PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

RECONFIGURACIÓN DE POLÍGONOS PARA DETERMINAR LA MEDIDA DE SU ÁREA CON ESTUDIANTES DEL SEGUNDO GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas que presenta a

MELISSA DENISSE CASTILLO MEDRANO

Dirigida por

DRA. JESÚS VICTORIA FLORES SALAZAR

San Miguel, 2018

RESUMEN

El presente trabajo de investigación tuvo por objetivo analizar la reconfiguración que realizan estudiantes para determinar la medida de área de polígonos. Se realizó con estudiantes de segundo grado de educación secundaria de una institución educativa privada de Lima cuyas edades están comprendidas entre los 13 y 14 años. La problemática que suscitó este estudio se fundamentó en la dificultad que tienen los estudiantes para determinar la medida de área de polígonos, dificultad generada por la forma de enseñanza de este objeto matemático basada en el empleo de fórmulas. Se utilizó como metodología aspectos de la Ingeniería Didáctica y como referente teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica, haciendo énfasis en el registro figural, en las aprehensiones y en la operación de reconfiguración que es una modificación mereológica en la que una figura inicial es descompuesta en sub-figuras para luego ser reorganizadas en una nueva figura de contorno global diferente a la inicial. Con respecto a la parte experimental de la investigación, se realizó una secuencia de dos actividades que fueron elaboradas con la intención de lograr que los estudiantes desarrollen la operación de reconfiguración de polígonos. En la primera actividad se abordó la reconfiguración por medio del Tangram; y en la segunda actividad, por medio de la malla cuadriculada. Asimismo, se identificó la aprehensión perceptiva, operatoria y discursiva que movilizaron los estudiantes en la secuencia de actividades y, se concluyó que los estudiantes del segundo grado de educación secundaria lograron reconfigurar los polígonos para determinar la medida de su área.

Palabras clave: Reconfiguración; Registro figural; Aprehensión; Medida de áreas.

ABSTRACT

This research aims to analyze the reconfiguration that makes a second grade students to find the measure of area of polygons. This investigation was made with high school students between 13 and 14 years old who belong to a private school in Lima. The main problem that motivated this study was the difficulty of students to find the measure of an area, this trouble as a consequence of how the concept of area was teaching based in the use of formulas. We use as methodology aspects of Teaching Engineering and as theoretical framework aspects of Theory of Semiotics Representation Registration. Therefore, we focus on figural registration, apprehensions and operation of reconfiguration, which involves making mereologic changes to decompose an initial figure in sub-figures to later compose them in a new figure with overall contour different to the initial figure and it can determine the extent of the area this mathematical object. Regarding the experimental part of the research, we carried out a sequence of two activities that were created with the intention of developing the operation of reconfiguration of polygons. In the first activity, students developed the reconfiguration through the use of tangram and in the second activity, through the grid mesh. Likewise, we also identify the perceptual, discursive, and operational apprehensions that students mobilized during the activities. Finally, we consider the second grade students were able to reconfigurate polygons to find the measure of their area.

Keywords: Reconfiguration; Figural registration; Apprehensions; Measure of areas.

Dedicada a mi querida madre, Carmen Medrano, por ser madre y padre a la vez, por entregar su vida entera por mí y mis hermanos, por todo el sacrificio que hizo y hace para que podamos ser mejores personas y tener una mejor educación. Gracias por enseñarme que todo lo que uno se gana en esta vida es a base de esfuerzo y constancia. Gracias por ser mi modelo, mi sostén y mi motor, ese que me da el impulso para seguir adelante día a día. Eres la persona más importante en mi vida, a la que dedicaré siempre cada uno de mis logros.

Te amo infinitamente.

AGRADECIMIENTOS

A mi estimada asesora, Dra. Jesús Victoria Flores Salazar, por su apoyo incondicional durante el transcurso de toda la investigación, por las observaciones y sugerencias oportunas que me permitieron mejorar cada una de las versiones de este estudio, pero sobre todo por su constante orientación y disposición sin los cuales este y otros proyectos no se hubieran hecho realidad.

A los miembros del jurado, Mg. Verónica Neira Fernández, por sus valiosas contribuciones y sugerencias realizadas durante las exposiciones de los avances de tesis, así como sus revisiones y observaciones en la versión final de la misma. A la Dra. Maria José Ferreira da Silva, por su disposición y tiempo para trabajar conmigo durante la estancia de investigación en la Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, y por compartir su experiencia y conocimientos en la mejora de este estudio.

A todos los profesores de la maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú por compartir sus valiosas experiencias profesionales y contribuir así en mi formación. Toda mi admiración y agradecimiento a los profesores que me enseñaron con dedicación, que manifestaron su disposición para ayudarme y seguir creciendo.

A la Pontificia Universidad Católica del Perú por las becas obtenidas gracias a esta investigación, al Vicerrectorado de Investigación por haber sido elegida beneficiaria del Programa de Apoyo a la Investigación para Estudiantes de Posgrado (PAIP) y del fondo de Responsabilidad Social Universitaria (RSU), y a la Escuela de Posgrado por haber sido seleccionada como beneficiaria del Fondo Marco Polo.

A mis estudiantes de segundo grado de secundaria, sujetos participantes de la investigación, por su total disposición y colaboración con la aplicación de este estudio. A los directivos de mi centro de trabajo por permitirme la aplicación de esta investigación, y por la comprensión y soporte durante su transcurso.

A mi querida familia, en especial a mi madre Carmen Medrano por su apoyo absoluto durante el transcurso de toda la maestría y a Diego Ortiz por su comprensión y paciencia, por estar a mi lado en los momentos más difíciles e importantes en mi vida.

A mis compañeros de la maestría con quienes compartimos amenas clases y a mis compañeros de promociones anteriores que tuvieron la amabilidad de responder a mis dudas. De manera especial, a mi amigo Mario Olano por la motivación y apoyo constante en el camino de la investigación, por las experiencias y conocimientos compartidos a lo largo de los cursos.

ÍNDICE

ANEXO C – ACTIVIDAD 2: HALLEMOS LA MEDIDA DEL ÁREA DE POLÍGONOS 118

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE CUADROS

CONSIDERACIONES INICIALES

El interés por analizar la reconfiguración de polígonos para determinar la medida de su área que realizan estudiantes de segundo grado de educación secundaria surge a raíz de observar que los estudiantes manifiestan dificultades en determinar la medida de área de un polígono. Esta dificultad es generada por la forma de enseñanza que se da en la escuela en la que los profesores de Matemática, apoyados en los libros de texto, introducen el concepto de área como un número asociado a una superficie e inmediatamente pasan al cálculo del área mediante el uso de fórmulas. E incluso en algunos casos, se pasa rápidamente al cálculo del área utilizando la fórmula sin hacer la relación con la superficie.

En ese sentido, partimos de las ideas de Duval (2012b) con respecto a la reconfiguración, quien la presenta como una operación que permite realizar tratamientos como la medida de área mediante la suma de las partes. Asimismo, consideramos también la hipótesis de Douady y Perrin-Glorian (1987) quienes mencionan la necesidad de construir la noción de área como magnitud y no solo como número.

Teniendo en cuenta esta realidad presentamos esta investigación que tiene por objetivo general analizar la reconfiguración que realizan estudiantes del segundo grado de educación secundaria para determinar la medida del área de polígonos. Para tal fin, identificamos la aprehensión perceptiva, discursiva y operatoria, y los tipos de reconfiguración que realizan estudiantes al desarrollar una secuencia didáctica.

Es por ello, que utilizamos aspectos de la Teoría de Registro de Representación Semiótica de Duval como marco teórico y aspectos de la Ingeniería Didáctica como marco metodológico y, de esta forma, creamos una secuencia didáctica que nos permita alcanzar los objetivos antes mencionados.

La secuencia didáctica estuvo compuesta por dos actividades. La primera de ellas involucró el trabajo con material didáctico mediante el Tangram, y la segunda actividad el trabajo con la malla cuadriculada. En ambas actividades esperábamos que los estudiantes reconfiguraran diferentes tipos de polígonos.

La aplicación de la secuencia de actividades estuvo a cargo del profesor de Matemática quien a su vez fue el investigador. El análisis de las producciones de los estudiantes se realizó mediante la ficha de actividades que resolvieron los estudiantes y de la filmación que se hizo a la aplicación.

Por todo ello, hemos considerado estructurar la presente investigación en cuatro capítulos de la siguiente manera:

En el capítulo I, se presenta las investigaciones de referencia que marcan los lineamientos de nuestra investigación, las cuales han sido organizadas por dos ejes temáticos: investigaciones relacionadas con la medida del área de polígonos y con la teoría de Registros de Representación Semiótica. Asimismo, se justifica el problema de investigación y se formula tanto la pregunta de investigación como los objetivos de la misma. También se presenta aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue como soporte metodológico para dicha investigación, la misma que consta de cuatro etapas: Análisis preliminares, Concepción y Análisis a priori, Experimentación, y Análisis a posteriori y Validación.

Luego, como parte de los Análisis Preliminares, primera etapa de la Ingeniería Didáctica, se elaboró el capítulo II y III.

En el capítulo II, se presenta aspectos del marco teórico de la investigación referido a la Teoría de Registros de Representación Semiótica en lo que respecta a Geometría y área. Por esta razón se hace énfasis en el registro figural, la operación de reconfiguración y las aprehensiones.

En el capítulo III, se presenta brevemente aspectos históricos de la medida de área; el aspecto didáctico del área como magnitud, según Douady y Perrin-Glorian (1987); el aspecto cognitivo de los sujetos de investigación, con base en las evaluaciones censales a nivel nacional; y el análisis del concepto de área en dos libros de texto de segundo grado de secundaria.

En el capítulo IV, se presenta el experimento que comprende la descripción de los sujetos de investigación, la descripción de la secuencia de dos actividades acompañado del análisis a priori y a posteriori de las producciones de dos estudiantes en cada uno de los ítems, y los resultados de la experimentación

Finalmente, se presenta las consideraciones finales de la investigación en relación con el marco teórico y metodológico, a la pregunta de investigación, al objetivo general, y las recomendaciones para futuras investigaciones que surgirán a raíz de nuestra investigación.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En el primer capítulo, se presenta las investigaciones de referencia en relación con la reconfiguración de polígonos para determinar la medida de su área, la justificación con base en los documentos curriculares para realizar nuestro estudio, la pregunta y los objetivos de la investigación. Asimismo, se explica el sustento del porqué esta investigación es cualitativa y los aspectos de la Ingeniería Didáctica que se han considerado.

1.1 Investigaciones de referencia

Las investigaciones de referencia consideradas para esta investigación fueron organizadas por dos ejes temáticos: investigaciones relacionadas a la medida del área de polígonos e investigaciones relacionadas con la Teoría de Registros de Representación Semiótica en lo que respecta a Geometría y área.

Con relación a las investigaciones relacionadas a la medida del área de polígonos, tenemos la de Douady y Perrin-Glorian (1983) pues son las primeras investigaciones, que se ha identificado, que utilizan el término área como magnitud para comprender que el área puede ser definida como un tipo de equivalencia a partir de una función medida en la que los procedimientos de composición y descomposición de figuras bidimensionales permiten la movilización de juegos de marcos geométricos y numéricos. Desde la teoría de Juego de Marcos o de Cuadros, como también se le conoce, Douady y Perrin-Glorian (1987) plantearon que es posible aprender los objetos matemáticos en la medida que se pueda trabajar con distintos tipos de marcos para un mismo problema: un marco geométrico constituido por las figuras planas como el cuadrado, rectángulo, triángulo, etc.; un marco numérico constituido por las medidas de las áreas de las figuras planas y, un marco de las magnitudes constituido por las clases de equivalencias de figuras de misma área.

Por otro lado, la investigación de Corberán (1996) es una tesis doctoral que aporta valiosa información sobre la evolución histórica del concepto área pues la autora se contactó con otros grupos de investigación interesados en el mismo objeto matemático e hizo una revisión de literatura especializada. Después de hacer un análisis exhaustivo de diferentes investigaciones sobre el objeto área, concluyó que todas coinciden en el alto grado de incomprensión que hay en los estudiantes sobre dicho concepto y esto debido en gran medida a la forma incorrecta de su enseñanza. Luego, la investigadora realizó un análisis didáctico del concepto área de polígonos, para ello efectuó un estudio global en donde se contempló sus distintos aspectos, especialmente aquellos causantes de error en los estudiantes.

Después, Corberán (1996) evaluó el efecto de la enseñanza que habitualmente se da a los estudiantes de primaria y cómo este iba evolucionando al finalizar la primaria, secundaria y universidad. Para ello, la autora administró un test a 521 estudiantes, de 8° año de Educación General Básica (13-14 años), 2° de Bachillerato (15-16 años), Curso de Orientación Universitaria (17-18 años), de 3° de la Escuela Magisterio (20-22 años) y 5° de la Facultad de Matemáticas (22-24 años). Este test contemplaba diferentes aspectos del área como: concepciones del área; unidad de medida; relación entre área y la forma de una superficie; fórmulas para el cálculo; relación entre el área de un rombo, paralelogramo y trapecio con la del rectángulo; conservación y/o variación del área y/o perímetro de una superficie cuando era sometido a determinadas transformaciones; entre otros.

Luego, la investigadora diseñó y experimentó con estudiantes del 4° curso de Enseñanza Secundaria Obligatoria (15-16 años), una unidad de enseñanza con el fin de corregir los errores detectados. Con esta unidad se pretendía presentar a los alumnos el área disociada de la forma de la superficie y del número que la mide, y el área disociada del perímetro de la superficie. Esto último a partir del estudio de la variación y/o conservación del área y perímetro de una superficie cuando está sometida a ciertas transformaciones.

La autora concluyó que existe una falta de comprensión por parte de los estudiantes de las fórmulas para el cálculo de áreas, lo que impide una correcta resolución de las tareas que requieran su uso comprensivo. La forma mecánica de enseñanza trae como consecuencia que los estudiantes solo se dediquen a la aplicación rutinaria de fórmulas para el cálculo de la medida del área. También concluyó que los estudiantes de octavo grado, de quienes se esperaba los mejores resultados por tener mucho más reciente la enseñanza sobre de este tema, fueron los que precisamente obtuvieron los peores resultados y a través de sus respuestas evidenciaron mayor grado de desconocimiento e incomprensión del área. Resulta interesante observar que luego de más de veinte años se siguen observando las mismas dificultades en los estudiantes.

Igualmente, Herendiné (2016) realizó una investigación en una escuela de Hungría con estudiantes desde quinto hasta octavo grado cuyas edades estaban comprendidas entre los 11 y 14 años. El principal objetivo del investigador era recoger a través de una prueba las ideas sobre los conceptos de área y perímetro que tienen los estudiantes después de unos meses de haber aprendido dichos conceptos. El autor concluyó que se pudo evidenciar una baja comprensión de los estudiantes con respecto a estos conceptos geométricos. Además, Herendiné (2016) también concluyó que la imagen mental del concepto de área no necesariamente se desarrolla a través de los años, puesto que a partir del estudio identificó que los estudiantes de octavo grado presentaron mayores dificultades que los de quinto y sexto grado. El investigador también concluyó que el uso de fórmulas ocasiona malentendidos en los estudiantes como, por ejemplo, pensar que la medida del área siempre va a ser el resultado del producto de dos lados cualesquiera en una figura.

Estas investigaciones presentadas fueron llevadas a cabo en países europeos como España y Hungría. Sin embargo, situaciones similares se presentaron en países más cercanos al nuestro.

Pérez (2016) realizó una investigación para su tesis doctoral cuyo objetivo era la construcción del significado robusto del concepto área y la caracterización del pensamiento geométrico, con estudiantes de sexto grado (entre 10 y 13 años) de cuatro instituciones educativas de Bogotá, Colombia.

Para ello, la investigadora diseñó 11 actividades que fueron implementadas con 176 estudiantes. Estas actividades fueron planificadas para que los estudiantes puedan resolver los problemas realizando transformaciones a las figuras geométricas por medio de acciones de descomposición, recomposición y comparaciones. Esto permitió que los estudiantes lleguen a deducir las fórmulas aritméticas para el cálculo del área de figuras geométricas.

La investigadora concluyó que la medición, en particular, la construcción del significado del concepto de área es primeramente geométrico, y combina luego elementos aritméticos que se basan en relaciones geométricas. Detrás de la estrategia de descomposición y composición, se halla la identificación y el uso de propiedades geométricas de las figuras involucradas. Esta identificación tiene su raíz en la manipulación física de fichas con cierta forma y se hace efectiva en la construcción del significado del concepto área. Durante el proceso de realización de las actividades, los estudiantes construyeron el concepto área utilizando su pensamiento geométrico operacionalmente.

En el mismo país Alfonso, Benítez, Peralta, Ramírez y Restrepo (2016) realizaron una investigación en la que usaron procedimientos geométrico-numéricos. Con procedimientos geométricos los autores se refieren al tratamiento cualitativo del área, por ejemplo, la descomposición de polígonos en partes iguales o de diferente forma y tamaño, y la recomposición por complementariedad de formas de las partes en la que se ha dividido el polígono con el fin de facilitar la comprensión de la conservación del área de una superficie.

Mientras que, con los procedimientos numéricos, Alfonso et al. (2016), hacen referencia al tratamiento cuantitativo del área, por ejemplo, cuando se cuenta los cuadraditos de una cuadrícula como unidad de medida. Los autores concluyeron que esta forma de trabajo resultó más sencilla para estudiantes, de aproximadamente 11 y 12 años, y les permitió avanzar hacia procedimientos de naturaleza simbólica y, en el futuro, poder llegar a generalizar fórmulas para realizar cálculos.

Por otro lado, Pessoa (2010) realizó un estudio diagnóstico para su tesis de maestría sobre los procedimientos movilizados por estudiantes de sexto año, aproximadamente con 12 años, en la resolución de actividades de cálculo de área de figuras planas sobre mallas cuadriculadas. Para ello, adoptó la definición de área como magnitud de Douady y Perrin-Glorian y aspectos teóricos de la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau, específicamente la noción de variable didáctica. Para tal fin, la autora investigó la influencia de cinco variables didácticas: el contorno de la figura, el llenado de la figura, la posición relativa de los polígonos en relación a la malla, la medida del área tomando un cuadradito de la malla como superficie unitaria y el tipo de figura. En ese sentido, aplicó un test de 14 preguntas sobre el cálculo del área y lo administró a 100 estudiantes de cinco escuelas diferentes en la región metropolitana de Recife, Brasil.

La investigadora concluyó que es más difícil para un estudiante calcular la medida del área de una figura cuyos lados no están sobre la cuadriculada que cuando sí lo están. Además, que el uso de la malla cuadriculada propició el cálculo de la medida del área como magnitud mediante el conteo de cuadraditos de la malla cuadriculada y en este proceso se realiza dos operaciones distintas, una geométrica y otra numérica. Ello la llevó a confirmar que los estudiantes calculan la medida de áreas de las figuras utilizando más el registro numérico que el registro figural. En cuanto a las variables investigadas solo dos de las cinco actuaron como variables didácticas: la posición relativa de los polígonos en relación con la malla y el tipo de figura.

En el mismo país, Santana y Silva (2016) realizaron un estudio cuyo objetivo era analizar las posibilidades del uso de poliminós como recurso didáctico en la construcción de los conceptos de área y perímetro como magnitudes geométricas desde la Teoría de Juego de Cuadros. Las autoras analizaron el proceso de yuxtaposición que este recurso posibilita mediante la composición y descomposición de figuras planas, manifestaron además que muchas investigaciones en Educación Matemática analizan la construcción del concepto área y perímetro, encontrando dificultades relacionadas en la compresión de dichos objetos como, por ejemplo, no reconocer que diferentes figuras pueden tener la misma medida de área, la confusión entre área y perímetro, y el uso indebido de fórmulas.

Santana y Silva (2016) concluyeron que la exploración con los poliminós permitió a los estudiantes, aproximadamente de 11 años, articular los cuadros numéricos y el de las magnitudes. Asimismo, permitió la producción de figuras planas por el proceso de composición por yuxtaposición y el uso de unidades no convencionales. Por esta razón, sugirieron la necesidad de realizar estudios más detallados sobre las posibilidades del uso de los poliminós, como recurso didáctico en el estudio de área y perímetro, así como estudios semejantes con el tangram, las mallas cuadriculadas y recursos tecnológicos.

Asimismo, Da Silva (2011) presentó un estudio cuyo objetivo era analizar el enfoque de la longitud, el perímetro y el área en libros didácticos aprobados por el Programa Nacional del Libro Didáctico (PNLD) desde el 2008 hasta el 2011, según la Teoría Antropológico de lo Didáctico. Los análisis se realizaron con base en los trabajos de Douady y Perrin-Glorian, quienes consideran que el enfoque de área como magnitud favorece la construcción de su sentido por parte de los alumnos.

Dicho estudio fue desarrollado en tres etapas. En la primera etapa se construyó una visión general del trabajo con todos los contenidos de los libros didácticos en sexto año (aproximadamente para estudiantes de 12 años) aprobados por el PNLD y seleccionó aquellos libros que serían analizados en la etapa siguiente. En la segunda etapa, se identificó los tipos de tareas contemplados y los predominantes en los capítulos referentes a longitud, perímetro y área en ocho libros. La tercera etapa consistió en el análisis de las organizaciones matemáticas puntuales en torno a los tipos de tareas predominantes en el estudio de longitud, perímetro y área en dos libros didácticos de 6° año.

Según el autor, los resultados de la investigación indicaron que, en la mayoría de las obras analizadas, el énfasis en las magnitudes geométricas era insuficiente, y el foco se daba en la medida en vez que en la magnitud. Los tipos de tareas predominantes fueron la conversión de unidades de longitud, el cálculo del perímetro y del área en figuras planas. En cuanto al cálculo del área de figuras planas, se observó que la tarea principal fue el conteo de la cantidad de superficies unitarias necesarias para embaldosar una figura y el uso de fórmulas.

Por otro lado, Ferreira (2010) realizó una investigación cuyo objetivo fue investigar la construcción del concepto de área por alumnos del tercer ciclo de Enseñanza Fundamental. La autora usó como referente teórico a la Teoría de Campos Conceptuales en la que el área es considerada como una tríada: conjunto de situaciones que dan sentido al área, un conjunto de invariantes operatorias subyacentes a la acción y un conjunto de representaciones simbólicas en juego. También usó el enfoque de área como magnitud según Douady y Perrin-Glorian.

Con respecto a la metodología, Ferreira (2010) hizo cuatro estudios, todos realizados con estudiantes del 3° ciclo (entre 11 y 12 años). El primero consistió en un análisis del enfoque de los conceptos de área y perímetro según los Parámetros Curriculares Nacionales (PCN) de Matemática en toda la Enseñanza Fundamental, en dos colecciones de libros didácticos (uno de 1° y 2° ciclo y otro de 3° y 4° ciclo). En el segundo estudio se elaboró la aplicación de una prueba diagnóstica para recoger los conocimientos de los alumnos de 6° año (aproximadamente 12 años) acerca de longitud y área. El tercer estudio consistió en la elaboración y aplicación de una secuencia didáctica. Después, se aplicó un test para verificar los conocimientos que habían evolucionado y las dificultades aún persistentes después de la secuencia didáctica. Luego de ello, se seleccionó a cuatro parejas de alumnos para una entrevista con el fin de esclarecer algunos procedimientos utilizados por ellos.

La investigadora concluyó que tanto el PCN como los libros didácticos presentan situaciones asociadas predominantemente al cuadro numérico y con figuras poligonales. A raíz de ello, procuraron investigar en los demás estudios cómo los estudiantes lidiaban con las situaciones que rompen con esa tendencia numérica. Los análisis de los resultados mediante las entrevistas mostraron avances con respecto a la descomposición y recomposición de figuras, el embaldosado de superficies tomando otra superficie como unidad de medida y la diferencia entre contorno y perímetro. Por otro lado, también concluyó que persisten aún dificultades en la disociación entre el concepto de área y perímetro mediante situaciones que no contemplen la representación simbólica de figuras, por lo que se sugiere la necesidad de nuevas investigaciones, como el estudio de otras situaciones que contribuyan para la construcción de esos conceptos.

En el Perú, Castillo (2015) realizó una investigación para su tesis de maestría en la que analizó los efectos de una secuencia didáctica desarrollada con cuatro estudiantes peruanos del sexto grado de educación primaria de 11 años. La investigadora planteó una secuencia de actividades que buscaba contribuir en la construcción del concepto de área como magnitud, basándose en aspectos propios de la Teoría de Situaciones Didácticas. Como resultado, la investigadora obtuvo que los estudiantes lograron movilizar los conceptos asociados al área de figuras geométricas simples y compuestas diferenciándola de su medida. Asimismo, la autora concluyó que los procedimientos como el conteo de unidades, uso de cuadrícula, descomposición y composición, permitieron a los estudiantes medir el área de los diversos polígonos, considerando que el área como magnitud es independiente de la unidad de medida elegida.

En relación a las investigaciones vinculadas con la Teoría de Registros de Representación Semiótica en lo que respecta a Geometría y área, presentamos a Marmolejo y Vega (2012) quienes realizaron una investigación en México en la que destacaron procedimientos cognitivamente potentes y económicos, como introducir trazos en una figura, dividirla en partes, aplicar sobre ella operaciones posicionales como rotaciones, traslaciones y transformar una figura en otra de contorno global diferente, realizados por estudiantes entre ocho y nueve años de edad pertenecientes al tercer grado de primaria. Los resultados de la investigación muestran que, de los 150 estudiantes evaluados, aproximadamente solo 15 estudiantes lograron resolver las dos tareas propuestas usando estrategias cognitivamente potentes y económicas. Los autores concluyeron que las áreas de regiones poligonales se constituyen como una entrada a la enseñanza de la Geometría que debe ser introducida en los primeros grados de la educación primaria y reforzada durante los siguientes años en la educación secundaria.

Asimismo, Popoca y Acuña (2011) indagaron cómo estudiantes mexicanos de 15 y 16 años de edad enfrentan tareas de identificación de figuras geométricas equivalentes en área que cambian de posición, forma o son reconfiguradas. Las autoras se apoyaron en el doblado de papel para representar las figuras de igual área y la comparación la hicieron luego de dibujar, cortar y doblar las figuras. Las investigadoras concluyeron que el reconocimiento del área igual se dificulta conforme aumenta el número de cortes. También concluyeron que los estudiantes observan la figura por su apariencia y aspecto global, en ausencia de sus propiedades figurales, por tanto, no pueden establecer relaciones matemáticas.

Por el lado brasileño, Moran (2016) realizó una investigación con 15 profesores de Educación Básica en la que estudió los diferentes tratamientos figurales que se dan al trabajar usando material manipulable, software GeoGebra y expresión gráfica, este nombre le atribuyó al trabajo con lápiz y papel. Al trabajar con cada uno de estos recursos se puso en juego el uso de diferentes registros, según menciona la autora, los estudiantes transitaron entre el registro figural, numérico y algebraico. La investigadora concluyó que los tratamientos figurales difieren dependiendo del tipo de registro utilizado, asimismo las movilizaciones a otros registros varían en función al registro de partida. En este sentido, la autora valoró la importancia de promover en la escuela la variación de las representaciones utilizadas para mejorar la comprensión de los estudiantes en Geometría usando Tangram, el software GeoGebra y expresión gráfica.

En el Perú, Borja (2015) planteó una investigación para su tesis de maestría con estudiantes peruanos del segundo grado de educación secundaria cuyas edades oscilaban entre los 12 y 15 años, acerca de la reconfiguración del trapecio isósceles utilizando el soporte de una malla cuadriculada y del uso del software GeoGebra para hallar la medida del área del trapecio isósceles.

Al analizar la producción de los estudiantes, la autora identificó el desarrollo de la aprehensión perceptiva, discursiva, secuencial y operatoria. Asimismo, observó que los estudiantes movilizaron sus conocimientos previos sobre la medida del área del trapecio cuando emplearon la fórmula para hallar la medida de su área. La autora finalmente concluyó que los estudiantes de segundo grado de educación secundaria lograron hallar la medida del área del trapecio a partir de la reconfiguración de dicho objeto matemático.

Todas estas investigaciones tienen como común denominador el hecho de haber usado aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica para sustentar su marco teórico en lo que concierne a Geometría y área.

Vistas las investigaciones de referencia, podemos afirmar que estos estudios son relevantes para nuestra investigación. En primer lugar, porque nos muestran la preocupación de los investigadores por estudiar la noción de medida del área de figuras planas. Y en segundo lugar porque nos manifiestan el interés por analizar los procesos que siguen los estudiantes al determinar el área de los polígonos mediante la reconfiguración de las figuras, a través del uso de la malla cuadriculada, y estrategias metodológicas como el uso de materiales didácticos.

A continuación, presentamos nuestra justificación para el presente estudio.

1.2 Justificación

Las investigaciones de Douady y Perrin-Glorian (1987), Corberán (1996), Pessoa (2010), Da Silva (2010), Ferreira (2011), Popoca y Acuña (2011), Marmolejo y Vega (2012), Borja (2015), Castillo (2015), Herendiné (2016), Alfonso et al. (2016), Moran (2016), mencionan la importancia de estudiar la medida del área de figuras poligonales mediante procedimientos geométricos como la descomposición y composición o reconfiguración, como la llamamos desde la Teoría de Registros de Representación Semiótica.

En síntesis, podemos afirmar que el área es uno de los conceptos geométricos más importantes que se enseñan en la escuela (Herendiné, 2016). Lamentablemente, hoy en día la forma de enseñanza del concepto área está más enfocada en la manipulación numérica y algebraica mediante la aplicación de fórmulas, en vez de la exploración de las relaciones geométricas que proporciona la figura (Ng y Sinclair, 2015). Esta forma de enseñanza genera la incomprensión de este concepto en los estudiantes lo que dificulta el aprendizaje de otros conceptos matemáticos durante el bachillerato o la universidad como por ejemplo la integral definida y problemas de maximización y minimización (Corberán, 1996). Según Sinclair, Pimm y Skelin (citados por Ng y Sinclair, 2015) uno de los principales enfoques geométricos para trabajar áreas es a través de la descomposición y composición, es decir, que es posible hallar la medida del área de un polígono a partir de su reconfiguración (Borja, 2015). Por otro lado, existen otras variables que favorecen la operación de la medida del área, como el uso de la malla cuadriculada (Pessoa, 2010).

Por otro lado, en nuestro país existen documentos curriculares que sustentan la importancia de la enseñanza de este concepto matemático en la escuela. En ese sentido, tenemos la Resolución Ministerial N° 199-2015 que modifica los contenidos del Diseño Curricular Nacional 2009 en la que se menciona que para el área de Matemática, dentro de la competencia "Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de forma, movimiento y localización", un estudiante al finalizar el VI ciclo de la Educación Básica Regular (EBR), es decir, al finalizar el segundo grado de educación secundaria, debería ser capaz de calcular el área de figuras poligonales regulares y compuestas, triángulos, círculos componiendo y descomponiendo en otras figuras cuyas medidas son conocidas con recursos gráficos y otros (ver Figura 1).

- Calcula el perímetro y área de figuras poligonales regulares y compuestas, triángulos, círculos componiendo y descomponiendo en otras figuras cuyas medidas son conocidas, con recursos gráficos y otros.

Figura 1. Indicador de desempeño para el 2° grado de Educación Secundaria relacionado al cálculo de la medida de área
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2015, p. 75)

Este documento nos muestra los estándares de aprendizaje para un estudiante de segundo grado de Educación Secundaria, es decir, lo que se espera de un estudiante de escuela pública o privada logre desarrollar al finalizar el VI ciclo de la EBR. Sin embargo, estas expectativas no se están llevando a cabo en la realidad peruana.

De acuerdo con la primera Evaluación Censal de Estudiantes (ECE) 2015 realizada por la Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes (UMC) en la que se evaluó a 490 637 estudiantes de segundo grado de secundaria de todo el Perú, menos del 50% de los estudiantes logró resolver la pregunta vinculada al cálculo de la medida del área de una figura compuesta sobre una cuadrícula. Según el Ministerio de Educación (Perú, 2016), “el 43,1% de los estudiantes marcó ‘c) 12u^2’, evidenciando que lograron calcular el área de la figura aplicando una estrategia válida” (p.30)

En el 2016, la UMC evaluó por segunda vez a los estudiantes de segundo grado de secundaria mediante la ECE y, según los resultados, una de las preguntas relacionadas al contenido de áreas de figuras planas quedó en el nivel Satisfactorio, esto significa que quedó en la parte más alta de la escala de dificultad y que, por lo tanto, muy pocos estudiantes lograron responderla correctamente.

De acuerdo con la información obtenida de la base de datos de la UMC, solo el 25.76% de los estudiantes logró responder correctamente a esta pregunta, un porcentaje inferior comparado al año anterior. Según el Ministerio de Educación (Perú, 2017), “estos estudiantes habrían visualizado la figura dada como el resultado de componer o descomponer figuras más sencillas que facilitan el cálculo del área” (p.27). Estos resultados nos dan indicios que efectivamente los estudiantes peruanos tienen dificultades para determinar la medida del área de figuras planas.

Por todo lo mencionado, consideramos que nuestra investigación es pertinente principalmente porque a través de las investigaciones de referencia podemos afirmar que la medida de área de figuras es enseñada en las escuelas desde un enfoque bastante memorístico y en este contexto la reconfiguración surge como una propuesta que permite al estudiante determinar la medida del área de un polígono sin necesidad de la aplicación de fórmulas. Mostramos evidencia de que hay investigadores interesados en el estudio del área de los polígonos por ser un tema clave en la enseñanza de Geometría, y cuya comprensión es importante para el desenvolvimiento de cualquier ciudadano en situaciones tan sencillas como cubrir un piso con losetas, empapelar una pared, comprar tela para realizar una prenda, lotear un terreno, determinar el área de un departamento, aproximar cuánto papel se necesita para envolver regalos, entre otras situaciones cotidianas.

Asimismo, existen documentos que respaldan la enseñanza del concepto área en la educación secundaria como la Resolución Ministerial N° 199-2015. Además, esta investigación surge como una propuesta para abordar de una forma diferente la enseñanza de la medida de áreas de polígonos en la escuela.

Tomando como base las investigaciones de referencia y la justificación presentada, nos planteamos la pregunta y los objetivos para esta investigación.

1.3 Pregunta y objetivos de la investigación

Para realizar este estudio nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

¿La operación de reconfiguración permite a estudiantes de segundo grado de educación secundaria determinar la medida del área de polígonos?

Para responder esta pregunta de investigación, planteamos el siguiente objetivo general:
Analizar la reconfiguración que realizan estudiantes del segundo grado de educación secundaria para determinar la medida del área de polígonos.

Con el propósito de lograr este objetivo general, establecemos los siguientes objetivos específicos:

- Identificar las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria que realizan los estudiantes al desarrollar una secuencia didáctica para determinar la medida de área de polígonos
- Identificar los tipos de reconfiguración que realizan estudiantes al desarrollar una secuencia didáctica para determinar la medida de área de polígonos

Para poder cumplir estos objetivos elaboramos una secuencia de dos actividades tomando como base aspectos de la Ingeniería Didáctica la que describimos a continuación.

1.4 Metodología y procedimientos

Hernández, Fernández y Baptista (2010) mencionan que “la investigación cualitativa se fundamenta en una perspectiva interpretativa centrada en el entendimiento del significado de las acciones de seres vivos, sobre todo de los humanos y sus instituciones” (p. 9). Es por ello que emplearemos tal metodología en esta investigación ya que nos centramos en analizar y explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje relacionados con el objeto de estudio que en nuestra investigación es el área de polígonos.

Asimismo, Hernández, Fernández y Baptista (2010) explican que, según el enfoque cualitativo, el investigador plantea un problema, pero no sigue un proceso establecido porque se basa más en una lógica y proceso inductivo. Las investigaciones cualitativas tienen la característica de ir de lo particular a lo general, y en la mayoría de los estudios no se prueban hipótesis debido a que estas se van generando durante el proceso. El objetivo de estas investigaciones es "reconstruir" la realidad, para ello utilizan diferentes técnicas de recolección como la observación, entrevistas abiertas, revisión de documentos entre otros.

Dentro de la investigación cualitativa tomaremos aspectos de la Ingeniería Didáctica, metodología que Artigue (1995) describe como "un esquema experimental basado en las 'realizaciones didácticas' en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza" (p. 36). La validación de tal secuencia en este tipo de metodología es interna y surge como el resultado de la confrontación entre el análisis a priori (lo que se planificó) y a posteriori (lo que realmente sucedió en clase). Como nuestro interés es analizar los procesos que realizan los estudiantes cuando trabajan en situaciones que involucran la medida del área de un polígono mediante la reconfiguración, consideramos que la Ingeniería Didáctica es la más idónea para el desarrollo de la presente investigación.

En ese sentido, presentamos las cuatro fases de la Ingeniería Didáctica: análisis preliminares, concepción y análisis a priori, experimentación y, análisis a posteriori y validación. Asimismo, las respectivas conexiones con nuestra investigación.

Análisis Preliminares

Según la autora, en una investigación de este tipo "la fase de concepción se basa no sólo en un cuadro teórico didáctico general y en los conocimientos didácticos previamente adquiridos en el campo de estudio, sino también en un determinado número de análisis preliminares" (p. 38). Por tal motivo, dentro de nuestra investigación se ha considerado pertinente realizar el estudio del objeto área de polígonos a través de los siguientes aspectos fundamentales:

- El aspecto histórico del objeto matemático medida de área, en el que se narra los hechos sobre cómo se fue construyendo este concepto a lo largo de la historia. Creemos que este estudio nos permite tener una comprensión de las consideraciones, alcances, restricciones y dificultades que afrontaron los hombres de ciencia desde los inicios de la civilización para sentar las bases del estudio de dicho objeto matemático.
- El aspecto cognitivo, en donde se realiza un análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución. En este aspecto,

hacemos referencia a los resultados de las dos evaluaciones censales administradas a estudiantes de segundo de secundaria a nivel nacional. Es importante resaltar que en las evaluaciones censales nos enfocaremos en analizar los errores presentados por los estudiantes.

- El aspecto didáctico, relacionado a la enseñanza del área de polígonos y sus efectos en el aprendizaje. En nuestro estudio analizaremos dos textos de matemática de segundo grado de secundaria, con respecto a la noción de medida de área de polígonos. Este análisis nos permite conocer la forma en que el conocimiento del objeto matemático es transmitido hacia los estudiantes.

Concepción y análisis a priori

En esta fase, Artigue (1995) distingue dos tipos de variables de comando, las variables macrodidácticas, concernientes a la organización global de la ingeniería y las variables microdidácticas, concernientes a la organización local de la ingeniería.

En nuestra investigación, utilizamos variables microdidácticas ya que elaboraremos una secuencia de dos actividades destinadas a desarrollarse en el aula: Trabajemos con el Tangram y Hallemos la medida del área de polígonos.

Además, en el análisis a priori proponemos posibles comportamientos esperados en los estudiantes, las estrategias que podrían emplear, así como prever los errores que puedan cometer durante el desarrollo de la secuencia de actividades.

Experimentación

En esta fase se pone en marcha la secuencia de actividades, con la participación principal de los estudiantes acompañados de la investigadora. En este momento, los estudiantes desarrollan las actividades planificadas y la investigadora observa las intervenciones tanto del docente como de los estudiantes, para luego registrarlos y describirlos. Los instrumentos para recoger la información son fichas de actividades y la filmación de la aplicación de la secuencia de actividades.

Análisis a posteriori y validación

Según la investigadora el análisis a posteriori se basa en el conjunto de datos obtenidos en la experimentación, las observaciones realizadas a la secuencia de enseñanza y las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Luego, se procede a la validación que consiste en la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori.

En nuestra investigación, esta fase se pondrá en evidencia cuando realicemos el análisis de lo que los estudiantes realmente hicieron durante la aplicación de las actividades, y el contraste entre el análisis a priori y a posteriori que se desarrollará de forma simultánea.

A continuación, como parte de los análisis preliminares presentamos el capítulo II y el capítulo III en donde se abordan aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval y el estudio del área de polígonos respectivamente.

CAPÍTULO II: ASPECTOS DE LA TEORÍA DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

En este capítulo explicamos el fundamento teórico de nuestra investigación, en este sentido, presentamos los aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) propuesta por Duval (1994).

2.1. Teoría de Registro de Representación Semiótica

Según Duval (2012a), los objetos matemáticos no son accesibles para el ser humano, razón por la cual se hace necesario el uso de sus representaciones. Sin embargo, para el aprendizaje de las matemáticas es importante no confundir a los objetos matemáticos con sus representaciones. De acuerdo con el autor existen dos tipos de representaciones según se muestra en el Cuadro 1.

Cuadro 1. *Tipos de representaciones*

MENTALES	SEMIÓTICAS
Son un conjunto de imágenes y, de manera general, conceptualizaciones que tiene un individuo sobre un objeto.	Son producciones constituidas por el empleo de signos pertenecientes a un sistema de representación.

Fuente: Adaptado de Duval (2004, p. 14, traducción nuestra)

Las representaciones mentales son producidas por el sujeto y cuando estas son expresadas se llaman representaciones semióticas, es decir, las representaciones semióticas sirven como un medio de comunicación. Sin embargo, según el autor también son necesarias para la actividad cognitiva del pensamiento pues desempeñan un papel fundamental en el desenvolvimiento de representaciones mentales, en la realización de diferentes funciones cognitivas y en la producción de conocimientos.

Asimismo, de acuerdo con Duval (2004) para el aprendizaje de la matemática se deben realizar dos procesos en el individuo:

- La **semiosis**, actividad ligada a la producción de representaciones semióticas, la cual depende de los signos que forman parte del sistema utilizado para generarlas, y
- La **noesis**, actividad ligada a la aprehensión conceptual de los objetos representados, incluyendo las diferentes actividades y procesos cognitivos desarrollados por el sujeto.

Ambas son actividades muy fuertemente ligadas pues según el autor no existe noesis sin semiosis y viceversa. Según Duval (2012a, p. 270), “La paradoja cognitiva del pensamiento matemático y las dificultades que resultan para su aprendizaje se da por el hecho de que no hay noesis sin semiosis mientras haya voluntad de enseñar matemáticas".

Por otro lado, Duval (2004) considera que un sistema semiótico comporta reglas más o menos explícitas, que permiten combinar los signos entre sí de tal forma que la asociación formada tenga un sentido. De esta manera, un sistema semiótico pasa a ser un registro de representación semiótica cuando cumple tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis y que se muestran en el Cuadro 2.

Cuadro 2. *Tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis*

Formación	Tratamiento	Conversión
Constituir una marca o conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado.	Transformar las representaciones de acuerdo con las reglas propias al sistema semiótico.	Convertir las representaciones producidas de un sistema semiótico a otro.

Fuente: Adaptado de Duval (2004, p. 42, traducción nuestra)

De acuerdo con Duval (2012a), el tratamiento de una representación es una transformación de esta representación en el mismo sistema semiótico en donde ella ha sido formada. Por ejemplo, la reconfiguración es un tipo de tratamiento particular que se puede realizar en figuras geométricas. Por otro lado, la conversión de una representación es una transformación que se da de un sistema semiótico a otro, conservando la totalidad o una parte del contenido de la representación inicial.

Para Duval (2011) es esencial que en la actividad matemática se puedan movilizar muchos registros de representación semiótica. Según el autor existen cuatro tipos de registros los cuales se agrupan en registros de representación discursiva y no discursiva. Los registros de representación discursiva son el registro de lengua natural y el registro algebraico, mientras que los registros de representación no discursiva son el registro figural y el gráfico. A continuación, presentamos un resumen de lo manifestado en el Cuadro 3.

Cuadro 3. *Clasificación de las representaciones discursivas y no discursivas*

Representación discursiva	Representación no discursiva
Lengua natural Designación de objetos, enunciación y raciocinio. Dos modalidades de producción: oral/escrita	Icónica Producción a mano libre, conservación interna de las relaciones topológicas características de las partes de un objeto. Configuración geométrica Construcción instrumental, división y reconfiguración mereológica, deconstrucción dimensional de las formas.
Escritura simbólica Sistema de numeración, escritura algebraica, lenguas formales. Una modalidad de producción: escrita	Gráficos cartesianos Operación de zoom, interpolación, cambio de ejes. Esquemas

Fuente: Adaptado de Duval (2011, p. 118, traducción nuestra)

Cada uno de estos registros favorece un tipo de transformación de representaciones que los otros registros no permiten y que son operaciones propias de ese registro. Según Duval (2004, p. 62), "en efecto, un registro puede permitir efectuar ciertos tratamientos de una manera mucho más económica y más potente que otro registro". Es por esta razón que es importante que el estudiante sepa seleccionar qué registro le conviene usar para abordar un problema matemático.

En nuestro estudio investigamos cómo la reconfiguración en el registro figural permite determinar la medida de área de polígonos, es por esta razón que ahora presentamos detalladamente a este registro.

2.2. Registro Figural

De acuerdo con Duval (2004), "(…) toda figura aparece como la combinación de valores para cada una de las variaciones visuales de estos dos tipos, dimensional y cualitativo" (p. 157). La variación dimensional se refiere al número de dimensiones de la figura, por ejemplo, el punto tiene dimensión cero, la línea tiene dimensión uno, el área tiene dimensión dos. Mientras que la variación cualitativa está referida a las variaciones de la forma (línea recta o línea curva), variaciones de tamaño, orientación, variaciones de granulación, de color, etc.

Según Duval (2004, p. 158), "toda figura combina dos tipos de variación; el cruce de los valores de esta variable visual cualitativa con la variable dimensión, nos permite definir las unidades figurales elementales para el registro de representaciones geométricas." Por lo tanto, una figura geométrica es siempre la configuración de al menos dos unidades figurales elementales. La

Figura 2 muestra la clasificación de las unidades figurales consideradas para nuestra investigación.

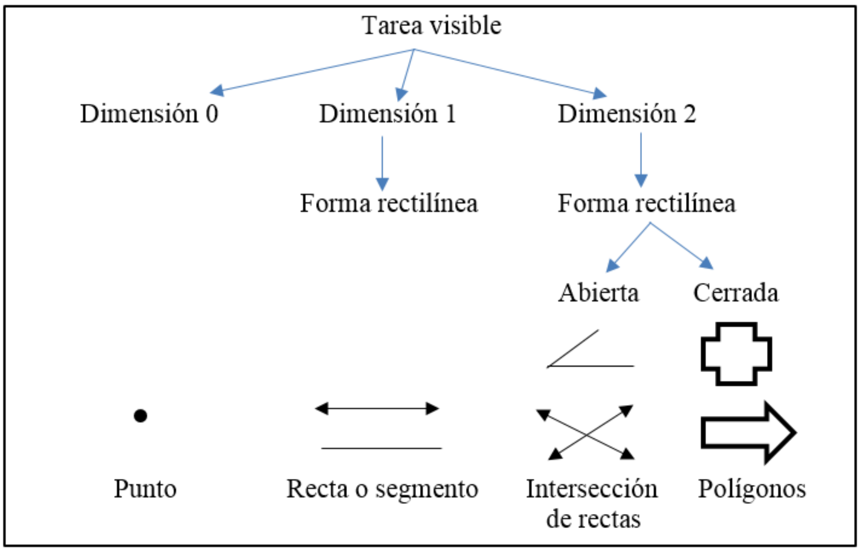


Figura 2. Clasificación de las unidades figurales elementales
Fuente: Adaptado de Duval (2004, p. 159)

Para Duval (2004) las figuras juegan un papel fundamental en la comprensión de problemas de Geometría:

> Es común admitir que las figuras forman un importante soporte intuitivo para las actividades en Geometría: dejan ver mucho más de lo que los enunciados dicen, permiten explorar, anticipar… Permiten, en la resolución de un problema o en la búsqueda de una demostración aquella conducta que Pierce describió bajo el término de 'abducción', consistente en limitar de entrada la clase de hipótesis o de alternativas que han de considerarse (…). (p. 161).

Desde la Teoría de Registros de Representación Semiótica, la aprehensión vendría a ser la comprensión conjunta de un objeto por medio de sus representaciones y propiedades en un registro determinado, los cuales, por medio de las reglas propias de ese registro, es posible inferir otras propiedades y aplicar lo aprehendido en otras situaciones y contextos.

Duval (2012b) considera a la figura como una aprehensión cognitiva y menciona que existen cuatro maneras diferentes de aprehender el registro figural en Geometría, según su rol: aprehensión perceptiva, aprehensión operatoria, aprehensión discursiva y aprehensión secuencial; cada una de ellas independiente de las otras.

Asimismo, el autor muestra que los diferentes tipos de operaciones puramente visuales les dan potencialidad heurística a las figuras. La separación de estos tipos de aprehensión es crucial para el análisis de cualquier actividad geométrica y para la identificación de dificultades en el aprendizaje de la Geometría. Por un lado, la resolución de problemas requiere que los estudiantes estén aptos para saltar de un tipo de aprehensión a otra. Y por otro lado, la dificultad del problema dado a los estudiantes depende del fenómeno de congruencia y no congruencia de la aprehensión perceptiva, operativa y discursiva de las figuras.

De acuerdo con Duval (1994), la **aprehensión perceptiva** es la que permite identificar o reconocer inmediatamente una forma o un objeto matemático en el plano o en el espacio. Para el investigador, una figura muestra objetos que se destacan independientemente del enunciado, así como los objetos nombrados en el enunciado no son necesariamente aquellos que aparecen de forma espontánea. Sin embargo, los estudios realizados por el autor demuestran que no todos los estudiantes logran visualizar las figuras de la misma forma y esta resistencia es a causa de la forma en que se suelen presentar las figuras en el aula.

Por ejemplo, en la Figura 3 es sencillo para un estudiante reconocer el rectángulo de la izquierda, sin embargo, hay mayor dificultad en reconocer el rectángulo de la derecha. Esto sucede porque en las clases mayormente se trabaja con figuras cuyo lado con mayor longitud aparece de forma horizontal.

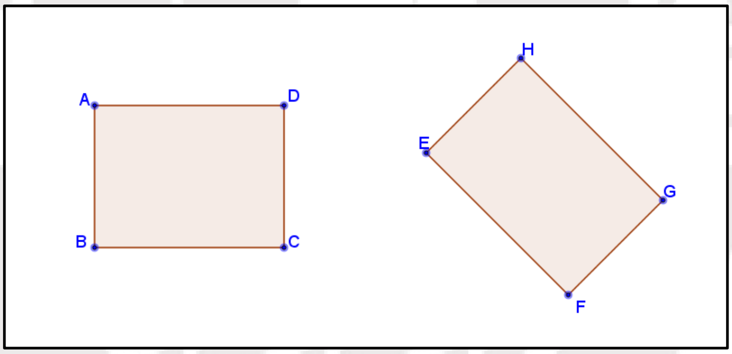


Figura 3. Aprehensión perceptiva de un rectángulo

Según Duval (2012b), una figura es una organización de elementos en un campo perceptivo, no homogéneo, que constituye un objeto que se destaca en este campo. Estos elementos pueden ser puntos, trazos o zonas. De acuerdo con el autor, los puntos y los trazos se caracterizan por ser discretos y continuos respectivamente. Las zonas se caracterizan por su forma o contorno. Cuando diferentes trazos forman un contorno simple y cerrado, ellos se destacan como una figura sobre un fondo, como se puede apreciar en la Figura 4.

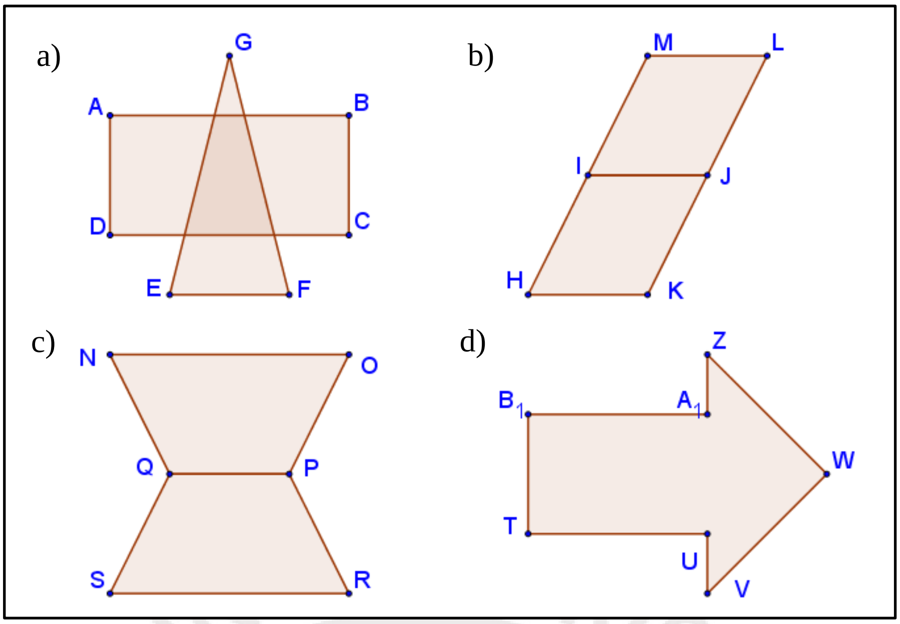


Figura 4. Ejemplos de organizaciones perceptivas de figuras
Fuente: Adaptado de Duval (2012b, p. 121)

Los ejemplos mostrados en la Figura 4 aparecen prioritariamente como:

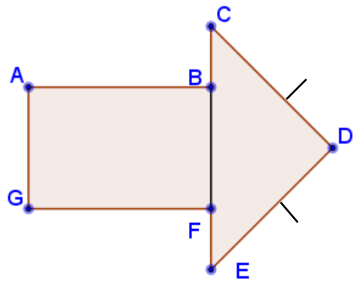
- En a, la superposición de dos formas, un rectángulo y un triángulo.
- En b, dos formas idénticas con un lado en común.
- En c, dos formas simétricas con un lado en común.
- En d, una partición de una flecha en un rectángulo y un triángulo.

Según los estudios realizados por Duval y otros investigadores, es muy probable que muchos estudiantes no logren identificar en el ejemplo “c” a ambos trapecios. Es más fácil para los estudiantes reconocer el trapecio cuyo lado mayor aparece en la parte inferior que cuando no lo está.

Luego, Duval (1994, traducción nuestra) menciona que “la **aprehensión discursiva** de una figura es aquella que corresponde a una explicación desde otras propiedades matemáticas de la figura a las indicadas por la leyenda o por la hipótesis.” (p. 124).

Por lo tanto, de acuerdo con el autor, si el estudiante está en la capacidad de reconocer otras propiedades matemáticas en la figura, no indicadas de forma explícita en su representación gráfica, podemos decir entonces que ha desarrollado su aprehensión discursiva. En el Cuadro 4 se muestra la aprehensión discursiva de un polígono de siete lados con forma de flecha.

Cuadro 4. *Ejemplo de aprehensión discursiva*

REPRESENTACIÓN	DISCURSO
 Polígono ABCDEFG	En el rectángulo ABFG, los lados $\overline{AB}$ y $\overline{GF}$, y los lados $\overline{AG}$ y $\overline{BF}$ son paralelos y congruentes respectivamente. En el triángulo CDE, los lados $\overline{CD}$ y $\overline{DE}$ son congruentes.

Por otro lado, Duval (1994, traducción nuestra) define a la **aprehensión secuencial** como aquella que "concierne al orden de construcción de una figura. Este orden no solo depende de las propiedades matemáticas de la figura en construcción, sino también de las herramientas a utilizar (como los comandos de menús del software, la regla y compás)" (p. 126).

Esta aprehensión se necesita cuando se requiere construir una figura o describir su construcción. Por ejemplo, la aprehensión secuencial de la flecha sería la secuencia de pasos para la construcción de dicha figura utilizando las herramientas del software GeoGebra (ver Figura 5). Es importante mencionar que esta no es la única forma de construcción que se puede hacer con dicho software.

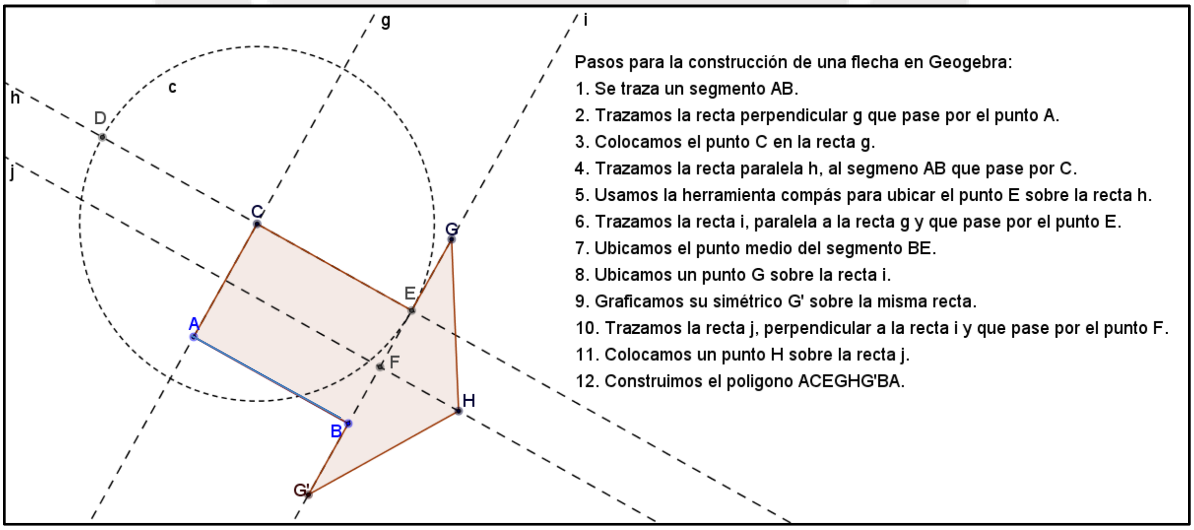


Figura 5. Aprehensión secuencial para construir un polígono

Finalmente, la **aprehensión operatoria** tiene que ver con las modificaciones o transformaciones que podemos hacer a las figuras para lo cual se distingue tres tipos: la modificación mereológica, la modificación óptica y la modificación posicional. Al respecto Duval (2004) menciona lo siguiente:

> Toda figura puede modificarse de varias maneras. Se pueden separar las unidades figurales de dimensión 2 que la componen en otras unidades figurales, homogéneas o heterogéneas, también de dimensión 2; y estas pueden recombinarse para modificar el contorno global de la figura. Se puede también agrandar o achicar la figura, desplazarla por traslación o rotación, etc. (p. 164)

- La **modificación mereológica** se da cuando la figura se puede dividir en varias sub-figuras estableciendo una relación parte – todo. Duval (2012a) menciona que la **reconfiguración** es un tipo de modificación mereológica que consiste en la descomposición en unidades figurales de la misma dimensión que la inicial, para luego ser recombinadas en otra figura o en diferentes sub-figuras. Según Duval (2004), "La reconfiguración es la operación que consiste en reorganizar una o varias sub-figuras diferentes de una figura dada en otra (…) es un tratamiento que consiste en la división de una figura en sub-figuras" (p. 165). La Figura 6, nos muestra un tratamiento en el registro figural, donde se realiza la modificación mereológica del polígono ABCDEFG en forma de flecha de dimensión dos, para transformarlo en el rectángulo AHIG también de dimensión dos y así poder determinar la medida de su área puesto que ambas figuras tienen la misma medida de área.

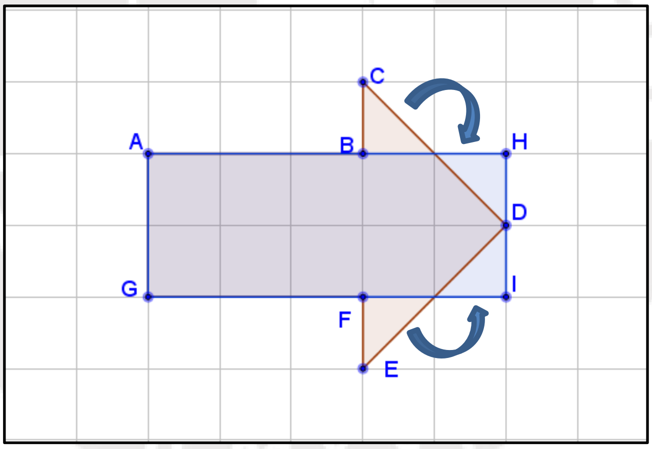


Figura 6. Tratamiento en el registro figural por reconfiguración

De acuerdo con Duval (2012b, traducción nuestra), "Esta operación permite comprometer, de inmediato, tratamientos tales como la medida de área a través de la suma de las partes elementales o del reconocimiento de la equivalencia de dos reagrupamientos intermedios".

- La **modificación óptica** según Duval (1994) consiste en aumentar, disminuir o deformar la figura inicial transformándola en otra figura llamada imagen. De acuerdo con Duval (2012b, traducción nuestra), "esta transformación, que es realizada mediante un juego de lentes y espejos, puede conservar la forma inicial o alterarla".

En la Figura 7, mostramos el polígono ABCDEFG (figura inicial) al que se le aplica la transformación geométrica homotecia, en el punto H, con factor de conversión 2.

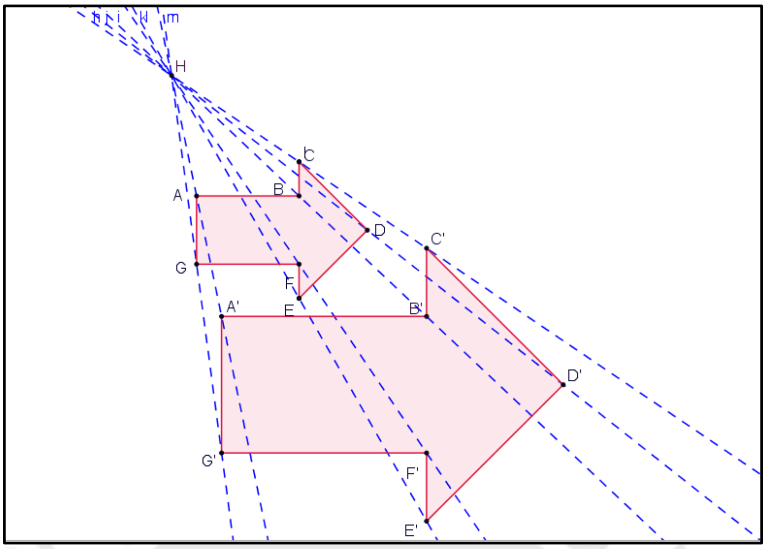


Figura 7. Modificación óptica de un polígono por ampliación
Fuente: Adaptado de Duval (2004, p. 167)

Sin embargo, usando un software de representación dinámica, también es posible hacer una modificación óptica sin producir una imagen puesto que la misma figura puede ser ampliada o reducida. Cuando Duval (1994) menciona los términos de figura inicial e imagen alude al trabajo con lápiz y papel porque todavía en aquel entonces no existía este tipo de tecnología.

- La **modificación posicional** según Duval (1994) consiste en el desplazamiento de una figura en relación a un referencial, es decir, mediante movimientos de rotación, traslación y simetría. En la Figura 8, al polígono ABCDEFG se le aplica la transformación de rotación, en el vértice D y ángulo 90° en sentido horario.

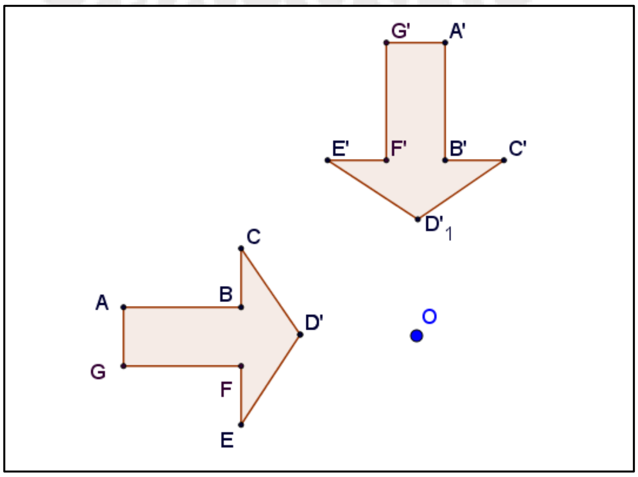


Figura 8. Modificación posicional de un polígono por rotación

En la operación de **reconfiguración**, según Duval (1994) toda figura geométrica puede ser dividida en sub-figuras de diferentes formas y de acuerdo con Duval (2012b) existen tres tipos de reconfiguración:

- **Estrictamente homogénea**, en donde las sub-figuras de la descomposición tienen la misma forma que la figura inicial. Por ejemplo, en la Figura 9 se muestra un rombo que ha sido descompuesto en cuatro rombos de la misma forma que el rombo inicial.

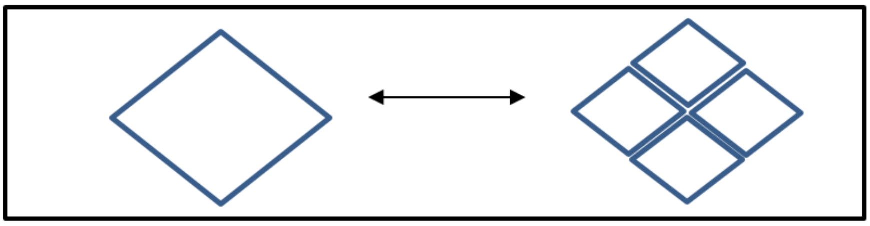


Figura 9. Descomposición estrictamente homogénea
Fuente: Adaptado de Duval (2016, p. 29)

- **Homogénea**, en donde las sub-figuras de la descomposición son diferentes a la figura inicial, sin embargo, conservan la misma forma entre ellas. Por ejemplo, en la Figura 10 se muestra un rombo que ha sido descompuesto en dos triángulos de la misma forma, pero diferentes a la figura inicial.

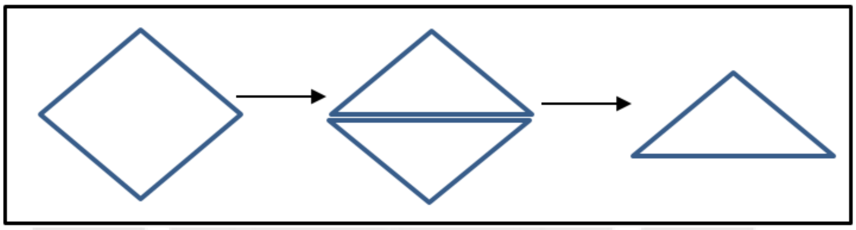


Figura 10. Descomposición homogénea
Fuente: Adaptado de Duval (2016, p. 29)

- **Heterogénea**, en donde las sub-figuras de la descomposición tienen formas diferentes entre ellas y diferentes a la figura inicial. Por ejemplo, en la Figura 11 se muestra un rombo que ha sido descompuesto en tres sub-figuras (un triángulo isósceles y dos triángulos rectángulos). Estas tres sub-figuras han sido reorganizadas formando así un rectángulo.

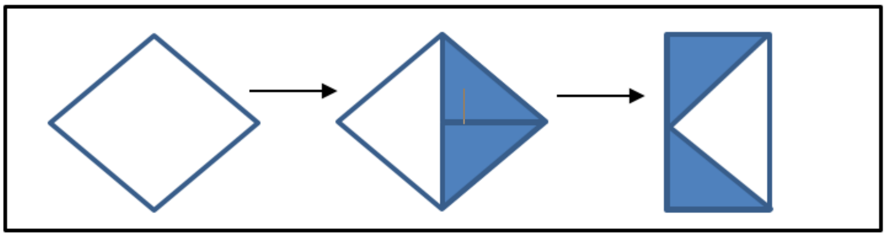


Figura 11. Descomposición heterogénea
Fuente: Adaptado de Duval (2016, p. 29)

En nuestra investigación consideramos estos tres tipos de descomposiciones puesto que los estudiantes tendrán que realizar modificaciones mereológicas en los polígonos y reconfigurarlos en figuras nuevas cuyas medidas de área sean más sencillo de determinar.

CAPÍTULO III: ESTUDIO DEL ÁREA DE POLÍGONOS

En este capítulo mostramos aspectos de las investigaciones correspondientes al objeto matemático que trataremos en nuestra investigación, es decir, analizaremos la concepción del área desde el punto de vista histórico, cognitivo y didáctico.

3.1. Aspectos históricos relacionados al área de polígonos

Según Corberán (1996), el concepto de área que se enseñan en primaria y secundaria está muy lejos del concepto matemático, el cual es un objeto tan complejo que no podría ser abordado en toda su magnitud ni siquiera en secundaria. Es por ello que la autora resalta que el objetivo de la enseñanza del área no debería ser la construcción del concepto matemático en sí.

Históricamente, debieron transcurrir muchos siglos para obtener la primera definición matemática de área y fue en el siglo XIX gracias a la definición de límite de Cauchy que se logró ello. Sin embargo, el problema del cálculo de áreas ha sido objeto de investigación en matemática desde el inicio de las civilizaciones antiguas.

Existen indicios sobre la formación de sociedades avanzadas que se instalaron a lo largo de los ríos: Nilo en Egipto, Tigris y Eufrates en Mesopotamia, Indo y Ganges en la región centro-sur de Asia y, Hwang Ho e Yanstzé en Asia Oriental. Estas sociedades tenían habilidades en ingeniería, en drenaje de pantanos e irrigación, construían obras de defensa para prevenir las inundaciones, grandes edificios y estructuras que requerían de mucha geometría práctica (Facco, 2003).

De acuerdo con Boyer (1968), a los geómetras egipcios se les llamó “los tensadores de cuerda” (o agrimensores), debido a que usaban las cuerdas para bosquejar los planos de los templos y para reconstruir las fronteras borradas entre los terrenos a causa del río Nilo. Sucesiones sencillas de diseños como la mostrada en la Figura 12 sugiere la comprensión de ciertas proposiciones geométricas y aritméticas. Según el autor, estos dibujos nos permiten reconocer inmediatamente que las áreas de los triángulos están entre sí como los cuadrados de sus lados.

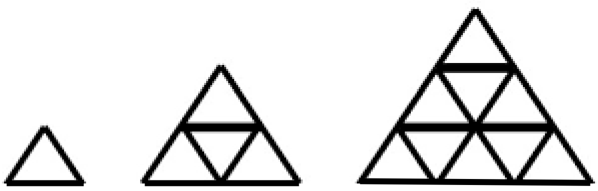


Figura 12. Sucesiones sencillas de diseños
Fuente: Boyer (1968, p. 25)

Por otro lado, en algunos papiros egipcios de los años 2000 y 1800 a. C se ha encontrado información sobre la matemática egipcia como por ejemplo el papiro de Rhind o también conocido como el papiro de Ahmes. Según (Boyer, 1968) el problema 51 de dicho papiro "muestra que el área de un triángulo isósceles fue hallado tomando la mitad de lo que llamaríamos base y multiplicándola por la altura" (p. 18, traducción nuestra). Ahmes justifica este método sugiriendo que el triángulo isósceles estaría compuesto por dos triángulos rectángulos que unidos formarían un rectángulo (ver Figura 13).

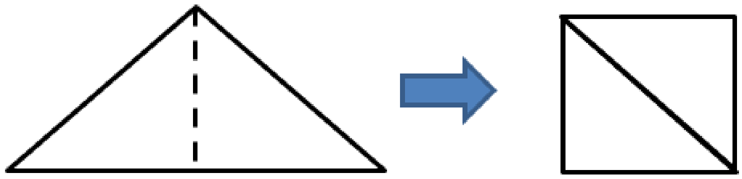


Figura 13. Reconfiguración de un triángulo isósceles en un rectángulo

Asimismo (Boyer, 1968) menciona que en el problema 52 Ahmes presenta a un trapecio isósceles (ver Figura 14) "cuya base mayor es 6, la base menor es 4, y la distancia entre ellas es 20. Tomando la semisuma de las bases, 'para hacer un rectángulo', Ahmes multiplicó este valor por 20 para encontrar el área" (p. 18, traducción nuestra). En transformaciones como los ejemplos mencionados, en donde un triángulo isósceles o un trapecio se descomponen y recomponen en un rectángulo, vemos los inicios de la teoría de la congruencia y una idea de demostraciones en Geometría. Además, estos dos problemas nos muestran claramente cómo se trabajó desde las primeras civilizaciones lo que Duval llamaría más adelante reconfiguración.

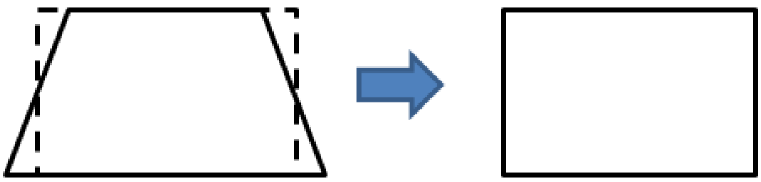


Figura 14. Reconfiguración de un trapecio isósceles en un rectángulo

Otro ejemplo que presenta es el papiro de Moscú en donde destaca el problema 10 que pregunta por la medida del área de una superficie de lo que parece ser una cesta de diámetro 4½. Asimismo, aparece lo equivalente a una fórmula $S = \left(1 - \frac{1}{9}\right)^2 (2x)x$, en donde x es 4½ obteniendo como respuesta 32 unidades. Como $S = \left(1 - \frac{1}{9}\right)^2$ es una aproximación egipcia a $\frac{\pi}{4}$, la respuesta 32 correspondería a la medida de la superficie de una semiesfera de diámetro 4½. Como podemos observar, desde la antigüedad ya se tenía ciertas nociones del concepto de área como magnitud cuyo valor de medida era una aproximación a un número irracional.

Según Boyer (1968), en 1936 se encontró un grupo de tablillas de Susa pertenecientes a la civilización Mesopotamia las cuales contenían resultados geométricos significativos. Una de las tablillas comparaba áreas y los cuadrados de los lados de polígonos regulares de tres, cuatro, cinco, seis y siete lados. Por ejemplo, que la razón del área del pentágono regular, al cuadrado del lado, se da como 1 a 40, valor que es correcto si se da con dos cifras exactas. Para el hexágono y heptágono las razones son expresadas como 2 a 37,30 y 3 a 41 respectivamente. Los sumerios consideraron a π como $3\frac{1}{8}$, lo que nos hace pensar que tanto ellos como los egipcios tuvieron una aproximación muy cercana al valor de π. Por otro lado, los babilonios hallaban la medida del área de un cuadrilátero mediante el producto del valor de las medias aritméticas de los pares de lados opuestos, sin advertir que esto solo era más que una burda aproximación.

Es importante resaltar que tanto los egipcios como los babilonios desarrollaron su Geometría de forma independiente, sin conocer lo descubierto por la otra cultura.

Según el autor, durante la antigua Grecia muchos griegos destacaron por su aporte a la demostración de fórmulas de cálculo de áreas y volúmenes, entre ellos figuran Tales de Mileto, Pitágoras de Samos, Demócrito de Abdera, Eudoxio de Cnido, Euclides de Alejandría y Herón de Alejandría.

De acuerdo con Facco (2003), Euclides señaló que la coincidencia de dos figuras planas por superposición es un paso intermedio para concluir la igualdad de sus áreas. Es decir, dos figuras que coinciden por superposición son congruentes. Luego, podemos inferir que dos figuras son equivalentes cuando tienen la misma área. La demostración de este hecho es posible por medio de la reconfiguración.

En el siglo VI, muchos matemáticos surgieron en la India, pero lamentablemente poco se sabe de ellos excepto algunos fragmentos de sus aportes. Al respecto, se encontró Aryabhatiya de Aryabhata que es un texto similar a los Elementos de Euclides, pues este texto hindú vendría a ser una breve obra descriptiva de recopilación. En él se encontraron 123 estrofas métricas que intentaban sustentar reglas de cálculo y medición (Boyer, 1968).

Según el autor, en este texto se presenta algunas reglas de medición, de las cuales la mitad de ellas contienen errores. Boyer (1968) menciona que “el área del triángulo está correctamente dado como la mitad del producto de la base y altura (…) El área del trapecio está expresada como la mitad de la suma de los lados paralelos multiplicados por la perpendicular entre ellos”

(p. 233, traducción nuestra). Pero después se menciona que la medida del área de cualquier figura plana se obtiene multiplicando dos de sus lados.

Durante la edad media y hasta casi el siglo XVI, los métodos para calcular la medida del área seguían los principios del razonamiento griego, es decir, el método de Exhaución.

Probablemente, según Corberán (1996) todos ellos admitieron que una superficie limitada tiene un área y se centraron en el cálculo de su medida, utilizando solo sus propiedades. Esto nos permite pensar en el hecho que se puede abordar el cálculo de la medida del área de superficies planas sin necesidad de precisar de un modo formal qué se entiende por ella.

En el siglo XVII, de acuerdo con la autora, Newton y Leibniz apoyándose en las ideas básicas del método de Exhaución, desarrollaron los fundamentos de lo que hoy conocemos como el Cálculo Integral, una rama de las matemáticas que tomaría forma definitiva en el siglo XIX gracias a Cauchy y Reimann. Precisamente, gracias a Cauchy y su definición de límite es que se pudo obtener la primera definición de área.

> Cuando los valores sucesivos atribuidos a una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo tal que al final la diferencia se hace tan pequeña como uno quiere, éste último (valor fijo) se llama el límite de los otros. Así, por ejemplo, un número irracional es el límite de diversas fracciones que dan valores cada vez más próximos a él. (Corberán, 1996, p. 36)

Como podemos observar en las primeras civilizaciones, el trabajo de los matemáticos no se direccionaba a la definición de área sino al estudio de sus propiedades. En consecuencia, el objetivo de la enseñanza del área en primaria y secundaria no debería centrarse en la búsqueda de la definición de área, sino en el estudio de los diversos procedimientos que permitan medir y comparar áreas de superficies planas a partir de sus propiedades. Según O'Daffer y Clemens (1977) citados por Corberán (1996), estas propiedades son:

Propiedad aditiva. Si una región R se puede descomponer en un número finito de regiones, la medida del área de la región completa es la suma de las medidas de áreas de las regiones separadas. Por ejemplo, en la Figura 15 se muestra una fórmula en la que la medida del área de la figura R es equivalente a la suma de las medidas de las áreas de las figuras S, T y U. Asimismo, se observa una figura R descompuesta en 3 regiones S, T y U.

$$A(R) = A(S) + A(T) + A(U)$$

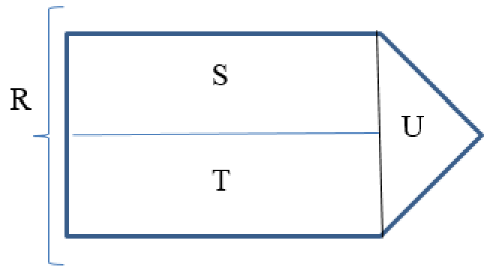


Figura 15. Propiedad Aditiva
Fuente: Adaptado de Corberán (1996, p. 37)

Propiedad de Invarianza. Si dos regiones R y S son congruentes, entonces A(R) = A(S).

Propiedad de la Unidad. El área del cuadrado unidad es 1.

Propiedad de la Disección. Si una región puede ser diseccionada en partes y esas partes reorganizadas para formar otra región, entonces las dos regiones tienen áreas iguales.

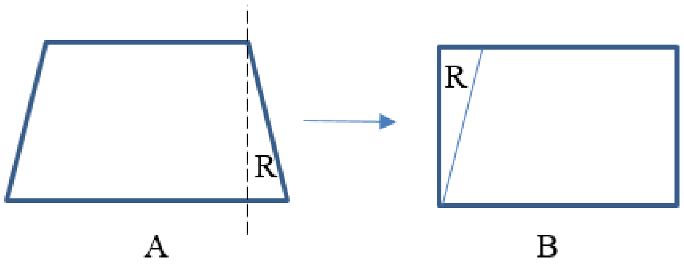


Figura 16. Propiedad de la Disección
Fuente: Adaptado de Corberán (1996, p. 37)

Estas propiedades son importantes porque nos permiten comprender las bases sobre las cuales se sustentaron las ideas de Duval (1994) para crear el concepto de reconfiguración dentro de la Teoría de Registros de Representación Semiótica. Tal y como lo afirmó Pérez (2016), detrás de la estrategia de descomposición y composición, se halla la identificación y el uso de propiedades geométricas de las figuras involucradas. Entendemos que, según Duval (1994) la estrategia de descomposición y composición es lo que conocemos como reconfiguración.

Ahora que ya conocemos cómo surgió este objeto matemático en la historia y sus particularidades, se procederá a analizar las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza.

3.2. Aspectos cognitivos relacionados al área de polígonos

En el aspecto cognitivo hacemos referencia a los resultados de las dos evaluaciones censales administradas a estudiantes de segundo de secundaria a nivel nacional.

Evaluación Censal de Estudiantes (ECE)

De acuerdo con la primera ECE 2015 realizada por Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes (UMC) en la que se evaluó a 490 637 estudiantes de segundo grado de secundaria de todo el país pertenecientes tanto a escuelas públicas como privadas, menos del 50% de los estudiantes lograron resolver preguntas vinculadas a la noción de área.

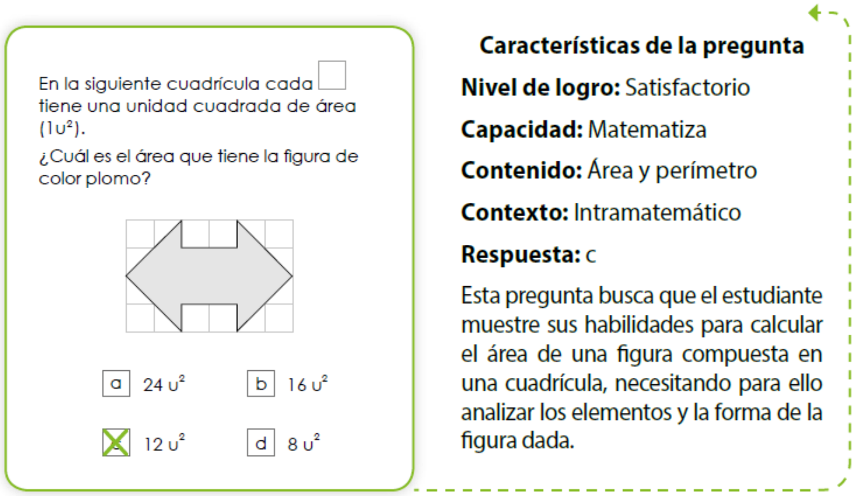


Figura 17. Ítem evaluado en la ECE 2015 a estudiantes de 2do de secundaria
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016, p. 30)

Según el Ministerio de Educación (Perú, 2016), el 43,1% de los estudiantes logró responder correctamente la pregunta planteada en la Figura 17, que es una pregunta vinculada al cálculo de la medida del área de una figura compuesta sobre una cuadrícula.

Es importante mencionar que según el libro de texto Matemática 2 de la Editorial Norma (2015), texto destinado para todas las escuelas públicas a nivel nacional, se define a las figuras compuestas como aquellas que se pueden derivar en otras formas poligonales (ver Figura 18).

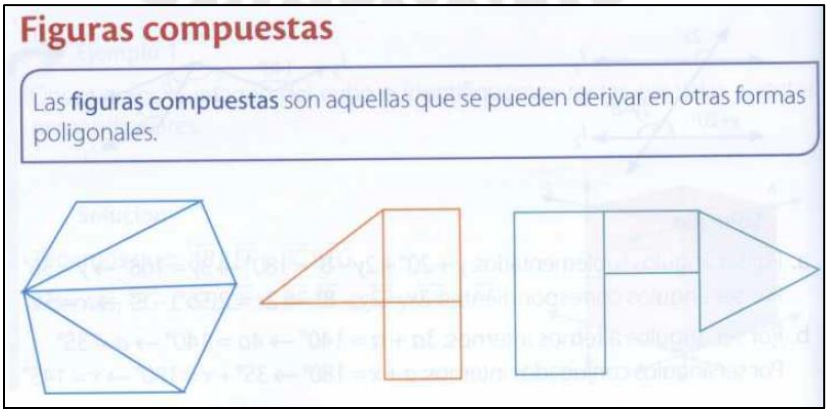


Figura 18. Definición de figuras compuestas
Fuente: Editorial Norma (2015, p. 96)

El 56.9% restante de estudiantes marcó alternativas incorrectas que nos dan evidencia de la inadecuada incomprensión que tienen los estudiantes sobre la medida de área de polígonos. Los estudiantes que no lograron responder correctamente a esta pregunta se distribuyeron de la siguiente forma:

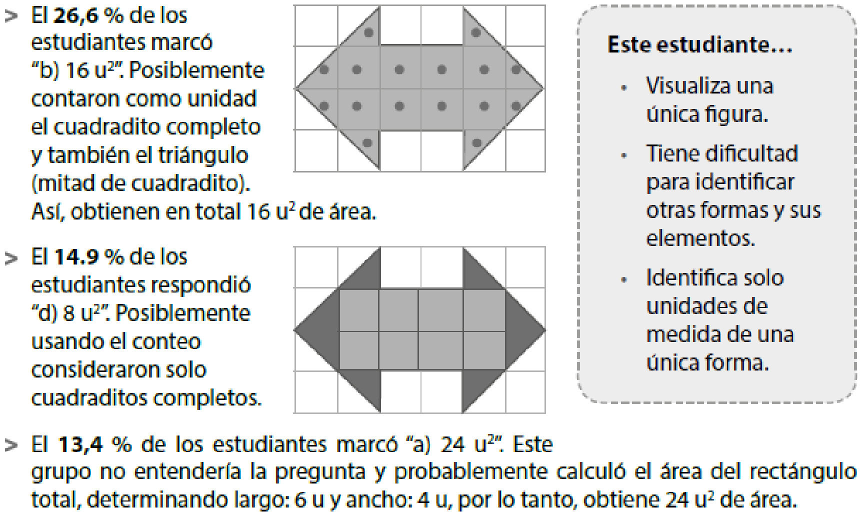


Figura 19. Dificultades de los estudiantes al determinar la medida de área
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016, p. 32)

En la Figura 19 podemos observar que el 26,6% de los estudiantes respondió que la medida de área era 16 u^2. Estos estudiantes solamente contaron los cuadraditos y los triángulos que componían la figura, obteniendo así 16 u^2.

El 14,9% de los estudiantes respondió 8 u^2. Estos estudiantes no admitieron la descomposición y recomposición de figura, por lo que ignoraron las partes de figura que no completaron un cuadrado de la cuadrícula y solo consideraron los 8 cuadrados del centro de la figura como medida de área.

El 13,4% de los estudiantes respondió que la medida de área era 24 u^2, estos estudiantes no percibieron que la figura pudo ser descompuesta y buscaron asociar la figura a lo más cercano para ellos que era el rectángulo dentro del cual estaba contenida la figura.

En el 2016, se volvió a evaluar a los estudiantes de segundo grado de secundaria mediante la segunda ECE y según el Ministerio de Educación (Perú, 2017) una de las preguntas relacionadas al contenido de áreas de figuras planas (ver Figura 20) quedó en el nivel Satisfactorio, esto significa que quedó en la parte más alta de la escala de dificultad y que, por lo tanto, muy pocos estudiantes lograron responderla correctamente.

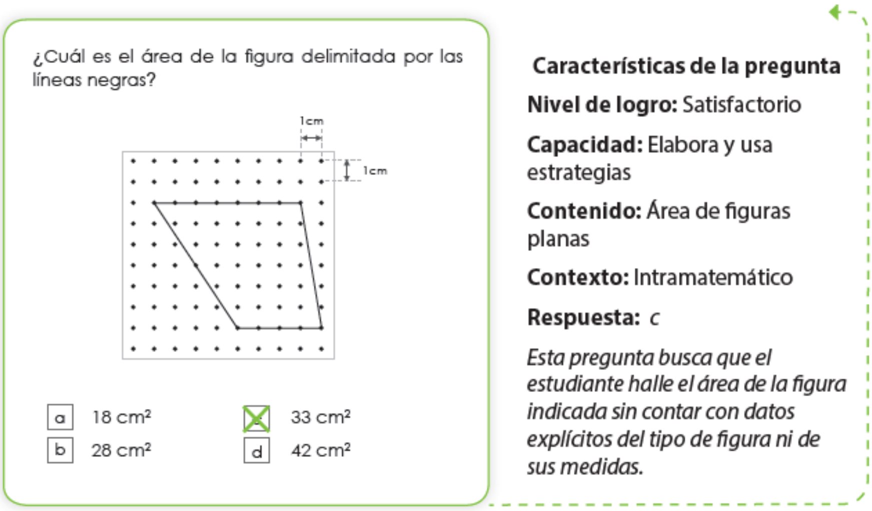


Figura 20. Ítem evaluado en la ECE 2016 a estudiantes de 2do de secundaria
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2017, p. 26)

Según la información obtenida de la base de datos de la UMC, solo el 25,76% de los estudiantes logró responder correctamente a esta pregunta. Lo que muestra que efectivamente los estudiantes peruanos tienen dificultades para determinar la medida del área de figuras planas.

El 74,24% de estudiantes erró marcando las otras alternativas. De este porcentaje, un grupo de ellos marcó 18 cm^2, evidenciando así su confusión entre área y perímetro. Otro grupo de estudiantes marcó 28 cm^2, estos estudiantes utilizaron los únicos dos datos explícitos en la figura (7 y 4) y los multiplicaron, asociando que la medida del área siempre tiene que ver con una multiplicación de dos lados. Otro grupo de estudiantes marcó 42 cm^2, estos estudiantes identificaron la base mayor del trapecio (7) y la altura (6) para luego multiplicar ambos datos.

Como podemos observar, según las respuestas analizadas, en los estudiantes está muy arraigada la idea de que la medida del área de una figura siempre se obtiene multiplicando la medida de dos lados cualesquiera de la figura. Según la investigación de Herendiné (2016) esta forma de pensar en los estudiantes sería una causa del uso temprano de fórmulas. Si bien, estos datos corresponden a las dificultades de los estudiantes a nivel nacional, nos dan una idea sobre cuál es la situación de un estudiante promedio perteneciente al segundo grado de secundaria en el Perú.

Por otro lado, debemos cuestionar que en ambas evaluaciones censales se enfocó al área como número y no como magnitud, pues la pregunta planteada en ambos ítems fue ¿Cuál es el área? Y no ¿Cuál es la medida del área? Como ya hemos presentado en las investigaciones de referencia, autores como Da Silva (2011) mencionan que este enfoque de área como número provoca dificultades en la comprensión del estudiante con respecto al concepto de área.

3.3. Aspectos didácticos relacionados al área de polígonos

Consideramos necesario empezar diferenciando los conceptos superficie y área, pues según las investigaciones consultadas, hay autores quienes las consideran sinónimos y hay quienes no.

Douady y Perrin-Glorian (1987) definen a las superficies planas como las partes acotadas de un plano cuyo interior no vacío está limitado por una o más curvas cerradas de longitud finita como se muestra en la Figura 21.

Figura 21. Ejemplos de superficies planas

Con respecto al área, los investigadores mencionan lo siguiente, "El propósito de la noción de área es medir la ocupación del plano independientemente de la forma" (p. 24, traducción nuestra).

Con base en lo descrito por Douady y Perrin-Glorian (1987) utilizaremos los siguientes términos: superficie como parte limitada de un plano; área como magnitud física, cualidad o propiedad de la superficie; y medida como número asociado al área cuando se ha hecho la elección de la unidad.

Medida del área de superficies planas

Como bien lo mencionamos, nosotros consideramos al área como una magnitud. Es importante, entonces, explicar qué entendemos por magnitud. La idea de magnitud es una de las más antiguas de la humanidad y tiene su origen asociado al surgimiento de los números y la necesidad del hombre por realizar conteos y mediciones. En ese sentido, nosotros consideramos la definición del Diccionario de M. Moliner presentado por Godino, Batanero y Roa (2002, p. 615) quienes mencionan lo siguiente:

> En la vida cotidiana y en las ciencias experimentales se habla de magnitudes para referirse a propiedades o cualidades de los objetos o fenómenos susceptibles de tomar diferentes valores numéricos. "Magnitud es cualquier aspecto de las cosas que puede expresarse cuantitativamente, como la longitud, el peso, la velocidad o la luminosidad"; "Cantidad es el aspecto por el que se diferencian entre sí las porciones de la misma cosa o los conjuntos de la misma clase de cosas, por el cual esas porciones o esos conjuntos se pueden medir o contar".

De esta forma queremos explicar que cuando mencionamos que la medida del área de una figura es 12 cm^2, estamos mencionando que 12 es la medida del área y cm^2 es la unidad de medida.

Por otro lado, Douady y Perrin-Glorian (1987) mencionan que las dificultades observadas en relación al concepto medida de área están relacionadas con la introducción prematura de un acercamiento a la medida del área mediante el uso de fórmulas, es decir un enfoque del área como número.

Es por esta razón que los investigadores tienen como una de sus hipótesis de investigación, la necesidad de construir la noción de área como magnitud, en donde se distinga el área de la superficie y el área del número.

En ese sentido, Da Silva (2011) presenta un esquema inspirado en las investigaciones de Douady y Perrin-Glorian (1989), el autor adopta una organización conceptual para el área en tres cuadros: el geométrico, numérico y de las magnitudes como se muestra en la Figura 22.

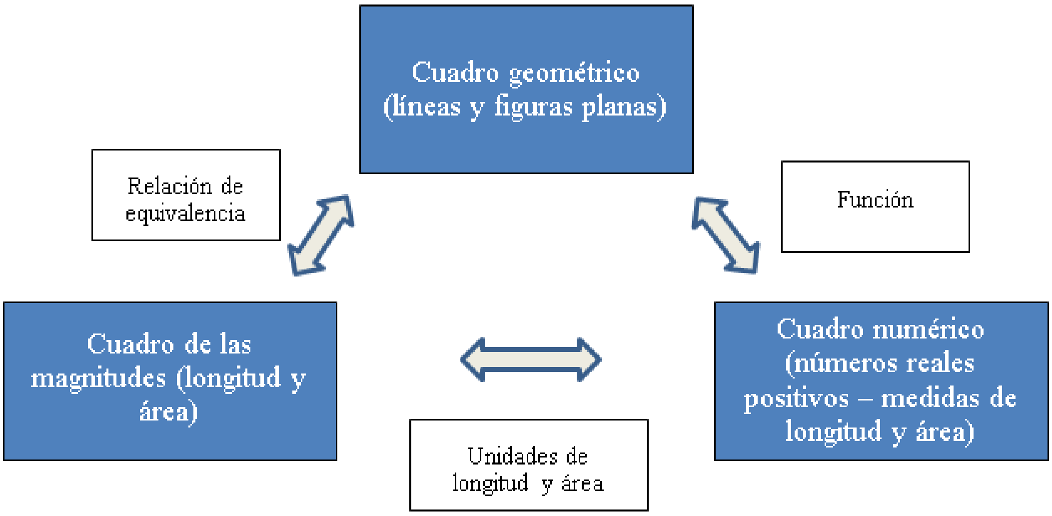


Figura 22. Organización conceptual de referencia del campo de las magnitudes longitud y área y sus medidas
Fuente: Da Silva (2011, p. 31)

En la Figura 22 podemos observar la organización de los tres cuadros que componen una organización conceptual del área como magnitud. Según Ferreira y Bellemain (2016), cada cuadro está constituído por lo siguiente:

- El cuadro geométrico constituido por las superficies planas (cuadrado, rectángulo, triángulo, paralelogramo, trapecio, etc.)
- El cuadro numérico constituido por las medidas de área de las superficies planas que pertenecen a los números reales positivos.

- El cuadro de las magnitudes constituido por las clases de equivalencia de figuras de la misma área.

Los cuadros están constituidos por objetos que pertenecen a diferentes ramas de la matemática, las relaciones entre los objetos, sus formulaciones y sus imágenes mentales. Es por ello que consideramos que un estudio del área como magnitud es establecer distinciones entre el área y la figura, y entre el área y el número. En la distinción entre área y figura, la operación de la reconfiguración juega un papel importante, pues a partir de una figura inicial se puede producir otra figura por la descomposición y recomposición de sus partes, obteniendo así una nueva figura que tiene la misma área.

Asimismo, si establecemos una relación entre los cuadros presentados por Douady y Perrin-Glorian y la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval podemos decir que: el cuadro numérico se relaciona con el registro numérico, el cuadro geométrico se relaciona con el registro figural y el cuadro de las magnitudes con las clases de equivalencias que se generan gracias a la reconfiguración.

Cabe mencionar que, desde el punto de vista matemático, existe la relación de equivalencia expresada en la frase "tener la misma área", lo que nos permite considerar al área como una magnitud. Es decir, la relación de equivalencia hace referencia que diversas superficies tienen atributos comunes. Por lo tanto, cuando decimos que dos superficies tienen una misma área, entendemos que ambas pertenecen a una misma clase de equivalencia.

Por otro lado, debido a que en nuestra investigación consideramos el área como magnitud asociada a polígonos, es necesario explicar qué entendemos por polígono. Llamaremos polígono a las partes acotadas de un plano cuyo interior no vacío está limitado por tres o más segmentos.

En algunas de las investigaciones de referencia presentadas al inicio se menciona constantemente los términos enfoque cualitativo y cuantitativo o enfoque geométrico y numérico del área. Es por ello, que se considera necesario explicarlos.

Enfoque cualitativo y cuantitativo del área

Los enfoques cualitativo y cuantitativo generan tratamientos diversos en los objetos, es por ello que es importante diferenciarlos.

Según Corberán (1996) el enfoque cualitativo está compuesto por procedimientos de naturaleza geométrica donde el número está ausente de cualquier razonamiento. El objetivo no es cuantificar el área sino comparar áreas de superficies sin necesidad de recurrir a un número para ello. Si bien, estos procedimientos no son precisos, juegan un papel fundamental en la comprensión del objeto matemático área. Este enfoque estaría relacionado con el cuadro geométrico y el cuadro de las magnitudes según Douady y Perrin-Glorian, y con el registro figural según Duval.

Mientras que el enfoque cuantitativo está compuesto por los procedimientos de naturaleza numérica. Aunque son diversos estos procedimientos, todos tienen el mismo fin, el de asignar un número al área de una superficie o bien determinar la medida del área de una superficie. Según Douady y Perrin-Glorian, este enfoque estaría relacionado con el cuadro numérico y según Duval, con el registro de escritura de los números reales positivos.

Sin embargo, existen determinadas situaciones para resolver problemas de áreas en donde se combinan ambos enfoques, estos no dejan de ser en realidad de naturaleza numérica, en la medida que su fin es cuantificar el área. En este sentido, el enfoque geométrico facilita el trabajo del enfoque numérico para obtener la medida del área. En nuestra investigación, observaremos cómo la reconfiguración facilita el trabajo de los estudiantes para determinar la medida del área de las figuras.

Entonces, después de todo lo mencionado y tomando como base la postura de Douady y Perrin-Glorian (1987) decidimos considerar el enfoque de área como magnitud dentro de nuestras actividades. Sin embargo, es necesario contrastarlo con el enfoque de área que se trabaja en el currículo peruano y en dos libros de texto de segundo grado de secundaria que analizaremos a continuación.

3.4. El concepto de área en el currículo peruano y en los libros de texto

Consideramos necesario presentar una visión general de cómo se enseña la noción de área en el Perú y para ello recurrimos al documento curricular oficial que es la Resolución Ministerial N° 199-2015. De ella obtuvimos los indicadores de desempeño que pertenecen a la competencia de Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de forma movimiento y localización, y seleccionamos aquellos que están vinculados al concepto de área.

En el Cuadro 5, los indicadores están organizados de forma horizontal por las cuatro capacidades que propone el currículo peruano y de forma vertical por grados desde 4° de primaria hasta 2° de secundaria. Si bien la noción de superficie la trabajan desde 2° grado de primaria, en el cuadro se decidió empezar por 4° grado de primaria para enfocarnos en lo que respecta al área en sí.

Cuadro 5. *Indicadores de desempeño de la competencia Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de forma movimiento y localización*

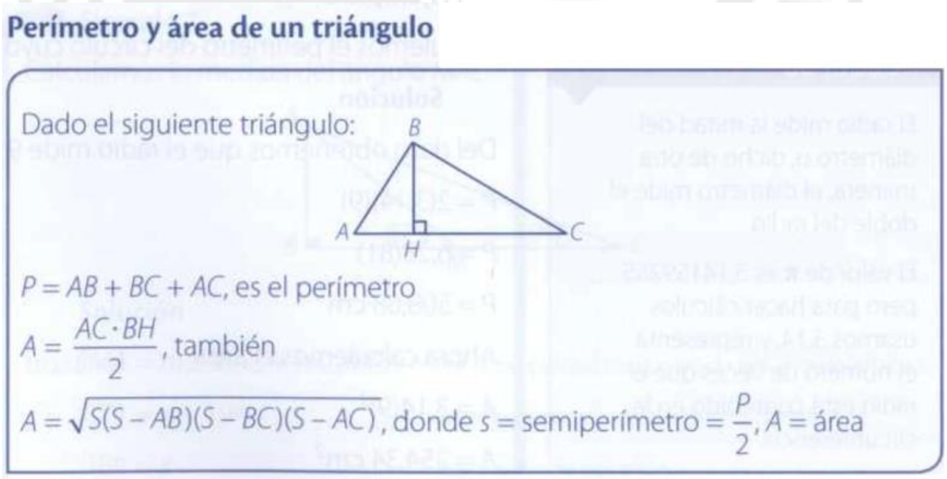
	4°	5°	6°	1°	2°
Matematiza Situaciones		Identifica características y propiedades geométricas explicitas según su perímetro y área en objetos y superficies de su entorno, expresándolos en un modelo basado en cuadriláteros y triángulos.	Identifica características y propiedades geométricas en objetos y superficies de su entorno, expresándolos en figuras geométricas bidimensionales (círculo circunferencia, polígonos regulares hasta 10 lados)	Organiza medidas, características y propiedades geométricas de figuras y superficies, y las expresa un modelo referido a figuras poligonales.	Organiza características y propiedades geométricas en figuras y superficies, y las expresa en un modelo referido a figuras poligonales regulares, compuestas, triángulos y el círculo.
Comunica y representa ideas matemáticas	Describe la estimación y la comparación de la medida de la longitud, perímetro, superficie de las figuras a partir de unidades arbitrarias o convencionales.	Representa en forma concreta (tangram, geoplano, origami) y gráfica (en cuadrículas, malla de puntos), cuadriláteros y triángulos, dados la medida de sus lados, ángulos, el perímetro o el área.	Expresa la medida de superficie usando unidades convencionales (km^2, m^2)	Expresa las relaciones y diferencias entre área y perímetro de polígonos regulares.	
Elabora y usa estrategias	Usa unidades patrón (cartón, cartulina, etc.) que midan un metro cuadrado para determinar cuántas unidades cuadradas necesita para cubrir superficies de figuras bidimensionales	Emplea procedimientos como componer o rotar figuras, estrategias de conteo de cuadraditos o composición de triángulos para calcular el área de paralelogramos y los trapecios a partir del área del rectángulo. Calcula el área del triángulo a partir del área del rectángulo.	Emplea estrategias que implican cortar la figura en papel y reacomodar las piezas, dividir en cuadritos de 1 cm2 y el uso de operaciones para determinar el área y el perímetro de figuras bidimensionales.	Emplea estrategias heurísticas, recursos gráficos y otros, para resolver problemas de perímetro y área del triángulo, rectángulo, cuadrado, rombo. Emplea estrategias heurísticas y procedimientos para hallar el área, perímetro, volumen, reconocer características proporcionales y ubicar cuerpos en mapas o planos a escala con recursos gráficos y otros.	Calcula el perímetro y área de figuras poligonales regulares y compuestas, triángulos, círculos componiendo y descomponiendo en otras figuras cuyas medidas son conocidas, con recursos gráficos y otros.
Razona y argumenta	Justifica sus conjeturas usando ejemplos sobre los procedimientos aplicados en problemas de cálculo de perímetro, superficie y capacidad con unidades patrón. Elabora conjeturas sobre los procedimientos a aplicar en el cálculo de perímetro, superficie y capacidad con unidades patrón.	Establece diferencias entre el área y el perímetro de una figura.	Elabora conjeturas sobre la relación entre perímetro y área de formas bidimensionales, entre áreas de cuadriláteros y triángulos	Plantea conjeturas para determinar perímetro y área de figuras poligonales (triángulo, rectángulo, cuadrado y rombo). Justifica las variaciones en el perímetro, área y volumen debidos a un cambio en la escala en mapas y planos.	Justifica condiciones de proporcionalidad en el perímetro, área y volumen entre el objeto real y el de escala, en mapas y planos.

Fuente: Adaptado de Resolución Ministerial N°199-2015 (2015, p. 66-79)

Como se puede apreciar en el Cuadro 5, hasta 4° grado de primaria se pide estimar la medida de la superficie. A partir de 5° de primaria se pide calcular la medida del área. Sin embargo, observamos que el currículo peruano también trabaja bajo el enfoque de área como número pues en los indicadores de desempeño aparecen expresiones como “calcular, determinar o hallar el área” y como bien hemos mencionado, este enfoque no ayuda en la comprensión global del estudiante pues según Douady y Perrin-Glorian (1987) se debe distinguir al área de la superficie y el área del número.

Basados en lo que estipula el currículo peruano, presentamos a continuación el libro de texto del segundo grado de educación secundaria denominado Matemática 2 del año 2015 de la editorial Norma, en el que en el capítulo 7 titulado “Figuras poligonales y círculo” desarrolla el objeto matemático de la presente investigación. Cabe resaltar que analizamos este texto porque es utilizado por todas las escuelas públicas a nivel nacional.

En Norma (2015) se presenta el perímetro y área de un triángulo (ver Figura 23). Desde la Teoría de Registros de Representación Semiótica el texto hace uso del registro figural para presentar a un triángulo con su altura y del registro algebraico para presentar tres fórmulas, una para el perímetro y dos para el área.



Perímetro y área de un triángulo

Dado el siguiente triángulo:

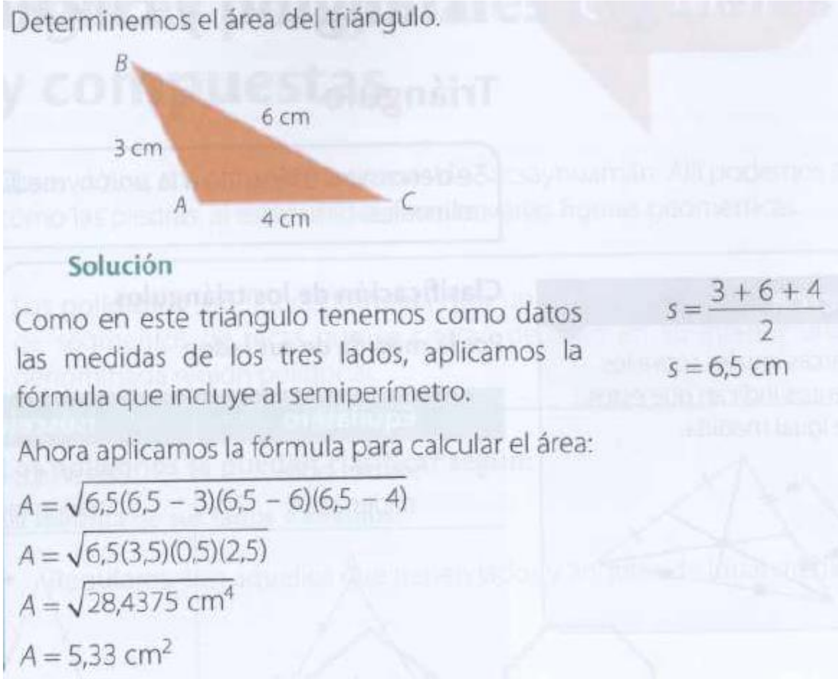
$P = AB + BC + AC$, es el perímetro

$A = \frac{AC \cdot BH}{2}$, también

$A = \sqrt{S(S - AB)(S - BC)(S - AC)}$, donde s = semiperímetro = $\frac{P}{2}$, A = área

Figura 23. Perímetro y área de un triángulo en el libro Matemática 2
Fuente: Norma (2015, p. 97)

Luego, el texto presenta un ejemplo resuelto en el que se pide determinar la medida del área del triángulo (Figura 24). En este ejemplo interviene el uso del registro figural y del registro numérico, no obstante, solo se realizan tratamientos en el registro numérico pues se pide la aplicación directa de la fórmula dada.


Determinemos el área del triángulo.

Solución

Como en este triángulo tenemos como datos las medidas de los tres lados, aplicamos la fórmula que incluye al semiperímetro.

$$s = \frac{3+6+4}{2}$$

$$s = 6{,}5 \text{ cm}$$

Ahora aplicamos la fórmula para calcular el área:

$$A = \sqrt{6{,}5(6{,}5-3)(6{,}5-6)(6{,}5-4)}$$

$$A = \sqrt{6{,}5(3{,}5)(0{,}5)(2{,}5)}$$

$$A = \sqrt{28{,}4375 \text{ cm}^4}$$

$$A = 5{,}33 \text{ cm}^2$$

Figura 24. Ejemplo para determinar la medida del área de un triángulo en el libro Matemática 2
Fuente: Norma (2015, p. 98)

Aquí, además se puede apreciar que el enfoque que maneja el autor del texto, al igual que el currículo peruano, es del área como número y que además se trabaja en el campo de los números racionales. Por otro lado, se cuestiona el hecho que se utilice a la unidad como una expresión algebraica a la que se le puede sacar la raíz cuadrada.

Después, en el subcapítulo sobre Perímetro y área de polígonos regulares (ver Figura 25) el texto Matemática 2 utiliza dos tipos de registros: el registro figural para mostrar a un nonágono y su apotema, y el registro algebraico para presentar la fórmula que permite obtener la medida del área de cualquier polígono regular. Además, como información complementaria también se presenta, en el registro de lengua natural, la explicación de otra forma de obtener la medida del área de un polígono regular realizando una descomposición de dicho polígono en triángulos, determinando la medida del área de uno de los triángulos y multiplicando este valor por la cantidad de triángulos que hay. Según la Teoría de Registros de Representación Semiótica, en este caso estaríamos realizando al polígono regular una modificación mereológica de tipo homogénea.

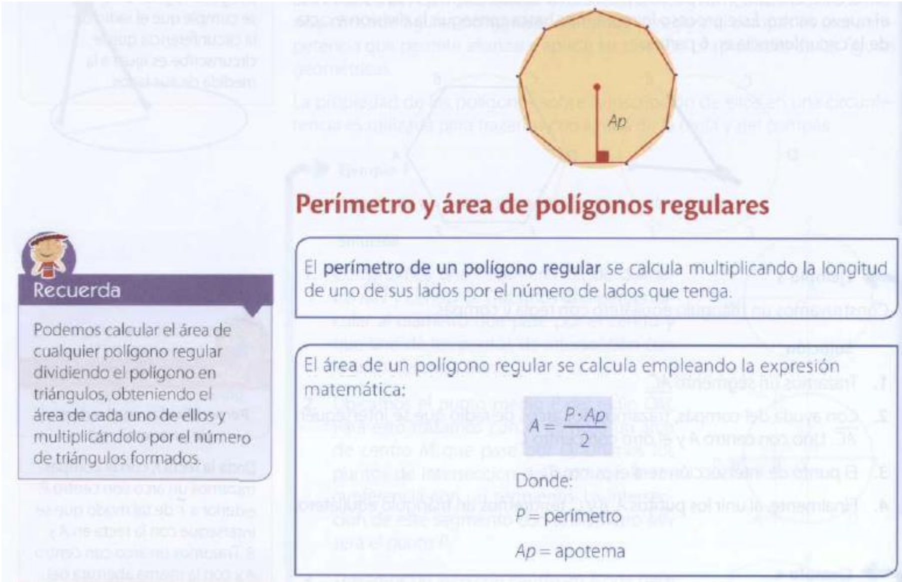
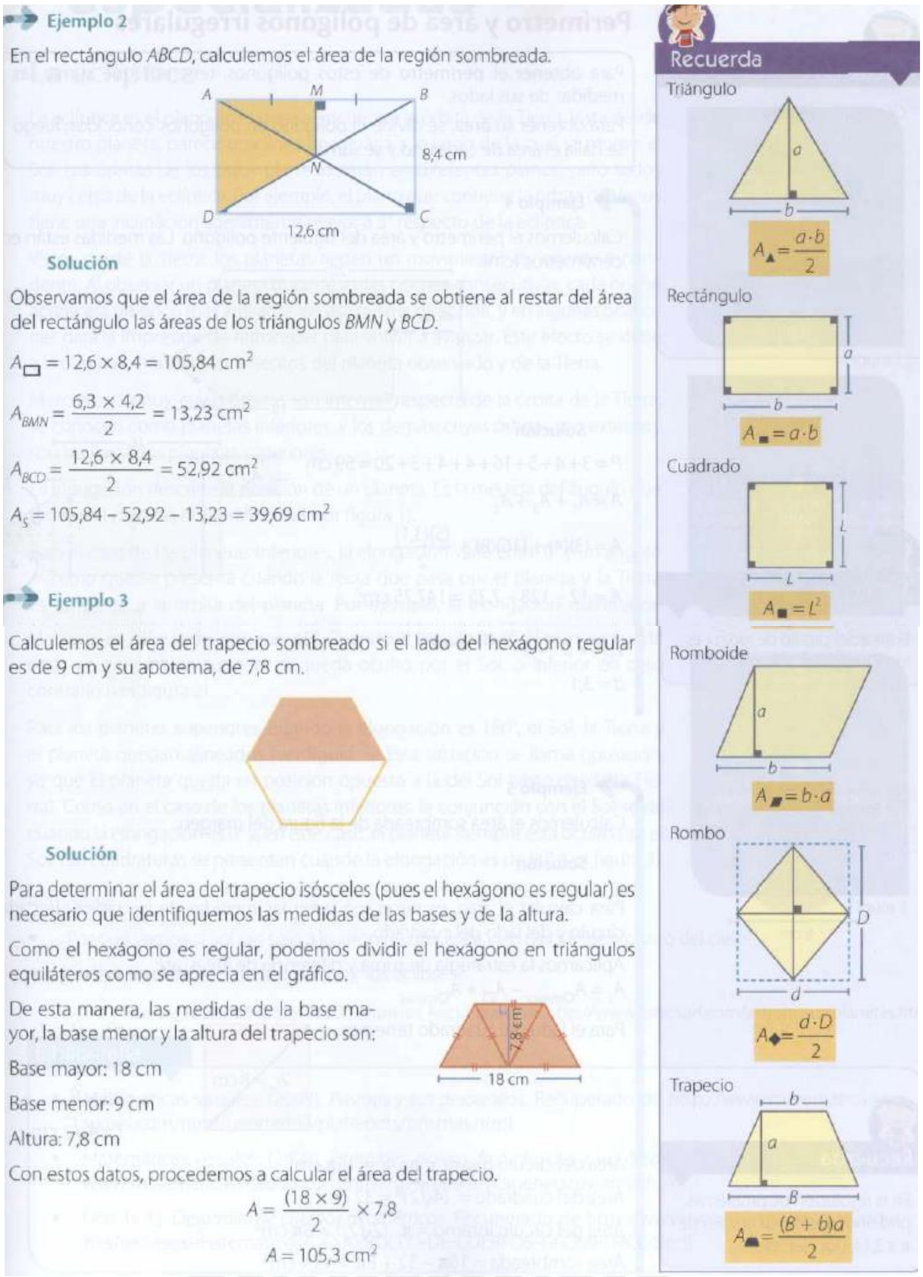


Figura 25. Perímetro y área de polígonos regulares en el libro Matemática 2
Fuente: Norma (2015, p. 106)

Luego, Norma (2015) presenta el ejemplo 2 y el ejemplo 3, de los cuales analizaremos el ejemplo 3. En este ejemplo resuelto (Figura 26) se pide calcular la medida del área del trapecio sombreado conociendo la medida del lado del hexágono regular y su apotema. Luego, el texto presenta una información usando el registro de lengua natural en la que explica el procedimiento que se debe seguir para resolver este ejercicio. Esta información va a acompañado de una figura y en este caso sí se llega a realizar tratamientos figurales como la aprehensión operatoria de modificación mereológica de tipo homogénea pues el trapecio se descompone en tres triángulos equiláteros, lo que permite calcular los lados paralelos del trapecio. Finalmente, se hace uso del registro numérico al reemplazar los datos en la fórmula, obteniendo así el valor del área. En este ejemplo, también se trabaja con números racionales y se sigue manteniendo el enfoque de área como número.

Por otro lado, cabe resaltar que al lado derecho se aprecia una columna con las fórmulas para obtener la medida de área de las figuras a modo de un recordatorio pues se supone que el estudiante ya las ha aprendido en los grados previos. Estas fórmulas presentadas en el registro algebraíco son acompañadas de una figura geométrica bidimensional. Podemos ver que según la Teoría de Registros de Representación Semiótica, el libro de texto hace uso del registro figural y presenta toda las figuras (excepto el rombo) con el lado mayor de forma horizontal.


Ejemplo 2

En el rectángulo *ABCD*, calculemos el área de la región sombreada.

A M B N D C 8,4 cm 12,6 cm

Solución

Observamos que el área de la región sombreada se obtiene al restar del área del rectángulo las áreas de los triángulos *BMN* y *BCD*.

$A_{\square} = 12{,}6 \times 8{,}4 = 105{,}84\ cm^2$

$A_{BMN} = \dfrac{6{,}3 \times 4{,}2}{2} = 13{,}23\ cm^2$

$A_{BCD} = \dfrac{12{,}6 \times 8{,}4}{2} = 52{,}92\ cm^2$

$A_S = 105{,}84 - 52{,}92 - 13{,}23 = 39{,}69\ cm^2$

Ejemplo 3

Calculemos el área del trapecio sombreado si el lado del hexágono regular es de 9 cm y su apotema, de 7,8 cm.

Solución

Para determinar el área del trapecio isósceles (pues el hexágono es regular) es necesario que identifiquemos las medidas de las bases y de la altura.

Como el hexágono es regular, podemos dividir el hexágono en triángulos equiláteros como se aprecia en el gráfico.

De esta manera, las medidas de la base mayor, la base menor y la altura del trapecio son:

7,8 cm 18 cm

Base mayor: 18 cm

Base menor: 9 cm

Altura: 7,8 cm

Con estos datos, procedemos a calcular el área del trapecio.

$A = \dfrac{(18 \times 9)}{2} \times 7{,}8$

$A = 105{,}3\ cm^2$

Recuerda

Triángulo

$A_{\blacktriangle} = \dfrac{a \cdot b}{2}$

Rectángulo

$A_{\blacksquare} = a \cdot b$

Cuadrado

$A_{\blacksquare} = L^2$

Romboide

$A = b \cdot a$

Rombo

$A_{\blacklozenge} = \dfrac{d \cdot D}{2}$

Trapecio

$A = \dfrac{(B + b)a}{2}$

Figura 26. Ejemplos para determinar la medida del área de polígonos en el libro Matemática 2
Fuente: Norma (2015, p. 107)

En cuanto al subcapítulo Perímetro y área de polígonos irregulares (ver Figura 27), el texto presenta lo que en el currículo peruano llaman figura compuesta. En esta sección se hace una explicación de cómo obtener la medida del área de un polígono irregular, mediante el registro de lengua natural, se explica que se debe descomponer la figura en sub-figuras conocidas para así obtener la medida del área de cada una de ellas y sumarlas. Esta explicación va a acompañado de un ejemplo en el registro figural en el que se presenta un octágono irregular que luego es descompuesto en dos rectángulos y un triángulo.

Por último, se presenta un ejemplo resuelto en el que se pide calcular la medida del perímetro y área de un polígono irregular. En este ejemplo, observamos que se realizan tanto tratamientos figurales como numéricos. En lo que respecta al área, primero se moviliza la aprehensión operatoria de modificación mereológica de tipo heterogénea para descomponer el polígono en dos rectángulos y un triángulo. Luego, mediante tratamientos numéricos se logra obtener la medida de los lados de los dos rectángulos y del triángulo. Sin embargo, observamos un error en estos procedimientos pues la altura del triángulo debería ser 2 cm y no 3,1 cm como lo menciona el texto. Tampoco entendemos cómo es que se logra obtener que el lado del triángulo es 4 sin hacer cálculo alguno. Finalmente, se vuelven a realizar otros tratamiento numéricos para determinar la medida del área de cada una de las sub-figuras y luego se procede a sumar dichos valores.

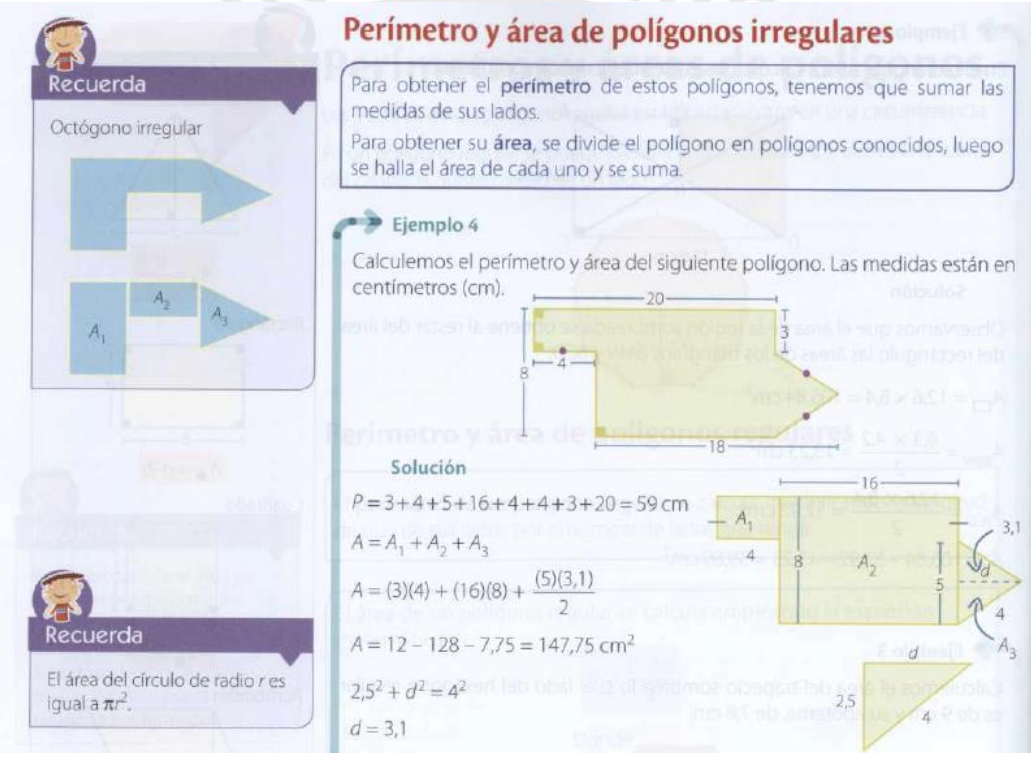


Figura 27. Perímetro y área de polígonos regulares en el libro Matemática 2
Fuente: Norma (2015, p. 108)

En todos los ejemplos se hace uso de la misma unidad de medida, lo que podría ocasionar que los estudiantes piensen que el centímetro es la única unidad que existe para las longitudes y por ende el centímetro cuadrado para el área. Si bien en ningún momento el texto define la noción de área es claro que existe un fuerte enfoque del área como número que guarda relación con el currículo peruano. Asimismo, no se observa ningún caso de reconfiguración en los ejemplos presentados, pero sí de descomposición de tipo homogénea y heterogénea.

Como ya se mencionó, este texto está destinado para todas las escuelas públicas a nivel nacional y por esta razón era importante conocer su enfoque. No obstante, la escuela a la que pertenecen los sujetos de la investigación es una escuela privada, por tal motivo seleccionamos un segundo libro de texto para analizar.

Cabe mencionar que en la escuela en donde estudian los sujetos de la investigación, no tienen un libro asignado para el grado, es por ello que decidimos analizar el libro de texto que el profesor utiliza como texto de consulta. Este libro, que pertenece a la editorial Haese Mathematics, es titulado *Mathematics for the international student 8* (Haese, Haese, Humphries, Kemp & Vollmar, 2014) es un texto para estudiantes del segundo grado de secundaria que pertenecen a escuelas con Bachillerato Internacional (BI).

El BI es un programa educativo de dos años de duración que se imparte en tres idiomas (inglés, francés, español) dirigido a estudiantes no universitarios entre los 16 y 19 años. Una escuela con BI tiene diversos programas para cada uno de los grados precedentes al propio programa BI. En nuestro caso, los sujetos de estudio reciben las clases de matemática en el idioma inglés y es por ello que los textos con los que trabajan profesores y estudiantes también están en ese idioma.

En el texto mencionado, dentro del capítulo 11 titulado Longitud y Área, se aborda todo lo concerniente al área. En relación a dicho objeto matemático, Haese et al. (2014) presenta la siguiente definición "Área es la cantidad de superficie dentro de una figura de dos dimensiones. Podemos medirla usando milímetros cuadrados (mm^2), centímetros cuadrados (cm^2), metros cuadrados (m^2), hectáreas (ha) o kilómetros cuadrados (km^2)" (p. 223, traducción nuestra).

Podemos apreciar que esta definición corresponde al cuadro numérico del que nos habla Douady y Perrin-Glorian (1987) el cual está constituido por las medidas de las superficies planas, por ello, no podemos afirmar que la noción de medida de área de un polígono esté asociada al área como magnitud.

Luego, observamos que las unidades (Figura 28) con las que se aborda el área son presentadas mediante el sistema métrico decimal, dando énfasis al centímetro y presentando apenas un ejemplo con milímetros. Esto genera una confusión en el estudiante puesto que asocia que el área de las figuras siempre o la mayoría de las veces se medirá en ese sistema. Por otro lado, cuestionamos que se utilice a las unidades como expresiones algebraicas con las que se pueda operar pues, como ya se mencionó anteriormente, no tiene sentido multiplicar centímetros.

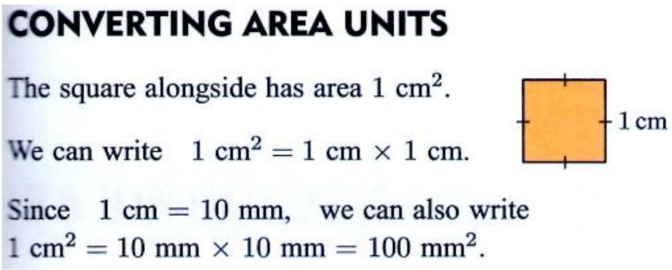


Figura 28. Conversión de unidades en el libro Mathematics for the international student 8
Fuente: Haese (2014, p. 223)

En cuanto a las fórmulas para determinar la medida del área de una figura, Haese et al. (2014) presenta lo siguiente:

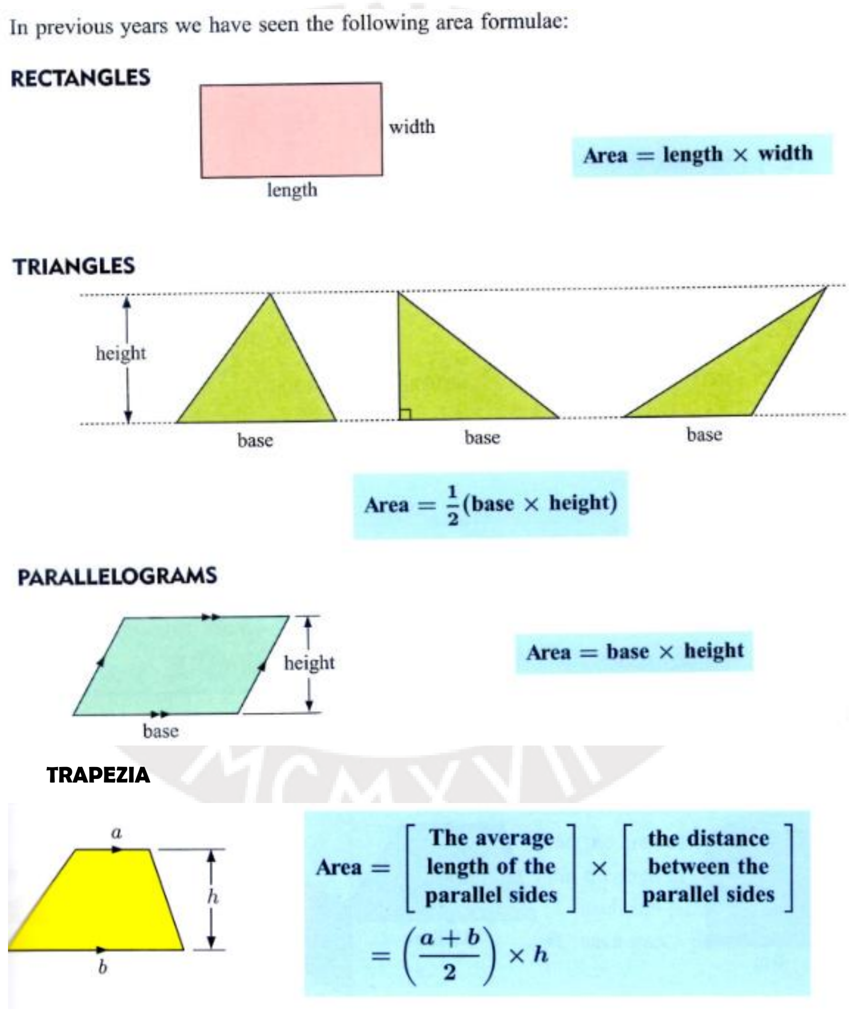


Figura 29. Fórmulas para el cálculo de áreas en el libro Mathematics for the international student 8
Fuente: Haese et al. (2014, p. 224-225)

Según lo que observamos en la Figura 29, las fórmulas de áreas se trabajan desde años anteriores. Estas fórmulas se presentan acompañadas de una figura geométrica de dimensión dos. Podemos ver que según la Teoría de Registros de Representación Semiótica, el autor presenta toda las figuras con el lado mayor de forma horizontal y que sus fórmulas mezclan una representación simbólica con el registro de lengua natural. Solo para el trapecio, el autor presenta una fórmula formalmente.

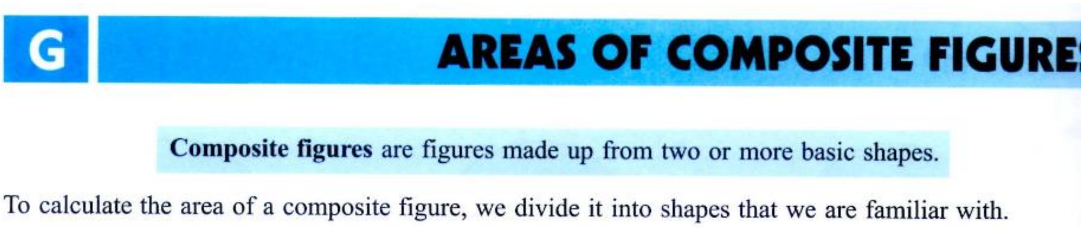
En todas las fórmulas, cuestionamos el hecho de combinar una representación simbólica con una representación en lengua natural puesto que no es posible multiplicar palabras. Este tipo de expresiones generan confusión en los estudiantes con respecto a la medida de área de un polígono.

Seguidamente, Haese et al. (2014) presenta tres ejemplos resueltos en donde se pide encontrar la medida del área de tres figuras (un triángulo, un paralelogramo y un trapecio). En la solución, se espera que el estudiante obtenga los datos a partir de la figura por medio de su aprehensión perceptiva y discursiva puesto que tiene que identificar las propiedades en cada figura y así obtener los datos. Luego, se espera que el estudiante reemplace los datos en la fórmula y realice tratamientos numéricos para obtener la respuesta.

A continuación, el libro le presenta al estudiante 13 actividades acerca del cálculo de medida de áreas en las que se aprecian tanto ejercicios de aplicación directa de la fórmula como problemas de la vida real en los que el estudiante tiene que modelar la situación utilizando la noción de área de polígonos.

En ninguno de los ejercicios planteados por el texto, tanto a manera de ejemplo como actividad para el alumno, se identifica a la reconfiguración como estrategia de solución.

Luego, el texto presenta el subcapítulo de áreas de figuras compuestas. En él, las define como figuras formadas por dos o más figuras básicas y menciona que para determinar la medida de su área se debe buscar descomponer en sub-figuras con las que nos sintamos más familiarizados. En el sentido de Duval, estaríamos hablando de una modificación mereológica en la que se establece una relación parte-todo (ver Figura 30).

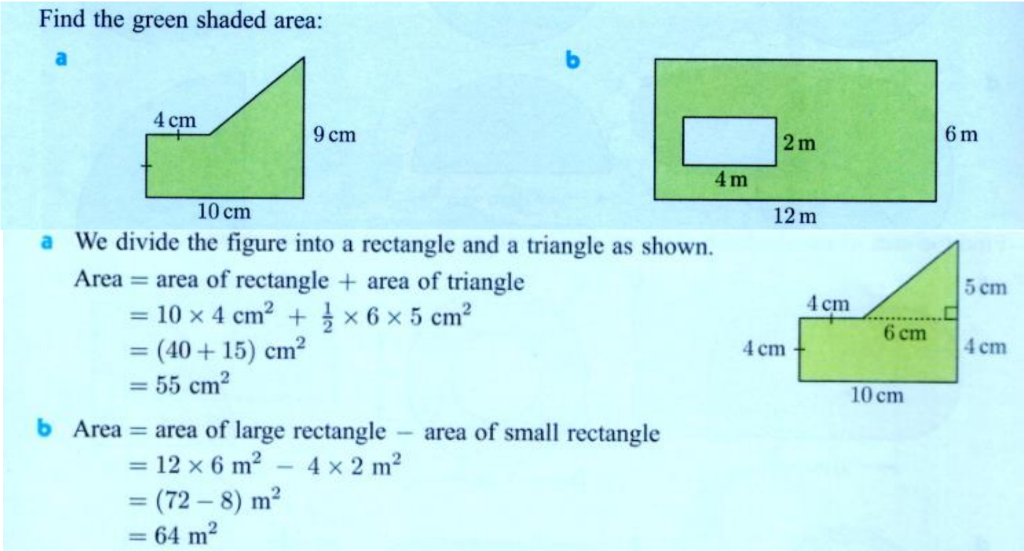

G AREAS OF COMPOSITE FIGURE

Composite figures are figures made up from two or more basic shapes.

To calculate the area of a composite figure, we divide it into shapes that we are familiar with.

Figura 30. Definición de figuras compuestas en el libro Mathematics for the international student 8
Fuente: Haese et al. (2014, p. 230)

A continuación, el texto presenta dos ejemplos resueltos de los cuales analizaremos el primero En la solución del primer ejemplo, se puede apreciar la descomposición heterogénea de un pentágono en dos sub-figuras (un rectángulo y un triángulo rectángulo). Esta descomposición se realizó mediante el trazo de una línea auxiliar dentro de la figura. Luego, se observa en el registro de lengua natural, la aplicación de las fórmulas del rectángulo y el triángulo para determinar la medida de las áreas de las figuras con el fin de sumarlas. En este ejemplo, en el sentido de Duval, observamos que los tratamientos no solo se realizan en el registro numérico (las operaciones que realiza) sino también en el registro figural (división de la figura en dos sub-figuras) como se aprecia en la Figura 31.


Find the green shaded area:

a

b

a We divide the figure into a rectangle and a triangle as shown.

Area = area of rectangle + area of triangle

$= 10 \times 4 \text{ cm}^2 + \frac{1}{2} \times 6 \times 5 \text{ cm}^2$

$= (40 + 15) \text{ cm}^2$

$= 55 \text{ cm}^2$

b Area = area of large rectangle − area of small rectangle

$= 12 \times 6 \text{ m}^2 - 4 \times 2 \text{ m}^2$

$= (72 - 8) \text{ m}^2$

$= 64 \text{ m}^2$

Figura 31. Ejemplos resueltos sobre cálculo de áreas para el estudiante en el libro Mathematics for the international student 8
Fuente**:** Haese et al. (2014, p. 230-231)

Nuevamente objetamos aquí la mezcla de registros que hace el autor del texto pues no es posible sumar o restar palabras. Asimismo, notamos que el autor opera con las unidades de medida como si fuesen una variable. En este caso, el tratamiento numérico debería consistir solo en las operaciones con los números y a la respuesta final añadirle la unidad correcta.

Después, el texto presenta al estudiante seis ejercicios para calcular la medida del área de figuras compuestas. De estos ejercicios analizaremos los dos últimos ya que son ejercicios en los que se puede realizar la reconfiguración (ver Figura 32). En todas las figuras se espera que el estudiante movilice de su aprehensión perceptiva y operatoria e identifique que las figuras están formadas por rectángulos, cuadrados y/o triángulos.

En el ejercicio “e” de la Figura 32, se aprecia un polígono de 5 lados. De acuerdo con los ejemplos resueltos por el libro, se espera que el estudiante realice una descomposición heterogénea de tal forma que se originen tres sub-figuras (dos triángulos y un rectángulo). Mediante el uso de las fórmulas se determine la medida del área de las tres sub-figuras y luego se sume las tres cantidades.

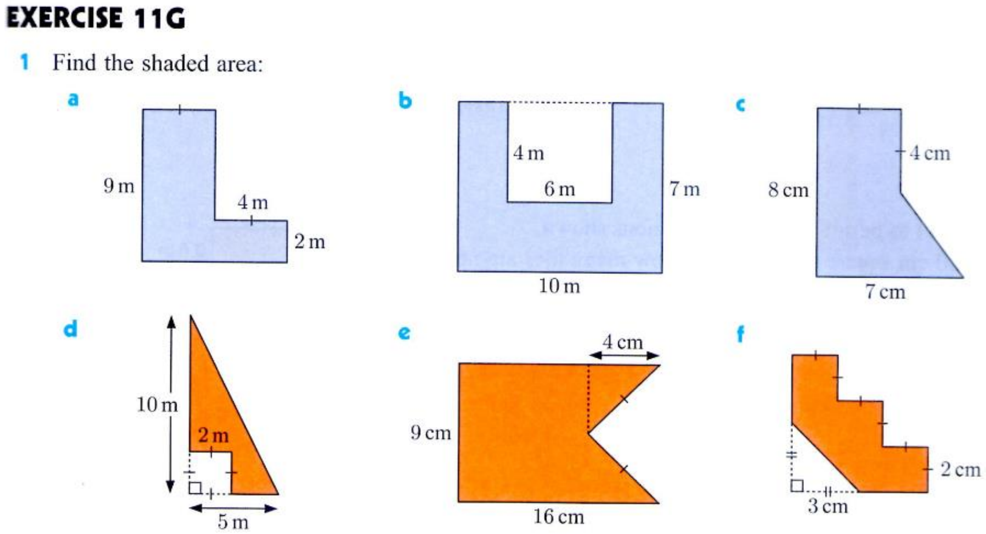
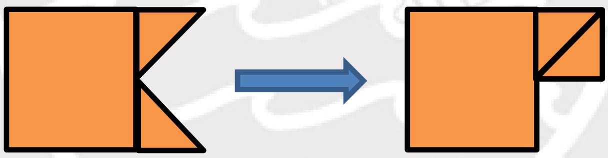


Figura 32. Ejercicios sobre cálculo de áreas para el estudiante en el libro Mathematics for the international student 8
Fuente: Haese et al. (2014, p. 231)

Sin embargo, en este ejemplo se puede apreciar la utilidad de la reconfiguración para realizar procedimientos más económicos, puesto que los triángulos son congruentes y se podrían unir formando un rectángulo. Para ello, podemos unir los dos triángulos de tal forma que se genere un rectángulo. Finalmente, determinamos la medida del área de cada rectángulo y sumamos las cantidades (ver Figura 33).



$$9 \times 12 + 4.5 \times 4$$

$$84 + 18$$

$$102\ \text{cm}^2$$

Figura 33. Reconfiguración del ejercicio "e" en el libro Mathematics for the international student 8

Una situación similar sucede con el ejercicio "f" de la Figura 32. Según la propuesta del libro, lo que se espera es que el estudiante descomponga el polígono de nueve lados en diferentes sub-figuras para que luego, mediante sumas y restas, se determine la medida del área de la figura. Sin embargo, aquí claramente podemos apreciar la utilidad de la reconfiguración.

Para ello, descomponemos la figura inicial en un heptágono y un cuadrado (ver Figura 34). Luego, trasladamos el cuadrado y lo ubicamos de tal forma que se genere un rectángulo incompleto. Encuadramos la figura dentro de un rectángulo, determinamos su área y luego le restamos el área del triángulo rectángulo que no forma parte de la figura.

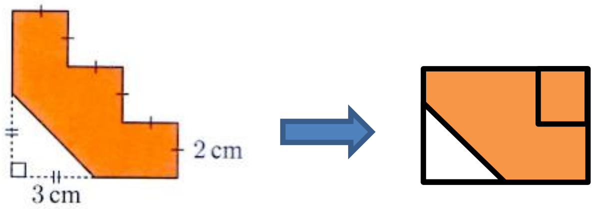


Figura 34. Reconfiguración del ejercicio “f” en el libro Mathematics for the international student 8

Luego de analizar el libro *Mathematics for the international student 8* (Haese et al., 2014), podemos concluir que el contenido y las actividades están presentadas mayoritariamente en el registro numérico y en algunos casos en el registro de lengua natural y figural. Encontramos ejercicios en los que la figura solo se presenta para obtener los datos y los tratamientos solo se realizan en el registro numérico, pero también encontramos ejercicios en los que es posible realizar tratamientos en el registro figural. Con respecto al campo numérico, los ejercicios son trabajados en el campo de los números racionales y no hay ningún ejemplo en donde se trabaje con números reales.

Es importante notar que en ninguno de los ejemplos y ejercicios presentados se utiliza la reconfiguración como estrategia de solución. Si bien, hay presencia de descomposiciones heterogéneas, de figuras en sub-figuras, estas solo se hacen con el fin de buscar figuras conocidas en las que se pueda usar la fórmula de área y no con el fin de recomponer las sub-figuras.

Por otro lado, no se aprecia actividades relacionadas a la comparación de áreas. En todos los ejercicios hay un fuerte enfoque cuantitativo del área (registro numérico según Duval y cuadro numérico según Douady y Perrin-Glorian) y los procedimientos geométricos sirven solo para agilizar los cálculos numéricos.

También cuestionamos el hecho de que tanto en el currículo como en los libros de texto se utilice el concepto de “figuras compuestas” puesto que matemáticamente no existe. La definición que se maneja en el libro de texto de Norma (2015) de “aquellas que se pueden derivar en otras formas poligonales” es discutible. Por ejemplo, un triángulo también se podría descomponer en dos triángulos rectángulos, sin embargo, la figura de un triángulo no es considerada como figura compuesta lo que podría generar dificultad en el estudiante para comprender el concepto de reconfiguración.

En conclusión, después de haber realizado este estudio del objeto matemático área, podemos hacer algunas reflexiones:

Del análisis histórico podemos concluir que existía el interés y la necesidad de determinar el área, desde las civilizaciones antiguas en Egipto, Mesopotamia y la India. Asimismo, las propiedades presentadas en el análisis histórico nos permiten justificar las ideas de Duval (2012a) en cuanto a la operación de reconfiguración.

Del análisis cognitivo podemos concluir que las evaluaciones muestran que los estudiantes de segundo grado de secundaria en el Perú no logran comprender el concepto de área y esto, probablemente, debido a que la forma en que se les enseña es bajo un enfoque de área como número y además a la utilización de fórmulas desde temprana edad.

Del análisis didáctico, resaltamos el enfoque que le daremos al área en nuestra investigación, el cual es área como magnitud con base en las ideas de Douady y Perrin-Glorian (1987), para quienes es importante distinguir al área de la superficie y al área del número.

Por otro lado, observamos que el currículo peruano, los libros de texto y la evaluación nacional manejan el mismo enfoque de área como número, y a pesar de esta coherencia los resultados de la ECE 2015 y ECE 2016 nos demuestran que los estudiantes no logran comprender la noción de área. La enseñanza bajo este enfoque solo está garantizando que menos del 45% de estudiantes a nivel nacional sepa determinar el área de una figura.

CAPÍTULO IV: PARTE EXPERIMENTAL Y ANÁLISIS DE LA INVESTIGACIÓN

En el presente capítulo presentamos a los sujetos de investigación, la organización de la secuencia de actividades, el análisis a priori y el análisis a posteriori de cada ítem.

4.1. Descripción de los sujetos de la investigación

La docente del curso de Matemática tiene la función de hacer que fluyan las interacciones entre los alumnos, el docente y el saber matemático, en este caso área de polígonos. La docente es a la vez la investigadora-observadora del estudio por lo que su función fue la de diseñar la secuencia de actividades y luego analizar su aplicación.

Los estudiantes pertenecen al segundo grado de educación secundaria de una institución educativa privada del distrito de La Molina. Estos estudiantes pertenecen a una de las cinco secciones del segundo grado de secundaria. Es importante mencionar que, dentro de la escuela en el área de Matemática, los estudiantes están divididos por niveles desde el nivel 1 hasta el nivel 5, en donde los alumnos más hábiles se encuentran en el nivel 1 y los menos hábiles en el nivel 5. Los estudiantes que participaron en esta investigación son estudiantes que pertenecen al nivel 3.

Aunque el grupo que participó de las actividades fue de 13 estudiantes, en este trabajo analizamos solamente la producción de dos de ellos pues fueron los que contestaron todas las preguntas de las fichas y presentaron mayor interés en el desarrollo de la secuencia de actividades. A estos dos estudiantes se les llamó Sara y Abril, nombres ficticios para fines de la investigación. Cabe mencionar además que los estudiantes han desarrollado actividades relacionadas a la medida de área desde los grados anteriores, ellos empiezan teniendo una aproximación al concepto de área desde el tercer grado de primaria y luego en cuarto empiezan a determinar la medida de área de las figuras a través de fórmulas.

4.2. Análisis de la aplicación de la secuencia de actividades

Las actividades están organizadas por ítems que promueven que los estudiantes comparen las áreas de figuras y reconfiguren diferentes polígonos para determinar su medida de área. En el Cuadro 6 mostramos la organización de la secuencia de actividades y el tiempo utilizado en cada una de ellas:

Cuadro 6. *Secuencia de actividades*

N° de actividad	Nombre	Descripción	Horas pedagógicas (40 min)
1	Trabajemos con el Tangram	Realizar reconfiguraciones mediante el uso del Tangram para comparar las áreas de figuras de forma diferente.	2
2	Hallemos la medida del área de polígonos	Determinar la medida del área de polígonos usando lápiz y papel mediante el uso de la malla cuadriculada. Movilizar los conocimientos de reconfiguración.	1

Cabe resaltar que antes de la aplicación de las actividades se administró una prueba diagnóstica a los sujetos de estudio la que presentamos a continuación.

4.2.1 Prueba diagnóstica administrada a los sujetos de estudio

Es importante mencionar que el capítulo correspondiente a áreas en segundo grado de secundaria ya había sido abordado meses antes de la aplicación.

Con el fin de obtener información más específica sobre los sujetos de estudio, se decidió administrar una prueba diagnóstica (ver Anexo A). Dicha prueba está organizada en tres partes, las que describiremos a continuación.

En la primera parte se buscó recoger las concepciones de los estudiantes con respecto al objeto matemático área, para ello se les pidió que describan con sus propias palabras qué entendían por área y que dieran un ejemplo (ver Figura 35).

1. Describe con tus propias palabras qué es el área de un polígono y muestra un ejemplo.

Figura 35. Pregunta 1 de la Prueba Diagnóstica

De los trece estudiantes solo tres lograron responder con una idea bastante aproximada a la definición de área, como se puede apreciar en las siguientes respuestas:

- *Es cuánto espacio tiene la figura dentro.*
- *Es el interior de una figura.*
- *Es descubrir el tamaño de la parte de adentro de una figura*

Cinco de ellos asoció la idea de área al uso de una fórmula como se muestra en las siguientes respuestas:

- *Es lo que hay dentro de una figura y se encuentra multiplicando la base por la altura.*
- *Multiplicas sus lados y lo divides entre dos.*
- *El área de un polígono es el área de una figura de varios lados. Por ejemplo, el triángulo su fórmula es* $\frac{b \times h}{2}$
- *El área de un polígono es lo que equivale al tamaño y el volumen de la superficie afuera. El triángulo es* $\frac{b \times h}{2}$
- *En un triángulo el área es* $\frac{b \times h}{2}$

Uno de ellos confundió área con perímetro:

- *El polígono tiene varios lados y es medio complicado de saber el área a menos que sumemos todos los lados.*

Tres de ellos aludieron a la definición de polígono:

- *El área de un polígono tiene distintas formas con distintos números de esquinas.*
- *Los polígonos son figuras de varios lados como el triángulo.*
- *Los pentágonos, cuadriláteros, etc.*

Y dos de ellos no respondieron a la pregunta.

En la segunda parte, se les presentó la pregunta 2 y 3 que tenían que ver con la relación de equivalencia. En ese sentido, se les presentó situaciones en donde las figuras mantenían la misma área. En la pregunta 2, se les presentó un cuadrado que sufrió una transformación mediante una rotación de 45° sobre su centro como se aprecia en la Figura 36.

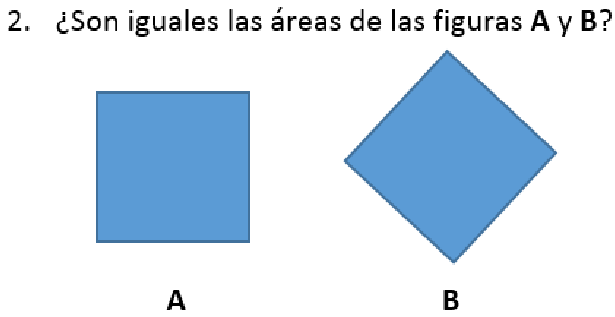


Figura 36. Pregunta 2 de la Prueba Diagnóstica

En esta pregunta, 12 de los 13 estudiantes respondió que sí y sus justificaciones se basaron en que era la misma figura, pero había sido rotada o que ambas figuras tenían las mismas medidas. Sin embargo, una estudiante respondió que no y su justificación fue la siguiente:

- *No porque el área es base por altura y la altura de la figura B es más grande que la de la figura A.*

En la pregunta 3, se les presenta una figura que había sido reconfigurada, es decir, un rectángulo que había sido descompuesto mediante una reconfiguración estrictamente homogénea para luego obtener un polígono de 12 lados como se aprecia en la Figura 37.

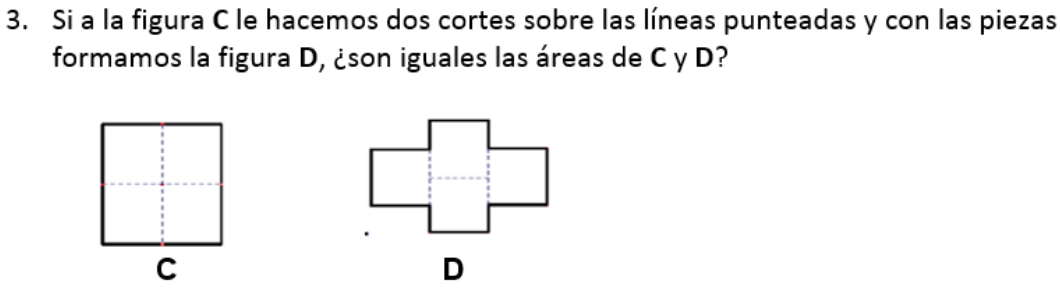


Figura 37. Pregunta 3 de la Prueba Diagnóstica

En esta pregunta, 9 de los 13 estudiantes respondieron que las áreas sí son iguales y sus justificaciones se basaron en que se trataba de la misma figura, pero “desarmada”. Sin embargo, cuatro estudiantes respondieron que no, aludiendo que ambas figuras tienen diferente medida.

En la parte tres de la prueba, se les pide determinar la medida del área de diversas figuras conocidas por ellos. En ellas solo se hace énfasis en obtener la medida correcta puesto que la unidad ya aparece en la prueba diagnóstica como se muestra en la Figura 38.

El objetivo de esta pregunta es analizar si los estudiantes utilizan la reconfiguración como estrategia para determinar la medida del área del rombo y trapecio que son las figuras que resultan más complejas de identificar su área. En este sentido, según la prueba diagnóstica ningún estudiante aplicó la operación de reconfiguración. Como resultado podemos obtener que los estudiantes no han trabajado antes problemas en donde la reconfiguración sea una estrategia de solución.

4. Determina la medida de área de las siguientes figuras.

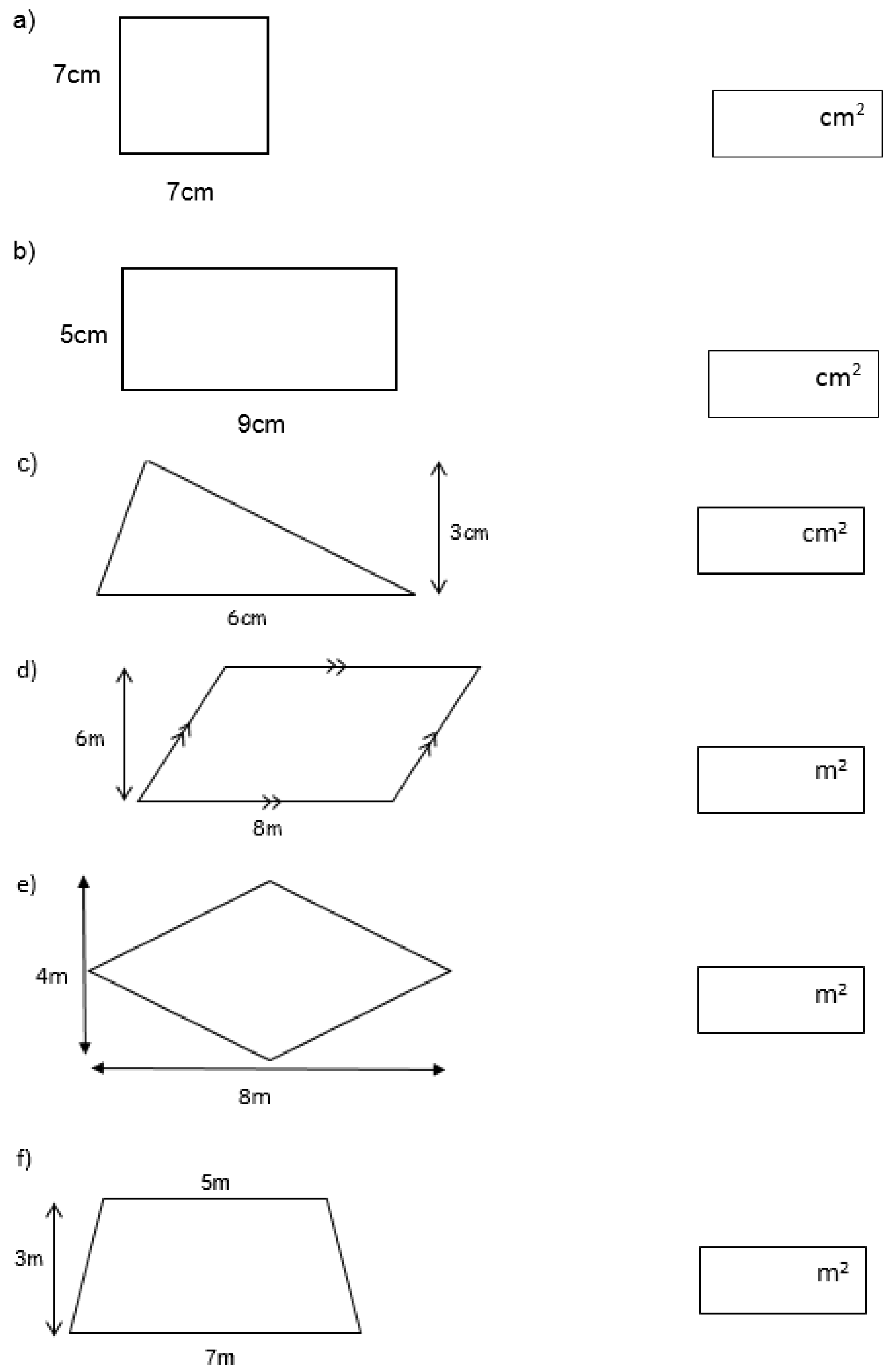


Figura 38. Pregunta 4 de la Prueba Diagnóstica

Mostramos en el Cuadro 7, un resumen que consolida los resultados de la pregunta 4.

Cuadro 7. *Resultados de la pregunta 4 de la Prueba diagnóstica*

	Respondieron correctamente	No respondieron correctamente	Total
Medida del área del cuadrado	12	1	13
Medida del área del rectángulo	13	0	13
Medida del área del triángulo	12	1	13
Medida del área del paralelogramo	11	2	13
Medida del área del rombo	4	9	13
Medida del área del trapecio	2	11	13

A continuación, analizaremos detalladamente cada una de las dos actividades. Para ello, realizaremos el análisis a priori y el análisis a posteriori de la producción de las dos estudiantes Sara y Abril en cada uno de los ítems.

4.2.2 Actividad 1: Trabajemos con el Tangram

El propósito de la Actividad 1 (ver Anexo B) es analizar las aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva que realizan los estudiantes mediante el uso del Tangram. Asimismo, según Douady y Perrin – Glorian, en esta primera actividad lo que se está provocando es relacionar el cuadro de las magnitudes con el cuadro de las figuras.

Escogimos realizar esta primera actividad con el Tangram porque pensamos que el uso del material concreto puede facilitar la comprensión de las propiedades de los objetos matemáticos, en este caso del área. Al respecto, Morán (2016) menciona que en el estudio de la Geometría y de las magnitudes es preciso valorar las experiencias de visualización y de manipulación de objetos del mundo físico. Mediante este tipo de experiencias los alumnos pueden descubrir y comprender mejor las propiedades matemáticas a través de los objetos físicos.

La primera actividad constó de 5 ítems y tuvo una duración de 80 minutos, lo equivalente a dos horas pedagógicas de la institución educativa, de ellos se tomaron 10 minutos para las indicaciones del profesor y para la entrega de materiales (Ficha de la actividad 1, 1 lápiz 2B, 1 borrador, 1 juego de Tangram y 1 regla de 20 cm).

Los estudiantes estuvieron sentados en mesas de 3 lugares porque así es la forma de distribución que tienen para las clases regulares. Esta organización les permitió discutir y compartir dudas, no obstante, cada estudiante resolvió su propia ficha de forma independiente.

<u>Análisis del ítem 1 de la Actividad 1</u>

Análisis a priori

El ítem 1 (ver Figura 39) tiene por finalidad que los estudiantes comparen las áreas de figuras que tienen formas diferentes.

1. Observa las siguientes figuras y responde:

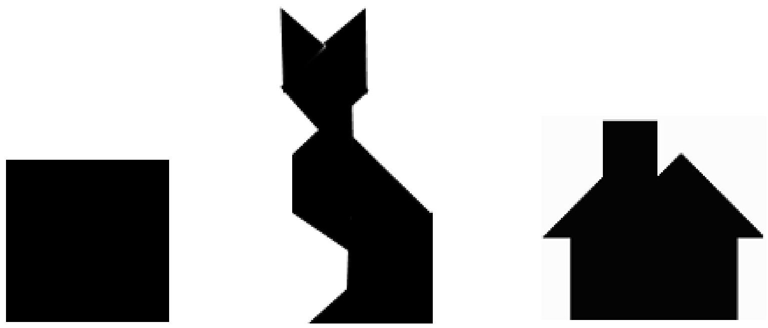


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

¿Tienen todas estas figuras la misma área? ¿Por qué?

Figura 39. Ítem 1 de la Actividad 1

Para que los estudiantes puedan contestar el ítem 1 de esta actividad esperamos primero que por medio de sus aprehensiones perceptiva y operatoria identifiquen que las tres figuras tienen la misma área, ya sea superponiendo las figuras, usando instrumentos de medición como la regla o intentando descomponer las tres figuras en sub-figuras. Basados en las investigaciones de Popoca y Acuña (2011) y Corberán (1996), pensamos que los estudiantes podrían responder que las tres figuras tienen diferente área por ser figuras diferentes entre sí. Según los autores, esta idea se encuentra muy arraigada en los estudiantes porque asocian el área de una figura a su forma, si la forma de la figura cambia entonces el área también. Por otro lado, podrían responder que la Fig. 3 o la Fig. 1 es la de mayor área por tener una forma más compacta que la Fig. 2. También podrían responder que la Fig. 2 es la que tiene mayor área por tener mayor altura. La variable didáctica que intervino en este ítem fue la forma de las figuras seleccionadas.

Análisis a posteriori resuelto por Sara

A diferencia de lo previsto en el análisis a priori, Sara responde que las tres figuras tienen la misma área. Ella identifica que las tres figuras al descomponerlas son formadas por las mismas piezas. Desde la Teoría de Registros de Representación Semiótica, Sara movilizó su aprehensión perceptiva y su aprehensión operatoria, específicamente tratamiento figural, que le permite reconocer la propiedad de la conservación de área de las figuras. Creemos que Sara llega a esta conclusión porque identifica que las sub-figuras que forman las tres figuras son las mismas y por ello brinda su respuesta mediante su aprehensión discursiva. Incluso, llega a reconocer que a pesar de que el área no cambia, el perímetro sí lo hace (ver Figura 40).

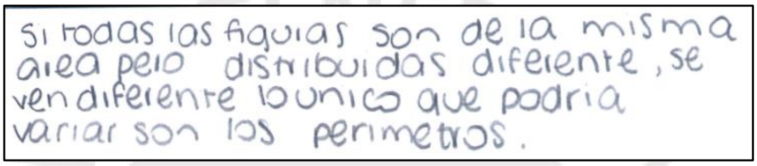

Si todas las figuras son de la misma area pero distribuidas diferente, se ven diferente lo unico que podria variar son los perimetros.

Figura 40. Respuesta de Sara al ítem 1 de la Actividad 1

Análisis a posteriori resuelto por Abril

Abril, a diferencia de lo que esperábamos en el análisis a priori, responde que todas las figuras tienen la misma área. Pensamos que Abril llegó a responder de esta forma (ver Figura 41) debido a que su aprehensión perceptiva y su aprehensión operatoria, específicamente tratamiento figural, le permitió reconocer que las figuras mostradas se pueden descomponer en sub-figuras que estas al ser reorganizadas permiten obtener nuevas figuras. Abril, a diferencia de Sara, logró describir mediante su aprehensión discursiva lo que implica reconfigurar una figura mencionando lo siguiente: *porque al desarmarlas por figuras podemos armarlas de nuevo y ponerlas como un cuadrado como la fig. 1.*

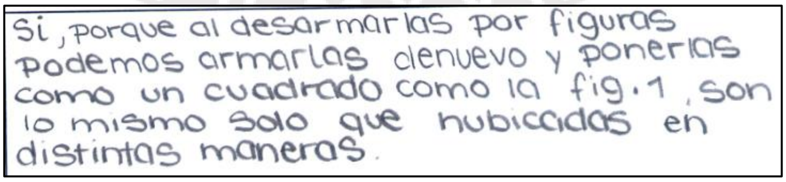

Si, porque al desarmarlas por figuras podemos armarlas denuevo y ponerlas como un cuadrado como la fig. 1, son lo mismo solo que hubicadas en distintas maneras.

Figura 41. Respuesta de Abril al ítem 1 de la Actividad 1

<u>Análisis del ítem 2 de la Actividad 1</u>

Análisis a priori

El objetivo del ítem 2 era que los estudiantes puedan descomponer las figuras mostradas en la ficha usando las piezas del Tangram (ver Figura 42).

2. Construye con todas las piezas del Tangram cada una de las figuras antes mostradas. Una vez construidas, plasma tu dibujo en el espacio en blanco indicando la forma en que ubicaste las piezas.

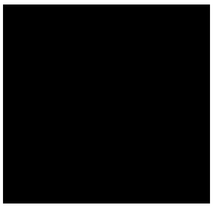
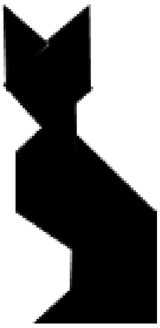
 Fig. 1	
 Fig. 2	
 Fig. 3	

Figura 42. Ítem 2 de la Actividad 1

En este ítem esperamos que los estudiantes puedan desarrollar su aprehensión perceptiva y operatoria de modificación posicional mediante movimientos de rotación, reflexión y traslación a las sub-figuras. De forma simultánea, los estudiantes desarrollan su aprehensión operatoria de modificación mereológica de reconfiguración, debido a que podrían descomponer mentalmente las tres figuras propuestas. Esperamos que los estudiantes identifiquen que las tres figuras se descomponen en sub-figuras de formas diferentes entre ellas, ello le dará subsidios para comprender la reconfiguración heterogénea.

La variable didáctica que interviene aquí es el fondo de las figuras presentadas. Al ser de color negro aumenta el nivel de dificultad, en cambio, si fuera con fondo blanco hubiese sido más sencillo de descomponer cada figura.

Para la Fig. 1 (el cuadrado) las posibles respuestas de formas de descomposición, con las piezas del Tangram, se muestra en la Figura 43.

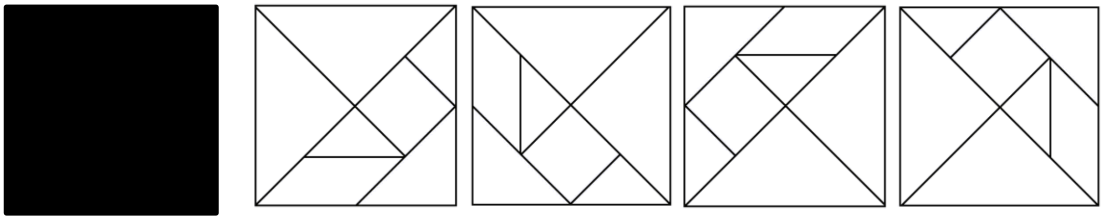


Figura 43. Construcción de la Fig. 1 con las piezas del Tangram

Para la Fig. 2 (el gato) las posibles respuestas de formas de descomposición, con las piezas del Tangram, se muestra en la Figura 44.

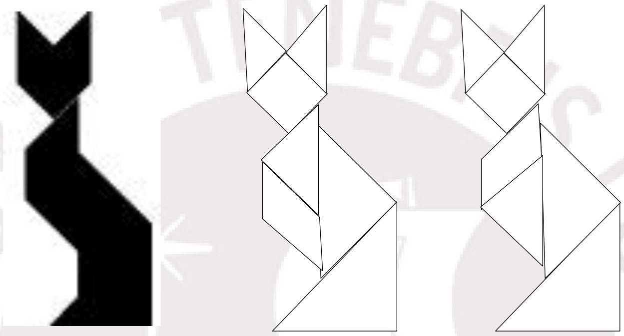


Figura 44. Construcción de la Fig. 2 con las piezas del Tangram

Para la Fig. 3 (la casa) las posibles respuestas de formas de descomposición, con las piezas del Tangram, se muestra en la Figura 45.

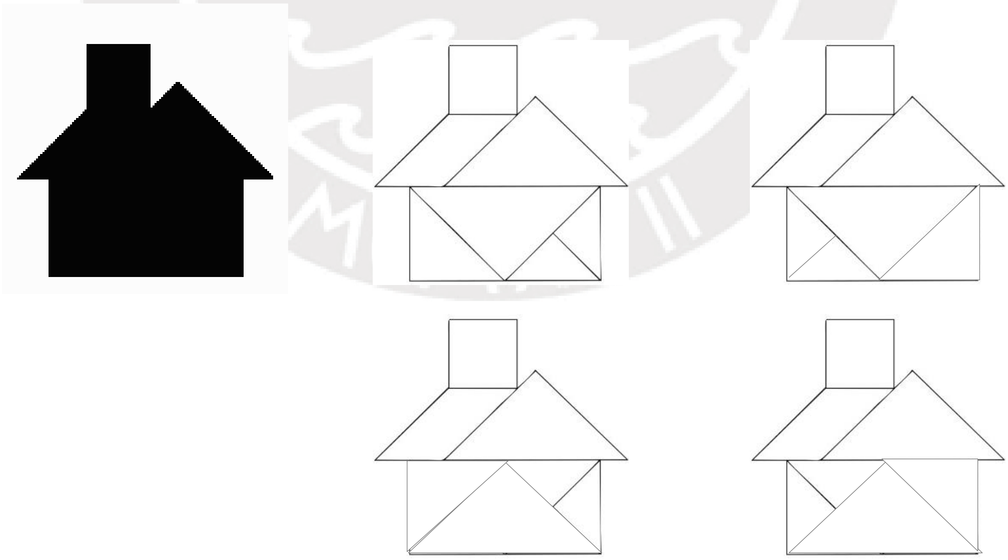


Figura 45. Construcción de la Fig. 3 con las piezas del Tangram.

Análisis a posteriori resuelto por Sara

Este ítem fue el que más tiempo les demoró a las estudiantes, aproximadamente 40 minutos. Se observó que al inicio las estudiantes mostraron una actitud impaciente al no poder encontrar la respuesta puesto que querían obtener resultados inmediatos. Es por ello que la profesora intentó animarlas a que no se rindieran fácilmente y que intentaran probar varias veces.

Sara preguntó si se podía poner una pieza encima de otra a lo que la profesora le respondió que no. A pesar de que, en un determinado momento, se les permitió compartir las respuestas, Sara decidió intentar hacer la construcción sola.

Sara logró construir de forma correcta con las piezas del Tangram la Fig, 1 y la Fig. 3. Sin embargo, observamos que la Fig. 2 no logró armarla correctamente ya que las piezas no están bien ubicadas. En ese sentido, podemos afirmar que Sara movilizó su aprehensión perceptiva y su aprehensión operatoria, que le permitió realizar una descomposición heterogénea de cada una de las figuras, observamos además que ella realizó algunos trazos auxiliares a la Fig. 2 (ver Figura 46).

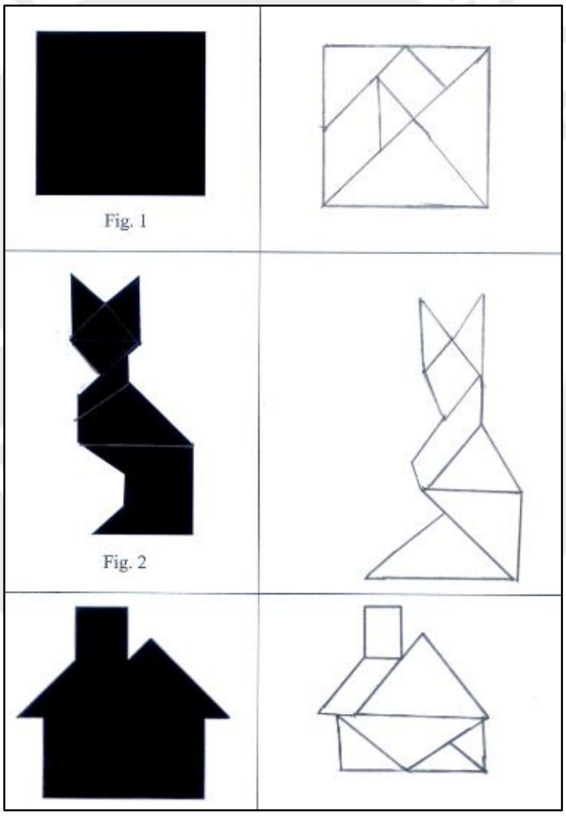


Figura 46. Respuesta de Sara al ítem 2 de la Actividad 1

Análisis a posteriori resuelto por Abril

Al principio Abril armó el cuadrado usando dos triángulos y preguntó si tenía que usar todas las piezas del Tangram. La profesora le pidió que vuelva a leer la indicación de la pregunta. Entonces, Abril volvió a intentar construir la primera figura usando todas las piezas. Después; pasó a construir la segunda figura y nuevamente volvió a hacer un comentario pero ahora diciendo que no le alcanzaban las piezas para armar el gato. La profesora le respondió que sí es posible y que ella ya lo había comprobado. Luego de varios minutos, Abril decidió empezar por la Fig. 3 y dejar para el final la Fig. 2 que la percibió más difícil de construir.

Abril logró construir correctamente las tres figuras a partir de las piezas del Tangram, tal y como lo esperábamos en el análisis a priori. En la respuesta de Abril (ver Figura 47) podemos evidenciar que ella movilizó su aprehensión perceptiva y su aprehensión operatoria, que le permitió realizar una descomposición heterogénea de las tres figuras.

Según lo observado durante la actividad, Abril construyó de forma correcta las tres figuras. Sin embargo, tuvo dificultades para dibujarlas en el papel. Por ejemplo, en la Fig. 1 no aparece una de las piezas del Tangram que es un cuadrado, en su lugar aparece un rectángulo. En la Fig. 2, los dos triángulos rectángulos pequeños no se ven congruentes. En cuanto a la Fig. 3, Abril dibujó el paralelogramo casi del mismo tamaño que el triángulo rectángulo grande.

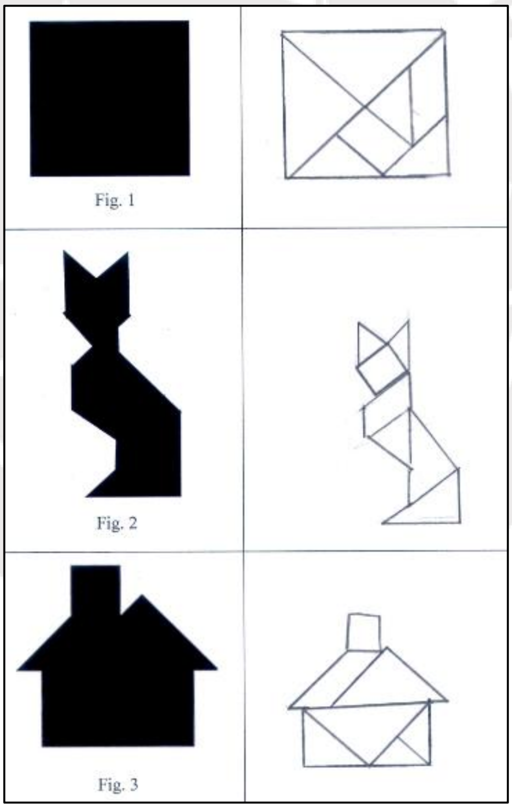


Figura 47. Respuesta de Abril al ítem 2 de la Actividad 1

Pensamos que la dificultad en dibujar se presenta porque no hay un contorno fijo, entonces los estudiantes tienen que hacer dos acciones de forma simultánea, deben dibujar el contorno y a la vez dibujar las piezas del Tangram, lo que incrementa el nivel de dificultad.

Análisis del ítem 3 de la Actividad 1

Análisis a priori

El objetivo del ítem 3 (ver Figura 48) era que los estudiantes concluyan que las tres figuras tienen la misma área.

3. En las tres figuras construidas en el ítem anterior se han utilizado las 7 piezas del Tangram.
   ¿Qué puedes concluir con respecto al área de las tres figuras construidas?

Figura 48. Ítem 3 de la Actividad 1

En este ítem esperamos que los estudiantes, mediante sus aprehensiones perceptiva y operatoria, identifiquen que las tres figuras están formadas por las mismas 7 piezas. Por ello, pensamos que podrían responder que las tres figuras construidas tienen la misma área. Esperamos que su respuesta sea dada en el registro de lengua natural.

Análisis a posteriori resuelto por Sara

Con respecto al ítem 3, Sara respondió según lo previsto en el análisis a priori. Ella reafirmó la idea que tuvo en un principio, de que las tres figuras a pesar de ser diferentes mantienen la misma área, además agregó que con las piezas del Tangram se pueden construir muchas figuras más.

Pensamos que Sara ha arribado a esta conclusión porque su modificación mereológica le ha permitido reconocer el todo y las partes de la figura. Ella, gracias a su aprehensión perceptiva y su aprehensión operatoria, identifica que con las 7 piezas del Tangram (sub-figuras desde la Teoría de Registros de Representación Semiótica) se pueden construir o crear diferentes figuras (ver Figura 49).

Que tienen la misma area, y puedes
crear differentes formas con los Tangram
y ver distintas posibilidades.

Figura 49. Respuesta de Sara al ítem 3 de la Actividad 1

Análisis a posteriori resuelto por Abril

En cuanto al ítem 3, tal y como lo esperábamos en el análisis a priori, Abril concluye que las tres figuras a las que ella llama "formas" tienen la misma área. La justificación que ella brinda es en base a las sub-figuras que componen la figura, sub-figuras a las que nuevamente llama “formas”. Abril hace uso de su aprehensión perceptiva y discursiva de forma simultánea (ver Figura 50).

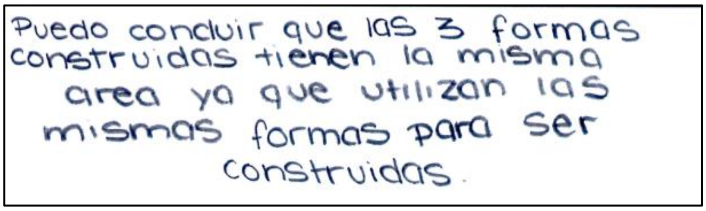

Puedo concluir que las 3 formas construidas tienen la misma area ya que utilizan las mismas formas para ser construidas.

Figura 50. Respuesta de Abril al ítem 3 de la Actividad 1

Con base en la respuesta de Abril, pensamos que ella no tiene claridad en el concepto de figura, por lo que en su lugar usa el término “formas”. Creemos que esta dificultad se debe a la falta de vocabulario matemático en español pues Abril recibe las clases de Matemática en inglés desde el nivel Inicial, como ya lo mencionamos anteriormente, y conoce los conceptos matemáticos en ese idioma. Es por esa razón que en esta respuesta y en otras más adelante, observaremos dificultades en el discurso de la estudiante. Por ejemplo, observaremos la mezcla de inglés con español, o el mal uso de algunos términos, etc.

<u>Análisis del ítem 4 de la Actividad 1</u>

Análisis a priori

El objetivo del ítem 4 (ver Figura 51) era que los estudiantes lleguen a concluir que figuras de diferente forma pueden tener la misma área y justifiquen la razón de esta propiedad a partir de los dos ítems anteriores.

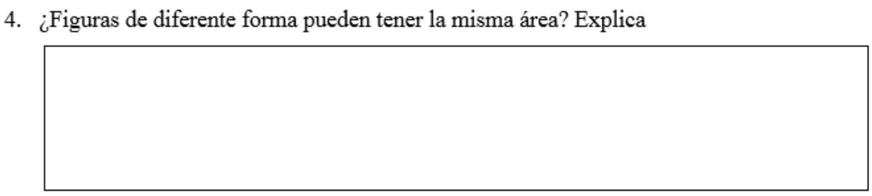

4. ¿Figuras de diferente forma pueden tener la misma área? Explica

Figura 51. Ítem 4 de la Actividad 1

Con respecto a este ítem, pensamos que los estudiantes pueden reconocer la utilidad de la reconfiguración como método para comparar el área de dos figuras de forma diferente. En tal sentido, esperamos que los estudiantes respondan que figuras de forma diferente pueden tener la misma área, siempre y cuando al descomponerlas estén formadas por las mismas regiones, es decir, identifiquen que dos o más figuras tienen la misma área porque están formadas por las mismas sub-figuras. En ese sentido, esperamos que el Tangram les sirva como referencia para concluir que diferentes figuras pueden tener la misma área siempre que se compongan por las mismas piezas.

Análisis a posteriori resuelto por Sara

En cuanto al ítem 4, Sara respondió según lo previsto en el análisis a priori. Ella mencionó que el área es lo que está dentro de una figura y es posible tener diferentes figuras con la misma área. Sin embargo, no mencionó en su discurso nada con respecto a las sub-figuras en las que se debe descomponer una figura para que esto sea posible (ver Figura 52). Pensamos que Sara sí tiene conciencia de esta propiedad de las figuras porque lo ha demostrado al responder otros ítems, no obstante, no lo ha escrito explícitamente en esta respuesta en particular.

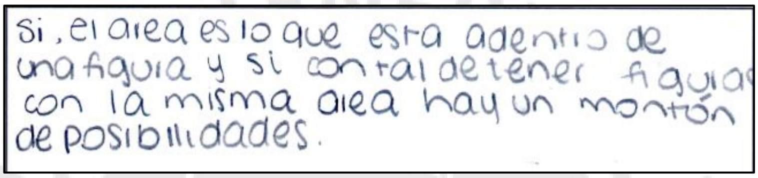

Si, el area es lo que esta adentro de
una figura y si contal de tener figuras
con la misma area hay un montón
de posibilidades.

Figura 52. Respuesta de Sara al ítem 4 de la Actividad 1

Análisis a posteriori resuelto por Abril

Abril responde al ítem 4 como lo esperábamos en el análisis a priori. Ella llega a generalizar que figuras diferentes pueden tener la misma área siempre y cuando estén compuestas por las mismas "formas". Creemos que Abril usa este término para nombrar a las piezas del Tangram y desde la Teoría de Registros de Representación Semiótica, estas vendrían a ser las sub-figuras en las que se descompone una figura.

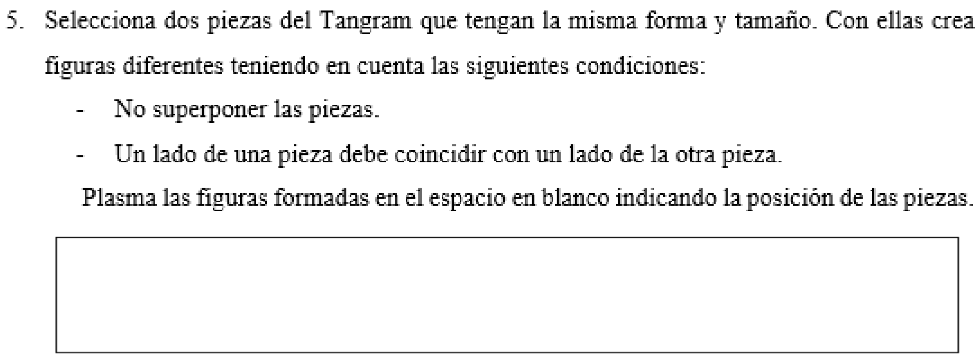

Si, porque pueden ser compuestas
por el mismo / mismos formas

Figura 53. Respuesta de Abril al ítem 4 de la Actividad 1

<u>Análisis del ítem 5 de la Actividad 1</u>

Análisis a priori

El objetivo del ítem 5 (ver Figura 54) era que los estudiantes puedan crear diferentes figuras a partir de dos piezas iguales del Tangram.



5. Selecciona dos piezas del Tangram que tengan la misma forma y tamaño. Con ellas crea figuras diferentes teniendo en cuenta las siguientes condiciones:
   - No superponer las piezas.
   - Un lado de una pieza debe coincidir con un lado de la otra pieza.

   Plasma las figuras formadas en el espacio en blanco indicando la posición de las piezas.

Figura 54. Ítem 5 de la Actividad 1

En este ítem pensamos que los estudiantes pueden desarrollar su aprehensión perceptiva y su aprehensión operatoria de modificación mereológica, específicamente de reconfiguración homogénea. Esto debido a que tendrán que formar figuras nuevas a partir de la unión de dos piezas iguales. Las posibles figuras que se pueden crear se muestran en la Figura 55.

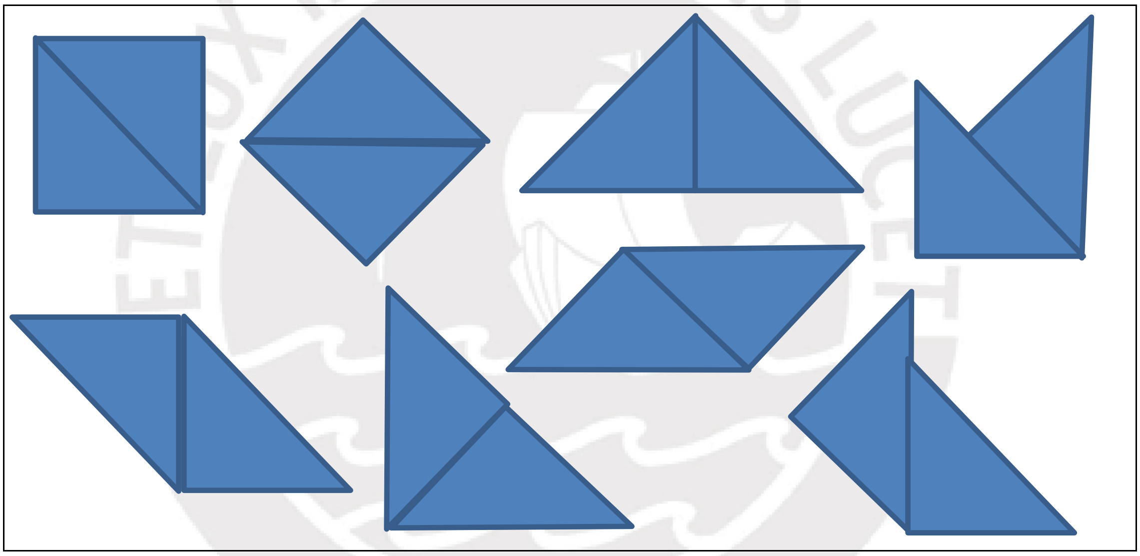


Figura 55. Ejemplos de reconfiguración con los triángulos grandes del Tangram

Análisis a posteriori resuelto por Sara

Sara primero construyó cuatro figuras, la profesora al percatarse que una de ellas no estaba correcta le hizo algunas preguntas y se generó el siguiente diálogo:

- Profesora: ¿Esta figura cumple los requisitos?
- Sara: Sí
- Profesora: ¿Qué dice el segundo criterio?
- Sara: Que un lado de una pieza debe coincidir con un lado de la otra pieza
- Profesora: ¿En qué lado coinciden ambas piezas?
- Sara: Ahhh

Luego, Sara borró la figura que no estaba correcta.

En este ítem, Sara movilizó su aprehensión perceptiva y su aprehensión operatoria de modificación mereológica, específicamente de reconfiguración homogénea, al formar figuras a partir de sub-figuras de la misma forma y tamaño. Sara efectuó la conversión del registro de lengua natural al registro figural. Sin embargo, a diferencia del análisis a priori, Sara solo logró construir tres figuras diferentes (ver Figura 56).

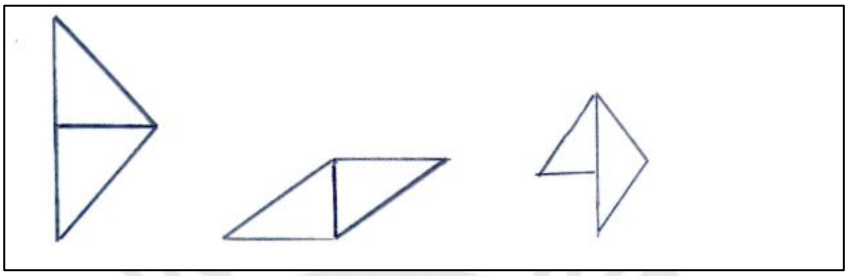


Figura 56. Respuesta de Sara al ítem 5 de la Actividad 1

Creemos que Sara solo logró construir estas tres figuras porque son las que ella conoce o son las que ella ha visto en la escuela. Probablemente, Sara dentro de su estructura mental no considera otras figuras diferentes a las convencionales.

Por otro lado, observamos que la tercera figura que construyó Sara aparece en la ficha como si ella hubiera usado dos piezas diferentes. Sin embargo, al contrastar esta información con la filmación observamos que Sara sí llegó a construir correctamente las figuras, pero tuvo dificultades al dibujarlas en la ficha.

Análisis a posteriori resuelto por Abril

Con respecto al ítem 5, Abril empezó preguntando qué significaba superponer a lo que la profesora le respondió “poner una pieza sobre otra”. Luego, ella intentó unir las piezas por las esquinas, pero la profesora le hizo énfasis en leer nuevamente las instrucciones para que se dé cuenta de lo que le están pidiendo. Abril así lo hizo y empezó a unir las piezas tal y como lo pedía el ítem. Después de unos minutos, preguntó “¿Cuántas figuras debemos poner?” Pero a los segundos ella sola se respondió “Todas las que queramos”.

De lo observado podemos afirmar que Abril logró desarrollar su aprehensión perceptiva y su aprehensión operatoria de modificación mereológica, específicamente de reconfiguración homogénea. Sin embargo, ella construyó menos figuras de las que esperábamos en el análisis a priori. En su respuesta podemos observar que las figuras que ella creó comparten un lado en común de la misma medida por lo que creemos que ella no admite la posibilidad de componer dos figuras y que los lados que comparten en común no tengan la misma medida (ver Figura 57).

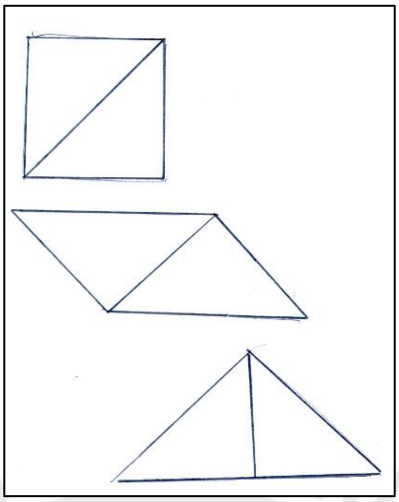


Figura 57. Respuesta de Abril al ítem 5 de la Actividad 1

Al igual que Sara, Abril solo dibujó tres figuras porque son las que ella conoce o son las que ella ha visto en la escuela. Abril no consideró otras figuras diferentes a las convencionales.

Finalmente, después que las estudiantes entregaron sus fichas de actividades, la profesora procedió a aclarar ciertas dudas e institucionalizar lo aprendido de esta primera actividad haciendo énfasis en lo siguiente: el área es una magnitud física, cualidad o propiedad de la superficie cuyo propósito es medir la ocupación del plano independientemente de la forma; un polígono es una superficie limitada por tres o más segmentos.

Luego preguntó si el área se podía medir y los estudiantes respondieron que sí. Entonces la profesora les indicó que esa medida está representada por un número. Por otro lado, con respecto a la reconfiguración se generó el siguiente diálogo:

- Profesora: ¿Figuras que tienen diferente forma pueden tener la misma área?
- Estudiantes: Sí
- Profesora: ¿Siempre y cuándo qué?
- Estudiantes: Siempre y cuando estén compuestas por las mismas piezas

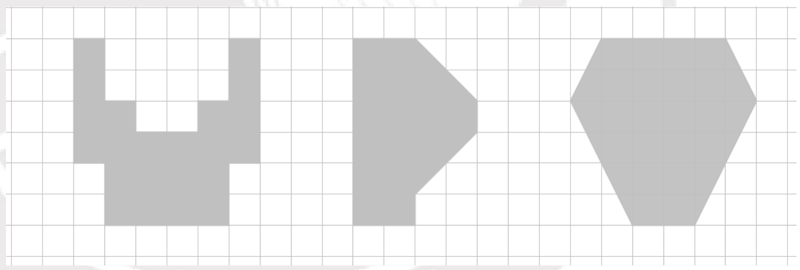
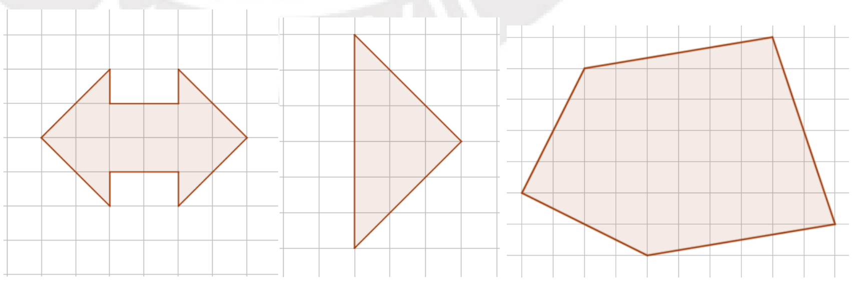
La profesora aprovechó para conectar con algunas de las preguntas que se habían realizado en la prueba diagnóstica relacionadas a la reconfiguración. En ese momento explicó que las figuras se pueden descomponer en sub-figuras y estas sub-figuras se pueden recomponer para generar nuevas figuras, y aun así seguir manteniendo la misma medida de área. Este proceso llamado reconfiguración nos permite reconocer que existen figuras de formas diferentes que pueden tener la misma área.

4.2.3 Actividad 2: Hallemos la medida de área de polígonos

El propósito de esta actividad es analizar las reconfiguraciones que los estudiantes realizan a diferentes polígonos para determinar la medida de su área, usando lápiz, papel con malla cuadriculada y de forma opcional se les dio colores. Asimismo, que movilicen los conocimientos de reconfiguración adquiridos en la actividad anterior. Por otro lado, según Douady y Perrin – Glorian, en esta segunda actividad lo que se está provocando es relacionar el cuadro de las figuras con el cuadro numérico.

En la actividad 2 (ver Anexo C) se presenta diferentes tipos de polígonos con la intención de favorecer la variedad de procedimientos en las respuestas de los estudiantes. Estas figuras fueron adaptadas de la investigación de Pessoa (2010). En todos los ítems se pide al estudiante determinar la medida del área de la figura, haciendo uso de la cuadrícula. Para una explicación mejor se ha propuesto agrupar a los ítems como se muestra en el Cuadro 8.

Cuadro 8. *Grupos de ítems de la Actividad 2*

Grupo	Ítems
Primer grupo Ítems 1, 2 y 3	
Segundo grupo Ítems 4, 5 y 6	

La primera diferencia que salta a la vista es que hay dos tipos de ítems. Un primer grupo compuesto por figuras de color gris opaco que no permite observar la malla cuadriculada y que, por lo tanto, podría obstaculizar la obtención de la respuesta. Y un segundo grupo compuesto por ítems de color rosado transparente que sí permite observar la malla cuadriculada.

Por otro lado, en los ítems 2 y 4 (ver Figura 58), a pesar de tener la diferencia sobre la posibilidad de observar la cuadrícula de fondo o no, comparten una característica en común: ambas figuras tienen algunos lados que no coinciden con la línea de la cuadrícula y que, por lo tanto, una unidad de medida puede ser obtenida por la composición de dos triángulos. En consecuencia, se espera que los procedimientos utilizados en ambos ítems sean parecidos.

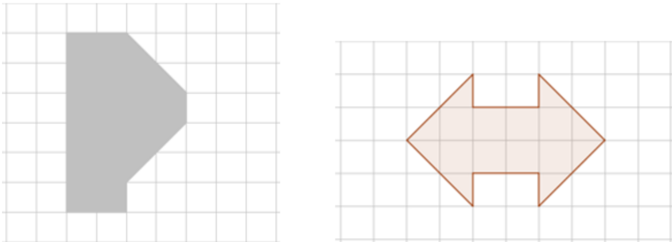


Figura 58. Comparación de ítems 2 y 4 de la Actividad 2

La actividad 2 tuvo una duración de 40 minutos, de los cuales 10 minutos se destinaron para las indicaciones y la entrega de materiales (Ficha de Actividad 2, lápiz, borrador y regla).

Es importante mencionar que primero se les entregó la hoja de la ficha que contenía los tres primeros ítems (ver Figura 59).

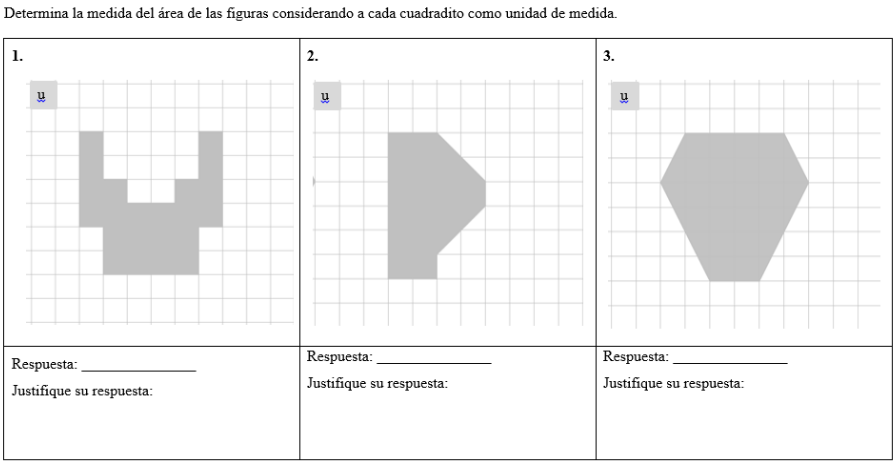


Figura 59. Tres primeros ítems de la Actividad 2

Una vez que terminaron de resolverla, se les entregó la segunda hoja con los tres ítems restantes. A continuación, presentamos el análisis a priori y a posteriori de la producción de dos estudiantes en cada uno de los ítems de la Actividad 2.

<u>Análisis del ítem 1 de la Actividad 2</u>

Análisis a priori

El objetivo del ítem 1 es que los estudiantes determinen la medida del área de una figura cuyo fondo no deja ver la malla y cuyos lados coinciden con la línea de la cuadrícula. Asimismo, movilicen sus aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva. Las variables didácticas que intervienen en este ítem son: nitidez de la figura (sin malla visible) y posición relativa de los polígonos en relación con la malla (todos los lados coinciden con la línea de la cuadrícula).

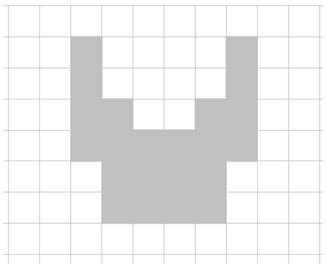


Figura 60. Ítem 1 de la Actividad 2

Para resolver este ítem esperamos que el procedimiento más usado sea el conteo de cuadraditos con el que se obtiene que la respuesta es 22u, como se puede observar en la Figura 61.

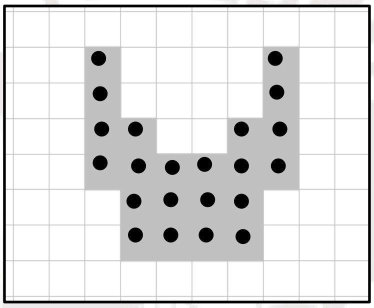


Figura 61. Conteo de unidades en el ítem 1 de la Actividad 2

Por otro lado, de acuerdo con Pessoa (2010) es posible que el hecho de no mostrar la cuadrícula de fondo provoque otros procedimientos como por ejemplo descomponer la figura en once rectángulos cuyos lados midan 2 y 1, es decir, se genere una descomposición homogénea (ver Figura 62). Después, se determine la medida del área de uno de los rectángulos y luego se multiplique este valor por la cantidad de rectángulos que hay en la figura.

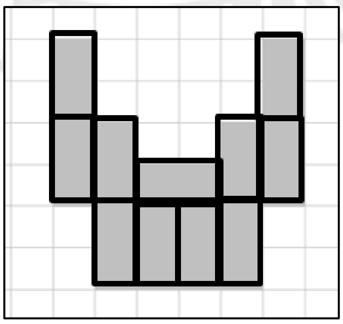
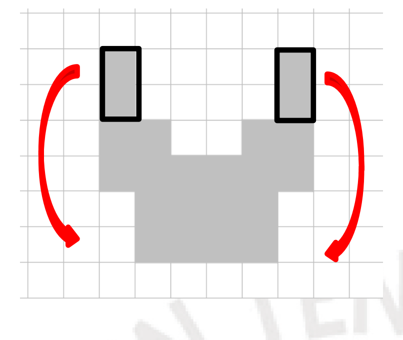
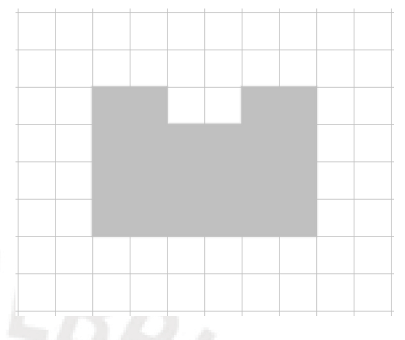


Figura 62. Descomposición homogénea del ítem 1 de la actividad 2.

Otro posible procedimiento que podrían usar los estudiantes sería la reconfiguración heterogénea. Por ejemplo, la figura inicial se puede descomponer en tres sub-figuras: dos rectángulos y un dodecágono. Luego, mediante una aprehensión operatoria de modificación posicional se traslade los dos rectángulos y se obtenga una nueva figura en la que sea más fácil determinar su área (ver Cuadro 9). Nuevamente señalamos que esta no es la única forma de reconfiguración heterogénea, existen múltiples formas de hacerlo.

Cuadro 9. *Posible reconfiguración del ítem 1 de la Actividad 2*

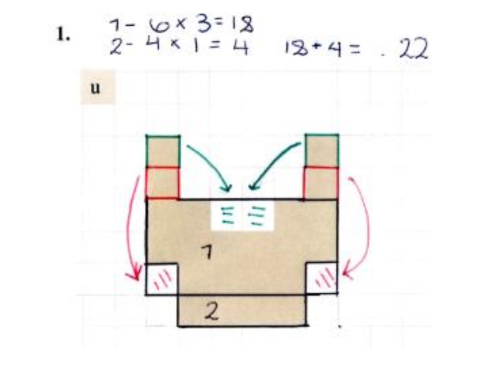
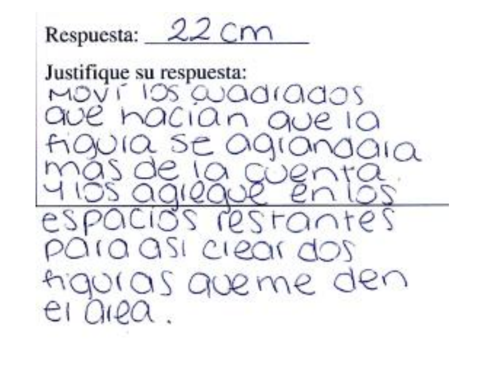
Figura inicial	Figura final
	

Luego de ello, esperamos que los estudiantes movilicen su aprehensión discursiva que le permita explicar el procedimiento utilizado para resolver el ítem. Por otro lado, pensamos que este ítem sería el más fácil de la Actividad.

Análisis a posteriori resuelto por Sara

En primer lugar, queremos señalar que Sara decidió usar colores como una forma de organizar mejor su trabajo. Como muestra el Cuadro 10, Sara movilizó su aprehensión perceptiva y operatoria de modificación mereológica de descomposición heterogénea, para transformar su figura inicial en dos rectángulos. A diferencia de lo previsto en el análisis a priori, Sara realizó más descomposiciones en la figura. Ella descompuso la figura inicial en cuatro cuadrados, un rectángulo y un octógono. Luego, mediante una modificación posicional, ella trasladó los dos cuadrados verdes y los dos cuadrados rojos para completar los "espacios vacíos" y formar un rectángulo cuyos lados midan 6 y 3, y otro rectángulo cuyos lados midan 4 y 1.

Cuadro 10. *Reconfiguración del ítem 1 de la Actividad 2 producido por Sara*

Aprehensión operatoria	Aprehensión discursiva
	

En cuanto a su aprehensión discursiva, podemos observar que Sara usó el término “mover” para referirse al movimiento de traslación, usó la frase “agrandar más de la cuenta” para referirse a una figura compuesta en la que no puede obtener el área desde un principio. Cuando Sara dice que desea “crear dos figuras que me den el área” pensamos que Sara cree que solo puede calcular el área de figuras conocidas como el rectángulo por ejemplo.

Por otro lado, podemos observar que Sara respondió correctamente la medida del área de la figura, sin embargo, falló en la unidad de medida elegida. Ella escogió al centímetro pero el ítem indicaba que la unidad de medida era *u*.

Análisis a posteriori resuelto por Abril

En un inicio, se dio el siguiente diálogo:

- Abril: Profesora, no se puede resolver esta pregunta porque no hay números.
- Profesora: Esta actividad es así y no tiene número.

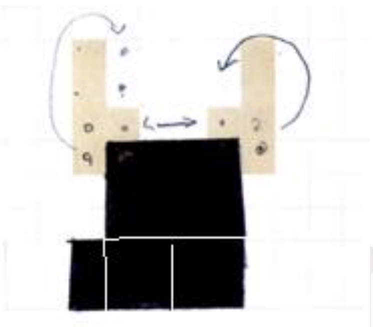
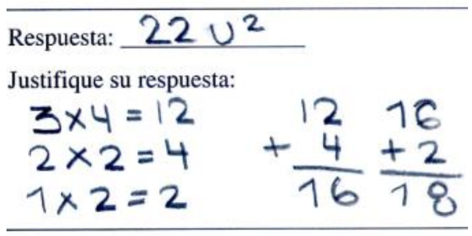
Probablemente, Abril no había resuelto antes ejercicios de este tipo y estaba acostumbrada a calcular medidas de áreas de figuras en donde aparecían sus longitudes, es decir, asociar el área a números.

Es importante mencionar que en nuestro análisis a priori, habíamos pensado que este sería el ítem más fácil y que por lo tanto les tomaría menos tiempo. Sin embargo, pudimos observar que las estudiantes se demoraron en responder este ítem justamente por la ausencia de números que ellas hacían referencia.

A diferencia del análisis a priori, Abril realizó otro tipo de reconfiguración (ver Cuadro 11). Ella movilizó su aprehensión perceptiva y operatoria para reconfigurar su figura inicial y la descompuso en 7 sub-figuras: un rectángulo cuyos lados midan 3 y 4, cuatro rectángulos cuyos lados miden 2 y 1 y en dos cuadrados cuyo lado mide 1. Luego, Abril trasladó dos de los rectángulos de lados 2 y 1 y los colocó al costado de los otros rectángulos de la misma medida para poder generar dos cuadrados cuyo lado mida 2, también juntó dos cuadraditos para generar un rectángulo cuyos lados miden 2 y 1. Finalmente, trasladó los dos cuadrados y el rectángulo que había generado y los ubicó debajo del rectángulo cuyos lados medían 3 y 4. Abril utilizó flechas para indicar las traslaciones que hizo y puntos para indicar a las sub-figuras que trasladó. Abril, a diferencia de Sara, no utiliza colores para diferenciar las sub-figuras que genera y es por ello que es un poco más complejo comprender su reconfiguración.

Cabe resaltar que en las respuestas de Abril se han añadido unos trazos blancos, dichos trazos fueron hechos por la investigadora para poder percibir mejor la reconfiguración de la estudiante.

Cuadro 11. *Reconfiguración del ítem 1 de la Actividad 2 producido por Abril*

Aprehensión operatoria	**Aprehensión discursiva**
	 Respuesta: 22 u² Justifique su respuesta: 3x4=12 2x2=4 1x2=2 12 + 4 = 16 16 + 2 = 18

En cuanto a su aprehensión discursiva, Abril no brindó su justificación usando el registro de lengua natural. En su lugar, ella utilizó el registro numérico de naturales para determinar la medida del área de las sub-figuras que había generado. Abril escribió los cálculos de todas las sub-figuras excepto de uno de los cuadrados cuyo lado medía 2. Creemos que ella realizó una operación mental en la que sumó 18 (que es la suma de las medidas de áreas que había obtenido) más 4, obteniendo 22 u^2 como respuesta final. A pesar de que la respuesta de Abril es correcta (22), la unidad de medida que escogió no, porque en esta actividad la unidad de medida seleccionada fue *u*.

<u>Análisis del ítem 2 de la Actividad 2</u>

Análisis a priori

El objetivo de este ítem es que los estudiantes determinen la medida del área de una figura y movilicen sus aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva. Las variables didácticas que intervienen en este ítem son: nitidez de la figura (sin malla visible) y posición relativa de los polígonos en relación con la malla (algunos lados coinciden con la línea de la cuadrícula).

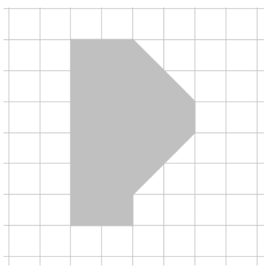
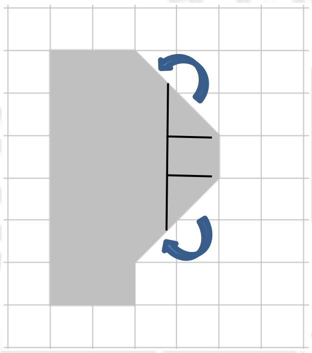
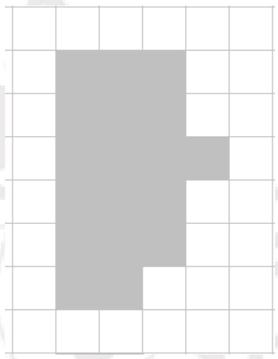


Figura 63. ítem 2 de la Actividad 2

Para que los estudiantes puedan contestar este ítem esperamos que en primer lugar movilicen su aprehensión perceptiva y operatoria y, mediante trazos hechos a lápiz, puedan obtener diferentes sub-figuras, es decir, apliquen una reconfiguración heterogénea. Por ejemplo, pensamos que podrían realizar tres trazos en el interior de la figura como se observa en la Cuadro 12, para descomponerla en cuatro sub-figuras. Luego, podrían rotar 180° los triángulos rectángulos, como indican las flechas, de tal forma que los cuadrados de la malla cuadriculada considerados como unidad de medida queden completos.

Cuadro 12. *Posible reconfiguración del ítem 2 de la Actividad 2*

Figura inicial	Figura final
	

También es posible que el estudiante cuente cada cuadradito como unidad y a los triángulos como la mitad de un cuadrado. De esta forma, podría juntar mentalmente las mitades y solo sumaría 16 más 2. En este caso solo estaría realizando una descomposición heterogénea.

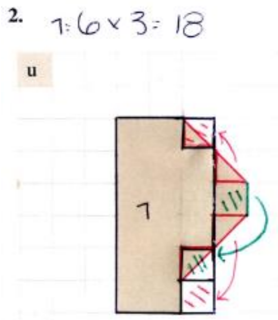
$$16 + 2 = 18$$

Luego de ello, esperamos que el estudiante movilice su aprehensión discursiva que le permita explicar el procedimiento utilizado para resolver el ítem e indique que la respuesta final es 18u.

Análisis a posteriori resuelto por Sara

Tal y como lo esperábamos en el análisis a priori, Sara movilizó su aprehensión perceptiva y operatoria y descompuso la figura inicial en dos triángulos, un cuadrado y un octógono. Luego, trasladó los dos triángulos para completar cuadrados. A diferencia del a priori, ella además de rotar los dos triángulos también trasladó el cuadrado con el fin de obtener un rectángulo como lo podemos observar en el Cuadro 13. En términos de Duval, Sara movilizó su aprehensión perceptiva y operatoria de modificación mereológica para descomponer la figura inicial y reconfigurarla en un rectángulo. Pensamos que la diagonal le permitió reconocer que el triángulo es la mitad de la unidad de medida y al juntar dos triángulos formaría un cuadradito completo.

Cuadro 13. *Reconfiguración del ítem 2 de la Actividad 2 producido por Sara*

Aprehensión operatoria	Aprehensión discursiva
	Respuesta: 18 cm Justifique su respuesta: Moví y sume differenta cuadrados para crear un rectangulo.

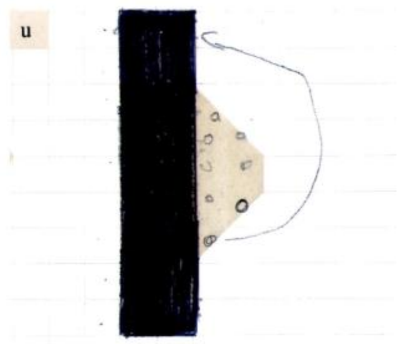
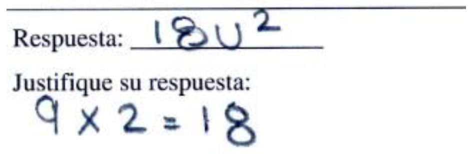
Antes de escribir su justificación, Sara preguntó si era necesario completar el espacio asignado para la justificación porque en todas las respuestas siempre colocaría lo mismo. La profesora le respondió que los procedimientos pueden ser similares mas no iguales y que por lo tanto los pasos para resolver cada pregunta pueden variar.

En cuanto a la aprehensión discursiva, Sara usó el término “mover” para referirse a movimietos de rotación y traslación, las flechas que ella realizó en el registro figural indican el sentido de rotación en el que gira los triángulos rojos con un ángulo de 180° y el desplazamiento que realizó al cuadrado verde. Por otro lado, ella menciona que sumó diferentes cuadrados para crear un rectángulo, sin embargo, ella multiplica las medidas del rectángulo que ha creado para obtener su medida de área. Sara llega a determinar correctamente la medida del área que es 18 mas no identifica la unidad correcta.

Análisis a posteriori resuelto por Abril

Abril movilizó su aprehensión perceptiva y operatoria, y realizó una reconfiguración similar a la que esperábamos en el análisis a priori (ver Cuadro 14). Ella descompuso la figura inicial en 4 sub-figuras: un rectángulo cuyos lados medían 6 y 2, dos triángulos rectángulos y un rectángulo cuyos lados medían 2 y 1. Ella dibujó puntos en las sub-figuras que iba a trasladar y trazó flechas indicando las traslaciones que estaba realizando. Abril juntó los dos triángulos, generó un cuadrado cuyo lado medía 2, lo trasladó arriba del rectángulo de lados 6 y 2, y debajo de este rectángulo, ubicó el rectángulo de lados 2 y 1.

Cuadro 14. *Reconfiguración del ítem 2 de la Actividad 2 producido por Abril*

Aprehensión operatoria	Aprehensión discursiva
	 Respuesta: 18u² Justifique su respuesta: 9 x 2 = 18

En cuanto a su aprehensión discursiva, Abril escribe la operación $6 \times 2 = 18$ indicando que está determinando la medida del área del rectángulo que ha generado a partir de la reconfiguración. Su respuesta final es 18u^2, y como ya indicamos la medida es correcta pero la unidad de medida no.

<u>Análisis del ítem 3 de la Actividad 2</u>

Análisis a priori

El objetivo de este ítem es que los estudiantes determinen la medida del área de una figura y movilicen sus aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva. Las variables didácticas que intervienen en este ítem son: nitidez de la figura (sin malla visible) y posición relativa de los polígonos en relación con la malla (algunos lados coinciden con la línea de la cuadrícula).

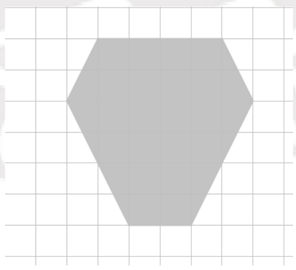
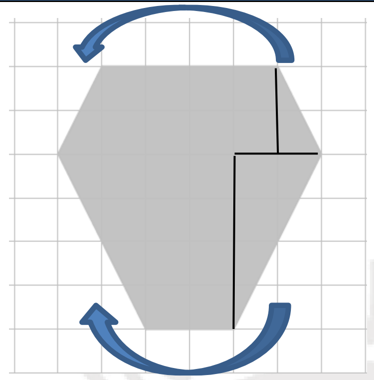
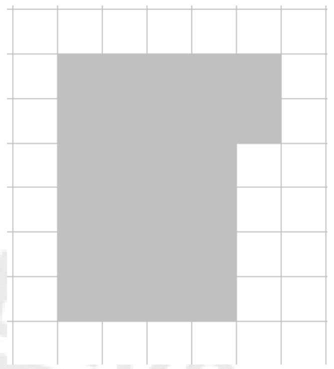


Figura 64. Ítem 3 de la Actividad 2

En este caso, esperamos que el procedimiento más usado sea la reconfiguración ya que en esta figura no es posible juntar media unidad de medida (triángulo) para formar la unidad completa. Se hace necesario otro tipo de descomposiciones más complejas. Pensamos que el estudiante podría trazar tres lineas auxiliares para formar tres sub-figuras, nuevamente estamos ante una reconfiguración heterogénea. Al reorganizar las partes como indica la flecha en el Cuadro 15 se generaría otra figura de contorno global diferente para facilitar la determinación de la medida de área.

Cuadro 15. *Posible reconfiguración del ítem 3 de la Actividad 2*

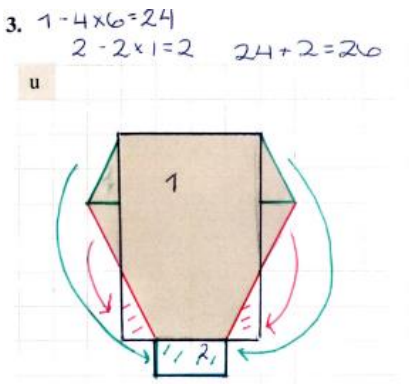
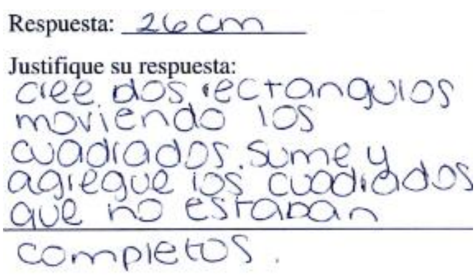
Figura inicial	**Figura final**
	

Luego de ello, esperamos que el estudiante movilice su aprehensión discursiva que le permita explicar el procedimiento utilizado para resolver el ítem e indique que la respuesta final es 26u.

Análisis a posteriori resuelto por Sara

Observamos que en el ítem 3, Sara movilizó su aprehensión perceptiva y operatoria, y reconfiguró el hexágono buscando obtener dos rectángulos (ver Cuadro 16). A diferencia del análisis a priori, Sara realizó más descomposiciones de las que esperábamos. Ella utilizó su aprehensión operatoria de descomposición mereológica para descomponer la figura inicial en cuatro triángulos y un hexágono. Luego, rotó los triángulos rojos en el sentido de las flechas que muestra en su registro figural y además identificó que los dos triángulos verdes al unirlos generan un rectángulo cuyos lados miden 2 y 1.

Cuadro 16. *Reconfiguración del ítem 3 de la Actividad 2 producido por Sara*

Aprehensión operatoria	**Aprehensión discursiva**
	

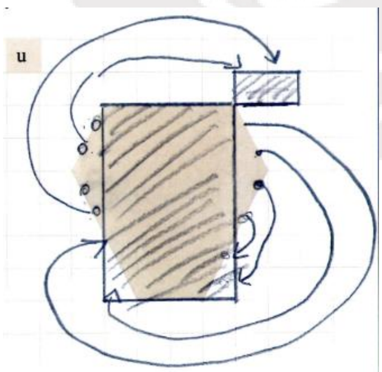
Mediante su aprehensión discursiva, podemos observar que la cuadrícula le permitió identificar rectángulos que, por lo que observamos, es una figura bastante cercana y familiar para ella. Entonces, al dibujar los dos rectángulos, observó que hay “espacios vacíos” y los intentó completar con las sub-figuras que formó al inicio. Su respuesta final fue 26cm y como ya hemos indicado la medida fue correcta pero la unidad no.

Análisis a posteriori resuelto por Abril

Con respecto al ítem 3, Abril movilizó su aprehensión perceptiva y operatoria, y reconfiguró el hexágono buscando obtener dos rectángulos. A diferencia del análisis a priori, Abril realizó más descomposiciones de las que esperábamos. Ella utilizó su aprehensión operatoria de descomposición mereológica para descomponer la figura inicial en cuatro triángulos y un hexágono. Luego, rotó uno de los triángulos 180° en sentido horario y trasladó otro de los triángulos con la intención de completar un rectángulo cuyos lados midan 6 y 4. Los otros dos triángulos pequeños los unió y formó un rectángulo cuyos lados miden 2 y 1.

En cuanto a su aprehensión discursiva, Abril nuevamente justifica su respuesta indicando las operaciones que ha realizado. Su justificación corresponde a lo que trabajó en el registro figural en donde generó dos rectángulos, por esta razón ella determina la medida de área de estos dos rectángulos y suma dichas cantidades, obteniendo como resultado 26u^2 (ver Cuadro 17). Sin embargo, a pesar de que la medida es correcta la unidad no lo es.

Cuadro 17. *Reconfiguración del ítem 3 de la Actividad 2 producido por Abril*

Aprehensión operatoria	Aprehensión discursiva
	Respuesta: 26u^2 Justifique su respuesta: $6 \times 4 = 24$ $2 \times 1 = 2$ $24 + 2 = 26$

Es importante mencionar que en la operación de reconfiguración, tanto Sara como Abril a pesar de que realizaron diferentes descomposiciones de las que esperábamos en el análisis a priori, ambas llegaron a la misma figura final: dos rectángulos, uno cuyos lados miden 6 y 4, y otro cuyos lados miden 2 y 1.

Luego de resolver estos tres ítems las estudiantes le entregaron la primera parte de su ficha a la profesora. Acto seguido recibieron la segunda parte de la ficha que contenía los tres ítems restantes (ver Figura 65). Para el ítem 4 y 5 no hubo intervención del profesor puesto que las estudiantes no manifestaron tener dudas y lograron trabajar solas.

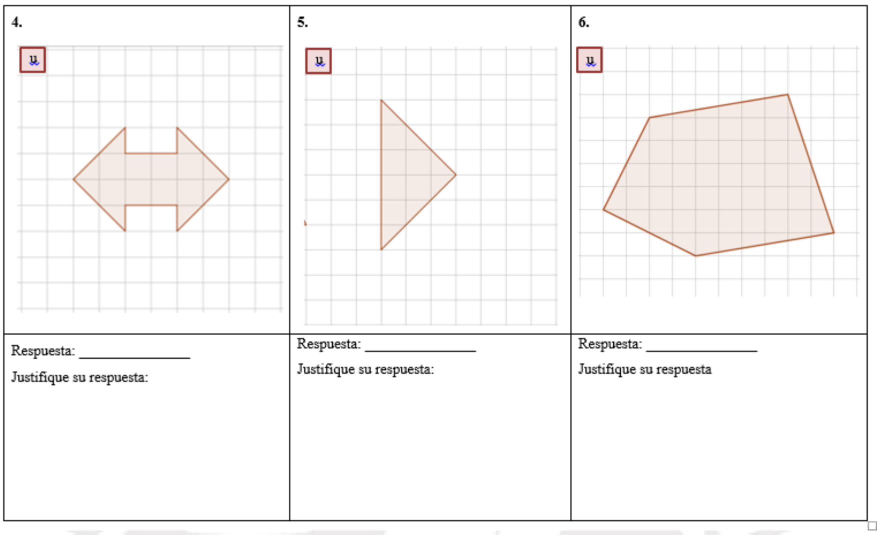


Figura 65. Tres últimos ítems de la Actividad 2

Análisis del ítem 4 de la Actividad 2

Análisis a priori

El objetivo del ítem 4 es que los estudiantes determinen la medida del área de una figura y movilicen sus aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva. Las variables didácticas que intervienen en este ítem son: nitidez de la figura (con malla visible) y posición relativa de los polígonos en relación con la malla (algunos lados coinciden con la línea de la cuadrícula).

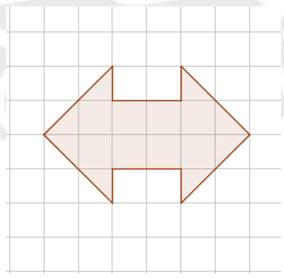
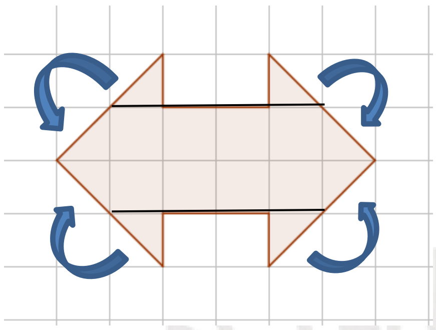
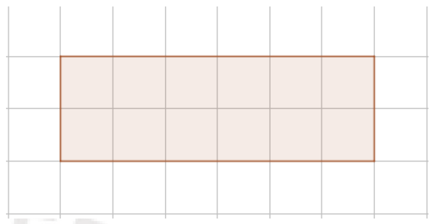


Figura 66. Ítem 4 de la Actividad 2

En este ítem esperamos que el estudiante pueda desarrollar su aprehensión perceptiva y operatoria de modificación mereológica para descomponer la figura en cinco sub-figuras. Es por ello que pensamos que el estudiante podría rotar 180° los cuatro triángulos rectángulos en el sentido que indican las flechas en el Cuadro 18. Se obtendría entonces a un rectángulo y de esta manera se haría más fácil determinar la medida de su área, mediante el conteo de cuadrados o mediante la multiplicación de las medidas de los lados del rectángulo creado.

Cuadro 18. *Posible reconfiguración del ítem 4 de la Actividad 2*

Figura inicial	Figura final
	

También es posible que, al igual que en el ítem 2, el estudiante cuente cada cuadradito como unidad y cada triángulo rectángulo como medio cuadradito. De esta forma, podría juntar mentalmente las mitades y solo sumaría 8 más 4.

$$8 + 4 = 12$$

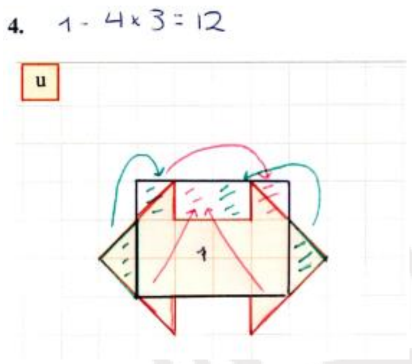
Luego de ello, esperamos que los estudiantes movilicen su aprehensión discursiva que le permita explicar el procedimiento utilizado para resolver el ítem e indique que la respuesta final es 12u.

Análisis a posteriori resuelto por Sara

En el ítem 4, Sara nuevamente moviliza su aprehensión perceptiva y operatoria, y reconfigura la figura para convertirla en un rectángulo (ver Cuadro 19). Sara descompone la figura inicial en 5 sub-figuras: cuatro triángulos y un octógono. Es importante notar que Sara reconfigura los triángulos verdes en cuadrados pero en su registro figural no dibuja las líneas auxiliares de descomposición por lo que creemos que la reconfiguración la ha realizado de forma mental. En este ítem se puede observar claramente que Sara ha comprendido que el triángulo representa media unidad de medida, pensamos que esta conclusión la ha obtenido de forma gráfica y no de forma numérica.

En cuanto a su aprehensión discursiva, Sara respondió: *Junté dos cuadrados que estaban hasta la mitad y cree un cuadrado*. Cuando Sara menciona “cuadrado que estaban hasta la mitad” se refiere a los triángulos que ocupan la mitad de un cuadrado. Mediante el registro de lengua natural, Sara nos explica que ha comprendido que dos triángulos de media unidad de medida equivalen a 1 cuadrado de la cuadrícula.

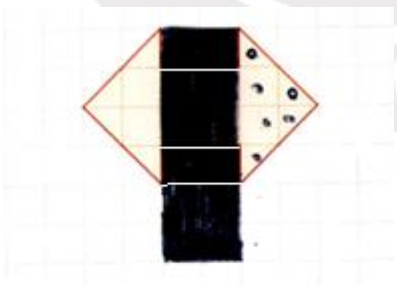
Cuadro 19. *Reconfiguración del ítem 4 de la Actividad 2 producido por Sara*

Aprehensión operatoria	Aprehensión discursiva
	Respuesta: 12cm Justifique su respuesta: Junte dos cuadiados que estaban hasta la mitad y cree un cuadiado.

Análisis a posteriori resuelto por Abril

En el ítem 4 observamos que Abril, mediante su aprehensión perceptiva y operatoria de modificación mereológica reconfiguró su figura inicial para generar un rectángulo (ver Cuadro 20). Para ello, descompuso la figura en un cuadrado cuyo lado mide 2, en 4 cuadrados de medida de lado 1, y 8 triángulos de media unidad de medida de área. En el registro figural ella no colocó flechas, pero juntó los triángulos para completar cuadrados y emparejó estos cuadrados para formar rectángulos.

Cuadro 20. *Reconfiguración del ítem 4 de la Actividad 2 producido por Abril*

Aprehensión operatoria	Aprehensión discursiva
	Respuesta: 12 u² Justifique su respuesta: 6 x 2 = 12

En cuanto a su aprehensión discursiva, Abril escribió la operación que utilizó para determinar el área que es $6 \times 2 = 12$. En su respuesta final colocó $12u^2$, como podemos observar determinó correctamente la medida del área pero no escogió de forma correcta la unidad de medida.

Análisis del ítem 5 de la Actividad 2

Análisis a priori

El objetivo de este ítem es que los estudiantes determinen la medida del área de una figura y movilicen sus aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva. En este ítem se presenta a un triángulo isósceles que poseen un lado sobre la malla cuadriculada, la medida de su área es un valor entero y es posible visualizar la malla. Lo particular de este triángulo es su posición pues su lado más largo se encuentra de forma vertical. Las variables didácticas que intervienen en este ítem son: nitidez de la figura (con malla visible) y posición relativa de los polígonos en relación con la malla (algunos lados coinciden con la línea de la cuadrícula).

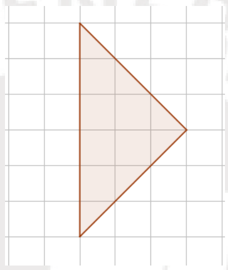
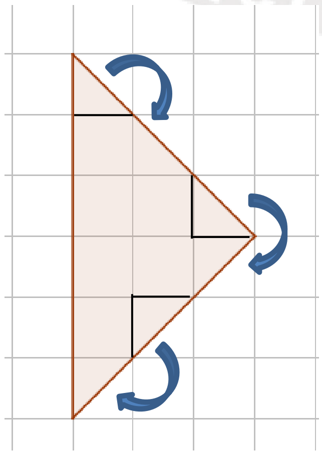
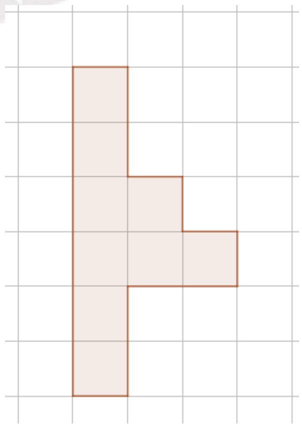


Figura 67. Ítem 5 de la Actividad 2

En el ítem 5 esperamos que el estudiante realice una reconfiguración heterogénea en la que trace cinco líneas auxiliares y descomponga la figura en cuatro sub-figuras. Luego, rote los tres triángulos rectángulos en el sentido que indican las flechas en el Cuadro 21 y se forme una nueva figura. En esta nueva figura podrían usar el conteo para determinar la medida del área de la figura.

Cuadro 21. *Posible reconfiguración del ítem 5 de la Actividad 2*

Figura inicial	**Figura final**
	

Por otro lado, es posible también que el estudiante utilice la fórmula del área de triángulo debido a que cuenta con la medida de la base y de la altura de dicha figura y realice la siguiente la operación:

$$\frac{6 \times 3}{2} = 9\,u$$

Luego de ello, esperamos que los estudiantes movilicen su aprehensión discursiva que le permita explicar el procedimiento utilizado para resolver el ítem.

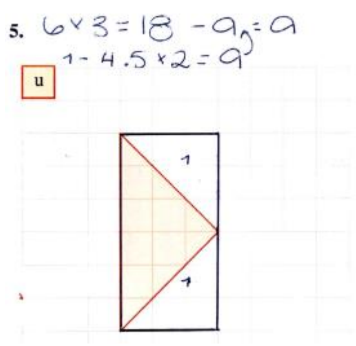
Análisis a posteriori resuelto por Sara

Con respecto al ítem 5, a diferencia del análisis a priori, Sara encuadró el triángulo dentro de un rectángulo con el fin de obtener el área de dicha figura y luego le restó las dos sub-figuras (triángulos rectángulos) que no forman parte de él (ver Cuadro 22). Sara determinó la medida del área del rectángulo cuyos lados medían 6 y 3, luego determinó el área de los dos triángulos rectángulos (a los que ella etiquetó con el número 1 en el registro figural). Creemos que ella utilizó el conteo para determinar que el área es 4.5, asimismo al usar el 0.5 nos hace pensar que Sara reconoció la unidad de medida y comprendió su significado.

Sara le preguntó a la profesora si alguna respuesta podía salir decimal y la profesora le respondió que sí. Creemos que Sara hizo esta pregunta porque probablemente está acostumbrada a obtener como medida de área de una figura a un número natural.

Su aprehensión perceptiva le permitió identificar que los dos triángulos rectángulos tienen la misma medida de área y por eso multiplicó su medida de área (4.5) por 2, obteniendo 9. Finalmente, ella restó 18 - 9, obteniendo 9 como medida de área.

Cuadro 22. *Respuesta de Sara al ítem 5 de la Actividad 2*

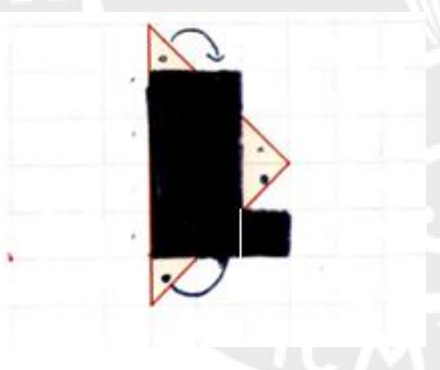
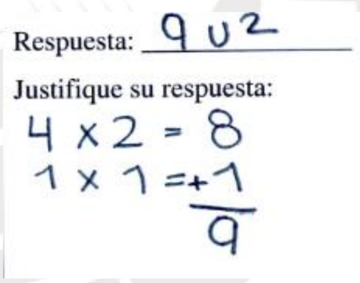
<table>
<tr><th>Aprehensión operatoria</th><th>Aprehensión discursiva</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Respuesta: 9 cm
Justifique su respuesta: saque el promedio de un rectangulo entero yel espacio restante lo reste.</td></tr>
</table>

En cuanto a su aprehensión discursiva, Sara respondió: *saqué el promedio de un rectágulo entero y el espacio restante lo reste*. Durante la aplicación de esta actividad, le preguntamos a Sara a qué se refería con el término “promedio”, a lo que ella respondió: *dibujé un rectángulo completo, calculé su área y luego le resté las dos partes*. Con respecto a esta respuesta, pensamos que Sara no tiene claridad en el significado de la palabra promedio, pues la usa como un término para referirse al área del rectángulo. Sin embargo, podemos observar que su modificación mereológica le permitió identificar las partes y el todo, es decir, ella reconoció un rectángulo compuesto por tres triángulos (dos de ellos triángulos rectángulos).

Análisis a posteriori resuelto por Abril

Con respecto al ítem 5, Abril reconfiguró la figura inicial, como lo esperábamos en el análisis a priori, pero realizó más descomposiciones de las que esperábamos (ver Cuadro 23). Ella descompuso la figura inicial en 4 triángulos de media unidad de medida y un hexágono. Luego, Abril rotó dos de los triángulos 180°, uno en sentido horario y el otro en sentido antihorario (como lo indica sus flechas) y finalmente juntó dos triángulos y generó un cuadrado.

Cuadro 23. *Reconfiguración del ítem 5 de la Actividad 2 producido por Abril*

Aprehensión operatoria	Aprehensión discursiva
	

En cuanto a su aprehensión discursiva, ella colocó las operaciones que había utilizado para determinar la medida del área. La primera corresponde al rectángulo cuyos lados miden 4 y 2 y la segunda corresponde a un cuadrado cuyo lado mide 1.

Luego, se dio la siguiente conversación entre Abril y un compañero de su mesa:

- Compañero: ¿La respuesta te salió decimal?
- Abril: No, sale 9.
- Compañero: Pero es que tienes que dividir entre 2 porque es un triángulo. Divide 9 entre 2.

- Abril: Pero estás contando lo que está dentro y ya no tienes que dividir entre 2. Mira 4 x 2 = 8 y 1 x 1 = 1. Sale 9 y no tienes que dividirlo entre 2.

Es interesante esta conversación que se dio entre Abril y su compañero puesto que podemos cuestionar que la forma de pensar de su compañero, quien piensa que siempre la medida del área de un triángulo se tiene que dividir entre dos, es el resultado del aprendizaje basado en fórmulas. El compañero de Abril no comprende realmente la noción de área.

Análisis del ítem 6 de la Actividad 2

Análisis a priori

El objetivo del ítem 6 es que los estudiantes determinen la medida del área de una figura y movilicen sus aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva. Pensamos que este ítem podría ser el de mayor dificultad puesto que no tiene ningún lado apoyado sobre la malla. Las variables didácticas que intervienen en este ítem son: nitidez de la figura (con malla visible) y posición relativa de los polígonos en relación con la malla (ningún lado coincide con la línea de la cuadrícula).

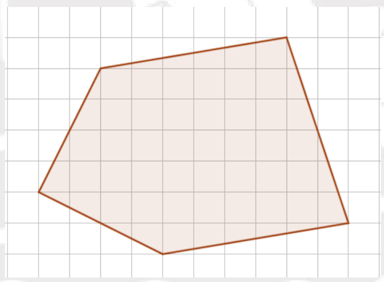
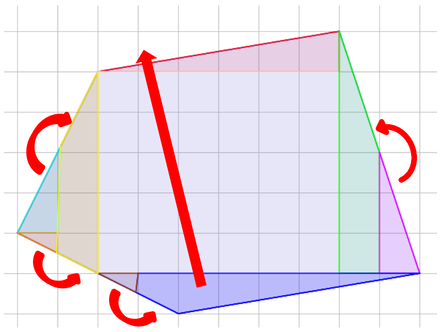
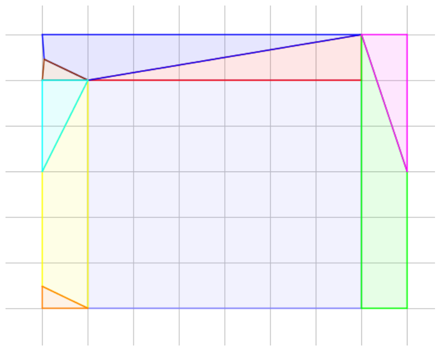


Figura 68. Ítem 6 de la Actividad 2

En este ítem esperamos que el estudiante utilice una reconfiguración de tipo heterogénea como se muestra en el Cuadro 24. Para ello, pensamos que el estudiante podría descomponer el pentágono en nueve sub-figuras (seis triángulos, un rectángulo y dos trapecios). Luego, podría rotar cuatro triángulos en el sentido que indican las flechas rojas y después podría trasladar el triángulo azul hacia la parte superior. Finalmente, formaría un rectángulo cuyos lados midan 6 y 8 en el que le sea más fácil de determinar el área.

Cuadro 24. *Posible reconfiguración del ítem 6 de la Actividad 2*

Figura inicial	**Figura final**
	

Luego de ello, esperamos que los estudiantes movilicen su aprehensión discursiva que les permita explicar el procedimiento utilizado para resolver el ítem e indique que la respuesta final es 48u.

Pensamos que este ítem sería el de mayor dificultad puesto que ninguno de los lados de la figura coincide con las líneas de la malla lo que podría generar mayor cantidad de pasos para su solución.

Análisis a posteriori resuelto por Sara

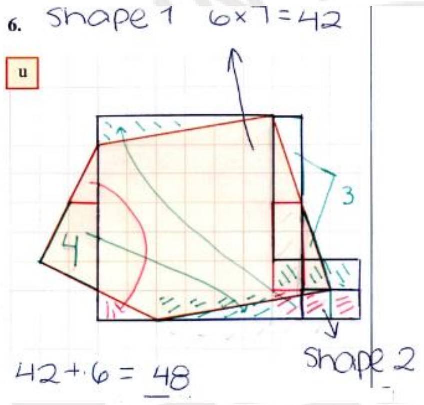
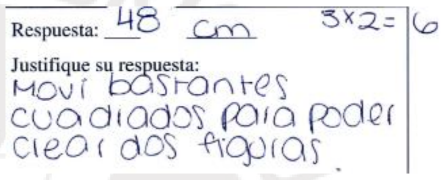
En un inicio, Sara miró fijamente la figura buscando qué estrategia aplicar. Luego, se dio la siguiente conversación entre Sara y un compañero de su mesa:

- Sara: ¿Cuánto te salió la última?
- Compañero: Me salió 48
- Sara: Pero, ¿Cómo te salió?
- Compañero: Es que si te fijas bien (señalando su hoja), esta partecita que está coloreada lo puedes sumar con esta partecita que no está coloreada para que completen los cuadrados.
- Sara: Ah ya entendí

Con respecto al ítem 6, Sara a diferencia del análisis a priori, realizó más descomposiciones de las que esperábamos (ver Cuadro 25). Ella reconfigura la figura inicial en dos rectángulos, uno cuyos lados miden 6 y 7, y otro cuyos lados miden 2 y 3. Para ello, Sara mediante su aprehensión perceptiva y operatoria de reconfiguración heterogéna, descompuso la figura inicial en sub-figuras (triángulos y rectángulos). Luego, mediante una modificación posicional de traslación y rotación trasladó las sub-figuras para completar los “espacios vacíos” en la cuadrícula. Es interesante notar la gran cantidad de descomposiciones que Sara realizó. En el registro figural, podemos observar que Sara usó flechas, números y líneas de color rosado y verde para cubrir los cuadraditos de la malla. Pensamos que su reconfiguración es bastante compleja, sin embargo, los colores que usó le permitieron trabajar de forma ordenada.

En cuanto a su aprehensión discursiva, Sara mencionó: *Moví bastantes cuadrados para poder crear dos figuras*. Cuando Sara menciona que "movió bastantes cuadrados", se refiere a que trasladó diferentes sub-figuras con la intención de poder completar cuadraditos de la cuadrícula y generar así los dos rectángulos.

Cuadro 25. *Reconfiguración del ítem 6 de la Actividad 2 producido por Sara*

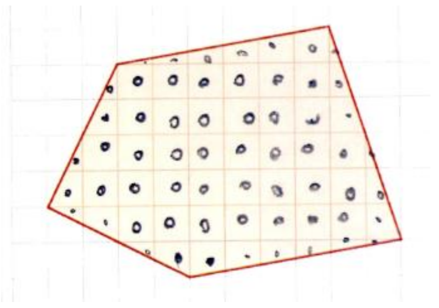
<table>
<tr><th>Aprehensión operatoria</th><th>Aprehensión discursiva</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Sara coloca como respuesta final 48 cm. La medida de área que ella ha obtenido después de la reconfiguración es correcta. Sin embargo, la unidad escogida no es la correcta pues en vez de seleccionar *u* como lo indica el ítem, ella escogió cm.

Análisis a posteriori resuelto por Abril

Con respecto al ítem 6, Abril dibujó puntos en todos los cuadrados que ocupó la figura en la cuadrícula, independientemente de si completaban o no la cuadrícula. Sin embargo, hay una diferencia sutil en la marca de sus puntos, pues en los cuadrados que cubren completamente la cuadrícula dibuja un círculo de mayor tamaño que el que usa cuando indica un cuadrado que no completa la cuadrícula.

Cuadro 26. *Respuesta de Abril al ítem 6 de la Actividad 2*

Aprehensión operatoria	**Aprehensión discursiva**
	Respuesta: 48 u^2 Justifique su respuesta: 48 cuadrados completos

En cuanto a su aprehensión discursiva, ella indica que su respuesta es 48 u^2 y como justificación escribe *48 los cuadrados completos*. Durante la actividad, cuando le preguntamos a Abril cómo llegó a la conclusión de que eran 48 cuadrados completos, y ella nos respondió que logró reconocer que había partes de la figura que al juntarlas formaban un cuadradito de la cuadrícula por lo que empezó a juntar varias sub-figuras para generar cuadraditos de 1u^2 de área.

Podemos observar que ambas estudiantes (Sara y Abril) utilizaron a la reconfiguración como una estrategia para poder determinar la medida del área de los seis polígonos presentados en la ficha. No obstante, ambas estudiantes realizaron más descomposiciones que las que esperábamos, pensamos que esto se debe a que su aprehensión perceptiva se apoyó en la cuadrícula de la malla cuadriculada.

Por otro lado, ambas estudiantes lograron articular sus aprehensiones perceptivas, discursivas y operatorias. A lo largo de las dos actividades, las estudiantes lograron realizar conversiones de un registro a otro, generando así el aprendizaje. Sin embargo, observamos que el discurso de Sara es más elaborado que el de Abril.

Finalmente, después que las estudiantes entregaron sus fichas de actividades, la profesora procedió a aclarar ciertas dudas e institucionalizar lo aprendido de esta segunda actividad haciendo énfasis en lo siguiente: existen diversas formar de determinar la medida de área, diferentes al uso de las fórmulas, como por ejemplo el conteo, encuadramiento de una figura dentro de otra, y la descomposición y composición. A esta estrategia de descomposición y composición la llamó reconfiguración y trató de conectar esta actividad con la primera.

La profesora preguntó: ¿en qué consiste reconfigurar una figura? Y una estudiante respondió: consiste en descomponerla en partes y luego volverlas a ordenar. La profesora explicó que a esas partes las llamamos sub-figuras y que una vez formadas las podemos desplazar hasta crear una figura nueva en la que sea más fácil determinar el área.

Después, la profesora preguntó: ¿Qué tipo de desplazamientos o movimientos se pueden realizar a las sub-figuras? Las estudiantes describieron los tipos de movimientos que realizaron pero no los llamaron por su nombre correcto. La profesora les hizo recordar que a estos movimientos en el plano se le conocen como rotación y traslación.

La profesora luego explicó que la unidad de medida de área no siempre tenía que ser cm^2, a la que ellos estaban acostumbrados. La unidad de medida de una figura puede ser u^2, m^2, u, incluso un cuadrado o un triángulo.

CONSIDERACIONES FINALES

Con respecto a las investigaciones de referencia y la justificación

Con base en los antecedentes y los documentos presentados en la justificación podemos afirmar que los estudiantes de segundo grado de educación secundaria tienen dificultades al determinar la medida de área de un polígono. Estas dificultades se presentan por la falta de comprensión que tienen sobre el área y sus propiedades, la que es generada por la forma de enseñanza que se da en la escuela, en la que se le da importancia al uso de fórmulas. Como consecuencia, los estudiantes no comprenden el significado de las fórmulas y las olvidan con facilidad.

Por otro lado, hay ausencia de otros procedimientos que permiten determinar la medida de área de los polígonos como por ejemplo la reconfiguración. Esta información es importante porque nos permite conocer la importancia de realizar esta investigación con estudiantes de segundo grado de educación secundaria. En ese sentido, esperamos que nuestra investigación sea un aporte para la enseñanza de la Geometría, específicamente para determinar la medida de área de polígonos a través de la reconfiguración.

Con respecto al marco teórico y metodológico

Creemos que la Teoría de Registros de Representación Semiótica y lo referido al registro figural permitió que los estudiantes obtengan la medida del área de los polígonos mediante la reconfiguración. Esta operación permitió que los estudiantes transformen cada polígono en una figura de contorno global diferente a la inicial. El fin era obtener una nueva figura que resultara familiar o conocida para los estudiantes y que les permita determinar la medida de su área. Los estudiantes realizaron diferentes tratamientos en el registro figural y justificaron sus procedimientos en el registro de lengua natural y en el registro numérico.

Consideramos que la Ingeniería Didáctica como metodología para nuestra investigación fue la más idónea porque esta metodología mediante sus cuatro fases (análisis preliminar, la concepción y análisis a priori, la experimentación y, análisis a posteriori y la validación) nos permitieron analizar los procesos que realizaron los estudiantes al determinar la medida de área de polígonos mediante la reconfiguración.

El análisis preliminar nos permitió comprender más la Teoría de Registros de Representación Semiótica, el objeto matemático área y los aspectos que debíamos considerar para la creación de las actividades. El análisis histórico nos permitió entender cómo surgió el estudio del concepto área de polígonos a lo largo de la historia y cuáles fueron las propiedades sobre las cuales Duval creó la Teoría de Registros de Representación Semiótica en lo que respecta a la reconfiguración. El análisis cognitivo nos permitió conocer cuáles eran las concepciones que tenían los estudiantes con respecto a este objeto matemático y cuáles eran sus dificultades. El análisis didáctico nos permitió comprender el enfoque de área que deberíamos considerar y cómo este concepto llega a los estudiantes a través del currículo peruano y los textos educativos.

Con respecto a la pregunta de investigación y el objetivo general

Con respecto a la pregunta de investigación: ¿La operación de reconfiguración permite a estudiantes de segundo grado de educación secundaria determinar la medida del área de polígonos?, podemos afirmar lo siguiente:

Logramos responder a la pregunta de investigación porque durante las actividades los estudiantes reconfiguraron diferentes polígonos e hicieron uso de diferentes tipos de aprehensiones para obtener la medida del área de las figuras presentadas en las fichas de actividades.

En la Actividad 1 los estudiantes trabajaron con el Tangram; mediante sus aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva; hicieron uso de reconfiguraciones de tipo homogénea y heterogénea para construir diferentes figuras. En la Actividad 2, los estudiantes trabajaron con la malla cuadriculada; mediante sus aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva; hicieron uso de la reconfiguración de tipo heterogénea para determinar la medida del área de diferentes polígonos.

En cuanto al cumplimiento de nuestro objetivo general: Analizar la reconfiguración que realizan estudiantes de segundo grado de educación secundaria para determinar la medida del área de polígonos, podemos decir lo siguiente:

Se logró alcanzar el objetivo general porque en el desarrollo de las actividades, los estudiantes lograron realizar reconfiguraciones con el Tangram y la malla cuadriculada, para luego comunicar a través de sus aprehensiones (perceptiva, operatoria y discursiva) y sus registros (registro figural, de lengua natural y registro numérico) sus respuestas.

Finalmente, nuestra investigación nos ayudó a comprender las acciones de los estudiantes al realizar tratamientos en el registro figural; cómo usan la operación de reconfiguración para determinar la medida de área de polígonos; cómo desarrollan las aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva; y cómo influye el factor perceptivo visual al trabajar con la malla cuadriculada. Asimismo, observamos que los estudiantes ahora tienen una nueva manera de determinar la medida del área de un polígono, mediante tratamientos en el registro figural como la operación de la reconfiguración la cual puede ser a través de descomposiciones estrictamente homogéneas, homogéneas o heterogéneas.

Con respecto a la parte experimental

La prueba diagnóstica, nos permitió corroborar muchas de las dificultades manifestadas por los autores en las investigaciones de referencia, así como notar que los estudiantes no conocían a la reconfiguración como una estrategia de solución para determinar la medida del área de una figura.

El Tangram es un recurso que permite la producción de figuras por el proceso de reconfiguración. Este material facilitó que las estudiantes comprendieran que dos figuras que tienen diferente forma pueden tener la misma área, siempre y cuando estén compuestas por la mismas sub-figuras. Asimismo, permitió que las estudiantes realizaran reconfiguraciones homogéneas y heterogéneas. Las estudiantes manifestaron comprender las actividades de la ficha y lograron armar las figuras. Sin embargo, los resultados muestran que tuvieron dificultades para dibujarlas.

La malla cuadriculada propició la reconfiguración mediante la descomposición y composición de las figuras. Las reconfiguraciones más utilizadas en las figuras fueron las de tipo heterogénea. Asimismo, la malla cuadriculada facilitó el poder determinar la medida del área de los polígonos mediante el conteo de cuadraditos o la generación de rectángulos. En ese sentido, medir el área se entendió por determinar cuántas veces un cuadradito cabía en la figura. Además, la malla cuadriculada permitió que las estudiantes comprendan que un cuadradito de la cuadrícula es una unidad de medida y un triángulo es media unidad de medida, lo que les permitió determinar correctamente la medida de área de cada figura.

Sin embargo, las estudiantes manifestaron dificultades en la selección de la unidad de medida pues una de ellas escogió al cm probablemente por temas de familiaridad y la otra estudiante, por el contrario, escogió u^2 porque para ella la medida del área siempre tiene que estar elevado al cuadrado. Entonces, ambas estudiantes no percibieron que la unidad de medida en este caso era u.

Por lo anterior, consideramos que las estudiantes comprenden al área como magnitud y logran determinar la medida del área de una figura de forma correcta, sin embargo, tienen dificultades para identificar la unidad de medida del área. Tampoco tienen los conocimientos previos consolidados sobre transformaciones pues usan el término “mover” para referirse a movimientos de rotación y traslación.

La aprehensión perceptiva de las estudiantes les permitió identificar rectángulos en la cuadrícula por lo que todas o la mayoría de sus reconfiguraciones tenían por objetivo trasformar las figuras iniciales en rectángulos. Probablemente para los estudiantes el rectángulo es una figura familiar referente pues conocen a esta figura desde el nivel primaria. El rectángulo además les permite determinar fácilmente el área mediante la multiplicación de las medidas de sus lados y promueve una forma rápida de conteo.

El Tangram y la malla cuadriculada han permitido que las estudiantes articulen sus aprehensiones perceptivas, operatorias y discursivas. Asimismo, han transitado por tres registros: el registro de lengua natural, el registro figural y el registro numérico. Se ha observado ausencia del registro algebraico, incluso en aquellas figuras donde era posible usar la fórmula para calcular el área de forma directa (como el triángulo), ambas estudiantes optaron por usar la reconfiguración.

En la Actividad 2 en particular, observamos que las estudiantes realizaron más reconfiguraciones de las que esperábamos en el análisis a priori. Esto probablemente se deba a los diferentes conocimientos previos que movilizan la investigadora y los sujetos de investigación. La investigadora tiene mayor conocimiento de las figuras, las transformaciones y su medida de área, por lo que busca hacer el mínimo de reconfiguraciones intentando encontrar la estrategia más económica en términos de tiempo. Sin embargo, los sujetos de investigación realizan todas las reconfiguraciones que sean necesarias con tal de obtener su figura referente (el rectángulo).

Confrontamos los análisis a priori y a posteriori de las actividades planteadas, afirmamos que se logró validar el uso de la reconfiguración como una operación en el registro figural que permitió obtener la medida de área de diversos polígonos.

Perspectivas futuras

El presente estudio se realizó con estudiantes de segundo grado de secundaria pues se esperaba que ellos, al estar finalizando el VI ciclo de la Educación Básica Regular, sepan determinar la medida del área de figuras compuestas; no obstante, en la revisión de antecedentes de investigación y nuestra propia experiencia, hemos verificado que la operación de reconfiguración, para determinar la medida de área de un polígono, puede ser utilizada por estudiantes desde sexto grado de primaria, por lo cual pensamos que el presente estudio podría también ser realizado con estudiantes de grados inferiores a segundo grado de secundaria y con otro tipo de figuras como el rombo, el paralelogramo y el trapecio.

De manera prospectiva, sería interesante analizar la comprensión de los estudiantes universitarios sobre las sumas de Riemann en donde tienen que determinar el área bajo la curva para calcular el valor de la integral definida. Así mismo, creemos que es importante realizar un estudio dirigido a docentes de matemática de nivel primario y secundario quienes enseñan las nociones relacionadas a áreas, y de esta manera reflexionar sobre la metodología utilizada por ellos.

También sugerimos investigar medidas de área de figuras curvas, en donde se use la aproximación. Asimismo, investigar el uso de otros recursos que propicien la reconfiguración como operación, por ejemplo, los poliminós, el rompecabezas o el geoplano. También, un estudio sobre la comprensión de las unidades de medida (u^2, cm^2, etc.). Asimismo, investigar cómo los estudiantes del nivel primario y secundario utilizan el registro figural en el área de Geometría.

Con respecto a la malla cuadriculada, sugerimos estudios en los que se focalice otras situaciones como comparación y/o producción de superficies. También, actividades en las que intervenga el estudio de la relación área y perímetro. Y la medida del área de una figura usando diferentes unidades de medida como por ejemplo una malla cuadriculada y una malla triangular.

Consideramos además necesario realizar réplicas de esta investigación en otros contextos con estudiantes de la educación básica regular, pues la reconfiguración permite comprender mejor la medida de área a través de la comparación con otras figuras geométricas equivalentes, es decir, tratar el aspecto cualitativo del área que generalmente no se trabaja en la escuela.

REFERENCIAS

Alfonso, F., Benítez, N., Peralta, B., Ramírez, K., & Restrepo, A. (2016). *Cálculo de áreas de polígonos por el método de descomposición y recomposición.* En Gómez, Pedro (Ed.), Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD 1 (pp. 13-75). Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/6504/1/Alfonso2016C%C3%A1lculo.pdf

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gomez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Grupo editorial Iberoamérica.

Borja, I. (2015). *Reconfiguración del trapecio para determinar la medida del área de dicho objeto matemático con estudiantes del segundo grado de Educación Secundaria*. (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. Disponible en http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/6659

Boyer, C. (1968). *A History of Mathematics*. New York, United States of America: Wiley International Edition.

Castillo, V. (2015). *Secuencia didáctica para contribuir en la construcción del concepto de área como magnitud con estudiantes de Educación Primaria.* (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. Disponible en http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/6751

Corberán, R. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes de primaria a la universidad.* (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, Valencia, España. Recuperado de: https://www.uv.es/aprengeom/archivos2/Corberan96.pdf

Da Silva, J. (2011). *Análise da abordagem de comprimento, perímetro e área em livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental sob a ótica da teoria antropológica do didático.* Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, Brasil. Recuperado de http://repositorio.ufpe.br/bitstream/handle/123456789/3966/arquivo6775_1.pdf?sequence=1

Douady, R. & Perrin-Glorian, M. (1983). Mesures des longueurs et des aires. *Cahier de didactique des mathematiques*.48. IREM Université Paris 7. Recuperado de: http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS97022.pdf

Douady, R. & Perrin-Glorian, M. (1987). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Cahier de didactique des mathematiques.37*. IREM Université Paris 7. Recuperado de: http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS00015.pdf

Duval, R. (1994). *Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. Repères-IREM*, (17), pp. 121-138. Recuperado de http://www.univ-irem.fr/exemple/reperes/articles/17_article_119.pdf

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano.* (Myriam Vega, trad.). Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2011). *Ver y ensinar a matematica de outra forma: entrar no odo matemático de pensar: os registros de representa*çõe *semióticas*. Sau Paulo, Brasil: Proem editora.

Duval, R. (2012a). Registro de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revemat, 7*(2), 266-297.

Duval, R. (2012b). Abordagen cognitiva de problema de Geometría em termos de congruencia. Revista electrónica de Educación Matemática. *Revemat, 7*(1), 118-138. Recuperado de https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p118

Duval, R. (2016). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la Geometría, desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. En Duval, R., & Sáenz-Ludlow, A. (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*. (pp. 13-60). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Facco, S. (2003). *Concepto de área. Una propuesta de enseñanza aprendizaje.* (Tesis de Maestría en Educación Matemática: Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Sao Paulo). Recuperado de http://www.pucsp.br/pensamentomatematico/dissertacao_sonia_facco.pdf

Ferreira, L. (2010). *A construção do conceito de área e da relação entre área e perímetro no 3º ciclo do ensino fundamental: estudos sob a ótica da teoria dos campos conceituais*. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, Brasil. Recuperado de http://repositorio.ufpe.br/bitstream/handle/123456789/3972/arquivo206_1.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Ferreira, L. & Bellemain, P. (2016). A aprendizagem e o ensino das grandezas geométricas no 6° ano: quais as raízes dos entraves enfrentados pelos alunos?. *Comunicación presentada en el I Simpósio Latino-americano de Didática da Matemática*, 01-06 de noviembre. Bonito: Mato Grosso do Sul.

Godino, J., Batanero, C. & Roa, R. (2002). *Medida de magnitudes y su didáctica para maestros*. Granada: Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/5_Medida.pdf

Haese, M., Haese, S., Humphries, M., Kemp, E. & Vollmar, P. (2014). *Mathematics for the international student 8*. Marlestion: Haese Mathematics.

Herendiné, E. (2016). The level of understanding geometric measurement. *Ninth Congress of the European Society of Research in Mathematics Education:* CERME 9, febrero 2015, Prague, pp. 536-542. Recuperado de: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01287005/document

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2010) *Metodología de la Investigación*. Ed. Mc Graw-Hill Interamericana. 5ta ed., p. 9.

Marmolejo, G. & Vega, M. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad en su aprendizaje. *Revista: Educación Matemática, 24*(3), 7-32.

Perú, Ministerio de Educación (2015). *Resolución Ministerial N° 199-2015*. Lima. Recuperado de http://ccec.edu.pe/files/RM-199-2015-MINEDU-Modifica-DCN-2009.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2016). Unidad de Medición de la Calidad. Evaluación Censal de Estudiantes 2015. *Informe para docentes. Segundo grado de secundaria*. Recuperado de http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2016/03/Informe-para-el-docente-Matem%C3%A1tica_ECE-2015.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2017). Unidad de Medición de la Calidad. Evaluación Censal de Estudiantes 2016. *Informe para docentes. Segundo grado de secundaria*. Recuperado de http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2017/04/Informe-para-Docentes-Matem%C3%A1tica-ECE-2016-2.%C2%B0-grado-de-secundaria.pdf

Moran, M. (2016). A influência dos diferentes registros figurais nos tratamentos de figuras e mobilizações em problemas de geometria. *Comunicación presentada en el I Simpósio*

Latino-americano de Didática da Matemática, 01-06 de noviembre. Bonito: Mato Grosso do Sul.

Ng, O. & Sinclair, N. (2015). Area Without Numbers: Using Touchscreen Dynamic Geometry to Reason About Shape, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, (15)*1, 84-101. doi: 10.1080/14926156.2014.993048

Norma (2015). *Matemática 2*. Lima: Grupo editorial Norma S.A.C.

Pérez, D. (2016). *Construcción de significado robusto para el concepto de área y caracterización del pensamiento geométrico involucrado en los estudiantes de sexto grado (10 a 13 años).* (Tesis doctoral). Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia.

Pessoa, G. (2010). *Um estudo diagnóstico sobre o cálculo da área de figuras planas na malha quadriculada: influência de algumas variáveis.* Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, Brasil. Recuperado de http://repositorio.ufpe.br/bitstream/handle/123456789/3944/arquivo61_1.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Popoca, M. & Acuña, C. (2011). Cambios en figuras de área igual, conservación y relaciones figúrales. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (24, 541-550). México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamaricano de Matemática Educativa A.C. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/4848/1/PopocaCambiosALME2011.pdf

Santana, W. & Silva A. (2016). O uso dos poliminós para o ensino de área e perímetro: uma proposta para o 6° año de ensino fundamental. *Comunicación presentada en el I Simpósio Latino-americano de Didática da Matemática*, 01-06 de noviembre. Bonito: Mato Grosso do Sul.

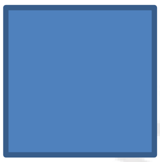
ANEXO A - PRUEBA DIAGNÓSTICA

Nombre:____

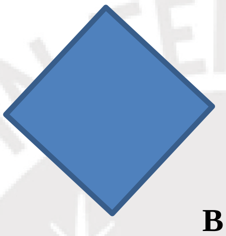
Responde a las siguientes preguntas. Recuerda mostrar tu procedimiento en cada una de ellas.

1. Describe con tus propias palabras qué es el área de un polígono y muestra un ejemplo.

2. ¿Son iguales las áreas de las figuras **A** y **B**?

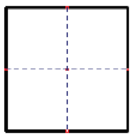


A

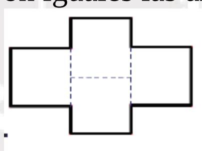


B

3. Si a la figura **C** le hacemos dos cortes sobre las líneas punteadas y con las piezas formamos la figura **D**, ¿son iguales las áreas de **C** y **D**?



C

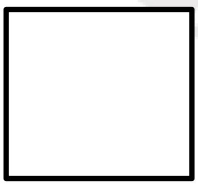


D

4. Determina la medida de área de las siguientes figuras, considerando a cada cuadradito como una unidad de medida.

a)

7cm



7cm

cm^2

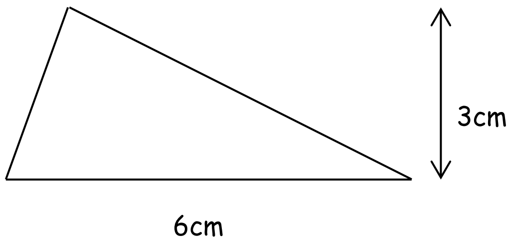
b)

5cm

9cm

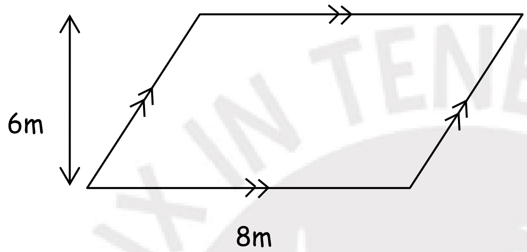
cm^2

c)



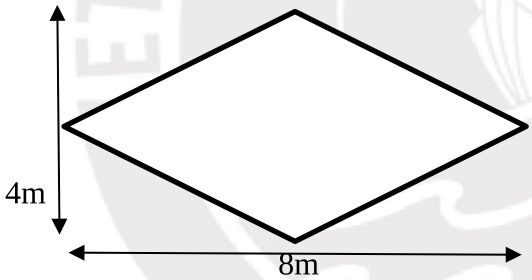
cm^2

d)



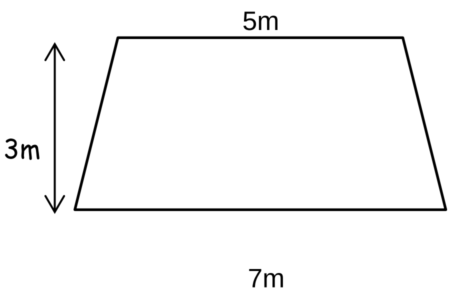
m^2

e)



m^2

f)



m^2

ANEXO B – ACTIVIDAD 1: TRABAJEMOS CON EL TANGRAM

ESTUDIANTE:____EDAD:_________

1. Observa las siguientes figuras y responde:

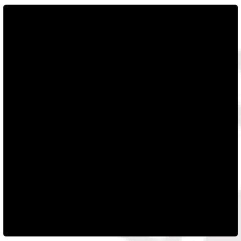


Fig. 1

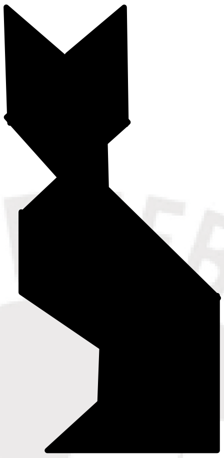


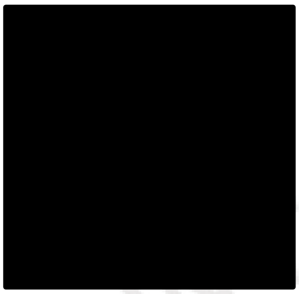
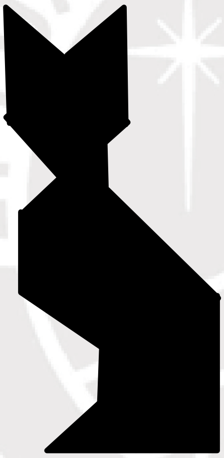
Fig. 2

Fig. 3

¿Tienen todas estas figuras la misma área? ¿Por qué?

El tangram es un puzzle de siete piezas que proviene de China. Con él se pueden construir más de 300 figuras diferentes.

2. Construye con todas las piezas del Tangram cada una de las figuras antes mostradas. Una vez construidas, plasma tu dibujo en el espacio en blanco indicando la forma en que ubicaste las piezas.

 Fig. 1	
 Fig. 2	
 Fig. 3	

3. En las tres figuras construidas en el ítem anterior se han utilizado las 7 piezas del Tangram. ¿Qué puedes concluir con respecto al área de las tres figuras construidas?

4. ¿Figuras de diferente forma pueden tener la misma área? Explica

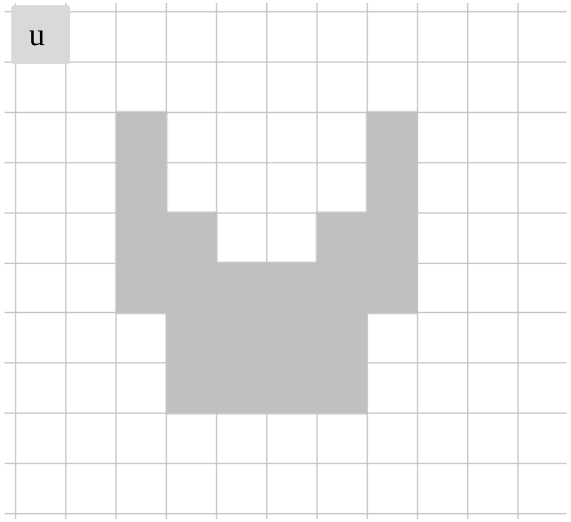
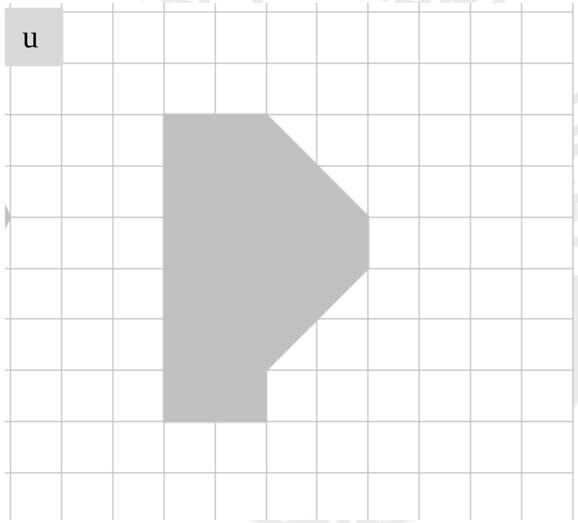
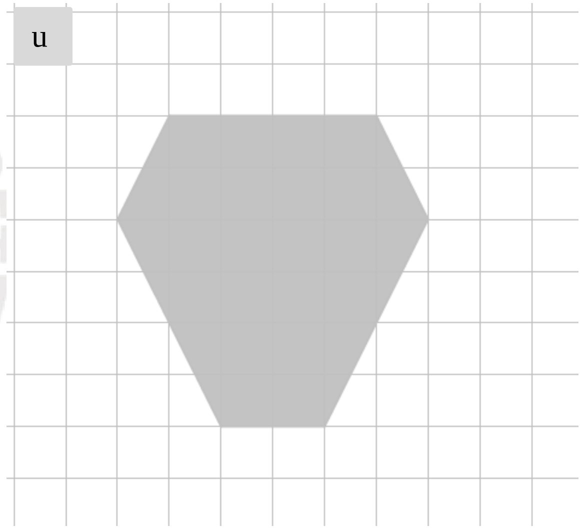
5. Selecciona dos piezas del Tangram que tengan la misma forma y tamaño. Con ellas crea figuras diferentes teniendo en cuenta las siguientes condiciones:
   - No superponer las piezas.
   - Un lado de una pieza debe coincidir con un lado de la otra pieza.

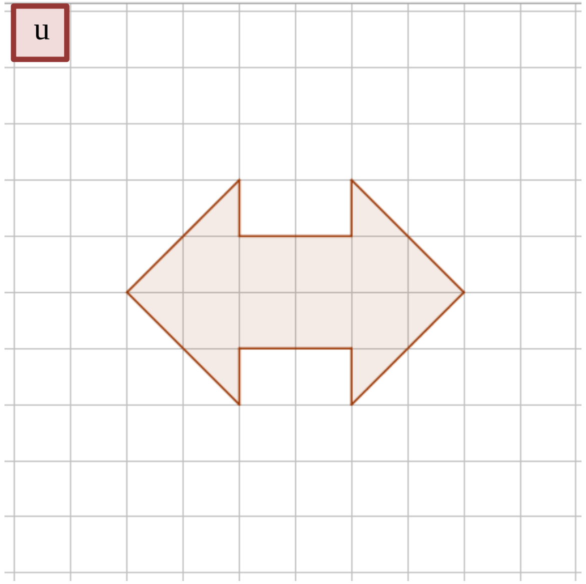
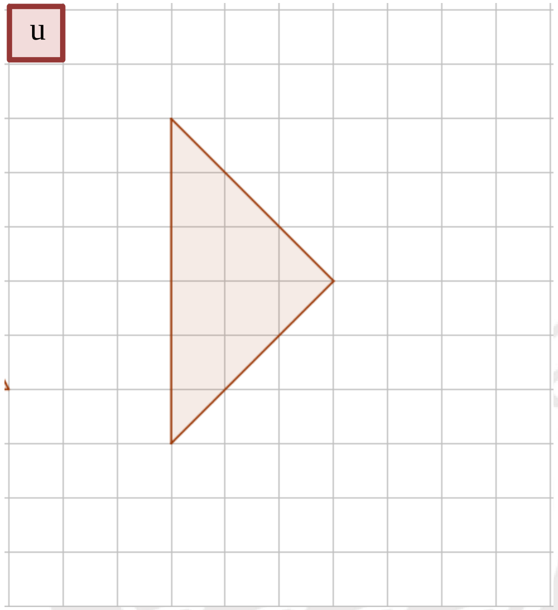
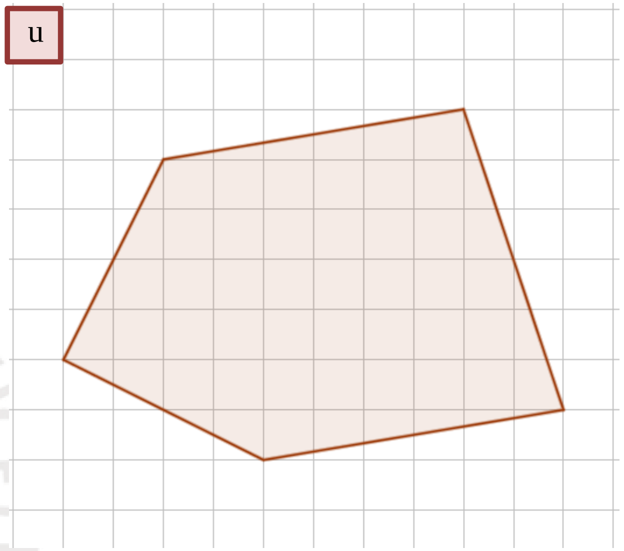
   Plasma las figuras formadas en el espacio en blanco indicando la posición de las piezas.

ANEXO C – ACTIVIDAD 2: HALLEMOS LA MEDIDA DEL ÁREA DE POLÍGONOS

ESTUDIANTE:____EDAD:_________

Determina la medida del área de las figuras considerando a cada cuadradito como unidad de medida.

1. 	**2.** 	**3.** 
Respuesta: _______________ Justifique su respuesta:	Respuesta: _______________ Justifique su respuesta:	Respuesta: _______________ Justifique su respuesta:

4. 	**5.** 	**6.** 
Respuesta: ________________ Justifique su respuesta:	Respuesta: ________________ Justifique su respuesta:	Respuesta: ________________ Justifique su respuesta

Fuente: Adaptado de Pessoa (2010, p. 48-49)