

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE POSGRADO



**GÉNESIS INSTRUMENTAL DE LA MEDIDA DEL VOLUMEN
DEL OCTAEDRO REGULAR MEDIADA CON CABRI 3D EN
ESTUDIANTES DEL CUARTO GRADO DE SECUNDARIA**

**Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas
que presenta**

Jorge Renán Batallanos Monzón

Dirigido por

Dra. Jesús Victoria Flores Salazar

Jurado

Mg. Carolina Reaño Paredes

Mg. Mariano Gonzáles Ulloa

Lima – Perú

2018

RESUMEN

El presente trabajo de investigación tiene por objetivo analizar el proceso de la génesis instrumental de la medida del volumen del octaedro regular mediada con Cabri 3D en estudiantes del cuarto grado de educación secundaria. Debido a que nuestro estudio contempla los procesos de instrumentalización e instrumentación, nuestra investigación responde a la siguiente pregunta: ¿cómo se produce la génesis instrumental de la medida del volumen del octaedro regular en estudiantes del cuarto grado de educación secundaria cuando trabajan una secuencia de actividades con Cabri 3D? Para el presente trabajo, utilizamos el referencial teórico del Enfoque Instrumental de Rabardel y, como referencial metodológico, la Ingeniería Didáctica de Artigue. Nos centramos en las dos direcciones de la génesis instrumental: el proceso de la instrumentalización y el de instrumentación. Se toma en cuenta la noción de esquema de Vergnaud para identificar los posibles esquemas de utilización que movilizan los estudiantes al desarrollar las actividades propuestas. Como resultados obtenidos en nuestra investigación podemos inferir que los estudiantes evidencian la utilización de esquemas de uso y de acción instrumentada, logrando la génesis instrumental de la medida del volumen del octaedro regular mediada con Cabri 3D, además de lograr una instrumentación local de algunas herramientas del Cabri 3D.

Palabras clave: Génesis Instrumental, Octaedro regular, Volumen, Cabri 3D.

ABSTRACT

The objective of this research work is to analyze the process of the instrumental genesis of the measurement of the volume of the regular octahedron in students of the fourth grade of secondary education. Because our study considers instrumentalization and instrumentation processes, our research answers the following question: how is the instrumental genesis of the volume measurement of the regular octahedron produced in fourth grade students of secondary education when they work a sequence of activities with Cabri 3D ? For the present work, we use the theoretical reference of Rabardel's Instrumental Approach and, as a methodological referential, the Artigue Didactic Engineering. We focus on the two directions of the instrumental genesis: the process of instrumentalization and that of instrumentation. The notion of Vergnaud's scheme is taken into account to identify the possible utilization schemes that students mobilize when developing the proposed activities. As results obtained in our research, we can infer that students demonstrate the use of instrumented use and action schemes, achieving the instrumental genesis of the volume measurement of the regular octahedron mediated with Cabri 3D, as well as achieving a local instrumentation of some tools of the Cabri 3D

Key words: Genesis Instrumental, Regular Octahedron, Volume, Cabri 3D.





A mi querida esposa, y que Dios nos de su bendición y permita siempre ver el resplandor de una luna hermosa y radiante el 4 de noviembre y el 10 de diciembre de todos los años.

A mis queridos hijos Jorge Gabriel y Nicolás Axel, y que Dios los guie en su formación profesional.

AGRADECIMIENTOS

La realización del presente trabajo de investigación, ha sido posible gracias al invaluable apoyo de mi asesora de tesis, Dra. Jesús Victoria Flores, a quien aprecio gratamente por lo siguiente: su actitud crítica que me ha permitido mejorar constantemente mi trabajo de investigación, sus reuniones de asesoría donde encontré respuestas a todas mis interrogantes, su pasión apostolada y su don de servir a los estudiantes de la maestría.

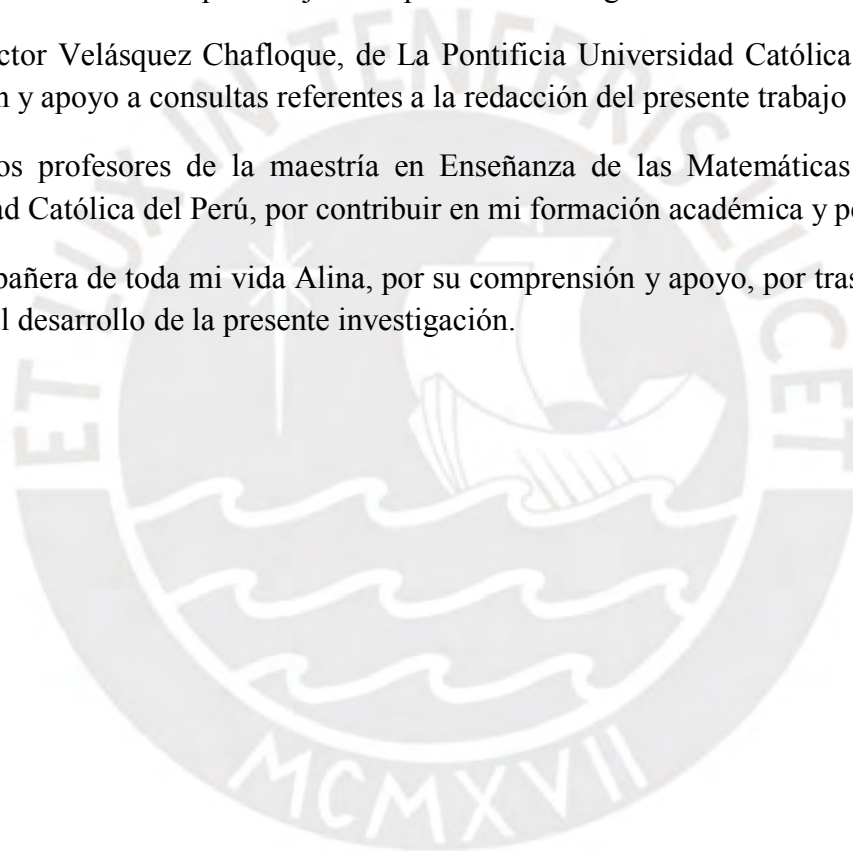
A mi profesora Dra. Cecilia Gaita Iparraguirre, por sus enseñanzas y el trato muy cordial que siempre he recibido en los años de estudio durante mi maestría.

A los miembros del jurado, Mg. Carolina Reaño Paredes y Mg. Mariano Gonzáles Ulloa por sus sugerencias brindadas para mejorar la presente investigación.

Al Dr. Héctor Velásquez Chafloque, de La Pontificia Universidad Católica del Perú, por su disposición y apoyo a consultas referentes a la redacción del presente trabajo de investigación.

A todos los profesores de la maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por contribuir en mi formación académica y personal.

A mi compañera de toda mi vida Alina, por su comprensión y apoyo, por trasladar tiempos de mi hogar al desarrollo de la presente investigación.



ÍNDICE

CONSIDERACIONES INICIALES	11
CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA.....	13
1.1 Investigaciones de referencia	13
1.2 El ambiente del Cabri 3D.....	24
1.3 Justificación de la investigación.....	31
1.4 Pregunta y objetivos de la investigación	32
CAPÍTULO II: ASPECTOS DEL ENFOQUE INSTRUMENTAL E INGENIERÍA DIDÁCTICA ...	33
2.1 Aspectos del Enfoque Instrumental.....	33
2.2 Aspectos de Ingeniería Didáctica	37
CAPÍTULO III: ESTUDIO DEL OCTAEDRO REGULAR	45
3.1 El octaedro regular	45
3.2 Aspectos históricos y matemáticos.....	47
3.3 El octaedro regular en los libros de texto	54
CAPÍTULO IV: EXPERIMENTO Y ANÁLISIS	57
4.1 Sujetos de la investigación	57
4.2 Escenario de la investigación	57
4.3 Descripción del experimento.....	58
4.4 Las actividades y sus análisis.....	58
CONSIDERACIONES FINALES	100
REFERENCIAS.....	103
ANEXOS	107

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Ventana de inicio del Cabri 3D versión v2.....	26
Figura 2. Herramienta manipulación	26
Figura 3. Herramienta poliedro regular	27
Figura 4. Herramienta punto	27
Figura 5. Herramienta punto de intersección.....	28
Figura 6. Herramienta segmento	28
Figura 7. Herramienta longitud	29
Figura 8. Herramienta ángulo.....	29
Figura 9. Función atributos para el estilo de superficie	30
Figura 10. Función atributos para el color de curva	30
Figura 11. Clasificación de los poliedros	45
Figura 12. Los sólidos platónicos.....	47
Figura 13. Aproximaciones a sólidos platónicos encontrados en Escocia	48
Figura 14. Proposición 14 traducida por Puertas	48
Figura 15. Proposición 14 traducida por Cardona et al.....	49
Figura 16. Cuadrado en Cabri 3D.....	50
Figura 17. Esfera circunscrita al cuadrado con Cabri 3D	51
Figura 18. Octaedro regular inscrito en una esfera con Cabri 3D	51
Figura 19. Icosaedro - Rombicosidodecaedro	54
Figura 20. El octaedro regular	55
Figura 21. Poliedros conjugados	56
Figura 22. Respuesta de David en Cabri 3D a la actividad 2.....	61
Figura 23. Respuesta de David en Cabri 3D a la actividad 3	61
Figura 24. Respuesta de Karla en Cabri 3D a la actividad 2.....	62
Figura 25. Respuesta de Karla en Cabri 3D a la actividad 3	63
Figura 26. Representaciones del octaedro regular en Cabri 3D	65
Figura 27. Representaciones del octaedro regular en Cabri 3D	66

Figura 28. Medidas de los lados de las caras en un octaedro regular en Cabri 3D.....	66
Figura 29. Medida de los ángulos de las caras en un octaedro regular en Cabri 3D	67
Figura 30. Octaedro regular PABCDQ en Cabri 3D	68
Figura 31. Diagonales del octaedro regular en Cabri 3D	69
Figura 32. Octaedro regular en Cabri 3D	69
Figura 33. Octaedro regular en Cabri 3D	70
Figura 34. Respuesta de David en Cabri 3D a la actividad 1a	71
Figura 35. Respuesta de David en Cabri 3D a la actividad 1b.....	71
Figura 36. Respuesta de David en Cabri 3D a la actividad 1c.....	72
Figura 37. Respuesta de David a la actividad 1c	72
Figura 38. Respuesta de David a la actividad 2	73
Figura 39. Respuesta de David en Cabri 3D a la actividad 3a.....	73
Figura 40. Respuesta de David a la actividad 3a	74
Figura 41. Octaedro regular PABCDQ.....	74
Figura 42. Respuesta de David a la actividad 3b	75
Figura 43. Respuesta de Karla en Cabri 3D a la actividad 1a.....	75
Figura 44. Respuesta de Karla en Cabri 3D a la actividad 1b.....	76
Figura 45. Respuesta de Karla en Cabri 3D a la actividad 1c.....	77
Figura 46. Respuesta de Karla a la actividad 2.....	77
Figura 47. Respuesta de Karla en Cabri 3D a la actividad 3a.....	78
Figura 48. Respuesta de Karla a la actividad 3a.....	78
Figura 49. Respuesta de Karla en Cabri 3D a la actividad 3b.....	79
Figura 50. Respuesta de Karla a la actividad 3b.....	79
Figura 51. Pirámide cuadrangular PABCD en Cabri 3D	81
Figura 52. Diagonal AC de la pirámide cuadrangular PABCD en Cabri 3D	82
Figura 53. Altura h (PO) de la pirámide cuadrangular PABCD en Cabri 3D	82
Figura 54. Volumen pirámide cuadrangular PABCD con arista a en Cabri 3D.....	84
Figura 55. Medida del volumen del octaedro regular PABCDQ con arista a en Cabri 3D	85

Figura 56. Octaedro regular PABCDQ con arista a en Cabri 3D.....	86
Figura 57. Respuesta de David en Cabri 3D a la actividad 1a.....	87
Figura 58. Respuesta de David a la actividad 1a	87
Figura 59. Respuesta de David en Cabri 3D a la actividad 1b.....	88
Figura 60. Respuesta de David a la actividad 1b	88
Figura 61. Respuesta de David en Cabri 3D a la actividad 1c	89
Figura 62. Respuesta de David a la actividad 1c	89
Figura 63. Respuesta de David en Cabri 3D a la actividad 2a	90
Figura 64. Respuesta de David a la actividad 2a	90
Figura 65. Respuesta de David en Cabri 3D a la actividad 2b.....	91
Figura 66. Respuesta de David a la actividad 2b	91
Figura 67. Respuesta de David en Cabri 3D a la actividad 3	92
Figura 68. Respuesta de David a la actividad 3	92
Figura 69. Respuesta de Karla a la actividad 1a.....	93
Figura 70. Respuesta de Karla en Cabri 3D a la actividad 1b.....	93
Figura 71. Respuesta de Karla a la actividad 1b.....	94
Figura 72. Respuesta de Karla en Cabri 3D a la actividad 1c.....	94
Figura 73. Respuesta de Karla a la actividad 1c	95
Figura 74. Respuesta de Karla en Cabri 3D a la actividad 2a.....	96
Figura 75. Respuesta de Karla a la actividad 2a.....	96
Figura 76. Respuesta de Karla en Cabri 3D a la actividad 2b.....	97
Figura 77. Respuesta de Karla a la actividad 2b.....	97
Figura 78. Respuesta de Karla en Cabri 3D a la actividad 3.....	98
Figura 79. Respuesta de Karla a la actividad 3	98

LISTA DE CUADROS

Cuadro 1. Tendencias de investigación en Geometría con entornos informáticos	20
Cuadro 2. Competencia Resuelve problemas de forma, movimiento y localización	40
Cuadro 3. Nivel de competencia de estudiantes del cuarto grado de educación secundaria	40
Cuadro 4. Textos de Matemática de cuarto grado de educación secundaria	54
Cuadro 5. Descripción de las actividades	58



CONSIDERACIONES INICIALES

En el contexto educativo de nuestro medio, la enseñanza de los temas de geometría espacial es postergada para los últimos meses del año escolar. Por este motivo, lo establecido en el Currículo Nacional de Educación Básica 2016 no se cumple, pues no se culmina con todos los contenidos previstos. En cuanto a los estándares de aprendizaje contemplados en los Mapas de Progreso de geometría, solo se alcanzan parcialmente los estándares en cada ciclo de la Educación Básica Regular.

En este sentido, debemos tener en cuenta investigaciones como las de Abrate, Delgado, y Pochulu (2006) (citado por Gamboa, Ballester, 2009, p.2). Estos autores afirman que los profesores priorizan la enseñanza de las matemáticas en otras áreas, ocasionando el desplazamiento de los contenidos de geometría al final del curso, lo que les obliga a desarrollarlos en forma superficial o a excluir algunos contenidos. Así también, la investigación de Baez y Iglesias (2007) sostiene que la enseñanza y aprendizaje de la geometría presenta dificultades, pues algunas veces los profesores disponen de poco dominio de los contenidos geométricos y/o desconocen la importancia de la geometría.

Por otra parte, la tesis de Almeida (2010), en referencia a la enseñanza y aprendizaje de la geometría, sostiene que la inclusión del software Cabri 3D puede contribuir a que los estudiantes construyan, observen y manipulen los objetos geométricos con mayor dinamismo. A su turno, Gravina (2001) afirma que los ambientes de geometría dinámica son recursos que permiten explorar un objeto matemático en diferentes representaciones.

Por los argumentos mostrados, nos interesó realizar el presente trabajo de investigación sobre la génesis instrumental de la medida del volumen del octaedro regular mediada con Cabri 3D en estudiantes del cuarto grado de secundaria.

A continuación, presentamos la estructura de nuestro trabajo, la que está compuesta de cuatro capítulos.

En el primer capítulo, presentamos la problemática de la investigación. Consideramos antecedentes relacionados con los cinco sólidos platónicos y presentamos el Enfoque Instrumental y el uso del software Cabri 3D. Asimismo, mostramos la justificación de nuestra investigación, formulamos nuestra pregunta y nuestros objetivos de investigación.

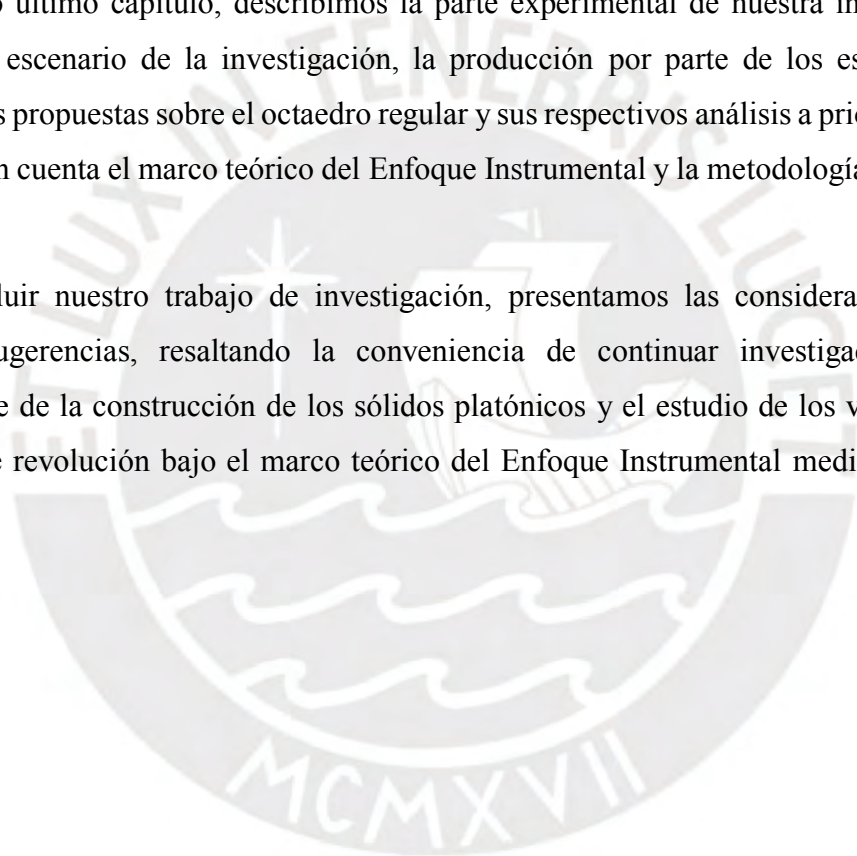
En el segundo capítulo, describimos algunos aspectos del Enfoque Instrumental de Rabardel (1995) como marco teórico de nuestra investigación. También presentamos algunos aspectos

de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) como guía metodológica en nuestra investigación. Asimismo, presentamos documentos del Ministerio de Educación referidos a la didáctica de la enseñanza de la geometría y sus efectos.

El tercer capítulo se relaciona con nuestro objeto matemático: el octaedro regular. Presentamos la evolución histórica y matemática de los sólidos platónicos, detallando principalmente la del octaedro regular. Además, se analiza los aspectos didácticos de su enseñanza de dos libros de matemática del cuarto grado de educación secundaria, siendo uno de ellos proporcionado a los estudiantes por el Ministerio de Educación.

En nuestro último capítulo, describimos la parte experimental de nuestra investigación, que incluye el escenario de la investigación, la producción por parte de los estudiantes de las actividades propuestas sobre el octaedro regular y sus respectivos análisis a priori y a posteriori, teniendo en cuenta el marco teórico del Enfoque Instrumental y la metodología de la Ingeniería Didáctica.

Para concluir nuestro trabajo de investigación, presentamos las consideraciones finales y algunas sugerencias, resaltando la conveniencia de continuar investigaciones sobre el aprendizaje de la construcción de los sólidos platónicos y el estudio de los volúmenes de los cuerpos de revolución bajo el marco teórico del Enfoque Instrumental mediado por el Cabri 3D.



CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En este capítulo, se presentan investigaciones sobre el estudio de poliedros regulares (*sólidos platónicos*) que guardan relación con nuestro objeto matemático: el octaedro regular. Además, se presentan trabajos de investigación bajo la perspectiva del Enfoque Instrumental mediados por el software Geogebra, la descripción del software Cabri 3D, como también la justificación para realizar nuestra investigación, la pregunta y los objetivos de la investigación.

1.1 Investigaciones de referencia

Debido a que estamos interesados en investigar el sustento científico de cómo se produce la génesis instrumental de la medida del volumen del octaedro regular en estudiantes de secundaria cuando utilizan el software Cabri 3D, abordamos en primera instancia investigaciones que tienen relación con nuestro objeto matemático, el octaedro regular, para identificar el avance del conocimiento en el estudio de los poliedros platónicos, entre ellas presentamos las investigaciones de Dos Santos (2016), Possani (2012), Camou (2010).

Dos Santos (2016) plantea como objetivo general de su investigación, analizar la construcción de los poliedros regulares convexos explicados por Euclides en el libro XIII de los Elementos, y adaptar los enunciados de sus procedimientos de construcción de los poliedros para que puedan ser construidos con el soporte de las herramientas del software Cabri 3D.

El autor explora la construcción de los poliedros regulares convexos tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro, y el icosaedro del libro XIII de los Elementos de Euclides. A continuación, con el Cabri 3D constata que todos los poliedros regulares convexos pueden ser construidos, y además explora que el dodecaedro se puede formar con la composición de doce pirámides regulares pentagonales cada una con base en una cara del dodecaedro y el icosaedro por veinte pirámides triangulares (tetraedros) cada una con base en una cara del icosaedro. Durante las construcciones propuestas de los poliedros regulares convexos en Cabri 3D, el autor determina relaciones matemáticas de las medidas de las aristas del tetraedro, hexaedro y octaedro, en términos de los radios de las esferas que los circunscriben. También determina relaciones matemáticas de la medida del área de la base de una pirámide y de su altura, en términos de las aristas. Se determina adicionalmente las medidas de las alturas, en términos de sus aristas, de las pirámides en que pueden ser descompuestos el dodecaedro e icosaedro. Lo anterior permite establecer una fórmula para el cálculo de los volúmenes de los poliedros en términos de las aristas del poliedro, así como también de la medida del diámetro de la esfera que lo circunscribe. En el caso de nuestro objeto matemático, el octaedro regular, el autor

determina el volumen de una pirámide cuadrangular en términos de su arista y, considerando que el octaedro regular está formado por la composición de dos pirámides cuadrangulares, halla el volumen del octaedro regular duplicando el volumen de una pirámide cuadrangular.

Dos Santos (2016) durante su investigación utiliza como marcos teóricos de soporte, aspectos de la teoría de la Transposición Didáctica de Chevallard y los Registros de Representación Semiótica de Duval.

El autor en su investigación desarrolla una metodología cualitativa de tipo bibliográfico basada en la lectura, análisis e interpretación del libro XIII de Euclides que explica las construcciones de los poliedros regulares. Entre sus principales conclusiones considera al Cabri 3D como un hábitat para el estudio de los poliedros regulares porque tiene todas las herramientas que permiten la movilización de conocimientos necesarios para la construcción de estos poliedros, para hacer su composición o descomposición en otros poliedros y, especialmente para elaborar conjeturas usando el dinamismo del Cabri 3D. También, pudo realizar las etapas de una transposición didáctica según Chevallard, del estudio de la construcción de los poliedros, del cálculo de sus volúmenes y que pueden ser adaptados en el nivel escolar tal como lo desarrollan los libros didácticos revisados por el autor. Asimismo, en cuanto a los registros figurales, las aprehensiones en el sentido de Duval pudieron ser desarrolladas en las construcciones geométricas realizadas en Cabri 3D, la conversión de registros figurales a registros algebraicos y el tratamiento de cada uno de ellos fue fundamental durante la investigación. También, fueron utilizadas las modificaciones mereológica, óptica y posicional en momentos que eran necesarias como, por ejemplo, para dividir un segmento en media y extrema razón, para la descomposición de un poliedro, para modificar una representación geométrica ampliándola o reduciéndola, o para obtener representaciones geométricas simétricas, rotadas y trasladadas.

A continuación, presentamos la investigación de Possani (2012), la cual tiene por objetivo investigar el aprendizaje del cálculo del volumen del poliedro platónico icosaedro regular, por estudiantes del tercer año de educación secundaria superior, basada en una secuencia de actividades mediadas por el software Cabri 3D. El interés del autor es responder a su pregunta de investigación: “Como una secuencia didáctica que involucra la geometría dinámica puede interferir con el aprendizaje del volumen del icosaedro regular” (p.31). La elección del objeto matemático “icosaedro regular”, el autor la justifica de la siguiente manera:

Como los poliedros regulares son cinco: tetraedro, hexaedro (cubo), octaedro, dodecaedro e icosaedro, opté por escoger uno de ellos que permita diseñar una secuencia de actividades utilizando el Cabri 3D, decidiendo por el icosaedro regular que tiene la mayor cantidad de aristas, cuyas caras están formadas por triángulos equiláteros, y además es conocido por la

mayoría de los estudiantes por aproximarse en su representación a una bola de fútbol (Possani, 2012, p.16).

La investigación de Possani (2012) guarda relación con la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2009), específicamente con los tratamientos, conversiones y las diferentes aprehensiones del registro figural y la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1986). Con el soporte de estos marcos teóricos, el autor sostiene que, al analizar el desarrollo de las actividades de los estudiantes, es posible observar que ellos entienden como calcular el volumen del icosaedro regular.

Así mismo, el autor en referencia a las secuencias de actividades señala que:

Al proponer una secuencia de actividades, esperamos que los estudiantes articulen los registros de representación semiótica en la construcción de nuevos conocimientos matemáticos, pues según Duval (2009), la coordinación de al menos dos registros de representación semiótica es necesaria para la comprensión de un concepto (Possani, 2012, p.31).

En la etapa experimental de la investigación participan cuatro estudiantes de un colegio localizado en Penha, cerca de la ciudad de Sao Paulo, a quienes se les plantea nueve secuencias didácticas para que ellos articulen los registros de representación semiótica que guardan relación con el icosaedro regular cuando movilizan sus conocimientos de geometría plana y del espacio, con el propósito de hallar la expresión que permita calcular la fórmula del volumen del icosaedro regular a partir de la exploración de las representaciones de este objeto matemático.

El autor en su investigación utiliza como metodología aspectos de la ingeniería didáctica y dentro de sus principales conclusiones afirma:

La metodología de la ingeniería didáctica y el análisis de las actividades bajo el marco teórico de las Situaciones Didácticas de Brousseau (1986) y la de los Registros de Representación Semiótica de Duval (2009) contribuyeron para alcanzar el objetivo de la investigación. Además, la utilización del Cabri 3D permitió a los estudiantes la construcción, manipulación y comprensión de algunas construcciones geométricas y conjeturar la medida del volumen del icosaedro.

Por otra parte, presentamos la investigación de Camou (2010), quién plantea que, en la enseñanza y aprendizaje de la geometría del espacio, para conceptualizar correctamente un objeto matemático, es imprescindible presentar a los estudiantes un conjunto de representaciones que sean semejantes al objeto matemático motivo de estudio, algunas en material concreto y otras en forma abstracta, utilizando diferentes tecnologías como el Cabri 3D. El autor a este nuevo enfoque para aprender y enseñar geometría del espacio lo denomina Integrando Multirepresentaciones, Aproximaciones y Tecnología (IMAT).

Camou (2010) realizó un experimento que consistió en la enseñanza de los poliedros platónicos regulares durante dos semanas con 134 estudiantes entre uruguayos y estadounidenses entre 16 y 18 años. En el experimento utilizó diferentes representaciones para los poliedros regulares tales como: modelos 3D en cartulina, representaciones en Cabri 3D, representaciones en papel, dados poliédricos. En el desarrollo de su investigación utiliza conceptos tales como: la relación de Euler: $C + V - A = 2$, que establece que en todo poliedro convexo la suma del número de caras más el número de los vértices menos el número de las aristas es siempre igual a 2, conceptos de ángulos diedros, áreas y volúmenes de los poliedros, construcción en Cabri 3D de poliedros arquimedianos; y cómo hacer objetos tridimensionales a lápiz y papel.

Una conclusión que describe el investigador es que, en una prueba inicial de diagnóstico, los estudiantes desconocían en su mayoría la noción matemática de poliedro regular. Ante la pregunta “¿Qué es un octaedro regular?”, solo obtuvo un cuatro por ciento de respuesta aceptable. Luego que los estudiantes realizaron actividades como construir el octaedro regular con Cabri 3D, con cartulina, representarlo en el papel y jugar con dados poliédricos, el setenta por ciento de los estudiantes dieron una respuesta aceptable sobre el octaedro regular.

En cuanto a las investigaciones bajo la perspectiva del marco teórico del Enfoque Instrumental, presentamos las siguientes.

Del Castillo y Montiel (2009) analizan la transformación de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas cuando se emplean recursos tecnológicos, basándose en la transposición informática que consiste en la presencia de entornos informáticos en las aulas de clases, lo que conlleva a la modificación de la enseñanza de las matemáticas, por lo que se debe analizar las potencialidades y restricciones de la tecnología, y los contenidos matemáticos. Esto implica el análisis de los conocimientos que pueden ser movilizados, las maneras distintas de ejecutar un tipo de tareas, cuando se utiliza una herramienta informática.

Los autores, basándose en el Enfoque Instrumental, analizan el proceso de cómo el artefacto Sistema Algebraico Computarizado (SAC) se convierte en un instrumento de acción a fin de que los estudiantes analicen simulaciones de movimiento dependientes del tiempo en un ambiente gráfico dinámico que permite el software matemático del SAC para el desarrollo significativo de la idea de función. Los autores sostienen que estas simulaciones, conjuntamente con sus representaciones algebraicas correspondientes a la parte gráfica, cálculos tabulares, y los procesos de instrumentación e instrumentalización constituyen elementos de estudio en la

génesis instrumental para que el artefacto SAC se convierta en instrumento, de forma que se integra al estudiante para que construya conocimiento.

La investigación cualitativa presenta una fase experimental con estudiantes del quinto semestre (15–18 años) del Nivel Medio Superior de un Centro Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios de México.

Del Castillo y Montiel (2009), de manera general, plantean que es necesario que los estudiantes interactúen con los instrumentos tecnológicos, realicen manipulaciones de objetos matemáticos tales como, las que realizan durante su investigación con un software de geometría dinámica y un software SAC.

En la misma línea del uso de la tecnología en el aula de clase, el Concejo Nacional de Maestros de Matemáticas (NCMT) señala que: “La tecnología es esencial para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; esto es que el uso de tecnología influye en las matemáticas que se enseña, facilitando el aprendizaje de los estudiantes” (NCTM, 2000, p.24).

Por otra parte, Iranzo y Fortuny (2009) realizan una investigación con la metodología del estudio de casos con diez estudiantes del primer año de bachillerato tecnológico en España. En esta institución, los investigadores estudian los comportamientos de los estudiantes en la resolución de dos problemas de geometría analítica. Analizan, en primer lugar, cómo resuelven un problema relativo a la circunferencia utilizando sus conocimientos geométricos y con recursos de lápiz y papel. En segundo lugar, se le propuso un problema relativo al rombo para su solución, utilizando las herramientas necesarias del Geogebra y sus conceptos geométricos.

Los investigadores, sobre la base del Enfoque Instrumental, analizan y comparan los procesos de resolución de los problemas en ambos medios, el tradicional con lápiz y papel y el tecnológico con el Geogebra, así también la interacción estudiante–estudiante, estudiante–Geogebra. A partir de este análisis, logran caracterizar las estrategias de resolución de los problemas por parte de los estudiantes en ambos medios. Además, caracterizan el comportamiento del aprendizaje de los estudiantes teniendo en cuenta los grados de los procesos de instrumentación–instrumentalización propuestos por los autores y, de esta manera, puedan proponer una tipología con diferentes tipos de estudiantes. Así también, exploran cómo influye el uso del Geogebra en la adquisición de conceptos geométricos, en la visualización y exploración de las representaciones geométricas y las estrategias para resolver problemas en cada tipología de estudiantes.

Iranzo y Fortuny (2009) basados en sus análisis de la resolución de los problemas por los estudiantes, definen grados de adquisición de habilidades técnicas, siendo estos grados alto, medio y bajo en los procesos de instrumentación-instrumentalización y también proponen las siguientes tipologías de estudiantes: autónomos, instrumentales, procedimentales, empíricos.

Autónomos, estudiantes con grado de instrumentación alto, así como el grado de instrumentación. Resuelven los problemas, con el medio tradicional usando lápiz y papel y con el Geogebra.

Instrumentales, estudiantes con grados de instrumentación e instrumentalización de nivel medio a alto, presentan dificultades conceptuales, algebraicas y/o de visualización en la resolución de problemas con lápiz y papel. En la resolución con el Geogebra, emplean las propiedades geométricas de la figura. En general, no presentan dificultades con el uso de las herramientas del Geogebra.

Procedimentales, estudiantes con grados de instrumentalización e instrumentalización inferior al de tipo instrumental, presentan dificultades al resolver los problemas con lápiz y papel, las construcciones de las figuras con el Geogebra se basan en sus propiedades de medida.

Empíricos, estudiantes con grados de instrumentalización e instrumentación bajos, presentan dificultades conceptuales algebraicas y geométricas, utilizan pocas herramientas del Geogebra y principalmente las de medida.

Entre otras conclusiones, los autores mencionan que la mayoría de los estudiantes usan simultáneamente la ventana algebraica y la ventana gráfica del Geogebra como estrategia para la resolución de los problemas; sin embargo, muestran dificultad en transferir estrategias usadas en el Geogebra para la resolución de los problemas con lápiz y papel. Además, recomiendan que los grados de adquisición de instrumentación e instrumentalización deban ser estudiados con mayor detalle, y que también es importante analizar el papel del profesor desde la perspectiva del Enfoque Instrumental.

Otra investigación relacionada al Enfoque Instrumental y el uso del Geogebra es la de Chumpitaz (2013), que analiza los procesos de instrumentalización en las acciones de los estudiantes cuando trabajan una secuencia de actividades en el aprendizaje de la función definida por tramos movilizando sus esquemas de uso, nuevos o preexistentes. En esta investigación participan seis estudiantes de los cursos de Análisis Matemático I de las carreras de Ingeniería a quienes se les plantea una secuencia de diez actividades.

Con las cinco primeras actividades, Chumpitaz (2013) explica que los estudiantes desarrollan acciones que, analizadas de acuerdo al modelo SAI (Situaciones de Actividades Instrumentadas), instrumentalizan algunas herramientas y funciones del Geogebra, entre ellas, la barra de herramientas, la barra de entrada, la vista algebraica, la vista gráfica, el arrastre, el deslizador y el comando función [] o comando condicional si []. Con las cinco últimas, el autor analiza las actividades para el proceso de instrumentalización de las propiedades de la función definida por tramos como dominio, rango, intervalos de monotonía, representación gráfica, regla de correspondencia, transformaciones de una función definida por tramos. El autor en su parte experimental sigue la metodología de investigación de la Ingeniería Didáctica. Entre sus principales conclusiones, identifica que en las interacciones de los estudiantes con la función definida por tramos movilizan esquemas de uso preexistentes, logrando minimizar las dificultades en la secuencia de aprendizaje. En el uso del Geogebra, identifica esquemas preexistentes relacionados con el uso de otro software; esto se evidenció cuando los estudiantes ejecutaban un arrastre, un zoom de acercamiento o alejamiento y el desplazamiento de la vista gráfica del Geogebra.

Así también, con el empleo del marco teórico del Enfoque Instrumental, presentamos la investigación de León (2014), que tiene como objetivo la instrumentalización de la elipse. Para ello, el investigador propone una secuencia de diez actividades dirigida a un grupo de estudiantes del curso de Matemática I en la carrera de Arquitectura y Administración de Proyectos. El diseño de cada actividad, mediada por el Geogebra, permitió a los estudiantes adquirir nociones matemáticas de la elipse.

En referencia a las características y propiedades de la elipse, y al proceso de la instrumentalización de la elipse, el autor señala que:

El proceso de instrumentación, se basó fundamentalmente en el enriquecimiento de las propiedades de la elipse por parte del sujeto durante una secuencia de actividades mediadas por el software Geogebra y que permitió el surgimiento y descubrimiento progresivo de sus componentes, Desde este conjunto de actividades los alumnos identificaron la condición geométrica de la elipse, la relación entre sus parámetros, la excentricidad, la ubicación de los vértices, focos, extremos del eje menor, el trazo del lado recto y vincularon la representación gráfica a la expresión algebraica correspondiente [...]. En el análisis de las acciones de los estudiantes, se eligió como referencial teórico el Enfoque Instrumental de Rabardel y como referencial metodológico la Ingeniería Didáctica de Artigue. A partir del diseño de nuestras actividades tratamos de describir el proceso de instrumentación de la elipse e identificaremos por medio de las acciones, los posibles esquemas de utilización que los estudiantes construyeron o movilizaron cuando trabajaron una secuencia de aprendizaje mediada por el Geogebra (León, 2012, p.5).

Entre sus principales conclusiones, León (2014) afirma que el Geogebra permitió que los estudiantes interactúen con los objetos geométricos representados. Además, las construcciones con el Geogebra permitieron a los estudiantes asimilar en forma progresiva características y propiedades de la elipse, instrumentalizando la elipse. En el análisis a posteriori, observó indicios de que esquemas de acción instrumentada evolucionaron a esquemas de uso, facilitando las actividades propuestas en la secuencia de aprendizaje, minimizando las dificultades que se pudieron haber presentado.

Así también, respecto al Geogebra, el autor señala que los estudiantes se han instrumentalizado en algunas herramientas, tales como el trazo de rectas paralelas, rectas perpendiculares, circunferencias, puntos de intersección, y distancias.

El investigador recomienda que en futuras investigaciones se considere la instrumentalización de otros objetos geométricos, empleando ambientes de geometría dinámica (AGD). En nuestro caso, investigaremos el proceso de la génesis instrumental de la medida del volumen del octaedro regular con Cabri 3D.

A continuación, presentamos investigaciones relacionadas a la enseñanza y aprendizaje de la geometría con la incorporación del Cabri 3D.

Gutiérrez (1998) afirma que una corriente de investigación actual es el uso de entornos informáticos en la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Por ello, hace un estado del arte de este tipo de investigaciones y clasifica las publicaciones de geometría espacial dedicadas al estudio de los poliedros, rotaciones de objetos geométricos en tres dimensiones, y sus representaciones planas. En geometría plana, clasifica publicaciones de temas tales como polígonos, proporcionalidad geométrica, isometrías, medidas de longitudes y superficies, etc.

Es así que el autor resume en el siguiente cuadro las tendencias de investigación en la enseñanza y aprendizaje de la geometría plana y del espacio con el uso de entornos informáticos.

Cuadro 1. Tendencias de investigación en Geometría con entornos informáticos

	GEOMETRÍA PLANA					GEOMETRÍA ESPACIAL		
	Polígonos	Proporcionalidad	Ángulos, rectas, etc.	Longitud, área	Isometrías	Poliedros	Rotaciones 3D	Representaciones planas
Entornos informáticos	X		X	X	X	X	X	X

Fuente: Gutiérrez (2008, p.2)

Una de las investigaciones correspondientes a las tendencias es la de Mariotti (1997) citado por Gutiérrez (1998, p.5), que realiza una investigación acerca de cómo los estudiantes exploran y discuten sobre la veracidad matemática de sus demostraciones geométricas cuando interactúan con el Cabri 3D. En este contexto, los estudiantes aceptan como demostración correcta una conjetura cuando utilizan funcionalidades de algunas herramientas del Cabri 3D, principalmente la función *arrastre* mediante el uso del mouse. Sin embargo, Mariotti (1997) manifiesta que los estudiantes se encuentran reticentes para hacerles comprender que las conjeturas desarrolladas con la función *arrastre* no son suficientes para demostrar la rigurosidad matemática que se requiere.

En la misma línea, cabe mencionar las investigaciones de Borda y Villareal (2005), Bittar (2000) y Brandao (2005) (citado por Salazar, 2012, p.10) sobre la influencia de la tecnología informática en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas cuando se utilizan ambientes de geometría dinámica, tales como el Cabri II, Cabri 3D y Geogebra. Estos trabajos afirman que la tecnología informática contribuye a que los estudiantes comprendan y se involucren más en el desarrollo de las nociones matemáticas del objeto matemático. Por ello, recomiendan a los profesores que integren en el aula de clase recursos informáticos en forma adecuada, y que sean de dominio de ellos y los estudiantes para obtener resultados exitosos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Por otra parte, citamos la investigación de Advíncula (2013), quien incorpora el uso del Cabri 3D como apoyo en la enseñanza de poliedros principalmente los prismas y pirámides con estudiantes de 17 a 19 años de edad del curso de Introducción a la Matemática Universitaria. La investigación se originó en la observación de las dificultades de los estudiantes para comprender las características y elementos de poliedros y, así mismo, en el hecho de que estos estudiantes no pudieran resolver los problemas relacionados a ellos.

Para analizar la evolución del razonamiento geométrico espacial de los estudiantes, la autora considera el modelo de Van Hiele y propone cinco actividades con poliedros en el Cabri 3D: construir los poliedros regulares tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro; construir poliedros regulares truncados; calcular el área y volumen de una pirámide; y, finalmente, resolver problemas relacionados con poliedros. Los estudiantes resuelven las actividades con el soporte de las herramientas *arrastre*, *poliedro convexo*, *abrir poliedro*, *recorte de poliedro*, *pirámide*, *área*, *volumen*, *traslación*, *recorte de poliedro*.

Advíncula (2013), al observar el desarrollo de las actividades con el Cabri 3D por parte de los estudiantes, señala las siguientes conclusiones. El ambiente de la geometría dinámica Cabri 3D mejora la visualización de los poliedros y permite la manipulación en forma dinámica y tridimensional del objeto matemático representado. Sobre el uso de la función del *arrastre* del Cabri 3D, señala su potencialidad al permitir que los estudiantes modifiquen las figuras en tiempo real y observen que las relaciones entre sus elementos permanecen inalterables, lo cual les permite realizar conjeturas sobre los objetos representados. Además, destaca que la flexibilidad y versatilidad del Cabri 3D contribuye con el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes, permitiendo el avance de su razonamiento geométrico y la resolución de problemas relacionados con poliedros.

La investigación de la autora consideramos importante para la nuestra por presentar un modelo para la enseñanza de los poliedros y mostrar las dificultades presentadas por los estudiantes en su aprendizaje. Además, presenta actividades que podrían ser consideradas como guías para nuestra investigación.

En el mismo sentido, Silva (2012) afirma que el Cabri 3D permite tener diversas representaciones del objeto matemático desde varios puntos de vista lo cual favorece el proceso de visualización del objeto. Esto, a su vez, permite realizar construcciones de poliedros, calcular directamente sus volúmenes o hacer particiones para calcular su volumen; analizar conjeturas y validarlas; resolver problemas nuevos, particularmente, construir poliedros por truncamiento.

Otra investigación que nos proporciona aportes del Cabri 3D en la enseñanza de la geometría es la de Martín (2013), quien realiza una propuesta didáctica para la enseñanza de poliedros y prismas para estudiantes del 2º año de Educación Secundaria Obligatoria (ESO, 12-14 años). La investigación que desarrolla la autora es bibliográfica en una parte y experimental en un segundo momento. Por ello, analiza documentos oficiales del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de España (MECD), los cuales establecen el modelo de la enseñanza en la Educación Secundaria Obligatoria. La investigadora muestra que en 2º año de ESO es el momento en que los estudiantes empiezan a conectarse con las representaciones de los poliedros, las figuras de revolución, las áreas y los volúmenes de estos objetos y explica que los conocimientos adquiridos de geometría plana en 1º ESO son la base para que los estudiantes comprendan los conceptos de geometría espacial. Sin embargo, en el análisis de los resultados de los informes del Program for International Student Assessment (PISA 2009), del Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS 2011) y el Program Education at a Glance (2011), se evidencia que la enseñanza de las matemáticas ha sufrido un retroceso,

siendo el álgebra y la geometría las disciplinas que presentan más dificultades entre los estudiantes. Supone Martín (2013), que la metodología empleada no es la adecuada, por lo que su investigación presenta la alternativa de usar el Cabri 3D como soporte en la enseñanza de la geometría espacial y se basa, en lo señalado por el Real Decreto 1631/ 2006 en el Boletín Oficial del Estado (BOE), del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de España, que dice al respecto:

La utilización de recursos manipulativos que sirvan de catalizador del pensamiento del alumno es siempre aconsejable, pero cobra especial importancia en geometría donde la abstracción puede ser construida por la interacción con un objeto físico. Especial interés presentan los programas de geometría dinámica al permitir a los estudiantes interactuar sobre las figuras y sus elementos característicos, facilitando la posibilidad de analizar propiedades, explorar relaciones, formular conjeturas y validarlas (BOE, 2007, p.751).

Asimismo, la autora sugiere el uso del Cabri 3D particularmente en la enseñanza de poliedros y prismas, tema que ha identificado como el que presenta altas dificultades en el aprendizaje de los estudiantes del 2º ESO. También indica que el principal aporte de su investigación es mostrar las ventajas en la enseñanza de la geometría a través de su propuesta didáctica que hace uso del Cabri 3D.

La investigadora realiza la parte experimental en dos centros de la comunidad de Madrid. Propone seis actividades a ser realizadas con el Cabri 3D, cuyo objetivo es fomentar la visualización de los objetos geométricos planos y tridimensionales, interactuar con los poliedros construidos experimentando el dinamismo e interactividad y generar la construcción de conocimiento. Así también, se propone explorar las representaciones geométricas y comprender conceptos geométricos por medio de la observación, la reflexión y la deducción. Además, con las actividades propuestas, se busca que el estudiante desarrolle competencias y habilidades.

Otra investigación que consideramos importante es la de Almeida (2010), que estudia la construcción de los trece sólidos arquimedianos con el Cabri 3D, teniendo como objetivo el rescate de este objeto matemático en la enseñanza de la escuela básica del contexto educativo brasileño. Para ello, utiliza como marco teórico la Transposición Didáctica, para articular el análisis epistemológico y el análisis didáctico del objeto matemático. Asimismo, emplea la teoría de Registros de Representación Semiótica para identificar y analizar registros que se movilizan en la construcción de los sólidos arquimedianos y analizar cómo se realizan los tratamientos y conversiones en los registros figural y algebraico.

Almeida (2010), en su investigación, utiliza la metodología de tipo bibliográfico (libros, artículos científicos, investigaciones en educación matemática) que aborden definiciones de poliedros, sólidos platónicos, procesos de la construcción de ellos en forma manual, con material concreto. Sobre esta base, analiza la construcción de los trece sólidos arquimedianos con el Cabri 3D. Concluye la primera parte de su investigación afirmando que es importante el estudio de los sólidos platónicos, ya que por medio de cortes en las aristas de estos sólidos se pueden generar los sólidos arquimedianos; el análisis de ellos está poco explorado tal vez por la dificultad en la visualización y representación de estos sólidos, y por la falta de comprensión de nociones y propiedades geométricas en el espacio. Asimismo, afirma que la enseñanza de los sólidos arquimedianos no está contemplada en el currículo del sistema educativo del Brasil.

La autora, en la segunda parte de su investigación, presenta su propuesta didáctica de considerar la posibilidad de la enseñanza y aprendizaje de los sólidos arquimedianos en la Educación Básica Brasileña. Esta posibilidad surge a partir de descubrir en su estudio bibliográfico una relación existente entre los sólidos arquimedianos y platónicos, además de los procedimientos matemáticos de truncamiento en el sólido platónico de origen, es decir, la determinación de las distancias desde el vértice hasta el punto de corte para obtener el sólido arquimediano. Luego, la autora propone los pasos para la construcción de cada sólido arquimediano con Cabri 3D. En su propuesta didáctica, la autora considera que las referencias de su marco teórico a la Transposición Didáctica y a los registros de Representación Semiótica fueron pertinentes para elaborar su investigación.

En cuanto al ambiente de geometría dinámica Cabri 3D, la autora afirma que simula un ambiente en tres dimensiones que puede contribuir para que contenidos geométricos sean recordados y revisados con un dinamismo inexistente en ambientes con lápiz y papel. Así también, confirma que el Cabri 3D se comporta como un hábitat para el estudio de los sólidos arquimedianos en la medida que reconozca a este objeto y a todos los saberes que determinan su existencia de este objeto como objetos de enseñanza.

1.2 El ambiente del Cabri 3D

Entre las Investigaciones presentadas en nuestros antecedentes, las de Dos Santos (2016), Possani (2012), Advíncula (2013), Martín (2013) y Almeida (2010) utilizan el Cabri 3D, al cual lo identifican como un software de geometría dinámica (SGD).

Al respecto, Gravina (2001) define un ambiente de geometría dinámica como un conjunto de herramientas informáticas que proporcionan una regla y compas virtuales, que permiten la

construcción de representaciones de objetos geométricos a partir de las propiedades que los definen, en la pantalla de una computadora. Los ambientes de geometría dinámica incorporan dominios teóricos como el caso de la geometría euclidiana para la construcción de sus objetos, los cuales pueden ser manipulados directamente en la pantalla del computador.

Gravina (2001) sostiene que un ambiente de geometría dinámica ofrece recursos de estabilidad de los objetos geométricos cuando se realizan deslizamientos a los elementos iniciales con los que se construye el objeto geométrico, es decir, los objetos conservan las relaciones geométricas consideradas en el proceso de su construcción. Menciona, por ejemplo, la construcción de un cuadrado a partir de un segmento y afirma que, al hacer variaciones a la medida de la longitud del segmento, se mantienen las propiedades del cuadrado, tales como “todos sus ángulos son rectos” y “todos sus lados son congruentes entre sí”.

Así también, la autora sostiene:

Los entornos de geometría dinámica también fomentan el espíritu de investigación matemática: su interface interactiva abierta a la exploración y la experimentación, proporciona experimentos del pensamiento. Manipulando directamente los objetos en la pantalla del ordenador, y su retroalimentación inmediata permite a los estudiantes cuestionar el resultado de sus acciones y operaciones, conjeturan y prueban la validez de sus conjeturas a través de recursos de naturaleza empírica (pp. 104-105).

La autora, para su investigación, emplea el Cabri – Geometry II. Al respecto, señala que es un software de geometría dinámica interactivo que permite la creación y manipulación de representaciones geométricas a partir de sus propiedades. Es un recurso para la enseñanza y aprendizaje de la geometría que permite explorar un objeto matemático en diferentes representaciones.

En nuestra investigación, utilizaremos el Cabri 3D, lo cual nos lleva a presentar algunas herramientas de este software que los estudiantes utilizarán en el desarrollo de la parte experimental de nuestra investigación.

Herramientas del Cabri 3D

La ventana inicial del Cabri 3D, en su versión v2, presenta la barra del menú, la barra de herramientas, la zona de trabajo y el plano base.

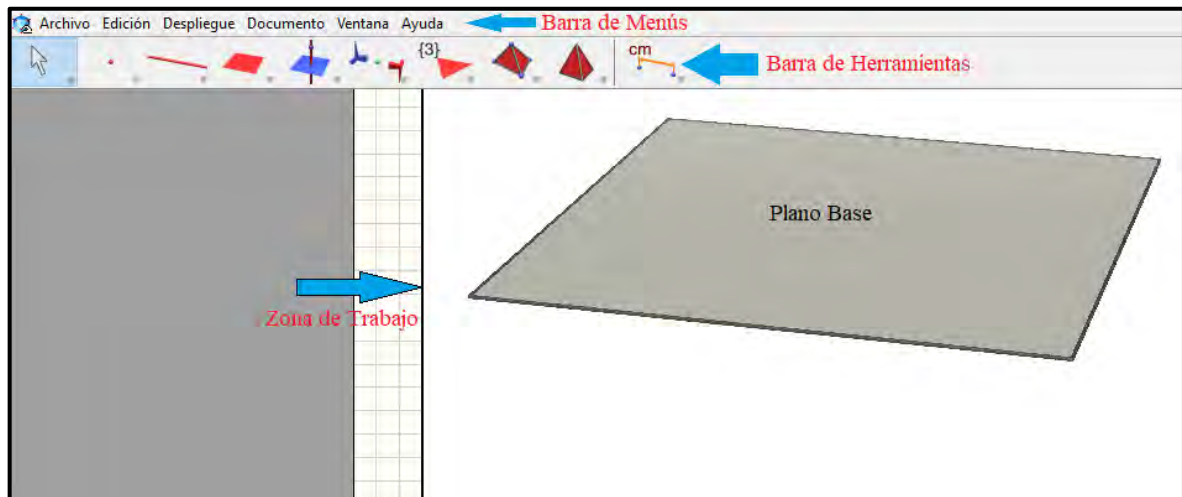


Figura 1. Ventana de inicio del Cabri 3D versión v2

- Herramienta *manipulación*: con ella, se puede seleccionar puntos y objetos, así como desplazarlos, modificarlos en la zona de trabajo. Además, permite activar y desactivar cualquier herramienta del Cabri 3D.

La figura 2 nos muestra la herramienta manipulación.

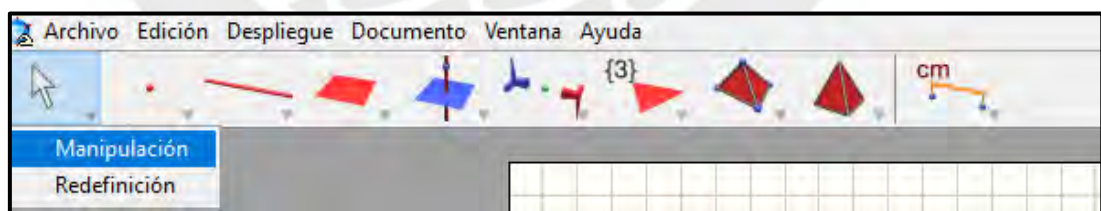


Figura 2. Herramienta manipulación

- Herramienta *poliedro regular*: una vez desplegada, permite seleccionar un tetraedro regular, un hexaedro regular (cubo), un octaedro regular, un dodecaedro o un icosaedro. La figura 3 nos muestra el octaedro regular obtenido, siguiendo las secuencias de su construcción.

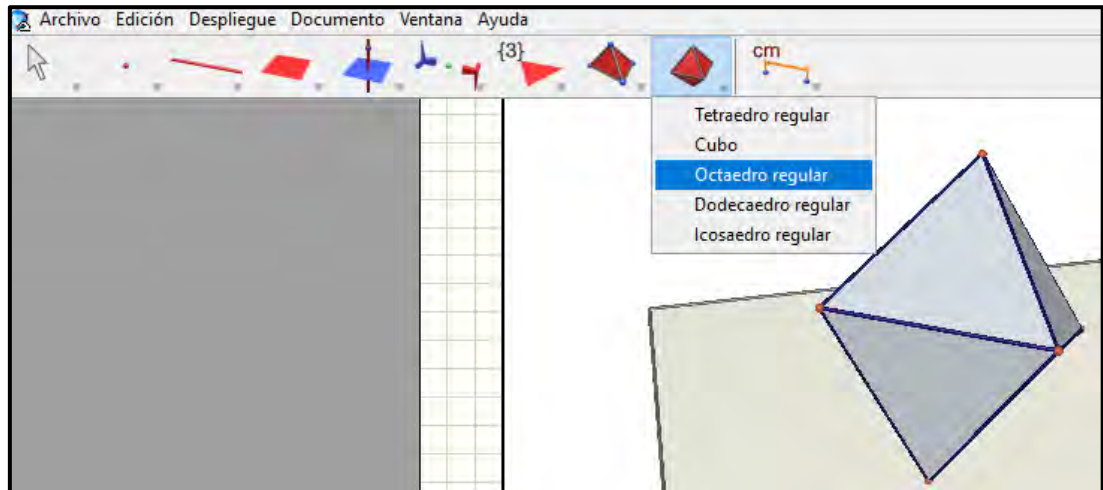


Figura 3. Herramienta poliedro regular

- Herramienta *punto*: con ella, se puede construir puntos en el plano base, sobre la parte visible del objeto y en el espacio. La figura 4 nos muestra los puntos A, B, C sobre la parte visible de un objeto (octaedro regular), en el plano base y en el espacio respectivamente, creados con la herramienta *punto*.

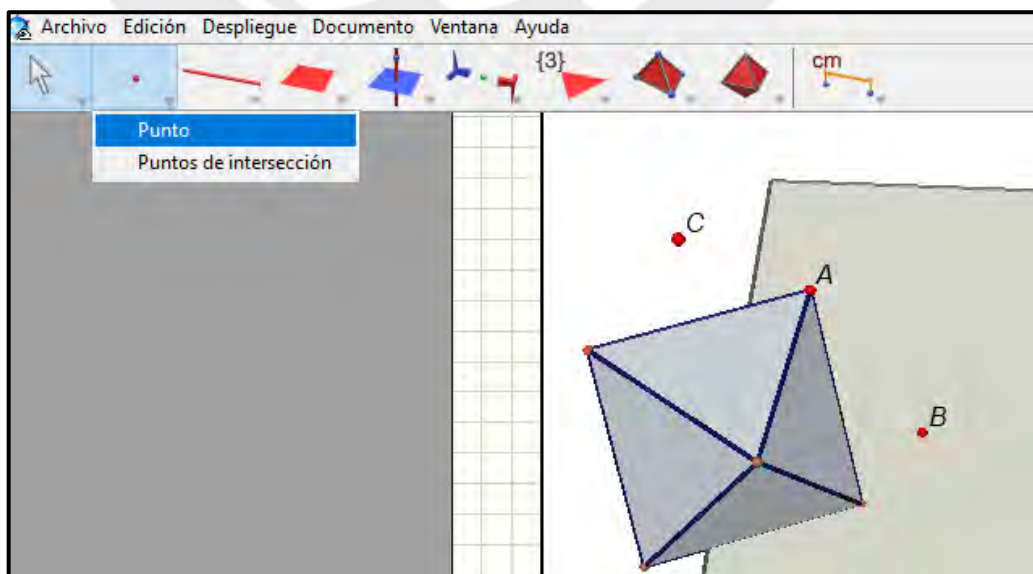


Figura 4. Herramienta punto

- Herramienta *punto de intersección*: con ella, se puede construir los puntos de intersección de dos objetos (segmentos, una recta y una esfera, etc.).

La figura 5 nos muestra el punto de intersección “O” de los segmentos \overline{AC} y \overline{PQ} .

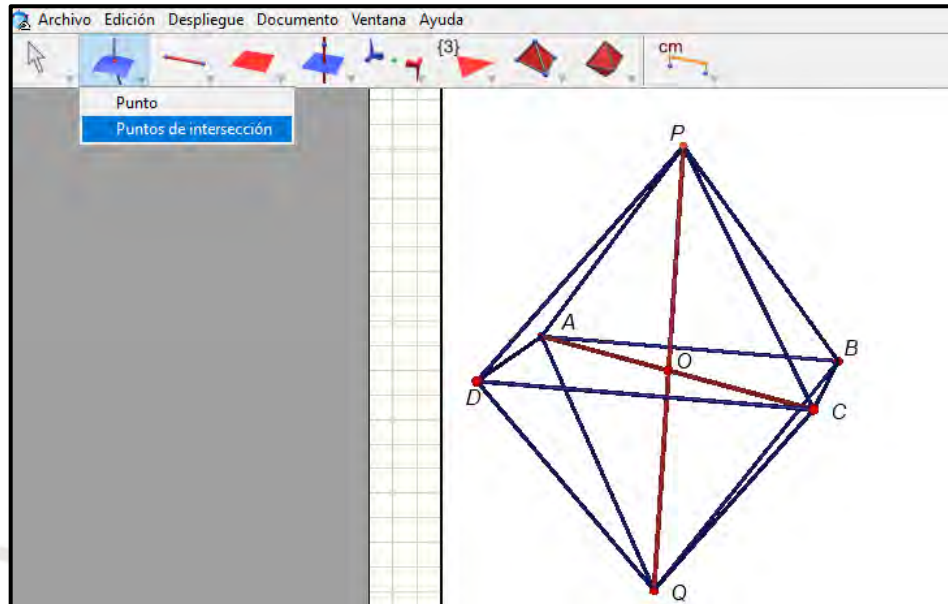


Figura 5. Herramienta punto de intersección

- Herramienta *segmento*: con ella, se puede crear un segmento entre dos puntos dados. La figura 6 nos muestra los puntos A, B, C y D; utilizamos la herramienta *segmento* para crear los segmentos \overline{AC} , \overline{BD} .

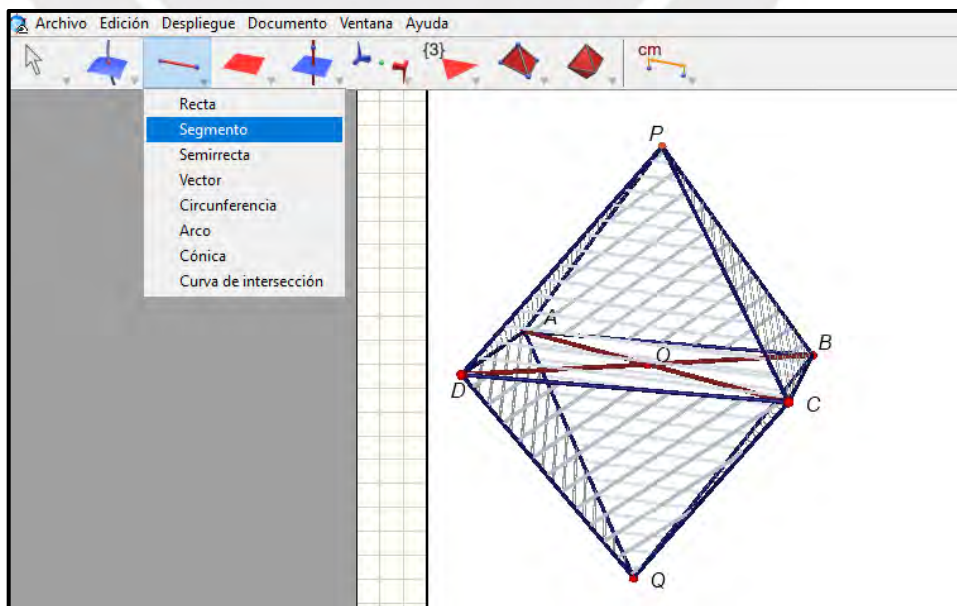


Figura 6. Herramienta segmento

- Herramienta *longitud*: con ella, se puede medir la longitud de un segmento, la arista de un poliedro, el lado de un polígono.

La figura 7 nos muestra la medida de las aristas de un tetraedro regular.

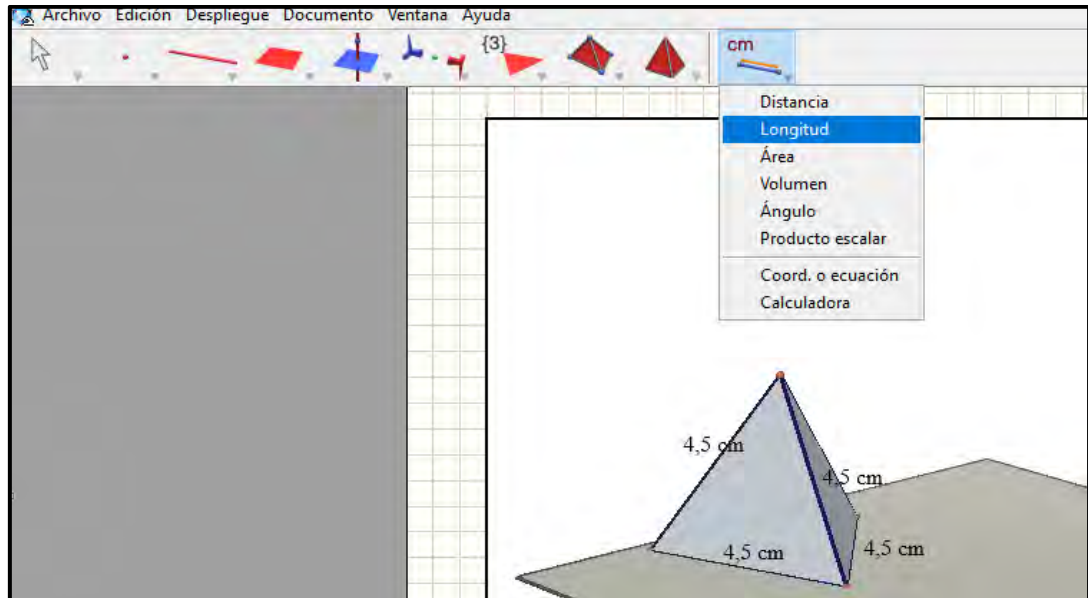


Figura 7. Herramienta longitud

- Herramienta *ángulo*: permite medir el ángulo formado por tres puntos.

La figura 8 nos muestra la medida de los ángulos de una de las caras del tetraedro regular.

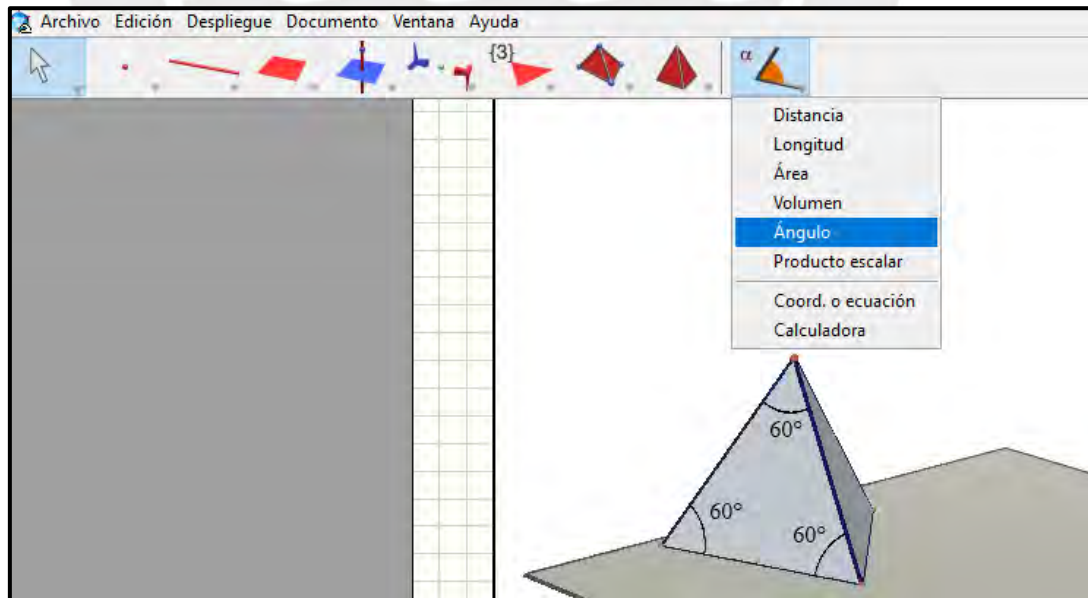


Figura 8. Herramienta ángulo

- Función atributos-*estilo de superficie*: esta función del Cabri 3D permite modificar el estilo de superficie de los objetos.

La figura 9 nos muestra el tetraedro regular con *estilo de superficie* rayado fino.

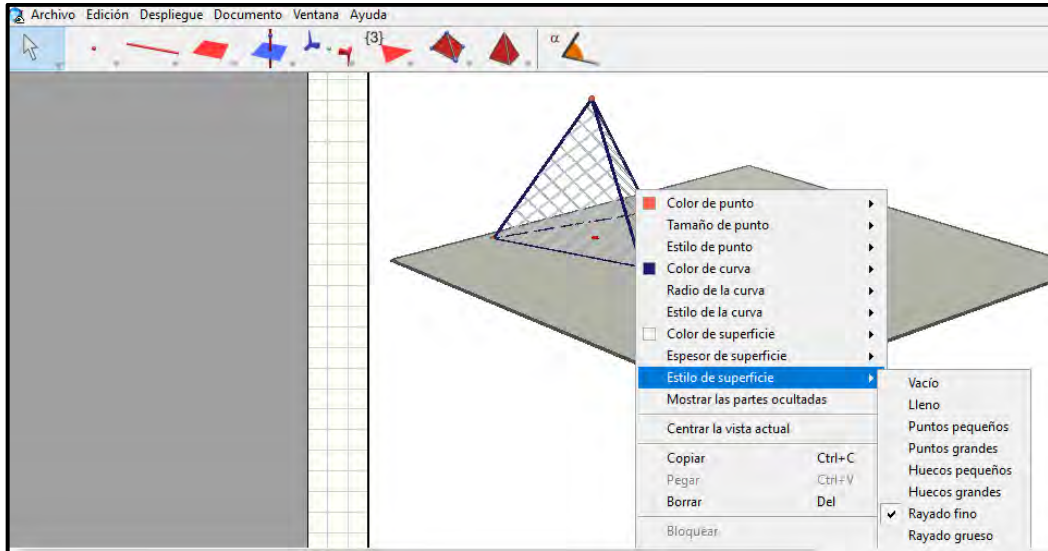


Figura 9. Función atributos para el estilo de superficie

- Función atributos-*color de curva*: esta función del Cabri 3D permite modificar el color de fuente de los objetos.

La figura 10 nos muestra las aristas de un tetraedro regular con atributos de *color de curva* rojo.

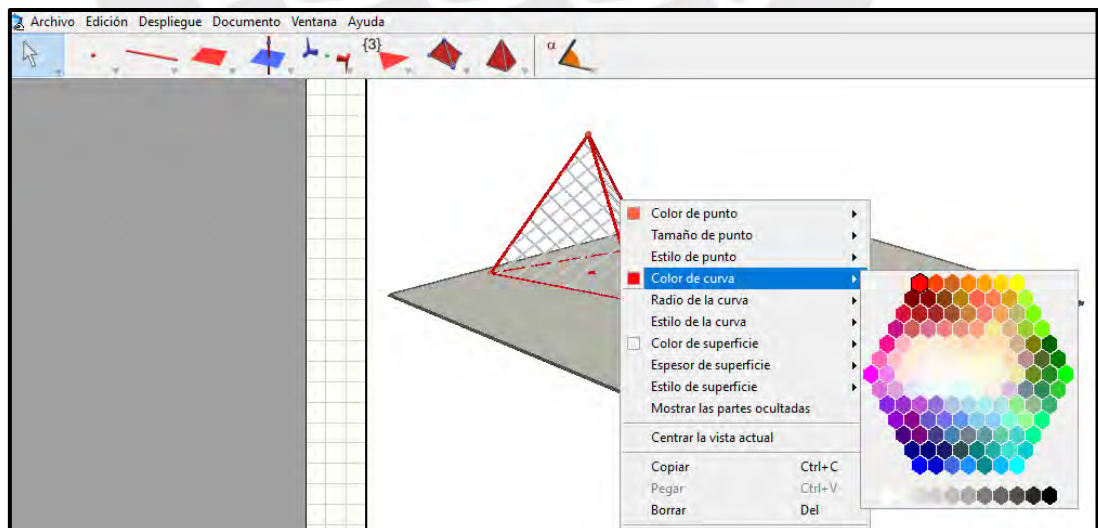


Figura 10. Función atributos para el color de curva

- Función *bola de cristal*: esta función del Cabri 3D permite observar la zona de trabajo desde diferentes puntos de vista. Para utilizarla, coloque el mouse en cualquier parte de la zona de trabajo, cliquee el lado derecho del mouse y, luego, desplace el cursor de arriba hacia abajo, de derecha a izquierda.

A continuación, presentamos la justificación, la pregunta y los objetivos de nuestra investigación.

1.3 Justificación de la investigación

Tomamos en cuenta, inicialmente, que las investigaciones presentadas en los antecedentes, entre ellas las de Dos Santos (2016), Possani (2012) y Camou (2010) sobre poliedros regulares, guardan cierta relación con el objeto matemático de nuestra investigación, el octaedro regular. Sin embargo, sus investigaciones tienen como base marcos teóricos diferentes al que proponemos en nuestra investigación. En este trabajo, se propone el análisis del proceso de la génesis instrumental de la medida del volumen del octaedro regular bajo los aspectos del Enfoque Instrumental.

Las investigaciones de, Del Castillo y Montiel (2009) e Iranzo y Fortuny (2009), tienen en común el uso del Geogebra en los procesos de la enseñanza y aprendizaje de objetos matemáticos diferentes al de nuestro interés, con el soporte teórico del Enfoque Instrumental. Sin embargo, estas investigaciones no usan el Cabri 3D.

En la misma línea, las investigaciones de León (2014) y Chumpitaz (2013) utilizan como marco teórico el Enfoque Instrumental, con el uso del Geogebra y están orientados a los objetos matemáticos función definida por tramos y elipse, respectivamente, pero no se refieren al octaedro regular, que es nuestro objeto de estudio con el uso del Cabri 3D.

Por otra parte, en cuanto al uso del Cabri 3D las investigaciones presentadas por Dos Santos (2016), Advíncula (2013), Martín (2013), Possani (2012), Gravina (2011), Almeida (2011), justifican la conclusión de que el mejor recurso tecnológico para la enseñanza de los poliedros es el Cabri 3D.

Así también, es pertinente señalar el documento Perú (2007), “Los poliedros Regulares Fascículo N° 7” proporcionado por el Ministerio de Educación a los docentes como material autoinstructivo desarrollando contenidos sobre los poliedros regulares: hexaedro (cubo), tetraedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro y los poliedros semiregulares o arquimedianos.

Por lo mencionado anteriormente, pensamos que el estudio del octaedro regular requiere ser investigado y, en nuestro caso, lo haremos con aspectos teóricos del Enfoque Instrumental y la Ingeniería Didáctica, y utilizaremos como medio el Cabri 3D, para analizar la génesis instrumental de la medida del volumen con estudiantes del cuarto grado de secundaria.

1.4 Pregunta y objetivos de la investigación

¿Cómo se produce la génesis instrumental de la medida del volumen del octaedro regular en estudiantes del cuarto grado de educación secundaria cuando trabajan una secuencia de actividades con Cabri 3D?

Para responder nuestra pregunta de investigación, nos planteamos los siguientes objetivos.

Objetivo General

Analizar el proceso de la génesis instrumental de la medida del volumen del octaedro regular en estudiantes del cuarto grado de educación secundaria.

Para alcanzar el objetivo general planteado, formulamos los siguientes objetivos específicos.

Objetivos Específicos

- Identificar, en las acciones de los estudiantes sus posibles esquemas de utilización (uso y de acción instrumentada) cuando movilizan la noción de octaedro regular en una secuencia didáctica en la que se utiliza Cabri 3D.
- Analizar, cómo los estudiantes asocian sus esquemas de utilización con las características del octaedro regular (artefacto) cuando conjeturan la medida del volumen del octaedro regular.

Después de presentado el problema de investigación, planteada la pregunta, así como sus objetivos, presentamos en el siguiente capítulo, aspectos del Enfoque Instrumental y aspectos de la Ingeniería Didáctica que guían el desarrollo de la presente investigación.

CAPÍTULO II: ASPECTOS DEL ENFOQUE INSTRUMENTAL E INGENIERÍA DIDÁCTICA

2.1 Aspectos del Enfoque Instrumental

En esta sección, abordaremos algunos aspectos del Enfoque Instrumental, el marco teórico de nuestra investigación. En ese sentido, definiremos los conceptos *sujeto*, *objeto*, *artefacto* e *instrumento*; sus interrelaciones y la *génesis instrumental*, desde la perspectiva de Rabardel (1995).

El Enfoque Instrumental propuesto por Rabardel (1995) tiene como referencias el estudio de los objetos o sistemas técnicos desde un enfoque antropotécnico, es decir, que el foco principal es el entorno humano ya que los hombres están presentes en el ciclo de vida de los objetos y sistemas, desde su diseño hasta su fin, interactuando con las fases principales de su funcionamiento y utilización. A continuación, mencionaremos algunos términos definidos por el investigador que son necesarios para el desarrollo de nuestra investigación.

Sujeto: puede referirse a un estudiante, un profesor, un niño, un operario, grupo de personas, que desarrollan una acción con un instrumento.

Artefacto: se refiere a un dispositivo material o simbólico que ha sufrido una transformación originada por un ser humano. En nuestro caso el artefacto es un medio simbólico representado por el octaedro regular. Así también puede entenderse el artefacto como una cosa susceptible de uso para inscribirse en actividades intencionadas, es decir, la intencionalidad es causa de su existencia. En otras palabras, es construido para actuar sobre el objeto y transformarlo para concretar una solución a un problema o una clase de problemas sociales.

El investigador señala también que el uso de un artefacto puede estudiarse desde distintos enfoques. Desde el **enfoque técnico**, el artefacto es un objeto de conocimiento diseñado para obedecer reglas y restricciones determinadas y que deben ser conocidas por el sujeto para su buena administración. Desde el **punto de vista funcional**, el artefacto es generador de transformaciones del producto tratado; el artefacto es lo que produce. Un tercer enfoque es el de **artefacto como medio de acción**. Según este enfoque, el artefacto es un medio que el sujeto toma para operar sobre el objeto.

Instrumento:

Rabardel (1995) define al instrumento desde un punto de vista psicológico como una entidad mixta, que incluye un componente artefactual (una parte de artefacto o un conjunto de artefactos) y unos componentes cognitivos (uno o varios esquemas mentales desarrollados por el usuario o apropiados de otros ya existentes).

En relación, al instrumento el autor señala que:

Utilizaremos el término “instrumento” para designar el artefacto en situación, inscrito en un uso, en una relación instrumental con la acción del sujeto, como medio de esta acción. Es solo una primera definición que corresponde a un enfoque mínimo de la noción psicológica de instrumento, que corresponderá a uno de los usos, el más débil, que haremos de la noción de instrumento (Rabardel, 1995, p.92).

A la definición anterior, el autor agrega que el *instrumento* es una entidad intermediaria entre el sujeto (usuario del instrumento) y el objeto sobre el cual realiza una tarea, y cuya principal característica es adaptarse al usuario y al objeto, adaptación que lo realiza a través de componentes cognitivos y semióticos en función del tipo de actividad en el que se inserta el instrumento o para el cual está diseñado. De este modo, es posible distinguir dos orientaciones en esta mediación: del **objeto al sujeto**, definida como mediación epistémica (el instrumento es un medio que permite conocer al objeto); y del **sujeto al objeto**, mediación pragmática (el instrumento es un medio para una acción transformadora dirigida al objeto).

Así mismo el autor señala que en cuanto a la ejecución de una tarea el sujeto no solamente asocia a la acción el artefacto, sino también los esquemas de utilización que van a permitir conjuntamente la inserción de un instrumento como componente funcional de dicha acción.

Por ejemplo, en nuestro caso para el artefacto octaedro regular, el estudiante con sus acciones en las secuencias de actividades investiga las propiedades del artefacto permitiendo el descubrimiento progresivo de sus componentes, para luego insertarlo como instrumento, con sus esquemas de utilización para ejecutar una tarea.

El autor, en referencia a la noción de esquema, considera la propuesta de Vergnaud, quien menciona el concepto de esquema como: “la organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dada. En los esquemas es donde se debe investigar los conocimientos-en-acto del sujeto, es decir, los elementos cognitivos que permiten a la acción del sujeto ser operatoria” (Vergnaud,1990, p.2).

Bajo el enfoque de Rabardel (1995), los esquemas son pragmáticos en el sentido de suponer que funcionan para la adquisición de conocimientos, para la adaptación a las situaciones, problemas por resolver y acciones del sujeto en estas circunstancias.

Esquemas de utilización

El autor propone que los esquemas de utilización, forman parte del instrumento, resultan de una construcción propia del sujeto o son producto de una apropiación de esquemas sociales de uso formados exteriormente a él y necesarias en el uso del artefacto. Con esta propuesta el autor muestra que el instrumento no existe por sí mismo, ha de ser construido por el sujeto para llevar a cabo una actividad, utilizando un artefacto y creando o movilizándolo esquemas de utilización.

De esta manera, el investigador distingue varios tipos de esquemas de utilización, los cuales están relacionados a diferentes tipos de actividades: el primer tipo está relacionado con las actividades referentes al conocimiento de las características y propiedades del artefacto, al que él denomina “tareas secundarias”; y el segundo tipo comprende las actividades que denomina “tareas primarias”, vinculadas hacia el objeto de la actividad.

Esta distinción, afirma el autor, permite diferenciar dos niveles de esquemas de utilización: los **esquemas de uso** y los **esquemas de acción instrumentada**. Los esquemas de uso son los que están asociados a las tareas secundarias. Según el autor, “Los esquemas de uso pueden situarse en el nivel de esquemas elementales. Lo que los caracteriza es su orientación hacia las tareas secundarias que corresponden a las acciones y actividades específicas directamente relacionadas con el artefacto” (Rabardel, 1995, p.172).

Por su parte, los **esquemas de acción instrumentada** se caracterizan por estar relacionados a la utilización de un artefacto en vista de realizar una acción (tareas primarias). Al respecto, el autor afirma:

Los esquemas de acción instrumentada consisten en totalidades cuyo significado está dado por el acto global que tiene como meta operar transformaciones sobre el objeto de la actividad. Esos esquemas incorporan, como constituyentes, los esquemas del primer nivel. Lo que les caracteriza es que son relativas las “tareas primeras” (Rabardel, 1995, p.172).

No obstante, el autor aclara que la noción de esquema no es rígida ni obedece a una propiedad del esquema, sino a la intencionalidad del uso. Así, un mismo esquema puede ser de uso, en una situación, o de acción instrumentada en otra.

La relación del artefacto con los esquemas de utilización está dada por el hecho de que los artefactos pueden inscribirse en una multiplicidad de esquemas de utilización, adoptando diferentes significados.

Los esquemas de uso y de acción instrumentada dependen mutuamente y poseen una dimensión privada (propia de cada sujeto) y social (involucra tanto a otros usuarios como a los diseñadores de los artefactos). Asimismo, Rabardel (1995) califica al *esquema de uso* como esquema social de utilización cuyas funciones son de naturaleza epistémica (comprensión de las situaciones), pragmática (pensadas en la obtención de resultados) y heurística (que orientan la actividad).

Visto así, el autor señala que el instrumento tiene dos componentes: el artefacto y los esquemas de utilización. Ambos se encuentran relacionados entre sí, pero, a la vez, tienen cierta independencia. Esto significa que un mismo esquema de utilización puede aplicarse a una multiplicidad de artefactos de una misma clase o de clases vecinas o diferentes. Del mismo modo, es posible utilizar un mismo artefacto según esquemas distintos, que van a dotar al artefacto de significados y funciones diferentes. En nuestra investigación, identificaremos y analizaremos los esquemas de utilización desarrollados por los estudiantes al llevar a cabo una secuencia de actividades en la que se utiliza el Cabri 3D para el aprendizaje de la medida del volumen del octaedro regular.

El Enfoque Instrumental, de acuerdo al autor estudia los procesos que desenvuelven la transformación progresiva del artefacto en instrumento, proceso al que denominó Génesis Instrumental, del que tratamos a continuación.

Génesis instrumental

El autor define la génesis instrumental como el proceso que resulta de la transformación progresiva del artefacto en instrumento. Esta génesis involucra dos polos del instrumento: el artefacto y los esquemas de utilización; en consecuencia, involucra dos dimensiones: la instrumentación (dirigida al sujeto) y la instrumentalización (relacionada al artefacto). La primera es definida como los procesos dirigidos hacia el sujeto. Por su parte, la segunda se define como el proceso de enriquecimiento de las propiedades del artefacto por parte del sujeto.

El autor define la instrumentación como:

El surgimiento y evolución de los esquemas de utilización y de acción instrumentada: constitución, funcionamiento, evolución por acomodación, coordinación, combinación, inclusión y asimilación recíproca, asimilación de artefactos nuevos a esquemas ya constituidos, etc. (Rabardel, 1995, p.211).

En referencia a la instrumentalización, el autor se refiere al,

Surgimiento de los componentes artefacto del instrumento: selección, reagrupación, producción e institución de funciones, desvíos y catacresis, atribución de propiedades, transformación del artefacto (estructura, funcionamiento, etc.) que prolongan las

creaciones y realizaciones de artefactos cuyos límites son difíciles de determinar debido a este proceso de transformación (Rabardel, 1995, p.211).

En la instrumentalización por atribución de función del artefacto el autor presenta dos niveles: una instrumentalización de tipo local, en la cual el artefacto es instrumentalizado momentáneamente, y otra, de naturaleza permanente, en la que las funciones del artefacto operan de manera durable. En ningún caso, el artefacto sufre una transformación material, pero sí se enriquece con nuevas propiedades.

En cuanto a las características de la instrumentación, Rabardel (1995) explica que:

[...] la génesis de los esquemas, la asimilación de nuevos artefactos a los esquemas (que dan así un nuevo significado a los artefactos), la acomodación de los esquemas (que contribuye a sus cambios de significado), son constitutivos de esta segunda dimensión de la génesis instrumental: los procesos de instrumentación (p.221).

En nuestra investigación, sobre la base del Enfoque Instrumental, analizaremos la génesis instrumental de la medida del volumen del octaedro regular, identificando los procesos de instrumentación e instrumentalización del artefacto octaedro regular

2.2 Aspectos de Ingeniería Didáctica

Nuestra investigación es cualitativa. Para esta calificación, nos basamos en Hernández, Fernández y Baptista (2010), quienes afirman que una investigación cualitativa utiliza la recolección de datos sin medición numérica para descubrir o afinar preguntas de investigación en el **proceso** de interpretación. La recolección de datos está fuertemente influenciada por las experiencias de los participantes más que por la aplicación de instrumentos estandarizados. Las preguntas y respuestas de los estudios cualitativos pueden ocurrir antes, durante o después de la recolección y análisis de los datos. El **proceso** de interpretación se desenvuelve dinámicamente entre los hechos y su interpretación en ambos sentidos.

Según los autores, la investigación cualitativa trata de identificar en su verdadera magnitud la naturaleza profunda de las realidades de sus participantes. La “realidad” es definida como la forma en que interpretan la realidad los participantes en la investigación, realidades que se van modificando mientras transcurre el estudio y que el investigador representa como fuentes de datos; además, este investigador se introduce en las experiencias de los participantes, considerándose como parte de ellos. El investigador trata de “reconstruir” la realidad natural (donde los participantes se comportan como lo hacen en su vida cotidiana) para luego evaluar el desarrollo natural de los sucesos, sin manipular o incentivar a quienes participan en la investigación.

Otra característica de la investigación cualitativa es que da mayor énfasis a los procesos antes que a los resultados o productos, esto es, dependiendo del objetivo de la investigación, se determina qué procesos analizar prioritariamente.

Nuestro trabajo de investigación presenta características de la investigación cualitativa. Como método de la investigación, elegiremos la ingeniería didáctica, ya que permitirá describir–explorar el proceso de nuestras interacciones en clase con los estudiantes.

En ese sentido, Artigue (1995) afirma que la noción de Ingeniería Didáctica se inicia en la didáctica de las matemáticas a comienzos de los 80 en Francia, como un método para las realizaciones tecnológicas de los hallazgos de la teoría de Situaciones Didácticas y de la Transposición Didáctica, y como respuesta a la exigencia de que las investigaciones en didáctica de las matemáticas sean funcionales, efectivas, en la producción de la enseñanza y aprendizaje de un objeto matemático, y así también para consolidarla como un método de investigación.

El nombre de Ingeniería Didáctica se origina al comparar un trabajo didáctico con el de un ingeniero al realizar un proyecto; al respecto, la autora afirma que un ingeniero:

(...) para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos depurados de la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo (Artigue, 1995, p.33).

Esto es, el profesor-ingeniero elabora un esquema experimental en el aula de clase, sobre la base de realizaciones didácticas, contemplando la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de ingeniería.

Douady (citado en Artigue, 1995) en el mismo sentido, menciona:

El término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un profesor-ingeniero, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos. En el transcurso de las interacciones entre el profesor y los estudiantes, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los estudiantes y en función de las selecciones y decisiones del profesor. De esta forma, la ingeniería didáctica es a la vez un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso en el transcurso del cual el profesor ejecuta el producto adaptándolo, si se presenta el caso, a la dinámica de la clase (p.61).

En la presente investigación, tomaremos aspectos de la ingeniería didáctica, porque estamos interesados en hacer una intervención con estudiantes en la parte experimental, para que ellos aprendan un determinado conocimiento matemático específico. En el caso de nuestro trabajo,

se propone que los estudiantes hallen la medida del volumen del octaedro regular, que conjeturen y lleguen, finalmente, a entender cómo se halla la medida de su volumen; además, con este propósito, se espera percibir el proceso de la génesis instrumental de la medida del volumen del octaedro regular con el Cabri 3D.

Por otro lado, Artigue (1995) señala que la ingeniería didáctica presenta las siguientes fases: los análisis preliminares, la concepción y el análisis a priori, la experimentación, los análisis a posteriori y la validación, las que presentamos en seguida.

Los análisis preliminares

En cuanto a los análisis preliminares, la autora considera algunos aspectos incluidos en la enseñanza del objeto matemático, y estos comprenden: el análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza; el análisis didáctico asociada a la enseñanza tradicional y sus efectos; el análisis cognitivo asociada a las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución, y, finalmente, el análisis del campo de restricciones donde se va a situar la acción didáctica efectiva. Al respecto, la autora considera que los análisis preliminares mantienen su calidad de preliminares en su primer nivel de elaboración, y estos se retoman en el transcurso de la investigación si es necesario.

En el análisis epistemológico de nuestro trabajo, presentaremos aspectos históricos del octaedro regular basados en Lanza (2009), Quesada (2006), Cardona, Dussan, Cubillas y Ocaña (2006), Navarro (2002), Puertas (1996) y, en cuanto al estudio matemático del octaedro regular, los Elementos de Euclides en su libro XIII y de los matemáticos Pogorélov (1982) y Alexander y Koeberlein (2013). Estos estudios se encuentran desarrollados en el capítulo estudio del octaedro regular.

En referencia a lo didáctico, presentaremos el tratamiento que se da al volumen de los cuerpos geométricos, de acuerdo con Perú (2016), en el Currículo Nacional de la Educación Básica y otros documentos oficiales, y analizaremos la forma cómo abordan los poliedros los libros *Matemática 4*, que distribuyó el Ministerio de Educación a los colegios públicos durante el año 2016 y el libro *Matemática por Áreas*, de la Editorial San Marcos (2016).

En el Currículo Nacional de la Educación Básica 2016, el área de Matemática está estructurada para que los estudiantes alcancen competencias, capacidades y estándares de aprendizaje y desempeño a lo largo de su educación básica. En referencia a la enseñanza de la geometría, está se considera en el desarrollo de la competencia “resuelve problemas de forma, movimiento y localización”, tal como se describe en el cuadro 2.

Cuadro 2. Competencia Resuelve problemas de forma, movimiento y localización

Competencia	Capacidades, que implica esta competencia
<p>Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.</p> <p>Consiste en que el estudiante se oriente y describa la posición y el movimiento de objetos y de sí mismo en el espacio, visualizando, interpretando y relacionando las características de los objetos con formas geométricas bidimensionales y tridimensionales. Implica que realice mediciones directas o indirectas de la superficie, del perímetro, del volumen y de la capacidad de los objetos, y que logre construir representaciones de las formas geométricas para diseñar objetos, planos y maquetas, usando instrumentos, estrategias y procedimientos de construcción y medida. Además, describa trayectorias y rutas, usando sistemas de referencia y lenguaje geométrico.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones. • Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas • Usa estrategias y procedimientos para orientarse en el espacio. • Argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas.

Fuente. Currículo Nacional de la Educación Básica 2016

Los estándares de aprendizaje de la competencia “resuelve problemas de forma, movimiento y localización” que se esperan alcanzar en los estudiantes del cuarto año de educación secundaria aparecen en el cuadro 3.

Cuadro 3. Nivel de competencia de estudiantes del cuarto grado de educación secundaria

Nivel	Descripción de los niveles del desarrollo de la competencia
DESTACADO	Resuelve problemas en los que modela las características y localización de objetos con propiedades de formas geométricas, así como su localización y desplazamiento usando coordenadas cartesianas, la ecuación de la elipse y la circunferencia, o una composición de transformaciones de formas bidimensionales. Expresa su comprensión de las relaciones métricas entre los elementos de la circunferencia y elementos de los polígonos inscritos; así como la trayectoria de objetos usando la ecuación de la elipse, usando diversas representaciones. Clasifica formas geométricas compuestas, basado en criterios propios y propiedades geométricas. Combina e integra estrategias o procedimientos para determinar las ecuaciones de la recta, parábola y elipse, así como instrumentos y recursos para construir formas geométricas. Plantea afirmaciones sobre relaciones entre conceptos geométricos, deduce propiedades y las sustenta con argumentos que evidencian su solvencia conceptual.
Nivel 7	Resuelve problemas en los que modela características de objetos con formas geométricas compuestas, cuerpos de revolución, sus elementos y propiedades, líneas, puntos notables, relaciones métricas de triángulos, distancia entre dos puntos, ecuación de la recta y parábola; la ubicación, distancias inaccesibles, movimiento y trayectorias complejas de objetos mediante coordenadas cartesianas, razones trigonométricas, mapas y planos a escala. Expresa su comprensión de la relación entre las medidas de los lados de un triángulo y sus proyecciones, la distinción entre transformaciones geométricas que conservan la forma de aquellas que conservan las medidas de los objetos, y de cómo se generan cuerpos de revolución, usando construcciones con regla y compás. Clasifica polígonos y cuerpos geométricos según sus propiedades, reconociendo la inclusión de una clase en otra. Selecciona, combina y adapta variadas estrategias, procedimientos y recursos para determinar la longitud, perímetro, área o volumen de formas compuestas, así como construir mapas a escala, homotecias e isometrías. Plantea y compara afirmaciones sobre enunciados opuestos o casos especiales de las propiedades de las formas geométricas; justifica, comprueba o descarta la validez de la afirmación mediante contraejemplos o propiedades geométricas.
Nivel 6	Resuelve problemas en los que modela características de objetos mediante prismas, pirámides y polígonos, sus elementos y propiedades, y la semejanza y congruencia de formas geométricas; así como la ubicación y movimiento mediante coordenadas en el plano cartesiano, mapas y planos a escala, y transformaciones. Expresa su comprensión de las formas congruentes y semejantes, la relación entre una forma geométrica y sus diferentes perspectivas; usando dibujos y construcciones. Clasifica prismas, pirámides, polígonos y círculos, según sus propiedades. Selecciona y emplea estrategias, procedimientos y recursos para determinar la longitud, área o volumen de formas geométricas en unidades convencionales y para construir formas geométricas a escala. Plantea afirmaciones sobre la semejanza y congruencia de formas, entre relaciones entre áreas de formas geométricas; las justifica mediante ejemplos y propiedades geométricas.

Fuente. Currículo Nacional de la Educación Básica 2016

Como observamos en el cuadro 3, el estudiante debe ser capaz de orientarse y describir la posición y movimiento de figuras geométricas de su contexto en la vida diaria, observando, interpretando y relacionando sus características con objetos tridimensionales. Por ejemplo, el estudiante podría encontrar semejanzas entre el poliedro icosaedro y una pelota de fútbol, o podría relacionar las construcciones arquitectónicas de forma piramidal con la mitad de un octaedro regular. El Currículo Nacional de la Educación Básica 2016 también contempla que el estudiante debe tener conocimiento de las propiedades de longitud, perímetro, área, volumen de los prismas, pirámides, y figuras compuestas, mas no detalla como figura compuesta a los poliedros.

Asimismo, como parte del análisis didáctico, presentamos algunos informes del Ministerio de Educación del Perú (MINEDU) sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En Perú (2004), el Informe de la Unidad de Medición de la Calidad Educativa (UMC) sobre la Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil 2004 da cuenta de los bajos resultados obtenidos por los estudiantes del VII ciclo (3^{ro}, 4^{to} y 5^{to} años, cursados por estudiantes cuyas edades están entre 14 y 16 años). Solo el 6,0 % de estudiantes de tercer grado, y el 2,9% de quinto grado alcanzaron el nivel suficiente, esto es, el nivel adecuado para el grado en cuanto al desarrollo de las habilidades y destrezas matemáticas.

El documento señala, respecto al eje temático **pensamiento geométrico**, que los estudiantes presentan dificultades al:

- Resolver situaciones problemáticas rutinarias de pocas etapas que involucran el uso de figuras geométricas planas elementales, **sólidos geométricos básicos** y algunas de sus propiedades más elementales.
- Relacionar las propiedades o atributos de una misma o de diferentes figuras o **sólidos geométricos entre sí** y al realizar conexiones entre los diversos contenidos de este campo conceptual. Por ejemplo, no pueden calcular el área de un cuadrado a partir de su perímetro.
- Calcular áreas de figuras geométricas elementales en los casos en los que se requiere aplicar directamente la fórmula, pues no tienen incorporada la noción de área ni recuerdan la fórmula correspondiente.
- Interpretar el Teorema de Pitágoras, pues no identifican los elementos de los triángulos rectángulos correctamente, sobre todo en triángulos rectángulos que no presentan uno de sus catetos paralelo a la horizontal. La mayoría de estudiantes que usa correctamente este teorema evidencia aplicarlo en forma mecánica para calcular un lado a partir de los otros dos (p. 198).

Estas dificultades, al parecer, no fueron superadas luego de ocho años. Prueba de ello, la encontramos en Perú (2012), el Informe Pedagógico de Resultados del *Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes* (PISA) en Matemática 2012, elaborado por la Unidad de Medición de Calidad del Aprendizaje del Ministerio de Educación del Perú, que concluye que

el **47% de nuestros estudiantes se encuentra debajo del nivel 1** en la subcategoría Espacio y forma (subcategoría equivalente con la competencia “resuelve problemas de forma, movimiento y localización” del Currículo Nacional de la Educación Básica 2016). Este resultado evidencia que el área de geometría requiere ser trabajada con mayor profundidad para mejorar estos índices.

En referencia al análisis de cómo abordan la enseñanza de los poliedros los textos del cuarto grado de secundaria, indicamos que este tema se detalla en el capítulo 3, que está dedicado al estudio del octaedro regular.

En cuanto al análisis cognitivo, tomamos en cuenta los estudios de nuestros antecedentes como el de Almeida (2010), Possani (2012) y Advíncula (2013), ya que ellos han realizado investigaciones con estudiantes, que les han permitido detectar los avances y dificultades en el aprendizaje de los poliedros.

Asimismo, consideramos la evolución de las características cognitivas de los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria con los cuales realizaremos las actividades de nuestra investigación. Al respecto, suponemos que, cognitivamente, han desarrollado competencias, capacidades y estándares de aprendizaje del área de Matemática de acuerdo a lo diseñado en el Currículo Nacional de la Educación Básica 2016 tales como los siguientes: resuelve problemas en los que modela características y propiedades de los elementos de objetos en forma de prismas, pirámides y polígonos; comunica la relación de las figuras tridimensionales en diferentes perspectivas; clasifica prismas, pirámides y polígonos según sus propiedades; y plantea afirmaciones de congruencia y semejanza de figuras tridimensionales. Además, en cuanto a los estándares de aprendizaje en la competencia “resuelve problemas de forma, localización y movimiento”, en el aprendizaje de la enseñanza de la geometría, se espera que los estudiantes alcancen conocimientos de prismas, pirámides, cuerpos geométricos de formas compuestas, polígonos, circunferencia y círculo, y relaciones métricas de los triángulos, los cuales servirán para facilitar el desarrollo de las actividades propuestas en nuestra investigación.

Concepción y el análisis a priori

Luego de haber culminado el análisis preliminar, vamos a diseñar nuestra secuencia de actividades. Elaboraremos una secuencia de tres actividades en las que los estudiantes utilicen el Cabri 3D. En esta fase, señala Artigue (1995) se tiene por objetivo: controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado por medio de las variables **micro-**

didácticas o locales en la organización de las secuencias de actividades en el aula y las variables **macrodidácticas o globales** referidas a la organización global de la ingeniería.

En referencia al análisis a priori, Artigue (1995) afirma:

[...] el objetivo del análisis a priori es determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Por lo anterior, este análisis se basa en un conjunto de hipótesis. La validación de estas hipótesis está, en principio, indirectamente en juego en la confrontación que se lleva a cabo en la cuarta fase entre el análisis a priori y el análisis a posteriori (Artigue, 1995, p. 45).

Sin embargo, en nuestro caso, diseñaremos una secuencia de actividades con el propósito de que el artefacto octaedro regular se convierta en instrumento, y con el soporte de nuestro marco teórico del Enfoque Instrumental, nos enfocaremos en identificar los posibles esquemas de utilización propuestos por los estudiantes antes de la presentación de la propuesta didáctica (análisis a priori). Para ello, haremos el análisis a priori, tomando en cuenta si los esquemas previstos que hemos supuesto para cada actividad conseguirán guiar a los estudiantes a transitar por los procesos de instrumentalización e instrumentación en el estudio de nuestro objeto matemático, y generar la génesis instrumental de la medida del volumen del octaedro regular.

La experimentación

Durante esta fase, según la autora, se establecen las condiciones para la recolección de datos y aplicación de los instrumentos, tales como fichas de actividades, fichas de observación, archivos de software, grabaciones, etc.

Según la autora, la experimentación, supone la explicación de los objetivos y condiciones de la realización de la investigación a los estudiantes participantes, el establecimiento del contrato didáctico y la disposición del registro de observaciones realizadas durante la experimentación.

En nuestro trabajo, durante la experimentación, aplicaremos una secuencia de tres actividades, las cuales son: en principio, que los estudiantes se familiaricen con algunas herramientas del Cabri 3D; la segunda actividad promueve que los estudiantes exploren el octaedro regular con mediación del Cabri 3D; y la tercera actividad propone que los estudiantes se apropien del cálculo de la medida del volumen del octaedro regular. En esta fase, contaremos con fichas de actividades para recolectar la información de los estudiantes que, además, contendrán la producción de los estudiantes.

Los análisis a posteriori y validación

Esta última fase de la Ingeniería Didáctica, según Artigue (1995), se basa en la recolección de datos a lo largo de la experimentación, datos que incluyen las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza y las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella.

Asimismo, en esta fase, de acuerdo con la autora se da la validación interna confrontando los resultados obtenidos en la fase de la experimentación (análisis a posteriori) con el análisis a priori. En nuestro trabajo, después de la experimentación, organizamos los datos de la fase experimental que nos permitirá describir y analizar las respuestas de los estudiantes para poder hacer el análisis en base al Enfoque Instrumental y observar cómo se ha desarrollado el proceso de la génesis instrumental de la medida del volumen del octaedro regular en los estudiantes del cuarto año de secundaria.

Para la recolección de la información durante la fase experimental, utilizamos los siguientes instrumentos:

Fichas de actividades: organizadas en tres actividades, cada una con una secuencia de preguntas que desarrollarán los estudiantes. Se muestran en los anexos 2,3 y 4.

Fichas de observación: disponibles por el observador para anotar el comportamiento de los estudiantes de algunos aspectos que se creen conveniente para, posteriormente, ser analizados. Se muestra en el anexo 6.

Archivos de Cabri 3D: los estudiantes enviarán sus archivos con extensión *.cg3 a la computadora del coordinador de informática, y luego serán capturados para su posterior análisis.

Después de presentados los aspectos teóricos y metodológicos de la tesis, es necesario presentar un breve estudio del octaedro regular.

CAPÍTULO III: ESTUDIO DEL OCTAEDRO REGULAR

En el presente capítulo, se describe un estudio del octaedro regular, desarrollado desde varios contextos. En primer lugar, presentamos el octaedro regular, sus propiedades y su relación con otros poliedros regulares. Luego, se muestra los descubrimientos en barro de figuras parecidas a los poliedros en el periodo Neolítico, la construcción del octaedro regular explicada por Euclides (300 a.C.) y su estudio y su representación en obras de arte por artistas de la época del Renacimiento. Finalmente, se presenta el análisis de dos libros de matemática del cuarto año de educación secundaria, considerando en el análisis su relación con nuestro marco teórico del Enfoque Instrumental.

3.1 El octaedro regular

Rangel (1982) define el octaedro regular como un poliedro convexo regular. Se muestra en la figura 11 la clasificación general de los poliedros propuesta por el autor. De esta forma, es necesario explicar el concepto de poliedro regular, con el propósito de entender las características y propiedades, del octaedro regular.

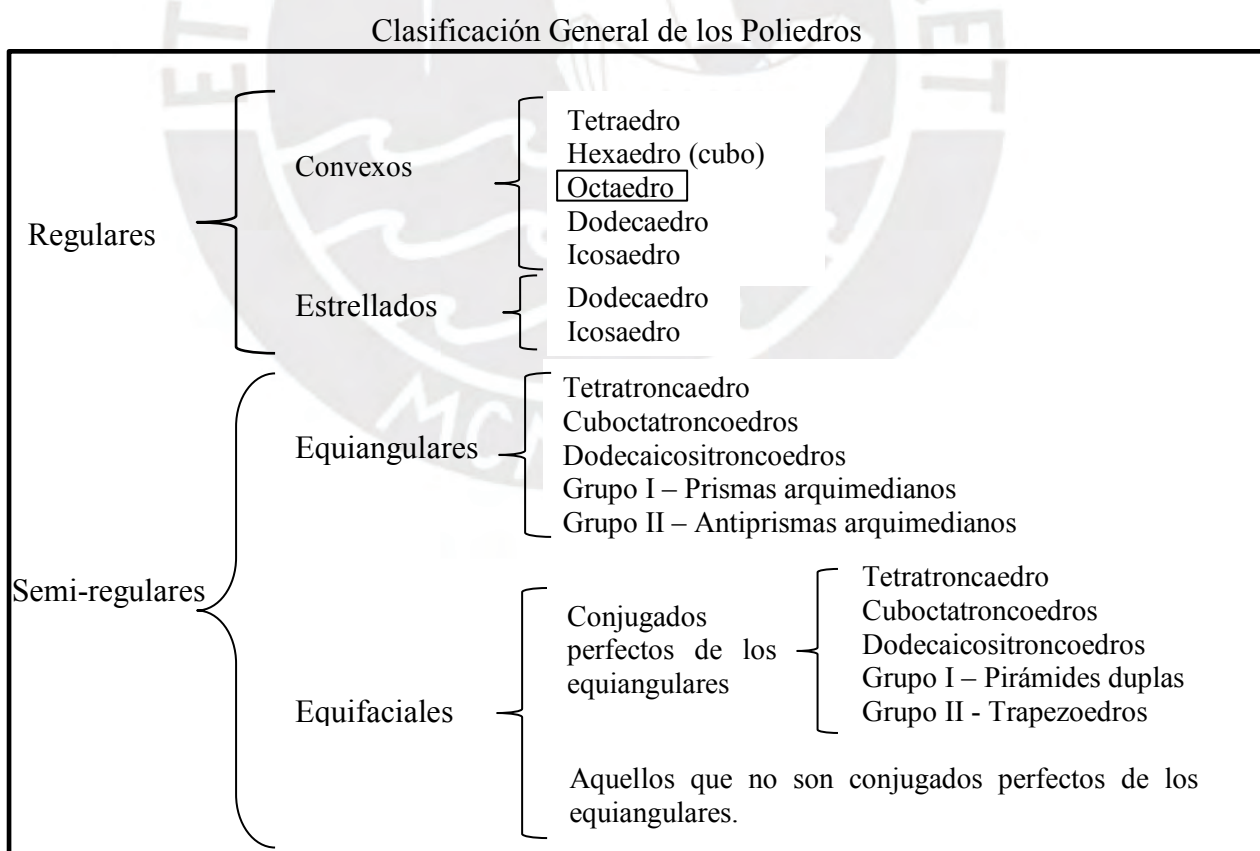


Figura 11. Clasificación de los poliedros
Fuente: Adaptado de Rangel (1982, p. 12).

Poliedros regulares convexos

Pogorélov (1974) afirma que un poliedro es regular cuando sus caras son polígonos regulares de un mismo número de lados y en los que concurren en cualquier vértice el mismo número de caras. Las caras de un poliedro regular son triángulos equiláteros, cuadrados o pentágonos regulares.

Así mismo, el autor comenta respecto de los poliedros regulares lo siguiente:

Efectivamente, a partir del hexágono regular, los ángulos internos no son menores que 120° y, como quiera que en todo vértice del poliedro convergen como mínimo tres aristas, resulta que la suma de los ángulos planos del ángulo poliedro correspondiente a cualquier vértice del poliedro regular no sería menor que $3 \times 120^\circ = 360^\circ$; pero esto es imposible pues la suma de los ángulos planos de cualquier ángulo poliedro convexo es menor que 360° . [...] Si las caras del poliedro regular son triángulos regulares, en todo vértice del poliedro no pueden converger más de cinco aristas. [...] Si las caras del poliedro regular son cuadradas, el número de aristas convergentes en todo vértice del poliedro no es mayor que tres y, por consiguiente, es igual a tres. [...] Si las caras del poliedro son pentágonos regulares, en todo vértice también convergen tres aristas solamente. [...] En todo poliedro regular son iguales todos los ángulos diedros (Pogorélov, 1974, pp. 180-181).

Por otra parte, Alexander y Koeberlein (2013) definen al poliedro regular convexo como el poliedro cuyas caras son todas polígonos regulares iguales y los ángulos diedros formados por caras adyacentes son también iguales.

El autor menciona que hay cinco poliedros regulares:

- 1.-El tetraedro regular, que tiene 4 caras (triángulos equiláteros), 4 vértices y 6 aristas.
- 2.-El hexaedro regular, que tiene 6 caras (cuadrados congruentes), 8 vértices y 12 aristas.
- 3.-El octaedro regular, que tiene 8 caras (triángulos equiláteros), 6 vértices y 12 aristas.
- 4.-El dodecaedro regular, que tiene 12 caras (pentágonos regulares), 20 vértices y 30 aristas.
- 5.-El icosaedro regular, que tiene 20 caras (triángulos equiláteros), 12 vértices y 30 aristas.

Por lo mencionado anteriormente, en nuestra investigación tomaremos como definición de octaedro regular las definiciones propuestas por Pogorélov (1974), y la de Alexander y Koeberlein (2013).

Planos y ejes de simetría en el Octaedro regular

Lanza (2009), en referencia a las propiedades de simetría en los poliedros, en los que incluye al octaedro regular, manifiesta que:

Los *sólidos platónicos* son fuertemente simétricos, presentan:

- a) Simetría central respecto a un punto del espacio (centro de simetría) que equidista de sus caras, de sus vértices, y de sus aristas.
- b) Simetría axial respecto a una serie de ejes de simetría que pasan por el centro de la simetría anterior.
- c) Simetría especular respecto a una serie de planos de simetría (o planos principales), que los dividen en dos partes iguales.

Como consecuencia geométrica de lo anterior, se puede trazar en todo sólido platónico tres esferas particulares, todas ellas a partir del centro de simetría del poliedro:

- 1) Esfera inscrita, tangente a todas sus caras en su centro.
- 2) Esfera tangente a todas sus aristas en su centro.
- 3) Esfera circunscrita, que pasa por todos los vértices del poliedro (p.261).

En relación con el octaedro regular, en el desarrollo de nuestra investigación consideramos un plano de simetría especular, es decir, aquel plano que divide al octaedro en dos pirámides cuadrangulares iguales.

3.2 Aspectos históricos y matemáticos

Presentamos a continuación aspectos de la evolución histórica de los poliedros regulares (sólidos platónicos), puesto que en ella se incluye nuestro objeto matemático. Para ello, nos basamos en Lanza (2009), Quesada (2006), Cardona, Dussan, Cubillas, Ocaña (2006), Navarro (2002) y, Puertas (1996).

Según Quesada (2006), muchas personas ajenas a las matemáticas no podrían identificar los nombres ni definir algunas características de los poliedros regulares, pero si los reconocerían. Este sería el caso del tetraedro regular, del cubo (hexaedro regular), del **octaedro regular**, del dodecaedro regular y del icosaedro regular, denominados también sólidos platónicos.

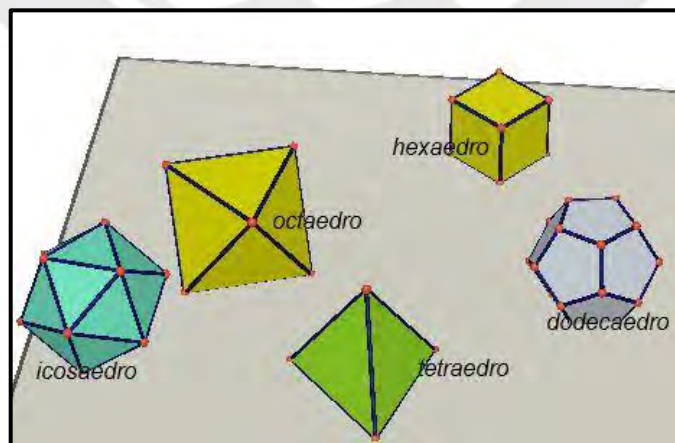


Figura 12. Los sólidos platónicos

El autor afirma que los restos arqueológicos más antiguos de figuras bastante parecidas a estos poliedros, aunque muy redondeadas se encontraron talladas en barro del período Neolítico en

un yacimiento en Escocia, aproximadamente 2000 a.C. (véase la figura 13). Es por eso que el autor afirma que en la Antigua Grecia se inicia el estudio de estas figuras geométricas; Platón las describe alrededor del año 350 a.C. en su más significativo diálogo, el “Timeo”, por lo que ahora denominamos estas figuras como los sólidos *platónicos*. Quesada (2006) manifiesta que quien realmente concreta el estudio matemático de los sólidos platónicos fue Euclides de Alejandría, construyéndolos e inscribiéndolos en una esfera, y explicándolos en el libro XIII de los Elementos de Euclides, alrededor del año 300 a.C.



Figura 13. Aproximaciones a sólidos platónicos encontrados en Escocia

Fuente: Quesada (2006 p. 4)

Navarro (2002) afirma en cuanto al libro *Los Elementos de Euclides*, que este estudia la geometría y los números. Se encuentra organizado en trece capítulos, denominados cada uno de ellos “libro”. Los tres últimos libros estudian la geometría del espacio. Cada libro está compuesto por diferentes definiciones, proposiciones, lemas, postulados, etc. En el libro XIII, se resuelven las construcciones de los cinco sólidos platónicos en el interior de una esfera.

Por otro lado, Puertas (1996) comenta que la proposición 14 “Construir un octaedro en una esfera, y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es el doble del cuadrado del lado del octaedro” Euclides la describe en lenguaje natural, de la siguiente forma

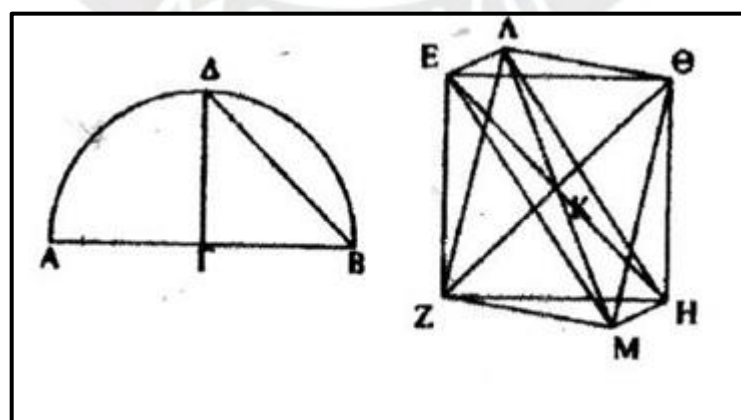


Figura 14. Proposición 14 traducida por Puertas

Fuente: Puertas (1994 p.339)

En la figura 14, se representa como AB el diámetro de la esfera, el semicírculo $A\Delta B$ considerando Γ el punto medio de AB se traza el triángulo rectángulo $\Delta\Gamma B$. Se considera el cuadrado $EZH\theta$ que tenga como lado la medida de ΔB , se traza θZ y EH , la recta $K\Lambda$ perpendicular con el plano del cuadrado $EZH\theta$, $\Lambda E, \Lambda Z, \Lambda H, \Lambda\theta, ME, MZ, MH, M\theta$, y luego explica que cada uno de los triángulos cuyas bases son los lados del cuadrado $EZH\theta$ y sus vértices los puntos Λ, M son triángulos equiláteros; y por tanto ha construido un octaedro comprendido por ocho triángulos equiláteros, y así también explica, en la figura 14, que el semicírculo descrito por ΛM pasará por los puntos $EZH\theta$, por lo que el octaedro quedará “envuelto” en una esfera; además, prueba que el cuadrado de la medida del diámetro de la esfera ΛM es igual al doble de la medida de la arista del octaedro regular, esto es: $\Lambda M^2 = 2\Lambda M^2$.

Por otra parte, Cardona, Ocaña, Dussan, Cubillas, y Ocaña (2006) explican la proposición 14 de la siguiente forma:

La proposición 14 del Libro XIII propone construir un octaedro y probar que el cuadrado del diámetro de la esfera que lo contiene equivale al doble del lado del octaedro. Euclides pide construir el segmento AB y la semicircunferencia ADB con centro en C (Figura 15); a continuación, construye los segmentos EK, GK, HK y FK congruentes con CB y de tal manera que EG sea perpendicular a FH (E, K y G son colineales, de la misma manera que lo son F, K y H); después traza LM perpendicular al plano del cuadrado $EFGH$, teniendo la precaución de que KL y KM sean también congruentes con CB . En ese orden de ideas, es fácil advertir que $EF, FG, GH, HE, EL, FL, GL, HL, EM, FM, GM, HM$, son todos iguales a DB , pues el cuadrado de cada uno de ellos es el doble del cuadrado de CB . Así las cosas, los triángulos $LEF, LFG, LHG, LHE, MEF, MFG, MGH$, y MHE son todos equiláteros y congruentes entre sí. El sólido así construido es, pues, un octaedro. EG , que es igual a AB , es el diámetro de la esfera que lo contiene, y su cuadrado resulta equivalente a dos veces el cuadrado de EL , el lado del octaedro. Por lo tanto:

$$d^2 = 2L^2_0$$

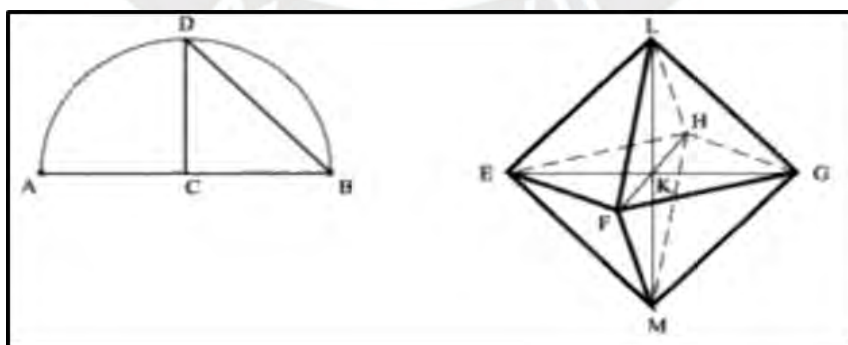


Figura 15. Proposición 14 traducida por Cardona et al.

Fuente: Cardona (p.196)

A continuación, modelamos en Cabri 3D, la construcción propuesta por Euclides y explicada por Cardona et al. (2006) sobre la construcción del octaedro regular.

1.-En principio, el autor explica que Euclides construye el segmento \overline{AB} y la semicircunferencia ADB con centro en C (ver Figura 15); a continuación, construye los segmentos \overline{EK} , \overline{GK} , \overline{HK} y \overline{FK} congruentes con \overline{CB} .

Con Cabri 3D, construimos una circunferencia de centro K con radio igual al segmento \overline{CB} , luego un cuadrado $EFGH$ centrado en K y cuyos vértices E , F , G , H se ubican en la circunferencia. Se puede demostrar que las diagonales del cuadrado son perpendiculares y se bisecan, por tanto, \overline{EG} y \overline{FH} son perpendiculares y son congruentes, los segmentos \overline{EK} , \overline{KG} , \overline{FK} , \overline{KH} son iguales al radio de la circunferencia \overline{CB} tal como se muestra en la Figura 16. Además, se observa que los puntos C y D de la figura 15 son equivalentes a los puntos K y H respectivamente, de la figura 16.

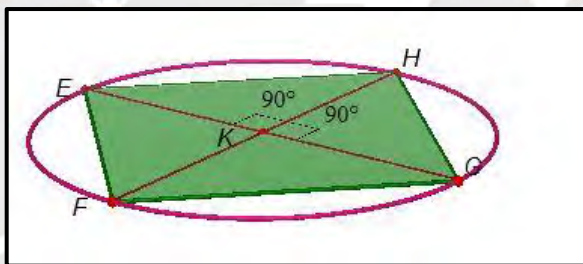


Figura 16. Cuadrado en Cabri 3D

En la construcción de Euclides (ver Figura 15), en la semicircunferencia de diámetro \overline{AB} , con centro en C traza el triángulo rectángulo DCB , de tal forma que se cumplen las siguientes relaciones $AC = CB$, $CB = CD$.

Además, sabemos que en el triángulo rectángulo DCB se cumple:

$$DB^2 = CB^2 + CD^2 = CB^2 + CB^2 = 2CB^2$$

$$\sqrt{DB^2} = \sqrt{2CB^2} \rightarrow DB = \sqrt{2} CB$$

2.- Luego Euclides traza la recta LM perpendicular al plano del cuadrado $EFGH$ teniendo la precaución de que KL y KM sean también congruentes con \overline{CB} .

Con Cabri 3D, levantamos la perpendicular al plano que contiene el cuadrado $EFGH$ por el punto K ; en seguida, construimos una esfera centrada en el punto K y con radio igual al segmento \overline{CB} que es igual a \overline{KG} . La esfera intercepta a la perpendicular en los puntos L y M .

Al ser los segmentos $\overline{EK}, \overline{KG}, \overline{FK}, \overline{KH}, \overline{KL}, \overline{KM}$ iguales al radio de la esfera, esta pasa por los puntos E, F, G, H, L, M. Además, \overline{KL} y \overline{KM} son congruentes a \overline{CB} .

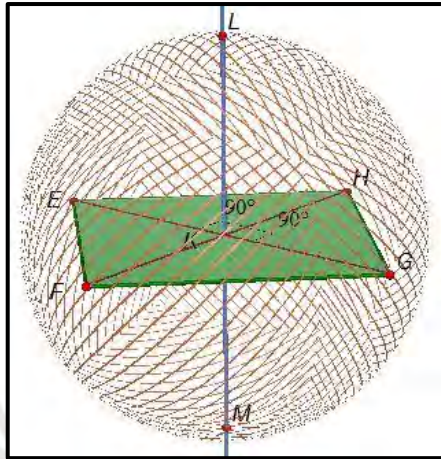


Figura 17. Esfera circunscrita al cuadrado con Cabri 3D

3.- Euclides continúa diciendo que, en ese orden de ideas, es fácil advertir que EF, FG, GH, HE, EL, FL, GL, HL, EM, FM, GM, HM, son todos iguales a DB. Así, los triángulos LEF, LFG, LHG, LHE, MEF, MFG, MGH, y MHE son todos equiláteros y congruentes entre sí.

En la figura 18, con Cabri 3D construimos los segmentos $\overline{EL}, \overline{FL}, \overline{GL}, \overline{HL}, \overline{EM}, \overline{FM}, \overline{GM}, \overline{HM}$ y tenemos que probar que los segmentos son iguales a \overline{DB} .

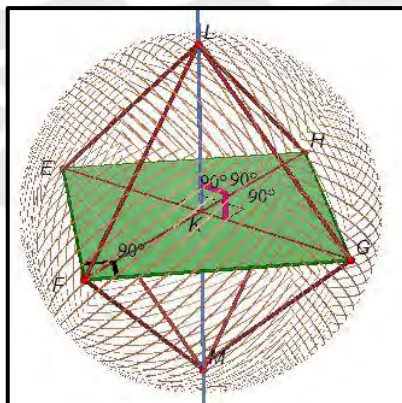


Figura 18. Octaedro regular inscrito en una esfera con Cabri 3D

En el triángulo rectángulo GKL se sabe que $KG = KL$ son radios de la esfera e iguales a \overline{CB} que es también radio de la esfera. Además, se cumple.

$$LG^2 = KL^2 + KG^2 = CB^2 + CB^2 = 2CB^2$$

$$\sqrt{LG^2} = \sqrt{2CB^2} \rightarrow LG = \sqrt{2} CB$$

De igual manera, se demuestra que las aristas $\overline{EL}, \overline{FL}, \overline{GL}, \overline{HL}, \overline{EM}, \overline{FM}, \overline{GM}, \overline{HM}$, son todas iguales a $\sqrt{2} CB$. Así también, sabemos que $EK = KH = CB$ y en el triángulo rectángulo EKH se cumple:

$$EH^2 = EK^2 + KH^2 = CB^2 + CB^2 = 2CB^2$$

$$\sqrt{EH^2} = \sqrt{2CB^2} \rightarrow EH = \sqrt{2} CB$$

Igualmente se demuestra que las aristas $\overline{EF}, \overline{FG}, \overline{GH}$, son todas iguales a $\sqrt{2} CB$.

Y teniendo en cuenta que: $DB = \sqrt{2} CB$

Los lados de los triángulos LEF, LFG, LHG, LHE, MEF, MFG, MGH, MHE son también iguales a \overline{DB} . Así, los triángulos serán equiláteros y congruentes entre sí y el sólido LEFGHM construido es el octaedro regular.

4.-Finalmente, Euclides describe que EG, que es igual a AB, es el diámetro de la esfera que lo contiene, y su cuadrado resulta equivalente a dos veces el cuadrado de EL, el lado del octaedro. Por lo tanto:

$$d^2 = 2L^2$$

Dónde: d es el diámetro de la esfera, L es el lado del octaedro.

En la construcción con Cabri 3D de la figura 18, se constata que $EF = FG = EL$ por ser los lados del octaedro regular y se cumple la siguiente relación en el triángulo rectángulo EFG.

$$EG^2 = EF^2 + FG^2 = EL^2 + EL^2 = 2EL^2$$

Como sabemos que $AB = EG$ son iguales al diámetro de la esfera que contiene al octaedro regular, se puede afirmar.

$$EG^2 = AB^2 = EL^2 + EL^2 = 2EL^2$$

$$AB^2 = 2EL^2$$

Esta última igualdad nos dice que el cuadrado del diámetro de la esfera es el doble del cuadrado del lado del octaedro y de esta forma concluimos que, con las construcciones con Cabri 3D, se replica la proposición 14 de los Elementos de Euclides.

En la época del Renacimiento (siglos XV y XVI), Lanza (2009) afirma que el artista matemático Piero della Francesca en su obra “El libellus de quinque corporibus regularibus” sostiene que el sólido inscrito con vértices en los centros de las caras de un sólido platónico toma la forma de otro sólido platónico.

Piero della Francesca, con estas construcciones, se aproxima a las propiedades de inscripción y dualidad de los poliedros regulares.

De acuerdo con Lanza (2009), en otras palabras: “Si se traza un poliedro, empleando como vértices los centros de las caras de un sólido platónico, se obtiene otro sólido platónico, llamado “conjugado” del primero, con tantos vértices como caras tenía el sólido inicial, y el mismo número de aristas” (p.238).

En palabras del autor:

Es decir, dos poliedros regulares pueden conjugarse si cumplen dos requisitos:

- a) Tienen el mismo número de aristas.
- b) El número de caras de uno es igual al número de vértices del otro.

Así el hexaedro tiene 6 caras y su conjugado, el octaedro regular, tiene 6 vértices y, viceversa, el octaedro regular tiene 8 caras y el hexaedro 8 vértices; el dodecaedro tiene 12 caras y su conjugado, el icosaedro, 12 vértices, y viceversa, el icosaedro tiene 20 caras y el dodecaedro 20 vértices; y el tetraedro tiene 4 caras y cuatro vértices, por eso se conjuga consigo mismo (Lanza, 2009, p.238).

Además, el autor comenta que Pacioli, en su obra “La Divina Proporción”, hace estudios matemáticos sobre los sólidos platónicos e interpreta las relaciones esotéricas del “Timeo” en su “Soneto a los poliedros”, donde idealiza los sólidos platónicos asociándolos con símbolos de la estructura de la materia, de modo que, al tetraedro, al cubo, al octaedro y al icosaedro los asocian al fuego, a la tierra, al aire y al agua, respectivamente, y al dodecaedro, con el universo. Asimismo, Pacioli justifica su denominación del dodecaedro como “nobilísimo cuerpo regular”, indicando que este sólido puede incluir progresivamente a los demás sólidos platónicos. Por ello, Platón relaciona místicamente al dodecaedro con el universo. Otro artista de esta época es Dürero, quien también estudió los sólidos platónicos y arquimedianos, realizando técnicas en perspectiva para representar en sus pinturas figuras de tres dimensiones en dos dimensiones, trabajos que, más tarde, analizaron matemáticos como Benedetti, Pascal y Desargues, dando inicio a la geometría proyectiva.

3.3 El octaedro regular en los libros de texto

Es de suma importancia conocer los lineamientos impartidos para la enseñanza de los poliedros en los textos de matemática del cuarto grado de educación secundaria. Es por eso que realizaremos el estudio de los textos del cuadro 4.

Cuadro 4. Textos de Matemática de cuarto grado de educación secundaria

Texto	Editorial	Contenido	Páginas
Matemática 4	Santillana (Ministerio de Educación) 2016	Poliedros	123
Matemática por Áreas 4	Editorial San Marcos 2016	Poliedros	81-85

El primero de ellos es el texto “Matemática 4” (2016) que el Ministerio de Educación del Perú proporciona a los estudiantes. Los poliedros los presenta en una “lectura especializada”, tal como se observa en la figura 19, describiendo las características de dos poliedros: el icosaedro truncado, formado por 20 hexágonos regulares, 12 pentágonos regulares y 90 aristas; del poliedro rombicoidodecaedro, formado por 20 triángulos equiláteros, 30 cuadrados, 12 pentágonos regulares y 120 aristas. Se les presenta estos poliedros a los estudiantes sin haber explicado conceptos y características de los poliedros, poliedros platónicos ni truncamiento de poliedros, por lo que pensamos que difícilmente podrían los alumnos movilizar esquemas de usos tales como vértices, caras, aristas de un poliedro regular, truncamiento de poliedros, etc.

El texto no presenta actividades para buscar competencias y capacidades en el tema poliedros.

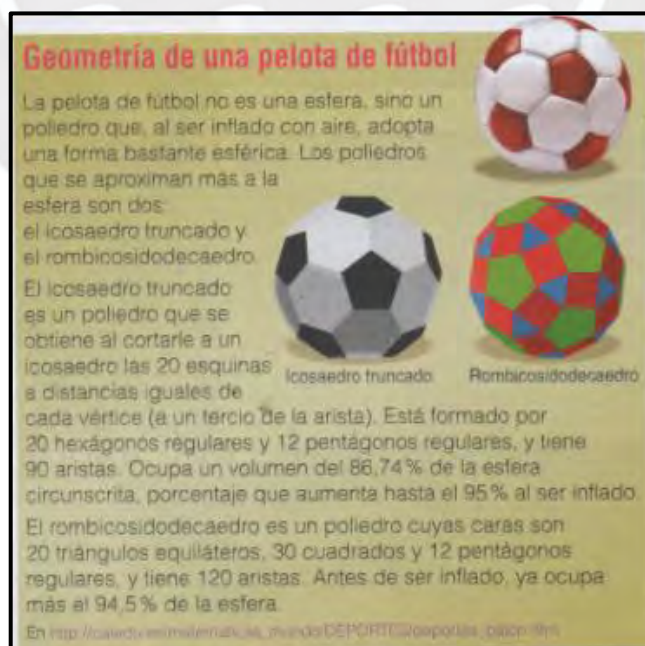


Figura 19. Icosaedro - Rombicoidodecaedro

Fuente: Matemática 4. Editorial Santillana (2016, p. 123)

Por otra parte, el texto *Matemática por Áreas 4*, utilizado en varios colegios particulares presenta la Unidad de Poliedros, con definiciones de poliedros, poliedros convexos, poliedros no convexos, poliedros irregulares, poliedros regulares y poliedros conjugados.

En la figura 20, presenta el octaedro regular, mencionando directamente el número de caras, número de vértices, número de aristas, centro de la esfera circunscrita, apotema y fórmulas para hallar la medida de su diagonal, área total, volumen y apotema en términos de la arista del octaedro regular. Pensamos que, si los estudiantes no poseen esquemas de uso sobre los conceptos de esfera circunscrita, diagonal, área lateral, volumen, referentes al octaedro regular, va a ser muy difícil que logren comprender las fórmulas que menciona el libro.

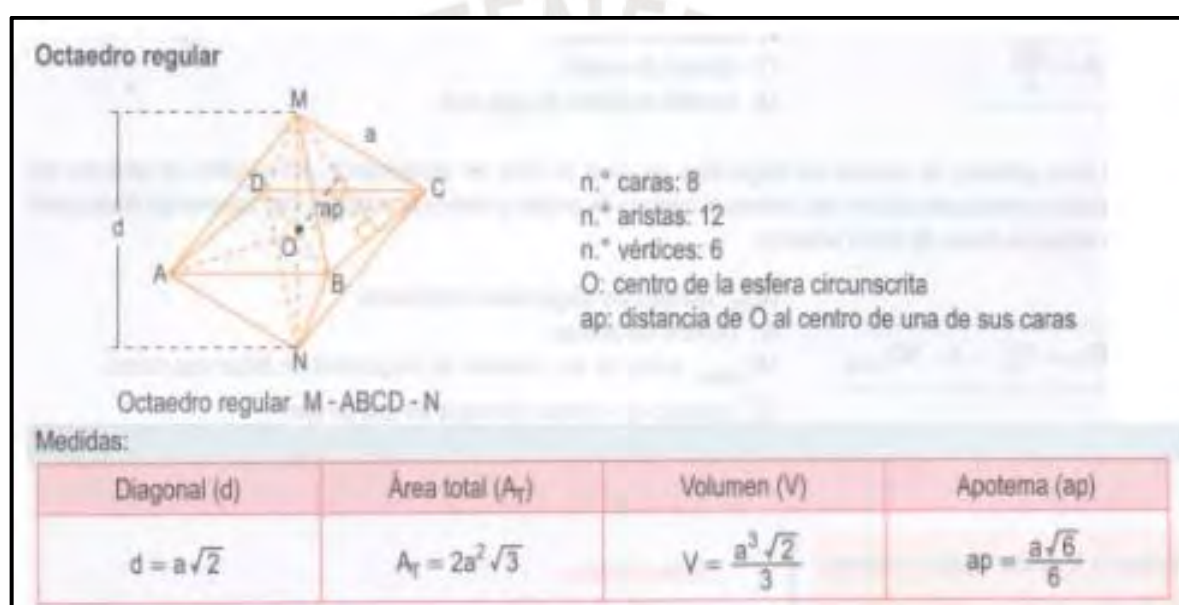


Figura 20. El octaedro regular

Fuente: matemáticas por Áreas 4. Editorial San Marcos (2016, p. 82)

Luego, el libro, en la figura 21, describe el concepto de poliedros conjugados y, entre ellos muestra la representación de un octaedro regular inscrito en un cubo. Además, indica la medida de la arista del octaedro regular en términos de la arista del cubo, sin ninguna explicación del proceso de construcción y las relaciones matemáticas para determinar la arista del octaedro. Notamos que la información que se brinda en forma tan directa no permite que los estudiantes movilicen sus esquemas de uso de nociones matemáticas sobre cómo encontrar los puntos medios de las caras del cubo, perpendicularidad, paralelismo y el teorema de Pitágoras para determinar la arista del octaedro regular en términos de la arista del cubo. Por otra parte, el libro no presenta actividades para la construcción del octaedro regular y su manipulación a través de planos de simetría y rectas de simetría, para deducir y analizar sus propiedades.

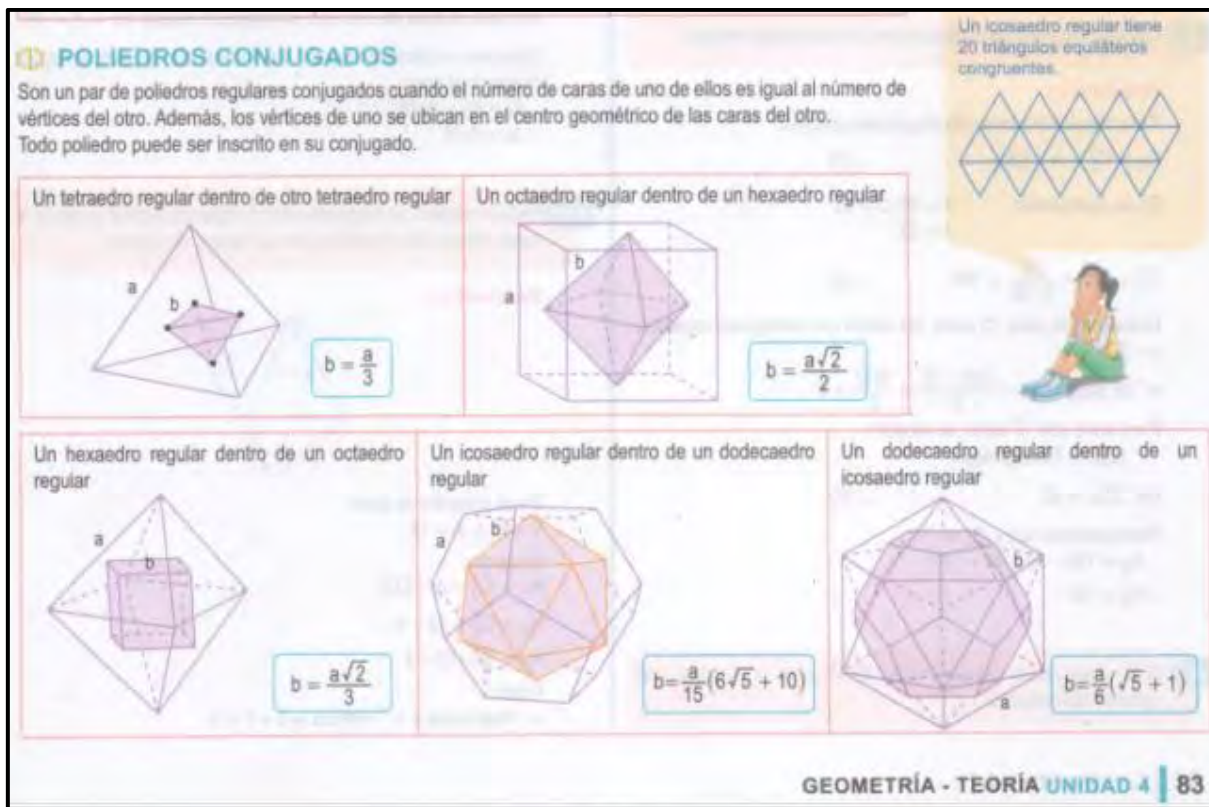


Figura 21. Poliedros conjugados

Fuente: Matemática por Áreas. Editorial San Marcos (2016, p. 83)

Luego, se presentan ejercicios para que el estudiante determine la medida de la diagonal del octaedro regular y su volumen. El autor supone que, con los conceptos propuestos en el libro, los estudiantes ya pueden utilizar esquemas de acción instrumentada.

En el siguiente capítulo, presentamos la parte experimental de la tesis en la que se realiza el análisis a priori y a posteriori de la secuencia de actividades desarrolladas para la investigación usando el Cabri 3D.

CAPÍTULO IV: EXPERIMENTO Y ANÁLISIS

En este capítulo, describiremos a los sujetos participantes en nuestra investigación, el escenario y los recursos de los que disponemos para la experimentación, la descripción de las secuencias de actividades y el análisis de las respuestas de la experimentación según los aspectos teórico y metodológico: el Enfoque Instrumental y la Ingeniería Didáctica.

4.1 Sujetos de la investigación

Nuestra investigación se realizará con veinticuatro estudiantes de cuarto de secundaria, cuyas edades están entre 14 y 15 años. Suponemos que los estudiantes han desarrollado competencias, capacidades en el área de matemática y han logrado sus estándares de aprendizaje de acuerdo al Currículo Nacional de la Educación Básica 2016, en los grados del primero al cuarto de Educación Secundaria.

Para el análisis de los trabajos (actividades) tomaremos al azar las actividades desarrolladas por dos estudiantes que han completado las tres actividades. Asimismo, participarán como observadores dos docentes de matemática quienes anotarán sus observaciones y conclusiones en las fichas de observación (ver anexo 6). Antes de iniciar la experimentación, se tendrá reuniones con los observadores para explicarles cuál es el objetivo de la investigación, la dinámica de las sesiones con los estudiantes y qué nos interesa que anoten en **sus** fichas de observación.

Además, durante la aplicación de las actividades, el profesor-investigador actuará como profesor y mediador para las consultas de los estudiantes.

4.2 Escenario de la investigación

La realización de las actividades se desarrolló en horas que corresponden al horario del dictado del curso de matemáticas los días 15, 22 y 29 de noviembre del 2016 en el aula de Innovación, que tiene capacidad para 30 computadoras, de una sección del cuarto de secundaria de las dos que dispone el Instituto Educativo Estatal Nuestra Señora de la Misericordia de Lima-Perú. Al terminar cada actividad, los estudiantes almacenaron sus archivos en una carpeta de trabajo y luego los enviaron a la computadora del coordinador de informática. Los estudiantes tenían conocimiento de cómo realizar este proceso.

El equipamiento que dispone el aula de Innovación son un proyector y su pizarra acrílica, acceso a Internet, disponibilidad del Cabri 3D versión v2 durante el periodo de evaluación libre que es de 30 días.

4.3 Descripción del experimento

Como se muestra en el cuadro 5, el experimento constará de tres actividades. En la actividad 0 del primer encuentro, se realizarán actividades con el Cabri 3D con el propósito de que los estudiantes exploren las herramientas que serán necesarias para el desarrollo de las actividades de la parte experimental; en la primera actividad, se realizará la caracterización del octaedro regular, y la segunda actividad consistirá en determinar la medida del volumen del octaedro regular.

En la actividad 0, realizaremos una descripción y un breve análisis del proceso de génesis instrumental de algunas herramientas del Cabri 3D. Las actividades 1 y 2 serán analizadas bajo el Enfoque Instrumental para que, por medio de las acciones de los estudiantes, podamos analizar las génesis instrumentales de los participantes en relación a la medida del volumen del octaedro regular.

Cuadro 5. Descripción de las actividades

Actividad	Título de la actividad	Duración de la actividad (horas pedagógicas)
0	Explorando el Cabri 3D	2 horas
1	El Octaedro regular	2 horas
2	Medida del volumen del Octaedro regular	2 horas

En seguida, presentamos las actividades y sus respectivos análisis a priori y a posteriori.

4.4 Las actividades y sus análisis

En la actividad 0, el investigador presentará a los estudiantes el software Cabri 3D. Además, el investigador desarrollará esta actividad con los estudiantes de manera interactiva; en principio, explicará el procedimiento para explorar el funcionamiento del Cabri 3D y, luego, los componentes de la zona de trabajo. Para hacer de conocimiento el uso de las herramientas, funciones y recursos del software, el investigador entregará a los estudiantes una guía con la explicación de las herramientas (ver anexo 1). En seguida, presentamos las actividades de la investigación:

Actividad 0: Explorando el Cabri 3D

1. Abra el Cabri 3D y explore la barra de herramientas (ver anexo de la ficha) para ello, despliegue cada una de las herramientas (clicke en la cabeza de flecha de la herramienta seleccionada).
2. Construya un cubo y nómbrelo ABCDEFGH.

Para eso:

- *Active la herramienta “cubo”.*
- *Clicke el plano base (seleccionar el lugar de la construcción).*
- *Clicke, arrastre y clicke otra vez para validar la construcción. Además:*
- *Trace las diagonales del cubo: AG y BH y marque el punto O que es la intersección de las diagonales.*
- *Construya la esfera centrada en el punto O y que pase por el punto A, y luego utilice los atributos y modifique su estilo de superficie a “rayado fino”.*

Sugerencia: *Además, puede ocultar el plano base, use la función “arrastre” y los atributos del Cabri 3D.*

3. Ahora, construya una pirámide recta de base pentagonal y nómbrela MPQRST, siguiendo los pasos:

- *Active la herramienta “pentágono”*
- *Clicke en el plano de base (seleccionar el lugar de la construcción).*
- *Clicke, arrastre y clicke otra vez para validar la construcción del pentágono y nómbrelo PQRST.*
- *Luego trace la recta L perpendicular al plano base y que pase por el punto O (centro del pentágono).*
- *Marque un punto M sobre la recta L.*
- *Con la herramienta “poliedro convexo” construya la pirámide MPQRST.*

Sugerencia: *use las funciones y atributos para modificar la apariencia de los objetos representados.*

Descripción de la actividad de exploración del Cabri 3D

El objetivo de esta actividad es familiarizar a los estudiantes con el uso de herramientas del Cabri 3D que serán útiles para la caracterización del octaedro regular y para que conjeturen la medida de su volumen. Esperamos que los estudiantes realicen las acciones que se les solicita en la ficha de trabajo, es decir, que exploren las herramientas y construyan las representaciones de diferentes objetos geométricos. Durante la actividad, las consultas que realicen los estudiantes serán explicadas por el profesor-investigador que está presente en el aula de innovación.

Presentamos a continuación las acciones de dos estudiantes elegidos al azar que completaron las tres actividades, a quienes llamaremos David y Karla.

Acciones de David:

El ítem 2 de la actividad dice:

Construya un cubo y nómbrelo $ABCDEFGH$, trace las diagonales \overline{AG} y \overline{BH} y marque el punto O , que es el punto de intersección de las diagonales, construya la esfera centrada en el punto O y que pase por el punto A .

David sigue las indicaciones y explora las herramientas tales como *cubo*, *segmento*, *punto de intersección* y *esfera* del Cabri 3D. Por las acciones del estudiante, creemos que moviliza sus esquemas de uso de cubo, diagonal de un cubo, segmento, punto de intersección y esfera, porque suponemos que ya identifica estas herramientas en el Cabri 3D, e interactúa con ellas de acuerdo a las indicaciones que aparecen en cada herramienta y logra construir la representación del objeto matemático. Por ejemplo, para construir el cubo elige la herramienta *cubo* y clikea tres veces sobre el plano base; para construir un segmento, elige la herramienta *segmento* para luego clikear el primer punto del segmento y, a continuación, el segundo punto. De esta manera con el uso de las herramientas necesarias para esta actividad construye lo solicitado en la actividad, como se muestra en la figura 22. En términos de Rabardel, esto significa que el estudiante moviliza sus conocimientos preexistentes, así como también crea nuevos esquemas de utilización tales como esfera circunscrita a un cubo cuando interactúan sus conocimientos de esfera y cubo, y diagonales del cubo cuando conectan sus conocimientos de cubo y segmento, lo que nos hace suponer que está en proceso de génesis instrumental de algunas herramientas del Cabri 3D correspondientes a esta actividad.

Además, notamos que en la figura 22 también usa el atributo rayado fino para visualizar sus construcciones en el interior de la esfera y la función *creación de etiquetas* para nombrar el cubo $ABCDEFGH$ y el punto O de intersección de las diagonales.

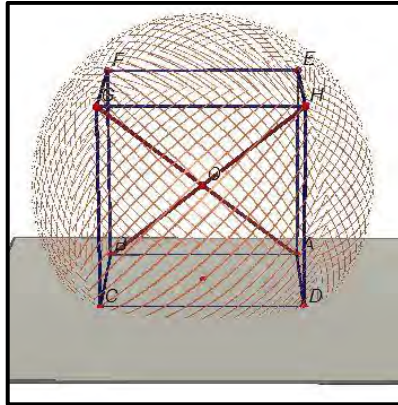


Figura 22. Respuesta de David en Cabri 3D a la actividad 2

El ítem 3 de la actividad dice:

Construya una pirámide recta de base pentagonal y nómbrala MPQRST; luego trace la recta L perpendicular al plano base y que pase por el centro O del pentágono; marque un punto M de la recta L y con la herramienta “poliedro convexo” construya la pirámide MPQRST.

David sigue las indicaciones y explora las herramientas del Cabri 3D: *pentágono regular, recta perpendicular, punto y poliedro convexo*. Por las acciones que se observa, tales como trazar el pentágono MPQRST, la recta perpendicular L al plano base, elegir el punto M en la recta perpendicular, construir la pirámide MPQRST, puede decirse que construye la actividad solicitada. Percibimos, en términos de Rabardel, que moviliza sus posibles esquemas de uso de pentágono regular, recta perpendicular, punto y pirámide. Además, las acciones de David nos hacen suponer que está en proceso de génesis instrumental de las herramientas del Cabri 3D usadas en esta actividad. Se muestra en la figura 23 el resultado de las acciones de David. Notamos que usó los atributos *color de superficie* naranja y *estilo de superficie* huecos pequeños, la función *creación de etiquetas* para nombrar el pentágono regular PQRST y el punto M. No utilizó el atributo *ocultar/mostrar objetos*.

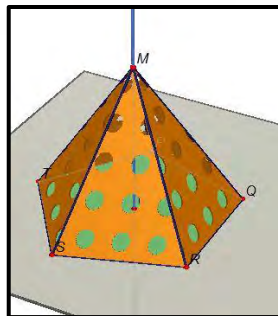


Figura 23. Respuesta de David en Cabri 3D a la actividad 3

Acciones de Karla:

El ítem 2 de la actividad dice:

Construya un cubo y nómbrelo $ABCDEFGH$; trace las diagonales \overline{AG} y \overline{BH} y marque el punto O que es el punto de intersección de las diagonales; construya la esfera centrada en el punto O y que pase por el punto A .

Karla explora las herramientas *cubo*, *segmento*, *punto de intersección*, el atributo *estilo de superficie vacío* identificadas en el Cabri 3D. Para esto, suponemos que moviliza sus esquemas preexistentes y observamos que ejecuta acciones como construir un cubo sobre el plano base con la herramienta *cubo*, traza las diagonales \overline{AG} y \overline{BH} con la herramienta *segmento* y ubica el punto de intersección “O” de las diagonales con la herramienta *punto de intersección*, tal como se muestra en la figura 24. En términos de Rabardel, las actividades que ejecuta Karla nos hacen suponer que está en proceso de génesis instrumental con algunas herramientas del Cabri 3D; así también, conecta sus conocimientos preexistentes para crear nuevos esquemas de uso, entre ellos, el de cubo como un objeto tridimensional limitado por aristas, que tiene vértices y diagonales. También utilizó, la función *creación de etiquetas* para nombrar algunos vértices del cubo (A, B, C, D, H, G) y el punto “O” como intersección de las diagonales. Observamos que Karla no ha explorado la herramienta *esfera* y no podemos asegurar que Karla tenga noción matemática de la esfera, como la figura que tiene un centro y que el segmento que une el centro con cualquier punto de su superficie se denomina radio.

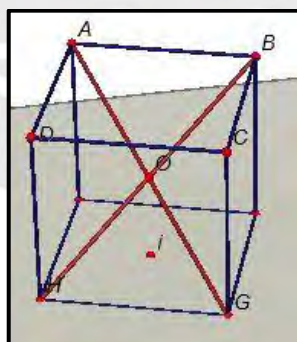


Figura 24. Respuesta de Karla en Cabri 3D a la actividad 2

En el ítem 3 de la actividad que dice:

Construya una pirámide recta de base pentagonal y nómbrela MPQRS; luego trace la recta L perpendicular al plano base y que pase por el centro O del pentágono, marque un punto M de la recta L y con la herramienta “poliedro convexo” construya la pirámide MPQRST.

Karla explora las herramientas *pentágono*, *recta perpendicular*, *punto*, *poliedro convexo*, los atributos de *color de curva azul*, *color de superficie verde* y *estilo de superficie rayado grueso*. A través de las acciones que realiza, tales como construir el pentágono PQRS sobre el plano base, trazar la recta “L” perpendicular al plano base por el punto “O” y ubicar el punto M sobre ella, y construir la pirámide MPQRST (ver Figura 25) suponemos, en términos de Rabardel, que moviliza sus esquemas de uso de pentágono, recta perpendicular a un plano, punto en una recta y pirámide.

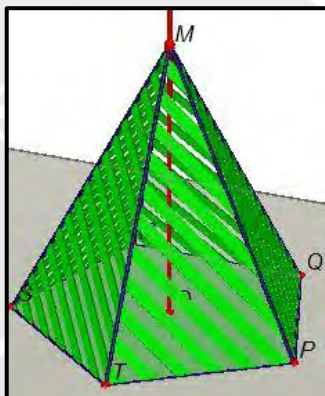


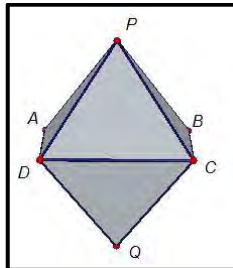
Figura 25. Respuesta de Karla en Cabri 3D a la actividad 3

Así también, a partir de las acciones observables en sus construcciones geométricas en la actividad 2 nos hace pensar que Karla está en un proceso de génesis de algunas herramientas del Cabri 3D.

A continuación, mostramos la actividad 1.

Actividad 1: El octaedro regular

1. Abra el archivo 1.cg3 del Cabri 3D, y desarrolle la siguiente actividad.



Utilizando la función *bola de cristal*, explore el octaedro regular PABCDQ y deduzca lo siguiente:

- a) ¿Cuántos vértices tiene el octaedro regular?
 - b) ¿Cuántas aristas y caras tienen el octaedro regular?
 - c) ¿Qué tipo de triángulo son las caras del octaedro regular? Justifique su respuesta.
2. A partir de las respuestas de los ítems 1 a), 1 b) y 1c), describa lo que es el octaedro regular.
 3. Abra el archivo 1.cg3. Trace las diagonales AC, BD, PQ del octaedro regular y marque el punto de intersección como "O". Sugerencia: cambie el *estilo de la superficie* del octaedro regular PABCDQ a "rayado fino"
 - a) ¿Qué tipo de cuadrilátero es el ABCD? Explique.
 - b) En el octaedro regular deduzca de que tipo son las pirámides PABCD y QABCD. Justifique su respuesta.

Análisis a priori

El objetivo de esta actividad es identificar, en las acciones de los estudiantes, la movilización de sus esquemas preexistentes de nociones de vértices, aristas, caras de un poliedro regular, cuadriláteros y pirámide cuadrangular. Además, se quiere identificar la organización de nuevos esquemas de uso en el artefacto octaedro regular en función de sus esquemas preexistentes, como, por ejemplo, conceptualizar las nociones de vértices, aristas, caras, diagonales, punto de intersección de las diagonales y la composición y descomposición en pirámides cuadrangulares del octaedro regular. La secuencia de actividades, suponemos, permitirá a los estudiantes el conocimiento de las características y algunas propiedades del artefacto octaedro regular representado en el Cabri 3D, a lo que Rabardel denomina "tareas secundarias".

En el ítem 1a), a la pregunta ¿Cuántos vértices tiene el octaedro regular?

Creemos que los estudiantes realizarán acciones en el octaedro regular utilizando la función *bola de cristal* del Cabri 3D, para obtener la representación del octaedro desde diferentes ángulos de vista como se muestra en la figura 26. Creemos que, a priori, los estudiantes movilizan su esquema de uso de vértice de un poliedro como el punto de concurrencia del mismo número de aristas, para realizar acciones en la representación del octaedro regular en Cabri 3D, que representa nuestro artefacto. En términos de Rabardel, los estudiantes efectúan tareas secundarias en la parte artefactual y presumimos que identifican como vértices los puntos P, A, B, C, D, Q. Inclusive, podrían observar y validar en una sola representación del octaedro regular, sin recurrir al uso de la función *bola de cristal*, que este tiene seis vértices.

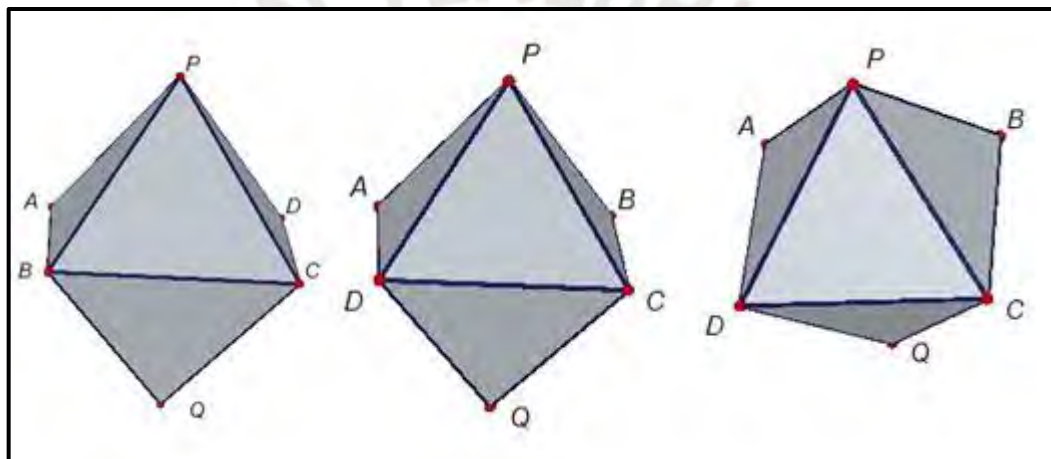


Figura 26. Representaciones del octaedro regular en Cabri 3D

En el ítem 1b), a la pregunta ¿Cuántas aristas y caras tienen el octaedro regular?

Pensamos que los estudiantes, en sus acciones, utilizarán la función *bola de cristal* para observar las aristas y caras no visibles de la representación del octaedro regular, por lo que, para mejorar esta visibilidad, pensamos que se apoyarán en usar los atributos estilo de superficie *vacío* y/o *puntos pequeños*, *puntos grandes*, *rayado fino*, etc. del Cabri 3D. Luego, creemos que los estudiantes realizarán manipulaciones en la parte artefactual “octaedro regular”, tratando de ubicar sus vértices y caras, tal como se muestra en la figura 27. De acuerdo con Rabardel, las actividades que realizan son referentes al conocimiento de las características y propiedades de la parte artefactual. Él denomina a estas actividades “tareas secundarias”. Suponemos, a priori, que movilizándolo sus esquemas de uso de arista como el segmento que une dos vértices, y cara de un poliedro regular como el polígono regular convexo de un mismo número de lados, concluirán que el octaedro regular tiene doce aristas:

$\overline{AP}, \overline{BP}, \overline{CP}, \overline{DP}, \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{AD}, \overline{AQ}, \overline{BQ}, \overline{CQ}, \overline{DQ}$ y ocho caras:

$APB, BPC, CPD, APD, AQB, BQC, CQD, AQD$.

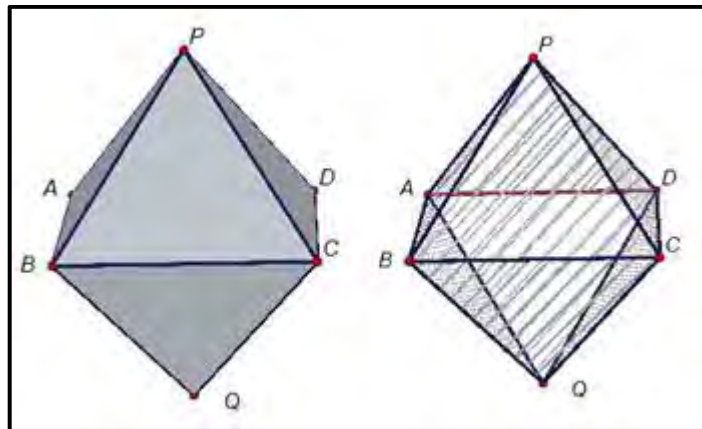


Figura 27. Representaciones del octaedro regular en Cabri 3D

En el ítem 1c), a la pregunta ¿Qué tipo de triángulo son las caras del octaedro regular? Justifique su respuesta.

Creemos que una primera acción de los estudiantes es determinar la longitud de los lados “visibles” de los triángulos que forman las caras del octaedro regular con la herramienta *longitud* del Cabri 3D. Luego, con la función *bola de cristal*, modificando la representación del octaedro regular observarían los otros lados “no visibles” para medir su longitud, tal como, se observa en la figura 28.

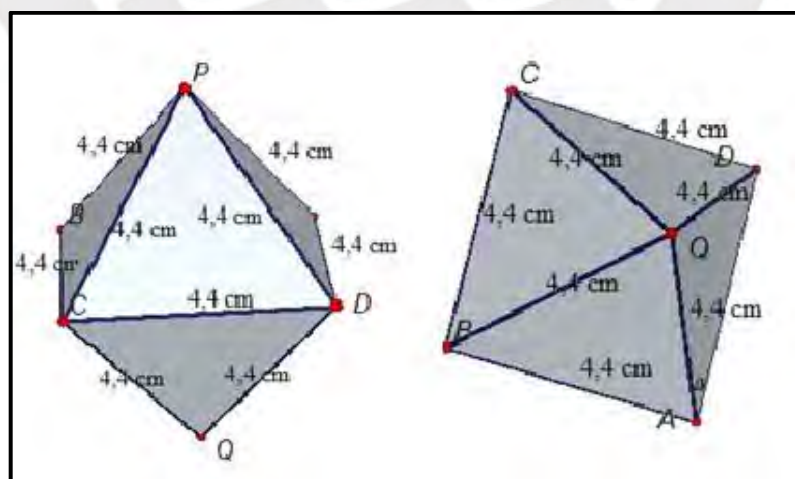


Figura 28. Medidas de los lados de las caras en un octaedro regular en Cabri 3D

Esperamos, a priori, que movilicen su esquema de uso de triángulo equilátero como aquel polígono regular convexo que tiene sus tres lados iguales (clasificación de tipos de triángulo de

acuerdo con sus lados) y nos hace pensar que concluirán que las caras del octaedro regular son triángulos equiláteros.

Pensamos que otra alternativa para contestar la pregunta *¿Qué tipo de triángulo son las caras del octaedro regular?* es que los estudiantes, utilizando las herramientas *ángulo*, *manipulación* y la función *bola de cristal*, medirán los ángulos de las caras del octaedro regular, encontrando que todas son iguales a 60° , como lo muestra la figura 29, y deducimos que concluirán que las caras del octaedro regular son triángulos equiláteros. Para ello, creemos, a priori, que movilizan su esquema de uso de triángulo equilátero, como aquella figura que tiene sus tres ángulos iguales a 60° (clasificación de tipos de triángulo de acuerdo con la medida de sus ángulos).

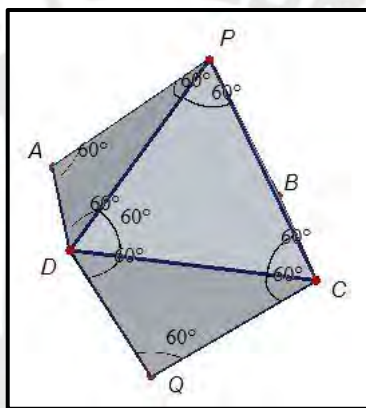


Figura 29. Medida de los ángulos de las caras en un octaedro regular en Cabri 3D

Suponemos que otros estudiantes, frente a la pregunta *¿Qué tipo de triángulo son las caras del octaedro regular?*, no harán uso de ninguna herramienta del Cabri 3D para explorar el octaedro regular, de la figura 30. Creemos, a priori, que movilizan su esquema de uso de poliedro regular, como la figura tridimensional que tiene sus caras iguales a un polígono regular del mismo número de lados. De acuerdo, a este esquema de uso, deducimos que relacionarán el octaedro regular con la noción de un poliedro regular que tiene sus ocho caras iguales y son triángulos equiláteros.

En el desarrollo de las actividades de esta pregunta, los estudiantes llegan a tener conocimiento de la característica que las caras del octaedro regular son triángulos equiláteros. Por esto, y de acuerdo con Rabardel, suponemos que los estudiantes crean un nuevo esquema de uso sobre el tipo de triángulo de las caras de un octaedro regular.

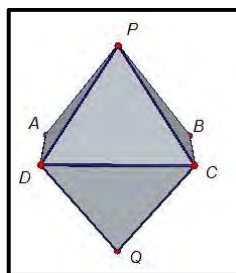


Figura 30. Octaedro regular PABCDQ en Cabri 3D

En el ítem 2, a la pregunta: A partir de las respuestas de los ítems 1a), 1b), 1c), describa lo que es un octaedro regular.

Creemos que, al movilizar sus esquemas de uso de vértices, aristas y caras de un octaedro regular desarrollados en actividades anteriores, y ante una nueva situación que enfrentan (la cual es describir al octaedro regular), los estudiantes conectarán sus conocimientos, esquemas de usos y pensamos que van a describir el octaedro regular como una figura que tiene 6 vértices, 12 aristas, 8 caras que son triángulos equiláteros. Por ello, creemos que este nuevo conocimiento generado por los estudiantes constituiría un esquema de acción instrumentada del artefacto octaedro regular, de acuerdo con Rabardel.

En el ítem 3, a la pregunta 3a). Trace las diagonales AC, BD, PQ del octaedro regular y marque el punto de intersección como "O". ¿Qué tipo de cuadrilátero es el ABCD? Explique.

Pensamos que los estudiantes utilizarán la herramienta *segmento* entre dos puntos para trazar los segmentos \overline{AC} , \overline{BD} , \overline{PQ} , la herramienta *punto de intersección curva/curva* para ubicar el punto de intersección de las diagonales al que nombrarán como "O" con la función *etiquetar*, utilizarán el atributo estilo de superficie *rayado fino*, *puntos pequeños* o *vacio* para observar en forma más precisa los elementos interiores del octaedro regular. En las acciones realizadas por los estudiantes esperamos, a priori, movilicen sus esquemas de uso de segmento, diagonal de un poliedro, punto de intersección de dos segmentos.

Luego, suponemos realizarán acciones utilizando la herramienta *ángulo* para medir los ángulos A, B, C, D del cuadrilátero ABCD. Pensamos que identificarán la medida de los ángulos como iguales a 90° . Se espera que movilicen los esquemas de uso: las aristas de un octaedro regular son todas iguales, y que el cuadrado es un cuadrilátero que tiene cuatro ángulos rectos y cuatro lados iguales. Por ello, creemos que identificarán \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DA} como aristas iguales y el cuadrilátero ABCD como un cuadrado tal como se muestra en la figura 31.

En el desarrollo de las acciones por parte de los estudiantes en términos de Rabardel, ellos realizan tareas referentes al conocimiento de nuevas características del octaedro regular y, así mismo, crean nuevos esquemas de uso tales como las diagonales de un octaedro regular y el hecho de que el cuadrilátero formado por los vértices de dos diagonales de un octaedro regular es un cuadrado.

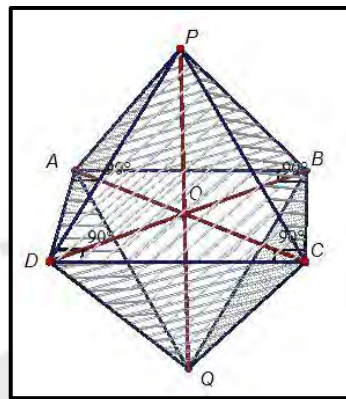


Figura 31. Diagonales del octaedro regular en Cabri 3D

Creemos que otros estudiantes, en sus acciones, movilizarán esquemas de uso tales como la medida de un segmento, la medida de un ángulo, y la de cuadrilátero. Por ello, con la herramienta *longitud* medirán la longitud de las aristas del cuadrilátero ABCD, determinando que son iguales entre sí; con la herramienta *ángulo*, medirán los ángulos A, B, C, D hallando que son iguales a 90° y, con la función *bola de cristal*, construirán el cuadrilátero ABCD tal como se observa en la figura 32. Movilizando su esquema de uso de cuadrado como la figura que tiene cuatro lados iguales y cuatro ángulos iguales, creemos que concluirán que el cuadrilátero ABCD es un cuadrado.

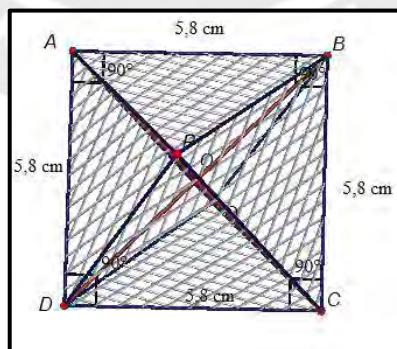


Figura 32. Octaedro regular en Cabri 3D

En el ítem 3, a la pregunta 3b). En el octaedro regular deduzca de qué tipo son las pirámides $PABCD$ y $QABCD$. Justifique su respuesta.

Pensamos que los estudiantes realizarán acciones, interactuando con la herramienta *manipulación* y la función *bola de cristal* en el octaedro regular, observando el octaedro desde diferentes perspectivas. Así también, usarán el atributo *estilo de superficie* rayado fino para construir la figura 33. Consideramos que, en estas acciones, movilizan dos esquemas de uso, el primer esquema de uso para observar el octaedro regular desde diferentes perspectivas en el espacio tridimensional y el segundo esquema de uso para ver la representación del octaedro regular tanto en forma interna como externa. Por otro lado, suponemos movilizarán esquemas de uso de pirámide regular, comparación de figuras y la composición y descomposición de una figura en partes. Los esquemas de uso empleados en las acciones de los estudiantes están relacionados al conocimiento de las características y propiedades de la parte artefactual. A priori un esquema de utilización podría ser la descripción que las pirámides $PABCD$ y $QABCD$ como pirámides rectas cuadrangulares iguales.

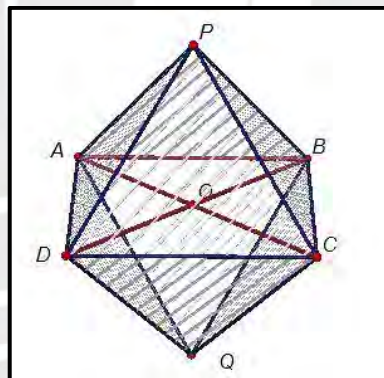


Figura 33. Octaedro regular en Cabri 3D

Análisis a posteriori de las acciones de David

En el ítem 1a), David utiliza la función *bola de cristal* para manipular la representación del objeto desde diferentes ángulos de vista, tal como fue previsto en el análisis a priori. Además, utiliza el atributo *color de punto* verde y *tamaño de punto* normal. Por ello, nos da indicios de que interactúa con la representación del octaedro regular y, movilizándolo su esquema de uso de vértice de un poliedro, logra identificar los vértices del octaedro regular y describe que tiene seis vértices como se muestra en la figura 34. En sus acciones se observa que David se está apropiando de una característica del artefacto. De acuerdo con Rabardel, nos da indicios de que está en un proceso de instrumentalización al tomar conocimiento de los vértices de un octaedro regular, creando un nuevo esquema de uso, para ser utilizado en otra situación problema.

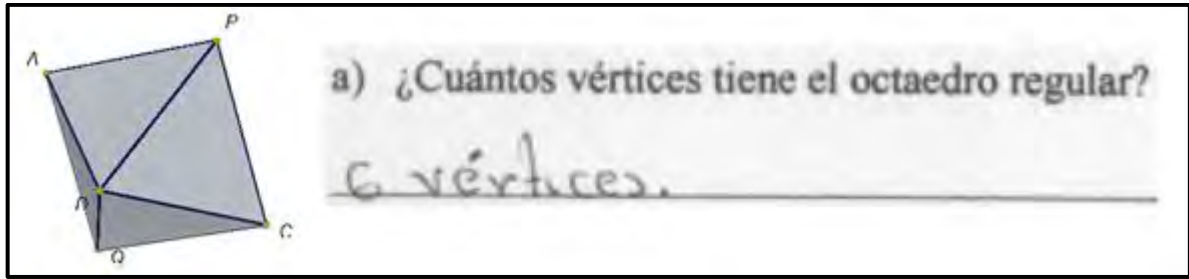


Figura 34. Respuesta de David en Cabri 3D a la actividad 1a

En el ítem 1b), David utiliza la función *bola de cristal* para observar las caras del octaedro regular en diferentes ángulos de vista y, además, considera los atributos *color de curva* naranja, *estilo de curva* punteado para identificar las aristas del octaedro regular y *color de punto* morado para representar los vértices tal como se muestra en la figura 35. Las acciones de David evidencian que interactúa con la representación del octaedro regular (artefacto) reconociendo sus aristas, vértices y caras, movilizándolo sus esquemas de uso previstos en el análisis a priori: arista y cara de un poliedro regular, para luego indicar que el octaedro regular tiene 12 aristas y 8 caras. David continúa tomando conocimiento de características del artefacto, por lo que de acuerdo con Rabardel, percibimos que el proceso de instrumentalización está sucediendo con David.

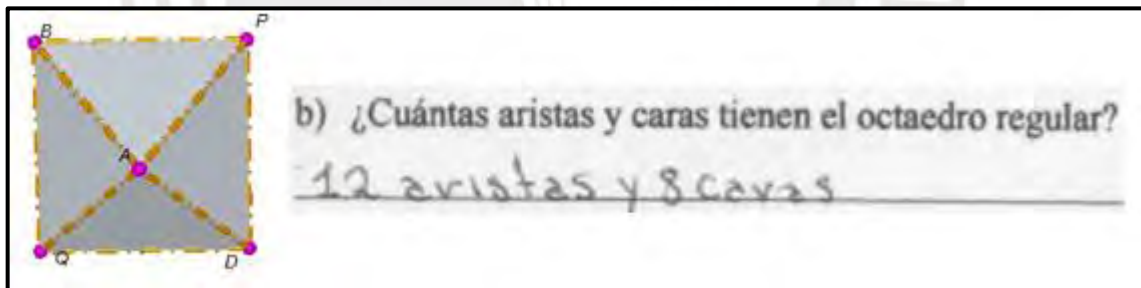


Figura 35. Respuesta de David en Cabri 3D a la actividad 1b

En el ítem 1c), David, tal como fue previsto en el análisis a priori, con la herramienta *ángulo* mide los ángulos de las caras del octaedro regular, encontrando que todos son iguales a 60° . Además, con la herramienta *longitud*, mide los lados de las caras del octaedro regular, encontrando la misma medida para cada lado (5.0 cm). David utiliza la función *bola de cristal*, lo que puede afirmarse por el indicio de que él manipula el octaedro regular, mostrando el vértice A en la parte superior, y el vértice C en la parte inferior, tal como se muestra en la figura 36.

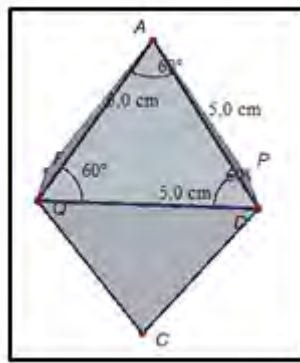


Figura 36. Respuesta de David en Cabri 3D a la actividad 1c

David describe que las caras del octaedro regular son triángulos equiláteros porque tiene tres lados iguales, tal como se aprecia en la figura 37.

Las acciones de David nos muestran que movilizó sus esquemas de uso de triángulo equilátero de acuerdo con sus lados tal como estuvo previsto en el análisis a priori. Continúa adquiriendo nociones de las características del artefacto octaedro regular, por lo que percibimos, de acuerdo con Rabardel, que el proceso de instrumentación sigue ocurriendo con David.

c) ¿Qué tipo de triángulo son las caras del octaedro regular? Justifique su respuesta.

Triángulo equilátero ya que tiene 3 lados de igual tamaño.

Figura 37. Respuesta de David a la actividad 1c

En el ítem 2, David, tal como estuvo previsto en el análisis a priori, moviliza, articula sus esquemas de uso de vértices, aristas, y caras de un octaedro regular y que estas han sido desarrolladas en las actividades 1a), 1b) y 1c), y logra describir el octaedro regular tal como se muestra en la figura 38. También describe al octaedro regular como un poliedro, lo que es evidencia de tener conocimiento del esquema de uso de poliedro, a pesar de que esto no había sido considerado en el análisis a priori. Se percibe en David aspectos de instrumentalización e instrumentación debido a que identifica características particulares del artefacto octaedro regular y logra explicarlo como se le pedía.

2. A partir de las respuestas de los ítems 1 a), 1 b) y 1c), describa lo que es el octaedro regular.

El octaedro regular es un poliedro conformado por 6 vértices, 12 aristas y 8 caras.

Figura 38. Respuesta de David a la actividad 2

En el ítem 3a), David, utiliza la herramienta *segmento* para trazar los segmentos \overline{AC} , \overline{BD} , \overline{PQ} , la herramienta *punto de intersección* para ubicar su intersección, nombrándola como “O”, y las funciones *creación de etiqueta* y *estilo de superficie rayado fino*. Así también, usa la herramienta *longitud* para medir los lados del cuadrilátero ABCD, resultando 4.7 cm cada uno, y la herramienta *ángulo* para medir los ángulos del cuadrilátero ABCD, hallando todos iguales a 90° . Asumimos que David utiliza la función *bola de cristal* para tratar de representar el cuadrilátero ABCD con 4 lados iguales y 4 ángulos iguales, coincidente con su conocimiento de cuadrado contenido en un plano y, luego del resultado de sus acciones, reconoce al cuadrilátero ABCD como un cuadrado, tal como lo presenta en la figura 39.

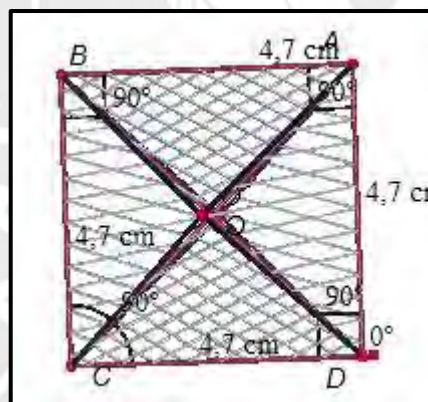


Figura 39. Respuesta de David en Cabri 3D a la actividad 3a

Notamos que David moviliza sus esquemas de uso de segmento, medida de un segmento, ángulo, medida de un ángulo, la de un cuadrado y características de sus elementos, por lo que podemos decir que, en esta actividad, David cumplió las expectativas de nuestro análisis a priori. Así también observamos que David interactúa continuamente con la representación del octaedro regular. Esto nos da indicios de que se apropia de características del artefacto octaedro regular, por lo que, según Rabardel, el proceso de la instrumentalización local está ocurriendo con David.

David describe que el cuadrilátero ABCD es un cuadrado tal como se muestra en la figura 40.

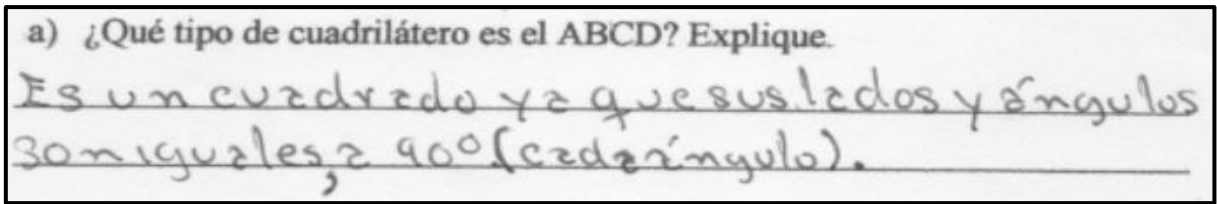


Figura 40. Respuesta de David a la actividad 3a

En el ítem 3b), David abre el archivo 1.cg3 tal como se muestra en la figura 41, no realiza actividades con herramientas y/o atributos del Cabri 3D y enfatiza su percepción visual en el objeto matemático representado, logrando percibir e interpretar las pirámides PABCD, QABCD como iguales y de un mismo tipo. En sus acciones, sobreentendemos, moviliza su esquema de pirámide, comparación de figuras tridimensionales tomando en cuenta su tamaño, forma y medida cuando David dice “Las dos pirámides son del mismo tipo”. En relación a lo esperado en esta actividad con nuestro análisis a priori, David no logró deducir el tipo de las pirámides de acuerdo a los pasos previstos. Nos hace pensar que sus conocimientos preexistentes de pirámide recta cuadrangular no se encuentran bien conceptualizados, por lo que da mayor importancia a su percepción visual para identificar solamente como pirámides iguales las representaciones PABCD y QABCD. Por ello, podemos decir que los procesos de instrumentalización e instrumentación en esta actividad se han presentado, sin poder precisar cuál es el más dominante.

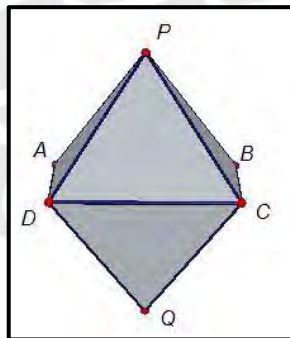


Figura 41. Octaedro regular PABCDQ

Se muestra a continuación, en la figura 42, la respuesta de David para esta actividad.

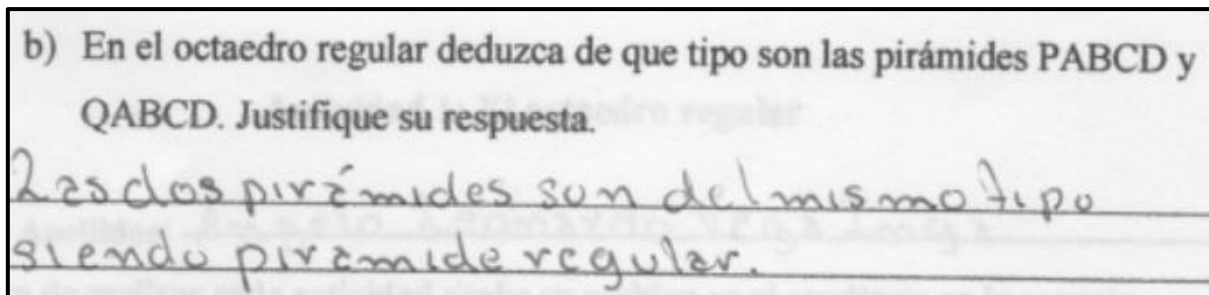


Figura 42. Respuesta de David a la actividad 3b

Análisis a posteriori de las acciones de Karla

En el ítem 1a), Karla abre el archivo 1.cg3, no realiza manipulación alguna con herramientas y atributos del Cabri 3D con la representación del octaedro regular de la figura 43. Suponemos que, para Karla, es suficiente su percepción visual del octaedro regular para identificar cómo vértices los seis puntos P, A, B, C, D, Q. Notamos que moviliza su esquema de uso de vértice en un poliedro para identificar qué puntos son sus vértices. En relación con lo esperado en nuestro análisis a priori, Karla sigue una de las alternativas presentadas en el análisis. Así también, en la presente actividad, Karla se apropia de una característica del octaedro regular, por lo que, de acuerdo con Rabardel, podemos decir que el proceso de instrumentalización está sucediendo en Karla.

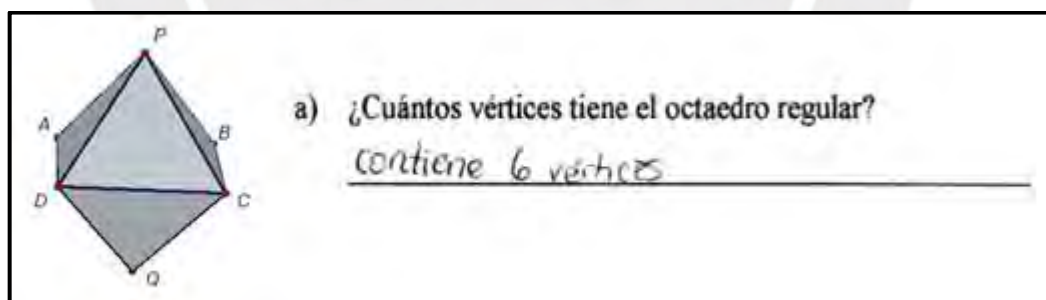


Figura 43. Respuesta de Karla en Cabri 3D a la actividad 1a

En el ítem 1b), Karla no realiza interacciones con la representación del octaedro regular a través de alguna herramienta del Cabri 3D. Pensamos que solamente dando énfasis a su percepción visual identifica 12 aristas y 8 caras en el octaedro regular y, de acuerdo a su respuesta “tiene 12 aristas y 8 caras, cumple Euler” nos hace pensar que, moviliza su esquema de la ley de Euler y conjuntamente con el número de vértices (resultado de la actividad 1a), valida que se cumpla la ley de Euler, que dice que en todo poliedro convexo se cumple la siguiente relación:

$$C - A + V = 2 \quad \text{donde } C = \# \text{ caras}, A = \# \text{ de aristas}, V = \# \text{ de vértices}$$

Con estas acciones, Karla logra identificar que el octaedro regular tiene doce aristas y ocho caras, tal como lo describe en la figura 44.

Por las acciones que realiza Karla, suponemos que moviliza sus esquemas de uso de aristas y caras de un poliedro regular, la ley de Euler.

En referencia a nuestro análisis a priori, Karla utilizó, de modo parcial, los esquemas previstos y, además, consideró el esquema de uso de la ley de Euler, esquema no previsto en el análisis a priori.

Así también, las acciones desarrolladas por Karla y sus posibles esquemas de uso movilizados nos dan indicios del conocimiento que toma de las características del artefacto octaedro regular, por lo que, de acuerdo con Rabardel, el proceso de instrumentalización de la génesis instrumental de la medida del volumen del octaedro regular está ocurriendo con Karla.

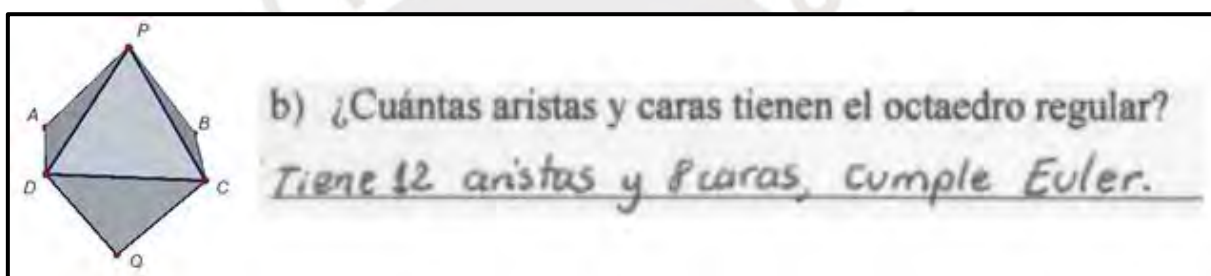


Figura 44. Respuesta de Karla en Cabri 3D a la actividad 1b

En el ítem 1c), Karla utiliza la función *bola de cristal* para rotar el octaedro regular y observar en mejor perspectiva otras caras del octaedro regular. Sin embargo, presentimos que la nueva vista del octaedro no le facilita precisar qué tipo de triángulo son las caras del octaedro, por lo que Karla utiliza la herramienta *longitud* para medir la longitud de todas las aristas visibles del octaedro regular, siendo el valor de 3,6 cm para cada arista. Luego, manifiesta que las caras del octaedro regular son triángulos equiláteros. Por las acciones de Karla, pensamos que moviliza su esquema de uso de triángulo equilátero. Así mismo, debido a las nociones que adquiere de las propiedades de las caras del octaedro regular, da indicios de que el proceso de instrumentalización está ocurriendo con ella.

En cuanto a nuestro análisis a priori, como se esperaba, Karla utilizó el esquema previsto de la clasificación de un triángulo respecto a sus lados.

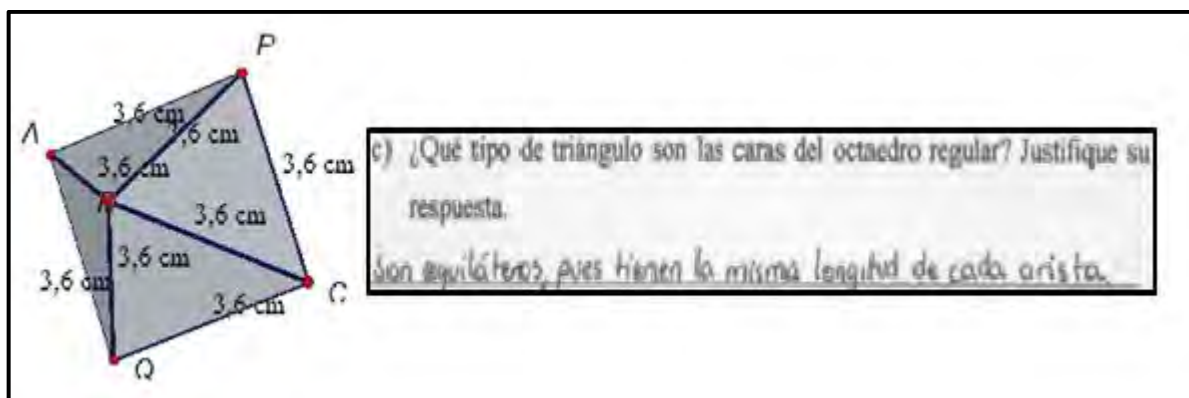


Figura 45. Respuesta de Karla en Cabri 3D a la actividad 1c

En el ítem 2, Karla, tal como se había previsto a priori, moviliza sus esquemas de usos de vértices, aristas, caras de un octaedro regular apropiados en el desarrollo de las actividades 1a), 1b) y 1c) y, de acuerdo, a estas nociones recientemente adquiridas, Karla describe el octaedro regular como “un poliedro regular de 6 vértices y 8 caras que son triángulos equiláteros” tal como se muestra en la figura 46. Se percibe en Karla aspectos de instrumentalización e instrumentación debido a que identifica características particulares del artefacto octaedro regular y logra explicarlo como se le pedía.

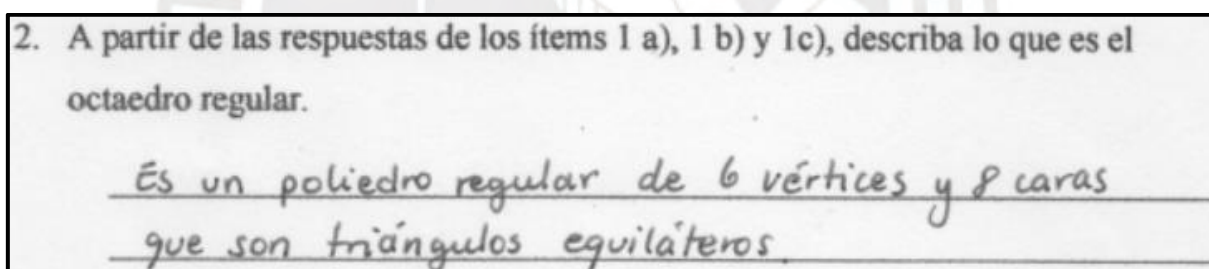


Figura 46. Respuesta de Karla a la actividad 2

En el ítem 3a), Karla utiliza la herramienta *segmento* para trazar los segmentos \overline{AC} , \overline{BD} y \overline{PQ} , y la herramienta *longitud* para medirlos, resultando el valor de cada uno igual a 4,9 cm. Usa también, la herramienta *ángulo* y mide los ángulos A, B, C y D, percatándose de que todos son iguales a 90° . Luego, deducimos que Karla tiene dudas para conjeturar el tipo del cuadrilátero ABCD. Debido a ello, utiliza la función *bola de cristal* para mostrar el cuadrilátero ABCD tal como se presenta en la figura 47 y a continuación logra describirlo como cuadrado.

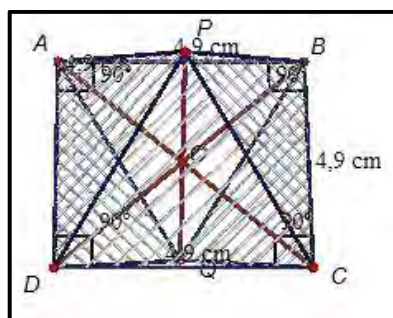


Figura 47. Respuesta de Karla en Cabri 3D a la actividad 3a

En las acciones de Karla, notamos que moviliza sus esquemas de uso de segmento y ángulo, y respecto al uso del esquema de cuadrado, se podría decir que su concepto está restringido a una única representación, como la de la figura 47, y no distingue como cuadrado representaciones en diferentes perspectivas. En esta actividad, Karla, de acuerdo con nuestro análisis a priori, considero el concepto de cuadrado como la figura con cuatro lados iguales y cuatro ángulos iguales cada uno a 90° para describir el cuadrilátero ABCD como cuadrado. Además, en el desarrollo de la actividad como se muestra en la figura 48, se observa que Karla desarrolla el proceso de instrumentalización, puesto que se apropia de características y propiedades del artefacto octaedro regular.

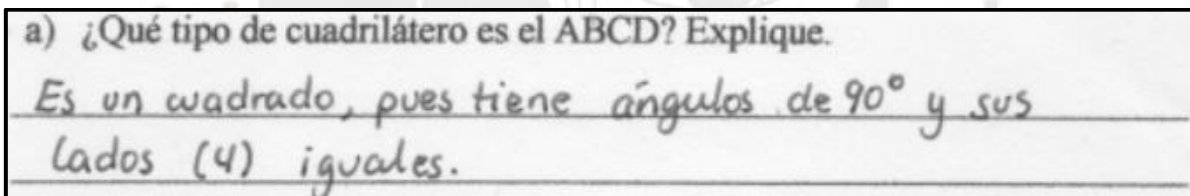


Figura 48. Respuesta de Karla a la actividad 3a

En el ítem 3b), Karla abre el archivo 1.cg3, utiliza las funciones de atributo *estilo de superficie* vacío, y *bola de cristal* para observar cómo está constituido internamente el octaedro regular tal como se muestra en la figura 49, suponemos se da cuenta de que está formado por dos pirámides regulares rectas, con la misma base e igual a un cuadrado. Nos hace pensar que, al decir “pirámide regular”, ha identificado que todas sus aristas son iguales entre sí.

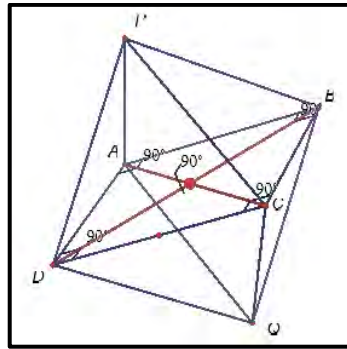


Figura 49. Respuesta de Karla en Cabri 3D a la actividad 3b

Por las acciones de Karla, notamos que ha movilizó sus esquemas de uso de pirámide regular, composición y descomposición de una figura tridimensional en partes, y comparación de figuras tridimensionales. Asimismo, observamos que Karla está interactuando con la representación del artefacto, deducimos, para tener nociones matemáticas de su constitución. Por ello, de acuerdo con Rabardel, está sucediendo el proceso de instrumentalización en Karla. En cuanto a nuestro análisis a priori, Karla realizó las acciones esperadas, por lo que llega a la conclusión de que las pirámides PABCD y QABCD son pirámides regulares cuadrangulares tal como describe en la figura 50.

b) En el octaedro regular deduzca de que tipo son las pirámides PABCD y QABCD. Justifique su respuesta.

Es una pirámide regular recta, pues sus lados de la base es un polígono regular (cuadrado)

Figura 50. Respuesta de Karla a la actividad 3b

A continuación, presentamos la actividad 2.

Actividad 2: Medida del volumen del octaedro regular

Abra el archivo 2.1.cg3, y trabaje la actividad.

1. En el octaedro regular PABCDQ, considere “a” como la medida de la arista del octaedro regular.
 - a. En la pirámide regular cuadrangular PABCD, ¿cuál es la medida del área de su base ABCD en términos de “a”? Explique su respuesta.
 - b. En el cuadrado ABCD, ¿cuál es la medida de la diagonal AC en términos de “a”? Explique su respuesta.
 - c. ¿Cuál es la medida de la altura h (PO) de la pirámide regular cuadrangular PABCD, en términos de “a”? Justifique
2.
 - a. Calcule la medida del volumen de la pirámide regular cuadrangular PABCD en términos de “a”. Justifique su respuesta.
 - b. Ahora calcule la medida del volumen del octaedro regular PABCDQ en términos de “a”. Explique su respuesta.
3. Abra el archivo 2.2.cg3, y trabaje la actividad.

En el octaedro regular PABCDQ, el área del cuadrilátero ABCD es de $9 u^2$. Calcule el volumen del octaedro regular. Explique detalladamente

Análisis a priori

El objetivo de esta actividad es que los estudiantes continúen con el proceso de la instrumentación e instrumentalización del artefacto octaedro regular a través de la secuencia de actividades. En ellas, los estudiantes continuarán con el proceso de su propia instrumentalización en las nociones y propiedades tales como la medida del área de la base, la altura de las pirámides rectas cuadrangulares en que se descompone el octaedro regular, la medida de los volúmenes de una pirámide recta cuadrangular y del octaedro regular, movilizándolo y/o creando esquemas de utilización (esquemas de uso/ esquemas de acción instrumentada).

A continuación, presentamos las secuencias de la actividad.

En el ítem 1a), a la pregunta. En la pirámide regular cuadrangular PABCD, ¿cuál es la medida del área de su base ABCD en términos de “a”? Explique su respuesta.

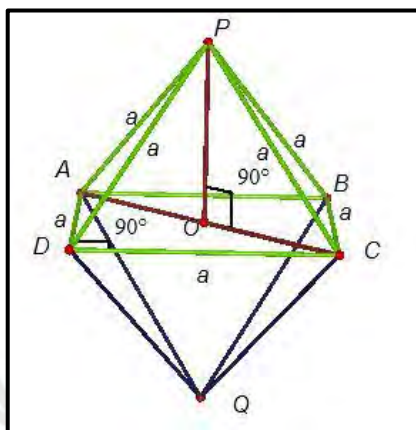


Figura 51. Pirámide cuadrangular PABCD en Cabri 3D

Pensamos que los estudiantes explorarán la figura 51 desde diferentes puntos de vista con la herramienta *manipulación* y la función atributo *bola de cristal*, observando cómo varía la representación del cuadrilátero ABCD, debido, probablemente, a la falta de percepción de que es un cuadrado. Esperamos, a priori, que movilicen su nuevo esquema de uso desarrollado en la actividad 1-3a), el cual manifiesta que el cuadrilátero ABCD es un cuadrado y, accionando sus esquemas de uso de arista del octaedro regular y área de un cuadrado como el resultado de elevar al cuadrado la longitud de su lado, suponemos, en primer lugar, que se darán cuenta de que la medida de cada lado del cuadrilátero ABCD es igual a la de la arista del octaedro regular y, en seguida, podrán calcular el área del cuadrilátero ABCD de la siguiente manera:

$$\text{Área del cuadrilátero } ABCD = \text{Área del cuadrado } ABCD = (\text{lado})^2 = a^2$$

Creemos que los estudiantes, al calcular la medida del área del cuadrado ABCD, se están enriqueciendo con una propiedad del artefacto octaedro regular, es decir, en términos de Rabardel, los estudiantes están en un proceso de instrumentalización.

En el ítem 1b), a la pregunta. En el cuadrado ABCD, ¿cuál es la medida de la diagonal AC en términos de “a”? Explique su respuesta

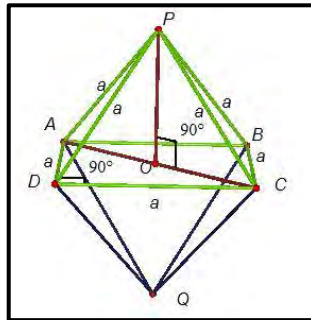


Figura 52. Diagonal AC de la pirámide cuadrangular PABCD en Cabri 3D

Proyectamos que los estudiantes utilizarán la función *bola de cristal* y la herramienta *manipulación* para obtener diferentes representaciones del segmento \overline{AC} en la figura 52 y creemos que reconocerán el segmento \overline{AC} como la hipotenusa del triángulo rectángulo ADC. En seguida, creemos que las acciones que realicen estarán vinculadas con sus esquemas de uso de aristas del octaedro regular (todas iguales), del teorema de Pitágoras y operaciones algebraicas. Por ello, nos da indicios de que realizarán los siguientes procedimientos cognitivos para hallar la diagonal \overline{AC} : $AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

Los estudiantes, al hacer suyo del conocimiento de la medida de la diagonal \overline{AC} , continúan con el enriquecimiento de propiedades del artefacto octaedro regular, es decir, están en un proceso de instrumentalización, proceso que está relacionado con la búsqueda del instrumento “medida del volumen de un octaedro regular”.

En el ítem 1c), a la pregunta ¿Cuál es la medida de la altura h (PO) de la pirámide regular cuadrangular PABCD, en términos de “a”?

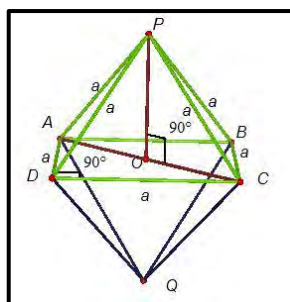


Figura 53. Altura h (PO) de la pirámide cuadrangular PABCD en Cabri 3D

Pensamos que los estudiantes utilizarán la herramienta *manipulación* y la función *bola de cristal* para rotar la representación de la figura 53, observando el comportamiento de la recta perpendicular (que contiene al segmento \overline{PO}) al plano que contiene el cuadrado ABCD, por lo que asumimos concluirán que el segmento \overline{PO} es perpendicular al segmento \overline{AC} y, además, asumimos que se darán cuenta de que se forma el triángulo rectángulo POC. En estas acciones realizadas por los estudiantes, creemos que movilizarán, a priori, su esquema de uso de recta perpendicular a un plano como aquel que forma un ángulo de 90° con el plano y con las rectas que pasan por el punto de intersección de la recta con el plano, para vincular que “O” es el punto de intersección de la recta perpendicular con el plano, y que el segmento \overline{PO} es perpendicular al segmento \overline{AC} , formándose el triángulo rectángulo POC. Creemos que los estudiantes, al reconocer el triángulo rectángulo POC, accionarán sus conocimientos preexistentes para relacionar uno de sus catetos con la altura “h” de la pirámide regular cuadrangular PABCD, y el otro cateto con el segmento \overline{OC} . Por ello, nos hace pensar que, para conseguir el objetivo de determinar “h”, movilizarán sus esquemas de uso: las diagonales de un cuadrado se bisecan (se cortan en su punto medio) y los lados del triángulo rectángulo POC guardan cierta relación según el teorema de Pitágoras.

Las acciones que realizarán los estudiantes para determinar “h”, creemos, serán las siguientes:

$AC = a\sqrt{2}$, esto es el resultado de la actividad anterior.

El segmento OC = la mitad de la diagonal AC

Por tanto, el segmento \overline{OC} es igual a:

$$OC = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

En el triángulo rectángulo POC.

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{2a^2}{4} = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2} \rightarrow h = PO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

En términos de Rabardel, con la presente actividad, los estudiantes continúan con el proceso de instrumentalización del artefacto octaedro regular, es decir, toman conocimiento de características y propiedades del artefacto.

En el ítem 2), Calcule el volumen de la pirámide regular cuadrangular PABCD en términos de “a”. Justifique su respuesta

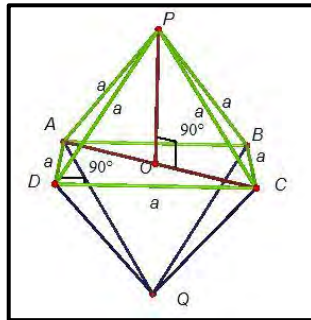


Figura 54. Volumen pirámide cuadrangular PABCD con arista a en Cabri 3D

Creemos que los estudiantes realizarán acciones para identificar la forma y volumen de la pirámide regular cuadrangular PABCD, y para identificar elementos en una pirámide cuadrangular como, por ejemplo, su altura y su base como se muestra en la figura 54. Esperamos, a priori, que, para obtener resultados, movilicen su esquemas de uso de una pirámide regular cuadrangular y sus características. Esto significa, bajo los terminos de Rabardel, que los estudiantes están realizando tareas “secundarias” en el artefacto. Luego, asumimos que ejecutarán acciones para calcular el volumen de la pirámide regular cuadrangular, por lo que esperamos, a priori, que movilicen su esquema preexistente de volumen de una pirámide como el producto del área de su base y su altura, y que vinculen el área de la base a la expresión $A_b = a^2$, y altura a $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, siendo estos resultados esquemas de uso de los que tomaron conocimiento en actividades anteriores. Por todo ello, creemos que escribirán una expresion algebraica de la medida del volumen de una pirámide de acuerdo a los siguientes pasos:

$$V_{piramide} = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

$$V_{piramide} = \frac{1}{3} \left(a^2 * \frac{a\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

De acuerdo con Rabardel, consideramos este nuevo esquema de $V_{piramide}$ como un posible esquema de acción instrumentada, debido a que le va a permitir al estudiante hallar la medida del volumen del octaedro regular en una determinada situación.

En el ítem 2), Ahora calcule el volumen del octaedro regular PABCDQ en términos de “a”.
Explique su respuesta.

Presentimos que los estudiantes, con la función *bola de cristal*, manipularán la representación del octaedro regular y accionarán sus esquemas preexistentes de composición y descomposición de volúmenes. Por ello, creemos que se darán cuenta de que el octaedro regular está formado por dos pirámides regulares cuadrangulares unidas por su base como se observa en la figura 55. A continuación, asumimos que realizarán acciones para sumar dos veces o duplicar la medida del volumen de una pirámide regular cuadrangular, para lo cual movilizarán sus esquemas de utilización de la medida del volumen de una pirámide y vincularán su cálculo con la medida del volumen de un octaedro regular. De acuerdo con Rabardel, para llegar al objetivo del cálculo de la medida del volumen, se han realizado una serie de acciones en la parte artefactual sostenidas con esquemas de utilización, por lo que nos da indicios de que se ha generado un esquema de acción instrumentada. Asimismo, en el desarrollo de las actividades 1 y 2, se ha percibido en los estudiantes aspectos de instrumentación e instrumentalización. Por ello, nos hace pensar que, al determinar “la medida del volumen del octaedro regular”, sucedió el proceso de la génesis instrumental de la medida del volumen del octaedro regular mediada con Cabri 3D.

Es de suponer que los estudiantes realizarán las siguientes acciones, basadas en esquemas preexistentes de resolución de operaciones algebraicas, para conjeturar la medida del volumen del octaedro regular en términos de la arista “a”.

Primera alternativa $V_{\text{octaedro}} = V_{\text{piramide}} + V_{\text{piramide}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} + \frac{a^3\sqrt{2}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

Segunda alternativa $V_{\text{octaedro}} = 2 * V_{\text{piramide}} = 2 * \frac{a^3\sqrt{2}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

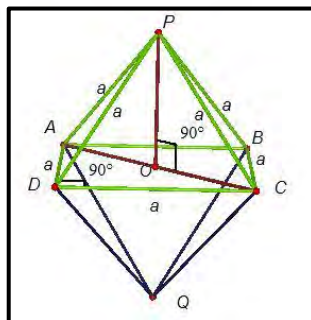


Figura 55. Medida del volumen del octaedro regular PABCDQ con arista *a* en Cabri 3D

En el ítem 3) Abra el archivo 2.2cg3, y trabaje la actividad.

En el octaedro regular $PABCDQ$, el área del cuadrilátero $ABCD$ es de $9 u^2$. Calcule el volumen del octaedro regular. Explique detalladamente

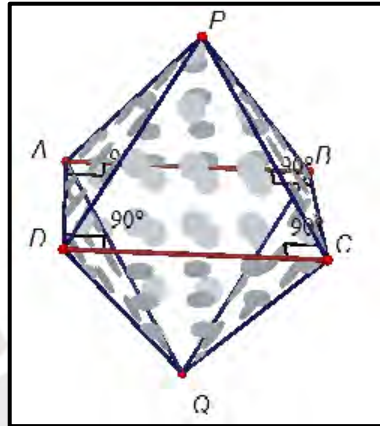


Figura 56. Octaedro regular $PABCDQ$ con arista a en Cabri 3D

Creemos que, ante la situación problema planteada en esta actividad, los estudiantes determinarán la medida de la arista del octaedro regular, por lo que pensamos que, previamente utilizarán la función *bola de cristal* para interactuar con la representación del octaedro regular, dándose cuenta que el cuadrilátero $ABCD$ es un cuadrado, por lo que, presumimos que la medida del área del cuadrado (a^2), igualarán a su valor de $9u^2$ para determinar la medida del lado del cuadrado, dándose cuenta que este valor es también igual a la arista del octaedro regular. Luego, creemos que utilizarán la noción de la medida del volumen del octaedro regular ($\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$), para hallar su medida, reemplazando el valor de a , que representa la medida de la arista.

Suponemos que los estudiantes, realizarán las siguientes acciones:

$$\text{Área del cuadrado } ABCD = 9u^2 = a^2 \rightarrow a = 3u$$

$$\text{Volumen del octaedro } PABCDQ = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} = \frac{3^3\sqrt{2}}{3} = 9\sqrt{2} u^3$$

Por las acciones de los estudiantes, creemos que están instrumentalizados, ya que consiguen resolver un problema con el uso del instrumento *medida del volumen del octaedro regular*. En la presente actividad movilizaron sus esquemas de uso de área de un cuadrado, característica del cuadrilátero $ABCD$ como un cuadrado (actividad 2-1a), operaciones con expresiones algebraicas, y el instrumento *medida del volumen del octaedro regular*.

Análisis a posteriori de las acciones de David

En el ítem 1a) David en la figura 57 reconoce que la base ABCD es un cuadrado de lado a y, por tanto, su área es a^2 debido a que él afirma en la figura 58 “el area de una base cuadrada es a^2 ”. Sin embargo, David manifiesta que “La figura es el problema” debido a ello, pensamos, que presenta dificultades para reconocer el cuadrado, pero en diferentes perspectivas. Por lo anterior, podemos decir que David parcialmente utilizó los esquemas previstos en el análisis a priori, no utilizó la función *bola de cristal* ni la herramienta *manipulación*.

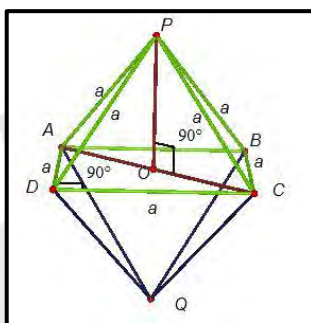


Figura 57. Respuesta de David en Cabri 3D a la actividad 1a

En las acciones de David, notamos que ha movilizado sus esquemas de uso de pirámide regular cuadrangular, área de un cuadrado. Asimismo, en David está ocurriendo el proceso de instrumentalización del artefacto octaedro regular, pues va conociendo más características del artefacto como se observa en la figura 58.

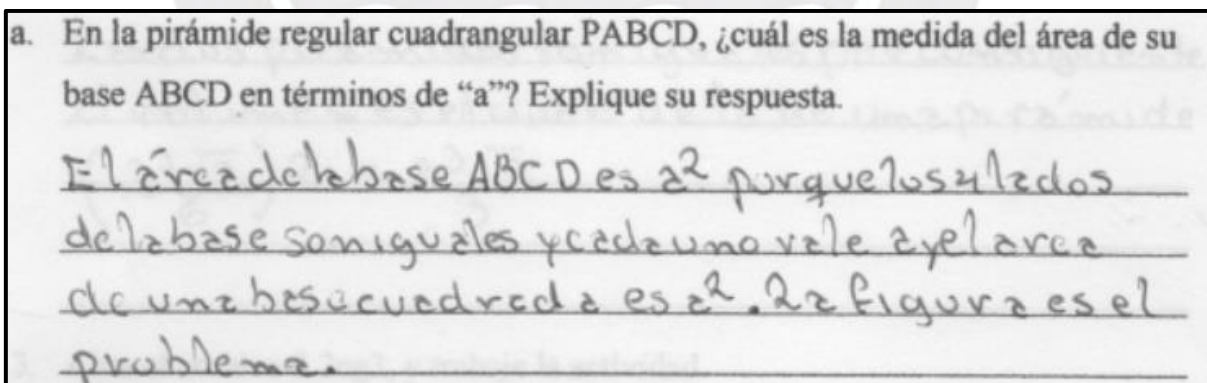


Figura 58. Respuesta de David a la actividad 1a

En el ítem 1b), al observar la figura 59, nos hace pensar que David se da cuenta de la presencia del triángulo rectángulo ADC con hipotenusa igual a \overline{AC} y catetos iguales $AD = DC = a$, por sus acciones a la respuesta 1b) tal como se observa en la figura 60. Para obtener estos resultados, moviliza sus esquemas de uso de las características de un triángulo rectángulo, logrando identificar los catetos y la hipotenusa del triángulo.

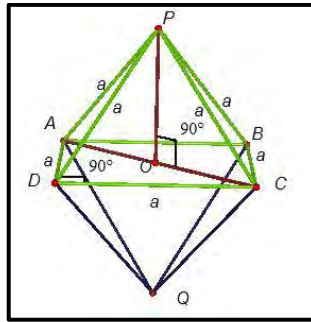


Figura 59. Respuesta de David en Cabri 3D a la actividad 1b

Luego, moviliza su esquema de uso del teorema de Pitágoras, lo que puede notarse por las acciones que realiza para determinar el valor de $AC = a\sqrt{2}$, tal como lo describe en la figura 60. David no logra utilizar la potencialidad de la función *bola de cristal* y la herramienta *manipulación* para darse cuenta, en forma adecuada, que, rotando el octaedro regular, los catetos del triángulo rectángulo ADC son iguales, por lo que nos hace pensar que su razonamiento espacial no permite reconocer que los catetos tienen igual magnitud tal como lo expresa, diciendo que “La figura es el problema”. En cuanto a los resultados esperados se cumplió lo indicado en el análisis a priori, a pesar de que David no utilizó la función atributo *bola de cristal* ni la herramienta *manipulación*. Además, se observa en David el proceso de instrumentalización, puesto que acumula conocimientos de algunas características de la base de la pirámide regular cuadrangular, parte constitutiva del artefacto octaedro regular.

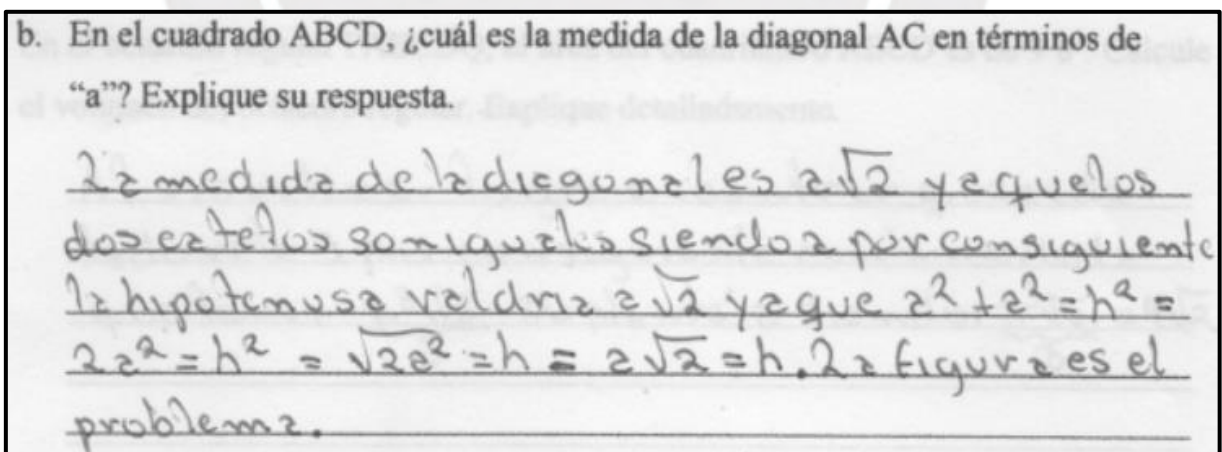


Figura 60. Respuesta de David a la actividad 1b

En el ítem 1c), En la figura 61, David, de acuerdo con sus acciones efectuadas que se muestra en la figura 62, reconoce la altura h (\overline{PO}) de la pirámide regular cuadrangular PABCD. Notamos que David utiliza sus esquemas preexistentes sobre nociones de los elementos de una pirámide regular cuadrangular, sin embargo, en sus acciones indica que “La figura es el problema”. Por ello, suponemos que no está debidamente instrumentalizado con la herramienta

manipulación y la función *bola de cristal*, es decir, con el apoyo de estas herramientas observar mejor el comportamiento de la altura h (\overline{PO}) del octaedro regular desde diferentes puntos de vista. De acuerdo a lo esperado a nuestro análisis a priori, utiliza parcialmente los esquemas previstos.

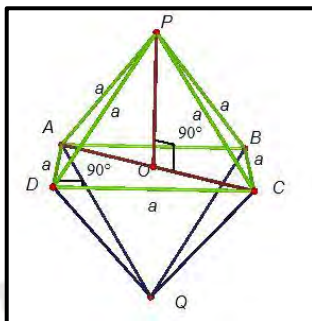


Figura 61. Respuesta de David en Cabri 3D a la actividad 1c

Luego, David logró movilizar los esquemas de uso como se esperaba en el análisis a priori, tales como las diagonales en un cuadrado se bisecan y, el teorema de Pitágoras, lo que se comprueba por las acciones que realiza para calcular la medida de la altura h (\overline{PO}). Se muestra en la figura 62 las acciones de David para calcular la medida de la altura de la pirámide regular cuadrangular. David logra, en esta actividad, adquirir noción de una característica del artefacto octaedro regular, por lo que, nos hace pensar que está en proceso de instrumentalización según Rabardel.

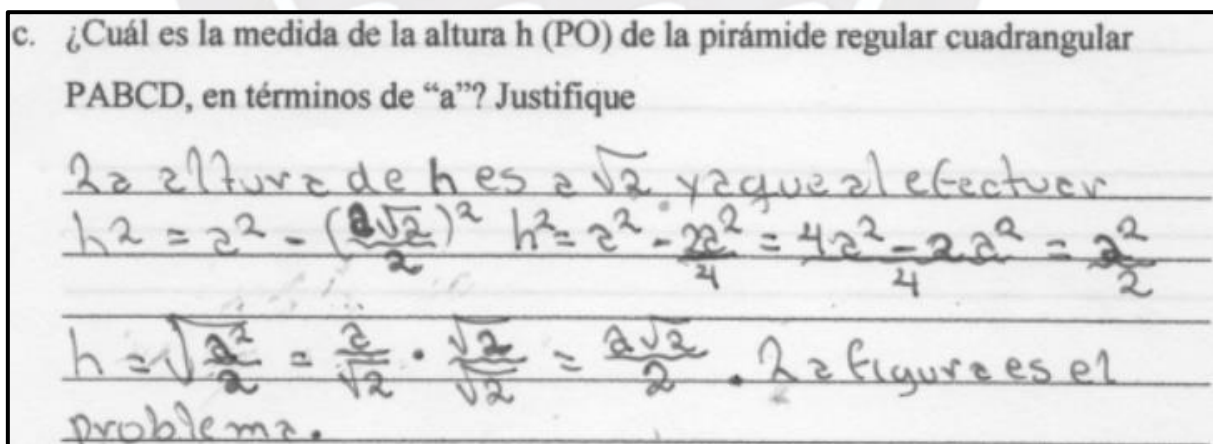


Figura 62. Respuesta de David a la actividad 1c

En el ítem 2a), David, de acuerdo, a sus acciones en la figura 63, logra reconocer la pirámide regular cuadrangular, su altura, su base, tal como lo dice en sus propias palabras “He podido visualizar la imagen”. Para el reconocimiento de estos elementos, suponemos que utilizó los esquemas de uso previstos en nuestro análisis a priori de tipos de pirámide y sus características

principales. Así también, la acción de David nos da indicios de que continúa teniendo conocimientos de características y propiedades de la parte artefactual; en otras palabras, continúa con el proceso de instrumentalización del artefacto octaedro regular.

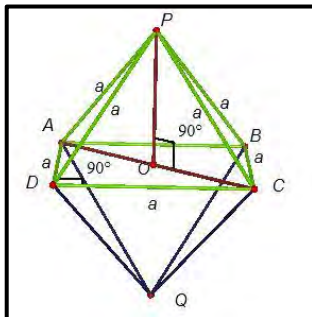


Figura 63. Respuesta de David en Cabri 3D a la actividad 2a

Luego, observamos en las acciones de David, que realiza las siguientes operaciones algebraicas para calcular el volumen de la pirámide regular cuadrangular, tal como se muestra en figura 64.

$$\frac{\frac{a^2 * a\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{\frac{a^3\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

Por ello, consideramos que David utiliza sus esquemas de uso del área de la base de la pirámide cuadrangular (a^2), y su altura ($\frac{a^2*\sqrt{2}}{2}$), desarrolladas en actividades anteriores, y volumen de una pirámide como la tercera parte del producto del área de su base por su altura ($\frac{A_b \cdot h}{3}$) para conjeturar el volumen de la pirámide regular cuadrangular. Las acciones de David son las previstas en nuestro análisis a priori.

2. a. Calcule la medida del volumen de la pirámide regular cuadrangular PABCD en términos de "a". Justifique su respuesta.

He podido visualizar la imagen y he calculado el volumen de la pirámide realizando

$$\frac{a^2 * a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

Figura 64. Respuesta de David a la actividad 2a

En el ítem 2b), David observa la representación del octaedro regular en la figura 65, creemos que supone que hay dos pirámides y que estas son iguales. Esto creemos porque él dice "Las

dos pirámides son iguales” tal como lo afirma en la figura 66. Observamos que, por las acciones que realiza, David utiliza esquemas de uso de composición y descomposición de volúmenes, y de nociones matemáticas de comparación de medidas en figuras tridimensionales. Como se esperaba a priori, David concluye que el octaedro regular está formado por dos pirámides regulares cuadrangulares. Sin embargo, podemos afirmar que utiliza parcialmente lo previsto en nuestro análisis a priori. David, por ejemplo, no utiliza la herramienta *manipulación*, ni la función *bola de cristal* para interactuar con la representación del octaedro regular y hacer algunas conjeturas acerca de la composición y descomposición de figuras en el octaedro regular.

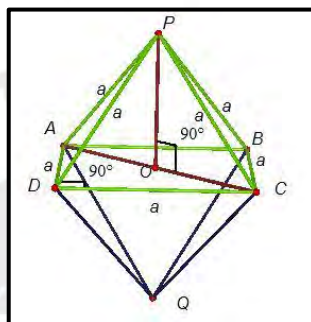


Figura 65. Respuesta de David en Cabri 3D a la actividad 2b

En seguida, observamos, en sus acciones efectuadas tal como se observa en la figura 66, duplica la medida del volumen de la pirámide regular cuadrangular que es igual a: $\frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{6}$, para conjeturar la medida del volumen del octaedro regular como $\frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{3}$. David movilizó sus esquemas de uso de volumen de una pirámide ($\frac{A_b \cdot h}{3}$) y de conceptos matemáticos preexistentes sobre el duplo de una magnitud. Asimismo, pensamos que, al calcular la medida del volumen del octaedro regular, David ha realizado una serie de acciones en la parte artefactual soportadas con esquemas de utilización, por lo que nos da indicios de que ha generado un esquema de acción instrumentada.

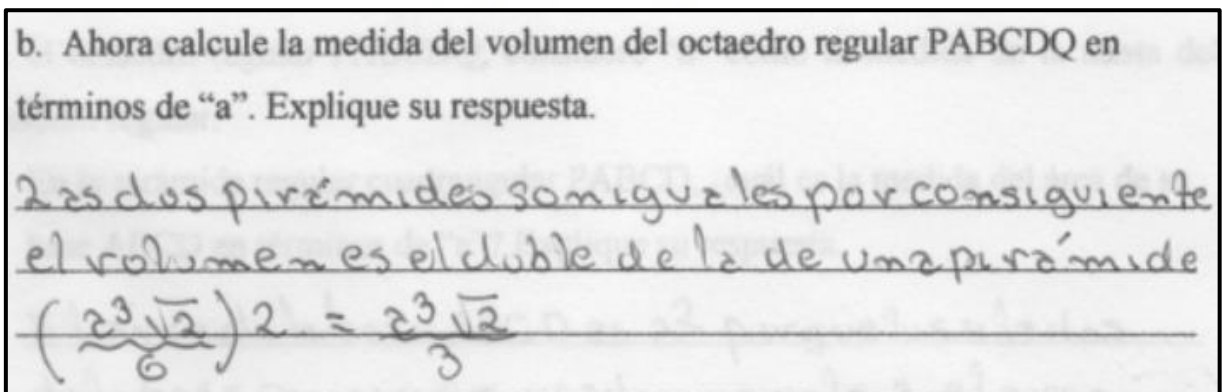


Figura 66. Respuesta de David a la actividad 2b

En el ítem 3), David abrió el archivo 2.2cg3; interactuó con el octaedro regular, reconociendo en la figura 67 el cuadrilátero ABCD cuya área es igual a 9, como un cuadrado. Esto deducimos porque él dice “Al visualizar logre encontrar que cada lado vale 3”.

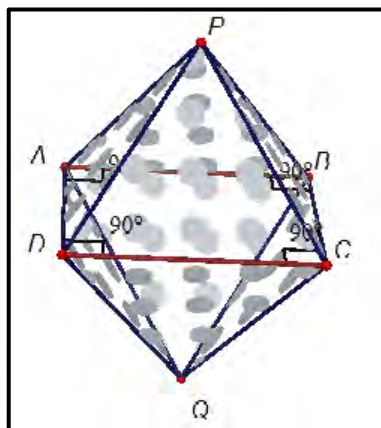


Figura 67. Respuesta de David en Cabri 3D a la actividad 3

Luego, realiza acciones, entre ellas se da cuenta que la medida del lado del cuadrado es igual a 3, efectúa operaciones algebraicas en la expresión $\frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{3}$ reemplazando “a” con el valor $a=3$, calculando la medida del volumen del octaedro regular igual a $9\sqrt{2}$ como se muestra en la figura 68.

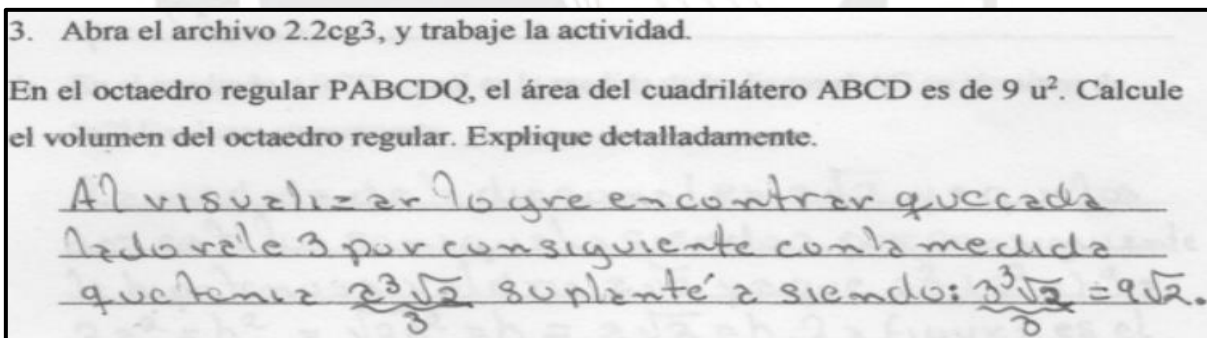


Figura 68. Respuesta de David a la actividad 3

En las acciones de David, notamos moviliza sus esquemas de uso de cuadrado, área de un cuadrado, arista de un octaedro regular, medida del volumen de un octaedro regular, operaciones con expresiones algebraicas, para calcular el volumen del octaedro regular igual a $9\sqrt{2}$.

Percibimos en David, que utiliza el instrumento “medida del volumen del octaedro regular” para resolver un problema y ya se encuentra instrumentalizado. Por ello, podemos afirmar que, en David, sucedió la génesis instrumental de la medida del volumen del octaedro regular.

Análisis a posteriori de las acciones de Karla

En el ítem 1a), Karla, con la herramienta *ángulo* midió todos los ángulos del cuadrilátero ABCD, determinando el valor de cada uno como igual a 90° y, utilizando su esquema de uso de cuadrado, logra identificar que el cuadrilátero ABCD es un cuadrado. Asimismo, entre sus acciones halla el área del cuadrado como a^2 , suponiendo que utilizó su esquema preexistente de área de un cuadrado. El resultado esperado está de acuerdo con lo previsto en el análisis a priori de esta actividad. Las acciones de Karla permiten conocer la característica de ser un cuadrado la base de una de las pirámides regulares cuadrangulares en que se descompone el artefacto octaedro regular. Esto nos da indicios de que hay un proceso de instrumentalización, en Karla. Mostramos en la figura 69 la explicación de Karla.

a. En la pirámide regular cuadrangular PABCD, ¿cuál es la medida del área de su base ABCD en términos de “a”? Explique su respuesta.

Al haber la medida de los ángulos de la base me di cuenta que todos median 90° , con eso saqué la conclusión que la base es un cuadrado, tiene lados iguales y para hallar su área la fórmula es lado al cuadrado, es decir " a^2 "

Figura 69. Respuesta de Karla a la actividad 1a

En el ítem 1b), Karla, al observar la figura 70 se da cuenta de que la medida de cada ángulo del cuadrilátero ABCD es igual a 90° debido a que manifiesta “Al saber que todos los ángulos miden 90° ” tal como se observa en la figura 71. Presumimos que este resultado obtenido por Karla se debe a su esquema de uso el tipo de cuadrilátero ABCD de la pirámide regular cuadrangular es un cuadrado.

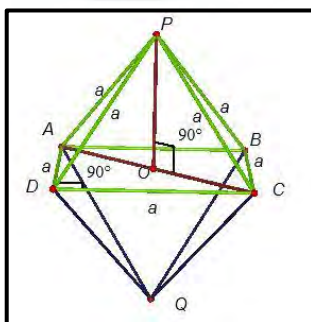


Figura 70. Respuesta de Karla en Cabri 3D a la actividad 1b

Por las acciones que realiza Karla y que lo describe en la figura 71. Karla moviliza su esquema de uso del teorema de Pitágoras logrando identificar a \overline{AC} como la hipotenusa y a \overline{AD} y \overline{DC} como los catetos del triángulo rectángulo ADC. Luego, moviliza su esquema preexistente de cálculos con operaciones algebraicas para determinar el valor de \overline{AC} como $x = a\sqrt{2}$.

b. En el cuadrado ABCD, ¿cuál es la medida de la diagonal AC en términos de "a"? Explique su respuesta.

Al saber que todos los ángulos miden 90° me di cuenta que la diagonal también representa a la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuya fórmula es que la suma de catetos al cuadrado es igual a la hipotenusa al cuadrado, es decir

$$"a^2 + a^2 = x^2 \quad 2a^2 = x^2 \rightarrow \sqrt{2a^2} = \sqrt{x^2} \rightarrow a\sqrt{2} = x"$$

Figura 71. Respuesta de Karla a la actividad 1b

Karla, al determinar el valor de la diagonal del octaedro en términos de su arista, como $AC = a\sqrt{2}$, toma conocimiento de una propiedad del artefacto octaedro regular. Por ello, podemos afirmar que el proceso de instrumentalización está sucediendo en Karla.

En el ítem 1c), Karla utiliza la herramienta *manipulación* y la función *bola de cristal* para representar el octaedro regular desde diferentes puntos de vista, dándose cuenta de que no cambia la forma del triángulo POC, es decir, siempre es un triángulo rectángulo con hipotenusa \overline{PC} y catetos \overline{PO} y \overline{OC} como se observa en la figura 72. Esto lo deducimos por lo que ella manifiesta "comenzé a rotar la figura y encontré que POC formaban un triángulo rectángulo" (ver figura 73). Las acciones de Karla son esperadas de acuerdo con nuestro análisis a priori.

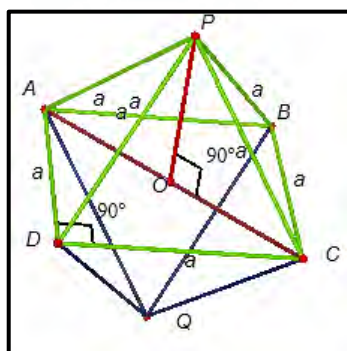


Figura 72. Respuesta de Karla en Cabri 3D a la actividad 1c

Luego, para calcular la medida de la altura h (\overline{PO}), moviliza sus esquemas de uso del teorema de Pitágoras, la medida de la diagonal $AC = a\sqrt{2}$ (actividad 1b) y aquella según la cual, en un cuadrado, las diagonales se bisecan.

Se muestra en la figura 73 las acciones de Karla para determinar la medida de la altura como

$h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Con relación a lo esperado en nuestro análisis a priori, ella realiza sus operaciones algebraicas de acuerdo con lo previsto. Con esta actividad, se observa que Karla continúa incrementando características y propiedades del artefacto octaedro regular, por lo que, de acuerdo con Rabardel, nos da indicios de que se encuentra en un proceso de instrumentalización.

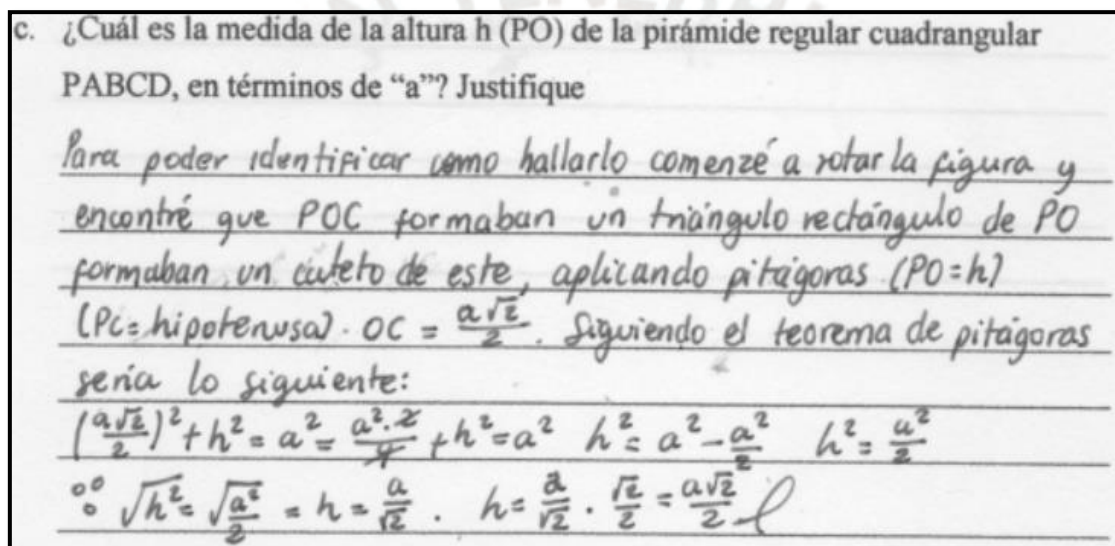


Figura 73. Respuesta de Karla a la actividad 1c

En el ítem 2a), Karla utiliza la herramienta *manipulación* y la función *bola de cristal* para observar la pirámide regular cuadrangular PABCD desde diversos puntos de vista, suponiendo esta acción para identificar la pirámide QABCD como una réplica de la pirámide PABCD. Así también identifica la base de la pirámide PABCD y su altura. Esto se puede afirmar porque ella dice que “Rotando la figura pude identificar la pirámide” (ver figura 74). Notamos que Karla moviliza sus esquemas de uso de nociones de pirámide regular cuadrangular y sus características, como lo habíamos previsto a priori. Las acciones de Karla, en esta actividad, indican que ella continúa con el proceso de reconocimiento de características y propiedades del artefacto octaedro regular, por lo que, de acuerdo con Rabardel, en Karla se está generando el proceso de instrumentalización.

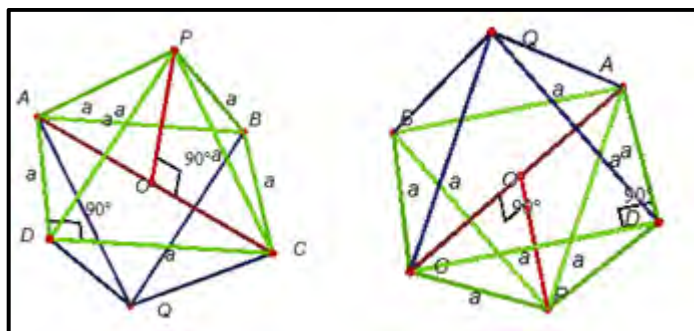


Figura 74. Respuesta de Karla en Cabri 3D a la actividad 2a

En seguida, Karla moviliza su esquema de uso de la medida del volumen de una pirámide igual a un $\frac{1}{3}$ del área de su base multiplicado por su altura $\left(\frac{A_b \cdot h}{3}\right)$. Esto lo deducimos por sus acciones tal como se muestra en la figura 75. Por tanto, de acuerdo a lo esperado en el análisis a priori se consiguió el objetivo de que Karla conjeture la medida del volumen de la pirámide regular cuadrangular PABCD como $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

2. a. Calcule la medida del volumen de la pirámide regular cuadrangular PABCD en términos de "a". Justifique su respuesta.

Rotando la figura pude identificar la pirámide de la cual deduje que:

$$V = \frac{1}{3} \times a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

Figura 75. Respuesta de Karla a la actividad 2a

En el ítem 2b), Karla, utilizando la herramienta *manipulación* y la función *bola de cristal*, logra rotar la representación del octaedro regular para presentarlo de una forma donde observa dos pirámides cuadrangulares, unidas por su base como se muestra en la figura 76. En sus acciones, suponemos, utiliza posibles esquemas de utilización como la composición y descomposición de una figura en dos partes, comparar magnitudes de longitud y, volumen de figuras tridimensionales. Por ello, Karla comenta que “el octaedro regular son 2 pirámides unidas a la misma base”.

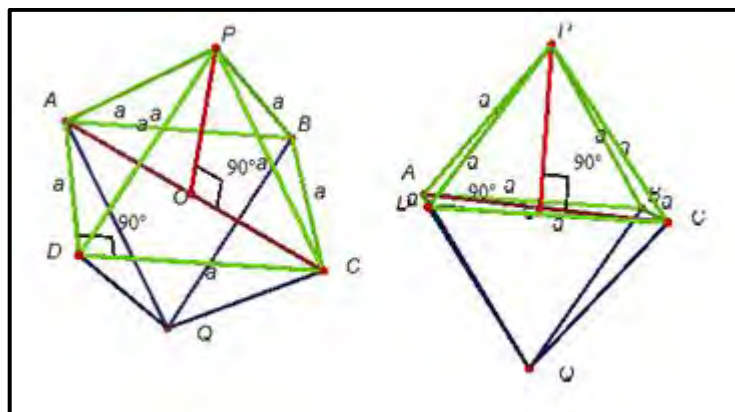


Figura 76. Respuesta de Karla en Cabri 3D a la actividad 2b

Luego, Karla, en sus acciones que describe en la figura 77, duplica la medida del volumen de una pirámide regular cuadrangular ($\frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{6}$), para conjeturar la medida del volumen del octaedro regular como $\frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{3}$. Karla movilizó sus esquemas de uso de noción del volumen de una pirámide como la tercera parte del producto, del área de su base por su altura ($\frac{A_b \cdot h}{3}$), y de esquemas preexistentes tales como operaciones con expresiones algebraicas, y noción del duplo de una magnitud.

Karla, al conjeturar la medida del volumen de un octaedro regular, nos hace pensar que genera un esquema de acción instrumentada para su utilización en una próxima acción. Asimismo sucede en Karla la génesis instrumental de la medida del volumen de un octaedro regular.

b. Ahora calcule la medida del volumen del octaedro regular PABCDQ en términos de "a". Explique su respuesta.

Al rotar la figura y ponerla derecha me di cuenta que el octaedro son 2 pirámides unidas a la misma base así deduje que su volumen es 2 veces el volumen de la pirámide $2 \left(\frac{a^3 \sqrt{2}}{6} \right) = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$

Figura 77. Respuesta de Karla a la actividad 2b

En el ítem 3), Karla abrió el archivo 2.2cg3, interactuó con el octaedro regular, reconociendo como cuadrado el cuadrilátero ABCD, por lo que ella en la figura 78 dice "Al rotar la figura identifiqué el cuadrado; pues cada ángulo del cuadrado mide 90° entonces si su área es 9 cada lado mide 3". Identifica el valor del lado del cuadrado igual a tres.

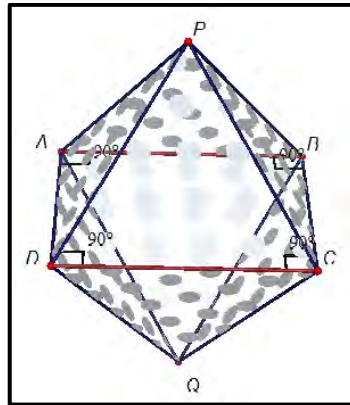


Figura 78. Respuesta de Karla en Cabri 3D a la actividad 3

Luego, Karla realiza operaciones algebraicas para calcular la medida del volumen del octaedro regular en la expresión $\frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{3}$, reemplazando en ella el valor de $a = 3$, obteniendo $9\sqrt{2}$, cómo se observa en la figura 79.

3. Abra el archivo 2.2cg3, y trabaje la actividad.

En el octaedro regular PABCDQ, el área del cuadrilátero ABCD es de 9 u^2 . Calcule el volumen del octaedro regular. Explique detalladamente.

Al rotar la figura identifiqué el cuadrado, pues cada ángulo del cuadrado mide 90° entonces si su área es 9 cada lado mide 3 y cada arista del octaedro mide igual con ello deduzco el volumen.

$$V = \frac{(3)^3 \sqrt{2}}{3} = \frac{27\sqrt{2}}{3} = 9\sqrt{2} \text{ f.}$$

Figura 79. Respuesta de Karla a la actividad 3

En las acciones de Karla, observamos que moviliza sus esquemas de uso de cuadrado, área de un cuadrado, arista de un octaedro regular, medida del volumen de un octaedro regular, operaciones con expresiones algebraicas, logrando determinar la medida del volumen del octaedro regular igual a $9\sqrt{2}$.

En términos de Rabardel, percibimos que Karla utiliza el instrumento “medida del volumen del octaedro regular” para resolver un problema. Por ello, podemos afirmar que ya se encuentra instrumentalizada. Además, en Karla sucedió el proceso de la génesis instrumental de la medida del volumen del octaedro regular.

En el desarrollo del ítem 3), tanto en las acciones de David como en las de Karla, podemos distinguir que no tienen definidas las representaciones de nociones de unidades de longitud como (u), unidades cuadradas como (u^2) y unidades cúbicas como (u^3), por lo que se puede decir que nuestro análisis a posteriori del ítem 3) cumple parcialmente el análisis a priori.



CONSIDERACIONES FINALES

Esta investigación es fruto de una inquietud en la enseñanza de la geometría del espacio, en estudiantes de la secundaria media, con el apoyo del software Cabri 3D, particularmente en la enseñanza y aprendizaje de los sólidos platónicos hexaedro (cubo), tetraedro regular, octaedro regular.

En el presente trabajo de investigación, hemos comprobado cómo los estudiantes confunden los conceptos de superficie, área y volumen de figuras tridimensionales, y se ha comprobado en la práctica cómo mejoran su comprensión con el soporte del Cabri 3D. En el desarrollo de nuestra investigación, se propuso a los estudiantes, la actividad 0 para que explorarán las herramientas *manipulación, punto, segmento, punto de intersección, longitud, ángulo* y las funciones *bola de cristal, atributos de color, atributos de superficie* del Cabri 3D, realizando construcciones geométricas que podrían necesitar para el desarrollo de las actividades 1 y 2. Como resultado de las acciones de los estudiantes en la actividad 0, se observó un proceso de génesis instrumental en algunas herramientas del Cabri 3D tales como *punto, segmento, longitud, ángulo y poliedro regular*.

Nuestra investigación trata sobre la génesis instrumental de la medida del volumen del octaedro regular mediada con Cabri 3D. Creemos que su estudio les va a permitir a los estudiantes movilizar sus conocimientos preexistentes de geometría plana y del espacio e, integrando estos conceptos, facilitar la comprensión del cálculo de la medida del volumen del octaedro regular siguiendo una secuencia de actividades mediadas con el Cabri 3D. Por ello, teníamos que elegir el marco teórico apropiado en la enseñanza de las matemáticas con soporte tecnológico. Es así que elegimos el Enfoque Instrumental de Rabardel (1995), que creímos pertinente, ya que los estudiantes, al desarrollar las secuencias de actividades diseñadas, adquieren conocimientos de características y propiedades del octaedro regular cuando observan y manipulan la representación del octaedro regular con el Cabri 3D que es nuestra parte artefactual. Es así que los estudiantes, en la actividad 1, movilizan esquemas de uso; percibimos, entre ellos, los de vértice, cara, arista de un poliedro regular; y, en la actividad 2, movilizan esquemas de utilización (de uso y acción instrumentada), entre ellos, la altura y base de una pirámide recta cuadrangular y el volumen de una pirámide recta cuadrangular. Al terminar el desarrollo de las actividades podemos señalar que los estudiantes transitaron por los procesos de instrumentalización e instrumentación. Creemos que la génesis instrumental de la medida del volumen del octaedro regular mediada con Cabri 3D sucede cuando los estudiantes conjeturan

la medida del volumen del octaedro regular desarrollando la pregunta 2b en la actividad 2. Así también, como referente para el desarrollo de nuestra investigación utilizamos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), considerando sus cuatro fases que son las siguientes: análisis preliminares, concepción y análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori y validación. Consideramos que el análisis preliminar, en sus dimensiones epistemológica, didáctica y cognitiva, tiene importancia en el inicio de nuestra investigación, para el diseño y elaboración de las secuencias didácticas orientadas a que los estudiantes planteen el uso de esquemas para el logro de nuestro primer objetivo específico. En cuanto a la dimensión didáctica, comprobamos la carencia del estudio de los sólidos platónicos: octaedro, dodecaedro e icosaedro en los libros proporcionados por el Ministerio de Educación. Además, la investigación de Abrate, Delgado y Pochulu (2006) (citado por Gamboa, Ballester, 2009, p.2), afirma que la enseñanza de la geometría espacial es relegada a los últimos meses del año, y por tanto desarrollados en forma superficial.

En la parte experimental, se observó que los estudiantes movilizan esquemas de utilización (esquemas de uso y de acción instrumentada). Nuestro análisis a priori y el análisis a posteriori se contrastó luego de aplicación de las actividades, evidenciando el comportamiento esperado de acuerdo con nuestro análisis a priori.

El objetivo general de nuestra investigación, “Analizar el proceso de la génesis instrumental de la medida del volumen del octaedro regular en estudiantes del cuarto grado de educación secundaria”, se logró alcanzar utilizando la noción de esquema de Rabardel (1995) en el desarrollo de las secuencias de actividades diseñadas.

Por otra parte, en cuanto a nuestro primer objetivo específico, “Identificar, en las acciones de los estudiantes sus posibles esquemas de utilización (uso y de acción instrumentada) cuando movilizan la noción de octaedro regular en una secuencia didáctica en la que se utiliza Cabri 3D”, se logró determinar luego del análisis a posteriori de las acciones ejecutadas por David y Karla, identificando esquemas de uso, que les han permitido a los estudiantes comprender nociones del objeto matemático octaedro regular tales como: vértices, aristas, caras, diagonales, altura, y esquemas de acción instrumentada como cuando conjeturan la medida del volumen de una pirámide regular cuadrangular, por ya estar instrumentalizados con las nociones de altura y área de la base de una pirámide recta cuadrangular. En cuanto al Cabri 3D, este ambiente facilitó a los estudiantes el observar y manipular las características del octaedro regular para su mejor comprensión.

Para el logro del segundo objetivo específico, “Analizar, como los estudiantes asocian sus esquemas de utilización con las características del octaedro regular (artefacto) cuando conjeturan la medida del volumen del octaedro regular”, se presentó el diseño de la actividad 2, luego del análisis a posteriori de las acciones ejecutadas por David y Karla, hemos identificado esquemas de uso tales como el teorema de Pitágoras, operaciones con expresiones algebraicas, área de la base y altura de una pirámide regular, y volumen de una pirámide regular cuadrangular, y esquemas de acción instrumentada que permitieron a los estudiantes interactuar con el octaedro regular para conjeturar la medida del volumen del octaedro regular.

Con respecto a nuestra pregunta de investigación, “¿Cómo se produce la génesis instrumental de la medida del volumen del octaedro regular en estudiantes del cuarto grado de educación secundaria cuando trabajan una secuencia de actividades con Cabri 3D?, puede afirmarse lo siguiente. En la fase experimental, desarrollando las actividades 1 y 2 mediada con el Cabri 3D, se observa, a través de sus acciones, que en los estudiantes sucede gradualmente el enriquecimiento de características y propiedades del artefacto octaedro regular, es decir, está sucediendo el proceso de la instrumentalización, así también se identificó esquemas de acción instrumentada que dan indicios que está sucediendo el proceso de instrumentación y desarrollando la pregunta 2b en la actividad 2 conjeturan la medida del volumen del octaedro regular. En otras palabras, podemos decir que, en los estudiantes, al determinar la medida del volumen del octaedro regular, se ha producido la génesis instrumental. Además, pudieron resolver un problema intramatemático con el uso del instrumento medida del volumen del octaedro regular.

Consideramos nuestro estudio como un aporte para futuros trabajos que puedan investigar el aprendizaje de la construcción de los sólidos platónicos hexaedro (cubo), tetraedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro mediados con Cabri 3D; por ser este software el más apropiado para realizar construcciones, observar y manipular los sólidos platónicos, bajo el marco teórico del Enfoque Instrumental. Por otro lado, sería beneficioso realizar estudios de los volúmenes de los cuerpos de revolución tales como el cilindro, cono, esfera mediadas por el Cabri 3D con el marco teórico del Enfoque Instrumental. Estas investigaciones realizadas con estudiantes del ciclo VII (entre 13 y 16 años) de la Educación Básica, podría ser la apertura de la enseñanza de los sólidos platónicos en el Currículo Nacional de la Educación Básica.

REFERENCIAS

- Advíncula, E. (2013). *Enseñanza de los poliedros con Cabri 3D*. En: Actas del VII CIBEM, 6820-6826.
- Alexander, D. y Koeberlein, G. (2013). *Geometria*. Recuperado de http://www.atibook.ir/dl/en/Siencas/Formal%20Sciences/mathematic/9781439047903/elementary_geometry_for_college_students.pdf.
- Almeida, T. (2010). *Sólidos arquimedianos e Cabri 3D: um estudo de truncaturas baseadas no renascimento*. (Tesis de Maestría Profesional en Enseñanza de Matemática). Pontificia Universidad Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.
- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L & Gomez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Baéz, R. y Iglesias, M. (2007). *Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL "El Mácaro"*. Enseñanza de la Matemática, 12, 67-87.
- Camou, B. (2012). *La infalibilidad de las matemáticas como un obstáculo para su enseñanza y su aprendizaje*. En: Actas del VI Congreso Iberoamericano de Cabri. Perú, 78-89.
- Cardona, C., Ocaña, A., Dussan, N., Cubillas, S. & Ocaña, J. (2006). *La geometría de Alberto Durero. Estudio y modelación de sus construcciones*. Bogotá: Universidad de Bogotá.
- Chumpitaz, L. (2013). *La génesis instrumental: un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediado por el software Geogebra con estudiantes de ingeniería*. (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.
- Del Castillo, A. y Montiel, G. (2009). *¿Artefacto o instrumento?* Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 459-467.
- Dos Santos, A. P. (2016). *Construção e medida de volume dos poliedros regulares convexos com o Cabri 3D: uma possível transposição didática*. (Tesis doctoral). Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil.
- Gamboa, R. y Ballesterio, E. (2009). *Algunas reflexiones sobre la didáctica de la matemática*. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 4(5), 113-136. Recuperado de www.cimm.ucr.ac.cr/edefaria.

- Gravina, M. (2001). *Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético dedutivo*. (Tesis de Doctorado). Pontificia Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.
- Gutiérrez, A. (1998). *Tendencias actuales de investigación en geometría y visualización*. Revista TIEM 98. 2, 2007.
- Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación 5ta. Ed.* México: Editorial Mc Graw Hill.
- Iranzo, N. y Fortuny, J. (2009). La influencia conjunta del uso de Geogebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 27(3), 433-444.
- Lanza, H. (2009). *Los cinco poliedros regulares convexos en el Timeo de platón y en la tradición platónica. Matemática, ontología, dialéctica, discurso y divinidad*. (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, España.
- León, J. (2014). *Estudio de los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el Geogebra en estudiantes de arquitectura y administración de proyectos*. (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.
- Lexicom (2016). *Matemática 4*. 2a. ed. Lima: Editorial San Marcos
- Martin, N. (2013). *Utilización del programa Cabri 3D como herramienta didáctica para la enseñanza de Geometría en 2ºESO*. (Tesis de maestría). Universidad Internacional de la Rioja, Madrid.
- Navarro, J. (2002). *Los Elementos de Euclides*. Recuperado de <https://www.google.com.pe/?ion=1&espv=2#q=navarro%20los%20elementos%20de%20euclides>
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principios y estándares para la educación matemática*. Traducido por Sociedad Andaluza de Educación Matemática. Sevilla
- Perú, Ministerio de Educación (2004). Unidad de Medición de la Calidad Educativa. *Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil 2004. Informe pedagógico de resultados. Formación matemática: Tercer grado y Quinto de secundaria*. Recuperado de http://www2.minedu.gob.pe/umc/admin/images/en2004/MatematicaS3_5.pdf
- Perú, Ministerio de Educación (2007). *Matemática. Serie 3 para docentes de Secundaria. Teoría de Matemática Básica. Fascículo 7: LOS POLIEDROS REGULARES*.

- Recuperado de <https://elpentagono.files.wordpress.com/2009/03/poliedros-fasciculo.pdf>
- Perú, Ministerio de Educación (2012). Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes. *Pisa en el Perú. Informe pedagógico de los resultados de resultados Pisa 2012 en Matemática*. Recuperado de <http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2015/06/INFORME-MATEMATICA-PISA-20121.pdf>
- Perú, Ministerio de Educación (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica 2016*. Recuperado de <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2016-2.pdf>
- Possani, J. F. (2012). *Uma sequencia didática para a aprendizagem do volume do icosaedro regular*. (Tesis maestría). Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil.
- Pogorélov, A. (1974). *Geometría elemental*. Moscú: Editorial Mir.
- Puertas, M. (1996). *Euclides Elementos Libros X-XIII*. (Trad. por M. Puertas). España: Editorial Gredos. S. A.
- Quesada, C. (2006). *Los sólidos platónicos: Historia, Propiedades y Arte*. Recuperado de <http://lya.fciencias.unam.mx/gfgf/ga20132/poliedros/arch5.pdf>
- Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies: une approche cognitive des instruments contemporains*. Université Paris. Armand Colin. Recuperado de <http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/>
- Rabardel, P. (2011). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. (Trad. por M. Acosta). Colombia: Ediciones Universidad Industrial de Santander.
- Rangel, A. (1982). *Poliedros*. Rio de Janeiro: Editorial Libros Técnicos y Científicos S.A.
- Salazar, J.V.F. (2009). *Gênese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de transformações geométricas no espaço*. (Tesis doctoral). Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil.
- Salazar, J.V.F., (2012). *La influencia de la tecnología informática en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas*. En: Coloquio Internacional de enseñanza de las matemáticas, 10-11.
- Salazar, J.V.F., Chumpitaz, A. (2013). *Génesis Instrumental: Un estudio del proceso de instrumentación de la función definida por tramos*. En Actas del VII CIBEM, 6863-6870.
- Santillana (2016). *Matemática 4*. Lima: Grupo editorial Santillana S.A.

- Silva, M. (2012). A construação de situações problemas utilizando o Cabri 3D. En F. Ugarte y H. Azabache (Eds.), *VI Congreso Iberoamericano de Cabri Actas 2012-IBEROCABRI 2012*. 23-37. Ediciones de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú.
- Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2), 133-170.



ANEXOS

ANEXO 1

HERRAMIENTAS DEL CABRI 3D

Como presentamos en la Figura 1, la pantalla inicial del Cabri 3D muestra los siguientes elementos: la barra de herramientas, la barra de menús del Cabri 3D, un plano base cuya su parte visible representamos por un cuadrilátero sombreado.

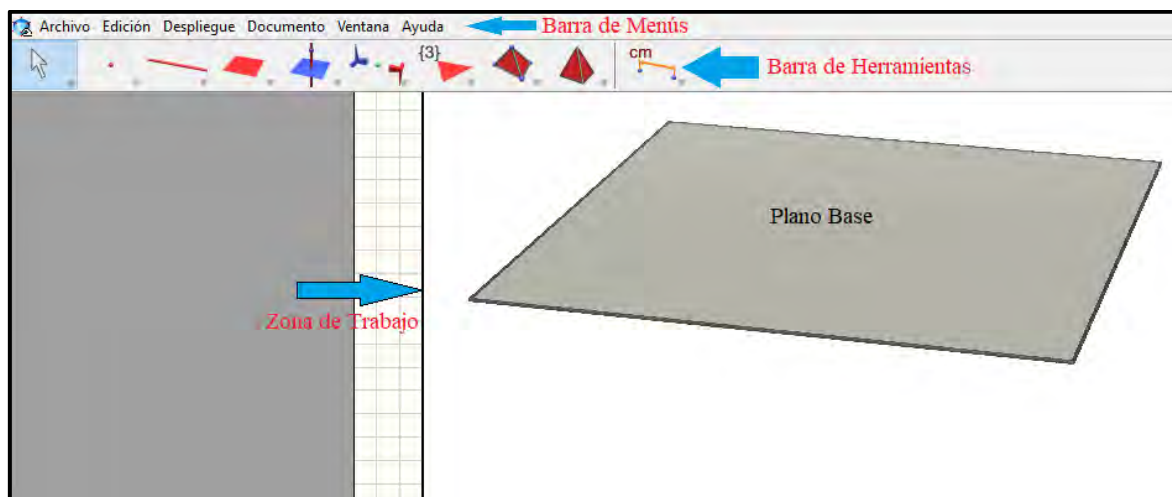








Figura 1. Elementos del Cabri 3D


Además, presentamos en el cuadro 2, algunas herramientas del Cabri 3D que utilizaremos en la investigación. Este cuadro se entregará a los estudiantes como guía de ayuda para que realicen las tareas de la actividad 1.

Cuadro 2. Guía de uso del Cabri 3D

Herramienta	Icono	Descripción
Manipulación		Clickea la herramienta, selecciona manipulación, luego selecciona el objeto con el mouse, hasta convertirse en una mano y manteniendo presionado el botón izquierdo desplaza el objeto en cualquier dirección.
Punto		Clickea la herramienta, selecciona punto. Este permite crear un punto en el plano base, en un objeto, en el espacio, cliqueando directamente en el lugar que deseas. También puedes crear un punto en el espacio manteniendo presionado la tecla Shift, desplazando el cursor que está en el plano base hacia arriba o abajo, soltar momentáneamente la tecla Shift y cliquear el punto para validarlo.
Punto medio		Clickea en la cabeza de flecha de la quinta herramienta, selecciona punto medio y desplaza el cursor hasta el segmento, una arista de un poliedro y cliquea sobre él, para crear su punto medio.
Segmento		Clickea en la cabeza de flecha, seleccionando segmento te permite crear un segmento entre dos puntos ya definidos
Plano		Clickea en la herramienta plano. Esto te permite crear un plano por tres puntos.
Perpendicular		Clickea en la herramienta y desplaza el cursor a la zona de trabajo para construir una recta perpendicular a un plano, un plano perpendicular a un segmento, a una recta.
Paralelo		Clicke en la cabeza de flecha de la quinta herramienta, selecciona paralelo y te permite crear un plano paralelo a otro plano y que pase por un punto.

Poliedro regular		Clickea en la herramienta, desplaza el cursor al plano base hasta convertirse en una manito, clickea una vez para escoger el plano base, con el lápiz que ahora aparece clickea una vez, arrastra el cursor y clickea otra vez para validar la construcción. Para desactivar la herramienta clickea en la herramienta <i>manipulación</i> .
Poliedro regular		Clickea en la herramienta, desplaza el cursor al plano base hasta convertirse en una manito, clickea una vez para escoger el plano base, con el lápiz que ahora aparece clickea una vez, arrastra el cursor y clickea otra vez para validar la construcción. Para desactivar la herramienta clickea en la herramienta <i>manipulación</i> .
Recorte de poliedro		Clickea en la herramienta, para recortar parte de un poliedro situado detrás del plano, clickea una vez sobre el plano y un segundo clicqueo sobre el poliedro.
Longitud		Permite medir la longitud de segmentos, aristas de un poliedro. Clickea en la herramienta, seleccionar longitud, y luego clickea el objeto para determinar su longitud.
Distancia		Permite medir la distancia entre dos puntos, clickea en un punto y luego en el otro punto.
Ángulo		Permite medir la medida de un ángulo. Clickea la herramienta <i>ángulo</i> , clickea un primer punto, luego el vértice y termina clicqueando el tercer punto. Para desactivar la herramienta clickea en la herramienta <i>manipulación</i> .

FUNCIONES Y ATRIBUTOS

Función *bola de cristal*: Permite visualizar la zona de trabajo desde diferentes puntos de vista, para hacer uso, clickear el lado derecho del mouse y manteniéndolo aparecerá el símbolo  y luego desplazar el cursor de arriba hacia abajo, de derecha a izquierda.

Función de ayuda: Para activar la función de ayuda interactiva de cómo usar las herramientas clickea F1 y aparece la ayuda en la derecha de la pantalla del Cabri 3D.

Atributos de color de punto, color de superficie, estilo de superficie, ocultar, mostrar, etc.: Para hacer su uso active la herramienta *manipulación*, luego seleccione el objeto apareciendo el símbolo de una manito, clickear el lado derecho del mouse y seleccionar el atributo que se desea tenga el objeto.

Etiquetar objetos: Permite nombrar un objeto con letras, números, para esto, con la herramienta *manipulación*, clickea el objeto ya construido que puede ser un vértice, una arista, un plano, etc., luego etiqueta con la letra o número deseado.

ANEXO 2

Actividad 0: Explorando el Cabri 3D

1. Abra el Cabri 3D y explore la barra de herramientas (ver anexo de la ficha) para ello, despliegue cada una de las herramientas (clicke en la cabeza de flecha de la herramienta seleccionada).
2. Construya un cubo y nómbrelo ABCDEFGH.

Para eso:

- *Active la herramienta “cubo”.*
- *Clique el plano base (seleccionar el lugar de la construcción).*
- *Clique, arrastre y clique otra vez para validar la construcción. Además:*
- *Trace las diagonales del cubo: AG y BH y marque el punto O que es la intersección de las diagonales.*
- *Construya la esfera centrada en el punto O y que pase por el punto A, y luego utilice los atributos y modifique su estilo de superficie a “rayado fino”.*

Sugerencia: *Además, puede ocultar el plano base, use la función arrastre y los atributos del Cabri 3D.*

3. Ahora, construya una pirámide recta de base pentagonal y nómbrela MPQRST, siguiendo los pasos:

- *Active la herramienta “pentágono”*
- *Clique en el plano de base (seleccionar el lugar de la construcción).*
- *Clique, arrastre y clique otra vez para validar la construcción del pentágono y nómbrelo PQRST.*
- *Luego trace la recta L perpendicular al plano base y que pase por el punto O (centro del pentágono).*
- *Marque un punto M sobre la recta L.*
- *Con la herramienta “poliedro convexo” construya la pirámide MPQRST.*

Sugerencia: *use las funciones y atributos para modificar la apariencia de los objetos representados.*

ANEXO 3

Actividad 1: El Octaedro regular

Nombres y Apellidos: -----

Nota: Luego de realizar cada actividad grave su archivo en el escritorio en la carpeta Cabri 3D.

1. Abra el archivo 1.cg3 del Cabri 3D, y desarrolle la siguiente actividad.

Utilizando la función *bola de cristal*, explore el octaedro regular PABCDQ y deduzca lo siguiente:

a) ¿Cuántos vértices tiene el octaedro regular?

b) ¿Cuántas aristas y caras tienen el octaedro regular?

c) ¿Qué tipo de triángulo son las caras del octaedro regular? Justifique su respuesta.

2. A partir de las respuestas de los ítems 1 a), 1 b) y 1c), describa lo que es el octaedro regular.

3. Abra el archivo 1.cg3. Trace las diagonales AC, BD, PQ del octaedro regular y marque el punto de intersección como "O". Sugerencia: Cambie el estilo de la superficie del octaedro regular PABCDQ a "rayado fino"

a) ¿Qué tipo de cuadrilátero es el ABCD? Explique.

b) En el octaedro regular deduzca de que tipo son las pirámides PABCD y QABCD. Justifique su respuesta.

ANEXO 4

Actividad 2: Medida del volumen del octaedro regular

Nombres y Apellidos: -----

Nota: Luego de realizar las actividades 1a), 2b), 1c) grave su archivo en el escritorio en la carpeta Cabri 3D.

Abra el archivo 2.1.cg3, y trabaje la actividad.

1. En el octaedro regular PABCDQ, considere “a” como la medida de la arista del octaedro regular.
 - a. En la pirámide regular cuadrangular PABCD, ¿cuál es la medida del área de su base ABCD en términos de “a”? Explique su respuesta.

 - b. En el cuadrado ABCD ¿cuál es la medida de la diagonal AC en términos de “a”? Explique su respuesta.

 - c. ¿Cuál es la medida de la altura h (PO) de la pirámide regular cuadrangular PABCD, en términos de “a”? Justifique

2.
 - a. Calcule la medida del volumen de la pirámide regular cuadrangular PABCD en términos de “a”. Justifique su respuesta.

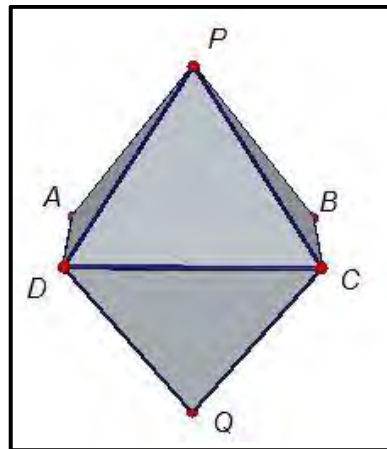
 - b. Ahora calcule la medida del volumen del octaedro regular PABCDQ en términos de “a”. Explique su respuesta.

3. Abre el archivo 2.2cg3, y trabaje la actividad.

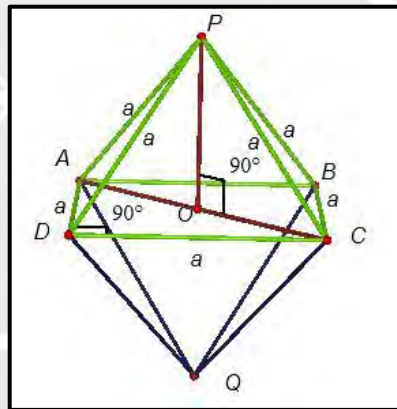
En el octaedro regular PABCDQ, el área del cuadrilátero ABCD es de $9 u^2$. Calcule el volumen del octaedro regular. Explique detalladamente

ANEXO 5

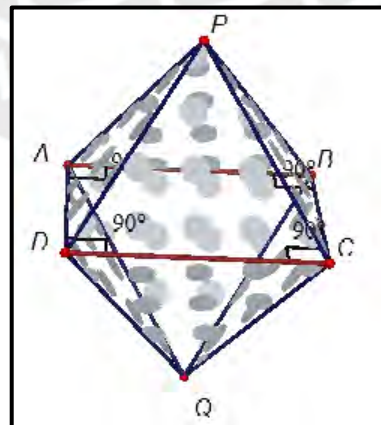
Archivo 1.1cg3



Archivo 2.1 cg3



Archivo 2.2 cg.3



ANEXO 6

FICHA DE OBSERVACION

Nombres y apellidos del observador: _____

Fecha de observación: _____

Nombres y apellidos del estudiante observado: _____

Interacción estudiante-Cabri3D

1.-Marque con un aspa donde corresponda:

Acción	Actividad 0						
	Pregunta						
	1	2			3		
	a	a	b	c	a	b	c
Usa el cursor del mouse.							
Usa la barra de herramientas.							
Usa la herramienta cubo.							
Usa la herramienta segmento.							
Usa la herramienta esfera.							
Usa funciones y atributos.							
Usa la herramienta pentágono.							
Usa la herramienta perpendicular.							
Usa la herramienta poliedro convexo.							

Interacción estudiante – octaedro regular

2. Marque con un aspa donde corresponda:

Dificultades observadas en las acciones de los estudiantes	Actividad 1					
	Pregunta					
	1			2	3	
	a	b	c		a	b
Para identificar los elementos del octaedro regular.						
Para describir el octaedro regular.						
Para describir las características de un cuadrilátero.						
Para describir las características de una pirámide.						

Dificultades observadas en las acciones de los estudiantes	Actividad 2					
	Pregunta					
	1			2	3	
	a	b	c		a	b
Para determinar la medida de las longitudes de una pirámide.						
Para determinar la medida del volumen del octaedro regular.						
Para ejecutar expresiones algebraicas.						
Para resolver problemas de formas geométricas.						

Observaciones realizadas en el desarrollo de las actividades

3. Actividad 1.1

4. Actividad 1.2

5. Actividad 1.3

6. Actividad 2.1

7. Actividad 2.2

8. Actividad 2.3

Medios de aprendizaje

9. Cantidad de estudiantes presentes al inicio de la actividad 0, 1, 2 _____

10. Cantidad de computadoras equipadas con el Software Cabri 3D _____