

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ  
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA



MODELO DE ASIGNACIÓN DE PASAJEROS EN UNA RED DE  
TRANSPORTE COLECTIVO URBANO  
TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE  
INGENIERO INDUSTRIAL

FERNANDO RAMIRO CASTRO ARAGÓN

LIMA – PERÚ

2005

## RESUMEN DE TESIS

En esta tesis se presenta el concepto y la implementación computacional de un modelo para resolver el problema de asignación de flujo de pasajeros de equilibrio en una red de transporte colectivo urbano con congestión. En esta aplicación se toma en consideración el Segundo Principio de Wardrop, u óptimo del usuario y se utiliza un modelo de equilibrio estático con demanda fija.

Se presentan los antecedentes y la naturaleza del problema de elección de ruta para los usuarios del sistema de transporte público, indicando las principales hipótesis sobre el comportamiento de éstos al momento de escoger la ruta.

Asimismo, se muestra la formulación matemática del problema de asignación de flujo de pasajeros en una red de transporte colectivo con congestión.

Se presenta además la descripción de la representación del sistema de transporte colectivo como una red, la determinación de las rutas de los pasajeros, y la asignación de flujo de pasajeros en las rutas escogidas por los pasajeros.

El flujo de equilibrio puede ser encontrado resolviendo un problema de minimización con una función objetivo no lineal y un conjunto de restricciones lineales. Se utiliza una adaptación del algoritmo de Frank-Wolfe, el cual resulta eficiente para resolver problemas estocásticos de transporte. La implementación en DELPHI se presenta detallando las principales subrutinas. Se presenta una aplicación práctica del modelo planteado.

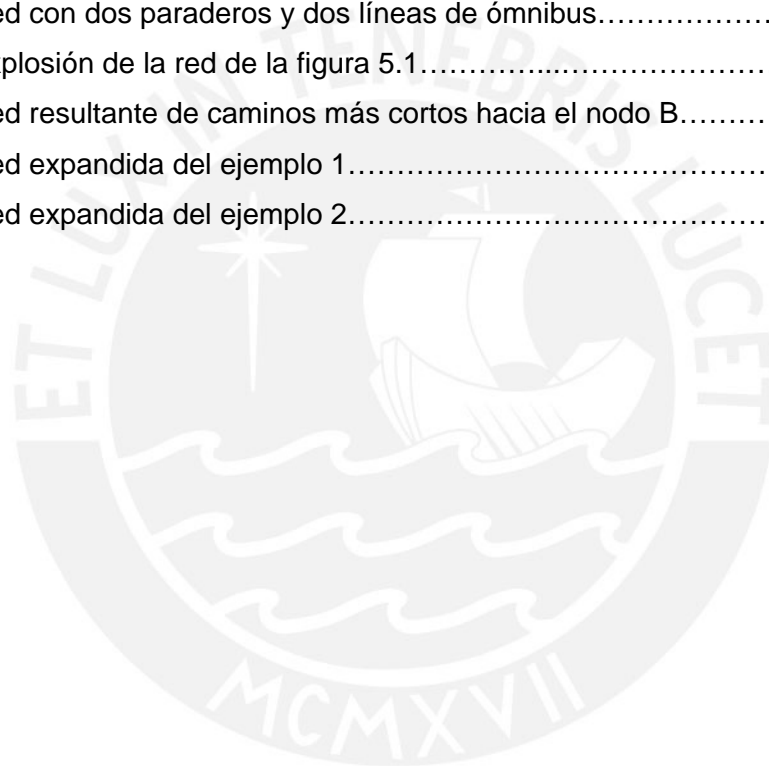
## ÍNDICE

Lista de figuras.....	i
CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN.....	1
CAPÍTULO 2. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA.....	5
2.1. Introducción.....	5
2.2. Conceptos y definiciones.....	5
2.3. Naturaleza del problema.....	8
2.4. Estado del arte.....	10
2.5. El Comportamiento de los usuarios del sistema de transporte colectivo a la hora de escoger la ruta.....	16
2.6. Determinación del tiempo de viaje.....	17
2.6.1. La selección de las líneas comunes.....	20
2.6.1.1. Algoritmo “S”.....	21
CAPÍTULO 3. FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN DE EQUILIBRIO EN REDES DE TRANSPORTE COLECTIVO.....	22
3.1. Introducción.....	22
3.2. Modelo de asignación con costos fijos.....	23
3.2.1. Algoritmo de asignación de viajes al destino $r$ para estrategias óptimas en redes de transporte colectivo con costos fijos.....	25
3.3. Asignación de flujo en redes de transporte colectivo con funciones no lineales.....	27
3.3.1. Algoritmo de asignación de equilibrio en redes de transporte colectivo para estrategias óptimas.....	32
3.4. Formulación del problema de equilibrio como un problema de inecuaciones variacionales.....	33
3.5. Asignación de equilibrio en redes de transporte colectivo con costos asimétricos.....	35
CAPÍTULO 4. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL DEL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN DE EQUILIBRIO.....	39
4.1. Introducción.....	39
4.2. Asignación de equilibrio en una red con congestión.....	40
4.2.1. Algoritmo de solución.....	41
4.3. Generación de la red de transporte colectivo.....	41
4.3.1. Procedimiento para generar en forma automática la red de transporte colectivo.....	43
4.4. Cálculo de los hipercaminos más cortos.....	48

4.4.1. Subrutina hipercamino.....	48
4.5. Asignación a los hipercaminos más cortos.....	51
4.6. Subrutina del cálculo del tamaño del paso.....	52
4.7. Subrutina del criterio de parada.....	54
CAPÍTULO 5. RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DEL ALGORITMO DE ASIGNACIÓN DE EQUILIBRIO.....	
5.1. Objetivos de la aplicación práctica.....	55
5.2. Ejemplo del proceso de asignación de flujo. Caso más simple, sin transbordos.....	56
5.2.1. Descripción de la red.....	56
5.2.2. Resumen en forma tabulada del ejemplo anterior.....	76
5.3. Solución del segundo ejemplo (considerando transbordos).....	79
5.4. Aplicación en una red de gran tamaño.....	84
CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	
6.1. Conclusiones.....	86
6.2. Recomendaciones.....	88
BIBLIOGRAFÍA.....	91

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1. Trazado de tres líneas de ómnibus.....	13
Figura 2.2. Representación del hipercamino de la figura 2.1.....	14
Figura 4.1. Representación de un paradero de ómnibus.....	43
Figura 4.2. Red aumentada con los arcos de acceso de los centroides.....	45
Figura 4.3. Vector a ser colocado en la estructura <i>heap</i> .....	50
Figura 4.4. Estructura <i>heap</i> del vector.....	50
Figura 4.5. Minimización de la función objetivo para cálculo del tamaño de paso.....	54
Figura 5.1 Red con dos paraderos y dos líneas de ómnibus.....	56
Figura 5.2 Explosión de la red de la figura 5.1.....	57
Figura 5.3 Red resultante de caminos más cortos hacia el nodo B.....	67
Figura 5.4 Red expandida del ejemplo 1.....	76
Figura 5.5 Red expandida del ejemplo 2.....	79



## CAPÍTULO 1.

### INTRODUCCIÓN

El transporte colectivo urbano constituye una de las necesidades fundamentales de la vida urbana, pues es a través de él que un porcentaje importante de la población se desplaza para desempeñar sus actividades. En Lima alrededor del 80% de los viajes son efectuados a través del sistema de transporte colectivo.

El planeamiento del transporte urbano ha sentido dificultades por la deficiencia en sistemas computacionales con modelos poco confiables para estimar los flujos en redes de transporte urbano en general, y de los flujos en redes de transporte público, en particular.

Esta tesis está dirigida a la solución del problema de asignación de flujos en redes de transporte colectivo urbano de gran tamaño. Al resolver este problema se busca determinar los flujos de pasajeros en la red, que resultan de las decisiones hechas por los pasajeros a la hora de escoger las rutas que serán utilizadas para llegar a sus destinos. En general, se considera como una red de gran tamaño, a aquella que representa a una urbe con una población superior a los 500.000 habitantes y con un sistema de transporte urbano que está afectado por congestión.

Un modelo clásico de transporte está compuesto por cuatro submodelos que reflejan las distintas etapas de la demanda y la oferta del transporte:

- i) generación/atracción de viajes,
- ii) distribución de viajes,
- iii) partición modal, y
- iv) asignación de viajes.

Los tres primeros submodelos representan la demanda de viajes, que corresponden a decisiones tomadas por los usuarios del sistema de transporte urbano que responden a las siguientes preguntas: viajar o no viajar, a dónde viajar, cómo viajar. El cuarto submodelo representa la oferta de viajes. Una vez que el usuario del sistema de transporte ha decidido viajar, ha determinado el destino y el modo de transporte, debe determinar su ruta en función de los caminos disponibles en el sistema vial. Si dispone de carro particular puede escoger libremente su itinerario en el sistema vial u optar por el transporte público. Si es usuario del sistema de transporte público deberá escoger su ruta en función de los itinerarios de las líneas de ómnibus disponibles.

La asignación de flujo determina los caminos preferidos por los viajeros para cada par origen-destino del área de estudio. La calidad técnica del análisis de la asignación depende del grado de comprensión del criterio de selección de los usuarios del sistema de transporte para la utilización de una determinada ruta.

Existen dos criterios que pueden influir en la decisión de los viajeros, que son el Primer y el Segundo Principios de Wardrop. Según el primero, los tiempos de viaje de todas las rutas utilizadas son iguales o menores que los tiempos de viaje de un vehículo en las rutas no utilizadas, y según el segundo, el tiempo promedio de todos los viajeros es mínimo.

Para realizar una asignación de viajes son necesarios los siguientes datos: la matriz de viajes interzonales, y la descripción completa del sistema de transporte existente y futuro. Como resultado se obtiene un estimado del volumen de tráfico en cada arco del sistema de transporte.

Los objetivos de la asignación de flujos pueden ser clasificados así:

- verificar las deficiencias del actual sistema de transporte, asignándose los estimados de viajes futuros al sistema existente;

- evaluar los efectos de cambios en el sistema existente, asignando estimados de viajes futuros a la red de transporte que incluye estos cambios,
- determinar prioridades para las modificaciones en la infraestructura de la red vial.

El planeamiento en el sistema de transporte colectivo saca provecho de algunas características del transporte en ómnibus, como por ejemplo: la flexibilidad para conexión de puntos de origen y destino distribuidos en el espacio urbano, la adaptabilidad de la oferta de servicio a incrementos de demanda y costos de implementación relativamente bajos.

Problemas tales como insuficiente accesibilidad a ciertos barrios y centros poblados de la periferia (alejados del centro), tiempos prolongados de caminata, baja frecuencia principalmente en horas punta o de mayor afluencia (que aumentan el tiempo de espera), la falta de capacidad de los vehículos, desequilibrio entre oferta y demanda de viajes, son algunos de los problemas que pueden ser resueltos por medio de la modelación de redes de transporte colectivo.

En esta tesis se presenta el desarrollo de un sistema de asignación de pasajeros en redes de transporte colectivo de gran tamaño. Debido a dificultades para la obtención de datos actuales de la red urbana de Lima Metropolitana, se presenta una aplicación práctica a una red de 94 zonas de tráfico y alrededor de 600 líneas de transporte público, que representa a la Región Metropolitana de Rio de Janeiro. La tesis consta de 6 capítulos siendo el Capítulo 1, esta breve introducción.

En el Capítulo 2 se efectúa una revisión bibliográfica sobre diferentes enfoques para la solución del problema de asignación de equilibrio en redes de transporte colectivo, se describe la naturaleza del problema, la selección de ruta de los usuarios del sistema de transporte colectivo y el cálculo del tiempo total de viaje.



En el Capítulo 3 se presenta la formulación matemática del problema de asignación de equilibrio bajo diversas hipótesis, como costos fijos en los arcos, funciones no lineales de costos en los arcos, funciones de costos en los arcos dependientes de los flujos en más de un arco, determinación de las rutas óptimas y formas de realizar la asignación a las rutas óptimas.

En el Capítulo 4 se muestra algunos detalles de la implementación computacional del modelo de asignación y una descripción acerca de como fueron implementadas las principales subrutinas y procedimientos del algoritmo de solución al problema y las estructuras de datos que fueron utilizadas.

En el Capítulo 5 se presentan dos ejemplos de aplicación del procedimiento de asignación de viajes para ilustrar el funcionamiento del algoritmo.

Finalmente las conclusiones y recomendaciones son colocadas en el Capítulo 6.

## CAPÍTULO 2.

### REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

#### 2.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo primeramente son definidos algunos términos que aparecen con frecuencia en la bibliografía referida al tema. Luego se describe la naturaleza del problema de la asignación de flujo a rutas de transporte colectivo y se compara con el problema de asignación en redes de transporte particular. Después son tratados los antecedentes a la formulación del problema de asignación de equilibrio. También se analizan algunos supuestos importantes del problema, como son las hipótesis acerca del comportamiento de los usuarios de una red de transporte colectivo, el cálculo del tiempo total de viaje y la selección de las líneas atractivas.

#### 2.2. CONCEPTOS Y DEFINICIONES

Algunos de los términos y conceptos utilizados en la descripción del problema de equilibrio en redes de transporte colectivo, que aparecen con frecuencia, en las principales referencias bibliográficas, y que posiblemente serán utilizados en esta tesis, son aquí definidos.

*Itinerario*: secuencia de paraderos por donde pasa un ómnibus de una determinada línea.

*Selección de ruta*: determinación de la combinación de líneas y de los puntos de transbordo, hecha por el usuario del sistema de transporte colectivo.

*Headway*: es definido por Rossetti y Turitto (1998) como el tiempo o la distancia, observada desde un punto fijo, entre la salida de un vehículo y la llegada del siguiente vehículo. Los *headways* realizados a lo largo de una ruta indican a los pasajeros con que frecuencia un ómnibus llega a la parada.

Estrategia: conjunto de reglas que permiten al usuario del sistema de transporte colectivo llegar a su destino.

Hipercamino: representación basada en la teoría de grafos que describe una estrategia.

Zona de tráfico: unidad geográfica en que la región de estudio es subdividida.

Centroides: un punto imaginario de cada zona de tráfico, donde se supone que está concentrado el origen y/o el destino de todos los viajes.

Tiempo total de viaje: tiempo total considerando los siguientes componentes:

- el tiempo de caminata desde el origen del viaje (centroide de la zona de tráfico correspondiente) hasta el punto de embarque (la parada más cercana por donde pasen las líneas de ómnibus atractivas para el viaje del usuario),
- el tiempo de espera,
- el tiempo en el vehículo, o tiempo abordo,
- los tiempos de transbordo (si es que ocurrieran transbordos) y el tiempo de caminata desde la parada de desembarque hasta el destino (centroide de la zona de tráfico de destino).

Tiempo en vehículo: tiempo que el usuario del sistema de transporte colectivo permanece dentro del vehículo desplazándose por las vías de la ciudad.

Tiempo de espera: tiempo que el usuario del sistema de transporte colectivo permanece en el punto de parada esperando un vehículo que sirva para su estrategia.

Tiempo de caminata: tiempo que el usuario del sistema de transporte colectivo necesita para desplazarse a pie desde el punto de inicio de su viaje hasta el punto de parada de ómnibus.

Frecuencia: inverso del *headway*, número de vehículos que transitan por unidad de tiempo.

Transbordo: cambio de línea de ómnibus. En el caso de haber más de un modo, existe la posibilidad de referirse a un cambio de modo, por ejemplo de ómnibus para tren, o de ómnibus para metro, etc.

Líneas comunes o líneas atractivas: subconjunto de líneas disponibles por un usuario del sistema de transporte colectivo, que desea viajar entre dos determinados puntos de la red, y que son percibidos por él como equivalentes en términos de costo de viaje.

Red vial: representación de la región en estudio en forma de grafo, considerando como nodos las intersecciones y como arcos las vías por donde transitan los vehículos.

Red aumentada: representación de la red vial considerando como nodos, los centroides, las paradas y los puntos de transbordo, y donde los arcos pueden representar los desplazamientos en vehículo, las caminatas desde el centroide origen del viaje hasta la parada inicial, la espera en la parada, los transbordos y desembarques en las paradas, y la caminata desde la parada final hasta el centroide destino del viaje.

Equilibrio del usuario: criterio de elección del camino caracterizado por la siguiente condición: ningún usuario puede reducir su costo de viaje haciendo una modificación individual de camino.

Cada usuario busca la minimización de su propio costo de viaje. Este criterio es conocido como el Primer Principio de Wardrop.

Equilibrio del sistema: criterio de elección de camino que garantiza que el costo total de todo el sistema sea mínimo. Es conocido como el Segundo Principio de Wardrop.

### 2.3. NATURALEZA DEL PROBLEMA

En los problemas de asignación de flujo en redes de transporte de vehículos particulares, existe una equivalencia directa entre los desplazamientos de los usuarios (personas o pasajeros) y los desplazamientos de los vehículos: la asignación de flujo de los usuarios está relacionada directamente con la determinación de los itinerarios de los vehículos. En el caso del problema de asignación de pasajeros de una red de transporte colectivo, esta equivalencia no es tan cierta: los desplazamientos de los ómnibus o los tramos del metro, no corresponden nunca totalmente a los desplazamientos de los usuarios. Los usuarios del sistema de transporte colectivo tienen que acceder a la red, o sea, tienen que desplazarse desde su punto de origen hasta una parada de ómnibus, donde esperarán para ser atendidos por algún vehículo, y después saldrán de la red para desplazarse a pie hasta sus destinos. Los correspondientes tiempos de espera son de modo general aleatorios, si se acepta la premisa de que las llegadas de los pasajeros y de los vehículos son aleatorias. Todo esto afecta el enfoque del problema.

Entonces se puede diferenciar que en redes de transporte colectivo se hace asignación de pasajeros y en redes de transporte particular se asignan vehículos. De cualquier modo, los primeros trabajos de investigación que aparecen en la literatura proponen tratar la asignación de pasajeros como una variación del problema de asignación de flujo de vehículos en redes de transporte particular, para los cuales ya existían, métodos de asignación basados en los

algoritmos diseñados por Moore (1957) y Dijkstra (1959) que resuelven el problema de rutas mínimas. Zhan y Noon (1998) analizan diversos algoritmos que resuelven el problema de encontrar rutas mínimas en redes reales. Ellos consideran que investigaciones anteriores evalúan el desarrollo computacional y la eficiencia de la implementación de los algoritmos para encontrar las rutas mínimas, principalmente en base a redes generadas aleatoriamente. Indican que los métodos para generar las redes aleatorias varían considerablemente, y que pueden identificarse diferencias con las redes reales, por su grado de conectividad, estimado por un ratio que mide la incidencia arco-nodo. Las irregularidades en la conectividad de las redes aleatorias pueden favorecer ciertos tipos de algoritmos en la evaluación del desempeño.

Por otro lado, el problema de asignación de equilibrio en redes de transporte colectivo es abordado por diversos modelos existentes en la literatura como un problema estático. En general estos modelos intentan determinar el estado medio del sistema durante el período estudiado, generalmente las horas punta, o sea determinar las cargas promedio en la red y los costos promedio de los desplazamientos de los pares origen-destino. Gendrau (1984) justifica esto, explicando que debido al tamaño de las redes analizadas, el estudio del estado promedio del sistema en las horas de mayor afluencia, representa probablemente un conjunto de informaciones pertinentes para la toma de decisiones de los planificadores de la red en estudio, y que si se considerase un modelo más detallado podría originar un modelo de tamaño y complejidad que volvería inviable su utilización en un problema real.

## 2.4. ESTADO DEL ARTE

Los modelos de asignación de pasajeros en redes de transporte colectivo han experimentado un desarrollo importante en las últimas cuatro décadas. Los modelos que primero aparecen en la literatura (Dial, 1967, Andréasson, 1976, Lampkin y Saalmans, 1967, Hasselström, 1981),

proponían modelos de asignación similares a los utilizados en los problemas de asignación de flujo de vehículos particulares. Estos modelos asumen que los pasajeros viajan en los caminos más cortos entre sus orígenes y destinos, y la mayoría de ellos no consideran los efectos del problema del congestionamiento, siendo denominados modelos sin restricción de la capacidad.

De modo general, los modelos que no consideran restricción de capacidad dependen de las hipótesis adoptadas sobre el comportamiento de los pasajeros. El comportamiento de los usuarios del transporte colectivo al momento de efectuar la elección de la ruta puede ser clasificado en dos tipos según la literatura existente: en el tipo I el pasajero espera un ómnibus de una línea determinada, y en el tipo II el pasajero espera el primer ómnibus que aparezca en el paradero, que pertenezca a un subconjunto de líneas consideradas atractivas.

En el primer grupo están aquellos que se basan en el concepto de ruta mínima, o sea, el usuario del sistema de transporte colectivo utilizará la ruta que minimice su costo generalizado. El usuario ya sabe cual es la línea que tiene el menor costo generalizado para llegar a su destino, y solamente espera un ómnibus de aquella línea, lo que correspondería a una asignación del tipo "todo o nada". En el segundo grupo, están aquellos modelos que se fundamentan en la idea de estrategia óptima, concepto ideado por Spiess (1983), que básicamente consiste en escoger un subconjunto de líneas de modo que se minimice el valor esperado del costo total de viaje. Bouzaïene-Ayari *et al.*(1995) indican que lo que determina una estrategia de viaje es el conjunto de líneas atractivas en diferentes paraderos, escogido por el pasajero, y los puntos de desembarque de aquellas líneas, para transbordo o para caminata hasta el destino. Knoppers (1995) resalta que los transbordos reducen la atractividad del transporte público como una alternativa al carro particular. La resistencia al transbordo puede

ser expresada como el tiempo necesario para el transbordo y una probabilidad de perder la conexión. Conexiones perdidas implican tiempos de espera largos.

De Cea *et al.* (1990) resaltan que los modelos basados en el concepto de estrategia permiten obtener una mayor dispersión de flujos en la red de transporte público, pero aquellos basados en la asignación a rutas mínimas son más eficientes en términos de tiempo de cálculo computacional. La existencia de secciones del camino que pueden ser atendidas por más de una línea de ómnibus, origina varias opciones para la elección de los pasajeros, y esta elección frecuentemente no es trivial, ni simple de ser modelada.

Un pasajero, para viajar de un punto a otro de la red, puede escoger de un conjunto de líneas disponibles. Unas líneas pueden ser mucho más lentas que otras. Chriqui (1974) presenta un método de determinación del subconjunto de las líneas atractivas. El parte de la idea de que el subconjunto de líneas es escogido buscando minimizar el valor esperado del costo total de viaje, incluyendo tiempo de espera y tiempo en el vehículo. La línea más rápida está siempre en ese subconjunto. Las otras líneas son ordenadas en forma creciente con respecto al tiempo de viaje en vehículo, y solamente son incluidas aquellas que disminuyen el valor esperado del tiempo total de viaje. Chriqui y Robillard (1975) demuestran que el problema de determinar el subconjunto óptimo de líneas que minimizan el valor esperado del tiempo total de viaje puede ser resuelto como un problema de programación hiperbólica.

Por otro lado, el concepto de ruta en una red de transporte colectivo no corresponde al concepto clásico de ruta definido para redes de transporte particular o privado. Los omnibuses transitan por la red siguiendo itinerarios preestablecidos. Por tanto, los usuarios del transporte colectivo escogen sus caminos en función de las líneas que utilizan y de las paradas donde se



embarcan y desembarcan, para continuar a pie o hacer un transbordo. Una ruta de transporte colectivo está entonces definida, por una línea o combinación de líneas, con los respectivos puntos de embarque y desembarque. Los trechos recorridos en el viaje, que serán representados por arcos en la red, aparecen como una consecuencia de lo anterior.

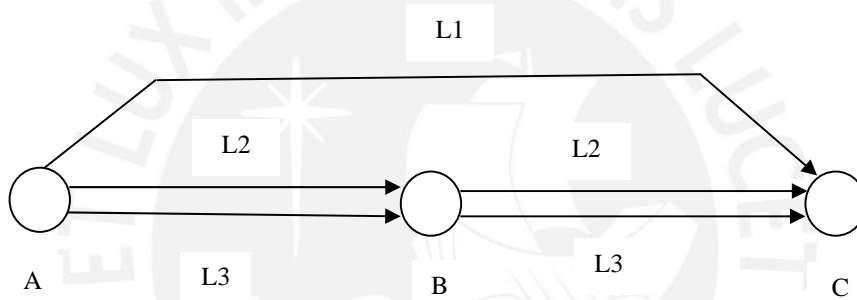
Mandl (1978) desarrolla un algoritmo para encontrar caminos más cortos, apropiado para redes de un sistema de transporte público urbano, que, para él, tiene características especiales: los nodos de esta red, usualmente representan un paradero o, de modo más general, un área de la ciudad, área a ser servida en ese paradero. Esta área debería ser lo suficientemente pequeña como para permitir llegar a cada punto dentro de ella, yendo a pie desde el paradero. Mandl considera, en la representación de su modelo, que la mayoría de las líneas utiliza los mismos arcos en los dos sentidos (lo que es verdadero en el caso del metro y a veces no es válido para los omnibuses) y que la representación de la red vial (que consiste de nodos y arcos) es un grafo no orientado.

Spiess (1983) propone un modelo que determina las rutas mínimas en una red de transporte colectivo, resolviendo un problema de programación lineal para obtener las estrategias óptimas de viaje entre dos nodos. Él define una estrategia, como un conjunto de reglas que permiten al pasajero llegar a su destino, o sea, el pasajero va decidiendo su viaje de acuerdo con esas reglas, pudiendo tener nodos de transbordo, y define la estrategia óptima, como aquella que minimiza el valor esperado del costo total de viaje. Este autor generaliza su modelo para el caso en que el costo de viaje en un arco es una función creciente del flujo de pasajeros en el arco.

Nguyen y Pallottino (1988) definen el concepto de hipercamino, como la representación de una estrategia, a través de un subgrafo acíclico que conecta dos nodos de la red,  $r$  y  $s$ , donde  $r$  es el

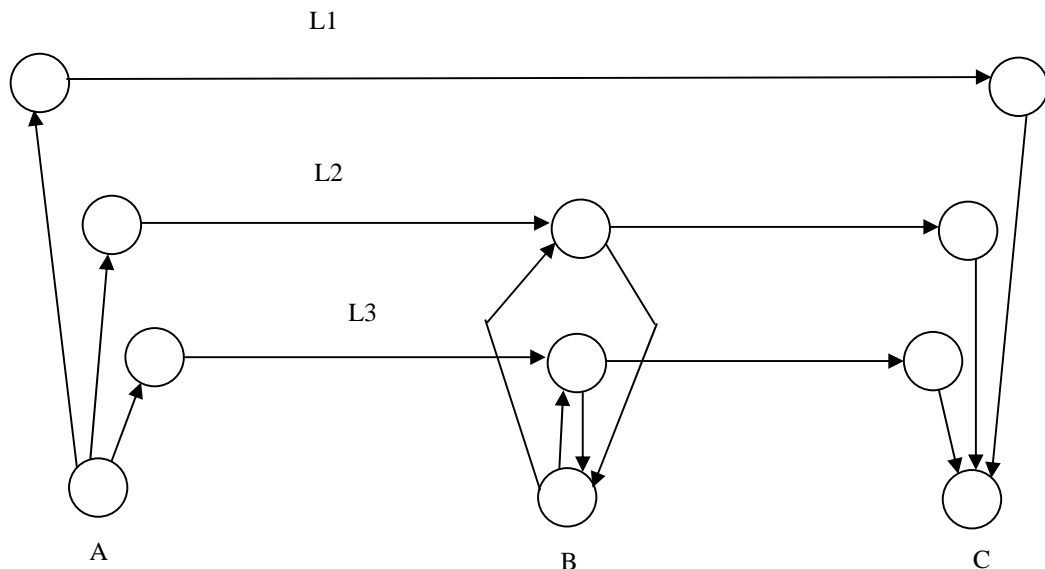
origen,  $s$  el destino, y donde cada nodo  $i$  contenido en el subgrafo, es atravesado por algún camino que conecta  $r$  con  $s$ , y donde solamente existen arcos divergentes en los nodos que representan paraderos. Esto quiere decir, que para un determinado par origen-destino  $r-s$ , un hipercamino representaría una subred que contenga todas las combinaciones posibles de caminos para ir de  $r$  hasta  $s$  (considerando transbordos) utilizando el subconjunto de líneas atractivas para ese par  $r-s$ .

En la figura 2.1 se muestra un ejemplo con tres paraderos, A, B y C y tres líneas de ómnibus.



**Figura 2.1 Trazado de tres líneas de ómnibus**

En la figura 2.2 se muestra la representación del hipercamino de la figura 2.1, donde se muestran todos los caminos posibles que conectan A con C.



**Figura 2.2 Representación del hipercamino de la figura 2.1.**

Modelos desarrollados posteriormente comienzan a considerar la influencia del congestionamiento. Spiess y Florian (1989) proponen un modelo que considera que los costos del desplazamiento en vehículo (costo relacionado al pasajero estando ya dentro del ómnibus) son funciones crecientes del número de pasajeros, o sea, que el efecto del congestionamiento representaría la falta de confort de los pasajeros dentro de un ómnibus lleno. En este modelo son considerados costos de espera fijos que únicamente dependen de la frecuencia de las líneas, pero que no son afectados por los efectos del congestionamiento.

Algunos autores consideran los efectos del congestionamiento concentrados en los paraderos de los omnibuses. Gendrau (1984) consideró efectos del congestionamiento en la distribución de pasajeros y en los tiempos de espera en los paraderos. De Cea y Fernández (1993-I) y Wu *et al.* (1994) presentan formulaciones en que los pasajeros experimentan tiempos de espera que dependen de la capacidad total de la línea (o conjunto de líneas atractivas) y del flujo de pasajeros en ella. De Cea y Fernández (1993-II) formulan dos modelos en que asumen que los tiempos de espera dependen de la capacidad de los arcos y del flujo de pasajeros que utiliza las líneas asociadas a estos arcos, pero una vez que los pasajeros abordan un vehículo, el tiempo de viaje en vehículo es fijo, y determinado solamente por el nivel de congestionamiento en la red vial, lo cual es considerado como un parámetro exógeno.

Nguyen y Pallottino (1986) enfatizan que el problema de asignación de pasajeros en redes de transporte colectivo puede ser escrito como un problema de inecuaciones variacionales en el

espacio de los vectores de flujos en los hipercaminos viables, en forma similar al problema de inecuaciones variacionales en el espacio de los vectores de flujos en los caminos viables, para problemas de asignación de tráfico, y que por tanto, los métodos de solución desarrollados pueden ser adaptados para el problema de asignación de pasajeros. Wu *et al.* (1994) formulan un modelo como un problema de inecuaciones variacionales, en que los costos de espera dependen de la frecuencia de las líneas y de los efectos del congestionamiento debido a las filas de pasajeros en los paraderos. Muchas modelaciones que consideran el fenómeno del congestionamiento, hacen una formulación como un problema de inecuaciones variacionales en que la función de costo en los arcos tiene en general un Jacobiano asimétrico. Ésto quiere decir que, la variación en el costo del arco  $b$ , originada por una variación en el flujo del arco  $a$ , puede ser diferente a la variación en el costo del arco  $a$ , originada por una variación en el flujo del arco  $b$ . Matemáticamente significa que las derivadas parciales cruzadas en general son diferentes, o que, la derivada parcial del costo en el arco  $a$  en relación al flujo en el arco  $b$ , no necesariamente es igual a la derivada parcial del costo en el arco  $b$  en relación al flujo en el arco  $a$ .

Las redes de transporte público en países en desarrollo presentan algunas características peculiares, como por ejemplo, la existencia de muchas vías por donde circula una gran cantidad de líneas de ómnibus. La estructura de los itinerarios de muchas líneas produce una gran superposición de ómnibus en algunas vías principales. En muchos países los operadores presionan para ofrecer líneas cuyos itinerarios atraviesan vías con mayor demanda. El problema de las líneas comunes en las redes de transporte colectivo en algunas ciudades de países en desarrollo origina problemas de límite de capacidad en algunos modelos de asignación disponibles, motivo por el cual es necesario hacer algunas simplificaciones.

## 2.5. EL COMPORTAMIENTO DE LOS USUARIOS DEL SISTEMA DE TRANSPORTE COLECTIVO A LA HORA DE ESCOGER LA RUTA

Los modelos de elección de ruta asumen que los pasajeros son individuos racionales, que ellos asocian una utilidad a cada alternativa de un conjunto de alternativas posibles, de forma tal que ellos escogen la alternativa de mayor utilidad.

Bunster (1986) indica que ninguna de las diferentes formulaciones acerca del comportamiento de los usuarios, a la hora de escoger la ruta, cuando existen líneas comunes, puede pretender ser exacta, pues en la decisión de cada usuario intervienen aspectos personales que difícilmente pueden ser modelados matemáticamente. Pero, considerando un comportamiento racional y similar en todos los usuarios, se puede suponer que el objetivo de ellos es minimizar el costo total asociado al viaje, lo que incluye tiempo de espera, valor monetario del pasaje, tiempo de desplazamiento en el vehículo, tiempo de caminata, etc. Kirchhoff (1995) considera que, para la selección de ruta, es necesario que los usuarios del sistema de transporte público, estando en el paradero y durante el viaje, tengan informaciones generales acerca del servicio de transporte público, y acerca de las diferentes posibilidades de desplazamiento en dirección a los destinos.

## 2.6. DETERMINACIÓN DEL TIEMPO DE VIAJE

El modelo de Chriqui (1974) considera que el tiempo de viaje entre dos nodos de la red, A y B, en el cual el conjunto de líneas atractivas es L, estará dado por la expresión:

$TTV(A,B) = TE_L + TV_L(A,B)$  donde el primer término es el tiempo de espera combinado, o sea, el valor esperado del tiempo de espera, considerando que el usuario abordará el primer vehículo que se presente en el paradero, si es que éste pertenece a alguna de las líneas del conjunto de líneas atractivas L; y el segundo término es el valor esperado del tiempo en

vehículo, considerando que el pasajero abordará el primer vehículo en presentarse en el paradero y que pertenezca al conjunto L.

Para el caso en que un pasajero pretende ir de A hasta B utilizando la primera línea del conjunto L, Chriqui asume que los omnibuses de las líneas aparecen en el paradero A en forma aleatoria e independiente, y que por tanto, los tiempos de espera de cada línea son variables aleatorias independientes y con distribuciones semejantes. También considera que para cada línea el tiempo de espera de un ómnibus es independiente del instante de llegada del pasajero al paradero, y así obtiene la siguiente propiedad:

$$\Pr[TE(i) \leq a_0 + a / TE(i) > a_0] = \Pr[TE(i) \leq a],$$

donde  $TE(i)$  es el tiempo de espera de la línea  $i$ .

propiedad que puede interpretarse de la manera siguiente: “la probabilidad de que el tiempo de espera en el paradero sea menor o igual que un determinado valor ( $a_0 + a$ ), dado que ya transcurrió un tiempo de espera  $a_0$ , es igual a la probabilidad de que el tiempo de espera sea menor o igual que un tiempo igual a  $a$ ”.

Esto equivale a decir que el tiempo de espera de un ómnibus de la línea  $i$  no depende del tiempo de espera ya transcurrido. Esta propiedad de “falta de memoria” es encontrada en la distribución exponencial, y Chriqui supone una distribución exponencial para las variables aleatorias de los tiempos de espera de las líneas:

$$\Pr[TE(i)=X] = 1/w_i \exp[-X/w_i], \text{ donde } w_i \text{ es el promedio del tiempo de espera } TE(i)$$

$$\text{Entonces : } \Pr[TE(i) > X_0] = \int_{X_0}^{\infty} 1/w_i \exp[-x/w_i] dx = \exp[-X_0/w_i]$$

Se define  $TE_M$  como el mínimo  $\{TE(i)\}$  según la hipótesis de que el pasajero tomará la primera línea en llegar al paradero.

$$Pr[TE_M > t] = \prod_{i=1}^n \exp[-t/w_i] = \exp[-t \times \sum_{i=1}^n 1/w_i] = 1 - Pr[TE_M < t]$$

Entonces se obtiene:  $Pr[TE_M < t] = 1 - \exp[-t \times \sum_{i=1}^n 1/w_i]$  que es la función de distribución

acumulada  $FDA(t)$ :

$FDA(t) = 1 - \exp[-t \times \sum_{i=1}^n 1/w_i]$ . Derivando se obtiene la función de densidad de probabilidad:

$$f(t) = (\sum_{i=1}^n 1/w_i) \times \exp[-t \times \sum_{i=1}^n 1/w_i]$$

El valor esperado de  $TE_M$  se calcula de la siguiente forma:

$$E[TE_M] = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} t \times (\sum_{i=1}^n 1/w_i) \times \exp[-t \times \sum_{i=1}^n 1/w_i] dt$$

Integrando por partes se llega a que:  $E[TE_M] = 1 / (\sum_{i=1}^n 1/w_i)$

Spiess (1983) considera que para una tasa de llegada uniforme de pasajeros al paradero, se puede considerar que para una determinada línea  $i$ ,  $w_i = a / F(i)$ , donde  $a$  es una constante positiva y  $F(i)$  es la frecuencia de la línea  $i$  (número de vehículos por unidad de tiempo). El caso en que  $a = 1$  corresponde a una distribución exponencial de los *headways*, con media  $1/F(i)$ . El caso en que  $a = 1/2$ , es una aproximación para *headways* constantes. El factor  $a$  puede modelar el efecto de diferentes percepciones de los tiempos de espera y de los tiempos en vehículo. Sin pérdida de generalidad, Spiess(1983) y Chriqui(1974) asumen un valor de  $a = 1$ .

$$\text{Luego : } E [TE_M] = 1 / \sum_{i=1}^n F(i)$$

Por otro lado, la probabilidad de que un vehículo de la línea  $i$  se presente primero, es igual a la probabilidad de que  $TE(i)$  sea  $t$ , y que a su vez, para las demás líneas el tiempo de espera sea mayor, o sea, para  $j \neq i$ ,  $TE(j) > t$ , o sea:

$$Pr [TE_M = TE(i)] = \int_0^{\infty} 1/w_i \exp [-t/w_i] \times \exp [-t \times \sum_{j \neq i} 1/w_j] dt$$

$$Pr [TE_M = TE(i)] = (1/w_i) / (\sum_{i=1}^n 1/w_i) = F(i) / \sum_{i=1}^n F(i)$$

Si el tiempo en vehículo en un ómnibus de la línea  $i$  es  $TV(i)$ , entonces el valor medio del tiempo en vehículo, independiente de la línea abordada será:

$$TV = \sum_{i=1}^n TV(i) Pr [TE_M = TE(i)] = TV(i) \times F(i) / \sum_{i=1}^n F(i)$$

Y el tiempo total de viaje esperado será:

$$TTV = 1 / \sum_{i=1}^n F(i) + \sum_{i=1}^n ( TV(i) \times ( F(i) / \sum_{i=1}^n F(i) ) )$$

Acomodando términos resulta la siguiente expresión para el tiempo total de viaje:

$$TTV = (1 + \sum_{i=1}^n TV(i) \times F(i) ) / \sum_{i=1}^n F(i)$$

Este valor de  $TTV$  es válido en el caso en que el pasajero tome el primer ómnibus que aparezca en el paradero, que sea de cualquier línea que lo lleve hacia su destino, o sea, son consideradas todas las líneas que pasan por el paradero y que pueden llevar al pasajero a su destino. En el caso general, el pasajero hace una selección de las líneas atractivas, escogiendo



aquellas que no aumenten “mucho” el tiempo total de viaje. A continuación se describe el método propuesto por Chriqui (1974) para la determinación de las líneas comunes o atractivas.

### 2.6.1. SELECCIÓN DE LAS LÍNEAS COMUNES

El problema de encontrar las líneas comunes equivale a encontrar los valores  $X_i$  tales que minimicen el valor esperado del tiempo total de viaje:

$$\min TTV = (1 + \sum_{i=1}^n X_i \times TV(i) \times F(i)) / \sum_{i=1}^n X_i \times F(i)$$

donde  $X_i$  son componentes del vector de decisión  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  y adoptan el valor 1 (uno) si la línea correspondiente es atractiva, y 0 (cero) en caso contrario.

Para resolver este problema Chriqui define:

$$a_0 = 1$$

$$b_0 = 1$$

$$a_i = TV(i) \times F(i)$$

$$b_i = F(i)$$

obteniéndose el problema equivalente:

$$\min (a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot X_i) / (b_0 + \sum_{i=1}^n b_i \cdot X_i)$$

el cual es un problema de programación hiperbólica, cuya solución general fue propuesta por Hammer y Robillard.

El procedimiento propuesto por Chriqui hace uso del algoritmo “S” descrito a continuación:

Primero se define: 
$$TTV_k = (1 + \sum_{i=1}^k TV(i) \times F(i)) / \sum_{i=1}^k F(i)$$

#### 2.6.1.1. ALGORITMO “S”

Etapa 1 ordenar las líneas con respecto a los tiempos en vehículo en forma ascendente:

$D = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$  y  $TV(1), TV(2), \dots, TV(n)$  com  $TV(1) \leq TV(2) \leq \dots \leq TV(n)$

Sea  $TTV_L = TV_{l_1}$ ,

$L = \{l_1\}$

Etapla 2 sea para  $i = 2, 3, \dots, n$ :

Si  $TV(i) \leq TTV_L$  entonces:  $TTV_L = TV_i$

$L = L \cup \{l_i\}$

, en caso contrario parar

### CAPÍTULO 3.

## FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN DE EQUILIBRIO EN REDES DE TRANSPORTE COLECTIVO

### 3.1. INTRODUCCIÓN

El problema de asignación de equilibrio en redes de transporte colectivo, abordado en esta tesis, está caracterizado por las siguientes hipótesis:

- La selección de las rutas de los pasajeros está basada en las estrategias óptimas, representación en el contexto de los hipercaminos.
- La asignación de pasajeros es efectuada según el primer principio de Wardrop, conocido como óptimo del usuario.
- La repartición de los pasajeros entre los caminos elementales que componen un hipercamino será de forma proporcional a la frecuencia de las líneas.
- La demanda de viajes es considerada fija, esto quiere decir, que la matriz origen-destino tiene valores constantes y conocidos.
- La matriz de costos en los arcos es asimétrica.
- Las funciones de costos en los hipercaminos son funciones convexas.

Para llegar a la formulación del problema que contempla las hipótesis antes indicadas, serán presentadas primeramente las formulaciones de un problema de asignación para los siguientes casos:

- un modelo de asignación con costos fijos, en el cual los efectos del congestionamiento no son tomados en consideración, y
- un modelo de asignación con funciones no lineales de costo en el arco, dependientes del flujo en el propio arco.

### 3.2. MODELO DE ASIGNACIÓN CON COSTOS FIJOS

Se presenta en esta sección, un modelo basado en las estrategias óptimas para redes de transporte colectivo con costos fijos.

La red de transporte colectivo es representada por un grafo  $G=(I,A)$ , donde los elementos del conjunto de nodos  $i \in I$ , son conectados por un conjunto de arcos  $a=(i,j) \in A$ . El conjunto de

arcos que salen del nodo  $i$  (*forward star*) es denotado por  $A_i^+$ , y el conjunto de arcos llegando al nodo  $i$  (*backward star*) es denotado por  $A_i^-$ .

Una impedancia  $c_a$  y una frecuencia  $f_a$  son asociados a cada arco  $a$ . En el caso de un modelo de asignación con costos fijos, la impedancia de cada arco es un valor constante, y en la literatura es llamado como tiempo de viaje o costo de viaje. La demanda de viajes entre los nodos  $i$  y  $j$  está dada por  $g_{ij}$ .

Una red aumentada, generada a partir de la red vial, es utilizada para representar el sistema de transporte colectivo. Un procedimiento automatizado de la explosión de la red, ideado y desarrollado por Castro y Leal (1998), es explicado con detalle en el siguiente capítulo. Los itinerarios de las líneas de ómnibus están implícitamente contenidos en la red vial. El conjunto de nodos de la red aumentada contiene, además de los nodos físicos de la red vial, un nodo adicional por cada paradero de cada línea. Correspondientemente los arcos son subdivididos en varios tipos, como arcos de embarque, arcos a bordo, arcos de desembarque o descenso, y arcos de caminata. Solamente los arcos de embarque implican el evento de espera, por lo tanto estos arcos tienen una frecuencia finita  $f_a$ . Los otros arcos son atendidos en forma continua, adoptando entonces una frecuencia infinita ( $f_a = \infty$ ).

El tiempo de espera en un nodo  $i$  depende del conjunto atractivo de arcos  $\hat{A}_i^+ \subseteq A_i^+$ , o sea, depende del subconjunto de arcos saliendo de  $i$ , que son considerados equivalentes, en términos de costo, por los usuarios. Los pasajeros abordarán el primer vehículo que corresponda a cualquiera de estos arcos atractivos. Para un conjunto de arcos atractivos  $\hat{A}_i^+$  en el nodo  $i$ , el tiempo de espera combinado  $W(\hat{A}_i^+)$  es proporcional a la frecuencia total combinada de estos arcos:

$$W(\dot{A}_i^+) = \alpha / \sum_{a \in \dot{A}_i^+} f_a, \alpha > 0 \quad (\alpha \text{ parámetro de calibración}) \quad (3.1)$$

La probabilidad  $P_a(\dot{A}_i^+)$  de pasar por el arco  $a$  saliendo del nodo  $i$  se calcula como:

$$P_a(\dot{A}_i^+) = f_a / \sum_{a' \in \dot{A}_i^+} f_{a'}, \quad a \in \dot{A}_i^+ \quad (3.2)$$

En base a (3.1) y (3.2) cualquier estrategia para llegar al destino  $r$  estaría completamente definida por el correspondiente subconjunto de arcos atractivos  $\dot{A} \subseteq A$ .

La estrategia óptima para llegar al destino es aquella que minimiza el valor esperado del costo total de viaje. El costo de una estrategia, es la suma de los tiempos de viaje de los arcos,  $c_a$ , ponderados por la probabilidad de viajar por el arco  $a$ , más el tiempo de espera en el nodo  $i$  ponderado por la probabilidad de viajar por el nodo  $i$ .

Para este problema con costos fijos en los arcos  $c_a$ , el problema de la asignación de los viajes desde todos los nodos de origen hasta el destino  $r$ , según la estrategia óptima, corresponde a resolver el siguiente problema de optimización lineal:

$$\mathbf{Min} \sum_{a \in A} c_a v_a + \sum_{i \in I} w_i \quad (3.3)$$

$$\text{sujeto a :} \quad \sum_{a \in A_i^+} v_a - \sum_{a \in A_i^-} v_a = g_{ir}, \quad i \in I, \quad (3.4)$$

$$v_a \leq f_a w_i, \quad a \in A_i^+, \quad i \in I, \quad (3.5)$$

$$v_a \geq 0, \quad a \in A, \quad (3.6)$$

Aquí  $v_a$  es el flujo en el arco  $a$ , y  $w_i$  representa el tiempo total de espera, expresado en cantidad de personas-minutos en el nodo  $i$ .

Este problema puede ser resuelto en forma eficiente utilizando un algoritmo del tipo *label-setting* propuesto por Spiess (1983), que es presentado en la siguiente sección, en el que son determinadas las estrategias óptimas desde todos los nodos de la red hasta un determinado destino  $r$ . Para efectuar la asignación hacia todos los destinos, basta ejecutar el algoritmo una vez para cada destino  $r$ .

### 3.2.1. Algoritmo de asignación de viajes al destino $r$ para estrategias óptimas en redes de transporte colectivo con costos fijos

El algoritmo busca la estrategia óptima para llegar al nodo de destino  $r$ , desde todos los nodos de origen. La estrategia óptima está representada por el conjunto  $\hat{A}^*$  y los valores esperados de los tiempos totales de viaje óptimos para ir desde cada nodo  $i \in I$  hasta el destino  $r$  son representados por la variable  $u_i^*$ .

Paso 0. Inicialización:

$$u_i \leftarrow \infty, \quad i \in I - \{r\}; \quad u_r \leftarrow 0$$

$$f_i \leftarrow 0, \quad V_i \leftarrow g_{ir}, \quad i \in I;$$

$$S \leftarrow A; \quad \hat{A} \leftarrow \phi$$

Paso 1. Encuentre el próximo:

si  $S = \phi$  entonces vaya al paso 3,

si no,

encuentre  $a = (i,j) \in S$  tal que  $(u_j + c_a)$  sea mínimo

$$S \leftarrow S - \{a\}$$

Paso 2. Actualice la etiqueta del nodo  $i$ :

si  $u_i \geq u_j + c_a$  entonces:

$$u_i \leftarrow (f_j u_i + f_a (u_j + c_a)) / (f_i + f_a),$$

$$f_i \leftarrow f_i + f_a, \quad \hat{A} \leftarrow \hat{A} + \{a\};$$

vaya al paso 1.

Paso 3. Asigne demanda a los arcos según la estrategia óptima:

Para todo arco  $a \in A$  en orden decreciente de  $(u_j + c_a)$ :

si  $a \in \hat{A}$  entonces:

$$v_a \leftarrow (f_a / f_i) V_i,$$

$$V_j \leftarrow V_j + v_a,$$

si no:  $v_a \leftarrow 0$

La variable  $V_i$  representa el flujo que pasa por el nodo  $i$ . En este algoritmo la distribución de pasajeros entre las líneas atractivas en cada paradero, es efectuada en forma proporcional a las frecuencias de cada línea atractiva.

### 3.3. ASIGNACIÓN DE FLUJO EN REDES DE TRANSPORTE COLECTIVO CON FUNCIONES DE COSTO NO LINEALES

En esta sección se analiza el problema de asignación de flujo cuando los tiempos de viaje en los arcos  $c_a$  ya no son constantes, si no más bien, son funciones continuas no decrecientes  $c_a(v_a)$  del flujo total en el correspondiente arco  $a$ . Esta dependencia de los costos en los arcos en función de los volúmenes de pasajeros, puede representar una disminución de la rapidez del vehículo debido al número de pasajeros, pero podría también ser interpretado como un costo generalizado que incluye un término de la incomodidad que aumenta a medida que el vehículo se va llenando.

Las principales hipótesis de este modelo son las siguientes:

- todos los pasajeros que viajan en los vehículos sufren el mismo grado de incomodidad, aún cuando aquellos pasajeros que abordaron el vehículo en los paraderos anteriores, tengan mayores chances de conseguir un asiento.
- Los tiempos de espera no son afectados directamente por el volumen de pasajeros. Los pasajeros pueden abordar el primer vehículo en llegar al paradero pues la capacidad de los vehículos no es considerada limitada.

Si  $v_{a,r}$  representa el volumen de pasajeros en el arco  $a \in A$  cuyo destino es el nodo  $r \in R$ , entonces el volumen total de pasajeros en el arco  $a$  será la suma de los volúmenes  $v_a$  para todos los diferentes destinos  $r \in R$ ,

$$v_a = \sum_{r \in R} v_{a,r} \quad , \quad a \in A, \quad (3.7)$$

En este contexto, el problema de asignación en una red de transporte colectivo no es separable por nodo de destino, debido a que el costo en cada arco depende del flujo total de pasajeros que transitan por el arco.

Si la demanda de viajes desde el nodo  $i \in I$  hasta el destino  $r \in R$  es  $g_{i,r}$ ,  $K_r$  el conjunto de todas las estrategias para llegar al destino  $r$ ,  $h_{i,k}$  la porción de la demanda  $g_{i,r}$  que es asignada a la estrategia  $k \in K_r$ , entonces la siguiente ecuación garantizará la conservación del flujo:

$$\sum_{k \in K_r} h_{i,k} = g_{i,r} \quad , \quad i \in I, \quad k \in K_r, \quad r \in R \quad (3.8)$$



Similarmente al caso en que los costos son constantes, cada pasajero escoge la estrategia que minimiza el valor esperado del tiempo total de viaje, solamente que en este caso los tiempos de viaje dependen de los volúmenes totales en los arcos, y por tanto, dependen de las estrategias escogidas por los otros pasajeros. El comportamiento de los pasajeros puede ser caracterizado matemáticamente por condiciones de equilibrio similares a aquellas que se originan del primer principio de Wardrop, utilizadas en una asignación de tráfico de equilibrio en una red de carros particulares.

Si  $s_{i,k}$  representa el costo de viaje esperado, desde el nodo  $i$  hasta el destino  $r$ , utilizando la estrategia  $k \in K_r$ ,  $u_{i,r}^*$  representa el mínimo costo esperado de viaje desde el nodo  $i$  hasta el destino  $r$ , las condiciones de equilibrio pueden ser escritas así:

$$\left. \begin{array}{l} s_{i,k}^* = u_{i,r}^*, \text{ si } h_{i,k}^* \geq 0 \\ s_{i,k}^* \geq u_{i,r}^*, \text{ si } h_{i,k}^* = 0 \end{array} \right\}, \quad i \in I, k \in K_r, r \in R \quad (3.9)$$

en base a la expresión (3.9) se puede decir que, solamente existirá flujo no nulo, en las estrategias cuyos costos sean iguales a los costos de la estrategia óptima, y en aquellas cuyo costo es mayor no existirá flujo, lo que implica que solamente las estrategias con el menor costo esperado serán utilizadas por los pasajeros.

Spiess (1983) demuestra que las condiciones de equilibrio de la ecuación (3.9) son la solución óptima del siguiente problema de minimización convexa:

$$\min \sum_{a \in A} \int_0^{v_a} c_a(x) dx + \sum_{i \in I} \sum_{r \in R} w_{i,r} \quad (3.10)$$

sujeto a :

$$v_a = \sum_{r \in R} v_{a,r} \quad , \quad a \in A, \quad (3.11)$$

$$v_{a,r} \leq f_a w_{i,r}, \quad a \in A_i^+, \quad i \in I, \quad r \in R, \quad (3.12)$$

$$\sum_{A_i^+} v_{a,r} - \sum_{A_i^-} v_{a,r} = g_{ir}, \quad i \in I, \quad r \in R, \quad (3.13)$$

$$v_{a,r} \geq 0, \quad a \in A, \quad r \in R, \quad (3.14)$$

donde:

$c_a(x)$  es la función de costo en el arco  $a$  que depende del flujo en el propio arco,

$w_{i,r}$  es el costo total de espera para ir desde  $i$  hasta  $r$ , y

$f_a$  es la frecuencia del arco  $a$

Spieß resalta que las restricciones del problema (3.11), (3.12), (3.13) y (3.14) son separables por destino (solamente las restricciones, la función objetivo no), y que por lo tanto es posible reformular el problema en términos de los volúmenes  $v_{a,k}$  asociados con cada estrategia viable  $k \in K$  de la siguiente forma:

$$\min \sum_{a \in A} \int_0^{v_a} c_a(x) dx + \sum_{r \in R} \sum_{k \in K_r} \sum_{i \in I} w_{i,k} \quad (3.15)$$

sujeto a:

$$v_{a,k} = f_a x_{a,k} w_{i,k}, \quad a \in A_i^+, \quad i \in I, \quad k \in K_r, \quad r \in R, \quad (3.16)$$

$$\sum_{a \in A_i^+} v_{a,k} - \sum_{a \in A_i^-} v_{a,k} = h_{i,k}, \quad i \in I, \quad k \in K_r, \quad r \in R, \quad (3.17)$$

$$v_a = \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_r} v_{a,k}, \quad a \in A, \quad (3.18)$$

$$w_{i,k} \geq 0, \quad h_{i,k} \geq 0, \quad i \in I, \quad k \in K_r, \quad r \in R \quad (3.19)$$

Las constantes  $x_{a,k}$  son iguales a 1, si el arco  $a$  forma parte de la estrategia  $k$ , o iguales a 0 en caso contrario. Si  $\underline{m}_{a,k}$ ,  $\underline{s}_{i,k}$  y  $\underline{u}_{i,r}$  son las variables duales que corresponden a las restricciones (3.8), (3.16) y (3.17), las condiciones de Kuhn-Tucker para una solución óptima  $(v^*, w^*, h^*)$  del problema (3.15) pueden ser escritas así:

$$\left. \begin{aligned} \underline{s}_{i,k}^* + t_a(v_a^*) + \underline{m}_{a,k}^* &= \underline{s}_{i,k}^* , \text{ si } h_{i,k}^* > 0 \\ \underline{s}_{i,k}^* + t_a(v_a^*) + \underline{m}_{a,k}^* &\geq \underline{s}_{i,k}^* , \text{ si } h_{i,k}^* = 0 \end{aligned} \right\} a=(i,j) \in A, k \in K_r, r \in R \quad (3.20)$$

donde  $t_a(v_a^*)$  es el costo en el arco  $a$  para el flujo óptimo  $v_a^*$

$$\sum_{a \in Ai^+} \underline{m}_{a,k}^* x_{a,k} f_a = 1, \quad i \in I, k \in K_r, r \in R, \quad (3.21)$$

y

$$\left. \begin{aligned} \underline{s}_{i,k}^* &= \underline{u}_{i,r}^* , \text{ si } h_{i,k}^* > 0 \\ \underline{s}_{i,k}^* &\geq \underline{u}_{i,r}^* , \text{ si } h_{i,k}^* = 0 \end{aligned} \right\} , \quad i \in I, k \in K_r, r \in R, \quad (3.22)$$

Las variables  $\underline{s}_{i,k}^*$  corresponden al tiempo de viaje esperado desde el nodo  $i$  hasta el destino  $r$  utilizando la estrategia  $k$ , esto es:

$$\underline{s}_{i,k}^* = s_{i,k}^* , \quad i \in I, k \in K_r, r \in R \quad (3.23)$$

Como por (3.22)  $\underline{u}_{i,r}^* = \min_{k \in K_r} \underline{s}_{i,k}^*$  entonces:

$$\underline{u}_{i,r}^* = u_{i,r}^* , \quad i \in I, r \in R \quad (3.24)$$

lo que garantiza que (3.22) es equivalente a (3.9).

Spiess (1983) sugiere que este problema puede ser resuelto utilizando un algoritmo basado en el método de Frank y Wolfe (1956) para sucesivas aproximaciones lineales de la función objetivo. Spiess indica que dado que no es necesario guardar explícitamente los volúmenes

dependientes de los destinos  $v_{a,r}$ , es posible trabajar con grandes redes con muchos nodos de destino. Una aproximación lineal de este problema, origina un nuevo problema en el que es posible separar los flujos por destino. Para cada destino, el subproblema resultante, es equivalente a un problema con costos fijos en los arcos, y por lo tanto puede ser resuelto utilizando el algoritmo presentado en la sección 3.2.1.

A continuación es presentado el algoritmo que resuelve el problema de asignación con funciones de costo no-lineales.

### 3.3.1. Algoritmo de asignación de equilibrio en redes de transporte colectivo para estrategias óptimas

Paso 0. Inicialización

Encuentre una solución viable inicial  $(v_o, w_o)$  donde  $v_o$  denota el vector de los flujos totales en el arco  $a$ , y el escalar  $w_o$  denota el correspondiente tiempo total de espera:  $\sum_{i \in I} \sum_{r \in R} w_{i,r}$

$l \leftarrow 0$

Paso 1. Subproblema

$l \leftarrow l+1$

calcule  $(v', w')$  resolviendo el problema de asignación con costos fijos  $c_a = c_a(v_{a,l-1})$  para cada destino  $r \in R$ .

Paso 2. Búsqueda lineal

Calcule el tamaño de paso  $\lambda_l$ , que minimice la función objetivo en el segmento de línea determinado por:  $(1 - \lambda) \cdot (v_{l-1}, w_{l-1}) + \lambda \cdot (v', w')$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$

Paso 3. Actualización

$$(v_l, w_l) \leftarrow (1 - \lambda_l) \cdot (v_{l-1}, w_{l-1}) + \lambda_l \cdot (v', w')$$

Si  $\sum_{a \in A} c_a(v_{a,l-1})(v_{a,l-1} - v_a') + w_{l-1} - w' < \varepsilon$  entonces pare, si no vaya al paso 1

La minimización del paso 2 puede ser implementada igualando a cero la derivada de la función objetivo. Lo que sería equivalente a resolver la siguiente ecuación:

$$\sum_{a \in A} c_a(v_{a,l-1} + \lambda(v_a' - v_{a,l-1}))(v_a' - v_{a,l-1}) + \lambda(w' - w_{l-1}) = 0 \quad (3.25)$$

Este mismo problema de una minimización convexa con costos simétricos, puede ser también formulado como un problema de inecuaciones variacionales, lo que se analiza en la siguiente sección.

### 3.4. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE EQUILIBRIO COMO UN PROBLEMA DE INECUACIONES VARIACIONALES

El problema de equilibrio puede ser escrito como un problema de inecuaciones variacionales, como a continuación se presenta.

Un problema de inecuaciones variacionales consiste en hallar el vector  $x^*$  que satisfaga la siguiente expresión:

$$c(x^*)^T(x - x^*) \geq 0, \quad (3.26)$$

donde  $x \in \Omega \subset R^n$ , un conjunto no vacío,  $c(x)$  es una función de  $R^n$  en  $R^n$  y  $c(x)^T$  es el traspuesto de  $c(x)$

Por otro lado, un problema de complementariedad no lineal, equivalente al problema de inecuaciones variacionales, es definido por:

$$c(x)^T x = 0 \quad (3.27)$$

$$c(x) \geq 0, \quad (3.28)$$

$$x \geq 0 \quad (3.29)$$

Torres (1987) presenta la equivalencia entre un problema de equilibrio en una red de vehículos particulares y un problema de complementariedad no lineal. Siguiendo la misma lógica se puede probar que un problema de equilibrio para una red de transporte colectivo también puede ser expresado como un problema de complementariedad no lineal.

Primero, considerando que las condiciones de óptimo del usuario (3.9) también pueden ser escritas como:

$$\left. \begin{array}{l} (s_{i,k}^* - u_{i,r}^*) h_{i,k}^* = 0 \\ s_{i,k}^* - u_{i,r}^* \geq 0 \end{array} \right\}, \quad i \in I, k \in K_r, r \in R \quad (3.30)$$

y las condiciones de conservación de flujo y de no negatividad de los flujos y de las variables duales (los multiplicadores de las restricciones):

$$\sum_{k \in K_r} h_{i,k} - g_{i,r} = 0, \quad i \in I, k \in K_r, r \in R \quad (3.31)$$

$$h \geq 0 \quad (3.32)$$

$$u \geq 0 \quad (3.33)$$

Se puede demostrar que una solución  $x = (h,u)$  que satisface las relaciones (3.30) – (3.33) también resuelve el problema de complementariedad no lineal:

$$c(x)^T x = 0 \quad (3.34)$$

$$c(x) \geq 0, \quad (3.35)$$

$$x \geq 0 \quad (3.36)$$

si se define apropiadamente  $c(x) = (y(x), z(x))$  una función de  $R^n$  en  $R^n$ , con  $n = |K| + |I \times R|$  donde  $y(x)$  y  $z(x)$  son definidas así:

$$y_k(x) = s_{i,k}^* - u_{i,r}^*, \quad i \in I, \quad k \in K_r, \quad r \in R \quad (3.37)$$

$$z_{ir}(x) = \sum_{k \in K_r} h_{i,k} - g_{i,r}, \quad i \in I, \quad r \in R \quad (3.38)$$

Entonces un problema de equilibrio de redes de transporte colectivo puede ser escrito como un problema de complementariedad no lineal, y por lo tanto, también como un problema de inecuaciones variacionales.

### 3.5. ASIGNACIÓN DE EQUILIBRIO EN REDES DE TRANSPORTE COLECTIVO CON COSTOS ASIMÉTRICOS

En esta sección se describe como es tratado el problema de asignación de equilibrio, cuando los costos en los arcos son funciones convexas no decrecientes que dependen, no solamente del flujo en el propio arco, si no que también depende de los flujos en otros arcos de la red.

El algoritmo presentado en la sección 3.3.1, satisfactorio para el caso en que el costo  $c_a$  en cada arco  $a$  depende solamente del flujo en el arco  $a$ , no es capaz de resolver situaciones como las que se presentan cuando los costos en los arcos no dependen únicamente de los

flujos en el propio arco. Ejemplos de estas situaciones se presentan en calles de doble sentido, en que los tiempos de desplazamiento en cada sentido depende no solamente del flujo en una dirección, si no también en la dirección contraria. Otro ejemplo aparece en las intersecciones, en las que el tiempo de desplazamiento en una determinada avenida puede depender de los flujos de las calles transversales a ésta.

Para una formulación en función de los flujos en los arcos, las restricciones del problema continúan siendo las de no negatividad y de conservación de flujo:

$$v_a = \sum_{r \in R} v_{a,r} \quad , \quad a \in A, \quad (3.39)$$

$$v_{a,r} \leq f_a w_{i,r}, \quad a \in A_i^+, \quad i \in I, \quad r \in R, \quad (3.40)$$

$$\sum_{a \in A_i^+} v_{a,r} - \sum_{a \in A_i^-} v_{a,r} = g_{ir}, \quad i \in I, \quad r \in R, \quad (3.41)$$

$$v_{a,r} \geq 0, \quad a \in A, \quad r \in R \quad (3.42)$$

La función objetivo no es más la misma de la formulación con funciones de costos en los arcos, que dependen únicamente del flujo en el propio arco. Para una asignación de acuerdo al óptimo del usuario, deben ser satisfechas las condiciones de equilibrio de Wardrop: las estrategias cuyos costos sean iguales al costo óptimo (costo de la mejor estrategia) tendrán flujos no negativos, y aquellas cuyos costos sean mayores tendrán flujos nulos, llegando a la siguiente expresión:

$$(X - X^*) C(X^*) + (W - W^*) \geq 0 \quad (3.43)$$

que es un problema de inecuaciones variacionales, donde  $X$  representa el vector de flujos en los arcos,  $X^*$  el vector óptimo de flujos en los arcos,  $C(X^*)$  el vector de costos para los flujos



óptimos,  $W$  el vector de costos totales de espera asociados al padrón de flujos  $X$ , y  $W^*$  el vector de costos totales de espera asociados al vector  $X^*$  óptimo.

Dado que el vector de costos  $C(X)$  posee un Jacobiano asimétrico, no existe una formulación equivalente de optimización. Una forma de resolver el problema consiste en utilizar el método de la diagonalización. A cada iteración el vector de costos es diagonalizado en la solución actual, consiguiéndose de esta manera, un problema de asignación simétrica.

El método de diagonalización forma parte de los métodos de aproximación lineal de la función de costos  $C(X)$ . Pang y Chan (1982) presentan el siguiente algoritmo para definir la aproximación lineal:

Dado  $X_k$  un vector de flujo viable, sea  $X_{k+1}$  la solución del subproblema de inecuaciones variacionales, donde el vector de costos  $C(X_k)$  es una aproximación de  $C(X)$  en el punto  $X_k$ .

Cada  $C(X_k)$  debería ser expresado de una forma tal, que el subproblema con el vector de costos aproximados, sea más fácil de ser resuelto que el problema original.

Una aproximación lineal de  $C(X)$  tiene la forma siguiente:

$$C_k(X) = C(X_k) + A(X_k)(X - X_k) \quad (3.44)$$

Donde  $A(X_k)$  es una matriz cuadrada.

Si  $C(X_k)$  fuera no lineal,  $C_k(X)$  sería una aproximación no lineal.

Cuando la matriz  $A(X_k)$  es igual a la diagonal del Jacobiano  $D(X_k)$ , el método es conocido como Jacobiano linealizado, o método de diagonalización.

Entonces volviendo al problema de equilibrio, la solución del problema (3.43) será encontrada resolviendo en forma iterativa el siguiente problema:

$$(X - X^*) C'(X^*) + (W - W^*) \geq 0 \quad (3.45)$$

donde  $C'(X)$  (la aproximación lineal) tiene un Jacobiano diagonal.

En Dafermos (1982) se puede apreciar que una condición necesaria y suficiente para que las funciones de costos sean fuertemente monótonas, es que el Jacobiano (no necesariamente simétrico), sea positivo definido para cualquier valor de flujo viable. Se espera que esta condición sea observada en la mayoría de las situaciones donde existe interacción entre los flujos de los diferentes arcos, pues generalmente para la función de costo  $c_a$  en un arco  $a$ , que podría depender de los flujos en todos los arcos, es razonable esperarse que la mayor dependencia sea con respecto al flujo del propio arco  $v_a$ , de tal forma que  $\partial c_a / \partial v_a$  sea mucho mayor que  $\partial c_a / \partial v_b$ .

Con todos estos supuestos, se puede reescribir el problema (3.45) como:

$$\min \sum_{a \in A} \int_0^{v_a} c_a'(x) dx + \sum_{i \in I} \sum_{r \in R} w_{i,r} \quad (3.46)$$

donde  $c_a'(x)$  es una componente del vector de costos  $C_k(X)$  que es aproximado como:

$$C_k(X) = C(X_k) + D(X_k)(X - X_k) \quad (3.47)$$

y donde  $D(X_k)$  es la diagonal del Jacobiano.

El problema puede ser resuelto en forma iterativa con el algoritmo de la sección 3.2.



## CAPÍTULO 4.

### IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL DEL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN DE EQUILIBRIO

#### 4.1 INTRODUCCIÓN

El propósito principal de esta tesis es el desarrollo de una herramienta computacional que sirva de auxilio a la solución de un problema de asignación de flujo de equilibrio en redes de gran tamaño de transporte colectivo.

En este capítulo se presenta el desarrollo de un programa computacional implementado en lenguaje Delphi 4, que resuelve el problema de la asignación de flujo de equilibrio para redes de transporte colectivo con congestionamiento, con funciones de costo asimétricas, utilizando el concepto de estrategias o hipercaminos. La repartición de los pasajeros en los diferentes caminos elementales de cada hipercamino será efectuada repartiendo en forma proporcional a las frecuencias de las líneas asociadas a los arcos de la red.

Se presenta la estructura del programa, detallándose los principales procedimientos, la estructura de los datos y los atributos de cada subrutina.

En cuanto a los datos necesarios para la ejecución del programa, estos fueron obtenidos a partir de archivos externos de extensión txt, y fueron leídos por subrutinas del programa principal. Debido a una limitación del Delphi para el espacio destinado al almacenamiento de las variables locales, fue conveniente definir variables que se quedan guardadas en la memoria *heap* del computador, siendo necesario trabajar con punteros que indican la posición de las variables en la memoria *heap*. De esa manera el programa solamente guarda los punteros de las variables, ocupando poco espacio de la memoria.

## 4.2. ASIGNACIÓN DE EQUILIBRIO EN UNA RED CON CONGESTIONAMIENTO

En esta implementación las funciones de costos en los arcos son funciones monótonas asimétricas de los flujos en los arcos. Se implementará, como parte de la solución, un método de diagonalización basado en el Jacobiano del vector de costos, que es un procedimiento iterativo en el que las funciones de costo son aproximadas en forma lineal en la solución actual, obteniéndose un nuevo problema con funciones de costo simétricas. Para encontrar la solución al problema de asignación en una red de transporte colectivo, será utilizado un procedimiento basado en el algoritmo de Frank-Wolfe (1956). De Cea y Fernández (1993) indican que las condiciones de monotonicidad de las funciones de costo, son suficientes pero no necesarias, en algoritmos de diagonalización, que en la práctica presentan excelentes propiedades de convergencia, aún hasta cuando dichas condiciones de monotonicidad de las funciones de costo no son satisfechas.

Como las restricciones de conservación de flujo y de no negatividad determinan un conjunto convexo, entonces el problema puede ser resuelto por métodos iterativos para resolver problemas de inecuaciones variacionales (ver Pang y Chang, 1982, Parada, 1989), en particular, por el procedimiento basado en el método de Frank-Wolfe, que no requiere guardar los volúmenes para cada destino en forma explícita.

A continuación se presenta el algoritmo propuesto para resolver el problema de equilibrio, en el cual se utiliza una adaptación del método de Frank-Wolfe, que resuelve el problema para el caso con congestión del problema linealizado y que efectúa una asignación en función a las frecuencias de las líneas de ómnibus asociadas a los arcos.

### 4.2.1. Algoritmo de solución

#### 0. Inicialización

Genere la red aumentada

Encuentre una solución viable  $(v_0, w_0)$

Sea  $l = 0$

1. Sea  $l = l + 1$

Encuentre los hipercaminos más cortos para todos los pares O-D

Haga una asignación proporcional a las frecuencias y halle  $(v', w')$  aplicando los algoritmos de repartición local y distribución de flujo con los costos en los arcos  $t_i = t_i(v_{l-1})$

2. Calcule el tamaño de paso  $\lambda_l$ , que minimice la función objetivo en el segmento de línea determinado por:  $(1 - \lambda) \cdot (v_{l-1}, w_{l-1}) + \lambda \cdot (v', w')$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$

3. Actualice  $(v', w') = (1 - \lambda_l) \cdot (v_{l-1}, w_{l-1}) + \lambda_l \cdot (v', w')$

Si  $\| (v', w') - (v_{l-1}, w_{l-1}) \| < \varepsilon$  entonces pare, si no, vaya al paso 1

Las principales rutinas de esta implementación pueden ser identificadas como:

- la generación de la red de transporte colectivo (red aumentada),
- la determinación de las rutas,
- la asignación de los pasajeros en esas rutas

A continuación se describe cada una de estas rutinas.

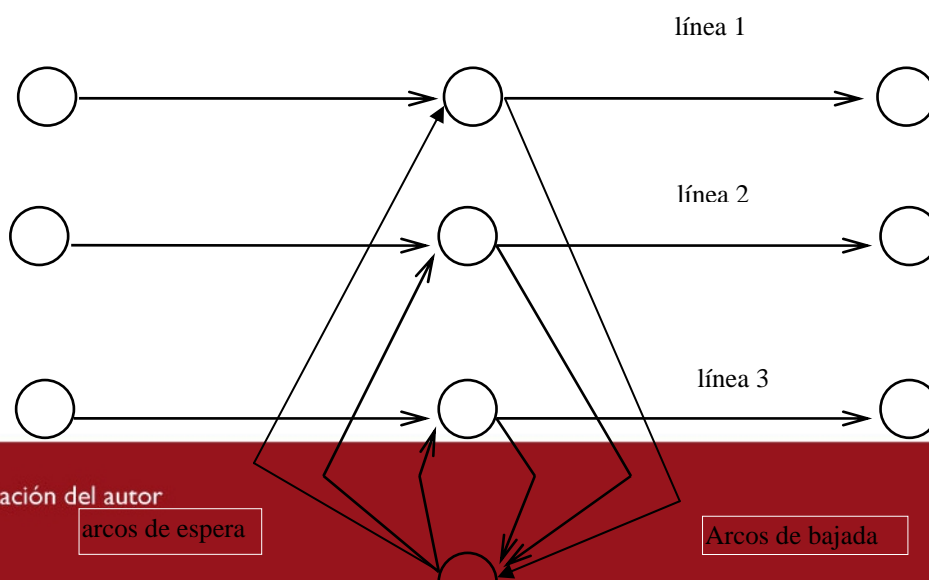
#### 4.3. GENERACIÓN DE LA RED DE TRANSPORTE COLECTIVO

La representación de la red vial será hecha a través de un grafo  $G=(N,A)$ , donde  $N$  es el conjunto de nodos y  $A$  es el conjunto de arcos. La región en estudio es dividida en zonas de tráfico. Cada una de estas zonas tiene un centroide, donde se supone que está concentrada la demanda de pasajeros. Se parte de la hipótesis de que la demanda es fija. Una matriz de viajes origen-destino representa los desplazamientos de pasajeros entre cada par de centroides. Los nodos de la red representan centroides, paraderos e intersecciones de las

vías. Los arcos representan las vías, conectando paraderos consecutivos y también existen conectores (arcos de caminata) que representan los accesos desde los centroides hacia la red vial.

El primer concepto específico para redes de ómnibus es aquel de red “aumentada”, correspondiendo a la adición de arcos de caminata utilizados para el acceso y la salida de la red y las transferencias entre las líneas. Además de esto, cada una de las líneas disponibles entre dos paraderos consecutivos  $i$  y  $j$  es representada por un arco individual  $a$ . Esto es,  $m$  líneas diferentes entre un mismo par de nodos serán representadas por  $m$  arcos diferentes. (Ver figura 4.1).

A partir de la red vial y de los itinerarios de las líneas, se genera la red aumentada (explosión de la red). Cada línea de ómnibus es definida por el itinerario, o sea, la secuencia de nodos por donde circula la línea, y otros atributos, como capacidad de los vehículos, frecuencia y velocidad. Esta red aumentada contiene arcos que representan los trechos de las líneas de ómnibus, los accesos (arcos de caminata) que conectan los centroides con los paraderos, la espera en los paraderos, los transbordos y las bajadas. Cada paradero de ómnibus atendido por  $k$  líneas es representado por  $k+1$  nodos diferentes (uno representando al propio paradero y un nodo adicional por cada línea), como puede ser apreciado en la figura 4.1. En esta figura puede verse un subgrafo que representa un paradero de la red vial, que es atendido por tres líneas de ómnibus.



La “explosión” de la red es efectuada a través de un procedimiento que crea la red aumentada en forma automática, y que dio origen a un artículo presentado en el XII ANPET (Castro y Leal, 1998).

Una descripción de este procedimiento se resume a continuación.

#### **4.3.1. PROCEDIMIENTO PARA GENERAR EN FORMA AUTOMÁTICA LA RED DE TRANSPORTE COLECTIVO**

Para modelar la red de transporte colectivo es necesario un levantamiento preliminar de la red vial básica a través de la selección de las vías por donde circulan los ómnibus. Se asume que los paraderos y las intersecciones son representados por nodos, a cada uno de los cuales se atribuye un número para identificación, y además, cada trecho físico de la red entre dos nodos es representado por un arco.

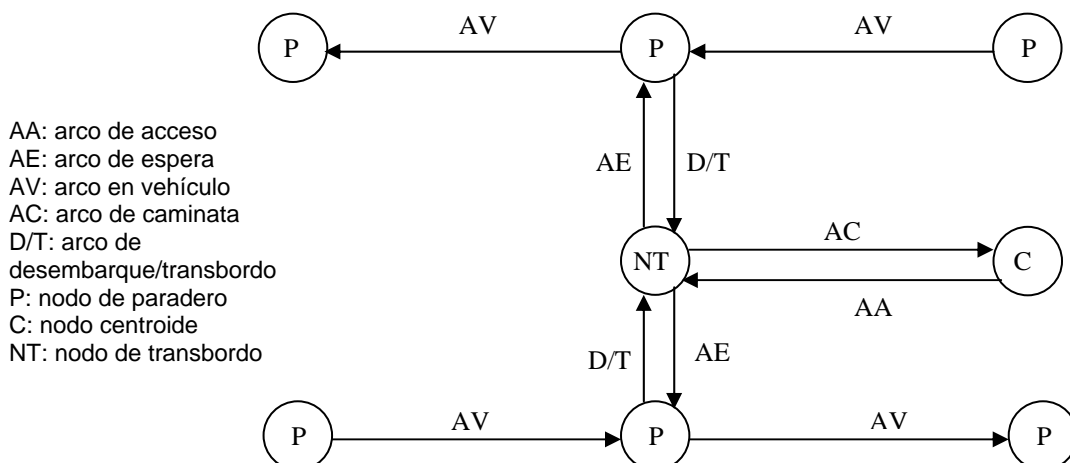
La red vial es utilizada como base para describir matemáticamente los itinerarios de las líneas de ómnibus. La secuencia alternada de nodos y arcos por donde pasan los ómnibus de cada línea definen el itinerario respectivo. Los paraderos son representados por nodos en la red vial. Los arcos representan los desplazamientos de los pasajeros en el vehículo.

La región en estudio es dividida en zonas de tráfico y se considera que la demanda de pasajeros está concentrada en puntos arbitrarios de las zonas. Deben por lo tanto, existir



conectores entre los centroides y la red vial, para poder representar el acceso y la salida de los pasajeros en la red.

Para crear la red aumentada se trabaja a partir de un archivo que contiene información de las líneas de ómnibus, como identificación de la línea, tipo de vehículo, frecuencia, velocidad, tiempo en cada trecho y el itinerario, o sea, la secuencia de nodos recorridos por el ómnibus, donde los nodos son referenciados a la red vial básica. Esta contiene nodos, que representan locales físicos de la región estudiada, como paraderos, intersecciones y arcos que representan vías. Una subrutina lee los datos del archivo de líneas y, para cada línea de ómnibus, crea un nodo adicional (a los que ya existen en la red vial básica) por cada nodo del itinerario de la línea, y también crea arcos de embarque y de desembarque que comunican el nodo original con el nodo adicional que representa el mismo paradero de la línea analizada. A cada arco creado son atribuidos dos valores: el tiempo de desplazamiento en el arco y la frecuencia. Esos dos atributos son utilizados para determinar las rutas de los pasajeros. A los arcos de embarque se les atribuye un valor del tiempo igual a cero y una frecuencia igual a la frecuencia de la línea correspondiente. A los arcos de desembarque se les atribuye un tiempo igual a cero y una frecuencia infinita. Son creados también los arcos que corresponden a cada trecho de cada línea, entre dos paraderos consecutivos del itinerario, a los cuales se atribuyen los valores de tiempo iguales a los obtenidos del archivo de líneas, y una frecuencia infinita.



#### Figura 4.2. Red aumentada con los arcos de acceso de los centroides

Un acumulador, inicializado con el valor del total de nodos en la red original, va contabilizando el total de nodos en la red redefinida, y otro acumulador, inicializado en cero, contabiliza el total de arcos generados en la red redefinida.

Una vez que la red aumentada está creada, los arcos son ordenados en forma ascendente con respecto al nodo final para guardarlos en forma de lista encadenada con punteros apuntando al próximo arco con nodo final (cabeza) diferente, en una estructura *backward star*. Generalmente las redes son esparcidas, y guardar información de los arcos en forma de matriz crearía muchos campos vacíos. Podría también crearse la lista encadenada con respecto al nodo inicial (cola) de los arcos (estructura *forward star*), pero los principales algoritmos de asignación en redes de transporte colectivo basados en hipercaminos, efectúan un barrido de la lista de nodos para atrás (*backward star*), comenzando del nodo de destino, para encontrar los caminos más cortos desde todos los otros nodos de la red. A continuación se presenta el pseudo-código del procedimiento de construcción automática de la red:

#### PROCEDIMIENTO crea\_arcos

INICIO

VARIANDO línea DE 1 HASTA nunlíneas HAGA

INICIO

LEA ident, hdwy, totnos

VARIANDO j DE 1 HASTA totnos HAGA

INICIO

LEA no[j]

cont ← cont + 1

aux[j] ← cont

SI (j =1) ENTONCES

INICIO

contarcos ← contarcos + 1                   {arcos de espera}

arc.nor[contarcos] ← no

arc.nod[contarcos] ← cont

arc.tempo[contarcos] ← 0

arc.freq[contarcos] ← 1 / hdwy

FIN-SI

SI (j = totnos) ENTONCES

INICIO

contarcos ← contarcos + 1                   {arcos de desembarque}

arc.nor[contarcos] ← cont

arc.nod[contarcos] ← no

arc.tempo[contarcos] ← 0

arc.freq[contarcos] ← 9999 (infinito)

FIN-SI

SI (j <>1) Y (j <> totnos) ENTONCES

INICIO

contarcos ← contarcos + 1                   {arcos de espera}

arc.nor[contarcos] ← no

arc.nod[contarcos] ← cont

arc.tempo[contarcos] ← 0

arc.freq[contarcos] ← 1 / hdwy

contarcos ← contarcos + 1                   {arcos de desembarque}

arc.nor[contarcos] ← cont

arc.nod[contarcos] ← no

arc.tempo[contarcos] ← 0

arc.freq[contarcos] ← 9999 (infinito)

FIN-SI

FIN-VARIANDO

VARIANDO j DE 1 HASTA (totnos -1) HAGA

INICIO

LEA tempo

contarcos ← contarcos + 1                   {arcos de percurso}

```

arc.nor[contarcos] ← aux[j]
arc.nod[contarcos] ← aux[j - 1]
arc.tempo[contarcos] ← tempo
arc.freq[contarcos] ← 9999 (infinito)

```

FIN-VARIANDO

FIN-VARIANDO

FIN

Donde

*nunlíneas* es el total de líneas de ómnibus

*ident* es un código identificador de la línea actual

*hdwy* es el *headway* de la línea actual

*totnos* es el número total de nodos de la línea actual

*cont* es un acumulador que contabiliza el total de nodos

*contarcos* es un acumulador que contabiliza el total de arcos

Una vez creada la red, con los arcos almacenados en una estructura de lista encadenada, estos pueden ser barridos para efectuar algún cálculo o verificación de algún atributo con una complejidad del orden de  $O(m)$ , donde  $m$  es el número de arcos. Si ellos estuviesen almacenados en forma de matriz esta misma operación tendría una complejidad del orden de  $O(n^2)$ , donde  $n$  es el número de nodos. Para valores altos de  $n$  y  $m$ , como es el caso en redes de gran tamaño, buscar la menor complejidad posible en las rutinas se torna importantísimo pues el tiempo de computación depende de la complejidad del programa.

#### 4.4. CÁLCULO DE LOS HIPERCAMINOS MÁS CORTOS

Para determinar la selección de las rutas de los pasajeros de la red, con funciones de costos asimétricas, fueron implementadas algunas subrutinas que están basadas en un proceso

iterativo que determina los hipercaminos más cortos con los costos actualizados en cada iteración, que dependen de la asignación de la iteración anterior.

#### 4.4.1. Subrutina hipercamino

Esta subrutina se encarga de encontrar los costos totales de viaje desde todos los nodos hasta un nodo que es fijado como nodo de destino, para costos fijos (constantes) en los arcos. Los valores de los costos fijos en una iteración, son calculados en función de los flujos de la iteración anterior. En la primera iteración se parte de un conjunto de flujos viables, pudiendo ser flujos nulos.

Las funciones de costos en los arcos que fueron utilizadas en esta aplicación dependen solamente de los flujos de dos arcos, además del flujo del propio arco, depende del flujo de un otro arco de la red. Como la actualización de los costos es efectuada en cada iteración, para este caso particular, en que las funciones de costo en los arcos dependen solamente de dos arcos, fue conveniente identificar ese otro arco cuyo flujo influye en el costo. Para esto, se creó una subrutina para identificar a ese arco auxiliar en el cálculo del costo, lo que agiliza la actualización de los costos. Para cada arco de espera fue considerado que el costo de espera dependía del número de pasajeros esperando en el paradero y de la cantidad de pasajeros que ya estaban dentro del vehículo cuando éste llegó al paradero. Para los arcos en vehículo, se consideró que el costo dependía del número de pasajeros que ya estaban dentro de él y de los que acababan de abordarlo.

En esta implementación se consideró el algoritmo de Spiess para costos fijos, detallado en el capítulo anterior en el ítem 3.2.1., el cual coloca etiquetas en los arcos que corresponden a las líneas consideradas atractivas por los pasajeros.

En el paso 1 de este algoritmo, para poder escoger el arco  $a=(i,j)$  con el menor  $u_j+c_a$ , los arcos deben ser ordenados en forma creciente según la etiqueta  $u_j+c_a$ . Para ésto fue utilizada una estructura *heap* binaria.

Un *heap* binario es un árbol binario, en el que cada elemento del árbol tiene dos hijos, e incluye un atributo llamado el valor del elemento. La propiedad del *heap* es que el valor de cada elemento es mayor o igual (o menor o igual, en el caso de ordenamiento creciente) que los valores de sus hijos (ver figura 4.4.). La característica fundamental de esta estructura de datos es que la propiedad del *heap* puede ser reestablecida eficientemente despues de hacer modificaciones en el valor de un elemento del *heap*. Si el valor de un elemento aumenta, de forma tal que se torna mayor que el valor de su padre, basta hacer un cambio entre estos dos valores y luego continuar el mismo proceso para arriba en el árbol hasta que la propiedad del *heap* sea reestablecida.

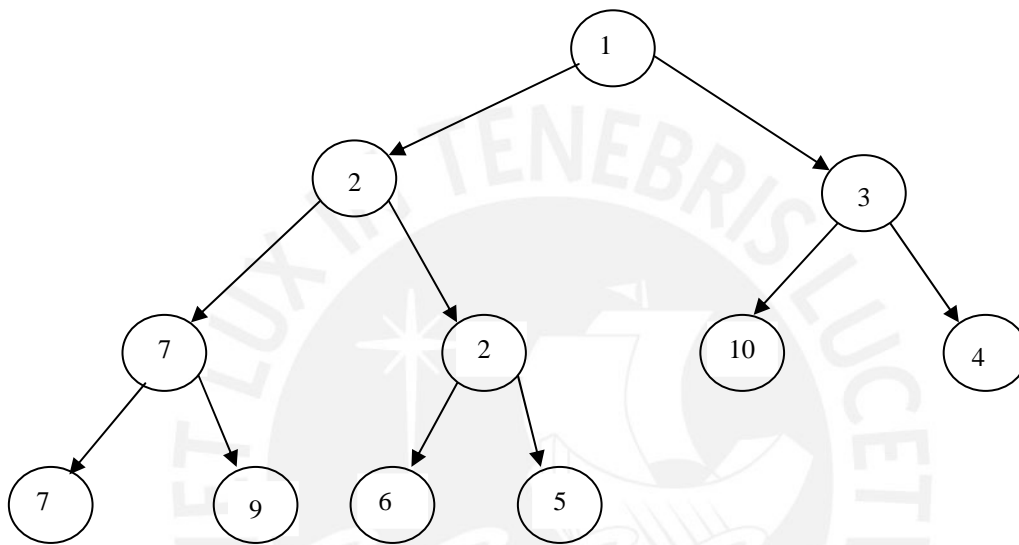
Para conseguir recuperar la propiedad del *heap* fueron implementadas dos subrutinas adicionales. Una que reordena el *heap* para arriba y otra que reordena para abajo a partir del elemento modificado en el árbol.

El uso de la estructura *heap* binaria permite que el proceso de ordenamiento de los arcos se efectúe con una complejidad del orden de  $O(m \log m)$ , donde  $m$  es el número de arcos a ser ordenados. Si se utilizara un vector en lugar de la estructura *heap* para efectuar el ordenamiento de los arcos, la complejidad sería del orden de  $O(m^2)$ . Esto aparentemente sería innecesario, si se aplicara el algoritmo a un prototipo con pocos datos, pero para redes grandes, como la red analizada en el ejemplo de aplicación, que contiene alrededor de 85.000 arcos (luego de generar la red aumentada), la complejidad de la subrutina de ordenamiento caería, del orden de 85.000 para 11 ( $\log 85.000 \cong 11$ ), lo que haría que el ordenamiento del vector sea 7.500 veces más rápido.

Ejemplo de un vector a ser ordenado:

1	6	9	2	7	5	2	7	4	10	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	---

Figura 4.3. Vector a ser colocado en la estructura *heap*



En el procedimiento eficiente para actualizar el costo de un nodo aparece en la sección 3.2.1. para realizar la actualización del nuevo valor de la etiqueta  $u_i$  debe observarse lo siguiente:

Figura 4.4.  
Estructura *heap* del vector

En la ecuación  $u_i = (f_i u_i + f_a (u_j + c_a)) / (f_i + f_j)$ , donde el valor de la frecuencia  $f_i$  es multiplicado por el valor del costo  $u_i$ , cuando la etiqueta es mejorada por primera vez para el nodo  $i$ , aparece un producto  $f_i u_i = 0 \cdot \infty$ . Para evitar inconsistencia en el cálculo, se debe adoptar la convención de que  $0 \cdot \infty = 1$ , ó  $0 \cdot \infty = \alpha$ , donde  $\alpha$  es el parámetro de la ecuación 3.1. En este caso fue utilizado  $\alpha = 1$ .

#### 4.5. ASIGNACIÓN A LOS HIPERCAMINOS MÁS CORTOS

Se implementó una subrutina para efectuar la asignación de pasajeros a los hipercaminos más cortos. Los flujos en los paraderos atendidos por más de una línea atractiva, son repartidos en forma proporcional a las frecuencias de las respectivas líneas.

La asignación de pasajeros divide los flujos en los arcos de cada hipercamino según la probabilidad de llegada de un vehículo de la línea asociada al arco, probabilidad determinada por la frecuencia de cada línea de ómnibus.

La subrutina que reparte los flujos tiene el siguiente pseudo-código:

#### PROCEDIMIENTO asigna\_demanda

INICIO

VARIANDO  $i$  DE 1 HASTA  $n_{\text{nnos}}$  HAGA

$V_i \leftarrow 0$

VARIANDO  $i$  DE 1 HASTA  $n_{\text{ncentroides}}$  HAGA

$V_i \leftarrow g_i$

VARIANDO  $j$  DE 1 HASTA  $n_{\text{arcs}}$  HAGA (en orden decreciente de  $u_j + v_a$ )

INICIO

SI EL ARCO  $a$  PERTENECE A  $i$  ENTONCES HAGA

$v_a \leftarrow f_a / f_i \cdot V_i$

$V_j \leftarrow V_j + v_a$

SINO

$v_a \leftarrow 0$

FIN

FIN

Donde  $u_j$  es la etiqueta del nodo  $j$  que representa el costo de ir del nodo  $j$  hasta el destino.

$n_{\text{nnos}}$ ,  $n_{\text{ncentroides}}$ ,  $n_{\text{arcs}}$  son respectivamente, el número de nodos, centroides y arcos de la red.

$V_i$  es el flujo en el nodo  $i$ .

$g_i$  es la demanda de pasajeros desde el nodo  $i$  hasta el destino.



$v_a$  es el flujo en el arco  $a$ .

$f_a$  es la frecuencia del arco  $a$ .

$f_i$  es la "frecuencia" en el nodo  $i$ .

$\mathring{A}$  es el conjunto de arcos que corresponden a las líneas atractivas.

#### 4.6. Subrutina del cálculo del tamaño de paso $\lambda$

Esta subrutina determina el valor del tamaño de paso que minimiza la función objetivo del problema linealizado, para valores de flujos calculados en dos iteraciones consecutivas.

Como se indica en el capítulo anterior, una forma de calcular esto, es igualando a cero la derivada de la función objetivo para un valor de flujo que depende de  $\lambda$ . Debe verificarse que el valor encontrado, corresponda a un mínimo y no a un máximo pues la derivada nula no garantiza que sea el mínimo. Para la igualación a cero de la derivada se realiza un cálculo iterativo utilizando el método de la bisección, con valores iniciales de  $\lambda$  de 0 y 1. Además de eso, en cada iteración se tienen que examinar las condiciones en los extremos del intervalo de búsqueda. Así por ejemplo, la condición de que las pendientes de la función a ser minimizada en los extremos de búsqueda deben tener signos contrarios para garantizar que pueda existir un mínimo en algún punto del intervalo de búsqueda. En el caso en que las pendientes en los extremos del intervalo de búsqueda tienen el mismo signo, el mínimo sucederá en uno de los extremos del intervalo de búsqueda. Para identificar en cual de los extremos se da el mínimo, basta evaluar la función en los dos puntos y comparar estos valores.

A continuación se presenta el pseudo-código de esta subrutina:

#### PROCEDIMIENTO encuentra\_tamano\_de\_paso

INICIO

$a \leftarrow 0$  ( $\lambda$  mínimo)

$b \leftarrow 1$  ( $\lambda$  máximo)  
 $gap \leftarrow 9999999$   
 MIENTRAS NO( $gap < \varepsilon$ )

**INICIO**

$c \leftarrow (a+b)/2$   
 $fa \leftarrow \text{funcion}(a)$   
 $fb \leftarrow \text{funcion}(b)$   
 $fc \leftarrow \text{funcion}(c)$   
 $gap \leftarrow |fa - fb|$

**SI ( $fa \cdot fb > 0$ ) ENTONCES**

**INICIO**

**SI  $a < b$  ENTONCES**

$pendiente \leftarrow (fa - fb) / (a - b)$

**SI  $pendiente < 0$  ENTONCES**

$c \leftarrow b$

**SINO  $c \leftarrow a$**

$Gap \leftarrow \varepsilon/2$  (número pequeño, menor que  $\varepsilon$ )

**FIN**

**SI ( $fa \cdot fb < 0$ ) ENTONCES**

**SI ( $fa \cdot fc < 0$ ) ENTONCES**

$b \leftarrow c$

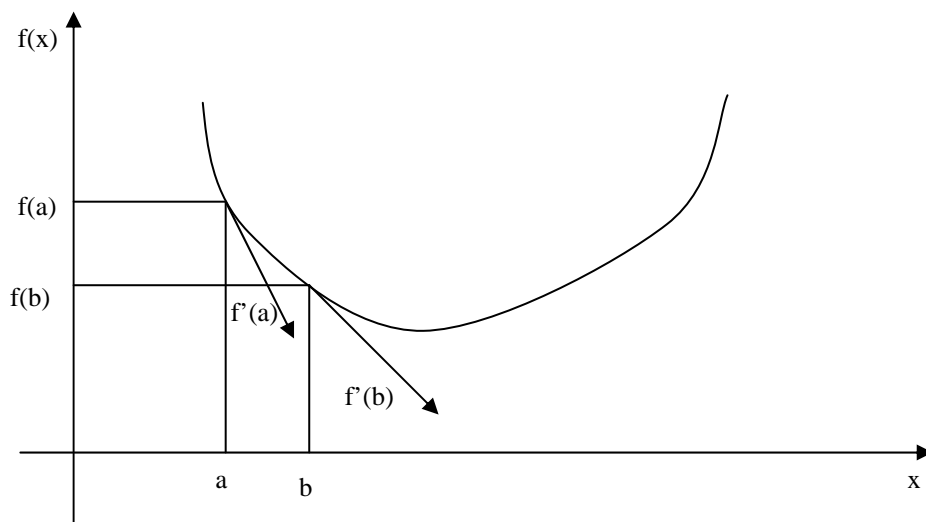
**SI ( $fb \cdot fc < 0$ ) ENTONCES**

$a \leftarrow c$

**FIN**

$c \leftarrow a$

**FIN**



#### 4.7. Subrutina del criterio de parada

Fueron utilizados dos criterios de parada, efectuándose la parada cuando el primero de estos criterios ocurra. Un criterio de parada fue un número predeterminado de iteraciones, y el otro fue el cálculo de un parámetro denominado *gap*, función definida como:

$$GAP(h) = \min_{x \in \Omega} S(h)^T(h-x) \quad (4.1)$$

Donde  $GAP(h) \geq 0$  en la región viable  $\Omega$  de los flujos en los hipercaminos, y donde  $GAP(h)$  es igual a 0 únicamente para los valores  $h$  que son solución del problema.

## CAPÍTULO 5.

### RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DEL ALGORITMO DE ASIGNACIÓN DE EQUILIBRIO

#### 5.1. OBJETIVOS DE LA APLICACIÓN PRÁCTICA

En este capítulo se presenta la aplicación del algoritmo buscando satisfacer dos objetivos:

- mostrar el procedimiento de asignación de flujo en los arcos, y comparar los resultados con otros métodos de asignación; y,
- enfatizar la importancia del tiempo de computación para que el algoritmo tenga una aplicación en casos reales, en los que el tamaño de la red no sea un obstáculo para su utilización.

Para ilustrar su funcionamiento se utiliza un ejemplo bastante sencillo. Se detalla paso a paso el procedimiento y luego se presentan en forma tabulada los resultados. Luego se presenta otro ejemplo también sencillo, en el cual es posible observar los transbordos y cómo van cambiando las líneas atractivas para los pasajeros. Estos dos ejemplos tienen como objetivo mostrar el proceso iterativo que converge a una solución de equilibrio. Vale la pena resaltar como en el proceso de asignación de flujos en los arcos de menor costo, van cambiando las soluciones conforme se actualizan los parámetros, ya que al variar los flujos cambian los costos en los arcos, y se producen nuevos patrones de flujo en cada iteración hasta que finalmente converge a una solución de equilibrio.

El primer caso mostrado, consta de una red lo más simple posible, con únicamente dos paraderos A y B, con pasajeros que desean desplazarse desde A hasta B, para lo cual disponen de dos líneas de transporte público. Un segundo ejemplo, algo más complejo, presenta 3 paraderos y 3 líneas de transporte público, con la finalidad de poder apreciar el fenómeno del transbordo.

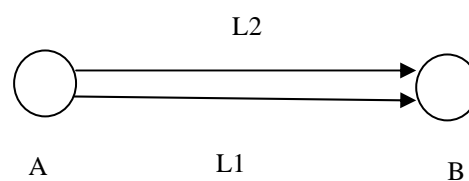
La complejidad de los cálculos efectuados paso a paso en estos ejemplos simples pueden mostrar la necesidad de realizar el proceso con una implementación que tenga en cuenta una adecuada estructura de datos para un mejor desempeño computacional cuando se resuelvan redes mucho más complejas como las que se ven en casos reales, lo cual corresponde al segundo objetivo. A modo de apreciar las ventajas de las estructuras de datos adecuadas en el cálculo computacional, y en la disminución del tiempo necesario para la ejecución del algoritmo en redes reales, se presentan algunos resultados de aplicación a una red de gran tamaño.

## 5.2. EJEMPLO DEL PROCESO DE ASIGNACIÓN DE FLUJO. CASO MAS SIMPLE, SIN TRANSBORDOS

A continuación se presenta el primer ejemplo detallando paso a paso hasta llegar a la solución de equilibrio en la red. Se muestra además una comparación con los costos obtenidos por otras formas de efectuar la asignación de flujo.

### 5.2.1. DESCRIPCION DE LA RED

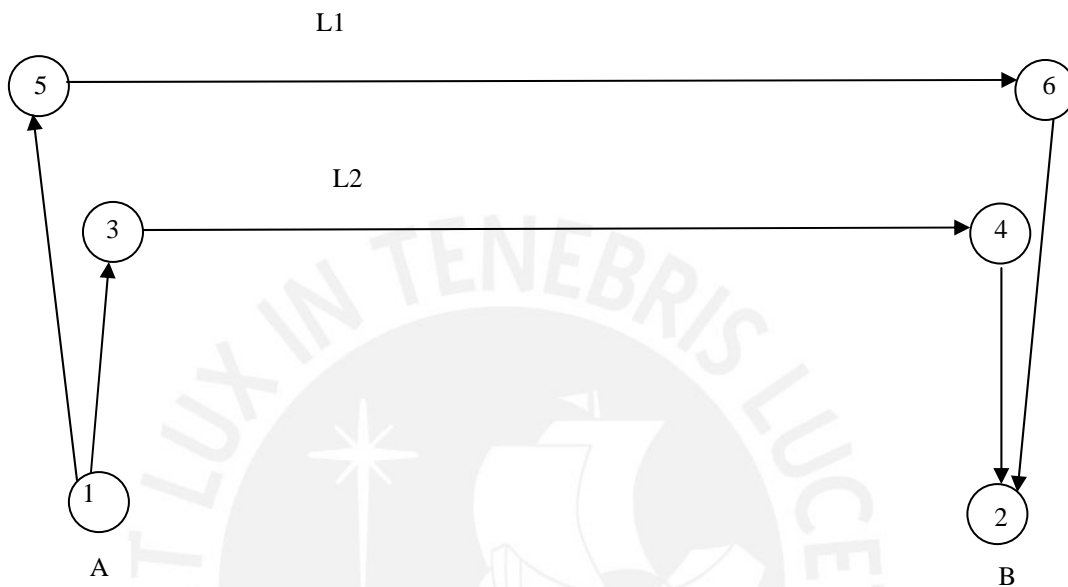
Considere la red que se muestra en la figura siguiente:



Se trata de una **Figura 5.1 Red con dos paraderos y dos líneas de ómnibus** las líneas de transporte L1 y L2. Suponga que únicamente existe flujo de A hacia B, ésto podría ser algo que ocurre en horas punta de la mañana entre un par de zonas con uso de suelo

marcadamente diferentes. Consideremos que la zona A es netamente residencial y que la zona B es una zona industrial.

Una vez que se explota la red se obtiene la siguiente “red aumentada”:



**Figura 5.2 Explosión de la red de la figura 5.1**

Los nodos 1, 3 y 5 representan el mismo punto físico, al igual que los nodos 2, 4 y 6. Los arcos (1,3) y (1,5) son arcos que representan la espera en el paradero. Los arcos (6,2) y (4,2) representan el desembarque de los ómnibus en el paradero de destino.

Los arcos son considerados en un solo sentido. Si hubiera flujo de B hacia A habría que agregar los arcos correspondientes a las líneas que tienen ese itinerario (arcos de espera, a bordo y de desembarque). Aún en el caso en que el recorrido de regreso fuera por vías de doble sentido, el modelo necesita que cada sentido sea representado por diferentes arcos.

El algoritmo está diseñado para su aplicación en la red aumentada. En las siguientes tablas se presentan los datos correspondientes a la “red aumentada” del ejemplo.

Tenemos la matriz origen-destino. No hay viajes intrazonales y solamente existe demanda de viajes de A hacia B.

O/D	A	B
A	0	100
B	0	0

También se presenta información sobre los arcos de la red aumentada:

arco	tiempo	frecuencia	Tipo de arco
(4,2)	0.1	$\infty$	desembarque
(6,2)	0.1	$\infty$	desembarque
(1,3)	0	1/20	espera
(3,4)	4	$\infty$	a bordo
(1,5)	0	1/5	espera
(5,6)	32	$\infty$	a bordo

Los tiempos (en minutos) que se detallan en la segunda columna de la tabla anterior son valores para incluir en las funciones de costo de los arcos, que dependen de los valores de los flujos en los arcos además del tiempo. Los arcos están ordenados secuencialmente según el segundo nodo (cabeza del arco). Es un requerimiento del algoritmo para efectuar el barrido de atrás hacia adelante (*backward star*) a la hora de construir los caminos mínimos a partir de todos los nodos de la red hacia un nodo de destino.

Las funciones de costo en los arcos utilizadas son las siguientes:

Para arcos de espera:  $\text{costos} = \alpha_2 \left[ \frac{(1-\beta_2) \cdot v_a + \beta_2 \cdot v_b}{k_b} \right]^{\rho}$  ( $\rho$  es exponente)

Para arcos en vehículo:  $\text{costos} = \alpha_3 \cdot t + \beta_3 \left[ \frac{v_a + (\gamma_3 - 1) \cdot v_b}{k_b} \right]^{\rho}$  ( $\rho$  es exponente)

Para arcos de desembarque:  $\text{costos} = \alpha_4 \cdot t$

Los valores adoptados de los parámetros son los siguientes:

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1, \rho = 2, \beta_2 = 0.2, \beta_3 = 1, \gamma_3 = 1.2, k_b = 40$$

$v_a$  y  $v_b$  son flujos de arcos a bordo y de espera con un nodo común. Por ejemplo para los arcos (1,5) y (5,6)  $v_a$  sería el flujo en (5,6) y  $v_b$  el flujo en (1,5).

No son incluidos arcos de caminata en este pequeño ejemplo, lo cual no modifica en nada el procedimiento del cálculo. Si se quisiera incluir debería agregarse un nodo para cada centroide con su respectivo arco de caminata conectando con un paradero de ómnibus. Estos arcos representarían la caminata desde el centroide de la zona de tráfico hasta el paradero respectivo, como un acceso al sistema de transporte colectivo.

Para resolver este ejemplo es utilizado el algoritmo 3.3.1.

Se analiza paso a paso el algoritmo 1 con el ejemplo:

Paso 0: Se parte de una solución factible: por ejemplo flujo nulo, con su correspondiente costo de espera también nulo:  $(v_o, w_o) = (0, 0, 0, \dots, 0)$  (iteración  $l = 0$ )

Arco	flujo
(4,2)	0
(6,2)	0
(1,3)	0
(3,4)	0
(1,5)	0
(5,6)	0

Paso 1:  $l = l + 1$

Calcular  $(v', w')$  resolviendo el problema de asignación con costos fijos  $c_a = c_a(v_{a,l-1})$  para cada destino  $r \in R$ . (en este caso  $R = \{1, 2\}$ )

Con los flujos de la iteración previa se calculan los costos en cada arco:

Arco	flujo	costo
(4,2)	0	0.1
(6,2)	0	0.1
(1,3)	0	0
(3,4)	0	4
(1,5)	0	0
(5,6)	0	32



Con los costos de la iteración previa (tercera columna) se efectúa la asignación de flujo para cada destino  $r$ , considerando el caso de asignación con costos fijos, utilizando el algoritmo 3.2.1. En este ejemplo sólo se está considerando flujo de A hacia B, entonces se debería solamente considerar el caso en que  $r = 2$ . En un caso más general se debe efectuar para cada nodo de destino de la matriz origen-destino. De cualquier forma, el algoritmo va a encontrar los caminos más cortos desde cada nodo de la red hasta el nodo  $r$ , habiendo o no habiendo flujo desde cada nodo hasta el nodo  $r$ . Cuando no hay flujo, no asigna carga a los arcos y no afecta al actualizar los costos en los arcos.

**Algoritmo 2 (de asignación con costos fijos para un nodo de destino  $r$ ) utilizado para resolver el paso 1 del algoritmo 1.**

Este algoritmo debe ser ejecutado una vez para cada nodo de destino  $r$ .

Paso A. Inicialización:

$$u_i \leftarrow \infty, \quad i \in I - \{r\}; \quad u_r \leftarrow 0$$

$$f_i \leftarrow 0, \quad V_i \leftarrow g_{ir}, \quad i \in I;$$

$$S \leftarrow A; \quad \dot{A} \leftarrow \phi,$$

Donde

$u_i$  es el valor de costo esperado acumulado asociado al nodo  $i$ .

$I$  es el conjunto de nodos

$r$  nodo de destino

$f_i$  es la frecuencia asociada al nodo  $i$

$V_i$  el flujo por el nodo  $i$

$g_{ir}$  la demanda de pasajeros de  $i$  hacia  $r$

S es el conjunto de arcos a ser analizados para ver si son atractivos

A es el conjunto de arcos de la red ;

$\dot{A}$  es el conjunto de arcos atractivos (utilizados en la estrategia para ir hacia el nodo de destino r);

En este caso mostramos el algoritmo cuando el destino es  $r=2$

Nodo de destino = 2 (zona de tráfico B)

Valores inicializados

nodo	$u_i$	$f_i$	$V_i$
1	$\infty$	0	100
2	0	0	0
3	$\infty$	0	0
4	$\infty$	0	0
5	$\infty$	0	0
6	$\infty$	0	0

$S = \{(4,2), (6,2), (1,3), (3,4), (1,5), (5,6)\}$

$\dot{A} = \phi$

Paso B. Encuentre el próximo arco:

si  $S = \phi$  entonces vaya al paso D,

si no,

encuentre  $a = (i,j) \in S$  tal que  $(u_j + c_a)$  sea mínimo

$S \leftarrow S - \{a\}$

En el ejemplo, como  $S \neq \phi$  entonces se busca el arco  $a = (i,j)$  con menor etiqueta  $(u_j + c_a)$

arco	$f_a$	$j$	$u_j$	$c_a$	$u_j + c_a$
(4,2)	$\infty$	2	0	0.1	0.1
(6,2)	$\infty$	2	0	0.1	0.1
(1,3)	1/20	3	$\infty$	0	$\infty$

(3,4)	$\infty$	4	$\infty$	4	$\infty$
(1,5)	1/5	5	$\infty$	0	$\infty$
(5,6)	$\infty$	6	$\infty$	32	$\infty$

En este caso hay empate entre dos arcos así que se escoge uno de ellos arbitrariamente:

(4,2) ó (6,2)

Tomando el arco  $a$  (4,2):

Se actualiza  $S = S - \{(4,2)\} = S = \{(6,2), (1,3), (3,4), (1,5), (5,6)\}$

El arco (4,2) sale del conjunto  $S$  de arcos a ser analizados. Aún no es definitiva su inclusión en el conjunto de arcos atractivos. Esto se verifica en el siguiente paso.

Paso C. Actualice la etiqueta del nodo  $i$ :

si  $u_i \geq u_j + c_a$  entonces:

$$u_i \leftarrow (f_j u_i + f_a(u_j + c_a)) / (f_i + f_a),$$

$$f_i \leftarrow f_i + f_a, \quad \hat{A} \leftarrow \hat{A} + \{a\};$$

vaya al paso B.

Aquí para el arco  $a$  (4,2) se identifica el nodo  $i = 4$ , entonces se compara:  $u_4 \geq u_2 + c_a$

Se verifica que  $\infty \geq 0 + 0.1$  entonces se incluye el arco (4,2) en la lista de arcos atractivos y también hay que actualizar  $u_4$  y  $f_4$

$u_i = (f_i u_i + f_a(u_j + c_a)) / (f_i + f_a)$ , aquí  $a(i,j) = (4,2)$  entonces substituyendo valores se obtiene:

$$u_4 = (f_4 u_4 + f_a(u_2 + c_a)) / (f_4 + f_a)$$

$u_4 = [0 * \infty + \infty * (0+0.1)] / (0+\infty)$  aquí se utiliza un artificio: factorizar  $\infty(0+0+0.1) / \infty$ , cancelando  $\infty$  arriba y abajo se obtiene:

$$u_4 = 0.01$$

$f_4 = f_4 + f_a = 0 + \infty = \infty$  y se incluye el arco (4,2) en el conjunto de arcos atractivos:  $\dot{A} = \{(4,2)\}$

En el programa desarrollado en lugar de infinito se utilizan números suficientemente grandes, por ejemplo 999999, con lo cual a la hora del cálculo no se presenta el problema de hacer artificios.

Luego se regresa al paso B hasta barrer con todos los arcos que quedan en el conjunto S:

arco	$f_a$	j	$u_j$	$c_a$	$u_j + c_a$
(6,2)	$\infty$	2	0	0.1	0.1
(1,3)	1/20	3	$\infty$	0	$\infty$
(3,4)	$\infty$	4	0.1	4	4.1
(1,5)	1/5	5	$\infty$	0	$\infty$
(5,6)	$\infty$	6	$\infty$	32	$\infty$

nodo	$u_i$	$f_i$	$V_i$
1	$\infty$	0	100
2	0	0	0
3	$\infty$	0	0
4	0.1	$\infty$	0
5	$\infty$	0	0
6	$\infty$	0	0

Se identifica al arco (6,2) como el de menor etiqueta  $u_j + c_a$  y se procede de forma similar: se le retira del conjunto S:  $S = \{(1,3), (3,4), (1,5), (5,6)\}$  y se verifica la condición para actualizar las etiquetas del nodo 6 del arco (6,2):

$$u_6 \geq u_2 + c_a \quad , \quad \infty \geq 0 + 0.1$$

$$u_6 = (f_6 u_6 + f_a (u_2 + c_a)) / (f_6 + f_a)$$

$$u_6 = [0 * \infty + \infty * (0 + 0.1)] / (0 + \infty) = 0.1$$

$f_6 = f_6 + f_a = 0 + \infty = \infty$  y se incluye el arco (6,2) en el conjunto de arcos atractivos:

$$\dot{A} = \{(4,2), (6,2)\}$$

luego se regresa al paso B hasta barrer con todos los arcos que quedan en el conjunto S:

arco	$f_a$	j	$u_j$	$c_a$	$u_j + c_a$
(1,3)	1/20	3	$\infty$	0	$\infty$
(3,4)	$\infty$	4	0.1	4	4.1
(1,5)	1/5	5	$\infty$	0	$\infty$
(5,6)	$\infty$	6	0.1	32	32.1

nodo	$u_i$	$f_i$	$V_i$
1	$\infty$	0	100
2	0	0	0
3	$\infty$	0	0
4	0.1	$\infty$	0
5	$\infty$	0	0
6	0.1	$\infty$	0

Se identifica al arco (3,4) como el de menor etiqueta  $u_j + c_a$  y se procede de forma similar: se le retira del conjunto S:  $S = \{(1,3), (1,5), (5,6)\}$  y se verifica la condición para actualizar las etiquetas del nodo 3 del arco (3,4):

$$u_3 \geq u_4 + c_a, \quad \infty \geq 0.01 + 4$$

$$u_3 = (f_3 u_3 + f_a (u_4 + c_a)) / (f_3 + f_a)$$

$$u_3 = [0 * \infty + \infty * (0.1 + 4)] / (0 + \infty) = 4.1$$

$f_3 = f_3 + f_a = 0 + \infty = \infty$  y se incluye el arco (3,4) en el conjunto de arcos atractivos:

$$\hat{A} = \{(4,2), (6,2), (3,4)\}$$

luego se regresa al paso B hasta barrer con todos los arcos que quedan en el conjunto S:

arco	$f_a$	j	$u_j$	$c_a$	$u_j + c_a$
(1,3)	1/20	3	4.1	0	4.1
(1,5)	1/5	5	$\infty$	0	$\infty$
(5,6)	$\infty$	6	0.1	32	32.1

nodo	$u_i$	$f_i$	$V_i$
1	$\infty$	0	100
2	0	0	0
3	4.1	$\infty$	0
4	0.1	$\infty$	0
5	$\infty$	0	0
6	0.1	$\infty$	0

Se identifica al arco (1,3) como el de menor etiqueta  $u_j + c_a$  y se procede de forma similar: se le retira del conjunto S:  $S = \{(1,5), (5,6)\}$  y se verifica la condición para actualizar las etiquetas del nodo 1 del arco (1,3):

$$u_1 \geq u_3 + c_a, \quad \infty \geq 4.1 + 0$$

$$u_1 = (f_1 u_1 + f_a(u_3 + c_a)) / (f_1 + f_a)$$

$$u_1 = [0 * \infty + 1/20 * (4.1 + 0)] / (0 + 1/20) = 24.1 \text{ (aquí se utiliza el artificio de que el producto } 0 * \infty \text{ es 1)}$$

$f_1 = f_1 + f_a = 0 + 1/20 = 1/20$  y se incluye el arco (1,3) en el conjunto de arcos atractivos:

$$\hat{A} = \{(4,2), (6,2), (3,4), (1,3)\}$$

luego se regresa al paso B hasta barrer con todos los arcos que quedan en el conjunto S:

arco	$f_a$	j	$u_j$	$c_a$	$u_j + c_a$
(1,5)	1/5	5	$\infty$	0	$\infty$
(5,6)	$\infty$	6	0.1	32	32.1

nodo	$u_i$	$f_i$	$V_i$
1	24.1	1/20	100
2	0	0	0
3	4.1	$\infty$	0
4	0.1	$\infty$	0
5	$\infty$	0	0
6	0.1	$\infty$	0

Se identifica al arco (5,6) como el de menor etiqueta  $u_j + c_a$ , y se procede de forma similar: se le retira del conjunto S:  $S = \{(1,5)\}$  y se verifica la condición para actualizar las etiquetas del nodo 1 del arco (5,6):

$$u_5 \geq u_6 + c_a, \quad \infty \geq 0.1 + 32$$

$$u_5 = (f_5 u_5 + f_a(u_6 + c_a)) / (f_5 + f_a)$$

$$u_5 = [0 * \infty + \infty * (0.1 + 32)] / (0 + \infty) = 32.1 \text{ (se "factoriza" } \infty)$$

$f_5 = f_5 + f_a = 0 + \infty = \infty$  y se incluye el arco (5,6) en el conjunto de arcos atractivos:

$$\dot{A} = \{(4,2), (6,2), (3,4), (1,3), (5,6)\}$$

luego se regresa al paso B hasta barrer con todos los arcos que quedan en el conjunto S:

arco	$f_a$	j	$u_j$	$c_a$	$u_j + c_a$
(1,5)	1/5	5	32.1	0	32.1

nodo	$u_i$	$f_i$	$V_i$
1	24.1	1/20	100
2	0	0	0
3	4.1	$\infty$	0
4	0.1	$\infty$	0
5	32.1	$\infty$	0
6	0.1	$\infty$	0

El único arco que queda es el (1,5) con  $u_j + c_a = 32.1$

Se le retira del conjunto S, entonces  $S = \emptyset$ , y se verifica la condición para actualizar las etiquetas del nodo 1 del arco (1,5):

$$u_1 \geq u_5 + c_a, \quad 24.1 \geq 32.1 + 0, \text{ no se cumple!!!}$$

Entonces no se actualiza  $u_1$  ni  $f_1$ , tampoco se incluye el arco (1,5) en el conjunto de arcos atractivos.

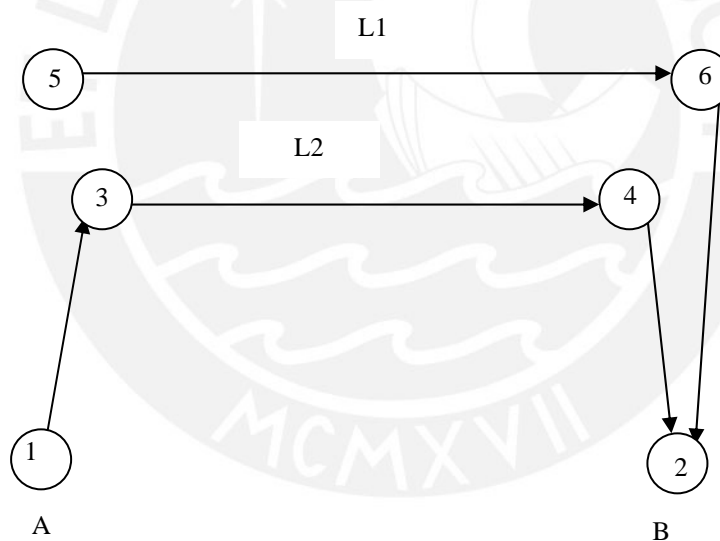
El algoritmo identifica todos los arcos que son incluidos en una especie de arborescencia de caminos más cortos desde todos los nodos de la red hasta el nodo r (en este caso  $r=2$ ). Puede apreciarse que el arco (1,5) es el único arco que no ha sido incluido en el conjunto de arcos atractivos para las estrategias óptimas para llegar al nodo 2 a partir de todos los demás nodos.

También puede notarse que el algoritmo incluye de modo general todos los caminos más cortos desde todos los nodos, aún en el caso en que algunos nodos no sean centroides de

zonas de tráfico y que por lo tanto no tengan demanda de viajes. En este caso sus demandas serían cero, lo cual no afecta la asignación de flujos en la red.

Puede notarse que al no haber sido incluido el arco (1,5) todo el flujo de pasajeros de 1 hacia 2 circulará a través de la línea 2. El hecho de que el arco (5,6) esté incluido en la arborescencia de caminos más cortos no implica que los viajeros que van de 1 a 2 tengan que utilizar la línea 1. El arco (5,6) está incluido en la lista de arcos atractivos porque fue considerado como parte del camino más corto del nodo 5 hacia  $r=2$ .

Esta sería la estructura que represente a la arborescencia de caminos más cortos a partir de todos los nodos de la red hacia el destino  $r = 2$ :



**Figura 5.3 Red resultante de caminos más cortos hacia el nodo B**

En este caso únicamente existe un camino para ir de A hacia B. La denominación hipercaminos dada a las estructuras resultantes de la aplicación del algoritmo de estrategias óptimas se debe a que por lo general van a existir varios caminos alternativos equivalentes para el usuario del sistema de transporte colectivo. En esta primera iteración del ejemplo bastante sencillo no se puede apreciar ésto. Veremos más adelante si en la próxima



iteración, el arco (1,5) se torna atractivo, dando lugar a que el usuario que quiere desplazarse de A hacia B disponga de las dos líneas de transporte colectivo.

En esta primera iteración al existir únicamente una línea de ómnibus en la estrategia óptima, el resultado obtenido será idéntico al caso en que el pasajero adopta el comportamiento I, mencionado en el capítulo 2, según lo cual el pasajero identifica la línea más rápida que lo lleve a su destino y espera en el paradero únicamente la llegada de un vehículo de dicha línea de transporte.

Continuando con el algoritmo 2 se procede a efectuar la asignación de flujos a los arcos.

Paso D. Asigne demanda a los arcos según la estrategia óptima:

Para todo arco  $a \in A$  en orden decreciente de  $(u_j + v_a)$ :

si  $a \in \hat{A}$  entonces:

$$v_a \leftarrow (f_a / f_i) V_i ,$$

$$V_j \leftarrow V_j + v_a ,$$

si no:  $v_a \leftarrow 0$

aquí debe observarse que al inicio  $V_i = g_i$ , o sea el flujo en los nodos es igual a la demanda hacia el nodo r. Entonces  $V_1 = 100$ , y el resto  $V_i = 0$ .

En esta parte del algoritmo de asignación con costos fijos, se necesita ordenar a los arcos según el valor de  $(u_j + v_a)$  decrecientemente, algo que podría verse intuitivamente como asignar flujos primero desde los nodos más alejados del nodo r para en el camino hacia r ir agregando las demandas de los nodos menos alejados del destino.

arco	tiempo	frecuencia	$(u_j + v_a)$
(4,2)	0.1	$\infty$	0.1
(6,2)	0.1	$\infty$	0.1

(1,3)	0	1/20	4.1
(3,4)	4	$\infty$	4.1
(1,5)	0	1/5	32.1
(5,6)	32	$\infty$	32.1

nodo	$u_i$	$f_i$	$V_i$
1	24.1	1/20	100
2	0	0	0
3	4.1	$\infty$	0
4	0.1	$\infty$	0
5	32.1	$\infty$	0
6	0.1	$\infty$	0

El arco (1,5) es el arco con mayor etiqueta. Como no pertenece al conjunto de arcos atractivos, entonces el flujo en (1,5) es nulo.

El siguiente arco sería el (5,6) que pertenece al conjunto de arcos atractivos. Entonces aplicando el algoritmo:

$$v_a = (f_a / f_5) V_5, \text{ substituyendo: } v(5,6) = \infty / \infty * 0 = 0$$

$$V_6 = V_6 + v_a = 0 + 0 = 0$$

El siguiente arco sería el (1,3) que pertenece al conjunto de arcos atractivos. Entonces aplicando el algoritmo:

$$v_a = (f_a / f_1) V_1, \text{ substituyendo: } v(1,3) = (1/20) / (1/20) * 100 = 100$$

$$V_3 = V_3 + v_a = 0 + 100 = 100$$

El siguiente arco sería el (3,4) que pertenece al conjunto de arcos atractivos. Entonces aplicando el algoritmo:

$$v_a = (f_a / f_3) V_3, \text{ substituyendo: } v(3,4) = \infty / \infty * 100 = 100$$

$$V_4 = V_4 + v_a = 0 + 100 = 100$$

El siguiente arco sería el (6,2) que pertenece al conjunto de arcos atractivos. Entonces aplicando el algoritmo:

$$v_a = (f_a / f_6) V_6, \text{ substituyendo: } v(6,2) = \infty / \infty * 100 = 100$$

$$V_2 = V_2 + v_a = 0 + 0 = 0$$

El siguiente arco sería el (4,2) que pertenece al conjunto de arcos atractivos. Entonces aplicando el algoritmo:

$$v_a = (f_a / f_4) V_4, \text{ substituyendo: } v(4,2) = \infty / \infty * 100 = 100$$

$$V_2 = V_2 + v_a = 0 + 100 = 100$$

Se obtienen los siguientes flujos en los arcos:

arco	flujo
(4,2)	100
(6,2)	0
(1,3)	100
(3,4)	100
(1,5)	0
(5,6)	0

El valor del escalar que representa el costo total del fenómeno de la espera en los paraderos se calcula en base a las frecuencias de las líneas consideradas en la estrategia óptima, o sea sólo de las líneas atractivas multiplicado por el flujo de pasajeros que pasan por dicho nodo de espera.

Para este ejemplo, en esta iteración solo se considera atractiva la línea 2.

$$\sum_{r \in R} \sum_{i \in I} W_{ir} = \sum_{r \in R} \sum_{i \in I} [1 / \sum_{a \in A} (f_a)] * V_i$$

en este caso solo se ha tratado un destino:  $r = 2$  y solo hay un origen con demanda que sería el nodo 1 que representa a la zona de tráfico A:

$$W = 1 / (1/20) * 100 = 2000.$$

Este valor representa el costo total de espera para los 100 pasajeros que van desde A hasta B. Puede medirse en minutos-hombre o en soles-hombre, dependiendo de las unidades adoptadas y de las equivalencias consideradas para el valor del tiempo.

De modo similar puede ejecutarse el algoritmo 3.2.1. para  $r = 1$ .

Pero si nos damos cuenta, dada la estructura de la red del ejemplo, no existen arcos entrando al nodo 1 por lo que no habría posibilidad de flujo de pasajeros hacia este nodo. El algoritmo identificará algunos arcos atractivos en caminos truncos hacia el destino  $r=1$ , pero al no haber flujos hacia dicho nodo la carga en dichos arcos será nula.

Una vez finalizado el paso 0 del algoritmo 1, continuamos ahora con el siguiente paso del mismo algoritmo 1. Con la asignación actual se deben recalculan los costos en los arcos y efectuar nuevamente una asignación de flujos con los costos actualizados, para lo cual se recurre de nuevo al algoritmo 2 para costos fijos.

Con las funciones de costos que dependen de los flujos en los arcos, se recalculan los costos.

$$C_2 = [(0.8 v_a + 0.2v_b) / 40]^2 \text{ para arcos de espera}$$

$$C_3 = t + [(v_a + 0.2v_b) / 40]^2 \text{ para arcos a bordo o en vehículo}$$

$$C_4 = t \text{ para arcos de desembarque}$$

Los costos actualizados se muestran en la siguiente tabla:

arco	flujos	$V_a$	$V_b$	tiempo	Tipo	costo
(4,2)	100	100	0	0.1	desembarque	0.1
(6,2)	0	0	0	0.1	desembarque	0.1
(1,3)	100	100	100	0	espera	6.25
(3,4)	100	100	100	4	a bordo	13
(1,5)	0	0	0	0	espera	0
(5,6)	0	0	0	32	a bordo	32

Para el arco (3,4) se muestra el cálculo del costo:

Como es arco "a bordo" se calcula con la función de costo  $c_3$ :

$$\text{Costo } c_3 = 4 + [(100 + 0.2 \cdot 100) / 40]^2 = 13$$

Con los nuevos valores de costos en los arcos se ejecuta el algoritmo 2 y se encuentra una nueva asignación de flujos y se identifican los arcos que son incluidos en la estrategia óptima actual. Entonces procediendo de forma similar a la etapa previa, se puede obtener lo siguiente:

arco	flujo
(4,2)	20
(6,2)	80
(1,3)	20
(3,4)	20
(1,5)	80
(5,6)	80

Y un costo total de espera calculado con la expresión:

$$\sum_{r \in R} \sum_{i \in I} W_{ir} = \sum_{r \in R} \sum_{i \in I} [1 / \sum_{a \in A} (f_a)] * V_i$$

para  $r = 2, i = 1$ , se obtiene:  $W = 1/(1/5+1/20)*100 = 400$  que sería el costo total de espera de la solución obtenida luego de actualizar el vector de costos.

Como se puede apreciar en el vector de flujos obtenido, ahora el arco (1,5) si está considerado en el conjunto de arcos de la estrategia óptima.

Este vector de flujos obtenido luego de la iteración inicial es una solución auxiliar para calcular el vector de flujos de la siguiente iteración con el cual se actualizará el vector de costos. Representa la dirección de descenso hacia una mejor solución. El vector de flujos considerado como solución de la iteración actual  $(v_i, w_i)$  viene a ser una combinación lineal del vector de flujos de la anterior iteración:  $(v_{i-1}, w_{i-1})$  y de este vector auxiliar:  $(v', w')$ , encontrado con los costos actualizados.

$$(v_i, w_i) = (1 - \lambda) \cdot (v_{i-1}, w_{i-1}) + \lambda \cdot (v', w'), \lambda \in [0, 1]$$

El valor de  $\lambda$  se determina al minimizar la función objetivo en dicha combinación lineal. Esto puede calcularse con la primera derivada y comprobando que se trata de un mínimo y no un máximo. El programa encuentra el valor de  $\lambda$  con cálculos iterativos, interpolando valores entre 0 y 1.

En este caso podemos calcular  $\lambda$  en forma analítica con la siguiente expresión:

$$\sum_{a \in A} c_a (v_{a,l-1} + \lambda (v_a' - v_{a,l-1})) (v_a' - v_{a,l-1}) + \lambda (w' - w_{l-1}) = 0$$

identificando términos:

	(4,2)	(6,2)	(1,3)	(3,4)	(1,5)	(5,6)	W
$(v_{a,l-1}, w_{l-1})$	100	0	100	100	0	0	2000
$(v_a, w')$	20	80	20	20	80	80	400
$(v_{a,l-1} + \lambda (v_a' - w_{l-1}))$	100 - 80 $\lambda$	0 + 80 $\lambda$	100 - 80 $\lambda$	100 - 80 $\lambda$	0 + 80 $\lambda$	0 + 80 $\lambda$	
Tiempo t	0.1	0.1	0	4	0	32	
costo	t	t	$[(0.8 v_a + 0.2v_b)/40]^2$	t + $[(v_a + 0.2v_b)/40]^2$	$[(0.8 v_a + 0.2v_b)/40]^2$	t + $[(v_a + 0.2v_b)/40]^2$	

Substituyendo se obtiene una ecuación en función de  $\lambda$  y se encuentra  $\lambda = 0.297$

En el paso 3 del algoritmo 1, con este valor de  $\lambda$  encontrado, se obtiene el vector de flujos siguiente:

arco	flujo
(4,2)	76.23
(6,2)	23.77
(1,3)	76.23
(3,4)	76.23
(1,5)	23.77
(5,6)	23.77

Este vector es el que minimiza la función objetivo para una combinación lineal de la anterior iteración con la asignación obtenida con los costos actualizados que corresponden a esa anterior iteración. Se obtiene entonces el vector que corresponde a la iteración  $l$ .

En el mismo paso 3 se verifica la convergencia con la expresión siguiente:

$$\sum_{a \in A} c_a (v_{a,l-1}) (v_{a,l-1} - v_a') + (w_{l-1} - w') < \varepsilon$$

Arco	$v_{a,l-1}$	$v_a'$	costo
(4,2)	100	20	0.1
(6,2)	0	80	0.1
(1,3)	100	20	6.25
(3,4)	100	20	13
(1,5)	0	80	0
(5,6)	0	80	32

Con  $w_{l-1} = 2000$

$w' = 400$

substituyendo valores:

$$0.01(100-20)+0.01(0-80)+6.25(100-20)+13(100-20)+0(0-80)+32(0-80)+(2000-400)=580$$

Para  $\varepsilon = 0.01$  no se satisface dicha desigualdad por lo que se requiere de más iteraciones.

Con el vector de flujos obtenido como una combinación lineal o sea el siguiente:

Arco	flujo
(4,2)	76.23
(6,2)	23.77
(1,3)	76.23
(3,4)	76.23
(1,5)	23.77
(5,6)	23.77

Se repite el proceso y se obtiene de nuevo el mismo vector de flujos:

Arco	Flujo	costos
(4,2)	76.23	0.1
(6,2)	23.77	0.1
(1,3)	76.23	3.63
(3,4)	76.23	9.23
(1,5)	23.77	0.35
(5,6)	23.77	32.51

Por lo que se llega al equilibrio.

Entonces la solución óptima está representada por ese vector de flujos. El costo total de espera  $W$  asociado a este vector de flujos viene a ser:

$$\sum_{r \in R} \sum_{i \in I} W_{ir} = \sum_{r \in R} \sum_{i \in I} [1 / \sum_{a \in A} (f_a)] * V_i$$

en este caso  $r = 2$  e  $i = 1$  (únicamente hay un origen y un destino)

$$W = 1 / (f_{(1,3)} + f_{(1,5)}) * V_1 = 1 / (1/5 + 1/20) * 100 = 400$$

Entonces el costo total sería  $\sum_{a \in A} c_a (v_a) v_a + W = 1772 + 400 = 2172$

Si se adoptara el comportamiento tipo I de identificar la línea mas rápida y esperar únicamente un vehículo de dicha línea en el paradero se obtendría el siguiente costo:

Tiempo de espera = 20

Tiempo en vehículo =  $4 + [(100 + 0.2(100))/40]^2 = 13$

Tiempo de desembarque = 0.1

Tiempo total unitario = 33.1

Para los 100 pasajeros el costo total sería = 3310

$$3310 > 2172$$

Se observa que con el comportamiento tipo II de esperar algún vehículo de varias líneas consideradas atractivas, equivalentes según su costo de viaje, es más económico o de menor tiempo total de viaje para los usuarios del sistema de transporte colectivo.

## 5.2.2. RESUMEN EN FORMA TABULADA DEL EJEMPLO ANTERIOR



Se aplica el algoritmo de la sección 3.3.1. a la red que conecta la zona de tráfico A con la zona B. La demanda de viajes de A hacia B es de 100 pasajeros. Dos líneas de transporte pueden atender esa demanda: L1 y L2.

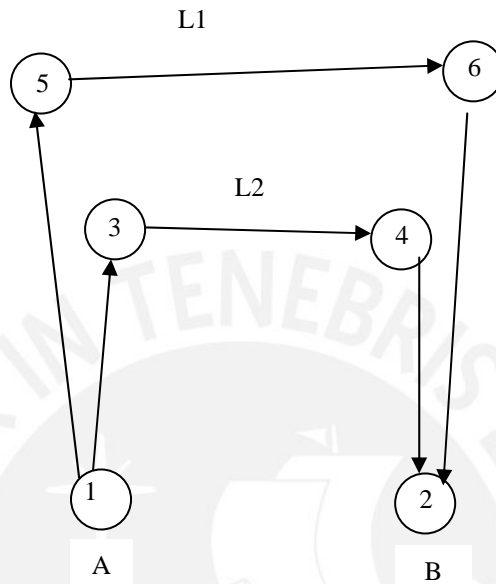


Figura 5.4 Red expandida del ejemplo 1

arco	t (min)	Frec. (min <sup>-1</sup> )	Tipo de arco
(4,2)	0.1	∞	desembarque
(6,2)	0.1	∞	desembarque
(1,3)	0	1/20	espera
(3,4)	4	∞	a bordo
(1,5)	0	1/5	espera
(5,6)	32	∞	a bordo

Se consideran las siguientes funciones de costos en los arcos:

arcos de espera	$[(0.8*v_a+0.2*v_b)/40]^2$
arcos a bordo	$t + [(v_a+0.2*v_b)/40]^2$
arcos de desembarque	t

(t es el tiempo en minutos que aparece en la tabla anterior)

En el paso 0 (inicialización del algoritmo 3.3.1.) para la iteración inicial ( $l=0$ ), se consideran flujos nulos ( $v_a=0, v_b=0$ ) en todos los arcos, para determinar los costos en los arcos. Se obtienen los siguientes valores:

Arco a	(4,2)	(6,2)	(1,3)	(3,4)	(1,5)	(5,6)
Costo $c_a$	0.1	0.1	0	4	0	32

Luego, con dichos costos en los arcos, se tiene que aplicar el algoritmo para costos fijos (sección 3.2.1.) para cada destino  $r$  de la red:

En este pequeño ejemplo el nodo destino es únicamente  $r = 2$ . Luego de aplicar el algoritmo 1 (para costos fijos) se obtiene la siguiente tabla:

# iter.	Etiquetas de los nodos ( $u_i, f_i$ )						Arco $a$ con menor $u_i + c_a$			
	1	2	3	4	5	6	(i,j)	$f_a$	$u_i + c_a$	$a \in \dot{A}$
0	$\infty, 0$	0,0	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$				
1				0.1, $\infty$			(4,2)	$\infty$	0.1	sí
2						0.1, $\infty$	(6,2)	$\infty$	0.1	sí
3			4.1, $\infty$				(3,4)	$\infty$	4.1	sí
4	24.1, 1/20						(1,3)	1/20	4.1	sí
5					32.1, $\infty$		(5,6)	$\infty$	32.1	sí
6	24.1, 1/20	0,0	4.1, $\infty$	0.1, $\infty$	32.1, $\infty$	0.1, $\infty$	(1,5)	1/5	32.1	no

# iter.	arco		Nodo volúmenes					
	(i,j)	volumen	1	2	3	4	5	6
1	(1,5)	0	100	0	0	0	0	0
2	(5,6)	0	100	0	0	0	0	0
3	(1,3)	100	100	0	100	0	0	0
4	(3,4)	100	100	0	100	100	0	0
5	(6,2)	0	100	0	100	100	0	0
6	(4,2)	100	100	100	100	100	0	0

Con los flujos obtenidos se actualizan los costos en los arcos:

Arco $a$	(4,2)	(6,2)	(1,3)	(3,4)	(1,5)	(5,6)
Costo $c_a$	0.1	0.1	6.25	13	0	32

Se vuelve a aplicar el algoritmo 1:

# iter.	Etiquetas de los nodos ( $u_i, f_i$ )						Arco $a$ con menor $u_i + c$			
	1	2	3	4	5	6	(i,j)	$f_a$	$u_i + c_a$	$a \in \dot{A}$
0	$\infty, 0$	0,0	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$				
1				0.1, $\infty$			(4,2)	$\infty$	0.1	sí
2						0.1, $\infty$	(6,2)	$\infty$	0.1	sí
3			13.1, $\infty$				(3,4)	$\infty$	13.1	sí
4	39.35, 1/20						(1,3)	1/20	39.251	sí
5					32.1, $\infty$		(5,6)	$\infty$	32.1	sí
6	33.55, 1/4	0,0	13.1, $\infty$	0.1, $\infty$	32.1, $\infty$	0.1, $\infty$	(1,5)	1/5	33.55	sí

# iter.	arco		Nodo volúmenes					
	(i,j)	volumen	1	2	3	4	5	6
1	(1,5)	80	100	0	0	0	80	0
2	(5,6)	80	100	0	0	0	80	80
3	(1,3)	20	100	0	20	0	80	80
4	(3,4)	20	100	0	20	20	80	80
5	(6,2)	80	100	80	20	20	80	80
6	(4,2)	20	100	100	20	20	80	80

Con las dos últimas asignaciones de flujo en los arcos se calcula el valor de  $\lambda$  que determina la combinación lineal que minimiza la función objetivo de costo en la red:  $\lambda = 0,297$ . Se calcula igualando a cero la derivada de la F.O.:

$$\sum_{a \in A} c_a (v_{a,l+1} + \lambda (v_a' - v_{a,l+1})) (v_a' - v_{a,l+1}) + \lambda (w' - w_{l-1}) = 0$$

Luego se recalculan los flujos y los costos en los arcos, y con los nuevos costos se repite el proceso y se obtiene la siguiente tabla:

Arco a	(4,2)	(6,2)	(1,3)	(3,4)	(1,5)	(5,6)
Costo $c_a$	0.1	0.1	3.63	9.23	0.35	32.51
flujo	76.23	23.77	76.23	76.23	23.77	23.77

# iter.	Etiquetas de los nodos ( $u_i, f_i$ )						Arco a con menor $u_i + c_a$			
	1	2	3	4	5	6	(i,j)	$f_a$	$u_i + c_a$	$a \in \bar{A}$
0	$\infty, 0$	0,0	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$				
1				0.1, $\infty$			(4,2)	$\infty$	0.1	sí
2						0.1, $\infty$	(6,2)	$\infty$	0.1	sí
3			9.33, $\infty$				(3,4)	$\infty$	9.33	sí
4	32.96, 1/20						(1,3)	1/20	32.96	sí
5					32.61, $\infty$		(5,6)	$\infty$	32.61	sí
6	32.96, 1/20	0,0	9.33, $\infty$	0.1, $\infty$	32.61, $\infty$	0.1, $\infty$	(1,5)	1/5	32.96	no

# iter.	arco		Nodo volúmenes					
	(i,j)	volumen	1	2	3	4	5	6
1	(1,5)	80	100	0	0	0	80	0
2	(5,6)	80	100	0	0	0	80	80
3	(1,3)	20	100	0	20	0	80	80
4	(3,4)	20	100	0	20	20	80	80
5	(6,2)	80	100	80	20	20	80	80
6	(4,2)	20	100	100	20	20	80	80

Con los dos últimos vectores de flujos en los arcos se vuelve a calcular el valor de  $\lambda$  y resulta  $\lambda = 0$ . O sea el flujo actual es igual al de la iteración previa. Se actualizan los flujos y los costos en los arcos y se repite el proceso obteniéndose nuevamente el mismo vector de flujos, por lo que ya se convergió a la solución:

Arco a	(4,2)	(6,2)	(1,3)	(3,4)	(1,5)	(5,6)
Costo $c_a$	0.1	0.1	3.63	9.23	0.35	32.51
flujo	76.23	23.77	76.23	76.23	23.77	23.77

### 5.3. SOLUCION DEL SEGUNDO EJEMPLO (CONSIDERANDO TRANSBORDOS)

Para este segundo caso se presenta el proceso de asignación de flujo en la red únicamente en forma tabulada. Se aplica el algoritmo de la sección 3.3.1. a la red que conecta la zona de tráfico A con las zonas B y C. Existe demanda de viajes de A hacia B y C, y de B hacia C de 100 pasajeros en cada caso. 3 líneas de transporte pueden atender esa demanda.

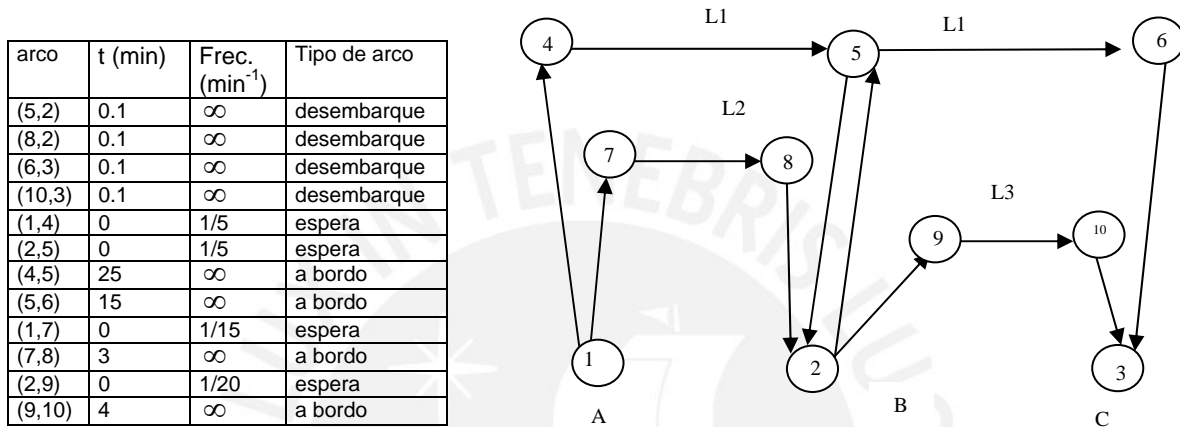


Figura 5.5 Red expandida del ejemplo 2

Se consideran las siguientes funciones de costos en los arcos:

arcos de espera	$[(0.8*v_a+0.2*v_b)/70]^2$
arcos a bordo	$t + [(v_a+0.2*v_b)/70]^2$
arcos de desembarque	t

(t es el tiempo en minutos que aparece en la tabla anterior)

En el paso 0 (inicialización del algoritmo 3.3.1.) para la iteración inicial ( $l=0$ ), se consideran flujos nulos ( $v_a=0, v_b=0$ ) en todos los arcos, para determinar los costos en los arcos. Se obtienen los siguientes valores:

Arco a	(5,2)	(8,2)	(6,3)	(10,3)	(1,4)	(2,5)	(4,5)	(5,6)	(1,7)	(7,8)	(2,9)	(9,10)
Costo $c_a$	0.1	0.1	0.1	0.1	0	0	25	15	0	3	0	4

Luego, con dichos costos en los arcos, se tiene que aplicar el algoritmo para costos fijos (sección 3.2.1.) para cada destino r de la red:

Cuando el destino es  $r = 2$ , se obtiene la siguiente tabla:

# iter.	Etiquetas de los nodos ( $u_i, f_i$ )										Arco $a$ con menor $u_i + c_a$			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	(i,j)	$f_a$	$u_i + c_a$	$a \in \bar{A}$
0	$\infty, 0$	$0, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$				
1					$0.1, \infty$						(5,2)	$\infty$	0.1	sí
2		$0, 0$									(2,5)	1/5	0.1	no
3								$0.1, \infty$			(8,2)	$\infty$	0.1	sí
4							$3.1, \infty$				(7,8)	$\infty$	3.1	sí
5	$18.1, 1/15$										(1,7)	1/15	3.1	sí
6				$25.1, \infty$							(4,5)	$\infty$	25.1	sí
7											(1,4)	1/5	25.1	no
8											(6,3)	$\infty$	$\infty$	no
9											(10,3)	$\infty$	$\infty$	no
10											(9,10)	$\infty$	$\infty$	no
11											(2,9)	1/20	$\infty$	no
12	$18.1, 1/15$	$0, 0$	$\infty, 0$	$25.1, \infty$	$0.1, \infty$	$\infty, 0$	$3.1, \infty$	$0.1, \infty$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	(5,6)	$\infty$	$\infty$	no

# iter.	(i,j)	volumen	Nodo volúmenes											
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
1	(5,6)	0	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	(2,9)	0	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	(9,10)	0	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	(10,3)	0	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	(6,3)	0	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	(1,4)	0	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	(4,5)	0	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	(1,7)	100	100	0	0	0	0	0	100	0	0	0	0	0
9	(7,8)	100	100	0	0	0	0	100	100	0	0	0	0	0
10	(8,2)	100	100	100	0	0	0	100	100	0	0	0	0	0
11	(2,5)	0	100	100	0	0	0	100	100	0	0	0	0	0
12	(5,2)	0	100	100	0	0	0	100	100	0	0	0	0	0

Luego se aplica el mismo algoritmo (sección 3.2.1.) para el destino  $r=3$ :

# iter.	Etiquetas de los nodos ( $u_i, f_i$ )										Arco $a$ con menor $u_i + c_a$			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	(i,j)	$f_a$	$u_i + c_a$	$a \in \bar{A}$
0	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$0, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$				
1						$0.1, \infty$					(6,3)	$\infty$	0.1	sí
2										$0.1, \infty$	(10,3)	$\infty$	0.1	sí
3									$4.1, \infty$		(9,10)	$\infty$	4.1	sí
4		$24.1, \infty$									(2,9)	1,20	4.1	sí
5					$15.1, \infty$						(5,6)	$\infty$	15.1	sí
6		$16.9, 1/4$									(2,5)	1/5	15.1	sí
7											(5,2)	$\infty$	17	no
8								$17, \infty$			(8,2)	$\infty$	17	sí
9								$20, \infty$			(7,8)	$\infty$	20	sí
10	$35.1, 1/15$										(1,7)	1/20	20	sí
11				$40.1, \infty$							(4,5)	$\infty$	40.1	sí
12	$35.1, 1/15$	$16.9, 1/4$	$0, 0$	$40.1, \infty$	$15.1, \infty$	$0.1, \infty$	$20, \infty$	$17, \infty$	$4.1, \infty$	$0.1, \infty$	(1,4)	1/5	40.1	no

# iter.	(i,j)	volumen	Nodo volúmenes											
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
1	(1,4)	0	100	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	(4,5)	0	100	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	(1,7)	100	100	100	0	0	0	0	0	100	0	0	0	0

4	(7,8)	100	100	100	0	0	0	0	100	100	0	0
5	(8,2)	100	100	200	0	0	0	0	100	100	0	0
6	(5,2)	0	100	200	0	0	0	0	100	100	0	0
7	(2,5)	160	100	200	0	0	160	0	100	100	0	0
8	(5,6)	160	100	200	0	0	160	160	100	100	0	0
9	(2,9)	40	100	200	0	0	160	160	100	100	40	0
10	(9,10)	40	100	200	0	0	160	160	100	100	40	40
11	(10,3)	40	100	200	40	0	160	160	100	100	40	40
12	(6,3)	160	100	200	200	0	160	160	100	100	40	40

Ya se efectuó la primera asignación para todos los destinos de la red. Se acumula en cada arco los flujos obtenidos para todos los destinos y se obtiene un vector de flujos totales en cada arco de la actual iteración ( $v_l$ ):

Arco	(5,2)	(8,2)	(6,3)	(10,3)	(1,4)	(2,5)	(4,5)	(5,6)	(1,7)	(7,8)	(2,9)	(9,10)
flujo	0	200	160	40	0	160	0	160	200	200	40	40

Se incrementa el contador de iteraciones ( $l=l+1$ ) y con los flujos totales en cada arco obtenidos en la iteración previa (ahora es  $v_{l-1}$ ) se recalculan los costos en los arcos y se obtiene el siguiente vector de costos:

Arco	(5,2)	(8,2)	(6,3)	(10,3)	(1,4)	(2,5)	(4,5)	(5,6)	(1,7)	(7,8)	(2,9)	(9,10)
costo	0.1	0.1	0.1	0.1	0	5.22	25	22.52	8.16	14.76	0.33	4.47

Con este vector de costos se repite el proceso (algoritmo para costos fijos, sección 3.2.1.) y se obtienen las siguientes tablas:

Para el destino  $r=2$ :

# iter.	Etiquetas de los nodos ( $u_i, f_i$ )										Arco $a$ con menor $u_i + c_a$			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	(i,j)	$f_a$	$u_i + c_a$	$a \in \hat{A}$
0	$\infty, 0$	0, 0	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$				
1								0.1, $\infty$			(8,2)	$\infty$	0.1	sí
2					0.1, $\infty$						(5,2)	$\infty$	0.1	sí
3		0, 0									(2,5)	1.5	5.32	no
4							14.86, $\infty$				(7,8)	$\infty$	14.86	sí
5	38.02, 1/15										(1,7)	1/15	23.02	sí
6				25.1, $\infty$							(4,5)	$\infty$	25.1	sí
7	28.33, 4/15										(1,4)	1/5	25.1	sí
8											(6,3)	$\infty$	$\infty$	no
9											(10, 3)	$\infty$	$\infty$	no
10											(9, 10)	$\infty$	$\infty$	no
11											(2,9)	1/20	$\infty$	no
12	28.33, 4/15	0, 0	$\infty, 0$	25.1, $\infty$	0.1, $\infty$	$\infty, 0$	14.86, $\infty$	0.1, $\infty$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	(5,6)	$\infty$	$\infty$	no

# iter.			Nodo volúmenes									
	(i,j)	volumen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	(5,6)	0	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	(2,9)	0	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	(9,10)	0	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	(10,3)	0	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	(6,3)	0	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	(1,4)	75	100	0	0	75	0	0	0	0	0	0
7	(4,5)	75	100	0	0	75	75	0	0	0	0	0
8	(1,7)	25	100	0	0	75	75	0	25	0	0	0
9	(7,8)	25	100	0	0	75	75	0	25	25	0	0
10	(2,5)	0	100	0	0	75	75	0	25	25	0	0
11	(5,2)	75	100	75	0	75	75	0	25	25	0	0
12	(8,2)	25	100	100	0	75	75	0	25	25	0	0

Luego el mismo algoritmo para costos fijos (sección 3.2.1.), para el destino  $r=3$ :

# iter.	Etiquetas de los nodos ( $u_i, f_i$ )										Arco $a$ con menor $u_j+c_a$			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	(i,j)	$f_a$	$u_j+c_a$	$a \in \hat{A}$
0	$\infty, 0$	$\infty, 0$	0,0	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$				
1						0.1, $\infty$					(10,3)	$\infty$	0.1	sí
2										0.1, $\infty$	(6,3)	$\infty$	0.1	sí
3									4.1, $\infty$		(9,10)	$\infty$	4.57	sí
4		24.1, $\infty$									(2,9)	1/20	4.9	sí
5					15.1, $\infty$						(5,6)	$\infty$	22.62	sí
6		16.9, 1/4									(8,2)	$\infty$	24.997	sí
7											(5,2)	$\infty$	24.997	no
8								17, $\infty$			(2,5)	1/5	27.85	no
9							20, $\infty$				(7,8)	$\infty$	39.75	sí
10	35, 1/5										(4,5)	$\infty$	47.62	sí
11				40.1, $\infty$							(1,4)	1/5	47.62	sí
12	35, 1/5	16.9, 1/4	0,0	40.1, $\infty$	15.1, $\infty$	0.1, $\infty$	20, $\infty$	17, $\infty$	4.1, $\infty$	0.1, $\infty$	(1,7)	1/5	47.92	sí

# iter.			Nodo volúmenes									
	(i,j)	volumen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	(1,7)	25	100	100	0	0	0	0	25	0	0	0
2	(1,4)	75	100	100	0	75	0	0	25	0	0	0
3	(4,5)	75	100	100	0	75	75	0	25	0	0	0
4	(7,8)	25	100	100	0	75	75	0	25	25	0	0
5	(2,5)	0	100	100	0	75	75	0	25	25	0	0
6	(5,2)	0	100	100	0	75	75	0	25	25	0	0
7	(8,2)	25	100	125	0	75	75	0	25	25	0	0
8	(5,6)	75	100	125	0	75	75	75	25	25	0	0

9	(2,9)	125	100	125	0	75	75	75	25	25	125	0
10	(9,10)	125	100	125	0	75	75	75	25	25	125	125
11	(6,3)	75	100	125	75	75	75	75	25	25	125	125
12	(10,3)	125	100	125	200	75	75	75	25	25	125	125

Se calculan los flujos totales en los arcos obteniéndose el siguiente vector de flujos ( $v$ ):

Arco	(5,2)	(8,2)	(6,3)	(10,3)	(1,4)	(2,5)	(4,5)	(5,6)	(1,7)	(7,8)	(2,9)	(9,10)
flujo	75	50	75	125	150	0	150	75	50	50	125	125

Ahora se determina el valor de  $\lambda$  (paso 2 del algoritmo 3.3.1.) parámetro que determina la combinación lineal de los dos vectores de flujos (que minimiza la F.O.) de la iteración previa ( $v_{i-1}$  y  $v$ ):  $\lambda = 0.379$ . Se actualiza el vector de flujos ( $v_i$ ) y el valor de  $w_i$  (que representa el tiempo total de espera en personas-minuto asociado al vector  $v_i$ ), en función de  $\lambda$ , se recalcula el vector de costos y se repite el proceso.

En las siguientes iteraciones se obtienen los siguientes vectores de flujos:

Iteración	Arco	(5,2)	(8,2)	(6,3)	(10,3)	(1,4)	(2,5)	(4,5)	(5,6)	(1,7)	(7,8)	(2,9)	(9,10)
2	flujo	28.42	143.16	127.79	72.21	56.84	99.37	56.84	127.79	143.16	143.16	72.21	72.21
3	flujo	39.72	120.55	139.25	60.75	79.45	99.52	79.45	139.25	120.55	120.55	60.75	60.75
4	flujo	39.72	120.55	139.25	60.75	79.45	99.52	79.45	139.25	120.55	120.55	60.75	60.75

A la cuarta iteración se observa que se repite el vector de flujo de la tercera iteración por lo que ya convergió al equilibrio.

#### 5.4. APLICACION EN UNA RED DE GRAN TAMAÑO

Los datos utilizados en esta aplicación corresponden a la Región Metropolitana de Rio de Janeiro. Esta región está dividida en 94 zonas de tráfico, siendo atendida por un total de 605 líneas de ómnibus, de las cuales 328 son líneas locales y 277 son líneas de interconexión.



También se toma en cuenta las dos líneas de metro, además de incluir también 10 ramales de tren y 5 líneas de barcas y aerobarcas.

Se aplicó el algoritmo con datos de las matrices origen-destino de las horas punta de la mañana y de la tarde.

El criterio de parada alcanzado fue generalmente el número de iteraciones previamente establecido en el programa, el cual fue fijado en 20 iteraciones. En términos de tiempo de CPU, utilizando una máquina Pentium, para la red generada con más de 30.000 nodos y 85.000 arcos, y poco más de 600 líneas de transporte público, el promedio fue de 25 minutos para 20 iteraciones, lo que daba un valor medio de 75 segundos por iteración. Esto depende mucho de la estructura particular de la red, de los algoritmos utilizados, y de las estructuras de datos utilizadas. En este caso, la red de la Región Metropolitana de Rio de Janeiro presenta alta concentración de líneas en determinadas zonas de tráfico de la ciudad, como por ejemplo, en el centro de la ciudad y en algunas avenidas concurridas. En promedio, cada línea pasaba por 10 paraderos, y cada paradero era atendido por 20 líneas de transporte colectivo. Aquí se debe tomar en cuenta que las líneas con recorridos de ida y vuelta fueron consideradas como dos líneas independientes y que algunos nodos de estas líneas formaban parte tanto del recorrido de ida como del de vuelta.

El uso del algoritmo de Frank-Wolfe continua teniendo vigencia debido a que consigue buenos resultados, resaltando que rápidamente obtiene un patrón de los flujos aún cuando la precisión de los cálculos no sea determinante. Se puede notar que los valores obtenidos de la función objetivo oscilan en torno a un mínimo local y en algunas de las iteraciones empeoran la solución de la iteración previa. El método de Frank-Wolfe llega en pocas iteraciones a la vecindad de una solución satisfactoria y fluctúa alrededor de ella.

A continuación se presenta una tabla con los resultados obtenidos en 10 iteraciones del algoritmo para esta red que incluyó más de 30.000 nodos y 85.000 arcos.

Iteración	F.O.
1	12176517548
2	1180415015
3	167930477
4	154576297
5	145615820
6	157123690
7	166338549
8	153827218
9	146435943
10	154135055

## CAPÍTULO 6.

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este capítulo se presentan las principales conclusiones que surgen a partir del estudio del problema de asignación de flujo de pasajeros en una red congestionada de transporte colectivo. También se presentan recomendaciones para futuros trabajos de investigación.

#### 6.1. CONCLUSIONES

- a) Se ha conseguido desarrollar un modelo que realiza la asignación de pasajeros según el Segundo Principio de Wardrop, con lo que cada usuario del sistema de transporte colectivo busca minimizar su tiempo total estimado de viaje, sin tener en cuenta las decisiones de los demás usuarios.

- b) El tiempo de cálculo, que es un criterio para evaluar el desempeño de un programa, ha sido influenciado significativamente por el nivel de detalle que se ha pretendido conseguir en la representación de la red vial.
- c) Para el tamaño de la red de la aplicación (85000 arcos, 600 líneas de transporte público) el programa utilizó un promedio de 45 segundos por iteración en una Pentium, utilizando Delphi 6.0.
- d) Redes más detalladas consumen mayor tiempo en los cálculos computacionales, y se debe llegar a una solución de compromiso, donde los criterios en conflicto serían la memoria necesaria para redes más detalladas y el tiempo de computación.
- e) El nivel de detalle de la representación de la red de transporte colectivo deberá ser escogido por los planificadores de acuerdo con los objetivos del estudio.
- f) Se podría identificar como una limitación de este modelo, el considerar la capacidad ilimitada de los vehículos de transporte colectivo. Esto implica que a la hora de abordar un vehículo los pasajeros siempre van a encontrar espacio, lo cual generalmente no sucede en las horas de mayor afluencia.
- g) En la aplicación del modelo de asignación propuesto, se han utilizado funciones de costo y parámetros establecidos arbitrariamente, debido a que escapan al objetivo principal de esta tesis. Únicamente se observó el requisito de que sean funciones convexas para garantizar la convergencia del algoritmo.
- h) En estudios de esta naturaleza la recolección de información es muchas veces la tarea más costosa. La calibración de las funciones también depende de la calidad de la información recogida en campo.
- i) Se debe tomar en cuenta que cada ciudad tiene particularidades debido a su geometría, infraestructura vial, tamaño de población, hábitos de los usuarios, tamaño de la oferta de transporte público, etc.
- j) Se constató la importancia de la estructura de los datos, la implementación en forma modular de las subrutinas y procedimientos, buscando facilitar modificaciones y

correcciones a ser hechas en el código del programa, las cuales no siempre son simples de identificar, pues el programa podría ser compilado y trabajar con errores no detectados de lógica.

- k) Asimismo, la complejidad de las subrutinas tiene una gran importancia, pues el manejo de datos de gran tamaño repercute en el tiempo de computación. Esto en particular puede ser ejemplificado en la subrutina de ordenamiento de los arcos de la red, que con una estructura *heap* es del orden de  $O(m \log m)$  en lugar de  $O(m^2)$  para un arreglo en forma de vector. Para los 85000 arcos del ejemplo, un ordenamiento con la primera estructura es 7500 veces más rápido que con la otra.

## 6.2. RECOMENDACIONES

Existe diversos trabajos de investigación que pueden surgir a partir de esta tesis, sobretodo para aplicación en nuestro medio donde el campo aún está por explorar. Además, buscando la aplicación del modelo sugerido en esta tesis a casos reales en nuestro país, en ciudades que presentan problemas originados por la congestión vehicular, se puede recomendar algunos trabajos de investigación que sirvan para abastecer de información al modelo como se citan a continuación:

- a) Realizar un estudio de zonificación de las ciudades del país a ser analizadas, para la determinación del número y tipo de zonas de tráfico en que se va a dividir cada ciudad, teniendo en cuenta los usos del suelo, el tamaño y distribución de la población, tasa de mototricación por hogar, niveles socioeconómicos de los hogares, y otros factores que puedan influir en los patrones de los viajes.
- b) Efectuar una encuesta domiciliaria sobre demanda de viajes en Lima y otras ciudades que presenten problemas de congestión vehicular, para la elaboración de la matriz origen - destino, y para identificar los motivos de viaje de los usuarios, los

- modos de transporte utilizados y la cantidad de transbordos efectuados según el tipo de vehículo.
- c) Llevar a cabo la actualización periódica de la matriz origen-destino, a fin de contar con información real y vigente de la demanda de viajes. Según recomendación de otras experiencias en ciudades de similares características a Lima, debería efectuarse un estudio cada 10 años.
  - d) Considerar las horas punta de la mañana de días de semana para estudios de demanda de viajes pues los patrones de comportamiento de los usuarios son más estables y previsibles, ya que la mayoría de usuarios repite el motivo de viaje y el modo de viaje en forma habitual en esos horarios.
  - e) Estudiar y crear las funciones específicas de costo generalizado para las vías de la ciudad a ser analizada, efectuando la calibración de los volúmenes y tiempos de viaje, de modo que el modelo refleje de la mejor manera posible lo observado en la realidad. Se debe tomar en cuenta el cálculo de los factores de ponderación de los tiempos de espera y de caminata (acceso más transbordo), y de los factores de conversión de las unidades monetarias a unidades de tiempo.
  - f) Proponer modificaciones en la red vial, como por ejemplo la utilización de corredores que descongestionen las vías más cargadas, efectuando una asignación y una comparación de resultados para análisis de las modificaciones propuestas.
  - g) Considerar en el modelo de asignación las actualizaciones de itinerarios de las líneas de transporte público que ocurren periódicamente, así como las modificaciones de sentido de circulación, ampliación de vías, etc.
  - h) Efectuar la asignación de pasajeros para escenarios futuros a 10 y 20 años, para sugerir modificaciones a la red vial, considerando la futura demanda del servicio de transporte así como también los efectos de la contaminación del medio ambiente, para según estos factores determinar los itinerarios de las rutas de transporte público.

- i) Crear una interfaz amigable con Arc View o algún otro software de Sistemas de Información Geográfica para una mejor visualización de los resultados de la asignación en la red actual y en escenarios futuros a través de mapas temáticos.
- j) Adaptar el modelo para ser más flexible en cuanto a modificaciones en los parámetros de las funciones de costo para análisis de sensibilidad.
- k) Realizar como una extensión al modelo, la investigación de otro modelo que tome en cuenta la interacción entre vehículos de la red de transporte colectivo y la red vial de vehículos particulares, dado que ambos comparten la misma infraestructura y que existen influencias que no se toman en cuenta al analizar en forma separada la red de transporte colectivo.
- l) Realizar una modificación al modelo, agregando un módulo que efectúe la asignación de flujo de pasajeros teniendo en cuenta el Primer Principio de Wardrop, según el cual se minimiza el tiempo total de viaje en el sistema. De esta forma se podría identificar las posibles diferencias entre las decisiones de los usuarios que buscan optimizar sus rutas individuales y las recomendaciones del planificador que busca el óptimo del sistema.

Estos estudios propuestos deben tener en consideración mejoras en la calidad de vida de la población, además de servir como instrumentos para la toma de decisiones de los planificadores urbanos desde diferentes puntos de vista como por ejemplo: aumento de la productividad (ahorro de tiempo total de viaje), aumento de la rentabilidad (menores costos de operación), aumento de la capacidad vial, mejor uso de la red vial actual, identificación de lugares con necesidad de mejoras y manutención en la red vial, racionalización de líneas de transporte público.

## BIBLIOGRAFÍA

- Ahuja, R. K., T. L. Magnanti, J. B. Orlin (1989) Network Flows, in Handbooks in Operations Research and Management Science, vol. 1 – Optimization, 211-369.
- Andréasson, I. (1976) A Method for the Analysis of Transit Networks, *Second European Congress on Operations Research*, Amsterdam, North-Holland.
- Bazaraa, M. S. (1990) Nonlinear Programming: Theory and Algorithms. John Wiley & Sons, New York.
- Bouzaïene-Ayari, B., M. Gendreau, S. Nguyen (1995) An Equilibrium-Fixed Point Model for Passenger Assignment in Congested Transit Networks. *Publication 1001, Centre de Recherche sur les Transports, Université de Montréal.*
- Bunster, J. P. (1986) Tratamiento de líneas comunes en modelos de asignación de viajes a redes de transporte público. Tesis de Maestría en Ciencias de la Ingeniería. Escuela de Ingeniería. Pontificia Universidad Católica de Chile.
- Castro A.,F.R., J.E. Leal (1997) Comparação de duas abordagens para o problema de alocação de equilíbrio para redes de transporte público. *Anais do XI ANPET Vol. 1, 314-326.*
- Castro A.,F.R., J.E. Leal (1998) Redefinição automática da rede de transporte coletivo para alocação de fluxo de equilíbrio. *Transportes Vol .6, n.2, 28-45.*
- Chriqui, C. (1974) Réseau de Transport en Commun: Les Problèmes de Cheminement et d'Accès. *Ph. D. thesis. Dép. I.R.O. Université de Montréal, Canadá.*
- Chriqui, C. (1975) Public transit network assignment method. *Publication 21, Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal, Canadá.*
- Chriqui, C., Robillard, P. (1975). Common bus lines. *Transportation Science* 14, 42-54.
- Dafermos, S. (1980) Traffic equilibria and variational inequalities. *Transportation Research*. 14, 42-54.

- De Cea, J., Fernández, J. E., Crovetto, G. (1990) Análisis comparativo de tres modelos de asignación a redes de transporte público basados en el concepto de ruta. *Apuntes de Ingeniería* 39, 5-22.
- De Cea, J., E. Fernández (1993-I) Comportamiento de los viajeros y modelos de asignación de equilibrio en redes de transporte público. *Apuntes de Ingeniería* 50, 5-20.
- De Cea, J., E. Fernández (1993-II) Transit Assignment for Congested Public Transport Systems: An Equilibrium Model. *Transportation Science*. Vol. 27, n.2, 133-147.
- Dial, R. B. (1967). Transit Pathfinder Algorithm. *Highway Research Record* 205, 67-85.
- Dial, R. B. (1971). A Probabilistic Multipath Traffic Assignment Model which obviates Path Enumeration. *Transportation Research*. 5, 83-111.
- Dijkstra, E. W. (1959) A note on two problems in connection with graphs. *Numerische Matematik*, 1, 269-271.
- Frank, M., P. Wolfe (1956) An Algorithm for Quadratic Programming. *Naval Research Logistics Quarterly* 3, 95-110.
- Gendrau, M. (1984). Étude approfondie d'un modèle d'équilibre pour l'affectation des passagers dans les réseaux de transport en commun. *Publication 384, Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal, Canadá.*
- Hasselström, D. (1981) Public Transportation Planning – A Mathematical Programming Approach. *Ph. D Thesis, Department of Business Administration, University of Gothenburg, Sweden.*
- Knoppers, P., T. Muller (1995) Optimized Transfer Opportunities in Public Transport. *Transportation Science*, vol 29, n.1, 101-105.
- Kirchhoff, P. (1995) Public transit research and developing in Germany. *Transportation Research A*, vol 29, n.1, 1-7.
- Lampkin, W, P. D. Saalmans (1967) The Design of Routes, Service Frequencies and Schedules for a Municipal Bus Undertaking: A case study. *Operation Research Quarterly*. 18, 375-397.



- Leal, J. E., F. M. Pompermayer (1997) Experiências com o tamanho de passo no algoritmo de Frank-Wolfe para redes de transportes. *Anais do XI ANPET*, vol. 1, 327-336.
- Mackett, R. L., M. Edwards (1998) The impact of new urban public transport systems: will the expectations be met? *Transportation Research A*, vol 32, n.4, 231-245.
- Mandl, C.E. (1978) Algorithms and computer programs in deterministic network optimization applied to public systems. *Institute for Advanced Studies, Viena. Research Memorandum n. 126*.
- Marguier, P.H.J., A. Ceder (1984) Passenger Waiting Strategies for Overlapping Bus Routes. *Transportation Science*. Vol. 18, n.3 207-230.
- Moore, E. F. (1957) The Shortest Path through a maze. International Symposium on the Theory of Switching Proceedings, Harvard University.
- Nguyen, S., (1984) An Algorithm for the Traffic Assignment Problem. *Transportation Science*. Vol. 18, n. 2, 203-216.
- Nguyen, S., C. Dupuis (1984) An Efficient Method for Computing Traffic Equilibria in Networks with Asymmetric Transportation Costs. *Transportation Science*. Vol. 18, n. 2, 185-202.
- Nguyen, S., Pallottino, S. (1986) Hyperpaths and Shortest Hyperpaths, *Combinatorial Optimization, Lectures Notes in Mathematics*, 1403, Springer-Verlag, 258-271.
- Nguyen, S., Pallottino, S. (1988) Equilibrium traffic assignment for large scale transit networks. *Publication 494, Centre de Recherche sur les Transports, Université de Montréal*.
- Nguyen, S., S. Pallottino, F. Malucelli (1994) A Modeling Framework for the Passenger Assignment on a Transport Network with Time-Tables. *Publication 94-47, Centre de Recherche sur les Transports, Université de Montréal*.
- Nguyen, S., Pallottino, S., Gendreau, M. (1998) Implicit Enumeration of Hyperpaths in a Logit Model for Transit Networks. *Transportation Science*. Vol. 32, n. 1, 54-64.

- Pallottino, S., Nguyen, S., Marcotte, P. (1995) On the Existence of Equilibrium Flows for Transit Networks. *Institute for Operations Research and the Management Sciences*.
- Pang, J.S., D. Chan (1982). Iterative Methods for Variational and Complementarity Problems. *Mathematical Programming* 24. 284-313.
- Parada D., V. M. (1989) Algoritmos para problemas de equilibrio em redes. *Tese de Doutorado em Engenharia de Sistemas de Computação. COPPE, UFRJ*.
- Pietrantonio, H. (1997) Modelos Normativos em Transportes Urbanos: Aplicação ao Projeto de Redes de Transporte Público Coletivo Regular Urbano de Passageiros – TPCR/UP. *Tese de Doutorado, Escola Politécnica da USP*.
- Pompermayer, F. M. (1997) Sistema para alocação de fluxos multimodal multiproduto para transporte de carga. *Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Industrial. Dissertação de Mestrado*.
- Ramanathan, B., R. Jayakrishnan, M. G. McNally (1995) Assignment of Transit Ridership Under Information Supply. *Institute for Operations Research and the Management Science*.
- Robillard, P. (1971) 0-1 Hyperbolic Programming Problems. *Naval Research Logistic Quarterly*, 18, 47-57.
- Rossetti, M. D., T. Turitto (1998) Comparing static and dynamic threshold based control strategies. *Transportation Research A*, vol 32, n. 8, p. 607-620.
- SECTRA (2002) Metodología para Análisis de Sistemas de Transporte en Grandes Ciudades y Ciudades de Tamaño Medio. <http://www.sectra.cl> 20/09/2002
- Spiess, H. (1983) On optimal route choice strategies in transit networks. *Publication 286, Centre de Recherch sur les Transports, Université de Montréal*.
- Spiess, H. (1984) Contributions à la Théorie et aux Outils de Planification des Réseaux de Transports en Commun. *Université de Montréal*.
- Spiess, H., Florian, M. (1989) Optimal strategies: A new assignment model for transit networks. *Transportation Research*, B-23(2) p. 83-102.

- Suwansirikul, C., T. L. Friesz, R. L. Tobin (1987) Equilibrium network design problem. *Transportation Science*. Vol. 21, n.4.
- Tertoolen, G., D. Van Kreveld, B. Verstraten (1998) Psychological resistance against attempts to reduce private car use. *Transportation Research, A* Vol. 32, n. 3, 171-181.
- Torres G., L. E. (1987) Contribuição ao problema de equilíbrio em redes. *Tese de Doutorado em Engenharia de Sistemas de Computação. COPPE, UFRJ*.
- Voss, S, J. R. Daduna (1995) Customer Orientation in Public Mass Transit through Passenger Information Systems. *Institute for Operations Research and the Management Science*.
- Wu, J.H., Florian, M., Marcotte, P. (1994) Transit equilibrium assignment: a model and solution algorithms. *Transportation Science* 28, n.3.
- Zhan, F.B., Noon, C. E. (1998) Shortest Paths Algorithms: An Evaluation using Real Road Networks. *Transportation Science*. Vol. 32, n. 1, 65-73.