



PONTIFICIA **UNIVERSIDAD CATÓLICA** DEL PERÚ

Esta obra ha sido publicada bajo la licencia Creative Commons  
Reconocimiento-No comercial-Compartir bajo la misma licencia 2.5 Perú.

Para ver una copia de dicha licencia, visite  
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/pe/>



**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ**

**ESCUELA DE GRADUADOS**



**SIMULACIÓN DE LA DINAMICA DEL MICROMÁSER  
MÁS ALLÁ DE LA RWA**

**TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE  
MAGÍSTER EN FÍSICA**

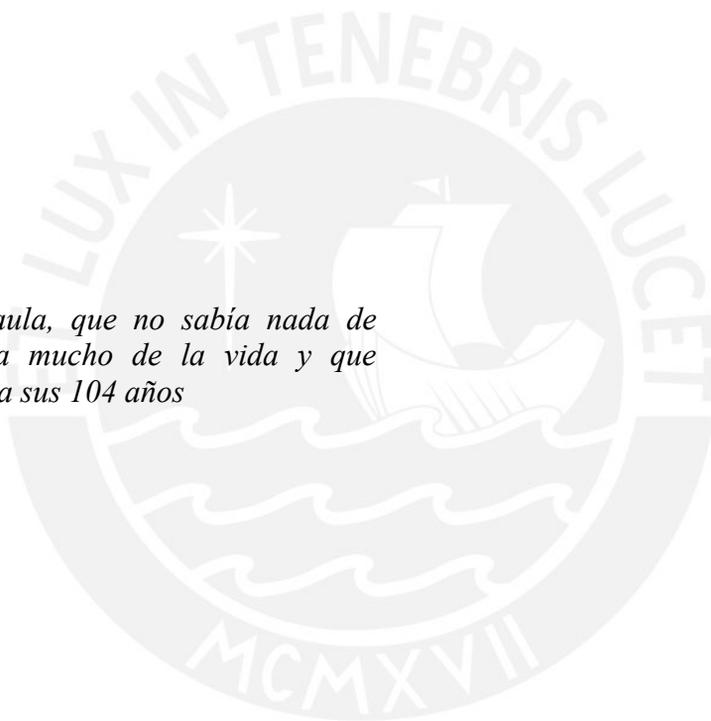
**PRESENTADO POR:**

**LEANDRO GARCÍA-CALDERÓN PALOMINO**

**LIMA – PERÚ  
2003**

*A mis padres, Consuelo y Jorge,  
responsables de mi existencia y de mi  
afición a la ciencia*

*A mi abuela, Paula, que no sabía nada de  
física pero sabía mucho de la vida y que  
decidió vivir hasta sus 104 años*



*A la compañera de todas las horas, Larissa,  
en la incertidumbre de la física y en la  
certidumbre de su amor*

El acto de recordar es siempre un ejercicio incompleto. Una tesis de maestría en física teórica dista mucho de ser un acto en solitario y una vez acabada es preciso recordar, para agradecer, para evitar, para añorar, para proyectar. Podría hacer el intento de plasmar en esta página los nombres de las muchas personas que me han ayudado de una u otra manera en la consecución de este trabajo, sin embargo, temo ser injusto olvidando alguno.

La persona que es imprescindible nombrar es mi asesor de tesis, Francisco, Pancho, de Zela Martínez, quien con sus conocimientos, paciencia y una permanente disposición para el descubrimiento ha hecho posible que un aficionado a la física, como yo, pueda presentar estos resultados.

## RESUMEN

Mediante técnicas de simulación Montecarlo, prescindiendo de la *aproximación de la onda rotante (RWA)*, se predice la aparición de efectos medibles en los llamados "estados atrapados", rasgo eminentemente cuántico del micromáser o máser monoatómico. Estos efectos se manifiestan por la aparición de picos bien definidos en la desviación estándar normalizada. Estos picos persisten incluso para temperaturas en el rango de las décimas de kelvin y no desaparecen por los efectos de la medición cuántica, concluyendo que estos fenómenos podrían detectarse en los experimentos de laboratorio llevados a cabo con el micromáser.

# Índice

	Página
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. La aproximación de la onda rotante (RWA)</b>	<b>5</b>
1.1 Resonancia magnética clásica	5
1.2 Probabilidades de transición inducidas	9
<b>2. El modelo de Jaynes-Cummings</b>	<b>20</b>
2.1 Interacción de la radiación con la materia	20
2.2 Sistemas cuánticos de dos niveles y el modelo de Jaynes-Cummings	23
2.3 Más allá de la RWA	29
<b>3. El micromáser</b>	<b>32</b>
3.1 Descripción del micromáser	32
3.2 La estadística fotónica y el proceso iterativo en el micromáser	36
3.3 Rasgos no clásicos de la estadística del micromáser: estados atrapados	42
3.4 La teoría del micromáser fuera de la RWA	45
3.4.1 Las aproximaciones de la onda rotante y contrarrotante	50
3.4.2 Diagonalización del Hamiltoniano de Rabi por el método de fracciones continuas	55
3.4.3 Las probabilidades de transición	60
3.4.4 La distribución fotónica del equilibrio	64
3.4.5 Los estados atrapados fuera de la RWA	66
<b>4. El proceso de simulación</b>	<b>70</b>
4.1 Pasos temporales fijos	72
4.2 Pasos temporales estocásticos	75
4.3 Simulación de la dinámica del micromáser más allá de la RWA	77
4.4 Presentación de los resultados	81
<b>5. Conclusiones</b>	<b>98</b>
5.1 Conclusiones concernientes a los aspectos computacionales	98
5.2 Conclusiones concernientes a los aspectos físicos	99

<b>Apéndice A. Matrices de Pauli</b>	<b>101</b>
<b>Apéndice B: El operador densidad</b>	<b>104</b>
<b>Apéndice C: Teoría del reservorio y el operador densidad</b>	<b>108</b>
<b>Bibliografía consultada</b>	<b>116</b>



## Introducción

En los últimos años, la óptica cuántica ha experimentado un desarrollo vertiginoso, siendo, sin duda, propiciado por la invención del láser<sup>1</sup> en los primeros años de la década del 60 del siglo pasado. El láser es especialmente importante por su singular naturaleza en cuanto a fuente de luz se refiere. Es completamente diferente a las fuentes naturales o artificiales de luz comunes debido a su carácter monocromático, su direccionalidad, intensidad, duración y propiedades estadísticas. Estas características, a su vez, han propiciado el estudio de las propiedades estadísticas de la luz y el desarrollo en las técnicas de detección de fotones o de cualquier otro componente implicado en la interacción de la radiación con la materia.

Sin embargo, el máser<sup>2</sup> es una invención anterior a la del láser. En 1955 el proceso fundamental en que se basa el máser se realizó por primera vez utilizando la frecuencia de la molécula de amoníaco por J. P. Gordon, H. J. Zeiger y C. H. Townes, obteniendo la amplificación de radiación en el campo de las microondas. Esta frecuencia corresponde a la energía del fotón emitido cuando el átomo de nitrógeno se desplaza de un lado al otro del triángulo formado por los tres átomos de hidrógeno de la molécula de amoníaco. A partir de su invención, el máser ofreció un método completamente novedoso y revolucionario de producir microondas, a pesar de que los fundamentos teóricos necesarios para comprender su funcionamiento ya se conocían desde los años 30. Hoy en día, tanto el láser como el máser son dispositivos muy populares, este último es un poderoso amplificador de ondas centimétricas, utilizándose como regulador de tiempo en relojes atómicos. También se utiliza como amplificador de frecuencias de radio de bajo nivel de ruido en comunicaciones por satélite y en radioastronomía.

Detrás de estos dispositivos subyace la interacción de la radiación electromagnética con las partículas materiales, interacción cuya naturaleza eminentemente cuántica permanece oculta por la participación de una cantidad muy grande de partículas, en este sentido, el láser y el máser pueden considerarse dispositivos clásicos. Sin embargo, en febrero del año

---

<sup>1</sup> *Light Amplification by stimulated Emission of Radiation.*

<sup>2</sup> *Microwave Amplification by stimulated Emission of Radiation.*

1985, D. Meschede, H. Walther y G. Müller anunciaron la realización de un experimento que se convirtió en la contrapartida física del modelo teórico de Jaynes-Cummings, la interacción de un átomo de dos niveles, que dentro de una cavidad resonante, interactúa con un campo electromagnético monomodal. Finalmente, este modelo que desde 1963 permaneció en el ámbito teórico podía ser estudiado mediante un máser donde se habían reducido al mínimo los aspectos clásicos de los láseres y másers comunes. Este dispositivo se conoce con el nombre de máser monoatómico o *micromáser*. A partir de su invención ha recibido una profusa atención tanto teórica como experimental por la naturaleza de su operación que permite un flujo de átomos Rydberg<sup>3</sup> muy rareado, asegurando de este modo que los efectos colectivos de las partículas se eliminen, permitiendo de este modo el estudio de la interacción de la radiación con la materia en el nivel más fundamental, el cuántico.

El modelo de Jaynes-Cummings, y por tanto la teoría que sustenta el funcionamiento del micromáser, hace uso de dos aproximaciones muy usadas en óptica cuántica: la aproximación dipolar y la aproximación de la onda rotante<sup>4</sup>. Originalmente, la RWA se introdujo en el contexto de la resonancia magnética, donde un sistema de espín 1/2 está bajo la influencia de dos campos magnéticos, uno uniforme y el otro oscilante en un plano perpendicular al primero. El campo uniforme causa que los espines tengan una precesión de Larmor alrededor de él, mientras que el campo oscilante puede descomponerse en la suma de dos campos los cuales giran en direcciones opuestas uno con respecto al otro. Uno de estos campos gira en el mismo sentido que la precesión de los espines y es la componente del campo oscilante responsable del cambio de sentido del espín en la resonancia, es decir, cuando la frecuencia de rotación coincide aproximadamente con la frecuencia de Larmor. El campo *contrarrotante* ejerce un torque dependiente del tiempo sobre el momento magnético asociado con el espín. Este torque invierte su sentido aproximadamente cuando la frecuencia es dos veces la frecuencia de Larmor. Así, se asume que el torque efectivo ejercido por el campo *contrarrotante* es muy pequeño en promedio y consecuentemente despreciable. En otras palabras, de los dos campos que componen el campo oscilante, se rechaza el campo *contrarrotante*. Esta aproximación fue lo que se conoció originalmente

---

<sup>3</sup> Átomos de número cuántico principal muy grande que permite un acoplamiento muy eficiente y largo de los átomos con el campo sustentado por la cavidad.

<sup>4</sup> RWA por sus siglas en inglés: *Rotating-Wave Approximation*.

como RWA. Dado que se puede demostrar que todo sistema de dos niveles<sup>5</sup> es formalmente equivalente a sistemas de espín  $1/2$  que interactúan con un campo magnético, en el modelo de Jaynes-Cummings fue una consecuencia natural que se adoptara una aproximación que hacía recordar su original aplicación: la eliminación de aquellas transiciones que permitía el hamiltoniano de Rabi<sup>6</sup> cuya ocurrencia estaba signada por una probabilidad extremadamente baja<sup>7</sup>. Aunque la validez de la RWA es raramente cuestionada, podemos citar algunos efectos predichos teóricamente que no pueden ser explicados dentro del ámbito de esta aproximación, como la aparición de caos<sup>8</sup> en sistemas de dos niveles interactuando con campos electromagnéticos clásicos. Así como, la aparición, en experimentos cuidadosamente diseñados, de efectos medibles como el corrimiento de *Block-Siegert* debido a la inclusión de los términos rechazados por la RWA.

El presente trabajo investiga la posibilidad de detectar variaciones en la estadística fotónica del estado estacionario del micromáser cuando no se hace la RWA. Los resultados analíticos y numéricos han sido desarrollados por el equipo de óptica cuántica de la sección de Física de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Dado el carácter estocástico de la inyección atómica en el micromáser, el método *Montecarlo* se vislumbra como una técnica para simular experimentos reales con este dispositivo. Por tanto, la tesis presente usa dicho método, especialmente en los casos en que se presentan los llamados *estados atrapados*, por ser estos estados donde se predice una marcada diferencia entre usar y no usar la RWA. El trabajo está dividido en cuatro capítulos, el primer capítulo trata de los fundamentos teóricos que sustentan la RWA. El segundo capítulo estudia el modelo de Jaynes-Cummings y la interacción de la radiación con la materia. El tercer capítulo describe al micromáser desde el punto de vista experimental como teórico y el cuarto capítulo trata de los métodos estocásticos empleados, así como los resultados de la simulación. Al final de la tesis se incluyen tres apéndices que sirven para entender aspectos cuánticos de la teoría relacionada con el micromáser.

---

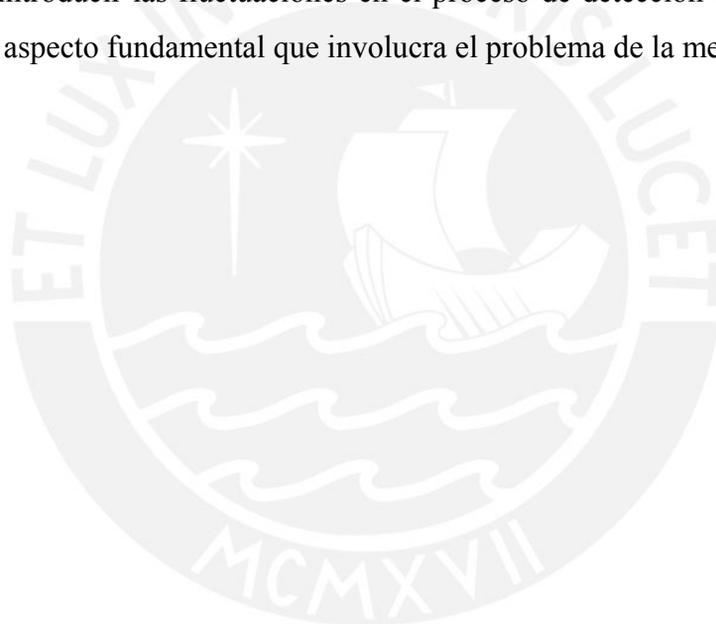
<sup>5</sup> O todo hamiltoniano en un espacio de Hilbert de dos dimensiones.

<sup>6</sup> Hamiltoniano que describe la interacción de un átomo de dos niveles con un campo electromagnético monomodal cuantizado.

<sup>7</sup> También se argumenta que dichos términos oscilan muy rápido y que en consecuencia decaen rápidamente a cero.

<sup>8</sup> P.W. Milloni, J.R. Ackerhalt y H.W. Galbraith, *Chaos in semiclassical N-atom Jaynes-Cummings Model; Failure of the Rotating-Wave Approximation*, Phys. Rev. Lett., Vol 50, n° 13, pag. 966, 28 March, 1983.

Este trabajo enmarcado en el terreno de la simulación viene como una consecuencia lógica de un trabajo previo<sup>9</sup> encuadrado dentro de la colaboración entre la Pontificia Universidad Católica del Perú y la Universidad Nacional Mayor de San Marcos a nivel de sus respectivos equipos de física teórica. Así como lo esperábamos, el proceso de simulación abre campo a la investigación de procesos cuya solución analítica es difícil de resolver o es preciso verificar. Por tanto, ahora también esperamos que este trabajo sirva como base para futuras investigaciones del equipo de óptica cuántica en cuanto al micromáser y su dinámica de refiere, ya que hay aspectos de ésta que quedan por investigar en el terreno de la simulación, como la posibilidad de que no todos los átomos ingresen a la cavidad en estado excitado o variar la distribución de la inyección atómica sin perder su estocasticidad o introducir las fluctuaciones en el proceso de detección de los átomos que dejan la cavidad, aspecto fundamental que involucra el problema de la medición cuántica.



---

<sup>9</sup> Leandro García-Calderón P., *Simulación de la dinámica del micromáser*, Tesis para optar el grado de licenciado en física, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima-Perú, 1997.

# 1. La Aproximación de la Onda Rotante (RWA)

El término *onda rotante* proviene del estudio de la resonancia magnética cuyos métodos son muy empleados en el tratamiento de sistemas que contienen espines nucleares o electrónicos desapareados. El sistema que se estudia está sometido a dos campos magnéticos: uno constante en el tiempo y en el espacio mientras que el otro rota u oscila en un plano perpendicular al campo constante.

## 1.1. Resonancia magnética clásica

Cuando un objeto posee un momento magnético  $\vec{M}$  y un momento angular  $\vec{L}$ , en presencia de un campo magnético  $\vec{B}$  experimenta un torque igual a:

$$\vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \times \vec{B} \quad (1.1)$$

En el caso de los electrones el momento magnético es proporcional y opuesto al momento angular, tal que:

$$\vec{M} = -\gamma\vec{L} \quad (1.2)$$

donde  $\gamma$  es la razón giromagnética. Entonces (1.2) puede escribirse como:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\gamma \frac{d\vec{L}}{dt} = -\gamma\vec{M} \times \vec{B} \quad (1.3)$$

Si multiplicamos escalarmente (1.2) por (1.3) obtenemos:

$$\vec{M} \cdot \frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{M} \cdot (-\gamma\vec{M} \times \vec{B}) = 0 \quad (1.4)$$

pero

$$\vec{M} \cdot \frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{M} \cdot \vec{M}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} M^2 \quad (1.5)$$

con lo cual vemos que la magnitud del momento magnético permanece constante. Luego, también valdrá:

$$\vec{B} \cdot \frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{B} \cdot (-\gamma \vec{M} \times \vec{B}) = 0 \quad (1.6)$$

Lo que nos lleva a concluir que el ángulo entre  $\vec{B}$  y  $\vec{M}$  no cambia con el tiempo. Se puede ver entonces que (1.3) expresa el movimiento de precesión de  $\vec{M}$  alrededor de  $\vec{B}$ .

Si el campo  $\vec{B}$  estuviera orientado en la dirección  $z$ , entonces  $\vec{B} = B_0 \hat{k}$  y la *frecuencia de Larmor* sería  $\omega_0 = \gamma B_0$ , con lo cual las ecuaciones dinámicas para  $\vec{M}$  tomarían la forma:

$$\begin{aligned} \frac{dM_x}{dt} &= -\omega_0 M_y \\ \frac{dM_y}{dt} &= \omega_0 M_x \\ \frac{dM_z}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Asumiendo la condición inicial  $\vec{M}(0) = M_x(0)\hat{i} + M_y(0)\hat{j} + M_z(0)\hat{k}$ , encontramos las soluciones para (1.7):

$$\begin{aligned} M_x(t) &= M_x(0) \cos \omega_0 t \\ M_y(t) &= M_x(0) \sen \omega_0 t \\ M_z(t) &= M_z(0) \end{aligned} \quad (1.8)$$

lo que expresa un movimiento de precesión en contra de las manecillas del reloj de  $\vec{M}$  alrededor de  $\vec{B}$ .

Podemos simplificar las cosas describiendo el sistema desde un sistema de referencia de coordenadas rotatorio<sup>10</sup> tal que:

$$\begin{aligned} M_{x'} &= M_x(0) \cos \omega t + M_y(0) \sin \omega t \\ M_{y'} &= -M_x(0) \sin \omega t + M_y(0) \cos \omega t \\ M_{z'} &= M_z(0) \end{aligned} \quad (1.9)$$

donde las coordenadas primadas indican que se trata del sistema de coordenadas rotatorio.

Si derivamos (1.9) con respecto al tiempo obtenemos fácilmente:

$$\begin{aligned} \frac{dM_{x'}}{dt} &= -\Delta M_{y'} \\ \frac{dM_{y'}}{dt} &= \Delta M_{x'} \\ \frac{dM_{z'}}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

siendo  $\Delta = \omega_0 - \omega$  el término de desintonización.

Podemos combinar las tres ecuaciones (1.10) en una sola ecuación vectorial para obtener:

$$\frac{d\vec{M}'}{dt} = -\gamma \vec{M}' \times \frac{\Delta}{\gamma} \hat{k}' \quad (1.11)$$

con la cual es fácil ver que la dirección de la precesión de  $\vec{M}'$  alrededor del campo magnético efectivo  $\frac{\Delta}{\gamma} \hat{k}'$  cambiará de acuerdo con el signo de  $\Delta$ . Se ve inmediatamente que en la resonancia  $\vec{M}'$  es constante en el tiempo, es decir, para un observador en el sistema rotatorio a la frecuencia  $\omega_0$  alrededor del eje Z (en sincronismo con la precesión del momento magnético) el momento magnético es un vector estacionario. Aun más, cuando

<sup>10</sup> Es conveniente escoger un sistema que gire alrededor del eje Z en el mismo sentido que el momento magnético  $\vec{M}$  con una frecuencia angular  $\omega$ .

$\omega = \omega_0$  el campo efectivo también es cero, consistente con la conclusión a la que arribó el observador en el marco de referencia rotatorio: de que no hay ningún torque actuando sobre el momento magnético y por tanto no hay un campo magnético. Cuando  $\omega < \omega_0$ , el campo efectivo es menor que  $B_0$  y cuando  $\omega > \omega_0$  el campo efectivo invierte su dirección. Además, cuando  $\omega \neq \omega_0$ , el movimiento aparente del momento magnético en el campo rotatorio es un movimiento de precesión alrededor del campo efectivo.

Si queremos que haya resonancia magnética debemos agregar un campo magnético dependiente del tiempo al campo constante que está en la dirección  $z$ :

$$\vec{b}(t) = b[\cos(\omega t)\hat{i} + \text{sen}(\omega t)\hat{j}] \quad (1.12)$$

este campo rota en un plano perpendicular al campo constante y en el mismo sentido que el momento magnético  $\vec{M}$ <sup>11</sup>. Siguiendo los mismos pasos que nos llevaron a (1.11) llegamos a la siguiente ecuación en el sistema de coordenadas rotatorio:

$$\frac{d\vec{M}'}{dt} = -\gamma\vec{M}' \times \left( \frac{\Delta}{\gamma}\hat{k}' + b\hat{i}' \right) \quad (1.13)$$

Al comparar (1.11) con (1.13) vemos que el campo magnético efectivo es ahora  $\frac{\Delta}{\gamma}\hat{k}' + b\hat{i}'$ .

Nótese que podemos escoger un campo magnético (1.12) que gire en sentido contrario (en el sentido de las manecillas del reloj) al momento magnético  $\vec{M}$  con lo que el campo magnético efectivo tomará la forma:  $\left( \frac{\omega + \omega_0}{\gamma} \right)\hat{k}' + b\hat{i}'$ . En el sistema rotatorio que gira en el sentido contrario a las manecillas del reloj con una frecuencia angular igual a  $\gamma B_0$ , el campo magnético que gira en el mismo sentido está en sincronismo con el movimiento de

<sup>11</sup> En el caso de la *resonancia magnética nuclear* lo que se busca es que el campo magnético oscilante tenga una frecuencia exactamente igual a la frecuencia de precesión del espín del protón alrededor del campo magnético constante externo, de tal manera que haya una transferencia de energía entre el campo oscilante y el protón, energía necesaria para “voltar” el espín del protón que al hacerlo emite una señal que puede medirse con gran precisión.

precesión del momento magnético y por tanto ejerce un torque constante sobre éste, sin embargo, un campo magnético que gire en dirección opuesta (en la resonancia o cerca de ésta) girará con una frecuencia igual al doble de  $\omega$  (ya que  $\omega = \omega_0$ ), por tanto su influencia es muy pequeña y usualmente no se le toma en cuenta. La costumbre de desechar los términos que giran en el sentido de las manecillas del reloj, costumbre que es casi un acto de fe, se le conoce como la *aproximación de la onda rotante* o RWA<sup>12</sup>. Sin embargo, si los campos magnéticos son muy intensos, los términos ignorados por la RWA producen un pequeño corrimiento en la frecuencia de resonancia llamado *corrimiento de Block-Siegert*.

## 1.2 Probabilidades de transición inducida

En la sección anterior, se describió en términos clásicos el movimiento de un momento magnético dentro de un campo magnético externo. Ahora describiremos de acuerdo a la formulación de la mecánica cuántica el caso de un sistema de espín electrónico igual a  $\frac{1}{2}$ .

La interacción de un momento magnético electrónico con un campo magnético externo está gobernada por el hamiltoniano:

$$H = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad (1.14)$$

en el cual el operador momento magnético  $\mathbf{m}$  está relacionado con el operador de espín de Pauli  $\boldsymbol{\sigma}$  por

$$\mathbf{m} = -\frac{e\hbar}{2m_e} \boldsymbol{\sigma} = -\mu_b \boldsymbol{\sigma} \quad (1.15)$$

El signo menos aparece como consecuencia de la carga eléctrica negativa del electrón;  $e$  es la carga (absoluta) del electrón ( $1.602 \times 10^{-19}$  C) y  $m_e$  es la masa ( $9.109 \times 10^{-31}$  kg) del electrón;  $\mu_b$  es el magnetón de Bohr ( $9.274 \times 10^{-24}$  J/T). También se puede escribir:

$$\mathbf{m} = -\frac{1}{2} \gamma \hbar \boldsymbol{\sigma} \quad (1.16)$$

<sup>12</sup> Mitchell Weissbluth; 1989, *Photon-Atom Interactions*, Academic Press, Inc, San Diego, CA.

donde  $\gamma$  es la razón giromagnética, relacionada con el magnetón de Bohr como:

$$\gamma = \frac{2\mu_b}{\hbar} = 1.761 \times 10^{11} \text{ T}^{-1} \text{ s}^{-1} \quad (1.17)$$

La magnetización macroscópica  $\mathbf{M}$  para un sistema de  $N$  partículas idénticas de espín  $\frac{1}{2}$  por unidad de volumen es  $N\langle \mathbf{m} \rangle$  donde  $\langle \mathbf{m} \rangle$  es el *ensemble average* del operador momento magnético.

Con  $\mathbf{m}$  escrito como en la ecuación (1.16) podemos escribir:

$$\mathbf{M} = N\langle \mathbf{m} \rangle = -\frac{N\gamma\hbar}{2} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \quad (1.18)$$

y

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \gamma \hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \quad (1.19)$$

Si  $\mathbf{B} = B_0 \hat{k}$ , el hamiltoniano:

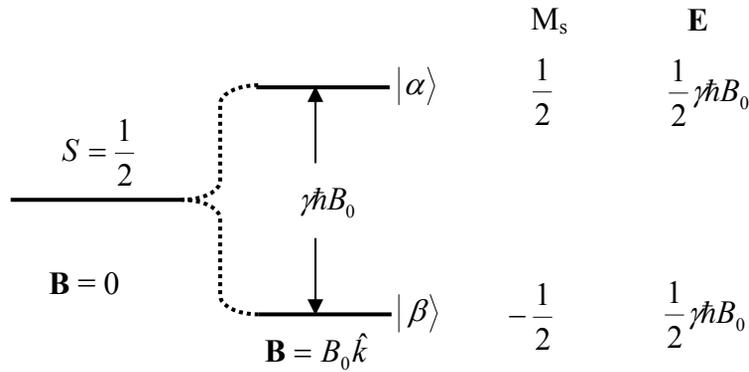
$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \gamma \hbar B_0 \sigma_z \equiv \mathbf{H}_0 \quad (1.20)$$

es diagonal en la base de los estados de espín  $|\alpha\rangle$  y  $|\beta\rangle$  con los valores propios  $\frac{1}{2} \gamma \hbar B_0 \sigma_z$  y  $-\frac{1}{2} \gamma \hbar B_0 \sigma_z$  respectivamente (Fig. 1.1)

Así, la diferencia de energía entre los dos estados de espín es:

$$\Delta E = E_\alpha - E_\beta = \gamma \hbar B_0 = \hbar \omega_0 \quad (1.21)$$

donde  $\omega_0$ , que es igual a  $\gamma B_0$ , es idéntica a la frecuencia de precesión del momento magnético en la formulación clásica. En el equilibrio térmico, la población de los dos estados está determinada por la distribución de Boltzmann.



**Fig. 1.1** Diagrama de los niveles energéticos de un sistema electrónico de espín  $\frac{1}{2}$ . Cuando  $\mathbf{B} = 0$  los dos estados de espín están degenerados, cuando  $\mathbf{B} = B_0 \hat{k}$  los dos estados de espín están separados por  $\gamma \hbar B_0$

Supongamos ahora que además del campo magnético constante en la dirección Z aplicamos un campo magnético rotatorio en el plano XY. Entonces:

$$\mathbf{B} = B_0 \hat{k} + \mathbf{b}_1 = B_0 \hat{k} + b_1 (\hat{i} \cos \omega t + \hat{j} \sin \omega t) \quad (1.22)$$

y el hamiltoniano se convierte en:

$$H = \frac{\gamma \hbar}{2} [B_0 \sigma_z + b_1 (\sigma_x \cos \omega t + \sigma_y \sin \omega t)] \quad (1.23)$$

$$= \frac{\gamma \hbar}{2} [B_0 \sigma_z + b_1 (\sigma^+ e^{-i\omega t} + \sigma^- e^{i\omega t})] \quad (1.24)$$

donde  $\sigma^+$  y  $\sigma^-$  están definidos por las ecuaciones (A.5) y (A.6)<sup>13</sup>

A partir de la siguiente fórmula podemos derivar otra forma útil del hamiltoniano:

$$f(\phi) = e^{\phi \sigma_z / 2} \sigma_x e^{-\phi \sigma_z / 2} \quad (1.25)$$

Con la ayuda de las relaciones de conmutación para los operadores de espín de Pauli, encontramos que:

<sup>13</sup> Véase el apéndice A.

$$\frac{df}{d\phi} = -e^{i\phi\sigma_z/2} \sigma_y e^{-i\phi\sigma_z/2} \quad (1.26)$$

$$\frac{d^2 f}{d\phi^2} = -f(\phi) \quad (1.27)$$

Si la solución de la ecuación (1.27) la escribimos como:

$$f(\phi) = A \cos \phi + B \operatorname{sen} \phi \quad (1.28)$$

las constantes son:

$$f(0) = A = \sigma_x, \quad \left( \frac{df}{d\phi} \right)_{\phi=0} = B = -\sigma_y \quad (1.29)$$

y

$$f(\phi) = \sigma_x \cos \phi - \sigma_y \operatorname{sen} \phi \quad (1.30)$$

Con  $\phi = -\omega t$ , el hamiltoniano (ecuación (1.23)) toma la forma:

$$H = \frac{\gamma \hbar}{2} \left( B_0 \sigma_z + B_1 e^{-i\omega t \sigma_z / 2} \sigma_x e^{i\omega t \sigma_z / 2} \right) \quad (1.31)$$

Tal como se hizo en el caso clásico, pasemos al sistema de coordenadas rotatorio. En el contexto de la mecánica cuántica, se logra esto por medio de un operador unitario. Si  $\psi$  satisface la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi \quad (1.32)$$

la transformación unitaria:

$$\psi' = O \psi \quad (1.33)$$

da como resultado:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = i\hbar \left[ O^{-1} \frac{\partial \psi'}{\partial t} + \frac{\partial O^{-1}}{\partial t} \psi' \right] \quad (1.34)$$

$$H \psi = H O^{-1} \psi' \quad (1.35)$$

Conforme a la ecuación (1.32):

$$i\hbar \left[ O^{-1} \frac{\partial \psi'}{\partial t} + \frac{\partial O^{-1}}{\partial t} \psi' \right] = H O^{-1} \psi' \quad (1.36)$$

o también:

$$i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t} = \left[ O H O^{-1} - i\hbar O \frac{\partial O^{-1}}{\partial t} \right] \psi' \equiv H' \psi' \quad (1.37)$$

Como  $H$  es hermítico y  $O$  es unitario, hay dos formas equivalentes para  $H'$ :

$$H' = O H O^{-1} - i\hbar O \frac{\partial O^{-1}}{\partial t} = O H O^{\dagger} + i\hbar \frac{\partial O}{\partial t} O^{\dagger} \quad (1.38)$$

Ahora transformamos el hamiltoniano (1.31) con el operador unitario:

$$O = e^{i\omega t \sigma_z / 2} \quad (1.39)$$

Entonces:

$$O H O^{\dagger} = \frac{\gamma \hbar}{2} (B_0 \sigma_z + b_1 \sigma_x), \quad i\hbar \frac{\partial O}{\partial t} O^{\dagger} = -\frac{1}{2} \hbar \omega \sigma_z \quad (1.40)$$

$$H' = \frac{\gamma \hbar}{2} \left[ \left( B_0 - \frac{\omega}{\gamma} \right) \sigma_z + b_1 \sigma_x \right] = \frac{\gamma \hbar}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}_{efect} \quad (1.41)$$

donde:

$$\mathbf{B}_{efect} = \left( B_0 - \frac{\omega}{\gamma} \right) \hat{k} + b_1 \hat{i} \quad (1.42)$$

Así, por virtud de una transformación unitaria con el operador (1.39), el hamiltoniano transformado  $H'$  es independiente del tiempo. Notamos que la ecuación (1.42) es idéntica a la ecuación (1.38), por tanto, el efecto del operador unitario (1.39) en el contexto de la mecánica cuántica es análogo en el caso clásico a la transformación al sistema de

coordenadas rotatorio. En ambos casos la transformación se lleva a cabo reemplazando  $\mathbf{B}$  por  $\mathbf{B}_{\text{efect}}$ .

En un campo magnético constante, los estados propios del hamiltoniano (1.20) son estados estacionarios  $|\alpha\rangle$  y  $|\beta\rangle$  con una separación energética  $\Delta E = E_\alpha - E_\beta = \gamma\hbar B_0 = \hbar\omega_0$ . Si adicionamos un campo magnético rotatorio transversal independiente del tiempo como en la ecuación (1.12), los estados  $|\alpha\rangle$  y  $|\beta\rangle$  ya no permanecen estacionarios. Calcularemos ahora el efecto de este campo rotatorio sobre el comportamiento temporal de los estados de espín.

La forma general de la función de onda normalizada para un sistema magnético de dos niveles en un campo de la forma (1.22) es una superposición lineal de los dos estados de espín. Como estamos interesados en la dependencia temporal de la función de onda, los coeficientes serán funciones dependientes del tiempo, tal que:

$$|\psi(t)\rangle = a(t)|\alpha\rangle + b(t)|\beta\rangle \quad (1.43)$$

con la condición de normalización  $|a(t)|^2 + |b(t)|^2 = 1$ .

La función de onda  $|\psi(t)\rangle$  es una superposición coherente de  $|\alpha\rangle$  y  $|\beta\rangle$  ya que la matriz densidad  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & ab^* \\ ab & |\beta|^2 \end{pmatrix}$  contiene elementos distintos de cero fuera de la diagonal principal. Consideraremos las transiciones  $|\beta\rangle \rightarrow |\alpha\rangle$  asumiendo que inicialmente el estado  $|\beta\rangle$  está ocupado y  $|\alpha\rangle$  está vacante, i.e.,  $a(0) = 0$ ,  $b(0) = 1$ .

Conforme pasa el tiempo  $a(t)$  y  $b(t)$  se apartan de sus valores iniciales debido al efecto del campo rotatorio.

Se consigue una simplificación importante si utilizamos el sistema de coordenadas del sistema rotatorio, así que, transformaremos  $|\psi(t)\rangle$  por medio del operador unitario

$$O = e^{i\omega t\sigma_z/2} :$$

$$\psi(t) = O^{-1}\psi(t)O = e^{-i\omega t\sigma_z/2}\psi(t)e^{i\omega t\sigma_z/2} \quad (1.44)$$

Dado que  $H'$  (ecuación 3.41)) es independiente del tiempo, es correcto expresar el desarrollo temporal de  $\psi'(t)$  por:

$$\psi'(t) = e^{-iH't/\hbar} \psi'(0) = e^{-iH't/\hbar} \psi(0) = e^{-iH't/\hbar} |\beta\rangle \quad (1.45)$$

donde se ha tomado en cuenta las condiciones iniciales  $a(0) = 0$ ,  $b(0) = 1$ .

Combinando las ecuaciones (1.43), (1.44) y (1.45) obtenemos:

$$\psi(t) = a(t)|\alpha\rangle + b(t)|\beta\rangle = e^{-i\omega t \sigma_z / 2} e^{-iH't/\hbar} |\beta\rangle \quad (1.46)$$

o, en vista de la ortonormalidad de las funciones de espín:

$$a(t) = \langle \alpha | e^{-i\omega t \sigma_z / 2} e^{-iH't/\hbar} |\beta\rangle \quad (1.47)$$

Para evaluar un elemento de matriz, es conveniente definir:

$$\Omega = (\gamma B_0 - \omega) \hat{k} + \gamma b_1 \hat{i} = \gamma \mathbf{B}_{efec} = \Delta \hat{k} + \gamma b_1 \hat{i} \quad (1.48a)$$

$$\Omega = \sqrt{(\gamma B_0 - \omega)^2 + (\gamma b_1)^2} \quad (1.48b)$$

$$\text{sen } \theta = \frac{\gamma b_1}{\Omega}, \quad \text{cos } \theta = \frac{\gamma B_0 - \omega}{\Omega} = \frac{\omega_0 - \omega}{\Omega} = \frac{\Delta}{\Omega} \quad (1.49)$$

El hamiltoniano  $H'$  (ecuación (1.41)) puede escribirse ahora como:

$$H' = \frac{\gamma \hbar}{2} \left[ \left( B_0 - \frac{\omega}{\gamma} \right) \sigma_z + b_1 \sigma_x \right] = \frac{\hbar \Omega}{2} (\text{cos } \theta \sigma_z + \text{sen } \theta \sigma_x) \quad (1.50)$$

que da como resultado:

$$\begin{aligned}
 e^{-iH't/\hbar} &= e^{-i\Omega(\cos\theta\sigma_z + \text{sen}\theta\sigma_x)t/2} \\
 &= \cos\left[\frac{\Omega}{2}(\cos\theta\sigma_z + \text{sen}\theta\sigma_x)t\right] - i\text{sen}\left[\frac{\Omega}{2}(\cos\theta\sigma_z + \text{sen}\theta\sigma_x)t\right]
 \end{aligned} \tag{1.51}$$

Escribiendo:

$$\cos\theta\sigma_z + \text{sen}\theta\sigma_x = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \tag{1.52}$$

se verifica inmediatamente que las potencias pares de la matriz son iguales a la matriz unitaria  $\mathbf{I}$  y que las potencias impares simplemente reproducen la matriz original. Por tanto:

$$\begin{aligned}
 \cos\left[\frac{\Omega}{2}(\cos\theta\sigma_z + \text{sen}\theta\sigma_x)t\right] &= \cos\frac{\Omega t}{2}\mathbf{I} \\
 \text{sen}\left[\frac{\Omega}{2}(\cos\theta\sigma_z + \text{sen}\theta\sigma_x)t\right] &= (\cos\theta\sigma_z + \text{sen}\theta\sigma_x)\text{sen}\frac{\Omega t}{2} \\
 e^{-iH't/\hbar} &= \cos\frac{\Omega t}{2}\mathbf{I} - i(\cos\theta\sigma_z + \text{sen}\theta\sigma_x)\text{sen}\frac{\Omega t}{2}
 \end{aligned} \tag{1.53}$$

El elemento de matriz en la ecuación (1.47) ahora se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 a(t) &= \langle\alpha|e^{-i\omega t\sigma_z/2}e^{-iH't/2}|\beta\rangle = \cos\frac{\Omega t}{2}\langle\alpha|e^{-i\omega t\sigma_z/2}|\beta\rangle \\
 &\quad - i\text{sen}\frac{\Omega t}{2}\cos\theta\langle\alpha|e^{-i\omega t\sigma_z/2}\sigma_z|\beta\rangle \\
 &\quad - i\text{sen}\frac{\Omega t}{2}\text{sen}\theta\langle\alpha|e^{-i\omega t\sigma_z/2}\sigma_x|\beta\rangle
 \end{aligned} \tag{1.54}$$

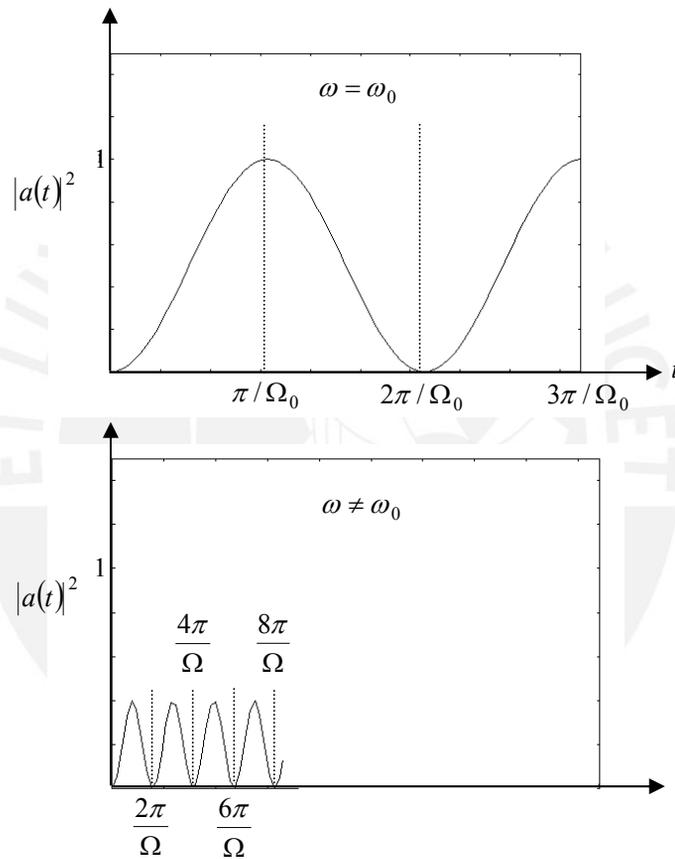
Como  $\sigma_z|\beta\rangle = -|\beta\rangle$ ,  $\sigma_x|\beta\rangle = |\alpha\rangle$ , y  $\langle\alpha|\beta\rangle = 0$ , solamente el último de los tres términos del lado derecho de la ecuación no desaparece, por tanto:

$$a(t) = -i\text{sen}\frac{\Omega t}{2}\text{sen}\theta\langle\alpha|e^{-i\omega t\sigma_z/2}|\alpha\rangle = -i\text{sen}\frac{\Omega t}{2}\text{sen}\theta e^{-i\omega t/2} \tag{1.55}$$

y la probabilidad de encontrar al sistema en el estado  $|\alpha\rangle$  está dada por:

$$\begin{aligned}
 |a(t)|^2 &= \text{sen}^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \text{sen} \theta = \left(\frac{\gamma b_1}{\Omega}\right)^2 \text{sen}^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \\
 &= \frac{(\gamma b_1)^2}{\Delta^2 + (\gamma b_1)^2} \text{sen}^2 \frac{t}{2} \sqrt{\Delta^2 + (\gamma b_1)^2}
 \end{aligned}
 \tag{1.56}$$

Esta ecuación se conoce como la fórmula de Rabi y  $\Omega$ , de acuerdo con la ecuación (1.48b), es la frecuencia de Rabi, también conocida como la frecuencia de nutación.



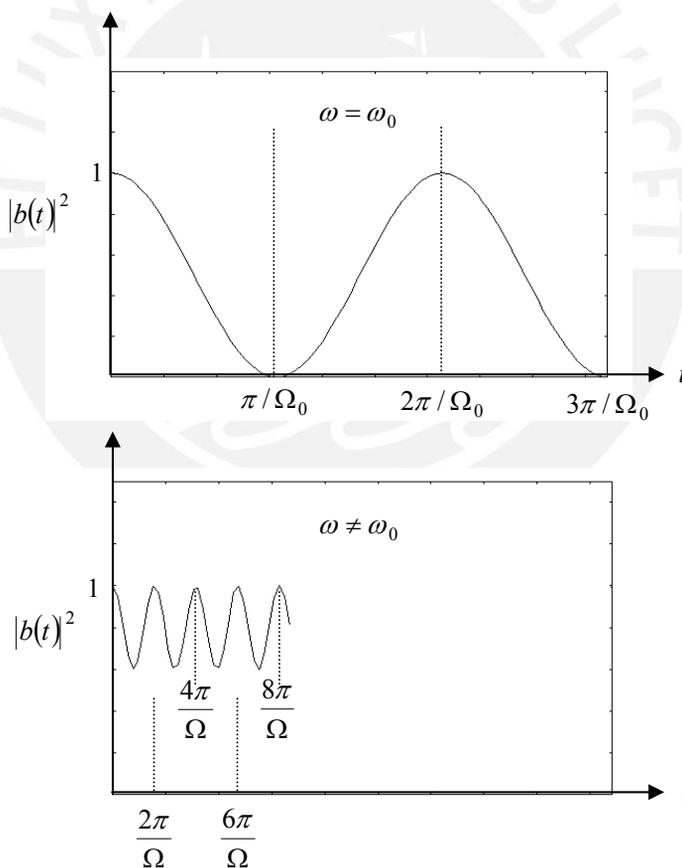
**Fig. 1.2** Cuando la población de un sistema de dos niveles está completamente en el nivel inferior, la población del estado superior oscila con el tiempo (oscilación de Rabi). En el diagrama superior, en la resonancia, la oscilación está entre cero y uno. En el diagrama inferior, fuera de la resonancia, la oscilación está entre cero y un valor menor que uno.

La fórmula de Rabi indica que la población en el estado superior oscila en el tiempo (Fig. 1.2). En la resonancia ( $\Delta = 0$ ),  $\gamma b_1 \equiv \Omega_0$ , la fórmula de Rabi se reduce entonces a:

$$|a(t)|^2 = \text{sen}^2 \frac{\gamma b_1 t}{2} = \text{sen}^2 \frac{\Omega_0 t}{2}
 \tag{1.57}$$

en este caso la oscilación está entre cero y uno, alcanzándose el valor más alto al tiempo  $t = \pi / \gamma b_1 = \pi / \Omega_0$ . Esto significa que si al tiempo  $t = 0$  el sistema está en el estado  $|\beta\rangle$ , entonces, después de que pase un tiempo  $\pi / \Omega_0$ , el sistema ocupará el estado  $|\alpha\rangle$ . Cuanto mayor es el valor de  $b_1$  –la amplitud del campo rotatorio- menor es el tiempo requerido para la inversión del espín. De acuerdo a la terminología de la resonancia magnética,  $\pi / \Omega_0$  es conocido como el pulso  $\pi$ .

Evidentemente, hay una similitud muy grande entre las descripciones clásica y cuántica, siendo esto más patente en la resonancia. En el marco de referencia rotatorio, el momento magnético invierte su dirección al tiempo  $\pi / \gamma b_1$ , que es precisamente el tiempo requerido para que se dé la transición  $|\beta\rangle \rightarrow |\alpha\rangle$  tal como se deduce de la fórmula de Rabi.



**Fig. 1.3** Oscilaciones de la población en el estado inferior de un sistema de dos niveles bajo las mismas condiciones iniciales de la figura 1.2. En el diagrama superior, en la resonancia, las oscilaciones están entre cero y uno (i.e., en cuadratura con la oscilación en el estado superior). En el diagrama inferior, fuera de la resonancia, la oscilación está entre un máximo igual a uno y un valor mayor que cero.

En vista de la condición de normalización  $|a(t)|^2 + |b(t)|^2 = 1$ , la población en  $|\beta\rangle$  también oscila con el tiempo (Fig. 1.3). Así, en la resonancia, cuando las condiciones están dadas por  $a(0) = 0$  y  $b(0) = 1$ , entonces vale:

$$|b(t)|^2 = \cos^2 \frac{\gamma b_1 t}{2} = \cos^2 \frac{\Omega_0 t}{2} \quad (1.58)$$

Las dos relaciones en las ecuaciones (1.57) y (1.58) implican que, en promedio, los estados  $|\alpha\rangle$  y  $|\beta\rangle$  están igualmente poblados. Sin embargo, cuando  $\omega \neq \omega_0$ ,  $|a(t)|^2 < 1$ ; la población promedio en el estado inferior  $|\beta\rangle$  es mayor que en el estado superior  $|\alpha\rangle$  (Figuras 1.2 y 1.3).

Para la resonancia magnética, experimentalmente, es preferible usar campos magnéticos oscilatorios en lugar de campos magnéticos rotatorios. Sin embargo, un campo magnético oscilatorio no es sino la superposición de dos campos que giran en dirección contraria, uno de los cuales está efectivamente dentro de la aproximación de la onda rotante. Por tanto, podemos reemplazar  $b_1$  en la fórmula de Rabi por  $B_1/2$  donde  $B_1$  es la amplitud del campo oscilatorio; por tanto:

$$|a(t)|^2 = \frac{\left(\frac{\gamma B_1}{2}\right)^2}{\Delta^2 + \left(\frac{\gamma B_1}{2}\right)^2} \text{sen}^2 \frac{t}{2} \sqrt{\Delta^2 + \left(\frac{\gamma B_1}{2}\right)^2} \quad (1.59)$$

La fórmula de Rabi predice la probabilidad para las transiciones inducidas por el campo magnético rotatorio entre los dos estados de espín. Aunque la fórmula de Rabi no lo muestra, existe otro mecanismo que permite que haya transiciones desde el estado excitado al estado base: la emisión espontánea. Este mecanismo disminuye rápidamente cuando disminuye la separación entre los dos estados, y aun, en experimentos que emplean campos muy grandes, para pequeñas separaciones entre los estados de espín, la emisión espontánea se hace despreciable.

## 2. El modelo de Jaynes-Cummings

El modelo de Jaynes-Cummings (JCM) describe a un átomo o molécula que puede acceder a sólo dos estados. Este sistema biestable interactúa con un campo electromagnético monomodal sustentado por una cavidad resonante. El modelo se usó originalmente para estudiar los aspectos clásicos de la emisión espontánea; sin embargo, estudios subsecuentes revelaron características que no se encontraban en los campos clásicos; se dice entonces que el campo JCM es eminentemente cuántico, lo que hace al modelo apropiado para el estudio de la interacción de la radiación con la materia al nivel más básico, cuyos aspectos cuánticos se ven camuflados en modelos donde la interacción del campo electromagnético de la cavidad resonante se hace con muchos átomos a la vez.

Aunque el modelo fue propuesto originalmente en 1963<sup>14</sup>, tuvo que pasar cerca de dos décadas para que los físicos desarrollaran un dispositivo experimental que pudiera constatar las predicciones del modelo<sup>15</sup>, el dispositivo en cuestión recibe el nombre de *micromáser*, cuyo comportamiento es el tema del presente trabajo.

### 2.1 Interacción de la radiación con la materia

Dentro del límite no relativista, el hamiltoniano que describe a un electrón moviéndose en un potencial central  $U(\mathbf{r})$  y en presencia de un campo electromagnético cuantizado descrito por el operador  $A$  es:

$$H = \frac{1}{2m}(p - eA)^2 + eU(r) + H_c \quad (2.1)$$

donde  $m$ ,  $e$ ,  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{r}$  son la masa; carga; *momentum* y posición del electrón respectivamente.

<sup>14</sup> E.T. Jaynes y F.W. Cummings; 1963, *Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser*, Proc. IEEE, **51**, 89

<sup>15</sup> D. Meschede, H. Walther y G. Müller; 1985, *One atom maser*, Phys. Rev. Lett., **54**, 6

El término  $H_c$  en la ecuación (2.1) es el campo electromagnético cuantizado. Usando los operadores de aniquilación y creación usados en la teoría del oscilador armónico cuántico tradicional<sup>16</sup> este término adopta la forma:

$$H_c = \sum_{k,\lambda} \hbar \omega_k \left( a_{k,\lambda}^+ a_{k,\lambda} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.2)$$

El término (2.2) representa la suma del número de fotones  $a_{k,\lambda}^+ a_{k,\lambda}$  en cada modo multiplicado por la energía del fotón en ese modo más la energía de las fluctuaciones del vacío  $\frac{1}{2} \hbar \omega$ .

Desarrollando la ecuación (2.1) obtenemos los siguientes términos:

$$H_a = \frac{p^2}{2m} + eU(r) \quad (2.3)$$

$$H_c = \sum_{k,\lambda} \hbar \omega_k \left( a_{k,\lambda}^+ a_{k,\lambda} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.4)$$

$$H_{ac} = -\frac{e}{m} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \frac{e^2}{m} A^2 \quad (2.5)$$

El hamiltoniano (2.3) representa la energía del átomo libre, por lo que se le denomina también como hamiltoniano no perturbado. El hamiltoniano (2.4) es el campo electromagnético cuantizado (2.2). El hamiltoniano (2.5) es el hamiltoniano de interacción átomo campo. Tiene dos términos: uno lineal y otro cuadrático en  $e$ . El primero representa la interacción entre el electrón y el campo  $\mathbf{A}$ , y el segundo, llamado "*término diamagnético*" representa la energía de interacción mutua entre los diferentes modos del campo a través del acoplamiento de él con el electrón.

En la mayoría de los análisis de óptica cuántica, el término diamagnético no es tomado en cuenta ya que es muy pequeño comparado con los otros términos del hamiltoniano (2.1);

<sup>16</sup> C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y F. Laloë; 1977, *Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons, New York.

sin embargo, se ha demostrado que fuera de la RWA puede adquirir significación al modificar la frecuencia del modo del campo<sup>17</sup>.

Debe aclararse que en general  $p$  no conmuta con  $A$ , pero en el *gauge* de Coulomb sí conmutan. Si tomamos un estado arbitrario  $\psi$  y utilizando la identidad  $p \equiv -i\hbar\nabla$  podemos escribir:  $(p.A)\psi = -i\hbar\nabla \cdot (A\psi) = -i\hbar\psi\nabla \cdot A + A(-i\hbar\nabla\psi)$ , como en el *gauge* de Coulomb  $\nabla \cdot A = 0$ , entonces  $p \cdot A = A \cdot p$ , justificándose así los términos obtenidos en (2.5).

También debemos decir que el hamiltoniano (2.1) no incluye las pérdidas debido al contacto con la cavidad resonante que actúa como un baño térmico, porque estamos considerando una cavidad ideal. Suponiendo que esto es factible, en principio podemos resolver la ecuación de Schrödinger y obtener la evolución del sistema; esto se logra representando el potencial vectorial en la imagen de Schrödinger como:

$$A_s = A(r,0) = \sum_{k,\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k \epsilon_0 V}} \hat{e}_{k,\lambda} \left[ a_{k,\lambda} e^{i(k \cdot r)} + a_{k,\lambda}^+ e^{-i(k \cdot r)} \right] \quad (2.6)$$

donde el subíndice  $s$  indica que el operador  $A$  está en la imagen de Schrödinger;  $\hat{e}_{k,\lambda}$  es el acostumbrado vector de polarización<sup>18</sup> y  $V$  es el volumen de la caja de lado  $L$  usada para “confinar” las ondas planas que sirvieron de base para representar el potencial vectorial  $A$ <sup>19</sup>.

Sin embargo, esto no puede hacerse exactamente y debemos recurrir a los métodos perturbativos de solución. Esto se justifica cuando el hamiltoniano (2.5) es muy pequeño comparado con los otros términos del hamiltoniano total. En nuestro caso no será necesario recurrir a estos métodos puesto que nos limitaremos a trabajar dentro de la RWA, donde el problema de la diagonalización se resuelve en forma exacta.

<sup>17</sup> Michael D. Crisp; 1992, *Application of the displaced oscillator basis in quantum optics*, Phys. Rev. **46**, 4138.

<sup>18</sup> Este vector debe cumplir las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \hat{e}_{k,\lambda} \cdot \hat{e}_{k,\lambda'} &= \delta_{\lambda\lambda'} \\ \hat{e}_{k,\lambda} \cdot \hat{K} &= 0 \end{aligned}$$

$\hat{K}$  es el vector de onda y el índice  $\lambda$  especifica las dos posibles polarizaciones independientes.

<sup>19</sup> W.H.Louisell; 1973, *Quantum Statistical Properties of Radiation*, John Wiley & Sons, New York.

Podemos simplificar aún más el problema considerando nuestro sistema átomo campo como un sistema donde sólo dos estados propios son significativos, es decir, privilegiamos la transición atómica sólo entre dos niveles energéticos y escogemos un modo del campo electromagnético que esté de acuerdo con la transición atómica. La simplificación sugerida, considerada como un ejercicio académico durante muchos años, es la base teórica en la que se sustenta el micromáser.

## 2.2 Sistemas cuánticos de dos niveles y el modelo de Jaynes-Cummings

La literatura sobre óptica cuántica y espectroscopia láser está llena de discusiones sobre sistemas de dos niveles. Este énfasis radica en que la interacción de estos sistemas con un campo electromagnético pueden tratarse con gran detalle para obtener valiosos resultados analíticos, esperando que tales resultados nos proporcionen información que pueda extenderse a situaciones más reales. Afortunadamente, hay importantes ejemplos en que la aplicación del modelo de dos niveles conduce a la construcción de una teoría más completa.

El término “sistema de dos niveles” se refiere a aquellos sistemas con sólo dos niveles energéticos relevantes, *i.e.* dos niveles cuánticos diferenciados por al menos un número cuántico, por ejemplo dos estados cuánticos diferentes del átomo de hidrógeno. Como ya hemos dicho, estos sistemas se tratan en conexión con algún campo electromagnético, tal que tenemos un modelo muy simple de la interacción de la radiación con la materia. Esta aproximación donde la materia sólo posee dos niveles, funciona bastante bien en el caso de la interacción resonante o cuasi resonante de la radiación con la materia, por ejemplo, un átomo, ya que no son necesarios los otros niveles debido a que éstos no pueden excitarse.

Los modelos de dos niveles se estudian en el contexto de la resonancia magnética nuclear, donde el momento dipolar magnético de un sistema de espines interactúa con un campo electromagnético. Estos modelos también son la base de la física de láseres y la óptica cuántica donde puede observarse la interacción dipolar eléctrica de un átomo con el campo radiante. Recientemente, los sistemas de dos niveles han adquirido popularidad en el campo de la *computación cuántica* donde tales sistemas se usan para almacenar y procesar información en los llamados “bits cuánticos”<sup>20</sup>

---

<sup>20</sup> Eleanor Rieffel, 19 de enero de 2000, *An Introduction to Quantum Computing for Non-Physicists*, FX Palo Alto Laboratory and Wolfgang Polak Consultant.

Como cualquier operador asociado a dos estados puede escribirse como una combinación lineal de las matrices de Pauli más la matriz identidad, podemos escribir el hamiltoniano atómico (2.3) como:

$$H_a = \hbar \begin{pmatrix} \omega_e & 0 \\ 0 & \omega_g \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

donde los dos niveles accesibles son los estados: excitado  $|e\rangle$  y base  $|g\rangle$  cuyas energías propias son respectivamente  $E_e = \hbar\omega_e$  y  $E_g = \hbar\omega_g$ . Como  $H_a$  es diagonal en la base escogida, luego de alguna manipulación algebraica simple, podemos escribirlo como:

$$H_a = \frac{1}{2} \hbar(\omega_e + \omega_g) \mathbf{I} + \frac{1}{2} \hbar(\omega_e - \omega_g) \sigma_z \quad (2.8)$$

y el hamiltoniano del campo electromagnético (2.2) como:

$$H_c = \hbar\omega(a^\dagger a) \mathbf{I} \quad (2.9)$$

donde hemos redefinido la energía del punto cero y considerado un solo modo del campo de frecuencia  $\omega$ .

Si desechamos el término diamagnético en el hamiltoniano de interacción (2.5) y hacemos la aproximación dipolar<sup>21</sup> podemos expresar el potencial vectorial (2.6) como:

$$A(0) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\epsilon_0 V}} e_x (a + a^\dagger) \mathbf{I} \quad (2.10)$$

donde hemos escogido la dirección de polarización en el eje  $X$  y tomado al núcleo atómico como el origen de coordenadas ( $\mathbf{r} = 0$ ).

<sup>21</sup> Esta aproximación es válida aquí porque podemos considerar que el campo electromagnético es constante en el volumen ocupado por el átomo ya que las longitudes de onda del campo son mucho más grandes que las dimensiones atómicas.

Para desarrollar apropiadamente (2.5) teniendo en cuenta a (2.10) debemos notar que los estados atómicos  $|e\rangle$  y  $|g\rangle$  tienen una paridad definida, mientras que el operador *momentum* atómico tiene paridad impar; por tanto sus elementos matriciales  $\langle e|p|e\rangle$  y  $\langle g|p|g\rangle$  son ceros. Entonces el operador *momentum* atómico podemos expresarlo usando las matrices de Pauli como:

$$p = \wp \hat{e} \sigma^+ + \wp^* \hat{e}^* \sigma^- \quad (2.11)$$

donde hemos definido  $\wp$  como:  $\wp = \langle e|p \cdot \hat{e}|g\rangle$ , siendo  $\hat{e}$  un vector de polarización complejo.

Al haber asumido una polarización en el eje X,  $\wp$  es igual a  $\langle e|p_x|g\rangle$ , con lo cual el hamiltoniano de interacción toma la forma:

$$H_{ac} = -\frac{e}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\epsilon_0 V}} (a + a^+) (\wp \sigma^+ + \wp^* \sigma^-) \quad (2.12)$$

Como estamos en un sistema de dos niveles, la fase de  $\wp$  es la diferencia de las fases de los dos niveles atómicos accesibles, la cual siempre la podemos escoger de tal manera que  $\wp = \wp^*$ , con lo cual (2.12) puede escribirse como:

$$H_{ac} = \hbar g (a + a^+) (\sigma^+ + \sigma^-) \quad (2.13)$$

donde definimos la *constante de interacción átomo campo* como:

$$g = -\frac{e \wp}{m \hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\epsilon_0 V}} \quad (2.14)$$

Usando (2.8), (2.9) y (2.13) el hamiltoniano (2.1) puede expresarse de la forma siguiente:

$$H = \frac{\hbar}{2}(\omega_e + \omega_g)\mathbf{I} + \frac{\hbar}{2}(\omega_e - \omega_g)\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar g(a^\dagger + a)(\sigma^+ + \sigma^-) \quad (2.15)$$

Usamos ahora la *aproximación de la onda rotante* (RWA) y desechemos los términos contrarrotantes, aquellos que “no conservan la energía”, obteniendo el *hamiltoniano de Jaynes-Cummings*:

$$H_{JCM} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar g(a^\dagger\sigma^- + a\sigma^-) \quad (2.16)$$

donde hemos corrido el origen de la energía de la transición atómica a la mitad entre  $E_e$  y  $E_g$  tal que  $\hbar\omega_0 = E_e - E_g$ ; siendo  $\omega_0$  la frecuencia de la transición atómica.

El uso de la RWA es casi universal en la óptica cuántica, consistiendo su principal virtud en que el hamiltoniano (2.16) tiene solución exacta.

Con el fin de comprender el modelo es conveniente ver como se diagonaliza el hamiltoniano de Jaynes-Cummings. En efecto, usando una base mixta resultado del producto tensorial de los estados número y los estados atómicos, la matriz infinita del Hamiltoniano (2.16) sólo contiene elementos diferentes de cero en bloques de  $2 \times 2$  a lo largo de la diagonal<sup>22</sup>. La diagonalización puede hacerse bloque por bloque, resultando un problema de valor propio de dos niveles. Por ejemplo, tomando uno de estos bloques cuya base original sea  $\{|e, n-1\rangle, |g, n\rangle\}$ , obtenemos la matriz:

$$\begin{pmatrix} \langle e, n-1 | H_{JCM} | e, n-1 \rangle & \langle e, n-1 | H_{JCM} | g, n \rangle \\ \langle g, n | H_{JCM} | e, n-1 \rangle & \langle g, n | H_{JCM} | g, n \rangle \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

donde:

$$\langle e, n-1 | H_{JCM} | e, n-1 \rangle = \hbar \left[ \frac{1}{2}\omega_0 + (n-1)\omega \right] \quad (2.18a)$$

$$\langle e, n-1 | H_{JCM} | g, n \rangle = \hbar g \sqrt{n} \quad (2.18b)$$

<sup>22</sup> P.L. Knight y P.W. Miloni; 1980, *The Rabi frequency in optical spectra*, Phys. Reports, 66 N°2, 21-107

$$\langle g, n | H_{JCM} | e, n-1 \rangle = \hbar g \sqrt{n} \quad (2.18c)$$

$$\langle g, n | H_{JCM} | g, n \rangle = -\hbar \left[ \frac{1}{2} \omega_0 - n\omega \right] \quad (2.18d)$$

La energía de interacción  $V = \hbar g(a^+ \sigma^- + a \sigma^+)$  ha acoplado los estados  $|e, n-1\rangle$  y  $|g, n\rangle$ . Estos estados llamados *undressed states* son estados propios del Hamiltoniano no perturbado  $H_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sigma_z + \hbar \omega a^+ a$ . Se puede ver que:

$$\begin{pmatrix} \langle e, n-1 | H_0 | e, n-1 \rangle & \langle e, n-1 | H_0 | g, n \rangle \\ \langle g, n | H_0 | e, n-1 \rangle & \langle g, n | H_0 | g, n \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hbar \left[ \frac{\omega_0}{2} + (n-1)\omega \right] & 0 \\ 0 & \hbar \left[ -\frac{\omega_0}{2} + n\omega \right] \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

con lo que el hamiltoniano de Jaynes-Cummings será la suma de cada uno de estos bloques, uno de cuyos representantes es (2.17), el que podemos escribir como:

$$H_n = \hbar \omega \left( n - \frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta & 2g\sqrt{n} \\ 2g\sqrt{n} & -\Delta \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

donde  $\Delta = \omega_0 - \omega$  es el parámetro de sintonización y  $2g\sqrt{n}$  es la frecuencia de Rabi cuando  $\Delta = 0$ , cumpliéndose que  $H_{JCM} = \sum_n H_n$ . Al diagonalizar (2.17) los estados propios resultantes conocidos como *dressed states* son una combinación lineal de la base original<sup>23</sup>:

$$|+, n\rangle = \cos\left(\frac{1}{2}\theta_n\right) |e, n-1\rangle + \sin\left(\frac{1}{2}\theta_n\right) |g, n\rangle \quad (2.21a)$$

$$|-, n\rangle = -\sin\left(\frac{1}{2}\theta_n\right) |e, n-1\rangle + \cos\left(\frac{1}{2}\theta_n\right) |g, n\rangle \quad (2.21b)$$

<sup>23</sup> Mitchell Weissbluth; 1989, *Photon-Atom Interactions*, Academic Press, Inc, San Diego, CA.

donde se ha introducido el ángulo de Rabi  $\theta_n$  definido como:  $\text{Tg}(\theta_n) = \frac{2g\sqrt{n}}{\Delta}$ .

Los *dressed states* tienen una separación energética igual a:

$$E_{(+,n)} - E_{(-,n)} = \hbar\sqrt{\Delta^2 + 4g^2n} \quad (2.22)$$

El radical en (2.22) es la frecuencia de Rabi con la cual el átomo oscila entre los estados  $|e, n-1\rangle$  y  $|g, n\rangle$  con las probabilidades de transición<sup>24</sup>:

$$\left\langle n, g \left| e^{-i\frac{H_{JCM}\tau}{\hbar}} \right| n, g \right\rangle = 1 - q_n(\tau) \quad (2.23a)$$

$$\left\langle n-1, e \left| e^{-i\frac{H_{JCM}\tau}{\hbar}} \right| n, g \right\rangle = q_n(\tau) \quad (2.23b)$$

$$\left\langle n, e \left| e^{-i\frac{H_{JCM}\tau}{\hbar}} \right| n, e \right\rangle = 1 - q_{n+1}(\tau) \quad (2.23c)$$

$$\left\langle n+1, g \left| e^{-i\frac{H_{JCM}\tau}{\hbar}} \right| n, e \right\rangle = q_{n+1}(\tau) \quad (2.23d)$$

donde:

$$q_n(\tau) = \frac{g^2n}{g^2n + \frac{1}{4}\Delta} \text{sen}^2\left(\tau\sqrt{g^2n + \frac{1}{4}\Delta}\right) \quad (2.24)$$

El caso que trataremos será la resonancia exacta entre la frecuencia del campo y de la transición atómica, es decir,  $\Delta = 0$ . La frecuencia de Rabi será  $\Omega_n = 2g\sqrt{n}$ , mientras que  $q_n(\tau)$  se reduce a:

$$q_n(\tau) = \text{sen}^2(gt\sqrt{n}) \quad (2.25)$$

<sup>24</sup> C. Cohen, B. Diu y F. Laloë; 1977, *Quantum Mechanics*, John Willey and Sons, New York.

En el caso particular del micromáser, donde el campo fotónico que encuentra el átomo que ingresa a la cavidad es el resultado de la interacción del campo electromagnético con los átomos que ingresaron previamente y los efectos disipativos, si denotamos la probabilidad de encontrar  $n$  fotones justo antes de que haya pasado por la cavidad el  $i$ -ésimo átomo como  $p_n(t_i)$ , entonces la probabilidad de transición o probabilidad condicional<sup>25</sup> de que un átomo excitado decaiga al estado base estará dada por:

$$p_g(t_i + \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} q_{n+1} p_n(t_i) \quad (2.26)$$

Correspondientemente, la probabilidad condicional de que el átomo que entró en estado excitado no sufra transición<sup>26</sup> será:

$$p_e(t_i + \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - q_{n+1}) p_n(t_i) \quad (2.27)$$

### 2.3 Más allá de la RWA

Introducida originalmente en el contexto de la resonancia magnética<sup>27</sup> donde un sistema de espín  $\frac{1}{2}$  actúa bajo la influencia de dos campos magnéticos, uno de ellos uniforme y el otro que oscila en un plano perpendicular al primero; se usa extensamente ya que se puede demostrar que todo hamiltoniano en un espacio de Hilbert bidimensional es equivalente a sistemas de espín  $\frac{1}{2}$ .

Como ya se ha dicho, la aproximación de la onda rotante es casi universal en óptica cuántica. Sin embargo, cuando los campos electromagnéticos son extremadamente intensos<sup>28</sup> o en general cuando la relación  $g/\omega$  no es despreciable, la RWA deja de ser apropiada porque los términos que se desecharon al hacer esta aproximación empiezan a

<sup>25</sup> Ver la ecuación (2.23d)

<sup>26</sup> Ver la ecuación (2.23c)

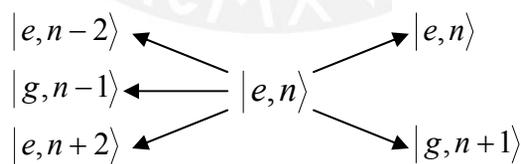
<sup>27</sup> Ver Capítulo 1.

<sup>28</sup> En sistemas magnéticos cuyo campo es muy grande, el campo que gira a favor de las manecillas del reloj produce un pequeño corrimiento en la frecuencia de resonancia llamado corrimiento de *Block-Siebert*.

ser significativos y en el modelo se hacen manifiestas nuevas características<sup>29</sup> que deberían poderse medir en los experimentos reales, ya que la naturaleza “no hace ninguna aproximación”.

La inclusión de los llamados términos “contrarrotantes” en el modelo refuerza el carácter cuántico del micromáser. Esta afirmación puede apreciarse mejor si consideramos que en el formalismo de la matriz densidad, los términos fuera de la diagonal principal son interpretados como las coherencias cuánticas<sup>30</sup>, es decir, aquellas relaciones entre los componentes de un sistema que sólo se manifiestan a nivel cuántico y que se pierden en el ámbito clásico<sup>31</sup>. En ese sentido, la RWA es menos cuántica de lo que debería ser. En particular, en el micromáser, la matriz densidad del sistema es tridiagonal, porque sólo se consideran las interacciones de los elementos adyacentes a la diagonal principal. En aquellos modelos donde se cuestiona la validez de la RWA, la matriz densidad pierde su *tridiagonalidad*, surgiendo así “más coherencias cuánticas”, decimos entonces, que hay más física si incluimos los términos contrarrotantes que si los excluimos.

Como se verá<sup>32</sup>, la matriz densidad del sistema átomo–campo del micromáser se describe por el producto tensorial de las matrices densidad del sistema atómico por el sistema de la cavidad resonante. Usando la base compuesta por los estados atómicos  $e$  y  $g$  y los estados Fock que dan cuenta del número de fotones presentes en la cavidad a un tiempo dado podemos esquematizar las interacciones entre los estados del sistema cuando no hacemos la RWA, sino que vamos un orden más allá en  $g/\omega$ :



<sup>29</sup> Francisco de Zela; 1999; *Micromaser dynamics beyond the rotating-wave approximation*. Ver nota bibliográfica n° 7.

<sup>30</sup> Karl Blum; 1981, *Density Matrix Theory and Applications*, Plenum Press, New York.

<sup>31</sup> Si describimos un sistema clásico con el formalismo cuántico, la matriz densidad del sistema sería una matriz diagonal, ya que las coherencias cuánticas se habrán reducido a valores completamente despreciables.

<sup>32</sup> Véase Apéndice C.

Nótese la aparición de procesos completamente inexplicables desde el punto de vista clásico, por ejemplo, hay  $n$  fotones en la cavidad y el átomo ingresó a ella en estado excitado, al salir de ella en estado excitado esperaríamos que persista el número de fotones, sin embargo hay  $n-2$  fotones:  $|e, n\rangle \rightarrow |e, n-2\rangle$ .

Creemos que para regímenes donde la relación  $g/\omega$  no es despreciable, estos efectos deben ser medibles experimentalmente. La esencia del presente trabajo es investigar mediante la simulación *Montecarlo* las predicciones teóricas del equipo de óptica cuántica de la Pontificia Universidad Católica del Perú, en particular, a lo largo de la línea de investigación iniciada por Francisco de Zela Martínez<sup>33</sup>.



---

<sup>33</sup> Francisco de Zela; 1999; *Micromaser dynamics beyond the rotating-wave approximation*. Ver nota bibliográfica n° 7.

### 3. El micromáser

El modelo de Jaynes-Cummings para la interacción de un solo átomo con un solo modo del campo electromagnético solamente tuvo interés académico hasta el advenimiento de los láseres de frecuencia sintonizable que permitieron la producción de *átomos Rydberg*<sup>34</sup>. Estos estados se acoplan fuertemente al campo electromagnético ya que el momento dipolar de los átomos Rydberg es muy grande. Además, las transiciones a los niveles adyacentes están en la región de las ondas milimétricas, lo que permite construir cavidades de alta fineza que aseguran tiempos de interacción relativamente largos. Los átomos Rydberg también tienen vidas medias lo suficientemente largas para asegurar que sólo sea importante el acoplamiento con el modo de la cavidad seleccionado.

Con el desarrollo de la técnica se han construido cavidades de muy alta fineza, lo que permite ignorar las pérdidas de energía durante el paso de los átomos por ellas. Además se ha reducido la radiación de cuerpo negro al mínimo posible al poderse trabajar a temperaturas del orden de los 0,01 K.

Con estos adelantos se pueden llevar a cabo experimentos donde la naturaleza cuántica de la interacción de la radiación con la materia se manifieste sin los efectos clásicos presentes en los máseres y láseres convencionales.

#### 3.1 Descripción del micromáser

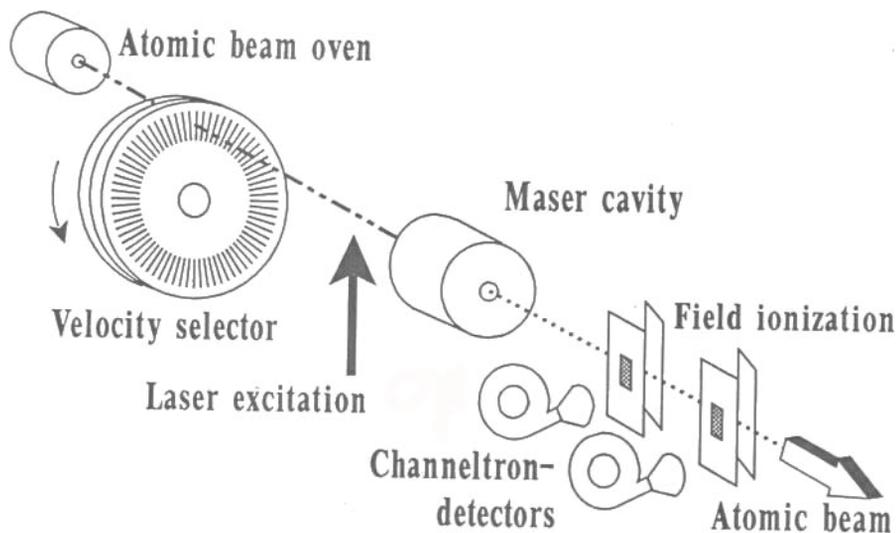
El micromáser es un dispositivo que consta básicamente de dos partes. Dentro de una cámara donde se ha practicado un alto vacío está la cavidad resonante y el horno donde se excitan los átomos que luego entrarán en la cavidad<sup>35</sup>.

Todas las partes del arreglo se montan dentro de un crióstato de helio. Se usa átomos de rubidio 85 obtenidos a partir de un horno que está aislado de la cavidad mediante placas de cobre enfriadas por agua, nitrógeno y helio líquidos. El flujo atómico pasa a través de pequeñas aberturas situadas en la parte del aparato que está enfriada por helio líquido. Allí

<sup>34</sup> Los estados atómicos Rydberg son estados de muy alta energía cuyo número cuántico principal es aproximadamente 20 ó aún mayor, por tanto el electrón de valencia está muy alejado del núcleo y del carozo de electrones tal que todo el sistema se comporta como un átomo de hidrógeno gigante.

<sup>35</sup> D. Meschede y H. Walther; 1985, *One Atom Maser*, Phys. Rev. Lett. **54**, 6, 551-554.

los átomos son excitados mediante radiación láser ultravioleta para luego ingresar a la cavidad. Los átomos se monitorean por medio de ionizadores y la detección posterior de los electrones emitidos se realiza con *electromultiplicadores* del tipo *channeltron*.



**Fig. 3.1** Esquema del arreglo experimental típico en los experimentos con el micromáser. (Dibujo tomado de: G.Rempe, F. Schmidt-Kaler, y H. Walther; 1990, *Observation of Sub-Poissonian Photon Statistics in a micromaser*, Phys. Rev. Lett. **64**, 23, 2783-2786.)

La cavidad cilíndrica tiene un diámetro de 24.7 mm y una longitud de 24 mm. Se construye de barras de niobio de alta pureza, constando de dos partes: un tarro cilíndrico y una cubierta donde está acoplada la guía de ondas.

La temperatura de la cavidad puede llegar a décimas de K, lo que corresponde a factores de calidad  $Q$  del orden de  $10^{10}$  lo que limita el número medio de fotones térmicos a rangos mínimos (1.5 ó menos)<sup>36</sup>.

El campo electromagnético sustentado por la cavidad resonante tiene una intensidad máxima de aproximadamente 20 V/cm. Una transición máser típica es  $63_{p_{3/2}} - 61_{d_{5/2}}$  lo que corresponde a unos 21 506.51(5) Mhz.<sup>37</sup>

El tiempo promedio típico que demora un átomo en atravesar el resonador es de alrededor de 80  $\mu$ s. Si tenemos flujos atómicos de 800 átomos/s, se asegura una

<sup>36</sup> El número medio de fotones térmicos puede calcularse usando  $n_b = [\exp(h\nu/k_b T)]^{-1}$ .

<sup>37</sup> G.Rempe, F. Schmidt-Kaler, y H. Walther; 1990, *Observation of Sub-Poissonian Photon Statistics in a micromaser*, Phys. Rev. Lett. **64**, 23, 2783-2786.

probabilidad de encontrar un átomo Rydberg dentro de la cavidad igual a 0.06, es decir, más del 99% de los eventos corresponden a un solo átomo.

Dado que con el tiempo la transición se satura, aproximadamente la mitad de los átomos que inicialmente están en el estado  $63_{p3/2}$  dejan la cavidad en el estado  $61_{d5/2}$ .

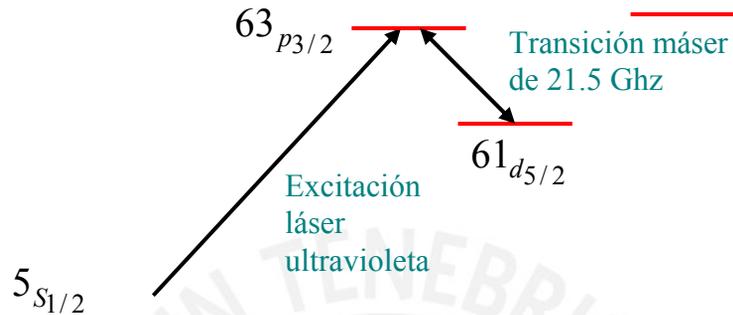


Fig. 3.2 Esquema del nivel de excitación del rubidio 85.

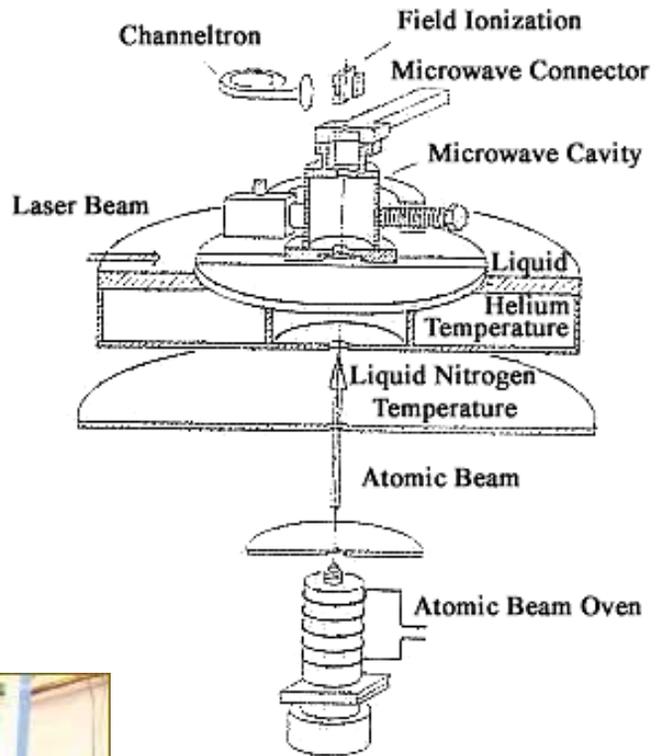
El decaimiento a otros niveles puede despreciarse para tiempos de tránsito igual a 80  $\mu$ s. El número promedio de fotones dejados en el resonador por estos átomos está dado por:

$$\langle n \rangle = \tau_d \frac{N}{2} \tag{3.1}$$

donde  $\tau_d$  es el tiempo de decaimiento característico de la cavidad y  $N$  el número de átomos Rydberg que ingresan en el resonador durante la unidad de tiempo. Tiempos típicos de decaimiento son del orden de 5 ms a la temperatura de 2 K y de 0.13 ms a la temperatura de 4.3 K. Los flujos atómicos oscilan entre 800 átomos y  $22 \times 10^3$  átomos por segundo. Por tanto, a una temperatura de 2 K y con un  $N$  igual a 800 átomos/s la energía de la radiación generada por los átomos Rydberg en la cavidad es aproximadamente igual a la de la energía de cuerpo negro.

La constante de acoplamiento entre el átomo y la radiación es lo suficientemente grande para permitir un intercambio múltiple de fotones entre el modo de la cavidad y un solo átomo Rydberg. Por ejemplo, a una temperatura de 2 K y a un flujo muy raleado de aproximadamente 800 átomos por segundo, un átomo Rydberg realiza entre 5 y 20 periodos de Rabi antes de abandonar la cavidad.

**Fig. 3.3** Esquema de las distintas partes del micromáser, donde se muestra la cámara de vacío con el dispositivo generador del flujo atómico y la cavidad resonante. (Dibujo tomado de: D.Meschede y H. Walther; 1985, *One Atom Maser*, Phys. Rev. Lett. **54**, 6, 551-554)



**Fig. 3.4** Equipo usado en el *Max-Planck-Institut für Quantenoptik*, uno de los centros donde actualmente el micromáser es objeto de investigación. (Foto tomada de la página WEB del *Max-Planck-Institut für Quantenoptik*.)

### 3.2 La estadística fotónica y el proceso iterativo en el micromáser

El micromáser es un ejemplo físico del modelo de Jaynes-Cummings de un solo átomo de dos niveles que interacciona con un único modo de un campo electromagnético. Proporciona una excelente oportunidad para estudiar varios efectos propios de la óptica cuántica, efectos que han sido predichos y en algunos casos verificados experimentalmente, tales como la producción de los llamados *estados atrapados*<sup>38</sup>; la naturaleza subpoissoniana de su distribución fotónica<sup>39</sup> y la presencia de los llamados *colapsos y renacimientos* de Jaynes-Cummings<sup>40</sup>.

En experimentos típicos con el micromáser, el tiempo de vuelo atómico es del orden de los microsegundos. Dado el alto factor de fineza de la cavidad y las temperaturas experimentales usadas que son cercanas al cero absoluto, la vida media del fotón dentro del resonador es del orden de los milisegundos e incluso últimamente del orden de los segundos con el mejoramiento en las técnicas de construcción de la cavidad.

Con estas características, mientras el átomo está dentro del resonador, podemos ignorar las pérdidas debidas a imperfecciones y a interacciones con la radiación de cuerpo negro. Por tanto, el paso del  $i$ -ésimo átomo por la cavidad puede describirse por el hamiltoniano de Jaynes-Cummings, siempre y cuando el experimento cumpla con los requisitos de la RWA.

La dinámica de la interacción átomo-campo durante el tiempo de vuelo atómico  $\tau$  está descrita por<sup>41</sup>:

$$\rho_{ac}(t_i + \tau) = U(\tau) \rho_{ac}(t_i) U^\dagger(\tau) \quad (3.2)$$

Dado nuestro interés en el campo electromagnético hacemos una traza parcial sobre los grados de libertad atómicos en (3.2) para quedarnos con el operador densidad del campo:

$$\rho_c(t_i + \tau) = \text{Tr}_{\text{átomos}} [\rho_{ac}(t_i + \tau)] \quad (3.3)$$

<sup>38</sup> P. Filipowicz, J. Javanainen y P. Meystre; 1986, *Theory of Microscopic Maser*, Phys. Rev. **34**, 3077.

<sup>39</sup> A diferencia de la distribución poissoniana típica de los láseres y másers normales.

<sup>40</sup> F. W. Cummings, Phys. Rev. **140**, 1051 (1965).

<sup>41</sup> Ver apéndice B.

Siguiendo la línea de razonamiento de Filipowicz et al.<sup>42</sup> usaremos una nomenclatura más compacta. Definimos el operador  $F(\tau)$  de la siguiente manera:

$$F(\tau)\rho_c(t_i) \equiv Tr_{\text{átomos}} [U(\tau)[\rho_a(t_i) \otimes \rho_c(t_i)]U^+(\tau) \quad (3.4)$$

con el cual podemos escribir (3.3) como:

$$\rho_c(t_i + \tau) = F(\tau)[\rho_c(t_i)] \quad (3.5)$$

Para dar cuenta de la evolución del campo fotónico sustentado por la cavidad durante el tiempo  $t_p$  en que ésta está vacía<sup>43</sup>, definimos el superoperador de decaimiento Liouvilliano:

$$L\rho_c \equiv \frac{\gamma}{2}(n_b + 1)[a^+ a \rho_c - a \rho_c a^+] - \frac{\gamma}{2}n_b[\rho_c a a^+ - a^+ \rho_c a] + \text{adj.} \quad (3.6)$$

con el cual podemos plantear la ecuación diferencial que gobierna la evolución del campo electromagnético durante el tiempo  $t_p$ :

$$\frac{d}{dt} \rho_c(t) = L\rho_c(t) \quad (3.7)$$

Teniendo en cuenta (3.5) podemos solucionar “formalmente” (3.7) para obtener el campo electromagnético que interactuará con el  $(i + 1)$ -ésimo átomo que entra dentro de la cavidad:

$$\rho_c(t_{i+1}) = e^{L t_p} F(\tau) \rho_c(t_i) \quad (3.8)$$

<sup>42</sup> P. Filipowicz, J. Javanainen y P. Meystre; 1986, *Theory of Microscopic Maser*, Phys. Rev. **34**, 3077.

<sup>43</sup> Es decir, el tiempo que transcurre entre la salida de la cavidad del  $i$ -ésimo átomo y la entrada del siguiente.

La ecuación (3.8) es un “mapeo” que vincula  $\rho_c$  de un átomo dado con el siguiente, por tanto, este mapeo puede usarse para hallar el operador densidad del campo electromagnético a cualquier tiempo mediante un cálculo iterativo.

De acuerdo a las características del modelo de Jaynes–Cummings, el operador  $F(\tau)$  actúa como el mecanismo de “ganancias” y el Liouvilliano como el mecanismo de “pérdidas”. El operador  $F(\tau)$  está en la imagen de Schrödinger mientras que el Liouvilliano definido en la ecuación (3.6) está en la imagen de interacción. Es necesario poner ambos operadores en la misma imagen. En la imagen de interacción y en la base atómica  $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ <sup>44</sup> el operador

evolución  $U(\tau) = e^{-i\frac{H_{JCM}\tau}{\hbar}}$  se convierte en<sup>45</sup>:

$$U(\tau) = \begin{pmatrix} C & \tilde{S} \\ S & \tilde{C} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

donde:

$$\begin{aligned} C &= \cos(g\tau\sqrt{aa^+}) \\ \tilde{C} &= \cos(g\tau\sqrt{a^+a}) \\ S &= -a \frac{\text{sen}(g\tau\sqrt{a^+a})}{\sqrt{a^+a}} \\ \tilde{S} &= -a^+ \frac{\text{sen}(g\tau\sqrt{aa^+})}{\sqrt{aa^+}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

En forma general podemos asumir que el estado inicial del átomo que atraviesa la cavidad es una mezcla diagonal de estados excitados y estados base, por lo tanto, el operador densidad tiene la siguiente forma:

$$\rho_a = \begin{pmatrix} \rho_{ee} & 0 \\ 0 & \rho_{gg} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

<sup>44</sup> los vectores  $|e\rangle$  y  $|g\rangle$  se refieren respectivamente a los estados atómicos excitado y base.

<sup>45</sup> Rafael Salazar Tío, *Cálculo y análisis de los espectros anómalos del micromáser*, Tesis para optar el grado de licenciado en física. Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima-Perú, 1995.

Ganando generalidad podemos escribir la matriz densidad del campo electromagnético en la base de *Fock* como:

$$\rho_c(t_i) = \sum_n p_n |n\rangle\langle n| \quad (3.12)$$

y la matriz densidad del átomo en la base atómica como:

$$\rho_a(t_i) = \rho_{ee} |e\rangle\langle e| + \rho_{gg} |g\rangle\langle g| \quad (3.13)$$

Puesto que el átomo y el campo electromagnético sustentado por la cavidad formarán un *entangled state*, justo antes de que empiece la interacción átomo–campo, el operador densidad que representa al sistema será el producto tensorial de (3.12) por (3.13):

$$\rho_{ac}(t_i) = (\rho_{ee} |e\rangle\langle e| + \rho_{gg} |g\rangle\langle g|) \otimes \left( \sum_n p_n |n\rangle\langle n| \right) \quad (3.14)$$

Si aplicamos el operador evolución (3.9) a (3.14) y tomamos la traza sobre los grados de libertad atómicos, es decir, aplicamos el operador  $F(\tau)$  a (3.14) obtenemos:

$$\rho_c(t_i + \tau) = \sum_n p_n (\rho_{ee} C |n\rangle\langle n| C^+ + \rho_{ee} S |n\rangle\langle n| S^+ + \rho_{gg} \tilde{S} |n\rangle\langle n| \tilde{S}^+ + \rho_{gg} \tilde{C} |n\rangle\langle n| \tilde{C}^+) \quad (3.15)$$

Resolviendo explícitamente en la ecuación anterior las acciones de los operadores definidos en (3.10) sobre la base  $\{|n\rangle\}$ , obtenemos la distribución de probabilidad<sup>46</sup> :

$$\langle n | \rho_c(t_i + \tau) | n \rangle = p_n(t_i + \tau) = \rho_{ee} \text{sen}^2(g\tau\sqrt{n}) p_{n-1}(t_i) + \rho_{gg} \text{sen}^2(g\tau\sqrt{n+1}) p_{n+1}(t_i) + [1 - \rho_{ee} \text{sen}^2(g\tau\sqrt{n+1}) - \rho_{gg} \text{sen}^2(g\tau\sqrt{n})] p_n(t_i) \quad (3.16)$$

<sup>46</sup> Per Elmfors, Benny Lautrup y Bo-Sture Skagerstam; *Dynamics, correlations, and phases of the micromaser*, CERN/TH 95-333 (1995).

El primer término en (3.16) es la probabilidad de decaimiento del estado atómico excitado. El segundo es la probabilidad de excitación del estado base y el tercero es la probabilidad de que el átomo no sufra ninguna transición durante la interacción<sup>47</sup>.

Podríamos haber llegado al resultado (3.16) a partir de las probabilidades de transición (2.23) si consideramos que la probabilidad de encontrar  $n$  fotones en la cavidad al tiempo  $t_i$  es  $p_n(t_i)$  y una vez que se active la interacción átomo–campo, entonces la probabilidad de que la población fotónica aumente por un decaimiento será  $\rho_{ee} q_n(\tau) p_{n-1}(t_i)$ , o que disminuya por una excitación:  $\rho_{gg} q_{n+1}(\tau) p_{n+1}(t_i)$ , o que quede igual, porque no ha existido transición alguna,  $\{\rho_{ee} [1 - q_{n+1}(\tau)] + \rho_{gg} [1 - q_n(\tau)]\} p_n(t_i)$ .

En nuestros experimentos, los átomos siempre ingresarán a la cavidad en estado excitado ( $\rho_{ee}=1, \rho_{gg}=0$ ), con lo cual, (3.16) se reduce a:

$$p_n(t_i + \tau) = \text{sen}^2(g\tau\sqrt{n})p_{n-1}(t_i) + \text{cos}^2(g\tau\sqrt{n+1})p_n(t_i) \quad (3.17)$$

Durante el tiempo que la cavidad está vacía, el campo de la cavidad disipa energía de acuerdo a la ecuación maestra para los decaimientos<sup>48</sup>. Los elementos diagonales de esta ecuación en la base de *Fock* son<sup>49</sup>:

$$\frac{d}{dt} p_n = \gamma(n_b + 1)[(n+1)p_{n+1} - n p_n] + \gamma n_b [n p_{n-1} - (n+1)p_n] \quad (3.18)$$

De la discusión anterior vemos que en nuestros experimentos la matriz de campo conserva la diagonalidad, interpretándose los elementos de esta diagonal como la estadística fotónica del micromáser, conteniendo ésta toda la información que necesitamos acerca del campo del resonador. Si no realizamos medición alguna los mecanismos de ganancias y pérdidas deben llegar al equilibrio, obteniéndose una estadística fotónica estacionaria correspondiente al mapeo (3.8). En otras palabras, el campo fotónico que encuentran los átomos subsiguientes es el mismo.

<sup>47</sup> Se ha usado la condición:  $\rho_{ee} + \rho_{gg} = 1$ .

<sup>48</sup> Ver Apéndice C.

<sup>49</sup> P. Meystre y M. Sargent III; 1991, *Elements of Quantum Optics*, Springer-Verlag, Berlin.

Podemos llegar a una expresión analítica de esta estadística<sup>50</sup> mediante la condición  $\rho_c(t_i + 1) = \rho_c(t_i) \equiv \rho_{\text{estacionaria}}$  y asumiendo que la inyección atómica obedece a una estadística de Poisson con un promedio temporal igual a:  $\bar{t}_p = R^{-1} = (N\gamma)^{-1}$ . Con estas condiciones el mapeo (3.8) se transforma en:

$$\rho_{\text{estacionaria}} = \frac{1}{1 - L\bar{t}_p} F(\tau) \rho_{\text{estacionaria}} \quad (3.19)$$

donde se ha reemplazado el operador Liouvilliano por su promedio  $(1 - L\bar{t}_p)^{-1}$  sobre la distribución exponencial:  $P(t_p) = Re^{-Rt_p}$ .

Con las ecuaciones (3.17), (3.18) y (3.19) se llega a una relación recursiva para el número de ocupación  $\bar{p}_n = \langle n | \rho_{\text{estacionaria}} | n \rangle$  que conduce a una expresión analítica para la estadística fotónica estacionaria:

$$\bar{p}_n = C \left[ \frac{n_b}{1 + n_b} \right]^n \prod_{k=1}^n \left[ 1 + \frac{N}{(n_b + 1)} \frac{\text{sen}^2(g\tau\sqrt{k})}{k} \right] \quad (3.20)$$

donde  $C$  es una constante de normalización que se determina exigiendo que  $\sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}_n = 1$ .

Evidentemente el mapeo (3.8) conduce el mismo resultado que (3.20) después de que un número determinado de átomos han atravesado la cavidad, número que depende de las variable dinámicas del Micromáser.

<sup>50</sup> Per Elmfors, Benny Lautrup y Bo-Sture Skagerstam; *Dynamics, correlations, and phases of the micromaser*, CERN/TH 95-333 (1995).

### 3.3 Rasgos no clásicos de la estadística del micromáser: *estados atrapados*.

Dadas las características del micromáser, éste presenta rasgos puramente cuánticos, es decir, rasgos que no se encuentran en los láseres y máseres normales donde la naturaleza cuántica de la interacción de la radiación con la materia queda oculta tras el gran número de átomos que intervienen en el proceso<sup>51</sup>. Dado que la estadística fotónica (3.20) contiene toda la información<sup>52</sup> acerca de las propiedades estadísticas del estado de equilibrio alcanzado por el micromáser, debemos esperar que ésta presente aspectos característicos del sistema, aspectos ajenos a los láseres y máseres comunes que en buena medida pueden ser considerados dispositivos clásicos.

En efecto, desde el trabajo de P. Filipowicz et al. aparecido en 1986, se ha constatado sus predicciones y han surgido otras que sólo pueden explicarse en el contexto cuántico. Uno de estos rasgos es la aparición de los llamados *estados atrapados*<sup>53</sup>, cuya existencia se predijo en una discusión teórica acerca de un micromáser sin pérdidas. Estos estados son estados número, es decir, estados donde el número de fotones está determinado. Los *estados atrapados* resultan de la naturaleza coherente de la interacción átomo-campo. Si los átomos que entran en la cavidad siempre lo hacen en estado excitado y ésta no tiene mecanismos disipativos o están muy disminuidos<sup>54</sup>, el micromáser siempre evolucionará hacia una mezcla de estos estados. Cuando se está en un *estado atrapado*, el átomo que inicialmente estaba en estado excitado, al entrar en ella, realiza un número entero de oscilaciones de Rabi para finalmente salir de la cavidad en estado excitado. Como se puede ver, el átomo no realiza transición alguna<sup>55</sup>, por lo tanto, el número de fotones en la cavidad permanece fijo, rasgo característico de un estado número.

En el ámbito de la RWA, la condición de entrapamiento se logra haciendo igual a cero la probabilidad de transición condicional (2.26) tal que  $q_{n+1} = 0$ , es decir,  $\text{sen}^2(g\tau\sqrt{n+1}) = 0$ .

<sup>51</sup> En el caso del micromáser, un flujo atómico de muy baja densidad es necesario para evitar los efectos radiativos colectivos de los átomos, por ejemplo la *superradiancia*.

<sup>52</sup> Esto se debe a que el campo de la cavidad permanece diagonal en todo momento.

<sup>53</sup> P. Meystre, G. Rempe y H. Walther; diciembre de 1988, *Very low temperature behavior of a micromaser*, OPTICS LETTERS, VOL. 13, No. 12.

<sup>54</sup> Cuando el número medio de fotones térmicos  $n_b$  tiende a cero, es decir, a muy bajas temperaturas.

<sup>55</sup> Esto sucede cuando la probabilidad de emisión estimulada es cero.

Con esta condición y etiquetando el número de oscilaciones de Rabi como  $q$  podemos escribir la condición para que se dé un *estado atrapado*:

$$g\tau\sqrt{n_q + 1} = k\pi \quad (3.21)$$

donde  $k$  es un número entero que junto con  $q$  sirven para identificar de qué *estado atrapado* se trata.

En general, los *estados atrapados* son muy sensibles a cualquier variación de las condiciones que los produjeron. El micromáser tiene un mecanismo fuertemente incoherente cuando hay fotones térmicos dentro de la cavidad, debido a fluctuaciones en la temperatura es posible tener transiciones del estado número  $n_q$  al estado número  $n_q + 1$ . Además, el decaimiento propio de la cavidad induce las transiciones contrarias: del estado número  $n_q$  al estado número  $n_q - 1$ . Con este mecanismo el sistema “escapa” del *estado atrapado* haciendo su producción un problema experimental difícil.

Sin embargo, en el límite cuando el número medio de fotones térmicos tiende a cero, los mecanismos de ganancias y pérdidas del micromáser se reducen a:

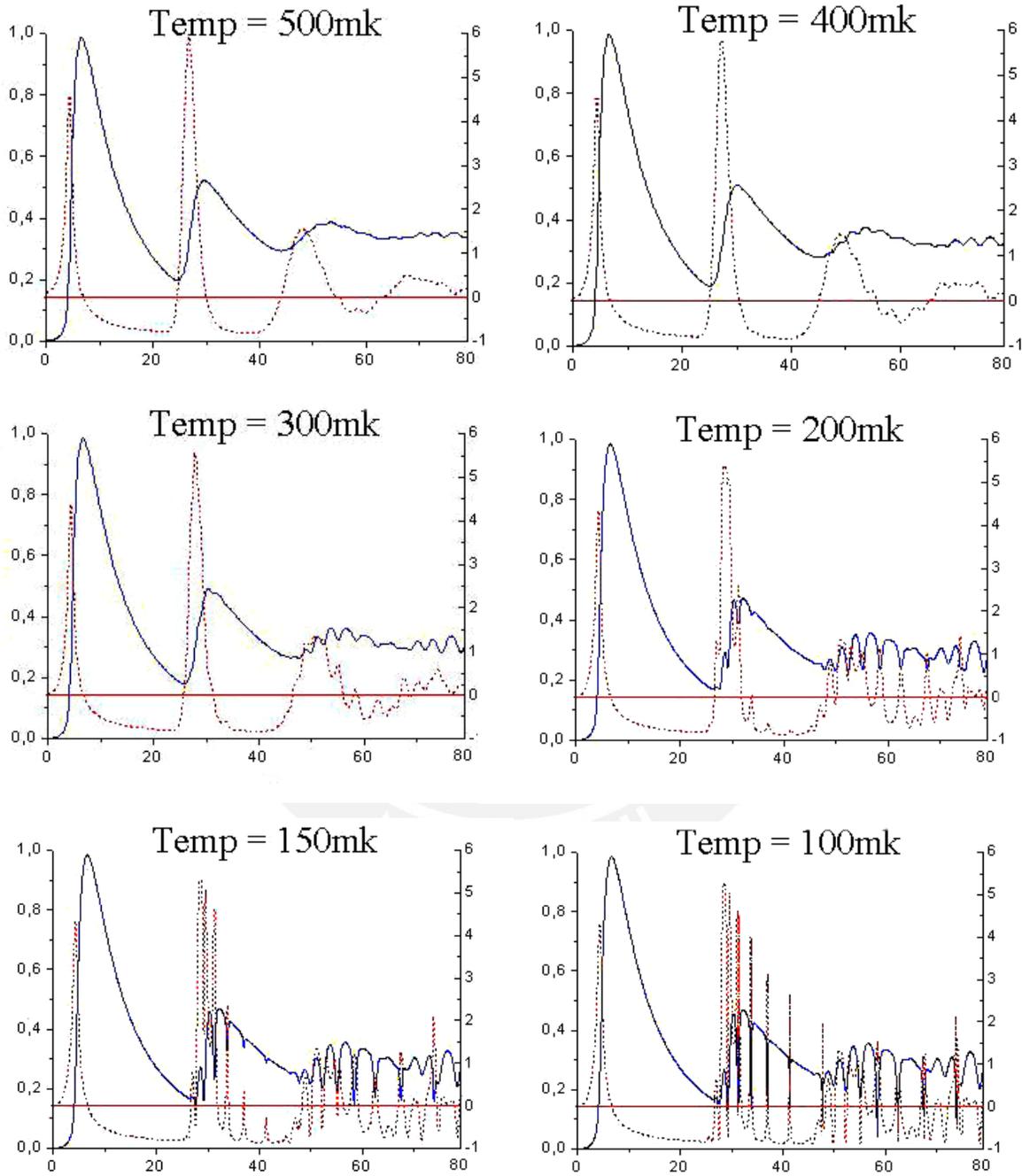
$$\frac{d}{dt} p_n(t) = \gamma[(n+1)p_{n+1}(t) - np_n] \quad (3.22)$$

permitiéndose solamente transiciones hacia abajo debido a la disipación. A diferencia de las fluctuaciones térmicas, las fluctuaciones del vacío no permiten que el estado del micromáser exceda el *estado atrapado*  $|n_q\rangle$ . En este límite la ecuación para la distribución fotónica del equilibrio (3.20) se reduce a:

$$p_n = C \prod_{k=1}^n \frac{N}{k} \text{sen}^2(g\tau\sqrt{k}) \quad (3.23)$$

Si la ecuación (3.21) se cumple para algún  $k$  entonces  $p_n$  es igual a cero para  $n > k$ , es decir, la estadística fotónica del micromáser se trunca en el *estado atrapado*  $|n_q\rangle$ . Luego,

estos estados son responsables de una estructura adicional en las gráficas del número medio de fotones *versus*  $g\tau$ , manifestándose como depresiones en las gráficas solamente cuando la temperatura es muy baja.



**Fig. 3.5** Las figuras muestran con línea continua el número medio de fotones normalizado  $\langle n \rangle / N$  vs el tiempo de interacción expresado en microsegundos. La línea discontinua muestra la variancia del número fotónico (el parámetro de Fano Mandel). Nótese como conforme baja la temperatura desde 500 milikelvin hasta 100 milikelvin las curvas suaves adquieren agudas depresiones debido a la aparición de *estados atrapados*.

### 3.4 La teoría del micromáser fuera de la RWA<sup>56</sup>

Hay tres escalas de tiempo independientes que determinan el comportamiento dinámico del micromáser. En primer lugar, tenemos el intervalo promedio de tiempo  $t_p$  entre dos átomos consecutivos, para lo cual se puede asumir una distribución Poissoniana. Segundo, el tiempo de interacción átomo-campo  $\tau$ . Tercero, el tiempo característico de decaimiento fotónico  $1/\gamma$ , donde  $\gamma$  significa la razón de decaimiento debido a las pérdidas de la cavidad. Para átomos que están siendo inyectados a la razón  $R = 1/t_p$  (átomos por segundo), la razón adimensional referida antes está dada por  $N = R/\gamma$ . La condición experimental de tener al menos un átomo dentro de la cavidad en un tiempo dado se traduce en la condición  $R\tau \ll 1$ . Como condición ulterior tenemos que  $\gamma\tau \ll 1$ , significando que puede ignorarse los decaimientos durante el tiempo de interacción. La evolución del sistema átomo-campo está regido por el hamiltoniano de Rabi:

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar g(a + a^\dagger)(\sigma^- + \sigma^+) \quad (3.24)$$

en donde  $\omega_0$  es la frecuencia de transición que conecta los dos niveles atómicos,  $\omega$  es la frecuencia de la cavidad,  $a$  y  $a^\dagger$  son respectivamente los operadores de aniquilación y creación de fotones y  $\sigma^\pm$  son los operadores de Pauli de subida y de bajada. Se ha asumido la aproximación dipolar ya que la longitud de onda de la transición atómica es mucho más grande que las dimensiones del átomo, tal que el campo eléctrico puede considerarse independiente de la posición. La constante de acoplamiento  $g$  es por consiguiente una constante que se fija esencialmente por la transición atómica y el campo de la cavidad.

El hamiltoniano de Rabi se reduce al de Jaynes-Cummings en la aproximación de la onda rotante a:

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar g(a\sigma^+ + a^\dagger\sigma^-) \quad (3.25)$$

<sup>56</sup> El apartado 3.4 es una traducción libre del desarrollo teórico seguido en *Micromaser dynamics beyond the rotating-wave approximation*. Ver nota bibliográfica n° 7.

Se espera que la RWA sea aplicable cuando el sistema esté cerca de la resonancia, i.e.,  $\omega \approx \omega_0$  y para valores suficientemente pequeños de la razón  $g/\omega$ .

Dentro de la RWA, el operador evolución temporal,  $e^{-iHt/\hbar}$ , puede calcularse en forma cerrada, más allá de la RWA debemos confiar en aproximaciones basadas en diferentes esquemas de cálculo. Seguimos aquí el esquema desarrollado por Swain y consideramos dos estados arbitrarios, llamándolos el estado inicial  $|i\rangle$  y el estado final  $|f\rangle$ . La probabilidad de que el estado inicial evolucione bajo la acción del hamiltoniano  $H$  hacia el estado final en el tiempo  $t$  está dada por:

$$P_f^i(t) = |\langle f | i(t) \rangle|^2 = |\langle f | e^{-iEt/\hbar} | i \rangle|^2 \quad (3.26)$$

Swain<sup>57</sup> expresa esta cantidad como:

$$P_f^i(t) = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint L_f^i(E) e^{-iEt/\hbar} dE \right|^2 \quad (3.27)$$

donde  $L_f^i(E)$  puede expresarse en términos de la base propia  $\{|\alpha\rangle\}$  de  $H$  como sigue:

$$L_f^i(E) = \sum_{\alpha} \frac{\langle 1 | \alpha \rangle \langle \alpha | f \rangle}{E - E_{\alpha}} \quad (3.28)$$

Nuestro interés se centrará en casos como  $L_{b,n\pm 1}^{a,n}$ ,  $L_{b,n}^{a,n\pm 1}$ , etc. Aquí,  $|a,n\rangle$  ( $|b,n\rangle$ ) denotan un estado donde el átomo está en el estado *arriba* (*abajo*), siendo  $n$  el número de fotones en el campo. Swain ha derivado un procedimiento general para calcular cantidades como  $L_f^i$  para cualquier orden deseado por medio de la técnica de fracciones continuas. Integrales tales como las que aparecen en la ecuación (3.27) pueden calcularse aplicando el teorema del residuo.

<sup>57</sup> S. Swain; 1973, *A continued fraction solution to the problem of a single atom interacting with a single radiation moden in the electric dipole approximation*. J. Phys. A: Math., Nucl. Gen., Vol. 6, February 1973.

Seguimos el procedimiento estándar considerando un átomo inicialmente excitado descrito por la matriz densidad  $\rho_{at}$  y el campo de la cavidad dado por  $\rho_c$ . Antes que el átomo ingrese en la cavidad, la matriz densidad átomo-campo  $\rho(0)$  está dada por el producto tensorial de las dos partes no interactuantes del sistema:

$$\rho(0) = \rho_{at} \otimes \rho_c. \quad (3.29)$$

Durante el tiempo  $\tau$  cuando un átomo está en la cavidad, el campo fotónico evoluciona de acuerdo a:

$$\rho(\tau) = T(\tau)\rho(0) = Tr_{\text{átomo}} \left( e^{-iHt/\hbar} \rho(0) e^{iHt/\hbar} \right) \quad (3.30)$$

donde por brevedad hemos obviado el subíndice  $c$ .

El operador de transición  $T(\tau)$  puede calcularse en forma cerrada dentro de la RWA. En general, sin embargo, puede descomponerse como:

$$T(\tau) = T^{(+)}(\tau) + T^{(-)}(\tau) \quad (3.31)$$

donde  $T^{(+)}$  y  $T^{(-)}$  corresponden respectivamente a átomos que salen de la cavidad en el estado excitado y desexcitado.

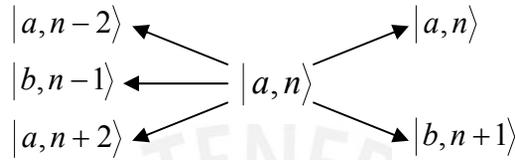
Durante el tiempo entre dos átomos, el campo de la cavidad evoluciona de acuerdo a la ecuación de Liouville:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\gamma L_c \rho = -\frac{\gamma}{2} (n_b + 1) (a^+ a \rho + \rho a^+ a - 2a \rho a^+) - \frac{\gamma}{2} n_b (a a^+ \rho + \rho a a^+ - 2a^+ \rho a) \quad (3.32)$$

con  $\gamma$  denotando la constante de decaimiento de la cavidad y  $n_b$  el número medio de fotones térmicos.

Con las evoluciones parciales dadas por las ecuaciones (3.30) y (3.32) se obtiene la ecuación maestra para el micromáser. El operador transición  $T(\tau)$  no puede calcularse en

forma cerrada fuera de la RWA, sin embargo, podemos calcular  $T(\tau)$  a cualquier orden deseado en el parámetro  $g/\omega$  usando fracciones continuas y cortando el esquema a un orden prescrito para la aproximación buscada. Restrinjámonos a los términos del orden de  $(g/\omega)^2$ . A este orden, las transiciones posibles desde el estado  $|a, n\rangle$ , en el cual el átomo está excitado y hay  $n$  fotones en la cavidad, son las siguientes:



Expresando el operador densidad en la base  $\{|a, n\rangle, |b, n\rangle\}$ , tenemos la siguiente expresión para el operador densidad inicial:

$$\rho(0) = \sum_{\{i,n;j,m\}} \rho_{i,n;j,m} |i,n\rangle\langle j,m| \quad (3.33)$$

Entonces el operador densidad evoluciona hacia:

$$\begin{aligned} & e^{-iHt/\hbar} \rho(0) e^{iHt/\hbar} \\ &= \sum \rho_{a,n;a,m} \left( |k,n'\rangle\langle k,n'| \right) |k,n'\rangle e^{-iHt/\hbar} |a,n\rangle \langle k,m'| e^{-iHt/\hbar} |a,m\rangle \end{aligned} \quad (3.34)$$

En principio, podemos calcular cualquier elemento de matriz  $\langle n|\rho(\tau)|m\rangle$ . Como estamos interesados en las poblaciones,  $p_n = \rho_{n,n}$ , y específicamente en las propiedades del estado estacionario del campo del micromáser, podemos restringir el cálculo anterior, asumiendo que todas las coherencias se van a cero en el estado estacionario, tal que éstas pueden obviarse de las ecuaciones de las poblaciones. Se obtiene la siguiente ecuación para la población de fotones:

$$p_n(\tau) = (P_{a,n}^{a,n} p_n + P_{b,n}^{a,n-1} p_{n-1}) + P_{a,n}^{a,n+2} p_{n+2} + P_{b,n}^{a,n+1} p_{n+1} + P_{a,n}^{a,n-2} p_{n-2} \quad (3.35)$$

donde por brevedad en la parte derecha de la ecuación hemos escrito  $p_n = p_n(0)$ , etc., y las probabilidades  $P_y^x$  están dadas por la ecuación (3.27).

La ecuación (3.35) para las poblaciones difiere de la ecuación estándar en los últimos tres términos, así como en las expresiones respectivas para las probabilidades de transición. Los últimos tres términos corresponden a las formas adicionales en que se puede llegar al estado excitado con  $n$  fotones en la cavidad después del tiempo de interacción  $\tau$ .

Por ejemplo, el término  $P_{a,n}^{a,n+2} p_{n+2}$  corresponde al caso en el cual comenzando con  $n + 2$  fotones en la cavidad, podemos acabar con  $n$  fotones, debido a que ahora hay una probabilidad  $P_{a,n}^{a,n+2} \neq 0$  conectada con los estados iniciales y finales,  $|a, n + 2\rangle$  y  $|a, n\rangle$ .

Transiciones como esas corresponden a los términos  $P_{a,n}^{a,n\pm 2}$  y  $P_{b,n}^{a,n+1}$ , comúnmente llamados “términos que no conservan la energía”. Se dice que provienen de procesos donde intervienen fotones virtuales. Nosotros afirmamos que una transición tal como  $|a, n + 2\rangle \rightarrow |a, n\rangle$  es tan real como la transición  $|a, n\rangle \rightarrow |b, n + 1\rangle$ , aunque las probabilidades correspondientes pueden diferir en varios órdenes de magnitud. Si decimos que una de estas transiciones “conserva la energía” y la otra no, debe haber una mala interpretación: aun sabiendo que dentro de la RWA, ni  $|a, n\rangle$  ni  $|b, n + 1\rangle$  son vectores propios del hamiltoniano de Jaynes-Cummings (JCH). En efecto, cada uno de estos vectores es una combinación lineal de dos vectores propios del JCH. Si un sistema átomo–campo ha sido preparado, por ejemplo, en el estado  $|a, n\rangle$ , y entonces medimos la energía del sistema, podemos obtener cualquiera de los dos valores propios posibles. Lo mismo vale para el estado  $|b, n + 1\rangle$ , tal que, tampoco podemos decir apropiadamente que la energía se conserva en tal transición. Lo que se conserva en estos casos es el número de cuantos. Esto se deduce de que el operador  $N_q = a^\dagger a + \sigma^+ \sigma^-$  cuyos valores propios son el número de cuantos, es en efecto una constante de movimiento para el JCH<sup>58</sup>.

En cambio, para el hamiltoniano de Rabi, lo que se conserva es la “paridad” de los estados. En efecto, Es el operador paridad  $P = \exp(i\pi N_q)$  el que ahora es una constante de movimiento. Esto permite partir el espacio de Hilbert en dos espacios desconectados.

<sup>58</sup> Más allá de la RWA no es más una constante.

Entonces, podemos decir que el número de cuantos es una cantidad que se conserva aproximadamente –si invocamos la RWA se conserva exactamente– siendo la cantidad por la cual no se conserva medida por  $g/\omega$ . Por supuesto, la energía total del sistema debe conservarse, tal que cualquier ganancia o pérdida de energía asociada con la creación o aniquilación de cuantos, debe compensarse de alguna manera en el balance energético total. Dentro del esquema del micromáser la fuente de energía en estos casos debe provenir de la energía cinética de los átomos. Esta energía juega un papel sustancial en la dinámica del sistema solamente para átomos muy fríos. En ese caso deberíamos estar en el contexto del llamado un “mazer” monoatómico. Entonces, el movimiento del centro de masa atómico tiene que incluirse en una forma cuantizada en el hamiltoniano del sistema.

### 3.4.1 Las aproximaciones de la onda rotante y contrarrotante

Antes de profundizar en el desarrollo de la teoría del micromáser más allá de la RWA, analicemos con más detalle la estructura del hamiltoniano de Rabi. A despecho de su aparente simplicidad, su diagonalización permanece aún como un problema abierto. Para analizar mejor el papel jugado por los términos contrarrotantes, seguimos a Crisp<sup>59</sup> escribiendo el hamiltoniano como:

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a - \hbar(\alpha a \sigma^+ + \alpha^* a^\dagger \sigma^- + \beta^* a \sigma^- + \beta a^\dagger \sigma^+) \quad (3.36)$$

con:

$$\alpha = \frac{e}{m} \left( \frac{2\pi}{\hbar\omega V} \right)^{1/2} \langle a | e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{\varepsilon} \cdot \vec{p} | b \rangle, \quad (3.37)$$

$$\beta = \frac{e}{m} \left( \frac{2\pi}{\hbar\omega V} \right)^{1/2} \langle a | e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{\varepsilon} \cdot \vec{p} | b \rangle$$

donde  $\vec{k}$  es el vector número de onda correspondiente a  $\omega$ ,  $V$  es el volumen de la cavidad,  $\vec{p}$  es el operador *momentum*, y  $e$  y  $m$  son respectivamente la carga y la masa del electrón. En la aproximación dipolar  $\vec{k} \cdot \vec{r} = 0$ , tal que  $\alpha = \beta$ ; pero los mantenemos con etiquetas

<sup>59</sup> Michael D. Crisp; 1992, *Application of the displaced oscillator basis in quantum optics*, Phys. Rev. 46, 4138.



$$\cos(\phi_n) \equiv \frac{\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 4|\alpha|^2(n+1)}}{|\omega - \omega_0|} \quad (3.42)$$

Notemos que al descomponer el espacio de Hilbert en dos subespacios  $\varepsilon = \varepsilon_a \oplus \varepsilon_b$  con  $\varepsilon_a = \{|a,0\rangle, |b,1\rangle, |a,2\rangle, |b,3\rangle, |a,4\rangle, |b,5\rangle, \dots\}$  y  $\varepsilon_b = \{|b,0\rangle, |a,1\rangle, |b,2\rangle, |a,3\rangle, |b,4\rangle, |a,5\rangle, \dots\}$  nuestro hamiltoniano se parte en dos bloques tridiagonales:

$$\hbar \begin{pmatrix} \omega_0/2 & -\alpha & & & & \\ -\alpha^* & \omega - \omega_0/2 & -\sqrt{2}\beta^* & & & \\ & -\sqrt{2}\beta & 2\omega - \omega_0/2 & -\sqrt{3}\alpha & & \\ & & -\sqrt{3}\alpha^* & 3\omega - \omega_0/2 & -\sqrt{4}\beta^* & \\ & & & -\sqrt{4}\beta & 4\omega - \omega_0/2 & \\ & & & & & \end{pmatrix}_{\varepsilon_a} \quad (3.43)$$

con una estructura similar para  $\varepsilon_b$ . Aquí también, haciendo  $\beta = 0$  se obtiene una matriz diagonal por bloques. Pero ahora nos podemos dar cuenta que también haciendo  $\alpha = 0$  surge una matriz diagonal por bloques. A ésta la llamamos la *aproximación de la onda contrarrotante* (CRWA). Recalcamos que  $\alpha$  y  $\beta$  son lo mismo numéricamente. Así, la RWA aparece dentro de este contexto como un poco arbitraria.

El problema del valor propio dentro de la CRWA también se resuelve fácilmente llegando a los siguientes autovalores:

$$E_n^\pm = \hbar\omega(n+1/2) \pm \frac{\hbar}{2} \sqrt{(\omega + \omega_0)^2 + 4|\beta|^2(n+1)} \quad (3.44)$$

cuyos vectores propios son:

$$\begin{aligned} |\psi_n^+\rangle &= \text{sen}(\phi_n)|b, n\rangle + \text{cos}(\phi_n)|a, n+1\rangle \\ |\psi_n^-\rangle &= \text{cos}(\phi_n)|b, n\rangle - \text{sen}(\phi_n)|a, n+1\rangle \end{aligned} \quad (3.45)$$

donde:

$$\cos(\phi_n) \equiv \frac{\sqrt{(\omega + \omega_0)^2 + 4|\beta|^2(n+1)}}{|\omega + \omega_0|} \quad (3.46)$$

Estas expresiones son similares a las de la RWA, la única diferencia es que  $(\omega + \omega_0)$  reemplaza a  $(\omega - \omega_0)$  y que el par de vectores conectados son  $|b, n\rangle, |a, n+1\rangle$  en lugar de  $|a, n\rangle, |b, n+1\rangle$ .

Que el hamiltoniano se parta en dos subespacios desconectados  $\varepsilon_a$  y  $\varepsilon_b$ , es una consecuencia del hecho ya mencionado que el operador paridad,  $P = \exp(i\pi N_q)$ , con  $N_q = a^+ a + \sigma^+ \sigma$ , conmute con el hamiltoniano de Rabi. En efecto, todos los vectores en  $\varepsilon_{a(b)}$  tienen una paridad definida: son vectores propios del operador paridad con autovalores  $-1(1)$ . Por otro lado, dentro de la RWA es  $N_q$  el que conmuta con el hamiltoniano de JCM. En este caso, ambos  $|a, n\rangle, |b, n+1\rangle$  son vectores propios de  $N_q$  para el mismo autovalor,  $n + 1$ , tal que el JCH sólo conecta estos dos vectores entre ellos mismos y así, se parte en un conjunto de bloques bidimensionales.

Regresando a la CRWA, tomemos un estado inicial del sistema átomo-cavidad de la forma  $|\psi(0)\rangle = |a\rangle \otimes \sum_n p_n |n\rangle$ , correspondiente a un átomo inicialmente excitado y el campo fotónico en algún estado (puro) mecánico cuántico, definido por las probabilidades de ocupación  $p_n$ . Al tiempo  $t$  el sistema habrá evolucionado al estado:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n a_n^+ e^{-iE_n^+ t/\hbar} |\psi_n^+\rangle + a_n^- e^{-iE_n^- t/\hbar} |\psi_n^-\rangle \quad (3.47)$$

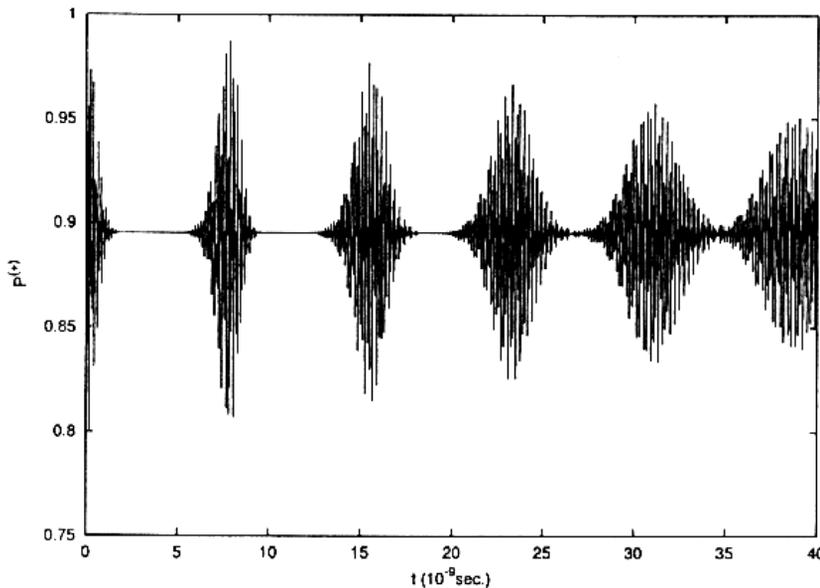
con  $a_n^+ = \langle \psi_n^+ | \psi(0) \rangle = p_{n+1} \cos(\phi_n)$ , y  $a_n^- = \langle \psi_n^- | \psi(0) \rangle = -p_{n+1} \sin(\phi_n)$ . La probabilidad de encontrar al sistema al tiempo  $t$  con un átomo en estado excitado y la cavidad con  $n$  fotones está dada por:

$$P(a, n; t) = |\langle a, n | \psi(t) \rangle|^2 = p_n^2 \left\{ \cos^2\left(\frac{R_{n+1}^+ t}{2}\right) + \cos^2(2\phi_{n-1}) \sin^2\left(\frac{R_{n-1}^+ t}{2}\right) \right\} \quad (3.48)$$

donde  $R_n^+ = \sqrt{(\omega + \omega_0)^2 + 4|\beta|^2(n+1)}$  es la “frecuencia de Rabi” para el caso contrarrotante.

Cerca de la resonancia ( $\omega \approx \omega_0$ ) y para una constante de acoplamiento  $|\beta| \ll \omega_0$ , obtenemos  $|\langle a, n | \psi(t) \rangle|^2 \approx p_n^2$ . En este caso el campo es casi incapaz de inducir transiciones atómicas.

Por otro lado, los fenómenos de colapsos-renacimientos predichos dentro de la RWA también aparecen dentro de la CRWA. En efecto, tomando el correspondiente estado coherente  $p_n = \langle n \rangle^n \exp(-\langle n \rangle) / n!$  para la distribución fotónica, obtenemos el comportamiento de colapsos-renacimientos mostrados en la figura 3.6. Pasa lo mismo que en la RWA pero con oscilaciones mucho más rápidas.



**Fig. 3.6.** Colapsos y renacimientos para la población del estado atómico excitado en la CRWA. Los parámetros del experimento son  $g = 4.4 \text{ GHz}$ ,  $\omega = \omega_0 = 21 \text{ GHz}$ ,  $\langle n \rangle = 6.25$

### 3.4.2 Diagonalización del hamiltoniano de Rabi por el método de fracciones continuas

Las matrices tridiagonales que representan al hamiltoniano de Rabi en los subespacios  $\varepsilon_{a(b)}$  conducen a problemas de valor propio de la forma:

$$\begin{vmatrix} Q_0 - \lambda & Q_0^+ & & & & \\ Q_1^- & Q_1 - \lambda & Q_1^+ & & & \\ & Q_2^- & Q_2 - \lambda & Q_2^+ & & \\ & & Q_3^- & Q_3 - \lambda & Q_3^+ & \\ & & & Q_4^- & Q_4 - \lambda & \end{vmatrix} = 0 \quad (3.49)$$

Esta ecuación secular puede resolverse aplicando las técnicas desarrolladas para los llamado “continuantés”<sup>60</sup> o por medio de usar procedimientos iterativos que conducen a fracciones continuas<sup>61</sup>. En cualquier caso, se puede escribir una ecuación de la forma:

$$Q_m - \lambda = C_1(Q_n^\pm, \lambda) + C_2(Q_n^\pm, \lambda) \quad (3.50)$$

donde  $C_{1,2}(Q_n^\pm, \lambda)$  representan dos fracciones continuas. Obtenemos para el valor propio  $\lambda$  la ecuación:

$$\begin{aligned} n\omega + (-1)^n \frac{\omega_0}{2} - \lambda &= \frac{(n+1)g^2}{(n+1)\omega + (-1)^{n+1} \frac{\omega_0}{2} - \lambda - \frac{(n+2)g^2}{(n+2)\omega + (-1)^{n+2} \frac{\omega_0}{2} - \lambda \dots}} + \\ &\frac{ng^2}{(n-1)\omega + (-1)^{n-1} \frac{\omega_0}{2} - \lambda - \frac{(n-2)g^2}{(n-2)\omega + (-1)^{n-2} \frac{\omega_0}{2} - \lambda \dots}} \end{aligned} \quad (3.51)$$

<sup>60</sup> T. Muir, W. H. Metzler; 1938, *A treatise on the theory of determinants*, Dover Pub., New York.

<sup>61</sup> H. Risken; 1989, *The Fokker-Planck equation: Methods of solutions and applications*, Springer-Verlag, Berlin.

donde establecemos que  $g = -\alpha = -\beta$ , explotando la posibilidad de escoger la fase relativa de los dos niveles atómicos y haciendo que  $\alpha$  –y consecuentemente  $\beta$ – sea un número real.

Aproximaciones sucesivas conducen a las siguientes raíces:

$$\lambda_n^\pm = n\omega + \frac{\omega + \omega_0}{2} + \frac{g^2}{2} \left( \frac{n}{\Omega \mp U} - \frac{n+2}{\Omega \pm U} \right) \mp V_\pm \quad (3.52)$$

donde

$$U = \frac{1}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 4g^2(n+1)} \quad (3.53a)$$

$$V_\pm = \left[ \frac{\omega - \omega_0}{2} + g^2(n+1) - \frac{g^2}{2} \left( \frac{n}{\Omega \mp U} + \frac{n+2}{\Omega \pm U} \right) \right]^2 \quad (3.53b)$$

con  $\Omega = \frac{1}{2}(\omega_0 + 3\omega)$ .

Este resultado lo obtuvo Swain algunos años atrás<sup>62</sup> siguiendo métodos un tanto diferentes. Para  $g \ll \omega$ , las expresiones obtenidas para  $\lambda_n^\pm$  se reducen a aquellas obtenidas para la RWA (pero con un nivel de referencia energético diferente):

$$\lambda_n^{\pm(RWA)} = n\omega + \frac{\omega + \omega_0}{2} \mp U \quad (3.54)$$

Concerniente al problema del valor propio, vemos que la matriz a ser diagonalizada se ha convertido en:

$$\hbar \begin{pmatrix} \omega_0/2 & g & & & & \\ g & \omega - \omega_0/2 & \sqrt{2}g & & & \\ & \sqrt{2}g & 2\omega - \omega_0/2 & \sqrt{3}g & & \\ & & \sqrt{3}g & 3\omega - \omega_0/2 & \sqrt{4}g & \\ & & & \sqrt{4}g & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}_{\varepsilon_a} \quad (3.55)$$

<sup>62</sup> S. Swain; *Continued fraction expressions for the eigensolutions of the hamiltonian describing the interaction between a single atom and a single field mode: comparisons with the rotating wave solutions*, J. Phys. A: Math., Nucl. Gen., Vol. 6, December 1973

con una matriz similar para  $\varepsilon_b$ . Esta matriz se puede tomar como la representación de Fock del hamiltoniano dado por:

$$H = \hbar\omega a^+ a + \hbar \frac{\omega_0}{2} \cos(\pi a^+ a) + \hbar g(a + a^+) \quad (3.56)$$

El problema del valor propio para este hamiltoniano se resuelve si diagonalizamos:

$$H_a = H - \hbar\omega g_\omega^2 = \hbar \frac{\omega_0}{2} \cos(\pi a^+ a) + \hbar g(a^+ - g_\omega)(a - g_\omega) \quad (3.57)$$

donde  $g_\omega = g/\omega$ . Ahora, introduciendo el operador desplazamiento:

$$D(d) = \exp(da^+ - d^* a) \quad (3.58)$$

podemos escribir:

$$\begin{aligned} H_a &= \hbar\omega D^+(g_\omega) a^+ a D(g_\omega) + \hbar \frac{\omega_0}{2} \cos(\pi a^+ a) \\ &= \hbar\omega D^+(g_\omega) a^+ a D(g_\omega) + \hbar \frac{\omega_0}{2} \exp(i\pi a^+ a) \end{aligned} \quad (3.59)$$

El problema de valor propio para el hamiltoniano de Rabi se reduce por tanto a la diagonalización del hamiltoniano  $H_a$  y el hamiltoniano correspondiente para el subespacio  $\varepsilon_b$ . Este último difiere de  $H_a$  solamente en el signo del término de paridad  $\hbar \frac{\omega_0}{2} \exp(i\pi a^+ a)$ .

Lo que hace difícil el problema de la diagonalización es la combinación, en el mismo hamiltoniano, de un operador número “desplazado”  $D^+(g_\omega) a^+ a D(g_\omega)$  más otro no desplazado.

El problema de valor propio para matrices tridiagonales puede alternativamente transformarse en un problema de encontrar las raíces de algún polinomio ortogonal. En efecto, considere la función peso  $W(x)$ , escogida convenientemente para definir el producto escalar de dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  a través de:

$$(f, g) = \int_a^b W(x)f(x)g(x)dx \tag{3.61}$$

Este producto escalar nos provee de una métrica para nuestro espacio de funciones, tal que, podemos definir la ortogonalidad y la normalización. Por tanto, podemos construir a conjunto de polinomios mutuamente ortogonales  $p_j(x)$  a través de la relación de recurrencia:

$$p_{j+1}(x) = (x - a_j)p_j(x) - b_j p_{j-1}(x) \tag{3.62}$$

donde  $j = 0, 1, 2, \dots$  denota el orden de los polinomios.

Los coeficientes en la ecuación (3.62) están dados por:

$$a_j = \frac{(xp_{j+1}, p_j)}{(p_j, p_j)} \tag{3.63}$$

$$b_j = \frac{(p_j, p_j)}{(p_{j-1}, p_{j-1})}$$

La relación de recurrencia (3.62) involucra a la matriz tridiagonal:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 & & & \\ b_1 & a_1 & 1 & & \\ & b_2 & a_2 & 1 & \\ & & b_3 & a_3 & 1 \\ & & & b_4 & \ddots \end{pmatrix} \tag{3.64}$$

En efecto, esta ecuación de recurrencia puede escribirse en forma vectorial como:

$$xp(x) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{p}(x) + p_N(x)\mathbf{e}_{N-1} \tag{3.65}$$

siendo  $N$  el orden al cual cortamos la matriz, mientras que  $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \dots, p_{N-1})$  y  $\mathbf{e}_{N-1} = (0, 0, \dots, p_N)$ .



### 3.4.3 Las probabilidades de transición

Ya sea, por medio de aplicar las técnicas desarrolladas por Swain o por medio de resolver el problema completo del valor propio, se puede calcular las probabilidades de transición desde cualquier estado inicial a cualquier estado final. En lo que sigue, consideraremos el caso resonante,  $\omega = \omega_0$ . Swain ha obtenido las probabilidades de transición relevantes para nuestro caso a segundo orden en  $g_\omega \equiv g / \omega$ <sup>63</sup>. Este orden de aproximación es suficiente para nuestros propósitos. Reproducimos aquí sus resultados:

$$P_{a,n}^{a,n}(\tau) = 1 - \frac{g_\omega^2}{2} n - \left[ 1 - \frac{g_\omega^2}{4} (3n+1) \right] \text{sen}^2(\omega\tau\theta_{n+1}) + \frac{g_\omega^2}{2} n \cos(\omega\tau\theta_{n+1}) \cos(\omega\tau\theta_{n-1}) \cos(2\omega\tau) \quad (3.69a)$$

$$P_{b,n+1}^{a,n}(\tau) = \left( 1 - \frac{3g_\omega^2}{4} (n+1) \right) \text{sen}^2(\omega\tau\theta_{n+1}) \quad (3.69b)$$

$$P_{a,n+2}^{a,n}(\tau) = \frac{g_\omega^2}{4} (n+2) \text{sen}^2(\omega\tau\theta_{n+1}) \quad (3.69c)$$

$$P_{a,n-2}^{a,n}(\tau) = \frac{g_\omega^2}{4} n \text{sen}^2(\omega\tau\theta_{n-1}) \quad (3.69d)$$

$$P_{b,n-1}^{a,n}(\tau) = \frac{g_\omega^2}{2} n \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[ \text{sen}^2(\omega\tau\theta_{n+1}) + \text{sen}^2(\omega\tau\theta_{n-1}) \right] - \cos(\omega\tau\theta_{n+1}) \cos(\omega\tau\theta_{n-1}) \cos(2\omega\tau) \right\} \quad (3.69e)$$

El ángulo generalizado de Rabi está dado por:

$$\theta_n = g_\omega \sqrt{n} \left( 1 - \frac{1}{8} g_\omega^2 n \right) \quad (3.70)$$

representando una pequeña corrección a tercer orden en  $g_\omega$  con respecto a la RWA.

<sup>63</sup> Swain; *Continued fraction expressions for the eigensolutions of the hamiltonian describing the interaction between a single atom and a single field mode: comparisons with the rotating wave solutions*, J. Phys. A: Math., Nucl. Gen., Vol. 6, December 1973.

Teniendo las expresiones explícitas para las probabilidades de transición podemos describir la dinámica del micromáser siguiendo el método estándar. Empezamos definiendo el “mapeo del micromáser” como:

$$\rho(t_{i+1}) = \exp(-\gamma L_C t_p) T(\tau) \rho(t_i) \quad (3.71)$$

donde  $t_i$  representa el tiempo en que el  $i$ -ésimo átomo es inyectado dentro de la cavidad,  $\tau$  es el tiempo de interacción y  $t_p = t_{i+1} - t_i - \tau \approx t_{i+1} - t_i$ , es el tiempo entre dos átomos sucesivos, para los cuales se asume una distribución de Poisson. Introduciendo la correspondiente razón de inyección Poissoniana  $R = 1/t_p$  y considerando la llamada derivada de “grano grueso” ( $dt \gg \tau$ ) se obtiene la ecuación maestra continua<sup>64</sup>:

$$\frac{d\rho}{dt} = \{R[T(\tau) - 1] - \gamma L_C\} \rho \quad (3.72)$$

Como dijimos anteriormente, el régimen operativo del micromáser requiere que  $R\tau \ll 1$  y  $\gamma\tau \ll 1$ . Se sabe que la distribución fotónica puede alcanzar un estado estacionario. Para encontrar la distribución fotónica del estado estacionario necesitamos resolver la ecuación (3.72) para las poblaciones  $\langle n | \rho | n \rangle$ , haciendo  $dp_n / dt = 0$ . Siguiendo a Elmfors<sup>65</sup> buscamos escribir el lado derecho de la ecuación (3.72) en la forma  $J_{n+1} - J_n$ , siendo  $J_n$  alguna función de las poblaciones. Ahora, el mapeo:

$$p(\tau) = T(\tau)p(0) \quad (3.73)$$

está dado por la ecuación (3.35), mientras que la parte liouvilliana de la evolución, la cual está regida por la ecuación:

<sup>64</sup> L.A. Luggiato, M.O. Scully y H. Walther; 1978, *Connection between microscopic and macroscopic maser theory*. Phys. Rev. A, vol 36, number 2, pag. 740, July 15, 1987.

<sup>65</sup> Per Elmfors, Benny Lautrup y Bo-Sture Skagerstam; *Dynamics, correlations, and phases of the micromaser*, CERN/TH 95-333 (1995).

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\text{pérdidas}} = -\gamma L_C p \quad (3.74)$$

ya tiene la forma deseada. En efecto,

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\text{pérdidas}} = \gamma[(n_b + 1)(n + 1)p_{n+1} - n_b(n + 1)p_n] - \gamma[(n_b + 1)np_n - n_b np_{n-1}] \quad (3.75)$$

Por tanto, nuestra tarea se reduce a poner el lado derecho de la ecuación (3.73) en la forma  $p_n(0) + J_{n+1} - J_n$ , así como tener  $p_n(\tau) = [T(\tau)p(0)]_n = p_n(0) + J_{n+1} - J_n$ , y por tanto:

$$[(T(\tau) - 1)p(0)]_n = J_{n+1} - J_n \quad (3.76)$$

Aunque la estructura de  $T(\tau)$  con los nuevos términos es un poco complicada, después de algunas operaciones algebraicas, el lado derecho de la ecuación (3.73) puede escribirse en la forma deseada  $p_n(0) + J_{n+1} - J_n$  con:

$$\begin{aligned} J_n = & \frac{g_\omega^2}{4} (n + 1) \text{sen}^2(\omega\tau\theta_n) p_{n+1} \\ & - \frac{g_\omega^2}{2} n \cos(\omega\tau\theta_{n+1}) \cos(\omega\tau\theta_{n-1}) \cos(2\omega\tau) p_n \\ & + \frac{g_\omega^2}{2} n \left(1 - \frac{1}{2} \text{sen}^2(\omega\tau\theta_{n+1})\right) p_n \\ & - \left(1 - \frac{g_\omega^2}{4} (2n - 1)\right) \text{sen}^2(\omega\tau\theta_n) p_{n-1} \\ & - \frac{g_\omega^2}{4} n \text{sen}^2(\omega\tau\theta_{n-1}) p_{n-2} \end{aligned} \quad (3.77)$$

Si invocamos la RWA desechando desde el inicio contribuciones mayores al primer orden en  $g_\omega$ , la expresión para  $J_n$  hubiera tenido la forma simple:

$$J_n^{(RWA)} = -\text{sen}^2(g\tau\sqrt{n})p_{n-1} \quad (3.78)$$

Finalmente, juntando las contribuciones del hamiltoniano y las del liouvilliano en la ecuación de la evolución para las poblaciones, obtenemos:

$$\frac{dp_n}{dt} = \gamma(J'_{n+1} - J'_n) \quad (3.79)$$

con

$$J'_n = (n_b + 1)np_n - n_b np_{n-1} + NJ_n \quad (3.80)$$

la distribución de equilibrio  $p_n^{(eq)}$  se deduce al hacer  $J'_{n+1} = J'_n$  y puede encontrarse resolviendo la ecuación:

$$J'_n = 0 \quad (3.81)$$

que sigue siendo verdadera debido a que el valor común  $J'_n = J$  debe desaparecer en realidad, para dar cuenta del hecho que  $p_n \rightarrow 0$  conforme  $n \rightarrow \infty$ . Teniendo ahora la ecuación que tiene que satisfacer  $p_n^{(eq)}$ , nuestra próxima tarea es resolverla. Confiaremos en los métodos perturbativos para llevar a cabo nuestra labor.

### 3.4.4 La distribución fotónica del equilibrio

La ecuación (3.81) para la distribución de equilibrio  $p_n^{(eq)}$  se lee explícitamente (escribiendo por brevedad,  $p_n$  en lugar de  $p_n^{(eq)}$ ):

$$\begin{aligned}
 & (n_b + 1)np_n - n_b np_{n-1} - N \text{sen}^2(\omega\tau\theta_n)p_{n-1} \\
 & + g_\omega^2 N \left\{ \frac{(n+1)}{4} \text{sen}^2(\omega\tau\theta_n)p_{n+1} \right. \\
 & + \frac{n}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \text{sen}^2(\omega\tau\theta_{n+1}) - \cos(\omega\tau\theta_{n+1})\cos(\omega\tau\theta_{n-1})\cos(2\omega\tau) \right) p_n \\
 & + \frac{(2n-1)}{4} \text{sen}^2(\omega\tau\theta_n)p_{n-1} \\
 & \left. - \frac{n}{4} \text{sen}^2(\omega\tau\theta_{n-1})p_{n-2} \right\} = 0
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

La ecuación anterior tiene la forma:

$$K_n(p_n) + g_\omega^2 K'_n(p_n) = 0 \tag{3.83}$$

y puede resolverse por aproximaciones sucesivas, escribiendo:

$$p_n = p_n^{(0)} + g_\omega^2 p_n^{(1)} + \dots \tag{3.84}$$

y requiriendo que la ecuación resultante se satisfaga para una  $g_\omega^2$  pequeña pero, por otro lado, arbitraria:

$$K_n(p_n^{(0)} + g_\omega^2 p_n^{(1)} + \dots) + g_\omega^2 K'_n(p_n^{(0)} + g_\omega^2 p_n^{(1)} + \dots) = 0 \tag{3.85}$$

Siguiendo los pasos usuales de la teoría de perturbaciones, obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones que deben ser resueltas iterativamente:

$$\begin{aligned}
 K_n(p_n^{(0)}) &= 0 \\
 K_n(p_n^{(1)}) + K'_n(p_n^{(0)}) &= 0 \\
 K_n(p_n^{(2)}) + K'_n(p_n^{(1)}) &= 0 \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{3.86}$$

De la primera ecuación obtenemos un resultado parecido al de la RWA:

$$p_n^{(0)} = \frac{n_b n + N \text{sen}^2(\omega\tau\theta_n)}{(n_b + 1)n} p_{n-1}^{(0)}
 \tag{3.87}$$

Esto conduce a:

$$p_n^{(0)} = p_0^{(0)} \prod_{m=1}^n \frac{n_b m + N \text{sen}^2(\omega\tau\theta_m)}{(n_b + 1)m}
 \tag{3.88}$$

donde  $p_n^{(0)}$  puede fijarse a través de la condición de normalización para las probabilidades a orden cero ( $\sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(0)} = 1$ ).

Insertando  $p_n^{(0)}$  en la segunda ecuación del sistema (3.86), obtenemos la relación de recurrencia:

$$p_n^{(1)} = \frac{n_b n + N \text{sen}^2(\omega\tau\theta_n)}{(n_b + 1)n} p_{n-1}^{(1)} - \frac{K'_n(p_n^{(0)})}{(n_b + 1)n} \equiv A_n p_{n-1}^{(1)} + f_n
 \tag{3.89}$$

con:

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{n_b n + N \text{sen}^2(\omega\tau\theta_n)}{(n_b + 1)n} \\
 f_n &= -\frac{K'_n(p_n^{(0)})}{(n_b + 1)n}
 \end{aligned}
 \tag{3.90}$$

Así, la corrección a primer orden para  $p_n^{(0)}$  está dada por:

$$p_n^{(1)} = \left( f_n + \sum_{j=1}^{n-1} f_j \prod_{m=j+1}^n A_m \right) + \left( \prod_{i=1}^n A_i \right) p_0^{(1)}
 \tag{3.91}$$

donde  $p_0^{(1)}$  puede determinarse, como antes, requiriendo la condición de normalización a primer orden  $(\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{(1)} = 1)$ . De aquí se deduce que:

$$p_n^{(1)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left( f_n + \sum_{j=1}^{n-1} f_j \prod_{m=j+1}^n A_m \right) \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^n A_i \right)^{-1} \quad (3.92)$$

Paramos en  $p_n = p_n^{(0)} + g_{\omega}^2 p_n^{(1)}$ , para estar en concordancia con el orden al cual se calcularon las probabilidades de transición. Ahora que tenemos  $p_n = p_n^{(eq)}$  al orden deseado, es posible hacer predicciones para cantidades mensurables a partir de la estadística fotónica hallada.

### 3.4.5 Los estados atrapados fuera de la RWA

Los estados llamados “atrapados” predichos por la teoría convencional del micromáser constituyen un aspecto prometedor para poder someter a prueba la validez de la RWA. Estos estados son muy sensibles a cualquier variación de las condiciones necesarias para su producción. Se predijo la producción de estados atrapados para un micromáser trabajando a muy bajas temperaturas, donde hay un número muy pequeño de fotones térmicos dentro de la cavidad resonante. Si hacemos  $n_b = 0$  en las ecuaciones de la distribución del equilibrio del micromáser, ésta se reduce a:

$$p_n^{(0)} = p_0^{(0)} \prod_{m=1}^n \frac{N \text{sen}^2(\omega\tau\theta_m)}{m} \quad (3.93)$$

$$p_n^{(1)} = \frac{N \text{sen}^2(\omega\tau\theta_n)}{n} p_{n-1}^{(1)} - \frac{K'_n(p^{(0)})}{n}$$

La condición de entrapamiento en la RWA se obtiene exigiendo que  $p_n = 0$ , para todo  $n > n_q$ , tal que la cavidad no tenga más que un número prescrito de fotones. Así, se debe satisfacer la siguiente condición:

$$g\tau\sqrt{n_q+1} = k\pi, \quad (3.94)$$

donde  $n_q$  y  $k$  son números enteros que sirven para caracterizar cada estado atrapado. En principio, escogiendo un tiempo de interacción apropiado  $\tau$ , es posible crear diferentes estados atrapados.

Más allá de la RWA, la condición de orden cero para un estado atrapado se establece por:

$$\omega\tau\theta_{n_q+1} = k\pi \quad (3.95)$$

i.e.,

$$g\tau\sqrt{n_q+1}\left(1 - \frac{g_\omega^2}{8}(n_q+1)\right) = k\pi. \quad (3.96)$$

Vemos que si insertamos esta condición en la expresión para  $p^{(1)}$ , obtenemos:

$$p_{n_q+1}^{(1)} = -\frac{K'_{n_q+1}(p^{(0)})}{n_q+1} = -\frac{N(n_q+1)}{4} \text{sen}^2(\omega\tau\theta_{n_q}) p_{n_q-1}^{(0)} \quad (3.97)$$

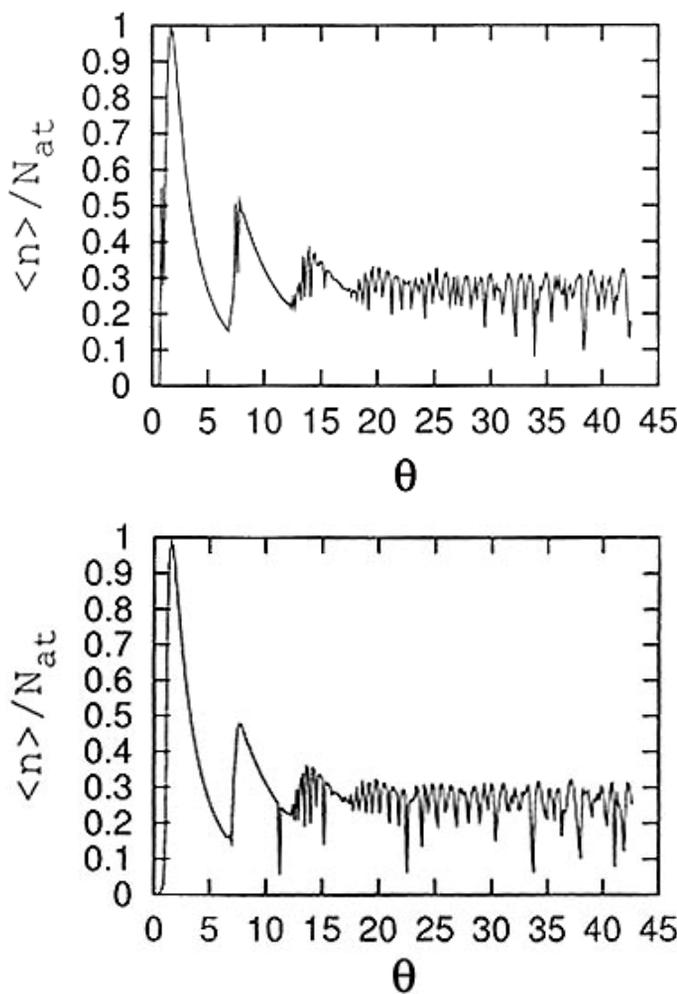
Se deduce que las poblaciones más allá del estado de Fock  $|n_q\rangle$  no son necesariamente cero, tal como es el caso en la RWA. Ahora están dadas por:

$$p_{n_q+1} = -g_\omega^2 \frac{N}{4} (n_q+1) \text{sen}^2(\omega\tau\theta_{n_q}) p_{n_q-1}^{(0)}, \quad (3.98)$$

tal que en general  $p_{n_q+1} \neq 0$ . Entonces, tendríamos estados de Fock ocupados más allá de aquellos que excluye la condición estándar de atrapamiento. Nótese por favor que el factor  $g_\omega^2$  hace que, en general, sea muy pequeña la violación de la condición de atrapamiento de la RWA. Sin embargo, sin el cálculo numérico es muy difícil predecir exactamente cuando la condición de atrapamiento comienza a mostrar alguna evidencia de las contribuciones procedentes de los términos contrarrotantes.

Una cantidad que puede analizarse para este fin es el número medio de fotones  $\langle n \rangle = \sum_n n p_n$ . En trabajos anteriores<sup>66</sup> los resultados obtenidos muestran que se tienen que alcanzar valores para  $g/\omega \sim 0.1$  para ver diferencias con la RWA. La Fig. 3.6 muestra un caso típico donde se aprecian resonancias agudas, reminiscencia de los estados atrapados. En efecto, observamos que algunas de las resonancias predichas dentro de la RWA desaparecen cuando vamos más allá de ella.

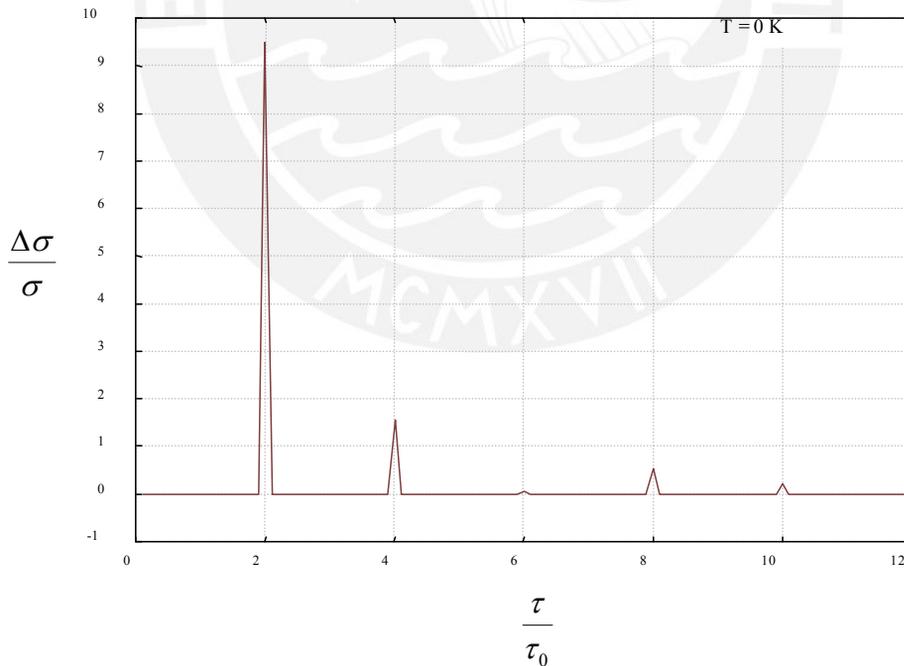
Para valores mucho menores de  $g/\omega$ , del orden de  $10^{-6}$ , aún vemos diferencias en la desviación estándar normalizada  $\sigma = (\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2)^{1/2} / (\langle n \rangle)^{1/2}$ . Si graficamos la diferencia relativa para la desviación estándar  $\sigma$ , i.e.,  $\Delta\sigma / \sigma = (\sigma^{(SRWA)} - \sigma^{(RWA)}) / \sigma^{(RWA)}$ , vemos que aparecen picos bien definidos.



**Fig. 3.6** El número medio de fotones  $\langle n \rangle / N$  como función del parámetro de bombeo  $\theta = g\tau\sqrt{N}$ . La figura superior corresponde al caso más allá de la RWA, la figura inferior a la RWA. Los valores de los parámetros en ambos casos son:  $g = 21$  GHz,  $\omega = 210$  GHz,  $g/\omega = 0.1$ ,  $\gamma = 1.25$  s<sup>-1</sup>,  $N = 64$ ,  $Q = 5.35 \times 10^9$ ,  $n_b = 0$ . Algunas de las depresiones predichas dentro de la RWA desaparecen cuando vamos más allá de ella.

<sup>66</sup> F. De Zela: enviado a Phys. Rev. A.

En la Fig. 3.7 se ha graficado  $100 \times \Delta\sigma/\sigma$  como una función del tiempo de interacción  $\tau$  medido en unidades de un tiempo  $\tau_0$  que satisface la condición de atrapamiento  $g\tau_0 = \sqrt{n_q + 1} = k\pi$ . Se ha escogido  $\tau_0 = \pi / g\sqrt{20}$ , correspondiente al estado atrapado  $k = 1$ ,  $n_q = 19$ . Observamos picos en  $\Delta\sigma/\sigma$  ocurriendo justo en  $\tau = 2\tau_0, 4\tau_0, 6\tau_0, 8\tau_0, \dots$ . Para estos tiempos se satisface la condición de atrapamiento estándar, con  $n_q = 19$ ,  $k = 2, 4, 6, 8, \dots$ . Por tanto, vemos que a la luz de los resultados presentados en la Fig. 3.7, se pone de manifiesto desviaciones con respecto a la RWA del orden del 10%. Esto sucede para valores de los parámetros no muy alejados de los valores alcanzados actualmente en los experimentos:  $g/\omega = 5 \times 10^{-6}$ ,  $\gamma = 1.25 \text{ s}^{-1}$ ,  $N = 80$ ,  $Q = 2. \times 10^{10}$ . Es posible observar desviaciones grandes –de hasta el 30% - para  $g/\omega \approx 10^{-5}$ , un valor sin duda posible de alcanzar en experimentos futuros. Sin embargo es necesaria una gran precisión en la detección atómica para poner en evidencia los efectos predichos, los constantes progresos en la tecnología actual hace que confiemos en que tal empresa será posible de realizar en un futuro próximo.



**Fig. 3.7** Al graficar la diferencia relativa en porcentaje  $\Delta\sigma/\sigma = (\sigma^{(SRWA)} - \sigma^{(RWA)}) / \sigma^{(RWA)}$ , como una función del tiempo de interacción normalizado  $\tau/\tau_0$ , vemos que los picos aparecen en aquellos tiempos correspondientes a estados atrapados:  $\tau = 2\tau_0, 4\tau_0, 6\tau_0, 8\tau_0, \dots$ , con  $g\tau_0\sqrt{20} = \pi$ . Los valores de los parámetros son:  $g = 0.4 \text{ MHz}$ ,  $\omega = 80 \text{ GHz}$ ,  $g/\omega = 5 \times 10^{-6}$ ,  $\gamma = 1.25 \text{ s}^{-1}$ ,  $N = 80$ ,  $Q = 2. \times 10^{10}$ ,  $n_b = 0$ . Los picos corresponden a los estados atrapados con números  $n_q = 19$ ,  $k = 2, 4, 6, 8, 10$ .

## 4. El proceso de simulación

La dinámica del campo fotónico del micromáser se presta para obtener resultados mediante simulación con el objeto de verificar y, aun más, encontrar efectos físicos que podrían no verse con los resultados teóricos.

Si prescindimos de la medición y dejamos evolucionar el campo fotónico mediante el paso de átomos excitados y el decaimiento del campo debido a la interacción con la cavidad resonante que actúa como un baño térmico, debemos esperar que con el tiempo se llegue al equilibrio, es decir,  $p_n(t + \Delta t) = p_n(t)$ . Esto se refleja en la distribución del número fotónico del micromáser en el equilibrio<sup>67</sup>.

$$p_n = C_0 \prod_{k=1}^n \frac{n_b + Nq_k}{k(n_b + 1)} \quad (4.1)$$

donde  $C_0$  es una constante de normalización elegida de tal manera que se cumpla:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \quad (4.2)$$

$N$  es el número de átomos que atraviesan la cavidad durante el tiempo de decaimiento de ésta;  $n_b$  es el número promedio de fotones térmicos obtenidos a partir de:

$$n_b = \frac{1}{e^{h\omega/K_bT} - 1} \quad (4.3)$$

siendo  $\omega$  la frecuencia del campo electromagnético sustentado por la cavidad;  $T$  la temperatura de la misma;  $h$  y  $K_b$  son las constantes de Planck y de Boltzmann respectivamente. En la fórmula (4.1)  $q_k$  queda definida por:

<sup>67</sup> P. Filipowicz, J. Javanainen y P. Meystre; 1986, *Theory of Microscopic Maser*, Phys. Rev. **34**, 3077.

$$q_k = \frac{g^2 k \operatorname{sen}^2(\tau \sqrt{g^2 k + 0.25(\omega_0 - \omega)^2})}{g^2 k + 0.25(\omega_0 - \omega)^2} \quad (4.4)$$

siendo la diferencia de las frecuencias del campo  $\omega$  y de los átomos  $\omega_0$  lo que se conoce como *detunning*. Aquí  $g$  y  $\tau$  son respectivamente la constante de acoplamiento átomo–campo y el tiempo que le toma a un átomo atravesar la cavidad.

Podemos estudiar esta dinámica mediante la simulación de trayectorias, es decir, suponemos un número muy grande de micromáseres preparados experimentalmente de la misma manera y cada uno de ellos se toma como si fuera una trayectoria que evoluciona individualmente durante un tiempo determinado, al final del cual podemos construir una matriz densidad y observar como se ha comportado el campo fotónico.

Para llevar a cabo esta simulación seguimos a Honerkamp<sup>68</sup> usando dos métodos estándares, uno con pasos temporales fijos y otro con pasos temporales estocásticos.

Las ecuaciones maestras son ecuaciones diferenciales para un conjunto determinado de estados  $p_n$  que toman la forma general:

$$\frac{d}{dt} p_n(t) = \sum_{n' \neq n} [\omega_{nn'} p_{n'}(t) - \omega_{n'n} p_n(t)] \quad (4.5)$$

donde los coeficientes  $\omega_{nn'}$  y  $\omega_{n'n}$  son las probabilidades condicionales por unidad de tiempo de pasar del estado  $n$  al estado  $n'$  y viceversa.<sup>69</sup>

En el caso del micromáser dentro de la RWA, la ecuación maestra continua es:

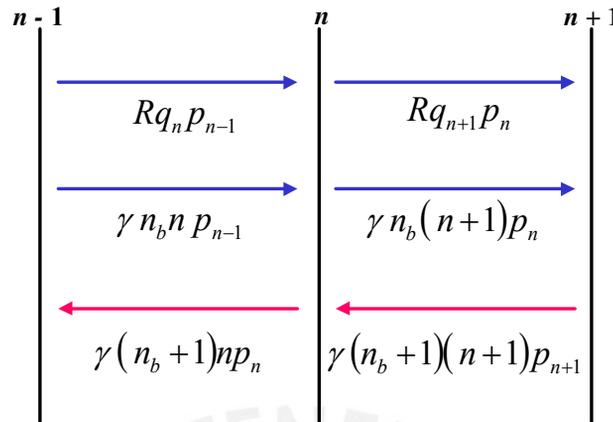
$$\frac{d}{dt} p_n(t) = \gamma(n_b + 1)(n + 1)p_{n+1} + [\gamma n_b n + \gamma N q_n] p_{n-1} - \gamma[(n_b + 1)n + n_b(n + 1) + N q_{n+1}] p_n \quad (4.6)$$

donde  $1/\gamma$  es el tiempo de decaimiento de la cavidad y  $q_{n+1}$  está dado por la ecuación (2.25) en el caso que  $\omega = \omega_0$ .

<sup>68</sup> Josef Honerkamp; 1994, *Stochastic Dynamical Systems*, VCH Publishers, Inc., New York.

<sup>69</sup> Nótese que es el término  $p_n$  o  $p_{n'}$  el que determina desde donde se hace el salto.

En la figura 4.1 se muestra las transiciones posibles de acuerdo a la ecuación (4.6).

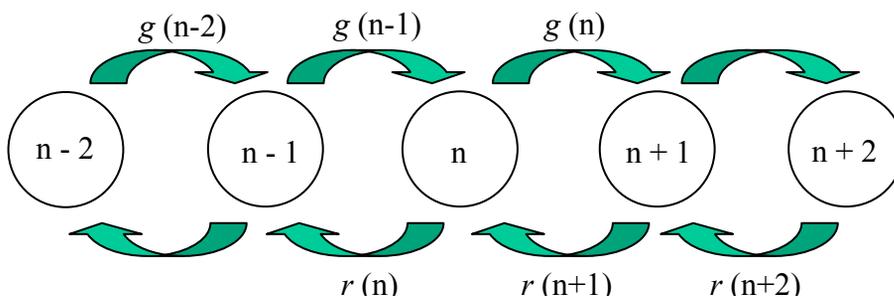


**Fig. 4.1** Transiciones posibles de acuerdo a la ecuación maestra continua del micromáser dentro de la RWA. Nótese como las transiciones condicionales por unidad de tiempo multiplicadas por la probabilidad de estar en un estado nos da la probabilidad por unidad de tiempo de saltar desde ese estado a otro accesible por el sistema.

La ecuación (4.6) la podemos escribir como:

$$\frac{d}{dt} p_n(t) = r(n+1)p_{n+1} + g(n-1)p_{n-1} + [r(n) + g(n)]p_n \quad (4.7)$$

La nomenclatura usada en la ecuación (4.7) tiene como propósito simplificar la notación y hacerla mnemotécnica: tómese la  $r$  como “reducciones” y la  $g$  como “ganancias”. En la figura 4.2 se ilustra las transiciones posibles de un solo paso siguiendo la convención anterior.



**Fig. 4.2** Razones de transición de un solo paso. Nótese que sólo es posible pasar de un estado adyacente a otro. La ecuación maestra continua del micromáser dentro de la RWA obedece a estos tipos de transiciones.

En la ecuación (4.7) podemos ver claramente que:

$$\begin{aligned} r(n+1) &= \gamma(n_b + 1)(n+1) \\ g(n-1) &= \gamma n_b n + \gamma N q_n \end{aligned} \quad (4.8)$$

obteniendo luego de un cálculo elemental:

$$r(n) + g(n) = \gamma(n_b + 1)n + \gamma n_b (n+1) + \gamma N q_{n+1} \quad (4.9)$$

#### 4.1 Pasos temporales fijos

Sea una partícula en el estado  $n$ . Si definimos una función  $r(n)$  de tal manera que  $r(n)dt$  sea la probabilidad de que la partícula haga un salto al estado  $n - 1$  durante el intervalo temporal  $dt$  y similarmente  $g(n)dt$  sea la probabilidad de que la partícula haga un salto al estado  $n + 1$  durante el tiempo  $dt$ , entonces,  $r(n)dt + g(n)dt$  será la probabilidad total de que la partícula haga una transición durante el tiempo  $dt$ .

Si escogemos  $dt$  apropiadamente de tal manera que  $[r(n) + g(n)]dt < 1$ , la probabilidad de que la partícula dé un salto a cualquiera de los estados  $n'$  (en nuestro caso  $n' = n \pm 1$ ) la podemos escribir como:

$$\omega_{n'n} dt = \frac{\omega_{n'n}}{u_0(n)} u_0(n) dt \quad (4.10)$$

con  $u_0(n) = r(n) + g(n)$ .

Los métodos de simulación exigen que se escoja un número aleatorio distribuido uniformemente entre 0 y 1; si este número es menor o igual que la probabilidad  $u_0(n)dt$  entonces la partícula ha realizado un salto del estado  $n$  al estado  $n'$ , de lo contrario se queda en el estado original donde se encontraba. Para saber a cuál estado ha saltado se construye la probabilidad:

$$s_1 = \frac{r(n)}{u_0(n)} \quad (4.11)$$

Se escoge un segundo número aleatorio distribuido uniformemente entre 0 y 1; si éste es menor o igual que  $s_1$  entonces la partícula ha realizado un salto del estado  $n$  al estado  $n - 1$ , de lo contrario ésta saltó al estado  $n + 1$ . Como el proceso dinámico debe realizarse durante un determinado lapso, el tiempo que le tomó al sistema pasar de un estado o quedarse en el que estaba se ha incrementado en una cantidad  $dt$ , es decir,  $t \rightarrow t + dt$ .

En un proceso estocástico general, el algoritmo anterior se puede extender cuando tenemos que tomar más de dos caminos. En este caso la probabilidad total por unidad de tiempo queda especificada como:

$$u_0(n) = \sum_{n' \neq n} \omega_{n'n} \quad (4.12)$$

De tal manera que  $u_0(n) dt$  es la probabilidad de que en el tiempo  $dt$  ocurra un salto desde el estado  $n$  a cualquier otro estado. A continuación, el intervalo  $[0,1]$  se determina en la forma:

$$[0, y_1, \dots, y_\alpha, \dots, 1] \quad (4.13)$$

con:

$$y_\alpha = \frac{1}{u_0(n)} \sum_{\alpha'=1}^{\alpha} \omega_{\alpha'n} \quad (4.14)$$

Donde  $\alpha$  y  $\alpha'$  etiquetan respectivamente a los estados  $n$  y  $n'$ . Así, el tamaño del intervalo entre  $y_{\alpha-1}$  y  $y_\alpha$  es proporcional a  $\omega_{\alpha n}$ . Entonces, el estado  $n'$  se determina escogiendo un segundo número aleatorio  $\xi_2$  distribuido uniformemente entre el intervalo  $[0,1]$ , para un  $\alpha$  específico tal que se satisfaga la condición:  $y_{\alpha-1} \leq \xi_2 < y_\alpha$ .

Proponemos el siguiente algoritmo al que llamaremos M1, en el caso que tengamos que tomar un número  $k$  de caminos.

Sean los estados  $c_1, c_2, \dots, c_i, \dots, c_k$ , cada uno de ellos con sus respectivas probabilidades condicionales de transición por unidad de tiempo  $p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_k$ , donde se cumple que

$$u_0(n) = \sum_{l=1}^k p_l. \text{ A cada estado le asignamos respectivamente un número entero: } 1, 2, \dots,$$

$i, \dots, k$ . Se genera un número entero aleatorio entre 1 y  $k$  para escoger una de las

probabilidades  $p_i / u_0(n)$ . Se escoge un segundo número aleatorio distribuido uniformemente entre 0 y 1; si éste es menor o igual que  $p_i / u_0(n)$  entonces la partícula ha realizado un salto del estado  $n$  al estado al estado  $c_i$ ; de lo contrario, se siguen generando aleatoriamente enteros entre 1 y  $k$  hasta que se dé una de las posibles transiciones. Una vez más, el tiempo del sistema debe pasar de  $t$  a  $t + dt$ .

Este camino alternativo es convenientemente claro, pero podría tornarse ineficiente si es que las probabilidades  $p_i$  son pequeñas comparadas con la “altura” máxima, es decir, el 1. Podríamos estar intentando una serie de números aleatorios enteros hasta que el número aleatorio distribuido en el intervalo  $[0,1]$  sea lo suficientemente pequeño para caer dentro de alguna transición permitida.

## 4.2 Pasos temporales estocásticos

En el método de los pasos temporales fijos, la elección del intervalo  $dt$  es crítica. Si escogemos  $dt$  demasiado grande podríamos no garantizar que  $u_0(n)dt < 1$  y si es demasiado pequeño podría ocurrir que el algoritmo sea ineficiente. Surge la pregunta si es posible encontrar un intervalo temporal  $\tau_a$  donde estemos plenamente seguros de que se ha realizado una transición, tal que el tiempo del sistema evolucione de  $t$  a  $t + \tau_a$ . La respuesta es sí. Se puede determinar una distribución temporal de residencia o distribución temporal de espera y escogerse un tiempo aleatorio gobernado por esta distribución tal que éste sea el intervalo temporal de evolución del sistema al pasar de un estado a otro. Si  $u_0 dt$  es la probabilidad de que haya una transición en el lapso  $dt$ , entonces, la probabilidad de que ocurra una transición exactamente después de  $n + 1$  intervalos de tiempo es:

$$p = (1 - u_0 dt)^n u_0 dt \tag{4.15}$$

Si se cumple que  $(n + 1)dt = t$ , es decir,  $dt = t / (n + 1)$ , entonces se deduce que:

$$p = \left[ 1 - \frac{u_0 t}{n + 1} \right]^n u_0 dt \tag{4.16}$$

En el límite cuando  $dt \rightarrow 0$  para un tiempo fijo  $t$ , entonces  $n \rightarrow \infty$  con lo cual tenemos:

$$p = u_0 e^{-u_0 t} dt \quad (4.17)$$

La ecuación (4.17) nos dice que  $p$  es la probabilidad de que haya una transición en el intervalo entre  $t$  y  $t + dt$ . Para generar tiempos aleatorios  $\tau_a$  a partir de la distribución (4.17) seguimos el método estándar de transformación de probabilidades.

Es posible generar, mediante algún algoritmo estándar, números aleatorios uniformemente distribuidos, con la probabilidad de generar un número entre  $x$  y  $x + dx$  está dada por:

$$p(x)dx = \begin{cases} dx & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.18)$$

Obviamente la distribución de probabilidad  $p(x)$  cumple con:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1 \quad (4.19)$$

Si tenemos una función  $\tau = \tau(x)$  entonces la distribución de probabilidad de  $y$  denotada por  $p(\tau)d\tau$ , se determina por:

$$p(\tau) = p(x) \left| \frac{dx}{d\tau} \right| \quad (4.20)$$

De acuerdo con (4.17) y (4.20) para generar la distribución deseada de los  $\tau_a$  necesitamos resolver la ecuación diferencial:

$$\left| \frac{dx}{d\tau} \right| = f(\tau) = u_0 e^{-u_0 \tau} \quad (4.21)$$

La solución de esta ecuación es  $x = \int_0^\tau u_0 e^{-u_0 t} dt = t e^{-u_0 t} \equiv F(t)$ . La transformación deseada que lleva de la distribución uniforme a la distribución (4.17) es:

$$\tau(x) = F^{-1}(x) \tag{4.22}$$

donde  $F^{-1}(x)$  es la función inversa de  $F(\tau) = e^{-u_0 \tau}$ , es decir, poniendo :

$$\tau_a(x) = -\frac{\ln(x)}{u_0} \tag{4.23}$$

donde  $x$  es un número aleatorio distribuido uniformemente entre 0 y 1. Por supuesto,

$$u_0 = u_0(n) = \sum_{n' \neq n} \omega_{n'n}$$

Como ya tenemos la distribución de tiempos adecuada podemos dar el paso  $t \rightarrow t + \tau_a$  y decidir a qué estado ha saltado el sistema utilizando el algoritmo propuesto para los pasos temporales fijos en el caso de dos estados posibles  $n'$  o cualquiera de los otros algoritmos posibles en caso de tener más de dos estados accesibles en el sistema, desde el estado  $n$ .

### 4.3 Simulación de la dinámica del micromáser más allá de la RWA

Una vez que conocemos la estrategia a seguir para simular procesos estocásticos descritos por una ecuación maestra, nuestro propósito es aplicarla al caso del micromáser más allá de la RWA, con el objetivo de investigar si en un experimento real aparecerán los efectos predichos teóricamente, especialmente en lo que concierne a los estados atrapados.

De acuerdo con la teoría desarrollada en el capítulo 3 la ecuación maestra continua del micromáser toma la forma:

$$\frac{dp_n}{dt} = \gamma (J'_{n+1} - J'_n) \tag{4.24}$$

con  $J'_n$  definida como:

$$J'_n = (n_b + 1)np_n - n_b np_{n-1} + NJ_n \tag{4.25}$$

donde  $J_n$  se especificó en la ecuación (3.77).

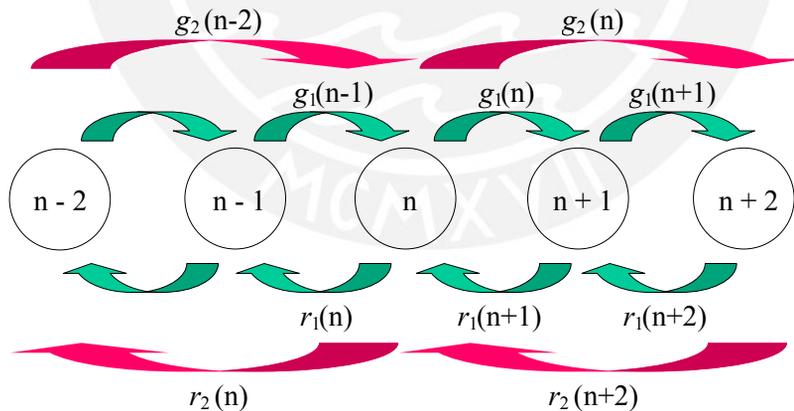
Después de alguna manipulación algebraica la ecuación (4.24) se convierte en:

$$\frac{dp_n}{dt} = \gamma(n_b + 1)(n + 1)p_{n+1} - \gamma[(n_b + 1)n + n_b(n + 1)]p_n + \gamma n_b np_{n-1} + R(J_{n+1} - J_n) \tag{4.26}$$

donde  $R$  es la razón de inyección atómica en el tiempo de decaimiento de la cavidad:

$$R = N\gamma.$$

Aunque la ecuación (4.26) puede parecer engorrosa debido al término  $R(J_{n+1} - J_n)$ , podemos establecer las razones de transición que nos permitan diseñar una estrategia de solución estocástica para la ecuación (4.24). Sin embargo, debe notarse que ahora hay dos transiciones posibles ajenas a la teoría convencional del micromáser dentro de la RWA, las transiciones del estado  $n$  a los estados  $n \pm 2$ . En la figura 4.3 se muestra los nuevos estados accesibles por el sistema.



**Fig. 4.3** Transiciones posibles de acuerdo a la ecuación maestra continua del micromáser fuera de la RWA. Nótese las nuevas transiciones permitidas que involucran dos pasos en lugar de uno.

La ecuación (4.26) nos lleva a establecer que la ecuación maestra continua del micromáser fuera de la aproximación de la onda rotante es:

$$\begin{aligned}
 \frac{dp_n}{dt} &= R \frac{g_\omega^2}{4} (n+2) \text{sen}^2(\omega\tau\theta_{n+1}) p_{n+2} \\
 &+ \left\{ \gamma(n_b + 1)(n+1) \right. \\
 &+ \left. R \frac{g_\omega^2}{2} (n+1) \left[ 1 - \frac{1}{2} \left[ \text{sen}^2(\omega\tau\theta_{n+2}) + \text{sen}^2(\omega\tau\theta_n) \right] - \cos(\omega\tau\theta_{n+2}) \cos(\omega\tau\theta_n) \cos(2\omega\tau) \right] \right\} p_{n+1} \\
 &+ \left\{ \gamma n_b n + R \left( 1 - \frac{3}{4} g_\omega^2 n \right) \text{sen}^2(\omega\tau\theta_n) \right\} p_{n-1} \\
 &+ \left\{ R \frac{g_\omega^2}{4} n \text{sen}^2(\omega\tau\theta_{n-1}) \right\} p_{n-2} \\
 &- \left\{ \gamma \left[ (n_b + 1)n + n_b(n+1) \right] \right. \\
 &- \left. R \frac{g_\omega^2}{2} n \left[ \cos(\omega\tau\theta_{n+1}) \cos(\omega\tau\theta_{n-1}) \cos(2\omega\tau) - \left[ 1 - \frac{1}{2} \text{sen}^2(\omega\tau\theta_{n+1}) \right] \right] \right\} \\
 &+ \left\{ R \left[ 1 - \frac{g_\omega^2}{4} (2n+1) \right] \text{sen}^2(\omega\tau\theta_{n+1}) \right\} p_n
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

con la cual podemos establecer que:

$$r_2(n) = R \frac{g_\omega^2}{4} n \text{sen}^2(\omega\tau\theta_{n-1}) \tag{4.28a}$$

$$\begin{aligned}
 r_1(n) &= \gamma(n_b + 1)n \\
 &+ R \frac{g_\omega^2}{2} n \left[ 1 - \frac{1}{2} \left[ \text{sen}^2(\omega\tau\theta_{n+1}) + \text{sen}^2(\omega\tau\theta_{n-1}) \right] - \cos(\omega\tau\theta_{n+1}) \cos(\omega\tau\theta_{n-1}) \cos(2\omega\tau) \right]
 \end{aligned} \tag{4.28b}$$

$$g_1(n) = \gamma n_b (n+1) + R \left( 1 - \frac{3}{4} g_\omega^2 (n+1) \right) \text{sen}^2(\omega\tau\theta_{n+1}) \tag{4.28c}$$

$$g_2(n) = R \frac{g_\omega^2}{4} (n+2) \text{sen}^2(\omega\tau\theta_{n+1}) \tag{4.28d}$$

Nótese que hemos recuperado las probabilidades de transición (3.69), excepto en los términos que involucran las transiciones de  $n$  a  $n \pm 1$ , donde se puede ver claramente que se han sumado las probabilidades que provienen del Liouvilliano. Es también importante notar que si el factor  $g_\omega$  se hace cero recobramos la ecuación (4.8).

Una vez que tenemos las razones de transición establecidas podemos proceder al proceso de simulación. Lo que queda por determinar es cuántos “saltos” debe hacer el sistema hasta considerar que se ha llegado al equilibrio.

En las simulaciones hemos usado la distribución del equilibrio dentro de la RWA como referencia para parar el proceso de simulación. Se escoge un número de “saltos” intuitivamente adecuados<sup>70</sup> y se construye los  $p_n$  a partir del número de fotones presentes en cada uno de los micromáseres escogidos inicialmente para el experimento. Si llamamos a los elementos de nuestra “nueva” matriz densidad  $\pi_n$ , el criterio para detener la simulación está dado por:

$$\sum_n (\pi_n - p_n)^2 \leq 10^{-3} \quad (4.29)$$

Aquí, los  $p_n$  son los elementos de la distribución fotónica del equilibrio (4.1). El criterio (4.9) nos asegura una aproximación con un margen de error del  $\pm 0.3\%$ .

---

<sup>70</sup> Consideramos que 100 de estos saltos es un número conveniente para detener temporalmente el proceso y verificar si la diferencia entre la simulación y la teoría ha llegado a un nivel aceptable.

#### 4.4 Presentación de los resultados

La teoría del micromáser fuera de la RWA para los estados atrapados<sup>71</sup> predice para estos estados diferencias entre esta teoría y el resultado estándar propio de la aplicación de la RWA. En principio, estas diferencias podrían ser medibles, es decir, en un experimento típico con valores adecuadamente elegidos de los parámetros y comparando los resultados experimentales con los teóricos podría detectarse tales diferencias.

La idea de la simulación consiste justamente en realizar estos experimentos bajo condiciones controladas con el objeto de hallar en qué casos estas diferencias podrían ser notadas.

Nuestros experimentos simulados se han diseñado con el objeto de investigar si persisten las diferencias en la desviación estándar normalizada  $\sigma = \left( \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 \right)^{1/2} / \langle n \rangle^{1/2}$  obtenida con diferentes aproximaciones al compararla con la obtenida para la RWA ya sea por simulación o con la distribución teórica (4.1). Los experimentos grafican la diferencia relativa para la desviación estándar  $\sigma$ , i.e.,  $\Delta\sigma/\sigma = (\sigma^{(1)} - \sigma^{(2)}) / \sigma^{(2)}$ , para los siguientes criterios<sup>72</sup>:

- a) Parámetros de la simulación:  $g/\omega = 5 \times 10^{-6}$ ,  $\gamma = 1.25 \text{ s}^{-1}$ ,  $N = 80$ ,  $Q = 2. \times 10^{10}$ .
  - a.1) RWA simulada sin medición<sup>73</sup> a diferentes temperaturas *versus* RWA teórica siempre a una temperatura de 0 °K.
  - a.2) RWA simulada sin medición *versus* RWA teórica, ambas a la misma temperatura.
  - a.3) RWA simulada con medición<sup>74</sup> a diferentes temperaturas *versus* RWA teórica siempre a una temperatura de 0 °K.

<sup>71</sup> Véase apartado 3.4.5.

<sup>72</sup> Las iniciales CRWA y RWA se refieren respectivamente a *contra rotating wave-approximation* y a *rotating wave-approximation*.

<sup>73</sup> Sin medición significa que se deja evolucionar el micromáser desde un estado térmico inicial hasta que alcance el estado de equilibrio

<sup>74</sup> Con medición significa que se realiza el proceso de medida sobre los átomos emergentes de la cavidad. Cada medida hace que el campo fotónico de la cavidad evolucione distinto a como lo haría en caso de deje que evolucione libremente.

- a.4) RWA simulada con medición *versus* RWA teórica, ambas a la misma temperatura.
- a.5) CRWA simulada sin medición *versus* RWA simulada sin medición, ambas a la misma temperatura.
- a.6) CRWA simulada sin medición a diferentes temperaturas *versus* RWA teórica siempre a una temperatura de 0 °K.
- a.7) CRWA simulada sin medición *versus* RWA teórica, ambas a la misma temperatura.

Los parámetros anteriores corresponden a los mismos parámetros usados para obtener la figura 3.7, es decir, las figuras que se incluyen tienen el objeto de mostrar si lo predicho teóricamente persiste en los experimentos simulados y por ende también en los experimentos reales. Aunque algunos valores para los parámetros experimentales están fuera del alcance tecnológico actual, se espera que en un futuro no muy lejano pueda llevarse a cabo experimentos reales con estos valores. De todas formas, la relación  $g/\omega$ , la cual usualmente se asume como determinante de la validez de la RWA, se ha mantenido en valores realistas y donde dicha aproximación debería ser correcta ( $g/\omega \sim 10^{-6}$ ).

- b) Parámetros de la simulación:  $g/\omega = 2.2 \times 10^{-6}$ ,  $\gamma = 5 \text{ s}^{-1}$ ,  $N = 100$ ,  $Q = 2. \times 10^{10}$ .
  - b.1) RWA simulada sin medición a diferentes temperaturas *versus* RWA teórica siempre a una temperatura de 0 °K.
  - b.2) RWA simulada sin medición *versus* RWA teórica, ambas a la misma temperatura.
  - b.3) RWA simulada con medición a diferentes temperaturas *versus* RWA teórica siempre a una temperatura de 0 °K.
  - b.4) RWA simulada con medición *versus* RWA teórica, ambas a la misma temperatura.
  - b.5) CRWA simulada sin medición *versus* RWA simulada sin medición, ambas a la misma temperatura.
  - b.6) CRWA simulada sin medición a diferentes temperaturas *versus* RWA teórica siempre a una temperatura de 0 °K.

b.7) CRWA simulada sin medición *versus* RWA teórica, ambas a la misma temperatura.

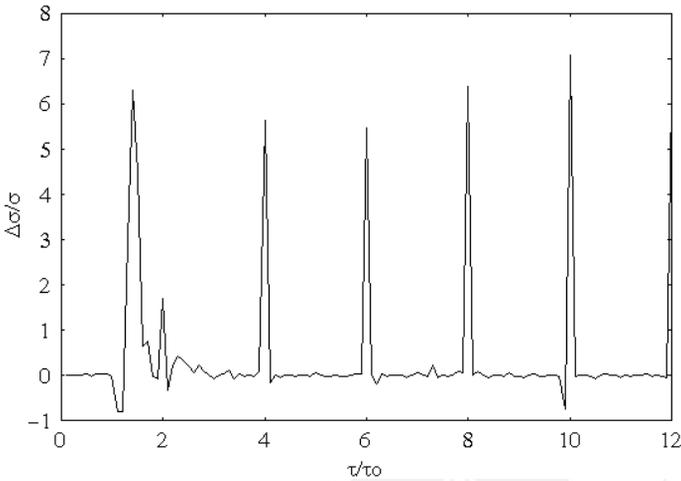
Los valores para los parámetros experimentales anteriores, a diferencia de los valores del primer grupo, están más acordes con aquellos que la tecnología actual permite lograr.

En los gráficos siguientes se indica cuál es el valor que se ha escogido para  $\tau_0$ , el tiempo de tránsito de los átomos dentro de la cavidad resonante, y los números enteros escogidos para obtener los estados atrapados a partir de la fórmula  $g\tau_0\sqrt{n_q + 1} = k\pi$ , es decir, los números  $k$  y  $n_q$ .



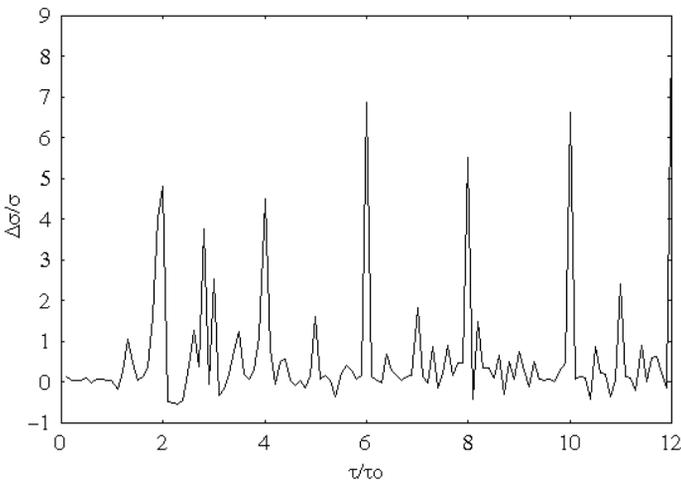
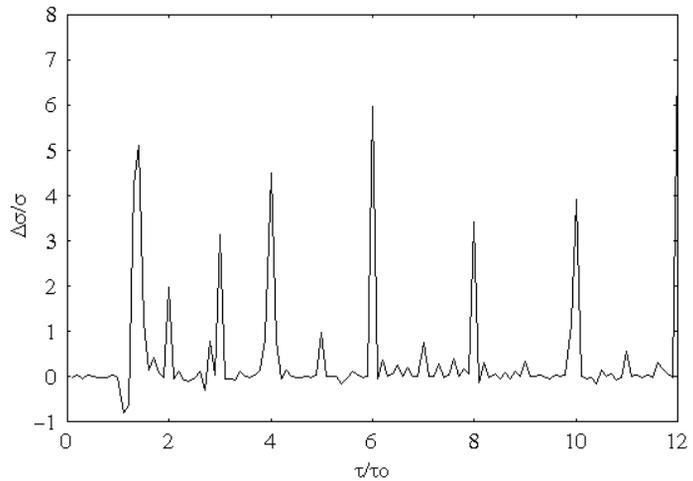
### 4.4.1 Gráficas pertenecientes al grupo a.1

Las siguientes figuras muestran la RWA simulada sin medición a diferentes temperaturas *versus* la RWA teórica siempre a una temperatura de 0 °K. El tiempo de tránsito atómico  $\tau_0$  es  $1.75 \times 10^{-6}$  s y los parámetros que determinan el estado atrapado son:  $k = 1$  y  $n_q = 19$ .



**Fig. 4.4.a** La temperatura de la RWA simulada es de 0.3 °K lo que determina un  $n_b = 2.76 \times 10^{-6}$ .

**Fig. 4.4.b** La temperatura de la RWA simulada es de 0.7 °K lo que determina un  $n_b = 4.16 \times 10^{-3}$ .

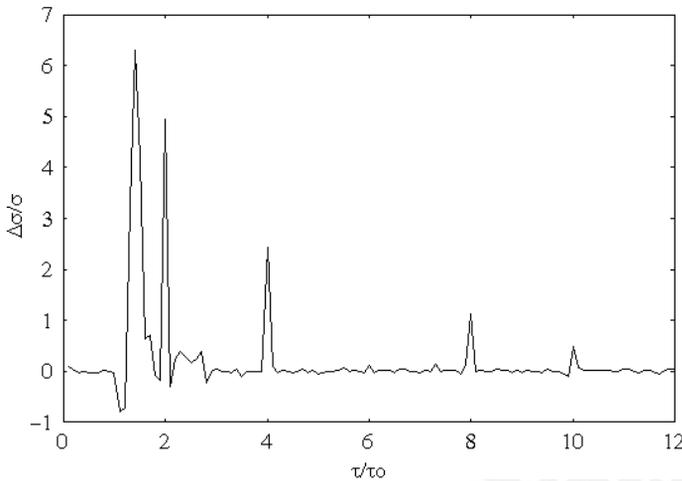
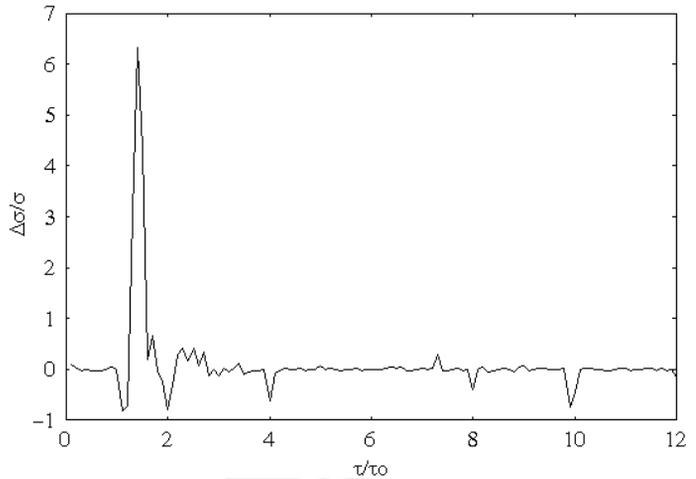


**Fig. 4.4.c** La temperatura de la RWA simulada es de 1.5 °K lo que determina un  $n_b = 8.38 \times 10^{-2}$ .

### 4.4.2 Gráficas pertenecientes al grupo a.2

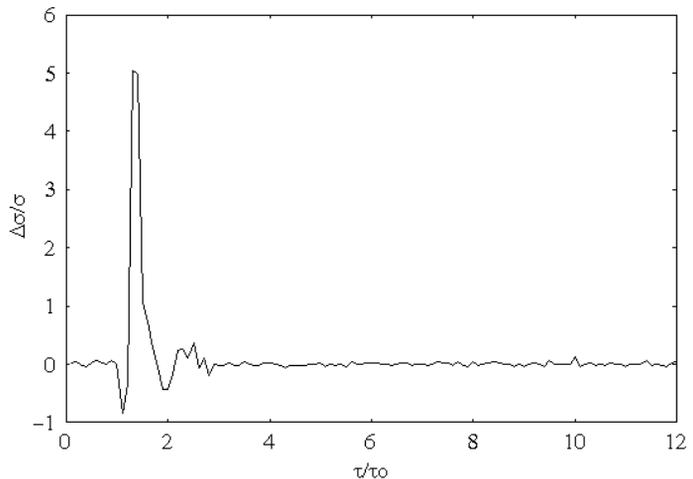
Las siguientes figuras muestran la RWA simulada sin medición a diferentes temperaturas *versus* la RWA teórica a la misma temperatura. El tiempo de tránsito atómico  $\tau_0$  es  $1.75 \times 10^{-6}$  s y los parámetros que determinan el estado atrapado son:  $k = 1$  y  $n_q = 19$ .

**Fig. 4.5.a** La temperatura de la RWA simulada es de 0.3 °K lo que determina un  $n_b = 2.77 \times 10^{-6}$ .



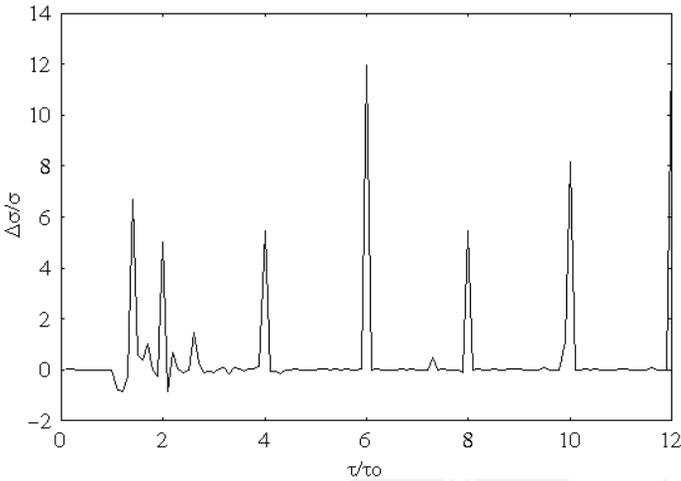
**Fig. 4.5.b** La temperatura de la RWA simulada es de 0.4 °K lo que determina un  $n_b = 6.78 \times 10^{-5}$ .

**Fig. 4.5.b** La temperatura de la RWA simulada es de 0.7 °K lo que determina un  $n_b = 4.17 \times 10^{-3}$ .



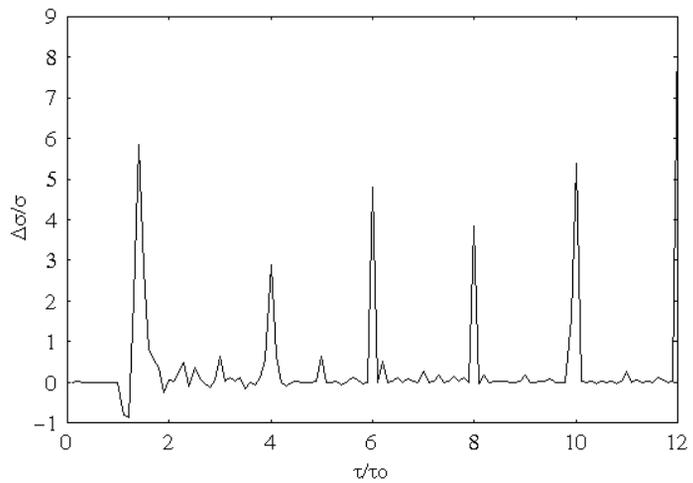
### 4.4.3 Gráficas pertenecientes al grupo a.3

Las siguientes figuras muestran la RWA simulada con medición a diferentes temperaturas *versus* la RWA teórica siempre a una temperatura de 0 °K. El tiempo de tránsito atómico  $\tau_0$  es  $1.75 \times 10^{-6}$  s y los parámetros que determinan el estado atrapado son:  $k = 1$  y  $n_q = 19$ .

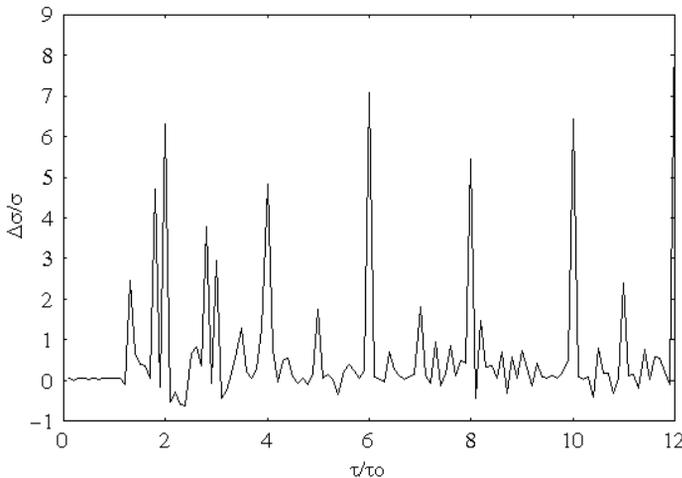


**Fig. 4.6.a** La temperatura de la RWA simulada es de 0.4 °K lo que determina un  $n_b = 6.78 \times 10^{-5}$ .

**Fig. 4.6.b** La temperatura de la RWA simulada es de 0.6 °K lo que determina un  $n_b = 1.67 \times 10^{-7}$ .



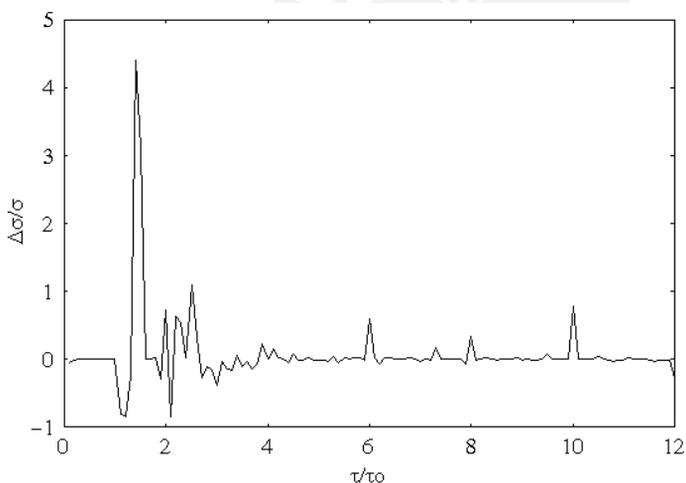
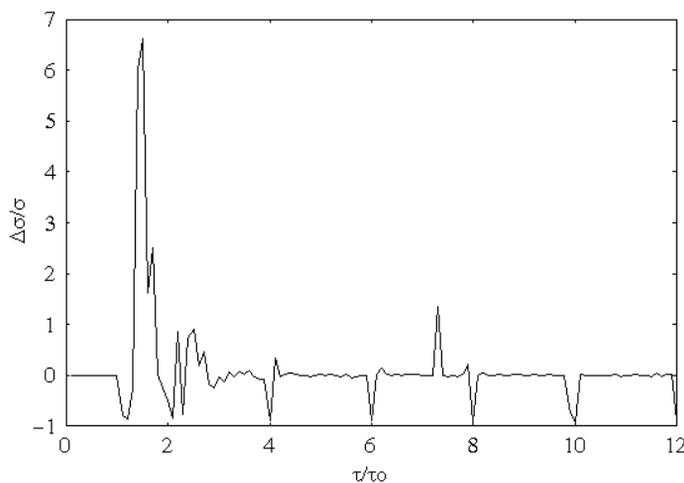
**Fig. 4.6.c** La temperatura de la RWA simulada es de 1.5 °K lo que determina un  $n_b = 8.38 \times 10^{-2}$ .



### 4.4.4 Gráficas pertenecientes al grupo a.4

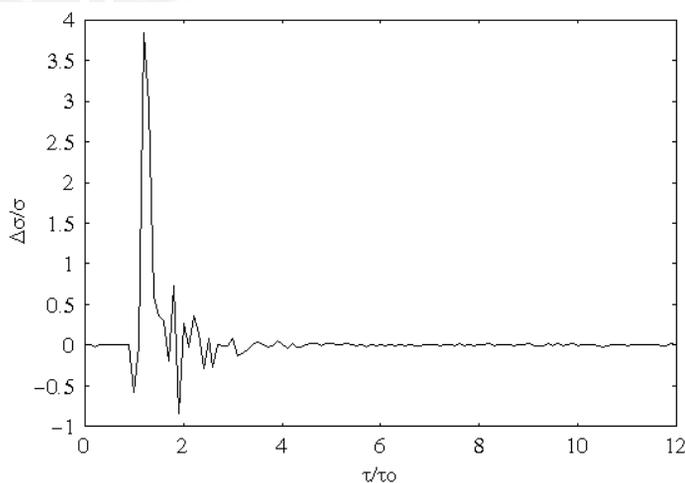
Las siguientes figuras muestran la RWA simulada con medición a diferentes temperaturas *versus* la RWA teórica a la misma temperatura. El tiempo de tránsito atómico  $\tau_0$  es  $1.75 \times 10^{-6}$  s y los parámetros que determinan el estado atrapado son:  $k = 1$  y  $n_q = 19$ .

**Fig. 4.7.a** La temperatura de la RWA simulada es de  $0.3 \text{ }^\circ\text{K}$  lo que determina un  $n_b = 2.77 \times 10^{-6}$ .



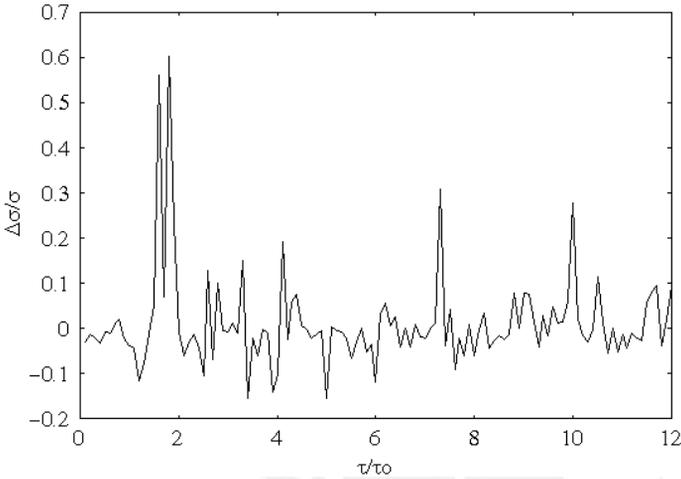
**Fig. 4.7.b** La temperatura de la RWA simulada es de  $0.5 \text{ }^\circ\text{K}$  lo que determina un  $n_b = 4.63 \times 10^{-4}$ .

**Fig. 4.7.c** La temperatura de la RWA simulada es de  $1.5 \text{ }^\circ\text{K}$  lo que determina un  $n_b = 8.38 \times 10^{-2}$ .



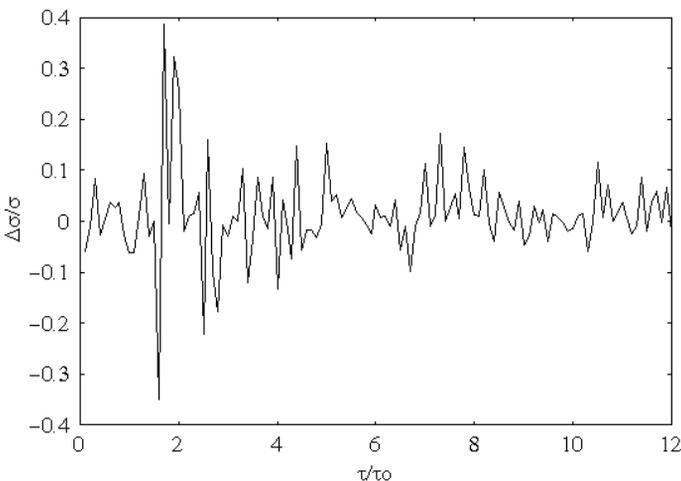
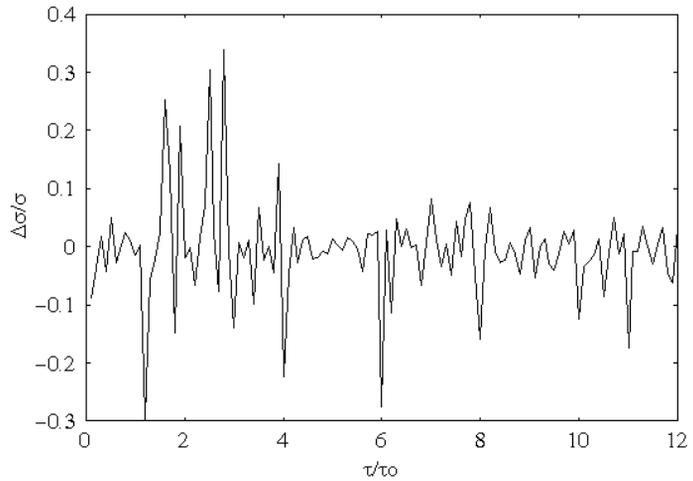
### 4.4.5 Gráficas pertenecientes al grupo a.5

Las siguientes figuras muestran la CRWA simulada sin medición a diferentes temperaturas *versus* la RWA simulada sin medición a la misma temperatura. El tiempo de tránsito atómico  $\tau_0$  es  $1.75 \times 10^{-6}$  s y los parámetros que determinan el estado atrapado son:  $k = 1$  y  $n_q = 19$ .



**Fig. 4.8.a** La temperatura de la CRWA simulada es de 0.0 °K lo que determina un  $n_b = 0$ .

**Fig. 4.8.b** La temperatura de la CRWA simulada es de 0.3 °K lo que determina un  $n_b = 2.77 \times 10^{-6}$ .

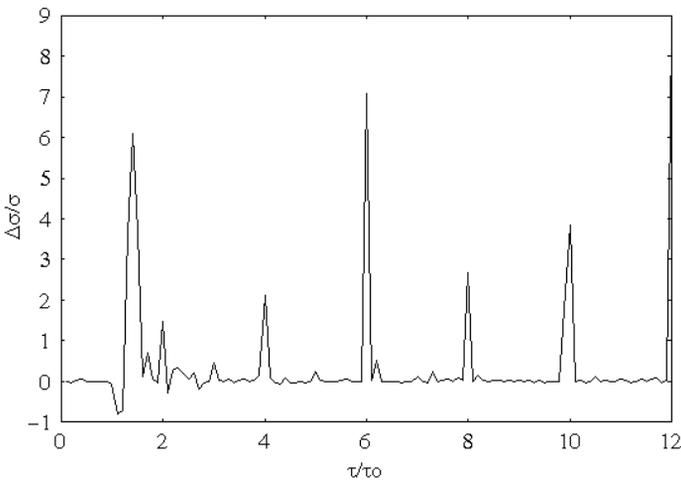
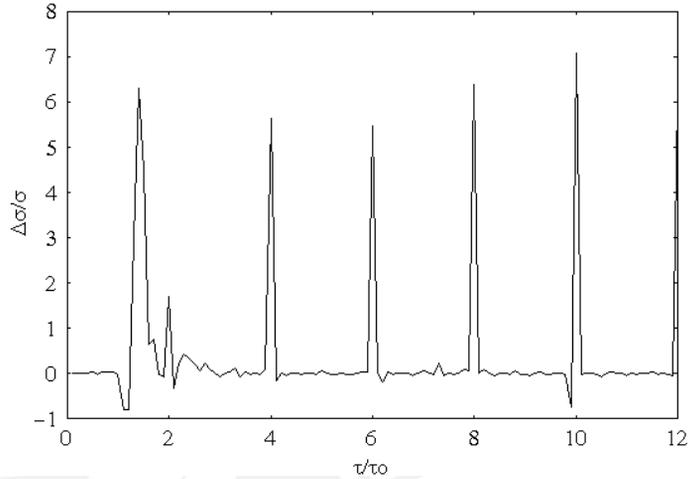


**Fig. 4.8.c** La temperatura de la CRWA simulada es de 0.5 °K lo que determina un  $n_b = 4.63 \times 10^{-4}$ .

### 4.4.6 Gráficas pertenecientes al grupo a.6

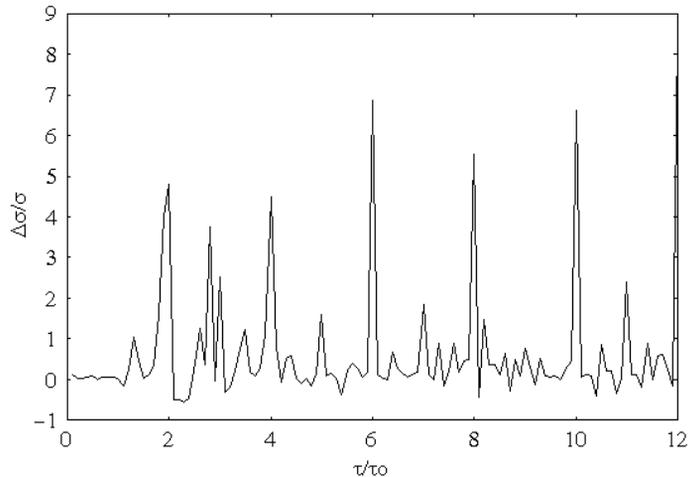
Las siguientes figuras muestran la CRWA simulada sin medición a diferentes temperaturas *versus* la RWA simulada siempre a la temperatura de 0 °K. El tiempo de tránsito atómico  $\tau_0$  es  $1.75 \times 10^{-6}$  s y los parámetros que determinan el estado atrapado son:  $k = 1$  y  $n_q = 19$ .

**Fig. 4.9.a** La temperatura de la CRWA simulada es de 0.3 °K lo que determina un  $n_b = 2.77 \times 10^{-6}$ .



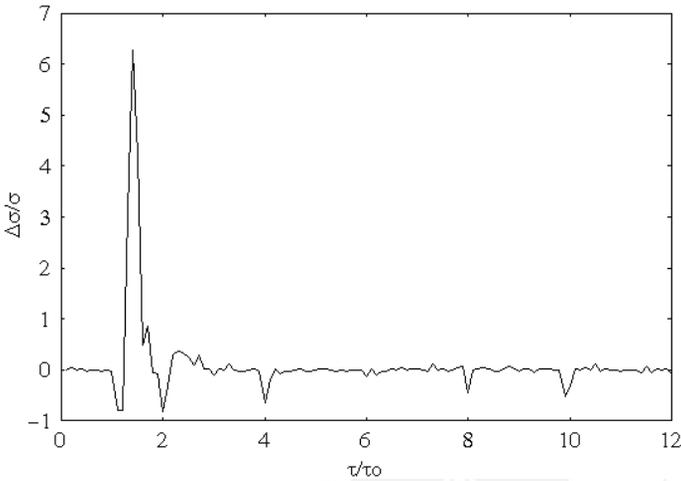
**Fig. 4.9.b** La temperatura de la CRWA simulada es de 0.5 °K lo que determina un  $n_b = 4.63 \times 10^{-4}$ .

**Fig. 4.9.c** La temperatura de la CRWA simulada es de 1.5 °K lo que determina un  $n_b = 8.38 \times 10^{-2}$ .



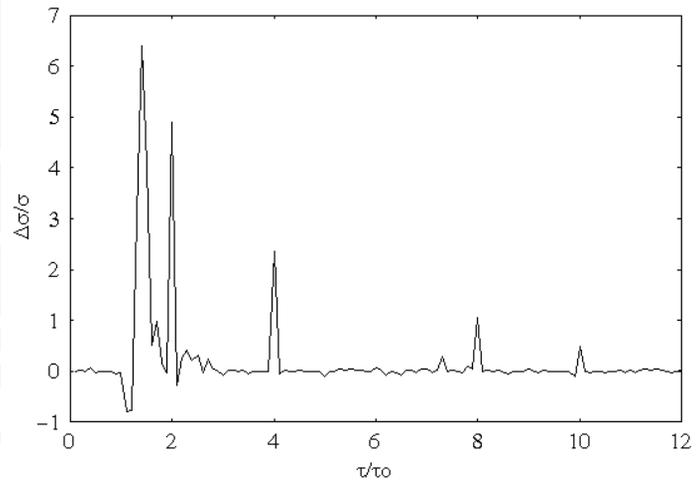
### 4.4.7 Gráficas pertenecientes al grupo a.7

Las siguientes figuras muestran la CRWA simulada sin medición a diferentes temperaturas *versus* la RWA teórica a la misma temperatura. El tiempo de tránsito atómico  $\tau_0$  es  $1.75 \times 10^{-6}$  s y los parámetros que determinan el estado atrapado son:  $k = 1$  y  $n_q = 19$ .

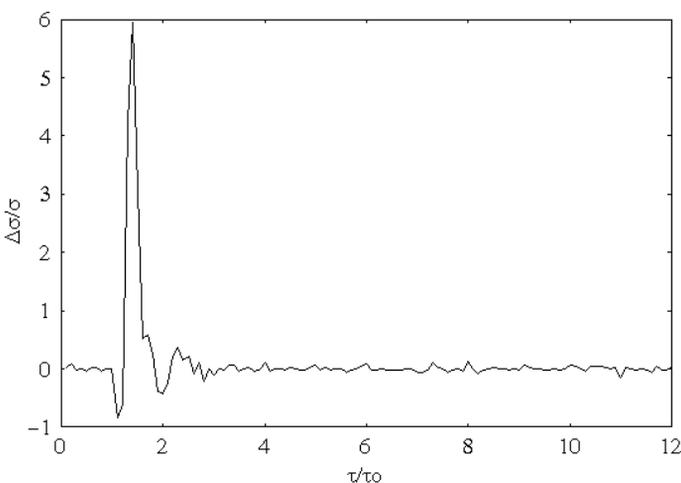


**Fig. 4.10.a** La temperatura de la CRWA simulada es de 0.2 °K lo que determina un  $n_b = 4.6 \times 10^{-9}$ .

**Fig. 4.10.b** La temperatura de la CRWA simulada es de 0.4 °K lo que determina un  $n_b = 6.8 \times 10^{-5}$ .



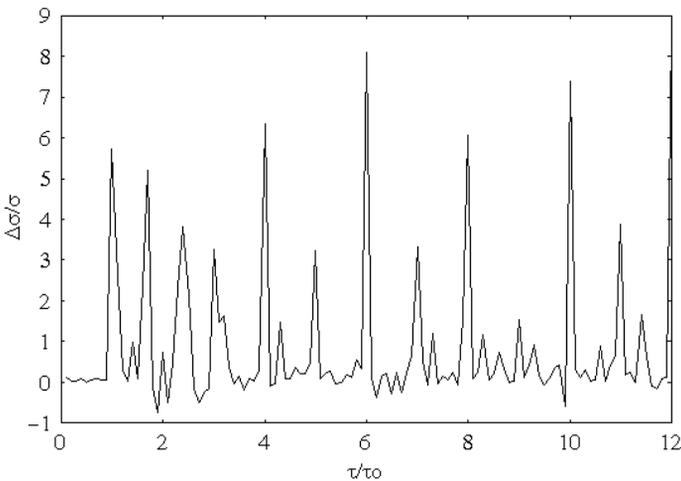
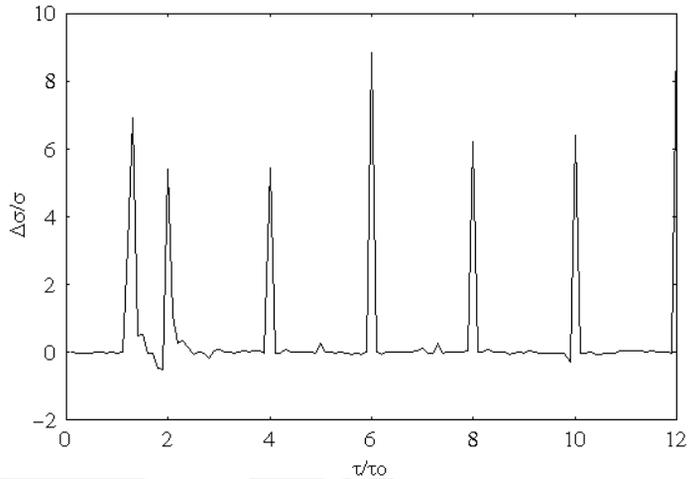
**Fig. 4.10.c** La temperatura de la CRWA simulada es de 0.6 °K lo que determina un  $n_b = 1.7 \times 10^{-3}$ .



### 4.4.8 Gráficas pertenecientes al grupo b.1

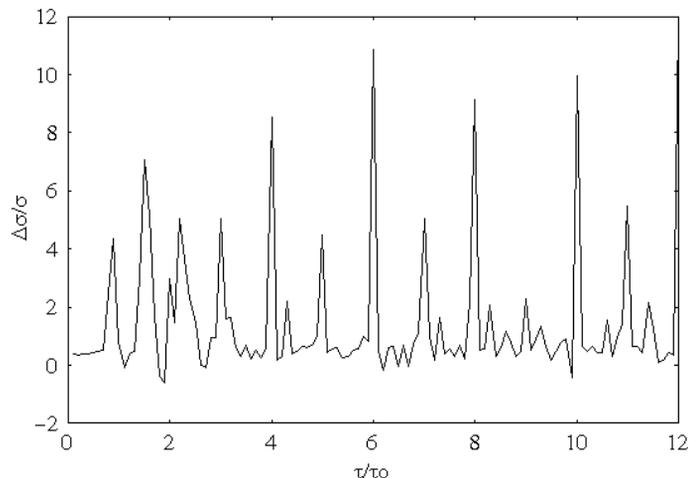
Las siguientes figuras muestran la RWA simulada sin medición a diferentes temperaturas *versus* la RWA teórica siempre a una temperatura de 0 °K. El tiempo de tránsito atómico  $\tau_0$  es  $1.59 \times 10^{-5}$  s y los parámetros que determinan el estado atrapado son:  $k = 1$  y  $n_q = 19$ .

**Fig. 4.11.a** La temperatura de la RWA simulada es de 0.1 °K lo que determina un  $n_b = 3.30 \times 10^{-5}$ .



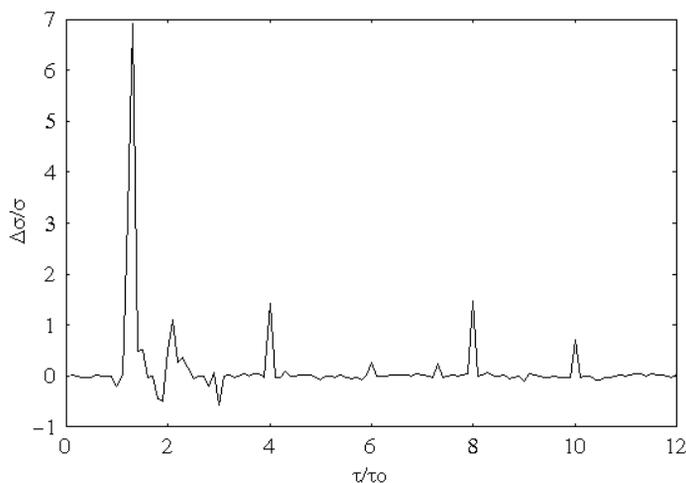
**Fig. 4.11.b** La temperatura de la RWA simulada es de 0.5 °K lo que determina un  $n_b = 0.15$ .

**Fig. 4.11.c** La temperatura de la RWA simulada es de 1.5 °K lo que determina un  $n_b = 1.01$ .



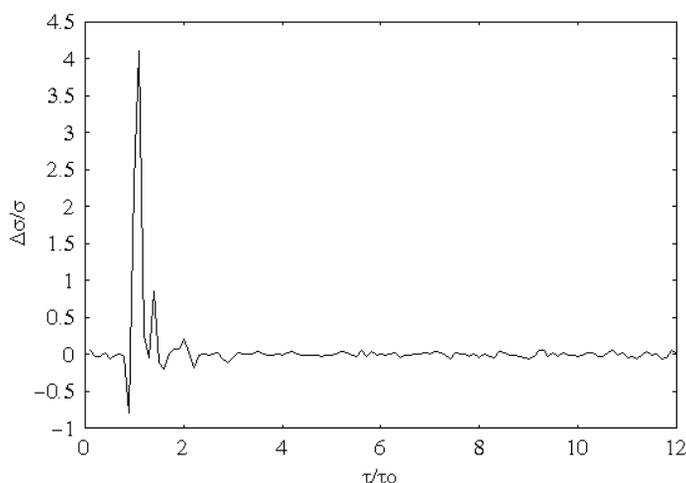
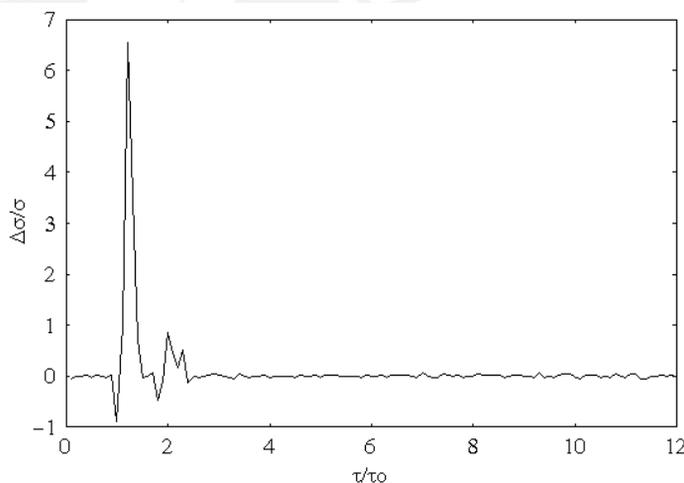
### 4.4.9 Gráficas pertenecientes al grupo b.2

Las siguientes figuras muestran la RWA simulada sin medición a diferentes temperaturas *versus* la RWA teórica a la misma temperatura. El tiempo de tránsito atómico  $\tau_0$  es  $1.59 \times 10^{-5}$  s y los parámetros que determinan el estado atrapado son:  $k = 1$  y  $n_q = 19$ .



**Fig. 4.12.a** La temperatura de la RWA simulada es de 0.1 °K lo que determina un  $n_b = 3.30 \times 10^{-5}$ .

**Fig. 4.12.b** La temperatura de la RWA simulada es de 0.2 °K lo que determina un  $n_b = 5.78 \times 10^{-3}$ .

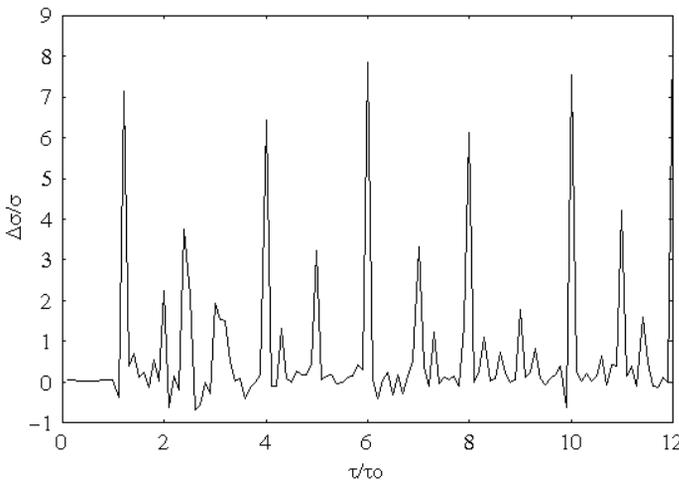
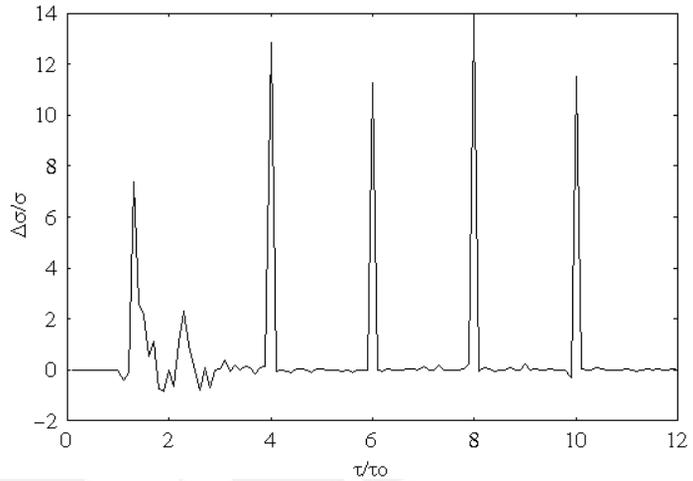


**Fig. 4.12.c** La temperatura de la RWA simulada es de 0.5 °K lo que determina un  $n_b = 0.15$ .

### 4.4.10 Gráficas pertenecientes al grupo b.3

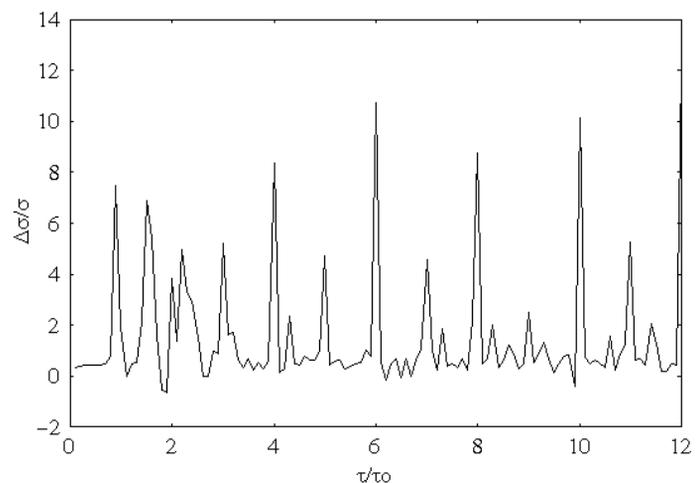
Las siguientes figuras muestran la RWA simulada con medición a diferentes temperaturas *versus* la RWA teórica siempre a una temperatura de 0 °K. El tiempo de tránsito atómico  $\tau_0$  es  $1.59 \times 10^{-5}$  s y los parámetros que determinan el estado atrapado son:  $k = 1$  y  $n_q = 19$ .

**Fig. 4.13.a** La temperatura de la RWA simulada es de 0.1 °K lo que determina un  $n_b = 3.30 \times 10^{-5}$ .



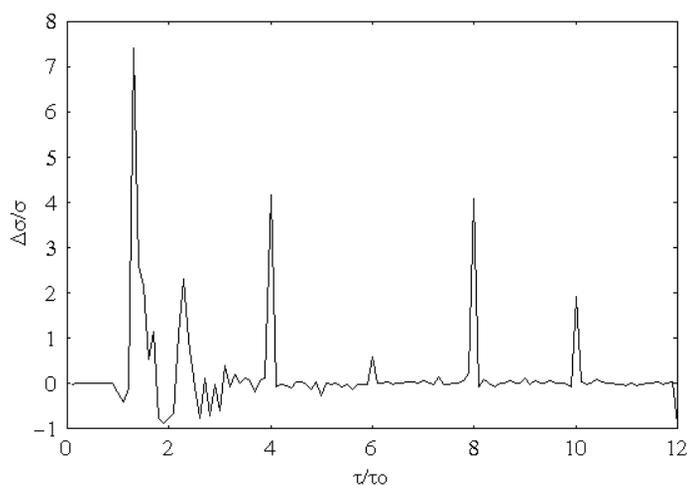
**Fig. 4.13.b** La temperatura de la RWA simulada es de 0.4 °K lo que determina un  $n_b = 8.20 \times 10^{-2}$ .

**Fig. 4.13.c** La temperatura de la RWA simulada es de 1.5 °K lo que determina un  $n_b = 1.01$ .



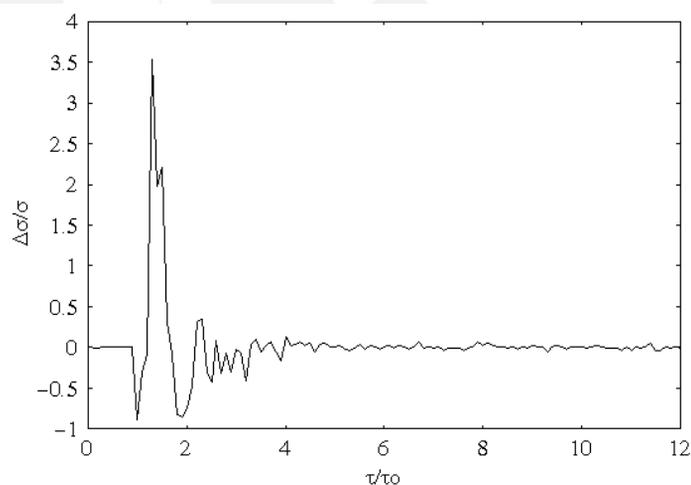
### 4.4.11 Gráficas pertenecientes al grupo b.4

Las siguientes figuras muestran la RWA simulada con medición a diferentes temperaturas *versus* la RWA teórica a la misma temperatura. El tiempo de tránsito atómico  $\tau_0$  es  $1.59 \times 10^{-5}$  s y los parámetros que determinan el estado atrapado son:  $k = 1$  y  $n_q = 19$ .

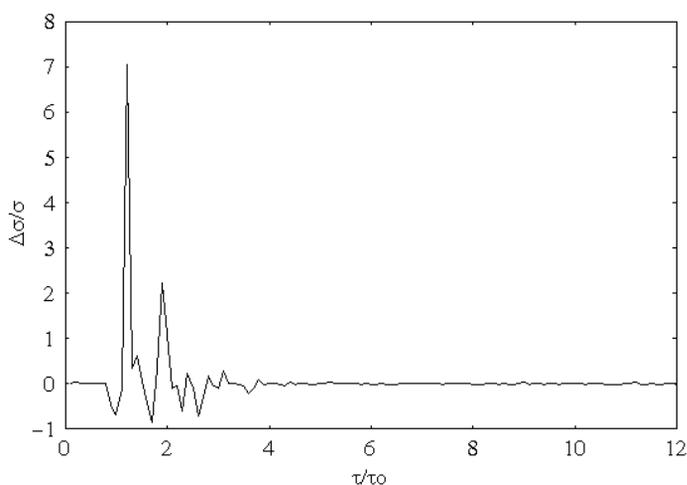


**Fig. 4.14.a** La temperatura de la RWA simulada es de 0 °K lo que determina un  $n_b = 0$ .

**Fig. 4.14.b** La temperatura de la RWA simulada es de 0.1 °K lo que determina un  $n_b = 5.78 \times 10^{-3}$ .



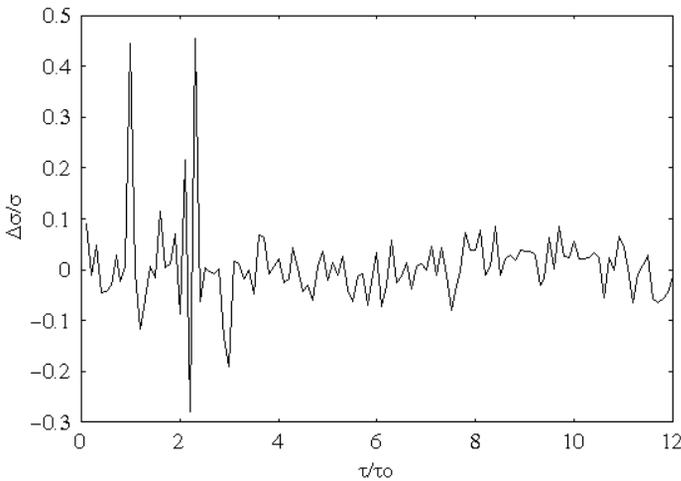
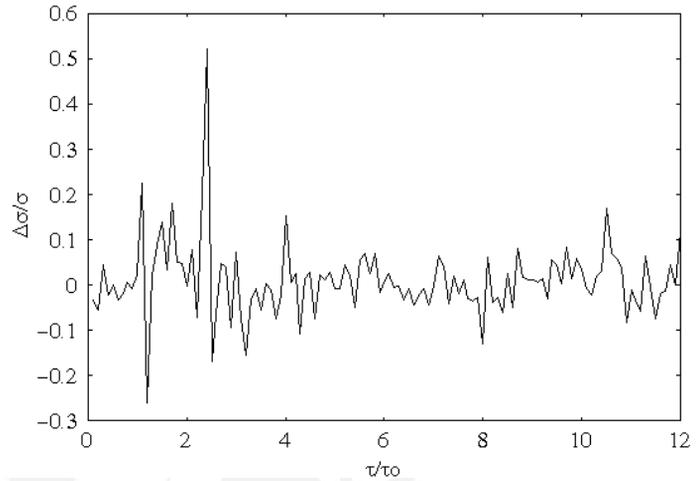
**Fig. 4.14.c** La temperatura de la RWA simulada es de 0.4 °K lo que determina un  $n_b = 8.20 \times 10^{-2}$ .



### 4.4.12 Gráficas pertenecientes al grupo b.5

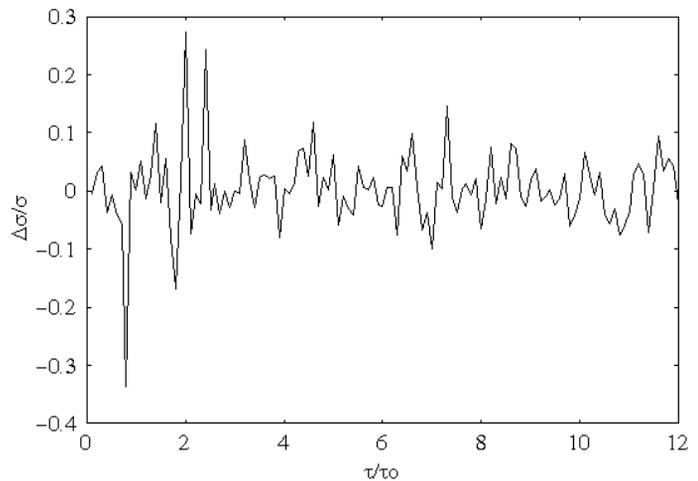
Las siguientes figuras muestran la CRWA simulada sin medición a diferentes temperaturas *versus* la RWA simulada sin medición a la misma temperatura. El tiempo de tránsito atómico  $\tau_0$  es  $1.59 \times 10^{-5}$  s y los parámetros que determinan el estado atrapado son:  $k = 1$  y  $n_q = 19$ .

**Fig. 4.15.a** La temperatura de la CRWA simulada es de  $0.1 \text{ }^\circ\text{K}$  lo que determina un  $n_b = 3.30 \times 10^{-5}$ .



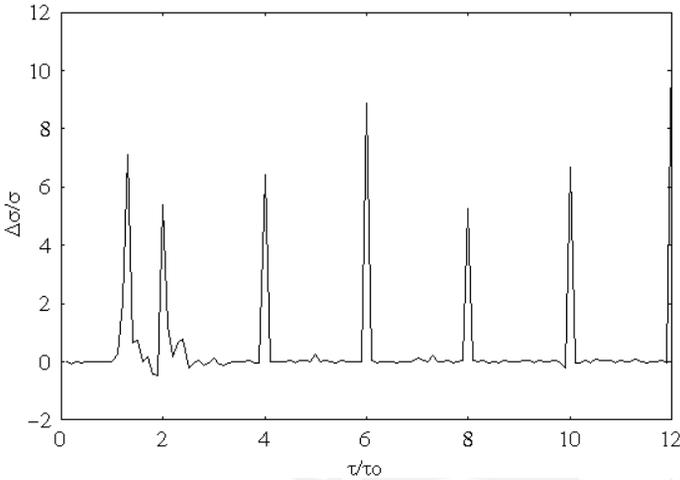
**Fig. 4.15.b** La temperatura de la CRWA simulada es de  $0.4 \text{ }^\circ\text{K}$  lo que determina un  $n_b = 8.20 \times 10^{-2}$ .

**Fig. 4.15.c** La temperatura de la CRWA simulada es de  $1.5 \text{ }^\circ\text{K}$  lo que determina un  $n_b = 1.01$ .



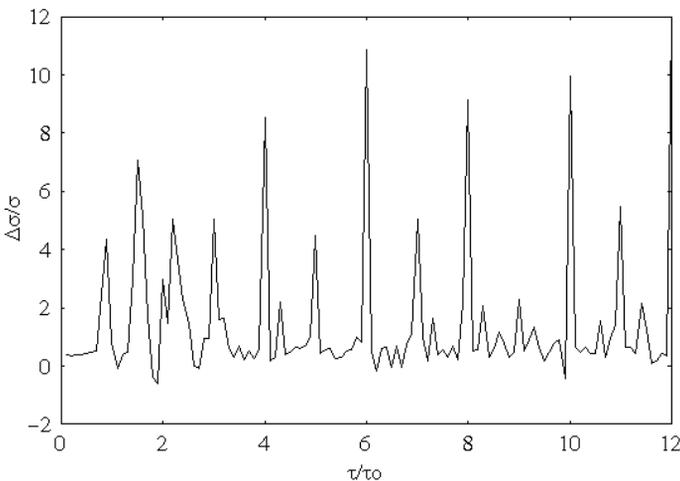
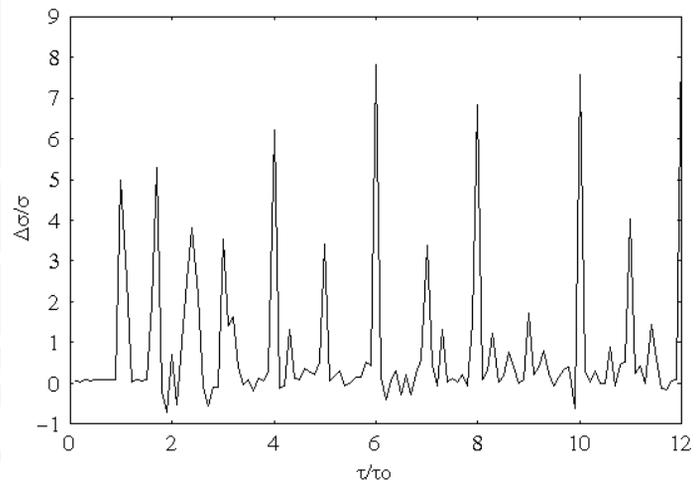
### 4.4.13 Gráficas pertenecientes al grupo b.6

Las siguientes figuras muestran la CRWA simulada sin medición a diferentes temperaturas *versus* la RWA simulada siempre a la temperatura de 0 °K. El tiempo de tránsito atómico  $\tau_0$  es  $1.59 \times 10^{-5}$  s y los parámetros que determinan el estado atrapado son:  $k = 1$  y  $n_q = 19$ .



**Fig. 4.16.a** La temperatura de la CRWA simulada es de 0.1 °K lo que determina un  $n_b = 3.30 \times 10^{-5}$ .

**Fig. 4.16.b** La temperatura de la CRWA simulada es de 0.5 °K lo que determina un  $n_b = 0.15$ .

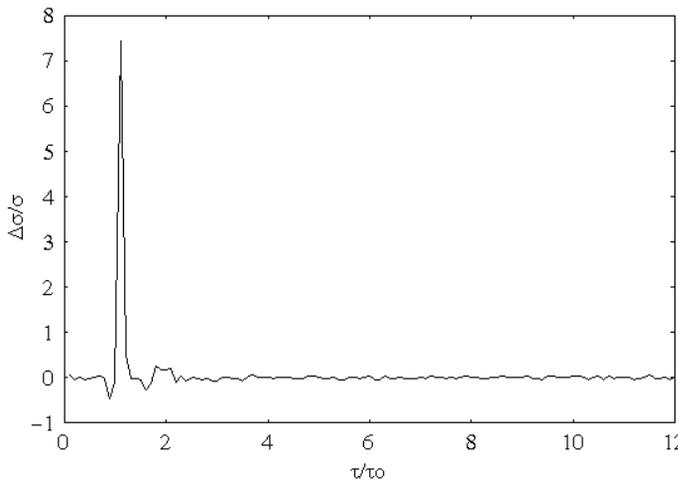
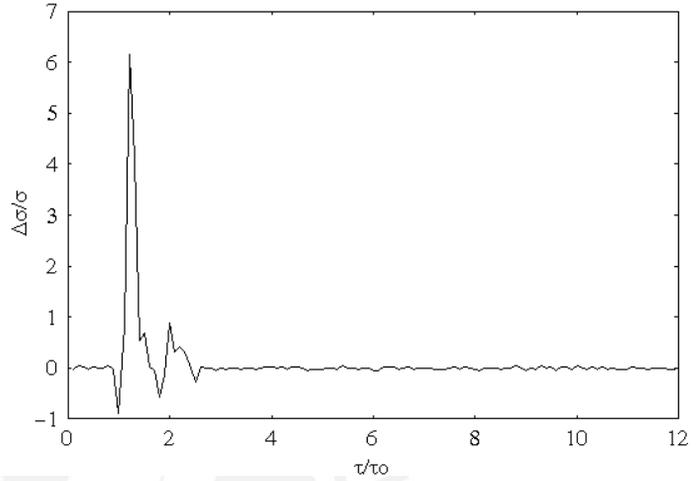


**Fig. 4.16.c** La temperatura de la CRWA simulada es de 1.5 °K lo que determina un  $n_b = 1.01$ .

#### 4.4.14 Gráficas pertenecientes al grupo b.7

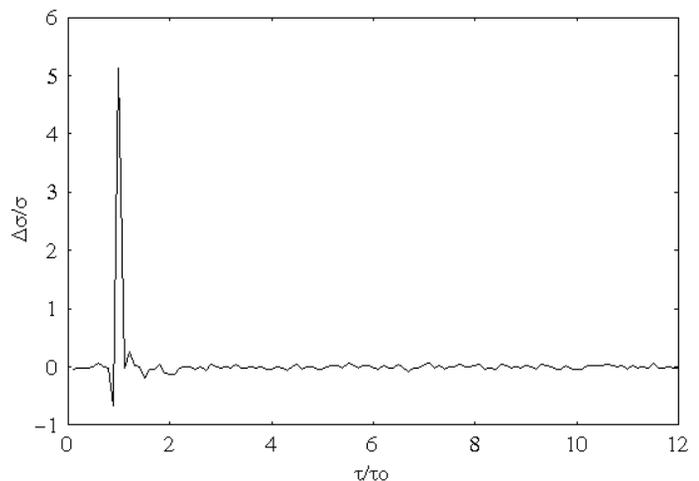
Las siguientes figuras muestran la CRWA simulada sin medición a diferentes temperaturas *versus* la RWA teórica a la misma temperatura. El tiempo de tránsito atómico  $\tau_0$  es  $1.59 \times 10^{-5}$  s y los parámetros que determinan el estado atrapado son:  $k = 1$  y  $n_q = 19$ .

**Fig. 4.17.a** La temperatura de la CRWA simulada es de  $0.2 \text{ }^\circ\text{K}$  lo que determina un  $n_b = 5.78 \times 10^{-3}$ .



**Fig. 4.17.b** La temperatura de la CRWA simulada es de  $0.4 \text{ }^\circ\text{K}$  lo que determina un  $n_b = 8.20 \times 10^{-2}$ .

**Fig. 4.17.c** La temperatura de la CRWA simulada es de  $0.6 \text{ }^\circ\text{K}$  lo que determina un  $n_b = 0.18$ .



## 5. Conclusiones

Las conclusiones del presente trabajo pueden dividirse en dos grupos: conclusiones concernientes a los aspectos computacionales y conclusiones concernientes a los aspectos físicos.

### 5.1 Conclusiones concernientes a los aspectos computacionales

El proceso de simulación es una actividad que puede resultar onerosa desde el punto de vista del tiempo de máquina empleado y depende básicamente de la eficiencia del código obtenido en base al programa principal y las subrutinas escogidas. Al ser la simulación un proceso iterativo cualquier algoritmo superfluo podría convertirse en un lastre muy pesado, por tanto, debe escogerse cuidadosamente las instrucciones del programa.

En cuanto a las subrutinas de generación de números aleatorios, es muy común usar aquellas que proporciona el *Numerical Recipes*, sin embargo, en nuestro caso debimos usar las que proporciona la versión 2 o posteriores, ya que la versión 1 condujo a resultados completamente erróneos.

Otro aspecto a tomar en cuenta es la aproximación que hacen los compiladores de los lenguajes de programación de tercera generación, FORTRAN por ejemplo, a la hora de generar el código objeto para las funciones trigonométricas, introduciendo pequeños errores en los resultados que se obtiene con estas funciones para los valores de  $n\pi$ <sup>75</sup>. En cálculos estándar, el error introducido es mínimo, pero en un proceso iterativo este error puede acumularse en forma significativa conduciéndonos a conclusiones realmente desafortunadas.

Uno de los aspectos más importantes en el proceso de simulación es la determinación del punto de corte de ésta ¿Cómo decidir cuándo debemos parar el proceso iterativo? Una de las formas es verificar si la matriz densidad que se está generando no cambia significativamente con una iteración adicional. Esto implica escoger un criterio para considerar que ya no hay ni habrá un cambio importante en la matriz. Nosotros decidimos tomar al estado de equilibrio calculado teóricamente según la RWA como punto de

---

<sup>75</sup> En los lenguajes de cuarta generación, MATHEMATICA por ejemplo, no hemos detectado estas inconsistencias.

comparación. Consideramos que una diferencia entre el resultado obtenido por simulación y el resultado teórico que asegurara una desviación del 0.3% era adecuada para detener el proceso iterativo. Sin embargo, debemos acotar que existen ciertas distribuciones fotónicas que tienen mínimos de potencial locales muy pequeños, provocando que los fotones pasen muchas veces de un mínimo a otro. Este efecto se nota especialmente en los estados atrapados, estados que como ya hemos visto, son muy sensibles a la presencia de fotones térmicos<sup>76</sup> los que destruirían el estado atrapado causando una “fuga” de fotones del estado  $n$  al estado  $n \pm 1$ . Estas situaciones pueden implicar una considerable cantidad de tiempo para llegar al equilibrio por simulación, inclusive, en algunos casos no se llega a salir nunca de este pasar fotones de un lugar a otro, por tanto, debe considerarse que aunque en estos casos no se llegue a la diferencia deseada entre lo teórico y lo simulado<sup>77</sup>, ya no podremos mejorar significativamente por más tiempo que le demos al proceso y por ende debemos para el proceso iterativo.

## 5.2 Conclusiones concernientes a los aspectos físicos

El procedimiento seguido a partir del trabajo de Honerkamp correspondiente a las ecuaciones maestras y la obtención de sus soluciones a partir de métodos estocásticos demostró su idoneidad para situaciones donde no se cumple la condición de “balance detallado”, es decir, aquella condición que establece que para alcanzar el estado estacionario el flujo de salida de partículas desde el estado  $n$  hacia los estados  $n'$  es el mismo que el flujo de llegada de partículas hacia  $n$  desde los estados  $n'$ . En el caso de la dinámica del micromáser fuera de la RWA esta condición no se cumple exactamente al no haber flujo de partículas entre los estados  $n + 1$  y  $n + 2$  ó entre los estados  $n - 1$  y  $n - 2$ . Sin embargo, el proceso que nos llevó a recuperar las probabilidades de transición halladas por Swain<sup>78</sup> a partir de este método nos sugirió que podría funcionar, aun, en estos casos más generales.

Por otro lado, los experimentos llevados a cabo mediante simulación demuestran que el efecto estocástico introducido por la presencia de fotones térmicos produce una diferencia

---

<sup>76</sup> Cuando hay una temperatura distinta de cero.

<sup>77</sup> Entiéndase aquí como experimental.

<sup>78</sup> Ecuación (3.69)

entre lo teórico y lo simulado que se hace muy marcada en los estados atrapados, estados que, como ya hemos visto, se van disipando conforme aumenta la temperatura.

Los resultados de comparar la RWA teórica a temperatura cero con la RWA simulada a temperaturas distintas de cero presentan picos en los estados atrapados, sugiriendo que en el experimento real será posible detectar la presencia de estos estados, ya que las temperaturas logradas experimentalmente son compatibles con las temperaturas empleadas en nuestras simulaciones<sup>79</sup>.

Cuando comparamos la RWA teórica con las RWA simulada a la misma temperatura no se notan diferencias importantes ya que a una temperatura distinta de cero los estados atrapados empiezan a desaparecer conforme aumenta la temperatura.

Son especialmente interesantes los casos cuando la dinámica del micromáser se ve afectada por la medición<sup>80</sup>, vemos que si promediamos los resultados obtenidos en sistemas donde ha habido medición se disipa el efecto de medir obteniéndose resultados que, dentro del error estadístico, son cuantitativamente iguales a los obtenidos en sistemas donde no ha habido medición alguna.

Cuando comparamos la CRWA con la RWA simuladas a la misma temperatura no detectamos ningún patrón que pueda sugerir alguna diferencia entre ambas. Sin embargo, a pesar de la estocasticidad introducida por la simulación, si la simulación de la RWA se hace a temperatura cero aparecen picos muy marcados en los estados atrapados, picos que van apantallándose con el ruido estocástico producido por el aumento de la temperatura.

Esto nos sugiere la posibilidad de detectar experimentalmente estados atrapados, ya que la Naturaleza no "sabe" de aproximaciones, y por tanto, la CRWA está más cerca de lo que pasa en el experimento real.

Finalmente, hemos realizado los mismos experimentos para otros parámetros determinantes de la dinámica del micromáser, detectando el mismo comportamiento: la inclusión de los términos "contrarrotantes" produce el mismo efecto de "fuga" de partículas del estado  $n$  a otros estados  $n'$  que el producido por la presencia de fotones térmicos.

---

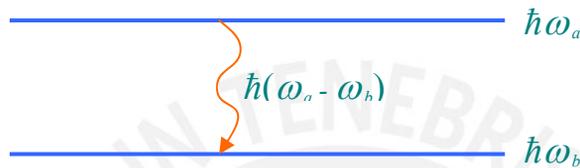
<sup>79</sup> Nótese que los picos persisten inclusive para temperaturas del orden de los kelvin.

<sup>80</sup> La detección de los átomos emergentes de la cavidad en estado excitado o desexcitado. Véase la nota bibliográfica 13.

## Apéndice A

### Matrices de Pauli

Cuando tratamos átomos de dos niveles a menudo es conveniente echar mano de la notación de matrices  $2 \times 2$ , de tal manera que si tenemos dos niveles de energía como los mostrados en la siguiente figura:



podemos representar matricialmente las funciones propias  $u_a$  y  $u_b$  como:

$$u_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Las matrices de Pauli en la base donde  $\sigma_z$  es diagonal, vienen dadas por:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Se puede demostrar<sup>81</sup> que cualquier matriz  $2 \times 2$  se puede representar mediante la combinación lineal de las matrices de Pauli más la matriz identidad  $I$ . Por ejemplo, la matriz  $M$  definida como:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

<sup>81</sup> C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y F. Laloë; 1977, *Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons, New York

podemos escribirla:

$$M = \frac{m_{11} + m_{22}}{2} I + \frac{m_{11} - m_{22}}{2} \sigma_z + \frac{m_{12} + m_{21}}{2} \sigma_x + i \frac{m_{12} - m_{21}}{2} \sigma_y \quad (\text{A.4})$$

Adicionalmente podemos definir  $\sigma^\pm$  mediante:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma^+ + \sigma^- \\ \sigma_y &= -i(\sigma^+ - \sigma^-) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Se puede ver fácilmente que:

$$\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Tales matrices juegan respectivamente el papel de operadores de “subida” y de “bajada” para los dos niveles energéticos involucrados.

En particular, si tenemos un hamiltoniano atómico representado en su base propia como:

$$H_a = \hbar \begin{pmatrix} \omega_a & 0 \\ 0 & \omega_b \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

podemos escribirlo como:

$$H_a = \frac{1}{2} \hbar (\omega_a + \omega_b) I + \frac{1}{2} \hbar (\omega_a - \omega_b) \sigma_z \quad (\text{A.8})$$

Dada la importancia teórica de los sistemas de dos niveles es conveniente introducir el operador  $\sigma$  definido de la siguiente manera:

$$\sigma = x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Las matrices de Pauli obedecen las siguientes reglas de conmutación:

$$\begin{aligned} [\sigma_x, \sigma_y] &= \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_x = 2i \sigma_z \\ [\sigma_y, \sigma_z] &= 2i \sigma_x \\ [\sigma_z, \sigma_x] &= 2i \sigma_y \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

y la siguiente regla de anticonmutación:

$$\{\sigma_i, \sigma_j\}_+ = 2\delta_{ij} \quad (\text{A.11})$$

de lo cual deducimos que si  $i = j$ , entonces  $\sigma_i^2 = 1$ , donde 1 es el operador identidad.

Si sumamos (A.10) más (a.11) obtenemos  $\sigma_i \sigma_j = i \sigma_k$ , donde  $i, j$ , y  $k$  obedecen la regla de conmutación par de 1, 2, 3, con la salvedad de que  $i \neq j$ .

Con las igualdades anteriores podemos deducir las útiles relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} [\sigma_{\pm}, \sigma_x] &= \pm \sigma_z \\ [\sigma_{\pm}, \sigma_y] &= i \sigma_z \\ [\sigma_{\pm}, \sigma_z] &= \mp 2\sigma_{\pm} \\ [\sigma_+, \sigma_-] &= \sigma_z \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

y de anticonmutación:

$$\begin{aligned} \{\sigma_{\pm}, \sigma_x\}_+ &= 1 \\ \{\sigma_{\pm}, \sigma_y\}_+ &= \pm i \\ \{\sigma_{\pm}, \sigma_z\}_+ &= 0 \\ \{\sigma_+, \sigma_-\}_+ &= 1 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

## Apéndice B

### El operador densidad

Von Neumann en 1927 introdujo el concepto de operador densidad para describir los conceptos estadísticos en mecánica cuántica. En vez de trabajar con la ecuación de Schrödinger, debemos manejarnos con la siguiente ecuación diferencial:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho(t) = [H(t), \rho(t)] \quad (\text{B.1})$$

llamada ecuación de Liouville porque adopta una forma análoga a la ecuación de movimiento para la distribución de probabilidad en el espacio de fases en la mecánica clásica. Aquí,  $\rho(t)$  es el operador densidad y  $H(t)$  es el Hamiltoniano del sistema. Una forma equivalente a (B.1) es:

$$\rho(t) = U(t) \rho(0) U^\dagger(t) \quad (\text{B.2})$$

donde  $U(t)$  es el operador evolución y satisface la ecuación:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t-t_0) = H(t) U(t-t_0) \quad (\text{B.3})$$

En el caso que  $H$  no dependa del tiempo, se tiene entonces:

$$\rho(t) = e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} \rho(0) e^{i\frac{Ht}{\hbar}} \quad (\text{B.4})$$

El operador densidad puede definirse en una base  $\{|\psi_k\rangle\}$  como:

$$\rho(t) = \sum_k W_k |\psi_k(t)\rangle \langle \psi_k(t)| \quad (\text{B.5})$$

Aquí,  $W_k$  es el peso estadístico de cada estado  $|\psi_k\rangle$ <sup>82</sup>.

Cuando poseemos información completa sobre el sistema, por ejemplo: sabemos con certeza que está en el estado  $|\psi\rangle$ , los  $W_k$  en (B.5) son todos cero excepto uno de ellos y el operador densidad se convierte en:

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| \tag{B.6}$$

y podemos definir un vector de estado que represente al sistema; decimos que estamos en un “estado puro”. En este caso resulta equivalente resolver la ecuación de Schrödinger para ese estado o la ecuación (B.1).

Sin embargo, si la información que poseemos sobre el sistema es incompleta, típicamente tenemos que apelar al concepto de probabilidad. En mecánica cuántica significa que el estado del sistema puede ser cualquiera de los  $|\psi_k(t)\rangle$  con su respectiva probabilidad  $W_k$ . En este caso, decimos que tenemos una “mezcla estadística de estados”. Para conocer la evolución del sistema tenemos que usar la ecuación (B.1) puesto que no podemos usar la ecuación de Schrödinger, ya que no existe una función de estado específica del sistema.

Puede demostrarse que:

$$\langle O \rangle = \text{Tr}[\rho O] = \text{Tr}[O \rho] \tag{B.7}$$

donde  $\langle O \rangle$  es el valor medio de un operador arbitrario  $O$  y  $\text{Tr}$  expresa la traza, es decir, la suma sobre los elementos de la diagonal principal de la matriz producto de  $\rho$  con  $O$ . Exigiendo que  $\rho(t) = \rho^\dagger(t)$ , las ecuaciones (B.1) y (B.7) constituyen las ecuaciones básicas de la teoría del operador densidad. El uso simultáneo de ellas conduce a las ecuaciones de movimiento de los observables implicados<sup>83</sup>

<sup>82</sup> Dichos estados no tienen necesariamente que ser ortonormales entre sí.

<sup>83</sup> Karl Blum; 1981, *Density Matrix Theory and Applications*, Plenum Press, New York.

## Dinámica del micromáser en la formulación del operador densidad

Evidentemente, el estado del campo fotónico dentro de la cavidad es una mezcla estadística de estados, tanto al tiempo inicial como necesariamente después de haber interactuado con cada átomo que ha entrado en ella. Como se explicó anteriormente, ambas condiciones hacen necesario el uso del operador densidad desde un inicio para tratar la dinámica del micromáser.

Si al tiempo inicial ( $t_i$ ) los operadores densidad que representan respectivamente al campo electromagnético dentro de la cavidad y al átomo que está a punto de entrar en ella (aún no se ha activado la interacción entre ellos) son  $\rho_c(t_i)$  y  $\rho_a(t_i)$ , el operador densidad del sistema será el producto tensorial de ambos:

$$\rho_{ac}(t_i) = \rho_n(t_i) \otimes \rho_c(t_i) \quad (\text{B.8})$$

Durante el tiempo que el átomo atraviesa la cavidad el sistema átomo–campo debe evolucionar de acuerdo a la ecuación:

$$\rho_{ac}(t_i + \tau) = U(\tau) \rho_{ac} U^+(\tau) \quad (\text{B.9})$$

con:

$$U(\tau) = e^{-i \frac{H_{JCM} \tau}{\hbar}} \quad (\text{B.10})$$

donde  $\tau$  es el tiempo de interacción, es decir, el tiempo que le toma al átomo atravesar la cavidad del micromáser. Aquí el operador evolución toma esta forma porque  $H_{JCM}$  es independiente del tiempo.

Como sólo estamos interesados en el subsistema del campo electromagnético, el cual contiene toda la información que necesitamos, podemos tomar la traza parcial sobre los grados de libertad atómicos para obtener el operador densidad que caracteriza al subsistema que nos interesa:

$$\rho_c(t_i + \tau) = \text{Tr}_{\text{at}} [\rho_{ac}(t_i + \tau)] = \text{Tr}_{\text{at}} [U(\tau) \rho_{ac}(t_i) U^+(\tau)] \quad (\text{B.11})$$

donde  $Tr_{at}$  significa la traza sobre el subsistema atómico.

Una vez que el átomo ha abandonado la cavidad, el campo electromagnético evoluciona hacia un estado térmico estacionario que depende del número medio de fotones térmicos  $n_b$  y en un tiempo que depende de las pérdidas de la cavidad. Éstas quedan tipificadas por el factor  $Q$  de “fineza” o, equivalentemente, por  $\gamma^{-1}$  (tiempo característico de la vida media de un fotón en la cavidad). Cuando llega el siguiente átomo, el proceso iniciado en (B.8) se repite otra vez.



## Apéndice C

### Teoría del reservorio y el operador densidad

Los experimentos realizados con el micromáser están diseñados de tal manera que el flujo atómico sea lo más raleado posible, con tiempos de vuelo atómicos que aseguren que el “baño” de fotones térmicos de la cavidad resonante no influyan significativamente en la interacción átomo–campo mientras el átomo esté dentro de ella. Teóricamente esto permitió la separación del análisis del experimento en dos partes, la primera, mientras el átomo está en la cavidad y la segunda cuando la cavidad está vacía. En esta última parte es necesaria una teoría que nos indique el estado del campo electromagnético que encontrará el siguiente átomo que va a ingresar dentro de la cavidad.

La dinámica básica del micromáser implica que entre el  $i$ -ésimo átomo y el que le sigue, el campo electromagnético sustentado por la cavidad debe sufrir un decaimiento irreversible<sup>84</sup> debido al hecho de que la cavidad se comporta como un reservorio o “baño térmico”.

Estamos ante un proceso muy común en la naturaleza: un gran sistema estacionario con muchos grados de libertad y con un espectro cuyo ancho de banda es casi continuo influye sobre un sistema dinámico cuyos estados energéticos son discretos y que por lo general tiene pocos grados de libertad<sup>85</sup>.

Tratar de resolver las ecuaciones de movimiento del sistema completo es imposible, ya que el número de ecuaciones involucradas es prácticamente infinito, lo que hace del modelaje el camino a seguir.

Los modelos para diferentes situaciones experimentales tienen en común (no necesariamente las únicas) las siguientes asunciones:

---

<sup>84</sup> El proceso por el cual un sistema dinámico progresa hacia el equilibrio (estado estacionario) con un reservorio térmico se le conoce como *damping*. Un cambio súbito en algún parámetro del sistema perturbará el equilibrio, el sistema se relajará hasta alcanzar un nuevo estado de equilibrio.

<sup>85</sup> Podemos tomar como ejemplos de tales sistemas a conjuntos de átomos –el sistema dinámico– que interactúan con sistemas más grandes que hacen las veces de reservorios, una red cristalina, por ejemplo.

1. Las fluctuaciones en el reservorio son estacionarias y *markovianas*<sup>86</sup>
2. El tiempo de correlación  $\tau_c$  de las fluctuaciones del reservorio es del orden del periodo medio de una fluctuación.
3. Los operadores del reservorio que representan los *ensamble average* son iguales a cero.
4. El acoplamiento sistema-reservorio es débil y el reservorio es un sistema lo suficientemente grande para que el efecto del acoplamiento sobre el reservorio sea despreciable. Por tanto se asume que el reservorio permanece en equilibrio térmico a temperatura constante todo el tiempo. Sin embargo, el acoplamiento tiene un efecto muy fuerte sobre el sistema dinámico que ulteriormente lo lleva al equilibrio con el reservorio.
5. El reservorio induce fluctuaciones markovianas en el sistema dinámico.
6. La constante  $1/\gamma$  del tiempo de relajamiento que gobierna la razón a la cual el sistema dinámico de acerca al equilibrio con el reservorio es mucho más largo que el tiempo de correlación  $\tau_c$ .

Como sólo estamos interesados en la evolución del campo electromagnético, trabajando en la imagen de Schrödinger debemos llegar a una “ecuación maestra”, es decir, una ecuación que describa la evolución temporal del operador densidad asociado con el subsistema dinámico bajo la influencia del reservorio<sup>87</sup>.

De aquí en adelante, los subíndices  $r$  y  $s$  harán referencia al reservorio y al sistema dinámico respectivamente. Las interacciones sistema-reservorio se modelan por las interacciones de un oscilador armónico simple (el sistema dinámico) acoplado a un continuo de osciladores armónicos (el reservorio)<sup>88</sup>

<sup>86</sup> Se dice que un sistema es *markoviano* cuando éste no tiene memoria de su pasado, es decir, la probabilidad de que una variable del sistema se encuentre en un determinado intervalo al tiempo  $t = t_n$  sólo depende del valor de la variable al tiempo  $t = t_{n-1}$ .

<sup>87</sup> Mitchell Weissbluth; 1989, *Photon-Atom Interactions*, Academic Press, Inc, San Diego, CA.

<sup>88</sup> P. Meystre y M. Sargent III; 1991, *Elements of Quantum Optics*, Springer-Verlag, Berlín.

El Hamiltoniano del sistema es:

$$H = H_r + H_s + H_{rs} \quad (C.1)$$

Con los conocidos operadores bosónicos de aniquilación y creación de fotones  $a$  y  $a^+$ ;  $b$  y  $b^+$  podemos escribir los componentes de (C.1) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} H_r &= \sum_k \hbar \omega_k b_k^+ b_k \\ H_s &= \hbar \omega a^+ a \\ H_{rs} &= \hbar \left( a \sum_k \lambda_k b_k^+ + a^+ \sum_k \lambda_k^* b_k \right) \end{aligned} \quad (C.2)$$

donde  $\lambda_k$  es la constante de acoplamiento entre el modo del sistema y el  $k$ -ésimo modo del reservorio,  $\lambda_k^*$  es el conjugado complejo de  $\lambda_k$ .

$H_{rs}$  simboliza la interacción sistema-reservorio, mediante el intercambio de energía entre ambos, por medio de la creación simultánea de un cuanto de excitación en el sistema y de la aniquilación de otro en el  $k$ -ésimo modo del reservorio, y viceversa. Debemos decir que el comportamiento del sistema no depende substancialmente de la forma explícita de  $H_r$  sino más bien de que cumpla con tener un espectro cuyo ancho de banda sea muy grande y por ende un tiempo de correlación muy pequeño.

Dada la forma del Hamiltoniano (C.1) nos conviene trabajar en la imagen de interacción; en adelante los símbolos  $\chi_{rs}(t)$  y  $V_{rs}(t)$  se referirán respectivamente a  $\rho_{rs}(t)$  y a  $H_{rs}(t)$  en esta imagen.

Asumiendo que la interacción se activó al tiempo  $t_0$  y haciendo  $H_0 = H_r + H_s$  podemos escribir:

$$\chi_{rs}(t) = e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} \rho_{rs}(t) e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} \quad (C.3)$$

haciendo uso de la conocida transformación unitaria.

La ecuación de movimiento para el operador densidad en la imagen de interacción es:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\chi_{rs}(t)) = [V_{rs}(t-t_0), \chi_{rs}(t)] \quad (C.4)$$

donde:

$$V_{rs}(t-t_0) = \hbar \sum_k \lambda_k a b^+ e^{-i(\omega-\omega_k)(t-t_0)} + \text{adjunto} \quad (C.5)$$

es el potencial de interacción en la imagen de interacción.

Como nos interesa solamente el sistema dinámico, definimos:

$$\chi_s(t) = \text{Tr}_{\text{res}} [\chi_{rs}(t)] \quad (C.6)$$

donde  $\text{Tr}_{\text{res}}$  es la traza sobre los grados de libertad del reservorio.

Ahora integramos (C.4) entre  $t$  y  $t_0$ , tomando  $\chi_{rs}(t) \approx \chi_{rs}(t_0)$  (aproximación de Markov) en el conmutador para obtener una solución a primer orden para  $\chi_{rs}(t)$ . Este valor lo usamos en el conmutador de (C.4) al integrar por segunda vez, obteniendo un valor mejorado a segundo orden:

$$\begin{aligned} \chi_{rs}(t) = & \chi_{rs}(t_0) - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' [V_{rs}(t'-t_0), \chi_{rs}(t_0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' [V_{rs}(t'-t_0), [V_{rs}(t''-t_0), \chi_{rs}(t_0)]] \\ & + \dots \end{aligned} \quad (C.7)$$

En los cálculos que siguen, los conmutadores dobles en (C.7) se simplificarán notando que:

$$\begin{aligned} & [V_{rs}(t'-t_0), [V_{rs}(t''-t_0), \chi_{rs}(t_0)]] = \\ & V_{rs}(t'-t_0) V_{rs}(t''-t_0) \chi_{rs}(t_0) - V_{rs}(t'-t_0) \chi_{rs}(t_0) V_{rs}(t''-t_0) + \text{adj.} \end{aligned} \quad (C.8)$$

En la Aproximación de Markov, el sistema dinámico evoluciona en intervalos temporales mayores que el tiempo de correlación o “memoria” del reservorio ( $t_c$ ). Luego,

siempre podemos encontrar un tiempo  $t$  durante el cual podemos definir una ecuación de movimiento para  $\chi_s(t)$  conocida como “derivada de grano grueso”:

$$\frac{d\chi_s(t)}{dt} \approx \frac{\chi_s(t) - \chi_s(t - \tau)}{\tau} \quad (C.9)$$

donde  $\tau = t - t_0 > \tau_c$  pero mucho menor comparado con el tiempo necesario ( $\gamma^{-1}$ ) para que las variables del sistema sufran cambios significativos.

De acuerdo a (C.6), el miembro derecho de (C.9) podemos escribirlo como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \chi_s &\approx \frac{i}{\hbar \tau} \int_0^\tau d\tau' \text{Tr}_{\text{res}} [V_{rs}(\tau')] \chi_{rs}(t_0) \\ &- \frac{i}{\hbar^2 \tau} \int_0^\tau d\tau' \int_0^{\tau'} d\tau'' \text{Tr}_{\text{res}} [V_{rs}(\tau') V_{rs}(\tau'') \chi_{rs}(t_0) - V_{rs}(\tau') \chi_{rs}(t_0) V_{rs}(\tau'')] \\ &+ \text{adj.} \end{aligned} \quad (C.10)$$

Escribamos ahora en forma compacta (C.5):

$$V_{rs}(\tau) = \hbar [aF^+(\tau) + a^+ F(\tau)] \quad (C.11)$$

donde

$$F(\tau) = -i \sum_k \lambda_k^* b_k e^{i(\omega - \omega_k)\tau} \quad (C.12)$$

es un operador que sólo actúa en el espacio de Hilbert del reservorio.

Para evaluar las trazas en (C.10) debemos tomar en cuenta que el reservorio siempre está descrito por una distribución en equilibrio térmico a una temperatura constante, sin importar la influencia del sistema en él. En otras palabras, las correlaciones entre el sistema y el reservorio se desprecian y por tanto, en buena aproximación podemos escribir:

$$\chi_{rs}(t) \rightarrow \langle \chi_{rs}(t) \rangle = \chi_s(t) \chi_r(t_0) \quad (C.13)$$

Con esta consideración y evaluando las trazas en (C.10) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \chi_s(t) = & -\frac{1}{\tau} \int_0^\tau d\tau' \int_0^{\tau'} d\tau'' \left[ a^+ a \chi_s(t) \langle F(\tau') F^+(\tau'') \rangle_r - a \chi_s(t) a^+ \langle F(\tau'') F^+(\tau') \rangle_r \right] \\
 & + a a^+ \chi_s(t) \langle F^+(\tau') F(\tau'') \rangle_r - a^+ \chi_s(t) a \langle F^+(\tau'') F(\tau') \rangle_r \\
 & + a a \chi_s(t) \langle F^+(\tau') F^+(\tau'') \rangle_r - a \chi_s(t) a \langle F^+(\tau'') F^+(\tau') \rangle_r \\
 & + a^+ a^+ \chi_s(t) \langle F(\tau') F(\tau'') \rangle_r - a^+ \chi_s(t) a^+ \langle F(\tau'') F(\tau') \rangle_r + \text{adj.}
 \end{aligned} \tag{C.14}$$

donde hemos asumido que  $\langle F^+(\tau) \rangle = \langle F(\tau) \rangle = 0$  porque son fluctuaciones muy rápidas del reservorio.

Las funciones de correlación en (C.14) las podemos escribir tomando en cuenta (C.12) como:

$$\begin{aligned}
 \langle F(\tau') F^+(\tau'') \rangle_r &= \sum_{k,n} \lambda_k \lambda_k^* \langle b_k b_k^* \rangle_r e^{i\omega(\tau' - \tau'')} e^{i(\omega_n \tau'' - \omega_k \tau')} \\
 &= \sum_k |\lambda_k|^2 \langle b_k b_k^+ \rangle_r e^{i(\omega - \omega_k)(\tau' - \tau'')}
 \end{aligned} \tag{C.15}$$

La última igualdad es válida porque hemos evaluado las funciones de correlación en una base donde la matriz densidad del reservorio es diagonal, y como éste siempre está en equilibrio térmico, en esta base los operadores  $b$  y  $b^+$  actúan de la manera usual. Entonces, estas funciones de correlación son estacionarias y deben depender sólo de la diferencia  $T = t' - t''$ , es decir:

$$\langle F(\tau') F^+(\tau'') \rangle_r = \langle F(\tau'') F^+(\tau') \rangle_r^* \tag{C.16}$$

Por tanto, las integrales que aparecen en (C.14):

$$\int_0^\tau d\tau' \int_0^{\tau'} d\tau'' \langle F(\tau') F^+(\tau'') \rangle_r = \int_0^\tau d\tau' \sum_k |\lambda_k|^2 \langle b_k b_k^+ \rangle_r \int_0^{\tau'} dT e^{i(\omega - \omega_k)T} \tag{C.17}$$

pueden evaluarse considerando que la última integral en (C.17) podemos tomarla como una función delta:

$$\int_0^{\infty} dT e^{i(\omega - \omega_k)T} = \pi \delta(\omega - \omega_k) \quad (C.18)$$

donde hemos despreciado el valor principal de Cauchy, porque corresponde a un pequeño corrimiento de la energía. El cambio del límite superior de  $\tau'$  a  $\infty$  se justifica viendo que  $T$  es del orden del tiempo de correlación del reservorio, mientras que  $\tau'$  es un tiempo típico de la variación de las cantidades dinámicas de interés,  $\chi_s(t)$  por ejemplo.

Como los modos en el reservorio están estrechamente espaciados, las sumatorias en (C.17) podemos reemplazarlas por integrales:

$$\sum_k |\lambda_k|^2 \langle b_k b_k^+ \rangle_r = \int_0^{\infty} d\omega_k D(\omega_k) |\lambda(\omega_k)|^2 \langle b(\omega_k) b_k^+(\omega_k) \rangle_r \quad (C.19)$$

con  $D(\omega_k)$  definida como la densidad de modos del reservorio. Con estas consideraciones:

$$\int_0^{\tau} d\tau' \int_0^{\tau'} d\tau'' \langle F(\tau') F^+(\tau'') \rangle_r = \frac{\gamma \tau}{2} \langle b(\omega) b^+(\omega) \rangle_r \quad (C.20)$$

donde hemos introducido la frecuencia promedio de decaimiento:

$$\gamma 2\pi D(\omega) |\lambda(\omega)|^2 \quad (C.21)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} n_b &= \langle b^+(\omega) b(\omega) \rangle_r \\ n_b + 1 &= \langle b(\omega) b^+(\omega) \rangle_r \end{aligned} \quad (C.22)$$

reemplazamos (C.20) y (C.22) en (C.14) para obtener finalmente:

$$\frac{d}{dt} \chi_s(t) = -\frac{\gamma}{2} (n_b + 1) [a^+ a \chi_s(t) - a \chi_s(t) a^+] - \frac{\gamma}{2} n_b [\chi_s(t) a a^+ - a^+ \chi_s(t) a] + \text{adj.} \quad (\text{C.23})$$

Los detalles matemáticos en la deducción de (C.23) los podemos encontrar en la bibliografía consultada<sup>89</sup>.



<sup>89</sup> Véase específicamente:

P. Meystre y M. Sargent III; 1991, *Elements of Quantum Optics*, Springer-Verlag, Berlín.  
 Mitchell Weissbluth; 1989, *Photon-Atom Interactions*, Academic Press, Inc, San Diego, CA.  
 W.H. Louisell; 1973, *Quantum statistical Properties of radiation*, John Willey and Sons, New York.  
 Karl Blum; 1981, *Density Matrix Theory and Applicatios*, Plenum Press, New York.  
 Miguel Orzag; 1999, *Quantum Optics*, Springer-Verlag, Berlín.

## Bibliografía consultada

1. C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y F. Laloë; 1977, *Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons, New York.
2. Carlos Landauro Saenz; 1995, *Teoría del Láser sin la Aproximación de la Onda Rotante*, tesis para obtener el grado de licenciatura en física, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima-Perú.
3. D. Meschede, H. Walther y G. Müller; 1985, *One atom maser*, Phys. Rev. Lett., 54, 6
4. E.T. Jaynes y F.W. Cummings; 1963, *Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser*, Proc. IEEE, 51, 89
5. Eleanor Rieffel, 19 de enero de 2000, *An Introduction to Quantum Computing for Non-Physicists*, FX Palo Alto Laboratory and Wolfgang Polak Consultant.
6. F. W. Cummings, Phys. Rev. 140, 1051 (1965)
7. Francisco de Zela; 1999; *Micromaser dynamics beyond the rotating-wave approximation. Lectures notes in Physics. Modern Challenges in Quantum Optics*, pag. 310, Springer-Verlag, Berlin, 2000
8. G.Rempe, F. Schmidt-Kaler, y H. Walther; 1990, *Observation of Sub-Poissonian Photon Statistics in a micromaser*, Phys. Rev. Lett. 64, 23, 2783-2786.
9. H. Risken; 1989, *The Fokker-Planck equation: Methods of solutions and applications*, Springer-Verlag, Berlin.
10. Josef Honerkamp; 1994, *Stochastic Dynamical Systems*, VCH Publishers, Inc., New York
11. Karl Blum; 1981, *Density Matrix Theory and Applications*, Plenum Press, New York.
12. L.A. Lugiato, M.O. Scully y H. Walther; 1978, *Connection between microscopic and macroscopic maser theory*. Phys. Rev. A, vol 36, number 2, pag. 740, July 15, 1987.
13. Leandro García-Calderón P., *Simulación de la dinámica del micromáser*, Tesis para optar el grado de licenciado en física. Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima-Perú, 1997
14. Michael D. Crisp; 1992, *Application of the displaced oscillator basis in quantum optics*, Phys. Rev. 46, 4138.
15. Miguel Orzag; 1999, *Quantum Optics*, Springer-Verlag, Berlin.
16. Mitchell Weissbluth; 1989, *Photon-Atom Interactions*, Academic Press, Inc, San Diego, CA.
17. P. Filipowicz, J. Javanainen y P. Meystre; 1986, *Theory of Microscopic Maser*, Phys. Rev. 34, 3077.
18. P. Meystre y M. Sargent III; 1991, *Elements of Quantum Optics*, Springer-Verlag, Berlín.

19. P. Meystre, G. Rempe y H. Walther; diciembre de 1988, *Very low temperature behavior of a micromaser*, OPTICS LETTERS, VOL. 13, No. 12.
20. P.L. Knight y P.W. Miloni; 1980, *The Rabi frequency in optical spectra*, Phys. Reports, 66 N°2, 21-107
21. P.W. Milloni, J.R. Ackerhalt y H.W. Galbraith, *Chaos in semiclassical N-atom Jaynes-Cummings Model; Failure of the Rotating-Wave Approximation*, Phys. Rev. Lett., Vol 50, n° 13, pag. 966, 28 March, 1983.
22. Per Elmfors, Benny Lautrup y Bo-Sture Skagerstam; *Dynamics, correlations, and phases of the micromaser*, CERN/TH 95-333 (1995).
23. R. Vyas y S. Singh; 1986, *Laser Theory without the Rotating-wave Approximation*, Phys. Rev. 33, 375.
24. Rafael Salazar Tío, *Cálculo y análisis de los espectros anómalos del micromáser*, Tesis para optar el grado de licenciado en física. Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima-Perú, 1995.
25. S. Swain; *A continued fraction solution to the problem of a single atom interacting with a single radiation moden in the electric dipole approximation*. J. Phys. A: Math., Nucl. Gen., Vol. 6, February 1973.
26. S. Swain; *Continued fraction expressions for the eigensolutions of the hamiltonian describing the interaction between a single atom and a single field mode: comparisons with the rotating wave solutions*, J. Phys. A: Math., Nucl. Gen., Vol. 6, December 1973
27. T. Muir, W. H. Metzler; 1938, *A treatise on the theory of determinants*, Dover Pub., New York.
28. W.H. Louisell; 1973, *Quantum statistical Properties of radiation*, John Willey and Sons, New York.