PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

Niveles de algebrización que alcanzan los estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de tareas estructurales de números racionales

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGISTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR

Johana Lizbeth Garcia Yataco

ASESORA:

Mg. Flor Isabel Carrillo Lara

San Miguel, 2018

A mi madre, Beatriz

AGRADECIMIENTOS

A la Mg. Flor Carrillo, una excelente asesora la cual me facilitó el tiempo en cada etapa de la investigación; por ser comprensiva conmigo y por compartir su amplia experiencia para este trabajo.

A los miembros del jurado, la Dra. Cecilia Gaita y el Dr. Francisco Ugarte, por la revisión de la tesis; por sus valiosos aportes, comentarios y sugerencias en cada exposición que me ayudó mucho para seguir mejorando la investigación.

A la Dra. Jesús Flores y a mis profesores de la Maestría en enseñanza de las Matemáticas, por brindarme su conocimiento en esta etapa de mi formación profesional.

Al círculo de estudios Pre-Uni-San Marcos, a cargo Walter y Beatriz, por darme las facilidades para realizar la experimentación con el aula de primer año de secundaria.

A mi abuelita Isabel y mi abuelito Emilio que en vida me dieron muy buenos consejos. ¡Muchas gracias!

A mis hermanos Brighitt, Krisstell, Walter y Emily, por su inmenso cariño y brindarme su apoyo y comprensión.

RESUMEN

La siguiente investigación analiza los niveles de algebrizacion de estudiantes de primer grado de educación secundaria en la resolución de tareas estructurales, es decir, aquellas tareas que involucran las operaciones y propiedades del conjunto de números racionales que generan el Razonamiento Algebraico Elemental (RAE). Se emplea algunas herramientas teóricas y metodológicas del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática para analizar las soluciones de cuatro tareas estructurales. Se realiza una prueba piloto con cuatro estudiantes de sexto grado de primaria, se propone una configuración cognitiva en la que se muestra las soluciones esperadas por parte de los estudiantes de primer grado de educación secundaria y luego se realiza la configuración instruccional. Tres de las tareas estructurales propuestas tienen como objetivo realizar conjeturas y validaciones que generen procesos de generalización para utilizar variables y una de las tareas tiene como objetivo identificar una situación de contexto de medida. A partir de ello, considerando las características de los rasgos de RAE propuestas por Godino, Castro, Ake y Wilhelmi (2012), identificamos los niveles de algebrizacion de cada tarea. Del análisis de las respuestas, se concluye que predominan las generalizaciones para valores cercanos, ya que los estudiantes manifiestan procedimientos aritméticos. Luego de los resultados, el nivel de algebrización predominante en los estudiantes en cada tarea fue nivel 1, ya que realizan correctamente las propiedades y operaciones, además de realizar generalizaciones. Asimismo, podemos concluir que los estudiantes están listos para avanzar a otro nivel y que sí pueden resolver estos tipos de tarea. Esto se visualiza en las soluciones de los estudiantes que logran alcanzar rasgos del nivel 3 de algebrización, ya que utilizan variables y realizan tratamientos para encontrar un patrón general.

Palabras clave: Tarea estructural, Niveles de Algebrización, Configuración cognitiva, Configuración instruccional.

ABSTRACT

This investigation aims to analyze the levels of algebraization in the resolution of structural tasks among first grade students at secondary level. The selected tasks involve the operation and properties of the set of rational numbers that generate the Elementary Algebraic Reasoning AR.

In order to analyze four structure tasks solutions, some theoretical and methodological tools were used. Specifically, the Onto-Semiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction. Based on that, a pilot test was run having four sixth grade students from primary school. So, a cognitive configuration is proposed in which the expected solutions from the students are considered and then, the instructional configuration is made. The proposed structural tasks objective from three proposed structural tasks are to make conjectures and validations that generates generalization processes to use variable and one of the tasks is to identify a situation that can allow measure the context, After that and considering the characteristics of AR features proposed by Godino, Castro, Ake and Wihelmi (2012), we identify the algebaization levels of each tasks and on that, the analysis of each student is performed on the four tasks. From the answers analysis which was made. From the Analysis of the answers, this investigation concludes that the generalization for near values or rates are predominant. This can be explained by the fact that the students manifest arithmetic procedures. After the results, the level of predominant algebraization in the students in each task was level 1, since they correctly perform the properties and operations, and also were able to make generalizations. Likewise, we can conclude that students are ready to be promoted to another level and that they can solve these types of tasks. This can be seen in the solutions of the students who manage to reach features of level 3 of algebraization, since they use variables and perform certain procedures to find a general pattern.

Key Words: Structural task, Algebraization levels, Cognitive configuration, Instructional configuration.

ÍNDICE

CONSIDERACIONES INICIALES 9

CAPÍTULO I: LA PROBLEMÁTICA 11

1.1 ANTECEDENTES 11

1.2 JUSTIFICACIÓN 20

1.3 PREGUNTA DE LA INVESTIGACIÓN Y OBJETIVOS 23

1.4 METODOLOGÍA Y PROCEDIMIENTOS EMPLEADOS EN LA INVESTIGACIÓN 24

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO 26

2.1 HERRAMIENTAS TEÓRICAS DEL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DE LA COGNICIÓN E INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA 27

2.2 ATRIBUTOS CONTEXTUALES 29

2.3 RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL (RAE) 31

2.4 NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN 34

CAPITULO III: DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN 37

3.1 PRIMERA ETAPA: DESARROLLO DE UN PLAN (PLANIFICACIÓN) 39

3.2 SEGUNDA ETAPA: PUESTA EN MARCHA DEL PLAN (ACCIÓN) 50

3.3 TERCERA ETAPA OBSERVACIÓN DE LOS EFECTOS DE LA ACCIÓN (OBSERVACIÓN) 53

3.4 CUARTA ETAPA: EVALUACIÓN 95

CONSIDERACIONES FINALES 96

SUGERENCIAS PARA INVESTIGACIONES A FUTURO 100

ANEXOS 107

ACTIVIDAD EN CLASE 107

PROPUESTA DE UNA TAREA QUE FOMENTA EL RAE 114

FACETA EPISTÉMICA TOMADAS DE JULIAN 116

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. *Características para rasgos de niveles de Algebrización* 38

Tabla 2. *Análisis de las cuatro tareas de cada estudiante* 53

Tabla 3. *Análisis y rasgos de nivel de 15 estudiantes respecto a la tarea 1* 65

Tabla 4. *Análisis y rasgos de nivel de 15 estudiantes respecto a la tarea 2* 72

Tabla 5. *Análisis y rasgos de nivel de 15 estudiantes respecto a la tarea 3* 77

Tabla 6. *Análisis y rasgos de nivel de 15 estudiantes respecto a la tarea 4* 83

Tabla 7. *Análisis de las cuatro tareas de cada estudiante* 88

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Equivalencia de fracciones 14

Figura 2. Tarea con patrones geométricos 18

Figura 3. Componentes de Idoneidad Didáctica 28

Figura 4. Objetos implicados en la práctica algebraica..... 32

Figura 5. Solución del Estudiante B-tarea 1 42

Figura 6. Solución del Estudiante D-tarea 1 42

Figura 7. Solución del Estudiante A-tarea 1 43

Figura 8. Solución del Estudiante C-tarea 1 44

Figura 9. Solución del Estudiante B-tarea 2 45

Figura 10. Solución del Estudiante D-tarea 2 46

Figura 11. Solución del Estudiante B-tarea 3 47

Figura 12. Solución del Estudiante A-tarea 3 48

Figura 13. Solución del Estudiante D-tarea 3 48

Figura 14. Solución del Estudiante D-tarea 4 49

Figura 15. Solución del Estudiante 3-tarea 1 68

Figura 16. Solución del Estudiante 2-tarea 1 69

Figura 17. Solución del Estudiante 1-tarea 1 70

Figura 18. Solución del Estudiante 3-tarea 2 75

Figura 19. Solución del Estudiante 6-tarea 2 75

Figura 20. Solución del Estudiante 1-tarea 2 76

Figura 21. Solución del Estudiante 2-tarea 3 80

Figura 22. Solución del Estudiante 3-tarea 3 81

Figura 23. Solución del Estudiante 9-tarea 3 81

Figura 24. Solución del Estudiante 12-tarea 4 85

Figura 25. Solución del Estudiante 5-tarea 4 86

Figura 26. Solución del Estudiante 7-tarea 4 87

CONSIDERACIONES INICIALES

La presente investigación tiene como objetivo realizar un análisis de las soluciones de tareas estructurales relacionadas con las operaciones y propiedades de los números racionales con estudiantes de primer grado de secundaria.

Dichas tareas, están acordes con el nivel educativo presentado en los documentos oficiales y que deben promover el Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) en los estudiantes. Para el análisis, se emplearán algunos aspectos del marco teórico Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS), como la práctica matemática, que son todas las expresiones que surgen en las soluciones de los estudiantes al momento de resolver una tarea estructural, donde reconocemos los tipos de objetos matemáticos primarios: Elementos lingüísticos, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos.

En el primer capítulo, se aborda la problemática de investigación, se presenta antecedentes que fueron seleccionados y clasificados según el objeto matemático en estudio, investigaciones que mostraban los errores en estudiantes al enfrentarse con tareas estructurales en los números racionales, antecedentes relacionados con el RAE en tareas estructurales de números racionales y el marco teórico a emplear en este trabajo. Asimismo, también se muestra los contenidos en el que se encuentra inmerso el estudiante de primer grado de secundaria. Además, presentamos los objetivos, la pregunta de investigación y la metodología empleada.

En el segundo capítulo, presentamos el marco teórico, considerando algunos elementos, dualidades, significados y facetas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS). También presentamos algunas definiciones del RAE y características de los rasgos de los niveles de algebrización.

En el tercer capítulo, se elabora un diseño de la experimentación para estudiantes de primer grado de secundaria. Para esto, nos apoyamos en el trabajo de Hernández, Fernández y Baptista (1991) que sostiene al diseño como la estrategia para obtener información de la investigación. Es por eso que este trabajo está dividido en cuatro pasos que son parte del desarrollo de un plan: La planificación, la acción, la observación y la reflexión. En una primera etapa, se desarrolla una propuesta de tareas estructurales que generen el RAE, como una prueba piloto, con cuatro estudiantes de sexto grado de primaria para analizar sus soluciones, luego, según las observaciones y resultados que se tuvieron en la prueba piloto, se realizaron algunas modificaciones puntuales en cada tarea. También se les brindó indicaciones adicionales al inicio de las tareas propuestas para ser aplicadas a estudiantes de primer grado de secundaria, con el propósito de analizar los rasgos de algebrización que alcanzan en las tareas propuestas.

Al analizar las soluciones de los estudiantes, se concluye que un estudiante de primer año de secundaria puede realizar correctamente operaciones y propiedades de los números racionales, lo cual podemos manifestar que los estudiantes que desarrollaron la actividad en clase se encuentran en nivel 1 en promedio, pero resaltar que también tienen rasgos algebraicos del nivel 2 y 3. Así, luego de analizar las soluciones, se puede considerar una próxima implementación, teniendo en cuenta que hayan adquirido los contenidos que sean suficientes para responder las tareas.

Finalmente, como parte de nuestras sugerencias, consideramos realizar propuestas de tareas estructurales que generen el Razonamiento Algebraico Elemental (RAE), donde los estudiantes realicen conjeturas y validaciones, además de considerar las distintas estrategias de resolución para abordar una tarea para así reforzar el Pensamiento Matemático Flexible (PMF).

CAPÍTULO I: LA PROBLEMÁTICA

En este capítulo se presentan investigaciones las cuales se relacionan con el problema de investigación.

En primer lugar, investigaciones sobre tareas estructurales en el conjunto numérico de los racionales, es decir, tareas relacionadas con las operaciones y propiedades de los números racionales y luego se presenta la justificación, la pregunta de investigación, el objetivo general, los objetivos específicos, la metodología y los procedimientos a seguir en este trabajo.

1.1 ANTECEDENTES

El primer trabajo que revisamos corresponde a Julian (2017), cuyo principal interés es analizar epistémicamente tareas estructurales y los niveles de algebrización en la resolución de tareas presentes en los libros de texto, según el Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) con aspectos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS).

Este trabajo recapitula investigaciones en torno a operaciones y propiedades de los números racionales no negativos, ya que revisa los libros de texto del V ciclo de Educación Básica del Perú, que corresponden a quinto y sexto grado de primaria, en el que considera 10 tareas del libro de Matemática 5 y 10 tareas del libro de Matemática 6 para analizar el nivel de algebrización en las resoluciones de las tareas estructurales.

En dichas soluciones, observa la ausencia de significados, asimismo menciona el autor que, en el libro de Matemática 5, se identifica el nivel 1, ya que solo se utilizan las propiedades de asociatividad, conmutatividad y distributividad, donde solo se resolvió a través de cálculos mentales.

Por otro lado, el mayor nivel de algebrización que se identifica en el libro de Matemática 6 fue el nivel 2, en una tarea que corresponde al área de una región rectangular, en el que realizaron una ecuación de primer grado para su resolución y movilizaron las propiedades de los números racionales.

Finalmente, en la tesis, encuentra que los argumentos presentes en los textos seleccionados no propician la justificación de los procedimientos, además que en dichas tareas no se pide sostener un término general, como puede ser el caso de progresiones o manipular expresiones con variables. Por ello, Julian (2017) propone cuatro tareas sobre números racionales, con sus respectivas soluciones, en las mismas se desarrollan conjeturas y validaciones que le permitan generalizar y obtener habilidades a los estudiantes para comprender tareas estructurales.

Esta tesis es una primera parte en relación a nuestro trabajo, además se investiga el mismo objeto matemático y considera el marco teórico Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) con la misma finalidad en promover el Razonamiento Algebraico Elemental (RAE).

Consideramos el análisis de la faceta epistémica y el resultado de los significados institucionales y luego modificamos las tareas presentadas en el trabajo de Julian (2017) para aplicar las tareas estructurales a estudiantes de primer grado de secundaria para analizar los rasgos de los niveles de algebrización en su resolución.

En relación a los antecedentes, estas se han organizado en tres grupos que son los siguientes:

- Antecedentes relacionados con tareas estructurales en los números racionales.
- Antecedentes relacionados con los errores en estudiantes al enfrentarse con tareas estructurales en los números racionales.
- Antecedentes relacionados con el RAE en tareas estructurales de números racionales y EOS.

1. Antecedentes relacionados con tareas estructurales en los números racionales

El trabajo de Álvarez (2016), realizado en el contexto peruano, tiene como objetivo describir la organización matemática que presenta un texto de primer grado de secundaria sobre los números racionales, para luego valorar la organización matemática a partir de indicadores de completitud, como la integración de los tipos de tareas y existencia de tareas matemáticas abiertas.

En dicho trabajo, se utiliza conceptos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), clasifica en nueve tipos de tareas de fracciones y se encuentra con que las técnicas implementadas no tenían justificaciones, deficiencia que Fonseca (2004) menciona como algo usual en la Educación Básica.

El autor define a la técnica como la forma de realizar una tarea, es decir, el procedimiento de resolver un tipo de tarea.

Entre los tipos de tareas está identificar los conjuntos numéricos a los que pertenece un número dado, mencionando que el conjunto de los enteros se amplía al de los racionales por las limitaciones que se presentan en la división de enteros. Otro tipo de tarea se encuentra al calcular el resultado de efectuar operaciones con fracciones y resolver situaciones contextualizadas que requieren efectuar operaciones con fracciones.

Por otro lado, Fazio y Siegler (2011), en Estados Unidos, presentan una serie de recomendaciones para las prácticas educativas, cuyo contenido está basado en un informe del Instituto de Ciencias de la Educación del Departamento de Educación del país antes citado. Entre ellas, mencionaremos las relacionadas con nuestro trabajo:

- Obtener éxito en la comprensión conceptual y claridad procedimental de las fracciones. Para ello, se propone introducir el tema a través de actividades sobre nociones de compartir y de proporcionalidad, lo que genera el entendimiento de reparto equitativo desarrollando la comprensión de los estudiantes al ordenar y relacionar la equivalencia entre fracciones.
- Otra actividad muestra a la fracción como número con magnitudes, donde se ayudan con rectas numéricas para ilustrar que cada fracción corresponde a una cierta magnitud y así los estudiantes no tengan errores en cuanto al significado de las fracciones mayores a uno.
- También se enfatiza en el empleo de material didáctico manipulativo y la representación visual de las fracciones, como recurso para ayudar a ampliar la comprensión conceptual de las operaciones de Cálculo. Así manifiestan que las representaciones gráficas ayudan a los estudiantes a entender la adición, multiplicación y división de fracciones. Se enfatiza en la necesidad de emplear denominadores comunes al sumar y restar fracciones, multiplicar fracciones que involucren calcular una fracción de una fracción y de conceptualizar la división pensando en cuántas veces puede el divisor estar presente en el dividendo. Por último, manifiestan que es necesario que desafíen directamente los conceptos erróneos más frecuentes de las fracciones y que realicen problemas de fracciones en contextos significativos.

Rescatamos de estas investigaciones el estudio de números racionales que promuevan en los estudiantes justificar sus soluciones y las recomendaciones que pueden ser aplicadas para mejorar el conocimiento conceptual, el empleo de las operaciones y propiedades de los números racionales con el fin de promover su desarrollo de manera eficaz.

2. *Antecedentes relacionados con los errores en estudiantes al enfrentarse con tareas estructurales en los números racionales*

Gonzáles (2015) presenta un cuestionario que fue aplicado a 67 alumnos de 12 y 13 años de edad de la I.E.S Valle del Saja en España y se sabe que en esta institución se desarrolló el tema de fracciones en la asignatura de Matemática.

El autor concluye que un grupo de alumnos tiene errores porque no logra la comprensión del concepto de las fracciones o procedimientos erróneos en operaciones con las mismas. Se encontró que el error de equivalencias de fracciones explica los errores de algoritmo suma, ya que a menudo relacionan multiplicar con aumentar y dividir con disminuir.

Para esto, se usa varios casos de equivalencia, como podemos ver en el ejemplo de la figura 1, una tarea simple de plegado de papel que representa la fracción $\frac{4}{6}$ y otra representación de la fracción $\frac{2}{3}$, para explicar que al colocar la representación gráfica de la fracción de la derecha sobre la representación gráfica de la fracción de la izquierda resultan ser representaciones gráficas que tienen la misma equivalencia.

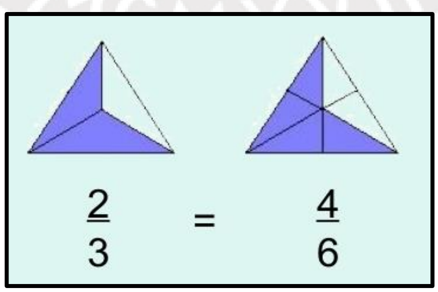


Figura 1. Equivalencia de fracciones.
Fuente: (Gonzáles, 2015, p. 46)

Por último, presenta propuestas en las que menciona que se puede presentar al alumno situaciones cercanas, como repartir un vaso de leche en tres vasos para que reconozcan el significado de división de la fracción, también resalta la representación de las fracciones en la recta numérica en lugar de partir del modelo parte-todo.

En el trabajo de Morales (2014) se analizaron las soluciones de estudiantes del séptimo año de 11 a 13 años de edad que fueron realizados en una institución educativa en México a través de estudio de caso, donde identificaron 15 tipos de errores diferentes, propuesta por Radatz (1979). Mencionaremos solo dos de ellas ya que nos interesa en esta investigación.

- **Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos:**
- Los estudiantes realizan operaciones y usan notaciones de la Aritmética en forma defectuosa.
- Utilizan un algoritmo adecuado en la solución de un problema aritmético, pero lo aplican en forma defectuosa.
- Interpretan y usan inadecuadamente una definición matemática asociada al concepto de número racional.

- **Errores debidos a dificultades de lenguaje:**

Los estudiantes plantean una ecuación que involucra fracciones que no corresponden con el enunciado. El autor menciona que las dificultades encontradas, al realizar dicha actividad, pueden tener su origen en la enseñanza de las fracciones, ya que, en la práctica, se suele utilizar la aplicación de algoritmos basándose en la memorización, que no exige el dominio conceptual y semántico de las fracciones.

Por otra parte, las dificultades encontradas al resolver problemas matemáticos es la interpretación del contexto en su resolución, ya que en los libros de texto tienden a realizar tareas que involucren aplicación directa de reglas o procedimientos, por lo que se debe situar problemas en un contexto que demanden reflexiones a nivel cognitivo y que sea significativo para los estudiantes.

También se ha revisado el trabajo de Angles (2015), cuyo objetivo es analizar el proceso de aprendizaje de la adición y sustracción de fracciones con estudiantes de primer grado de secundaria en una Institución Educativa.

Para ello, utiliza la Teoría de Situaciones Didácticas, el cual propone un modelo que relaciona al docente (Que elabora situaciones), los estudiantes (Que construyen su propio conocimiento) y el medio (Donde se debe generar aprendizaje). Luego, el autor muestra algunos errores surgidos al realizar operaciones aritméticas de fracciones, en particular, al sumar fracciones homogéneas, ya que algunos estudiantes sumaron numeradores y denominadores entre sí; sin embargo, en la práctica discursiva, presentan argumentos correctos sobre cómo sumar fracciones.

En otro trabajo de investigación sobre fracciones, León (2011) describe una secuencia y organización de tareas aplicadas a estudiantes de primer grado de secundaria. Para esto, busca que las tareas propuestas demanden reproducción, es decir, que los estudiantes expresen sus procedimientos en la resolución de tareas y conexión para otras situaciones con mayor nivel de reflexión.

Entre los errores encontrados se mencionan:

- Comparando fracciones. Por ejemplo, al decir que $\frac{1}{2}$ es menor que la fracción $\frac{1}{4}$, argumentando que $2 < 4$.
- Equivalencia de fracciones. Por ejemplo, $\frac{3}{4} = \frac{9}{10}$ argumentando que la fracción se considera como un par de números naturales que no están relacionados entre sí, es decir, suma al numerador y denominador el número 6 ($3 + 6 = 9,\ 4 + 6 = 10$).
- Simplificación al producto a la suma de fracciones. Por ejemplo, $\frac{2+8}{2+4}$ = 2 argumentando que puede simplificar el 2 y dividiendo el 8 por 4.
- La mitad de una fracción. Por ejemplo, al preguntarle la mitad de $\frac{1}{6}$ argumenta que es $\frac{1}{3}$ ya que la mitad de 6 es 3.

De lo anterior, tenemos en cuenta los errores que existen con los números racionales para realizar tareas de operaciones de fracciones, para que así el estudiante adquiera mayor dominio conceptual del objeto matemático antes de la experimentación que se realizará con tareas estructurales que generen Razonamiento Algebraico Elemental (RAE).

En otros trabajos, como el de Gonzáles (2015), se hace referencia a la presencia de situaciones en la vida cotidiana de los alumnos con problemas asociados a fenómenos que involucran fracciones, dentro del marco de la educación matemática realista.

Siguiendo con el análisis de errores en la resolución de tareas, en el de García (2010) se examina cada una de las respuestas de las 153 pruebas que fueron aplicadas en esta investigación, cuya clasificación se realizó acorde a criterios comunes de aquellos errores que coincidían entre las pruebas y finalmente se categorizan de una manera más general, tratando de resaltar las relaciones entre ellos. Se clasificaron en 12 tipos de errores, pero mencionaremos los errores pertinentes para nuestro trabajo.

Podemos resaltar la eliminación incorrecta de denominadores, ya que con este error el alumno reconoce que para eliminar un denominador debe multiplicar toda la expresión por un múltiplo del denominador, pero omite multiplicar todos los elementos de la misma, alterando de esta forma el resultado final. Otro error encontrado fue realizar de forma inadecuada las operaciones aritméticas-algebraicas al realizar alguna de las operaciones básicas aritmético-algebraicas, tales como la multiplicación, reducción de términos semejantes, operaciones con números enteros, decimales o fracciones que incluyan variables.

3. *Antecedentes relacionados con el RAE en tareas estructurales de números racionales y EOS*

Mencionamos al trabajo de Gaita y Wilhelmi (2017), cuyo interés es analizar tareas con recuento de patrones en figuras geométricas a partir de generalizaciones, utilizando algunos elementos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) como fundamento teórico y analizando las respuestas de los estudiantes para fomentar los niveles de razonamiento algebraico elemental.

La investigación se realiza con seis estudiantes de 16 a 17 años de edad que provienen de comunidades nativas amazónicas del Perú y que han terminado su Educación Básica Regular del Sistema Educativo Peruano.

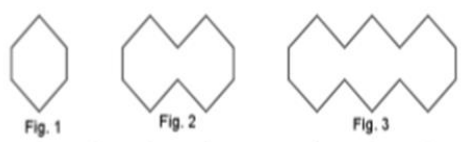
En el trabajo, los autores presentan actividades con patrones geométricos que pueden ser resueltas tanto de forma aritmética como algebraica que propicien el progreso gradual de un nivel de algebrización a otro.

Se muestra que las actividades con patrones geométricos han podido ser resueltas de manera aritmética y algebraica, según haya sido necesario. Por ello, ha sido posible diagnosticar el nivel algebraico de estudiantes resolviendo situaciones de este tipo y construyendo procesos de estudio potenciales que propicien el progreso gradual de un nivel de algebrización a otro.

Es por eso que presentamos en la figura 2 una tarea con patrones geométricos que, según los autores, promueve el desarrollo del Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) y así identificar en qué nivel de algebrización se encuentra a dicha tarea.

Tarea 2(post test)

Considera la siguiente sucesión de figuras.



Si se mantiene el mismo patrón:
¿Cuántos segmentos se requieren para construir la figura 4? ¿y para la figura 5? ¿y para la figura 6?
¿Qué ocurre cada vez que construyes una nueva figura?, ¿notas alguna regularidad?
¿Cuántos segmentos se requieren para construir la figura 20?

Figura 2. Tarea con patrones geométricos.
Fuente: (Gaita y Wilhelmi, 2017, p. 6)

Respecto a esta tarea, Gaita y Wilhelmi (2017) señalan que la última pregunta "¿Cuántos segmentos se requieren en la figura 20?" promueve a que el estudiante realice operaciones de manera aritmética, pero luego encuentre regularidades realizando procesos inductivos para valores cercanos y lejanos. Esto genera procesos de generalización, por lo que también consideramos se podría preguntar cuántos segmentos se requieren para una figura "*n*" para que el estudiante necesite utilizar variables y así alcance rasgos de algebrización de nivel 3. Es así que en esta investigación rescatamos el uso de generalización en la resolucion de tareas estructurales que genera el RAE.

Por su parte, en el trabajo de Aké, Castro y Godino (2015), se propone analizar las soluciones de tareas estructurales, según el marco teórico Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS). Antes de analizar una muestra de 52 docentes en formación, se esperó que logren modelizar la situación propuesta en cada tarea.

Así entonces, a través de este análisis, se explica cómo diferentes soluciones conllevan prácticas matemáticas con diferentes niveles de algebrización, ya que el principal objetivo de este trabajo es promover el desarrollo del sentido algebraico en los futuros maestros.

Por otro lado, en el artículo de Godino et al. (2015), se presenta un cuestionario que es aplicado a estudiantes del Magisterio de España para evaluar aspectos matemáticos y didácticos donde analizaron soluciones esperadas de 10 tareas seleccionadas e informaron de la validez de contenido del cuestionario para resolver un problema de cualquier nivel de dificultad utilizando el Razonamiento Algebraico Elemental (RAE). Por último, la aplicación del cuestionario ha permitido conjeturar algunas carencias formativas de los estudiantes sobre RAE, en particular, el uso conflictivo de incógnitas y variables.

También, en relación a la formación de profesores, se encuentra el trabajo realizado de Konic (2011), cuya investigación está orientada al estudio de los números racionales.

El investigador realizó un estudio exploratorio con un grupo de 49 de profesores en formación inicial de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de la Granada, para identificar los significados de los números racionales antes y después de recibir un proceso de instrucción específico sobre este contenido en sus representaciones fraccionarias y decimales.

Esta investigación toma como fundamento teórico al Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS), el cual se considera fundamental estructurar un modelo de referencia didáctico global para la enseñanza y aprendizaje de los números racionales (Konic, 2011).

Entre los errores frecuentes que mencionan en esta tesis, describen los relacionados con el concepto, escritura y operaciones de números decimales, entre ellos: Valor de posición, errores relacionados con el cero, con el orden y con las operaciones.

También se evidencian fuertes dificultades en el reconocimiento de los distintos conjuntos numéricos, estudios previos similares, el problema de “trasladar” el concepto de sucesor a otros campos numéricos y el error de que representaciones diferentes corresponden a números distintos.

Respecto a lo anterior, los cuestionarios que fueron aplicados, nos permiten conjeturar algunas carencias formativas de los estudiantes, ya sea relacionado al concepto, operaciones o el uso conflictivo de incógnitas.

En la siguiente sección, presentaremos la justificación con algunas investigaciones respecto a nuestro objeto, marco, metodología y documentos oficiales que respalden nuestro trabajo.

1.2 JUSTIFICACIÓN

Investigaciones como la de Morales (2014), Borassi (Como se citó en Rico, 1995), Castellanos y Obando (2009) han analizado los errores en estudiantes de la Educación Básica regular al desarrollar la construcción de conocimientos matemáticos con los números racionales y expresiones algebraicas. Todas estas concluyen que estos errores influyen en el aprendizaje de los diferentes contenidos matemáticos, por ello, se hace necesario que los estudiantes los reconozcan y los superen para conseguir comprender los conceptos involucrados.

También Butto y Rojano (2010) manifiestan que la principal crítica sobre la enseñanza del Álgebra es que se introduce al estudiante en un simbolismo sin significado a diferencia del Cálculo con operaciones aritméticas, donde la mayoría de los problemas se relacionan a la vida cotidiana.

Por otro lado, García (2010) analiza los errores y dificultades al resolver 10 tareas algebraicas de forma simbólica, pero con estudiantes de primer curso a nivel de Licenciatura en México. Investigaciones como esta, ponen en evidencia que los errores encontrados en estudiantes de nivel escolar, en relación al Álgebra, son persistentes y aún durante la Educación Superior continúan.

Ante esta situación, mencionamos la investigación de Gairín (1998) ya que las tareas diseñadas para recoger información y obtener datos relacionados con la comprensión del contenido facilitan producciones previas de los estudiantes entrevistados, los cuales superaron los errores comunes del Álgebra.

De esta investigación, también rescatamos que los profesores que tenían un mejor modelo de tareas lograban que sus estudiantes tengan mejores razonamientos respecto a los números racionales y que las distintas representaciones que utilizaron permitan la comprensión de las propiedades estructurales de los conjuntos numéricos.

De otro lado, Castro (2014) menciona el currículo del Álgebra de algunos países, de los cuales consideramos dos de ellos:

> China (2004): Introduce el Álgebra a los estudiantes al representar y comprender relaciones cuantitativas numéricas y simbólicas. Asimismo, realizan operaciones inversas para resolver ecuaciones y la generalización a partir de casos específicos.
>
> Singapur (2004): Menciona que se enseña a los estudiantes a construir, simplificar y evaluar expresiones algebraicas de una variable. El currículo matemático de la primaria ofrece oportunidades para que se desarrolle el pensamiento algebraico y generalización. (Castro, 2014, p. 140- 41)

En el currículo del Ministerio de Educación Nacional (Colombia, 1998), también inicia la enseñanza elemental con actividades orientadas a la búsqueda de patrones constituido por uso significativo de los números, operaciones y propiedades en varios campos numéricos para que así los estudiantes generen sus propios conceptos y adquieran el razonamiento algebraico en la etapa secundaria.

Por otro lado, mostramos los documentos oficiales de Perú, con el fin de mostrar aprendizajes que se espera que alcancen los estudiantes de primer año de secundaria.

Nombramos los contenidos del Currículo Nacional, que serán útiles para nuestra investigación (Perú, 2017), se divide en cuatro competencias, pero mencionaremos solo tres ya que están relacionadas con nuestro trabajo:

- Resuelve problemas de cantidad: Se espera que el estudiante resuelva problemas referidos a relaciones entre cantidades, traduciéndolas a expresiones numéricas y operativas con números racionales.
- Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio: Se espera que resuelva regularidades de expresiones; traduciéndolas a expresiones algebraicas y predecir el comportamiento de las variables.

- Resuelve problemas de forma, movimiento y localización: Selecciona y emplea estrategias, procedimientos y recursos para determinar la longitud, área o volumen (Perú, 2017, p. 74-76, 80).

Notamos que la Institución Educativa Particular en la que realizamos la investigación, también trabaja contenidos similares a los antes mencionados en el curso de razonamiento matemático, por lo que nombramos cada tema que fue abordado en el año escolar 2017, ya que será necesario como conocimiento previo de los estudiantes para el desarrollo de las tareas.

- Fracciones (Definición, clasificación, operaciones, propiedades, representaciones).
- Planteo de ecuaciones (Simbolización, ecuaciones, operaciones).
- Razonamiento inductivo (Problemas de regularidad).
- Áreas cuadrangulares (Tema de perímetros y áreas de regiones cuadrangulares).

Con respecto al Razonamiento Algebraico Elemental (RAE), diversas investigaciones como las de Kaput (2000), Rojas y Vergel (2013), Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest (2006) muestran la necesidad de trabajar este tópico para que la formación algebraica de los estudiantes adquiera mayor fortaleza y así muestren un mejor entendimiento de conceptos y procedimientos en etapas posteriores, que demandan un mayor nivel de complejidad.

En relación a las tareas algebraicas y estructuras numéricas, Aké, Castro y Godino (2011) señalan la afinidad que existe entre ellas, ya que debe buscarse la identificación de conocimientos algebraicos implicados que produzcan procesos de desarrollo e ideas matemáticas en relación con las propiedades y operaciones de las estructuras matemáticas, además del contenido algebraico que deben tener en cuenta a las "estructuras" como la relación de equivalencia y ecuaciones; "funciones" como son los patrones numéricos y "modelización" para problemas de contexto.

En la tesis de Aké (2010) y el trabajo de Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012) muestran que para caracterizar el Álgebra y generar el razonamiento algebraico se deben responder a dos preguntas: *¿Qué tipo de tareas pueden ser consideradas como algebraicas y cuáles serían sus características?* y *¿Para establecer la existencia de razonamiento algebraico es necesaria la presencia simbólica, lenguaje característico del Álgebra?*

Como parte de la respuesta, los autores señalan que se tiene que las tareas estructurales presentan un contexto adecuado para el desarrollo del Razonamiento Algebraico Elemental (RAE).

Después de presentar los contenidos del currículo peruano, mencionamos la investigación de Julian (2017) que analiza libros de textos escolares de quinto y sexto grado de educación primaria y encuentra que las tareas estructurales presentes no promovían al estudiante realizar conjeturas, justificaciones y validaciones para sus procedimientos.

Con base en la investigación antes mencionada, en nuestro trabajo proponemos tareas que promuevan realizar conjeturas, justificaciones y validaciones con el fin de analizar los rasgos de los niveles de algebrización en las resoluciones de las tareas estructurales del primer grado de secundaria y de esa manera generar el razonamiento algebraico elemental.

En ese contexto, creemos que las tareas estructurales sobre números racionales que presentamos y analizamos en este trabajo promueven en los estudiantes el desarrollo o identificación de patrones conocidos para casos particulares y facilite la generalización.

1.3 PREGUNTA DE LA INVESTIGACIÓN Y OBJETIVOS

De la justificación de la investigación surge la siguiente pregunta:

¿Qué niveles de algebrización predominan en la resolución de tareas estructurales de números racionales en estudiantes de primer grado de secundaria?

Objetivo general:

Analizar los niveles de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales en estudiantes de primer grado de secundaria.

Objetivos específicos:

Para alcanzar el objetivo general de nuestra investigación pretendemos alcanzar los siguientes objetivos específicos:

- Identificar los significados institucionales y esperados en las soluciones de los estudiantes.
- Reconocer rasgos asociados a los niveles de algebrización en la resolución de las tareas estructurales de números racionales por parte de estudiantes de primer grado de secundaria.

1.4 METODOLOGÍA Y PROCEDIMIENTOS EMPLEADOS EN LA INVESTIGACIÓN

En esta parte presentamos las características de la metodología como un estudio cualitativo, ya que nos da la visión de formular hipótesis antes, durante y después de coleccionar los datos. Dichas hipótesis se pueden obtener en nuestra investigación a través de análisis a priori y a posteriori de las tareas que se proponen.

Las investigaciones cualitativas expanden la información de un tema significativo de investigación y estudia el todo integrado como una unidad en distintas tareas. Es por ello que Taylor y Bogdan (2000), respecto a las características de una investigación con metodología cualitativa, destacan:

- La investigación cualitativa es inductiva. Los investigadores desarrollan conceptos y comprensiones partiendo de pautas de los datos y no recogiendo datos para evaluar modelos, hipótesis o teorías preconcebidos y siguen un diseño de investigación flexible, comenzando sus estudios con interrogantes vagamente formuladas.
- En la metodología cualitativa, el investigador ve al escenario y a las personas en una perspectiva holística; las personas, los escenarios o grupos no son reducidos a variables, sino considerados como un todo. Se estudia a las personas en el contexto de su pasado y las situaciones actuales en que se encuentran.

Por estas razones, nuestra investigación es cualitativa, además, basado en algunos elementos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) y el Razonamiento Algebraico Elemental (RAE), desarrollamos el siguiente procedimiento para nuestro de trabajo.

1.4.1 PROCEDIMIENTOS METODOLÓGICOS

Esta investigación es del tipo experimental, ya que es la aplicación y análisis de solución a tareas estructurales de los números racionales con alumnos de primer grado de secundaria considerando el modelo RAE, que permite describir la práctica operativa y discursiva desarrollada por los estudiantes en torno a los números racionales.

Asimismo, se muestra un diseño estructural, como el que propone Pino-Fan y Godino (2014), con las cuatro fases que un diseño instruccional debe tener para planificación de una tarea matemática:

- Estudio preliminar: Los antecedentes nos permiten identificar los errores de los estudiantes en tareas estructurales de números racionales, así como los significados institucionales identificadas en libros de textos que son recursos que se espera que facilite al estudiante.
- Diseño (o planificación): Construimos una propuesta de tareas estructurales de números racionales en los que se identifiquen los rasgos de los niveles de algebrización en la resolución por estudiantes de primer grado de secundaria.
- Implementación: Aplicamos la propuesta de tareas estructurales con números racionales.
- Evaluación: Contrastamos la resolución de las tareas estructurales propuestas con las ideales de acuerdo a los niveles de algebrización.

Se han señalado las investigaciones relacionadas con el marco teórico EOS y con el objeto matemático de nuestro estudio, como lo son las tareas estructurales de los números racionales, además, se ha presentado la justificación de la relevancia de nuestra investigación, se planteó la pregunta de investigación, los objetivos generales y específicos y se señaló el método y los procedimientos empleados en la investigación.

En el siguiente capítulo, se presentará con más detalle los elementos teóricos que respaldan nuestra investigación.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

En nuestra investigación, recurrimos al modelo teórico Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) para proponer diseños y analizar respuestas a tareas estructurales con estudiantes de primer grado de educación secundaria.

Mencionamos a Godino, Batanero y Font (2012) que analizan la actividad matemática al resolver los problemas, identificando las prácticas, objetos y procesos puestos en juego para analizar conocimientos de nuestro objeto de estudio, como lo son los números racionales, y las variables que intervienen en los enunciados, a fin de formular nuevos problemas y adaptarlos a cada circunstancia educativa.

Uno de los conceptos fundamentales del EOS es la noción de idoneidad didáctica para el diseño de tareas. Respecto a las tareas, el EOS las define como una actividad de indagación, donde los protagonistas son los estudiantes, el profesor y el medio para dar respuesta a una cuestión; es decir, son las situaciones-problemas las cuales se conciben como una actividad ligada a la resolución de problemas (Godino, 2013).

En lo que concierne a tarea estructural, ésta es considerada como una situación-problema que involucra objetos con operaciones y sus propiedades, ecuaciones e inecuaciones (Godino et al., 2015).

Algunos otros elementos teóricos que usaremos en esta investigación son los siguientes:

- Práctica matemática: Consideramos práctica matemática a toda expresión, ya sea verbal, gráfica, entre otros, a las que son realizadas por alguien para resolver un problema matemático, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a distintos contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994, p. 334).
- Sistemas de prácticas: Es el conjunto de prácticas que realiza el individuo tratando de resolver un problema matemático (Ávila, Ibarra y Grijalva, 2010, p. 341).

2.1 HERRAMIENTAS TEÓRICAS DEL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DE LA COGNICIÓN E INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA

En este trabajo se realiza análisis didáctico-matemático de procesos de enseñanza y aprendizaje con tareas estructurales que promueven la actividad matemática con algunos tipos de objetos matemáticos primarios. Entre ellos, según Godino (2011), están los siguientes:

- Elementos lingüísticos: Se utilizan al resolver problemas matemáticos para generalizar su solución o para describirlos. Para esto, se utiliza elementos del lenguaje, tales como términos, expresiones, notaciones, gráficos, entre otros.
- Conceptos y definiciones: Son nociones matemáticas que son necesarias para resolver una tarea mediante definiciones o descripciones características.
- Propiedades: Se manifiestan en las definiciones que se deben utilizar para la resolución de una tarea. Las propiedades son condiciones de realización de las acciones a características específicas de las situaciones y relaciones entre objetos.
- Procedimientos: Se emplean al resolver tareas propuestas a través de operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo y estrategias que los estudiantes deben conocer para resolver las diferentes tareas.
- Argumentos: Son enunciados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, en la solución de tareas. Estas justificaciones, para nuestra investigación, pueden ser deductivas o empíricas.

Para nuestra investigación, es necesario considerar la herramienta del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) que permite establecer conexiones entre aspectos cognitivos y epistémicos. Así, la noción de idoneidad didáctica será un indicador empírico entre el acoplamiento de los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos o implementados que se presentan en las tareas estructurales a los estudiantes de primer grado de secundaria.

La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como la articulación coherente y sistémica de los seis componentes siguientes (Godino, Batanero y Font, 2007):

- *Idoneidad epistémica: Se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.*

- *Idoneidad cognitiva: Expresa el grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.*
- *Idoneidad interaccional: Un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (Que se puedan detectar a priori) y, por otra parte, permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.*
- *Idoneidad ecológica: Es el grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro referente, la escuela y la sociedad como los condicionamientos del entorno en que se desarrolla. (Godino 2011, p.6)*

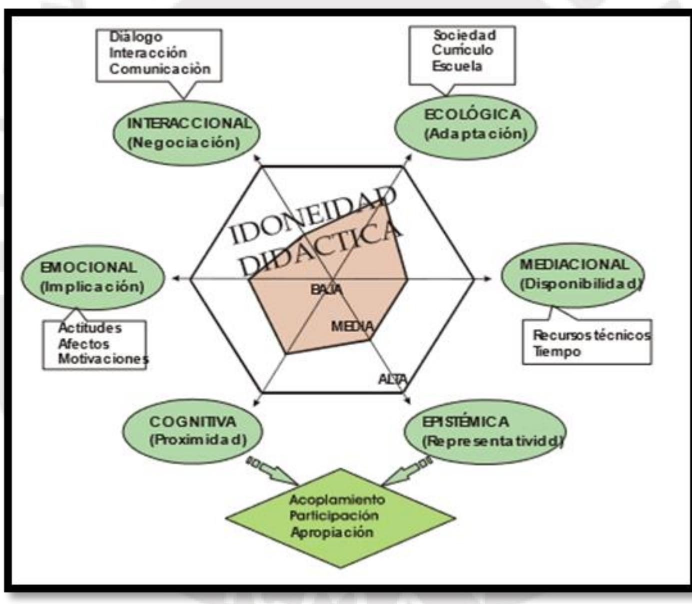


Figura 3. Componentes de Idoneidad Didáctica.
Fuente: Adaptado de Godino, Batanero y Font (2009, p. 16)

Respecto a estos seis componentes, se realizó el análisis epistémico en Julian (2017) para mostrar significados pretendidos de un estudiante de V ciclo de la Educación Básica regular y, a partir de esto, realizar un análisis cognitivo con estudiantes de primer grado de educación secundaria.

La faceta cognitiva se refiere al entendimiento del conocimiento de los estudiantes antes y después del aprendizaje de los contenidos de las tareas propuestas, que será tomado en cuenta en esta investigación. Seguidamente, mencionamos la faceta interaccional, ya que las indicaciones se dan para la resolución de tareas y la faceta ecológica para tener un panorama de los contenidos del currículo de estudiantes de primer grado de educación secundaria.

2.2 ATRIBUTOS CONTEXTUALES

Wittgenstein (Citado en Godino, Batanero y Font, 2009) presenta la importancia de la noción de juego de lenguaje, la institución, los elementos contextuales que relativizan los significados de los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los que surgen de ellas.

Mencionaremos a dos dimensiones duales de Godino (2002), además de brindar un ejemplo para facilitar el entendimiento del lector:

- Dualidad Extensivo-intensivo: Permite centrar la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general, que es una cuestión clave en la construcción y aplicación del conocimiento matemático. Un ejemplo particular puede ser encontrar una secuencia geométrica: $2\ , \frac{2}{3}, \ \frac{2}{9}, \ldots$ para un término cercano, luego encontrar un patrón específico $t_{n=} 2. (\frac{1}{3})^{n-1}$.

  Además, podemos encontrar un término genérico para cualquier secuencia geométrica, representando $t_{n} = t_1 . q^{n-1}$, donde t_1 es el primer término y q: razón.

- Dualidad Unitario-sistémico: En algunas circunstancias, los objetos matemáticos participan como entidades unitarias, mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio. Un ejemplo puede ser encontrar el valor de la siguiente serie $2 + 4 + 6 + \ \ldots + 40 = 2\,(1 + 2 + 3 + \cdots + 20)$, luego factorizar y encontrar relación con entidades unitarias.

  $1 + 2 = 3 = \frac{2\times3}{2}$, $\quad 1 + 2 + 3 = 6 = \frac{3\times4}{2}$, $\quad 1 + 2 + 3 = 6 = \frac{3\times4}{2}$,

  $$1 + 2 + \cdots + 20 = \frac{20 \times 21}{2}; \qquad 2 \times (1 + 2 + 3 + \cdots + 20) = 2\left(\frac{20 \times 21}{2}\right) = 420$$

Ahora, a base de un sistema, se resuelve utilizando la técnica de la serie aritmética con la siguiente fórmula: $S = t_1 + t_2 + t_3 + \ ... + t_n = \left(\frac{t_1+t_n}{2}\right) \times n$

Donde: n = número de términos t_1 es el primer término y t_n es el último término

Se obtendría la misma respuesta al reemplazar.

$2 + 4 + 6 + \cdots + 40 = \left(\frac{2+40}{2}\right) \times 20 = \frac{42}{2} \times 20 = 410$, (Godino, 2002, p. 7-8).

Significados Personales e Institucionales de los Objetos

Durante las actividades realizadas en el aula identificaremos algunos significados personales e institucionales. Para ello, nos basamos en Godino, Batanero y Font (2009) que presentan los significados personales propuestos por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) y los clasifican en Global, Declarado y Logrado:

- Global: Corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto, relativas a un objeto matemático.
- Declarado: Da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas, desde el punto de vista institucional.
- Logrado: Corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio, interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los emergentes (Godino, Batanero y Font, 2009. p. 5).

Ahora, en relación con los significados institucionales, el EOS, los investigadores lo clasifican en:

- Implementado: Sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente en un proceso de estudio específico.
- Evaluado: El subsistema de prácticas utilizado por el docente para evaluar los aprendizajes.
- Pretendido: Sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.
- Referencial: Sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido (Godino, Batanero y Font, 2009. p. 5).

A continuación, daremos algunos alcances del Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) que fundamenta nuestra investigación.

2.3 RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL (RAE)

El problema de la enseñanza del Álgebra se encuentra desde la escuela primaria. Es por eso que se presenta varios enfoques sobre la introducción de esta materia en la escuela elemental, evidenciando las dificultades de los niños en el tránsito desde la Aritmética hasta el Álgebra en el contexto curricular de la escuela secundaria.

En correspondencia con los enfoques, se discuten tanto algunas tareas de razonamiento algebraico elemental, que pueden ser implantadas en el aula, como algunas de las características algebraicas atribuidas. Ahora, presentamos algunas características del Álgebra:

- Usiskin (Citado en Castro, 2014) propone: “Concepciones del Álgebra: Aritmética generalizada; el conjunto de procedimientos usados para resolver ciertos problemas; el estudio de las relaciones entre cantidades y; finalmente, el estudio de la estructura”.
- Kaput (Citado en Castro, 2014) identificó aspectos del Álgebra: “Generalización y formalización; El estudio de las funciones, relaciones” (Castro, 2014. p. 139.).

Por otro lado, Godino, Castro, Aké, y Wilhelmi (2012) presentan en su investigación las siguientes interrogantes: *¿Solo se puede considerar como solución aritmética aquella actividad matemática que involucra números concretos y operaciones? ¿Solo se puede considerar como solución algebraica actividades matemáticas que involucra el uso de incógnitas, ecuaciones, símbolos literales y operaciones con dichos símbolos?*

Además, los investigadores proponen un modelo de Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) que considera a las configuraciones matemáticas de objetos y procesos como herramientas de análisis para explicar la naturaleza de la práctica algebraica.

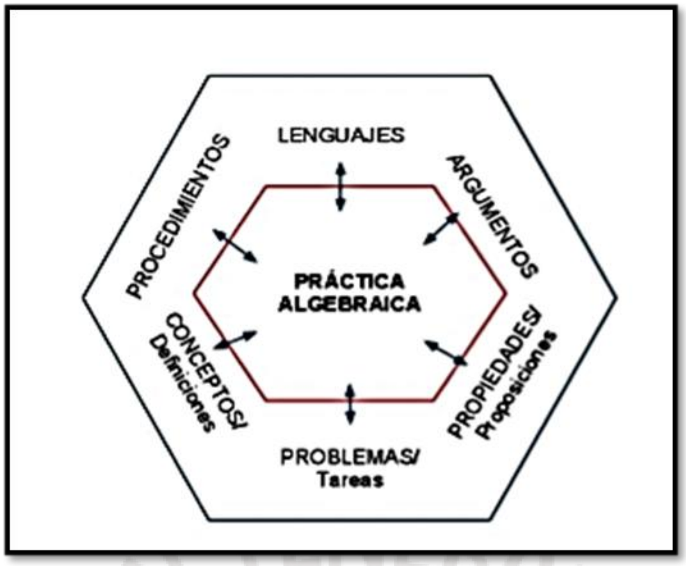


Figura 4. Objetos implicados en la práctica algebraica.
Fuente: Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012, p. 492)

En la figura 4, mostramos objetos implicados en las prácticas algebraicas, las cuales ya han sido definidas en el marco teórico que estarán presentes al solucionar las tareas estructurales.

Estos objetos implicados en la práctica algebraica son importantes para el análisis epistémico, ya que tiene la finalidad de estudiar objetos y significados en la solución de una tarea como un análisis de referencia e identificar posibles conflictos que podrían surgir en las soluciones de los estudiantes al resolver una tarea.

Ahora, con respecto a la generalización, surgen varios conceptos. Utilizan la palabra "generalización" en el sentido de "aplicar un argumento dado en un contexto más amplio" (Harel y Tall, 1991, p. 38).

El proceso de la generalización matemática "es una actividad sofisticada y poderosa" (Skemp, 1986, p. 58) que amerita ser considerada en las propuestas didácticas brindadas a los niños.

Se afirma que "la generalización tiene que ver con notar patrones y propiedades comunes a varias situaciones" (Mason, 1999, p. 9).

De las investigaciones mencionadas, se puede decir que caracterizar el Álgebra es "generalizar" que es noción de construcción de variable.

Por otro lado, respecto al Razonamiento Algebraico Elemental, creemos necesario que se introduzcan tareas que involucren rasgos algebraicos, ya que los procesos de simbolización, expresión de relaciones e identificación de patrones son propios de los primeros niveles de algebrización (Godino, Aké y Gonzato, 2012, p. 6).

Asimismo, consideramos la propuesta de García y Martinón (1998) sobre los niveles de generalización en patrones lineales en el que se distinguen tres niveles a saber:

- Actividad procedimental: Se muestra el conteo con estrategia utilizando datos conocidos para llegar a lo pedido.
- Comprensión procedimental: Establece un invariante de la acción realizada en una secuencia numérica pudiendo cambiar el modelo original.
- Comprensión conceptual: Se da cuando el invariante es capaz de ser utilizado para distintos problemas similares (Aké, 2010. p. 21).

Además, brindamos, a manera de aporte, ejemplos que faciliten la comprensión de cada concepto.

- Ejemplo de actividad procedimental: $10! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 10$ puede ser expresado como $10! = 9! \times 10$.
- Ejemplo de actividad fundamental: $f(x) = 4x - 1$, $f(3x) = 3f(x)$.
- Ejemplo de comprensión fundamental: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, Calcular: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Por otro lado, el autor menciona algunos conceptos que aparecen al realizar las tareas estructurales, como son el signo igual y las variables. Con respecto al signo igual en Ramírez (Como se citó en Ake, 2013), se observa que los términos de igualdad y equivalencia se utilizan para hacer referencia al signo, lo que marca la complejidad de la comprensión del éste. Además, Kücheman (Como se citó en Ake, 2013) manifiesta que la variable puede ser interpretada como letra evaluada, como objeto, como incógnita o valor desconocido específico, como número generalizado y como variable.

En relación al lenguaje y la Matemática que empleamos en las tareas estructurales, mencionamos a Duval (2004), ya que en la teoría de registros de representación semiótica se realiza transformaciones y conversiones donde se muestra cambios de enunciados literales a enunciados simbólicos utilizando para esto las variables.

2.4 NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN

Según Godino, Castro, Ake y Wilhelmi (2012), se pueden proponer niveles de algebrización y las características asociadas a tales niveles. El nivel que se asigna es de acuerdo a la actividad matemática que se realiza, por lo que la actividad matemática puede ser clasificada en un nivel u otro.

De acuerdo a Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014), resumen las características en los siguientes niveles:

- Nivel 0: Intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante los lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, pero este valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. En tareas de generalización, el mero reconocimiento de la regla recursiva que relaciona un término con el siguiente, en casos particulares, no es indicativa de generalización (Godino et al., 2014, p.207).
- Nivel 1: Intervienen objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante los lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con estos objetos. En tareas estructurales, se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente. En tareas funcionales, se reconoce la generalidad, aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal (Godino et al. 2014, p.208).
- Nivel 2: Intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico-literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial temporal. En tareas estructurales, las ecuaciones son de la forma. En tareas funcionales, se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión (Godino et al., 2014, p.210).

- Nivel 3: Es el nivel consolidado de algebrización, ya que supone la intervención de objetos intensivos de grado 2 representados de manera simbólico-literal y se opera con ellos. Se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del tipo $Ax + B = Cx + D\ (A, B, C, D\ \in R)$ y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones (Godino et al., 2014, p.211).

De estos niveles de algebrización, nos centraremos en el nivel 2 y nivel 3, que corresponden a nuestro nivel educativo, en el que utilizamos variables y es posible realizar generalizaciones a través de patrones, de tal forma que los estudiantes tengan la necesidad de resolver las tareas de la forma algebraica y no sólo utilizando operaciones aritméticas.

Por otro lado, en Godino et al. (2015), se muestran los cuestionarios que son aplicados a los docentes para evaluar aspectos matemáticos y didácticos, debido a que se muestra que la formación de profesores de Matemática y Didáctica, de primaria, debe ser relevante, ya que debe guiar al alumno a analizar el problema y entender el concepto para resolver un problema de cualquier nivel de dificultad utilizando la generalización. Así estaremos logrando que la enseñanza del razonamiento algebraico y el Álgebra se muestre de manera global y no sea de impacto para un alumno, sino que sea un avance de temas progresivamente.

Por último, Callejo y Zapatera (2014) mencionan el Pensamiento Matemático Flexible (PMF), ya que, según la demanda cognitiva, analiza las soluciones de los estudiantes en la cual se visualizan sus estrategias para cada tarea.

Definimos flexibilidad, según algunos autores:

- Demetriou (2004, p. 36) lo define como la cantidad de variaciones que puede introducir una persona en los conceptos y operaciones mentales.
- Krems (1995, p. 202) define la flexibilidad cognitiva como “la habilidad de una persona para modificar la resolución de un problema cuando se modifica la demanda de la tarea”.

En esta investigación, consideraremos flexibilidad al momento que el estudiante regularice el proceso utilizando sus conocimientos para una tarea.

Además, según la investigación del PMF, Callejo y Zapatera (2014) manifiestan que los estudiantes de 12 a 13 años de edad (Estudiantes de primer grado de secundaria), tienen menor grado de flexibilidad que los estudiantes de mayor edad, ya que la mayoría no son capaces de cambiar la estrategia recursiva debido a que los estudiantes tienen menor madurez intelectual para coordinar la información, realizar generalizaciones y escoger la mejor estrategia.

En nuestro análisis de resolución de tareas estructurales, usaremos los términos de flexibilidad para explicar el cambio de estrategia que tiene el estudiante de primer grado de secundaria, luego relacionaremos los términos que han sido presentados por el marco teórico, elementos teóricos, la metodología y procedimientos metodológicos.

Usaremos los Niveles de Algebrización del Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) para categorizarlos, según las características de las respuestas en las soluciones de las tareas estructurales que realizamos como actividad en clase con los estudiantes.

Para esto, presentamos a continuación los pasos detallados de nuestro diseño de investigación con la propuesta de tareas estructurales para implementarla en una actividad en clase.

CAPITULO III: DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo, analizamos qué nivel de algebrización predomina en la solución de tareas estructurales de números racionales con estudiantes de primer grado de educación secundaria de un colegio particular del Perú y para tal fin diseñamos cuatro tareas.

El diseño "es la estrategia que se desarrolla para obtener la información que se requiere para la investigación" (Hernández R., Fernández C. y Baptista, P. 1991).

En la primera etapa, presentamos la propuesta de Julian (2017) como base para nuestro diseño y aplicación de tareas, en la que presentó el desarrollo de la faceta epistémica de las cuatro tareas estructurales de números racionales, que aplicamos de manera experimental (Prueba piloto) con cuatro estudiantes del aula de sexto grado de primaria para analizar sus soluciones.

En la segunda etapa, realizaremos la misma prueba con nuestros estudiantes de primer grado de secundaria, pero con algunas modificaciones, de acuerdo a los resultados de la prueba piloto.

Asimismo, modificaremos las indicaciones para los estudiantes como una primera parte de instrucción del investigador y un observador presente, que ayudó a realizar la actividad, de acuerdo al nivel educativo para analizar sus soluciones.

Además, se analizarán las soluciones de tareas de los estudiantes de primer grado de secundaria para identificar los rasgos del nivel de algebrización predominante y, finalmente, se realizaran las reflexiones.

Ahora, como mencionamos en nuestro procedimiento metodológico, seguimos cuatro pasos a lo largo de nuestra investigación para abarcar cada etapa de la misma:

- Desarrollo de un plan (Planificación)
- Puesta en marcha del plan (Acción)
- Observación de los efectos de la acción (Observación)
- Reflexión sobre los efectos de la acción (Reflexión).

Para caracterizar los niveles de algebrización, se elabora una tabla con criterios presentados en Godino (2014) para nuestro trabajo:

Tabla 1. *Características para rasgos de niveles de Algebrización.*

Rasgos de Algebrización	***Características***
NIVEL 0	Intervienen objetos intensivos de primer grado (Números particulares). Lenguaje natural y numérico. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, pero este valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. En las tareas que involucren casos particulares, no es indicativa de generalización.
NIVEL 1	Se aplican relaciones y propiedades genéricas de las operaciones con objetos intensivos de primer grado. Lenguaje natural y numérico. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con estos objetos. En tareas estructurales, se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente. En tareas funcionales, se reconoce la generalidad, aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal.
NIVEL 2	En las tareas estructurales, son de la forma $Ax + B = C$. Se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables. Lenguaje simbólico-literal. Intervienen variables expresadas con lenguaje simbólico - literal. En tareas funcionales, se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.
NIVEL 3	Es el nivel consolidado de algebrización de las tareas estructurales que son de la forma: $Ax + B = Cx + D$. Lenguaje simbólico-literal. Se opera con las variables y se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia.

3.1 PRIMERA ETAPA: DESARROLLO DE UN PLAN (PLANIFICACIÓN)

Se presenta la propuesta de tareas de Julian (2017), que se realizó con la finalidad que los estudiantes trabajen conjeturas, validaciones y puedan encontrar regularidades que requieran realizar generalizaciones y así promover un nivel de algebrización mayor, ya que este autor analizó 20 tareas en libros de textos para estudiantes de quinto y sexto grado de primaria e identificó en la resolución de tareas, que en su mayoría había rasgos de algebrización de nivel 1 y solo en dos casos rasgos del nivel 2.

3.1.1 PROPUESTA DE TAREAS

A continuación, mostramos las cuatro tareas estructurales propuestas por Julian (2017) que fue aplicado sin ninguna modificación a cuatro estudiantes de sexto grado de primaria:

Tarea 1

Antes de la formulación de la pregunta que los estudiantes deberán abordar, se dialoga en clase con respecto a qué sucede si a la fracción $\frac{19}{5}$ se suma un número natural al numerador y se resta el mismo al denominador, ¿Qué sucede? ¿Pruebe con otros números naturales? ¿Será cierto que $\frac{19+n}{5+n}$ siempre es número natural?

Respecto a esta tarea, mencionamos que el objetivo que es realizar conjeturas a partir de las soluciones de casos particulares y luego para dar solución a un caso general.

Tarea 2

En el recuadro se observa que cada rectángulo tiene área siempre igual a 11.

Base	Altura	Área
$\mathbf{7}$	---------	11
$\mathbf{7/2}$	---------	11
$\mathbf{7/3}$	---------	11
		11
⋮	⋮	

¿Cuál es el valor de la altura del rectángulo número 45 de la serie?

El objetivo de esta tarea es que el estudiante sea capaz de completar la tabla generalizando, según los casos particulares, y así reconocer el contexto de medida. Para esto, el estudiante debería realizar operaciones y propiedades de los números racionales.

Tarea 3

Observe las siguientes operaciones:

$7 + 9$

$15 + 17$

$21 + 23$

$105 + 107$

$1575 + 1577$

¿Observa alguna regularidad? De ser así, elabore una conjetura y justifique.

Respecto a esta tarea, el objetivo es realizar conjeturas a partir de las soluciones de casos particulares (Cálculos aritméticos) y luego dar solución a un caso general con un mismo tipo de regularidad.

Tarea 4

Por inicio de clases, un determinado colegio realiza un torneo de Tenis (uno contra uno). Debido a ello, se inscribieron cierta cantidad de estudiantes. ¿Cuál será el número total de partidos que se realizarán en el torneo si cada estudiante juega una vez con cada uno de los estudiantes inscritos?

Respecto a esta tarea, el objetivo es realizar conjeturas a partir del reconocimiento de un mismo patrón para cada caso y así el estudiante pueda generalizar y utilizar variables para representar cualquier cantidad de estudiantes mencionados en la tarea 4.

En nuestro trabajo, presentamos la fase cognitiva, es decir, los significados esperados que los estudiantes presentan en la solución de las cuatro tareas propuestas. También se desarrolla la fase ecológica para la solución de cuatro tareas estructurales de números racionales, dos de ellas sobre números naturales y las otras restantes con fracciones positivas.

Es oportuno destacar que dicha prueba fue realizada con un grupo que han estudiado en la institución varios años atrás y han llevado contenidos similares a los estudiantes de primer grado de educación secundaria.

3.1.2 PUESTA EN MARCHA DEL PLAN: PRUEBA PILOTO

Para fundamentar nuestro análisis previo, realizamos una prueba piloto. En esta primera etapa de nuestro trabajo, consideramos la descripción de los participantes en la prueba piloto que son cuatro estudiantes de sexto grado de educación primaria de 10 y 11 años de edad de un colegio particular de Lima, Perú y que tienen conocimientos previos sobre las propiedades y operaciones de los números racionales, ya que se verificaron los contenidos que se encuentran en la programación anual de ese nivel educativo.

A continuación, mostramos el procedimiento para las tareas propuestas con una duración de 45 minutos, así como el análisis de los resultados.

A cada estudiante le asignaremos una letra para referirnos a él cuando se realice el análisis de la solución de cada tarea de esta manera: A, B, C y D.

Las recomendaciones que se brindaron a los estudiantes, al iniciar la prueba, fue que escriban todos los posibles casos que puedan encontrar, que detallen lo más que pudieran sus procedimientos y que si no lograban una respuesta final, no borrarán lo trabajado. También se les indicó que se consideraba el procedimiento y esta evaluación sería incluida como una nota del bimestre.

Soluciones de la Tarea 1

Antes de la formulación de la pregunta que los estudiantes deberán abordar, se dialoga en clase con respecto a qué sucede si a la fracción $\frac{19}{5}$ se suma un número natural al numerador y se resta el mismo al denominador, ¿Qué sucede? ¿Pruebe con otros números naturales? ¿Será cierto que $\frac{19+n}{5+n}$ siempre es número natural?

Presentamos la solución de la tarea 1, del estudiante B

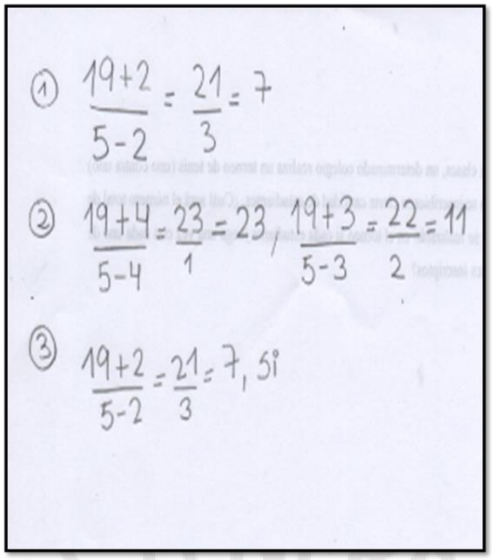


Figura 5. Solución del Estudiante B-tarea 1.

Este estudiante prueba con solo tres valores ($n = 2,\ n = 3,\ n = \ 4$) a lo que otro deduce, que siempre el resultado será un número natural. Además, se evidencia que realizó correctamente los cálculos en los números enteros, por lo que en su solución se identifican rasgos de algebrización del nivel 1.

También hay que resaltar que, en este caso, se identificó los rasgos del mayor nivel de algebrización referente a las respuestas de las cuatro tareas por cada estudiante.

Continuamos presentando la solución de la tarea 1, del estudiante D:

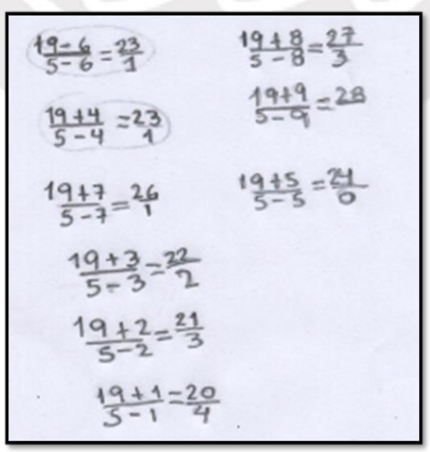


Figura 6. Solución del Estudiante D-tarea 1.

Para la solución de esta tarea, el estudiante prueba con nueve valores $(n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$, $n = 7$, $n = 8$, $n = 9)$. Notamos que hay errores en los cálculos aritméticos de los números enteros, lo que ocasiona que el estudiante generalice inadecuadamente y así no llegue a la respuesta correcta.

Tampoco hay presencia de rasgos algebraicos, movilización de propiedades del conjunto numérico, por lo que en su solución se identifican rasgos de algebrización del nivel 0.

Continuamos presentando la solución de la tarea 1 del estudiante A:

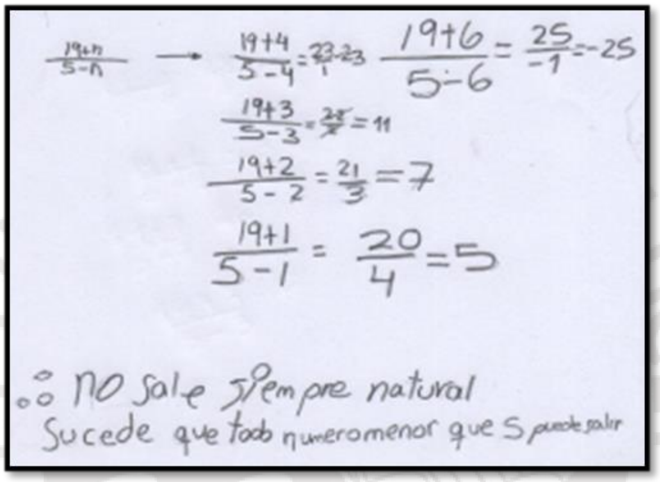


Figura 7. Solución del Estudiante A-tarea 1.

Este estudiante prueba con cinco valores $(n = 1,\ n = 2,\ n = 3,\ n = 4,\ n = 6)$, a partir de lo cual afirma que a veces resulta número natural y otras no. Notamos que realizó correctamente los cálculos, generaliza en forma escrita, deduciendo que es número natural y que solo para los valores menores que 5 será número natural, pero todavía no utiliza variables, por lo que en su solución se identifican rasgos de algebrización del nivel 1.

Continuamos presentando la solución de la tarea 1, del estudiante C:

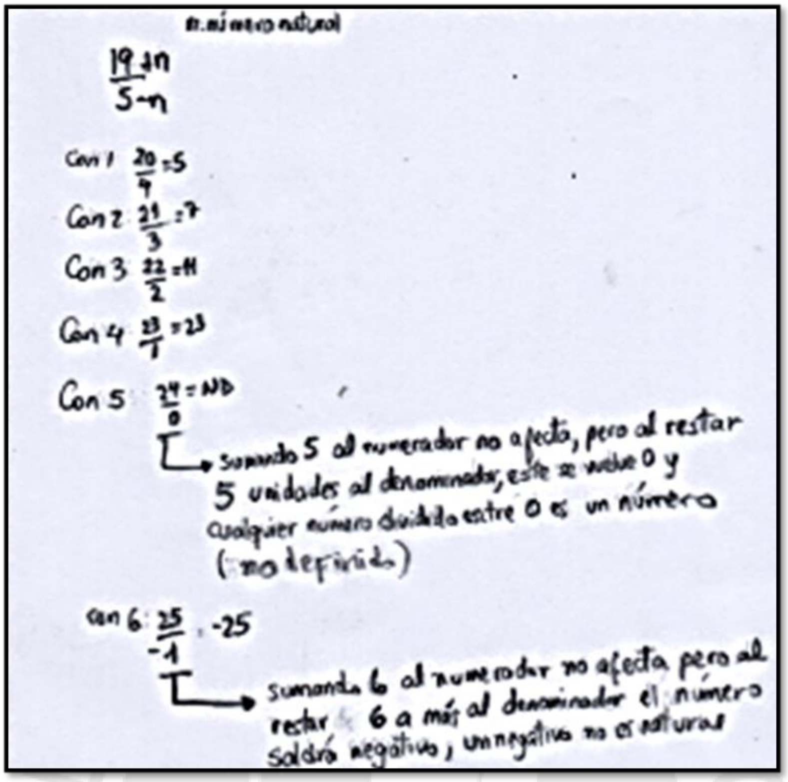


Figura 8. Solución del Estudiante C-tarea 1.

Este estudiante prueba con seis valores ($n = 1,\ n = 2,\ n = 3,\ n = 4, n = 5,\ n = 6$. Notamos que el estudiante C realiza correctamente los cálculos, justificando para cada caso. Para los cuatro primeros casos, resulta número natural, pero cuando es $n = 5$, el resultado es no definido y cuando considera $n = 6$, el estudiante manifiesta que el resultado que obtuvo es un número negativo y que por lo tanto no es número natural.

Intervienen objetos intensivos, cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante el lenguaje natural y numérico, aplica operaciones con números enteros (Sustracción y división de números enteros) y generaliza para varios números cercanos. Por lo que en su solución, se identifican rasgos de algebrización del nivel 1.

Con respecto a la tarea 1, evidenciamos que todos los alumnos respondieron a la pregunta, algunos dando valores, pero al no recibir instrucción ya no evaluaron más. Al respecto, lo que se rescata es que consideraran más valores para n y lograran justificar su respuesta en la experimentación. Por otro lado, dos alumnos realizaron cálculos adecuados utilizando las propiedades de los números enteros, variables y justificaron que, para todos los valores mayores a 5, ya no se cumple que sea número natural, así que tienen idea de generalizar con datos numéricos. Con esto, podemos decir que predominaron, en sus soluciones, rasgos de algebrización del nivel 1.

__Soluciones de la Tarea 2__

En el recuadro, se observa que cada rectángulo tiene área siempre igual a 11. ¿Cuál es el valor de la altura del rectángulo número 45 de la serie?

Presentamos la solución de la tarea 2, del estudiante B:

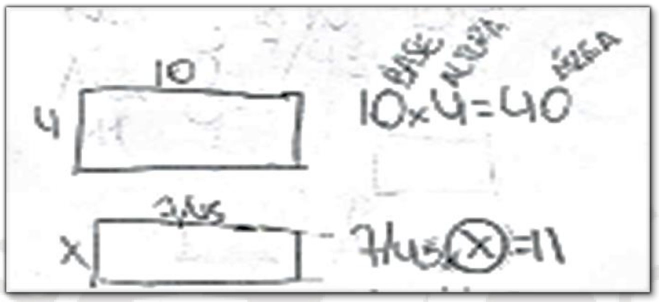


Figura 9. Solución del Estudiante B-tarea 2.

Este estudiante sabe cómo calcular el área de un rectángulo, ya que empieza realizando su propio ejemplo para destacar el valor de la medida de la base del rectángulo 45 a partir de la tabla y colocando el valor de la variable "*x*" a la altura pedida, reemplazando los valores y planteando la ecuación, pero no finalizó la ecuación. También hace uso de una variable para la solución de la tarea, por lo que en su solución se identifican rasgos de algebrización del nivel 2.

Presentamos la solución de la tarea 2, del estudiante D:

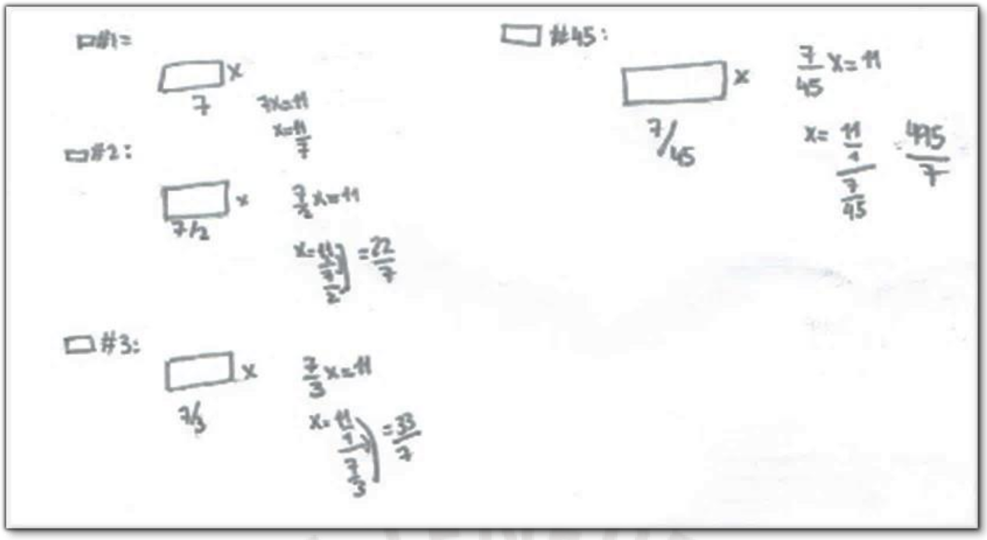


Figura 10. Solución del Estudiante D-tarea 2.

Este estudiante sabe cómo calcular el área de un rectángulo, realizando casos particulares, lo que lo llevó a generalizar para cuando la base sea igual a $\frac{7}{45}$. También asigna la variable "*x*" a la altura pedida, reemplazando los valores y planteando la ecuación, además de resolver adecuadamente los cálculos al operar la ecuación. Hace uso de una variable para la solución de la tarea y realizó las operaciones correspondientes, por lo que en su solución se identifican rasgos de algebrización del nivel 2.

Con respecto a la tarea 2, todos los estudiantes completaron la tabla, pero sólo dos de ellos determinaron la altura para cuando la base sea $\frac{7}{45}$. Asignaron una variable para el valor de la altura, intervinieron variables expresadas con lenguaje simbólico-literal, resolvieron una ecuación y generalizan, pero no se operó con las variables para obtener formas canónicas de la expresión, por lo que en las soluciones se identifican rasgos de algebrización del nivel 2.

Soluciones de la Tarea 3

Observe las siguientes operaciones:

$7 + 9$

$15 + 17$

$21 + 23$

$105 + 107$

$1575 + 1577$

¿Observa alguna regularidad? De ser así, elabore una conjetura y justifique.

Presentamos la solución de la tarea 3, del estudiante B:

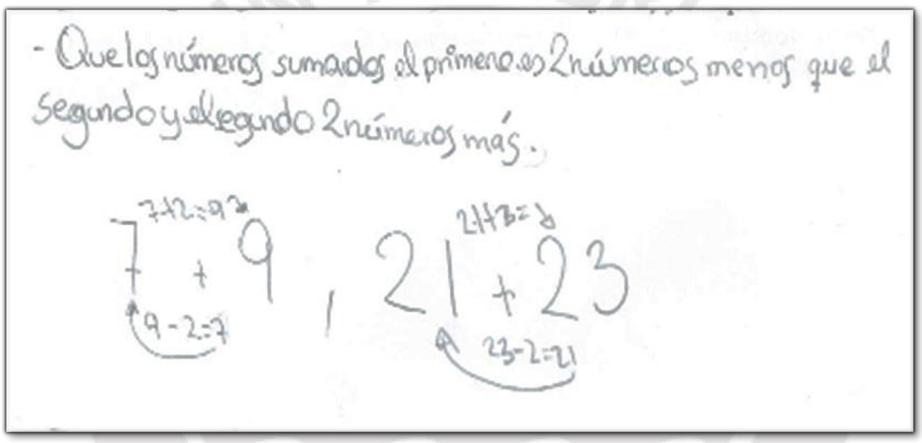


Figura 11. Solución del Estudiante B-tarea 3.

Este estudiante sólo realizó cálculos aritméticos mencionando que el menor de los sumandos es dos números menos que el sumando mayor. Realizó cálculos aritméticos, también justificó que se encuentra una misma relación para cada par de sumandos, por lo que en su solución se identifican rasgos de algebrización del nivel 1.

Por otro lado, presentamos la solución de la tarea 3, del estudiante A:

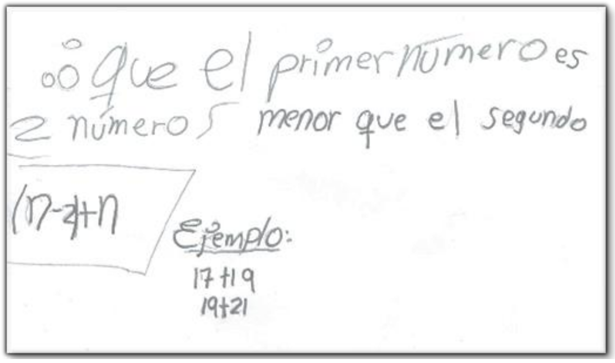


Figura 12. Solución del Estudiante A-tarea 3.

Este estudiante realizó cálculos aritméticos (Adición con números naturales) en dos ejemplos particulares, mencionando que el primer número es dos números menor que el segundo número, para luego generalizar y representar con variables, el menor número “$n - 2$" y el segundo número “n”.

A todo esto, intervinieron variables para representar a dos números a partir de una generalización, por lo que en su solución se identifican rasgos de algebrización del nivel 2.

Presentamos la solución de la tarea 3, del estudiante D:

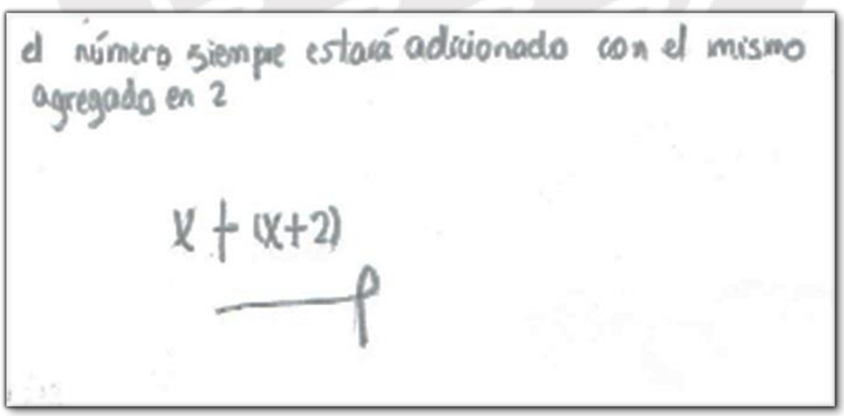


Figura 13. Solución del Estudiante D-tarea 3.

Este estudiante realizó cálculos aritméticos, mencionando que un número es adicionado con el mismo número agregado en 2 y lo representa con variables $x,\ x+2$.

En su solución, se identifican rasgos de algebrización del nivel 2, ya que justifica una misma relación para cada par de sumandos generalizando con variables $x+(x+2)$.

En la solución de esta tarea 3, identificamos rasgos de algebrización del nivel 1 y 2, ya que presentaron regularidades encontrando una forma general, además muestran justificaciones y utilizan variables, pero no llegaron a realizar operaciones con variables en este caso la adición.

__Soluciones de la Tarea 4__

Por inicio de clases, un determinado colegio realiza un torneo de Tenis (uno contra uno). Debido a ello, se inscribieron cierta cantidad de estudiantes. ¿Cuál será el número total de partidos que se realizarán en el torneo si cada estudiante juega una vez con cada uno de los estudiantes inscritos?

A continuación, presentamos la solución de la tarea 4, del estudiante D:

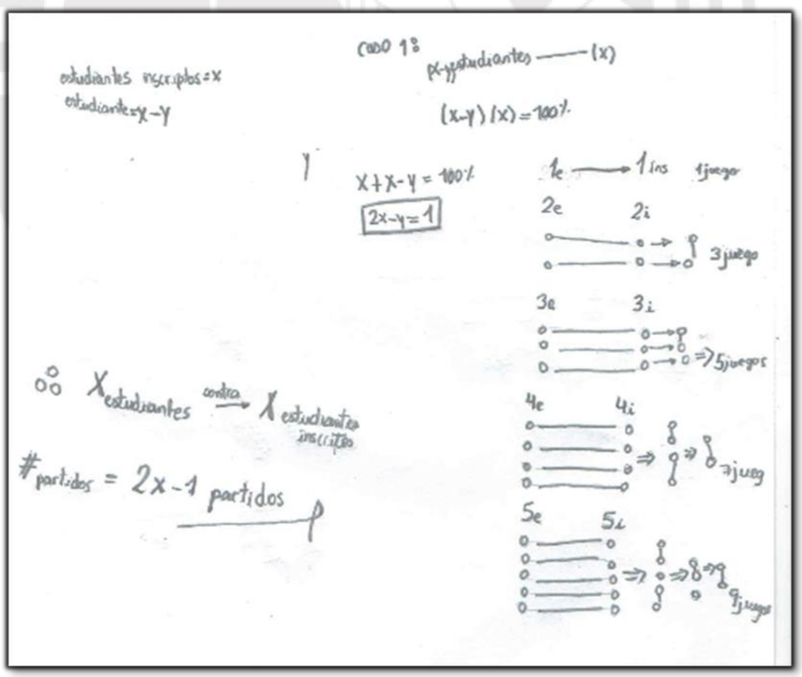


Figura 14. Solución del Estudiante D-tarea 4.

Esta tarea fue resuelta de manera equivocada, ya que la interpretación del enunciado literal al simbólico no fue entendida, es decir, el planteamiento de la tarea no fue correcto por un problema de lenguaje. El estudiante pensó que al decir la tarea “uno contra uno”, el que perdía ya no volvía a jugar con nadie; esto generó obtener errores en los casos particulares, por ende, no pudo encontrar correctamente el patrón general.

Lo que el estudiante mencionó a la profesora, al finalizar la prueba y entregar esa tarea, era que esa situación le resultó familiar con la tarea de contar el número de saludos (Estrechar la mano) que puede haber con una cierta cantidad de estudiantes de un aula, que tenía la misma forma general.

A partir del análisis realizado, se puede tomar en cuenta nuevos criterios para la faceta instruccional que debe realizar el docente para que la tarea sea resuelta por el estudiante de manera adecuada. Para esto, se hicieron modificaciones a las tareas e indicaciones adicionales para aplicar a los estudiantes de primer año de educación secundaria.

3.2 SEGUNDA ETAPA: PUESTA EN MARCHA DEL PLAN (ACCIÓN)

Para nuestro trabajo, aplicamos la propuesta de las cuatro tareas a estudiantes de primer grado de secundaria, para analizar la resolución de las tareas en el que se considera los mismos contenidos desarrollados en el curso de razonamiento matemático.

3.2.1 DATOS DE LA EXPERIMENTACIÓN

Para comenzar con la etapa de experimentación, se declaran antes los datos de los estudiantes, investigador y personas que van a intervenir.

Descripción del Alumno

La población considerada para efectuar la investigación fue la de estudiantes de primer grado de nivel secundario de un colegio particular de Lima, Perú.

Para el estudio, se consideró una muestra de 15 estudiantes de 12 a 13 años de edad que se encuentran matriculados en el año 2017, donde 10 estudiantes eran alumnos nuevos, que vienen de distintas instituciones, y solo cinco estudiantes eran alumnos antiguos, por lo que estos últimos tienen conocimientos previos.

Descripción del contenido de estudio del Alumno de primer grado de educación secundaria

De acuerdo al Diseño Curricular Nacional (2017), los estudiantes de primer grado de educación secundaria se encuentran en el VI ciclo de la Educación Básica regular.

Estos contenidos se encuentran en tres partes problemas: De cantidad, de regularidad y de forma.

***De acuerdo a la competencia problemas de cantidad*:**

En la institución particular, donde fue aplicado el experimento, se había enseñado los siguientes contenidos en el curso de razonamiento matemático sobre el tema de fracciones partiendo desde la definición y continuando con su clasificación, operaciones (cálculos), propiedades, representaciones, entre otros, que fueron necesarios, como conocimiento previo, para el desarrollo de las tareas.

***Resuelven problemas de regularidad, equivalencia y cambios*:**

En la institución particular donde aplicamos el experimento se trataron los siguientes contenidos:

- Planteo de ecuaciones: Simbolización, problemas de ecuaciones y factorización.
- Progresiones aritméticas.
- Sucesiones.
- Razonamiento inductivo.

Resuelven problemas de forma, movimiento y localización:

En la institución particular se menciona los contenidos que están en la programación:

- Perímetros.
- Áreas de regiones cuadrangulares y triangulares.
- Resolución de problemas de áreas usando ecuaciones y fracciones.

Aunque estos contenidos todavía no han sido enseñados hasta el mes de agosto, ya que están incluidos en el último bimestre (noviembre y diciembre), algunos estudiantes tienen los conocimientos previos del año anterior.

Ahora, podemos tener en cuenta los conocimientos que debe tener un estudiante en primer grado de secundaria para que sea capaz de resolver tareas aritméticas, geométricas y algebraicas que generen el Razonamiento Algebraico Elemental (RAE).

El Investigador Principal

La profesora planteó la propuesta de las cuatro tareas en un aula de 15 estudiantes de primer grado de secundaria en el curso de razonamiento matemático en un Centro Educativo Particular de Lima, Perú.

En ese momento, tomamos en cuenta la fase instruccional y mediacional, ya que estas se debieron tener en consideración al momento de dirigir la tarea. El rol específico del investigador principal y un docente observador, al que también se le dio las indicaciones que iban a ser presentadas al estudiante.

Se les brindó indicaciones para realizar la propuesta antes de iniciar la evaluación:

- Mostrar su procedimiento, ya que los intentos de soluciones serán considerados como parte de la evaluación.
- Se indica que el trabajo es personal y se le da una hoja para el desarrollo de cada pregunta, es decir, no pueden sacar hojas adicionales.
- El tiempo de duración es de 50 minutos.

3.3 TERCERA ETAPA OBSERVACIÓN DE LOS EFECTOS DE LA ACCIÓN (OBSERVACIÓN)

En este momento, podemos obtener resultados a partir de la prueba piloto que se realizó con los estudiantes denominados A, B, C y D.

A continuación, presentamos el análisis de rasgos de los niveles de algebrizacion hallados en cada estudiante al resolver las cuatro tareas algebraicas:

Tabla 2. *Análisis de las cuatro tareas de cada estudiante*

Estudiante	***Análisis de la solución de las 4 tareas***
A	TAREA 1: Realiza correctamente operaciones en números naturales y realiza soluciones para casos particulares. A todo esto, el estudiante presenta rasgos de algebrización referente al nivel 0. TAREA 2: Realizó un ejemplo con ayuda de un gráfico (Elemento lingüístico del EOS), luego asigna una variable "x" a la altura, notación simbólica (Elemento lingüístico del EOS). Mediante resolución de ecuaciones y generalizaciones, se obtiene la altura final en el planteamiento del concepto. A todo esto, el estudiante presenta rasgos de algebrización referente al nivel 2. TAREA 3: Realiza correctamente operaciones con números naturales y argumenta su respuesta, manifestando que el segundo término son 2 números más que el primer término. A todo esto, el estudiante presenta rasgos de algebrización referente al nivel 1. TAREA 4: No pudo realizar dicha tarea.
B	TAREA 1: Realizó operaciones de números enteros, pero presento errores en los cálculos, tampoco realiza generalizaciones ni justificaciones en sus solucione. Por lo tanto, hay rasgos referentes al nivel 0 de algebrización. TAREA 2: No pudo realizar dicha tarea. TAREA 3: No pudo realizar dicha tarea. TAREA 4: No pudo realizar dicha tarea.
C	TAREA 1: Realiza correctamente operaciones con números enteros, considerando varios casos particulares; así deduce que no siempre resulta natural. Por lo tanto, hay rasgos referentes al nivel 1 de algebrización.

	TAREA 2: Realiza correctamente operaciones con números naturales, argumenta su respuesta manifestando que el primer término es dos números menos que el segundo término y utilizó variables "$n-2$" y "n". Por lo tanto, hay rasgos referentes al nivel 2 de algebrización. TAREA 3: No pudo realizar dicha tarea. TAREA 4: No pudo realizar dicha tarea.
D	TAREA 1: Se generaliza a partir de seis casos particulares y justifica los resultados donde no se obtiene un número natural, pero no utiliza variables. Por lo tanto, hay rasgos referentes al nivel 1 de algebrización. TAREA 2: Realizó tres casos particulares con ayuda de gráficos (Elemento lingüístico del EOS), asigna una variable "x" a la altura, notación simbólica (Elemento lingüístico del EOS). Mediante la solución de los casos particular, generaliza para responder la pregunta. Por lo tanto, hay rasgos referentes al nivel 2 de algebrización. TAREA 3: Realiza correctamente operaciones con números naturales, argumenta su respuesta manifestando que el segundo término es mayor en dos números más que el primer término. También denota con variables. $n-2$ y n, luego realiza procedimientos con las variables. $(n-2)+n$ . . A todo esto, el estudiante presenta rasgos de algebrización referente al nivel 3. TAREA 4: Agrupó a través de diagramas, generalizó a partir de casos particulares y representó a través de variables. Por lo tanto, estudiante presenta rasgos de algebrización referente al nivel 2, aunque no llega a la respuesta debido a una interpretación incorrecta del enunciado literal al simbólico. El estudiante pensó que al decir la tarea “uno contra uno” el que perdía ya no volvía a jugar con nadie. Esto generó obtener errores en los casos particulares, por ende, no pudo encontrar correctamente el patrón general.

Como los objetivos de cada tarea son diferentes, no podemos sacar un promedio para saber qué nivel de algebrización tiene cada estudiante, pero sí podemos observar el rasgo de algebrización para cada tarea y así responder a nuestra pregunta de investigación.

Lo que sí podemos manifestar son los rasgos algebraicos en la resolución de cada tarea.

El estudiante A utilizó variables, símbolos y gráficos en su resolución. Además sabe las propiedades y definiciones de los números racionales.

Por lo tanto, se encuentran rasgos del nivel de algebrización 2.

El estudiante B realizó incorrectamente las operaciones, no realizó generalizaciones ni alguna propiedad con los números racionales. Por lo tanto, se encuentran rasgos del nivel de algebrización 0.

El estudiante C sí utilizó variables, símbolos y gráficos en su resolución, además que sabe las propiedades y definiciones de los números racionales. Por lo tanto, se encuentran rasgos del nivel de algebrización 2.

El estudiante D utilizó variables, realizó propiedades, símbolos, representación gráfica en su resolución y operó correctamente realizando generalizaciones. Por lo tanto, se encuentran rasgos del nivel de algebrización 2.

Respecto a este análisis, se evidenció que los rasgos de algebrización de las tareas que pudieron resolver se encuentran del nivel de 0 a 2, pero se mostró que tres estudiantes no respondieron a todas las preguntas, producto de que no conocían conceptos o no entendieron la situación de dichas tareas.

A partir de estos resultados, se presentan los cambios de cada tarea y sus respectivos objetivos.

<u>TAREA 1</u>

Si al numerador de la fracción $\frac{19}{5}$ se suma un número natural y se resta el mismo número al denominador. Por ejemplo, si el número natural es 1 ¿Qué sucede? o si el número natural es 2 ¿Qué sucede? y si pruebas con otros números naturales ¿Qué resulta? Entonces, a partir de esto, ¿Será cierto que $\frac{19+n}{5-n}$ siempre es número natural?

Objetivo de la tarea 1*:* La tarea presentada tiene como finalidad que el estudiante realice, en un primer momento, casos particulares con procedimientos aritméticos, para que a partir de estos resultados realice conjeturas y generalice considerando valores cercanos. Asimismo, que justifiquen y validen los valores que satisfacen la expresión que está denotada con variables y así argumentando su respuesta.

<u>TAREA 2</u>

En la siguiente tabla, se muestra tres columnas. La primera columna corresponde a la longitud de la base del rectángulo; en la segunda columna su altura y además se observa que el área es siempre igual a 11 u^2. Ahora, a partir de los datos que están en la tabla, completa las tres primeras alturas del rectángulo en la segunda columna.

Base	**Altura**	**Área**
7 u	---------	11 u^2
$\frac{7}{2}$ u	---------	11 u^2
$\frac{7}{3}$ u	---------	11 u^2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		11 u^2

Luego, a partir de los primeros resultados, calcular la altura del rectángulo cuando la base sea igual a: $\frac{7}{45}$ unidades.

Objetivo de la tarea 2: La tarea presentada tiene como finalidad que el estudiante reconozca el contexto de medida induciendo con casos particulares al momento de completar la tabla. También se requiere que argumenten sus procedimientos, así como el cálculo de área de un rectángulo y el desarrollo adecuado en las operaciones con números racionales.

Finalmente, se espera que pueda encontrar una solución para cualquier caso, para esto será necesario representar con variables.

<u>TAREA 3</u>

Realice las siguientes operaciones:

$7 + 9$

$15 + 17$

$21 + 23$

$105 + 107$

$1575 + 1577$

A partir de los cálculos realizados y al observar la relación que existe de cada par de números. ¿Encuentra alguna regularidad? De ser así, elabore una hipótesis y justifique.

Objetivo de la tarea 3: La tarea presentada tiene como finalidad que el estudiante resuelva, en un primer momento, casos particulares para que reconozca a la suma de números impares consecutivos con procedimientos aritméticos, para que, a partir de estos resultados, realice conjeturas y generalice para valores lejanos, es decir, que el estudiante sea flexible en su solución para buscar una estrategia que le ayude a generalizar encontrando una regularidad que se obtiene para cualquier par de sumandos consecutivos (impares) en sus respuestas y denote con variables para un término general (como el doble del término que se encuentra entre ambos sumandos).

<u>TAREA 4:</u>

Por inicio de clases, un determinado colegio realizará un torneo de Tenis (uno contra uno) y se han inscrito tres estudiantes, ¿Cuál será el número total de partidos que se realizarán en el torneo si cada estudiante juega una vez con cada uno de los estudiantes inscritos?

Ahora, luego de responder la primera pregunta, en general, si se inscriben una determinada cantidad de estudiantes, ¿Cuántos partidos se tendrá que jugar en total?

Objetivo de la tarea 4: La tarea presentada tiene como finalidad que el estudiante realice conjeturas y valide su resultado a través de generalizaciones. Asimismo, que justifiquen en sus argumentos de su respuesta.

Ahora mostramos las tres facetas para estas tareas:

3.3.1. FASE EPISTÉMICA

Para esta fase consideramos el trabajo realizado por Julian (2017, p 117), la cual desarrolló situaciones de conjetura-validación que le permitieron reconocer y aplicar propiedades estructurales, reconocer patrones, usar de manera sistemática símbolos para expresar cantidades indeterminadas y generalizaciones. Para esto, se rescata los objetos matemáticos primarios para representar las expresiones numéricas mediante esquemas, realizar procedimientos, utilizar propiedades y argumentar regularidades.

Como resultado, se muestra que las características presentes en las tareas realizadas se encuentran en el nivel 3 de algebrización. Esto nos servirá como base para tener un panorama de los conocimientos que debe tener un estudiante de primer año de secundaria al enfrentarse a situaciones de tareas como ésta.

Ahora, usaremos esta faceta epistémica y la modificamos, de acuerdo a nuestra situación, con resultados reales que puedan realizar los estudiantes, en base a la prueba piloto, para configurar la faceta cognitiva para analizar los rasgos de algebrización presentes en cada una de las tareas.

3.3.2 FASE COGNITIVA

En esta fase se colocarán todos los posibles resultados que se espera del estudiante a partir de las soluciones de nuestra prueba piloto.

Con respecto a la tarea 1:

- Un primer estudiante probará tres casos particulares y podrá decir en primer momento que siempre resultará un número natural de la siguiente forma:

$\frac{19+1}{5-1}=\frac{20}{4}=5$ es un número natural

$\frac{19+2}{5-2}=\frac{21}{3}=7$ es un número natural

$\frac{19+3}{5-3}=\frac{22}{2}=11$ es un número natural

Luego podrá decir que $\frac{19+n}{5-n}$ resulta un número natural.

- Otro estudiante probará, además de lo anterior, con 5 resultando $\frac{19+5}{5-5}=\frac{24}{0}$ la cual es una división imposible de resolver en $\mathbb{N}$ y el resto de conjuntos con ello.

- Otro estudiante reemplaza un número mayor a 6 obteniendo:

$\frac{19+6}{5-6}=\frac{25}{-1}=-25$, el resultado ya no es un número natural.

Por lo que se concluirá que sólo $\frac{19+n}{5-n}$ será un número natural cuando $n=1;2;3;4$

- Por último, también podemos encontrar a un estudiante que manifieste que como "n" es un número natural, entonces el numerador siempre será positivo, así que como lo que piden que el resultado sea natural, el denominador debe ser mayor que 0, con denominador distinto de cero ya que sería indeterminado.

$5 - n > 0$, donde n es un número natural

$(5 + -5) - n > 0 + -5$ …………………… sumamos "-5" a cada miembro

$-n > -5$ …………………………………... multiplicamos por -1 a cada miembro

$5 > n$

Así concluye que "n" toma el valor del 1 al 4.

Con respecto a la tarea 2:

- Un primer estudiante puede completar el cuadro mediante generalizaciones, sin explicar cada paso que utilizó para encontrar la base de cada caso:

Base	Altura	Área
$\mathbf{7\ u}$	---------	11 u²
$\mathbf{\frac{7}{2}\ u}$	---------	11 u²
$\mathbf{\frac{7}{3}\ u}$	---------	11 u²
⋮	⋮	⋮
		11 u²

- Un segundo estudiante puede encontrar las bases del rectángulo al completar las $7\ u$ de la primera base como: $7 = \frac{7}{1}$ y así indicar la siguiente de secuencia $\frac{7}{1}; \frac{7}{2}; \frac{7}{3}; \frac{7}{4}; \cdots \frac{7}{n}$ donde *n* es la ubicación del rectángulo de la secuencia. En este caso, el estudiante todavía no calcula las alturas en la tabla, por lo que todavía no presenta la respuesta de la tarea.

- Un tercer alumno puede utilizar variables para representar a cada altura y luego generalizar a partir de tres casos:

❖ $7\ x_1 = 11$………………………..… "x_1" es el valor de la primera altura.

$7\left(\frac{1}{7}\right)\ x_1 = 11\left(\frac{1}{7}\right)$…………………… multiplica a cada miembro por $\left(\frac{1}{7}\right)$ por propiedad.

Así, obtiene el valor de $x_1 = \frac{11}{7}$.

❖ $\frac{7}{2}\ x_2 = 11$………………………..… "x_2" es el valor de la segunda altura.

$\frac{7}{2}\left(\frac{2}{7}\right)\ x_2 = 11\left(\frac{2}{7}\right)$…………………… multiplica a cada miembro por $\left(\frac{2}{7}\right)$.

Así, obtiene el valor de $x_2 = \frac{22}{7}$.

- $\frac{7}{3}\ x_3 = 11$……………………..… "x_3" es el valor de la tercera altura.

$\frac{7}{3}\left(\frac{3}{7}\right) x_3 = 11\left(\frac{3}{7}\right)$…………………… multiplica a cada miembro por $\left(\frac{3}{7}\right)$.

Así, obtiene el valor de $x_3 = \frac{33}{7}$.

Luego, observa la siguiente regularidad al completar la tabla:

Base	Altura	Área
$\frac{7}{1}\ u$	$\frac{11}{7}\ u$	11 u^2
$\frac{7}{2}\ u$	$\frac{22}{7}\ u$	11 u^2
$\frac{7}{3}\ u$	$\frac{33}{7}\ u$	11 u^2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{7}{45}\ u$		11 ^{2}

De los valores encontrados de las tres primeras alturas:

$x_1 = \frac{11}{7}\ u$ ………….. $\frac{11\times1}{7}$

$x_2 = \frac{22}{7}\ u$ ………….. $\frac{11\times2}{7}$

$x_3 = \frac{33}{7}\ u$ ………….. $\frac{11\times3}{7}$

Después, generaliza la altura pedida base a los tres casos particulares con la regularidad que encuentra:

$x_{45} = \frac{11\times45}{7}\ u$

$x_{45} = \frac{495}{7}\ u$

Por lo que finalmente menciona el valor de la altura que piden en dicha tarea.

Con respecto a la tarea 3:

- De esta tarea, los estudiantes pueden mencionar que los números que se deben sumar se diferencian siempre en 2 y que de cada suma obtenida siempre será un número par y lo pueden representar con variables al momento de generalizar.

  De esta forma: $n + (n + 2)$ donde n es un número natural.

- Por otro lado, otro estudiante puede operar las representaciones de los valores que se le da a cada número: $n + \ (n + 2)$

$(n + n) + 2$ ………………….Por propiedad asociativa

Se obtiene: $2n + 2$

Luego, el estudiante factoriza, por lo que obtiene: $2n + 2 = 2\ (n + 1)$

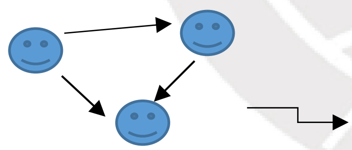
Entonces éste reconoce que "$n + 1$" es el valor intermedio al valor de cada sumando y que luego es multiplicado por 2.

Así encuentra que el patrón es el doble del valor intermedio a ambos sumandos.

Con respecto a la tarea 4:

- Un primer estudiante puede realizar diagramas y encontrar la forma para encontrar el número de partidas. Como dice la actividad para tres estudiantes, le resulta tres partidas.

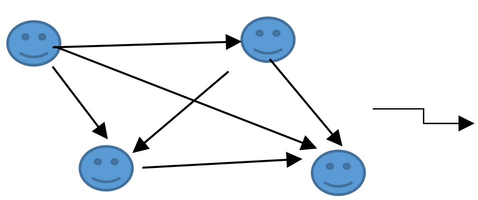
3 estudiantes



$$3\ partidas = \frac{2x3}{2}$$

Luego puede dar otro ejemplo:

4 estudiantes



$$6\ partidas = \frac{3x4}{2}$$

Por lo tanto, concluir que el número de partidas es la mitad del producto de dos números consecutivos.

Sea “n” el número de estudiantes.

El número de partidas será: $\frac{(n-1)n}{2}$

- Otro estudiante puede realizar una tabla en la que represente el número de estudiantes, utilización de variables para el conjunto de partidos obtenidos, donde (E_1, E_2, E_3, …) representa al orden, según el número de estudiantes, y, por último, encontrar el número de partidos obtenidos.

Número de estudiantes	**Conjunto de los partidos obtenidos**	**Representación de los partidos obtenidos**	**Número total de partidos**
3	{$E_1 E_2$, $E_1 E_3$, $E_2 E_3$}	E_1= 2 partidos E_2= 1 partido	2 + 1 = 3 partidos
4	{$E_1 E_2$, $E_1 E_3$, $E_1 E_4$, $E_2 E_3$, $E_2 E_4$, $E_3 E_4$}	E_1= 3 partidos E_2= 2 partidos E_3= 1 partido	3+ 2+ 1= 6 partidos
5	{$E_1 E_2$, $E_1 E_3$, $E_1 E_4$, $E_1 E_5$, $E_2 E_3$, $E_2 E_4$, $E_2 E_5$, $E_3 E_4$, $E_3 E_5$, $E_4 E_5$}	E_1= 4 partidos E_2= 3 partidos E_3= 2 partidos E_4= 1 partido	$4+3+2+1=10$ partidos
⋮	⋮	⋮	
20	{$E_1 E_2$, $E_1 E_3$, $E_1 E_4$, …, $E_{18} E_{20}$, $E_{19} E_{20}$}	E_1= 19 partidos E_2= 18 partidos ⋮ E_{19}= 1 partido	$19+18+17+\cdots+1=190$ partidos

Luego, a partir de la tabla, este estudiante puede encontrar el número de partidos para tres casos particulares, generalizando para valores cercanos. Así como para 20 estudiantes $19+18+17+\cdots+1=190$, llegando a la conclusión que, para un determinado número de estudiantes, el número de partidos se obtiene sumando los números naturales desde 1 hasta un número anterior al número de estudiantes que piden.

Asimismo, puede generalizar para un número "n" de estudiantes.

$$1+2+3+\cdots+(n-1)$$

Puede indicar que aplicará la fórmula de la suma de los números naturales para encontrar el número de partidas para una cantidad determinada de estudiantes:

$$1 + 2 + 3 + \cdots (n-1) = \frac{(n-1)}{2} \times n$$

Es así que, a partir de estas cuatro tareas, podemos encontrar rasgos de algebrización respecto a los niveles 1, 2 y 3, pero el objetivo, a través de esta experimentación con los estudiantes, será encontrar el nivel predominante del total de la muestra, resaltando que se espera rasgos de algebrización de los niveles 2 y 3.

3.3.3 FASE INSTRUCCIONAL

Como ya se obtuvieron los resultados de la experiencia en la prueba evaluada a estudiantes de sexto de primaria, mencionamos las indicaciones que se les propondrán a los estudiantes de primer grado de secundaria del colegio particular de Lima. La presentación debe ser estructurada de forma que para los estudiantes sea claro lo que tienen que hacer.

Así, mencionamos las indicaciones que se agregó al inicio de las tareas que se presentaron:

Indicaciones:

- Tiempo de duración 50 minutos.
- No se debe usar materiales de consulta como cuadernos, libros, celulares y las tareas son personales.
- Mostrar todos sus procedimientos, ya que serán tomados en cuenta para la calificación escolar con el fin que se comprometan y resuelvan lo mejor posible.
- Resolver el procedimiento en todo el espacio de la hoja. No se puede usar hojas adicionales

Por otro lado, se modificó la estructura de cada tarea a partir de la prueba piloto.

3.3.4 ANÁLISIS DE LA EXPERIMENTACIÓN

En esta parte, vamos a analizar las soluciones de las cuatro tareas que fueron realizadas por los estudiantes de primer grado de secundaria de un colegio particular de Lima, Perú, como actividad de clase para analizar los rasgos de los niveles de algebrización de cada uno por cada tarea.

Mostramos cuatro tablas con las soluciones de cada una de las tareas por separado, luego presentamos algunas figuras para mostrar más detalles de las soluciones, donde se espera que los estudiantes conjeturen, es decir, que brinden justificaciones para sus resultados a partir de casos particulares detallando las operaciones que realicen al costado de su procedimiento, como es la adición en números naturales y enteros, operaciones con números racionales (multiplicación con el inverso multiplicativo) y así dar respuesta a nuestra pregunta de investigación.

Por otro lado, se analizan los resultados de cada estudiante que involucre sus soluciones de las cuatro tareas realizadas en la actividad que se efectuó en clase y para esto se realiza otra tabla que detalle los resultados de cada estudiante.

Tarea 1   Si al numerador de la fracción $\frac{19}{5}$ se suma un número natural y se resta el mismo número al denominador. Por ejemplo, si el número natural es 1 ¿Qué sucede? o si el número natural es 2 ¿Qué sucede? y si pruebas con otros números naturales ¿Qué resulta? Entonces, a partir de esto, ¿Será cierto que $\frac{19+n}{5-n}$ siempre es número natural?

Mencionamos las respuestas de cada estudiante en una tabla:

Soluciones de la Tarea 1:

En la tabla 3 describimos los procedimientos realizados por cada estudiante, el análisis e identificamos los rasgos característicos de los niveles de algebrizacion para luego mostrar el nivel encontrado.

Tabla 3. *Análisis y rasgos de nivel de 15 estudiantes respecto a la tarea 1*

Estudiante	***Procedimiento de la tarea 1***	***Análisis e Identificación de rasgos de los niveles de algebrizacion.***
1	Consideró *n=1*, justificando que si suma el 1 al numerador y resto 1 al denominador resulta un número natural, luego reemplazó *n=2* justificando que si suma el 2 al numerador y resta 2 al denominador resulta un número natural, seguidamente reemplazó *n=3* justificando que si suma el 3 al numerador y resta 3 al denominador resulta un número natural. Finaliza declarando que no siempre $\frac{19+n}{5-n}$ saldrá un número natural, ya que a veces resulta fracciones.	Declaró el término general, lenguaje simbólico-literal, el cual se basó para decir que no siempre resulta un número natural, además de realizar correctamente las propiedades del conjunto numérico de los números racionales. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 2.
2	Consideró *n=1* y al resultado le colocó que es un número natural, luego reemplazó *n=2* y al resultado le colocó que es un número natural. Finaliza declarando que no siempre saldrá un número natural y colocó un ejemplo con *n= 10* colocando la respuesta como 5,8	Aparecieron los objetos intensivos, esto quiere decir que los objetos de generalidad serán reconocidos de manera explícita en tareas estructurales. Además, se movilizan las propiedades de los números racionales. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 1.
3	Consideró *n=1* y al resultado le colocó que es un número natural y luego finalizó declarando que sí siempre saldrá un número natural.	Intervinieron objetos extensivos, manipuló los objetos particulares sin encontrar una regla que generalice, pero aplicó adecuadamente la operación. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 0.
4	No entiende al inicio la tarea, ya que adicionó el número 1 a toda la fracción $\frac{19}{5}$ y luego le resta 1 al denominador por lo que obtiene 6 y de la misma forma aplica para el valor de 2. Luego se da cuenta y reemplaza correctamente para los números 1, 2 y 3 declarando que, para el valor de 5, no es número natural.	Se generalizó a partir de casos particulares. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 1.
5	Respondió las dos primeras preguntas de *n= 1* y *n= 2* colocando que resulta números naturales,	Generalizó a partir de casos particulares y movilizó las

	seguidamente da valor *n= 5* obteniendo como resultado algo no definido. Por último, reemplaza *n=6 y n=7* resultando números enteros, por lo que finaliza diciendo que no siempre resulta número natural	propiedades de los números racionales. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 1.
6	Respondió para *n= 1* obteniendo el número 5 pero no declara nada.	Manipuló los objetos particulares sin encontrar una regla que generalice. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 0.
7	Consideró *n=1, n=2, n=3 y n=4* mencionando que no siempre resulta un número natural, ya que si, por ejemplo, $n = 6$ no un número natural ya que resulta un número negativo.	Generalizó a partir de casos particulares. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 1.
8	Consideró *n=1* y al resultado le colocó que es un número natural, reemplazó *n=2* y al resultado le colocó que es un número natural, reemplazó *n=3* y al resultado le colocó que es un número natural, reemplazó *n=4* y al resultado le colocó que es un número natural, luego reemplazó *n=7* y al resultado le colocó que es un número entero, por lo que finaliza declarando que $\frac{19+n}{5-n}$ no siempre saldrá un número natural, ya que si coloca un número mayor que 5 es entero.	Declaró el término general al finalizar como lenguaje simbólico-literal, ya que, a partir de casos particulares, realizó conclusiones, en el que se basó para decir que no siempre resulta un número natural. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 2.
9	Consideró *n=1* y al resultado le colocó que es un número natural, reemplazó *n=2* y al resultado le colocó que es un número natural, reemplazó *n=3* y al resultado le colocó que es un número natural, reemplazó *n=4* y al resultado le colocó que es un número natural, luego reemplazó *n=5* y al resultado le colocó como no definido, luego reemplazó *n=6* y al resultado le colocó que es un número entero, por lo que finaliza declarando que no siempre saldrá un número natural, ya que si coloca un número mayor que 5 es entero.	Generalizó a partir de casos particulares. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 1.
10	Consideró *n=1, n=2, n=3* luego reemplazó *n=5* y al resultado le colocó que no existe y termina reemplazando *n= 7*.	Realizó operaciones adecuadas de tipo aritmético y no encontró algo en común para finalizar, pero sí aplicó adecuadamente las propiedades en los números racionales (Denominador de

		la fracción distinto de cero) y números enteros (Adición de números enteros). Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 1.
11	No entendió la tarea y operó incorrectamente.	Tuvo errores en las operaciones y, por ende, no llegó a encontrar algún término general. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 0.
12	No entendió la tarea y dejó en blanco la hoja.	
13	No entendió la tarea, ya que colocó números diferentes al sumar y restar al numerador y denominador respectivamente.	
14	Consideró $n=1$ y $n=2$ declarando que no siempre saldrá un número natural mencionando un ejemplo con $n = 6$.	Se generaliza a partir de casos particulares y aplicó correctamente las propiedades. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 1.
15	Consideró $n=1$, $n=2$, $n=3$ *y* $n=4$ mencionando que siempre resultará un número natural porque todos son naturales.	Realizó correctamente las operaciones, pero no consideró más casos para generalizar y encontrar un patrón. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 0.

Ahora, presentamos el análisis detallado de la solución de algunas tareas resueltas por los estudiantes.

Empezamos por el análisis en la solución de la tarea 1 del estudiante 3

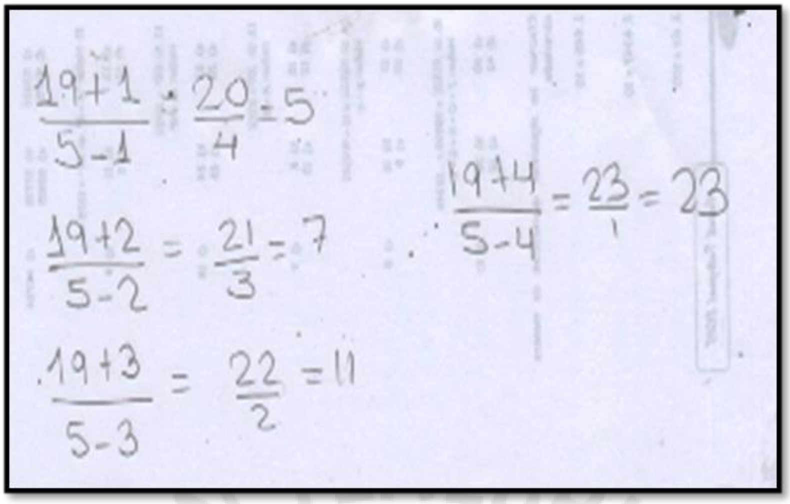


Figura 15. Solución del Estudiante 3-tarea 1.

En la figura 15, podemos observar que el estudiante 3 resolvió de manera parcial, es decir, reemplazando con algunos números naturales para su procedimiento ($n = 1, n = 2, n = 3, n = 4$), realizando correctamente las propiedades (Adición en los números naturales y enteros), ya que, de acuerdo al significado institucional, el estudiante ya tiene conocimiento del concepto de los conjuntos numéricos.

Por otro lado, este estudiante realizó cálculos aritméticos y no argumentó ningún resultado. Debido a esto y a todo lo mencionado, podemos decir que la solución del estudiante 3 presenta rasgos de algebrización referente al nivel 0.

Tenemos el análisis de la solución de la tarea 1 del estudiante 2

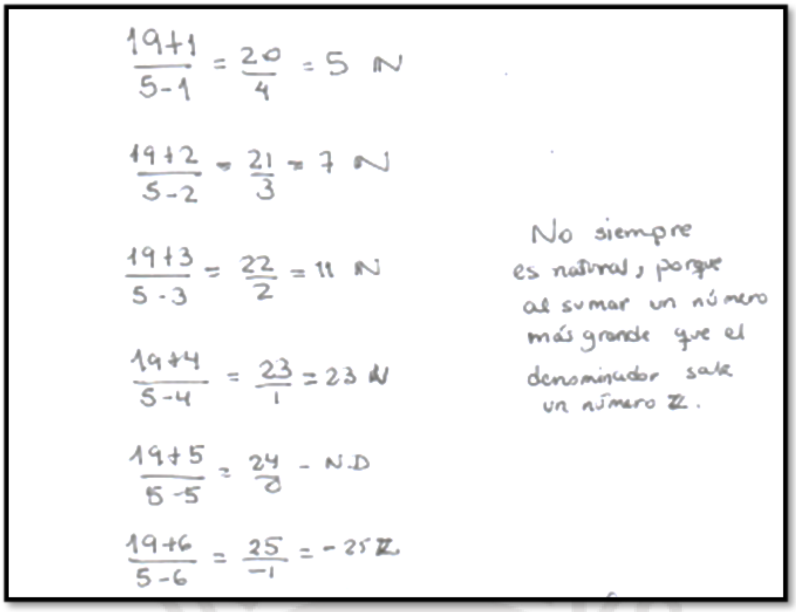


Figura 16. Solución del Estudiante 2-tarea 1

En la figura 16, podemos observar que el estudiante 2 resolvió demostrando toda su destreza en la tarea 1, dando valores para su procedimiento *(*$n=1$*,* $n=2$*,* $n=3$*,* $n=4$*,* $n=5$ y $n=6$*).* Además, empleó adecuadamente las propiedades de los números enteros realizando cálculos aritméticos (Adición en los números naturales y enteros), manifestando de manera explícita argumentos para cada valor. Cuando $n=1$ al $n=4$ resulta un número natural, cuando el $n=5$ resulta no definido y cuando $n=6$ resulta un número entero. Asimismo, de acuerdo al significado institucional, el estudiante ya tiene conocimiento del concepto de los conjuntos numéricos.

Por otro lado, argumentó que al agregar un número mayor que el denominador el resultado es un número entero, no define ninguna variable, ni utiliza notaciones simbólicas, pero ese razonamiento inductivo nos muestra rasgos de dualidad extensivos-intensivos. Por todo lo mencionado, podemos decir que la solución del estudiante B presenta rasgos de algebrización referente al nivel 1.

Ahora presentamos el análisis en la solución de la tarea 1 del estudiante 1:

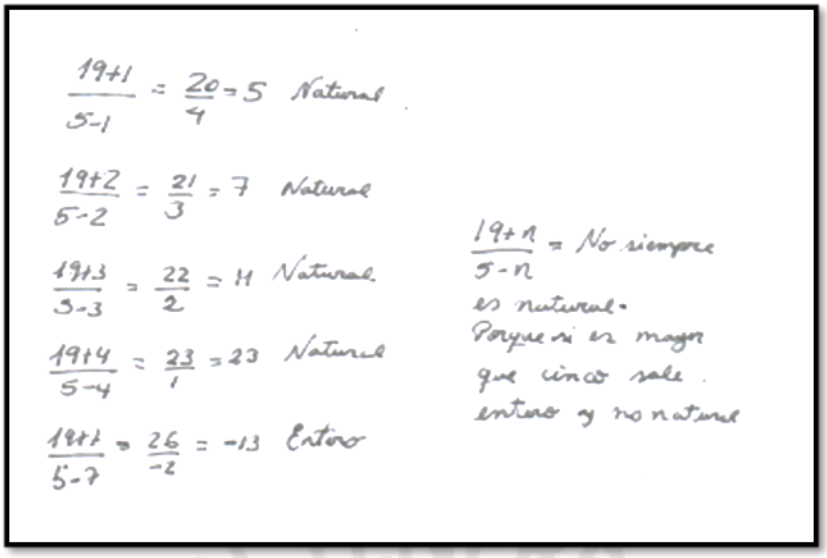


Figura 17. Solución del Estudiante 1-tarea 1.

En la figura 17, podemos observar que el estudiante 1 mostró operaciones dando valores $(n = 1,$ $n = 2,\ n = 3,\ n = 4\ y\ n = 7)$ y realizó cálculos aritméticos, argumentando que para los valores de n *=1* al n*= 4* resulta un número natural, pero para $n = 7$ resulta un número entero. Notamos conocimiento de conceptos y propiedades en su procedimiento.

Utiliza la dualidad extensivo-intensivo, donde manifiesta que el resultado de $\frac{19+n}{5-n}$ no siempre será un número natural, ya que argumentó que si el "n" mayor a 5 resulta un número entero y no un número natural. En esta parte, encontramos notaciones simbólicas como es la variable "n" y elementos lingüísticos como es la expresión algebraica para generalizar. Este estudiante se encuentra en el nivel 2 de algebrización, ya que generalizó a partir de casos particulares y llegó a un término general donde interviene una variable.

Después del análisis de las soluciones de los 15 estudiantes sobre la tarea 1, podemos concluir que el nivel 1 de algebrizacion es el que predomina, ya que en siete estudiantes se identificó el nivel 1 de algebrización, debido a que dieron valores a “n” del 1 al 10, considerado como casos particulares, para luego generalizar (Dualidad extensivo-extensivo). También la mayoría realizó cálculos adecuados utilizando las que se encuentra las propiedades de la adición en números naturales y números enteros.

Ante esto, podemos mencionar los elementos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) como los conceptos, propiedades y procedimientos que los estudiantes tienen claro para llegar a este nivel. Argumentaron (Elemento del EOS) que para todos los valores mayores a 5 ya no se cumple que sea natural y terminan generalizando para un término general.

El nivel 2 de algebrizacion solo se alcanzó en dos soluciones de los estudiantes en el que utilizaron variables, por lo que se obtuvo, en ambos casos, el significado logrado que se pretendió al evaluar la tarea.

Por último, se identifica el nivel 0 de algebrización en cuatro estudiantes, ya que realizaron algunos cálculos solo del tipo aritmético, pero no encontraron ninguna relación para generalizar, es decir, aplicaron casos particulares y dos estudiantes no respondieron la tarea, ya que al parecer no recordaban el concepto y las operaciones en el conjunto numérico de los números racionales.

Tarea 2

En la siguiente tabla, se muestra tres columnas. La primera columna corresponde a la longitud de la base del rectángulo; en la segunda columna su altura y además se observa que el área es siempre igual a 11 u^2. Ahora, a partir de los datos que están en la tabla, completa las tres primeras alturas del rectángulo en la segunda columna.

Base	Altura	Área
7 u	---------	11 u^2
$\mathbf{\frac{7}{2}\,u}$	---------	11 u^2
$\mathbf{\frac{7}{3}\,u}$	---------	11 u^2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		11 u^2

Luego, a partir de los primeros resultados, calcular la altura del rectángulo cuando la base sea igual a: $\frac{7}{45}$ unidades.

Soluciones de la tarea 2: En la tabla 4, describimos los procedimientos realizados por cada estudiante, el análisis e identificamos los rasgos característicos de los niveles de algebrizacion para luego mostrar el nivel que se ha encontrado.

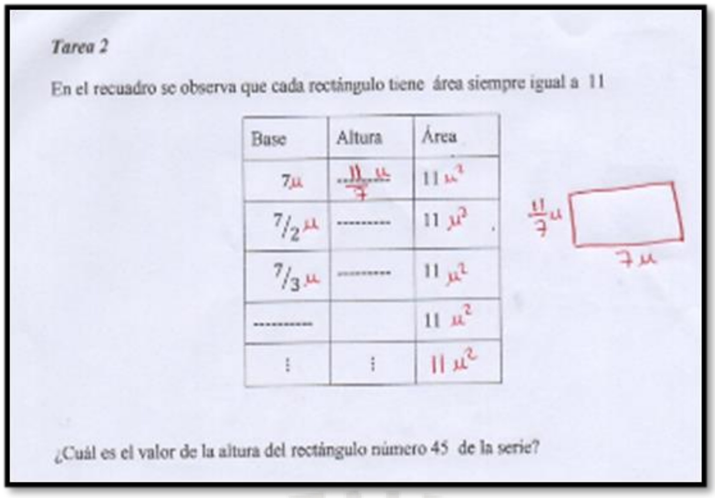
Tabla 4. *Análisis y rasgos de nivel de 15 estudiantes respecto a la tarea 2*

Estudiante	***Procedimiento de la tarea 2***	***Análisis e Identificación de rasgos de los niveles de algebrizacion.***
1	Este estudiante sabe cómo calcular el área de un rectángulo completando la tabla con las tres primeras alturas planteando, en cada caso, una ecuación base $\times$ altura $= 11$ u^2, donde al valor de la altura le asigna "x" y la base se induce al realizar una generalización. Así desarrolló una ecuación para calcular la altura del rectángulo que han pedido en dicha tarea, donde la base es $\frac{7}{45}$, la altura es "x" y el valor del área es 11 u^2, obteniendo el valor de la altura finalmente $x = \frac{495}{7}$ u.	Se le asignó una variable "x" a la altura, notación simbólica (Elemento lingüístico del EOS). Mediante resolución de ecuaciones y generalizaciones, obtuvo la altura final en el planteamiento del concepto. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de nivel de algebrización 2.
2	Dejó en blanco dicha tarea.	
3	Este estudiante completó solo la base del rectángulo en la tabla, realizó algunos dibujos, pero no recordaba el área de un rectángulo, por lo que no pudo completar la tarea.	Realizó un recuento para la base y se ayuda con gráficos (Elemento lingüístico del EOS), pero no realizó ningún argumento, ni realizó operaciones utilizando propiedades, ni asigna variables. Por ello, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de nivel de algebrización 0.
4	Este estudiante sabe cómo calcular el área de un rectángulo, completó solo la primera altura de la primera fila de la tabla $\frac{11}{7}$, que induce al realizar un gráfico. Así planteó y desarrolló una ecuación para calcular la altura del rectángulo que han pedido en dicha tarea, donde la base es $\frac{7}{45}$, la altura es "H" y el valor del área es 11 u^2 obteniendo el valor de la altura finalmente $x = \frac{11\times 45}{7}$ u.	Asignó una variable "H" a la altura, notación simbólica y realizó un dibujo, notación gráfica (Elementos lingüísticos del EOS). El estudiante realizó la resolución de ecuaciones para resolver la tarea. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de nivel de algebrización 2.

5	Este estudiante sabe cómo calcular el área de un rectángulo completando la tabla con las tres primeras alturas planteando, en cada caso, una ecuación $\text{base} \times \text{altura} = 11\ \text{u}^2$, donde al valor de la altura le asigna "x" y la base se induce al realizar una generalización. Así desarrolló una ecuación para calcular la altura del rectángulo que han pedido en dicha tarea, donde la base es $\frac{7}{45}$, la altura es "x" y el valor del área es $11\ \text{u}^2$ obteniendo $x = \frac{495}{7}$ u generalizando llegó a la conclusión que la altura del rectángulo es $x = \frac{11 \times 45}{7}$ u, lo que le determinó a conjeturar que para algún caso general la altura es $x = \frac{11.y}{7}$, donde "y" es el número de rectángulo que piden y "x" es la altura. (7 y 11 son constantes).	Asignó una variable "x" a la altura, notación simbólica (Elemento lingüístico del EOS). El estudiante realizó la resolución de ecuaciones para resolver la tarea y generalizaciones (Intensivo). Finalmente, asignó a la altura una variable que depende de otra variable (Según el número de rectángulos), es decir, generalizó con un patrón para cualquier número de rectángulo. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de nivel de algebrización 3.
6	Este estudiante sabe el concepto de área de un rectángulo, escribe la ecuación: $\text{base} \times \text{altura} = \text{área}$. Así desarrolló una ecuación para calcular la altura del rectángulo que han pedido en dicha tarea, pero se equivocó multiplicando los valores de la base con el área. Por ejemplo, para la primera altura 7×11, la segunda altura $\frac{7}{2} \times 11$ y así sucesivamente operando correctamente, pero no llegó a la respuesta.	El estudiante utilizó la fórmula del cálculo de área de un rectángulo, pero tuvo errores en las operaciones al resolver la ecuación, lo que produce que no resuelva correctamente la tarea. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de nivel de algebrización 1.
7	Dejó en blanco dicha tarea	
8	Dejó en blanco dicha tarea	
9	Dejó en blanco dicha tarea	
10	Dejó en blanco dicha tarea	
11	Este estudiante realizó un gráfico con altura igual a 6 y base igual a 4, por lo que multiplicó y obtuvo 24 entendiendo que ese resultado es el área de un rectángulo. Es así que deduce que la altura es resultado de dividir el área con la base y como se tiene los datos realizó las operaciones completando toda la tabla llegando a realizar la tarea, pero sin utilizar variables, solo con generalizaciones.	El estudiante utilizó la fórmula del cálculo de área de un rectángulo que se ayuda a través de dibujos notación gráfica (Elementos lingüísticos del EOS) y lo obtuvo a partir de generalizaciones completando toda la tabla.

	De esta manera: altura 1 = $\frac{11x1}{7}$, altura 2 = $\frac{11x2}{7}$, altura 3 = $\frac{11x3}{7}$, … así hasta la altura 45 = $\frac{11x45}{7}$	Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de nivel de algebrización 1.
12	Este estudiante se equivocó en el concepto de área de un rectángulo, colocando en su desarrollo la altura = $\frac{\text{basex área}}{2}$. Así desarrolló, para la solución de dicha tarea, por lo que no llegó a la respuesta.	El estudiante utilizó una fórmula incorrecta para el cálculo de área de un rectángulo, por lo que también tiene errores en los resultados y sus cálculos sólo son para casos particulares (Extensiva). Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de nivel de algebrización 0.
13	Este estudiante supo cómo calcular el área de un rectángulo, por lo que completó solo la primera altura de la primera fila de la tabla “$\frac{11}{7}$” y también completó la altura del rectángulo que piden, colocando en la tabla $\frac{495}{7}$.	El estudiante utilizó la fórmula del cálculo de área de un rectángulo y resolvió la tarea a partir de generalizaciones completando toda la tabla. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de nivel de algebrización 1.
14	Este estudiante no recordó el área de un rectángulo, sólo representa el $7 = \frac{7}{1}$.	
15	No entendió la tarea.	

Empezamos por el análisis en la solución de la tarea 2 del estudiante 3



Tarea 2

En el recuadro se observa que cada rectángulo tiene área siempre igual a 11

Base	Altura	Área
$7u$	$\frac{11}{7}u$	$11\ u^2$
$7/2\ u$	---------	$11\ u^2$
$7/3\ u$	---------	$11\ u^2$
----------		$11\ u^2$
⋮	⋮	$11\ u^2$

$\frac{11}{7}u$

$7u$

¿Cuál es el valor de la altura del rectángulo número 45 de la serie?

Figura 18. Solución del Estudiante 3-tarea 2.

En la figura 18, podemos observar que el estudiante 3 resolvió de manera parcial, es decir, solo completó la primera fila de la tabla. Realizó cálculos aritméticos (Dividió el área con la base para obtener la primera altura) y se ayudó con un gráfico (Representación como elemento lingüístico, según el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática, EOS) para dicha tarea, pero esto no fue suficiente ya que no completó los otros casos ni concluyó la actividad, por lo que se presenta rasgos de algebrización de nivel 0.

Luego tenemos, el análisis de la solución de la tarea 2 del estudiante 6:

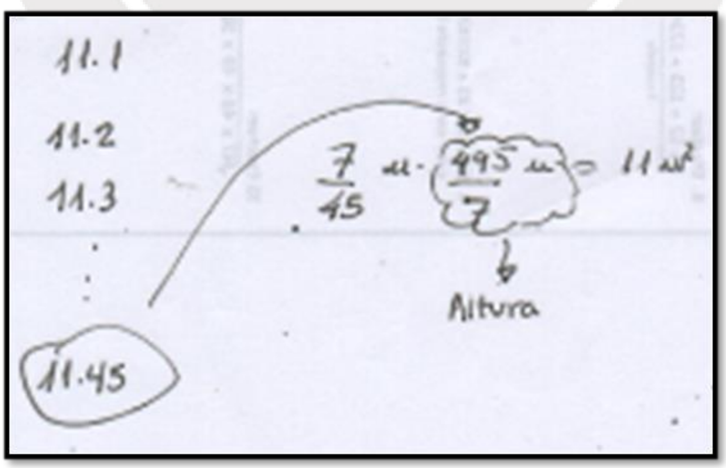


Figura 19. Solución del Estudiante 6-tarea 2.

En la figura 19, podemos observar que el estudiante conoce el concepto de área de rectángulo, ya que completó la tabla con las tres primeras alturas generalizando, a través de razonamientos (Dualidad extensiva-intensiva), realizando operaciones en los números racionales. Por otro lado, indujo y generalizó el valor de la medida de la base del rectángulo 45 y su altura encontrando una regularidad, pero no hizo uso de variables. Por lo tanto, presenta rasgos de algebrización de nivel 1.

Ahora presentamos la solución de la tarea 2, del estudiante 1:

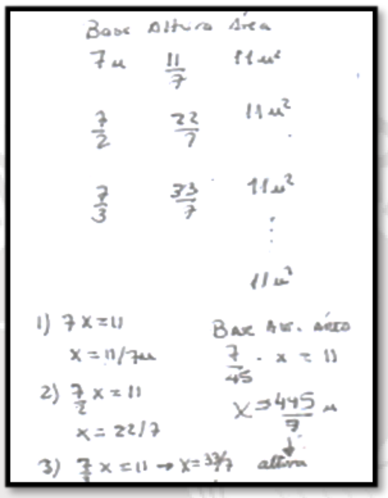


Figura 20. Solución del Estudiante 1-tarea 2.

En la figura 20, podemos observar que el estudiante conoce el concepto del área de rectángulo, ya que completó la tabla con las tres primeras alturas, como pedía la tarea, planteando en cada caso una ecuación (Concepto, operaciones y propiedades de los números racionales), luego calculó el valor de la medida de la base del rectángulo 45, agregando la unidad que corresponde.

Este estudiante se ubica en el nivel 2 de algebrización, porque se hizo uso de una variable para la solución de la tarea, además de usar las dualidades extensivas-intensivas.

Después del análisis de la tarea 2, podemos concluir que siete de ellos no respondieron a la tarea, ya que se olvidaron del concepto de área de un rectángulo, por lo que nos quedó analizar a los 8 estudiantes que sí respondieron.

De dicho grupo que respondieron, todos realizaron generalizaciones, algunos utilizando casos particulares y otros llegando a un caso general.

Tres estudiantes se presentan rasgos del nivel 1 de algebrización, así que fue el nivel predominante respecto a los que respondieron; otros dos estudiantes asignaron una variable para el valor de la altura, por lo que se presentan rasgos del nivel 2 de algebrización; otros dos estudiantes se inclinaron por realizar casos particulares, sin generalizar, por lo que se encuentran rasgos del nivel 0 de algebrización y solo un estudiante alcanzó rasgos del nivel 3 de algebrización, ya que utilizó correctamente conceptos, operaciones y propiedades, además de realizar generalizaciones (Extensivo-intensivo) y declarar manipulación de variables (Utilización de expresiones algebraicas).

Tarea 3:

Realice las siguientes operaciones:

$7+9$

$15+17$

$21+23$

$105+107$

$1575+1577$

A partir de los cálculos realizados y al observar la relación que existe de cada par de números, ¿Encuentra alguna regularidad? De ser así, elabore una hipótesis y justifique.

Soluciones de la Tarea 3: En la tabla 5, describimos los procedimientos realizados por cada estudiante, el análisis e identificamos los rasgos característicos de los niveles de algebrizacion para luego mostrar el nivel de algebrizacion encontrado.

Tabla 5. *Análisis y rasgos de nivel de 15 estudiantes respecto a la tarea 3*

Estudiante	***Procedimiento de la tarea 3***	***Análisis e Identificación de rasgos de los niveles de algebrización.***
1	Este estudiante realizó cálculos aritméticos correctamente, pero no mencionó ninguna relación o alguna regularidad.	Realizó correctamente operaciones en números naturales, pero no realizó generalizaciones ni utiliza variables. Por lo tanto, presenta rasgos de algebrización de nivel 0.

2	Este estudiante realizó cálculos aritméticos correctamente, luego mencionó que la relación que existe es que el par de sumandos se diferencian en 2, colocando razón $= +2$, pero no encontró la relación con el resultado.	Realizó correctamente operaciones en números naturales y las soluciones para casos particulares. Por lo tanto, presenta rasgos de algebrización de nivel 0.
3	Este estudiante realizó cálculos aritméticos correctamente, luego concluyó que la relación que existe en cada par es una diferencia de 2 y que cada suma es un número par. Finalmente generaliza para todos los sumandos.	Realizó correctamente operaciones con números naturales y argumentó su respuesta, por lo que presenta rasgos de algebrización de nivel 1.
4	Este estudiante realizó cálculos aritméticos correctamente, luego concluyó que el segundo sumando siempre es dos más que el primer sumando generalizando y encontrando que el resultado es un número par.	Realizó correctamente operaciones con números naturales y argumentó su respuesta generalizando. Por lo tanto, presenta rasgos de algebrización de nivel 1.
5	Este estudiante realizó cálculos aritméticos correctamente y concluyó que el primer sumando $+ 2$ resulta el segundo sumando. Finalmente generaliza para todos los sumandos.	Realizó correctamente operaciones con números naturales y argumentó su respuesta. Por lo tanto, presenta rasgos de algebrización de nivel 1.
6	Este estudiante también realizó cálculos aritméticos correctamente y concluyó que el número de la derecha le lleva por 2 al de la izquierda, además que cada par de números siempre tienen la misma cantidad de cifras. Finalmente generaliza para todos los sumandos.	Realizó correctamente operaciones con números naturales y argumentó su respuesta. Por lo tanto, presenta rasgos de algebrización de nivel 1.
7	Este estudiante realizó cálculos aritméticos correctamente, pero no mostró justificaciones ni encontró alguna regularidad.	Realizó correctamente operaciones en números naturales y realizó soluciones para casos particulares. Por lo tanto, presenta rasgos de algebrización de nivel 0.
8	Este estudiante realizó cálculos aritméticos correctamente. Luego el primer sumando $+ 2$ resulta el segundo sumando. Finalmente generaliza para todos los sumandos.	Realizó correctamente operaciones con números naturales y argumentó su respuesta. Por lo tanto, presenta rasgos de algebrización de nivel 1.
9	Este estudiante realizó cálculos aritméticos correctamente y concluyó que el primer sumando $+ 2$ resulta el segundo sumando. Luego declaró dos variables "a" y "b", donde a= menor número y	Realizó correctamente operaciones con números naturales y argumentó su respuesta (Símbolos). Utilizó variables, generalizó y colocó una variable en

	b= mayor número. Como el mayor es dos más que el menor, entonces coloca $b = a + 2$ y luego adicionó ambos números en función de las variables resultando: $a + (a + 2)$ Luego realiza la propiedad asociativa: $(a + a) + 2 = 2a + 2$ Finalmente, factoriza el número 2 obteniendo $2(a + 1)$ y ese es el resultado para un término general, solo que no terminó justificando si se cumple para las sumas propuestas en la tarea.	función de otra, resolvió utilizando propiedades. Por lo tanto, presenta rasgos de algebrización de nivel 3.
10	Este estudiante realizó cálculos aritméticos correctamente, pero no mostró justificaciones ni encuentra alguna regularidad.	Realizó correctamente operaciones en números naturales, pero no realizó generalizaciones, ni utilizó variables. Por lo tanto, presenta rasgos de algebrización de nivel 0.
11	Este estudiante realizó cálculos aritméticos correctamente y mencionó que el número de la derecha se le aumenta en dos.	Realizó correctamente operaciones con números naturales y argumentó su respuesta. Por lo tanto, presenta rasgos de algebrización de nivel 1.
12	Este estudiante realizó cálculos aritméticos correctamente, pero no mostró justificaciones ni encuentra alguna regularidad.	Realizó correctamente operaciones en números naturales, pero no realizó generalizaciones, ni utilizó variables. Por lo tanto, presenta rasgos de algebrización de nivel 0.
13	Este estudiante realizó cálculos aritméticos escribiendo que se llevan por 2 ambos sumandos, generalizó y encontró el patrón de regularidad. Así $7 + 9 = 16 \rightarrow 2x8,$ donde 8 es el número entre 7 y 9 $15 + 17 = 32 \rightarrow 2x16,$ donde 16 es el número entre 15 y 17 De la misma forma, realizó para los tres siguientes ejercicios manifestando que el resultado es la multiplicación de 2 con el número que está entre ambos sumandos.	Realizó correctamente operaciones con números naturales y argumentó su respuesta utilizando generalizaciones (El resultado es el doble del número natural que se encuentra entre cada par de sumandos). Por lo tanto, presenta rasgos de algebrización de nivel 1.
14	Este estudiante realizó cálculos aritméticos correctamente y mencionó que el número de la derecha se le aumenta en dos.	Realizó correctamente operaciones con números naturales y argumentó su respuesta utilizando generalizaciones.

	Finalmente generaliza para todos los sumandos.	Por lo tanto, presenta rasgos de algebrización de nivel 1.
15	Este estudiante realizó cálculos aritméticos correctamente y mencionó que los números que adicionan van de dos en dos. Finalmente generaliza para todos los sumandos.	Realizó correctamente operaciones con números naturales y argumentó su respuesta utilizando generalizaciones. Por lo tanto, presenta rasgos de algebrización de nivel 1.

Ahora presentamos el análisis de la solución de la tarea 3 de algunos estudiantes, empezando con el estudiante 2:

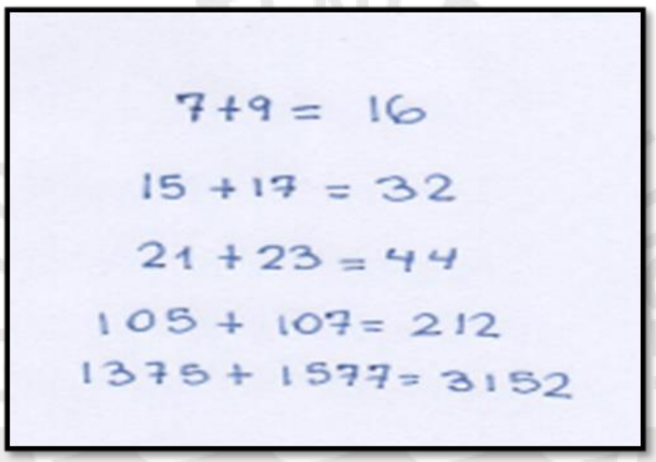


Figura 21. Solución del Estudiante 2-tarea 3.

En la figura 21, podemos observar que el estudiante 2 realizó operaciones aritméticas resolviendo las operaciones de cada una de ellas (Adición en los números naturales) sin analizar la respuesta, ya que no realizó conjeturas ni generalizó, solo resolvió casos particulares (Extensivo). Por esto, presenta rasgos de algebrización de nivel 0.

Presentamos el análisis de la solución de la tarea 3 del estudiante 3

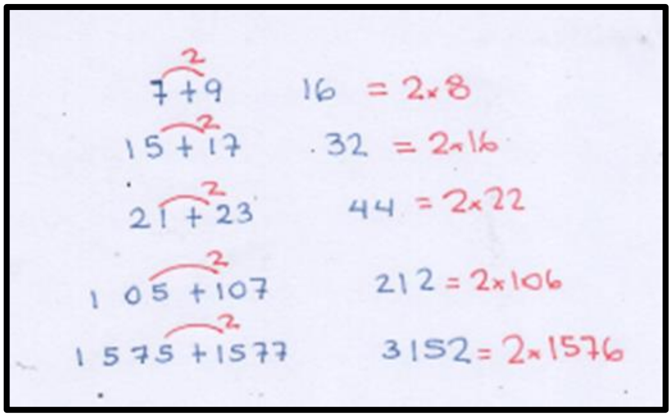


Figura 22. Solución del Estudiante 3-tarea 3.

En la figura 22, podemos observar que el estudiante 3 realizó operaciones aritméticas resolviendo las operaciones de cada una de ellas (Adición en los números naturales) y colocó dos unidades entre ambos sumandos para que se note la regularidad que hay entre ellos. Realizó conjeturas y generalizó según los casos particulares (Extensivo-intensivo), mencionando que el resultado es la multiplicación de 2 con el número posterior al primer sumando. Por lo tanto, presenta rasgos de algebrización de nivel 1.

Ahora presentamos la solución de la tarea 3 del estudiante 9:

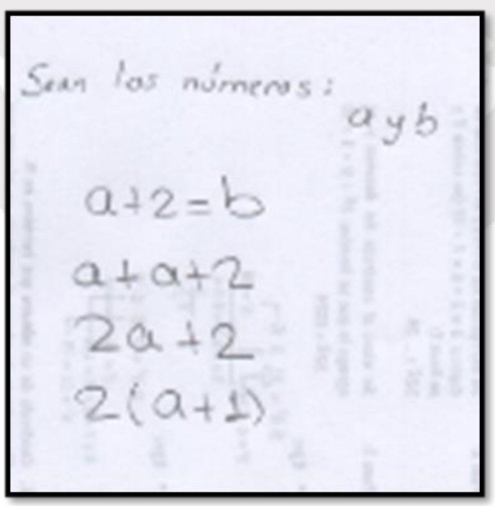


Figura 23. Solución del Estudiante 9-tarea 3.

En la figura 23, se puede observar que el estudiante realizó cálculos aritméticos, operando cada caso (Adición en los números naturales), luego asignó variables “a” y “b” (Se colocan notaciones simbólicas), igualando $b = a + 2$, ya que se diferencian ambos sumandos por dos. Realizó operaciones con ambas variables (Propiedades de los números naturales), luego factoriza y obtiene $2(a + 1)$, es decir, efectuó tratamientos.

Mencionó que el resultado es el doble del valor que se encuentra entre cada par de sumando. Los rasgos hallados corresponden al nivel 3, ya que opera las variables para encontrar un término general.

Después del análisis de las soluciones correspondiente a la tarea 3, identificamos que todos los estudiantes realizaron cálculos aritméticos (Adición de números naturales). El nivel predominante de algebrización son los rasgos del nivel 1, ya que nueve estudiantes realizaron argumentos en sus procedimientos generalizando y encontrando un patrón (Dualidad extensivo-intensivo).

Por otro lado, cinco estudiantes presentan rasgos del nivel 0 de algebrización, ya que los casos particulares no le ayudan a encontrar un caso general (Extensivo), además no hay presencia de propiedades. Solo un estudiante utiliza variables para generalizar y obtener una regularidad encontrándose rasgos del nivel 3 de algebrización, ya que además de utilizar variables las transforma y realiza tratamientos (Operaciones con los términos algebraicos).

<u>Tarea 4:</u>

Por inicio de clases, un determinado colegio realizará un torneo de Tenis (uno contra uno) y se han inscrito tres estudiantes, ¿Cuál será el número total de partidos que se realizarán en el torneo si cada estudiante juega una vez con cada uno de los estudiantes inscritos?

Ahora, luego de responder la primera pregunta, en general, si se inscriben una determinada cantidad de estudiantes, ¿Cuántos partidos se tendrá que jugar en total?

<u>Soluciones de la Tarea 4:</u> En la tabla 6, describimos los procedimientos realizados por cada estudiante, el análisis e identificamos los rasgos característicos de los niveles de algebrizacion para luego mostrar el nivel encontrado.

Tabla 6. *Análisis y rasgos de nivel de 15 estudiantes respecto a la tarea 4*

Estudiante	*Procedimiento de la tarea 4*	*Análisis e Identificación de rasgos de los niveles de algebrizacion.*
1	Este alumno respondió solo la primera pregunta. Para esto, se ayudó con dibujos, colocando a cada estudiante letras a, b y c. Luego mencionó que el primer partido lo da a con b, el segundo partido a con c y el tercer partido b con c. De ahí que respondió diciendo que hay tres partidos con tres estudiantes	Declaró letras y gráficos (Elementos lingüísticos del EOS) para ayudar a realizar el conteo respondiendo a la primera pregunta, pero no encontró el patrón para un caso general. Por lo tanto, presenta rasgos de algebrización de nivel 0.
2	Este alumno no encontró la regularidad correcta, ya que mencionó que el número de partidos $=$ $\text{número de inscritos}(\text{número de inscritos} - 1)$, notamos que le faltó dividir para encontrar a la regularidad correcta.	Empleó una fórmula para realizar el conteo, ya que al parecer recordó que hay una relación que ha sido enseñado, pero no recordó correctamente. Por lo tanto, presenta rasgos de algebrización de nivel 0.
3	Este alumno no entendió la tarea.	
4	Este alumno no entendió la tarea.	
5	Este alumno respondió a la primera pregunta, para esto se ayudó con dibujos, diciendo que con dos estudiantes hay un partido, para tres estudiantes hay tres partidos, cuatro estudiantes hay seis partidos. Luego, colocó un ejemplo con 15 estudiantes será $\frac{15(14)}{2} = 105$ partidos.	Realizó gráficos (Elemento lingüístico del EOS) para ayudar a realizar el conteo, pero no encontró el patrón correcto, pero sí realizó generalizaciones. Por lo tanto, presenta rasgos de algebrización de nivel 1.
6	Este alumno respondió solo a la primera pregunta correctamente, ya que para esto se ayudó con letras a, b y c realizando las combinaciones mediante flechas. Empieza con tres estudiantes con tres partidos, luego para cuatro estudiantes mencionó que hay seis partidos. Finalizó planteando que es la multiplicación de dos números consecutivos dividido por 2.	Declaró letras (Elemento lingüístico del EOS) para ayudar a realizar el conteo, por lo que encontró el patrón correcto. Por lo tanto, presenta rasgos de algebrización de nivel 1.
7	Este alumno respondió a la primera pregunta con ayuda de dibujos. Empezó con tres estudiantes y, mediante líneas, realizó un conteo encontrando que hay tres	Realizó gráficos y variables (Elementos lingüísticos del EOS) para ayudar a realizar el

	partidos, luego mencionó que esto se puede escribir como: $\frac{3(3-1)}{2} = 3$ partidos. Ahora, para cuatro estudiantes cuenta seis partidos, luego mencionó que esto se puede escribir como: $\frac{4(4-1)}{2} = 6$ partidos. A partir de esto generalizó, definió una variable n: número de estudiantes , y generalizó para un término general: Número de partidos que juegan $= \frac{n(n-1)}{2}$	conteo y utilizando casos particulares encontró el patrón correcto y realizó generalizaciones utilizando variables. Por lo tanto, presenta rasgos de algebrización de nivel 2.
8	Este alumno realizó mal el conteo de partidos para tres personas, lo cual no pudo llegar al análisis esperado.	
9	Este alumno realizó mal el conteo de partidos para cada caso y no finalizó con alguna justificación.	
10	Este alumno no entendió el problema.	
11	Este alumno no encontró la regularidad correcta, ya que mencionó que el número de partidos $= n(n-1)$, notamos que le faltó dividir para encontrar a la regularidad correcta.	No encontró la regularidad correcta, pero definió a una variable para encontrar una generalización, ya que le resultó familiar dicha tarea. Por lo tanto, presenta rasgos de algebrización de nivel 2.
12	Este alumno solo manifestó que tres estudiantes realizan tres partidos y cuatro estudiantes seis partidos.	Declaró letras para representar y realizar el conteo respondiendo a la primera pregunta. Por lo tanto, presenta rasgos de algebrización de nivel 0.
13	Este alumno no entendió el problema.	
14	Este alumno respondió sólo la primera pregunta. Para esto se ayudó con letras para cada estudiante J, D y R. Realizó correctamente el conteo, mencionó que con tres estudiantes hay tres partidos, con cuatro estudiantes encuentra seis partidos y que para cuatro estudiantes hay 10 partidos y así encontró que la regularidad es el cociente del producto de dos números consecutivos.	Declaró letras (Elemento lingüístico del EOS) para ayudar a realizar el conteo, por lo que encontró el patrón correcto (Dualidad extensivo-intensivo). Por lo tanto, presenta rasgos de algebrización de nivel 1.
15	Este alumno no entendió el problema.	

Ahora presentamos el análisis de la solución de la tarea 4 del estudiante 12:

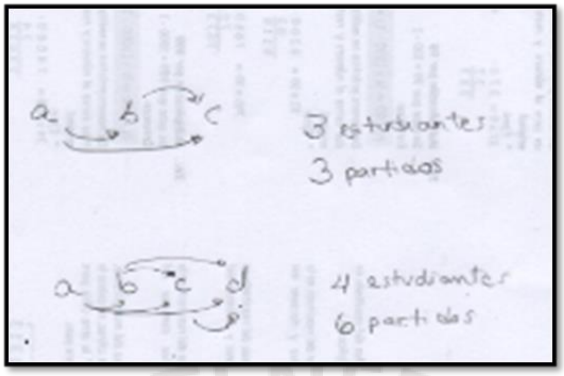


Figura 24. Solución del Estudiante 12-tarea 4.

En la figura 24, se puede observar que el estudiante 12 realizó un diagrama asignándole letras para representar a cada estudiante. Inició para tres estudiantes y obtiene tres partidas, luego para cuatro estudiantes obtiene seis partidas, pero no llegó a generalizar para un término general.

El nivel presenta rasgos de algebrización de nivel 0, porque no escribe ninguna conjetura, no hay variables que opere, sino que solo tiene letras que lo utiliza para agrupar.

Ahora presentamos el análisis de la solución de la tarea 4 del estudiante 5

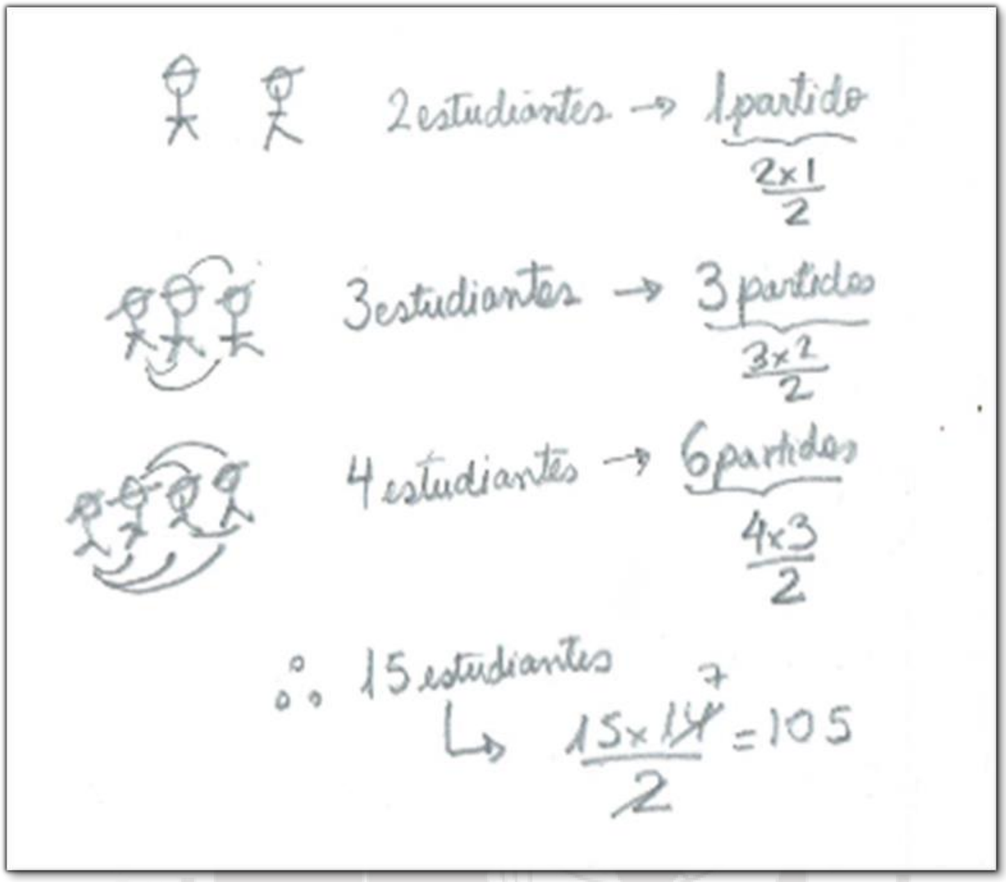


Figura 25. Solución del Estudiante 5-tarea 4

En la figura 25, podemos observar que el estudiante 5 presentó operaciones para algunos casos particulares, realizando conteo (Utiliza gráficos) aritméticos, reconociendo un patrón con tres estudiantes. Notamos conocimiento de conceptos y propiedades en su procedimiento.

Este estudiante presenta rasgos de algebrización de nivel 1, ya que generaliza a partir de casos particulares y coloca un ejemplo general para un valor 15.

Ahora presentamos el análisis de la solución de la tarea 4 del estudiante 7

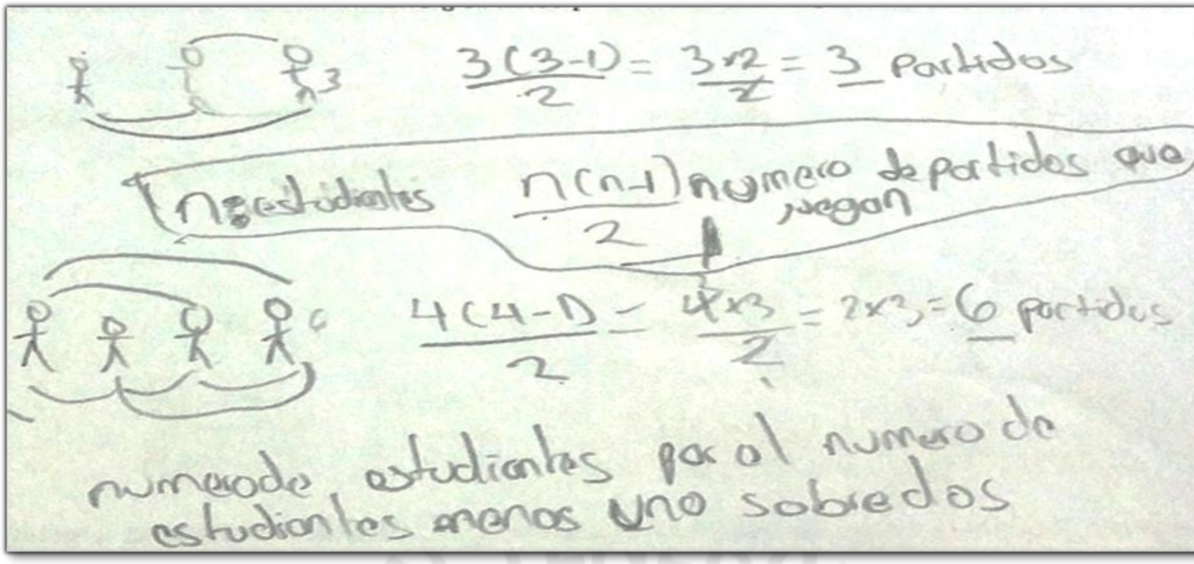


Figura 26. Solución del Estudiante 7-tarea 4.

En la figura 26, se puede observar que el estudiante 7 realizó un diagrama para tres estudiantes (Representación gráfica) obteniendo tres partidas, luego con cuatro estudiantes encuentran seis partidas (Extensivo) y así tiende a generalizar para un término general asignando en función de la variable "n", que le corresponde al número de estudiantes (Intensivo).

Se encuentra rasgos del nivel 2, ya que realiza el mismo patrón para casos particulares luego declara la variable y después, en función de la variable, plantea el número de partidas para cualquier caso. Además, escribe que el número de partidas de la siguiente manera:

$$\frac{(\text{numero de estudiantes})\text{x}\ (\text{numero de estudiantes} - 1)}{2}$$

Respecto al análisis en la solución de la tarea 4, se encontró que siete de los estudiantes no entendieron el problema o realizaron mal el conteo lo que les genera que no concluyan, tres estudiantes mostraron sus soluciones a través de gráficos o representaciones utilizando letras, pero no concluyeron (Extensivos) y otros tres estudiantes también realizaron conteo, pero estos sí encuentran un patrón (Intensivos), por lo que podemos decir que predominan los rasgos de los nivel de algebrización 0 y 1. Finalmente, dos estudiantes utilizaron variables por lo que presentan rasgos de algebrización de nivel 2.

A esto podemos decir que la mayoría de estudiantes de primer año de secundaria no tienen un pensamiento matemático flexible, ya que no encuentran estrategias para casos más generales sino para casos más cercanos (Generalización cercana), lo que no les permite encontrar correctamente el patrón.

Ahora presentamos, a manera de síntesis, el análisis de rasgos de los niveles de algebrización hallados en cada estudiante al resolver las cuatro tareas algebraicas:

Tabla 7. *Análisis de las cuatro tareas de cada estudiante*

Estudiante	***Análisis de la solución de las 4 tareas***
1	TAREA 1: Declaró el término general, lenguaje simbólico natural, el cual se basó para decir que no siempre resulta un número natural, además de realizar correctamente las propiedades del conjunto numérico de los números racionales. Los rasgos de algebrizacion encontrados corresponden al nivel 2. TAREA 2: Se le asigna una variable "x" a la altura, notación simbólica (Elemento lingüístico del EOS). Mediante resolución de ecuaciones y generalizaciones se obtiene la altura final en el planteamiento del concepto. Los rasgos de algebrizacion encontrados son de nivel 2. TAREA 3: Realizó correctamente operaciones en números naturales, pero no realizó generalizaciones ni utilizó variables. Los rasgos de algebrizacion encontrados son de nivel 0. TAREA 4: Declaró letras y gráficos (Elementos lingüísticos del EOS) para ayudar a realizar el conteo respondiendo a la primera pregunta, pero no encontró el patrón para un caso general. Los rasgos de algebrizacion encontrados son de nivel 0. Por los análisis hechos, podemos decir que en el razonamiento del estudiante empleó operaciones y reconoció las definiciones de los números racionales, por lo cual predomina rasgos de nivel 1, pero también se muestra presencia de variables, símbolos y gráficos en la solución de dos tareas, por eso está en proceso de desarrollar rasgos de algebrización de nivel 2.
2	TAREA 1: Aparecen los objetos intensivos, esto quiere decir que los objetos de generalidad serán reconocidos de manera explícita en tareas estructurales. Además, se movilizan las propiedades de los números racionales. Los rasgos de algebrizacion encontrado corresponden al nivel 1. TAREA 2: No pudo realizar dicha tarea.

	TAREA 3: Realizó correctamente operaciones en números naturales y realizó soluciones para casos particulares. Los rasgos de algebrizacion encontrados son de nivel 0. TAREA 4: Empleó una fórmula para realizar el conteo, ya que al parecer recuerda que hay una relación que ha sido enseñado, pero no correctamente. Los rasgos de algebrizacion encontrados son de nivel 0. Por lo anterior, podemos decir que, en el razonamiento del estudiante, empleó correctamente las operaciones aritméticas, así que predomina el nivel 0. Además, realizó generalizaciones para valores cercanos y reconoció algunas propiedades de los números racionales, por lo que en el proceso puede desarrollar rasgos de algebrización de nivel 1.
3	TAREA 1: Intervienen objetos extensivos, manipuló los objetos particulares sin encontrar una regla que generalice, pero aplicó adecuadamente la operación. Los rasgos de algebrizacion encontrados corresponden al nivel 0. TAREA 2: Realizó un recuento para la base y se ayudó con gráficos (Elemento lingüístico del EOS), pero no realizó ningún argumento, ni mucho menos asignó variables. Los rasgos de algebrizacion encontrados son de nivel 0. TAREA 3: Realizó correctamente operaciones con números naturales y argumentó su respuesta. Los rasgos de algebrizacion encontrados son de nivel 1. TAREA 4: No pudo realizar dicha tarea. Por lo anterior, podemos decir que, en el razonamiento del estudiante, empleó algunas operaciones, por lo que predominan rasgos de algebrización de nivel 0. Además, en sus soluciones, se presentaron argumentaciones, lo cual indica que está en proceso de desarrollar rasgos de algebrización del nivel 1.
4	TAREA 1: Se generaliza a partir de casos particulares. Los rasgos de algebrizacion encontrados corresponden al nivel 1. TAREA 2: Se le asigna una variable "H" a la altura, notación simbólica y realiza un dibujo, notación gráfica (Elementos lingüísticos del EOS). El estudiante realizó la resolución de ecuaciones para resolver la tarea. Los rasgos de algebrizacion encontrados son de nivel 2. TAREA 3: Realizó correctamente operaciones con números naturales y argumentó su respuesta generalizando. Los rasgos de algebrizacion encontrados son de nivel 1. TAREA 4: No pudo realizar dicha tarea.

	Por todo lo anterior, podemos decir que, en el razonamiento del estudiante, empleó propiedades y operó correctamente, por lo que predomina rasgos de nivel 1. Por otro lado, también generalizó en una de las tareas utilizando variables, símbolos y representación gráfica en su resolución, por lo tanto, puede desarrollar rasgos de algebrización de nivel 2 y 3.
5	TAREA 1: Generalizó a partir de casos particulares y movilizó las propiedades de los números racionales. Los rasgos de algebrizacion encontrado corresponden al nivel 1. TAREA 2: Se le asignó una variable "x" a la altura, notación simbólica (Elemento lingüístico del EOS). El estudiante realizó la resolución de ecuaciones para resolver la tarea y generalizaciones (Intensivo). Finalmente, asignó a la altura una variable que depende de otra variable (Según el número de rectángulos), es decir, generalizó con un patrón para cualquier número de rectángulo. Los rasgos de algebrizacion encontrados son de nivel 3. TAREA 3: Realizó correctamente operaciones con números naturales y argumentó su respuesta. Los rasgos de algebrizacion encontrados son de nivel 1. TAREA 4: Realizó gráficos (Elemento lingüístico del EOS) para ayudar a realizar el conteo, pero no encontró el patrón correcto, pero si realizó generalizaciones. Los rasgos de algebrizacion encontrados son de nivel 1. Por todo lo anterior, podemos decir que, en el razonamiento del estudiante, empleó correctamente las propiedades, algunas generalizaciones (Intensivo), por lo que predominan rasgos de nivel de algebrización 1. Además, en una tarea utilizó variables, notación simbólica (Elemento lingüístico del EOS), resolvió ecuaciones y asignó una variable en función de otra. Por esto, puede desarrollar rasgos de algebrización de nivel 3.
6	TAREA 1: Manipuló los objetos particulares sin encontrar una regla que generalice. Los rasgos de algebrizacion encontrado corresponden al nivel 0. TAREA 2: El estudiante utilizó la fórmula del cálculo de área de un rectángulo, pero tuvo errores en las operaciones al resolver la ecuación, lo que produjo que no resolviera correctamente la tarea. Los rasgos de algebrizacion encontrados son de nivel 1. TAREA 3: Realizó correctamente operaciones con números naturales y argumentó su respuesta. Los rasgos de algebrizacion encontrados son de nivel 1. TAREA 4: Declaró letras (Elemento lingüístico del EOS) para ayudar a realizar el conteo, por lo que encontró el patrón correcto. Los rasgos de algebrizacion encontrados son de nivel 1.

	Por lo anterior, podemos decir que, en el razonamiento del estudiante, empleó correctamente operaciones con números naturales y argumentó su respuesta, por lo que predomina en sus soluciones rasgos de algebrización de nivel 1 y está en proceso de desarrollar rasgos de algebrización de nivel 2.
7	TAREA 1: Generalizó a partir de casos particulares. Los rasgos de algebrizacion encontrado corresponden al nivel 1. TAREA 2: No pudo realizar dicha tarea. TAREA 3: Realizó correctamente operaciones en números naturales y realizó soluciones para casos particulares. Los rasgos de algebrizacion encontrados son de nivel 0. TAREA 4: Realizó gráficos y variables (Elementos lingüísticos del EOS) para ayudar a realizar el conteo y utilizando casos particulares encuentra el patrón correcto y realizó generalizaciones utilizando variables. Los rasgos de algebrizacion encontrados son de nivel 2. Por lo anterior, podemos decir que, en el razonamiento del estudiante, empleó las propiedades y definiciones de los números racionales, por lo que predominó en sus soluciones rasgos de algebrización de nivel 1. Además, utilizó variables, símbolos y gráficos en su resolución, por lo que está en proceso de desarrollar rasgos de algebrización de nivel 2.
8	TAREA 1: Declaró el término general al finalizar como lenguaje simbólico-natural, ya que, a partir de casos particulares, realizó conclusiones en el que se basó para decir que no siempre resulta un número natural. Los rasgos de algebrizacion encontrados son de nivel 2. TAREA 2: No pudo realizar dicha tarea. TAREA 3: Realizó correctamente operaciones con números naturales y argumentó su respuesta. Los rasgos de algebrizacion encontrados son de nivel 1. TAREA 4: No pudo realizar dicha tarea. Por lo anterior, podemos decir que en la solución del estudiante predominan rasgos de algebrización de nivel 1, ya que empleó correctamente propiedades y operaciones, pero en una tarea utilizó variables, generalizó y realizó tratamientos, por lo que está en proceso de desarrollar rasgos de algebrización de nivel 2.
9	TAREA 1: Generalizó a partir de casos particulares. Los rasgos de algebrizacion encontrado corresponden al nivel 1. TAREA 2: No pudo realizar dicha tarea.

	TAREA 3: Realizó correctamente operaciones con números naturales y argumentó su respuesta (Símbolos). Utilizó variables, generalizó y colocó una variable en función de otra, resolvió utilizando propiedades. Los rasgos de algebrizacion encontrados son de nivel 3. TAREA 4: No pudo realizar dicha tarea. Por lo anterior, podemos decir que, en la solución del estudiante, predominan rasgos de algebrización de nivel 1, pero en una tarea empleó variables, generalizó y realizó tratamientos, por lo que está en proceso de desarrollar rasgos de algebrización de nivel 3.
10	TAREA 1: Realizó operaciones adecuadas de tipo aritmético y no encontró algo en común para finalizar, pero sí aplicó adecuadamente las propiedades en los números racionales (Denominador de la fracción distinto de cero) y números enteros (Adición de números enteros). Los rasgos de algebrizacion encontrado corresponden al nivel 1. TAREA 2: No pudo realizar dicha tarea. TAREA 3: Realizó correctamente operaciones en números naturales, pero no realizó generalizaciones ni utilizó variables. Los rasgos de algebrizacion encontrados son de nivel 0. TAREA 4: No pudo realizar dicha tarea. Por lo anterior, podemos decir que, en la solución del estudiante, se empleó correctamente las operaciones y generalizó para valores cercanos, por lo que está en proceso de desarrollar rasgos de algebrización de nivel 1, más no se puede determinar qué nivel predomina.
11	TAREA 1: Tuvo errores en las operaciones y, por ende, no llegó a encontrar algún término general. Los rasgos de algebrizacion encontrado corresponden al nivel 0. TAREA 2: El estudiante utilizó la fórmula del cálculo de área de un rectángulo que se ayudó a través de dibujos notación gráfica (Elementos lingüísticos del EOS) y lo obtuvo a partir de generalizaciones completando toda la tabla. Los rasgos de algebrizacion encontrados son de nivel 1. TAREA 3: Realizó correctamente operaciones con números naturales y argumentó su respuesta. Los rasgos de algebrizacion encontrados son de nivel 1. TAREA 4: No encontró la regularidad correcta, pero definió a una variable para encontrar una generalización, ya que le resultó familiar dicha tarea. Los rasgos de algebrizacion encontrados son de nivel 2. Por lo anterior, podemos decir que, en las soluciones del estudiante, no se encontraron regularidades, pero realizó correctamente las operaciones por lo que predominan rasgos

	de algebrización de nivel 1. Por otro lado, sí utilizó variables debido a algunas características, así que está en proceso de desarrollar rasgos de algebrización de nivel 2.
12	TAREA 1: No pudo realizar dicha tarea. TAREA 2: El estudiante utilizó una fórmula incorrecta para el cálculo de área de un rectángulo, por lo que también tuvo errores en los resultados y sus cálculos sólo son para casos particulares (Extensiva). Los rasgos de algebrizacion encontrado corresponden al nivel 0. TAREA 3: Realizó correctamente operaciones en números naturales, pero no realizó generalizaciones ni utilizó variables. Los rasgos de algebrizacion encontrados son de nivel 2. TAREA 4: Declaró letras para representar y realizar el conteo respondiendo a la primera pregunta, pero no llegó a encontrar el término general. Los rasgos de algebrizacion encontrados son de nivel 0. Por lo anterior, podemos decir que, en las soluciones del estudiante, en su mayoría, empleó operaciones aritméticas, además de no generalizar por lo que predomina rasgos de algebrización de nivel 0, pero en una de las tareas se observó que realizó procedimientos con una variable presente, por lo que está en proceso de desarrollar rasgos de algebrización de nivel 2.
13	TAREA 1: No pudo realizar dicha tarea. TAREA 2: El estudiante utilizó la fórmula del cálculo de área de un rectángulo y resolvió la tarea a partir de generalizaciones completando toda la tabla. Los rasgos de algebrizacion encontrado corresponden al nivel 0. TAREA 3: Realizó correctamente operaciones con números naturales y argumentó su respuesta utilizando generalizaciones (El resultado es el doble del número natural que se encuentra entre cada par de sumandos). Los rasgos de algebrizacion encontrados son de nivel 1. TAREA 4: No pudo realizar dicha tarea. Por lo anterior, podemos decir que, en el razonamiento del estudiante, empleó argumentaciones con el lenguaje natural y realizó generalizaciones, por lo que está en proceso de desarrollar rasgos de algebrización de nivel 1.
14	TAREA 1: Generalizó a partir de casos particulares y aplicó correctamente las propiedades. Los rasgos de algebrizacion encontrados corresponden al nivel 1. TAREA 2: No pudo realizar dicha tarea. TAREA 3: Realizó correctamente operaciones con números naturales y argumentó su respuesta utilizando generalizaciones.

	Los rasgos de algebrizacion encontrados son de nivel 1. TAREA 4: Declaró letras (Elemento lingüístico del EOS) para ayudar a realizar el conteo, por lo que encontró el patrón correcto (Dualidad extensivo - intensivo). Los rasgos de algebrizacion encontrados son de nivel 1. Por lo anterior, podemos decir que, en el razonamiento del estudiante, empleó correctamente las operaciones y generalizaciones, así que predominan rasgos de algebrización 1. Por otro lado, está en proceso de desarrollar rasgos de algebrización de nivel 2.
15	TAREA 1: Realizó correctamente las operaciones, pero no consideró más casos para generalizar y encontrar un patrón. Los rasgos de algebrizacion encontrado corresponden al nivel 0. TAREA 2: No pudo realizar dicha tarea. TAREA 3: Realizó correctamente operaciones con números naturales y argumentó su respuesta utilizando generalizaciones. Los rasgos de algebrizacion encontrados son de nivel 1. TAREA 4: No pudo realizar dicha tarea. Por lo anterior, podemos decir que, en el razonamiento del estudiante, empleó correctamente las operaciones y argumentó todas sus soluciones, por lo que está en proceso de desarrollar rasgos de algebrización de nivel 1.

Se debe tener claro que los objetivos de cada tarea son diferentes, es por ello que no podemos obtener un promedio para saber en qué nivel de algebrización se encuentra cada estudiante, pero sí podemos observar el rasgo de algebrización que predomina por estudiante para la solución de cada tarea o también podemos identificar algunos rasgos que nos manifiestan que se encuentra en proceso de avanzar a un nivel mayor.

3.4 EVALUACIÓN

Valoramos las respuestas de los estudiantes, ya que según lo que se esperaba era que alcanzaran rasgos del nivel 2 o 3 de algebrizacion, según los documentos, pero se analizó de las tareas propuestas que los rasgos de algebrización el predominante fue el nivel 1.

Cuatro de quince estudiantes resolvieron todas las tareas, puesto que fueron matriculados desde quinto año de primaria en la misma institución particular, cuyos contenidos fueron enseñados de forma aritmética y algebraica.

Los once estudiantes restantes eran nuevos en dicha institución educativa, por lo que tenían procedimientos no algebraicos, sus cálculos eran erróneos y no tenían noción de algunos conceptos, como era el caso del cálculo de área de un rectángulo.

Por otro lado, mencionamos errores que se evidenciaron en esta investigación:

- Interpretar el lenguaje literal al lenguaje simbólico, es decir, que algunos estudiantes no pudieron plantear la tarea por falta de comprensión del texto.
- Poco uso de variables, ya que les resultó difícil encontrar una regularidad que englobe un caso general. Con respecto a los rasgos algebraicos, rescatamos que la utilización de procedimientos aritméticos llevó a muchos estudiantes encontrar una regla general, por lo que vieron conveniente utilizar variables (Rasgo característico del Álgebra).

Asimismo, rescatamos la intervención de los docentes, ya que ninguno de los profesores les dijo qué hacer en alguna tarea, sino que se les sugirió con indicaciones las cuales fueron leídas antes de la evaluación con el fin que el estudiante resolviera por sí solo cada tarea.

CONSIDERACIONES FINALES

La motivación inicial para el desarrollo de esta investigación se basó en los resultados de trabajos que reportaban errores en las soluciones de los estudiantes a nivel secundario al resolver tareas estructurales en los números racionales, tales como el de Morales (2014).

En Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012) y en Kieran (1992) se declara que los estudiantes, por lo general, al resolver tareas estructurales tienen dificultades en el tránsito de la Aritmética al Álgebra, ya que en la primaria sólo se desarrollaron procedimientos aritméticos.

Por otro lado, en relación a los libros de textos del V ciclo de la Educación Básica regular, Julian (2017) menciona que el tipo de tareas sobre números racionales no presentan situaciones basadas en conjeturas, justificaciones, contexto de medida entre otros, donde el estudiante no tiene la necesidad de realizar procedimientos algebraicos. Por ello, esta investigación analizó las soluciones de los estudiantes de primer grado de secundaria después de aplicar cuatro tareas estructurales cuyo objetivo es que realizaran conjeturas y que tengan la necesidad de utilizar variables, manipular operaciones y resolver tareas estructurales de números racionales.

Para esta investigación, de corte cualitativo, se diseñó una secuencia de actividades, con su respectivo análisis previo en base al Enfoque Ontosemiótico (EOS) para luego analizar las respuestas de los estudiantes con base en este enfoque.

Respecto a la secuencia de actividades, se empezó con una prueba piloto aplicada a cuatro estudiantes de sexto grado de Educación Primaria de la misma institución particular donde realizamos la experimentación, cuyos contenidos en su plan de trabajo son los números racionales, razonamiento inductivo, problemas de ecuaciones, entre otros.

Además, se valoró la riqueza de algunos aspectos del marco teórico EOS que empleamos en esta investigación como son los elementos del marco, que se utilizó para explicar las soluciones matemáticas realizadas por los estudiantes que estuvo inmersa en la práctica matemática. Por otro lado, consideramos a los objetos primarios como herramienta teórica que fue utilizado para el análisis de las cuatro tareas.

De los resultados de la prueba piloto, se encontraron ciertos errores de comprensión al traducir el lenguaje literal al simbólico, además que dos de los cuatro estudiantes fueron capaces de encontrar regularidades y que solo uno resolvió todas las tareas.

Luego de analizar los resultados de la prueba piloto, se realizaron modificaciones que facilitaron la comprensión de las cuatro tareas para realizar la experimentación y se valoró las respuestas de los estudiantes de primer grado de educación secundaria, ya que se esperaba alcanzar al nivel 2 o 3 de algebrización.

Si bien es cierto, cuatro de quince estudiantes resolvieron todas las tareas, esto fue debido a que tenían los conceptos necesarios para resolver las tareas que se les propuso, ya que en esta institución particular la enseñanza matemática de quinto y sexto grado de primaria tienen contenidos tanto aritméticos como algebraicos y estos estudiantes ya estaban en dicha institución años anteriores.

Por otro lado, once estudiantes eran nuevos en dicha institución, así que no tenían procedimientos algebraicos, realizaban con errores los cálculos y no recordaban algunos de los conceptos, como era el caso del cálculo de área de un rectángulo.

A todo esto, señalamos que la metodología utilizada fue útil para nuestro trabajo, ya que tuvo un plan de desarrollo que se inició a partir de una prueba piloto y que luego fue modificada y realizada con los estudiantes de primer grado de secundaria para analizar las soluciones de los estudiantes y así obtener resultados sobre los rasgos de algebrización.

Por otro lado, las investigaciones que hemos mencionado en los antecedentes han resaltado las dificultades de los maestros para abordar la solución de tareas algebraicas, así como para promover la enseñanza del Álgebra y para remediar las dificultades de aprendizaje de los estudiantes. Es por esto que consideramos promover el Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) en los estudiantes, para que reconozcan que algunas prácticas aritméticas puedan ser admitidas como prácticas algebraicas, por ello que reconocemos los niveles de algebrización en las soluciones de los estudiantes al resolver una tarea estructural.

Podemos afirmar que hemos alcanzado los objetivos planteados en la investigación. En seguida, explicamos cada uno de ellos:

Identificar los significados institucionales y esperados de las soluciones de las tareas estructurales de números racionales en los estudiantes

Este objetivo fue alcanzado porque, de acuerdo al análisis epistémico de Julian (2017), en el que identificó que las tareas estructurales implementadas eran situaciones que requieren de conjetura, validación y medida, al realizar una prueba piloto se analizó las soluciones, de lo que se rescató significados esperados por los estudiantes fueran desde las definiciones, procedimientos, argumentos y lenguajes (A través de símbolos, gráficos o alguna expresión algebraica).

En relación a nuestra investigación, en la actividad en clase (Cuatro tareas) también se consideró el diseño instruccional teniendo en cuenta los diferentes aspectos que ésta propone: Se consideraron indicaciones al estudiante de primer grado de educación secundaria y los contenidos, según la programación anual del colegio particular. Con ello, se logró identificar los significados institucionales y esperados de las soluciones de las tareas estructurales de números racionales en los estudiantes.

Reconocer rasgos asociados a los niveles de algebrización en la resolución de las tareas estructurales de números racionales por parte de los estudiantes de primer grado de secundaria.

Luego de obtener las soluciones de los estudiantes sobre las cuatro tareas, se reconocieron los rasgos asociados a los niveles de algebrización.

Ahora, según las características que presenten, se debe tener claro que los objetivos de cada tarea fueron diferentes. Es por eso que no podemos sacar un promedio para saber qué nivel de algebrización tiene cada estudiante, pero sí podemos reconocer rasgos de algebrización para cada tarea.

Por ejemplo, un estudiante generalizó a partir de casos particulares, movilizó propiedades, realizó operaciones correctamente y argumentó sus respuestas, por lo que consolida el nivel 1 de algebrización, pero tiene rasgos de algebrizacion del nivel 3, ya que propuso variables, movilizó dichas variables y encontró dependencia de otras para calcular la altura de una región rectangular.

Al lograr los objetivos específicos de investigación, podemos afirmar que se logró concretar el objetivo general de investigación:

Analizar los niveles de algebrización en la resolución de tareas estructurales de números racionales en estudiantes de primer año de secundaria.

Para el análisis de los niveles de algebrización, se consideró criterios que fueron organizados en una tabla para considerar las características e identificar los rasgos de algebrización en cada tarea.

Todo lo anterior, permitió que podamos responder a la pregunta que nos muestra esta investigación:

¿Qué nivel de algebrización predominante se identifican en la resolución de tareas estructurales de números racionales en estudiantes de primer año de secundaria?

El nivel de algebrización predominante en las cuatro tareas fue el nivel 1. Además, en cada solución de cada tarea, se encontró que predomina el lenguaje verbal, simbólico y en el caso de medida (Gráfico), realizando correctamente las propiedades y operaciones fundamentales de los números racionales.

Por otro lado, podemos resaltar que los argumentos emplean las dualidades extensivos- intensivos y podemos rescatar que la mayoría de estudiantes, a partir de este tipo de tareas, recién muestran argumentos para justificar sus soluciones.

También hay que resaltar que algunos estudiantes están en proceso de pasar a un siguiente nivel, por eso mencionamos algunas reflexiones:

A partir de lo hallado, ¿Qué actividades deberían promoverse en los estudiantes?

Luego de analizar las soluciones de cada estudiante para cada tarea y los resultados por estudiante, se puede considerar una próxima implementación teniendo en cuenta que hayan adquirido los contenidos que sean suficientes para responder las tareas, ya que por la experimentación, en este trabajo, algunos de los estudiantes no recordaron el concepto de área de un rectángulo.

Introducir fichas de trabajo con tareas estructurales que generen el Razonamiento Algebraico Elemental (RAE), donde los estudiantes realicen conjeturas y validaciones, además considerar las distintas estrategias de resolución para abordar una tarea y así reforzar el Pensamiento Matemático Flexible (PMF).

Además, respecto a la propuesta de una tarea estructural de números racionales, se espera que se produzcan más tipos de tareas que requieran de conjeturas, donde las generalizaciones lleven a realizar representaciones simbólicas y obtener procedimientos algebraicos.

Finalmente, tenemos que mencionar que en el anexo adjuntamos una propuesta de una tarea estructural de números racionales para estudiantes de secundaria, con el objetivo que realicen conjeturas y validaciones a partir de casos particulares y así el estudiante necesite emplear variables que les ayuden a representar un término general.

SUGERENCIAS PARA INVESTIGACIONES A FUTURO

En nuestra investigación, hemos analizado los rasgos algebraicos que se presentan en los estudiantes de primer grado de secundaria en sus soluciones de las tareas estructurales (Relación de equivalencia, propiedades de las operaciones y ecuaciones)

Es por eso que ahora proponemos:

- Realizar propuestas de tareas de este tipo que generen Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) en otros niveles de educación secundaria del Perú, como para el concepto de funciones a través de patrones o problemas de modelización.
- Realizar tareas estructurales de números racionales con un contexto o situación problemática para que el estudiante le resulte interesante aprender los contenidos de manera que le resulte útil a la vida cotidiana.
- Que se implementen más situaciones que involucren contenidos algebraicos y así se obtenga mejores resultados en la secundaria y en nivel superior.

REFERENCIAS

Aké, L. (2010). *Una aproximación al Razonamiento Algebraico Elemental desde el marco del Enfoque Ontosemiótico Del Conocimiento Matemático.* Tesis de Maestría, Universidad de Granada. Obtenido de http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Lilia_Ake_TFM_2010.pdf

Aké, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación*. España: Tesis doctoral. Universidad de Granada, Granada.

Aké, L., Castro, W., y Godino, J. (2011). *Conocimiento Didáctico -Matemático sobre el Razonamiento Algebraico Elemental: Un Estudio Exploratorio.* Universidad de los Andes, Colombia. Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/1808/1/379_Ake2011Conocimiento_SEIEM13.pdf

Aké, L., Castro, W., y Godino, J. (2015). *Niveles del Razonamiento Algebraico elemental en la actividad matemática de maestros en formación: Análisis de una tarea estructural. Acta latinoamericana de matemática educativa.* Obtenido de Acta latinoamericana de matemática educativa.

Álvarez, V. (2016). *Análisis de la organización matemática de los números racionales en un texto de primero de secundaria.* Obtenido de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/8071

Angles, S. (2015). *El aprendizaje de la adición y sustracción de fracciones en estudiantes de primer grado de educación secundaria basado en la teoría de situaciones didácticas.* Tesis, Pontificia Universidad Católica del Perú, Escuela de posgrado, Lima. Obtenido de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/6748

Ávila, R., Ibarra, S., y Grijalva, A. (2010) *El contexto y el significado de los objetos matemáticos*. Relime 13(4-II): 337-354

Borba, M., y Araújo, J. (2004). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autentica Editora LTDA.

Butto, C., y Rojano, T. (2010). Pensamiento Algebraico Temprano: El papel del entorno Logo. *Scielo, 22*(3). Obtenido de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262010000300004

Callejo, M., y Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la Resolución de Problemas de Identificación de Patrones Lineales en Estudiantes de Educación Secundaria. *28*(48), 64-88. Obtenido de http://www.scielo.br/pdf/bolema/v28n48/04.pdf

Carraher, D., Schliemann, A., Brizuela, B., y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87-115. doi:10.2307/30034843

Castellanos, M., y Obando, J. (2009). *Errores y dificultades en procesos de representación El caos de la generalización y el razonamiento algebraico.* Obtenido de 10° Encuentro colombiano de matemática educativa: http://funes.uniandes.edu.co/710/1/errores.pdf

Castro, W. (2014). Razonamiento algebraico elemental: propuestas para el aula. Obtenido de file:///C:/Users/Johana%20garc/Downloads/7696-36120-3-PB%20(2).pdf

Demetriou, A. (2004). Mind intelligence and development: A cognitive, differential, and developmental theory of intelligence. In A. Demetriou & A. Raftopoulos (Eds.), *Developmental change: Theories, models and measurement* (pp. 21–73). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Universidad del Valle, Colombia.

Escudero, P (2017). *Identificación De Conocimientos Didáctico-Matemáticos, En La Faceta Epistémica, Del Profesor De Educación Secundaria, Sobre Funciones Lineales Y Cuadráticas.* Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú, Escuela de Posgrado. Obtenido de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/123456789/8818

Fazio, L., y Siegler, R. (2011). *Enseñanza de las fracciones.* Quito, Ecuador: Academia Internacional de Educación. Obtenido de http://unesdoc.unesco.org/images/0021/002127/212781S.pdf

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria*. Tesis doctoral. Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Vigo. Recuperado de www.atd-tad.org

Gairín, J. (1998). *Sistemas de representación de números racionales positivos un estudio con maestros en formación.* Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza, Departamento de Matemáticas, Zaragoza. Obtenido de http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/ver_detalles/6671/

Gaita, C., y Wilhelmi, M. (2017). *Identificación de razonamiento algebraico elemental en tareas de recuento con patrones.* Obtenido de Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/gaita_wilhelmi.pdf

García, J. (2010). *Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer ingreso en nivel licenciatura.* Tesis de maestría, Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, Granada. Obtenido de http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Jose_Garcia.pdf

García, J., y Martinón, A. (1998). Interacción y construcción significativa del conocimiento: notas teóricas y una práctica educativa. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas.*

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques 22* (2/3), 237–284

Godino, J. (2011). *Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.* XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil. Obtenido de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf

Godino, J. (2013). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. *Revista de didáctica de la Estadística, 2,* 1-15.

Godino, J. (2014). *Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.* Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

Godino, J., Aké, L., Contreras, A., Díaz, C., Estepa, A., Blanco, T. F., Lacasta, E., Lasa, A., Neto, T., Oliveras, M. L. y Wilhelmi, M. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico - matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(1), 127-150. Obtenido de: https://ria.ua.pt/bitstream/10773/13467/1/1468-7956-1-PB.pdf

Godino, J., Aké, L., Gonzato, M., y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32* (1), 199-219. Obtenido de http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/287515/375668

Godino, J., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14 (3), 325-35.*

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2009) Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Universidad de Granada; Universidad de Barcelona. Obtenido de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2012). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. En *Perspectivas en la Didáctica de las Matemáticas* (págs. 47-78). Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Obtenido de http://www.ugr.es/local/jgodino

Godino, J., Castro, W., Aké, L., y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental. *Boletín de Educación Matemática*, *26*(42 B), 483-511. Obtenido de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291223574005

Gonzáles, D. (2015). *Errores comunes en el aprendizaje de las fracciones: Un estudio con alumnos de 12 y 13 años en Cantabria.* Universidad de Cantabria, Faculta de Educación, Cantabria. Obtenido de https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/6903/GonzalezdelOlmoDario.pdf

Harel, G., y Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics,* 38-42.

Hernández, S., Fernández, C., y Baptista, L. (1991). Metodología de la investigación. McGrawHill, México, Pág. 9-20. Obtenido de https://www.onsc.gub.uy/enap/images/stories/MATERIAL_DE_CURSOS/Hernndez_Sampieri_et_alli_Problema_objetivos_justificacion_cap.2.pdf

Julian, E. (2017). *Configuración Epistémica e Identificación de niveles de algebrización en tareas estructurales de los textos oficiales del V Ciclo de Educación Primaria.* Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú, Escuela de Posgrado. Obtenido de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/9282

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity for an engine of mathematical power by algebrafying‖ the K-12 curriculum.* Obtenido de National Center of Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science: https://eric.ed.gov/?id=ED441664

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (390-419). New York: Macmillan

Konic, P. (2011). *Evaluación de conocimientos de futuros profesores para la enseñanza de los numeros decimales.* Tesis doctoral, Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, Barcelona. Obtenido de http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Patricia_Konic_tesis.pdf

Krems, J. (1995). Cognitive flexibility and complex problem solving. In P. A. Frensch & J. Funke (Eds.), *Complex problem solving: The European perspective* (pp. 201–218). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

León, G. (2011). *Unidad didáctica: Fracciones.* Trabajo fin de máster, Universidad de la Granada, Especialidad: Matemáticas. Obtenido de http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Gloria_Leon.pdf

Martínez, M. (2006). *A Investigación Cualitativa* (Síntesis Conceptual). Obtenido de http://sisbib.unmsm.edu.pe/bvrevistas/investigacion_psicologia/v09_n1/pdf/a09v9n1.pdf

Mason, J. (1999). *Learning and doing mathematics.* (2nd revised edition). York, UK: QED

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos curriculares-Área Matemáticas. Bogotá.* Obtenido de http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/ article-89869.html

Ministerio de Educación Nacional (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica.* Lima. Obtenido de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2016.pdf

Ministerio de Educación Nacional (2016). *Programa curricular de educación secundaria en Perú.* Educación básica regular. Obtenido de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-curricular-educacion-secundaria.pdf

Morales, R. (2014). *Dificultades y errores en la solución de problemas con números racionales.* Tesis , Universidad Autónoma de Manizales, Departamento de Educación. Obtenido de http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/bitstream/11182/865/1/Informe%20final%20Raul%20Morales%20con%20toda%20la%20bibliografia%20diembre%20toda%20completa.pdf

Perú. Ministerio de Educación (MINEDU) (2017). Obtenido, de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2017.pdf

Radatz, H. (1979): Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1979, Vol 10 (3), pp.163-172.

Ramirez, M. (2010). *Interpretaciones del Signo Igual.* Un Estudio de Libros de Texto.

Rico, L. (1995) Didáctica de la matemática. Licenciatura de Matemáticas. 5° curso. *Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas. Obtenido de* http://funes.uniandes.edu.co/486/1/RicoL95-100.PDF

Rojas, P., y Vergel, R. (2013). Procesos de Generalización y Pensamiento Algebraico. *Revista Científica*, 760-766. Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/2726/1/Procesos_de_Generalizaci%C3%B3n_y_Pensamiento_Algebraico.pdf

Pino-Fan, L., y Godino, J. (2014). Perspectiva ampliada del conocimiento-didáctico matemático del profesor. Manuscrito enviado para su publicación. Obtenido de https://db.tt/VIiqGqR7

Skemp, R. (1986). The Psychology of Learning Mathematics, Penguin, Harmondsworth

Taylor, S. y Bogdan, R. (2000). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Barcelona: Paidós. Obtenido de https://asodea.files.wordpress.com/2009/09/taylor-s-j-bogdan-r-metodología-cualitativa.pdf

Wilhelmi, M., Lacasta, E., y Godino, J. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 27 (1), 77-120.

Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical investigations.* Oxford, USA: Basil Blackwell.

ANEXOS

ACTIVIDAD EN CLASE

<u>Indicaciones:</u>

- Tiempo de duración 50 minutos.
- No se debe usar materiales de consulta como cuadernos, libros, celulares y las tareas son personales.
- Mostrar todos sus procedimientos, ya que serán tomados en cuenta para la calificación escolar.
- Resolver el procedimiento en todo el espacio de la hoja. No se puede usar hojas adicionales.

Tarea 1

Si al numerador de la fracción $\frac{19}{5}$ se suma un número natural y se resta el mismo número al denominador, por ejemplo, si el número natural es 1 ¿Qué sucede?, o si el número natural es 2 ¿Qué sucede?, y si pruebas con otros números naturales ¿Qué resulta?

A partir de esto, ¿Será cierto que $\frac{19+n}{5-n}$ siempre es número natural?

Tarea 2

En la siguiente tabla, se muestran tres columnas. La primera columna corresponde a la longitud de la base del rectángulo; en la segunda columna su altura y además se observa que el área es siempre igual a 11 u^2. Ahora, a partir de los datos que están en la tabla, completa las tres primeras alturas del rectángulo en la segunda columna.

Base	Altura	Área
7 u	---------	11 u^2
$\frac{7}{2}$ u	---------	11 u^2
$\frac{7}{3}$ u	---------	11 u^2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		11 u^2

Luego, a partir de los primeros resultados, calcula la altura del rectángulo cuando la base sea igual a: $\frac{7}{45}$ unidades.

Tarea 3:

Realice las siguientes operaciones:

$7 + 9$

$15 + 17$

$21 + 23$

$105 + 107$

$1575 + 1577$

A partir de los cálculos realizados y al observar la relación que existe de cada par de números, ¿Encuentra alguna regularidad? De ser así, elabore una hipótesis y justifique.

Tarea 4

Por inicio de clases, un determinado colegio realizará un torneo de Tenis (uno contra uno) y se han inscrito tres estudiantes. ¿Cuál será el número total de partidos que se realizarán en el torneo si cada estudiante juega una vez con cada uno de los estudiantes inscritos?

Ahora, luego de responder la primera pregunta, en general, si se inscriben una determinada cantidad de estudiantes ¿Cuántos partidos se tendrá que jugar en total?

PRESENTAMOS LA SOLUCIÓN IDÓNEA DE CADA TAREA REALIZADA EN LA ACTIVIDAD DE CLASE

Tarea 1:

Deberá probar casos particulares realizando operaciones. Por ejemplo:

$\frac{19+1}{5-1} = \frac{20}{4} = 5$ es un número natural

$\frac{19+2}{5-2} = \frac{21}{3} = 7$ es un número natural

$\frac{19+3}{5-3} = \frac{22}{2} = 11$ es un número natural

Luego probará con el número 5 resultando $\frac{19+5}{5-5} = \frac{24}{0}$ la cual resulta no definido y al reemplazar un número mayor a 6 se obtiene:

$\frac{19+6}{5-6} = \frac{25}{-1} = -25$, justificando que el resultado es un número entero.

Así concluirá que sólo $\frac{19+n}{5-n}$ será un número natural cuando $n = 1; 2; 3; 4$ o declarar que como "n" es un número natural entonces el numerador siempre será positivo, así que como lo que piden que el resultado sea natural, entonces el denominador debe ser mayor que 0, con denominador distinto de 0 ya que sería indeterminado.

$5 - n > 0$, donde n es un número natural

$(5 + -5) - \mathrm{n} > 0 + -5$ …………………… sumamos $"-5"$ a cada miembro

$-n > -5$ ………………………………….. multiplicamos por -1 a cada miembro

$5 > n$

Así también concluirá que "n" toma el valor del 1 al 4.

Tarea 2:

Con respecto a la tarea 2:

- Un primer estudiante puede completar el cuadro mediante generalizaciones, sin explicar cada paso que utilizó para encontrar la base de cada caso:

Base	Altura	Área
$7\,u$	---------	11 u^2
$\frac{7}{2}$ u	---------	11 u^2
$\frac{7}{3}$ u	---------	11 u^2
⋮	⋮	⋮
		11 u^2

- Un segundo estudiante puede encontrar las bases del rectángulo al completar las 7 u de la primera base como: $7 = \frac{7}{1}$ y así indicar la siguiente de secuencia $\frac{7}{1}; \frac{7}{2}; \frac{7}{3}; \frac{7}{4}; \cdots \frac{7}{n}$ donde n es la ubicación del rectángulo de la secuencia.

  En este caso, el estudiante todavía no calcula las alturas en la tabla, por lo que todavía no presenta la respuesta de la tarea.

- Un tercer alumno puede utilizar variables para representar a cada altura y luego generalizar a partir de tres casos:

  - $7\,x_1 = 11$…………………………..… "x_1" es el valor de la primera altura.

    $7\left(\frac{1}{7}\right)x_1 = 11\left(\frac{1}{7}\right)$……………………. multiplica a cada miembro por $\left(\frac{1}{7}\right)$ por propiedad.

    Así, obtiene el valor de $x_1 = \frac{11}{7}$.

  - $\frac{7}{2}\,x_2 = 11$…………………………..… "x_2" es el valor de la segunda altura.

    $\frac{7}{2}\left(\frac{2}{7}\right)\,x_2 = 11\left(\frac{2}{7}\right)$……………………. multiplica a cada miembro por $\left(\frac{2}{7}\right)$.

    Así, obtiene el valor de $x_2 = \frac{22}{7}$.

  - $\frac{7}{3}\,x_3 = 11$…………………………..… "x_3" es el valor de la tercera altura.

    $\frac{7}{3}\left(\frac{3}{7}\right)\,x_3 = 11\left(\frac{3}{7}\right)$……………………. multiplica a cada miembro por$\left(\frac{3}{7}\right)$.

    Así, obtiene el valor de $x_3 = \frac{33}{7}$.

Luego, observa la siguiente regularidad al completar la tabla:

Base	Altura	Área
$\frac{7}{1}\,u$	$\frac{11}{7}\,u$	$11\,u^2$
$\frac{7}{2}\,u$	$\frac{22}{7}\,u$	$11\,u^2$
$\frac{7}{3}\,u$	$\frac{33}{7}\,u$	$11\,u^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\frac{7}{45}\ u$ $11\ u^2$

De los valores encontrados de las 3 primeras alturas:

$x_1 = \frac{11}{7}\ u$ .... $\frac{11\times 1}{7}$

$x_2 = \frac{22}{7}\ u$ .... $\frac{11\times 2}{7}$

$x_3 = \frac{33}{7}\ u$ .... $\frac{11\times 3}{7}$

Después, generaliza la altura pedida base a los tres casos particulares con la regularidad que encuentra:

$x_{45} = \frac{11\times 45}{7}\ u$

$x_{45} = \frac{495}{7}\ u$

Por lo que, finalmente, menciona el valor de la altura que piden en dicha tarea.

Tarea 3:

Los estudiantes deben considerar casos particulares y notar la diferencia de 2 entre ambos sumando y que, de cada suma obtenida, siempre será un número par y lo pueden representar con variables al momento de generalizar.

De esta forma: $\mathrm{n} + (\mathrm{n} + 2)$ donde n es un número natural. Asimismo, realizar tratamientos.

$(n + n) + 2$ ....Por propiedad asociativa

Se obtiene: $2n + 2$

Luego, el estudiante factoriza, por lo que obtiene: $2n + 2 = 2\ (n + 1)$

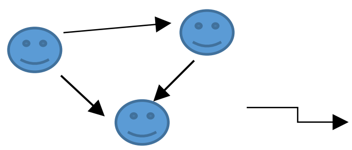
El estudiante reconoce que "$n + 1$" es el valor intermedio al valor de cada sumando y que luego es multiplicado por 2.

Así encuentra que el patrón es el doble del valor intermedio a ambos sumandos.

Tarea 4:

El estudiante puede realizar diagramas y encontrar la forma para encontrar el número de partidas. Como dice la actividad para tres estudiantes, le resultan tres partidas.

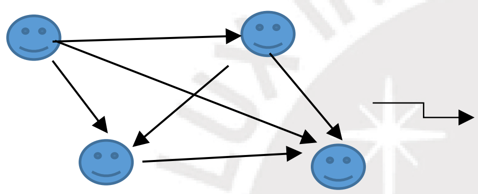
3 estudiantes



$$3\,partidas = \frac{2x3}{2}$$

Luego puede dar otro ejemplo:

4 estudiantes



$$6\,partidas = \frac{3x4}{2}$$

Por lo tanto, concluir que el número de partidas es la mitad del producto de dos números consecutivos.

Sea "n" el número de estudiantes.

El número de partidas será: $\frac{(n-1)n}{2}$

- Otro estudiante puede realizar una tabla en la que represente el número de estudiantes con el uso de variables para el conjunto de partidos obtenidos, donde (E_1, E_2, E_3,...) representa al orden según el número de estudiantes y por último encontrar el número de partidos obtenidos.

Número de estudiantes	Conjunto de los partidos obtenidos	Representación de los partidos obtenidos	Número total de partidos
3	{E_1 E_2, E_1 E_3, E_2 E_3}	E_1= 2 partidos E_2= 1 partido	2 + 1 = 3 partidos
4	{E_1 E_2, E_1 E_3, E_1 E_4, E_2 E_3, E_2 E_4, E_3 E_4}	E_1= 3 partidos	

		$E_{2=}$ 2 partidos $E_{3=}$ 1 partido	3+ 2+ 1= 6 partidos
5	{E_1 E_2, E_1 E_3, E_1 E_4, E_1 E_5, E_2 E_3, E_2 E_4, E_2 E_5, E_3 E_4, E_3 E_5, E_4 E_5}	$E_{1=}$ 4 partidos $E_{2=}$ 3 partidos $E_{3=}$ 2 partidos $E_{4=}$ 1 partido	4+3+2+1=10 partidos
⋮	⋮	⋮	
20	{E_1 E_2, E_1 E_3, E_1 E_4, …, E_{18} E_{20}, E_{19} E_{20}}	$E_{1=}$ 19 partidos $E_{2=}$ 18 partidos ⋮ $E_{19=}$ 1 partido	$19 + 18 + 17 + \cdots + 1 =$ 190 partidos

Luego, a partir de la tabla, este estudiante puede encontrar el número de partidos para tres casos particulares generalizando para valores cercanos. Así como para 20 estudiantes $19 + 18 + 17 + \cdots + 1 = 190$, llegando a la conclusión que, para un determinado número de estudiantes, el número de partidos se obtiene sumando los números naturales desde 1 hasta un número anterior al número de estudiantes que piden.

Asimismo, puede generalizar para un número "n" de estudiantes.

$1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1)$

Donde puede indicar que aplicará la suma de los números naturales para encontrar el número de partidas para una cantidad determinada de estudiantes:

$$1 + 2 + 3 + \cdots (n - 1) = \frac{(n - 1)}{2} \times n$$

Es así que, a partir de estas cuatro tareas, podemos encontrar niveles de algebrización del 1, 2 y 3, pero el objetivo, a través de esta experimentación con nuestros estudiantes, será encontrar el nivel predominante del total de la muestra, resaltando que se espera los niveles 2 y 3.

PROPUESTA DE UNA TAREA QUE FOMENTA EL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL (RAE)

De acuerdo a los aspectos algebraicos encontrados en la actividad de clase con los estudiantes de primer grado de secundaria, presentamos una tarea estructural de números racionales para seguir aportando con este tipo de situaciones que involucren conjeturas y validaciones.

Realice las siguientes operaciones:

- $\frac{1}{1x2} + \frac{1}{2x3}$
- $\frac{1}{1x2} + \frac{1}{2x3} + \frac{1}{3x4}$
- $\frac{1}{1x2} + \frac{1}{2x3} + \frac{1}{3x4} + \frac{1}{4x5}$

A partir de los cálculos realizados, encuentras alguna relación en los tres casos. ¿Encuentra alguna regularidad? Argumente su solución, luego responda ¿Cuál sería el resultado de operar las 10 primeras inversas de 2 números consecutivos?

$\frac{1}{1x2} + \frac{1}{2x3} + \frac{1}{3x4} + \cdots + \frac{1}{10x11}$

Finalmente:

¿Cuál sería el resultado de operar las "n" primeras inversas de dos números consecutivos?

$$\frac{1}{1x2} + \frac{1}{2x3} + \frac{1}{3x4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

SOLUCIÓN ESPERADA:

En esta tarea, se espera que el estudiante realice operaciones con los números racionales de esta manera:

$$\frac{1}{1x2} + \frac{1}{2x3}$$

$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ ……………………………...desdoblamiento de fracciones

$\frac{1}{1} + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) - \frac{1}{3}$………………………… propiedad asociativa

$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ ………………………………..operación de fracciones

$\frac{1}{1x2} + \frac{1}{2x3} = \frac{2}{3}$……………………….el resultado son los números que se encuentran en el denominador de la última fracción.

Puede aplicar la misma estrategia para tres fracciones:

$$\frac{1}{1x2} + \frac{1}{2x3} + \frac{1}{3x4}$$

Por lo que obtiene: $\frac{3}{4}$ y el resultado también son los números que se encuentran en el denominador de la última fracción.

Así reconoce, para casos cercanos, cómo es para las cuatro primeras fracciones:

$$\frac{1}{1x2} + \frac{1}{2x3} + \frac{1}{3x4} + \frac{1}{4x5} = \frac{4}{5}$$

También las 10 primeras fracciones:

$$\frac{1}{1x2} + \frac{1}{2x3} + \frac{1}{3x4} + \cdots + \frac{1}{10x11} = \frac{10}{11}$$

Finalmente, generaliza para un número de fracciones cualquiera, denotando de esta manera la suma de las inversas de números consecutivos.

$$\frac{1}{1x2} + \frac{1}{2x3} + \frac{1}{3x4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{(n+1)}$$

FACETA EPISTÉMICA TOMADA DE JULIAN (2017)

Julian (2017, p 117) desarrolló situaciones de conjetura – validación, de lo que rescata los objetos matemáticos primarios para representar las expresiones numéricas mediante esquemas, realizar procedimientos, utilizar propiedades y argumentar regularidades.

Esta faceta será modificada, de acuerdo a nuestra situación, con resultados que puedan realizar los estudiantes en base a nuestra prueba piloto para configurar la faceta cognitiva para analizar los rasgos de algebrización presentes en cada una de las tareas.

Situaciones problemas

Tarea 1: Conjetura y validación

Tarea 2: Contexto de medida

Tarea 3: Conjetura y validación

Tarea 4: Conjetura y validación

Lenguaje

Verbal Expresión numérica, adición, sustracción, multiplicación, división, signos de agrupación, propiedades de las operaciones, conmutativa, asociativa, distributiva, fracciones equivalentes, numerador, denominador, conjetura, cardinal de un conjunto, inverso multiplicativo, elemento neutro.

Esquemas

Cantidad de estudiantes	*Numero de juego*	
1= {a}	*0*	*0*
2= {a; b}	*Ab*	*1*
3= {a; b; c}	*ab + ac + bc*	*2 + 1*
4= {a; b; c; d}	*ab + ac + ad +bc +bd + cd*	*3 + 2 +1*
5= {a; b; c; d; e}	*ab + ac + ad +ae +bc + bd+ be + cd + ce + de*	*4 + 3 + 2 +1*

Simbólico literal $+;\ -;\times;\div;\rightarrow, n\times(n+1);\ 2{,}5\ \pm\ 3{,}6\ =\ 6{,}1;\ ?\div\frac{1}{2}\ =\ 8$

$$\frac{b}{2}, a\times b =, \frac{1}{3} = 0{,}333\cdots\left(\frac{45}{7}\times 11\right)$$

Definiciones

- Orden entre fracciones, decimales y naturales.
- Adición, sustracción, multiplicación y división.
- Clases de equivalencia

Procedimientos

Determinación de una heurística

Reglas generales que consiguen convertir la tarea en un contexto sencillo.

- Uso del paréntesis y jerarquía de las operaciones.
- Diversidad de representaciones de un mismo número.
- Descomposición del número.

Algoritmos para las operaciones

- Algoritmo para la adición y sustracción.
- Algoritmo para la multiplicación y división.
- Algoritmo para la obtener la fracción generatriz en base 10.

Propiedades

- Asociativa
- Conmutativa
- Inverso multiplicativo

Argumentos

Deductivo:

A partir de regularidades numéricas.

Inductivo:

A partir de casos particulares encontrados empíricamente.

Formalización del término general encontrado empíricamente.