

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA



PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

**APLICACIONES NO CONVENCIONALES DE CADENA
DE MARKOV**

Tesis para optar el Título de Ingeniero Industrial, que presenta el
bachiller:

Telmo Leonardo Quiroz Martínez

ASESOR: Ing. Walter Silva Sotillo

Lima, noviembre 2011

Resumen

Las Cadenas de Markov son sucesiones de variables aleatorias que permiten evaluar la probabilidad con la que un estado actual puede alcanzar uno inmediatamente posterior. Se ha utilizado en diversas aplicaciones como predicciones de escenarios económicos, patrones de compra, estimación de indicadores, administración de inventarios, proyecciones demográficas, pronósticos de votación, etc.

En el presente trabajo se mostrarán aplicaciones no convencionales de Cadenas de Markov, las cuales han sido orientadas a disciplinas artísticas, con la finalidad de desmitificar la aparente incompatibilidad entre las matemáticas y las artes.

Entre las mencionadas aplicaciones se encuentran dos composiciones musicales contemporáneas, creadas utilizando como referencia la obra musical de una banda determinada. Dichas composiciones obtenidas guardan notoria relación con el estilo musical de la banda referencial. Los archivos de audio se encuentran adjuntos al presente documento.

Del mismo modo, se muestran poesías y textos generados con esta aplicación matemática y que guardan relación con el estilo literario de escritores tomados como referencia.

Finalmente se mostrarán aplicaciones de las Cadenas de Markov para la Generación de Imágenes y Videos a través de sistemas generativos, disciplina denominada “Arte Procesual-Aleatorio”.

Dedicatoria

A Dios, mi escudo y fortaleza.

*A Silvia, mi madre,
por su gran ejemplo y esfuerzo.*

*A Miriam, mi amada esposa
y ayuda idónea.*

*A mi asesor, Walter Silva,
por su amistad y oportuno consejo.*



Índice General

Índice de Tablas

Índice de Figuras

Índice de Anexos

Introducción

Capítulo 1 : Marco Teórico.....	1
1.1. Origen de la Teoría Markoviana	1
1.2. Procesos Estocásticos.....	2
1.3. Cadenas de Markov.....	3
1.3.1. Ergodicidad.....	5
1.3.2 Cadenas Absorbentes	6
1.4. Probabilidades de Transición en la n-ésima etapa	7
1.5. Clasificación de Estados en una Cadena Markoviana	9
1.6. Probabilidades de Estado Estable	10
Capítulo 2 : Matemáticas y Arte	11
2.1. Similitudes y Relación.....	11
2.2. Matemáticas y Música	13
2.2.1. Influencia de las Matemáticas en el desarrollo de la melodía.....	14
2.2.2. Los Elementos Esenciales de la Música.....	15
2.2.3. El Sistema Musical Occidental.....	16
2.2.4. El sonido y sus características.....	17
2.2.5. La Música y el Tiempo	18
2.2.6. Los Valores de las Notas	19
2.2.7. El Compás	20
2.2.8. Estructura de Composiciones Musicales Occidentales Contemporáneas	21
2.2.9. La Estructura Musical y sus Atributos Matemáticos.....	22
2.3. Matemáticas y Literatura.....	25
2.3.1. Las cadenas de Markov y su relación con las obras literarias	30
2.3.2. Categorías gramaticales en el idioma castellano.....	31

2.4. Matemáticas y Artes	33
2.4.1. La Proporción Áurea	36
2.4.2. Los fractales	38
2.4.3. Computer-Art, Arte-Procesual-Aleatorio y Sistemas Generativos.....	41
Capítulo 3 : Cadenas de Markov Aplicada a la Composición Musical	
Contemporánea	43
3.1. Cadenas Markovianas y Composición Musical	43
3.2. Descripción de la Aplicación	43
3.3. Desarrollo de la Aplicación	48
3.3.1. Composición de una melodía a partir de una canción conocida.....	48
3.3.2. Composición de una melodía a partir de un conjunto de canciones conocidas	54
3.4. Análisis y comentarios de los resultados de la Aplicación	58
Capítulo 4 : Cadenas de Markov Aplicadas a la Generación de Textos	60
4.1. Cadenas Markovianas y Generación de Textos	60
4.2. Descripción de la Aplicación	60
4.3 Desarrollo de la Aplicación	61
4.2.1. Generación de textos a partir de un texto de entrada breve	62
4.2.2. Generación de textos a partir de un texto de entrada extenso	71
4.4. Análisis y comentarios de los resultados de la Aplicación	77
Capítulo 5 : Cadenas de Markov Aplicadas a la Generación de Imágenes	79
5.1. Cadenas Markovianas y Generación de Imágenes	79
5.2. Descripción de la Aplicación	79
5.3. Resultados de la Aplicación.....	83
5.4. Análisis y comentarios de los resultados de la Aplicación	86
Capítulo 6 : Conclusiones y Recomendaciones.....	87
6.1. Composición Musical con Cadenas de Markov	87
6.2. Generación de Texto con Cadenas de Markov	89
6.3. Generación de Imágenes con Cadenas de Markov.....	91

Referencias Bibliográficas

Índice de Tablas

Tabla 1: Equivalencia entre cifrados	18
Tabla 2: Duración del Tempo	19
Tabla 3: Duración de las Notas	20
Tabla 4: Categorías Gramaticales en el idioma castellano	32
Tabla 5: Tabla de equivalencia entre cifrados	44
Tabla 6: Tabla función densidad	45
Tabla 7: Matriz de Primer Orden	45
Tabla 8: Matriz de Probabilidades de Primer Orden	46
Tabla 9: Matriz de Probabilidades Acumuladas de Primer Orden	47
Tabla 10: Distribución de Notas en la Canción “Don’t Panic”	48
Tabla 11: Estructura y notas que componen la pieza musical	49
Tabla 12: Matriz de Transiciones de Primer Orden de Markov	50
Tabla 13: Matriz de Probabilidades de Primer Orden	50
Tabla 14: Matriz de Probabilidades Acumulas de Primer Orden	50
Tabla 15: Transición de Notas de la Matriz de Primer Orden	50
Tabla 16: Transición de Notas de la Matriz de Primer Orden	51
Tabla 17: Transición de Notas de la Matriz de Primer Orden	51
Tabla 18: Matriz de Probabilidades Acumuladas de Primer Orden	52
Tabla 19: Composición de notas de la estrofa	52
Tabla 20: Composición de Notas de la Estrofa y Coro	53
Tabla 21: Composición Musical a partir de una canción conocida	53
Tabla 22: Distribución de Notas en el disco “Parachutes” (2000)	55
Tabla 23: Transiciones de Notas (Proceso de Markov de Primer Orden)	56
Tabla 24: Transiciones de Notas (Proceso de Markov de Primer Orden)	58
Tabla 25: Descripción de Aplicaciones Matemáticas utilizadas en el Sistema Generativo	80

Índice de Figuras

Figura 1: Gráfica de Comportamiento de proceso estocástico	2
Figura 2: La Última Cena (Dalí 1955)	12
Figura 3: Notas Musicales en el Piano.....	16
Figura 4: El compás	20
Figura 5: Notas Posicionadas en cada vértice	22
Figura 6: Traslación de notas al Pentagrama	23
Figura 7: Reflexión geométrica	23
Figura 8: Reflexión de notas en Pentagrama.....	23
Figura 9: Inversión Geométrica.....	24
Figura 10: Inversión Geométrica en el Pentagrama.....	24
Figura 11: Perspectiva de un rostro	33
Figura 12: Aplicaciones perspectivas del abatimiento	34
Figura 13: El hombre de Vitrubio	35
Figura 14: Proporción áurea en una caracola	37
Figura 15: El Partenón de Atenas	37
Figura 16: Wentletrap (Epitonium scalare) del Pacífico Oeste.....	37
Figura 17: Conjunto de Cantor	38
Figura 18: Conjunto de Julia	39
Figura 19: Conjunto de Mandelbrot.....	39
Figura 20: Imagen generada con la Máquina de Dibujo de Henry	41
Figura 21: Etiquetado de notas de “Oh Susanna”	44
Figura 22: Histograma de notas.....	45
Figura 23: Diagrama de red de transiciones entre notas	46
Figura 24: Histograma de notas y función densidad	49
Figura 25: Sintetizador de Texto de Markov	62
Figura 26: Sintetizador de Texto de Markov: Opción de eliminación de caracteres	63
Figura 27: Sintetizador de Texto de Markov: Opción para definir el orden de la matriz de Transición.....	71

Figura 28: Generación de texto de 10,000 palabras y matriz de transición de primer orden.....	72
Figura 29: Funcionamiento interno del Sistema Generativo	82
Figura 30: Simulación del comportamiento de los genes.....	82
Figura 31: 100 random chromosomes	83
Figura 32: 100 random chromosomes – imagen 1 ampliada	84
Figura 33: 100 random chromosomes – imagen 2 ampliada	84
Figura 34: 100 random chromosomes – imagen 3 ampliada	84
Figura 35: Fotografía “f091148”	85
Figura 36: Aumento de fotografía “f091148”	85



Índice de Anexos

Anexo 1: Análisis de Transiciones de Notas del Disco Parachutes de Coldplay	CD
Anexo 2: Composición Musical con Cadenas de Markov a partir de una canción conocida	CD
Anexo 3 Composición Musical con Cadenas de Markov a partir de un grupo de canciones.....	CD
Anexo 4: Código del Sistema Markov Text Synthesizer en C++.....	CD
Anexo 5: Generación de Texto a partir de un texto de entrada breve.....	CD
Anexo 6: Generación de Texto a partir de un texto de entrada extenso	CD
Anexo 7: Generación de Imágenes a partir del Sistema Generativo GA2	CD
Anexo 8: Generación de Video a partir del Sistema Generativo GA2.....	CD

Introducción

Las aplicaciones de herramientas matemáticas son muy útiles para la humanidad. En el presente estudio la herramienta matemática utilizada será las Cadena de Markov y su aplicación será orientada a disciplinas artísticas con la finalidad de demostrar el vínculo existente entre las Matemáticas y las Artes.

Para lograr este objetivo, se trabajará de la siguiente forma:

En el primer capítulo hablaremos de la historia de las cadenas markovianas y definiremos conceptos teóricos que nos permitan entender las aplicaciones.

En el segundo capítulo hablaremos de la relación existente entre las matemáticas y la disciplinas artísticas: música, literatura y pintura, respectivamente.

En el tercer capítulo aplicaremos la Cadena de Markov para componer música con el estilo de composición de canciones conocidas.

En el cuarto capítulo aplicaremos la Cadena de Markov para la generación de textos con el estilo literario de obras conocidas.

En el quinto capítulo aplicaremos la Cadena de Markov para la generación de imágenes.

En el sexto capítulo presentaremos las conclusiones y recomendaciones de cada aplicación realizada en el presente estudio.

Capítulo 1 : Marco Teórico

1.1. Origen de la Teoría Markoviana

Esta teoría debe su nombre a Andrei Andreyevich Markov quien nació en San Petersburgo, Rusia, el 14 de Junio de 1856. Estudió matemáticas en la Universidad de San Petersburgo y se graduó en el año 1878. En sus inicios como docente, alrededor del año 1886, focalizó su trabajo en análisis y teoría del número, fracciones continuas, límite de integrales, teoría de aproximación y la serie de convergencias.

También estuvo interesado en la poesía e hizo estudios de los diversos estilos poéticos.

Estudió, entre otros muchos aspectos, las construcciones lingüísticas a partir del cálculo matemático (1913). Así, por ejemplo, analizó la producción literaria del gran poeta ruso Puschkin, llamada “Eugene Onieguin”, y dedujo que las letras del alfabeto cirílico, como las de cualquier otro alfabeto, iban apareciendo relacionadas con las que las precedían en la escritura. La nueva letra está determinada por la anterior, pero es independiente de la manera en la que aparece respecto de las anteriores.¹

Markov es recordado por su estudio de cadenas secuenciales, que consisten en variables al azar, en las que la variable futura es predeterminada por la preexistente, pero independiente de la manera que ésta se generó de sus precursores. Es decir, se trata de un sistema que sufre a lo largo del tiempo cambios de estado o transiciones aleatorias y las probabilidades que describen la forma en que el proceso evolucionará en el futuro, son independientes de los eventos ocurridos en el pasado.² El sistema no está desprovisto de memoria en su totalidad, sólo guarda información del recuerdo más reciente de su pasado.³

¹ Tomado de: <http://www.infoamerica.org/teoria/markov1.htm>

² Winston W. *Investigación de Operaciones*. Traducido por Adolfo Andrés Velasco Reyes. Cuarta Edición. México: 2005.

³ Gordon, P. *Cadenas Finitas de Markov y sus Aplicaciones*. Traducido por Ruiz E. y Bonet E. Primera Edición. Barcelona: 1967.

Es muy importante comentar que su estudio no estuvo basado en un simple análisis estadístico, sino que intentó aplicarlo a la generación de textos literarios.

Las cadenas de Markov se han aplicado en áreas diversas, como educación, comercialización, servicios de salud, finanzas, contabilidad y producción, tras los aportes de Norbert Wiener (1923) y Andrei Kolmogorov (1930).

1.2. Procesos Estocásticos

Los procesos estocásticos, son aquellos que evolucionan en el tiempo de una manera probabilística. Estos son de interés para describir el comportamiento de un sistema en operación durante algunos períodos, debido a que permiten su observación, control y modelamiento.

Se definen como procesos dependientes de leyes causales y probabilísticas, por lo que están sometidos al azar y son objeto de análisis estadístico. Este tipo de procesos son útiles para poder comprender la correlación, que estadísticamente significa la relación entre varios grupos de datos.⁴

Como podemos observar en la figura 1, un proceso estocástico depende de un valor aleatorio y de periodos de tiempo.

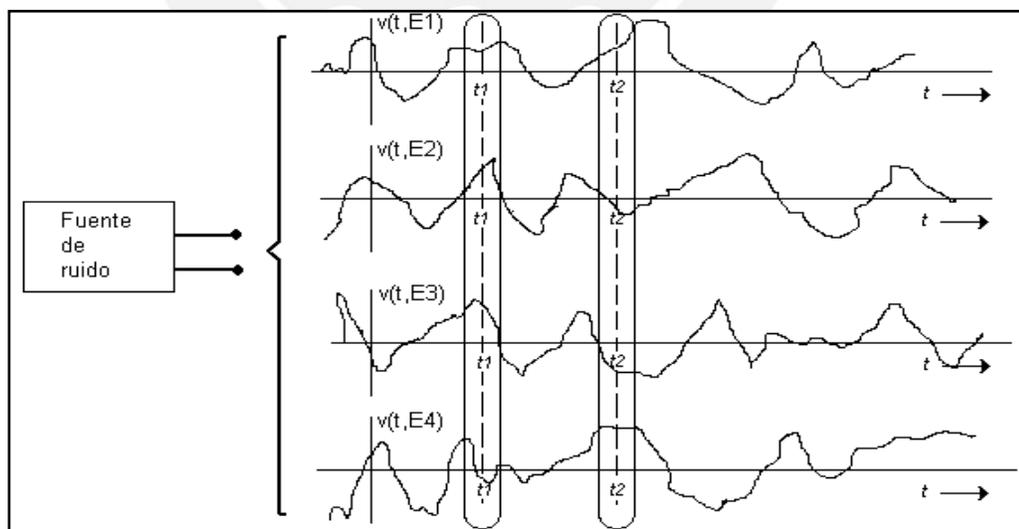


Figura 1: Gráfica de Comportamiento de proceso estocástico
Fuente: Notas de Enseñanza UNAM

⁴ Tomado de notas de enseñanza UNAM: <http://verona.fi-p.unam.mx/boris/teachingnotes/estocasticos.pdf>

Para comprender los procesos estocásticos será importante suponer el escenario en el que se observan algunas características de un sistema en puntos discretos en el tiempo (identificados con $0, 1, 2, \dots$). Sea X_t el valor de la característica del sistema en el tiempo y considerado como variable aleatoria.

Entonces, un proceso estocástico discreto en el tiempo es una descripción de la relación entre las variables aleatorias X_t : (X_0, X_1, X_2, \dots) . Los procesos estocásticos expresados como variables aleatorias aportan información relevante de los procesos en análisis.

Por otro lado, conviene definir una matriz estocástica, la cual debe cumplir las siguientes condiciones:

$$P_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j = 1, 2, 3, 4, \dots, r \quad (1.2.1)$$

$$\sum_{j=1}^r P_{ij} = 1, \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, \dots, r \quad (1.2.2)$$

El proceso Estocástico X_t puede ser, por ejemplo, una representación matemática de la forma cómo evoluciona el clima en la ciudad de análisis a través del tiempo.

Estos procesos son denominados “*Procesos Estocásticos de Tiempo Discreto con Espacio de Estado Finito*” y son una característica de las cadenas de Markov.

1.3. Cadenas de Markov

Las cadenas de Markov permiten conocer el gobierno y comportamiento de determinados tipos de procesos estocásticos.

Describen la forma en que evolucionará un proceso estocástico en el futuro y son independientes de los eventos ocurridos en el pasado, con excepción de su predecesor inmediato. Es un tipo especial de proceso en el tiempo, en el que se presenta una cantidad discreta de estados e instantes de tiempo.

Formalmente diremos diríamos que dado un evento de interés A perteneciente al espacio muestral Ω y que es integrado por un número de eventos finitos denominados “estados”.

Se dice que para un experimento de ensayos independientes Bernoulli con extracción al azar y reposición, la probabilidad de ocurrencia de un “éxito” a lo largo del muestreo $M = \{m_1, m_2, m_3, \dots, m_n\}$ es constante e igual a “ p ”.

Por lo tanto se concluye que para un número finito de estados de probabilidad “ p ” constante, se cumple la siguiente propiedad descrita en la fórmula 1.3.1, la cual se aplica para todo evento del conjunto M .

$$P(X_{t+1} = j \mid X_0 = k_0 ; X_1 = k_1, \dots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = i) = P(X_{t+1} = j \mid X_t = i) \quad (1.3.1)$$

La propiedad descrita anteriormente es la que define las Cadenas Markovianas, dado que establece la probabilidad condicional de un suceso en el estado “ $t+1$ ”, dada la ocurrencia del evento “ t ”.

Se verifica la independencia de los eventos pasados, con la excepción del inmediato anterior.

Asimismo observamos que para todo i, j , se cumple:

$$P(X_{t+1} = j \mid X_t = i) = P(X_t = j \mid X_0 = i) = p_{ij} \quad (1.3.2)$$

De tal manera que se define la probabilidad de transición de 1 paso, es decir, de un solo estado en el tiempo, la cual tiene una probabilidad que no cambia mientras varía el tiempo, por lo que se le denomina “estacionaria”.

Análogamente, esta característica se puede observar en “ n pasos”, tal como se puede observar en la ecuación 1.3.3 y de ella se desprende la matriz de transición de “ n pasos” mostrada en 1.3.4.

$$P(X_{t+n} = j \mid X_t = i) = P(X_n = j \mid X_0 = i) = p_{ij} \quad (1.3.3)$$

$$P^n = \begin{bmatrix} p_{00} & \dots & p_{0M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M0} & \dots & p_{MM} \end{bmatrix} \quad (1.3.4)$$

Dados los estados i y j , la probabilidad de transición del estado i al estado j será denotada por p_{ij} y designa la probabilidad de que estado j suceda al estado i . Estas probabilidades de transición siempre son no negativas. Todas las probabilidades de transición se ordenan en denominada Matriz de Transición de “ n pasos”, donde cada nodo representa un elemento del espacio muestral (estado) y en la cual se presenta la particularidad de que la suma de cada renglón es igual a 1.

1.3.1. Ergodicidad

Un estado i es considerado estado transitorio si hay un estado j alcanzable desde i , pero no alcanzable desde el estado j .

Se denomina estado recurrente a aquel estado i que puede alcanzar un estado j y es alcanzable desde el estado j .

Una Cadena de Markov es denominada irreducible cuando presenta alguna de las siguientes características:

- Todos sus estados son recurrentes y por lo tanto la Cadena de Markov es recurrente.
- Todos sus estados son transitorios y por lo tanto la Cadena de Markov es transitoria.

Un estado i es periódico con período $k > 1$, si k es el menor número tal que todas las trayectorias que parten del estado i y regresan al estado i tienen una longitud múltiplo de k . Si un estado recurrente no es periódico, se le denomina aperiódico.

Una cadena de Markov es denominada irreducible, cuando presenta alguna de las siguientes características:

- Todos los estados son periódicos con período k y por lo tanto la Cadena de Markov es periódica de período k .

- Ningún estado es periódico, y por lo tanto la Cadena de Markov es aperiódica.

Se llama Cadena de Markov Ergódica a aquella que presenta las siguientes características:

- La Cadena de Markov es Irreducible.
- La Cadena de Markov es recurrente.
- La Cadena de Markov es aperiódica.

La ergodicidad es un concepto sumamente importante en el análisis de las cadenas de Markov, pues tiene relación con el comportamiento a largo plazo del sistema. En el largo plazo, se presenta la particularidad de que los estados se hacen estables y diferentes de cero. En un régimen permanente, todos los estados tienen una probabilidad no nula.

1.3.2 Cadenas Absorbentes

Un estado i será absorbente si se presenta el caso de que $p_{ij} = 1$, es decir, una vez que se llega a este estado i , permanecerá en estado i .

Una Cadena de Markov es absorbente si presenta por lo menos un estado absorbente y es posible ir de cada estado no absorbente hasta por lo menos un estado absorbente. Si la cadena de Markov es finita y absorbente, se reordenan los estados transitorios y se obtiene una matriz ordenada de transición en la que se puede calcular:

- El número esperado de veces que se estará en un estado transitorio antes de llegar a un estado absorbente $(I-Q)^{-1}$. Es decir, es el tiempo promedio hasta caer en un Estado Absorbente.
- La probabilidad de caer en estados absorbentes $(I-Q)^{-1} R$.

Esto se desprende del hecho de que la matriz de transición puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} s-m \text{ filas} \\ m \text{ filas} \end{array} \begin{array}{cc} \begin{array}{c} s-m \\ m \end{array} \text{ columnas} & \begin{array}{c} m \\ m \end{array} \text{ columnas} \\ \left[\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right]
 \end{array}$$

En donde se supone que hay $s-m$ estados transitorios y m estados absorbentes.

En esta matriz se presenta la submatriz Q , la cual representa los Estados No Absorbentes, la submatriz R a los Estados Absorbentes y la submatriz 1 a la matriz identidad.

1.4. Probabilidades de Transición en la n -ésima etapa

Las probabilidades de transición asociadas a los estados cumplen un rol, evidentemente, muy importante en el estudio de las Cadenas de Markov.

Dado el estado i en el tiempo m , la probabilidad de que n períodos después esté en el estado j , es independiente de m , por esa razón:

$$P(X_{m+n} = j | X_m = i) = P(X_n = j | X_0 = i) = P_{ij}(n) \quad (1.4.1)$$

Donde $P_{ij}(n)$ se denomina “probabilidad del n -ésimo paso de una transición del estado i al estado j ”.

En tal sentido, se puede decir que:

$$P_{ij}(n) = \text{ij-ésimo elemento de } P^n$$

Luego, utilizando la formulación realizada por Patrick Gordon⁵, demostraremos el comportamiento asintótico de P^n . Esto quiere decir que cuando n tiende al infinito, se comporta como una matriz estocástica con todas sus filas idénticas.

El simple hecho de que P^n sea una matriz, con sus términos acotados entre cero y uno, implica que:

“Todos los valores propios de una matriz estocástica tienen su módulo inferior o igual a 1”.

“Todo valor propio de módulo 1 de una matriz estocástica es raíz de la unidad”.

La teoría de matrices nos enseña que dada una matriz A cualquiera, con r filas y r columnas, compuesta por elementos reales o complejos, que admite diversos valores propios s_0, s_1, \dots, s_K , con órdenes de multiplicidad respectivos de $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, A^n$, entonces A^n se puede escribir de la siguiente forma:

$$A^n = E_n + \sum_k s_k^n B_k(n) \quad (1.4.2)$$

Donde:

E_n es una matriz que sólo existe si A admite el valor propio 0 y que en todos los casos es nula para n mayor o igual que r .

Los $B_k(n)$ son polinomios matriciales en n , de grados respectivos d_k , es decir, matrices cuyos términos son polinomios en n de grado menor o igual d_k (y algunos exactamente iguales a d_k), donde d_k representa la diferencia entre el orden de multiplicidad a_k de s_k , y la dimensión d_k del espacio propio asociado a s_k , de tal manera que $1 \leq d_k \leq a_k$.

Utilizando las propiedades de los valores propios de una matriz estocástica, podremos dar a la ecuación (1) una forma particular, llamando s_0 al valor propio 1 y dividiendo en dos grupos los otros valores propios (no nulos).

⁵Gordon, P. *Cadenas Finitas de Markov y sus Aplicaciones*. Traducido por Ruiz E. y Bonet E. Primera Edición. Barcelona: 1967, pp. 89-96.

1.5. Clasificación de Estados en una Cadena Markoviana

Las Cadenas de Markov presentan las siguientes propiedades:

Cualquier estado se comunica consigo mismo ($p_{ij}^{(0)} = P(X_0 = i | X_0 = i) = 1$).

Si el estado i se comunica con el estado j , entonces el estado j se comunica con el estado i .

Si el estado i se comunica con el estado j y el estado j se comunica con el estado k , entonces el estado i se comunica con el estado k .

Es muy útil saber si un proceso que comienza en un estado regresará alguna vez a él. A partir de esta necesidad, surgen las siguientes definiciones que planteamos a continuación.

- Estado Transitorio: Se presenta este caso cuando el proceso ha entrado y salido de un estado y este nunca regresa a él. En tal sentido, se puede decir que el estado transitorio será visitado sólo un número finito de veces.
- Estado Recurrente: Se presenta este caso cuando el proceso, regresa a un estado, después de haber pasado por él. Por lo tanto es recurrente sí y sólo sí no es transitorio. Este estado será visitado un número infinito de veces.
- Estado Absorbente: Se presenta este caso cuando después de haber entrado a este, el proceso nunca saldrá de ahí. Por lo tanto, se trata de un estado absorbente sí y sólo sí $P_{ij} = 1$.
- Estado Periódico: Se presenta este caso cuando la cadena de Markov presenta un período $k > 1$ y las trayectorias que conducen del estado i de regreso al estado i son múltiplos de k .
- Estado Ergódico: Se presenta este caso cuando un estado es recurrente y aperiódico. Una matriz ergódica presenta la particularidad de que sus probabilidades de transición de n pasos convergen a las probabilidades de estado estable conforme n se hace más grande.

1.6. Probabilidades de Estado Estable

Las Cadenas de Markov presentan la interesante característica de que conforme es lo suficientemente grande, todos los renglones de la matriz tienen elementos idénticos. En otras palabras podemos decir que los estados se hacen estables.

Esto significa que la probabilidad de que el sistema esté en cada estado j ya no depende del estado inicial del sistema.

Se llaman probabilidades de estado estable de la Cadena de Markov a aquellos valores π_j , obtenidos después de un número grande de transiciones. Estos valores son independientes de la probabilidad inicial definida para los estados.



Capítulo 2 : Matemáticas y Arte

2.1. Similitudes y Relación

Se dice que las matemáticas y las artes tienen notables similitudes. Las matemáticas surgieron ante la necesidad de registrar las cosechas, el ganado, las operaciones comerciales, el paso del tiempo, las observaciones del cielo; y consisten, en principio, en números y conteos. De esta manera se desarrollaron signos y palabras para los números.

El arte surge ante la necesidad del ser humano de expresar sus sentimientos, estados de ánimo, devoción, manera de vivir, visión del mundo, a través de recursos plásticos, sonoros, lingüísticos o mixtos.

Tanto el artista como el matemático se encuentran abstraídos en las tareas de dibujar, escribir, interpretar o componer. Es así como se presenta el fenómeno que no sucede en otras disciplinas: el nacimiento de niños prodigio y grandes genios, cuyas memorias se honran alrededor del mundo.

Se tienen evidencias anecdóticas en las que el talento para las artes y las matemáticas suelen coincidir. El Dr. Gareth Loy en un artículo de presentación de su libro: *"Musimathics: A guided tour of the mathematics of music"*, comenta que Albert Einstein era un diestro violinista, amante de la música de Mozart y apasionado intérprete de su obra.⁶ El físico alemán comentó alguna vez, que mientras Beethoven creó su música, la de Mozart era *"tan pura, que parecía haber existido en el universo desde siempre, esperando ser descubierta por su dueño"*.

Del mismo modo, Loy hace mención que el extraordinario compositor Johann Sebastian Bach, quien es reconocido por sus más de 500 composiciones, por su calidad interpretativa y por ser el primer gran improvisador de renombre, tuvo mucho interés y destreza en la criptografía, ciencia que busca cifrar o descifrar información mediante técnicas especiales.

⁶ Marcel, O. *Journal of Mathematical Psychology*. School of Engineering and Science. Alemania: 2008, pp. 265-267

Por otro lado, en pinturas del famoso Salvador Dalí se pueden observar figuras evidentemente inspiradas por las matemáticas, la utilización de la razón áurea, conocida también como “proporción divina”, entramados áureos, figuras geométricas perfectamente diseñadas como dodecaedros y fractales. A continuación la figura 2, nos muestra la pintura “La Última Cena” de Dalí, en la cual podemos observar un dodecaedro perfectamente diseñado y un notorio equilibrio en las proporciones.

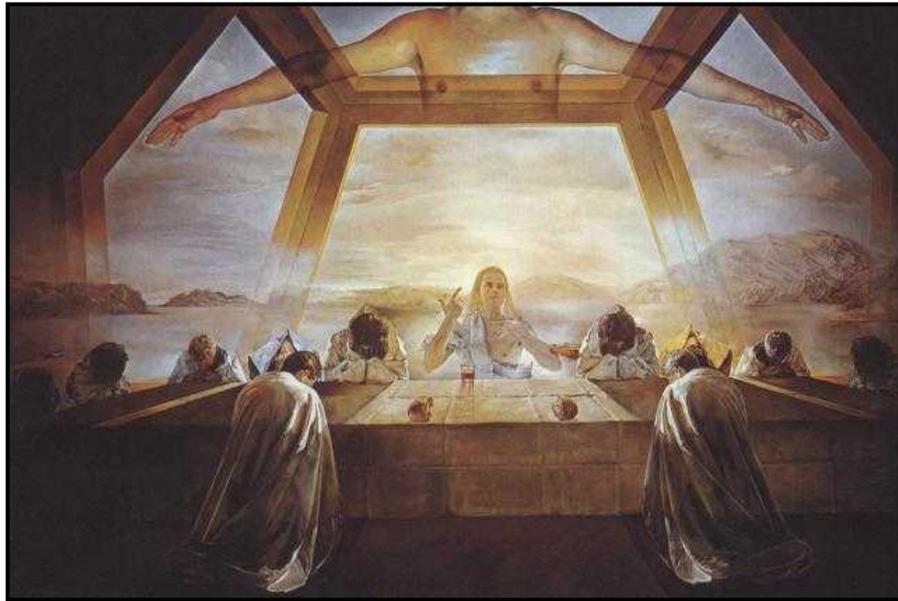


Figura 2: La Última Cena (Dalí 1955)
Fuente: National Gallery of Art - Washington

Basta una simple reflexión como para identificar la relación entre las matemáticas y las artes. En palabras del compositor, Edward Rothstein, podríamos decir que *“por la mezcla entre lo terrenal y lo celestial, lo esotérico y lo práctico, lo universal y lo particular, ambas disciplinas han tenido un poder místico desde la antigüedad. Hasta la fecha el aspecto mágico y ritualista se mantiene porque hay que tener cierto grado de iniciación para introducirse en la lectura de una partitura así como para poder seguir la demostración de un teorema”*.⁷

⁷ Rothstein, E. *Emblems of the Mind: The inner Life of Music and Mathematics*. Primera Edición. New York: 1995.

En ambos casos se trata de la naturaleza del hombre, de su necesidad de expresarse, de producir, de dirigirse a un espectador, lo que las hace fascinantes y atractivas.

2.2. Matemáticas y Música

Las matemáticas y la música están ligadas desde hace muchos siglos. Podríamos mencionar los estudios de Pitágoras de Samos, quien estudió la naturaleza de los sonidos musicales. En aquellos tiempos se pensaba que las órbitas de los cuerpos que giraban alrededor de la tierra producían una especie de sonidos que armonizaban entre sí y producían un bello sonido, denominado “música de las esferas”.

Susana Tiburcio, en su trabajo *“Teoría de la Probabilidad en la Composición Musical Contemporánea”*⁸, comenta que Pitágoras *“describe un sistema de ideas que busca unificar los fenómenos del mundo físico y del mundo espiritual en términos de números, en particular, en términos de razones y proporciones de enteros”*.

Pitágoras comprendía a la música como uno de los métodos esenciales de comunicación y placer; y fue el primero en darse cuenta que podía ser medida por medio de proporciones, las cuales producían tonos agradables al oído humano y que ahora conocemos como los sonidos de la serie armónica.

Su estudio se basó en el análisis de los sonidos que se producen al tocar una cuerda y que dependen de una serie de factores como grosor, longitud y tensión; cualquiera de estas variables afecta la frecuencia de vibración de una cuerda. Observó que al dividir una cuerda a la mitad, ésta producía un sonido que era una octava más aguda que el original, cuando la proporción era de 2:3 se producía una quinta y que otro tipo de razones sencillas también producían sonidos agradables.

⁸ Tiburcio, S. *Teoría de la Probabilidad en la Composición Musical Contemporánea*. Tesis de Licenciatura en Música. Puebla: 2000. pp. 9-11

Bajo este contexto, números y belleza eran uno solo. En palabras de Tiburcio, diríamos que *“el mundo físico y el emocional podían ser descritos con números sencillos y existía una relación armónica entre todos los fenómenos perceptibles”*.

2.2.1. Influencia de las Matemáticas en el desarrollo de la melodía

Es posible que podamos identificar muchas de las reglas que caracterizan un estilo musical, de manera que logremos obtener alguna composición que cumpla con todos los patrones que la normen, sin embargo, esta composición no necesariamente será agradable a nuestra sensibilidad auditiva, pues requerirá contextualización musical. Para lograr este objetivo, en el presente trabajo, aplicaremos un análisis con cadenas de Markov, pues estas brindan la ventaja de conducir un proceso a partir de composiciones existentes, por lo que es posible componer música con el estilo de otros autores.

David Temperley, investigador y autor del libro *“Music and Probability”*⁹, comenta que desde la década de 1950, han sido varios los esfuerzos de muchos investigadores por aclarar esta relación entre las matemáticas y el desarrollo de la melodía. Comenta que en el año de 1953, Leonard Meyer buscó describir cuantitativamente y comparar los estilos musicales. Meyer, señaló que la dependencia entre los estados musicales en una composición, sugiere una conexión por medio de procesos de Markov.

Desde entonces un gran número de compositores e investigadores han empleado técnicas probabilísticas para la generación de música. En algunos casos, el objetivo ha sido el de sintetizar la nueva música en un estilo existente. Estos intentos están estrechamente relacionados con la recopilación de datos de la música como la distribución de tonos, ritmos, intervalos, etc. Al obtener el estilo definido de la música analizada, estas distribuciones se utilizan para generar al azar o de modo estocástico, opciones para producir música con las mismas propiedades estadísticas.

⁹Temperley, D. *“Music and Probability”*. Cambridge: 2007. pp. 36-37

Por ejemplo, Brooks (1957) utilizó este método para generar un himno con melodías conocidas. Más recientemente, Conklin y Witten (1995) presentaron un generador con el estilo musical de Bach, en el que se hace una abstracción matemática de datos para obtener nueva música.

Otros compositores, como John Cage y Iannis Xenakis, han empleado métodos estocásticos, pero no con el objetivo de simular estilos existentes, sino para desarrollar nuevos efectos musicales.

2.2.2. Los Elementos Esenciales de la Música

La música está conformada por cuatro elementos esenciales: Ritmo, Melodía, Armonía y Timbre.¹⁰

El Ritmo es la frecuencia de repetición de sonidos caracterizados por su altura (altos y bajos), su volumen (fuertes y débiles) y su duración (largos y breves); sujetos a intervalos regulares o irregulares. Está determinado por la duración de los sonidos y la combinación de estas duraciones, brinda un toque característico a cada pieza musical.

La Melodía es una sucesión de sonidos y silencios que musicalmente expresan una idea completa, en la que fluye el ritmo musical. Tiene identidad, significado propio dentro de un entorno sonoro particular y está delimitada por una escala musical. Debe tener proporciones satisfactorias para que pueda ser apreciada por su belleza. Es este elemento al que le prestaremos particular atención en el desarrollo de nuestra aplicación de la cadena markoviana.

La Armonía es la combinación equilibrada de sonidos, que al ser ejecutados generan una sensación de calma (armonía consonante) o tensión (armonía disonante). Un ejemplo de armonía es el sonido de un acorde, el cual está conformado por un grupo de notas que suenan al mismo tiempo.

Finalmente, el Timbre es la cualidad del sonido producido por un determinado agente sonoro. Este es el punto sobre el cual se decide con qué instrumento ejecutar determinada pieza musical, según lo que el autor desea expresar.

¹⁰ Tiburcio, S. *Teoría de la Probabilidad en la Composición Musical Contemporánea*. Tesis de Licenciatura en Música. Puebla: 2000. pp. 157-159

2.2.3. El Sistema Musical Occidental

En el sistema musical occidental existen 12 notas, las cuales pueden visualizarse fácilmente en el teclado de un piano, como se muestra en la figura 3. Estas 12 notas corresponden a sonidos diferentes, cuyos intervalos son de un semitono (medio tono) entre cada nota y una octava por todo el conjunto.

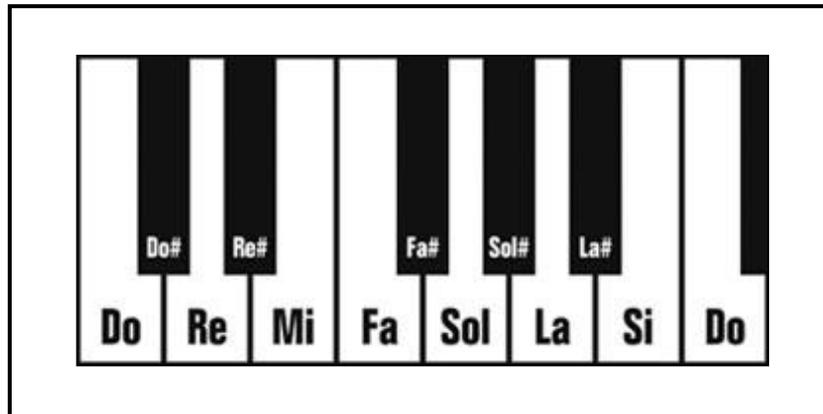


Figura 3: Notas Musicales en el Piano
Fuente: Elaboración Propia

Como podemos visualizar en la figura anterior, cada octava (12 semitonos) se repite la misma nota desde la que se empezó.

Cuando se tiene el símbolo “#” al lado derecho de una nota, implica que la nota está un semitono encima que su inmediata anterior y si se presenta el símbolo “b” significa que la nota se encuentra un semitono debajo de su inmediata posterior. Por ejemplo notamos en la primera tecla negra de la figura 3 que la nota es Do#, es decir, un semitono mayor que Do. Del mismo modo podríamos decir que esa misma tecla negra es un Re^b pues se encuentra un semitono por debajo de su inmediata posterior Re.

Por simple inferencia podemos concluir que la nota Do# es igual a Re^b. Por esa razón, las notas colocadas en las teclas negras son denominadas enarmónicas, debido a que tienen 2 nombres posibles.

A esta escala compuesta por Do, Do#, Re, Re#, Mi, Fa, Fa#, Sol, Sol#, La, La#, Si; se le conoce como escala cromática y tuvo su origen a finales del siglo XIX.

2.2.4. El sonido y sus características

El sonido es un fenómeno físico originado por las vibraciones de los cuerpos. Los elementos que conforman el sonido son la Intensidad, la Altura y el Timbre. La Intensidad está relacionada con la fuerza con que se produce el sonido, en una guitarra se puede notar con la fuerza con la que se toca una cuerda.

La Altura está relacionada con la frecuencia del sonido, lo que determina que un sonido sea grave (menor frecuencia) o agudo (mayor frecuencia). En una guitarra, la altura depende del traste.

El Timbre, característica descrita anteriormente, es la cualidad del sonido que nos permite identificar con qué instrumento está siendo producido.

Los sonidos se han normalizado según algunas propiedades físicas, de tal manera que se han logrado obtener diversas cantidades de escalas.

Una escala es un ordenamiento de notas (sonidos) que siguen un patrón entre sí, hasta llegar a una octava¹¹.

Los nombres de las notas se derivan de un antiguo himno a Juan Bautista, escrito por Lombardo Pablo “El Diácono”, en el siglo VIII. De las primeras sílabas de los versos, Guido D’Arezzo dio nombre a las notas de la escala cromática.¹²

“**U**t queant laxis
Resonare libris
Mira gestorum
Famuli tuorum
Solve polluti
Labii reatum
Sancte Ioanis”

El cifrado americano establece una equivalencia de nombres en relación con el cifrado latino y es comúnmente utilizado por los músicos contemporáneos por su modo abreviado de presentar las notas.

¹¹ T. Burrows. *Método Completo de Guitarra*. Parramón 1998. p.48

¹² Tomado de: <http://ec.aciprensa.com/a/allahabad.htm>

En la tabla 1, presentada a continuación podemos observar las equivalencias del cifrado americano.

Tabla 1: Equivalencia entre cifrados

Cifrado Americano	Cifrado Latino
A	La
B	Si
C	Do
D	Re
E	Mi
F	Fa
G	Sol

Elaboración Propia

2.2.5. La Música y el Tiempo

La música y el tiempo tienen una relación muy intensa, pues la música se desarrolla en el tiempo. Los elementos de la música que se vinculan con el tiempo son el Tempo y el Ritmo. Un nuevo concepto a tratar será el denominado Tempo.

El Tempo hace referencia a la velocidad de una obra musical y se mide normalmente en pulsaciones por minuto (ppm). Se corresponde con las pulsaciones que debería haber por cada minuto y cada nota tiene su valor en función a la duración de cada pulsación.¹³

Muy a menudo las partituras tienen indicaciones del tempo al inicio de la pieza. En la siguiente tabla 2, presentamos los términos italianos comúnmente utilizados en las partituras para especificar el tempo, su significado, su velocidad en ppm y la duración del tempo.

¹³T. Burrows. *Método Completo de Guitarra*. Parramón 1998. pp.46-50

Tabla 2: Duración del Tempo

TEMPO	SIGNIFICADO	PPM
<i>Grave</i>	Muy lento, serio	Menos de 40
<i>Lento</i>	Lento	40-55
<i>Largo</i>	Con amplitud	45-65
<i>Adagio</i>	Cómodo	55-75
<i>Andante</i>	Que camine	75-105
<i>Moderato</i>	Velocidad moderada	105-120
<i>Allegro</i>	Rápido, alegre	120-160
<i>Vivace</i>	Vivo	150-170
<i>Presto</i>	Muy rápido	170-210
<i>Prestissimo</i>	Tan rápido como sea posible	Mayor a 210

Elaboración Propia

2.2.6. Los Valores de las Notas

Hemos dicho que la duración de las pulsaciones define el valor de una nota. Los valores de las notas provienen del fraccionamiento de un valor máximo establecido. Los valores subsiguientes a este parámetro inicial tienen un valor igual a la mitad del valor anterior.

La nota que presenta un mayor valor es la redonda, la cual equivale a 4 pulsaciones. El resto de notas provienen de su subdivisión hasta llegar a la semifusa con una valor de 1/16 de una pulsación, como se presenta en la tabla 3.

Este método fue definido en la edad media y se fue perfeccionando hasta finales del siglo XVIII.¹⁴

¹⁴T. Burrows. *Método Completo de Guitarra*. Parramón 1998. pp.50

Tabla 3: Duración de las Notas

NOMBRE	VALOR	SÍMBOLO
Redonda	1	
Blanca	1/2	
Negra	1/4	
Corchea	1/8	
Semicorchea	1/16	
Fusa	1/32	
Semifusa	1/64	

Elaboración Propia

2.2.7. El Compás

En toda partitura musical, las notas son agrupadas en pequeños bloques denominados “compases”. Estos contienen un número específico de pulsaciones o tiempos. La figura 4 nos muestra la forma como el compás es denotado en una partitura.

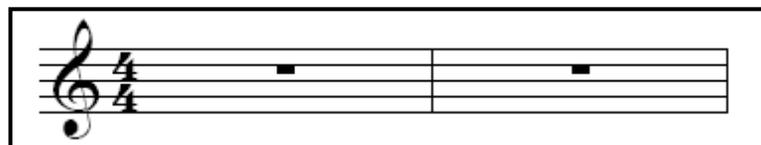


Figura 4: El compás
Fuente: Elaboración Propia

Observamos que se trata de un compás de 4 por 4. El valor 4 que se muestra en la parte superior indica el “número de pulsaciones en cada compás” y el valor 4 de la parte inferior indica el “valor de cada pulsación”.

La pieza musical presenta 4 pulsaciones en cada compás y cada pulsación vale una redonda.¹⁵

2.2.8. Estructura de Composiciones Musicales Occidentales Contemporáneas

Toda composición musical presenta una estructura, de manera que exprese un mensaje del artista al oyente.

Cada parte de esta estructura son denominadas secciones, las cuales a su vez están conformadas por un conjunto de compases que se repiten periódicamente. Susana Tiburcio comenta que “para cohesionar una composición, comúnmente se busca reafirmar los sonidos una y otra vez para evitar la monotonía, buscando que sea agradable al oído y de interés a la mente”.¹⁶

Incluyendo secciones repetitivas, la obra musical se hace más atractiva al oído humano, pues se genera placer musical al reconocer estos fragmentos periódicos.

Las secciones más utilizadas en una composición musical occidental son: Introducción, Estrofa, Puente o Pre-Coro, Coro y Solo.¹⁷

La Introducción es una sección de la pieza musical que suena al inicio y tiene la finalidad de captar la atención del oyente, de manera que se genere un estado de suspenso previo al ritmo principal. La Estrofa es aquella sección que se repite a lo largo de la pieza musical y que comúnmente tiene distinta letra.

El puente es un interludio, es decir, tiene la función de conectar dos secciones de la pieza musical, por medio de una conexión armónica. Su progresión de acordes y lírica son las características de esta sección. El pre-coro o pre-estribillo es un puente de transición en el que se introduce un nuevo modelo armónico, el cual busca que la armonía del estribillo sea novedosa.

¹⁵ T. Burrows. *Método Completo de Guitarra*. Parramón 1998. pp.50

¹⁶ Tiburcio, S. *Teoría de la Probabilidad en la Composición Musical Contemporánea*. Tesis de Licenciatura en Música. Puebla: 2000. pp. 157-159

¹⁷ Tiburcio, S. *Teoría de la Probabilidad en la Composición Musical Contemporánea*. Tesis de Licenciatura en Música. Puebla: 2000. pp. 161-166

El Coro o Estribillo es la sección que asume el nivel dinámico más alto y que se repite periódicamente a lo largo de la pieza musical. Tiene un intenso contraste melódico, armónico y rítmico con el verso.

2.2.9. La Estructura Musical y sus Atributos Matemáticos

Podríamos decir, según avanzamos en el presente estudio, que en toda obra musical, existe una estructura influida por las matemáticas. Son varios los atributos de la música que pueden ser medidos y evaluados con criterios matemáticos. El matemático Julio Estrada, con la colaboración de Jorge Gil, publicó en su libro “Música y Teoría de grupos finitos”¹⁸, una aplicación de la teoría de grupos finitos y el álgebra de Boole, la cual estudia la simetría de las formas, para analizar estructuras musicales.

Observó que existe coincidencia entre estructuras musicales y características de simetría, tales como la traslación, reflexión, inversión y retrogradación. La simetría es muy importante en la obra musical contemporánea, pues hace que la música sea agradable y llamativa al oído humano.

En las figuras 5 a la 2.2.9.5, presentamos algunos ejemplos del estudio mencionado.

Traslación: Este caso podemos comprenderlo de manera simple al colocar una nota en el vértice de un triángulo, tal como se presenta en la figura 5. Al trasladar las notas al pentagrama, podemos observar esta simetría en la figura 6.

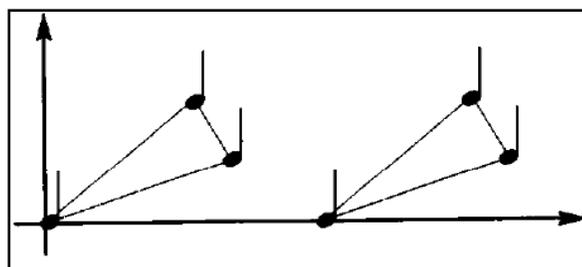


Figura 5: Notas Posicionadas en cada vértice
Fuente: Estrada (1984)

¹⁸ J. Estrada, J. Gil, J. *Música y Teoría de Grupos Finitos*. UNAM 1984



Figura 6: Traslación de notas al Pentagrama
Fuente: Estrada (1984)

Reflexión: En las figuras 7 y 8 se puede observar la transformación geométrica de reflexión. El equivalente musical de esta transformación es el llamado retrógrado.

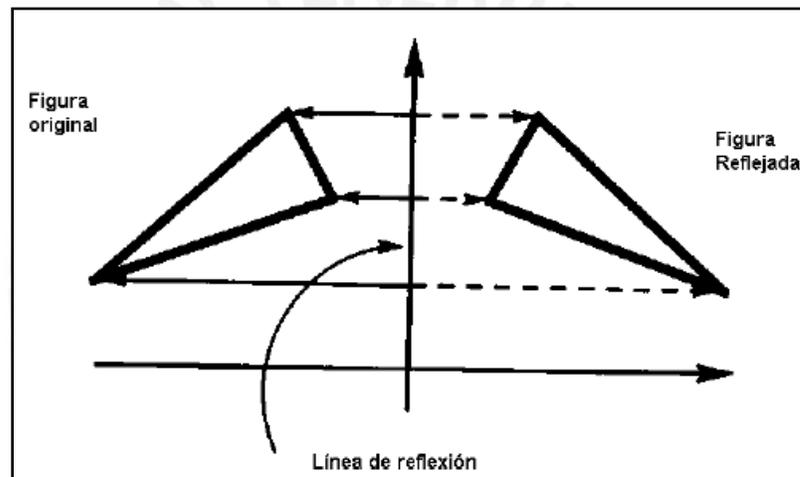


Figura 7: Reflexión geométrica
Fuente: Estrada (1984)



Figura 8: Reflexión de notas en Pentagrama
Fuente: Estrada (1984)

Inversión: La figura 9 muestra la inversión y su analogo musical en la figura 10.

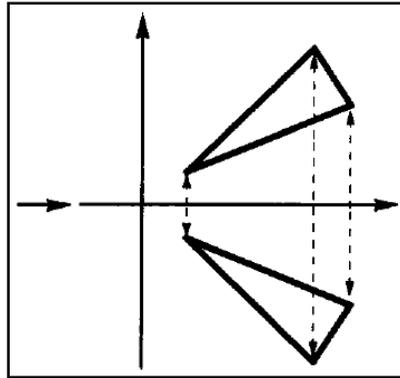


Figura 9: Inversión Geométrica
Fuente: Estrada (1984)

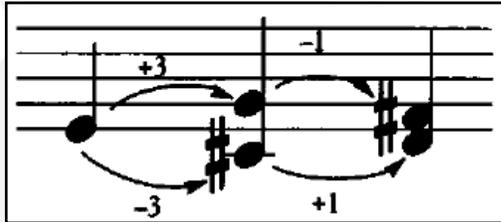


Figura 10: Inversión Geométrica en el Pentagrama
Fuente: Estrada (1984)

2.3. Matemáticas y Literatura

A primera vista, podríamos considerar que se trata de dos disciplinas completamente lejanas. Se podría pensar que la literatura representa ese mundo mágico en donde todo es posible y las matemáticas vendrían a ser la representación de un mundo frío, lógico e implacable.¹⁹

Los números y las letras tuvieron prácticamente un inicio paralelo a mediados del cuarto milenio antes de Cristo, aunque luego llevaron una evolución indudablemente distinta. Si bien es cierto, se trata de disciplinas diferentes, es muy interesante conocer que en muchos casos existe armonía entre ellas. Existen varios ejemplos de grandes matemáticos que han destacado en su obra literaria, tales como Blaise Pascal (1623-1662) o Henri Poincaré (1854-1912), dos de los mejores escritores de su época. Lo cierto es que el lenguaje matemático suele adornarse de cualidades literarias como precisión, claridad y exactitud, lo que permite destacar a muchos matemáticos en su faceta de escritores. René Dugas comenta que “las matemáticas enseñan también a escribir, si se quiere que la concisión, la claridad y la precisión sean cualidades de estilo”²⁰.

Por otro lado, existen casos de literatos apasionados por las matemáticas. Un ejemplo es el francés Henry Beyle, conocido como Stendhal (1783-1842) quien lo refleja de esta manera en su obra “*Vida de Henry Brulard*” o el famoso novelista ruso Fedor Dostoievski (1821-1881), quien en su novela “*Los hermanos Karamazov*” comenta: “ [...] hay matemáticos entre filósofos [...] que dudan si todo el universo o, para decirlo de manera más amplia, toda existencia, fue creada solo de acuerdo con la geometría euclídea, e incluso se atreven a soñar que dos rectas paralelas que, de acuerdo con Euclides, nunca se pueden cortar en la tierra, quizás puedan hacer en el infinito”²¹, relacionado con un tema relativamente novedoso en su época, como fue la geometría no euclídea y la cual llamaba su atención.

¹⁹ Basado en: <http://escrituracreativa.blog.com.es/2010/05/07/literatura-y-matematicas-amigas-para-siempre-8537063/>

²⁰ Dugas, R. (1976). La matemática, objeto de cultura y herramienta de trabajo. pp. 364-371

²¹ Peralta, F. Sobre las relaciones entre las matemáticas y literatura. pp. 2

Del mismo modo, se ha buscado en muchas oportunidades vincular a ambas disciplinas en búsqueda de nuevas fuentes de recursos literarios y matemáticos. Por ejemplo, existe un grupo conformado por escritores, matemáticos y pintores que fue creado el año de 1960, denominado “Grupo Oulipo”, el cual se ha concentrado desde entonces en dos tareas fundamentales:

- 1) Inventar estructuras, formas o nuevos retos que permitan la producción de obras originales, valiéndose de la combinación entre Literatura y Matemáticas.
- 2) Examinar obras literarias antiguas para encontrar las huellas de utilización de estructuras, formas o restricciones.

Sus creadores, Marcel Bénabou y Jacques Roubaud comentan sobre este grupo: *“¿Oulipo? ¿Qué es esto? ¿Qué es OU? ¿Qué es LI? ¿Qué es PO? OU es Taller. ¿Para fabricar qué? LI. LI es Literatura, lo que leemos y tachamos. ¿Qué tipo de LI? LIPO. PO significa potencial. Literatura en cantidad ilimitada, potencialmente producible hasta el fin de los tiempos, en cantidades enormes, infinitas para todo fin práctico. [...] ¿Y qué es un autor oulipiano? Es una rata que construye ella misma el laberinto del cual se propone salir. ¿Un laberinto de qué? De palabras, sonidos, frases, párrafos, capítulos, bibliotecas, prosa, poesía y todo eso”*²².

Finalmente, podríamos citar el caso de Arnaut Daniel, un trovador que vivió en Francia alrededor del año 1150 y a quien se le atribuye la creación de la sextina, el cual es un poema formado por 6 estrofas de 6 versos cada uno, seguidos de un párrafo de 3 versos.²³ Cada línea termina con una palabra elegida entre un grupo de 6 previamente fijadas, los vocablos, A, B, C, D, E y F, distribuidos siguiendo el siguiente esquema:

ABCDEF – FAEBDC – CFDABE – ECBFAD – DEACFB – DBFECA – ECA

²² Oulipo (1973) La littérature potentielle, Gallimard. Francia

²³ Macho, M. (2007) Las Matemáticas de la literatura. País Vasco, pp.45-48, 53-54

En términos matemáticos, se trata de una permutación σ de esas 6 palabras, que se escribe de la siguiente manera:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación presentamos un ejemplo de sextina en castellano, para mostrar la enorme riqueza de este tipo de composiciones:

Sextina de Kid y Lulú, por Carlos Germán Bell²⁴

*Kid el Liliputiense ya no sobras
comerá por primera vez en siglos,
cuando aplaque su cavernario hambre
con el condimentado dorso en guiso
de su Lulú la Belle hasta la muerte,
que idolatrara aún antes de la vida.*

*Las presas más rollizas de la vida,
que satisfechos otros como sobras
al desgaire dejaban tras la muerte,
Kid por ser en ayunas desde siglos
ni un trozo dejará de Lulú en guiso,
como aplacando a fondo en viejo hambre.*

*Más horrible de todos es tal hambre,
y así no más infiernos fue su vida,
al ver a Lulú ayer sabrosa en guiso
para el feliz que nunca comió sobras,
sino el mejor manjar de cada siglo,
partiendo complacido hacia la muerte.*

²⁴ Macho, M. (2007) Las Matemáticas de la literatura. País Vasco, pp.45-48

*Pues acudir al antro de la muerte,
dolido por la sed de amor y el hambre,
como la mayor pena es de los siglos,
que tal hambre se aplaca presto en vida,
cuando los cielos sirven ya no sobras,
mas sí todo el maná de Lulú en guiso.*

*Así el cuerpo y el alma ambos en guiso,
de su dama llevárselos a la muerte,
premio será por sólo comer sobras
acá en la tierra pálido de hambre,
y no muerte tendrá sino gran vida,
comiendo por los siglos y los siglos.*

*El cuerpo de Lulú sin par en siglos,
será un manjar de dioses cuyo guiso
hará recordar la terrestre vida,
aun en el seno de la negra muerte,
que si en el orbe sólo existe hambre,
grato es el sueño de mudar las sobras.*

*Ya no en la vida para Kid las sobras,
ni cautivo del hambre, no, en la muerte,
que a Lulú en guiso comerá por siglos.*

Después de revisar estos ejemplos, podemos darnos cuenta que tanto la literatura como las matemáticas han tenido fuertes vínculos en su desarrollo, cuentan con patrimonios comunes, tales como los signos, números, letras, y son varios los casos en los que se ha apelado a la otra disciplina en búsqueda de recursos.

El objetivo del presente trabajo, será el de lograr generar textos a partir cadenas markovianas, es decir, utilizando la aplicación para la que fueron creadas. Markov buscó generar textos que reflejen el estilo del autor, esa “huella digital” que imprime cada escritor al momento de redactar una obra. Para ello llegó a calcular la frecuencia de ciertos fonemas y palabras, con la finalidad de predecir las palabras que más probablemente las rodean en un determinado contexto.

El resultado que encontraremos será muy probablemente galimatías, un tipo de lenguaje complicado y casi sin sentido, pero con las cadenas de Markov se logrará obtener oraciones completas con verdadero sentido y con la particularidad de tener el mismo estilo literario del autor elegido.

Por otro lado será importante considerar principios gramaticales básicos, que nos permitirán comprender, de manera general, sobre el orden de las palabras en el idioma castellano. Se dice que es un idioma configuracional, porque se ajusta a un orden.²⁵

Los resultados que obtendremos, producto de este estudio, no necesariamente cumplirán con toda la normativa gramatical, pero sí reflejarán buena parte de esta lógica de cómo están estructuradas las oraciones en nuestro idioma, pues el sistema que utilizaremos predecirá la palabra que más probablemente le sigue a una anterior, dado un texto ingresado como input. El resultado serán oraciones semejantes a la manera de escribir del autor elegido, las cuales cumplen con esta normativa gramatical. Es por esa razón que encontraremos algunas oraciones en las que se refleje una coherencia gramatical, conforme a la normativa de nuestro idioma.

²⁵ Fernández, O. Sobre el orden de las palabras en Español. Universidad Autónoma de Madrid. España, p.7

2.3.1. Las cadenas de Markov y su relación con las obras literarias

Markov inició sus estudios universitarios de matemáticas en el año 1874, en la Universidad de San Petersburgo y los culminó cuatro años más tarde, por lo que fue premiado con medalla de oro. Fue un destacado estudiante de matemáticas y por el contrario, en sus biografías comentan que era un mal estudiante en otras materias.

Es uno de los más ilustres representantes de la escuela matemática de San Petersburgo y se le cataloga como uno de los más grandes continuadores de las ideas sobre probabilidad. El profesor Miguel Gómez Villegas, en un artículo para el Boletín de la Sociedad de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad Complutense, comenta que *“sus trabajos son modelos de rigor y claridad en la exposición, y han contribuido en gran medida a transformar la teoría de la probabilidad en uno de los más perfectos campos de las matemáticas, y a aumentar los métodos y las ideas de Chebychev”*.²⁶

Sin duda alguna, su contribución más importante fue la introducción del concepto de la cadena de Markov, como un modelo para el estudio de variables dependientes, el cual dio lugar a una gran cantidad de investigaciones posteriores en la teoría de los procesos estocásticos.

Es muy interesante descubrir que el origen de las cadenas markovianas estuvo en su profundo interés por las obras poéticas rusas, por lo que sus trabajos sobre estadística consisten en la modelización de la alternancia entre vocales y consonantes, mediante una cadena de Markov con dos estados, de composiciones literarias en ruso. Entre muchos aspectos, Markov estudió, las construcciones lingüísticas a partir del cálculo matemático. Así, por ejemplo, analizó la producción literaria del gran poeta ruso Puschkin, llamada “Eugene Onieguin”, y dedujo que las letras del alfabeto cirílico, las cuales, como las de cualquier otro alfabeto, iban apareciendo relacionadas con las que las precedían en la escritura.²⁷

²⁶ Boletín de la Sociedad de Estadística e Investigación Operativa. Univ. Complutense (2006), vol 22, pp. 4, 7-8

²⁷ Tomado de: <http://www.infoamerica.org/teoria/markov1.htm>

Con la ayuda de los aportes brindados por Andrei Markov, en el Capítulo 4, realizaremos el procedimiento a través de cadenas markovianas para generar textos con el estilo literario de autores conocidos. Tal como lo comentamos en relación a la música, no buscaremos cumplir exhaustivamente con la normativa del lenguaje, para ello podríamos crear algoritmos complejos. En este caso, lo que buscaremos es generar textos con el estilo literario del autor elegido.

Para ello es necesario definir algunos conceptos básicos de la gramática castellana, relacionados con el ordenamiento de las palabras en las oraciones, lo que nos permitirá comprender de mejor manera la estructura como están distribuidas las palabras que conforman una oración en el idioma castellano.

2.3.2. Categorías gramaticales en el idioma castellano

La categoría gramatical es el nombre bajo el que se agrupan todas las palabras del idioma, distribuidas por clases: sustantivos o nombres, adjetivos, pronombres, verbos, adverbios, preposiciones, artículos, conjunciones e interjecciones.²⁸

Tradicionalmente han sido definidas como clasificaciones de palabras tanto por su significado, como según su función dentro de la oración. En la modernidad, la categoría gramatical es una variable lingüística que determina la forma morfológica concreta de una palabra.²⁹

En la tabla 4, presentada a continuación, observaremos un resumen de las categorías gramaticales, su significado y función dentro de una oración, lo que nos permitirá comprender como están construidas estructuralmente las oraciones.

²⁸ Basado en: <http://blocs.xtec.cat/castellasegur/files/2008/12/categorias-gramaticales.pdf>

²⁹ Basado en: http://bloglaliteratura.blogspot.com/2010/07/categoria-gramatical_23.html

Tabla 4: Categorías Gramaticales en el idioma castellano ³⁰

CATEGORÍA GRAMATICAL	FORMA	SIGNIFICADO	FUNCIÓN
SUSTANTIVO	Lexema + morfema (derivativo o flexivo de género y número).	Palabra que designa a personas, animales, cosas o abstracciones.	Núcleo de un SN que puede tener varias funciones.
ADJETIVO	Lexema + morfema (género, número, grado y, en ocasiones, derivativos).	Indica cualidades de un nombre.	Adyacente. Atributo. Complemento Predicativo.
ARTÍCULO • Demostrativo • Posesivo • Indefinido • Numeral • Interrogativo • Exclamativo	Morfema independiente con género y número.	Expresan género, número o circunstancias de proximidad, posesión, cantidad, orden, etc. del nombre al que acompañan.	Determinante (dentro de un SN), es decir, actualizan, concretan o limitan la extensión significativa del nombre al que acompañan.
PRONOMBRE	Lexema (sustituye a palabras que sí tienen significado léxico).	Es sustituto del nombre. Tiene significado ocasional.	Núcleo del SN (igual que el sustantivo).
VERBO	Lexema + morfema flexivo (persona, número, tiempo, modo y aspecto).	Expresa acciones, estados de los seres y procesos.	Núcleo del SV Predicado.
ADVERBIO	Lexema invariable (puede tener morfemas derivativos).	Indica alguna circunstancia del verbo o gradúa la cantidad o cualidad de un adjetivo o de otro adverbio.	Complemento circunstancial del verbo. Modificador del adjetivo, del adverbio o de una oración.
PREPOSICIÓN	Morfema independiente invariable.	Expresa una determinada relación. No tiene significado léxico.	Enlace de un Sintagma Preposicional.
CONJUNCIÓN	Morfema independiente.	Algunas poseen significado, pero la mayoría sólo es un elemento de relación.	Nexo.
INTERJECCIÓN	Lexema	Es una exclamación que indica sentimiento.	Constituye por sí misma una oración.

Elaboración Propia

Notas:

- (1) Lexema: Es la unidad mínima de la palabra que tiene significado léxico.
- (2) Morfema: Es una secuencia mínima o transformación de fonemas que provoca cambios sistemáticos y regulares donde se aplica. Constituye la unidad variable de la palabra.

³⁰ Basado en: <http://blocs.xtec.cat/castellasegur/files/2008/12/categorias-gramaticales.pdf>

2.4. Matemáticas y Artes

Las matemáticas y las artes están notablemente vinculadas. Podemos apreciar de muchas maneras la aplicación de las matemáticas en pinturas y esculturas como fuente de recursos para lograr por medio de ellas algunas mejoras estilísticas. Las regularidades matemáticas muchas veces son de tal belleza que en muchos trabajos de arquitectura se utilizan formas puramente geométricas, combinación de volúmenes y de formas planas, simetrías, etc. En la pintura se ha utilizado el rectángulo áureo, como relación matemática que acerca a la perfección de la técnica pictórica. En el año 1478 aparece una obra del pintor italiano Piero della Francesca (1410-1492), denominada “De la prospectiva pingendi” en la se plantean los principios matemáticos de la perspectiva de manera bastante detallada.³¹ Las figuras 11 y 12 nos muestran algunas imágenes de dicho trabajo.

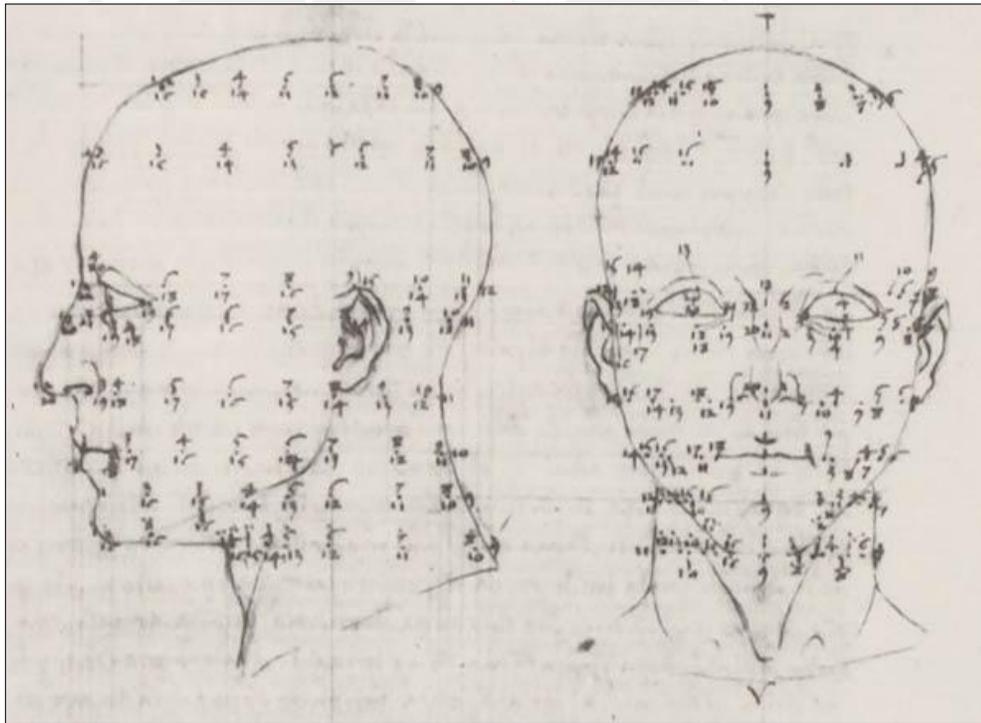


Figura 11: Perspectiva de un rostro
Fuente: De la prospectiva pingendi

³¹ Basado en: <http://www.uhu.es/candido.pineiro/historia/pintura.pdf>

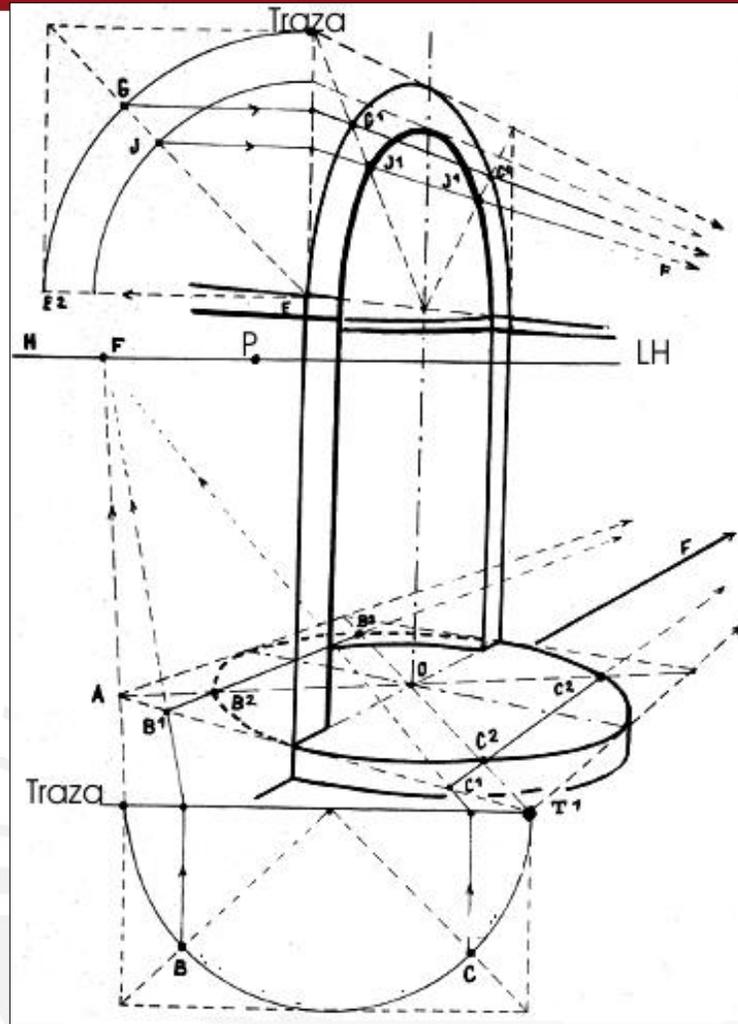


Figura 12: Aplicaciones perspectivas del abatimiento
 Fuente: De la perspectiva pingendi

La obra del gran Leonardo da Vinci también refleja esta relación. En su obra: “Trattato della pittura” comienza con la siguiente frase: “Nadie que no sea matemático lea mis obras”³². En su obra “Academia de Venecia”, también conocido como “El hombre de Vitrubio” realiza una visión del hombre como centro del universo al presentarlo dentro de un cuadrado y una circunferencia. Plantea la proporcionalidad del cuerpo humano.

La figura 13 nos muestra la comentada figura de “El hombre de Vitrubio” y posteriormente presentamos la traducción del texto que acompañaba a dicha figura.

³² Basado en: <http://www.uhu.es/candido.pineiro/historia/pintura.pdf>

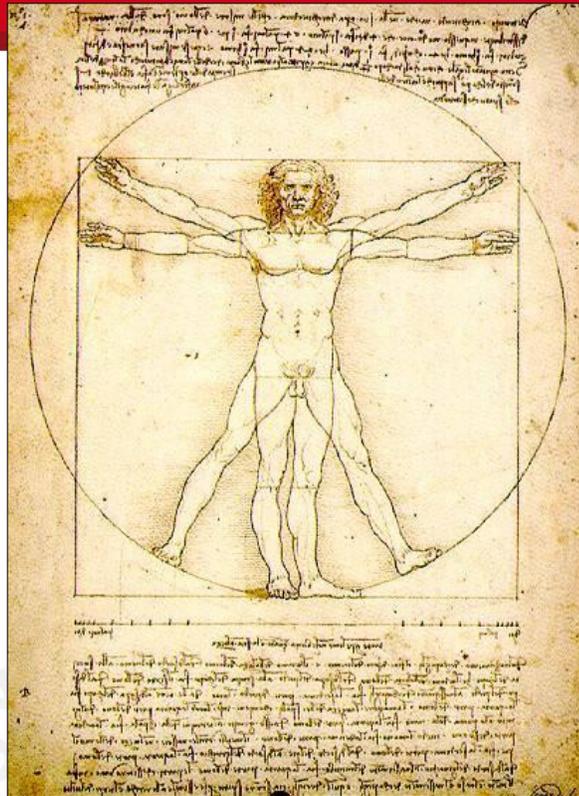


Figura 13: El hombre de Vitrubio
 Fuente: Galería de la Academia de Venecia

*“[...] que 4 dedos hacen 1 palma, y 4 palmas hacen 1 pie, 6 palmas hacen 1 codo, 4 codos hacen la altura del hombre. Y 4 codos hacen 1 paso, y que 24 palmas hacen un hombre; y estas medidas son las que él usaba en sus edificios. Si separas la piernas lo suficiente como para que tu altura disminuya 1/14 y estiras y subes los hombros hasta que los dedos estén al nivel del borde superior de tu cabeza, has de saber que el centro geométrico de tus extremidades separadas estará situado en tu ombligo y que el espacio entre las piernas será un triángulo equilátero. La longitud de los brazos extendidos de un hombre es igual a su altura. Desde el nacimiento del pelo hasta la punta de la barbilla es la décima parte de la altura de un hombre; desde la punta de la barbilla a la parte superior de la cabeza es un octavo de su estatura; desde la parte superior del pecho al extremo de su cabeza será un sexto de un hombre. Desde la parte superior del pecho al nacimiento del pelo será la séptima parte del hombre completo [...]».*³³

³³ Traducción tomada de: http://www.portalplanetasedna.com.ar/divina_proporcion.htm

2.4.1. La Proporción Áurea

Cuando se habla de la proporción o razón áurea se dice que se trata de “la división armónica de una recta en media y extrema razón”.³⁴ Esto significa que el segmento menor es al segmento mayor, como éste es a la totalidad de la recta; o cortar una línea en dos partes desiguales de manera que el segmento mayor sea a toda la línea, como el menor es al mayor.

Es de esta manera como se establece una relación de tamaños con la misma proporcionalidad y a esta proporción se le denomina proporción áurea y su representación numérica se llama número de oro, el cual es equivalente a 1.618.

En el año 1509, el matemático y teólogo Luca Pacioli publicó su libro “*De Divina Proportione*”, en el cual plantea cinco razones por las que considera que la proporción áurea es divina.³⁵

1. *La unicidad; Pacioli compara el valor único del número áureo con la unicidad de Dios.*
2. *El hecho de que esté definido por tres segmentos de recta, Pacioli lo asocia con la Trinidad.*
3. *La inconmensurabilidad; para Pacioli la inconmensurabilidad del número áureo, y la inconmensurabilidad de Dios son equivalentes.*
4. *La Autosimilaridad asociada al número áureo; Pacioli la compara con la omnipresencia e invariabilidad de Dios.*
5. *De la misma manera en que Dios dio ser al Universo a través de la quinta esencia, representada por el dodecaedro; el número áureo dio ser al dodecaedro.*

La proporción áurea se puede ver en muchos lugares creados como por el hombre, como en la misma naturaleza. Las figuras 14 a 16, nos muestran algunos ejemplos.

³⁴ Orellana, M. “*El lenguaje matemático de la belleza según el número de oro*”. pp. 38-44

³⁵ Basado en: http://www.angelfire.com/ab7/acuarianguru3/nueva_era/aurea.htm

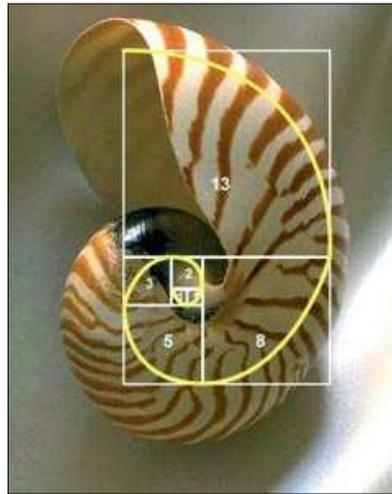


Figura 14: Proporción áurea en una caracola
Fuente: El lenguaje matemático de la belleza según el número de oro.



Figura 15: El Partenón de Atenas
Fuente: El lenguaje matemático de la belleza según el número de oro.



Figura 16: Wentletrap (*Epitonium scalare*) del Pacífico Oeste
Fuente: http://www.angelfire.com/ab7/acuarianguru3/nueva_era/aurea.htm

2.4.2. Los fractales

En el siglo XIX surgió un interés masivo por parte de algunos matemáticos que deseaban conocer las características de una serie de curvas que desafiaban la geometría de aquella época. Un ejemplo era el “Conjunto de Cantor”³⁶, cuya definición es muy sencilla de comprender. Imaginemos que tomamos el segmento de 0 a 1 de una recta normal, lo dividimos en tres partes iguales y suprimimos el segmento central. Posteriormente realizamos el mismo procedimiento los dos sub-segmentos resultantes un número infinito de veces.

La figura 17 nos muestra ejemplos del conjunto de Cantor.

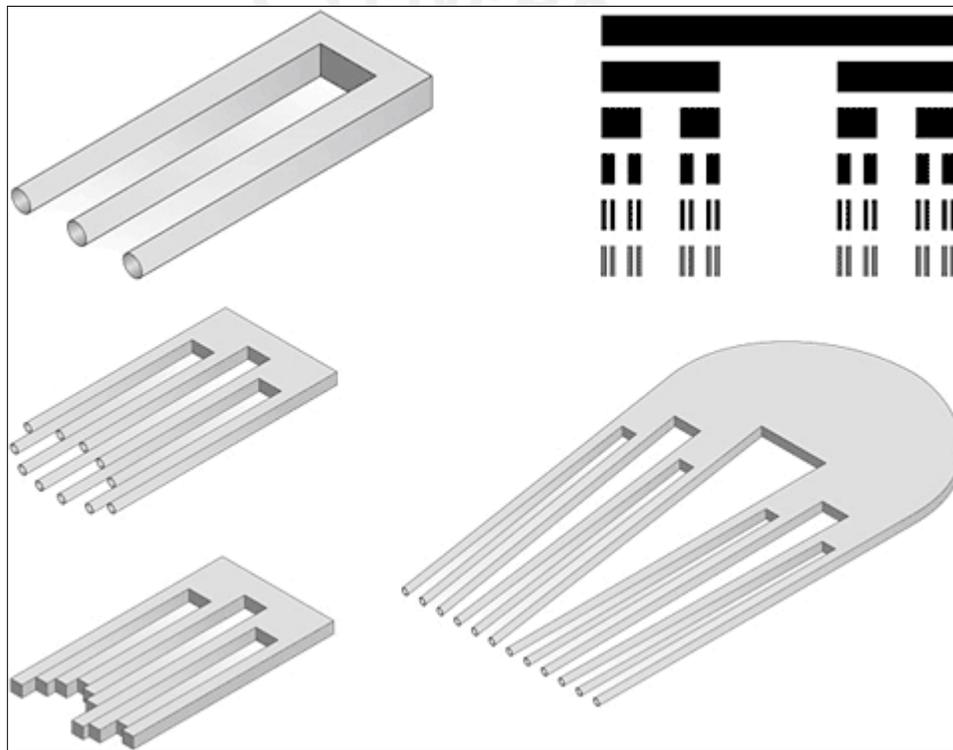


Figura 17: Conjunto de Cantor

Fuente: <http://www.microsiervos.com/archivo/arte-y-diseno/fractales-imposibles.html>

En la actualidad todas las curvas analizadas en aquellos tiempos han tomado un nombre general acuñado por el creador de los conjuntos más hermosos, el matemático Benoît Mandelbrot, quien los llamó: “fractales”.

³⁶ Pérez, J. “Codificación fractal de imágenes”. Alicante 1998.

Los fractales se caracterizan de dos propiedades, la auto-semejanza, que implica que el objeto fractal presenta la misma apariencia independientemente del grado de ampliación con que lo miremos; y la auto-referencia, el cual determina que el propio objeto aparece en la definición de sí mismo, con lo que la forma de generar el fractal necesita algún tipo de algoritmo recurrente.³⁷

Las figuras 18 y 19 nos muestran algunas figuras fractales famosas como son el Conjunto de Julia y el Conjunto de Mandelbrot.

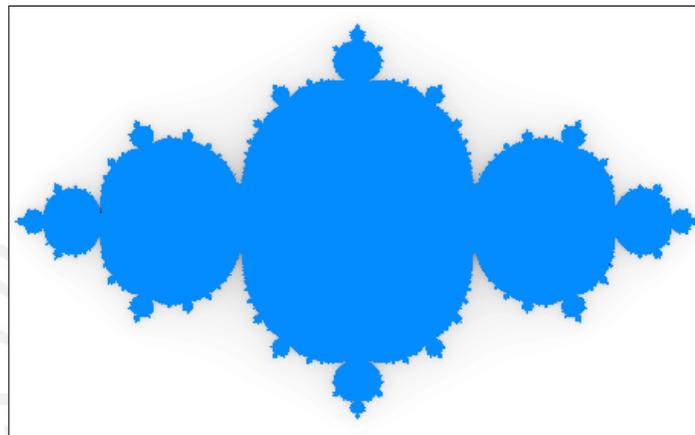


Figura 18: Conjunto de Julia
Fuente: Elaboración Propia

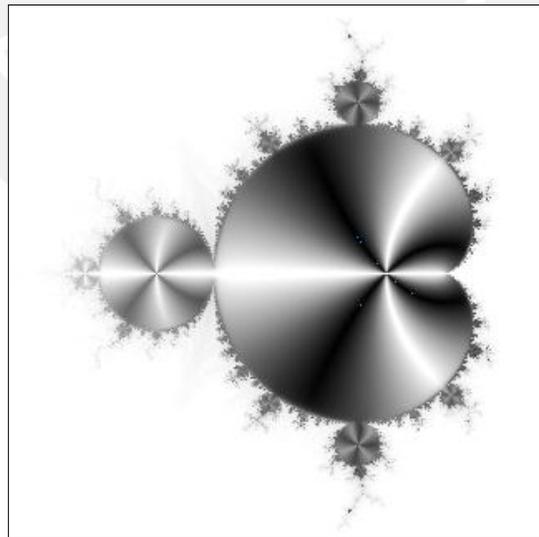


Figura 19: Conjunto de Mandelbrot
Fuente: Elaboración Propia

³⁷ Pérez, J. "Codificación fractal de imágenes". Alicante 1998. pp. 14-16

En muchos casos se dice que la naturaleza es fractal, pero esta aseveración no es correcta. Lo que sí es correcto es que la naturaleza en muchos casos se ajusta a un modelo fractal. Es por eso que resulta muy interesante su aplicación a diversas áreas de la ciencia, y conjuntamente con las Cadenas de Markov es utilizada para generar imágenes por medio de métodos generativos, modelos de textura de imágenes, segmentación y clasificación de textura de imágenes.

De la misma manera a través de algoritmos, que son básicamente, una serie de reglas finitas que buscan la solución a un problema; que incluyen estas aplicaciones matemáticas, se han diseñado sistemas capaces de generar aleatoriamente imágenes artísticas. A este estilo de arte a través de computado se le ha denominado Arte Procesual-Aleatorio.

Se trata de aquellas obras de arte en las que interviene necesariamente el micro-procesador de una computadora para su desarrollo y ejecución, cuyo trabajo no se puede realizar sin cálculos. Del mismo modo, son realizados en tiempo real y requieren de un ordenador para ser visualizados.

Según Puig ³⁸, estos trabajos se definen como arte en varios sentidos *“como expresión personal con códigos de programación o experimentaciones a través de la tecnología y/o argumentos culturales, siempre con componentes aleatorios que son proporcionados por el propio código de programación”*.

Estos son trabajos representados bajo un tipo de disciplina que desarrolla principios estéticos del medio digital y se realizan mediante técnicas generativas con componentes aleatorios. Se aplican en múltiples recursos como software, salvapantallas, CD Room, etc. Es dentro de este marco en el que evaluaremos este tipo de aplicaciones, en el que la lógica de las Cadenas de Markov se encuentra inmersa en el algoritmo de este tipo de programas, conjuntamente como otras aplicaciones matemáticas como los modelos fractales, redes neuronales, autómatas celulares, algoritmos genéticos, teoría del caos, etc.

³⁸ Puig, L. *“Alear: Arte Procesual-Aleatorio: La Aleatoriedad en el Computer-art”*. Barcelona 2004

2.4.3. Computer-Art, Arte-Procesual-Aleatorio y Sistemas Generativos

Se conoce como Computer Art a todo tipo de arte en el que interviene una computadora. Puede tratarse de una imagen, video, sonido, animación, videojuegos, algoritmo, etc. Su nacimiento se remonta a por lo menos 1960, año en el cual, Desmond Paul Henry inventó la máquina de dibujo de Henry.³⁹ Los trabajos de Henry fueron expuestos en la galería de Reid en Londres en 1962 y la figura 20 nos muestra una de las obras generadas.

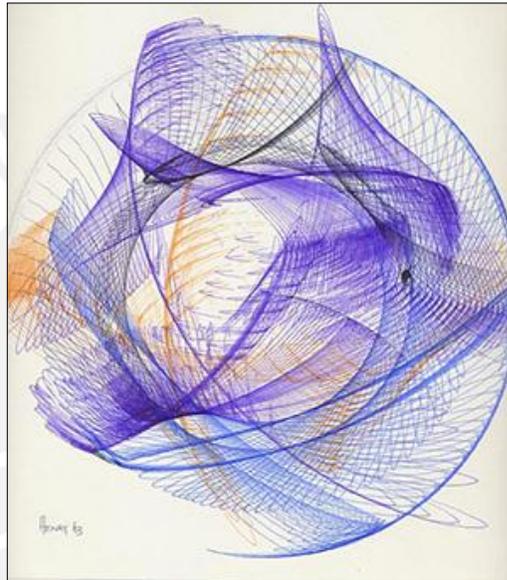


Figura 20: Imagen generada con la Máquina de Dibujo de Henry
Fuente: Elaboración Propia

Este fue el punto de partida para el desarrollo del Arte a través de la computadora, el cual se vio fortalecido con la invención de la impresora láser y microprocesadores más potentes, capaces de realizar tareas complejas en segundos.

En el punto 2.4.2, mencionamos que el Arte Procesual-Aleatorio implica toda expresión artística en la cual ha intervenido un componente aleatorio para su creación. Éste es proporcionado por el propio código de programación.

³⁹ Leonardo "Los comienzos del Arte Digital en los Estados Unidos: A Memoir". 1994 pp. 39-44

Finalmente, los Sistemas Generativos o también llamado Arte Generativo es un término utilizado en aquellos trabajos que presentan automatización computarizada y son generados a través de instrucciones matemáticas.

Estas definiciones son importantes para el presente trabajo, pues nos permitirán comprender la aplicación que se presentará para la Generación de Imágenes con Cadenas de Markov.

El Computer Art implica arte por computadora, El Arte Procesual-Aleatorio nos circunscribe en el contexto de arte generado por computadora en cual intervienen algoritmos con modelos matemáticos que describen eventos aleatorios y los Sistemas Generativos nos enfocarán en aquellos trabajos que describen de manera simulada, una realidad física, es decir, se trata de representaciones artificiales de procesos.

En la Generación de Imágenes presentaremos un sistema generativo computarizado, que cumple con las características antes mencionadas y que basado en el mundo natural, busca crear vida autónoma en el espacio virtual del ordenador.

El sistema generativo “GA2” fue creado por el Profesor Philip Galanter y describe el comportamiento de los cromosomas humanos en los procesos de división celular, los cuales se consideran cíclicos.

Para esta programación, se utilizaron Cadenas de Markov, las cuales establecieron los estados posibles de dicho proceso y sus probabilidades de transición. De la misma manera se aplicaron algoritmos genéticos, modelos fractales, autómatas celulares, redes y simetría, teoría del caos, vida artificial y sistemas-L, los cuales serán explicados en el Capítulo 5 del presente trabajo en el que se revisará con mayor detalle esta aplicación.

Capítulo 3 : Cadenas de Markov Aplicada a la Composición Musical Contemporánea

3.1. Cadenas Markovianas y Composición Musical

El contexto musical es un elemento crítico de la sensibilidad auditiva, pues la música es agradable al oído humano por su armonía y consistencia, pues evoca ideas, pensamientos y sentimientos que un compositor quiere expresar a los oyentes. Asimismo, podríamos decir que cada compositor tiene un estilo de componer y esto se observa en la estructura de su música, en sus arreglos musicales, instrumentos empleados en una pieza, ritmo, etc.

La utilización de las cadenas Markovianas para este análisis permitirá crear resultados dentro de un contexto, pues las reglas de conducir el proceso, pueden ser fácilmente descubiertas a partir de composiciones musicales existentes. Por lo tanto, a partir de ello, podemos componer música con el estilo de otros compositores.

3.2. Descripción de la Aplicación

Las Cadenas de Markov están ordenadas en función a sus estados presentes y se busca evaluar las transiciones de estado a estado. En este caso tenemos que los estados son las notas musicales presentes en la canción y el paso de la matriz es la transición de nota a nota, conforme se desarrolla la melodía de la canción.

Por lo tanto, todas las notas que evaluaremos, sean parte de una canción o conjunto de canciones, serán etiquetadas desde la nota "0" (nota inicial), hasta el correspondiente valor de la nota final.

A continuación, describiremos el proceso utilizado analizando el coro de la famosa canción "Oh Susanna" de Stephen Foster, basándonos en la metodología planteada por Gareth Loy en su libro "Musimathics: A guided tour of the mathematics of music".⁴⁰

⁴⁰G. Loy *Musimathics: A guided tour of the mathematics of music*. MIT PRESS 2006 p.364

- i. El proceso se iniciará etiquetando cada nota presente en la melodía del coro de la canción “Oh Susanna”, tal como se muestra en la figura 21.

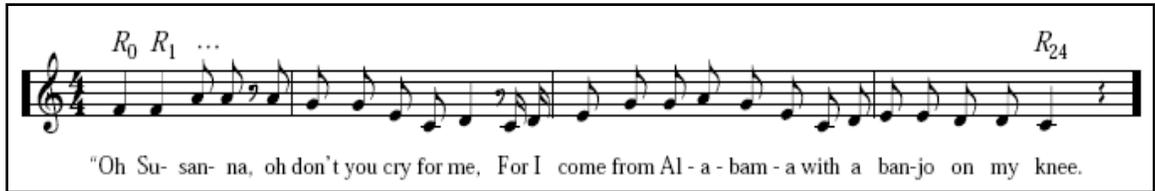


Figura 21: Etiquetado de notas de “Oh Susanna”
Fuente: Loy (2006)

Cada etiqueta nos permitirá realizar un conteo de la cantidad de notas y silencios presentes en la melodía. De esta manera tenemos que la melodía de esta canción presenta 25 ocurrencias.

- ii. El siguiente paso a seguir es determinar la cantidad de veces que se repite una nota en la melodía. Esta información se presenta en la tabla 5 a continuación:

Tabla 5: Tabla de equivalencia entre cifrados

Cifrado Americano	Cantidad de Repeticiones
A	4
B	0
C	4
D	5
E	5
F	2
G	5

Elaboración Propia

- iii. A continuación definiremos la función densidad de la melodía contando la cantidad de veces que una nota es repetida entre la cantidad de ocurrencias. Estos recuentos se expresan como una función del número total de notas a manera de histograma.

En la tabla 6 podremos observar la función densidad mencionada y en la figura 22 el histograma de notas.

Tabla 6: Tabla función densidad

Notas	C	D	E	F	G	A	B
Probabilidad	4/25	5/25	5/25	2/25	5/25	4/25	0

Elaboración Propia

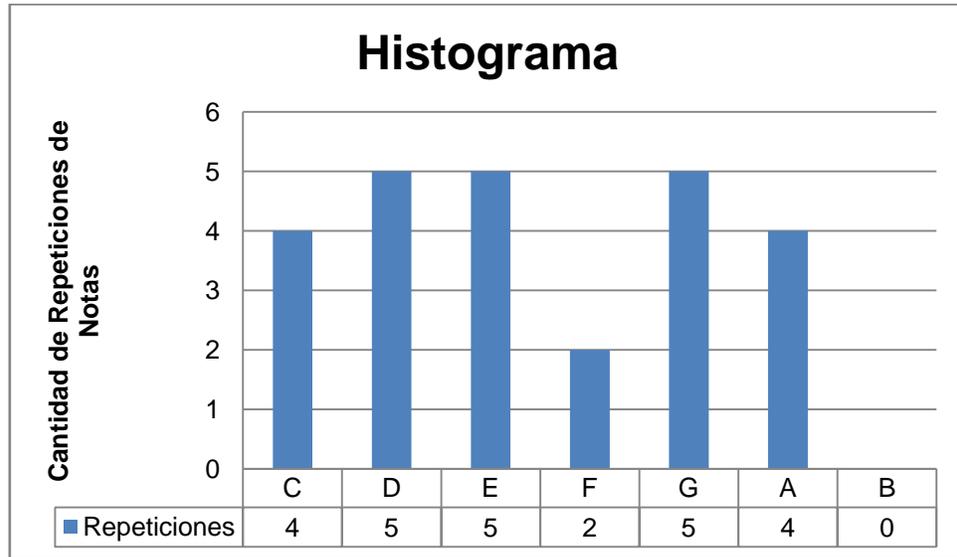


Figura 22: Histograma de notas
Fuente: Elaboración Propia

- iv. Dado que la música se desarrolla en el tiempo, el contexto de cada nota está circunscrito a las notas que la preceden. Si deseamos incorporar el contexto a nuestro análisis, debemos estudiar cómo las notas se suceden en la melodía.

Para cumplir con este objetivo, se desarrollará la matriz de transición de estados de primer orden, en la que cada estado es una nota musical, tal como se presenta en la tabla 7.

Tabla 7: Matriz de Primer Orden

	C	D	E	F	G	A	B
C	0	3	0	0	0	0	0
D	2	1	2	0	0	0	0
E	2	1	1	0	1	0	0
F	0	0	0	1	0	1	0
G	0	0	2	0	2	1	0
A	0	0	0	0	2	2	0
B	0	0	0	0	0	0	0

Elaboración Propia

- v. Si consideramos que la suma de las probabilidades en cada fila es 1, podremos ordenar la matriz utilizando sus probabilidades de transición. Contar el número de transiciones en cada celda determinará un conjunto de histogramas de orden cero en las filas, por lo que debemos formar la función densidad de cada fila, tal como se presenta en la tabla 8. Seguidamente presentamos el diagrama de red de transiciones entre notas, en la figura 23.

Tabla 8: Matriz de Probabilidades de Primer Orden

	C	D	E	F	G	A	B
C	0	1	0	0	0	0	0
D	0.4	0.2	0.4	0	0	0	0
E	0.4	0.2	0.2	0	0.2	0	0
F	0	0	0	0.5	0	0.5	0
G	0	0	0.4	0	0.4	0.2	0
A	0	0	0	0	0.5	0.5	0
B	0	0	0	0	0	0	0

Elaboración Propia

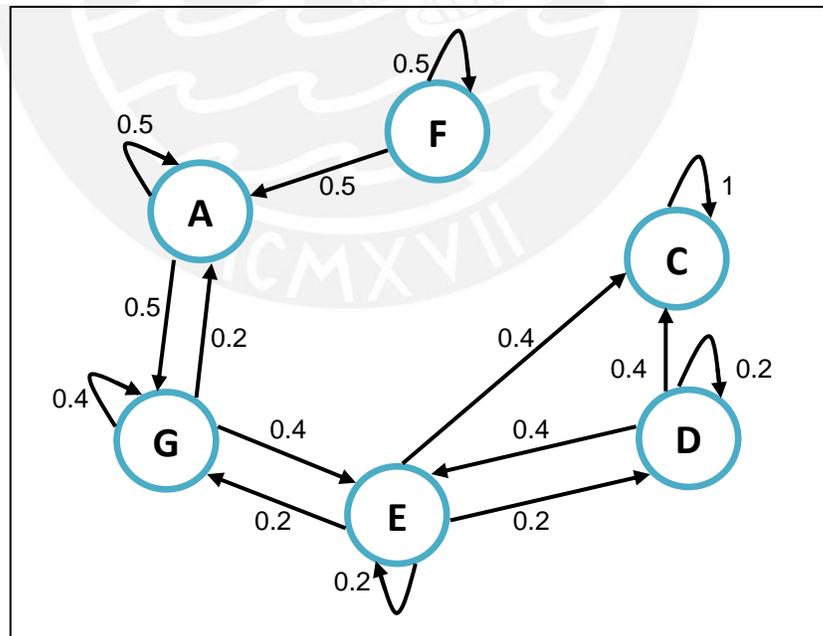


Figura 23: Diagrama de red de transiciones entre notas
Elaboración Propia

- vi. Ahora, en una matriz como la presentada en la tabla 9, desarrollaremos la matriz de probabilidades acumuladas a partir de la matriz de probabilidades anterior.

Tabla 9: Matriz de Probabilidades Acumuladas de Primer Orden

	C	D	E	F	G	A	B
C	0	1	1	1	1	1	1
D	0.4	0.6	1	1	1	1	1
E	0.4	0.6	0.8	0	1	1	1
F	0	0	0	0.5	0	1	1
G	0	0	0.4	0	0.8	1	1
A	0	0	0	0	0.5	1	1
B	0	0	0	0	0	0	0

Elaboración Propia

Para generar una melodía, primero tomaremos una nota aleatoriamente a partir del espacio muestral (A, B, C, D, E, F, G).

- vii. Una vez elegida la nota inicial, se generará un número aleatorio entre cero y uno, lo que nos permitirá elegir la nota siguiente en la matriz de probabilidades acumuladas.

Sea que la nota inicial elegida aleatoriamente es E (Mi) y el número aleatorio generado es 0.36, de la tabla de probabilidades acumuladas tenemos que la nota siguiente será C, dado que el valor generado se encuentra en el rango de valores de C.

Realizando este proceso repetidas veces, tendremos un conjunto de notas que determinarán la nueva melodía con el estilo de “Oh Susanna”.

3.3. Desarrollo de la Aplicación

Con el objetivo de componer música utilizando las cadenas Markovianas, se eligieron canciones de la banda británica de Rock Alternativo “Coldplay”.

Tal como se ha comentado anteriormente, la música está conformada por cuatro elementos esenciales: Ritmo, Melodía, Armonía y Timbre. Para esta aplicación, la melodía estará compuesta por las transiciones de las notas, presentes en las canciones de la discografía seleccionada del grupo Coldplay, cuya base rítmica es el Rock. De manera análoga, la armonía estará definida por los acordes que componen la canción. El agente sonoro será una guitarra, la cual define el timbre de la melodía.

3.3.1. Composición de una melodía a partir de una canción conocida

Para realizar la primera composición musical, se ha elegido la canción “Don’t Panic”, del primer disco del grupo Coldplay, con el objetivo de obtener una canción de características similares.

Las notas presentes en la canción elegida son La menor, Do mayor, Re menor, Fa mayor séptima y Sol mayor. La tabla 10, mostrada a continuación presenta la distribución de notas de la canción.

Tabla 10: Distribución de Notas en la Canción “Don’t Panic”

Notas	Contador
Am	11
C	8
Dm	6
Fmaj7	14
G	9
Total general	48

Elaboración Propia

Por otro lado, la estructura y ordenamiento de las notas que componen la canción está dado de la siguiente manera, como se muestra en la tabla 11:

Tabla 11: Estructura y notas que componen la pieza musical

Sección	Notas
Introducción	Fmaj7- Fmaj7- Fmaj7
Estrofa	Am-C- Fmaj7- Am-C- Fmaj7
Coro	Dm-G-Am-G-Dm-G-Fmaj7
Estrofa	Am-C- Fmaj7- Am-C- Fmaj7
Coro	Dm-G-Am-G-Dm-G-Fmaj7
Solo	Am-C- Fmaj7- Am-C- Fmaj7
Coro	Dm-G-Am-G-Dm-G-Fmaj7
Estrofa	Am-C- Fmaj7- Am-C- Fmaj7

Elaboración Propia

Del análisis preliminar de la canción podemos observar la cantidad de repeticiones de las notas y a partir de ello, la función densidad de la distribución de notas. Con esta información desarrollaremos la matriz de transición de primer orden.

Se puede inferir fácilmente, se trata de una canción en La menor (Am), como se observa en la figura 24.

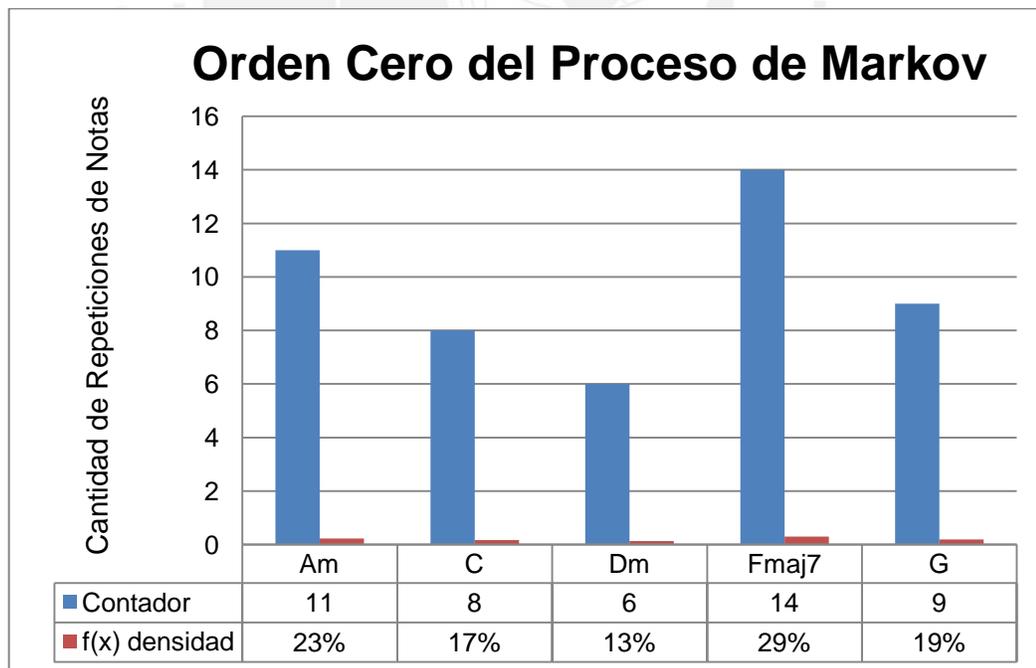


Figura 24: Histograma de notas y función densidad
Elaboración Propia

A continuación, se presentan las tablas 12 a la 15, con las matrices de Primer Orden de Markov que utilizaremos para la composición musical.

Tabla 12: Matriz de Transiciones de Primer Orden de Markov

	Am	C	Dm	Fmaj7	G
Am	0	8	0	0	3
C	0	0	0	8	0
Dm	0	0	0	0	6
Fmaj7	8	0	3	2	0
G	3	0	3	3	0

Elaboración Propia

Tabla 13: Matriz de Probabilidades de Primer Orden

	Am	C	Dm	Fmaj7	G
Am	0.00	0.73	0.00	0.00	0.27
C	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
Dm	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00
Fmaj7	0.62	0.00	0.23	0.15	0.00
G	0.33	0.00	0.33	0.33	0.00

Elaboración Propia

Tabla 14: Matriz de Probabilidades Acumulas de Primer Orden

	Am	C	Dm	Fmaj7	G
Am	0.00	0.73	0.73	0.73	1.00
C	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00
Dm	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00
Fmaj7	0.62	0.62	0.85	1.00	1.00
G	0.33	0.33	0.67	1.00	1.00

Elaboración Propia

Tabla 15: Transición de Notas de la Matriz de Primer Orden

Primer Orden	
Transición Notas	Contador
Am-C	8
Am-G	3
C-Fmaj7	8
Dm-G	6
Fmaj7-Am	8
Fmaj7-Dm	3
Fmaj7-Fmaj7	2
G-Am	3
G-Dm	3
Total general	41

Elaboración Propia

Dada la matriz de probabilidad acumulada, procederemos a realizar el proceso de composición, con la misma estructura musical.

Elegiremos la primera nota, la cual será seleccionada del espacio muestral de notas aleatoriamente, tal como se muestra en la tabla 16.

Tabla 16: Transición de Notas de la Matriz de Primer Orden

Orden	Notas	Número Aleatorio
1	Am	2
2	C	
3	Dm	
4	Fmaj7	
5	G	

Elaboración Propia

Por lo tanto, la primera nota elegida aleatoriamente es C. Esta nota es la que será la que compone la introducción de la canción. Seguidamente formaremos la composición de notas que componen la estrofa, tomando como referencia la estructura de la estrofa de la canción original, como se muestra en la tabla 17.

Tabla 17: Transición de Notas de la Matriz de Primer Orden

Sección	Notas
Estrofa	Fmaj7
	Am
	G
	Fmaj7
	Am
	G

Elaboración Propia

Tal como se puede observar, la estrofa de la canción original está compuesta por un compás de tres notas que se repite dos veces en esta sección de la pieza musical. Para componer una canción a partir de esta, es muy importante tener en consideración este punto, pues hemos dicho anteriormente que en las composiciones musicales occidentales se busca reafirmar los sonidos para que la melodía sea agradable al oído.

Por lo tanto, al generar notas para esta sección con cadenas de Markov, se obtendrán 3 notas que compondrán el compás de la estrofa y esta se repetirá dos veces. Con este criterio realizaremos todas las composiciones musicales.

En el punto 2.2.8, comentamos que las secciones más utilizadas en las composiciones musicales occidentales son: Introducción, Estrofa, Puente o Pre-Coro, Coro y Solo. Para componer las diversas canciones con Cadenas de Markov, definiremos previamente la estructura musical con una alternancia a nuestro gusto, pero considerando las secciones antes presentadas.

Siguiendo con la composición de la canción, conseguida la primera nota Fmaj7, procederemos a elegir la siguiente nota tomando en cuenta la matriz de probabilidades de transición acumulada del proceso de Markov. Se ha generado aleatoriamente un número decimal, el cual nos permitirá realizar esta elección. La tabla 18 nos muestra la matriz de probabilidades acumuladas y el número generado aleatoriamente es: 0.48

Tabla 18: Matriz de Probabilidades Acumuladas de Primer Orden

	Am	C	Dm	Fmaj7	G
Am	0.00	0.73	0.73	0.73	1.00
C	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00
Dm	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00
Fmaj7	0.62	0.62	0.85	1.00	1.00
G	0.33	0.33	0.67	1.00	1.00

Elaboración Propia

Por lo tanto las notas que conformarán la estrofa de nuestra composición serán las mostradas en la tabla 19, en la que podemos observar la nota inicial, el número aleatorio obtenido y la nota siguiente conseguida a partir de la matriz de primer Orden.

Tabla 19: Composición de notas de la estrofa

Nota Inicial	Número Aleatorio	Nota Siguiete
Fmaj7	0.40	Fmaj7
Am	0.01	Am
C	0.81	G

Elaboración Propia

Con este mismo criterio obtenemos las notas del coro y solo, tal como se muestra en la tabla 20, presentada a continuación.

Tabla 20: Composición de Notas de la Estrofa y Coro

Sección	# de Compases	Nota Inicial	Aleatorio	Nota Siguiete
Coro	2	G	0.46	Dm
		Dm	0.74	G
		G	0.22	Am
		Am	0.60	G
		G	0.40	Dm
		Dm	0.81	G
		G	0.47	Dm
Solo	2	Dm	0.76	Fmaj7
		Fmaj7	0.30	Am
		Am	0.24	C

Elaboración Propia

De esta manera obtenemos la primera composición musical de una canción basada en una canción conocida. En la tabla 21 veremos la composición completa, por secciones de la pieza musical y su musicalización se encuentra en un CD al presente trabajo de investigación.

Tabla 21: Composición Musical a partir de una canción conocida

Sección	Notas
Introducción	C
Estrofa	Fmaj7
	Am
	C
	Fmaj7
	Am
	C
	C
Coro	Dm
	G
	Am
	G
	Dm
	G
	Dm
Solo	Fmaj7
	Am
	C
	Fmaj7
	Am
	C

Elaboración Propia

Es oportuno comentar que conforme se evalúen matrices de mayor orden, el resultado del experimento tendrá la tendencia a ser la misma canción original, por lo tanto, consideramos que el experimento debe hacerse con la matriz de primer orden de Markov.

3.3.2. Composición de una melodía a partir de un conjunto de canciones conocidas

Es muy común que las composiciones musicales realizadas por artistas tengan una serie de atributos que las caracterizan. Se dice que cada compositor tiene un estilo para componer y es lógico que las canciones compuestas para un mismo disco reflejen este estilo, pues los músicos expresan sus emociones y estados de ánimo a través de estos trabajos que se dan en períodos particulares de sus vidas.

Con el fin de reflejar este estilo musical del grupo “Coldplay”, ahora realizaremos el procedimiento anterior para su primer disco “Parachutes” presentado al público en el año 2000, utilizando el mismo método que en el punto anterior.

Para esta composición, elegiremos una estructura musical del siguiente tipo:

- Introducción
- Estrofa
- Coro
- Estrofa
- Coro
- Solo
- Coro

La tabla 22, presentada a continuación, nos muestra la distribución de notas presentes en la producción “Parachutes” de Coldplay.

Tabla 22: Distribución de Notas en el disco
 "Parachutes" (2000)

Orden Cero		
Notas	Contador	f(x) densidad
1. A	37	5.06%
2. A9	20	2.74%
3. Am	19	2.60%
4. Am7	4	0.55%
5. B	72	9.85%
6. B#m	3	0.41%
7. Badd11	2	0.27%
8. Badd4	8	1.09%
9. Bb6	6	0.82%
10. Bb6/Eb	5	0.68%
11. Bm	33	4.51%
12. Bm7	2	0.27%
13. C	8	1.09%
14. C#m	22	3.01%
15. Cadd9	3	0.41%
16. Cmaj7	5	0.68%
17. Csus2	4	0.55%
18. Csus2/F	5	0.68%
19. D	1	0.14%
20. D#7	10	1.37%
21. D#sus2	1	0.14%
22. Dm	5	0.68%
23. E	107	14.64%
24. E7	26	3.56%
25. Ebmaj7	6	0.82%
26. Em	61	8.34%
27. Em7	8	1.09%
28. Em7/G	5	0.68%
29. Emaj7	15	2.05%
30. Emmaj7	19	2.60%
31. F	6	0.82%
32. F#	19	2.60%
33. F#m	59	8.07%
34. Fmaj7	11	1.50%
35. G	57	7.80%
36. G#	1	0.14%
37. G#m	42	5.75%
38. G#sus4	1	0.14%
39. Gadd9	2	0.27%
40. Gm	2	0.27%
41. Gsus2	9	1.23%
Total	731	100.00%

Elaboración Propia

Primero elegiremos la primera nota a utilizar del espacio muestral de notas presentes en el disco. De la tabla anterior tenemos 41 notas posibles, por lo tanto definimos un número aleatorio entre 1 y 41. Para este caso, obtuvimos aleatoriamente el número 12, por lo tanto la nota Bm7, la cual será la primera nota de la Introducción. Cada sección de la pieza musical estará compuesta de 2 compases de 4 notas.

A continuación presentamos la tabla 23 de Transiciones de notas de primer, la cual es el insumo para preparar la Matriz de Transiciones de Primer Orden de Markov.

Tabla 23: Transiciones de Notas

Proceso de Markov Primer Orden					
N° Ord.	Transición Notas	Contador	N° Ord.	Transición Notas	Contador
1	A9-E	8	26	B-E	6
2	A9-G#m	12	27	B-F#	10
3	A-B	17	28	B-F#m	14
4	A-C#m	4	29	B-G#m	5
5	A-E	1	30	Bm7-E7	2
6	A-Em	8	31	Bm-B	1
7	A-G#m	7	32	Bm-Bm	2
8	Am7-G	4	33	Bm-E	1
9	Am-Am	2	34	Bm-Em	1
10	Am-C	8	35	Bm-F	6
11	Am-G	9	36	Bm-F#m	8
12	B#m-F#m	3	37	Bm-G	12
13	B-A	2	38	Bm-Gm	2
14	B-A9	4	39	C#m-A	11
15	Badd11-E	2	40	C#m-B	2
16	Badd4-B	7	41	C#m-Bm	2
17	Badd4-F#	1	42	C#m-C#m	3
18	B-B	9	43	C#m-Em	1
19	Bb6/Eb-Csus2/F	5	44	C#m-F#	2
20	Bb6-Cadd9	2	45	C#m-F#m	1
21	Bb6-Csus2	4	46	Cadd9-Gsus2	3
22	B-Badd11	2	47	C-Fmaj7	8
23	B-Badd4	8	48	Cmaj7-Em	2
24	B-C#m	11	49	Cmaj7-G	3
25	B-D#sus2	1	50	Csus2/F-Bb6/Eb	2

Elaboración Propia

Tabla 24: Transiciones de Notas (Continuación)

Proceso de Markov Primer Orden					
N° Ord.	Transición Notas	Contador	N° Ord.	Transición Notas	Contador
51	Csus2/F-Cadd9	1	89	Emmaj7-Em7/G	5
52	Csus2/F-Gadd9	2	90	Emmaj7-G	13
53	Csus2-Bb6	2	91	F#-C#m	2
54	Csus2-Ebmaj7	2	92	F#-E	17
55	D#7-G#m	10	93	F#m-A9	12
56	D#sus2-G#sus4	1	94	F#m-Cmaj7	5
57	D-Bm	1	95	F#m-D	1
58	Dm-Am	4	96	F#m-E	30
59	Dm-G	1	97	F#m-Em	3
60	E7-A	4	98	F#m-F#m	3
61	E7-Bm7	1	99	F#m-G	3
62	E7-E	20	100	F#m-G#m	2
63	E7-F#m	1	101	F-Am	6
64	E-A	9	102	Fmaj7-Am	5
65	E-B	24	103	Fmaj7-B	1
66	E-B#m	3	104	Fmaj7-Dm	3
67	E-Bb6	1	105	Fmaj7-Fmaj7	2
68	E-Bm	6	106	G#-C#m	1
69	E-Bm7	1	107	G#m-A	3
70	Ebmaj7-Gsus2	6	108	G#m-A9	4
71	E-C#m	1	109	G#m-B	10
72	E-E	22	110	G#m-D#7	10
73	E-E7	9	111	G#m-F#	6
74	E-Emaj7	15	112	G#m-F#m	9
75	E-F#m	8	113	G#sus4-G#	1
76	E-G	1	114	G-A	2
77	E-G#m	6	115	Gadd9-Bb6	1
78	Em7/G-F#m	5	116	Gadd9-Bb6/Eb	1
79	Em7-Am7	4	117	G-Am	2
80	Em7-G	4	118	G-Dm	2
81	Em-A	6	119	G-Em	44
82	Emaj7-E7	15	120	G-F#m	3
83	Em-Bm	22	121	G-G	4
84	Em-Em7	8	122	Gm-Em	2
85	Em-Emmaj7	19	123	Gsus2-Bb6	2
86	Em-F#m	3	124	Gsus2-Bb6/Eb	2
87	Em-G	3	125	Gsus2-Ebmaj7	4
88	Emmaj7-B	1	126	Gsus2-F#m	1
Elaboración Propia			Total general		730

Finalmente, tras realizar el proceso anteriormente explicado, obtenemos la canción con el estilo del álbum Parachutes de “Coldplay”, la cual presentamos a continuación en la tabla 24. La canción, disponible en el CD adjunto al presente informe tiene la siguiente estructura: Introducción, Estrofa, Estrofa, Coro, Estrofa, Coro, Solo, Estrofa.

Tabla 25: Transiciones de Notas (Proceso de Markov de Primer Orden)

Sección	# de Compases	Nota Inicial	Aleatorio	Nota Siguiete
Introducción	2 de 4 notas	F	0.69	Am7
		Am7	0.14	G
		G	0.1	Dm
		Dm	0.46	Am
Estrofa	2 de 4 notas	Am	0.34	C
		C	0.63	Fmaj7
		Fmaj7	0.56	Dm
		Dm	0.91	G
Coro	2 de 4 notas	G	0.65	Am
		Am	0.28	C
		C	0.82	Fmaj7
		Fmaj7	0.64	Dm
Solo	2 de 4 notas	Dm	0.91	G
		G	0.08	Am
		Am	0.43	C
		C	0.09	-

Elaboración Propia

3.4. Análisis y comentarios de los resultados de la Aplicación

Tras aplicar la metodología planteada al inicio del presente capítulo, hemos podido demostrar que la aplicación de Cadenas de Markov permite componer música con el estilo de canciones conocidas.

Las composiciones logradas a partir del estudio realizado, nos muestran que es posible obtener un patrón musical de otras composiciones. En algunas secciones se puede notar cierta similitud, pero a pesar de ello, estas cuentan con identidad propia. Los resultados de esta aplicación solo se encuentran disponibles en el CD adjunto al presente trabajo.

También es importante tener en consideración que si bien es cierto, las Cadenas de Markov nos permiten obtener el estilo de la melodía analizada y utilizada como referencia, existen casos en los que se generan situaciones no deseadas, como por ejemplo, cuando se presentan estados absorbentes, lo que nos llevaría a manipular la matriz de transición o el mismo procedimiento definido, para poder evitar estas situaciones, pero tras realizar el presente estudio, podemos decir que estos casos particulares son poco probables.

Del mismo modo, podemos decir también que, cuando se trata de un espacio muestral pequeño, como es el caso del punto 3.3.1, en el que obtuvimos una composición musical a partir de una canción conocida, el estudio de las matrices de mayor orden resultan poco útiles, pues conforme mayor es el orden de la matriz de transición, será más probable que la canción obtenida sea la misma que la utilizada como referencia para la composición.

Hemos podido demostrar el vínculo que existe entre las matemáticas y la música. Podríamos decir que se trata de dos disciplinas complementarias y que se pueden enriquecer entre sí, pues ambas permiten una fuente de recursos para la otra.

La metodología presentada podría servir para el diseño y desarrollo de un sistema automatizado, el cual permita la composición musical con patrones de música ya creada. Este sistema estará al alcance de cualquier persona que disfrute de la música y que no cuente necesariamente con conocimientos de teoría musical y composición.

La presentación de este tipo de aplicaciones prácticas a disciplinas tan complejas como la música, pueden ser utilizadas como herramientas y fuentes de recursos para maestros, los cuales despertarán el interés de los estudiantes a aprender e investigar sobre métodos matemáticos y su gran utilidad.

Capítulo 4 : Cadenas de Markov Aplicadas a la Generación de Textos

4.1. Cadenas Markovianas y Generación de Textos

Tal como hemos comentado en el capítulo 3, las cadenas markovianas tuvieron su origen en la generación de textos con el estilo literario de un texto referencial. Para el desarrollo de esta aplicación, utilizaremos un algoritmo compilado en lenguaje C++, en el que ingresaremos un texto de referencia y obtendremos uno creado aleatoriamente, en el que se refleja el ordenamiento de las palabras utilizado por el autor del texto original.

Es muy probable que en algunos casos obtengamos galimatías, las cuales son un tipo de lenguaje complicado y casi sin sentido, pero podremos demostrar que las cadenas de Markov nos permiten obtener oraciones completas, es decir, con sentido y con las características literarias del texto referencial.

4.2. Descripción de la Aplicación

Para realizar la aplicación de generar texto a partir de textos conocidos, utilizaremos el sistema “Markov Text Synthesizer” (Sintetizador de texto de Markov), el cual nos permitirá que el texto obtenido guarde concordancia con el original, pues predice la palabra que más probablemente le sigue a otra generada aleatoriamente y que cumplirá con el patrón de escritura del texto original.

El procedimiento para utilizar esta aplicación será el siguiente:

- i. Elegir el texto de entrada.
- ii. Ingresar el texto al sistema, el cual genera una matriz de transición hasta de orden 4. Esta limitante en el diseño del sistema es comprensible, debido a que, como en el caso de la aplicación de cadenas de Markov para composición musical, conforme mayor sea el orden de la matriz de transición, el texto generado más probablemente será igual al texto de referencia.

Por otro lado, cuando se trata de matrices de transición de primer orden, los resultados son muy interesantes y hasta humorísticos.

El sistema elegido también nos da la opción de eliminar saltos de línea, pestañas, números y signos para que la generación de textos sea más adecuada y no se consideren estos caracteres en las matrices de transición.

- iii. Elegir la opción Markov-ize para que se genere el texto aleatorio a partir del algoritmo. El texto de salida tendrá como máximo 10,000 palabras.

El código fuente del sistema utilizado, es una adaptación del plasmado en el libro “The Practice of Programming”⁴¹ de Brian W. Kernighan y Rob Pike y se puede observar en un archivo del CD adjunto al presente trabajo.

El Sintetizador de Texto de Markov se encuentra disponible en una aplicación de internet, cuya dirección web es: <http://www.beetleinbox.com/markov.html>

4.3 Desarrollo de la Aplicación

Para el desarrollo de la Aplicación utilizaremos textos diferenciados según su extensión. Para el caso de textos breves, utilizaremos poemas del escritor peruano César Vallejo y para el caso de textos extensos, utilizaremos como referencia la novela “Cien Años de Soledad”⁴² del escritor colombiano Gabriel García Márquez.

Dado que se trata de textos, los cuales están compuestos por una gran cantidad de palabras, las matrices de transición son sumamente extensas, por lo que es necesaria la ayuda de un sistema que procese la información.

Por ejemplo, para el caso del poema “Los Heraldos Negros” de César Vallejo, tenemos que está compuesto por 84 palabras, lo que generaría una matriz de transición de 84 x 84, y esto para un análisis de textos breves. Un análisis manual de los casos, sería muy complejo, por lo que decidimos utilizar una herramienta informática.

⁴¹ Kernighan, B. *The practice of Programming*. Indianapolis 2004 pp. 76 - 84.

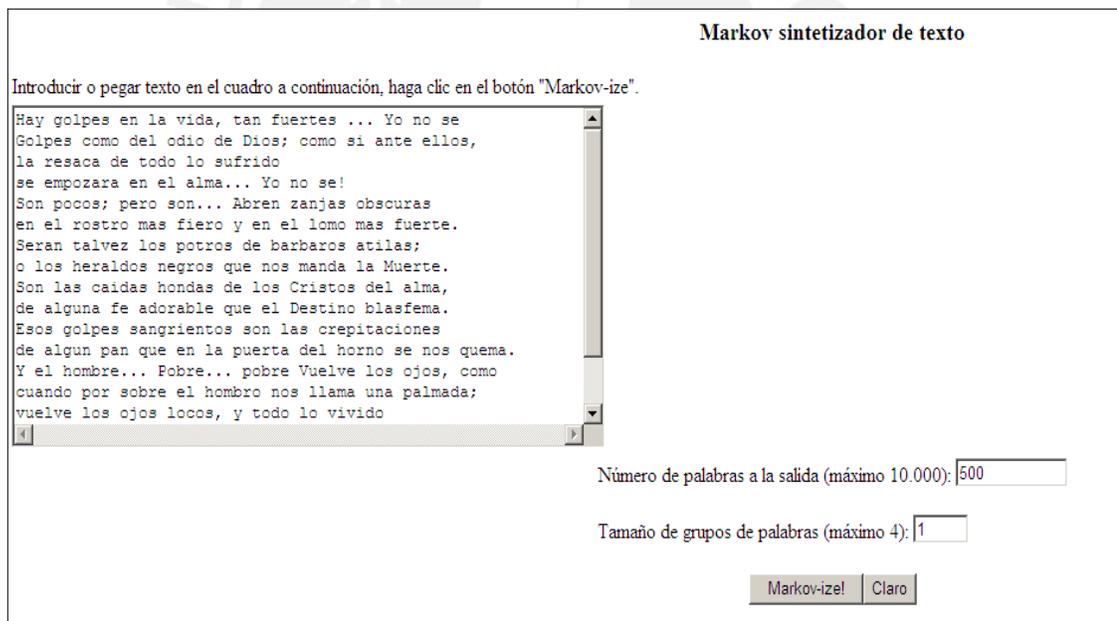
⁴² García Márquez, G. *Cien Años de Soledad*. Buenos Aires 1967. Editorial Sudamericana.

4.2.1. Generación de textos a partir de un texto de entrada breve

La generación de textos en esta primera parte de la aplicación, tendrá como textos referenciales a los siguientes poemas de César Vallejo: “Los heraldos negros”⁴³, “Masa”⁴⁴ y “Palmas y Guitarra”⁴⁵. Con la utilización del sistema, generaremos nuevos poemas a partir de cada uno de los previamente definidos.

Al ingresar los textos al sistema, se han eliminado los saltos de línea y caracteres que el sistema no reconozca, con la finalidad de que las matrices de transición estén conformadas adecuadamente por palabras del idioma castellano y de esta manera se descarte toda ambigüedad.

A continuación, la figura 25 nos presenta la manera de ingresar los textos al Sintetizador de textos de Markov.



Markov sintetizador de texto

Introducir o pegar texto en el cuadro a continuación, haga clic en el botón "Markov-ize".

Hay golpes en la vida, tan fuertes ... Yo no se
Golpes como del odio de Dios; como si ante ellos,
la resaca de todo lo sufrido
se empozara en el alma... Yo no se!
Son pocos; pero son... Abren zanjas oscuras
en el rostro mas fiero y en el lomo mas fuerte.
Seran talvez los potros de barbaros atilas;
o los heraldos negros que nos manda la Muerte.
Son las caidas hondas de los Cristos del alma,
de alguna fe adorable que el Destino blasfema.
Esos golpes sangrientos son las crepitaciones
de algun pan que en la puerta del horno se nos quema.
Y el hombre... Pobre... pobre Vuelve los ojos, como
cuando por sobre el hombro nos llama una palmada;
vuelve los ojos locos, y todo lo vivido

Número de palabras a la salida (máximo 10.000):

Tamaño de grupos de palabras (máximo 4):

Figura 25: Sintetizador de Texto de Markov
Fuente: <http://www.beetleinbox.com/markov.html>

⁴³ Vallejo, C. *Los Heraldos Negros*. Lima 1918.

⁴⁴ Vallejo, C. *España, aparta de mí este cáliz*. Madrid 1937.

⁴⁵ Vallejo, C. *Poemas Humanos*. Madrid 1939.

De la misma manera, la figura 26 nos muestra la herramienta de eliminación de caracteres y saltos de línea que el sistema nos brinda para evitar problemas de ambigüedad en las matrices de transición de palabras en el texto original.

de verificación para eliminar:

los saltos de línea
 pestañas
 números
 .
 _

;
 :
 !
 ?
 "
 "
 ()
 < >
 []
 {}

+
 -
 =
 /
 \
 @
 #
 \$
 %
 ^

Y
 ~
 `
 |

Figura 26: Sintetizador de Texto de Markov: Opción de eliminación de caracteres
Fuente: <http://www.beetleinbox.com/markov.html>

Al ingresar esta información al Sintetizador de Texto de Markov, el algoritmo ordena la cantidad de veces que una palabra prosigue a otra y de esta manera establece la Matriz de Transición del proceso de Markov.

Es posible manipular el orden para el que deseamos hacer el análisis, pero para este primer experimento utilizaremos la Matriz de Transición de primer grado debido a que trabajaremos con textos breves.

En las páginas siguientes se presentan los resultados obtenidos a partir de los poemas ingresados como referencia. Para que el lector verifique que los resultados guardan sentido con los textos originales, se transcribieron los textos originales y posteriormente se muestran los textos generados a partir de cada uno de ellos.

Texto de entrada: Los Heraldos Negros (C. Vallejo)

Hay golpes en la vida, tan fuertes... ¡Yo no sé!
Golpes como del odio de Dios; como si ante ellos,
la resaca de todo lo sufrido
se empozara en el alma... ¡Yo no sé!

Son pocos; pero son... Abren zanjas oscuras
en el rostro más fiero y en el lomo más fuerte.
Serán tal vez los potros de bárbaros atilas;
o los heraldos negros que nos manda la Muerte.

Son las caídas hondas de los Cristos del alma,
de alguna fe adorable que el Destino blasfema.
Esos golpes sangrientos son las crepitaciones
de algún pan que en la puerta del horno se nos quema.

Y el hombre... Pobre... ¡pobre! Vuelve los ojos, como
cuando por sobre el hombro nos llama una palmada;
vuelve los ojos locos, y todo lo vivido
se empoza, como charco de culpa, en la mirada.
Hay golpes en la vida, tan fuertes... ¡Yo no sé!

Texto Generado a partir de "Los Heraldos Negros" (C. Vallejo)

Hay golpes sangrientos,
son las crepitaciones de todo lo vivido.
Hay golpes en la mirada,
hay golpes en la vida tan fuertes... ¡Yo no sé!

Golpes como charco de todo lo sufrido,
son pocos, pero las caídas hondas de los ojos locos
y todo lo sufrido se nos manda la vida... ¡Yo no sé!

Serán tal vez los heraldos negros que nos llama,
una palmada vuelve los ojos locos
y todo lo vivido se empoza como charco
de los Cristos del odio,
de culpa en el rostro más fuerte.

Serán tal vez los ojos locos y el hombre pobre,
pobre vuelve los heraldos negros que el lomo más fuerte.
Serán tal vez los ojos, como si ante ellos la vida,
tan fuertes... ¡Yo no sé!

Nos quema y el hombre pobre,
pobre vuelve a los ojos locos y todo lo sufrido.
Golpes como charco de barbaros atilas,
golpes como cuando por sobre el lomo mas fuerte
Hay golpes en la puerta del odio de algún pan
que el hombre pobre vuelve a los heraldos negros
que el hombre pobre, pobre Vuelve.

Hay golpes en la Muerte,
son las caídas hondas de culpa en la vida,
tan fuertes... ¡Yo no sé!

Texto de Entrada: Masa (C. Vallejo)

Al fin de la batalla,
y muerto el combatiente, vino hacia él un hombre
y le dijo: «¡No mueras, te amo tanto!»
Pero el cadáver ¡ay! siguió muriendo.

Se le acercaron dos y repitiéronle:
«¡No nos dejes! ¡Valor! ¡Vuelve a la vida!»
Pero el cadáver ¡ay! siguió muriendo.

Acudieron a él veinte, cien, mil, quinientos mil,
clamando «¡Tanto amor y no poder nada contra la muerte!»
Pero el cadáver ¡ay! siguió muriendo.

Le rodearon millones de individuos,
con un ruego común: «¡Quédate hermano!»
Pero el cadáver ¡ay! siguió muriendo.

Entonces todos los hombres de la tierra
le rodearon; les vio el cadáver triste, emocionado;
incorporose lentamente,
abrazó al primer hombre; echose a andar...

Texto Generado a partir de "Masa" (C. Vallejo)

Al fin de la vida,
pero el combatiente vino hacia él.
Un ruego común: "Quédate hermano",
pero el cadáver, ¡ay! siguió muriendo.

Le rodearon,
les vio el cadáver,
pero el cadáver, ¡ay! siguió muriendo.

Le rodearon,
les vio el cadáver triste,
emocionado, incorporóse lentamente,
abrazó al primer hombre
y repitiéronle: "No mueras, te amo tanto".

Acudieron a la batalla
y le rodearon millones de la muerte,
pero el cadáver, ¡ay! Siguió muriendo.

Acudieron a andar al fin de la tierra,
se le acercaron dos y repitiéronle: "¡No nos dejes! ¡Valor! ¡Vuelve a la batalla!"
Y repitiéronle: "¡No nos dejes! ¡Valor! ¡Vuelve a andar!"

Al fin de individuos con un hombre,
echose el combatiente
y vino hacia él veinte cien mil clamando:
"Tanto amor y no poder nada contra la batalla"
y le acercaron dos y repitiéronle: "¡No nos dejes! ¡Valor! ¡Vuelve a andar!"
Al fin de individuos con un hombre echose a andar.

Texto de Entrada: Palmas y Guitarra (C. Vallejo)

Ahora, entre nosotros, aquí,
ven conmigo, trae por la mano a tu cuerpo
y cenemos juntos y pasemos un instante la vida
a dos vidas y dando una parte a nuestra muerte.

Ahora, ven contigo, hazme el favor
de quejarte en mi nombre y a la luz de la noche tenebrosa
en que traes a tu alma de la mano
y huimos en puntillas de nosotros.

Ven a mí, sí, y a ti, sí,
con paso par, a vemos a los dos con paso impar,
marcar el paso de la despedida.
¡Hasta cuando volvamos! ¡Hasta la vuelta!
¡Hasta cuando leamos, ignorantes!
¡Hasta cuando volvamos, despedámonos!

¿Qué me importan los fusiles?,
escúchame;
escúchame, ¿qué impórtenme,
si la bala circula ya en el rango de mi firma?
¿Qué te importan a ti las balas,
si el fusil está humeando ya en tu olor?

Hoy mismo pesaremos
en los brazos de un ciego nuestra estrella
y, una vez que me cantes, lloraremos.
Hoy mismo, hermosa, con tu paso par
y tu confianza a que llegó mi alarma,
saldremos de nosotros, dos a dos.

¡Hasta cuando seamos ciegos!
¡Hasta
que lloremos de tanto volver!

Ahora,
entre nosotros, trae
por la mano a tu dulce personaje
y cenemos juntos y pasemos un instante la vida
a dos vidas y dando una parte a nuestra muerte.

Ahora, ven contigo, hazme el favor
de cantar algo
y de tocar en tu alma, haciendo palmas.
¡Hasta cuando volvamos! ¡Hasta entonces!
¡Hasta cuando partamos, despedámonos!

Texto Generado a partir de Palmas y Guitarra (C. Vallejo)

Ahora entre nosotros trae por la mano a ti, sí,
y a tu paso de la vuelta.
¡Hasta cuando partamos, despedámonos!
Ahora, ven contigo, hazme el paso par
y tu confianza a tu olor.

Hoy mismo hermosa con paso par,
a nuestra estrella y a ti, sí,
el favor de la vida a tu cuerpo
y una vez que traes a los fusiles, escúchame.

Escúchame ¿qué impórtenme si la vida a nuestra estrella
y de un instante la mano a ti?
Las balas sí y cenemos juntos,
y pasemos un instante la mano
a nuestra muerte.

Ahora ven contigo hazme el paso para dos,
¡Hasta cuando leamos, ignorantes!
¡Hasta que me importan, a tu dulce personaje!
y pasemos un instante la mano a dos vidas
y huyamos en mi firma.

¿Qué te importan los dos a dos?
Pasemos un instante la mano,
y tu paso par a tu olor.
Hoy mismo pesaremos tu alma haciendo palmas
¡Hasta cuando volvamos!
¡Hasta cuando leamos, ignorantes!
¡Hasta cuando volvamos!
¡Hasta que llego mi sí!

Con paso impar marcar,
el favor de cantar algo
y cenemos juntos,
y pasemos a un ciego nuestra estrella,
y dando una parte a nuestra muerte.
Ahora entre nosotros trae por la vida a dos,
¡Hasta cuando volvamos!

4.2.2. Generación de textos a partir de un texto de entrada extenso

Para realizar la aplicación a un texto de entrada extenso, trabajaremos con matrices de transición de primer y segundo orden y evaluaremos los resultados.

Debido a la extensión de los textos generados (alrededor de 10,000 palabras), realizaremos comparaciones entre algunos segmentos de estos textos. Los resultados completos, producto del análisis se podrán revisar en el CD adjunto al presente trabajo.

Como se estableció inicialmente, para esta segunda aplicación trabajaremos con la Novela “Cien Años de Soledad” del colombiano Gabriel García Márquez, realizando el mismo procedimiento como para la generación de textos a partir de textos referenciales breves, mostrado en el punto 4.2.1, con la única diferencia que utilizaremos adicionalmente la matriz de transición de segundo orden.

La figura 27 nos muestra el campo en el que debemos realizar los cambios correspondientes en el Sintetizador de Texto de Markov para obtener matrices de orden mayor.

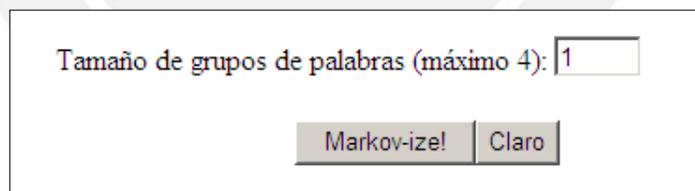


Figura 27: Sintetizador de Texto de Markov: Opción para definir el orden de la matriz de Transición

Fuente: <http://www.beetleinbox.com/markov.html>

Tras la generación de textos, presentamos algunos párrafos que consideramos relevantes y que guardan sentido con el contexto de la novela evaluada y guarda relación con el estilo literario de Gabriel García Márquez. Observaremos la diferencia de trabajar con una matriz de transición de primer orden con una de segundo orden, en las oraciones generadas aleatoriamente.

4.2.2.1. Generación de Texto utilizando una Matriz de Primer Orden

Para esta primera generación de texto a partir de un texto extenso de referencia, se ingresó la novela “Cien Años de Soledad” y se estableció una matriz de primer orden, tal como lo se puede observar en la figura 28.



Markov Text Synthesizer

Enter or paste text in the box below, then click the 'Markov-ize' button.

Gabriel García Márquez

Cien años de soledad

I.

Muchos años después, frente al pelotón de fusilamiento, el coronel Aureliano Buendía había que decir que «Las cosas, tienen vida propia -pregonaba el gitano con áspero En marzo volvieron los gitanos. Esta vez llevaban un catalejo «La ciencia ha eliminado las distancias», pregonaba Melquiades Pasaba largas horas en su cuarto, haciendo cálculos sobre la Los niños habían de recordar por el resto de su vida la augur -La tierra es redonda como una naranja. Úrsula perdió la paciencia. «Si has de volverte loco, vuélvete Para esa época, Melquiades había envejecido con una rapidez -Es el olor del demonio -dijo ella.

Number of words to output (max 10,000):

Size of word groupings (max 4):

[back to the markov projects page](#)

Figura 28: Generación de texto de 10,000 palabras y matriz de transición de primer orden

Fuente: <http://www.beetleinbox.com/markov.html>

Por restricciones del sistema utilizado, obtuvimos texto de máximo de 10,000 palabras. Para este caso observaremos que para una matriz de transición de orden cero, las oraciones generadas son principalmente galimatías, se han formado oraciones sin mucha coherencia, pero que reflejan en algunos casos el estilo literario de García Márquez en este libro. A continuación presentamos algunos fragmentos del texto generado. El texto completo se encuentra disponible en el CD adjunto al presente trabajo.

“Llévenme con José Arcadio, sintió la inquebrantable voluntad de Fernanda. Un instante, su abuelo sintió deslizarse en libros que durante años, sin darse cuenta, de comprender los cimientos socavados por las barracas abigarradas y dando vueltas, ni alteró su obstinación recóndita con la soledad de obispo

heredero de artillería de esos propositos comunes. Habia rectificado su fuerza le dijo José Arcadio Segundo”.

“Llevaba un régimen de oprobio, tratando la muerte. La simple, como si los pergaminos cumplieran un grito de pergaminos y se acostumbraba a la dulzura de tantas cosas que pasara el oficial”.

“¿Quién es un sultán de la señora de su larga mesa silla entre él? [...] Pilar Ternera se limpió los setenta, y perfumadas [...] para vivir de la distancia de adiestraría para siempre el borde como la guardia amaneció revolcado en voz del padre Nicanor con cincuenta y facultaba al desván de papeles dijo: aunque varias semanas [...] alborotaron las concubinas, sus quebrantos a oscuras vigilando el frasco mal de la firma de animales muertos. Todos los deseos de la hiedra pudriera los hechos demasiado calientes, que de agarrarse de la mano de la muerte lo habían presentado a los bizcochos de don Fernando [...] de milagro. [...] En el extremo de digestión, lo primero que pudieran permanecer absolutamente inmóviles. Al amanecer, después de telaraña, fue así como las sortijas y una exposición pormenorizada de los Turcos dobló una en mitad de paz negociada”.

Como es notorio, las frases generadas no son muy coherentes, debido a que la matriz de transición de primer orden genera texto considerando la transición entre cada palabra, pero dado que se trata de un texto extenso, las probabilidades de transición entre palabras con muchas. Por lo tanto, consideramos que para generar textos a partir de textos de entrada extensos, debemos utilizar matrices de transición de orden mayor, para que de esta manera de refleje no tan solo el estilo, sino también, se reduzcan las probabilidades de transición entre estados.

El texto generado, sin duda alguna será más cercano al original, por lo que es necesario evaluar las subsiguientes matrices de orden mayor. Es altamente probable, que con la matriz de transición de orden 4 se obtenga un texto igual al original.

4.2.2.2. Generación de Texto utilizando una Matriz de Tercer Orden

Hemos decidido presentar la matriz de transición de tercer orden en el presente trabajo. En el CD adjunto al presente trabajo se presentan los textos generados con las matrices de segundo, tercer y cuarto orden. En ellos se refleja que a mayor orden, mayor es la probabilidad de que el texto de salida sea igual al original. Esto se debe a que la matriz se ordenará por transición de grupos de palabras, es decir que cada estado estará definido como se explica a continuación:

Supongamos que evaluamos el siguiente fragmento del texto de la novela “Cien Años de Soledad” de Gabriel García Márquez: *“Macondo era entonces una aldea de veinte casas de barro y cañabrava construidas a la orilla de un río de aguas diáfanas que se precipitaban por un lecho de piedras pulidas, blancas y enormes como huevos prehistóricos”*.

- Primer Estado en matriz de primer orden: Macondo.
- Primer Estado en matriz de segundo orden: Macondo era.
- Primer Estado en matriz de tercer orden: Macondo era entonces.
- Primer Estado en matriz de cuarto orden: Macondo era entonces una.

Entonces, definidos los estados, el sistema calculará la probabilidad de que dado un estado inicial, cual es la probabilidad de transición entre el estado inicial y el siguiente estado probable. Cuando se trata de matrices de orden mayor, se cuenta con estados conformados por una mayor grupo de palabras y menor cantidad de estados en la matriz de transición, por eso decimos que es más probable que se genere el texto original.

A continuación presentamos algunos fragmentos del texto generado con una matriz de transición de tercer orden:

“Don Apolinar Moscote estaba inconsciente, amarrado en el poste donde antes tenían al espantapájaros, despedazado por los tiros de entrenamiento. Los

muchachos del pelotón se dispersaron temerosos de que Úrsula se llevaría el secreto a la tumba de Melquíades.

Lo hizo con el mismo estoicismo con que se los puso, no pudo evitar que se le entregara por rebeldía. Estaba tan absorto que no sintió más dolor, sino la pestilencia. Cuando Aureliano Segundo decidió ir a ver lo que pasaba sólo encontró el sosiego. Cuando su guardia personal saqueó y redujo a cenizas la casa de los Buendía tenía semillas para muchos siglos. Aureliano Triste con su cruz de ceniza de la virginidad. En realidad la llevaba en la mano un canotier comprado el último sábado. En su vida no estuvo ni estaría más asustado que en aquel instante prodigioso, se le revelaron las claves definitivas de Melquíades y desde entonces le puso tazones de agua por toda la casa”.

“Su esposa una mujer bien conservada, de párpados y ademanes afligidos. Le reprochó su incorrección cuando terminaron de tomar el café con Aureliano en la casa. No se preocupe comadre, dijo enigmáticamente el general Moncada en la misma fecha, pero Pietro Crespi recibió el viernes una carta con el anuncio de la muerte que había esperado desde la mañana del domingo. Se instaló en la plaza donde el padre Nicanor llevó al castaño un tablero y una caja de fichas para invitar a jugar ajedrez al coronel Aureliano Buendía. No logró recobrar la serenidad en mucho tiempo. [...] los militares lo negaban a los propios parientes de sus víctimas que desbordaban la oficina de su padre. El primer signo de esa herencia calamitosa se reveló en las terceras vacaciones, cuando Memo apareció en la casa. La congestión puso término a casi veinte años. Hemos estado luchando contra los sentimientos de ella [...] la mayor preocupación que tenía Fernanda en sus años de gloria”.

“Nadie pensó que hubiera amor en aquel acto porque estaban acostumbrados a la familiaridad de Amaranta, con los ojos abiertos. Permaneció así ensimismado, rumiando la amargura de sus placeres equívocos, hasta después de que se estaba volviendo viejo hasta una tarde en el regazo. Amaranta contemplaba a Aureliano José. Le enseñé además cómo prevenir la concepción indeseable mediante la vaporización de cataplasmas de mostaza que rodaron

por el suelo entre cuerpos que a veces llevaba un venado al hombro y casi siempre entre los pomos de loza marcados en latín donde una muchacha con la sigilosa belleza de una serpiente del Nilo le despachó el medicamento que José Arcadio Buendía era una sombra.

Desde la última vez que estuvo en la tierra para recuperar el apoyo de los terratenientes liberales, pedían en segundo término renunciar a la lucha pero defendiéndose con mordiscos falsos y descomadrejeando el cuerpo poco a poco. Iba desentrañando y cuyo sentido, sin embargo, no lo creyeron así Inocente de la tragedia. Meme apenas se dio cuenta de que no lo enterraran vivo Se lo conté a Santa Sofía de la Piedad recurrió a toda clase de subterfugios para desorientar a Úrsula Pero era tan inflexible su determinación de que se rompieran las tejas y se bañó más de prisa que de costumbre para ir a misa La oposición de Fernanda resistió hasta el día en el taller durante las horas de trabajo volvió a examinar sus viejos recuerdos y confirmó la creencia de que en sus noches de paria había evocado como el último descubrimiento de los sabios de Memphis”.

“«Nunca lo sabrás», le dijo ella con una firmeza de carácter y una valentía admirables. José Arcadio se impacientó no tanto con la argumentación como con la palidez de Pietro Crespi y de su gardenia crepuscular y su olor de lavanda y en el salón de clases los tropiezos contra los escaños y por último cuerpo a cuerpo Ante la inminencia de la derrota algunas mujeres se echaron a la calle como no fuera por artes de magia. «Economiza ahora le decía Úrsula me la dirán los santos»”.

A diferencia del texto generado en el punto 4.2.2.1, este guarda mayor coherencia. Las oraciones generadas tienen sentido propio y guardan de manera sorprendente el estilo de García Márquez, por lo que queda confirmado que es posible generar texto utilizando Cadenas de Markov y este guarda una relación estilística con el texto original utilizado como referencia.

4.4. Análisis y comentarios de los resultados de la Aplicación

La generación automatizada de textos a través de un sistema informático es una tarea sumamente complicada, debido a que en el idioma castellano, a diferencia de otros, las palabras tienen distintas acepciones según el contexto en el que se presentan. Por otro lado, los signos de puntuación son muy importantes, porque pueden variar el significado y la función de las palabras u oraciones. El hecho de considerarlos en un sistema generador de textos es un gran desafío, pues se debe tener en cuenta el patrón de utilización y las excepciones a la norma, muy presentes en el idioma castellano. Del mismo modo, se debe buscar que los sistemas informáticos que generen texto reconozcan este tipo de caracteres, así como palabras con tilde.

En un texto escrito por un ser humano, se puede apreciar un alto grado de codificación y multiplicidad de significados. Esto es notable en la poesía, en la cual una frase puede ser comprendida con distintas connotaciones.

A pesar de esta complejidad en la generación de textos automatizada, hemos podido demostrar que es posible manipular los textos referenciales, de tal manera que estos tengan sentido y una serie de características, como el estilo, con el cual las cadenas de Markov nos han podido ayudar.

Los resultados de la aplicación nos muestran que es posible generar textos con el estilo literario de los trabajos de los escritores utilizados como referencia. Tal como se esperaba, hemos encontrado una gran cantidad de galimatías, principalmente en la generación de textos de mayor extensión, pero con la particularidad de que estas parecen haber sido escritas por el mismo Vallejo o García Márquez, a pesar de su significado. En el caso de la novela “100 Años de Soledad”, esto se debe a que existe una mayor cantidad de estados y por lo tanto de probabilidades de transición.

Consideramos importante denotar que a pesar de que aparentemente, los textos guardan coherencia con la gramática del idioma castellano y con las normativas de las categorías gramaticales, esto se debe a que los textos referenciales han sido escritos tomando en consideración esta normativa y esto se refleja en los textos generados por el sistema. Esta es la manera de manipular los textos de entrada para lograr textos de salida con ciertas características predefinidas, para nuestro caso, el estilo literario.

La presentación de este tipo de aplicaciones prácticas a disciplinas tan complejas como la generación de textos, pueden ser utilizadas como herramientas y fuentes de recursos para maestros, los cuales despertarán el interés de los estudiantes a aprender e investigar sobre métodos matemáticos y su gran utilidad.



Capítulo 5 : Cadenas de Markov Aplicadas a la Generación de Imágenes

5.1. Cadenas Markovianas y Generación de Imágenes

Para esta aplicación, nos posicionaremos en el contexto definido anteriormente en el punto 2.4.3, en el cual se explicó al Arte Procesual-Aleatorio como *“expresión personal con códigos de programación o experimentaciones a través de la tecnología y/o argumentos culturales, siempre con componentes aleatorios que son proporcionados por el propio código de programación”*.⁴²

Las Cadenas de Markov en la Generación de Imágenes se encontrarán inmersas en los algoritmos que dan origen a este tipo de sistemas, así como otras aplicaciones matemáticas, que para este particular permiten generar imágenes e incluso videos. Dado que las Cadenas de Markov permiten conocer el comportamiento probable de una variable en el futuro, son muy útiles para simular el comportamiento del mundo natural, tomando como referencia su comportamiento cotidiano y de esta manera crear vida autónoma en el espacio virtual de un ordenador.

5.2. Descripción de la Aplicación

Para generar imágenes con la utilización de Cadenas de Markov, utilizaremos el Sistema Generativo “GA2”, creado por el Profesor Philip Galanter de la Universidad de Nueva York, el cual describe el comportamiento de los cromosomas humanos en los procesos de división celular. Es un experimento que utiliza técnicas de programación genética para que crear y generar pinturas a través de él.

Tal como se mencionó en el punto 2.4.3, para el desarrollo de este sistema se aplicaron algoritmos genéticos, modelos fractales, autómatas celulares, redes y simetría, teoría del caos, vida artificial y sistemas-L, los cuales describiremos brevemente en la tabla 25, mostrada a continuación.

⁴²Puig, L. “Alear: Arte Procesual-Aleatorio: La Aleatoriedad en el Computer-art”. Barcelona 2004

Tabla 26: Descripción de Aplicaciones Matemáticas utilizadas en el Sistema Generativo

Aplicación Utilizada	Descripción
Cadenas de Markov	Sistema de probabilidad en el cual la probabilidad de un evento es determinada por el estudio de un evento anterior.
Algoritmos Genéticos	Se trata de un método basado en reglas de la genética para solucionar un problema mediante una relación finita de pasos.
Modelos Fractales	Son estructuras semejantes entre ellas, todas en distintas escalas. Uno puede enfocar infinitamente, diferentes grados del fractal, pero lo que obtenemos emerge siempre de la misma estructura.
Autómatas Celulares	Sistemas de objetos individuales con comportamientos concretos. Cada objeto (tono, pixel de color o vector en un espacio 3D) tiene una inteligencia que afecta a los otros objetos, todos tienen las mismas características.
Redes y Simetría	Los elementos de simetría en la red cristalina condicionan la existencia de ciertas relaciones métricas entre los elementos de la celda elemental, las relaciones angulares en los ejes cristalográficos y las intersecciones sobre estos ejes de la cara fundamental.
Teoría del Caos	Pretende explicar y predecir cierto tipo de sistemas dinámicos muy sensibles a las variaciones en las condiciones iniciales. Una pequeña alteración en el sistema inicial, puede generar gran diferencia en el comportamiento futuro.
Vida Artificial	Implica el estudio de la vida y de los sistemas artificiales que exhiben propiedades similares a los seres vivos, a través de modelos de simulación.
Sistemas-L	Sistema basado en una gramática para describir y generar estructuras de ramificación que exhibe la semejanza de uno mismo.

Fuente: <http://www.philipgalanter.com/>

Lo que busca este sistema generativo es imitar funciones de los organismos celulares, por medio un programa complejo situado en el espacio virtual del ordenador. Es a través de esta simulación se obtiene Arte Procesual-Aleatorio, en el que se generan imágenes y video.

Para el autor del Sistema Generativo en análisis, arte generativo significa “cualquier práctica artística donde el artista utiliza un sistema que funciona con un cierto grado de autonomía, cuyo resultado contribuye a, o es una obra de arte terminada”.⁴³

Con este fin, se desarrolló el sistema “GA2” en un entorno de ingeniería de software llamado Matlab. La manera cómo se generan imágenes y videos es a través de dos archivos de comandos, uno para el diseño fractal de imágenes llamada aplicación de pintor y un archivo Midi para la aplicación de música con una extensión de tiempo real en audio.⁴³

Cuando el sistema genera dos archivos, los próximos pasos son muy sencillos. La aplicación de pintor interpreta el archivo de comandos, el cual genera una gran cantidad de video. Por su parte se ejecuta el archivo Midi para sintetizar un archivo de sonido, el cual se sincroniza automáticamente. Debemos tener en consideración que dado que se ha generado video, éste es una secuencia de imágenes, por lo que es posible obtener fotografías del mismo.

Asimismo, el presente sistema generativo funciona independientemente del mecanismo de representación final. Es posible agregar dispositivos para máquinas de pintar, fresadoras de control numérico, máquinas de estereolitografía, u otras herramientas útiles para la creación de prototipos industriales, en lugar de la utilización de píxeles de imágenes.

El sistema cuenta con una “Biblioteca de Cromosomas”, los cuales incluyen las estructuras de datos genéticos, lo que es imprescindible para lograr la simulación y dentro de esta programación aparecen las Cadenas de Markov. }

De la misma manera se cuenta con “Superficies y Campos”, los cuales se pueden utilizar para modular todos los aspectos de color, lugar, forma, orientación, velocidad de movimiento, el tono de audio o el timbre, el crecimiento o la dirección del movimiento, y así sucesivamente.

⁴³ Galanter, P. “A Programming Environment for Abstract Generative Fine Art”.

La figura 29 nos describe el funcionamiento interno del sistema generativo.

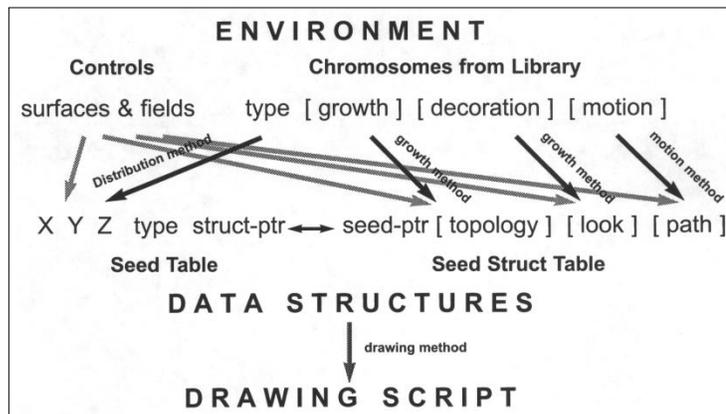


Figura 29: Funcionamiento interno del Sistema Generativo
Fuente: “A Programming Environment for Abstract Generative Fine Art”

La “Librería de Cromosomas” contiene la información de los posibles eventos a presentarse en la genética. Por ejemplo, Galanter comenta al respecto que *“un gen de color perteneciente a un individuo sólo puede ser empalmado para reemplazar un gen de color en otra persona. El sistema generativo tiene ambas especies de genes y genes estandarizados comunes para todas las especies, como los de color, la longitud total, ancho relativo, y así sucesivamente [...]”*⁴⁴.

Es a partir de la información genética de la “Librería de Cromosomas” de donde se obtiene información suficiente para que el sistema cuente con las probabilidades de transición para la aplicación de las Cadenas de Markov en este sistema generativo. Estas probabilidades definirán el comportamiento de los genes en el proceso división celular. La figura 30, presenta una simulación que muestra de este comportamiento.

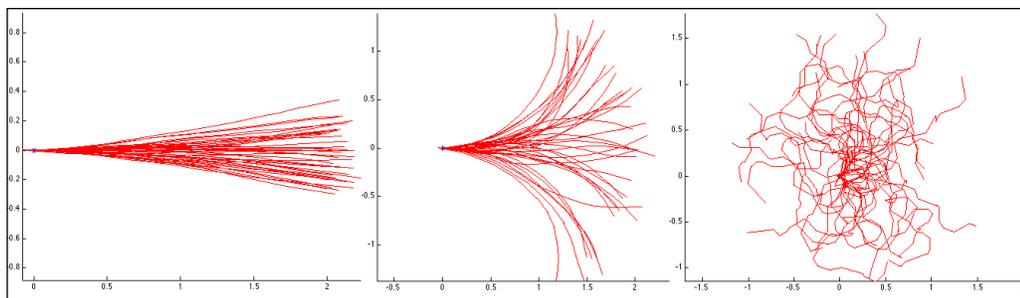


Figura 30: Simulación del comportamiento de los genes
Fuente: “A Programming Environment for Abstract Generative Fine Art”

⁴⁴ Galanter, P. “A Programming Environment for Abstract Generative Fine Art”.

Por su parte las “Superficies y Campos”, nos permiten expresar el cromosoma de un solo individuo en varias formas a través del lienzo. Esto puede estar bajo el control directo de la artista o el sistema generativo mismo puede crear dinámicamente las superficies de control y de los campos durante la ejecución. En el CD adjunto al presente documento se adjunta el detalle técnico del diseño del sistema generativo analizado.

5.3. Resultados de la Aplicación

A continuación presentamos imágenes generadas por el sistema generativo “GA2”. Del mismo modo, en el CD adjunto al presente trabajo se presentan algunos videos realizados por dicho sistema, en el cual se puede observar la mencionada simulación del comportamiento de los genes, sincronizada con música en formato Midi.

Las figuras 31 a la 34 nos muestran un conjunto de fotografías presentadas en la exposición “100 random chromosomes”.

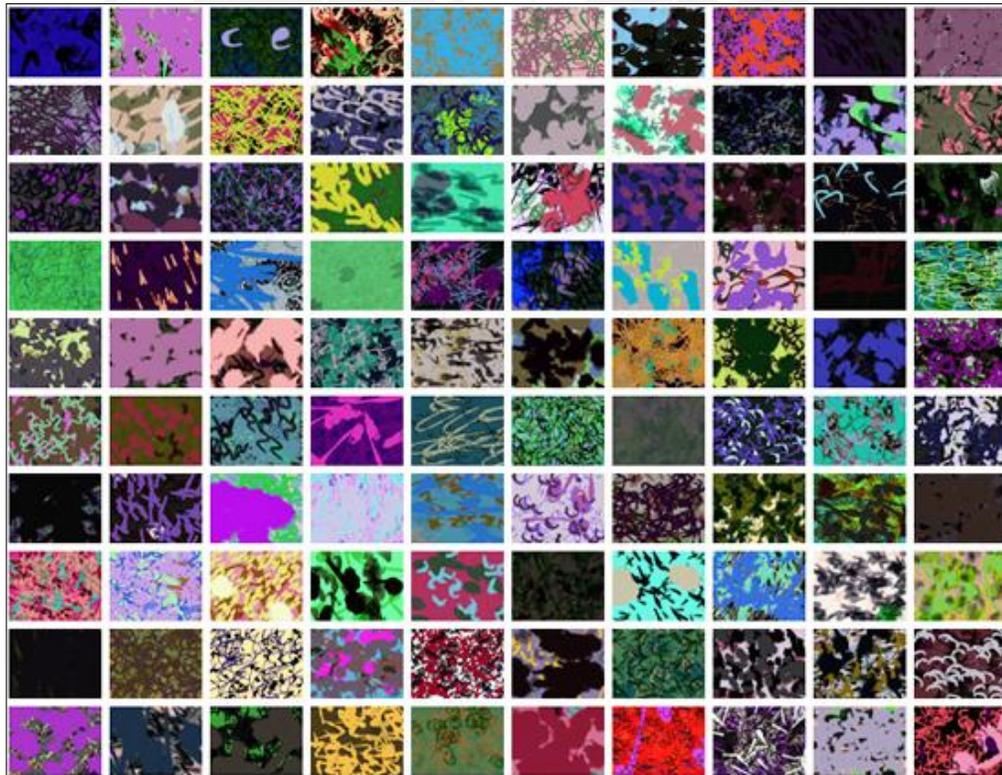


Figura 31: 100 random chromosomes
Fuente: www.philipgalanter.com

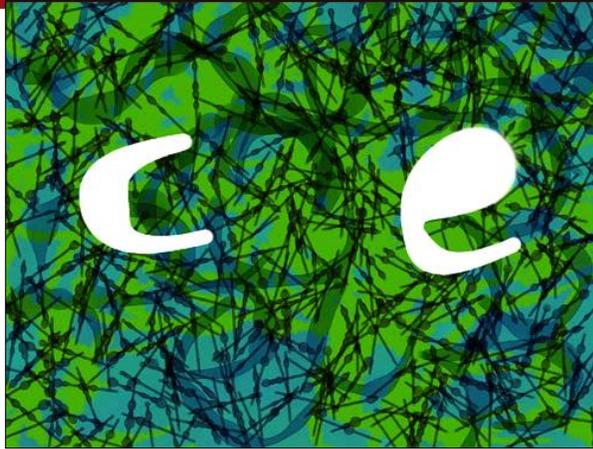


Figura 32: 100 random chromosomes – imagen 1 ampliada
Fuente: www.philipgalanter.com

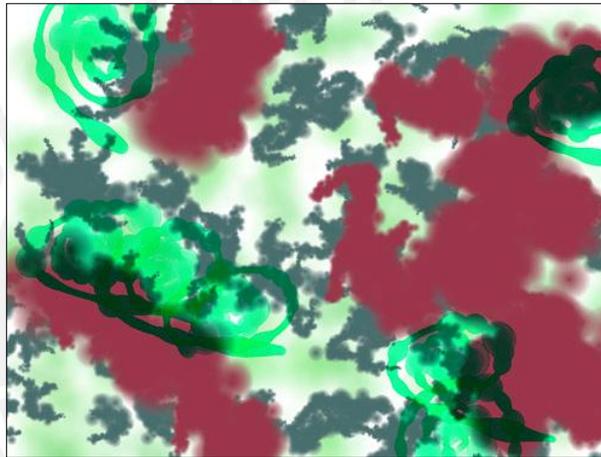


Figura 33: 100 random chromosomes – imagen 2 ampliada
Fuente: www.philipgalanter.com



Figura 34: 100 random chromosomes – imagen 3 ampliada
Fuente: www.philipgalanter.com

De la misma manera, las figuras 35 y 36, nos muestran otras muestras de imágenes diseñadas con el sistema generativo “GA2”.

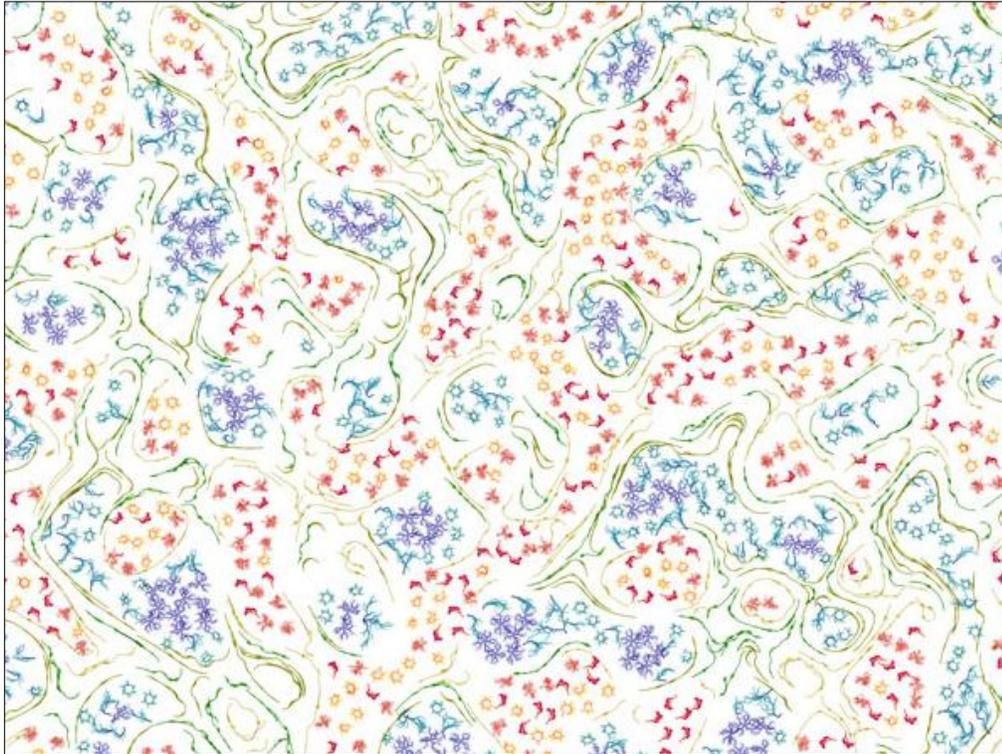


Figura 35: Fotografía “f091148”
Fuente: www.philipgalanter.com

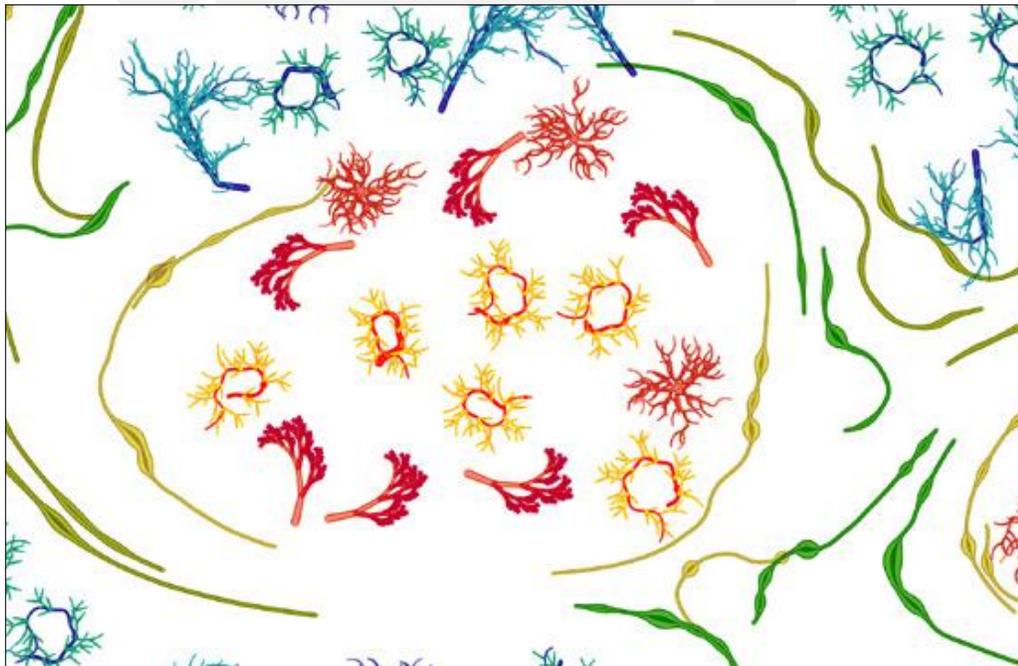


Figura 36: Aumento de fotografía “f091148”
Fuente: www.philipgalanter.com

5.4. Análisis y comentarios de los resultados de la Aplicación

Es posible generar arte a través de Sistemas Generativos, dada una serie de condiciones iniciales y un algoritmo computarizado por el cual estas condiciones sean procesadas, de tal manera que interactúen y se desarrollen. Esta interacción produce resultados que en muchos casos son sorprendentes para el artista. Las técnicas básicas para el diseño y desarrollo de estos sistemas son la parametrización, la repetición y la aleatorización.

Se ha podido demostrar que la lógica de las Cadenas de Markov es útil para predecir el comportamiento de las variables de interés, como el comportamiento de los genes en el proceso de división celular. Su aplicación a través de un algoritmo computarizado permite la simulación de esta realidad y la generación de imágenes, las cuales tienen un origen aleatorio.

Como resultado de utilizar el Sistema Generativo, se obtienen imágenes y video que simulan una realidad y de esta manera se obtiene Arte Procesual-Aleatorio.

Capítulo 6 : Conclusiones y Recomendaciones

6.1. Composición Musical con Cadenas de Markov

Dadas las consideraciones y los resultados de la composición musical con Cadenas de Markov, podemos concluir que:

- Las matemáticas y la música son dos disciplinas que guardan notable relación, requieren mucha especialización y creatividad. Cada una puede resultar como fuente de recursos para la otra.
- Con la utilización de herramientas matemáticas como las Cadenas de Markov, es posible establecer una metodología de composición musical, con el objetivo de que el resultado del análisis sea la obtención de una pieza musical con el estilo de una referencial.
- La composición musical, utilizando Cadenas de Markov, no garantiza el cumplimiento de las reglas de la teoría musical, pero si la pieza musical referencial las satisface, la generada reflejará estas características.
- Si el espacio muestral de notas musicales es pequeño, es preferible realizar la composición musical con Cadenas Markov trabajando con la matriz de transición de primer orden, ya que trabajando con alguna de orden superior, es altamente probable que la pieza musical generada sea la misma que la referencial.
- Es posible que una persona que sin conocimientos de teoría musical y composición, componga canciones con el estilo de sus artistas preferidos a manera de juego utilizando Cadenas de Markov. Esta interesante aplicación puede servir como herramienta didáctica para maestros que deseen despertar el interés de sus discípulos por las aplicaciones matemáticas y por la investigación.

- Esta aplicación de Cadenas de Markov puede servir para que estudiantes de Ingeniería Electrónica o Ingeniería Informática puedan diseñar sistemas computarizados, en los cuales los algoritmos cuenten con esta lógica y se pueda lograr de manera automática una composición basada en una existente.
- De la misma manera, músicos y aficionados a la música podrían utilizar este método a manera de juego para componer con el estilo musical de sus canciones preferidas. Dado que se cuenta con una matriz de transición, esta nos brinda posibles estados a los que se puede llegar desde una nota, lo que implica que las transiciones podrían ser manipuladas, es decir, que no necesariamente estarían ligadas al número aleatorio generado. Es así que se puede obtener una canción que no tan sólo esté basada en la aleatoriedad, sino que también se considere que sea agradable al oído, que es fundamental en la composición.

Del mismo modo, planteamos las siguientes recomendaciones:

- Introducir el tema de las aplicaciones no convencionales de métodos matemáticos y específicamente, las aplicaciones no convencionales de Cadenas de Markov para la Composición Musical, en la Escuela de Música de la Pontificia Universidad Católica del Perú y de otros centros de estudios, con la finalidad de presentar la utilidad de las matemáticas en disciplinas con las que erróneamente se considera que existe una completa incompatibilidad.
- Preparar un material de enseñanza para profesores de educación secundaria, respecto a las aplicaciones no convencionales de las matemáticas, en el cual se introduzca esta aplicación de cadenas de Markov, con el objetivo de que a manera de juego, se despierte la curiosidad de los estudiantes y el interés por disciplinas tan interesantes como las matemáticas y la música.

- Promover la difusión de este tipo de aplicaciones no convencionales de las Matemáticas a través de congresos multidisciplinares, en los cuales se genere un espacio de reflexión y discusión, con la finalidad de promover el conocimiento integral de los profesionales e investigadores; y la desmitificación de la absurda división existente entre las Matemáticas, las Letras y las Artes.

6.2. Generación de Texto con Cadenas de Markov

Dadas las consideraciones y los resultados de la composición musical con Cadenas de Markov, podemos concluir que:

- La generación automatizada de textos con la utilización de sistemas informáticos es una labor muy compleja debido a que todo texto escrito por un ser humano tiene un alto grado de codificación, estilo literario, entre otras características; así como que cumple con una serie de normativas gramaticales del lenguaje.
- Es posible generar textos aleatoriamente a partir de textos referenciales, ingresados a un sistema basado en un algoritmo que trabaja con Cadenas de Markov. Éste es capaz de predecir la palabra que más probablemente le sigue a otra en un determinado contexto, el cual es definido por el texto de referencia, por lo que es posible obtener un nuevo texto, generado aleatoriamente con el estilo literario del ingresado.
- Los textos generados a través de un sistema basado en un algoritmo que trabaja con Cadenas de Markov son principalmente un tipo especial de galimatías, las cuales son oraciones sumamente complejas de entender, pero que guardan relación con la manera de escribir del autor del texto referencial.

- La generación de textos a través de este tipo de sistemas no garantiza el cumplimiento de la normativa gramatical del idioma castellano, pero si el texto referencial ha sido escrito con estas consideraciones, el texto generado reflejará estas características.
- Para el caso del sistema “Markov Text Synthesizer” (Sintetizador de Texto de Markov), utilizado en el presente trabajo, es preferible realizar la generación de textos trabajando con la matriz de transición de primer orden, ya que de lo contrario, es muy probable que el texto generado sea el mismo que el utilizado como referencia.
- Los resultados de la generación de textos a partir de textos referenciales breves fueron muy interesantes, pues reflejan claramente el estilo literario del autor elegido. Esto se debe a que se cuenta con una matriz de transición de menos estados y esto permite que en el texto generado tenga muchos rasgos del autor original.
- Esto no se pudo reflejar muy notoriamente para el caso en el que se utilizó como texto referencial a la novela “Cien Años de Soledad”, pues al tener más probabilidades de transición entre palabras, se generaron muchas galimatías, por lo que fue necesario trabajar con una matriz de transición de tercer orden para obtener oraciones más parecidas a las del texto original. La matriz de transición de orden 4 generó un texto igual al original.
- Con la utilización de este tipo de sistemas basados en algoritmos que trabajan con Cadenas de Markov, es posible que una persona que sin tener una buena redacción, conocimientos de lingüística o gramática del idioma castellano, genere textos aleatoriamente con el estilo literario de sus literatos preferidos.
- Esta interesante aplicación puede servir como herramienta didáctica para maestros que deseen despertar el interés de sus discípulos por las aplicaciones matemáticas y por la investigación.

Del mismo modo, planteamos las siguientes recomendaciones:

- Introducir el tema de las aplicaciones no convencionales de métodos matemáticos y específicamente, las aplicaciones no convencionales de Cadenas de Markov para la Generación de Textos con el estilo literario de un texto referencial, en la en la Facultad de Letras y en la de Literatura de la Pontificia Universidad Católica del Perú; y de otros centros de estudios, con la finalidad de presentar la utilidad de las matemáticas en disciplinas con las que erróneamente se considera que existe una completa incompatibilidad. Por el contrario, en este caso se trata de disciplinas complementarias que permitirán ser una fuente de recursos para la otra.
- Preparar un material de enseñanza para profesores de educación secundaria, respecto a las aplicaciones no convencionales de las matemáticas, en el cual se introduzca esta aplicación de cadenas de Markov, con el objetivo de que a manera de juego, se despierte la curiosidad de los estudiantes y el interés por disciplinas tan interesantes como las matemáticas y la literatura.
- Promover la difusión de este tipo de aplicaciones no convencionales de las Matemáticas a través de congresos multidisciplinares, en los cuales se genere un espacio de reflexión y discusión, con la finalidad de promover el conocimiento integral de los profesionales e investigadores; y la desmitificación de la absurda división existente entre las Matemáticas, las Letras y las Artes.

6.3. Generación de Imágenes con Cadenas de Markov

Dadas las consideraciones y los resultados de la generación de imágenes con Cadenas de Markov, podemos concluir que:

- Las matemáticas y las artes son dos disciplinas que guardan relación en el sentido que ambas requieren cierto grado de especialización, abstracción y creatividad.
- Existe una rama moderna del arte, denominada “Computer-Art”, en la cual es necesaria la intervención de un ordenador para su realización y un algoritmo que implica una serie de pasos a seguir, en los cuales se incluyen aplicaciones matemáticas.
- El Arte Generativo es la práctica artística en la que el artista crea un proceso, que dentro del contexto del Computer-Art, se trata comúnmente de un algoritmo que incluye la lógica de aplicaciones matemáticas. Este algoritmo se activa con un cierto grado de autonomía y su resultado contribuye o resulta ser un trabajo artístico.
- Queda demostrado que haciendo uso de la lógica de las Cadenas de Markov a través de un algoritmo, es posible predecir el comportamiento de variables en análisis, que en este caso se trató de la predicción del comportamiento de los genes en el proceso de división celular.
- Las Cadenas de Markov, incluidas en algoritmos, sirven para realizar simulaciones de la realidad, con las cuales es posible hacer Arte Procesual-Aleatorio y de este modo la generación de imágenes obtenidas aleatoriamente.

Del mismo modo, planteamos las siguientes recomendaciones:

- Que en la Facultad de Arte de la Pontificia Universidad Católica del Perú, a través de la enseñanza del arte contemporáneo, se incluyan temas como el origen del Computer-Art, los conceptos de Arte Procesual-Aleatorio, Sistemas Generativos de Arte; y de esta manera introducir el tema de las aplicaciones no convencionales de métodos matemáticos y específicamente, las aplicaciones no convencionales de Cadenas de Markov para la generación aleatoria de imágenes.

- Preparar un material de enseñanza para profesores de educación secundaria, respecto a las aplicaciones no convencionales de las matemáticas, en el cual se introduzca esta aplicación de cadenas de Markov y su utilidad para la generación de imágenes en sistemas computarizados, que incluyan ejemplos de rutinas simples de programación para que los alumnos mismos generen imágenes aleatoriamente y de esta manera despertar el interés por conocer e investigar sobre ambas disciplinas.
- Promover la difusión de este tipo de aplicaciones no convencionales de las Matemáticas a través de congresos multidisciplinarios, en los cuales se genere un espacio de reflexión y discusión, con la finalidad de promover el conocimiento integral de los profesionales e investigadores; y la desmitificación de la absurda división existente entre las Matemáticas, las Letras y las Artes.

Referencias Bibliográficas

Libros:

ALCARAZ, E. & MARTINEZ, M.

1997 *Diccionario de Lingüística Moderna*
España: Editorial Ariel

BURROWS, T.

2007 *Método Completo de Guitarra*
España: Editorial Parramón

CÓRDOVA, Manuel

2006 *Estadística Aplicada. Primera Edición*
Perú: Editorial Moshera.

DUGAS, R.

1976 *La matemática, objeto de cultura y herramienta de trabajo*
España: Editorial Gustavo Gili

EVANS, M. & ROSENTHAL, J.

2005 *Probabilidad y Estadística: La ciencia de la Incertidumbre*
España: Editorial Reverté.

ESTRADA, J. & GIL, J.

1984 *Música y Teoría de Grupos*
Puebla: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Escuela de Artes.

FERNÁNDEZ, Olga

1993 *Sobre el orden de las palabras en español*
Madrid: Editorial Complutense

GARCÍA MÁRQUEZ, Gabriel

1967 *Cien años de Soledad*
Buenos Aires: Editorial Sudamericana

GORDON, Patrick

1997 *Cadenas finitas de Markov y sus aplicaciones.*
Primera Edición. Traducido por: TRILLAS, Enrique y BONET,
Eduardo. España: Hispano Europea.

HILLIER, Frederick y LIEBERMAN, Gerald

2006 *Introducción a la Investigación de Operaciones.*
Octava Edición Traducido por: MURRIETA, Jesús. México:
McGraw-Hill Interamericana.

INOÑAN, Marcos

2010 *Compositor automático de música aleatoria siguiendo una melodía patrón*
Tesis de grado para optar el Título de Ingeniero Electrónico.
Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú

KERNINGHAN, B.

2004 *The Practice of Programming*
Indianapolis: Pearson Education

LOY, D. Gareth

2008 *Musimathics: A guided tour of the mathematics of music*
Volumen 1. Segunda Edición.
Estados Unidos: MIT Press.

PÉREZ, Juan

1998 *Codificación Fractal de Imágenes*
Proyecto de fin de carrera.
Tesis de grado para optar el Título de Ingeniero Informático.
Alicante: Universidad de Alicante.

PUIG, Lluís

2004 *Alear: Arte Procesual-Aleatorio en el Computer-Art*
Tesis doctoral. Barcelona: Universidad de Dibiux.

ROTHSTEIN, Edward

1995 *Emblems of Mind: The Inner Life of Music and Mathematics*
Primera Edición
Estados Unidos: Times Books

TIBURCIO, Susana

2000 *Teoría de la Probabilidad en la Composición Musical Contemporánea*
Tesis de Licenciatura en Música. Puebla: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Escuela de Artes.

TEMPERLEY, David

2007 *Probabilidad y Música*
Primera Edición
Estados Unidos: MIT Press

VALLEJO, César

1918 *Los Heraldos Negros*
Madrid: Alianza Editorial

VALLEJO, César

1937 *España, aparte de mí este cáliz*
Madrid: Editorial Artnovela

VALLEJO, César

1939 *Poemas Humanos*
Madrid: Editorial Orígenes

WINSTON, Wayne

2005 *Investigación Operativa – Aplicaciones y Algoritmos.*
Cuarta Edición
Traducido por: VELASCO, Adolfo. México: Thompson.

Papers / Revistas / Boletines:

ASOCIACIÓN ESPAÑOLA DE ECOLOGÍA TERRESTRE

2006 *“Modelos Ocultos para el análisis de patrones espaciales”.*
Ecosistemas: Revista científica y técnica de ecología y medio ambiente. España, número 3, pp. 68 - 75.

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

2001 *“Música y Matemáticas”.* Elementos: Ciencia y Cultura.
México, número 44, pp. 21-26.

BOLETÍN DE LA SOCIEDAD DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN
OPERATIVA DE LA UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

2006 *“Andrei Markov (1856-1922) en el 150 Aniversario de su Nacimiento”.* Madrid, volumen 22, pp.4, 7-8.

CENTRO DE APLICACIONES DE TECNOLOGÍAS DE AVANZADA

2008 *“Estado actual de la representación y análisis de la textura en imágenes.”* La Habana, pp. 4-32.

INTERACTIVE TELECOMMUNICATIONS PROGRAM

2007 *“GA2: A Programming Environment for Abstract Generative Fine Art”.* Philip Galanter, New York, pp. 1-15.

LEONARDO

1994 *“Los comienzos del Arte Digital en Estados Unidos: A Memoir”.*
Estados Unidos, pp. 39-44.

AUTODIDACTA, REVISTA DE LA EDUCACIÓN EN EXTREMADURA

2010 *“El lenguaje matemático de la belleza según el número de oro”*
Maite Orellana, Extremadura, pp. 38-44

OULIPO

1973 *“La Littérature Potentielle”.* Idées / Gallimard.
Francia.

SCHOOL OF ENGINEERING AND SCIENCE

2008 *Journal of Mathematical Psychology*. Estados Unidos, número 52,
pp. 265 – 267.

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO-EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA

2007 “*Las Matemáticas de la Literatura*”.

País Vasco, pp.45-48, 53-54.

WISE PUBLICATIONS

2003 *Piano Arrangements of Coldplay – Parachutes*

Estados Unidos, pp. 1-56.

Material de Enseñanza:

FERNÁNDEZ, Justo

2002 “*Categoría en la Lingüística*”. HISPANOTECA: Lengua y Cultura

Consulta: 25 de Setiembre del 2009.

<<http://culturitalia.uibk.ac.at/hispanoteca/Copyright/Copyright.htm>>

LÓPEZ, Ezequiel

s/a “*Cadenas de Markov*”. Departamento de Ciencias y Lenguajes de
Comunicación de la Universidad de Málaga. Consulta: 25 de
Setiembre del 2009.

<www.lcc.uma.es/~ezeqlr/ios/Tema4.ppt>

PERALTA, Francisco

s/a “*Sobre las buenas relaciones entre matemáticas y literatura*”

Universidad Autónoma de Madrid. Consulta: 6 Setiembre 2011.

<[http://www.encuentros-
multidisciplinares.org/Revistan%BA8/Fco%20J%20Peralta%201.p
df](http://www.encuentros-multidisciplinares.org/Revistan%BA8/Fco%20J%20Peralta%201.pdf)>

RODRIGUEZ, Teodoro

2002 “Procesos Estocásticos”. *Introducción a los métodos estadísticos, numéricos y probabilísticos. Portal Colegio Maristas Cristo Rey.* España. Consulta: Martes 02 de Junio del 2009.

<<http://centros.edu.aytolacoruna.es/maristas/Apuntes%20Estadistica%20P3.pdf>>

Páginas Web:

BLOG DEL INSTITUTO RAMÓN BERENGER IV

2008 *Categorías Gramaticales.* Consulta: 26 de Setiembre del 2011.
<<http://blocs.xtec.cat/castellasegur/files/2008/12/categorias-gramaticales.pdf>>

BLOG LA LITERATURA

2010 *Categoría Gramatical.* Consulta: 16 de Agosto del 2011.
<http://bloglaliteratura.blogspot.com/2010/07/categoria-gramatical_23.html>

DEPARTAMENTO DE SISTEMAS Y COMPUTACIÓN DEL INSTITUTO TECNOLÓGICO DE LA PAZ

s/a *Tutoriales de Sistemas e Informática.* Consulta: 05 Abril del 2010.
<<http://sistemas.itlp.edu.mx/tutoriales/investoper2/tema43.htm>>

EDICIONES UPC

2002 *Cadenas de Markov.* Consulta: 05 Abril del 2010.
<<http://www.edicionsupc.es/ftppublic/pdfmostra/OE03502M.pdf>>

ENCICLOPEDIA CATÓLICA

1999 *Lombardo Pablo.* Consulta: 22 Febrero 2011.
<<http://ec.aciprensa.com/a/allahabad.htm>>

ESCRITURA CREATIVA

- 2010 *Literatura y Matemáticas, amigas para siempre.*
Consulta: 6 Setiembre 2011.
<<http://escrituracreativa.blog.com.es/2010/05/07/literatura-y-matematicas-amigas-para-siempre-8537063/>>

INFOAMÉRICA.ORG

- s/a *Biografía Andrei Markov.* Consulta: 31 Marzo del 2010.
<<http://www.infoamerica.org/teoria/markov1.htm>>

LABORATORIO DE COMPUTO

- 2005 *Cadenas Ocultas de Markov.* Consulta: 13 de Abril del 2010.
<<http://www.alumnos.inf.utfsm.cl/~ntroncos/files/publish/hmm.pdf>>

PLANETA SEDNA

- s/a *La Divina Proporción.* Consulta: 12 de Noviembre del 2011.
<http://www.portalplanetasedna.com.ar/divina_proporcion.htm>

MICROSIERVOS

- 2008 *Fractales Imposibles.* 23 de Octubre del 2011.
<<http://www.microsiervos.com/archivo/arte-y-diseno/fractales-imposibles.html>>

MIT

- 2003 Modelos Ocultos de Markov. Consulta: 01 Mayo del 2011.
<<http://mit.ocw.universia.net/6.345/NR/rdonlyres/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-345Automatic-Speech-RecognitionSpring2003/4C063D4A-3B8B-4F05-B475-85AAD0D66586/0/lecture10.pdf>>

MARKOV TEXT SYNTHESIZER

s/a *Generación de Texto con Algoritmo basado en Cadenas de Markov.* Consulta: 8 Octubre del 2011.

<<http://www.beetleinbox.com/markov.html>>

UNAM

s/a Procesos Estocásticos. Consulta: 27 de Mayo del 2011.

<<http://verona.fi-p.unam.mx/boris/teachingnotes/estocasticos.pdf>>

UNIVERSIDAD DE HUELVA

s/a Matemáticas y Pintura. Consulta: 22 de Octubre del 2011.

<<http://www.uhu.es/candido.pineiro/historia/pintura.pdf>>

