PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

Modelización de Funciones Cuadráticas: Espacio de Trabajo Matemático personal de estudiantes de humanidades

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGISTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTORA:

Ana Isabel Almonacid Adriano

ASESORA:

Dra. Jesús Victoria Flores Salazar

Julio, 2018

RESUMEN

La investigación que se presenta surge de identificar la dificultad que los estudiantes de carreras profesionales de humanidades tienen al resolver problemas de modelización que movilizan la noción función cuadrática. Estas dificultades están relacionadas a que la enseñanza de este concepto prioriza el manejo algebraico, ello no permite la comprensión de la naturaleza de la función cuadrática en el sentido relacional, variacional y de comportamiento. Comprensión que los estudiantes de carreras de humanidades requieren para identificar, interpretar modelos cuadráticos presentes en investigaciones de esas áreas, modelos matemáticos como los relacionados a las ciencias de la comunicación, predicción de justicia criminal y modelos usados en ciencias políticas. Esta necesidad está reflejada en los planes de diversas universidades peruanas, entre públicas y privadas. A partir de esta problemática el objetivo de nuestra investigación es analizar el Espacio de Trabajo Matemático Personal de estudiantes de humanidades cuando movilizan el concepto de función cuadrática al resolver tareas de modelización con el uso de tecnología digital. Para ello, nos basamos en el constructo teórico del Espacio de Trabajo Matemático desarrollado por Kuzniak y la tarea de modelización que se plantea sigue la estructura del ciclo de modelización de Blum y Leiβ. Como metodología se recurre a aspectos de la ingeniería didáctica de Artigue. Con respecto a la parte experimental, la investigación se realiza con estudiantes que cursan el primer ciclo de carreras de humanidades, estudiantes de entre 16 y 18 años. La tarea de modelización está compuesta de tres fases. La actividad que desarrollan los estudiantes al resolver la tarea propuesta permite identificar la activación de las génesis instrumental y semiótica, además admite establecer los paradigmas priorizados por los estudiantes. En base a esta investigación se concluye que las actividades desarrolladas por los estudiantes de primer ciclo de carreras de humanidades evidencian la activación del plano semiótico-instrumental.

Palabras clave: Función cuadrática; Modelización; Plano semiótico-instrumental.

ABSTRACT

The research presented arises from identifying the difficulty that students of professional careers in the humanities have when solving modeling problems that mobilize the notion of quadratic function. These difficulties are related to the fact that the teaching of this concept prioritizes algebraic management; this does not allow the understanding of the nature of the quadratic function in the relational, variational and behavioral sense. Understanding that students of humanities careers require to identify, interpret quadratic models present in research in those areas, mathematical models such as those related to communication sciences, prediction of criminal justice and models used in political science. This need is reflected in the plans of various Peruvian universities, between public and private. Based on this problem, the objective of our research is to analyze the Personal Mathematical Workspace of humanities students when they mobilize the concept of a quadratic function when solving modeling tasks with the use of digital technology. For this, we rely on the theoretical construct of the Mathematical Workspace developed by Kuzniak and the modeling task that follows is the structure of the Blum and Leiβ modeling cycle. As a methodology, aspects of Artigue didactic engineering are used. With respect to the experimental part, the research is carried out with students who attend the first cycle of humanities careers, students between 16 and 18 years of age. The modeling task is composed of three phases. The activity that the students develop when solving the proposed task allows to identify the activation of the instrumental and semiotic genesis, besides admits establishing the paradigms prioritized by the students. Based on this research, it is concluded that the activities developed by the students of the first cycle of humanities careers demonstrate the activation of the semiotic-instrumental plane.

Keywords: Quadratic function; Modeling; Instrumental-semiotic plane.

A Dios por permitirme superarme cada día.
A mi madre Margarita por su apoyo y oraciones para lograr mis metas.
A mi esposo Pascual por su amor y apoyo incondicional en todos mis proyectos.

AGRADECIMIENTOS

A mi estimada asesora, Dra. Jesús Victoria Flores Salazar, por su constante apoyo durante la elaboración de esta investigación. Por sus orientaciones, observaciones y sugerencias oportunas que me permitieron concluir con esta investigación, pero sobre todo por su comprensión, paciencia y disposición que me motivaron a continuar seguir investigando.

A los miembros del jurado, Dra. Elizabeth Montoya Delgadillo y Mg. Flor Isabel Carrillo Lara por sus sugerencias y observaciones, inestimables contribuciones, que permitieron mejorar mi investigación.

A todos los profesores de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú por compartir sus valiosos conocimientos y experiencias profesionales y así contribuir en mi formación.

A los estudiantes de primer ciclo de carreras de humanidades de una universidad privada de Lima-Perú que participaron amablemente en esta investigación.

A mi querida madre Margarita Adriano que a pesar de la distancia me brinda su apoyo y oraciones para cumplir con mis metas. Al cariño de mis hermanos y hermanas que me motivan a seguir adelante. A mi esposo Pascual por su amor, comprensión y apoyo incondicional en todos mis proyectos.

A mis compañeros de clases de la Maestría, por el tiempo y conocimientos compartidos en estos años de estudio. De manera especial, a mi amigo Ever Cruzado por sus aportes académicos, críticas y apoyo constante compartidos a lo largo de los cursos.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

CONSIDERACIONES INICIALES

El interés por analizar las acciones que desarrollan los estudiantes de humanidades al resolver tareas de modelización que movilizan la función cuadrática, surge como respuesta a las investigaciones de referencia revisadas, específicamente las relacionadas a las concepciones y dificultades sobre la función cuadrática, el uso de tecnología digital en la enseñanza de la función cuadrática y la modelización de funciones. De ellas se considera que la enseñanza centrada en la memorización de propiedades y que prioriza tratamientos en el registro algebraico no permite la comprensión de la naturaleza y de aspectos conceptuales de la función cuadrática.

La presente tesis tiene como objetivo general analizar el Espacio de Trabajo Matemático Personal de estudiantes de humanidades cuando movilizan el concepto de función cuadrática al resolver tareas de modelización con el uso de tecnología digital. Por ello, se considera pertinente adoptar como sustento teórico de esta investigación el constructo teórico del Espacio de Trabajo Matemático. Mientras que como metodología de investigación consideramos pertinente realizar una investigación de corte cualitativa en la que consideramos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) para alcanzar nuestro objetivo general.

La presente investigación está organizada en tres capítulos. En el primer capítulo abordamos investigaciones de referencia relacionados al objeto función, específicamente función cuadrática. En base a lo anterior y los planes de estudio de diversas universidades planteamos la justificación de nuestra investigación. También presentamos la pregunta y objetivos que guiaran nuestra investigación, explicamos los aspectos teóricos y metodológicos tomados en cuenta. En el segundo capítulo se desarrollan aspectos matemáticos e históricos de las funciones, aspectos didácticos presentes en textos didácticos utilizados en los primeros ciclos universitarios; así como, un análisis de los planes de estudio del nivel universitario. El tercer capítulo trata sobre el diseño de la tarea de modelización, su implementación, el análisis y confrontación entre análisis a priori y a posteriori. Finalmente, se presenta un resumen de los resultados de la investigación, así como, las consideraciones finales y las perspectivas para futuras investigaciones.

CAPITULO I: PROBLEMÁTICA DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presenta investigaciones de referencia del objeto función cuadrática, temas relacionados con su enseñanza y con el objeto propiamente, también, se presenta la justificación, la pregunta y los objetivos que orientan esta investigación. Del mismo modo se expone aspectos del constructo teórico del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) propuesto por Kuzniak (2011), constructo que sustenta esta investigación; y para finalizar el capítulo se indica la metodología de la investigación, cualitativa, específicamente en el método de investigación se consideran aspectos de la Ingeniería Didáctica.

1.1 Investigaciones de referencia

El interés, al iniciar esta investigación, es entender como tareas de modelización en un entorno tecnológico permiten desarrollar acciones relacionados con el conocimiento de función cuadrática. En ese sentido las investigaciones de referencia que se analizan están organizadas por ejes temáticos, estos son: concepciones y dificultades que tienen los estudiantes sobre la función cuadrática, mediación de la tecnología digital en la enseñanza de la función cuadrática, modelización en el desarrollo del tema de funciones, aportes del constructo teórico Espacio del Trabajo Matemático al estudio de las funciones y la presencia de la función cuadráticas en modelos propios de carreras de humanidades.

Investigaciones relacionadas a las concepciones y dificultades sobre la función cuadrática.

La investigación de Ozaltun y Bukova (2017), realizada en Turquía con estudiantes de décimo primer grado de secundaria (16-17 años), presentan un estado del arte que evidencia dificultades que estudiantes tienen para comprender la función cuadrática, estas dificultades se reflejan en la forma incorrecta de determinar el dominio y rango de una función cuadrática, dada en su representación gráfica, también en el hecho de no diferenciar entre la función cuadrática y la ecuación de segundo grado asociada a ella; y la dificultad de relacionar los parámetros de la representación algebraica de la función cuadrática con las características, como el vértice y la concavidad, de las representación gráfica de la función o en el sentido inverso.

Por otro lado, Ozaltun y Bukova (2017) resaltan que comprender el concepto de función cuadrática requiere del pensamiento relacional y tener en cuenta las ideas del Razonamiento Covariacional de Thompson y Carlson (citados por Ozaltun y Bukova, 2017), noción necesaria para entender situaciones de cambio y variación presentes en la vida cotidiana. Además, mencionan que las funciones cuadráticas tienen un papel muy importante en el estudio de funciones polinómicas de grado superior.

A partir de los hallazgos anteriores, las investigadoras se plantean como objetivo identificar las concepciones que tiene un estudiante de décimo primer grado de secundaria y sus razones implícitas mientras analiza y construye la representación gráfica de una función cuadrática. En este sentido, el estudio que realizan es de naturaleza cualitativa y del tipo de estudio de caso, donde específicamente utilizan la metodología de la entrevista clínica.

Las autoras toman como sustento teórico a la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, una herramienta cognitiva que sugiere que la comprensión de los estudiantes evoluciona mediante la articulación y reflexión de conceptos en el contexto de las actividades de aprendizaje. Las investigadoras consideran que para determinar el proceso de aprendizaje hipotético es necesario conocer las concepciones de la función cuadrática que posee un estudiante y sus razonamientos mientras analiza y grafica una función cuadrática. Es la razón por la cual el sujeto en esta investigación es un estudiante con calificaciones destacadas y que ya desarrolló el tema de función cuadrática en un curso anterior.

De los resultados de la entrevista clínica las investigadoras revelan que el estudiante confunde la representación gráfica de la función cuadrática con la representación gráfica de la función lineal, ya que para distinguirlas no considera la tasa de cambio. Por otro lado, reconoce que el valor de la discriminante de la ecuación de segundo grado indica características de la representación gráfica de la función cuadrática; sin embargo, tiene dificultad en hallar las raíces de la ecuación. En el caso de hallar el intercepto de la gráfica con el eje de las ordenadas asigna cero a la variable de las abscisas; pero no logra hallar los intercepto con el eje de las abscisas. Con respecto a identificar el vértice, el estudiante reconoce que es necesario saber la posición del vértice para realizar la gráfica, además advierte que el vértice corresponde al valor mínimo o máximo de la función; sin embargo, no relaciona el vértice con el eje de simetría y no logra establecer el vértice. Finalmente, Ozaltun y Bukova (2017) declaran que el estudiante es consciente de que la gráfica de la función se relaciona con la variación de los parámetros de la función; pero no establece la diferencia entre la función y la ecuación de segundo grado asociada a ella.

Las investigadoras infieren que las razones de las dificultades que el estudiante presenta se deben a la memorización de las reglas y propiedades sin la comprensión conceptual de la función cuadrática. Por otra parte, declaran que en el estudio de la función cuadrática establecer la relación de las tasas de cambio de la función lineal y la función cuadrática permite comprender su naturaleza variable, además mencionan que las tareas deben propiciar el cambio de registros y aplicación de los tratamientos pertinentes.

Por su parte, Díaz, Haye, Montenegro y Córdoba (2015) realizan un estudio con estudiantes (17- 20 años), ingresantes a las carreras de ingeniería de la Universidad Nacional del Litoral de Argentina. Donde, el objetivo de su investigación es estudiar las dificultades en la coordinación de las representaciones algebraica y gráfica de la función lineal y cuadrática.

Los autores utilizan como fundamento para su investigación la Teoría de Registros de Representación Semiótica debido a que relacionan la coordinación de las representaciones algebraica y gráfica de la función cuadrática al nivel de conceptualización de la misma. La metodología usada por los autores es del tipo descriptiva y exploratoria. Los datos son recogidos mediante un examen aplicado a los estudiantes en la primera clase de matemática del año académico. Las tareas que se consideraron en el cuestionario son temas desarrollados en el nivel de secundaria y revisados en un curso introductorio al año académico.

En el experimento, los investigadores consideran dos tareas. La primera consiste en que el estudiante a partir de la representación algebraica, forma general, de la función cuadrática realice la conversión al registro gráfico, para ello se debe tener en cuenta la interpretación de los signos de los parámetros de la función. Estos parámetros proveen información sobre la concavidad, la ordenada del origen y el eje de simetría. La segunda tarea consiste en el proceso inverso, a partir de la representación gráfica de la función cuadrática, para ello se muestra los datos necesarios para determinar su representación algebraica, estos son, el vértice y las intersecciones con los ejes. En esta actividad se espera que los estudiantes interpreten y extraigan los datos útiles para determinar los parámetros de la representación algebraica de la función cuadrática.

En los resultados de esta investigación, Díaz, Haye, Montenegro y Córdoba (2015) destacan la dificultad que los estudiantes tienen para establecer la concavidad, el eje de simetría de la función cuadrática, dificultad en relacionar la posición del vértice con el termino independiente, a partir del eje de simetría establecer el termino lineal, relacionar la concavidad con el signo del término cuadrático y utilizar la intersección con el eje de las abscisas para verificar la función cuadrática.

De estos resultados, los autores concluyen que los estudiantes tienen dificultades en coordinar las representaciones algebraica y gráfica; sin embargo, que estas dificultades son mayores al transitar del registro grafico al registro algebraico. En ese sentido declaran la posibilidad de que ello se deba a la predominancia de la representación algebraica en las clases de matemática.

Investigaciones relacionadas al uso de tecnología digital en la enseñanza de la función cuadrática en el nivel secundario y superior.

La investigación de Lima (2016) realizada en Brasil tiene por objetivo identificar y analizar las dificultades de estudiantes de noveno año de enseñanza fundamental II (14- 15 años) en la construcción del concepto de función cuadrática y en base a ello aplicar una secuencia didáctica en la que incorpora el ambiente de representaciones dinámicas GeoGebra como medio para construir este concepto.

Como referencial teórico el autor utiliza la Teoría de las Situaciones Didácticas y la Teoría de los Registros de Representación Semiótica y la metodología que aplica es de naturaleza cualitativa del tipo de Ingeniería Didáctica. Sobre la Teoría de las Situaciones Didácticas identifica las dificultades que los estudiantes poseen sobre el concepto de función cuadrática y se analiza los libros didácticos utilizados en la enseñanza de este tema, mientras que, la Teoría de los Registros de Representación Semiótica es utilizada para analizar la parte experimental de la investigación.

Las dificultades que los estudiantes poseen sobre la función cuadrática, que el investigador considera a partir del análisis de resultados de una prueba diagnóstica son: que los estudiantes no pueden definir la función cuadrática en lenguaje natural ni en forma algebraica; con respecto a la representación gráfica no son capaces de establecer el intercepto con el eje de las abscisas, la posición del vértice, reconocer características de la función cuadrática como la simetría, la posición de los interceptos con eje de las abscisas relacionados al valor del discriminante de la ecuación de segundo grado asociada a la función y características relacionados con la variación de coeficientes de la forma algebraica de la función cuadrática.

En cuanto a la revisión de los libros didácticos, Lima (2016) se centra en las actividades relacionadas con la variación de los coeficientes de la función, la construcción de gráficos, los puntos notables como vértices, interceptos, punto máximo y mínimo, y las conversiones más usuales que se realizan entre diferentes representaciones. A partir de esta revisión el autor declara que el contenido de los textos está centrado en definiciones, propiedades y el uso de técnicas algebraicas que contribuye al surgimiento de las dificultades de los estudiantes que tiene con el tema de función cuadrática.

La parte experimental de la investigación se realizó en siete sesiones, y participó un grupo de cinco estudiantes de una escuela pública estatal en la ciudad de Manaos-Amazonas, en Brasil. La secuencia didáctica propuesta está centrada en trabajar con la variación de los coeficientes y parámetros de la función cuadrática y de la discriminante de la ecuación de segundo grado asociada a la función cuadrática, respectivamente, ello permite analizar la variación del vértice, la concavidad, amplitud, los ceros de la función cuadrática. La actividad se desarrolló con la mediación del software GeoGebra.

El autor menciona que el uso del GeoGebra permitió la construcción del objeto función cuadrática y visualización de sus representaciones algebraica y gráfica de manera simultánea ello facilita la observación de las propiedades inherentes al objeto matemático cuando se realizan las manipulaciones o modificaciones de la representación gráfica o algebraica, visualizar esto sería trabajoso o imposible usando el lápiz y el papel; es así que la tecnología digital facilita la interacción entre la enseñanza y aprendizaje.

De las conclusiones del investigador se puede destacar que la contrastación del análisis a análisis a priori y posteriori evidencia que la secuencia didáctica apoyada en el entorno dinámico del GeoGebra permitió la construcción del concepto de función cuadrática mediante la visualización y manipulación de las representaciones graficas de la función cuadrática.

La investigación de Salazar (2015), por su parte, también se desarrolla en un entorno de geometría dinámica, estudia el proceso de génesis instrumental de las características de la traslación horizontal y vertical de la función cuadrática; sin embargo, el estudio se realizó con estudiantes universitarios de primer ciclo del curso de matemática de la Facultad de Artes Escénicas.

Para analizar este proceso, la autora, utiliza como marco teórico del Enfoque Instrumental, específicamente las nociones de sujeto, artefacto, instrumento y esquema. En ese sentido, la autora explica que el proceso de génesis instrumental presenta las dimensiones de instrumentalización e instrumentación, en donde se observa la dependencia entre el artefacto y los esquemas de uso del sujeto.

Con respecto a la parte experimental, la investigadora la organiza en seis actividades. Así, las tres primeras están enfocadas a movilizar características propias de la función cuadrática; mientras que las tres últimas actividades se centran en la manipulación de la forma canónica de la función cuadrática, donde los estudiantes utilizan la herramienta “arrastre” del software GeoGebra, y proponen conjeturas sobre la traslación horizontal y vertical de la gráfica de la función, que finalmente son validadas. De las reflexiones finales de la investigadora, se destaca que movilizar las nociones de traslación horizontal y vertical de la función cuadrática mediante el software GeoGebra permite a los estudiantes realizar y validar conjeturas acerca de las propiedades de la traslación de la gráfica de la función cuadrática. De ahí la pertinencia de su uso.

Por su parte, Ávila (2011) propone un enfoque diferente a las anteriores investigaciones, debido a que no se centra de los aspectos conceptuales de la función cuadrática sino en la naturaleza variable de la función cuadrática, es así que su objetivo es describir el proceso de razonamiento covaracional asociado al concepto de función lineal y cuadrática en una secuencia de actividades en la que se utiliza el ambiente de representaciones dinámicas GeoGebra y Modellus. La metodología que utiliza el investigador es cualitativa del tipo de estudio de caso y realiza el análisis de la producción de tres estudiantes de décimo grado de bachillerato (14-15años). La base teórica es el razonamiento covariacional propuesto por Carlson, Jacobs, Coe, Larsen,y Hsu (Citados en Ávila, 2011). Carlson et al. (Citados en Ávila, 2011) que define el razonamiento covariacional como “las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra” (p. 15).

Ávila (2011), en la parte experimental de la investigación, menciona que las actividades fueron aplicadas a los dieciocho estudiantes de décimo grado en un colegio de Colombia. En la secuencia de actividades se plantean tres actividades, la primera relacionada a la función lineal, la segunda a la función cuadrática y la tercera buscaba la profundización de las nociones de función lineal y cuadrática. La actividad relacionada con la función cuadrática parte de la idea del movimiento uniformemente acelerado, el cual es presentado en el software Modellus con el objetivo que los estudiantes describan en forma detallada el movimiento, los estudiantes deben tener en cuenta el desplazamiento y la velocidad del móvil. A partir de esa descripción los estudiantes deben realizar una gráfica en papel. En otro momento de la actividad los estudiantes deben hacer una descripción de cómo se desarrolla el movimiento del móvil a partir del análisis de la tabla de valores generada por el software Modellus, esto con el fin de que el análisis se realice sobre pequeños intervalos de tiempo. Finalmente, los estudiantes deben comparar la gráfica realizada por los ellos con la gráfica generada por el software, a partir de esas graficas los estudiantes deben generar la expresión algebraica que represente la variación de la situación.

De las conclusiones se puede destacar que abordar el estudio de la función lineal y cuadrática desde el enfoque variacional permite que los estudiantes exploren la naturaleza de las funciones, es decir, su comportamiento creciente o decreciente, concavidades, puntos de inflexión, puntos máximos o mínimos.

Por otro lado, el investigador resalta la pertinencia de los ambientes de representaciones dinámicas Modellus, ya que permite a los estudiantes a través de la manipulación, la observación y representación, plantear y validar sus conjeturas sobre el comportamiento de la función cuadrática. También resalta que, las acciones de los estudiantes muestran que transitaron entre los niveles de coordinación de variables, coordinación de dirección, coordinación cuantitativa y de razón promedio; sin embargo, no lograron coordinar la razón de cambio instantánea, eso se refleja en la gráfica que realizaron, no fue una curva suave.

Investigaciones relacionadas con la modelización de funciones.

Briceño y Buendía (2015) tienen el objetivo de identificar las acciones de los estudiantes, que les permitan dotar de significado a la matemática asociada a la función cuadrática mientras modelizan. Los estudiantes que participan de esta investigación cursan el primer grado de bachillerato (12-13 años) de una escuela colombiana.

Los autores fundamentan su investigación en la Metodología de los Experimentos de Diseño de Cobb, Confrey, di Sessa, Lehrer y Shauble (citados en Briceño y Buendía, 2015). Los investigadores declaran que esta metodología les permite además de entender el funcionamiento de una actividad en la práctica, desarrollar teoría. En el caso de la función cuadrática, la teoría que desarrollan los autores está relacionada a los aspectos variacionales, en ese sentido estudian el tiempo como variable independiente; y el uso de la gráfica y de las tablas de valores como modificadores de la percepción del concepto de función cuadrática.

Con respecto a la modelización, los investigadores utilizan el concepto de modelación en el sentido de Arrieta (citado en Briceño y Buendía, 2015). Ello, explican los investigadores, les permite estudiar el fenómeno físico asociado a la función cuadrática mediante los aspectos variacionales que se muestran cuando se utiliza una gráfica o una tabla de datos. La parte experimental se lleva a cabo en tres fases, la fase de preparación del experimento, fase de experimentación para apoyar el aprendizaje y la fase de análisis retrospectivo. En la primera fase se aplica un cuestionario diagnóstico. En la segunda fase se busca que los estudiantes relacionen significativamente la gráfica, las expresiones algebraicas y tabulaciones, la relación entre tiempo y distancia, teniendo en cuenta su entorno escolar. Para ello utilizan un *applet* de movimiento desarrollados en el software GeoGebra, ellos permiten observar el movimiento de un auto cuya velocidad disminuye continuamente hasta parar y regresar al punto de partida. Mientras que, para visualizar el lanzamiento vertical de una pelota, se utilizan los softwares Modellus y Tracker-310.

Los autores expresan que los estudiantes participan activamente de las actividades, muestra de ello es que realizan mediciones de los gráficos que se presentan en la pantalla, utilizan las manos para representar el movimiento, realizan tabulaciones y gráficos en papel. De las conclusiones de los autores se resalta que la modelización permite, que estudiante vincule los contextos de la ciencia y del conocimiento escolar; además permite reconocer las posturas de los estudiantes en el desarrollo de las actividades propuestas.

Por otro lado, Beltrão e Igliori (2010) afirman que diversas investigaciones evidencian las dificultades que existen en la enseñanza de Cálculo. En este sentido Barbosa (citado en Beltrão e Igliori, 2010) resalta que estas dificultades se dan con mayor proporción en carreras profesionales de orientación a las humanidades.

En ese sentido, las autoras destacan que la integración de los temas de Cálculo con temas propios de la carrera de los estudiantes desempeña un papel significativo en su formación profesional y le da a la matemática la categoría de herramienta para el desarrollo de otros cursos propios de sus carreras. En ese orden de ideas, las autoras afirman que la Modelización matemática permite acortar la brecha entre la matemática y la realidad, ya que, esta estrategia de enseñanza promueve el pensamiento crítico, para entender la matemática, mientras se resuelve problemas de la vida real.

Con respecto a los términos aplicación y modelización las autoras asumen que aplicación se refiere al uso de un modelo matemático específico en la resolución de un problema de la realidad, ahora bien, modelación se refiere al conocimiento matemático que se genera en el proceso de resolver un problema de la realidad. Las autoras explican que el proceso de modelización parte de una situación problemática planteada en un contexto cotidiano, y para resolverlo es necesario llevarlo a un contexto matemático, la solución hallada luego debe ser validada e interpretada en el contexto de origen.

A partir de la problemática sobre la enseñanza del Cálculo, las investigadoras tienen el objetivo de diseñar estrategias de modelación y aplicación que permitan una enseñanza eficaz de las nociones de función en estudiantes de primer año (17-19 años) de la carrera superior tecnológica de alimentos.

La propuesta que experimentan las autoras está compuesta de tres fases. En la primera fase se realiza una actividad previa que servirá de guía para diseñar actividades y comparar la evolución individual del conocimiento. Luego, con el objetivo de generar reflexión sobre el tiempo y el trabajo colectivo que llevó la construcción del concepto de función se introducen aspectos históricos importantes. Para finalmente, introducir con apoyo de la tecnología ejemplos de aplicaciones de modelos de funciones elementales relacionada a la carrera de los estudiantes, en base a la cual se institucionaliza conceptos formales relativos a función. En la segunda fase, con los conocimientos previos acerca de funciones los estudiantes deben investigar sobre aplicaciones de funciones relacionados a su área de estudio, para que luego de comprenderlas puedan explicar su construcción y utilidad. En la tercera fase, los estudiantes deben establecer un modelo matemático para un problema relacionado a su área de estudio.

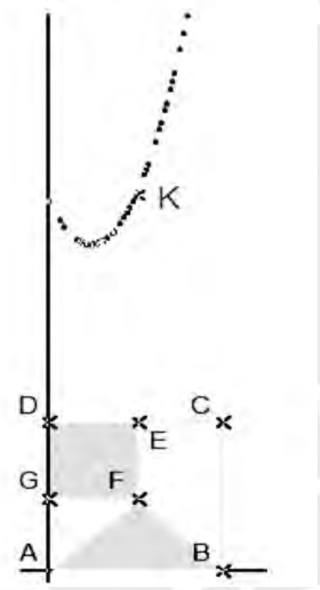
De las consideraciones finales de Beltrão e Igliori (2010) se destaca, que la propuesta superó las dificultades relacionadas con las exigencias institucionales, construcción de conceptos en los estudiantes, desarrollo de los contenidos previstos. Los estudiantes cambiaron su percepción acerca de la matemática, después de observar los ejemplos de la modelación en su área de profesión, los estudiantes valoraron la utilidad de la matemática, en consecuencia, se mostraron interesados en investigar y comprender otros fenómenos de su área de estudio. También se evidencio un progreso en las habilidades matemáticas y de comprensión en comparación con los resultados de la actividad previa en la primera fase.

Investigaciones relacionadas con el constructo del Espacio del trabajo Matemático

Minh y Lagrange (2016) parten del interés sobre la enseñanza de funciones en el aula, en ese sentido, ellos afirman que las funciones se presentan en diferentes entornos y bajo diversas representaciones, sin embargo, en su enseñanza se prioriza las representaciones y tratamientos algebraicos. Es así, que la asociación de representaciones algebraicas con las representaciones gráfica y tabular carece de sentido. Por consiguiente, los autores investigan el proceso de cómo se construye los espacios de trabajo personal de las funciones en estudiantes y profesores.

Los investigadores, se basan en el constructo del teórico del Espacio de Trabajo Matemático y plantean tres espacios de trabajo, estos son: de geometría dinámica, de la medida y del algebra. Estos espacios permiten el análisis de los aspectos covariacional, de variable independiente y la relación de la forma algebraica con sus propiedades algebraicas y geométricas del trabajo funcional, aspectos planteados por Lagrange y Psycharis (citado en Minh y Lagrange, 2016).

Con respecto a los planes de estudios de ambos países, Minh y Lagrange (2016) mencionan que estos están orientados a la consolidación de las habilidades algebraicas como una preparación para temas de Cálculo. Pero que, dado a la incorporación de la tecnología digital en las aulas, específicamente software de geometría dinámica los programas de estudio están cambiando su enfoque, se están interesando cada vez más en la resolución de problemas reales en entornos de multirepresentación. Sin embargo, las tareas que se proponen no permiten trabajar las dependencias funcionales, que permitiría entender la noción de función y su simbolismo asociado. Ejemplo de ello, es la tarea analizada por Robert y Vandebrouck (citado en Minh y Lagrange ,2016) (ver figura 1).



AB=5 y la traza de la función

ABCD es un cuadrado, E es un punto en el lado [DC] y DEFG es un cuadrado. El objetivo es encontrar una posición de E con el fin de que la suma de las áreas $DEFG + FBA$ sea la mínima.

Tareas:

1. Hacer una figura dinámica.
2. Explorar y conjeturar la posición de E.
3. Probar algebraicamente, tomando $x = DE$ y calculando la suma de las áreas "como una función de x".

Las expectativas del maestro son:

La tarea es para una hora en décimo grado, con el objetivo de que los estudiantes luego de la construcción de la figura y una primera observación numérica realicen:

1. Una exploración completa por la definición de un punto K de coordenadas DE y la suma de las áreas, usando el modo trazo, van a hacer una observación gráfica, especificando la conjetura.
2. Obtener una formula cuadrática de la función
3. Demostrar el mínimo "completar el cuadrado"

$$f(x) = \frac{2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 25}{2} = (x - \frac{5}{4})^2 + \frac{175}{16}$$

*Figura 1.*Tarea "tienda bandera"
Fuente: Minh y Lagrange (2016, p.795)

Es una situación planteada para estudiantes de décimo grado de secundaria. Robert y Vandebrouck (citado en Minh y Lagrange ,2016) mencionan las dificultades que tienen los estudiantes al desarrollar esta tarea: de inicio, los estudiantes tienen dificultad en construir la figura geométrica, tienen dificultad en explorar el valor mínimo, no entienden el cálculo de la suma de la áreas en función de x, no identifican la traza como la representación gráfica de la función, hallan la expresión algebraica pero no saben usarlo, pues la tarea no se centra en la dependencia de las medidas entre el área y la posición del punto E, sino, en técnicas de prueba orientada a la manipulación algebraica.

En base a la tarea anterior y el constructo teórico del ETM, Minh y Lagrange (2016), proponen una tarea que coordine los tres espacios: de geometría dinámica, de medida y algebraico y que a la vez permita analizar la covariación, la variable independiente y el simbolismo de las funciones.

En ese sentido, los autores mencionan que la tarea en el primer espacio debe permitir una construcción simple, observar la dependencia entre objetos sin tener en cuenta la cuantificación. En el segundo espacio, debe permitir establecer medidas de dependencia entre los objetos geométricos. Finalmente, en el tercer espacio debe permitir enfatizar la cuantificación, el establecimiento algebraico de la función analítica y las propiedades de la función relacionadas a sus parámetros, gráficos y tablas. Esta propuesta se completa con la incorporación del software Casyopée, el cual está diseñado para brindar artefactos necesarios a cada espacio de trabajo, además, en ella se pueden desplegar sus más de tres ventanas interactivas.

La parte experimental, de este estudio, de acuerdo a Minh (citado en Minh y Lagrange ,2016), se lleva a cabo en Vietnam con estudiantes de decimoprimer y decimosegundo grado de secundaria (14 y 15 años), durante dos años. El primer año, se desarrolla en tres grupos de sesiones con los estudiantes de decimoprimer grado se centró en el uso del software Casyopée para la construcción de figuras geométricas relacionadas entre sí mediante la función cuadrática. En el segundo año, se trabajó con los mismos estudiantes que terminaban el decimoprimer grado y pasaban al siguiente. Los estudiantes resolvieron el segundo problema (ver figura 1) y otros problemas similares cada mes. Además, incorporaron el uso del software Casyopée en el trabajo de temas algebraicos. Al finalizar el segundo año se realizó una entrevista.

Los investigadores mencionan que los estudiantes en el primer año tuvieron mayor dificultad en la construcción de figuras geométricas que resistieran la variación por animación. Ello se debe a que tradicionalmente en la enseñanza se utilizan figuras estáticas, figuras que no permiten a los estudiantes visualizar la variación de valores respeto a otros.

En el espacio de medida los estudiantes en el primer año tuvieron problemas con la elección de la variable independiente, la formación de la variable dependiente y establecerla de manera algebraica. En el segundo año, la situación propuesta fue más compleja por lo tanto la exploración también lo fue, sin embargo, los estudiantes plantearon diferentes maneras de establecer la variable independiente y dependiente, utilizaron un lenguaje coherente para referirse a la dependencia de los valores. También utilizaron el software Casyopée de manera más eficiente.

Minh y Lagrange (2016), mencionan que en el espacio algebraico durante el primer año los estudiantes tuvieron dificultades en utilizar sus conocimientos previos de función cuadrática. En el segundo año los estudiantes proponen un método en base al uso de la derivada y el uso de herramientas del software Casyopée.

Los autores, mencionan que, en la entrevista final, realizada al final del segundo año evidencia la coordinación de los tres espacios (de geometría dinámica, de la medida y del algebra) en un solo proceso, ello muestra que los estudiantes entendieron la naturaleza de la función cuadrática.

Con respecto a las conclusiones, los investigadores, destacan que el estudio sobre las génesis son un estudio a largo plazo, específicamente la génesis de los estudiantes es una construcción gradual y coordinada entre los tres espacios. Por otra parte, el marco teórico del “enfoque instrumental” ha permitido estudiar la interacción de las herramientas del software Casyopee en el estudio de las génesis.

Mencionan también que los espacios particulares que han utilizado en este estudio le dan una visión analítica y está centrado en el trabajo matemático y no en el uso de los artefactos.

Por su parte Dávila-Araiza y Moreno-Armella (2014) tienen el objetivo de describir las tensiones existentes entre la naturaleza intuitiva del Cálculo y la estructura formal del Análisis, que en la enseñanza tradicional ha servido de guía para la enseñanza del Cálculo. Lo que buscan es encontrar una ruta de naturaleza intuitiva que permita la exploración del pensamiento matemático a partir de ideas de variación y acumulación sin dejar de lado la formalización ni el rigor de los temas de Cálculo.

Las autoras mencionan investigaciones que evidencian que los estudiantes registran altos índices de reprobación en el curso de Cálculo, también mencionan que el desarrollo del curso de Cálculo es predominantemente tradicional, en ese sentido los programas educativos no toman en cuenta las intuiciones presentes en la mente de los estudiantes y están direccionadas al Análisis. En ese sentido los autores afirman la organización del Cálculo puede estar justificada por su desarrollo histórico, pero no como respuesta a problemas didácticos. Estos problemas no están relacionados al rigor ni la formalización; sino al problema del desarrollo de significados y la existencia de los objetos matemáticos.

Dávila-Araiza y Moreno-Armella (2014) explican que la intuición y la capacidad de simbolizar son dos partes inseparables de la cognición humana. Teniendo en cuenta ello, sería incorrecto responsabilizar a nuestra mente analítica o simbólica de como aprendemos temas de Cálculo, en lugar de ello se debe formular estrategias didácticas donde los estudiantes utilicen los dos hemisferios cerebrales al momento de aprender temas de Cálculo. Esto tiene más sentido, declaran los autores, cuando se conoce que los objetos matemáticos son el resultado de procesos reiterativos de reconstrucciones de nuestras experiencias e intuiciones en el mundo cotidiano en los que diversas experiencias de variación son simbolizadas por los estudiantes hasta un cierto nivel, con palabras, con dibujos y con movimientos de mano.

Las autoras hacen hincapié que en el desarrollo de las matemáticas se ha dejado de trabajar con la intuición física, esto ha llevado al Cálculo a seguir la organización del Análisis dejando de lado que las nociones y supuestos epistemológicos del Cálculo nacieron del estudio de la variación, de la acumulación y del cambio y no de la aritmética y la lógica. El Cálculo está relacionado a las intuiciones y experiencias que se tienen con los fenómenos de cambio en el mundo físico. En la investigación se muestra algunos ejemplos de desarrollar nociones de Cálculo a partir de experiencias cotidianas, como el vuelo de un avión, la superficie de una puerta, la temperatura, etc.

De las conclusiones de esta investigación se destaca que es necesario establecer una estrategia que conecte de manera natural las primeras intuiciones de las estudiantes relacionadas a la variación, el cambio de manera que los estudiantes puedan expresar y entender las representaciones formales. En ese sentido, el uso del software GeoGebra es necesarios para proveer al estudiante experiencias que amplíen y refinen sus intuiciones permitiendo que la apropiación de los conceptos del Cálculo y con respecto al ETM, el enfoque tradicional influenciado por el análisis matemático obstaculiza los tres génesis del ETM de los estudiantes, ya que no desarrollan el significado esperado para las representaciones formales de los conceptos, no logran el nivel de rigor o formalidad en sus demostraciones, razonamientos o procedimientos.

Investigaciones relacionadas a la presencia de la función cuadrática en modelos propios de carreras de humanidades.

Agastya, Bag y Chakraborty (2014) presentan una investigación en la que se analiza la interacción entre un emisor y receptor inmersos en un modelo matemático, que relaciona la experiencia en comunicación acertada y rentabilidad, sobre estos modelos se reconocen funciones de incertidumbre residual cuadráticas o gaussianas. Las autoras mencionan que estas nos informan en qué casos la calidad de información transmitida puede mejorar o empeorar la rentabilidad. Con respecto a ello, las autoras declaran que en modelos económicos que tienen estrecha relación con la comunicación, las funciones de incertidumbre residual o pérdida cuadrática están presentes.

Otro ejemplo de que la función cuadrática está presente en modelos científicos es la investigación de Berk (2011), donde el autor menciona que los procedimientos estadísticos utilizados para la predicción de entornos relacionados con la justicia penal como reincidencia en general, pronósticos de tasas de criminalidad, poblaciones penitenciarias entre otras se basan, por lo general en funciones de perdida simétrica; sin embargo, de acuerdo a la naturaleza del fenómeno se deben considerar funciones de perdida asimétricas. Es así que el investigador realiza una comparación entre la función de pérdida simétrica, cuadrática, con funciones de pérdida asimétrica. Cabe resaltar, de acuerdo al autor, todos los pronósticos estadísticos basados en modelos tienen incorporadas funciones de pérdida, estas funciones se introducen como parte del proceso de construcción del modelo y están relacionadas al riesgo de hacer pronósticos erróneos. Menciona también que el caso de la previsión en criminología que incluyen temas sobre la asignación de recursos de supervisión para la libertad condicional, la capacidad carcelaria, es un área en el que se van utilizando este tipo de funciones y ello es parte de la preocupación de diversas jurisdicciones políticas en Estados Unidos.

Por su parte, Carroll, Lewis, Poole y Rosenthal (2013) presentan una investigación sobre la estructura de utilidad en modelos de votación, los autores explican que los modelos empíricos de votación basados en votaciones nominales permiten encontrar un punto de preferencia de cada legislador y estos modelos son comúnmente asumidas la función cuadrática y la función gaussiana.

Los autores mencionan que los últimos 25 años el congreso de Estados Unidos se ha apoyado en el análisis de datos de votación nominal, gracias a ello pueden predecir aproximarse al comportamiento legislativo en general.

1.2 Justificación

A partir de las investigaciones de referencia presentados, reconocemos concepciones y las dificultades que los estudiantes tienen al resolver tareas sobre función cuadrática en los últimos grados de educación secundaria y los primeros años de educación superior, evidencia de ello son las investigaciones de Ozaltun y Bukova (2017) y Díaz, Haye, Montenegro, Córdoba (2015). En ese sentido, las investigaciones de Lima (2016), Salazar (2015) y Ávila (2011) muestran que es una necesidad incorporar tecnología digital en la enseñanza de las matemáticas y en particular de las funciones cuadráticas, con el propósito de explotar su capacidad dinámica y visual.

Por otra parte, las investigaciones de Briceño y Buendía (2015), Beltrao e Igliori (2010), sobre la modelización de funciones, advierten, la importancia de la matemática al ser utilizados como herramienta en la resolución problemas, es particular de carreras de humanidades, y ello permite al estudiante relacionarse en un contexto interdisciplinario.

Además de investigaciones de referencia mencionadas, la investigación de Agastya, Bag y Chakraborty (2014) evidencia que la función cuadrática está presente en el desarrollo de modelos propios de las ciencias de la comunicación, mientras que en la investigación de Berk (2011) la función cuadrática de perdida es parte del modelo de predicción de justicia criminal, similar a ello se tiene la investigación de Carroll, Lewis, Poole y Rosenthal (2013) evidencia que la función cuadrática es utilizado para plantear un modelos relacionado a las elecciones, tema propio de las ciencias políticas, estas aplicaciones de la función cuadrática se encuentran enmarcadas en el contexto de la estadística. En ese sentido, la estadística es considerada, una herramienta, para para todo profesional y en particular para los profesionales de humanidades.

La siguiente tabla presenta planes de estudio del año 2018 de universidades peruanas que tienen cursos de matemática como prerrequisito para cursos de Estadística o Negocios, ámbitos donde se plantean modelos matemáticos relacionados a las funciones y en particular a las funciones cuadráticas, ejemplo de ello son las investigaciones de Agastya, Bag y Chakraborty; Berk, y Carroll, Lewis, Poole y Rosenthal. En ese sentido, inferimos que en el desarrollo de los cursos prerrequisitos, Matemática Básica y Fundamentos de Matemática mostrados en la tabla 1 deben desarrollarse los contenidos relacionados a funciones y en particular a función cuadrática.

Tabla 1.*Planes de estudio de carreras de humanidades*.

Planes de Estudio	Especialidad	Cursos
Estudios Generales Letras de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP).	• Antropología • Ciencia Política y Gobierno • Psicología • Sociología	• Matemática Básica curso prerrequisito para el curso de Estadística.
Programa de Estudios Generales de la Escuela Universitaria de Humanidades de la Universidad Privada de Lima.	• Comunicación • Derecho • Psicología	• Fundamentos de Matemática prerrequisito para los cursos de Economía y Empresa, y Estadística Aplicada a la Psicología.

Estos planes de estudio son solo un ejemplo de cómo carreras de humanidades incorporan en su malla curricular cursos que tienen contenido relacionado a modelos y aplicaciones de la matemática.

Cabe destacar que en la sumilla de los cursos mencionados se indica que el curso pertenece al área curricular de estudios generales, en ese sentido el Artículo 41 de la Ley Universitaria (2014) establece que los cursos generales de pregrado son de carácter obligatorio y están orientados a la formación integral de los estudiantes.

Por las investigaciones de referencia y la importancia que tiene la función cuadrática, evidenciada en los diferentes planes de estudio que responden a la necesidad de que un estudiante de carreras orientadas a las humanidades tenga conocimiento de los conceptos matemáticos básicos para su inserción en el mundo laboral que en la actualidad es diverso y multidisciplinario. En ese sentido, consideramos que investigar sobre como un estudiante de carreras de humanidades se enfrenta a un problema de modelización haciendo uso de sus conocimientos matemáticos de la función cuadrática por medio del uso de la tecnología es pertinente como también es conveniente utilizar como fundamento teórico el Espacio de Trabajo Matemático y aspectos de la modelización.

1.3 Pregunta y objetivos de la investigación

Considerando los antecedentes encontrados, con relación a la función cuadrática, y que los estudiantes se enfrentan eventualmente a problemas de modelización relacionadas a las funciones cuadráticas se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuál es el Espacio de Trabajo Matemático personal que desarrollan estudiantes de humanidades al resolver tareas de modelización de funciones cuadráticas?

De ahí se desprende el objetivo de esta investigación.

Objetivo General.

Analizar el Espacio de Trabajo Matemático personal en estudiantes de humanidades cuando movilizan el concepto de función cuadrática al resolver tareas de modelización con el uso de tecnología digital.

Objetivos específicos

Para alcanzar el objetivo general pretendemos lograr los siguientes objetivos específicos:

- Describir las acciones que permiten la activación de las génesis semiótica e instrumental cuando los estudiantes realizan tareas de modelización con funciones cuadráticas.
- Identificar los paradigmas de la Geometría y el Análisis Matemático Estándar que los estudiantes priorizan cuando realizan tareas de modelización con funciones cuadráticas.

1.4 Aspectos teóricos del Espacio de Trabajo Matemático

La presente investigación se sustenta en el constructo teórico del Espacio de Trabajo Matemático, ETM, desarrollado por Kuzniak (2011). El autor declara que este constructo surge como una extensión de investigaciones sobre la noción de Espacio de Trabajo Geométrico y tiene como propósito fundamental permitir el análisis del trabajo matemático de una persona.

Este constructo será la base para analizar el ETM personal de estudiantes de carreras de humanidades cuando resuelven tareas de modelización de funciones cuadráticas con el uso de tecnología digital.

De la investigación de, Kuzniak, Tanguay y Elia (2016), destacamos nociones básicas que permiten entender el constructo del ETM. Ellas son las siguientes:

- Trabajo matemático: consiste en resolver problemas matemáticos, identificar problemas y organizar contenidos dentro de un dominio específico.
- Paradigma: “es el conjunto de creencias, técnicas y valores que comparte un grupo científico” (Kuzniak, Tanguay y Elia, 2016, p. 723).
- Dominio matemático: estos son determinados de acuerdo a la naturaleza de los objetos estudiados y de los paradigmas que lo caracterizan. Ejemplo de ellos son el dominio de geometría, algebra, aritmética, análisis, entre otros.

Además, los investigadores hacen especificaciones sobre las nociones de tarea y actividad, mencionan que estas nociones están consideradas como aspectos que tienen una relación estrecha con el trabajo matemático. En ese sentido:

- Tarea: de acuerdo a Sierpinska (citada en Kuzniak et al., 2016), los investigadores explican que la tarea es considerada como cualquier tipo de problema matemático, con preguntas establecidas de manera explícita y clara, que requiere un tiempo predecible para su resolución. Por otro lado, en el sentido de Chevallar (citado en Kuzniak et al., 2016), la tarea está organizada en tipos de tareas y, posee un conjunto de técnicas y conocimientos que la respalda.
- Actividad: es considerada como las acciones que el sujeto realiza al solucionar la tarea propuesta. En este aspecto, están relacionadas con las actividades que se espera que el sujeto emplee y lo que el sujeto de manera real efectúa, cuando se enfrenta con un problema matemático en el contexto escolar, profesional o cotidiano.

El ETM y la actividad matemática

Los investigadores consideran que la actividad del matemático es el modelo de trabajo matemático. En ese sentido, el trabajo matemático que desempeña un estudiante le permite la construcción de su propio conocimiento sobre la matemática, esto le da acceso a la obra matemática o resultados concretos del trabajo desarrollado por los matemáticos sobre conceptos abstractos; sin embargo, este proceso es gradual, iterativo y de largo plazo. También mencionan que este proceso se realiza sobre el vestigio del trabajo ya realizado por los matemáticos y con la guía del profesor.

Por otra parte, Kuzniak et al. (2016) declaran que las instituciones educativas interpretan de maneras diversas los dominios matemáticos, ello se evidencia en las transposiciones didácticas que se emplea en sus procesos de enseñanza. Para tener en cuenta los diversos puntos de vista que pueden surgir alrededor de un dominio matemático, Houdement y Kuzniak, también Kuzniak y Raucher (citados en Kuzniak et al., 2016) introducen el enfoque por medio de paradigmas, ello va a permitir reconocer de manera diferenciada la presentación de un conocimiento racional. Sin embargo, también mencionan que diversos paradigmas pueden existir y coexistir en una misma institución. Así Houdement y Kuzniak (Citados en Henríquez-Rivas y Montoya-Delgadillo, 2016), mencionan que los tres paradigmas de la Geometría son:

El paradigma Geometría Natural (GI), donde el trabajo geométrico se realiza en base a la observación y manipulación de artefactos sobre objetos reales o materiales que permiten la aproximación y la medida. El paradigma Geometría Axiomática Natural (GII), donde el trabajo matemático se realiza en base de la realidad e intuición espacial. Estos procedimientos se basan en definiciones y propiedades del sistema axiomático. La Geometría Axiomática Formal (GIII) basa el trabajo geométrico en el sistema axiomático y busca rigurosidad y formalismo.

Por otro lado, en el dominio del Análisis Matemático Estándar se pueden distinguir los siguientes paradigmas.

> Análisis geométrico/aritmético (AG): permite interpretaciones nacidas de la geometría, del cálculo aritmético o del mundo real. Análisis calculatorio (AC): donde las reglas del cálculo son definidas, más o menos explícitamente, y se aplican independientemente de la reflexión de la existencia y naturaleza de los objetos introducidos. Análisis Real (AR): es caracterizado por los trabajos que implican aproximación (o una entrada más topológica) (Montoya-Delgadillo y Vivier, 2016, p. 24).

Aseguran los autores que esta coexistencia de paradigmas puede ser una fuente de ambigüedades y dificultades. Además, es importante mencionar que los paradigmas no establecen una jerarquía del trabajo matemático realizado; sino, una caracterización del trabajo matemático.

Con respecto a la resolución de problemas, Kuzniak et al. (2016) explican que este cumple un rol importante en el trabajo de los matemáticos como también en la enseñanza de las matemáticas. En el proceso de resolución de problemas los estudiantes despliegan técnicas y conocimientos de acuerdo a un paradigma. En relación a ello, la evolución de sus conocimientos matemáticos dependerá de las tareas propuestas y las actividades que el estudiante realice al enfrentar la tarea. El trabajo matemático depende del contenido matemático en sí mismo y la estrecha relación con la actividad del individuo, ello permite establecer un vínculo directo con los aspectos epistemológicos y cognitivo considerados en el modelo de espacio de trabajo matemático que se explica en la siguiente sección.

Los autores explican que los contenidos matemáticos y la actividad del individuo evidenciada en la resolución de problemas representan elementos de naturaleza epistemológica y cognitiva respectivamente. En consecuencia, estructuran el modelo del ETM sobre los planos, epistemológico y cognitivo (ver figura 2). Modelo que se detalla en adelante.

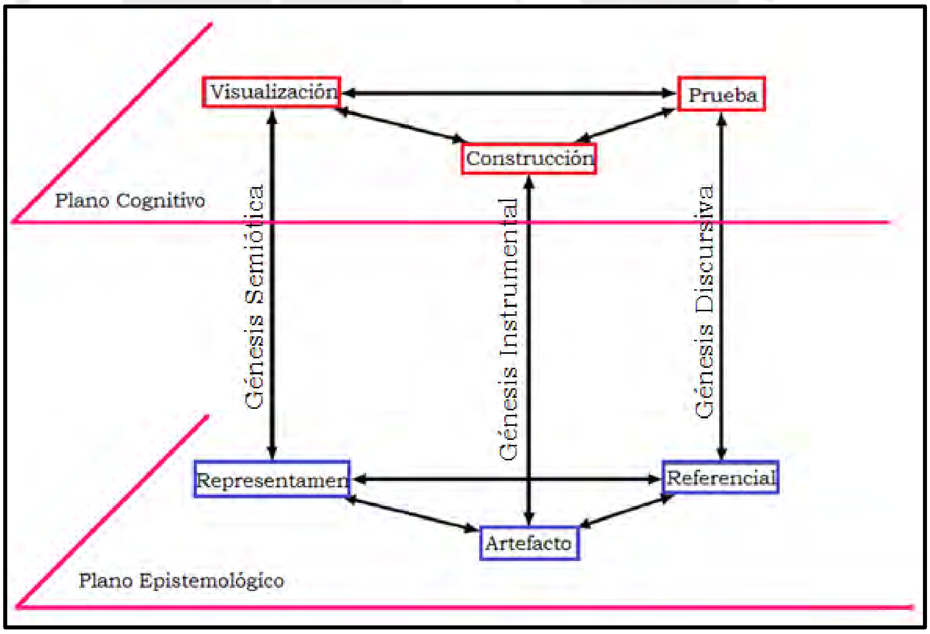


Figura 2.Espacio de trabajo Matemático
Fuente: Kuzniak et al. (2016, p. 725)

En el plano epistemológico, los autores explican que tres componentes describen el trabajo matemático, y están organizados de acuerdo a criterios puramente matemáticos: un conjunto concreto de objetos tangibles (*representamen* o signo), un conjunto de artefactos (*artefactos*) tales como instrumentos de dibujo o software; un sistema de referencia (*referencial*) basado en definiciones, propiedades y teoremas.

Kuzniak et al. (2016) declaran que estas componentes deben estar organizadas de acuerdo con objetivos predeterminados que dependerán del dominio matemático y las tareas propuestas. En detalle explican que:

El *representamen* o signo depende del dominio matemático en juego y las estrategias de enseñanza, y pueden ser imágenes geométricas, símbolos algebraicos, gráficos, fichas, fotos. Estos elementos pueden organizarse en registros de representación semiótica de Duval (citado en Kuzniak et. al, 2016) y la interacción entre los registros puede relacionarse con manejos semióticos de Arzarello (citado en Kuzniak et. al, 2016).

El *artefacto* proviene de la noción de Rabardel (citado en Kuzniak et. al, 2016). Sin embargo, este término está restringido a algoritmos relacionados a artefactos materiales tradicionales como el ábaco, tablas logarítmicas o relacionadas a técnicas de cálculo o de la construcción como la división euclidiana y las construcciones con regla y compas, de manera respectiva. Esta restricción está formulada para evitar la confusión entre los elementos del plano epistemológico que son considerados herramientas.

El *referencial* es el marco de referencia y está compuesto por propiedades, definiciones y teoremas y axiomas que se refieren a la parte teórica del trabajo matemático.

El plano cognitivo

Los autores consideran la matemática como un conjunto organizado de propiedades y objetos manipulados mediante signos y representamen por el individuo. De ahí que mencionan al individuo como un sujeto cognitivo. En ese sentido y en estrecha relación con los componentes del nivel epistemológico, este plano incorpora tres componentes. La *visualización*, la *construcción* y la *prueba* o validación.

La *visualización* está relacionada al proceso de descifrar e interpretar señales considerando las interrelaciones, para la construcción de la representación interna (psicológica) de los objetos involucrados y sus relaciones. Se distingue de la simple visión o percepción de los signos.

La *construcción* está relacionada con acciones provocadas por el uso de herramientas de artefactos, acciones que pueden no necesariamente resultar en una producción tangible tal como dibujos o escritos, pero bien puede abarcar la observación, exploración o la experimentación. Ello depende de los artefactos utilizados y las técnicas asociadas.

La *prueba* o validación relacionada a los procesos de producción de argumentaciones, basado en un marco teórico de referencia.

Las génesis semiótica, instrumental y discursiva

Kuzniak et al. (2016) explican que el modelo del ETM articula el plano epistemológico con el plano cognitivo, a través de las génesis originadas por el trabajo matemático. Estas génesis son la *génesis semiótica*, la *génesis instrumental* y la *génesis discursiva*. Estas son detalladas a continuación.

La *génesis semiótica* "es el proceso asociado a los signos y representamen (o significantes), y que representa la relación dialéctica entre la sintáctica y las perspectivas semánticas sobre los objetos matemáticos, desarrollado y organizado mediante sistemas semióticos de representación" (Kuzniak, Tanguay y Elia, 2016, p.726). De ahí que, la génesis semiótica permite, además de exteriorizar las representaciones mentales del individuo mediante la codificación o instanciación, le permite al individuo deducir significados mediante el descifrado e interpretación de signos o representamen. Ello, en su conjunto, permite la actividad cognitiva del individuo.

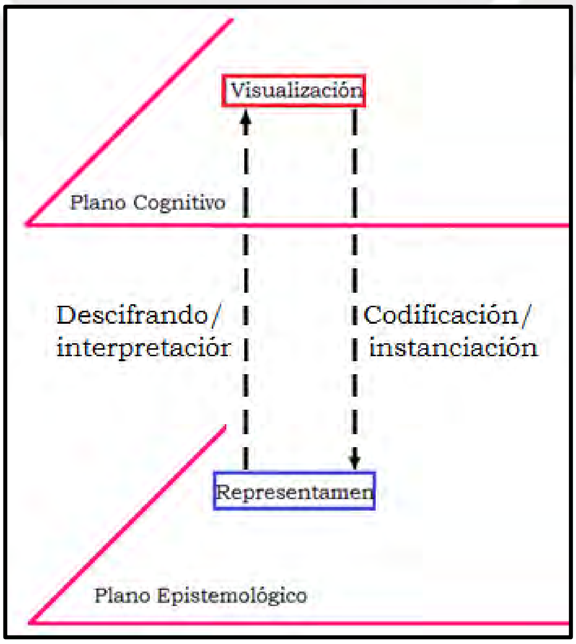


Figura 3. Posibles especificaciones de la génesis semiótica
Fuente: Kuzniak et al. (2016, p.726)

En el caso del modelo del ETM, la figura 3 brinda una idea de cómo se produce la coordinación entre el plano cognitivo y el plano semiótico mediante la génesis semiótica, como un proceso circulatorio entre el representamen y el proceso de visualización.

La *génesis instrumental* “permite hacer a los artefactos operativos mediante los procesos de construcción que contribuyen a alcanzar el trabajo matemático” (Kuzniak, Tanguay y Elia, 2016, p.726). Kuzniak et al. (2016) explican que el instrumento en sentido de Rabardel, tiene naturaleza cognoscitiva y que en ese sentido se reconoce que el instrumento es un artefacto material o simbólico al que se le asocian esquemas de uso, con el objetivo de lograr un propósito. En ese sentido, el proceso que un individuo despliega al transformar un artefacto en instrumento o cuando genera la evolución del instrumento, de acuerdo a sus esquemas de uso, es denominado génesis instrumental.

Kuzniak et al. (2016) señalan con respecto al modelo del ETM, los componentes del espacio epistemológico son considerados herramientas, ellas poseen la misma naturaleza de los artefactos. Esto debido a que estas herramientas contribuyen a la resolución de problemas. En ese sentido, los autores mencionan que es necesario restringir el término de artefacto para no confundirlo con los otros componentes del plano epistemológico.

Por otra parte, los autores destacan que la génesis instrumental debe ser visto en dos sentidos como lo menciona Artigue (citada en Kuzniak et al., 2016). Ello se puede describir en el modelo del ETM como el proceso que parte del artefacto y va hacia el proceso de construcción llamado instrumentación proceso que describe como el usuario, manipula el artefacto o manipula el instrumento proporcionado por el artefacto.

El proceso inverso va desde la configuración de la construcción, dirigido por el usuario, hacia la adecuada elección de un artefacto, esta orientación de la génesis es denominado instrumentalización. Los autores, mencionan que el conocimiento matemático está más comprometido y desarrollado en el sentido de instrumentalización (ver figura 4).

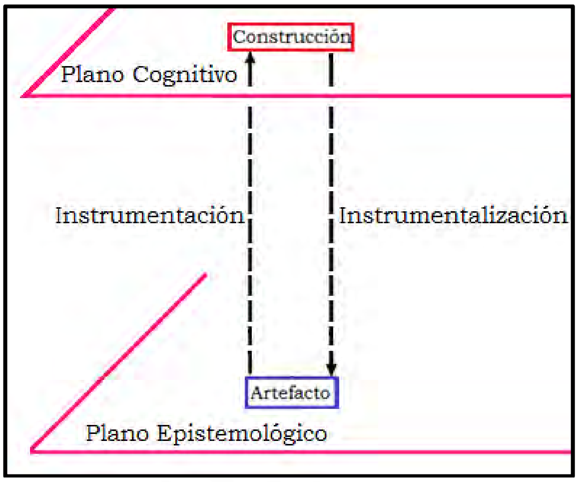


*Figura 4.*Descripción de la Génesis instrumental

Semejante a las génesis anteriores la *génesis discursiva* es un proceso en el que la validación está sustentada en el referencial teórico; estas superan a las validaciones gráficas, empíricas o instrumentadas; sin embargo, estas podrían generarlas.

En nuestra investigación, se considera que la génesis semiótica se ha activado cuando el estudiante a partir del representámen logra deducir un significado esperado o viable, o cuando a partir de la interpretación de sucesos o datos interrelacionados expresa una conclusión esperada o viable. En el caso de la génesis instrumental, consideraremos que la génesis se ha activado cuando la actividad del estudiante, asociada a la manipulación de un artefacto permite la observación, exploración o experimentación de una situación predeterminada.

También, se considera que la activación de la génesis semiótica es parcial cuando el estudiante a partir del representámen logra deducir un significado errado o no viable, o cuando a partir de la interpretación de sucesos o datos interrelacionados expresa una conclusión herrada o no viable. En el caso de la génesis instrumental, consideraremos que la génesis se ha activado de manera parcial cuando la actividad del estudiante, asociada a la manipulación de un artefacto no le permite la observación, exploración o experimentación de una situación predeterminada.

Los planos verticales y la cuestión de la circulación en el ETM

Los planos verticales son introducidos por Coutat y Richard (citados en Kuzniak et al., 2016) y permiten estudiar la circulación del conocimiento en el Espacio de Trabajo Geométrico. Específicamente, estos planos permiten conectar las fases del trabajo matemático, estas son: el descubrimiento y exploración; justificación y razonamiento; y presentación y comunicación.

Kuzniak et al. (2016) explican que en el caso del ETM la interpretación de los planos verticales (ver figura 5) es mucho más amplia y flexible, ya que, depende del dominio matemático en que se estudia y la institución escolar con la que se trabaja.

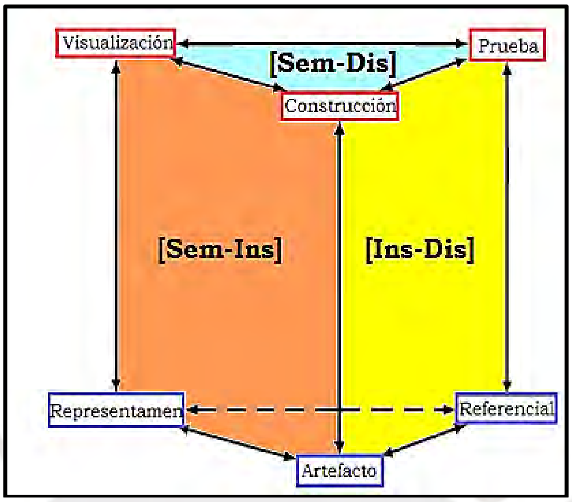


Figura 5.Tres planos verticales del modelo ETM
Fuente: Adaptado de Kuzniak et al. (2016, p.727)

Debido a que el objetivo de esta investigación está relacionada a la movilización de la función cuadrática al resolver tareas de modelización con el uso de la tecnología digital, se concibe importante el proceso de exploración, al momento de relacionar las variables presentes en la situación y la coordinación de las diversas representaciones de la función cuadrática. Más aún, debido a que se plantea el uso de tecnología digital, que promueve la manipulación de artefactos, se define que el análisis de las actividades de los estudiantes en el plano semiótico instrumental es pertinente.

El *plano semiótico instrumental* [Sem-Ins], mencionan los investigadores, le da importancia a la tecnología digital ya que, ellas permiten la exploración de gráficos de funciones o configuraciones geométricas con el objetivo de la construcción de conceptos de una noción en particular. Al mismo tiempo promueven la interpretación características geométricas de un objeto, aportadas por el artefacto.

En ese sentido, en nuestra investigación se considera que la activación del plano [Sem- Ins] esta evidenciada por la activación de las génesis semiótica e instrumental. Mientras que se considera la activación del plano [Sem-Ins] es parcial cuando la activación de una o de las dos génesis es considerada parcial.

Los diferentes tipos de ETM: el referencial, el idóneo y el personal

Los autores declaran que, a partir de observar el trabajo matemático en el contexto escolar, se tiene en cuenta que las instituciones educativas establecen las orientaciones y los profesores son los que guían y concretizan esas orientaciones en su trabajo en el aula. De acuerdo con las funciones de la institución, el profesor y el estudiante. Se distinguen tres ETM. Ellos son el ETM de referencia, ETM idóneo y el ETM personal.

> ETM de referencia se define con respecto a la relación con el conocimiento, bajo criterios matemáticos; el ETM idóneo depende de la institución involucrada y se define de acuerdo a la forma en que el conocimiento debe ser enseñado, en relación con su lugar y su función específica dentro del currículo nacional; y el ETM personal se relaciona con cada individuo y se define por la forma en que él o ella se ocupa de un problema matemático con sus propios conocimientos y capacidades matemáticas (Kuzniak et al., 2016, p.279).

Kuzniak et al. (2016) explican que el ETM de referencia está orientado y estructurado en base a un paradigma, en el contexto educativo esta orientación viene dada por la interacción de paradigmas. Además de ello, el ETM de referencia está influenciado por aspectos sociales y políticos de la realidad en que establece la institución educativa. Con respecto al ETM de referencia cada institución establece un ETM idóneo que debe ser aplicado por el profesor, cuyo objetivo es permitir el trabajo activo del estudiante mediante la resolución de problemas. Por lo tanto, las tareas deben ser elegidas por el docente propiciaran el desarrollo del ETM personal de los estudiantes, ello se evidenciará en las acciones que estos desplieguen para resolver un problema. Cabe mencionar que la elección de tarea debe estar de acuerdo a las competencias generales de los estudiantes, ETM personal inicial del estudiante, ello mostraría una interdependencia del ETM personal e idóneo enmarcado por el ETM de referencia.

1.5 Procedimientos metodológicos

Hernández, Fernández y Baptista (2010) explican que la investigación cualitativa parte de una realidad específica, particular, inmersa en un entorno social. De ahí, el investigador busca realizar generalizaciones a partir del análisis e interpretaciones de los comportamientos de los sujetos de ese entorno. En este tipo de estudio, la teoría y los antecedentes del fenómeno que se estudia son un marco de referencia y no parámetros a los que se debe ajustar la investigación.

Teniendo en cuenta a Hernández et al. (2010) y considerando que el interés de esta investigación es estudiar las actividades que estudiantes de humanidades realizan cuando movilizan el concepto de función cuadrática al resolver tareas de modelización la metodología que se emplea es de tipo cualitativa.

Por otro lado, Artigue (2015) menciona que el método de investigación de la Ingeniería Didáctica se identifica por “un esquema experimental basado en las ‘realizaciones didácticas’ en clase” (p.36). Esta “realización didáctica” se inicia con la planificación, luego, ella es experimentada y observada. Las observaciones y sus resultados son analizados y validados de manera interna.

En ese sentido se considera, de acuerdo a la autora, pertinente utilizar aspectos de la Ingeniería Didáctica, ya que consideramos a la tarea de modelización como una “realización didáctica”, sobre la cual se realizan análisis y observaciones en sus fases de análisis preliminar; concepción y análisis a priori; experimentación; y análisis a posteriori y validación. Para el caso de esta investigación la detallamos a continuación.

Análisis preliminar: la autora declara que esta fase es importante, debido a que ella guía la investigación. En ella se tiene en cuenta aspectos epistemológicos, didácticos y cognitivos de la enseñanza, relacionados al objeto matemático. Aspectos que de acuerdo a las necesidades de la investigación son retomadas y profundizadas en las fases posteriores. A continuación, se detalla el desarrollo de estos aspectos en esta investigación.

La dimensión epistémica se desarrolla a través del análisis de aspectos históricos del objeto función. Ello nos permite conocer el fenómeno o necesidad que propició su existencia, las problemáticas que generaron su progreso, las concepciones que acarrearon dificultades en su desarrollo y los usos que tiene en la actualidad. El desarrollo de esta dimensión se encuentra en el capítulo II.

La dimensión cognitiva presenta investigaciones de referencia en las que se identifica las concepciones y dificultades que los estudiantes tienen sobre la función, y específicamente sobre función cuadrática y la resolución de problemas donde movilizan esta noción. Esta dimensión es desarrollada en el Capítulo I, considerada parte de la problemática de esta investigación.

La dimensión didáctica muestra el análisis de un texto utilizado por docentes y estudiantes de primer ciclo de carreras de humanidades. En él se identifica la activación de las génesis del plano semiótico instrumental, de esta manera, se identifica en términos del ETM como el objeto matemático función, específicamente función cuadrática es transmitido a dichos estudiantes. Esta revisión está detallada en el capítulo II.

Concepción y análisis a priori: de acuerdo a Artigue (2015), en esta fase se establece las “variables comando” y se realiza el análisis a priori de la secuencia. Estas variables son de dos tipos y en base a ellas se diseña la tarea que se formulará en clase. Estas variables son la variable macrodidáctica o globales y la variable microdidáctica o locales.

En esta investigación se definen en cada fase de la tarea variables microdidácticas, que permiten formular la tarea de modelización que moviliza la noción de función cuadrática.

Luego de tener el diseño de la tarea se procede con el análisis a priori; en el cual se consideran los posibles procedimientos, respuestas o soluciones que los estudiantes pueden dar en la resolución de la tarea planteada.

Experimentación: La investigadora declara que esta fase comprende la aplicación de la secuencia didáctica en el aula por parte del docente-investigador, y el registro de las observaciones de la experiencia.

En esta investigación, esta fase se realizará con estudiantes universitarios de primer ciclo (16-18 años) de carreras de humanidades de una universidad privada de Lima, Perú. La secuencia didáctica que se propone está compuesta de una tarea de modelización y requiere el uso del software GeoGebra. Los instrumentos para la recolección de datos son fichas de tareas, archivos de GeoGebra, archivos de video de Camtasia y fichas de observación.

Análisis a posteriori y validación: según la autora, esta fase se inicia con el análisis de los datos recolectados durante la experimentación y finaliza con la validación interna, que consiste en confrontar el análisis a priori con el análisis a posteriori.

Para efectuar el análisis a posteriori, se organiza y analiza los datos recolectados en las fichas de tareas, fichas de observación, archivos de GeoGebra y archivos de video, que evidencian el trabajo matemático del estudiante. En este proceso se identifica las estrategias realizadas, los errores evidenciados, los artefactos utilizados al resolver las tareas propuestas en concordancia del plano instrumental- semiótico del ETM.

Finalmente, se procederá a realizar la validación mediante la confrontación del análisis a priori con el análisis a posteriori de la investigación.

En esta investigación la secuencia didáctica está compuesta de una tarea de modelización, el diseño de la misma está orientado por el ciclo de modelización de Blum y Leiβ (2007). Dicho ciclo es detallado a continuación.

Ciclo de Modelización de Blum y Leiβ

El ciclo de modelización de Blum y Leiβ (citados en Blum y Borroneo Ferri, 2009) relaciona el mundo real, cotidiano, con la matemática. Los autores explican que el ciclo parte de una situación real (problema) que es transformada mediante una serie de procesos hasta proveer una solución a la situación real.

En detalle, Blum y Borroneo Ferri (2009) explican que, en base de la situación real y mediante el proceso de *construcción* se reconoce los valores, las condiciones y restricciones que intervienen en la situación; además, del propósito de su confrontación. Así, la situación real es convertida en una situación a modelar, la cual debe pasar por un proceso de *simplificación y estructuración* en la que se considera los valores, condiciones y restricciones que pueden ser cuantificadas y relacionadas; el resultado de este proceso es denominado modelo real (problema).

El ciclo continúa con la síntesis del modelo real mediante el proceso de *matematización* que lo transforma en un modelo matemático, el cual consiste de ciertas ecuaciones. Este modelo matemático es sometido al *trabajo matemático* en el que intervienen los tratamientos algebraicos para producir un resultado matemático que es *interpretado* en el contexto real y considerado como resultado real, que viene a ser la solución de la situación real.

Los investigadores mencionan que la *validación* de los resultados de los procesos se realiza mediante la confrontación del resultado real con el contexto real. En el caso de identificar incongruencias será necesario reiniciar el ciclo y reconocer el proceso defectuoso. Finalmente, el resultado luego de ser validado es *comunicado* en concordancia del lenguaje usado en el contexto de la situación real presentada (ver figura 6).

Cabe considerar que, en el proceso de modelizar, el número de procedimientos y orden que se realizan no son rígidos; ya que dependen de la situación real, estilo de pensamiento matemático del estudiante, y las veces que el ciclo ha sido ya recorrido.

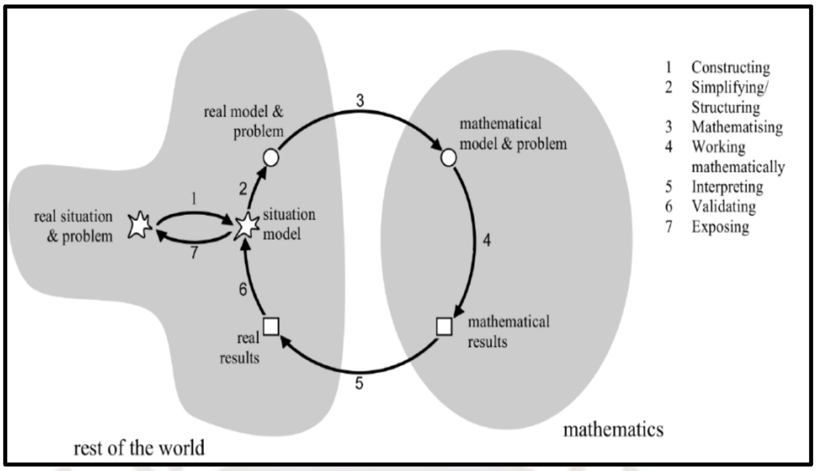


Figura 6.Ciclo de modelización de Blum y Leiβ
Fuente: Blum y Borroneo (2009, p.46)

Ese aspecto es destacado por Blum y Borroneo Ferri (2009), al mencionar que la modelización es un proceso complejo que transita entre el contexto extramatemático (mundo real) y el contexto intramatemático (procedimientos matemáticos). Esta complejidad conlleva a que los estudiantes establezcan relaciones entre elementos de estos contextos de manera diferente, definiendo así rutas diferentes de modelización.

En el desarrollo de esta investigación consideramos que el ciclo de modelización de Blum y Leiβ nos permite diseñar una tarea de modelización eficiente, que parta de la exploración de variables de la situación y concluya con la validación del modelo matemático.

Respecto al diseño de la tarea, además del ciclo de modelización de Blum y Leiβ, se toma en cuenta los aspectos matemáticos e históricos de la función, la manera como se presenta el objeto de función cuadrática en los textos didácticos y la orientación de como el tema de funciones cuadráticas está planteada en los planes de estudio de carreras de humanidades. Ello nos brinda un panorama de las características que se debe tener en cuenta para diseñar la tarea de modelización.

Estos aspectos que guían el diseño de nuestra tarea serán desarrollados en el siguiente capítulo.

CAPITULO II: ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO DE REFERENCIA DE LAS FUNCIONES

En este capítulo se expone los aspectos matemáticos, históricos del objeto función. Por otra parte, se muestra como el objeto matemático función, específicamente, función cuadrática se presenta en libros didácticos y finaliza con el análisis de planes de estudios del nivel universitario de carreras de humanidades.

2.1 Aspectos matemáticos e históricos

Alvarenga, Barbosa y Ferreira (2014) mencionan que, para presentar una línea continua, de tiempo, del desarrollo del concepto de función es necesario distinguir cuatro etapas históricas: génesis de concepto de función con relación entre variables; la noción de función en estudio de dependencia entre variables físicas, época de formalización, época moderna. En esta investigación se presentará una visión de la evolución de la noción de función desde 2000 a.C hasta el siglo XX.

Génesis de concepto de función con relación entre variables

Boyer (1986) menciona que las en las nociones primitivas relacionadas con el concepto de número y magnitud, puede darnos indicios de conceptos matemáticos actuales, como la noción de función. En ese sentido, las nociones primitivas de número y magnitud pueden haber estado relacionados con la percepción de las variaciones, tal como la diferencia entre un lobo y muchos lobos, la diferencia de tamaño entre un pez y una ballena. Esto debido a que la supervivencia del hombre probablemente está relacionada con el desarrollo de conceptos matemáticos.

Luego de percibir diversas experiencias de comparación, es posible que haya surgido una conciencia de semejanzas, y darse cuenta de que ciertos grupos pueden ponerse en correspondencia uno a uno, como por ejemplo los dedos de los pies y de las manos. Este reconocimiento llevó al desarrollo del número, y pudo haberse originado aproximadamente hace 400 000 años como parte de una conciencia colectiva gradual. Todo ello, indicaría que el progreso del concepto de número fue largo y lento. Evidencia de este desarrollo es el hueso de cachorro de lobo hallado en Checoslovaquia que data de hace 30 000 años. Este hueso tiene 55 incisiones distribuidas en dos series, una de 25 incisiones y la segunda de 30 incisiones, en cada una, las incisiones están separadas en grupos de 5.

Boyer (1986) menciona que, con el desarrollo del sistema de numeración, se desarrolló la noción de magnitud, un sistema de correspondencia entre los objetos concretos y símbolos abstractos. Ejemplo de ello es que se utilizaba unidades de medidas como el palmo, el codo, la vara, al medir la altura de un caballo.

El autor declara que los matemáticos sumerios y del Antiguo Egipto se enfrentaban a problemas envueltos en cantidades variables, los que se les podía proporcionar valores diferentes, y eran planteados y resueltos por medio de operaciones de números específicos. Un ejemplo de ello es un documento egipcio del año 1850 a.C., llamado “Papiro de Moscú”.

En este papiro se menciona un procedimiento para determinar el volumen de una pirámide cuadrangular truncada de altura 6 unidades, aristas de la base inferior y superior 4 y 2 respectivamente. Está expresado de la siguiente manera por el escriba:

> Elevar al cuadrado los números 2 y 4 y añadirle a la suma de estos dos cuadrados el producto de 2 por 4, cuyo resultado es 28; por último, se multiplica este resultado por un tercio de 6, y el escriba concluye con consabidas palabras: “Ves, es 56; lo has calculado correctamente” (Boyer, 1986, p.41)

La Figura 7 muestra la transcripción al jeroglífico del papiro de Moscú que representa el problema del volumen de la pirámide cuadrangular truncada.

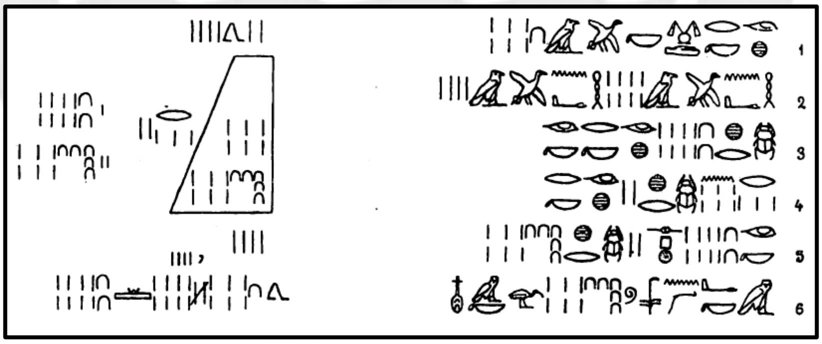


*Figura 7.*Transcripción de un fragmento del Papiro de Moscú
Fuente: Boyer (1986, p. 30)

El autor explica que, si las magnitudes de la pirámide cambian, al seguir el procedimiento propuesto en el papiro se obtiene el volumen de la nueva pirámide truncada. Por otro lado, este procedimiento puede ser convertido en la siguiente expresión algebraica: $V = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2)$

Donde h es la altura, a es el valor de cada lado de la base y b es la medida de cada lado superior de la pirámide.

Boyer (1986) menciona que Herodoto y Aristóteles sostenían ideas contrapuestas sobre el origen de la geometría. Herodoto mencionaba que la geometría habría surgido con una finalidad práctica, de trazar los linderos de los terrenos luego de las inundaciones anuales del valle del rio Nilo. Mientras que Aristóteles sostenía que el desarrollo de la geometría habría sido desarrollado como una actividad de ocio de los sacerdotes y luego habría sido utilizada en el desarrollo agrícola. El autor explica que estas dos concepciones no escapan del hecho que a los geómetras se les llamara “tensadores de cuerdas” y que estas técnicas se utilizaban para bosquejar los planos de los templos como también para reconstruir linderos borrados entre los terrenos. El trabajo de los “tensadores de cuerda” nos remite a los controles de datos, es decir ellos deberían haber tenido un registro de las medidas de los terrenos, sus respectivas ubicaciones y sus respectivos dueños, todo ello nos da la idea del desarrollo de la noción de función.

Otra evidencia, que menciona el autor, es del desarrollo de la noción de función son los trabajos de alfarería, cestería y tejido, en ella se pueden apreciar sucesiones en una correspondencia biunívoca, y se puede deducir un patrón de construcción; como se observa en la figura 8.

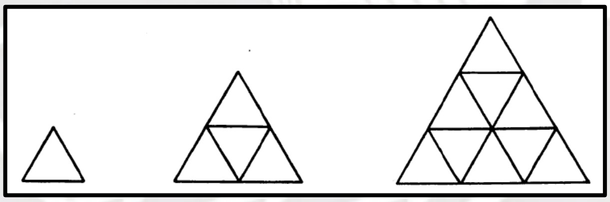


*Figura 8.*Símbolos hallados en trabajos de alfarería
Fuente: Boyer (1986, p. 25)

En este sentido el autor menciona que el desarrollo del sistema de numeración como el de la geometría pudo haber tenido un origen en las prácticas rituales, pero que sin duda han sido útiles al resolver problemas prácticos.

Por otro lado, el autor menciona que el interés de los egipcios por la astronomía los habría llevado a tomar datos sobre la inundación anual del valle del rio Nilo y la salida de la estrella sirio. Con estos datos lograron establecer la frecuencia de las inundaciones, está eran 365 días, gracias a al registro de los movimientos de las estrellas y los fenómenos naturales lograron establecer un calendario solar de 12 meses, cada uno con 30 días y cinco días festivos extra, muy aproximado al calendario actual.

Boyer (1986), también menciona que en el Papiro de Ahmes se encuentran diversos procedimientos, a manera de recetas, por ejemplo, en el problema 50 se presenta un método para hallar el área del círculo, en el problema 51 un procedimiento para hallar el área de un triángulo isósceles, en la que hay que tomar la mitad de la base y multiplicarlo por la altura. El problema 52 da un procedimiento que se realiza para hallar el área de un trapecio isósceles y el problema 56 presenta un avance en geometría relacionado a la noción de crecimiento constante.

Por otra parte, explica que otra evidencia del desarrollo de la noción función se encuentran registradas en las tablillas babilónicas de arcilla, en la que están acuñadas tablas de cuadrados, de cubos, de raíces cuadradas y cubicas. Unas tablillas más antiguas, son tablas análogas a las tablas actuales de antilogaritmos, tablas de tipo exponencial o logarítmico.

También resalta una tablilla babilónica de mucha utilidad. Se trata de una tabulación de valores de $n^3 + n^2$ para valores naturales de n, es esto considerado una muestra de que el avance en algebra era mayor en Mesopotamia que en Egipto.

Por otro lado, el autor considera una de las producciones más famosas de la escuela pitagórica, el "Teorema de Pitágoras", teorema que relaciona las longitudes de un triángulo rectángulo, de la siguiente manera: el cuadrado de la medida de la hipotenusa (h) es igual a la suma de los cuadrados de sus lados restantes, es decir:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Este teorema representa un padrón general que cumplen este tipo de triángulos, en ella se relaciona áreas de cuadrados que pueden ser construidos a cada lado del triángulo.

Sobre el trabajo de Apolonio de Perga (262 a. C.-180 a. C.), el autor menciona que las cónicas fue un trabajo excepcional y que es por ello por lo que en la antigüedad Apolonio fue conocido como "El Gran Geómetra". En su obra, Apolonio, les da un tratamiento completo a los lugares geométricos de la elipse, la parábola y la hipérbola. Para este estudio se utilizó las ecuaciones cuadráticas que permitió describir las cónicas a través de relaciones de áreas y longitudes, que daban origen a la propiedad característica de definición de curva.

La noción de función en estudio de dependencia entre variables físicas

Alvarenga, Barbosa y Ferreira (2014) mencionan que a partir del siglo XII la noción de función es expresada sobre una forma geométrica y mecánica, y la característica de dependencia se representó mediante gráficos o de manera verbal.

Boyer (1986) menciona que Nicole Oresme conocía que hace un siglo antes de su época, había un interés de los filósofos por la cuantificación de las “formas” variables. Temas relacionados a la velocidad de un cuerpo móvil y la variación de la temperatura. Es por ello que probablemente para el año 1361, Oresme tuvo la idea de hacer una gráfica que representara la manera de como las cosas varían (ver figura 9). Ella es una sugerencia primitiva de lo que hoy en día sería la representación gráfica de funciones.

> Oresme dibuja una gráfica velocidad-tiempo en la que los puntos de una recta horizontal representan los sucesivos instantes de tiempo (o longitudes) y, para cada uno de estos instantes traza un segmento (o latitud) perpendicular a la recta de longitudes en dicho punto, cuya longitud representa la velocidad en ese instante. Los extremos superiores de todos estos segmentos están en una recta, tal como vio Oresme, y si el movimiento uniformemente acelerado parte del reposo, entonces la totalidad de los segmentos velocidades (que nosotros llamamos ordenadas) cubren el área de un triángulo rectángulo. (Boyer, 1986, p. 339)

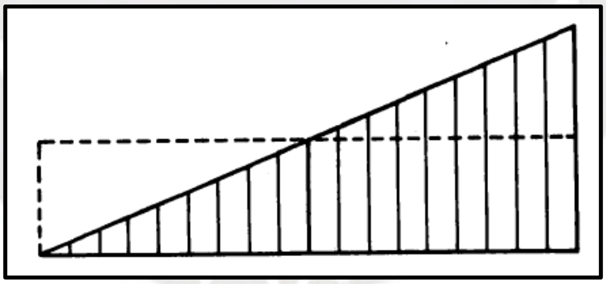


Figura 9.Representación gráfica de la velocidad
Fuente: Boyer (1986, p. 339)

El mismo diagrama, menciona el autor, conduce a la ley del movimiento que se le suele atribuir a Galileo (siglo XVII), que en realidad es una organización del trabajo de Oresme; pero con precisión matemática.

Entre otras contribuciones de Galileo, el autor menciona “están el análisis del movimiento de un proyectil, en un componente horizontal uniforme y una componente vertical uniforme acelerada. Con este análisis Galileo logró demostrar, despreciando la resistencia del aire, es siempre una parábola” (p. 340).

La época de la formalización del concepto de función

Boyer (1986) menciona que durante el segundo tercio del siglo XVII Francia fue considerada el centro de las matemáticas, el desarrollo de las matemáticas tenía una motivación económica, social o tecnológica. Los dos personajes representativos de esta época fueron René Descartes (1596 - 1650) y Pierre de Fermat (1601-1665).

El autor declara que Descartes introduce la noción de función relacionado a la noción de ecuación. En ella, desarrollaba la idea de dependencia entre variables. Él inició el usó las primeras letras del alfabeto para los parámetros y las últimas letras como incógnitas o variables. Descartes demostró que su interés en el estudio de las cónicas eran los métodos necesarios para construir geométricamente las ordenadas correspondientes a abscisas dadas y no los lugares geométricos.

El libro de "La geometrie" es el que más se aproxima a la concepción moderna de la geometría analítica. El autor menciona, que la teoría de funciones sacó finalmente un gran sentido de esta obra, aunque la idea de "forma" o "función" no pareció ser alguna motivación en el desarrollo de la geometría cartesiana.

Por su parte Fermat, explica el autor, en base a su breve tratado titulado "Ad locos planos el solidos isagoge" ("una introducción a los lugares geométricos planos y sólidos"), se interesó únicamente por los lugares geométricos más sencillos. Es así, que comenzó por la ecuación lineal de la forma $Dx = By$ era representada por la gráfica es una semirrecta con origen en el origen de coordenadas, debido a que Fermat no utilizaba abscisas negativas. Fermat con el objetivo de presentar la capacidad de sus métodos para el estudio de lugares geométricos, presenta el problema siguiente:

> Dado un número cualquier de rectas en un plano, el lugar geométrico es de un punto tal que la suma de cualesquiera múltiplos de los segmentos trazados desde dicho punto a las rectas dadas, formando con ellas ángulos dados, sea constante, es una línea recta. (Fermat citado en Boyer, 1986, p. 438)

El autor menciona que ese resultado proviene del hecho de que los segmentos mencionados son funciones lineales de las coordenadas, y de que Fermat considera que toda ecuación de primer grado es representada por una línea recta.

El autor menciona que la obra de Fermat fue una exposición mucho más sistemática, didáctica y actual que la de Descartes. Ello debido al hecho de que el eje de ordenadas se toma generalmente perpendicular al eje de las abscisas. Por otro lado. Fermat descubrió un método muy ingenioso para hallar los puntos en los que la función polinómica de la forma $y = f(x)$ toma un valor máximo o mínimo. Fermat comparaba el valor de $f(x)$ en un cierto punto con el valor de $f(x + E)$, cuanto más pequeño era el intervalo E entre los dos puntos.

Otro de los aportes al desarrollo de la noción de función, que Boyer (1986) menciona, es el de Roberval, hecho en 1635, el primer bosquejo de la mitad de un arco de la curva “seno” (ver figura 10), la importancia de este hecho radica en que se acerca al enfoque funcional.

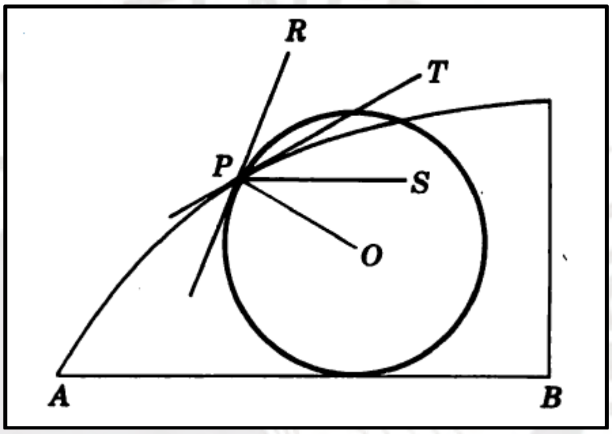


Figura 10. Bosquejo de la mitad de un arco de la curva “seno”
Fuente: Boyer (1986, p. 450)

Torricelli por su parte, menciona el autor, antes de su muerte en 1647 se cree que representó por primera vez la gráfica de la función logarítmica. Además, estudió las trayectorias parabólicas que siguen los proyectiles disparados desde un punto fijo con velocidad inicial constante, pero con ángulo de elevación sobre la horizontal.

En una revisión de la investigación del autor sobre los trabajos de Newton y Leibniz se percibe que su principal objetivo era el estudio del cálculo infinitesimal en la que se relacionaban las funciones ecuaciones algebraicas y problemas geométricos y cinemáticos y no hay evidencia de que su interés fuera directamente las funciones.

Continuando con la revisión, el autor menciona que los primeros conceptos de función desvinculados de la geometría aparecen en el siglo XVIII con Joham Bernoulli (1667) y Leonard Euler (1707-1783).

En ese sentido, el autor menciona que Bernoulli entre sus tantos aportes, se dedicó a estudiar las curvas exponenciales simples $y = a^x$ y también las exponenciales como $y = x^x$. También las relaciones que había entre las funciones trigonométricas inversas y los logaritmos de números imaginarios. Experimento con varios tipos de notaciones para representar una función de x, de la más parecida a la moderna era $\emptyset x$.Su idea sobre lo que era una función era: “una cantidad compuesta de cualquier manera a partir de una variable y constantes arbitrarias”

Por otra parte, Boyer (1986) menciona, que la obra de Euler publicada en 1748 “Introductio in analysin infinitorum” es considerado la piedra angular del nuevo análisis. En ella se considera la idea de “función” como una idea fundamental del análisis. Ella se define como: “una cantidad variable y con números o cantidades constantes”, en una manera menos formal y más general Euler consideraba una función como: “la relación entre dos coordenadas de los puntos de una curva trazada a mano alzada” en el plano. Con respecto a ello, el autor menciona que probablemente la idea que Euler tenía para dar aquella definición estaba relacionada a las funciones algebraicas y las funciones trascendentales, desde un punto de vista analítico y no geométrico.

Por su parte, el autor menciona que Lejeune Dirichlet, propuso en 1837 una definición de función general: “si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x”.

Época moderna

Esta época se considera los avances realizados entre los últimos años del siglo XIX y el siglo XX. Las investigaciones que se nombran, en esta investigación, son evidencia de que en esta época la noción de función trascendió diversas ramas de la matemática. Por ejemplo, la investigación de Poincaré con la que obtuvo su doctorado en 1879 contribuyó a la rama de las ecuaciones diferenciales, específicamente a las funciones automorfas, sin embargo, este estudio partió de la generalización de las funciones trigonométricas, declara el autor. Esto de debido a que la noción de función de los matemáticos estaba siendo influenciado por los avances en los estudios de teoría de conjuntos, de Cantor, y series trigonométricas.

Así, el concepto de función se enfocó en la correspondencia puntual, no en el sentido variacional, sino, de acuerdo a la teoría de la medida. En ese sentido, el autor refiere que Borel en los primeros años del siglo XX enfocó su trabajo en la aplicación de la teoría de conjuntos a la teoría de funciones, una muestra de ello es el teorema de

Heine-Borel. Este estudio, menciona el investigador, motivó a Lebesgue a analizar la integral definida por Rieman y definir de una nueva manera el concepto de integral, en términos de teoría de la medida. Una generalización que permite el trabajo con un mayor conjunto de funciones y además permite establecer la relación inversa entre diferenciación e integración.

Otra muestra de ello, es mencionado por Boyer (1986) sobre el trabajo de Fréchet que presentado en París en 1906 sobre la teoría de funciones definida en base a la teoría de conjuntos que corresponden a un Cálculo generalizado, denominado Calculo Funcional.

El autor menciona que el alto nivel de abstracción y generalización que influenció a los matemáticos como Hilbert a establecer la definición de “espacio”. Hilbert en sus trabajos de 1904 a 1910, desarrolla un cambio del concepto de continuidad de una función de infinitas variables, esto sobre el espacio que lleva su nombre. Mientras que el espacio vectorial funcional definido por Frechet, Banash y otros permitió una generalización del análisis, a las aplicaciones de la teoría de probabilidades y a la física.

Así, estos avances realizados a partir de la teoría de conjuntos y la teoría de la medida relacionada a las funciones, se vio todavía más impulsada por el inicio de la primera guerra mundial. El autor declara que este avance envolvió a la teoría de las probabilidades, más específicamente, las aplicaciones de la teoría de las probabilidades tanto a la física como a la genética. Muestra de ello, son los trabajos de: Francis Galton (1822-1911) sobre los fenómenos de regresión, Andrei Andreyevich Markov (1856-1922) sobre la teoría cinética de los gases, fenómenos sociales y biológicos.

El autor declara que el desarrollo de la teoría de las probabilidades y la estadística durante el siglo XX se relaciona al desarrollo de las computadoras electrónicas de alta velocidad. Esto evidencia el gran desarrollo de la matemática aplicada a otras ciencias en este periodo. Sin embargo, el autor resalta que este avance no estaba enfocado solo en la aplicación, sino, también en el desarrollo de la matemática pura, ello debido a la abstracción y la identificación de modelos generales.

Específicamente, menciona el autor que el avance en matemática en el segundo tercio del siglo XX, se evidencia en las obras de Nicolas Bourbaki, un colectivo de matemáticos, que busca fundamentar y desarrollar las grandes teorías básicas de la matemática. En la primera parte de su obra denominada *Les Structures fondamentales de l´ analyse* se encuentra un libro sobre Funciones de Variable Real, esta obra estaba caracterizado por un planteamiento axiomático y una forma general y abstracta con una estructura lógica. En ella, la definición de función es presentada de la siguiente manera: “Sean E y F dos conjuntos, distintos o no. Una relación entre una variable x de E y una variable y de F se dice una relación funcional en y, o relación funcional de E en F, si cualquiera que sea $x \in E$, existe uno y sólo un elemento $y \in F$ que se asocie a x en la relación considerada” (Méndez citado en Alvarenga et al., 2014, p.174).

2.2 Aspectos de función cuadrática en los libros didácticos

En esta sección de nuestra investigación nos basamos en el libro de Stewart, Redlin y Watson (2012). Un texto que es utilizado por los docentes como guía de clase. Este presenta definiciones, propiedades, ejemplos y tareas útiles para ser propuestos en clase; por ello se considera un importante documento que permite analizar el ETM de referencia del objeto función, particularmente la función cuadrática.

El análisis del texto que se presenta a continuación hace énfasis en tres aspectos, el primero es el concepto y propiedades de función, el segundo es el concepto y propiedades de función cuadrática y finalmente algunos aspectos de la modelización de funciones.

Análisis del concepto y algunas propiedades de función

Se utiliza el lenguaje natural para introducir la noción de función, en ese sentido, se destaca que la función es útil para modelar situaciones del mundo real. Los autores mencionan que estos modelos son una “regla” que describen la dependencia de una cantidad sobre otra, ejemplo de ello son los modelos físicos, como el modelo de caída libre que Galileo estableció en el siglo XVII; además de otros como los siguientes:

- La estatura es una función de la edad.
- La temperatura es una función de la fecha.
- El costo de enviar un paquete por correo depende de su peso.

Para introducir la definición de función los autores presentan la regla “elevar al cuadrado un número”, es decir, la función cuadrática en lenguaje natural, luego se realiza la conversión al registro numérico, se presentan algunos resultados, y finalmente se induce la forma algebraica de la función cuadrática. A partir de ella se presenta la definición de función (ver figura 11).

DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN

Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto B.

Figura 11. Definición de función
Fuente: Stewart et al. (2012, p.143)

Así, la definición de función está dada en lenguaje natural, auxiliada de algunos símbolos algebraicos. Donde, A recibe el nombre de dominio de la función y el conjunto de todos los posibles valores de $f(x)$ cuando x varía en todo el dominio es denominado rango de la función.

Stewart et al. (2012) exponen representaciones que muestran la noción de función. Una es la idea de máquina que funciona bajo una regla (ver izquierda de la figura 12).

Así, cuando una variable independiente x que está en el dominio de la función e ingresa a la maquina se produce un valor dependiente $f(x)$, valor de salida, de acuerdo con la regla de la función. Entonces, los autores mencionan que se puede deducir que el dominio de la función puede ser comprendido por todos posibles valores de entrada y el rango comprendido por todos los valores de salida posibles.

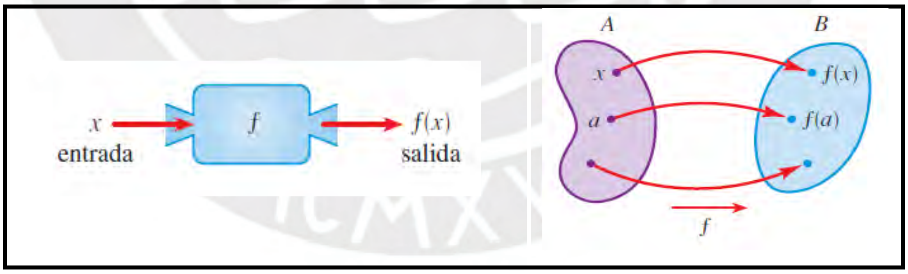


Figura 12. Diagrama de máquina y de flecha
Fuente: Adaptado de Stewart et al. (2012, p.143)

La otra representación es el diagrama de flecha (ver derecha de la figura 12). En ella se relacionan cada elemento de A con un único elemento de B y se puede deducir que los elementos de A que estén asociados a un elemento de B pertenecen al dominio de la función, y todos los valores de B relacionados con un elemento de A forman el rango de la función.

Con respecto a los registros de representación con los que se puede dar a conocer a una función los autores se refieren de la siguiente manera:

- Verbalmente (por descripción en palabras)
- Algebraicamente (por una forma explícita)
- Visualmente (por una gráfica)
- Numéricamente (por una tabla de valores)

Stewart et al. (2012) destacan la utilidad de pasar de una representación a otra, ya que ella permite conocer y entender las propiedades de la función. En ese sentido, la gráfica de una función nos permite establecer fácilmente si una función es creciente o decreciente, así como también ubicar sus valores mínimo y máximo, e intuir o definir el dominio y el rango de una función.

Para graficar una función f, los autores mencionan que se necesita localizar los puntos $(x, f\ (x))$ en un plano de coordenadas. Donde, x corresponde al valor de la abscisa y $f(x)$ al valor de la ordenada (ver figura 13).

LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Si f es una función con dominio A, entonces la **gráfica** de f es el conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

localizados en un plano de coordenadas. En otras palabras, la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $y = f(x)$; esto es, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

Figura 13. Grafica de funciones por localización de puntos
Fuente : Stewart et al. (2012, p.153)

Como ejemplo del proceso de graficar una función, los autores proponen graficar una función cuadrática, descrita a continuación:

Para graficar la función $f(x) = 0.5x^2$ los autores recomiendan utilizar la representación tabular, tabla de valores. Luego, ubicar los puntos, dados en la tabla, en un sistema de coordenadas cartesianas y unirlos con una curva suave sin irregularidades, como se observa en la figura 14.

x	$f(x) = 0.5x^2$
-2	2
-1	0.5
1.42	1
2.45	3

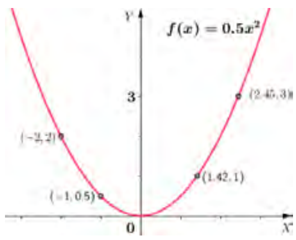


Figura 14. Gráfica de una función cuadrática
Fuente: Adaptado de Stewart et al. (2012, p.154)

El procedimiento muestra la coordinación entre los registros de representación algebraica, tabular y gráfica que recalcan los autores.

Con respecto a la naturaleza variable de la función, se sabe que está relacionada a la rapidez de cambio promedio definida en la figura 15.

RAPIDEZ DE CAMBIO PROMEDIO

La **rapidez de cambio promedio** de la función $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es

$$\text{rapidez de cambio promedio} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La rapidez de cambio promedio es la pendiente de la **recta secante** entre $x = a$ y $x = b$ en la gráfica de f, esto es, la recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

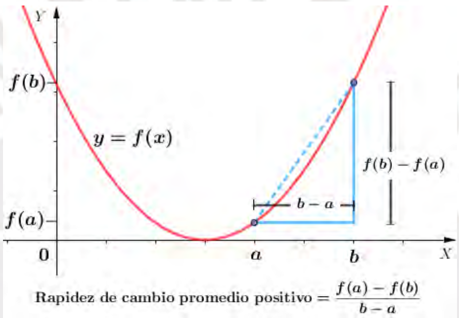


Figura 15. Rapidez de cambio promedio
Fuente: Adaptado de Stewart et al. (2012, p.173)

Esta definición está dada predominantemente en el registro algebraico y gráfico, permite entender esta noción como el cociente de las diferencias componente a componente de coordenadas o como el cociente de la variación de los valores de salida y de los valores de entrada.

Los Stewart et al. (2012) mencionan que el valor de la rapidez de cambio promedio, presentado gráficamente se relaciona al comportamiento de la función en un intervalo, ello puede ser de crecimiento o decrecimiento (ver figura 16).

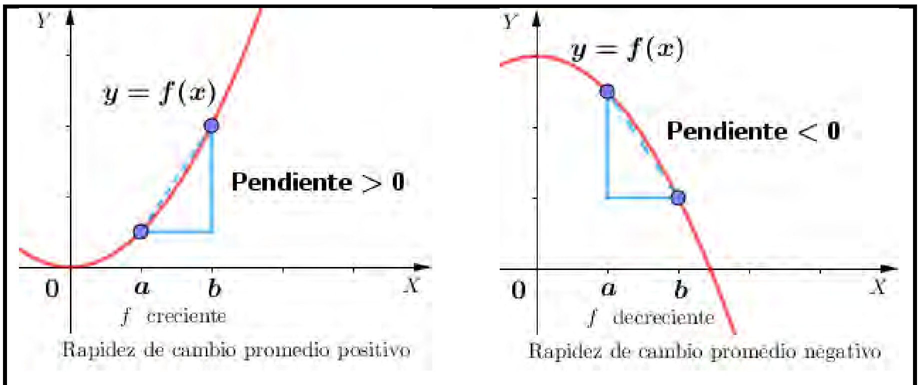


Figura 16. Rapidez de cambio promedio positivo y negativo
Fuente: Adaptado de Stewart et al. (2012, p.175)

Stewart et al. (2012) presentan las propiedades de desplazamiento horizontal y vertical y mencionan que estas propiedades son importantes al momento de realizar la gráfica de una función, debido a que su entendimiento facilita el proceso de graficar.

La propiedad de desplazamiento vertical esta dado en el registro algebraico y registro gráfico (ver figura 17).

DESPLAZAMIENTOS VERTICALES DE GRÁFICAS

Suponga $c > 0$.

Para graficar $y = f(x) + c$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ c unidades hacia arriba.

Para graficar $y = f(x) - c$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ c unidades hacia abajo.

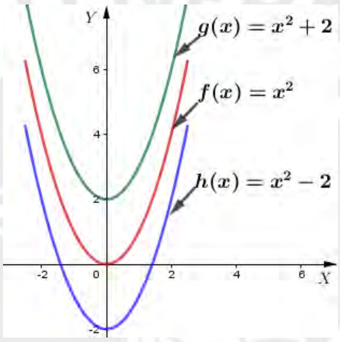


Figura 17. Propiedad de traslación vertical de la función
Fuente: Adaptado de Stewart et al. (2012, p.180)

El registro grafico permite relacionar la variación del término independiente de la función en su forma algebraica.

En el ejemplo de esta propiedad, el caso de la función cuadrática se observa que el vértice de la función g está 2 unidades arriba del vértice correspondiente a f y el vértice de la función h está 2 unidades debajo respecto de f.

Los autores presentan la propiedad de desplazamiento horizontal de manera similar a la anterior (ver figura 18). En este caso, el vértice de la función cambiará de posición sobre el eje de las abscisas.

En el ejemplo de esta propiedad, para graficar g, la posición del vértice se desplaza 3 unidades a la izquierda la gráfica de f, y para graficar h, el vértice se desplaza 2 unidades a la derecha la gráfica de f. Como se observa en la figura 18.

DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES DE GRÁFICAS

Suponga $c > 0$.

Para graficar $y = f(x - c)$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ c unidades a la derecha.

Para graficar $y = f(x + c)$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ c unidades a la izquierda.

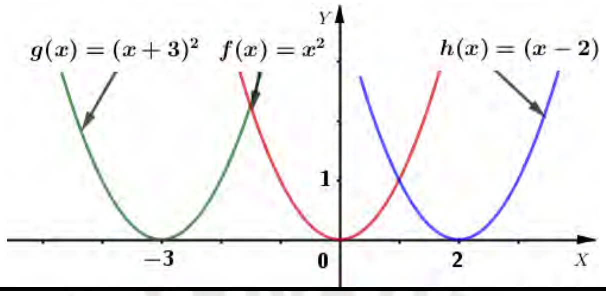


Figura 18. Propiedad de traslación horizontal
Fuente: Adaptado de Stewart et al. (2012, p.181)

Al presentar las definiciones y propiedades de la función Stewart et al. (2012) utilizan los registros de lengua natural, registro algebraico y gráfico. La coordinación de estos registros permitiría entender la propiedad de desplazamiento horizontal de graficas que se está desarrollando.

Análisis del concepto y algunas propiedades de función cuadrática

Los autores exponen la definición de función cuadrática en lenguaje algebraico, introducida a partir de una función polinomial (ver figura 19).

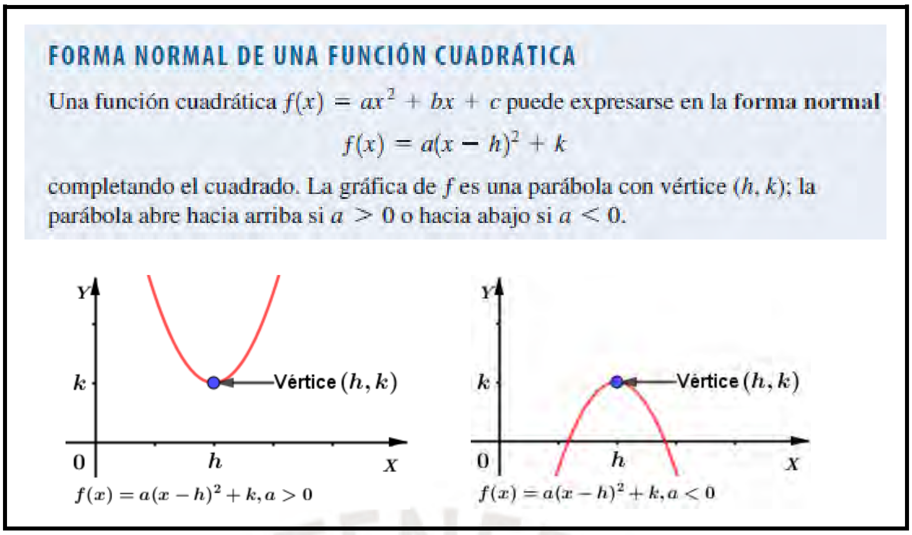
FUNCIONES CUADRÁTICAS

Una **función cuadrática** es una función polinomial de grado 2. Entonces, una función cuadrática es una función de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0$$

Figura 19. Definición de función cuadrática
Fuente: Stewart et al. (2012, p.224)

Los autores introducen la forma normal de una función cuadrática (ver figura 20) a partir de que la función polinomial con valores $a = 1, b = c = 0$, y se obtiene $f(x) = x^2$ cuya grafica es una parábola, entonces $g(x) = m(x + n)^2 + t$, donde $m, n, t \in \mathbb{R}$, se puede tener una idea clara de la gráfica de la función al considerar las propiedades de desplazamiento horizontal y vertical de la gráfica de la función.



FORMA NORMAL DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ puede expresarse en la **forma normal**

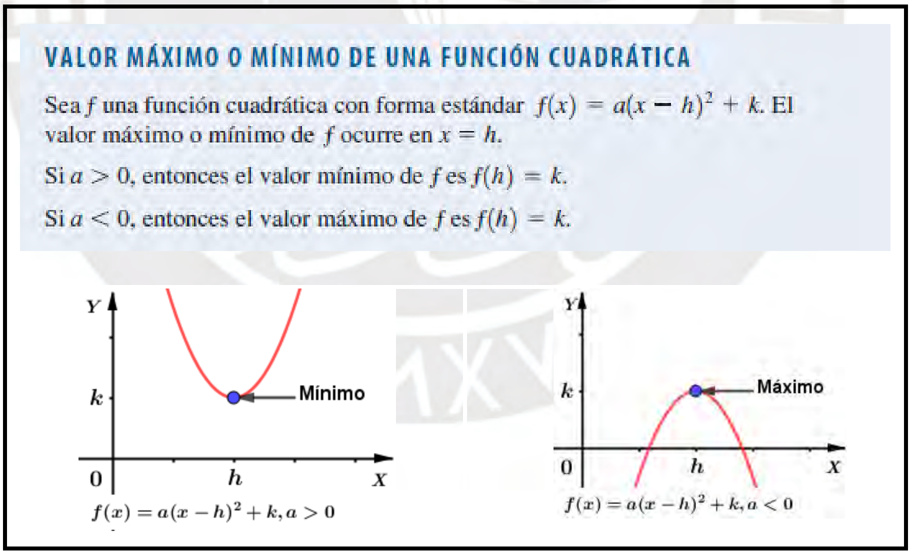
$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

completando el cuadrado. La gráfica de f es una parábola con vértice (h, k); la parábola abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.

Figura 20. Notación estándar de la función cuadrática
Fuente : Stewart et al. (2012, p.224)

Esta propiedad de la función se presenta el registro algebraico y gráfico, la coordinación entre estos registros permitiría entender las propiedades de la forma normal de una función cuadrática.

Stewart et al. (2012) consideran que conocer los coeficientes de la forma normal de la función cuadrática permite establecer los valores máximo y mínimo (ver figura 21).



VALOR MÁXIMO O MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Sea f una función cuadrática con forma estándar $f(x) = a(x - h)^2 + k$. El valor máximo o mínimo de f ocurre en $x = h$.

Si $a > 0$, entonces el valor mínimo de f es $f(h) = k$.

Si $a < 0$, entonces el valor máximo de f es $f(h) = k$.

Figura 21. Valores máximo y mínimo
Fuente: Stewart et al. (2012, p.225)

En ese sentido, h y k permiten establecer el vértice de la parábola y a, el valor del coeficiente principal de la función permite determinar la orientación para donde se abre la parábola.

La propiedad de valor máximo y mínimo esta dado en el registro algebraico y gráfico, ello permite entender la relación entre el valor del coeficiente principal de la forma normal de la función cuadrática y si la ordenada del vértice representa el valor máximo o mínimo.

En ese sentido, Stewart et al. (2012) mencionan que el procedimiento de completar cuadrados permite obtener la forma normal de una función cuadrática a partir de la forma general de la función.

Este método parte de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ y mediante tratamientos algebraicos a se obtiene $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$, la forma normal, de allí se deduce que $h = \frac{-b}{(2a)}$ y $k = c - \frac{b^2}{(4a)}$. A partir de ese resultado definen la siguiente propiedad (ver figura 22).

VALOR MÁXIMO O MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

El valor máximo o mínimo de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Si $a > 0$, entonces el **valor mínimo** es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

Si $a < 0$, entonces el **valor máximo** es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

Figura 22. Valor máximo o mínimo a partir de los coeficientes de la función
Fuente: Stewart et al. (2012, p.227)

El procedimiento de completar cuadrados para establecer la forma normal de la función cuadrática se puede considerar como un artefacto de acuerdo a la noción de artefacto que se utiliza en el constructo del Espacio de Trabajo Matemático (ver pág. 34).

Es importante resaltar que en esta sección del texto las definiciones y propiedades se presentan en los registros algebraico y gráfico, esto permitiría entender mejor las definiciones o propiedades que se han desarrollado. Ello evidencia que la génesis semiótica dirige el trabajo matemático de esta sección del texto.

Aspectos de la modelización de funciones

Los autores declaran que existen fenómenos de las ciencias físicas y sociales en los que interactúan valores que tienen una relación de dependencia y establecer la manera como estas cantidades varían es parte del proceso de modelización. Como ejemplo mencionan el modelo de crecimiento de una bacteria trabajada por un biólogo.

El enfoque que plantean Stewart et al. (2012) pretende que los estudiantes puedan construir modelos matemáticos a partir de propiedades geométricas o algebraicas que se pueda identificar en el fenómeno que se estudia, relativo a funciones en general. Luego, el modelo hallado debe permitir deducir y analizar propiedades del fenómeno estudiado. Para desarrollar este tipo de tarea los autores presentan una guía para modelar.

GUÍA PARA MODELAR CON FUNCIONES

1. **Expresar verbalmente el problema.** Identificar la cantidad que se desea modelar y expresarla, verbalmente, como función de las otras cantidades del problema.
2. **Escoger la variable.** Identificar todas las variables que se usan para expresar la función del Paso 1. Asignar un símbolo, por ejemplo x, a una variable, y expresar las otras variables en términos de este símbolo.
3. **Establecer el modelo.** Expresar la función en el lenguaje de álgebra al escribirla como función de la variable única escogida en el Paso 2.
4. **Usar el modelo.** Usar la función para contestar las preguntas planteadas en el problema. (Para hallar un máximo o un mínimo, usar los métodos descritos en la Sección 3.3.)

Figura 23. Guía para modelar
Fuente: Stewart et al. (2012, p.215)

Entre los ejemplos y tareas que se presentan en el texto están los relacionados con:

- Modelar el volumen de una caja
- Maximizar un área
- Instalar una cerca en un jardín
- Reducir al mínimo el metal de una lata
- Rendimiento máximo en kilometraje de un auto
- Maximizar ingresos por venta de boletos

Si bien es cierto, las situaciones a modelizar que plantean los autores están relacionadas con situaciones reales (cotidianas) la guía para modelar es una guía sintetizada con respecto al ciclo de modelización de Blum y Leiβ (2007).

Los pasos que presentan son una concentración y combinación de los procesos que proponen Blum y Leiβ. En ese sentido, cuando en la guía para modelar con funciones que se presenta en el texto menciona que el primer paso se refiere a *expresar verbalmente el problema* sugiere un entendimiento profundo de las variables que intervienen en la situación, teniendo en cuenta la relación entre estas variables y el objetivo que plantea la situación. El segundo paso plantea *escoger la variable,* esto sugiere identificar las variables que se usan para expresar verbalmente la situación propuesta.

En ese sentido, resulta confuso el orden de los pasos que indica seguir la guía mencionada, debido a que primero pide expresar de manera verbal la situación y para ello se sabe que se debe considerar las variables; mientras que en el segundo paso recién pide identificar las variables.

De ahí, se puede decir que la unión de la primera y segunda fase corresponde a los procesos de construcción, simplificación y estructuración del ciclo de modelización de Blum y Leiβ (ver pág. 39).

A continuación, la guía para modelar con funciones menciona el tercer paso que es *establecer el modelo* y es explicado como el proceso en el cual se realizan los tratamientos algebraicos para llegar a establecer el modelo matemático, esto en el sentido del ciclo de modelización de Blum y Leiβ corresponde al proceso de matematización.

El último paso que se plantea en la guía de modelar se refiere a *usar el modelo* para hallar un resultado matemático que responda la pregunta de la situación planteada. Esto correspondería en el ciclo de modelización de Blum y Leiβ a realizar el trabajo matemático.

Es importante resaltar que la guía que se presenta en el texto no tiene en cuenta la interpretación del resultado en el contexto de origen, tampoco la validación del resultado en el contexto real (cotidiano), lo cual si es considerado en el ciclo de modelización de Blum y Leiβ.

2.3 Análisis de planes de estudio del nivel universitario

Se realiza un estudio exploratorio de los planes de estudios de carreras orientadas a las humanidades de dos universidades peruanas. Ellas son la Universidad Nacional Mayor de San Marcos y la Pontificia Universidad Católica del Perú, a los planes de estudio se accede mediante la página web respectiva de cada universidad. Se identifica carreras de humanidades que tienen en su plan de estudios cursos de matemática, en detalle se puede observar en la tabla 2.

Tabla 2. *Carreras de humanidades que desarrollan un curso de matemática*.

Universidad	Carrera Profesional		Curso
Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM)	▪ Historia ▪ Sociología ▪ Antropología ▪ Arqueología ▪ Trabajo social ▪ Geografía ▪ Derecho ▪ Ciencia política	▪ Literatura ▪ Filosofía ▪ Lingüística ▪ Arte ▪ Comunicación social ▪ Conservación y restauración ▪ Bibliotecología y ciencias de la información ▪ Danza ▪ Educación.	Matemática aplicada a las ciencias sociales y humanas
Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP)	▪ Antropología ▪ Ciencia política y gobierno ▪ Psicología	▪ Danza ▪ Teatro ▪ Música ▪ Creación y producción escénica	Matemática Básica o Matemática 1

La asignatura de Matemática aplicada a las ciencias sociales y humanas que ofrece la UNMSM es descrita como un curso teórico y práctico del área de Estudios Generales y ofrece el desarrollo de objetos matemáticos fundamentales en el que se da énfasis a conceptos que permitan el estudio de estadística descriptiva.

Mientras que la signatura de Matemática Básica que ofrece PUCP es descrita como un curso que permite utilizar la matemática como herramienta para resolver problemas de la vida cotidiana y de relacionados con su especialidad.

Por otra parte, la descripción del curso de la asignatura de Matemática 1 es más específica, entre sus contenidos ofrece el estudio de funciones reales de variable real, particularmente, funciones cuadráticas como una introducción a las funciones matemáticas y sus propiedades.

De lo antes mencionado, se puede deducir que estos cursos están orientados a que el conocimiento obtenido sirva para plantear e interpretar modelos matemáticos básicos planteados en el desarrollo de sus carreras profesionales o relacionadas a ellas. Además, se sabe que los cursos mencionados pertenecen al área curricular de estudios generales, en ese sentido el Artículo 41 de la Ley Universitaria (2014) establece que los cursos generales de pregrado son de carácter obligatorio y están orientados a la formación integral de los estudiantes.

Finalmente, se puede decir que las carreras de humanidades tienen la necesidad de incluir en sus planes de estudio asignaturas que permitan establecer e interpretar modelos matemáticos básicos relacionados objeto matemático de función y específicamente en la función cuadrática; debido a que estos modelos están muy presentes en el avance científico de estas áreas de estudio.

Teniendo en cuenta los aspectos matemáticos e históricos del objeto función desarrollada en esta sección, resaltamos la importancia de los aspectos relacionales y variacionales de la función, debido a que ello permite reconocer, establecer e interpretar modelos matemáticos funcionales, en particular modelos cuadráticos.

Por otra parte, considerando que la forma como se presenta el objeto matemático función, específicamente función cuadrática en los libros didácticos está dirigida a activar la génesis semiótica; mientras que la activación de la génesis instrumental se busca en menor proporción. Teniendo en cuenta que la génesis instrumental permite la comprensión de un objeto matemático a partir de la manipulación, exploración y observación creemos que es importante propiciar su activación más aún cuando en la actualidad se cuenta con tecnología económica y eficiente que permite la exploración y observación de situaciones de cambio.

Finalmente, creemos que la presencia del objeto función cuadrática en los planes de estudio de carreras de humanidades responde a la necesidad de reconocer, establecer e interpretar modelos matemáticos relacionados a sus respectivas carreras. En el siguiente capítulo se presenta la tarea que va a ser aplicada en este trabajo de investigación y en su diseño se toma en cuenta los aspectos antes mencionados.

CAPITULO III: ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO IDÓNEO Y PERSONAL

En el presente capítulo se presenta el escenario y los sujetos de investigación, la construcción de la tarea a modelizar; el análisis a priori, y el análisis a posteriori de la producción de los estudiantes sobre la tarea a modelizar.

3.1 Escenario y sujetos de investigación

Escenario: la parte experimental de este estudio se lleva a cabo con estudiantes del primer ciclo de carreras de humanidades de una universidad privada de la provincia de Lima. Específicamente, dichos estudiantes asisten al curso de matemática I, el primer y único curso de matemática en el que participan los estudiantes de carreras orientadas a las humanidades. En el desarrollo del mencionado curso participan además de los estudiantes, un profesor y dos asistentes de docencia. La función de los asistentes de docencia es dar apoyo a los estudiantes durante el desarrollo de las tareas del curso. La particularidad de este curso es que al final de cada clase los estudiantes desarrollan tareas individuales y colaborativas. Además, es importante señalar que los estudiantes están habituados al uso de software GeoGebra en el desarrollo del curso.

Estudiantes: son los asistentes al curso de Matemática I, estudiantes ingresantes de las carreras de humanidades de entre 16 y 18 años. Estos estudiantes desarrollan por primera y única vez el tema de función cuadrática en el nivel universitario. El rol que tienen en esta investigación es desarrollar una tarea de modelización.

Formador: es el docente que está a cargo del curso; por consiguiente, es la persona que da las indicaciones a los estudiantes para que trabajen la tarea de modelización.

Observadores: son los dos asistentes de docencia que participan en el desarrollo del curso y el investigador, cuya función es también elaborar la tarea y analizar los resultados. El rol de los observadores es tomar nota de las acciones de los estudiantes en las fichas de observación durante la aplicación de la tarea.

En la aplicación de la tarea de modelización participaron 15 estudiantes; sin embargo, para el análisis de resultados se toma en cuenta la producción de tres de ellos. Esta selección consideró las producciones de estudiantes que desarrollaron por completo cada una de las fases de la tarea; además, estas producciones fueron seleccionadas porque permiten observar a detalle las acciones de los estudiantes; esto, mediante los archivos de video, Camtasia; los archivos de GeoGebra; las fichas de tarea y las fichas de observaciones. A estos estudiantes se les denomina E1, E2 y E3, para fines de la investigación.

Los estudiantes desarrollaron la tarea de manera individual en un tiempo aproximado de 60 minutos. Cada estudiante dispuso de una computadora y una ficha para las respuestas de la tarea.

3.2 Construcción de la tarea a modelar

La tarea de modelización titulada "Escenario rectangular" está organizada de acuerdo al ciclo de modelización de Blum y Leiβ (2007). Ello se puede observar en las tres fases en la que se organiza la tarea (ver tabla 3).

Tabla 3. *Organización de la tarea "Escenario rectangular"*.

Fase	Objetivo	Ciclo de Modelización
1	Reconocer las variables involucradas en la tarea a modelizar, sus comportamientos y la relación entre ellas.	Reconocimiento de problema real propuesto y mediante la deducción de datos convertirla a una situación a modelizar. Los datos de esta situación son simplificados y estructurados y convierte a la situación a modelizar en un problema a modelar.
2	Establecer la función cuadrática en forma algebraica, para ello se debe tener en cuenta sus representaciones en el registro tabular y gráfico	Establecer el modelo matemático mediante la matematización y el uso de resultados matemáticos.
3	Resolver preguntas que se presentan en el contexto cotidiano.	Interpretación y validación del modelo matemático.

3.3 La tarea a modelizar y su análisis a priori

Debido a que el objetivo de nuestra investigación es analizar el Espacio de Trabajo Matemático Personal de estudiantes de humanidades cuando movilizan el concepto de función cuadrática al resolver tareas de modelización con el uso de tecnología digital. La tarea ha sido diseñada con el propósito de que las acciones de los estudiantes evidencien la activación del plano [Sem-Ins], a partir de ello se identificará los paradigmas de la Geometría y el Análisis que los estudiantes privilegian. Se consideran los paradigmas de la Geometría desarrollados Houdement y Kuzniak (Citados en Henríquez-Rivas y Montoya-Delgadillo, 2016) y los paradigmas del Análisis, desarrollados por Montoya-Delgadillo y Vivier (2016) (pág. 29). A continuación (ver figura 24) se presenta la situación inicial que genera la tarea a modelizar.

Tarea a Modelizar: Escenario rectangular

Los estudiantes de un Centro de Música de una universidad peruana, con motivo de la semana de aniversario institucional están organizando un concierto, de "acceso libre" al público. En él, participarán solistas y grupos de hasta ocho integrantes, entre cantantes y músicos.

Para para la presentación del concierto se cercará un escenario de forma rectangular (ver figura 1); pero, no será necesario cercar la parte en frente del público. Se sabe que el Centro dispone de tarimas, escaleras y cercas para 24 m de perímetro.

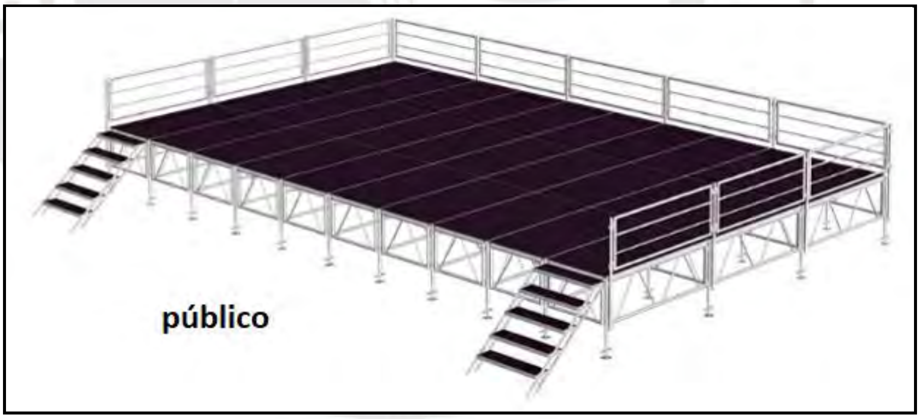


Figura 1. Escenario rectangular

Figura 24. Situación que genera la tarea de modelización.

Las cuestiones planteadas en las siguientes fases de la tarea activaran los Espacios de Trabajo Matemático Personal de los estudiantes.

Fase 1:

El objetivo de esta fase es reconocer los elementos matemáticos que intervienen en la situación inicial, como: variables, relación de dependencia entre las variables, comportamiento de las variables. Por otro lado, los artefactos y preguntas que se proporcionan restringen el tipo de respuesta que se espera de los estudiantes, por ello en esta fase no se considera ninguna variable microdidactica.

A continuación, se presenta las tareas de la fase 1(ver figura 25):

Abra el archivo Escenario_dinámico1.ggb y en la vista gráfica observará la representación del escenario rectangular cercado (ver figura 2).

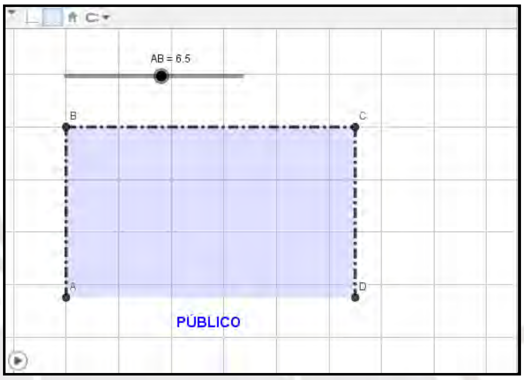


Figura 2. Escenario_dinámico1

Complete y justifique cada uno de los siguientes ítems.

i. Arrastre el deslizador "AB" para hacer variar la medida del segmento AB, mencione ¿qué valores cambian y que valores permanecen contantes? Explique detalladamente.

ii. De los valores mencionados en el ítem i, ¿cuáles son necesarios conocer, para establecer el área del escenario? y ¿por qué no los otros?, justifique, ¿cuáles son necesarios conocer, para establecer el área del escenario? y ¿por qué no los otros?, justifique.

iii. Desde el Menú Vista abra la Hoja de Cálculo y utilice el deslizador "AB", de la Vista Gráfica, ¿Qué representan los valores de la tabla, en relación con la representación de la Vista Gráfica? ¿Cuantifica, cómo cambian los valores de la segunda columna cuando la longitud de AB aumenta a razón de 1? Explique detalladamente.

iv. Desde el Menú Vista abra la Vista Gráfica 2, active la animación con el ícono y para detener la animación utilice el ícono, entonces, ¿cómo se relaciona la representación de la Hoja de Cálculo con la representación de la Vista Gráfica 2? ¿Qué representa el eje X e Y? Explique detalladamente.

Figura 25. Tareas de la fase 1

Es importante mencionar que las tareas de esta fase están planteadas en el dominio de la geometría, debido a que se utilizan objetos propios de la geometría, como, por ejemplo: segmento, longitud, área, cuadrícula. Sin embargo, se toma en cuenta que el dominio en que los estudiantes pueden resolver estas tareas puede ser en el dominio de la Geometría o el del Análisis.

Análisis a priori de la fase 1

En seguida se expone los posibles procedimientos y respuestas que los estudiantes desarrollaran a partir de los ítems planteados. En base a estos desarrollos se establece los paradigmas que se espera que los estudiantes privilegien.

Ítem i:

La pregunta de este ítem se refiere a determinar los valores cambian y que permanecen contantes en la situación, para lo cual se proporciona a los estudiantes los artefactos: deslizador “AB” y cuadricula. Artefactos diseñados por la investigadora y presentes en el archivo de GeoGebra y que fue proporcionado a los estudiantes.

Se espera que se activen las génesis instrumental y semiótica, es decir, se dé la activación el plano [Sem-Ins]. Detalladamente de la siguiente manera.

La génesis instrumental se activa cuando los estudiantes manipulan el artefacto deslizador “AB”; mediante ello exploran y observan los cambios en el la configuración de la figura rectangular, es decir, la longitud de los lados del rectángulo (AB, BC y los segmentos paralelos a ellos), la cantidad de cuadriculas interiores a la región rectangular y la cantidad de segmentos congruentes (de la misma medida) que componen el perímetro del cerco del escenario.

Sobre las representaciones que el estudiante percibe se espera que se active la génesis semiótica, cuando los estudiantes interpreten que lo que está cambiando es la longitud de los lados del rectángulo y la cantidad de cuadriculas interiores a la región rectangular; mientras que permanece constante la cantidad de segmentos congruentes que componen el perímetro del cerco del escenario.

A partir de esta construcción el estudiante manipula el artefacto deslizador “AB” con el objetivo de establecer, en varios casos, la cantidad exacta de cuadriculas interiores a la región rectangular y la cantidad exacta de segmentos congruentes (de la misma medida) que componen el perímetro del cerco del escenario.

Mediante la génesis semiótica y a partir del proceso de visualización se espera que los estudiantes registren datos de manera que puedan fundamentar su respuesta. Para ello se cree que los estudiantes posicionaran el deslizador “AB” en valores enteros, que les permitan contabilizar cuadriculas completas, al interior de la región rectangular, además de la cantidad de segmentos congruentes que componen el perímetro del cerco del escenario y de esos datos deducir las medidas exactas del área de la región rectangular y el perímetro del cerco. Por ejemplo, de la siguiente manera.

Cuando AB=2, CD=20, el área mide 40 y el perímetro mide 24.

Cuando AB=4, CD=16, el área mide 64 y el perímetro mide 24.

Cuando AB=6, CD=12, el área mide 72 y el perímetro mide 24.

Se espera que los estudiantes concluyan, mencionando, que los valores que cambian son las medidas de los segmentos AB, BC y los segmentos paralelos; el área de la región rectangular; mientras que el valor que permanece constante es la medida del perímetro del cerco del escenario.

Las acciones antes descritas evidencian la activación del plano [Sem-Ins]. Además, se considera que, al utilizar nociones de área, perímetro, segmento se estaría privilegiando al paradigma de la Geometría Natural (GI), cual es el paradigma que se espera que los estudiantes empleen.

Ítem ii:

La pregunta de este ítem se refiere a establecer los valores necesarios para establecer el área del escenario, teniendo en cuenta los datos obtenidos en el ítem anterior.

Se espera que se active la génesis semiótica, de la siguiente manera.

La génesis semiótica se activa cuando los estudiantes revisan los datos hallados en el ítem anterior, ellos pueden ser casos específicos en los que se tiene el valor de AB, BC, la medida del área y la medida del perímetro del cerco.

En la visualización que el estudiante logra sobre los datos se espera que este tenga en cuenta que hay unos que varían y otro que es constante. De los datos que varían son la medida del segmento AB, BC y el área de la región rectangular; y el dato que permanece constante es la medida del perímetro del cerco del escenario.

A partir identificar esta relación se espera que los estudiantes deduzcan y mencionen que el valor necesario para determinar el área es medida del segmento AB; debido a que la medida del segmento BC o AD, se puede deducir al considerar que la medida del perímetro del cerco es constante. Ello puede ser presentado de la siguiente manera:

Cuando AB=2 BC=24-2(AB)=24-2(2)=20

Cuando AB=4 BC=24-2(AB)=24-2(4)=16

Cuando AB=6 BC=24-2(AB)=24-2(6)=12

Las acciones antes descritas evidencian la activación de la génesis semiótica. Además, se considera que, al utilizar nociones de medida, área, perímetro, segmento se estaría privilegiando al paradigma de la Geometría Natural (GI), cual es el paradigma que se espera que los estudiantes empleen.

Ítem iii:

La pregunta de este ítem se refiere a como se relacionan la representación de la vista grafica con una representación tabular de datos y establecer cuantitativamente como cambian los valores de la segunda columna cuando la longitud de AB aumenta a razón de 1, para ello los estudiantes cuentan con el artefacto deslizador “AB”. Artefacto que fue diseñado por la investigadora y está presente en el archivo de GeoGebra, proporcionado a los estudiantes.

Con respecto a la primera pregunta se espera que los estudiantes activen la génesis instrumental de la siguiente manera: se espera que los estudiantes manipulen el artefacto deslizador “AB”, de la Vista Grafica, con el objetivo de explorar lo que sucede con los valores de la tabla, de la Hoja de Cálculo. Por otra parte, se cree que el proceso de construcción de los estudiantes permitirá la activación de la génesis semiótica, esto cuando deduzcan que el par de valores al inicio de la Hoja de Cálculo corresponden a la longitud del segmento AB y a la medida del área de la región rectangular, esto debe ser expresado en las respuestas de los estudiantes.

Con respecto a la pregunta sobre la cuantificación de cómo cambian los valores de la segunda columna cuando la longitud de AB aumenta a razón de 1 se espera que se produzca la dialéctica instrumentalización – instrumentación del artefacto deslizados “AB” con la finalidad de recuperar los datos de la segunda columna cuando la longitud de AB aumenta a razón de 1.

Para resolver esta cuestión se espera que la génesis semiótica se active con la toma de datos de la tabla y la deducción de como los valores del área de la región rectangular cambian. Ello puede ser presentado como se muestra en la figura 26.

AB	Área
1	22
2	40
3	54
4	64
5	70
6	72
7	70
8	64
9	54
10	40
11	22
12	0

Figura 26. Representación tabular de la función

Para deducir como los valores del área cambian, se espera que los estudiantes recurran a tratamientos en el registro tabular como se muestra en la figura 27.

AB	Área		
1	22	+18	-4
2	40	+14	-4
3	54	+10	-4
4	64	+6	-4
5	70	+2	-4
6	72	-2	-4
7	70	-6	-4
8	64	-10	-4
9	54	-14	-4
10	40	-18	-4
11	22	-22	-4
12	0		

Figura 27. Cuantificación del cambio

Es decir, comparen los valores de las medidas de las áreas y luego comparen estos valores hallados para establecer numéricamente como está cambiando esta variación. A partir de ello se espera que concluyan mencionando que mientras la longitud de AB aumenta de manera constante de uno en uno, la medida del área aumenta de forma variable, la cantidad en la que aumenta el área va disminuyendo de forma constante de 4 en 4.

Las acciones antes descritas evidencian la activación del plano [Sem-Ins]. Además, se considera que al utilizar nociones de longitud de segmento y área se estaría privilegiando al paradigma de la Geometría Natural (GI), cual es el paradigma que se espera que los estudiantes empleen.

Ítem iv:

La pregunta de este ítem indaga sobre la relación entre la representación de la Hoja de Cálculo con la representación de la Vista Gráfica 2 y lo que representan los ejes X e Y en la situación planteada. Para ello los estudiantes cuentan con el artefacto animación. Artefacto que fue diseñado por la investigadora y está presente en el archivo de GeoGebra, proporcionado a los estudiantes.

Se espera que se active la génesis instrumental. Ello cuando los estudiantes manipulen el artefacto animación mediante los iconos de activación y pausa. En base a ello observen y exploren los valores que toma el punto F de la Vista Gráfica 2 y los valores de la tabla en la Hoja de Cálculo. En seguida se espera que se active la génesis semiótica cuando deduzcan que las coordenadas del punto F , de la Vista grafica 2, corresponden a la longitud del segmento AB y la medida del área de la región rectangular. Además, se espera que los estudiantes tengan en cuenta como la representación de la Vista Grafica 2 muestra el comportamiento de la medida del área con respecto a la medida del segmento AB.

Con respecto a lo que representan los ejes X e Y se espera que los estudiantes, a partir de la construcción realizada en base al artefacto animación relacionen los valores de X con la medida del segmento AB y los valores de Y con los valores de la medida del área y así deduzcan que el eje X representa los valores que pueden tomar la medida del segmento AB, y el eje Y representa los valores que pueden tomar el área de la región rectangular correspondiente a la medida del segmento AB.

Las acciones antes descritas evidencian la activación del plano [Sem-Ins]. Además, se considera que al utilizar nociones de medida del segmento AB y medida del área de la región rectangular el estudiante privilegia el paradigma de la Geometría Natural.

Análisis a posteriori de la fase 1

A continuación, se presenta el análisis de los procedimientos y respuestas que los estudiantes desarrollaron a partir de los ítems planteados. En base a estos desarrollos se establece los paradigmas que los estudiantes privilegiaron.

Es importante mencionar que el análisis fue realizado en base de la producción de los estudiantes que fueron registrados en fichas de tareas, archivos de GeoGebra y archivos de video, Camtasia. Además, en este análisis se tuvo en cuenta las fichas de observación completada por los dos observadores de la aplicación de la tarea.

Análisis de ítem i desarrollado por el estudiante E1

La tarea que se le plantea al estudiante es la siguiente:

> i. *Arrastre el deslizador "AB" para hacer variar la medida del segmento AB, mencione ¿qué valores cambian y que valores permanecen contantes? Explique detalladamente.*

Se observa que E1 manipula el deslizador "AB", en un inicio de manera progresiva, del punto inicial al punto final; luego, se observa que E1 detiene el deslizador "AB" sobre valores pares, donde se puede observar un número exacto de cuadriculas internas a la región rectangular y segmentos congruentes en el perímetro del cerco del escenario (ver figura 28).

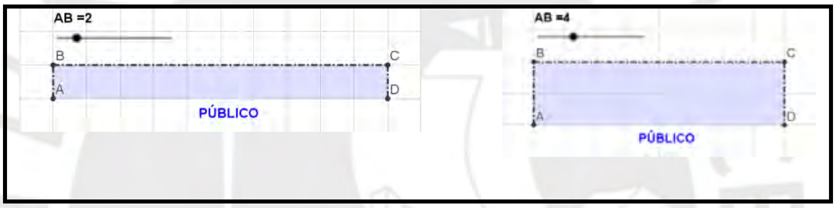


Figura 28. Manipulación del deslizador AB realizado por E1

Las acciones de E1 evidencian la manipulación de los artefactos deslizador y cuadricula, en base de ella realiza exploraciones y observaciones, que le permiten conjeturar y validar que los valores que están variando son las medidas de los segmentos del rectángulo y el área; mientras que permanece constante la medida del perímetro del cerco del escenario.

La construcción que logra hacer E1 le permite descifrar e interpretar que la variación de la medida de los segmentos y la cantidad de cuadriculas internas a la región rectangular está relacionada a la variación del área del escenario rectangular. Mientras que, permanece constante la medida del perímetro del cerco del escenario. Este resultado es expresado en el registro de lengua natural de la siguiente manera (ver figura 29).

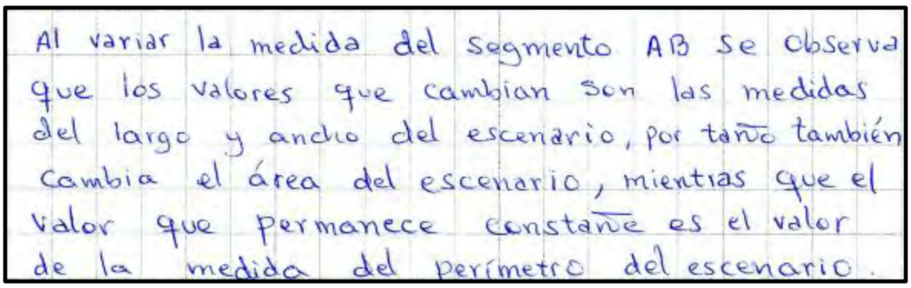

Al variar la medida del segmento AB se observa que los valores que cambian son las medidas del largo y ancho del escenario, por tanto también cambia el área del escenario, mientras que el valor que permanece constante es el valor de la medida del perímetro del escenario.

Figura 29. Respuesta de E1 al ítem i de la tarea de modelización.

Las acciones de E1, antes descritas, evidencian la activación del plano [Sem-Ins]. Por otra parte, los procedimientos del estudiante al estar basados en la figura geométrica y empleo de nociones de la geometría como, medida de un segmento, área y perímetro, permiten afirmar que el estudiante privilegia el paradigma de la Geometría Natural (GI) como se consideró en el análisis a priori de este ítem. Finalmente, concluimos que las acciones y desarrollo presentado por E1 coinciden con el análisis a priori.

Análisis de ítem i desarrollado por el estudiante E2

La tarea que se le plantea al estudiante es la siguiente:

i. Arrastre el deslizador "AB" para hacer variar la medida del segmento AB, mencione ¿qué valores cambian y que valores permanecen contantes? Explique detalladamente.

Se observa que E2 manipula el deslizador "AB" similar al estudiante E1, de manera progresiva del punto inicial al punto final, luego de ello el estudiante detiene el deslizador sobre valores que le permiten observar cuadriculas completas y segmentos congruentes (de igual longitud) que componen el perímetro del cerco del escenario (ver figura 30).

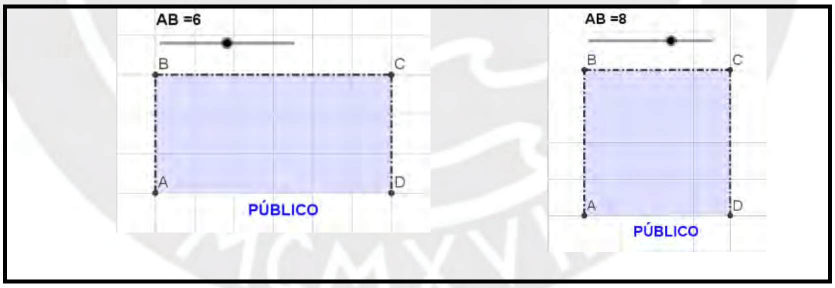


Figura 30. Manipulación del deslizador AB realizado por E2

Las acciones E2 evidencian la manipulación de los artefactos deslizador y cuadricula, en base de estos explora y observa la cantidad de segmentos congruentes que componen el perímetro del cerco del escenario. Ello le permite conjeturar y validar que los valores que están cambiando son los segmentos del rectángulo y el valor que permanece constante es la medida del perímetro del cerco del escenario. Sin embargo, E2 no considera el artefacto cuadricula que le permitiría observar por la variación de cuadriculas internas a la región que uno de los valores que cambia es la medida del área de la región rectangular Esto evidencia la activación parcial de la génesis instrumental.

En la construcción que logra E2 no considera la relación de la variación de las medidas de lados del escenario a la variación de la medida del área interna a la región del escenario rectangular. Esto evidencia la activación parcial de la génesis semiótica.

En consecuencia, el desarrollo que realiza E2 evidencia que las génesis instrumental y semiótica fueron activadas parcialmente; debido a que no se considera el artefacto cuadricula ni se considera la relación de la variación de la medida de los segmentos AB y BC con la variación del área interna al rectángulo. Este resultado es expresado en el registro de lengua natural de la siguiente manera (ver figura 31).

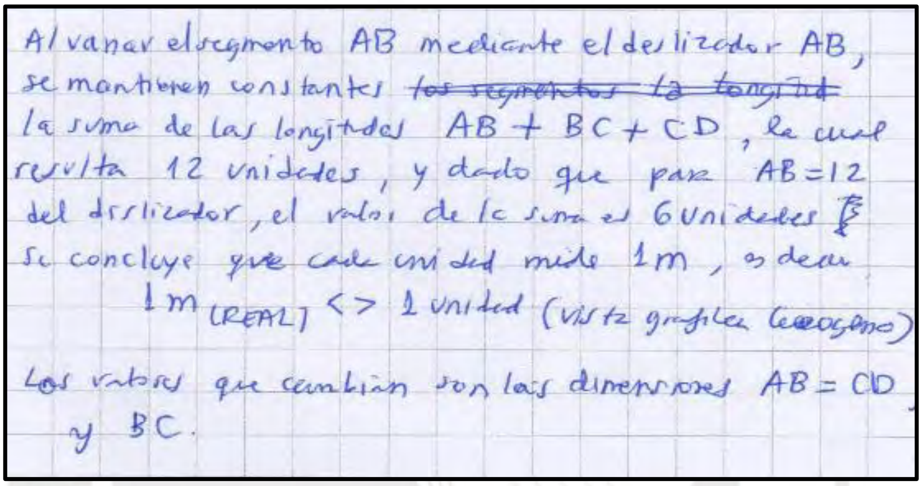

Al variar el segmento AB mediante el deslizador AB, se mantienen constantes ~~los segmentos la longitud~~ la suma de las longitudes AB + BC + CD, la cual resulta 12 unidades, y dado que para AB = 12 del deslizador, el valor de la suma es 6 unidades
se concluye que cada unidad mide 1m, es decir
1m (REAL) <> 1 unidad (vista gráfica Geogebra)
Los valores que cambian son las dimensiones AB = CD y BC.

Figura 31. Respuesta de E2 al ítem i de la tarea de modelización.

Las acciones de E2 evidencian la activación parcial del plano [Sem-Ins]. Así, la respuesta presentada por E2 (ver figura 31) coincide parcialmente con el análisis a priori realizado, debido a que E2 no considera la medida del área rectangular como un valor que cambia.

Por otro lado, los procedimientos realizados por E2, basados en la figura geométrica y la actividad de conteo de segmentos congruentes evidencian que el estudiante privilegia el paradigma de la Geometría Natural (GI) como se consideró en el análisis a priori de este ítem.

Análisis de ítem i desarrollado por el estudiante E3

La tarea que se le plantea al estudiante es la siguiente:

> i. *Arrastre el deslizador "AB" para hacer variar la medida del segmento AB, mencione ¿qué valores cambian y que valores permanecen contantes? Explique detalladamente.*

Se observa que E3 manipula el deslizador "AB" de manera progresiva, del valor inicial al valor final, luego de ello, el estudiante detiene el deslizador en valores indistintos, que no le permiten observar cuadriculas completas al interior de la región rectangular y/o segmentos congruentes que componen el cerco del perímetro del escenario (ver figura 32). Estas acciones permiten la activación parcial de la génesis instrumental.

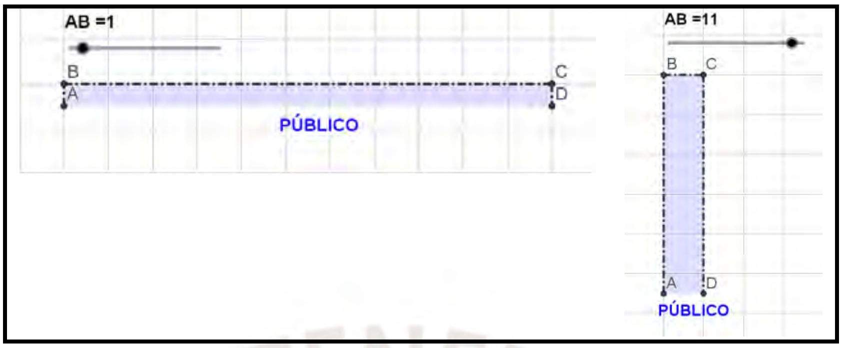


*Figura 32.*Manipulación del deslizador AB realizado por E3

Los procedimientos que realiza E3 evidencia la manipulación del artefacto deslizador y en base a ella realiza exploraciones y observaciones, que le permiten conjeturar y validar que los valores que están variando son las medidas de los segmentos del rectángulo.

En ese sentido, la activación de la génesis semiótica se ve afectada ya que E3 al no considerar el artefacto cuadricula no logra relacionar la variación de las medidas de los segmentos a la variación de la medida del área interna a la región rectangular ni que el perímetro del cerco del escenario permanece constante.

La construcción que logra hacer E3 no le permite visualizar la variación de la cantidad de cuadriculas internas a la región rectangular que está relacionada a la variación del área del escenario rectangular y la permanencia de la medida del perímetro del cerco. Este resultado es expresado en el registro de lengua natural de la siguiente manera (ver figura 33).

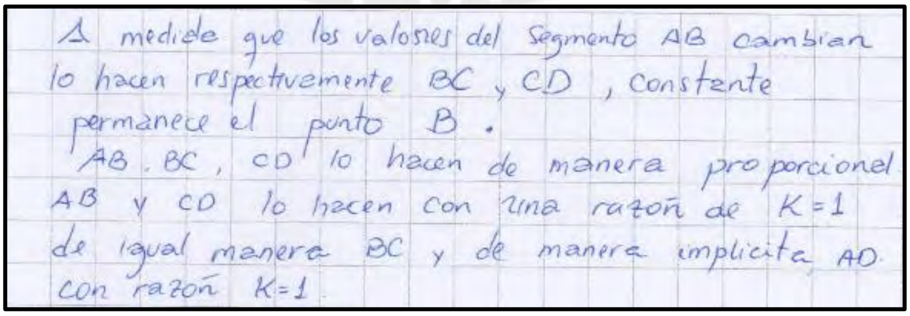

A medida que los valores del segmento AB cambian
lo hacen respectivamente BC y CD, constante
permanece el punto B.
AB, BC, CD lo hacen de manera proporcional
AB y CD lo hacen con una razón de K=1
de igual manera BC y de manera implícita AD
con razón K=1

Figura 33. Respuesta de E3 al ítem i de la tarea de modelización.

Las acciones de E3 evidencian la activación parcial del plano [Sem-Ins]. En consecuencia, la respuesta presentada por E3 (ver figura 33) coincide parcialmente con el análisis a priori realizado, esto debido a que el estudiante no reconoce como uno de los valores que cambia a la medida del área de la región rectangular mientras que el valor que permanece constante es la medida del perímetro del cerco del escenario.

Además, los procedimientos realizados por E3, basados en la figura geométrica y nociones de segmento evidencian que el estudiante privilegia el paradigma de la Geometría Natural (GI) como se consideró en el análisis a priori de este ítem.

Análisis de ítem ii desarrollado por el estudiante E1

La tarea que se le plantea al estudiante es la siguiente:

ii.	De los valores mencionados en el ítem i, ¿cuáles son necesarios conocer, para establecer el área del escenario? y ¿por qué no los otros?, justifique.

Se observa que E1 no considera manipular el deslizador “AB”, ni sus observaciones realizadas en el ítem anterior; específicamente no toma en cuenta que el valor que permanece constante es la medida del perímetro del cerco del escenario. En lugar de ello se basa en su conocimiento previo (conocimiento general).

La construcción que logra hacer E1 no está relacionada a la situación planteada. Ello no le permite visualizar que la medida del área de la región rectangular depende únicamente de la medida del segmento AB. La respuesta de E1 es expresada en el registro de lengua natural de la siguiente manera (ver figura 34).

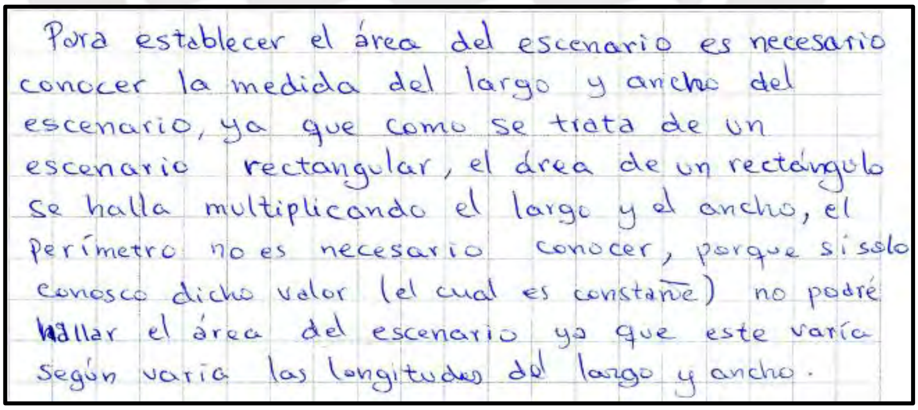

Para establecer el área del escenario es necesario conocer la medida del largo y ancho del escenario, ya que como se trata de un escenario rectangular, el área de un rectángulo se halla multiplicando el largo y el ancho, el perímetro no es necesario conocer, porque si solo conosco dicho valor (el cual es constante) no podré hallar el área del escenario ya que este varía según varía las longitudes del largo y ancho.

Figura 34. Respuesta de E1 al ítem ii de la tarea de modelización.

Las acciones de E1 evidencian que se activa la génesis semiótica de manera parcial, debido a que el estudiante toma en cuenta la variación de los lados del rectángulo, pero no la relación con que la medida del perímetro del cerco permanece constante. Por otra parte, se en la respuesta de E1 se observa que el paradigma que privilegia es el de Geometría Axiomática Natural (GII) al utilizar la fórmula del área rectangular; ello tampoco se esperaba según el análisis a priori.

Análisis de ítem ii desarrollado por el estudiante E2

La tarea que se le plantea al estudiante es la siguiente:

ii.	De los valores mencionados en el ítem i, ¿cuáles son necesarios conocer, para establecer el área del escenario? y ¿por qué no los otros?, justifique.

Se observa que E2 manipula el deslizador “AB” y lo detiene en valores que le permiten observar segmentos congruentes que componen el cerco perimétrico y el número de cuadriculas internas a la región rectangular (ver figura 35). Se observa en el archivo de video que E2 cuenta las cuadriculas y los segmentos del borde perimétrico.

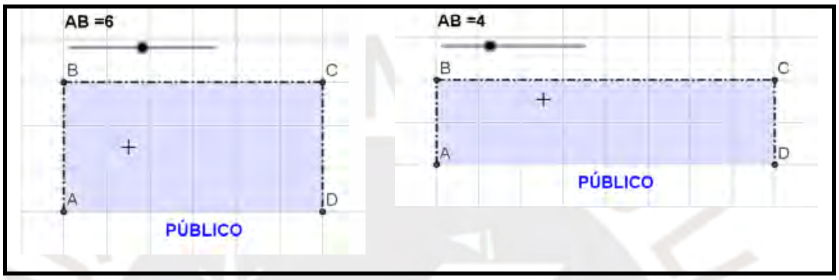
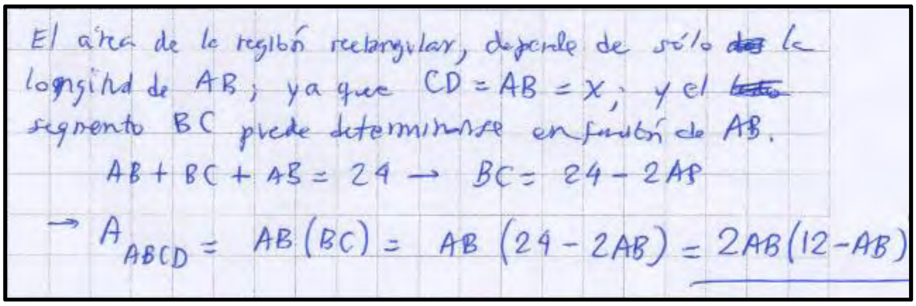


Figura 35. Manipulación del deslizador AB realizado por E2

Las acciones de E2 evidencian la manipulación de los artefactos deslizador y cuadricula, en base de ella realiza exploraciones y observaciones que le permiten conjeturar y validar que permanece constante el perímetro del cerco del escenario y que la medida del área depende de la medida del segmento AB.

La construcción que logra hacer E2 le permite relacionar que al variar los segmentos paralelos en la misma proporción y permanecer constante la medida del perímetro del cerco del escenario la medida del segmento BC se puede expresar en función del segmento AB, esta relación es expresada en el registro algebraico y mediante tratamientos algebraicos E2 deduce que el área interna a la región rectangular depende de únicamente de la medida del segmento AB. Este resultado es expresado en el registro algebraico de la siguiente manera (ver figura 36).


El área de la región rectangular, depende de sólo ~~de~~ la longitud de AB, ya que $CD = AB = x$; y el ~~lado~~ segmento BC puede determinarse en función de AB.

$$AB + BC + AB = 24 \rightarrow BC = 24 - 2AB$$

$$\rightarrow A_{ABCD} = AB(BC) = AB(24 - 2AB) = \underline{2AB(12 - AB)}$$

Figura 36. Respuesta de E2 al ítem ii de la tarea de modelización.

Los procedimientos que realiza E2 evidencia la activación del plano [Sem-Ins]. Además, el trabajo sobre la fórmula de área rectangular para explicitar que el área de la región rectangular depende únicamente de la medida del segmento AB evidencia que el estudiante prioriza el paradigma de Geometría Axiomática Natural (GII), hecho que no se consideró en el análisis a priori de este ítem.

Es importante mencionar que en el análisis a priori de este ítem no está considerada la activación de la génesis instrumental; sin embargo, fue desarrollada por E2 y permitió que su respuesta coincidiera con lo esperado en el análisis a priori.

Análisis de ítem ii desarrollado por el estudiante E3

La tarea que se le plantea al estudiante es la siguiente:

ii.	De los valores mencionados en el ítem i, ¿cuáles son necesarios conocer, para establecer el área del escenario? y ¿por qué no los otros?, justifique.

Se observa que E3 manipula el deslizador "AB" y lo detiene en valores que le permiten observar segmentos congruentes (de igual medida) en el perímetro del cerco del escenario (ver figura 37). Se observa en el archivo de video que E3 cuenta dichos segmentos.

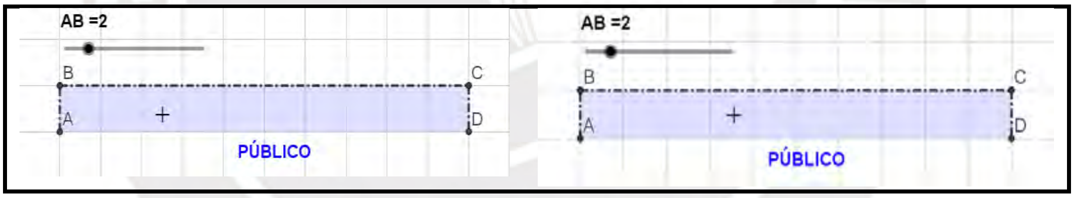


Figura 37. Manipulación del deslizador "AB" realizado por el estudiante E3

Las acciones de E3 evidencian la manipulación de los artefactos deslizador y cuadricula, en base de ella realiza exploraciones y observaciones, que le permiten conjeturar y validar que los valores que están variando en la misma medida es la medida del segmento AB y permanece constante la medida del cerco perimétrico del escenario.

La construcción que logra hacer E3 le permite descifrar e interpretar que la variación de la medida del segmento AB y la medida constante del perímetro del cerco están relacionadas a la variación del segmento BC en función de AB. Este resultado es expresado en el registro de algebraico de la siguiente manera (ver figura 38).

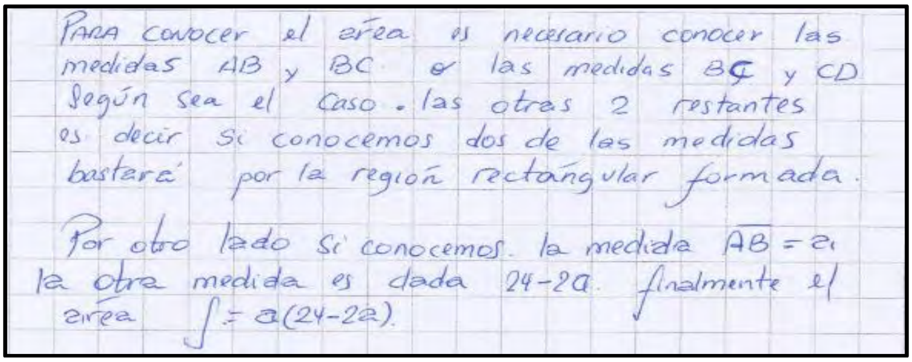

PARA conocer el área es necesario conocer las
medidas AB y BC o las medidas BC y CD
según sea el caso. las otras 2 restantes
es decir si conocemos dos de las medidas
bastará por la región rectangular formada.
Por otro lado si conocemos la medida $\overline{AB} = a$
la otra medida es dada $24-2a$. finalmente el
área $\int = a(24-2a)$.

Figura 38. Respuesta de E3 al ítem ii de la tarea de modelización.

El desarrollo que realiza E3 evidencia la activación del plano [Sem-Ins]. Además, el trabajo sobre la medida de los segmentos AB y BC evidencia que el estudiante prioriza el paradigma de Geometría Natural (GI) como se esperaba en el análisis a priori de este ítem.

Es importante mencionar que en el análisis a priori de este ítem no está considerada la activación de la génesis instrumental; sin embargo, fue desarrollada por E3 y permitió que su respuesta coincidiera con lo esperado en el análisis a priori.

Análisis de ítem iii desarrollado por el estudiante E1

La tarea que se le plantea al estudiante es la siguiente:

iii.	*Desde el Menú Vista abra la Hoja de Cálculo y utilice el deslizador "AB", de la Vista Gráfica, ¿Qué representan los valores de la tabla, en relación con la representación de la Vista Gráfica? ¿Cuantifica, cómo cambian los valores de la segunda columna cuando la longitud de AB aumenta a razón de 1? Explique detalladamente.*

Se observa que E1 manipula el deslizador "AB", detiene el deslizador en valores enteros y observa los valores en las columnas de la Hoja de Cálculo (ver figura 39).

	A	B
1	1	22
2	1.2	25.92
3	1.4	29.68
4	1.6	33.28
5	1.8	36.72
6	2	40
7	2.2	43.12
8	2.4	46.08
9	2.6	48.88
10	2.8	51.52
11	3	54

Figura 39. Manipulación del deslizador AB realizado por el estudiante E1

Las acciones de E1 evidencian la manipulación de los artefactos deslizador y cuadricula, en base de ella realiza exploraciones y observaciones, que le permiten conjeturar y validar que los valores de las columnas de la Hoja de Cálculo corresponden al valor de la medida de la longitud del segmento AB y la medida del área de la región rectangular.

La construcción que logra hacer E1, sobre los datos mostrados en la Hoja de Cálculo le permite cuantificar la variación de la medida del área del escenario rectangular. Y lo expresa de la siguiente manera (ver figura 40).

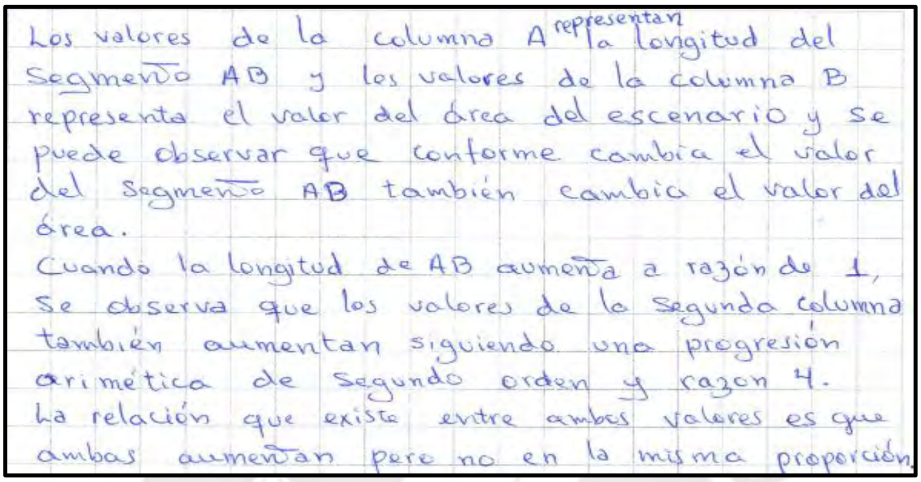

Los valores de la columna A representan la longitud del Segmento AB y los valores de la columna B representa el valor del área del escenario y se puede observar que conforme cambia el valor del segmento AB también cambia el valor del área.
Cuando la longitud de AB aumenta a razón de 1, se observa que los valores de la segunda columna también aumentan siguiendo una progresión arimética de segundo orden y razon 4.
La relación que existe entre ambos valores es que ambas aumentan pero no en la misma proporción

Figura 40. Respuesta de E1 al ítem iii de la tarea de modelización.

Las acciones de E1, antes descritas, evidencian la activación del plano [Sem-Ins]. Por otra parte, los procedimientos del estudiante al estar basados en nociones de la geometría como medida de un segmento y medida del área permiten afirmar que el estudiante privilegia el paradigma de la Geometría Natural (GI) como se consideró en el análisis a priori de este ítem. Finalmente, concluimos que las acciones y respuesta presentado por E1 coinciden con el análisis a priori.

Análisis de ítem iii desarrollado por el estudiante E2

La tarea que se le plantea al estudiante es la siguiente:

> *iii. Desde el Menú Vista abra la Hoja de Cálculo y utilice el deslizador "AB", de la Vista Gráfica, ¿Qué representan los valores de la tabla, en relación con la representación de la Vista Gráfica? ¿Cuantifica, cómo cambian los valores de la segunda columna cuando la longitud de AB aumenta a razón de 1? Explique detalladamente.*

Se observa que E2 manipula el deslizador "AB", detiene el deslizador en distintos valores enteros, cuenta o aproxima la medida del área mediante el número exacto o aproximado de cuadriculas completas y compara este número con el primer valor de la columna B de la Hoja de Cálculo (ver figura 41).

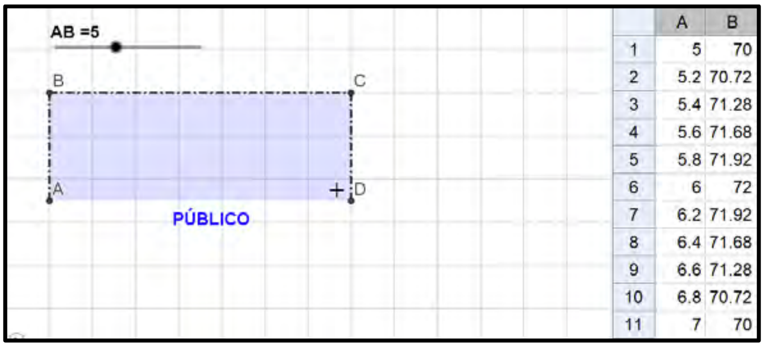
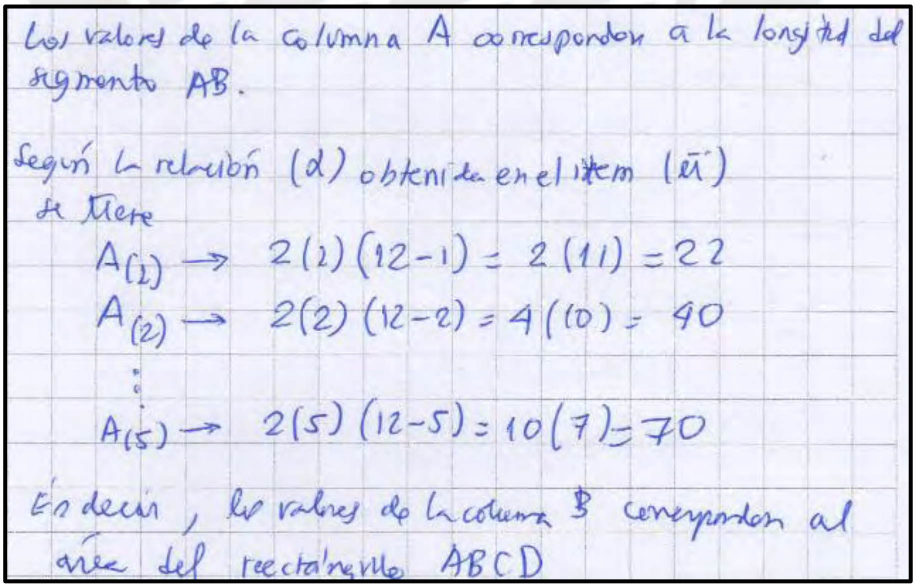


Figura 41. Manipulación del deslizador AB realizado por E2

Las acciones de E2 evidencian la manipulación de los artefactos deslizador y cuadricula, en base de ella realiza exploraciones y observaciones, que le permiten conjeturar y validar que los valores de las columnas de la Hoja de Cálculo corresponden al valor de la medida de la longitud del segmento AB y la medida del área de la región rectangular. E2, implícitamente, expresa que la variación de la medida del área depende de la medida del segmento AB.

La construcción que logra hacer E2, sobre los datos mostrados en la Hoja de Cálculo no le permite cuantificar la variación de la medida del área del escenario rectangular; sin embargo, expresa la relación de dependencia del área de la región rectangular y la longitud del segmento AB; aunque dicha relación no es explicitada por E2. La respuesta de E2 está justificada en el registro tabular de la siguiente manera (ver figura 42).


Los valores de la columna A corresponden a la longitud del segmento AB.

Según la relación (d) obtenida en el ítem (ii) se tiene

$A_{(1)} \rightarrow 2(1)(12-1) = 2(11) = 22$

$A_{(2)} \rightarrow 2(2)(12-2) = 4(10) = 40$

$\vdots$

$A_{(5)} \rightarrow 2(5)(12-5) = 10(7) = 70$

Es decir, los valores de la columna B corresponden al área del rectángulo ABCD

Figura 42. Respuesta de E2 al ítem iii de la tarea de modelización.

Las acciones de E2 evidencian una activación parcial del plano [Sem-Ins], debido a que no realiza tratamientos en el registro tabular que le permitan interpretar como va cambiando los valores del área cuando la longitud de AB aumenta a razón de 1. Por otro lado, los procedimientos de E2 se basan en las medidas de la longitud AB y el área de la región rectangular, en un inicio, luego se basan en la fórmula del área de una región rectangular; ello evidencia que E2 pasa de trabajar del paradigma de Geometría Natural (GI) al paradigma de Geometría Axiomática Natural (GII) lo cual no estaba considerado en el análisis a priori de este ítem. Finalmente, concluimos que las acciones y respuesta presentado por E2 coinciden parcialmente con el análisis a priori.

Análisis de ítem iii desarrollado por el estudiante E3

La tarea que se le plantea al estudiante es la siguiente:

> iii. *Desde el Menú Vista abra la Hoja de Cálculo y utilice el deslizador "AB", de la Vista Gráfica, ¿Qué representan los valores de la tabla, en relación con la representación de la Vista Gráfica? ¿Cuantifica, cómo cambian los valores de la segunda columna cuando la longitud de AB aumenta a razón de 1? Explique detalladamente.*

Se observa que E3 manipula el deslizador "AB", detiene el deslizador en distintos valores enteros, cuenta o aproxima la medida del área mediante la cantidad de cuadriculas y compara este valor con los valores de la Hoja de Cálculo (ver figura 43).

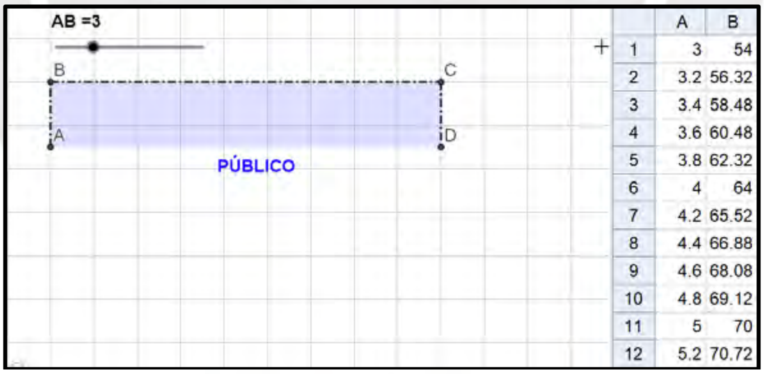
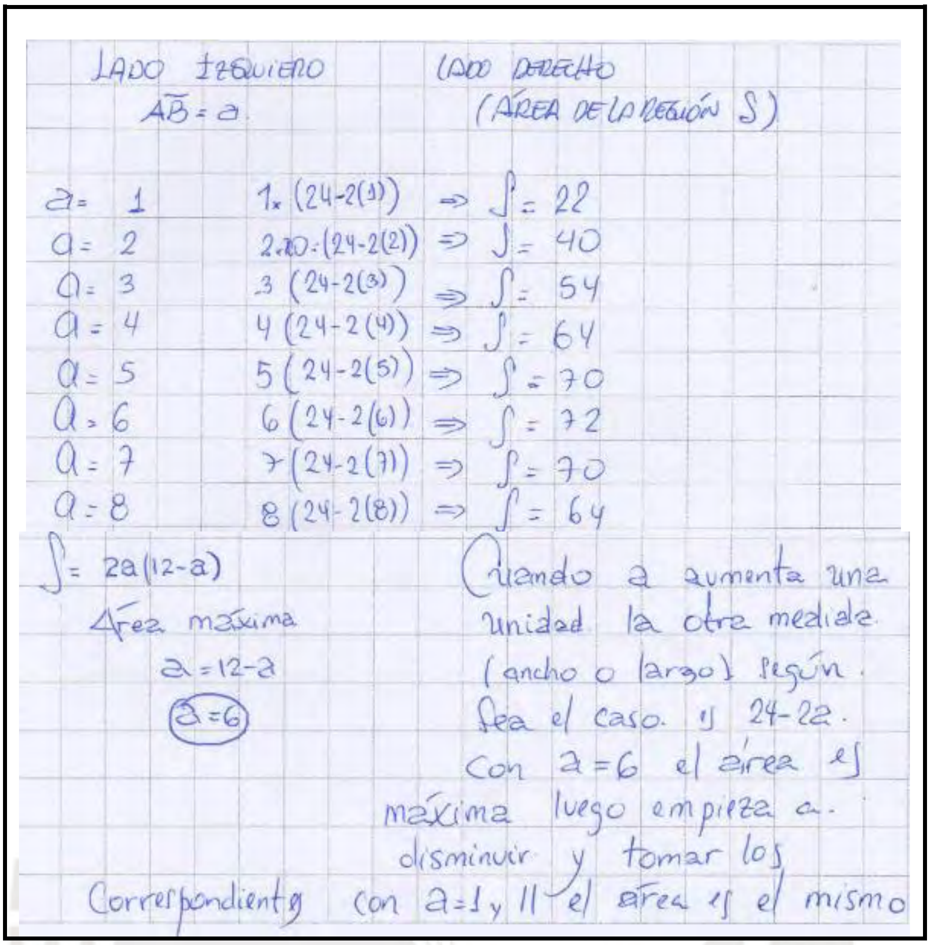


Figura 43. Manipulación del deslizador AB realizado por E3

El estudiante manipula los artefactos deslizador "AB" y cuadricula para realizar exploraciones y observaciones, que le permiten deducir que los valores de las columnas de la Hoja de Cálculo corresponden al valor de la medida de la longitud del segmento AB y la medida del área de la región rectangular (ver figura 44).



LADO IZQUIERDO
$\overline{AB} = a$

LADO DERECHO
(ÁREA DE LA REGIÓN S)

$a = 1$ $1 \cdot (24-2(1)) \Rightarrow S = 22$
$a = 2$ $2 \cdot (24-2(2)) \Rightarrow S = 40$
$a = 3$ $3\,(24-2(3)) \Rightarrow S = 54$
$a = 4$ $4\,(24-2(4)) \Rightarrow S = 64$
$a = 5$ $5\,(24-2(5)) \Rightarrow S = 70$
$a = 6$ $6\,(24-2(6)) \Rightarrow S = 72$
$a = 7$ $7\,(24-2(7)) \Rightarrow S = 70$
$a = 8$ $8\,(24-2(8)) \Rightarrow S = 64$

$S = 2a(12-a)$
Área máxima
$a = 12-a$
$a = 6$

Cuando a aumenta una unidad la otra medida (ancho o largo) según sea el caso. y 24-22. Con a=6 el área es máxima luego empieza a disminuir y tomar los correspondientes con a=1 y 11 el área es el mismo

Figura 44. Respuesta de E3 al ítem iii de la tarea de modelización.

Además, se puede mencionar que la activación de la génesis semiótica fue parcial, debido a que los tratamientos realizados en el registro tabular no permitieron a E3 deducir cuantitativamente como varia la medida del área de la región rectangular cuando la longitud de AB aumenta a razón de 1. En lugar de ello, implícitamente, muestra que la variación de la medida del área depende de la medida del segmento AB y menciona que el valor del área aumenta hasta cuando el valor de AB es seis y luego desciende.

Las acciones de E3 evidencian la activación parcial del plano [Sem-Ins] debido a que la génesis semiótica se dio de manera parcial. Por otro lado, los procedimientos realizados por E3 se basaron inicialmente en la aproximación y medida, esto mediante el uso de los artefactos deslizador “AB” y cuadricula, luego de ello E3 basa sus acciones en la fórmula del área de una región rectangular y el uso de la variable “a”; todo ello indica que E3 pasa de trabajar del paradigma de la Geometría Natural (GI) al paradigma de la Geometría Axiomática Natural (GII), lo cual no estaba considerado en el análisis a priori de este ítem. Finalmente, concluimos que las acciones y respuestas presentadas por E3 coinciden parcialmente con el análisis a priori.

Análisis del ítem iv desarrollado por el estudiante E1

La tarea que se le plantea al estudiante es la siguiente:

> iv. *Desde el Menú Vista abra la Vista Gráfica 2, active la animación con el ícono y para detener la animación utilice el ícono, entonces, ¿cómo se relaciona la representación de la Hoja de Cálculo con la representación de la Vista Gráfica 2? ¿Qué representa el eje X e Y? Explique detalladamente.*

Se observa que E1 manipula los controles de activación y pausa del artefacto animación para comparar los valores de la Hoja de Cálculo con los valores aproximados de la abscisa y ordenada del punto F (ver figura 45).

Las acciones de E1 evidencian la manipulación del artefacto animación, en base a ella conjetura que los valores de las columnas de la Hoja de Cálculo corresponden al valor de la coordenada del punto F; mientras que, el eje X representa los valores que la medida de la longitud del segmento AB puede tomar e Y representa los valores que la medida del área de la región rectangular puede tomar.

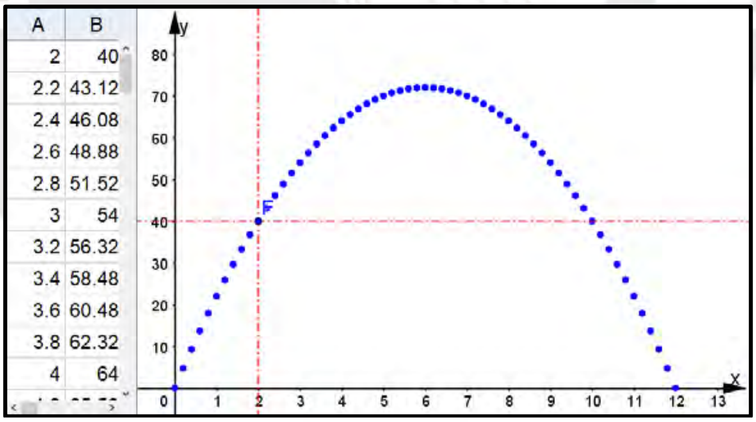


Figura 45. Manipulación de la animación realizado por E2

La construcción que logra hacer E1, sobre los datos mostrados en la Hoja de Cálculo y la vista grafica 2 le permite establecer la relación entre las representaciones. La respuesta de E1 está expresada en lengua natural (ver figura 46).

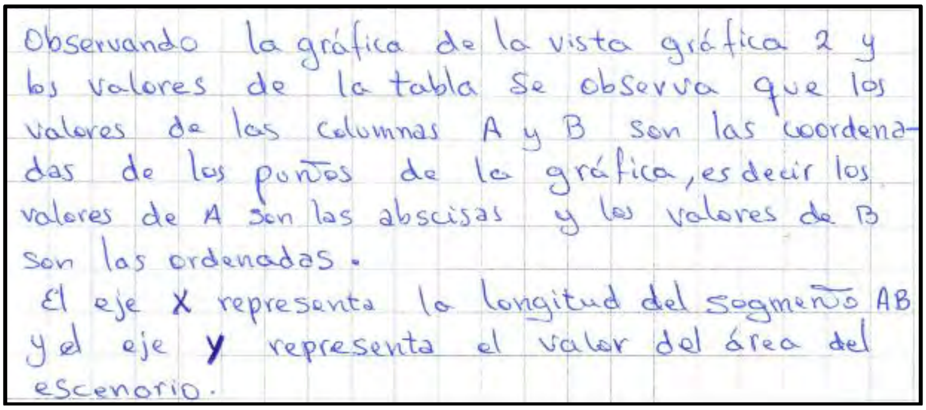

Observando la gráfica de la vista gráfica 2 y los valores de la tabla se observa que los valores de las columnas A y B son las coordenadas de los puntos de la gráfica, es decir los valores de A son las abscisas y los valores de B son las ordenadas.
El eje X representa la longitud del segmento AB y el eje Y representa el valor del área del escenario.

Figura 46. Respuesta de E1 al ítem iv de la tarea de modelización.

Las acciones de E2 evidencian la activación del plano [Sem-Ins]. Por otra parte, los procedimientos de E2 basados en nociones de medida del segmento AB y medida del área de la región rectangular ello evidencia que el estudiante privilegia el paradigma de la Geometría Natural (GI) como se consideró en el análisis a priori de este ítem. Finalmente, concluimos que las acciones y desarrollo presentado por E2 coinciden con el análisis a priori.

Análisis de ítem iv desarrollado por el estudiante E2

La tarea que se le plantea al estudiante es la siguiente:

> iv. *Desde el Menú Vista abra la Vista Gráfica 2, active la animación con el ícono y para detener la animación utilice el ícono, entonces, ¿cómo se relaciona la representación de la Hoja de Cálculo con la representación de la Vista Gráfica 2? ¿Qué representa el eje X e Y? Explique detalladamente.*

Se observa que E2 manipula además de los controles de activación y pausa, el deslizador de la Vista Gráfica para comparar los valores enteros de la Hoja de Cálculo con los valores de la abscisa y ordenada del punto F (ver figura 47).

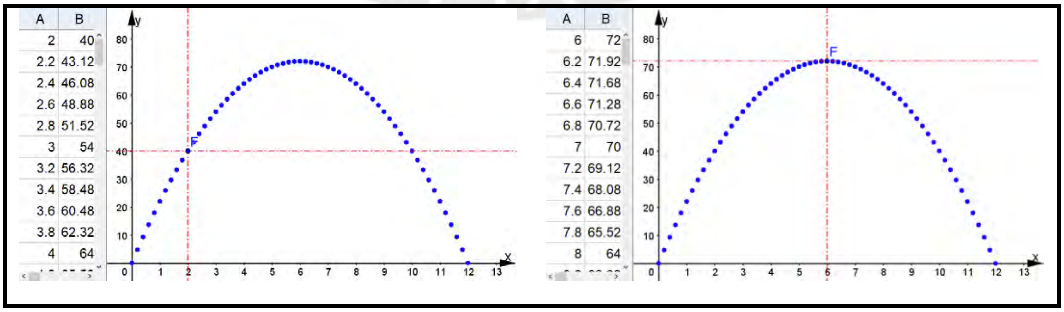
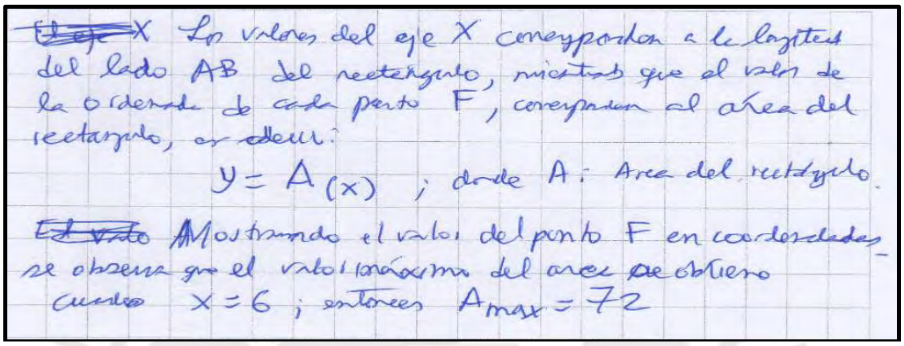


Figura 47. Manipulación de la animación realizado por E2

Las acciones de E2 evidencian la manipulación de los artefactos deslizador y animación, en base de ella E2 conjetura que los valores de las columnas de la Hoja de Cálculo corresponden al valor de la coordenada del punto F y que el eje X representa a los valores que la medida de la longitud del segmento AB puede tomar e Y representa a los valores que la medida del área de la región rectangular puede tomar.

La construcción que logra hacer E2, sobre los datos mostrados en la Hoja de Cálculo y la vista grafica 2 le permite establecer la relación entre las representaciones. Además, le permite observar el valor máximo del área de la región rectangular. La respuesta de E2 está expresada en lengua natural (ver figura 49).


~~Eje~~ X Los valores del eje X corresponden a la longitud del lado AB del rectángulo, mientras que el valor de la ordenada de cada punto F, corresponden al área del rectángulo, es decir:

$y = A_{(x)}$; donde A: Area del rectángulo.

~~Eje Y~~ Mostrando el valor del punto F en coordenadas se observa que el valor máximo del area se obtiene cuando $x = 6$; entonces $A_{max} = 72$

Figura 48. Respuesta de E2 al ítem iv de la tarea de modelización.

Las acciones de E2 evidencian la activación del plano [Sem-Ins]. Por otra parte, como se sabe, la tarea de este ítem está planteada en el dominio de la Geometría. En ese sentido, el estudiante utilizó los objetos: segmento, medida del área de la región rectangular en la noción de la función cuadrática, específicamente la notación $A(x)$ y el uso de la variable x nos da idea de ello. En ese sentido y al estar, sus procedimientos relacionados a objetos geométricos afirmamos que el paradigma privilegiado fue el paradigma del Análisis Geométrico/Aritmético (AG) como se consideró en el análisis a priori de este ítem. Finalmente, concluimos que las acciones y desarrollo presentado por E3 coinciden con el análisis a priori.

Análisis de ítem iv desarrollado por el estudiante E3

La tarea que se le plantea al estudiante es la siguiente:

iv.	*Desde el Menú Vista abra la Vista Gráfica 2, active la animación con el ícono y para detener la animación utilice el ícono, entonces, ¿cómo se relaciona la representación de la Hoja de Cálculo con la representación de la Vista Gráfica 2? ¿Qué representa el eje X e Y? Explique detalladamente.*

Se observa que E3 manipula además de los controles de activación y pausa del artefacto animación el deslizador de la Vista Gráfica para comparar los valores enteros de la Hoja de Cálculo con los valores de la abscisa y ordenada del punto F (ver figura 49).

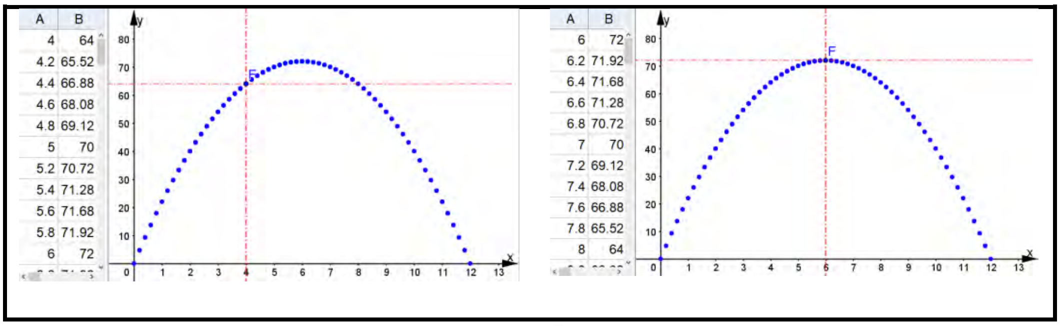
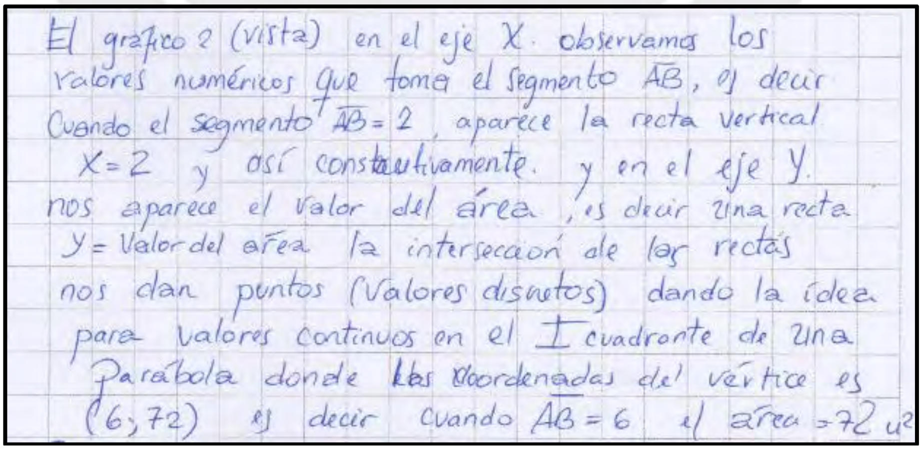


Figura 49. Manipulación de la animación realizado por E3

Las acciones de E3 evidencian la manipulación de los artefactos deslizador y animación, en base de ella E3 conjetura que los valores de las columnas de la Hoja de Cálculo corresponden al valor de la coordenada del punto F y que el eje X representa a los valores que la medida de la longitud del segmento AB puede tomar e Y representa a los valores que la medida del área de la región rectangular puede tomar.

La construcción que logra hacer E3, sobre los datos mostrados en la Hoja de Cálculo y la vista grafica 2 le permite establecer la relación entre la representación tabular y representación gráfica (aproximada por ser discreta) de la función área. Además, le permite observar el valor que hace máxima el área de la región rectangular. La respuesta de E3 está expresada en lengua natural (ver figura 50).



El gráfico 2 (vista) en el eje X. observamos los
valores numéricos que tome el segmento $\overline{AB}$, es decir
Cuando el segmento $\overline{AB} = 2$ aparece la recta vertical
$X = 2$ y así consecutivamente. y en el eje Y.
nos aparece el valor del área, es decir una recta
$y =$ Valor del área la intersección de las rectas
nos dan puntos (Valores discretos) dando la idea
para valores continuos en el I cuadrante de una
Parábola donde las coordenadas del vértice es
(6; 72) es decir cuando $\overline{AB} = 6$ el área $= 72\ u^2$

Figura 50. Respuesta de E3 al ítem iv de la tarea de modelización.

Las acciones de E3 evidencian la activación del plano [Sem-Ins]. Por otra parte, a pesar de que la tarea de este ítem está planteada en el dominio de la Geometría el estudiante utilizó los objetos: segmento, medida del área de la región rectangular en la noción de la función cuadrática, específicamente sobre la idea de la gráfica de la función cuadrática (parábola). En ese sentido y al estar, sus procedimientos relacionados a objetos geométricos y el cálculo aritmético se puede afirmar que el paradigma privilegiado fue el paradigma del Análisis Geométrico/Aritmético (AG) como se consideró en el análisis a priori de este ítem. Finalmente, concluimos que las acciones y desarrollo presentado por E3 coinciden con el análisis a priori.

Fase 2.

En el análisis a priori de esta fase se consideran dos variables (ver tabla 4) que el estudiante podrá utilizar de acuerdo a su preferencia, conocimientos y/o habilidades matemáticas. En el caso, de la variable registro de representación los valores son elegidos teniendo en cuenta la fase 1. Y en el caso de la variable representación algebraica de la función cuadrática se considera que los estudiantes la elegirán de acuerdo a sus conocimientos de función cuadrática.

Tabla 4. *Variables didácticas presentes en la fase 2*

Variable didáctica	Valores
Registro de representación	Figural y tabular
	Tabular y gráfica
Representación algebraica de la función cuadrática.	Forma general
	Forma canónica

A continuación, se presenta la tarea de la fase:

> *Teniendo en cuenta los datos y las representaciones de la fase 1 determine la expresión matemática que modela el área del escenario, en función de la longitud del segmento AB. Explique detalladamente el procedimiento realizado para hallar dicho modelo.*

Análisis a priori de la fase 2

En seguida se expone los posibles procedimientos y respuestas que los estudiantes desarrollaran a partir de la tarea planteada en esta fase. En base a estos desarrollos se establece los paradigmas que se espera que los estudiantes privilegien.

Estrategia 1: se espera que mediante la génesis instrumental los estudiantes observen y exploren la gráfica de la Vista Gráfica y de los valores brindados en la Hoja de Cálculo (ver figura 51).

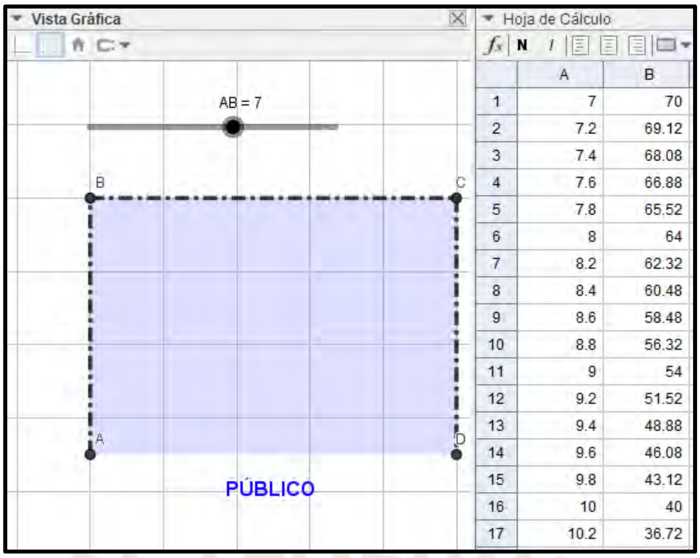


Figura 51. Vista Gráfica y Hoja de Cálculo

Con el objetivo de hallar relación entre las longitudes de los lados de la región rectangular y el área. Luego de ello, se activa la génesis semiótica que permite deducir la función objetivo, la función cuadrática, mediante tratamientos numéricos, y expresarlo de la siguiente manera (ver figura 52).

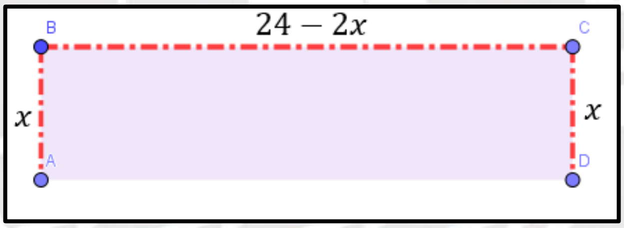


Figura 52. Relación entre los lados del área rectangular

Luego de ello, se espera que se continue con la genesis semiotica, para se espera que los estudiantes determinen que la fórmula que les permite plantear el modelo es la fórmula del el área de un rectángulo y en ella reemplacen las longitudes de los lados del rectángulo, de la siguiente manera.

$$Área = AB \times BC$$

$$\text{Área} = (x)(24 - 2x)$$

Realicen los tratamientos algebraicos necesarios.

$$\text{Área} = 24x - 2x^2$$

$$A(x) = 24x - 2x^2$$

Consideren los valores que puede tomar x y logren expresar el modelo matemático.

$$A(x) = -2x^2 + 24x \text{ donde } x \in < 0{,}12 >$$

A partir de las actividades desarrolladas por los estudiantes, observaciones e interpretaciones, basados en la percepción de la Vista Gráfica y los valores brindados en la Hoja de Cálculo, el uso de la fórmula de área de la región rectangular, la noción de función y los tratamientos algebraicos realizados se determina que se ha producido un cambio de dominio, del dominio geométrico al dominio del análisis. En ese sentido, el paradigma privilegiado es del Análisis Geométrico/Aritmético (AG).

Estrategia 2: se espera que mediante la génesis instrumental los estudiantes observen y exploren los datos de la Hoja de Cálculo y la gráfica de la Vista Gráfica 2 (ver figura 53).

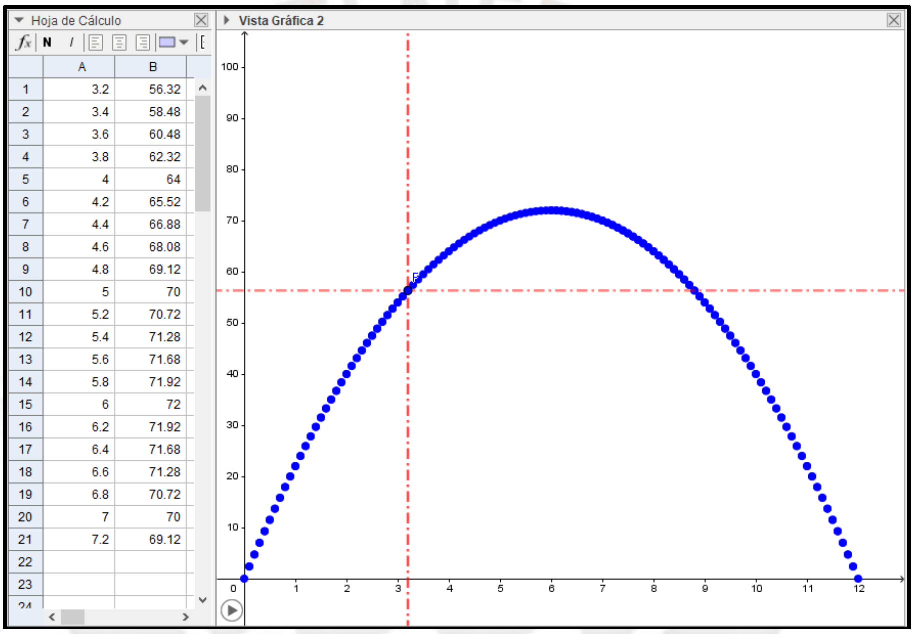


Figura 53. Hoja de Cálculo y la gráfica de la Vista Gráfica 2

Con el objetivo de hallar información sobre el tipo de función que modela la situación planteada y determinar datos que les permitan hallar los parámetros de la función. Luego de ello se activa la génesis semiótica, que permite deducir que el tipo de función que modela la situación es la función cuadrática, y para hallar los parámetros es necesario evaluarla en tres puntos.

Con respecto a ello, se espera que los estudiantes escriban la forma general de la función cuadrática, como sigue.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Luego, se consideren algunos datos proporcionados en la Hoja de Cálculo; por ejemplo:

$x = 4$, y su correspondiente valor $f(4) = 64$

$x = 5$, y su correspondiente valor $f(4) = 70$

$x = 6$, y su correspondiente valor $f(4) = 72$

Luego, evalúen los valores en el modelo cuadrático de la siguiente manera:

$$f(4) = 16a + 4b + c = 64$$

$$f(5) = 25a + 5b + c = 70$$

$$f(6) = 36a + 6b + c = 72$$

Mediante tratamientos algebraicos resuelvan el sistema de ecuaciones y hallen los valores de los parámetros de la función cuadrática ($a = -2,\ b = 24$ y $c = 0$)

Finalmente, se espera que los estudiantes consideren los valores que puede tomar x y logren expresar el modelo matemático.

$$f(x) = -2x^2 + 24x \text{ , donde } x \in < 0{,}12 >$$

Si bien es cierto, se espera que los estudiantes partan de la observación de los datos de la Hoja de Cálculo y el grafico de la Vista gráfica 2, ellos son relacionados con las notaciones formales de la función cuadrática, propiedades de la función. Estos procedimientos evidenciarían el cambio de dominio, de la geometría al dominio del análisis. En ese sentido, se determina que el paradigma privilegiado por los estudiantes es el paradigma del Análisis Calculatorio.

Estrategia 3: se espera que mediante la génesis instrumental los estudiantes observen y exploren la los datos de la Hoja de Cálculo y la gráfica de la Vista Gráfica 2.

Con el objetivo de hallar información sobre el tipo de función que modela la situación planteada y determinar datos que les permitan hallar los parámetros de la función. Luego de ello se activa la génesis semiótica, que permite deducir que el tipo de función que modela la situación es la función cuadrática, y para hallar los parámetros es necesario conocer el vértice y un punto por donde pasa la parábola.

Con respecto a ello, se espera que los estudiantes escriban la forma canónica de la función cuadrática, como sigue.

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

Luego, mediante la génesis instrumental los estudiantes manipulen el deslizador “AB”, de la Vista Gráfica, y observen la Hoja de Cálculo con el objetivo de reconocer el vértice del gráfico de la función cuadrática (ver figura 55). Donde el vértice está dado por el par (6,72) y un punto, en particular, que pertenece a la gráfica de la función cuadrática es (2,40).

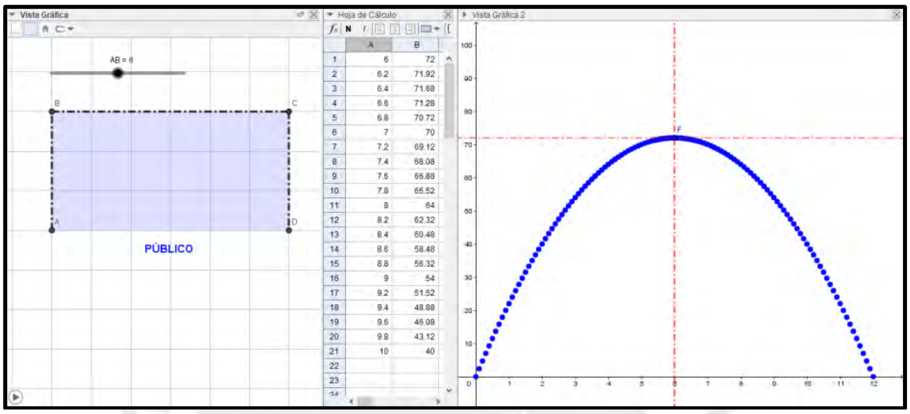


*Figura 54.*Representaciones de la tarea a modelar.

Luego, reemplazando las coordenadas del vértice en la función se tiene:

$$f(x) = a(x - 6)^2 + 72$$

Evaluando la función en $x = 2$ se sabe que resulta 40

$$f(2) = a(2 - 6)^2 + 72 = 40$$

$$16a + 72 = 40$$

$$16a = -32$$

$$a = -2$$

Luego, reemplazando en la forma canónica y realizando los tratamientos algebraicos necesarios se tiene:

$$f(x) = -2(x - 6)^2 + 72$$

$$f(x) = -2(x^2 - 12x + 36) + 72$$

$$f(x) = -2x^2 + 24x - 72 + 72$$

$$f(x) = -2x^2 + 24x$$

Finalmente, se espera que consideren los valores que puede tomar x y logren expresar el modelo matemático.

$$f(x) = -2x^2 + 24x \text{ , donde } x \in <0{,}12>$$

Como en la estrategia anterior, se espera que los estudiantes partan de la observación de los datos de la Hoja de Cálculo y el grafico de la Vista gráfica 2, estos datos son relacionados con las notaciones formales de la función cuadrática, y sobre ella se realizan tratamientos algorítmicos. En ese sentido, se determina que el paradigma priorizado por los estudiantes es el paradigma del Análisis Calculatorio.

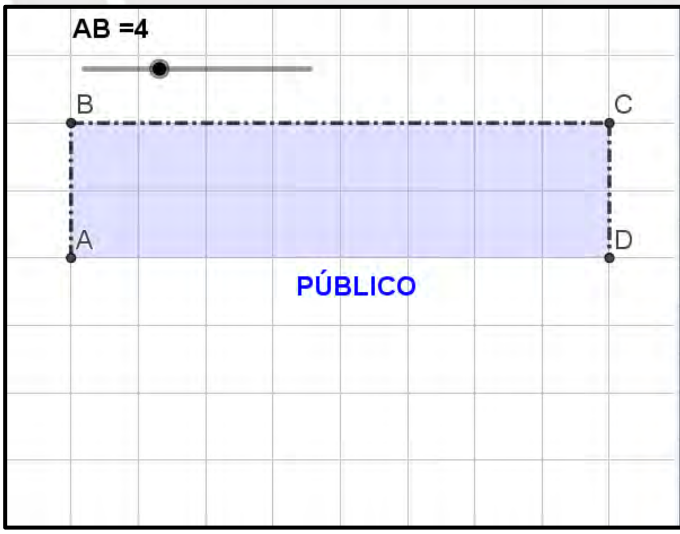
Análisis a posteriori de la fase 2

A continuación, se presenta el análisis de los procedimientos y respuestas que los estudiantes desarrollaron a partir de la tarea planteada. En base a estos desarrollos se establece los paradigmas que los estudiantes privilegiaron.

Es importante mencionar que el análisis fue realizado en base de la producción de los estudiantes que fueron registrados en fichas de tareas, archivos de GeoGebra y archivos de video, Camtasia. Además, en este análisis se tuvo en cuenta las fichas de observación completada por los dos observadores de la aplicación de la tarea.

Análisis del desarrollo realizado por el estudiante E1

Se observa que E1 toma en cuenta el registro figural y tabular para hallar el modelo matemático (ver figura 55).



	A	B
1	4	64
2	4.2	65.52
3	4.4	66.88
4	4.6	68.08
5	4.8	69.12
6	5	70
7	5.2	70.72
8	5.4	71.28
9	5.6	71.68
10	5.8	71.92
11	6	72

Figura 55. Registros tomados en cuenta por E1

E1 establece la medida del segmento BC en función del segmento AB, considera las restricciones del valor de AB que le permiten establecer el área de la región rectangular.

La construcción que logra hacer E1 le permite descifrar el modelo matemático del área del escenario rectangular en función de la longitud de uno de sus lados. Este resultado es expresado en el registro algebraico (ver figura 56).

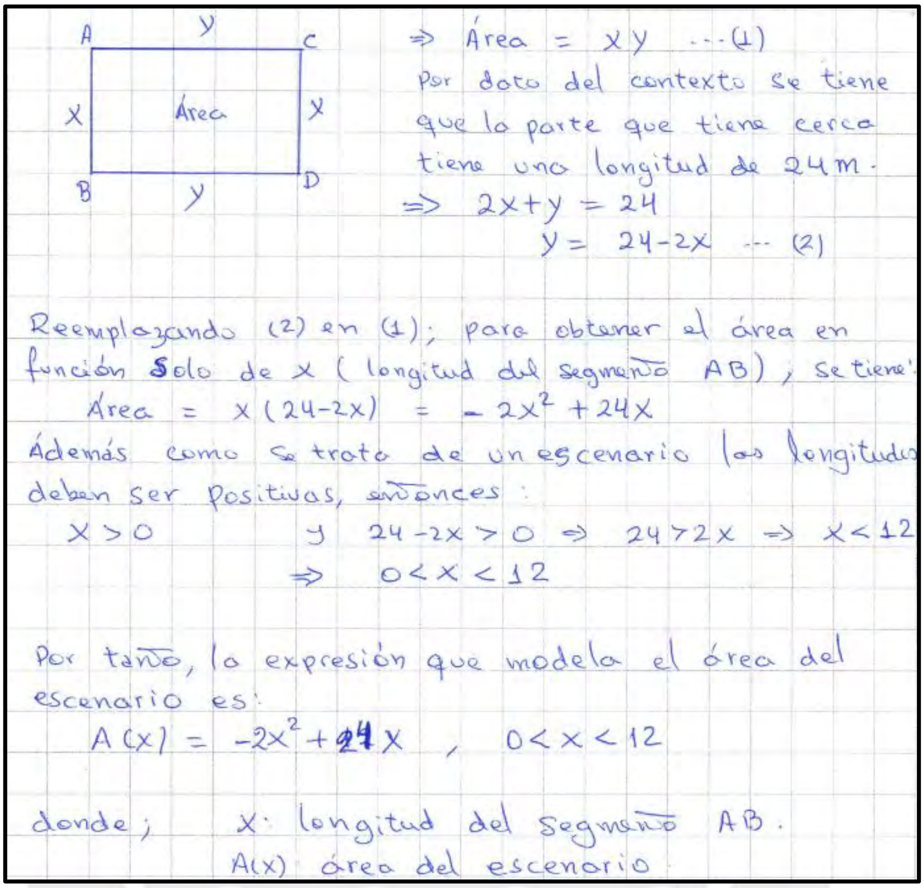

A y C
x Área x
B y D
$\Rightarrow$ Área $= xy$ ...(1)
Por dato del contexto se tiene que la parte que tiene cerca tiene una longitud de 24 m.
$\Rightarrow 2x + y = 24$
$y = 24 - 2x$ ... (2)
Reemplazando (2) en (1); para obtener el área en función solo de x (longitud del segmento AB), se tiene:
Área $= x(24-2x) = -2x^2 + 24x$
Además como se trata de un escenario las longitudes deben ser positivas, entonces:
$x > 0$ y $24 - 2x > 0 \Rightarrow 24 > 2x \Rightarrow x < 12$
$\Rightarrow 0 < x < 12$
Por tanto, la expresión que modela el área del escenario es:
$A(x) = -2x^2 + 24x$, $0 < x < 12$
donde; x: longitud del segmento AB.
A(x): área del escenario.

Figura 56. Respuesta de E1 de la fase 2 de la tarea de modelización.

Las acciones de E1 evidencian la activación del plano [Sem-Ins]. Los procedimientos basados en la figura geométrica y el uso de variables, inecuaciones y tratamientos algebraicos evidencia que el estudiante prioriza el paradigma del Análisis Calculatorio.

Análisis del desarrollo realizado por el estudiante E2

Se observa que E2 toma en cuenta el registro figural para hallar el modelo matemático; sin embargo, no considera el registro tabular, ello no le permite verificar si el modelo hallado es el correcto.

E2 establece la medida del segmento BC en función del segmento AB, considera las restricciones del valor de AB que le permiten establecer el área de la región rectangular. Sin embargo, E2 considera un valor errado de la medida del perímetro.

La construcción que logra hacer E2 le permite descifrar el modelo matemático errado del área del escenario rectangular en función de la longitud de uno de sus lados. Este resultado es expresado en el registro algebraico (ver figura 57).

$$A = (AB)(BC) = AB(20 - 2AB)$$
$$= 2AB(10 - AB)$$

si $AB = x$

$\hookrightarrow A(x) = 2x(10 - x)$

Restricciones: $x > 0 \wedge 10 - x > 0$

$x > 0 \wedge x < 10$

$\hookrightarrow \boxed{A(x) = 2x(10 - x); \quad x \in \,]0;10[}$

Donde $[x]: m$

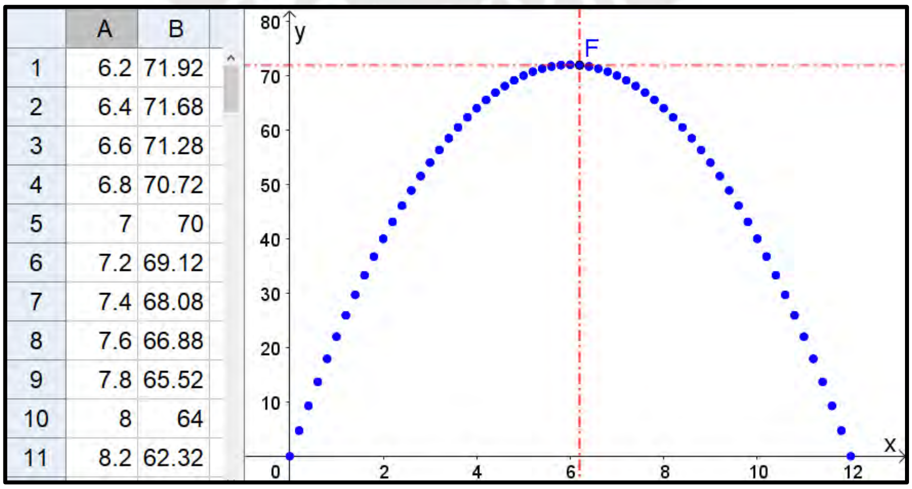
$[A]: m^2$

Figura 57. Respuesta de E2 de la fase 2 de la tarea de modelización.

Las acciones de E2 evidencian la activación del plano [Sem-Ins] de manera parcial, al no tener en cuenta el valor de la medida del perímetro del cerco perimétrico de la región rectangular. Los procedimientos basados en la figura geométrica, variables, inecuaciones y los tratamientos algebraicos evidencia que el estudiante prioriza el paradigma del Análisis Calculatorio.

Análisis del desarrollo realizado por el estudiante E3

Se observa que E3 toma en cuenta el registro tabular gráfico para hallar el modelo matemático (ver figura 58).



	A	B
1	6.2	71.92
2	6.4	71.68
3	6.6	71.28
4	6.8	70.72
5	7	70
6	7.2	69.12
7	7.4	68.08
8	7.6	66.88
9	7.8	65.52
10	8	64
11	8.2	62.32

Figura 58. Registros tomados en cuenta por E3.

E3 reconoce que se trata de una función cuadrática; por lo tanto, toma valores de la hoja de cálculo para reemplazar en la fórmula general de una función cuadrática y, con ella, halla los parámetros de la fórmula.

La construcción que logra hacer E3 le permite determinar el modelo matemático del área del escenario rectangular en función de la longitud de uno de sus lados. Este resultado es expresado en el registro algebraico (ver figura 59).

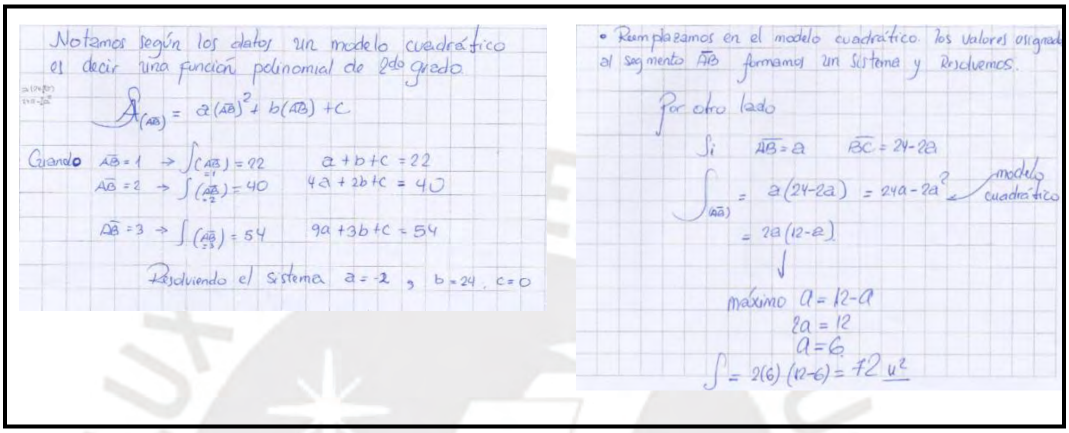


Figura 59. Respuesta de E3 a la fase 2 de la tarea de modelización.

Las acciones de E3 evidencian la activación del plano [Sem-Ins]. Los procedimientos basados en la definición general de la función cuadrática y los tratamientos algebraicos evidencia que el estudiante prioriza el paradigma del Análisis Calculatorio.

Fase 3.

En el análisis a priori de esta fase se considera una variable microdidáctica con dos valores (ver tabla 5) que el estudiante podrá utilizar de acuerdo a su preferencia, conocimientos y/o habilidades matemáticas. Se considera que esta tarea está inmersa en el dominio del análisis debido a que para su solución se utiliza nociones de función; ya sea en el registro gráfico o en el registro algebraico.

Tabla 5. *Variables didácticas presentes en la fase 3.*

Variable didáctica	Valores
Registro de representación	Registro grafico
	Registro algebraico

A continuación, se presenta la tarea de la fase:

En la barra de entrada de la vista gráfica, ingrese la función algebraica hallada en el ítem anterior y configure ambos ejes, X e Y, en escala de 1:10. Resuelva y justifique.

Después de hacer un análisis sobre la cantidad máxima de integrantes e instrumentos que se presentarán en el concierto han concluido que el área del escenario debe medir 70 m^2. Este año los encargados de armar el escenario renovarán las cercas de los lados AB y CD, comprarán nuevas cercas, ¿cuáles deben ser las dimensiones del escenario? Si se busca ahorrar en los costos del concierto.

Análisis a priori de la fase 3

En seguida se expone los posibles procedimientos y respuestas que los estudiantes desarrollaran a partir de la tarea planteada. En base a estos desarrollos se establece los paradigmas que se espera que los estudiantes privilegien.

Estrategia 1: se espera que mediante la génesis instrumental los estudiantes utilicen las herramientas función constante que pueden ingresarlo en la barra de entrada de GeoGebra, también, rectas perpendiculares. Con el objetivo de establecer el punto o los puntos de la representación gráfica de la función cuadrática se intercepta con la gráfica de la función constante y los valores exactos de las abscisas.

Luego de ello se activa la génesis semiótica, que permite deducir, a partir de las rectas perpendiculares, las abscisas que representan los valores que la longitud AB debe tomar para que el área rectangular sea de 70 m^2.

Para ello ingresen la función $y = 70$ en la barra de entrada. Luego, utilicen las herramientas de intersección y recta perpendicular; para obtener las coordenadas exactas que dirigirán sus respuestas (ver figura 60).

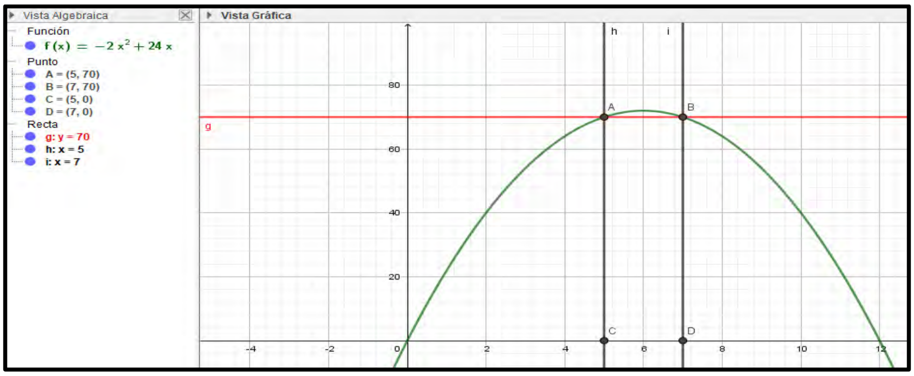


Figura 60. Opción grafica para resolver tarea.

Finalmente, se espera que los estudiantes expresen su respuesta de la siguiente manera: el segmento AB debe tomar la menor medida, es decir 5m, debido a que se si toma la medida de 7 el costo sería mayor.

A partir de las actividades desarrolladas por los estudiantes, observaciones e interpretaciones, basados en la percepción de la Vista Gráfica, el uso de herramientas gráficas, como lo son la gráfica de la función constante, puntos y rectas se determina que el paradigma priorizado por los estudiantes en esta estrategia es el paradigma del Análisis Geométrico/ Aritmético (AC).

Estrategia 2: se espera que mediante la génesis semiótica los estudiantes interpreten que algebraicamente la pregunta se puede resolver encontrando, los valores de x para los cuales la función sea igual a 70 m^2. El procedimiento se inicia a partir de la función algebraica, de la siguiente manera:

$$f(x) = -2x^2 + 24x = 70$$

Se realizan tratamientos de manera que se hallan los valores de x.

$$-2x^2 + 24x = 70$$

$$-2x^2 + 24x - 70 = 0$$

$$x^2 - 12x + 35 = 0$$

$$(x - 5)(x - 7) = 0$$

$$x = 5, x = 7$$

Finalmente, se espera que los estudiantes expresen su respuesta de la siguiente manera: el segmento AB debe tomar la menor medida, es decir 5m, debido a que se si toma la medida de 7 el costo sería mayor.

A partir de las actividades desarrolladas por los estudiantes, la interpretación y validación del modelo matemático está basada en las notaciones formales de la función cuadrática, tratamientos algorítmicos de las expresiones funcionales, se determina que el paradigma priorizado por los estudiantes en esta estrategia es el paradigma del Análisis Calculatorio (AC).

Análisis a posteriori de la fase 3

En seguida, se presenta el análisis de los procedimientos y respuestas que los estudiantes desarrollaron a partir de la tarea planteada. En base a estos desarrollos se establece los paradigmas que los estudiantes privilegiaron.

Es importante mencionar que el análisis fue realizado en base de la producción de los estudiantes que fueron registrados en fichas de tareas, archivos de GeoGebra y archivos de video, Camtasia. También, en este análisis se tuvo en cuenta las fichas de observación completada por los dos observadores de la aplicación de la tarea.

Análisis del desarrollo realizado por el estudiante E1

Se observa que E1 ingresa la función matemática hallada en un nuevo archivo de GeoGebra, visualiza la función en la Vista Algebraica y la Vista Grafica. Utiliza la herramienta, de GeoGebra, punto sobre objeto; el cual lo posiciona sobre el gráfico de la función, en seguida lo manipula con el objetivo de posicionarlo en un punto donde el valor de la ordenada sea 70 (ver figura 61).

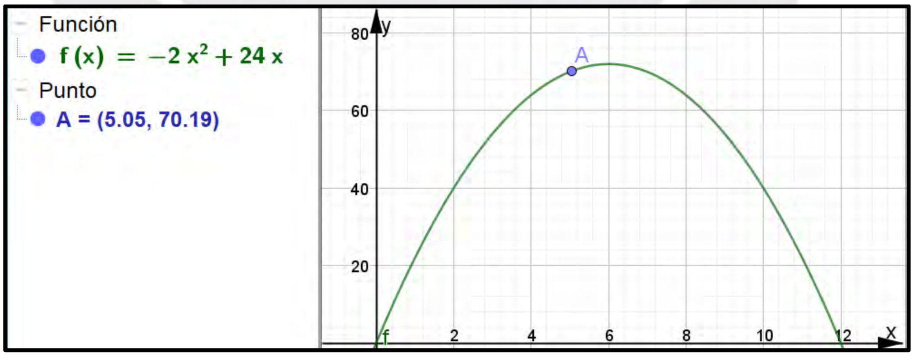


Figura 61. Uso de software GeoGebra realizado por el estudiante E1

Las acciones de E2 evidencian la manipulación de los artefactos del software GeoGebra, en base de ella realiza exploraciones y observaciones, que le permiten conjeturar y validar que la medida del segmento que hace que el área de la región rectangular es 70 m^2 es 5m.

La construcción que logra hacer E2 le permite descifrar e interpretar el valor correspondiente al área indicada. Sin embargo, no le permite verificar que este resultado sea único ni considerar la pregunta sobre los costos, realizada en esta fase (ver figura 62). La tarea de esta fase está centrada en la validación del modelo matemático.

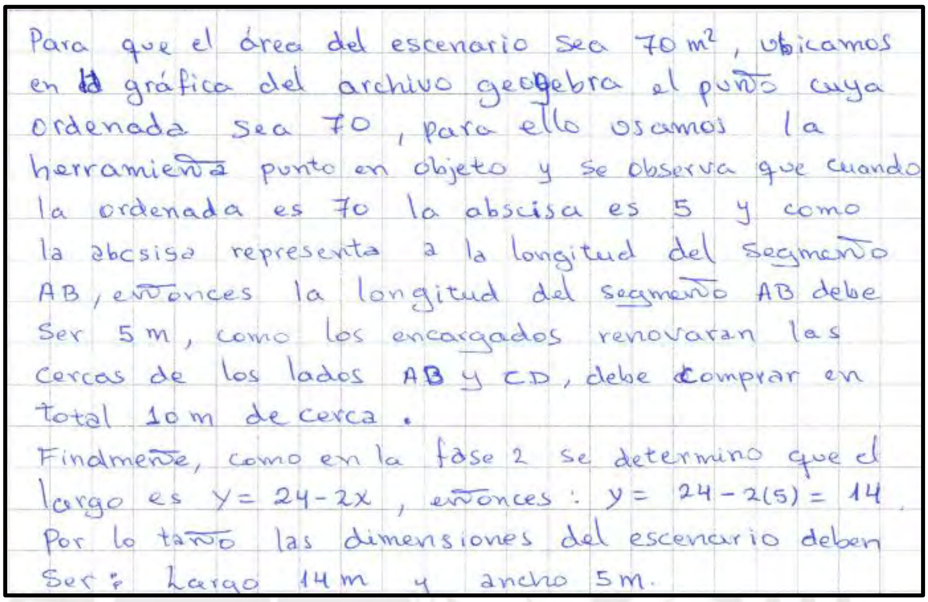

Para que el área del escenario sea $70\ m^2$, ubicamos en la gráfica del archivo geogebra al punto cuya ordenada sea 70, para ello usamos la herramienta punto en objeto y se observa que cuando la ordenada es 70 la abscisa es 5 y como la abscisa representa a la longitud del segmento AB, entonces la longitud del segmento AB debe ser 5 m, como los encargados renovaran las cercas de los lados AB y CD, debe comprar en total 10 m de cerca.
Finalmente, como en la fase 2 se determino que el largo es $y = 24 - 2x$, entonces: $y = 24 - 2(5) = 14$
Por lo tanto las dimensiones del escenario deben ser: Largo 14 m y ancho 5 m.

Figura 62. Respuesta de E1 de la fase 3 de la tarea de modelización.

Las acciones de E3 evidencian la activación del plano [Sem-Ins] es parcial al no considerar el análisis de un caso alterno. Por otra parte, los procedimientos basados en el registro gráfico y operaciones aritméticas evidencia que el estudiante prioriza el paradigma del análisis geométrico/aritmético (AG). Teniendo en cuenta lo anterior, se concluye que las acciones del estudiante no coinciden con el análisis a priori, aunque la respuesta si coincida.

Análisis del desarrollo realizado por el estudiante E2

Se observa que E2 ingresa la función matemática hallada en un nuevo archivo de GeoGebra, visualiza la función en la Vista Algebraica y la Vista Grafica y observa que el valor máximo que alcanza la función es menor al dado como dato de esta fase, debido a ello menciona que el valor del perímetro debe ser otro valor. Sin embargo, no verifica que el modelo matemático es el mismo que se ha trabajado en la primera fase, de manera implícita, ello se observa en la figura 63.

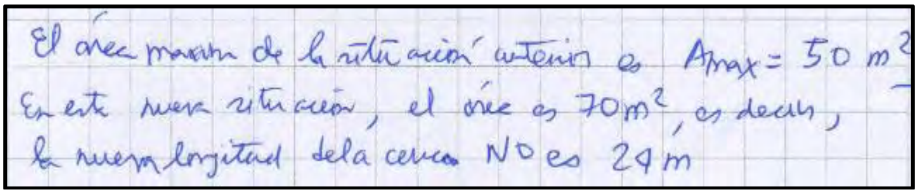


Figura 63. Respuesta de E2 de la fase 3 de la tarea de modelización.

Las acciones de E2 evidencian la activación parcial del plano [Sem-Ins]. Los procedimientos basados en el registro gráfico evidencia que el estudiante prioriza el paradigma del análisis geométrico/aritmético. Finalmente, se concluye que el desarrollo y las acciones realizadas por E3 coinciden parcialmente con el análisis a priori.

Análisis del desarrollo realizado por el estudiante E3

Se observa que E3 ingresa la función matemática hallada en un nuevo archivo de GeoGebra, visualiza la función en la Vista Algebraica y la Vista Grafica y compara su comportamiento con el modelo trabajado, de manera implícita, en la fase 1. Utiliza la función hallada en la fase 2 para igualarla a la medida del área mencionada y efectúa tratamientos algebraicos que le permiten hallar los valores que hacen que la medida del área sea la mencionada. No obstante, no considera la pregunta sobre los costos planteada sobre la situación (ver figura 64).

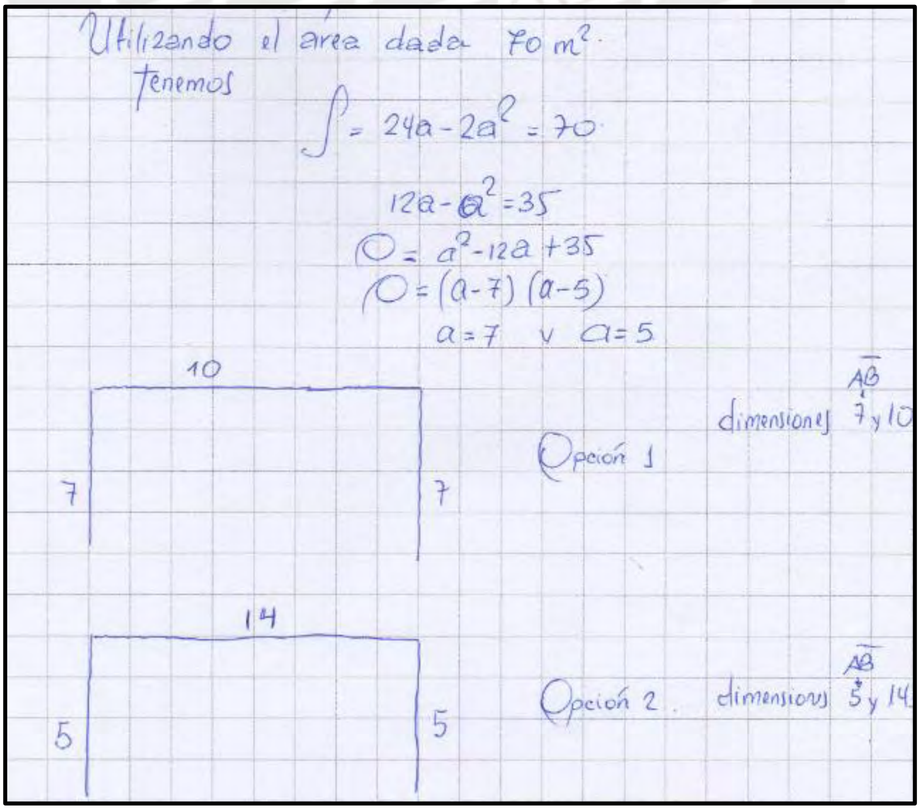


Figura 64. Respuesta de E3 de la fase 3 de la tarea de modelización.

Las acciones de E3 evidencian que la activación del plano [Sem-Ins] es parcial al no realizar un análisis sobre cuál es la medida, del segmento AB, que es más conveniente que se debe adoptar. Los procedimientos basados en notaciones formales de la función y el cálculo de ecuaciones evidencian que E3 privilegia el paradigma del Análisis Calculatorio (AC). Finalmente, se concluye que el desarrollo y las acciones realizadas por E3 coinciden parcialmente con el análisis a priori.

Resumen de resultados

La tabla 6 muestra un resumen de las actividades que los 15 estudiantes que participaron en la aplicación de la tarea de modelización. Como se conoce la primera fase de la tarea tiene el objetivo de identificar la situación real propuesta y mediante el reconocimiento de las variables involucradas, sus comportamientos y la relación entre ellas. Estos datos deben ser simplificados y estructurados convirtiendo a la situación a modelizar en un problema a modelar. Mientras que la fase 2 busca que el estudiante establezca el modelo matemático mediante la matematización, ello se puede lograr con el uso de resultados matemáticos y finalmente la fase 3 de la actividad busca la interpretación y validación del modelo matemático mediante la resolución de preguntas del contexto cotidiano.

Tabla 6. *Resumen de respuestas de los estudiantes a la tarea de modelización*

		Activación de la génesis semiótica	Activación de la génesis instrumental	Coincide con el análisis a priori	Paradigmas de la geometría			Paradigmas del análisis		
					GI	GII	GIII	AG	AC	AR
Fase 1	i	15	15	13	15					
	ii	15	12	9	5	8				
	iii	15	15	3	15					
	iv	15	15	12	10			4		
Fase 2		15	10	8				8	4	
Fase 3		15	14	2				7	6	

En el análisis de las respuestas del ítem i de tarea “Escenario Rectangular” se puede observar que las acciones y respuestas de 13 estudiantes coinciden con el análisis a priori realizado. Las acciones de estos estudiantes activaron además el plano [Sem-Ins]. En las respuestas presentadas por los estudiantes se observa que privilegian al paradigma de la Geometría Natural (GI), que es el paradigma esperado.

Con respecto al ítem ii, 9 de las acciones y respuestas de los estudiantes coinciden con el análisis a priori. Las acciones de estos estudiantes activaron la génesis semiótica y 5 de estos de las acciones de estos estudiantes activaron también la génesis instrumental. De las respuestas presentadas por los estudiantes 5 privilegian el paradigma de Geometría Natural (GI) y 8 el paradigma de Geometría Axiomática Natural (GII). Los que privilegian GI utilizan nociones de aproximación y medida; mientras los que privilegian GII además utilizan la fórmula de área rectangular.

Aunque en el análisis a priori se esperaba que se privilegie el paradigma GI, las acciones de los estudiantes que privilegiaron GI realizaron su trabajo sobre la medida de segmentos y perímetro del cerco; mientras los que privilegiaron GII utilizaron además la noción de área.

En el caso del ítem II solo 3 de las acciones y respuestas de los estudiantes coinciden con el análisis a priori. Las acciones de estos estudiantes activaron le plano [Sem-Ins] de manera parcial debido a que la génesis semiótica desarrollada no se percibe tratamientos en el registro tabular que le permitan cuantificar como está variando la medida del área respecto al cambio de la medida del segmento de la longitud del segmento AB. Pero, también se observa que el paradigma privilegiado es el paradigma de la geometría de la Geometría Natural donde se utiliza nociones de aproximación y medida de las figuras geométricas, que era lo esperado.

Sobre el ítem iv se observa que 12 de las acciones y respuestas de los estudiantes coinciden con el análisis a priori. Las acciones de los estudiantes evidencian la activación del plano [Sem-Ins] y 4 de los estudiantes respondieron a esta tarea utilizando la noción de función cuadrática (gráfica de la función cuadrática y/o notación de función) que nos permite afirmar que se realizó un cambio de dominio, del dominio de la Geometría al dominio del Análisis. En ese sentido el paradigma privilegiado fue el paradigma del Análisis Geometrico/Aritmetico (AG) el cual no es el paradigma esperado.

En la fase 2 se observa que 8 de las acciones y respuestas de los estudiantes coinciden con el análisis a priori, en todas estas acciones se observa la activación del plano [Sem-Ins]. De ellos se observa que 8 privilegiaron el paradigma del Análisis Geométrico Aritmético (AG) y 4 privilegiaron el paradigma del Análisis Calculatorio (AC)

Finalmente, en la fase 3 se observa que solo 2 de las acciones y respuestas coinciden con el análisis a priori y en todas estas se activaron el plano [Sem-Ins]. Es importante señalar que las acciones y respuestas de los estudiantes que no coinciden con el análisis a priori es porque no validaron o verificaron su respuesta en el modelo cuadrático (en la representación gráfica y/o algebráica), en esos casos se considera que la activación del plano [Sem-Ins] es parcial. En el análisis a posteriori no se consideran los casos que coinciden con el análisis parcial, debido a que la tarea “Escenario Rectangular” no fue resuelta completamente o las justificaciones no fueron explicitas.

CONSIDERACIONES FINALES

A continuación, se presentan las consideraciones finales y perspectivas para futuras investigaciones relacionadas al Espacio de Trabajo Matemático en estudiantes de humanidades cuando modelizan funciones cuadráticas.

Según las investigaciones de referencia revisadas, con respecto a las concepciones y dificultades que tienen los estudiantes sobre la función cuadrática, afirmamos que los estudiantes priorizan el registro de representación algebraico, evidencia de ello encontrada en nuestra investigación es la dificultad que tienen al realizar un análisis de la función cuadrática en el registro de representación tabular o gráfico.

En ese sentido, pensamos que las tareas propuestas a los estudiantes relacionados con la función cuadrática no permiten reconocer su comportamiento variable, tampoco permiten realizar conjeturas ni validaciones. Todo ello contribuye a que el estudiante tenga dificultades en el análisis, visualización e interpretación del objeto función cuadrática; por ende, en la comprensión de la noción de función cuadrática.

Por otra parte, consideramos que los aspectos de la Ingeniería Didáctica aplicados en nuestra investigación fueron pertinentes, debido a que, el desarrollo de las fases: preliminar, concepción y análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori y validación nos permitió analizar el Espacio de Trabajo Matemático Personal en estudiantes de humanidades cuando movilizan el concepto de función cuadrática al resolver tareas de modelización con el uso de tecnología digital.

Del análisis preliminar, destacamos que las dificultades y concepciones erróneas, que los estudiantes tienen, sobre las funciones cuadráticas provienen de una enseñanza centrada en los tratamientos algebraicos, que no promueven la coordinación de registros de representación y tampoco permiten la exploración y observación de la relación de dependencia y característica variable de la función cuadrática. En cuanto a los aspectos matemáticos e históricos de la evolución de la noción de función muestran que esta surge de la idea de relación entre valores o magnitudes variables.

Por su parte, los libros didácticos cuando presentan el tema de funciones y en particular funciones cuadráticas promueven la activación de la génesis semiótica; sin embargo, no consideran la activación de la génesis instrumental. Finalmente, teniendo en cuenta lo anterior y la presencia del objeto función, en particular función cuadrática, en los planes de estudio de carreras de humanidades es pertinente considerar que las tareas a aplicar deben permitir la exploración y observación de la naturaleza relacional y variable de la función cuadrática ya que ello permitiría a los estudiantes comprender el objeto función cuadrática y relacionarlos a situaciones variables del contexto cotidiano.

En ese sentido, el ciclo de modelización de Blum y Leiβ nos permitió organizar la tarea "Escenario Rectangular" en tres fases, cada una de ellas relacionada a las fases del ciclo. Así, la primera fase está relacionada a los procesos de construcción, simplificación/estructuración y matematización dirigida al reconocimiento de variables, relación entre ellas y reconocimiento del comportamiento de la función implícita; la segunda fase relacionado al trabajo matemático para hallar el modelo matemático; y la tercera fase relacionada a la interpretación y validación del modelo matemático hallado.

Es importante mencionar que en las acciones de los estudiantes se percibió que las rutas del ciclo de modelización de Blum y Leiβ permitió reajustar el conocimiento logrado en la primera fase de la tarea, ello permitió a los estudiantes lograr establecer el modelo matemático en la fase 2 de la tarea. Sin embargo, en la fase 3 no se tomó en cuenta los datos de la pregunta, ni el comportamiento del modelo para su interpretación y validación. En ese sentido creemos que es importante propiciar tareas que promuevan la interpretación y validación de modelos matemáticos.

Con respecto a la pregunta de investigación: ¿Cuál es el Espacio de Trabajo Matemático personal que desarrollan estudiantes de humanidades al resolver tareas de modelización de funciones cuadráticas?, podemos afirmar lo siguiente.

El espacio de Trabajo de Trabajo Matemático personal que desarrollan estudiantes de humanidades al resolver tareas de modelización de funciones cuadráticas está definido por las acciones que desarrollan sobre artefactos, registros de representación y nociones; además de los procesos de construcción, visualización y justificación.

En ese sentido, las acciones, respuestas y observaciones del actuar de los estudiantes cuando resolvieron la tarea de modelización fueron registradas en archivos de video y Geogebra; fichas de tareas; y fichas de observación respectivamente. Estos documentos y archivos nos permitieron identificar y analizar el Espacio de Trabajo de Trabajo Matemático personal que desarrollaron los estudiantes de humanidades participantes.

Detalladamente, en la fase 1 de la tarea los estudiantes trabajaron a partir de la representación gráfica dinámica del área de un escenario rectangular, luego mediante de la manipulación de los artefactos deslizador “AB”, cuadricula y animación lograron explorar y hacer observaciones de los valores que variaban y se mantenían constantes; la relación de dependencia y la relación de estos valores con su representación tabular y gráfica. Ello permitió a los estudiantes deducir que el área es uno de los valores que varía y que el valor que permanece constante es el perímetro del cerco; por otro lado, también lograron deducir que la medida del área depende únicamente de la medida del segmento AB. También, establecieron la relación de la representación dinámica con la representación tabular y la representación tabular con la representación gráfica.

En esta fase también se identificó que los estudiantes tienen la dificultad de cuantificar la variación del área, se cree que esto se debió a que los estudiantes no realizaron exploraciones, observaciones ni tratamientos necesarios en el registro tabular.

En la fase 2, los estudiantes eligieron representaciones de la situación de variación planteada al inicio planteada que les permitió definir el modelo matemático; estas representaciones hicieron emerger en los estudiantes la noción de función, ya sea relacionado a la definición de área rectangular o a la función cuadrática. Además, les permitió recuperar datos que les permitieran explicitar el modelo matemático.

En la fase 3, se identificaron soluciones que se apoyaron en la representación gráfica de la función cuadrática y otras apoyadas en la representación algebraica de la misma; sin embargo, en ambos casos no se tomó en cuenta el comportamiento del modelo matemático para validar la respuesta hallada.

En cuanto al cumplimiento de nuestro objetivo general: analizar el Espacio de Trabajo Matemático personal en estudiantes de humanidades cuando movilizan el concepto de función cuadrática al resolver tareas de modelización con el uso de tecnología digital.

Se logró alcanzar el objetivo general a través de: describir las acciones que permiten la activación de las génesis semiótica e instrumental cuando los estudiantes realizan tareas de modelización con funciones cuadráticas; e Identificar los paradigmas de la Geometría y el Análisis que los estudiantes privilegian cuando realizan tareas de modelización con funciones cuadráticas.

Podemos especificar que, en la primera fase los estudiantes exploraron y observaron, mediante los artefactos deslizador “AB” y cuadricula, el valor que varía y el valor que permanece constante. Esto evidencia la activación de la génesis instrumental. Mientras que la activación de la Génesis semiótica se produjo sobre la construcción lograda con la exploración y observación, En base a ella los estudiantes dedujeron que el valor que varía es la medida del área y el valor que permanece constante es la medida del perímetro rectangular.

En esta fase, los estudiantes también exploraron y observaron mediante el artefacto animación la representación figural, tabular y gráfica de la variación de variables de la situación planteada. A partir de ello, los estudiantes dedujeron la relación entre las mencionadas representaciones. Todo ello evidencia también la activación de las génesis semiótica e instrumental.

Es importante mencionar que en esta fase se identificó una dificultad relacionada con la cuantificación de la variación a partir de datos discretos dados en el registro tabular, específicamente, los estudiantes no realizaron los tratamientos necesarios, tampoco la exploración y observaciones en el registro tabular que les permitieran identificar y cuantificar la manera como varia el área de la región rectangular cuando la longitud del segmento AB varia a razón de 1. Creemos que esta dificultad está relacionada con la falta de costumbre de hacer este tipo de tratamientos y procedimientos al resolver una tarea.

Similar que en la fase 1, en la fase 2 los estudiantes utilizan el artefacto animación para explorar y observar las representaciones: figural, tabular y gráfica de la variación de variables de la situación planteada inicialmente. De las cuales deducen la noción de función relacionada a la definición de área rectangular o relacionada a definición de función cuadrática en el registro algebraico; también recuperan los datos necesarios que les permitirán realizar el trabajo matemático necesario para establecer el modelo de la función cuadrática relacionado a esta situación. Este proceso muestra, también, la activación de las génesis semiótico e instrumental.

Es importante mencionar que en la fase 1 de la tarea los ítems propuestos permitieron a los estudiantes realizar reajustes sobre la comprensión de la relación entre las variables, de ese modo los estudiantes lograron determinar el modelo cuadrático de manera esperada.

Contrario a lo que sucedió en la fase 1 y 2, en la fase 3 los estudiantes no utilizaron los artefactos animación; ni la representación tabular o grafica para verificar su respuesta. Se cree que esto se debe a que los estudiantes se centraron en utilizar el modelo matemático para hallar la respuesta y dejaron de lado el aspecto de la validación.

En ese sentido, considerando que la modelización se inicia con la situación problemática planteada en un contexto cotidiano y concluye con la validación y del modelo hallado, se puede concluir que las acciones realizadas por los estudiantes en el desarrollo de la tarea de modelización "Escenario Rectangular" logró describir las acciones que permiten la activación parcial de las génesis semiótica e instrumental o del plano [Sem-Ins].

Finalmente, podemos concluir que, las acciones realizadas por los estudiantes en el desarrollo de la tarea de modelización "Escenario Rectangular" y que han sido descritas anteriormente evidencian la activación de las génesis semiótica e instrumental o del plano [Sem-Ins].

Con respecto a la identificación de paradigmas de la Geometría y el Análisis Matemático Estándar que los estudiantes privilegian cuando realizan tareas de modelización con funciones cuadráticas. Se encontró que los estudiantes, en el ítem i y iii de la fase 1, priorizan el paradigma de la geometría natural en la que utilizan nociones de medida y aproximación de la medida. En el ítem ii de la fase 1, se observa que los estudiantes priorizan el paradigma de la Geometría Axiomática Natural (GII), donde, además de tener en cuenta las nociones de medida y aproximación de la medida, los estudiantes, tienen en cuenta la fórmula de área de una región rectangular. En el ítem iv de la fase 1, se observa que los estudiantes privilegian el paradigma de la Geometría Natural (GI), donde, tienen en cuenta las nociones de medida y aproximación de la medida; sin embargo, también se observan respuestas donde los estudiantes privilegian el paradigma del Análisis Geométrico/ Aritmético (AG) donde, los estudiantes tienen en cuenta las nociones de medida, la fórmula de área de una región rectangular y la noción de función.

Es importante resaltar que la tarea del ítem iv promueve el cambio de dominio, es decir, aunque la tarea de este ítem está planteada en el dominio de la geometría la representación gráfica asociada a la situación planteada inicialmente está relacionada a la gráfica de una función cuadrática (parábola) que propicia en los estudiantes tomar en cuenta la noción de función, noción que pertenece al dominio del análisis.

En la fase 2 y 3 se observa que los estudiantes priorizan el paradigma del Análisis Geométrico/ Aritmético y el paradigma del Análisis Calculatorio, ambos paradigmas esperados en las estrategias realizadas en nuestro análisis a priori.

Concluimos, con respecto a los paradigmas priorizados que, los paradigmas de la Geometría que los estudiantes priorizan cuando realizan tareas de modelización con funciones cuadráticas son el paradigma de la Geometría Natural (GI) y el de la Geometría Axiomática Natural (GII). Mientras que, los paradigmas del Análisis que los estudiantes priorizan cuando realizan tareas de modelización con funciones cuadráticas son el paradigma del Análisis Geométrico/ Aritmético (GA) y el paradigma del Análisis Calculatorio (AC).

Creemos que fue necesario identificar los paradigmas de la geometría y el análisis para caracterizar el Espacio de Trabajo Matemático de los estudiantes de humanidades. Además, nos permite tener en cuenta las nociones que propician el surgimiento de nociones relacionadas a funciones pertenecientes al dominio del análisis.

El tomar en cuenta los paradigmas privilegiados por los estudiantes nos permite declarar que la tarea de modelización “Escenario rectangular” promueve el cambio de dominio, específicamente, ello se observa en la primera fase de la tarea. De hecho, las tareas de esta fase son planteadas en el dominio de la Geometría, pero la representación gráfica relacionada a la situación inicial planteada, formada por puntos discretos y que dan la idea de una parábola, promueve el uso de la noción de función cuadrática, perteneciente al dominio del Análisis. Esto es evidenciado en las acciones y respuestas de los estudiantes.

Luego de justificar el logro de los objetivos de esta investigación es importante mencionar que el constructo teórico del Espacio de Trabajo Matemático nos permitió analizar las acciones de estudiantes de humanidades cuando resuelven una tarea de modelización de funciones cuadráticas propuesta en el dominio de la geometría y el análisis.

Con respecto al usos de software Geogebra, consideramos que su importancia esta reflejada en dos aspectos. Primero, permitió el diseño de artefactos (deslizador “AB”, cuadricula y animación) que permitieron realizar exploraciones, observaciones y generar nuevos instrumentos. Y segundo, permitió a los estudiantes trabajar en un entorno dinámico que promovió que los estudiantes realizaran conjeturas, validaciones y deducciones. En consecuencia, permitió activar la génesis instrumental que junto a la génesis semiótica garantizó la comprensión de la situación inicial, la identificación de variables dependiente e independiente, el establecimiento del modelo cuadrático.

Con respecto a los alcances en investigaciones futuras, creemos que esta investigación podría ser replicada con estudiantes de los últimos grados del nivel secundaria, debido a que las investigaciones de referencia evidencian que los estudiantes de este nivel tienen dificultades al trabajar con la noción de función cuadrática. También, pensamos que es importante debido a que la tarea “Escenario Dinámico” permite introducir el dominio del análisis a partir del dominio de la Geometría, dominio desarrollado desde los inicios de la escolaridad, y en el que se manejan nociones relacionadas al contexto cotidiano con el cual todo estudiante de secundaria tiene relación.

A partir de ello, pensamos que sería importante también analizar el Espacio de Trabajo matemático personal de los docentes de matemática de nivel de secundaria, quienes enseñan funciones y en particular funciones cuadráticas, y de esta manera reflexionar sobre las nociones y procedimientos que utilizan para resolver una tarea de modelización de funciones cuadráticas.

Por otra parte, se considera importante investigar sobre tareas que favorezcan la activación del plano Semiótico-Instrumental, relacionado a otras funciones de variable real debido a que promueve relacionar y discriminar datos de una situación y desarrollar habilidades de observación y exploración.

Consideramos además que es necesario aplicar este tipo de tareas en el contexto de la educación básica regular y primeros ciclos universitarios para buscar la comprensión de la naturaleza relacional y variacional de la función que no es tomada en cuenta en la enseñanza tradicional, centrada en la manipulación algebraica.

Tomando en cuenta los distintos artefactos, procedimientos y nociones (área, perímetro, función, inecuación) que los estudiantes tomaron en cuenta para realizar el trabajo matemático podemos decir que la tarea “espacio rectangular” propició una circulación del Espacio de Trabajo Matemático personal de los estudiantes de humanidades y este análisis puede ser mejorado en futuras investigaciones. Para ello se debe realizar un análisis a profundidad sobre el referencial teórico y el procedimiento de prueba o justificación.

REFERENCIAS

Agastya, M., Bag , P. K., & Chakraborty, I. (2014). Communication and authority with a partially informed expert. *The RAND Journal of Economics, 45*(1), 176-197. Obtenido de https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/1756-2171.12047

Alvarenga, K., Barbosa, C. V., & Ferreira, G. M. (2014). O conceito de função: o desenvolvimento baseado em alguns modelos desde o ano de 2000 a. C até o século XX. *REVEMAT, 9*(1), 159-178. Obtenido de https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2014v9n1p159

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, & P. Goméz (Ed.), *Ingeniería Didáctica en Educación: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (págs. 33-59). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica. Obtenido de https://core.ac.uk/download/pdf/12341268.pdf

Ávila, P. E. (2011). *Razonamiento covariacional a través del software dinámico: el caso de la variación lineal y cuadrática (tesis de maestría).* Medellin, Colombia: Universidad Nacional de Colombia. Obtenido de http://bdigital.unal.edu.co/6765/1/43480455.2012.pdf

Beltrão, M. E., & Igliori, S. B. (2010). Modelagem Matemática e Aplicações: Abordagens Para o Ensino de Funções. *Educación Matemática, 12*(1), 17-42. Obtenido de https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/2171

Berk, R. (2011). Asymmetric Loss Functions for Forecasting in Criminal Justice Settings. *Journal of Quantitative Criminology, 27*(1), 107-123. Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/225747848

Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45-58. Obtenido de http://gorila.furb.br/ojs/index.php/modelling/article/viewFile/1620/1087

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la Matemática.* (M. Martínez Perez, Trad.) España: Alianza Editorial.

Briceño, O. A., & Buendía, G. (2015). Los experimentos de diseño y la práctica de modelación:significados para la función cuadrática. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*(45), 65-83. Obtenido de http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/viewFile/656/1189

Carroll, R., Lewis, J. B., Lo , J., Poole, K. T., & Rosenthal, H. (2013). The Structure of Utility in Spatial Models of Voting. *American Journal of Political Science, 57*(4), 1008-1028. Obtenido de https://scholar.princeton.edu/sites/default/files/jameslo/files/ajps_utility.pdf

Dávila-Araiza, M., y Moreno-Armella, L. (2014). Intuición y movimiento:hacia una redescripción de las ideas intuitivas del cálculo. *Espacio de Trabajo Matemático*, (págs. 335-369). San Lorenzo de El Escorial, Madrid, España.

Díaz , M. E., Haye, E. E., Montenegro, F., y Córdoba, L. M. (2015). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *Unión: Revista Iveroamericana de Educación Matemática* (41), 20-38. Obtenido de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2015/41/Artigo1.pdf

Henríquez-Rivas, C., y Montoya-Delgadillo, E. (2016). El Trabajo Matemático de Profesores en el Tránsito de la Geometría Sintética a la Analítica en el Liceo. Bolema, 30(54), 45-66. Obtenido de http://www.scielo.br/pdf/bolema/v30n54/1980-4415-bolema-30-54-0045.pdf

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. d. (2010). *Metodología de la Investigación* (5ta ed.). México D.F., México: McGraw-Hill / Interamericana.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses génèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16*, 9 – 24. Obtenido de http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/annales_de_didactique_et_de_sciences_cognitives/

Kuzniak, A., Nechache, A., & Drouhard, J. P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM Mathematics Education, 48*, 861–874.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education, 48*, 721–737.

Lima, E. (2016). *Sequência didática usando o GeoGebra na aprendizagem de função quadrática no ensino fundamental II (tesis de maestría).* Manaus-Am., Brasil: Universidade Federal do Amazonas. Obtenido de https://tede.ufam.edu.br/handle/tede/5551

Minh, T. K., & Lagrange, J. B. (2016). Connected functional working spaces: a framework for the teaching and learning of functions at upper secondary level. *ZDM Mathematics Education, 48*, 793–807.

Montoya-Delgadillo, E., & Vivier, L. (2016). Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *ZDM Mathematics Education, 48*(6), 739–754.

Ozaltun, A., & Bukova, E. (2017). Revealing Ozgur's thoughts of a quadratic function with a clinical interview: Concepts and their underlying reasons. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 3*(1), 122-134. Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/312383841

Raftopoulos, A., & Portides, D. (2014). Los tipos de cambios que subyacen en las transiciones entre los diferentes tipos de representaciones de funciones y la ETM. *Espacio de Trabajo Matemático*, (págs. 117-128). San Lorenzo de El Escorial, Madrid, España. Obtenido de http://etm5.web.uowm.gr/wp-content/uploads/2017/11/%CE%95%CE%A4%CE%9C5Final.pdf

Salazar F., J. V. (2015). Génesis Instrumental: el caso de la función cuadrática. *Unión* (41), 57-67. Obtenido de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2015/41/Artigo3.pdf

Stewart, J., Redlin , L., & Watson, S. (2012). *Precálculo: Matemáticas para el Cálculo.* México: Cengage Learning.

ANEXOS

Tarea de Modelización

Estudiante: ……………………………………………………………………………….

Tarea a Modelizar: Escenario rectangular

Los estudiantes de un Centro de Música de una universidad peruana, con motivo de la semana de aniversario institucional están organizando un concierto, de “acceso libre” al público. En él, participarán solistas y grupos de hasta ocho integrantes, entre cantantes y músicos.

Para para la presentación del concierto se cercará un escenario de forma rectangular (ver figura 1); pero, no será necesario cercar la parte en frente del público. Se sabe que el Centro dispone de tarimas, escaleras y cercas para un escenario de 24 m de perímetro.

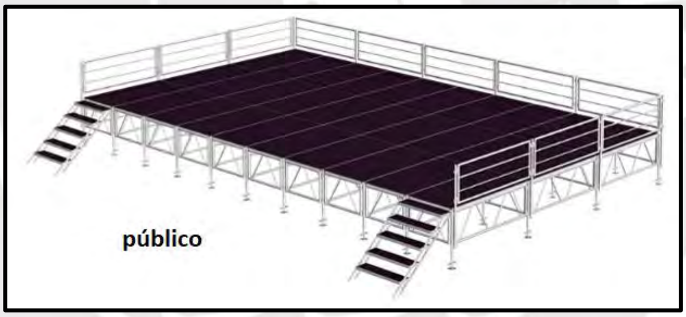


Figura 1. Escenario rectangular

Fase 1:

Abra el archivo Escenario_dinámico1.ggb y en la vista gráfica observará la representación del escenario rectangular cercado (ver figura 2).

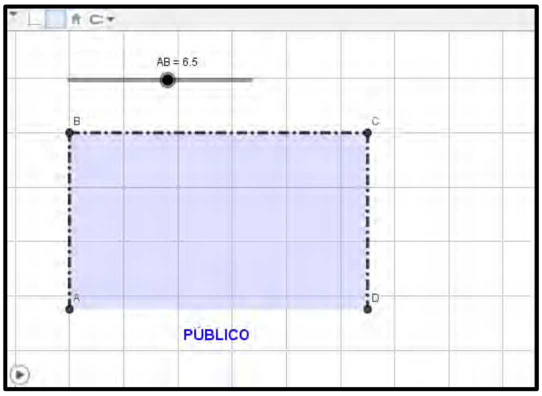


Figura 2. Escenario_dinámico1

Complete y justifique cada uno de los siguientes ítems.

i. Arrastre el deslizador “AB” para hacer variar la medida del segmento AB, mencione ¿qué valores cambian y que valores permanecen contantes? Explique detalladamente.

ii. De los valores mencionados en el ítem i, ¿cuáles son necesarios conocer, para establecer el área del escenario? y ¿por qué no los otros?, justifique.

iii. Desde el Menú Vista abra la Hoja de Cálculo y utilice el deslizador “AB”, de la Vista Gráfica, ¿Qué representan los valores de la tabla, en relación con la representación de la Vista Gráfica? ¿Cuantifica, cómo cambian los valores de la segunda columna cuando la longitud de AB aumenta a razón de 1? Explique detalladamente.

iv. Desde el Menú Vista abra la Vista Gráfica 2, active la animación con el ícono y para detener la animación utilice el ícono, entonces, ¿cómo se relaciona la representación de la Hoja de Cálculo con la representación de la Vista Gráfica 2? ¿Qué representa el eje X e Y? Explique detalladamente.

Fase 2.

Teniendo en cuenta los datos y las representaciones de la fase 1 determine la expresión matemática que modela el área del escenario, en función de la longitud del segmento AB. Explique detalladamente el procedimiento realizado para hallar dicho modelo.

Fase 3.

En la barra de entrada de la vista gráfica, ingrese la función algebraica hallada en el ítem anterior y configure ambos ejes, X e Y, en escala de 1:10. Resuelva y justifique.

Después de hacer un análisis sobre la cantidad máxima de integrantes e instrumentos que se presentarán en el concierto han concluido que el área del escenario debe medir 70 m^2. Este año los encargados de armar el escenario renovarán las cercas de los lados AB y CD, comprarán nuevas cercas, ¿cuáles deben ser las dimensiones del escenario? Si se busca ahorrar en los costos del concierto.

Ficha de Observación

Fecha:……….

Nombres y apellidos del observador: ...………………………………………………

………………………………………………………………………………………….

Tiempo de observación: ………………………………………………………………

Fase 1:

Describa las acciones que realizan los estudiantes durante el desarrollo de la fase.

Ítem i:
Ítem ii:
Ítem iii:
Ítem iv:

Detalla las dificultades observadas en las acciones de la dupla durante la actividad.

Ítem i:
Ítem ii:
Ítem iii:
Ítem iv:

Anote los aspectos relevantes de su observación.

Fase 2:

Describa las acciones que realizan los estudiantes durante el desarrollo de la fase.

Detalla las dificultades observadas en las acciones de la dupla durante la actividad.

Anote los aspectos relevantes de su observación.

Fase 3:

Describa las acciones que realizan los estudiantes durante el desarrollo de la fase.

Detalla las dificultades observadas en las acciones de la dupla durante la actividad.

Anote los aspectos relevantes de su observación.