curva es homeomorfa al toro.

5.3. Campos meromorfos inducidos por parametrizaciones

Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto. Decimos que X es campo **meromorfo** en U si X es una función meromorfa en U . Claramente un campo meromorfo define un campo holomorfo fuera de su conjunto de polos. Luego, la noción de singularidad se establece igual que en el capítulo anterior. Sea $h : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ una parametrización holomorfa local de la curva afín lisa $C \subset \mathbb{C}^2$. Sea X un campo meromorfo en Ω . Sean $\{p_j\}_{j \in I}$ los polos de X . Luego, como se hizo en la sección anterior, tenemos que $dh(t) \cdot X(t)$ define un vector tangente a C en $h(t)$ para todo $t \in \Omega \setminus \{p_j\}_{j \in I}$. Entonces, por definición, diremos que

$$h(t) \in h(\Omega) \rightarrow dh(t) \cdot X(t) \in \mathbb{C}^2$$

es el campo meromorfo inducido por X vía la parametrización h , y lo denotaremos por $h_*(X)$. Observemos que $h_*(X)$ no está definido para $t \in \{p_j\}_{j \in I}$ y diremos que los puntos $h(t)$, $t \in \{p_j\}_{j \in I}$, son los polos de $h_*(X)$.

Definición 5.3.1. Sea \bar{C} una curva proyectiva lisa en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Un campo X meromorfo sobre \bar{C} es una colección $\{(\varphi_i, \Omega_i, X_i)\}_{i \in I}$ que cumple las condiciones siguientes:

1. $\varphi_i : \Omega_i \rightarrow \bar{C}$ parametrización
2. $\bar{C} \subset \bigcup_i \varphi_i(\Omega_i)$
3. X_i campo meromorfo sobre Ω_i
4. Para cualesquiera $i, j \in I$ tal que $h_i(\Omega_i) \cap h_j(\Omega_j) \neq \emptyset$ vale que $X_j = \Phi_*(X_i)$, donde $\Phi = h_j^{-1} \circ h_i$.

Del ítem 4, tenemos que si $q \in C$ se expresa como

$$q = h_i(z_i) = h_j(z_j),$$

con $z_i \in \Omega_i, z_j \in \Omega_j$, entonces se tiene que

$$z_i \text{ es polo de } X_i \Leftrightarrow z_j \text{ es polo de } X_j.$$

Gracias a esto, podemos definir que q es polo de X si $q = h_i(z_i)$ con z_i polo de X_i , para algún $i \in I$. Además, definimos el orden de q como

$$\text{ord}(X, q) = \text{ord}(X_i, z_i).$$

De la ecuación $X_j = \Phi_*(X_i)$, se obtiene fácilmente que este número no depende de i . Naturalmente, las singularidades de X son los puntos $p = h_i(w_i)$ tal que $X_i(w_i) = 0$.

Teorema 5.3.2. *Sea \bar{C} como en la definición anterior. Sea X campo meromorfo sobre \bar{C} . Además, sean p_1, \dots, p_k las singularidades y q_1, \dots, q_l los polos de X . Entonces*

$$\sum_{j=1}^k m(p_j) - \sum_{j=1}^l \text{ord}(X, q_j) = \chi(\bar{C})$$

Para probar el teorema, debemos ver primero el resultado siguiente:

Lema 5.3.3. *Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto. Sea F un campo holomorfo en $U - \{0\}$, con un polo de orden $n \in \mathbb{N}$ en $0 \in U$, pero sin singularidades. Entonces, existe $\epsilon > 0$ y un campo continuo $X : U \rightarrow \mathbb{C}$ tal que:*

1. $\bar{D}_\epsilon(0) \subset U$
2. X coincide con F en $U - D_\epsilon(0)$
3. X tiene una única singularidad en $0 \in \mathbb{C}$ de índice $-n$.

Demostración. Como F tiene polo de orden n en 0 , sabemos que podemos expresar

$$F(z) = \frac{h(z)}{z^n}, \quad h \in \mathcal{O}(U), \quad h(0) \neq 0.$$

Luego $h(z) \neq 0, \forall z \in U$. Tomemos $\epsilon > 0$ tal que $\bar{D}_\epsilon(0) \subset U$. Cambiando de coordenadas si es necesario, podemos suponer que $\epsilon = 1$. Si $z \in \partial D_1(0)$, tenemos que

$$F(z) = \frac{h(z)}{z^n} = h(z)\bar{z}^n.$$

Entonces, definimos

$$X(z) = \begin{cases} F(z) & , \text{ si } z \in U \setminus D_1(0) \\ h(z)\bar{z}^n & , \text{ si } z \in D_1(0) \end{cases}$$

el cual es un campo continuo. Así

$$\begin{aligned} \text{Ind}(X, 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{X(\partial D)} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i} \int_{F(\partial D)} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{F'(z)}{F(z)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{z^n h'(z) - n z^{n-1} h(z)}{z^n h(z)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \left(\frac{h'(z)}{h(z)} - \frac{n}{z} \right) dz \\ &= -n. \end{aligned}$$

□

Prueba del teorema 5.3.2:

Demostración. Aplicando sucesivamente el lema anterior, podemos construir un campo continuo Y sobre \bar{C} tal que:

1. Y coincide con X salvo en pequeños discos D_j centrados en cada polo q_j de X .
2. Las singularidades de X son también singularidades de Y y los índices coinciden.
3. Los polos de X son singularidades de Y y sus índices son los opuestos de los ordenes de estos polos.
4. Y no tiene más singularidades que las indicadas en 2 y 3.

Luego, por el teorema de Poincaré-Hopf 4.1.5 tenemos

$$\chi(\bar{C}) = \sum_{q \in \text{Sing}(Y)} \text{Ind}(q) = \sum_{j=1}^k m(p_j) - \sum_{j=1}^l \text{ord}(X, q_j).$$

□

Capítulo 6

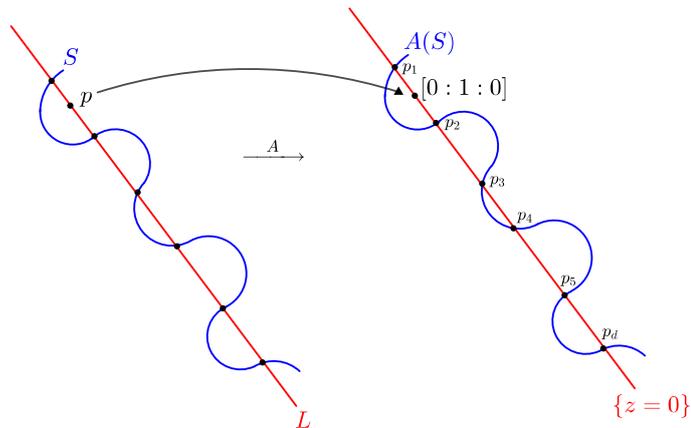
Fórmula grado género

Para finalizar el presente trabajo, desarrollaremos en este capítulo el resultado más importante de la tesis, que es la fórmula que relaciona el grado y género de una curva lisa en \mathbb{CP}^2 .

Teorema 6.0.1. *Sea $S \subset \mathbb{CP}^2$ una curva lisa de grado $d \in \mathbb{N}$. Entonces el género de S satisface la ecuación siguiente:*

$$g(S) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Demostración. Dado que S es una curva en \mathbb{CP}^2 de grado $d \in \mathbb{N}$, por la proposición 3.0.23 existe una recta L tal que el número de puntos de intersección de S y L es d . Tomemos $p \in L \setminus S$. Por el lema 2.0.6, existe un automorfismo A de \mathbb{CP}^2 tal que $A(L) = \{z = 0\}$ y $A(p) = [0 : 1 : 0]$. Luego, $A(S)$ interseca $\{z = 0\}$ en d puntos al infinito y ninguno de estos es $[0 : 1 : 0]$.



Como $g(S) = g(A(S))$ y $gr(S) = gr(A(S))$, cambiando la notación si es necesario, podemos suponer que S intersecta a $\{z = 0\}$ en d puntos y ninguno de estos puntos es $[0 : 1 : 0]$. Es decir, si S tiene la ecuación afín $f(x, y) = 0$, siendo f de grado d , entonces tenemos que $\{f = 0\}$ tiene d puntos al infinito y ninguno de estos puntos es $[0 : 1 : 0]$. Así que estos puntos al infinito son de la forma $p_j = [1 : m_j : 0]$ donde $m_j \in \mathbb{C}$, $\forall j \in \{1, \dots, d\}$.

Consideremos el campo hamiltoniano de f :

$$H(x, y) = (-f_y(x, y), f_x(x, y)).$$

Como $(f_x, f_y) \neq 0$ sobre S , pues S es no singular, entonces H define un campo holomorfo no singular sobre $S - \{p_1, \dots, p_d\}$. Demostraremos que H tiene polos en cada p_j y cada uno de estos tiene orden $d-3$. Consideremos las coordenadas $(u, v) \rightarrow [1 : u : v]$. Estas coordenadas se relacionan con las coordenadas (x, y) por la relación $(u, v) = \varphi(x, y) = \left(\frac{y}{x}, \frac{1}{x}\right)$. El campo $H(x, y)$ se expresa en las coordenadas (u, v) por

$$F = \varphi_*(H)$$

entonces $F(u, v) = d\varphi(x, y) \cdot H(x, y)$, donde $(x, y) = \varphi^{-1}(u, v) = \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right)$. Notemos que

$$d\varphi(x, y) = \begin{bmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ -\frac{1}{x^2} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad H(x, y) = (-f_y, f_x).$$

Entonces

$$F(u, v) = \left(\frac{y}{x^2} f_y + \frac{1}{x} f_x, \frac{1}{x^2} f_y \right) = (uvf_y + vf_x, v^2 f_y).$$

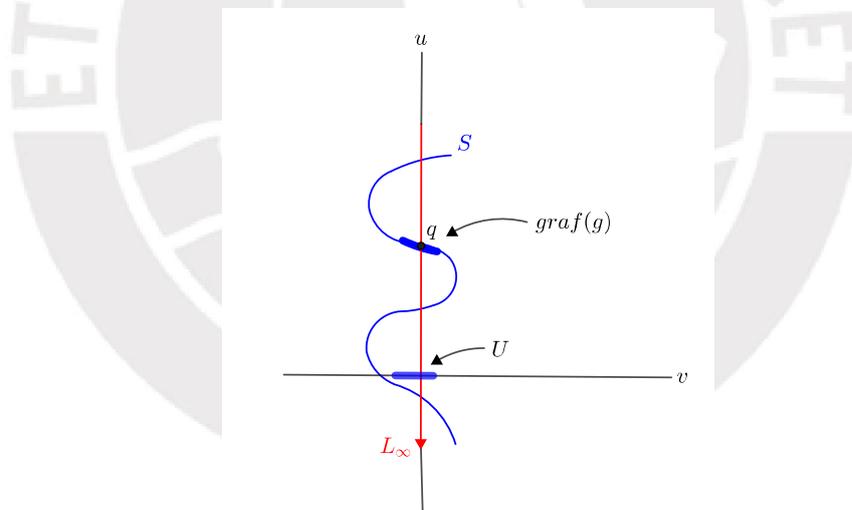
Sabemos que $z = 0$ es la ecuación homogénea de la recta al infinito

$$L_\infty = \{[x : y : z] : z = 0\},$$

y en coordenadas (u, v) esta recta se expresa como

$$L_\infty \cap \mathbb{C}^2 = \{[1 : u : v] : v = 0\}.$$

Sea q uno de los p_j . Por la proposición 3.0.23 tendríamos que S y el eje u se intersecan transversalmente en q , entonces, cerca de q , podemos parametrizar S como el gráfico de una función $g : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$, $0 \in U$ y $(g(0), 0) = q$.



Es decir

$$t \in U \xrightarrow{\psi} (g(t), t)$$

parametriza una vecindad de p en S . En la coordenada $t \in U$, el campo $F|_S$ se representa por un campo $G : U \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$F = \psi_*(G)$$

entonces

$$F(g(t), t) = d\psi(t) \cdot G(t) = (g'(t)G(t), G(t)). \quad (6.1)$$

Pero

$$F(g(t), t) = (g(t)tf_y(x, y) + tf_x(x, y), t^2f_y(x, y)), \quad (6.2)$$

donde $(x, y) = \left(\frac{1}{t}, \frac{g(t)}{t}\right)$. Luego, igualando las segundas coordenadas de las ecuaciones (6.1) y (6.2) obtenemos

$$G(t) = t^2f_y\left(\frac{1}{t}, \frac{g(t)}{t}\right). \quad (6.3)$$

Por otro lado, expresemos

$$f = f^d + f^{d-1} + \dots + f^0,$$

donde cada f^i es un polinomio homogéneo de grado i ($i = 0, \dots, d$). Luego

$$f_y = f_y^d + f_y^{d-1} + \dots + f_y^1,$$

donde cada f_y^i es homogéneo de grado $i - 1$. Como los puntos al infinito de f son $[1 : m_j : 0]$, entonces, como ya vimos en la definición 3.0.11 ecuación (3.1), debemos tener

$$f^d(1, m_j) = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, d\}.$$

Es decir, los números m_1, \dots, m_d son raíces del polinomio en una variable $h(y) = f^d(1, y)$. Como $gr(h) \leq d$ y m_1, \dots, m_d son raíces diferentes de $h(y)$, se sigue que $gr(h) = d$. Entonces

$$h(y) = k(y - m_1) \cdot \dots \cdot (y - m_d), \quad \text{donde } k \neq 0.$$

Como cada m_j es raíz simple de h , debemos tener por el teorema 1.5.12 que $h'(m_j) \neq 0$. Luego

$$f_y^d(1, m_j) \neq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, d\}. \quad (6.4)$$

Además, como $(g(0), 0) = p_j$ para algún $j \in \{1, \dots, d\}$, entonces $g(0) = m_j$. Reemplazando en la ecuación (6.4) tenemos $f_y^d(1, g(0)) \neq 0$. Por otro lado, de la ecuación (6.3) tenemos

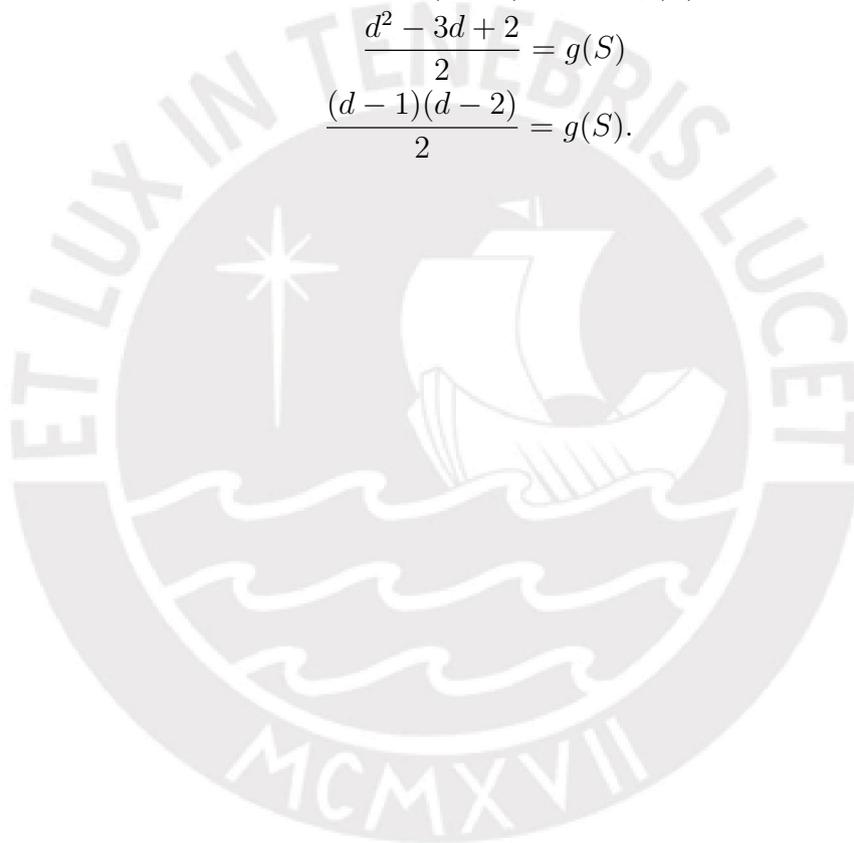
$$\begin{aligned}
G(t) &= t^2 \left(f_y^d \left(\frac{1}{t}, \frac{g(t)}{t} \right) + f_y^{d-1} + \dots \right) \\
&= t^2 \left(\frac{1}{t^{d-1}} f_y^d(1, g(t)) + \frac{1}{t^{d-2}} f_y^{d-1} + \dots \right) \\
&= \frac{1}{t^{d-3}} (f_y^d(1, g(t)) + t f_y^{d-1}(1, g(t)) + t^2 f_y^{d-2}(1, g(t)) + \dots).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, como $f_y^d(1, g(0)) \neq 0$, tenemos un polo de orden $(d-3)$ en $t = 0$.

Así, por el teorema 5.3.2 tenemos que

$$\begin{aligned}
-\sum_{j=1}^d \text{ord}(H, p_j) &= \chi(S) \\
-d(d-3) &= 2 - 2g(S) \\
\frac{d^2 - 3d + 2}{2} &= g(S) \\
\frac{(d-1)(d-2)}{2} &= g(S).
\end{aligned}$$

□



Referencias Bibliográficas

- [1] Achahuanco Garry; *Teoría de distribución de valores de funciones meromorfas y sus aplicaciones*. PUCP, 2016.
- [2] De Nápoli, Pablo; *Polinomios (Notas de Álgebra I)*.
- [3] Garay L., Cristhian; *Geometría algebraica básica ejemplificada*. ESFM, 2015, p. 31.
- [4] Gunning, R.; *Introduction to holomorphic functions of several variables Vol I*. Princeton University, p. 1-7.
- [5] Lima, Elon.; *A característica de Euler-Poincaré*. IMPA.
- [6] Lima, Elon.; *Introdução à topologia diferencial*. Rio de Janeiro, IMPA, 1961, p. 128-131.
- [7] Lins Neto, A.; *Funções de uma variável complexa*. Rio de Janeiro: Proyecto Euclides-IMPA, 2008.
- [8] Perrin, D.; *Algebraic geometry an introduction*. Springer, 2008, p. 9-34.
- [9] Seifert, H. y Threlfall, W.; *Lecciones de Topología*. Inst. Jorge Juan de Matemáticas, Madrid, 1951, p. 183. (También: *A textbook of topology*, Academic Press, 1980.)
- [10] Whitehead J.; *On \mathbb{C}^1 complexes*, *Annals of Math*, 1940, p. 809-824.
- [11] Zaldívar, Felipe; *Notas de geometría algebraica*.