

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO



El teorema de Merle para foliaciones

Tesis para optar el grado de Magíster en Matemáticas que presenta

Felipe Antony Torres Estrella

DIRIGIDO POR

Dr. Percy Braulio Fernández Sánchez

MIEMBROS DEL JURADO

Dra. Evelia García Barroso

Dr. Roland Rabanal Montoya

San Miguel, 2018



RESUMEN DE LA TESIS

Felipe Antony Torres Estrella

Maestría en Matemáticas

El teorema de Merle para foliaciones

En el presente trabajo, estudiamos el teorema de Merle para curvas algebroides planas irreducibles, en este teorema se establece una descomposición de la curva polar de una curva analítica irreducible que determina la topología de esta curva. También estudiamos el teorema de Rouillé, que generaliza el teorema de Merle, en donde se establece la descomposición de la curva polar, de una foliación holomorfa de tipo curva generalizada, que nos brinda información topológica de la separatriz de la foliación.

Palabras Claves: *Exponentes característicos. Polígono de Newton de una foliación.*



*Con todo mi cariño y mi amor para las personas que hicieron
todo en la vida para que yo pudiera lograr mis sueños, por
motivarme y darme la mano cuando sentía que el camino se
terminaba, a ustedes por siempre mi corazón y mi
agradecimiento.
Papá y mamá.*

Índice general

	Pág.
Resumen	ii
Agradecimientos	vi
Introducción	vii
1. Curvas algebraicas planas y foliaciones holomorfas	1
1.1. Definiciones y propiedades de curvas algebraicas planas	1
1.2. Teorema de preparación de Weierstrass	7
1.3. Parametrización de Puiseux	12
1.4. Intersección de curvas y semigrupo de valores	24
1.5. Curvas polares	32
1.5.1. Observaciones finales	38
1.6. Foliationes holomorfas	41
1.7. Índice CS , de variación y GSV	50
2. Descomposición de una curva polar	58
2.1. Noción de contacto	58
2.2. Teorema de Kuo-Lu	68
2.3. Teorema de Merle	76

3. Polares de una foliación	80
3.1. Propiedades de una 1-forma de tipo curva generalizada	86
3.2. Polar genérica	91
3.3. Polares y ramificación	95
3.4. Teorema de Merle para foliaciones	96
Bibliografía	107



Agradecimientos

Dios, por iluminar mi camino y bendecir cada paso de mi existencia.

A mi asesor de tesis, el *Dr. Percy Braulio Fernández Sánchez*, por sus conocimientos para llevar a cabo este trabajo, y por su paciencia para esperar a que este pudiera llegar a su fin.

A mis padres, quienes me han heredado el tesoro más valioso que puede dársele a un hijo: amor. A ellos que sin escatimar esfuerzo alguno han sacrificado gran parte de su vida, que me han formado y educado.

A los excelentes profesores del programa de maestría en *Matemáticas* que participaron en mi formación académica.

A mis amigos de la maestría: *Iris Huaccan, Mery Egúsqüiza, Pedro Suárez, Rina Paucar, Ronald Mas, Víctor Rodríguez*, con quienes compartí buenos momentos. A todos los que alguna vez han compartido sus conocimientos para enriquecernos.

A la *Dra. Evelia Rosa García Barroso*, por la disposición de absolver mis dudas a lo largo del trabajo.

Por último a la PUCP, por otorgarme la beca *Aristóteles* para poder continuar con los estudios de maestría, así mismo agradezco al DGI-PUCP por el apoyo brindado para el desarrollo de la tesis mediante el proyecto DGI-2016-1-0069.

Introducción

El presente trabajo es una introducción al estudio de la curva polar de una curva algebroide plana irreducible. Merle [Mer77] probó un teorema para el caso irreducible, sobre una descomposición de la curva polar en paquetes, considerando el contacto entre las ramas de la polar y la curva. En 1977, Kuo-Lu [KL77], con motivaciones diferentes, estudiaron el contacto entre las parametrizaciones de Newton-Puiseux de la polar y las parametrizaciones de Newton-Puiseux de la curva, para la prueba del teorema de Merle ellos usan un lema en las raíces de la derivada de una curva algebroide. Sin embargo, la prueba del lema dada en [KL77] es más técnica y parte del lema no es cierto (como se analizará en el presente trabajo). En 1991, Gwozdziejewicz-Płoski [GP91] construyen un ejemplo donde se verifica que no se cumple el lema dado en [KL77] y da la correcta versión del lema de Kuo-Lu, para probar directamente la fórmula de Merle.

Con el fin de estudiar algunas propiedades de la curva polar, el primer capítulo aborda nociones básicas a ser utilizadas a lo largo del texto, tales como: curva algebroide plana y equivalencia de curvas, también varios resultados, como el Teorema de Preparación de Weierstrass y el Teorema de Newton-Puiseux (este último nos presenta elementos importantes que están relacionados con una curva algebroide plana irreducible, como por ejemplo, parametrización de Newton-Puiseux, exponentes característicos y los pares de Puiseux). Se introduce el concepto de intersección de dos curvas algebroides planas; enseguida presenta el concepto de semigrupo de valores, un importante invariante topológico con respecto a la equivalencia de curvas, y algunas de sus propiedades. Luego se define la curva analítica plana, donde las propiedades hechas para curvas algebroides

planas también se cumplen para las curvas analíticas planas. El capítulo concluye con una sección dedicada específicamente a las curvas polares donde se presentan algunas de sus propiedades.

En el segundo capítulo, se define el contacto entre dos curvas algebroides planas irreducibles y la relación existente entre el contacto y el índice de estas. Más adelante se presenta una versión mejorada del teorema de Kuo-Lu sobre el contacto entre las parametrizaciones de Newton-Puiseux de la curva polar y las parametrizaciones de una curva algebroides plana. Enseguida, se demuestra el teorema de Merle. Para finalizar, el tercer capítulo introduce el concepto de polígono de Newton de una foliación definida por una 1-forma, lado principal de una 1-forma, foliaciones de tipo curva generalizada con sus respectivas propiedades. Por último el teorema de descomposición de la polar para una foliación de tipo curva generalizada.



Curvas algebroides planas y foliaciones holomorfas

Para este primer capítulo tomaremos como referencia [Bar96, BK12, CA00, Che08, Hef03, Pto90]. En este capítulo daremos definiciones y notaciones que usaremos a lo largo del trabajo, como: equivalencia de curvas algebroides planas, polígonos de Newton. Definiremos mediante la parametrización de Newton-Puiseux invariantes topológicos: los exponentes característicos de una curva algebroides plana y pares característicos de Newton-Puiseux. Así como también el índice de intersección entre curvas algebroides y sus propiedades para su cálculo. Finalizamos la parte de curvas algebroides definiendo las curvas polares. Luego, daremos las nociones básicas de foliaciones holomorfas. Después estudiamos el índice de Gomez, Seade y Verjovski, en base a este índice definir las foliaciones que son del tipo curva generalizada [CNS⁺84], [CCD13], [MS01].

1.1. Definiciones y propiedades de curvas algebroides planas

En esta sección el objetivo principal es introducir el concepto de curvas algebroides y equivalencia entre ellas.

1. Curvas algebroides planas y foliaciones holomorfas

Sea $\mathbb{C}[[X, Y]]$ el anillo de series de potencias formales con coeficientes en \mathbb{C} . El conjunto $\mathcal{M} = \{f \in \mathbb{C}[[X, Y]] / f(0) = 0\}$ es el único ideal maximal de $\mathbb{C}[[X, Y]]$ y coincide con el ideal generado por X e Y . Si $f \in \mathbb{C}[[X, Y]] \setminus \{0\}$, entonces

$$f = \sum_{i \geq n} F_i = F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + \cdots$$

donde cada F_i es un polinomio homogéneo de grado i , consideraremos el polinomio cero como un polinomio de grado $+\infty$. Si $F_n \neq 0$, diremos que este es la **forma inicial** de f y llamaremos al entero n la **multiplicidad** de f , denotado por $\text{mult}(f) = n$. Por convención, si $f = 0$ entonces $\text{mult}(f) = \infty$.

Los siguientes resultados son fáciles de verificar.

Proposición 1.1.1 ([Hef03]). *Un elemento $f = \sum_{i=0}^{\infty} F_i \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ es inversible o unidad¹ si y solo si $F_0 \neq 0$.*

Proposición 1.1.2 ([Hef03]). *Dadas $f, g \in \mathbb{C}[[X, Y]]$. Entonces*

1. $\text{mult}(f \cdot g) = \text{mult}(f) + \text{mult}(g)$.
2. $\text{mult}(f \pm g) \geq \min\{\text{mult}(f), \text{mult}(g)\}$, con la igualdad cuando $\text{mult}(f) \neq \text{mult}(g)$.

Dos elementos $f, g \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ son llamados **asociados** si existe una unidad u tal que $f = u \cdot g$, esta relación de asociados es una relación de equivalencia; esto es

$$f \sim g \text{ si y sólo si } f = u \cdot g.$$

Ahora introduciremos uno de los objetos centrales de este trabajo.

Definición 1.1.1. *Sea f un elemento no nulo de \mathcal{M} . La curva algebroides plana C_f es la clase de equivalencia de f , módulo la relación de asociados. Esto significa*

$$C_f = \{u \cdot f / u \text{ es una unidad en } \mathbb{C}[[X, Y]]\}.$$

¹Decimos que un elemento $f \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ es inversible o una unidad si existe otro elemento $g \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ tal que $f \cdot g = g \cdot f = 1$.

1.1. Definiciones y propiedades de curvas algebroides planas

Por lo tanto, de la definición tenemos que $C_f = C_g$ si y solamente si, existe una unidad $u \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ tal que $f = u \cdot g$.

La multiplicidad de una serie de potencias formal es invariante bajo la multiplicación por una unidad. Así, podemos definir **la multiplicidad de una curva algebroides plana** C_f como la multiplicidad de la serie de potencias f . La curva algebroides plana con multiplicidad igual a uno es llamada **suave**. En el caso de que esta multiplicidad sea mayor que uno, decimos que la curva algebroides plana es **singular**. Del mismo modo, a la serie de potencias $f \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ cuya multiplicidad sea mayor que 1, se llamará **singular**.

Decimos que una curva algebroides plana C_f es **irreducible**, si la serie de potencias formal f es irreducible² en $\mathbb{C}[[X, Y]]$.

Definimos un **\mathbb{C} -automorfismo** o un **automorfismo** sobre \mathbb{C} de $\mathbb{C}[[X, Y]]$, como un isomorfismo de la \mathbb{C} -álgebra $\mathbb{C}[[X, Y]]$ sobre si mismo.

Muchas de las propiedades de una curva algebroides plana son preservadas por un cambio de coordenadas en $\mathbb{C}[[X, Y]]$, esto es, a través de un \mathbb{C} -automorfismo de $\mathbb{C}[[X, Y]]$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.1.2. Dadas las curvas algebroides planas C_f y C_g con $f, g \in \mathcal{M} \subset \mathbb{C}[[X, Y]]$, diremos que ellas son equivalentes, y lo denotamos por $C_f \sim C_g$, si existe un \mathbb{C} -automorfismo Φ de $\mathbb{C}[[X, Y]]$ tal que

$$\Phi(C_f) = C_g.$$

En otras palabras C_f y C_g son equivalentes, si existen un \mathbb{C} -automorfismo Φ y una unidad u de $\mathbb{C}[[X, Y]]$ tal que

$$\Phi(f) = u \cdot g.$$

Proposición 1.1.3. Sean $g_1, g_2 \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ con formas iniciales lineales L_1 y L_2 ,

²Un elemento $f \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ es irreducible si f no es unidad y además si $f = g \cdot h$, entonces g es unidad o h es unidad

1. Curvas algebroides planas y foliaciones holomorfas

respectivamente. Entonces la aplicación

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{C}[[X, Y]] &\longrightarrow \mathbb{C}[[X, Y]] \\ f &\longmapsto f(g_1, g_2)\end{aligned}$$

es un \mathbb{C} -automorfismo si y solamente si L_1 y L_2 son \mathbb{C} -linealmente independientes.

Demostración: Ver Proposición 1.12, página 14 de [Hef03]. \square

La siguiente proposición nos dice que la equivalencia entre curvas algebroides, preserva la irreducibilidad y la multiplicidad.

Proposición 1.1.4. *Dadas las curvas algebroides planas C_f y C_g equivalentes, con $f, g \in \mathcal{M} \subset \mathbb{C}[[X, Y]]$, entonces*

1. f es irreducible si y solamente si g es irreducible.
2. $\text{mult}(f) = \text{mult}(g)$.

Demostración:

1. Tenemos que f es reducible si y solamente si $g = u^{-1}\Phi(f)$ es reducible, donde Φ es un automorfismo y u es una unidad de $\mathbb{C}[[X, Y]]$, en efecto suponemos que f es reducible, esto es $f = \prod_{i=1}^r f_i$ con f_i irreducible, entonces tenemos que

$$g = u^{-1}\Phi(f) = u^{-1}\Phi\left(\prod_{i=1}^r f_i\right) = u^{-1}\prod_{i=1}^r \Phi(f_i).$$

Por tanto g es reducible. Tomando $r = 1$ tenemos que f es irreducible, por tanto g también es irreducible.

2. Consideremos $f = \sum_{i \geq m} F_i$, donde la $\text{mult}(f) = m$. Debemos mostrar que la $\text{mult}(g) = m$, donde $g = u^{-1}\Phi(f)$.

Observemos que

$$g = u^{-1}\Phi(f) = u^{-1}\Phi\left(\sum_{i=1}^r F_i\right) = u^{-1}\sum_{i=1}^r \Phi(F_i).$$

1.1. Definiciones y propiedades de curvas algebroides planas

Analicemos $\Phi(F_i)$ con

$$F_i = \sum_{j+k=i} a_{jk} X^j Y^k.$$

Como Φ es un automorfismo de $\mathbb{C}[[X, Y]]$, tenemos que

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{C}[[X, Y]] &\longrightarrow \mathbb{C}[[X, Y]] \\ X &\longmapsto aX + bY + \text{términos de orden superior} \\ Y &\longmapsto cX + dY + \text{términos de orden superior} \end{aligned}$$

satisfaciendo $ad - bc \neq 0$. Vemos que $\text{mult}(\Phi(X)) = 1$ y $\text{mult}(\Phi(Y)) = 1$, así

$$\Phi(F_i) = \sum_{j+k=i} a_{jk} \Phi(X)^j \Phi(Y)^k.$$

Luego

$$\text{mult}(\Phi(X)^j \Phi(Y)^k) = j + k = i.$$

Por lo tanto,

$$\text{mult}(\Phi(F_i)) = i \quad \text{y} \quad \text{mult}(g) = m.$$

□

Sea C_f una curva algebroides plana de multiplicidad n . Podemos escribir

$$f = F_n + F_{n+1} + \cdots,$$

donde cada F_i es un polinomio homogéneo en $\mathbb{C}[[X, Y]]$ de grado i y $F_n \neq 0$. Llamamos **cono tangente** de la curva C_f a la curva algebroides plana C_{F_n} .

Como cualquier polinomio homogéneo de dos variables con coeficientes en un cuerpo algebraicamente cerrado se descompone en un producto de factores lineales, podemos escribir

$$F_n = \prod_{i=1}^s c_i (a_i X + b_i Y)^{r_i},$$

donde $\sum_{i=1}^s r_i = n$, $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ para $i = 1, \dots, s$ y $a_i b_j - a_j b_i \neq 0$, si $i \neq j$.

1. Curvas algebroides planas y foliaciones holomorfas

De esta manera, el cono tangente de C_f consiste de las formas lineales $a_i X + b_i Y$, $i = 1, \dots, s$, donde cada una de ellas posee una multiplicidad r_i . Llamamos **recta tangente** de C_f a cada una de estas formas lineales. Decimos que dos curvas algebroides planas C_f y C_g son **transversales**, si poseen rectas tangentes distintas.

Ejemplo 1.1.1. Sea $f(X, Y) = Y^2 - a^2 X^2 - X^3 \in \mathbb{C}[[X, Y]]$. Si $a \neq 0$ el cono tangente de la curva C_f consiste de las rectas, C_{Y+aX} y C_{Y-aX} , ambas con multiplicidad 1. Si $a = 0$, tenemos que el cono tangente de la curva C_f es la recta C_Y con multiplicidad 2.

Observamos que si la curva C_f fuera suave, entonces su cono tangente consiste de una única recta tangente con multiplicidad 1.

Consideramos el anillo de serie de potencias convergentes en las variables X e Y , este anillo será denotado por $\mathbb{C}\{X, Y\}$. Los resultados vistos anteriormente para $\mathbb{C}[[X, Y]]$, pueden obtenerse de forma similar para $\mathbb{C}\{X, Y\}$, para mayor información revisar el Capítulo 7 de [Che08].

La convergencia permite una interpretación geométrica del conjunto de ceros de un elemento $f \in \mathcal{M} = \langle X, Y \rangle$ (\mathcal{M} es el único ideal maximal de $\mathbb{C}\{X, Y\}$).

Definición 1.1.3. Sea $f \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ y sea $U \subset \mathbb{C}^2$ un abierto donde f es convergente. Definimos una **curva analítica plana** determinada por f , como

$$Z_f = \{(x, y) \in U; f(x, y) = 0\},$$

donde $U \subset \mathbb{C}^2$ es una vecindad del origen.

Observe que todo elemento de $C_f \cap \mathbb{C}\{X, Y\}$ determina la misma curva analítica plana. Por esa razón vamos a denotar C_f por Z_f .

Definición 1.1.4. Dadas dos curvas irreducibles C_f y C_g decimos que tienen el mismo **tipo topológico** si y solo si, existe un homeomorfismo $\phi : U \rightarrow U'$ tal que

$$\phi(C_f \cap U) = C_g \cap U',$$

donde U (respectivamente U') es una vecindad del origen en \mathbb{C}^2 en el cual C_f (respectivamente C_g) está definida.

1.2. Teorema de preparación de Weierstrass

En esta sección estudiaremos algunas propiedades algebraicas del anillo de series de potencias formales. El objetivo central es enunciar el teorema de preparación de Weierstrass.

Definición 1.2.1. Diremos que $f \in \mathbb{C}[[X, Y]] \setminus \{0\}$ es regular de orden n con respecto a la variable Y o Y -regular de orden n (resp. X) si $f(0, Y)$ (resp. $f(X, 0)$) es de orden n respecto de Y (resp. X).

Decimos también, que f es **regular** en Y o Y -**regular** (resp. X), cuando f es regular con respecto a Y (resp. X) de orden $n = \text{mult}(f)$.

Ejemplo 1.2.1. Consideremos $f(X, Y) = Y^4 - 2X^5Y^2 - 4X^7Y + X^{10} \in \mathbb{C}[[X, Y]]$. Notemos que $f(X, 0) = X^{10}$, esto es, f es regular de orden 10 con respecto a la variable X , además de esto, tenemos que $f(0, Y) = Y^4$, o sea f es regular en Y , pues $\text{mult}(f) = 4$.

Proposición 1.2.1. Sea $f \in \mathbb{C}[[X, Y]] \setminus \{0\}$ con $\text{mult}(f) = n$. Entonces existe un \mathbb{C} -automorfismo lineal ψ de $\mathbb{C}[[X, Y]]$ tal que $\psi(f)$ es regular en Y (o en X).

Demostración: Sólo buscaremos la regularidad en la segunda variable pues el caso en X es similar, sea $f(X, Y) = F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + \dots$, donde cada F_i es un polinomio homogéneo de grado i . Escribiendo F_n en la forma $F_n(X, Y) = a_{n,0}Y^n + a_{n-1,1}Y^{n-1}X + \dots + a_{1,n-1}YX^{n-1} + a_{0,n}X^n$, obtenemos que,

$$F_n(X, 1) = a_{n,0} + a_{n-1,1}X + \dots + a_{1,n-1}X^{n-1} + a_{0,n}X^n \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\},$$

admite raíces en \mathbb{C} que las reunimos en el conjunto R . De esta forma si tomamos $\alpha \in \mathbb{C} \setminus R$, $F_n(\alpha, 1) \neq 0$.

Ahora, consideremos la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{C}[[X, Y]] &\longrightarrow \mathbb{C}[[X, Y]] \\ X &\longmapsto X + \alpha Y \\ Y &\longmapsto Y. \end{aligned}$$

1. Curvas algebroides planas y foliaciones holomorfas

Afirmación 1: La aplicación $\psi : \mathbb{C}[[X, Y]] \longrightarrow \mathbb{C}[[X, Y]]$ es un \mathbb{C} -automorfismo en $\mathbb{C}[[X, Y]]$. **En efecto**, observemos que las formas iniciales de $\psi(X) = X + \alpha Y$ y $\psi(Y) = Y$ son linealmente independientes, entonces por la Proposición 1.1.3 obtenemos que ψ es un \mathbb{C} -automorfismo de $\mathbb{C}[[X, Y]]$.

Afirmación 2: Denotando $g(X, Y) = \psi(f(X, Y)) = f(X + \alpha Y, Y)$ tenemos que g es regular en Y . **En efecto**, como

$$\psi(f(X, Y)) = f(X + \alpha Y, Y) = F_n(X + \alpha Y, Y) + F_{n+1}(X + \alpha Y, Y) + \cdots,$$

tenemos que

$$g(0, Y) = f(0 + \alpha Y, Y) = F_n(\alpha Y, Y) + F_{n+1}(\alpha Y, Y) + \cdots.$$

Observemos que basta mostrar que $F_n(\alpha Y, Y)$ es regular en Y , pues ningún término de $F_n(\alpha Y, Y)$ se cancela con términos de $F_{n+1}(\alpha Y, Y) + \cdots$, pero

$$F_n(\alpha Y, Y) = a_{n,0}Y^n + a_{n-1,1}\alpha Y^n + \cdots + a_{1,n-1}\alpha^{n-1}Y^n + a_{0,n}\alpha^n Y^n,$$

o sea,

$$F_n(\alpha Y, Y) = Y^n(a_{n,0} + a_{n-1,1}\alpha + \cdots + a_{1,n-1}\alpha^{n-1} + a_{0,n}\alpha^n) = Y^n \cdot F_n(\alpha, 1),$$

donde, como se vio anteriormente, $F_n(\alpha, 1) \neq 0$. Luego, $F_n(X, Y)$ es regular en Y y por lo tanto $\psi(f(X, Y))$ también lo es. \square

Veamos a continuación un ejemplo que nos permita visualizar este resultado.

Ejemplo 1.2.2. Consideremos $f(X, Y) = X^3Y + XY^3 + X^4Y^2$. Podemos escribir f en polinomios homogéneos de la siguiente manera,

$$f(X, Y) = F_4(X, Y) + F_6(X, Y),$$

donde $F_4(X, Y) = X^3Y + XY^3$. Notemos que $F_4(X, 1) = X^3 + X$ y las raíces de este polinomio en \mathbb{C} son $\{0, i, -i\}$; tomando $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0, i, -i\}$, $F_4(\alpha, 1) \neq 0$. En particular, tomemos $\alpha = 1$.

1.2. Teorema de preparación de Weierstrass

De esta manera, considerando el \mathbb{C} -automorfismo de $\mathbb{C}[[X, Y]]$

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{C}[[X, Y]] &\longrightarrow \mathbb{C}[[X, Y]] \\ X &\longmapsto X + Y \\ Y &\longmapsto Y,\end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}\psi(f(X, Y)) &= f(X + Y, Y) = F_4(X + Y, Y) + F_6(X + Y, Y) \\ &= (X + Y)^3 Y + (X + Y) Y^3 + (X + Y)^4 Y^2 \\ &= X^3 Y + 3X^2 Y^2 + 4XY^3 + 2Y^4 + X^4 Y^2 + 4X^3 Y^3 + 6X^2 Y^4 + 4XY^5 + Y^6 \\ &= 2Y^4 + X^3 Y + 3X^2 Y^2 + 4XY^3 + Y^6 + X^4 Y^2 + 4X^3 Y^3 + 6X^2 Y^4 + 4XY^5.\end{aligned}$$

Poniendo $g(X, Y) = \psi(f(X, Y))$, tenemos que $g(0, Y) = 2Y^4 + Y^6 = Y^4(2 + Y^2)$, esto es, $g(X, Y)$ es regular en Y .

El teorema que sigue, desempeña un papel importante en la teoría de singularidades, pues como un corolario de este se tiene el teorema de preparación de Weierstrass, donde $\mathbb{C}[[X]]$ (conjunto de series formales en la variable X) y $\mathbb{C}[[X]][Y]$ (conjunto de polinomios en la variable Y con coeficientes en $\mathbb{C}[[X]]$).

Teorema 1.2.1 (División de Weierstrass). *Sea $f \in \mathcal{M} \subset \mathbb{C}[[X, Y]]$ regular en Y de orden $n \geq 1$. Dado $g \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ existe $q \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ y $r \in \mathbb{C}[[X]][Y]$, con $r = 0$ ó $\text{grad}_Y(r) < n$, únicamente determinados por f y g tales que $g = qf + r$.*

Demostración: Ver Teorema 2.3 página 20 de [Hef03]. □

Como consecuencia del teorema anterior, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.2.2 (Preparación de Weierstrass). *Sea $f \in \mathcal{M} \subset \mathbb{C}[[X, Y]]$ regular en Y y $\text{mult}(f) = n \geq 1$, entonces existe una unidad $u \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ tal que*

$$u(X, Y)f(X, Y) = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(X)Y + a_n(X),$$

con $a_i(X) \in \mathbb{C}[[X]]$ y $\text{mult}(a_i(X)) \geq i$.

1. Curvas algebraicas planas y foliaciones holomorfas

Demostración: La demostración del Teorema 1.2.2 que aparece en [HKT13] utiliza el Teorema 1.2.1, página 72. \square

Observación 1.2.1. Un polinomio de Weierstrass en Y es una serie de potencias en $\mathbb{C}[[X, Y]]$ de la forma

$$P(X, Y) = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(X)Y + a_n(X), \quad (1.1)$$

tal que $n \geq 1$ y $\text{mult}(a_i(X)) \geq i$ para $i = 1, \dots, n$.

Ejemplo 1.2.3. Veamos una aplicación del teorema de preparación de Weierstrass a $f = XY - Y^3 + Y^4$. Escribiendo $f = \bar{f} + f_4$ con $\bar{f} = XY - Y^3$, $f_4 = Y^4$ y usando el teorema de Preparación de Weierstrass tenemos

$$Y^3 = -1\bar{f} + XY = -f + Y^4 + XY.$$

Pero

$$Y^4 = -Y\bar{f} + XY^2.$$

Así

$$\begin{aligned} Y^3 &= -f + XY + XY^2 - Y\bar{f} \\ Y^3 &= -f - Y(f - Y^4) + XY + XY^2 \\ Y^3 &= (-1 - Y)f + Y^5 + XY + XY^2. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} Y^4 &= -Y\bar{f} + XY^2 \\ Y^5 &= -Y^2\bar{f} + XY^3 \\ Y^5 &= -Y^2\bar{f} + X(XY - \bar{f}) \\ Y^5 &= -Y^2\bar{f} + X^2Y - X\bar{f} \\ Y^5 &= (-Y^2 - X)\bar{f} + X^2Y. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} Y^3 &= (-1 - Y)f + (-Y^2 - X)\bar{f} + X^2Y + XY + XY^2 \\ Y^3 &= (-1 - Y)f + (-Y^2 - X)(f - Y^4) + X^2Y + XY + XY^2 \\ Y^3 &= (-1 - X - Y - Y^2)f + Y^6 + XY^4 + XY + XY^2 + X^2Y. \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} Y^6 + XY^4 &= Y^2(-Y\bar{f} + XY^2) + XY^4 \\ Y^6 + XY^4 &= -Y^3\bar{f} + 2XY^4 \\ Y^6 + XY^4 &= -Y^3\bar{f} + 2X(-Y\bar{f} + XY^2) \\ Y^6 + XY^4 &= (-Y^3 - 2XY)\bar{f} + 2X^2Y^2. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} Y^3 &= (-1 - X - Y - Y^2)f + (-Y^3 - 2XY)\bar{f} + 2X^2Y^2 + XY + XY^2 + X^2Y \\ Y^3 &= (-1 - X - Y - Y^2)f + (-Y^3 - 2XY)(f - Y^4) + 2X^2Y^2 + XY + XY^2 + X^2Y \\ Y^3 &= (-1 - X - Y - 2XY - Y^2 - Y^3)f + (Y^3 + 2XY)Y^4 + XY + XY^2 + X^2Y + 2X^2Y^2. \end{aligned}$$

Continuando con el proceso, tenemos

$$(-1 - X - Y - Y^2 + \dots)f = Y^3 - (X + 2X^2 + \dots)Y^2 - (X + X^2 + \dots)Y.$$

Observación 1.2.2. Usando la Proposición 1.2.1 y el teorema anterior podemos asumir que una curva algebroide plana, es dado, a menos de un cambio de coordenadas, por un polinomio de Weierstrass, i.e.,

$$Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \dots + a_{n-1}(X)Y + a_n(X),$$

con $\text{mult}(a_i(X)) \geq i$, para $i = 1, \dots, n$.

1.3. Parametrización de Puiseux

Introduciremos la noción de parametrización de una curva plana. Esta será una herramienta poderosa para el estudio de las propiedades en las curvas. Analizaremos el método de Newton, para definir la parametrización de Puiseux.

Denotaremos por U_n al grupo multiplicativo de las n -ésimas raíces de la unidad en \mathbb{C} .

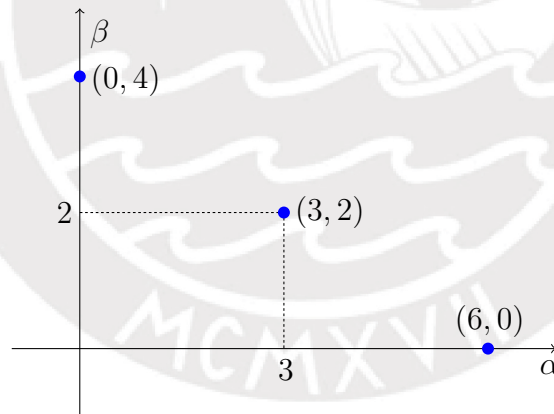
Sea $f(x, y) = \sum a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$ una serie de potencias, definimos el **soporte** de f , $\Delta(f)$, al conjunto de índices (α, β) cuyos monomios $x^\alpha y^\beta$ aparecen en la serie de potencias (i.e. para los cuales $a_{\alpha\beta} \neq 0$). Así,

$$\Delta(f) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 / a_{\alpha\beta} \neq 0\}, \text{ cuando } f(x, y) = \sum a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$$

Ejemplo 1.3.1. Sea $f(x, y) = y^4 - 2x^3y^2 + x^6$, entonces se tiene:

$$\Delta(f) = \{(6, 0), (0, 4), (3, 2)\}.$$

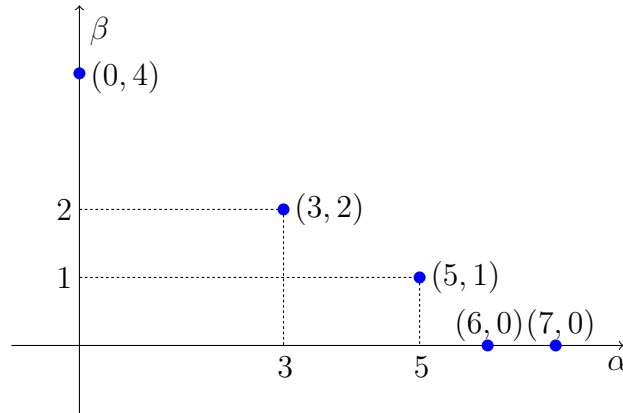
A continuación mostramos un gráfico de los puntos del soporte de f :



Ejemplo 1.3.2. Sea $f(x, y) = y^4 - 2x^3y^2 - 4x^5y + x^6 - x^7$, entonces se tiene:

$$\Delta(f) = \{(6, 0), (7, 0), (0, 4), (3, 2), (5, 1)\}.$$

A continuación mostramos un gráfico de los puntos del soporte de f :



Para cada $p \in \Delta(f)$ consideremos $p + (\mathbb{R}^+)^2$, que es el cuadrante positivo trasladado al punto $p \in \Delta(f)$. De la unión de todos estos cuadrantes construimos la envolvente convexa:

$$\text{conv} \left(\bigcup_{p \in \Delta(f)} (p + (\mathbb{R}^+)^2) \right). \quad (1.2)$$

La **frontera** de (1.2) está formada por dos semirrectas paralelas a los ejes y por un camino poligonal que conecta estas dos semirrectas. Este camino poligonal se llama **polígono de Newton**.

Observación 1.3.1. *Los vértices del polígono de Newton están en $\Delta(f)$. Por otra parte, los elementos de $\Delta(f)$ tienen la siguiente caracterización:*

Un punto $(r, s) \in \Delta(f)$ está en el polígono de Newton si y sólo si vale la siguiente propiedad: siempre que $(r', s') \in \Delta(f)$ es tal que $r' \leq r$ y $s' \leq s$, entonces $(r, s) = (r', s')$.

Sea $f(x, y) = \sum a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$ una serie de potencias convergente de multiplicidad m , sin pérdida de generalidad podemos asumir que f es regular en y . Sea $-\frac{1}{u_0}$ la pendiente del primer segmento del polígono de Newton (es el segmento que tiene como extremo al punto $(0, m)$). Particionando los términos de f como sigue

$$f(x, y) = \sum_{\alpha+u_0\beta=v} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta + \sum_{\alpha+u_0\beta>v} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta, \quad (1.3)$$

donde v es la intersección de la recta a través de $(0, m)$ con pendiente $-\frac{1}{u_0}$ (nótese que $v = mu_0$) se observa que existen al menos 2 puntos de $\Delta(f)$ tales que

$$\alpha + u_0\beta = v.$$

1. Curvas algebroides planas y foliaciones holomorfas

La primera solución aproximada de $f(x, y) = 0$ que construiremos es una solución de la ecuación

$$\hat{f}(x, y) = \sum_{\alpha+u_0\beta=v} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta = 0. \quad (1.4)$$

En (1.4) reemplazamos $y = tx^{u_0}$, obteniendo

$$\hat{f}(x, y) = x^v \sum_{\alpha+u_0\beta=v} a_{\alpha\beta} t^\beta = x^v g(t)$$

El polinomio

$$g(t) = \sum_{\alpha+u_0\beta=mu_0} a_{\alpha\beta} t^\beta$$

es de grado m y tiene una raíz $t_0 \neq 0$ entonces,

$$y_0 = t_0 x^{u_0}$$

es una solución aproximada de la ecuación $f(x, y) = 0$. El exponente u_0 es racional,

$$u_0 = \frac{p_0}{q_0}, \text{ donde } \text{mcd}(p_0, q_0) = 1.$$

Sustituyendo $x_1 = x^{1/q_0}$, tenemos que la solución aproximada es $y_0 = t_0 x_1^{p_0}$. Para mejorar la solución aproximada, hacemos:

$$y = x_1^{p_0} (t_0 + y_1)$$

en $f(x, y) = 0$. Da como resultado una serie de potencias en x_1 y y_1

$$f(x_1^{q_0}, x_1^{p_0} (t_0 + y_1)).$$

Luego se tiene

$$\begin{aligned} f(x_1^{q_0}, x_1^{p_0} (t_0 + y_1)) &= \sum_{\alpha+u_0\beta=v} a_{\alpha\beta} x_1^{q_0\alpha+p_0\beta} (t_0 + y_1)^\beta + \sum_{\alpha+u_0\beta>v} a_{\alpha\beta} x_1^{q_0\alpha+p_0\beta} (t_0 + y_1)^\beta \\ &= x_1^{vq_0} \left(\sum_{\alpha+u_0\beta=v} a_{\alpha\beta} (t_0 + y_1)^\beta + \sum_{\alpha+u_0\beta>v} a_{\alpha\beta} x_1^{q_0\alpha+p_0\beta-q_0v} (t_0 + y_1)^\beta \right) \\ &= x_1^{vq_0} f_1(x_1, y_1), \end{aligned}$$

donde

$$f_1(x_1, y_1) = \sum_{\alpha+u_0\beta=v} a_{\alpha\beta}(t_0 + y_1)^\beta + \sum_{\alpha+u_0\beta>v} a_{\alpha\beta}x_1^{q_0\alpha+p_0\beta-q_0v}(t_0 + y_1)^\beta,$$

así, $f_1(0, y_1) = \sum_{\alpha+u_0\beta=v} a_{\alpha\beta}(t_0+y_1)^\beta$ tiene multiplicidad m_1 para algún $(\alpha, m_1) \in \Delta(f)$ luego $m_1 \leq m$; por lo tanto, f_1 es y_1 -regular de orden $m_1 \leq m$. Ahora construimos el polígono de Newton para f_1 . Sea $-\frac{1}{u_1}$ la mayor pendiente negativa ($u_1 = \frac{p_1}{q_1}$), obteniendo una solución aproximada $y_1 = t_1x^{u_1}$, sustituyendo $x_2 = x_1^{1/q_1}$, de nuevo para mejorar ponemos $y_1 = x_2^{p_1}(t_1 + y_2)$, sustituimos en $f_1(x_1, y_1) = 0$ y extraemos todas las potencias de x_2 :

$$f_1(x_2^{q_1}, x_2^{p_1}(t_1 + y_2)) = x_2^{v_1q_1}f_2(x_2, y_2),$$

donde f_2 es y_2 -regular de orden $m_2 \leq m_1$, etc.

Aplicando lo mismo sucesivamente, tenemos una sucesión de series de potencias convergentes $f_i(x_i, y_i)$ (con $x_{i+1} = x_i^{1/q_i}$), cada una es y_i -regular de orden m_i y

$$m = m_0 \geq m_1 \geq m_2 \geq \dots$$

También tenemos una sucesión de soluciones aproximadas

$$\begin{aligned} y &= x^{u_0}(t_0 + y_1) \\ y_1 &= x_1^{u_1}(t_1 + y_2) \\ y_2 &= x_2^{u_2}(t_2 + y_3) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} y &= x^{u_0}(t_0 + x_1^{u_1}(t_1 + x_2^{u_2}(t_2 + \dots))) \\ &= t_0x^{u_0} + t_1x^{u_0}x_1^{u_1} + t_2x^{u_0}x_1^{u_1}x_2^{u_2} + \dots \\ &= t_0x^{u_0} + t_1x^{u_0+u_1/q_0} + t_2x^{u_0+u_1/q_0+u_2/q_0q_1} + \dots \end{aligned} \tag{1.5}$$

es una expansión de y como una serie de potencias fraccionarias crecientes de x .

Lema 1.3.1. *Con las notaciones anteriores, los denominadores en los exponentes de la serie no crecen de manera indefinida.*

1. Curvas algebroides planas y foliaciones holomorfas

Demostración:

Afirmación: Existe un índice $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que u_i es un entero para $i \geq i_0$.

Si la afirmación se cumple, entonces $q_i = 1$ y $x_{i+1} = x_i$ para $i \geq i_0$, luego tomamos $n = q_0 q_1 \cdots q_{i_0}$ donde $q_i | n$ para $i = 0, 1, \dots, i_0$. De esto, y se puede representar como una serie de potencias de $(x^{1/n})$.

En efecto:

Las series f_i son y_i -general de orden m_i , y sus órdenes forman una secuencia decreciente de números naturales:

$$m_0 \geq m_1 \geq m_2 \geq \cdots$$

donde u_i no es entero cuando $m_i > m_{i+1}$. Esto sucede para un número finito de veces, luego para un cierto i_0 , todos los u_i son enteros para todo $i \geq i_0$. \square

Queda mostrar que si $m_i = m_{i+1}$, entonces $u_i \in \mathbb{N}$.

En efecto: (Sin pérdida de generalidad, para el caso $i = 0$)

Sustituyendo $x = x_1^{q_0}, y = x_1^{p_0}(t_0 + y_1)$ en la ecuación (1.3), se obtiene

$$\begin{aligned} x_1^{vq_0} f_1(x_1, y_1) &= f(x_1^{q_0}, x_1^{p_0}(t_0 + y_1)) \\ &= x_1^{vq_0} \left(\sum_{\alpha+u_0\beta=u_0m} a_{\alpha\beta} (t_0 + y_1)^\beta + x_1(\cdots) \right) \end{aligned}$$

De esto se sigue:

$$f_1(0, y_1) = \sum_{\alpha+u_0\beta=u_0m} a_{\alpha\beta} (t_0 + y_1)^\beta = g(t_0 + y_1)$$

donde t_0 es una raíz no nula de la ecuación $g(t) = 0$ y g es un polinomio de grado $m = m_0$ (en efecto, si suponemos que el grado de g es $m' < m$, entonces $u_0m = v$, $u_0m' = v$. Como $m' < m$ se tiene $u_0m' > u_0m$ así $v > v$ lo cual nos lleva a una contradicción). Como m_1 es el orden de la solución $y_1 = 0$ de $f_1(0, y_1) = 0$, y así el orden de la raíz t_0 de g . Como f_1 es y_1 -regular de orden m_1 por el Teorema 1.2.2, $f_1(x_1, y_1) = (y_1^{m_1} + a_1(x_1)y_1^{m_1-1} + \cdots + a_{m_1}(x_1)) \cdot u(x_1, y_1)$, con $a_i(0) = 0$ para todo $i = 1, \dots, m$ y $u(0, 0) \neq 0$. Luego $f_1(0, y_1) = y_1^{m_1} \cdot u(0, y_1)$, observamos como $u(0, 0) \neq 0$ se tiene que $u(0, y_1)$ no es divisible por y_1 . Así $y_1 = 0$ es una solución de $f_1(0, y_1) = 0$ de orden m_1 . Por lo tanto, $f(0, 0) = g(t_0) = 0$, de esto se tiene que t_0 es una raíz de g de

orden m_1 . Por hipótesis tenemos que $m_1 = m_0 = m$, entonces g tiene la forma

$$g(t) = c(t - t_0)^m, \quad (c \neq 0).$$

En particular el coeficiente de t^{m-1} en el polinomio

$$g(t) = \sum_{\alpha+u_0\beta=u_0m} a_{\alpha\beta}t^\beta$$

no desaparece, i.e. $a_{\alpha m-1} \neq 0$, para algún $\alpha \in \mathbb{N}$ con $\alpha + u_0(m-1) = u_0m$. Luego $u_0 = \alpha \in \mathbb{N}$. □

Ahora se tiene y como una serie de potencias formales en $x^{1/n}$.

La serie $y(x) = \sum a_i x^{i/n}$ es llamada **expansión de Puiseux** para la curva con ecuación $f(x, y) = 0$.

Presentamos a continuación una versión del teorema de Newton que mejor se adapta a nuestro enfoque.

Teorema 1.3.1 (Newton [Hef03]). *Sea $f(X, Y) = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \dots + a_{n-1}(X)Y + a_n(X) \in \mathbb{C}[[X]][Y]$ un polinomio de Weierstrass irreducible. Entonces*

$$f(X, Y) = \prod_{i=1}^n (Y - \varphi(\zeta^i X^{\frac{1}{n}})),$$

para alguna raíz n -ésima primitiva de la unidad $\zeta \in U_n$ fija y $\varphi(X^{\frac{1}{n}}) \in \mathbb{C}[[X^{\frac{1}{n}}]]$.

El teorema anterior dado por Newton para serie de potencias formales, también puede enunciarse para serie de potencias convergentes el cual es dado por Puiseux como sigue:

Teorema 1.3.2 (Puiseux [Che08]). *Sea f una serie convergente. Si f es irreducible, entonces φ es una serie convergente.*

Demostración: Ver teorema 8.6.1 página 124 de [Che08]. □

En este caso, tenemos

$$\begin{cases} X = T^n \\ Y = \varphi(T), \end{cases}$$

1. Curvas algebroides planas y foliaciones holomorfas

una parametrización de Newton-Puiseux de la curva C_f definida por f . En virtud del teorema anterior, C_f tiene n parametrizaciones distintas y podemos obtener todas a partir de una fija y de los elementos de U_n .

Consideremos C_f una curva algebroides plana irreducible, de multiplicidad n , tal que f es regular en Y y admite una parametrización de Newton-Puiseux como sigue,

$$\begin{cases} X = T^n \\ Y = \varphi(T) = \sum_{i \geq m} b_i T^i, \text{ con } b_m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, m \geq n. \end{cases}$$

Definimos dos sucesiones (ϵ_i) y (β_i) de número naturales asociados a f como sigue:

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= \beta_0 = \text{mult}(f) = n, \\ \beta_j &= \text{mín}\{i / \epsilon_{j-1} \text{ no divide } i, \text{ con } b_i \neq 0\}, \text{ si } \epsilon_{j-1} \neq 1, \\ \epsilon_j &= \text{mcd}(\epsilon_{j-1}, \beta_j) = \text{mcd}(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_j). \end{aligned}$$

Tenemos que ϵ_j divide a ϵ_{j-1} para todo $j \geq 1$ y

$$n = \epsilon_0 > \epsilon_1 > \epsilon_2 > \dots$$

Consecuentemente, para algún $g \in \mathbb{N}$ se tiene que $\epsilon_g = 1$ y por lo tanto la secuencia de los β_j , $j \geq 1$ es creciente y termina en β_g .

Definición 1.3.1. *Los exponentes característicos de C_f son los $g + 1$ números naturales $(\beta_0, \dots, \beta_g)$.*

La secuencia de números naturales $(\epsilon_0, \dots, \epsilon_{g-1})$ es llamada la secuencia de los divisores de C_f .

Los pares de Puiseux (η_j, μ_j) , $j = 1, \dots, g$ de C_f se definen:

$$\eta_j = \frac{\epsilon_{j-1}}{\epsilon_j}, \text{ y } \mu_j = \frac{\beta_j}{\epsilon_j}.$$

Ahora, como $\epsilon_j = \text{mcd}(\epsilon_{j-1}, \beta_j)$, tenemos que $\text{mcd}(\eta_j, \mu_j) = 1$.

Ejemplo 1.3.3. *Para*

$$\begin{cases} X = T^8 \\ Y = T^{12} + 3T^{16} - T^{20} + 2T^{22} + 8T^{23} + \dots \end{cases}$$

$$\beta_0 = 8 = \epsilon_0 \text{ y } \beta_1 = 12,$$

$$\epsilon_1 = \text{mcd}(8, 12) = 4 \text{ luego } \beta_2 = 22,$$

$$\epsilon_2 = \text{mcd}(4, 22) = 2 \text{ luego } \beta_3 = 23,$$

$$\epsilon_3 = \text{mcd}(2, 23) = 1.$$

Por tanto los exponentes característicos son $(8, 12, 22, 23)$.

Notemos que los exponentes característicos de una curva algebroide plana C_f determinan la secuencia de los divisores ϵ_j pues se tiene que

$$\epsilon_j = \text{mcd}(n, \beta_1, \dots, \beta_j).$$

A través de un cambio de coordenadas, si es necesario, podemos considerar una parametrización de Newton-Puiseux de la curva C_f como

$$\begin{cases} X = T^{\beta_0} \\ Y = T^{\beta_1} + \sum_{i>\beta_1} b_i T^i. \end{cases}$$

donde $\beta_0 < \beta_1$ y β_1 no es divisible por β_0 .

Observación 1.3.2. De la definición de los β_j , se deduce que los coeficientes de la parametrización anterior tienen la siguiente propiedad: si i y j son enteros tales que $\beta_{j-1} \leq i \leq \beta_j$ y si $\epsilon_{j-1} \nmid i$ entonces, $b_i = 0$.

Ejemplo 1.3.4. Del Ejemplo 1.3.3 obtenemos los siguientes pares de Puiseux:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} = 2, \text{ y } \mu_1 = \frac{\beta_1}{\epsilon_1} = 3, \text{ entonces } (\eta_1, \mu_1) = (2, 3), \\ \eta_2 &= \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = 2, \text{ y } \mu_2 = \frac{\beta_2}{\epsilon_2} = 11, \text{ entonces } (\eta_2, \mu_2) = (2, 11), \\ \eta_3 &= \frac{\epsilon_2}{\epsilon_3} = 2, \text{ y } \mu_3 = \frac{\beta_3}{\epsilon_3} = 23, \text{ entonces } (\eta_3, \mu_3) = (2, 23). \end{aligned}$$

Teorema 1.3.3 ([Zar32]). Dos curvas irreducibles tienen el mismo tipo topológico si y solo si tienen los mismos pares de Puiseux.

1. Curvas algebraicas planas y foliaciones holomorfas

Definición 1.3.2. Llamamos polinomio distinguido en \mathcal{A} (anillo local) si todo elemento es de la forma $Y^p + \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i Y^i$, donde α_i pertenece al ideal maximal \mathcal{M} de \mathcal{A} .

Para el desarrollo del siguiente apartado se define $K[[X]]^*$ con K un cuerpo como

$$K[[X]]^* = \bigcup_{n \geq 1} K[[X^{\frac{1}{n}}]].$$

Teorema 1.3.4 ([Che08]). Dado P un polinomio distinguido de grado N en $K[[X]][Y]$ con K un cuerpo y sean $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ las raíces de P en $K[[X]]^*$. El polígono de Newton de P tiene un número de lados igual al número de valores distintos tomados por los órdenes de φ_k . A cada orden μ_k le corresponde un lado de ecuación $i + \mu_k j = \nu_k$ y de longitud (en proyección sobre el eje j) igual al número de raíces con ese orden.

Demostración: Escribimos $P = \prod_{k=1}^N (Y - \varphi_k)$, $\varphi_k(0) = 0$. Reemplazando los enteros por los racionales vemos como definir el polígono de Newton de un elemento, $f \in K[[X]]^*$, en particular $f = \prod_{k=1}^N (Y - \varphi_k)$.

Esta observación va a permitirnos razonar por inducción sobre N . Suponemos que las raíces φ_i numeradas por orden decrecientes, según la hipótesis de inducción (se verifica trivialmente para $N = 1$). El polinomio $\prod_{i=1}^{k-1} (Y - \varphi_i)$ tiene un polígono de Newton descrito por el lema. Sea μ el más pequeño de los órdenes de φ_i para $1 \leq i \leq k-1$; como los φ_i están numerados por órdenes decrecientes, entonces $\mu_k \leq \mu_i$ para todo $i \in \{1, \dots, k-1\}$; por lo tanto, $\mu_k \leq \mu$, es el orden de φ_k . Veamos dos casos:

1. $\mu_k < \mu$.

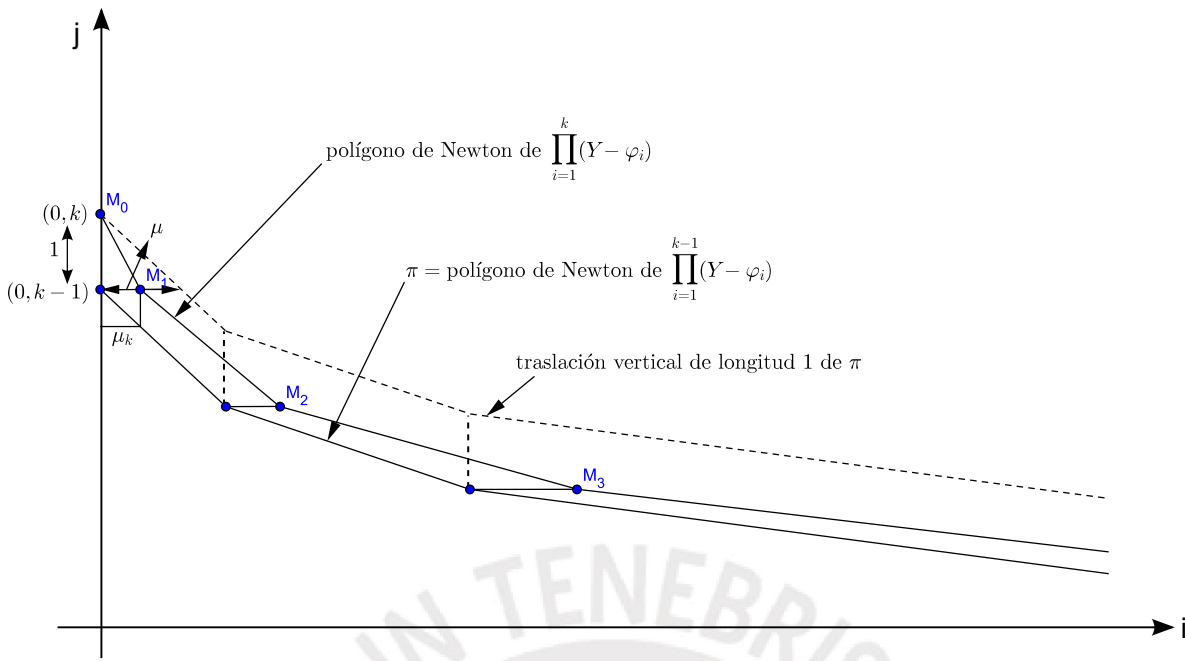


Figura 1.1. [Che08]

Tenemos que comprobar que existen los puntos M_i (es decir, los coeficientes correspondientes no se anulen). Para M_1 es claro que el producto $\prod_{i=1}^{k-1} (Y - \varphi_i)$ no puede contener ningún término $Y^{k-2} X^{\mu_k}$, a causa de la condición $\mu_k < \mu$. En general, para ver que M_i está presente, basta con observar que si $\prod_{i=1}^{k-1} (Y - \varphi_i)$ tiene un término $X^a Y^b$, pero no tiene el término $X^{a+\mu_k} Y^{b-1}$.

2. $\mu_k = \mu$.

1. Curvas algebroides planas y foliaciones holomorfas

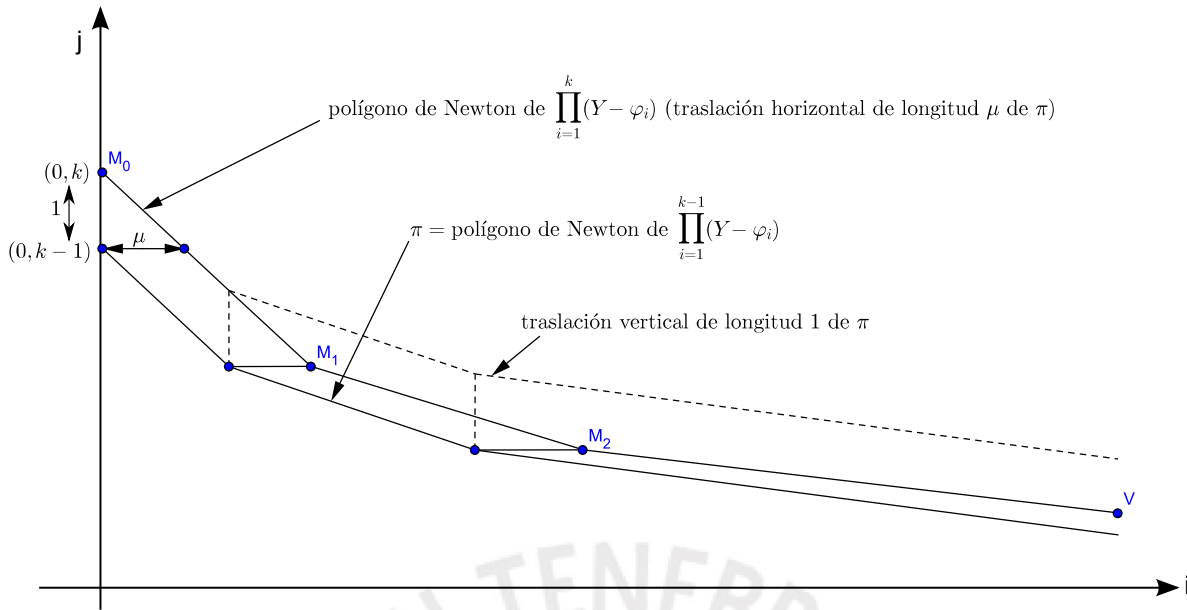


Figura 1.2. [Che08]

Una vez más, se tiene que verificar que el punto M_i existe, prestar un poco más de atención que en el primer caso, vemos que si $\prod_{i=1}^{k-1} (Y - \varphi_i)$ tiene un término $X^a Y^b$, con $a \neq 0$, y no tiene un término $X^{a'} Y^b$, $a' < a$, entonces el no tiene al término $X^{a+\mu} Y^{b-1}$ desde que $k-1-b$ es mayor o igual al número l de raíces de φ_i ($1 \leq i \leq k-1$) de orden μ . En efecto, $X^a Y^b$ obligatoriamente debe provenir de $Y^b \cdot \psi_1 \dots \psi_l, \dots$ (donde ψ_1, \dots, ψ_l son las raíces φ_i de orden μ) y no podemos cambiar un Y contra un φ_i de orden estrictamente superior a μ . Pero según la hipótesis de inducción, la ordenada de M_1 es exactamente $k-1-l$, lo que muestra que M_i tiene por coordenadas (a, b) con $b \leq k-1-l$, es decir $k-1-b \geq l$. \square

Corolario 1.3.1 ([Pł090]). Sea $f(X, Y) \in \mathbb{C}[[X]][[Y]]$ un polinomio distinguido. Para cada lado S del polígono de Newton de f le corresponde $|m_S|$ soluciones de orden $\frac{|n_S|}{|m_S|}$, donde $|n_S|$ y $|m_S|$ son las longitudes de la proyección en X e Y de S , respectivamente.

Demostración: Aplicando el Teorema 1.3.4, el polígono de Newton de f tiene un número de lados igual al número de valores distintos tomados por los órdenes de φ_k , a cada orden

μ_k le corresponde un lado S de ecuación $x + \mu_k y = \nu_k$ y longitud (proyección en el eje Y) igual al número de raíces de orden μ_k .

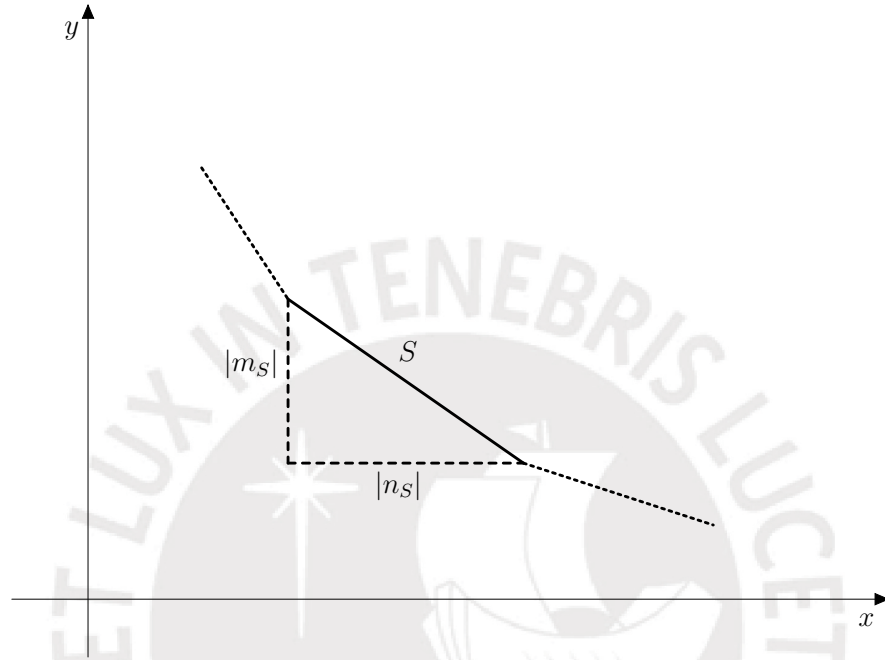


Figura 1.3

En la figura observamos que $|n_s|$ y $|m_s|$ son las longitudes de la proyección en X e Y de S respectivamente, la pendiente del lado S es $-\frac{1}{\mu_k}$. Pero de la figura tenemos que la pendiente de S es $-\frac{|m_s|}{|n_s|}$. Así,

$$-\frac{1}{\mu_k} = -\frac{|m_s|}{|n_s|}$$

$$\mu_k = \frac{|n_s|}{|m_s|}.$$

Por lo tanto, a cada lado S del polígono de Newton de f le corresponden $|m_s|$ soluciones de orden $\frac{|n_s|}{|m_s|}$. \square

1.4. Intersección de curvas y semigrupo de valores

En esta sección, introducimos el concepto de índice de intersección: una manera de expresar numéricamente el grado de coincidencia entre dos curvas algebroides planas, presentaremos el semigrupo de valores de una curva algebroides plana irreducible. Este es un invariante bajo la equivalencia de curvas, conocido como un invariante de la clasificación topológica de curvas (gérmenes) analíticas planas irreducibles. Relacionaremos este semigrupo a los enteros característicos y los pares de Puiseux.

Sean $f, g \in \mathbb{C}[[X, Y]]$. El **índice de intersección** de f y g es el número entero (o ∞) definido por:

$$I(f, g) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[[X, Y]]}{\langle f, g \rangle}.$$

Dados $f, g, h \in \mathbb{C}[[X, Y]]$, ϕ un \mathbb{C} -automorfismo de $\mathbb{C}[[X, Y]]$ y u, v unidades en $\mathbb{C}[[X, Y]]$. El índice de intersección tiene las siguientes propiedades:

1. $I(f, g) < \infty$ si y solamente si f y g son relativamente primos en $\mathbb{C}[[X, Y]]$;
2. $I(f, g) = I(g, f)$;
3. $I(\phi(f), \phi(g)) = I(uf, vg) = I(f, g)$;
4. $I(f, g \cdot h) = I(f, g) + I(f, h)$;
5. $I(f, g) = 1$ si y solamente si C_f y C_g son suaves y transversales;
6. $I(f, g - hf) = I(f, g)$.

Sea $f \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ una serie de potencias irreducible, regular en Y de orden n y $(T^n, \varphi(T))$ una parametrización de Newton-Puiseux de la curva C_f . Definimos como *valoración asociada a f* , la función

$$\begin{aligned} v_f : \mathbb{C}[[X, Y]] &\longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\ g &\longmapsto \text{mult}(g(T^n, \varphi(T))), \end{aligned}$$

y $v_f(0) = \infty$. Sean g y h elementos de $\mathbb{C}[[X, Y]]$. Se sigue de la Proposición 1.1.2 las siguientes propiedades de la función v_f :

1. $v_f(g.h) = v_f(g) + v_f(h)$;
2. $v_f(h) = 0$ si $h(0,0) \neq 0$;
3. $v_f(g + h) \geq \min\{v_f(g), v_f(h)\}$, con igualdad si $v_f(g) \neq v_f(h)$.

El próximo resultado nos da una manera interesante de calcular el índice de intersección mediante la valoración.

Teorema 1.4.1. Sean $f, g \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ y $f = f_1 \cdots f_r$ una descomposición de f en factores irreducibles, con $f_i \neq f_j$ para todo $i \neq j$. Entonces

$$I(f, g) = \sum_{i=1}^r v_{f_i}(g).$$

Demostración: Ver Teorema 4.17 de [Hef03] en la página 65. □

Dado que estamos trabajando con curvas algebroides planas irreducibles, observemos por el Teorema 1.4.1 que;

$$I(f, g) = v_f(g),$$

para todo $g \in \mathbb{C}[[X, Y]]$.

Proposición 1.4.1. Sea curva algebroides plana irreducible C_f y $g \in \mathbb{C}[[X, Y]]$, entonces

$$I(f, g) = \text{mult}_T(g(\alpha(T))),$$

donde $\alpha(T) = (T^n, T^m + \cdots)$ es una parametrización de Newton-Puiseux de C_f .

Demostración: Vea [Hef03], dentro de la prueba del Teorema 4.17 en la página 66. □

La siguiente proposición se relaciona con la fórmula de Halphen, la cual puede revisarse en [CA00] página 55.

Proposición 1.4.2 (Regla de Zeuthen [Plo90]). Sea $f(X, Y), g(X, Y) \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ tal que $f(0,0) = g(0,0) = 0$ y $f(0, Y)g(0, Y) \neq 0$ en $\mathbb{C}[[Y]]$. Sea $(Y_i(X))$ (respectivamente $(\bar{Y}_j(X))$) la sucesión de todas las soluciones en $\mathbb{C}[[X]]^* = \bigcup_{k \geq 1} \mathbb{C}[[X^{\frac{1}{k}}]]$ (contadas con multiplicidades) de $f(X, Y) = 0$ (respectivamente $g(X, Y) = 0$). Entonces

$$I(f, g) = \sum_i \sum_j \text{mult}_X(Y_i(X) - \bar{Y}_j(X)).$$

1. Curvas algebraicas planas y foliaciones holomorfas

Demostración: Del Teorema 1.3.1, se tiene

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= \prod_{i=1}^n (Y - Y_i(X)) \\ g(X, Y) &= \prod_{j=1}^m (Y - \bar{Y}_j(X)). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Luego,

$$\begin{aligned} I(f, g) &= \sum_{i=1}^n \text{mult}_X(g(Y_i(X))). \\ \text{Usando (1.6), } I(f, g) &= \sum_{i=1}^n \text{mult}_X \left(\prod_{j=1}^m (Y_i(X) - \bar{Y}_j(X)) \right), \\ I(f, g) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \text{mult}_X(Y_i(X) - \bar{Y}_j(X)). \end{aligned}$$

□

El próximo teorema nos da en una situación particular, el índice de intersección de dos curvas algebraicas planas.

Teorema 1.4.2. Sean $f, g \in \mathbb{C}[[X, Y]]$. Entonces

$$I(f, g) \geq \text{mult}(f) \cdot \text{mult}(g),$$

con igualdad si y solamente si C_f y C_g no poseen tangentes en común.

Demostración: Es suficiente probar el teorema para f y g irreducibles. En efecto, consideremos las siguientes decomposiciones de f y g en factores irreducibles, $f = f_1 \cdots f_r$ y $g = g_1 \cdots g_s$. Tenemos, por los ítems (2) y (4) de las propiedades del índice de intersección, que

$$I(f, g) = \sum_{i,j} I(f_i, g_j).$$

Por otro lado, tenemos que

$$\text{mult}(f) \cdot \text{mult}(g) = \sum_{i,j} \text{mult}(f_i) \cdot \text{mult}(g_j).$$

Luego, si $I(f_i, g_j) \geq \text{mult}(f_i) \cdot \text{mult}(g_j)$ para todo i, j , entonces

$$I(f, g) = \sum_{i,j} I(f_i, g_j) \geq \sum_{i,j} \text{mult}(f_i) \cdot \text{mult}(g_j) = \text{mult}(f) \cdot \text{mult}(g).$$

1.4. Intersección de curvas y semigrupo de valores

Tomemos que f y g son irreducibles y consideremos una parametrización de Newton-Puiseux de f

$$\begin{cases} X = T^n \\ Y = \varphi(T) = T^{\beta_1} + \sum_{i>\beta_1} b_i T^i, \end{cases}$$

donde $n = \text{mult}(f) < \beta_1$ y n no divide a β_1 .

Ahora suponemos que $\text{mult}(g) = m$ y

$$g(X, Y) = (aX + bY)^m + g_{m+1}(X, Y) + \dots,$$

donde $g_{m+i}(X, Y)$, con $i \geq 1$ es un polinomio homogéneo de grado $m + i$. Entonces por el Teorema 1.4.1, tenemos que

$$I(f, g) = \text{mult}_T[(aT^n + b\varphi(T))^m + g_{m+1}(T^n, \varphi(T)) + \dots] \geq n \cdot m = \text{mult}(f) \cdot \text{mult}(g)$$

con igualdad si y solamente si $a \neq 0$, i.e las rectas tangentes de C_f y C_g son distintas. \square

Corolario 1.4.1. Sean $f, g \in \mathbb{C}[[X, Y]]$. Si C_f y C_g son suaves y transversales, entonces

$$I(f, g) = \text{mult}(f) \cdot \text{mult}(g).$$

Ejemplo 1.4.1. Hallaremos el índice de intersección de $Y^2 - X^2 - X^3$ y $Y^2 - X^3$.

$$\begin{aligned} I(Y^2 - X^2 - X^3, Y^2 - X^3) &= I(-X^2, Y^2 - X^3) \\ &= I(-X^2, Y^2 - X \cdot X^2) \\ &= I(-X^2, Y^2) = 2I(X, Y^2) \\ &= 2I(X, Y^2) = 4I(X, Y). \end{aligned}$$

Luego, de la quinta propiedad del índice de intersección se obtiene que $I(X, Y) = 1$. Por lo tanto,

$$I(Y^2 - X^2 - X^3, Y^2 - X^3) = 4.$$

Definición 1.4.1. Un semigrupo es una estructura algebraica de la forma $(G, +)$ donde G es un conjunto no vacío y $+$ una operación binaria, cerrada y asociativa. Si además $+$ es una operación conmutativa, se dice que es un semigrupo conmutativo.

1. Curvas algebroides planas y foliaciones holomorfas

Sea $G \neq \{0\}$ un subconjunto de \mathbb{N} el cual continene al cero. Decimos que G es un semigrupo en \mathbb{N} cerrado bajo la adición. El elemento $\text{mult}(G \setminus \{0\})$ es llamado la **multiplicidad de G** y es denotado por $\text{mult}(G)$.

Si $x_0, x_1, \dots, x_r \in \mathbb{N}$, entonces el conjunto

$$\langle x_0, x_1, \dots, x_r \rangle = \{\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_r x_r; \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{N}\}$$

es un semigrupo en \mathbb{N} , llamado el *semigrupo generado* por x_0, x_1, \dots, x_r . Los elementos x_0, x_1, \dots, x_r son llamados generadores para G . Por ejemplo, tenemos

$$\langle 3, 5 \rangle = \{0, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \dots\}.$$

El siguiente resultado muestra que el semigrupo G es finitamente generado.

Proposición 1.4.3. *Dado cualquier semigrupo G en \mathbb{N} , existe un único conjunto finito de elementos v_0, \dots, v_g en G tal que*

1. $v_0 < \dots < v_g$, y $v_i \not\equiv v_j \pmod{v_0}$ para $i \neq j$,
2. $G = \langle v_0, \dots, v_g \rangle$,
3. $\{v_0, \dots, v_g\}$ está contenido en algún subconjunto de generadores de G .

Demostración: Definamos $\{v_0, \dots, v_g\}$ por inducción. Ponemos $v_0 = \text{mult}(G)$ y definimos

$$v_1 = \text{mín}(G \setminus \langle v_0 \rangle).$$

Es claro que $v_0 \not\equiv v_1 \pmod{v_0}$, pues de otro modo $v_1 \in \langle v_0 \rangle$ sería una contradicción debido a que $v_1 \notin \langle v_0 \rangle$, pues $v_1 \in G \setminus \langle v_0 \rangle$ como se mencionó anteriormente. Para $i \geq 2$,

$$v_i = \text{mín}(G \setminus \langle v_0, \dots, v_{i-1} \rangle).$$

Se tiene que $v_i \not\equiv v_j \pmod{v_0}$, para $j < i$, de otro modo, $v_i \in \langle v_0, \dots, v_{i-1} \rangle$, lo cual es una contradicción. Ya que $v_i \not\equiv v_j \pmod{v_0}$, para $j \neq i$, entonces para algún $g < v_0$, se tiene que

$$G = \langle v_0, \dots, v_g \rangle.$$

1.4. Intersección de curvas y semigrupo de valores

Por definición de los v_i tenemos que; $v_0 < v_1 < \dots < v_g$, además veamos que $\{v_0, \dots, v_g\}$ está contenida en cualquier conjunto de generadores de G .

Por definición de los v_i , $\{v_0, \dots, v_g\}$ es el conjunto mínimo dentro de G tal que verifique 1.) y 2.), esto implica que cualquier otro generador de G deberá contener a todos los v_i , $i = 0, \dots, g$ y algunos otros elementos de G que son combinación de los v_i . \square

Las siguientes definiciones pueden verse en la sección 6.2 de [Hef03].

El conjunto $\{v_0, \dots, v_g\}$ es llamado el **sistema mínimo de generadores** de G , y el entero g es llamado el **género** del semigrupo G .

Dado un semigrupo G en \mathbb{N} , los elementos de $\mathbb{N} \setminus G$ son llamados **lagunas** de G . Un semigrupo puede tener un número finito o infinito de lagunas.

Ejemplo 1.4.2. *El semigrupo $H = \langle 4 \rangle = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, \dots\}$ tiene infinitas lagunas pues; el conjunto*

$$\mathbb{N} \setminus H = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19, \dots\} \text{ es infinito.}$$

El semigrupo $G = \langle 3, 5 \rangle = \{0, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, \dots\}$, tiene un número finito de lagunas pues el conjunto $\mathbb{N} \setminus G = \{1, 2, 4, 7\}$ es finito.

Cuando el número de lagunas de G es finito, existe un único elemento $c \in G$ llamado **conductor** de G , tal que

1. $c - 1 \notin G$,
2. Si $z \in \mathbb{N}$ y $z \geq c$, entonces $z \in G$.

Ejemplo 1.4.3. *El semigrupo*

$$G = \langle 4, 7 \rangle = \{0, 4, 7, 8, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, \dots\},$$

tiene un número finito de lagunas, cuyo conductor es 18, pues $18 - 1 \notin G$ y cualquier $z \in \mathbb{N}$, $z \geq 18$, está en el semigrupo.

A continuación definiremos uno de los objetos más importantes para el estudio de la clasificación de curvas algebroides irreducibles planas. El semigrupo de valores asociado a una curva algebroide plana que es un invariante topológico.

1. Curvas algebroides planas y foliaciones holomorfas

Definición 1.4.2. Sea f un elemento irreducible de \mathcal{M} . Llamamos semigrupo de valores asociado a la curva C_f , el conjunto

$$S(f) = \{I(f, g); g \in \mathbb{C}[[X, Y]] \setminus \langle f \rangle\} \subset \mathbb{N}.$$

Como vimos en el Teorema 1.4.1, si f es irreducible, $I(f, g) = v_f(g)$. Esto nos da la siguiente caracterización de $S(f)$ cuando $f \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ es Y -regular cuya parametrización de Newton-Puiseux es $(T^n, \varphi(T))$. Especificando tenemos que

$$S(f) = \{v_f(g); g \in \mathbb{C}[[X, Y]] \setminus \langle f \rangle\} = \{\text{mult}(g(T^n, \varphi(T))); g \in \mathbb{C}[[X, Y]] \setminus \langle f \rangle\}.$$

Ejemplo 1.4.4. Sea la curva $f = Y^3 - X^5$ con una parametrización de Newton-Puiseux

$$\begin{cases} X = T^3 \\ Y = T^5, \end{cases}$$

entonces dado $g = \sum a_{ij} X^i Y^j \in \mathbb{C}[[X, Y]] \setminus \langle f \rangle$, tenemos que

$$v_f(g) = \text{mult}(g(T^3, T^5)) = \text{mult}\left(\sum a_{ij} T^{3i+5j}\right) = 3r + 5s,$$

para algún número natural r y s . Esto implica que $S(f) = \langle 3, 5 \rangle$, con conductor $c = 8$.

La noción de semigrupo de valores nos permite introducir la siguiente definición.

Definición 1.4.3. Dados C_f y C_g dos curvas algebroides planas irreducibles decimos que son equisingulares si $S(f) = S(g)$.

Observación 1.4.1. Si C_f y C_g son curvas algebroides planas irreducibles y equivalentes, entonces C_f y C_g son equisingulares.

En efecto: Sola basta verificar que $S(f) = S(g)$. Para esto, debemos garantizar que para todo $h' \in \mathbb{C}[[X, Y]] \setminus \langle f \rangle$, existe $p' \in \mathbb{C}[[X, Y]] \setminus \langle g \rangle$ tal que $I(f, h') = I(g, p')$. Como C_f y C_g son equivalentes, existe un \mathbb{C} -automorfismo φ de $\mathbb{C}[[X, Y]]$ y una unidad $u \in \mathbb{C}[[X, Y]]$, tal que $\varphi(f) = ug$. Así mismo, tenemos que

$$I(f, h') = I(\varphi(f), \varphi(h')) = I(u^{-1}\varphi(f), u^{-1}\varphi(h')) = I(g, u^{-1}\varphi(h')),$$

1.4. Intersección de curvas y semigrupo de valores

siendo la primera y la segunda igualdad válidas por la tercera propiedad del índice de intersección. Observemos que, como $u^{-1}\varphi(h')$ es un elemento de $\mathbb{C}[[X, Y]] \setminus \langle g \rangle$, basta tomar $p' = u^{-1}\varphi(h')$ y se tiene la igualdad deseada. Luego, las curvas son equisingulares.

Observación 1.4.2. Consideremos C_f una curva algebroide plana irreducible y c el conductor del semigrupo de valores $S(f)$ de C_f . Si β_0, \dots, β_g son los exponentes característicos de C_f , entonces podemos obtener el conductor c de $S(f)$ por la fórmula

$$c = \sum_{i=1}^g (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i) \beta_i - \beta_0 + 1,$$

donde $\epsilon_0 = \beta_0$ y $\epsilon_i = \text{mcd}(\beta_0, \dots, \beta_i)$. Ver Colorario 7.15 de [Hef03]

Como vimos anteriormente C_f admite una parametrización de Newton-Puiseux de la forma

$$\begin{cases} X = T^n \\ Y = \varphi(T) = \sum_{i \geq m} b_i T^i, \end{cases}$$

con $b_m \neq 0$, $m > n$ y n no divide a m tras un cambio de coordenadas, si es necesario.

Observación 1.4.3. En estas condiciones, tenemos que $m = \text{mín}(S(f) \setminus \langle n \rangle)$.

En efecto: m es un elemento de $S(f)$, una vez que $I(f, Y) = m$. Por otro lado, si $g(X, Y) = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}} a_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta \in \mathbb{C}[[X, Y]]$, entonces,

$$I(f, g) = \text{mult} \left(\sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}} T^{n\alpha} \cdot \varphi(T)^\beta \right),$$

así $\text{mín}(S(f) \setminus \langle n \rangle) \geq m$. Pero, como $I(f, Y) = m$, se tiene la igualdad. \square

Si v_0, \dots, v_g representan el sistema mínimo de generadores de $S(f)$, tenemos que $v_0 = n = \text{mult}(f)$ y $v_1 = m$, recordando que, $m = \text{mult}(\varphi(T))$ y m no es divisible por n . Por la definición de exponentes característicos se puede concluir que $\beta_0 = v_0$ y $\beta_1 = v_1$.

Zariski mostró la siguiente igualdad para los v_i , con $2 \leq i \leq g$ (ver teorema 6.12 de [Hef03]),

$$v_i = \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\epsilon_{k-1} - \epsilon_k}{\epsilon_{i-1}} \beta_k + \beta_i = \frac{\epsilon_0 - \epsilon_1}{\epsilon_{i-1}} \beta_1 + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_{i-1}} \beta_2 + \dots + \frac{\epsilon_{i-2} - \epsilon_{i-1}}{\epsilon_{i-1}} \beta_{i-1} + \beta_i. \quad (1.7)$$

1. Curvas algebroides planas y foliaciones holomorfas

Así Zariski obtuvo el sistema mínimo de generadores del semigrupo de valores asociados a una curva plana algebroides plana irreducible a partir de los exponentes característicos a través de la siguiente relación:

$$v_0 = \beta_0, v_1 = \beta_1, \text{ y } v_i = \eta_{i-1}v_{i-1} - \beta_{i-1} + \beta_i, \quad (1.8)$$

para $2 \leq i \leq g$.

1.5. Curvas polares

En esta sección definiremos las curvas polares de una curva algebroides plana, objeto central de nuestro estudio a partir de este momento.

Sean $f, g \in \mathcal{M}$ tal que la curva algebroides plana C_g sea suave. Denotaremos por $P_g(f)$ el determinante del jacobiano

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(X, Y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial X} & \frac{\partial f}{\partial Y} \\ \frac{\partial g}{\partial X} & \frac{\partial g}{\partial Y} \end{pmatrix}.$$

Definición 1.5.1. Si $P_g(f) \neq 0$, entonces $P_g(f)$ define una curva, a la cual llamamos **curva polar** de f con respecto a g (o g -polar) y lo denotamos por $C_{P_g(f)}$.

Ejemplo 1.5.1.

1. Sea $f \in \mathcal{M}$ un polinomio de Weierstrass y $g(X, Y) = X$ entonces, la g -polar es

$$C_{P_g(f)} = -\frac{\partial f}{\partial Y}$$

2. Sea $f \in \mathcal{M}$ un polinomio de Weierstrass y $g(X, Y) = Y$ entonces, la g -polar es

$$C_{P_g(f)} = \frac{\partial f}{\partial X}$$

Lema 1.5.1. La curva polar $C_{P_g(f)}$ es invariante por cada cambio de coordenadas.

Demostración: Sean $f, g \in \mathcal{M}$ con C_g una curva suave y se considera el siguiente \mathbb{C} -automorfismo

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{C}[[X, Y]] &\longrightarrow \mathbb{C}[[X, Y]] \\ X &\longmapsto u(X, Y) \\ Y &\longmapsto v(X, Y).\end{aligned}$$

Por la Proposición 1.1.3, las formas iniciales $u(X, Y)$ y $v(X, Y)$ deben ser linealmente independientes. Luego,

$$\begin{aligned}\varphi(f) &= f \circ \varphi(X, Y) = f(u(X, Y), v(X, Y)) \in \mathbb{C}[[X, Y]] \text{ y} \\ \varphi(g) &= g \circ \varphi(X, Y) = g(u(X, Y), v(X, Y)) \in \mathbb{C}[[X, Y]].\end{aligned}$$

Calculemos a qué es igual $P_{\varphi(g)}(\varphi(f))$,

$$\begin{aligned}P_{\varphi(g)}(\varphi(f)) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi(f)}{\partial X} & \frac{\partial \varphi(f)}{\partial Y} \\ \frac{\partial \varphi(g)}{\partial X} & \frac{\partial \varphi(g)}{\partial Y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f(u(X, Y), v(X, Y))}{\partial X} & \frac{\partial f(u(X, Y), v(X, Y))}{\partial Y} \\ \frac{\partial g(u(X, Y), v(X, Y))}{\partial X} & \frac{\partial g(u(X, Y), v(X, Y))}{\partial Y} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial X} & \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial Y} \\ \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial X} & \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial Y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \right) \\ \left(\frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \right) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial u}{\partial Y} \\ \frac{\partial v}{\partial X} & \frac{\partial v}{\partial Y} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial u}{\partial Y} \\ \frac{\partial v}{\partial X} & \frac{\partial v}{\partial Y} \end{vmatrix} = \varphi(P_g(f)) \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(X, Y)}.\end{aligned}$$

Si $\frac{\partial(u, v)}{\partial(X, Y)}$ es una unidad, entonces podemos concluir que las curvas $\varphi(P_g(f))$ y $P_{\varphi(g)}(\varphi(f))$ son las mismas. *En efecto*, consideremos

$$u(X, Y) = aX + bY + h_1(X, Y) \quad \text{y} \quad v(X, Y) = cX + dY + h_2(X, Y),$$

donde $h_1, h_2 \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ son singulares. Sabemos que las formas iniciales de $u(X, Y)$ y

1. Curvas algebroides planas y foliaciones holomorfas

$v(X, Y)$ son linealmente independientes, o sea

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

□

Observación 1.5.1. Sea $g(X, Y) = aY - bX$, con $a, b \in \mathbb{C}$ no ambos nulos. La ecuación de la curva polar con respecto a g es:

$$P_g(f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial X} & \frac{\partial f}{\partial Y} \\ \frac{\partial g}{\partial X} & \frac{\partial g}{\partial Y} \end{vmatrix} = a \frac{\partial f}{\partial X} + b \frac{\partial f}{\partial Y}.$$

Cualquier curva polar de f admite una ecuación como en la Observación 1.5.1, basta realizar un adecuado cambio de coordenadas. En efecto, como C_g es suave tenemos $g(X, Y) = aX + bY + h(X, Y)$, donde $a \neq 0$ o $b \neq 0$ y $h(X, Y) \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ con $\text{mult}(h(X, Y)) \geq 2$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $b \neq 0$ y consideremos el siguiente \mathbb{C} -automorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}[[X, Y]] &\longrightarrow \mathbb{C}[[X, Y]] \\ X &\longmapsto \frac{aY - g(X, Y)}{b} \\ Y &\longmapsto Y. \end{aligned}$$

De esta manera, tenemos que $\varphi^{-1}(g(X, Y)) = aY - bX$, entonces

$$P_{\varphi^{-1}(g)}(\varphi^{-1}(f)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi^{-1}(f)}{\partial \varphi^{-1}(X)} & \frac{\partial \varphi^{-1}(f)}{\partial \varphi^{-1}(Y)} \\ \frac{\partial \varphi^{-1}(g)}{\partial \varphi^{-1}(X)} & \frac{\partial \varphi^{-1}(g)}{\partial \varphi^{-1}(Y)} \end{vmatrix} = a \frac{\partial \varphi^{-1}(f)}{\partial \varphi^{-1}(X)} + b \frac{\partial \varphi^{-1}(f)}{\partial \varphi^{-1}(Y)}.$$

Observación 1.5.2. A partir de ahora, para que no haya confusión, cuando se haga un cambio de coordenadas como se hizo anteriormente, por un abuso de lenguaje indicaremos que $\varphi^{-1}(g(X, Y)) = aY - bX$ y $P_{\varphi^{-1}(g)}(\varphi^{-1}(f)) = a \frac{\partial \varphi^{-1}(f)}{\partial \varphi^{-1}(X)} + b \frac{\partial \varphi^{-1}(f)}{\partial \varphi^{-1}(Y)}$, simplemente por $g(X, Y) = aY - bX$ y $P_g(f) = a \frac{\partial f}{\partial X} + b \frac{\partial f}{\partial Y}$, respectivamente.

Es válido que si realizamos un cambio de coordenadas a considerar $g(X, Y) = X$, se tiene $P_g(f) = -\frac{\partial f}{\partial Y}$.

La curva polar de f con respecto a g es invariante por cambio de coordenadas, pero ella depende de f el representante de la curva escogida. En efecto, sabemos que la ecuación de la curva polar de f con respecto a g es dada por $P_g(f)$. Ahora, tomemos otro representante de la curva algebroide C_f , digamos uf , donde u es unidad en $\mathbb{C}[[X, Y]]$ y calculemos la ecuación de la curva polar uf con respecto a g . Tenemos,

$$\begin{aligned} P_g(uf) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial(uf)}{\partial X} & \frac{\partial(uf)}{\partial Y} \\ \frac{\partial g}{\partial X} & \frac{\partial g}{\partial Y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial X}f + u\frac{\partial f}{\partial X} & \frac{\partial u}{\partial Y}f + u\frac{\partial f}{\partial Y} \\ \frac{\partial g}{\partial X} & \frac{\partial g}{\partial Y} \end{vmatrix} \\ &= f\frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial g}{\partial Y} + u\frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial g}{\partial Y} - f\frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\partial g}{\partial X} - u\frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial g}{\partial X} \\ &= u\left(\frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial g}{\partial Y} - \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial g}{\partial X}\right) + f\left(\frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial g}{\partial Y} - \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\partial g}{\partial X}\right) \\ &= u\frac{\partial(f, g)}{\partial(X, Y)} + f\frac{\partial(u, g)}{\partial(X, Y)} \\ &= uP_g(f) + fP_g(u). \end{aligned}$$

Teorema 1.5.1 ([CA00]). Sean $f, g \in \mathcal{M}$ tales que la curva algebroide plana C_g sea suave. Considerando $P_g(f)$ la ecuación de la curva polar de f con respecto a g , tenemos:

1. $I(P_g(f), g) = I(f, g) - 1$.
2. $\text{mult}(P_g(f)) \geq \text{mult}(f) - 1$, siendo estrictamente mayor si y solamente si todas las ramas³ de f son tangentes a g .
3. Si ninguna rama de f es tangente a g , entonces ninguna rama de la polar $P_g(f)$ es tangente a g .

Demostración: Como la multiplicidad y el índice de intersección son invariantes por cambio de coordenadas podemos considerar que $g(X, Y) = X$. Por la Observación 1.5.2,

³Una rama de f es una componente irreducible de f .

1. Curvas algebroides planas y foliaciones holomorfas

ecuación de la curva polar de f con respecto a g puede ser considerada $P_g(f) = \frac{\partial f}{\partial Y}$. Además, por un adecuado cambio de coordenadas podemos asumir que f es regular en Y , así

$$f(0, Y) = Y^{\text{mult}(f)}(c_0 + c_1 Y + \dots).$$

Con estas consideraciones procedemos a mostrar lo que se pide.

1. Como $f(0, 0) = 0$, tenemos que $\text{mult}_Y(f(0, Y)) > 0$ y en consecuencia

$$\begin{aligned} \text{mult}_Y(f(0, Y)) &= \text{mult}(f) \text{ y} \\ \text{mult}_Y\left(\frac{\partial f(0, Y)}{\partial Y}\right) &= \text{mult}(f) - 1 = \text{mult}_Y(f(0, Y)) - 1. \end{aligned}$$

Dada una parametrización de Newton-Puiseux de C_f de la forma

$$\begin{cases} X = T^{\text{mult}(f)}, \\ Y = \varphi(T) = T^{\beta_1} + \sum_{i>\beta_1} b_i T^i \end{cases}$$

se cumple

$$I(f, g) = I(f, X) = \text{mult}_T(g(T^{\text{mult}(f)}, \varphi(T))) = \text{mult}_T(T^{\text{mult}(f)}) = \text{mult}(f).$$

Así

$$\begin{aligned} I(f, g) &= I(f, X) = \text{mult}(f) = \text{mult}_Y(f(0, Y)) = \text{mult}_Y\left(\frac{\partial f(0, Y)}{\partial Y}\right) + 1 \\ &= I\left(\frac{\partial f}{\partial Y}, g\right) + 1 = I(P_g(f), g) + 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $I(P_g(f), g) = I(f, g) - 1$.

2. Consideremos la siguiente expansión de f en polinomios homogéneos,

$$f = F_n + F_{n+1} + \dots,$$

donde $F_n = \prod_{i=1}^s c_i (a_i X + b_i Y)^{r_i}$, $\sum_{i=1}^s r_i = n$, y $a_i b_j - a_j b_i \neq 0$, si $i \neq j$ (las formas lineales $a_i X + b_i Y$ y $a_j X + b_j Y$ de F_n , con $i \neq j$, son linealmente independientes).

Luego,

$$\frac{\partial f}{\partial Y} = \frac{\partial F_n}{\partial Y} + \frac{\partial F_{n+1}}{\partial Y} + \dots,$$

con

$$\frac{\partial F_n}{\partial Y} = \sum_{i=1}^s r_i b_i c_i (a_i X + b_i Y)^{r_i-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s c_j (a_j X + b_j Y)^{r_j}.$$

Veamos que dos términos de $\frac{\partial F_n}{\partial Y}$ nunca se cancelan. *En efecto*, supongamos que $b_i \neq 0$, $b_k \neq 0$ con $i \neq k$ y que

$$r_i b_i c_i (a_i X + b_i Y)^{r_i-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s c_j (a_j X + b_j Y)^{r_j} = -r_k b_k c_k (a_k X + b_k Y)^{r_k-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^s c_j (a_j X + b_j Y)^{r_j},$$

o sea, $r_i b_i (a_k X + b_k Y) = -r_k b_k (a_i X + b_i Y)$, esto es,

$$(a_i X + b_i Y) = \frac{-r_i b_i}{r_k b_k} \cdot (a_k X + b_k Y)$$

y como estamos asumiendo $i \neq k$, $b_i \neq 0$ y $b_k \neq 0$ se tiene que las formas lineales $(a_i x + b_i y)$ y $(a_k x + b_k y)$ son linealmente dependientes, lo que es una contradicción. Por lo tanto, dos términos de $\frac{\partial F_n}{\partial Y}$ nunca se cancelan.

Luego,

$$\text{mult} \left(\frac{\partial F_n}{\partial Y} \right) = r_i - 1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s r_j = \sum_{j=1}^s r_j - 1 = \text{mult}(f) - 1,$$

si $b_i \neq 0$ para algún $i \in \{1, \dots, s\}$, o entonces $\frac{\partial F_n}{\partial Y} = 0$, si $b_i = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, s\}$. Así, $\text{mult} \left(\frac{\partial F_n}{\partial Y} \right) > \text{mult}(f) - 1$, si, y solamente si, $b_i = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, s\}$. Por lo tanto,

$$\text{mult} \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \right) \geq \text{mult}(f) - 1,$$

Así mismo,

$$\text{mult} \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \right) > \text{mult}(f) - 1,$$

si y solamente si $b_i = 0$, para todo $i \in \{1, \dots, s\}$, o sea, si y solamente si el cono tangente de C_f es de la forma $\prod_{i=1}^s (a_i X)^{r_i}$, esto es, todas las ramas de C_f poseen misma tangente que C_g .

1. Curvas algebroides planas y foliaciones holomorfas

3. Como estamos asumiendo que $g(X, Y) = X$, tenemos que $\text{mult}(g) = 1$. Así,

$$\begin{aligned} \text{mult}(P_g(f)) &= \text{mult}(P_g(f)) \cdot \text{mult}(g) \stackrel{\text{Teo. 1.4.2}}{\leq} I(P_g(f), g) \stackrel{\text{item 1}}{=} I(f, g) - 1, \\ &= \text{mult}(f)\text{mult}(g) - 1, \text{ como } f \text{ y } g \text{ tienen tangentes distintas,} \\ &= \text{mult}(f) - 1, \end{aligned}$$

por el item 2, se tiene $\text{mult}(P_g(f)) \geq \text{mult}(f) - 1$. Luego,

$$\text{mult}(P_g(f)) = \text{mult}(f) - 1.$$

Por lo tanto, $I(P_g(f), g) = \text{mult}(P_g(f)) \cdot \text{mult}(g)$, esto es las tangentes de $P_g(f)$ no coinciden con las tangentes de g . \square

1.5.1. Observaciones finales

Sea una curva algebroides plana irreducible C_f , $n = \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_g$ los exponentes característicos de C_f , y η_j y ϵ_j los enteros correspondientes a los exponentes característicos (vea la Sección 1.3). Definamos para $j = 0, 1, \dots, g$, el conjunto

$$G_j = U_{\epsilon_j} = \{\zeta \in \mathbb{C}; \zeta^{\epsilon_j} = 1\}.$$

Tenemos así,

$$U_n = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_g = \{1\},$$

luego, la cardinalidad de G_j es ϵ_j , la cual denotaremos por $\#G_j$.

Presentaremos dos resultados, que serán de utilidad para el capítulo 2.

Lema 1.5.2. *Si $\zeta \in G_j \setminus G_{j+1}$ con $j \in \{0, \dots, g-1\}$, entonces $\zeta^{\beta_{j+1}} \neq 1$.*

Demostración: Como $\zeta \in G_j \setminus G_{j+1}$, se tiene que $\zeta^{\epsilon_j} = 1$ y $\zeta^{\epsilon_{j+1}} \neq 1$. Suponemos que $\zeta^{\beta_{j+1}} = 1$, entonces $\zeta^{\epsilon_j} = \zeta^{\beta_{j+1}} = 1$. Pero, $\epsilon_{j+1} = \text{mcd}(\epsilon_j, \beta_{j+1})$, o sea, podemos expresar ϵ_{j+1} como $\epsilon_{j+1} = a\epsilon_j + b\beta_{j+1}$, para algún $a, b \in \mathbb{Z}$. Luego,

$$\zeta^{\epsilon_{j+1}} = (\zeta^{\epsilon_j})^a \cdot (\zeta^{\beta_{j+1}})^b = 1,$$

lo que contradice la hipótesis de $\zeta \notin G_{j+1}$. Luego, $\zeta^{\beta_{j+1}} \neq 1$. \square

Proposición 1.5.1. *Sea una curva algebroide plana irreducible C_f con multiplicidad n . Si $\zeta \in G_k \setminus G_{k+1}$ y $\mu \in G_i \setminus G_{i+1}$ con $i \geq k$ y $\zeta \neq \mu$, entonces*

$$\text{mult}(\varphi(\zeta T) - \varphi(\mu T)) = \beta_{k+1}.$$

Demostración: Sean $\zeta, \mu \in U_n$, con $\zeta \neq \mu$. Como $\zeta \in G_k \setminus G_{k+1}$ y $\mu \in G_i \setminus G_{i+1}$ con $i \geq k$, entonces $\zeta^j = \mu^j = 1$, para todo $j < \beta_{k+1}$, esto es, $\zeta^j T^j = \mu^j T^j$, para todo $j < \beta_{k+1}$. Como $\zeta \neq \mu$, tenemos $\zeta^{\beta_{k+1}} \neq \mu^{\beta_{k+1}}$. Así, $\text{mult}(\varphi(\zeta T) - \varphi(\mu T)) = \beta_{k+1}$. \square

Corolario 1.5.1. *Sea una curva algebroide plana irreducible C_f con multiplicidad n . Si $\zeta \in G_k \setminus G_{k+1}$,*

$$\text{mult}(\varphi(\zeta T) - \varphi(T)) = \beta_{k+1}.$$

Demostración: Basta tomar $\mu = 1 \in U_n$ en la Proposición 1.5.1. \square

Por la definición de los exponentes característicos de C_f , podemos escribir un desarrollo de Puiseux de C_f como sigue:

$$\varphi(X^{\frac{1}{n}}) = \sum_{i \in (n)} a_i X^{\frac{i}{n}} + a_{\beta_1} X^{\frac{\beta_1}{n}} + \sum_{\substack{i \in (\epsilon_1) \\ \beta_1 < i < \beta_2}} a_i X^{\frac{i}{n}} + a_{\beta_2} X^{\frac{\beta_2}{n}} + \sum_{\substack{i \in (\epsilon_2) \\ \beta_2 < i < \beta_3}} a_i X^{\frac{i}{n}} + \cdots + \sum_{i \geq \beta_g} a_i X^{\frac{i}{n}}.$$

Lema 1.5.3 ([Bar96]). *Sea $\varphi(X^{\frac{1}{n}})$ un desarrollo de Puiseux de la rama C y ω una raíz n -ésima de la unidad. Entonces*

1. $\text{mult}_x(\varphi(X^{\frac{1}{n}}) - \varphi(\omega X^{\frac{1}{n}})) \geq \frac{\beta_1}{n}$.

2. Si $\varphi(X^{\frac{1}{n}}) \neq \varphi(\omega X^{\frac{1}{n}})$ y $\text{mult}_X(\varphi(X^{\frac{1}{n}}) - \varphi(\omega X^{\frac{1}{n}})) > \frac{\beta_i}{n}$, entonces

$$\text{mult}_X(\varphi(X^{\frac{1}{n}}) - \varphi(\omega X^{\frac{1}{n}})) \geq \frac{\beta_{i+1}}{n}, \text{ para todo } i \in \{1, \dots, g-1\}.$$

Demostración:

1. Si $\sum_{i \in (n)} a_i X^{\frac{i}{n}} + a_{\beta_1} X^{\frac{\beta_1}{n}} + \sum_{\substack{i \in (\epsilon_1) \\ \beta_1 < i < \beta_2}} a_i X^{\frac{i}{n}} + a_{\beta_2} X^{\frac{\beta_2}{n}} + \cdots$, entonces

$$\varphi(\omega X^{\frac{1}{n}}) = \sum_{i \in (n)} \omega^i a_i X^{\frac{i}{n}} + \omega^{\beta_1} a_{\beta_1} X^{\frac{\beta_1}{n}} + \sum_{\substack{i \in (\epsilon_1) \\ \beta_1 < i < \beta_2}} \omega^i a_i X^{\frac{i}{n}} + \omega^{\beta_2} a_{\beta_2} X^{\frac{\beta_2}{n}} + \cdots$$

1. Curvas algebroides planas y foliaciones holomorfas

Por tanto, si $i \in (n)$ entonces $\omega^i = 1$ y $\text{mult}_X(\varphi(X^{\frac{1}{n}}) - \varphi(\omega X^{\frac{1}{n}})) \geq \frac{\beta_1}{n}$.

Ahora vemos la segunda parte del lema.

2. Procedamos por inducción sobre i .

Si $\text{mult}_X(\varphi(X^{\frac{1}{n}}) - \varphi(\omega X^{\frac{1}{n}})) > \frac{\beta_1}{n}$, entonces $a_{\beta_1}(1 - \omega^{\beta_1}) = 0$. Esto nos da $\omega^n = \omega^{\beta_1} = 1$ y como $\epsilon_1 = \text{mcd}(n, \beta_1)$, existen $r, s \in \mathbb{Z}$ tales que $\epsilon_1 = rn + s\beta_1$ y $\omega^{\epsilon_1} = 1$. Por tanto,

$$\text{si } \text{mult}_X(\varphi(X^{\frac{1}{n}}) - \varphi(\omega X^{\frac{1}{n}})) > \frac{\beta_1}{n}, \text{ entonces } \text{mult}_X(\varphi(X^{\frac{1}{n}}) - \varphi(\omega X^{\frac{1}{n}})) \geq \frac{\beta_2}{n}.$$

Suponemos que la propiedad es cierta para i y queremos probarla para $i + 1$.

Si $\text{mult}_X(\varphi(X^{\frac{1}{n}}) - \varphi(\omega X^{\frac{1}{n}})) > \frac{\beta_i}{n}$ entonces $a_{\beta_k}(1 - \omega^{\beta_k}) = 0$ para todo $k \in \{1, \dots, i\}$. Esto nos da $\omega^n = \omega^{\beta_1} = \dots = \omega^{\beta_i} = 1$ y como $\epsilon_i = \text{mcd}(n, \beta_1, \dots, \beta_i)$, existen $r, s_1, \dots, s_i \in \mathbb{Z}$ tales que $\epsilon_i = rn + s_1\beta_1 + \dots + s_i\beta_i$ y $\omega^{\epsilon_i} = 1$. Por lo tanto,

$$\text{mult}_X(\varphi(X^{\frac{1}{n}}) - \varphi(\omega X^{\frac{1}{n}})) \geq \frac{\beta_{i+1}}{n}.$$

□

Corolario 1.5.2 ([Bar96]). *Sea $\varphi(X^{\frac{1}{n}})$ un desarrollo de Puiseux de la rama C y $q \in \{1, \dots, g\}$. Entonces*

1. $\#\left\{\omega \in \mathbb{U}_n : \varphi(X^{\frac{1}{n}}) \neq \varphi(\omega X^{\frac{1}{n}}) \text{ y } \text{mult}_X(\varphi(X^{\frac{1}{n}}) - \varphi(\omega X^{\frac{1}{n}})) \geq \frac{\beta_q}{n}\right\} = \epsilon_{q-1} - 1.$
2. $\#\left\{\omega \in \mathbb{U}_n : \text{mult}_X(\varphi(X^{\frac{1}{n}}) - \varphi(\omega X^{\frac{1}{n}})) = \frac{\beta_q}{n}\right\} = (\eta_q - 1)\eta_{q+1} \cdots \eta_g.$

Demostración:

1. De la demostración del lema anterior,

$$\begin{aligned} & \#\left\{\omega \in \mathbb{U}_n : \varphi(X^{\frac{1}{n}}) \neq \varphi(\omega X^{\frac{1}{n}}) \text{ y } \text{mult}_X(\varphi(X^{\frac{1}{n}}) - \varphi(\omega X^{\frac{1}{n}})) \geq \frac{\beta_q}{n}\right\} \\ &= \#\{\omega \in \mathbb{U}_n : \omega^n = \omega^{\beta_1} = \dots = \omega^{\beta_{q-1}} = 1\} - 1 \\ &= \#(\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_{\beta_1} \cap \dots \cap \mathbb{U}_{\beta_{q-1}}) - 1 \\ &= \#\mathbb{U}_{\text{mcd}(n, \beta_1, \dots, \beta_{q-1})} - 1 \\ &= \text{mcd}(n, \beta_1, \dots, \beta_{q-1}) - 1 = \epsilon_{q-1} - 1. \end{aligned}$$

2. Para obtener esta segunda parte basta considerar:

$$\begin{aligned}
 & \# \left\{ \omega \in \mathbb{U}_n : \text{mult}_X(\varphi(X^{\frac{1}{n}}) - \varphi(\omega X^{\frac{1}{n}})) = \frac{\beta_q}{n} \right\} \\
 &= \# \left\{ \omega \in \mathbb{U}_n : \text{mult}_X(\varphi(X^{\frac{1}{n}}) - \varphi(\omega X^{\frac{1}{n}})) \geq \frac{\beta_q}{n} \right\} \\
 &\quad - \# \left\{ \omega \in \mathbb{U}_n : \text{mult}_X(\varphi(X^{\frac{1}{n}}) - \varphi(\omega X^{\frac{1}{n}})) > \frac{\beta_q}{n} \right\} \\
 &= \# \left\{ \omega \in \mathbb{U}_n : \text{mult}_X(\varphi(X^{\frac{1}{n}}) - \varphi(\omega X^{\frac{1}{n}})) \geq \frac{\beta_q}{n} \right\} \\
 &\quad - \# \left\{ \omega \in \mathbb{U}_n : \text{mult}_X(\varphi(X^{\frac{1}{n}}) - \varphi(\omega X^{\frac{1}{n}})) \geq \frac{\beta_{q+1}}{n} \right\} \\
 &= \epsilon_{q-1} - \epsilon_q \\
 &= \left(\frac{\epsilon_{q-1}}{\epsilon_q} - 1 \right) \epsilon_q \\
 &= (\eta_q - 1) \frac{\epsilon_q}{\epsilon_{q+1}} \cdot \frac{\epsilon_{q+1}}{\epsilon_{q+2}} \cdots \frac{\epsilon_{g-1}}{\epsilon_g} \\
 &= (\eta_q - 1) \eta_{q+1} \cdots \eta_g.
 \end{aligned}$$

□

1.6. Foliaciones holomorfas

Definición 1.6.1. Una variedad compleja de dimensión n es un par $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, donde \mathcal{M} es un espacio topológico de Hausdorff con base numerable y $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ es una colección de homeomorfismos

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha,$$

donde U_α es un abierto de \mathcal{M} y V_α es un abierto de \mathbb{C}^n , que satisfacen las dos condiciones siguientes:

a) $\mathcal{M} = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha.$

b) Si $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{M}$ son tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta),$$

es un biholomorfismo.

1. Curvas algebroides planas y foliaciones holomorfas

Sean $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ una variedad compleja de dimensión n y $p \in \mathcal{M}$, consideremos $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ tal que $p \in U$ y denotemos por $z = (z_1, \dots, z_n)$ las coordenadas complejas de $\varphi(U) \subseteq \mathbb{C}^n$. El **espacio tangente holomorfo** de \mathcal{M} en el punto p , al cual denotaremos por $T_p(\mathcal{M})$, es por definición, el \mathbb{C} -espacio vectorial generado por $\frac{\partial}{\partial z_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}(p)$.

A partir de ahora denotaremos por \mathcal{M} a la variedad compleja $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$.

Sea \mathcal{M} una variedad compleja de dimensión $n \geq 2$.

Definición 1.6.2. Una foliación holomorfa no singular de dimensión k (o codimensión $n - k$) en \mathcal{M} , donde $1 \leq k \leq n - 1$, es dada por la siguiente información:

- \mathcal{M} posee una cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de abiertos.
- Para cada $\alpha \in I$, un biholomorfismo $\Phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{D}^k \times \mathbb{D}^{n-k}$, donde $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ es el disco unitario en el origen.
- Siempre que $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$,

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha\beta} : \Phi_\alpha(U_{\alpha\beta}) &\rightarrow \Phi_\beta(U_{\alpha\beta}) \\ (z, w) &\mapsto \Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1}(z, w) = (\varphi_1, \varphi_2) \end{aligned}$$

donde $\Phi_{\alpha\beta}(z, w) = (\varphi_1(z, w), \varphi_2(w))$.

Cada abierto U_α es llamado **abierto trivializador** de la foliación. Por el ítem b), U_α es descompuesto en variedades de dimensión k de la forma $\Phi_\alpha^{-1}(\mathbb{D}^k \times w_0)$, donde $w_0 \in \mathbb{D}^{n-k}$ son llamadas **placas**. Por el ítem c), las placas se sobrepone en las intersecciones de abiertos trivializadores de la siguiente forma: si $P_\alpha \subset U_\alpha$ y $P_\beta \subset U_\beta$ son placas, o $P_\alpha \cap P_\beta = \emptyset$, o $P_\alpha \cap U_\beta = P_\alpha \cap P_\beta = P_\beta \cap U_\alpha$.

En \mathcal{M} definimos la siguiente relación de equivalencia: $p \sim q$ si y solo si existen placas P_1, \dots, P_n con $p \in P_1$ y $q \in P_n$ tales que $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$, para $i = 1, \dots, n - 1$. La clase de equivalencia de $p \in \mathcal{M}$ por esta relación es llamada **hoja** por p . Cada hoja con la topología generada por los abiertos de sus placas, posee una estructura de variedad compleja de dimensión k inmersa en \mathcal{M} . Una foliación proporciona, una descomposición

de la variedad en subvariedades inmersas de dimensión k , dos a dos disjuntas. Decimos que dos foliaciones son iguales si todas sus hojas coinciden.

Observación 1.6.1. Una foliación también puede ser dada por el siguiente conjunto de informaciones:

- a) Una cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de \mathcal{M} por abiertos.
- b) Para cada $\alpha \in I$, una inmersión holomorfa $\Psi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^{n-k}$.
- c) Siempre $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, una aplicación holomorfa

$$\Psi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow GL(n-k, \mathbb{C})$$

donde $\Psi_{\alpha|U_{\alpha\beta}} = \Psi_{\alpha\beta} \Psi_{\beta|U_{\alpha\beta}}$.

Definición 1.6.3. Sea \mathcal{M} una variedad compleja de dimensión n . Un campo de vectores tangentes en \mathcal{M} es una aplicación $Z : \mathcal{M} \rightarrow \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p(\mathcal{M})$ que a cada $p \in \mathcal{M}$ le asocia un vector $Z(p) \in T_p(\mathcal{M})$.

Observación 1.6.2. Dado el conjunto $T\mathcal{M} = \{(p, v) : p \in \mathcal{M}, v \in T_p(\mathcal{M})\}$, el cual tiene una estructura de variedad compleja de dimensión $2n$.

Definición 1.6.4. Sean \mathcal{M} y \mathcal{N} variedades complejas de dimensiones n , $F \in \text{Bihol}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ y $Z : \mathcal{N} \rightarrow T\mathcal{N}$ un campo de vectores. El pull-back de Z bajo F es el campo de vectores $F^*(Z) : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$ definido por

$$F^*(Z)(p) = [((F^{-1})' \cdot Z) \circ F](p) = (F^{-1})'(F(p))Z(F(p)).$$

Observación 1.6.3.

1. Sea $p \in \mathcal{M}$, como $(F^{-1})'(F(p)) : T_{F(p)}\mathcal{N} \rightarrow T_p\mathcal{M}$ es lineal y $Z(F(p)) \in T_{F(p)}\mathcal{N}$, entonces

$$F^*(Z)(p) = (F^{-1})'(F(p))Z(F(p)), \text{ para todo } p \in \mathcal{M}$$

esto muestra que $F^*(Z)$ es un campo de vectores tangentes.

1. Curvas algebroides planas y foliaciones holomorfas

2. Denotaremos por $\mathcal{X}(\mathcal{M})$ al conjunto de todos los campos holomorfos tangentes a \mathcal{M} .
3. De las definiciones anteriores se sigue que si \mathcal{M} y \mathcal{N} son variedades analíticas complejas de dimensión n , $F \in \text{Bihol}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ y $Z \in \mathcal{X}(\mathcal{N})$, entonces $F^*(Z) \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$.

A continuación daremos unas propiedades, las cuales se prueban usando la definición 1.6.4.

Proposición 1.6.1 ([Ben09]). Sean \mathcal{M} y \mathcal{N} son variedades analíticas complejas de dimensión n y $F \in \text{Bihol}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Se cumplen las siguientes propiedades.

1. $F^*(Z + Y) = F^*(Z) + F^*(Y)$, para todo $Z, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{N})$.
2. $F^*(aZ) = aF^*(Z)$, para todo $Z \in \mathcal{X}(\mathcal{N})$ y para todo $a \in \mathbb{C}$.
3. $F^*(fZ) = (f \circ F)F^*(Z)$, para todo $Z \in \mathcal{X}(\mathcal{N})$ y para todo $f \in \mathcal{O}(\mathcal{N})$.

Demostración:

1. Dado $p \in \mathcal{M}$, por definición de Pull-back, tenemos

$$\begin{aligned} F^*(Z + Y)(p) &= (F^{-1})'(F(p))(Z + Y)(F(p)) \\ &= (F^{-1})'(F(p))Z(F(p)) + (F^{-1})'(F(p))Y(F(p)) \\ &= F^*(Z)(p) + F^*(Y)(p). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $F^*(Z + Y) = F^*(Z) + F^*(Y)$.

2. Dado $p \in \mathcal{M}$, por definición de Pull-back, tenemos

$$\begin{aligned} F^*(aZ)(p) &= (F^{-1})'(F(p))(aZ)(F(p)) \\ &= a(F^{-1})'(F(p))Z(F(p)) \\ &= aF^*(Z)(p). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $aF^*(Z) = F^*(aZ)$.

3. Dado $p \in \mathcal{M}$, por definición de Pull-back, tenemos

$$\begin{aligned} F^*(fZ)(p) &= (F^{-1})'(F(p))(fZ)(F(p)) \\ &= (F^{-1})'(F(p))[f(F(p))Z(F(p))] \\ &= f(F(p))F^*(Z)(p) = [(f \circ F)F^*(Z)](p). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $F^*(fZ) = (f \circ F)F^*(Z)$.

□

Proposición 1.6.2 ([Ben09]). Sean \mathcal{M} , \mathcal{N} y \mathcal{P} variedades analíticas complejas de dimensión n , $F \in \text{Bihol}(M, N)$ y $G \in \text{bihol}(N, P)$. Se cumple:

$$(G \circ F)^*(Z) = F^*(G^*(Z)), \text{ para todo } Z \in \mathcal{X}(\mathcal{P}).$$

Demostración: Dado $p \in \mathcal{M}$, por definición de Pull-back, tenemos

$$\begin{aligned} (G \circ F)^*(Z)(p) &= ((G \circ F)^{-1})'((G \circ F)(p))Z((G \circ F)(p)) \\ &= (F^{-1} \circ G^{-1})'((G \circ F)(p))Z((G \circ F)(p)) \\ &= (F^{-1})'(F(p))(G^{-1})'((G \circ F)(p))Z((G \circ F)(p)) \\ &= (F^{-1})'(F(p))G^*(Z)(F(p)), G^*(Z) \in \mathcal{X}(\mathcal{N}) \\ &= F^*(G^*(Z))(p). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(G \circ F)^*(Z) = F^*(G^*(Z))$.

□

Proposición 1.6.3 ([Ben09]). Sean $U, V \subseteq C^n$ abiertos, $F \in \text{Bihol}(U, V)$. Si $\left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \right\}$ y $\left\{ \frac{\partial}{\partial w_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial w_n} \right\}$ son las bases para los campos de vectores en U y V respectivamente, entonces

$$F^* \left(\frac{\partial}{\partial w_j} \right) = \frac{\partial F^{-1}}{\partial w_j} \circ F = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial w_j} \right) \frac{\partial}{\partial z_i}, \text{ para todo } j = 1, \dots, n$$

donde $F^{-1} = (f_1, \dots, f_m)$.

1. Curvas algebroides planas y foliaciones holomorfas

Demostración: Ver [Ben09] página 45. □

Sean $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ una variedad analítica de dimensión n y $Z \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$. Dado $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$, denotaremos por $\left\{ \frac{\partial}{\partial z_1^\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n^\alpha} \right\}$ a la base de $\mathcal{X}(\varphi_\alpha(U_\alpha))$, tenemos que $(\varphi_\alpha^{-1})^*(Z) \in \mathcal{X}(\varphi_\alpha(U_\alpha))$, luego existen $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{O}(\mathcal{X}(\varphi_\alpha(U_\alpha)))$ tales que $(\varphi_\alpha^{-1})^*(Z) = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}$, entonces

$$Z = (\varphi_\alpha)^* \left(\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha} \right) = \sum_{j=1}^n (a_j \circ \varphi_\alpha) (\varphi_\alpha)^* \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}.$$

Si denotamos $Z_j^\alpha = (\varphi_\alpha)^* \left(\frac{\partial}{\partial z_j^\alpha} \right)$ y $a_j^\alpha = a_j \circ \varphi_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ tenemos que

$$Z = \sum_{j=1}^n a_j^\alpha Z_j^\alpha.$$

De esta manera $\{Z_1^\alpha, \dots, Z_n^\alpha\}$ es una base de $\mathcal{X}(U_\alpha)$, llamado **referencial móvil** de Z en la carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$.

Sea $(U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{A}$ tal que $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, denotando $\left\{ \frac{\partial}{\partial z_1^\beta}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n^\beta} \right\}$ la base de $\mathcal{X}(\varphi_\beta(U_\beta))$ y $Z_j^\beta = (\varphi_\beta)^* \frac{\partial}{\partial z_j^\beta} \in \mathcal{X}(U_\beta)$, tenemos que $\{Z_1^\beta, \dots, Z_n^\beta\}$ es una base de $\mathcal{X}(U_\beta)$. Veremos como se relacionan $\{Z_1^\alpha, \dots, Z_n^\alpha\}$ y $\{Z_1^\beta, \dots, Z_n^\beta\}$ en $U_{\alpha\beta}$. Como $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \in \text{Bihol}(\varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}), \varphi_\beta(U_{\alpha\beta}))$ y denotando $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} = (f_1, \dots, f_n)$, por la proposición 1.6.3 se tiene

$$(\varphi_\alpha^{-1})^*(Z_j^\beta) = (\varphi_\alpha^{-1})^* \left((\varphi_\beta)^* \left(\frac{\partial}{\partial z_j^\beta} \right) \right) = (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^* \left(\frac{\partial}{\partial z_j^\beta} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial z_j^\beta} \circ (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha},$$

luego

$$\begin{aligned} Z_j^\beta &= (\varphi_\alpha)^* \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial z_j^\beta} \circ (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j^\beta} \circ \varphi_\beta \right) (\varphi_\alpha)^* \left(\frac{\partial}{\partial z_i^\alpha} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j^\beta} \circ \varphi_\beta \right) Z_i^\alpha. \end{aligned}$$

Sean \mathcal{M} una variedad compleja de dimensión n y $Z \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$. Decimos que $p \in \mathcal{M}$ punto singular de Z si y solo si $Z(p) = 0 = (p, 0)$, caso contrario diremos que p es un punto regular de Z . Denotaremos por $\text{Sing}(Z)$ al conjunto de todos los puntos singulares de Z .

Teorema 1.6.1 ([Ben09] **Teorema del flujo tubular para variedades**). *Sean \mathcal{M} una variedad compleja de dimensión n y $Z \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$. Si $p \in \mathcal{M}$ punto regular de Z entonces existe $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ con $p \in U_\alpha$ tal que $\varphi_\alpha(U_\alpha) = \Delta^1 \times \Delta^{n-1}$ (donde Δ^k denota un polidisco abierto en \mathbb{C}^k) y $\varphi^* \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right) = Z$ en U_α (donde $z = (z_1, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ son las coordenadas de $\varphi_\alpha(U_\alpha)$).*

Ejemplo 1.6.1. *Sea \mathcal{M} una variedad compleja y Z un campo de vectores tangentes holomorfos en \mathcal{M} tal que $Z(p) \neq 0$, para todo $p \in \mathcal{M}$. Veremos que el campo Z induce una foliación sobre \mathcal{M} . **En efecto:** por el teorema 1.6.1 tenemos que dado $p \in \mathcal{M}$, existe $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ con $p \in U_\alpha$ tal que $\varphi_\alpha(U_\alpha) = \Delta^1 \times \Delta^{n-1}$ y $\varphi^* \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right) = Z$ en U_α (donde $z = (z_1, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ son las coordenadas de $\varphi_\alpha(U_\alpha)$).*

Consideremos la familia $\mathcal{A}' = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ es claro que satisface las dos primeras condiciones de la definición 1.6.2 (con $k = 1$). En cuanto a la tercera condición, sea $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{A}'$ tales que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$. Denotando por $w = (w_1, w')$ a las coordenadas de $\varphi_\beta(U_\beta)$, de la definición de \mathcal{A}' y propiedades del pull-back se tiene,

$$(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^* \left(\frac{\partial}{\partial w_1} \right) = \frac{\partial}{\partial z_1} \text{ en } \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}).$$

Por otro lado, los cambios de coordenadas $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \rightarrow \varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$ lo podemos escribir de la forma

$$(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(z_1, z'') = (f_1(z_1, z''), \dots, f_n(z_1, z'')).$$

Por la proposición 1.6.3 tenemos

$$\frac{\partial}{\partial w_1} = (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})^* \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right) = \sum_{i=1}^n (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})^* \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_1} \right) \frac{\partial}{\partial w_i},$$

de donde se sigue que

$$\frac{\partial f_i}{\partial z_1} \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} = 0, \text{ para todo } i \geq 2.$$

De esta manera f_2, \dots, f_n no dependen de z_1 y la tercera condición de la definición 1.6.2 está satisfecha.

Observación 1.6.4. *Una foliación de dimensión 1 es inducida localmente por campos de vectores no singulares.*

1. Curvas algebroides planas y foliaciones holomorfas

En efecto: Para cada abierto trivializador U_α , tomemos el campo $v_\alpha = (\Phi_\alpha)^* \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)$ donde $(z_1, (z_2, \dots, z_n)) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}^{n-1}$. Si $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, para cada $p \in U_{\alpha\beta}$, por lo visto anteriormente existe $f_{\alpha\beta}(p) \in \mathbb{C}^*$ tal que $v_\alpha = f_{\alpha\beta}v_\beta$, donde $f_{\alpha\beta}$ es una función holomorfa. Por lo tanto, el siguiente conjunto de datos:

- a) Una cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de \mathcal{M} por abiertos.
- b) Para cada $\alpha \in I$, un campo de vectores holomorfo no singular v_α en U_α .
- c) Siempre que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, una función holomorfa

$$f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{C}^*$$

tal que $v_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = f_{\alpha\beta}v_\beta|_{U_{\alpha\beta}}$.

Definen una foliación de dimensión 1 en \mathcal{M} por la observación 1.6.1. □

Definición 1.6.5. Una foliación holomorfa singular de dimensión k (o codimensión $n-k$), donde $1 \leq k \leq n-1$, en una variedad compleja \mathcal{M} es una foliación no singular de dimensión k en $\mathcal{M} \setminus S$, donde S es un conjunto analítico⁴ en \mathcal{M} de codimensión mayor o igual a 2.

El conjunto S de la definición anterior será minimal en el sentido: no existe subconjunto analítico propio $S' \subset S$ tal que una foliación regular en $\mathcal{M} \setminus S$ se extienda a $\mathcal{M} \setminus S'$. En esas condiciones, S es llamado el **conjunto singular** de la foliación \mathcal{F} y es denotado por $Sing(\mathcal{F})$. Los elementos de $Sing(\mathcal{F})$ son llamados **puntos singulares** o **singularidades**, en cuanto a los elementos de $\mathcal{M} \setminus Sing(\mathcal{F})$ son llamados **puntos regulares**. Las hojas de \mathcal{F} son, por definición, las hojas de la foliación regular $\mathcal{F}|_{\mathcal{M} \setminus Sing(\mathcal{F})}$. Dos foliaciones singulares \mathcal{F} y \mathcal{F}' son iguales si:

$$i) \quad Sing(\mathcal{F}) = Sing(\mathcal{F}').$$

⁴Sea X un subconjunto de una variedad compleja \mathcal{M} . X es un subconjunto analítico de \mathcal{M} , si para cada $x \in \mathcal{M}$ existen una vecindad abierta $U \subset \mathcal{M}$ de x y una función holomorfa $f : U \rightarrow \mathbb{C}^p$ tales que $X \cap U = f^{-1}(0)$ (p puede depender de x).

ii) Las foliaciones regulares $\mathcal{F}|_{\mathcal{M} \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})}$ y $\mathcal{F}'|_{\mathcal{M} \setminus \text{Sing}(\mathcal{F}')}$ son iguales.

A partir de ahora, usaremos el término de foliación para designar foliación holomorfa singular.

Proposición 1.6.4 ([MS01]). *Toda foliación de dimensión 1 es inducida localmente por un campo de vectores holomorfo.*

Demostración: Como el problema es local, se puede considerar en un polidisco $P \subset \mathbb{C}^n$. Sea \mathcal{F} una foliación en P . $\mathcal{F}|_{P \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})}$ es una foliación no singular, por la observación 1.6.4 existe una cobertura abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de $P \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$ y campos de vectores v_α induciendo $\mathcal{F}|_{U_\alpha}$, satisfaciendo $v_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = f_{\alpha\beta}v_\beta|_{U_{\alpha\beta}}$ siempre que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, donde $f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{C}^*$ es una función holomorfa. Sea $v_\alpha = (v_1^{(\alpha)}, \dots, v_n^{(\alpha)})$, como $P \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$ es convexo⁵, suponemos que $v_n^{(\alpha)} \neq 0$ para todo $\alpha \in I$. Para cada $\alpha \in I$,

$$g_1^{(\alpha)} = \frac{v_1^{(\alpha)}}{v_n^{(\alpha)}}, \dots, g_{n-1}^{(\alpha)} = \frac{v_{n-1}^{(\alpha)}}{v_n^{(\alpha)}}$$

son funciones meromorfas en U_α . Si $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, como $v_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = f_{\alpha\beta}v_\beta|_{U_{\alpha\beta}}$ tenemos

$$v_i^{(\alpha)} = f_{\alpha\beta}v_i^{(\beta)}, \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n-1\}$$

luego,

$$g_i^{(\alpha)} = \frac{v_i^{(\alpha)}}{v_n^{(\alpha)}} = \frac{f_{\alpha\beta}v_i^{(\beta)}}{f_{\alpha\beta}v_n^{(\beta)}} = \frac{v_i^{(\beta)}}{v_n^{(\beta)}} = g_i^{(\beta)}.$$

Así,

$$g_i^{(\alpha)} = g_i^{(\beta)}, \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n-1\}. \quad (1.9)$$

Las definiciones locales de (1.9) son compatibles y definen funciones meromorfas g_1, \dots, g_n en $P \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$. Una vez que $\text{Sing}(\mathcal{F})$ tiene codimensión por lo menos 2, el teorema de Levi⁶ nos permite extender g_1, \dots, g_{n-1} a funciones meromorfas en P , denotadas por

⁵**Proposición:** Sea A un conjunto analítico con dominio D , $A \neq D$, entonces $D - A$ es conexo.

⁶**Teorema de extensión de Levi** [GH14]: Sea f una función meromorfa definida fuera de una variedad analítica de codimensión ≥ 2 en una variedad compleja \mathcal{M} . Entonces f se extiende a una función meromorfa en \mathcal{M} .

1. Curvas algebroides planas y foliaciones holomorfas

g_1, \dots, g_{n-1} . Sea h el m.c.m. de sus denominadores (en un polidisco una función meromorfa es el cociente de 2 funciones holomorfas⁷). El campo $v = (hg_1, \dots, hg_{n-1}, h)$ es holomorfa en P , su conjunto singular está contenido en $Sing(\mathcal{F})$ e induce \mathcal{F} (por el ejemplo 1.6.1) en $\mathcal{M} \setminus Sing(\mathcal{F})$. Por lo tanto, \mathcal{F} es una foliación de dimensión 1 inducida localmente por v . □

1.7. Índice CS , de variación y GSV

Para mayor entendimiento de los siguientes elementos, puede verse [MS01]. Dada una foliación singular \mathcal{F} , p una singularidad de \mathcal{F} y S una separatriz en torno de p . Una **separatriz** de ω es un germen de curva S cuya ecuación reducida $f = 0$, $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ verifica

$$\omega \wedge df = f \cdot \eta$$

donde η es una 2-forma.

Lema 1.7.1 ([MS01]). *Tomamos una 1-forma holomorfa ω que induce \mathcal{F} en torno de p y una función holomorfa f tal que $f = 0$ ecuación reducida de S con las condiciones de arriba, existen gérmenes de funciones holomorfas g y h , relativamente primos y no idénticamente nulos sobre S y germen de 1-forma holomorfa η tal que*

$$g\omega = hdf + f\eta. \tag{1.10}$$

Demostración: Consideremos el problema en una vecindad $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Escribimos $\omega = pdx + qdy$. Mediante un cambio de coordenadas, si es necesario, podemos suponer que $\{x = 0\}$ no es invariante por \mathcal{F} , lo que nos da $q \not\equiv 0$ y $f_y \not\equiv 0$,

$$df \wedge \omega = (f_x dx + f_y dy) \wedge (pdx + qdy) \text{ y}$$

$$df \wedge \omega = (f_x q - f_y p) dx \wedge dy.$$

Una vez que S es invariante por \mathcal{F} , tenemos

$$fk = f_x q - f_y p, \tag{1.11}$$

⁷Teorema 8 sección O de [Gun90].

para alguna función holomorfa k , o sea

$$df \wedge \omega = f k dx \wedge dy.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f_y \omega &= f_y(pdx + qdy) \\ f_y \omega &= f_y pdx + f_y qdy \\ f_y \omega &= \underbrace{(f_x q - f k)}_{\text{por (1.11)}} dx + f_y qdy \\ f_y \omega &= (f_x dx + f_y dy)q - f k dx \\ f_y \omega &= qdf + f(-kdx), \end{aligned}$$

genera una descomposición como en (1.10), donde $g = f_y$, $h = q$ y $\eta = -kdx$. \square

Sea p una singularidad de \mathcal{F} y S una separatriz en p . Tomamos $f = 0$, una ecuación local reducida de S , $\omega = 0$ una ecuación local de \mathcal{F} y por el Lema 1.7.1 asociamos la descomposición $g\omega = hdf + f\eta$. Denotamos por ∂S la curva $S \cap S_\epsilon$, donde S_ϵ es una esfera de radio $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño con centro en p .

Definición 1.7.1 ([MS01]). *El índice de Camacho-Sad de \mathcal{F} con respecto a S en p es definido por*

$$CS(\mathcal{F}, S, p) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\eta}{h}.$$

Si $p \notin \text{Sing}(\mathcal{F})$, por convención $CS(\mathcal{F}, S, p) = 0$.

Proposición 1.7.1. *El índice CS no depende de la ecuación local de \mathcal{F} y S , de la descomposición tomada y de $\epsilon > 0$.*

Demostración:

1. No depende de la 1-forma holomorfa ω que define la foliación \mathcal{F} . **En efecto**, supongamos que existe otra 1-forma holomorfa ω_1 tal que $\omega_1 = 0$ define \mathcal{F} , existe una función holomorfa φ que no se anula en una vecindad en p tal que $\omega_1 = \varphi\omega$. Utilizando la descomposición $g\omega = hdf + f\eta$, tenemos

$$g\omega_1 = \varphi(hdf + f\eta) = \varphi hdf + \varphi f\eta$$

1. Curvas algebroides planas y foliaciones holomorfas

es una descomposición de ω_1 , así

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\varphi \eta}{\varphi h} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\eta}{h} = CS(\mathcal{F}, S, p).$$

2. No depende de la expresión de la función irreducible f que define $S = \{f = 0\}$. **En efecto**, si consideramos que $S = \{f_1 = 0\}$ entonces existe una función holomorfa no nula ψ tal que

$$f = \psi f_1, \text{ donde } \psi(p) \neq 0,$$

por la descomposición del Lema 1.7.1

$$g\omega = hdf + f\eta = h(\psi df_1 + f_1 d\psi) + \psi f_1 \eta = h\psi df_1 + f_1(hd\psi + \psi\eta),$$

así,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{hd\psi + \psi\eta}{h\psi} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{d\psi}{\psi} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\eta}{h} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\eta}{h} \\ &= CS(\mathcal{F}, S, p). \end{aligned}$$

Puesto que ψ es no nula y holomorfa $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{d\psi}{\psi}$ es cero.

3. No depende de la descomposición. **En efecto**, consideremos dos descomposiciones de ω y f :

$$\begin{aligned} g\omega &= hdf + f\eta, \\ \tilde{g}\omega &= \tilde{h}df + f\tilde{\eta}. \end{aligned}$$

Tenemos

$$0 = g\omega \wedge \tilde{g}\omega = hfdf \wedge \tilde{\eta} + f\tilde{h}\eta \wedge df + f^2\eta \wedge \tilde{\eta},$$

donde

$$(\tilde{h}\eta - h\tilde{\eta}) \wedge df + f\eta \wedge \tilde{\eta} = 0.$$

Se concluye que, sobre S , $\tilde{h}\eta - h\tilde{\eta} \equiv 0$. Por lo tanto,

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\tilde{\eta}}{\tilde{h}} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\eta}{h} = CS(\mathcal{F}, S, p).$$

4. No depende de ϵ . **En efecto**, sean $\partial S_1 = S \cap S_{\epsilon_1}$ la curva analítica real y consideremos la variedad con borde R contenido en S cuyo borde es precisamente $\partial S - \partial S_1$. Como $\frac{\eta}{h}$ es holomorfa en R , luego $\frac{\eta}{h}$ es cerrada en R y por el teorema de Stokes

$$\int_{\partial S} \frac{\eta}{h} - \int_{\partial S_1} \frac{\eta}{h} = \int_{\partial R} \frac{\eta}{h} = \int_R d\left(\frac{\eta}{h}\right) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_{\partial S_1} \frac{\eta}{h} = \int_{\partial S} \frac{\eta}{h} = CS(\mathcal{F}, S, p).$$

□

Sea $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ y una 1-forma holomorfa ω que induce \mathcal{F} en una vecindad U de p . Dado un punto regular $q \in U$, existe en una vecindad de q , una 1-forma holomorfa ν tal que

$$d\omega = \nu \wedge \omega.$$

Definición 1.7.2 ([MS01]). *El índice de variación de \mathcal{F} con respecto a S en p es definido por*

$$\text{Var}(\mathcal{F}, S, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \nu.$$

Si $p \notin \text{Sing}(\mathcal{F})$, por convención $\text{Var}(\mathcal{F}, S, p) = 0$.

El índice $\text{Var}(\mathcal{F}, S, p)$ está bien definido porque no depende de la ecuación local de \mathcal{F} , es decir ω , de f que define S y ϵ .

Definición 1.7.3 ([MS01]). *El índice de Gómez-Mont-Seade-Verjovsky de \mathcal{F} con respecto a S en p es definido por*

$$GSV(\mathcal{F}, S, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{d(h/g)}{h/g} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{dh}{h} - \frac{dg}{g}.$$

Si $p \notin \text{Sing}(\mathcal{F})$, por convención $GSV(\mathcal{F}, S, p) = 0$.

Ejemplo 1.7.1. *Sea \mathcal{F} la foliación inducida en una vecindad de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ por*

$$\omega(x, y) = x(\lambda_1 + yf(x, y))dy - y(\lambda_2 + xg(x, y))dx,$$

1. Curvas algebroides planas y foliaciones holomorfas

donde $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ y f, g son holomorfas. $S_1 : \{y = 0\}$ y $S_2 : \{x = 0\}$ son separatrices.

Tenemos

$$GSV(\mathcal{F}, S_1, 0) = \int_{\partial S_1} \frac{dx((\lambda_1 + yf(x, y)))}{x(\lambda_1 + yf(x, y))} = 1.$$

De manera análoga, se tiene $GSV(\mathcal{F}, S_2, 0) = 1$.

Proposición 1.7.2. *El índice GSV no depende de la ecuación local de \mathcal{F} y S , de la descomposición tomada y de $\epsilon > 0$.*

Demostración:

1. No depende de la 1-forma holomorfa ω que define la foliación \mathcal{F} . **En efecto**, supongamos que existe otra 1-forma holomorfa ω_1 tal que $\omega_1 = 0$ define la foliación \mathcal{F} , tenemos que existe una función holomorfa φ que no se anula en una vecindad en p tal que $\omega_1 = \varphi\omega$. Utilizando la descomposición $g\omega = hdf + f\eta$, tenemos

$$g\omega_1 = \varphi(hdf + f\eta) = \varphi hdf + \varphi f\eta$$

es una descomposición de ω_1 , así

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{d(\varphi h/g)}{\varphi h/g} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\frac{d(\varphi h)g - \varphi h dg}{g^2}}{\varphi h/g} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{d(\varphi h)g - \varphi h dg}{\varphi h g} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{d\varphi h g + \varphi dh g - \varphi h dg}{\varphi h g} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{d\varphi}{\varphi} + \frac{dh}{h} - \frac{dg}{g} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{d\varphi}{\varphi} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{dh}{h} - \frac{dg}{g} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{dh}{h} - \frac{dg}{g} \\ &= GSV(\mathcal{F}, S, p). \end{aligned}$$

Puesto que φ es no nula y holomorfa $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{d\varphi}{\varphi}$ es cero.

2. No depende de la expresión de la función irreducible f que define $S = \{f = 0\}$. **En efecto**, si consideramos que $S = \{f_1 = 0\}$ entonces existe una función holomorfa no nula ψ tal que

$$f = \psi f_1, \text{ donde } \psi(p) \neq 0,$$

luego utilizando nuevamente la descomposición del Lema 1.7.1

$$g\omega = hdf + f\eta = h(\psi df_1 + f_1 d\psi) + \psi f_1 \eta = h\psi df_1 + f_1(hd\psi + \psi\eta),$$

así,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{d(\psi h/g)}{\psi h/g} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\frac{d(\psi h)g - \psi h dg}{g^2}}{\psi h/g} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{d(\psi h)g - \psi h dg}{\psi h g} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{d\psi h g + \psi dh g - \psi h dg}{\psi h g} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{d\psi}{\psi} + \frac{dh}{h} - \frac{dg}{g} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{d\psi}{\psi} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{dh}{h} - \frac{dg}{g} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{dh}{h} - \frac{dg}{g} \\
 &= GSV(\mathcal{F}, S, p).
 \end{aligned}$$

Puesto que ψ es no nula y holomorfa $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{d\psi}{\psi}$ es cero.

3. No depende de la descomposición. **En efecto**, consideremos dos descomposiciones de ω y f :

$$g\omega = hdf + f\eta,$$

$$\tilde{g}\omega = \tilde{h}df + f\tilde{\eta}.$$

Entonces $\omega = \frac{h}{g}df + \frac{f}{g}\eta$ y $\omega = \frac{\tilde{h}}{\tilde{g}}df + \frac{f}{\tilde{g}}\tilde{\eta}$, diferenciando la primera expresión, considerando en S ; $g\omega = hdf$; $S = \{f = 0\}$,

$$d\omega = d\left(\frac{h}{g}\right) \wedge df + d\left(\frac{f}{g}\right) \wedge \eta + \frac{f}{g}d\eta$$

$$d\omega = d\left(\frac{h}{g}\right) \wedge df + \frac{dfg - fdg}{g^2} \wedge \eta$$

$$d\omega = d\left(\frac{h}{g}\right) \wedge df + \frac{df}{g} \wedge \eta = \left(d\left(\frac{h}{g}\right) - \frac{\eta}{g}\right) \wedge df$$

$$d\omega = \left(d\left(\frac{h}{g}\right) - \frac{\eta}{g}\right) \wedge \frac{g}{h}\omega$$

$$d\omega = \left(d\left(\frac{h}{g}\right) \frac{g}{h} - \frac{\eta}{h}\right) \wedge \omega.$$

Así por la Definición 1.7.2,

$$Var(\mathcal{F}, S, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} d\left(\frac{h}{g}\right) \frac{g}{h} - \frac{\eta}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{d(h/g)}{h/g} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\eta}{h}.$$

Análogamente

$$d\omega = \left(d\left(\frac{\tilde{h}}{\tilde{g}}\right) \frac{\tilde{g}}{\tilde{h}} - \frac{\tilde{\eta}}{\tilde{h}}\right) \wedge \omega,$$

1. Curvas algebroides planas y foliaciones holomorfas

y

$$\text{Var}(\mathcal{F}, S, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} d\left(\frac{\tilde{h}}{\tilde{g}}\right) \frac{\tilde{g}}{\tilde{h}} - \frac{\tilde{\eta}}{\tilde{h}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{d(\tilde{h}/\tilde{g})}{\tilde{h}/\tilde{g}} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\tilde{\eta}}{\tilde{h}},$$

luego

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{d(h/g)}{h/g} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\eta}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{d(\tilde{h}/\tilde{g})}{\tilde{h}/\tilde{g}} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\tilde{\eta}}{\tilde{h}}.$$

Pero como $CS(\mathcal{F}, S, p)$ no depende de la descomposición

$$CS(\mathcal{F}, S, p) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\eta}{h} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\tilde{\eta}}{\tilde{h}}.$$

Así

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{d(h/g)}{h/g} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{d(\tilde{h}/\tilde{g})}{\tilde{h}/\tilde{g}} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\eta}{h} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\tilde{\eta}}{\tilde{h}} &= 0 \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{d(h/g)}{h/g} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{d(\tilde{h}/\tilde{g})}{\tilde{h}/\tilde{g}} + CS(\mathcal{F}, S, p) - CS(\mathcal{F}, S, p) &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{d(\tilde{h}/\tilde{g})}{\tilde{h}/\tilde{g}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{d(h/g)}{h/g} = GSV(\mathcal{F}, S, p).$$

4. No depende de ϵ . **En efecto**, sean $\partial S_1 = S \cap S_{\epsilon_1}$ la curva analítica real y consideremos la variedad con borde R contenido en S cuyo borde es precisamente $\partial S - \partial S_1$. Como $\beta = \frac{d(h/g)}{h/g}$ es holomorfa en R , luego β es cerrada en R y por teorema de Stokes

$$\int_{\partial S} \frac{d(h/g)}{h/g} - \int_{\partial S_1} \frac{d(h/g)}{h/g} = \int_{\partial R} \beta = \int_R d\beta = 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_{\partial S_1} \frac{d(h/g)}{h/g} = \int_{\partial S} \frac{d(h/g)}{h/g} = GSV(\mathcal{F}, S, p).$$

□

Definición 1.7.4. Un punto $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ es **no dicrítico** si \mathcal{F} tiene sólo un número finito de separatrices en p .

Definición 1.7.5. Una foliación \mathcal{F} es **curva generalizada no dicrítica**⁸ si $GSV(\mathcal{F}, S, p) = 0$, donde p es una singularidad de \mathcal{F} no dicrítica y S es la unión de separatrices en p .



⁸ [CNS⁺84] Se dice que es **curva generalizada no dicrítica** si en su reducción de singularidades no aparecen componentes dicríticas ni puntos silla-nodo.

Descomposición de una curva polar

Para este segundo capítulo tomaremos como referencia [Bar96, GP91, KL77]. En el presente capítulo estudiaremos el contacto entre dos ramas que es una manera de medir la coincidencia de las parametrizaciones de Newton-Puiseux de dos curvas planas irreducibles. La inclusión de este concepto nos permitirá calcular el índice de intersección de dos curvas algebroides planas irreducibles, cuando están dadas por sus parametrizaciones de Newton-Puiseux, enunciaremos el Teorema de Kuo-Lu, el cual da una relación entre los órdenes de coincidencia de dos parametrizaciones de Newton-Puiseux de una curva algebroides plana y los órdenes de coincidencia de una parametrización de esta con una parametrización de su curva polar; por último, conoceremos un resultado conocido como el Teorema de Merle.

2.1. Noción de contacto

Sean C_f y C_g dos curvas algebroides planas irreducibles con multiplicidades n y m , respectivamente. Sean $\{y_i(X^{\frac{1}{n}})\}_{i=1}^n$ y $\{z_j(X^{\frac{1}{m}})\}_{j=1}^m$ los conjuntos de parametrizaciones de Newton-Puiseux de C_f y C_g , respectivamente. Definimos el **contacto** entre C_f y C_g como:

$$\text{cont}(C_f, C_g) = n \cdot \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \{\text{mult}_X(y_i(X^{\frac{1}{n}}) - z_j(X^{\frac{1}{m}}))\} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}.$$

En particular, $\text{cont}(C_f, C_g) = \infty$ indica que C_f y C_g tienen una componente en común.

Ejemplo 2.1.1. Sean C_f y C_g dos curvas algebroides planas cuyas parametrizaciones de Newton-Puiseux son:

$$C_f : \begin{cases} y_1 = X^{\frac{3}{2}} + 2X^{\frac{9}{4}}, \\ y_2 = -X^{\frac{3}{2}} + 2iX^{\frac{9}{4}}, \\ y_3 = X^{\frac{3}{2}} - 2X^{\frac{9}{4}}, \\ y_4 = -X^{\frac{3}{2}} - 2iX^{\frac{9}{4}}, \end{cases}$$

y

$$C_g : \begin{cases} z_1 = 3X^{\frac{5}{2}} + X^6, \\ z_2 = -3X^{\frac{5}{2}} + X^6. \end{cases}$$

Luego, $\text{cont}(C_f, C_g) = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$ y $\text{cont}(C_g, C_f) = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$.

El ejemplo anterior muestra que no siempre tenemos la igualdad entre $\text{cont}(C_f, C_g)$ y $\text{cont}(C_g, C_f)$, sin embargo

$$\begin{aligned} \text{cont}(C_g, C_f) &= m \cdot \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \{\text{mult}_X(z_j(X^{\frac{1}{m}}) - y_i(X^{\frac{1}{n}}))\}, \\ &= m \cdot \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \{\text{mult}_X(y_i(X^{\frac{1}{n}}) - z_j(X^{\frac{1}{m}}))\}, \\ &= m \cdot \frac{\text{cont}(C_f, C_g)}{n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\text{cont}(C_f, C_g)}{\text{mult}(f)} = \frac{\text{cont}(C_g, C_f)}{\text{mult}(g)}.$$

Dados $y_i(X^{\frac{1}{n}})$ una parametrización de C_f y $z_j(X^{\frac{1}{m}})$ una parametrización de C_g , ambas se puede ver como dos elementos de $\mathbb{C}\{X^{\frac{1}{nm}}\}$ como sigue:

$$\begin{aligned} y_i(X^{\frac{1}{n}}) &= \sum_{r \geq l} a_r X^{\frac{rm}{nm}}, \\ z_j(X^{\frac{1}{m}}) &= \sum_{s \geq k} b_s X^{\frac{sn}{nm}}. \end{aligned}$$

Ahora si queremos ver lo anterior en una variable T es suficiente tomar $X = T^{nm}$ y,

$$\begin{aligned} y_i(T^m) &= \sum_{r \geq l} a_r T^{rm}, \\ z_j(T^n) &= \sum_{s \geq k} b_s T^{sn}. \end{aligned}$$

2. Descomposición de una curva polar

De esto obtenemos otra manera de tener el contacto entre C_f y C_g .

Lema 2.1.1.

$$\text{cont}(C_f, C_g) = \frac{1}{m} \cdot \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \{mult_T(y_i(T^m) - z_j(T^n))\}.$$

Demostración: Dados $y_i(X^{\frac{1}{n}}) = \sum_{r \geq l} a_r X^{\frac{rm}{n}}$ una parametrización de C_f y $z_j(X^{\frac{1}{m}}) = \sum_{s \geq k} b_s X^{\frac{sn}{m}}$ una parametrización de C_g . Si $mult_X(y_i(X^{\frac{1}{n}}) - z_j(X^{\frac{1}{m}})) = \frac{\alpha}{nm}$, entonces:

$$a_r = b_s, \quad \text{para todo } rm < \alpha \text{ y } sn < \alpha,$$

$$a_{r_0} \neq b_{s_0}, \quad r_0 m = s_0 n = \alpha.$$

Tenemos:

$$y_i(T^m) - z_j(T^n) = \sum_{r \geq l} a_r T^{rm} - \sum_{s \geq k} b_s T^{sn} = \underbrace{(a_{r_0} - b_{s_0})}_{\neq 0} T^\alpha + \dots$$

donde $mult_T(y_i(T^m) - z_j(T^n)) = \alpha$ y

$$mult_X(y_i(X^{\frac{1}{n}}) - z_j(X^{\frac{1}{m}})) = \frac{\alpha}{nm} = \frac{mult_T(y_i(T^m) - z_j(T^n))}{nm}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \text{cont}(C_f, C_g) &= n \cdot \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \{mult_X(y_i(X^{\frac{1}{n}}) - z_j(X^{\frac{1}{m}}))\}, \\ &= n \cdot \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \left\{ \frac{mult_T(y_i(T^m) - z_j(T^n))}{nm} \right\}, \\ &= \frac{1}{m} \cdot \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \{mult_T(y_i(T^m) - z_j(T^n))\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\text{cont}(C_f, C_g) = \frac{1}{m} \cdot \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \{mult_T(y_i(T^m) - z_j(T^n))\}.$$

□

Veremos en el siguiente resultado que si fijamos una parametrización de Newton-Puiseux de C_f , digamos $y(X^{\frac{1}{n}})$, y calculamos el orden de coincidencia con todas las parametrizaciones $\{z_j(X^{\frac{1}{m}})\}_{j=1}^m$ de la curva C_g , tenemos:

$$\max_{1 \leq j \leq m} \{mult_X(y(X^{\frac{1}{n}}) - z_j(X^{\frac{1}{m}}))\} = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \{mult_X(y_i(X^{\frac{1}{n}}) - z_j(X^{\frac{1}{m}}))\}.$$

Lema 2.1.2 ([Bar96]). Sean $\{z_j(X^{\frac{1}{m}})\}_{j=1}^m$ el conjunto de parametrizaciones de Newton-Puiseux de C_g y $y(X^{\frac{1}{n}})$ una parametrización de Newton-Puiseux de C_f . Entonces,

$$\text{cont}(C_f, C_g) = n \cdot \max_{1 \leq j \leq m} \{\text{mult}_X(y(X^{\frac{1}{n}}) - z_j(X^{\frac{1}{m}}))\}.$$

Demostración: Basta probar que

$$\max_{1 \leq j \leq m} \{\text{mult}_T(y(T^m) - z_j(T^n))\} = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \{\text{mult}_T(y_i(T^m) - z_j(T^n))\}.$$

Dados $v(T) = y(T^m) = \sum_{r \geq l} a_r T^{rm}$ y $w(T) = z(T^n) = \sum_{s \geq k} b_s T^{sn}$. Si

$$U_{nm} = \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta^{nm} = 1\} = \{\zeta_k\}_{k=1}^{nm}$$

Definimos

$$\begin{aligned} v_k(T) &= v(\zeta_k T) = \sum_{r \geq l} a_r \zeta_k^{rm} T^{rm}, \\ w_k(T) &= w(\zeta_k T) = \sum_{s \geq k} b_s \zeta_k^{sn} T^{sn}. \end{aligned}$$

Luego, se tiene

$$\{v_k(T)\}_{k=1}^{nm} = \{y_i(T^m)\}_{i=1}^n.$$

En efecto, si $k = \{1, \dots, nm\}$ y $\zeta_k^{nm} = 1$, entonces $\zeta_k^m \in U_n$ y

$$v_k(T) = \sum_{r \geq l} a_r \zeta_k^{rm} T^{rm} = \sum_{r \geq l} a_r (\zeta_k^m)^r T^{rm}. \quad (2.1)$$

Pero si $y(X^{\frac{1}{n}}) = \sum_{r \geq l} a_r X^{\frac{r}{n}}$, las otras parametrizaciones de C_f por el teorema de Newton-Puiseux son de la forma,

$$y_i(X^{\frac{1}{n}}) = y(\rho X^{\frac{1}{n}}) = \sum_{r \geq l} a_r \rho^r X^{\frac{r}{n}},$$

donde $\rho \in U_n$, por lo tanto $y_i(T^m) = \sum_{r \geq l} a_r \rho^r T^{rm}$ donde $\rho \in U_n$. Luego de (2.1) tenemos $\{v_k(T)\} \subseteq \{y_i(T^m)\}_{i=1}^n$, ahora si $y_i(T^m) = \sum_{r \geq l} a_r \rho^r T^{rm}$, debido a que existe una aplicación sobreyectiva entre U_{nm} y U_n , entonces existe $\zeta_k \in U_{nm}$ tal que $y_i(T^m) =$

2. Descomposición de una curva polar

$\sum_{r \geq l} a_r \zeta_k^{rm} T^{rm} \in \{v_k(T)\}$. Luego, $\{v_k(T)\}_{k=1}^{nm} = \{y_i(T^m)\}_{i=1}^n$. De manera análoga se demuestra que $\{w_k(T)\}_{k=1}^{nm} = \{z_j(T^n)\}_{j=1}^m$. Por lo tanto es suficiente probar que,

$$\max_{1 \leq j \leq nm} \{mult_T(v(T) - w_j(T))\} = \max_{1 \leq i, j \leq nm} \{mult_T(v_i(T) - w_j(T))\}.$$

Sea $P_j(T) = v(T) - w_j(T)$, se tiene $P_j(\zeta_k T) = v(\zeta_k T) - w_j(\zeta_k T)$, para todo $k \in \{1, \dots, nm\}$ y $mult_T(P_j(T)) = mult_T(P_j(\zeta_k T))$ porque si $mult_T(P_j(T)) = h$, entonces $P_j(T) = \sum_{\alpha \geq h} c_\alpha T^\alpha$ donde $c_h \neq 0$, por tanto $P_j(\zeta_k T) = \sum_{\alpha \geq h} c_\alpha \zeta_k^\alpha T^\alpha$ y $c_\alpha \zeta_k^\alpha \neq 0$, así $mult_T(P_j(\zeta_k T)) = h$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq j \leq nm} \{mult_T(v(T) - w_j(T))\} &= \max_{1 \leq j \leq nm} \{mult_T(P_j(T))\} \\ &= \max_{1 \leq i, j \leq nm} \{mult_T(P_j(\zeta_i T))\} \\ &= \max_{1 \leq i, j \leq nm} \{mult_T(v(\zeta_i T) - w_j(\zeta_i T))\} \\ &= \max_{1 \leq i, j \leq nm} \{mult_T(v_i(T) - w_j(\zeta_i T))\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Afirmación: Fijada $\zeta_i \in U_{nm}$, $\{w_j(T)\}_{j=1}^{nm} = \{w_j(\zeta_i T)\}_{j=1}^{nm}$.

En efecto: Si $\zeta_i = 1$ entonces se tiene que $\{w_j(T)\}_{j=1}^{nm} \subset \{w_j(\zeta_i T)\}_{j=1}^{nm}$. Para la otra inclusión, $w_j(\zeta_i T) = w(\zeta_i \zeta_j T)$, y como $\zeta_i, \zeta_j \in U_{nm}$, entonces $\zeta_i \zeta_j \in U_{nm}$, así $\{w_j(\zeta_i T)\}_{j=1}^{nm} \subset \{w_j(T)\}_{j=1}^{nm}$. Luego $\{w_j(T)\}_{j=1}^{nm} = \{w_j(\zeta_i T)\}_{j=1}^{nm}$.

De esto,

$$\max_{1 \leq i, j \leq nm} \{mult_T(v_i(T) - w_j(\zeta_i T))\} = \max_{1 \leq i, j \leq nm} \{mult_T(v_i(T) - w_j(T))\}.$$

Por lo tanto de (2.2) tenemos

$$\max_{1 \leq j \leq nm} \{mult_T(v(T) - w_j(T))\} = \max_{1 \leq i, j \leq nm} \{mult_T(v_i(T) - w_j(T))\}$$

□

De manera análoga, si fijamos $z(X^{\frac{1}{m}})$ una parametrización de C_g , obtenemos un resultado parecido.

Consideremos C_f y C_g dos curvas algebroides planas irreducibles de multiplicidades n y n' respectivamente, β_0, \dots, β_g los exponentes característicos de C_f y $\beta'_0, \dots, \beta'_{g'}$ los exponentes característicos de C_g .

Proposición 2.1.1. *Sea α el contacto entre C_f y C_g , tal que $\beta_q \leq \alpha < \beta_{q+1}$ para algún $q \geq 1$, donde $\beta_{g+1} = +\infty$. Entonces,*

$$\frac{n}{n'} = \frac{\epsilon_i}{\epsilon'_i} = \frac{\beta_i}{\beta'_i} \quad \text{para} \quad \begin{cases} 0 \leq i \leq q-1, & \text{si } \alpha = \beta_q \\ 0 \leq i \leq q, & \text{si } \alpha > \beta_q \end{cases}$$

Demostración: Sean

$$y(X^{\frac{1}{n}}) = a_{i_0}X^{\frac{i_0}{n}} + \dots + a_{i_r}X^{\frac{i_r}{n}} + a_{i_{r+1}}X^{\frac{i_{r+1}}{n}} + \dots$$

y

$$z(X^{\frac{1}{n'}}) = b_{j_0}X^{\frac{j_0}{n'}} + \dots + b_{j_s}X^{\frac{j_s}{n'}} + b_{j_{s+1}}X^{\frac{j_{s+1}}{n'}} + \dots$$

con $n = \beta_0$, $n' = \beta'_0$, $a_{i_0}, \dots, a_{i_{r+1}} \neq 0$, $b_{j_0}, \dots, b_{j_{s+1}} \neq 0$, parametrizaciones de Newton-Puiseux de C_f y C_g respectivamente, tales que

$$\text{mult}_X(y(X^{\frac{1}{n}}) - z(X^{\frac{1}{n'}})) = \max_{\substack{1 \leq l \leq n \\ 1 \leq k \leq n'}} \{\text{mult}_X(y_l(X^{\frac{1}{n}}) - z_k(X^{\frac{1}{n'}}))\}.$$

Sabemos que $\alpha = \text{cont}(C_f, C_g) = n \cdot \text{mult}_X(y(X^{\frac{1}{n}}) - z(X^{\frac{1}{n'}}))$, esto nos dice que las series $y(X^{\frac{1}{n}})$ y $z(X^{\frac{1}{n'}})$ coinciden hasta un orden $\frac{\alpha}{n} - 1$.

Suponemos que $i_r < \alpha \leq i_{r+1}$ y además $\alpha = \min\{i_{r+1}, j_{s+1}\}$. Así se tiene que $r = s$, como el contacto es entero, se considera $\alpha = i_{r+1}$. También se tiene

$$\frac{i_p}{n} = \frac{j_p}{n'} \quad \text{y} \quad a_{i_p} = b_{j_p},$$

para $j = 0, \dots, r$ (pues la multiplicidad es i_{r+1} , así todos se anulan hasta i_r).

Si $\frac{i_{r+1}}{n} = \frac{j_{s+1}}{n'}$ entonces, $a_{i_{r+1}} = b_{j_{s+1}}$ (debido a que i_{r+1} es la multiplicidad, los coeficientes no se pueden anular).

Observamos que:

$$\text{mcd}(n'n, n'i_0, n'i_1, \dots, n'i_r) = n' \cdot \text{mcd}(n, i_0, i_1, \dots, i_r). \quad (2.3)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \text{mcd}(n'n, n'i_0, n'i_1, \dots, n'i_r) &= \text{mcd}(n'n, nj_0, nj_1, \dots, nj_r) \\ &= n \cdot \text{mcd}(n', j_0, j_1, \dots, j_r). \end{aligned} \quad (2.4)$$

2. Descomposición de una curva polar

De (2.3) y (2.4) se tiene,

$$\begin{aligned} n' \cdot \text{mcd}(n, i_0, i_1, \dots, i_r) &= n \cdot \text{mcd}(n', j_0, j_1, \dots, j_r) \\ \frac{n}{n'} &= \frac{\text{mcd}(n, i_0, i_1, \dots, i_r)}{\text{mcd}(n', j_0, j_1, \dots, j_r)} \end{aligned}$$

Y como $\beta_q \leq \alpha \leq \beta_{q+1}$, el resultado se sigue de las definiciones de ϵ_i , ϵ'_j , β_i y β'_j . \square

Se sigue de la Proposición 2.1.1, la siguiente observación.

Observación 2.1.1. Sean dos curvas algebroides planas irreducibles C_f y C_g definidas anteriormente. Considerando (η_k, μ_k) con $1 \leq k \leq g$ y (η'_l, μ'_l) con $1 \leq l \leq g'$ los pares característicos de Puiseux de C_f y C_g , respectivamente se cumple:

1. Si $\text{cont}(C_f, C_g) = \beta_q$, entonces $(\eta_k, \mu_k) = (\eta'_k, \mu'_k)$, para todo $1 \leq k \leq q - 1$. Y así, los q primeros exponentes característicos de C_g puede ser expresados de la forma $\beta'_k = \frac{n' \beta_k}{n}$, así como, $\epsilon'_k = \frac{n' \epsilon_k}{n}$, para todo $0 \leq k \leq q - 1$.
2. Si $\text{cont}(C_f, C_g) > \beta_q$, entonces $(\eta_k, \mu_k) = (\eta'_k, \mu'_k)$, para todo $1 \leq k \leq q$. Y así, los $q + 1$ primeros exponentes característicos de C_g puede ser expresados de la forma $\beta'_k = \frac{n' \beta_k}{n}$, así como, $\epsilon'_k = \frac{n' \epsilon_k}{n}$, para todo $0 \leq k \leq q$.

Proposición 2.1.2. Sean C_f y C_g dos curvas algebroides planas irreducibles y regulares en Y . Consideremos β_0, \dots, β_g los exponentes característicos de la curva C_f y sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\beta_q \leq \alpha < \beta_{q+1}$, donde $\beta_{g+1} = \infty$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\alpha = \text{cont}(C_f, C_g)$;
2. $\frac{I(f, g)}{\text{mult}(g)} = \frac{\eta_q v_q + \alpha - \beta_q}{\eta_0 \cdots \eta_q}$, donde $\eta_i = \frac{\epsilon_{i-1}}{\epsilon_i}$, v_q es el q -ésimo elemento del sistema mínimo de generadores de $S(f)$, por convención $\eta_0 = 1$.

Demostración: Sean las parametrizaciones de Newton-Puiseux de C_f y C_g respectivamente,

$$y(X^{\frac{1}{n}}) = \sum_{i \geq \beta_1} b_i X^{\frac{i}{n}}, \quad z(X^{\frac{1}{m}}) = \sum_{j \geq \beta'_1} b'_j X^{\frac{j}{m}},$$

donde $n = \text{mult}(f)$ y $m = \text{mult}(g)$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $y(X^{\frac{1}{n}})$ y $z(X^{\frac{1}{m}})$ son las parametrizaciones de Newton-Puiseux, tales que

$$\text{mult}_X(y(X^{\frac{1}{n}}) - z(X^{\frac{1}{m}})) = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \{\text{mult}_X(y_i(X^{\frac{1}{n}}) - z_j(X^{\frac{1}{m}}))\}. \quad (2.5)$$

Por el teorema de Newton-Puiseux, se tiene

$$f(X, Y) = \prod_{\zeta \in G_0 = U_n} (Y - y(\zeta X^{\frac{1}{n}})).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} I(f, g) &= m \cdot \text{mult}_X f(X, z(X^{\frac{1}{m}})) \\ &= m \cdot \text{mult}_X \left(\prod_{\zeta \in G_0 = U_n} (z(X^{\frac{1}{m}}) - y(\zeta X^{\frac{1}{n}})) \right) \\ &= m \cdot \sum_{\zeta \in G_0} \text{mult}_X (z(X^{\frac{1}{m}}) - y(\zeta X^{\frac{1}{n}})) \\ &= m \cdot \sum_{i=1}^{g+1} \sum_{\zeta \in G_{i-1} \setminus G_i} \text{mult}_X (z(X^{\frac{1}{m}}) - y(\zeta X^{\frac{1}{n}})), \end{aligned} \quad (2.6)$$

siendo (2.6) válida, pues $G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_g = \{1\}$, donde $G_i = \{\zeta \in \mathbb{C}; \zeta^n = 1\}$ y por convención $G_{g+1} = \emptyset$.

Mostraremos primero que (1) implica (2).

Supongamos que $\alpha = \text{cont}(C_f, C_g)$, por hipótesis, $\beta_q \leq \alpha < \beta_{q+1}$. Si $q = 0$, o sea, $\beta_0 \leq \alpha < \beta_1$, entonces

$$\text{mult}_X (z(X^{\frac{1}{m}}) - y(\zeta X^{\frac{1}{n}})) = \frac{\alpha}{n},$$

para todo $\zeta \in G_{i-1} \setminus G_i$ y todo $i \in \{1, \dots, g+1\}$. En efecto, como $\epsilon_{i-1} | j$, para todo j tal que $\frac{j}{n}$ es exponente de $y(X^{\frac{1}{n}})$ y $j < \beta_i$, tenemos que $\zeta^j = 1$, esto es, $\zeta^j b^j X^{\frac{j}{n}} = b^j X^{\frac{j}{n}}$ para todo $j < \beta_i$. Así como $\alpha < \beta_1$ tenemos:

$$\text{mult}_X (z(X^{\frac{1}{m}}) - y(\zeta X^{\frac{1}{n}})) = \text{mult}_X (z(X^{\frac{1}{m}}) - y(X^{\frac{1}{n}})) = \frac{\alpha}{n}$$

Luego, por la igualdad (2.6):

$$\begin{aligned} I(f, g) &= m \cdot \sum_{\zeta \in G_0} \frac{\alpha}{n} = m \cdot \frac{\alpha}{n} \cdot n \quad (\#G_0 = n) \\ I(f, g) &= m \cdot \alpha \end{aligned}$$

2. Descomposición de una curva polar

como $\beta_0 = v_0$ podemos escribir

$$\begin{aligned}\frac{I(f, g)}{\text{mult}(g)} &= \frac{1 \cdot n + \alpha - n}{\eta_0} \\ \frac{I(f, g)}{\text{mult}(g)} &= \frac{\eta_0 \cdot v_0 + \alpha - \beta_0}{\eta_0}\end{aligned}$$

Ahora, supongamos que $\beta_q \leq \alpha < \beta_{q+1}$, donde $q = 1, \dots, g$. Tomemos $\zeta \in G_{i-1} \setminus G_i$ con $i = 1, \dots, q-1$, se tiene por Lema 1.5.2 que $\zeta^{\beta_i} \neq 1$, o sea, el término $\zeta^{\beta_i} b_i^{\beta_i} X^{\frac{\beta_i}{n}}$ es diferente de $b_i^{\beta_i} X^{\frac{\beta_i}{n}}$. El término $\zeta^{\beta_i} b_i^{\beta_i} X^{\frac{\beta_i}{n}}$ no se cancela con ningún término de $z(X^{\frac{1}{m}})$, pues como $\beta_q \leq \alpha < \beta_{q+1}$, $b_i^{\beta_i} X^{\frac{\beta_i}{n}}$ se cancela con algún término de $z(X^{\frac{1}{m}})$, para $i = 1, \dots, q-1$. Por otro lado, $\zeta^j = 1$ para todo $j < \beta_j$, esto es, todos los términos de $y(\zeta X^{\frac{1}{n}})$ anteriores a $\zeta^{\beta_i} b_i^{\beta_i} X^{\frac{\beta_i}{n}}$ se cancelan con algún término de $z(X^{\frac{1}{m}})$. Luego,

$$\text{mult}_X(z(X^{\frac{1}{m}}) - y(\zeta X^{\frac{1}{n}})) = \frac{\beta_i}{n}. \quad (2.7)$$

Primer caso: Consideremos $\alpha = \text{cont}(C_f, C_g) = \beta_q$.

Cuando $\zeta \in G_{q-1}$, tenemos que

$$\text{mult}_X(z(X^{\frac{1}{m}}) - y(\zeta X^{\frac{1}{n}})) = \text{mult}_X(z(X^{\frac{1}{m}}) - y(X^{\frac{1}{n}})) = \frac{\alpha}{n} = \frac{\beta_q}{n}, \quad (2.8)$$

siendo la primera igualdad válida, pues $\zeta^j = 1$ para todo $j < \beta_q$.

Como $\sharp(G_{i-1} \setminus G_i) = \epsilon_{i-1} - \epsilon_i$, tenemos

$$\sum_{\zeta \in G_{i-1} \setminus G_i} \text{mult}_X(z(X^{\frac{1}{m}}) - y(\zeta X^{\frac{1}{n}})) \stackrel{(2.7)}{=} (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i) \frac{\beta_i}{n}, \quad (2.9)$$

con $i = 1, \dots, q-1$. Por la igualdad (2.6), se tiene

$$\begin{aligned}I(f, g) &\stackrel{(2.9)}{=} m \cdot \left(\sum_{i=1}^{q-1} (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i) \frac{\beta_i}{n} + \sum_{\zeta \in G_{q-1}} \text{mult}_X(z(X^{\frac{1}{m}}) - y(\zeta X^{\frac{1}{n}})) \right) \\ &\stackrel{(2.8)}{=} m \cdot \left(\sum_{i=1}^{q-1} (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i) \frac{\beta_i}{n} + \epsilon_{q-1} \cdot \frac{\alpha}{n} \right),\end{aligned}$$

donde, en la última igualdad, $\epsilon_{q-1} = \sharp G_{q-1}$.

De esto,

$$\begin{aligned}
 \frac{I(f, g)}{\text{mult}(g)} &= \sum_{i=1}^{q-1} (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i) \frac{\beta_i}{n} + \epsilon_{q-1} \cdot \frac{\alpha}{n} \\
 &= \frac{1}{n} \cdot \frac{\epsilon_{q-1}}{\epsilon_{q-1}} \cdot \sum_{i=1}^{q-1} (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i) \beta_i + \epsilon_{q-1} \cdot \frac{\alpha}{n} \\
 &\stackrel{(1.7)}{=} \frac{\epsilon_{q-1}}{n} (v_q - \beta_q) + \frac{\epsilon_{q-1}}{n} \alpha \\
 &= \frac{\epsilon_{q-1}}{n} v_q - \frac{\epsilon_{q-1}}{n} \alpha + \frac{\epsilon_{q-1}}{n} \alpha \\
 &= \frac{\epsilon_{q-1}}{n} v_q = \frac{v_q}{\eta_0 \cdots \eta_{q-1}} = \frac{\eta_q v_q + \alpha - \beta_q}{\eta_0 \cdots \eta_q}.
 \end{aligned}$$

Segundo caso: consideremos $\beta_q < \alpha < \beta_{q+1}$.

Si tomamos $\zeta \in G_q$, entonces (2.9) es válido, o sea,

$$\text{mult}_X(z(X^{\frac{1}{m}}) - y(\zeta X^{\frac{1}{n}})) = \frac{\alpha}{n} \quad (2.10)$$

pues $\zeta \in G_q \subset G_{q-1}$.

De manera análoga a los argumentos utilizados en el primer caso, se obtiene

$$\begin{aligned}
 I(f, g) &= m \cdot \left(\sum_{i=1}^q (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i) \frac{\beta_i}{n} + \sum_{\zeta \in G_q} \text{mult}_X(z(X^{\frac{1}{m}}) - y(\zeta X^{\frac{1}{n}})) \right) \\
 &\stackrel{(2.10)}{=} m \cdot \left(\sum_{i=1}^q (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i) \frac{\beta_i}{n} + \epsilon_q \cdot \frac{\alpha}{n} \right),
 \end{aligned}$$

De esto,

$$\begin{aligned}
 \frac{I(f, g)}{\text{mult}(g)} &= \sum_{i=1}^q (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i) \frac{\beta_i}{n} + \epsilon_q \cdot \frac{\alpha}{n} \\
 &= \frac{1}{n} \cdot \frac{\epsilon_q}{\epsilon_q} \cdot \sum_{i=1}^q (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i) \beta_i + \epsilon_q \cdot \frac{\alpha}{n} \\
 &\stackrel{(1.7)}{=} \frac{\epsilon_q}{n} (v_{q+1} - \beta_{q+1}) + \frac{\epsilon_q}{n} \alpha \\
 &\stackrel{(1.8)}{=} \frac{\epsilon_q}{n} (\eta_q v_q - \beta_q) + \frac{\epsilon_q}{n} \alpha \\
 &= \frac{\epsilon_q \eta_q v_q - \epsilon_q \beta_q}{n} + \frac{\epsilon_q}{n} \alpha \\
 &= \frac{\eta_q v_q + \alpha - \beta_q}{\eta_0 \cdots \eta_q}.
 \end{aligned}$$

2. Descomposición de una curva polar

Ahora mostraremos (2) implica (1).

Dado un número racional α tal que $\beta_q \leq \alpha < \beta_{q+1}$, y

$$\frac{I(f, g)}{\text{mult}(g)} = \frac{\eta_q v_q + \alpha - \beta_q}{\eta_0 \cdots \eta_q}.$$

Por lo que acabamos de mostrar, si $\tilde{\alpha} = \text{cont}(C_f, C_g)$, con $\beta_{\tilde{q}} \leq \tilde{\alpha} < \beta_{\tilde{q}+1}$, entonces

$$\frac{I(f, g)}{\text{mult}(g)} = \frac{\eta_{\tilde{q}} v_{\tilde{q}} + \tilde{\alpha} - \beta_{\tilde{q}}}{\eta_0 \cdots \eta_{\tilde{q}}}.$$

esto es,

$$\frac{\eta_q v_q + \alpha - \beta_q}{\eta_0 \cdots \eta_q} = \frac{\eta_{\tilde{q}} v_{\tilde{q}} + \tilde{\alpha} - \beta_{\tilde{q}}}{\eta_0 \cdots \eta_{\tilde{q}}}, \quad (2.11)$$

Se quiere probar que $\alpha = \text{cont}(C_f, C_g)$, o sea, $\alpha = \tilde{\alpha}$. Supongamos que $\alpha \neq \tilde{\alpha}$ y analicemos las siguientes situaciones: $q = \tilde{q}$ y $q \neq \tilde{q}$.

Si $q = \tilde{q}$ y considerando, sin pérdida de generalidad, $\alpha < \tilde{\alpha}$, tenemos

$$\frac{\eta_q v_q + \alpha - \beta_q}{\eta_0 \cdots \eta_q} < \frac{\eta_{\tilde{q}} v_{\tilde{q}} + \tilde{\alpha} - \beta_{\tilde{q}}}{\eta_0 \cdots \eta_{\tilde{q}}},$$

lo que contradice (2.11).

Ahora, si $q \neq \tilde{q}$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\tilde{q} = q + 1$, entonces

$$\frac{\eta_{\tilde{q}} v_{\tilde{q}} + \tilde{\alpha} - \beta_{\tilde{q}}}{\eta_0 \cdots \eta_{\tilde{q}}} = \frac{\eta_{q+1} v_{q+1} + \tilde{\alpha} - \beta_{q+1}}{\eta_0 \cdots \eta_{q+1}} \geq \frac{v_{q+1}}{\eta_0 \cdots \eta_q} \stackrel{(1.8)}{=} \frac{\eta_q v_q + \beta_{q+1} - \beta_q}{\eta_0 \cdots \eta_q} > \frac{\eta_q v_q + \alpha - \beta_q}{\eta_0 \cdots \eta_q},$$

siendo la primera desigualdad válida debido al hecho de que $\beta_{q+1} = \beta_{\tilde{q}} \leq \tilde{\alpha}$ y la última es válida, pues $\beta_{q+1} > \alpha$. Lo cual es una contradicción con la igualdad (2.11).

Por lo tanto, $\alpha = \tilde{\alpha}$, o sea, α es el contacto entre las curvas C_f y C_g . \square

2.2. Teorema de Kuo-Lu

Dado A un conjunto. Para cualquier $a_1, \dots, a_m \in A$, denotamos por $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$ la sucesión a_1, \dots, a_m considerada como no ordenada. Usaremos la siguiente notación,

$$\langle a_1 : \mu_1, \dots, a_k : \mu_k \rangle = \left\langle \overbrace{a_1, \dots, a_1}^{\mu_1 \text{ términos}}, \dots, \overbrace{a_k, \dots, a_k}^{\mu_k \text{ términos}} \right\rangle.$$

Consideremos C_f y C_g dos curvas algebroides planas con C_g suave y a través de un cambio de coordenadas, asumiremos que $g(X, Y) = X$, luego $P_g(f) = \frac{\partial f}{\partial Y} = f_Y$ es la curva polar de f respecto a g , la cual denotaremos por Γ .

Definición 2.2.1. Sea $f(X, Y) = \sum_i f_i(X)Y^i \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ una serie formal de potencias Y -regular de orden p i.e $\text{mult}_Y(f(0, Y)) = p$. Definimos el conjunto $\text{Zer}(f)$ como:

$$\text{Zer}(f) = \langle y_1(X), \dots, y_p(X) \rangle$$

Donde $y_1(X), \dots, y_p(X) \in \mathbb{C}[[X]]^{*1}$, son las p raíces de f (contadas con multiplicidades), con $\text{mult}_X y_i(X) > 0$ para $i = 1, \dots, p$.

El siguiente resultado dado en [KL77] establece una relación entre los órdenes de coincidencia de dos parametrizaciones de Newton-Puiseux de una curva algebroides C_f y los órdenes de coincidencia de una parametrización de C_f con una parametrización de la curva polar $C_{f_Y} = C_\Gamma$, pero una parte de la proposición no es cierta. Primero enunciaremos la proposición y luego daremos un ejemplo donde no se cumple.

Pseudoproposición 2.2.1 (Kuo-Lu [KL77]). Sean dos parametrizaciones de Newton-Puiseux de C_f , $y_i(X^{\frac{1}{n}})$ y $y_j(X^{\frac{1}{n'}})$, donde $i \neq j$. Entonces existe una parametrización de Newton-Puiseux $z_k(X^{\frac{1}{m}})$ de C_Γ que satisface las siguientes igualdades,

$$\text{mult}_X(y_i(X^{\frac{1}{n}}) - z_k(X^{\frac{1}{m}})) = \text{mult}_X(y_j(X^{\frac{1}{n'}}) - z_k(X^{\frac{1}{m}})) = \text{mult}_X(y_i(X^{\frac{1}{n}}) - y_j(X^{\frac{1}{n'}})).$$

Recíprocamente, dada una parametrización de Newton-Puiseux $y_i(X^{\frac{1}{n}})$ de C_f y una parametrización $z_k(X^{\frac{1}{m}})$ de C_Γ , existe una parametrización $y_j(X^{\frac{1}{n'}})$ de C_f que satisface las igualdades anteriores.

Es más, dada una parametrización de Newton-Puiseux $y_i(X^{\frac{1}{n}})$ de C_f y un número racional $d > 0$, tenemos

$$\begin{aligned} & \#\{y_j(X^{\frac{1}{n'}}) \in P(C_f); \text{mult}_X(y_i(X^{\frac{1}{n}}) - y_j(X^{\frac{1}{n'}})) = d\} \\ &= \#\{z_k(X^{\frac{1}{m}}) \in P(C_\Gamma); \text{mult}_X(y_i(X^{\frac{1}{n}}) - z_k(X^{\frac{1}{m}})) = d\}, \end{aligned}$$

¹ $\mathbb{C}[[X]]^* = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{C}[[X^{\frac{1}{n}}]]$

2. Descomposición de una curva polar

donde $P(C_f)$ y $P(C_\Gamma)$ son los conjuntos de parametrizaciones de Newton-Puiseux de C_f y C_Γ , respectivamente.

En [GP91] se detecta el error de la Pseudoproposición 2.2.1, justificándolo mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.1. Dado $f(X, Y) = Y(Y - X)(Y - X^2)$. Entonces,

$$\text{Zer}(f) = \langle y_1, y_2, y_3 \rangle = \langle 0, X, X^2 \rangle.$$

y

$$\text{Zer}\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right) = \langle z_1, z_2 \rangle = \left\langle \frac{2}{3}X + \dots, \frac{1}{2}X^2 + \dots \right\rangle.$$

Para y_2, z_2 no existe y_j tal que:

$$\text{mult}_X(y_2 - z_2) = \text{mult}_X(y_j - z_2) = \text{mult}_X(y_2 - y_j).$$

Ahora bien, el enunciado correcto dado por [GP91] se puede observar en el Teorema 2.2.1 (página 72).

Proposición 2.2.1 ([GP91]). Sean $f(X, Y) = \sum_i f_i(X)Y^i$, $\tilde{f}(X, Y) = \sum_i \tilde{f}_i(X)Y^i \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ dos series formales de potencias Y -regular de orden p con

$$\text{Zer}(f) = \langle y_1(X), \dots, y_p(X) \rangle$$

$$\text{Zer}(\tilde{f}) = \langle \tilde{y}_1(X), \dots, \tilde{y}_p(X) \rangle.$$

Si $\text{mult}_X(f_i(X)) = \text{mult}_X(\tilde{f}_i(X))$ para todo i , entonces

$$\langle \text{mult}_X(y_1(X)), \dots, \text{mult}_X(y_p(X)) \rangle = \langle \text{mult}_X(\tilde{y}_1(X)), \dots, \text{mult}_X(\tilde{y}_p(X)) \rangle.$$

Demostración: $f(X, Y) = \sum_i f_i(X)Y^i \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ Y -regular de orden p , de esto

$$\text{Zer}(f) = \langle y_1(X), \dots, y_p(X) \rangle; \quad y_i(X), \tilde{y}_i(X) \in \mathbb{C}[[X]]^*.$$

Tenemos de dato que $\text{mult}_X f_i(X) = \text{mult}_X \tilde{f}_i(X)$, así el soporte de f ($\Delta(f)$) es igual al soporte de \tilde{f} ($\Delta(\tilde{f})$). De esto, los polígonos de Newton de f y \tilde{f} son iguales.

Por el corolario 1.3.1, a cada lado del S del polígono de Newton de f le corresponde $|m_S|$ soluciones de orden $\frac{|n_S|}{|m_S|}$, donde $|n_S|$ y $|m_S|$ son las longitudes de la proyección en X e Y de S respectivamente, pero como los polígonos de Newton de f y \tilde{f} son iguales, a cada lado de S del polígono de Newton de \tilde{f} le corresponde $|m_S|$ soluciones de orden $\frac{|n_S|}{|m_S|}$, o sea que los órdenes de la raíces de f y \tilde{f} son iguales, i.e

$$\langle \text{mult}_X(y_1(X)), \dots, \text{mult}_X(y_p(X)) \rangle = \langle \text{mult}_X(\tilde{y}_1(X)), \dots, \text{mult}_X(\tilde{y}_p(X)) \rangle.$$

□

Teorema 2.2.1 (Kuo-Lu [GP91]). *Suponemos que $f(X, Y) = \sum_i f_i(X)Y^i \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ es Y -regular de orden $p > 1$ sin factores múltiples. Sea:*

$$\text{Zer}(f) = \langle y_1, \dots, y_p \rangle, \quad \text{Zer}\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right) = \langle z_1, \dots, z_{p-1} \rangle.$$

Entonces, para cualquier $i \in \{1, \dots, p\}$ se tiene

$$\langle \text{mult}_X(z_1 - y_i), \dots, \text{mult}_X(z_{p-1} - y_i) \rangle = \langle \text{mult}_X(y_1 - y_i), \dots, \text{mult}_X(y_{i-1} - y_i), \text{mult}_X(y_{i+1} - y_i), \dots, \text{mult}_X(y_p - y_i) \rangle.$$

Demostración: Es suficiente considerar la serie de potencias con raíces en $\mathbb{C}[[X]]$. En efecto, si $d \geq 1$ es un entero suficientemente grande la serie de potencias $f(X^d, Y)$ tiene raíces en $\mathbb{C}[[X]]$ y se puede ver que, Teorema 2.2.1 se mantiene para $f(X^d, Y)$ entonces, Teorema 2.2.1 se mantiene para $f(X, Y)$.

Fijemos $i \in \{1, \dots, p\}$ y consideremos el caso especial cuando $y_i = 0$ (i.e Y es un factor de $f(X, Y)$). Observamos que $\frac{f(X, Y)}{Y} \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ es Y -regular de orden $p - 1$ y $\text{Zer}\left(\frac{f}{Y}\right) = \langle y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_p \rangle$. Vemos que $\frac{f(X, Y)}{Y}$ y $\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)(X, Y)$, son Y -regulares de orden $p - 1$. Más aún, $\frac{f(X, Y)}{Y}$ y $\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)(X, Y)$ satisfacen las hipótesis de la proposición 2.2.1, dado que $\text{mult}_X(f_i(X)) = \text{mult}_X(f_i(X))$ para todo i . Así,

$$\langle \text{mult}_X(z_1), \dots, \text{mult}_X(z_{p-1}) \rangle = \langle \text{mult}_X(y_1), \dots, \text{mult}_X(y_{i-1}), \text{mult}_X(y_{i+1}), \dots, \text{mult}_X(y_p) \rangle,$$

2. Descomposición de una curva polar

que prueba el lema para el caso especial ($y_i = 0$).

Consideremos la serie

$$\tilde{f}(X, Y) = f(X, Y + y_i(X)) \in \mathbb{C}[[X, Y]].$$

Tenemos

$$\text{Zer}(\tilde{f}) = \langle y_1 - y_i, \dots, y_{i-1} - y_i, 0, y_{i+1} - y_i, \dots, y_p - y_i \rangle$$

y

$$\text{Zer}\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y}\right) = \langle z_1 - y_i, \dots, z_{p-1} - y_i \rangle.$$

Aplicamos el caso especial a \tilde{f} y se obtiene el lema. □

Sea f irreducible de exponentes característicos $\{\beta_0, \dots, \beta_h\}$. Se cumplen las siguientes propiedades:

Proposición 2.2.2 ([GP91]). Si $\text{Zer}(f) = \langle y_1, \dots, y_p \rangle$, entonces para todo $i \in \{1, \dots, p\}$

$$\begin{aligned} & \langle \text{mult}_X(y_1 - y_i), \dots, \text{mult}_X(y_{i-1} - y_i), \text{mult}_X(y_{i+1} - y_i), \dots, \text{mult}_X(y_p - y_i) \rangle \\ &= \left\langle \frac{\beta_1}{\beta_0} : \epsilon_0 - \epsilon_1, \dots, \frac{\beta_h}{\beta_0} : \epsilon_{h-1} - \epsilon_h \right\rangle. \end{aligned}$$

Demostración: Aplicando la Proposición 1.5.1 tenemos,

$$\text{mult}_X(y_i - y_j) = \frac{\beta_q}{\beta_0}, \text{ para algún } q \in \{1, \dots, h\}.$$

Luego usando el Corolario 1.5.2, se obtiene el resultado. □

Ejemplo 2.2.2. Dado $f(X, Y) \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ tal que $\text{Zer}(f) = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, donde

$$\beta_0 = 4 \quad , \quad \epsilon_0 = 4$$

$$\beta_1 = 6 \quad , \quad \epsilon_1 = 2$$

$$\beta_2 = 9 \quad , \quad \epsilon_2 = 1$$

y

$$\begin{aligned} y_1 &= X^{\frac{3}{2}} + 2X^{\frac{9}{4}} \\ y_2 &= -X^{\frac{3}{2}} + 2iX^{\frac{9}{4}} \\ y_3 &= X^{\frac{3}{2}} - 2X^{\frac{9}{4}} \\ y_4 &= -X^{\frac{3}{2}} - 2iX^{\frac{9}{4}}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \langle \text{mult}_X(y_1 - y_2), \text{mult}_X(y_3 - y_2), \text{mult}_X(y_4 - y_2) \rangle &= \left\langle \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{4} \right\rangle = \left\langle \frac{3}{2} : 2, \frac{9}{4} : 1 \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\beta_1}{\beta_0} : \epsilon_0 - \epsilon_1, \frac{\beta_2}{\beta_0} : \epsilon_1 - \epsilon_2 \right\rangle. \\ \langle \text{mult}_X(y_1 - y_3), \text{mult}_X(y_2 - y_3), \text{mult}_X(y_4 - y_3) \rangle &= \left\langle \frac{9}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{3}{2} : 2, \frac{9}{4} : 1 \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\beta_1}{\beta_0} : \epsilon_0 - \epsilon_1, \frac{\beta_2}{\beta_0} : \epsilon_1 - \epsilon_2 \right\rangle. \\ \langle \text{mult}_X(y_1 - y_4), \text{mult}_X(y_2 - y_4), \text{mult}_X(y_3 - y_4) \rangle &= \left\langle \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{3}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{3}{2} : 2, \frac{9}{4} : 1 \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\beta_1}{\beta_0} : \epsilon_0 - \epsilon_1, \frac{\beta_2}{\beta_0} : \epsilon_1 - \epsilon_2 \right\rangle. \\ \langle \text{mult}_X(y_2 - y_1), \text{mult}_X(y_3 - y_1), \text{mult}_X(y_4 - y_1) \rangle &= \left\langle \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{3}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{3}{2} : 2, \frac{9}{4} : 1 \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\beta_1}{\beta_0} : \epsilon_0 - \epsilon_1, \frac{\beta_2}{\beta_0} : \epsilon_1 - \epsilon_2 \right\rangle. \end{aligned}$$

Proposición 2.2.3 ([GP91]). *Sea $z = z(X) \in \mathbb{C}[[X]]^*$ tal que,*

$$o_f(z) = \max\{\text{mult}_X(y_1 - z), \dots, \text{mult}_X(y_p - z)\} < +\infty.$$

Sea k el entero más pequeño tal que $o_f(z) \leq \frac{\beta_k}{\beta_0}$ (poniendo $\frac{\beta_{g+1}}{\beta_0} = +\infty$). Entonces

$$\langle \text{mult}_X(y_1 - z), \dots, \text{mult}_X(y_p - z) \rangle = \left\langle \frac{\beta_1}{\beta_0} : \epsilon_0 - \epsilon_1, \dots, \frac{\beta_{k-1}}{\beta_0} : \epsilon_{k-2} - \epsilon_{k-1}, o_f(z) : \epsilon_{k-1} \right\rangle.$$

Demostración: Existe una raíz de f donde se alcanza el valor de $o_f(z)$, digamos que tal raíz es y_r . Por tanto, para las raíces y_j , con $j \neq r$, debe ocurrir

$$\text{mult}_X(y_j - z) \leq o_f(z) = \text{mult}_X(y_r - z).$$

Distinguimos dos casos:

2. Descomposición de una curva polar

a) $mult_X(y_j - z) < o_f(z)$.

b) $mult_X(y_j - z) = o_f(z)$.

Si ocurre (a),

$$mult_X(y_j - y_r) \geq \min(mult_X(y_j - z), mult_X(z - y_r)) = \min(mult_X(y_j - z), o_f(z)),$$

la última desigualdad se obtiene usando lo siguiente:

$$mult_X(f + g) \geq \min(mult_X(f), mult_X(g)). \quad (2.12)$$

En consecuencia,

$$mult_X(y_j - y_r) \geq mult_X(y_j - z). \quad (2.13)$$

Luego,

$$mult_X(y_j - z) \stackrel{(2.12)}{\geq} \min(mult_X(y_j - y_r), mult_X(y_r - z)) = \min(mult_X(y_j - y_r), o_f(z)).$$

Por tanto,

$$mult_X(y_j - z) \geq mult_X(y_j - y_r). \quad (2.14)$$

De (2.13) y (2.14), se tiene

$$mult_X(y_j - y_r) = mult_X(y_j - z).$$

Por la Proposición 1.5.1,

$$mult_X(y_j - y_r) = \frac{\beta_i}{\beta_0}, \text{ para algún } i \in \{1, \dots, k-1\}.$$

Entonces,

$$mult_X(y_j - z) = \frac{\beta_i}{\beta_0}, \text{ para algún } i \in \{1, \dots, k-1\}.$$

Así, por el Corolario 1.5.2

$$\# \left\{ j \in \{1, \dots, p\} : mult_X(y_j - z) = \frac{\beta_i}{\beta_0} \right\} = \epsilon_{i-1} - \epsilon_i.$$

Para (b) tenemos,

$$\begin{aligned} \#\{j \in \{1, \dots, p\} : \text{mult}_X(y_j - z) = o_f(z)\} &= p - \sum_{j=1}^{k-1} (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i) \\ \#\{j \in \{1, \dots, p\} : \text{mult}_X(y_j - z) = o_f(z)\} &= \epsilon_{k-1}. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\langle \text{mult}_X(y_1 - z), \dots, \text{mult}_X(y_p - z) \rangle = \left\langle \frac{\beta_1}{\beta_0} : \epsilon_0 - \epsilon_1, \dots, \frac{\beta_{k-1}}{\beta_0} : \epsilon_{k-2} - \epsilon_{k-1}, o_f(z) : \epsilon_{k-1} \right\rangle.$$

□

Sea $g = g(X, Y)$ una serie de potencias irreducible, Y -regular de orden q con $\text{Zer}(g) = \langle z_1, \dots, z_q \rangle$. Suponemos que f y g son coprimos. Ponemos $o_f(g) = o_f(z_1) = \dots = o_f(z_q)$ (decimos que z, \tilde{z} pertenece al mismo ciclo, cuando $o_f(z) = o_f(\tilde{z})$).

El siguiente teorema es la clásica fórmula debida a Noether para la multiplicidad de intersección $I(f, g)$ de las ramas $f = 0$, $g = 0$.

Teorema 2.2.2 (Noether). *Suponemos que f, g son irreducibles, f de exponentes característicos $\{\beta_0, \dots, \beta_h\}$, y k el entero más pequeño tal que $o_f(z) \leq \frac{\beta_k}{\beta_0}$ ($\frac{\beta_{h+1}}{\beta_0} = +\infty$).*

Entonces,

$$\frac{I(f, g)}{I(X, g)} = \sum_{i=1}^{k-1} (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i) \frac{\beta_i}{\beta_0} + \epsilon_{k-1} \cdot o_f(g).$$

Demostración: Sea $\text{Zer}(f) = \langle y_1, \dots, y_p \rangle$, $\text{Zer}(g) = \langle z_1, \dots, z_q \rangle$. Luego,

$$I(f, g) = \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^p \text{mult}_X(z_j - y_i),$$

usando la Proposición 2.2.3,

$$\begin{aligned} I(f, g) &= \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^{k-1} (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i) \frac{\beta_i}{\beta_0} + \epsilon_{k-1} \cdot o_f(g), \\ I(f, g) &= q \left(\sum_{i=1}^{k-1} (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i) \frac{\beta_i}{\beta_0} + \epsilon_{k-1} \cdot o_f(g) \right), \\ \frac{I(f, g)}{q} &= \sum_{i=1}^{k-1} (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i) \frac{\beta_i}{\beta_0} + \epsilon_{k-1} \cdot o_f(g). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{I(f, g)}{I(X, g)} = \sum_{i=1}^{k-1} (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i) \frac{\beta_i}{\beta_0} + \epsilon_{k-1} \cdot o_f(g).$$

□

2. Descomposición de una curva polar

2.3. Teorema de Merle

El siguiente lema nos servirá en gran parte para dar la *fórmula de Merle*.

Lema 2.3.1 ([GP91]). *Sea $f = f(X, Y)$ una serie de potencias irreducible Y -regular de orden p con exponentes característicos $\{\beta_0, \dots, \beta_g\}$, $Zer(f) = \langle y_1, \dots, y_p \rangle$ y $Zer\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right) = \langle z_1, \dots, z_{p-1} \rangle$. Entonces,*

$$\langle o_f(z_1), \dots, o_f(z_{p-1}) \rangle = \left\langle \frac{\beta_1}{\beta_0} : m_1, \dots, \frac{\beta_h}{\beta_0} : m_h \right\rangle,$$

donde $m_k = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_k} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{k-1}}$ para $k = 1, \dots, h$.

Demostración: Por Teorema 2.2.1 y Proposición 2.2.2, para cualquier $i \in \{1, \dots, p\}$ se tiene,

$$\langle o_f(z_1 - y_i), \dots, o_f(z_{p-1} - y_i) \rangle = \left\langle \frac{\beta_1}{\beta_0} : \epsilon_0 - \epsilon_1, \dots, \frac{\beta_h}{\beta_0} : \epsilon_{h-1} - \epsilon_h \right\rangle. \quad (2.15)$$

Luego para cualquier $i \in \{1, \dots, p-1\}$, existe $k \in \{1, \dots, h\}$ tal que $o_f(z_i) = \frac{\beta_k}{\beta_0}$. Así, podemos escribir

$$\langle o_f(z_1), \dots, o_f(z_{p-1}) \rangle = \left\langle \frac{\beta_1}{\beta_0} : m_1, \dots, \frac{\beta_h}{\beta_0} : m_h \right\rangle.$$

Nuestro objetivo es hallar los valores de m_1, \dots, m_h , para ello consideremos la matriz

$$\begin{pmatrix} mult_X(z_1 - y_1), \dots, mult_X(z_{p-1} - y_1), \\ mult_X(z_1 - y_2), \dots, mult_X(z_{p-1} - y_2), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ mult_X(z_1 - y_p), \dots, mult_X(z_{p-1} - y_p), \end{pmatrix}.$$

De acuerdo a (2.15), el número $\frac{\beta_k}{\beta_0}$ aparece $\epsilon_{k-1} - \epsilon_k$ veces en cualquiera de las $p = \epsilon_0$ filas, así $\epsilon_0(\epsilon_{k-1} - \epsilon_k)$ elementos de la matriz son iguales a $\frac{\beta_k}{\beta_0}$. Usando la Proposición 2.2.3 veremos cuantas veces aparece $\frac{\beta_k}{\beta_0}$ en las columnas,

- Si $o_f(z_j) < \frac{\beta_k}{\beta_0}$, entonces la j -columna no contiene a $\frac{\beta_k}{\beta_0}$.

- Si $o_f(z_j) = \frac{\beta_k}{\beta_0}$, entonces la j -columna contiene ϵ_{k-1} elementos iguales a $\frac{\beta_k}{\beta_0}$.
- Si $o_f(z_j) > \frac{\beta_k}{\beta_0}$, entonces la j -columna contiene $\epsilon_{k-1} - \epsilon_k$ elementos iguales a $\frac{\beta_k}{\beta_0}$.

Luego,

$$m_k \epsilon_{k-1} + (m_{k+1} + \dots + m_h) \epsilon_{k-1} - \epsilon_k = \epsilon_0 (\epsilon_{k-1} - \epsilon_k),$$

para $k \in \{1, \dots, h\}$, donde el primer término de la igualdad es la cantidad total de elementos iguales a $\frac{\beta_k}{\beta_0}$ en las columnas y la segunda es la cantidad de elementos iguales a $\frac{\beta_k}{\beta_0}$ en las filas. Resolvemos esta igualdad para $k = h$, luego

$$\begin{aligned} m_h \epsilon_{h-1} &= \epsilon_0 (\epsilon_{h-1} - \epsilon_h), \\ m_h &= \epsilon_0 \cdot \left(\frac{\epsilon_{h-1} - \epsilon_h}{\epsilon_{h-1} \cdot \epsilon_h} \right), \text{ pues } \epsilon_h = 1. \end{aligned}$$

Así,

$$m_h = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_h} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{h-1}}.$$

Para $k = h - 1$,

$$\begin{aligned} m_{h-1} \epsilon_{h-2} + m_h (\epsilon_{h-2} - \epsilon_{h-1}) &= \epsilon_0 (\epsilon_{h-2} - \epsilon_{h-1}), \\ m_{h-1} \epsilon_{h-2} &= (\epsilon_{h-2} - \epsilon_{h-1}) (\epsilon_0 - m_h), \\ &= (\epsilon_{h-2} - \epsilon_{h-1}) \left(\epsilon_0 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_h} + \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{h-1}} \right), \\ m_{h-1} \epsilon_{h-2} &= (\epsilon_{h-2} - \epsilon_{h-1}) \cdot \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{h-1}}, \\ m_{h-1} &= \epsilon_0 \cdot \left(\frac{\epsilon_{h-2} - \epsilon_{h-1}}{\epsilon_{h-2} \cdot \epsilon_{h-1}} \right), \\ m_{h-1} &= \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{h-1}} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{h-2}}. \end{aligned}$$

Continuando con el proceso tenemos, $m_k = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_k} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{k-1}}$ para $k = 1, \dots, h$. Lo que prueba el lema. □

Como se mencionó anteriormente daremos la fórmula de Merle en el siguiente teorema:

2. Descomposición de una curva polar

Teorema 2.3.1 (Merle). *Sea $f = f(X, Y)$ una serie de potencias irreducible de exponentes característicos $\{\beta_0, \dots, \beta_h\}$. Entonces existe una descomposición*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)(X, Y) = \prod_{i=1}^h g_i(X, Y)$$

en $\mathbb{C}[[X, Y]]$ tal que,

a) $I(X, g_k) = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_k} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{k-1}}.$

b) Si g es un factor irreducible de $g_k(X, Y)$, entonces

$$\frac{I(f, g)}{I(X, g)} = \sum_{i=1}^{k-1} (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i) \frac{\beta_i}{\beta_0} + \epsilon_{k-1} \frac{\beta_k}{\beta_0}.$$

Demostración: De acuerdo al Lema 2.3.1, tenemos

$$\begin{aligned} m_1 + \dots + m_h &= \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0}\right) + \dots + \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_h} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{h-1}}\right), \\ &= \frac{\epsilon_0}{\epsilon_h} - 1 = \epsilon_0 - 1, \\ m_1 + \dots + m_h &= p - 1. \end{aligned}$$

De esto podemos escribir,

$$\text{Zer}\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right) = \langle z_{1,1}, \dots, z_{1,m_1}, \dots, z_{h,1}, \dots, z_{h,m_h} \rangle,$$

donde $m_k = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_k} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{k-1}}$ y

$$o_f(z_{k,1}) = \dots = o_f(z_{k,m_k}) = \frac{\beta_k}{\beta_0} \text{ para } k = 1, \dots, h.$$

Las raíces $z_{k,i}$ y $z_{l,j}$ ($k \neq l$) no pertenecen al mismo ciclo porque si $k \neq l$, $o_f(z_{k,i}) \neq o_f(z_{l,j})$.

Por lo tanto, existe una descomposición

$$\frac{\partial f}{\partial Y} = \prod_{i=1}^h g_i(X, Y) \text{ en } \mathbb{C}[[X, Y]]$$

tal que

$$\text{Zer}(g_k) = \langle z_{k,1}, \dots, z_{k,m_k} \rangle.$$

Se tiene $I(X, g_k) = mult_Y(g_k(0, Y)) = m_k = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_k} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{k-1}}$, así hemos probado la parte a) del teorema. Como g es un factor irreducible de g_k , entonces

$$o_f(g) = o_{f_k}(g) = o_f(z_{k,1}) = \frac{\beta_k}{\beta_0}.$$

Luego aplicando la teorema 2.2.2,

$$\begin{aligned} \frac{I(f, g)}{I(X, g)} &= \sum_{i=1}^{k-1} (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i) \frac{\beta_i}{\beta_0} + \epsilon_{k-1} \cdot o_f(g), \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i) \frac{\beta_i}{\beta_0} + \epsilon_{k-1} \cdot \frac{\beta_k}{\beta_0}. \end{aligned}$$

Luego se tiene la parte b) del teorema. □



Polares de una foliación

Para este último capítulo tomaremos como referencia [Can93, MS01, Rou96, Rou99]. Las secciones 3.2 y 3.3 están enfocados en [Pér01] y [FS16]. Al final enunciaremos el Teorema de Merle para foliaciones, una extensión del mismo para curvas algebroides planas estudiado en el capítulo 2.

Sea f una función analítica que se anula en el origen y su desarrollo en serie:

$$f(x, y) = \sum_{\alpha, \beta} f_{\alpha, \beta} x^{\alpha} y^{\beta}.$$

Sea $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ una 1-forma holomorfa, las separatrices de ω son las soluciones analíticas de la ecuación diferencial:

$$A(x, y) + B(x, y) \frac{dy}{dx} = 0,$$

y el desarrollo de serie de potencias se puede escribir,

$$A(x, y) + B(x, y) \frac{dy}{dx} = \sum_{\alpha, \beta} A_{\alpha\beta} x^{\alpha} y^{\beta} + B_{\alpha\beta} x^{\alpha+1} y^{\beta-1} \frac{dy}{dx}.$$

Definición 3.0.1. Sea $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ una 1-forma holomorfa con $A, B \in \mathbb{C}[[x, y]]$, el **polinomio diferencial** asociado a ω es dado por g , si tenemos que

$$g = A(x, y) + B(x, y) \frac{dy}{dx} = \sum_{\alpha, \beta} M_{\alpha\beta}(g),$$

donde $M_{\alpha\beta}(g) = A_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta + B_{\alpha\beta}x^{\alpha+1}y^{\beta-1}\frac{dy}{dx}$, $A_{\alpha\beta}$ y $B_{\alpha\beta}$ son números complejos tales que $B_{\alpha 0} = 0$ para todo α , y el índice (α, β) recorre el conjunto $\left(\frac{1}{q}\mathbb{Z}\right)_{\geq -1} \times \mathbb{N}$ donde $q \in \mathbb{N}$ y $\left(\frac{1}{q}\mathbb{Z}\right)_{\geq -1} = \{r \geq -1/q \cdot r \in \mathbb{Z}\}$.

Definición 3.0.2. El soporte de ω (respectivamente g) y lo denotamos por $\Delta(\omega)$ (respectivamente $\Delta(g)$) es el siguiente conjunto :

$$\Delta(\omega) = \{(\alpha, \beta) : (A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta}) \neq (0, 0)\}$$

(respectivamente $\Delta(g) = \{(\alpha, \beta) : M_{\alpha,\beta} \neq 0\}$).

En un punto $(\alpha, \beta) \in \Delta(\omega)$, el monomio $A_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta$ es llamado contribución de A y el monomio $B_{\alpha\beta}x^{\alpha+1}y^{\beta-1}\frac{dy}{dx}$ es llamado contribución de B . Notamos que un punto del soporte no es contribución al mismo tiempo para A y B .

Definición 3.0.3. El polígono de Newton de ω (respectivamente el polígono de Newton de g) y se denota por $N(\omega)$ (respectivamente $N(g)$), es el borde de la envolvente convexa de

$$\bigcup_{(\alpha,\beta) \in \Delta(\omega)} (\alpha, \beta) + (\mathbb{R}_{\geq 0})^2 \quad (\text{respectivamente} \quad \bigcup_{(\alpha,\beta) \in \Delta(g)} (\alpha, \beta) + (\mathbb{R}_{\geq 0})^2).$$

Observación 3.0.1. Tener en cuenta que $N(f)$ se deduce de $N(df)$ por traslación: $N(df) + (1, 0)$.

En efecto: Se tiene que probar que $N(f) = N(df) + (1, 0)$, para ello usaremos la doble inclusión.

- $N(f) \subset N(df) + (1, 0)$:

Sea $(\alpha', \beta') \in N(f)$, entonces existe $(\alpha, \beta) \in \Delta(f)$ y $(a, b) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^2$ tales que

$$(\alpha', \beta') = (\alpha, \beta) + (a, b) \tag{3.1}$$

Sea $f(x, y) = f_{\alpha,\beta}x^\alpha y^\beta + \dots$, luego

$$df(x, y) = (\alpha f_{\alpha\beta}x^{\alpha-1}y^\beta + \dots)dx + (\beta f_{\alpha\beta}x^\alpha y^{\beta-1} + \dots)dy, \text{ usando (3.1)}$$

$$df(x, y) = (A_{\alpha'\beta'}x^{\alpha-a-1}y^{\beta-b} + \dots)dx + (B_{\alpha'\beta'}x^{\alpha-a}y^{\beta-b-1} + \dots)dy,$$

3. Polares de una foliación

donde $(A_{\alpha'\beta'}, B_{\alpha'\beta'}) \neq (0, 0)$. Se tiene

$$\begin{aligned}(\alpha' - a - 1, \beta' - b) &\in \Delta(df) \\(\alpha' - 1, \beta') &\in \Delta(df) + (a, b) \subset \Delta(df) + (\mathbb{R}_{\geq 0})^2 = N(df) \\(\alpha', \beta') &\in N(df) + (1, 0).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $N(f) \subset N(df) + (1, 0)$.

■ $N(df) + (1, 0) \subset N(f)$:

Sea $(\alpha', \beta') \in N(df) + (1, 0)$, entonces existe $(\alpha, \beta) \in \Delta(df)$ y $(a, b) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^2$ tales que

$$(\alpha', \beta') = (\alpha, \beta) + (a, b) + (1, 0) \quad (3.2)$$

Sea $df(x, y) = \sum_{\alpha, \beta} A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta dx + B_{\alpha\beta} x^{\alpha+1} y^{\beta-1} dy$, como $\sum_{\alpha, \beta} A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$.

Entonces,

$$\sum_{\alpha, \beta} \frac{A_{\alpha\beta}}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} y^\beta + c(y) = f(x, y),$$

luego

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha, \beta} B_{\alpha\beta} x^{\alpha+1} y^{\beta-1} &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \sum_{\alpha, \beta} B_{\alpha\beta} x^{\alpha+1} y^{\beta-1} &= \sum_{\alpha, \beta} \frac{\beta}{\alpha + 1} A_{\alpha\beta} x^{\alpha+1} y^{\beta-1} + c'(y).\end{aligned}$$

obtenemos $(\alpha + 1)B_{\alpha\beta} = \beta A_{\alpha\beta}$ y $c(y) = c$ y como f se anula en el origen, entonces $c = 0$. Luego, $f(x, y) = f_{\alpha\beta} x^{\alpha+1} y^\beta + \dots$ con $f_{\alpha\beta} = \frac{A_{\alpha\beta}}{\alpha + 1} \neq 0$ (consecuencia de $(A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta}) \neq (0, 0)$ y la relación entre $A_{\alpha\beta}$ y $B_{\alpha\beta}$). Así,

$$\begin{aligned}(\alpha + 1, \beta) &\in \Delta(f), \text{ usando (3.2) y } \Delta(f) + (a, b) \subset N(f) \\(\alpha', \beta') &\in N(f)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $N(df) + (1, 0) \subset N(f)$.

De todo lo anterior, se concluye que

$$N(f) = N(df) + (1, 0).$$

□

Para la 1-forma $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$, la existencia de un lado horizontal de $N(\omega)$ equivale a $A(x, 0) \equiv 0$, en este caso $\{y = 0\}$ es una separatriz de ω .

Ejemplo 3.0.1. *El polígono de Newton de $d(y^2 - x^3)$ se muestra en el siguiente gráfico:*

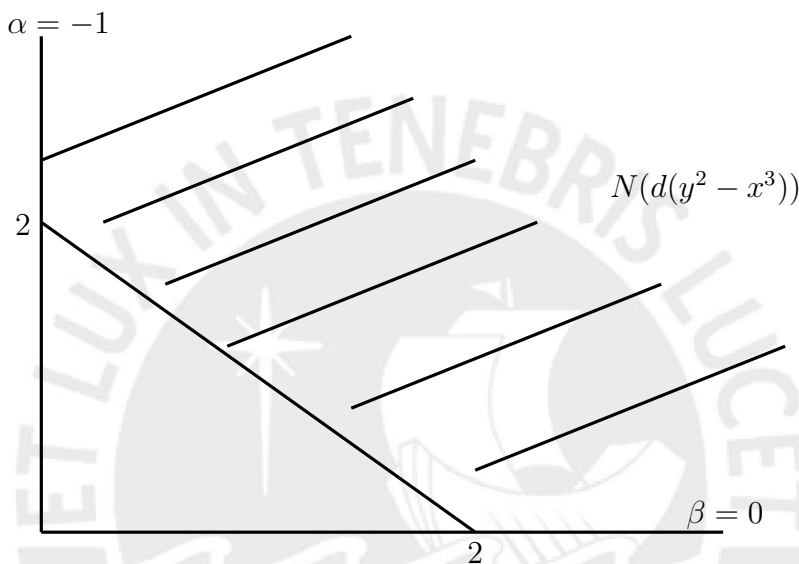


Figura 3.1. Polígono de Newton de $d(y^2 - x^3)$

Para cualquier $\nu \in \mathbb{Q}^+$, definimos $L(g, \nu)$ como la única recta con pendiente $-\frac{1}{\nu}$ que interseca $N(g)$ exactamente en un lado o un vértice. Consideremos

$$\begin{aligned} \Phi_{(g, \nu)}(C) &= \sum_{(\alpha, \beta) \in L(g, \nu)} (A_{\alpha\beta} + \nu B_{\alpha\beta}) C^\beta, \\ In^{(\nu)}(g) &= \sum_{(\alpha, \beta) \in L(g, \nu)} M_{\alpha\beta}(g). \end{aligned}$$

Para cada $\nu \in \mathbb{Q}^+$ y $c \in \mathbb{C}$ definimos el polinomio diferencial $g[cx^\nu + y]$,

$$g[cx^\nu + y] = g(x, cx^\nu + y).$$

3. Polares de una foliación

Entonces las siguiente propiedades se cumplen:

- La serie $z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^{\nu_i}$ es una solución de $(g = 0)$ si y sólo si $\sum_{i=2}^{\infty} c_i x^{\nu_i}$ es una solución de $(g[c_1 x^{\nu_1} + y] = 0)$. En particular, $z = c_1 x^{\nu_1}$ es una solución de $(g = 0)$ si y sólo si $\{y = 0\}$ es una solución de $(g[c_1 x^{\nu_1} + y] = 0)$.
- Si $\Delta(g) \subset \left(\frac{1}{q}\mathbb{Z}\right)_{\geq -1} \times \mathbb{N}$ entonces, existe un entero $q' > 0$ tal que $\Delta(g[cx^{\nu} + y]) \subset \left(\frac{1}{q'}\mathbb{Z}\right)_{\geq -1} \times \mathbb{N}$. En particular, el polígono de Newton $N(g[cx^{\nu} + y])$ tiene un número finito de lados y vértices.
- Si $\nu' < \nu$ entonces,

$$\begin{aligned} L(g, \nu') &= L(g[cx^{\nu} + y], \nu') \\ In^{(\nu')}(g) &= In^{(\nu')}(g[cx^{\nu} + y]) \\ \Phi_{(g, \nu')}(C) &= \Phi_{(g[cx^{\nu} + y], \nu')}(C). \end{aligned}$$

Así, si $Q(g, \nu)$ es el punto más bajo de $N(g) \cap L(g, \nu)$, las porciones de $N(g)$ y $N(g[cx^{\nu} + y])$ por encima de $Q(g, \nu)$ son iguales. Por otra parte, $L(g, \nu) = L(g[cx^{\nu} + y], \nu)$ y si escribimos

$$In^{(\nu)}(g) = A_0 x^{\alpha} + \sum_{i=1}^t A_i x^{\alpha_i} y^i + B_i x^{\alpha_i+1} y^{i-1} \frac{dy}{dx}, \quad \alpha_i = \alpha - i\nu,$$

entonces se tiene que para cualquier $c \in \mathbb{C}$

$$In^{(\nu)}(g[cx^{\nu} + y]) = A_0(c) x^{\alpha} + \sum_{i=1}^t A_i(c) x^{\alpha_i} y^i + B_i(c) x^{\alpha_i+1} y^{i-1} \frac{dy}{dx}. \quad (3.3)$$

Si escribimos

$$\Phi(g, \nu)(C) = \alpha(C) + \nu C \beta(C), \quad (3.4)$$

donde $\beta(C) = \sum_{i=1}^t B_i C^{i-1}$ y $\alpha(C) = \sum_{i=0}^t A_i C^i$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} A_0(c) &= \Phi(c) \\ A_j(c) &= \frac{1}{j!} \Phi^{(j)}(c) - \nu \frac{1}{(j-1)!} \beta^{(j-1)}(c), \quad j = 1, \dots, t \\ B_j(c) &= \frac{1}{(j-1)!} \beta^{(j-1)}(c), \quad j = 1, \dots, t, \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde $\Phi^{(j)}(c) = \frac{\partial^j \Phi}{\partial C^j}(c)$ y $\beta^{(j)}(c) = \frac{\partial^j \beta}{\partial C^j}(c)$. Especialmente $A_t = A_t(c)$, $B_t = B_t(c)$ y $A_0(c) = 0$ si y sólo si $\Phi(c) = 0$.

Teorema 3.0.2 ([BK12]). *Sea f una función, $N(f)$ su polígono de Newton. A todo lado de $N(f)$ de pendiente $-\frac{1}{\nu}$ superior a -1 , de extremos (α'_1, β'_1) , (α'_2, β'_2) con $\beta'_1 > \beta'_2$, corresponde una unión:*

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^k \gamma_i,$$

de componentes de $f^{-1}(0)$ tal que $\text{mult}(\Gamma) = \beta'_1 - \beta'_2$ y para todo $i = 1, \dots, k$ la componente γ_i está parametrizada por

$$y(x) = c_i x^\nu + \varepsilon_i(x) \text{ con } \text{mult}_x \varepsilon_i(x) > \nu \text{ y } c_i \neq 0.$$

Demostración: Dado $f(x, y) = \prod_{i=1}^k f_i(x, y)$, donde f_i es irreducible para todo $i = 1, \dots, k$, con $\text{mult}(f_i) = N_i$. Tomando un $i \in \{1, \dots, k\}$, luego usando el teorema 1.3.4 para f_i , sean $\varphi_i, \dots, \varphi_{N_i}$ las raíces de f_i en $K[[x]]^*$. De esto, el polígono de Newton de f_i tiene un lado de ecuación $i + \nu j = \mu$ con $-\frac{1}{\nu} > -1$ y como $(0, N_i)$ pertenece a este lado, entonces $\mu = N_i \nu$; donde el otro punto del único lado del polígono de Newton de f_i es $(N_i \nu, 0)$. Poniendo $\Gamma_i \equiv (f_i(x, y) = 0)$ tenemos,

$$\Gamma_i = \bigcup_{j=1}^{N_i} \gamma_{i_j},$$

tal que $\text{mult}(\Gamma_i) = N_i$ y para todo $j = 1, \dots, N_i$ la componente γ_{i_j} está parametrizada por:

$$y(x) = c_i x^\nu + \varepsilon_i(x) \text{ con } \text{mult}_x \varepsilon_i(x) > \nu \text{ y } c_i \neq 0.$$

□

El Teorema 3.0.2 no se cumple en las 1-formas, considerar:

$$\omega = xdy - (ny - x^n)dx,$$

$N(\omega)$ tiene lado L de pendiente $-\frac{1}{n}$ mientras que su única separatriz es la curva de ecuación $x = 0$. Para superar esta desventaja, [Can93] introdujo el concepto de lado principal y demuestra una versión más débil del teorema anterior.

3. Polares de una foliación

Definición 3.0.4. Sea L un lado de $N(\omega)$ de pendiente $-\frac{1}{\nu}$, de extremos (α'_1, β'_1) , (α'_2, β'_2) con $\beta'_1 > \beta'_2$, se dice que es un **lado bueno** si

$$(L, a)_\omega := B_{\alpha'_1, \beta'_1} \neq 0 \text{ y } -\frac{A_{\alpha'_1, \beta'_1}}{B_{\alpha'_1, \beta'_1}} \notin \mathbb{Q} \cap \{r \geq \nu\};$$

$$(L, b)_\omega := A_{\alpha'_2, \beta'_2} + \nu B_{\alpha'_2, \beta'_2} \neq 0.$$

Si $\{y = 0\}$ no es una separatriz de ω y si L es el lado bueno de mayor pendiente, entonces se dice que este es el **lado principal** de ω . De manera similar se puede definir el lado bueno y el lado principal para el polinomio diferencial asociado a ω .

Teorema 3.0.3. Si $\{x = 0\}$ y $\{y = 0\}$ no son separatrices de ω , entonces $N(\omega)$ tiene un lado principal y único. Si este último es de pendiente $-\frac{1}{\nu}$, entonces ω tiene una separatriz parametrizada por:

$$y(x) = cx^\nu + \eta(x) \text{ con } \text{mult}_x \eta(x) > \nu \text{ y } c \neq 0.$$

Si $\frac{p_1}{n_1}$ con $\text{mcd}(p_1, n_1) = 1$ y si E es la aplicación:

$$E(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}^{n_1}, \bar{y} + c\bar{x}^{p_1}),$$

entonces $y = 0$ es la ecuación de una separatriz de $E^*\omega$, o $N(E^*\omega)$ tiene un lado principal de pendiente $-\frac{1}{\lambda}$ con $\lambda > p_1$.

Demostración: Ver [Can93] página 133. □

3.1. Propiedades de una 1-forma de tipo curva generalizada

Definición 3.1.1. La 1-forma ω se desarrolla en series de 1-formas ω_j de grado j ,

$$\omega = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j,$$

$\text{mult}(\omega)$ denota la multiplicidad algebraica de ω , el cual es el grado del primer término no nulo de la serie anterior. Si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ parametriza una curva, llamaremos

3.1. Propiedades de una 1-forma de tipo curva generalizada

$mult_t \omega(x(t), y(t))$ la multiplicidad algebraica de $\gamma^* \omega$. Supongamos que $\nu = mult(\omega)$ y $\omega_\nu = A_\nu dx + B_\nu dy$; ω se dice dicrítica si tiene infinitas separatrices.

Lema 3.1.1 ([Rou96]). Sean ω_1 y ω_2 dos 1-formas de tipo curva generalizada no dicríticas con singularidad aislada y las mismas separatrices. Dada una curva $\gamma(t)$ distinta de sus separatrices se verifica:

$$mult_t(\gamma^* \omega_1) = mult_t(\gamma^* \omega_2).$$

Demostración: Observemos que una 1-forma singular ω reducida del tipo curva generalizada que no sea del tipo silla-nodo, podemos suponer de la forma:

$$\omega = \lambda x(1 + \dots)dy + \mu y(1 + \dots)dx \quad \text{con } \mu\lambda \neq 0 \text{ y } \frac{\lambda}{\mu} \notin \mathbb{Q}^-,$$

y toda ecuación reducida de sus separatrices es de la forma $f(x, y) = xyU(x, y)$ con $U(0, 0) \neq 0$. Sea $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ una parametrización de una curva γ . Si $x(t) = ut^p + t^p \epsilon(t)$ y $y(t) = vt^q + t^q \eta(t)$, con $\epsilon(t), \eta(t) \in t\mathbb{C}\{t\}$, entonces:

$$\gamma^* \omega = uv(q\lambda + p\mu)t^{p+q-1}dt + t^{p+q}\alpha(t)dt,$$

$$\gamma^* df = uvU(0, 0)(p+q)t^{p+q-1}dt + t^{p+q}\beta(t)dt,$$

con $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ que pertenecen a $\mathbb{C}\{t\}$. Dado que $\frac{\lambda}{\mu} \notin \mathbb{Q}^-$,

$$mult_t \omega(x(t), y(t)) = mult_t df(x(t), y(t)),$$

lo que prueba el lema cuando ω_1 y ω_2 son reducidas.

El caso general se deduce de la propiedad de equidesingularización de curvas generalizadas que tienen las mismas separatrices. Las coordenadas se eligen de modo que $[0, 1]$ no está en el cono tangente de γ , de ω_1 y de ω_2 ; γ está parametrizada por:

$$x(t) = t^n \quad \text{con } n = mult(\gamma),$$

$$y(t) = \sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i.$$

Realizamos la explosión del origen mediante la siguiente aplicación:

$$E : (x, u) \mapsto (x, xu).$$

3. Polares de una foliación

Las transformaciones estrictas de ω_1 y ω_2 son respectivamente $\hat{\omega}_1$ y $\hat{\omega}_2$, las cuales son del tipo curvas generalizadas. Sea $f = 0$ la ecuación reducida de las separatrices de ω_1 y ω_2 , y \hat{f} su transformada estricta por E . Las 1-formas ω_1 y ω_2 no son dicríticas, por elección del sistema de coordenadas, la ecuación reducida de las separatrices de $\hat{\omega}_1$ tal como $\hat{\omega}_2$, es $x\hat{f} = 0$; las restricciones de $\hat{\omega}_1$ y $\hat{\omega}_2$ en la vecindad de todo punto del divisor excepcional de E se verifican las hipótesis del lema.

Hacemos:

$$\omega_1 = A_1 dx + B_1 dy, \quad \omega_2 = A_2 dx + B_2 dy,$$

Así,

$$E^* \omega_1 = (A_1(x, xu) + uB_1(x, xu))dx + xB_1(x, xu)du = x^{m_1} \hat{\omega}_1,$$

$$E^* \omega_2 = (A_2(x, xu) + uB_2(x, xu))dx + xB_2(x, xu)du = x^{m_2} \hat{\omega}_2.$$

Como ω_1 y ω_2 no son dicríticas, m_1 y m_2 son las multiplicidades respectivas de ω_1 y ω_2 , luego: $\text{mult}(\omega_1) = \text{mult}(\omega_2) = \text{mult}(df)$.

Para $i = 1$ o $i = 2$, se tiene

$$\begin{aligned} \gamma^* \omega_i &= (E \circ \hat{\gamma})^* \omega_i, \\ &= \hat{\gamma}^*(E^* \omega_i) = x(t)^{m_i} \hat{\gamma}^* \hat{\omega}_i, \end{aligned}$$

donde $\hat{\gamma}$ es la transformada estricta de γ . Luego,

$$\begin{aligned} \text{mult}(\gamma^* \omega_i) &= \text{mult}(x(t)^{m_i} \hat{\gamma}^* \hat{\omega}_i), \\ &= \text{mult}(\gamma) \text{mult}(\omega_i) + \text{mult}(\hat{\gamma}^* \hat{\omega}_i). \end{aligned}$$

Se deduce que $\text{mult}(\gamma^* \omega_1) = \text{mult}(\gamma^* \omega_2)$ por inducción sobre el número mínimo de explosiones de desingularizar ω_1 y ω_2 . \square

Teorema 3.1.1 ([Rou96]). Sean ω_1 y ω_2 dos 1-formas de tipo curva generalizada no dicríticas con singularidad aislada y las mismas separatrices, entonces

$$\Delta(\omega_1) = \Delta(\omega_2).$$

3.1. Propiedades de una 1-forma de tipo curva generalizada

Demostración: $N(\omega_2)$ es el borde de un convexo cerrado de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ al cual llamaremos K . **Afirmación:** $\Delta(\omega_1) \subset \Delta(\omega_2)$. Suponemos que esta afirmación fuera falsa, entonces existe un punto $(\alpha_0, \beta_0) \in \Delta(\omega_1)$ tal que no pertenece a K al cual corresponde el monomio:

$$A_{\alpha_0\beta_0}x^{\alpha_0}y^{\beta_0} + B_{\alpha_0\beta_0}x^{\alpha_0+1}y^{\beta_0-1}\frac{dy}{dx}.$$

Observemos que si $N(\omega_2)$ tiene un lado horizontal incluido en la recta $\{\beta = 1\}$, entonces $\{y = 0\}$ es una separatriz de ω_2 como de ω_1 : la recta $\{\beta = 1\}$ contiene así un lado horizontal de $N(\omega_1)$. Del mismo modo, si $N(\omega_2)$ tiene un lado vertical con la recta $\{\alpha = 0\}$, $N(\omega_1)$ también, K siendo convexo, por (α_0, β_0) pasan dos rectas de apoyo de K distintas, de pendientes $-\frac{1}{\lambda_-}$ y $-\frac{1}{\lambda_+}$ con $\lambda_+ > \lambda_-$, **en efecto**, $-\frac{1}{\lambda_-}$ y $-\frac{1}{\lambda_+}$ son las pendientes de 2 lados adyacentes en (α_0, β_0) de la cápsula convexa de $K \cup (\alpha_0, \beta_0)$.

Luego, para todo $\lambda \in]\lambda_-, \lambda_+[$, K no intersecta a cualquier recta que pasa por (α_0, β_0) de pendiente $-\frac{1}{\lambda}$, y el conjunto de puntos de coordenadas enteras mayores o iguales a -1 situado sobre tales rectas es finito, así el número de rectas con pendiente estrictamente entre $-\frac{1}{\lambda_-}$ y $-\frac{1}{\lambda_+}$ y que pasan por un punto de $\Delta(\omega_1)$ es finito.

Encontrar un número racional $\frac{p}{q} \in]\lambda_-, \lambda_+[$ con p y q primos entre si tal que si \mathcal{D} es la recta pendiente $-\frac{q}{p}$ que pasa por (α_0, β_0) , entonces se verifican las siguientes propiedades:

- $\mathcal{D} \cap \Delta(\omega_1) = \{(\alpha_0, \beta_0)\}$.

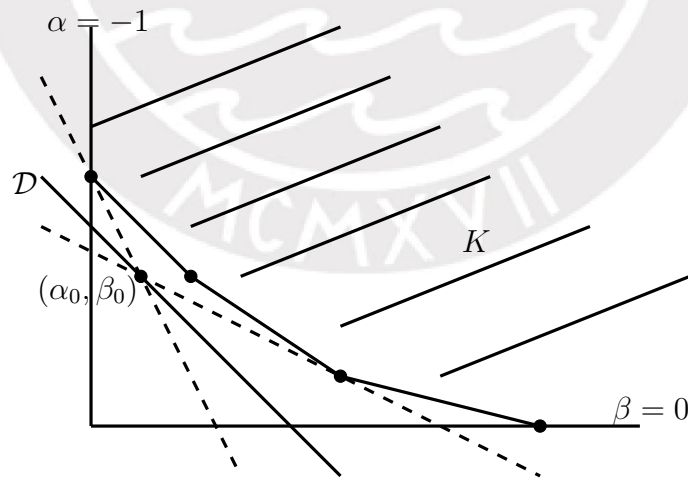


Figura 3.2. [Rou96]

3. Polares de una foliación

- Sabemos que \mathcal{D} tiene por ecuación:

$$\begin{aligned}\frac{\beta - \beta_0}{\alpha - \alpha_0} &= -\frac{q}{p}, \\ p(\beta - \beta_0) &= -q(\alpha - \alpha_0), \\ p\beta - p\beta_0 &= -q\alpha + q\alpha_0, \\ q\alpha + p\beta &= q\alpha_0 + p\beta_0,\end{aligned}$$

denotando $c = q\alpha_0 + p\beta_0$, así se tiene

$$K \subset \{(\alpha, \beta) : q\alpha + p\beta > c\}.$$

- Como $(\alpha_0, \beta_0) \in \Delta(\omega_1)$ tenemos $(A_{\alpha_0\beta_0}, B_{\alpha_0\beta_0}) \neq (0, 0)$, luego $pA_{\alpha_0\beta_0} + qB_{\alpha_0\beta_0} \neq 0$.

Sea $\gamma(t)$ la curva parametrizada por $(x(t), y(t)) = (t^q, t^p)$, sabiendo que $dx = qt^{q-1}dt$ y $dy = pt^{p-1}dt$ tenemos,

$$\gamma^*(A_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta + B_{\alpha\beta}x^{\alpha+1}y^{\beta-1}) = (qA_{\alpha\beta} + pB_{\alpha\beta})t^{q\alpha+p\beta+q-1}dt.$$

Como $\{(\alpha_0, \beta_0)\} = \mathcal{D} \cap \Delta(\omega_1)$ y $pA_{\alpha_0\beta_0} + qB_{\alpha_0\beta_0} \neq 0$,

$$\text{mult}(\gamma^*\omega_1) \leq c + q - 1.$$

Por otro lado, todo punto $(\alpha, \beta) \in \Delta(\omega_2)$ satisface, $q\alpha + p\beta + q - 1 > c + q - 1$, de donde

$$\text{mult}(\gamma^*\omega_2) > c + q - 1 \geq \text{mult}(\gamma^*\omega_1),$$

Luego $\text{mult}(\gamma^*\omega_2) > \text{mult}(\gamma^*\omega_1)$, que contradice el lema 3.1.1. La afirmación es cierta.

Luego, $\Delta(\omega_1) \subset \Delta(\omega_2)$. De forma análoga tenemos

$$\Delta(\omega_2) \subset \Delta(\omega_1),$$

cambiando en la demostración de la afirmación ω_1 por ω_2 . Por lo tanto,

$$\Delta(\omega_1) = \Delta(\omega_2).$$

□

El siguiente teorema a continuación es conocido por **H. Dulac** [Dul03].

Teorema 3.1.2. *Si ω es una 1-forma de tipo curva generalizada con singularidad aislada y $f = 0$ una ecuación reducida de sus separatrices, entonces ω y df tienen el mismo polígono de Newton.*

Demostración: Como ω y df tienen las mismas separatrices, tenemos que ω y df cumplen las hipótesis del teorema 3.1.1, luego

$$\Delta(\omega) = \Delta(df).$$

Como ω y df tienen el mismo soporte, se concluye que ω y df poseen el mismo polígono de Newton. □

3.2. Polar genérica

Sea \mathcal{F} una foliación singular en $(\mathbb{C}^2, 0)$, definida por la 1-forma

$$\omega = \underbrace{A(x, y)}_{a_\nu + a_{\nu+1} + \dots} dx + \underbrace{B(x, y)}_{b_\nu + b_{\nu+1} + \dots} dy$$

donde $A, B \in \mathbb{C}\{x, y\}$, $A(0, 0) = B(0, 0) = 0$ y A, B son primos relativos.

Sea ω_1 una 1-forma regular, definimos Γ_{ω_1} como la polar de \mathcal{F} respecto a ω_1 dada por:

$$\omega \wedge \omega_1 = 0$$

Si $\omega_1 = p(x, y)dx + q(x, y)dy$, luego:

$$\Gamma_{\omega_1} = \{q(x, y)A(x, y) - p(x, y)B(x, y) = 0\}$$

Las curvas polares de una foliación \mathcal{F} son curvas del sistema lineal definido por el ideal $I_{\mathcal{F}} = (A, B)$.

Como $(0, 0)$ es una singularidad aislada entonces $I_{\mathcal{F}}$ es \mathcal{M} -primario¹.

¹Para mayor información sobre ideal primario puede revisar el libro **M. F. Atiyah y I. G. Macdonal: Introduction to commutative algebra**, capítulo 4.

3. Polares de una foliación

Si ν es la multiplicidad de \mathcal{F} entonces, $I_{\mathcal{F}} \setminus \mathcal{M}^{\nu+1}$ tiene como elementos curvas polares de multiplicidad ν . Existe un abierto de Zariski de $I_{\mathcal{F}} \setminus \mathcal{M}^{\nu+1}$ donde todas las curvas son equisingulares.

Consideremos

$$\Gamma_{[a:b]} = \{aA(x, y) + bB(x, y) = 0\}$$

donde $[a : b] \in P_{\mathbb{C}}^1$, existe un abierto de Zariski $\mathcal{U} \in P_{\mathbb{C}}^1$ tal que, para todo $[a : b] \in \mathcal{U}$ las curvas $\Gamma_{[a:b]}$ son reducidas y equisingulares. Se llamará **curva polar genérica** de la foliación a una curva $\Gamma_{[a:b]}$ con $[a : b] \in \mathcal{U}$.

La multiplicidad $m(\Gamma_{[a:b]}) = \nu$, si $m(\mathcal{F}) = \nu$.

Sea $F : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ un cambio de coordenadas analítico, si $F = (F_1, F_2)$, la curva polar de $F^*\mathcal{F} : (\omega \circ F)dF$ luego,

$$\begin{aligned} ((A \circ F)dx + (B \circ F)dy) \cdot (dF_1, dF_2) &= 0, \\ (A \circ F) \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} dx + \frac{\partial F_2}{\partial y} dy \right) + (B \circ F) \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} dx + \frac{\partial F_2}{\partial y} dy \right) &= 0, \\ \left[(A \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial x} + (B \circ F) \frac{\partial F_2}{\partial x} \right] dx + \left[(A \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial y} + (B \circ F) \frac{\partial F_2}{\partial y} \right] dy &= 0. \end{aligned}$$

Luego, la polar de $F^*\mathcal{F}$ en $[a : b]$ es

$$\begin{aligned} \left[(A \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial x} + (B \circ F) \frac{\partial F_2}{\partial x} \right] a + \left[(A \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial y} + (B \circ F) \frac{\partial F_2}{\partial y} \right] b &= 0, \\ I_{F^*\mathcal{F}} &= (A \circ F, B \circ F). \end{aligned}$$

La curva $F^{-1}(\Gamma_{[a:b]})$ es dado por:

$$a(A \circ F) + b(B \circ F) = 0,$$

y

$$I_{F^{-1}(\Gamma_{[a:b]})} = (A \circ F, B \circ F).$$

Dada una foliación \mathcal{F} definida por la 1-forma $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ con singularidad aislada en el origen, el **número de Milnor** $\mu(\mathcal{F})$ de \mathcal{F} se define con la multiplicidad de la intersección en el origen de los coeficientes de la 1-forma, es decir, $\mu(\mathcal{F}) = \mu(\omega) = (A, B)_0$.

Si \mathcal{F} tiene un número finito de separatrices y $f = 0$ es una ecuación reducida de sus separatrices, entonces $\mu(\mathcal{F}) \geq \mu(f)$, y se da la igualdad si y sólo si \mathcal{F} es de tipo curva generalizada (para mayor referencia de la prueba de esta afirmación puede consultar [CNS+84]).

A partir de ahora para simplificar el término de una 1-forma de tipo curva generalizada asociada a una foliación se le mencionará como una foliación curva generalizada.

Proposición 3.2.1. Sean \mathcal{F} una foliación curva generalizada, $\Gamma_{[a:b]}$ una curva polar genérica tal que $[a : b]$ no está en el cono tangente de \mathcal{F} y $C \equiv (f = 0)$ la curva formada por las separatrices de \mathcal{F} , entonces

$$I_0(\Gamma_{[a:b]}, C) = \mu(\mathcal{F}) + \nu(\mathcal{F})$$

Demostración: Supongamos que $a \neq 0$, de igual manera si $b \neq 0$. Sea $\Gamma_{[a:b]} = \bigcup_q \Gamma_q$ la descomposición de la curva polar en sus componentes irreducibles y sea $\gamma_q(t) = (x_q(t), y_q(t))$ una parametrización de Γ_q . Luego,

$$\begin{aligned} I_0(\Gamma_{[a:b]}, C) &= \sum_q I_0(\Gamma_q, C), \\ &= \sum_q \text{mult}_t(f(\gamma_q(t))), \\ &= \sum_q \left[\text{mult}_t \left(\frac{d}{dt} f(\gamma_q(t)) \right) + 1 \right], \\ &= \sum_q \left[\text{mult}_t \left(\frac{\partial}{\partial x} f(\gamma_q(t)) \cdot \dot{x}_q(t) + \frac{\partial}{\partial y} f(\gamma_q(t)) \cdot \dot{y}_q(t) \right) + 1 \right], \\ &= \sum_q [\text{mult}_t(\gamma_q^* df) + 1]. \end{aligned}$$

Como ω es curva generalizada, por el lema 3.1.1 tenemos que $\text{mult}_t(\gamma^* df) = \text{mult}_t(\gamma^* \omega)$.

3. Polares de una foliación

Así,

$$\begin{aligned}
I_0(\Gamma_{[a:b]}, C) &= \sum_q [\text{mult}_t(\gamma_q^* w) + 1], \\
&= \sum_q [\text{mult}_t(\underbrace{A(\gamma_q(t)) \cdot \dot{x}_q(t) + B(\gamma_q(t)) \cdot \dot{y}_q(t)}_{-\frac{b}{a}B(\gamma_q(t))}) + 1], \\
&= \sum_q \left[\text{mult}_t(B(\gamma_q(t))) + \text{mult}_t \left(-\frac{b}{a} \dot{x}_q(t) + \dot{y}_q(t) \right) + 1 \right], \\
&= \sum_q \left[\text{mult}_t(B(\gamma_q(t))) + \text{mult}_t \left(-\frac{b}{a} \dot{x}_q(t) + \dot{y}_q(t) \right) + 1 \right], \\
&= \sum_q \text{mult}_t(B(\gamma_q(t))) + \sum_q \text{mult}_t \left(-\frac{b}{a} \dot{x}_q(t) + \dot{y}_q(t) \right), \\
&= I_0(B, aA + bB) + I_0(\Gamma_{[a:b]}, -x + ay), \\
&= I_0(A, B) + I_0(\Gamma_{[a:b]}, -x + ay), \\
&= \mu(\mathcal{F}) + \nu(\mathcal{F}).
\end{aligned}$$

□

La siguiente proposición nos dará el comportamiento del polígono de Newton de una curva polar de una foliación $\Gamma_{[a:b]}$ respecto al polígono de Newton de la foliación \mathcal{F} .

Proposición 3.2.2. Sean \mathcal{F} una foliación definida por la 1-forma $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ y L un lado de $\mathcal{N}(\mathcal{F}; x, y)$ con pendiente $-\frac{1}{\alpha}$, $\alpha \geq 1$. Si $i + \alpha j = k$ es la ecuación de la recta de apoyo de L , entonces

$$\mathcal{N}(\Gamma_{[a:b]}) \subset \{i + \alpha j \geq k - \alpha\}.$$

Más precisamente, si $\alpha > 1$ se tiene $\Delta(B) \subset \{i + \alpha j \geq k - \alpha\}$ y $\Delta(A) \subset \{i + \alpha j > k - \alpha\}$.

Demostración: Sea $(i, j) \in \Delta(\Gamma_{[a:b]})$. Veamos dos casos para (i, j)

- Si $(i, j) \in \Delta(\Gamma_{[a:b]}) \cap \Delta(A)$, entonces $(i, j) \in \Delta(\omega)$. Así $i + \alpha j \geq k$ y tenemos $i + \alpha j \geq k > k - 1 \geq k - \alpha$, luego
 - Si $\alpha > 1$, $\Delta(A) \subset \{i + \alpha j > k - \alpha\}$.
 - Si $\alpha = 1$, $\Delta(A) \subset \{i + \alpha j \geq k - \alpha\}$.

- Si $(i, j) \in \Delta(\Gamma_{[a:b]}) \cap \Delta(B)$, entonces $(i-1, j+1) \in \Delta(\omega)$. Así $i-1 + \alpha(j+1) \geq k$ y tenemos $i + \alpha j \geq k - \alpha$, luego

$$\Delta(B) \subset \{i + \alpha j \geq k - \alpha\}.$$

□

3.3. Polares y ramificación

Dada una foliación \mathcal{F} definida por la 1-forma $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0$ y una ramificación de \mathbb{C}^2 dada por $\rho(u, v) = (u^n, v)$, entonces $\rho^*\mathcal{F}$ está definido por

$$\omega \circ \rho = \rho^*\omega = A(u^n, v)nu^{n-1}du + B(u^n, v)dv.$$

La curva $\rho^{-1}(\Gamma_{[a:b]})$ que se obtiene al ramificar $\Gamma_{[a:b]}$ está definida por:

$$\rho^{-1}(\Gamma_{[a:b]}) = \{aA(u^n, v) + bB(u^n, v) = 0\}.$$

y la curva polar de $\rho^*\mathcal{F}$, denotado por $\Gamma_{[a:b]}(\rho^*\mathcal{F})$, está definido por

$$\Gamma_{[a:b]}(\rho^*\mathcal{F}) = \{aA(u^n, v)nu^{n-1} + bB(u^n, v) = 0\}.$$

En el siguiente ejemplo se observa que $\rho^{-1}(\Gamma_{[a:b]})$ y $\Gamma_{[a:b]}(\rho^*\mathcal{F})$ no son equisingulares.

Ejemplo 3.3.1. Dada la función $f(x, y) = y^3 - x^{11}$ y sea \mathcal{F} la foliación definida por df .

Dada $[a : b] \in P_{\mathbb{C}}^1$ la curva polar $\Gamma_{[a:b]}$ está definida por:

$$\Gamma_{[a:b]} = \{-11ax^{10} + 3by^2 = 0\}.$$

luego la polar genérica está formada por dos ramas no singulares

$$\begin{aligned} -11ax^{10} + 3by^2 &= 0 \\ y^2 &= \frac{11a}{3b}x^{10} \\ y &= \pm\sqrt{\frac{11a}{3b}}x^5 \\ y_1 &= \sqrt{\frac{11a}{3b}}x^5 \quad \wedge \quad y_2 = -\sqrt{\frac{11a}{3b}}x^5. \end{aligned}$$

3. Polares de una foliación

Sea $\rho : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ ramificación dada por $\rho(u, v) = (u^3, v)$, que hace que todas las separatrices de $\rho^*\mathcal{F}$ sean no singulares. Una curva polar genérica $\Gamma_{[a:b]}(\rho^*\mathcal{F})$ de $\rho^*\mathcal{F}$ está dada por:

$$\Gamma_{[a:b]}(\rho^*\mathcal{F}) = \{-11au^{32} + bv^2 = 0\}.$$

Compuesta por dos ramas singulares

$$\begin{aligned} -11au^{32} + bv^2 &= 0 \\ v^2 &= \frac{11a}{b}u^{32} \\ v &= \pm\sqrt{\frac{11a}{b}}u^{16} \\ v_1 &= \sqrt{\frac{11a}{b}}u^{16} \quad \wedge \quad v_2 = -\sqrt{\frac{11a}{b}}u^{16}. \end{aligned}$$

Mientras si se considera el ramificado de la polar $\Gamma_{[a:b]}$, tenemos

$$\rho^{-1}(\Gamma_{[a:b]}) = \{-11au^{30} + 3bv^2 = 0\}$$

También está formada por dos ramas no singulares

$$v_1 = \sqrt{\frac{11a}{3b}}u^{15} \quad \wedge \quad v_2 = -\sqrt{\frac{11a}{3b}}u^{15}.$$

Se observa que $\Gamma_{[a:b]}(\rho^*\mathcal{F})$ y $\rho^{-1}(\Gamma_{[a:b]})$ no son equisingulares.

3.4. Teorema de Merle para foliaciones

Utilizar el polígono de Newton hace indispensable el cambio de variables $F(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}^m, \bar{y})$, es necesario verificar que la categoría de curvas generalizadas se conservan bajo tales aplicaciones. A continuación daremos dos lemas, en los cuales nos dan condiciones para que lo anterior suceda.

Lema 3.4.1 ([Rou99]). *Si ω es del tipo curva generalizada y si el cono tangente de sus separatrices no contiene $[0 : 1]$ y si $F(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}^m, \bar{y})$ con $m \in \mathbb{N}$, entonces $F^*\omega$ es del tipo curva generalizada.*

Demostración: Suponemos que ω no tiene un número finito de separatrices, sea $f = 0$ la ecuación reducida de sus separatrices, el teorema 4 del capítulo 2 página 64 de [CNS⁺84] nos dice que los números de Milnor de df y ω son iguales si y solamente si ω es del tipo curva generalizada, luego para probar el lema es suficiente verificar:

$$\mu(F^*df) = \mu(F^*\omega),$$

sabiendo $\mu(df) = \mu(\omega)$. Procedamos a calcular por separado,

$$\begin{aligned} \mu(F^*df) &= I_0 \left(m\bar{x}^{m-1} \frac{\partial f}{\partial x}(F(\bar{x}, \bar{y})), \frac{\partial f}{\partial y}(F(\bar{x}, \bar{y})) \right), \\ &= (m-1)I_0 \left(\bar{x}, \frac{\partial f}{\partial y}(F(\bar{x}, \bar{y})) \right) + I_0 \left(\frac{\partial f}{\partial x}(F(\bar{x}, \bar{y})), \frac{\partial f}{\partial y}(F(\bar{x}, \bar{y})) \right), \end{aligned}$$

como F es de grado m ,

$$I_0 \left(\frac{\partial f}{\partial x}(F(\bar{x}, \bar{y})), \frac{\partial f}{\partial y}(F(\bar{x}, \bar{y})) \right) = mI_0 \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = m\mu(df).$$

Como $[0 : 1]$ no está en el cono tangente de df , $mult_y \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = mult(df)$ y

$$I_0 \left(\bar{x}, \frac{\partial f}{\partial y}(F(\bar{x}, \bar{y})) \right) = mult_{\bar{y}} \frac{\partial f}{\partial y}(F(0, \bar{y})) = mult_y \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = mult(df).$$

Por lo tanto,

$$\mu(F^*df) = (m-1)mult(df) + m\mu(df).$$

Para $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$, calculamos

$$\begin{aligned} \mu(F^*\omega) &= I_0(m\bar{x}^{m-1}A \circ F(\bar{x}, \bar{y}), B \circ F(\bar{x}, \bar{y})), \\ &= (m-1)I_0(\bar{x}, B \circ F(\bar{x}, \bar{y})) + I_0(A \circ F(\bar{x}, \bar{y}), B \circ F(\bar{x}, \bar{y})), \\ &= (m-1)mult(\omega) + m\mu(\omega). \end{aligned}$$

Luego, como $mult(\omega) = mult(df)$ y $\mu(\omega) = \mu(df)$ se tiene

$$\mu(F^*df) = \mu(F^*\omega).$$

Por lo tanto, $F^*\omega$ es del tipo curva generalizada. □

3. Polares de una foliación

En lo siguiente, ω es una 1-forma de tipo curva generalizada y C será su única separatriz. Denotaremos m la multiplicidad de C , la cual se descompone como sigue, $m = \eta_1 \cdots \eta_g$ y los exponentes característicos de C se escriben:

$$\frac{\beta_i}{m} = \frac{\mu_i}{\eta_1 \cdots \eta_i},$$

con $\text{mcd}(\mu_i, \eta_i) = 1$ para $i = 1, \dots, g$.

Daremos primero algunas notaciones. Suponemos que la única separatriz C de ω está parametrizada por la serie de Puiseux

$$y_C(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{\frac{j+m}{m}},$$

fijo un exponente característico $\frac{\beta_i}{m}$. Por definición, β_i es el primer exponente de la serie $y_C(t^m)$ no divisible por el mcd de los exponentes precedentes y fijamos una determinación de la función,

$$y_i(x) = \sum_{j=0}^{\beta_i - m - 1} a_j x^{\frac{j+m}{m}},$$

la función $\bar{y}_i(\bar{x}) = y_i(\bar{x}^{\eta_1 \cdots \eta_{i-1}})$ es definida así como la aplicación:

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}^{\eta_1 \cdots \eta_{i-1}}, \bar{y} + \bar{y}_i(\bar{x})).$$

Denotamos,

$$\bar{A}(\bar{x}, \bar{y}) = A \circ F(\bar{x}, \bar{y}) \text{ y } \bar{B}(\bar{x}, \bar{y}) = B \circ F(\bar{x}, \bar{y}).$$

Las funciones \tilde{A} y \tilde{B} son definidas por

$$\bar{\omega} = F^* \omega = \tilde{A}(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} + \tilde{B}(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}.$$

En base a estas notaciones, enunciaremos y demostraremos los siguientes lemas que nos ayudarán en la demostración del teorema 3.4.1.

Lema 3.4.2 ([Rou99]).

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\bar{x}, \bar{y}) &= \eta_1 \cdots \eta_{i-1} \bar{x}^{\eta_1 \cdots \eta_{i-1} - 1} \bar{A}(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{B}(\bar{x}, \bar{y}) \frac{d\bar{y}_i(\bar{x})}{\bar{x}}, \\ \tilde{B}(\bar{x}, \bar{y}) &= \bar{B}(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
 F^*\omega &= A \circ F(\bar{x}, \bar{y})d(\bar{x}^{\eta_1 \cdots \eta_{i-1}}) + B \circ F(\bar{x}, \bar{y})d(\bar{y} + \bar{y}_i(\bar{x})), \\
 &= \eta_1 \cdots \eta_{i-1} \bar{A}(\bar{x}, \bar{y})\bar{x}^{\eta_1 \cdots \eta_{i-1}-1}d(\bar{x}) + \bar{B}(\bar{x}, \bar{y})\frac{d\bar{y}_i(\bar{x})}{d\bar{x}} \cdot d\bar{x} + \bar{B}(\bar{x}, \bar{y})d\bar{y}, \\
 &= \tilde{A}(\bar{x}, \bar{y})d\bar{x} + \tilde{B}(\bar{x}, \bar{y})d\bar{y}.
 \end{aligned}$$

El resultado es inmediato por identificación. \square

$\{x = 0\}$ no está en el cono tangente de ω , la 1-forma $\bar{\omega} = F^*\omega$ es de tipo curva generalizada por el lema 3.4.1.

Lema 3.4.3 ([Rou99]). *El lado de pendiente más grande del polígono de Newton de $\bar{\omega}$ es de pendiente $-\frac{\eta_i}{\mu_i}$ y es su lado principal.*

Demostración: Las curvas $\{x = 0\}$ y $\{y = 0\}$ no son separatrices de ω , su polígono de Newton posee un lado principal. Como $N(\omega)$ es una traslación del polígono de Newton de una ecuación irreducible f de C entonces, por el teorema 3.1.2, el polígono $N(\omega)$ se reduce a un solo lado.

Si $i_1 = \inf\{i \in \mathbb{N} / a_i \neq 0\}$, entonces el único lado de $N(\omega)$ es principal y de pendiente $-\frac{m}{i_1 + m}$. O bien $\frac{\beta_i}{m} = \frac{i_1 + m}{m}$ o bien llevamos a cabo la transformación

$$E_1(x_1, y_1) = (x_1^{q_1}, y_1 + a_{i_1}x_1^{r_1}),$$

donde

$$\frac{r_1}{q_1} = \frac{i_1 + m}{m} \text{ y } \text{mcd}(r_1, q_1) = 1.$$

En primer lugar, vemos que $\omega_1 = E_1^*(\omega)$ es una 1-forma de tipo curva generalizada, y si f_1 es una ecuación reducida de sus separatrices, ω_1 y f_1 tienen el mismo polígono de Newton a menos de una traslación. Toda componente de $\{f_1 = 0\}$ es una rama de $E_1^{-1}(C)$ y posee una parametrización:

$$y_1(x_1) = y_C(x_1^{q_1}) - a_{i_1}x_1^{r_1},$$

y $\frac{\beta_i}{m} \neq \frac{i_1 + m}{m}$ lo que causa que $y_1(x_1) \neq 0$ para toda determinación de $y_C(x)$.

3. Polares de una foliación

Cuando la determinación del término de orden $\frac{i_1 + m}{m}$ de $y_C(x)$ coincide con la elección de a_{i_1} ,

$$y_1(x_1) = \sum_{i=i_2}^{\infty} a_i x^{\frac{i+m}{m} q_1},$$

donde $i_2 = \inf\{i \in \mathbb{N} / i > i_1; a_i \neq 0\}$, si no $\text{mult}_{x_1}(y_1) = r_1$ y en razón del teorema 3.0.3 el polígono de Newton de f_1 posee dos lados, uno de pendiente

$$-\frac{q_2}{r_2} = -\frac{m}{q_1(i_2 + m)} \text{ con } \text{mcd}(r_2, q_2) = 1,$$

el otro de pendiente $-\frac{1}{r_1}$.

En segundo lugar, $\{y_1 = 0\}$ no es una separatriz de ω_1 , $N(\omega_1)$ tiene un lado principal de pendiente estrictamente mayor a $-\frac{1}{r_1}$, es pues el lado de pendiente $-\frac{q_2}{r_2}$.

En cada etapa, consideramos una 1-forma ω_{p-1} cuyo lado principal de su polígono de Newton es el lado de mayor pendiente, siendo $-\frac{q_p}{r_p}$ con

$$\frac{r_p}{q_1 \cdots q_p} = \frac{i_p + m}{m}, \quad i_p = \inf\{i \in \mathbb{N} / i > i_{p-1}; a_i \neq 0\},$$

donde, o bien $\frac{i_p + m}{m} = \frac{\beta_i}{m}$, o bien definimos

$$E_p(x_p, y_p) = (x_p^{q_p}, y_p + a_{i_p} x_p^{r_p}), \quad i_{p+1} = \inf\{i \in \mathbb{N} / i > i_p; a_i \neq 0\},$$

en este caso la 1-forma $\omega_p = E_p^* \omega_{p-1}$ es de tipo curva generalizada.

Primero su polígono de Newton coincide con el polígono de Newton de una ecuación reducida f_p de sus separatrices, siendo las componentes de $(E_1 \circ E_2 \circ \cdots \circ E_p)^{-1}(C)$ y son parametrizadas por

$$y_p(x_p) = y_C(x_p^{q_1 \cdots q_p}) - a_{i_1} x_p^{r_1 q_2 \cdots q_p} - \cdots - a_{i_{p-1}} x_p^{r_{p-1} q_p} - a_{i_p} x_p^{r_p}.$$

Cuando la determinación de los términos de orden estrictamente inferior a $\frac{i_p + m}{m}$ de la serie $y_C(x)$ coincide con la elección de los coeficientes a_{i_1}, \dots, a_{i_p}

$$\text{mult}_{x_p} y_p(x_p) = \frac{i_{p+1} + m}{m} \cdot q_1 \cdots q_p.$$

Si no

$$\text{mult}_{x_p} y_p(x_p) \leq \frac{i_{p+1} + m}{m} \cdot q_1 \cdots q_p = r_p.$$

El lado de mayor pendiente del polígono de Newton de ω_p es de pendiente

$$-\frac{m}{q_1 \cdots q_p (i_{p+1} + m)}.$$

Segundo, $y_p = 0$ no es la ecuación de una separatriz de ω_p , su polígono de Newton contiene un lado principal de pendiente estrictamente superior a $-\frac{1}{r_p}$ y es el lado de pendiente mayor.

El proceso se detiene debido a que los exponentes $\frac{r_p}{q_1 \cdots q_p}$ son los de la serie $y_C(x)$, en esta etapa

$$\frac{r_p}{q_1 \cdots q_p} = \frac{\beta_i}{m}.$$

□

Los extremos del lado principal de $N(\bar{\omega})$ pertenecen a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, siendo su pendiente $-\frac{\eta_i}{\mu_i}$, todo punto (α, β) tiene coordenadas enteras este lado satisface ya sea $\beta = 0$ o $\beta \geq \eta_i$. Entre los vértices del lado principal que cuentan una contribución de \tilde{B} , anotamos (α'_1, β'_1) cuya ordenada es mínima; en este caso $\beta'_1 \geq \eta_i$.

Lema 3.4.4 ([Rou99]). *Los lados del polígono de Newton de $a\bar{A}(\bar{x}, \bar{y}) + b\bar{B}(\bar{x}, \bar{y})$ que conectan los vértices de ordenadas mayores a $\beta'_1 - 1$ son de pendiente no nula y estrictamente mayor a $-\frac{\eta_i}{\mu_i}$, siempre que $[a : b]$ evita un número finito de valores.*

Demostración: La recta que contiene el lado de pendiente $-\frac{\eta_i}{\mu_i}$ de $N(\bar{\omega})$ es de ecuación:

$$\alpha + \frac{\mu_i}{\eta_i} \beta = c, \quad \text{con } c = \text{mult}_{\bar{x}} \bar{A}(\bar{x}, 0).$$

Como (α'_1, β'_1) es un vértice de $N(\bar{\omega})$ conteniendo una contribución de \bar{B} , $(\alpha'_1 + 1, \beta'_1 - 1)$ pertenece al soporte de $a\bar{A}(\bar{x}, \bar{y}) + b\bar{B}(\bar{x}, \bar{y})$. La recta que pasa por $(\alpha'_1 + 1, \beta'_1 - 1)$ y de pendiente $-\frac{\eta_i}{\mu_i}$ es de ecuación

$$\alpha + \frac{\mu_i}{\eta_i} \beta = c + 1 - \frac{\mu_i}{\eta_i}.$$

3. Polares de una foliación

Por convexidad del polígono de Newton de $a\bar{A}(\bar{x}, \bar{y}) + b\bar{B}(\bar{x}, \bar{y})$, probaremos el lema si se prueba que el soporte de $a\bar{A} + b\bar{B}$ está en el interior del semiplano superior H definido por la recta.

$$H = \left\{ (\alpha, \beta) : \alpha + \frac{\mu_i}{\eta_i} \beta \geq c + 1 - \frac{\mu_i}{\eta_i} \right\}; \quad \text{int}H = \left\{ (\alpha, \beta) : \alpha + \frac{\mu_i}{\eta_i} \beta > c + 1 - \frac{\mu_i}{\eta_i} \right\}.$$

La recta de pendiente $-\frac{\eta_i}{\mu_i}$ pasa por el punto (α'_1, β'_1) es una recta de apoyo de la cápsula convexa de $\Delta(\bar{\omega})$, en consecuencia de que

$$\alpha + \frac{\mu_i}{\eta_i} \beta \geq c,$$

para todo $(\alpha, \beta) \in \Delta(\bar{\omega})$. Si (α, β) pertenece a $\Delta(\tilde{B})$ y $(\alpha + 1, \beta - 1)$ pertenece a $\Delta(\bar{\omega})$, de la desigualdad

$$(\alpha - 1) + \frac{\mu_i}{\eta_i} (\beta + 1) \geq c,$$

O $\beta \geq \beta'_1$ o la desigualdad es estricta y el punto (α, β) está en el interior de H ; entonces

$$\text{mult}_{\bar{x}} \frac{d\bar{y}_i(\bar{x})}{d\bar{x}} > \eta_1 \cdots \eta_{i-1},$$

en consecuencia

$$\Delta \left(\frac{\tilde{B}}{\eta_1 \cdots \eta_{i-1} \bar{x}^{\eta_1 \cdots \eta_{i-1} - 1}} \cdot \frac{d\bar{y}_i(\bar{x})}{d\bar{x}} \right) \subset \text{int}H,$$

en razón de las fórmulas dadas en el lema 3.4.2,

$$\Delta(\bar{A}) \subset \Delta \left(\frac{\tilde{B}}{\eta_1 \cdots \eta_{i-1} \bar{x}^{\eta_1 \cdots \eta_{i-1} - 1}} \cdot \frac{d\bar{y}_i(\bar{x})}{d\bar{x}} \right) \cup \Delta \left(\frac{\tilde{A}}{\eta_1 \cdots \eta_{i-1} \bar{x}^{\eta_1 \cdots \eta_{i-1} - 1}} \right),$$

y todo punto (α, β) de $\Delta(\bar{A})$ pertenece a $\text{int}H$, o a

$$\Delta \left(\frac{\tilde{A}}{\eta_1 \cdots \eta_{i-1} \bar{x}^{\eta_1 \cdots \eta_{i-1} - 1}} \right),$$

en este caso $(\alpha + \eta_1 \cdots \eta_{i-1} - 1, \beta)$ pertenece a $\Delta(\bar{\omega})$,

$$\alpha + \eta_1 \cdots \eta_{i-1} - 1 + \frac{\mu_i}{\eta_i} \beta \geq c,$$

y como $\frac{\mu_i}{\eta_i} > \eta_1 \cdots \eta_{i-1}$,

$$\alpha + \frac{\mu_i}{\eta_i} \beta \geq c - \eta_1 \cdots \eta_{i-1} + 1 > c - \frac{\mu_i}{\eta_i} + 1,$$

y (α, β) pertenece a $\text{int}H$. □

Teorema 3.4.1 ([Rou96]). *Existe un conjunto finito T de \mathbb{CP}^1 tal que para todo $[a : b] \in \mathbb{CP}^1 \setminus T$ la curva,*

$$\Gamma_{[a:b]} = \{(x, y) / aA(x, y) + bB(x, y) = 0\},$$

se descompone en $\Gamma_{[a:b]} = \bigcup_{i=1}^g \Gamma_i$ donde para todo i toda componente γ de Γ_i satisface

1. $cont(C, \gamma) = \frac{\beta_i}{m}$.

2. $mult(\Gamma_i) = \eta_1 \cdots \eta_{i-1}(\eta_i - 1)$.

Demostración: Por el lema 3.4.4, para todo $[a : b]$ excepto para un número finito, el polígono $N(a\bar{A} + b\bar{B})$ comprende una sucesión de lados entre $(\alpha'_1 + 1, \beta'_1 - 1)$ y un punto $(d, 0)$, de pendientes no nulas $-\frac{1}{\nu_1}, \dots, -\frac{1}{\nu_l}$ mayores a $-\frac{\eta_i}{\mu_i}$, esto corresponde a los lados de las componentes $\bar{\gamma}_{jk}$ de la curva de ecuación $a\bar{A}(\bar{x}, \bar{y}) + b\bar{B}(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ y parametrizado

$$\bar{y}(\bar{x}) = h_{jk}\bar{x}^{\nu_j} + \varepsilon_{jk}(\bar{x}),$$

$$\text{con } h_{jk} \neq 0, \text{mult}_{\bar{x}}\varepsilon_{jk}(\bar{x}) > \nu_j, j = 1, \dots, l, k = 1, \dots, k_j.$$

Sabemos que el lado de mayor pendiente del polígono de Newton de la ecuación reducida de las separatrices de $\bar{\omega}$ es de pendiente $-\frac{\eta_i}{\mu_i}$. Toda separatriz \bar{C} de $\bar{\omega}$ está parametrizada por $\bar{y}_{\bar{C}}(\bar{x})$ donde

$$mult_{\bar{x}}\bar{y}_{\bar{C}}(\bar{x}) \leq \frac{\eta_i}{\mu_i},$$

se deduce que para todo $j \in \{1, \dots, l\}$ y $k = 1, \dots, k_j$

$$cont(\bar{C}, \bar{\gamma}_{jk}) = \frac{\mu_i}{\eta_i}.$$

Recordar que la diferencia de las ordenadas de los extremos de un lado del polígono de $N(a\bar{A} + b\bar{B})$ proporciona la multiplicidad de la unión de las ramas correspondientes y colocamos

$$\bar{\Gamma}_i = \bigcup_{j=1}^l \bigcup_{k=1}^{k_j} \bar{\gamma}_{jk},$$

entonces $mult(\bar{\Gamma}_i) = \beta'_1 - 1$. Volvamos a las coordenadas (x, y) poniendo

$$\gamma_{jk} = F(\bar{\gamma}_{jk}) \text{ y } \Gamma_i = F(\bar{\Gamma}_i);$$

3. Polares de una foliación

mostramos

$$\text{cont}(C, \gamma_{jk}) = \frac{\mu_i}{\eta_1 \cdots \eta_i} = \frac{\beta_i}{m},$$

y $\text{mult}(\Gamma_i) = \eta_1 \cdots \eta_{i-1} \cdot \text{mult}(\bar{\Gamma}_i) = \eta_1 \cdots \eta_{i-1}(\beta'_i - 1)$. Se ha visto que $\beta'_i - 1 \geq \eta_i - 1$, $\text{mult}(\Gamma_i) \geq \eta_1 \cdots \eta_{i-1}(\eta_i - 1)$.

Esto es verdad para todos los exponentes característicos $\frac{\beta_i}{m}$. Siempre $[a : b]$ evite un número finito de valores,

$$\text{mult}(aA(x, y) + bB(x, y)) = \sum_{i=1}^g \text{mult}(\Gamma_i),$$

y

$$\text{mult}(aA(x, y) + bB(x, y)) = m - 1 = \eta_1 \cdots \eta_g - 1 = \sum_{i=1}^g \eta_1 \cdots \eta_{i-1}(\eta_i - 1),$$

provoca que para todo $i \in \{1, \dots, g\}$ la igualdad

$$\text{mult}(\Gamma_i) = \eta_1 \cdots \eta_{i-1}(\eta_i - 1).$$

□

Sea $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ una 1-forma. Sabemos que para todo $[a : b]$ excepto para un número finito, la curva polar

$$\Gamma_{[a:b]} = \{(x, y) / aA(x, y) + bB(x, y) = 0\}$$

es reducida y se descompone en polares generales

$$\bigcup_{q=1}^r \gamma_q = \Gamma_{[a:b]}.$$

Definimos los siguiente números los cuales son independientes de $[a : b]$ y $[a' : b']$,

$$m_q(\omega) = \text{mult}(\gamma_q) \quad \text{y} \quad e_q(\omega) = I_0(\Gamma_{[a':b']}, \gamma_q)$$

a los cuales llamaremos **invariantes polares** de ω .

Teorema 3.4.2 ([Rou96]). *Dada ω una 1-forma de tipo curva generalizada, supongamos que C es su única separatriz entonces el tipo topológico de C está determinado por los invariantes polares de ω .*

Demostración: La prueba se basa en [Mer77] donde se muestra que el tipo topológico de C está determinado por la multiplicidad de una polar genérica y sus cocientes polares, los cuales son

$$\left\{ \frac{e_q(C)}{m_q(C)} \right\}.$$

Recordar que si ω es de tipo curva generalizada, y si f es una ecuación reducida de su única separatriz C , las multiplicidades algebraicas de ω y de df son las mismas, el resultado es que para $[a : b]$ genérico, la curva $\Gamma_{[a:b]}(\omega)$ de ecuación: $aA + bB = 0$ y la curva $\Gamma_{[a:b]}(f)$ de ecuación: $a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ tienen la misma multiplicidad. Para probar el teorema, basta mostrar que

$$\left\{ \frac{e_q(C)}{m_q(C)} \right\} = \left\{ \frac{e_q(\omega)}{m_q(\omega)} \right\}$$

entonces $\Gamma_{[a:b]}(f)$ se descompone en $\Gamma_{[a:b]}(f) = \bigcup_{q=1}^k \gamma_q(f)$,

$$e_q(C) + m_q(C) = \text{mult}_t f(x_q(t), y_q(t))$$

donde $(x_q(t), y_q(t))$ es una parametrización de $\gamma_q(f)$, luego

$$\begin{aligned} e_q(C) + m_q(C) &= I_0(\gamma_q(f), C) = I_0(C, \gamma_q(f)) \\ \frac{e_q(C)}{m_q(C)} + 1 &= \frac{I_0(C, \gamma_q(f))}{m_q(C)} \end{aligned}$$

Además, para toda curva irreducible δ cuyo contacto con C es el mismo que de $\gamma_q(f)$ con C , se tiene

$$\frac{I_0(C, \gamma_q(f))}{m_q(C)} = \frac{I_0(C, \delta)}{\text{mult}(\delta)},$$

entonces para una elección genérica de $[a : b]$, el contacto de C con las ramas de la polar $\Gamma_{[a:b]}(\omega)$ no depende de la elección de ω entre las curvas generalizadas con C como única separatriz y demostrar el teorema es probar que para toda rama $\gamma_p(\omega)$ de una polar $\Gamma_{[a:b]}(\omega)$ parametrizada por $(x_p(t), y_p(t))$, se tiene:

$$\frac{e_p(\omega)}{m_p(\omega)} + 1 = \frac{I_0(C, \gamma_p(\omega))}{m_p(\omega)}$$

siempre que $[a : b]$ evite un número finito de valores.

3. Polares de una foliación

Por definición

$$aA(x_p(t), y_p(t)) + bB(x_p(t), y_p(t)) = 0$$

y para todo elemento $[a', b']$ de $P_{\mathbb{C}}^1$ salvo un número finito:

$$\text{mult}_t(a'A(x_p(t), y_p(t)) + b'B(x_p(t), y_p(t))) = I_0(\Gamma_{[a':b']}, \gamma_p) = e_p(\omega)$$

incluso suponiendo $ab \neq 0$, se tiene

$$\text{mult}_t A(x_p(t), y_p(t)) = \text{mult}_t B(x_p(t), y_p(t)) = e_p(\omega).$$

Aplicamos el lema 3.1.1

$$\text{mult}_t \omega(x_p(t), y_p(t)) = \text{mult}_t df(x_p(t), y_p(t)).$$

Si los ejes coordenados son elegidos tal que $\{y = 0\}$ sea el cono tangente de $\Gamma_{[a:b]}(\omega)$,

$$\text{mult}_t y_p(t) > \text{mult}_t x_p(t) = m_p(\omega).$$

Luego,

$$\text{mult}_t \omega(x_p(t), y_p(t)) = \text{mult}_t df(x_p(t), y_p(t))$$

$$\text{mult}_t \omega(x_p(t), y_p(t)) = \text{mult}_t f(x_p(t), y_p(t)) - 1$$

$$e_p(\omega) + m_p(\omega) - 1 = I_0(C, \gamma_p(\omega)) - 1$$

$$e_p(\omega) + m_p(\omega) = I_0(C, \gamma_p(\omega)).$$

□

Bibliografía

- [Bar96] Evelia García Barroso. *Invariants des singularités de courbes planes et courbure des fibres de Milnor*. PhD thesis, Universidad de La Laguna, 1996.
- [Ben09] Renato Benazic. Algunas observaciones sobre el concepto de foliación analítica. *Pesquimat*, 12(2), 2009.
- [BK12] Egbert Brieskorn and Horst Knörrer. *Plane Algebraic Curves: Translated by John Stillwell*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [Bra] K Brauner. Zur geometrie der funktionen zweier komplxe ver ander-lichen. *Abh. aus dem Math. Sem. Hamburg 6*.
- [CA00] Eduardo Casas-Alvero. *Singularities of plane curves*, volume 276. Cambridge University Press, 2000.
- [Can93] Jose Cano. An extension of the newton-puiseux polygon construction to give solutions of pfaffian forms. In *Annales de l'institut Fourier*, volume 43, pages 125–142, 1993.
- [CCD13] Felipe Cano, Dominique Cerveau, and Julie Déserti. *Théorie élémentaire des feuilletages holomorphes singuliers*. Belin, 2013.
- [Che08] Alain Chenciner. *Courbes algébriques planes*. Springer, 2008.

BIBLIOGRAFÍA

- [CNS⁺84] César Camacho, Alcides Lins Neto, Paulo Sad, et al. Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields. *Journal of Differential Geometry*, 20(1):143–174, 1984.
- [Dul03] Henri Dulac. *Recherches sur les points singuliers des équations différentielles*. Gauthier-Villars, 1903.
- [FS16] Percy Fernández and Nancy Saravia. Polígono de newton de una foliación de tipo curva generalizada. *Pro Mathematica*, 29(57):47–81, 2016.
- [GH14] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. John Wiley & Sons, 2014.
- [GP91] J. Gwoździewicz and A. Płoski. On the merle formula for polar invariants. *Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź*, 41(7):61–67, 1991.
- [Gun90] Robert Clifford Gunning. *Introduction to holomorphic functions of several variables*, volume 2. CRC Press, 1990.
- [Hef03] Abramo Hefez. Irreducible plane curve singularities. *LECTURE NOTES IN PURE AND APPLIED MATHEMATICS*, pages 1–120, 2003.
- [HKT13] James William Peter Hirschfeld, Gábor Korchmáros, and Fernando Torres. *Algebraic curves over a finite field*. Princeton University Press, 2013.
- [KL77] Tzee-Char Kuo and Yung-Chen Lu. On analytic function germs of two complex variables. *Topology*, 16(4):299–310, 1977.
- [Mer77] Michel Merle. Invariants polaires des courbes planes. *Inventiones mathematicae*, 41(2):103–111, 1977.
- [MS01] R. Mol and M. Soares. Índices de campos holomorfos e aplicações. *Publicações Matemáticas do IMPA*, 23, 2001.

- [Pér01] Nuria Corral Pérez. *Curvas polares de una foliación singular*. PhD thesis, Universidad de Valladolid, 2001.
- [Pło90] Arkadiusz Płoski. Newton polygons and the Łojasiewicz exponent of a holomorphic mapping of \mathbb{C}^2 . In *Annales Polonici Mathematici*, volume 51, pages 275–281. Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, 1990.
- [Rou96] Patrick Rouillé. *Courbes polaires et courbure*. PhD thesis, 1996.
- [Rou99] Patrick Rouillé. Théorème de merle: cas des 1-formes de type courbes généralisées. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática-Bulletin/Brazilian Mathematical Society*, 30(3):293–314, 1999.
- [Zar32] Oscar Zariski. On the topology of algebroid singularities. *American Journal of Mathematics*, 54(3):453–465, 1932.

