PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

Problemas de optimización mediados por el geogebra que movilizan el concepto de derivada de funciones reales de variable real en estudiantes de ingeniería

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGISTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR

Ever Franklin Cruzado Quispe

ASESOR:

Jesús Victoria Flores Salazar

Marzo, 2018

RESUMEN

Esta investigación tiene como finalidad analizar de qué manera estudiantes de las diferentes carreras de ingeniería coordinan registros de representación semiótica al resolver problemas de optimización movilizando el concepto de derivada de funciones reales de variable real. Por ello se plantea como pregunta de investigación *¿Problemas de optimización en los cuales sea necesario movilizar el concepto de derivada de funciones reales de variable real favorecen la coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica en estudiantes de ingeniería?* Para este estudio se toma como marco teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica y como método de investigación usamos aspectos del estudio de caso. Este marco teórico permite analizar porque los estudiantes tienen dificultades al momento de resolver problemas de optimización. Para la parte experimental de la investigación se elabora dos problemas de optimización mediados por el Geogebra y son aplicados a estudiantes de Ingeniería Mecánica de una universidad nacional peruana. El análisis de los resultados logrados por los estudiantes muestra que hay dificultades al momento de coordinar el registro en lengua natural, figural, algebraico y gráfico, sin embargo se concluye que los problemas de optimización propuestos favorecen para que se dé dicha coordinación, pues en el segundo problema de optimización los estudiantes realizan tratamientos y conversiones en los registros mencionados con menor dificultad respecto al primer problema de optimización.

Palabras claves: Problemas de optimización, registros de representación semiótica, estudio de caso.

ABSTRACT

The purpose of this research is to analyze how students from different engineering careers coordinate semiotic representation registers when solving optimization problems by mobilizing the derivative concept of real functions of real variable. Therefore, we consider as a research question. Do optimization problems in which is necessary to mobilize the concept of derivative of real functions of real variable favors the coordination between the different registers of semiotic representation in engineering students? For this study, we take the Theory of Semiotic Representation Registers as theoretical framework and as research method we use aspects of the case study. This theoretical framework allowed us to analyze why students have difficulties when solving optimization problems. For the experimental part of the research two optimization problems were elaborated mediated by the Geogebra and applied to students of Mechanical Engineering of a peruvian national university. The analysis of the results obtained by the students shows that there are difficulties when coordinating the registers in natural language, figural, algebraic and graphic, however it is concluded that the proposed optimization problems favor such coordination, since in the second optimization problem the students perform treatments and conversions in the mentioned registers with less difficulty respect to the first optimization problem.

Keywords: Optimization problems, semiotic representation registers, case study.

Dedicatoria

A mi querida madre por su cariño

y por los valores inculcados.

AGRADECIMIENTOS

Al concluir este trabajo, que presento como tesis para obtener el grado de Magister en Enseñanza de las Matemáticas, en primer lugar doy gracias a Dios por haberme permitido llegar a este momento de mi vida.

A la profesora Jesús Victoria Flores Salazar, por su tiempo brindado y su excelente orientación para la realización y culminación de este trabajo.

A los miembros del jurado a la profesora Verónica Neira y a la profesora Flor Carrillo, por la revisión de la tesis, por sus valiosos aportes y sus sugerencias oportunas para la mejora del trabajo.

A los profesores de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP por sus enseñanzas y motivación para formarte como investigador, y consejos para mejorar las prácticas profesionales como docente.

A mi amiga Ana Almonacid por su amistad y por su apoyo incondicional como observadora en la aplicación de la propuesta didáctica elaborada para esta investigación.

A los estudiantes participantes en la parte experimental, por su tiempo e interés en participar, ya que sin ellos no hubiese sido posible realizar la parte experimental de la tesis.

A mis familiares que siempre están pendientes de mí, en especial a mi madre por su cariño y motivación para seguir adelante.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

CONSIDERACIONES INICIALES

La presente investigación se centra en la coordinación de registros de representación semiótica en estudiantes de las diferentes carreras de ingeniería cuando resuelven problemas de optimización, con ayuda del Geogebra, investigación que surge por el interés de investigar porqué estudiantes de ingeniería presentan dificultades al momento de resolver problemas de optimización usando los conceptos relacionados con la derivada de funciones reales de variable real, las cuales fueron observadas en mi calidad de docente cuando enseñaba dicho tema y además son evidenciadas en investigaciones de referencia de este trabajo.

Se cree que dicha situación se da ya que los estudiantes aprenden los procesos algorítmicos de la derivada, pero no comprenden que indica los conceptos relacionados a la derivada respecto al comportamiento de la gráfica de una función, además de ello, los problemas de optimización en muchos casos se presentan de forma textual y el estudiante debe determinar una función en una variable que modele el problema planteado, ya que sin ello no podrá aplicar los métodos relacionados con la derivada de funciones reales de variable real para resolver problemas de optimización.

A continuación presentamos la estructura de la investigación, la cual está compuesta de tres capítulos que describimos en seguida.

En el primer capítulo se presenta las investigaciones de referencia, las cuales nos sirven de insumo para nuestra investigación, pues estas tienen objetivos similares o relacionados a nuestro tema de investigación, luego se presenta la justificación, los principales aspectos de la teoría de registros de representación semiótica, la cual justifica y fundamenta nuestra investigación, en seguida se presenta las preguntas y objetivos, y finalmente los aspectos metodológicos del estudio de caso.

En el segundo capítulo se presenta un estudio de los principales aspectos, tanto históricos como didácticos, de los problemas de optimización. En cuanto a los aspectos históricos se muestra como el pensamiento optimizador ha estado presente a lo largo de la era de la humanidad y como este pensamiento optimizador, presente en la vida cotidiana, ha dado lugar a desarrollar métodos para resolver problemas que impliquen optimizar funciones reales de variable real, hasta convertirse en una disciplina de la matemática llamada en la actualidad Optimización Matemática. Respecto a los aspectos didácticos se muestra de qué manera se presentan los problemas de optimización en los libros didácticos usados en la enseñanza del nivel superior.

En el tercer capítulo se presenta la parte experimental de la investigación. Este comprende la descripción de los sujetos participantes, así como también la descripción y análisis de los dos problemas de optimización elaborados para la investigación, los cuáles son las unidades de análisis, es decir se presenta una descripción y análisis de los resultados esperados y de los resultados logrados por los estudiantes participantes, haciendo una triangulación de la información recolectada con los diferentes instrumentos de recolección de datos usados en la investigación.

Finalmente, se presentan las conclusiones de la investigación y las perspectivas para futuros trabajos de investigación en base a esta tesis.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En este capítulo se presenta las investigaciones de referencia que involucran el tema en estudio de esta investigación. Cabe señalar que el tema en estudio son problemas de optimización de funciones reales de variable real en los que se debe movilizar el concepto de derivada para su resolución y se utiliza como medio el ambiente de representaciones dinámicas Geogebra. Por ello, las investigaciones que se presentan son referidas a esta temática. En seguida, se presenta la justificación, el marco teórico, la pregunta de investigación, los objetivos de la investigación y finalmente los aspectos metodológicos que se usan en la tesis.

1.1 Investigaciones de referencia

Las investigaciones de referencia que se presentan en esta sección están organizadas en cuatro grupos de acuerdo a ciertos criterios que detallamos a continuación, en el primer grupo se presentan las investigaciones en las que se trata sobre problemas de optimización sin usar algún Ambiente de Representaciones Dinámicas (ARD), en el segundo grupo se encuentran las investigaciones que tratan sobre problemas de optimización, y donde para la resolución de este tipo de problemas se usa un ARD, en tercer lugar están las investigaciones que tratan sobre el aprendizaje o comprensión de la derivada por medio de problemas de optimización sin el uso de algún ARD y finalmente se presentan las investigaciones que tratan de la comprensión de la derivada y sus conceptos relacionados con el uso de algún ARD.

Además, en la parte final de esta sección se presenta una investigación la cual muestra qué concepción tienen los estudiantes de ingeniería sobre el concepto de optimización.

Investigaciones sobre problemas de optimización sin uso de ARD

De las investigaciones revisadas referidas a problemas de optimización de funciones reales de variable real, y en las que no se usa ningún ARD se tiene la de Baccelli, Anchorena, Figueroa y Prieto (2012) quienes señalan que estudiantes de primer año de las carreras de ingeniería fracasan cuando se les propone problemas que impliquen optimizar funciones reales de variable real. Es por ello, que los autores mencionados tiene como objetivo realizar un análisis exploratorio descriptivo de las dificultades que presentan los estudiantes para resolver problemas de optimización con la finalidad de proponer estrategias de enseñanza en este tema.

El marco teórico que usan Baccelli et al. (2012) es el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), ya que los autores pretenden elaborar la configuración epistémica y las configuraciones cognitivas asociadas al problema.

Esta investigación es un artículo que forma parte de una tesis de maestría para obtener el grado de Magister en Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior de la Universidad de Tucumán en Argentina. La investigación se realizó en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata (UNMDP) en Argentina, en el curso de Análisis Matemático A, específicamente en el capítulo referido a máximos y mínimos relativos de funciones reales de variable real.

Según los investigadores, después de haber estudiado los conceptos de máximo, mínimo, crecimiento y decrecimiento de funciones reales de variable real, se proponen problemas de optimización que involucran dichos conceptos, pero se observa que la mayoría de estudiantes fracasan en su resolución, notándose la dificultad de los estudiantes en el planteo, el análisis y resolución de este tipo de problemas, esto se evidencia en el examen parcial, ya que los estudiantes no resuelven los problemas relacionados a optimización.

Por ello, los investigadores se plantean la siguiente pregunta de investigación *¿Cuáles son las causas que determinan las dificultades de los estudiantes para resolver problemas de optimización en un curso de cálculo diferencial?* (Baccelli et al., 2012, p. 2). Para responder esta pregunta, los autores investigan sobre diferentes dimensiones o aspectos en un proceso de instrucción matemática, y luego realizan un análisis exploratorio descriptivo, para determinar en qué práctica matemática se producen más dificultades al resolver problemas de optimización.

La investigación se inicia con un problema de optimización que se presenta a 38 estudiantes de las carreras de ingeniería de la UNMDP en un primer curso de Análisis Matemático. El problema planteado es "Determinar la mayor área que puede encerrar un rombo cuyo lado mide un metro" (Baccelli et al., 2012, p. 4). Para realizar un análisis cualitativo de las soluciones obtenidas de los estudiantes, con base en el problema enunciado anteriormente, un docente del curso Análisis Matemático y otro docente de Estadística e investigador de la UNMDP confeccionan la configuración epistémica. Posteriormente, a partir de la configuración epistémica, los autores diseñan un protocolo para analizar el desempeño de los estudiantes.

Según los investigadores, la información obtenida sobre la base del protocolo empleado se puede analizar desde diferentes aspectos, de acuerdo al tipo de objeto primario que se desea observar y analizar. Para Baccelli et al. (2012) se considera como una respuesta satisfactoria la de los estudiantes que determinaron el punto crítico, sin tener en cuenta que no justifican por que el valor obtenido es máximo. Bajo estas consideraciones los investigadores presentan los siguientes resultados, aproximadamente la tercera parte de los estudiantes resuelven el problema, el cual es un porcentaje bajo, también se observa que la mayoría de un total de 38 estudiantes realizan un gráfico del rombo como figura de análisis, aproximadamente la mitad lo hace correctamente y casi todos los estudiantes que no representan correctamente consideran el rombo como un cuadrado, pues consideran las diagonales congruentes.

Una conclusión a la que llegan los investigadores son que el planteo de la función en una variable es un paso clave en la resolución de problemas de optimización, ya que para obtener los puntos extremos de una función usando los conocimientos matemáticos en juego, es necesario tener la función en una variable, otra conclusión es que ninguna de las soluciones presentadas por los estudiantes corresponde al análisis de una función cuadrática, a pesar de haber sido uno de los conocimientos previos adquiridos. Lo que indica que este grupo de estudiantes están interesados en buscar herramientas dentro del análisis matemático, no teniendo en cuenta los conocimientos previos.

Además del trabajo de investigación de Baccelli et al. (2012), Baccelli, Anchorena, Moler y Aznar (2013) realizan otra investigación, la cual es un artículo realizado en el mismo marco del trabajo de tesis de la investigación anterior, pero a diferencia de la primera esta se enfoca en realizar un análisis exploratorio para identificar las posibles causas que pueden ocasionar la aparición de dificultades en los procedimientos usados para resolver problemas de optimización de funciones reales de variable real, y para dicho análisis los autores clasifican las dificultades encontradas en la resolución de problemas de optimización, usando las herramientas del EOS y así obtener la información necesaria para diseñar estrategias de enseñanza.

Los autores realizan su investigación con un grupo de 183 estudiantes del curso Análisis Matemático A, el cual pertenece al primer año de las carreras de la Facultad de Ingeniería de la UNMDP.

Según los autores en el curso de Análisis Matemático A se dictan clases teóricas y prácticas, los problemas de optimización se abordan después de desarrollar los conceptos relacionados a derivada y diferencial de una función real de variable real, después de la resolución de problemas de optimización por parte del profesor se propone una guía de trabajos prácticos de aplicaciones de la derivada, durante el desarrollo de la clase los estudiantes realizan consultas en forma individual o grupal.

Luego de la resolución de los problemas que propone el profesor en la guía de trabajos, se administra el instrumento de la investigación que son dos problemas de optimización, y se aclara a los estudiantes que escriban en la hoja todo tipo de planteo, justificación y argumentación que utilicen en la resolución de dichos problemas.

Para que se realice un análisis cualitativo de las soluciones obtenidas de los estudiantes, Baccelli et al. (2013) confeccionan la configuración epistémica de cada problema, luego se compara los objetos presentes en las resoluciones de los estudiantes con los de las configuraciones epistémicas.

Una vez realizado el análisis de resultados los autores concluyen que el análisis realizado a partir de las configuraciones cognitivas de los estudiantes y las configuraciones epistémicas de cada problema, permitió determinar cuáles son los procedimientos en los que los estudiantes presentan mayores dificultades, entre estos procedimientos se tiene el planteo de la función objetivo en una variable y el planteo de la condición del problema. Además, a partir de los resultados obtenidos, los autores sugieren mirar críticamente las prácticas matemáticas, pues estas suelen dar prioridad al cálculo de derivadas y, la formulación y resolución de problemas de optimización de funciones reales de variable real, los cuales forman parte de las aplicaciones de las derivadas, son dejados en segundo plano.

El mismo grupo de investigadores de las dos investigaciones anteriores, Baccelli, Anchorena, Figueroa y Prieto (2014), realizan una investigación más, en el mismo marco y contexto de las investigaciones previamente descritas, pero en esta su objetivo es presentar un análisis de los obstáculos, que se presentan en la construcción de significados, que dificultan la resolución de problemas de optimización de funciones reales de variable real en estudiantes del primer año de la Facultad de Ingeniería de la UNMDP. El marco teórico usado para esta investigación también es el EOS.

Del mismo modo que en las investigaciones previas, los autores indican que la mayoría de los estudiantes fracasan al resolver problemas de optimización, pues esto se evidencia en las evaluaciones ya que muchos estudiantes no abordan este tipo de problemas y los que intentan resolverlo presentan dificultades al plantear, desarrollar y al verificar los resultados. Por esta razón es que este trabajo tiene una vital importancia ya que se enfoca en analizar las dificultades que se presentan al resolver problemas de optimización.

Para llevar a cabo dicho análisis Baccelli et al. (2014) se plantean como objetivos: realizar un análisis de las resoluciones de problemas de optimización producidas por los estudiantes, para lo cual usan las herramientas del EOS; definir funciones semióticas como instrumento para la determinación de conflictos semióticos y como parte del análisis del significado evidenciado por los estudiantes en sus resoluciones de problemas de optimización y como último objetivo se plantean obtener información relevantes que son útiles para diseñar estrategias de enseñanza.

El tipo de investigación realizada por los autores es exploratoria descriptiva. La población objetivo está formada por 183 estudiantes del curso Análisis Matemático A, del primer año de la Facultad de Ingeniería de la UNMDP. Para la recolección de datos, los autores consideran tres problemas de optimización, de los cuales los dos primeros fueron suministrados antes de la experiencia didáctica y el tercer problema corresponde a una pregunta del examen parcial evaluado.

Los autores siguieron los siguientes procedimientos, en una primera etapa administran el instrumento formado por los dos primeros problemas, cabe resaltar que para ese momento los estudiantes ya habían concluido las actividades teóricas y prácticas relacionadas al tema en estudio, en la segunda etapa, para contrastar las producciones de los estudiantes, se utilizaron las configuraciones epistémicas confeccionadas para ambos problemas, las cuales fueron las mismas que se utilizaron en Baccelli et al. (2013), pues se trataba de los mismos problemas, en una tercera etapa se establecen funciones semióticas, en el sentido del EOS, las cuales tienen como antecedente un objeto primario y como consecuente las prácticas realizadas para resolver el problema. En una cuarta etapa, los autores analizan las configuraciones cognitivas para cada problema, permitiéndoles detectar los errores más frecuentes en las resoluciones de los estudiantes.

El análisis realizado, por los autores, sobre las resoluciones de los dos primeros problemas pone en evidencia lo que siempre acontece en las evaluaciones del curso al momento de corregirlas, pues se evidencia que la cantidad de estudiantes que resuelven los problemas de optimización presentados es baja. Luego se elaboró un cuadro comparativo de las funciones semióticas establecidas, calculados sobre las ciento ochenta y tres configuraciones cognitivas analizadas para los dos primeros problemas, también, los autores elaboran un cuadro comparativo de las funciones semióticas establecidas para el tercer problema.

Luego de realizado el análisis de resultados obtenidos, los autores concluyen que las herramientas teóricas y metodológicas que proporciona el EOS permiten reflejar el significado personal e institucional referido a problemas de optimización; también concluyen que las funciones semióticas definidas explican los errores que cometen los estudiantes al resolver problemas de optimización y también nos indican que las funciones semióticas mal establecidas permiten identificar los conflictos semióticos, los cuales fueron fundamentales en planificación de la experiencia didáctica, para trabajar con estudiantes en forma presencial y superar dichos conflictos. Finalmente, Baccelli et al. (2014) nos indican que los resultados mejoraron notoriamente.

Por otro lado, Encinas, Ávila y De las Fuentes (2013) realizan una investigación, con estudiantes de ingeniería, sobre la eficacia en la resolución de problemas de optimización de funciones reales de variable real. En esta investigación, los autores presentan un estudio sobre las prácticas matemáticas que realizan estudiantes de ingeniería cuando resuelven problemas de optimización y luego se plantean como objetivo identificar qué elementos hacen que los estudiantes sean eficaces o no al resolver este tipo de problemas.

Para el estudio, los autores seleccionaron a estudiantes de ingeniería de una universidad del noroeste de México, y luego se les presenta problemas con enunciado del texto que se utiliza en las clases del curso de Cálculo.

Los autores mencionan que tanto para realizar el análisis de la práctica escrita así como también la transcripción, usaron los referentes teóricos proporcionados por el EOS y también otros referentes teóricos relacionados con la Metacognición.

Para cumplir con su objetivo, en primer lugar los autores seleccionaron problemas de optimización de los libros usados por los profesores del curso de Cálculo. Para los autores era necesario que los estudiantes que resuelven los problemas satisfagan ciertos criterios, en particular que comprendan la noción de optimización.

Para el estudio se seleccionaron diez estudiantes de un grupo de estudiantes de primer semestre de carreras de Ingeniería, los cuales obtuvieron las mayores calificaciones en tres exámenes de conocimientos previos sobre optimización, además estos estudiantes recibieron el aval de su profesor de Cálculo y aceptaron participar en la investigación. También, participaron tres estudiantes destacados de tercer semestre. Para la colección de datos, los autores primero aíslan a cada estudiante en un cubículo, luego se le presentan los problemas de optimización, pero previamente se les solicita que cuando resuelvan el problema lo escriban en unas hojas de papel que se le proporciona para tal fin y también se les pide que externaran en voz alta y de manera simultánea el proceso de resolución, sus pensamientos, los cuales son grabados y luego transcritos.

Encinas et al. (2013) colectan la información en dos etapas, en la primera fueron analizados los 13 paquetes de hojas de respuestas que escribieron los estudiantes con la finalidad de resolver el problema, usando la clasificación de objetos matemáticos y se identificaron los objetos que intervienen en la práctica de los estudiantes, en seguida se identificaron los procesos matemáticos involucrados; todo este proceso de análisis se realiza con base en el enfoque teórico utilizado. En una segunda etapa, los autores revisan las 13 transcripciones hechas siendo muy cuidadosos para identificar los diversos elementos de la gestión metacognitiva, así como también el nivel de conciencia que los estudiantes tienen de dicha gestión, además se registró con precisión los tiempos de avance del proceso.

Los autores indican que el análisis de desempeño de los estudiantes participantes en la investigación les permite afirmar que hay una estrecha relación entre las significaciones que se tienen de los objetos y procesos matemáticos que intervienen, el nivel de desarrollo de las habilidades intelectuales que están en juego al desarrollar los procesos matemáticos y metacognitivos, así como también las actitudes que muestran los estudiantes al estar tratando de resolver el problema y su nivel de eficacia.

Finalmente, los autores concluyen que los estudiantes examinados son poco eficaces cuando intentan resolver problemas de optimización de manera independiente, así como también en cada uno de los subprocesos como son: modelar, planear, supervisar, regular y verificar, por el contrario observan que la etapa del procedimiento algebraico se ejecuta de manera más eficaz.

Además, los autores afirman que el principal obstáculo que tienen los estudiantes, al resolver problemas de optimización, se presenta al construir la función que modela matemáticamente el problema planteado, pues no identifican las magnitudes que varían y las relaciones que hay entre ellas, y los estudiantes que logran construir dicha función no tienen problemas para resolver el problema, pues muestran un buen dominio de los procesos algorítmicos.

Investigaciones sobre problemas de optimización en las cuales se usa un ARD

En este grupo de investigaciones tenemos la investigación de Otero (2012) la cual es un trabajo de tesis, cuyo propósito es elaborar una secuencia de actividades que permitan realizar el tránsito entre las representaciones internas y las representaciones externas mediante preguntas que pretenden orientar al estudiante durante el desarrollo de la misma, con la finalidad de proporcionar herramientas para la resolución de problemas de optimización que impliquen minimizar funciones reales de variable real. Para aclarar, una representación interna son las imágenes que se crean en la mente para representar procesos u objetos matemáticos, mientras que las representaciones externas son las representaciones que se pueden hacer escribiendo en papel, dibujando, haciendo representaciones geométricas o ecuaciones.

Por lo mencionado, Otero (2012) se plantea como objetivo general diseñar una propuesta de intervención en el aula para resolver problemas de optimización relacionados con la minimización de costos, con el apoyo del software Geogebra, y para cumplir este objetivo, el autor, primero se fundamenta en un marco matemático, es decir toma los referentes teóricos en los cuales se fundamenta el trabajo, como por ejemplo hace un repaso del concepto de máximos y mínimos, y en seguida como marco teórico didáctico el autor usa la Teoría de Registros de Representación Semiótica. Para el desarrollo del trabajo, el autor realiza una prueba piloto con un grupo de veinte estudiantes del grado undécimo, de la Escuela Tecnológica Instituto Técnico Central (Colombia), con la finalidad de identificar cuáles son las dificultades de los estudiantes cuando resuelven problemas de optimización, y para este fin se elaboraron tres actividades, de las cuales las dos primeras se realizaron en el salón de clases y la tercera en la sala de sistemas.

Luego, el autor hace una revisión de las actividades desarrolladas por los estudiantes, lo cual le permite tomar los contenidos necesarios y descartar los que no son necesarios para la elaboración de la propuesta final. De las actividades propuesta por el autor, en la primera se pretende que el estudiante resuelva un problema de optimización mediante una serie de pasos guiados, con el fin de que logre mejorar el tránsito entre el registro lengua natural y el algebraico, y para ello el autor elabora una serie de preguntas. En la segunda actividad también se propone, al estudiante, un problema de optimización, pero este tiene menos pautas que el de la actividad uno, esperando que con el problema anterior el estudiante haya adquirido herramientas que le permitan resolver el segundo problema. En la tercera actividad el autor hace uso de la herramienta tecnológica Geogebra, para modelar un problema de optimización y, se pide a los estudiantes lean detenidamente las indicaciones dadas, para luego responder las preguntas propuestas por el autor.

Algunas de las conclusiones a la que llega el autor es que, de acuerdo con los resultados obtenidos al implementar la propuesta, la planeación y elaboración de las actividades se logra realizar el tránsito del registro en lengua natural al algebraico. El autor también afirma que la implementación del problema de optimización en el software Geogebra permite identificar y observar las condiciones del problema, sin embrago algunas deficiencias propias del software no permiten que los estudiantes logren el tránsito entre registros, así por ejemplo, las dificultades que se generan por la escala de medidas del problema, y además a esto se suma las falencias con el manejo del Geogebra.

Por otro lado, también se tiene la investigación de Bustos y Vásquez (2016), en la que explican que una de las causas por la cual los estudiantes presentan dificultades en su aprendizaje, es que los profesores enseñan las definiciones formales, olvidando las ideas geométricas que fueron la base para llegar a la formalización. Por lo expuesto anteriormente, las autoras se plantean como objetivo general, diseñar un conjunto de situaciones adidácticas que aprovechen el potencial del software *Carmetal*, para dar sentido a las estrategias de resolución de problemas de optimización por medio de la noción de derivada, favoreciendo la interpretación geométrica de las mismas; para tal fin las autoras usan como referente teórico a la teoría de situaciones didácticas de Brousseau, además como un medio metodológico usa a la Ingeniería Didáctica desde un nivel de microingeniería donde se abordan la fases I (análisis preliminares) y la fase II (concepción y análisis a priori), puesto que las autoras, no realizan la implementación, solo llevan a cabo el diseño de las situaciones adidácticas en el software *Carmetal*.

En la fase de análisis preliminares, las autoras dan a conocer los análisis didáctico, epistemológico y cognitivo, que son la base para el diseño de las actividades, pues identifican el origen de las nociones que se van a abordar, así como también, su sentido, sus características y las dificultades que pueden tener los estudiantes al trabajar con ellas.

En la fase II, se propone a los estudiante dos problemas de optimización y su modelación en el software *Carmetal*, para que al interactuar con el modelo virtual, los estudiante puedan invalidar las estrategias espontáneas de su parte, con el fin de explicitar la necesidad de una estrategia matemática. Los problemas propuestos por las autoras son el problema del hexágono, del cual se pide la maximización de su área y, el problema de la caja, del cual se pide la maximización de su volumen. Para cada problema las autoras diseñan cuatro actividades, donde para la primera actividad el objetivo es plantear el problema, explorar el modelo, invalidar las estrategias perceptivas, introducir una función y su gráfica como herramienta para determinar el máximo.

La segunda actividad tiene como objetivo determinar las condiciones necesarias para poder medir con instrumentos de manera indirecta la altura de objetos cuya altura es inaccesible. La tercera actividad consiste en aplicar la estrategia de medición de la actividad dos, para determinar la altura máxima de la gráfica de la función, se utiliza la derivada como lugar geométrico. Por último el objetivo de la cuarta actividad es trabajar sobre la noción de límite y el cálculo de la pendiente de una recta tangente usando lugares geométricos, para complementar la tercera actividad.

Una vez diseñada las actividades, Bustos y Vásquez (2016) realizan una prueba piloto para controlar la pertinencia del análisis a priori, es decir verifica en un número reducido de sujetos si las estrategias previstas surgen espontáneamente y si no aparecen un gran número de estrategias que no estaban previstas. Las autoras realizan esta prueba piloto con cinco estudiantes, donde uno es de la carrera de matemática de la Universidad Nacional y los demás del grado undécimo del colegio San José de Calasanz (Colombia).

En definitiva, las autoras llegan a la conclusión que las actividades diseñadas favorecen a la interpretación geométrica del método de la derivada para hallar puntos máximos y mínimos, pues se comprende el por qué y el para qué de cada uno de los pasos del método. También, las autoras concluyen que la teoría de situaciones didácticas fue de vital importancia, pues permite identificar el rol del software en el diseño de las actividades, además brinda al estudiante la posibilidad de experimentar sus propias estrategias para ponerlas a prueba.

Investigaciones sobre comprensión de la derivada por medio de problemas de optimización sin uso de ARD

En este grupo de investigaciones se tiene el artículo de Guzmán, Ortega, Tapia, Rodríguez y Pérez (2010) en el cual se enfocan en analizar la problemática que involucra a la comprensión y dominio de los objetos matemáticos relacionados con la derivada de una función y más aun con la aplicación de los criterios de la primera y segunda derivada para determinar los extremos (máximo y mínimo) de una función real de variable real.

Frente a los criterios surgen preguntas respecto al comportamiento de los estudiantes, que motivaron a los autores el estudio del problema planteado, y estas preguntas son:

> ¿cuánto dominio sobre estos criterios muestran para determinar los valores extremos de una función de variable real?, ¿qué estrategia eligen para decidir sobre los valores extremos cuando $f''(c) = 0$?, ¿coordinan las representaciones del objeto matemático **valor extremo** en los registros algebraico-simbólico y registro gráfico?, es decir, ¿reconocen el significado en cada uno de los registros mencionados? y ¿qué formas de razonamiento emplean los estudiantes en sus deducciones? (Guzmán et al., 2010, p. 3).

Por ello, los autores se plantean como objetivo estudiar la naturaleza de las dificultades que se presentan en los estudiantes al enfrentarse a un problema que implique usar los criterios de la derivada para determinar los extremos de una función.

El marco teórico empleado en la investigación es de carácter cognitivo, pues se usa el proceso de comprensión del razonamiento deductivo, en especial al desarrollo de un aspecto de razonamiento deductivo (*modus ponens*) y por otra parte, además se usa el razonamiento indirecto (*modus tollens*), también se usa aspectos de la teoría de registros de representación semiótica, pues según Guzmán et al. (2010) la función semiótica de los registros involucrados es un elemento fundamental para el proceso de comprensión, pues esta nos permite analizar las operaciones cognitivas de tratamiento en cada registro de representación semiótica y de conversión del uno al otro.

La metodología que usan los autores en su investigación es de tipo cualitativa y, lo realizan en cuatro etapas, las cuales son: análisis a priori del problema, aplicación, análisis de resultados y análisis estadístico implicativo.

El problema que los autores plantean a los estudiantes es: "Considere la función $h(x) = x^3$, sabemos que $h'(x) = 0$ si $x = 0$, ¿podemos con esto asegurar que en $x = 0$ existe un máximo o un mínimo?" (Guzman et al., 2010, p. 5) y, se aplicó a 96 estudiantes que cursaban el curso de Cálculo Diferencial de las carreras de Ingeniería en Transporte y Tránsito, Tecnología Médica y Bioquímica, pertenecientes a una universidad de la región Metropolitana y a dos universidades de la región de Valparaíso en Chile.

Posteriormente, los autores llevan a cabo el análisis de los resultados por medio del software *Correspondence & Hierarchical Cluster* (CHIC), el cual es un sotware para hacer análisis de correspondencias y análisisis jerárquico de conglomerados, para ello los autores primero realizan el análisis cualitativo de contenido de las respuestas de los estudiantes, luego hacen una codificación de los estudiantes y de las variables consideradas.

En seguida los autores elaboran tablas estadísticas donde muestran los indicadores, las variables y la frecuencia, en una de las tablas observan que de los 96 estudiantes, solo 83 respondieron la pregunta, además de los 83 los que respondieron explícitamente la pregunta (ya sea correcta o equivocada) fueron 75. También en otra tabla observan que 37 estudiantes responden sin usar ningún criterio de la derivada, 14 usan el criterio de la primera derivada y 32 recurren el criterio de la segunda derivada.

Una de las conclusiones a la que llegan los autores es que la mayoría de los estudiantes no se han apropiado de los criterios de la primera y segunda derivada, pues más de un tercio de los estudiantes, de un total de 96, no usan criterio alguno y los que aplican lo hacen de manera incompleta poniendo en evidencia que desconocen los criterios en el registro algebraico-simbólico, además, tampoco realizan el tránsito al registro gráfico, por lo cual obtienen conclusiones incompletas o erradas.

Si bien la investigación previa no menciona para nada los problemas de optimización, el cual es nuestro objeto de estudio, se considera que es una investigación importante ya que trata de la comprensión y dominio del criterio de la primera derivada y segunda derivada para hallar extremos de funciones reales de variable real, y estos criterios son esenciales para resolver problemas de optimización.

Investigaciones sobre el estudio de derivada por medio de problemas de optimización usando ARD

En este grupo de investigaciones se tiene el artículo de Navarro, Robles, Leyva y Castro (2016), cuyo objetivo de dicha investigación es construir el significado del concepto de derivada a través de un problema de optimización de contexto de la vida cotidiana en estudiantes universitarios. El marco teórico usado en esta investigación es el EOS.

Los autores aplicaron la actividad didáctica a un grupo de veinte estudiantes, que cursaban la asignatura de Cálculo I, para ello se dispuso de un aula de cómputo con el ambiente de representaciones dinámicas Geogebra.

El medio, utilizado por los autores, para la recolección de información es una hoja de trabajo, diseñada para tal fin, y también en esta se registran las observaciones y conclusiones de los estudiantes. El instrumento, según los autores, está integrado por treinta reactivos, donde algunas son preguntas abiertas y otras requerían realizar procedimientos matemáticos para obtener áreas y volúmenes. La actividad didáctica, planteada por los autores, es "construir un cilindro con el máximo volumen" (Navarro et al., 2016, p. 5). Al iniciar la actividad se proporciona a los estudiantes una hoja tamaño carta, cinta adhesiva, una regla, tijeras, arroz crudo y una taza medidora. En la primera pregunta se les solicita cortar la hoja tamaño carta por la mitad y con cada mitad construir dos cilindros uno que resulte de doblar la mitad de la hoja por el lado corto y otro que resulte de doblar la hoja por el lado largo y se les cuestiona si ambos cilindros tienen el mismo volumen, para ello los estudiantes tenían que llenar con arroz ambos cilindros construidos y luego usar la taza medidora para determinar cuál de los dos cilindros es el de mayor volumen.

Posteriormente, los autores cuestionan a los estudiantes si existe otro cilindro con otras dimensiones de radio y altura, pero con la misma área, y que este tuviera un volumen mayor a los anteriores. Luego conducen a los estudiantes para que construyan la expresión del volumen en función del radio de la base y que completen una tabla donde calculaban el volumen, con la expresión obtenida, para diferentes radios dados.

En seguida, Navarro et al. (2016) dan la instrucción a los estudiantes de abrir el archivo de Geogebra e iniciaron trabajando con tablas de radio contra volumen dando incrementos de radio de 0,25 cm, 0,1 cm y 0,01 cm, e identificaron los valores de radio entre los que se encuentra el volumen máximo para cada acercamiento. En el archivo mencionado, según los autores, los estudiantes también pueden observar el cambio de volumen y de las dimensiones del radio y la altura al mover un deslizador; así mismo, en el archivo los estudiantes también visualizan la gráfica de radio contra volumen y la recta tangente sobre la gráfica en un punto determinado, el cual los estudiantes pueden moverlo a través de un deslizador, y observan simultáneamente las coordenadas y la pendiente de la recta tangente.

Luego de finalizada la actividad, los autores llevan a cabo el análisis didáctico de la actividad, y este se realizó de acuerdo a las cinco fases que especifica el EOS.

Una vez finalizado el análisis de los resultados obtenidos, los autores llegan a las siguientes conclusiones: la actividad didáctica generó las condiciones para que los estudiantes se involucrarán en el problema a resolver, también concluyen que el software Geogebra que se utilizó como apoyo facilita la visualización de la función y la tabulación de los valores de la misma y que la actividad didáctica contribuyó a que los estudiantes relacionen la pendiente de la recta tangente igual a cero en el punto crítico.

Por otro lado, se tiene la investigación de Cuevas, Rodríguez y Gonzáles (2014) en la cual afirman que el curso de Cálculo Diferencial es el que más reprueban los estudiantes de las escuelas de Ingeniería de universidades mexicanas, según los autores esta situación ya ha sido evidenciado en investigaciones anteriores de Martínez y Zepeda (citados en Cuevas et al., 2014) los cuales dicen que un problema es que la enseñanza se hace estrictamente operativa y en otros casos solo se enseña el contenido formal, además según los autores el uso de tecnologías es casi nulo, sabiendo que en la actualidad existen varios softwares que permiten introducir el concepto de derivada y en algunos están disponibles de manera gratuita en la red. Por ello, los autores elaboran una propuesta didáctica para enseñar el concepto de derivada en un curso de Cálculo Diferencial, y para la cual se hace uso de la tecnología digital.

Para la propuesta didáctica los autores previamente revisan los planes y programas de estudio vigentes de algunas instituciones de educación superior en México, y como referencia usan el marco teórico didáctico propuesto por Cuevas y Pluvinage (citados por Cuevas et al., 2014), el cual consiste en una secuencia de recomendaciones para introducir un determinado concepto matemático.

La propuesta elaborada por Cuevas et al. (2014) se implementa con un grupo de 50 estudiantes de Ingeniería en computación de la Universidad Autónoma del estado de México, y para ello se usa Escenarios Didácticos Virtuales Interactivos (EDVI) diseñados en el software CalcVisual, con el objetivo de promover y desarrollar una mejor comprensión del concepto de derivada de funciones reales de variable real. Las actividades planteadas por los autores en los EDVI son dos problemas de optimización, el isoperímetro con el cual se pudo introducir el concepto de derivada y el Barril de Kepler, donde se puede percibir la variación, al ver que los cambios de la longitud de la altura producen cambios en el volumen.

Los autores concluyen que con la aplicación de la propuesta apoyado en la tecnología, en el curso de Cálculo, se logró que la mayoría de los estudiantes, de un total de 50, comprendieran de manera intuitiva el concepto de derivada de una función real, el cual es esencial para comprender conceptos como la monotonía, máximos y mínimos, y de esta manera resolver problemas de optimización. En consecuencia los autores afirman que se logró disminuir el índice de reprobados del curso de Cálculo Diferencial, usando los mismos sistemas de evaluación.

Por último se presenta el artículo de Gallego y Aldana (2013), en el cual realizan una investigación que trata de un estudio de diagnóstico que es parte de una investigación más amplia sobre optimización con estudiantes universitarios, y cuyo objetivo es atender a los estudiantes que tienen dificultades en aprender el concepto de optimización de funciones reales de variable real y como resolver problemas que involucren el concepto de optimización. La metodología toma aspectos de la Ingeniería Didáctica y el marco teórico es la Teoría de Situaciones Didácticas.

La finalidad del trabajo es investigar los conocimientos que tienen los estudiantes acerca de optimización, las posibles dificultades y/o concepciones erróneas, que el estudiantes se ve enfrentado por medio de situaciones a un proceso de desequilibrio que pone a prueba lo que el estudiante puede hacer con lo que sabe.

Los autores realizaron su investigación en Colombia con 10 estudiantes de ingeniería que ya habían visto el concepto de optimización en el curso de Cálculo Diferencial. En el episodio de entrevistas, los autores preguntan a cada uno de ellos sobre lo que han entendido del tema de optimización, con el fin de conocer las concepciones que ellos tienen del objeto matemático en estudio. También se les plantea un problema de optimización, para que resuelvan y el profesor luego les pregunta sobre sus procedimientos. Los resultados muestran que el conocimiento alcanzado por los estudiantes sobre el concepto de optimización es de tipo intuitivo, pues asocian a la gráfica de la función.

Gallego y Aldana (2013) concluyen que la noción que tienen los estudiantes de la optimización no es coherente con la imagen que ellos tienen del concepto y la definición formal del concepto matemático, además tienen dificultad para resolver problemas en contexto específicos que no sean de tipo algorítmico.

La investigación previa si bien no trata específicamente de la resolución de problemas de optimización hace un estudio sobre la concepción que tienen los estudiantes de ingeniería sobre el concepto optimizar, y se considera que esta investigación puede ayudar a entender porque los estudiantes tienen dificultades cuando resuelven problemas de optimización.

Las investigaciones revisadas nos dan valiosos aportes a nuestra investigación pues presentan cuáles son las principales dificultades que tienen los estudiantes para resolver problemas de optimización, así como también las dificultades en la comprensión de la derivada de funciones reales de variable real, pues la comprensión de este concepto matemático es esencial para resolver problemas de optimización usando dicho concepto.

Todas las investigaciones presentadas si bien algunas están direccionadas hacia el estudio de las dificultades que se presentan cuando un estudiante de ingeniería resuelve un problema de optimización, otras estan enfocadas hacia el estudio de la derivada por medio de problemas de optimización usando algún ARD, nosotros estamos interesados en analizar la coordinación de registros de representación semiótica en estudiantes de ingeniería cuando resuelven problemas de optimización movilizando el concepto de derivada de funciones reales de variable real y haciendo uso del Geogebra.

A continuación presentamos la justificación de la investigación.

1.2 Justificación

Las investigaciones presentadas en la sección anterior muestran que estudiantes de nivel superior a pesar de haber estudiado derivadas de funciones reales de variable real, cuando se les presentan problemas de optimización en los que deben movilizar este concepto no movilizan o tienen dificultades al momento de plantear la función objetivo, es decir la función que modela al problema de optimización, y cuando si logran plantear dicha función objetivo siguen procesos algorítmicos aunque a veces sin entender el porqué.

Así se tiene las investigaciones de Baccelli et al. (2013), Encinas et al. (2013) las cuales coinciden que la principal dificultad de los estudiantes es plantear la función objetivo, es decir la función que modela matemáticamente al problema de optimización planteado.

Además, las investigaciones de Navarro et al. (2016), Bustos y Vásquez (2016) y Cuevas et al. (2014) nos dan alcances de como un ambiente de representaciones dinámicas (ARD) ayuda en la comprensión de manera intuitiva e interpretación de los métodos de la derivada para hallar máximos y mínimos de una función real de variable real, mientras que Otero (2012) afirma que el uso de un ARD facilita la visualización y condiciones de un problema de optimización.

Por ello, se buscó información de universidades peruanas, como de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM), Universidad Nacional de Ingeniería (UNI), Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC) y de la Universidad Nacional del Callao (UNAC), para ver cómo se presenta el tema en estudio y, se pudo constatar que el tema de problemas de optimización está presente como aplicaciones de la derivada, en los cursos de Matemática I, Análisis Matemático I, Cálculo I o Cálculo Diferencial (el nombre varía según la universidad), el cual es un primer curso de matemáticas de las carreras de ingeniería.

Así por ejemplo, se puede observar que el tema en estudio se encuentra presente en el sílabo de Cálculo I de la UPC, ver Figura 1.

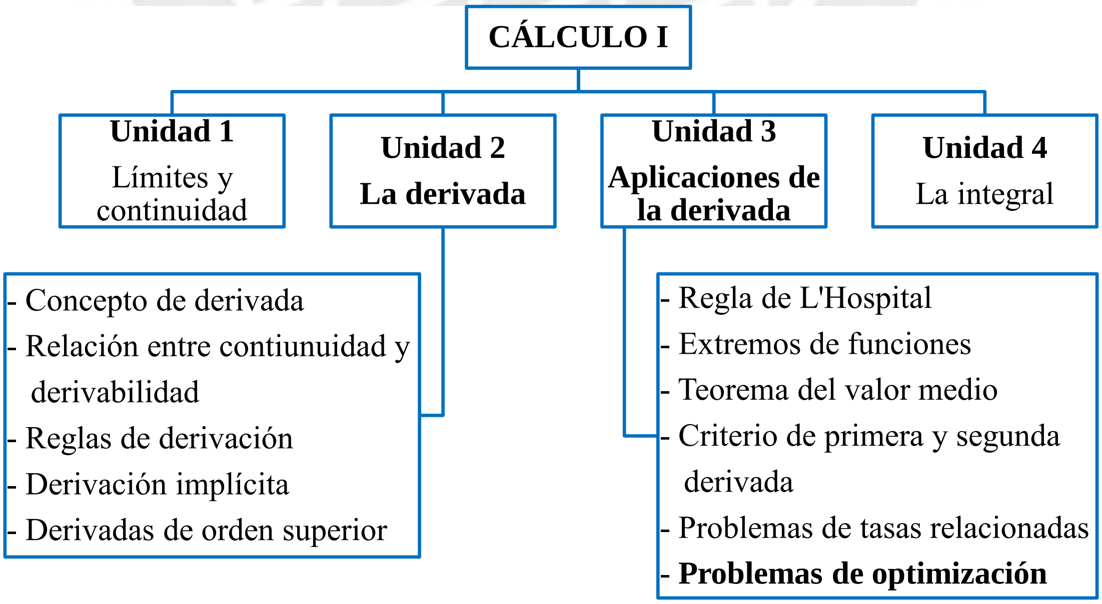


Figura 1. Contenido de la unidad 2 y 3 del curso Cálculo I de las carreras de ingeniería de la UPC.
Fuente: Elaboración propia basada en el sílabo de Cálculo I de las carreras de ingeniería de la UPC.

En la Figura 1 se muestra los temas pertenecientes a la unidad 2 y 3 del sílabo de Cálculo I de la UPC, y como se puede observar en la unidad 2 se estudia la parte teórica del concepto de derivada y en la unidad 3 se aborda nuestro tema de estudio, es decir los problemas de optimización como parte de las aplicaciones de la derivada.

Además, el curso de Cálculo I es un curso de las diferentes carreras de ingeniería de la UPC, y es requisito para cursos posteriores de las carreras de ingeniería de la UPC, como se puede ver en la Figura 2.

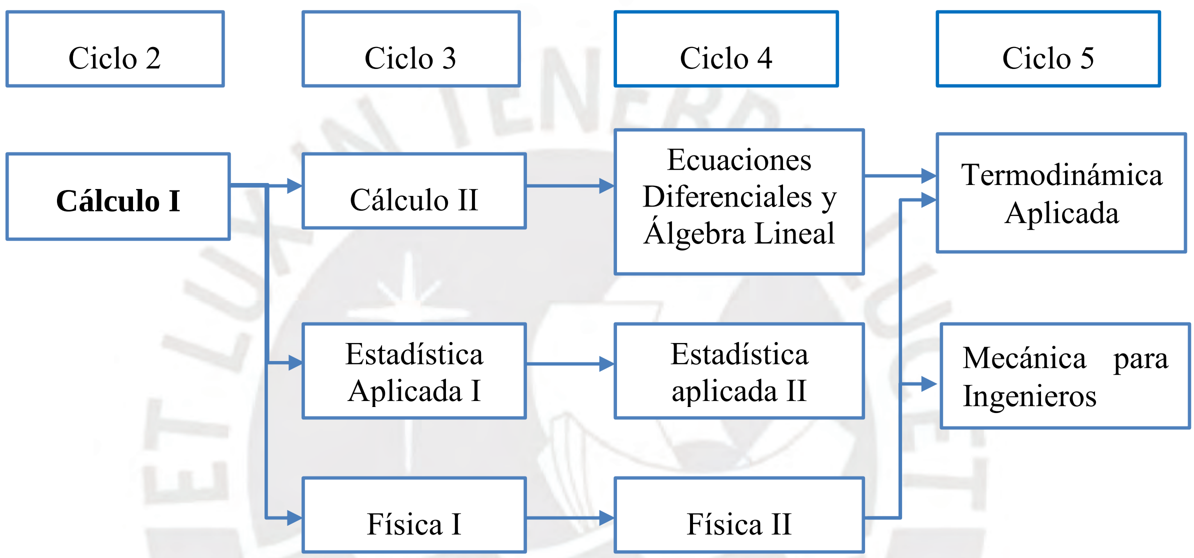


Figura 2. Parte de la malla curricular de las carreras de ingeniería de la UPC.
Fuente: Elaboración propia basada en la malla curricular de la carrera de Ingeniería Industrial de la UPC. http://pregrado.upc.edu.pe/carrera-de-ingenieria-industrial/malla-curricular

En la Figura 2 se muestra parte de la malla curricular de las carreras de ingeniería de la UPC, tomado como referencia la carrera de Ingeniería Industrial, con respecto a las otras carreras de ingeniería puede haber pequeñas variaciones de cursos como del ciclo en el cual se encuentran los cursos. Podemos notar que el curso de Cálculo I es prerrequisito de tres cursos del tercer ciclo y a la vez estos cursos son prerrequisitos para cursos de ciclos superiores.

Del mismo modo, en el sílabo del curso de Matemática I de Ingeniería Química de la UNAC se encuentra presente el tema de derivadas y sus aplicaciones, como se ve en la figura 3.

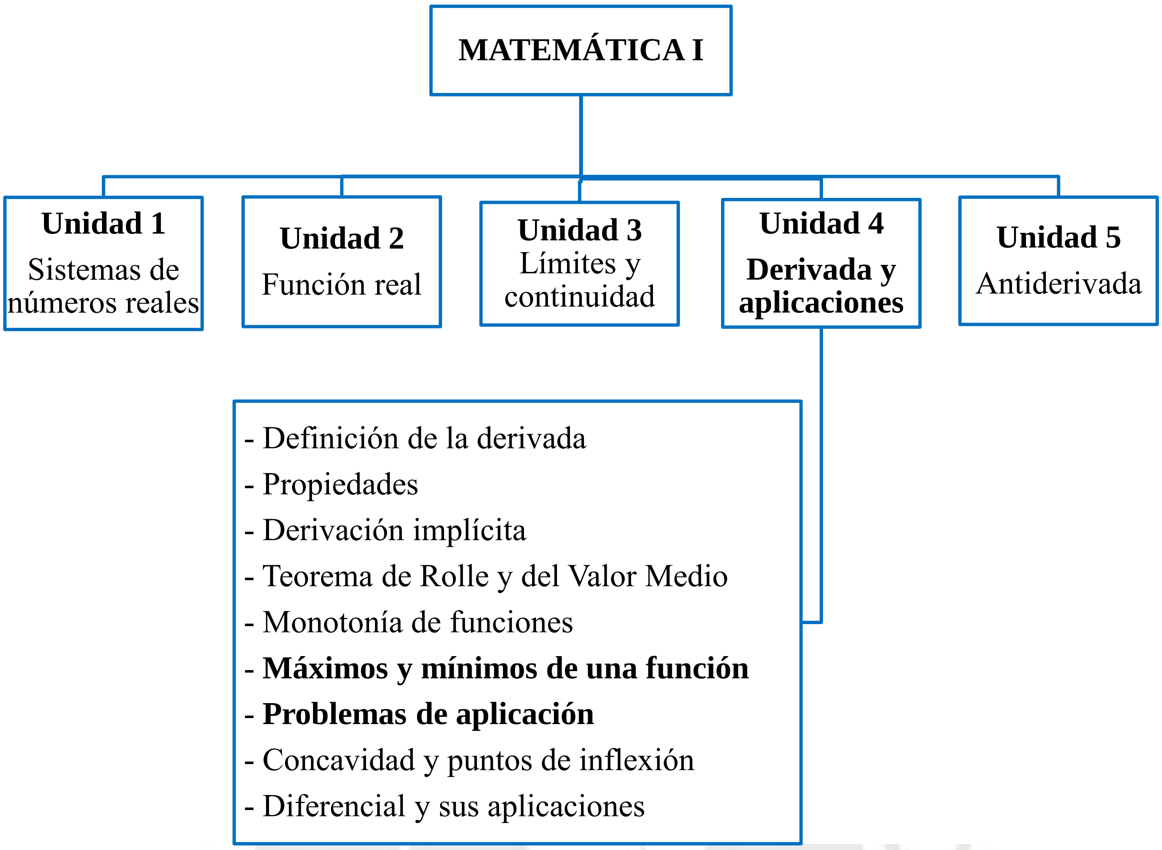


Figura 3. Contenido de la unidad 4 del curso Matemática I de la carrera de Ingeniería Química de la UNAC.
Fuente: Elaboración propia basada en el Sílabo de Matemática I de Ingeniería Química de la UNAC.
https://fiq.unac.edu.pe/epiq-plan-de-estudio.html

En la figura 3 podemos ver los contenidos de la unidad 4 del sílabo de Matemática I de la carrera de Ingeniería Química de la UNAC, relacionada con derivadas de funciones reales de variable real y sus aplicaciones, si bien no figura como contenido de esta unidad los problemas de optimización, este tipo de problemas se encuentra presente en el tema de máximos y mínimos de una función y problemas de aplicación los cuales si están presentes (ver Figura 3), pues hay que tener en cuenta que los problemas de optimización son problemas que implican hallar máximos o mínimos de una función.

Además, se constató en la malla curricular que el curso de Matemática I es requisito para otros cursos de la carrera de Ingeniería Química, como se ve en la Figura 4, en la cual solo se muestra parte de la malla curricular hasta el quinto ciclo.

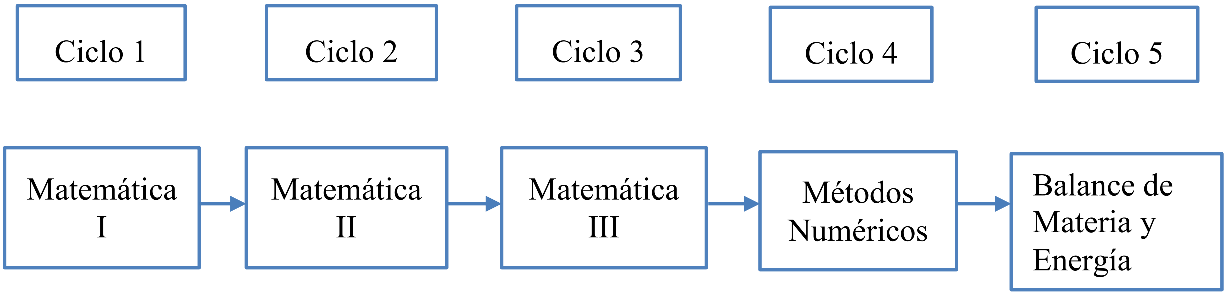


Figura 4. Parte de la Malla curricular de la carrera de Ingeniería Química de la UNAC.
Fuente: Elaboración propia basada en la malla curricular de la carrera de Ingeniería Química de la UNAC.
https://fiq.unac.edu.pe/epiq-plan-de-estudio.html

A diferencia del curso Cálculo I de la UPC que era prerrequisito para tres cursos del siguiente ciclo, se nota de la Figura 4 que el curso de Matemática I, perteneciente al primer ciclo de la carrera de Ingeniería Química de la UNAC, solo es prerrequisito para Matemática II, curso del segundo ciclo, sin embargo, este curso de Matemática II es prerrequisito para Matemática III, y a la vez este curso prerrequisito para Métodos Numéricos y a su vez este es prerrequisito para Balance de Materia y Energía, por tanto es de relevancia comprender los contenidos del curso de Matemática I, entre ellos los problemas de optimización, los cuales forman parte de las aplicaciones de la derivada para hallar máximos y mínimos de una función.

Por otra parte, el perfil de los ingenieros es resolver problemas para la toma de decisiones, por ello en la actividad profesional de los ingenieros, estos deben enfrentarse a problemas que impliquen optimizar, ya que una de las labores de estos profesionales es lograr la productividad máxima utilizando la mínima cantidad de recursos disponibles. Así por ejemplo, en Ingeniería Química la optimización se aplica para optimizar operaciones y procesos químicos; en Ingeniería Eléctrica se usa para optimizar redes eléctricas y en Ingeniería Industrial la optimización tiene aplicaciones en procesos industriales, pues se debe optimizar la cantidad de recursos disponibles y tomar las mejores decisiones que le conviene a una determinada empresa generándole la mayor ganancia posible.

Por tal razón y por lo anteriormente presentado, tanto en las investigaciones de referencia como en los documentos de las diferentes carreras de ingeniería de universidades peruanas, la presente investigación se considera que es pertinente, más aún porque se desea incorporar un ambiente de representaciones dinámicas, como lo es el Geogebra, como un medio esencial para resolver problemas de optimización en los que sea necesario movilizar el concepto de derivada de funciones reales de variable real y, además no se han encontrado investigaciones precedentes en nuestro país que traten del tema de problemas de optimización de funciones reales de variable real usando el concepto de derivada para su resolución.

Por ello, como es de interés utilizar la Teoría de Registros de Representación Semiótica, a continuación se presenta los principales aspectos de dicha teoría que serán usados en la tesis.

1.3 Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica

Según Duval (2004), aprender matemáticas involucra una secuencia de actividades cognitivas como la conceptualización, el razonamiento y la resolución de problemas; es por ello que para aprender y enseñar matemáticas se requiere la utilización de distintos registros de representación y de expresión, como por ejemplo el lenguaje natural, la representación mediante imágenes, símbolos, etc.

Además, el autor afirma que los objetos matemáticos no son accesibles a la percepción o la experiencia intuitiva inmediata, ya que no son objetos reales o físicos, por ello se hace necesario usar las diferentes representaciones semióticas de un objeto, y que no se debe confundir el objeto con su representación, ya que si esto sucede nos conduce a una pérdida de la comprensión y los conocimientos adquiridos del objeto matemático.

Por lo descrito anteriormente, Duval (2012) indica que un registro es un campo de variación de representación semiótica en función de los factores cognitivos que le son propios. Cabe mencionar que las representaciones semióticas son producciones que hace un sujeto a partir de sus representaciones mentales para representar un objeto matemático mediante signos que tienen su propia significación y funcionamiento dentro de un sistema de representación. Es decir las representaciones se pueden considerar como un medio para exteriorizar las representaciones mentales con la finalidad que se establezca una comunicación con otros sujetos.

Según el autor para que un sistema semiótico sea un registro de representación, debe permitir las tres actividades cognitivas fundamentales que detallamos a continuación:

- **La formación de una representación identificable,** esta actividad se refiere a la expresión mental, es decir a la expresión de un objeto en un determinado registro semiótico, lo cual implica que se debe seleccionar un conjunto de caracteres, además de las relaciones y datos que permiten constituir lo que representamos.

- **Tratamiento,** esta actividad consiste en la transformación de una representación en el mismo registro donde fue formado, es decir es una transformación interna que se hace dentro del mismo registro.
- **Conversión,** se refiere a la transformación de una representación hecha de un objeto de un registro a otro, en el cual se puede conservar la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial, por ello se dice que es una transformación de carácter externo.

En ese sentido, podemos decir que en la actividad matemática siempre se encuentran presentes las actividades cognitivas de tratamiento y de conversión.

Además, según Duval (2004) en la actividad matemática se encuentran presentes diferentes registros de representación semiótica, así tenemos el registro de lengua natural, el registro algebraico, el registro figural y el registro gráfico, que resumimos a continuación:

- **Registro en lengua natural:** Este registro se manifiesta de manera oral o escrita, es decir si se quiere modelar matemáticamente un fenómeno o situación se debe partir de una descripción del mismo ya sea de manera oral o escrita.

  Un problema de optimización por lo general se da en lengua natural, como por ejemplo se puede ver en la Figura 5.

> **V EJEMPLO 2** Se va un fabricar una lata que ha de contener 1 L de aceite. Encuentre las dimensiones que debe tener la lata de manera que minimicen el costo del metal para fabricarla.

Figura 5. Problema de optimización dado en lengua natural.
Fuente: Stewart (2012, p. 327)

- **Registro figural:** Este registro involucra esquemas, bosquejos, líneas, figuras geométricas.

  Así por ejemplo, la Figura 6 es una representación figural del problema de optimización presentado anteriormente en la Figura 5. Respecto al problema de optimización presentado en lengua natural (ver Figura 5) se puede comentar que el autor del libro Stewart (2012) no específica que la lata a fabricar debe tener forma cilíndrica, sin embargo en el registro figural (ver Figura 6) el autor considera que tiene dicha forma.

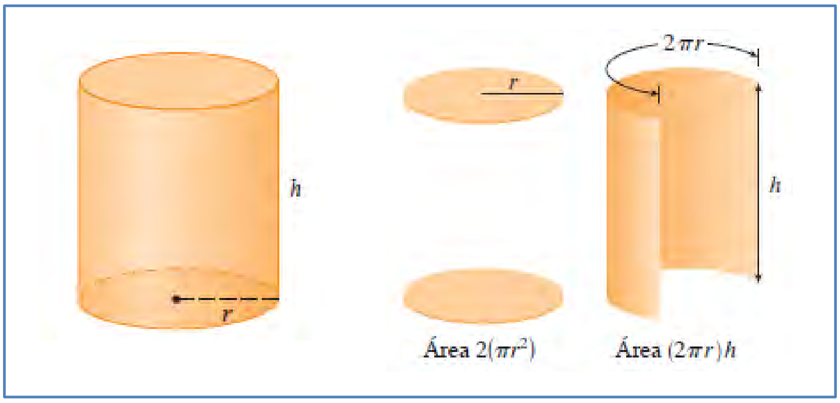


Figura 6. Representación figural del problema de optimización de la Figura 5.
Fuente: Stewart (2012, p. 327)

- **Registro algebraico:** En este registro un objeto matemático se puede representar por medio de expresiones algebraicas.

  Por ejemplo, para el problema de optimización dado anteriormente (ver Figura 5) su registro algebraico es:

  $$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}; \;\; r > 0,$$

  ya que la expresión dada es la función o expresión algebraica que modela al problema de optimización; y además para que se llegue a dicha expresión se hizo el siguiente tratamiento algebraico.

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Para eliminar h recurrimos al hecho de que el volumen está dado como 1 L, que tomamos como 1000 cm³. Así

$$\pi r^2 h = 1000$$

lo cual da $h = 1000/(\pi r^2)$. Sustituyendo esto en la expresión para A, da

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

Por tanto, la función que queremos minimizar es

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \qquad r > 0$$

Figura 7. Tratamiento algebraico para llegar a la representación algebraica del problema de optimización de la Figura 5.
Fuente: Stewart (2012, p. 327)

- **Registro gráfico:** Este registro se usa para representar un objeto matemático usando un sistema de coordenadas cartesianas.

  Así la representación gráfica del problema de optimización de la Figura 5 es:

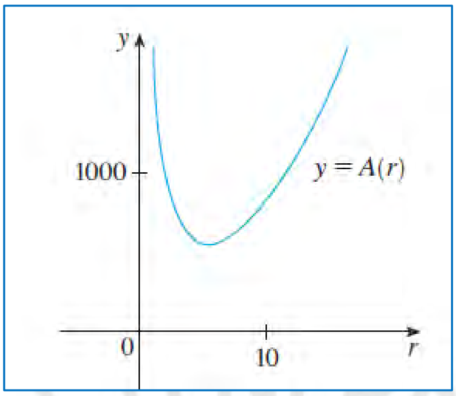


Figura 8. Representación gráfica del problema de optimización de la Figura 5.
Fuente: Stewart (2012, P. 327)

Respecto a la coordinación de registros, Duval (2012) dice: "La coordinación de muchos registros de representación semiótica es fundamental para una aprehensión conceptual de objetos, es preciso que un objeto no sea confundido con sus representaciones y que sea reconocido en cada una sus representaciones posibles" (traducción propia, p. 5). Por ello en esta investigación también se hace necesario que los estudiantes coordinen los cuatro registros presentados, ya que eso sería fundamental para resolver de manera eficaz un problema de optimización.

1.4 Pregunta y objetivos

En esta investigación se analiza la resolución de dos problema de optimización, en los cuales se debe coordinar los registros de representación semiótica presentados en el marco teórico: lengua natural, figural, algebraico y gráfico, ya que a los estudiantes se le presenta los dos problemas de optimización en lengua natural, luego deben realizar su representación algebraica, para ello primero deben hacer una representación figural, pues esto ayuda para deducir la expresión algebraica que modela al problema, en seguida deben hacer una representación gráfica en el Geogebra, para que con ayuda de las herramientas del software puedan dar la solución del problema de optimización planteado.

Por ello, después de haber presentado las investigaciones de referencia, relacionados a la temática de la investigación, la justificación que muestra la pertinencia de la investigación, así como también los aspectos relevantes del marco teórico a usar en la tesis se presenta la pregunta que guía esta investigación:

¿Problemas de optimización en los cuales sea necesario movilizar el concepto de derivada de funciones reales de variable real favorecen la coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica en estudiantes de ingeniería?

Para responder a esta pregunta se plantean los siguientes objetivos:

Objetivo General

Analizar la coordinación de registros de representación semiótica que realizan estudiantes de ingeniería al resolver problemas de optimización en los cuales sea necesario movilizar el concepto de derivada de funciones reales de variable real.

Con la finalidad de alcanzar el objetivo general, se plantean los siguientes objetivos específicos:

- Identificar los diferentes registros de representación semiótica que movilizan estudiantes de ingeniería al resolver un problema de optimización mediado por el Geogebra.
- Identificar los tratamientos y conversiones que realizan los estudiantes al coordinar los registros en lengua natural, figural, algebraico y gráfico, en el desarrollo de problemas de optimización mediados por el Geogebra.

1.5 Aspectos metodológicos

La investigación que desarrollamos es cualitativa pues de acuerdo con Borba (2004), “una investigación cualitativa en Educación Matemática prioriza procedimientos descriptivos a medida en que su visión de conocimiento explícitamente admite una interferencia subjetiva” (p. 2), por otro lado Martínez (2006) afirma que la investigación cualitativa se fundamenta en la construcción de una teoría empezando de una serie de proposiciones u observaciones extraídas de la realidad, la cual es objeto de estudio.

El método de investigación que se usa son aspectos del estudio de caso, por ello a continuación se presenta los principales aspectos de este método que se consideran necesarios para el desarrollo de la tesis.

Estudio de caso

El estudio de caso busca conocer una entidad bien definida, que puede ser una persona, una institución, un curso, un sistema educativo o cualquier otra disciplina de la sociedad, pues el objetivo de esta metodología es conocer en profundidad el cómo y porqué de dicha entidad, evidenciando las características y los aspectos que son de interés para el investigador (Ponte, 2006).

En ese sentido, el autor afirma que los estudios de caso, en la Educación Matemática, son usados para investigar cuestiones de aprendizaje de los estudiantes, así como también para investigar el conocimiento y las prácticas profesionales de los profesores, programas de formación inicial, proyectos de innovación curricular, etc.

Por otro lado, Martínez (2006) explica que en un estudio de caso se estudia una entidad en su contexto real y para ello se usan diversas fuentes de evidencia como por ejemplo entrevistas, observaciones y documentos. Además, indica que un estudio de caso puede tener diversos propósitos, siendo así algunos trabajos de investigación, basados en esta metodología, exploratorios, es decir se usa para obtener información previa del objeto en estudio, también pueden ser descriptivos, donde el objetivo es describir como es el caso en estudio y finalmente también pueden ser analíticos, procurando problematizar el objeto y desarrollar una nueva teoría o confrontarla con una ya existente.

Para diseñar una investigación basada en estudio de caso, el autor indica que se deben tener en cuenta las siguientes componentes importantes:

1. Las preguntas de investigación: Son las que sirven de referencia o como un punto de partida para la colección de la información, es decir las preguntas de investigación nos proporcionan una clave importante para establecer la estrategia de investigación más adecuada, que se debe usar en la investigación.
2. Las proposiciones teóricas de la investigación: Al igual que las preguntas de investigación, las proposiciones teóricas de la investigación sirven como referencia para la recolección de la información, para su respectivo análisis posterior. Las proposiciones teóricas de la investigación destinan su atención a alguna cosa que se debe analizar dentro del campo de estudio.

   Con respecto a la primera y segunda componente que son las que contienen los constructos, es decir, los conceptos, dimensiones, factores o variables, de los cuáles se debe obtener información, se puede decir que en esta investigación estas componentes si están contempladas ya que se define el caso: **Problemas de optimización.**

Además, la pregunta que guía está investigación es: *¿Problemas de optimización en los cuales sea necesario movilizar el concepto de derivada de funciones reales de variable real favorecen la coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica en estudiantes de ingeniería?* y en base a esta pregunta de investigación es que se recolecta la información para luego ser analizada.

En cuanto a las proposiciones teóricas que se utilizan como fundamento teórico en la tesis son aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995), para analizar cuáles son los registros de representación que utilizan los estudiantes de ingeniería al resolver problemas de optimización y como coordinan entre ellos, además que conversiones y/o tratamientos realizan en su proceso de resolución de los problemas.

3. Unidades de análisis: Son los elementos que conforman un caso, que puede ser único o múltiple. Una unidad de análisis, también depende de cómo las preguntas iniciales de la investigación son definidas.

   Para esta investigación, ya que el caso es problemas de optimización, las unidades de análisis están conformadas por dos problemas de optimización que se presentan a los estudiantes para su resolución, pues el análisis de la resolución de los problemas de optimización planteados permitirá con base en los aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica, alcanzar el objetivo general de la tesis.

4. La lógica que une los datos a las proposiciones: Esta componente se refiere al proceso donde el investigador relaciona la información recolectada con las proposiciones teóricas, es decir con el marco teórico.

5. Los criterios para interpretar: Esta componente del estudio de caso, se refiere al proceso de análisis, que hace el investigador, a partir de la información recolectada de las unidades de análisis.

   En esta investigación, la cuarta y quinta componente del estudio de caso se ven reflejadas cuando, a partir de la información recolectada, se identifique que nociones y conceptos tienen los estudiantes, a cerca de la resolución de problemas de optimización en los cuales sea necesario movilizar el concepto de derivada y que registros de representación semiótica movilizan y coordinan en su proceso, y finalmente se hace el análisis de los dos problemas de optimización, los cuales conforman nuestras unidades de análisis, realizados en términos del marco teórico para luego obtener los resultados y conclusiones de la investigación.

Procedimientos metodológicos

Para asegurar la objetividad de un estudio de caso, en función de su fiabilidad y validez, Martínez (2006) propone el protocolo de estudio de caso, el cual está constituido por la guía de procedimientos que deben realizarse en la fase de obtención de la evidencia y tiene los siguientes elementos: semblanza del estudio de caso, preguntas del estudio de caso, procedimientos a ser realizados y guía del reporte del estudio de caso.

El primer elemento es necesario para integrar a los miembros del equipo de investigación, es decir a las personas que colaboran en la investigación, en nuestro caso se integra a una profesora que cumple el papel de observadora durante la aplicación de los problemas de optimización elaborados para esta investigación, el segundo elemento consiste de la pregunta de investigación que se plantea, la cual debe tener conexión con los aspectos teóricos del estudio, mientras que los procedimientos establecen los medios necesarios para la recolección de datos, para esta investigación se establece como medios de recolección de datos a las fichas de los problemas de optimización, las fichas de observación, grabaciones de audio y archivos Geogebra que usaron los estudiantes para la resolución de los problemas, para ser analizados posteriormente, finalmente se tiene la guía para el reporte la cual se elaborará con la finalidad de reportar los resultados de la investigación, y está no tiene un formato único.

En la Figura 9, se presenta los pasos de los procedimientos metodológicos de la investigación de la tesis, los cuales han sido adaptados de Martínez (2006).

Como se puede observar de la Figura 9, como primer paso de la tesis se plantea el problema, para ello se presentan las investigaciones de referencia, la justificación, la pregunta y los objetivos generales y específicos de la investigación.

En segundo lugar, se hace la formulación de las proposiciones, en esta investigación se tiene como fin principal: Analizar la coordinación de registros de representación semiótica que realizan estudiantes de ingeniería al resolver problemas de optimización en los cuales sea necesario movilizar el concepto de derivada de funciones reales de variable real, y para ello se presenta los principales aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica los cuales son usados en la tesis, luego se elabora la propuesta didáctica, así como también los instrumentos para la colección de los datos.

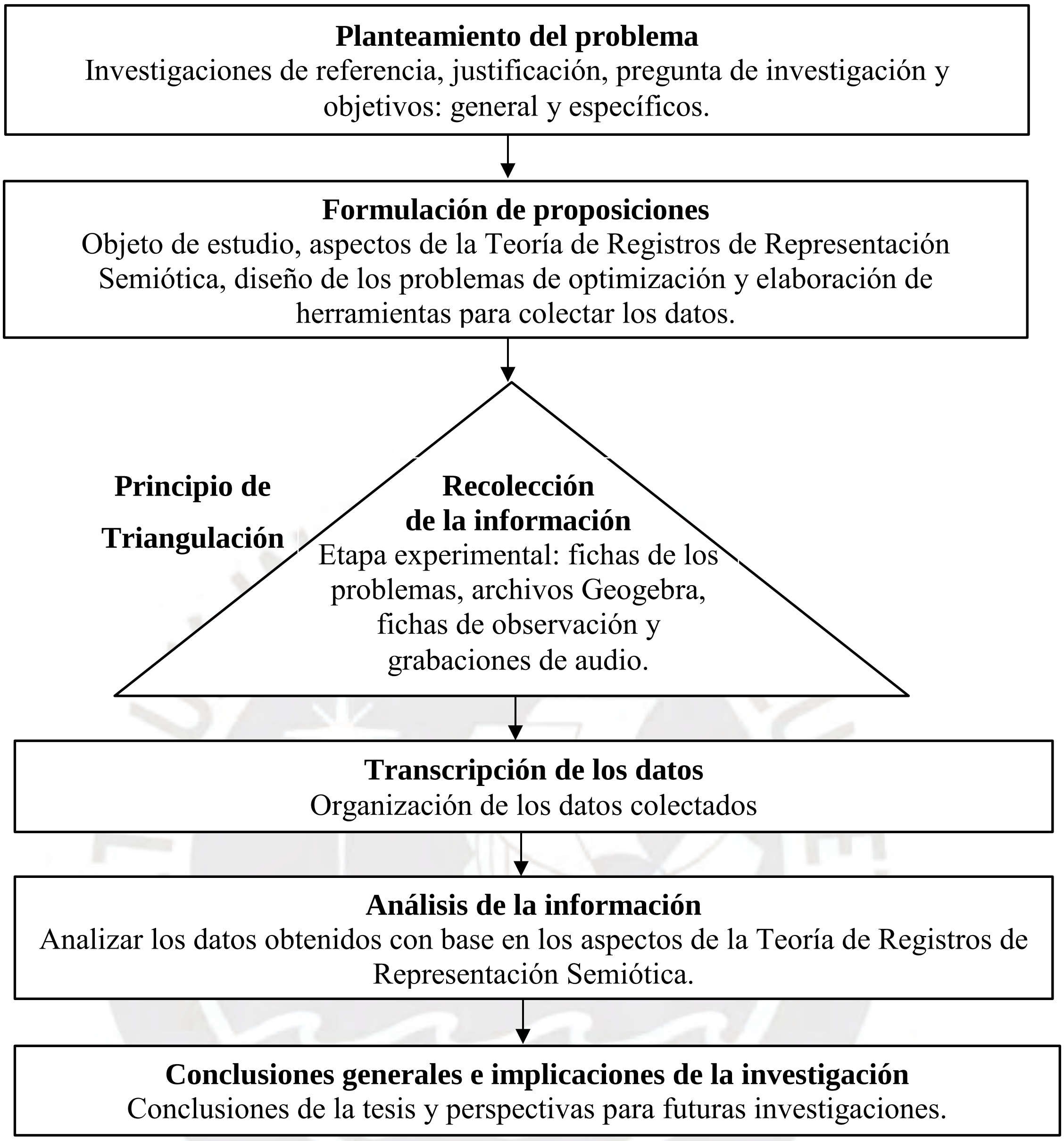


Figura 9. Procedimientos metodológicos de la tesis.
Fuente: Adaptado de Martínez (2006, p. 182)

Como tercer paso se hace la recolección de información, con estudiantes de ingeniería de una universidad nacional, para ello se usa las fichas de los problemas de optimización, fichas de observación, archivos Geogebra y grabaciones de audio, para su posterior análisis.

Luego, como cuarto paso se hace la transcripción de los datos, que consiste en organizar los datos recolectados. Esto se hará después de realizada la parte experimental que consta de dos problemas de optimización elaborados para la investigación.

Posteriormente, se hace el análisis de la información, pues en esta etapa de la investigación se analiza los datos obtenidos con base en el marco teórico, además se realiza la triangulación de los datos, que consiste en contrastar y comparar la información obtenida de las diferentes fuentes de información.

Finalmente, en la última etapa de la tesis, se presentan las conclusiones generales, implicaciones de la investigación y perspectivas para futuras investigaciones.

En el siguiente capítulo se presenta los aspectos históricos de los problemas de optimización, que nos darán una idea de cómo han estado presentes en cada momento histórico, aunque no hayan sido presentados como tal pero se nota que en la historia de las matemáticas este tipo de problemas siempre han estado presentes.

CAPÍTULO II: PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

En el presente capítulo se realiza el estudio de los principales aspectos de los problemas de optimización visto desde los aspectos: histórico y didáctico; para el primer aspecto se presenta una reseña histórica de como surgen los problemas de optimización y como han estado presentes en la historia aunque no hayan sido presentados como tal, y para el aspecto didáctico se describe de qué manera se presentan los problemas de optimización en los libros didácticos, los cuales son usados en las áreas de ingeniería.

2.1 Problemas de optimización: Aspectos históricos

Cuando se habla de problemas de optimización se hace referencia a un campo muy amplio de las matemáticas que en la actualidad tienen un gran desarrollo y cada vez más se hacen investigaciones en este campo de las matemáticas, pues tienen múltiples aplicaciones en diversos ámbitos como las ciencias básicas, ingenierías, economía, administración, etc. Posiblemente los problemas de programación lineal (también llamados en la actualidad de optimización lineal) son los problemas de optimización más conocidos, pero también existen problemas de optimización no lineal, de optimización dinámica, de optimización discreta, de optimización convexa, etc; aunque todos tienen un mismo objetivo común, el cual es obtener un valor máximo o mínimo de una variable o varias variables, existiendo diversos métodos para tal fin. Sin embargo, en esta investigación solo nos enfocamos en problemas de optimización de una variable y donde se usa métodos relacionados con la derivada de funciones reales de variable real para su resolución, por ello se hace una reseña histórica de como surgen este tipo de problemas y, cuál es la importancia que han tenido desde tiempos antiguos y como han ido evolucionando en la historia.

Es importante resaltar que los problemas de optimización como tal se desarrollaron a partir de la segunda guerra mundial con los trabajos de Dantzing en 1947, sin embargo desde tiempos antes de nuestra era ya estaban presentes este tipo de problemas ya que en el ser humano está siempre presente un pensamiento optimizador.

Al respecto, Malaspina (2012) afirma que en las personas siempre está presente un pensamiento optimizador, pues siempre están en la búsqueda de lo mejor, de lo óptimo, usando la inteligencia y la intuición. Por ello, el mismo autor indica que:

> En la ciencia y la tecnología está claramente presente la optimización y consideramos que el pensamiento optimizador de los seres humanos acompañado de su creatividad, presentes al afrontar problemas y necesidades, son los motores que impulsan el avance tecnológico; así, seguramente que el pensamiento optimizador al cazar animales; es decir, la búsqueda de la mejor manera de cazar animales llevó a inventar armas para cazar; el pensamiento optimizador al cruzar los rios llevó a inventar balsas, canoas, puentes; el pensamiento optimizador para desplazar cosas y para desplazarse llevó el invento de la rueda, la carreta, los vehículos motorizados; el pensamiento optimizador para comunicarse llevó al invento del telégrafo, el teléfono, los satélites, la internet; (...). Ciertamente, los avances tecnológicos y científicos continúan y seguramente que el pensamiento optimizador genera en cada campo de la tecnología una dinámica propia para su avance (...). (p. 3 - 4)

Por lo mencionado se presenta algunos acontecimientos históricos, es decir algunos problemas de optimización, aunque en su momento no se presentó como un problema de optimización, sabemos que estuvo presente el pensamiento optimizador, pues su resolución implicaba hallar máximos y mínimos de una variable o varias variables, siendo está la naturaleza de la optimización matemática a cuya disciplina pertenecen los problemas de optimización.

De este modo, Malaspina (2008) indica que un primer hecho histórico a cerca de la optimización estuvo presente en Grecia con los trabajos de Apolonio (262 – 190 a.C.), pues en una de sus obras estudia los segmentos de longitud máxima y longitud mínima trazados respecto a una cónica. Al respecto Boyer (1986), afirma sobre Apolonio que si bien su teoría era una bella teoría parecía no tener aplicabilidad en esos tiempos, pues sus teoremas sobre máximos y mínimos eran teoremas sobre tangentes y normales a secciones cónicas, sin embargo, en épocas posteriores fue fundamental en campos como dinámica terrestre y mecánica celeste, además, la teoría de Apolonio hizo posible, 1800 años después, los *Principia* de Newton.

Según el mismo autor, los problemas isoperimétricos también tienen un lugar en la historia de los problemas de optimización, como se cita en el siguiente párrafo:

> Los problemas isoperimétricos tienen un lugar importante en la historia de las matemáticas y en particular de los problemas de optimización. Cabe hacer mención a la leyenda según la cual la princesa Dido – personaje mítico de Fenicia, considerada fundadora de Cartago – cuando llegó en el siglo IX antes de Cristo a lo que actualmente es Túnez, y quiso comprar tierras para establecerce con su pueblo, sólo se le permitió hacerlo en una extensión tal que pudiera ser encerrada por una inmensa cuerda. Es claro que la princesa y los fenicios que la acompañaban, tuvieron que resolver un problema

isoperimétrico: determinar la región de mayor área posible, encerrada por la cuerda (el perímetro dado) (p. 16).

Por otro lado, en Boyer (1968) se muestra un párrafo en el cual se manifiesta un hecho histórico relacionado con la optimización, pues se afirma que la naturaleza siempre procede de la manera más sencilla, es decir tiene un comportamiento optimizador:

> La ley de reflexión para la luz había sido conocida por Euclides y Aristóteles (probablemente también por Platón); pero fue Heron quien mostró por un simple argumento geométrico, en un trabajo sobre *Catóptrica* (o reflexión), que la igualdad de los ángulos de incidencia y reflexión es una consecuencia del principio Aristotélico de que la naturaleza no hace nada por el camino difícil. Es decir, si la luz va a viajar desde una fuente S a un espejo MM' y luego al ojo E de un observador (Fig. 10.12), entonces la luz debe seguir el camino más corto posible SPE, que es exactamente aquel en que los ángulos SPM y EPM' son iguales. (Traducción propia, p. 192)

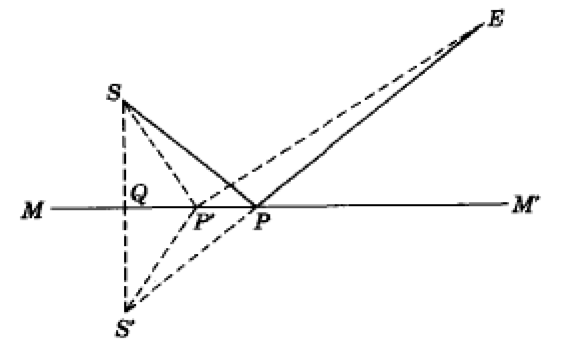


FIG. 10.12

Figura 10. Representación figural de la cita anterior.
Fuente: Boyer (1968, p. 192)

Del mismo modo, citamos otro fragmento del libro de Boyer (1968) en el cual se evidencia que la idea de máximo también está presenta en la obra de Pappus de Alejandría, quien escribió un libro titulado *Collection* en el año 320 d.C.

> Pappus demostró que de dos polígonos regulares que tienen perímetros iguales el que tiene el mayor número de lados tiene la mayor área (...). El libro aborda otros problemas de isoperimetría, incluida una demostración de que el círculo tiene una mayor área, para un perímetro dado, que cualquier polígono regular. Aquí Pappus parece haber seguido de cerca un trabajo *Sobre Figuras Isométricas* escrito casi medio milenio antes por Zenodoro (ca. 180 a.C.), (...). Entre las proposiciones en el tratado de Zenodoro había una que afirma que de todas las figuras sólidas cuyas superficies son iguales la esfera tiene el mayor volumen, pero solo se dió una justificación incompleta. (Traducción propia, p. 208)

Dorrie (1965) indica que el primer problema de optimización planteado en la historia es el siguiente: "¿En qué punto de la superficie terrestre una barra suspendida perpendicularmente parece ser la más larga? (es decir, ¿en qué punto el ángulo visual es máximo?)" (Traducción propia, p. 369). El autor indica que este problema fue planteado en 1471 por el matemático Johannes Müller y fue llamado *Regiomontanus´ Maximum Problem*.

Por lo mostrado anteriormente, se puede decir que la noción de optimizar siempre ha estado presente en la historia de las matemáticas, pues en muchos momentos de la historia el hombre se ha enfrentado a resolver problemas que implican hallar máximos o mínimos; pero con el surgimiento del cálculo diferencial, con los significativos aportes de Newton y Leibnitz en el siglo XVII, los problemas de máximos y mínimos de funciones continuas de una variable y varias variables son tratados de manera sistemática. Por ello, el desarrollo del cálculo diferencial y el uso de derivadas marco un hito histórico para la resolución de problemas de optimización, pues con ello se amplió las aplicaciones de las matemáticas en diversos campos de las ciencia y la tecnología (Malaspina, 2012).

Además, Malaspina (2008) indica que en el desarrollo de la optimización también se destaca los aportes de Fermat (1601 - 1665) por sus métodos ingeniosos para resolver problemas de máximos y mínimos, los cuales fueron expuestos en su memoria *Methodus ad disquirendam maximam et minimam.*

Por otro lado, el mismo autor también afirma que:

> Los aportes de Lagrange y de Euler, destacados científicos del siglo XVIII, permitieron tratar los problemas de optimización con varias variables y restricciones de igualdad e incursionar en problemas de optimización en los cuales el elemento optimizante no es ni un número real ni un vector *n* dimensional, sino una función. Nos estamos refiriendo al cálculo de variaciones (...). (p. 17)

Los problemas de optimización tuvieron un mayor auge a partir de la cuarta década del siglo XX, mediante la programación lineal, la cual fue desarrollada gracias a las contribuciones de Kantorovich (1939), Dantzing (1947), Neumann (1947) y Karmarkar (1984), los métodos desarrollados por los investigadores eran usados para resolver problemas de asignación óptima de recursos, en diversos campos como la economía, finanzas, transporte, etc. Cabe resaltar que el término programación lineal hace referencia a la optimización lineal, es decir la parte de la optimización donde están involucradas solamente funciones y restricciones lineales.

También surge la programación no lineal, con los trabajos de Kuhn Tucker (1950), quien estableció las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de soluciones óptimas de problemas de programación no lineal.

Como se mencionó al inicio de esta sección, en la actualidad la resolución de problemas de optimización pertenecen a un área de la matemática llamada optimización matemática la cual está muy desarrollada, pues sus múltiples aplicaciones en diversos campos de las ciencias y la tecnología aceleraron su avance, de este modo, en el siglo XX se desarrollaron varias sub-áreas de la optimización matemática, así se tiene los modelos de optimización dinámica, los cuales fueron utilizados en modelos de la teoría económica, del mismo modo se tiene los aportes de Belmman en 1957 que incluyen los problemas de control óptimo, por último también se tienen otras sub-áreas de la optimización matemática como la optimización discreta, optimización continua, optimización estocástica, etc. (Malaspina, 2008).

Ya visto cómo se han presentado los problemas de optimización a lo largo de la historia, ahora se pasa a estudiar cómo se presentan los problemas de optimización en los textos didácticos de enseñanza superior, específicamente se muestra los problemas de optimización en los cuales se usan métodos relacionados con la derivada para hallar un máximo o mínimo.

2.2 Problemas de optimización en los textos de cálculo

En esta sección se describe algunos aspectos didácticos a cerca de los problemas de optimización, en cuales se moviliza el concepto de derivada para su resolución, para ello se ha seleccionado dos libros muy usuales en la enseñanza de las derivadas y sus aplicaciones en el nivel superior, pues estos libros aparecen en la bibliografía de los sílabos de los cursos donde se aborda dicho tema. Los libros seleccionados son: Cálculo de una variable trascendentes tempranas de James Stewart y, el cálculo de Leithold; en la Tabla 1 se dan más detalles acerca de los libros seleccionados.

De los libros de consulta se ha revisado los capítulos en los que identificamos nuestro tema en estudio, los cuales están consignados en la Tabla 1, y de cada libro se analiza la forma como se presentan los aspectos relacionados a nuestra investigación.

Tabla 1

Libros de Consulta

Autor	Título	Capítulo	Páginas
James Stewart **(7 Ed.)**	Cálculo de una variable trascendentes tempranas	Capítulo 4: Aplicaciones de la derivada.	273 - 337
Leithold **(7 Ed.)**	El cálculo	Capítulo 3: Comportamiento de las funciones y de sus gráficas, valores extremos y aproximaciones	197 - 295

Primero se analiza el libro de Stewart (2012), en la primera sección del capítulo 4 se estudia el tema de valores máximos y mínimos, para lo cual el autor menciona que una de las aplicaciones del cálculo diferencial son los problemas de optimización, en los cuales se requiere encontrar la manera óptima para hacer algo. Como se ve a continuación en la Figura 11.

4.1 Valores máximos y mínimos

Algunas de las aplicaciones más importantes del cálculo diferencial son los *problemas de optimización*, en los cuales se requiere encontrar la manera óptima (la mejor) para hacer algo. Algunos ejemplos de los problemas que resolveremos en este capítulo son.

- ¿Cuál debe ser la forma de una lata que minimice los costos de fabricación?
- ¿Cuál es la aceleración máxima de un trasbordador espacial? (Ésta es una importante pregunta para los astronautas que tienen que soportar los efectos de la aceleración.)
- ¿Cuál es el radio de una tráquea contraída que expele aire del modo más rápido al toser?
- ¿Qué ángulo deben formar los vasos sanguíneos al ramificarse, de modo que se minimice la energía consumida por el corazón al bombear la sangre?

Figura 11. Introducción a los valores máximos y mínimos de una función.
Fuente: Stewart (2012, p. 274)

Luego, el autor del libro indica que resolver los problemas mostrados en la Figura 11 se reduce a encontrar valores máximo o mínimo de una función. Por ello, en seguida el autor muestra la definición de máximo y mínimo absoluto de una función real de variable real, como se ve en la Figura 12.

1 Definición Sea c un número en el dominio D de una función f. Entonces $f(c)$ es el

- valor **máximo absoluto** de f sobre D si $f(c) \geqslant f(x)$ para toda x en D.
- valor **mínimo absoluto** de f sobre D si $f(c) \leqslant f(x)$ para toda x en D.

Figura 12. Definición de máximo y mínimo absoluto.
Fuente: Stewart (2012, p. 274)

Luego, Stewart (2012) también da la definición de máximo local y mínimo local, pues estas son las definiciones fundamentales para posteriormente estudiar los métodos para hallar máximos y mínimos de una función real en una variable y, por ende para resolver problemas de optimización.

2 Definición El número $f(c)$ es un

- valor **máximo local** de f si $f(c) \geqslant f(x)$ cuando x está cerca de c.
- valor **mínimo local** de f si $f(c) \leqslant f(x)$ cuando x está cerca de c.

Figura 13. Definición de máximo y mínimo local.
Fuente: Stewart (2012, p. 274)

Posteriormente, el autor, en la sección 4.3, estudia los métodos para identificar los máximos y mínimos de una función real de variable real, para ello primero da la definición de punto crítico, como se ve en la Figura 14.

6 Definición Un **número crítico** de una función f es un número $x = c$ en el dominio de f tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

Figura 14. Definición de número crítico.
Fuente: Stewart (2012, p. 277)

En seguida, el autor muestra el primer método para hallar máximos y mínimos absolutos de una función real de variable real, al cual lo llama el método del intervalo cerrado, como se puede ver en la Figura 15.

Método del intervalo cerrado Para hallar los valores máximo y mínimo *absolutos* de una función continua f sobre un intervalo cerrado $[a, b]$:

1. Encuentre los valores de f en los números críticos de f en (a, b).
2. Halle los valores de f en los puntos extremos del intervalo.
3. El más grande de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto; el más pequeño, el valor mínimo absoluto.

Figura 15. Método del intervalo cerrado para hallar máximos y mínimos.
Fuente: Stewart (2012, p. 278)

Posteriormente, Stewart (2012) en la sección 4.3 estudia la relación existente entre el valor de la derivada y la gráfica de la función, para lo cual muestra que si la derivada de f sobre un intervalo es mayor a cero, entonces f es creciente en ese intervalo y, por el contrario si la derivada de f es negativa sobre un intervalo entonces f es decreciente en ese intervalo, a la cual le llama la prueba creciente/decreciente.

Luego, el autor muestra el segundo método para hallar máximos y mínimos locales de una función, al cual le llama la prueba de la primera derivada, tal como se muestra en la Figura 16.

Prueba de la primera derivada Supongamos que $x = c$ es un número crítico de una función continua f.

a) Si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un máximo local en c.
b) Si f' cambia de negativo a positivo en c, entonces f tiene un mínimo local en c.
c) Si f' no cambia de signo en c (p. ej., si f' es positiva por ambos lados de c o negativa por ambos lados), entonces f no tiene ningún máximo o mínimo local en c.

Figura 16. Método de la primera derivada para hallar máximos y mínimos.
Fuente: Stewart (2102, p. 291)

Una vez presentado los aspectos teóricos para hallar máximo y mínimos de una función real de variable real, en la sección 4.7, del libro del mismo autor se trata específicamente de los problemas de optimización, en esta sección el autor indica que los métodos para hallar máximos y mínimos de una función real de variable real tienen aplicaciones en muchas áreas de la vida, por ejemplo cuando un empresario quiere minimizar sus costos y maximizar sus ganancias, entre otras, es decir una de la aplicaciones de los métodos para hallar máximo y mínimos es para resolver problemas de optimización.

Respecto a los problemas de optimización, Stewart (2012) afirma: “En la resolución de tales problemas prácticos, el mayor desafío suele ser convertir el problema expresado en palabras en un problema de optimización matemática, estableciendo la función que va a maximizar o minimizar” (p. 325). En términos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica, lo que nos quiere decir el autor es que el mayor desafío de un problema de optimización es pasar del registro en lengua natural al registro algebraico, es decir una función que modele dicho problema, ya que si no se tiene la representación algebraica no podremos aplicar los métodos de la derivada para hallar un máximo o un mínimo.

Además, el autor sugiere los siguientes pasos para resolver problemas de optimización, ver Figura 17.

Pasos para la resolución de problemas de optimización

1. **Comprenda el problema** El primer paso consiste en leer detenidamente el problema hasta que se entienda claramente. Pregúntese: ¿qué es lo desconocido? ¿Cuáles son las cantidades conocidas? ¿Cuáles son las condiciones dadas?
2. **Dibuje un diagrama** En la mayoría de los problemas resulta útil dibujar un diagrama e identificar las cantidades dadas y las cantidades requeridas en el diagrama.
3. **Introduzca la notación** Asigne un símbolo a la cantidad que va a ser maximizada o minimizada [vamos a llamarla Q (del inglés *quantity*) por ahora]. También seleccione símbolos ($a, b, c, \ldots, x, y$) para otras cantidades desconocidas y etiquete el diagrama con estos símbolos. Puede ser provechoso utilizar iniciales como símbolos sugerentes —p. ej., A para el área, h para la altura, t para el tiempo.
4. Exprese Q en términos de algunos de los otros símbolos del paso 3.
5. Si Q se ha expresado como una función de más de una variable en el paso 4, utilice la información dada para encontrar relaciones (en forma de ecuaciones) entre estas variables. Utilice estas ecuaciones para eliminar todas, excepto una de las variables en la expresión para Q. Así Q se expresará en función de *una* variable x, digamos, $Q = f(x)$. Escriba el dominio de esta función.
6. Utilice los métodos de las secciones 4.1 y 4.3 para encontrar los valores máximo o mínimo *absolutos* de f. En particular, si el dominio de f es un intervalo cerrado, entonces puede utilizarse el método del intervalo cerrado de la sección 4.1.

Figura 17. Pasos para resolver problemas de optimización.
Fuente: Stewart (2012, pp. 325 - 326)

En esta investigación, las funciones que modelizan a los problemas de optimización que presentamos están definidas sobre un intervalo cerrado, por lo tanto para la resolución de dichos problemas se puede usar el método del intervalo cerrado, pero también se puede usar el criterio de la primera derivada.

A continuación veremos mediante un ejemplo la forma como se presentan los problemas de optimización en el libro de Stewart (2012).

> **EJEMPLO 1** Un agricultor tiene 2400 pies de material y quiere construir una barda para cercar un campo rectangular que bordea un río recto, de modo que no necesita barda a lo largo del río. ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener el campo para encerrar el área más grande?

Figura 18. Problema de optimización del libro de Stewart.
Fuente: Stewart (2012, p. 326)

Se puede ver en la Figura 18 que el autor presenta un problema de optimización en lengua natural, y para la resolución de este problema el autor moviliza los registros figural, algebraico y lengua natural, pues en un primer momento indica que se debe comprender el problema, para esto manifiesta que se deben experimentar con casos especiales, es decir se debe representar casos particulares de la forma que debe tener el campo para hacerse una idea de lo que sucede con el área de dicho campo, como se puede ver en la figura 19.

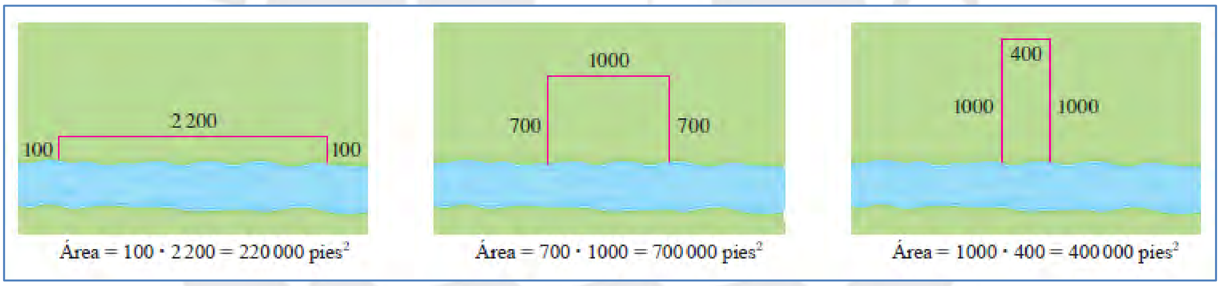


Figura 19. Casos particulares de la forma del campo del problema planteado.
Fuente: Stewart (2012, p. 326)

Luego, el autor en base a los casos particulares muestra la gráfica del caso general, es decir la representación figural del problema de optimización, e indica que se debe introducir notación, es decir variables, como se puede ver en la Figura 20.

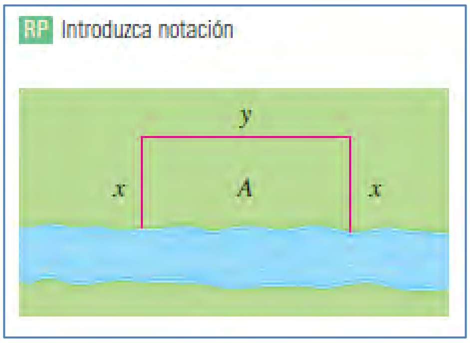


Figura 20. Caso general del campo del problema de optimización planteado.
Fuente: Stewart (2012, p. 326)

Por lo tanto, lo que Stewart (2012) sugiere, en términos de la teoría de registros de representación semiótica, es que se debe pasar del registro en lengua natural al registro figural, es decir se debe coordinar estos registros.

Luego, el autor usa los datos del problema para hacer tratamiento algebraico y llegar a definir una función que modela el área del campo, para ello usa que el área de un rectángulo es:

$$A = xy,$$

También, el autor usa el dato que $2x + y = 2400$, de donde obtiene que $y = 2400 - x$, y reemplazando en la fórmula del área se tiene:

$$A = x(2400 - 2x) = 2400x - 2x^2$$

Además, muestra las restricciones de las variables que son $x \geq 0$ y $x \leq 1200$, de este modo la función objetivo, es decir la función a maximizar es:

$$A(x) = 2400x - 2x^2; \quad 0 \leq x \leq 1200$$

Por ello, se puede decir que el autor se ayudó del registro figural para modelar el área del campo, del problema planteado, por medio de una función, lo cual indica que ha coordinado el registro figural con el registro algebraico.

En seguida, el autor halla la primera derivada de la función obtenida y halla el único punto crítico que es $x = 600$ e indica que usando el método del intervalo cerrado para hallar máximos y mínimos (ver Figura 15) el valor máximo de A debe producirse en el número crítico determinado o en un extremo del intervalo restricción. Pero muestra que $A(0) = 0$ y $A(1200) = 0$, por lo cual concluye que el área máxima del campo se da cuando $x = 600$, siendo esta área igual a $A(600) = 720\ 000$.

Por tanto, el autor una vez determinada la función objetivo realiza tratamientos en el registro algebraico y usando el método del intervalo cerrado halla el valor de x para que la función $A(x)$ tome su mayor valor, y finalmente el autor responde en lengua natural que las dimensiones del campo rectangular deben ser 600 pies de largo y 1200 pies de ancho, con lo cual se concluye que el autor para resolver el problema ha coordinado los registros en lengua natural, figural, algebraico; además ha realizado tratamientos y conversiones en dichos registros.

Ahora se analiza de qué manera se presentan los problemas de optimización en el libro de Leithold (1998), pues en este libro no hay una sección específica sobre problemas de optimización, sin embargo presenta problemas de optimización como aplicaciones de obtención de extremos absolutos de las funciones continuas en un intervalo cerrado y para ello usa el teorema del valor extremo que se muestra en la siguiente figura.

3.1.7 Teorema del valor extremo

Si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en $[a, b]$.

Figura 21. Teorema del valor extremo.
Fuente: Leithold (1998, p. 203)

Este teorema garantiza la existencia de un máximo y un mínimo absoluto de una función real de variable real en un intervalo cerrado $[a, b]$, por ello Leithold (1998) sugiere los siguientes pasos para hallar el máximo y mínimo de una función real de variable real (ver Figura 22).

1. Determine los valores de la función en los números críticos de f en (a, b).
2. Determine los valores de $f(a)$ y $f(b)$.
3. El mayor de los valores determinados en los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto, y el menor de los valores es el valor mínimo absoluto.

Figura 22. Pasos para hallar los extremos absolutos de una función en un intervalo cerrado.
Fuente: Leithold (1998, p. 204)

Luego, el autor presenta la sección 3.2 del libro llamada aplicaciones que involucran un extremo absoluto en un intervalo cerrado, en dicha sección se resuelven problemas que involucran hallar máximos y mínimos de una función real de variable real, usando el Teorema del valor extremo (ver Figura 21) y siguiendo los pasos sugeridos por el autor (ver Figura 22).

Uno de los problemas de optimización que presenta el autor es:

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Un fabricante de cajas de cartón quiere elaborar cajas abiertas a partir de trozos rectangulares de cartón con dimensiones de 10 pulg por 17 pulg, cortando cuadrados en las cuatro esquinas y doblando los lados hacia arriba. Se desea determinar la longitud del lado de los cuadrados que se deben cortar de modo que la caja tenga el mayor volumen posible.]

Figura 23. Problema de optimización presentado en Leithold.
Fuente: Leithold (1998, pp. 207-208)

Como se puede ver de la Figura 23, Leithold (1998) presenta el problema de optimización en lengua natural, luego para la resolución del problema primero hace una representación figural del problema (ver Figura 24), el cual es esencial para definir una función que modele la situación planteada en el problema.

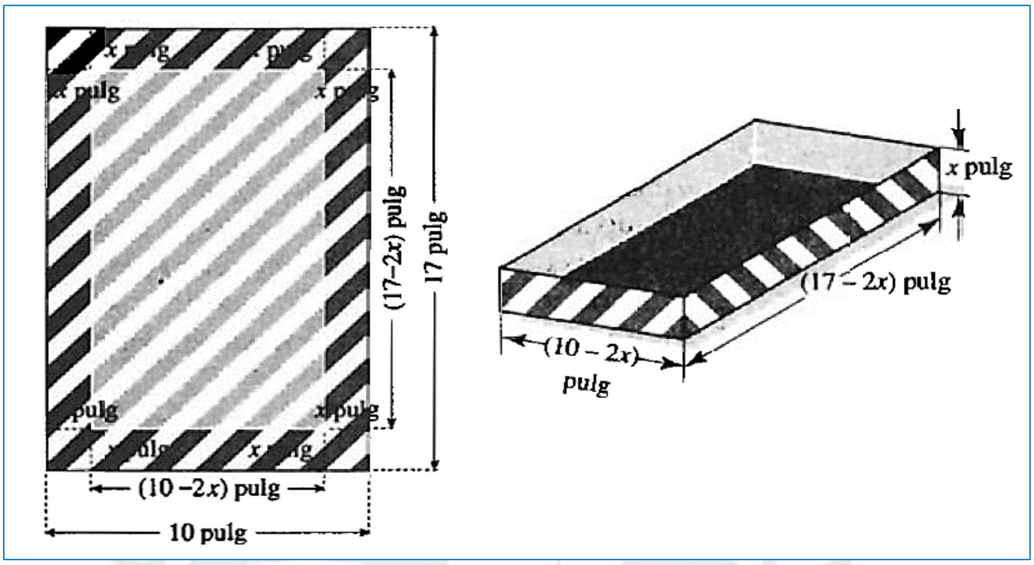


Figura 24. Representación figural del problema planteado.
Fuente: Leithold (1998, p. 208)

Luego, el autor en base al registro figural y usando las condiciones dadas en el problema, determina una función que modela el volumen de la caja, es decir determina la representación algebraica del problema; cabe resaltar que el autor determinó la representación algebraica del problema en un sección anterior llamada funciones como modelos matemáticos, y para ello hizo tratamientos en el registro algebraico, como se puede ver en la Figura 25.

Sea x pulgadas la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán y sea $V(x)$ pulgadas cúbicas el volumen de la caja. En la figura 2 se presenta una pieza de cartón dada y la figura 3 muestra la caja obtenida a partir de la pieza de cartón. El número de pulgadas de las dimensiones de la caja son x, $10 - 2x$ y $17 - 2x$. Por tanto,

$$\begin{aligned} V(x) &= x(10 - 2x)(17 - 2x) \\ &= 170x - 54x^2 + 4x^3 \end{aligned}$$

Figura 25. Tratamiento algebraico y representación algebraica del problema de optimización.
Fuente: Leithold (1998, p. 23)

Además, indica que el dominio de esta función es el intervalo $[0, 5]$. En seguida el autor realiza tratamiento algebraico, pues deriva la función e iguala a cero para hallar los valores críticos, obteniendo que $x = 6{,}97$ o $x = 2{,}03$, por tanto el único valor crítico es $x = 2{,}03$, ya que $x = 6{,}97$ no pertenece al dominio de la función.

Posteriormente, Leithold (1998) usa el Teorema del valor extremo (ver Figura 21) para hallar el máximo de la función $V(x)$, de este modo usando los pasos dados en la Figura 22 obtiene que $V(0) = V(5) = 0$ y $V(2{,}03) = 156{,}03$, por tanto concluye que el máximo absoluto de la función $V(x)$ es 156,03 y ocurre cuando $x = 2{,}03$. Finalmente, el autor da una respuesta a la pregunta planteada en el problema, lo cual indica que el autor interpreta los valores obtenidos para dar una respuesta en lengua natural, como se puede ver en la Figura 26.

Conclusión: El mayor volumen posible es 156.03 pulg^3, y se obtiene cuando la longitud de los lados de los cuadrados que se cortarán es de 2.03 pulg. ◀

Figura 26. Respuesta del problema de optimización en lengua natural.
Fuente: Leithold (1998, p. 208)

De lo mostrado, se concluye que el autor para resolver el problema coordinó los registros en lengua natural, figural y algebraico, además realiza tratamientos y conversiones en dichos registros al igual que Stewart (2012). Adicionalmente, el autor indica que el resultado puede apoyarse en la graficadora, lo cual quiere decir que también se puede usar el registro gráfico para verificar o hallar la solución del problema de optimización.

Por lo visto en el análisis de los dos libros se puede observar que en ambos se siguen procesos muy similares para llegar a resolver un problema de optimización, pues en ambos primero se realiza una conversión del registro en lengua natural al registro figural, luego al registro algebraico y luego en este registro se hacen tratamientos algebraicos, pues se usan los conceptos relacionados con la derivada para resolver el problema.

Esto indica que tanto Leithold (1998) como Stewart (2012) coordinan entre los diferentes registros de representación semiótica (lengua natural, figural, algebraico) para hallar la solución de un problema de optimización, sin embargo si se desea usar algún software se hace necesario también usar el registro gráfico, ya que en este registro se pueden usar las herramientas del software para hallar la derivada, los puntos críticos, el valor extremo de la función, etc.

Por ello, como en esta investigación se usa un ambiente de representaciones dinámicas como el Geogebra, se verá que para resolver un problema de optimización es necesario coordinar entre los registros en lengua natural, figural, algebraico y gráfico y el objetivo es analizar de qué manera estudiantes de ingeniería coordinan entre dichos registros para resolver este tipo de problemas, dicho análisis se presenta en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO III: PARTE EXPERIMENTAL

En este capítulo se describe a los sujetos de la investigación y a las unidades de análisis de la investigación, las cuales constan de dos problemas de optimización, para ello se presenta los resultados esperados de dichos problemas, así mismo se presenta el análisis de los resultados logrados por los estudiantes participantes, es decir se analiza la fichas de los estudiantes donde resolvieron los problemas, al mismo tiempo se realiza la triangulación de la información recolectada de las diferentes fuentes de recolección de datos usados en la investigación. El análisis se hace en términos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica.

3.1 Los participantes

Los participantes en la investigación son estudiantes de la carrera de Ingeniería Mecánica de una universidad nacional, dichos estudiantes cursan el curso de Cálculo Integral en el semestre académico 2017-2, es decir ya llevaron el curso de Cálculo Diferencial en el semestre académico 2017-1.

En la investigación participaron 6 estudiantes, los cuales se comprometieron en participar de manera voluntaria luego de que se invitó a 40 estudiantes aproximadamente en su aula de clases del curso de Cálculo Integral del ciclo regular 2017-2 de una universidad nacional. Sin embargo, para el análisis de los resultados se escogen solamente dos de ellos teniendo en cuenta que dichos estudiantes fueron los que mejor se desempeñaron durante el desarrollo de la parte experimental, y se piensa que la información obtenida de dichos estudiantes será más rica para realizar el análisis; a estos estudiantes en adelante llamaremos estudiante A y estudiante B para salvaguardar sus identidades.

El lugar donde se llevó a cabo la parte experimental fue en un laboratorio de cómputo de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la misma universidad, en dicho laboratorio se contaba con una pizarra acrílica, un proyector multimedia y una computadora para el profesor investigador, además cada estudiante también contaba con una computadora en la cual estaban instalados el software Geogebra versión 5.0.392.0 de libre distribución.

Para la recolección de la información se usaron los siguientes instrumentos: prueba diagnóstico, fichas de los problemas, las cuales fueron proporcionadas a los estudiantes para su resolución, fichas de observación, archivos Geogebra que usaron los estudiantes y grabaciones de audio.

La prueba diagnóstico tuvo una duración de aproximadamente 15 minutos y se aplicó con la finalidad de lograr mayor objetividad en la selección de los estudiantes de los cuales se analiza su ficha, dicha prueba se aplicó a cuatro estudiantes ya que dos llegaron tarde cuando ya había culminado la prueba diagnóstico, pero se les indicó que conceptos deberían conocer para desarrollar los problemas. La prueba estaba diseñada para identificar los conocimientos que tienen los estudiantes, específicamente de los conocimientos que deberían saber para desarrollar satisfactoriamente los problemas de optimización elaborados para la parte experimental, como por ejemplo saber derivar y hallar los números críticos de una función real de variable real, también que reconozcan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función, así como también los intervalos donde la función es positiva y negativa.

Dicha prueba consta de dos preguntas (ver Anexo 1), la primera tenía dos ítems y trata de hallar la derivada de una función real de variable real y hallar los números críticos de dicha función y la segunda pregunta tiene seis ítems, los cuales consisten en responder el dominio de la función, el intervalo de crecimiento y decrecimiento, los ceros de la función, y los extremos de una función mediante la gráfica de una función dada.

A continuación, se muestran los resultados de la prueba diagnóstico de los dos estudiantes elegidos.

Tabla 2

Resultados de la prueba diagnóstico.

Pregunta	Ítem	Estudiante A	Estudiante B
1	a)	✓	✓
	b)	✓	✓
2	a)	✓	✓
	b)	✓	✓
	c)	✓	✓
	d)	------	✓
	e)	X	✓
	f)	X	✓

Como se puede observar en la tabla de resultados de la prueba diagnóstico (Tabla 2) solo un estudiante respondió todas las preguntas correctamente, mientras que el otro no respondió el ítem d) de la pregunta 2 y falló en los items e) y f) de la misma pregunta; las preguntas que falló este estudiante eran para hallar máximos y mínimos absolutos y relativos de una función dada su gráfica, y revisando sus respuestas se observó que los máximos y mínimos absolutos respondió bien pero erró en los máximos y mínimos relativos, lo cual nos indica que este estudiante no tiene claro el concepto de máximo y mínimo relativos en el registro gráfico. En general puedo comentar que todos los estudiantes, tanto los que fueron elegidos para el análisis como los que no, respondieron correctamente la primera pregunta, lo cual nos indica que este grupo de estudiantes no tienen dificultades cuando se enfrentan a preguntas que implican procesos algebraicos, pues hacen tratamientos algebraicos correctos, sin embargo en la segunda pregunta si presentan falencias, esto pone en evidencia que cuando se trata de preguntas de interpretación en el registro gráfico los estudiantes tienen dificultades. En términos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica esto quiere decir que los estudiantes probablemente tienen dificultades para entender ciertos conceptos en el registro gráfico.

Puesto en evidencia las dificultades de los estudiantes una vez finalizada la prueba diagnóstico se dió algunas indicaciones puntuales sobre las respuestas de las preguntas presentadas en la prueba, pues se considera que dichos conceptos involucrados eran de vital importancia para desarrollar los problemas de optimización de manera satisfactoria.

Además, previo al inicio de la aplicación de la parte experimental se hizo una introducción breve al Geogebra, básicamente se les indica cómo usar las herramientas que son usadas en el desarrollo de los problemas de optimización, así por ejemplo cómo graficar una función con dominio restringido en el Geogebra, pues para ello se les indica cómo deben ingresar la regla de correspondencia de la función con su respectivo dominio en la barra de entrada del software, también se les indica como colocar un punto sobre la gráfica de la función e identificar sus coordenadas, tanto en la vista grafica como en la vista algebraica del Geogebra, asimismo se les indica cómo aumentar o disminuir la escala de los ejes, como hallar el intercepto de la gráfica de una función con los ejes coordenados o con cualquier otra función y como derivar una función usando el software, se notó que los estudiantes comprendieron rápidamente el uso de las herramientas mencionadas, por tanto en seguida se pasó a repartir la ficha del primer problema de optimización, la cual se describe en la siguiente sección.

3.2 Los problemas de optimización y sus análisis

Para la parte experimental de la investigación se elabora dos problemas de optimización, puesto que se usa como método de investigación aspectos del estudio de caso, dichos problemas conforman nuestras dos unidades de análisis. La ficha del primer problema de optimización contiene cinco ítems los cuales orientan al estudiante a seguir un procedimiento para resolver dicho problema usando el concepto de derivada de funciones reales de variable real, y con ayuda del Geogebra; mientras que en la ficha del segundo problema de optimización solo se presenta al estudiante el problema y para resolverlo el estudiante debe seguir un procedimiento similar al primer problema, solo se le indica que para resolver dicho problema debe hacerlo con ayuda del Geogebra.

A continuación presentamos la descripción de cada unidad de análisis.

Tabla 3

Descripción de las unidades de análisis.

Problema	Descripción	Duración
1	El objetivo de este problema es que los estudiantes coordinen registros de representación semiótica, para ello se les presenta el problema de optimización y una serie de ítems que orientan al estudiante a resolver dicho problema con la ayuda del Geogebra, para ello se le indica los pasos que debe hacer en el Geogebra, además se le proporciona un archivo Geogebra el cual debe manipular para responder algunos ítems que posteriormente lo llevan a dar la respuesta de dicho problema movilizando sus conocimientos de derivada de funciones reales de variable real.	40 min.
2	El objetivo de este problema es el mismo que del problema 1, pero a diferencia del primero ya no se proporciona ningún archivo Geogebra y tampoco se le da items, solamente se le proporciona el enunciado del problema de optimización y se le pide que lo resuelva con ayuda del Geogebra, para ello debe seguir un procedimiento similar a lo hecho en la resolución del problema 1.	20 min.

Los dos problemas de optimización fueron planteados y desarrollados por los estudiantes en una sola sesión y, estos se planificaron para que sean desarrollados de forma individual por cada estudiante, donde cada uno de ellos contaba con una computadora, además se pidió a los estudiantes que anoten en la ficha de los problemas todos los procedimientos que realicen y escriban las respuestas de las preguntas planteadas.

Durante el desarrollo de los problemas, además del profesor investigador, se encontraba una profesora observadora a la cual se le proporcionó una ficha de observación en la cual básicamente se le pide que anote cuáles son las dificultades más resaltantes que puede notar de los estudiantes.

A continuación, se presenta una descripción más detallada de cada uno de los problemas de optimización, para ello primero se presenta un análisis de los resultados esperados por el investigador, luego se presenta el análisis de lo ocurrido durante la aplicación de la parte con los estudiantes de ingeniería, y se hace la triangulación de la información, esto se hace para cada ítem de nuestras unidades de análisis. Cabe recordar que nuestro caso en estudio es: Problemas de optimización.

Las fuentes de información usadas para la recolección de la información son las fichas de los estudiantes, siendo esta nuestra principal fuente y como fuentes secundarias tenemos grabación de audio, fichas de observación y archivos Geogebra usados por los estudiantes, de los cuales se revisa los protocolos de construcción para saber qué acciones realizaron los estudiantes en el software, y en base a estas fuentes se hace la triangulación de la información.

Análisis del primer problema de optimización

La finalidad de este problema es analizar la coordinación de registros de representación semiótica de los estudiantes cuando resuelven dicho problema de optimización en el que es indispensable movilizar el concepto de derivada de funciones reales de variable real.

La ficha de este problema está organizada en cinco ítems (ver Anexo 2) que orientan al estudiante a seguir un procedimiento para resolver un problema de optimización con ayuda del Geogebra, para ello se presenta al estudiante un problema de optimización en lengua natural, luego el estudiante debe ser capaz de pasar de dicho registro al registro figural y enseguida al registro algebraico, en los cuales debe realizar tratamientos y conversiones, por ende debe coordinar dichos de registros de representación semiótica, ya que una vez estando en el registro algebraico se puede usar los métodos relacionados con la derivada de funciones reales de variable real para resolver problemas de optimización usando dicho concepto.

El desarrollo del primer problema de optimización se inició repartiendo a los estudiantes la ficha de dicho problema, luego se les señala que lean las indicaciones, que resuelvan de manera individual y que escriban todos los argumentos y/o procedimientos que usen para responder las preguntas planteadas. El tiempo de duración fue de aproximadamente 40 minutos, finalizada la resolución de los estudiantes se les indicó que guardaran el archivo Geogebra en el escritorio de la computadora para su posterior análisis, además se hizo un cierre de dicho problema poniendo énfasis en las dificultades que se notaron durante su desarrollo.

A continuación, se presenta el primer problema de optimización, en seguida se hace un análisis de los resultados esperados y de los resultados logrados por los dos estudiantes elegidos, a los cuales se les llama estudiante A y estudiante B.

Primer problema de optimización

Dos postes de 10 m y 12 m distan entre sí 30 m. Se desea tender un cable que una un punto del suelo (ubicado entre los postes) con los extremos superiores de los postes.

Dado el enunciado, se pide resolver los siguientes ítems.

Primer ítem

a) *Determine la expresión matemática que modela la longitud del cable, en función de la distancia de uno de los postes al punto donde se debe fijar el cable.*

   Sugerencia: *Puede representar geométricamente el problema para determinar la expresión matemática pedida.*

   El objetivo de este ítem es que el estudiante pase del registro en lengua natural al registro figural y posteriormente al registro algebraico, es decir el estudiante debe coordinar entre dichos registros, por ello se espera que el estudiante interprete el problema planteado geométricamente, para ello debe hacer una representación figural, como la de la Figura 27, ya que sin esta representación sería muy difícil que el estudiante logre determinar la expresión matemática que modela la longitud del cable.

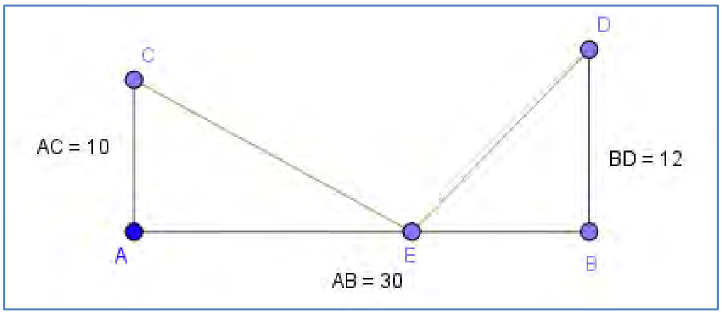


Figura 27. Representación figural del problema planteado.
Fuente: Elaboración propia.

Después, el estudiante con ayuda de la representación figural debe determinar una función en una sola variable que modele la longitud del cable, para ello debería usar el Teorema de Pitágoras y previo tratamiento algebraico determinar la función que modela la longitud del cable, la cual sería la representación algebraica del problema de optimización.

Una representación algebraica que el estudiante podría determinar es:

$$f(x) = \sqrt{100 + x^2} + \sqrt{144 + (30 - x)^2};\ \ 0 \leq x \leq 30$$

Donde:

$f(x)$: Longitud del cable en metros.

x: Distancia del punto A al punto E en metros.

Otra posible representación algebraica que podría determinar el estudiante es:

$$f(x) = \sqrt{144 + x^2} + \sqrt{100 + (30 - x)^2};\ \ 0 \leq x \leq 30$$

Donde:

$f(x)$: Longitud del cable en metros.

x: Distancia del punto B al punto E en metros.

Como se puede observar el estudiante no solo debe determinar la función que modela la longitud del cable sino también la restricción de la variable, es decir el dominio de la función; si el estudiante logra determinar alguna de las funciones dadas con su respectivo dominio se puede decir que ha logrado coordinar el registro figural con el registro algebraico.

A continuación se hace el análisis de los resultados logrados por los estudiantes.

En este ítem se notó que los estudiantes empezaron por hacer una representación figural del problema y luego definieron la función objetivo que modela la longitud del cable, pero en un inicio no dieron la restricción de la variable; es decir, el dominio de la función, además no tenían claro lo que significaba la variable, pues no acostumbran primero definir su variable e interpretarlo en el contexto, ya que por lo general los profesores tampoco lo hacen, dándolo como sobreentendido cual es la variable. Por ello el profesor investigador tuvo que intervenir haciendo preguntas a cada alumno que se le identificaba la deficiencia descrita, como por ejemplo se les preguntó cuál era el dominio de la función que habían definido, a lo cual algún alumno respondió que era todos los reales, como esto era incorrecto se procedió a preguntarle qué significaba la variable y según su gráfica que valores podría tomar, finalmente lograron dar la restricción y comprendieron que significaba la variable.

A continuación, se presenta el análisis correspondiente al estudiante A y al estudiante B, los cuales fueron los más destacados de los participantes.

- **Estudiante A**

Este estudiante en su resolución hizo un procedimiento detallado, como se puede ver en la Figura 28, sin embargo no define variables en lengua natural, pero si los indica en el registro figural.

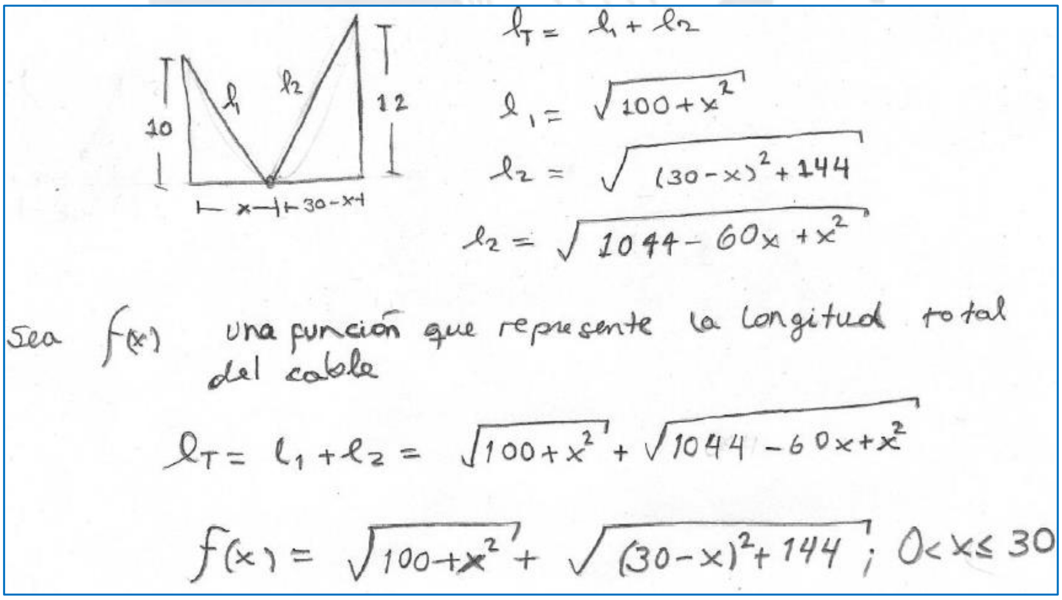


Figura 28. Procedimiento del ítem a) del estudiante A.

También, se puede observar que este estudiante primero hace una representación figural del problema, luego hace una conversión del registro figural al registro algebraico, ya en este registro previo tratamiento algebraico llegó a determinar la función que modela la longitud del cable y su respectiva restricción o dominio de la función, aunque consideró en 0 abierto y cerrado en 30, debiendo haber sido cerrado en 0 y 30, lo cual fue indicado al cierre del problema, también se puede observar que el estudiante no definió la variable x en lengua natural, sin embargo si lo indica en su representación figural, como la distancia del poste de 10 m hacia el punto donde se debe fijar el cable, con esto se evidencia lo manifestado en párrafos anteriores, que no definen sus variables.

- **Estudiante B**

Este estudiante, a diferencia del estudiante A, solo hace una representación figural del problema, es decir logra convertir el problema de optimización del registro en lengua natural al registro figural y define la función que lo modela, aunque no define sus variables en lengua natural pero si lo indica en su representación figural, además de ello tampoco considera ninguna restricción de la variable o dominio de la función, ver Figura 29.

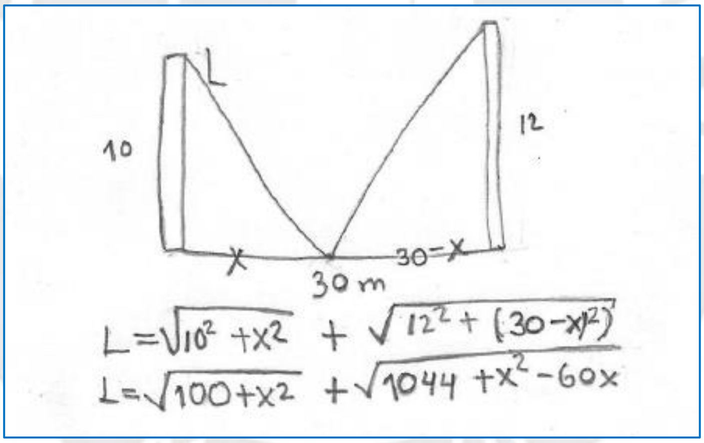


Figura 29. Procedimiento del ítem a) del estudiante B.

De acuerdo con la Figura 29 se puede decir que este estudiante coordinó el registro en lengua natural y el registro figural, sin embargo no coordinó estos registros con el registro algebraico, pues al no considerar ninguna restricción para la variable x, la función tal como está definida no modela la longitud del cable del primer problema de optimización.

Por lo descrito, en los resultados esperados del ítem 1 y lo hecho por los estudiantes, se concluye que los estudiante pudieron coordinar el registro en lengua natural con el registro figural sin ningún problema pero en el registro algebraico tuvieron algunas falencias ya que un estudiante no definió su restricción y el otro tuvo un error en la desigualdad.

Por otro lado, de los apuntes hechos de la profesora observadora se tiene que los estudiantes establecieron la función, para lo cual usaron el Teorema de Pitágoras y que relacionaron la distancia del punto fijado en el suelo hacia los postes como la variable independiente, esto lo hacían en la representación figural, como se puede observar en la Figura 28 y Figura 29, aunque no lo definen en lengua natural, estando en concordancia con lo descrito anteriormente por el investigador.

Segundo ítem

b) Con ayuda del Geogebra represente gráficamente la función definida en el ítem a). Después, con la herramienta "punto en objeto" ubique un punto sobre la representación gráfica de la función, luego arrastre dicho punto e identifique sus respectivas coordenadas.

¿Qué indican los valores de las coordenadas del punto A en el contexto del problema? Explique.

El objetivo de este ítem es que el estudiante transite del registro algebraico al registro gráfico y luego al registro en lengua natural, por ello se espera que el estudiante con ayuda del Geogebra haga la representación gráfica de la función definida en el ítem a), como se ve en la Figura 30, luego usando la herramienta punto en objeto del Geogebra debe ubicar un punto cualquiera sobre la gráfica de la función e identificar sus coordenadas, una vez hecho esto se espera que responda que la ordenada del punto indica la longitud del cable cuando la distancia del punto ubicado en el suelo hacia un poste es el valor de la abscisa, es decir debe responder lo que indican las coordenadas del punto en lengua natural.

Por ejemplo, si ubicase el punto A(9,14; 37,61) podría responder que *"las coordenadas de ese punto indican que la longitud del cable es 37,61 m cuando la distancia del primer poste al punto fijado al suelo es 9,14 m"*

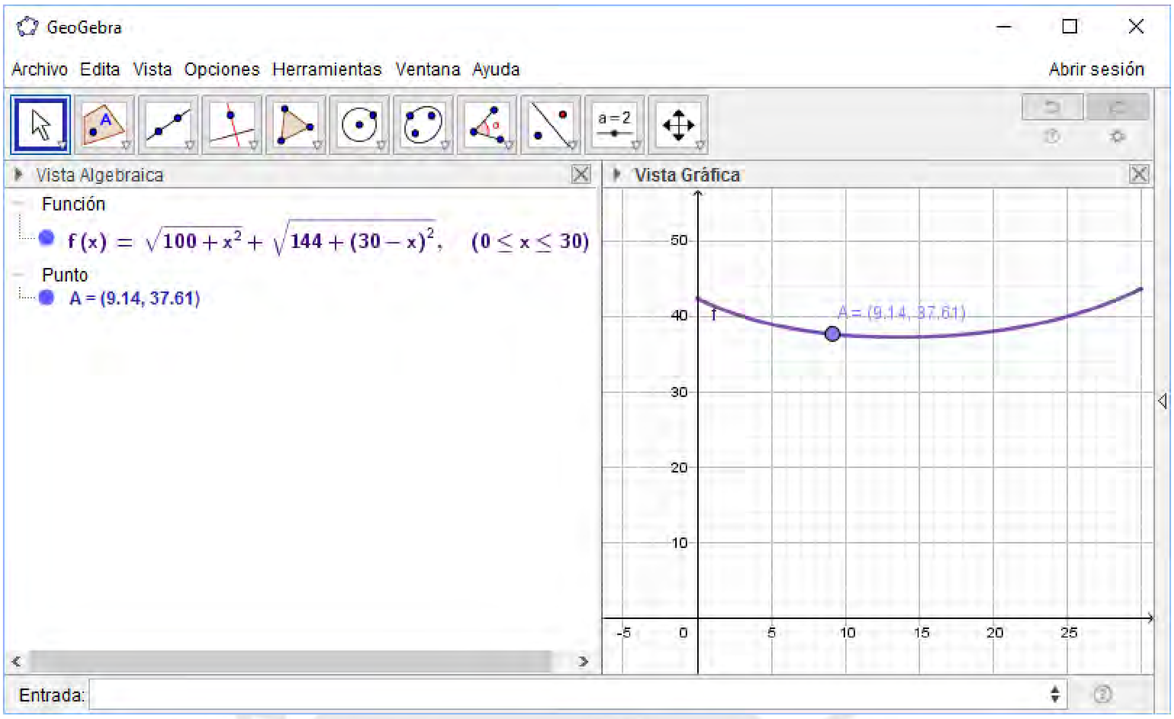


Figura 30. Representación gráfica de la función definida en el ítem a).
Fuente: Elaboración propia.

Por lo tanto, el estudiante debe comprender que la distancia de uno de los postes al punto donde se fija el cable está representada en el eje X y la longitud del cable está representada en el eje Y.

Si el estudiante logra esta comprensión y redacta su argumento, se puede decir que el estudiante coordinó el registro gráfico con el registro en lengua en natural.

En seguida se analiza las respuestas de los estudiantes:

- **Estudiante A**

En este ítem se observa, de la Figura 29, que el estudiante solo indica las coordenadas de un punto sobre la gráfica, pero no responde a la pregunta en lengua natural, sin embargo en el protocolo del Geogebra se observa que el estudiante ingresó la función al software y ubica un punto sobre la gráfica, es decir hizo un tratamiento en el registro gráfico, pero no logro coordinar este registro con el registro en lengua natural para responder en palabras lo que indican en el contexto del problema las coordenadas de dicho punto.

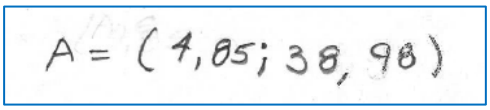


Figura 31. Respuesta al ítem b) del estudiante A.

- **Estudiante B**

De acuerdo con la Figura 32 se puede observar que el estudiante B escribió las coordenadas de un punto sobre la gráfica de la función que modela la longitud del cable, sin embargo al igual que el estudiante A no responde que indican las coordenadas de dicho punto en el contexto del problema, aunque argumenta en lengua natural lo que hizo para ubicar dicho punto, pero esto no responde a la pregunta planteada; lo cual indica que dichos estudiantes tienen falencias cuando se trata de escribir en lengua natural la interpretación de las coordenadas de un punto sobre la gráfica, se cree que la posible dificultad que han tenido los estudiantes al responder este ítem se presenta porque no definieron en el ítem a) que significaba la variable.

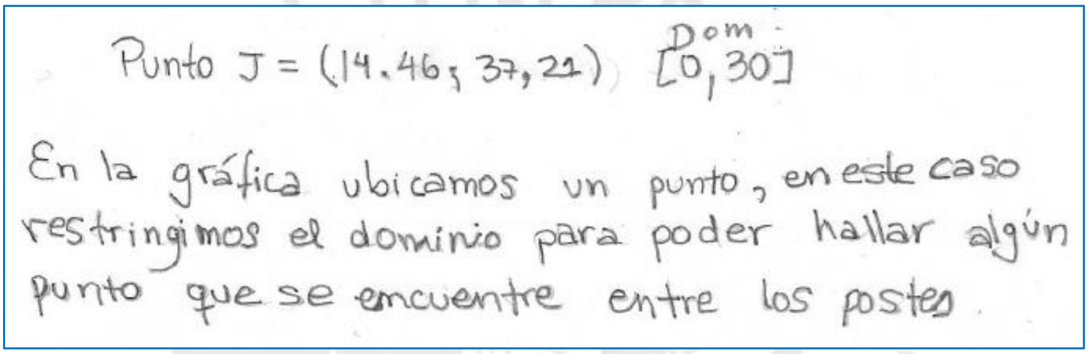


Figura 32. Respuesta al ítem b) del estudiante B.

La profesora observadora manifiesta en su ficha de observación que los estudiantes ingresan la función en el Geogebra y manipulan un punto sobre la gráfica y observan cómo cambia las coordenadas de dicho punto, lo mismo se puede observar en el protocolo del Geogebra, lo cual indica que hacen tratamientos en el registro gráfico aunque no lograron coordinar dicho registro con el registro en lengua natural, para responder lo planteado.

Tercer ítem

c) *En base a la representación gráfica anterior:*

¿Dónde se debe ubicar el punto sobre el suelo para fijar el cable de tal modo que su longitud sea mínima? Explique detalladamente.

El objetivo de este ítem es que el estudiante conjeture en qué punto se debe fijar el cable para que su longitud sea mínima, esto lo podría lograr por medio de hacer tratamientos en el registro gráfico con ayuda del Geogebra.

Para ello, como ahora el estudiante ya debe tener el conocimiento previo de que significan las coordenadas de un punto sobre la gráfica, se espera que arrastre el punto A que ubicó en el ítem b) y perciba sus coordenadas e identifique cuando se da la mínima longitud del cable, tal como se ve en la Figura 33, de este modo el estudiante debería responder que la longitud mínima del cable es de 37,2 m y se debe ubicar a 13,7 m del poste de 10 m.

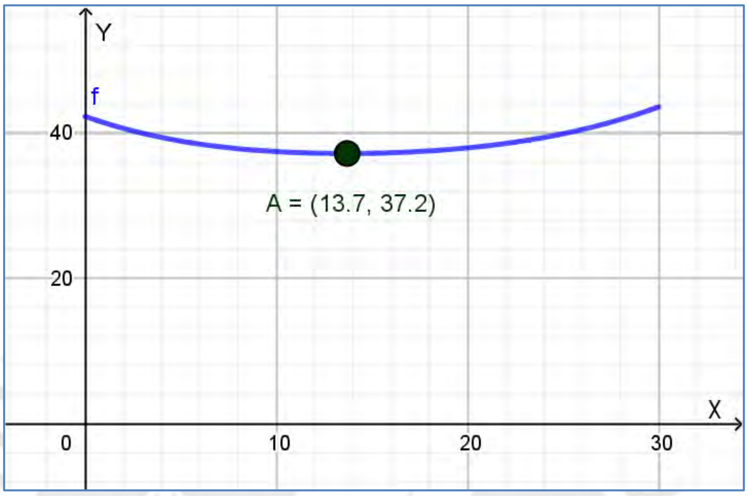


Figura 33. Mínimo de la función f hallado con ayuda del Geogebra.
Fuente: Elaboración propia.

Tal como se describe en los resultados esperados, los estudiantes solo tienen que arrastrar el punto ubicado sobre la gráfica y observar sus coordenadas y responder la pregunta planteada, es evidente que para ello deberían tener claro lo que significan las coordenadas del punto, en términos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica, los estudiantes deben hacer tratamientos en el registro gráfico, luego hacer una conversión para el registro en lengua natural, para poder responder la pregunta planteada y a la vez explicar el porqué; es decir, deben haber una coordinación entre dichos registros.

Ahora analicemos las respuestas de los estudiantes.

- **Estudiante A**

Al analizar el protocolo de Geogebra se observó que el estudiante hizo lo que se tenía previsto en los resultados esperados; es decir, hizo tratamientos en el registro gráfico para ubicar el punto donde se da la longitud mínima del cable, e incluso lo grafica en su ficha como se puede observar en la Figura 34. Sin embargo no responde adecuadamente a la pregunta planteada, pues el estudiante escribe que en el punto 13,81 la función $f(x)$ es mínimo (ver Figura 34), lo cual no es correcto pues 13,81 no es un punto, el estudiante también indica que $f(13{,}81) = 37{,}2$ (ver Figura 34), lo cual si es correcto, pero es una respuesta netamente matemática y se esperaba que interprete este resultado en el contexto del problema, es decir que dé una respuesta en lengua natural.

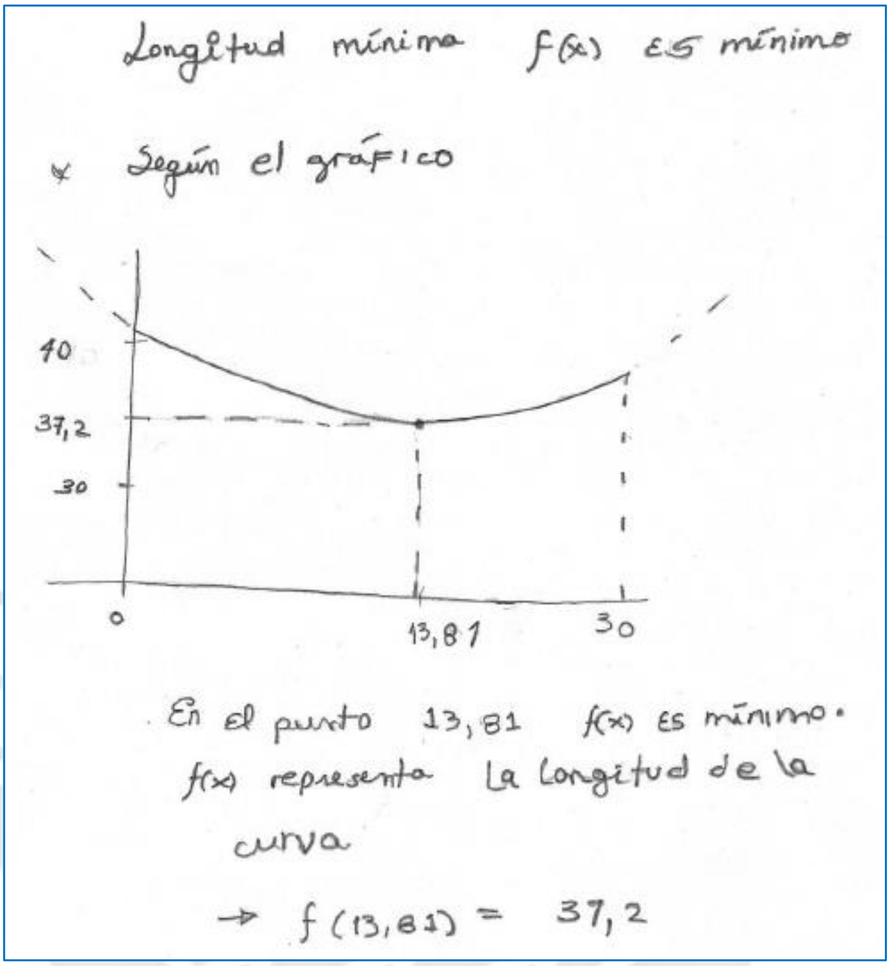


Figura 34. Respuesta para el ítem c) del estudiante A.

Por lo descrito se evidencia que el estudiante hizo tratamientos en el registro gráfico, y no tuvo problemas para ubicar el punto donde se da la longitud mínima del cable, pero no hubo una coordinación entre el registro gráfico y el registro en lengua natural, lo cual ya había sido evidenciado en el ítem anterior.

- **Estudiante B**

Al analizar el protocolo de Geogebra de este estudiante se observa que determinó el mínimo de la función por medio de ubicar un punto y observar sus coordenadas, es decir hizo tratamientos en el registro gráfico, y además de ello uso la función mínimo del

Geogebra, tal como lo manifiesta en su ficha (ver Figura 35), coincidiendo que el mínimo de la función es 37,2.

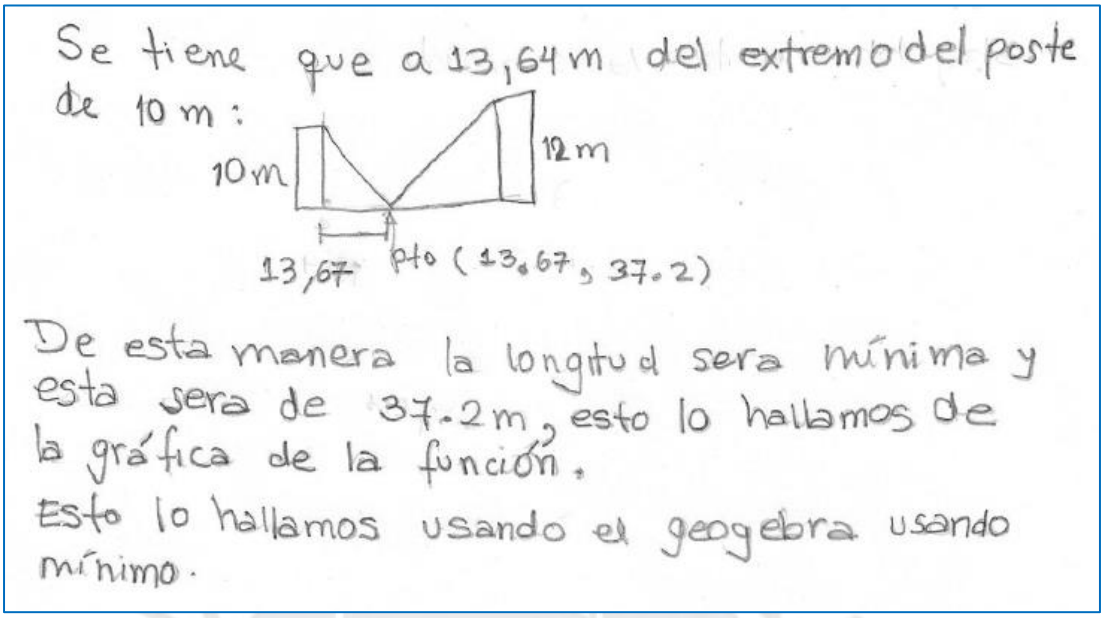


Figura 35. Respuesta para el ítem c) del estudiante B.

De la Figura 35, también se observa que este estudiante, a diferencia del estudiante A, si responde la pregunta planteada, indicando que la longitud mínima se tiene a 13,64 m del extremo del poste de 10 m, e incluso indica esta distancia en el registro figural. De lo descrito se concluye que este estudiante hizo tratamientos en el registro gráfico y más aún pudo responder la pregunta en lengua natural, lo cual nos indica que hubo una coordinación entre dichos registros de representación semiótica.

Cuarto ítem

d) Abra el archivo **Función.ggb** *y arrastre el punto A ubicado sobre la gráfica de f y en base a su observación, responda:*

i. ¿En qué intervalo la función crece? Explique.

ii. ¿En qué intervalo la función decrece? Explique.

Este ítem está compuesto por dos sub ítems, la finalidad de este ítem es que el estudiante movilice el concepto de derivada para determinar en qué intervalo la función f crece y en que intervalo decrece, para ello el estudiante primero debe abrir el archivo de Geogebra que se le indica, pues en este archivo están las gráficas de la función f y de su derivada, además el punto A sobre la gráfica de f está enlazado con un punto llamado B ubicado sobre la gráfica de la derivada de f, con la finalidad de que identifique en el registro gráfico y movilizando el concepto de derivada, debe responder en que intervalo la función crece y en que intervalo decrece. Para ello, se espera que el estudiante debe entender que la ordenada del punto B (mostrado en archivo de Geogebra, ver Figura 36) representa la derivada de f evaluada en su respectivo valor de la abscisa, luego con ese conocimiento el estudiante ya podría responder las preguntas planteadas en los sub ítems *i) y ii)*.

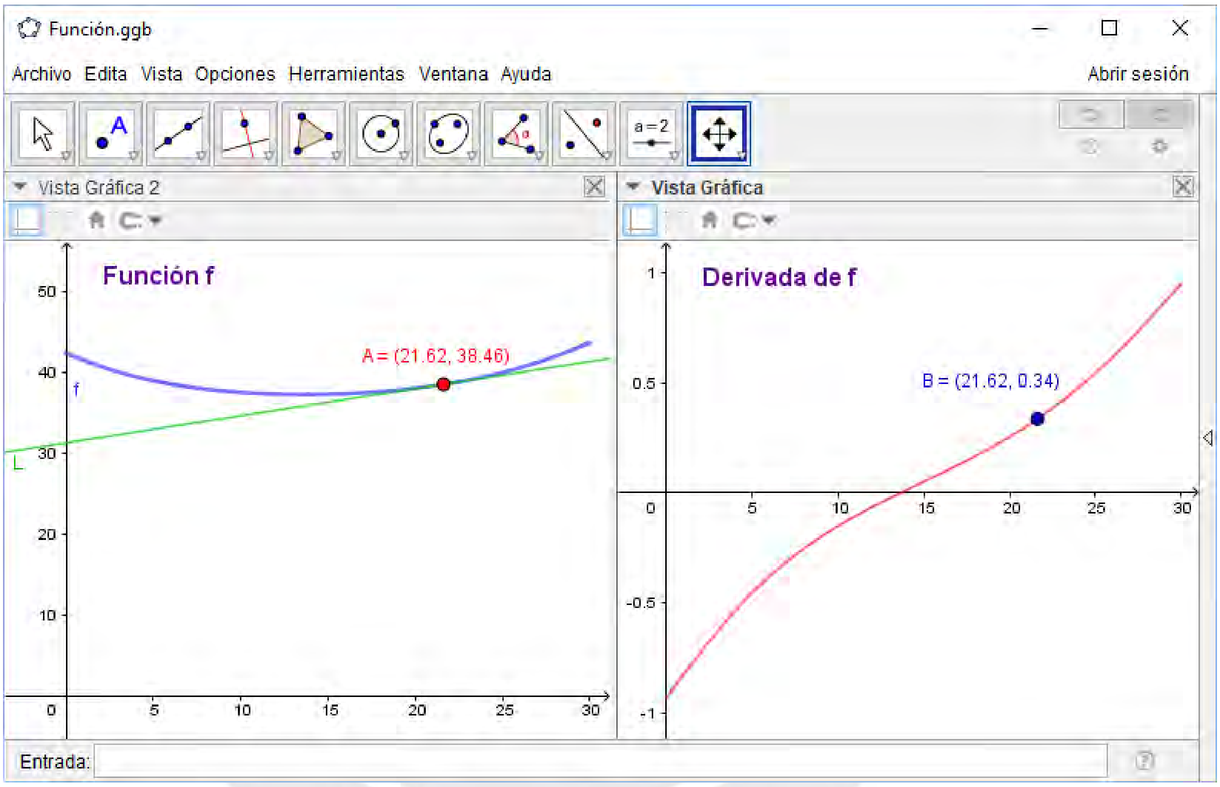


Figura 36. Archivo de Geogebra que se le proporciona al estudiante.
Fuente: Elaboración propia.

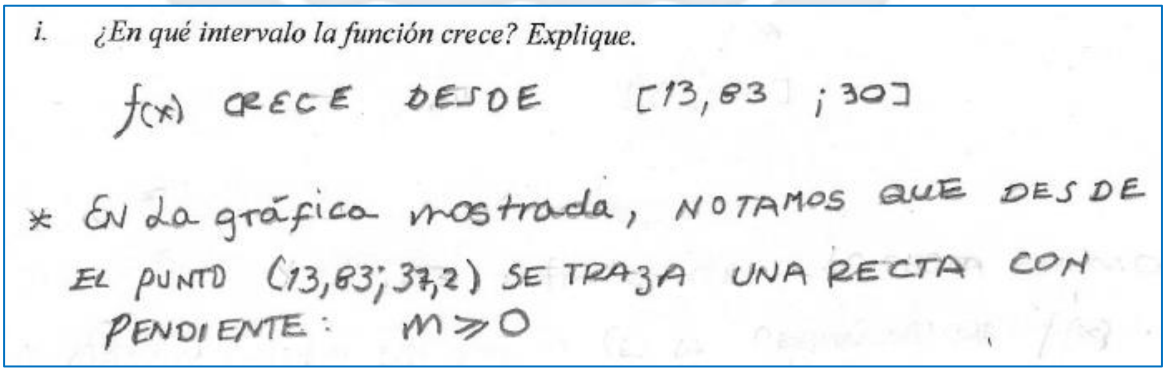
Con el sub ítem *i)* se pretende que el estudiante movilice el concepto de derivada para determinar cuándo una función crece, específicamente debe saber que cuando la derivada es mayor a cero la función crece, por esto se espera que el estudiante indique que el intervalo donde la función es creciente es $]13{,}64; 30]$ aproximadamente, pues el valor de la derivada es positivo, es decir debe hacer tratamientos en el registro gráfico.

De modo similar, en el sub ítem *ii)* se pretende que el estudiante haga tratamientos en el registro gráfico movilizando el concepto de derivada, pero esta vez para determinar donde la función decrece, por ello debe saber que cuando la derivada es negativa la función decrece. Por tanto, se espera que el estudiante indique que el intervalo donde la función es decreciente es $[0; 13{,}64[$ aproximadamente, pues el valor de la derivada es negativo.

En conclusión, el estudiante debe movilizar el concepto de derivada en el registro gráfico, para ello debe hacer tratamientos en dicho registro, luego debe ser capaz de transitar al registro en lengua natural, además debe coordinar entre dichos registros, ya que el estudiante debe identificar en base a sus tratamientos realizados en el archivo Geogebra, en que intervalo la función crece y en que intervalo decrece justificando su respuesta. En seguida analizamos si se lograron los resultados esperados.

- **Estudiante A**

Analizando la respuesta del estudiante se puede observar que logra identificar el intervalo de crecimiento de la función, el cual es $[13{,}83; 30]$, esto lo logra según lo indicado por el estudiante (ver Figura 37), gracias a que notó que desde el intervalo $(13{,}83; 37{,}2)$ se traza una recta con pendiente mayor o igual a cero, entendemos que el estudiante quiso decir que a partir de ese punto a la derecha la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función es positiva, lo cual nos indica que este estudiante tiene claro el concepto de la derivada ya que teóricamente la pendiente de la recta tangente en un punto es el valor de la derivada de la función en dicho punto, y por ende este estudiante hace tratamientos en el registro gráfico y coordina con el registro en lengua natural, pues explica por qué en dicho intervalo la función crece.

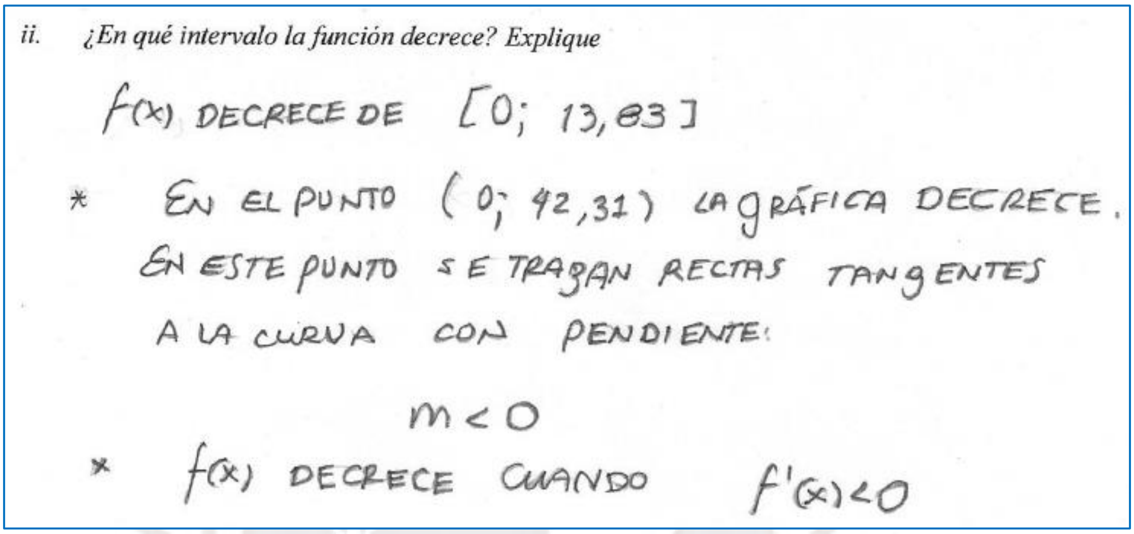

i. ¿En qué intervalo la función crece? Explique.

f(x) CRECE DESDE [13,83 ; 30]

* EN la gráfica mostrada, NOTAMOS QUE DESDE EL PUNTO (13,83; 37,2) SE TRAZA UNA RECTA CON PENDIENTE: $m \geq 0$

Figura 37. Respuesta para el sub ítem i) del cuarto ítem del estudiante A.

Por otra parte en el sub ítem *ii),* el estudiante responde que la función decrece en el intervalo $[0; 13{,}83]$, aunque su explicación no es tan clara, pues indica que en el punto (0; 42,31) la función decrece, y que en ese punto se trazan rectas tangentes a la curva con pendiente menor a cero (ver Figura 38), se cree que el estudiante quería decir que en ese punto la función empieza a decrecer, pero no lo explica de esa manera, es decir no hubo una coordinación entre el registro gráfico y el registro en lengua natural, pero a pesar de ello también indica que la función decrece cuando su derivada es menor a cero, lo cual indica que si hace tratamientos en el registro gráfico.


ii. *¿En qué intervalo la función decrece? Explique*

$f(x)$ DECRECE DE $[0; 13,83]$

* EN EL PUNTO $(0; 42,31)$ LA GRÁFICA DECRECE.
EN ESTE PUNTO SE TRAZAN RECTAS TANGENTES
A LA CURVA CON PENDIENTE:

$$m < 0$$

* $f(x)$ DECRECE CUANDO $f'(x) < 0$

Figura 38. Respuesta para el sub ítem ii) del cuarto ítem del estudiante A.

Por lo descrito anteriormente, se puede decir que se lograron de manera parcial los resultados esperados, pues este estudiante no solo uso el valor de la derivada para determinar en qué intervalo la función crece o decrece, sino también usa el valor de la pendiente de la recta tangente, lo cual nos indica que dicho estudiante usa correctamente los conceptos asociados a la derivada para determinar los intervalos de crecimiento o decrecimiento de una función, sin embargo queda evidenciado una vez más que cuando tienen que dar una respuesta en lengua natural tienen dificultades.

- **Estudiante B**

Al revisar la ficha de este estudiante se observó que se cumplieron los resultados esperados, tanto para el sub ítem *i)* como para el *ii),* pues respondió que el intervalo donde la función crece es $]13,67; 30[$ y en el intervalo $]0; 13,67[$ la función decrece, además indica que esto lo determina usando la gráfica de la función derivada teniendo en cuenta que cuando la derivada es mayor a cero la función crece y cuando la derivada es menor a cero la función decrece, (ver Figura 39 y Figura 40) lo cual nos indica que este estudiante moviliza correctamente los conceptos asociados a la derivada, en el registro gráfico, para determinar en qué intervalo la función crece o decrece, además da una explicación adecuada en lengua natural, por tanto hubo una coordinación entre los registros mencionados.

i. ¿En qué intervalo la función crece? Explique.

la función crece entre <13.67; 30>, en este caso observamos la gráfica de la función derivada y es de ahí que obtenemos el intervalo en que la función crece
$f' > 0 \rightarrow$ función crece.

Figura 39. Respuesta para el sub ítem i) del cuarto ítem del estudiante B.

ii. ¿En qué intervalo la función decrece? Explique

la función decrece entre <0; 13.67>
Al igual que en en el punto i, en este caso la $f' < 0 \rightarrow$ función decrece, es así que observando las gráficas obtenemos los puntos.

Figura 40. Respuesta para el sub ítem *ii)* del cuarto ítem del estudiante B.

Respecto a este ítem la profesora observadora indica en la ficha de observación que un estudiante, del total de los participantes, intento derivar algebraicamente la función para hallar sus raíces, es decir para hallar los valores críticos, el cual es un procedimiento algebraico para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, lo cual indica que dentro del grupo de estudiantes participantes había un estudiante que está familiarizado con el proceso algorítmico (algebraico) y no usa el registro gráfico proporcionado por el Geogebra, por ello se revisó el audio grabado y se pudo determinar que en esta situación el profesor investigador tuvo que intervenir e indicar que solo usen el archivo de Geogebra proporcionado y que manipulen dicho archivo y observen las coordenadas del punto tanto en la gráfica de la función y la gráfica de su derivada y en base a ello den su respuesta. En términos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica se puede decir que dicho estudiante no concebía hacer tratamientos y conversiones en el registro gráfico por ello recurre al registro algebraico.

Quinto ítem

e) En base al ítem anterior y con ayuda del Geogebra muestre matemáticamente lo explicado en el ítem c).

El objetivo de este ítem es que el estudiante explique en lengua natural como usa lo hecho en el ítem anterior, para que con ayuda de algún método para hallar extremos relativos o absolutos de funciones reales de variable real, justifique o valide que lo conjeturado en el ítem c) es la longitud mínima del cable.

Por ello se espera que el estudiante haga el siguiente análisis:

$x = 13{,}62$ es un valor crítico de la función, ya que el valor de la derivada es cero, por lo tanto puede ser un máximo o mínimo de f, pero en el ítem d) se determinó que:

Cuando $x \in [0; 13{,}62\rangle$ la función decrece, pues $f'(x) < 0$.

Cuando $x \in \langle 13{,}62; 30]$ la función crece, pues $f'(x) > 0$.

Entonces usando el criterio de la primera derivada se tiene que un mínimo relativo de la función f se da cuando $x = 13{,}62$. Además, si evaluamos en los extremos del intervalo donde se define f, se tiene:

$$f(13{,}62) = 37{,}2; \quad f(0) = 42{,}31 \quad \text{y} \quad f(30) = 43{,}62,$$

por tanto, usando el método del intervalo cerrado para hallar extremos absolutos de una función real de variable real se tiene que el mínimo absoluto de f es 37,2 y se da cuando $x = 13{,}62$.

De esta manera, el estudiante justifica matemáticamente que lo conjeturado en el ítem c) es la longitud mínima del cable y dicho cable se debe fijar a una distancia de 13,62 metros del poste de la izquierda.

Ahora analizamos las respuestas de los estudiantes.

➢ **Estudiante A**

A continuación en la Figura 41 se muestra el proceso realizado por el estudiante.

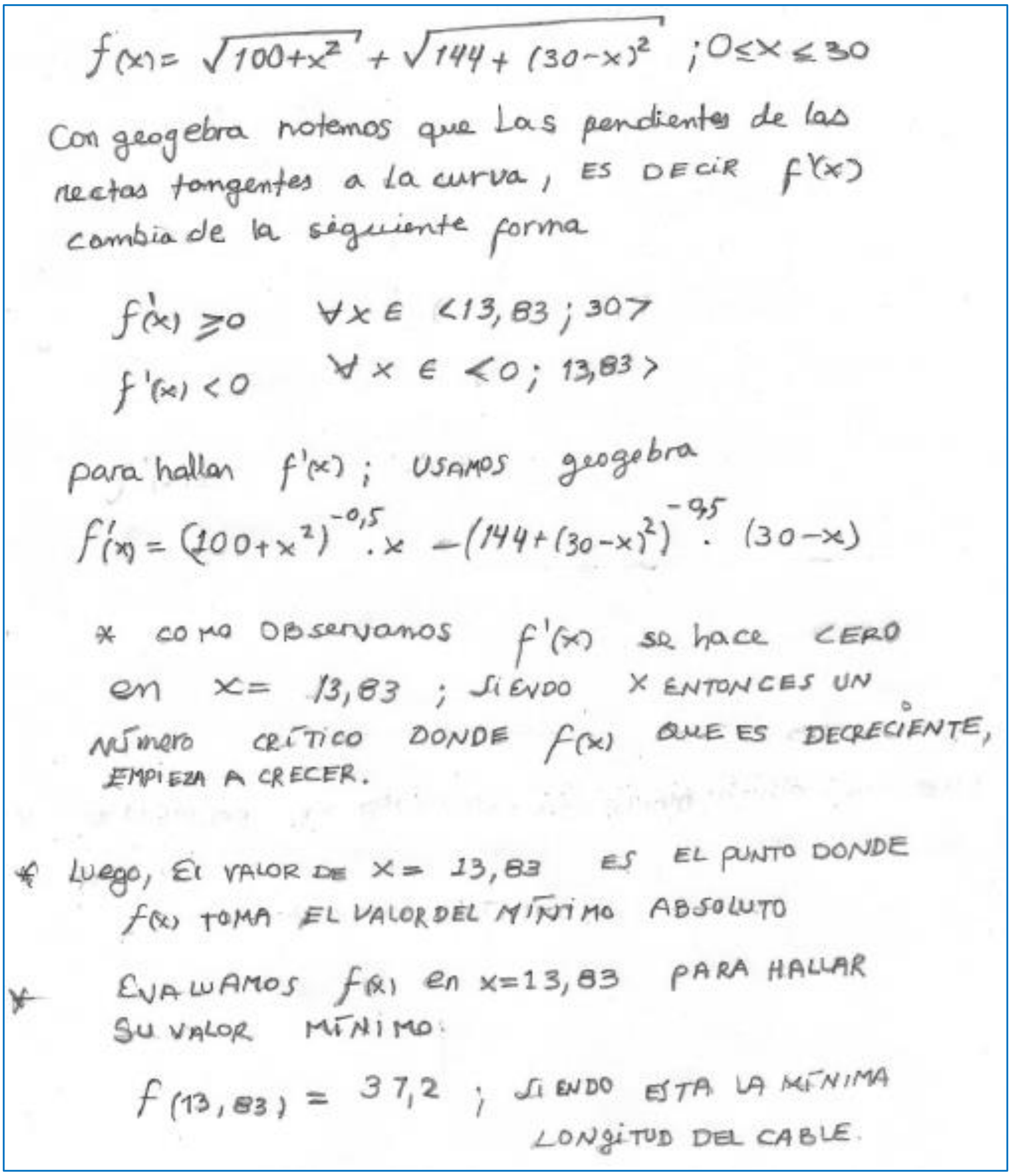


Figura 41. Respuesta para el quinto ítem del estudiante A.

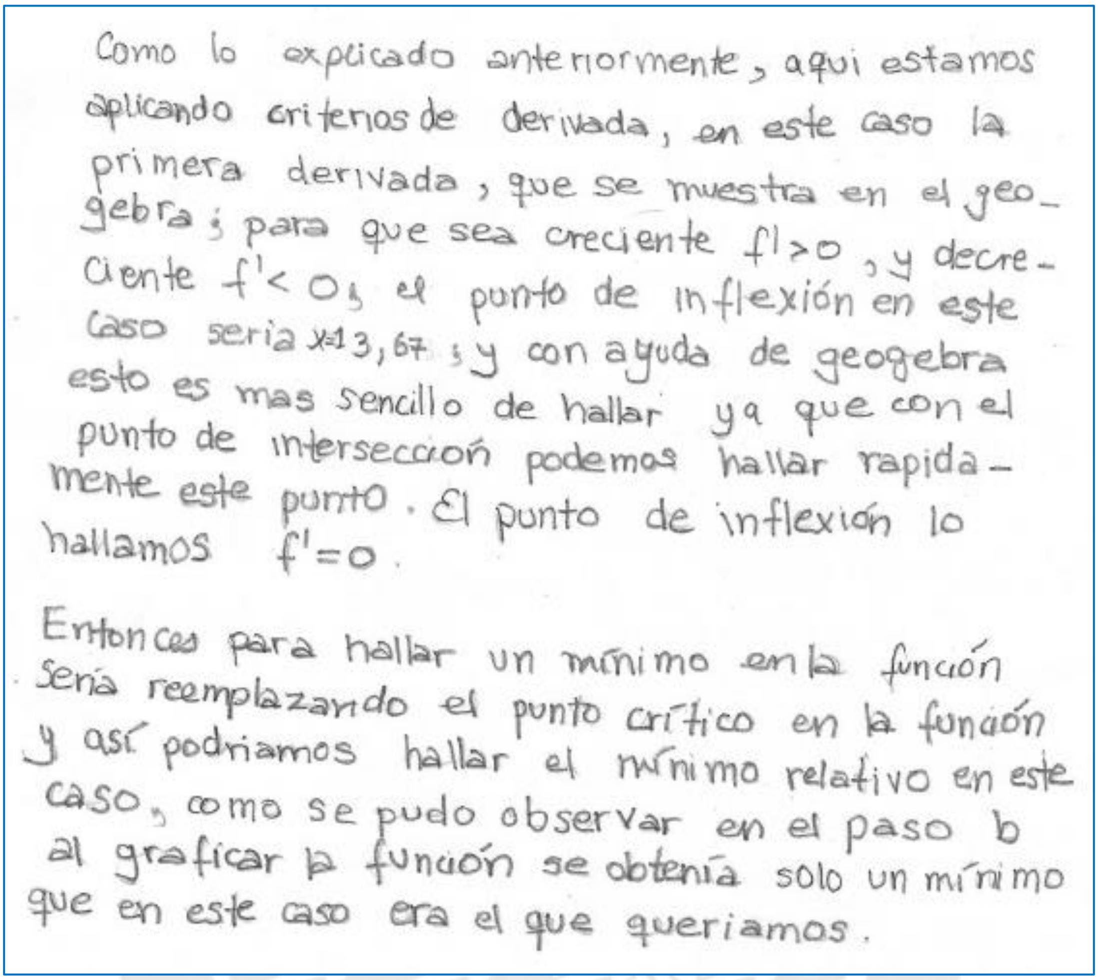
De la figura anterior se observa que el estudiante A llega a justificar que la longitud mínima del cable es 37,2, para ello indica que usa el Geogebra, es decir usa el registro gráfico, para determinar que $f'(x) \geq 0$, para todo $x \in \langle 13{,}83; 30\rangle$ y $f'(x) \leq 0$, para todo $x \in \langle 0;\ 13{,}83\rangle$, y además indica que en 13,83 la derivada se hace cero, por tanto $x = 13{,}83$ es un número crítico, por ello en este valor la función tiene un mínimo absoluto y que al evaluar la función en dicho valor resulta que $f(13{,}83) = 37{,}2$, por ende 37,2 es la longitud mínima del cable (ver Figura 41).

Por lo descrito, se concluye que el estudiante A moviliza el concepto de derivada en el registro gráfico para hallar el mínimo de la función y además da su justificación en lengua natural de su proceso, por tanto hasta este último ítem se nota una mejora en cuanto a la coordinación de registros con respecto a los primeros ítems, aunque también se nota algunas deficiencias en la formalidad matemática, como por ejemplo en los intervalos de crecimiento y decrecimiento considera intervalos abiertos, pues deberían ser semi abiertos, como los indicados en los resultados esperados, también cuando indica que en $x = 13{,}62$ se da el mínimo absoluto no justifica porqué o que criterio usa para afirmar lo mencionado, pues se esperaba que use el criterio de la primera derivada o el método del intervalo cerrado para dicho fin, sin embargo ello no afecta a que la respuesta sea correcta ya que no habían más puntos críticos.

Estudiante B

Al analizar la ficha del estudiante B se observa que este estudiante indica que la función f es creciente cuando $f'(x) > 0$ y es decreciente cuando $f'(x) < 0$, tal como los había explicado en el ítem anterior, por ello ya no indica cuales son los intervalos de crecimiento y decrecimiento, luego el estudiante indica que con ayuda del Geogebra identifica el punto de inflexión que es $x = 13{,}67$, pues en este valor la derivada es cero y esto lo hizo usando la herramienta intersección del Geogebra (ver Figura 40), lo cual evidencia que este estudiante hace tratamientos en el registro gráfico, aunque aquí podemos notar una confusión del estudiante, pues en primer lugar $x = 13{,}67$ no es un punto y en segundo lugar en dicho valor de x no habría punto de inflexión, sino de acuerdo a la formalidad matemática sería un número crítico y por ende habría un extremo relativo de la función.

Siguiendo en el análisis de la respuesta del estudiante líneas más abajo (ver Figura 40) indica que para hallar el mínimo de la función reemplaza el punto crítico en la función y el valor obtenido sería un mínimo relativo, pero además indica que como en la gráfica del paso b (ítem *b)*) había un solo mínimo, entonces ese es el mínimo que se quiere, se cree que el estudiante quería decir que es el mínimo absoluto.



Como lo explicado anteriormente, aqui estamos aplicando criterios de derivada, en este caso la primera derivada, que se muestra en el geogebra; para que sea creciente $f'>0$, y decreciente $f'<0$; el punto de inflexión en este caso seria $x=13,67$; y con ayuda de geogebra esto es mas sencillo de hallar ya que con el punto de intersección podemos hallar rapidamente este punto. El punto de inflexión lo hallamos $f'=0$.

Entonces para hallar un mínimo en la función sería reemplazando el punto crítico en la función y así podriamos hallar el mínimo relativo en este caso, como se pudo observar en el paso b al graficar la función se obtenía solo un mínimo que en este caso era el que queriamos.

Figura 42. Respuesta para el quinto ítem del estudiante B.

Finalmente se comenta que este estudiante hace tratamientos y conversiones entre los diferentes registros de representación semiótica para justificar su respuesta en el registro en lengua natural, además moviliza el concepto de derivada en su proceso, pero cometió algunos errores en cuanto a la formalidad matemática, sin embargo su proceso está dentro de los resultados esperados, con la excepción que no justifica porque en $x = 13{,}67$ se da el mínimo absoluto.

Análisis del segundo problema de optimización

Este problema tiene como finalidad analizar la coordinación entre los registros de representación semiótica que realiza un estudiante de ingeniería cuando resuelve el problema de optimización planteado, en el que es indispensable movilizar el concepto de derivada de funciones reales de variable real, es decir tiene el mismo objetivo que el primer problema de optimización, pero a diferencia del primero solo se presenta al estudiante el enunciado del problema de optimización y en un único ítem se le pide que resuelva dicho problema con ayuda del Geogebra, pues se cree que como en el primer problema de optimización ya se dió una serie de ítems que orientan a seguir un procedimiento en el cual se involucra el concepto de derivada, entonces los estudiantes ya están en la capacidad de resolver cualquier problema de optimización movilizando dicho concepto y usando el Geogebra. Además, en la ficha del problema se da una sugerencia al estudiante que use una vista algebraica 2 del Geogebra para graficar la derivada de la función, y también se da una nota para que el estudiante guarde el archivo de Geogebra en el escritorio de la computadora con la sintaxis Problema2_Apellido, para mayores detalles ver el Anexo 3.

La resolución del segundo problema de optimización fue mucho más rápido que la del primer problema de optimización, pues los estudiantes terminaron en aproximadamente 20 minutos, y se inició entregando la ficha a los estudiantes, y se les indicó que tenían que resolver el problema planteado siguiendo un proceso similar al del primer problema de optimización, también se les indicó que apunten todas las justificaciones y/o procedimientos que realicen, a pesar de que estaba en una nota escrita en la ficha, también se les indicó que al finalizar su resolución guarden su archivo Geogebra en el escritorio de la computadora.

A continuación, se muestra el segundo problema de optimización planteado y el único ítem propuesto con su respectivo análisis de los resultados esperados y su análisis de los resultados logrados por los dos estudiantes elegidos, los cuales son los mismos que fueron elegidos para el análisis del primer problema de optimización.

Segundo problema de optimización

Se requiere construir un oleoducto desde una plataforma marina que está localizada a 20 km al oeste mar adentro, hasta unos tanques de almacenamiento que están en la playa a unos 15 km al norte. Si el costo de construcción de cada km de oleoducto en el mar es de 2 millones de dólares y en tierra es de 1 millón de dólares ***¿a qué distancia hacia el norte debe salir el oleoducto submarino a la playa para que el costo de la construcción sea mínimo?***

El único ítem se muestra a continuación.

Ítem único

a) *Resolver el problema planteado con ayuda del Geogebra.*

Sugerencias: *Si desea representar la derivada de una función f en el Geogebra, hágalo en la vista gráfica 2 del Geogebra, y para ello escriba el comando Derivada(f) en la barra de entrada.*

Como ya se mencionó en párrafos anteriores, en este problema no se da una serie de ítems como en el primer problema de optimización, pues solo se pide al estudiante que resuelva el problema planteado con ayuda del Geogebra, por tanto el estudiante puede seguir una secuencia similar a la que hizo en la resolución del primer problema, o quizá use otra forma o método de resolver pero eso si con ayuda del Geogebra y movilizando el concepto de derivada, por tanto debe coordinar registros de representación semiótica.

Por ello, se espera que primero el estudiante determine una expresión matemática (una función) que modele el problema de optimización, luego lo represente en el Geogebra y comprenda lo que representa en el contexto del problema, luego debe representar la derivada de f en la vista gráfica 2 del Geogebra y posteriormente usarlo para determinar los extremos de una función real de variable real haciendo uso de algún método relacionado con las derivadas para hallar dichos extremos y, finalmente debe responder la pregunta planteada en el problema.

Durante el desarrollo del segundo problema de optimización se notó que en primer lugar los estudiantes realizaron una representación figural del problema aunque en algunos estudiantes se notó algunas dificultades pues no lograban interpretar adecuadamente el problema, pero luego el profesor dio algunas pautas, lo cual sirvió para que los estudiantes comprendan el contexto del problema, y finalmente pudieron definir la función que modela sin ninguna dificultad, aunque al igual que en el primer problema algunos estudiantes no consideraban la restricción de la función.

Por otro lado, la profesora observadora indica en la ficha de observación que los estudiantes grafican un caso de la situación, es decir hacen una representación figural, y definen la variable independiente tomando de referencia el gráfico, luego establecen la función objetivo; es decir, la función que modela al problema y la ingresan al Geogebra, considerando la restricción del dominio, además manifiesta que de todos los estudiantes participantes usan dos vistas graficas del Geogebra, tal como fue sugerido, excepto un estudiante que en una sola vista gráfica ingreso la función y su derivada.

A continuación, se analiza que hizo cada estudiante para llegar a la solución del problema y que registros de representación semiótica coordinó para llegar a dicha solución.

➢ Estudiante A

Al revisar la ficha del estudiante A se puede notar que primero hizo una representación figural del problema, indicando en dicha representación la variable, y además lo definió en lengua natural, luego en base a su representación figural, previo tratamiento algebraico, determina una representación algebraica para el costo de construcción del oleoducto, indicando su respectivo dominio (ver Figura 43).

Lo hecho por el estudiante nos indica que pasó del registro en lengua natural al registro figural y registro algebraico, además hubo una coordinación entre dichos registros.

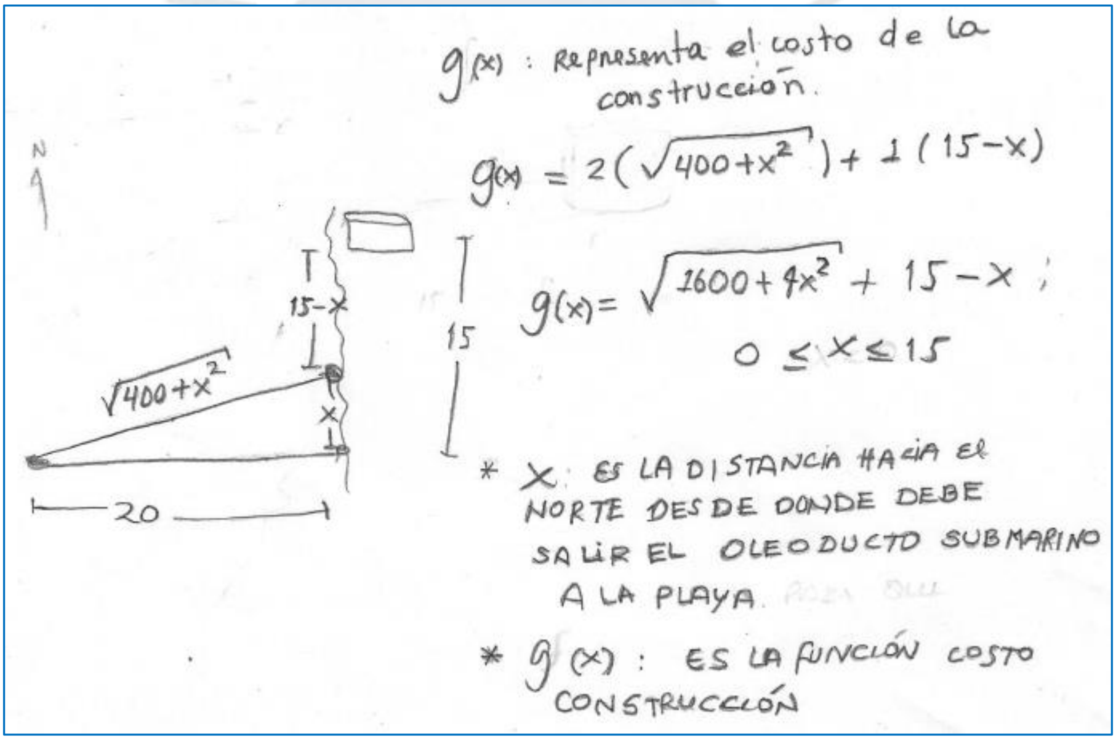


Figura 43. Determinación de la función que modela al problema del estudiante A.

Una vez determinada su función el estudiante ingresa la función al Geogebra y hallar su derivada en una vista gráfica 2 del Geogebra e identifica el punto de intersección con el eje X, lo cual representaría su valor crítico, luego en base a ello identifica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, como se puede ver en la Figura 44, lo que nos indica que este estudiante realiza tratamientos en el registro gráfico, luego indica que en

$x = 11{,}55$ se da el mínimo de la función, en seguida evalúa este valor en la función, obteniendo que $g(11{,}55) = 49{,}64$ y responde en lengua natural que el costo mínimo de construcción es 49,64 millones de dólares y el oleoducto debe salir a una distancia de 11,55 km al norte, por tanto el estudiante coordinó los registros en lengua natural, figural y algebraico.

EN LA GRÁFICA DE $g'(x)$ EN LA VISTA GRÁFICA 2 NOTAMOS QUE

$$g'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in \langle 11{,}55 ; 15 \rangle$$
$$g'(x) < 0 \quad \forall\, x \in \langle 0 ; 11{,}55 \rangle$$

POR TANTO COMO EN

* $x < 11{,}55$; $g(x)$ DECRECE y EN $x \geq 11;55$ $g(x)$ CRECE, CONCLUIMOS QUE

EN $x = 11{,}55$ SE DA EL EXTREMO MÍNIMO

* EVALUANDO $g(x)$ EN $x = 11{,}55$

$$g(11{,}55) = 49{,}64$$

ENTONCES ESTE ES EL VALOR MÍNIMO ABSOLUTO

POR TANTO EL COSTO MÍNIMO ES 49,64 MILLONES DE DÓLARES

* Y LA DISTANCIA HACIA EL NORTE DESDE DONDE DEBE SALIR EL OLEODUCTO ES 11,55 km.

Figura 44. Proceso en el cual el estudiante A determina la solución del segundo problema.

Por lo descrito, se concluye que este estudiante realizó tratamientos en el registro gráfico, movilizando el concepto de derivada para hallar el mínimo de la función, y además dio una respuesta correcta en lengua natural, por tanto el estudiante coordinó los registros en lengua natural, figural, algebraico y gráfico, lo cual indica que los resultados esperados por el investigador se han satisfecho, y que el primer problema de optimización sirvió para que el estudiante se apodere de un proceso de resolución usando el Geogebra y movilizando el concepto de derivada.

- **Estudiante B**

Al igual que el estudiante A, se puede observar de la Figura 45 que el estudiante B también hace una representación figural del problema planteado y en base a ello define la función que modela al segundo problema de optimización, es decir la función que representa al costo de construcción del oleoducto, definiendo su variable en lengua natural y la restricción para dicha variable.

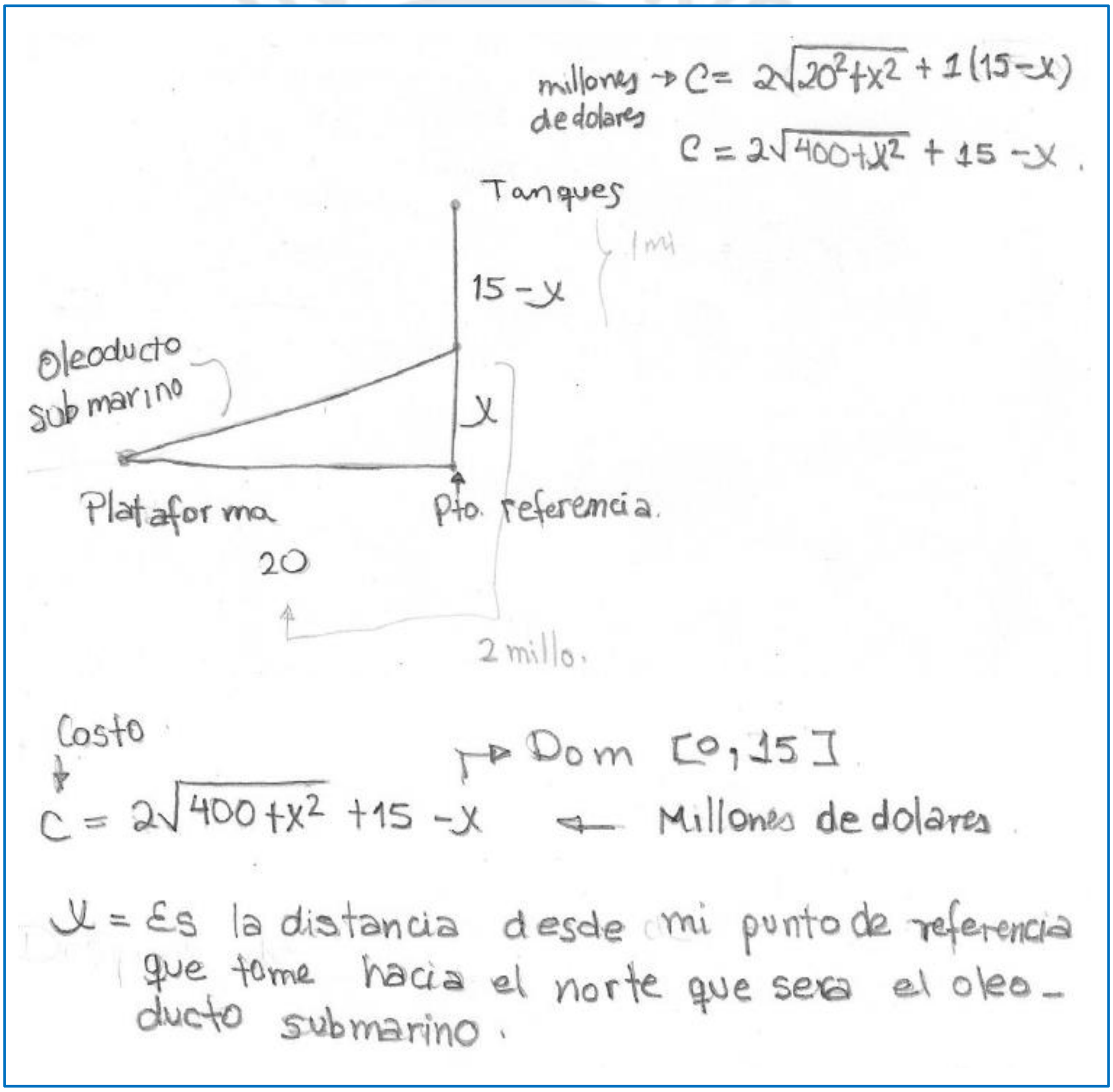


Figura 45. Determinación de la función que modela al problema planteado del estudiante B.

Luego, se revisa el archivo Geogebra del estudiante y se observa en el protocolo de construcción que primero ingresa la función, luego halla la derivada usando el Geogebra en una vista gráfica 2, y en seguida halla el punto de intersección del eje X con la gráfica de la derivada, y en su ficha indica que este punto es el punto crítico, pues la derivada de la función en dicho punto es cero; además, en el registro gráfico identifica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, lo cual nos indica que realizó tratamientos en el registro gráfico y coordinó con el registro en lengua natural ya que redacta su respuesta de forma correcta en este registro, como se puede en la siguiente figura.

Despues de realizar las gráficas de la función y de su derivada, podemos obtener el mínimo costo; despues de analizar la gráfica siendo decreciente en el intervalo de $\langle 0; 11{,}55\rangle$ $(f'<0)$ y creciente $\langle 11{,}55; 15\rangle$ y obteniendo el punto crítico que es $x = 11{,}55$ $(f'=0)$ podemos decir que el mínimo se encuentra en $x = 11{,}55$ y que el costo mínimo sería 49,64 millones de dólares.

Figura 46. Proceso del estudiante B para determinar la solución del problema planteado.

Luego, se puede decir que si bien en el primer problema de optimización estos estudiantes tenían dificultades, en la coordinación de registros de representación semiótica, tal como fue descrito en el análisis del primer problema, en el segundo problema de optimización dichas dificultades fueron superadas, y por ende el primer problema de optimización favoreció para alcanzar dicho objetivo.

Por lo tanto, se concluye que los problemas de optimización elaborados para la investigación favorecen la coordinación de registros de representación semiótica al resolver dichos problemas con ayuda del Geogebra.

CONSIDERACIONES FINALES

En la enseñanza de las derivadas y sus aplicaciones, entre estas aplicaciones la resolución de problemas de optimización, se suele enseñar de manera algorítmica, dando mayor relevancia al registro algebraico, por tal motivo estudiantes de ingeniería presentan dificultades al momento de resolver este tipo de problemas; por ello nos planteamos realizar esta investigación, para analizar la coordinación de registros de representación semiótica en estudiantes de ingeniería cuando resuelven problemas de optimización con ayuda del Geogebra.

Es así que para nuestra investigación creímos pertinente usar aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica, con esta teoría se pudo analizar las acciones de los estudiantes cuando resuelven un problema de optimización con ayuda del Geogebra. Además, se usó aspectos del estudio de caso para orientar la investigación, pues esta metodología nos permitió organizar la información obtenida de las diferentes fuentes de recolección de datos y realizar la triangulación de la información durante el análisis de los problemas de optimización resueltos por los estudiantes.

Después de llevar a cabo la parte experimental de la investigación y de realizar los análisis de los problemas de optimización, se obtuvo los siguientes resultados:

La prueba diagnóstico nos indicó que los estudiantes están más familiarizados con el registro algebraico que con el registro gráfico, pues en las preguntas que implicaban hacer algún cálculo respondieron correctamente, mientras que en las preguntas de interpretación en el registro gráfico algunos estudiantes fallaron.

También, de las observaciones durante la aplicación de la parte experimental se puede afirmar que los estudiantes tienen dificultades al momento de plantear la función objetivo que modela a un problema de optimización, poniéndose de manifiesto lo evidenciado en las investigaciones de Baccelli et al. (2013) y Encinas et al. (2013).

Luego de realizar el análisis de los problemas de optimización, con respecto a la afirmación anterior, se puede concluir que la principal dificultad de los estudiantes, por la cual tienen falencias para definir la función objetivo que modela al problema de optimización, es que no logran coordinar registros de representación semiótica, específicamente los registros en lengua natural, figural, algebraico.

Se identificó que los estudiantes cuando resuelven un problema de optimización con ayuda del Geogebra movilizan el registro en lengua natural, figural, algebraico y gráfico, además realizan tratamientos y conversiones en dichos registros, sin embargo no los coordinan.

En el primer problema de optimización se identificó que los estudiantes tienen dificultades para plantear la función que modela al problema de optimización, tal como ya fue manifestado en párrafos anteriores; también, se identificó que una vez que los estudiantes tienen el problema de optimización en el registro gráfico movilizan el concepto de derivada haciendo uso del Geogebra, sin embargo tienen dificultades al coordinar el registro gráfico con el registro en lengua natural, pues esto se evidencia al momento de revisar la justificación y/o argumentación que dan los estudiantes a las preguntas que implicaban usar el registro gráfico para dar una respuesta.

Respecto a nuestra pregunta de investigación, se concluye que los problemas de optimización si favorecen la coordinación de registros de representación semiótica en estudiantes de ingeniería, específicamente la coordinación entre los registros en lengua natural, figural, algebraico y gráfico, esto se afirma ya que en el segundo problema de optimización se notó una mejoría en cuánto a la coordinación de los registros mencionados, pues los estudiantes hicieron tratamientos y conversiones entre dichos registros logrando determinar la solución de dicho problema con menor intervención del docente investigador con relación al primer problema de optimización, lo cual también permitió que los estudiantes determinaran la solución del problema en un menor tiempo.

Finalmente, se recomienda en el futuro investigar sobre problemas de optimización ya que es de vital importancia en las ciencias básicas, ingenierías, administración, economía, etc., pues en la vida cotidiana siempre se trata de encontrar la mejor solución posible u óptima a algún problema o situación; es decir, siempre nos enfrentamos a problemas de optimización; y más aún si se trabaja con un ambiente de representaciones dinámicas como es el Geogebra, ya que este favorece realizar tratamientos en el registro gráfico.

Por otro lado, ya que antes de presentar los problemas de optimización se dio algunas pautas sobre el uso del Geogebra, se observó que los estudiantes tienen habilidades para aprender rápidamente el uso de este software, por ello y teniendo en cuenta que en la actualidad se cuenta con alumnos digitales; es decir, que han nacido en la era de la tecnología, se recomienda que se debe aprovechar esta situación para innovar la enseñanza de las matemáticas haciendo uso de ambientes de representaciones dinámicas como el Geogebra, Cabri, Mathematica, entre otros softwares, pues estos ayudan a un mejor entendimiento e interpretación de las matemáticas y favorecen los tratamientos y conversiones en los registros figural, algebraico y gráfico.

Por ello, también se recomienda que las instituciones de educación superior implementen en sus aulas equipos multimedia y deben promover el uso de softwares de representaciones dinámicas para la enseñanza del Cálculo y en general para cualquier curso de matemáticas ya que esto favorecería la coordinación de registros de representación semiótica y por ende un mejor entendimiento de las matemáticas por parte de los estudiantes, evitando que la enseñanza de esta materia se convierta solo en procesos algorítmicos que en muchos casos carecen de significado para los estudiantes, pues no ven aplicación alguna en la vida cotidiana. Para tal objetivo los profesores deben capacitarse en el uso de softwares de representación dinámica.

Por otro lado se recomienda que los problemas de optimización planteados en esta investigación sean aplicados por otros profesores en clases, también se pueden implementar otros problemas con más riqueza matemática con la finalidad de movilizar los conceptos relacionados con la derivada para resolver problemas de optimización, favoreciendo la coordinación de registros de representación semiótica.

Una vez finalizado este trabajo se comenta que se dejan abiertas otras posibilidades de investigación en el futuro respecto a nuestro tema de investigación, ya que se considera que este trabajo se puede enriquecer y complementar con otros trabajos de investigación, sugerimos algunas ideas para futuras investigaciones:

Estudiar la instrumentalización del concepto de derivada de funciones reales de variable real cuando estudiantes de ingeniería resuelven problemas de optimización con el uso del Geogebra o usando otros ambientes de representaciones dinámicas, movilizando dicho concepto.

Ampliar la siguiente investigación pero para analizar las dificultades que presentan estudiantes de ingeniería cuando resuelven problemas que impliquen optimizar, es decir hallar máximos y mínimos, de funciones de varias variables movilizando el concepto de derivadas parciales.

Analizar las dificultades que presentan los estudiantes de ingeniería cuando resuelven problemas de optimización, usando otros marcos teóricos, ya que pueden proporcionar otras herramientas teóricas para entender porque los estudiantes tienen falencias al momento de resolver problemas de optimización movilizando el concepto de derivada.

Realizar investigaciones similares a esta investigación pero aplicado en estudiantes de otras carreras, en las cuales también es importante comprender el concepto de optimización de funciones reales de variable real movilizando el concepto de derivada, como por ejemplo en estudiantes de economía, administración, matemática, física, entre otras carreras.

REFERENCIAS

Baccelli, S., Anchorena, S., Figueroa, S., & Prieto, G. (2012). Análisis de un problema de optimización desde el enfoque ontosemiótico. Obtenido de https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10189/10841

Baccelli, S., Anchorena, S., Figueroa, S., & Prieto, G. (2014). Problemas de optimización: un análisis en la construcción de significados. *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*. Obtenido de www.oei.es/historico/congreso2014/memoriactei/1119.pdf

Baccelli, S., Anchorena, S., Moler, E., & Aznar, M. (2013). Análisis exploratorio de las dificultades de alumnado de Ingeniería en la resolución de problemas de optimización. *NÚMEROS, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 84*, 99-113. Obtenido de http://dipmat.math.unipa.it/~grim/QRDM_20_suppl1_Guzman_al.pdf

Borba, M. (2004). A pesquisa qualitativa em Educação Matemática. *CD nos Anais da 27ª reunião anual da Anped, Caxambu, MG*.

Boyer, C. (1968). *A history of mathematics.* John Wiley & Sons, Inc.

Bustos, L., & Vásquez, J. (2016). *Uso del software Carmetal para potenciar el aprendizaje de la noción de derivada al resolver problemas de optimización.* Obtenido de http://repository.udistrital.edu.co/handle/11349/2686

Cuevas, A., Rodríguez, A., & González, O. (2014). Introducción al concepto de derivada de una función real con apoyo de las tecnologías digitales. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.*, 2335-2345. Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/6205/

Dörrie, H. (1965). *100 Great problem of elementary mathematics: Their history and solution.* New York: Dover Publications, Inc.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano.* (M. Vega, Trad.) Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2012). *Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento.* (M. Thadeu, Trad.) Florianópolis, Brasil.

Encinas, A., Ávila, R., & De Las Fuentes, M. (2013). Eficacia en la resolución de problemas de optimización por estudiantes de ingeniería. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.*, 663 - 671.

Gallego, L., & Aldana, E. (2013). Análisis de la concepción de la actividad de optimizar, desde una ingeniería didáctica. Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/6630/1/Aldana2013Analisis.pdf

Guzmán, I., Ortega, L., Tapia, X., Rodriguez, N., & Perez, L. (2010). La apropiación de los criterios de optimización en Cálculo Diferencial de estudiantes de carreras no matemáticas. Obtenido de http://dipmat.math.unipa.it/~grim/QRDM_20_suppl1_Guzman_al.pdf

Leithold, L. (1998). *El Cálculo* (7 ed.). Oxford University Press - Harla México, S.A. de C.V.

Malaspina, U. (2008). *Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización. Un análisis desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática.* Obtenido de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/7485

Malaspina, U. (2012). Resolución de problemas y estímulo del pensamiento optimizador en la educación básica. *Tópicos Educacionais, 18*(1 - 2), 176 - 200.

Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso: estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento y Gestión, 20*, 165-193. Obtenido de http://www.redalyc.org/pdf/646/64602005.pdf

Navarro, L., Robles, A., Ansaldo, J., & Castro, F. d. (2016). Secuencia didáctica apoyada en tecnología para la construcción del concepto derivada en problemas de optimización. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 46*, 171-187. Obtenido de http://www.asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/article/view/32

Otero, D. (2012). Propuesta de intervención en el aula para resolver problemas de optimización relacionados con la minimización de costos, implementando como apoyo el software Geogebra. Obtenido de http://repository.pedagogica.edu.co/xmlui/handle/123456789/132

Ponte, J. (2006). Estudos de Caso em Educação Matemática. *Boletim de Educação Matemática, 25*.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable trascendentes tempranas* (7 ed.). México: Cengage Learning.

ANEXOS

Anexo 1

PRUEBA DIAGNÓSTICO

Estudiante:...

1. Dada la función:

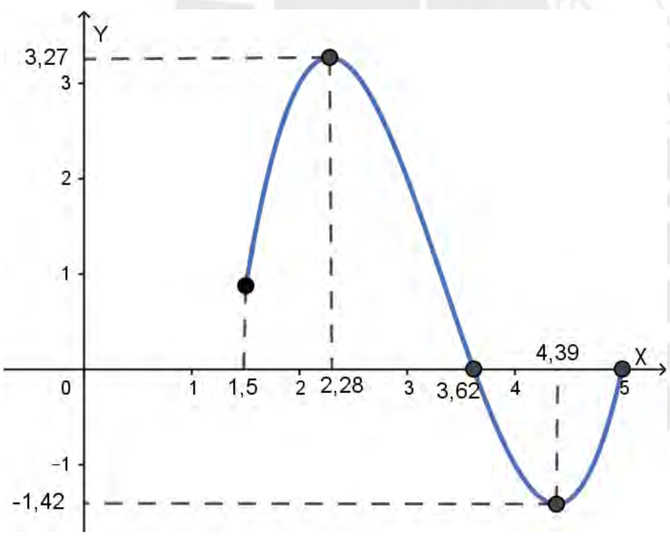
$$f(x) = \sqrt{(3 + 2x)^2 + 5}$$

   a) Hallar la derivada de la función f.

   b) Hallar los números críticos de la función f.

2. Dada la gráfica de una función g.

   Determine lo siguiente:



a) El dominio de la función g.

b) Intervalo donde la función g es positiva.

c) Intervalo donde la función g es negativa.

d) Los ceros de la función g.

e) El mínimo absoluto y relativo de la función g.

f) El máximo absoluto y relativo de la función g.

Anexo 2

PRIMER PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

Estudiante: ....

Problema adaptado de Haro F. (2013).

Dos postes de 10 m y 12 m distan entre sí 30 m. Se desea tender un cable que una un punto del suelo (ubicado entre los postes) con los extremos superiores de los postes.

De acuerdo a la información dada:

a) Determine la expresión matemática que modela la longitud del cable, en función de la distancia de uno de los postes al punto donde se debe fijar el cable.

Sugerencia: Puede representar geométricamente el problema para determinar la expresión matemática pedida.

b) Con ayuda del Geogebra represente gráficamente la función definida en el ítem a). Después, con la herramienta "punto en objeto" ubique un punto sobre la representación gráfica de la función, luego arrastre dicho punto e identifique sus respectivas coordenadas.

¿Qué indican los valores de las coordenadas del punto A en el contexto del problema? Explique.

c) En base a la representación gráfica anterior:

¿Dónde se debe ubicar el punto sobre el suelo para fijar el cable de tal modo que su longitud sea mínima? Explique detalladamente.

d) Abra el archivo **Función.ggb** y arrastre el punto A ubicado sobre la gráfica de *f* y en base a su observación, responda:

i. *¿En qué intervalo la función crece? Explique.*

ii. *¿En qué intervalo la función decrece? Explique*

e) En base al ítem anterior y con ayuda del Geogebra muestre matemáticamente lo explicado en el ítem c).

Anexo 3

SEGUNDO PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

Estudiante: ....

Se requiere construir un oleoducto desde una plataforma marina que está localizada a 20 km al oeste mar adentro, hasta unos tanques de almacenamiento que están en la playa a unos 15 km al norte. Si el costo de construcción de cada km de oleoducto en el mar es de 2 millones de dólares y en tierra es de 1 millón de dólares ***¿a qué distancia hacia el norte debe salir el oleoducto submarino a la playa para que el costo de la construcción sea mínimo?***

a) Resolver el problema planteado con ayuda del Geogebra.
   Sugerencias: Si desea representar la derivada de una función f en el Geogebra, hágalo en la vista gráfica 2 del Geogebra, y para ello escriba el comando Derivada(f) en la barra de entrada.

Nota: Guarde su archivo Geogebra que use para el desarrollo de este problema en el escritorio de la computadora.

Anexo 4

Ficha de Observación 1

Nombres y apellidos del observador:…………………………………………………………...

Tiempo de observación:…………………………………………………………………………

Fecha:…………….

---

1. Describa las acciones que realiza los estudiantes de manera secuencial durante el desarrollo del problema.

2. Centrarse especialmente en las acciones que siguen los estudiantes para determinar la expresión matemática que modela a la longitud del cable.

3. Detallar las dificultades observadas en las acciones de los estudiantes durante el desarrollo del problema.

4. Anote los aspectos relevantes de su observación.

Gracias.