PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE GRADUADOS

ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

"UN ESTUDIO SOBRE LAS CONCEPCIONES DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN DESDE LA PERSPECTIVA DE LA TEORÍA APOS"

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas.

Presentado por : CERAPIO NICÉFORO QUINTANILLA CÓNDOR.

Asesora : CECILIA GAITA IPARRAGUIRRE

Jurados : Dr. Uldarico Malaspina Jurado

Mg. Francisco Ugarte Guerra

Mg. Cecilia Gaita Iparraguirre

LIMA, PERÚ

2009

DEDICATORIA

A mi padre Máximo Quintanilla Quispe (en memoria), quien me impulsó a continuar con mis estudios también me enseñó los verdaderos valores de la vida.

Mi eterno cariño

AGRADECIMIENTOS

A la *profesora Magíster Cecilia Gaita Iparraguirre*, mi asesora, por la paciencia y dedicación que tuvo durante el desarrollo de este trabajo. Querida profesora, agradezco por todo el apoyo brindado en esta extensa jornada de conducción por el camino de la investigación.

A mi esposa, *Vilma*, por entenderme y por la paciencia que tuvo durante los momentos difíciles que pasé para concluir este trabajo. Te agradezco por tu cariño y comprensión permanente.

A mis hijos *Kenny* y *Max* por su comprensión a la entrega del desarrollo del trabajo, descuidando su formación.

A *mi familia*, en especial a *mi madre y hermanos* por el apoyo e incentivo que me dieron durante el desarrollo de mis estudios.

A los profesores de la *Escuela de Graduados de Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú*, que me permitieron aprender el verdadero papel de un educador matemático.

A *CONCYTEC* por la ayuda financiera brindada durante mis estudios de maestría.

A los alumnos que participaron con mucho empeño en la realización de este trabajo.

A Júber Gavidia A. y a Álvaro Camposano C. por la ayuda en la revisión del trabajo.

El autor

RESUMEN

El objetivo del trabajo fue investigar las concepciones que poseen los estudiantes universitarios sobre el concepto de *función*. El estudio fue realizado con 16 estudiantes del VIII y X ciclo de la Especialidad de Matemática – Física de la Facultad de Educación en la Universidad Nacional de Huancavelica. El diseño de investigación y el análisis de los datos tienen un carácter cualitativo, basado en la Teoría APOS, desarrollada por el grupo RUMEC y liderada por Ed Dubinsky; asimismo, muestran los niveles de constructos mentales que los estudiantes poseían antes y después de la investigación.

Para alcanzar el objetivo propuesto, se trabajó en tres momentos: 1) En el *análisis teórico* desde la perspectiva de la Teoría APOS, que consistió en diseñar la descomposición genética de función y las situaciones tomadas como prueba de entrada; 2) En el diseño e implementación del *tratamiento instruccional*, etapa que comprendió en la elaboración de actividades para desarrollar el ciclo ACE (actividades con el programa ISETLW, discusión en clases y ejercicios) y su ejecución respectiva, donde los estudiantes participaron en equipo (trabajo cooperativo de 2 estudiantes por equipo); 3) En la *recolección y análisis de los datos*: la primera consistió en extraer los datos de la prueba de entrada y de salida, así como de la entrevista, y la segunda consistió en contrastar los datos de la entrevista con las pruebas de dos estudiantes.

Luego de este análisis, se comprobó cierta modificación en el nivel de constructo mental desarrollados por los estudiantes respecto al concepto de función. De esta forma, se verifica cómo la Teoría APOS permite identificar las concepciones que los estudiantes poseen acerca de un determinado tópico o tema.

Palabras claves: función, Teoría APOS, constructos mentales, descomposición genética.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

El sistema educativo peruano ha sufrido diversos cambios de acuerdo a los gobiernos de turno; de esta forma, se han introducido en este proceso, diversos nombres, tales como constructivismo, nuevo enfoque pedagógico, entre otros. Al respecto, los críticos han tratado de cuestionar estos cambios por los resultados que han generado y por la influencia política que han sufrido al ejecutarse. Asimismo, se considera que esta situación ha agudizado el problema educativo en sus diferentes niveles. Así, en el sistema universitario, los resultados son estudiantes con serias deficiencias académicas.

En este contexto, el aprendizaje y la enseñanza de la matemática (en las diferentes etapas de la educación) se han convertido en un tema de preocupación para los docentes e investigadores de este campo. La didáctica de la matemática es la disciplina que se interesa en resolver estas situaciones educativas, pues tal como refiere Godino (2006), esta estudia e investiga los problemas que surgen en la Matemática Educación y propone intervenciones fundadas para su transformación. Asimismo, (Brousseau, 1989, citado en Godino, 2006) define a la didáctica de la matemática como “una ciencia que se interesa por la producción y comunicación de los conocimientos matemáticos, en los que esta producción y esta comunicación tienen de específicos de los mismos” (p. 7).

En la década de l990, se iniciaron, en los Estados Unidos, investigaciones ligadas a la enseñanza y aprendizaje de la matemática; específicamente, el concepto de función fue ampliamente investigado y reportado por los especialistas, tales como Dubinsky y Harel (1992); Yerushalmy y Schwars (1993); David Tall, Mercedes McGowen y Phil DeMarois (1996); Daniel Breidenbach, et ál., (1992). Al respecto, Breidenbach, D., et al (1992) manifiestan que los estudiantes universitarios que han tomado un número de cursos de matemáticas aún no tienen una comprensión adecuada del concepto de función. Precisamente, este concepto es esencial en el aprendizaje de las matemáticas y tuvo un mayor enfoque de atención por la comunidad de investigadores en educación matemática en las décadas pasadas (DeMarois, McGowen y Tall, 1996). Asimismo, es importante en todos los niveles: “El concepto de función es uno de los conceptos fundamentales en matemáticas, y aparece en la primaria, secundaria y universidad” (Akkoç y Tall, 2003, p.1). Entonces, consideramos que el tema de funciones es el eje central en los procesos de aprendizaje de las matemáticas (análisis matemático o cálculo), por lo que se requiere diseñar situaciones que equilibren los diferentes acercamientos teóricos y metodológicos.

Por lo tanto, existe la necesidad de realizar un estudio de las concepciones sobre el concepto de función que poseen los estudiantes en nuestra universidad, quienes han llevado los cursos de Matemática Básica I y II, y Análisis Matemático I, II, y III. Por eso el trabajo de investigación consiste en el estudio de la concepción de las funciones en los estudiantes del nivel universitario de la especialidad de Matemática y Física bajo la perspectiva de la Teoría APOS. Los estudiantes que participaron en la investigación cursan el VIII y X ciclo, equivalente al 4to. y 5to. año de Facultad, en la Facultad de Educación de la Universidad Nacional de Huancavelica. Principalmente, la problemática que atiende el trabajo de investigación es identificar los niveles de los constructos mentales acerca del concepto de función (prefunción, acción y proceso).

De todo lo expuesto, surge la necesidad de plantearse las siguientes interrogantes:

- ¿Qué concepciones poseen los estudiantes de la especialidad de Matemática y Física, de la Universidad Nacional de Huancavelica respecto al concepto de función desde la perspectiva de la Teoría APOS?
- ¿Existen distintas concepciones respecto al concepto de función desde la perspectiva de la Teoría APOS en estudiantes de la especialidad de Matemática y Física de la Universidad Nacional de Huancavelica?

1.1. Antecedentes

Los antecedentes que enmarcan este trabajo de investigación son varios. Los más importantes son los trabajos realizados por Dubinsky y Harel (1992) en la Universidad de Purdue denominado “La naturaleza del proceso de concepción de función”, y el de Breidenbach, Dubinsky, Hawks y Nichols (1992), quienes escribieron la investigación “Desarrollo del proceso de concepción de función” con estudiantes universitarios de los primeros ciclos. Ambos proyectos son desarrollados desde la óptica de la Teoría APOS y son los pilares para el desarrollo del presente trabajo de investigación.

Además, se han tomado en cuenta las tesis de la maestría en Educación Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Sao Paolo de Brasil con referencia a funciones. Una de ellas es presentada por Coelho (2004), que cita a Dryfus y Vinner (1989, apud Kieran, 1992), quien dice: “En una investigación con Universitarios del curso de Matemática y profesores de enseñanza media se observó, que gran parte de los estudiantes no acertaban la definición ofrecida por la teoría de conjuntos del concepto de función enseñada en sus cursos de Matemática. En cambio, los profesores sí mostraron preferencia por la interpretación formal de la teoría de los conjuntos, es decir, como una correspondencia entre elementos de un dominio y codominio”. Asimismo, Coelho (2004) cita a Carneiro, Fantil e Silva (2003) en el estudio que realizaron en la Universidade Federal do Rio Grande do Soul con la intención de identificar y describir diferentes significados generados por los estudiantes en la noción de función. El resultado de la investigación se comenta en el siguiente párrafo: “Resulta que no se hace la relación entre transformación geométrica y función en las disciplinas de Geometría. Concluye, aunque la noción de función es considerada por los estudiantes como una correspondencia, asociación y relación, mas no como transformación". Estos trabajos presentan un estudio de carácter diagnóstico cuya intención fue investigar el conocimiento de los estudiantes universitarios acerca del concepto de función. Y en ellos se observa que su definición de función es difícil de comprender; y, algunas veces es considerada simplemente como una asociación o correspondencia entre objetos. La diferencia entre ambas investigaciones radica en trabajar con teorías diferentes; los trabajos mencionados fueron realizados desde la teoría de *Concepto imagen* y *Concepto definición* desarrollada por Tall y Vinner; en cambio, el presente trabajo se ha desarrollado bajo la perspectiva de la Teoría APOS (acción, proceso, objeto y esquema).

Otra tesis de maestría relevante es la de Brandao (2003), "Introducción al concepto de función: la importancia de la comprensión de las variables". En esta investigación se introdujo el concepto de función por medio de las variables dependientes e independientes y la relación entre ellas. También se revisó el aporte de Lourival Pereira Martins (2006) en "Análisis de la dialéctica herramienta-objeto en la construcción del concepto de función" en donde constata las dificultades presentadas por los alumnos en la utilización del concepto de función como herramienta en la resolución de problemas.

La tesis doctoral presentada en Australian Catholic University por Ronda (2004), "Una estructura que revela el desarrollo de los estudiantes en la comprensión del concepto de función", contribuye a enfocar el desarrollo y comprensión de los contenidos matemáticos y, particularmente, la comprensión del concepto de función en matemática.

Situaciones similares ocurren en nuestro medio con los estudiantes universitarios, por lo que consideramos importante emprender la presente investigación.

1.2. Perspectiva teórica

En el área de la didáctica de la matemática, como en la mayoría de las ciencias sociales, existen muchas teorías, cada una de las cuales explica de manera parcial algunos conceptos o fenómenos. Es muy difícil decir que una teoría es mejor que otra;

lo único que se puede afirmar es que, para algunos problemas, una teoría es más pertinente que otra o que una teoría presenta herramientas teóricas más útiles; por esa razón, la seleccionamos (Trigueros, 2005, p. 14). Siendo el trabajo de investigación de carácter cognitivo, se decidió por la Teoría APOS, dentro de la perspectiva cognitiva, pero con un paradigma distinto al tradicional. Dubisnky y Harel (1992), y Breidenbach, et al. (1992) realizan una extensión del análisis piagetiano de la percepción y de la inteligencia usando el marco teórico de la *abstracción reflexiva* mediante *acciones, procesos, objetos* y *esquemas* (APOS). Desde esta perspectiva, se considera que el conocimiento matemático de un individuo es su tendencia para responder lo percibido de una situación problemática en matemática, reflexionando sobre el problema y su solución en un contexto social, mediante la construcción o reconstrucción de acciones matemáticas, procesos, objetos y organizaciones de aquellos esquemas para tratar con las situaciones. Además, en este enfoque, se define el fenómeno de descomposición genética de un concepto como un conjunto estructurado de constructos mentales (Asiala, et al. 2004, p. 7).

En esta teoría, el desarrollo de la comprensión “ … comienza con la manipulación de los objetos físicos o mentales previamente construidos para formar acciones; las acciones se interiorizan para formar procesos que se encapsulan para formar objetos. Los objetos pueden volver a desencapsular hacia el proceso desde el cual se formaron. Finalmente, las acciones, los procesos y los objetos pueden organizarse en esquemas” (Asiala, et al 1996, citado en Meel, D., 2003). Por otro lado, Meel (2003) argumenta que la Teoría APOS utiliza técnicas de recolección de datos orales y escritos para formar un documento descriptivo que clasifique el nivel de comprensión alcanzado por el estudiante. También Dubinsky y McDonald (2001) afirman que el poder explicativo de la Teoría APOS reside en la capacidad de la teoría en comparar los éxitos y fracasos de los estudiantes con las tareas matemáticas, y las construcciones mentales específicas de acciones, procesos, objetos y esquemas que un estudiante puede haber alcanzado o no. Trigueros (2005), haciendo referencia a la Teoría APOS, comenta lo siguiente: “…y muestra cómo esta teoría se encuentra en desarrollo dinámico y continuo a través de la introducción de nuevos conceptos que permiten dar cuenta de la manera en que los estudiantes universitarios entienden y son capaces de integrar los conceptos de las matemáticas a nivel superior”.

Además, la abstracción reflexiva es uno de sus ejes principales, clave de la construcción de los conceptos lógico matemáticos. El mecanismo principal en la construcción del conocimiento matemático en esta teoría es, como en la de Piaget, la abstracción reflexiva, en el sentido de un proceso que permite al individuo, a partir de las acciones sobre los objetos, inferir sus propiedades o las relaciones entre objetos en un cierto nivel de pensamiento. Esto implica, la organización o la toma de conciencia de dichas acciones y separar la forma de su contenido e insertar esta información en un marco intelectual reorganizado en un nivel superior (Dubinsky, 1991a, 1991b, citado en Trigueros, M. 2003). La Teoría APOS es constructivista, arraigada en el trabajo de Jean Piaget sobre el concepto de abstracción reflexiva; ha sido desarrollada sobre un mecanismo por el cual los investigadores pueden examinar y describir el pensamiento matemático avanzado de los estudiantes (Weller, Clark, Dubinsky, Loch, McDonald y Merkovsky, 2000) y (Asiala, et al, 1996, 2000, 2004).

Para realizar investigaciones con este marco, se utiliza el método cualitativo, basado en esta perspectiva teórica y que está siendo desarrollado a través de ensayos para comprender las ideas de Piaget, concernientes a la abstracción reflexiva y la reconstrucción de estos procesos en el contexto de la matemática y en el nivel universitario. Consideramos importante presentar los principales componentes de la Teoría APOS, el Ciclo ACE (actividad, discusión en clase y ejercicios), el aprendizaje cooperativo y el uso de un lenguaje de programación en matemática ISETLW (Interactive Set Language for Window). El Ciclo ACE se desarrolló con los estudiantes en el laboratorio de cómputo. Luego se les presentaron las *actividades*; luego, se pasó a una *discusión en clase* de las situaciones de cómo se han desarrollado las actividades en el laboratorio y, finalmente, los *ejercicios* fueron tareas domiciliarias de refuerzo de todo lo que fue aprendido para ser desarrollados individualmente de acuerdo a la disponibilidad de tiempo del estudiante. Los ejercicios sugeridos guardan relación con los ejercicios presentados en las actividades.

Es importante el uso de un lenguaje de programación en el aprendizaje de las matemáticas, además existen muchos lenguajes de programación; sin embargo, el ISETLW que es una versión para Windows adecuada del lenguaje de programación ISETL, es un lenguaje muy sencillo debido a que su sintaxis es muy cercana a la notación matemática, sus comandos y aspectos de programación son relativamente fáciles de aprender. "El lenguaje de programación ISETL (Interactive SET Language) está diseñado especialmente para reflejar las ideas matemáticas, tales como la definición de conjuntos, la definición de función como conjuntos de pares ordenados o proceso de asignación, cuyos nombres pueden ser usados como el ingreso de otras funciones" (Tall, 1997, p.27). Este lenguaje de programación permite a los estudiantes manipular arbitrariamente las funciones como conjuntos de pares ordenados además de procedimientos; ayuda también a construir operaciones como la composición de funciones. Recientemente, se ha logrado que el ISETL realice gráficas de las funciones (Tall, 1990, p. 504).

Finalmente, según el RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community), la Teoría APOS es una herramienta que permite describir cómo los estudiantes construyen los conceptos matemáticos. Weller, et al. (2000) señalan que miembros de RUMEC la consideran importante porque:

- Dentro del contexto comparativo, los estudiantes que han recibido una instrucción basada en el desarrollo de la Teoría APOS, al menos bien, en muchos casos, tuvieron un resultado mejor en comparación con los que han recibido un tratamiento instruccional tradicional.
- Con respecto a los datos no comparativos (entrevistas en clases, tareas o exámenes en grupos, definir o desarrollar algún tópico de una unidad), el nivel de desarrollo alcanzado por los estudiantes fue alto, hecho que los autores han observado en su experiencia colectiva como profesores de matemáticas.
- Con respecto al desarrollo cognitivo, los estudiantes que han recibido instrucciones bajo la Teoría APOS fueron alcanzando una madurez de comprensión de los conceptos presentados.
- Con respecto al dominio afectivo, la instrucción basada sobre la Teoría APOS tuvo un efecto positivo en el interés y disfrute de las matemáticas.

Por todo lo expuesto, elegimos desarrollar el trabajo de investigación basado en la Teoría APOS.

1.3. Concepto de función

Diversas investigaciones y citas realizadas sobre noción de función, especialmente en el espacio universitario, indican que los estudiantes tienen dificultades en comprender las definiciones presentadas sobre función. La epistemología de función no es simple; inclusive para un matemático, esta provee una enorme complejidad de ideas matemáticas. Algunos estudiantes son hábiles para construir esta delicada combinación de simplicidad y complejidad. Para otros, es realmente complicado (Akkoç & Tall, 2002, p. 1).

En los últimos años, el concepto de función ha sido considerado como un aspecto fundamental para dar soporte al currículo en su forma completa. En EE.UU., el National Council of Teachers of Mathematics (1989, 154), citado en Akkoç, y Tall, (2005), expresa sobre la función lo siguiente:

> "El concepto de función es una idea unificada importante en matemática. Una función es una correspondencia especial entre dos conjuntos, y es común en todos los currículos. En aritmética, las funciones aparecen como una operación usual sobre números, donde un par de números corresponde a un simple número, tal como la suma de un par de números; en álgebra, las funciones son relaciones entre variables que representan números; en Geometría, las funciones conectan un conjunto de puntos a sus imágenes bajo movimientos tales como cambio rápido, deslizar y rotar; en probabilidad ellos conectan eventos a su probabilidad. El concepto de función es también importante porque relaciona muchas situaciones de entrada y salida encontradas en el mundo real".

El concepto de función dado por Maquiera, et al. (1981, 8) dice que "toda función es un conjunto de pares ordenados. Para que un conjunto de pares ordenados sea una función entre dos conjuntos A y B, es necesario que esos pares ordenados determinen una correspondencia unívoca de A en B". También se puede definir como una función $f : A \to B$ y consta de tres partes: un conjunto A, llamado el dominio de la función (o conjunto donde está definida la función), y un conjunto B llamado codominio de la función, y una regla que permite asociar de un modo muy bien determinado; y para cada elemento $x \in A$, existe un único elemento $f(x) \in B$, llamado el valor que una función asume en x (o en el punto x) (Lages, 1976, p. 10).

Para abordar la noción de función, Leithold (1992, p. 42 - 44) inicia su explicación mencionando que *y* es una función de *x* si existe alguna regla por medio de la cual es designado un único valor para *y* del valor de *x*. Luego, la define de manera formal:

> Una función es un conjunto de pares ordenados de números (x, y) en los que no existe dos pares ordenados diferentes que tengan el mismo primer número. Al conjunto de valores admisibles de *x* se le llama dominio de la función y al conjunto de valores resultantes de *y* se le llama contradominio (o ámbito) de la función.

Asimismo, Fenton y Dubinsky (1996) manifiestan que una función es un conjunto de pares ordenados (x, y), tal que dos pares ordenados distintos no deben tener el mismo primer elemento.

En las citas, se nota que *es un conjunto de pares ordenados* (x, y); esta definición solo hace referencia a pares ordenados de un plano cartesiano; sin embargo, no expresa en forma general, cuando se tiene relación de nombres a números o de números a nombres, o si la función está expresada de objetos a objetos.

Para el presente trabajo, se considerará la definición de William E. Fenton y Ed Dubinsky, haciendo la observación de que los pares ordenados (x, y) deberían modificarse de un modo general por un par ordenado (a, b), porque cuando expresamos como pares ordenados (x, y) se tiene la idea de función con gráfica en el plano cartesiano. No obstante, cuando se utiliza el par ordenado (a, b), el primer y el segundo componente pueden representar a cualquier objeto.

1.4. Descripción del cuerpo de la tesis

1.4.1. Importancia de la investigación

Consideramos que los estudiantes de la especialidad de Matemática y Física de la Universidad Nacional de Huancavelica, que finalizan la universidad, deben tener una concepción más amplia sobre el concepto de función, porque en su pasaje curricular han desarrollado asignaturas que guardan directa relación al tema de funciones, tales como Matemática Básica I–II, Análisis Matemático I, II y III, Ecuaciones Diferenciales, Álgebra I–II y Álgebra Lineal. Para tratar el concepto de función y su práctica, es importante que los profesores de matemática tengan buen desarrollo conceptual y conocimiento del concepto de funciones incluyendo su importancia en la matemática y su interrelación con otros conceptos (Cooney y Wilson, 1993; Einsberg, 1992; Even, 1993; Thomas, 2003; Vollrath, 1994; citado en Hansson, Ö. 2006).

De esta forma, el estudio se centra en identificar las concepciones del concepto de función, desde la perspectiva de la Teoría APOS, en los estudiantes de Educación en la especialidad de Matemática y Física en los últimos ciclos. Para realizar el trabajo, se han tomado situaciones similares a las empleadas en el estudio de Dubinsky y Breindenbach (1992), el mismo que ha permitido seguir la secuencia de la teoría e identificar los niveles cognitivos (acción, proceso, objeto y esquema). Las situaciones presentadas a los estudiantes contienen cuatro tratamientos distintos respecto a las funciones: gráfico, expresiones (algebraicas, programas y proposiciones), sucesiones y tablas.

1.5. Objetivos de la investigación e hipótesis

Objetivos de la investigación son los siguientes:

- Diseñar situaciones asociadas al concepto de función y para cuyas soluciones sea necesario mostrar un dominio del tema a nivel de acción y proceso.
- Diseñar las actividades para el desarrollo del ciclo ACE e implementar el ciclo ACE con el soporte del programa ISETLW.
- Realizar un estudio de caso con dos estudiantes para identificar los constructos mentales que poseen respecto a la concepción de función, teniendo en cuenta la descomposición genética.

Hipótesis de la investigación:

- A través del desarrollo del ciclo ACE, los estudiantes logran el tránsito de un nivel de *prefunción* a un nivel superior, respecto a la comprensión de la concepción del concepto de función.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

2.1. Breve historia del concepto de función

No pretendemos realizar un análisis detallado sobre la epistemología del concepto de función. El objetivo principal de esta sección es presentar algunos aspectos que permitan comprender el concepto función y sus diferentes significados.

Han pasado siglos para tener la forma actual de presentación de la función en la enseñanza. Es una evolución que ha sucedido de manera gradual a través de nociones vagas e inexactas y que según los investigadores, se inició hace 4000 años aproximadamente. Sin embargo, solamente en los últimos tres siglos se ha desarrollado la noción de función en estrecha relación con problemas del cálculo y análisis. Con referencia a la matemática oriental antigua, a la numeración y correspondencia, Vera (1961) comenta que lo más notable de la aritmética precientífica es su fundamentación en el concepto de correspondencia: piedra angular de la matemática moderna. Esto significa que existía una idea de función (correspondencia) que practicaban indirectamente en los quehaceres diarios como en las operaciones matemáticas.

Veinte siglos antes de Cristo, las relaciones funcionales eran, en su mayoría, descritas de manera verbal o por medio de relaciones numéricas expresadas en tablillas. La civilización babilónica registraba sus informaciones en tablillas de arcilla y, en estas, representaba sus figuras geométricas. Algunas tablas presentaban dos columnas como en la tabla de multiplicación, donde para cada número de la primera columna había un número en la segunda columna que representaba el resultado de la multiplicación del número de la primera columna por un valor fijo. Es de esa forma que existían las tablas de multiplicación por 7, 9, 10, … (Coelho, 2004, p. 21).

Al respecto, Youschkevitch, (1976) se refiere a tres etapas principales del desarrollo de la idea de función:

> La Antigüedad. Etapa en la que se hace estudios de casos particulares de dependencia entre dos cantidades. Aparece el uso de tablas sexagesimales, de cuadrados y raíces cuadradas, de cubos y raíces cúbicas. Se elaboran empíricamente tablas de efemérides del sol, la luna y los planetas, las cuales se convirtieron en cimientos matemáticos del desarrollo subsiguiente de la astronomía. Los griegos, al determinar leyes sencillas de la acústica, como la relación entre las longitudes y los tonos de las notas emitidas por cuerdas de la misma especie, al ser pulsadas bajo tensiones iguales. En la época de Alejandría se desarrolló toda una trigonometría de las cuerdas correspondientes a una circunferencia de radio fijo, las cuales equivaldrían a las tablas del seno de los hindúes unos cuantos siglos más tarde.
>
> La Edad Media (siglo XIV). Las nociones generales se expresaban cada vez más de modo definido mediante figuras geométricas como mecánicas; sin embargo, igual que en la Antigüedad, cada caso concreto de la dependencia entre dos cantidades era definido por la expresión verbal de su propiedad específica o por medio de una gráfica.
>
> Período del siglo moderno (siglo XVI). Empiezan a resaltar las expresiones analíticas de las funciones. Al situarnos en el periodo moderno se tiene que el lenguaje matemático, de la latitud y longitud, al igual que las semicuerdas y segmentos de diámetros, corresponden a las secciones cónicas de la Antigüedad, bien podrían denominar la ordenada y la abscisa, respectivamente, en donde es necesario resaltar que las coordenadas que se usaron en el siglo XIV siempre se referían a puntos de alguna curva y no puntos arbitrarios del plano (Youschkevitch, 1976).

Para Oresme (1323–1382), destaca Boyer (1986, p. 340): “Los términos de latitud y longitud vienen a ser completamente equivalentes a nuestras coordenadas y abscisas respectivamente y sus representaciones gráficas se parecen mucho a nuestra geometría analítica:”; continúa comentando lo siguiente: “Oresme parece haberse dado cuenta del principio esencial de que una función de una variable se puede representar por una curva, pero no fue capaz de hacer un uso efectivo de esa observación salvo en el caso de la función lineal, como era inevitable”.

Luego, entre los años 1676 y 1694 surge la expresión de función por primera vez, cuando Leibniz trabajaba parte del cálculo integral, la discusión comienza con una función genérica cuya gráfica se extiende por encima del eje horizontal. El objetivo del cálculo es determinar el área sombreada bajo la curva $y = f(\mathrm{t})$ entre dos puntos cualesquiera a lo largo de este eje, se refiere a segmentos y curvas para hallar las áreas (Dunham, 1995, p. 212).

Asimismo, al comienzo de su obra *Introductio in analysin infinitorum*, Euler define la función de una cantidad variable como “expresión analítica formada con la cantidad variable y con números o cantidades constantes” (Boyer, 1986, p. 558). Engloba bajo esta denominación a los polinomios, series de potencia, las expresiones trigonométricas y logarítmicas. Sin embargo, no logró definir claramente la expresión analítica (Collette, 1986, p. 192). Por otro lado, Castro (1996, p. 4) atribuye a que, con el fin de utilizarlas para resolver problemas de series, Euler definió en 1729 la función *gamma* (Γ), como $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx, \quad \forall s > 0$. No obstante, Euler también consideró a veces una función de una manera menos formal y más general << a mano alzada>> en el plano (Boyer, 1986, p. 558).

La definición de función como correspondencia entre variables se debe a Peter Lejeune Direchlet que, en 1837, escribió: “Si una variable $\boldsymbol{y}$ está relacionado con otra variable $\boldsymbol{x}$ de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a $\boldsymbol{x}$ hay una regla según la cual queda determinado un único valor de $\boldsymbol{y}$, entonces se dice que $\boldsymbol{y}$ es una función de la variable dependiente $\boldsymbol{x}$”. Es cierto que esta definición se acerca mucho a la idea moderna de una correspondencia general de funciones entre dos conjuntos de números reales; sin embargo, los conceptos de conjunto y de número real distan mucho del significado preciso en la época de Dirichlet (Boyer, 1986, p.687).

Finalmente, en las publicaciones del siglo XX, los matemáticos ingresan con una influencia formalista de la filosofía; en 1939, el grupo Bourbaki en su *Théorie des*

Esembles, define función en términos de la teoría de conjuntos de la siguiente manera, citado por Kleiner (1989):

> Sea E y F dos conjuntos, los cuales pueden ser o no iguales. Una relación entre una variable $\boldsymbol{x}$ de E y una variable $\boldsymbol{y}$ de F, es llamada una relación funcional en $\boldsymbol{y}$ si para todo $\boldsymbol{x}\in$E, existe un único $\boldsymbol{y}\in$F que está en relación con $\boldsymbol{x}$. Damos el nombre de función a la operación que asocia cada elemento $\boldsymbol{x}\in$E al elemento $\boldsymbol{y}\in$F, el cual está dada en relación con $\boldsymbol{x}$**.** Se dice que $\boldsymbol{y}$ es un valor de la función relativo al valor de $\boldsymbol{x}$ y que la función está determinada por la relación funcional dada. Dos relaciones funcionales equivalentes determinan una misma función (p. 299).

En la evolución del concepto de función, se pueden apreciar tres momentos principales:

i) Como dependencia entre variables

ii) Como expresión analítica

iii) Como una relación entre conjuntos

En la actualidad, una acepción de función se caracteriza por ser más algebraica (expresado en ecuaciones) en el campo del análisis matemático, donde el concepto de función asume un rol fundamental.

Estos tres momentos del concepto función siempre se encuentran en la idea de cada estudiante de menor a mayor grado. Para la Teoría APOS, una comprensión del objeto función existe al transitar por estas tres representaciones: como dependencia entre variables (una correspondencia de causa y efecto); como expresión analítica, que es representada mediante expresiones algebraicas; y como relación entre conjuntos. Esta parte final es mucho más compleja, porque el concepto de función se expresa como la relación entre dos conjuntos bajo ciertas reglas que lo definen.

2.2. Teoría APOS

La Teoría APOS (*action, process, objects* and *schemas*) es desarrollada por Ed Dubinsky. Las siglas en español, APOE, significan las acciones, procesos, objetos y esquemas que son las construcciones mentales que un individuo realiza para lograr el entendimiento de las situaciones y de los problemas matemáticos a los que se enfrenta. Los mecanismos para realizar dichas construcciones son las llamadas abstracciones reflexivas e incluyen la interiorización, la encapsulación, la desencapsulación, la coordinación y la inversión.

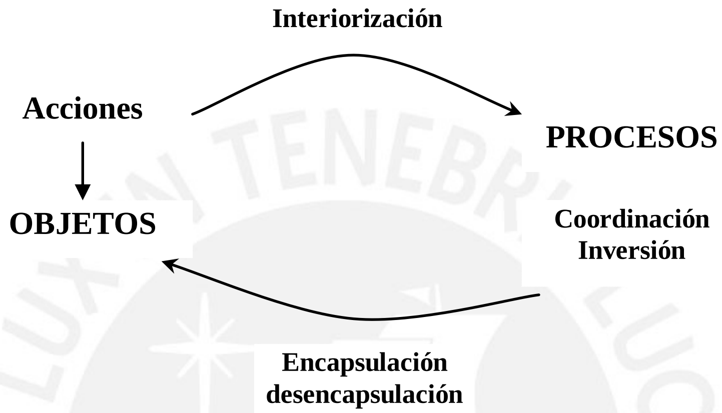


Figura 1.

En la construcción mental del aprendizaje de las matemáticas (vease la figura 1), se considera que la comprensión de un concepto matemático inicia con la manipulación mental o física de objetos, previamente construidos para formar acciones: las acciones son posteriormente interiorizadas para formar procesos que más adelante se encapsulan para formar objetos. Los objetos pueden ser desencapsulados de regreso hacia los procesos, a partir de los cuales fueron formados. Finalmente, las acciones, los procesos y los objetos pueden ser organizados en esquemas.

A continuación, describimos, en forma breve, en qué consiste cada una de las construcciones mentales, incluyendo una primera parte llamada *prefunción*, propuesta por Breindenbach, et al. (1992, p. 251).

Prefunción

Es cuando el sujeto no presenta una noción amplia sobre el concepto de función. Esto significa que el tema no es muy común al estudiante durante el desarrollo de sus tareas.

Asimismo, los constructos mentales propuestos por Asiala, et al. (2004) y Breindenbach, et al, (1992) son los siguientes:

Acción

Una acción es una transformación de objetos que el individuo percibe como algo que es hasta cierto punto externo. Decimos que un individuo está en un nivel de *concepción de acción* de una función dada si su desarrollo de comprensión es limitado a desarrollar acciones, únicamente reaccionando a indicaciones externas que le proporcionan detalles precisos sobre qué pasos ha de tomar, como evaluar el valor numérico de una función en un punto.

Procesos

Es cuando se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción; pero, en este nivel, no es necesariamente dirigido por un estímulo externo. Si una persona resuelve problemas y demuestra que utiliza transformaciones, se dice que tiene una *concepción de proceso* de una función; entonces, puede reflexionar sobre cómo invertir los pasos de la transformación, es decir, cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, y este puede interiorizarse en un proceso.

Objetos

Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) y es capaz de actuar sobre él, se dice que el individuo tiene una *concepción objeto* del concepto. En este caso, decimos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto. Por ejemplo, uno tiene la concepción de objeto si uno es hábil para pensar acerca de la composición de una función como la suma de dos funciones.

Esquemas

Una vez ya construidos los objetos y los procesos, pueden interconectarse en formas diversas; por ejemplo, dos o más procesos pueden ser coordinados al encadenarlos por medio de la composición u otras formas. Los procesos y los objetos se relacionan en virtud al hecho de que los procesos actúan sobre los objetos. Para formar un esquema, es necesario organizar, en forma estructurada, una colección de procesos y objetos. Los esquemas mismos pueden ser tratados como objetos y ser incluidos en la organización de esquemas de un nivel más alto. Cuando esto sucede, decimos que el esquema ha sido tematizado a un objeto. En resumen, se puede decir que un esquema es una colección coherente de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que se tienen para un concepto en particular.

2.3. Descomposición genética

Un aspecto muy importante dentro de la Teoría APOS es la *descomposición genética*. Al respecto, Asiala, et al. (2004) dicen:

> El propósito del análisis teórico de un concepto es proponer un modelo de cognición, esto es, una descripción específica de la construcción mental que un aprendiz podría hacer en orden para desarrollar su comprensión del concepto. Nosotros referiremos al resultado de este análisis como una descomposición genética del concepto. Es decir, una descomposición genética de un concepto es un conjunto estructurado de constructos mentales, el cual podría describirse como el concepto que puede desarrollarse en la mente de un individuo (p. 5).

Del mismo modo, Trigueros (2005, p. 8) sobre la descomposición genética, señala: "En la Teoría APOS se parte, entonces, de un análisis de los conceptos matemáticos en el que se ponen de relieve las construcciones cognitivas que pueden ser requeridas en su aprendizaje. A este análisis se le conoce como descomposición genética del concepto". Además, sigue comentando: "Pueden coexistir varias descomposiciones genéticas de un mismo concepto. Lo que es importante es que cualquier descomposición genética de un concepto sea un instrumento que dé cuenta del comportamiento observable del sujeto".

Entonces, se trata de un análisis de los conceptos matemáticos en el que se enfatizan las construcciones cognitivas que pueden ser requeridas en su aprendizaje. Estas construcciones se caracterizan bajo los temas de acción, proceso y objeto.

2.4. Descomposición genética de función

Al revisar la literatura relacionada con los trabajos de Ed Dubinsky sobre la concepción de función, se presentaron dificultades debido a que carecíamos de información. Sin embargo, pese a estas limitaciones, se ha podido realizar la descomposición genética de función.

> De acuerdo con Asiala, et al. (2004, p. 7) "El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia para responder a situaciones matemáticas problemáticas percibidas reflexionando sobre ellas y sus soluciones en un contexto social, construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos organizándolos en esquemas para usar y relacionar con las situaciones"; en este sentido, los hemos agrupado en cinco (5) categorías: prefunción, acción, proceso, objeto y esquema. Además, las situaciones de las funciones son las sucesiones finitas, cadenas de caracteres, gráficos, tablas, ecuaciones, proposiciones, conjunto de pares ordenados y procedimientos lógicos (programación). Estas situaciones son parte del desarrollo de la evaluación de concepción de función; todas ellas están englobadas en cuatro áreas principales: correspondencia de conjuntos, expresiones algebraicas, conjunto de pares ordenados y gráficos.

Breidenbach propone la descomposición genética de la función considerando una construcción mental previa a la acción denominada la concepción de *prefunción*.

Prefunción.- Según Breidenbach, et al. (1992), prefunción es cuando realmente el sujeto o el estudiante *no manifiesta mucho del concepto de una función*. En otras palabras, cuando el estudiante no tiene una amplia noción del concepto de función; en esta parte, los estudiantes, algunas veces, no pueden identificar una función, o intentan desarrollar las situaciones como una función y no consiguen llegar a una solución completa y, a veces, ni parcial. Por ejemplo, cuando asocian la función solo a una correspondencia de diagramas, pares ordenados, expresiones algebraicas, o cuando está presentada mediante gráficas.

Acción.- Una acción es una manipulación mental o física repetible de objetos (Breidenbach, et al. 1992). Esta concepción enfatiza puntos específicos como el acto de sustituir un valor a las variables para obtener otro valor relacionando con una operación anterior; además, el reconocer las diferentes formas de presentación de una función (algebraicas, gráficas, tablas o en expresiones). También consiste en verificar una función imitando una situación similar. Si la comprensión de un concepto por parte de un estudiante se limita a realizar acciones, entonces decimos que esta tiene una *concepción acción*. Se entiende que la concepción acción es limitada. Consideramos algunas acciones que debe realizar el estudiante si se encuentra en nivel de acción:

A.1. Grafica una función guiándose de ciertos patrones similares o mediante sustitución de valores.

A.2. Verifica el comportamiento de las funciones por analogía de acuerdo a la definición.

A.3. Evalúa una función en un punto determinado sin verificar las condiciones necesarias.

A.4. Ve una gráfica y determina su ecuación algebraica por analogía o por haber comprendido la definición.

A.5. Determina la veracidad funcional de una proposición.

Proceso.- La concepción de proceso de una función involucra una transformación dinámica de objetos de acuerdo a algún significado repetible, que, dado el mismo objeto original, producirá siempre el mismo objeto transformado. El sujeto es capaz de pensar acerca de la transformación como una actividad completa comenzando con algún objeto favorable, haciendo alguna cosa a aquellos objetos y obteniendo nuevos objetos (Breidenbach, et al, 1992). El ***proceso*** ocurre cuando una acción es repetida y el estudiante reflexiona sobre ella; entonces, puede interiorizar tal acción en proceso. Es así que la construcción interna permite realizar la misma acción, mas no puede ser dirigida por estímulos externos; como ejemplo de estar en este nivel, el individuo puede realizar las siguientes operaciones:

P.1. Grafica las funciones sin guiarse de ciertos patrones; comprende realmente todo el proceso de graficación, considerando su dominio y rango respectivo.

Además, puede describir los pasos a seguir durante el proceso de graficación.

P.2. Verifica el comportamiento y la tendencia de las funciones de acuerdo a las variables, dominio y rango de la función, en forma generalizada de acuerdo al tipo de función.

P.3. Evalúa una función en un punto o más, verificando las condiciones necesarias y luego generaliza (caso de funciones racionales).

P.4. Evalúa la gráfica de una función según condiciones del dominio, rango y continuidad.

Objeto.- Es cuando el individuo reflexiona sobre las acciones aplicadas a un proceso específico; también es capaz de ver con amplitud las transformaciones, tanto gráfica y algebraicamente; además, es capaz de reconstruirlas. Si es así el caso, se dice que se ha realizado una reconstrucción o se ha encapsulado como un objeto cognitivo; entonces, el individuo está en la capacidad de lo siguiente:

O.1. Piensa en una función $h(x)$ como la suma de dos funciones conocidas; y puede diferenciar esta operación de la composición de funciones.

O.2. Analiza las situaciones en las diferentes funciones (función de variable real, función definida de conjunto a conjunto, función de varias variables, ecuaciones paramétricas) y justifica las razones en cada una de las situaciones.

O.3. Analiza el comportamiento de las funciones y sus transformaciones de acuerdo a los coeficientes, tanto gráfica como analíticamente. El individuo demuestra ser consciente del proceso como un todo, porque aplica las propiedades de los números reales y conjuntos.

Esquema.- Para el campo de las funciones, abarca una colección de acciones, procesos y objetos en la que se puede agregar necesariamente otros esquemas previamente construidos. El individuo desarrolla con una visión más amplia y generalizada el concepto de función; además, puede realizar cualquier tipo de conexión con otros esquemas, concernientes a diversos conceptos matemáticos, dependiendo de los constructos mentales que posee. Esta etapa es muy compleja, como lo expone Dubinsky y Harel, (1992). En tal sentido, el individuo puede:

E.1. Modelar situaciones de la vida real en términos de funciones.

E.2. Expresar una familia de funciones a partir de una situación dada.

E.3. Presentar contextos generalizados de funciones, en integrales, y ecuaciones diferenciales.

2.5. Términos de uso común en la descomposición genética de funciones

***Dominio de una función*:** Al respecto, existen diferentes nominaciones del término *dominio de una función*. El dominio o conjunto de definición de una función coincide con su conjunto de partida, y sus elementos se llaman valores del argumento de la función (Tola, J. 1970). Al conjunto de valores, que puede tomar la variable independiente y se le llama *dominio* de la función (Dubinsky, Schowingendorfk y Mathews, 1995). En términos generales, se puede apreciar que el término *dominio* se refiere al conjunto de valores de la variable independiente que tiene imagen y se representa como $Dom(\boldsymbol{f})$.

Rango de la función: Si una función está definida de M en N. Si a es un elemento de M, el elemento $b = f(a)$ de N que le corresponde se denomina *imagen* del elemento a (para la aplicación f) (Kolmogorov y Fomin 1978). Al conjunto de valores que toma los valores de la variable dependiente se le llama *rango* de la expresión (Dubinsky, et al. 1995). El rango de una función se llama también conjunto de valores de la función (Tola, 1970). Entonces se puede concluir que el rango (recorrido, imagen, codominio) de una función es el conjunto de valores de la variable dependiente que son imágenes de algún valor de la variable independiente y se representa como $Rang(\boldsymbol{f})$.

Conjunto: Un conjunto es una colección de cosas. Estas pueden ser personas, lugares, objetos, letras, números, valores booleanos, animales, vegetales, minerales, etcétera (Fenton y Dubinsky 1996).

Tuples: La idea de orden es importante. Un ***tuple*** es un conjunto finito con un orden específico. ISETL usa corchetes para denotar un conjunto ordenado, inclusive pares ordenados Fenton y Dubinsky 1996).

En ISETLW, se usa ***tuple*** para representar una sucesión finita de números enteros. Es simple la forma de elaborar una lista de enteros consecutivos tales como [1, 2, 3, 4], [0 . . 19] o [-30 . . 50], los cuales representan, respectivamente, la sucesión de números enteros de 1 a 4, de 0 a 19 y –30 a 50. Es también posible construir una progresión aritmética de números enteros dando los primeros números de la forma [0, 2 . . 19]; esto representa los números pares entre 0 y 19 (Dubinsky y Leron, 1994).

Función (***func***): La noción de función es fundamental en cada área de la matemática. En ISETLW, existen varias formas de representar funciones, una de las cuales es ***func*** Fenton y Dubinsky 1996).

Ejemplo:

```
>     f := func(z);
>>          if even(z) then return z/2;
>>          else return 3*z+1;
>>          end;
>>    end;
>
```

Para este caso, el ejemplo muestra que **func**(z) define una función de $\mathbf{Z}$ en $\mathbf{Z}$ de la forma $f(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{2}, & \text{si } z \text{ es par.}\\ 3z+1, & \text{si } z \text{ es impar}\end{cases}$, luego evaluando en $z = 2$ y $z = 3$ se obtiene:

```
>     f(2);f(3);
1.000;
10;
>.
```

Cadena de caracteres: los caracteres son aquellos usados por ISETLW tales como @ [ ] ; : = | { } ( ) . # ? * / + - _ " < > % ~ , ' ^.

También son caracteres las letras desde la *a* hasta la *z*, de la *A* hasta la *Z*, los números desde 0 hasta 9. (http://isetlw.muc.edu/isetlw).

Así una cadena de caracteres es cualquier sucesión de caracteres expresada entre comillas (“ ”) y se define como una función.

Ejemplo:

```
>    M := "MATEMATICAS";
>    is_string(M);
true;
```

El ejemplo nos muestra otra manera de definir una función en ISETLW; los dos puntos y la igualdad juntas (:=) sirven para definir la función.

Como se ha definido, la función M se puede evaluar en los puntos 1, 2, 3, …, 11 que son el orden de las letras que componen la palabra "MATEMATICAS".

```
>    M(1); M(2); M(3); is_string(M(3));
"M";
"A";
"T";
true;
```

Abstracción reflexiva: Es el mecanismo que nos sirve para extraer o separar una característica de un objeto, a partir no exactamente de los objetos, sino de las acciones que realizamos sobre ellos. La palabra reflexiva tiene doble connotación: una es reflexionar sobre nuestras acciones, otra es proyectar nuestra acción sobre el plano de las operaciones.

Encapsulación: Un tipo de abstracción reflexiva en la cual uno puede pasar de un nivel de comprensión proceso a un nivel objeto. Tal abstracción permite al individuo mirar un proceso como algo cerrado en si mismo con “existencia propia” lo que permite mirarlo como un objeto.

Se trabajó con estos conocimientos previos; asimismo, se desarrollaron las actividades usando el ISETLW del Ciclo ACE.

CAPÍTULO 3

ASPECTOS METODOLÓGICOS DE LA INVESTIGACIÓN

Este capítulo describe la metodología de la investigación de acuerdo a los objetivos propuestos y al tipo de investigación emprendida. La investigación es cualitativa, porque pretende investigar la comprensión de los estudiantes sobre la noción de función. Su desarrollo abarca tres etapas: En la primera, se realiza una presentación a priori; en la segunda, se presenta una actividad desarrollada de conceptualización denominada ACE (actividad, clases y ejercicios); en la tercera, se realizan la prueba de salida y la entrevista respectiva para recoger la resignificación del concepto de función.

El diseño de la investigación es no experimental, ya que ocurre sin la manipulación de variables. Se trabajó con un grupo de 16 estudiantes del VIII y X ciclo de la Especialidad de Matemática – Física. El tratamiento instruccional se basó en la teoría constructivista del aprendizaje según la propuesta del grupo RUMEC, que se caracterizó por incluir trabajos en el laboratorio de computación, orientados al desarrollo de la concepción de función por parte de los estudiantes. Asimismo se realizaron varias observaciones a los participantes antes, durante y después del desarrollo del tratamiento educacional para verificar el nivel alcanzado respecto a la comprensión del concepto de función.

3.1. Diseño e implementación de la instrucción

Dubinsky considera que el método pedagógico que sustenta sus investigaciones, con el fin de alcanzar sus objetivos, está conformado por tres grandes componentes: el primero es el *análisis teórico* desde la perspectiva de la Teoría APOS, que fue presentado en el capítulo II; el segundo describe el *diseño y la implementación del tratamiento instruccional* incluyendo el Ciclo de Enseñanza ACE (actividades con ordenador, discusiones en clases y ejercicios de afianzamiento), aprendizaje cooperativo y el uso del lenguaje de programación ISETLW; finalmente, la *recolección y el análisis de datos*.

Presentación a priori

La investigación comenzó con el análisis teórico del concepto de función, que es denominado por Dubinsky análisis epistemológico del concepto. El análisis corresponde a cómo debería ser construida la descomposición genética y las situaciones que serían presentadas a los estudiantes. Luego, se elaboraron 33 situaciones que fueron refinadas hasta llegar a ser presentadas a los estudiantes a modo de una prueba de entrada. Para la construcción de las *situaciones*, se tuvo como referencia las que fueron diseñadas por Dubinsky y Harel (1992), y Breidenbach (1992); siete fueron tomadas de sus trabajos, tales son las *situaciones* 5, 12, 16, 18, 23, 25, 26, 29 y 33; asimismo, se han tenido en cuenta los trabajos realizados por David Tall, (1990), tales son las *situaciones* 2, 9 y 15. La situación 11 se tomó de http//upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/9b/EKGI.png. Y la *situación* 10 del trabajo: A Mismatch between Curriculum design and Student Learning: *The case of the function concept*, (Akkoç y Tall, 2005). El resto de las situaciones fueron diseñadas por el autor de esta tesis.

Una vez realizado el estudio del análisis teórico del concepto de función, se propuso la descomposición genética, que es el conjunto de constructos mentales que describe cómo el concepto de función es desarrollado en la mente del estudiante. Para alcanzar los niveles de constructos mentales propuestos en la investigación, se construyeron las 33 situaciones; de ellas, algunas tienen un grado de dificultad, como el caso de las situaciones 14, 22 y 28 considerando que los estudiantes son del VIII y X ciclo. La concepción de función en el trabajo de Dubinsky se refiere a establecer dependencia entre dos variables y, para ello, no es necesario trabajar con situaciones complejas, sino presentar situaciones elementales de diferentes connotaciones. (ver las situaciones en el anexo A).

Las situaciones han sido clasificadas en nueve (9) grupos según el contexto (categorías). Estas están distribuidas de la siguiente manera:

Nº	**Categorías**	**Situaciones**	**Descripción**
a)	Programación	S_{25} S_{29}	Programación en ISETLW
b)	Expresiones analíticas	S_{01} S_{04} S_{06} S_{08} S_{10}	Expresiones analíticas definidas como función clásica
c)	Pares ordenados	S_{21} S_{27} S_{32}	Pares ordenados con números enteros
d)	Cadena de caracteres	S_{12} S_{26}	Un grupo de letras que indica secuencia de orden (ingreso y salida)
e)	Ecuaciones	S_{17} S_{24}	Ecuación de una variable
		S_{03} S_{19} S_{30}	Ecuaciones de dos variables
		S_{14}	Ecuación paramétrica
f)	Gráficas	S_{02}	La gráfica presenta una parábola en el eje positivo de *x*
		S_{09} S_{11} S_{18}	La gráfica muestra funciones de variable continua
		S_{15}	Una gráfica que presenta líneas horizontales y verticales (respecto al eje *x* y *y*)
		S_{28}	Gráfica de varias variables
		S_{22}	Gráfica de ecuación paramétrica
g)	Tablas	S_{05}	Una tabla que presenta situación de notas de estudiantes
h)	Sucesiones	S_{16} S_{20} S_{31} S_{33}	Sucesiones infinita y finita
i)	Proposiciones	S_{07} S_{13} S_{23}	Proposición que expresa validez, o se puede expresar como una función

Luego de haber construido las 33 situaciones, se realizó el trabajo *a priori*; es decir, se presentaron a los 20 estudiantes una prueba de entrada que duró cuatro horas. En dicha evaluación los participantes tuvieron ciertas preguntas relacionadas con funciones y señalaron que las situaciones no guardaban relación con el tema de funciones. Se les respondió que sí hacían y que debían analizar si cada una de las situaciones era una función, y encontrar su dominio y rango; en caso de no ser una función, en qué caso podrían serlo. También se les pedió que realizaran comentarios y dieran ejemplos.

Para cada categoría de las situaciones, se describe cómo debieron desarrollarlas y qué niveles de constructos mentales debían alcanzar los estudiantes.

a) Programación

El procedimiento de una programación computacional es un proceso desarrollado paso a paso, que tiene una aplicación de ingreso y salida de datos. Por eso, el proceso está relacionado a la concepción de función, por ejemplo, la situación que presentamos

S_{25}:

```
>     f:=func(x);
>>    return 2*x**2;
>>    end;
```

Se analiza que está definida una función f con variable x, en donde debe ingresar valores que represente a x y retornar $2(x)^2$; es decir, que el programa está definiendo una función $f(x) = 2x^2$.

Si la repuesta del estudiante expresa un procedimiento de entrada de datos y salida de otra información (resultados) en la situación **S_{25}**, es evidente que por lo menos tiene una *concepción de acción* y que ha comprendido la concepción de función; caso contrario, es muy probable que tenga una *concepción de prefunción*. En este proceso de entrada y salida de datos, existe una transformación lógica de información, donde el estudiante es capaz de desarrollar otros procesos de programación.

b) Expresiones analíticas

Las expresiones analíticas presentadas tienen particularidades que permiten al estudiante identificar su dominio, rango, continuidad y, en algunos casos, graficar; asimismo, puede describir el comportamiento y tendencia de las gráficas. Por ejemplo, las situaciones S_1 y S_4 son funciones que tienen una restricción por ser funciones racionales. Veamos la siguiente situación:

S₀₄: $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

En esta situación, el estudiante debió analizar la restricción para el valor de x y evaluar los valores que debía tomar, analizar la asíntota oblicua, pudiendo inclusive pudo modificar la función así $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ como una adición de funciones, hallar el rango $\langle -\infty; -2] \cup [2;\infty\rangle$ y graficarla. El resultado esperado, es la figura que se muestra.

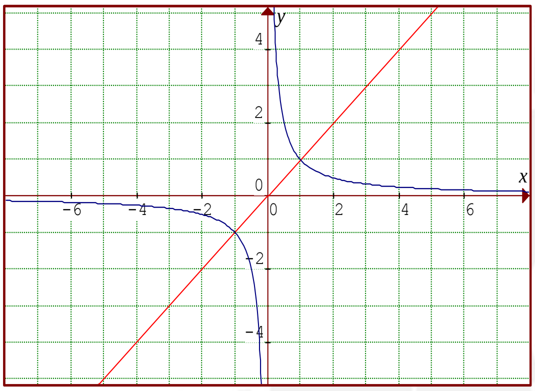


Figura de $g(x)=x$ y $h(x)=\dfrac{1}{x}$

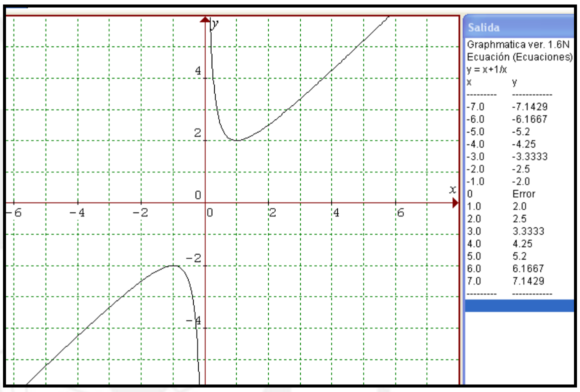


Figura de $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

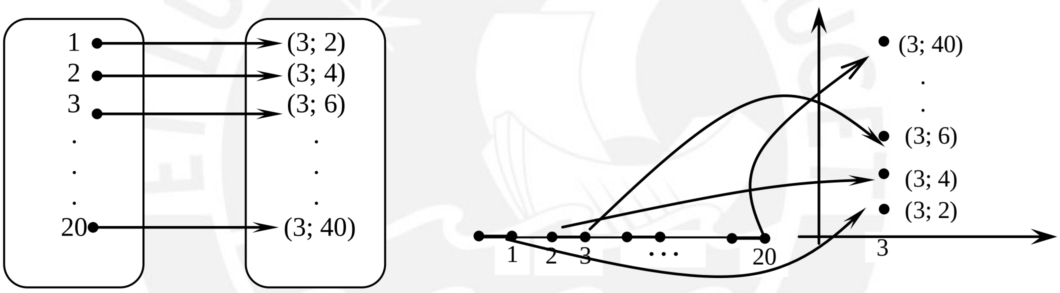
Si el estudiante ha evaluado la función en un punto del dominio y obtiene un resultado, y ha comparado con funciones similares, simplemente se encuentra en una concepción de *acción*; pero si el estudiante ha expresado dichas ecuaciones analíticas mediante gráficas y ha analizado (reflexionado) el comportamiento tendencial de las funciones, entonces, tendrá una concepción de *proceso*.

c) Pares ordenados

El conjunto de pares ordenados presentados tienen diferentes contextos. El estudiante debe identificar cuáles de ellos definen funciones. Como señala Dubinsky y Harel (1992): “La idea de un conjunto de pares ordenados presenta un número de dificultades para los estudiantes” (p. 93), las cuales aparecen cuando emergen procesos de concepción en los estudiantes. La actividad consiste en identificar el dominio bajo ciertas condiciones; considerando además que el primer miembro de un par ordenado no siempre es el dominio. Los estudiantes generalmente tienen la idea de función cuando el par ordenado tiene la forma de (x, y) o (x, f(x)), donde x pertenece al dominio y el rango y = f(x). Sin embargo, los pares ordenados presentados en las situaciones requieren un análisis para identificar el dominio y el rango; algunas veces, puede coincidir con la presentación clásica; pero, en otras el dominio se encuentra en la condición de la situación y el rango son pares ordenados, por ejemplo, la situación siguiente:

S_{21}: { (3;2x) / x en {1, 2, 3, . . ., 20}}

Para esta situación, el dominio es {1, 2, 3, ... , 20}, que se encuentra en la situación, y el rango es el conjunto de pares ordenados de la forma {(3; 2); (3; 4); (3; 6); … ;(3; 40)}. También se puede presentar dicha correspondencia mediante una gráfica.



En el proceso de concepción de función, el estudiante debe encontrar que los pares ordenados son una función de acuerdo a las condiciones dadas y la definición de función; si es así, posee una concepción de *acción*, además, si el estudiante observa y reflexiona sobre la situación en diferentes contextos y explica que se trata de una función bajo ciertas condiciones, entonces poseerá una concepción de *proceso*.

d) Cadena de caracteres

Cuando el estudiante observa por primera vez una cadena de caracteres, no puede identificar desde un punto de vista matemático si existe en ella una relación de función, porque una relación de letras no dice nada; sin embargo, se puede analizar e identificar la sucesión (la posición de un carácter es el ingreso y el carácter es la salida), de modo que el dominio es el índice de los caracteres y la imagen, el conjunto de los caracteres. Considerar por ejemplo, la siguiente situación:

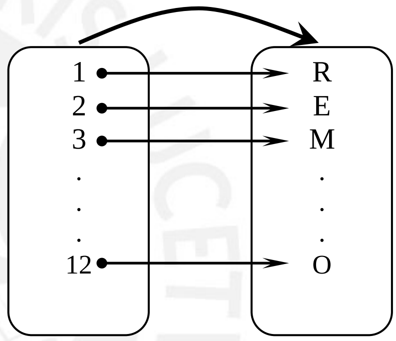
S₁₃: "REMDTJKFMAWO"

Aquí verificamos la posición de cada carácter.

Caracteres	R	E	M	D	T	J	K	F	M	A	W	O	Rango
Posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Dominio

Luego, con la ayuda del programa ISETLW, definimos la función y la presentamos mediante el diagrama:

```
>  f := "REMDTJKFMAWO";
>  f(1);f(2);f(3);f(4);f(5);f(6);f(7);f(8);f(9);f(10);f(11);f(12);
"R";
"E";
"M";
"D";
"T";
"J";
"K";
"F";
"M";
"A";
"W";
"O";
```



La evaluación de la función en cada una de las posiciones 1, 2, 3,…, resulta un carácter; por ejemplo para `f(1);f(2);f(3)`, se tiene el resultado en el rango: "R", "E", "M". De este modo, cuando el estudiante identifica el dominio, rango y grafica la correspondencia, se dice que ha alcanzado el constructo mental de *proceso*.

e) Ecuaciones

Dubinsky y Harel (1992) argumentan que una ecuación de dos variables puede ser considerada como una función si una variable afecta en la obtención del valor de la otra variable, esto como una igualdad de una expresión en la otra variable. Esto es una ecuación explícita en la cual una variable está expresada en términos de otra variable. Por ejemplo, tenemos la siguiente situación

S₁₉: $y_4 = x_4$

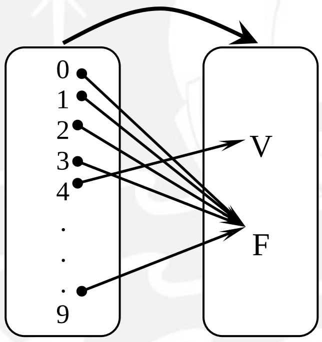
Por otra parte, cuando aparece una ecuación implícita o cuando una ecuación es de una sola variable, también se puede considerar como una función, de manera que al ingresar un valor a la(s) variable(s) de la ecuación, retorna un valor que puede ser falso o verdadero, dependiendo de si la ecuación es satisfecha. La veracidad de la proposición es vista como una función. En este caso, presentamos el siguiente situación:

S$_{17}$: $x^2 + \sqrt{x} - 18 = 0$

Consideramos los valores enteros para *x*; luego, evaluamos para cada uno de los valores que cumplan o no la ecuación.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	. . .
$x^2 + \sqrt{x} - 18 = 0$	F	F	F	F	V	F	F	F	F	F	. . .

Luego, mediante el diagrama, presentamos la correspondencia.

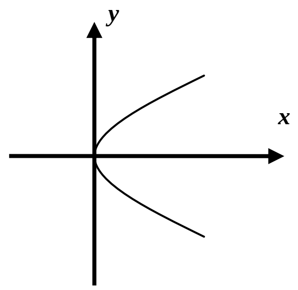


En esta situación, el estudiante deberá alcanzar la concepción de *acción* si logra identificar los valores de cada ecuación explícita e implícita.

f) Gráfica

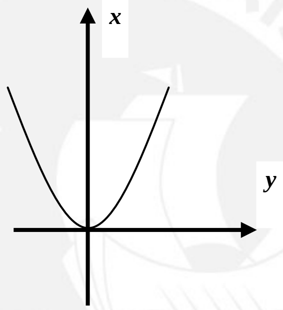
La presentación de una gráfica es para que el estudiante pueda reconocer si es una función o no, o en qué condiciones una gráfica puede ser una función; para estas situaciones, el estudiante deberá tener una mente creativa. Dubinsky y Harel (1992), en su trabajo, reportan que algunos estudiantes reconocieron una gráfica como una función solamente de memoria. Ellos no fueron capaces de expresar con ejemplos; empezaron por el eje horizontal, aun cuando era necesario hacer uso del eje vertical para identificar al dominio. Considerar por ejemplo la siguiente situación:

S_{02}:



Para esta situación, es necesario tener en cuenta dos aspectos: primero rotar y luego considerar como dominio al eje *y*, y como rango al eje *x*.

Entonces, se define como $x = y^2$.



En tal sentido, si el estudiante logra identificar el dominio y rango, escribe la ecuación explícita y realiza la gráfica; entonces, habrá alcanzado el nivel del constructo mental proceso.

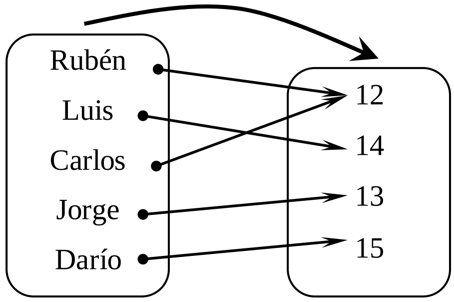
g) Tablas

La tabla es otra forma de presentación en dos columnas, que, analizada, debe proporcionar un conjunto de pares ordenados. El estudiante debe construir su proceso ubicando cuál de las columnas es el dominio y cuál es el rango. Si expresa como dominio la primera columna y la relaciona con el conjunto de llegada que es el rango, está mostrando con una concepción de *acción* del concepto función.

Para mejor ilustración, veamos la siguiente situación:

S_{05}: Se tienen las notas obtenidas por los estudiantes del V ciclo de la especialidad de Matemática Informática en un examen:

Nombre	**Nota**
Rubén	12
Luis	14
Carlos	12
Jorge	13
Darío	15



A cada uno de los nombres se le hace corresponder la nota obtenida en la asignatura.

h) Sucesiones

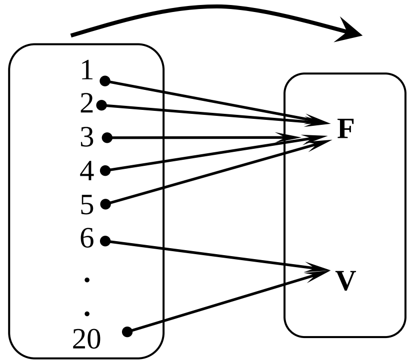
Dubinsky y Harel (1992) manifiestan que una sucesión por sí misma no representa una función; sin embargo, si se realizan ciertas operaciones, sí. Entonces, el estudiante debe asignar valores enteros de acuerdo a la condición, dando valores al primer término, segundo término y así sucesivamente, y hacer corresponder el conjunto de partida con el conjunto de llegada. En este caso, el estudiante habrá alcanzado una concepción de *acción*. Si ha logrado estructurar subsucesiones o ha determinado secuencias lógicas en el programa ISETLW, se concluye que ha logrado una concepción de *proceso*. Por ejemplo, tenemos esta situación:

$$\mathbf{S_{16}}: \ \{ \ 2^n > n^2 + 3n : \quad n \ \text{en} \ [\, 1, 2, 3, \ldots, 20] \ \}$$

En la situación, el dominio es el valor de n considerado desde 1 hasta 20 y el rango es el resultado de evaluar $2^n > n^2 + 3n$.

	Valores de n		$2^n > n^2 + 3n$	Decisión	
Dominio	$n = 1$	$\Rightarrow$	$2 > 4$	Falso	Rango
	$n = 2$	$\Rightarrow$	$4 > 10$	Falso	
	$n = 3$	$\Rightarrow$	$8 > 18$	Falso	
	$n = 4$	$\Rightarrow$	$16 > 28$	Falso	
	$n = 5$	$\Rightarrow$	$32 > 40$	Falso	
	$n = 6$	$\Rightarrow$	$64 > 54$	Verdadero	
	$n = 7$	$\Rightarrow$	$128 > 70$	Verdadero	
	…	$\Rightarrow$	…	…	
	$n = 20$	$\Rightarrow$	$1\,048\,576 > 460$	Verdadero	

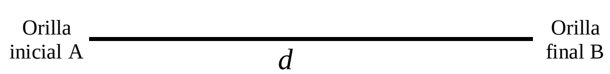
En un diagrama:



i) Proposiciones

Para Dubinsky y Harel (1992), las proposiciones son vagas descripciones de situaciones físicas o geométricas, y constituyen expresiones sin límites. Estas proposiciones fueron vistas por los estudiantes como algo que no representan a las funciones; sin embargo, presentamos las situaciones como una forma de esquematizar las proposiciones lógicas desde la óptica de validar si es falso o es verdadero, o modelar una ecuación matemática. En la situación presentada, el estudiante debe identificar si la proposición es cierta o falsa, o si es necesario relacionarla con alguna definición con lo que determinaría una estructura funcional; si este es el caso, entonces se dice que ha alcanzado una concepción de *acción*. Por ejemplo, se presenta la situación siguiente:

S_{23}: Un nadador comienza desde la orilla y nada hasta el otro lado del lago. Esta situación se podría ver como una función distancia.



i. Visto desde un punto de vista físico, se definiría como $f(t)$ con $t \geq 0$, siendo $f(t)$ la distancia recorrida en un tiempo t.
ii. Visto como espacio métrico, la distancia d se define como $d(\text{A;B}) = |\text{B} - \text{A}|$.
iii. Visto como una proposición lógica, podría ser verdadera o falsa, según el nadador alcance o no la otra orilla.

Los resultados que se obtienen de cada una de las situaciones dependen de la concepción de función que tengan los estudiantes y todas son válidas.

3.2. Conceptualización del Ciclo ACE

El tratamiento educacional se basa en la teoría constructivista del aprendizaje realizada con trabajos en el laboratorio de computación, los cuales se orientan al desarrollo de la concepción de función por parte de los estudiantes. Para llevar a cabo el tratamiento instruccional, se elaboraron cuatro módulos del Ciclo ACE (actividades, discusión en clase y ejercicios): módulo 1, que corresponde al tema de conjuntos; módulo 2, que corresponde al tema de Lógica; módulo 3, que corresponde al tema de relaciones y, finalmente, el módulo 4, que comprende el tema de funciones. Cada módulo estuvo compuesto por *una actividad, discusión en clase* y *ejercicios domiciliarios*. En la construcción de los dos últimos módulos, fue valioso el apoyo del libro *Introduction to Discrete Mathematics with ISETL* de W. Fenton y Ed Dubinsky; así también fue importante el libro *Learning Abstract Algebra with ISETL* de Ed Dubinsky y Uri Leron.

Para el desarrollo de las actividades, se consideró el lenguaje de programación ISETLW (Interactive Set Language Window), que permite desarrollar la conceptualización del concepto de función. Para ello, se elaboró el manual del programa ISETLW, basado en manual extraído de la página web http:// www.ilstu.edu/~jfcttr/isetl/; este ha servido como guía de trabajo en el laboratorio de cómputo en el momento de trabajo de las *actividades* con el programa ISETLW.

3.3. Implementación didáctica

Los estudiantes del VIII y X ciclo de la especialidad de Matemática y Física de la Facultad de Educación, que participaron en el proceso de investigación, fueron *invitados* en un número de 20. A ellos se les aplicó la prueba de entrada y luego se iniciaron las actividades del ciclo ACE con la finalidad de que logren reflexionar sobre su trabajo y sobre las concepciones que tenían respecto al concepto de función. Las sesiones se realizaron una vez por semana y se alternaron con trabajos en el laboratorio de cómputo (3 horas), con discusiones en aula (2 horas) y con las tareas domiciliarias de cada módulo durante dos meses. Asimismo, la naturaleza del trabajo fue a través de pequeños grupos, de dos y tres estudiantes intercambiados en cada clase. En el proceso del Ciclo ACE, cuatros estudiantes no terminaron con las sesiones, por tener cruce de horario y por exigencia de los docentes para recuperar clases perdidas en horarios extracurriculares con fines de culminar el ciclo luego de la huelga de docentes. El ciclo de enseñanza se realizó a través de tres componentes:

a) **Actividades**: En este componente, los estudiantes desarrollaron actividades en equipo (grupos de dos); este tuvo que discutir sobre las actividades propuestas y, cuando el caso lo requería, utilizaron el lenguaje de programación ISETLW como ayuda para comprender las situaciones presentadas sobre el concepto de función. Las actividades fueron diseñadas con la finalidad de inducir a los estudiantes a efectuar las construcciones mentales específicas de acciones, proceso, objeto y el nivel de esquema.

b) **Discusiones en clases:** En esta etapa, los estudiantes trabajaron la parte teórica en grupos de tres, bajo el principio de cooperación y la dirección del profesor que, cuando fue necesario, puntualizó algún aspecto con la finalidad de llegar a consensos sobre el concepto desarrollado.

c) **Ejercicios complementarios**: Los estudiantes desarrollaron de manera individual o grupal los ejercicios complementarios, en base a tareas que se encontraban al final de cada módulo. El propósito fue reforzar las ideas con respecto al tema de cada actividad y discusión de clases en un determinado módulo.

3.4. Descripción de la recolección y análisis de datos

Proceso de la recolección de datos

En la recolección de datos, se emplearon tres clases de instrumentos:

- Preguntas escritas (33 situaciones – *prueba de entrada*), cuyas situaciones fueron especialmente diseñadas; esta prueba de entrada duró cuatro horas (desde 8:00 a 12:00 horas). Esta prueba permitió explorar el nivel del constructo mental que tenían los estudiantes antes del inicio del Ciclo ACE. En cada una de las preguntas se encontraron respuestas correctas, incorrectas y situaciones que dejaron sin desarrollar por no comprenderlas.

- Luego de haber desarrollado el Ciclo ACE, que duró dos meses, se tomó una *prueba de salida* a los 16 participantes que siguieron todo el proceso. Inicialmente fueron 20 estudiantes, de los cuales cuatro no pudieron continuar por los motivos expuestos anteriormente. La prueba de salida administrada fue igual a la prueba de entrada; esta fue un indicador de cuánto habían aprendido los estudiantes luego de haber desarrollado el Ciclo ACE.

- Finalmente, se realizó la entrevista a cada uno de los 16 estudiantes acerca de los ejercicios desarrollados; se realizó un cruce de información entre los resultados de su prueba y las respuestas verbales de los estudiantes. Esta entrevista le permitió explicar sobre lo que había pensado, lo que no siempre correspondía con la interpretación que uno puede dar a lo escrito. Las preguntas que se plantearon giraron en torno a cómo fueron desarrolladas las situaciones o por qué fueron desarrollados de esa manera, tanto en la prueba de entrada (aunque casi no hubo respuestas) como en la prueba de salida. La entrevista fue grabada y, durante la conversación, los estudiantes se comportaron un tanto nerviosos, pero esta situación paulatinamente fue superada. Cada entrevista duró aproximadamente 30 minutos, tiempo restringido por coincidir con los exámenes finales de los estudiantes.

Cabe aclarar que la recolección de datos difiere de la propuesta hecha por la Teoría APOS. En la Teoría APOS se consideran solo dos momentos en la recolección de datos: una prueba de entrada (escrita) con situaciones especialmente diseñadas y la entrevista luego del Ciclo ACE. En esta propuesta, en cambio, se considera un momento adicional: la prueba de salida. Esto se consideró necesario, ya que la prueba inicial brindaba muy poca información.

Análisis de datos

En el análisis de datos, intervienen tres momentos:

- Evaluar cada una de las respuestas brindadas por los estudiantes en la prueba de entrada, con la finalidad de verificar las respuestas correctas, parcialmente correctas y respuestas incorrectas o si dejaron las preguntas sin contestar. No se realizaron análisis de las respuestas. Luego de la entrevista, se contrastaron con las respuestas de la prueba de salida y las entrevistas.
- A continuación, con el mismo mecanismo anterior, se realizó la evaluación de la prueba de salida. Luego, se presentaron los porcentajes de las respuestas sobre la pregunta ¿qué es una función?; estas respuestas se ha categorizaron de acuerdo a la definición de función que los estudiantes comentaron.
- En este tercer momento, se compararon las pruebas de entrada y de salida de *dos estudiantes*; se complementó este análisis con las respuestas que dieron los alumnos durante las entrevistas. Además, las entrevistas grabadas fueron transcritas en un formato de dos columnas; en la primera figura la conversación entre el profesor y el estudiante y, en la segunda se incluyen algunas anotaciones o comentarios que se extrajeron de este diálogo.

En base a todo el análisis anterior, se propone identificar las concepciones que poseen los estudiantes respecto al concepto de función.

CAPÍTULO 4

PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE INVESTIGACIÓN

Esta es una investigación de carácter cualitativa, destinada al estudio de las concepciones del concepto de función desde la perspectiva de la Teoría APOS. Se desarrolló con los estudiantes del VIII y X ciclo de la Especialidad de Matemática y Física de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional de Huancavelica.

Se propusieron, en distintos momentos, actividades para identificar las concepciones de los estudiantes. El primero comprende una prueba escrita, que se desarrolló en la cuarta semana del semestre académico y en la que se presentaron 33 situaciones (ver anexo A) referentes a funciones. El segundo momento se llevó a cabo al finalizar el desarrollo del Ciclo ACE (actividades, discusión en clase y ejercicios), donde se aplicó el examen de salida con las situaciones presentadas al inicio. Ambas pruebas sirvieron para comparar las concepciones que tenían los estudiantes respecto al concepto de función en el momento previo al ingreso al Ciclo ACE y al finalizar este. Finalmente, el tercer momento se trató de una entrevista individual grabada en la que se realizaron preguntas para complementar la información recogida en las pruebas.

Luego de haber ejecutado el examen de entrada, se realizó el Ciclo ACE, descrito en el capítulo III, que consistió en desarrollar, en equipos de dos estudiantes, las *actividades* relacionadas al tema de funciones con la ayuda del programa ISETLW. Después, las discusiones se desarrollaron en el salón de clases y, algunas veces, en el laboratorio con la finalidad de corregir y discutir los resultados obtenidos en las actividades; finalmente, se dejaron ejercicios para el desarrollo en sus domicilios.

Una vez realizado el trabajo por los estudiantes, durante dos meses en el laboratorio de cómputo, con tres horas semanales intercaladas con dos horas semanales para la discusión de clases, ellos tuvieron familiaridad con el uso de la sintaxis del programa ISETLW para realizar procesos y operaciones respecto al concepto de funciones. En ningún momento del desarrollo del Ciclo ACE, se les mencionó que estaban trabajando con situaciones relacionadas a funciones, salvo en el desarrollo del tema de funciones (módulo 4). La premisa que tuvimos es que los estudiantes deberían de reflexionar acerca de cada una de las situaciones presentadas en las actividades del ciclo ACE. Sin embargo, no fue fácil para ellos construir algoritmos o expresiones relacionados con el concepto de función. Las razones podrían ser que las situaciones presentadas eran nuevas y, además, fue difícil romper los esquemas de los conceptos que tenían interiorizados.

4.1. Primer momento: prueba de entrada

La prueba de entrada contenía 33 situaciones (ver anexo A), todas relacionadas con funciones. Los 20 estudiantes desarrollaron dicho examen en un tiempo de cuatro horas aproximadamente (desde las 8:00 hasta las 12:00 horas). Los resultados obtenidos sirvieron como referencia en las entrevistas y en el análisis de los resultados de la entrevista para contrastar con la prueba de salida.

4.2. Segundo momento: prueba de salida

Al final del Ciclo ACE, se tomó una prueba de salida a los 16 estudiantes usando la misma prueba de entrada con 33 situaciones. Estas se clasificaron en nueve categorías;

la correspondiente a *expresiones analíticas* debían ser familiares a los estudiantes, ya que habían desarrollado tópicos de funciones en Matemática Básica II, Análisis Matemático I; sin embargo, tuvieron cierta dificultad para desarrollarlas. En la categoría de *gráficas* se les colocaron situaciones, en su mayoría, familiares que habían desarrollado en los cursos de pregrado; aquí tuvieron cierta dificultad para reconocer y determinar si se trataba de una función, así como en identificar su dominio y rango.

En cambio, para las otras categorías de *programación, pares ordenados, cadena de caracteres, ecuaciones, tablas, sucesiones y proposiciones*, se tuvo cierta mejora, ya que los estudiantes lograron comprender la naturaleza del concepto de función, pese a que la mayoría de las situaciones eran absolutamente nuevas para ellos.

Consideramos que este cambio sustancial positivo fue producto del Ciclo ACE, donde los estudiantes tuvieron experiencias que les permitieron alcanzar un nivel de comprensión del objeto función.

4.3. Tercer momento: entrevista a dos participantes

La entrevista se realizó después de la prueba de salida; se convirtió en una fuente especial de información acerca de las concepciones que tenía cada estudiante sobre el concepto de función. En la entrevista, se preguntó por las respuestas dadas en la prueba de salida, que fue el mismo examen de entrada, solo se indagó sobre aquellas situaciones que fueron trabajadas. Se identificó que algunos estudiantes realizaron ciertas operaciones en algunas situaciones, pero cuando se les entrevistó, se obtuvieron respuestas diferentes a las dadas en el examen. Se encontró también que los estudiantes tuvieron otra visión con las situaciones nuevas presentadas, asimilando así una nueva concepción del concepto de función. De los 16 participantes se han tomado dos casos para analizar la conversación de acuerdo a nuestra perspectiva teórica; ellos son Edison (E), que fue seleccionado al azar, y Braulio (B), que fue seleccionado intencionalmente por ser un estudiante que tiene mayor dominio en matemáticas.

Caso 1: entrevista a Edison

Edison es un estudiante del X ciclo con rendimiento académico regular que participó a las clases del ciclo ACE; a la pregunta ¿qué es una función?, Edison respondió:

> Con un ejemplo de acuerdo como yo pienso, conjuntistamente puedo decir que dado dos conjuntos A y B, para todo elemento de A tiene que tener una imagen en B; o si para todo elemento de A debe corresponder un solo punto en B. En otras palabras, la preimagen tiene que ser un solo punto.
>
> Para todo *x* que pertenece a A, existe un *y* que pertenece a B y el par ordenado (*x*, *y*) y (*x*, *z*) pertenece a la función tal que *y* e *z* deben ser iguales.

En la primera parte, de la respuesta de Edison se nota cierta ambigüedad. Al inicio estaría pensando en una relación entre dos conjuntos, porque trata de definirla como una correspondencia. Parece que Edison trata de recordar y repetir alguna definición que anteriormente vio o leyó; por eso, no puede explicar con claridad y solamente trata de repetir tal como recuerda. En este caso, el estudiante tiene una concepción de *prefunción* porque trata de reproducir o relacionar alguna definición dada en algún texto.

Presentamos la situación 01 de la prueba de entrada de Edison, donde resuelve parcialmente la pregunta **S₀₁:** $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ y $g(x)=x+2$, y dice que es una función.

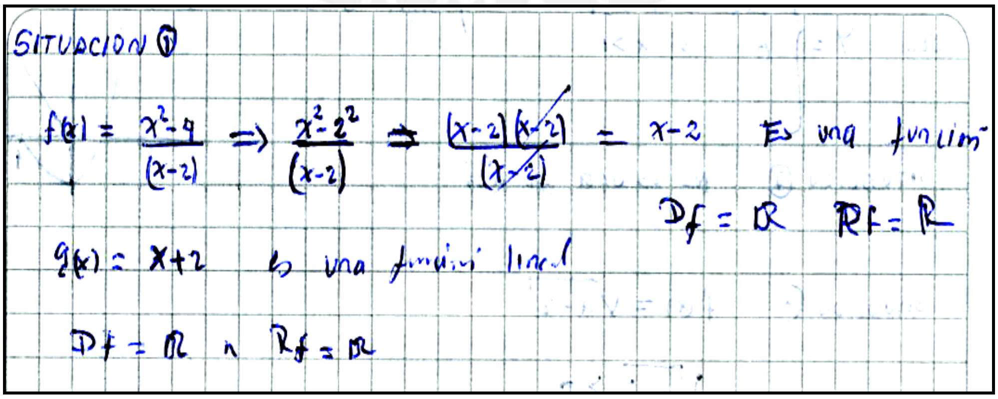


Figura 2. Prueba de entrada S_{01}.

En esta situación, Edison debería haber desarrollado y encontrado $f(x) = x+2$; además, debió determinar su dominio Dom(f) = **R** – {2}, el rango Ran(f) = **R** – {4} y luego graficarlo. Finalmente, debió comparar $f(x)$ con la función $g(x) = x + 2$. En esta situación, el estudiante se encuentra en transición del nivel de constructo mental de *prefunción* a *acción*.

Si verificamos la respuesta en la prueba de salida, observamos que no ha dado una respuesta adecuada, pese a que la situación presentada le debe ser familiar. Esta es su respuesta en la prueba de salida:

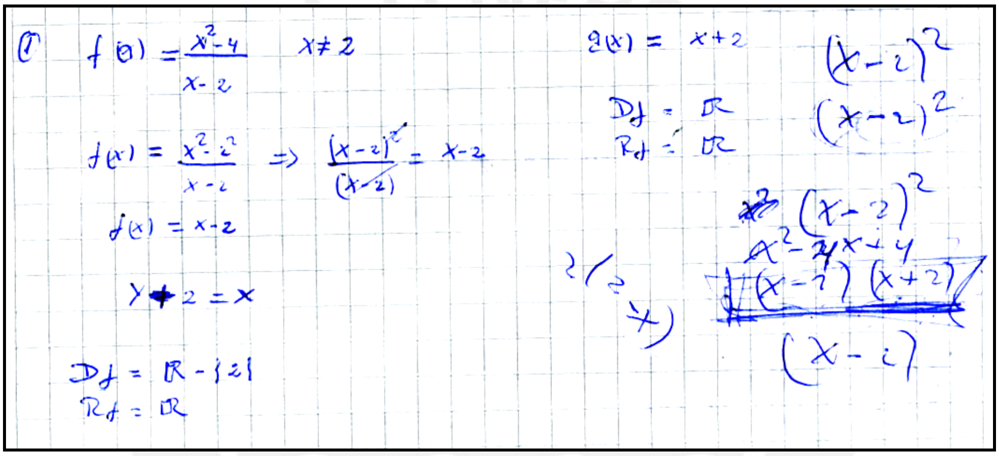


Figura 3. Prueba de salida S_{01}.

P: Edison, aquí tenemos tu examen y la situación Nº 1; para $f(x)$ hiciste $\dfrac{(x-2)^2}{x-2}$ y luego cancelaste, no lo entiendo; ¿es una diferencia de cuadrados?, pero no lo es, lo que hiciste es el factor de $(x-2)$.

E: Profesor, si hallo la diferencia de cuadrados, eso no es así.

P: ¿Completando cuadrados?

E: No, eso es así… es $(x-2)^2$.

P: ¿No crees que te has equivocado?

E: Me equivoqué, profesor, quise hallar esto.

Se aprecia que tiene dificultad en la operación de la diferencia de cuadrados; además, opera mecánicamente sin tener en cuenta las condiciones. Por ejemplo, si vemos la restricción que toma x diferente de 2, entonces el dominio son todos los números reales menos el valor de 2; sin embargo, el rango de $f(x)$ deberían ser todos los números reales menos 4. Si observamos el desarrollo de la situación de $f(x)$ y $g(x)$, notamos que no ha evaluado ni ha intentado graficar. Edison tiene un constructo mental de *prefunción* con transición al constructo mental de *acción* para la situación.

Su respuesta a la **situación 2** es precisa, pues reflexiona acerca de la situación presentada en comparación a la realizada en la prueba de entrada, donde no ha desarrollado y solamente hizo un comentario.

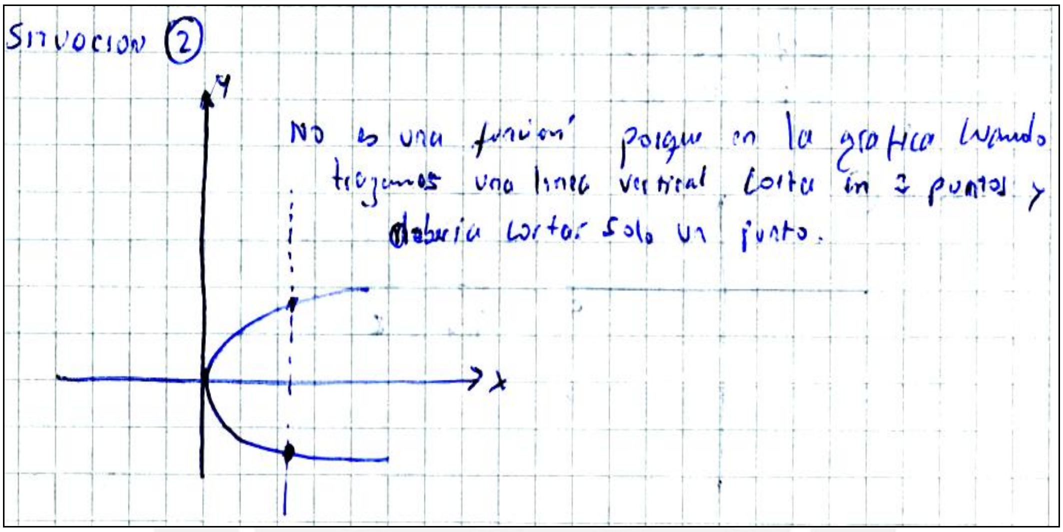


Figura 4. Prueba de entrada S_{02}.

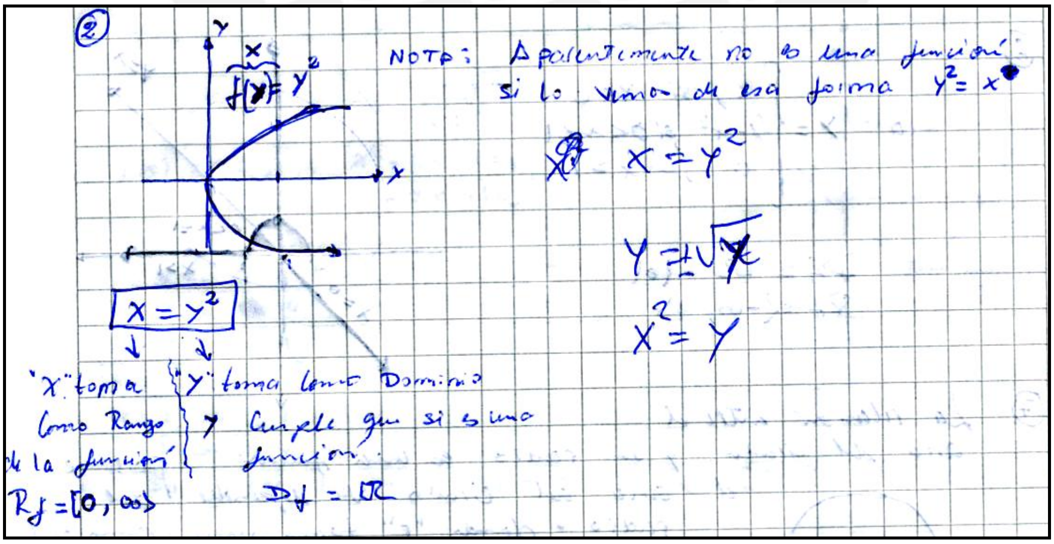


Figura 5. Prueba de salida S_{02}.

P: Edison**,** he analizado la situación 2. En la prueba de entrada, dices simplemente que no es una función, pero ahora, en la prueba de salida, consideras que sí es una función.

E: Sí, porque mi idea fue así la inversa.

P: ¿Cómo así la inversa?

E: Por ejemplo, si trabajamos con $x = y^2$.

Pero ahora si reemplazamos el valor de y y sus raíces de x, será parte de aquí positivo y negativo, y x tiene dos puntos; entonces, no es una función.

Pero ahora qué pasaría si considero la inversa $x = y^2$.

P: ¿Consideras la inversa a trasladar o hacer rotar?

E: No, lo que pasa es que y toma como dominio y x como rango.

P: Así es otra cosa.

E: En ese caso sí es una función. Pero, a simple vista, así no es una función.

P: Se entiende que cambiaste de posición; eso quiere decir que el dominio no puede tomar necesariamente la variable x, sino otras variables.

E: Claro, puede tomar cualquier variable.

En la figura 4, se muestra el desarrollo que realizó Edison en la prueba de entrada, donde trazó una recta vertical que cortaba a la gráfica en dos puntos y, aplicando la definición, señaló que no era una función; en este caso, no reflexiona sobre la situación, solamente aplica la definición a través del criterio de recta perpendicular al eje x para ver si corta al gráfico en más de un punto. Esto demuestra que tiene un constructo mental de *acción* antes del inicio del Ciclo ACE, de acuerdo a [A.2] de la descomposición genética de función. Luego, en la figura 5, mostramos el examen desarrollado de la prueba de salida; aquí Edison reflexiona, interiorizando el proceso. Describe cuándo es una función y cuándo no lo es; asimismo, explica que $f(y) = y^2$ con dominio los números reales y rango $[0, +\infty\rangle$; su explicación data en la rotación de la figura. También, con la situación, muestra que los ejes pueden tomar cualquier variable y no necesariamente la presentación clásica de la forma (x, y). Este desarrollo demuestra que Edison tiene un constructo mental de *proceso*, porque está de acuerdo a [P.1)] y [P.2)] de la descomposición genética de función.

Para la **situación 5**, se muestra que tuvo cierto acercamiento a la respuesta correcta, tanto en la prueba de entrada como en la prueba de salida, debido a que la situación presentada es una tabla de notas que tiene una correspondencia de nombres a sus respectivas notas.

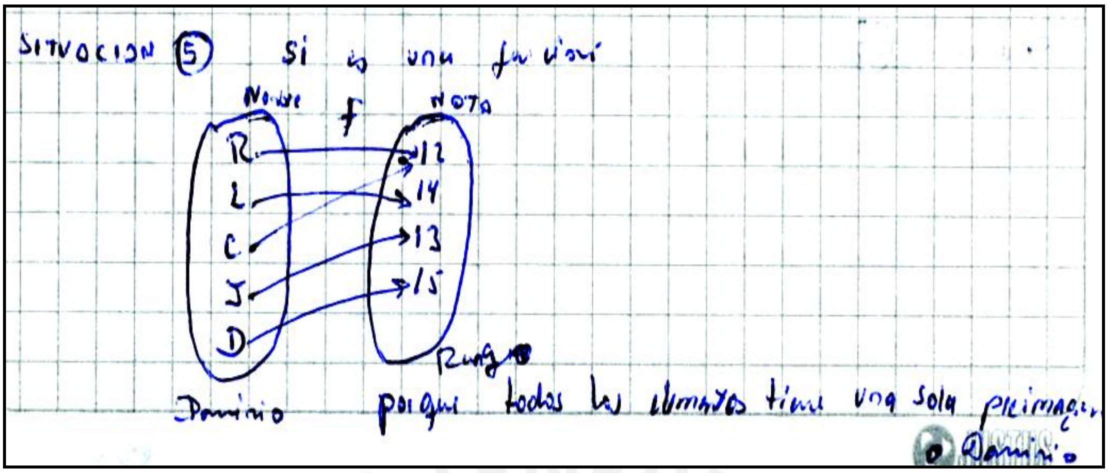


Figura 6. Prueba de entrada S_{05}.

En la prueba de entrada, dice que es una función, realiza el diagrama, hace un comentario acerca de la función y afirma *sí es una función, porque todos los elementos tienen una sola imagen*.

En la entrevista, se obtuvo la siguiente información:

P: En la **situación 5**, en el caso de las notas, el dominio son los nombres y el rango las notas; en cambio, la inversa no es una función. En este caso, si trabajamos con el programa ISETLW, siempre que ingresan números, salían letras.

E: Era el rango.

P: Ahora no necesariamente ingresan números, sino letras. Entonces, si comparamos con las situaciones anteriores, *x* es elemento del conjunto de partida, en este caso no, está en el conjunto de llegada.

E: No, profesor, si existe una regla de correspondencia de salida y llegada, ya es una función. La relación es de un punto a otro punto.

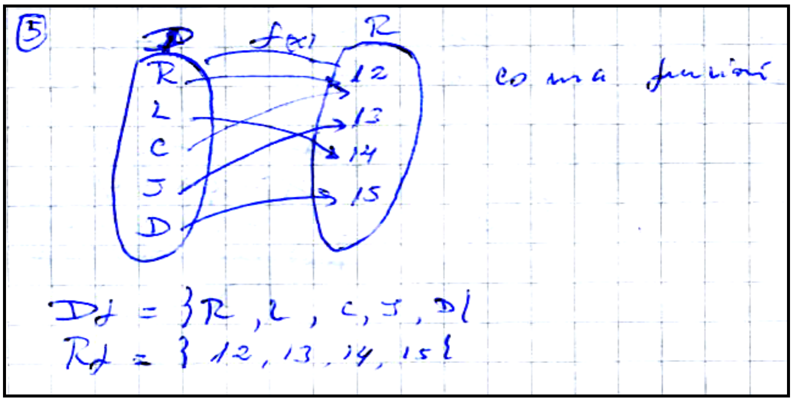


Figura 7. Prueba de salida S_{05}.

En la figura 7, que es la prueba de salida, tenemos el diagrama y dice que es una función; además, presenta el dominio y rango de la función por separado. Al comentario en la entrevista sobre si el programa era de evaluar en un punto, su respuesta fue tener siempre presente su definición y que basta tener una regla de correspondencia de salida y llegada, entonces es una función. Nuevamente está presente el nivel de *acción* para dicha situación de acuerdo a [*A*.2], ya que realiza una comparación teniendo como patrón la definición dada en el inicio.

En la situación 7, se presenta una nueva forma física de relacionar la geometría con el álgebra para determinar el área de un círculo de radio r: $A(r) = (\pi)(r^2)$; y esperamos que el estudiante trate de relacionar estas dos magnitudes:

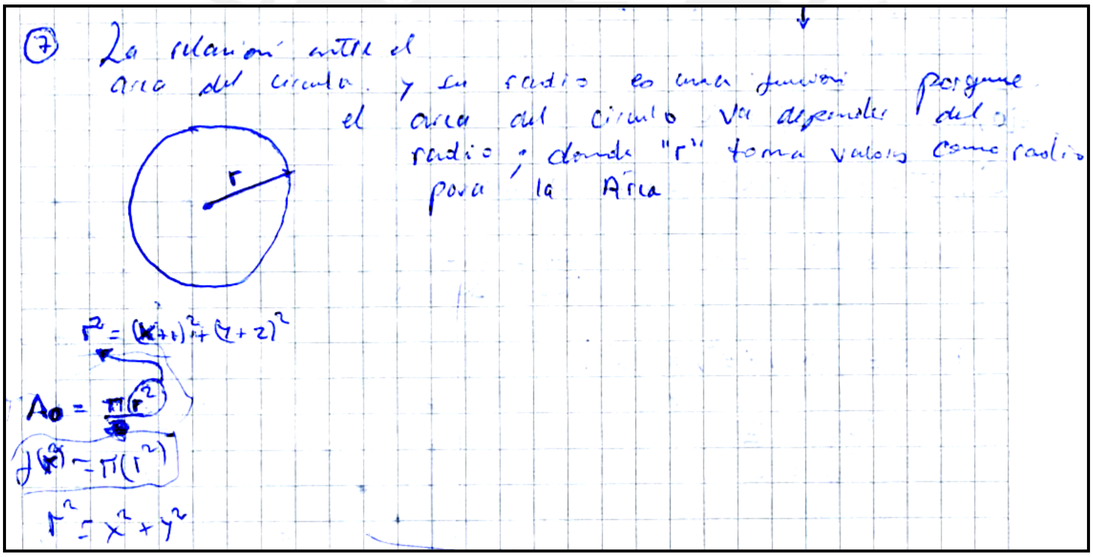


Figura 8. Prueba de salida S_{07}.

P: En la **situación 7**, el área del círculo, dices que **no es función** en tu prueba de entrada.

E: Sí, es una función. Le explico, por ejemplo, el área del círculo es *pi* por radio al cuadrado, y el radio $r^2 = x^2 + y^2$ que es la ecuación de la circunferencia y *pi* una constante, sea $f(x)$ la función y r^2 una variable y, en vez de x, sería el radio y sería así $f(r)$; entonces, el dominio sería el radio y el rango el área.

P: Si el radio tomase –3, ¿sería correcto?

E: Radio –3 ummm, no sería correcto, porque es negativo; entonces, el radio r tomaría valores mayores o iguales a 0.

En esta situación, trata de relacionar la ecuación de la circunferencia pensando que guarda relación con la función y, aunque esto es cierto, no es necesario; solo debe recordar que, cuanto mayor es el radio del círculo, se tendrá mayor área. Esto se podría expresar como $f(r) = (\pi)(r^2)$ o a través de su gráfica, que es parte de una parábola para $r > 0$. A la pregunta si el radio puede tomar valores negativos, tiene una clara idea de que r no puede tomar dichos valores. Como se aprecia, su idea está en transición de *prefunción* a *acción*; asimismo, en la prueba de entrada, no ha desarrollado dicha situación.

Por otro lado, se aprecia que Edison presenta dificultades cuando trata con una situación analítica como la **situación 10,** tanto en la prueba de entrada como en la prueba de salida:

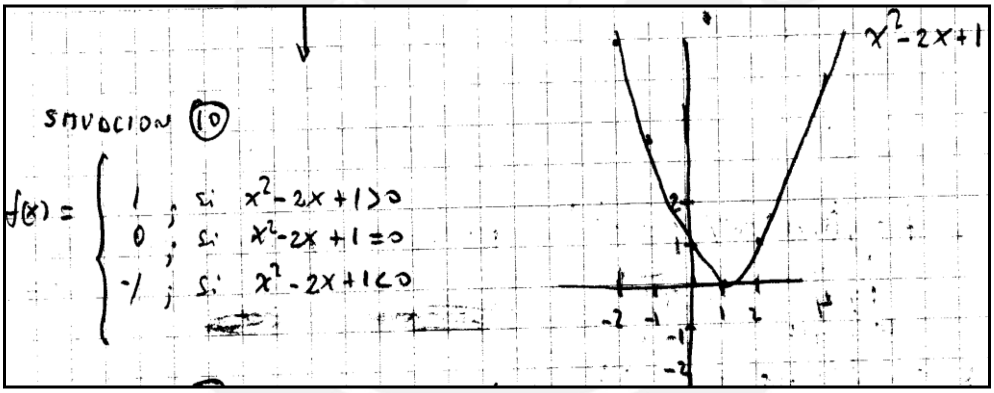


Figura 9. Prueba de entrada S_{10}.

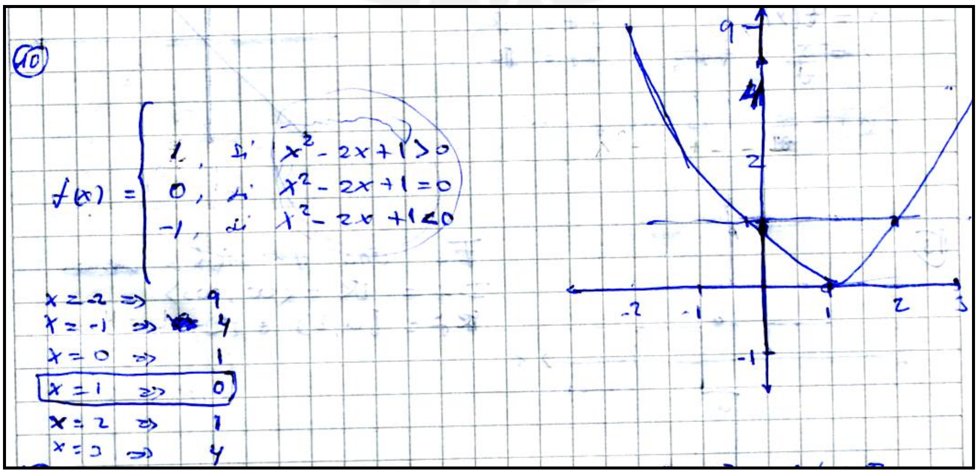


Figura 10. Prueba de salida S_{11}.

P: En la situación 10, tenemos un gran problema, ¿por qué has graficado una parábola?

E: Todos tienen una ecuación y yo he graficado esa ecuación $x^2 - 2x + 1$

P: Pero te dice que f(x) = 1 sí cumple la inecuación $x^2 - 2x + 1 > 0$, f(x) = 0 si cumple la inecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$

E: Ahí sí no tenía idea, profesor, porque lo que hice es cuando y = 1, x cuánto vale y no podía.

P: Esta es una función constante para cada condición.

E: Hice algunos puntitos.

P: Ahora es 0, cuando $x = 1$.

E: Entonces, para encontrar el dominio, se debe hallar las inecuaciones y el rango en función de los intervalos. Y si es una función, basta el dominio y rango, y el rango hallado es 0, 1, 4, 9; ¡ah!, … pero no se cumple.

Esta situación tiene una característica parecida a la función signo, o como una función constante para cada condición que debe tomar el dominio. Edison aquí no tuvo esa idea, y se equivocó y manipuló (en el segundo recuadro) como si fuese una función cuadrática de la forma $f(x) = x^2 - 2x + 1$; tal vez sea porque la condición de la situación (dominio) sea nueva para el estudiante. Así, se observa que se encuentra en el nivel de *prefunción*, porque en la entrevista recién se da cuenta que de debería de tomar el resultado de la inecuación como parte del dominio; pese a la explicación, no sale de su asombro pues no cumple el rango encontrado que es 0, 1, 4, y 9. Edison sigue fijándose en sustituir los valores a la condición algebraica (dominio) y eso le causa desconcierto; por lo que se queda con más dudas. Es decir, aún con la explicación del profesor, no entiende que el rango no se obtiene dándoles valores a $x^2 - 2x + 1$, sino es $\{0, 1\}$. Esta situación realmente resultó novedosa para Edison, ya que, durante sus clases de matemática, no había desarrollado funciones similares que le permitieran relacionar esta situación con otras. Su nivel de constructo mental está en transición de *prefunción* a *acción*.

Analicemos ahora la **situación 12.** Cuando se le presentó por vez primera esta situación a Edison, no tenía idea de cómo desarrollarla, porque la situación era nueva; él trata de relacionar de acuerdo a la definición que manejaba; buscaba establecer una regla de correspondencia, tal como muestra en su prueba de entrada:

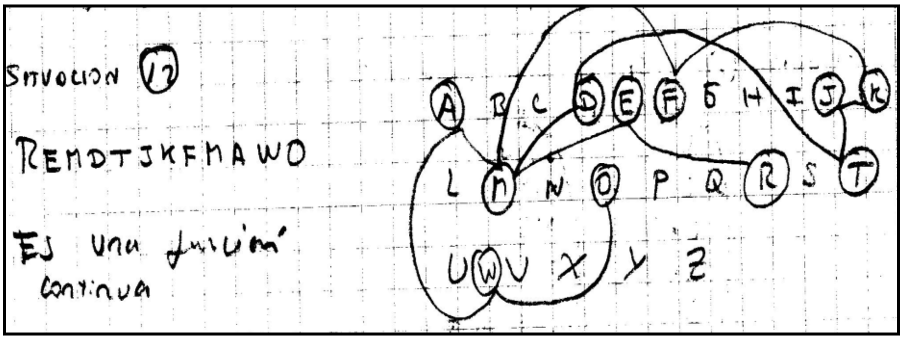


Figura 11. Prueba de entrada S_{12}.

Aquí lo que hace es poner en orden las letras del alfabeto desde la A hasta la Z, donde busca hacer una correspondencia de elemento a elemento empezando con R y relacionándola con E y esta con M, y M con D y así sucesivamente hasta finalizar en O. Se piensa que hacer la interrelación entre dos letras significa para Edison la continuidad; es decir, en esta parte, se encuentra en el nivel de *prefunción*.

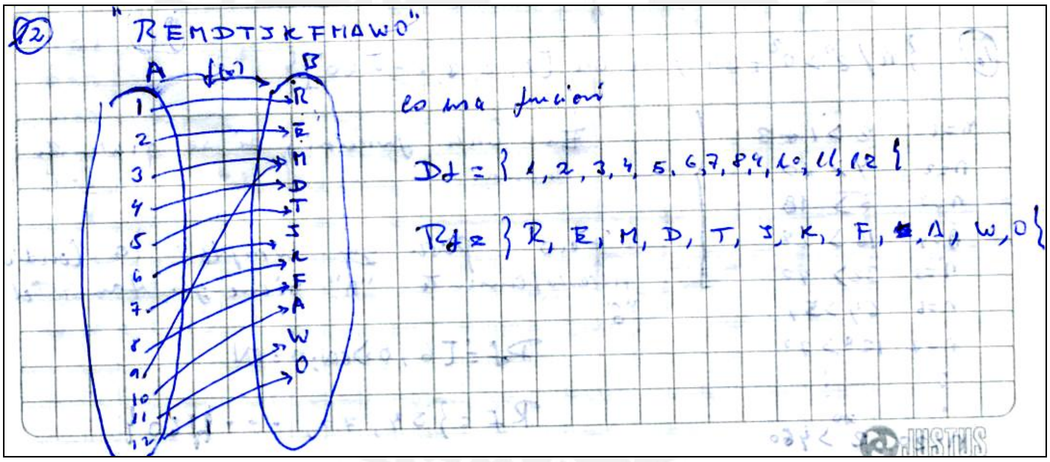


Figura 12. Prueba de salida S_{12}.

En la entrevista, se obtuvieron las siguientes respuestas:

P: En la situación 12, el dominio son los números, ¿por qué pusiste los valores?

E: Por el orden de las letras. Es una serie de letras y he dado valores a cada uno de ellos, por el orden 1, 2, 3, 4, … haciendo corresponder 1 a R, 2 a E, 3 a M, y así sucesivamente y luego he graficado conjuntistamente el conjunto de partida y llegada tomando a todos los números como dominio y a todas las letras como rango.

P: ¿Y sería una función si lo tomas al revés?

E: No cumpliría, porque M tendría dos imágenes.

P: Y el programa ¿qué nos muestra? (*se refiere a ISETLW*)

E: El programa nos enseña de la misma forma, pero si lo invertimos no es así, ya no cumple.

En la prueba de salida, Edison ha cambiado su respuesta, ahora su desarrollo fue correcto; consideramos que este cambio ha sido producto y fruto del desarrollo del Ciclo ACE para dicha situación y otras similares. Siempre, en su conversación, existe la palabra *correspondencia* refiriéndose a lo explicado al inicio; esto demuestra que tiene la concepción de *proceso*, de acuerdo a [P.1] y [P.2] de la descomposición genética de función y hace referencia a "y así sucesivamente". También trata, de alguna manera, explicar y reflexionar sobre el proceso inverso "no se cumpliría porque M tendría dos imágenes".

Por otro lado, muestra correctamente cuál es el dominio y cuál es el rango. Haciendo una comparación con lo desarrollado en la prueba de entrada, aquí se tiene una visión más clara sobre el concepto de función.

En la **situación 14, S_{14}:** $\begin{cases} x = t^3 - 4t \\ y = t^2 - 4 \end{cases}$, t es un número real; se tiene en cuenta un patrón de comparación, ya que, de alguna manera se busca relacionar con algún ejercicio similar. Presentamos la prueba de entrada y de salida:

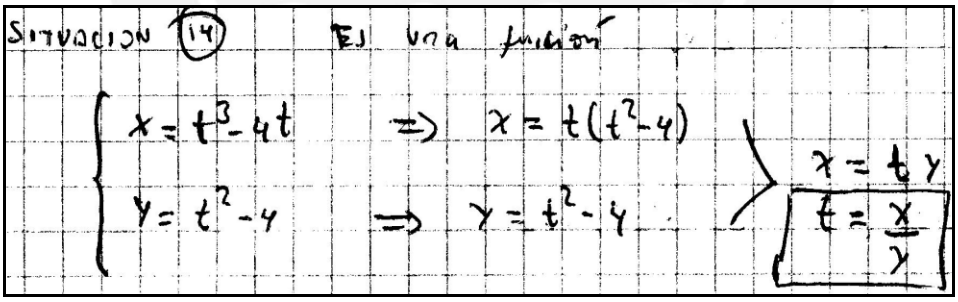


Figura 13. Prueba de entrada S_{14}.

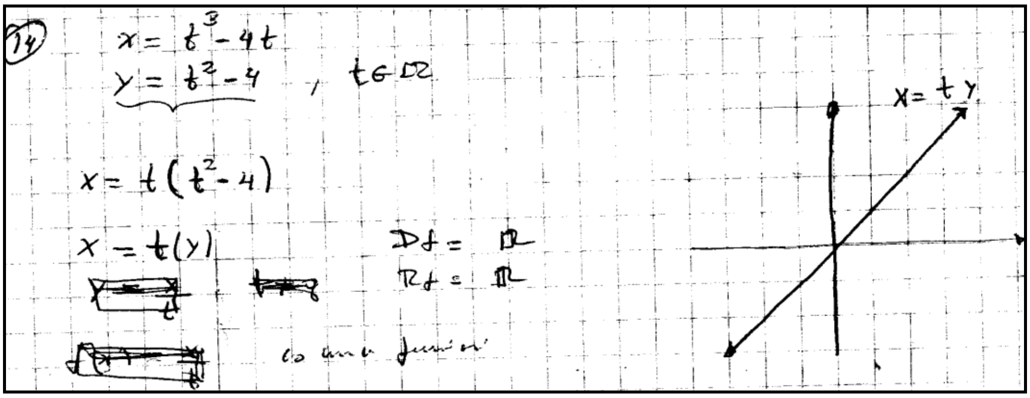


Figura 14. Prueba de salida S_{14}.

En ambos casos, existe una fuerte relación de dependencia entre las variables *x* e *y*, a través de *t*. Edison ha tratado de relacionar ambas variables, pero sin tener en cuenta el parámetro ***t***; como en los casos estudiados en los cursos de Cálculo, ha tratado de hallar expresiones que relacionan *x* e *y*.

P: La situación **14** no la has hecho, pero has tratado de graficarla.

E: Sí, lo hice.

P: Has despejado en términos de *y*: $\frac{x}{t} = y$, pero no te has fijado que *x* es una variable y *t* también es otra variable porque pertenece a los reales; pareciera el producto de dos variables, ¿no te has fijado en eso?

E: Aquí estoy considerando a *t* como una constante. Pero no me he fijado.

Se entiende que el valor de *t* lo ha tomado como un valor constante; eso lo demuestra la gráfica presentada en la prueba de salida. Asimismo, se evidencia que tiene una concepción de *acción* [*A*.1], porque siempre trata de relacionar a los pares ordenados (*x*, *f*(*x*)); pero, no logra prescindir de *t* antes de intentar hacer un gráfico en el plano *xy*.

En la situación 15, se presenta un caso especial. Si vemos la prueba de entrada y salida respectivamente, se observa que, en ambos casos, tiene la misma concepción acerca de la situación presentada:

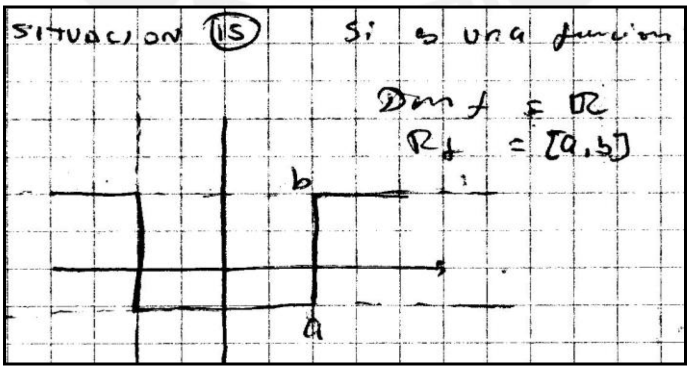


Figura 15. Prueba de entrada S_{15}.

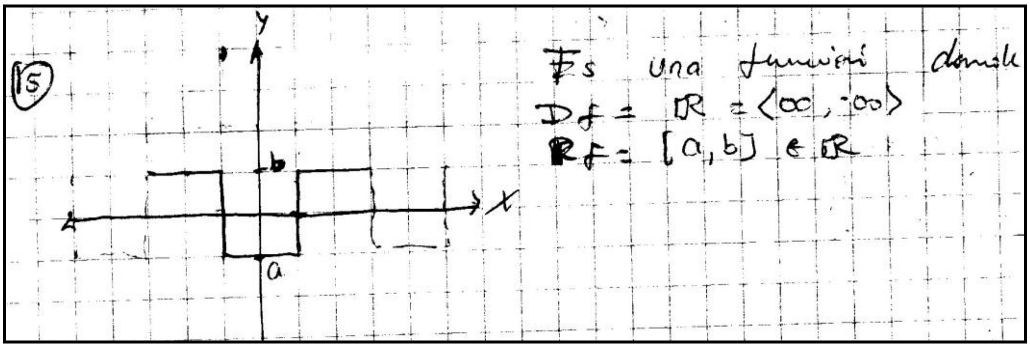


Figura 16. Prueba de salida S_{15}.

P: La situación 15 dices que es una función, ¿es una función?

E: Sí, es una función, porque acá tomo un punto.

P: Pero aquí hay varios puntos en la perpendicular. En un punto *x* te da como imagen varios puntos.

E: Me he confundido.

Ambas presentaciones guardan una relación de similitud, lo que significa que posiblemente se recordaba una función periódica y, por analogía, trató de responder que sí era una función, o Edison sigue trabajando con la concepción de “a cada preimagen le corresponde una imagen”, pero no pensó que el segmento vertical era parte de la gráfica. En esta situación, Edison se encuentra en un nivel de constructo mental de *prefunción*. Este resultado difiere con las investigaciones hechas por Tall (1990), que concluye que casi todos los participantes consideran que no es una función, no porque tenga líneas verticales, sino porque es extraño, no la conciben como una curva suave y continua, o porque les es difícil definirla.

Para la ecuación de la **situación 17:** $x^2 + \sqrt{x} - 18 = 0$, es difícil aceptar que tiene la naturaleza de función; se aprecia que, en la prueba de entrada, Edison no logra asociarla a una función.

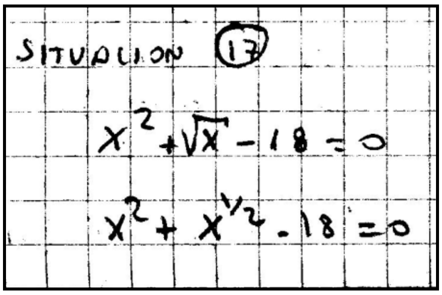


Figura 17. Prueba de entrada S_{17}.

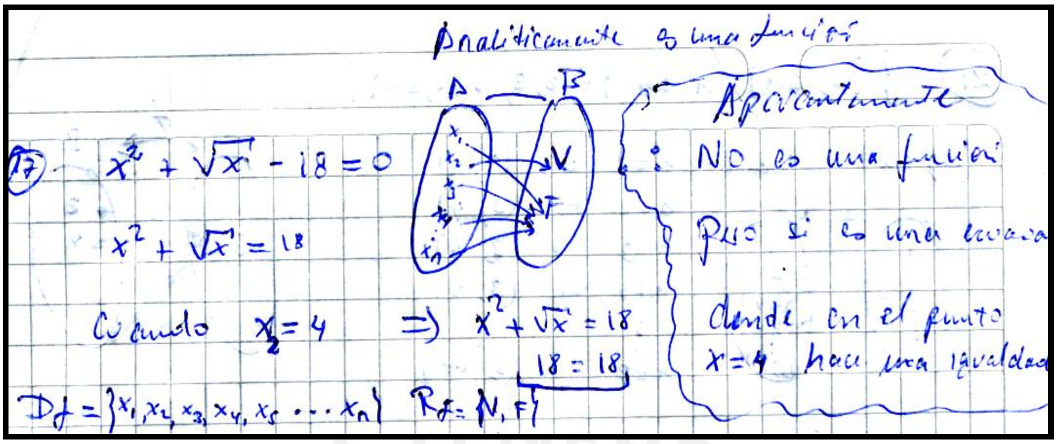


Figura 18. Prueba de salida S_{17}.

P: Vamos a la situación 17. Aquí hiciste para x = 1, 2, 3, 4 y 5. Para 4 es probable que se cumpla.

E: Para 4 sí cumple, para 4 es verdadero y el resto es falso.

P: El dominio es cualquier valor desde x_1 hasta x_n .

E: Sí, el dominio es desde x_1 hasta x_n , y el rango es verdadero y falso.

P: Pero ¿qué pasó con la situación anterior? Me refiero a la situación 16.

E: Me di cuenta demasiado tarde y ya no pude hacer nada.

Sin embargo, en la prueba de salida, ha manipulado la expresión y ha encontrado un valor que satisface la ecuación. Se debe tener en cuenta que esta situación es una función de correspondencia proposicional, donde el dominio está conformado por los valores que se asigna al evaluar x en la ecuación y el rango es la veracidad que se cumple al evaluar la ecuación y que puede ser verdadero (V) o falso (F). Edison logra manipular esta situación y, además, identifica la correspondencia de dominio y rango. Con esta respuesta, Edison muestra haber alcanzado el nivel de constructo mental de *proceso*, porque cumple: [*P*.1] grafica la función considerando su dominio y rango; por [*P*.2] verifica el comportamiento y tendencia de la función analizando el dominio de x_1, x_2, x_3,… x_n. y explica las condiciones para ser una función.

Ahora veamos, qué sucede con la **situación 21**, cuando un conjunto de pares ordenados aparentemente tienen el mismo valor para el primer componente.

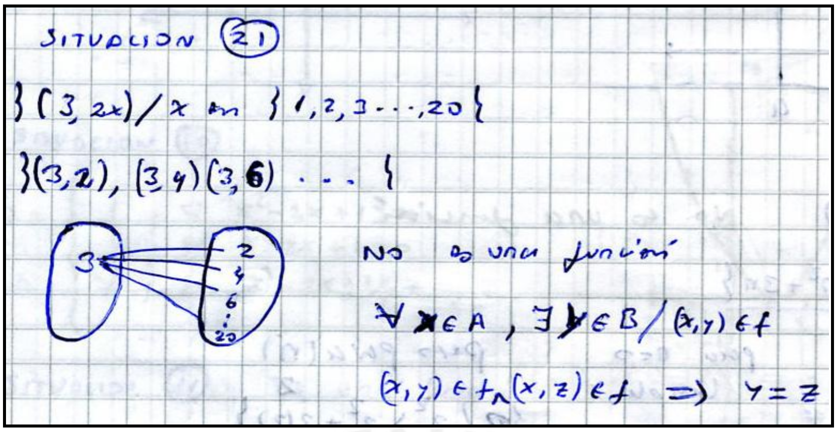


Figura 19. Prueba de entrada S_{21}.

En la prueba de entrada, se aprecia que evalúa para valores de *x* en (3, *x*) y obtiene el conjunto de pares ordenados, donde el primer componente es 3; al observar, utiliza la propiedad $\forall x \in$A, $\exists y \in$B / $(x, y) \in f$, también dice que $(x, y) \in f$ $(x, z) \in f \Rightarrow y = z$, y concluye que no es una función. Para esta situación, Edison se encuentra en el nivel de constructo mental de *acción*, por cumplir [*A*.1] y [*A*.4] de la descomposición genética de función.

A continuación, se muestra el resultado de la prueba de salida.

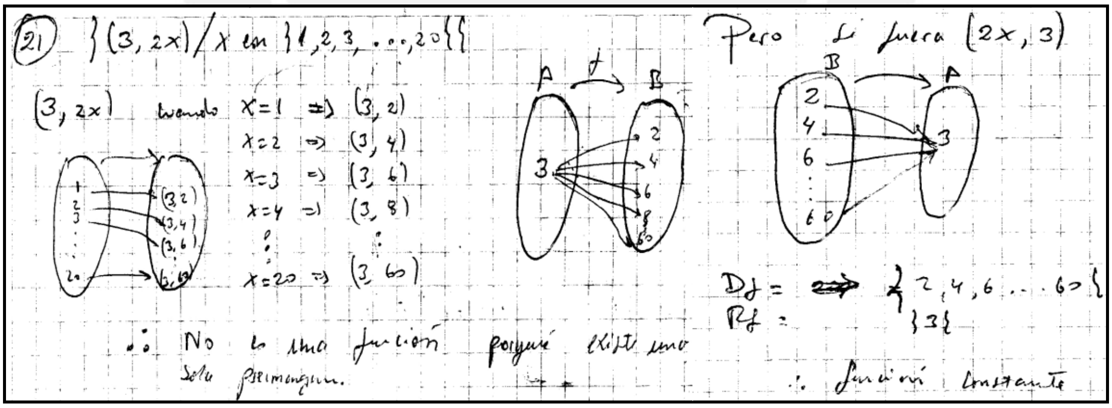


Figura 20. Prueba de salida S_{21}.

P: En la situación 21, ¿por qué hiciste dos gráficas y en una de ellas consideras solamente el punto 3?, *x* pertenece al …

E: Al dominio y.

P: La situación dada es el conjunto los pares ordenados.

E: Sí, me di cuenta después de desarrollar que el dominio era del 1 al 20 y el rango era el conjunto de pares ordenados; por eso, puse solamente la gráfica. Así sí es una función. Además, consideré que si el par (2*x*, 3) fuese así, sí sería una función, claro pensándolo como en el primero.

La concepción clásica de pares ordenados ocasiona que Edison, pese a haber desarrollado la situación, diga que no es una función; manipuló las variables, realizó la primera gráfica donde existía correspondencia entre los números del 1 al 20 con los pares ordenados (3, 2), (3, 4), (3, 6), …, (3, 60) y esto fue correcto; sin embargo, Edison pensó que no era correcto. Aquí primó la definición clásica de función y no la función f: $x \rightarrow (3, 2x)$; es la razón por la que, en la entrevista, Edison afirma que se dio cuenta muy tarde. Su concepción de función está en el nivel de *proceso*, porque cumple con [*P*.2] y [*P*.3] de la composición genética de función; él reflexiona y verifica el comportamiento de la función de acuerdo a las variables, dominio y rango de la función; también analiza y toma la inversa de la forma clásica ($2x$, 3) y muestra que sí es una función, una función constante.

Finalmente, veamos la **situación 27** trabajada por Edison. Se tiene la prueba de entrada.

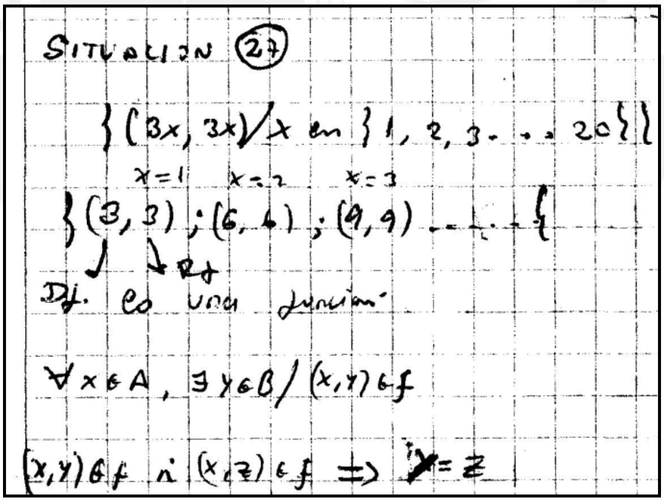

SITUACION 27
$\{(3x, 3x) / x$ en $\{1, 2, 3 \ldots 20\}\}$
$x=1$ $x=2$ $x=3$
$\{(3,3); (6,6); (9,9) \ldots\}$
Df. es una función
$\forall x \in A, \exists y \in B / (x,y) \in f$
$(x,y) \in f$ ∧ $(x,z) \in f \Rightarrow y = z$

Figura 21. Prueba de entrada S_{27}.

Si apreciamos la figura 21, de la prueba de entrada, se observa que Edison solamente sustituyó los valores de x en los pares ordenados y dijo que era una función. Lo cierto es que tuvo cierta duda; por eso, no pudo decir cuál era el dominio y cuál era el rango de la función; estuvo claramente influido por el concepto clásico. Por lo tanto, Edison es considerado en el nivel de constructo mental de *prefunción* para dicha situación en la prueba de entrada.

A continuación, se presenta la prueba de salida.

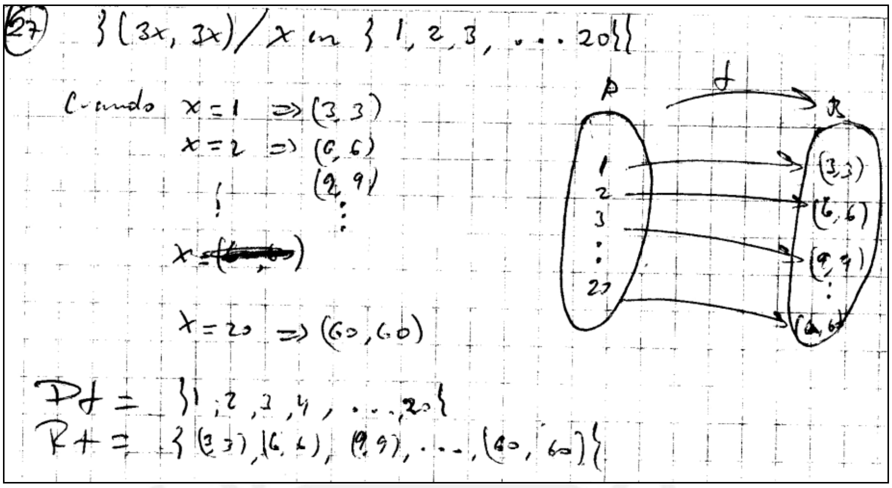


Figura 22. Prueba de salida S_{27}.

P: La situación 27 la hiciste y consideraste el dominio y rango.

E: Aquí ya lo entendí, ya lo había comprendido.

Pero, si ahora analizamos el segundo recuadro, se observa que ha cambiado su forma de ver la correspondencia, pues concibe funciones cuyas imágenes son pares ordenados. Ha alcanzado el nivel de constructo mental de *proceso,* pues cumple con [*P*.2] y [*P*.3] de la composición genética de función; Edison reflexiona y verifica el comportamiento de la función de acuerdo a las variables, dominio y rango de la función; asimismo, evalúa los pares ordenados de acuerdo a la condición del dominio.

Resumiendo, el estudiante ha desarrollado con dificultad las situaciones clásicas que había trabajado en cursos previos; todo ello demuestra que se encuentra en transición de *prefunción* a *acción*. Mientras que ha desarrollado la mayoría de las situaciones nuevas exitosamente, se aprecia que el Ciclo ACE ha ayudado en la conceptualización de la definición de función, de manera que el estudiante logre un nivel de constructo mental de *acción* por cumplir: [*A*.1] porque grafica la función guiándose con la correspondencia de dos conjuntos; por [*A*.3] evalúa la ecuación asignándole valores a *x*, y identifica qué valor satisface la ecuación y [*A*.5] determina la veracidad funcional de la ecuación, con tránsito al nivel de constructo mental de *proceso,* porque cumple en algunas situaciones: [*P*.1] grafica la función considerando su dominio y rango; [*P*.2] verifica el comportamiento y tendencia de la función analizando el dominio de x_1, x_2, x_3,… x_n. y explica las condiciones para ser una función.

Caso 2: entrevista a Braulio

A la pregunta ¿qué entiende por función?, se obtuvo la siguiente respuesta:

P: Braulio, ¿puedes decirme qué es una función?

B: Yo lo veo como [una regla de correspondencia, entre un conjunto de partida y un conjunto de llegada. Para conocer una función, siempre debo de conocer su preimagen, de preimagen generar mi imagen](1). También, [puedo definir geométricamente trazando una recta](2); también puedo definir y [que cumpla solamente dos condiciones: primero, debe tener su regla de correspondencia; el segundo, que el dominio no debe generar dos imágenes o una preimagen no debe generar dos imágenes diferentes](3).

En su respuesta, presenta tres maneras de definir una función: en la primera, falta precisión porque esta puede representar a una relación y no necesariamente a una función; la segunda es una forma de comprobar si una gráfica representa a una función, definición geométrica. Esta forma de definir una función es cierta para algunos casos, pero no lo es cuando una función está definida mediante puntos en el plano cartesiano, por ejemplo, si f está definida de **N** en **N** y cuya regla de correspondencia es $f(n) = n^2$. La tercera definición que da Braulio se ajusta mejor a la definición del concepto de función, ya que se refiere a una correspondencia entre dos conjuntos; además, que el primer elemento no debe tener dos imágenes.

P: Pero se da el caso, por ejemplo, que se tiene en el dominio nombres y en el rango las notas. Y cuando trabajo con la situación de las letras, en el dominio van los números y luego las letras como rango. Entonces, ¿necesariamente tengo que poner x al primer componente?

B: No, profesor, porque usted puede tomar cualquier variable.

P: Entonces, ¿la definición clásica de (x, y)?

B: Yo creo que hay que tratar de evitar, y no siempre hay que darles a los estudiantes con valores de x. Podemos darles el valor de a; es como cuando los alumnos están en 1ero, 2do, 3ero y cuando entran a 5to les cambias por seno y coseno. Es igual como en el álgebra; entonces, ellos ven otro panorama.

En esta parte, se aclara que no necesariamente se debe usar el par ordenado de la forma (*x, y*), sino que se pueden emplear otras variables. La definición que hace Braulio es correcta y consideramos que su concepción de función, se encuentra en el nivel de *proceso*.

En la **situación 2**, veamos cómo responde:

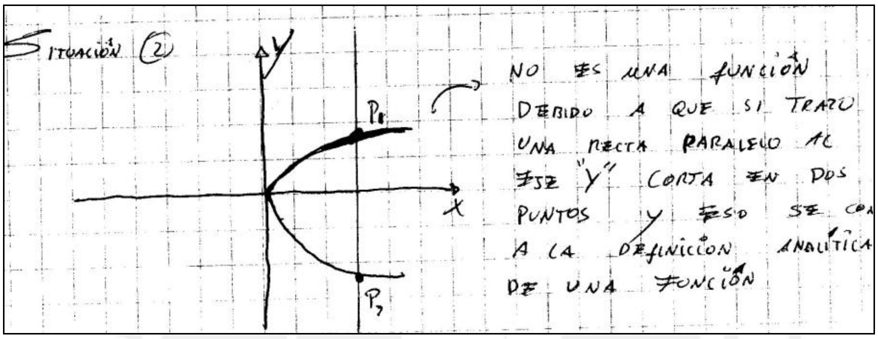


Figura 23. Prueba de entrada de S_2.

Al inicio, en la prueba de entrada, amparándose en su definición geométrica, dice que no es una función; su concepción sobre función fue de *acción* porque aplicó su definición geométrica. No ha realizado ningún análisis, solamente se ha ceñido a lo que conocía, es decir, que se ha enmarcado dentro de su concepción. Su nivel de constructo mental para la situación es *acción*, por [*A*.2] de la descomposición genética de función.

Presentamos la prueba de salida.

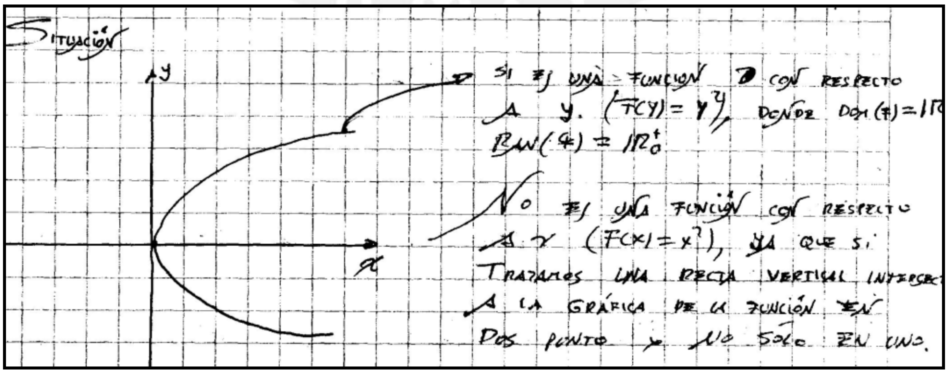


Figura 24. Prueba de salida de S_2.

P: Dices que la situación 2 es una función con respecto a *y*.

B: Sí, profesor, es cuando analizamos si es una función con respecto a "*y*".

B: Tomando como dominio a "*y*" y rango a x; en cambio, si tomo a "*x*" como dominio no es una función, porque si trazo una recta perpendicular hacia el eje *x*, esta corta en dos puntos, pero tomando como dominio a *y* sí es una función.

Luego de haber realizado el taller del ciclo ACE, el resultado fue otro; y se observa en la figura 24, donde Braulio reflexiona sobre cuándo sería una función ($f(y) = y^{2}$) y cuándo no lo sería. En este caso, ha modificado su concepción al nivel de *proceso* con respecto a la prueba de entrada, porque está de acuerdo a [*P*.1] y [*P*.2] de la descomposición genética de función.

Ahora, veamos la situación 3**:**

a) $F = \{(x, y) \in N^2 \,/\, y^2 = x^2\}$, definido de N en N.

b) $D = \{(x, y) \in Z^2 \,/\, y^2 = x^2\}$, definido de Z en Z.

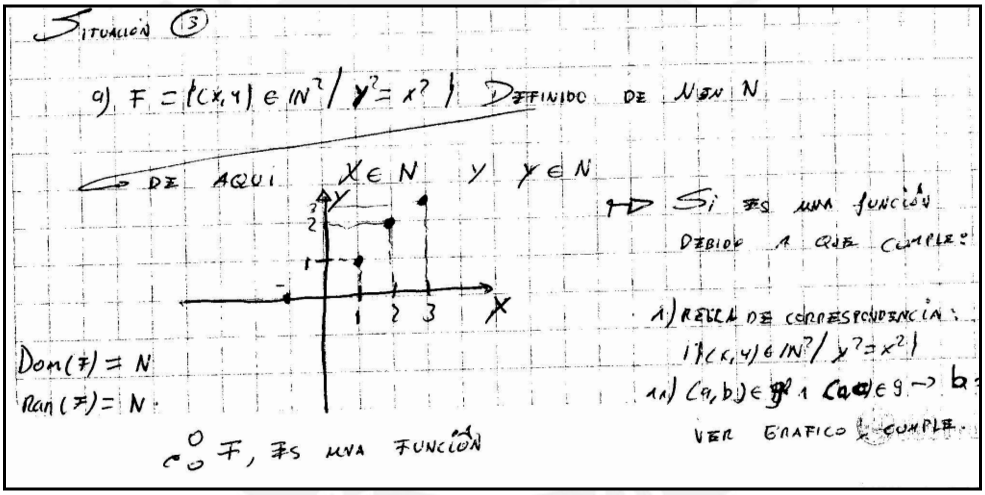


Figura 25 – a. Prueba de entrada de S_3.

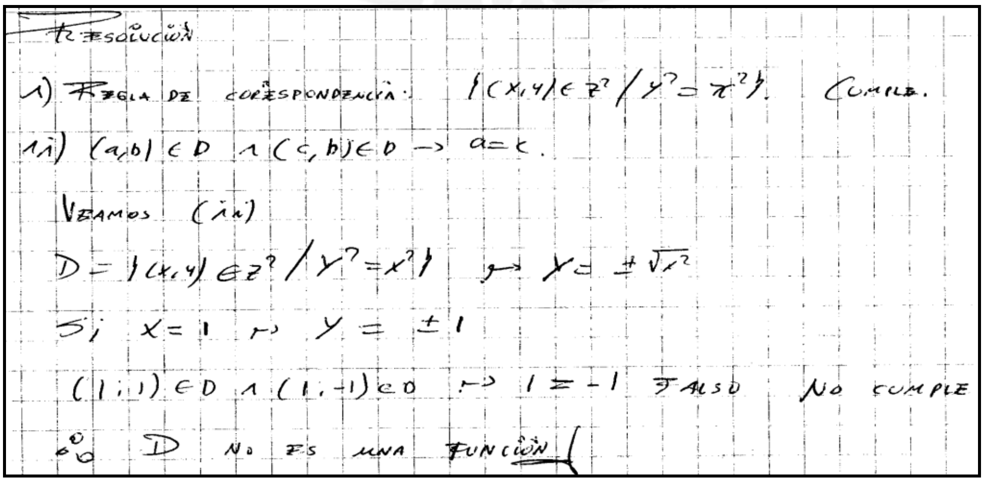
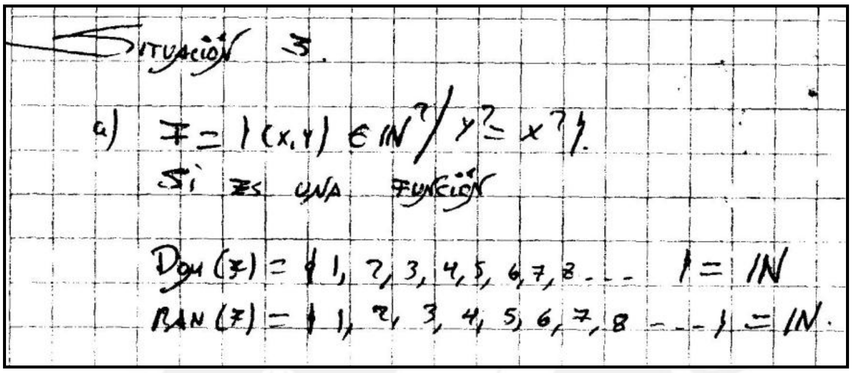


Figura 25 – b. Prueba de entrada de S_3.

Si verificamos la prueba de entrada, su desarrollo es correcto y ha utilizado las propiedades que le son necesarias. Hizo el análisis correspondiente de las condiciones necesarias para determinar si es una función y aquí nos muestra que su nivel de concepción corresponde al de *proceso*.



Situación 3.

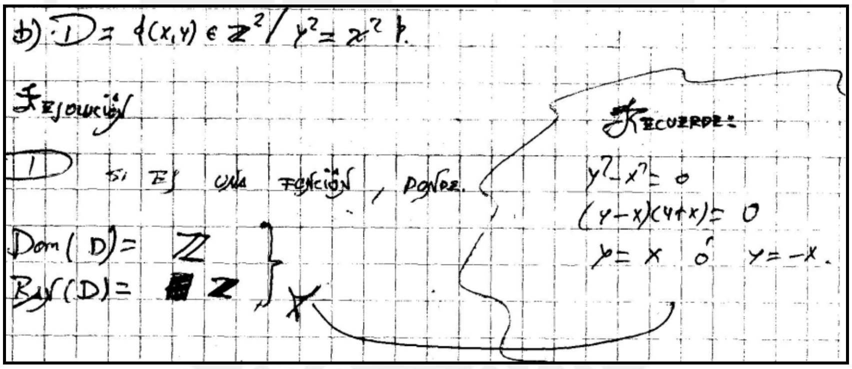
a) $F = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 / y^2 = x^2\}$.

Si es una función

$Dom(F) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \ldots\} = \mathbb{N}$

$RAN(F) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \ldots\} = \mathbb{N}$.

Figura 26 – a. Prueba de salida de S_3.



b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 / y^2 = x^2\}$.

Resolución

I) Si es una función, donde:

$Dom(D) = \mathbb{Z}$

$Ran(D) = \mathbb{Z}$

Recuerde:

$y^2 - x^2 = 0$

$(y-x)(y+x) = 0$

$y = x$ ó $y = -x$.

Figura 26 – b. Prueba de salida de S_3.

P: Con respecto a la situación 3, ¿dices que a) es una función?

B: Sí.

P: 1-1, 2-2, 3-3, ¿por qué lo hiciste con 1-1, 2-2, 3-3, el dominio y el rango? ¿Has cancelado los exponentes?

B: Dice (*x*, *y*) pertenece a los naturales; entonces, el dominio de la función son todos los naturales, porque *x* puede tomar 1, 2, 3, 4, 5.

P: ¿También "*y*"?

B: "y" también, cuando pasa tomaría más – menos, sería el valor de *x* al cuadrado, pero será siempre positivo porque son los números naturales.

P: Correcto. ¿Y para la b) dices que es una función?

B: Ahhh. Pero es diferente, porque está en Z. (S*e refiere a los números enteros*).

P: Claro que sí.

B: Entonces, en Z, es de la misma manera; *x* puede tomar cualquier valor entero. Este valor entero *y* va a tomar con la raíz cuadrada, será un valor entero positivo.

P: ¿No crees que en los negativos te has equivocado? Aquí has hecho bien la diferencia de cuadrados: $y=x$, eso sería los positivos, pero cuando $y=-x$ es negativo; entonces, esta recta tiene pendiente positiva y esta otra tiene pendiente negativa, es una función con pendiente negativa.

B: Bien, si x = y sería cierto.

P: ¿Qué pasaría si graficas primero $y = x$?

B: Si $y = x$ será así; en cambio, cuando $y = -x$, va a ser lo contrario. En este caso, $y = x$ es una función e $y=-x$ también es una función.

P: Pero en este caso es una sola función.

B: Sí.

P: Entonces, si trazas una perpendicular, ya no se cumpliría.

B: Sí, profesor, entonces no sería una función.

Cuando verificamos la prueba de salida, la respuesta no fue igual a la prueba de entrada. No se entiende cuál fue la razón para haber realizado un trabajo que parece que se hizo de manera apresurada. En la situación 3-a) estamos de acuerdo aunque falta la gráfica. Pero, para la situación 3-b), dice que $y^2 = x^2$ es una función, cuando ésta no lo es. Si comparamos la prueba de entrada y de salida ahora se encuentra en transición del nivel de *acción* al nivel de *proceso*, pues Braulio ha desarrollado parcialmente dicha situación.

Cuando se presenta situaciones de la forma $y = \begin{cases} x & , si \quad x \le 0 \\ 1-x^2 & , si \quad 0 < x \le 1 \\ 0 & , si \quad x > 1 \end{cases}$, Braulio tuvo dificultad, pese a que estas funciones le eran familiares.

En la figura 27–a, se presenta la prueba de entrada, Braulio considera que es una familia de funciones, sin haber desarrollado o graficado.

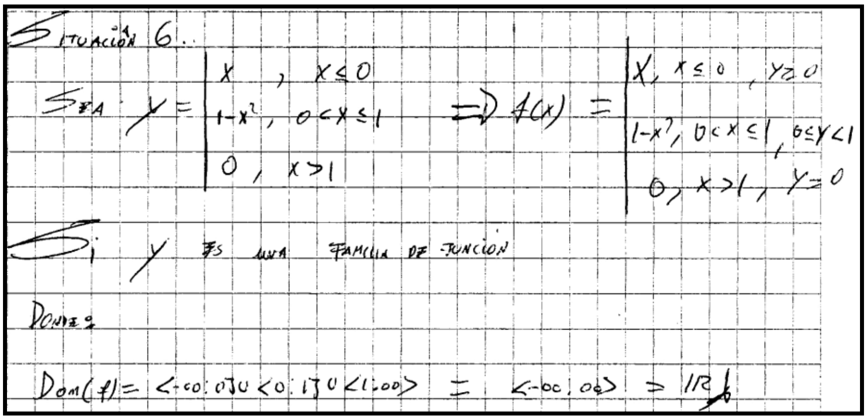


Figura 27 – a. Prueba de entrada S_6.

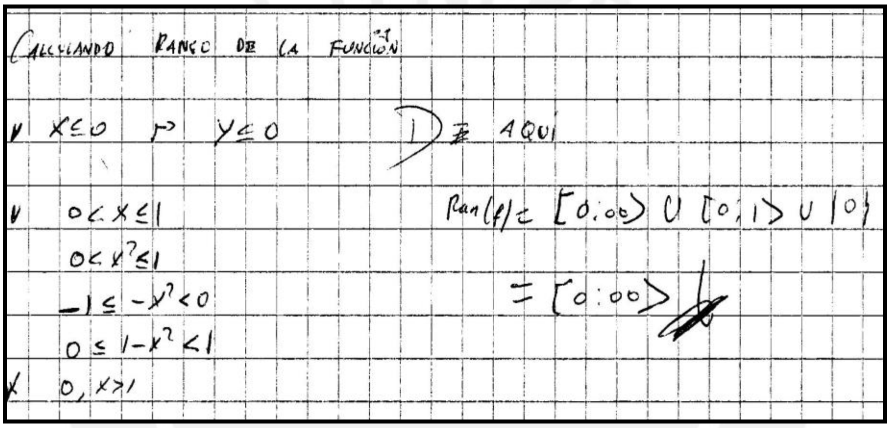


Figura 27 – b. Prueba de entrada S_6.

Aunque trató de manipular el dominio y el rango de la función, no ha completado adecuadamente todo el proceso. Ahora, veamos la prueba de salida:

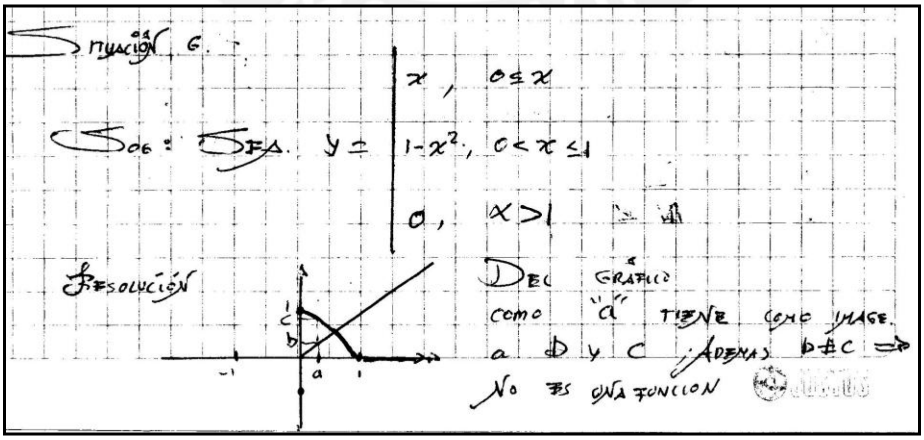


Figura 28. Prueba de salida S_6.

P: En el gráfico de la situación 6, *"a"* tiene como imagen "b" y "c", dices que no es función.

B: Yo he considerado solo puntos.

P: No te has fijado y dices que no es una función, porque *x* era menor o igual a cero. Entonces, ¿la gráfica es para el tercer cuadrante?

B: Sí, profesor.

En situaciones de este tipo, creemos que existe una dificultad para identificar las condiciones de la función, razón por la cual se equivocó y nos dice que no es una función, a pesar de que este tipo de funciones deberían ser familiares a los estudiantes que estudiaron matemática básica. Comparando las de prueba de entrada con la de salida, podríamos decir que nuestro interlocutor se encuentra en un constructo mental de tránsito de *prefunción* a *acción*.

Muchos objetos de la matemática, como en la geometría u otras áreas, requieren ser tratados usando el concepto de función. Ese es el motivo por el que se presenta la ***situación 7***, que está relacionada con el área de un círculo.

En la prueba de entrada, se aprecia que el desarrollo ha sido analítico; en este caso, no ha manipulado las variables, sino ha explicado de manera lógica.

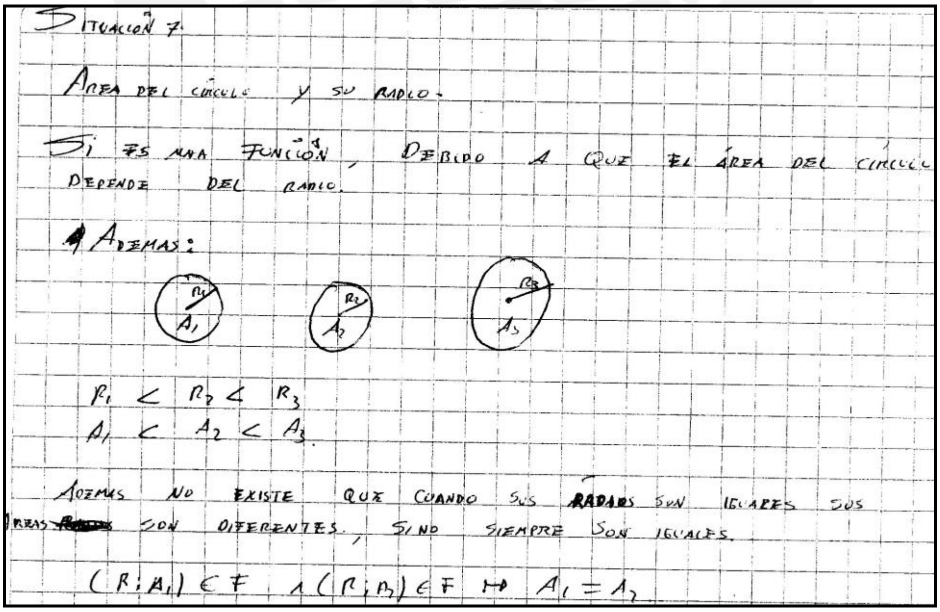


Figura 29. Prueba de entrada S_7.

En esta solución, Braulio no ha escrito la ecuación de la función A(*r*) y define el concepto de función bajo una construcción particular, concibiendo el concepto desde el nivel de *acción* por [*A*.5]. Además, establece la relación de que si los radios son iguales, entonces sus áreas también lo serán. Ahora, veamos la prueba de salida.

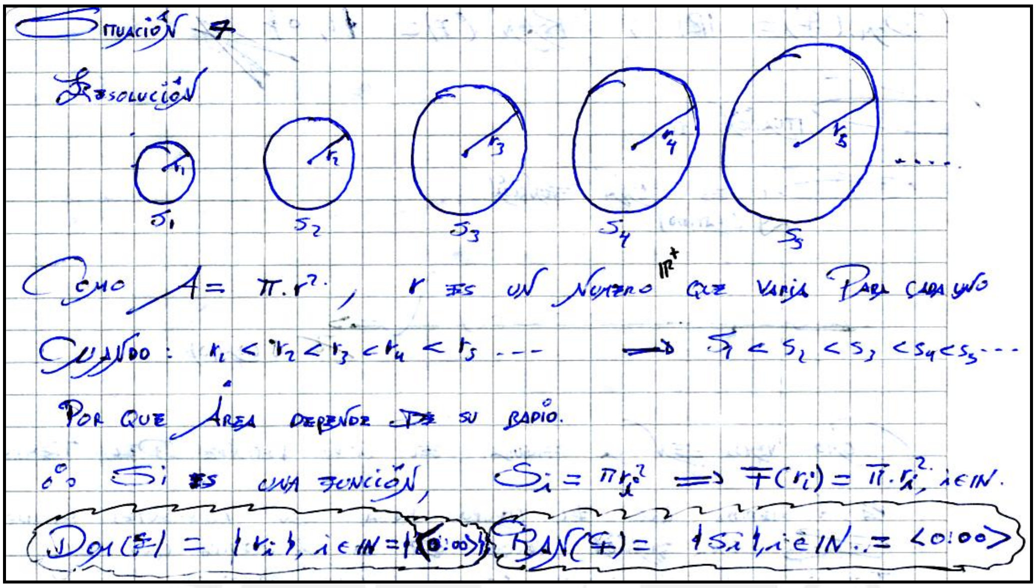


Figura 30. Prueba de salida S_7.

P: En la situación 7, dices A es igual a *pi* por *r* al cuadrado.

B: Y *r* pertenece a los reales. Y en cada una de las circunferencias hay un valor de *r*.

P: ¿Crece el valor de r?

B. Sí, cuando el valor de *r* crece, también el área crece. Los radios son diferentes: $r_1 < r_2$, entonces su áreas también serán diferentes.

P: Las ecuaciones que presentas está en función de *r*.

B: Sí profesor, como en la física, se puede tomar una función *F* en términos del radio *r*.

P: Pero no se distingue el área, ¿por qué no pusiste A en términos de *r*?

B: Sí, profesor, para una mejor relación el área sería A(*r*).

P: ¿La variable independiente?

B: El valor de *r*.

Las respuestas han mejorado para la prueba de salida, porque presenta la variación de las áreas mientras el valor de *r* cambia (desigualdad de radios); su concepción ha variado con respecto a la prueba de entrada. En esta parte, muestra con mayor seguridad el proceso de concepción de función, aunque tiene cierta dificultad en precisar el dominio y el rango de la función $S(r_i)=\pi r_i^2$; dice él que debería colocarse para mejor comprensión A(*r*) del área. Esto nos muestra que ha alcanzado un nivel constructo mental de *proceso* para dicha situación de acuerdo a [*P*.1.] y [*P*.2.] de la descomposición genética.

La **situación 10** tiene una particularidad, debido a que se parece a una función signo; sin embargo, Akkoç y Tall (2005), en su investigación *The case of the function concept*, consideran que es una función signo. A continuación se presenta la respuesta en la prueba de entrada.

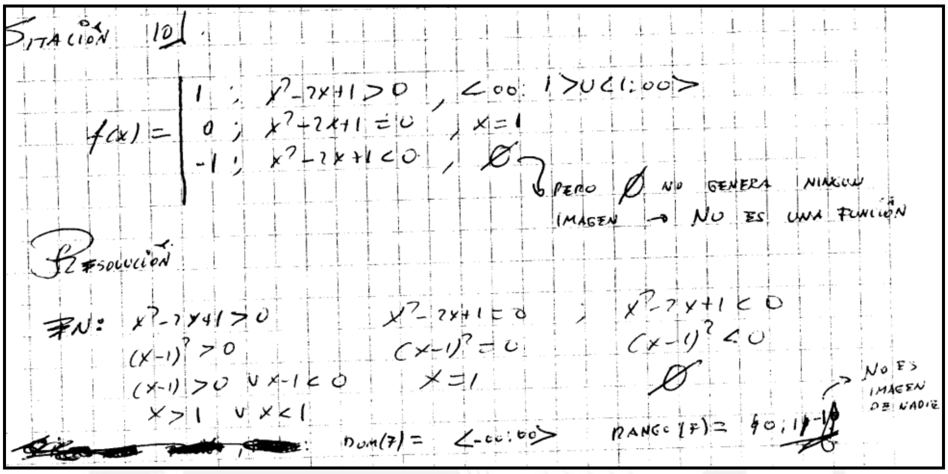


Figura 31. Prueba de entrada S_{10}.

Braulio identifica que una de las condiciones del dominio de la función no se cumple; es el caso de $x^2 - 2x + 1 < 0$, al expresarlo como $(x - 1)^2 < 0$, muestra que una expresión elevada al cuadrado no puede ser menor que cero. En la prueba de entrada, se aprecia que su constructo mental está en el nivel de *Proceso*.

De igual modo, en la prueba de salida, realiza la misma presentación.

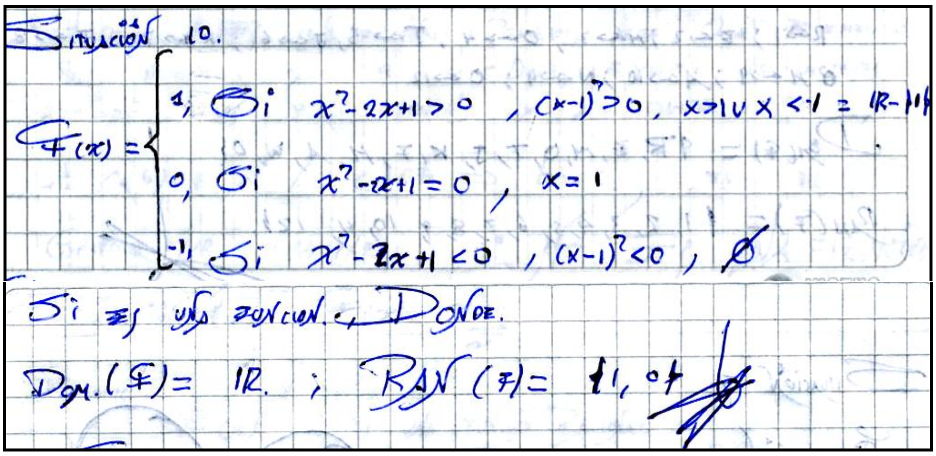


Figura 32. Prueba de salida S_{10}.

En la prueba de salida, desarrolló la idea en menos pasos y fue muy hábil para reconocer y utilizar la propiedad $(x - 1)^2 < 0$. Siguiendo la descomposición genética [*P*.2.] y [*P*.4.], se concluye que posee una concepción al nivel de proceso.

La situación 12 es la cadena de caracteres.

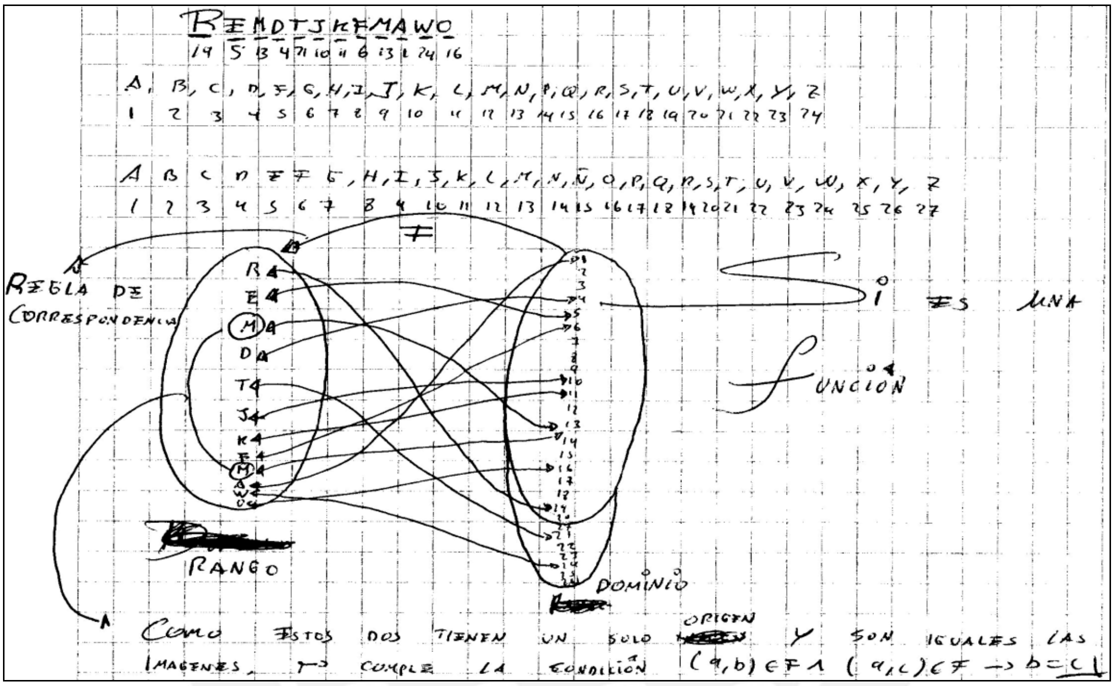


Figura 33. Prueba de entrada S_{12}.

En la figura 33, el estudiante ha tratado de mostrar la correspondencia, estableciendo una relación entre las letras del abecedario y el orden de ellas. Ha considerado como dominio al orden de las letras y como rango, las letras; sin embargo, la idea de realizar el orden se acerca a la definición de función en la cadena de caracteres. Por tanto, Braulio se encuentra en tránsito de *prefunción* a *acción*.

P: La situación 12, dices que es una función. Considero que no es una función, porque hay dos valores M.

B: ¿M y M profesor?

P Claro que sí, aquí hay M que relaciona con 3 y otro M que se relaciona con 9. Pero en sí…

B: Ah, se contradice la definición de función. Como dice f(a) y f(c) son iguales, entonces $a = c$, ¿entonces con la definición 3 = 9?, no. Por tanto, es una contradicción, no es una función.

Se presenta la prueba de salida.

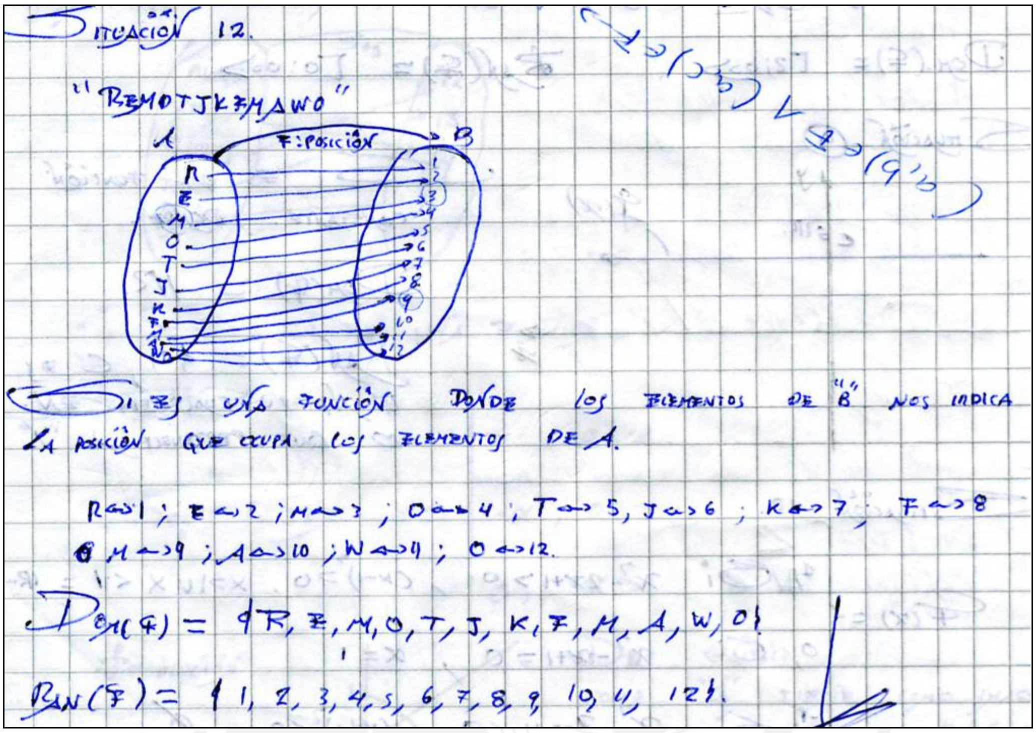


Figura 34. Prueba de salida S_{12}.

En la segunda parte, comienza a relacionar el orden de las letras, porque recuerda algo de lo que hizo con el programa ISETLW; considera como dominio el conjunto de letras y como rango el orden de las letras. Entonces, Braulio tiene dificultad para decidir si es o no una función, recuerda el trabajo en el laboratorio y, finalmente, se da cuenta que no es una función.

P: Recuerda, cuando trabajamos con el programa ISETLW, evalúas en un número y resulta ser su posición. Entonces, ¿qué valor ha ingresado …?

B: Si tú ingresaras M …

P: Pero, no ingresamos M.

B: No, ingresamos 3 y sale M.

P: Ahhh!!! Entonces, ¿cuál sería el dominio?

B: Las letras del abecedario.

P: Pero ¿qué valor ingresó?

B: Entonces, el dominio de esta función sería B y el rango A.

Aquí se observa que Braulio tiene dificultad para asociar el conjunto de letras a una función; significa que su concepción acerca de función para dicha situación está en transición de *prefunción* a *acción*, porque hace la correspondencia sin verificar que la letra M tiene como imagen al numero 3 y al número 9.

Analicemos, ahora, **la situación 13**, que es la aplicación de funciones. Lo que se espera es que el estudiante tenga en cuenta la proporcionalidad entre el peso del cerebro y su peso corporal. Presentamos la prueba de salida, pues en la prueba de entrada, también lo hizo de modo similar.

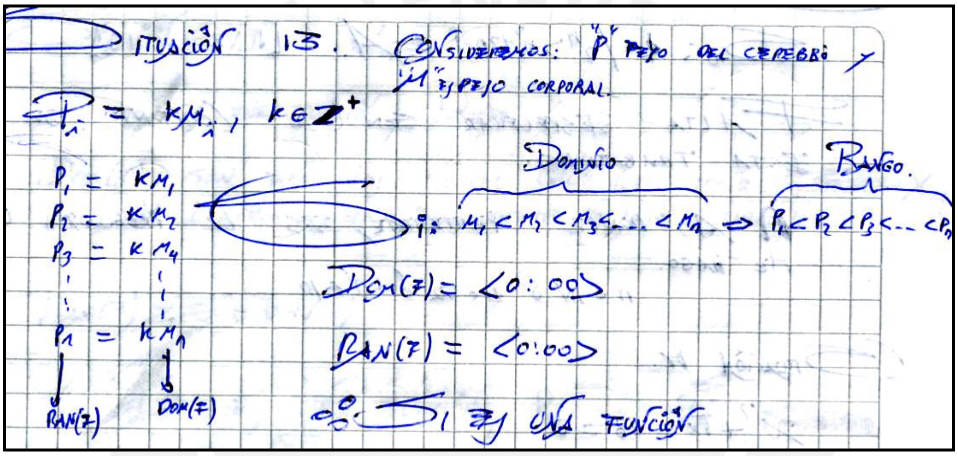


Figura 35. Prueba de salida S_{13}.

P: En la situación 13, consideramos que *p* es el peso del cerebro y *m* es el peso corporal, y *k* ¿qué significa?

B: Como dice que es directamente proporcional, es una constante

P: ¿Es una constante de proporcionalidad?

B: Sí, profesor.

El estudiante tuvo la idea de proporcionalidad, pero no ha expresado analíticamente la función. Ha desarrollado por analogía con situaciones similares; además, debería tener cuidado en expresar el dominio y rango, consideró infinito. Por tanto, se aprecia que tiene un constructo mental de *acción* por [*A*.1] y [*A*.2].

La situación **14** es una ecuación paramétrica, donde los valores de *t* ($t \in \mathbf{R}$) son el dominio y los valores de *x* e *y* son los valores del rango.

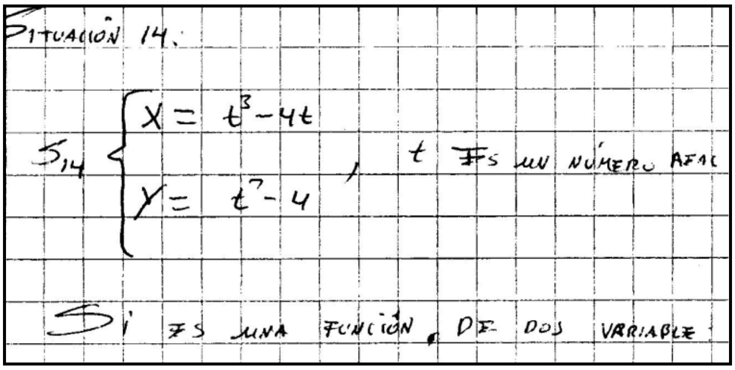


Figura 36. Prueba de entrada S_{14}.

En la prueba de entrada, Braulio manifiesta qué es una función; sin embargo, no identifica cuál es el dominio y cuál es el rango. Tiene el nivel de constructo mental de *prefunción*. Ahora, veamos la prueba de salida.

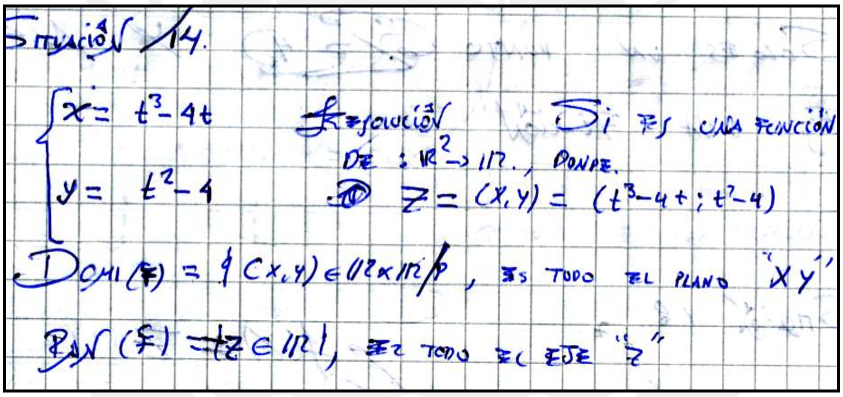


Figura 37. Prueba de salida S_{14}.

P: En la situación 14, has trabajado con pares ordenados, ¿por qué no llegaste a graficarla?

B: No, la función es de par ordenado (x, y) = (t^3 – 4, t^2 – 4)……

P: ¿En este caso has considerado una función de varias variables?

B: Sí, profesor, porque (x, y) = (t^3 – 4, t^2 – 4) = z; entonces, sus componentes son t^3 – 4 y t^2 – 4.

P: Entonces podrías ¿graficarla en un plano?

B: Sí, profesor. Eso depende de la superficie y de los valores de t.

P: ¿Has desarrollado la situación 22?

B: Sí, pero, en la situación 22, nosotros analizamos directamente, trazo una línea recta paralela al eje y y entonces va a cortar en más de un punto. Cuando corta en más de un punto, ya no es una función.

B: Si se trabaja en el espacio, ahí sí no se podría aplicar, como quien dice, la definición geométrica de función

P: Te invito a graficar la situación 14 y el resultado es la situación 22.

B: ¿Pero en el espacio?

P: No, en el plano. El dominio corresponde a t en una recta **R**, y el rango corresponde a los pares ordenados (x, y). Por ejemplo, si tomamos $t = 1$, entonces tendremos $x = -3$ y $y = -3$.

B: Estaríamos hablando de una función de **R** en $\mathbf{R}^2$, porque mayormente trabajamos de $\mathbf{R}^2$ en **R** y nunca he visto de **R** en $\mathbf{R}^2$.

Inicialmente, se confunde con las funciones de varias variables de la forma z = (x, y), cuando, en este caso, el dominio corresponde a los valores de t y rango a los pares ordenados en un plano. Al final, trata de comprender la correspondencia de la función de **R** en $\mathbf{R}^2$. Para la situación, Braulio se encuentra en el nivel de constructo mental de *prefunción*.

Para la siguiente situación **17**, presentamos la prueba de entrada.

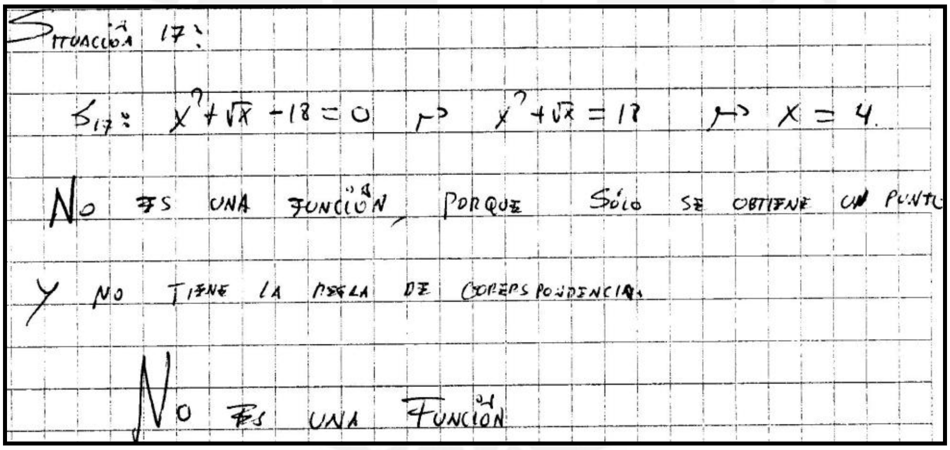


Figura 38. Prueba de entrada S_{17}.

En esta prueba, solo muestra la solución de la ecuación y no tiene la idea de concebir como una función.

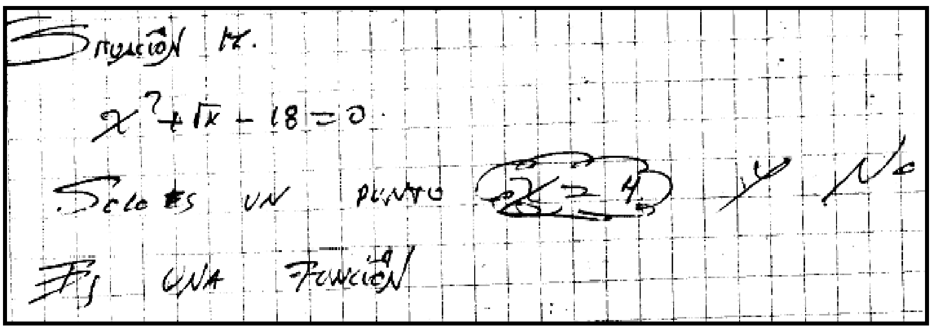


Figura 39. Prueba de salida S_{17}.

P: La situación 17, no la has desarrollado y dices solamente para $x = 4$ se cumple.

B: Sí he resuelto y me da un punto, porque es una ecuación.

P: Para $x = 4$.

B: Entonces va a cumplir

P: Cuando el valor es 4, sí cumple la ecuación.

P: ¿Cuándo x = 1?

B: No cumple.

P: ¿Si x = 2?

B: Tampoco cumple.

En esta situación, también solamente ha probado con un valor: $x = 4$, que cumple la ecuación, y no ha evaluado la expresión para otros valores; creemos que su concepción está en ver la expresión como una ecuación. Si apreciamos las figuras 37 y 38, el resultado no es bueno. Braulio se resiste a comprender cómo una ecuación puede asociarse a una función. Consideramos que su constructo mental es de *prefunción*.

En la situación **21,** se presenta un conjunto de pares ordenados de la forma (3, 2*x*), con *x* tomando valores enteros desde 1 hasta 20. Presentamos el resultado de la prueba de entrada.

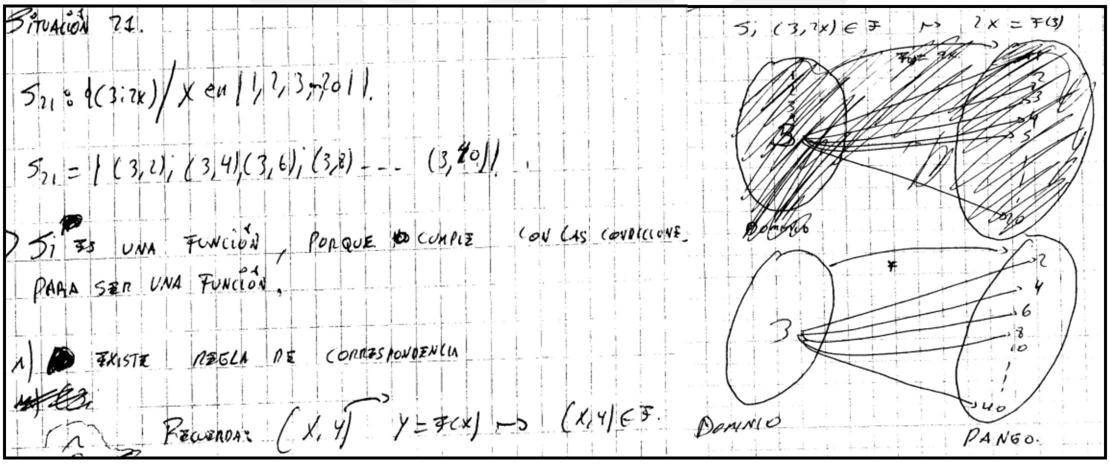


Figura 40. Prueba de entrada S_{21}.

En su análisis, dice que la situación es una función; pero tal como está, no lo es, porque considera a {3} como dominio y que tiene varias imágenes, por lo que Braulio se encuentra en el nivel de *prefunción* para esta situación. Veamos, ahora, la prueba de salida.

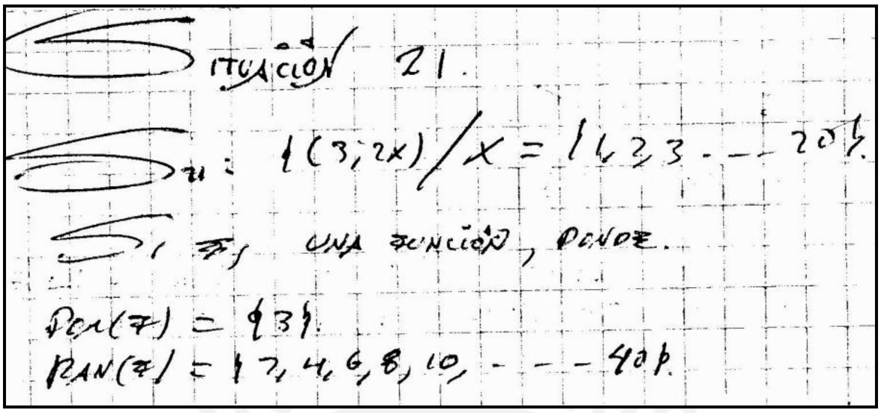

Situación 21.
S_{21}: $\{(3;2x)/x = 1,2,3 \ldots 20\}$.
Si es una función, donde.
Dom(f) = {3}.
Ran(f) = {2, 4, 6, 8, 10, ... 40}.

Figura 41. Prueba de salida S_{21}.

P: En la situación 21, dices que es una función, pero tu dominio no es correcto, tampoco tu rango.

B: Analizando si ingresa *x* y el par está en el plano, no sería una función, porque 3 tendría varias imágenes, con 2, con 4, con 6 y no cumpliría la condición de una función.

P: Pero si analizas, como a la situación 22.

B: En este caso, sería una función. El dominio sería desde una recta y el rango pares ordenados.

P: ¿Del 1 al 20?

B: Estaría tomando los valores, estaría generando una curva, ahhh… una recta.

P: ¿No pensaste de esa forma?

B: Estamos acostumbrados desde la secundaria a ver una forma clásica de (*x*, *y*), donde *x* pertenece al dominio y *y* al rango. También nuestros profesores lo enfatizan, porque estamos trabajando con lo tradicional. Además, trabajamos siempre con *x* e *y*, y otras variables nunca se utilizan. Y eso es lo que nos limita la visualización del panorama.

Nuevamente, igual que en la prueba de entrada su concepción se mantiene en el nivel de *prefunción*. Luego, durante el diálogo, ha reflexionado sobre la situación; al final, concibe cómo debería ser la función. Por lo que, su nivel de constructo mental es de *acción*.

Esta situación **23** es abierta, pues se puede ver de distintas maneras: puede ser proposicional, una distancia en función del tiempo (física), como espacios métricos o correspondencia entre puntos.

En la prueba de entrada, Braulio no ha desarrollado, simplemente escribió “no entiendo”. Sin embargo, en la prueba de salida si ha desarrollado.

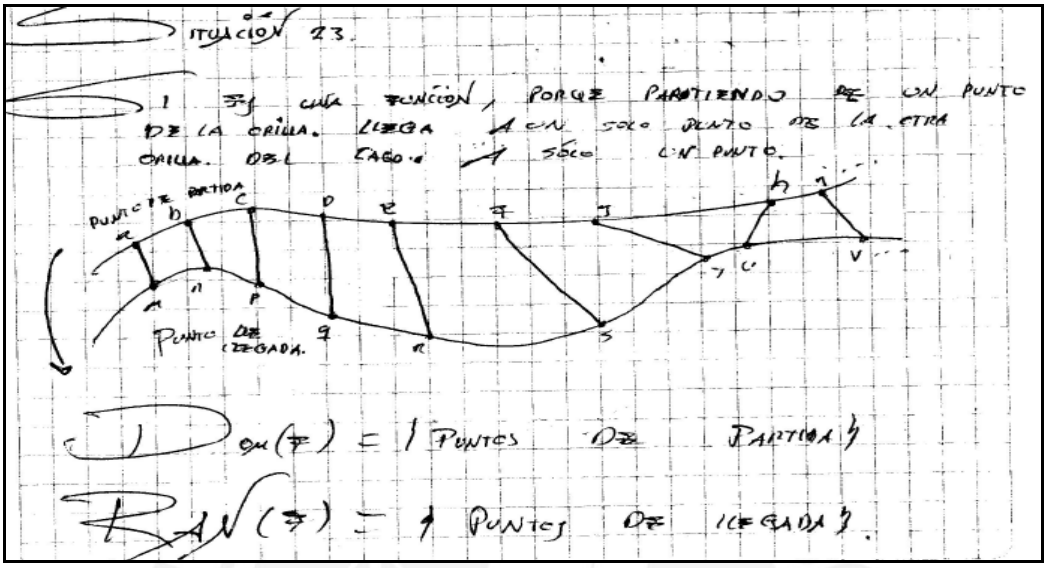


Figura 42. Prueba de salida S_{23}.

P: En la situación 23, dices que es una función, porque partiendo de un punto de la orilla llega a un solo punto de la otra orilla

B: De cada punto se partiría y se llegaría a un punto de la otra orilla. Si tú quieres llegar de aquí para acá, no hay ningún problema y cumple la definición de función. Sus imágenes deben ser iguales; entonces, he considerado como una función.

Ahora tiene una idea clara del concepto de función; pensó en una de las funciones que se esperaba: una correspondencia de puntos de la orilla de donde parte y los posibles puntos de llegada. Su razonamiento está claro porque ha relacionado dos conjuntos de puntos. Su concepción se encuentra en el nivel de constructo mental de *proceso* por [*P*.1] y [*P*.2]; es decir, ha graficado la función sin guiarse de ciertos patrones considerando su dominio y rango, así como consideró el comportamiento de la función de acuerdo al tipo de correspondencia.

La situación 27 tiene similitud con la situación 21. En la prueba de entrada, Braulio afirmó “no entiendo”; luego, en la prueba de salida, sí se aprecia alguna idea sobre la situación { (3*x*; 3*x*) / *x* en {1, 2, 3, . . ., 20}}, tal como se muestra en la figura.

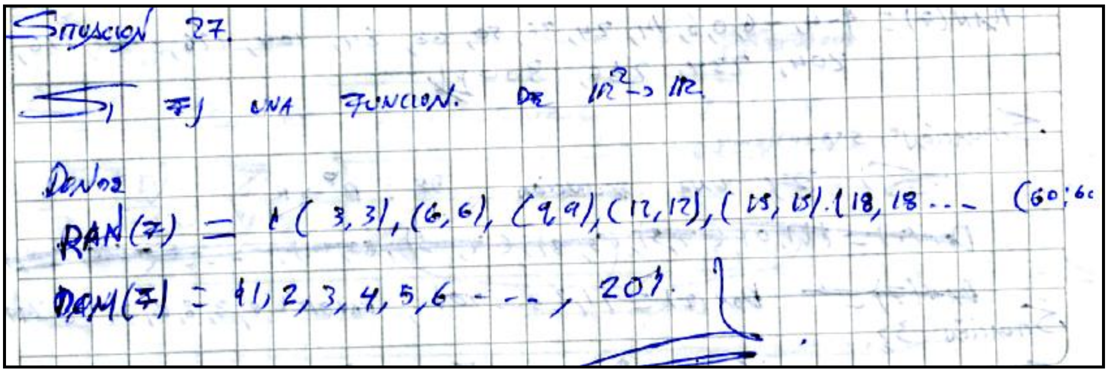


Figura 43. Prueba de salida S_{27}.

P: En la situación 27, acertaste con la respuesta.

B: Es que, en la situación 21, te daban (3, 2*x*); en cambio, aquí si te dan (3*x*, 3*x*) y tú reemplazabas *y* daba *y*, es una función.

Por ejemplo si x=1 sería (3, 2), y si x=2 sería (3, 4), entonces los puntos son diferentes y es una función.

En el recuadro, dice que es una función. Encontramos la expresión: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$**,** que es un error pues debe de ser lo contrario; además, ha tratado de borrar y ha intercambiado el dominio con el rango. Pero, en la conversación, ya tiene la idea y la compara con la S_{21}. Se observa que va interiorizando la situación. Su concepción acerca del concepto de función se encuentra en el nivel de constructo mental de *acción*, en mérito a [*A*.1].

Podemos resumir que Braulio tiene mayor conceptualización de función en las situaciones clásicas que le son familiares, donde realiza las operaciones adecuadas en su mayoría y tiene una concepción de *acción* por cumplir: [*A*.1] grafica la función guiándose con la correspondencia de dos conjuntos o comprendiendo la definición; [*A*.3] evalúa la ecuación asignándole valores a *x*, luego identifica qué valor satisface la ecuación y [*A*.4] trata de determinar la ecuación de una función comprendiendo la definición. Sin embargo, cuando se trata de situaciones nuevas tiene dificultad de desarrollarlas, se confunde en algunos casos y no comprende, y tiene una concepción en transición de *prefunción* a *acción* para las situaciones nuevas. En algunos casos para las situaciones clásicas, ha alcanzado el nivel de constructo mental de *proceso*, porque cumple: [*P*.1] grafica la función sin guiarse de ciertos patrones comprendiendo el proceso de su graficación considerando su dominio y rango; [*P*.2] verifica el comportamiento y tendencia de la función analizando el dominio y rango para generalizar y [*P*.4.] porque evalúa la gráfica de una función según condiciones. Como lo indica la Teoría APOS, el nivel alcanzado respecto a un concepto no es estático; en este caso se redefine con las nuevas respuestas. Sin embargo, por la mayoría de respuestas dadas por Braulio, se podría decir que prevalece el nivel de constructo mental de *acción*.

4.4. Resultados de las entrevistas a los participantes

Ahora, se comentarán las situaciones donde los estudiantes tuvieron mayor dificultad y que no pudieron desarrollar tanto en la prueba de entrada como en la de salida. Las situaciones 14 y 22 corresponden a una ecuación paramétrica y su gráfica, respectivamente. Se han revisado los sílabos de Análisis Matemático II que desarrollaron en pregrado y se ha encontrado que no han desarrollado el tema señalado. Asimismo, la situación 24 corresponde a una ecuación trigonométrica y tampoco pudieron desarrollarla. De igual modo, la situación 28 asociada a la gráfica de funciones de varias variables $z = y^2 - x^2$ no fue desarrollada.

Luego, en las entrevistas, se han encontrado expresiones acerca del concepto de función, tales como:

I. Es una regla de correspondencia entre un conjunto de partida y un conjunto de llegada.

II. Es un conjunto de pares ordenados que son puntos en una gráfica.

III. El trazo de una recta paralela al eje *y* que corta a la gráfica en dos puntos.

IV. Es una aplicación entre dos conjuntos, que, para cada elemento del conjunto de partida, debe existir un único elemento en el conjunto de llegada.

V. Para todo *x* que pertenece a A, existe un *y* que pertenece a B; los pares ordenados (*x, y*) y (*x, z*) pertenecen a la función, tal que *y* y *z* son iguales.

VI. Es una relación de dos conjuntos donde los elementos del primer conjunto tienen una sola imagen en el conjunto de llegada.

VII. Es un conjunto de pares ordenados, donde el primer componente no debe estar relacionado con dos o más valores diferentes del segundo componente.

Un primer intento por determinar los niveles de concepción del concepto de función que poseen los 16 estudiantes entrevistados se realizó analizando estas respuestas, cuyo resultado se presenta en la siguiente tabla:

Tabla Nº 11 – a.

Definición de función luego del ciclo ACE.

I	II	III	IV	V	VI	VII	Nº de respuestas
13%	6%	25%	6%	6%	19%	25%	16

Es posible agrupar las definiciones I y II en un solo nivel de *prefunción* según la descomposición genética realizada en el capítulo II. La definición III se considera en el nivel de *acción*, ya que el alumno manipula la gráfica mentalmente y aplica una propiedad presentada previamente. Recordemos que *acción* se refiere a la habilidad de repetir tantas veces hasta comprender el tema; por ejemplo, la concepción de función es limitada a acciones si el sujeto es hábil para formar la composición de dos funciones a través de expresiones algebraicas reemplazando cada ocurrencia de cada variable por otra expresión, pero probablemente no es capaz de componer dos funciones en situaciones generales (Breidenbach, et al, 1992). Y de igual modo, las definiciones IV, V, VI y VII se consideran en el nivel de *proceso*, porque está basado en una construcción interna, ya no dirigida por estímulos externos (Trigueros, M. 2005).

Tabla Nº 11 – b.

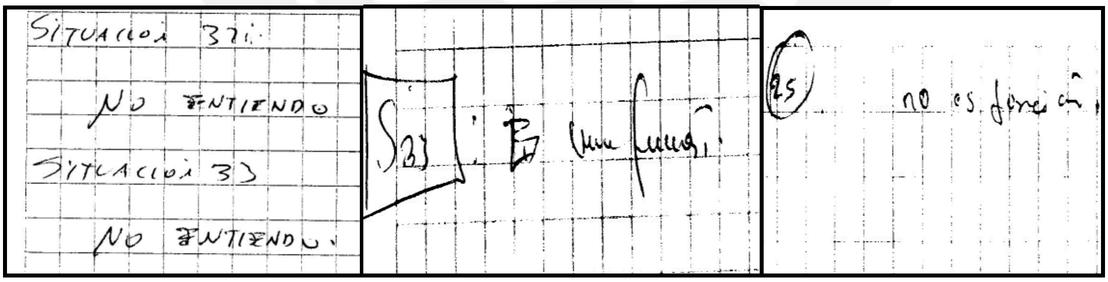
Definición de función luego del ciclo ACE.

Prefunción	Acción	Proceso	Otros	Nº de respuestas
19%	25%	56%	0%	16

Al observar los resultados, se aprecia que el 56% de los estudiantes alcanzaron a definir el concepto de función adecuadamente; el 25% alcanzó el nivel de *acción* por definir geométricamente y un 19% no logró definir el concepto de función.

Los estudiantes definen con claridad el concepto de función; sin embargo, cuando se observan las situaciones desarrolladas, estas no guardan relación con las definiciones dadas. Tall y Bakar (1991, 8) en su trabajo *Students´ Mental Prototypes for Functions and Graphics*, reflexionan que el concepto general de función es difícil de generalizar. Además, afirman que los estudiantes no pueden construir el concepto abstracto de función sin experimentar con ejemplos de funciones prototipos teniendo limitaciones en la construcción. La mayoría ha expresado alguna idea del concepto de función en el nivel de *proceso* tomando alguna clase que guarda relación o algún procedimiento que produce una salida de información; pero también se observa que no hacen mención ni al dominio ni al rango. Por otra parte, muchos han usado términos técnicos matemáticos, tales como *ley de formación, conjunto, gráfica, imagen, punto, programa*, *recta paralela*, que utilizan en su quehacer educativo; también se han encontrado expresiones empleadas como argumentos, tales como *valor que ingresa, evaluación en un punto, desarrollado en el programa* ISETLW, *la relación es de un punto a otro punto* y *puntos en una gráfica*.

Para los estudiantes, las situaciones han sido nuevas, pues no las habían visto en su quehacer educativo; esta es probablemente la razón por la que algunos en sus exámenes de entrada, escribieron *no entiendo*, *es una función*, *no es función*, sin desarrollar las situaciones. A continuación se muestra algunos de esos casos.



Todo esto muestra la dificultad que tuvieron los participantes en el momento de resolver la prueba de entrada. A pesar de ello, el Ciclo ACE ha permitido modificar parcialmente las concepciones iniciales. Esto se evidencia en las entrevistas realizadas.

Finalmente, se aprecia que algunos de los estudiantes se encuentran en transición de *prefunción* a *acción* y la gran mayoría está en el nivel de constructo mental de *acción*; un porcentaje mínimo, en el nivel de constructo mental de *proceso*.

A manera de conclusión

Esta investigación busca aportar elementos para lograr la concepción de las funciones en los estudiantes de la especialidad de Matemática – Física. Siendo el aprendizaje y la conceptualización de *función* un aspecto fundamental en la matemática, es preciso explicar cómo los estudiantes logran comprender este concepto. El propósito fue identificar las concepciones que los estudiantes poseían sobre el concepto de función, antes y después de haber desarrollado actividades durante el ciclo ACE, según la Teoría APOS.

El aporte de la investigación radica en el diseño de la *descomposición genética* del objeto función, así como el diseño de las diferentes *situaciones* y la elaboración de módulos para el desarrollo del ciclo ACE y su implementación.

Para la identificación de los niveles de concepción que los estudiantes poseen, fue muy importante relacionar las respuestas escritas de la prueba de entrada y de salida con las entrevistas realizadas a los estudiantes; los resultados obtenidos se resumen a continuación:

1. La mayoría de los estudiantes participantes en el ciclo ACE poseen una concepción de *Acción* del concepto de función, con cierto grado de transición al nivel superior de *Proceso*, considerando la descomposición genética de función. Porque la concepción de *Acción* enfatiza puntos específicos como el acto de sustituir un valor a las variables para obtener otro valor relacionando o imitando con una operación similar, además reconocer las diferentes formas de presentación de una función.

2. Resultó difícil para los estudiantes concebir el concepto de función en situaciones nuevas, pero es necesario enfrentarlos a ellos para poder identificar sus verdaderas concepciones sobre el concepto estudiado. La concepción del concepto de función

de cada estudiante difiere de acuerdo a cada situación, así como la capacidad de reflexión.

3. El estudio indica que los estudiantes tienen dificultades en comprender el concepto de función; esto se evidencia en las respuestas dadas para las situaciones planteadas. Los estudiantes siguieron patrones preestablecidos, donde la abstracción reflexiva por parte de los estudiantes no fue relevante.

4. En el tratamiento instruccional desarrollado en el ciclo ACE se empleó el programa ISETLW. Esto ha permitido a los estudiantes alcanzar un progreso en el desarrollo de su proceso de concepción del concepto de función, evidenciándose mejor en las situaciones nuevas que en las situaciones clásicas algebraicas. Por tanto, el ciclo ACE ha contribuido a que los alumnos que inicialmente se encontraban en el nivel de *Prefunción* pudieran pasar al nivel de *Acción*, con tránsito al nivel de *Proceso*.

5. Respecto al concepto de *función*, los dos estudiantes que fueron entrevistados muestran una fuerte presencia de la definición clásica de función de la forma $f(x) = y$, expresado como conjunto de pares ordenados (x, y).

Luego del análisis de los resultados, al realizar las conclusiones del trabajo de investigación se generó ciertas incógnitas, los cuales nos han permitido arribar a conclusiones más generales.

6. Las respuestas que un estudiante brinda respecto a un determinado concepto matemático, podrían corresponder a diferentes niveles, según la descomposición genética. Por tanto, se tendría dificultad en asignarle un único nivel. Esto se debe a que el modelo de la Teoría APOS no es lineal. Ante nuevas situaciones el estudiante reformula sus concepciones.

7. La interpretación a las respuestas por parte del investigador, para asignarle un determinado nivel de concepción de un concepto matemático a un estudiante, es subjetiva. Esto ocurre porque el marco teórico elegido es de tipo cognitivo; siendo entonces los resultados discutibles.

Cuestiones abiertas

Al finalizar el trabajo de investigación, fue necesario puntualizar algunos aspectos. Por ejemplo, el estudio debería haber involucrado a un alto número de estudiantes y no solamente a dieciséis. Asimismo, se encontraron muchas interrogantes a las que hemos llamado "cuestiones abiertas", porque, a través de ellas, se invita a futuras investigaciones relacionadas al concepto de función, así como a solucionar las interrogantes. Con esa finalidad, se dejan disponibles materiales que permitirán ayudar a los investigadores, tales como las situaciones (modificables), la transcripción de la entrevista y los exámenes de entrada y salida (escaneados).

Las cuestiones abiertas son las siguientes:

1. ¿Es posible establecer el nivel de constructo mental de cada estudiante teniendo en cuenta las situaciones desarrolladas y las entrevistas?
2. ¿Es posible establecer la ubicación de los constructos mentales de todo un grupo de participantes teniendo en cuenta las situaciones desarrolladas y las entrevistas?
3. ¿Es posible inferir la ubicación del nivel de constructo mental de un grupo de estudiantes teniendo en cuenta las situaciones desarrolladas y las entrevistas?
4. ¿Es posible, a partir de la información, emplear la estadística para mostrar los niveles de constructos mentales de los participantes?
5. ¿Es posible desarrollar investigaciones relacionadas con conceptos de análisis matemático, que tienen como prerrequisito al concepto de función bajo la perspectiva de la Teoría APOS, luego de complementar el ciclo ACE propuesto en esta investigación?
6. ¿Se pueden organizar situaciones (graduadas con niveles progresivos de complejidad) de modo que estas permitan avanzar progresivamente hacia niveles mayores de concepción del concepto de función?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Akkoç, H. & Tall, D. (2002). The Simplicity, Complexity and Complication of the Function Concept. In Anne D. Cockburn & Elena Nardi (Eds), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2. Norwich: UK, pp. 25 – 32.

Akkoç, H and Tall, D. (2003). The Function Concept: *Comprehension and Complication*. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 23(1). Pp. 1 – 6.

Akkoç, H and Tall, D. (2005). A Mismatch between Curriculum design and Student Learning: *The case of the function concept*. In D Hewitt A. Noyes (Eds), *Proceedings of the sixth British Congreso of Mathematics Education* held at the University of Warwick, pp. 1 – 8.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K.(1996) . A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. CBMS *Issues in Mathematics Education:* Research in Collegiate Mathematics Education, 6. pp.I-32. Copyright © 1996 American Mathematical Society.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K.(2000, 2004). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. CBMS *Issues in Mathematics Education:* Research in Collegiate Mathematics Education, 6. pp.I-32.

Biehler, R., Scholz, R., Sträßer, R., and Winkelmann, B. (1994). Didáctics of Mathemátics as a Scientific Discipline (Pp.1 – 8). NETHERLANDS: Kluwer Academic Publishers.

Boyer, C. (1986). Historia de la Matemática. España: Alianza editorial S.A.

Brandao, E. (2003). Introdução ao Conceito de Função: *A Importância da Compreensão das Variáveis*. Tese de Mestrado. PUC/SP . Sao Paolo. Brasil.

Breindenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. & Nichols, D. (1992). “Development of the conception of function” Educational Studies in Mathematics. 23. pp. 247 – 285.

Castro, I. (1996). Leonardo Euler. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Coelho, A. (2004). *Conhecimentos de Estudantes Universitários sobre el Conceito de Função Matemática*. Tese de Mestrado. PUC/SP. Sao Paolo. Brasil. pp 19.

Collette, J. (1986). Historia de las matemáticas II. España: Siglo XXI Editores. pp. 192.

DeMarois, P. & Tall, D. (1996). Facets and Layers of the Function Concept. España: *Publisher in Proceedings of PME 20*, Valencia, (1996) vol.2, pp. 297 – 304.

Dubinsky, E. (1991a). Reflexive Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht, Kluwer Academic Publisher, pp. 95 - 153.

Dubinsky, E. & Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function. In G. Harel and E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 85 - 106). (MAA Notes No 25) Washington DC: Mathematical Association of America.

Dubinsky, E. & Leron, U. (1994). Learning Abstract Algebra with ISETL. USA: Spring - Verlag.

Dubinsky, E., Schwingendorf, K. and Mathewa, D. (1995). Calculus: *Concepts and Computers* (second edition). USA: McGraw – Hill.

Dubinsky, E. (2000). Writing Programs to Learn Mathematics. USA: Georgia St. University. Pp. 1 - 23.

Dubinsky, E. & McDonald, M. (2001) APOS: A Constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In D. Holton et al. (Eds). *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 273 – 280). Netherlands; Kluwer Academic Publishers.

Dunham, W. (1995). El Universo de las matemáticas. España: Ediciones Pirámide, S.A. p.212.

Fenton, W., & Dubinsky, E. (1996). Introduction to Discrete Mathematics with ISETL. USA: Spring - Verlag.

Godino, J. (2006). Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica. Documento de trabajo del curso de doctorado "Teoría de la educación Matemática". Universidad de Granada. Pp. 1 – 44.

Hansson, O. (2006). *Studying the Views of Preservice Teachers on the Concept of Functin*. Doctoral Thesis. Lulea University of Technology, Sweden.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the Function Concept: *A Brief Survey*. The College Mathematics Journal, 20 (4), 282 – 300.

Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V. (1978). Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional. URSS: MIR.

Lages, E. (1976). Curso de Análise. Brasil: Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

Larson, R. y Hostetler, R. (1991). Cálculo con Geometría Analítica. México: McGraw Hill.

Leithold, L. (1992). Calculo con Geometría Analítica. México: Harla.

Maquiera, R., Santibañez, E. y Recio, F. (1981). Matemática: *funciones elementales y sistema de ecuaciones*. Cuba: Editorial de libros para la Educación – La Habana.

Meel, D. (2003). Modelos y Teorías de la Comprensión Matemática: *Comparación de los Modelos de Pirie y Kieran sobre el Crecimiento de la Comprensión Matemática y la Teoría APOE*. México: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6(003), pp. 221 – 278.

Pereira, L. (2006). Análise da Dialética Ferramenta – Objeto na Construção do Conceito de Função. Tese de Mestrado. PUC/SP . São Paolo. Brasil.

Ronda, E. (2004). A Framework of Growth Points in students´ Developing Understanding of Function. Ph. D. Thesis in Mathematics Education. Australia: Australian Catholic University.

Tall, D.O. (1990). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: *Functions, Límits, Infinity and Proof*. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Macmillan, New York. Pp. 495 - 511.

Tall, D. O. & Baker, M (1991). Student´s Prototypes for Functions and Grafics: *Functions, Límits, Infinity and Proof*. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Macmillan, New York. Pp. 495 - 511.

Tall, D.O. (1997). Functions and Calculus. Published in A.J. Bishop et al (Eds), *International Handbook of Mathematics Education, 289 – 325,* Dordrecht: Kluwer.

Tall, D. O., McGowen, M. & DeMarois, P. (2000). The Function Machine as a Cognitive Root for the Function Concept. UK: University of Warwick, Coventry CV4 7AL.

Tola, J. (1970). Análisis I. Perú. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Trigueros, M. (2005). La Noción de Esquema en la Investigación en Matemática a nivel superior. México, Universidad Autónoma del Estado de México: Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal (Educación Matemática Santillana), 17(001), pp. 5 – 31.

Vera, F. (1961). Breve Historia de la Matemática (2da. ed.). Argentina: Losada, S.A.

Weller, K., Clark, J. Dubinsky, E., Loch, S., McDonal, M. & Merkovsky, R. (2000). An Examination of Student Performance Data in Recent RUMEC Studies. USA.

Youschkevitech, A. P. (1976). The concept of function up to the midle of the 19th century (tradución: Dra Rosa María Farfan). *Serie: Antologías 1* Mexico: Cinvestav IPN (Programa Editorial, Area de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa). pp. 99 – 145.

Interactive Set Language Window. Disponible en http:// www.ilstu.edu/~jfcttr/isetl/

Interactive Set Language Window. Disponible en http://isetlw.muc.edu/isetlw.

La situación 11 de http//upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/9b/EKGI.png.

ANEXOS

ANEXO A

Situaciones presentadas en las pruebas de entrada y salida

SITUACIONES PRESENTADAS.

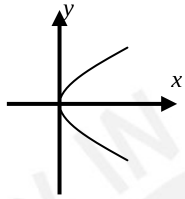
Analiza si cada una de las siguientes situaciones es una función, y encuentre su dominio y rango; en caso de no ser una función, responda en qué caso podría ser. Si es necesario, realiza comentarios y dé ejemplos

Situación 1

S$_{01}$: $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ y $g(x)=x+2$.

Situación 2

S$_{02}$:



Situación 3

S$_{03}$:

a) F = $\{(x, y)\in N^2 \,/\, y^2 = x^2\}$, definido de $\boldsymbol{N}$ en $\boldsymbol{N}$

b) D = $\{(x, y)\in Z^2 \,/\, y^2 = x^2\}$, definido de Z en Z

Situación 4

S$_{04}$: $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

Situación 5

S$_{05}$: Se tienen las notas obtenidas por los estudiantes del V ciclo de la especialidad de Matemática Informática en un examen:

Nombre	**Nota**
Rubén	12
Luis	14
Carlos	12
Jorge	13
Darío	15

Situación 6

S$_{06}$: Sea $$y=\begin{cases} x & , si \quad x\le 0 \\ 1-x^2 & , si \quad 0<x\le 1 \\ 0 & , si \quad x>1 \end{cases}$$

Situación 7

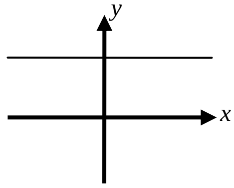
S$_{07}$: La relación existente entre el área del círculo y su radio

Situación 8

S$_{08}$: $f(x)=\sqrt{x-2}$

Situación 9

S$_9$:

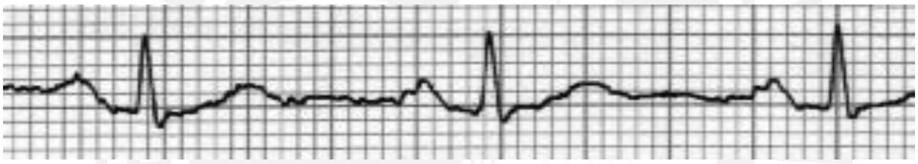


Situación 10

S$_{10}$: $$f(x)=\begin{cases} 1\,, & si \quad x^2-2x+1>0 \\ 0\,, & si \quad x^2-2x+1=0 \\ -1\,, & si \quad x^2-2x+1<0 \end{cases}$$

Situación 11

S$_{11}$: La gráfica generada por el palpitar de un corazón



Situación 12

S$_{12}$: REMDTJKFMAWO

Situación 13

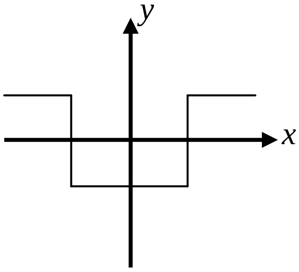
S$_{13}$: El peso aproximado del cerebro de una persona es directamente proporcional a su peso corporal.

Situación 14

S$_{14}$: $$\begin{cases} x=t^3-4t \\ y=t^2-4 \end{cases}, \qquad t \text{ es un número real}$$

Situación 15

S$_{15}$:



Situación 16

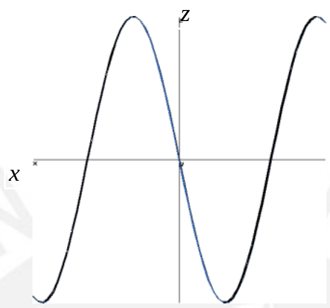
S16: { $2^n > n^2 + 3n$: n en [1, 2, 3, . . . ,20] }

Situación 17

S17: $x^2 + \sqrt{x} - 18 = 0$

Situación 18

S18:



Situación 19

S19: $y_4 = x_4$

Situación 20

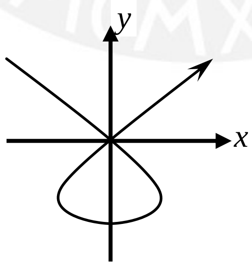
S20: { $(\frac{(-1)^n}{n+2})$ / n en **N**}

Situación 21

S21: { (3;2x) / x en {1, 2, 3, . . ., 20}}

Situación 22

S22:



Situación 23

S23: Un nadador comienza desde la orilla y nada hasta el otro lado del lago.

Situación 24

S24: $senx + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Situación 25

S_{25}:
```
>      f:=func(x);
>>     return 2*x**2;
>>     end;
```

Situación 26

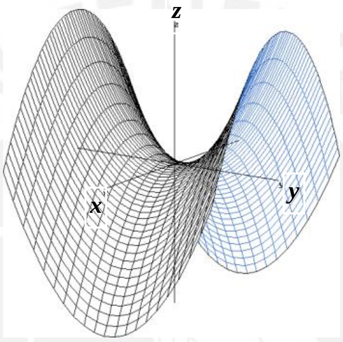
S_{26}: El equipo de básquet de "NERLY" es campeón mundial.

Situación 27

S_{27}: $\{ (3x; 3x) / x$ en $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}\}$

Situación 28

S_{28}:



Situación 29

S_{29}:
```
>      f:= func(x);
>>       if is_integer(x)
>>          then return
>>          12+random(abs(x));
>>       end;
>>     end;
>
```

Situación 30

S_{30}: $y^3 = x^2$

Situación 31

S_{31}: $\{ (n^2 - 5n) / n$ en $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}\}$

Situación 32

S_{32}: $\{ (x; x^2 - 1) / x$ en $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}\}$

Situación 33

S_{33}: $[\ 3x + \text{random}(5) :\ x$ en $[1, 2, 3, \ldots, 20]\ ]$

ANEXO B

Módulo del Ciclo ACE

UNIVERSIDAD NACIONAL DE HUANCAVELICA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES.

MODULO ACE

(ACTIVIDADES, DESARROLLO DE CLASES Y EJERCICIOS)

Para el desarrollo con el programa ISETLW

Isetlw.exe

Cerapio Quintanilla C.

2007

MÓDULO 1 – ACE

PRIMERA CLASE – CONJUNTOS.

1) En la primera clase, se trabajarán desde ítems **a)** hasta **l)** de la actividad. Los estudiantes realizarán los trabajos en grupos formados de tres personas en sus respectivos cuadernos, luego se realizarán una puesta en común en la pizarra.
2) En clase se desarrollará con el programa ISETLW en el laboratorio de cómputo en grupos de dos personas, luego un representante de cada grupo pasará a la pizarra para responder las preguntas realizadas en el ejercicio. En esta etapa, los estudiantes utilizarán la función ***mod*** y ***func*** predefinida en el programa, además se determinará explícitamente el dominio y codominio. (*x mod y* = 0 si y sólo si *x* es múltiplo de *y*). Del mismo modo explicarán los resultados obtenidos comprando con los resultados obtenidos a priori en la actividad 1.
3) Finalmente cada estudiante podrá escribir en sus cuadernos las definiciones de los conjuntos involucrados en el ejercicio Nº 3, que son ejercicios domiciliarios. En esta parte deberán de corregir los errores cometidos en los ejercicios anteriores.

SITUACIONES

1. CONJUNTOS.

Actividad 1.

El estudiante debe desarrollar cada una de las actividades en su cuaderno antes de desarrollar con el programa ISETLW, para luego comparar estos resultados obtenidos cuando se trabaje con el programa.

a) Definir el conjunto de los números naturales.
b) Sea el conjunto M formado por los números que son múltiplos de 8 menores que 41.
c) Sea el conjunto N formado por los números que son múltiplos de 4 menores que 21.
d) Con los conjuntos M y N hallar: M∩N, M⋃N, N – M, *P*(M∩N).
e) Calcular: #(M), #(N), #*P*(M∩N).
f) Sea el conjunto S:= {a, b, trae }
g) Sea el conjunto T:= { }
h) Sea el conjunto R:= { T subset S, a in S }
i) Sea el conjunto Q:= { 1, {1, { 1 } } }
j) Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales? Dar el resultado antes de usar ISETLW, luego verificar A=B; A=C; etc. Explicar tus resultados, así como cualquier diferencia entre tus resultados y los de la computadora.
   i. A:= { n: n in {-4 ..10} | even(n) };
   ii. B:= { 2*(n-2) : n in {0 ..7} };
   iii. C:= { (n-30)/5 : n in {10, 20 .. 80};
   iv. D:= {-4, -2 .. 10};
   v. E:= {4*x-4 : x in {0, 0.1 .. 3.5}| is_integer(4*x-4} };

vi. F:= {floor(((n+65)**2)/70 -66) : n in {1 .. 8} };
vii. G:= {x+y : x,y in {-3, -1 .. 5} };
viii. H:= { 0, 4, -2, 10, 0, 8, -4, 6, -2, 2 };

k) Considerar los siguientes conjuntos, y describirlos por comprensión según ISETLW.
   i. L:= el conjunto de puntos de la parábola $y = x^2$ con el valor de x enteros entre -10 y 10 incluidos.
   ii. W:= el conjunto de los números positivos que son divisibles por 6.

l) Dada la siguiente sucesión:

$$t_1 = 2, \quad t_i = t_{i-1} + 3(i-3).$$

Escribir una función ***func*** dando ***i*** un número natural, y retornar el valor de t_i de la sucesión. Crear una **tupla** (pares ordenados) que tenga los 10 primeros números de la sucesión. ¿200 es parte de la sucesión?, ¿y 2000?, ¿y 20 000? y ¿200 000?

CLASE LABORATORIO – CONJUNTOS.

Introducir las siguientes definiciones en ISETLW.

a) M := {*x*: *x* in [0 .. 41] | *x* mod 8 = 0};
b) N := {*x*: *x* in [0 .. 21] | *x* mod 4 = 0};

Una vez definidos los conjuntos, solicitar a ISETLW las siguientes operaciones y explicar los resultados. Comparar con lo desarrollado en la actividad 1:

c) N; M;
d) M inter N; y M union N;
e) N – M, pow(M inter N);
f) #M; y #N; #pow(M inter N):
g) 16 in N; 20 in M; 20 in N; 16 in M;
h) `{0, 8, 16}subset N;`
i) `{20, 40} subset M;`

Explicar los resultados comparando con los desarrollados en los ítems f), g), h), i) de la actividad 1.

j) Explicar y comparar los resultados del ítem j) de la actividad 1.

Una vez realizado las operaciones en ISETLW, contestar las siguientes preguntas:

k) ¿Cómo se denominan estas operaciones en ISETLW?
l) ¿Qué operación es *x* **mod** 4?
m) ¿Qué operación es *x* mod *y*, siendo *x* y *y* números naturales?.

Ejercicios: EJERCICIOS DOMICILIARIO

Con los conjuntos definidos en el ejercicio 2, introducir las siguientes expresiones en ISETLW.

a) `x := 2;`
b) `x in A;`
c) `y:= 3;`
d) `y in A;`
e) `even(2);`
f) `2<14;`
g) `odd(5);`
h) `6<3;`
i) `4 in B;`
j) `7 in B;`
k) `{2,4} subset A;`
l) `A subset B;`
m) `A = B;`
n) `#A = #B;`
o) `even(41);`
p) `even(42);`
q) `odd(41);`
r) `odd(56);`

Responder a las siguientes preguntas.

s) Evaluar las obtenidas en (a), (c), (m) y (n). ¿Qué significa los símbolos **=** y **:=** en ISETLW?
t) ¿Qué respuestas se obtuvieron al evaluar (a), (h) y (o)?, ¿qué expresiones tienen resultados de este tipo?
u) Decir cuál es el dominio y codominio de la función **even** y **odd** .

m) Considerar los siguientes conjuntos y describirlos según el ISETLW.
   i. K := el conjunto de números positivos de tres dígitos, donde el primer dígito es menor que los otros dígitos (así: 132 o 586, pero no 043 o 115).
   ii. J:= el conjunto de los números positivos de tres dígitos en el cual el tercer dígito es mayor que los dos otros dígitos.

MÓDULO 2 – ACE

PRIMERA CLASE – LÓGICA.

4) En la primera clase se trabajarán las actividades de **a)** hasta **e)**. Los estudiantes desarrollarán cada uno de los ítems con la ayuda del profesor en grupos de tres estudiantes.
5) Se utilizarán las computadoras en grupos de dos personas, luego un representante de cada grupo pasará a la pizarra para responder las preguntas realizadas en el ejercicio. En esta etapa, los estudiantes utilizarán las funciones (conectivos lógicos). Del mismo modo explicarán los resultados obtenidos comprando con los resultados obtenidos a priori en la actividad 1.
6) Finalmente cada estudiante podrá escribir en sus cuadernos las definiciones de los conjuntos involucrados en el ejercicio, que son ejercicios domiciliarios. En esta parte deberán corregir los errores cometidos en los ejercicios anteriores.

SITUACIONES

2. LÓGICA

Actividad 1

a) Cada una de las siguientes proposiciones son verdaderas (true), falso (false) o ninguno. Explicar su respuesta. (ISETLW puede ayudarla para algunas de ellas).
b) Para cada una de las proposiciones que no es verdadera ni falsa, ¿qué se necesita antes para decidir que sea verdadero o falso? Explique su respuesta.
   Aquí las proposiciones:
   i. La suma de dos números primos no puede ser un número primo.
   ii. **Is_tuple([-1, 3, 2, 6, 3])**
   iii. n es divisible por 11 y por 19.
   iv. Huancayo es capital de Lima.
   v. ¡Este libro es confuso!
   vi. ¿Trabajar con ISETLW es interesante?
   vii. ***gcd*(138, 92) = 23**.
   viii. $a^2 + b^2 = c^2$.
   ix. **Is_string("forma").**

c) Una forma de crear un programa de proposiciones compuestos **p and q** es como sigue**.** Si el programa es correcto genera la tabla de verdad. El programa es el siguiente:
```
>   for p,q in [true, false] do
>>  writeln p, q, p and q;
>>  end;
```
d) Generar la tabla de verdad para las siguientes expresiones Booleanas:

i. $-(p \vee q)$
ii. $-p \vee q$
iii. $p \wedge (q \vee r)$
iv. $(p \wedge q) \vee r$
v. $-(-p) \wedge q$
vi. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
vii. p and not q
viii. not p and not q
ix. q and p
x. p or not (q and p)
xi. p impl q
xii. p iff q

Comparar iii y vi, ii y xi, explique su respuesta.

e) Se tienen las siguientes proposiciones con *n* número natural:

A: ***n* mod 15** es **impar (odd)**.
B : ***n*** es relativamente primo a 15.
C : ***n*** es impar y divide a 15.

Consideremos las siguientes proposiciones:
i. ***n* mod 15** es **impar (odd)** or ***n*** es relativamente primo a 15, pero ***n*** es par y divide a 15.
ii. ***n* mod 15** y ***n*** divide a 15, ambos no son impares.
iii. ***n* mod 15** es **impar,** y ***n*** es relativamente primo a 15 o ***n*** es impar y divide a 15.
Construir en cada (i, ii y iii) la tabla de valores.

f) Pensar en la siguiente proposición

$n^2 - n + 11$ es primo.
¿La proposición es verdadera, es falso? Explique su respuesta

CLASE LABORATORIO – LOGICA.

a) Verificar manualmente cada una de las proposiciones. Luego ingresar al programa de ISETLW y verificar si es falso (false) o verdadero (true) cada uno de las proposiciones. Encuentre su dominio y rango si se expresase como una función.

```
  i.   > (3>=4)or (1.2<3);
 ii.   > (3>=4)and(1.2<3);
iii.   > (3>=4)impl(1.2<3);
 iv.   > (3>=4)iff(1.2<3);
  v.   > (3>=4)iff(1.2<1);
```

b) De la actividad 1, desarrolle cada una de las situaciones en ISETLW y compare las respuestas con las absueltas en la actividad 1. Explique cada una de las respuestas.

c) Siendo las proposiciones siguientes:
P : Mi Tío fue a trabajar.
Q : Mi hermano miró el partido de fútbol.
R : Ayer llovió mucho.

i. Construir la ecuación simbólica de las proposiciones:
Mi tío fue a trabajar, entonces mi hermano miró el partido de fútbol.
Mi hermano miró el partido de fútbol y ayer no llovió mucho.
Ayer llovió mucho, entonces mi tío no fue a trabajar y mi hermano no vió el partido de fútbol.

ii. Averiguar los valores de verdad de las proposiciones de (i).

iii. Definir en ISETLW y construir la tabla de valores y verificar si es tautología, contingencia o contradicción.

Ejercicios: EJERCICIOS DOMICILIARIO

En cada una de las proposiciones, explicar los resultados al correr el programa:

```
a. (2<=3) impl (3 = 2+1);
b. (2<=3) impl (not(3 = 2+1));
c. (2>3) impl (3 = 2+1);
d. (2>3) impl (3 =2+1);
e. (3>3) impl (3 = 2+1);
f. (4>3) impl (3 = 1+5);
```

Dado los siguientes enunciados verificar la veracidad o falsedad

```
a.  > 7mod 4 = 1; 11 mod 4 = 3; -1 mod 4 = 3;
b.  > (23 + 17) mod 3 = 2;
```

c. La proposición "si $n-1$ y $n+1$ son números primos, entonces n es divisible por 6" ¿es verdad?, su reciproco es verdad.

Desarrollar cada una de las expresiones dadas

a. Escribir la negación de la siguiente proposición y simplificar
$(23 \bmod 5 \neq 1) \wedge (46 \bmod 5 \neq 1) \wedge (69 \bmod 5 \neq 1) \wedge (92 \bmod 5 \neq 1)$.

b. Encontrar una expresión booleana que es equivalente a $\neg(p \rightarrow q)$, en el cual no se use implicancia. Pruebe que su respuesta sea correcta.

MÓDULO 3 – ACE

3. RELACIONES

Acciones a desarrollarse

1) Las actividades se trabajarán en parejas desde la actividad 1 hasta la actividad 4. En caso si los requiera puede usar el programa ISETLW para comprobar y verificar los resultados obtenidos. Los estudiantes desarrollarán cada una de ítems, si el caso requiere con la ayuda del profesor.
2) Se realizará la discusión en grupos de dos personas, luego un representante de cada grupo pasará a la pizarra para responder a las preguntas puestas en discusión. Si el caso lo amerita será necesario recurrir al programa ISETLW.
3) Finalmente cada estudiante podrá escribir en sus cuadernos las definiciones de los conjuntos involucrados en el ejercicio, que son ejercicios domiciliarios. En esta parte deberán corregir los errores cometidos en los ejercicios anteriores.

Actividad

3. Usar los valores de {1 .. 6} para completar la tabla incompleta que se presenta abajo, de cualquier forma sea razonable. Luego, escribir el conjunto A que contiene los pares ordenados que muestra la tabla. (grabar el conjunto para futuras actividades).

x	1	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4	5	6
y	1			4			2	4		3				

4. Escribir los pares ordenados para cada una de las siguientes situaciones:

B:= El conjunto de pares ordenado [*x*,*y*] que cumpla la condición $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor$, para *x*, *y* en {2 ..10}. ($\lfloor\ \rfloor$ el símbolo se llama máximo entero, **floor** en programa ISETLW).

C := El conjunto de pares ordenados [*x*,*y*] si x+y < 7, para *x*, *y* en {1 .. 7}.

D := El conjunto de pares ordenados [*x*,*y*] si *x* mod 5 = *y* mod 5, para *x*, *y* en {1 .. 11}.

E := El conjunto de pares ordenados [*x*,*y*] si $x \subset y$, para *x*, *y* elementos del conjunto potencia de {“a”,”b”,”c”}.

5. Encontrar el dominio y rango para cada una de las relaciones A, B, C, D y E.
6. Encontrar el conjunto de pares ordenados bajo las condiciones y graficar manualmente:

B1 := {[*x*,*y*] : [*x*,*y*] in B | even(*x*+*y*)};

B2 := {[*x*,*y*] : [*x*,*y*] in B | *x*+*y* > 9};

B3 := {[*x*,*y*] : [*x*,*y*] in B | *x*=5 or *x* = 4 or *y*=5 or *y* = 4};

B4 := {[*x*,*y*] : [*x*,*y*] in B | *x*>4 and *y* > 4}

DISCUSIÓN EN CLASE

1) Hay muchas cosas interesantes acerca de conjuntos:

   El conjunto, sus elementos, su cardinalidad, subconjuntos, etc.

   El conjunto {0, 1,…, 9} de numerales de base 10, como también pude ser el dominio de la adición del modulo (mod 10).

   Además el conjunto puede ser visto como un conjunto ordenado: 0 < 1 < 2 < … < 9.

2) Relación y propiedades.

   - Cuando se muestra una relación en una tabla, la relación puede ser explicado como una colección de pares ordenados tomado directamente de la tabla.
   - En la relación de la actividad del conjunto A encontraremos los pares [1,1] y [1,4] y 20 pares más.
   - ¿Por qué los números son relativos a 1 en la actividad en el conjunto A?
   - En la tabla se muestra que 1 está relacionado con 4. ¿El 4 está relacionado con 1?
   - En la actividad B, ¿cuáles de los números deberían ser usados como valor de *x*?
   - Presentar las relaciones *reflexiva, simétrica y transitiva* con los conjuntos A, B, C y D.
   - Para la actividad E, el {“b”} es un subconjunto de {“a”,”b”}. Así el par ordenado { {“b”},{“a”,”b”}}está en E. Por supuesto {“a”,”b”} es subconjunto de {“a”,”b”,”c”}; así como [{“a”,”b”},{“a”,”b”,”c”}] esta también en E.

3) Representando una relación y una función.

   Para cada uno de los conjuntos B1, B2, B3 y B4, seleccionar pares ordenados [x,y] de modo que

   $\underset{[x,y]}{f : B_i x B_j} \underset{\mapsto}{\to} \underset{x*y}{N}$, donde x*y depende de las operaciones de Bi (i, j = 1,2,3,4) sea una función.

   Si es necesario construir tablas para cada una de ellas.

4) Lectura y discusión.

   Leer y discutir a cerca de *PAREJAS ORDENADAS* escrita por Paul R. Halmos (Teoría intuitiva de conjuntos, 1965 - sección 6 pp.35 – 39).

Ejercicios: EJERCICIOS DOMICILIARIO

1) Suponga que J := {[1,”d”], [2,”r”], [3,”r”], [4,”r”], .. [20,”r”], [21,”r”], . . .}.
   a. Explicar acerca de la relación.
   b. Encontrar el dominio y rango de J.

2) Existe una relación de pares ordenados de los números enteros:

   [*a*,*b*] está relacionado a [*c*,*d*] si *b* y *d* no son cero y *ad* = *bc*.

Por ejemplo. [1,3] esta relacionado a [3,12]. ¿Qué propiedades tiene esta relación?.

3) Definir el conjunto L = {1 .. 6}x{1 .. 5}. Existe una relación sobre el conjunto L:

$[x_1,y_1]$ es relacionado a $[x_2,y_2]$

Si $x_1 < x_2$ o si $x_1 = x_2$ y $y_1 \leq y_2$.

Citar el conjunto de pares ordenados manualmente.

¿Qué propiedades cumple la relación?

4) Completar la tabla. ¿Qué regla se sigue al completar?

x	{ }	{ *a* }	{*b*}	{*c*}	{*a*,*b*}	{*a*,*c*}	{*b*,*c*}	{*a*,*b*,*c*}
y	**000**	**100**	**010**		**110**	**101**		

a. Graficar la relación.
b. ¿Existe un correspondencia uno a uno? Explique.

5) Usando *string* (cadena de caracteres) considerar "**matemáticas"**, en esta palabra hay palabras como "**temá"** que son palabras en español. Encontrar muchos de los *substring* (subcadenas) como usted pueda. Listar el conjunto de subcadenas.

Codificar en ISETLW la cadena de caracteres "**matemáticas**" , que significa ¿"**temá** in "**matemáticas**"?. Realizar las mismas operaciones con los demás cadena de caracteres que usted a listado.

6) Definir la relación:

Q := {[x,y]: x,y en N – {1}| x es divisor de y};

a. listar los pares ordenados.

b. Mostrar el dominio y rango de la relación.

MÓDULO 4 – ACE

4. FUNCIONES

Acciones a desarrollarse

1. Las actividades se trabajarán en parejas desde la actividad 1 hasta la actividad 6. Los estudiantes desarrollarán cada uno de los ítems con la ayuda del profesor.
2. Se utilizarán las computadoras en grupos de dos personas, luego un representante de cada grupo pasará a la pizarra para responder las preguntas realizadas en el ejercicio. En esta etapa, los estudiantes utilizarán las funciones. Del mismo modo explicarán los resultados obtenidos comprando con los resultados obtenidos a priori en la actividad 1.
3. Finalmente, cada estudiante podrá escribir en sus cuadernos las definiciones de los conjuntos involucrados en el ejercicio, que son ejercicios domiciliarios. En esta parte deberán de corregir los errores cometidos en los ejercicios anteriores.

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

Actividad A

1. Después de experimentar con cada código usado, escriba y explique brevemente cada una de las funciones predefinidas: **abs**, **min**, **max**, **sqrt**, ******, **ceil** and **floor**.
2. Sean las funciones:

   i) $f(x) = 2x - 1$,

   ii) $g(r) = |r - 2| - 3$.

   iii) $h(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{2x + 1}$

   iv) $i(z) = \sqrt{z+1} - 2$; z en los reales.

   v) $j(n) = \dfrac{n+1}{n}$

   vi) $shara(\text{kema}) = 3(\text{kema})^2 - 2$

   a) Evaluar en $f(-3)$; $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(0.5)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(3)$; $f(4)$; y bosquejar su gráfica.

   b) Evaluar en $g(-3)$; $g(-2)$; $g(-1/2)$; $g(0)$; $g(1)$; $g(2)$; $g(3)$; $g(4)$; $g(5)$; y bosquejar su gráfica.

   c) Evaluar en $h(-3)$; $h(-2)$; $h(-1)$; $h(0)$; $h(1)$; $h(2)$; $h(3)$; $h(4)$; $h(5)$; y bosquejar su gráfica

   d) Comparar las funciones f y h ¿son iguales?, ¿cuál es su comentario?

   e) Evaluar en $i(-3)$; $i(-2)$; $i(-1)$; $i(0)$; $i(1)$; $i(2)$; $i(3)$; $i(4)$; y bosquejar su gráfica.

f) Bosquejar la gráfica de la función, hallar el dominio y rango de la función.

g) Evaluar en *shara*(-3); *shara*(-2); *shara*(-1); *shara*(0); *shara*(1); *shara*(2); *shara*(3); *shara*(4); *shara*(5); ¿Qué valores toman *shara* y *kema*?, definir su dominio y rango, además bosqueje su gráfica.

h) Utilizar el programa ISETLW para ayudarse y graficar en cada una de las funciones. Comentar a cerca de su conjetura inicial.

3. Se define las expresiones B y C.

```
>     B:= "QUINTANILLA";
>     C:= "QUINTA" + "NILLA";
```

Explicar las operaciones:

```
  i.  >  B = C;
 ii.  >  "T" in "QUINTA"; "n" in "NILLA";
```

Evaluar y escribir la correspondencia en pares ordenados y bosqueje su gráfica.

```
iii.  B(0); B(1); B(2); B(3); B(4); B(5); B(6); B(7);
      B(8); B(9); B(10); B(11); B(12); B(13);
 iv.  C(0); C(1); C(2); C(3); C(4); C(5); C(6); C(7);
      C(8); C(9); C(10); C(11); C(12); C(13);
```

4. Escribir la siguiente función en ISETLW:

```
>      P := func(n);
>>       return func(r);
>>       return (n**4 < 3**r);
>>       end;
>>     end;
>
```

Escribir sus predicciones, entonces correr el programa. Explique los resultados.
P(1); P(3); P(5); P(10);
P(10), P(10)(7); P(7)(10);

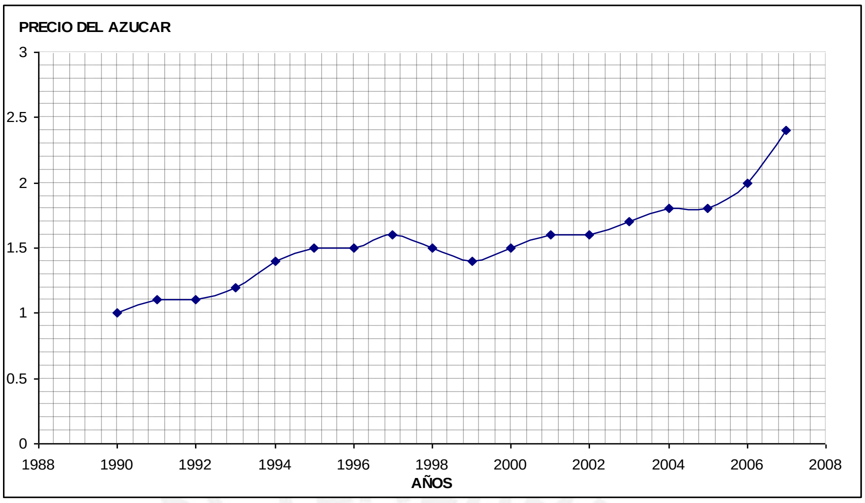
5. Escribir Tuple ordenado para la siguiente sucesión:

```
S := [0.9, 0.81 .. 0.0343368382];
```

- Explicar porqué los resultados que predijo los obtenidos con ISETLW no son iguales.
- Evaluar en los siguientes puntos:
  `S(0); S(1);S(2);S(4);S(4.5);S(5);S(6);S(8.5);`
- Decir ¿cuál es el dominio y cuál es el rango de S?.
  ¿Qué pasó al evaluar en S(4.5) y S(8.5)?

6. En el figura se presenta el comportamiento del precio de azúcar desde el año 1990 hasta el año 2007. elaborar un conjunto de pares ordenados en el ISETLW (smap), usando al menos 25 valores. Usar **plot** para graficar tu **smap** y comparar tu resultado con la figura 4.1 (conservar tu **smap**).

Figura Nº 4.1



7. Definir las siguientes funciones usando el programa ISETLW. Considerar que el dominio es el conjunto de los números naturales.

i) $T(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & ,\text{si } n \text{ par.} \\ 3n+1 & ,\text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$

ii) $Q(n) = n^2.$

iii) $R(n) = \left\lfloor \dfrac{13n^2}{2^n} \right\rfloor$

b) Evaluar en: T(4); R(2); R(10); R(20); R(30); R(47);
c) Graficar con **plot** las funciones T, Q y R por separado.
d) Explicar el comportamiento de cada una de las gráficas.

8. Realizar el programa en ISETLW para:
   a. $z = y^2 - x^2$.
   b. $r = x^2 - y^2$.
   c. $t = (y^2 - x^2)/(y^2 + x^2)$
      i) Evaluar en $z(1,2)$; $z(2,3)$; $z(5,10)$; $z(0,0)$; $z(10,5)$;
      ii) Evaluar en $r(3,4)$; $r(5,8)$; $r(10,10)$; $r(0,0)$; $r(8,5)$;
      iii) Evaluar en $t(2,2)$; $t(1/2,1/2)$; $t(5,10)$; $t(0,0)$; $t(10,5)$;
      iv) Esbozar la gráfica de cada una de las funciones: *z, r* y *t*.
9. Dado la sucesión $\{ n^2 + 2n \mid n \text{ en } [1 .. 20]\}$
   a. Encontrar el dominio y rango de la función.
   b. Graficar en caso de que los pares ordenados sea una función
10. Dada la expresión: $a^2 - a + 11$ es primo.

¿Cuál es la función que pude definir la expresión, habrían muchas? Para cada función que usted encuentre, decir como es su proceso, ingreso de datos y salida, además dar su dominio y rango.

DISCUSIÓN EN CLASE "A"

1. Al desarrollar la actividad "A" donde se ha visto diferentes presentaciones de funciones. ¿Cómo clasificaría esas presentaciones?, discutir con su compañero y luego explicar en la discusión de grupos.
2. En la actividad 2 se tiene un grupo de funciones. ¿Puede describir la particularidad de las funciones?. ¿Qué relación guarda la función f y g?. Si graficó la función *shara* que conclusión tiene acerca de una función.
3. En la actividad 6 se tiene funciones representado por expresiones. Una de aquellas expresiones es $R(n) = \left\lfloor \frac{13n^2}{2^n} \right\rfloor$, ¿cuál es el proceso de esta función? Supóngase que ingresamos R(15), ¿qué resultado se obtiene?
4. En la actividad 4 se tiene una expresión. ¿Cuál es el resultado al evaluar en P(5), puede describir `(5**4 < 3**r)`? ¿Se puede evaluar en P(5)(4)? ¿Qué clase de valores producirá esta expresión?
5. Una sucesión (serie) puede ser definido como una función, cuyo dominio es el conjunto de los números naturales o un subconjunto de los números naturales, un subconjunto de la forma [1, … ,k], la función puede ser representado por la lista de las salidas en el correspondiente orden, como en las actividades 8 y 9.
6. Al encontrar los pares ordenados de una relación, ¿ésta se puede presentar mediante tablas? Tomar las funciones $f(x)$ y $i(z)$ de la actividad 2.
7. De la actividad 5, que comentario se merece.

Proceso de una función.

Cada tipo de representación tiene su propio proceso:

a) Expresión.

Representación	**Proceso para encontrar $f(a)$.**
Expresión	Asignar el valor de a a la variable, sustituir y desarrollar los cálculos necesarios.
Sucesión	Usar el valor de a como el índice y encontrar la serie
Tabla	Localizar el valor de a en el dominio (columna), y leer la correspondiente salida de en la columna rango
Gráfica.	Localizar el valor de a sobre el dominio del eje x, y encontrar la distancia vertical a la gráfica.

EJERCICIOS DOMICILIARIO

1. Desarrollar las operaciones presentadas.

```
a) > sqrt(2);

b) > 8*(-4);

c) > 5
   >>  +7.5-3
   >>  *2
   >>  ;

d) > x:= 8;
   > x;

   > x:= x+20; x;

   > x:= x-6; x;

e) > p:=[4,-2]; q:=[1,2.5]; z:=[0.5,-2,-1];
   > p; q; z;

   > p(1); q(2); z(1); q(1); p(5);

   > p(1)*q(1)+q(2)*z(3); p(1)**q(1);

f) > 2**0.5; sqrt(2); 5.0**4; 5**4.0;
```

Explicar cada uno de los resultados.

```
g) >  (2/=4)and((4.5/2.25)>1.5); (3<=2)impl(not(4=3+1));

h) > float(4256); floor(23.86789); fix(5981*10**(-2));

i) > x:=2;
   > abs(x-5)<2.5;

j) > sgn(2.5); sgn(0); sgn(-3);

k) > 5**2**3; (5**2)**3; 5**(2**3);

l) > min(sqrt(0.16),0.16);
```

2. Ejecutar cada una de las funciones en ISETLW. Explique cada una de las situaciones.

```
a) > length := 0;
   > for i in [1..3] do
   >>       length := length +z(i)**2;
   >>  end;
   > length := sqrt(length);
```

```
> length;
2.291;
```

```
b) MaxEquals:= (max(3,5)=5);
   maxequals;

   > MaxEquals;

   > MaxEquals or (3<4);
```

3. En cada una de las situaciones, desarrollar de acuerdo a lo solicitado.

a) Se tiene los días de un mes de un año, se considera la primera columna el día domingo como se muestra en el ejemplo (modificar la función). Construir el mismo mes después de 3 años (no considerar año bisiesto).

```
>    printf 2*[""]+[1..30] : 7*[6] with "\n";

                1     2     3     4     5
      6     7   8     9    10    11    12
     13    14  15    16    17    18    19
     20    21  22    23    24    25    26
     27    28  29    30
```

b) A partir del ejemplo que se muestra, **construir** la suma de los primeros 6 números, presentados en 8 columnas (modifique la función).

```
>   x:= [[i,j,i+j]: i,j in [1..4]];
>   printf x: 5*[[0,"+",0,"=",0],"\t"]
>>  with "\n","\n";
1+1=2    1+2=3    1+3=4    1+4=5    2+1=3
2+2=4    2+3=5    2+4=6    3+1=4    3+2=5
3+3=6    3+4=7    4+1=5    4+2=6    4+3=7
4+4=8
```

```
c) Ejecutar el programa
    >      P:= func(n);
    >>         if is_integer(n) and n>0
    >>         and exists x,y in [1..n div 3]|
    >>         3*x+5*y=n then return true;
    >>         else return false;
    >>         end;
    >>     end;
```

d) Demostrar: $|x + y| \leq |x| + |y|$;

4. Describir el proceso en cada una de las funciones presentadas y la evaluación respectiva en cada uno de los puntos. Además, identificar el dominio y el rango.

a) Dado el siguiente definición

```
>   f:= [1..6];

justifique los resultados de:

a. >     is_set(f);
b. >     is_atom (f);
c. >     is_boolean(f);
d. >     is_integer(f);
e. >     is_tuple(f);
f. >     is_om(f);
```

Escriba su dominio y rango.

b) Dado los siguientes cadena de caracteres

```
>   g:= MSJDMFHGIORNDC; M := "jdkfkglrgojfhdg";

justifique los resultados de:

a. >     is_string(g);
b. >     is_number(f);
c. >     is_string(M);
d. >     is_file(f);
e. >     is_atom(M);
f. >     g(1);g(2);g(3);g(4);g(5);g(6);g(7); .. g(16);
```

c) Dado el programa, encontrar la condición que cumpla.

```
"!CONGRUENCIA"
>   C:= func(a,b,m);
>>  return ((a-b)mod m =0);
>>  end func;
>   C( , , ); C( , , ); C( , , );
```

5. Correr cada una de las funciones en ISETLW (en la misma pantalla), evaluar y graficar

```
 ii. >  h:= func(x);
     >>      return 2*x-x**3;
     >> end;
     > h(-2); h(0); h(3);

iii. > g:= |x->2*x-x**3|;
     > g(-2); g(0); g(3);

 iv. > h = g;
  v. Graficar las dos funciones:  plot(h,g);
```

6. Correr cada una de las funciones en ISETLW, evaluar, hallar el dominio y rango de cada una de las funciones y graficar.

i.
```
> m:=func(x);
>>      if x>0 then return x**2-1;
>>      elseif x=0 then return 1;
>>      else return x+2;
>>      end;
>> end;
> m(2); m(6); m(0); m(-2); m(-3);
```

ii.
```
> K:= func(t);
>>      return 3-5*t<2*t+7;
>> end;
>  K(1); K(2); K(-1); K(-2); K(-2.5); K(-3);
```

v.
```
>  F:=func(y,z);
>>      return abs(3-2*z)>abs(2*y+1);
>> end;
>   F(-5,4); F(4,-1); F(-0.5,0); F(0.1,1);
```

vi.
```
>  x:=func(y);
>>      if 0<=y and y<3 then return sin(y);
>>        elseif y<=5 then return y-1;
>>        elseif y<8 then return 1-2*sqrt(y);
>>      else return y**2-3;
>>      end;
>> end;
>   x(-2); x(1); x(4); x(10); x(15);
```

v.
```
>   h:=func(x);
>>  return(x**2+2*x+1=0);
>>  end;
>   h(1); h(0); h(-1); h(-2);
```

ANEXO C

Trascripción de las entrevistas

ENTREVISTA A BRAULIO

SITUACIÓN 2.

P: Dices que la Situación 2 es una función con respecto a *y*

B: Sí, profesor, cuando analizamos nos damos cuenta de que es una función con respecto a *y*.

P: Tomando como dominio…

B: Tomando como dominio a "*y*" y rango a *x*; en cambio si tomo a "*x*" como dominio no es una función, porque si trazo una recta perpendicular hacia el eje *x*, esta corta en dos puntos, pero tomando como dominio a *y* sí es una función.

P: Entonces, afirmas que el dominio no necesariamente puede tomar *x*, sino también *y*.

B. Sí, porque aquí, debe ser la función *(x,y)* tal que *x* pertenece al dominio, o mejor dicho una función definida de R en R, donde (*x,y*) o f(*x*) = *y*.

P: Si no te dicen que es una función, puede tomarlo arbitrariamente.

B. Sí, eso he analizado, aunque en el primero no hice o hice directamente.

Se refiere a la prueba de entrada.

P: ¿Hiciste de acuerdo a la definición clásica que conoces?

B: Sí, profesor.

P: Con respecto a la SITUACIÓN 3, tomaste la a) y dices que es una función.

B: Sí

P: 1-1, 2-2, 3-3, ¿Por qué lo hiciste con 1-1, 2-2, 3-3, el dominio y el rango?. ¿Has cancelado los exponentes?

B: Dice (*x,y*) pertenece a los naturales, entonces el dominio de la función son todo los naturales, porque *x* puede tomar 1, 2, 3, 4, 5,…

P: ¿*y* también?

B: Sí, "*y*" también, cuando pasa tomaría más – menos, sería el valor de *x* al cuadrado, pero será siempre positivo porque son los números naturales.

P: Correcto. ¿Y para la b)? Dices que es una función.

B: Ahhh. Pero es otro, *y* está en Z

P: Claro que sí.

B: Entonces, en Z es de la misma manera, *x* puede tomar cualquier valor entero; este valor entero *y* va a tomar con la raíz cuadrada; sería un valor entero positivo.

P: ¿No crees que en los negativos te hayas equivocado?, aquí has hecho correcta la diferencia de cuadrados: *y* =*x*, eso sería los positivos, pero cuando *y*=-*x* es negativo; entonces, esta recta pasa con pendiente positivo y esta otra con pendiente negativo, es una función negativo

B: En este caso *x* = y, sería cierto.

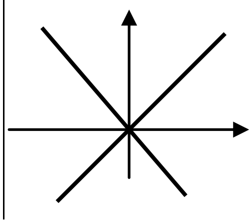
Se refiere a la gráfica en el plano cartesiano

P: Y qué pasaría si graficas primero *y* = *x*

B: Si *y* = *x* va a ser así, en cambio cuando *y* = -*x* va a ser lo contrario, en esta caso y =x es una función y *y*=-*x*, también es una función.

$y = -x$

$y = x$



P: Pero en este caso es una sola función.

B: Sí.

P: Entonces, si trazaras una perpendicular, ya no se cumpliría.

B: Sí profesor; entonces, no sería una función.

P: Que opinas sobre la pregunta.

B: En general, hay que analizar antes de desarrollar

P: Alguna vez, ¿has visto esos ejercicios o algo parecidos?
B: Nunca, profesor, la pregunta siempre es directo.
P: Dices que La SITUACIÓN 4, es una función racional, donde el dominio es todos los reales menos cero. ¿Y para el eje *y*?.
B: El rango. De la ecuación hay que despejar *x* en función de *y* , por eso he despejado *x*.
P: ¿Estás seguro?
B: Sí, profesor, *y* es mayor igual que a 2 y *y* es menor igual que a 2. Entonces este intervalo es el rango de la función.
P: ¿No crees que te has equivocado?, ¿no crees que solamente sea el cero?
B: No, profesor. Si tomaríamos 1 y sustituyendo, sería imaginario.
P: En la SITUACIÓN 5 dices que cada persona tiene una única nota respectiva, hasta aquí ya se tiene la idea.
B: Sí, es una función
P: En la SITUACIÓN 6, en el gráfico, *"a"* tiene como imagen D y C, tu dices que no es función.
B: He considerado como puntos.
P: No te has fijado y aseguras que no es una función. Porque *x* era menor igual a cero. Entonces, esto era para acá, así y luego así.

Se refiere a la gráfica para *x* menores que cero.

B: Sí, profesor.
P: En la SITUACIÓN 7, dices que A es igual a pi por r^2.
B: Sí, *r* pertenece a los reales. Y en cada una de las circunferencias hay un valor de *r*.
P: Crece el valor de *r*.
B. Sí, cuando el valor de *r* crece, también el área crece. Las áreas son diferentes, si *r* uno es menor que *r* dos; entonces, sus áreas son diferentes.
P: Las ecuaciones que presentas está en función de r.
B: Sí profesor, como en la física. Se puede tomar una función F en términos del radio *r*.
P: Pero no se distingue el área, ¿por qué has puesto a A en términos de *r*?.
B: Si profesor, para que exista mayor relación. Área sería A(r).
P: ¿La variable independiente?
B: El valor de *r*.
P: Simplemente ésa es la idea.
B: Profesor, analizando, esto se puede aplicarse a las ecuaciones diferenciales, la química, etc.
P: Ahora la SITUACIÓN 8 es correcta, la SITUACIÓN 9 también es correcta, y la SITUACIÓN 10, no lo has graficado, correcto. ¿La SITUACIÓN 11? Dices que es una función. Como vemos en la figura, el latido del corazón depende del tiempo; a medida que pasa hay diferentes latidos, y nunca se realiza dos latidos diferentes al mismo tiempo. ¿El tiempo tendría que ser igual a cero, mayor que cero?
B: Creo que el tiempo es mayor que cero
P: ¿Y sería la amplitud o rango?
B: ¿El rango de esa función?. Creo que no se puede.
P: ¿Por qué no se puede determinar?. Porque hay un máximo y un mínimo.

Indicando la gráfica de su examen, lo nombra *a* la parte superior y *b* la parte inferior.

B: Pero tendría que conocer con el latido de mi corazón; por ejemplo, un punto *a* y un punto *b*, esto sería donde fluctúa el latido de mi corazón.

P: Claro, ahí lo has encontrado. El instrumento mide las fluctuaciones.

B: Entonces, aquí las constantes *a* y *b* ya estaba el rango.

Se refiere a la gráfica, y ubicar los valores de *a* y *b* en el eje de *y*.

P: Entonces, ¿es una función?

B: Sí, es una función.

P: Dices que la SITUACIÓN 12 es una función. Considero que no es una funciòn.

B: ¿M y M, profesor?.

P Claro que sí, aquí hay M que relaciona con 3 y otro M que se relaciona con 9. Pero en sí…

B: Ah, se contradice la definición de función. Como dice f(a) y f(c) son iguales, entonces *a* = *c*. Entonces con la definición 3 = 9. En consecuencia, es una contradicción, no es una función.

La correspondencia está dada del conjunto de letras hacia el orden de las letras.

P: Recuerda, cuando trabajamos con el programa y cuando ingresas un valor, resulta su posición; entonces, ¿qué valor ha ingresado acá?.

B: Si tu ingresaras M …

P: Pero no ingresamos M.

B: No, ingresamos 3 y sale M,

Recién comprende la correspondencia.

P: Ahhh entonces ¿Cuál sería el dominio?

B: Las letras del abecedario

P: Pero, ¿Cuál ingresa?

B: Entonces, el dominio de esta función sería B y el rango A.

P: Cambiaste de posición, ¿no recordabas?

B: Yo, lo único que he observado es simplemente que esos números tienen la posición de f,

Se refiere a que debe ingresar los números y no las letras

P: Si cambiamos de dominio, sí es una función y si no cambiamos no es una función.

B: Sí, profesor.

P: SITUACIÓN 13 consideramos que *p* es el peso del cerebro y m es el peso corporal, y *k* ¿qué significa?

B: Como me dice que es directamente proporcional, es una constante

P: Es una proporcionalidad.

B: Sí, profesor.

P: No crees que aquí te has confundido?.. Ahhh está correcto.

P: En la SITUACIÓN 14 has trabajado con pares ordenados, ¿por qué has graficado?

Se confunde con las funciones de varias variables de la forma z = (*x*, *y*), cuando realmente es t es el dominio y rango es los pares ordenados

B: No, la función de par ordenado (*x*, *y*) = ($t^3 - 4$, $t^2 - 4$)……

P: Has considerado aquí como una función de varias variables

B: Sí, profesor, porque (*x*, *y*) = ($t^3 - 4$, $t^2 - 4$) = z, entonces sus componentes son $t^3 - 4$, y $t^2 - 4$.

P: Entonces, ¿podrías graficar en un plano?.

B: Sí profesor. Y eso depende de la superficie de los valores de t.

P: ¿Has desarrollado la situación 22?.

B: Si, pero nosotros analizamos directamente, le trazo una línea recta paralela al eje *y* y entonces va a cortar en más de un punto. Cuando corta en más de un punto ya no es una función.

Sigue con la idea de una función f(x).

P: Eso sería cuando la gráfica no tiene una dirección; en este caso, la gráfica tiene una dirección, una flecha.

B: Sí para acá, No en el plano.

B: Sí me estarían hablando en el espacio, ahí sí no podría aplicar, como quien dice, la definición geométrica de función.

P: Te invito a graficar la situación 14 y el resultado es la situación 22.

B: ¿Pero en el espacio?

P: No, en el plano, lo que pasa en el dominio es t en la recta R, y el rango los pares ordenados (*x*, *y*), por ejemplo si tomamos t = 1, entonces tendremos *x* =-3 y *y* = -3. ¿Alguna vez has visto situaciones similares?

B: Tomando valores externos, estaríamos hablando de una función de R en R^2, porque mayormente trabajamos de R^2 en R. y nunca he visto de R en R^2.

Es posible que no hayan desarrollado ecuaciones paramétricas.

P: O sea que las funciones fueron de R^2 en R.

P: La SITUACIÓN 15, dices que no es una función.

P: En la SITUACIÓN 16, dices que falta especificar en qué conjunto se ha considerado los valores de *n* que toma desde 1 hasta 10.

B: En este caso, cuando se especifica la función dependería de …. A de *n*, pero yo no vi eso y no podía en qué sistema de número trabajar. Puede ser en los enteros, los reales.

P: Es parecido la SITUACION 17, tampoco lo has desarrollado y dices solamente para 4.

B;: Si lo he resuelto y me da un punto, porque es una ecuación.

P: Para 4.

B: Entonces, se cumple

P: Cuando el valor es 4, sí cumple la ecuación

P: Cuando x = 1

B: No cumple

P: Si x = 2.

B: Tampoco cumple.

P: ¿No crees que ahora hay valores que ingresan?

B: Entonces el dominio sería 1, 2, 4, y el rango cumple o no cumple.

P: No crees que eso ocurriría?

B: Viéndo desde ese punto de vista, sería una función, pero así de manera normal no sería una función, sólo genera un punto.

P: Pero te da una apertura; aquí ingresas los valores de *n*, resulta que tus compañeros ingresaron los valores de 1, 2, 3 y ahí se quedó y lo generalizaron

B: En la situación 16?

P: Claro,

B: Si sustituimos a cada uno de los valores, si cumple será una relación, entonces A tendrá un elemento común. Si sustituimos todos los valores y si se cumple, entonces es una función.

P: La SITUACION 18, dices que es una función definida de R en R, donde *x* es la preimagen y *z* es la imagen. El dominio es R y el rango también R, ¿es cierto esta afirmación?

B: He considerado como una función cúbica.

Lo consideró como una función cúbica dentro de un intervalo.

P: Ahhh, has considerado como una función trigonométrica

B: No profesor.

P: Si es así, está correcto.

B: Si hubiese sido trigonométrica, debería haber puesto parámetros. Entonces el rango de la función hubiera cambiado, pero el dominio no.

P: Para la SITUACIÓN 19 dices que es una función.

B: Si, profesor, porque si x_4 = 1, entonces y_4 también es 1, entonces sería de 1 en 1. Si $x_4 = 2$, entonces $y_4 = 2$.

P: ¿No sería como la función lineal?

B: Es una función lineal.

P: Aquí has cambiado que NO es una función.

B: Sí, es una función.

P. Dices que la SITUACIÓN 20 es una función.

Recapacita y explica mejor.

B: Sí, es una función, porque toda sucesión es una función.

P: La SITUACIÓN 21. Dices que es una función, pero tu dominio no es cierto, tampoco tu rango.

B: Analizando si ingresa x y el par está en el plano, no sería una función, porque 3 tendría varias imágenes, con 2, con 4 con 6 y no cumpliría la condición de una función.

P: Pero si pasas como en este caso (refiriendo a la situación 22).

B: En este caso sería una función, desde una recta.

P: Del 1 al 20

B: Estaría tomando los valores, estaría generando una curva, ahhhhhh una recta.

P: No pensaste de esa forma?

B: Estamos acostumbrados a trabajar con la forma tradicional. Además trabajamos siempre con x y y, y otras variables nunca se utilizan. Y eso es la que nos limita el panorama.

P: En la SITUACIÓN 23, dices que es una función, porque partiendo de un punto de la orilla llega a un solo punto de la otra orilla

B: De cada punto se partiría, para llegar a un punto de la otra orilla, si tú quieres llegar de acá para allá no hay ningún problema y cumple la definición de función, sus imágenes deben ser iguales, entonces sí lo he considerado como una función.

P: **¿Puedes decirme qué es una función?**

B: Yo veo como una regla de correspondencia, entre un conjunto de partida y un conjunto de llegada. Para conocer una función siempre debo de conocer su preimagen, de esta preimagen generar mi imagen. También puedo definir geométricamente trazando una recta; también puedo definir y que cumpla solamente dos condiciones: de que el primero debe tener su regla de correspondencia; el segundo, es que el dominio no debe generar dos imágenes o una preimagen no debe generar dos imágenes diferentes. Porque no tenía mucho panorama antes de la prueba de entrada y antes de ir al centro de cómputo.

P: Pero se da el caso; por ejemplo, se tiene en el dominio nombres y en el rango las notas. Y cuando trabajo con la situación de las letras, en el dominio va los números y luego las letras como rango, entonces ¿necesariamente tengo que poner x al primer componente?.

B: No, profesor, porque usted puede tomar cualquier variable

P: ¿Entonces, ¿las definiciones clásicas de (x, y)?

B: Yo creo que hay que tratar de evitar, y no siempre hay que darles a los estudiantes con valores de x. Podemos darles el valor de a, es cuando los alumnos estuvieran en 1ro., 2do., 3ero y cuando entran a 5to le cambias por seno y coseno, es igual como en el álgebra, entonces ellos ven ya desde otro panorama.
Y si consideras con a a seno y con b a coseno, pueden aplicar las identidades trigonométricas

P: Dices que La SITUACIÓN 24 no es una función

B: Sólo me genera un punto y que x debe tomar un valor específico, por ejemplo $x = 45º$,

P: Pero la curva de la gráfica va ha repetirse varias veces.

B: Ahh.. Entonces x tomará los valores de 45º, 135º, asi … y el otro ya sería negativo.

P: Entonces, como en la situación de la ecuación que habíamos considerado, resultaría verdadero para esos puntos y falso para los otros puntos.

B: Entonces estaríamos hablando de puntos que son válidos para la función y puntos que no son válidos para la función. Porque cada cierto período va a generar esos valores

P: ¿No pensó en eso?

B: No, profesor.

P: Las situaciones 25y 26 están bien. La SITUACIÓN 27, has acertado con la respuesta.

B: Es que en la situación anterior te daba (3, 2*x*), en cambio aquí si (3*x*, 3*x*) y si reemplazabas era una función.
Por ejemplo si x = 1 sería (3, 2), y si x= 2 sería (3, 4); entonces, los puntos son diferentes y es una función.

P: La SITUACIÓN 27 sí es una función. La SITUACIÓN 28 también es una función

B: Sí, es una función de R^2 en R, es una superficie.

ENTREVISTA A EFRAÍN

P: En la prueba de entrada a la SITUACION 1, consideras que ambas funciones son iguales, y ahora en la prueba de salida consideras que son diferentes.

E: En la primera función encontramos la asíntota, están trabajando en los números reales y en el denominador x=2, entonces se convierte en indeterminado. Por lo que $x \neq 2$.

E: Por ejemplo, sabemos que en la definición de función, en una función dos pares ordenados y los primeros componentes no deben tener dos imágenes, entonces ya no sería una función, sería una relación.

Se pasa a la SITUACIÓN 2, haciendo el comentario para culminar su idea

P: Dices que no es una función puesto que trazando una paralela al eje *y* corta en dos puntos.

E: Eso también es una de las formas de analizar.

P: Ahora en el examen de salida escribes $x = y^2$ y dices que es una función.

E: No. Analizando tenemos la gráfica, por ejemplo, he tratado de explicar $y = x^2$ es una función. ¿Qué pasaría si ahora invierto la posición?, entonces esto también sería una función.

P: En este caso. ¿Cuál sería el dominio?

E: El dominio sería todos los valores de *y*, eso he tratado de explicar. Si invertimos, *y* sería como dominio.

P: Muy bien.

E: Tal como está, sí es una relación. Y si la invertimos, sí es una función.

P: Entonces, afirma que necesariamente *x* es el eje de las ordenadas, y las abscisas pueden tomar cualquier valor. MUY BIEN.

P: Que pasó con la SITUACIÓN 7.

E: No, profesor, en la situación 8. Me he confundido. Esto es distinto. Y no sabía y dije cómo hago, y he tratado de relacionar. Con respecto a la relación del círculo y su radio

P: Ya

E: Aquí, la relación del circulo y su radio ……, podemos considerar en un plano *x y*, entonces la relación entre el área del círculo y su radio, aquí no dice en qué punto está el centro del círculo, entonces podemos considerar acá, además está relacionado con su área. ¿No es cierto?

Desea ubicar el centro del círculo en el plano cartesiano.

P: No has encontrado la relación.
E: No he encontrado.
P: Qué pasaría si le das 2 al radio. ¿Cuánto sería tu área?.
E: El área es *pi* por radio al cuadrado, el área es 4 *pi*. El área del círculo.
P: Y si tomas r = 3.
E: R = 3, entonces sería 9pi y eso sería el área del círculo
P: Y si consideras r = 1,
E: El área solamente es *pi*.
P: Si consideras *r* = 4.
E: Sería 16 *pi*.
P: Cómo sería si graficarías los resultados en el plano cartesiano. A cuál considerarles en el eje de las ordenadas y de las abscisas. ¿Cuál sería el dominio y quién el rango?
E: El dominio…..
P: No la entiendes?
E: El dominio en este caso sería…
P: ¿No crees que es r (radio)?
E: Claro que sí, *r* es el dominio.
P: ¿Y la salida?
E: El área sería como rango
P: Con respecto la **SITUACIÓN 10**. Qué me comentas.
E: Acá es una relación, estamos hablando de 3 funciones. Primero he tratado de evaluar en cada una de las funciones.
P: Ya
E: Esta expresión sería mayor que cero, y el dominio sería la unión de todos los valores de *x*.

Se refiere a $(x-1)^2 > 0$

P: De la **SITUACIÓN 12**, dices que sí es una función, porque puede representar el siguiente número.
E: Sí es una función así,
P: ¿Recuerdas lo que hicimos en el programa?
E: Del programa que hemos realizado?
P: Que hacía el programa, …. Definía esta expresión como una función.

Se ha olvidado por lo que se hizo recordar con un ejemplo

E: Claro, estaba igualado, o más o menos así; por ejemplo, con tu nombre.
P: Más o menos así: f := “RAUL”
E: Sí, Raúl,
P: Me pedía evaluar, y ¿qué me resultaba?.
E: Raúl sería 1.
P: ¡RAUL?, que resultaba cuando evaluaba en 1.
E: Ah! Ya, ya recordé, f(1) = R, f(2) = A, f(3) = U, y f(4) = L.

Se definió una función y empezó a evaluar a la pregunta el orden de las palabras f(1) = R, f(2) = A, f(3) = U, y f(4) = L.

P: Qué ocurre en ese caso?
E: En ese caso RAUL sería como rango y sería la salida.

P: Claro que sí. Entonces, cómo sería.

Se refiere a la situación 12.

E: Aquí también he desarrollado, y aquí está.
P: Qué significaría, en ese caso, cuando tiene esa cantidad de letras.
E: Estaríamos hablando de la posibilidad de evaluar en cada letra.
P: No crees que se está tomando el orden de las letras?
E: De todas maneras, se tiene que tomar el orden de las letras; por ejemplo, para el punto 1 no se puede tomar A, sino que tiene que ir en orden. Porque sería distinto.
P: No fuiste claro en este punto.
E: Sí, profesor.
P: En la **SITUACIÓN 16,** ¿qué pasó? ¿no es preciso tu respuesta?
E: Sí, profesor. Tuve una duda, si es desde el 1 al 20.
P: Así es,
E: Aquí he evaluado punto por punto, 2 > 4 es falso, para n=2 y 4>10 también es falso también, n=3 y 8>18 de igual modo es falso.

Ha evaluado en cada uno de los valores de n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, … 20. pero no ha llegado ha concluir.

P: ¿Cuándo cumple en ese caso?
E: Hummmmm, ya, a partir del 6 cumple, cuando n=6 si se cumple, el resultado se invierte, será menor. Y eso nos pide evaluar.
P: Has evaluado.
E: Entonces acá,
P: ¿Cuál será el dominio?
E: Dominio será todo esto, lo que estamos igualando de 1 al 20. Y la salida es falso, falso,... y verdad, verdad, .. y eso sería el rango.

Se refiere a los valores de n

P: No has escrito.
E: No he registrado.
P: La **SITUACIÓN 17** .
E: Bueno, aquí he evaluado en el punto 4, y cumple la ecuación
P: ¿Y con otros valores?
E: No cumple
P: ¿Y no crees que es parecido a la situación 16?
E: Uhmmmm, pero con otros no va a cumplirá, no así, profesor?
P: Si no cumple, ¿cómo sería?
E: Sólo en ese punto sería
P: Ingresa un valor 3, ¿cuál es el resultado?, ¿es cierto o falso?
E: Es falso.
P: ¿Con qué valor cumple?

Hace comparación con la situación 17..

E: Solamente con 4. Aquí también estaríamos hablando como en la situación 16.
P: ¿Cuál sería el dominio aquí?
E: Dominio seria el 4.
P: ¿Sólo el 4?
E: ¿O todos los reales?
P: Estamos diciendo que puede ser cualquier número.
E: Si es cualquier número, el dominio sería todos los reales, pero se va a cumplir solamente en el punto 4. Entonces el rango sería falso, falso, falso, y en el punto 4 sería verdadero. Algo parecido como en la situación 16.
P: En la Situación 19, dices que falta especificar.
E: No lo he comprendido.
P: Entonces, ¿qué entiendes por función?

P: Qué impresión tienes del Taller que realizamos basado en el programa ISETLW.
E: Este programa nos lleva al análisis profundo de lo que es la función.
P: ¿Crees que es cierto eso?
E: Sí, profesor.
P: De alguna manera te lleva a reflexionar.
E: Este programa conlleva a analizar punto por punto lo que es la función.
P: Y lo que han aprendido aquí en la universidad con respecto a funciones, ¿no es lo mismo?
E: Sí profesor, lo que nosotros hemos aprendido fue de manera mecánica. Pero analizando de esta forma, por esa función de RAÚL, quién se iba a imaginar.
P: La idea no es…
E: No está en los libros. No está escrito cómo son las funciones.
P: Gracias, Efraín. Así nos pasaríamos hablando todo el día.
E: En realidad, cuánto nos hubiera gustado avanzar más con respecto a las funciones. La verdad, he aprendido bastante de estas funciones por ser analítica, no con ese esquema de f(x).
P: No es lo mismo como las definiciones clásicas que se tiene en los libros. Y como profesores, también nos equivocamos.
E: En conclusión, es hablar solamente de f(x), así como el programa que estamos desarrollando tiene otros enfoques.

Comentario acerca del programa

P: Entonces, ¿habría una definición única o habría definiciones para cada una?
E: La definición es única.
P: Lo que pasa es que nosotros los restringimos para casos específicos, y cuando lo presentamos de otra manera ya nos perdemos.
E: Por eso, cuando nos presentaste por primera vez, nosotros no sabíamos nada, y analizando sí eran funciones.

ENTREVISTA A MIGUEL

P: Qué entiendes por función?
M_}: Función vienen a ser pares ordenados de XY en el plano, donde los primeros componentes no deben ser repetidos. Si son repetidos vendrían a ser una relación.
Si en este conjunto A se tiene los elementos de 1,2,3 y 4 que será dentro del dominio, y tengo otro 5, 6 y 7, el rango de la función. Éste elemento viene solamente a una de ellas y si de una parte a dos imágenes eso ya no es función, eso es una relación.

Aquí hace su definición de función.

P: Entonces, vamos a la pregunta 1.
M: Si $f(x) = (x^2 - 4)/(x-2)$, analizando en este ejercicio. Para f(x), y haciendo que x = 2, se hace indeterminado. Entonces el dominio será todo los reales menos el dos (R-{2}). Y el rango vendría a ser lo que factorizamos (a la función) y obtenemos $x + 2 = f(x)$, entonces **Y** será igual $x+2$, y como me dicen que el dominio es R-{2}, entonces yo puedo decir acá, será a partir del 2.
M: Claro del dos al infinito (de 2 al ∞)
P: A ver, grafícalo.
M: Lo grafico, voy ha tabularlo XY, a $x = -2$ entonces será 0, $x = -1$ esto será 1, si $x = 0$ será 2, $x = 1$ será 3 y si le doy 2 será 4 y así sucesivamente. Y luego graficamos, uniendo los puntos es una función lineal, profesor. No sé si esta bien la gráfica.

Inicia la gráfica uniendo los puntos

P: El punto 2, no se debe considerar ¿y el resultado de la imagen?

M: Entonces el rango sería los reales (R).

P: Entonces, lo que has escrito aquí no está correcto. (Se refiere a su gráfica en el examen)

La gráfica en su examen de salida es una parábola.

M: Ah, es una forma, aquí simplificándola. Observando acá no cumple, es indeterminado.

P: Entonces en tu gráfica ¿cómo debería ser?

M: Si acá le doy 2 es 4, y aquí le doy 2 y se hace cero (0) y se hace indeterminado, otro más – 3 es –5.

P: Qué pasa cuando evalúas en 2.

M: Si evalúo en 2 sería 4 en y.

P: Y qué significa x diferente de 2.

M: En dos no.

P: ¿Qué genera la gráfica?

M: No es una función continua, porque aquí en el 2 va a tener una abertura.

P: **En la Situación No. 3**, ¿su gráfica está correcta? Para la pregunta 3, la parte a).

M: Ah, me dice que el par ordenado (x, y) pertenece a los naturales al cuadrado, tal que $y^2 = x^2$. Si evalúo en $y^2 = x^2$ se obtiene $y = x$, simplificando por álgebra

P: ¿Qué en álgebra son distintas las funciones? Eliminar los exponentes.

M: Esto puede ser así $y = \sqrt{x^2}$, y de aquí $x^2 \geq 0$ por definición.

P: Me sorprendes al sacar la raíz cuadrada, o en todo caso es $y = \pm\sqrt{x^2}$

M: Esto es $y = \pm\sqrt{x^2}$,

P: ¿Es una función?

M: No, profesor. Pero sí se puede graficar, sustituyendo los valores

P: Nuevamente sale una parábola, estás definiéndolo en una función de N en N.

ENTREVISTA A KETTY

P: En la prueba de entrada no has desarrollado todas las preguntas; en cambio en la prueba de salida sí has desarrollado gran parte; por ejemplo, la situación 1 has evaluado y graficado, ¿Qué puedes comentar al respecto?

K: Por ejemplo, en la situación 1, la función $(x^2 – 4)/(x–2)$, donde tomo $x – 2$ que es diferente de cero. Si fuese cero, no se podría dividir.

P: ¿Sería indeterminado?

K: Sí, por eso tomo $x – 2$ diferente de cero, que x es diferente de 2. Quiere decir que en el punto $x = 2$ es abierto.

P: Es una función discontinua. ¿Podrías llamarlo así?

K: Podría ser una función continua

P: ¿Podría ser? ¿Es una función?

K: Sí, es una función discontinua.

P: ¿Comparándolo con la $g(x)$?

K: En cambio en $g(x)$ se toma como dominio a todo los reales R.

P: ¿Son iguales o diferentes, $f(x)$ y $g(x)$?

K: Son diferentes, porque para x=2, en $f(x)$ habría un agujero, en cambio para $g(x)$, x toma todos los puntos del dominio.

P: Sobre la **SITUACIÓN** 2, no dices nada, solamente los has graficado.

K: Tomé como dos funciones $y = \sqrt{x}$ y el otro $y = -\sqrt{x}$, y como estaba en duda no lo había hecho.

P: Así, como esta la gráfica, ¿es un función?

K: Así como está, tomo $-\sqrt{x}$ y $\sqrt{x}$, sí es una función.

P: Pero ya sería dos funciones distintas. Así como está, no es una función. Para usted, **¿qué es una función**?

K: Es cuando un conjunto X tiene sus puntos, y que estos puntos deberían de tener necesariamente su imagen en el conjunto Y en un punto, eso sería la definición.

Trata de explicar la definición de función.

P: No me queda claro.

K: Ahhhhh… Que un elemento del dominio deberá tener una sola imagen.

P: ¿Podría tener dos?

K: No.

P: Con la SITUACIÓN 2. ¿ Por qué hiciste $y = x$? si la presentación es $y^2 = x^2$.

K: Como ambos están elevados al cuadrado, se eliminan o se sacan la raíz cuadrada.

Las operaciones de este tipo, generalmente los realizan cancelando los exponentes.

P: ¿Tal vez has aplicado alguna propiedad de los números reales?

K: Algo así, aquí los exponentes son iguales; entonces, las bases también son iguales. Por eso puse $y = x$.

P: Pues eso cumple en los números naturales, ¿qué pasa en los números enteros?. Porque la gráfica es una recta

K: Si lo cancelado igual $y = x$.

P: No crees que al cancelar los exponentes esta perdiendo una solución?; ejemplo, $y^2 = x^2$ y e $y^2 - x^2 = 0$, y de aquí se tiene que $(x - y)(x + y) = 0$. ¿Qué propiedad es? ¿Recuerdas?

K: Diferencia de cuadrados.

P: De aquí tenemos que $x = y$ y ….

K: $x = -y$.

P: Aquí, ¿no has considerado esa operación?.

K: No lo he considerado así.

P: En la **SITUACIÓN 5,** dices que es una función ¿verdad?

K: Sí, profesor,

P: ¿Cuál sería el dominio?

K: Serían los nombres, y el rango las notas.

P: En el programa ISETLW, si ingresas un número ¿sale una letra o un número?

K: Si ingreso un nombre, saldría un número.

P: ¿No crees que el programa ejecute de esa manera?

K: No, lo que pasa es que dije que hay que considerar elementos y no necesariamente tiene que ser número, puede ser letras o figuras que tengan una relación.

P: Con respecto a la **SITUACIÓN** 7, la relación que existe entre el círculo y su radio

K: Hice un círculo pequeño con un radio también pequeño, a mayor radio también será mayor el área.

Indica su examen, para hacer el comentario.

P: ¿Es una función?

K: Sí, es una función.

P: ¿Y el dominio? ¿Y el rango?
K: El dominio sería el círculo y rango el radio. A mayor círculo mayor radio.
P: Pero hiciste que a mayor radio, mayor es el área del circulo; hasta ahí esta bien. Entonces, el dominio sería …
K: Todos los reales positivos que son el radio y rango serían también todos los reales positivos incluyendo el cero.
P: La SITUACIÓN 11,
K: He tomando aquí como un punto cero el inicio y la parte más baja de la gráfica hasta la parte más alta que consideré 4, conté los casilleros y de esa forma obtuve el rango.
P: ¿Y el dominio?
K: El dominio es… todos los reales, en cambio el rango sería de 0 hasta 4.
P: ¿Todos los reales?, porque nuestra vida no creo que sea todo los reales. La vida es en función del tiempo $t \geq 0$ y t es un real.
K: Ahhh… sí el dominio son los reales positivos.

A la aclaración el participante reflexiona y considera que el dominio debe ser mayor o igual a cero.

P: En la SITUACIÓN **12** ¿Has considerado el orden del ABCEDARIO**?**
K: Sí.
P: Cuando trabajamos con el programa, y el conjunto de letras ¿qué operación realiza elprograma?
K: El orden.
P: Claro, no es lo mismo poner la O delante de REMDTJKFMAWO y es distinto, en este caso ¿Cuál sería el dominio?
K: El dominio sería los números.
P: La posición de las letras.
K: Así es.
P: ¿Y el rango?
K: Las letras,
P: ¿Qué paso aquí?
K: Lo puse al revés.
P: Así como lo pusiste aquí, eso es la idea. Pero aún, no sería una función porque M se repite dos veces.
K: La posición sería al revés.

La estudiante ha participado activamente en las actividades del ciclo ACE. Pero ha desarrollado por analogía el orden del ABECEDARIO.

P: La SITUACIÓN **13** y **14** no lo has hecho; en la **SITUACIÓN 16**,
K: Parece que faltaba definir. La **SITUACIÓN 15.**
P: Ahhhhhhh…. Falta considerar que si es una función o no lo es, solamente has considerado el dominio todos los reales $\boldsymbol{R}$ y el rango desde $-k$ hasta s. ¿Es una función? ¿Qué conclusión tienes?
K: Por ejemplo, aquí puedo considerar un valor 5, ésta no puede tomar dos imágenes, un negativo y otro positivo, por eso no es una función.

Lo dejó en inconcluso, e indicando su examen hace el comentario en la situación 15.

P: O sea, no es una función
K: Sí, profesor.
P: Volviendo a la SITUACIÓN **16**,
K: Ahí nos pidió sólo hallar los valores de **n**.
P: No fue exactamente eso, era sustituir los valores de ***n*** del 1 al 20 que cumplieran la inecuación. ¿Sería una función?
K: Sí podría ser una función, porque a n le damos valores reemplazando, cuando n=1 entonces 2>4, y si evalúo n=2 entonces 4>10.

P: El resultado que obtienes ¿Es verdadero o falso?
K: Todo es falso, hasta n=6, en este caso resulta 64>54 y resulta verdadero.

P: En este caso. ¿Cuál sería el dominio?
K: El dominio sería los números que están ingresando.
P: ¿Y el rango?
K: El rango sería solamente los que cumplen
P: Pero acabas de decirme que el dominio son los números que ingresan, en este caso 1, 2, 3, 4 y 5, y si no cumplen ¿qué haces?
K: Pero tendría que especificar que $2^n>64$
P: En todo caso, no sería una función.
K: Aquí seria como un abierto y no se tomaría los puntos.

Se refiere del 1 al 5.

P: ¿Es una función?
K: Sí, es una función, pero no tomaría los que no se cumplen y sería como abiertos.
P: Solamente sería con los valores de ***n*** que cumplen.
K: Así es.
P: Con la **SITUACIÓN 17**, no lo has hecho.
K: No tengo idea.
P: Con la **SITUACIÓN 18**, ¿es una función?.
K: No la hice.
P: La **SITUACIÓN 19**,
K: Aquí tampoco, no nos dice nada, solamente nos pone su base 4. Y si es base 4, entonces $y = x$ o y es diferente de x, o sea no está especificado el punto.
P: Si lo especificara, ¿sería una función la situación?.
K: Si es una función.
P: ¿A qué te refieres “especificado”?, como sería eso.
K: Por ejemplo, a que base 4, dice que $y = x$ o le ponemos diferente, y le ponemos 5 y nos dice en base 4.
P: Ya entiendo, te refieres a la base en aritmética.
K: Así es.
P: No se refiere a eso. Hagamos que ese 4 desaparece.
K: Sólo sería $y = x$, entonces si x=1 entonces y =1, si x=2 entonces y =2, si x=3 entonces y =3. Entonces así sería la función.

Completa la tabla de tabulación.

K: Sí, es una función.
P: En la **SITUACIÓN 23**, el nadador en el río, nada desde una orilla a la otra.
K: Sí, es una función. Aquí tenemos un río y supongamos que corre para allá, y tenemos una persona que quiere cruzar nadando como en la figura.
P: Ya, ¿qué más?
K: La orilla del río es el dominio, y el rango es la distancia digamos desde 0 hasta F. Pero como el agua tiene que correr hacia allá, tiene que nadar prácticamente contra la corriente; entonces, tendría que nadar así (cruzando); entonces, le digo que sí es una función
P: Te entiendo que estas tratando de ubicar los puntos en el plano cartesiano.
K: Algo así.
P: Tú que has llevado el curso de topología, en esa distancia no interesa la corriente del río, o que el río es torrentoso y haya arrastrado hasta acá. Desde un punto A hasta un punto B, ¿no crees que es una distancia desde A hasta B $d(A,B) = |B - A|$? ¿No has pensado así?

K: No.
P: O en física, para recorrer esta distancia requiere un tiempo, ¿no pensó en esa situación?
K: Tampoco, no pensé.

P: La **SITUACIÓN 22**,
K: No es una función, porque tendría dos imágenes.
P: No te has preguntado que esa curva tiene una flecha al final?
K: La flechita que pueda ser que continúa el gráfico.
P: Claro, la idea es esa. Porque generalmente la gráfica de una función no es así. ¿Tienes idea de la gráfica?.

No comprende una la situación presentada mediante una gráfica.

K: No profesor.
P: ¿Recuerdas haber hecho ecuaciones paramétricas?
K: Sí.
P: ¿Recuerdas situaciones parecidas?. Se parece a la situación 14.
K: No recuerdo
P: Es la gráfica de la situación 14.
K: ¿Entonces es una función?
P: Claro que sí. Lo que pasa, es que esta definido de una recta R en un plano RxR. Queda una tarea para la casa.
K: Pero si dices que le trazas una recta y se corta en más de un punto, se dice que no es una función.
P: Ahhhh, eso es cuando la función está definido de R en R.
P: La **SITUACIÓN 25** está asociada al lenguaje de programación estudiado, ¿es correcta la gráfica?

Trata de graficar en un papel.

K: Sí, ya que es una función de $2x^2$, luego así es la gráfica.
P: Correcto.
P: La **SITUACIÓN 27**, ¿corresponde a una función?
K: Sí, es una función
P: ¿Cuál es el domino?
K: El dominio corresponde a los valores que ingresan, aquí va desde 1 al 20.
P: ¿Y el rango?
K: El rango es reemplazando los valores de *x*, es decir los pares ordenados, desde 3 hasta 60.
P: Ketty, ¿y tu gráfica está bien? Me presentas lo que no está aquí; es decir, no están los puntos
K: Por ejemplo, aquí nos da un par ordenado, a este par ordenado voy a graficar y lo llamaré como el valor de *x*, y los valores de *x* me dicen que están del 1 al 20 y tan solo estoy reemplazando y puedo hallar el dominio y el rango.

Indicando su examen.

P: Entonces al reemplazar se tiene aquí 33, 66, 99, etc.
K: Sí, profesor.
P: Y en la gráfica ¿dónde está el dominio?
K: El dominio es 3, 6, 9,
P: No, no. Si *x* está tomando los valores de 1, 2, 3, y es el dominio
K: El dominio está en el eje *x*.
P: Y no crees que el dominio está aparte?.
K: Ya entiendo, los pares ordenados están en función de los valores de *x*.
P: Entonces el plano es el rango con los puntos de los pares ordenados. ¿Dónde ubicarías el dominio?
K: Ubicaría aparte en una recta. Aquí mismo (al eje x).
P: Sería el mismo eje. Eso no parece
K: Aparte, una recta paralela al eje *x* desde el 1 hasta el 20.
P: La **SITUACIÓN 30**, ¿cómo lo abordaste?.
K: Estoy tomando valores de –2, –1, 0, 1, 2, 3 para *x* y al reemplazar en x^2 se obtiene 4, 1, 0, 1, 4; asimismo al reemplazar y^3 tenemos –8, –1, 0, 1, 8.
P: Así como está, no sería una función.

K: Si son iguales, entonces tomarán los primeros valores de x o de y.
P: ¿Qué pasa si $x = 2$ y luego $y^3 = 4$ y le extraes la raíz cúbica, obtienes un valor para y, verdad?
K: No he pensado en eso.
P: Ketty, ¿qué comentario merece todo lo que has hecho?
K: Parece fácil, sin embargo me confundí. He aprendido bastante, hice mejor en comparación del otro.
P: Tu comentario, de lo que has aprendido en la universidad, tus profesores, u otros detalles.
K: Sí, a veces no nos enseñan con situaciones de la vida real, como por ejemplo del lago.

ENTREVISTA A LUCIANO

P: En la SITUACIÓN 2, en la prueba de entrada consideras que no es una función, luego en la prueba de salida dices que es una función. ¿Por qué esa diferencia?
L: Al inicio de la prueba de entrada me fijé solamente en la gráfica, para ver si es una función o una relación; se traza una recta paralela al eje *y*, para que sea una función solamente corta en un solo punto; me fijé en la gráfica y dije: ésta es una relación. Pero no hay ninguna definición; en este caso, puedo definir para que sea una función.
P: ¿Cómo hiciste?
L: Giro hacia arriba, entonces ***y*** es el dominio y ***x*** es el rango. Luego es una función.
P: ¿Y qué pasaría si rotamos hacia abajo?
L: También sería una función.
P: Y ¿el dominio?
L: El eje *y*, y el rango el eje *x*.
P: ***¿Qué es una función?***
L: Una función es un aplicación entre dos conjuntos, una de partida y otra de llegada; la condición es que del conjunto de partida sus elementos deben tener un solo o un único elemento en el conjunto de llegada.

Trata de definir el concepto de función.

P: Un único elemento.
L: Claro, para que sea una función. Caso contrario no se cumple. Esa es mi definición.
P: ¿Las variables ¿pueden ser *x* y *y*?
L: No necesariamente, puede ser *x* y *y*, o cualquier variable.
P: Recuerdas que en la escuela nos enseñaron conjuntos.
L: No, profesor, justo nuestra duda fue ahí, anteriormente nos enseñaron con *x* y *y*, diciendo que esto es dominio *x* y esto es rango *y*. O sea, como una regla fija, así como tenía una gráfica …

Hace comentario de cómo aprendió el concepto de función.

P: ¿La situación 2?
L: Así como la gráfica de la situación. Que esto puede convertirse en una función.

P: Si hablamos de variables, variables independiente para la situación 2 es la *y* ¿nos es así? y variable dependiente es *x*, en cambio nos acostumbramos decir …
L: variable independiente a *x* y variable dependiente a *y*.
P: Y qué pasaría si asignamos *m* y *n* , por ejemplo
L: ¿En vez de *x*, *y*?
P: Sí,

L: No pasaría nada. Sería una forma de asignarle los valores

P: La **SITUACIÓN 12**, como lo consideras, lo hiciste de la misma letra en la misma letra. ¿Qué pasó ahí?

L: Aquí R puede tomar un valor, por ejemplo 1, 2, … — Se refiere a su examen.

P: No, no, no. Aquí lo has colocado el mismo conjunto de partida como el conjunto de llegada (con las mismas letras del conjunto de partida). ¿Por qué has considerado así? ¿Qué has pensado?

L: Aquí he relacionado de R en R, pero R no puede tomar necesariamente ese valor.

P: No encuentro ninguna lógica. No entiendo por qué asignarle un número, no entiendo por qué has considerado el mismo conjunto de partida y el de llegada.

L: Una igualdad de conjuntos. Cada elemento está relacionado consigo mismo.

P: En la **SITUACIÓN 14**, has tratado de ingresar los valores de *t*, 1, 2, 3, así sucesivamente; y el resultado son los pares ordenados (*x*, *y*). y ¿cuál sería tu dominio?

L: En esta caso el dominio son los valores que tomo de *t*. y el rango sería los pares ordenados.

P: Interesante. Entre todos usted es el único que ha desarrollado. ¿Pero porque no has graficado?

L: No lo hice, profesor.

P: Sobre la **SITUACIÓN 15**, dices que es una función, ¿es cierto?

L: No es cierto, porque al trazar una paralela hay una infinidad de puntos si trabajamos en los reales; por ejemplo, con un solo punto en el dominio y muchos puntos en el rango, por esa razón **no** sería una función.

P: ¿Fue un error considerar una función?

L: Sería una función siempre en cuando estos puntos sean abiertos, entonces no se consideraría esos puntos. Por tanto sería una función. — Se refiere a los puntos que caen verticalmente al eje *y*.

P: ¿En los extremos?

L: En el eje *x*, donde la línea vertical cae al eje *x*.

P: ¿De dónde has aprendido la línea vertical paralela al eje *y*?

L: Ahh eso lo encontré en el libro.

P: ¿Que libro?

L: Encontré en el libro de Lázaro, relaciones y funciones.

P: ¿Es un teorema, una propiedad?

L: Es como una condición para poder saber, si es una función o es una relación, es como una recomendación.

P: En la **SITUACIÓN 2**1. Tú ingresas los valores de *x*, ¿verdad?, y tu gráfica dice que no es una función. Te pide hallar los pares ordenados de la forma (3, 2*x*). Y reemplazando los valores de *x* encontramos todos los valores de los pares ordenados. ¿Es una función?.

L: Así como está no es una función, porque he tomado a 3 como dominio y a 2*x* como rango. — Hace énfasis en el desarrollo de su examen.

P: ¿Cuál es la razón para que tomaras así?

L: Como nos enseñaron así, que el primero del par ordenado es el dominio y el segundo el rango. Pero analizando, los valores de *x* sería el dominio y el rango sería los pares ordenados.

P: Y la gráfica, ¿se mantiene, o es otra?

L: Sería diferente. La gráfica sería de los valores de *x*= 1, 2, 3, 4, hasta 20, hacia los pares ordenados (3, 2), (3, 4), (3, 6),… (3, 40).

P: ¿Has pensado en eso antes?
L: No estaba seguro, porque siempre se considera el primero de los elementos de los pares ordenados como dominio, esa fue la razón.
P: Ese mismo caso ocurre en la **SITUACIÓN 27**. Y no lo hiciste.
L: Sí, profesor. No lo hice.
P: La **SITUACIÓN 16**, dices que no es una función.
L: Si te pide desarrollar $2^n > n^2 + 3n$, y al reemplazar los valores de n no se cumple la condición. Pero, tomé hasta el número 3, además como n tomaba valores desde 1 al 20, hasta el 5 no cumple esta condición y a partir del 6, sí cumple esta condición.
M: ¿Por qué probaste solamente hasta el número 3 y no has seguido completando?

Generaliza sin haber evaluado con todos los valores.

L: Como hasta 3 no se cumplía, entonces pensé que con los demás no se cumplía. Pero ahora ya lo he probado, y cumple desde el 6 hasta el 20.
P: ¿Si es así, cuál sería el dominio, y el rango?
L: El dominio sería los elementos de n (valores de n) de 1 al 20; y el rango sería … la expresión que está aquí.
P: ¿Esta inecuación, o a cuál te refieres?
L: Graficando, profesor, he tomado el valor de n desde 1 al 20 para el dominio. En este caso sería el rango, verdadero y falso. ¿Por qué? Porque tomamos valores del 1 al 5 no va ha cumplir; entonces, sería falso. Pero a partir del 6 al 20 serían verdaderos; entonces, sería de esta manera. Eso sería el rango de la expresión.

Indicando a su examen hace el comentario.

P: ¿Por qué el error?
L: Por no comprobar con todos los valores de n. Por falta de tiempo, y como se está cumpliendo, uno piensa que para todos ya se cumple así.
P: Una pregunta ¿Dónde has estudiando?
L: Aquí en Huancavelica, yo soy de Yauli, pero de niño vine aquí, porque mi Papá trabajaba, luego ha fallecido y nos quedamos aquí.
P: ¿Qué te parece la educación en los colegios?
L: La educación en los colegios no brinda una buena educación
P: ¿Tuviste buenos profesores?
L: Al inicio sí cuando estaba en 1º y 2º año no inculcaban para estudiar porque conocían su tema, pero luego vinieron profesores contratados, tomaban exámenes facilitos y uno estudiaba. Uno estudiaba un poco y prácticamente aprobaba con 15 y 18. Ahí también nos han acostumbrado a no estudiar. De ahí pensé que la universidad también era como el colegio.

ENTREVISTA A CESAR

P: En la **SITUACIÓN** 1, hiciste la gráfica para f(x) y para g(x) en uno solo.
C: Sí, profesor, tiene agujero
P: El dominio es …
C: Todos los reales menos 2, y el rango de f(x) es R – {4}.
P: ¿La gráfica es única?
C: Sí profesor, el del lápiz es para $g(x)$ y el con agüero es para $f(x)$; el dominio de $g(x)$ es todos los reales y el rango también es R.
P: En la **SITUACIÓN** 2, dices que es una función, ¿por qué?

C: Aquí, esta gráfica representa la función de $\sqrt{x}$, entonces la función sería f(x) = $\sqrt{x}$.

El estudiante trata de comparar por analogía y dice que es un función $f(x) = \sqrt{x}$.

P: ¿Y la gráfica de la parte inferior?
C: Sería la imagen, porque en ese instante para desarrollarlo he pensado de esa manera
P: ¿Usted ha asistido a clases?
C: Sí, profesor,
P: ¿No ha entendido la clase?
C: Lo que pasa es que me he olvidado.
P: En la **SITUACIÓN** 3, una función definida de N en N, ¿por qué trazaste una recta?
C: Creo que solamente deben ir los puntos, pero aún no me parece claro. Me estoy dando cuenta de que debería ser solamente los puntos y no la recta.

Se refiere a la situación de la forma $y^2 = x^2$ y lo convierte a $y = x$, sin tomar en cuenta los signos.

P: Ah!!! Ahora si esta claro. ¿Y en la b)?
C: En este caso, como dice los números enteros, toma tanto su positivo como su negativo. Por eso lo he tomado, tanto lo negativos y los positivos.
P: Pero al despejar aquí has considerado el signo ± y, eso no lo has utilizado. Pareciera que tienes dos imágenes.
C: Creo que en este caso me he equivocado. La gráfica no está correcta.
P: Para la primera parte estaría correcta, pero para la parte negativa no; en este caso no sería una función.
C: Yo solamente he tomado una parte y era una función, pero debería de haber tomado en ambos casos ±.
P: En la **SITUACIÓN 4**, x toma los valores diferente de CERO, si x = 0 entonces existe un agujero. Además la gráfica es una línea recta.
C: Profesor tomando los valores, no es exactamente una recta.
P: En la **SITUACIÓN 5**, se tiene las notas de un grupo de estudiantes, una correspondencia de alumnos y sus notas
C: Por ejemplo, aquí, para la nota de Raúl he formado un par ordenado y así Luís tiene nota de 14 le hecho su par ordenado, entonces es una función.
P: Aquí no aparece la letra x como parte del dominio
C: No, profesor. Aquí se puede poner un conjunto A y un conjunto B
P: Siempre decimos x pertenece a A y la función es f(x),
C: No siempre debe de ser $f(x)$, en este caso podría ser $f(g)$, así como también $f(a)$.
P: ¡Cuál sería el dominio de la función?
C: Dominio es todos los nombres y rango son las notas.
P: **¿Qué entiendes por función?**
C: La función es conjunto de pares ordenados que son puntos en una gráfica.

P: ¿Crees que es cierto?, porque una relación también es un conjunto de pares ordenados.
C: Es un conjunto de puntos, que son pares ordenados
P: Cómo se expresaría en su forma más completa el término de función, teniendo en consideración la función presentada ahí.
C: Por ejemplo, aquí he considerado un conjunto y para cada elemento del conjunto debe de tener una imagen única.
P: La **SITUACIÓN 6**, ¿qué paso?, no se entiende.
C: Lo he desarrollado por partes, cada uno de ellos.

Admite su error.

P: Pero no crees que $x \leq 0$,

C: Aquí me he equivocado
P: Aquí también se tiene, $1 - x^2$, está entre 0 y 1.
C: La gráfica es desde 0 hasta 1. La gráfica sería esta pequeña parte.
P: En este caso para x>0 sí está bien, pero siempre en cuando agrupáramos las tres
C: Lo que debería de haber hecho es agruparlo, porque es una sola función.
P: La **SITUACIÓN 7**, el área del circulo.
C: Para el radio ***r*** he tomado valores diferentes, por ejemplo r = 1, entonces el radio es pi^2, y si r = 2 el área incrementa, y si el radio tomar a mayor valor el área también tomará mayor valor.
P: Pero en tu gráfica consideras que el radio es el **doble(2r)** del radio **r**.
C: Es sólo un ejemplo, puedo sustituir de uno en uno, como 1, 2, 3, 4, 5 y así sucesivamente. Donde el dominio son los valores de *r* y el rango son los valores del área.
P: En la **SITUACIÓN 8**, ¿cuál sería el dominio? ¿Desde cero a más infinito?
C: Creo que aquí el dominio debe ser desde el cero a más infinito

No se ve seguro de su respuesta.

P: ¿Desde cero?
C: No, …, sería de dos.
P: ¿Por qué dices dos?
C: Aquí se podría realizar el trabajo tabulando una forma práctica, pero puede ser también $x - 2 \geq 0$, entonces x tomaría los valores mayores o iguales a 2.
P: Eso deberías haber hecho para hallar el dominio. Hay que tener cuidado.
P: Respecto a la **SITUACIÓN 9**, dices que el dominio es R y el rango una constante ¿a qué llamas una constante?
C: Es un punto que se considera en la recta R, ahora que es parte del rango, por ahí pasa la función.
P: La **SITUACIÓN 10** ¿Por qué no has resuelto?
C: No tuve ninguna idea.
P: La **SITUACIÓN 11**, aquí consideras el dominio a R.
C: No, el dominio sería el tiempo, y el rango desde cero hasta 5. Además aquí deberíamos considerar como en el plano cartesiano XY, y la gráfica no llegaría al cero porque ya estaría muerto, solamente estaría en la parte superior.
P: No necesariamente, por ejemplo, veamos la curva sinusoidal, es desde -1 hasta 1.
C: Pensé que los latidos del corazón no deberían de ser por debajo del cero. Solamente en la parte superior. Entonces el rango ahora será desde un valor –k hasta otro valor k; es decir, un intervalo.
P: ¿El tiempo puede ser negativo?,
C: No.

P: En la **SITUACIÓN 12**, consideras el dominio, el orden de las letras. Y como rango las letras.
C: Sí, profesor.
P: Pero hay un problema. Vemos que el número 10 tiene dos imágenes
C: El dominio son los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12, escribí mal, además 3 y 9 tienen como imagen a M, pero la posición de 10 es A, al marcar no marqué bien y da la impresión que es del 10.
P: De la **SITUACIÓN 13**, dices que el dominio es el peso del cuerpo y rango peso aproximado del cerebro.
C: Para la situación, por ejemplo, que una persona pesa x, y el peso del

cerebro es *y*, con ese cálculo se puede decir que el peso del cerebro es directamente proporcional, si la persona pesa menos su cerebro también pesará menos y si la persona pesa más entonces el cerebro también pesará más.

P: En la **SITUACIÓN 15**, ¿Es una función?

C: No es una función, porque si trazamos una vertical en este punto (indicando la línea vertical) corta en varios puntos, entonces no es una función.

P: En la **SITUACIÓN 16**, no tuviste ninguna idea

P: ¿En la **SITUACIÓN 17**, tampoco?

C: Parece una función constante, porque sí reemplaza. Por ejemplo cuando $x = 4$, sería $16 + 2 - 18 = 0$. Cuando x vale 4 entonces la función sería una constante.

Se confunde con la función constante, hace una analogía piensa que es la función $f(x) = 4$.

P: Esa constante no puede ser una función, porque el valor de x es todo el eje x.

C: No es horizontalmente.

P: No cree que está equivocado?

P: La situación 18 y 19 no lo hiciste.

P: La **SITUACIÓN 20**, sí lo hiciste. Los valores de n son los que ingresan que es el dominio y la salida es el rango cuyos elementos son los valores de -1/3, 1/4, -1/5, 1/6, etc.

P: La **SITUACIÓN 21**, ¿qué valores toman el dominio?

C: En este caso el dominio viene a ser solamente 3, y lo que va a cambiar es el rango, cuando reemplacemos los valores de x que es 1, 2, 3, 4, 5,… y el resultado es múltiplo de 2.

P: Si el rango es desde el 2 hasta el 40, no crees que te has equivocado? No crees que sigues pensando en la forma clásica, donde el primero corresponde a x y el segundo a y. Pero en caso de los valores de x es distinto del par ordenado, y te dice que construyas el conjunto de pares ordenados de la forma $(3, 2x)$. Ahora pregunto, ¿cuáles serían los pares ordenados?

C: El rango estaría formado por el conjunto de pares ordenados. El dominio sería x que es desde 1 al 20.

P: La **SITUACIÓN 22**, no has desarrollado. La **SITUACIÓN 23**, sí.

C: Eso sí lo hice. Parte de un punto que es el punto A, y las distancias B, C, D y E. Y la orilla como f(x). Inicia desde el punto A, y tiene su imagen de cada punto hasta que llegue a la otra orilla.

Trató de explicar la relación aparente de distancia cuando podría ser el tiempo los puntos A, B, C… Además incluye el río en el plano cartesiano.

P: Ya te entiendo

C: Entonces aquí su imagen de A es f(A), su imagen de B es f(B). En tanto, que el dominio es A, B, C, D, E, F, …. En cambio el rango está compuesto por los valores de f(A), f(B), f(C), f(D), f(E), f(F), …

P: ¿La **SITUACIÓN 25** es una función?

C: Graficamos y está desarrollado en el programa ISETLW,

P: La **SITUACIÓN 26**, ¿qué hiciste, aquí?, no entiendo

C: Por ejemplo, hice así, que tenga el equipo NERLY solamente tres partidos (3) y gana todos los partidos, entonces he representado los puntos con que ganó los partidos. El conjunto de partida, en cambio, el conjunto de llegada con los puntos que ha perdido los equipos. Por ejemplo en el primer partido a ganado 7 a 3, el segundo partido ha ganado 8 a 2 y el tercer partido han ganado 10 a 1. Por tanto, el dominio de la función es 7, 8 y 10, en tanto que el rango de la función es 3, 2 y 1.

Hace referencia a la expresión de la situación.

P: En la **SITUACIÓN 27**, son los componentes $3x$ dando resultado

Tiene el mismo caso que la

	(3, 3), (6,6), (9,9), … Luego de haber ingresado los valores del 1 al 20 ¿Cómo se llama estos elementos?	situación 21.
C:	Umm … pares ordenados.	
P:	La **SITUACIÓN 29** es función de 12 + random valor absoluto de *x*.	
C:	En este caso, random significa aleatorio, como dice entero puedo tomar el valor de 1, entonces el random tomará valor entre 0 y 1. Así, cada valor que le asignas toma el valor que tienen el resultado.	Tiene dificultad con la expresión *random.*
P:	¿Y crees que es correcta la gráfica que hiciste?.	
C:	No creo.	
P:	¿Por qué ahí has despejado 12 + $\lvert x \rvert$?	
C:	Eso lo hice para el valor de *y*.	
P:	En la **SITUACIÓN 31**, en esta situación reemplazaste los valores de *n*.	
C:	Sí, profesor, lo hice f(*n*) = n^2 – 5n, luego evalué en los valores de *n* y finalmente he graficado.	
P:	La **SITUACIÓN 32**,	
C:	Ahí también me he equivocado, porque los valores de *x* dice es de 1 hasta 20, entonces *x* es el dominio y el rango sería los pares ordenados.	
P:	La **SITUACIÓN 33**,	
C:	Hice como con el programa ISETLW, donde *x* tiene que tomar del uno al 20, en este caso el aleatorio de 5 lo he tomado 5 para todos y lo he reemplazado los valores de *x*, y se tiene (1,8), (2, 11), (3, 14) así, luego el dominio es de 1 al 20 y rango son 8, 11, 14, 17, 20 … 65.	
P:	Gracias, César.	
	WILLIAM	
P:	William, en tu prueba de entrada has graficado solamente g(*x*), en cambio en tu prueba de salida has graficado las dos funciones y dices que las dos funciones son equivalentes. ¿No crees que haya un error ahí?, fíjate ahí, ¿por qué dices que son iguales? Aquí las dos expresiones son diferentes.	
W:	Si vemos aquí, ambas funciones, aparentemente son distintas, porque la función f(*x*) = (x^2 – 4)/(*x*– 2) transformándole es (*x* +2) y es igual a g(*x*) = *x* + 2.	No tiene en cuenta los aspectos principales de asíntota.
P:	Aquí hay un detalle, en el denominador hay una expresión (*x* – 2), ¿qué pasaría si *x* = 2?	
W:	Sería indefinido	
P:	Si es indeterminado, ¿por qué no has considerado ese valor ahí? Si son iguales significa que *x* = 2. ¿Crees que es incorrecto?	
W:	A ver, aquí en el inicio de la función si *x* diferente de 2,	
P:	Claro que sí, es una función de variable real. Y cuando se cancela, *x* tomaría diferente de dos, y si tomamos *x* = 2 entonces *y* = 4. Entonces, en el par ordenado (2, 4) existe un agujero.	
W:	Ahhh … la función no es continua; por tanto, no es equivalente.	
P:	Ahora con la **SITUACION 2,** dices que no es una función porque no cumple con la propiedad.	
W:	Cuando nosotros trazamos una paralela al eje *y* la gráfica de la función, debe cortar en un solo punto. Entonces, a esta gráfica que tenemos si se traza una paralela corta en dos puntos y no cumple con la propiedad principal de función. Además, recordemos la gráfica de la inversa.	
P:	¿Cómo inversa?	Hace mención a definición

convencional de función.

W: Si $x = y^2$ en ese caso cambiaría
P: ¿En este caso cumple?
W: Sí, es una función.
P: ¿Por qué no ha escrito?
W: Pensé que el examen era solamente por convencionalismo.
P: **¿Qué entiendes por función?**
W: Función es una relación que cumple ciertas condiciones, un conjunto de partida y un conjunto de llegada, y que la diferencia de acuerdo al programa ISETLW no siempre está como nosotros lo vemos antes.
P: ¿Entonces, como entendemos el concepto de función?
W: Una función es la relación de dos conjuntos, donde los elementos del primer conjunto tienen una sola imagen o única imagen en el segundo conjunto.
P: Ahora, como variable, ¿puede representar cualquier cosa o necesariamente (x, y)?
W: Las variables no necesariamente van a ser (x, y), como vemos aquí nombres y notas, como también podemos encontrar una relación de figuras, de cosas que tenga una relación que cumpla una función y no necesariamente (x, y) como se ha venido trabajando.
P: Entonces, es una costumbre definir (x, y).
W: Sí, cuando se nos presentan situaciones diferentes, nos confunde y cometimos el error de escribir así. Y seguimos con esa mentalidad de estar trabajando como en análisis real y, sin embargo, estamos trabajando en otra realidad.
P: En la **SITUACIÓN 7,** con respecto al área del círculo, dices que es una función donde r pertenece a los reales positivos o es una recta donde el Dom(S(x)) = valores de r y Ran(S(x)) = resultados de la ecuación en un plano. ¿Crees que es cierto lo que dices? Qué pasa si $r = 1$ y si $r = 2$ cuánto sería el área.
W: En caso del radio r, por ejemplo, el área de una circunferencia debe estar dentro de los reales, y para que dé un punto dentro de los reales r va a ser como una recta que puede tomar cualquier valor.
P: O sea que el área es un número real.
W: Es un número real, pero dentro del plano. Porque el resultado será el área de una circunferencia en un plano y expresado en unidades cuadradas. Entonces, diríamos que el área de una circunferencia es una función, donde el radio pertenecería todos los reales diferente de cero. Y el radio sería una recta y además esta recta sería el dominio de la función.
P: ¿El área depende del radio o el radio depende del área?

W: El radio depende directamente del radio.
P: ¿Si el radio crece?
W: El área aumenta.
P: ¿Si el radio es cero?
W: No tenemos ninguna área. El área es cero. Y la circunferencia es un punto.
P: En la **SITUACIÓN 10**, ¿Por qué no lo has hecho en un plano?
W: Quise trabajar con los puntos críticos, pero un poco que no recordaba la definición.
P: O sea, estos son los puntos críticos
W: Ajá, pero estoy tomando por partes, o sea, en cada una de las ecuaciones, es decir, de las inecuaciones en cada una de ellas. Y no terminé.
P: Dices que la **SITUACIÓN 12** es una función.

W: Así es.
P: ¿Cuál es dominio?
W: Al dominio le asigno como el conjunto A, tomé los números enteros desde 1 hasta el 12, porque tengo 12 caracteres en este caso

Reconoce su error de escribir {A}.

P: 12 letras.
W: Este caso, a las 12 letras le doy valor a cada una de ellas para poder obtener una función.
P: ¿Por qué le pones el dominio como el conjunto cuyo elemento es A?
W: Creo que no, sólo sería A, sin llaves. Quizás por la premura del tiempo escribí así.
P: Sobre la **SITUACIÓN 14**, dices que es una función y lo has despejado en términos de t ambas expresiones, y expresas como una línea recta ($y=x/t$)

Menciona que la ecuación se convierte en $f(x) = x/t$.

W: Claro, como si estuviera trabajando en x y y, tratando que el término t esté en una de los términos.
P: Una idea convencional, ¿de $f(x) = x/t$?
W: Claro, donde $y=x/t$ así que t necesariamente tiene que ser un real cualquiera.
P: La SITUACIÓN 15, me dices que no es una función.
W: No es una función porque no cumple con la definición de función.
P: La SITUACIÓN 16,…..
W: Es una sucesión.
P: ¿Es una sucesión?
W: No tanto como una sucesión, es una inecuación.
P: Una desigualdad
W: También una desigualdad en términos de n, y nos pide que $2^n > n^2+3n$, y como dominio nos da desde el 1 hasta el 20.
P: Ya,
W: Empezamos a reemplazar y damos el primer valor, ¿no va a cumplir, no es cierto, y no va a cumplir?, porque 2 no es mayor que 4. Entonces la proposición sería falsa. Así seguiríamos tomando hasta el 5, y que va a ser falsa; pero a partir de n = 6 hasta 20 esa proposición se convierte en verdadero. Y como ya tengo el dominio desde el 1 hasta el 20, en el rango tendría solamente dos elementos, una es falsa y la otra verdadera.

P: El mismo mecanismo ocurre para la **SITUACIÓN 17,**
W: Es similar.
P: Además he visto que tus compañeros han sustituido hasta el 3 y dijeron que todo es falso.
W: ¿En caso **16**?,
P: Claro, en el caso 16,
W: Creo que es necesario, en mi caso, he probado hasta el 3 y luego me salté al 12 y en 12 sí se cumple, entonces empecé a buscar en que punto variaría.
P: Claro, en matemáticas muchas veces evaluamos en los primeros puntos y luego queremos generalizar. Tal vez eso ha ocurrido con tus compañeros.
W: Creo que eso ocurre al probar en los primeros valores y resulta como sale en el primero, y en el segundo también te sale y piensas que con eso tú puedes generalizar. Entonces estarías cometiendo un error. Por eso le decía que probé con el 12 o el 15 no recuerdo, entonces hay un punto que empieza a variar, es decir, que no cumple para ciertos valores y para otros sí.
P: Para la **SITUACIÓN 18**, dices que es una función seno. Dices que la

función $f(x) = a.senx$, y no dices cuál es la amplitud.
W: Sí, $a.senx$. Y como estamos trabajando en todos los reales, entonces a pertenece a los reales, y x es el ángulo.
P: ¿Y el rango?
W: El rango sería desde $-a$ hasta a.
P: La **SITUACIÓN 19**, ¿es una función?
W: Lo veo como una función, de un elemento, tanto en el dominio y el rango. Y existe una relación de ese elemento con el otro elemento.
P: En la **SITUACIÓN 21**, no has considerado si es o no una función.
W: De hecho es una función. Por eso considero el dominio y el rango, el dominio es desde el 1 hasta el 20, y el rango de esa función es el conjunto de pares ordenados en un plano.
P: Cuando revisé tu examen de entrada encuentro que no está claro, en cambio, en la prueba de salida sí ya está claro.
P: Acerca de la **SITUACIÓN 22**, dices que no es una función.

No tiene idea de la gráfica presentada, y piensa que puede estar en el espacio.

W: No es una función, es una gráfica cualquiera. Y como está en el plano, esto no sería una función.
P: ¿No tomaste en cuenta la flechita de la gráfica?
W: Quizás está en el espacio.
P: ¿No graficaste la situación 14?
W: No lo hice.
P: Te invito a graficarlo. Es una ecuación paramétrica.
P: La **SITUACIÓN 23**.
W: También digo que es una función, porque el factor que interviene es el tiempo. Va ha partir de un punto y llegará hasta el otro punto, ese trayecto estará dado en función de un tiempo.
P: En la **SITUACIÓN 24** has puesto, que el dominio está en grados sexagesimales y el rango está en la expresión de falso y verdadero.
W: Esta es una función trigonométrica, entonces la raíz cuadrada de 2 he multiplicado aquí, y es igual a uno.

Trata de explicar de cómo evaluar los valores de x y los posibles resultados.

P: Te entiendo, la idea esta ahí,
W: Aquí, como en la situación 18, la amplitud sería raíz de 2 y el ángulo es x y cuando x toma desde 0º hasta 45º va ser verdadero y cuando x es mayor es falso.
P: La SITUACIÓN 25, queda claro, ¿sí?

W: Sí, porque trabajamos con el programas ISETLW.
P: La SITUACIÓN 26, lo has tomado como NERLY, pero no como el equipo de básquet, que es campeón mundial.
W: NERLY es campeón del mundo, ¿es verdad?, entonces puedo tomarlo como campeón del mundo o como NERLY también, y en este caso lo tomé como NERLY. Yo me fui más al nombre.

Hace referencia a la situación 12 y trata de explicar.

P: La SITUACIÓN 30, ¿cómo lo has visto?
W: Dice que $y = \sqrt[3]{x^2}$, x pertenece a los reales.
P: Pero si cambiáramos x como la variable dependiente y y como la variable independiente, ¿no crees que las gráficas serían iguales?

Se observa que siempre se orienta ha despejar en término de x como variable independiente.

W: No, no serían iguales. También sería una función.
P: ¿Interesa el tipo de variable?
W: En este caso no. Pero, dependerá de quién toma la variable independiente.
P: En la SITUACIÓN 32,
W: Lo hice como en el ejercicio anterior, el resultado es el conjunto de pares ordenados $(x, x^2 - 1)$ en un plano. Tal que x toma los valores desde 1 hasta 20.

P: Evalúas para cada uno de ellos.
W: Evalúo en cada uno de ellos y tomo como dominio a los valores de x desde 1 al 20, y el rango los pares ordenados en el plano. Al inicio lo había tomado de una manera espontánea, desde distintos puntos de vista, como de x en y de R en R. quizás muchas veces no entendemos.
P: Para finalizar la SITUACIÓN 33, ¿Cómo lo has visto?
W: También es una función, nos dice que es $3x + 5$ números tomados aleatoriamente desde 1 al 20
P: ¿5 números aleatorios?
W: En este caso tomé desde 0 hasta 4 que no está en los valores que toma x. Tomo los 5 valores que son 0, 1, 2, 3 y 4. Y cada uno de los valores de x, tomé aleatoriamente un número de los 5 valores cualquiera que sea sin tener en cuenta el orden, entonces, es una función.

ENTREVISTA A ADRIÁN

P: ¿Cómo define una función?
Ad: Tenemos un conjunto de partida y al cual llamamos conjunto A, y cada elemento del conjunto A tendrá una sola imagen, o sea, un único elemento en el conjunto de llegada.
P: Cuando hablamos del dominio ¿puede ser números o letras? ¿Qué debería ser?
Ad: El dominio puede ser letras, números, también puede ser otras variables como nombres y figuras
P: En la **SITUACIÓN 1**, dices que es una función.
Ad: Sí es una función, $f(x)$ es una función restringida en $x =2$.
P: Qué pasaría si consideramos $x = 2$,
Ad: No existiría la función, en este caso ya no sería función.
P: ¿Qué pasaría si en el denominador consideramos CERO?
Ad: ¿En el denominador?, no existe, en caso de esa función, pero en otras funciones sí puede ser, pero de acuerdo a qué función nos dé.

No es seguro en su respuesta.

P: Dices que x no debe de ser igual a 2, ¿verdad? Para esta función.
Ad: Si x es diferente de 2, entonces, y el dominio es R – {2}
P: ¿Y el rango?
Ad: Va a tener agujero en 2. Pero factorizándolo queda la función $x +2$.
P: Veamos si $x = 2$, y sustituyes en $x +2$, ¿qué resulta?
Ad: En cuatro sería el agujero. Entonces, el rango deberá de ser todos los reales menos el 4 (R – {4}).

Al desarrollar, es probable que se haya copiado de su compañero, es la razón que no puede explicar.

P: ¿La función $g(x)$ es igual a la función encontrada en $f(x)$?
Ad: Sí, son iguales.
P: Pero dices que el dominio y el rango para $f(x)$ son restringidos y para $g(x)$ son todos los reales (R).
Ad: Factorizando eso es el resultado. A ver, aquí no se toma a 2, pero para $g(x)$ sí se toma. Ahhhh no serían iguales.
P: En la SITUACIÓN 2, dices que no es una función, por teoría, si trazamos una línea vertical paralela al eje y, y debe cortar en un solo punto. Pero sí es una función si descomponemos en cada cuadrante.
Ad: Si, descomponemos en cada uno de los cuadrantes, como $y = x^2$.
P: ¿Estás seguro? ¿Eso representa la gráfica?
Ad: No, tenemos que sacarle la raíz cuadrada, entonces tendríamos dos funciones, una para arriba $y = \sqrt{x}$ y otra para abajo $y = -\sqrt{x}$, en

	este caso es una función.
P:	En la SITUACIÓN 4, se presenta una x en el denominador, entonces x es diferente de cero (0), pero has graficado considerando el cero.
Ad:	Hice tabulando sin considerar el cero, pero la gráfica no pasa por el cero (0)
P:	Pero aquí en tu gráfica has incluido el cero. Sin embargo el dominio dices R – {0} y el rango también R – {0}. ¿Cómo debería de ser tu gráfica?
Ad:	No se debe incluir el cero, la gráfica ya no llegaría al punto cero, sino de uno para arriba en el primer cuadrante y de – 1 hacia abajo en el tercer cuadrante.
P:	En la **SITUACIÓN 5**, dices que es una función.
Ad:	Sí es una función, porque aquí dice las notas obtenidas por cada estudiante. Un estudiante tendrá su correspondiente nota en el otro conjunto, por ejemplo, la nota de Rubén es 12, y no tiene otra nota, es única. Entonces por la definición de función sí es.
P:	En la **SITUACIÓN 7,** sobre el área del círculo no ha desarrollado
Ad:	No la hice.
P:	En la **SITUACIÓN 9**, ¿es una función constante?
Ad:	Sí, profesor. Sí es una función constante.
P:	Pero, dices que el domino son todos los reales y ¿el rango también?
Ad:	Y el rango también serán todos los reales (R).
P:	Aquí has considerado un número 4, por donde pasa la recta.
Ad:	Sí,
P:	Ahora hacemos que $f(x)$ =4.
Ad:	$f(x) = 4$.
P:	Si $x = 3$, qué resultado obtienes.
Ad:	La función será 3.
P:	Si tomas $x = 3$ en el dominio?
Ad:	No entiendo donde va el 3.
P:	En la SITUACIÓN 12, dices que es una función. ¿Has entendido?
Ad:	Tomé como dominio al conjunto de letras, y como rango al abecedario desde la A hasta la Z.
P:	¿Qué razón te dio para hacer eso?
Ad:	Es obvio que dentro del abecedario está incluido el conjunto de letras.
P:	En la SITUACIÓN 15, dices que no es una función
Ad:	Sí, no es una función por definición. Porque hay infinitos puntos en los dos segmentos verticales.
P:	En la SITUACIÓN 16,
Ad:	Sí es una función, todo lo que vamos a evaluar del 1 al 20 es el dominio, y los resultados que nos dan es el rango de la función.
P:	La SITUACIÓN 17, no has desarrollado. ¿No tuviste idea?
Ad:	No.
P:	¿No crees que es parecida a la situación 16?
Ad:	Estuve intentándolo
P:	Si le asignas un valor resulta falso; si le asignas otro valor, resulta falso; y habría un valor que te va a dar lo cierto.
Ad:	Estuve probando con los números positivos, porque con valores negativos sería imaginario.
P:	En la SITUACIÓN 18,
Ad:	Es la función que tiene la forma de función seno,

Su respuesta es aparentemente correcta, sin embargo desconoce como se genera la función constante.

Hace una relación por analogía dice que es función

P: ¿Será cierto la gráfica de la función seno?
Ad: Esto diríamos que es la función coseno porque está debajo. El rango se obtiene dando valores de –1 hasta 1.

coseno, cuando es una función $z = -a.senx$.

P: En la SITUACIÓN 19, por qué deberías que es una función.
Ad: Porque $y = x$, porque a=b, c=d, y es uno a uno, *y* es una función.
P: En la SITUACIÓN 20, es una sucesión.
Ad: Sí, evaluamos en los valores de la sucesión y evaluamos en cada uno de los punto de **N**.
P: En la SITUACIÓN 21, ¿es una función?
Ad: Sí, porque evaluamos del 1 al 20 que es el dominio y el resultado que son pares ordenados, es el rango que son puntos en el plano.

Tiene el concepto de función, donde el dominio son del 1 al 20 y el rango son pares ordenados.

P: Dices que el rango esta en otro plano.
Ad: Si está en otro plano, y el rango es una recta con puntos del 1 al 20. Nos da un resultado, ese resultado son pares ordenados
P: En la SITUACIÓN 22, ¿no lo has desarrollado?
Ad: Sí lo hice, no es una función. Cuando tomamos un punto en el eje *x*, ésta tiene dos imágenes. Y no cumple con la definición.
P: En la SITUACIÓN 23, dices que es una función.
Ad: Si he considerado que el nadador, digamos que es así, el nadador está en la orilla punto A, y tiene que llegar de hecho al punto B, e irá solamente por una línea, por lo tanto, es una función.

Relaciona la regla de correspondencia de elemento de A hacia B.

P: Ah, tienes la idea del conjunto de partida y conjunto de llegada y hay una relación solamente con una flecha.
Ad: Es la idea de ir de un punto hasta la llegada
P: En la SITUACIÓN 24, lo has elevado al cuadrado, has tratado de llegar a una ecuación única
Ad: Sí, he realizado por identidades y no pude terminar
P: Por identidades para realizar los ángulos dobles y …
Ad: No recordaba, y olvidé. Y luego reemplazaría los valores para ver que sucedía.

P: Dices que la SITUACIÓN 28, es una función en el espacio
Ad: si, pero no lo pude desarrollar
P: ¿Ya llevaste el curso de Análisis matemático III?
Ad: No,
P: Tienes razón no haber desarrollado, por qué ahí se estudia funciones de varias variables.
P: No lo has desarrollado la SITUACIÓN 30.
Ad: He intentado, pero no me ha salido, porque si elevas al cuadrado, en el dominio sale positivo, pero si elevas al cubo en el rango sale negativo, por lo que no sería una función si escribiera así.
P: La SITUACIÓN 31, sí es una función. La SITUACIÓN 32, también, has desarrollado con pares ordenados. La SITUACIÓN 33, no está claro,
Ad: Para la situación 33, yo he puesto un número cualquiera aleatorio.
P: Ah, una función $3x$ + k, una constante cualquiera del número aleatorio 5.
Ad: si profesor, y he evaluado desde 1 al 20 para los valores de *x* y le he sumado las constantes y eso es el rango.
P: Gracias Adrián por haberte molestado,
Ad: No, profesor. Lo contrario, agradezco por usted, porque de esa manera aprendemos un poco más. La verdad, he comprendido

mucho más de lo que no se imagina, porque las diferentes presentaciones hace que nos ilustre mejor, porque estuvimos acostumbrados solamente con las funciones de la forma x, y. Por ejemplo, se ha presentado variables con nombres y esas cosas motivan. Gracias a usted, profesor.

P: Gracias, Adrian.

ENTREVISTA A MARIBEL

P: **En la SITUACIÓN 1**, las dos funciones son iguales ¿es cierto?

M: No todo es cierto.

P: ¿Por qué nos son iguales? La gráfica que muestras dices que son iguales.

M: Por ejemplo, aquí tiene que tomar $x \neq 2$, porque si se toma 2 se hace indeterminado, entonces el dominio sería todo los reales menos el 2.

P: ¿Por qué no lo graficaste así?

M: Tiene que ser abierto en 2.

P: ¿Y cuál es el rango de la función?

M: Los reales también.

P: ¿Todos los reales?

M: No va a tomar el valor de dos, desde menos infinito hasta abierto en dos. Con ejemplos claros nos hubiese enseñado y ahí hubiésemos aprendido cuál es el dominio y cual es el rango, recién en este caso usted, profesor, nos dice cual es el dominio y cuál es el rango, los valores de x y y. Puede ser un punto o cualquier tipo. Así, nunca nos han hecho ver nuestra realidad. Y al menos ahora recién he entendido.

P: Te entiendo, pero qué pasó con los demás profesores, ente caso ¿tampoco te enseñaron?

M: Como te digo, nos dijo debe ser aplicando ciertas técnica para graficar.

P: ¿No tenías una clara comprensión de que es una función?

M: Así es, porque no dejaba graficar

P: ¿Pero tú empezaste a titubear?

M: Si, yo ya había empezado a graficar tabulando, pero el profesor nos ha prohibido porque deberíamos de aplicar técnicas y que este tipo de graficaciones era para niños.

Hace comentario que su profesor anteriormente no permitía evaluar una función mediante tabulación.

P: Creo que debe quedar claro, primero debes de saber que es una función y luego utilizar ciertas técnicas para graficar.

P: ¿Usted viene de un colegio estatal de la zona rural?

M: UMMMM. Sí

P: ¿Cómo fueron tus profesores?

M: Peor profesor, no nos han enseñado nada.

P: ¿Nada... nada?

M: Ellos venían a trabajar complementariamente, no les importaba a ellos si aprendíamos, venían a rellenar su pizarra nada más. Cuando le preguntabas, igual nos hacían creer, de funciones casi nada nos han enseñado, y como no conocíamos decíamos amen y amen, mis compañeros también.

Realiza una crítica a sus docentes de su colegio, y que poco los importaban si sus alumnos aprendieran o no.

P: Cosa muy difícil ¿verdad?

M: Ummm, sí.

P: Retomando nuestro trabajo, esto sería todo los reales menos 4.

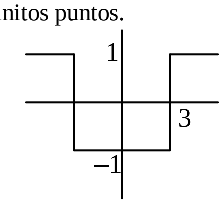
M: Menos 4.
P: Para ello hubieses factorizado, simplificado; para ello ya habías restringido en el punto 2 y luego evaluar en el punto 2.
P: **La SITUACIÓN 2**.
M: No tiene ninguna restricción, profesor.
P: Pero aquí me dices que no es una función.
M: Si es una función profesor.
P: ¿Por qué dices en la primera que no es una función?
M: Aquí no es una función tal como está, porque si trazamos una recta vertical, un punto del eje *x* tendría dos imágenes, para arriba y para abajo, positivo y negativo. Entonces no sería una función.
M: Para que sea una función, simplemente que para cada elemento del conjunto que es la recta *x*, debe tener una sola imagen en *y*.
P: ¿Una sola imagen?
M: sí, pero tal como esta no es una función
P: ¿Cuándo o en qué momento sería una función?

Explica la condición para que sea una función.

M: cuando cambio, profesor
P: Cuando lo cambias, ¿en que sentido?.
M: Cuando lo rotamos,
P: En ese caso y ¿cuál sería el dominio?
M: El dominio en este caso va ha ser el eje *y*, y el rango es *x*. Puede ser así también, invertido hacia abajo
P: **La SITUACIÓN 12** esta correcto, ¿puedes explicarme?
M: Hemos aprendido en el laboratorio, tal como habías explicado en los módulos.
M: Lo he dado valores y ya!
P: ¿Y qué crees que haya hecho el programa ISETLW?
M: Ingresas cualquier número y el resultado da una letra.
P: ¿Qué significa ese resultado? Por ejemplo ingreso un número 4 y me da como resultado la letra D. ¿Qué está haciendo el programa para que se diga que es una función?
M: Los valores de su orden de las letras ya están dadas, es la razón si le das un número te devuelve una letra.

P: Dices que **la SITUACIÓN 15** es una función, ¿es verdad?

Trata de reflexionar, y muestra que 3 tiene dos imágenes, sin tener en cuenta la línea vertical que tiene infinitos puntos.



M: No es una función, profesor; igual, si tomamos valores en este punto tiene una sola imagen; pero si tomamos en este caso, tiene dos imágenes.
P: ¿En cuál de ellos?
M: En este punto $x = 3$ que está en la vertical, por ejemplo en este punto colocamos para arriba 1 y para abajo –1; entonces como $x = 3$ tiene dos imágenes, no puede ser una función.
P: ¿Sólo tiene dos imágenes?
M: Estas dos imágenes que tienen que ser para arriba y para abajo.
P: ¿Estás seguro? ¿Qué pasó, dices que es una función? No habías evaluado los puntos en a línea vertical?
M: Sólo había evaluado en , pero no en 3.
P: Has intentado resolver **la SITUACIÓN 16**, evaluando la desigualdad $2^n > n^2 + 3n$.
M: Si, profesor. Aquí he hallado el dominio *n* y he reemplazado, y entonces no cumple con ninguno de los números.
P: Evaluaste para $n = 2$ y es falso, con 3 también has puesto que es

El estudiante trata de

	falso y con 4 y 5 también es falso y ahí te quedaste.	generalizar sin haber probado con todo o por lo menos con los valores extremos.
M:	Con todo profesor sale falso, y en este caso el dominio…. y es *n*.	
P:	¿Estás seguro?	
M:	Y el rango sería …..ummmmm	
P:	Si tu dices que es cierto: perdóneme, si tomamos $n = 6$, entonces $2^6 > 6^2 + 3(6)$, aquí el resultado sería $64 > 54$	
M:	Sí,	
P:	$64 > 54$, esto sí es verdad, ¿qué pasó?	
M:	Como estaba llegando ahí y es falso, falso dije, no creo que se cumpla hasta 20, en eso nomás me parecía.	
P:	O sea que indujiste que …	
M:	Que todo era falso.	
P:	Eso qué indica en matemáticas,	
M:	No, eso está muy mal debería probar con todos.	
P:	**La SITUACIÓN 17**,	
M:	La pregunta 17 es una ecuación ¿no es cierto?	La estudiante tiene muchas limitaciones. Ella proviene de un colegio rural.
P:	Sí, un momentito quiero preguntarte, ¿en qué colegio has estudiado?	
M:	En el colegio Inca Gracilazo de la Vega, está por el Virgen del Rosario, provincia de Acobamba	
P:	¿Hay que caminar o está en la carretera?	
M:	Está en la misma carretera, por él mismo esta pasando la carretera.	

ENTREVISTA A ALCIDES

P	**La SITUACIÓN 1**. En esta situación no graficaste para $f(x)$ pero has considera el valor $x = 2$. ¿Por qué consideras?	
A	En el ejercicio 1, que observamos acá, primeramente simplificamos, viendo bien no deberíamos cancelarla, como usted ha dicho, ¿qué pasaría si x=2?, de ahí cuando observé, el ejercicio nos da un polinomio y comencé a simplificarlo	
P	Está bien	
A	Empecé dando valores, tabulé acá, lo que me faltó es decir cuál es el dominio de la función y es todo los reales uhmmm, menos el 2.	
P	El dos. Hay que tener cuidado.	
P	**La SITUACIÓN 2**,	
A	En esta situación quisiera partir de … , desde el colegio me enseñaron que una función es cuando va a cortar en un solo punto a la gráfica, me acordaba que si la recta paralela corta en dos puntos ya no era una es una función	Siempre se tiene la idea de una paralela al eje *y*, sin embargo tiene la idea de separarlo, en ese caso sí es una función de dos funciones diferentes.
P	¿Cuándo o en qué momento sería una función?	
A	Es una función cuando evalúas con los valores de *x* y *y*.	
P	No te he entendido, así como está y en esa posición no es una función, ¿cuándo es una función?	
A	Es cuando reemplazamos valores y …	
P	Lo has separado, ¿sí?	
A	Sí, uno para arriba y otro para abajo	
P	¿Sólo en ese caso, no habría otro?	
A	En otro caso no habría	
P	Y qué pasaría si rotamos.	
A	Si lo rotamos, sí es una función	
P	¿Cuál sería el dominio de dicha función?	
A	el dominio sería *y*, y el rango *x*.	
P	¿Estás seguro?	
A	Sí profesor.	

P Eso significa que cualquiera puede ser el dominio, ¿cualquier variable?
A No necesariamente, puede ser *m* y *n* también.
P Si la invertimos hacia abajo, como uno de tus compañeros lo dijo.
A Sería una inversa negativa.
P Es una función cuadrática con gráfica hacia abajo, el dominio en este caso es…
A Trabajando con los ejes.
P ¿Cuál sería el dominio?
A El dominio sería *x*.
P **La SITUACIÓN 8**, ¿por qué la gráfica inicia desde cero?, cuando es la raíz cuadrada de $x – 2$.
A Bien, para sustentar este ejercicio quiero ser muy franco, no me acorde.
P ¿Te has olvidado?
A Pero sí me acordaba; acá, si es solamente *x*, entonces para raíz de *x* sería esta gráfica, pero como nos estas dando $\sqrt{x-2}$, entonces partería de $x = 2$, si fuera $\sqrt{x-4}$ partería de $x = 4$.
P Si fuese de $\sqrt{x+2}$
A Partería de $x = – 2$, igualando a cero.

P Hay una propiedad en matemática que conocemos y que cumple para la radical de $x – 2$.
A La propiedad es igualar a $x – 2 = 0$.
P ¿Igualar a cero?
A Mayor o igual a cero. En este caso $x – 2 \geq 0$.
P **En la SITUACIÓN 12**, usted lo puso así “cualquier letra que conforma una palabra es una función ¿qué idea tuvo?.
A Primero, desde el primer momento que me enseñó yo desconocía y dije, ¿esto es una función? o ¿no lo es? ¿Con letras?, todos mis compañeros decían que no era una función. Entonces yo me imaginé y dije que tiene una dominio y tiene un rango; entonces hay un punto de partida y un punto de llegada; entonces, hasta que quería graficarlo con la mitad, y resulta:

REMDTJ KFMAWO

Pero que hubiese pasado si habría una letra más. No sé, si estará bien esa idea de que la mitad es el conjunto de partida y la otra mitad es el conjunto de llegada.
P Dices que **la SITUACIÓN 15** es una función.
A Esa gráfica es una función signo.
P Ah, no es una función signo.

Por analogía trató de comparar y dice que es una función signo. Pero no tiene en cuenta los segmentos verticales.

A Yo había visto que, si trazábamos una recta, cortaba en un solo punto. Y de igual manera, si trazábamos una recta paralela a *y* también cortaba en un solo punto; entonces se corta en un solo punto es una función. Pero si cortaba en dos puntos no hubiera sido función.
P Eso de trazar una recta paralela y que corta en un punto, ¿quién lo enseñó? ¿De donde obtiene?
A Eso de suryectiva, inyectiva eso en el colegio.
P Y aquí en la universidad, ¿también le enseñaron así?
A Aquí en la universidad me enseñaron y ocupaba el primer lugar en el 1er ciclo y dominaba bien mi tema. Luego, postergué y regresé

Reflexiona y trata de cambiar su idea anterior y

	de un año (por situación económica). En el primer examen me saque cero, cero y en el segundo examen me esforzaba y me saque doce de promedio.	dice que no es una función.
P	Aquí en la universidad, entonces, has aprendido ese de paralela	
A	Sí, profesor.	
P	Veamos, aquí hay una línea vertical. ¿No te fijaste en esa línea?	
A	No, profesor.	
P	¿Porque no evaluó ahí?	
A	Solamente acá he evaluado.	
P	¿Es o no es una función?	
A	Ah, si en este punto sería una función.	
P	En este punto del corte de la línea vertical considero un punto $x = 1$, ¿cuál sería su imagen?	
A	En ese caso no sería una función, si cortamos ahí, no sería. De 1 saldría varias imágenes.	
P	Dices que **la SITUACIÓN 21** no es una función, porque del dominio tiene que salir tan solo una imagen, en este caso sale a varias imágenes. Fíjese en 3.	Alcides tiene la idea de que el par ordenado es (3, 2*x*) y el primer componente es el dominio y el segundo es el rango, sin tener en cuenta que *x* es el dominio. No tuvo la idea de considerar el par ordenado (*x*, (3, 2*x*)).
A	3 es el dominio.	
P	Pero aquí, no te dice eso, *x* está desde el 1 al 20, ¿eso sería el dominio no crees?	
A	Estuve desarrollando con 3; el primero lo consideré como 3 y en *2x* lo reemplacé con *x*.	
P	Pero repito que *x* sería el dominio.	
A	En ese caso sería al contrario, si *x* es el dominio; entonces, el punto de partida sería *2x* y el punto de llegada 3.	
P	Uhmmmmmmm	
A	Este sería *x*.	
P	Dices que **la SITUACIÓN 30** es una función; además comentas, con qué conjunto voy a trabajar ¿**N, Z** o **R?**.	
P	Para la **SITUACIÓN 32**. Aquí tenemos la situación 21 con el par (3, 2*x*) y al desarrollar no lo hiciste, en cambio en la situación 32 si lo has hecho.	
A	Eso fue dando los valores desde el 1 al 20	
P	Correcto, eso lo trazaste en una recta	
A	Así es,	
P	Resulta de ingresar los valores…	
A	Aquí, ingresando a $x^2 - 1$ es el rango y el domino es *x* y cuando para $x = 1$ entonces, el par ordenado menos 1 es cero	
P	Cuando ingresa un número, sale un par ordenado, ¿cuál es el dominio en este caso?	
A	Es de 1 al 20.	
P	Ya, y ¿cuál es el rango?	
A	Son los pares ordenados	
P	Entonces está bien, ¿no pensaste igual en la situación 21?	
A	Sí, lo he pensado pero . . .	
P	¿Es porque en el par ordenado (2, 3*x*), no hay la variable *x* en el primer componente?	
A	Sí, porque a este le falta *x* y que sólo hay al otro lado.	
P	Gracias, Alcides.	

ENTREVISTA A EDISON

P Edison, en tu examen de salida en el ejercicio Nº 1, para $f(x)$ hiciste $\dfrac{(x-2)^2}{x-2}$ y luego lo cancelaste, no lo entiendo. Esto diferencia de cuadrados, pero no lo es lo que hiciste.

En la prueba de entrada sí desarrolla bien la diferencia de cuadrado. Pero en la prueba de salida no. **Se equivocó**.

E Profesor, si hallo la diferencia de cuadrados eso no es así

P ¿Completando cuadrados?

E No, eso es así… $(x-2)^2$.

En la prueba de entrada identifica el dominio y rango.

P ¿No crees que te hayas equivocado?

E Me equivoqué profesor, quise hallar esto.

P **La SITUACIÓN 2.** En la anterior dices simplemente que no es una función, pero ahora en el segundo consideras que es una función.

E Sí, porque mi idea fue así, la inversa

P ¿Como así la inversa?

E Por ejemplo, si trabajamos con $x^2 = y$.
Pero ahora si reemplazamos el valor de *y* y sus raíces de *x*, será parte de aquí positivo y negativo y *x* tiene dos puntos, entonces no es una función.
Pero ahora que pasaría si considero la inversa $x = y^2$.

P ¿La inversa me dices a trasladar o hacer rotar?

E No, lo que pasa es que *y* toma como dominio y *x* como rango.

P Así es otra cosa

E En ese caso sí es una función. Pero a simple vista así no es una función.

P Se entiende que cambiaste de posición, eso quiere decir que el dominio no puede tomar necesariamente los valores de *x*, sino otros valores.

E Claro, puede tomar cualquier variable.

P **La SITUACIÓN 4.** No la has graficado, y dices que el dominio todo los reales. ¿Y el rango son todos los reales?

E Sí, profesor, y no pude graficar

P Si hay una asíntota en el eje *x*, entonces habrá una asíntota en el eje *y* por supuesto.

E No tuve una idea clara.

P **Dices en la SITUACIÓN 5** que el dominio son los nombres y rango las notas y no es una función.

E Era el rango.

P Creo que no has entendido, en el dominio hay nombres y en el rango las notas. Parece que te ha confundido, porque en el programa ingresa números que es el orden de las letras como dominio y retorna letras.

E No profesor, que haya una regla de correspondencia de salida y llegada ya es una función. La relación es de un punto a otro punto.

P ¿**Qué entiendes por función**?

E Por función, puedo explicar así como casi empíricamente

P No tanto empírica.

E Con un ejemplo de acuerdo como yo pienso. Conjuntistamente puedo decir que dado dos conjuntos A y B, existe una correspondencia. Para todo elemento de A debe corresponder un solo punto en B. En otras palabras la preimagen tiene que ser un solo punto.

P No me queda claro, quiero que me expliques

E Para todo *x* que pertenece a A, existe un *y* que pertenece a B y el par ordenado (x, y) y (x, z) pertenece a la función tal que *y* y *z* deben ser iguales.

P **La SITUACIÓN 6.** Para esta situación graficaste para $x \leq 0$, para *x* entre 0 y 1 una semi-parábola y 0 si $x > 1$.

E Es una función discontinua, porque tiene saltos

P Pero no has considerado el valor de cero en el dominio.

P **La SITUACIÓN 7** que es el área del circulo.

E Sí es una función. Lo explico, por ejemplo el área del circulo es pi por radio al cuadrado, y el radio $r^2 = x^2 + y^2$ que es la ecuación de la circunferencia y pi es una constante, sea f(x) la función y r^2 una variable y en vez de x sería el radio y sería así $f(r)$ entonces el dominio sería el radio y el rango el área.

Cita solamente el radio como dominio, pero no considera qué valores debe tomar. Además, sustituye el valor de r^2 por la ecuación de la circunferencia.

P Si el radio tomase –3, ¿sería correcto?

E Radio –3 ummm, no sería correcto porque es negativo, entonces el radio r tomaría valores mayores o iguales a 0.

P **La SITUACIÓN 10.** ¿Por qué graficaste una parábola?

E Todos tienen una ecuación y lo grafiqué esa ecuación $x^2 - 2x + 1$

P Pero te dice que $f(x) = 1$ sí cumple la inecuación $x^2 - 2x + 1 > 0$, $f(x) = 0$ sí cumple la inecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$

Se confunde con la condición de la función y logra graficar la inecuación como si fuese la función.

E Ahí si no tenía idea profesor, porque lo que hice es cuando y = 1, x cuanto vale y no podía.

P Esta es una función constante para cada condición.

E Hice algunos puntitos.

P Ahora 0 es cuando $x = 1$.

E Entonces para hallar el dominio se debe hallar las inecuaciones y el rango en función de los intervalos. Y si es una función basta el dominio y rango y el rango lo halle es 0, 1, 4 y 9, ah pero no se cumple.

P ¡¡¡¡¡¡¡ ah … !!!! ya,

E Ahora la duda es más.

P **La SITUACIÓN 11**, se refiere a la palpitación del corazón.

E Aquí también trabajamos en R^2, lo he tomado de R como el dominio y va a oscilar en un intervalo [a, b]

P Ah, lo has considerado un intervalo, [a, b], pero una pregunta ¿en todos los reales? imagínate que empieza a latir, éste tiene un inicio.

E Tuvo un inicio, entonces es 0. Entonces el dominio será desde 0 a más, hasta un valor donde deja de latir.

P En la **SITUACIÓN 12**, el dominio son los números, ¿por qué pusiste los valores?

E Por el orden de las letras. Es una serie de letras y he dado valores a cada uno de ellos, por el orden 1, 2, 3, 4, … haciendo corresponder 1 a R, 2 a E, 3 a M, y así sucesivamente y luego he graficado conjuntistamente el conjunto de partida y llegada tomando a todos los números como dominio y a todas las letras como rango.

P ¿Y sería una función si lo tomas al revés?

E No cumpliría porque M tendría dos imágenes.

P Y el programa ¿qué nos muestra? (*se refiere a ISETLW*)

E El programa nos enseña de la misma forma, pero si lo invertimos no es así, ya no cumple.

P **La SITUACIÓN 13**, es peso del cerebro, ¿no lo has hecho?

E Sí lo puse, el peso corporal es el rango y peso del cerebro es x.

P ¿Crees?

E Al revés creo que es, pero sí hay una relación

P Una cosa es la proporción del peso del cerebro con tu cuerpo
y otra cosa es proporción directo, porque x es variable y es distinto.

P **La SITUACIÓN 14**, No lo has hecho, pero has tratado de graficarla.

E Si lo hice,

P Has despejado en términos de *y*: $\frac{x}{t} = y$, pero no te has fijado que *x* es una variable y *t* también es otra variable porque pertenece a los reales, pareciera el producto de dos variables, ¿no te has fijado en eso?

Compara con la definición de función en términos de *x* y *y* sin tener en cuenta que *t* es el parámetro.

E Aquí estoy considerando a *t* como una constante. Pero no me he fijado.

P **La SITUACIÓN 15**, dices que es una función, ¿es una función?

E Sí es una función, porque acá tomo un punto,

P Pero aquí hay varios puntos en la perpendicular. En un punto *x* te da como imagen varios puntos.

E Me he confundido.

P En la **SITUACIÓN 16**, evaluaste en n = 1, 2, 3, 4, 5,… y dices que es una función si se trata de sucesión. Además dices, para que se cumpla *n* tienen que tomar valores mayores que 6, entonces el dominio es [6, ∞> y el rango desde 54 hasta 460.

E Para *n* menores que 5 no cumple.

P Vamos a **La SITUACIÓN 17**, aquí hiciste para x = 1, 2, 3, 4 y 5. Para 4 es probable que se cumpla.

E Para 4 sí cumple, para 4 es verdadero y el resto es falso.

P El dominio es cualquier valor desde x_1 hasta x_n.

E Sí, el dominio es desde x_1 hasta x_n, y el rango verdadero y falso.

P Pero ¿qué pasó con la situación anterior?

E Tarde me di cuenta y ya no pude hacer nada.

P Vamos a **La SITUACIÓN 18**, y dices que es una función, dominio todo los reales y rango el intervalo [a, b].

Por analogía de función trigonométrica dice ser función.

E Sí es una función periódica.

P Veamos **La SITUACIÓN 19**, lo hiciste de punto a punto.

E Sí, profesor.

P Vamos a **La SITUACIÓN 20**, consideras dominio a N y rango el intervalo 〈–1, 1〉.

E Si me doy cuenta que mi gráfica también no esta correcto, debe ser solamente puntos.

P **La SITUACIÓN 21**, ¿porqué hiciste dos gráficas y en una de ellas consideras solamente el punto 3?, *x* pertenece al

E Al dominio y

P El conjunto de la situación dada era los pares ordenados,

E Sí, me di cuenta después de desarrollar que el dominio era del 1 al 20 y el rango era el conjunto de pares ordenados, por eso puse solamente la gráfica, así sí es una función. Además consideré que si el par (2*x*, 3) fuese así, sí sería una función, claro pensándolo como en el primero.

P Para la **SITUACIÓN 22**, le sugiero lo resuelva la situación 14, como ya te expliqué el resultado será esta gráfica.

E Ya, profesor. ¿Es una función?

P Si es una función paramétrica.

E Pero si trazamos una recta paralela corta en dos puntos, aquí un punto y aquí otro punto, igual no cumple.

P Observe aquí, igual con pares ordenados.

E Ah ya, ya, te va ha dar como tres pares como (*x*, *y*, *z*)

P Lo que pasa es que va de un punto a una pareja, pero estamos acostumbrados es lo contrario que va de pares ordenados a un punto.

P **La SITUACIÓN 23**, que es del nadador.

E Del nadador. Por ejemplo nos dice que va de una orilla hasta la otra orilla. Entonces una de las orillas voy ha tomar y esta tiene hartos puntos, también en la otra orilla hay hartos puntos y va ha partir solamente de un punto de un *x* hacia un *y*.

Considera un conjunto de puntos para explicar que existe una correspondencia.

P Siempre dices de *x* hacia *y*.
E Puede ser de *y* hacia un *x* puede ser.
P **La SITUACIÓN 24**, ya lo has entendido ¿verdad?
E Sí, profesor. Sí es una función, porque a la ecuación se le asigna valores, se obtiene valores que cumplan la igualdad, entonces será verdadero, caso contrario será falso.
P **La SITUACIÓN 26**. Has considerado con números y con el nombre de NERLY, ¿no lo pensaste como una proposición?.
E Lo hice como la situación anterior de las letras.
P Pero si fuese una proposición ¿cumpliría?
E Sí cumple profesor, porque puede ser verdadero o falso.
P En la **SITUACIÓN 27**, lo consideraste el dominio y rango.
E Aquí ya lo entendí, ya la había comprendido la situación.
P **La SITUACIÓN 28**, ¿está seguro que es de R^3 en R^3?
E Sinceramente no lo sé, pero por la gráfica todo pensé que si es
P Pero me imagino que has llevado funciones de varias variables
E Sí, profesor.
P **La SITUACIÓN 29**. Hiciste $f(x) = |x| + 12$, ¿no has entendido?. Porque random significa tener un número aleatorio que toma de valor absoluto de *x*. Por ejemplo, si toma $x = 5$, entonces random tomará desde 0 hasta 5.
E **Así** no lo he visto.
P **La SITUACIÓN 30**, lo despejaste en términos de y
E No comprendí, pensé en una función $f(x)$.
P En la **SITUACIÓN 32**, tenemos el conjunto de pares ordenados. Está bien, se podría tomar como la clásica de *x* a *y* o como se ha presentado como el conjunto de pares ordenados en el rango.
P **La SITUACIÓN 33**.
E **En la 33** creo que he fallado.
P Para $f(x) = 3x+5$, aquí el random de 5 lo tendríamos que tomar desde 0 hasta 5, porque el programa toma aleatoriamente de ese conjunto.
E No sabía que tomaba de 0 a 5. Nada más puede ser de 0 a 5 y ¿puede ser un número negativo?
P Sólo toma los números positivos.
P De todo lo que ha visto Edison, ¿qué puedes comentarnos? Del examen del trabajo tal vez no te gustó.
E El curso que hemos desarrollado en el centro de cómputo ha reforzado bastante mi conocimiento y los principios que tuve acerca de funciones, porque lo veía desde una sola óptica. Esa óptica fue solamente de dominio y rango, y luego fijarme en la definición y quizás de un par ordenado y me he olvidado, por ejemplo nunca he visto de una proposición que es verdadero y falso, si esto lo evaluamos va ha salir verdadero o falso. Con la función *x* nada más evaluar en cualquier punto y nos va ha dar otro valor, donde el primero es el dominio y el otro es el rango, y no me fijaba en eso. Sólo con números como el clásica pensamiento, más allá ya no lo analizaba tanto así.

Comentario del participante

P Pero en educación primaria trabajamos con conjunto de partida y llegada, con figuritas y otros. ¿Eso nos hemos olvidado? O en la universidad ya no se hace esa relación.
E Parece que nos hemos olvidado y no hemos revisado

P ¿Y el programa que le pareció, tal vez has comparado con otros programas?
E Si el programa me apareció muy sencillo comprensible con menos pautas.
P ¿Cómo así, menos pautas?
E Es que acepta todo, por ejemplo, sale verdadero o falso, porque una proposición nunca puede ser verdadera y falsa ambos a la vez.
P Espero que haya contribuido de alguna manera más allá del concepto clásico de funciones que se tiene. Gracias, Edison
E De lo contrario. Gracias a usted profesor, por mostrarnos nuestros errores y diferentes aspectos y se ve que nos falta mucho y el trabajo fue interesante. Gracias.

ENTREVISTA A PERCY

P Empecemos con **La SITUACIÓN 1**, veo ahí un error en la gráfica, y en el rango. Si hay un agujero en el punto 2, también lo hay en la imagen, en este caso para el rango de la función. Tú consideraste para x =2 que valor le corresponde a y.

Tiene dificultad para entender y no puede explicar la discontinuidad de la función.

O La imagen sería 3.
P Si consideras 2, entonces 2+2=
O Es cero.
P Es 4.
O Cuatro. Entonces el rango sería R – {4}
P Así es, No es 2, es R menos el punto 4.
P En la **SITUACIÓN 2**, dices que no es una función, es una relación.
O Sí es una relación.
P Porque dices que al trazar una recta paralela al eje y corta en dos puntos. ¿Quién le enseñó a decir una recta paralela?
O En matemática Básica II, con el profesor Tito. Pero también la segunda definición, dice: cuando tomas dos conjuntos A y B, y que para cada elemento del conjunto A tiene un único elemento en el conjunto B.
P ¿Eso es la definición; puedes repetirlo?
O Una función es de A en B, y que para cualquier elemento del conjunto A, existe un único elemento del conjunto B.
P Entonces esa condición no se estaría cumpliendo acá.
O En esta relación, si.
P **La SITUACIÓN 4**, dices que es una función no continua, donde x va ha ser distinto de cero. El dominio R–{0} y el rango $\langle -\infty, -2] \cup [2, \infty\rangle$, la gráfica no esta correcto, bueno la idea esta por ahí.

Trata de aproximar la gráfica de la función.

P **La SITUACIÓN 5**, en esta situación son la notas, el dominio son los nombres y el rango son las notas.
P **La SITUACIÓN 8**, está correcta.
P **La SITUACIÓN 9**, está correcta.
P **La SITUACIÓN 10**, el dominio esta bien, pero el rango lo pusiste [0, 1], ¿no crees que son los puntos 0 y 1?
O Ah, sólo 0 y 1. Entonces no es el intervalo.
P Para la **SITUACIÓN 11**, dices que si es una función porque formará una función en cada punto. Tiene dominio y rango.
P En la **SITUACIÓN 12**. Dices “que sí es una función porque para determinar su rango, se dará una condición o una ley de formación de las letras que nos dan como dominio”.

Piensa en determinar una ecuación, cuando esta es imposible.

O Me está preguntando si es una función o no, entonces de repente para ser función yo tengo que buscar una ley de formación para hallar su rango

P ¿Usted ha asistido a las clases en el laboratorio?
O Si he asistido, pero a una clase no he asistido
P ¿No pensó en el orden de las letras?
O No, no lo pensé.
P De la **SITUACIÓN 13**, dices que es una función que tiene constante, proporcionalidad, hallaste la proporcionalidad, pero no la función.
O De la **SITUACIÓN 14**, no se acuerda la definición.
P **La SITUACIÓN 15**, dices que no es una función por cortar en varios puntos cuando trazas una paralela.
O Sí, profesor. No es una función, porque la gráfica es cortada en dos puntos.
P En la **SITUACIÓN 16**, tienes resultados falso, falso, verdadero.
O Según la definición, n es del 1 al 20, cuando evaluó en n =1 no cumple, así con 2, 3.
P Cuando sustituyes los valores, ¿qué resultados obtienes?
O A partir del 6.
P Pero aquí sale falso, falso, falso
O Cuando reemplazas 1 sale 2>4 y es falso, con 2 sale 4>10, así he probado hasta el 5 y sale 32>40 y es falso, y con 6 es 64>58 y es verdadero y va a cumplir hasta el número 20.
P Entonces, ¿cuál es el dominio para usted?
O Es n que tiene valores desde 1 hasta el 20.
P Y ¿el rango?
O Es a partir del que cumple
P ¿Y los valores para los que no cumple?
O No se le considera para nada.
P En la **SITUACIÓN 17**, la ecuación lo hiciste como una función constante, ¿es cualquier valor?

Al ver una ecuación, siempre el estudiante cree el resultado que satisface la ecuación es una función.

O Esto lo he despejado y x = 4.
P Dices que si x = 4 entonces f(x) = 4. ¿Qué sucede si x puede tomar –2 en la ecuación?
O Sale imaginario.
P No cumpliría.
O Ya cambia. Entonces no debí tomar la solución de la ecuación.
P Dices que la **SITUACIÓN 18**, es una función teniendo como dominio a R y rango [a, b] en y. ¿Qué función sería?

Siempre existe la idea del eje y cuando en la gráfica se observa el eje z.

O Una función trigonométrica.
P En la **SITUACIÓN 21**, dices que no es una función, porque el dominio es sólo un punto. ¿Crees que es cierto? En el par ordenado (3, 2x) ¿piensas que el primer componente corresponde al dominio y el segundo componente corresponde al rango?

Con la conversación recién comprende la función, se piensa en el par (x,y) clásico.

O Sí.
P Aquí no dice eso, el dominio sería de 1 al 20.
O Entonces, el rango sería como un par ordenado.
P Esta situación **22** no es como la anterior, le invito a desarrollar la situación 14, porque la gráfica de la 14 es ésta.
P En la **SITUACIÓN 23**, te desplazas una distancia por el cual tiene un dominio y rango.

Da la idea que la piscina ES un plano cartesiano, no toma la distancia como función, tampoco el tiempo.

O En una piscina, hay dos puntos cualesquiera y serían dos coordenadas y puede desplazarse en esa dirección, entonces se puede decir que es una función.
P **La SITUACIÓN 25**. Está correcto.
P **La SITUACIÓN 29**,

O Aquí me he dificultado, porque no lo entiendo el término random.
P El término "random" es desconocido y tienes dificultad, pero ¿recuerdas el valor absoluto de x?
O Si, por eso escribí $f(x) = 12 + |x|$.
P **La SITUACIÓN 30**, dices que es una función porque tiene un dominio y rango.
O El dominio es $x \geq 0$.
P **La SITUACIÓN 32**, dices que es una función lineal. ¿El dominio?
O Es 1, 2, 3, 4, …
P El rango.
O El resultado.
P ¿Cuál resultado? ¿(1, 2), (2,3), (3, 8), (4,15)?
O Sí.
P **La SITUACIÓN 33**,
O Aquí, otra vez tuve dificultad.
P Bueno, siempre hay dificultad, aquí random va a tomar los valores desde 0 hasta 5 y seleccionado aleatoriamente.
O Lo que hice es formar funciones lineales con constantes diferentes.
P Gracias, Taipe por su colaboración.

A pesar de que la función puede expresarse como $y=x^2-1$, una definición clásica.

ANEXO D

Manual del lenguaje de programación matemática ISETLW

UNIVERSIDAD NACIONAL DE HUANCAVELICA
FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES.

MANUAL DE LENGUAJE DE PROGRAMACION MATEMÁTICA

ISETLW


Isetlw.exe

Interactive Set Language for Windows

Cerapio Quintanilla C.

2007

Manual Básico de ISETLW

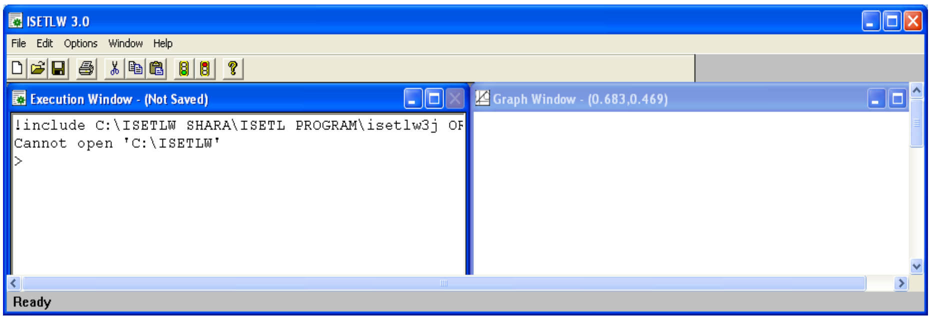
0. Información sobre el software

El programa y la documentación sobre el mismo se encuentran en el sitio de Internet: http://www.ilstu.edu/~jfcottr/ISETLW/, versión "ISETLW for Windows (Jim´s)". El programa es de libre distribución.

1. Introducción

ISETLW pertenece a un paradigma de lenguajes de programación, llamado *lenguaje de programación matemática*. Los lenguajes de este paradigma se caracterizan por poseer una sintaxis similar a la notación matemática estándar. Algunos lenguajes de este paradigma son *Maple*, *Mathematica*, *Matlab*, *Derive*, *Cabri*, etc, donde algunos han sido desarrollados para la investigación en matemática, por ejemplo Maple. **ISETLW** por el contrario es específico para la enseñanza de matemática, especialmente para cursos de grado.

ISETLW es un lenguaje de programación *interactivo*. Entre otras cosas esto significa que la comunicación con el usuario se realiza por medio de *sesiones* (ver *Glosario)*. Para iniciar una sesión con **ISETLW**, se hace doble "click" sobre el icono de *"**ISETLW**"*  Isetlw.exe , con lo cual se empieza el programa y aparecen en pantalla dos ventanas: la ventana de ejecución y la ventana gráfica. Es en la primera donde el usuario desarrolla su sesión, en la segunda aparecen las representaciones gráficas cuando es necesario (por ejemplo, de una relación o de una función). Para abandonar **una** sesión, se hace "click" en la palabra ***exit*** de la barra superior, o se ingresa la directiva `!quit` (ver "directivas").



La ventana gráfica no es usada en general en el desarrollo del curso (ver Anexo A), por lo cual puede bajarse a la barra inferior de la pantalla cliqueando en el cuadradito superior derecho que tiene un - (**ISETLW** no permite cerrarla).

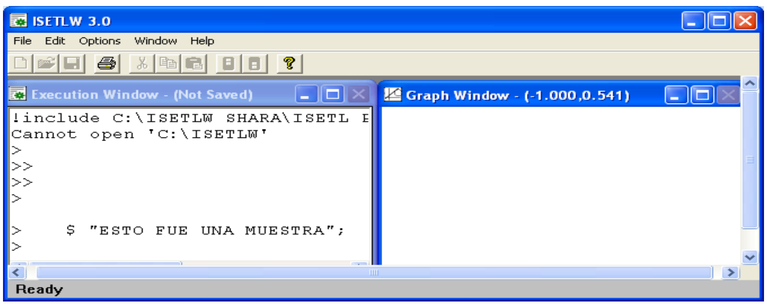
Para trabajar con **ISETLW** se cuenta con objetos *predefinidos*. Estos son objetos, que **ISETLW** reconoce y que el usuario puede utilizar sin necesidad de definirlos previamente. Tales son por ejemplo: las constantes numéricas, las operaciones aritméticas, el conjunto vacío, las operaciones básicas con conjuntos, etc.

Si bien **ISETLW** es adecuado para la enseñanza, es necesario tener en cuenta algunas carencias que deben ser señaladas, por ejemplo que no es un lenguaje tipado (tipos), que la definición de las funciones y de los procedimientos es confusa, etc. Para más detalles ver el Anexo A.

En la barra de menú, se encuentra la palabra *"Help"*. Cliqueando en ella, se abren varias opciones para obtener ayuda sobre **ISETLW** (por internet), caso contrario no aparece, cliqueando en la primera de ellas, *"Contents"*, se accede a un manual on-line de **ISETLW** y dentro del mismo, en "*ISETLW Language reference*" se tiene *"Predefined routines*" y *"Reserved words",* con una descripción de los objetos predefinidos.

2. Ventana de Ejecución

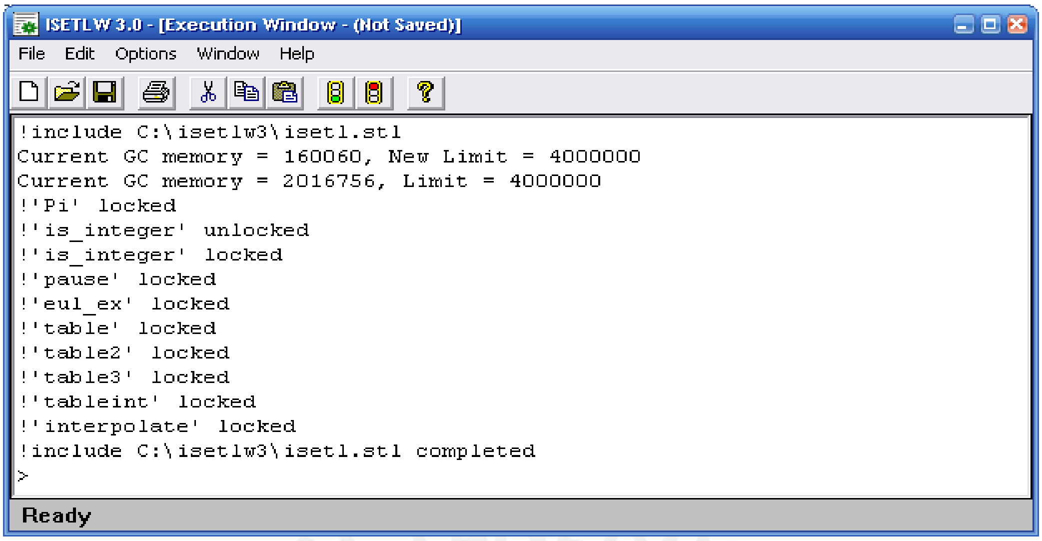
Al iniciar una sesión en **ISETLW**, aparece en la ventana de ejecución, el ***símbolo*** **'>'**, que indica que **ISETLW** está listo para interactuar con el usuario. Las frases (ver *Glosario)* que **ISETLW** comprende son: **expresiones, definiciones, directivas y fragmentos de código.** Cada frase puede comprender más de un renglón, el ***símbolo*** **'>>'** indica que la frase está incompleta en el programa. Cada frase debe terminar con el ***símbolo*** **";"**. El ***signo*** **'$'** se utiliza para introducir comentarios, los cuales son ignorados por **ISETLW**.



2.1 Definiciones del menú

El uso del menú es importante en el desarrollo de ISETLW.

a) Tablero de menús.



Button	**Nombre**	**Función**	**Menú Equivalente Selección**
	New	Crea un Nuevo Texto en Windows	Folder | Nuevo
	Open	Abre un Nuevo texto en Windows	Folder | Abrir
	Save	Graba la acción ejecutado o Texto en Windows	Folder | Grabar
	Print	Imprime la acción en Windows o texto resaltado.	Folder | Imprimir
	Cut	Corta el texto resaltado.	Editar | Cortar
	Copy	Copia el texto seleccionado	Editar | Copiar
	Paste	Pega el texto copiado en Windows.	Editar | Pegar
	Go	Ejecuta el código resaltado	Folder | Correr (Run)
	Stop	Interrumpe el código que actualmente es ejecutado	Folder | Interrupt
	Help	Ayuda e informa a cerca de ISETLWW	Ayuda (Help) | Tabla de Contenidos.

b) Ejecución de cada uno de los menús.

Folder del menú.

New	Crea un Nuevo Texto en Windows
Open...	Abre un Nuevo folder o texto en Windows
Close	Cerrar el texto active en Windows (no puedes cerrar la ejecución de Windows o la Grafica en Windows)
Save	Graba la acción (ejecutado o Texto) en Windows a un disco.
Save As...	Graba la acción (ejecutado o Texto) en Windows a un disco a una carpeta con un nombre nuevo.
Print...	Imprime la acción en Windows o texto resaltado
Dos shell	Crea un sistema operativo indicado (compatible con ISETLW y DOS)

Run	Ejecuta la línea resaltado de los códigos.
Interrupt	Interrumpe el código que actualmente se esta ejecutando.
Exit	Salir de ISETLW

Edit Menu

Undo	Deshacer el ultimo corte, copia o pegado en la ejecución activa o texto de Windows
Cut	Cortar (borrar) el texto seleccionado.
Copy	Copiar el texto seleccionado de Windows.
Paste	Pegar lo copiado de Windows
Select Line	Seleccionar una línea iluminado.
Select All	Seleccionado de toda cosa en la ejecución o texto de Windows:
Find...	Encontrar una palabra, frase o cualquier cadena de caracteres en la ejecución de una acción o texto de Windows.
Replace...	Encontrar una palabra, frase o cualquier cadena de caracteres y reemplazar este con cualquier palabra, frase o cadena de caracteres.
Deprompt	Remover las línea(s) resaltadas o de una línea actual. ISETLW removerá los signos > y >> provocando tabular en frente de ellos.

Menú Windows

Cascade	Es el arreglo de la ventana de Windows, y aparecen uno sobre otro las ventanas de texto y de gráfico.
Tile Horizontally	Arregla la ventana de Windows, así aparece uno arriba y otro en la parte baja.
Tile Vertically	Arregla la ventana de Windows y aparecen en dos columnas.
Clear	Borra la acción o texto de Windows.
[list of Windows]	Haciendo Clic de una ventana se active. **Nótese:** Si usted tiene la función **plot**, necesita usar el comando **q** (quit) para retornar al control de ejecución de Windows o a Text Windows.

Menu de Ayuda.

Help: Contents, Index, Search...	ISETLW ayuda: Tabla de contenidos, índice y búsqueda
About ISETLW.	Versión y información de Copyright.

2.2 Definiciones y Evaluación de expresiones

Las definiciones permiten extender el conjunto de objetos predefinidos con otros definidos por el usuario. Ejemplo:

```
>                          : Este es un comentario.
>    x:=2;                 : se define la variable x y se le asocia el
                             valor 2.
>    A:={0,2,4,6};         : se define la variable A y se le asocia el
                             conjunto (valor) {0,2,4,6}.
>    p:= x in A;           : se define p como el valor de la expresión
                             x∈A (true).
```

El símbolo **:=** se lee "se define como". La sintaxis de una definición es:

nombre := expresión;

donde ***nombre*** es cualquier palabra no reservada (ver "reserved words" en el manual on-line) y ***expresión*** es cualquiera de las que se describen mas adelante.

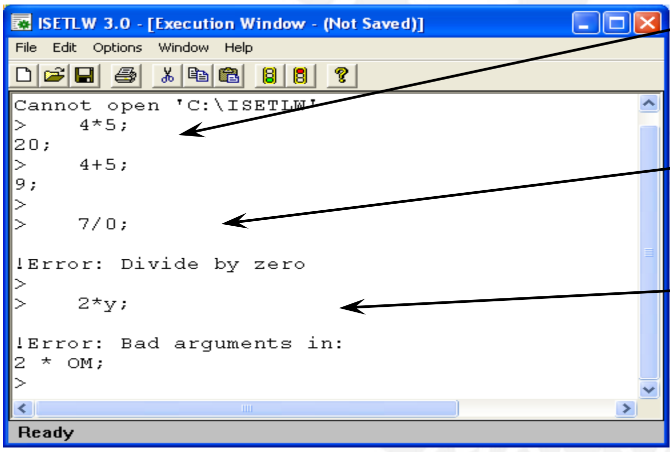
Evaluación de expresiones

Las expresiones son evaluadas por **ISETLW** hasta su *forma canónica* (valor). Si ésta existe, **ISETLW** la imprime en pantalla, si no, imprime la palabra OM, que representa el *objeto no definido*, o imprime un mensaje de error. Ejemplos:

```
> 2 + 3;                    : la función suma aplicada a 2 y 3
  5;                          ISETLW evalúa la expresión e imprime su
                              Valor.
> 2 / 0;                    : al intentar evaluar esta expresión
  ¡Error: Divide by zero      no llega a la forma canónica y reconoce
                              el error


> 2 * y;                    : y es una variable indefinida
  ¡Error : 2 * OM             por lo tanto la expresión no tiene forma
                             canónica
```

Se muestra en el ejemplo:



ISETLW realiza la operación de 4x5, cuyo resultado es 20. Así mismo la operación de 4+5, cuyo resultado es 9.

Cuando la operación no es correcta, evalúa la expresión y explica la razón del error.

ISETLW evalúa la expresión 2*y; pero ésta no dice nada, ISETLW muestra el error del *objeto no definido.*

Las expresiones pueden ser:

- cláusula *if*
- constantes
- variables
- expresiones formadas por operaciones aplicadas a expresiones

Cada tipo de expresión tiene operaciones que le corresponden, que pueden ser o bien predefinidas o bien definidas por el usuario. Por ejemplo, podemos sumar dos expresiones enteras o hallar la unión entre dos conjuntos, pero no tiene sentido pretender hacer la unión de un número y un conjunto. El usuario puede definir una función que halle el máximo común divisor de dos números, y no tiene sentido que defina esa función para objetos de otro tipo.

2.2.1 Cláusula *if*

Las expresiones que llamamos *Cláusula if* se describen a continuación:

La cláusula condicional **if,** puede escribirse de dos formas :

- **if** *condición* **then** *lista de frases de **ISETLW*** ; **end;**
- **if** *condición* **then** *lista de frases de **ISETLW*** ;
- **else** *lista de frases de **ISETLW*** ; **end;**

La ejecución de esta cláusula requiere la evaluación de la expresión booleana *condición*. Si esta expresión es verdadera, se ejecuta la lista de frases inmediatamente posterior a **then**. En caso contrario, se termina la ejecución de la ***cláusula if*** exitosamente o se ejecuta la lista de frases inmediatamente posterior a **else**, según corresponda.

Observar que en ambos casos las cláusulas **if**, finalizan con la palabra reservada **end**.

La *lista de frases de **ISETLW*** indicada después del **then** o del **else** es cualquiera válida, inclusive un **if,** como se ve en la definición de la función mcd (máximo común divisor) más adelante.

2.2.2 Constantes, variables y expresiones compuestas

* Las *constantes*

Pueden ser:

- constantes booleanas: **true, false.**
- constantes numéricas: **naturales, enteros, reales** (en su representación decimal).
- conjuntos finitos.
- tuplas finitas.
- funciones

* Las *variables*

En **ISETLW** pueden denotar cualquier expresión. Como **ISETLW** no es un lenguaje tipado, las variables no tienen tipo (o los tienen todos) y lo que determina el tipo de la expresión en algunos casos, es la operación involucrada. Por ejemplo en las expresiones,

not p **p and q** **p or q** **p impl q**

se deduce por las operaciones lógicas (no, y, o e implica) que las variables son booleanas. Sin embargo como en algunas operaciones están sobrecargadas (se usa el mismo símbolo para operaciones distintas) no siempre es claro que tipo tiene la expresión. Por ejemplo en:

m + ***n***

m y ***n*** podrían ser variables numéricas, conjuntos o tuplas (ver Anexo A).

A las expresiones formadas por operaciones aplicadas a otras expresiones les llamamos expresiones compuestas.

* Las *expresiones booleanas* son aquellas que al ser evaluadas, dan un valor del conjunto Booleano, es decir, ***true*** o ***false***.

Ejemplo:

```
>  2*3  > 4;
true;
```

```
>  forall n in [1..100] | not (n div 10) = 9;
false;
>  exists n in [1..100] | not (n div 10) = 9;
true;
>  y div 10 = 9;
!Error: Bad arguments in: OM div 10;
```

Observar que si la expresión contiene variables, estas deben estar definidas (tener un valor asociado), o ser ligadas por el cuantificador ***forall*** (para todo) o el cuantificador ***exists*** (existe) para que pueda ser evaluada, si no el valor es indefinido.

* Conjuntos

En **ISETLW** se pueden representar solamente conjuntos *finitos*, ya sea por extensión o por comprensión. Por **extensión** se indican los elementos entre llaves y separados por comas como en matemática; si los elementos están en *progresión aritmética*, se indican los dos primeros, dos puntos seguidos y el último elemento (o uno inmediatamente mayor, ver tercer ejemplo a continuación); si la razón es 1 se indican solo el primero y el último, separados por dos puntos. Ejemplos:

```
>    {0,7,2,-1,5};        : es el conjunto de números naturales.
>    {1 .. 10};           : consecutivos del 1 al 10
>    {-0.4,0.4 .. 3}      : es el conjunto {-0.4,0.4, 1.2, 2.0, 2.8}
```

Por **comprensión**, también la notación es similar a la matemática: por ejemplo, el conjunto $\{ x : x \in \{1,2,...,50\} \mid x$ es múltiplo de $2\}$ se puede escribir en **ISETLW** de las siguientes maneras, entre otras:

```
>    { x : x in {1..50} | even(x)};
>    { x : x in {1..50} | x mod 2 = 0};
>    { 2 * x : x in {1..25}};
```

La expresión ***`even`*** es una función predefinida que testa (prueba) si un número es par, ***`mod`*** es una función predefinida que devuelve el resto de la división entera de un número por otro (ver "predefined routines" en el manual on-line). En el último caso, se muestra que no es necesario indicar la condición que deben cumplir los elementos, pues ya se indica en la expresión **`2*x`**.

Observar que no se puede indicar como dominio **N** o **Z** por ejemplo, ya que **ISETLW** no permite trabajar con conjuntos infinitos.

La sintaxis general es:

```
{ expresión : especificador de dominio | condición};
```

Ejemplo.

```
{ x : x in {1..50} | x mod 2 = 0};
```

Expresión

Especificador del dominio

Condición

donde el especificador de dominio indica el conjunto al que pertenece la o las variable/s, que aparecen en expresión, y la condición debe ser una expresión booleana, es decir que al ser evaluada sea verdadera o falsa.

Por otra parte es necesario mostrar los predicados de operadores de **ISETLW**

Predicado de operadores

Operador	Descripcion	Ejemplo
forall (para todo)	Es verdad si la condición es cierto para el conjunto o tuple. (Cuantificador Universal)	> forall x in {1..5} | x < 5; false; > forall x in [1..5] | x < 4; false;
exists (existe)	Es verdad si la condición es cierto por al menos existe un valor en el conjunto o tuple (Cuantificador Existencial)	> exists x in {1..5} | x < 5; true; > exists x in [1..5] | x < 5; true;
choose	Retorna cualquier del conjunto o tuple para la condición si es cierto o OM si no cumple la condición	> choose x in {1..5} | x < 5; 2; > choose x in [1..5] | x < 5; 4;

Operaciones predefinidas para los conjuntos:

- **A union B** o **A + B** (unión de A y B)
- **A inter B** o **A * B** (intersección de A y B)
- **A - B** (conjunto de elementos de A que no están en B)
- **A subset B** (true si A es subconjunto de B, false si lo no es)
- **x in A** (true si x ∈ A, false si no)
- **#A** (número de elementos de A)
- **pow(A)** (conjunto potencia de A)

Presentamos con ejemplos el cuadro de operadores

Operador	Descripcion	Ejemplo
union +	Conjunto de todos los elementos que estan en uno o en ambos conjuntos	> {1..6} union {3,4}; {2,1,5,6,4,3};
inter *	Muestra el conjunto de los elementos que son comunes a ambos conjuntos	> {1..6} inter {4,10}; {4,5,6};
-	Todos los elementos del primer conjunto que no son del segundo conjunto	> {1..5} - {3,4}; {2,1,5};
=	Es verdad si todos los elementos del primer conjunto y segundo son iguales.	> {1..5} = {3,4}; false;
/=	Verifica la desigualdad de elementos entre dos conjuntos.	> {1..5} /= {3,4}; true;
in **notin**	"in" es verdad si dado un elemento se encuentra en el conjunto. "notin" es verdad si el elemento dado no esta en el conjunto	> x := 3; > S := {2,3,5,7,11}; > x in S; true; > x notin S; false;
arb	Retorna un elemento arbitrario del conjunto.	> S := {2,3,5,7,11}; > arb(S); 3; > arb(S); 11;
forall **exists** **choose**	Ver arriba (Predicado de Operadores)	

#	Muestra el número de elementos del conjunto o conjunto de pares ordenados.	> S := {2,3,5,7,11}; > #(S); 5; > M:= {[1,3],[2,5],[3,5]}; > #(M); 3;
%	Genera un una operación binaria para desarrollar sobre todos los elementos del conjunto e.g. %+ significa sumar los elementos, y %* significa multiplicar todos los elementos.	> %+{1..5}; 15; > 5%+{1..5}; 20; > %*{1..5}; 120; > 5%*{1..5}; 600;
with	Inserta el elemento dentro del conjunto.	> S := {1..5}; > x := 17; > S2 := S with x; > S2; {3,4,17,5,1,2};
less	Remueve el elemento del conjunto	> S := {1..5}; > x := 4; > S2 := S less x; > S2; {3,5,1,2};
take from	Remueve un elemento arbitrario del conjunto y asigna dicho variable retirado.	> S := {1..5}; take x from S; > S; {1,3,5,4}; > x; 2;
subset	Es verdadero si el primer conjunto es un subconjunto del segundo conjunto.	> S1 := {1..5}; > S2 := {3,5}; > S3 := {}; > S1 subset S2; false; > S2 subset S1; true; > S3 subset S1; true;

* *Tuplas y strings*

La sintaxis de una *tupla* es similar a la de conjuntos pero se escriben corchetes en vez de llaves.

Ejemplos: **[2,3]** es un par ordenado.

[“a”, 1, {}] es una terna.

Los caracteres que pertenecen a un conjunto de símbolos se pueden representarse en la computadora. En **ISETLW** se denotan entre comillas. Ejemplo: “$”, **“ ”**, “a”, “A”, “0”, “1”, etc. Observar que el carácter “1” no es el número natural 1 y que el espacio en blanco es un carácter.

Los strings son tuplas de caracteres y para denotarlos, se usa una abreviación como sigue:
`[“I”,”S”,”E”,”T”,”L”,”W”]` se escribe “ISETLW”.

Operaciones predefinidas para tuplas

El símbolo + se utiliza para denotar la concatenación de tuplas, por ejemplo

“**cuarenta “ + “y” + “ seis”** es **“cuarenta y seis**”.

Podemos acceder a los elementos de una tupla, de a uno o en un intervalo.

```
>       [1,2](1);
1;
>       [1,2,3,4,5,6,7](2..5);
[2, 3, 4, 5];
```

En general

$[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ (i) es el i-ésimo elemento de la tupla, con $1 \leq i \leq n$.
$[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ (i ..j) es la tupla de los elementos de $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ entre i y j.

Tuple Operators

Operador	Descripción	Ejemplo
+	Concatena Dos tuples	> [1..5]+[3,4]; [1,2,3,4,5,3,4];
*	Repite los componentes del tuple	> 3*[3,4]; [3,4,3,4,3,4];
=	Es verdadero si dos tuples tienen el mismo número de componentes y cada componente del primer tuple está en el segundo en el mismo índice.	> [1..5] = [3,4]; false;
/=	Es verdadero si dos tuples tienen diferentes números de componentes, o si algún componente del primer tuple no está en el segundo tuple.	> [1..5] /= [3,4]; true;
in **notin**	"in" es verdad si el element dado es un tuple. "notin" es verdad si el element dado no un tuple.	> x := 3; > S := [2,3,5,7,11]; > x in S; true; > x notin S; false;
arb	Retorna un componente arbitrario del tuple	> T := [2,3,5,7,11]; > arb(T); 7; > arb(T); 2;
forall **exists** **choose**	Ver arriba (Predicado de operadores)	
#	Índice del último non-OM componente si todos los componentes son “definidos” entonces esto es su número de componentes	> T := [2,3,5,7,11]; > #(T); 5; > T := [2,OM,5,7,OM]; > #(T); 4;
%	Genera una operación binaria para ser desarrollado sobre todos los componentes del tuple. e.g. %+ significa sumar los componentes, %* significa multiplicar todos ellos juntos (como un factorial de un número)	> %+[1..5]; 15; > 5%+[1..5]; 20; > %*[1..5]; 120;

		> 5%*[1..5]; 600;
with	Inserta el componente dado dentro del tuple al final	> T := [1..5]; > x := 17; > T2 := T with x; > T2; [1,2,3,4,5,17};
take fromb	Remueve el primer componente del tuple y asigna el variable dado.	> T := [1..5]; take x from T; > T; [2,3,4,5]; > x; 1;
take from	Así mismo como en take fromb	Ver arriba (See Above)
take frome	Remueve el un componente del tuple, y asigna el variable dado.	> T := [1..5]; take x from T; > T; [1,2,3,4]; > x; 5;

* *Funciones*

Las funciones pueden representarse en **ISETLW** como *conjuntos de pares ordenados* (***smap***) o como *reglas de transformación* (***func***), o sea como elementos de un conjunto definido de A → B, donde A es el conjunto de elementos a los cuales puede aplicarse la regla (dominio) y B es el conjunto de elementos que resultan al aplicar la regla (co-dominio). Notar, que esta manera de definir funciones es incompleta, ya que no se explicita el dominio y el co-dominio (ver Apéndice A).

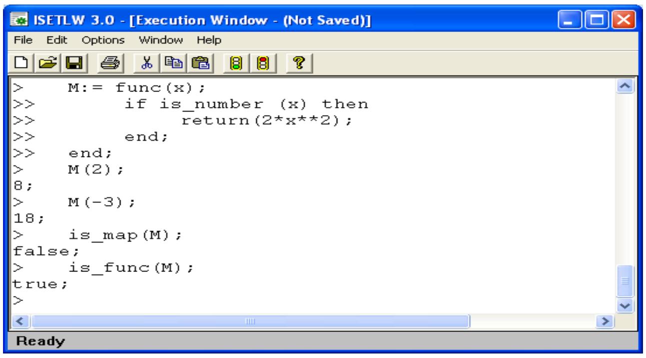
Ejemplo.

```
>   $ smap
>   f := {[1,3],[3,5],[6,7]};     : se define f como un conjunto de pares
>   is_map(f);                    : is_map es una función predefinida
True;
>   $ regla de transformación
>   doble:=func(x);
>>       if is_number (x) then
>>           return 2 *x;
>>       end;
>>   end;
```

Esta última definición se lee así: "se define doble como una función que toma un número **x** y devuelve **2*x**". Las palabras reservadas **func, return** y **end** siempre deben aparecer en la definición de una función. A continuación de **func,** se indica la lista de argumentos, en este caso **x** (de existir más de 1 argumento, éstos se separan con coma), a continuación de **return** se indica lo que devuelve y se termina la definición con **end;**
En este caso, la regla de transformación (método o algoritmo) está descrita por la expresión **2*x**.

```
>   is_func(doble);               : is_func es una función
true;                             : predefinida
>   is_map(doble);                : is_map es una función
false;                            : predefinida
```

Ejemplo:



Se observa que ISETLW es atipado, por lo que se puede definir la función como uno ve por conveniente. Cuando se le pregunta por su definición (si es par ordenado o función continua) ISETLW devuelve de acuerdo a lo definido, es verdad o falso.

Puesto que en **ISETLW** no se exige indicar el dominio y co-dominio como parte de la definición de la función, comenzamos con la cláusula "**if is_number (x)**" etc, de modo de asegurar que **x** pertenece al dominio correcto (ver Anexo A). En caso de que **x** no sea un número, la función devuelve OM, lo cual es coherente con el concepto matemático de existencia.

La operación predefinida en **ISETLW** para las funciones es la ***aplicación*** de una función a un argumento Los argumentos de una función también son expresiones.

Ejemplos:

```
>   f(1)                 : quién es el correspondiente de 1 en f?
3;

>   doble(-3);           : aplicación de doble a -3
-6;
>   doble("a");          : aplicación de doble a "a"
OM;
```

Definiciones recursivas de funciones

Los algoritmos recursivos se implementan en **ISETLW** muy fácilmente. Por ejemplo, el algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor de dos números, que llamamos **mcd**, se escribe en **ISETLW** como sigue:

```
>   mcd:=func(x,y);
>>      if is_number(x) and is_number(y) then
>>          if y = 0 then
>>              return x;                    : paso base
>>          else
>>              return mcd(y, x mod y);      : paso inductivo
>>          end;                             : fin del segundo if
>>      end;                                 : fin del primer if
>>   end;                                    : fin de la definición de la
                                             función
```

Esta definición es *recursiva* (pues el algoritmo de Euclides lo es), lo que significa que hay **al menos un caso base y un caso inductivo**.

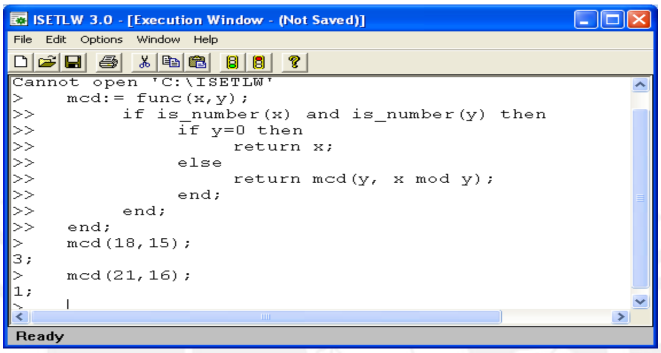
En este ejemplo, tenemos el caso base cuando el segundo número del par de argumentos es 0 (y el resultado es el primero) y un caso inductivo en el que el algoritmo se aplica recursivamente a otro par de argumentos, tal que el segundo número es menor.

De esta forma, se asegura que el algoritmo llegue al caso base y devuelva un resultado (termine). Para cada caso (base e inductivo) debe haber un ***return*** en la definición de la función.

Ejemplo de aplicación

>	**mcd(18,15);**	: esta expresión es la aplicación de la función **mcd** a 18 y 15
3;		: resultado de la aplicación

El programa desarrollado en el ejemplo se muestra en la figura.



La definición en **ISETLW** asocia el nombre mcd con un elemento del conjunto de funciones Z x Z → Z, descrito por la regla correspondiente (algoritmo). Cuando se aplica una función, **ISETLW** usa la regla asociada al nombre para realizar el cálculo (cómputo) y obtener el resultado.

>	**mcd;**	**:** preguntamos a ISETLW qué es mcd
!func(17)!;		**:** responde que es una función. Los signos! y el número 17 los usa ISETLW para su organización interna

La composición de funciones NO es predefinida en ISETLW y se define en el curso.

- ***Definiciones locales***

La sintaxis general de definición de función es:

nombre := func(lista de argumentos);
descripción del algoritmo;
return expresión;
end;

Sin embargo, pueden usarse definiciones locales, en cuyo caso, la sintaxis es:

nombre := func(lista de argumentos);
definiciones locales
descripción del algoritmo;
return expresión;
end;

Al igual que en matemática podemos usar definiciones locales en una definición de una función. Ejemplo, calcular las raíces de una ecuación de segundo grado de coeficientes a, b, c.

ANEXO A

Situaciones presentadas en las pruebas de entrada y salida

ANEXO B

Módulo del Ciclo ACE

ANEXO C

Trascripción de las entrevistas

ANEXO D

Manual del lenguaje de programación matemática ISETLW

En la fórmula matemática se utiliza una variable local usualmente llamada "delta" para el discriminante. Podemos representarlo en **ISETLW** como sigue:

```
>     raíces:=func(a,b,c);
>>       local  delta:=b**2-4*a*c;    :  definición de variable local
                                      :  (en matemática decimos ¨sea  delta …")
>>       if delta < 0 then
>>           print "no existen raíces reales";
>>       else if delta = 0 then
>>                return -b/2*a;
>>            else
>>                return [(-b + sqrt(delta))/ 2*a, (-b -
                            sqrt(delta))/2*a];
>>            end;
>>       end;
>>    end;
```

La sintaxis **sqrt** es una función predefinida que calcula la raíz cuadrada de un número. Dentro de la definición de la función raíces, se define una variable local, *delta*, que se utiliza para abreviar y clarificar el resto de la definición. La variable es local ya que no existe fuera de la definición de la función raíces. La sentencia que comienza con **print** en el programa arriba, es lo que llamamos "*fragmentos de código*" y se explica en la sección *Código*, un poco más adelante.

2.3 Directivas

Las directivas son frases con las que **ISETLW** se comunica con el sistema operativo (Windowss, en este caso). Se escriben comenzando con el símbolo ! y sin el punto y coma final. Las más usadas son:

```
>     !include pepe          $ las definiciones en el
                             $ archivo "pepe" se agregan a las
                             $ predefinidas
>     !clear                 $ borra la pantalla
>     !quit                  $ se abandona la sesión
```

2.4 Código

En este curso utilizaremos muy pocas veces fragmentos de código, ya que para los conceptos del curso, son innecesarios y lo que es más importante, no tienen una interpretación matemática sencilla. Son herramientas propias de un paradigma de programación llamado *imperativo,* donde los programas son secuencias de frases imperativas. Uno de los fragmentos de código que aparece en este documento es la iteración por medio de una cláusula ***for*** y la sentencia **print** de la definición en **ISETLW** de la *función raíces* (ver arriba).

En el curso utilizaremos un paradigma más cercano a la matemática, llamado *funcional,* donde los programas son implementaciones de funciones matemáticas.

ISETLW no es un lenguaje funcional, aunque tiene algunas características de este paradigma. Una de las cosas que hacen que no sea funcional, es que permite escribir funciones que no se corresponden con el concepto de función matemática, por ejemplo, se puede escribir una función que contenga código.
Ejemplo

```
>    fac := func(x);
>>      tmp:=1;
>>      for i in [1..x] do      $ comando de iteración
>>         tmp:=tmp * i;        $ la variable tmp se "actualiza" en
                                $ cada iteración
>>      end;
>>      return tmp;
>>   end;
>    fac(6);
720;
```

Observar que para calcular el factorial de un número de esta forma, necesitamos definir y "actualizar" una variable temporal, que llamamos **tmp**, y que interviene una variable de iteración i. Esta es una definición de la función factorial en código **ISETLW**, que difiere mucho de la definición matemática usual, que es:

$$\begin{aligned} fac(x) &= 1 && ; \text{si } x = 0 \\ &= x * fac(x-1) && ; \text{si } x > 0 \end{aligned}$$

En **ISETLW** podemos escribir esta definición tal cual, sin usar código.

```
>    fac := func(x);
>>      if x = 0 then return 1;
>>      else if x > 0 then return x * fac(x-1); end;
>>      end;
>>   end;
>    fac(6);
720;
```

El uso de código en **ISETLW** resulta útil en algunos casos, por ejemplo si queremos imprimir en pantalla tablas, como las tablas de verdad del cálculo proposicional:

```
>    for p, q in [true, false] do
>>      writeln p, q, p and q, p or q, p impl q, not p;
>>   end;
```

> 93.52 * 7; 654.640; > x := 5; > x + 7; 12; >	SETLW 93.52 multiplicar por 7 ISETLW muestra el resultado. asigna el valor de 5 a x. ISETLW pide la operación x+7 ISETLW muestra resultado ISETLW espera el inicio de una operación
> y := 173 >> ; >	Se asigna a y el valor de 173 >> indica que ISETLW espera de como se puede suplir el olvido de poner el punto y coma.
> $ This line is a comment >	Cada cosa puesto después de $ es un comentario ignorado por ISETLW
> S := {5, 10..25}; > S; {15, 25, 5, 20, 10}; > S; #S; T; {15, 20, 10, 5, 25}; 5; OM; >	Define un conjunto S Muestra S (no necesariamente es ordenado) ISETLW's muestra el resultado de S muestra S, número de elementos de S, T muestra fuera un número x muestra el número de elementos Muestra el conjunto T (OM significa no definido) espera ingreso de información o acción

<table>
<tr><td>> y := [1..10];
></td><td>Define a “y” como un par ordenado.
ISETLW reconoce con un Nuevo indicador para ingresar.</td></tr>
<tr><td>> x := 12 mod 5;
> x;
2;
> X;
OM;
> s := "Mathematics";
> t := 'Mathematics';
> s;
"Mathematics";
> t;
"Mathematics";
> s = t;
true;
></td><td>Asigna un valor a x.
Pide el valor de x.
ISETLW muestra el resultado.
ISETLW pide el valor de X
OM , es el resultado no definido (X es mayúscula).
Asigna un valor de caracteres de cadena a “s”.
Asigna un valor de caracteres de cadena a “t”.
ISETLW solicita para s.
ISETLW muestra resultado.
ISETLW pide para t.
ISETLW muestra el resultado
se pide si son iguales s y t.
ISETLW muestra resultado.
ISETLW indica un nuevo ingreso.</td></tr>
<tr><td>> 4 in y;
true;
></td><td>Prueba ya que 4 esta en el conjunto y.
la salida afirma que es cierto.
Se espera el ingreso de más información.</td></tr>
<tr><td>> S3 := {[a,b,c] : a,b,c in {1..3} : #{a,b,c} = 3};
></td><td>El conjunto de todas las ternas ordenadas, talq ue cada miembro es 1, 2 o 3, tal que el número de los differentes miembros es 3. el conjunto de permutaciones de 3 cosas.</td></tr>
<tr><td>> S3;
{[2, 1, 3], [2, 3, 1], [1, 3, 2], [1, 2, 3], [3, 2, 1], [3, 1, 2]};
></td><td>Muestra los elementos de S3.

Espera el indicador para ingresar</td></tr>
<tr><td>> perm := [2, 1, 3]
> perm(1);
2;
> perm(2);
1;
> perm(3);
3;
> perm(4);
OM;
></td><td>Define perm para ser éste 3-tuple.
Se evalúa el 1er miembro de 3-tuple.
Resultado
Se evalúa el 2do miembro de 3-tuple.
Resultado
Se evalúa el 3er miembro de 3-tuple.
Resultado
Se evalúa un 4to miembro de 3-tuple (no existe).
Resultado (OM means undefined – por no exister)
Espera el indicador una nueva solicitud.</td></tr>
<tr><td>> f := func(x);
>> return 3*x**2;
>> end;
> f(0); f(1); f(2); f(-3);
0;
3;
12;
27;
></td><td>Define f como una función de una variable.
Nótese que >> indica ingresar la función definida.
ISETLW >> indica que finaliza el programa.
Pedimos a ISETLW a evaluar en: f(0), f(1), etc.

ISETLW muestra el resultado de la evaluación en cada valor solcitada.</td></tr>
<tr><td>> {p | p in {2..20} | (forall divisor in {2..p div 2} | p mod divisor /= 0)};

{17, 19, 7, 11, 13, 2, 5, 3};

> !setrandom off
> {p | p in {2..20} | (forall divisor in {2..p div 2} | p mod divisor /= 0)};
{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19};
></td><td>Por omisión !setrandom es la que muestra el conjunto aleatoriamente ordenado de los primos.

Muestra todo los primos entre 2 y 20 (en orden aleatorio).
Nuevamente usar la directive !setrandom off y.
Define el conjunto.

Muestra el conjunto de los primos.</td></tr>
</table>

3. Ventana gráfica

Cuando se inicia una sesión con **ISETLW**, se abre una ventana de ejecución y una ventana gráfica. Para obtener la representación gráfica de una función, usar el comando ***plot***, cuya sintaxis es:

plot(f);El comando plot(f); produce la gráfica de la función f en el dominio (por defecto) [10,10] y con la escala vertical elegida automáticamente.

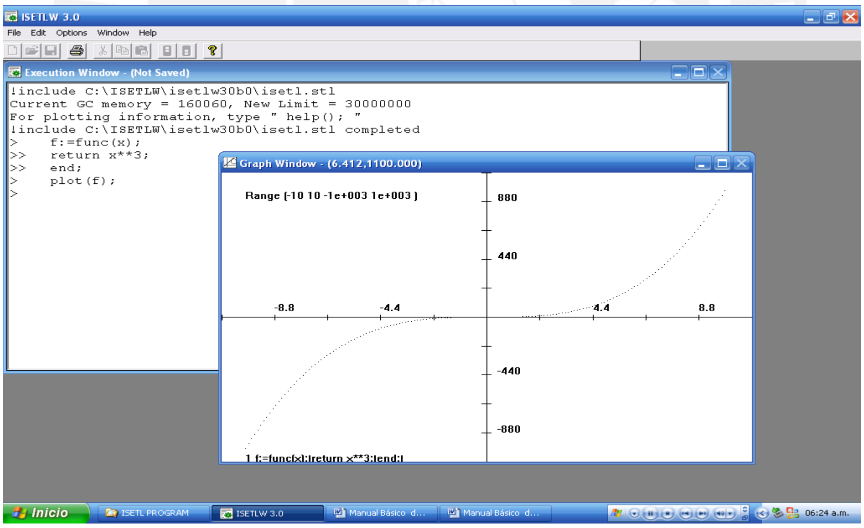
plot(f,a,b); usa [a,b] como escala horizontal.

plot(f,a,b,c,d); usa [a,b] como escala horizontal y [c,d] como escala vertical.

Ejemplo

```
>    cuad := func(x);
>>       if is_number(x) then
>>         if x < 100 then
>>           return x*x;
>>         end;
>>       end;
>>    end;
>    plot(cuad);
```

El resultado de ejecutar `plot(cuad);` aparece la gráfica en ISETLW.



- ➢ Para incluir texto en el gráfico, poner el cursor en el lugar deseado, apretar Ctrl-Enter, escribir el texto y apretar Ctrl-Enter otra vez.
- ➢ Se puede imprimir un gráfico como cualquier otro archivo.
- ➢ Para abandonar la ventana gráfica y pasar a la de ejecución, usar la tecla **q**. Para volver a la ventana gráfica apretar Ctrl-g.

Aparece en la ventana gráfica la representación de la relación binaria R, *con la carencia de que los bucles NO aparecen.* También resulta una carencia que los vértices del grafo debe colocarlos el usuario como texto. Si la relación es medianamente grande, no resulta cómodo.

4. Glosario

Cláusula. Usada como sinónimo de comando.
Comentarios. Frases cuyo único uso es la mejor comprensión para el usuario humano. Los comentarios no son nunca analizados ni ejecutados por **ISETLW**.
Frase. Instrucciones o requerimientos realizados a **ISETLW** y que son comprendidos como una única solicitud por el sistema.
Sesión. Período durante el cual el sistema está ejecutándose. También son las acciones que tienen lugar durante dicho período.

5. Referencias:

Introduction to Discrete Mathematics with ISETL (1996). Ed Dubinsky, William Fenton. Springer–Verlag, 1996. ISBN 0-387-94782-5.

Calculus, Concepts & Computers.(1995). Ed Dubinsky, Keith E. Schwingendorf y David M. Mathews. The McGraw-Hill Companies, Inc, 1995. ISBN 0-07-041033-X.

http://www.ilstu.edu/~jfcottr/ISETLW/, versión "ISETLW for Windowss (Jim´s)". Libre distribución. (agosto de 2006).

ANEXO

6. Anexo A

Limitaciones de ISETLW
Como se ha mencionado antes, **ISETLW** tiene algunas carencias. Las mismas derivan principalmente del hecho de que no es un *lenguaje tipado*, es decir, un lenguaje en el cual a cada expresión sintácticamente válida del lenguaje se le asigna *un tipo* (entero, booleano, función, etc) y para cada tipo se definen operaciones válidas.

ISETLW no es tipado, por ejemplo se puede definir

```
>       doble:=func(x);
>>              return 2 * x;
>>       end;
```

donde x puede ser cualquier objeto para el cual la operación 2 * este definida. Así tenemos que

```
>       doble(2);
4:

>        doble ("a");
"aa";
```

O sea que lo que se esta definiendo en realidad es una familia de funciones, ya que no se tiene en cuenta que una función matemática es una terna formada por un conjunto dominio, un conjunto co-dominio y una regla de transformación.
Para especificar el dominio utilizamos las cláusulas if como se indicó anteriormente y de esta forma vemos que si x no es un numero la función para ese argumento esta indefinida, lo cual coincide con el concepto matemático.
El símbolo * se usa para operaciones distintas. Se dice que esta "sobrecargado". Otro ejemplo

de símbolo sobrecargado es el +, que se usa para la suma de números, la concatenación de strings y la unión de conjuntos.
Estas limitaciones derivan en realidad del hecho de que **ISETLW** ha sido diseñado para trabajar con matemática tradicional donde se trabaja principalmente con el conjunto de los números reales. Así, la ventana gráfica está hecha para representar funciones sobre los números reales y no tiene utilidad para un curso de matemática discreta.

7. Anexo B

Situaciones de sintaxis incorrecta

Se recomienda usar archivos e incluirlos en la sesión con el intérprete y si hay errores, corregirlos en el archivo y volver a incluirlo. De esta forma, los mensajes de ISETLW y otras líneas innecesarias, no serán guardados.
Si ud, realiza los cambios directamente en la sesión con el intérprete, trate de observar lo que recomendamos a través del siguiente ejemplo:
Supongamos que ud. incluye un archivo llamado pepe.txt y le aparecen errores:

```
>   !include pepe.txt
>   5/7;
0.714;
>   2*3
>>  ;
6;
>   forall n in [1..10] ! n mod 2 = 0;
Unknown compiler directive "! n" ignored
>>  ;
!Syntax error - clearing input from:

forall n in [1..10] ! n mod 2 = 0;
;
!clear
!clear complete
>       □
```

Lo que recomendamos es reconocer los errores, corregirlos en el archivo y volver a incluirlo. Si ud. quiere corregir en la misma sesión, es decir, sin ir al archivo, el procedimiento es: corregir la expresión, luego “pintarla” y cliquear la opción “Run” de la barra superior de ISETLW.

Los mensajes de error

El primer mensaje de error indica un error en la sintaxis de la expresión: en vez del ¡ va un | .
El segundo mensaje de error se debe a que la línea es vacía. La directiva ¡clear borra el error anterior y deja el programa esperando una nueva interacción, es decir el cursor queda en el lugar del □ en el ejemplo.

Si el programa se “tranca” por algún motivo (lo cual no es raro que ocurra), se pueden hacer dos cosas: 1) usar la directiva ¡clear o 2) pintar la última expresión correcta y ejecutar “Run”. Es común que el programa “se tranque” porque ud. ha continuado trabajando en una situación incorrecta, o sea en la cual por ejemplo, no le aparecía el > o en la cual el cursor estaba inmediatamente después de > y no a unos espacios como debe ser.

Una vez corregido el error, si Ud. quiere guardar su trabajo, debe primero eliminar lo que ya no es útil. En este caso concreto, lo que guardamos es:

```
> 5/7;
0.714;
> 2*3
>> ;
6;
> forall n in [1..10] | n mod 2 = 0;
false;
>
```

O sea, borramos todo lo que era incorrecto y los mensajes de error.
También es útil borrar lo superfluo para trabajar mas cómodamente en la misma sesión, es decir, aunque no guardemos el trabajo.

Los archivos

Se recomienda crear archivos de texto y no usar tildes ni eñes y crear los archivos en el mismo directorio en el que se corre el programa. Supongamos que creamos un archivo de texto y lo nombramos “raices”. El sistema operativo lo guardará con la extensión .txt. En este archivo definimos una función como sigue:

```
raices:=func(a,b,c);
        if is_num(a) and
           is_num(b) and
           is_num(c) then
        delta:=b**2-4*a*c;
        if delta < 0 then
            print “no existen raices reales”;
        else if delta = 0 then
             return –b/2*a;
        else
            return [(–b + sqrt(delta))/2*a,
                    (-b - sqrt(delta))/2*a];
         end;
        end;
    end;
  end;
```

En la ventana de ejecución de ISETLW escribimos la primera y la tercera de las líneas siguientes y obtenemos como respuestas la segunda y la cuarta y la quinta.

```
> !include raices.txt
!include raices.txt completed
> raices(1,1,1);
"no existen raices reales";
OM;
>
```

Resumiendo: en el archivo raices.txt, hemos implementado una definición de la función raices. En la ventana de ejecución hemos incluido el archivo, (con la directiva ¡include), con lo cual la definición de la función ha quedado accesible. Luego, le hemos pedido al intérprete (al programa), que evalúe la expresión raíces (1,1,1), para lo cual el, computador usa la definición que le hemos dado como regla de transformación de esa expresión, es decir como algoritmo para realizar el cálculo.

RECOMENDACIONES DE USO

Algunas recomendaciones para trabajar en ISETLW.

El programa se puede bajar del sitio de Internet que se indica en el Manual. Normalmente, haciendo doble clic en el enlace indicado, la "bajada" e instalación del programa ocurren automáticamente. Una vez instalado, el programa se ejecuta haciendo doble clic en el icono "ISETLW", que representa ejes de coordenadas y una recta. El manual online lo obtiene haciendo clic en el botón "Help" y dentro de las opciones en "Contents". Es un buen ejercicio recorrer este manual para conocerlo.
Al hacer doble clic en el icono de ISETLW se despliegan las siguientes líneas:

```
!include ISETLW.stl
>        !include ISETLW.stl
Current GC memory = 160060, New Limit = 4000000
Current GC memory = 2016756, Limit = 4000000
!include ISETLW.stl completed
>          □
```

Indica la posición del cursor.

Obtenga de la página web un archivo llamado MD01.txt. que tiene las mismas expresiones de la a) a la n) que Ud. evaluó manualmente, pero escritas en ISETLW. En este trabajo Ud. evaluará las expresiones con el computador (automáticamente) y comparará los resultados con los obtenidos en su evaluación manual.

Para ello, copie las expresiones del archivo, péguelas en ISETLW y digite enter.

Responda las siguientes preguntas:
0) Cómo se escribe en ISETLW la operación potencia?

- Qué opina de las respuestas b) y c)?

- En las expresiones g), i), j) y k) aparecen variables (n, x e y). La evaluación de esas expresiones produce resultados donde aparece la palabra OM en algunos casos y un valor determinado en otros. Por qué y qué representa OM en ISETLW?

- Abra el archivo MD01.txt y estudie cómo se representan los distintos objetos matemáticos en ISETLW ($\in$, $\forall$, etc).

Observe: Que no podemos representar en ISETLW $n \in N$ (por ser un conjunto infinito), así que usamos x in [0 .. 100] que es el conjunto de los naturales de 0 a 100 (en realidad, es una secuencia, ya que está ordenada). Que en ISETLW la relación de orden lexicográfico entre cadenas de caracteres (strings) está predefinida. Por eso la evaluación de la expresión n) da resultado true.