

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE GRADUADOS

Maestría en Ingeniería Civil



Material de Apoyo para la Enseñanza de los Cursos de Diseño y  
Comportamiento del Concreto Armado

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE  
MAGÍSTER EN INGENIERÍA CIVIL

Presentada por

Ing. Gianfranco Ottazzi Pasino

Lima - Perú

2004

## Material de Apoyo para la Enseñanza de los Cursos de Diseño y Comportamiento del Concreto Armado

### Tesis para optar el Grado Académico de Magíster en Ingeniería Civil

#### RESUMEN

El objetivo principal de esta tesis es contribuir a la mejora de la enseñanza de los cursos de Concreto Armado 1, que se dicta en la Facultad de Ciencias e Ingeniería en la especialidad de Ingeniería Civil, y del curso Comportamiento del Concreto Armado, que ofrece la Escuela de Graduados como electivo en el Programa de Maestría en Ingeniería Civil.

Para ello, se ha elaborado un documento, a manera de apuntes, que contiene los principales capítulos de los programas analíticos de los cursos Concreto Armado 1 y Comportamiento del Concreto Armado. En el documento se ha hecho énfasis en los aspectos fundamentales del comportamiento de secciones y elementos simples de Concreto Armado, antes de presentar los procedimientos clásicos de análisis y diseño.

También se ha tratado de explicar la procedencia o sustento de las numerosas disposiciones contenidas en los Códigos y Normas de Concreto Armado, en especial de la Norma Peruana, de tal modo que estas disposiciones no se conviertan en reglas o recetas “absolutas” que se apliquen sin conocer su procedencia, limitaciones y alcances. Se espera que este enfoque permita a los estudiantes profundizar aspectos más avanzados del comportamiento de este material, especialmente en el rango no lineal.

Se han elaborado tres presentaciones multimedia (Power Point) relacionadas con los tipos de elementos estructurales y posibilidades constructivas del concreto armado, las fallas en elementos y estructuras de concreto armado y el comportamiento de elementos simples de concreto armado en flexión y cortante. Esta última presentación está basada en ensayos realizados recientemente en el Laboratorio de Estructuras de la PUCP. Estas presentaciones complementan los aspectos teóricos y prácticos contenidos en los apuntes.

Este documento podrá ser publicado por la Oficina de Publicaciones para la Docencia de la PUCP. Versiones preliminares ya han sido publicadas y vendidas por la mencionada oficina con el título “Apuntes del Curso Concreto Armado 1”. Se han editado ya cuatro versiones de estos apuntes, la última en el semestre 2004-1.

## INDICE

<b>Bibliografía</b>	4
<b>Introducción</b>	5
<b>Capítulo 1 Propiedades Mecánicas del Concreto</b>	12
1.1 Introducción.	
1.2 Resistencia a la compresión.	
1.3 Principales factores que afectan a la resistencia en compresión.	
1.4 Resistencia del Concreto en la estructura real.	
1.5 Resistencia a la tracción del Concreto.	
1.6 Módulo de Elasticidad del Concreto.	
1.7 Módulo de Poisson del Concreto.	
1.8 Mecánica de la fractura del Concreto en compresión.	
1.9 Efecto del confinamiento (estados triaxiales).	
1.10 Comportamiento del Concreto en compresión.	
1.11 Modelos para el Concreto.	
1.12 Concretos de alta resistencia.	
1.13 Concretos Livianos.	
<b>Capítulo 2 Cambios Volumétricos del Concreto</b>	33
2.1 Introducción.	
2.2 Creep o Flujo Plástico del concreto.	
2.2.1 Algunas observaciones relativas al Creep.	
2.2.2 Principales factores que afectan la magnitud del Creep.	
2.2.3 Coeficiente de Flujo Plástico.	
2.3 Retracción o Contracción del concreto.	
2.3.1 Algunas observaciones relativas a la Retracción.	
2.3.2 Principales factores que afectan a la Retracción.	
2.3.3 Valores típicos de la Contracción.	
2.3.4 ¿Cómo controlar la Retracción?	
2.3.5 Retracción por Carbonatación del concreto.	
<b>Capítulo 3 Acero de Refuerzo</b>	42
3.1 Introducción	
3.2 Barras de refuerzo laminadas en caliente.	
3.3 Calidades del acero de refuerzo.	
3.4 Propiedades mecánicas de las barras de refuerzo.	
3.5 Propiedades de la barras Grado 60.	
3.5.1 Características mecánicas – ASTM A615.	
3.5.2 Soldabilidad.	
3.5.3 Diámetros mínimos de doblado del acero de refuerzo.	
3.5.4 Efecto de la temperatura.	
3.6 Mallas Electro Soldadas.	

**Capítulo 4 Requisitos de Resistencia y de Servicio**

51

- 4.1 Introducción.
- 4.2 Conceptos sobre los Estados Límites de una estructura.
  - 4.2.1 Estado Límite Último.
  - 4.2.2 Estados Límites de Servicio.
  - 4.2.3 Estados Límites
- 4.3 Coeficientes (factores) de Seguridad.
- 4.4 Diseño por Esfuerzos Admisibles (WSD)
- 4.5 Diseño por Resistencia.
- 4.6 Factores de Reducción de Resistencia – Resistencia de Diseño.
  - 4.6.1 Factores de Reducción de Resistencia – Norma Peruana.
- 4.7 Factores de Carga (Resistencia Requerida).
  - 4.7.1 Factores de Carga de la Norma Peruana (Resistencia mínima requerida).
- 4.8 Análisis y diseño por Resistencia.
- 4.9 Estimación de los coeficientes de seguridad globales.
- 4.10 Diseño Límite.

**Capítulo 5 Casos Especiales de la Flexión Simple**

72

- 5.1 Vigas con altura (peralte) mayor a 0.90 m.
  - 5.1.1 Exigencias de la Norma Peruana relacionadas con Ask.
  - 5.1.2 Exigencias del ACI 318-02 relacionadas con Ask.
- 5.2 Análisis de vigas con refuerzo distribuido en el alma.
- 5.3 Cuantía balanceada en vigas con refuerzo en el alma.
- 5.4 Influencia del acero repartido en el alma en la resistencia.
  - 5.4.1 Comparación entre el acero repartido y el acero concentrado.
- 5.5 Diseño de secciones no rectangulares.

**Capítulo 6 Fisuración en Elementos de Concreto Armado**

83

- 6.1 Introducción.
- 6.2 Durabilidad del Concreto.
- 6.3 Tipos de fisuras en elementos de Concreto Armado.
- 6.4 Razones para controlar el ancho de las fisuras.
- 6.5 Principales factores que afectan el ancho de las fisuras.
- 6.6 Limitación del ancho de las fisuras.
- 6.7 Disposiciones reglamentarias para elementos en flexión.
  - 6.7.1 Norma Peruana.
  - 6.7.2 Disposiciones del ACI 318-02 para elementos en flexión.
- 6.8 Ejemplo.

**Capítulo 7 Diagramas Momento – Curvatura**

99

- 7.1 Introducción.
- 7.2 Definición de curvatura.
- 7.3 Ductilidad de curvatura.
- 7.4 Construcción de diagramas Momento – Curvatura.
- 7.5 Factores que influyen en los diagramas  $M-\phi$  y en la Ductilidad de Curvatura.
- 7.6 Diagramas  $M-\phi$  aproximados.

**Capítulo 8 Redistribución de Momentos Flectores**

114

- 8.1 Introducción.
- 8.2 Diagramas Momento – Rotación.
- 8.3 Requisitos generales para la Redistribución.
  - 8.3.1 Especificaciones de la Norma de Concreto Armado – Redistribución.
  - 8.3.2 Limitaciones de la Norma.
- 8.4 Introducción al Análisis Límite.
- 8.5 Ejemplos.

**Capítulo 9 Flexión Biaxial**

133

- 9.1 Introducción.
- 9.2 Flexión biaxial en vigas.
- 9.3 Flexión biaxial en columnas.
  - 9.3.1 Método de Bresler.
- 9.4 Influencia de la Flexión Biaxial en la resistencia de columnas.

**Capítulo 10 Diseño Unificado en Concreto Armado**

151

- 10.1 Introducción.
- 10.2 Disposiciones “clásicas” hasta el ACI-99 para elementos en flexión.
- 10.3 Algunas “inconsistencias” hasta el ACI-99.
- 10.4 Conceptos centrales del Diseño Unificado.
- 10.5 Nuevas definiciones en el ACI-02.
- 10.6 Disposiciones para vigas del ACI-02.
- 10.7 Redistribución de Momentos.
- 10.8 Ventajas del Diseño Unificado adoptado por el ACI-02.
- 10.9 Ejemplos.

## Introducción

No es tarea simple encontrar en nuestro medio, material apropiado para la enseñanza de los cursos de Concreto Armado, tanto en el antegrado como en el postgrado. Los libros disponibles están casi todos en inglés y se ajustan a normas técnicas extranjeras. Si bien nuestra Norma de Concreto Armado está basada principalmente en el Reglamento del American Concrete Institute (ACI), ésta tiene adecuaciones a nuestra realidad que es conveniente precisar y explicar.

Por otro lado, la mayoría de los libros disponibles se concentran en los problemas y procedimientos típicos del diseño de las secciones de concreto armado, sin enfatizar en los aspectos relacionados con el comportamiento de este material compuesto. Es cierto que existen libros “avanzados” sobre el comportamiento de secciones y elementos de concreto armado, así como numerosas publicaciones técnicas periódicas. Sin embargo, para entender toda esta información, es necesario primero sentar las bases o fundamentos del comportamiento, análisis y diseño de secciones y elementos de Concreto Armado.

El objetivo principal de esta tesis es contribuir a la mejora de la enseñanza en la PUCP de los cursos de Concreto Armado 1, que se dicta en la Facultad de Ciencias e Ingeniería en la especialidad de Ingeniería Civil, y del curso Comportamiento del Concreto Armado, que ofrece la Escuela de Graduados como electivo en el Programa de Maestría en Ingeniería Civil.

Para cumplir parcialmente con el objetivo planteado se ha elaborado un documento, a manera de apuntes, que contiene los principales capítulos de los programas analíticos de los cursos Concreto Armado 1 y Comportamiento del Concreto Armado. El documento contiene, al inicio de cada capítulo, una relación de lecturas complementarias provenientes de artículos de revistas que pueden consultarse en la Hemeroteca de Ingeniería.

El documento incluye un anexo con los planos estructurales de un edificio simple, que sirva como ejemplo de la manera de presentar y transmitir gráficamente los resultados de un diseño en concreto armado. Adicionalmente se han elaborado tres presentaciones en Multimedia (Power Point) para que sirvan de apoyo en el dictado de los cursos, estas presentaciones son:

- Tipos de elementos estructurales y posibilidades constructivas del Concreto Armado.
- Fallas en elementos y estructuras de Concreto Armado.
- Comportamiento de elementos simples de Concreto Armado en flexión, cortante y compresión. Esta presentación está basada principalmente en ensayos realizados en el Laboratorio de Estructuras de la PUCP.

Ya que el documento (apuntes) completo es demasiado extenso para ser presentado en una tesis, se ha estimado conveniente incluir en esta memoria, solo algunos de los capítulos. Los capítulos que se presentan han sido seleccionados por el suscrito sobre la base de sus preferencias personales y de manera tal que no resulte una memoria demasiado extensa. El documento completo (apuntes) contiene 23 capítulos y dos anexos, con una extensión total cercana a las 460 páginas. A continuación se presenta el índice detallado del documento completo, con lo cual se pretende formar una idea del contenido de los apuntes.

## CAPITULO 1

### Propiedades Mecánicas del Concreto

#### Lecturas:

- 1.1 Properties of Concrete – An Overview. Adam Neville. ACI Concrete International, February 1986
- 1.2 Advancements in Concrete Technology. P. Kumar Mehta. ACI Concrete International, June 1999.
- 1.3 Durability – Critical Issues for the Future. P. Kumar Mehta. ACI Concrete International, July 1997.
- 1.4 The Question of Concrete Durability: We Can Make Good Concrete Today. Adam Neville. ACI Concrete International, July 2000.
- 1.5 Concrete Technology – An Essential Element of Structural Design. Adam Neville. ACI Concrete International, July 1998.
- 1.6 Building Durable Structures in the 21st Century. Mehta, Burrows. ACI Concrete International, March 2001.
- 1.7 How the Water-Cement Ratio Affects Concrete Strength. Aitcin, Neville. ACI Concrete International, August 2003.
- 1.8 How Useful is the Water-Cement Ratio? Adam Neville. ACI Concrete International, September 1999.
- 1.9 Core Test: Easy to Perform, Not Easy to Interpret. Adam Neville. ACI Concrete International, November 2001.
- 1.10 How Good is Good Enough? Edward A. Abdun-Nur. ACI Concrete International – Landmark Series, June 2003.
- 1.11 Tensile Strength of Concrete. Jerome M. Raphael. ACI Journal, March – April 1985.

## 1.1 Introducción

En su forma más simple, el Concreto es un material compuesto constituido por un material cementante, agua y agregado. El cemento, normalmente tipo Portland, una vez hidratado genera la adhesión química entre los componentes. Por lo general el agregado representa entre el 60 al 75% del volumen total del concreto estructural, el cemento entre un 7 a 15% y el aire atrapado entre 1 al 3%. Para ciertos propósitos se puede incorporar hasta un 8% de aire, en forma de pequeñas burbujas en el mortero, agregando sustancias especiales. El aire incorporado es importante para concretos que van a estar sometidos a procesos de hielo – deshielo.

El concreto tiene una alta resistencia en compresión, pero su resistencia en tracción es baja, de hecho en los cálculos se suele despreciar la resistencia en tracción.

En la tabla 1-1 (Mehta) se presenta una dosificación típica para un concreto de resistencia a la compresión  $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$  y un asentamiento (slump) comprendido entre 5" y 6". La intención de esta tabla es dar una idea de la cantidad de cada uno de los elementos presentes en una mezcla de concreto. Es interesante anotar que el contenido de pasta de cemento, constituido por la suma del cemento, el agua y el aire atrapado, constituye cerca del 30% del volumen.

Asumiendo que el cemento y los agregados son de buena calidad, los indicadores más importantes son la relación agua – cemento ( $w/c$ ) y el contenido total de pasta de cemento en la mezcla. Ambos indicadores, asumiendo que no se empleen aditivos, tienen que ver con la resistencia a la compresión y con la retracción por secado que experimentará la mezcla. La cantidad total de cemento presente en la mezcla, tiene que ver con el calor de hidratación que se genera durante la fragua y por consiguiente con el potencial de que se formen fisuras térmicas.

**Tabla 1-1.** Dosificación de una mezcla de concreto. Resistencia  $250 \text{ kg/cm}^2$

	En peso ( $\text{kg/m}^3$ )	% en peso	En volumen ( $\text{m}^3$ )	% en volumen
Cemento	307	13%	0.098	10%
Agua	178	8%	0.178	18%
Aire atrapado			0.020	2%
Agregado grueso	1,040	44%	0.385	39%
Agregado fino	825	35%	0.319	32%
total	2,350	100%	1.00	100%
Relación $w/c$	0.58		1.82	
Contenido de Pasta			0.296	29.6%

## 1.2 Resistencia a la Compresión

El valor de  $f'_c$  (resistencia a la compresión) se utiliza generalmente como indicador de la calidad del concreto. Es claro que pueden existir otros indicadores más importantes dependiendo de las solicitaciones y de la función del elemento estructural o estructura. Por ejemplo en el diseño de pavimentos la resistencia a la tracción por flexión es un indicador importante. Otro indicador importante puede ser la durabilidad.

Las Normas o Códigos relacionan muchas de las características mecánicas del concreto (modulo de elasticidad, resistencia a la tracción, resistencia al corte, adherencia, etc.) con el valor de  $f'_c$ .

La resistencia a la compresión se determina a partir de ensayos de laboratorio en probetas estándar cargadas axialmente. Este ensayo se utiliza para monitorear la



resistencia del concreto tanto para el control de la calidad como para la aceptación del concreto fabricado. La confección de las probetas y el ensayo están reguladas por las Normas (ASTM) y en ellas se especifica:

- El proceso de confección de las probetas.
- El tamaño de las probetas. Normalmente se utilizan probetas cilíndricas 6”x12”.
- El proceso de curado de las probetas ya sea en el laboratorio o en obra para las probetas denominadas curadas bajo condiciones reales de obra. Estas últimas permiten determinar la efectividad de los procesos de curado utilizados y los plazos de desencofrado y puesta en servicio de la estructura.
- El proceso de ensayo a compresión de las probetas. El ensayo puede estar controlado por carga o por deformación. Cuando el ensayo es realizado controlando la carga, normalmente la velocidad es tal que se alcanza la falla de la probeta en 2 a 3 minutos, lo cual equivale a un incremento de esfuerzo entre 2.1 y 2.8 kg/cm<sup>2</sup> por segundo aproximadamente. Cuando el control es por deformación, la velocidad de deformación unitaria es de 0.001 por minuto aproximadamente.

En otros países (Europa) se utilizan probetas cúbicas de 0.15, 0.20 ó 0.30 m de lado (la arista debe ser mayor que tres veces el tamaño máximo del árido empleado). La resistencia de las probetas cúbicas, por el efecto del confinamiento que producen las aristas y los cabezales de las máquinas de ensayo en contacto con la probeta, es mayor que las cilíndricas. El CEB recomienda la siguiente equivalencia (valor medio) entre probetas cilíndricas y cúbicas:

$f^c$  (cilíndrica)  $\approx$  0.80  $f^c$  (cúbica de 0.15 m de arista). Valores límites entre 0.70 y 0.90

$f^c$  (cilíndrica)  $\approx$  0.83  $f^c$  (cúbica de 0.20 m de arista). Valores límites entre 0.75 y 0.90

$f^c$  (cilíndrica)  $\approx$  0.90  $f^c$  (cúbica de 0.30 m de arista). Valores límites entre 0.80 y 1.00

Es necesario resaltar que las probetas de concreto curadas y ensayadas bajo condiciones estándar, miden, en teoría, el **potencial resistente** del concreto al cual representan.

### 1.3 **Principales Factores que Afectan la Resistencia - $f^c$ -**

- a) En todos los concretos de buena calidad, la resistencia de las partículas de agregado es mayor que la de los demás componentes del concreto, de modo que los elementos importantes en la resistencia del concreto son, la resistencia del propio cemento hidratado (matriz) y la resistencia de la interfase matriz - agregado.
- b) La relación agua - cemento ( $w/c$ ). Esta es tal vez la variable más importante, una relación  $w/c$  baja, reduce la porosidad de la matriz o pasta de cemento y mejora la traba entre los sólidos aumentando la resistencia. Por el contrario una relación alta aumenta la porosidad de la matriz y de la zona de transición entre la matriz y los agregados, reduciendo la resistencia.

La figura 1-1 (ACI) muestra la clara influencia que tiene la relación  $w/c$  en la resistencia a la compresión a los 28 días de un grupo de mezclas de concreto sin aire incorporado. También se observa que para una misma relación el rango de resistencias es amplio. Para una relación  $w/c$  de 0.45 el rango de resistencia varía entre 350 y 450 kg/cm<sup>2</sup> aproximadamente, mientras que para una relación de 0.65 el rango de variación es entre los 175 y los 280 kg/cm<sup>2</sup>.

La figura 1-2 (González Cuevas) muestra la influencia de la relación agua - cemento en la resistencia y en forma de la curva esfuerzo – deformación del concreto. Nótese que a medida que se reduce la relación  $w/c$  aumenta la resistencia y la rigidez axial (módulo de elasticidad). Los concretos de baja resistencia muestran deformaciones

de rotura ( $\epsilon_{cu}$ ) mayores que los de alta resistencia y la pendiente de la rama descendente de la curva es suave.

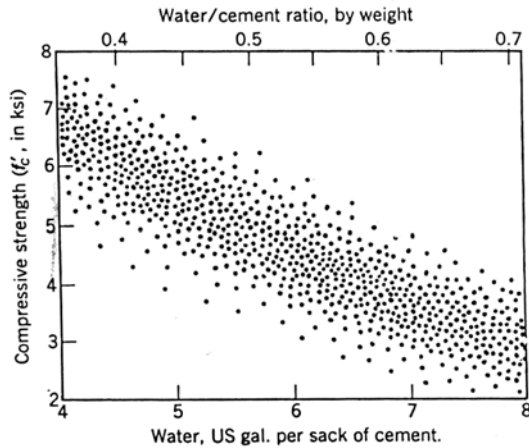


Fig. 1-1 Influencia de la relación  $w/c$

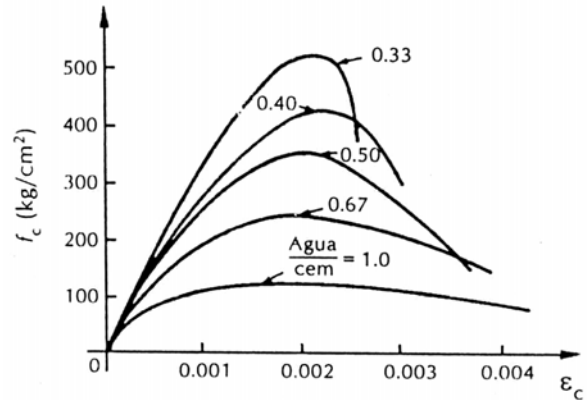


Fig. 1-2 Influencia de la relación  $w/c$  en la resistencia y la forma de la curva.

La figura 1-3 (Bresler) muestra curvas aproximadas que permiten apreciar el efecto de la relación  $w/c$  sobre la resistencia del concreto. Ya hemos mencionado que para una misma relación pueden obtenerse varias resistencias (figura 1-1) por lo tanto las curvas deben tomarse como tendencias globales y no como valores exactos. Se muestran las curvas para mezclas confeccionadas con y sin aire incorporado, curadas por vía húmeda a 21 °C hasta el día del ensayo.

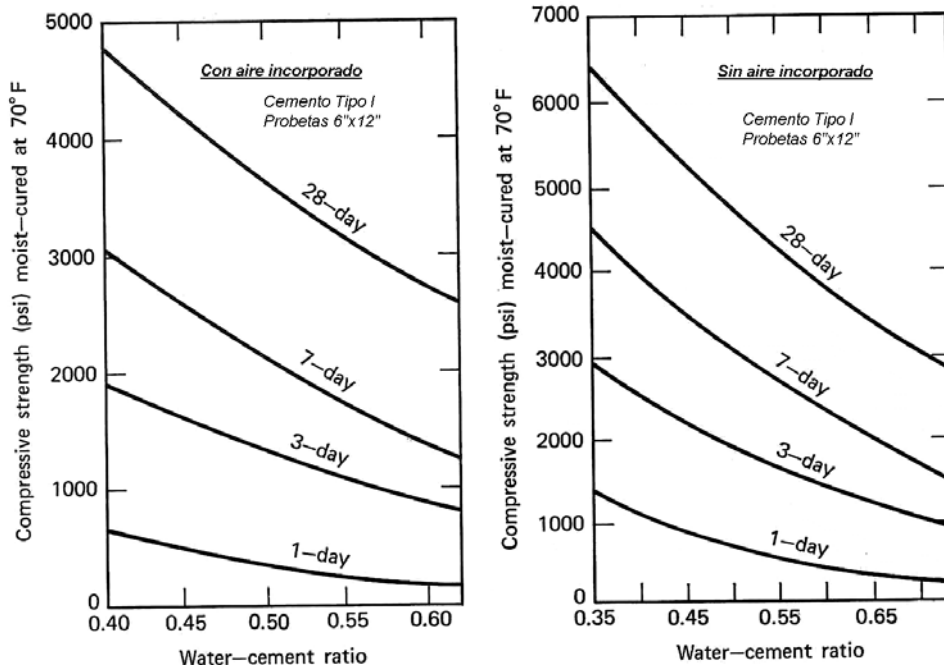


Fig. 1-3 Efecto de  $w/c$  en concretos con y sin aire incorporado.

- c) El aire incorporado (aire incluido o incorporado) en la mezcla a través de aditivos, tiende a reducir la resistencia en compresión. También el aire que queda atrapado (aire atrapado) por una consolidación no adecuada del concreto dentro de los encofrados, tiende a reducir la resistencia.

Las burbujas de aire incluido son del orden de 0.05 mm mientras que las de aire atrapado suelen ser mucho mayores, algunas de ellas tan grandes que se les denomina “marcas de viruela” como aquellas que se aprecian en la superficie de algunos elementos de concreto, principalmente muros, luego de desencofrar.

En la figura 1-3 se puede apreciar el efecto del aire incluido por medio de aditivos en la mezcla. Es claro que para una misma relación  $w/c$  las mezclas con aire incluido (a la izquierda de la figura) presentan resistencias menores.

La figura 1-4 (Neville) muestra la reducción de la resistencia del concreto por el efecto del aire incluido y el atrapado. La figura demuestra que la presencia de aire, sin ningún otro cambio en las proporciones de la mezcla, genera una reducción en la resistencia que es prácticamente proporcional al volumen del aire incluido. También muestra el efecto del aire atrapado como producto de una mala compactación.

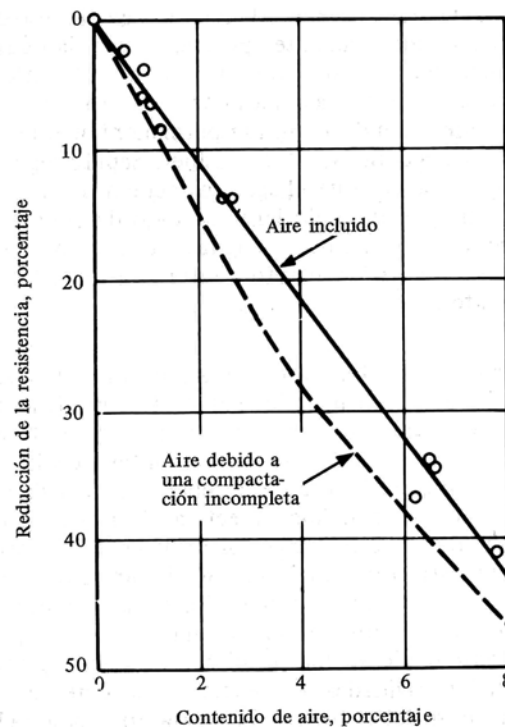


Fig. 1-4 Efecto del contenido de aire en el concreto

- d) El tipo de cemento. El tipo de cemento normalmente afecta la velocidad con la cual se logra  $f_c$ . El Cemento Tipo III, por ejemplo, es de una alta resistencia inicial o de rápido endurecimiento. A la edad de un día los concretos fabricados con Cemento Tipo III exhiben, aproximadamente, una resistencia dos veces mayor que los fabricados con Cemento Tipo I y a los 7 días una resistencia entre 1.2 y 1.5 veces mayor.

Los Cementos Tipo II (calor de hidratación moderado y resistencia moderada a los sulfatos) el Tipo IV (de bajo calor de hidratación) y el Tipo V (resistente a los sulfatos) desarrollan resistencia en el tiempo mas lentamente que el Tipo I.

A partir los dos o tres meses de edad aproximadamente, los concretos fabricados con cualquiera de los cinco tipos de cemento definidos por la Norma ASTM C150, exhiben prácticamente la misma resistencia.

- e) La gradación, textura y origen de los agregados. La gradación influye en la porosidad y la textura superficial afecta la adherencia entre el agregado y la matriz y el tamaño del área adherida.

Los concretos de resistencia normal fabricados con agregados gruesos resistentes, fallan en compresión por el agrietamiento del mortero (matriz) y muestran un curva esfuerzo – deformación con una amplia rama descendente. En contraste si el agregado falla antes que el mortero, la falla tiende a ser súbita con una rama descendente corta y muy inclinada.

- f) Las condiciones de humedad y temperatura durante el curado. Debido al proceso continuo de hidratación del cemento, el concreto aumenta su resistencia en el tiempo dependiendo de las condiciones de intercambio de humedad con el ambiente, por ello las condiciones de humedad durante el curado afectan fuertemente la resistencia. Periodos prolongados de curado aumentan significativamente la resistencia.

La figura 1-5 (Mehta) muestra la influencia de las condiciones y tiempo de curado en la resistencia del concreto. Las diferencias en la resistencia por el efecto del curado son notables entre los concretos curados al aire (curva inferior) y los curados por vía húmeda. La figura 1-6 (González Cuevas) muestra las curvas esfuerzo – deformación de probetas fabricadas con un mismo concreto y ensayadas a distintas edades, todas las probetas fueron curadas bajo las mismas condiciones hasta el día del ensayo.

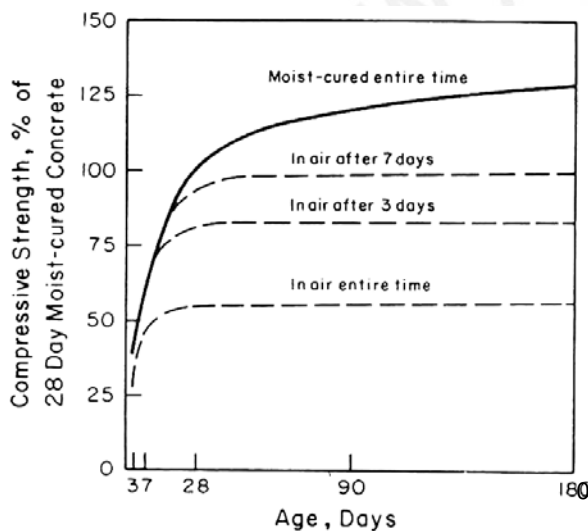


Fig. 1-5 Influencia de las condiciones de curado en la resistencia.

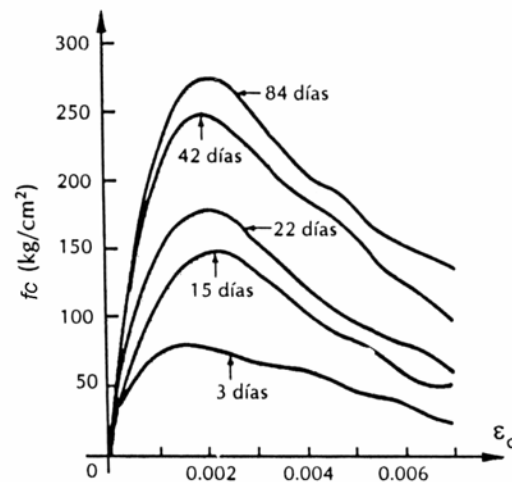


Fig. 1-6 Efecto de la edad y del curado en la resistencia.

- g) La edad del concreto. Con Cemento Tipo I la resistencia a los 7 días es aproximadamente el 65% a 70% de la resistencia a los 28 días. En la figura 1-3 se nota claramente el efecto de la edad en la resistencia para probetas curadas permanentemente hasta el día del ensayo.

En la figura 1-5 es posible apreciar que una probeta curada durante 7 días, que suele ser el plazo mínimo recomendado de curado para cementos Portland normales, aumenta poco su resistencia luego de un mes. En consecuencia, en estructuras reales curadas durante plazos convencionales, no es de esperarse un aumento importante en la resistencia con el tiempo.

- h) La velocidad de carga o de deformación. Los ensayos de probetas se realizan a una velocidad especificada por la Norma (ver 1.2), sin embargo en las estructuras reales la velocidad con la cual se aplica la carga es distinta a la del ensayo. Este suele ser el caso de las cargas vivas, de las cargas de impacto y de las cargas inducidas por las acciones sísmicas.

A velocidades de carga muy altas,  $f_c$  puede aumentar en un 15% a 20% o más. Por ejemplo cuando la probeta se lleva a la falla en 0.1 a 0.15 segundos, lo que corresponde a una velocidad de carga de unos 2,000 kg/cm<sup>2</sup> por segundo, la resistencia del concreto se incrementa en un 15%. Esta velocidad de carga es la que podría esperarse en una estructura rígida durante un sismo intenso.

La figura 1-7 (Bresler) y 1-8 (González Cuevas) muestran la influencia de la velocidad de aplicación del esfuerzo de compresión sobre la resistencia del concreto. Es clara la influencia de las cargas (esfuerzos) aplicadas rápidamente, también el hecho de que a velocidades de carga muy bajas  $f_c$  se reduce hasta en un 15%. Este fenómeno probablemente se deba a que con velocidades de carga muy bajas, puede producirse un mayor creep o flujo plástico en el concreto. Como resultado, las deformaciones en el concreto se incrementan más rápidamente y la falla ocurre cuando se alcanza una cierta deformación límite, independiente de la magnitud del esfuerzo aplicado en ese instante.

En la figura 1-8 no ha sido posible obtener la rama descendente de la curva, por lo menos para cargas lentas, ya que el ensayo fue controlado por carga.

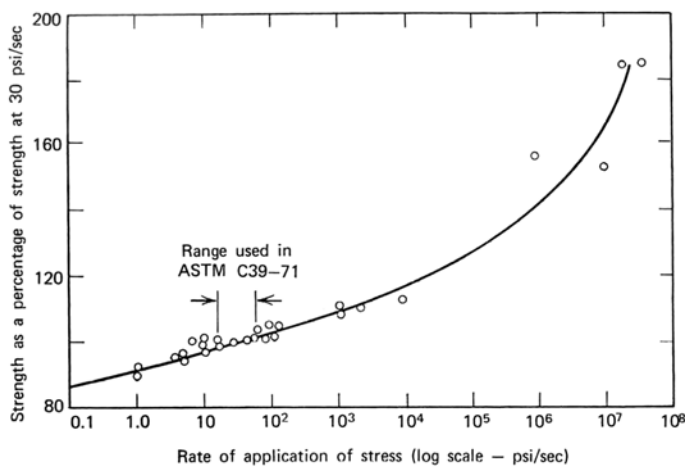


Fig. 1-7 Influencia de la velocidad de carga.

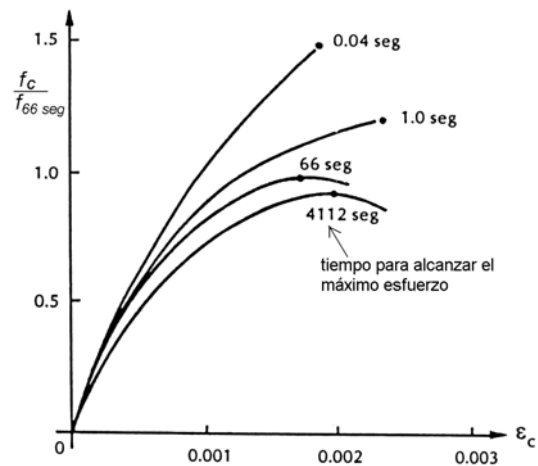


Fig. 1-8 Efecto de la velocidad de carga en la curva esfuerzo – deformación.

La figura 1-9 (adaptada de Neville) muestra las curvas esfuerzo – deformación de probetas cargadas axialmente para distintas velocidades de deformación. En este caso el ensayo se hace controlando la deformación longitudinal (axial) de la probeta y, a diferencia de los ensayos controlados por velocidad de carga, sí es posible obtener la rama descendente de la curva. La velocidad de deformación, por lo menos en el rango presentado en la figura, no tiene una marcada influencia en la resistencia máxima, la influencia fuerte está en la forma de las curvas. La diferencia en las formas de las curvas para velocidades lentas, se debe al efecto del creep o flujo plástico.

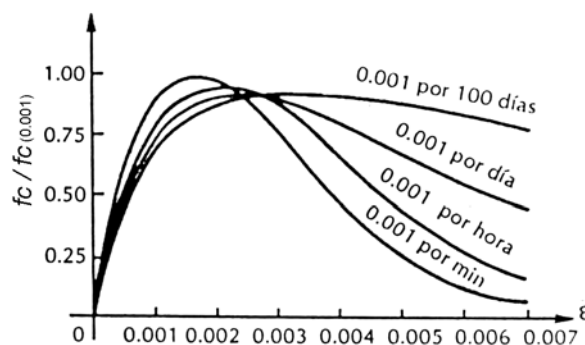


Fig. 1-9 Efecto de la velocidad de deformación

#### **1.4 Resistencia del Concreto en la Estructura Real**

En general, la resistencia del concreto en la estructura real, tiende a ser menor que la resistencia  $f_c$  obtenida en laboratorio a partir de las probetas fabricadas y ensayadas de acuerdo a las normas. Recuerde que, en teoría, las probetas miden el **potencial resistente** del concreto al cual representan. Las siguientes son algunas de las razones por las cuales se producen las diferencias:

- a) Las diferencias en la colocación y compactación entre el concreto colocado y compactado (vibrado) en la estructura real y el concreto colocado y compactado en una probeta.
- b) Las diferencias en el curado. Es clara la diferencia notable en las condiciones de curado entre una probeta de laboratorio y una estructura real.
- c) El efecto de la migración hacia arriba del agua en el concreto colocado en una estructura real. Esto genera que la relación  $w/c$  no sea uniforme a lo largo de la altura del elemento. En elementos peraltados el concreto de la parte superior suele ser menos resistente que el de la parte inferior. Esto debido a un aumento en la relación  $w/c$  por la migración del agua luego de colocado el concreto, y por la mayor compactación del concreto de la parte inferior producto del peso del concreto por encima.
- d) El efecto de la segregación de los agregados que se produce durante el llenado de las columnas. Este efecto genera un concreto no uniforme.
- e) Las diferencias de forma y tamaño entre los elementos de una estructura y la probeta de laboratorio. La probeta es cilíndrica de 6"x12" mientras que el elemento real puede tener cualquier forma y tamaño.
- f) Las diferencias entre los regímenes de esfuerzos en una probeta y en el elemento real. En una probeta la sollicitación es prácticamente de compresión uniforme, con algunas distorsiones o concentraciones de esfuerzos cerca de las zonas de aplicación de las cargas, mientras que en el elemento estructural real pueden existir fuertes gradientes de esfuerzos. Por ejemplo en la zona comprimida de una viga sometida a flexión, las fibras menos esforzadas, las cercanas al eje neutro, tienden a estabilizar a las fibras más esforzadas.

La resistencia del concreto en una estructura real se puede estimar mediante la extracción de testigos perforados (Norma Peruana artículo 4.6.6, ACI-02 artículo 5.6.5). La uniformidad del concreto en la estructura real se puede determinar con la ayuda de un instrumento denominado Esclerómetro, con el cual se determina la dureza superficial del concreto. Aunque algunos de los Esclerómetros incluyen tablas de correlación entre la dureza superficial y la resistencia del concreto, estos valores deben tomarse con suma prudencia, los resultados deben interpretarse como una medida de la uniformidad del concreto y no como una medida directa de la resistencia del concreto.

#### **1.5 Resistencia a la Tracción del Concreto**

La resistencia en tracción directa o en tracción por flexión del concreto, es una magnitud muy variable. La resistencia a la tracción directa ( $f_t$ ) del concreto varía entre el 8% y el 15% de la resistencia en compresión ( $f_c$ ).

La resistencia a la tracción del concreto es importante ya que la resistencia al corte del concreto, la adherencia entre el concreto y el acero y la fisuración por retracción y temperatura, dependen mucho de esta.

La resistencia en tracción directa, depende mucho del tipo de ensayo utilizado para su determinación. El ensayo en tracción directa no es simple de ejecutar por el tamaño de la probeta, por la baja resistencia en tracción del concreto, por su fragilidad ante esta

solicitación y por la dificultad de aplicar cargas sin producir concentraciones de esfuerzos que distorsionen los resultados de los ensayos.

La figura 1-10 (González Cuevas) muestra un ensayo en tracción directa sobre una probeta de sección variable. Es un ensayo difícil de ejecutar y no está normalizado. Nótese que la curva esfuerzo – deformación se puede aproximar bastante bien mediante una parábola. También es importante hacer notar la pequeña deformación axial asociada al valor máximo del esfuerzo de tracción (0.00001) y al esfuerzo de rotura. La deformación de rotura en este caso, es del orden de la vigésima parte de la deformación de rotura en compresión del concreto especificada por el ACI (0.003).

La resistencia a la tracción del concreto depende también del tipo de agregado y de la presencia de esfuerzos transversales a los de tracción (estados biaxiales o triaxiales). Se desarrolla mas rápidamente en el tiempo que la resistencia a la compresión.

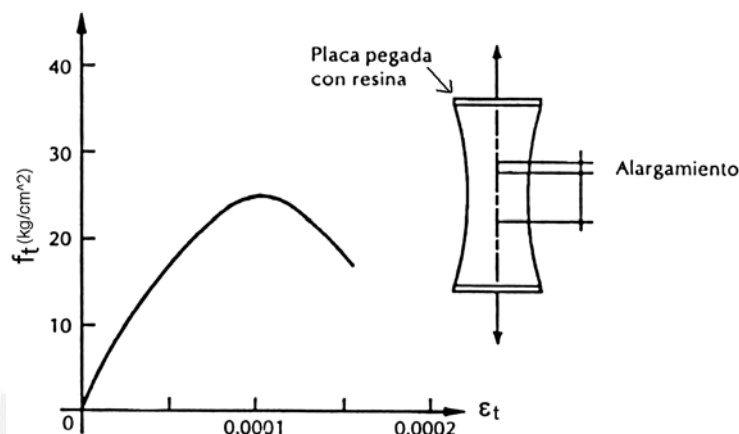


Fig. 1-10 Ensayo de tracción directa.

Los principales ensayos utilizados para determinar, de manera indirecta, la resistencia a la tracción del concreto son:

- a) Módulo de Rotura  $f_r$  (ensayo de tracción por flexión) es una medida indirecta de  $f_t$ . Se obtiene ensayando hasta la rotura una probeta prismática de concreto simple de 6"x6"x18" simplemente apoyada, con cargas a los tercios. Para calcular el esfuerzo de rotura  $f_r$  se asume una distribución lineal de los esfuerzos internos y se aplica la formula de resistencia de materiales:

$$f_r = 6 M / (bh^2) \quad (1-1)$$

El ajuste de un gran número de resultados experimentales, arroja un promedio (con mucha dispersión) de:

$$f_r \approx 2.2 \sqrt{f'_c} \quad (\text{kg/cm}^2) \quad (1-2)$$

EL ACI y la Norma Peruana, definen el Módulo de Rotura del concreto mediante la ecuación 1-3. El ACI utiliza esta ecuación para el cálculo de deflexiones en elementos de concreto armado. Sin embargo para elementos de concreto simple (sin armadura) sometidos a flexión el ACI-02 (artículo 22.5.1) especifica el valor dado por la ecuación 1-4.

$$f_r \approx 2 \sqrt{f'_c} \quad (\text{kg/cm}^2) \quad (1-3) \text{ ACI-02 } 9.5.2.3$$

$$f_r \approx 1.3 \sqrt{f'_c} \quad (\text{kg/cm}^2) \quad (1-4) \text{ ACI-02 } 22.5.1$$

- b) Split Test  $f_{sp}$ . También llamado Ensayo Brasileño o Ensayo de Compresión Diametral. Se ensaya hasta la rotura una probeta cilíndrica de estándar 6"x12"

cargada diametralmente, tal como se ilustra en la figura 1-10. Los esfuerzos a lo largo del diámetro vertical varían de compresiones transversales muy altas cerca de las zonas de aplicación de cargas a esfuerzos de tracción prácticamente uniformes en aproximadamente las dos terceras partes del diámetro. El esfuerzo de rotura se calcula con la formula 1-5 deducida de la teoría de la elasticidad para materiales homogéneos.

$$f_{sp} = 2 P / (\pi l d) \quad (1-5)$$

El ajuste de un gran número de resultados experimentales, arroja un promedio (con mucha dispersión) de:

$$f_{sp} \approx 1.7 \sqrt{f_c} \quad (\text{kg/cm}^2) \quad (1-6)$$

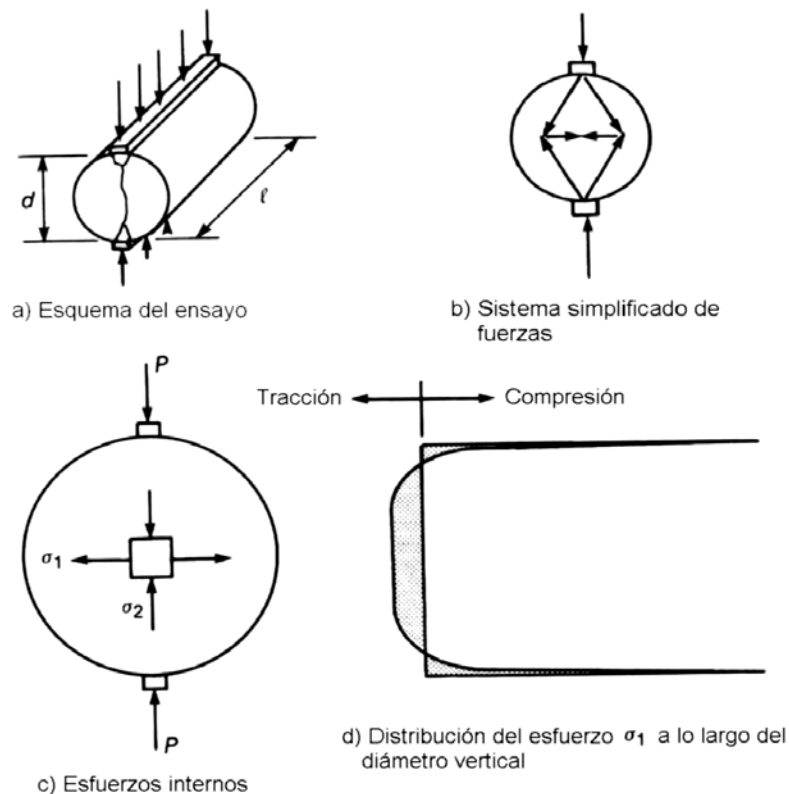


Fig. 1-10 Ensayo de Compresión Diametral (Split Test)

La figura 1-11 (MacGregor) muestra los resultados de un gran número de ensayos de compresión diametral ( $f_{sp}$ ) con relación a la resistencia a la compresión  $f_c$ . La curva (ajuste) superior corresponde al promedio representado por la ecuación 1-6 en unidades inglesas. Es notoria la fuerte dispersión de los resultados en todos los rangos de resistencia, en consecuencia los valores promedio deben utilizarse con criterio.

En general las resistencias obtenidas de los ensayos, se ordenan del siguiente modo:

$$f_r > f_{sp} > f_t \quad (1-7)$$

El CEB (Jiménez Montoya) admite las siguientes relaciones entre los resultados de los ensayos:

$$f_t \approx 0.9 f_{sp} \quad (1-8)$$

$$f_t \approx 0.5 f_r \quad (1-9)$$



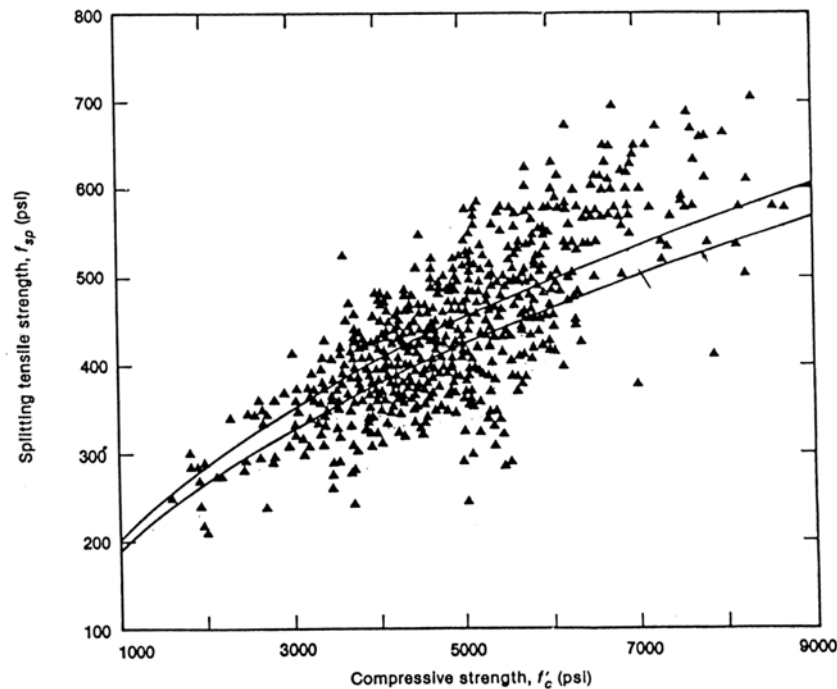


Fig. 1-11 Relación entre el ensayo Split Test y la resistencia en compresión

Tal como se mencionó, las deformaciones de rotura medidas en los ensayos de tracción son pequeñas, los siguientes son valores referenciales (MacGregor):

Tracción axial ( $f_t$ ):  $\epsilon_{rotura} = 0.0001$  a  $0.00015$

Tracción por flexión ( $f_r$ ):  $\epsilon_{rotura} = 0.00014$  a  $0.0002$

El ensayo de tracción por flexión o módulo de rotura ( $f_r$ ) presenta mayor dispersión que el ensayo de compresión diametral. Esto se debe a que en la probeta utilizada, la hipótesis de secciones planas que se utiliza para calcular la resistencia  $f_r$  no es válida y al gradiente de esfuerzos que existe en la zona traccionada de la probeta, gradiente que origina que las fibras menos esforzadas, las cercanas al eje neutro, tiendan a estabilizar a las más esforzadas. La correlación entre la resistencia a tracción por flexión y la resistencia a la tracción directa no es buena. Si fuera necesario estimar la resistencia a la tracción directa del concreto, es preferible utilizar el ensayo de compresión diametral.

Debido a la baja resistencia en tracción del concreto, esta generalmente se desprecia en los cálculos de resistencia en flexión y flexocompresión. Sin embargo el comportamiento de los elementos de concreto armado bajo cargas de servicio (fisuración y deflexiones por flexión) es fuertemente dependiente de la resistencia a tracción del concreto. Además existen situaciones en las cuales el diseño del concreto se realiza en estado elástico y está controlado por la resistencia en tracción del concreto, como por ejemplo en cimentaciones sin armar, estanques o reservorios impermeables, pavimentos.

Si fuese necesario contar con un modelo simplificado (diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$ ) del comportamiento en tracción directa del concreto, por ejemplo para el diseño de tirantes en los cuales no se acepta fisuración, puede suponerse un diagrama lineal hasta la deformación de rotura en tracción, o hasta un esfuerzo máximo aproximado de  $0.1 f'_c$ , con una pendiente aproximadamente igual a la del módulo de elasticidad del concreto en compresión. Esta última suposición relativa al módulo de elasticidad en tracción del concreto, se ha comprobado experimentalmente que es aceptable.

### 1.6 Módulo de Elasticidad del Concreto Simple para Cargas de Corta Duración

Para estimar las deformaciones en elementos o estructuras de concreto armado, debidas a las cargas de corta duración, donde es posible asumir para el concreto una relación lineal entre esfuerzos y deformaciones sin errores importantes, es necesario definir un valor del módulo de elasticidad. Las curvas esfuerzo - deformación del concreto no son lineales (ver figuras 1-2, 1-6, 1-8, 1-9) por lo tanto el concepto convencional de módulo de elasticidad, como el que empleamos para el acero, no es correcto. Sin embargo para esfuerzos bajos de hasta  $0.4$  a  $0.5 f_c$  el suponer un comportamiento lineal no conlleva a errores importantes.

La figura 1-12 (Harmsen) muestra las distintas definiciones que puede adoptar el módulo de elasticidad del concreto simple: el módulo tangente inicial, el módulo tangente en un punto determinado de la curva y el módulo secante entre dos puntos de la misma. Esta última definición es la más utilizada para cargas de corta duración y se suele calcular para un esfuerzo cercano a  $0.5 f_c$ . El módulo de elasticidad tangente inicial, normalmente es un 10% mayor que el secante. Las Normas ASTM (C469-94) especifican la manera de calcular el módulo secante a partir de los ensayos de compresión en probetas estándar de concreto.

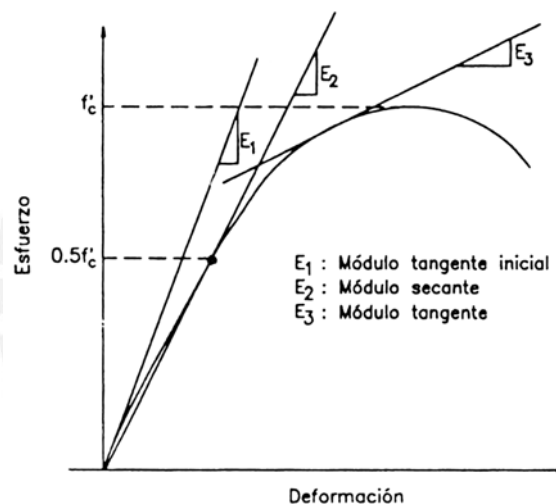


Fig. 1-12 Módulo de elasticidad del concreto

Para tomar en cuenta los efectos de las cargas sostenidas (cargas de larga duración) es necesario corregir el módulo de elasticidad determinado para cargas de cortas duración, ya que el flujo plástico del concreto modifica las deformaciones internas. Una posibilidad es utilizar el Coeficiente de Flujo Plástico del concreto  $C_t$  (Sección 2.2.3) el cual es dependiente del tiempo, con lo cual el módulo de elasticidad puede aproximarse mediante la ecuación 1-10 (Park - Paulay).

$$E_c(t) = \frac{E_c}{1 + C_t} \quad (1-10)$$

El módulo de elasticidad del concreto depende de muchas variables, entre las principales están:

- El módulo de elasticidad de la pasta de cemento (matriz). Un incremento en la relación  $w/c$  aumenta la porosidad de la pasta reduciendo el módulo de elasticidad ( $E_c$ ) en consecuencia hay dependencia entre  $E_c$  y  $f'_c$ .

- b) El módulo de elasticidad de los agregados. Los agregados de peso normal tienen un módulo que varía entre 1.5 a 5 veces el módulo de elasticidad de la pasta. Por lo tanto el tipo de agregado y la cantidad presente en la mezcla influyen fuertemente en el valor de  $E_c$ .

El ACI permite estimar el valor  $E_c$  para concretos de peso específico entre 1,400 y 2,500  $\text{kg/m}^3$  mediante la ecuación 1-11:

$$E_c = 0.14 (\gamma)^{1.5} \sqrt{f'_c} \quad (\text{kg/cm}^2) \quad (1-11) \quad \text{ACI-02 8.5.1}$$

Siendo  $\gamma$  el peso específico del concreto en  $\text{kg/m}^3$ . Este valor corresponde al módulo de elasticidad secante del concreto, medido al 45% de  $f'_c$  aproximadamente, en ensayos de corta duración.

Para Concretos de Peso Normal (aproximadamente 2,300  $\text{kg/m}^3$ ) el ACI y la Norma Peruana permiten estimar  $E_c$  mediante:

$$E_c = 15,000 \sqrt{f'_c} \quad (\text{kg/cm}^2) \quad (1-12) \quad \text{E-060 9.4.2}$$

Ya que estas ecuaciones ignoran el tipo de agregado utilizado, su dispersión es amplia, los valores medidos en ensayos varían entre 0.8 y 1.2 del predicho por las ecuaciones. Cuando sea necesario una mejor estimación del módulo de elasticidad para cargas de corta duración, por ejemplo para el caso en que las deflexiones o vibraciones sean determinantes en el diseño, se recomienda obtener mediante ensayos el módulo de elasticidad del concreto a utilizarse.

### 1.7 Módulo de Poisson del Concreto

Por debajo del esfuerzo crítico (75% a 80% de  $f'_c$ ) el Módulo de Poisson -  $\mu$  - varía entre 0.11 y 0.21. Normalmente está en el rango de 0.15 a 0.20 y permanece aproximadamente constante bajo cargas sostenidas. En la práctica se suele adoptar  $\mu = 0.15$ , con lo cual el Módulo de Rigidez al Esfuerzo Cortante es:

$$G_c = E_c / 2 (1 + \mu) \quad (1-13)$$

$$G_c = E_c / 2.3 \quad (1-14)$$

### 1.8 Mecánica de la Fractura del Concreto en Compresión

La figura 1-13 (Mehta) muestra el comportamiento en compresión de la pasta de cemento hidratada y de los agregados utilizados para fabricar concreto. El comportamiento de ambos es frágil y prácticamente lineal hasta la falla, sin embargo, el concreto que es un material compuesto por la mezcla de los dos anteriores, muestra un comportamiento en compresión no lineal con algo de ductilidad.

Este fenómeno de comportamiento no lineal y de ductilidad aparente, se puede explicar si se observa en la figura 1-14, en la cual se muestra el estado de microfisuración interna en la interfase entre la pasta y el agregado (fisuras de adherencia) y en la misma pasta de cemento (fisuras en el mortero). El estado de microfisuración interna depende del nivel del esfuerzo aplicado, cerca del esfuerzo máximo ( $f'_c$ ) la fisuración interna es muy pronunciada tanto en la interfase como en la pasta misma.

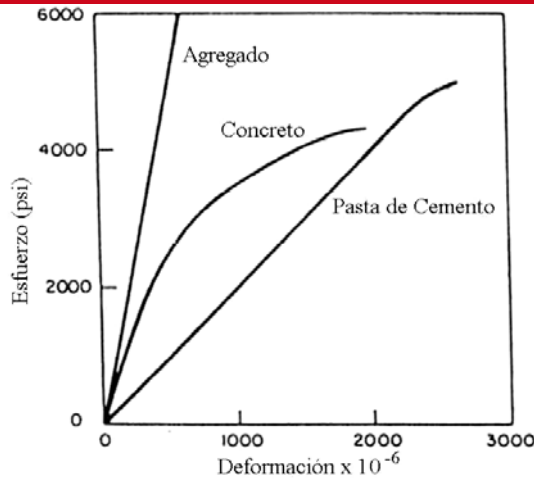


Fig. 1-13 Curvas esfuerzo – deformación del concreto y sus componentes

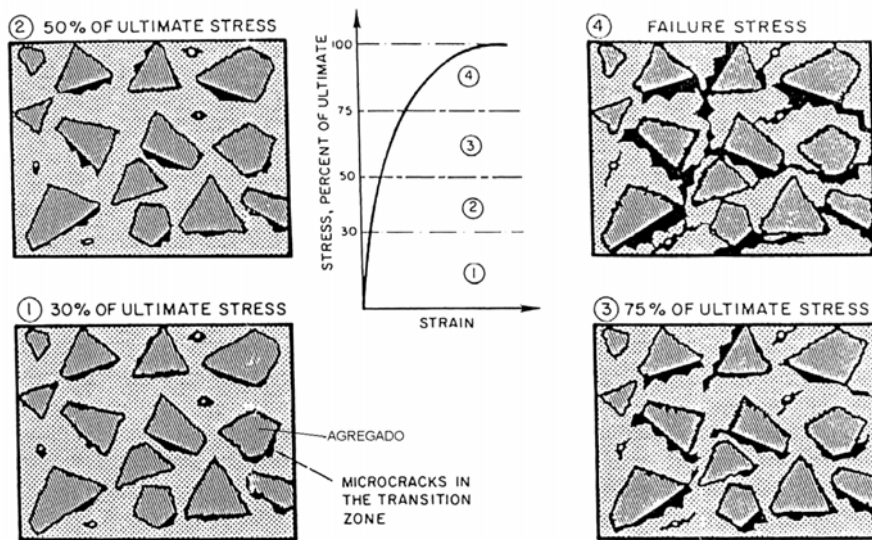


Fig. 1-14 Fisuración interna en el concreto sometido a esfuerzos

Las deformaciones longitudinales  $\epsilon_1$  y transversales  $\epsilon_3$  (por efecto Poisson) que se producen en un ensayo de compresión, son como se muestran en la figura 1-15 (MacGregor).

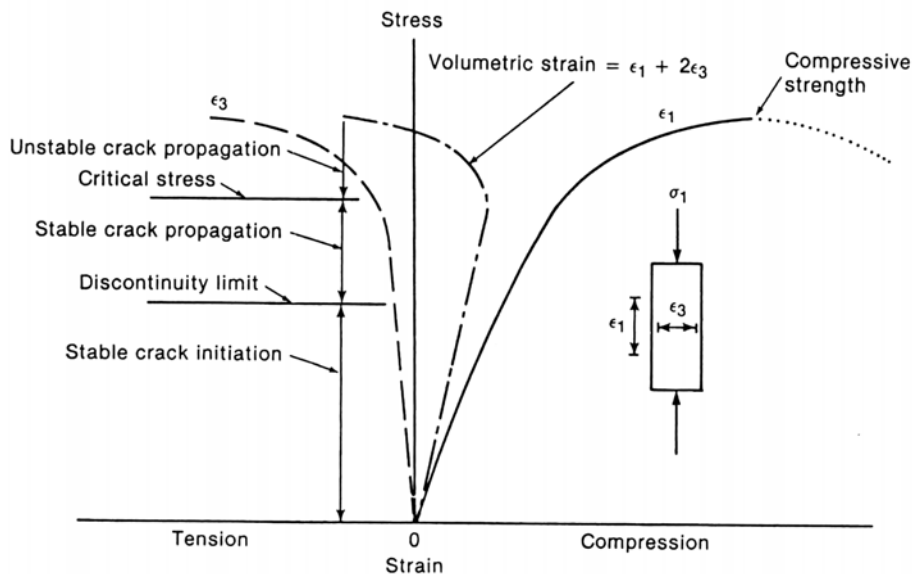


Fig. 1-15 Curva esfuerzo - deformación para el concreto sometido a compresión

Cuando los esfuerzos exceden del 30% a 40% de  $f'_c$ , se empiezan a formar las fisuras de adherencia en la interfase entre la pasta y los agregados, este agrietamiento es estable y se propaga solamente si se aumenta el esfuerzo axial. Al aumentar la carga los esfuerzos internos se redistribuyen hacia las zonas de interfase que aún no se han agrietado y hacia el mortero (pasta). Esta redistribución origina que el diagrama esfuerzo - deformación empiece a curvarse a partir de un esfuerzo cercano a  $0.4, 0.5 f'_c$ .

La propagación del agrietamiento interno es estable hasta el denominado Esfuerzo Crítico (entre  $0.75$  a  $0.8$  de  $f'_c$ ). Al alcanzar este esfuerzo la estructura interna del concreto se convierte en inestable, se incrementa el agrietamiento en el mortero y aumenta el comportamiento global no lineal. La deformación lateral ( $\epsilon_3$ ) y la deformación volumétrica crece fuertemente.

Los gradientes de esfuerzos que se producen en las situaciones reales, por ejemplo en la zona comprimida de una viga en flexión, atenúan el efecto de la propagación inestable ya que las fibras menos comprimidas estabilizan a las más comprimidas.

La figura 1-16 muestra el efecto que tienen las cargas sostenidas de compresión en un elemento de concreto sin armaduras de refuerzo (el denominado efecto de la permanencia de la carga). En esta figura, la curva inferior denominada límite de deformación, muestra las deformaciones máximas que se obtendrían al aplicar indefinidamente esfuerzos de compresión, inferiores al esfuerzo crítico. Es claro que bajo cargas constantes las deformaciones aumentan con el tiempo por el efecto del flujo plástico del concreto. La curva superior, denominada límite de falla, indica las deformaciones a la falla correspondientes a las cargas superiores al valor crítico.

La intersección entre las dos curvas mencionadas en el párrafo anterior, representa teóricamente el porcentaje de la resistencia del concreto por debajo del cual el elemento puede resistir la carga de compresión indefinidamente. Si se carga en compresión un elemento de concreto sin armar hasta cerca del esfuerzo crítico y se mantiene la carga en el tiempo, el concreto fallará.

En teoría, un elemento de concreto sin armar, puede soportar cargas indefinidamente sin fallar, hasta para un esfuerzo en el orden del 60% de su resistencia. Cargas mayores, aplicadas de modo permanente, que produzcan esfuerzos mayores al 70 – 80% de su capacidad, provocarán la falla del elemento.

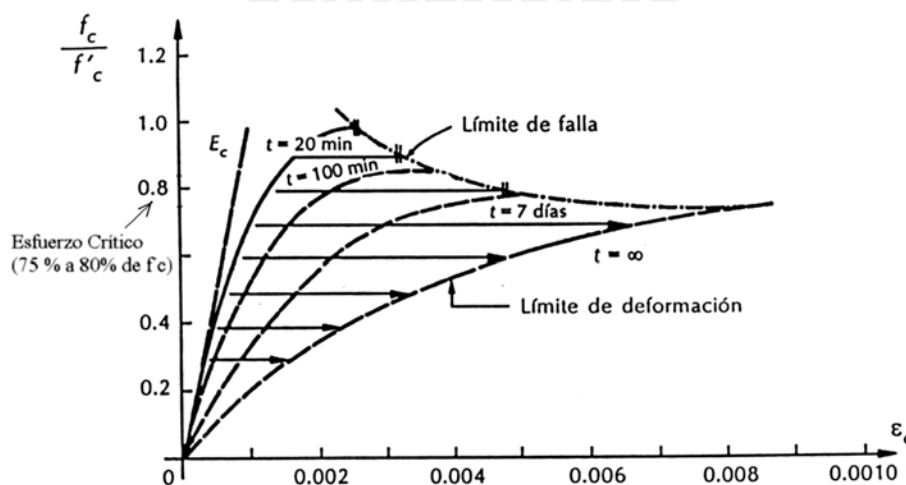


Fig. 1-16 Efecto de las cargas sostenidas de compresión.

### 1.9 Efecto del Confinamiento (Estados Triaxiales)

A partir del esfuerzo crítico el fuerte aumento de la deformación lateral del concreto hace que este empiece a empujar al refuerzo transversal, si lo hubiera, que sirve de confinamiento al concreto (estribos, espirales o zunchos). El confinamiento reacciona sobre el concreto restringiendo la deformación lateral o expansión, retardando así la desintegración del concreto.

La figura 1-17 (MacGregor) esquematiza el efecto del confinamiento que ejerce el refuerzo transversal (en este caso una espiral) sobre el concreto comprimido. En la parte (a) se muestra el núcleo de concreto sometido a un esfuerzo de compresión  $f_1$  y los esfuerzos de compresión  $f_2$  que surgen por el efecto del confinamiento que reacciona sobre el concreto. La parte (b) es una vista en planta del núcleo y de media vuelta de la espiral y la parte (c) representa un elemento de concreto sometido a un estado triaxial de esfuerzos como consecuencia del confinamiento proporcionado por el refuerzo transversal.

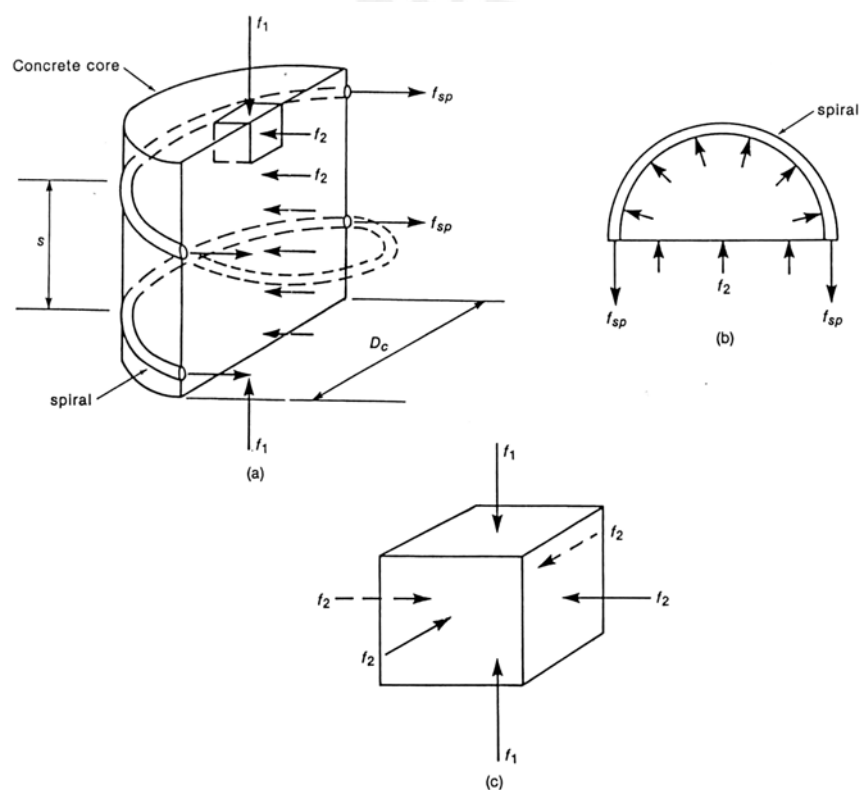


Fig. 1-17 Efecto del confinamiento sobre el concreto

La figura 1-18 (adaptada de MacGregor) muestra la influencia que tienen los estados triaxiales tanto en la resistencia a compresión del concreto, como en la curva misma esfuerzo – deformación. En ella se resumen los resultados de ensayos de compresión en probetas de concreto simple sometidas a distintos estados triaxiales de esfuerzos ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ) de magnitud creciente.

La resistencia del concreto no confinado en la figura 1-18 es de  $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$  y el comportamiento del concreto no confinado está representado por la curva inferior correspondiente a un esfuerzo  $\sigma_3 = 0$ . Es notable el incremento en la resistencia del concreto que se logra bajo estados triaxiales de esfuerzos, así como la modificación en la forma de la curva esfuerzo – deformación y el aumento de la deformación última o de rotura -  $\epsilon_{cu}$  - del concreto.

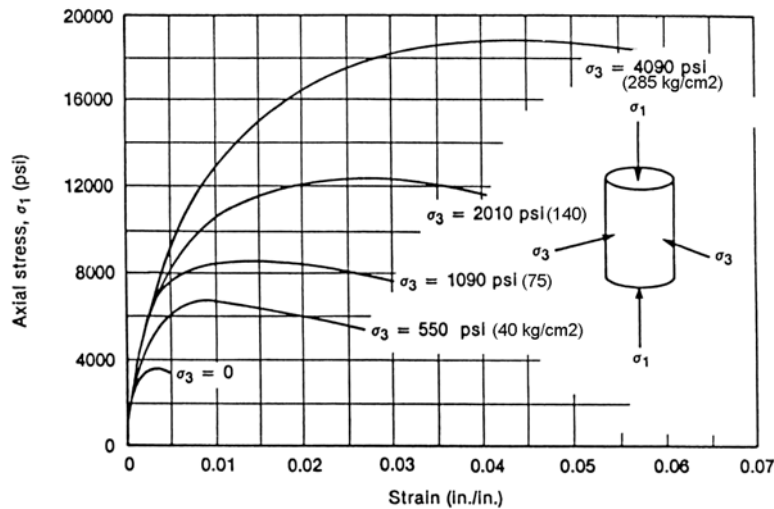


Fig 1-18 Comportamiento del concreto en compresión en estados triaxiales de esfuerzos.

Los resultados de estos ensayos sugieren que el esfuerzo longitudinal en la falla se puede aproximar mediante la ecuación 1-15.

$$\sigma_1 = f'_c + 4.1 \sigma_3 \quad (1-15)$$

Las figuras 1-19 y 1-20 (Park–Paulay) muestran los resultados de ensayos de compresión en probetas de concreto (sin refuerzo longitudinal) confinadas en un caso, por espirales con distintos pasos de las hélices y en el otro caso por estribos cerrados. Nuevamente es notoria la marcada influencia, tanto en la resistencia a la compresión como en la curva esfuerzo – deformación, que tiene el refuerzo transversal de confinamiento. Es claro que el efecto de confinamiento producido en el concreto por la presencia de una espiral, es bastante más marcado que para el caso de los estribos cerrados. Las espirales, debido a su forma, proveen un confinamiento continuo y producen presiones de confinamiento mayores y por ende son más eficientes. Los estribos cerrados (figura 1-20) tienen poca influencia en la resistencia, pero sí contribuyen a la ductilidad.

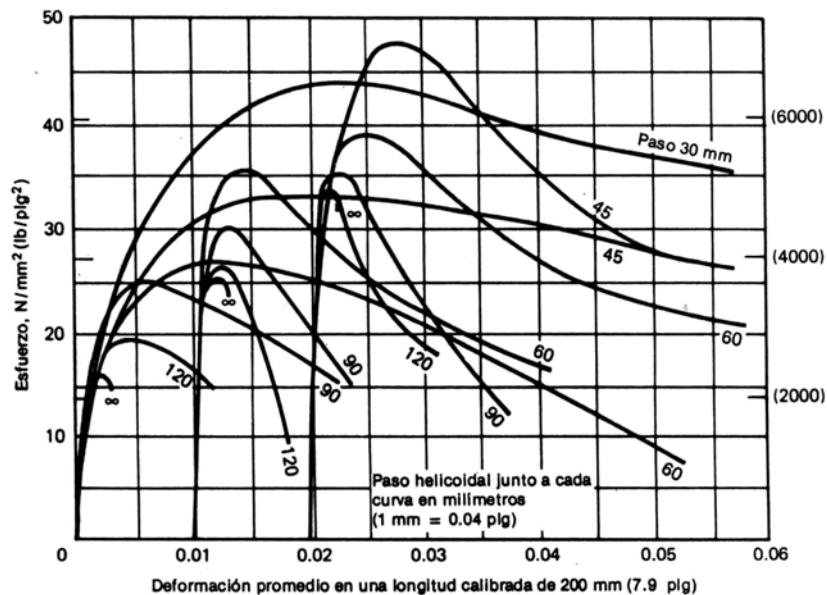


Fig. 1-19 Curvas esfuerzo – deformación para cilindros estándar de concreto (tres calidades de concreto) confinados por espirales de 1/4'' con distintos pasos.

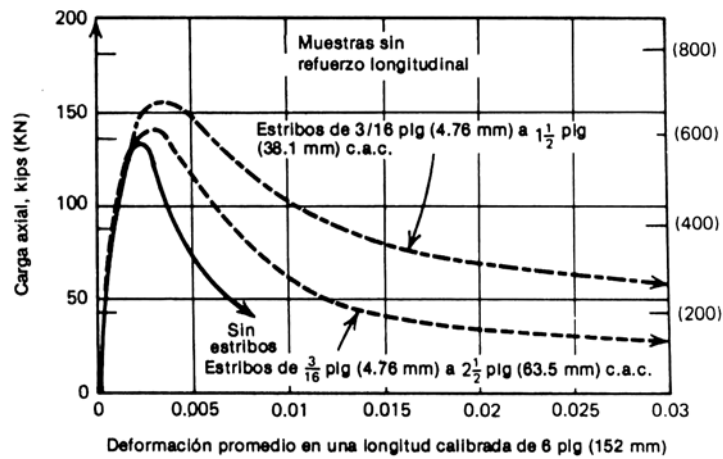


Fig. 1-20 Curvas carga – deformación axial para prismas de concreto de 4.5” de lado con estribos cerrados cuadrados.

Situaciones como las descritas, son comunes en los extremos de las columnas y vigas de concreto así como en los nudos o encuentros viga – columna donde se suele utilizar estribos poco espaciados, principalmente en elementos con responsabilidad sísmica donde se espera que se formen las rótulas en sismos severos. En estos casos cuando el concreto se esfuerza más allá de las cargas de servicio y se acerca al esfuerzo crítico, los estribos ejercen una presión de confinamiento sobre el concreto incrementando su resistencia y ductilidad. A este tipo de confinamiento se le denomina pasivo.

### 1.10 Comportamiento del Concreto en Compresión

La figura 1-21 muestra las formas típicas que tienen las curvas esfuerzo – deformación del concreto cargado axialmente. Las curvas han sido obtenidas de ensayos de compresión lentos con control de deformación, de tal modo que pudo obtenerse la zona descendente de las curvas. En ensayos con carga controlada, normalmente no es posible obtener la zona descendente.

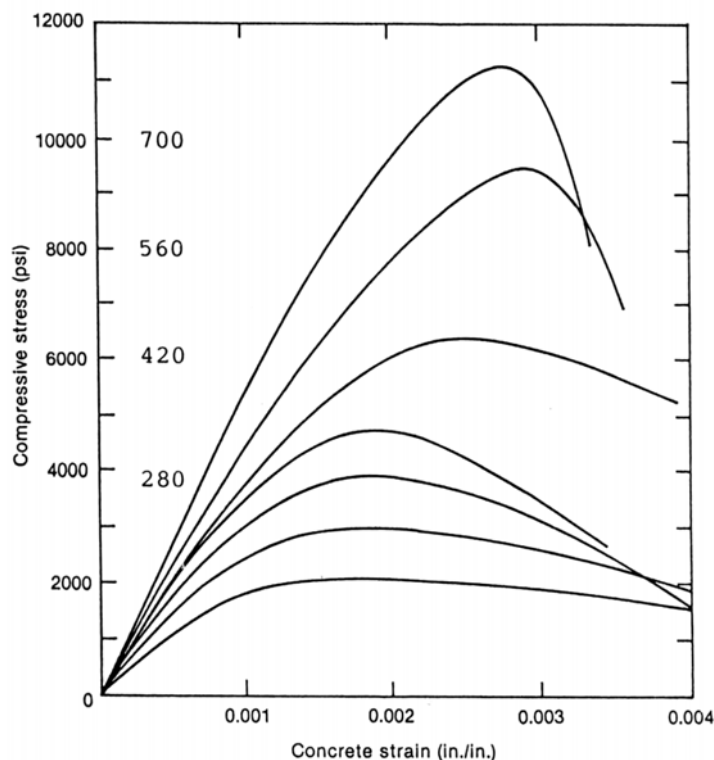


Fig. 1-21 Curvas típicas del concreto simple en compresión.



Es posible establecer algunas conclusiones generales de interés a partir de estas curvas:

- a) El concreto simple (sin armaduras de refuerzo) es un material frágil de baja capacidad de deformación que no tiene punto de fluencia ni rango de deformación plástica ni endurecimiento por deformación como el acero.
- b) A mayor resistencia ( $f_c$ ) tiene menor capacidad de deformación. La deformación máxima que puede alcanzar el concreto comprimido -  $\epsilon_{cu}$  - disminuye al aumentar  $f_c$ .
- c) La deformación - $\epsilon_o$  - correspondiente al valor de  $f_c$ , varía entre 0.0015 y 0.003. Al aumentar  $f_c$  aumenta  $\epsilon_o$ . Para concretos de hasta unos 350 kg/cm<sup>2</sup> el valor de  $f_c$  se presenta para deformaciones cercanas a 0.002.
- d) Luego de alcanzar  $f_c$  empieza una rama descendente producto de la fisuración interna. Por encima del esfuerzo crítico la propagación interna de las grietas se vuelve inestable.
- e) La longitud de la rama descendente está muy influenciada por las condiciones del ensayo (control de carga o de deformaciones) y por la máquina de ensayo (rígida o flexible), las máquinas flexibles conducen a fallas explosivas de las probetas.
- f) La curva es aproximadamente lineal hasta 0.4, 0.5 de  $f_c$ .
- g) La rama ascendente se puede aproximar por una parábola.

En elementos reales (por ejemplo vigas) la rama descendente de la curva esfuerzo – deformación siempre estará presente, por la presencia de gradientes de esfuerzos en los cuales las fibras menos esforzadas estabilizan a las más esforzadas.

### **1.11 Modelos para el Concreto**

Se han propuesto numerosas ecuaciones o modelos para describir analíticamente la curva esfuerzo – deformación del concreto en compresión. El problema es complejo ya que intervienen numerosas variables, entre ellas la presencia de confinamiento.

Afortunadamente las Normas permiten simplificaciones importantes en el modelo de comportamiento que se utiliza para el diseño de secciones de concreto armado, por ejemplo el ACI permite utilizar un bloque de compresiones rectangular. Sin embargo, cuando es necesario calcular (investigar) con mayor precisión la resistencia y ductilidad de un elemento, es necesario utilizar algún modelo de comportamiento. Hay que tener presente que rara vez se pueden determinar con precisión todas las variables que pueden influir en la forma de la curva y en los valores asociados de esfuerzos y deformaciones.

La figura 1-22 muestra una de las idealizaciones más comunes para el comportamiento del concreto no confinado, corresponde al modelo de Hognestad que data del año 1951. En este modelo se suele adoptar un valor de  $\epsilon_o = 0.002$  y un valor de  $\epsilon_{cu}$  comprendido entre 0.003 y 0.004.

La figura 1-23 ilustra el modelo utilizado por el CEB para el diseño de elementos de concreto armado en flexión simple. Consiste en una parábola seguida por una recta.

En los dos modelos comentados, el valor de  $f''_c$ , representa la resistencia del concreto en la estructura real, por ejemplo el CEB especifica  $f''_c$  equivalente a  $0.85 f_c$ .

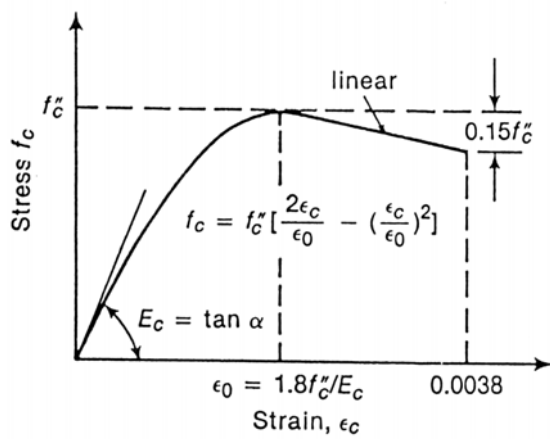


Fig. 1-22 Modelo de Hognestad (1951) concreto no

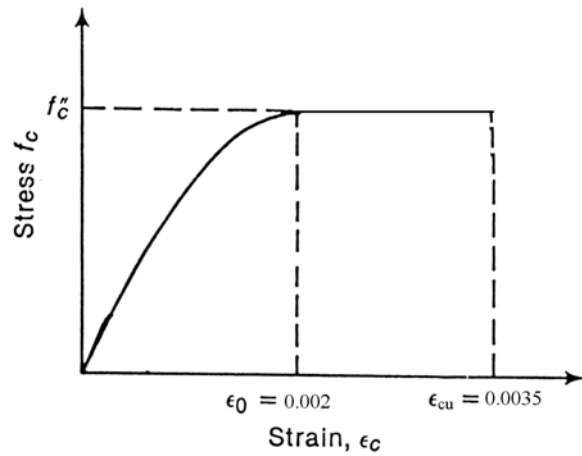


Fig. 1-23 Modelo del CEB para elementos en flexión simple

La figura 1-24 (Park-Paulay) muestra uno de los tantos modelos propuestos para el concreto confinado por estribos rectangulares. Conservadoramente no se ha modificado la resistencia del concreto por la presencia del confinamiento, su efecto se ha considerado en la longitud y pendiente de la rama descendente de la curva.

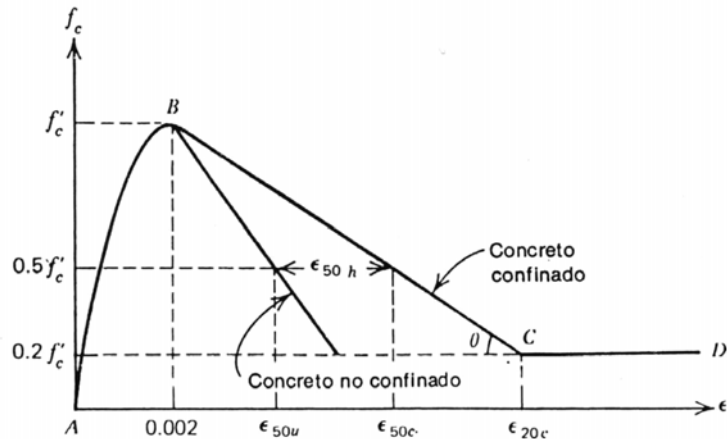


Fig. 1-24 Modelo de Kent y Park para concreto confinado por estribos rectangulares

La figura 1-25 muestra el Modelo de Mander para tres calidades de concretos no confinados (210, 280 y 350 kg/cm<sup>2</sup>). El Modelo de Mander es actualmente uno de los más utilizados para la investigación del comportamiento de secciones de concreto en flexión y flexocompresión. Es posible modificar la curva correspondiente al concreto no confinado, para incluir el efecto del confinamiento (estribos o espirales) tanto en el valor de  $f'_c$  como en la deformación máxima.

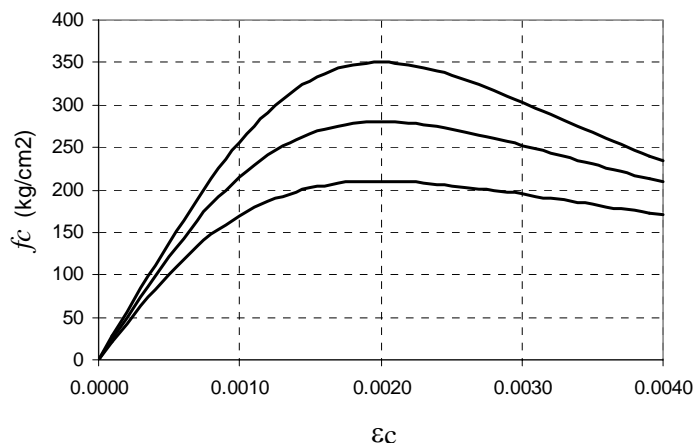


Fig. 1-25 Modelo de Mander para concreto no confinado

### 1.12 Concretos de Alta Resistencia

Los concretos de alta resistencia se definen, en la literatura especializada, a partir de un  $f_c$  superior a los  $420 \text{ kg/cm}^2$  ( $6,000 \text{ psi}$ ). En los Estados Unidos se han usado concretos con  $f_c$  de hasta  $1,300 \text{ kg/cm}^2$  en la construcción de algunos edificios altos.

Se logran con el uso de relaciones  $w/c$  muy bajas, con la ayuda de superplastificantes, micro sílice y el empleo de agregados resistentes, angulosos y de superficie rugosa. El concreto resultante tiene un volumen de vacíos menor que los concretos convencionales.

Las curvas esfuerzo – deformación (ver figura 1-21) exhiben una zona lineal inicial de mayor amplitud y una rama descendente mas pronunciada. La falla suele ocurrir por la fractura de los agregados con deformaciones laterales bastante menores que las asociadas a concretos convencionales, esto conlleva a que el refuerzo transversal de confinamiento sea menos efectivo en incrementar la resistencia y la deformación de rotura del concreto. El esfuerzo crítico se produce al 90% de  $f_c$  aproximadamente.

La expresión 1-11 ya no es válida para estimar el módulo de elasticidad del concreto de alta resistencia. Esta es válida para concretos de hasta  $420 \text{ kg/cm}^2$  aproximadamente de resistencia a la compresión.

### 1.13 Concretos Livianos

Los concretos livianos se definen para pesos específicos entre los  $1,400$  y  $1,900 \text{ kg/m}^3$ . Para su fabricación se utilizan agregados livianos, en algunos casos artificiales. Se utiliza arena de peso normal o arena liviana.

El módulo de elasticidad ( $E_c$ ) y la resistencia en tracción ( $f_t$ ) es inferior a los valores correspondientes para los concretos de peso normal.

Los concretos livianos son en general más costosos que los de peso normal, por los agregados que se utilizan en su fabricación. En nuestro medio se utilizan muy poco por la poca o nula disponibilidad de agregados livianos.

La figura 1-26 muestra algunas curvas típicas esfuerzo – deformación correspondientes a concretos livianos comparándolas con los de peso normal. La resistencia  $f_c$  se alcanza a mayores valores de  $0.002$  ( $\epsilon_0$ ) y hay una marcada diferencia tanto en la pendiente de la zona inicial como en la rama descendente de la curva.

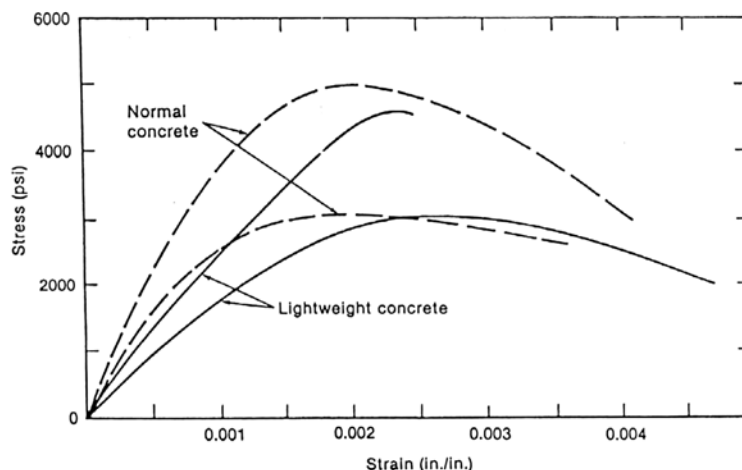


Fig. 1-26 Curvas esfuerzo – deformación para concretos de peso normal y livianos de  $210$  y  $350 \text{ kg/cm}^2$ .

## CAPITULO 2

### Cambios Volumétricos del Concreto



#### **Lecturas:**

- 2.1 Shrinkage Cracking in Fully Restrained Concrete Members. R. Ian Gilbert. ACI Structural Journal. March – April 1992.
- 2.2 Integrated View of Shrinkage Deformation. Aitcin, Neville, Acker. ACI Concrete International. September 1997.
- 2.3 Creep of Concrete and Behavior of Structures. Adam Neville. ACI Concrete International. May 2002, June 2002.
- 2.4 ACI 209R-92 (Reapproved 1997). Prediction of Creep, Shrinkage and Temperature Effects in Concrete Structures. ACI Manual of Concrete Practice.
- 2.5 Creep, Shrinkage, and Cracking of Restrained Concrete at Early Age. Salah Altoubat, David Lange. ACI Materials Journal, July – August 2001.
- 2.6 Why Concrete Walls Crack. Concrete Technology Today - PCA. June 1984.

## 2.1 Introducción

Una de las principales desventajas del concreto como material de construcción, está asociada a los cambios volumétricos que este experimenta a lo largo del tiempo. Los principales cambios volumétricos que experimenta el concreto a lo largo del tiempo, son los debidos al Creep o Flujo Plástico, los debidos a la Retracción (Shrinkage), también llamada Contracción de Fragua y los asociados con los cambios de temperatura. Las figuras 2-1 y 2-2 (Mehta) muestra esquemáticamente los dos primeros fenómenos.

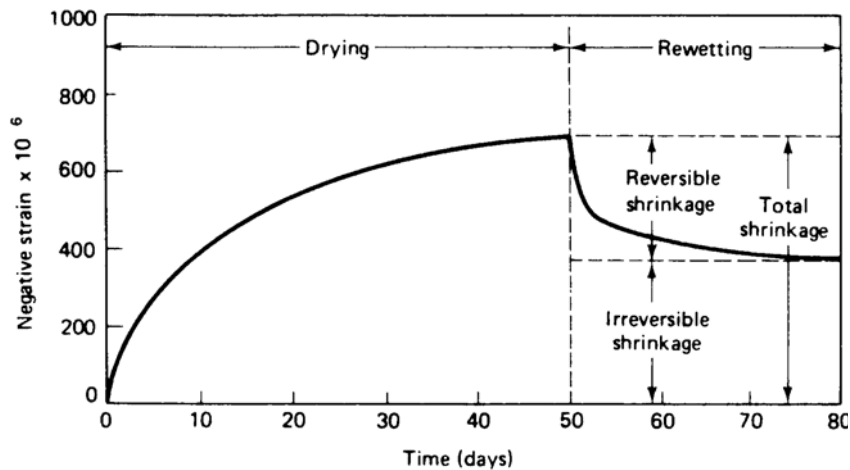


Fig. 2-1 Retracción en un elemento de concreto simple.

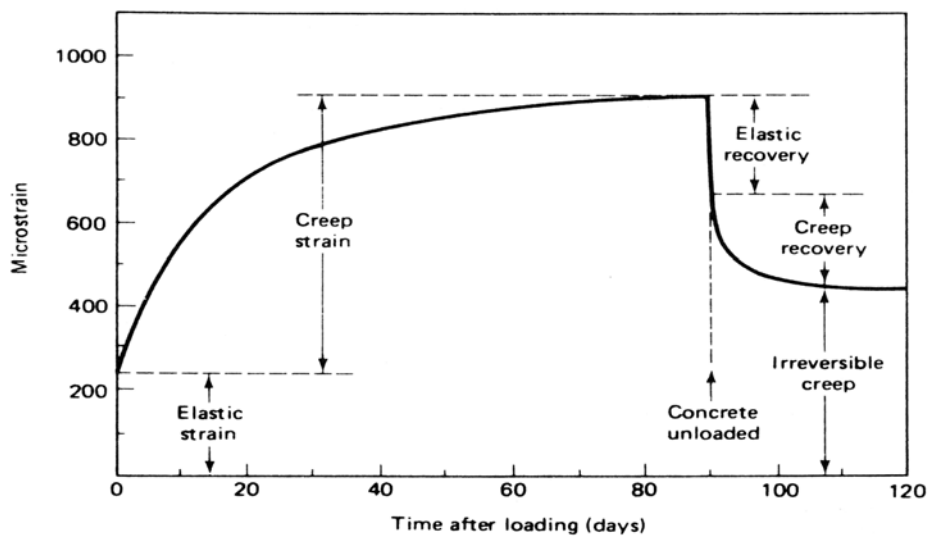


Fig. 2-2 Flujo plástico (Creep) en un elemento de concreto simple en compresión.

Al comparar las curvas de las figuras 2-1 y 2-2, se nota que existe una marcada similitud entre ambos fenómenos: Por un lado la figura 2-1 muestra la variación en el tiempo de la deformación ocasionada por la retracción no restringida del concreto, con los cambios que ocurren en ella por los procesos de secado y humedecimiento a los que está sujeto el concreto. Por otro lado, la figura 2-2 muestra la variación en el tiempo de la deformación longitudinal en un elemento cargado axialmente originada por el creep, con los cambios que ocurren por los sucesivos procesos de carga y descarga a los cuales puede estar sometida, por ejemplo, una columna.

En un elemento real de concreto, ambos fenómenos estarán presentes simultáneamente, y la deformación total del elemento será función de las deformaciones elásticas y de las deformaciones en el tiempo ocasionadas tanto por el creep como por la retracción.

## 2.2 Creep o Flujo Plástico del Concreto

El creep puede definirse como una deformación inelástica del concreto bajo esfuerzos sostenidos. Ocurre adicionalmente a las deformaciones elásticas producidas por los esfuerzos aplicados y se manifiesta como un aumento continuo de las deformaciones bajo carga sostenida. Ocurre únicamente cuando el concreto está sometido a esfuerzos de compresión o de tracción (en este caso cuando el elemento no se encuentra fisurado), es decir, si el elemento no está cargado no se produce creep.

Cuando se remueven o dejen de actuar los esfuerzos sostenidos, ocurre una recuperación parcial de las deformaciones ocasionadas por el creep, conocido como recuperación del creep (creep recovery). La recuperación del creep no es total, por lo tanto, el creep no es un fenómeno reversible.

Las deformaciones por creep en un elemento de concreto simple bajo esfuerzos sostenidos, son en general, mayores que las deformaciones elásticas iniciales, en consecuencia este fenómeno representa una parte importante de las deformaciones totales en un elemento de concreto a compresión. Como resultado del creep los desplazamientos y esfuerzos internos en una estructura de concreto, se modifican.

La figura 2-3 (Bresler) muestra una curva típica tiempo – deformación longitudinal para un espécimen de mortero 1:3 sin armaduras, a una humedad relativa del 95% y cargado inicialmente a un esfuerzo de compresión de 150 kg/cm<sup>2</sup>. El esfuerzo de compresión se mantuvo invariable durante 120 días y luego se descargó el espécimen. La deformación adicional por creep medida, antes de retirar la carga, fue del mismo orden de magnitud de la deformación elástica instantánea.

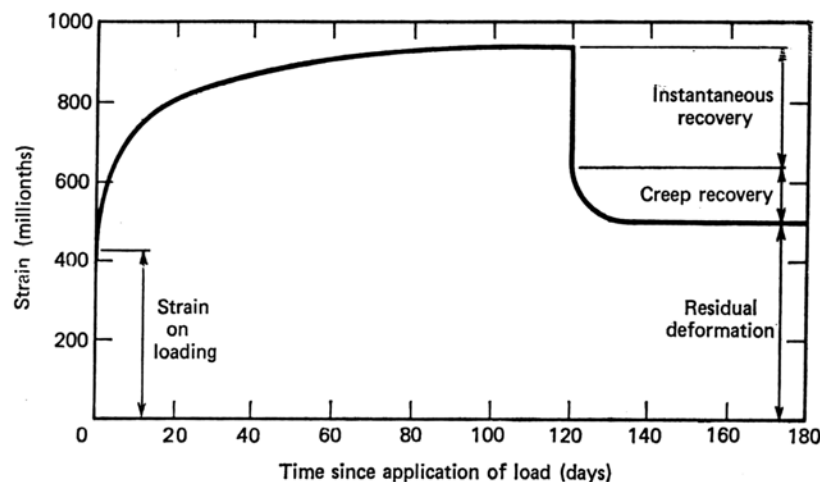


Fig. 2-3 Flujo plástico en un espécimen de mortero.

### 2.2.1 Algunas Observaciones Relativas al Creep

- Existen dos tipos de creep, ambos ocurren bajo la acción de cargas sostenidas. El primero es el denominado Creep Básico y ocurre bajo condiciones de humedad constante, es decir sin intercambio de humedad hacia o desde el medio ambiente. El segundo se denomina Creep por Secado, es adicional al primero y ocurre por el secado junto con la retracción.
- El creep es en general un fenómeno complejo, en consecuencia las deformaciones adicionales a las elásticas ocasionadas por el creep son difíciles de predecir. La figura 2-4 (White – Gergely), muestra el comportamiento de un cilindro de concreto simple sometido a compresiones de intensidad variable en el tiempo. La observación de la manera como evolucionan las deformaciones a lo largo del tiempo durante las

sucesiva cargas y descargas en el elemento, indica que se trata de un fenómeno no lineal complejo.

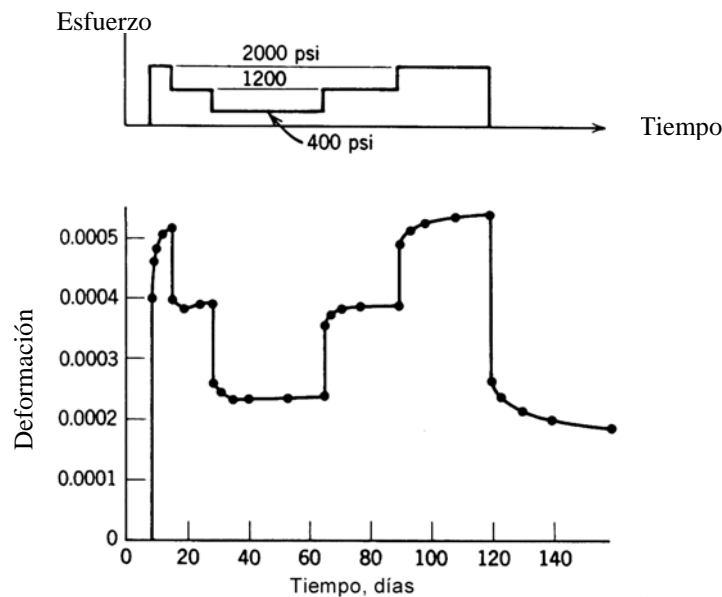


Fig. 2-4 Espécimen con esfuerzos de compresión variables en el tiempo

- La deformación adicional que ocasiona el creep ( $\epsilon_{cr}$ ) puede ser de una a tres veces la deformación elástica inicial. La presencia de acero longitudinal modifica tanto las deformaciones elásticas como las ocasionadas por el creep.
- El creep genera un aumento de las deflexiones en el tiempo, no solo en los elementos cargados axialmente (columnas), también en los elementos sometidos a flexión (vigas) ya que la zona de concreto comprimido por la flexión en las vigas también sufre el fenómeno del creep.
- El creep genera una redistribución interna de los esfuerzos en la estructura. En algunos casos los alivia, como es el caso de los esfuerzos generados por los asentamientos diferenciales de los apoyos en las estructuras.
- El creep genera un aumento importante en el esfuerzo del acero en compresión de vigas y columnas.
- El creep origina una reducción o pérdida en los esfuerzos iniciales de los elementos preesforzados tanto en los elementos pretensados como en los postensados.
- El creep origina acortamientos distintos en las columnas de los pisos altos de un edificio. Estos acortamientos no uniformes generan desplazamientos diferenciales en los extremos de las vigas los que a su vez, debido al monolitismo o hiperestaticidad de la estructura, generan esfuerzos adicionales en las vigas.

### 2.2.2 Principales Factores que Afectan la Magnitud del Creep

- a) La duración de la carga. Si las cargas son de corta duración, como el viento o el sismo, no se produce creep. El creep está asociado a cargas de naturaleza sostenida como el peso propio de los elementos estructurales. Si la carga se mantiene durante un año, el creep es alrededor de un 80% mayor que si se mantiene durante un mes.
- b) La edad a la cual se le aplican esfuerzos sostenidos al concreto. Si el concreto se carga a edades tempranas, el creep es mayor. Si el concreto se carga a los siete días, el creep es un 20% mayor que si se carga a los treinta días (ACI 209).

- c) El creep depende de la magnitud del esfuerzo de compresión aplicado. Hasta un esfuerzo de  $a$  aproximadamente  $0.5 f_c$ , las deformaciones por creep son proporcionales a las deformaciones elásticas y por ende a la magnitud del esfuerzo aplicado. Más allá de este esfuerzo el creep se incrementa rápidamente. Para esfuerzos sostenidos entre el 75% a 85% de  $f_c$  el creep puede llevar el elemento a la falla (ver figura 1-16, efecto de las cargas sostenidas de compresión o efecto de la permanencia de la carga)
- d) El creep depende de la cantidad de armadura y de las dimensiones del elemento. Las dimensiones del elemento afectan en dos sentidos. El primero tiene que ver con la intensidad del esfuerzo, es claro que si el elemento tiene dimensiones mayores que las necesarias por resistencia, el esfuerzo aplicado será bajo y en consecuencia también el creep. Por otro lado la influencia de las dimensiones y forma del elemento puede ser representada por la relación área superficial – volumen del elemento. Cuanto mayor sea esta relación mayor será el creep y la retracción que experimenta el elemento.
- e) El creep depende de la composición del concreto. Lo único que experimenta creep es la pasta de cemento, los agregados no experimentan creep. Por lo tanto a mayor contenido de pasta mayor creep. El creep depende también del contenido de aire en el concreto y del contenido de finos en el concreto.
- f) El creep depende de la humedad relativa promedio del ambiente, a mayor humedad menor creep ya que una parte del creep (Creep por Secado) se debe a la migración de agua libre en los poros hacia el exterior del concreto. Al 50% de humedad relativa el creep es un 40% mayor que al 90% de humedad.

### 2.2.3 Coeficiente de Flujo Plástico

Para el cálculo de las deformaciones adicionales ocasionadas por el creep, el ACI 209 utiliza el denominado Coeficiente de Flujo Plástico ( $C_t$ ), definido como:

$$\varepsilon_{cr}(t) = C_t \varepsilon_{ci} \quad (2-1)$$

$\varepsilon_{cr}(t)$  es el valor de la deformación unitaria ocasionada por el creep en el tiempo.

$\varepsilon_{ci} = f_c/E_c$  es la deformación elástica inicial (esfuerzo aplicado ÷ modulo elasticidad)

Por lo tanto: 
$$\varepsilon_{total}(t) = f_c/E_c + C_t f_c/E_c = f_c/E_c (1+C_t) = \varepsilon_{ci} (1+C_t) \quad (2-2)$$

El ACI-209 recomienda calcular el valor de  $C_t$  mediante la siguiente expresión:

$$C_t = C_u K_{ti} K_{ed} K_{hu} K_{es} K_{sl} K_{fi} K_{ai} \quad (2-3)$$

$C_u$  es el coeficiente último de creep, es decir el valor máximo que puede alcanzar el creep. Varía en un rango amplio, entre 1.3 a 4.2 con un valor promedio cercano a 2.4.

$K_{ti} = t^{0.6}/(10 + t^{0.6})$ .  $t$  es el tiempo en días después de la aplicación de la carga sostenida.

$K_{ed} = 1.25 (t_i)^{-0.118}$ .  $t_i$  es la edad del concreto (días) al aplicar la carga sostenida.

$K_{hu} = 1.27 - 0.0067 H_u$  para  $H_u > 40\%$ .  $H_u$  es la humedad relativa.

$K_{es}$ ,  $K_{sl}$ ,  $K_{fi}$ ,  $K_{ai}$  son coeficientes que dependen del espesor del elemento, del slump del concreto, del contenido de finos en la mezcla y del contenido de aire respectivamente. Para condiciones normales (ver ACI 209) se pueden suponer iguales a la unidad. Normalmente el contenido de cemento en la mezcla no es necesario considerar que afecta el valor de  $C_t$ , siempre y cuando no exceda de  $450 \text{ kg/m}^3$ .



Si consideramos un elemento de concreto simple cargado durante un tiempo indefinido, una edad del concreto cuando se aplicó la carga de siete días y una humedad relativa del 90% (Lima) el valor de  $C_t$  será, como orden de magnitud:

$$C_t \approx C_u \times 1.0 \times 1.0 \times 0.7 = 0.7 C_u = 0.7 \times 2.4 \approx 1.7$$

El resultado anterior significa que se espera una deformación por creep 1.7 veces la deformación elástica inicial. Estos valores hay que tomarlos con cuidado debido a la alta dispersión del fenómeno del creep. Tanto una sobrestimación del creep como una subestimación pueden conducir a situaciones peligrosas en términos de los esfuerzos internos en la estructura ocasionados por este fenómeno.

### 2.3 Retracción o Contracción del Concreto

La retracción o contracción es el acortamiento que experimenta el concreto durante el proceso de endurecimiento y secado. Se debe principalmente a la pérdida por evaporación del exceso de agua de mezclado. Hay que recordar que el agua añadida inicialmente a una mezcla de concreto, puede llegar a ser aproximadamente el doble de la necesaria para lograr la hidratación del cemento, el exceso de agua se denomina agua de amasado o de mezclado.

En la figura 2-5 (Park – Paulay), se muestra una curva típica de la evolución de la retracción con el tiempo en un elemento de concreto,  $t_0$  es el tiempo en el cual el elemento se somete a un medio ambiente de secado. La contracción ocurre a una tasa decreciente con el tiempo, normalmente para concretos curados por vía húmeda durante siete días, el 50% de la retracción total ocurre durante el primer mes posterior al curado y aproximadamente un 80% ocurre durante el primer año (T.Y Lin).

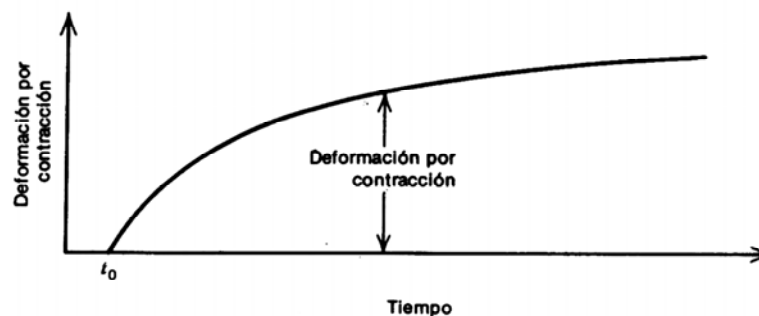


Fig. 2-5 Curva típica de retracción en el concreto

#### 2.3.1 Algunas Observaciones Relativas a la Retracción

- Existen tres diferentes formas de la retracción:
  - a) Retracción por Secado, que se produce por la pérdida de humedad en el concreto.
  - b) La Retracción Autógena o auto generada, que es causada por la hidratación del cemento.
  - c) La Retracción por Carbonatación, que se trata brevemente en la sección 2.3.5.
- Las deformaciones por retracción son independientes del estado de esfuerzos en el elemento de concreto. Si se restringe la retracción, ya sea por la presencia de armaduras de acero, o por restricciones externas o por combinaciones de ambas, aparecen esfuerzos de tracción en el concreto que puede ocasionar el agrietamiento del elemento. La retracción, por lo general, provoca en los elementos estructurales (principalmente vigas) un aumento de las deflexiones con el tiempo.

- La contracción por secado es un fenómeno reversible (figura 2-1), esta se recupera parcialmente si se humedece el concreto. Los constantes cambios de humedad (procesos de humedecimiento y secado) en el concreto producen cambios de volumen en el concreto y en consecuencia movimientos en la estructura. Tal es el caso de los puentes de grandes luces en los cuales las deflexiones varían de acuerdo a la estación del año.
- La retracción origina una reducción o pérdida en los esfuerzos iniciales de los elementos preesforzados tanto en los elementos pretensados como en los postensados.

### **2.3.2 Principales Factores que Afectan a la Retracción**

- a) La retracción por secado depende de la relación agua/cemento ( $w/c$ ). Considerando la naturaleza misma del proceso, resulta claro que el factor determinante de la magnitud final de la retracción es el contenido original de agua en la mezcla, a mayor contenido de agua es de esperarse mayor retracción. Por este motivo la cantidad de agua en la mezcla no debe ser mayor que la necesaria para producir una adecuada trabajabilidad.
- b) La contracción sucede en la pasta de cemento (cemento más agua) por lo tanto, una mezcla rica en pasta se contraerá más que otra pobre. Los agregados no sufren retracción, por lo tanto éstos la restringen.
- c) Depende fuertemente de las condiciones ambientales (humedad relativa) especialmente a edades tempranas. A menor humedad mayor retracción. De allí la importancia del curado inicial especialmente en climas extremos, por ejemplo en nuestra serranía donde se pueden sumar condiciones de baja humedad y mucho viento.
- d) Depende de la finura del cemento, a mayor finura de molido del cemento, corresponde una mayor retracción.
- e) La presencia de finos en la mezcla aumenta apreciablemente la retracción.
- f) De los cambios estacionales de humedad (humedecimiento y secado) tal como se muestra en la figura 2-1.
- g) Depende de la relación (Volumen del elemento) / (Área de la superficie expuesta) ya que las capas exteriores del elemento pierden humedad más rápidamente que las interiores. En consecuencia las capas interiores restringen a las exteriores generando esfuerzos de tracción en la superficie del elemento.

En elementos grandes o masivos la relación anterior (volumen / área superficial) es mayor, por lo tanto la retracción será menor ya que habrá más concreto húmedo restringiendo la retracción. En elementos delgados la retracción es mayor.

### **2.3.3 Valores típicos de la Contracción**

Los valores finales de la contracción o retracción libre ( $\epsilon_{su}$ ) medidos en probetas de laboratorio de 6"x12" mantenidas durante periodos prolongados a una humedad del 40% se encuentran entre 0.0004 y 0.0011 (MacGregor) con un valor promedio cercano a 0.0008 para los concretos normales curados por vía húmeda.

Los valores de la retracción final que aparecen en la literatura técnica son variados, a continuación se señalan algunos valores recomendados:

- Si no existe información de laboratorio disponible, el ACI-209 recomienda adoptar un valor final para la retracción libre de  $\epsilon_{su} = 0.00078$  para una humedad relativa del 40%.

- Para el cálculo de las pérdidas de preesfuerzo, Nilson recomienda, en ausencia de información específica, un valor típico de 0.0006.
- Para el cálculo de las pérdidas de preesfuerzo, T.Y Lin recomienda, un valor típico de 0.00055 para una humedad relativa cercana al 40%.
- La Norma Peruana de Cargas E-020 especifica un valor de 0.0002, aparentemente este valor es bajo, sin embargo es necesario precisar que el valor especificado por la Norma corresponde a valores típicos de la retracción restringida y no de la retracción libre.
- Jiménez Montoya recomienda adoptar, como valores medios del acortamiento por retracción, cuando no sea necesaria su determinación precisa, 0.00035 para concreto en masa y 0.00025 para concreto armado.
- La PCA, para muros de concreto armado, recomienda valores comprendidos entre 0.00043 y 0.00057.

La expresión propuesta por el ACI-209 para estimar la retracción de un elemento de concreto simple en el tiempo, tiene una forma similar a la ecuación 2-3 presentada para el creep. Adicionalmente a los factores que intervienen en la ecuación 2-3, para la retracción es necesario agregar un factor que depende del tiempo de curado del elemento, ya que el ACI-209 adopta un curado “estándar” de siete días. La forma de la ecuación para estimar la retracción en cualquier instante “t”, reteniendo únicamente las variables más importantes es:

$$\epsilon_s(t) = \epsilon_{su} K_t K_h K_{vs} \quad (2-4)$$

$\epsilon_{su}$  es el valor de la retracción libre. El ACI-209 recomienda un valor de 0.00078 en ausencia de información específica para los agregados y condiciones locales.

$K_t = t / (35 + t)$ . t es el tiempo en días después de los 7 días de curado por vía húmeda.

$K_h = 1.4 - 0.01 H$ . H es la humedad relativa en porcentaje ( $40\% \leq H \leq 80\%$ ). Para humedades relativas mayores que el 80%,  $K_h = 3.0 - 0.03 H$

$K_{vs} = 1.2 e^{-0.00472 v/s}$  Es un factor que depende de la relación volumen del elemento (v) al área expuesta (s) por donde se evapora el agua. El cociente v/s está expresado en mm.

De los factores anteriores, para concretos normales, el más importante es el asociado con la humedad relativa ( $K_h$ ).

El ACI 209 recomienda los siguientes valores mínimos para la retracción final:

- $\epsilon_s \geq 0.0001$  para concreto sometido a cambios estacionales de humedecimiento y secado
- $\epsilon_s \geq 0.00015$  para concreto sometido a condiciones sostenidas de secado.

Si consideramos un elemento de concreto simple, secando durante un tiempo indefinido, una humedad relativa del 90% (Lima) y una relación típica de volumen a área expuesta 100 mm (corresponde a un muro de 0.20 m de espesor con las dos caras expuestas) el valor de  $\epsilon_s$  será, como orden de magnitud:

$$\epsilon_s(\infty) \approx 0.00078 \times 1.0 \times 0.3 \times 0.75 \approx 0.00018$$

Si el muro fuera de 0.10 m de espesor el valor de la retracción sería un 25% mayor.

Por lo general en una estructura real, la retracción final (retracción restringida) será menor que la retracción libre de una probeta de laboratorio, por los siguientes motivos:

- a) Presencia del refuerzo de acero que restringe la contracción libre. El concreto armado retrae menos que el concreto en masa ya que las barras de refuerzo se oponen al acortamiento y lo disminuyen, tanto más cuanto mayor sea la cuantía de refuerzo. La relación entre un valor y otro de la retracción es del orden del 80% (Jiménez Montoya).
- b) Por la presencia de restricciones externas por conexiones del elemento con otros elementos estructurales rígidos.
- c) Las estructura se construyen en etapas o con vaciados parciales por lo tanto parte de la contracción ocurre antes de completarse las zonas vecinas.

#### **2.3.4 ¿Cómo controlar la Retracción?**

- Mediante un curado apropiado del concreto. Un concreto curado durante un solo día experimenta alrededor de 20% más retracción que uno curado durante una semana. El plazo mínimo de curado por vía húmeda debería ser de 7 días.
- Mediante el empleo de dosificaciones o mezclas de concreto apropiadas. Es importante limitar el contenido de agua en la mezcla al mínimo necesario consistente con los requerimientos de trabajabilidad.
- Evitar las temperaturas altas en el concreto durante su colocación y curado.
- Mediante el uso de juntas de llenado o de construcción.
- Mediante el uso de juntas de control.
- Mediante el empleo de las llamadas “bandas de retracción” sobre todo en losas de piso de gran área o en edificios de plantas grandes.
- Mediante el empleo de refuerzo de acero adecuadamente distribuido.
- Mediante el uso de cementos expansivos.

Estas medidas son para intentar controlar la retracción y reducir sus efectos en la estructura, sin embargo la retracción es inevitable.

#### **2.3.5 Retracción por Carbonatación del Concreto**

Es un tipo de retracción secundaria que suele ocurrir en ambientes o atmósferas ricas en dióxido de carbono (estacionamientos, lluvia ácida en atmósferas contaminadas) por la reacción de diversos productos de la hidratación del cemento con el  $\text{CO}_2$  del medio ambiente. Al 50% de humedad relativa la Retracción por Carbonatación puede llegar a ser de la misma magnitud de la retracción primaria.

## CAPITULO 3

### Acero de Refuerzo



#### Lecturas:

- 3.1 Capítulo 2 (Reinforcing Steel) del libro Reinforced Concrete Engineering – Volume 1. Edited by Boris Bresler. John Wiley.
- 3.2 Capítulo 6 (Properties of Materials for Reinforced Concrete) del libro Handbook of Concrete Engineering – Second Edition. Edited by Mark Fintel. Van Nostrand.
- 3.3 Cold Straightening of Partially Embedded Reinforcing Bars – A Different View. L.A. Erasmus. ACI Concrete International, June 1981.
- 3.4 ¿Cuál es la Varilla de Refuerzo más Resistente a la Corrosión? Revista Construcción y Tecnología, Febrero 2000. Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto.
- 3.5 Norma ASTM A615/A615M-01b. Standard Specification for Deformed and Plain Billet Steel Bars for Concrete Reinforcement.
- 3.6 Norma ASTM A706/A706M-01. Low-Alloy Steel Deformed and Plain Bars for Concrete Reinforcement.

### 3.1 Introducción

El concreto es un material débil en tracción, por lo tanto se le usa junto con acero de refuerzo capaz de resistir los esfuerzos de tracción. Por ejemplo, en una viga sometida a flexión, el concreto se encarga de resistir las compresiones y las barras de acero longitudinal, colocadas cerca de la superficie en tracción, se encargan de resistir las tracciones originadas por la flexión. Adicionalmente se suele colocar refuerzo transversal, en la forma de estribos, que ayudan a resistir los esfuerzos de tracción diagonal en el concreto causados por las fuerzas cortantes.

El acero también se utiliza para ayudar al concreto a soportar los esfuerzos de compresión, por ejemplo en el caso de las columnas o elementos que trabajan en compresión o flexocompresión. Esto ayuda a reducir las secciones transversales de las columnas y se puede entender si se compara la resistencia en compresión de un concreto normal, digamos de  $210 \text{ kg/cm}^2$ , con la resistencia del acero de refuerzo que utilizamos en nuestro medio que es de  $4,200 \text{ kg/cm}^2$ , es decir cada centímetro cuadrado de acero equivale a  $20 \text{ cm}^2$  de concreto trabajando en compresión.

Para que el acero trabaje de manera efectiva es necesario que exista una fuerte adherencia entre el concreto y el acero, para asegurar que no ocurran movimientos relativos (deslizamientos) entre las barras de refuerzo y el concreto circundante. Esta unión o adherencia, proviene básicamente de tres fuentes: de la *adhesión* del tipo químico que existe en la interfase entre el acero y el concreto, de la *rugosidad natural* que tienen las superficies del refuerzo de acero laminado en caliente y de las *corrugaciones* (resaltes) con las cuales se fabrican las barras de refuerzo corrugadas. Esta última fuente es la más importante para la adherencia, y solo está presente en las barras corrugadas, en las barras lisas solamente existen las dos primeras fuentes.

Adicionalmente existen otras características que conducen a un comportamiento satisfactorio del conjunto acero – concreto, estas son:

- a) Los coeficientes de dilatación térmica del acero y del concreto son similares. Esto permite que no se forme agrietamiento en el concreto debido a las deformaciones térmicas.
- b) El concreto que rodea a las barras de refuerzo provee una buena protección contra la corrosión del acero.
- c) La resistencia al fuego del acero desprotegido no es buena, por su alta conductividad térmica y por el hecho de que sus propiedades mecánicas se reducen notablemente cuando es expuesto a temperaturas elevadas. El concreto protege al acero de la exposición a temperaturas elevadas, como las que se producen en un incendio, permitiendo aumentar el tiempo de exposición a las temperaturas altas que es capaz de resistir una estructura.

### 3.2 Barras de Refuerzo Laminadas en Caliente

El refuerzo de acero se distribuye normalmente en barras o varillas de sección básicamente circular, con resaltes o corrugaciones en la superficie para mejorar la adherencia con el concreto. Los aceros lisos casi no se usan como refuerzo, salvo el de 1/4" que se utiliza en nuestro medio, para el refuerzo de retracción y temperatura en los aligerados y para estribos de columnas y elementos secundarios. Los aceros lisos, que en los inicios del concreto armado eran los únicos disponibles, hoy en día han sido completamente remplazados por los corrugados, con lo cual se ha logrado una mejora sustancial en la adherencia acero – concreto.

En la figura 3-1 (Fling) se muestran los principales tipos de corrugaciones de los aceros de refuerzo. El acero que se utiliza en nuestro medio tiene resaltes similares a los de la tercera columna de la misma figura. La Norma ASTM A615 especifica la altura mínima

que deben tener las corrugaciones o resaltes, el espaciamiento entre los resaltes y la inclinación de los mismos.

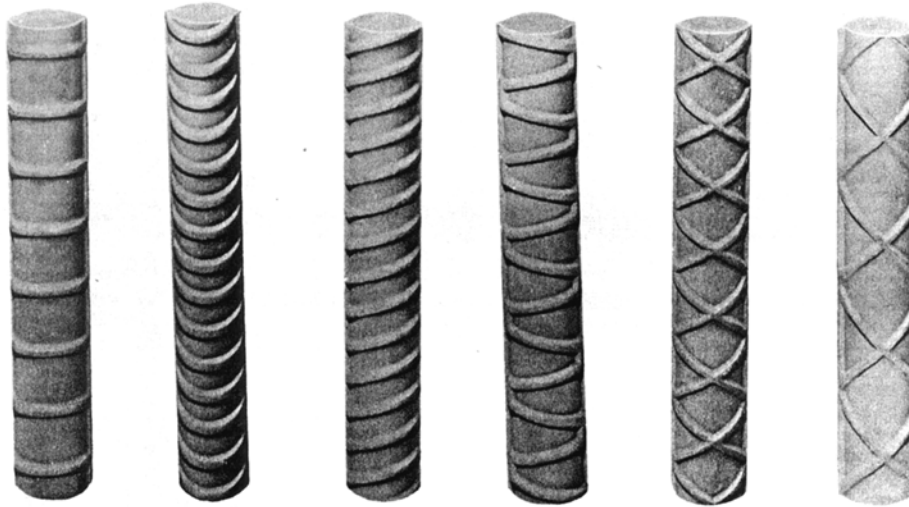


Fig. 3-1 Tipos de corrugaciones en las barras de refuerzo.

En la tabla 3-1, adaptada de la ASTM, se resumen las principales características de las varillas de refuerzo. Las barras de producción nacional se ajustan a estas características. Los productores de acero en los Estados Unidos distinguen los distintos diámetros asignándoles un número relacionado con el diámetro de la barra expresado en octavos de pulgada (por ejemplo la barra #5 es de 5/8", la #6 es de 3/4"). El área de las barras puede ser calculada directamente del diámetro nominal.

Las barras de producción nacional vienen en longitudes de 9 m, bajo pedido Aceros Arequipa puede fabricar barras de 12 m de longitud.

SiderPerú y Aceros Arequipa fabrican, adicionalmente a las barras de 3/8", 1/2", 5/8", 3/4", 1" y 1-3/8", barras de 8 mm y de 12 mm. Aceros Arequipa fabrica también barras de 6 mm corrugadas.

Tabla 3-1 Características de las varillas corrugadas.

Designación	Diámetro (in)	Diámetro (mm)	Área (cm <sup>2</sup> )	Peso (kg/m)	Observaciones
2	1/4	6.4	0.32	0.250	Liso
3	3/8	9.5	0.71	0.560	
4	1/2	12.7	1.29	0.994	
5	5/8	15.9	2.00	1.552	
6	3/4	19.1	2.84	2.235	
8	1	25.4	5.10	3.973	
11	1 3/8	35.8	10.06	7.907	
6 mm (*)		6	0.28	0.222	Ac. Arequipa
8 mm		8	0.50	0.395	Ac. Arequipa
12 mm		12	1.13	0.888	Ac. Arequipa
7	7/8	22.2	3.87	3.042	No disponible
9	1 1/8	28.7	6.45	5.060	No disponible
10	1 1/4	32.3	8.19	6.404	No disponible
14	1 11/16	43.0	14.52	11.380	No disponible
18	2 1/4	57.3	25.81	20.240	No disponible

(\*) Acero de 6 mm corrugado. También se comercializa en rollos

### 3.3 Calidades del Acero de Refuerzo

Las principales características que deben tener los aceros de refuerzo, están descritas en la Norma Peruana en el artículo 3.4 y en ACI-02 artículo 3.5.

Los aceros de refuerzo que se producen en el Perú (SiderPerú, Aceros Arequipa) deben cumplir con alguna de las siguientes Normas:

- Norma Peruana Itintec 341.031-A-42. Acero Grado 60.
- Norma ASTM A615. Acero Grado 60.
- Norma ASTM A706. Acero de baja aleación, soldable. Grado 60.

La Norma A615 cubre los aceros de refuerzo que se utilizan con mayor frecuencia, en nuestro medio son prácticamente los únicos que utilizamos. La citada Norma, no limita la composición química de los aceros, salvo el contenido de fósforo.

La Norma A706 cubre los aceros para aplicaciones especiales en las cuales la soldabilidad, la facilidad de doblado y la ductilidad, sean consideraciones importantes para la elección del acero. Limita la composición química del acero de tal modo que el carbono equivalente sea menor que el 0.55%. El carbono equivalente se calcula en función del contenido de Carbono, Manganeso, Cobre, Níquel, Cromo, Molibdeno y Vanadio.

Las calidades del acero que cubre la Norma ASTM y que es posible emplear, como refuerzo para el concreto, se resumen en la tabla 3-2. Se indica el esfuerzo de fluencia ( $f_y$ ) mínimo y máximo, el esfuerzo máximo o último ( $f_u$ ) mínimo, a este último también se le denomina resistencia a la tracción (tensile strength).

Tabla 3-2 Calidades del acero de refuerzo.

Grado	ASTM	$f_y$ min (kg/cm <sup>2</sup> )	$f_y$ max (kg/cm <sup>2</sup> )	$f_u$ min (kg/cm <sup>2</sup> )	$f_u/f_y$ (min)
40	A 615	2,800	--	4,200	--
60	A 615	4,200	--	6,300	--
75	A 615	5,300	--	7,000	--
60	A 706	4,200	5,500	5,600	1.25

Cabe resaltar que en el Perú, tanto Acero Arequipa S.A. como SiderPerú, los únicos productores de acero corrugado, solo fabrican acero de refuerzo Grado 60. La mayoría del acero disponible en nuestro medio, se ajusta a la Norma ASTM A615. Aceros Arequipa, bajo pedido, fabrica acero A706 solo en los diámetros de 5/8", 3/4" y 1". Este acero es soldable, desgraciadamente es más caro que el A615 y su uso no se ha difundido.

Nótese en la tabla 3-2, que la ASTM A615 fija únicamente los valores mínimos de  $f_y$  y de  $f_u$ , no especifica un valor máximo para  $f_y$ . En contraste la Norma A706 sí especifica un valor máximo para  $f_y$  de 5,500 kg/cm<sup>2</sup>.

En general los fabricantes de acero se preocupan por cumplir con el valor mínimo de  $f_y$ . Los ensayos de laboratorio indican que el valor de  $f_y$  real puede ser mayor que el nominal, no es de extrañar valores de  $f_y$  un 10% a 30% por encima del nominal, tal como se aprecia en la figura 3-2 (MacGregor) correspondiente a muestras de la producción de acero Grado 60 en los Estados Unidos. En esta muestra el 10% de los ensayos mostraron un  $f_y$  33% mayor que el valor nominal, con un coeficiente de variación cercano al 9% y muy pocos resultados por debajo del  $f_y$  nominal.

Un valor de  $f_y$  real muy por encima del nominal no es conveniente, ya que el elemento tendrá una marcada sobrerresistencia en flexión la que puede ocasionar una falla frágil por esfuerzo cortante.



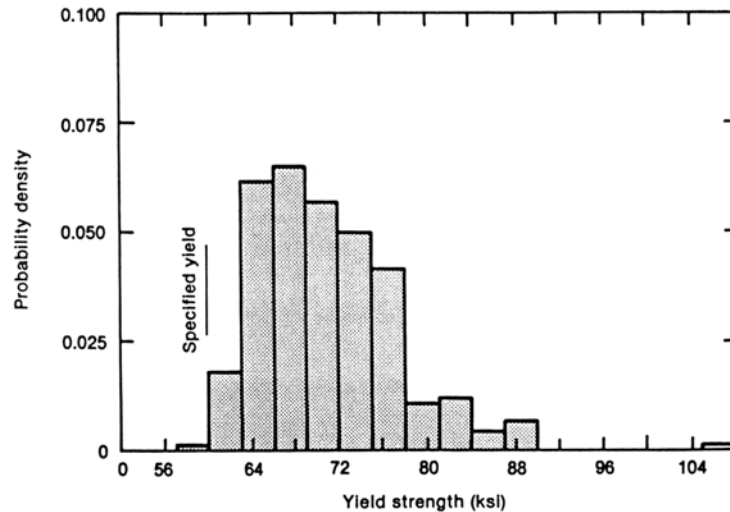


Fig. 3-2 Distribución de los esfuerzos de fluencia medidos en ensayos de tracción. Aceros Grado 60.

### 3.4 Propiedades Mecánicas de las Barras de Refuerzo

La figura 3-3 (MacGregor) muestra curvas típicas idealizadas esfuerzo – deformación, de los aceros de refuerzo Grado 40, 60 y 75. También se muestra en línea punteada la curva típica para los alambres con los cuales se fabrican las mallas electro soldadas (Welded wire fabric).

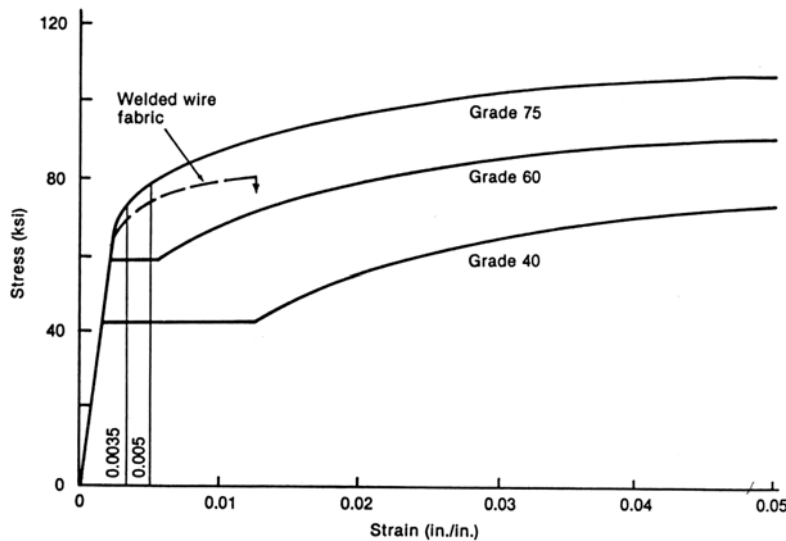


Fig. 3-3 Curvas esfuerzo – deformación típicas.

La figura 3-4 (adaptada de Fintel) muestra algunas curvas fuerza – deformación típicas de aceros con distintas calidades (40, 60 y 75) y distintos diámetros. Las curvas corresponden a la producción de acero Norteamericana.

Para los aceros Grado 40 y 60 se observan claramente las plataformas de fluencia, mientras que los aceros de mayor resistencia, como el Grado 75 y los alambres para mallas electro soldadas, ya no exhiben tal plataforma.

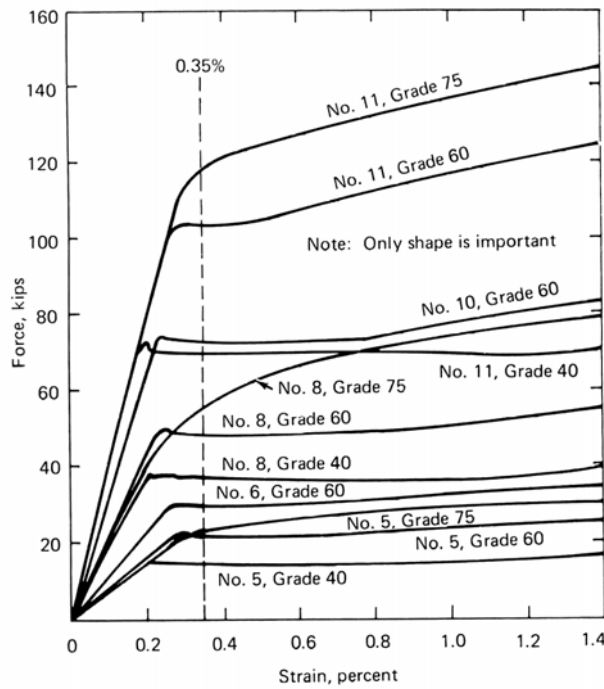


Fig. 3-4 Curvas fuerza – deformación típicas.

Los aceros Grado 60 pueden o no presentar plataforma de fluencia, dependiendo de la composición química y del proceso de fabricación. En el caso que no exista una fluencia clara, la Norma ASTM A615 especifica que la fluencia se calculará para una deformación del 0.5% para el Grado 60 y de 0.35% para el Grado 75 (ver figura 3-3).

Para los aceros con una resistencia especificada mayor que la correspondiente al Grado 60 ( $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$ ) el ACI exige que el esfuerzo de fluencia (en este caso virtual) se calcule para una deformación de 0.35% como se indica en la figura 3-4.

Los aceros que se producen en el Perú, suelen presentar un escalón de fluencia definido, salvo los aceros “trabajados en frío”. La figura 3-5 muestra los resultados de los ensayos de dos barras de 5/8” Grado 60, fabricadas por Aceros Arequipa. Se muestran también las curvas de descarga y recarga las que son paralelas a la recta inicial de carga. Solo se muestra un tramo de la curva, la gráfica se ha interrumpido mucho antes de la rotura de las barras.

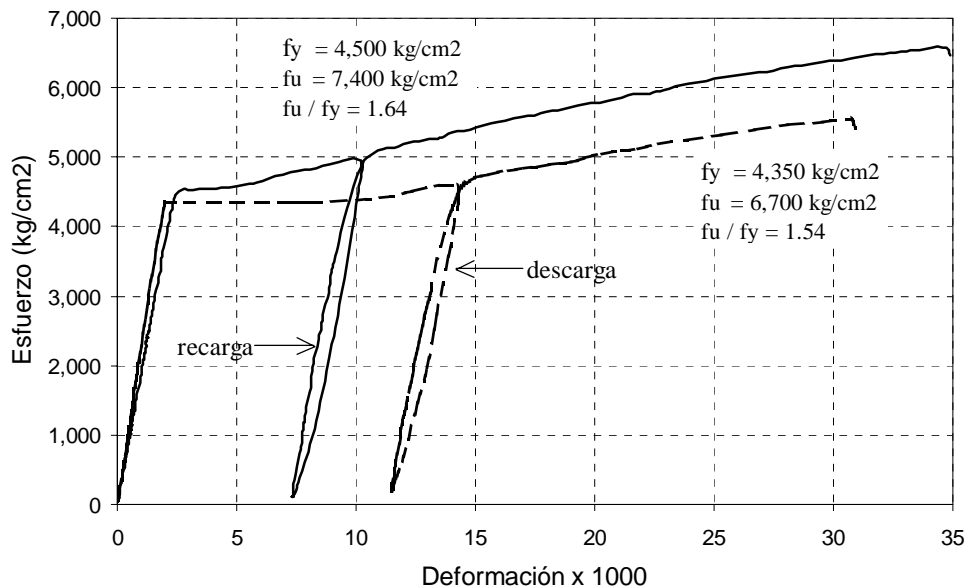


Fig. 3-5 Curvas típicas para aceros nacionales de 5/8” Grado 60.

El ACI (artículo 9.4) especifica que los diseños no deben basarse en un esfuerzo de fluencia de la armadura -  $f_y$  - que exceda de  $5,600 \text{ kg/cm}^2$ , salvo para aceros de preesforzado. La Norma Peruana y el ACI, en elementos con responsabilidad sísmica, no permiten el empleo de aceros con una resistencia especificada a la fluencia superior al Grado 60.

La Norma ASTM especifica el *alargamiento o elongación de rotura* mínima (medido en los ensayos en una longitud de 8") que deben tener los aceros de refuerzo. Para el acero Grado 60 el alargamiento mínimo debe estar entre el 7 y 9% dependiendo del diámetro. La tabla 3-3 resume los requerimientos para el acero Grado 60.

El alargamiento o elongación es una medida de la ductilidad del acero. Obsérvese en la tabla 3-3 que la Norma ASTM exige para el acero A706 una elongación mínima alrededor del 50% mayor que la correspondiente al acero fabricado bajo la A615, en consecuencia el A706 es bastante más dúctil y su empleo es recomendable en zonas de alta sismicidad.

Tabla 3-3 Elongaciones mínimas de rotura.

Designación	A615 Grado 60	A706 Grado 60
Barras # 3, 4, 5, 6	9%	14%
Barras # 7, 8	8%	12%
Barras # 9, 10, 11	7%	12%

En nuestro medio no es raro encontrar aceros trefilados o "trabajados en frío". Estos se fabrican a partir del fierro de 1/4" estirándolo en frío, para producir diámetros de 4, 4.5, 5, 5.5 mm. Las propiedades mecánicas de estos aceros son distintas a la del acero a partir del cual se fabricaron ya que el estiramiento en frío elimina el escalón de fluencia, dando lugar a aceros frágiles con poca elongación de rotura.

### 3.5 Propiedades de las Barras Grado 60

#### 3.5.1 Características Mecánicas – ASTM A615:

- $f_y \text{ min} = 4,200 \text{ kg/cm}^2$  (fluencia nominal, valor mínimo).
- $f_u \text{ min} = 6,300 \text{ kg/cm}^2$  (esfuerzo máximo o último o resistencia a la tracción).
- $E_s \approx 2'000,000 \text{ kg/cm}^2$  (módulo de elasticidad).
- Deformación en el inicio de la fluencia  $\epsilon_y = (f_y / E_s) \approx 0.0021$
- Longitud de la plataforma de fluencia = variable.
- Deformación de rotura >> Deformación de fluencia (30 a 40 veces).
- Elongación a la rotura entre el 7% y 9% (Tabla 3-3).
- Coeficiente de dilatación  $\approx 11 \times 10^{-6} \text{ 1/C}^\circ$ . Valor muy parecido al del concreto el cual es  $\approx 10 \times 10^{-6} \text{ 1/C}^\circ$ . Ambos coeficientes de dilatación dependen de la temperatura.

#### 3.5.2 Soldabilidad

El acero ASTM A615, por su composición química (carbono equivalente mayor a 0.5%) no es soldable en esencia. El alto contenido de carbono equivalente lo hace un acero difícil de soldar, con una alta posibilidad que se originen uniones frágiles y de baja resistencia. Es necesario utilizar procedimientos muy cuidadosos para lograr una soldadura "decente" como por ejemplo precalentar las barras y luego de soldar controlar el enfriamiento y usar electrodos de bajo contenido de hidrógeno E-7018 ó E-8018. En

general no es recomendable soldar este acero, salvo bajo procedimientos supervisados y con mano de obra especializada.

El acero fabricado bajo la Norma ASTM A706 sí es soldable. Su uso es recomendable en zonas de alto riesgo sísmico ya que facilita las reparaciones y/o refuerzo de estructuras dañadas luego de sismos intensos, o cuando se requiere reforzar o ampliar una estructura. También su uso facilita los empalmes de barras por soldadura, si fuesen necesarios.

### 3.5.3 Diámetros Mínimos de Doblado del Acero de Refuerzo.

La Norma Peruana en los artículos 7.2 y 7.3 establece los diámetros mínimos de doblado para las barras de refuerzo. Estos diámetros mínimos de doblado, no deben confundirse con el diámetro de la prueba de doblado especificada por las Normas ASTM.

### 3.5.4 Efecto de la Temperatura.

El acero expuesto a altas temperaturas pierde (reduce) sus propiedades mecánicas ( $f_y$ ,  $f_u$ ,  $E_s$ ). A partir de los 450 C° aproximadamente, la reducción en  $f_y$  y  $f_u$  crece rápidamente. El recubrimiento de concreto protege, dentro de ciertos límites, al acero de refuerzo del fuego, prolongando el tiempo necesario para que sus propiedades mecánicas se vean afectadas por el efecto de las altas temperaturas.

La figura 3-6 (MacGregor) muestra el efecto de las altas temperaturas en la resistencia del acero, para las barras trabajadas (estiradas) en frío (cold-drawn), para las barras laminadas en caliente (hot-rolled) y para las barras de alta resistencia..

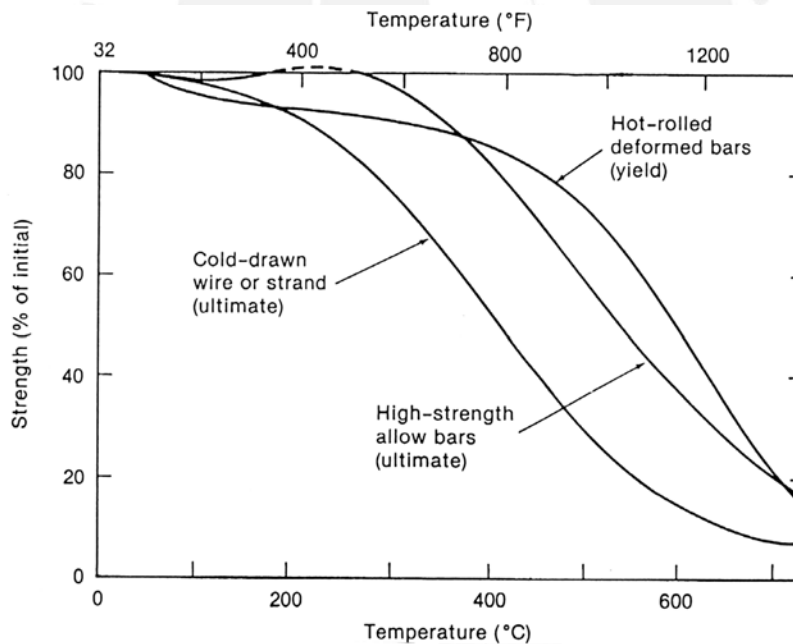


Fig. 3-6 Efecto de las altas temperaturas en la resistencia del acero.

La figura 3-7 (MacGregor) muestra la influencia de la temperatura en la resistencia a la compresión del concreto simple. Se muestran las curvas correspondientes a tres tipos de agregados distintos. En general tanto la resistencia a la compresión como el módulo de elasticidad del concreto disminuyen con las temperaturas altas, mientras que el coeficiente de dilatación aumenta. Los concreto fabricados con agregados con carbonatos (calizas, dolomitas) son menos sensibles a la altas temperaturas que los fabricados con agregados silicios (granito, areniscas, cuarcitas). Estos últimos son los más utilizados en nuestro medio.

El color del concreto luego de un incendio, es un indicador aproximado de las temperaturas que se han alcanzado. En la parte inferior de la figura 3-7 se indican algunos rangos de temperatura asociados con el color del concreto. En general cuando el color ha pasado del rosado al gris, es probable que el concreto haya sido dañado de manera importante por las temperaturas.

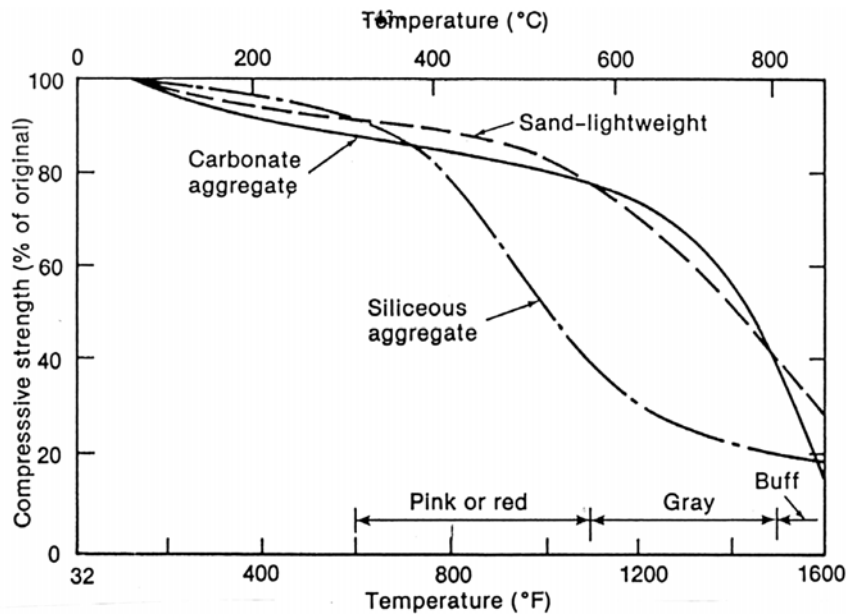


Fig. 3-7 Efecto de las altas temperaturas en la resistencia del concreto.

### 3.6 Mallas Electro Soldadas

Las mallas electro soldadas se utilizan como refuerzo prefabricado para el concreto. Consisten en alambres lisos o corrugados colocados horizontal y verticalmente, los alambres se sueldan eléctricamente en las intersecciones conformando mallas con aberturas cuadradas o rectangulares.

Se las usa como refuerzo en pavimentos, losas, muros y en general en estructuras con refuerzo longitudinal y transversal dispuesto en un patrón regular. La ventaja que tienen es la de ahorrar mano de obra ya que de utilizar refuerzo convencional, las armaduras deben "tejerse" manualmente.

Las Normas ASTM establecen las características que deben tener tanto las mallas como los alambres que la componen, por ejemplo la ASTM A496 especifica las características del alambre corrugado utilizado para la fabricación de mallas corrugadas. En este caso el acero debe tener un esfuerzo de fluencia mínimo de  $4,900 \text{ kg/cm}^2$  y un esfuerzo último mínimo de  $5,600 \text{ kg/cm}^2$ .

El uso de las mallas electro soldadas debe evaluarse cuidadosamente en aquellas estructuras que requieran ductilidad, como lo son las estructuras que deban soportar sismos y en las cuales las fuerzas de diseño se han obtenido reduciendo el espectro elástico de respuesta. Esto se debe a que el alambre con el cual se fabrican las mallas suele ser frágil con una elongación a la rotura entre el 1% y el 3%, valores bastante menores a los exigidos para el acero corrugado de refuerzo (tabla 3-3). La reducción en la ductilidad se origina por el proceso de estiramiento en frío (trefilado) al cual son sometidos los alambres. Este proceso conlleva a un endurecimiento por deformación del acero y elimina el escalón de fluencia.

## CAPITULO 4

### Requisitos de Resistencia y de Servicio



#### **Lecturas:**

- 4.1 Load and Resistance Factors for Concrete Design. James G. MacGregor. ACI Structural Journal, July – August 1983.
- 4.2 Calibration of Design Code for Buildings (ACI 318): Part 1 – Statistical Models for Resistance, Part 2 – Reliability Analysis and Resistance Factors. Andrzej Nowak, Maria Szerszen. ACI Structural Journal. May-June 2003.
- 4.3 Capítulo 1 (Las Estructuras de Concreto) del libro Aspectos Fundamentales del Concreto Reforzado – Tercera Edición. González Cuevas – Robles. Limusa.
- 4.4 Capítulo 1 (Structural Safety) del libro Practical Design of Reinforced Concrete. Russell S. Fling. John Wiley.
- 4.5 Development of a national Building Code for Reinforced Concrete 1908-1977. George Winter. ACI Concrete International, December 1982.

## 4.1 Introducción

El objetivo del diseño consiste en determinar las dimensiones y características de los elementos constituyentes de una estructura, para que ésta pueda cumplir la función para la cual fue concebida, con un grado de seguridad razonable. Adicionalmente el comportamiento de la estructura bajo condiciones normales de servicio, debe ser satisfactorio y finalmente el costo de la estructura debe estar dentro de límites económicos aceptables.

De la definición anterior surgen, de manera natural, algunas interrogantes:

- a) ¿Cuál es la vida útil de la estructura que debe preverse?
- b) ¿Cuáles son las solicitaciones o acciones exteriores que debe soportar la estructura?  
¿Cuáles son sus valores máximos, mínimos y medios?
- c) ¿Qué fuerzas internas o solicitaciones generan las acciones exteriores?
- d) ¿Cuál es el grado de seguridad razonable? ó ¿Cuál es la resistencia adecuada?
- e) ¿Qué se entiende por un comportamiento bajo cargas de servicio aceptable y cuales son los requisitos que debe cumplir una estructura para lograrlo?
- f) ¿Cuál es el costo económico aceptable?
- g) ¿Es estéticamente aceptable la solución propuesta?

Las respuestas a estas preguntas no siempre son sencillas. Dada la complejidad del problema, en general, puede afirmarse que la solución estructural no es única, se intenta que la solución sea razonable.

Para intentar una respuesta a las preguntas formuladas líneas arriba, es conveniente introducir algunas ideas sobre lo que se conoce como *Estados Límites* de una estructura, elemento estructural o sección.

## 4.2 Conceptos sobre los Estados Límites de una Estructura

Cuando una estructura ó un elemento estructural ya no es capaz de cumplir con alguna de las funciones de uso para la cual fue concebida, se dice que ha alcanzado alguno de los Estados Límites. En el diseño de estructuras de concreto armado, se reconocen, en general, tres grandes grupos de Estados Límites.

### 4.2.1 Estado Límite Ultimo

Involucra el colapso total o parcial. Este evento debe tener una probabilidad muy baja de ocurrencia ya que puede conducir a la pérdida de vidas humanas y pérdidas económicas importantes. Los principales estados límites últimos son:

- a) **Pérdida de Equilibrio.** De una parte o de toda la estructura como sólido rígido, caso típico del volteo o del deslizamiento. Ocurre cuando las reacciones y/o restricciones necesarias para mantener el equilibrio no pueden desarrollarse.
- b) **Rotura o Agotamiento.** De alguno de los elementos estructurales que conlleva al colapso parcial o total. Casi todo el diseño en Concreto Armado que se estudia en este curso, tiene que ver con este estado límite.
- c) **Colapso Progresivo.** La falla localizada de un elemento puede conducir a que los elementos adyacentes se sobrecarguen y fallen y así sucesivamente hasta que toda la estructura puede alcanzar el colapso. El colapso progresivo puede prevenirse o atenuarse mediante detalles adecuados del refuerzo que permitan “amarrar” a los elementos estructurales entre sí y que provean trayectorias alternativas a las cargas en caso de una falla localizada. Este tipo de falla suele ocurrir con relativa frecuencia durante la construcción.

- d) **Formación de un Mecanismo Plástico.** Cuando se forma un número suficiente de rótulas plásticas que conviertan a la estructura en inestable (mecanismo). Este estado límite es la base del denominado **Diseño Límite o Diseño Plástico o Diseño por Capacidad** utilizado por ejemplo, para el diseño plástico de estructuras metálicas o para el diseño sísmico en el cual se confía en la ductilidad de la estructura para reducir las fuerzas elásticas de diseño.
- e) **Inestabilidad (Pandeo).** Puede tratarse del pandeo local (aislado) de un elemento o del pandeo total de un grupo de elementos, por ejemplo el pandeo lateral de un entrepiso.
- f) **Fatiga.** Fractura o falla del elemento debido a un número elevado de ciclos de carga y descarga. Ocurre bajo cargas de servicio.

#### 4.2.2 Estados Límites de Servicio

No involucran colapso parcial o total, pero sí puede involucrar un mal (pobre) funcionamiento de la estructura bajo cargas de servicio. Ya que este estado tiene asociado un menor peligro de pérdidas de vidas humanas, generalmente se suele tolerar una mayor probabilidad de ocurrencia que para el caso de los estados límites últimos. Los principales estados límites de servicio para el concreto armado son:

- a) **Deflexiones Excesivas.** Pueden generar un mal funcionamiento de la estructura con daños en los elementos no estructurales y suelen ser visualmente inaceptables ya que generan una sensación de inseguridad.
- b) **Fisuración excesiva.** A pesar de que el concreto debe fisurarse antes de que las armaduras de refuerzo sean efectivas, es posible detallar el refuerzo para lograr minimizar la fisuración (ancho de fisuras y número) del concreto por tracción. Una fisuración excesiva puede conducir a problemas de corrosión en las armaduras de refuerzo y a un deterioro progresivo del concreto. En el diseño, por ejemplo, de un reservorio destinado a contener agua, este estado controlará normalmente el diseño.
- c) **Vibraciones Indeseables.** Las vibraciones verticales de las losas de piso o los tableros de puentes así como las oscilaciones laterales en edificios ocasionados por el viento o sismo pueden originar un pobre comportamiento de la estructura. También sucede con las vibraciones ocasionadas por el tráfico o por la operación de maquinarias.
- d) **Corrosión de las armaduras de refuerzo.** Si bien en el concreto armado este estado se ha considerado normalmente dentro de los *estados límites especiales* (ver 4.2.3), creo que dada la frecuencia con la cual se presentan problemas de corrosión en las estructuras de concreto armado, tanto en nuestro medio como en el mundo, este estado debería considerarse como uno específico dentro de los *estados límites de servicio*. La corrosión de las armaduras ocurre bajo cargas de servicio.

#### 4.2.3 Estados Límites Especiales

Involucran daño o colapso de la estructura debido a cargas o condiciones inusuales. Es el caso, por ejemplo de terremotos extremos, cargas de nieve extremas, inundaciones, tornados, explosiones, colisión de vehículos, incendios.

El diseño de una estructura por Estados Límites, normalmente involucra las siguientes etapas:

- 1) La identificación de los modos potenciales de falla o estados límites significativos.
- 2) La determinación de los niveles aceptables de seguridad ante cada estado límite.
- 3) La consideración, por el diseñador, de todos los estados límites significativos.



Para las estructuras o edificios usuales, las etapas 1 y 2 se fijan en los Códigos o Normas. En ellos se especifican las cargas de servicio, los factores de carga con los cuales hay que combinarlas, los factores de reducción de resistencia para las distintas solicitaciones que actúan en un elemento y los factores de seguridad mínimos.

En el diseño de edificios convencionales, se suele empezar por dimensionar las secciones y los refuerzos de acero utilizando para ello el estado límite último de rotura o agotamiento (Diseño por Resistencia). Posteriormente se realizan las verificaciones necesarias para asegurar que las dimensiones y refuerzos cumplen con los estados límites de servicio. Se sigue esta secuencia ya que normalmente la función principal de los elementos estructurales de los edificios convencionales es la de resistir las cargas sin poner en riesgo a los ocupantes. En contraste, cuando se diseña un reservorio de concreto armado, el estado límite de fisuración es de igual importancia que el estado límite último ya que la estructura debe permanecer impermeable. En este caso se suele empezar el diseño considerando el estado límite de servicio asociado al agrietamiento, para luego verificar la seguridad frente al estado límite de rotura.

### **4.3 Coeficientes (factores) de Seguridad**

La primera condición que debe satisfacer un diseño, es que la estructura resultante sea lo suficientemente segura. Se entiende por seguridad, en términos generales, el evitar que la estructura o elemento estructural alcance o sobrepase alguno de los estados límites últimos descritos en 4.2.1.

Las Normas o Códigos actuales de concreto armado se centran en el estado límite último de rotura, falla o agotamiento (Diseño por Resistencia) de las secciones que componen los elementos estructurales. Desde esta óptica y de manera rudimentaria, *el factor de seguridad se puede definir como el cociente entre la resistencia y el valor estimado de la solicitación correspondiente en condiciones de servicio. La evaluación cuantitativa del coeficiente de seguridad requiere comparar la demanda de resistencia (solicitación o carga) con la capacidad suministrada al elemento o estructura (resistencia máxima).*

Dada la definición de coeficiente de seguridad que se ha planteado, sería válido imaginar una situación hipotética en la cual, si se cumplieran las siguientes dos condiciones:

- a) La resistencia de la estructura o elemento, construida sin defectos y tal como se concibió y diseñó, puede determinarse con absoluta precisión.
- b) Las cargas que obran sobre ella durante su vida útil así como los efectos que estas producen en el elemento (flexión, cortante, axial, etc.) se conocen con la misma precisión.

Entonces, la seguridad de la estructura podría garantizarse suministrando una resistencia ligeramente superior a la demandada por las cargas.

Se puede ilustrar la idea anterior utilizando el siguiente ejemplo simple sobre el factor o coeficiente de seguridad de un elemento estructural (Riddell, Hidalgo): El cable de una grúa debe ser capaz de izar una carga de 3 ton, para ello se ha seleccionado un cable de acero de calidad y sección transversal tal que su resistencia nominal de rotura es de 5 ton. En este caso el factor de seguridad frente a la rotura del cable es de  $5/3 = 1.7$ .

El ejemplo anterior nos lleva a pensar que si existiera certeza de que la carga máxima no excederá de 3 ton, y conociéramos con precisión la resistencia del cable, entonces bastaría seleccionar un cable con una resistencia ligeramente superior a la demanda para evitar la rotura y por lo tanto se podría usar un cable más económico. Sin embargo, en la realidad hay incertidumbre respecto del valor preciso de la carga que el operador de la grúa puede ser requerido de izar y también hay incertidumbre respecto de la resistencia última real del cable utilizado.

Las incertidumbres mencionadas, relativas a las cargas y a las resistencias, requieren el empleo de factores de seguridad. En rigor se trata de un problema probabilístico, ya que tanto las cargas como las resistencias son variables aleatorias. Las variables aleatorias son aquellas en que sus valores no son determinísticos, es decir, no pueden ser fijados con precisión o conocidas de antemano y deben describirse mediante una función de distribución de probabilidades o función de densidad de probabilidades.

La figura 4-1 muestra una función supuesta de distribución de probabilidades de las sobrecargas  $Q$  (por unidad de área) que obran sobre una estructura o elemento estructural. La forma exacta de esta curva, para un tipo de carga en particular, como por ejemplo las sobrecargas en un techo de una vivienda, oficina o depósito, pueden determinarse sobre la base de datos estadísticos obtenidos a partir de muestreos a gran escala de las sobrecargas reales que obran en tales edificaciones. La intensidad de la sobrecarga de servicio que se utiliza para el diseño se ha designado como  $Q_d$  y en nuestro caso la fija la Norma de Cargas E-020. La intensidad de la carga media se ha designado como  $Q_m$ .

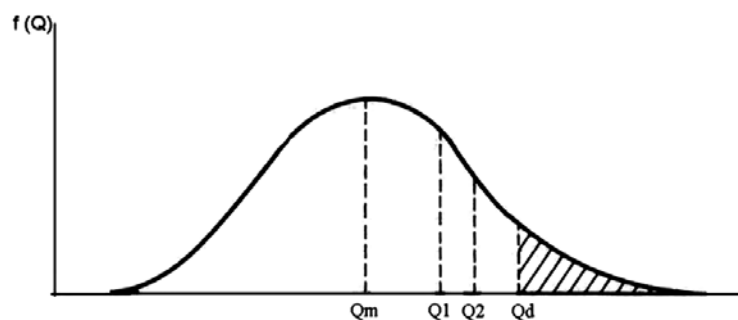


Fig. 4-1 Distribución supuesta de las frecuencias de las cargas vivas

Normalmente la sobrecarga de diseño ( $Q_d$ ) es considerablemente mayor que la sobrecarga media ( $Q_m$ ) que actúa sobre la estructura. La probabilidad de que la sobrecarga que actúe sobre la estructura sea mayor que la de diseño, viene representada por el área sombreada a la derecha de  $Q_d$ . Generalmente las Normas fijan el valor nominal de la intensidad máxima de la sobrecarga de diseño, considerando una vida útil de la estructura de 50 años y una probabilidad de excedencia entre el 2% (González Cuevas) y el 5% (Riddell, Hidalgo).

La resistencia también es una variable aleatoria. La forma que tiene la curva de distribución de las resistencias, no es fácil de obtener, depende de muchas variables, entre ellas la resistencia y variabilidad de los materiales que componen la estructura, de las variaciones en las dimensiones de las secciones transversales de los elementos, del tipo de sollicitación, del cuidado y controles durante el proceso constructivo, etc.

La figura 4-2 muestra una función supuesta de distribución de probabilidades de las resistencias ( $R$ ) de un grupo de estructuras o elementos estructurales ante determinada fuerza interna (flexión, cortante, axial, etc.). Se muestra la resistencia media ( $R_m$ ) la resistencia nominal ( $R_n$ ) y la resistencia de diseño ( $R_d$ ), el significado de estas dos últimas se definirá posteriormente.

El área de la curva de la figura 4-2 a la izquierda de  $R_n$ , representa la probabilidad de que la resistencia real del elemento esté por debajo del valor calculado por el diseñador. Veremos posteriormente que la Norma obliga a reducir el valor de  $R_n$  al valor de diseño  $R_d$ , con lo cual se reduce la probabilidad. El valor de la resistencia de diseño debe ser seleccionado de tal modo que la probabilidad de que no sea alcanzado sea relativamente pequeña, un valor del 2% suele ser recomendable (González Cuevas).

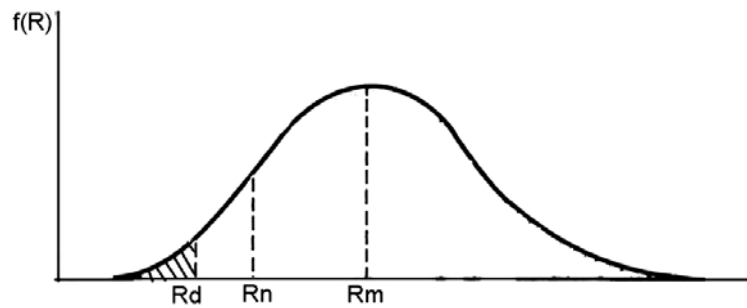


Fig. 4-2 Distribución supuesta de las frecuencias de las resistencias

La selección de un factor de seguridad adecuado no es tarea sencilla, debido al gran número de variables y de condiciones que deben tomarse en cuenta. Como ya se ha mencionado, parte de la dificultad estriba en la naturaleza probabilística tanto de las acciones que obran sobre la estructura como de las resistencias de éstas. Los coeficientes de seguridad intentan reducir la probabilidad de falla, sin embargo siempre habrá una cierta probabilidad de que la estructura se sobrecargue o de que la resistencia sea menor a la calculada o una combinación de ambos efectos que conduzca a la falla. Lo anterior es particularmente fácil de comprobar, si se analizan las numerosas fallas y colapsos estructurales que se producen luego de terremotos fuertes.

La figura 4-3 (adaptada de González Cuevas) intenta dar una idea de la determinación de la probabilidad de falla de un elemento estructural. La curva de la derecha muestra la distribución de las resistencias, por ejemplo a la flexión, ( $R$ ) de un grupo de elementos estructurales similares. La curva de la izquierda muestra la distribución del efecto (en este caso el momento flector) que se espera que ocurra durante la vida útil de la estructura debido a las cargas externas. Si el efecto de las cargas ( $S$ ) alcanza un valor  $S1$  y la resistencia un valor  $R1$ , ocurrirá un evento de falla, en este caso por flexión. El área sombreada es una medida de la probabilidad de falla del elemento estructural. La probabilidad de falla da una medida significativa del margen de seguridad real de la estructura.

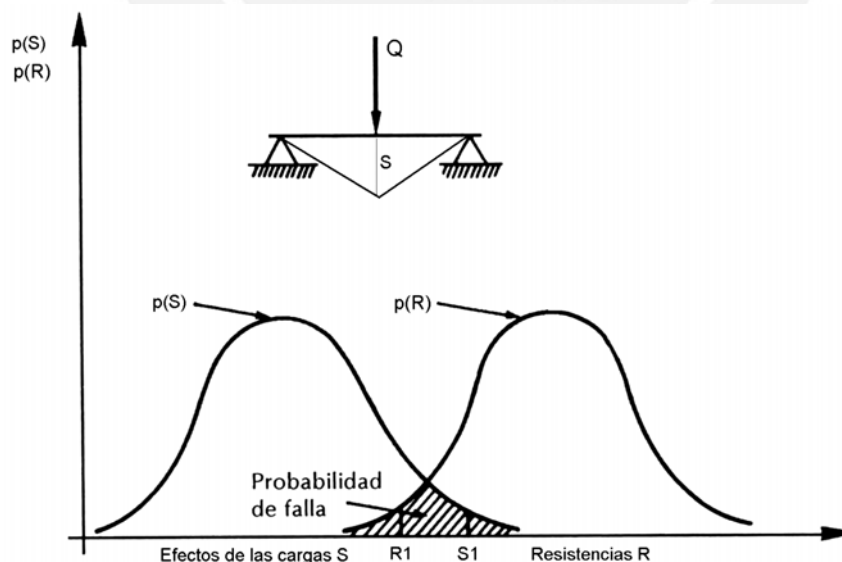


Fig. 4-3 Probabilidad de falla de un elemento estructural.

Es claro que para una distribución dada de los efectos de las cargas, la probabilidad de falla se puede reducir incrementando la resistencia de la estructura, esto equivale a

correr hacia la derecha la curva de resistencias. También se puede reducir la probabilidad de falla reduciendo la dispersión en la resistencia.

Existen diferentes definiciones relativas a la seguridad de una estructura que conviene aclarar, las definiciones o términos más empleados son:

a) Coeficiente de seguridad  $CS = R/S$  (4-1)

b) Margen de seguridad  $Z = R - S$  (4-2)

c) Probabilidad de falla  $P_f = \text{probabilidad que } [Z \leq 0]$  (4-3)

d) Confiabilidad  $P_c = \text{probabilidad que } [Z > 0] = 1 - P_f$  (4-4)

La probabilidad de falla es tal vez la más utilizada cuando se realiza el análisis de la seguridad de una estructura. Por definición la falla de una estructura o elemento ocurre cuando el valor de  $Z$  es negativo. La probabilidad viene representada por el área sombreada de la figura 4-4 (MacGregor).

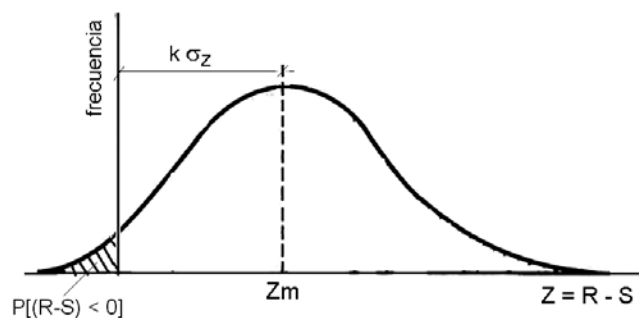


Fig. 4-4 Margen de seguridad y probabilidad de falla.

Para tener una idea del significado de los valores de las probabilidades de falla, puede considerarse que  $P_f > 10^{-3}$  (mayor que uno en mil) revela una situación de alto riesgo, mientras que una  $P_f < 10^{-5}$  (menor que uno en cien mil) refleja una condición de bajo riesgo.

Las Normas actuales de diseño están planteadas en términos determinísticos. Independientemente de los modelos probabilísticos que hayan sido utilizados para definir la intensidad de las cargas de diseño y las resistencias, el enfoque es determinístico ya que no se requiere realizar un análisis de confiabilidad estructural, es decir, evaluar la seguridad de un diseño (elemento estructural o estructura completa). Esta situación conduce a coeficientes de seguridad que no son uniformes, en el sentido que ciertos elementos pueden resultar diseñados en condiciones más conservadoras, o inversamente más inseguras, que otros.

A pesar de lo anterior, las Normas se calibran periódicamente frente a los resultados de diseño satisfactorios o no, frente la observación del comportamiento real de las estructuras ante las sollicitaciones, frente a las prácticas de diseño y construcción y frente a los nuevos materiales y refuerzos que aparecen. Esto origina ajustes periódicos de los coeficientes de seguridad, de las cargas de diseño y de las expresiones o teorías para evaluar las resistencias de los elementos y estructuras. Es decir las Normas no son estáticas, mejoran continuamente.

En términos generales puede decirse que las Normas enfocan el problema de la seguridad según dos filosofías o criterios diferentes de diseño: el Método de los Esfuerzos Admisibles y el método del Diseño por Resistencia, siendo este último el predominante hoy en día.

#### 4.4 Diseño por Esfuerzos Admisibles (WSD)

Durante muchos años el concreto armado se diseñó utilizando el método (filosofía) denominado Diseño por Esfuerzos Admisibles (en inglés WSD, Working Stress Design), también denominado Diseño Elástico. En breve resumen, este método establece que para las cargas de trabajo (servicio) ningún punto de la estructura puede tener un esfuerzo superior a un valor “admisible” que garantice que la estructura permanezca en el rango elástico. Está basado en:

- El análisis y el diseño de la estructura o elemento estructural se realizan bajo combinaciones de las cargas de servicio sin amplificar.
- Se asume que el concreto bajo cargas de servicio se comporta linealmente, esto es aproximadamente válido siempre y cuando el esfuerzo de compresión en el concreto no exceda de aproximadamente 0.4 a 0.5  $f_c$ .
- Los esfuerzos en el acero y en el concreto, bajo cargas de servicio, no deben exceder de ciertos valores fijados por la Normas, valores conocidos como esfuerzos admisibles o permisibles. Por ejemplo para el diseño por flexión de una sección de concreto armado, los esfuerzos admisibles suelen ser:

$$\begin{array}{ll} \text{Compresión en el concreto} & \sigma_c \leq 0.45 f_c \\ \text{Tracción en el acero} & f_s \leq 0.5 f_y \end{array}$$

- El coeficiente de seguridad se fija sobre los esfuerzos del concreto y del acero como una fracción de sus resistencias ( $f_c, f_y$ ).

El WSD se utilizó desde principios de 1900 hasta finales de la década del 60. Debido a las numerosas deficiencias que presentaba, a partir de la publicación del ACI-63 se inició una rápida transición hacia el Diseño por Resistencia. En la publicación del código del ACI en 1971, todo el diseño en concreto armado pasó a ser por Resistencia y el WSD se convirtió en una pequeña sección del código. A partir del ACI del 77 el WSD pasó a ser un apéndice y se le llamó Alternate Design Method (Método de Diseño Alternativo) y se mantuvo hasta el ACI del 99 desapareciendo completamente en el ACI del 2002

#### 4.5 Diseño por Resistencia

En sus inicios se le denominó Diseño por Resistencia Última o Diseño a la Rotura (Ultimate Strength Design ó USD), hoy en día se le conoce principalmente con el nombre de Diseño por Resistencia (Strength Design Method).

Este método es en esencia un diseño por *estados límites*, con la particularidad que la atención se centra en los *estados límites últimos* (ver 4.2.1). Los *estados límites de servicio* (ver 4.2.2) se verifican luego del diseño de los refuerzos de acero.

Vale la pena transcribir los artículos 10.1.1 y 10.1.2 de la Norma De Concreto E-060 en los cuales se establece la filosofía del Diseño por Resistencia:

Artículo 10.1.1- Las estructuras y los elementos estructurales deberán diseñarse para obtener, en todas sus secciones, resistencias de diseño por lo menos iguales a las resistencias requeridas, calculadas para las cargas amplificadas en las combinaciones que se estipulan en esta Norma.

Artículo 10.2.2 - Las estructuras y los elementos estructurales también deberán cumplir con todos los demás requisitos de esta Norma, para garantizar un comportamiento adecuado en los niveles de cargas de servicio.

El término *resistencia* hay que entenderlo en un sentido amplio, es aplicable a cualquier sollicitación o fuerza de sección, tal como: flexión, cortante, carga axial, torsión, etc. o a combinaciones de estas.

Cuando por ejemplo, en una viga sometida a un grupo de cargas externas, la flexión hace que se alcance la resistencia de alguna o varias secciones, es decir cuando una o

varias secciones alcanzan a su máxima capacidad, se dice que se ha alcanzado o se ha agotado la resistencia a la flexión o se ha superado el *momento resistente* o la *capacidad en flexión de la sección*.

El elemento estructural o la estructura soportará en forma segura las cargas o sollicitaciones, si en cada sección se cumple:

$$\text{Resistencia} \geq \text{Efecto de las Cargas} \quad (4-5)$$

$$\text{Resistencia Suministrada o Proporcionada} \geq \text{Resistencia Requerida} \quad (4-6)$$

$$\underline{\text{Resistencia de Diseño}} \geq \underline{\text{Resistencia Requerida}} \quad (4-7)$$

Las expresiones 4-5, 4-6 y 4-7 son totalmente equivalentes y son las expresiones básicas para el diseño por el *estado límite último de rotura* o para el Diseño por Resistencia.

Ya que las resistencias y las cargas son variables aleatorias independientes, es conveniente contar con un juego de factores que tomen en cuenta la variabilidad de la resistencia y con otro juego de factores que tomen en cuenta la variabilidad en los efectos que producen las cargas externas en la estructura.

Es decir, para contemplar la posibilidad de que la resistencia sea menor que la calculada o predicha y que los efectos de las cargas sean mayores que los calculados o estimados deberá cumplirse:

$$\phi R_n \geq C_1 * S_1 + C_2 * S_2 + C_3 * S_3 + \dots + C_n * S_n \quad (4-8)$$

donde:

- $R_n =$  Resistencia de Diseño o resistencia suministrada o proporcionada.
- $\phi =$  Factor de Reducción de Resistencia, menor que la unidad.
- $R_n =$  Resistencia Nominal, corresponde a aquella calculada mediante un modelo mecánico del comportamiento del elemento frente a determinada sollicitación o combinación de sollicitaciones, utilizando los valores nominales de las resistencias especificadas para el concreto y el acero, las dimensiones del elemento y el acero de refuerzo indicados en los planos. Los valores nominales de las resistencias del concreto y del acero se refieren a la resistencia determinística especificada como calidad de los materiales.
- $S_1, S_2, S_3 \dots =$  Efecto de las cargas de servicio especificadas (muertas, vivas, sismo, viento, empuje de líquidos o suelos, etc.), en este caso también son nominales.
- $C_1, C_2, C_3 \dots =$  Factores de Carga o de amplificación o de mayoración.

La ecuación 4-8 aplicada a los distintos tipos de sollicitaciones y grupos de carga que pueden estar presentes en un elemento estructural, se puede escribir como:

Para Flexión:  $\phi_f M_n \geq C_d M_d + C_l M_l + C_s M_s + \dots$   
 $\phi_f M_n \geq M_u \quad (4-9)$

Para Corte:  $\phi_v V_n \geq C_d V_d + C_l V_l + C_s V_s + \dots$   
 $\phi_v V_n \geq V_u \quad (4-10)$

Para Axial:  $\phi_p P_n \geq C_d P_d + C_l P_l + C_s P_s + \dots$   
 $\phi_p P_n \geq P_u \quad (4-11)$

Por ejemplo, la Norma Peruana, para el diseño por flexión de una viga, sometida únicamente a cargas de gravedad y de uso (muertas y vivas), exige que en todas las secciones se cumpla:

$$\phi M_n \geq M_u$$

$$0.9 M_n \geq 1.5 M_d + 1.8 M_l \quad (4-12)$$

Donde  $M_d$  es el momento flector ocasionado por las cargas muertas y  $M_l$  el ocasionado por las cargas vivas, ambas en servicio.

El ACI-99, para el mismo grupo de cargas exige:

$$0.9 M_n \geq 1.4 M_d + 1.7 M_l \quad (4-13)$$

El ACI-02, basado en las combinaciones especificadas por el ASCE 7-98, que unifica los factores de carga y combinaciones de carga para su uso en estructuras de concreto, acero, madera, ladrillo, para el mismo grupo de cargas, exige:

$$0.9 M_n \geq 1.4 M_d \quad (4-14)$$

$$0.9 M_n \geq 1.2 M_d + 1.6 M_l \quad (4-15)$$

De la comparación de las expresiones 4-12 y 4-13, resulta claro que para este grupo de cargas, el factor de seguridad mínimo exigido por la Norma Peruana, es mayor que el exigido por el ACI-99. La comparación de las expresiones 4-13 y 4-15 indica que el ACI-02 ha reducido el factor de seguridad global para este grupo de cargas (muertas y vivas).

#### 4.6 Factores de Reducción de Resistencia - Resistencia de Diseño

Los factores de reducción de resistencia ( $\phi$ ) afectan a las resistencias nominales de las secciones y toman en cuenta las siguientes incertidumbres:

##### a) *La Variabilidad en la Resistencia*

- Variabilidad en la resistencia de los materiales. En nuestro caso del concreto y del acero. La diferencia entre la resistencia del concreto de la probeta de laboratorio con el concreto realmente colocado en obra.
- Diferencias entre las dimensiones indicadas en los planos y la construcción real y las tolerancias en la colocación del acero.
- Incertidumbre del modelo mecánico en que se basa la determinación de resistencia nominal del elemento o sección. Inexactitudes, suposiciones y simplificaciones en las ecuaciones que utilizamos para predecir la resistencia.

La figura 4-5 (MacGregor), muestra en el eje horizontal la relación entre la resistencia a flexión de un grupo de vigas (112 vigas con  $f'_c > 140 \text{ kg/cm}^2$ ) de concreto armado medida en ensayos de laboratorio y la resistencia predicha por las ecuaciones de diseño que se utilizan ( $M_{test}/M_n$ ) y que se presentarán posteriormente. El promedio de las mencionadas relaciones se ubica en 1.05 con un coeficiente de variación cercano al 10%. Es claro que existe un grupo de resultados con una resistencia menor que la predicha por las ecuaciones, en este caso la discrepancia se debe fundamentalmente a las simplificaciones y suposiciones asociadas con las ecuaciones que predicen la resistencia ya que las otras variables están controladas bajo condiciones de laboratorio.

b) *Las Consecuencias de la Falla del elemento.* La importancia del Elemento dentro de la estructura y las consecuencias de la falla del mismo. En un edificio, por ejemplo, las columnas suelen ser elementos cuya falla entraña más peligro que la falla de una viga. Adicionalmente la resistencia a compresión de las columnas es sensible a las variaciones en la resistencia del concreto ( $f'_c$ ) mientras que las vigas son poco sensibles a estas variaciones.

c) *El Tipo de falla del elemento,* asociada con la sollicitación y el comportamiento de este bajo esa sollicitación. Hay una marcada diferencia entre una falla dúctil y una frágil, ciertos elementos de concreto en una estructura experimentan fallas frágiles cuando se sobrecargan más allá de su capacidad. Este es, por ejemplo, el caso de las

columnas con cargas axiales altas en las cuales las fallas son mucho menos dúctiles que las fallas de las vigas en flexión. También es importante la posibilidad de que cuando algunas secciones de un elemento estructural, se sobrecarguen más allá de su resistencia, este pueda encontrar trayectorias alternas para soportar las cargas sin colapsar, a esto se le llama redistribución, cuando ésta no es posible se debe proveer un mayor grado de seguridad.

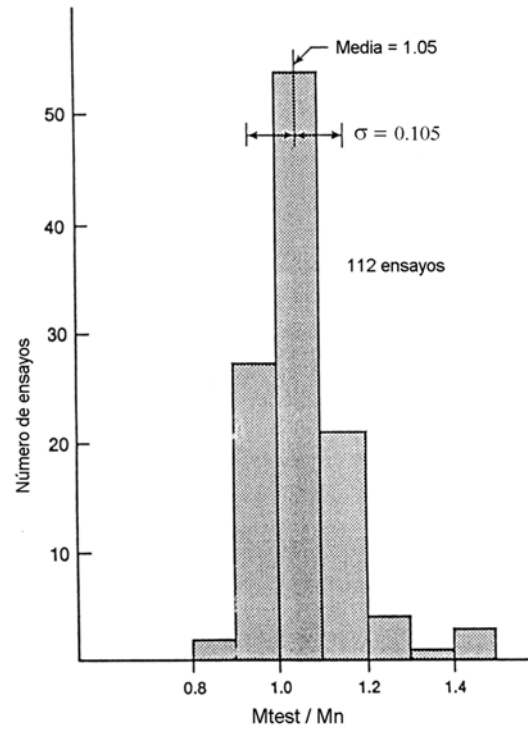


Fig. 4-5 Comparación entre las resistencias nominales a flexión calculadas y las obtenidas en laboratorio.

#### 4.6.1 Factores de Reducción de Resistencia – Norma Peruana

Los factores de reducción están especificados en la Norma Peruana artículo 10.3 y son copias de los especificados por el ACI-99. El ACI-02 ha modificado, de manera importante, los valores de  $\phi$  como consecuencia de haber reducido los factores de carga (ver ecuaciones 4-13 y 4-15) para así lograr que el coeficiente de seguridad global no se reduzca significativamente.

<u>Solicitud</u>	<u>Factor <math>\phi</math> de Reducción</u>
• Flexión	0.90
• Tracción y Tracción + Flexión	0.90
• Cortante	0.85
• Torsión	0.85
• Cortante y Torsión	0.85
• Compresión y Flexocompresión:	
Elementos con espirales	0.75
Elementos con Estribos	0.70
• Aplastamiento en el concreto	0.70
• Zonas de anclaje del postensado	0.85
• Concreto Simple (sin armaduras)	0.65 (ACI-99 Art. 9.3.5)



#### 4.7 Factores de Carga (Resistencia Requerida)

En el Diseño por Resistencia las cargas de servicio se llevan a una condición extrema o última (de allí el nombre original de Diseño a la Rotura, USD) es decir, a un nivel de cargas de baja probabilidad de ser excedida durante la vida de la estructura. Para ello se utilizan *factores de carga* que en algunos textos se denominan *factores de amplificación o mayoración de las cargas*. Deben tomar en cuenta lo siguiente:

a) La variabilidad de las cargas, es decir el grado de precisión con el que se pueden estimar las cargas y calcular sus efectos.

Para las cargas muertas convencionales los errores de estimación deberían ser menores al 20%. En los Estados Unidos, mediciones realizadas de la carga muerta real en un grupo de estructuras, arrojaron coeficientes de variación entre 6% y 13%, siendo 10% una aproximación razonable.

Para las cargas vivas los errores de estimación pueden ser mucho más altos que para las cargas muertas.

Para las cargas de sismo y viento es muy difícil precisar el nivel de aproximación con el cual se pueden calcular. Las cargas de sismo son tal vez, las más difíciles de cuantificar.

b) El grado de precisión de los métodos de análisis que utilizamos. Hay diferencias entre las fuerzas de sección que calculamos utilizando nuestros métodos de análisis y las que ocurren realmente en la estructura. Estas diferencias tienen que ver con las suposiciones y simplificaciones que se realizan para llegar a un modelo estructural, en las propiedades y comportamiento de los materiales, en el comportamiento de la cimentación, en la idealización de las cargas, en las propiedades de las secciones transversales de los elementos, en la interacción de los elementos estructurales, etc.

La figura 4-6 (Hart) muestra el histograma de las frecuencias de la intensidad de las sobrecargas medidas en un grupo grande de oficinas en los Estados Unidos. Las mediciones corresponden a oficinas privadas de uso general y para empleados de oficina. Es clara la fuerte dispersión encontrada, con un coeficiente de variación cercano al 60%. Llama la atención la sobrecarga promedio medida de tan solo 45 kg/m<sup>2</sup> en comparación con la sobrecarga de diseño de 250 kg/m<sup>2</sup> especificada por las Normas para las oficinas.

Es necesario mencionar que las sobrecargas medidas corresponden a lo que se podrían llamar las cargas vivas sostenidas, es decir las que se suponen actúan permanentemente como el mobiliario y cargas normales de las personas que las ocupan. A estas es necesario agregar las sobrecargas transientes como las que se presentan en caso de reuniones, almacenaje temporal, cambios de uso, entre otros efectos, con lo cual se podría alcanzar el valor de diseño.

La tabla 4-1 (Hart) muestra los promedios y los coeficientes de variación de las sobrecargas medidas en oficinas privadas, de acuerdo al uso de los ambientes. El número total de ambientes de oficinas medidas fue de 834.

La tabla 4-2 (Hart) muestra la sobrecargas medidas en oficinas privadas (834 ambientes) y estatales (520 ambientes) de acuerdo al área del ambiente. Es clara la influencia que tiene el área sobre la intensidad promedio de las sobrecargas medidas, sobre la base de este hecho las Normas permiten reducir las sobrecargas de diseño, en función del área tributaria que soporta el elemento a diseñar (viga, columna, losa).

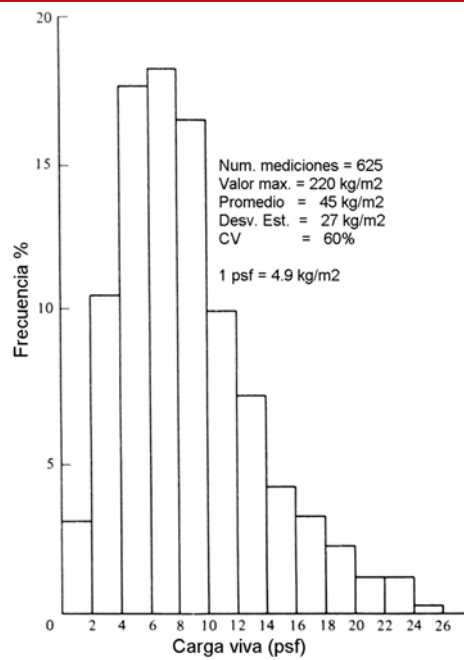


Fig. 4-6 Intensidad de las sobrecargas medidas en ambientes de uso general y oficinas de empleados.

Tabla 4-1 Sobrecargas medidas en oficinas

Uso del ambiente	Sobrecarga promedio (kg/m <sup>2</sup> )	Coefficiente de Variación
General	43	0.56
Empleados	50	0.69
Recepción	23	1.04
Conferencias	30	0.82
Archivo	120	0.79
Almacenaje	76	0.89
Biblioteca	122	0.39
Todos los ambientes	48	0.84

Tabla 4-2 Influencia del área del ambiente en la intensidad de la sobrecarga.

Area del ambiente (metros cuadrados)	Número de mediciones	Sobrecarga promedio (kg/m <sup>2</sup> )	Coefficiente de Variación
hasta 5	41	85	100%
más de 5 a 10	188	65	95%
más de 10 a 28	899	45	70%
más de 28	226	43	102%

1,354

#### 4.7.1 Factores de Carga de la Norma Peruana (Resistencia Mínima Requerida)

- Cargas muertas y vivas

$$U = 1.5 CM + 1.8 CV \quad (4-16)$$

- Cargas de viento (V)

$$U = 1.5 CM + 1.8 CV \quad (4-16)$$

$$U = 1.25 (CM + CV \pm V) \quad (4-17)$$

$$U = 1.25 (CM \pm V) \quad (4-18)$$

$$U = 0.9 CM \pm 1.25 V \quad (4-19)$$

- Cargas de sismo (CS)

$$U = 1.5 CM + 1.8 CV \quad (4-16)$$

$$U = 1.25 (CM + CV \pm CS) \quad (4-20)$$

$$U = 1.25 (CM \pm CS) \quad (4-21)$$

$$U = 0.9 CM \pm 1.25 CS \quad (4-22)$$

- Empuje de suelos (CE)

$$U = 1.5 CM + 1.8 CV \quad (4-16)$$

$$U = 1.5 CM + 1.8 CV + 1.8 CE \quad (4-23)$$

Si la CM y la CV reducen el efecto del empuje de CE, por ejemplo la sobrecarga que pudiera existir encima del relleno detrás de un muro de contención:

$$U = 0.9 CM + 1.8 CE \quad (4-24)$$

- Empuje de líquidos (CL) con densidades definidas y alturas controladas

$$U = 1.5 CM + 1.8 CV \quad (4-16)$$

$$U = 1.5 CM + 1.8 CV + 1.5 CL \quad (4-25)$$

Si la CM y la CV reducen el efecto del empuje de CL:

$$U = 0.9 CM + 1.8 CL \quad (4-26)$$

- Cargas de impacto: Se deberán incluir en la CV.

- Efecto (CT) de asentamientos diferenciales, cambios de temperatura, creep, retracción

$$U = 1.5 CM + 1.8 CV \quad (4-16)$$

$$U = 1.25 (CM + CV + CT) \quad (4-27)$$

$$U = 1.5 (CM + CT) \quad (4-28)$$

Las ecuaciones 4-19 y 4-22 son para los casos en los cuales las cargas muertas y vivas estabilizan a la estructura o reducen el efecto de las cargas de viento o sismo. Por ejemplo en el muro en voladizo mostrado en la figura 4-7, sometido a empujes laterales de viento, es claro que las cargas muertas y vivas estabilizan al muro. El esfuerzo máximo de compresión en el punto B estará controlado por las ecuaciones 4-16 ó 4-17 (V con signo positivo) y el esfuerzo máximo de tracción en el punto A estará controlado por la ecuación 4-19.

Similar razonamiento es válido para el caso de empuje de suelos o líquidos, casos en los cuales es necesario investigar la resistencia utilizando las ecuaciones 4-24 y 4-26.

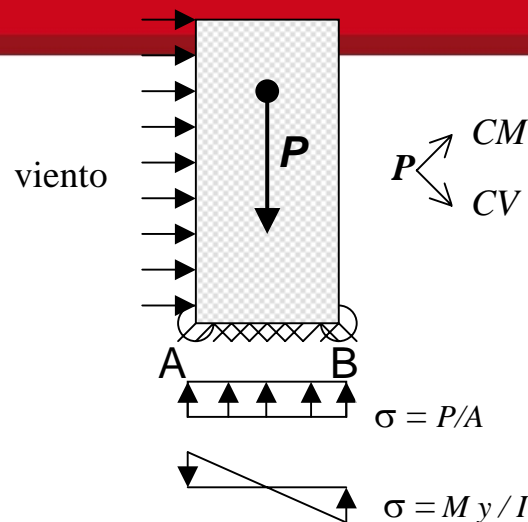


Fig. 4-7 Efecto estabilizante de las cargas muertas y vivas

Los factores de carga o resistencias requeridas, deben considerarse, en general, como *valores mínimos*. Si las consecuencias de la falla del elemento estructural pueden ser especialmente graves o si no fuera posible estimar razonablemente las cargas de servicio, siempre será posible aumentar dichos factores.

#### 4.8 Análisis y Diseño por Resistencia

Para el diseño de una estructura o elemento utilizando el Diseño por Resistencia, lo que se suele hacer es analizar la estructura para las cargas de servicio (con factores de carga unitarios), asumiendo comportamiento elástico de la misma bajo la acción de las cargas o grupos de cargas que puedan actuar sobre ella durante su vida útil (cargas muertas, sobrecargas de uso, viento, sismo, etc.). Luego los resultados de cada uno de los efectos de las cargas individuales se combinan con sus respectivos *factores de carga*, de este modo se determina la *resistencia requerida* en cada una de las secciones del elemento y se procede a su diseño (por flexión, corte, torsión, flexocompresión, etc.) utilizando el formato de la ecuación 4-8.

También es posible analizar la estructura bajo la acción de las cargas multiplicadas por sus respectivos factores (cargas amplificadas, factorizadas o mayoradas), el resultado será el mismo, ya que el análisis se realiza asumiendo un comportamiento lineal de la estructura. En general es mejor analizar la estructura bajo cargas sin amplificar, esto permitirá realizar una serie de verificaciones que se hacen bajo condiciones de servicio, por ejemplo, el cálculo de deflexiones o del esfuerzo en el acero para verificar las exigencias relativas al control de fisuras.

El análisis de una estructura bajo cargas de servicio para luego amplificar y combinar los resultados de las distintas cargas, no es válido si se están analizando estructuras con comportamiento no lineal, por ejemplo si se están incluyendo los efectos de segundo orden producidos por las cargas de gravedad. En estos casos el análisis debe realizarse con las cargas amplificadas.

Para diseñar un elemento en flexión, por ejemplo una viga, es útil construir la envolvente de las Resistencias Requeridas. Este es el caso, por ejemplo, de la envolvente de momento flector y fuerza cortante que se presenta en el ejemplo 4-1 para una viga sometida a carga muerta, carga viva y momentos en sus extremos provenientes de las acciones sísmicas que obran sobre el pórtico al cual ella pertenece. Conocida la envolvente de las resistencias requeridas, se procede al diseño del refuerzo de acero para varias secciones a lo largo de la viga.

A estas alturas, el lector atento se habrá percatado que en el Diseño por Resistencia, tal como se aborda hoy en día, hay una inconsistencia importante. Por un lado trabajamos con resistencias de diseño - que representan la capacidad máxima inelástica de la sección frente a determinada sollicitación - y con cargas amplificadas por ciertos factores de carga para las cuales el comportamiento de la estructura ya no es elástico, más bien para la intensidad de las cargas amplificadas, la estructura ya incurrió en el régimen inelástico. Por otro lado, utilizamos métodos de análisis que son aplicables a estructuras con comportamiento lineal elástico, ignorando por ejemplo el efecto de la redistribución de fuerzas internas que se produce en una estructura con comportamiento inelástico.

Ciertamente lo anterior es una “inconsistencia” sin embargo, se acepta ya que los métodos de análisis en el rango del comportamiento inelástico no se encuentran suficientemente desarrollados para su uso rutinario. Aún cuando dispongamos de métodos analíticos de análisis inelástico (de hecho los hay), en el concreto armado hay incertidumbre relacionada con: la ubicación exacta y longitud de las rótulas plásticas, la ductilidad disponible o capacidad de rotación de las mencionadas rotulas, la interacción de la fuerza cortante y/o fuerza axial con los momentos de flexión, con el hecho de que no es posible lograr niveles de capacidad de rotación inelástica uniformes en todos los elementos, el hecho que ciertos elementos bajo determinadas sollicitaciones tiene fallas frágiles y finalmente porque no se han desarrollado modelos completos y confiables del comportamiento del concreto armado bajo sollicitaciones complejas.

Por otro lado la experiencia de más de 40 años en el uso del Diseño por Resistencia (se introdujo en el ACI de 1963) ha demostrado que el comportamiento de las estructuras diseñadas aún con esta “inconsistencia”, ha sido, en general satisfactorio, con niveles de seguridad razonables y por lo tanto lo seguiremos empleando por un buen tiempo.

#### **4.9 Estimación de los Coeficientes de Seguridad Globales**

Es conveniente tener una idea del coeficiente de seguridad que resulta al utilizar el Diseño por Resistencia. Si bien el coeficiente de seguridad global de una estructura completa, por ejemplo un edificio, es difícil de estimar, sí es posible tener una idea del mismo para un elemento en particular bajo una determinada condición de carga y para un determinado tipo de falla del elemento. Por ejemplo, los aligerados, que son elementos estructurales muy comunes en nuestro medio, se diseñan generalmente solo para la acción de su peso propio, el piso terminado y la sobrecarga de uso especificada por la Norma de Cargas.

Para un aligerado de 0.25 m de peralte, con una sobrecarga de uso de 200 kg/m<sup>2</sup> tendremos:

$$\text{Peso propio} = 350 \text{ kg/m}^2$$

$$\text{Piso terminado} = 100 \text{ kg/m}^2$$

$$\text{Carga total en servicio} = 350 + 100 + 200 = 650 \text{ kg/m}^2$$

$$\text{Resistencia Requerida} = \omega u = 1.5 (350 + 100) + 1.8 (200) = 1,035 \text{ kg/m}^2$$

Si asumimos que el aligerado está bien construido, que los materiales utilizados se ajustan a lo especificado, que el diseñador ha colocado en todas las secciones exactamente la cantidad de acero que resulta de los cálculos, y que la falla del elemento se inicia por flexión (falla dúctil) tendremos que el coeficiente de seguridad frente a la falla por flexión, en este caso particular, estará en el orden de:

$$CS = (1 / 0.9) * (1,035 / 650) \approx 1.8$$

Por consiguiente podemos estimar que el coeficiente de seguridad global frente la falla por flexión en un aligerado (o en una viga) diseñado únicamente para cargas de

gravidad estará, de acuerdo a las *resistencias requeridas* de la Norma Peruana, entre 1.67 ( $U/\phi = 1.5 / 0.9$ ) cuando exista únicamente carga muerta y 2.0 ( $U/\phi = 1.8 / 0.9$ ) cuando la carga viva sea mucho mayor que la carga muerta. En estos cálculos se ha supuesto que la falla del elemento sea ocasionada por la flexión, si la falla se iniciara antes por otras sollicitaciones internas, tal como el cortante, se modificará el coeficiente de seguridad, el mecanismo de falla y sobre todo la ductilidad del elemento ya que la falla puede cambiar de dúctil a una falla frágil.

Es evidente que el diseñador tiene la capacidad de modificar el coeficiente de seguridad que se ha estimado, colocando por ejemplo, más o menos acero por flexión que el necesario. También es evidente que el constructor puede modificar seriamente los coeficientes de seguridad, si la ejecución de la obra adoleciera de serios defectos constructivos.

**Ejemplo 4-1** La figura 4-8 muestra una parte de un pórtico plano perteneciente a un edificio de baja altura. Sobre la viga del piso  $n+1$  actúa una carga muerta uniformemente distribuida de 2.35 ton/m y una carga viva de 1.12 ton/m, ambas en servicio y provenientes de un metrado convencional de la viga. Adicionalmente el pórtico está sometido a un conjunto de fuerzas laterales provenientes del sismo actuando sobre el edificio. Se supone que mediante algún método reconocido de análisis estructural se han determinado las acciones en los extremos de la viga y a partir de ellas se han construido los diagramas de momento flector indicados en la figura.

Se quiere calcular la *resistencia requerida* en flexión para la sección A-A de la viga

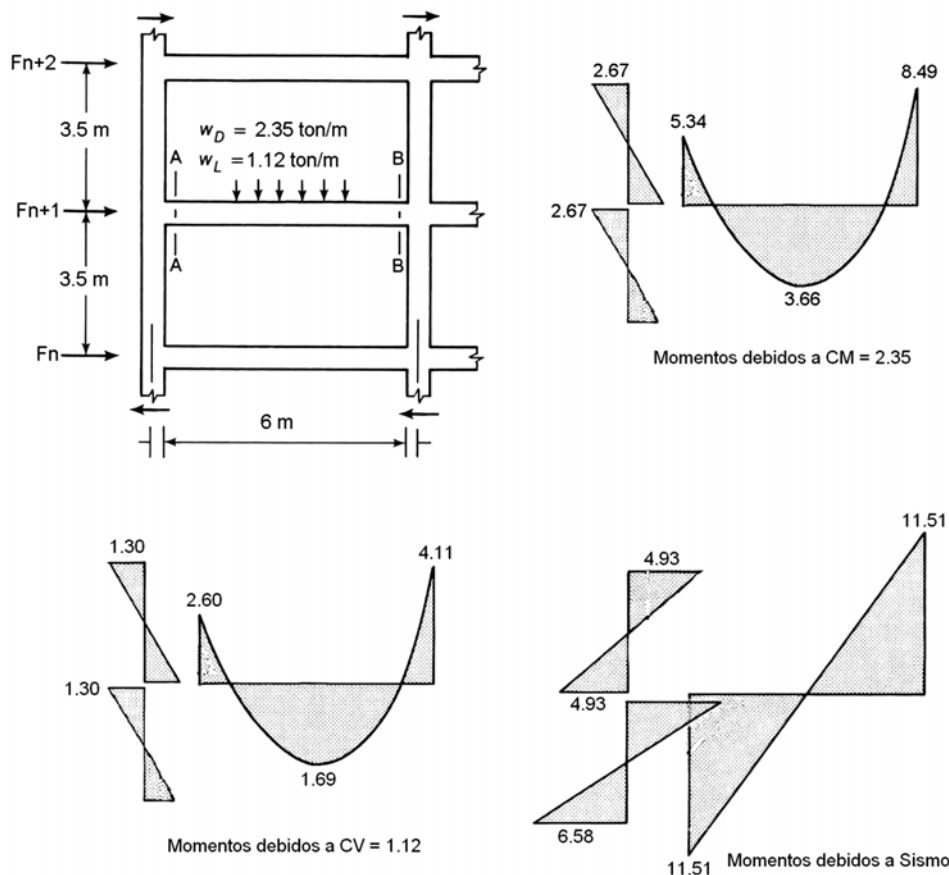


Fig. 4-8 Diagramas de momentos para la viga del pórtico.

Utilizando los *factores de carga* de la Norma Peruana, ecuaciones 4-16, 4-20, 4-21 y 4-22 se obtienen las siguientes resistencias requeridas ( $M_u$ ) para la sección A-A de la viga. Por convención asumiremos que los momentos son positivos cuando producen compresiones en la fibra superior de la sección

$$\begin{aligned}
 U = M_u &= 1.5(-5.34) + 1.8(-2.6) &= -12.69 \text{ ton-m} & (4-16) \\
 M_u &= 1.25(-5.34 - 2.6 + 11.51) &= 4.46 & (4-20) \\
 M_u &= 1.25(-5.34 - 2.6 - 11.51) &= \underline{-24.31} & (4-20) \\
 M_u &= 1.25(-5.34 + 11.51) &= 7.71 & (4-21) \\
 M_u &= 1.25(-5.34 - 11.51) &= -21.06 & (4-21) \\
 M_u &= 0.9(-5.34) + 1.25(11.51) &= \underline{9.58} & (4-22) \\
 M_u &= 0.9(-5.34) + 1.25(-11.51) &= -19.19 & (4-22)
 \end{aligned}$$

En consecuencia la *resistencia requerida* en flexión ( $M_u$ ) en la sección A-A es de -24.31 ton-m para momento negativo y de +9.58 ton-m para momento positivo. Si se repiten los mismos cálculos para diversas secciones a lo largo de la viga, es posible obtener la *envolvente de resistencias requeridas*. La figura 4-9 muestra la construcción de la envolvente de momentos flectores donde se indican las parábolas correspondientes a las distintas combinaciones (ecuaciones 4-16, 4-20, 4-22) en línea punteada se muestra la resistencia requerida solo por la acción de las cargas verticales (ecuación 4-16). La figuras 4-10 y 4-11 muestran las envolventes finales de momento flector y fuerza cortante.

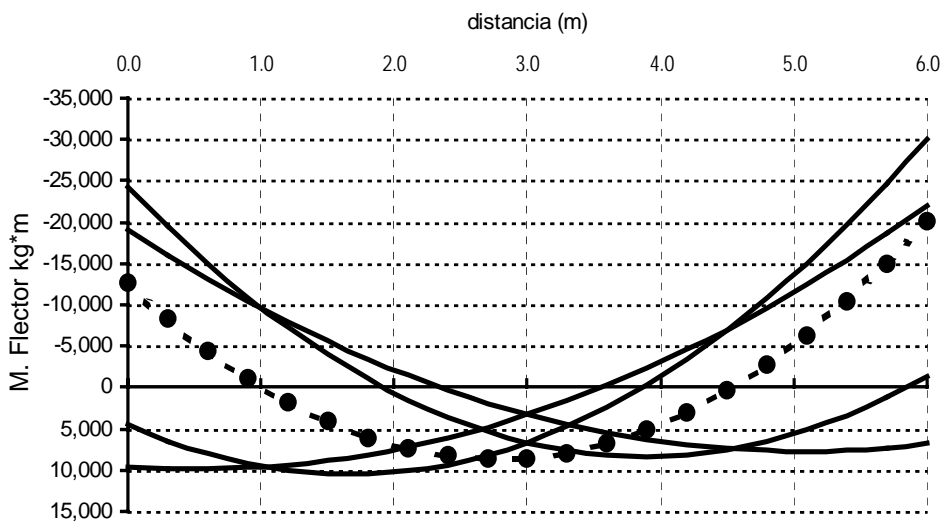


Fig. 4-9 Construcción de la envolvente de momentos flectores

Conocida la envolvente de las *resistencias requeridas*, se procede al diseño del refuerzo de acero, tanto por flexión como por cortante, para varias secciones a lo largo de la viga. En la tabla 4-3 se muestra el diseño por flexión y cortante a lo largo de este tramo de viga (cada 0.30 m) basado en las ecuaciones 4-9 y 4-10. Se ha supuesto que la sección transversal de la viga es de 0.30x0.60 m con un concreto de  $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$  y un acero de refuerzo con  $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$ . Se han empleado las ecuaciones de diseño por flexión y cortante que se presentarán más adelante en los Capítulos 9 y 19.

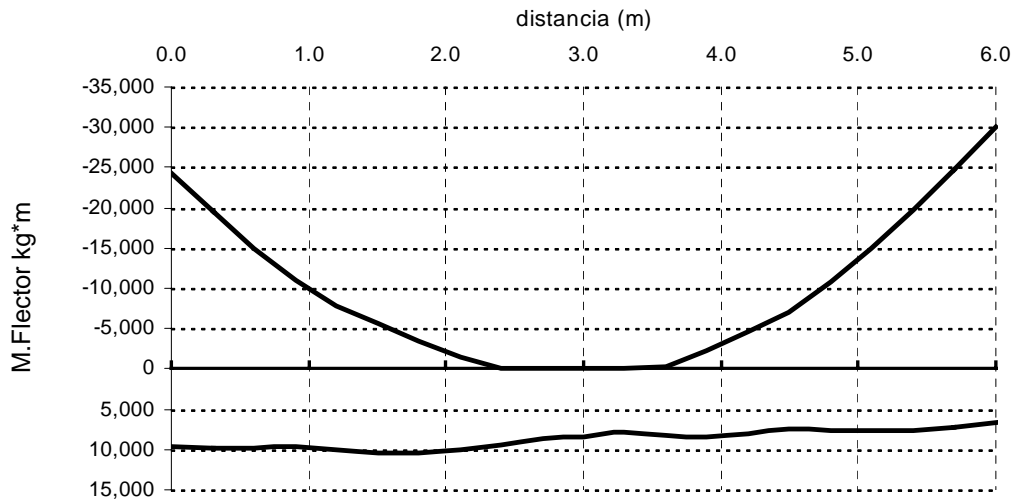


Fig. 4-10 Envolvente de momentos flectores ( $M_u$ )

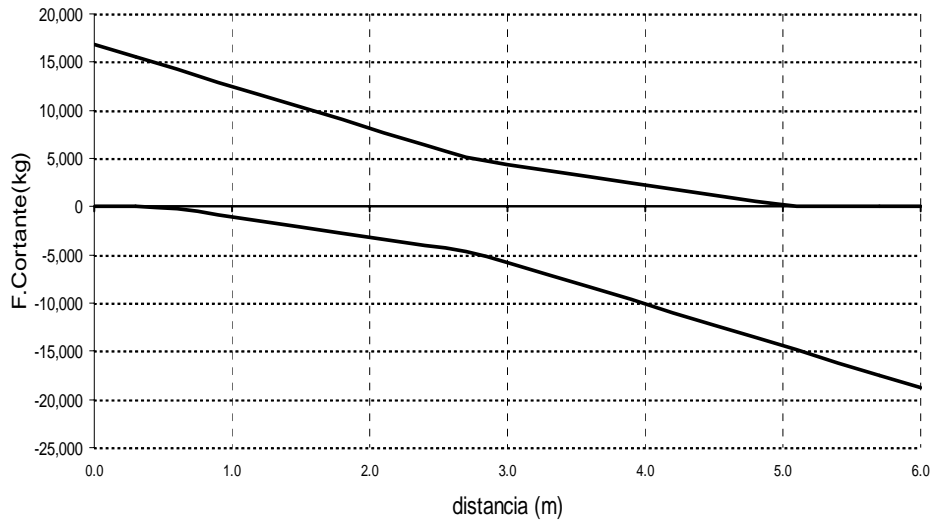


Fig. 4-11 Envolvente de fuerzas cortantes ( $V_u$ )

Tabla 4-3 Diseño por flexión y cortante

Posición (m)	Mu Neg. (kg-m)	Acero Neg. (cm <sup>2</sup> )	Mu Pos. (kg-m)	Acero Pos. (cm <sup>2</sup> )	Cortante Vu (kg)	Estribos S (cm)	Estribos Smax (cm)
0.0	-24,313	13.2	9,581	4.9	16,838	31	27
0.3	-19,464	10.3	9,806	5.0	15,536	39	27
0.6	-14,991	7.8	9,847	5.0	14,235	53	27
0.9	-10,923	5.6	9,690	4.9	12,934	82	27
1.2	-7,914	4.0	10,035	5.1	11,633	183	27
1.5	-5,574	2.8	10,444	5.3	10,331		27
1.8	-3,417	1.7	10,478	5.3	9,030		27
2.1	-1,457	0.7	10,107	5.1	7,729		27
2.4	0		9,360	4.7	6,427		27
2.7	0		8,636	4.4	5,126		40
3.0	0		8,523	4.3	5,767		27
2.7	0		7,921	4.0	7,068		27
2.4	-248	0.1	8,195	4.1	8,369		27
2.1	-2,308	1.1	8,359	4.2	9,670		27
1.8	-4,551	2.3	8,148	4.1	10,972	487	27
1.5	-7,039	3.5	7,578	3.8	12,273	114	27
1.2	-10,726	5.5	7,650	3.9	13,574	64	27
0.9	-15,001	7.8	7,706	3.9	14,875	45	27
0.6	-19,651	10.4	7,579	3.8	16,177	34	27
0.3	-24,707	13.4	7,254	3.7	17,478	28	27
0.0	-30,138	16.8	6,746	3.4	18,779	24	27



Calculemos el factor de seguridad frente a la falla por flexión en la sección A-A del ejemplo anterior. Supongamos que el diseñador ha colocado refuerzos de acero por flexión estrictamente iguales a los necesarios (tabla 4-3) y que el concreto y el acero se ajustan a las especificaciones, supongamos además que la estructura ha sido bien construida. Bajo estas premisas el factor de seguridad de la sección A-A frente a la falla por flexión para momento negativo, si no existiera como solicitación el sismo sería:

$$FS = (1/0.9) * (12.69 / (5.34+2.6)) \approx 1.8$$

Sin embargo es claro que en la sección A-A el diseño está controlado por la combinación 4-20 que incluye la acción del sismo, en consecuencia frente a cargas de gravedad el factor de seguridad de la sección es mucho mayor:

$$FS = (1/0.9) * (24.31 / (5.34+2.6)) \approx 3.4$$

Cuando actúe la solicitación sísmica con una magnitud igual a la supuesta y la viga se encuentre soportando el íntegro de la carga muerta y de la carga viva, el factor de seguridad estimado en la sección A-A será:

$$FS = (1/0.9) * (24.31 / (5.34+2.6+11.51)) \approx 1.4$$

Esta situación es frecuente en los elementos en los cuales el sismo controla el diseño. Los elementos suelen tener coeficientes de seguridad frente a las cargas verticales, las de todos los días, bastante más altos que los estrictamente necesarios si solo hubiera cargas verticales. El exceso de resistencia y ductilidad está a la espera que se produzca el “gran evento sísmico”, evento que tal vez nunca ocurra durante la vida útil de la estructura, o que podría ocurrir al día siguiente de poner en servicio la estructura. Este exceso de resistencia podría denominarse “coeficiente de seguridad pasivo” y a las armaduras de refuerzo (refuerzo longitudinal y transversal) colocadas a la espera del “evento” se les puede denominar “armaduras pasivas”.

Para fuerza cortante el factor de seguridad será mayor ya que el factor de reducción de resistencia es 0.85. Para las columnas el factor de seguridad será aún mayor, ya que el factor de reducción para columnas con estribos controladas por compresión es de 0.7.

Cabe recordar, lo que ya se ha señalado, con relación a que el Diseño por Resistencia en Concreto Armado, tal como lo enfocan los códigos, está orientado hacia el diseño de secciones de elementos. En consecuencia el estado límite último de rotura o agotamiento (ver 4.2.1) que utilizamos está relacionado directamente con el comportamiento de las secciones de elementos estructurales. Sin embargo es necesario reconocer que existen diferentes niveles o “tipos” de estados límites de rotura en el comportamiento de una estructura de concreto, estos pueden ser:

- a) El alcanzar la capacidad última (resistencia suministrada) de una sección de un elemento estructural. El alcanzar la capacidad última de una sección de un elemento estructural, no significa necesariamente que el elemento en cuestión falle o colapse, por ejemplo, en una viga continua o hiperestática se puede alcanzar la resistencia de una sección y la viga puede seguir recibiendo más carga por su capacidad de redistribuir los momentos. Sin embargo para que esto ocurra, las secciones que primero alcancen su resistencia deben tener ductilidad suficiente para soportar rotaciones inelásticas sin fallar y permitir así la redistribución de los momentos hacia otras secciones que tienen reserva de resistencia.
- b) El alcanzar la carga última de un elemento de la estructura.
- c) El alcanzar la carga última de la estructura completa.

#### 4.10 Diseño Límite

Es importante resaltar que el Diseño por Resistencia no debe confundirse con el Diseño Límite o Diseño Plástico (ver 4.2.1) que permite evaluar cuál es el mecanismo y carga de falla (límite) o carga de colapso (parcial o total) de una estructura.

El Diseño Límite permite determinar el factor de seguridad global de una estructura, entendido como el cociente entre la carga de falla y la carga de servicio.



## CAPITULO 5

### Casos Especiales de la Flexión Simple



#### Lecturas:

- 5.1 Design Proposal for Side Face Crack Control Reinforcement for Large Reinforced Concrete beams. Gregory Frantz and John Breen. ACI Concrete International, October 1980.
- 5.2 Myths and Fallacies in Earthquake Engineering – Conflicts between Design and Reality. Nigel Priestley. ACI Concrete International. February 1997.
- 5.3 Seismic Resistance of Frames with Vertically Distributed Longitudinal Reinforcement in Beams. Wong, Priestley, Park. ACI Structural Journal. July-August 1990.
- 5.4 Ultimate Strength of Nonrectangular Structural Concrete Members. Mattock, Kriz. Journal ACI. January 1961.
- 5.5 Designing and Constructing With FRP (Fiber Reinforced Polymer) Bars: An Emerging Technology. Antonio Nanni, Salem Faza. ACI Concrete International, November 2002.

### 5.1 Vigas con altura (peralte) mayor a 0.90 m

Las recomendaciones que a continuación se presentan, son aplicables a vigas con un peralte mayor a 0.90 m. Para estas vigas el ACI y la Norma Peruana exigen la colocación, adicional al acero principal de tracción, de una cierta cantidad de acero distribuido en el alma ( $A_{sk}$ ) que en inglés se le denomina “skin reinforcement” término que puede traducirse como refuerzo o “armadura superficial”.

La armadura superficial debe colocarse lo más cerca posible a las caras del alma de la viga en la zona de tracción, con la finalidad de controlar el agrietamiento por flexión del alma. Sin este refuerzo, el ancho de las grietas en el alma podría ser mayor que el ancho de las grietas a nivel del refuerzo principal de flexión. Esto se muestra en la figura 5-1, en donde, de no existir acero distribuido en el alma, podría suceder que las grietas “B” tengan un ancho mayor que las grietas “A” donde está ubicado el refuerzo principal de flexión.

En muchos casos este refuerzo también ayuda a controlar o distribuir mejor el agrietamiento que se produce por los esfuerzos de tracción, originados por la retracción en vigas restringidas longitudinalmente.

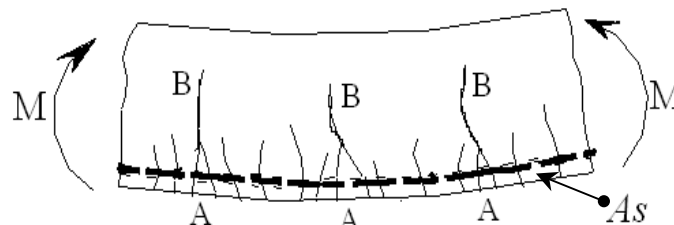


Fig. 5-1 Agrietamiento por flexión en el alma de una viga peraltada.

#### 5.1.1 Exigencias de la Norma Peruana Relacionadas con $A_{sk}$

La norma peruana (artículo 11.7.2.3) exige que la armadura mínima superficial repartida en el alma  $A_{sk}$  no debe ser menor del 10% del acero principal por flexión. La distribución de este acero se muestra en la figura 5-2.

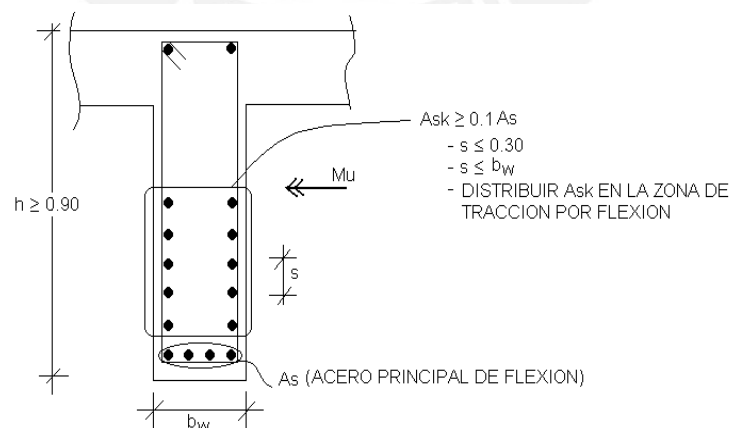


Fig. 5-2 Exigencias de la Norma Peruana relativas a  $A_{sk}$ .

La exigencia de la Norma Peruana proviene del ACI 318-83 y es conceptualmente incorrecta, ya que al fijar  $A_{sk}$  como una fracción (10%) del acero principal de flexión, resulta que cuanto más peraltada sea la viga, menos acero de flexión será necesario y por lo tanto menor será el área de refuerzo  $A_{sk}$  exigida y en consecuencia mayor será el riesgo de agrietamiento en el alma.

En ese sentido el ACI a partir de la edición de 1989, modificó los requerimientos de este acero para subsanar la inconsistencia señalada.

### 5.1.2 Exigencias del ACI 318-02 Relacionadas con $A_{sk}$

Las disposiciones del Código ACI 318-02 (artículo 10.6.7) se resumen en la figura 5 -3 y deberían usarse en reemplazo de lo dispuesto en la Norma Peruana.

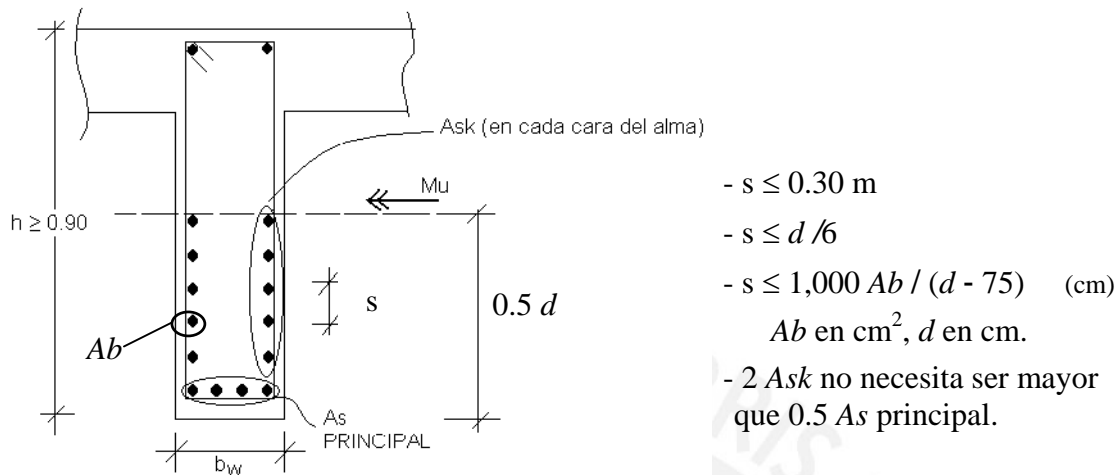


Fig. 5-3 Exigencias del ACI-02 relativas a  $A_{sk}$ .

El refuerzo total (dos veces  $A_{sk}$ ) exigido por el ACI, puede llegar a ser importante, por lo tanto puede incorporarse en los cálculos de la resistencia a flexión de la sección.

Las vigas de gran peralte o vigas pared, tienen sus propias disposiciones específicas.

### 5.2 Análisis de Vigas con Refuerzo Distribuido en el Alma

Veremos solamente el análisis de este tipo de vigas, pues derivar ecuaciones específicas para su diseño - dada la gran variedad de configuraciones geométricas de las secciones transversales así como las múltiples posibilidades de distribuciones del acero de refuerzo que se pueden presentar en la realidad - no es práctico. En estos casos hay que acudir a métodos numéricos.

En la mayoría de los casos los problemas de diseño se pueden transformar en problemas de análisis, para ello es necesario suponer una cierta distribución tentativa o preliminar del acero para luego verificar mediante el análisis de la sección, si la resistencia es adecuada.

El problema de análisis, cuando no se cuenta con herramientas mas elaboradas, se resuelve por tanteos. Con relación a la figura 5-4 el procedimiento de tanteos consiste en:

- 1) Asumir un valor de "c" (posición del eje neutro).
- 2) Calcular la deformación en cada uno de los aceros,  $\epsilon_{si}$  y el esfuerzo correspondiente  $f_{si} = E_s \epsilon_{si}$ . Verificar que  $f_{si} \leq f_y$ .
- 3) Calcular la compresión total en el concreto ( $C_c$ ).
- 4) Realizar el equilibrio de la sección  $C_c + \sum f'_{si} A_{si} = \sum f_{sj} A_{sj}$  donde  $A_{si}$  son las barras en compresión y  $A_{sj}$  las de tracción.
- 5) Si no se logra el equilibrio regresar al primer paso e intentar con un nuevo valor de la posición del eje neutro.

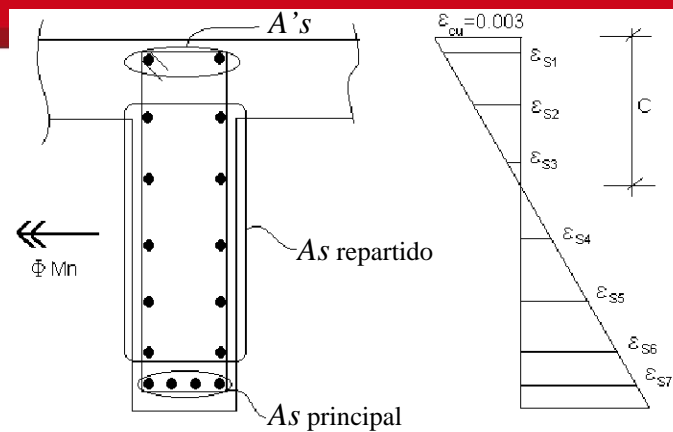


Fig. 5-4 Análisis de una sección con refuerzo distribuido en el alma.

### 5.3 Cuantía Balanceada en Vigas con Refuerzo en el Alma

Luego de lograr el equilibrio de la sección, será necesario verificar que la sección es subreforzada (falla por tracción). Es claro que si el análisis demuestra que el acero mas alejado del eje neutro no llega a la fluencia, se trata de una sección sobreforzada. En caso contrario deberá verificarse, de acuerdo a la Norma, que  $A_s \leq 0.75 A_{sb}$ . Este límite deberá verificarse en el acero de tracción mas alejado del eje neutro (el  $A_s$  principal de la figura 5-4) es decir en el acero inferior más bajo en el caso de flexión positiva, y en el acero superior más alto si se tratara de flexión negativa. Para ello será necesario calcular la cantidad de acero  $A_{sb}$  que produce la falla balanceada de la sección. Cuando existe acero repartido en el alma, el procedimiento a seguir es:

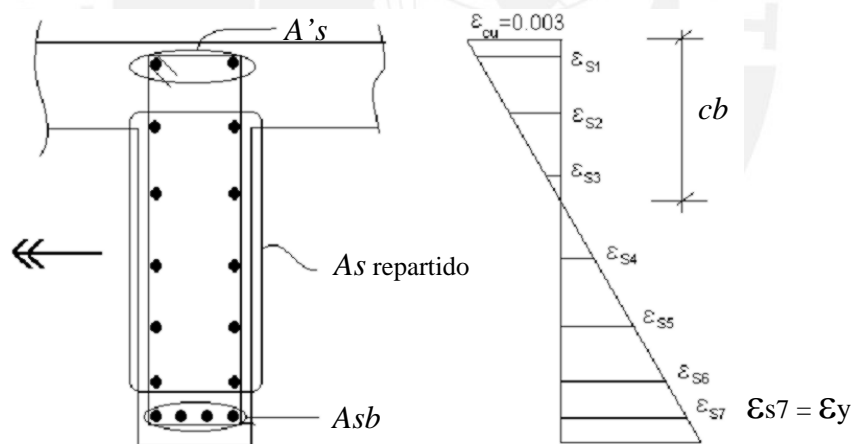


Fig. 5-5 Condición de falla balanceada en una sección con acero en el alma.

- Con referencia a la figura 5-5, construida para el caso de flexión positiva, el acero en compresión  $A's$  y el acero repartido en el alma son conocidos. La incógnita es  $A_{sb}$ . Similar razonamiento es válido para el caso de flexión negativa.
- Determinar la posición del eje neutro en la falla balanceada:
 
$$cb = 0.588 d \quad (\text{válido para } f_y = 4,200 \text{ y } \epsilon_{cu} = 0.003)$$

$$ab = 0.588 \beta_1 d$$

En este caso  $d$  deberá medirse desde el borde en compresión de la sección, al centroide del acero en tracción más alejado del eje neutro.

- Para la posición del eje neutro en la falla balanceada -  $cb$  - calcular las deformaciones y esfuerzos en las distintas capas del acero de refuerzo.

- Utilizar la ecuación de equilibrio de la sección para determinar  $As_b$

$$C_{cb} + \sum f'_{sbi} A_{si} = A_s b f_y + \sum f_{sbj} A_{sj}$$

↓
↘
↘

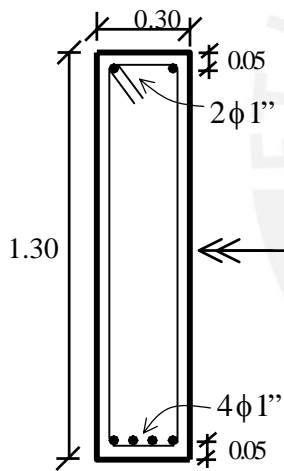
Compresión en el concreto en la Falla Balanceada      Barras en Compresión      Barras en Tracción

- Finalmente verificar que  $A_s \leq 0.75 A_{s_b}$  donde, tal como se mencionó líneas arriba,  $A_s$  es el acero más alejado del eje neutro.

Con las nuevas disposiciones del ACI-02 el cálculo del acero que produce la falla balanceada, es innecesario. Para que la sección califique como controlada por tracción ( $\phi = 0.9$ ), bastará verificar que la deformación en el acero de tracción más alejado del eje neutro (asociado a  $d_t$ ) sea mayor o igual a 0.005.

#### 5.4 Influencia del Acero Repartido en el Alma en la Resistencia a Flexión

En la figura a continuación se muestra la sección de momento positivo de una viga continua de varios tramos que fue diseñada por resistencia. Se quiere determinar el acero repartido necesario en el alma, por ser una viga con más de 0.90 m de peralte, y calcular el aporte a la resistencia en flexión de este acero repartido. Para ello primero calculemos la resistencia de la sección sin la presencia de acero repartido en el alma tal como se indica a continuación:



$$f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2 \quad f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$$

$$A_{s \text{ min}} = 0.24\% \times 30 \times 125 \approx 9 \text{ cm}^2$$

Considerando solo el acero en tracción ( $4\phi 1''$ ) la resistencia de la sección es:

$$\phi M_n \approx 90.2 \text{ ton-m} \quad c = 18.82 \text{ cm} \quad c/d \approx 0.15 \quad \epsilon_s = 8.06 \epsilon_y$$

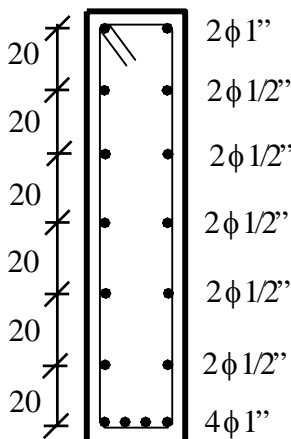
Considerando el aporte del acero en compresión ( $A'_s = 2\phi 1''$ ) la resistencia de la sección es:

$$\phi M_n \approx 92.6 \text{ ton-m} \quad c = 11.32 \text{ cm} \quad c/d \approx 0.091 \quad \epsilon_s = 14.35 \epsilon_y$$

$$\epsilon'_s = -0.78 \epsilon_y$$

El incremento en la resistencia por la presencia del acero en compresión es de tan solo 2.7%.

El diseño del acero repartido en el alma se hará de acuerdo a la Norma ACI 318-02 presentado en la sección 5.1.2.



$$s \leq 30 \text{ cm.}$$

$$s \leq d/6 = 125 / 6 \approx 21 \text{ cm}$$

$$s \leq \frac{1000 A_b}{(d - 75)}$$

Para  $\phi 1/2''$  repartido  $A_b = 1.29 \text{ cm}^2$

$$s \leq \frac{1000 \times 1.29}{(125 - 75)} \approx 26 \text{ cm}$$

Para  $\phi 3/8''$  repartido  $A_b = 0.71 \text{ cm}^2$

$$s \leq \frac{1000 \times 0.71}{(125 - 75)} \approx 14 \text{ cm}$$

Seleccionamos  $\phi 1/2''$  a  $s = 20 \text{ cm.}$

Para la distribución del acero repartido mostrada en la figura anterior se tiene:

$$A_{sk} = 1.29 \times 5 = 6.45 \text{ cm}^2 \quad (\text{en cada cara del alma})$$

$$2 A_{sk} = 2 \times 6.45 = 12.9 > 0.5 A_s = 10.2 \text{ cm}^2$$

Si bien el ACI indica que  $2 A_{sk}$  no necesita ser mayor que el 50% del acero principal en tracción, la condición que gobierna el espaciamiento es  $d/6$ , en consecuencia el espaciamiento no puede aumentarse.

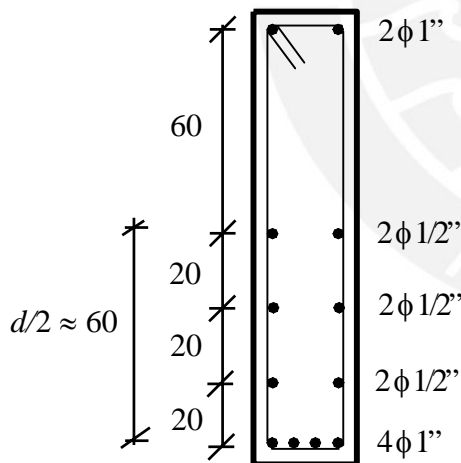
Utilizando la metodología propuesta en 5.2, la resistencia de la sección considerando el acero principal en tracción y compresión así como el refuerzo repartido en el alma es:

$$\phi M_n \approx 117.8 \text{ ton}\cdot\text{m} \quad c = 19.82 \text{ cm} \quad \epsilon_s = 7.58 \epsilon_y \quad \epsilon'_s = -1.07 \epsilon_y$$

El valor calculado representa un 27% de incremento en la resistencia, en consecuencia podría reducirse el acero principal de flexión (los  $4\phi 1''$ ). En todo caso, si no se realiza esta reducción, es necesario modificar la fuerza cortante de diseño para tener en cuenta la sobrerresistencia en flexión que podría inducir una falla por cortante.

Es interesante aprovechar este ejemplo para calcular el peralte efectivo de la sección, de acuerdo a la definición clásica de peralte efectivo " $d$ ". Cuando la sección alcanza su resistencia nominal ( $c = 19.82 \text{ cm}$ ) la resultante de las fuerzas de tracción en el refuerzo está ubicada a 1.06 m aproximadamente ( $0.82 h$ ) del borde superior, en consecuencia este es el valor del peralte efectivo para esta sección.

Nótese que en este caso, por ser una viga continua se ha colocado acero repartido a todo lo alto del alma. Si fuera, por ejemplo, una viga simplemente apoyada, el acero repartido podría colocarse hasta una altura equivalente a  $d/2$  medida desde el acero de tracción. En este caso la distribución del acero sería:



Con esta distribución del acero la resistencia de la sección es:

$$\phi M_n \approx 114.6 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$c = 16.58 \text{ cm}$$

$$\epsilon_s = 9.34 \epsilon_y$$

$$\epsilon'_s = -1.0 \epsilon_y$$

La capacidad de la sección aumenta en un 24%

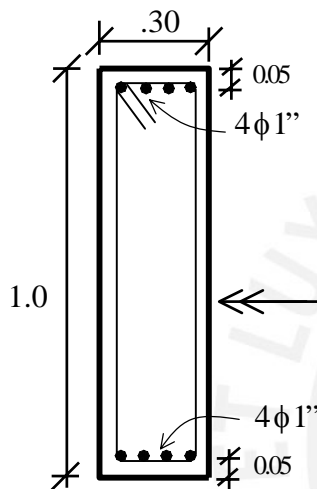
Para esta distribución del refuerzo, el peralte efectivo, calculado cuando la sección alcanza su resistencia nominal ( $c=16.58 \text{ cm}$ ), resulta ser 1.14 m aproximadamente ( $0.88 h$ ).



### 5.4.1 Comparación entre el acero concentrado y el acero repartido

La idea de esta sección es la de comparar la resistencia de una viga con un armado del tipo "clásico" - es decir aquel en el cual tratamos de colocar los refuerzos de acero lo más cerca de los bordes superior e inferior para tratar de ganar el mayor brazo de palanca posible - con un armado no tan convencional que consiste en utilizar la misma cantidad de acero pero distribuida a lo alto del alma. Para comparar ambas situaciones utilizaremos algunos ejemplos simples.

- a) Primer caso. Se trata de una sección rectangular con igual cantidad de acero en tracción y compresión. Esta situación es común en la zona de momentos negativos de vigas que soportan sismo, en las cuales debido a la inversión de los signos de los momentos flectores, resultan cantidades similares de acero superior e inferior.



$$f'c = 210 \text{ kg/cm}^2 \quad fy = 4,200 \text{ kg/cm}^2$$

Considerando solo el acero en tracción ( $4 \phi 1''$ ) la resistencia de la sección es:

$$\phi Mn = 67.1 \text{ ton-m}$$

$$c = 18.82 \text{ cm} \quad c/d \approx 0.20 \quad \epsilon_s = 5.78 \epsilon_y$$

$$\phi u = 0.003/18.82 \approx 0.16 \times 10^{-3} \text{ 1/cm} \quad (\text{curvatura última})$$

Considerando el aporte del acero en compresión ( $A's = 4\phi 1''$ ) la resistencia de la sección es:

$$\phi Mn = 69.9 \text{ ton-m}$$

$$c = 8.24 \text{ cm} \quad c/d \approx 0.087 \quad \epsilon_s = 15.04 \epsilon_y \quad \epsilon'_s = -0.56 \epsilon_y$$

$$\phi u = 0.003/8.24 \approx 0.36 \times 10^{-3} \text{ 1/cm} \quad (\text{curvatura última})$$

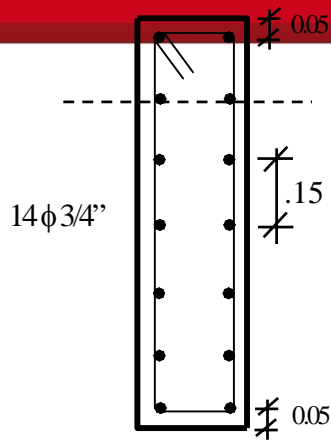
El incremento en la resistencia por la presencia del acero en compresión es de tan solo un 4%.

Una forma rápida de estimar la resistencia de una sección peraltada con igual cantidad de acero en tracción y compresión, consiste en tomar momentos del acero en tracción con respecto al acero en compresión. Esto presupone que el centroide del bloque de compresiones coincide aproximadamente con el del acero en compresión. Para el caso anterior se tendría:

$$\phi Mn \approx 0.9 \times (20.4 \times 4,200) \times (d - d') = 69.4 \text{ ton-m}$$

Se observa que la precisión del método propuesta es razonable y puede servir para verificaciones rápidas.

Ahora transformemos los  $8\phi 1''$  ( $A_s = 40.8 \text{ cm}^2$ ) concentrados en los extremos de la viga, por su equivalente distribuido a lo alto del alma. La equivalencia más cercana consiste en  $14 \phi 3/4''$  ( $A_s \approx 39.8 \text{ cm}^2$ ) espaciados cada 0.15 m, tal como se indica en la figura a continuación:



Con esta distribución del acero la resistencia de la sección es:

$$\phi Mn \approx 61 \text{ ton-m}$$

$$c = 20.67 \text{ cm} \quad c/dt = 20.67/95 \approx 0.22$$

$$\epsilon_s = 5.14 \epsilon_y \quad \epsilon'_s = -1.08 \epsilon_y$$

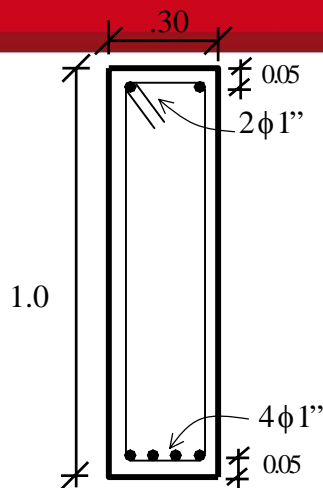
$$\phi u = 0.003 / 20.67 \approx 0.145 \times 10^{-3} \text{ 1/cm (curvatura última)}$$

En consecuencia, en este caso particular, el utilizar acero repartido en el alma ha reducido la capacidad de la sección, de 70 ton-m a 61 ton-m, es decir un 13% de reducción. Esta reducción ciertamente no es dramática, es más, si se utiliza para la comparación la capacidad de la sección con armadura convencional y sin considerar el aporte del acero en compresión, la reducción sería de 67 ton-m a 61 ton-m, es decir un 9% de reducción. Sin embargo la curvatura última sí ha experimentado una reducción importante y en consecuencia la ductilidad de la sección, la curvatura última ha cambiado de  $0.36 \times 10^{-3}$  a  $0.145 \times 10^{-3}$  1/cm lo que representa una reducción del 60%.

Para esta distribución del refuerzo, el peralte efectivo, calculado cuando la sección alcanza su resistencia nominal ( $c=20.67$  cm), resulta ser 0.65 m aproximadamente (0.65 h).

Algunos investigadores, entre ellos Nigel Priestley, en vigas con responsabilidad sísmica, abogan por el uso de refuerzo distribuido en el alma en lugar del armado convencional. El refuerzo distribuido en el alma en este tipo de vigas tiene las siguientes ventajas:

- No hay diferencias importantes entre las resistencias del armado clásico y del armado con acero distribuido.
  - Se reduce la congestión del acero en los nudos.
  - Permite una mejor colocación y compactación del concreto.
  - Mejora el comportamiento del nudo frente a fuerzas cortantes, reduciendo así la cantidad de refuerzo transversal que suele colocarse en los nudos.
  - Mejora el comportamiento de la zona de unión viga columna frente a la posibilidad de una grieta vertical que genera deslizamiento por cortante.
  - Mejora la resistencia de la viga para fuerzas cortantes ya que hay mayor cantidad de concreto comprimido resistiendo parte de la fuerza cortante. Esto es fácil de comprobar en el ejemplo anterior si se comparan las profundidades de los ejes neutros para el caso de refuerzo convencional y refuerzo distribuido.
  - Se reduce la sobrerresistencia en flexión asociada al endurecimiento por deformación del acero de refuerzo.
- b) Segundo caso. Se trata de la misma sección rectangular analizada en el primer caso, con la diferencia de que se evalúa la resistencia en la zona de momentos positivos donde se tienen únicamente  $2\phi 1''$  en compresión.



Considerando el acero en tracción y el de compresión, la resistencia de la sección es:

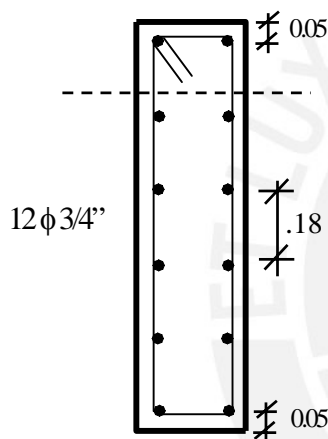
$$\phi Mn \approx 69.5 \text{ ton-m}$$

$$c = 11.32 \text{ cm} \quad c/d \approx 0.12$$

$$\epsilon_s = 10.56 \epsilon_y \quad \epsilon'_s = -0.797 \epsilon_y$$

$$\phi u = 0.003/11.32 \approx 0.27 \times 10^{-3} \text{ 1/cm} \quad (\text{curvatura última})$$

Ahora transformemos los  $6\phi 1''$  ( $A_{st} = 30.6 \text{ cm}^2$ ) concentrados en los extremos de la viga, por su equivalente distribuido a lo alto del alma. Una posibilidad consiste en utilizar  $12\phi 3/4''$  ( $A_{st} \approx 34.1 \text{ cm}^2$ ) espaciados cada 0.18 m, tal como se indica a continuación:



Con esta distribución del acero la resistencia de la sección es:

$$\phi Mn \approx 53.8 \text{ ton-m}$$

$$c = 17.87 \text{ cm} \quad c/dt = 17.87/95 \approx 0.19$$

$$\epsilon_s = 6.17 \epsilon_y \quad \epsilon'_s = -1.03 \epsilon_y$$

$$\phi u = 0.003/17.87 \approx 0.17 \times 10^{-3} \text{ 1/cm} \quad (\text{curvatura última})$$

$$\text{peralte efectivo } d \approx 0.64 \text{ m}$$

En consecuencia, en este caso particular, el utilizar acero repartido en el alma ha reducido la capacidad de la sección, de 69.5 ton-m a 53.8 ton-m, es decir un 23% de reducción. A diferencia del caso anterior, esta reducción sí podría ser importante. Nuevamente la curvatura última ha experimentado una reducción importante y en consecuencia la ductilidad de la sección.

### 5.5 Diseño de Secciones no Rectangulares

Las fórmulas que se han deducido para el análisis y/o diseño de secciones sometidas a flexión simple, corresponden a secciones con geometría simple, tales como rectangulares, secciones T, secciones doble T.

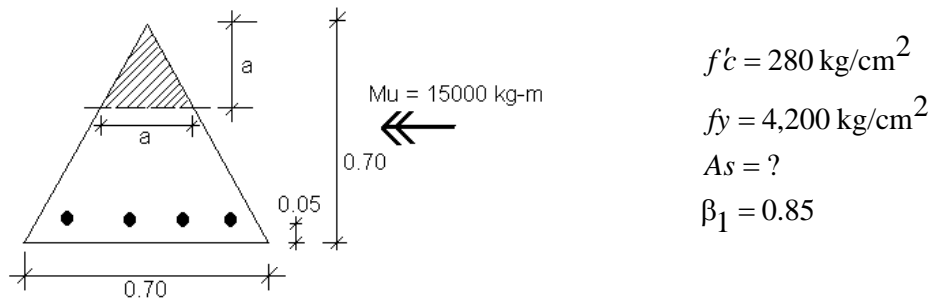
Cuando la geometría del bloque comprimido no es rectangular, normalmente, no es simple derivar expresiones generales para el análisis y/o diseño de tales secciones. En muchos casos, ni siquiera es práctico tratar de derivar estas ecuaciones ya que podría tratarse de unas pocas secciones ó elementos aislados dentro de una estructura en la cual predominan las secciones rectangulares o T.

Para los casos en los cuales el bloque de compresiones no es rectangular o no puede descomponerse en una suma de rectángulos, existen dos posibilidades:

- a) Tratar de derivar ecuaciones para el diseño en las cuales normalmente se establece como incógnita la profundidad del eje neutro. Esto será posible en los casos en los cuales la geometría del bloque comprimido sea relativamente simple.

b) Utilizar procesos numéricos o de tanteos. Esta, por lo general, será la opción más práctica.

Veamos las dos posibilidades propuestas mediante un ejemplo:



a) En este caso es fácil plantear ecuaciones para el diseño de la sección, ya que la geometría del bloque comprimido es triangular. Las expresiones para el brazo interno de palanca  $jd$  y para la resultante de compresiones en el concreto  $C_c$  son:

$$jd = d - \frac{2a}{3} \quad d = 65$$

$$C_c = 0.85 f'_c \frac{a^2}{2} = 119 a^2$$

- Asumimos que el acero de tracción fluye.

$$T = As f_y$$

$$\text{Equilibrio: } C_c = T \Rightarrow 119 a^2 = As f_y$$

- Equilibrio de momentos (equivalencia estática)

$$\frac{Mu}{\phi} = Mn = As f_y \left( d - \frac{2a}{3} \right)$$

$$\frac{Mu}{\phi} = 119 a^2 \left( d - \frac{2a}{3} \right)$$

$$\frac{15 \times 10^5}{0.9} = 119 a^2 \left( 65 - \frac{2a}{3} \right)$$

$$79.33 a^3 - 7735 a^2 + 1.667 \times 10^6 = 0$$

- De las tres raíces de esta ecuación, la solución es:

$$a = 16.06 \text{ cm} \quad c = \frac{16.06}{0.85} = 18.89 \text{ cm}$$

$$C_c = 119 (16.06)^2 = 30,692 \text{ kg} = As f_y$$

$$As = 7.31 \text{ cm}^2 \quad (4\phi 5/8")$$

- Verificación de la capacidad resistente con los 4 fierros de 5/8" seleccionados:

$$As f_y = C_c \quad 8.0 f_y = 119 a^2 \quad a = 16.8 \text{ cm} \quad c = 19.77 \text{ cm}$$

$$\phi Mn = 0.9 (8.0) (4,200) \left[ 65 - \frac{2 \times 16.8}{3} \right] \approx 16,270 \text{ kg m}$$

- Verificación de la fluencia del acero

$$\frac{c_b}{d} = 0.588 \quad c_b = 38.22 > 19.77 \text{ cm} \quad \text{ok}$$

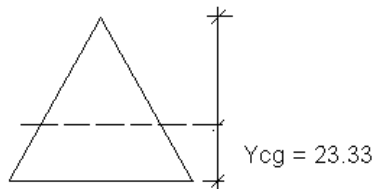
- Verificación del límite de la Norma  $A_s \leq 0.75 A_{sb}$  (solo por curiosidad ya que es evidente que se trata de una sección subreforzada).

$$c_b = 0.588(65) = 38.22 \quad a_b = \beta_1 c_b \approx 32.5 \text{ cm}$$

$$C_{cb} = 0.85(280) \left( \frac{32.5}{2} \right)^2 = 125,694 \text{ kg} = A_{sb} f_y$$

$$A_{sb} \approx 30 \text{ cm}^2 \quad A_s \text{ max} = 0.75 \times 30 = 22.5 \text{ cm}^2$$

- Verificación del acero mínimo:



$$I_g = \frac{(70)(70)^3}{36} \approx 667,000 \text{ cm}^4$$

$$M_{cr}^+ = \frac{f_r I_g}{y_b} \quad f_r = 2\sqrt{f'_c}$$

$$f'_c = 280$$

$$M_{cr}^+ = 9,570 \text{ kg-m}$$

$$1.5 M_{cr}^+ = 14,355 \text{ kg-m} < 15,000 \text{ (momento de Diseño) ok.}$$

- b) Proceso de tanteos o iterativo. En este caso utilizaremos un proceso de tanteos en el cual la variable es el brazo de palanca interno  $jd$ .

Ecuaciones para las iteraciones :

$$jd = d - \frac{2a}{3} \quad (1) \quad A_s = \frac{Mu}{\phi f_y (jd)} \quad (2) \quad C_c = A_s f_y \quad (3)$$

Estimar  $jd$

→ Primer Estimado  $jd = 0.9 d$

$$jd = 0.9 \times 65 = 58.5 \quad \text{de (2)} \quad A_s = 6.78 \text{ cm}^2$$

$$\text{de (3)} \quad C_c = A_s f_y = 119 a^2 \rightarrow a = 15.47$$

$$\rightarrow \text{Segundo Estimado} \quad jd = d - \frac{2a}{3} = 65 - \frac{2(15.47)}{3} = 54.68 \text{ cm}$$

$$\text{de (2)} \quad A_s = 7.26 \text{ cm}^2$$

$$\text{de (3)} \quad C_c = A_s f_y = 119 a^2 \rightarrow a = 16.0 \text{ cm}$$

$$\rightarrow \text{Tercer Estimado} \quad jd = 65 - \frac{2(16)}{3} = 54.33 \text{ cm}$$

$$\text{de (2)} \quad A_s = 7.3 \text{ cm}^2 \leftarrow \text{Solución}$$

Se puede apreciar que el proceso converge rápidamente, a pesar que el primer estimado fue pobre, un mejor estimado hubiera sido  $jd = 0.8 d$  por la forma triangular del bloque de compresiones.

## CAPITULO 6

### Fisuración en Elementos de Concreto Armado

#### **Lecturas:**

- 6.1 Durability – Critical Issues for the Future. P. Kumar Mehta. ACI Concrete International, July 1997.
- 6.2 The Question of Concrete Durability: We Can Make Good Concrete Today. Adam Neville. ACI Concrete International, July 2000.
- 6.3 Building Durable Structures in the 21st Century. Mehta, Burrows. ACI Concrete International, March 2001.
- 6.4 ¿Cuál es la Varilla de Refuerzo más Resistente a la Corrosión? Revista Construcción y Tecnología, Febrero 2000. Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto.
- 6.5 Causes, Evaluation and Repair of Cracks in Concrete Structures. ACI Committee 224. ACI Manual of Concrete Practice.
- 6.6 Crack Width, Cover and Corrosion. David Darwin et al. ACI Concrete International. May 1985.
- 6.7 Another Look at Cracking and Crack Control in Reinforced Concrete. ACI Structural Journal. May - June 1989.
- 6.8 Cracks and Crack Control in Concrete Structures. Fritz Leonhardt. Special Report, PCI Journal, July - August 1988.
- 6.9 Diagnosis of Deterioration in Concrete Structures. Concrete Repair Manual. Concrete Society, Technical Report No. 54.
- 6.10 Shrinkage Cracking in Fully Restrained Concrete Members. R. Ian Gilbert. ACI Structural Journal. March – April 1992.

## 6.1 Introducción

El Diseño por Resistencia de un elemento estructural, no garantiza necesariamente que su comportamiento bajo cargas de servicio será satisfactorio. Por lo tanto, es indispensable verificar que los elementos no excedan los Estados Límites de Servicio.

En este capítulo trataremos con uno de estos estados límites de servicio, el de la fisuración. Es necesario evitar una excesiva fisuración o anchos de grietas mayores que ciertos límites que han demostrado en la práctica estar asociados a un comportamiento satisfactorio. Estudiaremos únicamente como “controlar” la fisuración originada por la flexión.

Las fisuras y deflexiones en elementos a flexión se calculan bajo cargas de servicio utilizando la sección transformada agrietada o no. La sección transformada permite calcular los esfuerzos en el acero y el concreto bajo cargas de servicio, recuerde que es razonable suponer que hasta un nivel de esfuerzos cercano a  $0.5 f'c$  el concreto se comporta linealmente. Bajo condiciones de servicio, este esfuerzo no se suele exceder.

## 6.2 Durabilidad del Concreto

Antes de proceder al estudio de la fisuración, conviene presentar algunas ideas generales sobre un tema que hoy en día tiene una importancia fundamental, el tema de la Durabilidad de las Estructuras de Concreto Armado.

La durabilidad de un concreto puede definirse (ACI) como su resistencia a la acción del clima, a los ataques químicos, a la abrasión, o cualquier otro proceso de deterioro. Un concreto durable es aquel que mantiene su forma original, su calidad y sus propiedades al estar expuesto al medio ambiente.

El deterioro anticipado de las estructuras de concreto armado, bajo condiciones normales u ordinarias de operación, puede ser propiciado por factores estructurales y no estructurales. Entre las diversas acciones o agentes de carácter no estructural que suelen ocasionar el deterioro prematuro del concreto, destacan las siguientes por su frecuencia y por la importancia de sus efectos en la durabilidad de las estructuras de concreto armado:

- Ataque por sulfatos.
- Corrosión del acero de refuerzo.
- Ciclos de congelación y deshielo.
- Reacción álcali – agregado.
- Intemperismo, abrasión.
- Ataque por sustancias ácidas.

### a) Ataque por Sulfatos:

Los sulfatos forman parte de las sales inorgánicas que normalmente están presentes en el terreno (suelos), en las aguas freáticas y superficiales y en el agua de mar, aunque su grado de concentración puede ser muy variable. Los sulfatos solubles son principalmente los de sodio, calcio y magnesio.

Durante la hidratación del cemento se libera hidróxido de calcio, de la reacción de los sulfatos con el hidróxido de calcio resulta sulfato de calcio (yeso). El volumen que ocupa el yeso es el doble que el de los compuestos originales que lo forman, este aumento de volumen, que no puede acomodarse en el espacio original de los poros del concreto, genera esfuerzos internos de tracción en la masa del concreto, que primero lo microfisuran y posteriormente lo desintegran gradualmente.

El sulfato de sodio puede reaccionar con el aluminato de calcio hidratado presente en el cemento Portland endurecido para producir etringita, producto que tiene un mayor volumen que los compuestos originales.

Para que los sulfatos representen un potencial problema de durabilidad en el concreto, es necesario que estén en solución y en la concentración necesaria. Adicionalmente es necesario que las sustancias en solución puedan ingresar en la estructura interna del concreto y permanezcan en ella el tiempo suficiente para que reaccionen con el cemento.

En pocas palabras, se necesita un agente que transporte a la masa del concreto los sulfatos contenidos en el ambiente que lo rodea, este agente es la humedad. Por lo tanto los concretos densos e impermeables o protegidos por una barrera impermeable pueden ser inmunes al ataque de los sulfatos, salvo que puedan ingresar debido a una fuerte fisuración del concreto originada por los esfuerzos o por la retracción.

En algunas circunstancias es recomendable el empleo de cemento Portland resistente a los sulfatos. El cemento Portland Tipo II es de moderada resistencia a los sulfatos y el Tipo V está recomendado para ser utilizado donde se requiera una elevada resistencia a los sulfatos en solución.

#### b) **Corrosión del Acero de Refuerzo:**

La corrosión del acero de refuerzo es considerada uno de los problemas más importantes para el mantenimiento de obras civiles tales como puentes, túneles, muelles y edificios. Los daños que puede ocasionar la corrosión en la infraestructura vial de un país (puentes, muelles) pueden tener un impacto económico y social importante.

El concreto protege al acero de refuerzo mediante dos mecanismos. El primero formando una barrera física que separa a las barras de refuerzo de la exposición directa al medio ambiente y el segundo debido a que la solución encerrada en los poros del concreto es altamente alcalina (pH entre 12.5 y 13.5) y se forma una capa pasiva (película de pasivación) que protege al acero de la corrosión. Cuando el pH del concreto adyacente a las barras de refuerzo cae por debajo de 10 ó 11, la corrosión puede iniciarse.

Los cloruros, al igual que los sulfatos, son sales inorgánicas que abundan en la naturaleza, y por ello suelen hallarse presentes en los componentes del concreto y en las aguas y suelos que tienen contacto con las estructuras. La influencia del ión cloruro como agente impulsor de la corrosión del acero de refuerzo, deriva de dos efectos principales:

1. Al agregarse cloruros a la solución de poros del concreto que actúa como electrólito, se incrementa la conductividad de este y se facilita el movimiento de los iones de hidroxilo (OH-) entre el cátodo y el ánodo.
2. Cuando la cantidad de cloruros alcanza un alto grado de concentración, se producen reacciones químicas que originan zonas de deterioro en la película de pasivación, las cuales al funcionar como ánodos dan lugar a la formación de celdas de corrosión electrolítica.

El refuerzo protegido por el concreto no experimentará corrosión hasta que se haya establecido una celda (pila) electroquímica o celda galvánica. Para esto es necesaria la presencia simultánea en el concreto de oxígeno y humedad.

La corrosión del acero de refuerzo tiene dos consecuencias principales que afectan la durabilidad de la estructura:

1. Por efecto de la corrosión se reduce la sección de las barras de acero y se merma fuertemente su adherencia con el concreto. Como consecuencia la capacidad estructural del elemento resulta seriamente comprometida.



2. Como resultado de la corrosión, se originan productos (herrumbre) cuyo volumen es varias veces superior al de los componentes que le dieron origen. Este aumento de volumen trae como consecuencia esfuerzos internos de tracción en el concreto que agrietan progresivamente el recubrimiento de concreto e incluso, lo desprenden totalmente en situaciones de corrosión avanzada.

La corrosión puede iniciarse cuando la carbonatación (disminución de la alcalinidad) del recubrimiento de concreto alcance el acero de refuerzo o cuando la permeabilidad del concreto permita el ingreso de cloruros hasta la superficie del refuerzo. El tiempo necesario para que ocurra corrosión dependerá de la existencia o no de grietas en el concreto, de la agresividad del medio ambiente, del espesor del recubrimiento de su calidad y grado de compactación y de la impermeabilidad del concreto.

Como regla general, la corrosión es más probable que se inicie por:

- La presencia de cloruros.
- La humedad relativa excede del 60%. Por debajo de este valor es poco probable que ocurra corrosión, salvo en presencia de cloruros.
- Las temperaturas ambientales son altas acelerando así las reacciones químicas.
- Los ciclos continuos de humedecimiento y secado en el concreto, como en el caso de los pilotes de un muelle en la zona de fluctuación de las mareas o la zona de salpicadura de agua de mar. La corrosión no ocurre en el concreto permanentemente saturado ya que el agua no permite el flujo de oxígeno hacia el acero.
- La presencia de corrientes eléctrica erráticas en el acero de refuerzo.

Es claro que cuando mayor sea el recubrimiento de concreto y más impermeable sea este, tomará más tiempo y trabajo al oxígeno, humedad y iones cloruro el alcanzar a las barras de refuerzo. El agrietamiento del recubrimiento por flexión o por retracción de fragua puede propiciar una vía de ingreso.

Las Normas intentan controlar la corrosión del acero de refuerzo especificando una resistencia mínima del concreto, una relación  $w/c$  máxima para reducir la permeabilidad del concreto y espesores apropiados de recubrimiento. También limitan la cantidad máxima de cloruros en la mezcla.

### c) **Ciclos de Congelación y Deshielo:**

Cuando el agua contenida en los poros del concreto se congela, aumenta su volumen. Al expandirse genera esfuerzos internos lo suficientemente fuertes como para dañar aún a los concretos más fuertes.

En los climas fríos, el daño a las estructuras de concreto, principalmente a las losas de pavimentos, plataformas de puentes y muros de sostenimiento, puede deberse a la acción de los ciclos de congelamiento – deshielo. Los efectos nocivos sobre el concreto endurecido dependen no solamente de las características del concreto sino también de las condiciones específicas del ambiente.

La repetición de ciclos de congelación – deshielo provoca esfuerzos fluctuantes en el concreto que pueden llevarlo a la falla por fatiga.

Los aditivos incorporadores de aire, generan burbujas microscópicas de aire muy juntas que alivian las presiones internas generadas por la congelación del agua.

### 6.3 Importancia del Agrietamiento y Tipos de Fisuras

Debido a la baja resistencia a la tracción del concreto, los elementos de este material son proclives a agrietarse. Los elementos (estructuras) de concreto armado se agrietan fundamentalmente por los esfuerzos de tracción ocasionados por las cargas externas y por las deformaciones impuestas por los cambios volumétricos restringidos (creep, retracción, cambios de temperatura).

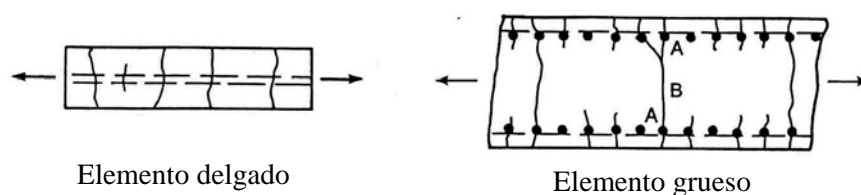
Adicionalmente, los agentes de carácter no estructural mencionados en 6.2, también pueden ocasionar serios agrietamientos en las estructuras de concreto armado.

La importancia del agrietamiento en las estructuras de concreto armado puede clasificarse de acuerdo a las siguientes cuatro categorías:

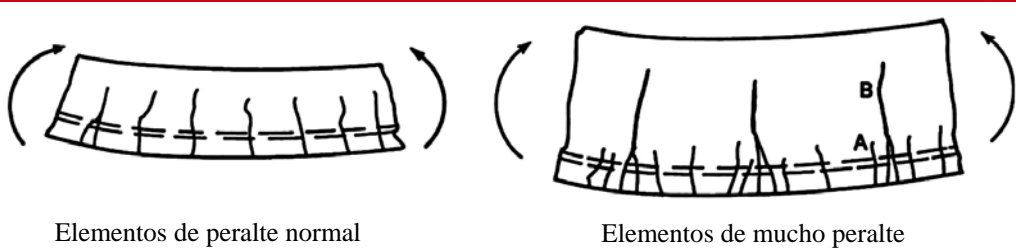
- Grietas que afectan la integridad estructural de los elementos.
- Grietas que pueden conducir, en el tiempo, a problemas de durabilidad de la estructura.
- Grietas que pueden conducir a un mal comportamiento de la estructura bajo cargas de servicio. Por ejemplo filtraciones en estructuras que retienen líquidos, daños en los acabados, pérdida de aislamiento acústico, etc.
- Grietas que estéticamente son inaceptables.

A continuación se describen los principales tipos de agrietamiento que pueden producirse en el concreto. Muchas de las figuras utilizadas para ilustrar los tipos de agrietamiento, han sido tomadas de MacGregor y Calavera.

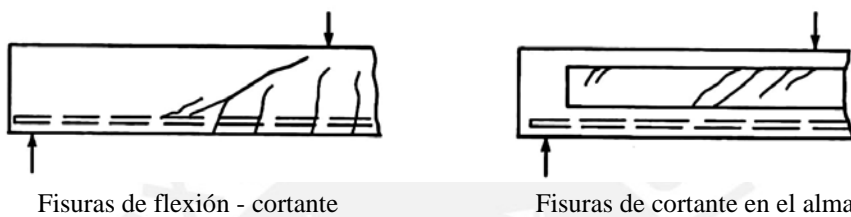
- Grietas por esfuerzos de tracción directa.** Bajo esta sollicitación los elementos se agrietan a través de toda su sección, con un espaciamiento entre grietas comprendido entre 0.75 a 2 veces la menor dimensión de la sección transversal. En el caso de elementos de sección gruesa con refuerzo solamente en las caras, se desarrollan pequeñas fisuras en la superficie que alcanzan el refuerzo. Algunas de estas fisuras se unen en el centro del elemento (fisuras B), como resultado las fisuras que se unen tienen un mayor ancho que las superficiales.



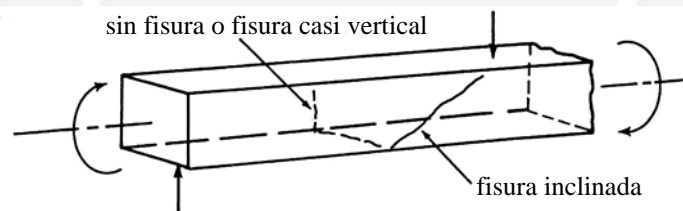
- Grietas por esfuerzos de tracción por flexión.** Los elementos que soportan momentos flectores desarrollan grietas en la zona de tracción. Algunas de estas fisuras verticales progresan casi hasta el eje neutro de la sección. En vigas de mucho peralte (peralte mayor que 1 m aproximadamente) como se explicó en la sección 5.1, las fisuras al nivel del refuerzo principal de flexión suelen tener poco espaciamiento. Algunas de estas fisuras progresan hacia el alma de la viga hasta llegar casi al eje neutro y podría suceder que estas fisuras (B en la figura) presenten un ancho mayor que las fisuras A. Por este motivo la Norma obliga a colocar refuerzo distribuido en el alma, adicional al refuerzo principal por flexión.



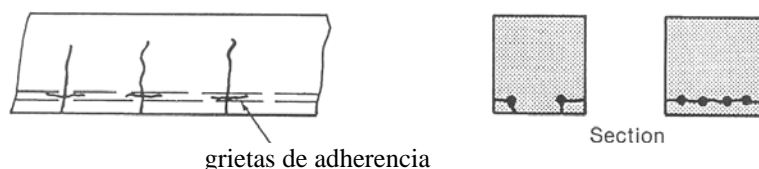
- c) **Grietas de flexión – cortante y de cortante en el alma.** Se les reconoce por ser inclinadas, muchas de ellas se inician por flexión y luego se inclinan hasta alcanzar, en algunos casos, la zona comprimida de la viga. Las fisuras por cortante en el alma se suelen producir en vigas con patines generosos en tracción y compresión y con almas relativamente delgadas.



- d) **Grietas de torsión.** Las fisuras originadas por la torsión pura tienden a formar una espiral alrededor del elemento. Sin en el elemento, como suele ocurrir en la mayoría de los casos, además de la torsión existe flexión y cortante, las fisuras tienden a ser pronunciadas en la cara donde se suman los esfuerzos cortantes producidos por la torsión y el cortante y menos pronunciadas o ausentes, en la cara opuesta donde los cortantes se contrarrestan.

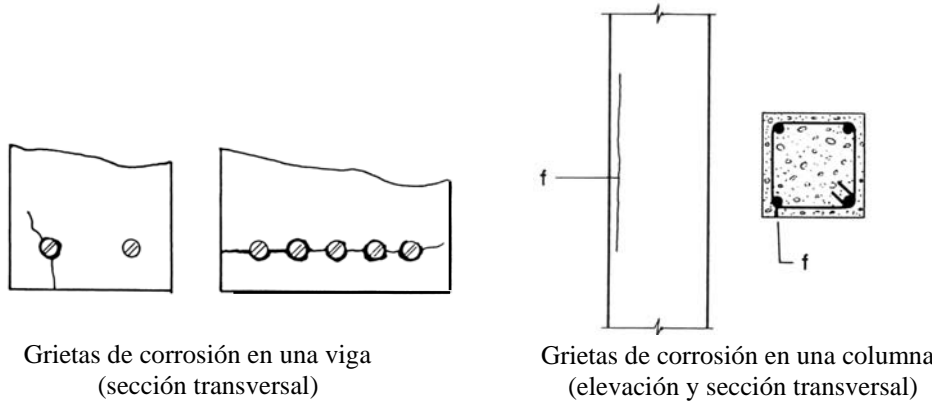


- e) **Grietas de adherencia entre el concreto y el acero.** Se suelen formar a lo largo del acero de refuerzo como producto de recubrimientos insuficientes o de esfuerzos de adherencia elevados. La grieta es paralela al refuerzo (splitting).

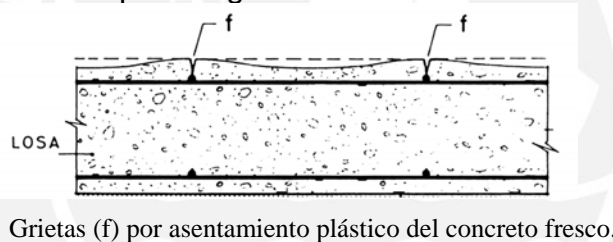


- f) **Grietas por corrosión en el acero.** El óxido ocupa varias veces el volumen del metal a partir del cual se formó, en consecuencia las barras corroídas generan presiones radiales que empujan el concreto que las circunda, este empuje puede conducir a la pérdida del recubrimiento. Las grietas por corrosión suelen ser paralelas al refuerzo y similares a las grietas de adherencia (splitting). Normalmente, cuando el estado de

corrosión es avanzado, las fisuras vienen acompañadas de manchas en la superficie del concreto que las hacen fácilmente identificables.

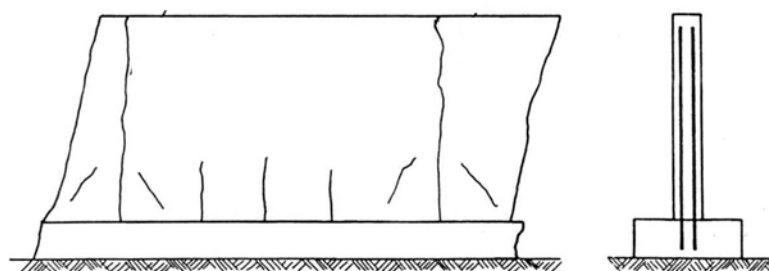


- g) **Grietas por asentamiento plástico del concreto fresco.** Se producen por el asentamiento plástico que experimenta el concreto fresco cuando se produce la exudación. Cuando las barras de refuerzo no pueden desplazarse verticalmente, el asentamiento plástico del concreto se encuentra restringido y en consecuencia se forman grietas paralelas al refuerzo, generalmente de poca profundidad. Este tipo de agrietamiento también se produce en la parte superior de las columnas, se manifiesta como grietas horizontales que son producidas por el asentamiento plástico restringido por los estribos de la columna. Una correcta dosificación del concreto y recubrimientos adecuados eliminan este tipo de agrietamiento.



- h) **Grietas por calor de hidratación.** Se forman por el enfriamiento a la temperatura del medio ambiente del concreto que se ha expandido por el calor de hidratación generado durante el fraguado. Para que suceda este tipo de agrietamiento, el elemento debe de estar restringido por otros durante su enfriamiento. Un ejemplo es el agrietamiento que se produce en los muros largos (sin juntas) de contención como el mostrado en la figura. El concreto del muro ha sido colocado luego de que la zapata corrida ha endurecido, en consecuencia ésta restringe la contracción del muro a medida que este se enfría.

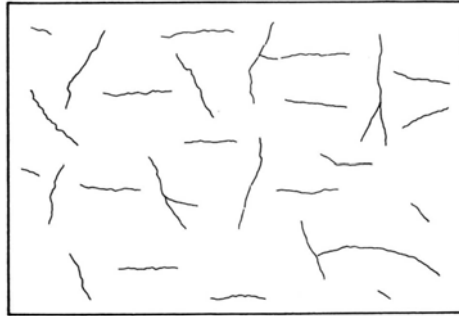
Este tipo de agrietamiento puede eliminarse si se controla el aumento de temperatura generado por el calor de hidratación o la velocidad de enfriamiento o ambos. También colocando juntas o vaciando el muro en segmentos cortos o aumentando significativamente la armadura horizontal de retracción.



Fisuración de un muro por contracción térmica inicial.

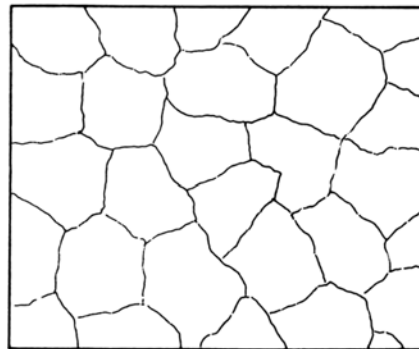
- i) **Grietas por retracción plástica del concreto.** Se presentan en losas, son de poca profundidad y erráticas. Aparecen pocas horas luego de colocado el concreto y normalmente se deben a una evaporación muy rápida del agua en la superficie del concreto. Se forman con facilidad en zonas de alta temperatura, baja humedad relativa y en días con viento sumado a un curado inadecuado.

Estas fisuras se pueden evitar mediante el empleo un diseño de mezcla adecuado, evitando la evaporación rápida del agua de la superficie durante las primeras horas luego de colocado el concreto y un curado minucioso.



Fisuras por retracción plástica en una losa (vista en planta)

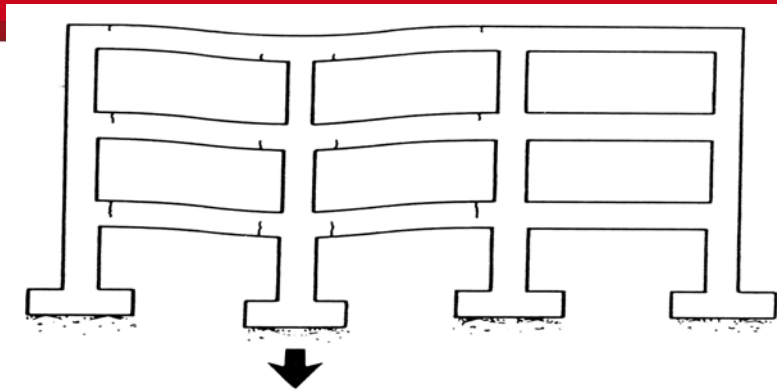
- j) **Fisuración en mapa en muros y losas.** Las fisuras se caracterizan por ser de ancho pequeño a medio (0.05 a 0.2 mm) poca profundidad y distribución errática. Aparecen durante la primera semana de edad del concreto. Se deben normalmente a un contenido excesivo de cemento, un curado deficiente, encofrados excesivamente impermeables o a un exceso de llaneado (acabado) en la superficie. En muchas ocasiones se originan por la mala costumbre de los constructores de espolvorear cemento en la superficie. La reacción álcalis – agregado también puede ser responsable de este tipo de agrietamiento.



Fisuración en "mapa" en un muro o losa

- k) **Grietas por deformaciones impuestas.** Dentro de esta categoría se encuentra el agrietamiento originado por las siguientes causas:
- Asentamiento de apoyos.
  - Retracción del concreto.
  - Cambios de temperatura.

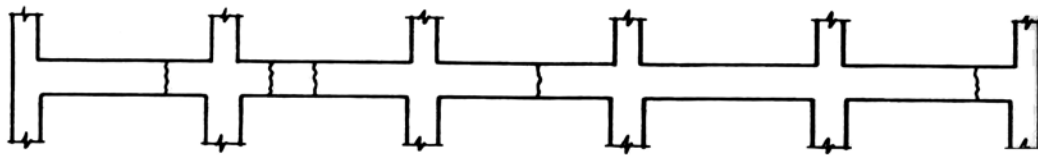
Si cualquiera de los efectos anteriores ocurre en una estructura que restringe la deformación libre del elemento, se producirá agrietamiento.



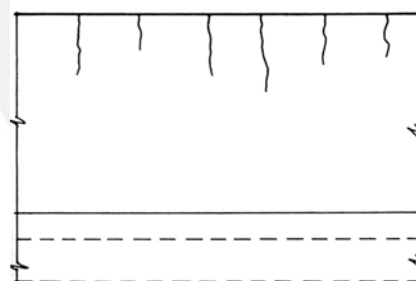
Fisuración en vigas por asentamiento de una columna interior de un pórtico

Las grietas típicas de retracción en vigas son como se muestra en la figura a continuación. Suelen presentarse cerca del centro y cerca a los tercios de la luz del elemento. Las grietas son casi verticales y a todo lo alto del elemento.

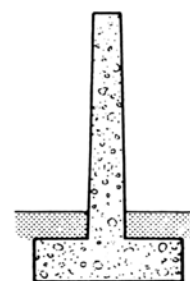
El agrietamiento ocasionado por la retracción o por los cambios de temperatura, puede controlarse por medio de refuerzo de acero adecuadamente distribuido o por juntas de control que hacen que las grietas aparezcan en lugares predefinidos.



Agrietamiento por retracción en una viga.



ALZADO



SECCION

Agrietamiento por retracción en la parte superior de un muro

#### 6.4 Razones para Controlar el Ancho de las Fisuras

##### a) Apariencia

En superficies limpias y poco rugosas, se ha establecido que las grietas que exceden de 0.25 mm a 0.35 mm son visibles y pueden conducir a preocupación por parte del público usuario. El ancho de grietas anterior podría considerarse como ancho límite. El tamaño “visible” de las grietas depende mucho del acabado, color y textura superficial del elemento.

##### b) Corrosión de las Armaduras

Tradicionalmente se ha relacionado la presencia de grietas con el peligro de corrosión en las armaduras. Las recientes investigaciones realizadas, no han podido establecer a partir de que ancho de grietas existe peligro de corrosión y sugieren que los factores que

influyen en el eventual inicio de la corrosión, son independientes del ancho de las grietas.

c) Impermeabilidad:

Esta razón es de suma importancia cuando se trata de estructuras destinadas a contener o retener líquidos. Es claro que si se requiere impermeabilidad es indispensable controlar el ancho de las grietas.

### **6.5 Principales Factores que Afectan el Ancho de las Fisuras**

A continuación se señalan algunas de las variables que tiene mayor influencia en el agrietamiento por flexión de los elementos de concreto armado.

- a) El uso de refuerzo liso o corrugado que influye fuertemente en la adherencia entre el acero y el concreto. El ancho de grietas es mayor con refuerzo liso. Hoy en día casi todo el refuerzo que utilizamos es corrugado, en consecuencia este ya no es un factor importante.
- b) El espesor del recubrimiento. A mayor espesor de recubrimiento es de esperarse un mayor ancho de grieta.  

Una mala práctica de diseño es la de intentar reducir el ancho de grietas disminuyendo el espesor del recubrimiento. El espesor del recubrimiento debe ser compatible con las condiciones ambientales o de exposición del elemento para así proporcionar una protección adecuada al refuerzo de acero.
- c) El esfuerzo en el acero de tracción por flexión. Tal vez esta es la variable más importante ya que a mayor esfuerzo en el acero de tracción por flexión (bajo cargas de servicio) mayor será el ancho de las grietas. Esto se debe a la mayor deformación en el acero que a su vez origina una mayor deformación en el concreto circundante.
- d) La distribución del acero de refuerzo en la zona de tracción. Es mejor utilizar varias barras de menor diámetro con poco espaciamiento que pocas de gran diámetro muy espaciadas. El ancho de grieta disminuye cuanto mejor distribuido se encuentre el acero de refuerzo en la zona de tracción.

### **6.6 Limitación del Ancho de las Fisuras**

No existe un acuerdo o reglas relativas al ancho máximo de grietas aceptables en un elemento estructural. Algunos investigadores y códigos establecen límites en los anchos de grieta del orden de 0.1 a 0.2 mm para estructuras expuestas a ambientes agresivos y de 0.2 a 0.4 mm para ambientes normales.

En la tabla 6-1 (González Cuevas) se resumen los anchos permisibles según distintos investigadores y códigos de acuerdo con el tipo de exposición al medio ambiente del elemento.

Tabla 6-1 Ancho máximo de grietas.

Investigador o Reglamento	Condiciones de exposición	Anchos máximos permisibles, mm
Brice	Severa	0.10
	Agresiva	0.20
	Normal	0.30
Rusch	Agresiva (agua salada)	0.20
	Normal	0.12 - 0.30
Efsen	Severa o agresiva	0.05 - 0.15
	Normal (exterior)	0.15 - 0.25
	Normal (interior)	0.25 - 0.35
Reglamento ACI 318 - 89	Exterior	0.33
	Interior	0.40
CEB (Comité Eurointernacional del concreto)	Interior (ambiente normal)	0.30
	Interior (ambiente medianamente agresivo)	0.20
	Exterior	0.20
	Muy agresivo o cuando se requiere impermeabilidad	0.10
CFE (Manual de Diseño de Obras Civiles, Comisión Federal de Electricidad - México)	Interior	0.30
	Agresivo	0.20
	Agresivo cuando se requiere impermeabilidad	0.10
	Cargas accidentales	0.40
Comité ACI 224	Aire seco o membrana protectora	0.40
	Aire húmedo, contacto con el suelo	0.30
	Productos químicos descongelantes	0.18
	Agua de mar, mojado y secado alternado	0.15
	Estructuras para almacenamiento de agua	0.10

### 6.7 Disposiciones Reglamentarias para Elementos en Flexión

Bajo cargas de servicio el patrón final de agrietamiento no se ha desarrollado completamente. Normalmente hay pocas grietas en las zonas de máximos esfuerzos. El número de grietas que se producen, por ejemplo en una viga, es finito. Una vez que el patrón de grietas se ha estabilizado y se incrementa la carga hacia la carga última las grietas existentes se agrandan, formándose pocas grietas adicionales.

El ancho de las grietas, su espaciamiento, su distribución ó patrón, la variación de los esfuerzos en el acero ( $\epsilon_s$ ) y en el concreto ( $\epsilon_c$ ) entre las zonas agrietadas, son muy difíciles de establecer. Por este motivo los códigos utilizan fórmulas empíricas para controlar indirectamente el ancho de grietas. La idea central es lograr varias grietas finas en lugar de pocas gruesas.

El código (ACI o Peruano) presta mas atención a la distribución del refuerzo en la zona de tracción que al ancho mismo de la grieta. La Norma se limita a proporcionar reglas para la distribución del refuerzo en los elementos en flexión, tales como las vigas y las losas armadas en una dirección.

#### 6.7.1 Norma Peruana

Nuestra norma, basada en el ACI, limita indirectamente el ancho de grietas ( $\omega$ ) a los siguientes valores:

$$\text{Exposición interior } \omega_{max} = 0.016'' \approx 0.40 \text{ mm}$$

$$\text{Exposición exterior } \omega_{max} = 0.013'' \approx 0.33 \text{ mm}$$

Nunca estuvo claro o definido en el ACI el significado del término exposición interior o exterior. Más razonable sería referirse a condiciones de exposición severa, agresiva, normal o a la necesidad de lograr elementos impermeables.



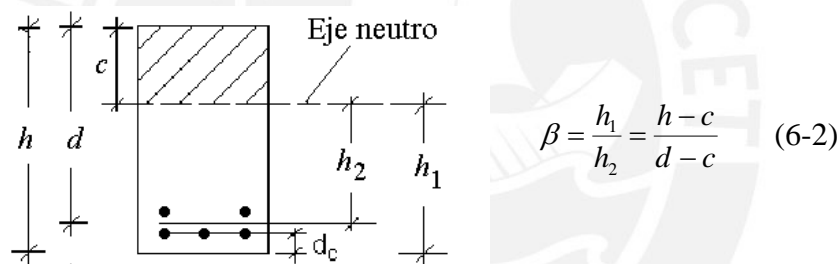
La fórmula del ACI, hasta su versión del año 95, está basada en la Fórmula empírica de Gergely – Lutz (ecuación 6-1) que permite estimar el ancho máximo de las grietas en la cara en tracción por flexión de vigas y losas. Esta ecuación fue derivada estadísticamente a partir de la medición de los anchos máximos de grietas observados en vigas.

El valor de  $\omega$  - predicho debe tomarse con reserva debido a la fuerte dispersión en los anchos de grieta observados. Por ejemplo, de la serie de datos que dio origen a la fórmula, el 10% de las grietas superaban en 1.5 veces el ancho predicho por la fórmula. Por este motivo y por la naturaleza aleatoria del fenómeno del agrietamiento, los cálculos de los anchos de grieta deben emplearse solamente como una guía para lograr una disposición apropiada de las barras de refuerzo.

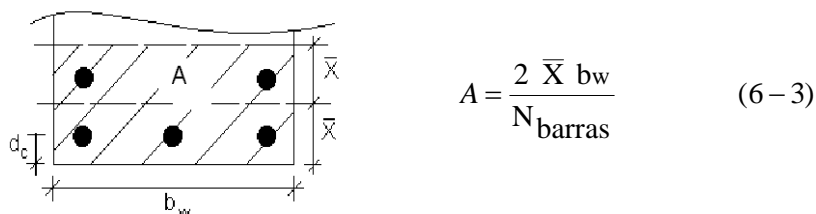
$$\omega = 1.1 \beta f_s \sqrt[3]{dc A} \times 10^{-5} \quad (\text{en mm}) \quad (6-1)$$

El significado de los términos de la ecuación 6-1 es el siguiente:

- $\omega$  es el ancho de la grieta (en mm) en la fibra extrema en tracción.
- $f_s$  esfuerzo (en  $\text{kg/cm}^2$ ) bajo cargas de servicio, en el acero de tracción por flexión.
- $\beta$  es la distancia del eje neutro a la fibra extrema en tracción dividida entre la distancia al centroide del refuerzo y se calcula con la ecuación 6-2. La posición del eje neutro se calcula para cargas de servicio.



- $dc$  es la distancia entre la fibra extrema en tracción y el centroide del acero más cercano a ella.
- $A$  es el área efectiva del concreto en tracción (zona achurada de la figura a continuación) que rodea al acero de refuerzo y que tiene el mismo centroide que el acero de refuerzo. Se calcula con la ecuación 6-3.



- $\bar{X}$  es el centroide del acero de tracción por flexión.
- $N_{\text{barras}}$  : es el número de barras de refuerzo. Si estas son de distintos diámetros, se convierte el área total de acero al número de barras que correspondería a la barra de mayor diámetro.

Debido a la dispersión en los resultados, el ACI (hasta su versión del 95) y la Norma Peruana no controlan directamente el ancho de las grietas. Lo que hacen es un control indirecto mediante el cálculo del parámetro “Z” definido por la ecuación 6-4.

$$Z = f_s \sqrt[3]{dc A} \quad \text{kg/cm} \quad (6-4)$$

El refuerzo en la zona de tracción por flexión debe distribuirse de tal modo que:

$$Z \leq 31,000 \text{ kg/cm para elementos con exposición interior } (\omega = 0.016'')$$

$$Z \leq 26,000 \text{ kg/cm para elementos con exposición exterior } (\omega = 0.013'')$$

En la fórmula 6-4,  $f_s$  es el esfuerzo en el acero de tracción al nivel de cargas de servicio y la Norma permite que se suponga igual a  $0.6 f_y$  sin embargo, para evaluar  $f_s$  es mejor utilizar la expresión 6-5 o la ecuación 6-6 que es una simplificación de la anterior proveniente de asumir que el brazo de palanca interno se puede estimar como  $0.9 d$ .

$$f_s = \frac{M_{servicio}}{A_s j d} \quad (6-5)$$

$$f_s \approx \frac{M_{servicio}}{A_s 0.9 d} \quad (6-6)$$

El parámetro “Z” proviene directamente de la ecuación 6-1 de Gergely – Lutz, haciendo:

- $\omega = 0.40 \text{ mm } (0.016'')$  Exposición interior
- $\omega = 0.33 \text{ mm } (0.013'')$  Exposición exterior
- y asumiendo  $\beta \approx 1.2$  (valor para vigas de dimensiones usuales)

En losas el valor de  $\beta$  es cercano a 1.35, sin embargo la norma no hace distinción entre vigas y losas macizas armadas en una dirección.

El parámetro “Z” no es aplicable a losas armadas en dos sentidos, este tipo de elemento estructural tiene sus propias disposiciones.

### 6.7.2 Disposiciones del ACI 318–02 para Elementos en Flexión

A partir del año 99 el ACI modificó el procedimiento para el control de fisuras. Sigue basándose en las investigaciones de Gergely – Lutz, pero ya no exige el cálculo del parámetro “Z” esto debido a las siguientes razones:

- Reconoce que el ancho de las grietas es muy variable y las expresiones que intentan predecir este ancho, tienen mucha dispersión. Las nuevas expresiones intentan controlar el ancho de grietas a un tamaño aceptable bajo condiciones usuales, pero reconocen que este ancho puede variar mucho.
- Ya no hay distinción entre exposición exterior o interior. Tal como se comentó líneas arriba, esta distinción nunca estuvo clara, la distinción se debía a la supuesta asociación entre el ancho de grietas y la posibilidad de corrosión en las armaduras. Ya que las investigaciones han mostrado que la corrosión no está claramente correlacionada con el ancho de grietas que ocurre en estructuras o elementos bajo condiciones de exposición usuales, no hay razón para seguir manteniendo esta distinción en el tipo de exposición.
- Las nuevas disposiciones que presenta no son suficientes para elementos o estructuras sometidas a una exposición severa o agresiva o cuando deban ser impermeables. Para estos casos será necesario adoptar precauciones especiales que no están cubiertas por la Norma.

- Las nuevas disposiciones del ACI fijan indirectamente un ancho de grietas máximo de 0.4 mm (0.016”).
- Las nuevas disposiciones controlan el espaciamiento máximo del refuerzo “S” en elementos en flexión de tal modo que no se exceda el ancho máximo de grietas. Las expresiones para determinar el máximo espaciamiento del refuerzo más cercano a la superficie en tracción por flexión son:

$$S \leq \frac{96,000}{f_s} - 2.5 C_c \quad (\text{en cm}) \quad (6-7)$$

$$S \leq 30 \left( \frac{2,520}{f_s} \right) \quad (\text{en cm}) \quad (6-8)$$

Donde  $f_s$  es el esfuerzo en el acero (en  $\text{kg/cm}^2$ ) bajo cargas de servicio calculado como  $0.6 f_y$  ó mejor con 6-5 ó 6-6.

$C_c$  es el recubrimiento libre (en cm), medido desde la superficie en tracción del concreto a la superficie del refuerzo en tracción por flexión más cercano.

En las losas macizas armadas en un sentido deberá cumplirse adicionalmente:

$$S \leq 3 h \quad S \leq 0.45 \text{ m}$$

En losas macizas armadas en dos sentidos, en las zonas de esfuerzos elevados:

$$S \leq 2 h$$

Las ecuaciones 6-7 y 6-8 del ACI aplicadas a una viga típica con acero de refuerzo de  $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$ , asumiendo  $f_s = 0.6 f_y \approx 2,500 \text{ kg/cm}^2$  y  $C_c = 5 \text{ cm}$  (recubrimiento + diámetro del estribo), conducen a:

$$S \leq \frac{96,000}{2,500} - 2.5 \times 5 \approx 25 \text{ cm} \quad S \leq 30 \times \frac{2,520}{2,500} \approx 30 \text{ cm}$$

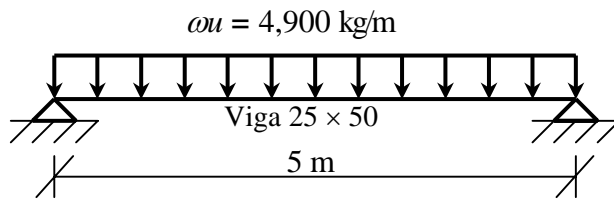
Por lo tanto en vigas típicas bastará asegurar que el espaciamiento del refuerzo sea menor que 0.25 m. Esta limitación raramente será excedida salvo en el caso de vigas anchas con refuerzo muy espaciado.

Para una losa maciza armada en una dirección con un recubrimiento típico ( $C_c$ ) de 2 cm tendremos:

$$S \leq \frac{96,000}{2,500} - 2.5 \times 2 \approx 33 \text{ cm} \quad S \leq 30 \times \frac{2,520}{2,500} \approx 30 \text{ cm}$$

Por lo tanto en losas macizas armadas en una dirección, bastará asegurar que el espaciamiento del refuerzo no exceda de 0.30 m ó  $3h$ .

6.8 Ejemplo Control de la fisuración en una viga con exposición exterior



CM  $\approx$  2,120 kg/m

CV = 950 kg/m

$\omega_s = 3,070$  kg/m (servicio)

$\omega_u \approx 4,900$  kg/m

$M_u = 1/8 (4,900 \times 5^2) = 15,310$  kg-m

$M_{servicio} \approx 9,600$  kg-m

$f_c = 210$  kg/cm<sup>2</sup>

$f_y = 4,200$  kg/cm<sup>2</sup>

- Diseño por flexión con acero grueso en una sola capa

$M_u = 15,310$  kg-m     $d \approx 50 - 6 = 44$  cm     $A_s \text{ max} = 17.53$  cm<sup>2</sup>

$A_s = 10.35$  cm<sup>2</sup> (acero necesario)  $\Rightarrow$  Seleccionamos  $2\phi 1'' = 10.2$  cm<sup>2</sup>

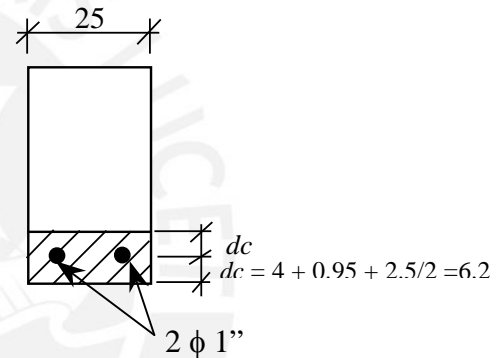
De 6-3:

$A = 2 \times 6.2 \times 25 / 2 \text{ barras} = 155$  cm<sup>2</sup>

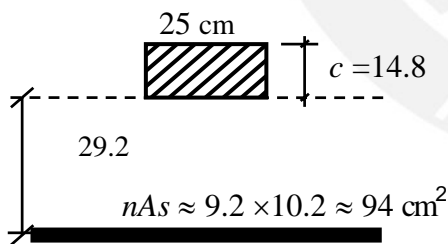
De 6-6

$f_s \approx \frac{M_{servicio}}{0.9 d A_s} = 9,600 \times 100 / (0.9 \times 44 \times 10.2) \approx 2,380$  kg/cm<sup>2</sup>

$f_s \approx 0.57 f_y$



- Verificamos, por curiosidad, los esfuerzos en el acero (Sección Transformada):



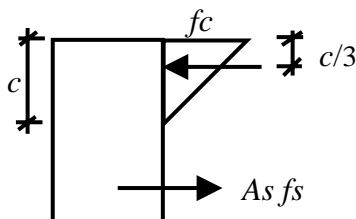
$M_{cr} = 3,020$  kg-m (sin aporte del acero)

$9,600 > 3,020$  (la sección se agrieta)

$n \approx 9.2$      $I_{cr} = 107,000$  cm<sup>4</sup>  $\approx 0.4 I_g$

$c = 14.8$  cm  $\approx 0.34 d$  (valor típico)

$jd = 44 - 14.8 / 3 \approx 39.1$  cm  $\approx 0.89 d$



$f_s = \frac{M}{A_s jd} = 9,600 \times 100 / (10.2 \times 39.1) \approx 2,410$  kg/cm<sup>2</sup>

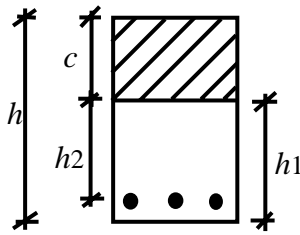
$1/2 f_c (25) c = A_s f_s \Rightarrow f_c \approx 135$  kg/cm<sup>2</sup>  $\approx 0.64 f_c$

- Cálculo del parámetro Z

$Z_{max} = 26,000$  kg/cm para condiciones de exposición exterior

$Z = 2,410 \sqrt[3]{6.2 \times 155} \approx 23,800$  kg/cm  $\Rightarrow$  ok cumple

- Estimación del ancho de grietas (Gergely – Lutz) ecuación 6-1.



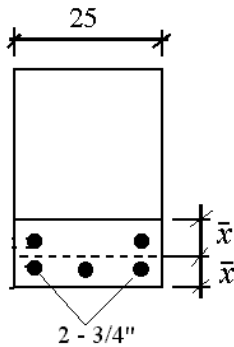
$$\omega = 1.1 \beta f_s \sqrt[3]{dc A} \times 10^{-5} \quad (\text{en mm})$$

$$\beta = \frac{h_1}{h_2} = \frac{h-c}{d-c} = \frac{50-14.68}{44-14.68} = 1.2$$

$$\omega = 1.1 \times 1.2 \times 2,410 \sqrt[3]{6.2 \times 155} \times 10^{-5} \quad (\text{mm})$$

$$\omega \approx 0.3 \text{ mm}$$

- Acero de menor diámetro. Para estimar la influencia que tiene la selección de las armaduras en el ancho de grietas por flexión, cambiemos los dos fierros de 1", por armaduras de menor diámetro.



Nueva armadura:

$$2\phi 3/4'' + 3\phi 5/8'' \quad A_s = 11.68 \text{ cm}^2 \quad (\text{contra } 10.2)$$

$$\bar{x} = \frac{7.68 \times 5.9 + 4 \times 9.2}{11.68} \approx 7$$

$$\text{Con } d = 50 - 7 = 43 \text{ cm} \quad A_s \text{ necesario} = 10.7 \text{ cm}^2$$

$$n = 11.68 / 2.84 = 4.1 \text{ barras}$$

$$A = (2 \times 7 \times 25) / 4.1 = 85 \text{ cm}^2$$

$$f_s = 9,600 \times 100 / (0.9 \times 43 \times 11.68) \approx 2,130 \text{ kg/cm}^2 \approx 0.51 f_y$$

Por lo tanto:

$$Z = 2,130 \sqrt[3]{5.9 \times 85} \approx 16,900 \text{ kg/cm}$$

El nuevo ancho de grieta estimado por la ecuación de Gergely – Lutz será:

$$\beta = \frac{h_1}{h_2} = \frac{h-c}{d-c} = (50 - 15.4) / (43 - 15.4) \approx 1.25$$

$$\omega = 1.1 \times 1.25 \times 2,130 \sqrt[3]{5.9 \times 85} \times 10^{-5} \approx 0.23 \text{ mm}$$

## CAPITULO 7

### Diagramas Momento - Curvatura



#### Lecturas:

- 7.1 Influencia de la Plataforma de Fluencia y el Endurecimiento del Acero en la Ductilidad de Elementos de Concreto Armado. G. Ottazzi, A. Muñoz. Memorias del XI Congreso nacional de Ingeniería Civil, 1997.
- 7.2 Capítulo 6 – Ultimate Deformation and Ductility of Members with Flexure – del Libro Reinforced Concrete Structures. Park – Paulay.
- 7.3 Myths and Fallacies in Earthquake Engineering – Conflicts between Design and Reality. Nigel Priestley. ACI Concrete International. February 1997.
- 7.4 Load Moment Curvature Characteristics of Reinforced Concrete Sections. Pfrang, Siess, Sozen. ACI Journal. July 1964.
- 7.5 Displacement Based Design of RC Structures Subjected to Earthquakes. Moehle, Eeri. Earthquake Spectra, Vol. 8, No. 3, 1992.

## 7.1 Introducción

En el diseño de elementos y estructuras de concreto armado, es importante lograr un comportamiento dúctil bajo cargas de gravedad y especialmente frente a sollicitaciones sísmicas severas. La importancia de considerar las características carga – deformación de un elemento o de una estructura, obedecen a:

- a) La necesidad de evitar las fallas frágiles. En el caso extremo de que una estructura se vea sobrecargada hasta la falla, si su comportamiento es dúctil y ciertas porciones de la estructura pueden fluir sin fallar, la estructura puede ser capaz de soportar grandes deflexiones o deformaciones cerca de su capacidad máxima de carga. Bajo estas condiciones la estructura “avisa” y es posible prevenir el colapso total.

La figura 7-1 muestra el comportamiento de una viga bajo cargas que se incrementan hasta la falla. Se muestran dos posibilidades de comportamiento, un comportamiento del tipo frágil y uno dúctil. Lo deseable es lograr un comportamiento dúctil asociado a deformaciones importantes sin pérdida apreciable en la capacidad de carga. La estructura dúctil tiene mayor capacidad de absorber energía, esta mayor capacidad se aprecia si se comparan las áreas debajo de la curva carga -deflexión. Frente a cargas de servicio el comportamiento es prácticamente el mismo para ambas vigas.

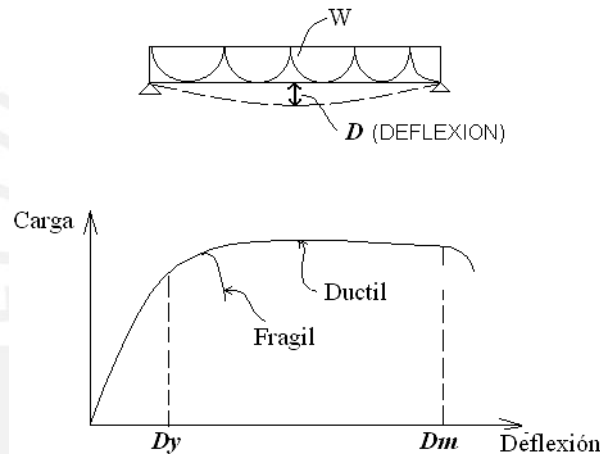


Fig. 7-1 Comportamiento de una viga con falla frágil y dúctil

En la figura anterior, si el comportamiento de la estructura es dúctil, esta puede incursionar en el rango no lineal sin colapsar. Si la estructura es hiperestática ocurre una importante redistribución de las fuerzas internas. Una medida de la ductilidad de una estructura es la **ductilidad de desplazamiento** definida como el cociente entre el desplazamiento máximo y el desplazamiento donde se inicia la fluencia de la estructura:

$$\mu = D_m / D_y$$

- b) Si una estructura hiperestática es dúctil, mediante la redistribución de momentos, puede modificarse la distribución de momentos flectores que se obtiene del análisis elástico. Si las secciones que componen la viga tienen una ductilidad adecuada, puede modificarse el diagrama de momentos proveniente del análisis elástico aliviando por ejemplo los momentos negativos y transfiriendo la reducción hacia la zona de momentos positivos. Esto se puede lograr solamente si las secciones donde se reducen los momentos negativos, tienen la capacidad de soportar rotaciones inelásticas sin fallar.

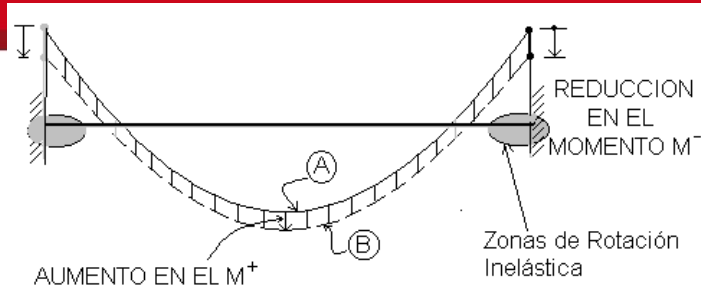


Fig. 7-2 Redistribución de los momentos flectores.

La figura 7-2 ilustra esta idea en una viga doblemente empotrada. El diagrama A corresponde al diagrama de momentos flectores proveniente del análisis elástico y el diagrama B corresponde al de momentos ajustados o redistribuidos. En consecuencia es posible lograr una nueva distribución de momentos flectores, distinta a la elástica, si las secciones de momento negativo tienen capacidad de rotación inelástica manteniendo su capacidad de momento una vez alcanzada la fluencia del acero de refuerzo.

En una estructura hiperestática, como la mostrada en la figura 7-2, la redistribución permite que, una vez alcanzada la resistencia de fluencia en los empotramientos, la carga pueda seguir aumentando hasta formar, en este caso, una tercera rotula plástica al centro del tramo, momento en el cual se formará un mecanismo plástico. En consecuencia la relación final entre el momento negativo y el momento positivo diferirá de manera importante con la presente en el rango elástico ( $1/12 \div 1/24 = 2$ ).

La redistribución en una estructura hiperestática significa que los momentos internos pueden reajustarse para permitir a la estructura soportar cargas adicionales, luego de la formación de una o más rotulas plásticas.

- c) La ductilidad es importante no solamente porque puede servir como señal de alerta de fallas inminentes, también es esencial si la estructura debe resistir, en algún instante de su vida útil, cargas dinámicas como las que imponen los grandes terremotos.

En zonas de alta sismicidad, la ductilidad es una consideración de diseño muy importante. La actual filosofía de diseño sismo – resistente confía en las propiedades de absorción y disipación de energía de las estructuras (reducción de las fuerzas elásticas por ductilidad) para que estas puedan sobrevivir sin colapsar, terremotos intensos.

En consecuencia las características de disipación de energía o de comportamiento inelástico de los elementos estructurales son importantes. Estas características son dependientes de los diagramas Momento – Curvatura y será posible formarse una idea clara de la capacidad de deformación inelástica de un elemento o estructura, si construimos los diagramas Momento – Curvatura para varias secciones a lo largo del eje del elemento.

Aunque en el diseño “corriente” de estructuras de concreto armado, no es necesario conocer en forma explícita, la relación que existe entre el momento aplicado a determinada sección del elemento y la curvatura que resulta en el intervalo completo de carga hasta su falla, y tampoco forma parte de los procedimientos de diseño contenidos en la Normas, el conocimiento del comportamiento de la sección a través de los diagramas momento – curvatura es importante en diferentes contextos. Es básica para estudiar la ductilidad de la sección y del elemento, para entender el desarrollo de las rotulas plásticas y la redistribución de los momentos elásticos que ocurre en la mayor parte de estructuras de concreto armado antes del colapso.



Los diagramas Momento – Curvatura ( $M - \phi$ ) normalmente se construyen para una sección de concreto armado, considerando que las deformaciones predominantes son las de flexión. Normalmente las deformaciones predominantes de un elemento estructural de dimensiones o proporciones usuales, provienen de la sollicitación de flexión.

### 7.2 Definición de Curvatura

La definición de curvatura de una sección que utilizaremos es la misma que se presenta en los textos de resistencia de materiales y que se resume en la figura 7-3.

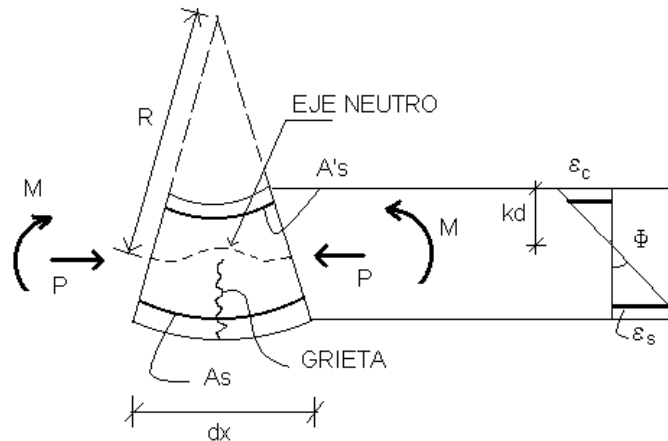


Fig. 7-3 Curvatura de un elemento.

$R$  = radio de curvatura (medido al eje neutro)

La curvatura se define como el cambio de ángulo (rotación) por unidad de longitud en una ubicación dada, a lo largo del eje del elemento sometido a cargas que producen flexión. La curvatura entre los extremos del elemento de la figura 7-3, será:

$$\frac{dx}{R} = \frac{\epsilon_c dx}{kd} = \frac{\epsilon_s dx}{d(1-k)}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{\epsilon_c}{kd} = \frac{\epsilon_s}{d(1-k)} = \phi \quad \text{Curvatura del elemento (Rotación por unidad de longitud)}$$

$$\phi = \frac{\epsilon_c}{kd} = \frac{\epsilon_s}{d(1-k)} \quad \phi = \frac{\epsilon_c}{c} = \frac{\epsilon_s}{d-c} = \frac{\epsilon_c + \epsilon_s}{d}$$

La curvatura de la sección ( $\phi$ ) cambia a lo largo del eje del elemento debido a la variación en la profundidad del eje neutro, a la variación de las deformaciones entre grietas y a la variación en la cantidad de acero de refuerzo. En la etapa elástica (sección sin fisurar) se cumplirá la relación clásica:

$$EI = MR = M / \phi$$

### 7.3 Ductilidad de Curvatura

Se define a través del siguiente cociente:

$$\mu\phi = \phi_u / \phi_y$$

Donde  $\phi_u$  es la curvatura correspondiente a la falla de la sección, es decir cuando el concreto alcanza su deformación de agotamiento  $\epsilon_{cu}$ . La curvatura  $\phi_y$  corresponde a la primera fluencia del acero de refuerzo en tracción.

La ductilidad de curvatura permite “medir” la capacidad de rotación o de deformación inelástica de una sección.

**7.4 Construcción de los Diagramas Momento – Curvatura.**

La construcción de los diagramas momento – curvatura para una sección de concreto armado, es una tarea numéricamente tediosa por la gran cantidad de iteraciones que es necesario realizar. En cada etapa de los cálculos se deberán cumplir, las ecuaciones de equilibrio, la compatibilidad (Navier) y las relaciones constitutivas de los materiales así como la hipótesis de adherencia entre concreto y acero. Las grandes etapas son:

- Definir la geometría de la sección y la disposición de las armaduras.
- Definir el diagrama  $\sigma_c - \epsilon_c$  del concreto comprimido. Normalmente se desprecia el aporte del concreto en tracción. Es necesario adoptar un valor de la deformación de agotamiento del concreto  $\epsilon_{cu}$ , consistente con la cantidad de confinamiento transversal presente en la sección. El valor de  $\epsilon_{cu}$  que se adopte es importante ya que es determinante en la curvatura última de la sección.
- Definir el diagrama  $\sigma_s - \epsilon_s$  del acero. Las posibilidades son: diagrama elastoplástico, diagrama con endurecimiento por deformación, diagrama proveniente de resultados de ensayos de laboratorio. Se asume que el comportamiento del acero en tracción y compresión es el mismo.
- Variar la deformación del concreto  $-\epsilon_c$  correspondiente a la fibra mas comprimida en incrementos pequeños, desde cero hasta el valor máximo o de agotamiento del concreto  $\epsilon_{cu}$ .
- Fijado un cierto valor de  $\epsilon_c$  en el paso anterior, es necesario variar la profundidad del eje neutro ( $c_i = kd$ ) hasta alcanzar el equilibrio de la sección. Cuando se alcanza el equilibrio de la sección es posible calcular la curvatura asociada mediante:

$$\phi_i = \frac{\epsilon_c}{c_i} = \frac{\epsilon_s}{d - c_i} = \frac{\epsilon_c + \epsilon_s}{d}$$

La figura 7-4 (Park y Paulay) ilustra una de las numerosas iteraciones necesarias para la construcción del diagrama momento – curvatura de una sección. En este caso, el punto del diagrama que se está calculando corresponde a una deformación igual a  $\epsilon_{cm}$ .

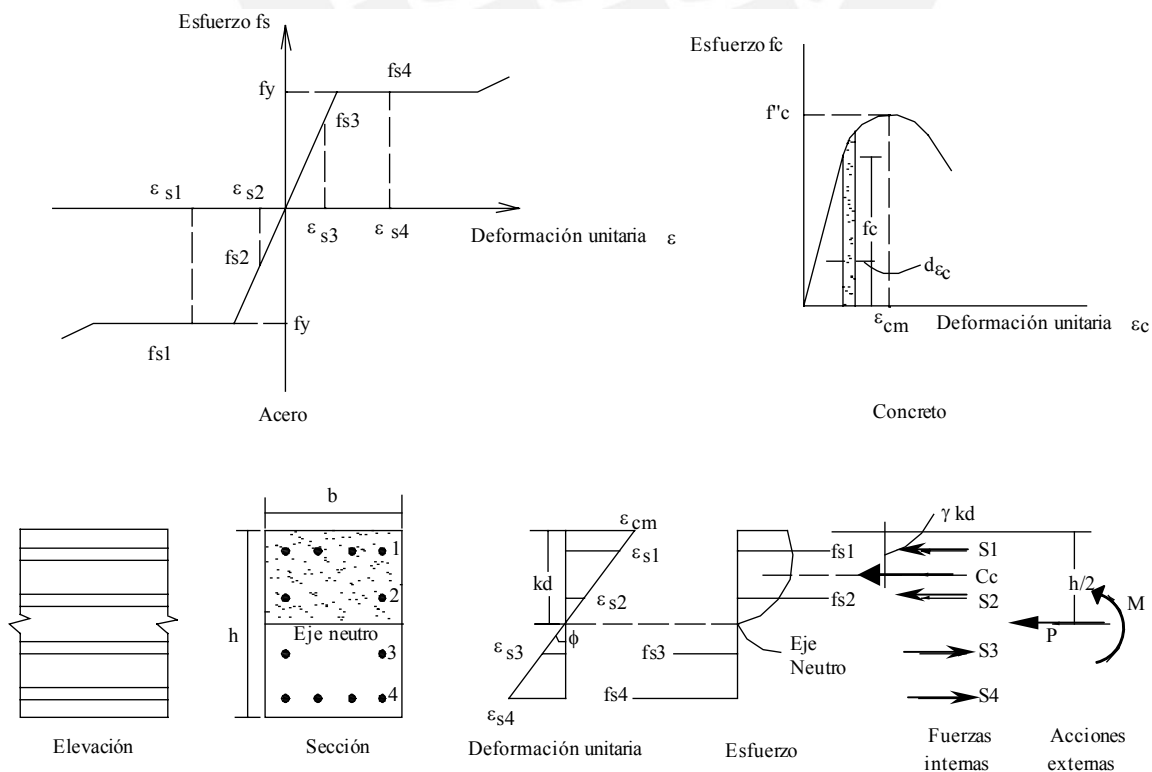


Fig. 7-4 Determinación de un punto del diagrama momento – curvatura de una sección.

A manera de ejemplo, la figura 7-5 muestra el diagrama momento - curvatura para una sección de concreto armado de 0.35x0.70 m, sin carga axial y reforzada con acero de tracción únicamente con una cuantía equivalente al 50% de la balanceada. El modelo del acero adoptado es elastoplástico perfecto con  $f_y = 4,200$  y el modelo del concreto es similar al Modelo de Hognestad, es decir, parabólico hasta  $f'_c = 210$  ( $\epsilon_0 = 0.002$ ) y lineal descendente hasta  $f_c = 180$  ( $\epsilon_{cu} = 0.004$ ).

Se ha supuesto que el concreto resiste tracciones hasta un instante antes de producirse la fisuración por flexión, de allí en adelante se ignora el aporte que podría tener el concreto en tracción que aún no se ha fisurado.

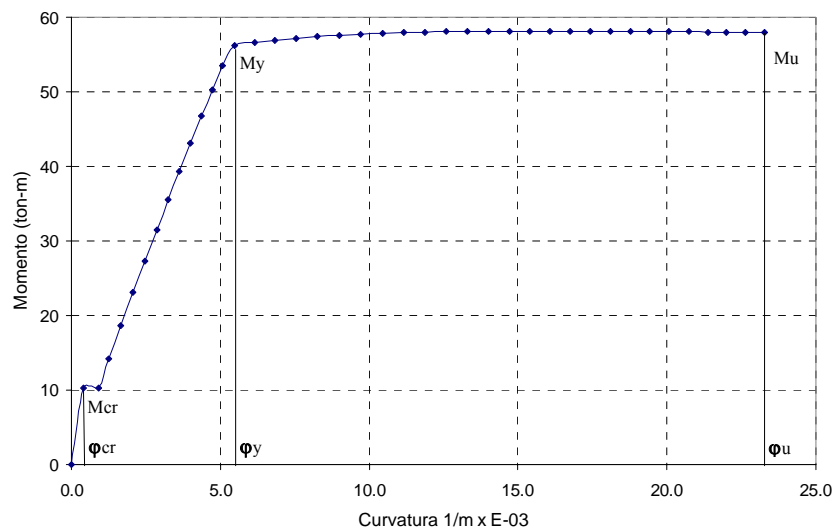


Fig.7-5 Diagrama de interacción para una sección de una viga.

Se distinguen claramente tres etapas en el comportamiento de la sección:

- La primera asociada al comportamiento de la sección antes de alcanzar el momento de agrietamiento ( $M_{cr} \approx 10.3$  ton-m) es decir la etapa en la cual el concreto aún resiste tracciones. Cuando se produce la fisuración por flexión, la rigidez se reduce y la curvatura aumenta sin incremento en el momento flector.

Antes de la fisuración la rigidez de la sección se puede estimar mediante  $E_c I_g$ , siendo  $I_g$  el momento de inercia bruto de la sección. Luego de la fisuración y hasta antes del inicio de la fluencia, la rigidez de la sección se reduce a  $E_c I_{cr}$ , siendo  $I_{cr}$  el momento de inercia de la sección completamente fisurada, ya que se está despreciando la resistencia a la tracción de todo el concreto situado por debajo del eje neutro.

- La segunda etapa está asociada al comportamiento de la sección fisurada con el acero trabajando en el rango elástico ( $f_s < f_y$ ).
- La tercera etapa se presenta una vez que se ha excedido el momento flector que produce la primera fluencia del acero ( $M_y \approx 56.2$  ton-m) y se prolonga hasta alcanzar el agotamiento del concreto en compresión, el cual se produce para un momento flector  $M_u \approx 58$  ton-m

Nótese la similitud entre el momento de fluencia de la sección ( $M_y$ ) y la resistencia nominal o momento último ( $M_u$ ) la diferencia es de tan solo un 3%. Esto se debe, en parte, al modelo elastoplástico adoptado para el acero. Si se hubiera adoptado un modelo con endurecimiento por deformación, la diferencia hubiera sido mayor. Para esta sección, el asumir un diagrama momento – curvatura bilineal, sería acertado.

La ductilidad de curvatura de la sección es de:

$$\phi_u / \phi_y = 23.3 / 5.4 \approx 4.3$$

### 7.5 Factores que Influyen en los Diagramas $M - \phi$ y en la Ductilidad de Curvatura

- La cantidad de acero en tracción. A mayor cantidad de acero en tracción menor ductilidad de curvatura. Al aumentar el acero en tracción aumenta  $kd$ , aumenta  $\phi_y$  y  $\phi_u$  se reduce.
- La cantidad de acero en compresión. Su presencia aumenta la ductilidad ya que  $kd$  decrece,  $\phi_y$  decrece y  $\phi_u$  aumenta.
- El esfuerzo de fluencia  $f_y$  del acero. Un aumento en  $f_y$  es equivalente a aumentar el área de acero en tracción.
- Las características de la plataforma de fluencia y de la zona de endurecimiento por deformación del acero. Estas características son importantes una vez que se ha alcanzado la fluencia del acero.
- La forma del diagrama esfuerzo – deformación del concreto.
- La forma y tamaño de la zona en compresión.
- El valor de  $f'_c$ . Un aumento de  $f'_c$  (para la misma cantidad de acero en tracción) aumenta la ductilidad ya que,  $kd$  se reduce,  $\phi_y$  se reduce y  $\phi_u$  aumenta.
- El valor de  $\epsilon_{cu}$  del concreto. Una mejora en este valor hace que  $\phi_u$  aumente y en consecuencia la ductilidad de curvatura. Hay diferencias notables entre el concreto confinado y no confinado, la presencia de confinamiento (estribos o espirales) influye marcadamente en el valor de  $\epsilon_{cu}$ .
- La intensidad de la carga axial. Para una misma sección y armaduras, un aumento de la carga axial reduce la ductilidad de curvatura fuertemente.

Para observar la influencia que tiene la cantidad de acero en tracción en la forma del diagrama Momento – Curvatura así como en la ductilidad, se han construido los diagramas para una sección de  $0.25 \times 0.50$  con diversas cantidades de acero en tracción únicamente. El concreto es de  $210 \text{ kg/cm}^2$  con un diagrama parabólico – lineal ( $\epsilon_{cu}=0.004$ ). Se asume que el peralte efectivo se mantiene constante ( $d = 0.45 \text{ m}$ ) y que el acero es elastoplástico perfecto con  $f_y = 4,200$ . La figura 7-6 muestra los resultados.

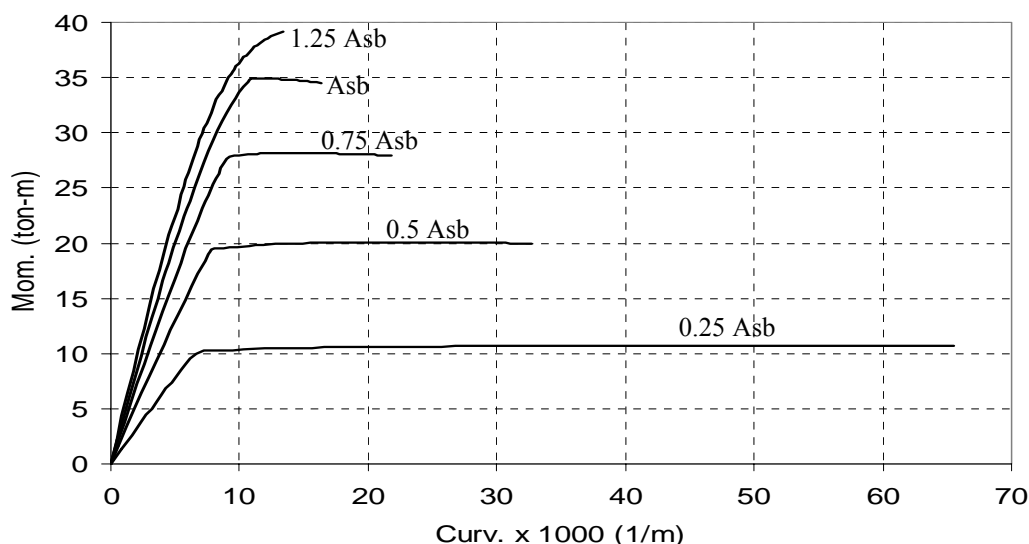


Fig. 7-6 Diagramas Momento – Curvatura. Sección  $0.25 \times 0.50$ . Acero en tracción variable

La tabla a continuación resume los resultados y la ductilidad de curvatura que puede alcanzar la sección para las distintas cantidades de acero en tracción utilizadas. Nótese que para un acero equivalente a  $0.75 A_{sb}$ , la ductilidad de curvatura es de tan solo 2.4.

$A_s / A_{sb}$	$M_y$ ton-m	$M_u$ ton-m	$\phi_y$ 1/m *1000	$\phi_u$ 1/m *1000	Duct. Curvat. $\mu\phi = \phi_u / \phi_y$
0.25	10.2	10.6	6.57	65.48	10.0
0.50	19.4	20.0	7.76	32.74	4.2
0.75	27.9	27.9	9.04	21.83	2.4
1.00	34.9	34.5	10.83	16.37	1.5
1.25	---	39.1	---	13.44	---

Para intentar cuantificar las diversas variables que influyen en los diagramas Momento – Curvatura, y por lo tanto en la ductilidad de la sección, resolvamos el caso particular de una sección de 0.35x0.70 m como la indicada en la figura 7-7.

Las variables a estudiar son: la cantidad de acero en tracción, la cantidad de acero en compresión, el valor de  $\epsilon_{cu}$  y la intensidad e la carga axial, manteniendo  $f'_c$  y  $f_y$  constantes. Para cada uno de los casos, se calculó la Ductilidad de Curvatura de la sección como una medida del cambio que se produce en la ductilidad.

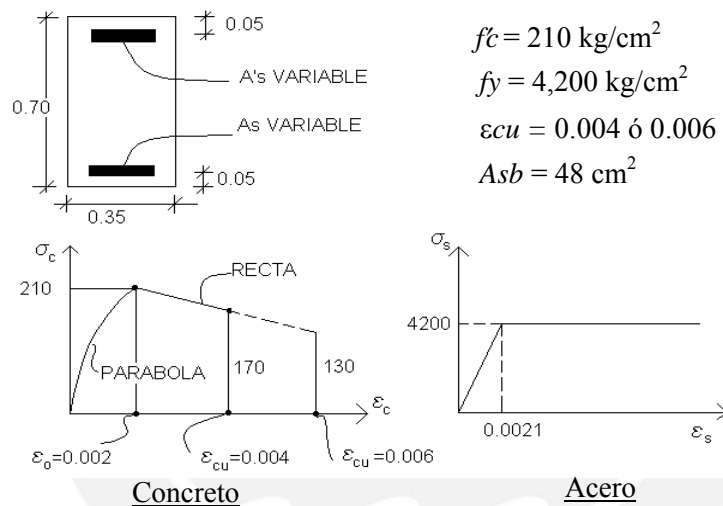
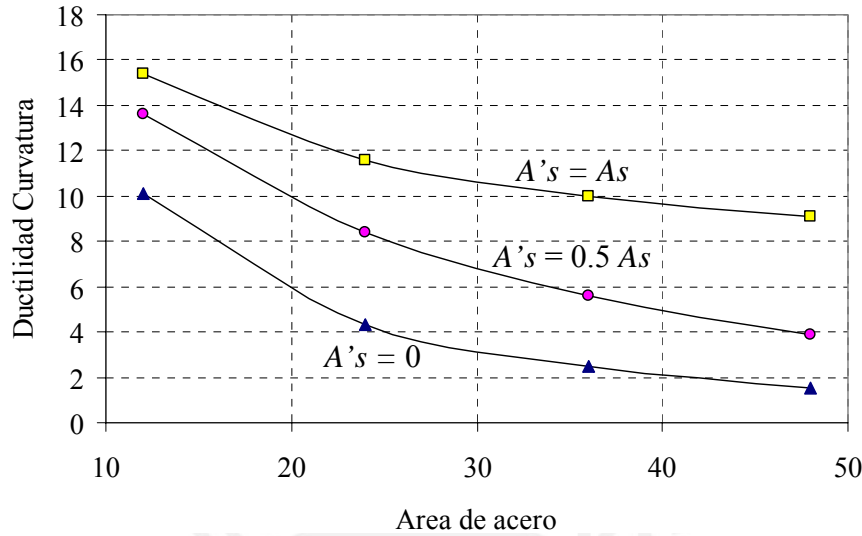


Fig. 7-7 Sección de concreto armado utilizada para cuantificar el efecto de algunas de las variables que influyen en la ductilidad de curvatura.

**a) Caso 1  $\epsilon_{cu} = 0.004$**

$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	$A'_s$ (cm <sup>2</sup> )	Mom. fluencia $M_y$ (ton-m)	$\phi_y$ 1/m x 10 <sup>-3</sup>	Mom. máximo $M_n$ (ton-m)	Ductilidad de Curvatura
12 (0.25 $A_{sb}$ )	0	29.5	4.54	30.8	10.1
<b>24 (0.50 <math>A_{sb}</math>)</b>	0	56.2	5.35	57.8	<b>4.3</b>
<b>36 (0.75 <math>A_{sb}</math>)</b>	0	80.6	6.23	80.8	<b>2.5</b>
48 (1.00 $A_{sb}$ )	0	101.3	7.43	100.0	1.5
12	6	29.8	4.43	31.0	13.6
12	12	30.0	4.33	31.1	15.4
<b>24</b>	<b>12</b>	58.0	5.01	60.9	<b>8.4</b>
24	24	59.0	4.77	61.2	11.6
<b>36</b>	<b>18</b>	85.7	5.48	90.1	<b>5.6</b>
36	36	87.9	5.07	91.4	10.0
48	24	113.2	5.89	118.3	3.9
48	48	116.9	5.30	121.6	9.1

La ductilidad de curvatura que presenta esta sección cuando el acero de refuerzo equivale a  $0.75 A_{sb}$  es de tan solo 2.5. La figura a continuación resume los resultados del Caso 1, se muestra la variación en la ductilidad de curvatura por efecto de las variaciones en el acero de tracción y de compresión.



**b) Caso 2**  $\epsilon_{cu} = 0.006$

$A_s$ ( $cm^2$ )	$A's$ ( $cm^2$ )	Mom. fluencia $M_y$ (ton-m)	$\phi_y$ $1/m \times 10^{-3}$	Mom. máximo $M_n$ (ton-m)	Ductilidad de Curvatura
<b>24 (0.50 <math>A_{sb}</math>)</b>	0	56.2	5.35	56.8	<b>6.1</b>
24	12	58.0	5.01	60.8	13.1
<b>36 (0.75 <math>A_{sb}</math>)</b>	0	80.6	6.23	78.6	<b>3.5</b>
36	18	85.7	5.48	89.6	8.0
48 (1.00 $A_{sb}$ )	0	101.3	7.43	96.1	2.2
48	24	113.2	5.89	117.3	5.6

**c) Caso 3**  $\epsilon_{cu} = 0.004$  **Efecto de la Carga Axial**

Utilizando la misma sección de  $0.35 \times 0.70$  m, se calcularon las ductilidades de curvatura para distintos niveles de carga axial de una columna con armadura simétrica en dos caras con una cuantía total de acero del 2% ( $48/35 \times 70$ ). La figura 7-8 muestra las dimensiones, refuerzos y modelos del concreto y acero utilizados para este análisis.

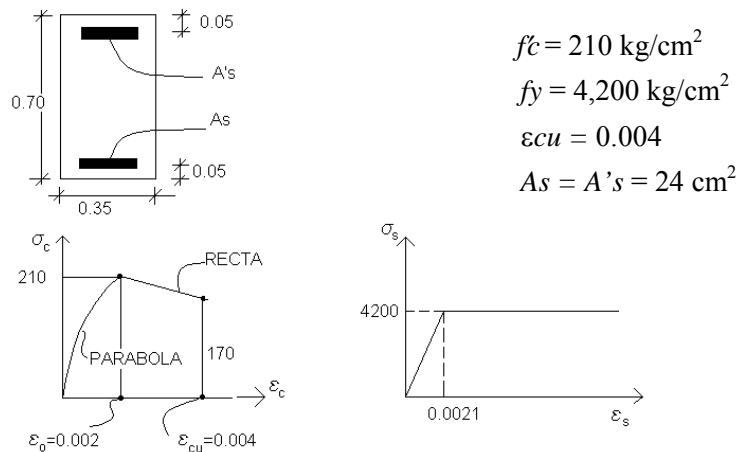


Fig. 7-8 Ductilidad de Curvatura en una columna

Para asociar cada una de las cargas axiales analizadas con la resistencia de la columna, se presenta a continuación el Diagrama de Interacción de esta sección (resistencias nominales) construido sobre la base de las hipótesis del ACI para elementos en flexocompresión, es decir con un bloque rectangular equivalente de compresiones y una deformación de agotamiento del concreto  $\epsilon_{cu} = 0.003$ . También se muestra en trazo discontinuo el Diagrama de Interacción construido con el mismo modelo del concreto (figura 7-8) con el cual se calcularon las ductilidades de curvatura de la tabla precedente.

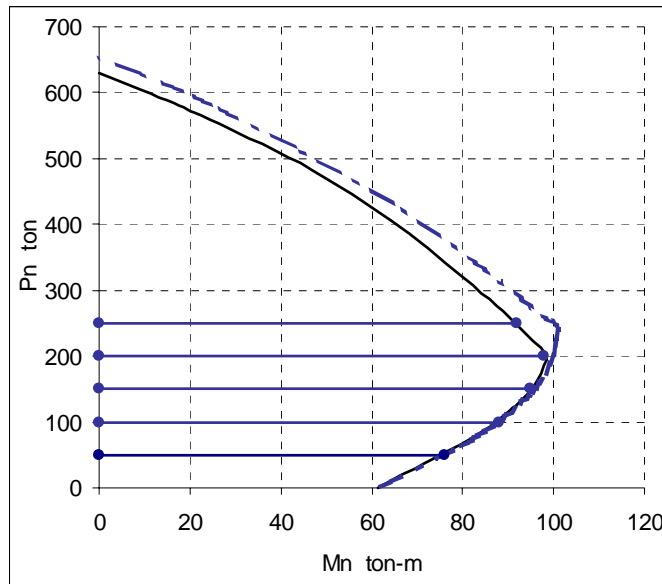


Diagrama de Interacción de la Sección de la Fig. 7-8.

a) Trazo continuo: construido con las hipótesis del ACI.

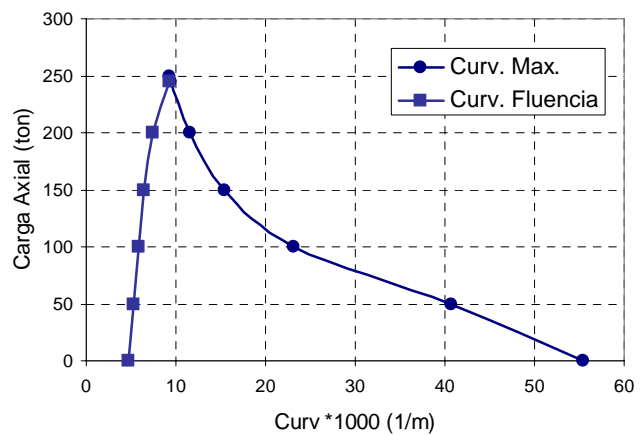
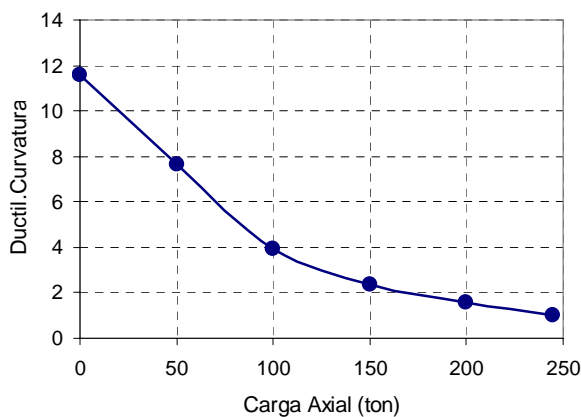
Falla balanceada:  $P_b = 203 \text{ ton}$   $M_b = 98.6 \text{ t-m}$

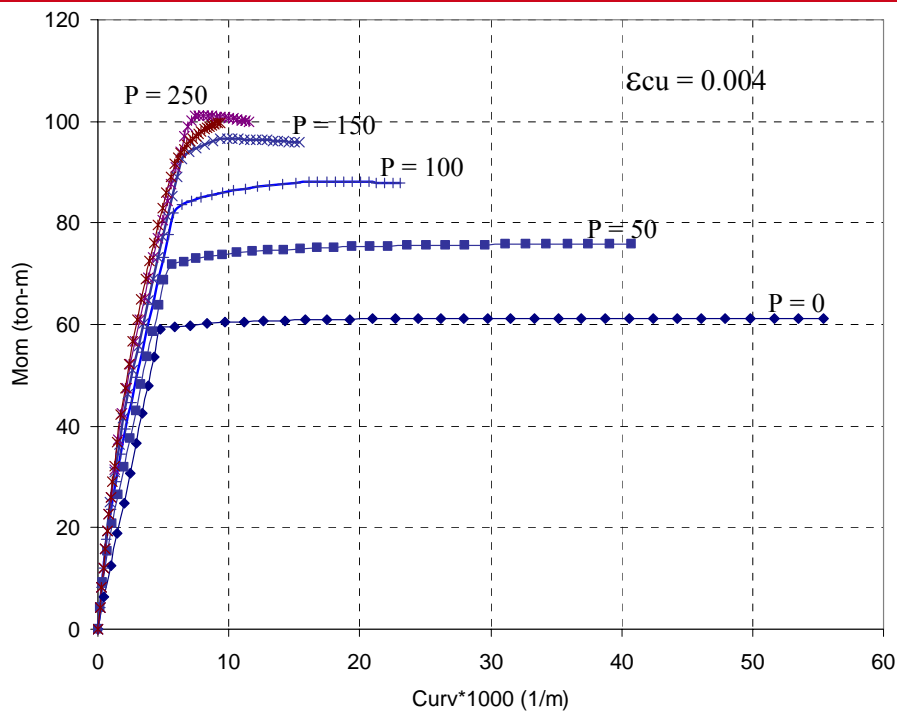
b) Trazo discontinuo: construido con el modelo de concreto de la figura 7-8.

Falla balanceada:  $P_b = 245 \text{ ton}$   $M_b = 100 \text{ t-m}$

La tabla y los gráficos a continuación resumen los resultados obtenidos para 7 niveles (intensidades) de la carga axial.

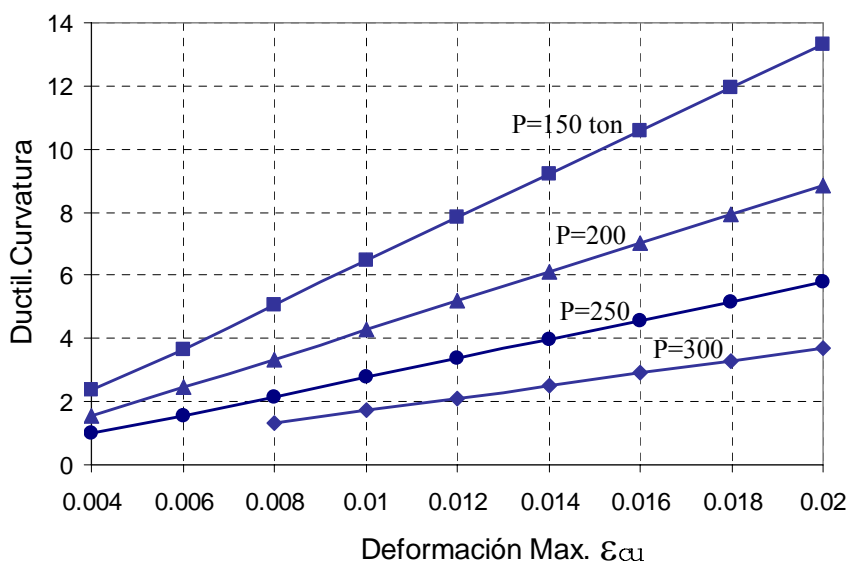
$P$ (ton)	Mom. fluencia $M_y$ (ton-m)	$\phi_y$ $1/m \times 10^{-3}$	Mom. máximo $M_n$ (ton-m)	$\mu\phi$
0	59.0	4.77	61.2	11.6
50	71.4	5.32	75.9	7.7
100	82.9	5.88	87.8	3.9
150	93.3	6.50	95.8	2.4
200	101.2	7.38	100.1	1.6
245	100.5	9.30	100.4	1.0
250	--	--	99.7	--





Es clara la fuerte influencia que tiene la carga axial en la ductilidad de curvatura de esta sección. Como era de esperarse, para cargas por encima de la carga balanceada (245 ton) la sección no desarrolla ductilidad de curvatura ya que el acero en tracción más alejado, no llega a fluir en tracción.

Para desarrollar ductilidades cuando la carga axial es mayor que la balanceada, es necesario incrementar la deformación de agotamiento del concreto ( $\epsilon_{cu}$ ) por medio de estribos que confinen eficientemente al núcleo. La figura a continuación muestra, para diversos valores de la carga axial, la dependencia entre la ductilidad de curvatura y el valor de  $\epsilon_{cu}$ . Se observa una relación prácticamente lineal entre la ductilidad de curvatura y la deformación de agotamiento del concreto, debido a que para cada intensidad de la carga axial analizada, la curvatura de fluencia es prácticamente la misma, independiente del valor de  $\epsilon_{cu}$ . Cabe anotar, que el modelo utilizado para el concreto y el acero en la construcción de esta gráfica, son los indicados en la figura 7-8, adicionalmente se ha supuesto que el valor de  $f_c$  asociado a  $\epsilon_{cu}$  es constante ( $170 \text{ kg/cm}^2$ ).





### 7-6 Diagramas $M - \phi$ Aproximados

Si se observan las figuras 7-5 y 7-6, se notará que para cálculos rápidos, es posible simplificar los diagramas momento – curvatura de una sección de concreto armado. La figura 7-9 muestra tres posibles simplificaciones para la construcción de los diagramas momento - curvatura de una sección de concreto armado en flexión pura. El diagrama más simple y fácil de construir es el Bilineal Simplificado, para su construcción se necesitan solamente tres valores: Las curvaturas de fluencia y última y el momento último (nominal) que resiste la sección.

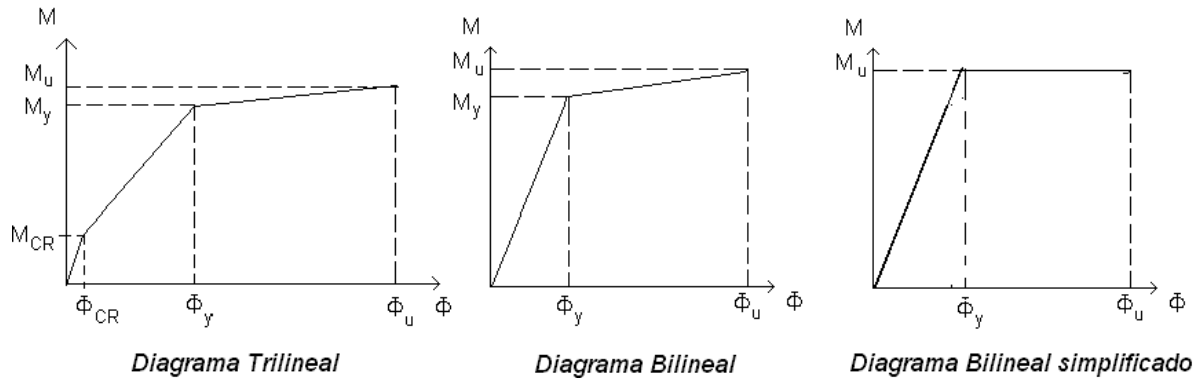
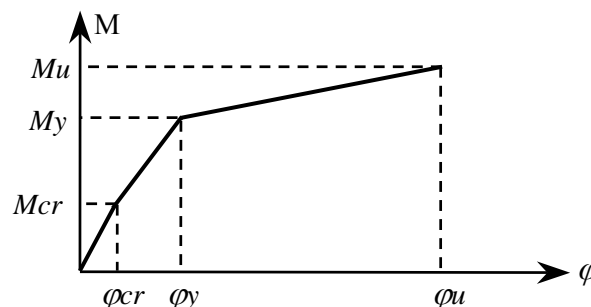


Fig. 7-9 Diagramas momento – curvatura aproximados.

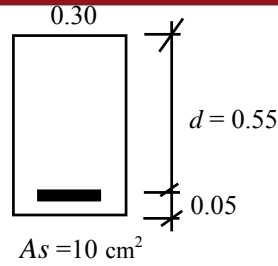
Los puntos notables del Diagrama Trilineal son:

- $M_{cr}$ ,  $\phi_{cr}$ : El momento y la curvatura de agrietamiento de la sección. Para su cálculo se puede ignorar la presencia del acero de refuerzo.
- $M_y$ ,  $\phi_y$ : El momento y la curvatura asociados al inicio de la fluencia en el acero de tracción. Para su determinación se puede suponer comportamiento elástico en el concreto hasta el inicio de la fluencia del acero en tracción. Normalmente el esfuerzo en el concreto ( $f_c$ ) en el inicio de la fluencia, suele exceder de  $0.5 f_c$  por lo tanto esta suposición es discutible. Sin embargo el suponer comportamiento lineal hasta el inicio de la fluencia del acero generalmente subestima  $\phi_y$  y sobrestima  $M_y$  siendo esta situación conservadora para el cálculo de la ductilidad de curvatura, por lo que suele aceptarse. Si se quisiera una mejor aproximación puede optarse por un modelo de comportamiento del tipo parabólico para el concreto.
- $M_u$ ,  $\phi_u$ : El momento y la curvatura asociados a la falla de la sección, ya sea por agotamiento del concreto o por rotura del acero (situación poco común).  $M_u$  se puede aproximar mediante el uso de las hipótesis del ACI. Un valor de  $\epsilon_{cu} = 0.004$  es más apropiado para el cálculo de  $\phi_u$ .

Con la ayuda de un ejemplo mostraremos la construcción de un diagrama aproximado momento – curvatura para una sección rectangular. Los diagramas aproximados, como ya se explicó, se pueden construir determinando tres puntos notables de los mismos, los que están indicados en la figura a continuación.

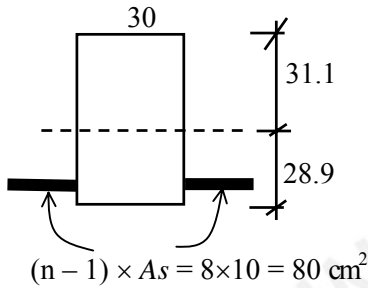


La sección para la cual calcularemos el diagrama aproximado, es la siguiente:



$$\begin{aligned}
 f_c &= 210 \text{ kg/cm}^2 \\
 f_y &= 4,200 \text{ kg/cm}^2 \\
 E_c &= 220,000 \text{ kg/cm}^2 \\
 E_s &= 2.0 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2 \\
 n &= E_s / E_c \approx 9 \\
 f_r &= 2 \sqrt{f_c} \approx 29 \text{ kg/cm}^2 \\
 A_s &= 10 \text{ cm}^2 \quad (0.28 A_{sb})
 \end{aligned}$$

- Cálculo de  $M_{cr}$ ,  $\phi_{cr}$  (agrietamiento de la sección)

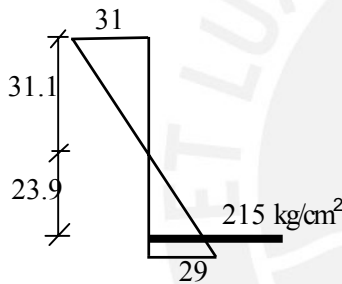


Sección transformada no agrietada:

$$\begin{aligned}
 I_{tr} &\approx 588,000 \text{ cm}^4 & I_g &= 540,000 \text{ cm}^4 \\
 S^+ &\approx 20,345 \text{ cm}^3 & S^- &\approx 18,905 \text{ cm}^3 \\
 M^+_{cr} &= f_r \times S^+ \approx 5.9 \text{ ton-m}
 \end{aligned}$$

Esfuerzos en el concreto y acero:

$$\begin{aligned}
 f_c &= M^+_{cr} / S^- \approx 31 \text{ kg/cm}^2 \\
 f_s &= n M^+_{cr} / 24,600 \approx 215 \text{ kg/cm}^2 \\
 \epsilon_c &= 31 / E_c \approx 140 \times 10^{-6} \\
 \phi_{cr} &= 140 \times 10^{-6} / 31.1 \approx 0.455 \times 10^{-3} \text{ 1/m}
 \end{aligned}$$



Alternativamente:

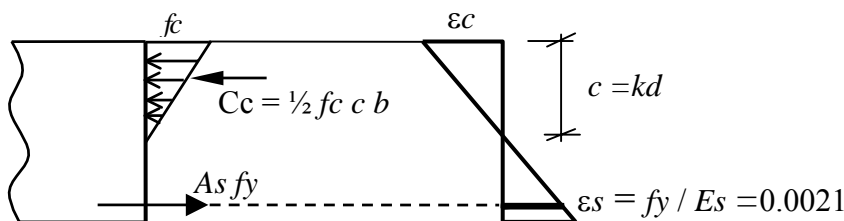
$$\phi_{cr} = M^+_{cr} / E_c I_{tr} \approx 0.455 \times 10^{-3} \text{ 1/m}$$

Si se hubiera despreciado o ignorado la presencia del acero de refuerzo, el momento de agrietamiento y la curvatura correspondiente, serían:

$$\begin{aligned}
 S^+ = S^- &= 18,000 \text{ cm}^3 & M^+_{cr} &= f_r \times S^+ \approx 5.22 \text{ ton-m} \\
 f_c &= M^+_{cr} / S^- \approx 29 \text{ kg/cm}^2 & \phi_{cr} &= M^+_{cr} / E_c I_g \approx 0.439 \times 10^{-3} \text{ 1/m}
 \end{aligned}$$

Es claro que en este caso, el error que se comete al despreciar el aporte del acero no es importante.

- Cálculo de  $M_y$ ,  $\phi_y$ : Asumiremos que el concreto se comporta linealmente hasta el inicio de la fluencia del acero. Para la condición de inicio de fluencia del acero la sección de concreto normalmente se encuentra completamente agrietada.



Posición del eje neutro en la sección agrietada:

$$\begin{aligned}
 \rho &= 10 / (30 \times 55) = 0.606\% \Rightarrow k = \sqrt{(\rho n)^2 + 2\rho n} - \rho n \approx 0.28 \quad c = k d = 15.4 \text{ cm} \\
 I_{cr} &\approx 178,000 \quad (\text{momento de inercia de la sección agrietada} \approx 0.33 I_g) \\
 \text{Equilibrio: } C_c &= \frac{1}{2} f_c (15.4 \times 30) = A_s f_y = 42,000 \Rightarrow f_c \approx 180 \text{ kg/cm}^2 \approx 0.86 f_c
 \end{aligned}$$

Curvatura de fluencia:  $\varphi_y = 0.0021 / (55 - 15.4) = 5.3 \times 10^{-3} \text{ 1/m}$

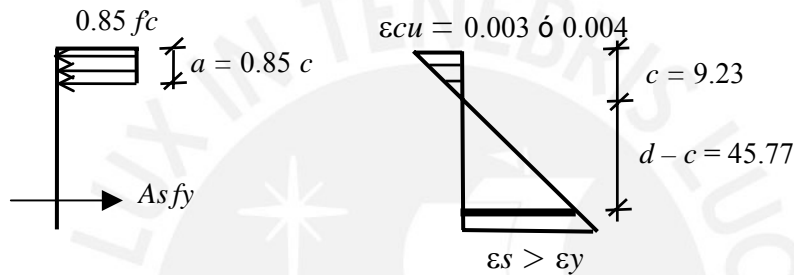
Momento de fluencia:  $M_y = A_s f_y (d - c/3) \approx 20.9 \text{ ton-m}$

El valor de  $f_c$  calculado es bastante alto. Para estos niveles de esfuerzo, el concreto ya dejó de comportarse linealmente, sin embargo, aceptaremos los resultados sobre la base de que se subestima  $\varphi_y$  y se sobrestima  $M_y$ , lo cual es conservador para el cálculo de la ductilidad de curvatura. Otra alternativa sería la de trabajar con un diagrama parabólico de esfuerzos en el concreto.

La curvatura de fluencia, al haber asumido que el concreto se comporta elástico hasta este nivel, también puede calcularse mediante la relación clásica momento – curvatura:

$\varphi_y = M_y / E_c I_{cr} = 20.9 \times 10^5 / (220,000 \times 178,000) \approx 5.3 \times 10^{-3} \text{ 1/m}$

- Cálculo de  $\varphi_u, M_u$ . Se puede realizar, de manera simplificada, utilizando las hipótesis del ACI de bloque equivalente de esfuerzos. Sin embargo, el valor de  $\varepsilon_{cu}$  considerado por el ACI de 0.003 es conservador, un valor más adecuado sería  $\varepsilon_{cu} = 0.004$ .



$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f' c b} = 7.84 \text{ cm}$        $c = a / \beta_1 = 7.84 / 0.85 \approx 9.23 \text{ cm}$

$M_u = M_n = A_s f_y (d - a/2) = 21.45 \text{ ton-m}$

Curvatura última:  $\varphi_u = \varepsilon_{cu} / c$

Si  $\varepsilon_{cu} = 0.003$  entonces  $\varphi_u = 32.5 \times 10^{-3} \text{ 1/m}$        $\varepsilon_s \approx 7.1 \varepsilon_y$

Si  $\varepsilon_{cu} = 0.004$  entonces  $\varphi_u = 43.3 \times 10^{-3} \text{ 1/m}$        $\varepsilon_s \approx 9.4 \varepsilon_y$

En resumen:

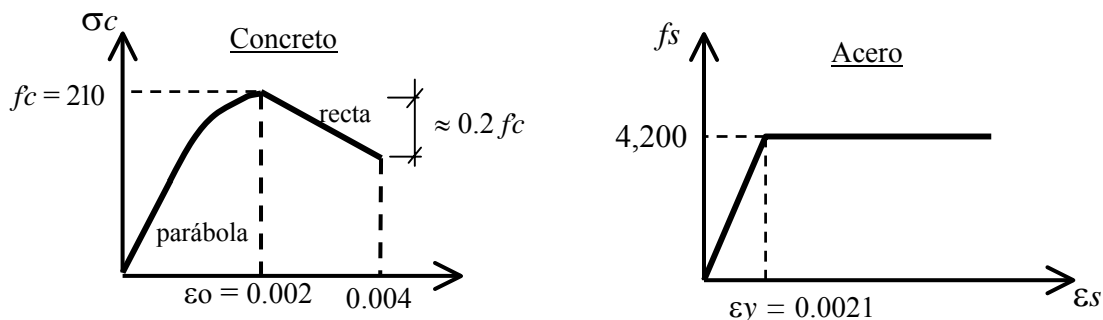
$M_{cr} = 5.9 \text{ ton-m}$        $\varphi_{cr} = 0.455 \times 10^{-3} \text{ 1/m}$

$M_y = 20.9 \text{ ton-m}$        $\varphi_y = 5.3 \times 10^{-3} \text{ 1/m}$

$M_u = 21.45 \text{ ton-m}$        $\varphi_u = 43.3 \times 10^{-3} \text{ 1/m}$

La ductilidad de curvatura de la sección es:  $\mu_\varphi = 43.3 / 5.3 \approx 8.2$

A manera de verificación del método aproximado propuesto, calculemos los puntos notables utilizando un diagrama esfuerzo – deformación del concreto un poco más “refinado” manteniendo un modelo elastoplástico para el acero, como se muestra a continuación. Se ha supuesto que el concreto se encuentre agrietado por tracción desde el inicio, por lo tanto no se ha calculado el momento de agrietamiento.



Con este modelo para el concreto y el acero los resultados son:

$$M_y = 20.62 \text{ ton-m} \quad \phi_y = 5.51 \times 10^{-3} \text{ 1/m} \quad (\epsilon_c \approx 0.48 \epsilon_o \quad f_c \approx 0.7 f'_c \quad c = 16.9 \quad \epsilon_s = \epsilon_y)$$

$$M_u = 21.53 \text{ ton-m} \quad \phi_u = 47.1 \times 10^{-3} \text{ 1/m} \quad (\epsilon_c = 0.004 \quad c = 8.48 \quad \epsilon_s = 10.4 \epsilon_y)$$

La ductilidad de curvatura de la sección es:  $\mu\phi \approx 8.5$

Analicemos la influencia que tendría la presencia de acero en compresión en la sección. Para ello asumamos  $A's = 5 \text{ cm}^2$  (50% de  $A_s$ ) y utilicemos para el análisis el modelo "refinado" para el concreto, los resultados son:

$$M_y = 20.82 \text{ ton-m} \quad \phi_y = 5.36 \times 10^{-3} \text{ 1/m}$$

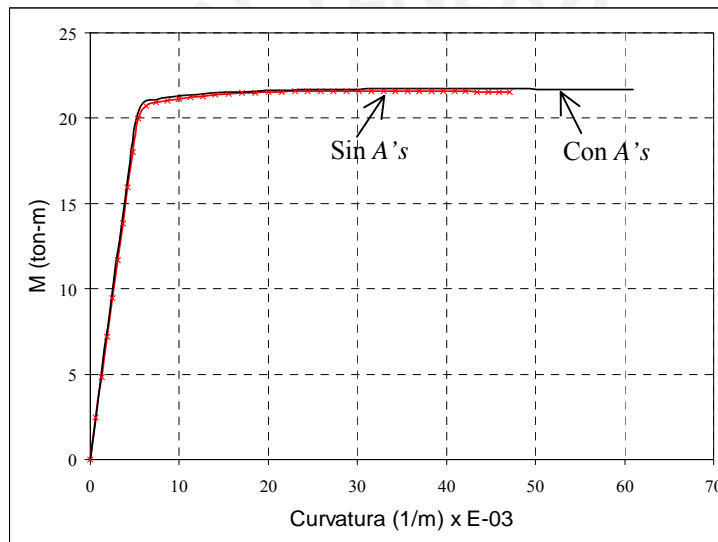
$$(\epsilon_c \approx 0.42 \epsilon_o \quad f_c \approx 0.65 f'_c \quad c = 15.8 \text{ cm} \quad \epsilon_s = \epsilon_y \quad f'_s = 0.27 f_y)$$

$$M_u = 21.69 \text{ ton-m} \quad \phi_u = 61 \times 10^{-3} \text{ 1/m}$$

$$(\epsilon_c = 0.004 \quad c = 6.56 \text{ cm} \quad \epsilon_s = 14.1 \epsilon_y \quad f'_s = 0.45 f_y)$$

La ductilidad de curvatura es:  $\mu\phi \approx 11.4$ .

El gráfico a continuación muestra los diagramas momento – curvatura para los dos casos analizados.



Finalmente, utilizando las mismas relaciones constitutivas (modelos) para el concreto y el acero, calculemos la ductilidad de curvatura de esta sección, sin acero en compresión, para las siguientes cantidades de acero:

$A_s = 10.0 \text{ cm}^2$ (0.28 $A_{sb}$ )	$M_y = 20.62 \text{ t-m}$	$M_u = 21.53 \text{ t-m}$	$\mu\phi \approx 8.5$
$A_s = 17.6 \text{ cm}^2$ (0.5 $A_{sb}$ )	$M_y = 34.83 \text{ t-m}$	$M_u = 35.80 \text{ t-m}$	$\mu\phi \approx 4.2$
$A_s = 26.4 \text{ cm}^2$ (0.75 $A_{sb}$ )	$M_y = 49.94 \text{ t-m}$	$M_u = 50.0 \text{ t-m}$	$\mu\phi \approx 2.4$

Nótese nuevamente la escasa ductilidad de curvatura disponible (2.4) que tiene la sección cuando el acero de refuerzo equivale a 0.75  $A_{sb}$ . Si fuese necesario mejorar la ductilidad, tendremos que colocar una cantidad significativa de acero en compresión, o lograr un aumento en la deformación  $\epsilon_{cu}$  del concreto comprimido por medio de confinamiento apropiado, o aumentar el área del concreto comprimido (por ejemplo creando una viga T) lo cual no será posible en las zonas de momento negativo. Estas tres alternativas no son excluyentes entre si, por ejemplo, es usual en el diseño de elementos con responsabilidad sísmica utilizar acero en compresión y además colocar estribos cerrados con poco espaciamiento para confinar de manera efectiva el concreto comprimido.

## CAPITULO 8

### Redistribución de Momentos Flectores



#### **Lecturas:**

- 8.1 Capítulo 6 - Ultimate Deformation and Ductility of Members with Flexure - del Libro Reinforced Concrete Structures. Park – Paulay.
- 8.2 Capítulo 10 - Strength and Ductility of Frames - del Libro Reinforced Concrete Structures. Park – Paulay.
- 8.3 Capítulo 28 – Behavior of Concrete Structures - del Libro Structural Engineering, Vol. 3, Behavior of Members and Systems. White - Gergely - Sexsmith.
- 8.4 Rotational Capacity of Reinforced Concrete Beams. W. Gene Corley. Journal of the Structural Division. ASCE, October 1966.
- 8.5 Rotational Capacity in Hinging Regions in Reinforced Concrete Beams. Allan H. Mattock. International Symposium of Flexural Mechanics of Reinforced Concrete. ASCE, 1965.

## 8.1 Introducción

En el Capítulo 7 – Diagramas Momento Curvatura – se discutió la importancia de lograr un comportamiento dúctil de las estructuras y elementos estructurales. La importancia está asociada a la necesidad de evitar las fallas frágiles en las estructuras y elementos, a la actual filosofía de diseño sísmico que confía en las propiedades de absorción y disipación de energía y a la posibilidad de modificar la distribución elástica de los momentos flectores.

Si las secciones de un elemento (por ejemplo una viga hiperestática) tienen suficiente ductilidad, es posible modificar el diagrama de momentos flectores obtenido del análisis elástico, aliviando por ejemplo los momentos negativos y transfiriendo la reducción hacia la zona de momentos positivos. A este proceso se le denomina Redistribución de Momentos.

La figura 8-1 ilustra la redistribución de momentos en una viga doblemente empotrada sometida a una carga uniformemente distribuida:

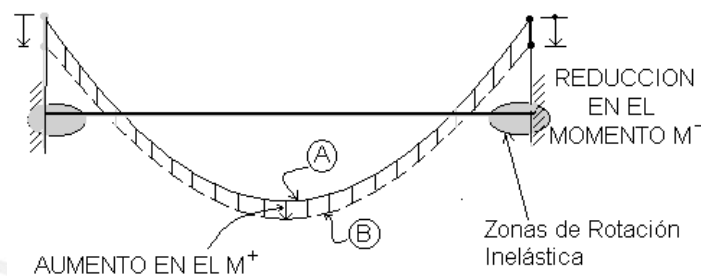


Fig. 8-1 Redistribución de los momentos flectores en una viga doblemente empotrada.

En la figura 8-1 el diagrama A corresponde a la distribución elástica de los momentos flectores y el diagrama B al de momentos ajustado o redistribuido, distinto al elástico, en el cual se han reducido los momentos negativos. Este nuevo diagrama será posible si las secciones en las zonas de momento negativo, una vez alcanzada la fluencia del acero, tienen suficiente capacidad de rotación inelástica manteniendo su resistencia (capacidad de momento) de tal modo que transfieran la diferencia hacia la zona de momentos positivos. En este caso la rotación inelástica se concentra en las zonas aledañas a los empotramientos en una cierta longitud, difícil de estimar con precisión, que se denomina zona plastificada o zona de rotación inelástica.

Normalmente la redistribución se utiliza para reducir los momentos flectores negativos en las zonas de “rótulas plásticas” o zonas plastificadas, con respecto a los obtenidos del análisis elástico, lo que se traduce, para mantener el equilibrio, en un aumento de los momentos positivos. Como resultado es posible, por ejemplo, reducir la congestión del acero en la zona de momentos negativos sin reducir la seguridad del elemento o estructura.

La redistribución también puede suceder en la eventualidad de una sobrecarga o acción imprevista sobre el elemento o estructura. En esta eventualidad, si la estructura es redundante y con suficiente ductilidad, las secciones que alcancen momentos flectores cercanos al de fluencia, podrán “transferir” el exceso de demanda hacia las zonas que aún tienen reserva de resistencia hasta formar un mecanismo plástico y agotar la capacidad de la estructura.

Los ensayos han mostrado que una estructura hiperestática puede seguir admitiendo incrementos de carga aún cuando una o varias secciones hayan entrado en fluencia, siempre y cuando las secciones que ya alcanzaron su capacidad (resistencia) puedan soportar rotaciones inelásticas es decir, si se pueden formar rótulas plásticas. Esto

permite el incremento de los momentos en otras secciones (redistribución) que tienen reserva, hasta que se forme el mecanismo de colapso.

## 8.2 Diagramas Momento – Rotación

Es importante hacer notar la diferencia que existe entre un diagrama momento - curvatura y un diagrama momento - rotación para la zona plastificada de una viga de concreto armado. El primero corresponde a una sección (en teoría de longitud nula) fisurada de concreto armado y el segundo a una zona o porción del elemento, normalmente la zona donde se forma la articulación plástica.

La capacidad de las estructuras de concreto armado para soportar rotaciones inelásticas en las zonas de formación de las rótulas plásticas, no es ilimitada. Por lo tanto, cuando se realiza un análisis límite en una estructura de concreto armado o cuando se reducen los momentos mediante la redistribución, es necesario conocer (o por lo menos estimar) la demanda de rotación inelástica en las zonas donde se forman las rótulas. La demanda se compara con la disponibilidad de rotación inelástica que tiene la estructura en esas zonas. Si la demanda es mayor que la disponibilidad no será posible una redistribución total, ni será posible alcanzar el mecanismo plástico de colapso ya que las secciones donde se forman las rótulas no tendrán suficiente capacidad de rotación inelástica.

A partir de un diagrama momento – curvatura, en teoría, se podría calcular la rotación entre dos puntos cualesquiera a lo largo del eje del elemento y por lo tanto calcular la rotación inelástica (plástica) disponible en la zona de la rótula. Recuerde que la curvatura se define como la rotación por unidad de longitud del elemento, en consecuencia la rotación entre dos puntos A y B, viene dada por la ecuación 8-1.

$$\theta_{AB} = \int_A^B \phi dx \quad (8-1)$$

Sin embargo, los diagramas momento – curvatura se construyen para una sección agrietada mientras que la zona donde se presenta la plastificación tiene una cierta longitud que se denota mediante el símbolo -  $l_p$  - (longitud plastificada equivalente). Esta zona incluye normalmente una cierta cantidad de grietas discretas. Entre estas grietas el concreto no fisurado reduce la deformación unitaria del acero, esto conduce a lo que se conoce como efecto de “rigidización por tensión”. Este efecto se discutió en la sección 16.4 donde se presentó la posibilidad de calcular las deflexiones de elementos de concreto armado a partir de los diagramas momento – curvatura de las secciones que lo componen. Adicionalmente los diagramas momento – curvatura construidos a partir de la teoría presentada en el Capítulo 7, no incluyen las deformaciones causadas por el agrietamiento inclinado por cortante ni por el deslizamiento del acero en las vecindades de las grietas.

Como resultado del efecto de rigidización, la rotación total en la zona de rótula es menor que la que resultaría de multiplicar la curvatura por unidad de longitud en la sección fisurada, por la longitud observada o supuesta en la zona de rótula.

Lo anterior hace difícil el cálculo de la rotación inelástica disponible en la zona de las rótulas, por lo tanto se suele acudir a expresiones empíricas producto del ajuste de resultado experimentales o a simplificaciones del problema real.

## 8.3 Requisitos Generales para la Redistribución

- a) Las secciones donde se forman las rótulas deben tener la ductilidad suficiente para aceptar rotaciones inelásticas, permitiendo que otras secciones alcancen su momento de fluencia. Esto significa que se debería comparar la capacidad de rotación inelástica en las zonas donde se prevé que se formarán las rótulas plásticas, con la demanda de rotación impuesta por las cargas externas. Sin embargo, veremos posteriormente, que

si se utilizan los límites de redistribución que permite la Norma, esta verificación no es un requisito de la Norma.

En el Capítulo 7 – Diagramas Momento Curvatura – se estudiaron las principales variables que afectan a la ductilidad de curvatura de una sección de concreto armado y en consecuencia la capacidad de rotación inelástica de la misma. Lo que no se ha presentado es como calcular la capacidad inelástica de rotación a partir de los diagramas momento - curvatura, ni como calcular la demanda de rotación.

- b) Las “rótulas plásticas” no deben formarse al nivel de cargas de servicio ya que en estas secciones las grietas pueden tener anchos y profundidades importantes. Adicionalmente la estructura bajo cargas de servicio podría experimentar deflexiones apreciables, incompatibles con los estados límites de servicio.
- c) Ya que normalmente los momentos máximos positivos y negativos provienen de patrones de carga distintos (alternancia) las secciones tienen una reserva de resistencia la cual no es totalmente empleada por ninguna de las condiciones de carga usuales. La redistribución permite utilizar la capacidad total de un mayor número de secciones, a medida que se alcanza la carga última (límite) obteniéndose un diseño más eficiente.
- d) El ajuste de los momentos negativos y positivos debe realizarse para cada estado de carga. Luego las secciones se diseñan para los máximos ajustados que resulten de cada uno de los estados de carga.
- e) Se debe mantener el equilibrio estático, entre la carga externa y las fuerzas internas de sección, en todos los apoyos (nudos) y tramos antes y después de la redistribución.

### **8.3.1 Especificaciones de la Norma de Concreto Armado - Redistribución**

La Norma Peruana de Concreto Armado y el ACI (hasta el año 99) permiten que se aumenten o disminuyan los momentos negativos en los apoyos de los miembros continuos para cualquier estado de carga. El porcentaje de aumento o disminución de los momentos negativos calculados por métodos elásticos en los apoyos de elementos continuos, no deberá superar el siguiente valor:

$$\%R = 20 \left(1 - \frac{\rho - \rho'}{\rho_b}\right) \text{ en } \% \quad (8-2)$$

La expresión anterior es aplicable solo a aquellas secciones en las cuales el término cuantía en flexión ( $\rho$ ) tenga significado, estas son las secciones rectangulares y las T, en consecuencia parecería que el código limita la redistribución a este tipo de secciones. Lo que sucede es que la investigación experimental que dio base a la propuesta del código, probablemente se realizó únicamente en secciones rectangulares o T. Sin embargo, otras formas de secciones transversales también tienen capacidad de rotación inelástica y en consecuencia ser susceptibles a redistribución de momentos flectores, por lo tanto la expresión propuesta por el código puede transformarse a:

$$\%R = 20 \left(1 - \frac{A_s - A'_s}{A_{sb}}\right) \text{ en } \% \quad (8-3)$$

La figura 8-2 (ACI) compara los resultados experimentales de la cantidad de redistribución disponible contra el índice de refuerzo por flexión,  $(\rho - \rho')/\rho_b$ . Se indica también el límite de redistribución (expresión 8-2) adoptado por la Norma. Como se observa este límite es conservador comparado con los resultados experimentales y no ha sido modificado desde la edición del ACI del año 1971.



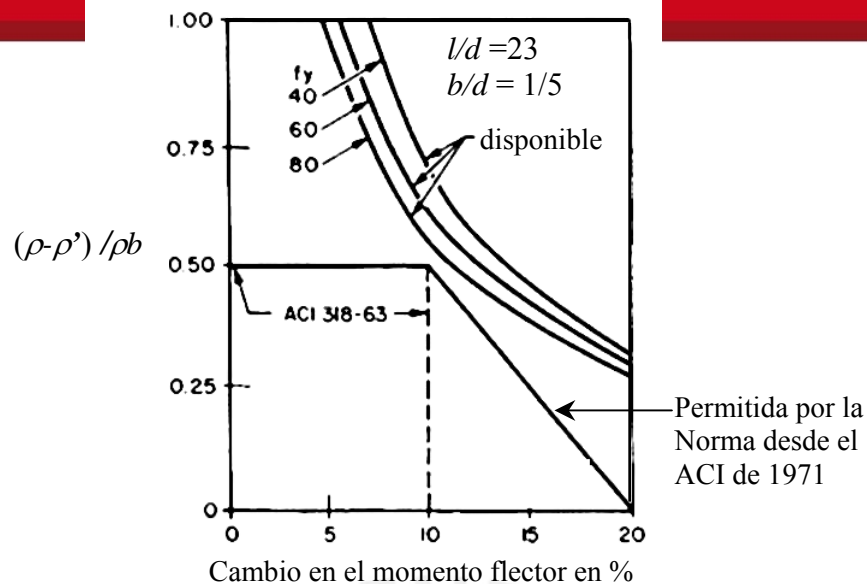


Fig. 18-2 Redistribución permitida por la Norma en comparación con la disponible teórica y experimental.

### 8.3.2 Limitaciones de la Norma

- a) En la sección o secciones en las cuales se reduce el momento flector, la cantidad máxima de acero presente debe cumplir con:

$$\rho \leq 0.5 \rho_b \quad \text{ó} \quad \rho - \rho' \leq 0.5 \rho_b$$

Una de las variables que más influencia tiene en la ductilidad de las secciones de una viga, es la cantidad de refuerzo presente (véase la sección 7.5) en consecuencia, con esta limitación, la Norma pretende garantizar que la sección en la cual se realiza la redistribución, tenga una ductilidad de curvatura adecuada.

- b) La redistribución de momentos no es aplicable cuando los momentos flectores hayan sido obtenidos mediante métodos aproximados, como por ejemplo, el método de los coeficientes de la Norma.
- c) Los momentos negativos modificados deben utilizarse para calcular todas las fuerzas internas restantes (momentos y cortante) de tal modo que se conserve el equilibrio entre las fuerzas internas y las cargas externas.
- d) De las ecuaciones 8-2 y 8-3 resulta claro que el código establece un límite superior del 20% para la redistribución de los momentos. Este límite es en general conservador. Está basado en la información experimental sobre la capacidad de rotación inelástica de secciones y elementos, para las cuales se adoptaron valores conservadores de la deformación máxima del concreto ( $\epsilon_{cu}$ ) y de las longitudes de rótulas plásticas. La adopción de este límite conservador demostró en los ensayos, que la fisuración y las deflexiones de los elementos diseñados con los niveles máximos de redistribución permitidos, no eran significativamente mayores, bajo cargas de servicio, que los diseñados a partir de la distribución elástica de momentos.

En otras palabras, la cantidad máxima de redistribución fijada por la Norma, no requiere que las secciones tengan grandes cantidades de ductilidad disponible, las que solo se podrían lograr con cuantías de refuerzo bajas y gran capacidad del concreto para deformarse, capacidad asociada a valores altos de  $\epsilon_{cu}$  que se logran con la presencia de abundante refuerzo transversal de confinamiento. Es por eso que la cantidad de redistribución que permite el código, no está condicionada a la presencia de refuerzo de confinamiento, solo está limitada por la cuantía de acero en

flexión de la sección. Por lo tanto, es posible redistribuir momentos aún en elementos que no tengan refuerzo transversal, como lo son por ejemplo los aligerados. Adicionalmente, si se emplean los límites de redistribución de la Norma, es de esperar un comportamiento aceptable bajo cargas de servicio.

- e) La Norma no requiere el cálculo de la cantidad de rotación inelástica disponible en las zonas donde se espera que se formen las rótulas plásticas. Tampoco exige el cálculo de la demanda de rotación inelástica que se produce como consecuencia de la redistribución en las rótulas, por la acción de las cargas externas.

La figura 8-3 muestra el porcentaje de redistribución máximo que permite la Norma versus el índice de refuerzo.

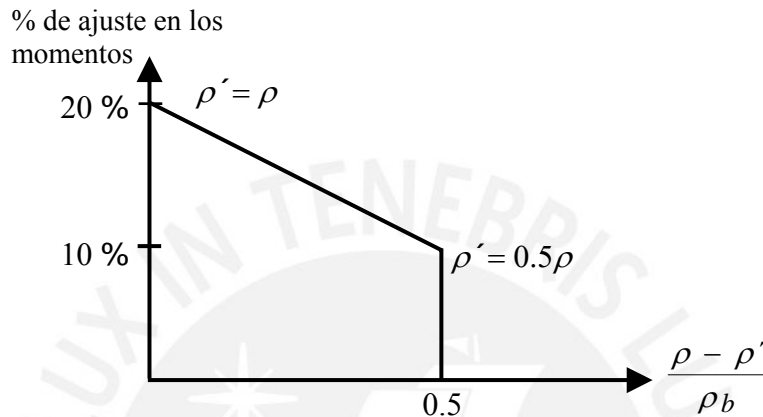


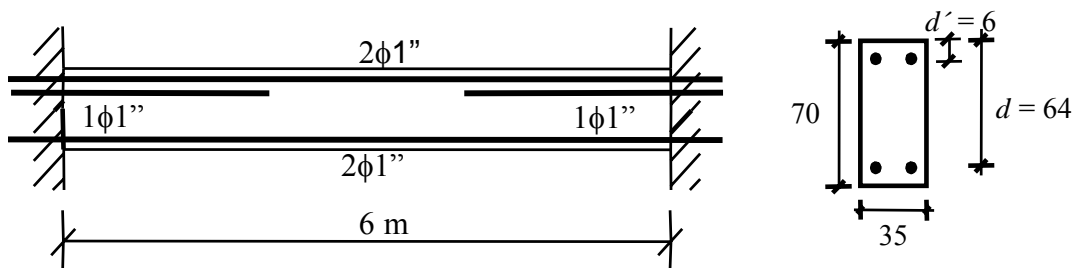
Fig. 8-3 Redistribución máxima permitida por la Norma.

#### 8-4 Introducción al Análisis Limite

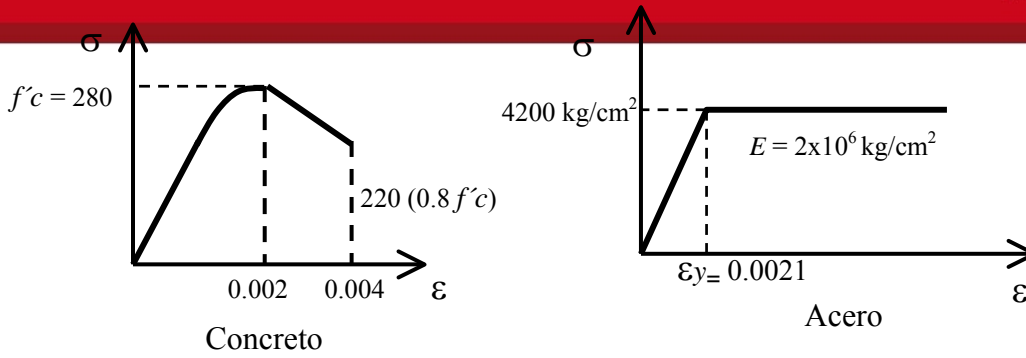
Cuando se presentaron los Estados Límites Últimos de una estructura o elemento estructural, se mencionó que uno de ellos era el asociado a la Formación de un Mecanismo Plástico, es decir a la situación en la cual se forma un número suficiente de rotulas plásticas que convierten a la estructura en un mecanismo. En esto se basa el Análisis y Diseño Limite conocido también como Diseño Plástico.

La aplicación de esta metodología de análisis, permite entender mejor la redistribución de momentos y puede ser aplicada, como herramienta para estimar la capacidad o carga límite de una estructura (viga o pórtico) de concreto armado.

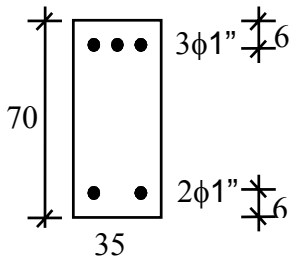
**Ejemplo 8-1** Para introducir algunas particularidades del Diseño Limite, analizaremos la viga doblemente empotrada, cuya distribución de acero de refuerzo ha sido obtenida a partir de un análisis elástico convencional utilizando el Diseño por Resistencia.



Para formarnos una idea de la ductilidad de curvatura disponible de las secciones, de momento negativo y positivo máximo, construiremos los diagramas momento - curvatura. Asumiremos un modelo parabólico - lineal para el concreto y un modelo elastoplástico perfecto para el acero, tal como se indica en la figura a continuación.

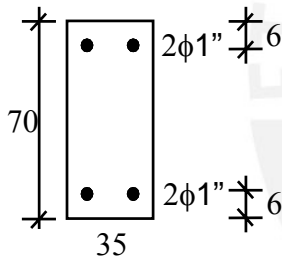


- Sección de momentos negativos:

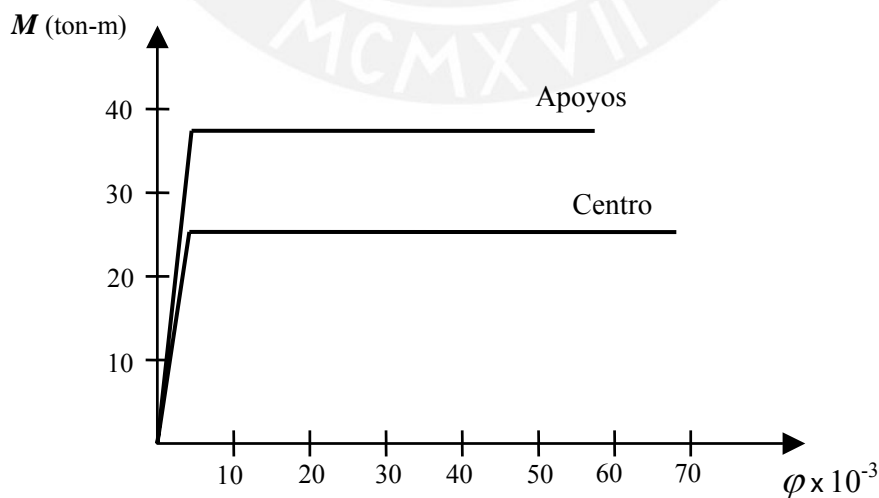


Momento de Fluencia ( $M_y$ )	37.36 ton-m
Curvatura de Fluencia ( $\phi_y$ )	$4.46 \times 10^{-3}$ 1/m
Deformación del concreto ( $\epsilon_{cf}$ )	0.00075 (0.38 $\epsilon_o$ )
Altura del bloque comprimido ( $c$ )	16.87 cm
Momento último ( $M_u = M_n$ )	38.83 ton-m
Curvatura última ( $\phi_u$ )	$57.4 \times 10^{-3}$ 1/m
Deformación en el concreto ( $\epsilon_{cu}$ )	0.004
Altura del bloque comprimido ( $c$ )	6.95 cm
Ductilidad de curvatura	12.9

- Sección de momentos positivos



Momento de Fluencia ( $M_y$ )	25.28 Ton-m
Curvatura de Fluencia ( $\phi_y$ )	$4.19 \times 10^{-3}$ 1/m
Deformación del concreto ( $\epsilon_{cf}$ )	0.0006 (0.3 $\epsilon_o$ )
Altura del bloque comprimido ( $c$ )	13.90 cm
Momento último ( $M_u = M_n$ )	26.37 ton-m
Curvatura última ( $\phi_u$ )	$68.1 \times 10^{-3}$ 1/m
Deformación en el concreto ( $\epsilon_{cu}$ )	0.004
Altura del bloque comprimido ( $c$ )	5.86 cm
Ductilidad de curvatura	16.2



Diagramas  $M - \phi$

Los diagramas de momento - curvatura obtenidos son prácticamente bilineales, por lo que podemos asumir sin mayor error que  $M_y \approx M_u$ . Adicionalmente los resultados indican que tanto las secciones de momento negativo como las de positivo tienen una alta

ductilidad de curvatura y por lo tanto deben ser capaces de soportar rotaciones inelásticas importantes, siempre y cuando no sobrevenga antes una falla por fuerza cortante, posibilidad que debe evitarse mediante un diseño por cortante de la viga adecuado, si se quiere utilizar la ductilidad de las secciones.

La capacidad de rotación inelástica disponible en las zonas de momento negativo, donde se espera se producirán las primeras rótulas plásticas, se puede estimar mediante la ecuación 8-4 (ver Park y Paulay) en la cual  $l_p$  es la longitud plastificada equivalente, la cual conservadoramente se puede estimar para este caso, como  $0.5 d$ .

$$\theta_p \text{ disponible} = (\phi_u - \phi_y) l_p \quad (18-4)$$

Para este ejemplo, en las zonas de empotramiento, tendremos:

$$\theta_p \text{ disponible} = (57.4 - 4.46) \times 10^{-3} \times 0.5 \times 0.64 \approx 17 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

La capacidad de rotación inelástica disponible calculada, que en este caso es grande, deberá compararse con la demanda de rotación en la zona de negativos, cuando se forme el mecanismo plástico.

Con fines comparativos calculemos la resistencia nominal, de acuerdo al código, de las secciones de momento positivo y negativo.

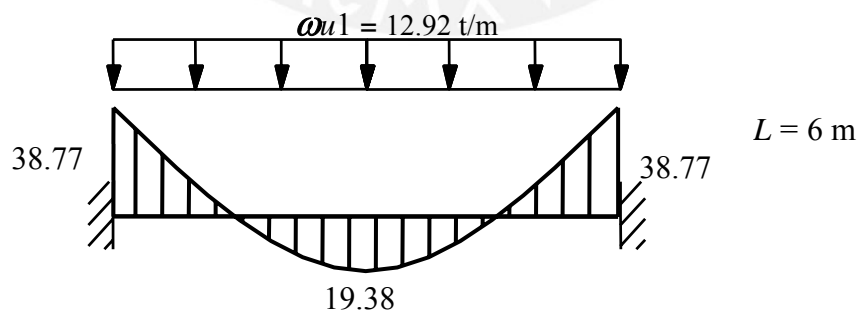
	$M_n$ con A's	$M_n$ sin A's	$M_n$ teórico
Momento negativo	38.77 t-m	38.65	38.83
Momento positivo	26.31 t-m	26.32	26.37

Notamos nuevamente la poca influencia que tiene en la resistencia de la sección la presencia de acero en compresión. También la buena aproximación al valor del momento nominal máximo ( $M_n$ ) que se obtiene, en este caso, al utilizar las suposiciones del código para evaluar la resistencia en flexión.

Ahora realizaremos el Análisis Limite con cargas incrementales para determinar el valor de la carga máxima (límite) que puede soportar la viga, así como la secuencia de formación de rótulas. El primer paso consiste en hallar el valor de la carga  $\omega u_1$  que agote la capacidad en las secciones de momento negativo ( $M_{n-}$ ) para ello utilizaremos la distribución de momentos correspondiente a la etapa elástica.

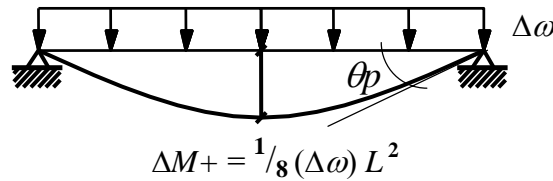
Para  $M_-$ :  $M_{n-} = 38.77 = (1/12) \omega u_1 (36) \Rightarrow \omega u_1 \approx 12.92 \text{ ton/m}$

Para  $M_+$ :  $M_+ = (1/24)(12.92) 36 = 19.38 < M_{n+}$



Las secciones de los empotramientos alcanzaron la fluencia, mientras que la sección central aun tiene una capacidad no utilizada plenamente, por lo tanto a la viga le queda una reserva de resistencia. Si las secciones de los empotramientos poseen suficiente capacidad de rotación inelástica, podremos seguir incrementando la carga y utilizar la reserva de resistencia de la zona de momentos positivos. Para ello deberán formarse articulaciones plásticas en los apoyos.

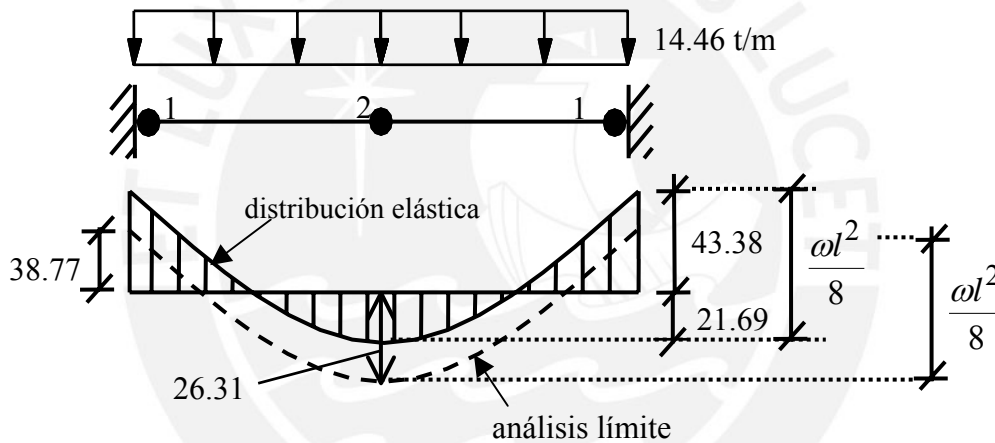
Ya que los diagramas momento – curvatura son prácticamente del tipo bilineal, no habrá incremento de momentos negativos ante posteriores incrementos de la carga, por lo tanto la viga se comportará como simplemente apoyada.



La capacidad remanente en la sección de  $M_+$  será la diferencia entre la capacidad máxima (resistencia disponible) y la ya empleada. Por lo tanto la capacidad remanente es:

$$\begin{aligned} \Delta M_+ &= 26.31 - 19.38 = 6.93 \text{ ton-m} \\ \frac{1}{8} (\Delta \omega) (36) &= 6.93 \Rightarrow \Delta \omega \approx 1.54 \text{ t/m} \\ \omega_{ul} &= \omega_{u2} = 12.92 + 1.54 \approx 14.46 \text{ ton/m} \end{aligned}$$

Cuando la carga alcance una intensidad de 14.46 ton/m, se formará un mecanismo con tres rótulas, con el siguiente diagrama de momentos:



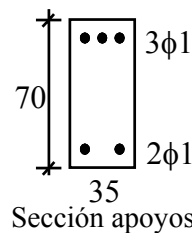
Como comprobación, verifiquemos el equilibrio de la estructura, cuando ésta alcanza la carga límite:

$$\frac{1}{8} \omega_{ul} L^2 = 14.46 \times 36 / 8 = 65.07 \text{ ton-m} = 38.77 + 26.31$$

Cambio en los momentos flectores:  $M_-$  de 43.38 a 38.77  $\approx -11\%$   
 $M_+$  de 21.69 a 26.31  $\approx +21\%$

El código permite para esta viga la siguiente cantidad máxima de redistribución, en este caso la reducción de los momentos negativos en los empotramientos:

$$\begin{aligned} \rho_b &= 2.83\% & 0.5 \rho_b &= 1.42\% \\ \rho - \rho' &= \frac{15.3 - 10.2}{35 \times 64} = 0.228\% < 0.5 \rho_b \\ \%R &= 20(1 - 0.228/2.83) \approx 18\% \end{aligned}$$



Calculemos la demanda de rotación inelástica que se produce en las zonas de momento negativo al alcanzar el mecanismo plástico. Mientras que no se formen las rótulas en los empotramientos, no habrá demanda de rotación inelástica. La demanda se produce una vez que se hayan formado las rótulas en los empotramientos y la rotación plástica

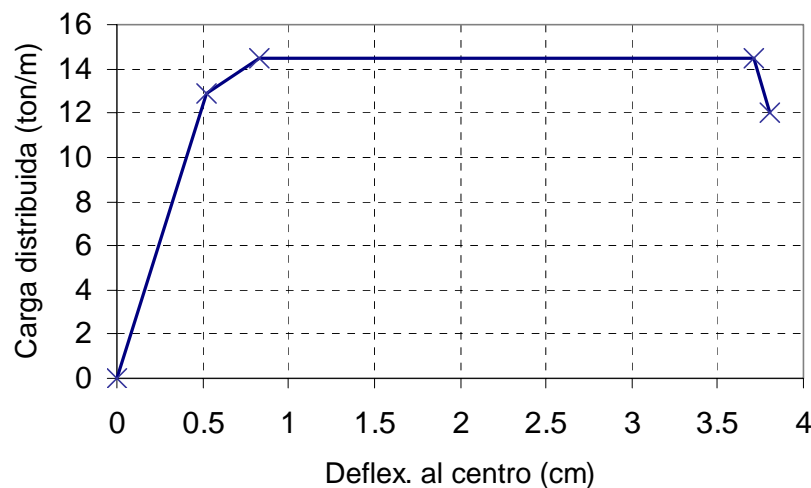
demandada ( $\theta_p$ ) será la rotación en el apoyo de la viga simplemente apoyada, a la cual le aplicamos el incremento de carga necesario para formar la tercera rótula al centro de la viga. Asumiendo que la viga trabaja con la sección fisurada desde el inicio de la aplicación de las cargas, la rigidez en flexión  $EI$  y la rotación plástica en la viga simplemente apoyada son:

$$E I_{cr} = M_y - / \varphi_y = 37.36 / 4.46 \times 10^{-3} \approx 8,380 \text{ ton}\cdot\text{m}^2 \approx 0.4 E I_g$$

$$\theta_p = \Delta \omega L^3 / (24 E I_{cr}) = 1.54 \times 6^3 / (24 \times 8380) \approx 1.65 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

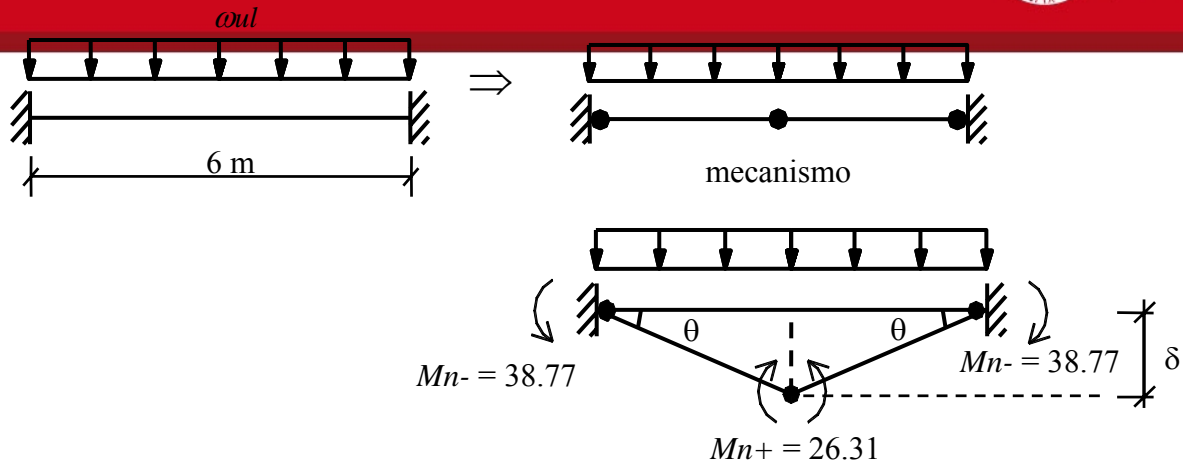
La demanda de rotación ( $\theta_p$ ) es bastante menor que la capacidad de rotación inelástica disponible en las rótulas de los negativos ( $\theta_p \text{ disponible} = 17 \times 10^{-3}$ ) en consecuencia será posible alcanzar el mecanismo plástico completo.

Ya que solo se ha utilizado un 10% de la capacidad de rotación inelástica en los apoyos, la deflexión al centro del tramo podrá seguir aumentando, sin aumento en la carga externa, hasta agotar la capacidad de rotación en las rótulas de los momentos negativos. La figura a continuación, muestra un diagrama idealizado carga versus desplazamiento vertical al centro del tramo. Para los cálculos se ha supuesto un momento de inercia constante igual a  $E I_{cr}$ . Se nota un fuerte cambio en la rigidez de la viga al formarse las dos rótulas en los empotramientos a una deflexión de 0.52 cm. La tercera rótula, al centro del tramo, se forma para una deflexión de 0.83 cm aproximadamente. La ductilidad global de desplazamiento, resulta ser cercana a 7.



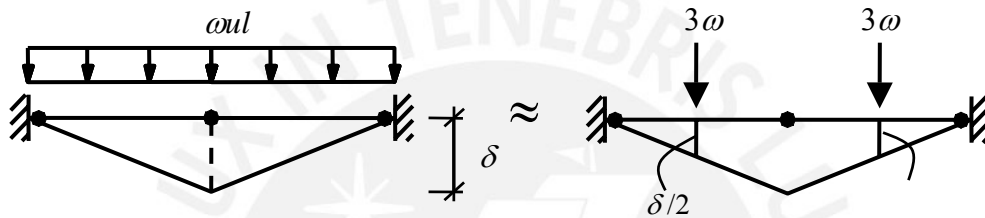
Para que pueda desarrollarse el mecanismo plástico, es necesario asegurar que no se producirá una falla prematura por esfuerzo cortante. Por lo tanto la viga deberá diseñarse para soportar las fuerzas cortantes producidas por la carga límite.

Hay otros métodos que permiten calcular la carga límite *oul*. Uno de ellos es el Método del Trabajo Virtual o de los Desplazamientos Virtuales en el cual hay que presuponer el mecanismo de falla. Es un método poderoso y simple, sin embargo no permite conocer la secuencia de formación de las rótulas. Apliquemos este método a la misma viga:

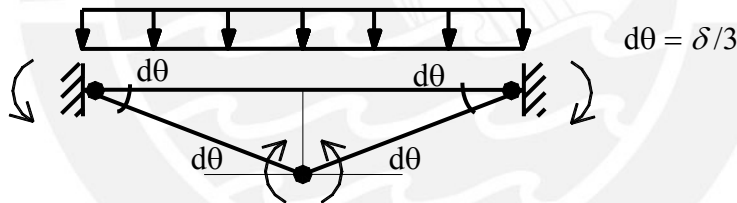


Trabajo virtual externo = Trabajo virtual interno

$$\sum Q\bar{D} = \sum q\bar{d} \quad (\text{Desplazamientos virtuales})$$



Trabajo virtual externo:  $3 \omega l \left(\frac{\delta}{2}\right) \times 2 = 3 \omega l \delta$

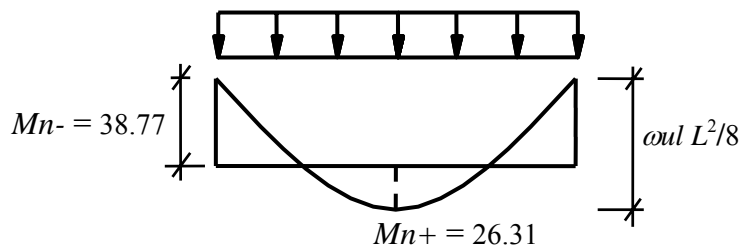


Trabajo virtual interno:  $38.77 \times \frac{\delta}{3} \times 2 + 26.31 \times \frac{\delta}{3} \times 2 = 43.39 \delta$

Igualando los trabajos virtuales:

$$3 \omega l \delta = 43.39 \delta \Rightarrow \omega l \approx 14.46 \text{ ton/m}$$

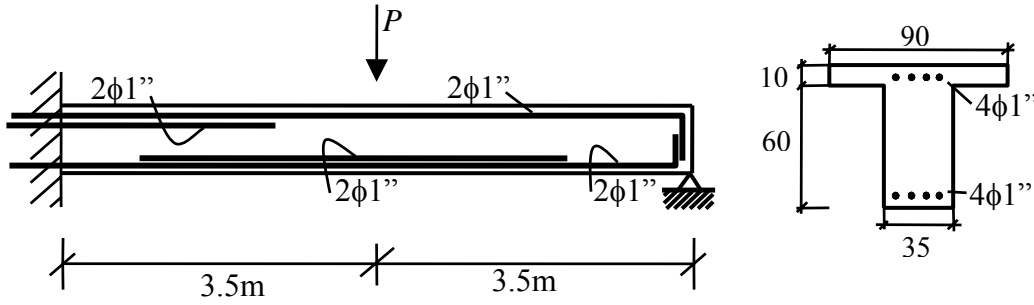
Un tercer método, generalmente el más simple y rápido, consiste en reconocer que en el mecanismo final debe cumplirse necesariamente el equilibrio entre la carga límite y los momentos internos, esto equivale a igualar la suma de las resistencias disponibles en las secciones de momento positivo y negativo ( $M_{n+}$  y  $M_{n-}$ ) al máximo valor del momento producido, en este caso, por la carga distribuida.



Deberá cumplirse que:

$$1/8 \omega l (6)^2 = 38.77 + 26.31 \quad \omega l \approx 14.46 \text{ ton/m}$$

Ejemplo 8-2 - Análisis límite y redistribución.



Características resistentes de las secciones de momento negativo y positivo con  $f_c = 210$  kg/cm<sup>2</sup>:

Sección Momento Negativo (ignorando el aporte del A's):

$$A_{s-} = 20.4 \text{ cm}^2, \quad b = 35 \text{ cm}, \quad d = 64 \text{ cm}$$

$$M_{n-} \approx 49 \text{ t-m} \quad (c = 16.13 \text{ cm} \quad \epsilon_s = 4.24 \epsilon_y)$$

Sección Momento Positivo (ignorando el aporte del A's):

$$A_{s+} = 20.4 \text{ cm}^2, \quad b = 90 \text{ cm}, \quad d = 64 \text{ cm}$$

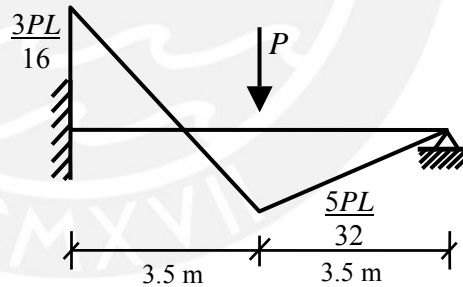
$$M_{n+} \approx 52.6 \text{ t-m} \quad (c = 6.27 \text{ cm} \quad \epsilon_s = 13.14 \epsilon_y)$$

Secuencia de formación de rótulas:

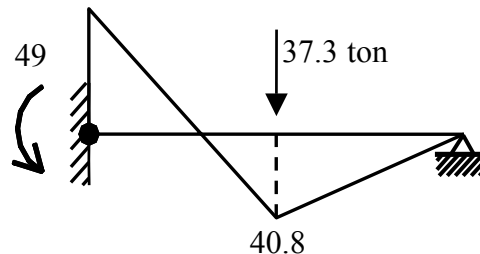
Primera rótula: Se formara cuando la sección en el empotramiento alcance el valor de  $M_{n-}$ . Utilizando los resultados del análisis elástico e ignorando el peso propio de la viga, tendremos:

$$M_{n-} = 49 = 3 PL / 16$$

$$P_{ul1} = 37.3 \text{ ton}$$



El diagrama de momentos flectores en esta etapa es:



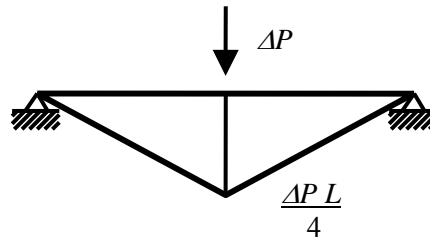
Segunda rótula: Se formará cuando la sección central alcance el valor de  $M_{n+}$ . Los incrementos en la carga producirán un incremento en los momentos flectores como si la viga estuviera simplemente apoyada. Asumiremos que los diagramas momento curvatura son del tipo bilineal es decir  $M_y \approx M_u$  en consecuencia un aumento en las rotaciones plásticas en el empotramiento, no producirá incremento en los momentos.



La capacidad remanente de momento positivo es:

$$\Delta M = 52.6 - 40.8 = 11.8 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

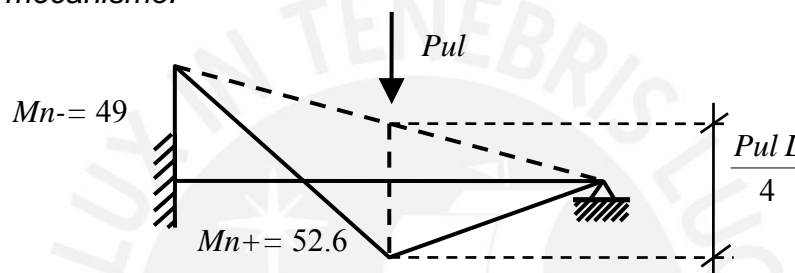
Una vez formada la primera rótula en el apoyo, para los sucesivos incrementos de carga, la viga se comportará como simplemente apoyada.



$$\Delta P L / 4 = 11.8 \Rightarrow \Delta P \approx 6.74 \text{ ton} \Rightarrow P_{ul} = 37.3 + 6.74 \approx 44 \text{ ton}$$

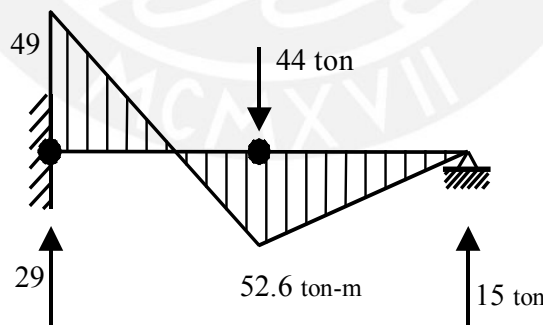
Por lo tanto la segunda rótula se formará cuando la carga externa alcance las 44 ton.

Verificación del mecanismo:

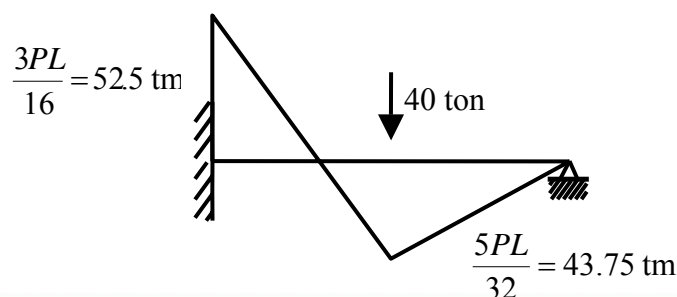


$$52.6 + \frac{49}{2} = \frac{P_{ul} L}{4} \Rightarrow P_{ul} \approx 44 \text{ ton}$$

El diagrama de momento y las fuerzas cortantes en los apoyos cuando se forme el mecanismo plástico completo será el mostrado en la figura a continuación.

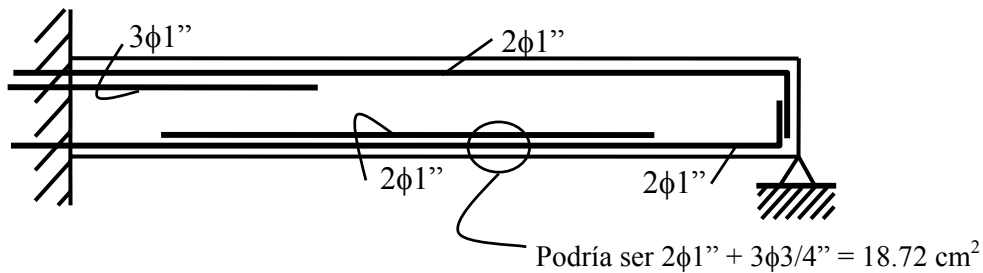


Como aplicación de la redistribución de momentos, realicemos el diseño de la viga empleando la distribución elástica, suponiendo que actúa una carga externa (resistencia requerida)  $P_u = 44 \times 0.9 \approx 40 \text{ ton}$  e ignoremos el peso propio. La distribución elástica será:



Diseño:  $Mu^- = 52.50 \text{ tm}$   $b = 0.35$ ,  $d = 0.64$   $As^- = 25.0 \text{ cm}^2$   
 $Mu^+ = 43.75 \text{ tm}$   $b = 0.90$ ,  $d = 0.64$   $As^+ = 18.8 \text{ cm}^2$

La armadura de la viga, con los resultados del análisis elástico es:



El acero positivo seleccionado ( $4\phi 1''$ ) excede del necesario, por lo tanto intentemos una reducción del momento negativo de tal modo que el área de acero negativo final sea  $4\phi 1''$  ( $20.4 \text{ cm}^2$ ) en la sección de momento máximo negativo tendremos:

$$As^- = 20.4 \text{ cm}^2 (4\phi 1'')$$

$$Asb = 47.6 \text{ cm}^2 \quad A's = 10.2 \text{ cm}^2 (2\phi 1'')$$

$$0.5 Asb = 23.8 \text{ cm}^2$$

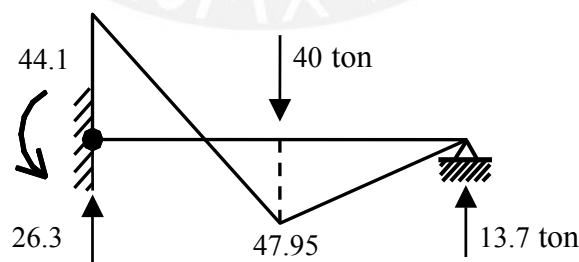
$$As^- - A's = 20.4 - 10.2 = 10.2 < 0.5 Asb$$

El porcentaje máximo de redistribución admitido por la Norma es:

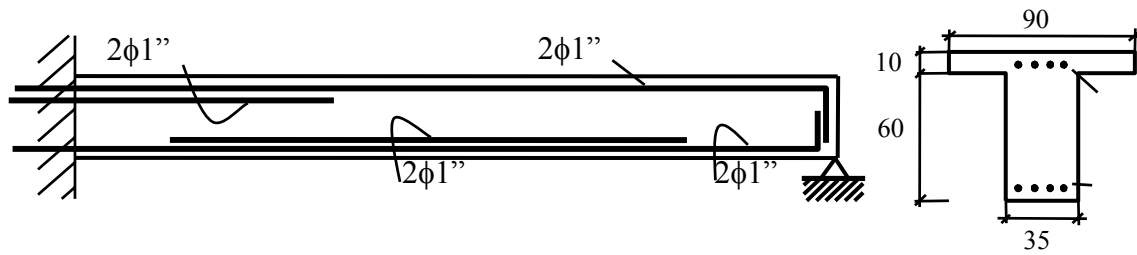
$$\% R = 20 \left( 1 - \frac{20.4 - 10.2}{47.6} \right) \approx 16 \%$$

El momento negativo redistribuido será:  $Mu^- = 52.5 (1 - 0.16) = 44.1 \text{ ton-m}$ . Para esta intensidad del momento negativo, el área de acero necesaria es  $20.4 \text{ cm}^2$  con lo cual los  $4\phi 1''$  propuestos son suficientes.

Las otras fuerzas internas deberán calcularse empleando el momento negativo reducido, esto se logra por equilibrio, como se muestra en la figura a continuación.



Para el centro de la luz el área de acero necesaria para  $Mu^+ = 47.95$  será  $As^+ = 20.7 \text{ cm}^2$  con lo cual los  $4\phi 1''$  seleccionados inicialmente serán suficientes. La distribución final del acero será la mostrada a continuación.



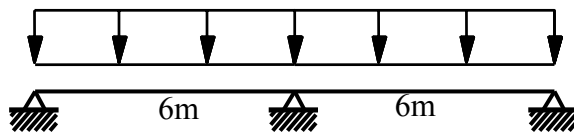
Empleando la redistribución hemos conseguido reducir el acero negativo de 25.5 a 20.4  $\text{cm}^2$  es decir, un 20% de reducción en el área de acero.

Para concluir el diseño falta:

1. El diseño del refuerzo por cortante. Las fuerzas cortantes deben calcularse a partir del diagrama de momentos redistribuido.
2. Corte del fierro negativo y positivo empleando el diagrama de momentos final que considere la redistribución.
3. El cálculo de  $Z$  (control de la fisuración) para momentos positivo y negativo bajo cargas de servicio, teniendo cuidado de verificar el esfuerzo de trabajo en el acero al haber reducido el área de acero negativa.
4. El cálculo de las deflexiones.

**Ejemplo 8-3 - Redistribución en una viga continua**

Se diseñará la viga de dos tramos mostrada a continuación incluyendo la posibilidad de redistribución del momento negativo. Sobre la viga se apoya un aligerado de  $h = 0.20$  m con una longitud tributaria de 5.1 m.



$f_c = 210 \text{ kg/cm}^2$   
 $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$   
 Sección  $0.30 \times 0.60$  m

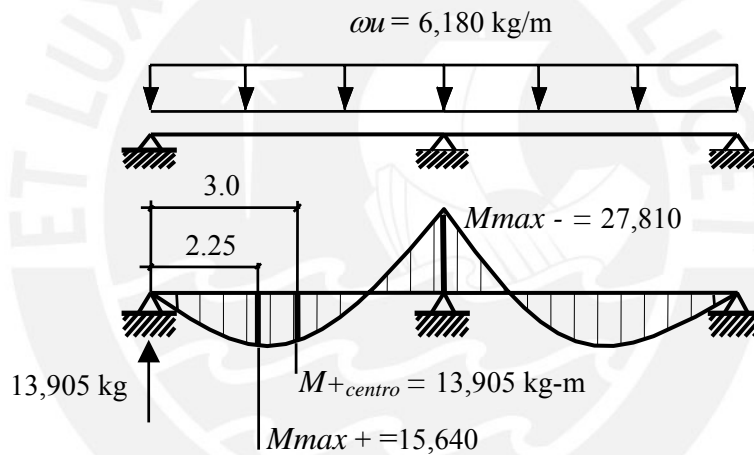
- **Metrado de cargas:**

p.p. viga + pt	=	$0.30 \times 0.60 \times 2,400 + 0.30 \times 100$	=	462 kg/m
Aligerado + pt	=	$400 \times 5.1$	=	<u>2,040</u>
				2,500
$s/c = 250 \times (5.1 + 0.3)$				<u>1,350</u>

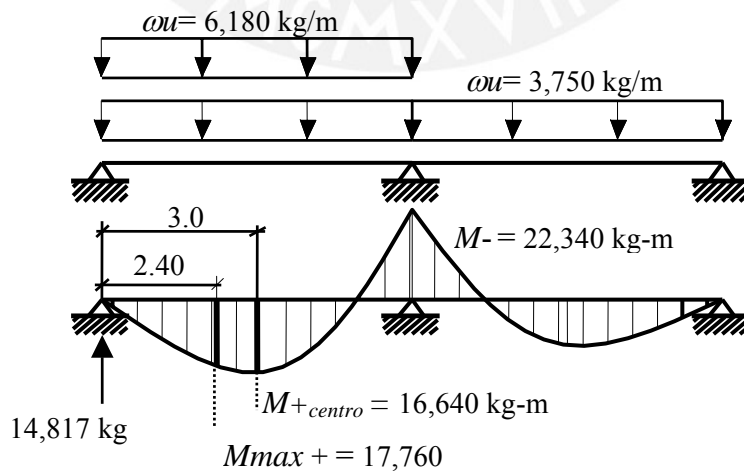
$\omega_{servicio} = 3,850 \text{ kg/m}$   
 $\omega_u = 1.5 \times 2,500 + 1.8 \times 1,350 = 6,180 \text{ kg/m}$

- **Análisis elástico considerando alternancia:**

*Máximo negativo*



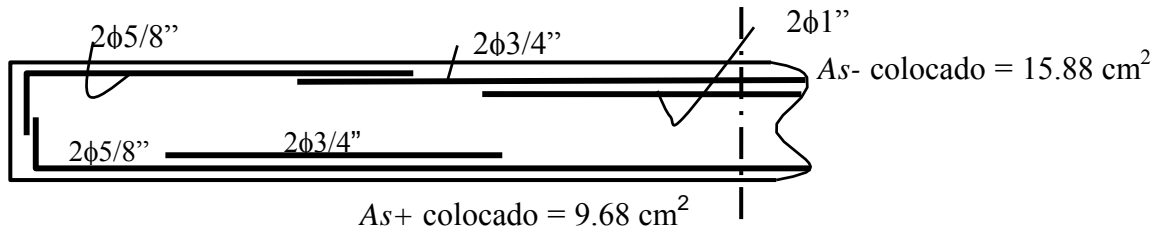
*Máximo positivo*



El diseño de acuerdo al diagrama elástico de momentos flectores es:

$M_{u-} = 27,810 \text{ kg-m}$	$b = 0.30, d \approx 0.54$	$A_{s-} = 15.33 \text{ cm}^2 \quad (0.45 A_{sb})$
$M_{u+} = 17,760 \text{ kg-m}$		$A_{s+} = 9.33 \text{ cm}^2 \quad (0.27 A_{sb})$

Una alternativa de armado de la viga, sobre la base de los momentos provenientes del análisis elástico, sería:



Si la carga de servicio, asumiendo sobrecarga plena en los dos tramos, se incrementara de manera continua, la primera sección que alcanzaría su resistencia máxima sería la del apoyo central. En consecuencia el factor de seguridad de la viga frente a la falla por flexión, sobre la base de los resultados del análisis elástico, se puede estimar como:

$$F.S \approx (6,180/3,850) \times (15.88/15.33) \times (1/0.9) \approx 1.85$$

Estimemos la cantidad de redistribución que es posible realizar empleando el  $A_s$ -calculado:

Para la sección de 0.30x0.60  $A_{sb} = 34.4 \text{ cm}^2$        $0.5 A_{sb} = 17.2 \text{ cm}^2$   
 $A'_s = 2\phi 5/8'' = 4 \text{ cm}^2$

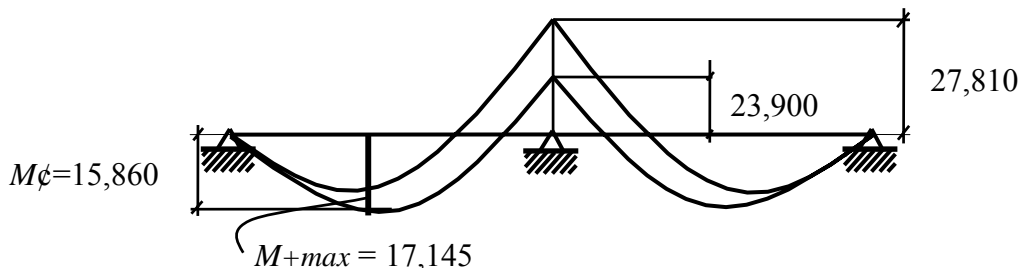
$$\% \text{ Redistribución} = 20 \left( 1 - \frac{15.33 - 4.0}{34.4} \right) \approx 14 \%$$

$$M^- (\text{redis}) = 27,810 (1 - 0.14) \approx 23,900 \text{ kg-m}$$

Momento positivo ajustado:



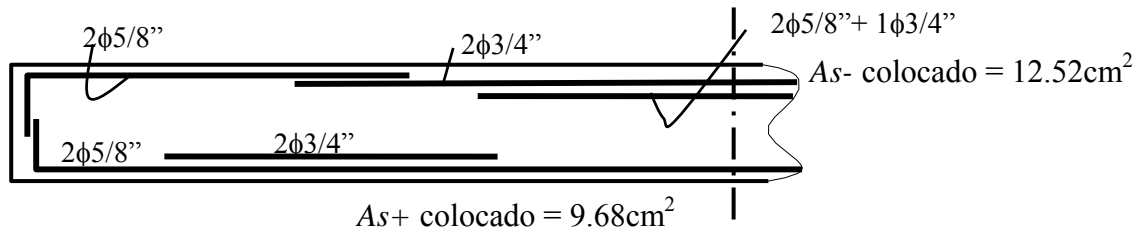
Distribución final de los momentos flectores:



En consecuencia el momento negativo se puede reducir a 23,900 kg-m y el momento positivo que controla el diseño es 17,760 kg-m proveniente de la alternancia elástica que produce el máximo positivo.

**Diseño final:**

$M_{u-} = 23,900 \text{ kg-m}$   $A_{s-} = 12.9 \text{ cm}^2$  ( $0.38 A_{sb}$ ). Hemos logrado, mediante la redistribución, reducir el acero negativo necesario de  $15.33$  a  $12.9 \text{ cm}^2$  ( $16 \%$  de reducción). El acero positivo no ha variado ya que está controlado por el máximo proveniente de la alternancia.



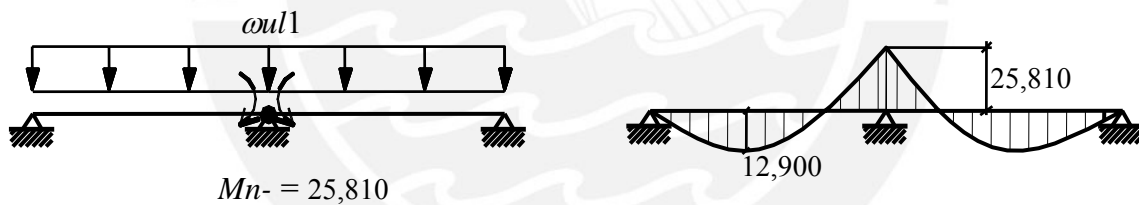
Verifiquemos el porcentaje de redistribución admisible con el acero realmente colocado:

$$\begin{aligned}
 A_{s-} &= 12.52 \text{ cm}^2 \\
 A'_{s-} &= 4.0 \text{ cm}^2 \text{ (} 2\phi 5/8'' \text{)} \\
 A_{sb} &= 34.4 \text{ cm}^2
 \end{aligned}
 \quad \Rightarrow \quad
 \%R = 20 \left( 1 - \frac{12.52 - 4}{34.4} \right) = 15\%$$

**Carga última que soporta la viga:** realicemos un análisis límite (plástico) para determinar, por curiosidad, la carga máxima que resiste la viga.

Zona de $M_-$	$A_{s-} = 12.52 \text{ cm}^2$	$M_{n-} \approx 25,810 \text{ kg-m}$
Zona de $M_+$	$A_{s+} = 9.68 \text{ cm}^2$	$M_{n+} \approx 20,410 \text{ kg-m}$

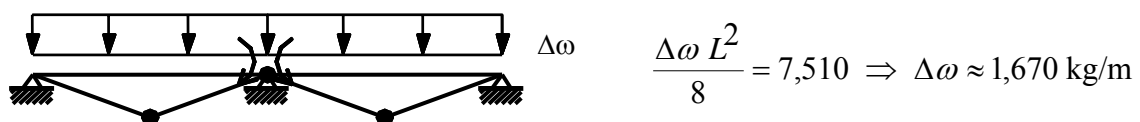
**Primera rótula**



$$0.125 (oul1) 36 = 25,810 \Rightarrow oul1 = 5,735 \text{ kg/m}$$

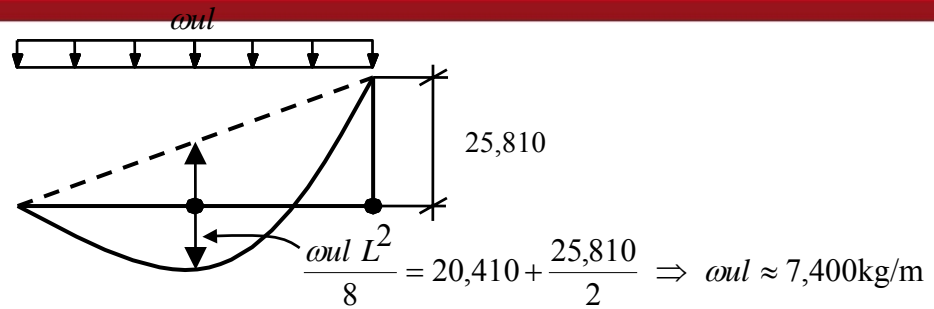
**Segunda y tercera rótula**

Se formarán simultáneamente cerca del centro de los tramos. Asumiremos por simplicidad, que los máximos positivos se producen al centro del tramo. Una vez que se ha formado la primera rótula, la capacidad remanente en las secciones de momento positivo será de  $7,510 \text{ kg-m}$  ( $20,410 - 12,900$ ).



La carga límite total es:  $oul = 5,735 + 1,670 \approx 7,400 \text{ kg/m}$

La carga límite también se puede calcular por equilibrio de uno de los tramos de la siguiente manera:



La carga plena de servicio es de 3,850 kg/m, la resistencia requerida es de 6,180 kg/m y la carga límite 7,400 kg/m. El factor de seguridad de la viga, frente a la formación de un mecanismo plástico, es de 1.9 aproximadamente. Al haber utilizado redistribución de momentos hemos acercado la intensidad de la resistencia requerida ( $oul$ ) a la intensidad de la carga límite, lográndose un diseño un tanto más eficiente. Estrictamente hablando para comparar la resistencia requerida con la carga límite, es necesario multiplicar esta última por 0.9 ya que en el diseño se ha incluido el factor de reducción de resistencia.

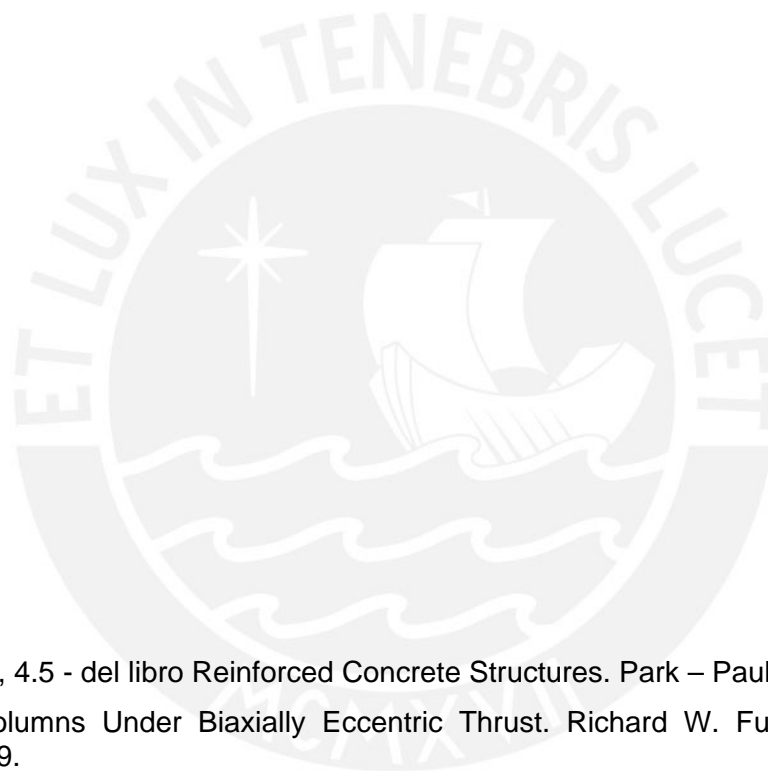
De haber utilizado la armadura proveniente del diseño basado en los momentos del análisis elástico, la primera rotula se formaría para una carga de 7,080 kg/m y la carga límite total sería de 8,070 kg/m aproximadamente. Se nota que en este caso habría un exceso de resistencia, mayor del obtenido al utilizar redistribución.

Para concluir el diseño falta:

1. El diseño del refuerzo por cortante. Las fuerzas cortantes deben calcularse a partir del diagrama de momentos redistribuido.
2. Corte del fierro negativo y positivo empleando el diagrama de momentos final que considere la redistribución.
3. El cálculo de  $Z$  (control de la fisuración) para momentos positivo y negativo bajo cargas de servicio, teniendo cuidado de verificar el esfuerzo de trabajo en el acero al haber reducido el área de acero negativa.
4. Cálculo de las deflexiones.
5. Sería necesario comparar la capacidad de rotación inelástica de la sección sobre el apoyo central donde se han reducido los momentos, con la demanda de rotación inelástica. Sin embargo, dado que se ha utilizado una cantidad reducida de redistribución (alrededor de un 15%) y que la cantidad de acero negativo colocado es equivalente a  $0.35 A_{sb}$ , es probable que la sección disponga de la capacidad de rotación inelástica necesaria para "acomodar" sin problemas los cambios realizados en el diagrama de momentos.

## CAPITULO 9

### Flexión Biaxial



#### Lecturas:

- 21.1 Artículos 4.4, 4.5 - del libro Reinforced Concrete Structures. Park – Paulay.
- 21.2 Concrete Columns Under Biaxially Eccentric Thrust. Richard W. Furlong. ACI Journal, October 1979.
- 21.3 Ultimate Limit State of Cracked Arbitrary Concrete Sections Under Axial Load and Biaxial Bending. Troels Brondum-Nielsen. ACI Concrete International. November 1982.
- 21.4 Ultimate Flexural Capacity of Circular and Annular Cracked Concrete Sections. Troels Brondum-Nielsen. ACI Structural Journal, July – August 1988.
- 21.5 Biaxial Interaction Diagrams for Short RC Columns of any Cross Section. J.A. Rodriguez, J. Dario Aristizabal-Ochoa. ASCE Journal of Structural Engineering, June 1999.
- 21.6 Partially and Fully Prestressed Concrete Sections under Biaxial Bending and Axial Load. J.A. Rodriguez, J. Dario Aristizabal-Ochoa. ACI Structural Journal, July – August 2000.
- 21.7 Análisis y Diseño de Secciones de Columnas de Sección Poligonal de Concreto Armado Sometidas a Carga Axial y Flexión Biaxial. Geo José Baccarani Rosas. Tema de Tesis en el Área de Investigación para optar el Título de Ingeniero Civil. Pontificia Universidad Católica del Perú, Facultad de Ciencias e Ingeniería, 1990.



## 9.1 Introducción

Hasta ahora hemos estudiado la manera de analizar y diseñar secciones de concreto armado con uno o dos ejes de simetría sometidas a flexión (con o sin carga axial) alrededor de uno de los ejes principales de flexión. Sin embargo existen con frecuencia situaciones en las cuales, debido a las sollicitaciones externas se presentan simultáneamente momentos flectores alrededor de ambos ejes principales.

La flexión biaxial puede presentarse en vigas y en columnas. El término “vigas” debe entenderse en un sentido amplio, es decir todo elemento con una carga axial pequeña o nula, independientemente de su posición dentro de la estructura.

## 9.2 Flexión Biaxial en Vigas

La flexión biaxial en vigas, por lo general, sucede solamente en vigas aisladas sin la losa de piso que las rodee. Es importante reconocer que las vigas aisladas pueden deformarse libremente vertical y horizontalmente y por lo tanto, dependiendo de las sollicitaciones externas, desarrollar flexión biaxial.

Un caso típico de elementos aislados se presenta en las vigas que soportan un muro o elemento de cierre que está sometido a fuerzas laterales de viento o sismo. En este caso la viga debe soportar además de su peso propio y el peso del muro o elemento de cierre que actúan en un plano vertical, la reacción horizontal del elemento de cierre produciéndose flexión vertical y horizontal. Otro caso frecuente es el de las vigas “carrileras” es decir aquellas sobre las que se desplazan los puentes grúa, en estas se produce flexión biaxial por el peso del puente grúa y por el frenado transversal del mismo.

La figura 9-1 muestra la sección transversal de una viga de concreto armado sometida a flexión alrededor de sus ejes principales. La carga  $W_x$  produce flexión alrededor del eje  $y$  ( $M_y$ ) y la carga  $W_y$  flexión alrededor del eje  $x$  ( $M_x$ ).

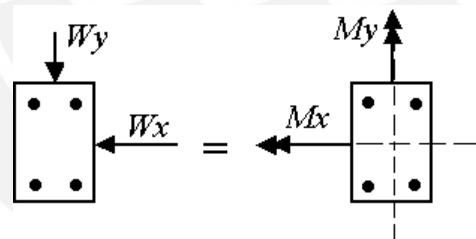


Fig. 9-1 Viga con sollicitaciones que producen flexión biaxial.

Si la viga de la figura anterior no fuera aislada, es decir si fuera parte por ejemplo de un sistema de piso conformado por vigas y losas, la losa o diafragma impediría la deformación horizontal y forzaría a que el eje neutro sea paralelo (o casi) a la losa, por lo tanto la sección se puede diseñar suponiendo flexión únicamente alrededor del eje  $x$  ( $M_x$ ). La figura 9-2 esquematiza esta situación.

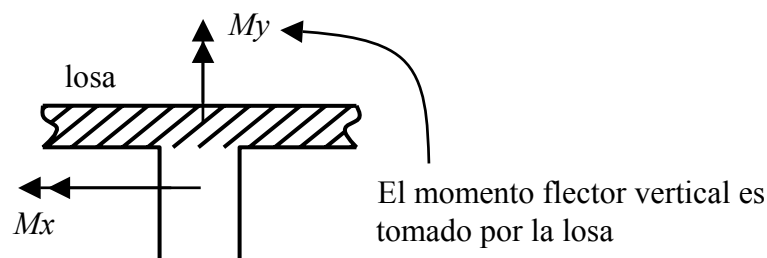


Fig. 9-2 Viga que forma parte de un sistema de piso.

Una situación similar se produce en los techos inclinados, como el mostrado en la figura 9-3, ya sea una losa maciza apoyada sobre vigas intermedias o un aligerado. En este caso debido a la inclinación del techo las cargas de gravedad  $W$  se descomponen en  $W_x$ ,  $W_y$ . Podría pensarse que estas dos componentes originan flexión biaxial en la viga, sin embargo la componente  $W_x$  es tomada por la losa. La losa, junto con las vigas extremas (las de borde) conforman, debido al monolitismo del sistema, una viga doble T de gran peralte la que soporta el momento  $M_y$  y en consecuencia las vigas (o el aligerado si fuera el caso) trabajan soportando únicamente la flexión alrededor de un eje paralelo a la losa originada por la componente  $W_y$ .



Fig. 9-3 Losa o techo inclinado.

Un caso particular lo constituyen las vigas aisladas con sección transversal asimétrica como la mostrada en la figura 9-4. Al ser una viga aislada se supone que entre sus apoyos, es libre de deformarse vertical y horizontalmente. En este caso el plano de carga o de la flexión (que se asume pasa por el centro de corte de la sección) no es un eje de simetría de la sección.

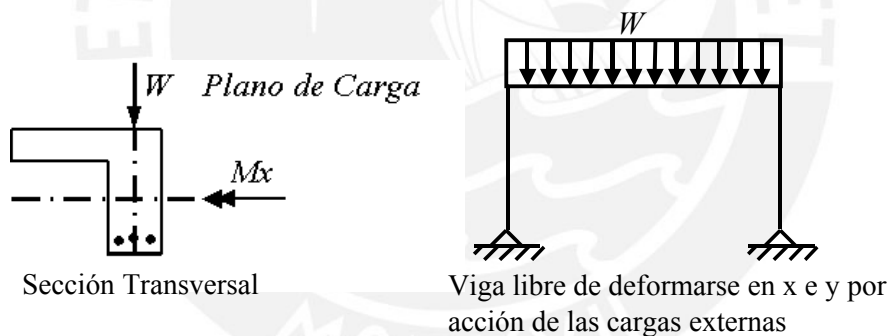
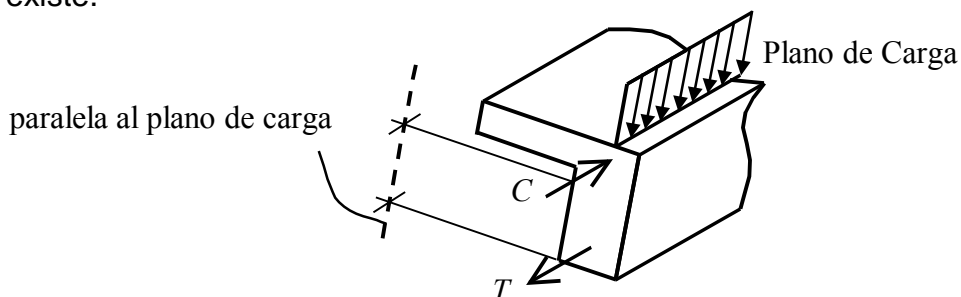


Fig. 9-4 Viga aislada con sección transversal asimétrica con respecto al plano de carga.

Las cargas aplicadas originan momentos flectores que deben ser resistidos por pares internos cuyo momento resultante, en este caso, es alrededor de un eje horizontal. Como sabemos el par interno que resiste la flexión proviene de la compresión en el concreto y de la tracción en el acero. Ya que las cargas aplicadas originan únicamente un momento alrededor de un eje horizontal, las fuerzas internas resultantes  $C$  y  $T$  deberán estar contenidas en el plano de cargas (en este caso vertical) o en un plano paralelo a él (ver figura a continuación), de no ser así el par interno originaría flexión biaxial la cual en este caso, no existe.



En este caso particular, de una sección transversal en L invertida, la condición de que la resultante de las compresiones y de las tracciones estén contenidas en el plano de carga vertical, conducirá a un bloque de compresiones de forma triangular como se indica en la figura 9-5. La explicación física de esto es simple: si el eje neutro fuera horizontal, el centroide del bloque comprimido donde actúa la resultante de compresiones, no coincidiría (sobre la misma vertical) con el centroide de la resultante de las tracciones en el acero, originando un par interno alrededor de un eje vertical que no está equilibrado por las cargas externas.

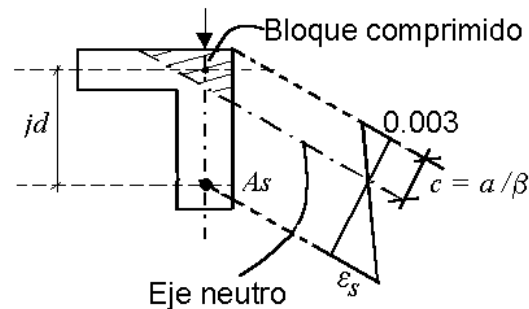


Fig. 9 -5 Inclinación del eje neutro en una sección asimétrica con plano de cargas

Las clásicas ecuaciones que se presentan en los textos de resistencia de materiales para la determinación de los esfuerzos en secciones sometidas a flexión biaxial, son válidas (despreciando el aporte del acero) solamente cuando la sección de concreto armado no está agrietada. La investigación de los esfuerzos en el acero y en el concreto en una sección agrietada bajo cargas de servicio (análisis elástico), utilizando las ideas de la sección transformada agrietada, no es tarea simple ya que se desconoce la profundidad e inclinación del eje neutro y adicionalmente los esfuerzos en el acero varían aún entre las barras de una misma capa. En consecuencia será necesario acudir a las ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y relaciones constitutivas para hallar la solución, normalmente será necesario proceder por aproximaciones sucesivas.

En una sección en flexión biaxial, el eje neutro está inclinado con respecto a la horizontal, la profundidad y el grado de inclinación del eje neutro depende de las propiedades de la sección (calidad del concreto, geometría y disposición de las armaduras) y de la relación entre los momentos flectores actuantes ( $M_x / M_y$ ). En general el eje neutro no es perpendicular al plano de flexión ni paralelo al vector momento resultante. Solamente se conoce la inclinación del eje neutro cuando la sección transversal es cuadrada con el mismo acero en las cuatro caras y además los momentos flectores alrededor de sus dos ejes principales son iguales ( $M_x = M_y$ ), en este caso particular, el bloque de compresión tiene la forma de un triángulo isósceles.

La manera de analizar una sección de concreto armado sometida a flexión biaxial sin carga axial se muestra en la figura 9-6. En ella se muestra una sección rectangular perteneciente a una viga aislada, sometida a momentos flectores alrededor de ambos ejes principales con armadura en las cuatro esquinas. Se quiere determinar las resistencias nominales de la sección  $M_x$ ,  $M_y$ . En la figura 9-6 se muestra el estado de deformaciones y fuerzas en el concreto y en el acero para una posición particular del eje neutro definida por su inclinación y profundidad. Será necesario variar la profundidad del eje neutro hasta lograr el equilibrio de la sección, deberá cumplirse:

- Tracción = Compresión
- $\Sigma$  Momentos  $x = M_x$  (resistencia nominal)
- $\Sigma$  Momentos  $y = M_y$  (resistencia nominal)

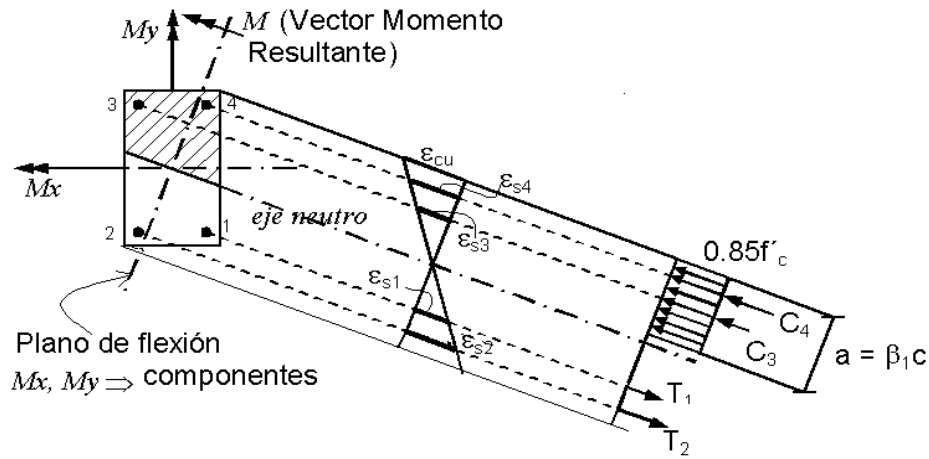


Fig. 9-6 Deformaciones y fuerzas internas en una sección en flexión biaxial para una posición particular del eje neutro.

Es evidente que para cada inclinación del eje neutro que se seleccione, se podrá calcular por iteración sobre su profundidad, hasta lograr el equilibrio de fuerzas en la sección, el par de valores  $M_x, M_y$  que agotan la capacidad de la sección. La sucesión de cálculos permitirá construir el diagrama de interacción de la sección.

La figura 9-7 (adaptada de Park – Paulay), muestra las formas (solamente en el primer cuadrante) que tendrían los diagramas o curvas de interacción de secciones rectangulares con la misma cantidad de acero en cada esquina. Estas curvas han sido construidas para una cuantía total creciente y podrían utilizarse para el diseño. Se observa que a medida que la cuantía total aumenta, las curvas cambian de forma o de perfil.

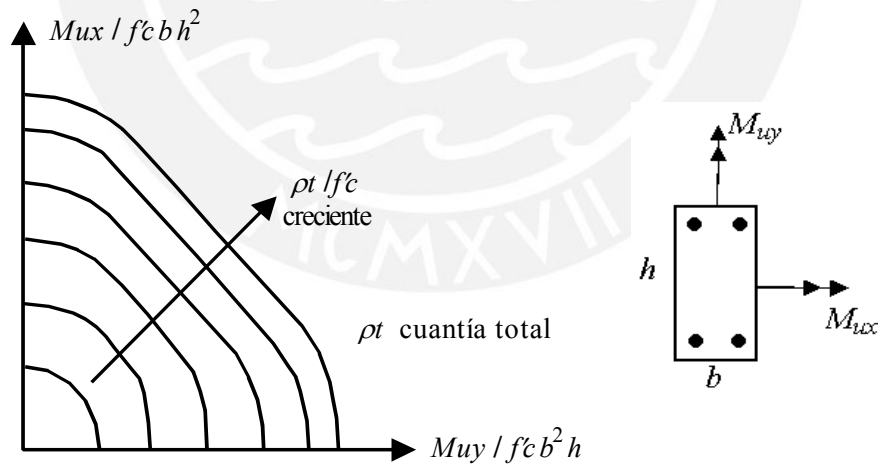


Fig. 9-7 Formas de las Curvas de Interacción para secciones en flexión biaxial.

Una aproximación conservadora para el análisis de secciones en flexión biaxial, es la de asumir una curva de interacción del tipo lineal, tal como se muestra en la figura 9-8. Una mejora importante a esta aproximación, puede lograrse si se calcula un punto adicional del diagrama, por ejemplo para un eje neutro inclinado a 45 grados. Si se aproximara la curva de interacción por una elipse (o un círculo para el caso de igual resistencia alrededor de ambos ejes principales) podría sobrestimarse la resistencia de la sección a la flexión biaxial.

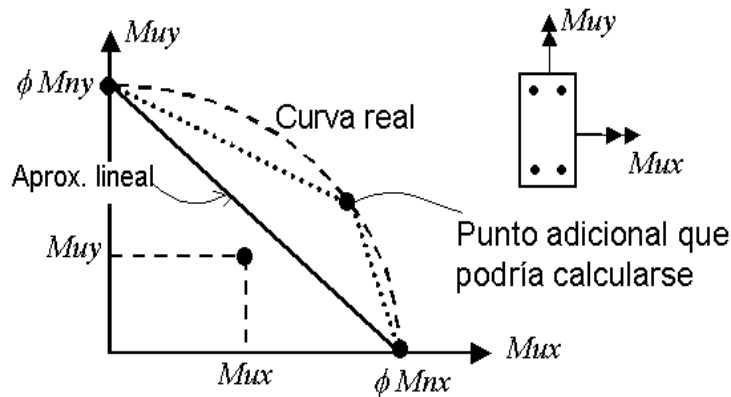


Fig. 9-8 Aproximación lineal a la curva de interacción para flexión biaxial.

En función de la geometría, del área y disposición supuesta de los refuerzos de acero, se calculan las resistencias  $\phi Mnx$ ,  $\phi Mny$  con los procedimientos presentados para la flexión uniaxial, para luego verificar si las armaduras supuestas son adecuadas para resistir la sollicitación externa.

La ecuación de interacción que resulta de suponer una curva de interacción del tipo lineal como la mostrada en la figura 9-9, es la siguiente:

$$\frac{Mux}{\phi Mnx} + \frac{Muy}{\phi Mny} \leq 1.0 \quad (9-1)$$

No se presentarán ecuaciones o una metodología para el diseño de secciones sometidas a flexión biaxial más refinada que la presentada líneas arriba (ecuación 9-1), basada en diagramas de interacción o en aproximaciones a los mismos, ya que es prácticamente imposible cubrir la gran cantidad de variables involucradas en el problema, entre ellas: la geometría de la sección, la calidad del concreto y del acero, la disposición o arreglos posibles de las armaduras.

Para el diseño, conocidas las dimensiones de la sección transversal y las sollicitaciones externas, es necesario acudir a métodos numéricos, en donde, partiendo de una disposición determinada de las armaduras, a través de numerosas iteraciones es posible calcular el área de acero necesaria. La gran cantidad de iteraciones necesarias para llegar a la solución, solamente es posible enfrentarla con la ayuda de programas de computadora.

### 9.3 Flexión Biaxial en Columnas

En la práctica las columnas sometidas a carga axial y flexión biaxial, se presentan con más frecuencia que las vigas. Una situación típica es la de las columnas que soportan los efectos de las fuerzas laterales de sismo o viento. En este caso además de la flexión producida por las cargas verticales (de gravedad) alrededor de uno de los ejes principales, se producirá por el sismo o viento flexión alrededor del otro eje principal originando una sollicitación biaxial.

El problema de diseño de columnas en flexión biaxial es complejo numéricamente por la gran cantidad de iteraciones que es necesario realizar, recuerde que el eje neutro por lo general no es perpendicular a la excentricidad resultante o paralelo al vector momento resultante. Para el diseño normalmente se suele suponer un cierto arreglo de la armadura de refuerzo y el área de acero supuesta se va corrigiendo, hasta lograr que la capacidad de la columna sea adecuada para soportar las sollicitaciones externas.

En las tesis de grado para optar el título de ingeniero civil, desarrolladas en el Departamento de Ingeniería de la PUCP, por los ingenieros Geo Bacarani Rosas y posteriormente por Luis Salcedo Ponce de León, se desarrollaron algoritmos y programas de cómputo para el análisis y diseño de columnas en flexión biaxial. Dichos algoritmos son generales ya que no están limitados a una forma particular de la sección transversal o a un arreglo particular de las armaduras de refuerzo, sin embargo son de utilidad solamente con la ayuda de una computadora, es decir no sirven para cálculos manuales.

El análisis de columnas en flexión biaxial es un poco más simple que el de diseño ya que se conoce de antemano el arreglo y el área de las armaduras. En este caso es posible describir la resistencia de una sección mediante las llamadas Superficies de Interacción, que representan el lugar geométrico de todas las combinaciones de carga axial ( $P_n$ ) y momentos flectores  $M_{nx}$ ,  $M_{ny}$  que juntos agotan la capacidad de la sección.

La figura 9-9 muestra esquemáticamente una superficie de interacción típica que ha sido construida variando la inclinación del eje neutro para obtener una serie de diagramas de interacción a distintos ángulos ( $\lambda$ ) respecto de los ejes principales de la sección. Solamente se muestra el primer cuadrante de la superficie. Si la sección (y/o las armaduras) fuese asimétrica, para describir completamente el comportamiento sería necesario construir los otros cuadrantes. Similarmente si la carga fuese de tracción sería necesario construir la zona inferior de la superficie, correspondiente a los valores negativos (tracción) de la carga axial.

Los diagramas de interacción contenidos en los planos  $P_n - M_{nx}$  y  $P_n - M_{ny}$  respectivamente, corresponden a flexión uniaxial y su construcción se puede hacer con los métodos estudiados en el capítulo de flexocompresión. Todos los otros diagramas comprendidos entre los dos anteriores, corresponden a un cierto ángulo de inclinación ( $\lambda$ ) de la excentricidad resultante con respecto a los ejes principales de la sección.

Las secciones horizontales a través de la superficie de interacción representan el lugar geométrico de todas las posibles combinaciones de  $M_{nx}$  y  $M_{ny}$  que conjuntamente con una carga axial constante agotan la capacidad de la sección, se les denomina Curvas de Falla para carga constante o Contornos de Carga Constante. Las curvas de interacción que se presentaron para el caso de vigas en flexión biaxial, son un caso particular de los contornos de carga en el cual la carga axial es nula.

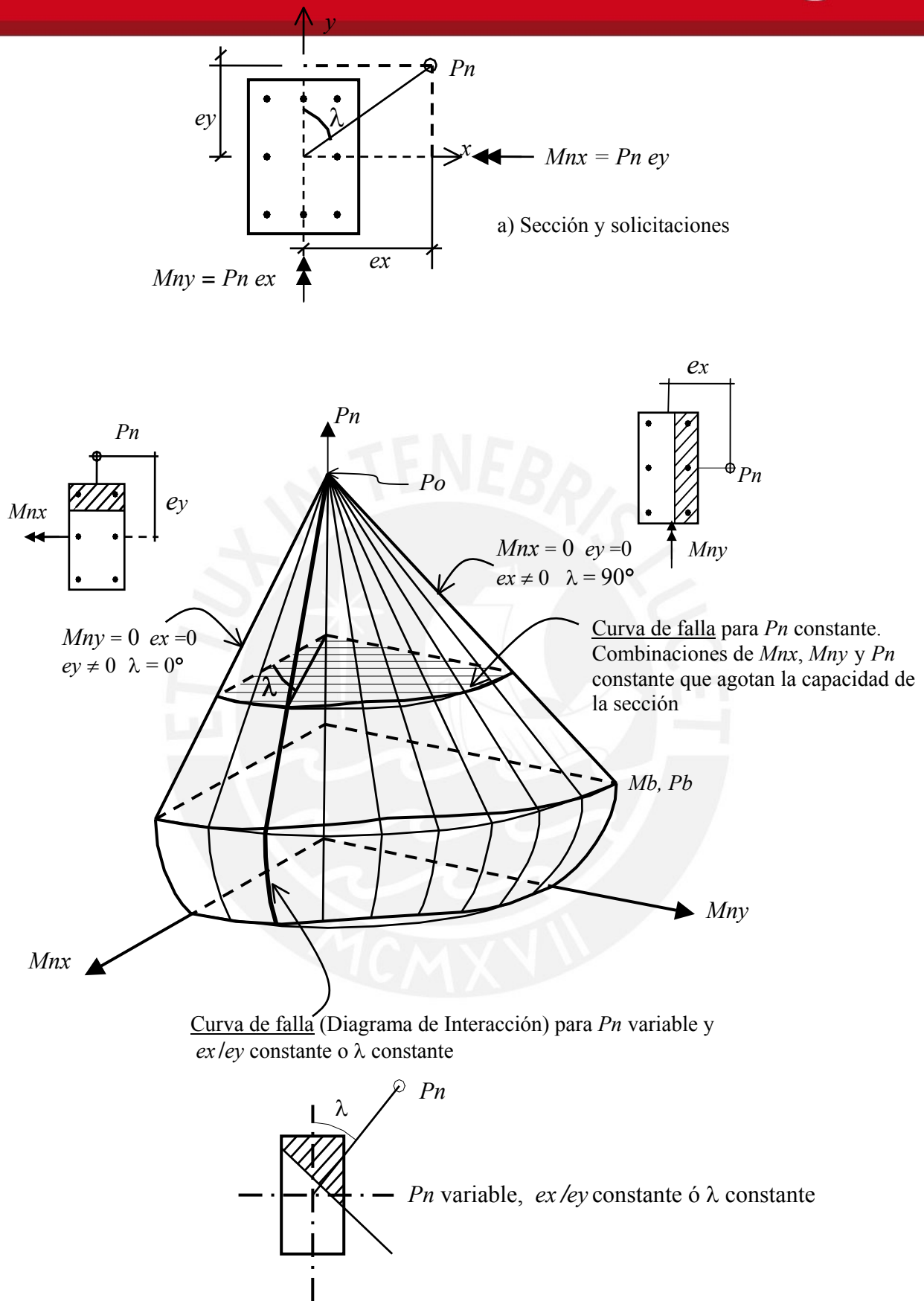


Fig. 9-9 Superficie de interacción para flexocompresión biaxial.

En las figuras 9-10 y 9-11, se muestran los *Contornos de Carga Constante* para una columna de 0.30 x 0.60 m armada con un fierro en cada esquina, el área total de acero es de 20 cm<sup>2</sup>. Se han construido los contornos para distintos niveles de carga axial, la figura 9-10 corresponde a cargas nominales por encima de la carga balanceada y la figura 9-11 para valores por debajo de la carga balanceada. Es clara la dependencia de la forma de los contornos con el nivel de la carga axial. Con un poco de imaginación, a partir de los contornos de carga constante, puede visualizarse la superficie de interacción.

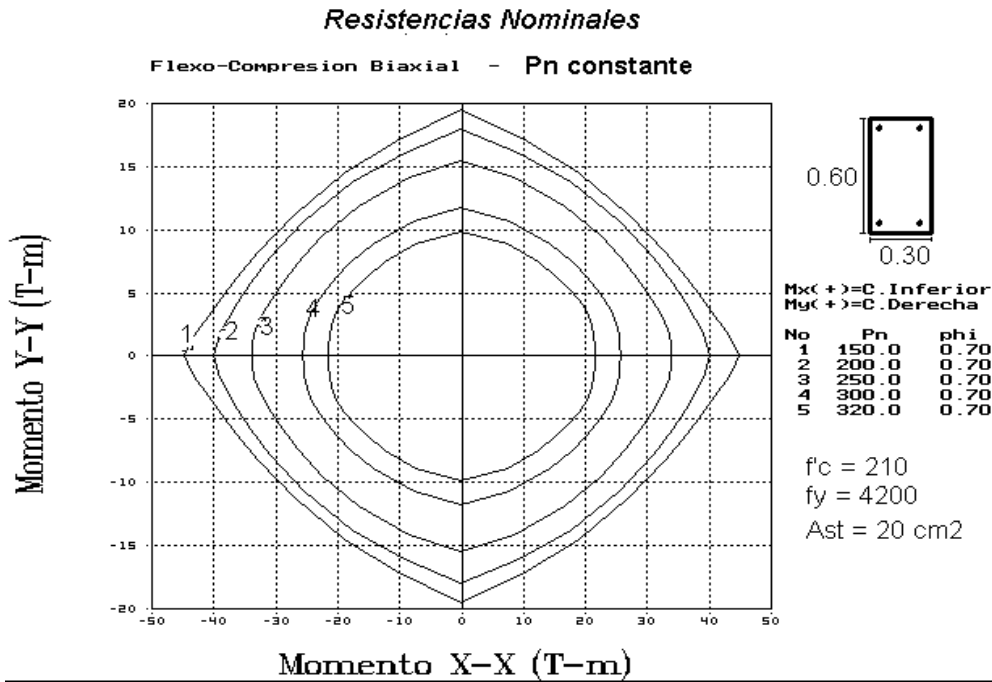


Fig. 9-10 Curvas de falla para distintos valores de Pn.  
Cargas axiales mayores que Pb (Pb ≈ 150 ton)

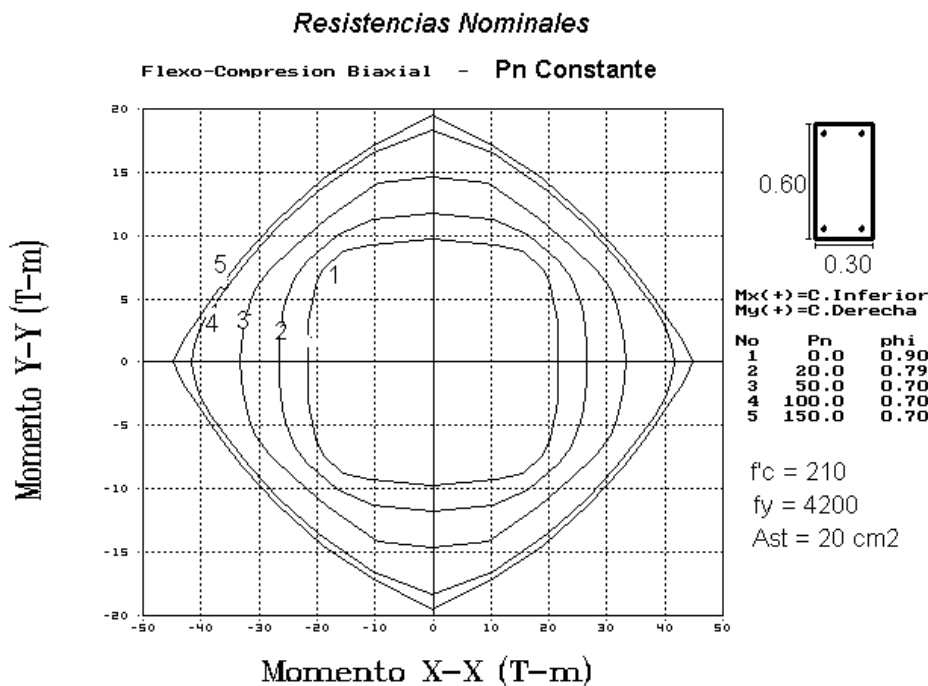


Fig. 9-11 Curvas de falla para distintos valores de Pn.  
Cargas axiales menores que Pb (Pb ≈ 150 ton)



Debido a la gran cantidad de variables involucradas, no es simple deducir expresiones que permitan aproximar los contornos de carga constante. Los contornos varían con la geometría de la sección, la calidad del concreto y del acero, el arreglo y cuantía de las armaduras de refuerzo y con la intensidad de la carga axial. Es claro que aproximar los contornos por medio de líneas rectas, es una aproximación bastante conservadora, salvo para cargas axiales cercanas a la carga balanceada.

Debido a la complejidad numérica del problema, se han propuesto numerosos métodos aproximados para el diseño de columnas en flexión biaxial. La mayoría no son verdaderos métodos de diseño, más bien son métodos que permiten estimar la resistencia de una columna para una armadura dada. Es decir, se supone un arreglo y cuantía para la armadura de refuerzo y mediante el empleo de alguno de los métodos aproximados propuestos, se calcula la capacidad de la columna la cual se compara con las solicitaciones actuantes hasta lograr el nivel de ajuste deseado.

La mayoría de los métodos aproximados que proporcionan una precisión “razonable” están basados en aproximaciones al perfil de la superficie real de interacción de la sección. Uno de los métodos más utilizados, incluido en la Norma Peruana E060 y en los comentarios del código ACI, es el Método de Bresler.

### 9.3.1 Método de Bresler

Proviene del código Ruso y se basa en una aproximación al perfil de la superficie de interacción. Este método intenta predecir la resistencia de una sección bajo carga axial y flexión biaxial, a partir de las resistencias a flexión uniaxial de la misma. Las diversas formas de la expresión de Bresler son:

$$\frac{1}{P_n} = \frac{1}{P_{nx}} + \frac{1}{P_{ny}} - \frac{1}{P_o} \quad (9-2)$$

$$\frac{1}{P_{ur}} = \frac{1}{\phi P_{nx}} + \frac{1}{\phi P_{ny}} - \frac{1}{\phi P_o} \quad (9-3)$$

$$\frac{1}{P_{ur}} = \frac{1}{P_{ux}} + \frac{1}{P_{uy}} - \frac{1}{\phi P_o} \quad (9-4)$$

Donde:

$P_{ur}$  es la carga axial que resiste la columna en flexión biaxial.

$\phi P_{nx}$  capacidad de la sección si solo existiera  $M_{ux}$  ( $M_{uy} = 0$ )

$\phi P_{ny}$  capacidad de la sección si solo existiera  $M_{uy}$  ( $M_{ux} = 0$ )

$\phi P_o$  capacidad de la sección si solo existiera carga axial ( $e_x = e_y = 0$ )

$$P_o = 0.85 f'_c \cdot (A_g - A_{st}) + A_{st} f_y$$

Es claro que el método de Bresler es más una herramienta de análisis que de diseño, su utilización para el diseño obliga a suponer una área de acero y a aproximarse a la solución final por tanteos.

Deberá verificarse que el valor de  $P_{ur}$  que resulte de la ecuación 9-3 ó 9-4 sea menor que la carga axial máxima permitida por el código (corte horizontal de los diagramas de interacción) es decir:

$$P_{ur} \leq 0.8 \phi P_o \quad (\text{para columnas con estribos})$$

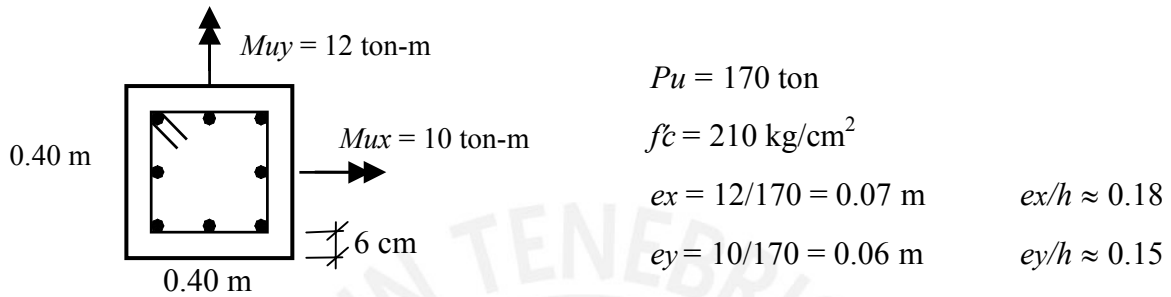
Limitaciones de la fórmula de Bresler:

- Se limita a secciones simétricas con armaduras simétricas (secciones rectangulares).
- La formula funciona mejor para valores de  $P_{ux}$  y  $P_{uy}$  por encima del valor de la carga balanceada correspondiente.

c) La carga axial actuante debe ser por lo menos mayor que  $P_u \geq 0.1 \phi P_o$  es decir el método de Bresler no funciona para cargas axiales bajas cercanas a la flexión simple. Cuando la carga axial es menor que el valor antes mencionado, podrá emplearse la ecuación 9-1 que se reproduce a continuación.

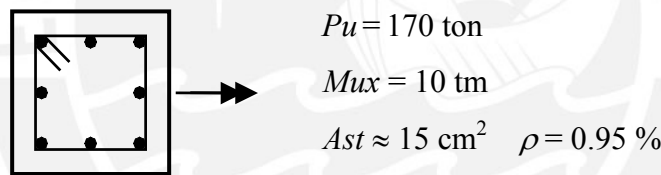
$$\frac{M_{ux}}{\phi M_{nx}} + \frac{M_{uy}}{\phi M_{ny}} \leq 1.0$$

**Ejemplo 9-1 – Diseño de una columna en flexión biaxial.**

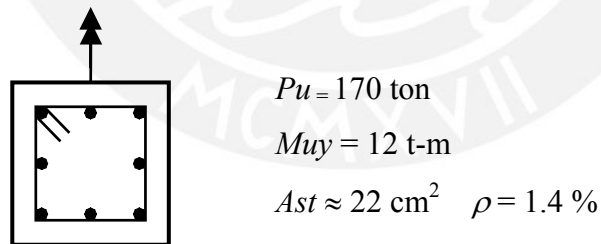


Ya que no tenemos una idea precisa del área necesaria, para iniciar los tanteos hagamos el diseño de la columna para flexión uniaxial alrededor de cada uno de los ejes por separado. Utilizaremos los ábacos para diseño en flexión uniaxial para columnas con armadura en las cuatro caras

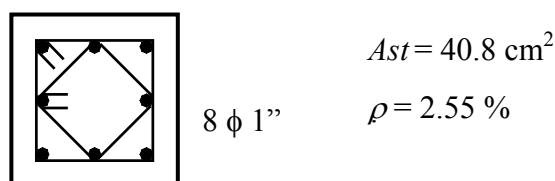
- Para  $M_{uy} = 0$ , tendremos:



- Para  $M_{ux} = 0$ , tendremos:



Por lo tanto el área total de acero ( $A_{st}$ ) deberá ser por lo menos, mayor que  $22 \text{ cm}^2$ . Intentemos con un área de acero que sea la suma de ambas áreas halladas  $15 + 22 = 37 \text{ cm}^2$ . Esta aproximación es la base de uno de los varios métodos (métodos de superposición) para el diseño de columnas en flexión biaxial, sin embargo no tiene una base física y puede no ser conservador ya que se está empleando dos veces la capacidad máxima del concreto. Iniciemos los tanteos con el siguiente arreglo:



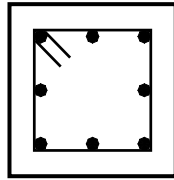
$$\phi P_o = 0.7 (0.85 \times 210 \times (1600 - 41) + 40.8 \times 4200) \approx 0.7 \times 450 = 315 \text{ ton}$$

- Deberá cumplirse que:

$$P_u > 0.1 \phi P_o = 0.1 \times 315 \approx 32 \text{ ton} \quad \text{ok}$$

$$P_u < P_u \text{ max} = 0.8 \phi P_o = 0.8 \times 315 = 252 \text{ ton} \quad \text{ok (} P_u = 170 \text{)}$$

- Cálculo de la capacidad para momento flector solo alrededor del eje x:



$$M_{ux} = 10 \text{ t-m}$$

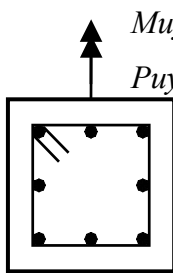
$$P_{ux} = ?$$

$$A_{st} = 40.8 \text{ cm}^2$$

$$\text{Para } M_{ux} = 10, \quad P_{ux} \approx 245 \text{ ton}$$

$$\phi P_b \approx 85 \text{ t} \quad \phi M_b \approx 22 \text{ t-m}$$

- Cálculo de la capacidad para momento flector solo alrededor del eje y:



$$M_{uy} = 12 \text{ t-m}$$

$$P_{uy} = ?$$

$$A_{st} = 40.8 \text{ cm}^2$$

$$\text{Para } M_{uy} = 12, \quad P_{uy} \approx 230 \text{ ton}$$

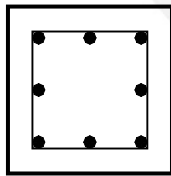
$$\phi P_b \approx 85 \text{ t} \quad \phi M_b \approx 22 \text{ t-m}$$

- Aplicando Bresler:

$$\frac{1}{P_{ur}} = \frac{1}{245} + \frac{1}{230} - \frac{1}{315}$$

$$P_{ur} \approx 190 \text{ ton} > P_u = 170 \quad \text{ok.}$$

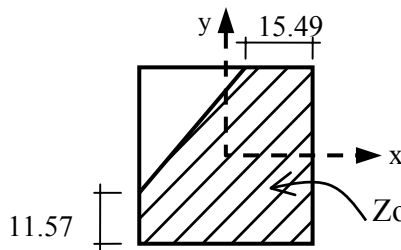
A manera de verificación, se calculó con la ayuda de un programa de cómputo la solución "exacta" resultando en un área de acero requerida de  $43 \text{ cm}^2$  para las sollicitaciones antes indicadas:



Para ocho fierros y sollicitaciones de:

$$P_u = 170, \quad M_{ux} = 10 \quad M_{uy} = 12 \text{ t-m}$$

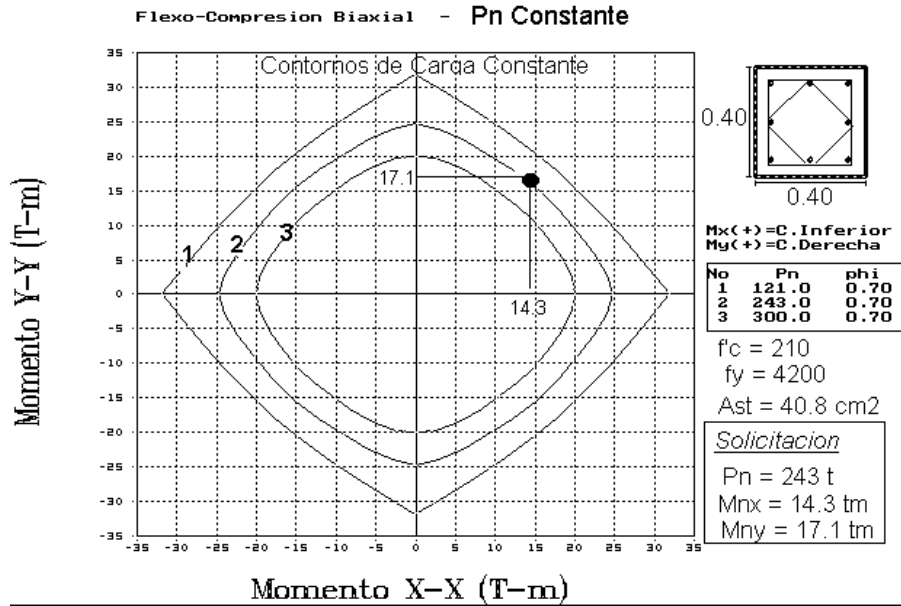
$$A_{st} \text{ requerida} = 43 \text{ cm}^2, \quad \rho = 2.69\%$$



$$\text{Ecuación eje neutro: } x = 0.8621 y - 12.73 \text{ cm}$$

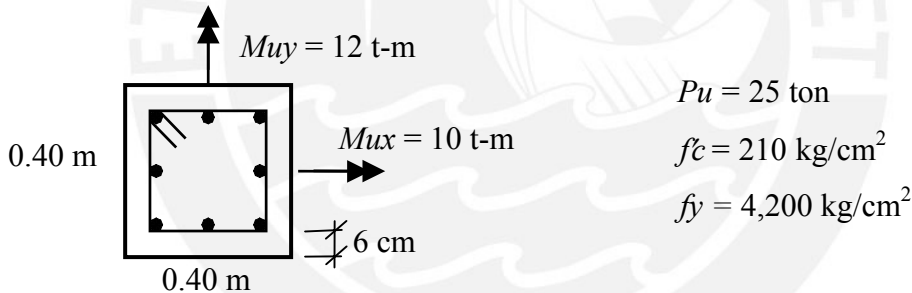
La figura a continuación muestra los contornos de carga constante para la columna de  $0.40 \times 0.40$  reforzada con 8 barras de 1". El contorno número 2 corresponde a la carga nominal actuante ( $170/0.7 = 243 \text{ ton}$ ), el contorno número 1 corresponde a la carga que produce la falla balanceada de la sección y el número 3 se ha incluido para mostrar la tendencia de los contornos al aumentar la carga axial.

Columna 0.40x0.40 8-1" Resistencias Nominales



**Ejemplo 9-2 – Diseño de una columna en flexión biaxial.**

Diseñemos la misma columna del ejemplo 9-1 pero solicitada por una carga axial pequeña de  $P_u = 25 \text{ ton}$



- Al ser la carga axial baja ( $P_u \leq 0.1 \phi P_o$ ) no es aplicable la ecuación de Bresler, usaremos la ecuación de interacción 9-1 para flexión simple:

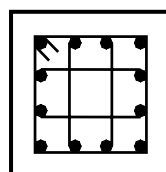
$$\frac{M_{ux}}{\phi M_{nx}} + \frac{M_{uy}}{\phi M_{ny}} \leq 1$$

- Aproximación inicial al área de acero requerida:

Para  $P_u = 25$        $M_{ux} = 10$ ,       $M_{uy} = 0$        $A_{st} \approx 13 \text{ cm}^2$

Para  $P_u = 25$        $M_{ux} = 0$ ,       $M_{uy} = 12$        $A_{st} \approx 19 \text{ cm}^2$

Seleccionemos un área de acero que sea la suma de las calculadas para flexión uniaxial  $A_{st} \approx 32 \text{ cm}^2$ . Intentaremos con  $12 \phi 3/4''$  en el siguiente arreglo:



$12 \phi 3/4''$   
 $A_{st} = 34.1 \text{ cm}^2$   
 $\rho = 2.13 \%$

- Para  $P_u = 25$  ton y  $\rho = 2.13\%$ , utilizando los ábacos para flexión uniaxial para columnas con acero en las cuatro caras, se obtiene:

$$\phi M_{nx} = \phi M_{ny} \approx 17.5 \text{ ton-m} \quad (\phi = 0.75)$$

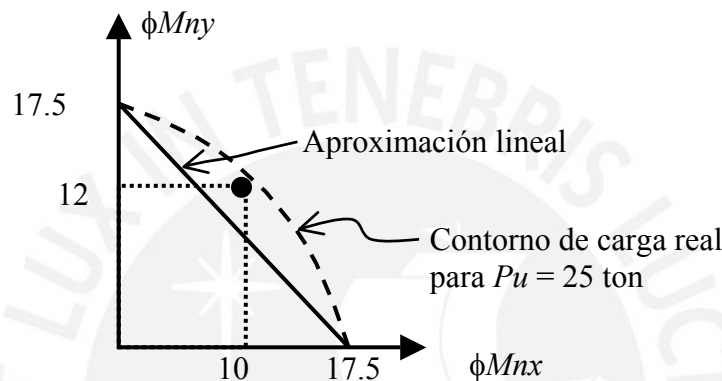
- Si calculamos la resistencia suponiendo flexión pura ( $P_u = 0$ ) se obtiene:

$$\phi M_{nx} = \phi M_{ny} \approx 18.1 \text{ ton-m} \quad (\phi = 0.9)$$

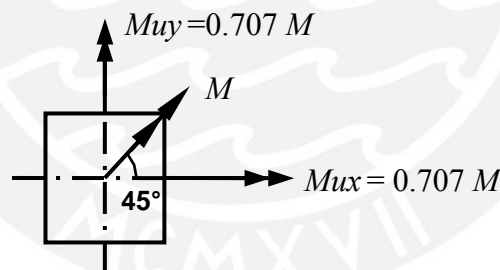
- Reemplazando valores en la ecuación de interacción:

$$\frac{10}{17.5} + \frac{12}{17.5} = 1.26 > 1 \quad \text{La sección no pasa}$$

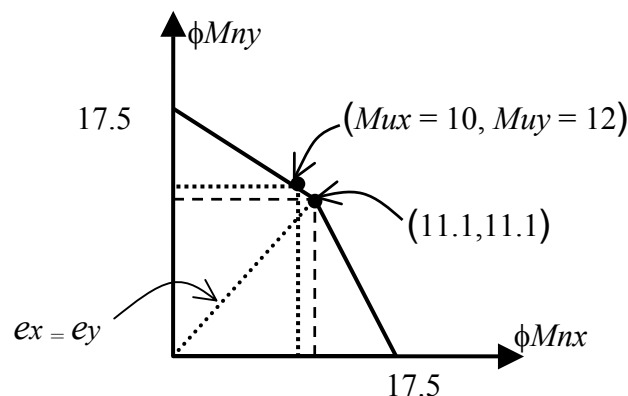
Una alternativa sería la de aumentar el área de acero, por ejemplo probar con una nueva armadura de  $4\phi 1" + 8\phi 3/4"$ . Otra posibilidad consiste en calcular un punto adicional del contorno de carga ya que sabemos que la aproximación lineal es conservadora, tal como se ilustra en la siguiente figura:



Generaremos un punto adicional del contorno de carga correspondiente al caso más simple, el de flexión a  $45^\circ$  como se muestra a continuación:



Para  $P_u = 25$  ton y una armadura de  $12\phi 3/4"$  utilizando un proceso iterativo relativamente simple, se obtiene  $\phi M_{nx} = \phi M_{ny} \approx 11.1$  ton-m. En este caso el bloque de compresiones, por la doble simetría de la sección y las armaduras y por la baja intensidad de la carga axial, es un triángulo isósceles. Con este punto adicional se puede mejorar la aproximación inicial:

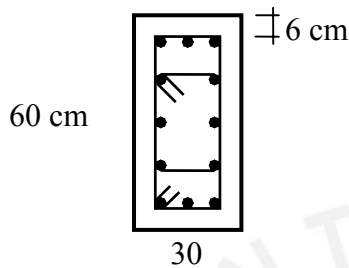


De la figura anterior es claro que la armadura supuesta ( $12\phi 3/4''$ ) es adecuada para soportar las solicitaciones externas. A manera de verificación, se calculó con la ayuda de un programa de cómputo la solución "exacta" resultando, para las solicitaciones antes indicadas, un área de acero requerida de  $33 \text{ cm}^2$  aproximadamente.

### 9.4 Influencia de la Flexión Biaxial en la Resistencia de las Columnas

Mediante el análisis de una columna particular, intentemos formarnos una idea de la influencia que puede tener la flexión biaxial en la capacidad de carga ( $P_u$ ). Para ello analicemos las siguientes columnas:

Caso I:



$$f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Armadura: } 12\phi 3/4''$$

$$A_{st} = 34.1 \text{ cm}^2 \quad \rho = 1.9\%$$

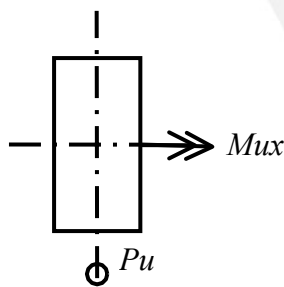
- Características generales:

$$P_o \approx 460 \text{ ton} \quad \phi P_o = 0.7 \times 460 \approx 320 \text{ t} \quad P_u \text{ max} = 0.8 \times 320 \approx 260 \text{ t}$$

$$\text{Dirección fuerte: } \phi P_b \approx 105 \text{ t} \quad \phi M_b \approx 31 \text{ t-m (condición balanceada)}$$

$$\text{Dirección débil: } \phi P_b \approx 81 \text{ t} \quad \phi M_b \approx 15 \text{ t-m (condición balanceada)}$$

- Si la columna estuviera solicitada en flexocompresión uniaxial alrededor del eje x, para la armadura antes indicada, bajo la acción de un momento flector  $M_{ux}$  de 22 t-m, la resistencia de la columna sería de 210 ton. La columna está controlada por compresión ya que la carga axial es mayor que la carga balanceada, tal como se aprecia en el diagrama de interacción para flexión uniaxial a continuación.

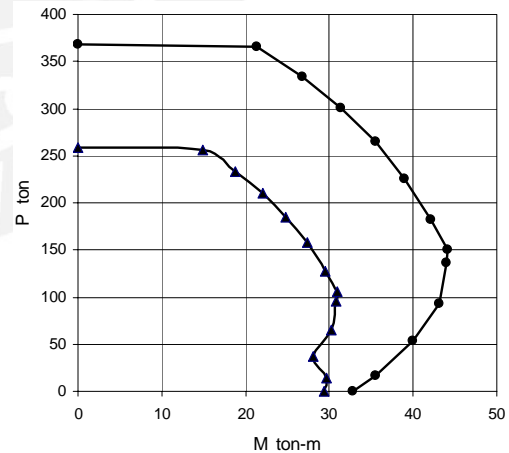


$$P_u = 210 \text{ t}$$

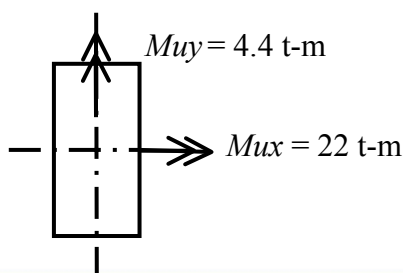
$$P_u / P_u \text{ max} \approx 0.8$$

$$M_{ux} = 22 \text{ t-m}$$

$$e_y / h \approx 0.17$$



- Supongamos ahora que conjuntamente con  $M_{ux}$  actúa un momento  $M_{uy}$  equivalente al 20% del anterior, en este caso la capacidad de carga se reduce de 210 a 175 ton, es decir una reducción del 17%.



$$A_{st} = 12\phi 3/4''$$

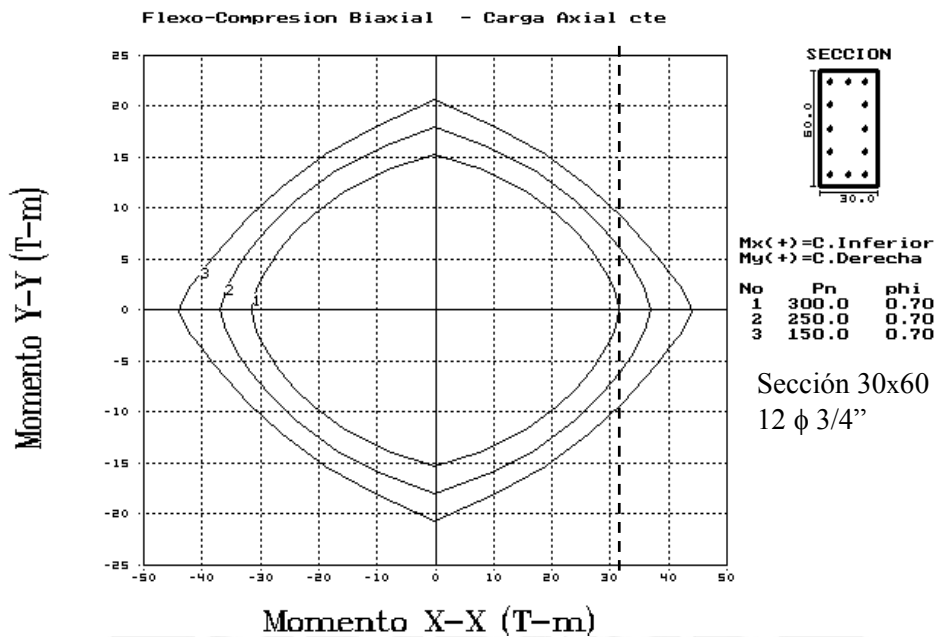
$$M_{ux} = 22 \text{ t-m}$$

$$M_{uy} = 4.4 \text{ t-m (20\% de } M_{ux})$$

$$P_u = 175 \text{ ton (17\% de reducción)}$$

- Aumentemos el momento flector  $M_{uy}$  al 30% de  $M_{ux}$ , en este caso la capacidad de carga se reduce de 210 a 105 ton, es decir una reducción del 50%. Con este nivel de reducción en la capacidad de carga, es muy probable que el coeficiente de seguridad que resta sea próximo a la unidad y por lo tanto el diseño sea inseguro. Recuerde que el coeficiente de seguridad ( $P_u / P_{servicio}$ ) es cercano a  $1.6/0.7 \approx 2.3$  lo cual significa que la carga axial en condiciones de servicio es de  $210/2.3 \approx 90$  ton y la carga resistente es 105 ton.

La figura a continuación muestra los contornos de carga constante para esta columna, para las tres intensidades de la carga axial nominal calculadas.



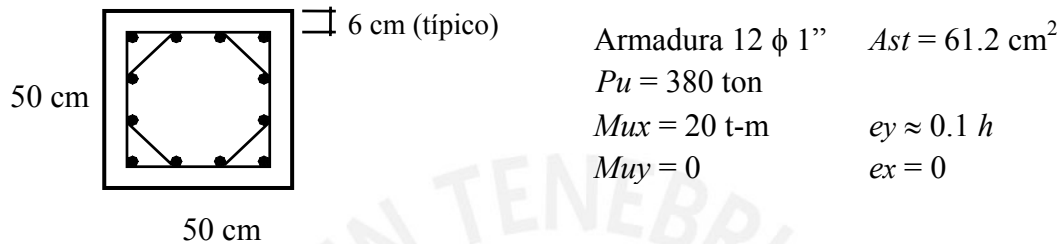
Otra forma de evaluar en este caso la influencia de la flexión biaxial, es la de suponer que tanto la carga axial como el momento flector  $M_{ux}$  son constantes e ir variando  $M_{uy}$ . Para cada una de las combinaciones  $P_u$ ,  $M_{ux}$ ,  $M_{uy}$  se calculó el área de acero necesaria, el cambio en la demanda de acero de refuerzo mide la influencia de la flexión biaxial. En la tabla a continuación se muestran los resultados, se supone que la distribución de la armadura (12 fierros) es la misma en todos los casos.

$P_u$ (ton) constante	$M_{ux}$ (t-m) constante	$M_{uy}$ (t-m) Variable	$A_{st}$ requerida (cm <sup>2</sup> )	Cuantía $\rho$	Incremento en $A_{st}$
210	22	0	34	1.9 %	--
210	22	2	36	2.0 %	7%
210	22	4	42	2.3 %	22%
210	22	6	49	2.7 %	44%
210	22	8	58	3.2 %	69%
210	22	10	67	3.7 %	98%
210	22	12	78	4.3 %	129%

**Caso 2:** Existen otras situaciones en las cuales la influencia de la flexión biaxial no es tan marcada como en el caso anterior. Para ilustrar esta situación analicemos una columna con las siguientes características y solicitaciones:

$$\begin{aligned} \text{Sección } 0.50 \times 0.50 \text{ m} & \quad f'c = 210 \text{ kg/cm}^2 \\ Pu = 380 \text{ ton} \\ Mux = 20 \text{ t-m} & \quad ey \approx 0.1 h \\ Muy = 0 & \quad ex = 0 \end{aligned}$$

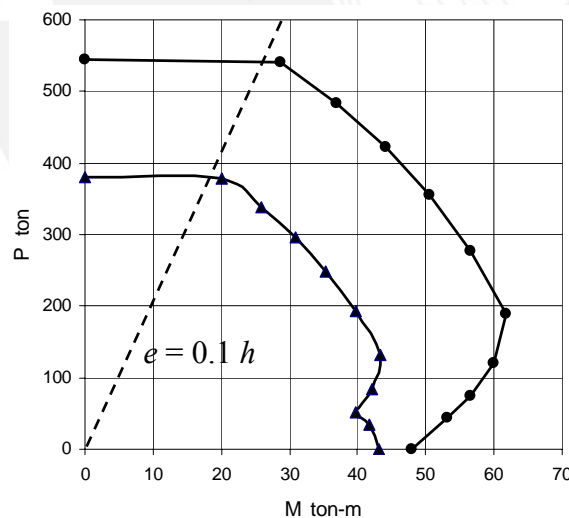
Para las características y solicitaciones indicadas, el área de acero necesaria es  $Ast \approx 62 \text{ cm}^2$ . Con el arreglo de armaduras que se indica a continuación se satisface el requerimiento de resistencia.



- Características generales:

$$\begin{aligned} Po = 692 \text{ ton} & \quad \phi Po = 0.7 \times 692 = 484 \text{ t} & \quad Pu \text{ max} = 0.8 \times 484 = 387 \text{ ton} \\ \phi Pb \approx 140 \text{ t} & \quad \phi Mb \approx 43 \text{ t-m} & \quad (\text{condición balanceada}) \end{aligned}$$

Es claro que se trata de una sección con falla en compresión, con una excentricidad pequeña. Es más, la carga actuante es cercana al máximo valor de la carga axial permitido por la Norma de 387 ton ( $Pu / Pu \text{ max} \approx 0.98$ ). El diagrama de interacción en flexión uniaxial, es el mostrado en la figura a continuación.



Para investigar la influencia de la flexión biaxial en esta sección particular, agreguemos un momento flector alrededor del eje y manteniendo constante el momento flector en x (20 t-m) y la armadura, calculemos la carga axial que es capaz de soportar la columna.

- Agreguemos  $Muy = 30\% Mux$   $Mux = 20 \text{ t-m}$   $Muy = 6 \text{ t-m}$   
 $Pu \approx 370 \text{ ton}$  (resistencia calculada)

La resistencia se redujo de 380 a 370 ton que representa un 3% de reducción en la capacidad de carga.

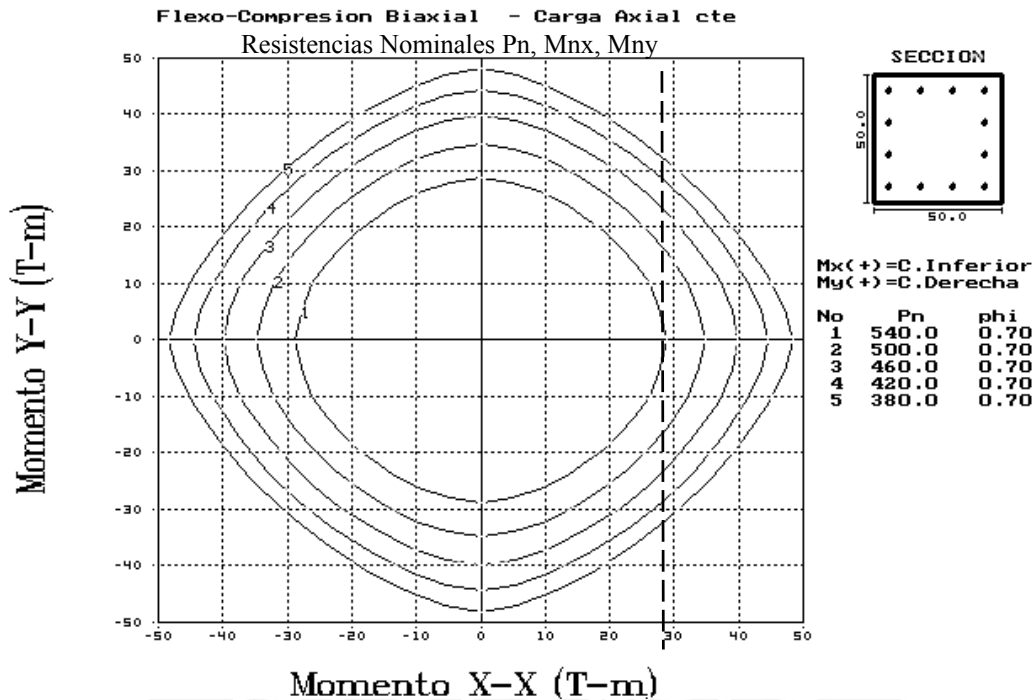
- Agreguemos  $Muy = 50\% Mux$   $Mux = 20 \text{ t-m}$   $Muy = 10 \text{ t-m}$   
 $Pu \approx 355 \text{ ton}$  (resistencia calculada)



La resistencia se redujo de 380 a 355 ton que representa un 7% de reducción en la capacidad de carga.

- Agreguemos  $M_{uy} = 100\% M_{ux}$        $M_{ux} = 20 \text{ t-m}$        $M_{uy} = 20 \text{ t-m}$   
 $P_u \approx 290 \text{ ton}$  (resistencia calculada)

La resistencia se redujo de 380 a 290 ton que representa un 24% de reducción en la capacidad de carga. La figura a continuación muestra los contornos de carga constante para esta columna, para cinco intensidades de la carga axial nominal.



Como comprobación de la aproximación que se logra con el método de Bresler, apliquemos este método al último caso analizado, es decir calculemos la resistencia de la columna ( $P_{ur}$ ) en flexión biaxial para las siguientes solicitaciones:

$$M_{ux} = 20 \text{ t-m} \quad M_{uy} = 20 \text{ t-m}$$

Para  $M_{ux} = 20$  y  $M_{uy} = 0$ , la resistencia de la columna en  $P_{ux} \approx 380 \text{ ton}$ . Dada la simetría de la sección y las armaduras, tendremos  $P_{uy} \approx 380 \text{ ton}$ , en consecuencia con la ecuación 21-4 del Bresler tendremos:

$$\frac{1}{P_{ur}} = \frac{1}{380} + \frac{1}{380} - \frac{1}{0.7 \times 692} \quad \Rightarrow P_{ur} \approx 310 \text{ ton}$$

Por lo tanto el método de Bresler predice una resistencia para esta columna en flexión biaxial de 310 ton, contra 290 ton calculado con un método "exacto". El error de Bresler en este caso es cercano al 7 %.

## CAPITULO 10

### **Diseño Unificado en Concreto Armado**

Apéndice B del Reglamento ACI 318-99

Norma ACI 318-02



#### **Lecturas:**

- 10.1 Unified Design Provisions for Reinforced and Prestressed Concrete Flexural and Compression Members. Robert F. Mast. ACI Structural Journal. March – April 1992.
- 10.2  $\phi$  Factors and Other Anomalies. William Gamble. ACI Concrete International. August 1998.
- 10.3 ACI 318-95 Appendix B: Beam Design Applications. Richard Furlong. ACI Concrete International. June 1997.
- 10.4 Unified Design Recommendations for Reinforced, Prestressed and Partially Prestressed Concrete Bending and Compression Members. Antoine Naaman. ACI Structural Journal. March - April 1992.
- 10.5 Appendix B - Unified Design Provisions for Reinforced and Prestressed Concrete Flexural and Compression Members. Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary. ACI 318-99.

## 10.1 Introducción

En el ACI 318 del año 1995 se introdujo el Apéndice B titulado “Disposiciones de diseño unificadas para elementos de Concreto Armado y Pretensado sometidos a Flexión y Compresión”. Este Apéndice se basó casi exclusivamente en el trabajo de Robert F. Mast citado en la lectura 10.1. El ACI 318 del año 1999 repitió este Apéndice sin modificaciones.

En la última edición del ACI 318 del año 2002, el Apéndice B se incorporó, con algunas modificaciones, al cuerpo de la Norma quedando sus artículos incluidos en los diversos capítulos (el ACI-02 tiene 22 capítulos y 6 Apéndices) principalmente en el Capítulo 8 (Requisitos Generales para el Análisis y Diseño), Capítulo 9 (Requerimientos de Resistencia y de Servicio), Capítulo 10 (Flexión y Carga Axial) y en el Capítulo 18 (Concreto Preesforzado).

Para poder entender mejor los cambios que se han producido el diseño de elementos de concreto armado, es conveniente revisar íntegramente el Apéndice B del ACI-99. De otro modo, sería necesario recorrer el ACI-02 en busca de los cambios que se han originado, al haberlo incluido en el cuerpo de la Norma.

Es necesario anotar que en el ACI-02 se ha introducido un nuevo Apéndice B, titulado “Disposiciones de Diseño Alternativas para Elementos de Concreto Armado y Preesforzado Sometidos a Flexión y Compresión”. Este nuevo Apéndice B contiene las disposiciones “clásicas” para diseño por flexión con o sin carga axial empleadas hasta el ACI del año 1999, es decir, el límite del refuerzo en vigas basado en el concepto de cuantía balanceada ( $0.75 A_{sb}$ ), la redistribución de momentos limitada a las secciones con cuantías por debajo de  $0.5 A_{sb}$ , la interpolación de los factores de reducción de resistencia ( $\phi$ ) para columnas con poca carga axial.

## 10.2 Disposiciones “Clásicas” hasta el ACI-99 para Elementos en Flexión

La figura 10-1 recuerda la definición de falla o condición balanceada en una sección de concreto armado, en este caso para un acero de  $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$ . Esta condición hasta el ACI-99, sirvió de base para establecer la cantidad máxima de acero permitida en una sección.

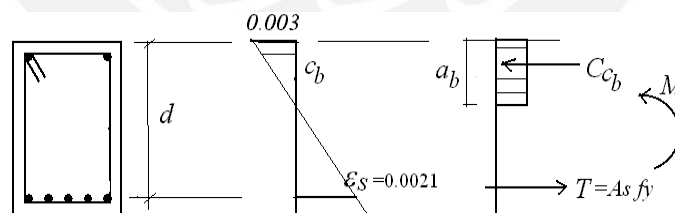


Fig. 10-1 Falla balanceada de una sección en flexión sin carga axial

Hasta el ACI-99 la cantidad máxima de acero venía limitada por la Norma mediante la expresión 10-1:

$$\rho_{max} \leq 0.75 \rho_b \quad (10-1)$$

La expresión 10-1 ha sido cuestionada a lo largo de estos apuntes, por varios motivos, uno de ellos porque estrictamente el término de cuantía ( $A_s/bd$ ) solo tiene sentido en secciones rectangulares, no es aplicable cuando el bloque comprimido de concreto no tiene una forma rectangular. Sin embargo la Norma cuando limita la cantidad máxima de acero utiliza el término cuantía. Esta limitación es fácilmente superable si la Norma, en lugar de limitar la cuantía, limitase la cantidad máxima de acero, como se indica en las ecuaciones 10-2 o en la 10-3 aplicable a secciones con acero en compresión.

$$A_s \max = 0.75 A_{sb} \quad (10-2)$$

$$A_s \max = 0.75 A_{sb} + A's f'sb/f_y \quad (10-3)$$

Es conveniente recordar que la posición del eje neutro en la falla balanceada, independientemente de la geometría de la sección, viene dada por:

$$cb/d \approx 0.588 \quad (\text{para } f_y = 4,200, \varepsilon_{cu} = 0.003) \quad (10-4)$$

En acápites anteriores, se demostró que para una sección rectangular la limitación de  $A_s \leq 0.75 A_{sb}$  equivale a:

$$c/d \leq 0.75 \times 0.588 \Rightarrow c/d \leq 0.441 \quad (\text{para } f_y = 4,200) \quad (10-5)$$

Para una sección rectangular la limitación de la Norma (hasta el año 99) en el acero máximo de tracción (ecuación 10-2), equivale indirectamente a imponer una deformación mínima en el acero de tracción. Es posible demostrar, que la deformación mínima en el acero ( $\varepsilon_s \min$ ), cuando la sección está reforzada con acero solo en tracción y considerando  $\varepsilon_{cu} = 0.003$ , es:

$$\varepsilon_s \geq 0.0038 \quad (\approx 1.8 \varepsilon_y \text{ para } f_y = 4,200) \quad (10-6)$$

Es importante recordar la máxima profundidad del eje neutro (ecuación 10-5) y la deformación mínima en el acero de tracción (ecuación 10-6) en una sección rectangular, ya que en el ACI-02 el control indirecto de la máxima cantidad de acero y del tipo de comportamiento de una sección, viene dado por la deformación del acero de tracción más alejado del borde comprimido.

### 10.3 Algunas "Inconsistencias" hasta el ACI-99

A lo largo de estos apuntes se han señalado algunas de las "inconsistencias" del ACI, a continuación se resumen las principales:

- La definición del peralte efectivo ( $d$ ) para elementos en flexión, como la distancia entre el borde comprimido y el centroide de los aceros en tracción. Esta definición es fácil de aplicar en secciones en las cuales el acero de tracción está concentrado cerca de la superficie en tracción, como suele ocurrir en las vigas. Sin embargo para secciones con acero distribuido en el alma (columnas, placas, vigas de gran peralte) no es directo el establecer cuales de los aceros (capas) están en tracción.  
Lo mismo ocurre con secciones con acero preesforzado o con combinaciones de acero convencional con preesforzado. En estos casos la norma toma una definición distinta del peralte efectivo (en preesforzado la llama  $dp$ ).
- La definición de la cuantía balanceada a partir de la cual se fija el acero máximo. En algunas situaciones es necesario "estirar" este concepto, como por ejemplo en las secciones con acero distribuido en el alma (véase la sección 5.3) o el tener que definir un nivel de carga axial ( $0.1 f'c A_g$ ) para diferenciar una viga de una columna ya que, para elementos en flexión los límites son distintos que para elementos en flexocompresión, es decir en elementos con carga axial (columnas) se permite colocar una mayor cantidad de acero de refuerzo (hasta un 8% según el ACI).
- El limitar las armaduras como una fracción de la cuantía balanceada. Esta limitación tiene por objeto asegurar un cierto nivel de comportamiento dúctil, asegurando que el acero de refuerzo entrará en fluencia antes de que el concreto alcance su deformación de agotamiento o rotura.

Sin embargo para el acero máximo permitido, la deformación en el acero depende de la forma del bloque comprimido de concreto, es decir la deformación en el acero de tracción no es uniforme, depende de la forma del bloque comprimido y por lo tanto la ductilidad de curvatura será distinta aún en elementos con igual peralte efectivo. Basta

comparar la curvatura última de tres secciones: triangular, rectangular y T, las tres reforzadas con  $0.75 A_{sb}$  y con el mismo peralte efectivo, la de mayor curvatura última será la sección T, le seguirá la rectangular y finalmente la menos dúctil será la triangular, a pesar que las tres cumplen con el límite de la Norma.

- El mismo término de cuantía, que en algunas geometrías no es aplicable. Por ejemplo secciones triangulares en flexión, secciones circulares, etc. Adicionalmente las secciones preesforzadas tenían sus propias definiciones de cuantías, distintas a las reforzadas con acero convencional.
- La Norma especifica límites del refuerzo distintos para secciones de concreto armado y preesforzado.
- Expresiones (límites) distintas para la redistribución de momentos en concreto armado y preesforzado.
- Interpolación de los factores  $\phi$  para columnas con baja carga axial. Los diagramas de interacción que resultan al aplicar la interpolación en los factores de reducción de resistencia, presentan una “colita” en la zona de cargas axiales bajas. Esta “colita” no tiene sentido físico, la inconsistencia estriba en que en esta zona, al aumentar la carga axial la resistencia en flexión se reduce, situación que no se produce en los diagramas de resistencia nominal.

#### **10.4 Conceptos Centrales del Diseño Unificado**

- Se elimina el concepto de cuantía balanceada y la limitación de la cantidad máxima de acero como una fracción de esta.
- El concepto de elementos en flexión (vigas) se ha remplazado por el de secciones controladas por tracción.
- Se define el concepto de secciones controladas por compresión. En este tipo de secciones, normalmente columnas con cargas axiales altas, el comportamiento está gobernado por el agotamiento ( $\epsilon_{cu}$ ) del concreto en compresión, sin que el acero de tracción haya llegado a la fluencia.
- Las secciones controladas por tracción o por compresión, se definen en función de la magnitud de la deformación del acero más alejado del borde comprimido cuando la sección alcanza su resistencia nominal.
- Las hipótesis y metodologías para el cálculo de las resistencias nominales de secciones en flexión simple o compuesta, no se ha modificado.
- Los factores de Reducción de Resistencia ( $\phi$ ) dependen de la deformación neta del acero ( $\epsilon_t$ ) más alejado del borde comprimido cuando la sección desarrolla su resistencia nominal ( $M_n$ ). En consecuencia los factores dependerán del comportamiento de la sección, es decir, si se trata de una sección controlada por tracción o por compresión.
- La deformación neta del acero ( $\epsilon_t$ ) más alejado del borde comprimido cuando la sección desarrolla su resistencia nominal ( $M_n$ ), es una medida del comportamiento de la sección al alcanzar su resistencia máxima. También puede ser una medida de alerta, bajo cargas de servicio, de posibles problemas de deflexiones excesivas o agrietamiento excesivo.
- Las disposiciones son igualmente aplicables a vigas y columnas de cualquier geometría y arreglo o distribución del refuerzo y combinaciones de refuerzo convencional y preesforzado.

### 10.5 Nuevas definiciones en el ACI-02

- Se elimina, para flexión simple y compuesta, la definición tradicional de peralte efectivo  $d$ . Esta se reemplaza por  $dt$ , la distancia entre la fibra extrema en compresión y el centroide del acero de refuerzo más alejado. La figura 10-2 ilustra la nueva definición.

Sin embargo, para cortante y torsión el ACI-02 ha retenido la definición clásica de peralte efectivo ( $d$ ).

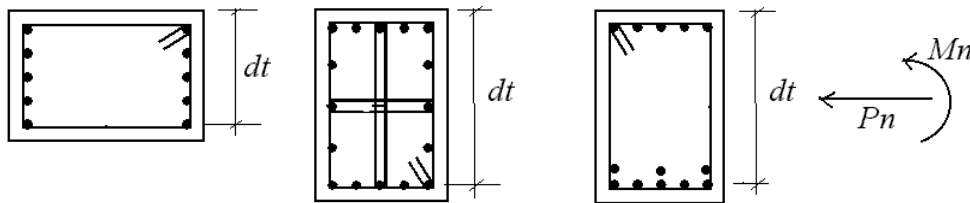


Fig. 10-2 Definición de  $dt$

- Deformación neta  $\epsilon_t$  en el acero de tracción. Se define como la deformación neta en el acero más alejado cuando la sección alcanza su resistencia nominal. Se excluyen las deformaciones en el acero debidas al preesfuerzo, flujo plástico, retracción, cambios de temperatura.
- Secciones controladas por compresión, por tracción o de transición. Las secciones se clasifican de acuerdo a la magnitud de  $\epsilon_t$  cuando alcanzan o desarrollan su Resistencia Nominal, tal como se indica en la figura 10-3.

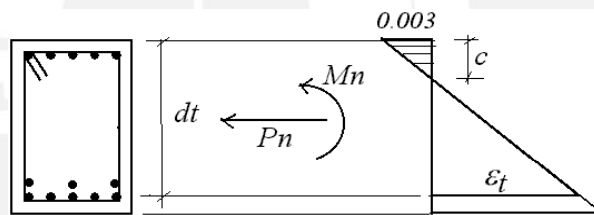


Fig. 10-3 Comportamiento de una sección definido por  $\epsilon_t$

Para cualquier geometría y distribución del acero de refuerzo, la relación entre la profundidad del eje neutro y la deformación en el acero más alejado, viene dado por la ecuación 10-7 (asumiendo  $\epsilon_{cu} = 0.003$ ), la cual es una relación del tipo geométrico:

$$c/dt = 0.003/(0.003 + \epsilon_t) \quad (10-7)$$

$$\epsilon_t = 0.003 (dt/c - 1) \quad (10-8)$$

Dependiendo del valor de  $\epsilon_t$ , las secciones pueden ser:

- Secciones Balanceadas:** Cuando  $\epsilon_t = \epsilon_y$ . Esta definición es igual a la clásica empleada en estos apuntes, correspondiente a secciones con falla balanceada.

$$\epsilon_t = f_y / E_s \quad \epsilon_t = 0.0021 \quad (\text{para } f_y = 4,200)$$

Equivale a:  $c/dt \approx 0.588$  (para  $f_y = 4,200$ ) (10-9)

- Secciones Controladas por Compresión:** Cuando  $\epsilon_t \leq \epsilon_y$ . Esta definición es similar a la de secciones sobre reforzadas o secciones con falla en compresión.

$$\epsilon_t \leq f_y / E_s \quad \epsilon_t \leq 0.0021 \quad (\text{para } f_y = 4,200)$$

Equivale a:  $c/dt \geq 0.588$  (para  $f_y = 4,200$ ) (10-10)

Para las secciones controladas por compresión, el factor de reducción de resistencia que deberá considerarse es:

$$\phi = 0.70 \quad (\text{elementos con estribos})$$

$$\phi = 0.75 \quad (\text{elementos con espirales que cumplan con 20.4.1})$$

c) **Secciones Controladas por Tracción:** Cuando  $\epsilon_t \geq 0.005$ . Nótese que esta limitación es independiente de la calidad del acero.

$$\epsilon_t \geq 0.005 \text{ (independiente de } f_y) \quad \text{para } f_y = 4,200 \quad \epsilon_t \geq 2.38 \epsilon_y$$

Equivale a:  $c/dt \leq 0.375$  (10-11)

Para las secciones controladas por tracción, el factor de reducción de resistencia que deberá considerarse es:

$$\phi = 0.9$$

d) **Secciones de Transición**

$$\epsilon_y / E_s < \epsilon_t < 0.005$$

$$0.375 < c/dt < 0.588 \quad (10-12)$$

Para las secciones de transición, el factor de reducción de resistencia es variable y puede obtenerse por interpolación lineal como se muestra en la figura 10-4 para  $f_y = 4,200$ .

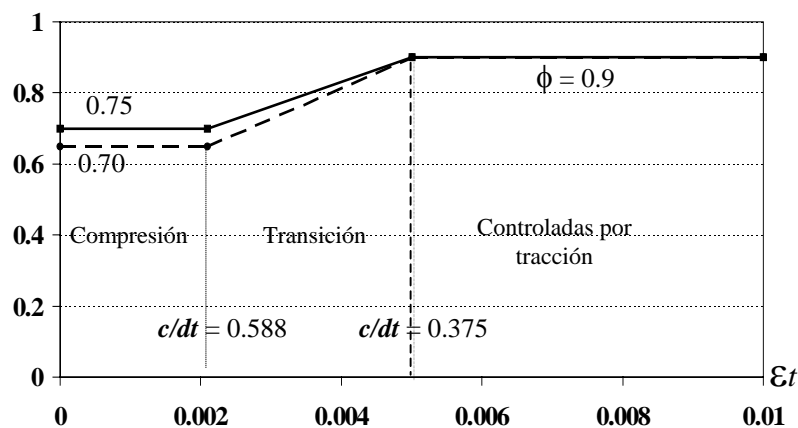


Fig. 10-4 Valores de  $\phi$  para las secciones de transición ( $f_y = 4200$ )

$$\phi = 0.555 + 69 \epsilon_t \leq 0.9 \quad (\text{secciones con estribos y } f_y = 4,200) \quad (10-13)$$

$$\phi = 0.641 + 51.7 \epsilon_t \leq 0.9 \quad (\text{secciones con espirales y } f_y = 4,200) \quad (10-14)$$

### 10.6 Disposiciones para Vigas del ACI-02

- Se considera a una sección como viga si:  $P_u < 0.1 f'_c A_g$ . Esta limitación no estuvo presente en el Apéndice B del ACI-99, al parecer el ACI-02 resolvió insistir con este límite arbitrario para diferenciar una viga de una columna.
- La deformación mínima del acero en tracción cuando la sección alcanza su resistencia nominal deberá ser  $\epsilon_t \geq 0.004$ . Este límite inferior para la deformación del acero, no estuvo presente en el Apéndice B del ACI-99, en teoría se podían diseñar vigas con secciones controladas por compresión o de transición, reduciendo el valor de  $\phi$  como se indica en la figura 10-4, sin embargo esto no resultaría económico ya que al reducir  $\phi$ , se reduce la resistencia de diseño y obliga a colocar aún más acero.

Al parecer el ACI-02 resolvió mantener la "tradición" e intentar garantizar por medio de esta limitación, un cierto nivel de ductilidad mínima en las secciones de vigas.

Las consecuencias de imponer este límite en la deformación del acero son:

- a) Obliga a que  $c/dt \leq 0.43$  (para cualquier valor de  $f_y$ )
- b) Para una sección rectangular con  $f_y=4200$ , equivale a limitar el área de acero a un máximo de:  $A_s \leq 0.72 A_{sb}$ .

Sin embargo, para un valor de  $\epsilon_t = 0.004$  el valor del factor de reducción de resistencia que resulta de emplear la ecuación 10.13 es  $\phi \approx 0.83$ .

En general, las vigas deberían diseñarse para lograr que  $\epsilon_t \geq 0.005$  y así poder utilizar el valor de  $\phi = 0.9$ . En secciones rectangulares para lograr que  $\epsilon_t \geq 0.005$  es necesario limitar:

$$A_s < 0.63 A_{sb} \quad (\text{para } f_y=4200) \quad c/dt \leq 0.375$$

Aumentar el área de acero por encima de  $0.63 A_{sb}$  no es conveniente ya que  $\phi$  se reduce y no se gana resistencia de diseño. Mejor es agregar acero en compresión para levantar el eje neutro y lograr que la sección sea del tipo controlada por tracción.

En la tabla a continuación se comparan los aceros máximos en vigas para secciones rectangulares con  $f_y = 4,200$ . EL ACI-02 permite un 15% menos de acero máximo

$f'c$	ACI - 99 (1)		ACI - 02 (2)	
	$A_s$ max	$c/dt$	$A_s$ max	$c/dt$
210	1.59%	0.441	1.35%	0.375
280	2.13%	0.441	1.81%	0.375
350	2.50%	0.441	2.13%	0.375

- (1) Calculado para  $0.75 A_{sb}$
- (2) Calculado para  $\epsilon_t = 0.005$

### 10.7 Redistribución de Momentos

La redistribución de momentos flectores se explicó en el Capítulo 8. El ACI-02 ha modificado las expresiones que se utilizaron durante muchos años para redistribuir momentos, sin embargo no ha modificado el máximo de redistribución aceptado (20%).

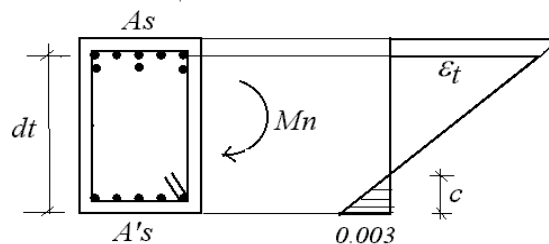


Fig. 10-5 Redistribución de momentos negativos

Con relación a la figura 10-5, es posible redistribuir solo si en la sección en la cual se reduce el momento negativo se cumple:

$$\epsilon_t \geq 0.0075 \quad (\approx 3.8 \epsilon_y) \quad \text{Independiente del valor de } f_y$$

Equivale a:  $c/dt \leq 0.29$

En una sección rectangular, sin acero en compresión, lo anterior equivale a limitar el área de acero a:  $A_s \leq 0.48 A_{sb}$  (para  $f_y = 4,200$ ).



El porcentaje de redistribución permitido es :

$$\Delta M = 1,000 \varepsilon t \% \leq 20\% \quad (10-15)$$

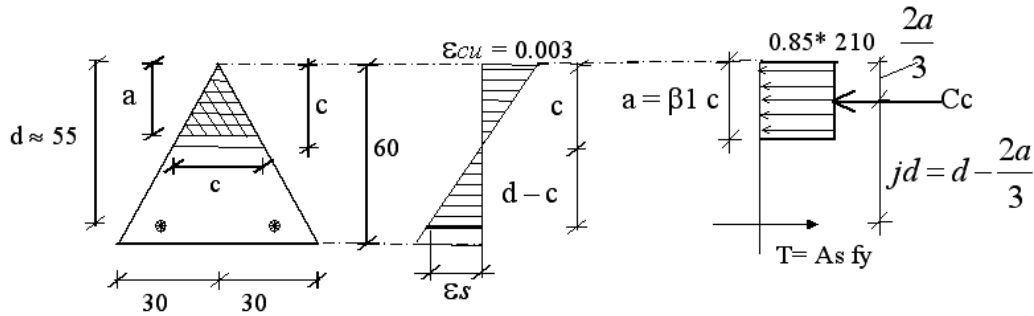
Esta expresión se aplica tanto a elementos de concreto armado como a elementos preesforzados. Como siempre la redistribución no es aplicable a elementos isostáticos, vigas analizadas por el método de coeficientes y losas en dos sentidos analizadas por el Método Directo.

### **10.8 Ventajas del Diseño Unificado adoptado por el ACI-02**

A continuación se señalan algunas de las ventajas de haber adoptado el llamado “diseño unificado”:

- Se da el mismo tratamiento para secciones en flexión y flexocompresión.
- Se ha introducido el concepto de secciones controladas por compresión y el de secciones controladas por tracción.
- Se cubre con facilidad la distinción de secciones con falla en tracción (las que antes se denominaban sub reforzadas) y las de falla por compresión (antes, sobre reforzadas) de cualquier geometría
- Se cubre con facilidad la definición de secciones con falla en tracción o compresión en los casos de flexión biaxial.
- Con los mismos conceptos o definiciones se cubre la gama del concreto reforzado, preesforzado y combinaciones de ambos.
- Se cubre con facilidad el caso de acero en varias capas o niveles.
- Se cubren con facilidad las Secciones Compuestas.
- Se ha corregido o mejorado la interpolación de los factores de reducción de resistencia en las columnas controladas por tracción.
- Se utilizan las mismas expresiones para la redistribución de momentos tanto en elementos de concreto armado como en elementos preesforzados.
- Se ha eliminado el concepto de cuantía o acero balanceado y en consecuencia también el límite absoluto en la cantidad de acero de tracción ( $0.75 A_{sb}$ ). En consecuencia, ya no es necesario el contar con diversas expresiones o ecuaciones particulares, para cada geometría y arreglo de los aceros de refuerzo, para el cálculo de  $A_{sb}$ .
- Se ha creado una dependencia entre el factor de reducción de resistencia y el comportamiento de la sección cuando esta alcanza su resistencia nominal.
- El haber adoptado una definición de secciones controladas por tracción basado en la magnitud de la deformación del acero, conduce a que secciones con geometría distinta pero con el mismo valor de  $dt$ , tengan la misma curvatura última cuando el valor de  $\varepsilon t$  se fija en el mínimo aceptado (0.005). Esto se puede comprobar si se examina las ecuaciones 10-7 y 10-11 conjuntamente con la definición de curvatura máxima ( $\varepsilon_{cu} / c$ ), a igualdad de  $dt$  se tendrá la misma curvatura, independientemente de la forma de la sección.
- Para las secciones en flexión simple o compuesta se ha eliminado el concepto tradicional de peralte efectivo reemplazándolo por  $dt$ , el cual se puede calcular sin ambigüedades.

**Ejemplo 10-1** – Apliquemos las ideas del diseño unificado a la sección triangular que se muestra a continuación y que fue resuelta en el Capítulo de Flexión Simple. La sección está reforzada con 2 fierros de 1" ( $A_s = 10.2 \text{ cm}^2$ ) siendo  $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$  y  $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$ .



La primera dificultad que surge al aplicar el ACI-99 es la relativa a la definición de cuantía en flexión. Esta dificultad ya la hemos comentado, sin embargo para resolver el problema podemos obviar esta definición.

Para el cálculo de la resistencia nominal no hay diferencias entre el ACI-99 y el ACI-02, por lo tanto tendremos:

$$T = A_s f_y = 10.2 \times 4,200 = 42,840 \text{ kg}$$

$$C_c = T$$

$$C_c = 0.85 \times 210 \times a^2 / 2 = 42,840 \text{ kg} \Rightarrow a = 21.91 \text{ cm}$$

$$c = a / 0.85 = 25.78 \text{ cm}$$

$$c/d \approx 0.47 < 0.588 \quad (\text{el acero fluye})$$

$$\epsilon_s \approx 0.0034 \approx 1.62 \epsilon_y$$

$$M_n = C_c \times jd = T \times jd = A_s \times f_y \times jd$$

$$M_n = 42,840 \times 40.39/100 = 17,305 \text{ kg-m}$$

$$\phi_u = 0.003 / 25.78 \approx 11.6 \times 10^{-3} \text{ 1/m} \quad (\text{curvatura última})$$

- Con el ACI-99 y Norma Peruana:

$$0.75 A_{sb} \approx 12 \text{ cm}^2 \Rightarrow 2 \text{ fierros } 1'' \text{ ok}$$

$$\phi M_n = 0.9 \times 17,305 \approx 15,575 \text{ kg-m}$$

Si colocáramos una armadura equivalente a  $0.75 A_{sb}$  ( $12 \text{ cm}^2$ ) la posición del eje neutro estaría en  $c = 27.96 \text{ cm}$  ( $c/d = 0.51$ ) y la deformación en el acero sería  $\epsilon_s \approx 0.0029$  ( $\approx 1.4 \epsilon_y$ ). La curvatura última de la sección es de  $10.7 \times 10^{-3} \text{ 1/m}$ . En esta situación, la deformación en el acero que resulta es inconsistente con respecto a las secciones rectangulares armadas con  $0.75 A_{sb}$ .

- Con el Apéndice B del ACI-99:  $dt = d = 0.55 \text{ m}$   $c/dt \approx 0.47$   $\epsilon_t \approx 0.0034$

Este Apéndice no impone ningún límite mínimo a la deformación del acero en tracción, por lo tanto esta sección clasificaría como una de transición y el factor  $\phi$ , calculado con 23-13, es:

$$\phi = 0.555 + 69 * 0.0034 \approx 0.79$$

$$\phi M_n = 0.79 \times 17,305 \approx 13,670 \text{ kg-m} \quad (-12\%)$$

- Con el ACI-02:  $dt = d = 0.55 \text{ m}$   $c/dt \approx 0.47$   $\epsilon_t \approx 0.0034$ .

La sección no se acepta ya que  $\epsilon_s < 0.004$  ó lo que es equivalente  $c/dt > 0.43$ . Las alternativas son las de aumentar la calidad del concreto o la de colocar acero en compresión.

Calculemos la cantidad máxima de acero en tracción que se podría colocar en esta sección para que pueda considerarse como controlada por tracción. En el límite tendremos que  $\epsilon_t = 0.005$  y  $c/d_t = 0.375$ , por lo tanto:

$$c_{\max} = 0.375 \times 55 = 20.625 \text{ cm} \quad a_{\max} = 0.85 c_{\max}$$

$$0.85 \times 210 \times a_{\max}^2 / 2 = A_s f_y$$

$$A_s = 6.53 \text{ cm}^2$$

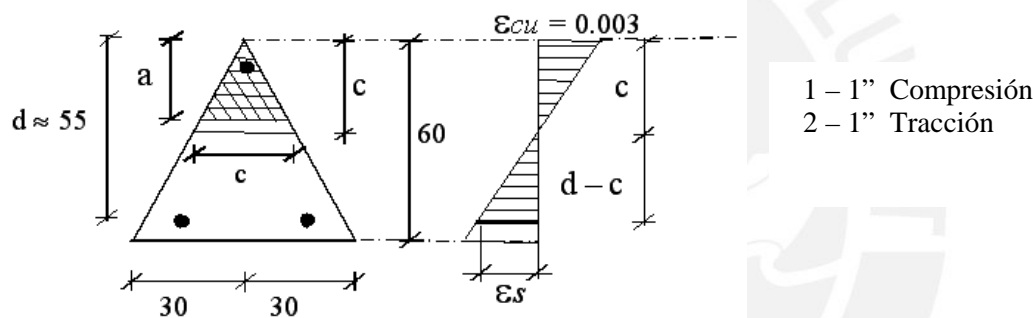
$$\phi M_n = 10,690 \text{ kg-m} \quad (\phi = 0.9)$$

$$\phi u = 0.003 / 20.625 \approx 14.5 \times 10^{-3} \text{ 1/m} \quad (\text{curvatura última})$$

Es claro que con el ACI-02 la cantidad máxima de acero que podríamos colocar en esta sección, para que pueda considerarse como controlada por tracción, es bastante menor que la permitida hasta el ACI-99 correspondiente a  $0.75 A_{sb}$  ( $12 \text{ cm}^2$ ).

También se aprecia que en este caso la curvatura última mínima, que puede ser una medida de la ductilidad de la sección, exigida por el ACI-02, es bastante más alta de la que se obtiene al limitar el acero a  $0.75 A_{sb}$ .

**Ejemplo 10-2** – Veamos como se modifica el comportamiento de la sección triangular del ejemplo 10-1 al agregar 1 fierro de 1" ( $A_s = 5.1 \text{ cm}^2$ ) en compresión.



Asumiendo, con cargo a verificar, que tanto el acero en tracción como el de compresión están en fluencia cuando la sección alcanza su resistencia nominal, se tiene:

$$0.85 \times 210 \times a^2 / 2 + 5.1 \times 4,200 = 10.2 \times 4,200$$

$$a = 15.49 \text{ cm} \quad c = 18.23 \text{ cm} \quad c/d_t \approx 0.33$$

$$\epsilon'_s = 0.002177 \approx 1.037 \epsilon_y$$

$$\epsilon_t = \epsilon_s = 0.00605 \approx 2.9 \epsilon_y$$

$$C_c = 21,415 \text{ kg} \quad (\text{compresión resultante en el concreto})$$

$$M_n = 5.1 \times 4200 \times 50 + 21,415 \times (55 - 2 \times 15.49/3) = 20,280 \text{ kg-m} \quad (\text{mom. respecto de } A_s)$$

$$\phi u = 0.003/18.23 \approx 16.5 \times 10^{-3} \text{ 1/m} \quad (\text{curvatura última})$$

- Con el ACI-02:  $d_t = d = 0.55 \text{ m}$   $c/d_t \approx 0.33$   $\epsilon_t \approx 0.00605$ .

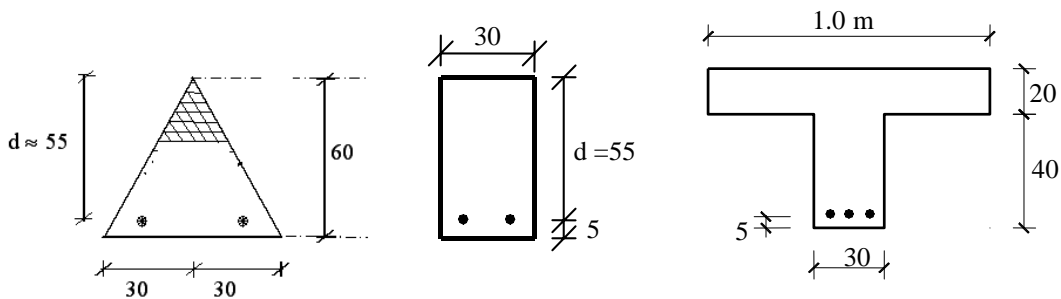
Se trata de una sección controlada por tracción ( $\epsilon_t > 0.005$   $c/d_t < 0.375$ ) en consecuencia puede emplearse  $\phi = 0.9$ .

$$\phi M_n \approx 0.9 \times 20,280 = 18,250 \text{ ton-m} \quad (+17\% \text{ con respecto al ejemplo 23-1})$$

Conclusión: El acero en compresión modifica la posición del eje neutro y en este caso convirtió la sección de la zona de transición y no aceptada por el ACI-02 en una sección controlada por tracción.

En este caso el acero en compresión, a diferencia de las secciones rectangulares, ha modificado de manera apreciable la resistencia de la sección. También su presencia ha aumentado la curvatura última de  $11.6$  a  $16.5 \times 10^{-3} \text{ 1/m}$ .

**Ejemplo 10-3** – Comparemos el comportamiento de tres secciones con distintas geometrías del bloque comprimido, pero con el mismo peralte efectivo ( $d = dt = 0.55 \text{ m}$ ). Las tres secciones tendrán la armadura en tracción máxima permitida tanto por el ACI-99 como por el ACI-02. El concreto es de  $210 \text{ kg/cm}^2$  y el acero de  $4,200$ .



**ACI-99**

Sección	$A_s \text{ (cm}^2\text{)} (*)$	$c \text{ (cm)}$	$c / dt$	$\epsilon_t$	$\phi Mn \text{ (ton-m)}$	$\phi u \text{ (1/m x } 10^{-3}\text{)}$
Triangular	12.0	27.96	0.51	1.4 $\epsilon_y$	15.1	10.7
Rectangular	26.3	24.27	0.44	1.8 $\epsilon_y$	44.4	12.4
Sección T	70.9	19.63	0.36	2.6 $\epsilon_y$	125.0	15.3

(\*) Corresponde a  $0.75 A_s b$

**ACI-02**

Sección	$A_s \text{ (cm}^2\text{)} (*)$	$c \text{ (cm)}$	$c / dt$	$\epsilon_t$	$\phi Mn \text{ (ton-m)}$	$\phi u \text{ (1/m x } 10^{-3}\text{)}$
Triangular	6.5	20.63	0.375	2.4 $\epsilon_y$	10.7 (-29%)	14.6
Rectangular	22.3	20.63	0.375	2.4 $\epsilon_y$	39.0 (-12%)	14.6
Sección T	74.5	20.63	0.375	2.4 $\epsilon_y$	130.2 (+4%)	14.6

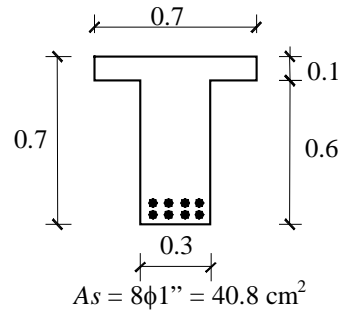
(\*) Corresponde a una deformación  $\epsilon_t = 0.005$

Nótese que la armadura máxima permitida por el ACI-02, para que la sección clasifique como controlada por tracción, es menor que la permitida por el ACI-99 tanto para la sección triangular como para la rectangular. Sin embargo permite un poco más de acero en la sección T. La sección triangular es la más afectada ya que con el ACI-02 la resistencia nominal máxima que puede alcanzar es alrededor del 70% de la que permitiría el ACI-99.

También es claro que la profundidad del eje neutro cuando la sección alcanza su resistencia nominal es la misma para las tres secciones de acuerdo al ACI-02. Lo mismo sucede con la curvatura última de la sección, en consecuencia las tres secciones, en teoría, alcanzan la misma curvatura en la falla mientras que en el ACI-99, las curvaturas últimas son distintas y en consecuencia también lo serán las ductilidades de curvatura.

Por lo tanto si la intención de la Norma al limitar el acero (ACI-99), o imponer una deformación mínima (ACI-02) tiene por objeto asegurar un cierto nivel de comportamiento dúctil en la sección, el ACI-02 es más uniforme o consistente.

**Ejemplo 10-4** – Apliquemos las ideas del diseño unificado a la sección T que se muestra a continuación y que fue resuelta en el Capítulo Vigas T. Se trata de una sección con una ala en compresión pequeña y con una armadura de tracción importante. La sección está reforzada con 8 fierros de 1” ( $A_s = 40.8 \text{ cm}^2$ ) siendo  $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$  y  $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$



- Con el ACI-99 y Norma Peruana:

$$d \approx 61 \text{ cm}$$

$$A_{sb \text{ max}} = 0.75 A_{sb} \approx 42 \text{ cm}^2$$

$$c \approx 22 \text{ cm} \quad c/d = 22/61 = 0.36 < 0.588 \quad \text{se comprueba que el acero fluye}$$

$$M_n \approx 91.6 \text{ ton-m} \quad \phi M_n \approx 82.4 \text{ ton-m}$$

- Con el ACI-02:

$$dt \approx 64 \text{ cm}$$

Deformación en el acero más alejado del borde comprimido (asociado a  $dt$ ):

$$\epsilon_t \approx 0.00574 \approx 2.73 \epsilon_y$$

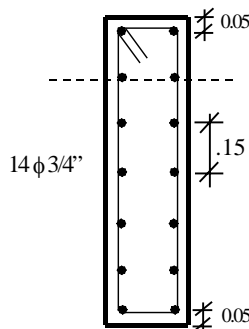
$$c/dt \approx 22/64 \approx 0.34 \quad (c/dt < 0.375)$$

Por lo tanto se trata de una sección controlada por tracción  $\phi = 0.9$

$$\phi M_n \approx 82.4 \text{ ton-m}$$

Conclusión: Las secciones T, aún con alas pequeñas, normalmente cumplirán con el ACI-02 y no habrá diferencias en el cálculo de la resistencia de diseño con respecto al ACI-99.

**Ejemplo 10-5** – Analizaremos la sección con acero distribuido en el alma que se muestra a continuación. Esta sección fue analizada en el acápite 5.4.1



Sección 0.30 x 1.0

$$f'_c = 210$$

$$f_y = 4,200$$

Armadura total 14 barras de 3/4" a 0.15 m

- Con el ACI-99 y Norma Peruana:

El primer problema que encontramos es el de definir el peralte efectivo  $d$ . Este hay que calcularlo como el centroide de las fuerzas en los aceros en tracción, para ello hay que determinar las deformaciones y esfuerzos reales del acero en tracción (aquellos ubicados debajo del eje neutro) cuando la sección alcanza su resistencia nominal en flexión. Este procedimiento se utilizó en la sección 5.4.1 resultando en un valor  $d = 65 \text{ cm}$ .

El siguiente problema que encontramos está relacionado con el cálculo de la cuantía balanceada para esta sección, ya que a partir de este valor la Norma fija la cantidad máxima de acero. Para solucionar este inconveniente, puede utilizarse la metodología presentada en la sección 5.3 en la cual “estiramos” un tanto la definición.

Resultados del análisis:

$$c \approx 20.67 \text{ cm}$$

$$\varepsilon \approx 0.0108 \approx 5.1 \varepsilon_y \quad (\text{deformación en el acero inferior})$$

$$\phi Mn \approx 61 \text{ ton-m}$$

- Con el ACI-02:

$$dt \approx 95 \text{ cm}$$

$$\varepsilon_t \approx 0.0108 > 0.005$$

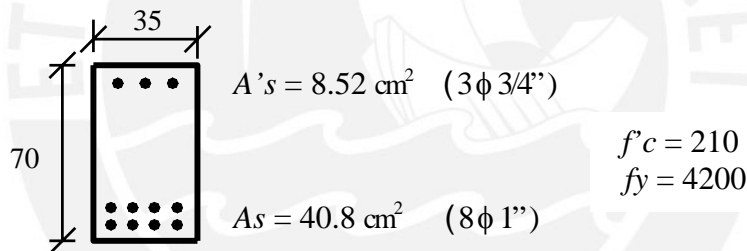
$$c/dt \approx 20.67 / 95 \approx 0.22 \quad (c/dt < 0.375)$$

Por lo tanto se trata de una sección controlada por tracción  $\phi = 0.9$

$$\phi Mn \approx 61 \text{ ton-m}$$

Conclusión: El tratamiento de este tipo de secciones con acero distribuido en el alma es más simple y consistente con el ACI-02.

**Ejemplo 10-6** - Sección con acero en compresión. Esta sección fue diseñada en el Capítulo Secciones con Acero en Compresión, para una resistencia requerida ( $M_u$ ) de 80 ton-m, con los resultados del diseño, verifiquemos la resistencia de la sección.



- Con el ACI-99 y Norma Peruana:

$$d \approx 61 \text{ cm} \quad d' \approx 6 \text{ cm}$$

$$c = 25.53 \text{ cm} \quad c/d = 0.418$$

$$\varepsilon_s = 0.00417 \quad (\text{calculado a la altura del centroide del acero en tracción})$$

$$Mn \approx 87.67 \text{ ton-m} \quad (\text{calculado con } d = 61 \text{ cm})$$

$$\phi Mn = 0.9 \times 87.67 = 78.9 \text{ t-m}$$

Cantidad máxima de acero:  $A_s \text{ max} = 0.75 A_s^b + A's f'_c / f_y \approx 42.6 \text{ cm}^2$  ok los 8 de 1''

- Con ACI-02:

$$dt \approx 63.8 \text{ cm} \quad c = 25.53 \text{ cm} \quad c/dt = 0.40 > 0.375$$

$$\varepsilon_t \approx 0.0045 < 0.005$$

Se trata de una sección de transición con  $\phi = 0.555 + 69 \times 0.0045 \approx 0.87$

$$\phi Mn = 0.87 \times 87.67 \approx 75.9 \text{ t-m}$$

Conclusión: Para lograr que  $\varepsilon_t > 0.005$  es necesario reformular el diseño de secciones con acero en compresión, reduciendo, por ejemplo la cantidad máxima de acero en tracción que debe equilibrar el concreto (se podría reducir a  $0.7 A_s^b$  en lugar de  $0.75 A_s^b$ ) Otra posibilidad es la de aumentar el acero en compresión, por ejemplo, si se aumentara

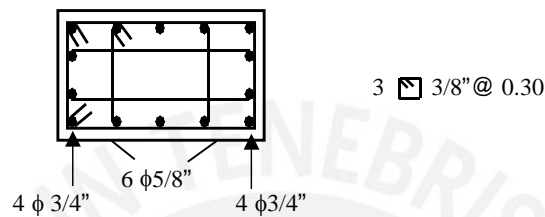
el acero en compresión a 2-1" + 1-3/4" ( $A's = 13.04 \text{ cm}^2$ ) sin modificar el acero en tracción, se tendría:

$$dt \approx 63.8 \text{ cm} \quad c \approx 22 \text{ cm} \quad \epsilon_t \approx 0.0057 \Rightarrow \phi = 0.90$$

$$Mn \approx 90.36 \text{ ton-m} \quad (\text{calculado con } d = 61 \text{ cm})$$

$$\phi Mn = 0.9 \times 90.36 \approx 81.3 \text{ t-m}$$

**Ejemplo 10-7** - Estudiemos el efecto que tiene en los diagramas de interacción el haber adoptado factores de reducción de resistencia dependientes de la deformación en el acero  $\epsilon_t$ . Para ello consideremos una columna de 0.40x0.80 con flexión alrededor de su eje fuerte (resuelta en el Capítulo Flexocompresión) armada con 8  $\phi$  3/4" + 6  $\phi$  5/8" ( $A_{st} = 34.72 \text{ cm}^2$ ,  $\rho \approx 1.1 \%$ ) y concreto  $f'c = 210$ .



La tabla a continuación resume los valores de la resistencia nominal de la sección para distintas posiciones del eje neutro. También se indican los valores de los factores de reducción de resistencia calculados. Con el ACI-99 la interpolación de los factores se inicia para una carga axial inferior a  $0.1 f'c A_g$  mientras que para el ACI-02, los factores dependen de la deformación en el acero más alejado del borde comprimido. Es claro que los factores son distintos para la misma resistencia nominal de la sección.

$c$ (cm)	$Pn$ (ton)	$Mn$ (t-m)	$\phi$ ACI-99	$\phi$ ACI-02
11.10	0.6	50.6	0.90	0.90
13.00	17.5	55.9	0.86	0.90
15.00	37.8	61.4	0.82	0.90
17.00	57.5	66.4	0.78	0.90
19.00	75.6	70.9	0.74	0.90
21.00	91.6	74.5	0.71	0.90
23.00	106.0	77.5	0.70	0.90
25.00	122.4	80.2	0.70	0.90
30.00	162.9	85.9	0.70	0.86
35.00	202.1	89.8	0.70	0.79
40.00	242.8	91.7	0.70	0.73
45.00	284.9	91.3	0.70	0.70
50.00	332.8	87.0	0.70	0.70
55.00	377.6	82.2	0.70	0.70
65.00	460.5	70.4	0.70	0.70
79.00	566.8	47.3	0.70	0.70

Las figuras a continuación muestran los diagramas de interacción construidos con ambas versiones del ACI. Las resistencias nominales son las mismas en ambos casos, ya que tal como se comentó, el ACI-02 no ha modificado en absoluto el cálculo de las resistencias nominales de una sección de concreto armado.

En el diagrama construido con el ACI-99, se presenta la "colita" (resaltada con un círculo en la figura) en la zona de cargas axiales bajas cuando la columna trabaja más como una viga. Esta "colita" ya hemos comentado que no tiene sentido físico, es el resultado de un proceso matemático que intenta variar de manera continua el factor de reducción desde 0.7 (columna con estribos) hasta el valor de 0.9 que corresponde a la flexión pura.

En el diagrama construido con el ACI-02, la inconsistencia mencionada en el párrafo anterior ha desaparecido. Sin embargo se presenta a mi entender, una inconsistencia

peor, se trata de la concavidad que se produce en el diagrama (resaltada con un círculo en la figura) para cargas axiales relativamente altas. Esta concavidad se explica si se observan los valores de  $\phi$  de la tabla anterior.

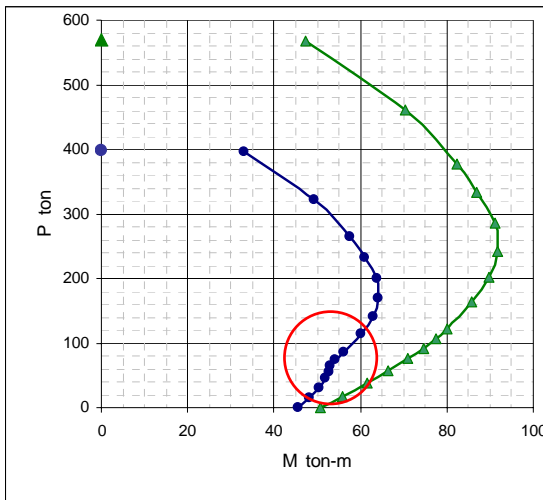


Diagrama de interacción ACI-99

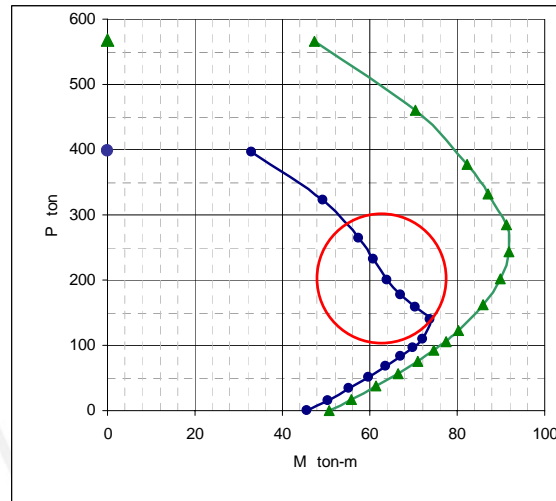
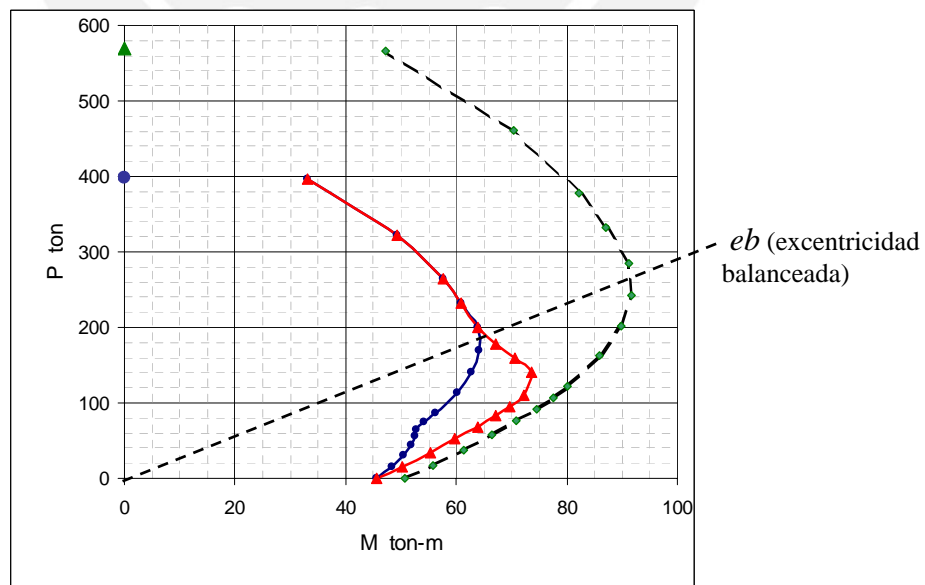


Diagrama de interacción ACI-02

En la figura a continuación se han superpuesto los diagramas para resaltar ambas inconsistencias. Nótese que el diagrama de resistencias de diseño de ACI-02, en la zona de cargas axiales bajas, está mucho más pegado a la curva de resistencia nominal, en consecuencia, es claro que el ACI-02 exige menos acero de refuerzo en la zona de cargas axiales bajas que el ACI-99.

Nótese también, que en el diagrama de resistencias de diseño construido con el ACI-02, es casi imposible identificar el punto de falla balanceada si no se conoce el diagrama de resistencias nominales.





**Ejemplo 10-8** - Para cuantificar las diferencias que se producen en las demandas de acero de refuerzo en una columna con carga axial baja, diseñemos una columna de sección  $0.40 \times 0.80$  con acero uniformemente repartido en las cuatro caras y concreto de  $f'_c = 210$ . Las resistencias requeridas son:

$$\begin{aligned} P_u &= 100 \text{ ton} \\ M_u &= 55 \text{ ton-m} \\ e &= M_u/P_u = 0.55 \text{ m} \quad e/t = 0.55/0.8 = 0.69 \end{aligned}$$

- Con el ACI-99 y Norma Peruana:

El valor de la carga axial por debajo de la cual puede iniciarse la interpolación de los factores de reducción de resistencia entre 0.7 y 0.9, es:

$$P_u \text{ transición} = 0.1 \times 210 \times 40 \times 80 \approx 67 \text{ ton} < 100 \text{ ton}$$

En consecuencia esta sección debe diseñarse con  $\phi = 0.7$ . Para la combinación  $P_u$ ,  $M_u$  y una armadura uniformemente distribuida en las cuatro caras, los resultados son:

$$\begin{aligned} A_{st} &\approx 32 \text{ cm}^2 & \rho &\approx 1\% \quad (\text{área total de acero necesaria}) \\ c &= 27.56 \text{ cm} & \epsilon_t &= 0.00506 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la resistencia nominal de esta sección reforzada con  $32 \text{ cm}^2$  de acero de acero es:

$$P_n = 100/0.7 \approx 143 \text{ ton} \quad M_n = 55/0.7 \approx 78.6 \text{ ton-m}$$

- Con ACI-02:

$$dt \approx 64 \text{ cm}$$

La deformación en el acero mas alejado del eje neutro, calculada con el ACI-99 indica que se trata de una sección controlada por tracción ( $\epsilon_t > 0.005$ ) en consecuencia el valor de  $\phi$  permitido es de 0.9 y las resistencias nominales asociadas a  $P_u$ ,  $M_u$  son:

$$P_n = 100/0.9 \approx 111 \text{ ton} \quad M_n = 55/0.9 \approx 61.1 \text{ ton-m}$$

Para la combinación  $P_n$ ,  $M_n$  calculada y una armadura uniformemente distribuida en las cuatro caras, los resultados son:

$$\begin{aligned} A_{st} &\approx 21 \text{ cm}^2 & \rho &\approx 0.66\% \quad (\text{área total de acero necesaria}) \\ c &= 22.14 \text{ cm} & c/dt &\approx 0.3 & \epsilon_t &= 0.00703 \end{aligned}$$

El valor de  $c/dt$  o de  $\epsilon_t$  calculado, confirma nuevamente que se trata de una sección controlada por tracción.

**Conclusión:** La demanda de acero de refuerzo en columnas con baja carga axial, es (por lo menos en este caso) notablemente inferior con el ACI-02 ( $21 \text{ cm}^2$  contra  $32$  lo que representa un 34% menos). En la práctica, en el armado final de esta sección, no habría diferencias si respetamos la cuantía mínima en columnas del 1%.

## Bibliografía

### 1) Básica

- James G. MacGregor. 1997. *Reinforced Concrete – Mechanics and Design*. 3ra. Edición. Prentice Hall.
- Arthur H. Nilson. 1999. *Diseño de Estructuras de Concreto*. 12a. Edición. McGraw Hill Interamericana.
- R. Park y T. Paulay. 1975. *Reinforced Concrete Structures*. Wiley – Interscience.
- A. M. Neville. 1997. *Properties of Concrete*. 4ta. edición. John Wiley & Sons.
- P. Kumar Mehta, Paulo J. M. Monteiro. 1993. *Concrete: Structure, Properties and Materials*. 2da. Edición. Prentice Hall.
- ININVI. 1989. *Norma Técnica de Edificación E-060, Concreto Armado*. Instituto Nacional de Investigación y Normalización de la Vivienda. Lima, Perú.
- American Concrete Institute. 1999. *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-99) and Commentary (ACI 318R-99)*.
- American Concrete Institute. 2002. *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-02) and Commentary (ACI 318R-02)*.

### 2) De consulta

- González Cuevas, Robles. 1995. *Aspectos Fundamentales del Concreto Reforzado*. 3ra. Edición. Limusa.
- Antonio Blanco Blasco. 1997. *Estructuración y Diseño de Edificios de Concreto Armado*. 2da. Edición. Colección del Ingeniero Civil, Libro 2.
- Teodoro E. Harmsen. 2002. *Diseño de Estructuras de Concreto Armado*. 3ra. Edición. Fondo Editorial 2002 PUCP.
- José Calavera Ruiz. 1999. *Patología de Estructuras de Hormigón Armado y Pretensado*. Ediciones Intemac, Madrid.
- José Calavera Ruiz. 1988. *Cálculo, Construcción y Patología de Forjados de Edificación*. 4ta. Edición. Ediciones Intemac, Madrid.
- Boris Bresler. 1974. *Reinforced Concrete Engineering. Volume 1. Materials, Structural Elements, Safety*. John Wiley & Sons.
- Richard N. White, Peter Gergely, Robert G. Sexsmith. 1974. *Structural Engineering, Volume 3, Behavior of Members and Systems*. John Wiley & Sons.
- Pedro Jiménez Montoya, Alvaro García, Francisco Morán. 2000. *Hormigón Armado, 14ª edición basada en la EHE*. Editorial Gustavo Gili, Barcelona.
- Rafael Riddell, Pedro Hidalgo. 2002. *Diseño Estructural*. 3ra. Edición. Textos Universitarios. Ediciones Universidad Católica de Chile.
- Russell s. Fling. 1987. *Practical Design of Reinforced Concrete*. John Wiley & Sons
- Michael Collins, Denis Mitchell. 1997. *Prestressed Concrete Structures*. Response Publications, Canada.
- Arthur H. Nilson. 1987. *Design of Prestressed Concrete. Second Edition*. John Wiley & Sons.
- Mark Fintel. 1985. *Handbook of Concrete Engineering, Second Edition*. Van Nostrand Reinhold, New York.