PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE GRADUADOS

LA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL QUINTO GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Tesis para optar el Grado Académico de Magíster en Enseñanza de la Matemática

Presentado por:

Jesús VILCHEZ GUIZADO

Lima - Perú

2 005

DEDICATORIA:

A mis padres Alejandro y Rosa gestores de mi autoformación personal.

A Ángela mi compañera del presente y futuro por su constante apoyo en mis actividades personales y profesionales.

RECONOCIMIENTOS:

A mi asesor Mg. Teódulo VERÁSTEGUI CHUQUILLANQUI, por su permanente, sistemática y acertada orientación para concluir con el presente trabajo de tesis.

Al Mg. Víctor AGAPITO ZAVALA, quien me invitó a seguir estos estudios y con quien inicie la ejecución de esta tesis.

A los maestros de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por su constante preocupación en la formación y capacitación de docentes de la Matemática.

Í N D I C E

Página

APÉNDICE

MODELO DIDÁCTICO: LAS FUNCIONES TRIGONOMÁTRICAS

DESARROLLO DEL MODELO DIDÁCTICO

I n t r o d u c c i ó n

El objetivo fundamental de la enseñanza de la matemática en el nivel secundario es hacer que los alumnos desarrollen sus capacidades de intuición, abstracción y de razonamiento lógico-matemático; que se expresa en el conocimiento de los conceptos y propiedades, su disposición para aplicarlos en la resolución de problemas diversos. Para el logro de este propósito, es imprescindible que los docentes que enseñan esta disciplina científica tengan un amplio y profundo conocimiento de la matemática, para así proveer de una amplia cultura matemática a sus pupilos.

El presente trabajo titulado LA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL QUINTO GRADO DE SECUNDARIA, resulta del envolucramiento en esta problemática durante más de diez años de labor docente en matemática del quinto grado de Educación Secundaria en diversos centros educativos y de indagaciones realizadas sobre condiciones académicas y metodológicas del profesor y de las situaciones de aprendizaje de los alumnos. Por ello, nos proponemos implementar una forma secuencial, interactiva y dinámica del proceso de enseñanza de las funciones trigonométricas a través del uso de un modelo didáctico con contenidos y orientaciones metodológicas para superar las deficiencias y las limitaciones en la asimilación de los contenidos temáticos y su aplicación en la resolución de problemas; rescatando aportes importantes del diseño de instrucción, de los métodos activos y del constructivismo, que se vienen implementando en la última década en el Perú y distintos países de latinoamérica.

La presente investigación consiste en conocer el efecto que produce el uso de modelos didácticos, elaborados por el docente de acuerdo a objetivos previamente fijados para lograr aprendizaje significativo de la Trigonometría. Comprobándose que cuando la enseñanza a los alumnos es reforzada con un material que propicia el auto estudio, autoaprendizaje y el trabajo en equipo, los aprendizajes son más significativos.

El tipo de estudio es “cuasi-experimental”, realizado con dos grupos: un grupo experimental y otro de control. La medición se efectuó mediante una prueba de entrada (pre-test) y una prueba de salida (post-test). El procesamiento de datos se llevó a cabo mediante la decisión estadística, a través de las medidas de tendencia central, de dispersión, y prueba de hipótesis para la diferencia de medias.

El presente informe se distribuye en cuatro capítulos, como se detalla a continuación:

En el Primer Capítulo, se hace una descripción detallada del área problemática, haciendo una diagnóstico integral de la situación real del proceso de enseñanza-aprendizaje de la trigonometría; luego, se determina y formula el problema de investigación, la justificación e importancia, los objetivos, y los alcances y limitaciones de la investigación.

En el Segundo Capítulo, se realiza una exposición de la definición de algunos términos básicos, mención de algunos antecedentes del tema de investigación y presentación del marco teórico que orienta y sustenta nuestro trabajo de investigación. Se aborda concepciones del proceso de enseñanza-aprendizaje, importancia y tendencias en la enseñanza de la trigonometría, y desarrollo de los conceptos fundamentales de las funciones reales, funciones trigonométricas y sus aplicaciones en la resolución de triángulos.

En el Tercer Capítulo, se expone el sistema de hipótesis de investigación, se identifican las variables operacionadas y se detallan los indicadores. Asimismo, se describe el procedimiento metodológico seguido, con indicación de la población y muestra, explicación de las acciones realizadas en el estudio, la validez y confiabilidad de resultados, herramientas para tratamiento de los datos, procedimiento de experimentación y procedimiento de evaluación, así como las técnicas utilizadas para el tratamiento de los datos.

En el Cuarto Capítulo, se aborda el análisis, presentación y la interpretación de los resultados de la encuesta administrada a los alumnos, de la prueba de pre-requisitos, y de la prueba de salida administrada al final del proceso de experimentación; para luego dar las conclusiones, sugerencias a partir de los resultados del trabajo experimental realizado.

En la sección apéndice, se anexan la matriz de consistencia, los antecedentes académicos de la muestra en estudio, las pruebas de entrada y salida, la encuesta administrada, asimismo los planes de clases del proceso de experimentación de la propuesta y las fichas de autoevaluación y coevaluación.

El presente trabajo se completa con el Modelo Didáctico sobre contenidos y desarrollo de funciones trigonométricas para el quinto grado de educación secundaria; elaborado y experimentado. Consta de seis unidades utilizados para reforzar aprendizajes de las funciones trigonométricas: Instrucciones dirigidas al lector, esquema de contenidos, el objetivo terminal y específicos, requisitos o saberes previos para estudiar las funciones trigonométricas, pruebas de diagnóstico de requisitos y de complementación y, actividades previas al estudio de los temas del modelo didáctico.

Se inicia con el estudio de arcos orientados sobre la circunferencia unitaria en el sistema de coordenadas rectangulares, ángulos orientados y su medición, para presentar las funciones trigonométricas como funciones reales y sus gráficos, funciones trigonométricas inversas, identidades y ecuaciones trigonométricas y aplicaciones de las funciones trigonométricas, con ejemplos ilustrativos, y cada sección concluye con un grupo de ejercicios de comprobación de aprendizajes y resumen del estudio realizado en cada unidad.

Los ítems de la prueba auto evaluación de salida, fueron elaborados de acuerdo a los niveles del dominio cognoscitivo de la taxonomía de Bloom, y abarcan los temas estudiados durante el proceso de experimentación; al final se menciona la clave de resultados, y ponderación de los resultados.

A través del presente trabajo esperamos haber alcanzado la finalidad primordial del estudio, presentando una propuesta metodológica de contenidos, desarrollada para la enseñanza de las funciones trigonométricas y pueda servir a mejorar el aprendizaje de la matemática.

El Autor

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA Y OBJETIVOS

1.1. ÁREA PROBLEMÁTICA: DIAGNÓSTICO SITUACIONAL

1.1.1. Centros Educativos

En la Educación Secundaria del país, el aprendizaje de las ciencias, de la Matemática en particular, es deficiente. Esto se expresa en la cantidad considerable de alumnos desaprobados; es decir, el bajo rendimiento en matemática es un problema latente. Esta problemática se observa también en la provincia de Huánuco, en donde representan aproximadamente el 53% del universo de los desaprobados (Subdirecciones de Formación General, 2000). Este hecho confirma y ratifica la Evaluación del Rendimiento Escolar, que ubica al Perú en el último lugar en Matemática (UNESCO, 1999-2000-2002). El problema se mantiene desde mucho tiempo atrás con tendencia a empeorar debido, entre otras causas, a la escasa preparación académica y metodológica de los profesores, que se expresa en:

-) Falta de actualización e innovación en temas de enseñanza, que se refleja en la repetición de las mismas definiciones, ejemplos y tareas por varios años consecutivos, como se ha constatado en cuadernos de alumnos de tres promociones diferentes que llevaron la asignatura de Matemática con los mismos docentes.

-) Escasa preparación en recursos y metodologías de enseñanza, que se limitan a clases expositivas, donde la poca o nula participación de los alumnos produce un pobre rendimiento formativo en los alumnos, que puede apreciarse en las respuestas a las preguntas de la encuesta a docentes.

-) Carencia de ética, de conciencia y de compromiso con su misión de educador. Por versión de los alumnos incumplen el horario de clases, y por versión de coordinadores de área, no alcanzan los objetivos planteados.

La presencia de estas tres deficiencias, inciden en que sólo se cumplan en promedio el 80% de las horas programadas para el desarrollo de clases en el año académico, mientras que los objetivos y contenidos programados lo desarrollan en un 75%, como manifiestan más del 50% de los docentes encuestados al responder a la pregunta: ¿*Qué porcentaje de los objetivos y contenidos programados para la enseñanza de la Matemática los desarrolla durante el año*?.

Cuando se constata en los calificativos obtenidos de los cinco concursos para nombramiento de docentes, llevados a cabo entre 1992 y el 2000, aprobaron un reducido número de docentes, con bajas notas, y no permitió cubrir las plazas vacantes existentes, según publicación de resultados en la Dirección Regional de Educación de Huanuco.

En el Plan Nacional de Capacitación Docente, "PLANCAD", que tuvo como fin mejorar la calidad de la educación, privilegiando las estrategias metodológicas y el aprendizaje cognitivo (MED,98), no se establecieron conexión con temas específicos de la Matemática y no tuvo los frutos esperados, puesto que en el proceso de capacitación se puso énfasis en recetas metodológicas, descuidando lo fundamental: el conocimiento de temas matemáticos por parte del docente, y también debido a la falta de motivación y esfuerzo de la mayoría de los docentes participantes, que asistieron por imposición y motivación económica como expresaron capacitados y capacitadores.

La implementación del paradigma constructivista, denominado "nuevo enfoque pedagógico", no tuvo efectos visibles en la mejora de la calidad del rendimiento académico en Matemática del nivel secundario. Puesto que los docentes no asimilaron suficientemente las virtudes de los nuevos enfoques pedagógicos que se sustentan en enseñanza por competencias, que propugnan los aprendizajes conceptual, procedimental y actitudinal, que se da a través de cinco momentos: **motivación**, **actividad básica, actividad práctica, evaluación y extensión** del proceso de enseñanza-aprendizaje, con la finalidad de buscar aprendizajes significativos y eficiente formación matemática de los estudiantes. Pero estas propuestas que quedaron sólo en buenas intenciones, debido a factores personales, profesionales, académicos, por falta de predisposición para el cambio de la mayoría de los docentes-alumnos que no son motivados para el aprendizaje individual y cooperativo, y las autoridades educativas locales que no cumplen en su totalidad con su rol de asesoría y supervisión.

Otro factor que dificulta el proceso de enseñanza-aprendizaje y que repercute en el rendimiento de los alumnos es el escaso número de medios y materiales didácticos: textos, medios audiovisuales, ordenadores, etc., los pocos existentes en los centros educativos de la región se le da un uso inadecuado.

Para tener resultados más objetivos de lo que viene pasando en la enseñanza-aprendizaje de las funciones trigonométricas en el quinto grado de secundaria, hemos recopilado información de los factores materiales y humanos que convergen en este proceso, como son: el programa curricular, los objetivos, contenidos, el alumno, el docente, el entorno, etc., a través de entrevistas, encuestas y visitas a los centros educativos de Huánuco.

1.1.2. Programas curriculares:

La estructura curricular básica de Matemática para el quinto grado de educación secundaria está vigente desde la década de los años 80, y ha sido adaptada a los años posteriores por Decretos y Resoluciones Ministeriales. Así, para el año 2003, de acuerdo a la Resolución Ministerial Nº 0310-2003-ED, se decreta que los centros educativos no comprendidos dentro del proceso experimental, seguirán con el plan de estudios vigente (1989-1993), donde los contenidos curriculares actuales de la Trigonometría para el quinto grado de secundaria son los mismos del año 1989.

En los diversos programas curriculares de Matemática para el nivel secundario, desde la década de los 60, al que tuvimos acceso, hasta el presente, consigna el tema de la Trigonometría sólo en el quinto grado, puesto que se trata de funciones trascendentes cuya comprensión tiene alto grado de dificultad para los alumnos.

En los programas curriculares de los Centros Educativos de Huánuco, para el tema de la trigonometría, se considera los siguientes:

OBJETIVOS:

1. **“***Reconocer y determinar los sistemas de medidas angulares y las funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo, para resolver ejercicios con identidades trigonométricas*”.

Los conceptos y propiedades que componen este objetivo están referidos al triángulo rectángulo, que limita la enseñanza de la trigonometría a las razones entre los lados de un triángulo rectángulo, que repercute en el estudiante en tener una idea reducida, a veces errónea y confusa sobre las funciones trigonométricas, encuadrando el estudio del triángulo, que tiene sus limitaciones, por ejemplo, el coseno de un ángulo recto

2. “*Determinar las funciones trigonométricas en el círculo trigonométrico y usar la tabla de valores naturales, para aplicarla en la solución de ejercicios con funciones trigonométricas*”.

Se repite el estudio de las funciones trigonométricas en la circunferencia unitaria reduciéndolos a triángulos rectángulos, en donde las tablas de los valores naturales ya no se usan en la mayoría de los centros educativos; en todo caso se debe hacer referencia al uso y manejo de calculadoras y ordenadores. No se justifica hablar de funciones.

El uso del sistema de coordenadas rectangulares es el más adecuado para el estudio de las funciones trigonométricas, como funciones reales, para su representación gráfica, cálculo de sus valores e identificación de sus propiedades.

3. “*Calcular los ángulos de elevación y de depresión, aplicando las funciones trigonométricas en la resolución de triángulos y de ecuaciones trigonométricas, vinculadas con situaciones de la vida real*”.

Está referida a las aplicaciones de la trigonometría a cálculo de longitudes y medidas angulares.

CONTENIDOS:

El diseño curricular del año 2000, divide a la Trigonometría en dos grupos:

1. *Sistema de medidas angulares. Razones o funciones trigonométricas de un ángulo en el triángulo rectángulo. Identidades trigonométricas.*

2. *Funciones trigonométricas de un ángulo en el círculo trigonométrico. Razones trigonométricas de ángulos de cualquier magnitud. Reducción al primer cuadrante. Transformaciones: funciones trigonométricas de ángulos compuestos. Tabla de valores naturales de funciones trigonométricas. Resolución de triángulos.*

El diseño curricular básico del año 2003, lo divide también en dos partes:

1. *"Ángulo y arco trigonométrico. Sistema de medidas angulares. Razones trigonométricas de ángulos agudos, notables y complementarios. Identidades pitagóricas, recíprocas y por cociente".*

2. *"Sistema de coordenadas rectangulares. Ángulo en posición normal. Razones trigonométricas de un ángulo en posición normal. Razones trigonométricas en ángulos cuadrantales. Ángulos coterminales. Razones trigonométricas de ángulos negativos. Reducción al primer cuadrante. Razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos. Ley de senos y cosenos".*

Estas propuestas no tienen fundamentación ni justificación adecuada, ni están acompañados de sugerencias metodológicas. Los centros de formación de docentes de matemática no participan ni toman como referente las propuestas emanadas por el Ministerio de Educación para la formación del futuro docente.

Según lo descrito, el programa del 2003, para la "Nueva Secundaria", recién hace mención de arco y ángulo trigonométrico, el estudio de sistema de coordenadas rectangulares y ángulos coterminales. En lo demás no existe diferencia significativa entre la secuencia temática de los contenidos de la Trigonometría que propone el Ministerio desde la década de los 60, que inicia el estudio del tema a partir de los triángulos rectángulos. Algunos cambios se dieron en las sugerencias metodológico, como los modelos conductistas en los 70, cognitivos en los 80 y constructivistas en los 90, sin mejorar en forma significativa la enseñanza y, por ende, en el aprendizaje de la matemática por los alumnos de secundaria.

El plan curricular que siguen los cuatro colegios nacionales que tomamos para nuestro trabajo siguen estrictamente la secuencia que se indica en el Plan del Ministerio de Educación. Los docentes se limitan a la cronogramación de actividades, objetivos y contenidos para el año escolar. Además los contenidos y objetivos no se reformulan ni reajustan de un año a otro, sólo se limitan a modificar las fechas en la programación curricular y no se hace una evaluación integral de las fortalezas y debilidades que se tuvo en el año anterior; asimismo, no se toma en cuenta el perfil del alumno que se pretende formar a través de la Matemática (Entrevistas no estructurada, revisión de programas en las coordinaciones).

1.1.3. Alumnos

Entre algunas características de los alumnos, que cursan el quinto grado de secundaria en el Colegio Nacional de Aplicación, destacan:

- Son adolescentes de ambos sexos cuyas edades fluctúan entre 15 y 18 años. Según los estadios del desarrollo intelectual propuestos por Piaget, están en la etapa de las operaciones formales, actividades mentales que implican conceptos abstractos e hipotéticos, de utilizar supuestos en situaciones de resolución de problemas, de resolver problemas que exijan el uso del razonamiento proposicional.

- La mayoría tiene poco interés por el estudio de la Matemática, pero tienen deseos de seguir estudios superiores.

- Dedican escaso tiempo para el estudio y la práctica de la Matemática fuera del aula. Según la encuesta, el 52,56% no estudia y el 23% a lo más lo hace una hora diaria, debido a que tienen otras tareas que desempeñar en el ambiente familiar y social.

- Durante el proceso de enseñanza se limitan a escuchar la exposición del profesor tomando apuntes, intervienen en forma esporádica con preguntas referidos al tema. Las tareas domiciliarias y los que se desarrollan en clase consisten en ejercicios propuestos de algún texto escolar. Son evaluados por el docente con sendas pruebas para constatar la retención de lo enseñado y lo practicado.

En la prueba aplicada, previo al experimento, se detectaron las dificultades de:

- Comprensión del lenguaje simbólico de la Matemática.

- Ejecutar relaciones de simetría entre puntos del plano cartesiano y trazar gráfica de una función real.

- Identificar las funciones pares e impares, periódicas, monótonas.
- Identificar el dominio y rango de una función.
- Identificar la función a partir de su gráfico.

1.1.4. Docentes

De la encuesta administrada a 60 docentes de la especialidad de Matemática, de las entrevistas y de las visitas a los centros educativos, detectamos:

- La mayoría de los docentes son titulados y provienen de las facultades de educación de las universidades de la región, laboran en condición de nombrado y su tiempo de servicio al magisterio varía entre cuatro a quince años.

- En su formación matemática tienen deficiencias de nivel conceptual y procedimental en conocer la Trigonometría. Esto se agrava aún más debido a que no recuerdan, ni utilizan, conceptos matemáticos aprendidos en su formación docente, tienen poca habilidad para deducir y analizar algunas propiedades de las funciones trigonométricas, no estudian textos actualizados del nivel medio y superior para reforzar sus conocimientos sobre temas de Trigonometría.

- En la encuesta, al preguntarse *¿Qué métodos didácticos suelen utilizar con más frecuencia durante el proceso E-A de la Matemática*? (Pregunta 12, Anexo 3), la mayoría de los docentes expresaron que utilizan el expositivo-dialogal. Al asistir a algunas clases de los colegas, constatamos que el estudio del tema lo hacen en forma simbólica e intuitivo, carente de formalidad matemática; no se conjugan ambas formas de presentación para tener resultados más eficaces. Asimismo, no hacen uso de conocimientos previos para abordar los diversos tópicos de la Trigonometría, no propician estrategias de aprendizaje activo individual ni grupal y, en la etapa de fijación de tareas, no incentivan el estudio individual y cooperativo.

- En la metodología que usan en sus clases, no existe tratamientos individuales ni en pequeños grupos durante el proceso de enseñanza aprendizaje. Se limitan a seguir una secuencia de actos: una exposición, resolución de algunos ejemplos y tareas para casa en forma generalizada.

- En su mayoría, de las respuestas a la pregunta 5 de la encuesta, cumplen en forma parcial con su horario de clases, al que asisten sólo en un 75% durante el año debido a las múltiples actividades extra-curriculares que se programan en el centro educativo y a las constantes inasistencias por diversos motivos personales (Docentes y auxiliares de educación). Asimismo, la mayoría no llega a lograr los objetivos del curso y no concluyen contenidos programados para el año.

- La mayoría de los docentes no prepara sus clases y algunos, que sí lo hacen, se limitan a utilizar, como texto de consulta a los libros escolares de circulación nacional que están elaborados de acuerdo al programa curricular del Ministerio de Educación, tales como: Rojas Poémape, Coveñas Naquiche, Flavio Vega, entre otros (pregunta 9, anexo 3). Ningún docente, de los 60 encuestados, utilizan textos de nivel superior e intermedio para "preparar su clase" y están alejados de los fundamentos matemáticos que sustentan los tópicos que enseñan. No tienen voluntad para adaptar su enseñanza según su perspectiva personal o institucional, y no elaboran sus propios materiales didácticos con miras a mejorar su labor docente.

Lo descrito, confirma que la gran mayoría de los docentes de matemática son reacios al cambio en el proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática. Es preciso incentivar cambios en contenidos, estrategias metodológicos y elaboración de materiales didácticos con miras a mejorar la calidad del aprendizaje de la matemática.

1.1.5. Material Bibliográfico

Los docentes de Matemática encuestados, a la pregunta ¿*Qué textos utiliza usted para preparar su clase de Matemática en el quinto grado de secundaria*? El 40% manifiesta que utiliza el texto de Coveñas Naquichi, el 30% consigna a Rojas Poémape y el 16,7% considera el texto de Vega Villanueva.

Estos autores, en sus textos, presentan los siguientes contenidos de Trigonometría:

Flavio Vega Villanueva	Alfonso Rojas Poémape	Manuel Coveñas Naquiche
I. Ángulos geométricos y trigonométricos. Sistema de medidas angulares. 2. Funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo. 3. Funciones trigonométricas de un ángulo de cualquier magnitud. 4. Reducción al primer cuadrante, representación gráfica. Variaciones. 5.Identidades trigonométricas 6. Funciones trigonométricas de la suma y diferencia de dos ángulos, del ángulo doble y del ángulo mitad. Transformaciones. 7. Resolución de triángulos rectángulos. Ángulos de elevación y depresión. 8. Resolución de triángulos en general. Ley de senos, cosenos y tangentes.	1. Definición de ángulo, sistema de medida angular, aplicaciones. 2.Triángulos notables, propiedades, otros triángulos notables, resolución de triángulos rectángulos. 3.Razones trigonométricas de cualquier magnitud, representación trigonométrica, reducción al primer cuadrante. 4. Análisis de las funciones trigonométricas, identidades. 5. Funciones trigonométricas de la suma y diferencia de dos ángulos, de ángulos dobles, de ángulo mitad; transformaciones trigonométricas. 6. Resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos. Ecuaciones trigonométricas.	1. Ángulo trigonométrico. 2. Sistema de medidas angulares. 3. Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo. 4. Identidades trigonométricas. 5. Razones trigonométricas de un ángulo de cualquier magnitud. 6. Estudio de las funciones trigonométricas en el círculo trigonométrico. 7. Funciones trigonométricas de números reales. 8.Transformaciones trigonométricas. 9. Resolución de triángulos rectángulos. 10. Ángulos horizontales. 11. Funciones trigonométricas inversas.

CUADRO RESUMEN DEL CONTENIDO DE TEXTOS ESCOLARES

Del contenido desarrollado en los textos, podemos destacar:

1. Los textos de Poémape y Coveñas consideran a la Trigonometría en el primer capítulo, definen las funciones trigonométricas como razones entre lados del triángulo rectángulo. Desde esta perspectiva desarrollan todos los temas y no se formaliza definición alguna; mencionan algunos problemas motivadores, ejemplos resueltos y una gama de ejercicios para desarrollar. Mientras que el texto de Vega trata el tema de Trigonometría en la octava unidad, desarrolla funciones trigonométricas tomando como referencia el círculo trigonométrico; para deducir algunas fórmulas usa triángulos rectángulos en un sistema de ejes rectangulares, sin hacer uso de las coordenadas del plano.
2. Analizando algunos puntos del contenido temático, podemos citar:

   GRÁFICAS: El texto de Poémape y Coveñas, al final del capítulo desarrolla, en forma resumida las gráficas de las funciones trigonométricas y sus características; mientras que Vega no toca.

   ÁNGULOS CUADRANTALES: Las funciones trigonométricas “cuadrantales” de 0, $\pi/2$, π y $3\pi/2$ radianes; cuyos valores resultan de la forma $a/0$, Vega los considera como “infinito”, Coveñas como “no existe” y Poémape como “no definido”; no existiendo un lenguaje único de estos autores para denominar a las expresiones que determinan asíntotas en gráfica de las funciones.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS: Sólo uno de los autores analizados, Coveñas, desarrolla las funciones trigonométricas inversas y sus gráficas en forma breve; mientras que Poémape se limita a desarrollar el tema de ecuaciones trigonométricas.

APLICACIONES: Casi todo el desarrollo del tema, inclusive las "definiciones" o ideas de funciones trigonométricas se sustentan en la resolución de triángulos rectángulos y, en menor proporción, se aplica a la resolución de triángulos oblicuángulos. No se hace mención de aplicaciones a la física, mucho menos al estudio de fenómenos periódicos.

3. Los tres autores tienen textos de Matemática para los cinco grados de educación secundaria; sin embargo, en los últimos años, el uso del texto de Poémape y Coveñas gozan de la preferencia en toda la región y el país, ambos con objetivos y contenidos estructurados de acuerdo al programa oficial.

4. Estos tres textos, los más usados por los docentes y algunos alumnos, con sus bondades y limitaciones, no orientan ni motivan su lectura a los alumnos. Se limitan a deducir algunas fórmulas y presentación de ejercicios resueltos y propuestos.

1.1.6. Medios y materiales didácticos

Entendiendo que los medios y materiales son elementos fundamentales, coadyuvantes y de apoyo para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en general y de la Trigonometría en particular, se observa que:

- Sólo cuentan con tizas, mota, uno o dos juegos de reglas y escuadras como recursos para que el docente los utilice durante su labor de enseñanza.

- Los alumnos llevan consigo sólo un cuaderno de apunte, pocos tienen a su alcance algún texto, como material y medio de estudio.

- No existen materiales didácticos preparados por el docente y sus alumnos para la enseñanza de la Matemática, mucho menos para desarrollar tópicos específicos como la Trigonometría.

- En la mayoría de los colegios existen televisores y ordenadores, pero no son utilizados como medio de enseñanza de la Matemática, sino que están orientados a actividades netamente de carácter administrativo.

La no-existencia de trabajo alguno en la elaboración de material didáctico y de la utilización de medios didácticos acordes a la realidad e interés de los alumnos, que faciliten el logro de aprendizajes significativos, es consecuencia de que el docente no conjuga su preparación académica con la metodológica, inherentes a su actividad profesional.

1.1.7. Cuadernos de alumnos:

En los cuadernos revisados de algunos alumnos del quinto grado de secundaria no se mencionan conocimientos previos ni problemas motivadores, se presentan los temas de Trigonometría colmado de errores y abusos de notación y de lenguaje, se distorsionan inclusive algunas ideas que se dan en los textos escolares analizados.

Por ejemplo: Las funciones trigonométricas se presentan considerando “un triángulo rectángulo *ABC*, de lados a = cateto opuesto, b = hipotenusa y c = cateto adyacente; se tienen seis funciones trigonométricas: sen$A = a/b$, cos$A$ = c/b, tg = a/c, ctg$A$ = c/a, sec$A = b/c$, cosec$A = b/a$”; esto hace que los alumnos tengan dificultades para entender las funciones trigonométricas de ángulos obtusos, periodicidad, representación gráfica, etc.

Sólo en dos cuadernos de los ocho revisados, encontramos las gráficas de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente; pero no se hace mención de algunas características de estas funciones, menos de los procedimientos de sus trazos.

En ninguna de las copias revisadas se mencionan funciones trigonométricas inversas, ni las ecuaciones trigonométricas a pesar de que se menciona en el programa y en los textos que usan los docentes.

Por lo expuesto, el trabajo que proponemos consiste en la presentación de las funciones trigonométricas como funciones reales de variable real, a partir de la identificación y manipulación de puntos pertenecientes a la circunferencia unitaria, de ecuación: $x^2 + y^2 = 1$ que facilita comprender la periodicidad, dominio, rango y otras características de estas funciones que tienen múltiples aplicaciones en la ciencia, la tecnología y en el estudio de temas de la Matemática superior, como: Números complejos, vectores, movimiento armónico simple, coordenadas polares, series funcionales, etc.

1.2. DETERMINACIÓN DEL PROBLEMA

Consideramos que el responsable principal del proceso enseñanza-aprendizaje de la Matemática es el docente, por ello recogemos lo vertido por Pedro Gómez durante el II CONEM-99: "*yo veo al profesor de matemáticas como un diseñador y ejecutor de experiencias que pone a los estudiantes en interacción con él mismo, con los otros estudiantes y con el conocimiento que poseen para que puedan construir este conocimiento matemático que queremos que todos obtengan; por consiguiente el profesor debe ser un profesional; y para ser un profesional, tener el conocimiento producto de esa disciplina, de esa profesión y debe ser capaz de describir y caracterizar el estado de comprensión de los estudiantes. Si no sabe en qué estado están los estudiantes, no puede saber a qué estado puede llevarlos*".

De las indagaciones hechas, el docente de Matemática del nivel secundario de la región Huánuco presenta una formación deficiente, en cuanto al conocimiento matemático y metodológico, y realiza sus clases con un esquema didáctico predominante y sesgado al esquema de enseñar al alumno (modelo pasivo) y no orientar que aprenda el alumno (modelo activo).

Por otro lado, es una necesidad reajustar contenidos de la trigonometría en un contexto más simple de manejar e implementar nuevas metodologías activas, como la enseñanza a través de procesos activos y con participación de los alumnos. Esto nos plantea la inquietud de este estudio, que nos permite conocer hasta qué punto puede influir la implementación de nuevas estrategias metodológicas en el logro de resultados académicos óptimos en los estudios secundarios.

A través de un seguimiento y involucramiento en la problemática de la enseñanza-aprendizaje de la Matemática, llegamos a determinar algunos problemas básicos, como:

- La formación deficiente de los docentes en lo que concierne al conocimiento de los temas que son materia de su enseñanza;

- La falta de capacitación continua del personal docente, en contenidos y estrategias metodológicas para la enseñanza de la Matemática;

- La falta de equilibrio en la enseñanza de la Matemática entre sus fines formativo, funcional e instrumental, durante la acción educativa;

- La falta de innovación y adaptación a la realidad, en la manera de llevar la secuencia de los contenidos curriculares, durante la enseñanza de la Matemática;

- El escaso material bibliográfico para abordar el estudio de la Matemática (Trigonometría) y los textos vigentes de Matemática son elaborados conforme a la propuesta curricular del Ministerio de educación, sin un ápice de creatividad ni adecuados a la realidad, los que son desarrollados en el aula;

- Falta de elaboración y manejo de materiales y medios didácticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática;

- La falta de elementos motivadores y de uso de la tecnología computacional durante el proceso de enseñanza - aprendizaje de la Matemática y;.

- La casi nula actitud participativa individual y grupal de los alumnos en sus procesos de aprendizajes, debido al uso de una metodología que concibe el aprendizaje como un conjunto de acciones mecánicas que se limitan a dar contenidos acabados, como recetarios, formando en los estudiantes hábitos perniciosos como el memorismo y el conformismo.

Los problemas señalados tienen un grado de repercusión para que se cumpla, con cierta eficacia, la labor docente y, consecuentemente, la aceptable formación matemática de los alumnos; los mismos que se deben implementar e innovar acorde al avance de la ciencia y la tecnología, teniendo en cuenta el entorno escolar como el modelo del sistema educativo, los métodos y sistemas de enseñanza, la labor de los profesores, la comunicación en el centro educativo, presencia de padres de familia y alumnos en el colegio, medidas para la atención a la diversidad, etc., y nos orienta a buscar nuevas estrategias de enseñanza que nos permita lograr aprendizajes cada vez más eficaces y significativos en los educandos.

Para subsanar las deficiencias o debilidades planteadas, consideramos la necesidad de elaboración, implementación y desarrollo de modelos didácticos activos para la enseñanza de la Trigonometría, a partir de la circunferencia unitaria en el plano cartesiano, que propicie el aprendizaje eficaz tanto individual como grupal con mejoras significativas en el rendimiento académico.

En este proceso, se refuerzan métodos apropiados, destacando las propuestas por Valiente (2000), como son:

- ♦ **El método heurístico**, que es una forma activa para la enseñanza de la matemática. Cuyos pasos son: entender el problema, indagar un plan, realizar el plan y examinar la solución.

- ♦ **Método Socrático**, que se usa en forma individual o colectiva sea escrita u oral; se somete al alumno a interrogación en cadena de preguntas esperando respuestas inmediatas y simples. El alumno construye juicios.

- ♦ **Método de correlación**, introduce al alumno a procedimientos intuitivos, tiende a las acciones prácticas pues exige contenidos reales y útiles. Es utilitario, activo y relacional.

- ♦ **Método individual**, conveniente para los alumnos de lento aprendizaje; adecuado para plantear problemas o temas a resolver y como complemento de las clases para fijar conocimientos; ejercita al alumno para actuar por iniciativa propia.

- ♦ **Método de proyectos**, el alumno manipula objetos y actúa por propia iniciativa. El alumno debe llegar a soluciones abstractas a partir de situaciones concretas, siendo el maestro el que orienta y dirige; es una forma utilitaria y formativa. Pueden ser: proyectos constructivos o proyectos problemas.

1.3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Para dar solución, aunque sea en parte, a la problemática del proceso de enseñanza-aprendizaje de la trigonometría, una de las estrategias es la implementación del desarrollo de clases a través de modelos didácticos, lo que nos lleva a formular el problema de la presente investigación en los siguientes términos:

1.3.1. Problema general

Con la elaboración, implementación y desarrollo del modelo didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de conceptos, propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas a partir de puntos de la circunferencia unitaria en el plano cartesiano; ¿se mejora significativamente el rendimiento académico de los alumnos del quinto grado de secundaria?

1.3.2. Problemas específicos

- ¿Qué importancia tiene diseñar y elaborar un modelo didáctico para abordar un estudio secuencial de las funciones trigonométricas, siguiendo procedimientos metodológicos para la enseñanza individual y grupal, que mejore el aprendizaje de los alumnos?.

- ¿Qué efectos produce el desarrollo del modelo didáctico durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones trigonométricas a partir de los puntos de la circunferencia unitaria en el plano cartesiano en el quinto grado de secundaria?.

- ¿Existe diferencia significativa, en cuanto a los resultados del rendimiento académico en el tema de funciones trigonométricas, usando el modelo didáctico?

1.4. OBJETIVOS

Los objetivos planteados en el siguiente estudio están enmarcados y orientados a resolver los problemas descritos:

1.4.1. Objetivo general:

Comprobar que la implementación y desarrollo del modelo didáctico, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de conceptos, propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas a partir de puntos de la circunferencia unitaria en el plano cartesiano, mejora significativamente el rendimiento académico de los alumnos del quinto grado de secundaria.

1.4.2. Objetivos específicos:

1. Diseñar y elaborar un modelo didáctico, para abordar un estudio secuencial de las funciones trigonométricas, considerando procedimientos didácticos y

metodológicos adecuados al aprendizaje individual y grupal, atractivo a la lectura de los alumnos y que facilite la labor del docente en el aula.

2. Desarrollar el modelo didáctico durante las sesiones de clase de las funciones trigonométricas a partir de puntos en una circunferencia unitaria en el plano cartesiano con uso de materiales y medios auxiliares, para motivar, facilitar y mejorar el rendimiento académico de los alumnos.

3. Analizar y comparar resultados de mejoras del rendimiento académico logrados, por alumnos en el estudio de las funciones trigonométricas a partir de puntos de la circunferencia unitaria en el plano cartesiano, con desarrollo del modelo didáctico.

1.5. JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA

La presente investigación es un intento de abordar y responder a un problema permanente de nuestra realidad educativa, como es el proceso de enseñanza-aprendizaje y el rendimiento escolar en Matemática de los alumnos de la educación secundaria y en particular en el quinto grado. En tal sentido esta orientada a:

- La implementación de modelos didácticos de contenidos metodológicamente elaborados, que incluye la selección, secuenciación, y organización de temas, organización, desarrollo y control del trabajo en el aula que garantiza el aprendizaje integral, continua, sistemática de los temas estudiados e implica participación consciente y activa del alumno en la construcción de sus conocimientos matemáticos y en el fortalecimiento de su capacidad de intuición y abstracción.

- La contextualización de la concepción de la enseñanza-aprendizaje de la matemática en función de las necesidades, intereses y aspiraciones que tienen los estudiantes que egresan de la educación secundaria.

- La reestructuración de la secuencia temática, de objetivos, y mejorar el tratamiento metodológico durante el proceso enseñanza-aprendizaje asequible y de fácil comprensión para el alumno, donde debe primar los métodos activos en el proceso de construcción del conocimiento y la asignación de significados y, criterios para valorar los logros en el aprendizaje y el tratamiento adecuado de los errores, para optimizar el aprendizaje de los alumnos.

- Lograr en la enseñanza del tema, a través de materiales didácticos, un mejor aprovechamiento de las clases y el logro de aprendizajes significativos y mejora en el rendimiento académico de los alumnos.

- Coincidir con los lineamientos del diseño curricular básico de educación secundaria en el área de Matemática 2004, que propugne la búsqueda de calidad total en la educación. Persigue que los estudiantes: *"...Aprendan a valorar la matemática, se sientan seguros de su capacidad para hacer matemática, lleguen a resolver problemas matemáticos, aprendan a comunicarse mediante la matemática y aprendan a razonar matemáticamente*"; a través del desarrollo de capacidades de: "*Razonamiento y demostración, interpretación de gráficos y/o expresiones simbólicas y, resolución de problemas*"(Diseño Curricular Básico, 2004)

La importancia del trabajo, desde el punto de vista pedagógico, radica en que está centrado preferentemente en la regulación del proceso de aprendizaje acorde a los lineamientos de la política educativa actual, basado en el enfoque constructivista, que postula que el conocimiento se construye mediante la interacción con otros y con los objetos circundantes, teniendo como centro de la clase el alumno, e incide en el aprendizaje de la matemática centrado en su carácter formativo, instrumental y personalizado. Donde, el docente cumple el rol de guía y conductor de la actividad investigadora y creativa de los alumnos, tanto grupal como individual, a través del modelo didáctico, para que refuercen el aprendizaje de un tema, participando activamente en el proceso de construcción del conocimiento, haciendo uso eficiente y eficaz del modelo didáctico como medio y material educativo.

Desde el punto de vista técnico-pedagógico, teniendo como modelo nuestra propuesta, el profesor analiza la problemática de la enseñanza, diseña y elabora con antelación las estrategias didácticas para desarrollar el estudio del tema, entrega el material antes de abordar el tema, luego expone en forma breve y resumido el contenido temático; pone en práctica las etapas de motivación, conceptualización, ejemplificación, evaluación y extensión. En esta última se propicia el estudio personalizado y cooperativo del modelo didáctico y la resolución de los **ejercicios de comprobación de los aprendizajes**.

El desarrollo del tema de las funciones trigonométricas a través de puntos de la circunferencia unitaria en el sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, permite conjugar los conocimientos de álgebra y geometría elemental de los grados anteriores. En ella, los alumnos hacen un estudio analítico de las funciones trigonométricas, como tal, identifican fácilmente el dominio y rango, el crecimiento y decrecimiento, los signos según los cuadrantes, la condición de ser par o impar, su comportamiento periódico, sus puntos de discontinuidad o asíntotas. Por otro lado, explotan la riqueza de tener casi todas las propiedades de las funciones reales de variable real, que son necesarios para modelar y simular el comportamiento de los distintos fenómenos periódicos, que se presentan en las ciencias relacionadas con las telecomunicaciones, por ejemplo, que es el detonante actual del desarrollo de la ciencia y la tecnología.

La estrategia metodológica desarrollada responde a los lineamientos del constructivismo, con clases desarrolladas de manera activa orientado al aprendizaje individual y grupal, propiciando el logro de aprendizajes significativos, a través de la explotación de los conocimientos previos y el uso pertinente de recursos, medios y materiales educativos. Para el desarrollo de las gráficas de funciones trigonométricas se usa el computador con el programa Derive, el mismo que facilita visualizar el comportamiento de las curvas que los representan, permitiendo asimilar las diversas propiedades y motivando el aprendizaje interactivo individual y cooperativo.

Por lo expuesto, con este modesto aporte se establece la validez empírica de la implementación de una estrategia de enseñanza a través del modelos didácticos, para saber la eficacia de su aplicación en el proceso de enseñanza de la matemática escolar, reportándonos información que sirve de material de reflexión para el quehacer docente y dar inicio hacia un cambio de actitud. Por otra parte, permite generar acciones tendientes a promover, practicar y realizar investigaciones sobre nuevas estrategias didácticas que permiten elevar el nivel matemático de los alumnos en el nivel secundario.

1.6. ALCANCES Y LIMITACIONES

1.6.1. Alcances:

El presente trabajo está referido a la realidad educativa, en el nivel de educación secundaria, de la localidad de Huanuco. Según estudio del INEI (2000), es el segundo departamento más pobre del Perú.

Los resultados y conclusiones de esta investigación tienen validez interna y externa; como tal pueden generalizarse a la población de todos los estudiantes del quinto grado de secundaria de la localidad de Huanuco; sin embargo, en un sentido macro los resultados son extendibles a otros grados de estudio y otras asignaturas en los centros educativos de la región centro oriental del Perú, cuya realidad educativa es isomorfo al de la región Huánuco.

1.6.1. Limitaciones:

- Para la muestra del estudio se asignaron dos secciones, sólo teniendo en cuenta sus antecedentes académicos.

- El experimento se realiza en un capítulo de la asignatura, en base al Diseño Curricular Básico, durante las 12 primeras semanas de clases, que corresponden al primer y segundo bimestres del año escolar.

- La prueba para la evaluación de requisitos fue elaborada sólo por el docente investigador, mientras la evaluación de salida (post-prueba) fue planteada por los docentes que dirigen el grupo de control y grupo experimental, para los calificativos de la prueba bimestral.

- El estudio estuvo centrado en el proceso de enseñanza-aprendizaje de Trigonometría, a través de la administración de pruebas, encuestas, y el análisis de los resultados obtenidos en el proceso.

- La investigación se realizó bajo las restricciones cronológicas que se tiene en los centros educativos estatales, toda vez que tiene que cumplirse con el cronograma y los lineamientos emanado por la Dirección Regional de Educación.

- La actitud reactiva de los docentes y los alumnos, en el proceso de recopilación de información, fue superada con la ayuda de otros colegas y autoridades educativas.

- Un aspecto crucial y de mucha importancia que afecta a todas los docentes e instituciones educativas estatales es la situación económica, que limitó muchos análisis que hubiesen sido posible en otras circunstancias o realidades.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1. ANTECEDENTES Y FUENTES

En el proceso de estudio, se han encontrado trabajos vinculados al uso de medios y materiales educativos con la finalidad de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el nivel secundario.

En las bibliotecas de las universidades Mayor de San marcos, Pontificia Universidad Católica del Perú, "Hermilo Valdizán" de Huánuco y de Educación "Enrique Guzmán y Valle", no existen trabajos específicos referidos al tema realizados en los últimos años; pero, existen trabajos cuyos aportes metodológicos y de tratamiento estadístico tienen relación con los de la presente investigación, los mismos que detallamos a continuación:

- LLANOS, Rosa (1997) realizó una tesis de tipo educacional tecnológica, titulado "*La Enseñanza Personalizada a través de Modelos Autoeducativos y el Rendimiento Académico en Matemática en los Estudiantes de la Universidad de Santa*", para optar el grado de Magíster en Educación con mención en Didáctica Universitaria de la Universidad Nacional de Educación. Plantea que la Enseñanza Personalizada, realizada a través de Modelos Educativos, contribuye a un mejor rendimiento académico de los estudiantes de los primeros ciclos de ingeniería de la Universidad de Santa, en la asignatura de matemática.

  Se propone lograr, a través de la investigación experimental, procedimientos de enseñanza y materiales educativos que posibiliten una dirección del aprendizaje más ventajosa y que el aprendizaje de la matemática se incrementa cuando se ha aplicado la enseñanza personalizada a través de "modelos autoeducativos", que influye positivamente en el rendimiento académico.

- ZENTENO, Armando (1999) "*Modelo de Enseñanza Aprendizaje de Relación Binaria para el Segundo Grado de Educación Secundaria*", tesis de Magíster en

Enseñanza de la Matemática, PUCP. Es un estudio cuasi-experimental, donde plantea elaborar un modelo de enseñanza para mejorar el aprendizaje de las relaciones binarias en alumnos del Segundo Grado de Educación Secundaria de los colegios estatales de Ciencias y Humanidades de la ciudad de Cerro de Pasco, considerando el entorno social del alumno y los modos activo, icónico y simbólico. Entres sus conclusiones considera que "*los resultados que se obtuvieron de la enseñanza aprendizaje de la relación binaria y sus temas específicos bajo la metodología y el contenido propuesto, son significativos en comparación al proceso usual; con predominancia del razonamiento intuitivo sobre lo memorístico, la metodología inductiva frente a la deductiva, el aprendizaje concreto frente al abstracto, en contextos reales*".

- SULCA ARBAIZA, Arturo (2000) "*Uso de la regla y el compás para la enseñanza aprendizaje de la Matemática en Educación Secundaria*", tesis de Magíster en Educación con mención en Enseñanza de la Matemática, PUCP. Sostiene que el uso de la regla y el compás durante las sesiones de clase, elevan el rendimiento de los alumnos en el dominio cognoscitivo de algunos temas de la Matemática en la Educación Secundaria. Del proceso experimental que realiza con alumnos del cuarto grado de secundaria, confirma significativamente su planteamiento y concluye que "El uso de la regla y compás en la solución de problemas geométricos hace que el alumno tenga mayor preocupación por el aprendizaje comprensivo, es decir, las construcciones motivan el trabajo escolar. El solo hecho de estar manipulando objetos con la regla y el compás o las escuadras nos conduce a concentrarnos, y su uso adecuado nos permite deducir y verificar sus propiedades".

- FLORES CUBAS, Milusca (2000) "*Enseñanza de las Funciones Reales de Variable Real en el Tercer Año de Educación Secundaria*", tesis de Magíster en Enseñanza de la Matemática, PUCP. Aborda el problema de la enseñanza de las funciones reales en el rendimiento escolar de los alumnos del tercer año de Educación Secundaria del Colegio Nacional "José Leonardo Ortiz" de Chiclayo, a través de un modelo Autodidáctico. De sus resultados concluye que la aplicación del Modelo Autoinstructivo sobre funciones reales es un estímulo de aprendizaje eficaz, permite un mayor rendimiento. Además, la utilización del Modelo Autodidáctico ha permitido un trato personal con el estudiante, observando su avance, dificultades y orientado para superarlos, que conlleva a mayor comunicación entre profesor y alumno.

2.2. PROCESO ENSEÑANZA - APRENDIZAJE

La enseñanza y el aprendizaje constituyen una unidad y son elementos indesligables en todo acto educativo para la plasmación de una educación acorde a sus fines y orientaciones, sustentadas en objetivos y programas, contenidos y métodos. Según Ferrández (1979, p.29) "*el aprendizaje es el correlativo lógico de la enseñanza, tarea que corresponde al docente y supone un cambio en la disposición o capacidad humana, con carácter de relativa permanencia, y que no es atribuible simplemente al proceso de desarrollo. Sólo en el plano teórico se pueden superarse ambos procesos: enseñanza y aprendizaje. Los dos vienen a significar las fases de la instrucción*".

En todo proceso de enseñanza-aprendizaje, los trabajos didácticos y las actividades de aprendizajes sistematizados se convierten en modos, formas, medios, procedimientos y métodos que llevan al logro de aprendizaje; convirtiéndose en experiencias de aprendizaje significativos y satisfacen los objetivos y contenidos programáticos, congruentes con: los objetivos propuestos, el nivel de madurez de los alumnos, los intereses del grupo y, la necesidad de promover nuevos aprendizajes (Valiente, 2000).

2.2.1. El aprendizaje

Según lo expresado por Ausubel/Novak/Hanesian (1998), históricamente pueden considerarse, en forma amplia y de manera resumida, tres periodos que dan cuenta de cómo han sido consideradas estas ideas centrales por sus representantes y sus teorías acerca del proceso de aprendizaje:

De 1850 a 1900 en la Escuela Instruccional, se pone énfasis en los **contenidos** para lograr motivar en el alumno el aprendizaje, descuidando el desarrollo de la **capacidad intelectiva** y los **desempeños** reflejados en actitudes.

En Escuela Tradicional de Transmisión - Asimilación de Conocimientos, se enfatiza los **contenidos** entregados con un fin pragmático, esto es, para ser aplicados en la vida práctica. En el área **actitudinal** se descuidaron los **intereses** y **necesidades** de los estudiantes. Sus representantes más notables fueron: J. B. Salle, J. A. Commenius, J. J. Rousseau y J. H. Pestalozzi.

De 1901 a 1950 surgen dos escuelas y dos líneas teóricas que marcan el periodo:

a) **Escuela Activa** (Centros de Interés, Escuela Nueva, Escuela Sensual Empirista, Escuela Lúdica), donde priorizan las necesidades del entorno y del educando, a éste se le prepara para el oficio y el desempeño eficiente, educación **actitudinal**, pero se descuida el **contenido** del aprendizaje. Algunos de sus más destacados representantes: O. Decroly, J. Dewey, E. Claparede, G. Kerchensteiner.

b) **Escuela Conductista,** que procura motivar al estudiante, canalizando su **interés** a través de estímulos, para que aprenda los **contenidos** conceptuales; pero se descuidaron las **habilidades**, las **destrezas** y la **capacidad de hacer algo**. Representantes: B. F. Skinner, B. Bloom, A. Bandura.

De 1950 a 2000 se tiene nuevos enfoques pedagógicos

a) **Escuela Cognitivista,** donde el núcleo del hacer pedagógico está puesto en los **procesos de pensamiento** más que en los **contenidos** los cuales se descuidan por buscar la **motivación** hacia el aprendizaje. Precursores: J. Piaget, J. Brunner, R. Gagné, Briggs, H. Aebli, entre otros.

b) **Escuela Constructivista y Escuela Postconstructivista,** donde se hace hincapié en el desarrollo de los procesos de pensamiento para modelar actitudes en pro de la **construcción del conocimiento**, no obstante, el maestro es quién decide cuales son los **contenidos**, los **métodos** y las **estrategias** a seguir, descuidando en parte los **intereses y actitudes** de los estudiantes.

Resumiendo, se tiene:

Período	Escuela con Pedagogía de tipo	Énfasis que hizo y/o hace la escuela de aprendizaje	Objetivos a lograr en el educando (aprendiz)	Lo que se descuidó o minimizó teóricamente
1850 a 1900	Instruccional	Contenidos	Actitudes	Actitudes
	Transmisión-asimilación	Contenidos	Actitudes	Actitudes
1901 a 1950	Activa	Actitudes	Actitudes	Contenidos
	Conductista	Actitudes	Contenidos	Actitudes
1950 a 2003	Cognitiva	Actitudes	Actitudes	Contenidos
	Constructivista	Actitudes	Contenidos	Actitudes

FUENTE: Cuadro resumen de la perspectiva histórica (elaborado por CASANUEVA, Patricio)

En el plano de desarrollo profesional del docente actual, son las posiciones constructivistas las que más interesan estudiar y aplicar, porque propician y generan aprendizajes significativos en el estudiante (Ausubel, 1990). Siendo novedoso volver a re-estudiar a Piaget, re-encontrarse con Skinner, Bandura, Gagné y Bloom, empezar a conocer más de cerca de Vygotsky y seguir estudiando a Novak, Gowin y a Ausubel.

El constructivismo pedagógico está centrado en la persona y en sus experiencias previas, a partir de las cuales ésta realiza nuevas construcciones mentales. Tomamos como referencia de este modelo a tres pensadores: Piaget, Vygotsky y Ausubel.

Teórico	Constructivismo	Núcleo de Desarrollo	Aprendizaje
Piaget	Genético	La persona El individuo	Por Equilibración (Asimilación- Acomodación)
Vygotsky	Social	Lo Social El hombre colectivo	Por Interacción ZDP
Ausubel	Disciplinario	La Actitudinal Disciplina	Significativo Experiencias previas

FUENTE: Cuadro resumen del modelo Constructivista del aprendizaje (CASANUEVA, Patricio)

Este modelo considera que la construcción del conocimiento se produce:

i) Para Piaget y el Constructivismo Genético:

El conocimiento se construye mediante la interacción con los objetos circundantes, generándose el desarrollo individual hacia las operaciones lógicas y formales y de la inteligencia. Aprender y enseñar es trabajar con los esquemas, puede haber esquemas manipulativos y representativos, esto se ve prácticamente en que los niños aprenden nuevos esquemas y afianzan los que ya tienen, esto último está en relación con los conceptos de asimilación y acomodación, mecanismos básicos del funcionamiento de la inteligencia.

ii) Para Vygotsky y el Constructivismo Social:

El aprendizaje se realiza en interacción con otros. La premisa básica de esta interacción está dada por la siguiente expresión: detrás de cada sujeto que aprende hay un sujeto que piensa. Para ayudar al alumno debemos acercarnos a su "*zona de desarrollo próximo*", partiendo de lo que ya sabe. El ser humano es una consecuencia de su contexto. La enseñanza debe estar guiada por un énfasis constructivista en los actos del habla, el aprendizaje y maduración de los procesos psicológicos superiores como el lenguaje y sus expresiones -en tanto desarrollo de ideas que luego se internalizan- implican un intercambio compartido de aceptaciones y rechazos de las mismas, hecho que se desarrolla necesariamente en contacto con otros.

iii) Para Ausubel y el Constructivismo Disciplinario:

Ninguna tendencia o teoría pedagógica cumple a cabalidad las exigencias ideales del aprendizaje por la complejidad del mismo proceso, no obstante, una selección sincrética centrada en el **aprendizaje significativo** da luz acerca de los logros y metas a cumplir por los alumnos. La teoría de Ausubel es interesante para llevar a la práctica la elaboración de modelos didácticos.

Teniendo en cuenta los autores mencionados, en la consecución del trabajo, se conjugan los paradigmas establecidos por las tres escuelas: **Activa** por su énfasis en el saber hacer, en tanto permite desarrollar el actuar, el estar ocupado y el aprender a convivir. **Lúdica** por su énfasis en el ser, el trabajar con los sentimientos, con el querer ser de la persona y lograr descubrir la vocación, explorar una forma de aprender a vivir, en síntesis, la formación del aprendiz y **Constructivista** por su énfasis en el saber, en los contenidos curriculares que permiten desarrollar el acto de pensar, la tarea de investigar y autoevaluar el aprendizaje y finalmente -como consecuencia- aprender a aprender.

2.2.2. Aprendizaje significativo

Este tipo de aprendizaje busca que el alumno construya su propio aprendizaje, llevándolo a la autonomía, al momento de pensar de modo tal que desarrolle su inteligencia relacionando de manera integral lo que tiene y lo que conoce, respecto a lo que quiere aprender.

"*La teoría de aprendizaje significativo es una introducción a la psicología de aprendizaje en salón de clases, que se preocupa principalmente del problema de la enseñanza y de la adquisición y retención de estructuras de significados en el alumno. El principio básico de esta teoría, reside en la afirmación de que las ideas expresadas simbólicamente, van relacionados de manera sustancial con lo que el alumno ya sabe. Por eso, la recomendación ausubeliana se basa en averiguar primero, lo que el alumno ya sabe para proceder en consecuencia*" (Ausubel, Novak & Hannesian, 1998, p.27).

Para Ausubel (1990) este tipo de aprendizaje centra su atención en los conceptos y en el aprendizaje proposicional como base sobre la que los individuos construyen sus significados propios. La teoría del "*aprendizaje significativo*" se da como contraposición al "*aprendizaje memorístico*" y, aunque sus aportaciones y terminología se consideran en muchos entornos ya antiguas, que clarifican muchos de los conceptos que normalmente se utilizan; además, sólo desde una aproximación consciente a su origen es posible entender el desarrollo y la integración que del modelo constructivista.

El aprendizaje significativo se produce cuando los nuevos conocimientos se dan o se construyen en base a lo que el alumno conoce (conocimientos previos) que sirve de base para ampliar el edificio cognitivo; y, se logra cuando la adquisición de los nuevos conocimientos encajan fácilmente en la estructura cognitiva del alumno, concatenando e integrando los conocimientos previos con los nuevos, en un entorno de permanente motivación.

Ventajas del Aprendizaje Significativo:

- Produce una retención más duradera de la información. La nueva información al ser relacionada con la anterior, es guardada en la memoria a largo plazo.
- Facilita el adquirir nuevos conocimientos relacionados con los anteriormente adquiridos de forma significativa, ya que al estar claros en la estructura cognitiva se facilita la retención del nuevo contenido, permite explicarlos y aplicarlos.
- Es activo, pues depende de la asimilación de las actividades de aprendizaje por parte del alumno.
- Es personal, ya que la significación del aprendizaje depende de los recursos cognitivos del estudiante.

Aplicaciones pedagógicas

- El maestro debe conocer los conocimientos previos del alumno, es decir, se debe asegurar que el contenido a presentar pueda relacionarse con las ideas previas o requisitos, ya que al conocer lo que sabe el alumno ayuda a la hora de planear.
- Organizar los materiales en el aula de manera lógica y jerárquica, teniendo en cuenta que no sólo importa el contenido sino la forma en que se presenta a los alumnos.
- Considerar la motivación como un factor fundamental para que el alumno se interese por aprender, ya que el hecho de que el alumno se sienta contento en su clase, con una actitud favorable y una buena relación con el maestro, hará que se motive para aprender.
- El maestro debe saber utilizar ejemplos: por medio de dibujos, diagramas o fotografías, se enseñan los conceptos.

Para el aprendizaje significativo, es necesario conocer las estrategias didácticas para manipular los recursos con eficacia. Para potenciar el aprendizaje a largo plazo conviene usar los recursos didácticos, conectados e integrados dentro de la estructura de la unidad didáctica o bloque de trabajo. Por tanto, los recursos tienen que estar conectados con la estructura conceptual del tema trabajado, por ejemplo, mediante un mapa conceptual adecuadamente construido para potenciar el aprendizaje de un tema.

Para la matemática este tipo de aprendizaje representa un modo eficaz para lograr que los conocimientos sean aprendidos significativamente en base a las experiencias del alumno. Ello significa que antes del aprendizaje de un concepto matemático el docente debe explorar lo que el alumno conoce sobre el tema, sólo así determinará si los conocimientos previos le permitirán construir con mayor facilidad los nuevos conocimientos e integrarlos a sus estructuras cognitivas.

2.2.3. La enseñanza

La enseñanza es el acto de dirigir la transferencia de conocimientos con técnicas y procedimientos apropiados durante el proceso de aprendizaje de los alumnos, que suministra conocimientos y asume funciones de:

- Cuidar los aspectos formativos, que es lo esencial en el desenvolvimiento de la persona humana.
- El alumno debe participar en forma activa en sus acciones y reacciones, y al mismo tiempo la enseñanza debe adaptarse al interés y a las condiciones psíquicas del educando.
- Dirigir a los alumnos hacia el conocimiento de la realidad a través del análisis consciente de los diversos problemas que se suscitan.
- No descuidar el aspecto social del alumno, haciendo del lugar de estudios el sitio del encuentro personal y humano.

La enseñanza debe adecuarse de modo que cada alumno pueda aprender significativamente, individualmente o en grupo, situación que se produce con frecuencia; ello exige cierto grado de vivacidad y numerosas competencias particulares, para que el proceso constructivo del alumno resulte eficaz (UNESCO, 1994). Para que el aprendizaje sea efectivo, es necesario que los conocimientos impartidos encajen a las características individuales del alumno, teniendo en cuenta sus esquemas previos de conocimiento, para modificar esos esquemas en la dirección adecuada (De Guzmán, 1993). Por ello, en todo el proceso de enseñanza es preciso planificar con antelación: los instrumentos, la organización del aula, agrupamientos, elección y secuenciación de contenidos, etc.

2.2.4. Materiales y medios didácticos

A menudo se relacionan y hasta se confunden los conceptos de recurso, medio y material educativo. En la práctica, suele darse el caso de que un medio sea, al mismo tiempo, un material. Por ejemplo: un material impreso es un medio para adquirir determinada información sobre temas de Trigonometría, pero también es material a través del cual se transmite dicha información.

a) Materiales didácticos:

Son materiales diseñados con fines educativos, trasciende la intención de uso original y admite variadas aplicaciones (Rico, 1999). Es decir, es todo instrumento diseñado y elaborado con la finalidad de simular aprendizajes específicos y que se emplea como auxiliar o facilitador para la tarea de enseñar y aprender. Entre éstos destacan los denominados **instruccionales** o **educacionales**. Todo material didáctico debe reunir las condiciones de ser interesante y adecuado a los alumnos, parecerse lo más posible a la realidad y poseer valor social, contribuir al desarrollo de las facultades anímicas del estudiante y facilitar la actividad del docente.

b) Medios didácticos:

Canales a través de los cuales se comunican los mensajes o se favorece el proceso de enseñanza–aprendizaje. Estos medios pueden ser: la palabra oral, escrita, medios audiovisuales, etc., aptas para desarrollar las facultades y actividades y que lleva de modo consciente y sistemático la consecución de un fin educativo. Para (Pérez & García, 1989) los medios constituyen un conjunto de elementos que los agentes de la educación tienen a su alcance como exigencia de un aprovechamiento más eficaz de la tarea educativa vinculados en sentido amplio a los objetivos de la educación, a la actividad del alumno, la motivación, los contenidos, el método, la previsión de tiempo y espacio de cada actividad formativa.

Como manifiestan Hoban, Ch.; Finn, J. & Dale,E.; citados por Ogalde (2003, p.20), los medios y recursos didácticos, cuando se utilizan adecuadamente en el proceso enseñanza-aprendizaje:

- Proporcionan una base completa para el pensamiento conceptual y, por tanto, reducen las respuestas verbales sin significado de los alumnos.
- Tienen un alto grado de interés para el autoaprendizaje de los estudiantes.
- Hacen que el aprendizaje sea permanente y eficiente.
- Ofrecen una experiencia real que estimula la actividad por parte de los alumnos.
- Desarrollan continuidad de pensamiento en el desarrollo de un tópico.
- Contribuyen al aumento de significados y, por tanto, al desarrollo del vocabulario.
- Proporcionan experiencias que se obtienen fácilmente a través de otros materiales y medios, y contribuyen a la eficiencia, profundidad y variedad del aprendizaje.

Como el aprendizaje de la matemática se da fundamentalmente por observación, análisis y formalización de información codificada simbólicamente y transmitido a través de medios, con el uso pertinente de los materiales didácticos; según Cloutier citado por (Ogalde, 2003, p.23), "*los medios pueden emplear distintos lenguajes o formas para comunicar, como las siguientes*:

1. Lenguaje verbal o auditivo: radios, cintas, discos.
2. Lenguaje visual: el empleo de la imagen en transparencias, fotografías o carteles.
3. Lenguaje escrito: empleo de textos, modelos, revistas, diarios y manuales.
4. Combinación de lenguajes: Audiovisuales, televisión, cine, etc".

Siendo los medios y materiales mencionados, los conducentes a la dinamización y optimización del proceso enseñanza-aprendizaje, la combinación de medios visuales, auditivos y escritos, que son aplicables en la enseñanza de la matemática, se concretaron en el desarrollo del modelo en las clases de trigonometría.

2.2.5. Evaluación de la enseñanza-aprendizaje

Es un proceso permanente de valoración de la tarea educativa sobre la base de determinados objetivos previstos con la finalidad de optimizar el proceso de enseñanza aprendizaje y poder conocer los aciertos y errores del proceso en su conjunto.

Según Llinares (1990, p.184) "*la evaluación permite al alumno orientarse sobre cómo está estudiando y cómo va aprendiendo, le sirve para saber cuanto le falta aún y qué puntos debe repasar. Es una función orientadora, que también le servirá para ubicarse dentro del grupo, es decir, si se reconoce como parte de los estudiantes a quienes les sale todo bien, los que no hacen nada, o los que se equivocan y reparan el error. Esta posibilidad de autoevaluarse, no con el patrón del profesor, sino el de sus propios compañeros, es la prueba de autocrítica con respecto a su compromiso con el aprendizaje*".

Para Pérez & García (1989), evaluar es el acto de valorar la realidad educativa, que forma parte de un proceso cuyos momentos previos son los de fijación de características de la realidad a valorar, y de recolección de información sobre las mismas, y cuyas etapas posteriores son la información y la toma de decisiones en función del juicio del valor emitido.

De Guzmán (1993) expresa que la evaluación es un instrumento eficaz y favorecedor del proceso enseñanza-aprendizaje y que permite:

- Impulsar el trabajo diario y comunicar seguridad en el propio esfuerzo;

- dar información al profesor y a los alumnos sobre los conocimientos que se poseen, sobre las deficiencias que se hayan producido, haciendo posible la incidencia inmediata sobre las mismas y sobre los progresos realizados, en los distintos aspectos y crear expectativas positivas;

- reunir un número elevado de resultados de cada alumno, reduciendo sensiblemente la aleatoriedad de una valoración única.

Según Casanova (1999, p.60) evaluación educativa es "*un proceso sistemático y riguroso de recogida de datos, incorporando al proceso educativo desde el comienzo, de manera que sea posible de disponer de información continua y significativa para conocer la situación, formar juicios de valor respecto a ella y tomar las decisiones adecuadas para proseguir la actividad educativa mejorándola progresivamente*".

Siendo la evaluación un momento relevante del procesos enseñanza-aprendizaje, orientado a regular las actividades del profesor, alumno, materiales y la institución escolar; se da a través de siete etapas consistente en:

a) especificar las decisiones a tomar y los juicios a emitir,
b) describir la información necesaria;
c) plantear la obtención de la información;
d) obtener, analizar y registrar información;
e) formular juicios,
f) tomar decisiones; y
g) resumir y dar a conocer los resultados de la evaluación.
(Wenzelburger,1995).

El proceso de enseñanza-aprendizaje incluye implícitamente a la evaluación inicial, procesual y final en la medida en que ésta se vaya haciéndose explícito a través de aplicación de instrumentos, el interés en él llevará a profundizar lo que es la evaluación y como mejorarla, de la misma forma que se hace con la enseñanza y el aprendizaje (Díaz,1995); así, la evaluación es un instrumento de seguimiento y mejora del proceso y una actividad colectiva por excelencia, donde los estudiantes tienen la ocasión de discutir aspectos como el ritmo en que el profesor imprime el trabajo o la manera de dirigirse a ellos, y sus propias actitudes y logros.

La evaluación educativa según su temporalización puede ser:

a) Evaluación inicial

Se lleva a cabo en forma preliminar antes de impartir un tema o los contenidos de la asignatura para obtener información sobre la situación real del alumno, con la finalidad de indagar qué conocimientos tiene antes de iniciar el estudio del tema. Según Giménez (1997) "*pretende conocer los preconceptos de los alumnos, tener una intuición de sus intenciones, reconocer sus habilidades y destrezas procedimentales, tomar cuenta de sus actitudes y contrastar todo ello con lo que se pretende trabajar*". Adquiridos en asignaturas consideradas como requisitos y es base para impartir nuevos conocimientos; que desde la teoría del aprendizaje significativo, es averiguar qué sabe el alumno y qué tiene en su estructura mental (Orlich, 1994). Esta evaluación se realiza mediante la aplicación de una prueba previa; de reactivos elaborados para recavar información de los conocimientos previos para tratar un tema. Los instrumentos más usados para estas pruebas son: cuestionarios, pruebas de conocimiento y test de inteligencia.

En el estudio realizado se administró una prueba de conocimiento (de requisitos), donde se evalúan conceptos, destrezas operativas, manejo del lenguaje simbólico y gráfico, necesarios para iniciar con el estudio de las funciones trigonométricas a partir de los puntos de la circunferencia unitaria en el plano cartesiano.

b) Evaluación procesual

Se lleva a cabo durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, para controlar, diagnosticar o regular, aprender de los errores cometidos y conseguir mejores logros. Proporciona información cuantitativa y cualitativa necesarias para analizar las variables del proceso didáctico, corregir el propio proceso, reconducir la enseñanza y establecer una retroalimentación; suministrados periódicamente con el fin de verificar si el aprendizaje se está logrando realmente. Proporciona al profesor un feed-back continuo acerca de su enseñanza, para que pueda replantear sus estrategias.

Bloom (1990) considera que la evaluación formativa da mejores resultados cuando no se le atribuye una nota. Esta evaluación puede utilizarse como recurso de enseñanza y como fuente de motivación, con efectos muy positivos. Para Casanova (1999) "*es netamente formativa, pues al favorecer la recogida continua de datos, permite la adopción de decisiones sobre la marcha, que es lo que más interesa al docente para no dilatar en el tiempo la resolución de dificultades presentadas por sus alumnos*".

Los instrumentos adecuados a la evaluación procesal son: Guías de observación, Tablas de cotejo, escalas de valoración, pruebas de conocimiento, ficha de observación operacional. Para el caso de nuestro estudio se hizo una práctica continua de pruebas orales y escritas, trabajos individuales y en equipo durante el desarrollo, con asesoría del profesor y a través de autoevaluación y coevaluación permanentes en clase.

c) Evaluación final

Se lleva a cabo al final de un proceso de enseñanza-aprendizaje, para promover a los estudiantes para nuevos estudios e indicar el resultado global alcanzado, y que se traduce en una nota, como producto final del proceso enseñanza-aprendizaje.

La evaluación final adopta dos funciones:

- Función formativa, para adecuar la enseñanza al modo de aprendizaje del alumno o para retroalimentar la programación del profesor, con miras a mejorar el proceso de enseñanza en la unidad o tema siguiente.
- Función sumativa, para tomar la decisión última sobre el grado de lo alcanzado por un alumno y obrar en consecuencia (Casanova, 1999).

Los resultados de la evaluación final se pueden analizar e interpretar con tres referentes distintos:

- En relación con los objetivos y criterios de evaluación establecidos para el tema;
- En relación a la evaluación inicial realizado a cada alumno.
- En relación con los resultados alcanzados por el resto del grupo.

Entre los instrumentos para la evaluación final, destacan: escalas de valoración, pruebas de conocimiento, cuestionario de opinión. En el estudio realizado, se aplica una prueba para concretar con precisión el aprendizaje individual logrado por los alumnos referente al tema de Trigonometría: Funciones trigonométricas, identidades trigonométricas y aplicaciones de las funciones trigonométricas. Cuyos ítem se elaboraron en concordancia con los niveles del dominio cognoscitivo de la Taxonomía de los objetivos de la educación de Bloom.

2.2.6. Dominio cognoscitivo de la Taxonomía de Bloom

Es el de más trascendencia en la educación y en la Matemática, incluye según Bloom (1990, p.10) aquellos objetivos que "*se refieren a la memoria o evocación de* *los conocimientos y al desarrollo de habilidades y capacidades técnicas de orden intelectual. Este es el dominio central en el trabajo de la mayoría de los que actualmente dedican al examen de conocimientos adquiridos*". Asimismo, es el terreno en el cual se han extendido la mayor parte de trabajos sobre estructuración de **currículum**, y en el cual pueden encontrarse las definiciones de objetivos más claros en su formulación verbal, como descripción del comportamiento verbal.

El dominio cognoscitivo posee seis niveles:

CONOCIMIENTO: Capacidad de recordar hechos específicos y universales, métodos y procesos, o un esquema, estructura o marco de referencia. Los objetivos de conocimiento subrayan sobre todo los procesos psicológicos de evocación. En este nivel recuerda porciones de información, conceptos, fórmulas matemáticas, reglas y convenciones para desarrollar un problema (Bloom, p.127).

COMPRENSIÓN: El alumno asimila lo que se le está enseñando y hace uso de los materiales o ideas que se le transmite. Esta habilidad en la matemática se expresa en interpretación gráfica de las funciones, traducción de la información en tablas y explicación de propiedades en forma gráfica y simbólica (Bloom, p.129).

APLICACIÓN: Uso de abstracciones en situaciones particulares y concretas. Pueden presentarse en forma de ideas generales, reglas de procedimientos o métodos generalizados y pueden ser también principios. La aplicación designa al uso de representaciones abstractas a situaciones concretas.

ANÁLISIS: Fraccionamiento de una comunicación o conocimiento en sus elementos constitutivos, de tal modo que aparezca en forma clara la jerarquía relativa de las ideas y se exprese explícitamente la relación existente entre éstas. El análisis clarifica la comunicación, indica cómo está organizada y la forma cómo se logra comunicar sus efectos, sus fundamentos y ordenación. Expresados a través de: la aplicación de los términos o conceptos y la predicción de efectos probables de cambio (Bloom, p.130).

SÍNTESIS: Reunión de los elementos y las partes para formar un todo. Trata sobre los procesos de trabajo con elementos aislados, partes, piezas, etc., ordenándolos y combinándolos de tal manera que constituyan un esquema o estructura que antes no estaba presente de manera clara. Se expresa a través de la producción de una comunicación única, producción de un plan o conjunto de operaciones y la derivación de un conjunto de relaciones abstractas (Bloom, p.130-131).

EVALUACIÓN: Formulación de juicios sobre el valor del material y los métodos, de acuerdo a determinados propósitos. Incluye juicios cuantitativos y cualitativos respecto de la medida en que los materiales o los métodos satisfacen determinados criterios que el estudiante haya determinado o los que le son sugeridos. La evaluación se expresa a través de: juicios formulados en términos de evidencias internas y de evidencias externas (Bloom, p.131).

2.3. ENSEÑANZA - APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

La Matemática es una actividad vieja y polivalente, empleada con objetivos profundamente diversos. Fue utilizada como un importante elemento disciplinador del pensamiento en el Medioevo, ha sido la más versátil e idónea herramienta para la exploración del universo a partir del Renacimiento, ha constituido una magnífica guía del pensamiento filosófico, entre los pensadores del racionalismo y filósofos contemporáneos, ha sido un instrumento de creación de belleza artística, un campo de ejercicio lúdico, entre los matemáticos de todos los tiempos (De Guzmán, 1990).

Para Valiente (2000) la matemática es una parte importante de la riqueza cultural de la humanidad que debe ser compartida por todos. Desde esta perspectiva, la enseñanza de la Matemática en los niveles básicos tiene como propósitos: Hacer conocer al adolescente el acervo cultural de la sociedad, desarrollar en los estudiantes nociones y conceptos útiles para comprender su entorno, proporcionarles un conjunto de procedimientos e instrumentos del pensamiento que les permita el acceso a las otras áreas del conocimiento y la actividad humana. Por ello, en la escuela secundaria el aprendizaje de la Matemática debe favorecer en el estudiante: la apreciación del trabajo personal, su capacidad para explorar y buscar soluciones a problemas y, su amplitud para comunicar, analizar y justificar afirmaciones.

2.3.1. Metodología de enseñanza-aprendizaje de la matemática

El método es la dirección misma del proceso de enseñanza-aprendizaje que depende de los objetivos de un programa de estudios. Para la matemática son los métodos llamados pedagógicos o procedimientos pedagógicos, que tienen tres intenciones y sus correspondientes modos de enseñanza, como se presenta en el cuadro sinóptico:

MÉTODOS PEDAGÓGICOS	Para la dirección del aprendizaje.	Expositivo Interrogativo activo
	Según la presentación del aprendizaje	intuitivo simbólico
	Por las relaciones con los alumnos durante	individual colectivo

Estos modos se expresan en formas metodológicas, y las que más se aplican en la enseñanza de la matemática en el nivel de educación secundaria son: La forma Socrática, de correlación, Heurística, Expositiva, Estudio de Textos, Individual y de Proyectos.

No existe una estrategia metodológica predeterminada, aislada y única para la enseñanza de la matemática. Para lograr aprendizajes significativos en los alumnos es preciso conjugar algunos métodos activos como el de: auto-estudio, estudio dirigido, de proyectos, heurístico, etc. Desde esta perspectiva, la Matemática en el nivel secundario, debe ser enseñada en función al interés del estudiante, orientada hacia el desarrollo de competencias y de sus capacidades para que los estudiantes:

- Usen sus conocimientos adquiridos durante el proceso de enseñanza aprendizaje, en la resolución de problemas dentro y fuera de la escuela.

- Realicen cálculos valiéndose de las propiedades de los números reales y de las operaciones definidas en ella: cálculo mental y cálculo escrito.

- Desarrollen su capacidad de pensar sobre números, formas, funciones y sus transformaciones. Se incorporen a la cultura tecnológica de nuestra época a través del uso de calculadoras y computadoras.

El proceso de aprendizaje de la matemática se da por niveles:

Nivel 1 (de reconocimiento), donde los alumnos realizan acciones concretas sobre objetos matemáticos.

Nivel 2 (de análisis) donde se identifican los elementos y propiedades de los objetos matemáticos, sin llegar a una etapa de generalización.

Nivel 3 (de clasificación), comienza la capacidad de razonamiento formal, pudiendo dar definiciones y entender definiciones dadas.

Nivel 4 (de deducción formal), los alumnos entienden y realizan razonamientos lógicos formales.

Los métodos de aprendizaje y la enseñanza de la matemática que se propone son propios del constructivismo pedagógico, que se da a través de la construcción de esquemas de conocimiento matemático, donde:

- Los alumnos aprenden matemática a partir de sus experiencias y mediante la reflexión de las acciones que realizan. La actividad de aprender matemática, a los alumnos debe permitirles elaborar hipótesis, probar distintos caminos para resolver problemas, equivocarse, disponer de estrategias para darse cuenta de los errores, rectificar, etc.

- Para aprender matemática, los alumnos necesitan poseer una gama de conocimientos previos, expresar sus ideas, relatar sus experiencias, trabajar con materiales, dibujar o modelar sus representaciones mentales, intentar procedimientos, equivocarse, corregirse, sentirse estimulados, organizar sus descubrimientos y demostrar sus adquisiciones.

- El aprendizaje de la matemática debe ser mediado y favorecido por un docente que asuma el rol de orientador, que dialogue con los alumnos, que proporcione los materiales adecuados y, principalmente, que les dé confianza en su capacidad de aprender.

- El aprendizaje de la matemática en los alumnos se ve enriquecido por el diálogo con sus pares, donde podrá confrontar sus puntos de vista, intercambiar procedimientos, aprender de los otros.

2.3.2. Las inteligencias múltiples:

Las tendencias metodológicas para el aprendizaje en general y de la matemática en particular se fundamentan en la teoría de las inteligencias múltiples formulado por Gardner (1994), quien considera la inteligencia como la capacidad de resolver problemas o elaborar productos que sean valiosos para el logro de aprendizajes, dependiendo del medio ambiente, las experiencias, la educación recibida, etc., a través de ocho tipos de inteligencias: lógico-matemática, lingüístico-verbal, corporal-kinestésica, espacial, musical, interpersonal, intrapersonal y naturalista.

El aprendizaje, a la hora de aprender está en continua evolución sin que exista contraposición real con la teoría de las inteligencias múltiples. Un mismo tema se puede presentar de diversas formas que permitan al alumno asimilarla partiendo de sus capacidades y aprovechando sus puntos fuertes. Consideramos que una educación centrada en cinco de los ocho tipos de inteligencia es la más adecuada para la enseñanza de la matemática en alumnos del quinto grado de secundaria, para que sean competitivos. Estos son:

	El alumno destaca en	Le gusta	Aprende mejor
LÓGICO - MATEMÁTICA	Matemáticas, razonamiento, lógica, resolución de problemas, pautas.	Resolver problemas, cuestionar, trabajar con números, experimentar.	Usando pautas y relaciones, clasificando, trabajando con lo abstracto.
LINGÜÍSTICO-VERBAL	Lectura, escritura, narración de historias, memorización de fechas, piensa en palabras.	Leer, escribir, contar historias, hablar, memorizar, hacer puzzles.	Leyendo, escuchando y viendo palabras, hablando, escribiendo, discutiendo y debatiendo.
ESPACIAL	Lectura de mapas, gráficos, dibujando, laberintos, puzzles, imaginando cosas, visualizando.	Diseñar, dibujar, construir, crear, soñar despierto, mirar dibujos.	Trabajando con dibujos y colores, visualizando, usando su ojo mental, dibujando.
INTERPER-SONAL	Entendiendo a la gente, liderando, organizando, comunicando, resolviendo conflictos, vendiendo.	Tener amigos, hablar con la gente, juntarse con gente.	Compartiendo, comparando, relacionando, entrevistando, cooperando.
INTRAPER-SONAL	Entendiéndose a sí mismo, reconociendo sus puntos fuertes y sus debilidades, estableciendo objetivos.	Trabajar solo, reflexionar, seguir sus intereses.	Trabajando solo, haciendo proyectos a su propio ritmo, teniendo espacio, reflexionando.

Cuadro traducido por Nuria de Salvador de *Developing Students' Multiple Intelligences*. NICHOLSON-NELSON, K. (New York: Scholastic Professional Books 1998).

2.3.3. Teorías para el aprendizaje de la matemática

La mayoría de las teorías de aprendizaje de matemática ha estado sustentado a través de dos enfoques principales. Históricamente, el primero tiene una raíz conductual y el segundo una base cognitiva.

La tendencia conductuales (asociacionista): Sobre el aprendizaje matemático, considera que aprender es cambiar conductas e insiste en destrezas de cálculo y divide estas destrezas en pequeños pasos para que, mediante el aprendizaje de destrezas simples, se llegue a aprender secuencias de destrezas más complejas. Desde esta perspectiva, por ejemplo, un alumno ha aprendido a dividir si realiza correctamente divisiones.

La interpretación cognitiva (estructuralista): Sobre el aprendizaje matemático, considera que el aprender matemática es alterar las estructuras mentales e insisten en el aprendizaje de conceptos. Dada la complejidad de los conceptos, el aprendizaje no puede descomponerse en la suma de aprendizajes más elementales, sino que se origina partiendo de la resolución de problemas o de la realización de tareas complejas.

En la teoría cognitiva de Gagné, la atención se ha dirigido hacia las implicancias del diseño de enseñanza. En ella, toda situación de aprendizaje en general y la enseñanza-aprendizaje de la matemática en particular se resume en el cuadro:

Etapa de	Proceso	Eventos externos que ejercen influencia

aprendizaje		
Motivación	Expectativa	Comunicación del objetivo por realizar.
Comprensión	Atención: percepción selectiva	Confirmación previa de la expectativa a través de una experiencia exitosa
Adquisición	Cifrado: acceso a la acumulación.	Modificación en la estimulación para atraer la atención.
Retención	Almacenar	Aprendizaje previo de percepción. Indicaciones diferenciales adicionales para la perfección.
Recordar	Recuperación	Proyectos sugeridos para el cifrado Proyectos sugeridos para la recuperación. Indicaciones para la recuperación.
Generalización	Transferencia	Variedad de contextos para las indicaciones dirigidas a la recuperación
Actuación	Respuesta	Casos de actuación
Retroalimentación	Fortalecimiento	Retroalimentación informativa que proporciona constatación o comparación de un modelo.

2.3.4. Fundamentos biológicos y psicológicos del aprendizaje

Fundamentos biológicos: Desde el punto de vista biológico, las relaciones entre el organismo y el medio exterior son determinantes para el proceso del aprendizaje de la matemática, que permite al organismo responder a cualquier situación actualizando las estructuras del conocimiento; los evolucionistas explican paralelamente las variaciones adaptativas, por presión del medio, por mutaciones endógenas con selección inmediata, y por interacción progresiva de factores internos y externos; algunos tratadistas como Darwin atribuyen el desarrollo de la inteligencia y el aprendizaje como dones hereditarios (Piaget, 1972). Una de las condiciones para el logro de aprendizajes se encuentra en la salud del escolar, en condiciones del local, el clima social y familiar, que se constituyen en elemento motivador tanto individual como colectivo.

Fundamentos psicológicos: Para Piaget, en el período de las operaciones mentales sobre contenidos no presentes físicamente, el individuo que hace uso de las operaciones formales es capaz de preguntar: *¿Qué ocurrirá si se altera las condiciones existentes*? Además, contesta a su propia pregunta al considerar sistemáticamente todas las condiciones hipotéticas que pueden aparecer a causa de los cambios en el estado de las cosas (Bergan, 2000). Los fenómenos como la capacidad mental, la maduración, la diversidad aptitudinal y disposicional, la variedad de intereses, etc., son factores para el aprendizaje de la matemática. Otro fundamento del aprendizaje está dado por los impulsos emocionales, los sentimientos que gobiernan y acondicionan el aprendizaje del adolescente influyendo directamente en su mente y su corazón en el aula (Goleman, 1998).

2.3.5. Finalidad de la enseñanza de la Matemática

Según Riveros, 1981; Torres, 1993; Santaló, 1994 (citado por Pérez de Zapata, 1997); y Rico (2000) la enseñanza-aprendizaje de la Matemática tiene tres propósitos:

- **Formativo**, porque desarrollan las capacidades de razonamiento lógico, simbolización, abstracción, rigor y precisión que caracterizan al pensamiento formal. Está relacionado con el desarrollo de habilidades cognoscitivas abstractas, tales como la capacidad para razonar, abstraer, deducir, entre otras, y permite desarrollar la capacidad de pensar, influyendo en la formación de la inteligencia.

- **Práctico, utilitario o funcional**, porque la Matemática proporciona esquemas mentales, que permiten resolver problemas de la vida cotidiana, incluyendo situaciones de la vida laboral. La matemática aparece en todas las formas de expresión humana, permiten codificar información y obtener una representación del medio social y natural, para una actuación posterior sobre dicho medio

- **Instrumental**, porque proporciona herramientas de trabajo al desarrollo y sistematización de otras disciplinas, a través de sus resultados. Las técnicas matemáticas se aplican no sólo a la Física y la Química, sino también a la Biología, la Economía, las Ciencias Sociales, etc. En la actualidad, no hay disciplina alguna que no necesite de la matemática.

Los propósitos expuestos indican que el aprendizaje de las matemáticas escolares debe ser siempre un proceso activo, resultado de una variedad de interacciones del alumno con su maestro y compañeros, que se produce sobre la base de conocimientos previos, de tipo formal, intuitivo e informal. La acción sobre objetivos reales, las manipulaciones a los que se puede someter objetos a cualquier actuación que ponga de manifiesto relaciones que pueden considerarse entre objetos diversos, que constituyen imprescindible en la comprensión y asimilación de los conceptos matemáticos, que se integran a la red conceptual previamente existente. (Rico, 2000).

2.3.6. Tendencias Metodológicas de aprendizajes de la Matemática:

a) Aprendizaje en base a problemas:

Estrategia didáctica para aprendizaje de la matemática propuesto por Pólya (1967), que enfatiza la enseñanza del descubrimiento y desarrollo ejercicios apropiados, involucrando al estudiante en la solución de problemas, generaliza su método en cuatro pasos: **Entender el problema**, **configurar un plan**, **ejecutar el plan**, y **mirar hacia atrás**. Según Pólya para resolver un problema, uno hace una pausa, reflexiona y hasta puede ser que ejecute pasos originales para dar la respuesta, dando un paso creativo en la solución, no importa que tan pequeño sea, ello distingue un problema de un ejercicio. Hacer ejercicios es muy valioso en el aprendizaje de las matemáticas, pues ayuda a aprender conceptos, propiedades y procedimientos -entre otras cosas-, los cuales se pueden aplicar cuando se enfrentan a la tarea de resolver problemas.

Luego, este método fue desarrollado por los psicólogos (D´Zurilla y Goldfried, 1971), como uno de los procedimientos heurísticos para el aprendizaje de la matemática que abre un panorama en las actividades intelectuales de más amplio nivel, esta estrategia de aprendizaje de la matemática se da a través de:

1) Presentación y análisis del problema;
2) Comprensión del problema: Identificación de datos o informaciones y la incógnita.
3) Aprendizaje de conceptos y propiedades, uso de medios y materiales adecuados.
4) Aplicaciones progresivas de conceptos y propiedades en problemas previos, mando medio y materiales adecuados;
5) Solución del problema presentado;
6) Respuesta al problema presentado;
7) Otras aplicaciones.

Mediante la presentación y planteamiento de problemas y situaciones problemáticas, expresamente elaboradas, se orienta al alumno al proceso de aprendizaje de un tema determinado para la adquisición de conocimientos, desarrollo de habilidades y de actitudes, lográndose así los objetivos de aprendizaje propuestos; con orientación y guía del profesor y en el proceso de retroalimentación.

La resolución de problemas juega un papel trascendental en la aproximación a la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Se espera que el estudiante construya su conocimiento matemático al enfrentar, dentro del contexto social del salón de clase, problemas para los que no conoce de antemano una estrategia de solución apropiada, para significar un reto y que ponen en juego un conocimiento matemático relevante (Rico,1988).

A través de este método el alumno manipula los objetos matemáticos, activa su propia capacidad mental, ejercita su creatividad, reflexiona sobre su propio proceso de pensamiento a fin de mejorarlo, hace transferencias de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental, adquiere confianza en sí mismo, se divierte con su propia actividad mental, se prepara así para otros problemas de la ciencia y, posiblemente, de su vida cotidiana, se prepare para los nuevos retos de la tecnología y de la ciencia.

Ventajas:

-) Proporciona a los alumnos: capacidad autónoma y crítica para resolver sus problemas aplicando sus propios procedimientos.

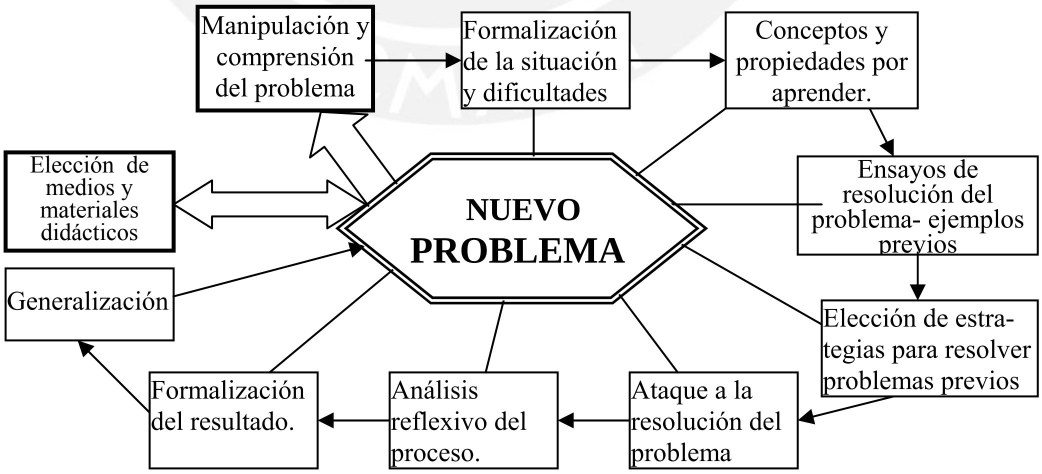
-) Los procesos efectivos de adaptación a los cambios de nuestra ciencia y de nuestra cultura no se hacen obsoletos

-) Se realizan trabajos atrayentes, divertidos, satisfactorio, autorrealizador y creativo, proporcionando el proceso de retroalimentación continua.

-) Se consolidan hábitos que tienen un valor universal, no limitado al mundo de las matemáticas

La presentación de un tema matemático basada en el espíritu de la resolución de problemas debería proceder del siguiente modo:

Propuesta de la situación problema o nuevo problema de la que surge el tema a estudiar (basada en la historia, aplicaciones, modelos, juegos...), se expresa en el esquema:



b) Aprendizaje cooperativo:

El Aprendizaje Cooperativo o colaborativo o grupal, es una estrategia pedagógica, en la que a los estudiantes trabajando en grupos o equipos, desarrollan habilidades de carácter cognitivo, valorativo y socioafectivo.

El Aprendizaje Cooperativo:

- Es conjugar esfuerzos para alcanzar una meta de aprendizaje común.
- Es más que la ejecución distribuida de una tarea entre los miembros del grupo.
- Es lograr productos que son resultados de la potenciación de los esfuerzos individuales.
- Se produce si cada uno de los miembros del grupo se siente responsable de su propio aprendizaje, al mismo tiempo que del aprendizaje de los demás.

En el aprendizaje cooperativo se consideran las componentes:

Interdependencia positiva: Cada uno es responsable del aprendizaje de los demás.

Interacción fomentadora: Aliento mutuo y retroalimentación positiva.

Responsabilidad individual: El esfuerzo de cada uno es indispensable para el éxito.

Habilidades interpersonales: Conocimiento mutuo, confianza, aceptación y comunicación clara.

Procesamiento por el grupo: Análisis y evaluación del funcionamiento grupal.

Para que el aprendizaje cooperativo sea efectivo el docente debe considerar los siguientes pasos para la planificación, estructuración y manejo de las actividades.

1. Especificar los objetivos de la clase o tema a tratar.
2. Establecer con prioridad la forma en que se conformarán los grupos de trabajo.
3. Explicar con claridad a los alumnos la actividad de aprendizaje que se persigue y la interrelación grupal deseada.
4. Supervisar en forma continua la efectividad de los grupos de aprendizaje cooperativo e intervenir para enseñar destrezas de colaboración y asistir en el aprendizaje académico cuando surja la necesidad.
5. Evaluar los logros de los estudiantes y participar en la discusión del grupo sobre la forma en que colaboraron.

Se espera que los alumnos interactúen entre si, que compartan ideas y materiales, apoyo y alegría en los logros académicos de unos y otros, que elaboren y expresen conceptos y estrategias aprendidas. La evaluación participativa es el sistema recomendado.

El papel del profesor es directivo, orientador. Sus intervenciones –explicaciones, comentarios, preguntas, respuestas-- y las tareas propuestas a los alumnos para su realización durante la clase, están destinadas a encauzar los hábitos de trabajo intelectual y otras capacidades de los educandos. El aprendizaje no sólo se nutre de los conocimientos del profesor, de los libros, textos y otros materiales didácticos; sino, también de lo mucho que sus compañeros son capaces de aportar; desarrollando valores como la ayuda mutua o la colaboración desinteresada de los más avanzados en el proceso.

En el aprendizaje cooperativo, destacan las estrategias:

- **El Tándem (o trabajo en pares)**, tiene una semejanza a una bicicleta para dos personas en la cual ambas personas pedalean juntos la bicicleta, avanzando en forma conjunta y con una dirección determinada (objetivo). Esta estrategia es aplicada en todas las sesiones del aprendizaje con el modelo.

- **El Rally (o trabajo en grupos paralelos)**: Concurso entre varios grupos de estudio, que intentan realizar su mejor presentación, propicia la colaboración dentro de los grupos y la competencia entre ellos. En la enseñanza con modelos, esta estrategia se desarrolla una vez por semana en el desarrollo grupal del modelo.

- **El rompecabezas (o trabajo en grupos cruzados)**: tiene la estructura de dependencia mutua, para realizar una tarea con éxito. Los alumnos se ven obligados a cooperar, porque cada uno dispone sólo de una parte de la información. Una vez que cada uno trasfiera información a los miembros del grupo e individualmente o en conjunto deben armar sus piezas de información como rompecabezas. Esta actividad se recomienda, cuando se distribuye tareas grandes o extensas, y específicas a los integrantes del grupo, o a cada grupo.

c) Aprendizaje Activo o Método activo :

Estrategia metodológica sustentada en el principio de que el alumno sólo aprende bien cuando lo hace por observación, reflexión y experimentación (auto-formación). La enseñanza debe ser adaptado a la naturaleza propia de cada alumno (enseñanza-diferenciado); orientado no sólo en su formación intelectual, también a sus aptitudes manuales, así como a su energía creadora (educación integral); etc.

El aprendizaje activo se caracteriza porque:

- Está centrado en los alumnos. El educando es el eje del sistema educativo y protagonista de su aprendizaje.

- Parte de las necesidades, intereses, expectativas y/o curiosidades de los estudiantes.

- Se funda en las necesidades de conocer, saber, buscar, elaborar, trabajar, observar, etc. El docente debe crear o descubrir dichas necesidades.

- Respeta la vocación y espontaneidad de los estudiantes. Las cosas que hagan con agrado les serán más gratificantes, duraderas y constructivas. No la imposición.

- Permite la comunicación horizontal. El proceso educativo fundamentalmente es un proceso comunicativo entre el docente y los alumnos entre sí.

- Es vital: El centro educativo toma en cuenta el entorno, haciendo una educación realista, vital y coherente.

En el aprendizaje activo:

EL DOCENTE asume la función de generador y motivador de aprendizajes, y sirve de guía y modelo para sus alumnos. Determinando los objetivos que se propone lograr, tomando en cuenta las características y necesidades del estudiante, selecciona los procesos para poner en práctica la enseñanza y las condiciones del aprendizaje, en cantidad y calidad, que influye algo más que una buena presentación material, buscando producir una alta motivación del estudiante para participar y comprometerse en el proceso de su propia educación y sentir una seguridad que le conduzca al éxito.

LOS ALUMNOS, asumen una función protagónica, activa y dinámica en su proceso formativo, especialmente en su aprendizaje; desafiados a hacer algo que no saben hacer, es decir encontrar la respuesta a un problema que reta su imaginación y sus propias habilidades; trabajando en equipo, solidariamente y cooperando con sus compañeros o en proyectos individuales y grupales; manteniendo un estado y una mentalidad optimista; tomando en consideración el decálogo de desarrollo: compañerismo, orden, puntualidad, superación, respeto a los demás, trabajo, responsabilidad, honradez, solidaridad, perseverancia, laboriosidad y tolerancia.

En el proceso de la enseñanza de la matemática a través de modelos se conjugan, entre otras, el trabajo individual, la resolución de problemas, la hoja de instrucción, la instrucción programada, el estudio dirigido, el trabajo en equipo y el de los grupos de estudio que forman parte de los métodos activos colectivizados.

d) Aprendizaje a través del Computador:

El aprendizaje ayudado por computadoras (Computed assisted instruction) es un procedimiento que se desprende de la instrucción programada, propicia un aprendizaje activo-personalizado a través de la combinación de diferentes medios. Así por ejemplo, cuando el estudiante lee mensajes a través de la pantalla recibe mensaje similar al libro; si observa gráficos o imágenes, tiene la función de materiales de imagen fija y gráficos; si escucha un mensaje auditivo tiene la función de medio auditivo, etc. "*A través de este material didáctico se integra las actividades de estimulación, respuesta y retroalimentación*" (Ogalde, 2000, p.84). Entre algunas ventajas del uso de la computadora en el proceso de enseñanza-aprendizaje, destacan:

a) Incrementa o mantiene la atención del alumno durante más tiempo.

b) Reduce el tiempo necesario para aprender una tarea.

c) Permite al alumno interactuar activamente con el material, responder, practicar y probar cada paso del tema que debe dominar.

d) Permite al estudiante conocer en forma inmediata si sus respuestas fueron o no acertadas, así como la causa de sus errores.

e) Propicia un alto grado de individualización, el estudiante avanza a su propio ritmo.

En los últimos años, se vienen propiciando el uso de software matemáticos para coadyuvar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática a través de herramientas multimedia y elaboración de hipermedios con la utilización simultánea de sonido, movimiento, imagen y colores, que motivan y facilitan el aprendizaje de los alumnos, constituyéndose en medios y materiales insoslayables para los docentes de matemática.

2.3.7. Organización del contenido

Compartiendo el punto de vista cognitivo, el conocimiento matemático está organizado en dos grandes campos: Conceptual y procedimental.

El **conocimiento conceptual:** Se caracteriza por ser rico en relaciones, puede considerarse como una membrana conectada de conocimientos, una red en la que las relaciones de conexión saturan los hechos y proposiciones individuales de modo que todas las piezas de información están conectadas a alguna red.

En el conocimiento conceptual se distinguen tres niveles: los **hechos**, que son unidades de información y sirven como registros de acontecimientos; los **conceptos** que describen una regularidad o relación de un grupo de hechos, que admiten un modelo o representación y se designa con un signo o un símbolo; y las **estructuras conceptuales**, que unen conceptos o sugieren formas de relación entre conceptos, constituyendo algún orden o relación entre ellos.

El **conocimiento procedimental:** Consiste en los modos de ejecución ordenada de una tarea, lo constituyen las reglas, algoritmos o procedimientos empleados para resolver una tarea. Hay instrucciones paso por paso que prescriben cómo concluir una tarea, se ejecutan en una secuencia lineal predeterminada.

En la ejecución de tareas matemáticas se distinguen tres niveles de conocimientos en el campo de los procedimientos: Las **destrezas**, consisten en transformar una expresión simbólica desde una forma dada hasta otra forma, y para ello se ejecutan una secuencia de reglas sobre manipulación de símbolos; los **razonamientos** que se presentan al procesar relaciones entre conceptos y propiedades, permiten establecer relaciones de inferencia entre los mismos; las **estrategias**, que se ejecutan sobre representaciones y relaciones que operan dentro de una estructura conceptual, teniendo en cuenta las relaciones y conceptos implicados.

2.3.8. La enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Educación Secundaria

El proceso enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la mayoría de los centros educativos de la región se da por el procedimiento expositivo, donde el profesor muestra los conceptos, las ideas y todo el razonamiento como si estuviera en una conferencia, con exposición de contenidos-ejemplos-ejercicios sencillos- ejercicios más complicados- dejando al alumno el papel de receptor de los conocimientos. Este procedimiento induce a los alumnos a un aprendizaje memorístico y pasajero, en base memorización de reglas, fórmulas y hechos poco significativos que el alumno tiene como única arma para resolver un problema.

Como una alternativa a esta enseñanza tradicional, que ve al alumno como un recipiente vacío que asimila contenidos dados por el docente, debe existir una correspondencia horizontal entre el acto de aprender y el acto de enseñar, pues lo que interesa es la adquisición de conocimiento y cambio de actitudes, explotando los conocimientos previos del alumno, haciendo que experimenten por si mismos para dotarlos de significado y aceptar que el alumno va construyendo su propio conocimiento al integrar la nueva información en redes conceptuales ya existentes.

Según Pérez de Zapata (1997) la Matemática es una de las asignaturas que ocupa un lugar relevante en los currículos de los distintos niveles del sistema educativo, en la que se adjudica valiosos aportes para la formación integral del alumno que justifica ampliamente su presencia. Sus aportes no sólo contribuyen al desarrollo del pensamiento lógico, sino hacia el desarrollo de un pensamiento creativo y crítico, que permite al alumno:

- Desarrollar un pensamiento razonable y reflexivo, que lo conduzca a saber elegir qué aceptar y qué rechazar, usar la experiencia y conocimientos previos como punto de referencia, usar variadas estrategias de pensamiento, buscar y reunir información fiable para fundamentar juicios frente a lo que se va hacer.

- Demostrar conocimiento, reflexión y control del propio proceso de pensamiento, que le permita desarrollar la capacidad para reconocer los pasos y procesos que se han utilizado en la resolución de una tarea, aumentar el grado de conciencia que la persona tiene de su propio ritmo en el proceso de aprender.

- Contribuir a la consecución de las necesidades básicas del aprendizaje: "conocimientos, capacidades, actitudes y valores necesarios para que las personas sobrevivan, mejoren su calidad de vida y sigan aprendiendo".

Por lo anterior, la enseñanza de la Matemática en la educación secundaria debe estar orientada a incentivar que los alumnos:

- Usen sus conocimientos, adquiridos durante el proceso de enseñanza aprendizaje, en la resolución de problemas dentro y fuera de clase.

- Realicen cálculos, valiéndose de las propiedades de los números reales y de las operaciones, definidas en ella: cálculo mental y cálculo escrito.

- Desarrollen su capacidad de pensar sobre números, formas, funciones y sus transformaciones. Se incorporen a la cultura tecnológica de nuestra época a través del uso de calculadoras y computadoras.

- Elaboren hipótesis, prueben distintos caminos para resolver problemas, equivocarse, disponer de estrategias para darse cuenta de los errores, rectificar, etc.

- Utilicen una gama de conocimientos previos: expresar sus ideas, relatar sus experiencias, trabajar con materiales, dibujar o modelar sus representaciones mentales, intentar procedimientos, equivocarse, corregirse, sentirse estimulados, organizar sus descubrimientos y demostrar sus adquisiciones. Que pueden ser logrados sólo a través de la aplicación sistemática de la enseñanza modular y el uso pertinente de los métodos activos en clase.

2.3.9. Objetivos generales de Enseñanza-Aprendizaje de la Matemática en la Educación Secundaria

Según el Ministerio de Educación (1992) los objetivos de la enseñanza de la Matemática en este nivel están orientados a que el educando:

- "Desarrolle su capacidad de razonamiento lógico, de operativización, de análisis-síntesis, de abstracción y generalización, que le permitan comprender mejor su realidad y tomar conciencia del rol que le corresponde en nuestra sociedad".

- "Disponga de los instrumentos operativos básicos, relacionados con las grandes áreas de estudio de la asignatura, que le posibiliten elevar su nivel científico-técnico-cultural y que favorezcan su capacitación laboral".

Así, el área de Matemática es el espacio curricular en el cual están organizados los aprendizajes que ofrecen a los estudiantes la oportunidad de lograr el conocimiento matemático, destrezas, habilidades y modos de pensamiento que van a necesitar en la vida diaria, para ser ciudadanos conscientes, participativos y críticos.

2.4. ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA TRIGONOMETRÍA

2.4.1. Origen e importancia de la Trigonometría

La Trigonometría surge como medio para satisfacer las necesidades de las investigaciones astronómicas y su historia se remonta a las primeras matemáticas conocidas, en Egipto y Babilonia. Los egipcios establecieron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos, que fueron perfeccionado por los los griegos quienes establecieron sus fundamentos. Se considera a Herón de Alejandría y a Hiparco de Nicea (361-127 a.c) como los creadores de la Trigonometría, pero el nombre se cree que se deba a Bortholomeus Petescus (1561-1613).

Basándose en los fundamentos de Hiparco de Nicea, Ptolomeo la generaliza las relaciones entre los lados y ángulos de los triángulos y confecciona una tabla de funciones trigonométricas para ser usados en los cálculos astronómicos, publicado en el primer libro de Almagesto que ha llegado hasta nuestra época. Luego, Isaac Newton (1642-1727) inventor del cálculo diferencial e integral fundamenta su trabajo en la representación de muchas funciones matemáticas utilizando series infinitas de potencias de la variable *x*, desarrollando las serie para el sen*x*, para el cos*x* y la tg *x*, que desempeñan importante papel en las matemáticas puras como en las aplicadas.

Leonhard EULER siglo XVIII, fue el fundador de la trigonometría moderna. A él se debe el actual uso de las minúsculas latinas *a*, *b*, *c*, para los lados de un triángulo plano o esférico y el de las mayúsculas correspondientes *A*, *B*, *C* para los ángulos opuestos. Estudio de las funciones circulares tomando el radio como unidad, estas funciones son las antiguas "líneas trigonométricas" dadas mediante desarrollos en series enteras o en productos infinitos. Que forman con las funciones exponenciales, logarítmicas, funciones transcendentes elementales. La analogía entre funciones circulares y funciones exponenciales fueron puestas de manifiesto por Euler con una audacia y geniales intuiciones. Así, el estudio de las Funciones Trigonométricas se fundamentan en el estudio general de las funciones.

2.4.2. Tendencias y Aplicaciones del Aprendizaje de la Trigonometría en la educación secundaria.

Todo docente que aspira elevar el rendimiento académico de sus alumnos debe llevar con pertinencia el proceso de enseñanza-aprendizaje. Para ello es necesario que conozca la evolución histórica del tema, materia de su enseñanza, sepa deducir resultados encuadrados en conceptos y propiedades de la Matemática superior, innovando conceptos con nuevas tendencias didácticas y con el uso de tecnologías como ayuda para plasmar el aprendizaje.

Según la National Council of Teachers of Mathematics (1992), el currículum de matemáticas básicas debe incluir el estudio de la Trigonometría para que todos los estudiantes sean capaces de aplicarlo en la resolución de problemas donde aparecen triángulos y explorar los fenómenos periódicos del mundo real usando las funciones seno y coseno en general; luego conocer la conexión que existe entre el comportamiento de las funciones trigonométricas y los fenómenos periódicos, aplicar técnicas generales de representación gráfica de funciones trigonométricas, las propiedades de las funciones trigonométricas en el estudio de las coordenadas polares, vectores, números complejos y series.

A partir de las relaciones entre las coordenadas de los puntos del plano y el radio vector correspondiente se originan funciones trigonométricas. Estas funciones, especialmente el seno y el coseno, constituyen modelos matemáticos para muchos fenómenos periódicos del mundo real, tales como el movimiento circular uniforme, los cambios de temperatura, los biorritmos, las ondas de sonido y la variación de las mareas. La exploración de los datos de estos fenómenos deben realizar todos los estudiantes de los distintos niveles educativos, principalmente en el Quinto Grado de Educación Secundaria de nuestro Sistema Educativo, deben identificar y analizar los modelos trigonométricos, y estudiar las identidades que impliquen expresiones y funciones trigonométricas inversas, junto a su aplicación en la resolución de ecuaciones e inecuaciones trigonométricas.

Actualmente, las calculadoras científicas, los software matemático como el MatLab, Derive y Calcula facilitan el aprendizaje de la Trigonometría, al proporcionar más potencia en los cálculos, que permiten la adquisición de estructuras conceptuales y su puesta en práctica con aplicaciones reales. Las gráficas proporcionan herramientas dinámicas que permiten al alumno realizar el modelo de muchas situaciones reales por medio de ecuaciones e inecuaciones trigonométricas. Siendo coherente con los otros estándares, las utilidades gráficas deben jugar también un papel importante en la adquisición de las estructuras conceptuales, así como de las propiedades de las funciones trigonométricas y las inversas.

Los alumnos que concluyen los estudios secundarios deben estar en condiciones para resolver ecuaciones e inecuaciones trigonométricas por medios informáticos. Además, deben aplicar métodos trigonométricos en situaciones prácticas de resolución de triángulos.

Como ejemplo, hallar el ángulo θ que se forma entre la transversal *AB* y posición final *P* de una lancha que al cruzar un río de 200 m de ancho es arrastrada por la corriente a una distancia de 150 m con respecto a la orilla opuesta del río.

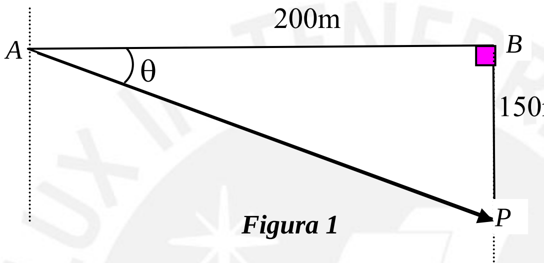


Figura 1

Aquí, el estudiante primero bosqueja un gráfico que ilustre el problema geométrico basado en la información dada, luego identifica la razón trigonométrica que relaciona los datos y escribiendo la ecuación correspondiente, para obtener con la calculadora una respuesta numérica e interpretar este valor con un grado de exactitud adecuado con las unidades de medidas que se manejen. A partir de aquí los estudiantes están expeditos para descubrir las otras razones trigonométricas.

Los estudiantes usan las funciones seno y coseno para elaborar modelos de fenómenos periódicos del mundo real, cuyos procesos de planteamiento y solución pueden verse por niveles. Por ejemplo, consideremos una rueda de forma circular con un radio de 25 cm que tarda 12 segundos en dar una vuelta completa. Así, obtendremos el modelo matemático que describa la relación entre la altura *h* y el tiempo ***t***.

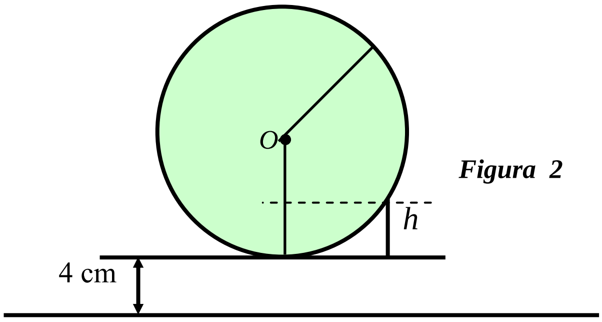


Figura 2

Por niveles, se tiene:

Nivel 1: En este nivel los alumnos construyen una tabla para valores de ***t*** y *h*. Asumiendo que el cochecito está en la posición más baja para ***t*** = 0, los estudiantes pueden determinar con facilidad los valores de *h* para ***t*** = 0, 3, 6, 9, 12. Para valores intermedios de ***t***, los valores correspondientes de *h* se pueden estimar a partir de un dibujo a escala como muestra (fig. 3), y dándose cuenta de la periodicidad de la función, los alumnos pueden conjeturar que la gráfica tiene forma sinusoidal y podrán predecir su forma para valores mayores de ***t***.

Tiempo .t(segundos)	Altura h(centímetros)
0	0
1,5	7
3	5
4,5	43
6	50
7,5	43
9	25
10,5	7
12	0

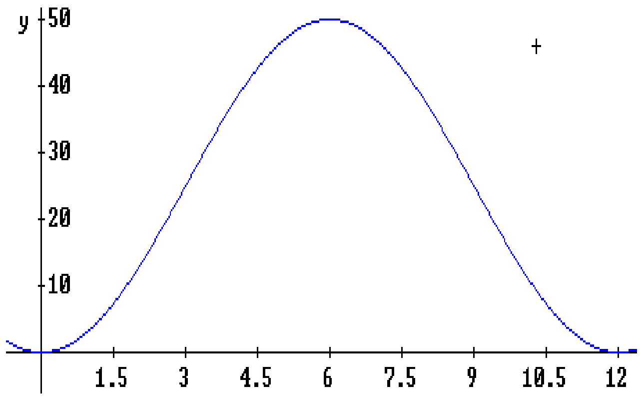
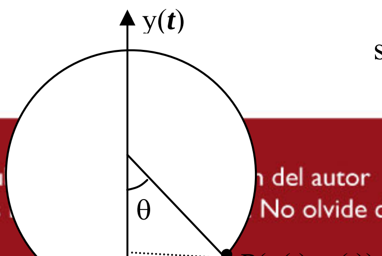


Figura 3

Nivel 2: En este nivel los estudiantes están en condiciones de hallar la relación entre ***t*** y *h*, dado por: $h(\boldsymbol{t}) = -25\cos(\pi/6)\boldsymbol{t} + 25$ y se les pide que representen su gráfica y la analicen. La interpretación de la gráfica debe centrar la atención en: el significado, el contexto de máximos y mínimos relativos, la obtención de valores de h para valores dados de ***t*** y viceversa; la obtención de número de vueltas para valores (grandes) de ***t***, y el tiempo ***t*** que tarda en dar un número determinado de vueltas. Finalmente, los estudiantes investigarían los cambios que se producen en la gráfica en el caso de ruedas que tengan diferente radio y velocidad angular.

Nivel 3: Una vez que se sepa que la gráfica obtenida mediante experiencias como las que se llevaron a cabo en el Nivel 1, pertenecientes a una función de tipo $h(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{a}.\cos(b\boldsymbol{t}) + c$, los estudiantes procederían a calcular *a*, *b* y *c* comparando la gráfica $f(\boldsymbol{t}) = \cos(\boldsymbol{t})$ con la suya. Este análisis hará pensar en la necesidad de reflejar la gráfica *f* a través del eje ***t*** y ajustar entonces la amplitud, el período y el desplazamiento vertical.

Nivel 4: En este nivel los alumnos usarían la Trigonometría del triángulo rectángulo y la proporcionalidad simple para poder obtener las expresiones paramétricas de un punto *P* = $(x(\boldsymbol{t}),y(\boldsymbol{t}))$ de la rueda en función del tiempo, verificando con ella que la altura es una función sinusoidal de ***t***. A continuación podrían utilizar un programa de representación en paramétricas para simular la trayectoria de un punto en movimiento de la rueda circular.



$$\text{sen}(\theta) = x(\boldsymbol{t})/25 \rightarrow x(\boldsymbol{t}) = 25.\text{sen}(\theta)$$

$$25\cos(\theta) = (25 - y(\boldsymbol{t}))/25 \rightarrow y(\boldsymbol{t}) = -25\cos(\theta) + 25$$

•

$$2\pi/12 = \theta/\boldsymbol{t} \rightarrow \theta = (\pi/6).\boldsymbol{t}$$

Figura 4

Los conceptos relacionados con las funciones trigonométricas, tales como amplitud, período y ángulo inicial de fase, deben ser presentados ante los estudiantes del nivel secundario por medio de aplicaciones a fenómenos a interpretar los fenómenos periódicos. Por ejemplo la ecuación de un movimiento ondulatorio. Siendo requisito la experiencia en trazar el gráfico de funciones del tipo $y = \boldsymbol{a}f\,(bx + c) + d$, incluyendo la investigación de los efectos que se producen al cambiar los parámetros a, b, c, d en la gráfica $y = f\,(x)$. Por consiguiente, después de las experiencias adecuadas con utilidades gráficas por ordenador, serán capaces de esbozar sin ayuda del ordenador la gráfica de una función como y = 3sen(x+2) aplicando dos transformaciones: traslación de dos unidades a izquierda y multiplica por tres, a la función y = sen($\boldsymbol{x}$).

Los estudiantes deben tener también la oportunidad de comprobar identidades trigonométricas básicas, como por ejemplo $\sec^2(A) = 1 + \tan^2(A)$, ya que esta actividad fortalece la comprensión de las propiedades trigonométricas, y proporciona un nuevo contexto para demostraciones deductivas.

La Trigonometría no sólo es una herramienta poderosa e importante para la ciencia y la tecnología, sino también tiene un gran atractivo estético para muchos estudiantes debido a sus regularidades y simetrías. La disponibilidad de calculadoras y ordenadores hacen que ambos aspectos de este tema sean accesibles a un mayor número de estudiantes secundarios de grados inferiores. Esto facilita a su vez una mayor integración de la Trigonometría con la Geometría y el Álgebra.

2.5. SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS RECTANGULARES

René Descartes, filósofo y matemático francés (1596 –1650) fue el primero que utilizó el método de las coordenadas para indicar la posición de un punto (en el plano o en el espacio), por eso se habla de coordenadas cartesianas.

En el plano, para representar un punto, se fijan dos rectas perpendiculares o ejes de coordenadas: Una recta horizontal, eje de las abscisas o eje X, y una recta vertical, eje de ordenadas o eje Y. Fijados un sistema de coordenadas en cada recta, se tiene el plano 3^2, donde la posición de un punto se logra estableciendo una biyección entre los puntos P del plano y pares ordenados (a, b) de números reales, con a en X y b en Y; es decir, a cada punto P del plano le corresponde un único par ordenado (a , b) de números reales y a cada par ordenado (a , b) de números reales le corresponde un único punto P del plano, y se denota por $P = (a , b)$ ó $P(a , b)$, como se ilustra en la *figura 5*:

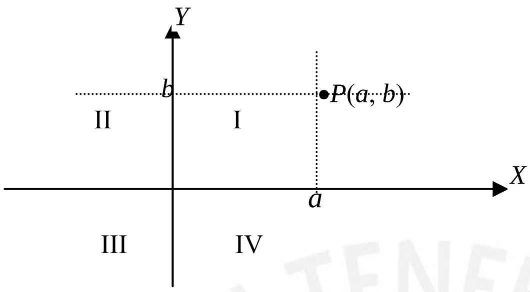


***Figura* 5**

En el plano 3^2, a partir de un punto $P = (a, b)$, es útil identificar otros puntos llamados puntos simétricos, por reflexión de P respecto a los ejes de coordenadas, respecto al origen y respecto a la diagonal principal, $y = x$. Se tienen, como se ilustran en la *Figura 6* que sigue:

El simétrico de *P* respecto al eje *X* es $S_x(a , b) = (a , -b)$

El simétrico de *P* respecto al eje *Y* es $S_y(a , b) = (-a , b)$

El simétrico de *P* respecto al origen de coordenadas es $S_0(a , b) = (- a , -b)$.

El simétrico de *P* respecto a la recta diagonal *y = x* es $S_D(a , b) = (b , a)$.

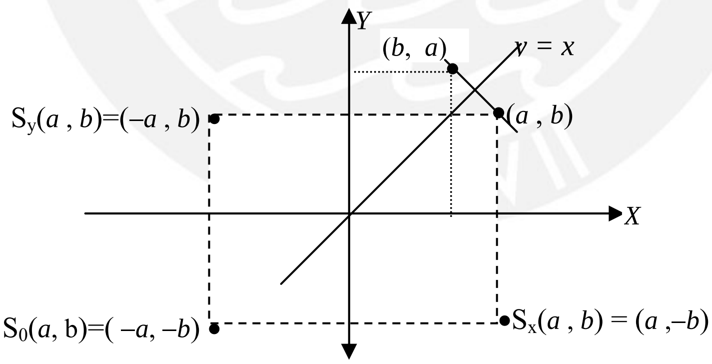


***Figura* 6**

Además, permite calcular la distancia entre puntos del plano:

Dados dos puntos $P = (x , y)$ y $Q = (x' , y')$ del plano 3^2, la distancia de P a Q es el número real $d(P , Q) = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$

Así, para $P = (-1 , 1)$ y $Q = (2 , 5)$, se tiene: $d(P , Q) = \sqrt{(-1-2)^2+(1-5)^2} = \sqrt{9+16} = 5\,u$.

2.5.1. La circunferencia unitaria:

Una circunferencia de centro $O = (0 , 0)$ y radio 1, llamada ***circunferencia unitaria***, es el lugar geométrico de los puntos $P = (x , y) \in 3^2$, tales que $d(P , O) = 1$; es decir, d(P, O) = $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$ = 1. De esto, $x^2+y^2=1$, es la ecuación de la circunferencia unitaria, denotada por $\mathcal{C}_1(O)$.

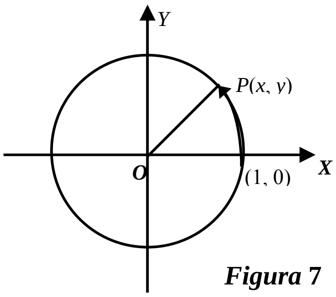


***Figura* 7**

Según lo anterior: $(x\,,y) \in \mathcal{C}_1(O) \iff x^2+y^2=1$.
Así, el punto $P(3/5\,,\,4/5) \in \mathcal{C}_1(O)$, pues $(3/5)^2 + (4/5)^2 = 9/25 + 16/25 = 1$. También los puntos simétricos $S_X(P) = (3/5, -4/5)$, $S_Y(P) = (-3/5, 4/5)$, $S_0(P) = (-3/5, -4/5)$ y $S_D(P) = (4/5, 3/5)$ satisfacen la ecuación $x^2+y^2=1$; es decir, tales puntos están en $\mathcal{C}_1(O)$.

2.5.3. Arcos y ángulos orientados:

En una circunferencia $\mathcal{C}_r(O)$ de centro O y radio $r > 0$, dados dos puntos $P \neq Q$, se tienen los arcos $\overset{\frown}{PMQ}$ y $\overset{\frown}{PNQ}$ que pasan por M y N, respectivamente,

El arco $\overset{\frown}{PMQ}$, asociado al par $(P\,,Q)$, define un arco orientado de punto inicial P y punto terminal Q, que se denota por $\overset{\curvearrowright}{PMQ}$ o $\overset{\curvearrowleft}{QMP}$.

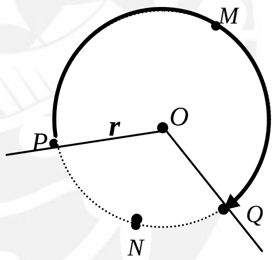
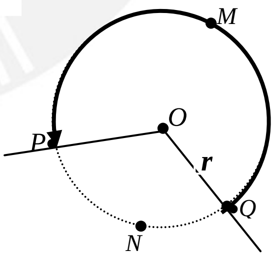


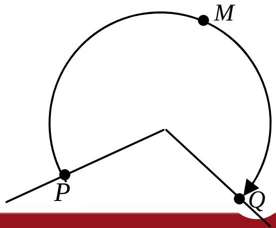
***Figura* 8**

El arco $\overset{\frown}{PMQ}$, asociado al par $(Q\,,\,P)$, define un arco orientado de punto inicial Q y punto terminal P, que se denota por $\overset{\curvearrowright}{QMP}$ o $\overset{\curvearrowleft}{PMQ}$.



Según la orientación, si es en **sentido antihorario**, la **orientación positiva**; y si es en **sentido horario**, la **orientación es negativa**.

Por otro lado, el ángulo $\widehat{POQ}$ asociado al arco orientado $\overset{\curvearrowright}{PMQ}$, determina el ángulo orientado $\widehat{POQ}$ de lado inicial $\overrightarrow{OP}$ y lado terminal $\overrightarrow{OQ}$; y se muestra en la figura:



o simplemente

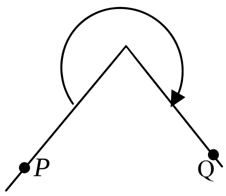
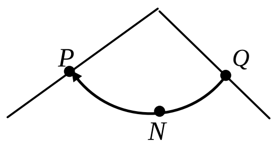


***Figura* 9**

Análogamente, asociando el arco $\widehat{QNP}$ al ángulo $P\widehat{O}Q$, se tiene el ángulo orientado: $P\widehat{O}Q$ con lado inicial $\overrightarrow{OQ}$ y lado terminal $\overrightarrow{OP}$, como se muestra gráficamente.



o simplemente

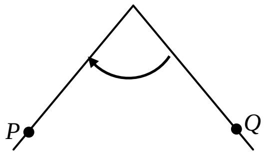


Figura 10

En la circunferencia unitaria $\mathcal{C}_1(O)$ de centro $O = (0 , 0)$ y radio $r = 1$, dada por los puntos (x , y) tales que $x^2 + y^2 = 1$; los arcos orientados con extremo inicial fijo $A = (1, 0)$ y extremo terminal por determinar por la longitud del arco y su orientación, están dadas por un número real θ:

Definición: La función E: 3 $\longrightarrow \mathcal{C}_1(O)$, tal que a cada número real θ, le hace corresponder un único punto $E(\theta) = (u , v)$ de $\mathcal{C}_1(O)$, con $u^2 + v^2 = 1$, llamada ***función envolvente*** de $\mathcal{C}_1(O)$; donde, fijado el punto $A = (1 , 0)$ en $\mathcal{C}_1(O)$, para $\theta \in$ 3. se define:

i) Si $\theta = 0$, se tiene $E(O) = A = (1, 0)$; es decir, el arco orientado es un punto, con extremo inicial y final coincidentes.

ii) Si $\theta > 0$, partiendo de A se describe el arco orientado con extremo terminal $E(\theta)$, recorriendo la circunferencia en sentido antihorario hasta describir un arco de longitud θ.

iii) Si $\theta < 0$, partiendo de A se describe el arco orientado con extremo terminal $E(\theta)$, recorriendo la circunferencia en sentido horario hasta describir un arco de longitud $|\theta| = -\theta$.

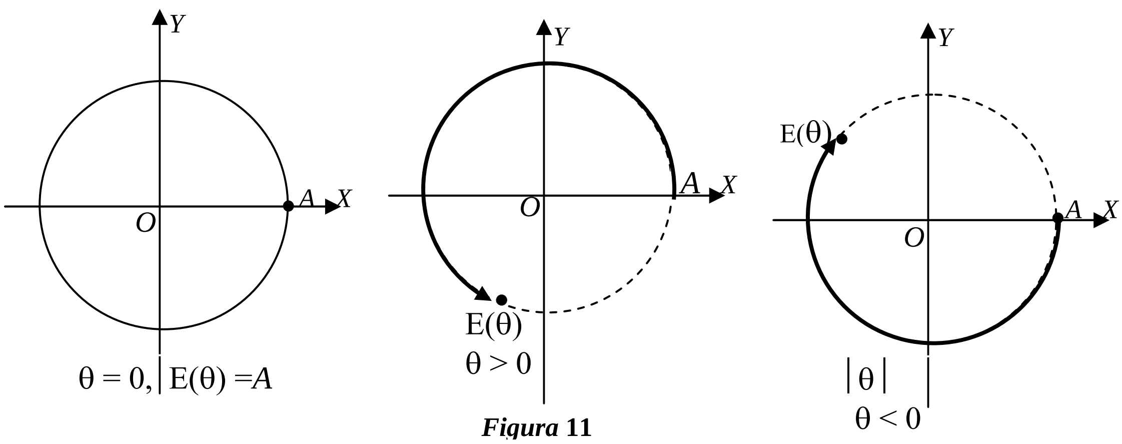


Figura 11

Se observa claramente que E es una función periódica, de período 2π; es decir: $E(\theta+2\pi) = E(\theta)$ ó $E(\theta + 2k\pi) = E(\theta)$, para todo $\theta \in 3$ y para $k \in 9$., y para $0 < p < 2\pi$ se tiene $E(\theta + p) \neq E(\theta)$; y al describir un arco de una vuelta a $\mathcal{C}_1(O)$ se recorre un trayecto de longitud 2π, y se cumple que $E(\theta + 2\pi) = E(\theta - 2\pi) = E(\theta)$, $\forall\ \theta \in\ 3$. Además se tiene que la función E es suryectiva pero no es inyectiva. De esto, dos arcos orientados de $\mathcal{C}_1(O)$, con un mismo punto inicial $A = (1\ ,\ 0)$ y un mismo punto terminal se denominan ***arcos coterminales***. Así:

1) Como $E(\pi/2) = E(\pi/2 + 2k\pi) = B = (0\ ,\ 1)$; $\forall\ k \in 9$, los arcos orientados definidos por $\pi/2$ y por $\pi/2 + 2k\pi$ son coterminales;

2) Como $E(\pi) = E(\pi+2k\pi) = C = (-1, 0)$; $\forall\ k \in 9$, los arcos orientados definidos por π y $\pi+2k\pi$ son coterminales;

3) Se tiene $E(3\pi/2) = E(-\pi/2) = D = (0\ ,\ -1)$; es decir, los arcos arientados definidos por $3\pi/2$ y $-\pi/2$, son coterminales;

4) $E(\pi/4) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = E(9\pi/4) = E(-7\pi/4) \in \mathcal{C}_1(O)$. Luego, los arcos definidos por $\pi/4$, $9\pi/4$ y $-7\pi/4$ son coterminales.

5) En general, para cualquier punto $P \in \mathcal{C}_1(O)$ y $\forall\ \theta \in\ 3$, para un arco orientado definido por θ con extremo inicial $A = (1\ ,\ 0)$ y extremo terminal $E(\theta)$, se tiene $E(\theta) = E(\theta + 2k\pi)$; es decir, los arcos orientados dados por θ y $\theta + 2k\pi$, son coterminales.

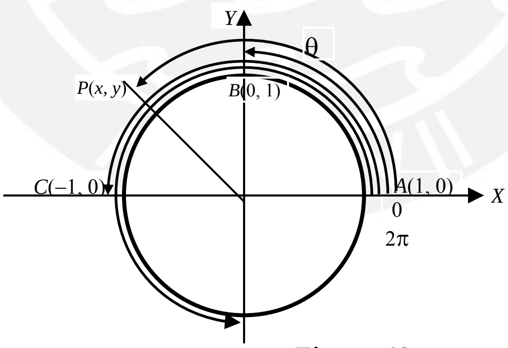


Figura 12

2.5.3. Longitud de arco y medidas angulares:

LONGITUD DE ARCO: En una circunferencia de radio r, sean θ: la medida, en radianes, de un ángulo central y s la longitud del arco de circunferencia contenido en el interior del ángulo. Estas medidas son proporcionales a 2π, la medida angular de la circunferencia, y a $2\pi r$, longitud de la circunferencia; es decir:

Medida angular $\rightarrow$ ***Longitud***	***Proporción***	***Longitud de arco***

2π $2\pi r$ θ s	$\dfrac{2\pi \; rad}{\theta \; rad} = \dfrac{2\pi \, r}{s}$	$s = \theta\, r$ Para $r = 1$, $\;s = \theta$

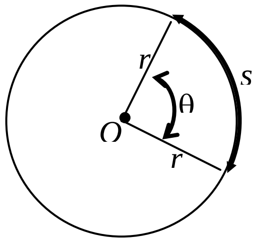
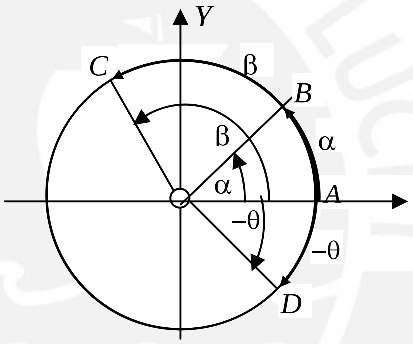


Figura **13**

En **2.5.2**. se ha visto que en la $\mathcal{C}_1(O)$, un arco orientado definido por $\alpha \in 3$, de extremo inicial $A = (1\ ,\ 0)$ y extremo terminal $B = \mathrm{E}(\alpha)$, define un ángulo orientado $\overset{\frown}{AOB}$, con vértice en O, el origen de coordenadas, y que se genera al rotar el lado inicial $\overrightarrow{OA}$ alrededor de O hasta la posición $\overrightarrow{OB}$.

Figura **14**



Definición: Para $\alpha \in 3$, $A = (1\ ,\ 0)$ y $B = \mathrm{E}(\alpha)$ en $\mathcal{C}_1(O)$, la medida del ángulo orientado $\widehat{AOB}$, en radianes, es α; y se denota $\alpha = m(\widehat{AOB})$.

En tal caso, la orientación del ángulo está determinada por α; y la orientación y la longitud del arco orientado $\overset{\frown}{AB}$ están dados por α, se tiene: $\alpha = m(\widehat{AOB}) = m(\overset{\frown}{AB})$, en radianes.

En la medición de ángulos, el **Sistema Internacional** de Medidas establece como unidad el ***radián*** (***rad***); donde un ángulo de radián (1 ***rad***) es la medida de un ángulo orientado definido por $\alpha = \dfrac{1}{2\pi}$, que es $\dfrac{1}{2\pi}$ de la longitud de $\mathcal{C}_1(O)$. De esto, como un ángulo orientado generado por una vuelta del lado inicial alrededor de su vértice y en sentido antihorario es definido por $\beta = 2\pi$, se tiene que $m(\mathcal{C}_1(O)) = \beta$ rad $= 2\pi$ rad.

Existen otros sistemas para medición de ángulos, como el Sistema Sexagesimal o el Sistema Centesimal, cuyas unidades son el grado sexagesimal o simplemente ***grado***(^{o}) y el grado centesimal, respectivamente. En el **Sistema sexagesimal**, un ángulo de un grado (1º) es la medida de un ángulo orientado, definido por $\alpha = \dfrac{1}{360}$, que corresponde a $\dfrac{1}{360}$ de 2π, la longitud de $\mathcal{C}_1(O)$; es decir: $1^{\circ} = \dfrac{1}{360}\times 2\pi$ rad $= \dfrac{2\pi}{360}$ rad. De esto, un ángulo orientado generado por una vuelta del lado inicial alrededor de su vértice y en sentido antihorario mide $2\pi \times 1\text{rad} = 2\pi$ rad $= 360\times 1^{\circ} = 360^{\circ}$, expresión que relaciona medición de ángulos o arcos en los sistemas radial y sexagesimal.

Más precisamente: Si S y R las medidas de un ángulo orientado en los sistemas sexagesimal y radial, respectivamente, por la expresión anterior, se tiene:

$$\frac{S}{360^{\circ}} = \frac{R}{2\pi} \quad \text{ó} \quad \boxed{\frac{S}{180^{\circ}} = \frac{R}{\pi}}$$

Relación que permite hacer diversas conversiones entre medidas de ángulos dados en sistemas radial y sexagesimal.

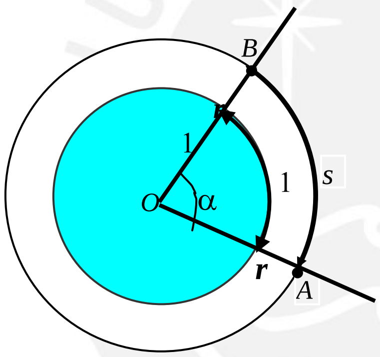


Figura **15**

En la $\mathcal{C}_r(O)$, un ángulo central de medida α rad y arco comprendido en él de longitud s, cumple:

-) $s = r.\alpha$;

-) $\alpha = 1$ radián $\Leftrightarrow$ $r = s$

-) $C = 2\pi\, r = 2\pi$ radios y $m(\widehat{C}) = 2\pi$ rad.

-) Si $r = 1$, entonces $s = \alpha$.

2.6. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS:

2.6.1. Las funciones seno y coseno:

Para la $\mathcal{C}_1(O) \subset 3^2$, dada por la ecuación: $u^2 + v^2 = 1$, se tienen las funciones:

Primera proyección: $\text{Pr}_1: 3^2 \longrightarrow 3$, tal que $\text{Pr}_1(u\,,v) = u$;

Segunda proyección: $\text{Pr}_2: 3^2 \longrightarrow 3$, tal que $\text{Pr}_2(u\,,v) = v$;

Función Envolvente: $\text{E}: 3 \longrightarrow \mathcal{C}_1(O) \subset 3^2$, tal que $\text{E}(\theta) = (u\,,v)$, con $u^2 + v^2 = 1$.

Considerando estas funciones, se definen otras funciones reales, como sigue:

1. FUNCIÓN COSENO:

Es la función denotada por cos, definida por la función compuesta:

$\cos = \text{Pr}_1\text{oE}: 3 \to 3$, tal que: $\cos(\theta) = (\text{Pr}_1\text{oE})(\theta) = \text{Pr}_1(\text{E}(\theta)) = \text{Pr}_1(u\,,v) = u$, abscisa de $\text{E}(\theta)$.

2. FUNCIÓN SENO:

Es la función denotada por sen, definida por la función compuesta:

sen = Pr_2oE: 3 → 3, tal que sen(θ) = (Pr_2oE)(θ) = Pr_2(E(θ)) = $Pr_2(u\ ,\ v) = v$, ordenada de E(θ).

EJEMPLOS:

a) Como E(π/4) = E(−7π/4) = $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, se tiene: cos(π/4) = cos(−7π/4) = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y sen(π/4) = sen(−7π/4) = $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

b) Como E(π/3) = $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y E(4π/3) = $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, se tiene: cos(π/3) = $\frac{1}{2}$, cos(4π/3) = $-\frac{1}{2}$, sen(π/3) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y sen(4π/3) = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Si θ ∈3 tal que: cos(θ) = 0, se tiene E(θ) = (0, v), puntos del eje Y. Luego: θ = kπ, k∈ 9. E(θ) ∈ $\mathcal{C}_1(O)$, si $\boldsymbol{C}$ es conjunto solución de cos(θ) = 0, entonces $\boldsymbol{C}$ = {θ = π/2 + kπ / k∈9}

d) Si θ ∈ 3 tal que: sen(θ) = 0, se tiene E(θ) = (u, 0), puntos del eje X. Luego: θ = kπ, k ∈ 9. Para E(θ) ∈ $\mathcal{C}_1(O)$, si $\boldsymbol{D}$ es conjunto solución de sen(θ) = 0, entonces $\boldsymbol{D}$ = {θ = kπ / k ∈ 9}.

2.6.2. Las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante:

De las funciones seno y coseno, se definen otras funciones trigonométricas:

3. FUNCIÓN TANGENTE: Denota por tan, es la función cociente de las funciones seno y coseno, es decir tan = $\frac{sen}{\cos}$ y tan(θ) = $\frac{sen(\theta)}{\cos(\theta)}$, ∀ θ ∈ 3– $\boldsymbol{C}$, con $\boldsymbol{C}$ = {θ = π/2+kπ / k∈ 9}

4. FUNCIÓN COTANGENTE: Denotada por cot, es la función cociente de las funciones coseno y seno, siendo cot = $\frac{\cos}{sen}$ y cot(θ) = $\frac{\cos(\theta)}{sen(\theta)}$, ∀ θ∈3 – $\boldsymbol{D}$, con $\boldsymbol{D}$ = {θ = kπ / k∈ 9}.

5. FUNCIÓN SECANTE: Se denota por sec, es la función recíproca de la función coseno, es decir sec = $\frac{1}{\cos}$ y sec(θ) = $\frac{1}{\cos(\theta)}$, ∀ θ ∈ 3 – $\boldsymbol{C}$, donde $\boldsymbol{C}$ = {θ = π/2 + kπ / k ∈ 9}.

6. FUNCIÓN COSECANTE: Se denota por csc, es la función recíproca de la función seno; es decir csc = $\frac{1}{sen}$ y csc(θ) = $\frac{1}{sen(\theta)}$, ∀ θ ∈ 3 – $\boldsymbol{D}$, con $\boldsymbol{D}$ = {θ = kπ / k ∈ 9}.

Ejemplos:

1. El lado terminal de un arco orientado es E(θ) = (4/5 , –3/5) ∈ $\mathcal{C}_1(O)$; entonces, por definición las funciones trigonométricas se tiene:

sen(θ) = –3/5	cos(θ) = 4/5	tan(θ) = –3/4
csc(θ) = –5/3	sec(θ) = 5/4	cot(θ) = –4/3

2. Dado cos(θ) = –2/5 y π/2 < θ <π. Hallar sen(θ) y tan(θ).

   En E(θ) = (u , v), se tiene $u^2 + v^2 = 1$, cos(θ) = u y sen(θ) = v. Luego, $sen^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$.

Según esto, como $\cos(\theta) = -2/5$, entonces $(-2/5)^2 + \operatorname{sen}^2(\theta) = 1$ y $\operatorname{sen}^2(\theta) = 21/25$, de donde $\operatorname{sen}(\theta) = \pm\sqrt{21}/5$. Como $\pi/2 < \theta < \pi$, se tiene que $E(\theta) = (u , v)$ está en el segundo cuadrante; es decir, $v > 0$. Luego $v = \operatorname{sen}(\theta) = \sqrt{21}/5$, y, de esto, $\tan(\theta)= \dfrac{sen(\theta)}{\cos(\theta)} = -\dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

PROPOSICIÓN 1. Para $\theta \in 3$, en $\mathcal{C}_1(O)$; se cumple:

i) $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta)$; es decir, la función **seno** es ***función impar***.

ii) $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$; es decir, la función **coseno** es ***función par***.

iii) $\operatorname{sen}(\theta + \pi) = -\operatorname{sen}(\theta)$;

iv) $\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$

Demostración:

Si $E(\theta) = (u , v) \in \mathcal{C}_1(O)$, se tiene $E(-\theta) = (u , -v) \in \mathcal{C}_1(O)$; es decir, los puntos $E(\theta) = (u , v)$ y $E(-\theta) = (u , -v)$ son simétricos respecto al eje X, como se ilustra en la **figura 16**. Luego:

i) $\operatorname{sen}(-\theta) = -v = -\operatorname{sen}(\theta)$; y **ii)** $\cos(-\theta) = u = \cos(\theta)$.

También, si $E(\theta) = (u, v) \in \mathcal{C}_1(O)$, se tiene $E(\theta + \pi) = (-u , -v) \in \mathcal{C}_1(O)$; es decir, los puntos $E(\theta) = (u , v)$ y $E(\theta + \pi) = (-u , -v)$ son simétricos respecto al origen O, como se ilustra en la figura 17. Luego:

iii) $\operatorname{sen}(\theta + \pi) = -v = -\operatorname{sen}(\theta)$; y **iv)** $\cos(\theta + \pi) = -u = -\cos(\theta)$.

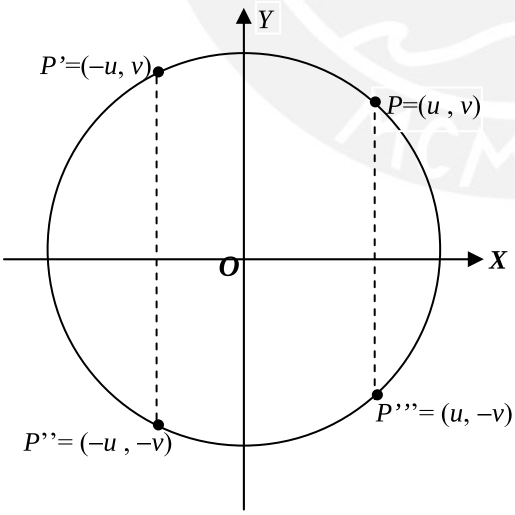


***Figura* 16**

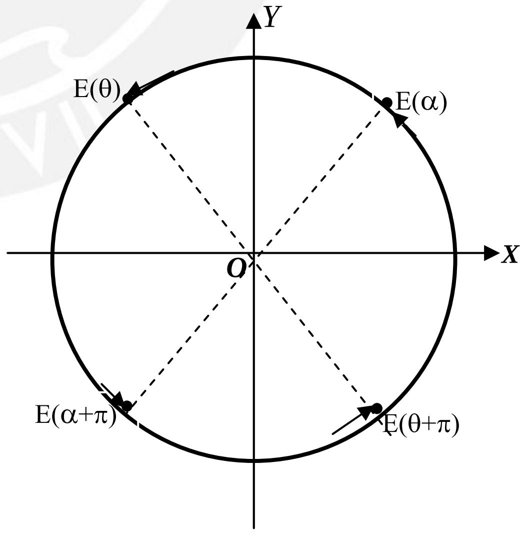


***Figura* 17**

PROPOSICIÓN 2.: Las funciones trigonométricas son periódicas.

i) El período de las funciones: seno, coseno, secante y cosecante es 2π.

ii) El período de la función: tangente y cotangente es π.

Demostración:

En $\mathcal{C}_1(O)$, sea θ tal que $\theta = \theta + 2\pi k$ y sea $A = (1 , 0)$, para todo $P = (u , v) = \mathrm{E}(\theta) \in \mathcal{C}_1(O)$, siendo $\mathrm{E}(\theta) = \mathrm{E}(\theta + 2\pi)$:

i) $\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}(\theta)$ $\qquad \cos(\theta+2\pi) = \cos(\theta)$.

$\operatorname{sen}(\theta + 4\pi) = \operatorname{sen}(\theta)$ $\qquad \cos(\theta + 4\pi) = \cos(\theta)$.

$\operatorname{sen}(\theta + 6\pi) = \operatorname{sen}(\theta)$ $\qquad \cos(\theta + 6\pi) = \cos(\theta)$.

En general:

$\operatorname{sen}(\theta + 2k\pi) = \operatorname{sen}(\theta)$ $\qquad \cos(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta), \ \forall\, k \in 9.$

Procediendo en forma análoga:

$$\sec(\theta + 2k\pi) = \frac{1}{\cos(\theta+2k\pi)} = \frac{1}{\cos(\theta)} = \sec(\theta),\ \ \theta \neq \pi/2,\ \forall\, k \in 9.$$

$$\csc(\theta + 2k\pi) = \frac{1}{sen(\theta+2k\pi)} = \frac{1}{sen(\theta)} = \csc(\theta),\ \ \theta \neq \pi,\ \forall\, k \in 9.$$

$\tan(\theta + k\pi) = \tan(\theta),\ \ \theta \neq \pi/2,$ $\qquad \cot(\theta + k\pi) = \cot(\theta),\ \theta \neq \pi;\ \ \forall\, k \in 9.$

PROPOSICIÓN 3. *Propiedad de cofunciones*: Para $\theta \in 3$, en $\mathcal{C}_1(O)$; se cumple:

i) $\cos(\pi/2 - \theta) = \operatorname{sen}(\theta)$; $\qquad$ **ii)** $\operatorname{sen}(\pi/2 - \theta) = \cos(\theta)$;

iii) $\tan(\pi/2 - \theta) = \cot(\theta)$; $\qquad$ **iv)** $\sec(\pi/2 - \theta) = \csc(\theta)$.

Demostración:

En $\mathcal{C}_1(O)$, sea θ tal que $0 \leq \theta \leq \pi/2$ y sean $A = (1 , 0)$ y $B = (0 , 1)$ y $C = \mathrm{E}(\theta)$.

Entonces $m(\overset{\frown}{AOB}) = \pi/2$, $m(\overset{\frown}{AOC}) = \theta$ y $m(\overset{\frown}{BOC}) = \pi/2 - \theta$.

Por otro lado, existe un único punto $D = \mathrm{E}(\pi/2 - \theta)$ en $\mathcal{C}_1(O)$ tal que $m(\overset{\frown}{AOD}) = \pi/2 - \theta$, siendo C y D puntos simétricos respecto a la recta $y = x$, como puede apreciarse en la figura 18.

Luego, si $C = \mathrm{E}(\theta) = (r , s)$, entonces $D = \mathrm{E}(\pi/2 - \theta) = (s , r)$. De esto:

i) $\cos(\theta) = s = \operatorname{sen}(\pi/2 - \theta)$ y $\operatorname{sen}(\theta) = r = \cos(\pi/2 - \theta)$;

ii) $\cot(\theta) = s/r = \tan(\pi/2 - \theta)$, $r \neq 0$ y $\tan(\theta) = r/s = \cot(\pi/2 - \theta)$, $s \neq 0$;

iii) $\csc(\theta) = 1/r = \sec(\pi/2 - \theta)$, $s \neq 0$ y $\sec(\theta) = 1/s = \csc(\pi/2 - \theta)$, $r \neq 0$

Si θ es la medida en radianes de un ángulo, con $0 \leq \theta \leq \pi/2$, la medida de su complemento es $\pi/2 - \theta$. Las igualdades anteriores nos indican que: el coseno de θ es el seno de su complemento, la cotangente de θ es la tangente de su complemento y la cosecante de θ es la secante de su complemento. Por ello, seno y coseno, tangente y cotangente y secante y cosecante, los denominamos cofunciones.

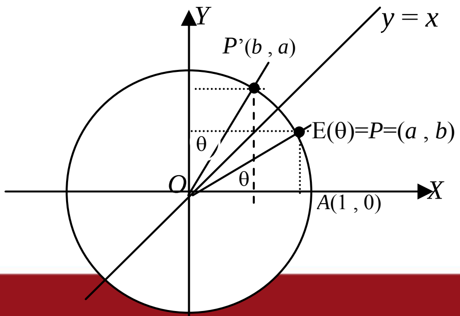


Figura 18

2.6.3. Razones trigonométricas de ángulos:

Para un ángulo orientado $\widehat{AOB}$, de lados inicial $\overrightarrow{OA}$ y terminal $\overrightarrow{OB}$ y vértice O, se fija un sistema de coordenadas rectangulares de origen O y con $\overrightarrow{OA} \subset \boldsymbol{X}$ y eje $\boldsymbol{Y} \perp \boldsymbol{X}$ en O.
Entonces se dice que el ángulo dado es un ***ángulo en posición normal***.
Sea $m(\widehat{AOB}) = \theta$ rad, que también puede estar expresado en (º) sexagesimal.

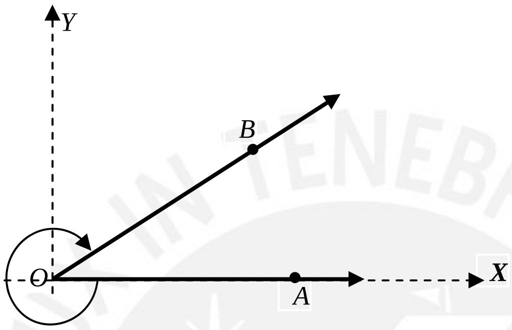


***Figura* 19**

Con centro O, se construye una circunferencia de radio 1, que intercepta a los lados $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ del ángulo $\widehat{AOB}$ en los puntos P y Q, respectivamente, donde $P = (1\ ,\ 0)$, y se describe un único arco orientado en $\mathcal{C}_1(O)$ con puntos inicial P y terminal Q, definido por θ; es decir, $Q = \mathrm{E}(\theta)$.

Recíprocamente, dado un arco orientado en $\mathcal{C}_1(O)$, de punto inicial $P = (1\ ,\ 0)$, punto terminal $Q = \mathrm{E}(\theta)$ y definido por θ, determina un único ángulo en posición normal con vértice en el centro O, origen del sistema de coordenadas.

En la figura 20, los triángulos rectángulos OMQ, OPB y OAR, con $d(O\ ,\ R) = r$, son semejantes y se tiene una proporcionalidad entre las longitudes de lados homólogos: $b/r = y/1$, $a/r = x/1$, y $b/a = y/x$. De esto, se definen las razones trigonométricas del ángulo tal que su medida es α^{o}, que expresado en radianes es θ rad, o simplemente $\theta \in 3$:

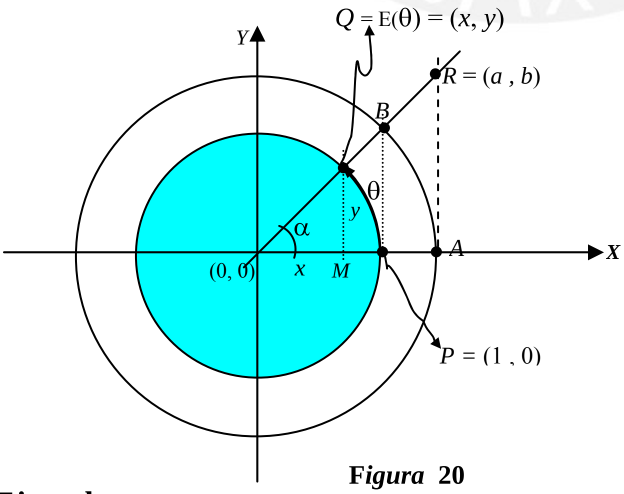


***Figura* 20**

$\mathrm{sen}(\alpha^{o}) = b/r = \mathrm{sen}(\theta)$:

$\cos(\alpha^{o}) = a/r = \cos(\theta)$

$\tan(\alpha^{o}) = b/a = \tan(\theta)$

$\cot(\alpha^{o}) = a/b = \cot(\theta)$

$\sec(\alpha^{o}) = r/a = \csc(\theta)$

$\csc(\alpha^{o}) = r/b = \csc(\theta)$

Ejemplos:

a) Para un ángulo de 30^{o}, se tiene el ángulo orientado en posición normal dado por $\theta = \pi/6$ rad $= \pi/6$. Entonces: $\mathrm{sen}(30^{o}) = \mathrm{sen}(\pi/6) = 1/2$, etc.

b) Dado $P = (-5 , 2) \in 3^2$, sea d(O , P) = $r = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$ y αº es la medida del ángulo central. Entonces sen(αº) = 2/$\sqrt{29}$ cos(αº) = –5/$\sqrt{29}$, tan(αº) = –2/5, etc.

2.6.4. Gráfica de las funciones trigonométricas

Gráficas de las funciones: y = sen(θ) e y = cos(θ)

La función seno y coseno se definen como coordenadas de E(θ) $\in \mathcal{C}_1(O)$, y para todo número entero k, y θ en radianes o reales se cumple: sen($\theta + 2\pi k$) = sen(θ) y cos(θ+2πk) = cos(θ).

a) propiedades de la función seno:

1. La función sen(θ) está definido para todo $\theta \in 3$, por tanto: dom(sen) = 3.

2. Como para E(θ) = (x , y) $\in \mathcal{C}_1(O)$: $x^2 + y^2 = 1$, sen(θ) = y. Entonces:
   $x^2 = 1 - y^2 \Rightarrow 1 - y^2 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq y^2 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1$. Luego, ran(sen) = [– 1 , 1].

3. Dado que en la $\mathcal{C}_1(O)$: E(θ) = (x , y) y E(– θ) = (x , –y), se tiene sen(–θ) = –sen(θ); es decir, la función y = sen(θ), es impar y su gráfica e simétrica respecto al origen de coordenadas.

4. La longitud de $\mathcal{C}_1(O)$ es 2π y, como sen(θ) = sen(θ + 2π), la función seno tiene período 2π. En general, se cumple: sen(θ) = sen($\theta + 2k\pi$), $\forall\ k \in 9$.

5. La ecuación sen(θ) = 0 tiene solución θ tal que E(θ) = (u , 0); es decir, u = 1 ó u = –1. De esto θ = 0, π, 2π, 3π, etc.; es decir, $\theta = k\pi$, $k \in 9$.

6. Los intervalos de signo constante para la función seno son:
   Sen(θ) > 0, para $\theta \in]2\pi k, \pi+2\pi k[$, $k \in 9$;
   Sen(θ) < 0, para $\theta \in]\pi+2\pi k , 2\pi+2\pi k [$, $k \in 9$

7. La función sen(θ) es creciente para $\theta \in]-\pi/2+2k\pi , \pi/2+2\pi k [$, $k \in 9$, su valor varía de –1 hasta 1; y decreciente para $\theta \in]\pi/2+2\pi k , 3\pi/2+2\pi k [$, $k \in 9$, variando de 1 hasta –1.

8. El valor máximo del sen(θ) es 1, para $\theta = \pi/2 + 2\pi k$, $k \in 9$; y su valor mínimo igual a –1, para $\theta = -\pi/2 + 2\pi k$, $k \in 9$.

De las propiedades descritas, se tiene la gráfica de: y = sen(θ)

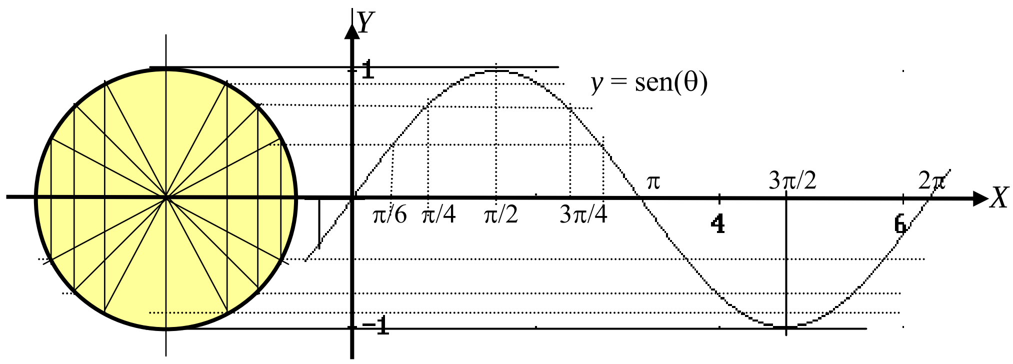


Figura 21

b) propiedades de la función coseno:

1. La función cos(θ) está definido para todo θ ∈ 3, por tanto: dom(cos) = 3.

2. Como para E(θ) = $(x, y) \in \mathcal{C}_1(O)$: $x^2 + y^2 = 1$, cos(θ) = x. Entonces:

   $y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x^2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$. Luego, ran(cos) = [–1 , 1].

3. En la $\mathcal{C}_1(O)$: E(θ) = (x, y) y E(–θ) = $(x, -y)$, por lo que se tiene: cos(–θ) = cos(θ); es decir, la función x = cos(θ), es par y su gráfica es simétrica respecto al eje Y.

4. Longitud de la $\mathcal{C}_1(O)$ es 2π y, como cos(θ) = cos(θ + 2π), la función coseno tiene período 2π, siendo: cos(θ) = cos(θ + 2kπ), ∀ k ∈ 9.

5. La ecuación cos(θ) = 0, considerando E(θ), tiene solución θ = π/2 + πn, n ∈ 9.

6. Los intervalos de signo constante para el coseno son:

   cos(θ) > 0, para θ ∈]–π/2+2nπ , π/2+2πn[, n ∈ 9;

   cos(θ) < 0, para θ ∈]π/2+2πn , 3π/2+2πn[, n ∈ 9

7. La función cos(θ) es creciente en θ ∈]–π+2πn , 2πn [, n ∈ 9 variando desde –1 hasta 1; y es decreciente para θ ∈]2πn , π+2πn [, n ∈ 9 variando de 1 hasta -1.

8. La función alcanza su valor máximo, igual a 1, para θ = π + 2πn, n ∈ 9; y valor mínimo igual a –1, para θ = 2πn, n ∈ 9.

De las propiedades descritas, se tiene la gráfica de la función: x = cos(θ)

La gráfica de x = cos(θ), se obtiene a partir de del gráfico de y = sen(θ), teniendo en cuenta que cos(θ) = sen(θ +π/2), para todo número real θ; es decir, la gráfica de: x = cos(θ), es la gráfica de la función seno desplazado π/2 hacia la izquierda a lo largo del eje X.

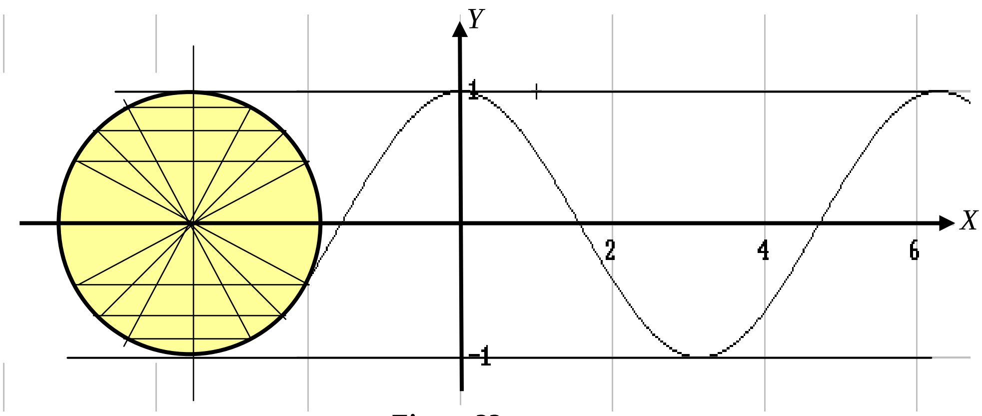


Figura 22

2.6.5. Generalización de las funciones seno y coseno:

Las gráficas de las funciones $y = \text{sen}(x)$ e $y = \cos(x)$, se generalizan en funciones que se expresan de la forma: $y = a\ \text{sen}(bx + c)$ e $y = a\ \cos(bx + c)$, para a, b, c en $3 - \{0\}$.

Este tipo de funciones se usan con frecuencia en el análisis de ondas sonoras y de radio, rayos **X** y gamma, luz visible, radiaciones infrarrojas y ultravioleta, ondas sísmicas y oceánicas, circuitos de generadores eléctricos, vibraciones, construcción de puentes y edificios, entre otros.

En las funciones generalizadas de la forma: $y = a\text{sen}(bx + c)$ e $y = a.\cos(bx + c)$, se identifican otros elementos, que se detallan:

TEOREMA: Si $y = a.\text{sen}(bx + c)$ o $y = a.\cos(bx + c)$, donde a , b y c son números reales distintos de cero, entonces:

1) La amplitud es $|a|$ y su período es $2\pi/|b|$
2) Se puede calcular el desplazamiento de fase y el intervalo que contiene exactamente un ciclo, resolviendo las dos ecuaciones siguientes: $bx + c = 0$ y $bx + c = 2\pi$.

EJEMPLO: Calcular la amplitud, período y desplazamiento de fase de $y = 3\text{sen}(2x + \pi/2)$.

Solución:

Como la ecuación tiene la forma $y = a.\text{sen}(bx) + c$ donde $a = 3$, $b = 2$ y $c = \pi/2$. Entonces: la amplitud es $|a| = 3$ y el período es $2\pi/|b| = 2\pi/2 = \pi$.

El desplazamiento de fase y el intervalo que contiene que contiene una onda sinusoidal se obtiene de las ecuaciones:

$$2x + \pi/2 = 0 \quad \text{y} \quad 2x + \pi/2 = 2\pi.$$

despejando

$$x = -\pi/4 \quad \text{y} \quad x = 3\pi/4.$$

Así que el desplazamiento es $-\pi/4$, y una onda sinusoidal de amplitud 3 ocupa el intervalo $[-\pi/4\ ,\ 3\pi/4]$, si se traza esa onda y se repite luego a derecha e izquierda, como se muestra en la figura 23:

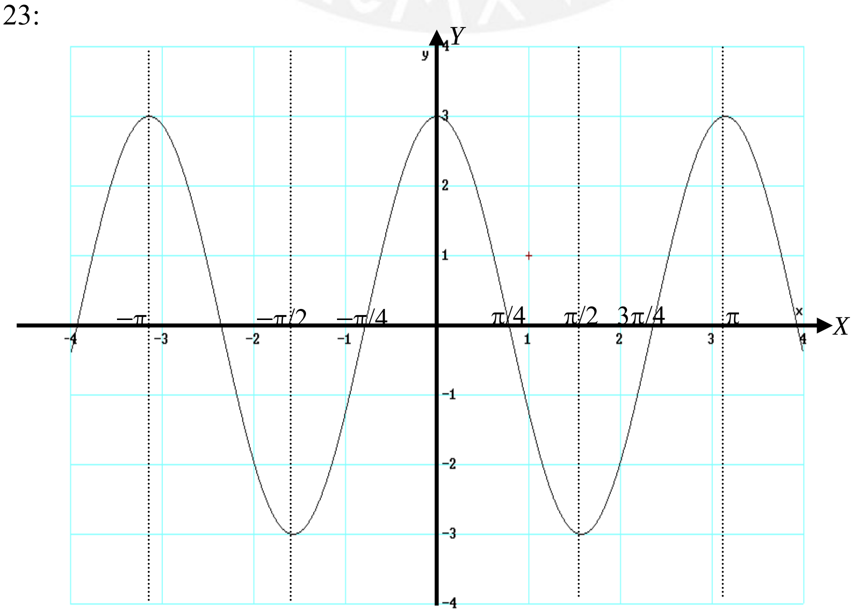


Figura 23

2.6.6. Gráfica de la función: $y = \tan(\theta)$

Como en el caso de las funciones seno y coseno, para obtener la gráfica de la función tangente se consideran las:

Propiedades de la función tangente:

1. Según la definición el dominio de la función tangente es $\{ \theta \in 3 \,/\, \theta \neq \pi/2 + n\pi,\ n \in 9 \}$.
2. Los valores de la función $\tan(\theta)$, es todo los reales, por lo tanto ran(tan) = 3.
3. La función es impar, puesto que $\tan(-\theta) = \text{sen}(-\theta)/\cos(-\theta) = -\text{sen}(\theta)/\cos(\theta) = -\tan(\theta)$. De esto, su gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas.
4. Es una función periódica y tiene período π: $\tan(\theta + \pi) = \tan(\theta)$.
5. La ecuación $\tan(\theta) = 0$, tiene solución para $\theta = \pi n$, $n \in 9$.
6. Los intervalos de signo constante son:.
   $\tan(\theta) > 0$, para $\theta \in \,]\pi n\,,\, \pi/2+\pi n[$, $n \in 9$; y,

   $\tan(\theta) < 0$, para $\theta \in \,]-\pi/2+\pi n\,,\, \pi n[$, $n \in 9$

7. La función $\tan(\theta)$ es creciente en cada una de los intervalos $]-\pi/2+\pi n\,,\, \pi/2+\pi n\,[$, $n \in 9$.

De las propiedades descritas, el gráfico de la función $y = \tan(\theta)$ se obtiene mediante un procedimiento análogo a la construcción de $y = \text{sen}(\theta)$, resultando una curva en donde las rectas verticales $x = \pi/2 + \pi n$, con $n \in 9$, se llaman asíntotas verticales; como se muestra:

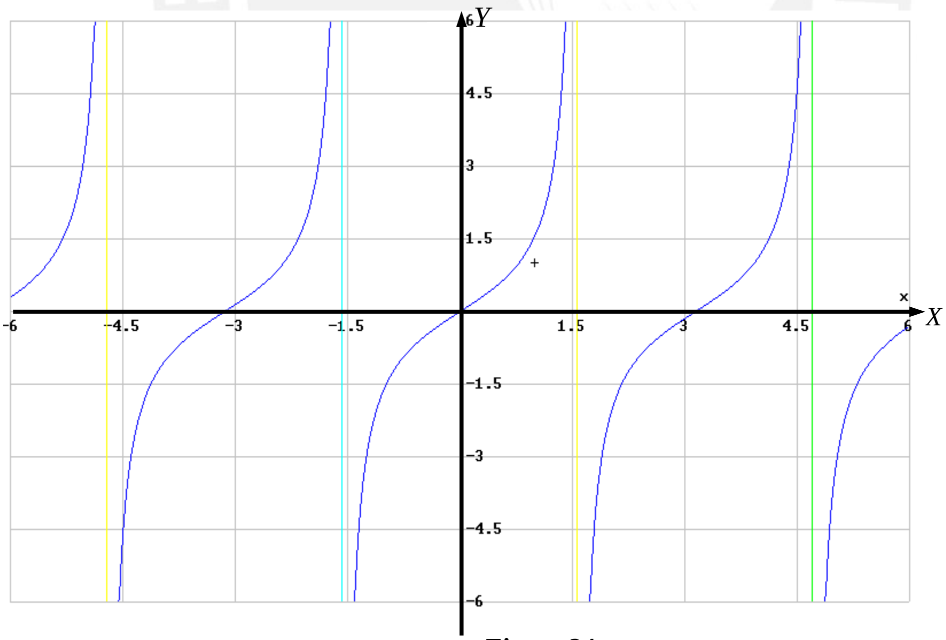


Figura 24

NOTA: Las gráficas correspondientes a las funciones: $y = \cot(\theta)$, $y = \sec(\theta)$ e $y = \csc(\theta)$, se obtienen a partir de la tangente, coseno y seno respectivamente. Siendo sus dominios y rangos correspondientes:

dom(cot) = $\{\theta \in 3 \,/\, \theta \neq n\pi,\ n \in 9\}$ ran(cot) = 3.

dom(sec) = $\{ \theta \in 3 \,/\, \theta \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi\,,\ n \in 9 \}$ ran(sec) = $]-\infty\,,\,-1] \cup [1\,,\,+\infty[$

dom(csc) = { $\theta \in 3 / \theta \neq n\pi, n \in 9$ } ran(sec) =] $-\infty$, -1] $\cup$ [1 , $+\infty$ [.

2.7. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS Y GRÁFICAS:

DEFINICIÓN: Una función ***f*** es **inyectiva** o **uno a uno** si para $a, b \in$ Dom(f):

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b).$$

PROPOSICIÓN: Si f :A⟶3 / $y = f(x)$ es función inyectiva y su rango en B $\subset$ 3; existe una función g:B⟶3, cuyo rango es A y se cumplen: $f \circ g = \mathrm{Id}_B$ y $g \circ f = \mathrm{Id}_A$.

Prueba:
Como B = ran(f), para cada x de B existe y en A tal que $f(y) = x$; y, como f es inyectiva, el valor y es único. De esto, la correspondencia $x \to y$ define una función g de B en 3; es decir, se tiene: $g : B \to 3$ tal que: $g(x) = y \iff x = f(y)$, de donde ran(g) $\subset A$; y para cada y en A se tiene $f(y) = x \in B$ y $g(x) = y \in$ ran(g), se tiene $A \subset$ ran(g), o sea ran(g) = A.

Además, en $g(x) = y$, se tiene reemplazando x por $f(y)$, se tiene $g(f(y)) = y$, o sea $(g \circ f)(y) = y$ para $y \in A$; también en $x = f(y)$, reemplazando y por $g(x)$ se tiene $x = f(g(x))$, o sea $(f \circ g)(x) = x$ para $x \in B$. Luego, se cumple: $f \circ g = \mathrm{Id}_B$ y $g \circ f = \mathrm{Id}_A$.

DEFINICIÓN: Si f es una función inyectiva con rango B; a la función g definida por:
$g(x) = y \iff x = f(y)$, para cada x en B = ran(f), se llama la ***función inversa*** de la función f, y se denota por $g = f^{-1}$; y cumple: $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B$ y $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A$., de donde $f^{-1}(x) = y \iff x = f(y)$.

De la definición anterior, para determinar la función inversa f^{-1} de f se sigue los pasos:

1. Hallar dom(f^{-1}) = ran(f) y ran(f^{-1}) = dom(f).
2. Comprobar que f es función inyectiva en su dominio.
3. Despejar x de la ecuación $y = f(x)$ en términos de y, para obtener una ecuación de la forma $x = f^{-1}(y)$. De esto, intercambiando x e y, resulta: $y = f^{-1}(x)$, la regla de correspondencia de f^{-1}
4. Comprobar las dos condiciones siguientes:
   a) $(f^{-1} \circ f)(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$ para todo x en el dominio de f.
   b) $(f \circ f^{-1})(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$ para todo x en el dominio de f^{-1}.

EJEMPLO: Determinar la inversa de $f(x) = x^2 - 3$, para $x \geq 0$, si existe
Solución:
1º El dominio de f es [0 , $+\infty$[y el rango de f es [-3 , $+\infty$[. Como f es creciente e inyectiva, entonces tiene su función inversa f^{-1} cuyo dominio es [-3 , $+\infty$[, y su rango es [0 , $+\infty$ [.

2º Despejando x de la ecuación $y = x^2 - 3$, se tiene: $x = \sqrt{y+3}$. Haciendo $x = f^{-1}(y)$, se tiene $f^{-1}(y) = \sqrt{y+3}$, cambiando el símbolo para la variable que la define, se puede escribir: $f^{-1}(x) = \sqrt{x+3}$, donde x está en el dominio de f^{-1}.

3º Comprobación de (a) y (b) para x en los dominios de f y f^{-1}, respectivamente.

a) $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2-3)$ (definición de f)

$= \sqrt{(x^2-3)+3}$ (definición de f^{-1})

$= \sqrt{x^2} = x$, para $x \geq 0$ (se simplifica)

b) $f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{(x^2+3)})$ (definición de f^{-1})

$= (\sqrt{x+3}) - 3$ (definición de f)

$= (x+3) - 3 = x$, para $x \geq 3$. (se simplifica)

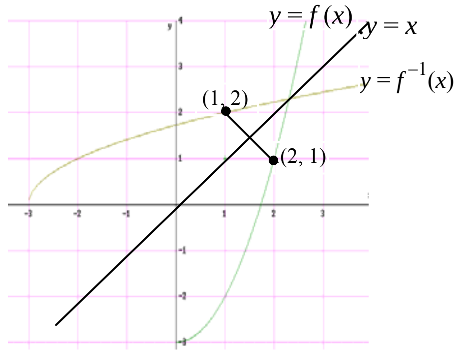


Figura 25

Estas comprobaciones demuestran que la función inversa de f es: $f^{-1}(x) = \sqrt{x+3}$, siendo las gráficas de f y f^{-1} simétricas a la recta $y = x$, como se muestra en la figura 25.

OBSERVACIÓN: Las funciones trigonométricas, anteriormente definidas, no son inyectivas en sus correspondientes dominios y, por tanto, ninguna de ellas admite función inversa. Reduciendo o restringiendo convenientemente sus dominios a intervalos, se asegura la inyectividad de ellas; y calculando los rangos respectivos a estos dominios, se definen las ***funciones trigonométricas inversas***. La reducción del dominio no es en forma única; en lo que sigue, consideraremos al ***intervalo principal***:

2.7.1. Función inversa del coseno:

De la gráfica, la función coseno es inyectiva en el intervalo $[0\ ,\ \pi]$, donde su rango es $[-1\ ,\ 1]$ y la función $y = \cos(x)$ es decreciente (figura 26). Por lo tanto, la función admite función inversa.

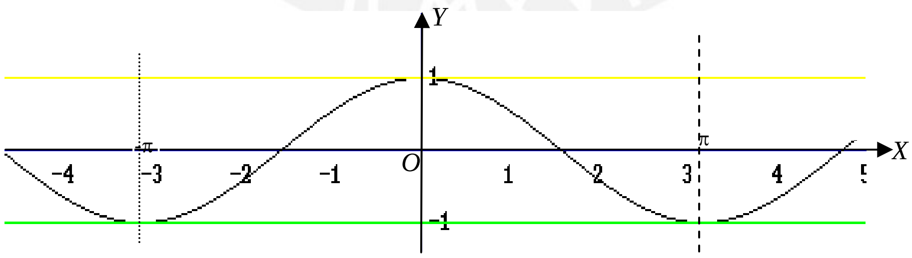


Figura 26: La función $y = \cos(x)$ es uno a uno en $[0\ ,\ \pi]$

DEFINICIÓN: La función inversa del coseno, denotado por $\mathbf{cos}^{-1}$ o **arccos** y es llamada arco coseno o coseno inverso, está definida por:

$$\arccos : [-1\ ,\ 1] \longrightarrow [\,0\ ,\ \pi\,]\ ,\ \text{donde}\ \arccos(x) = y \iff \cos(y) = x.$$

De la definición, para todo $y \in [0\ ,\ \pi]$ existe un único $x \in [-1\ ,\ 1]$ tal que $\arccos(x) = y$.

Gráfica de $y = \arccos(x)$

Composición del coseno y su inversa:

$\cos(\arccos((x)) = x, -1 \leq x \leq 1$

$\arccos(\cos((x)) = x, \;\; 0 \leq x \leq \pi$

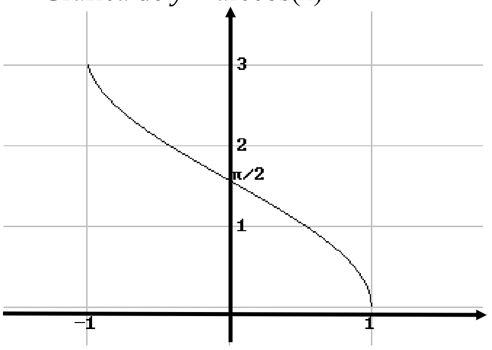


Figura 27

2.7.2. Función inversa del seno:

De la gráfica, la función seno es inyectiva en el intervalo $[-\pi/2 \, , \, \pi/2]$, su rango es $[-1 \, , \, 1]$ y la función $y = \text{sen}(x)$ es creciente (figura 28). Luego, la función seno admite función inversa.

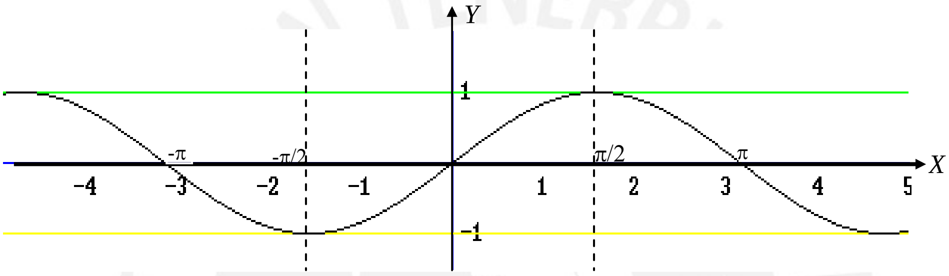


Figura 28: La función $y = \text{sen}(x)$ es uno a uno en $[-\pi/2 \, , \, \pi/2]$

DEFINICIÓN: La función inversa del seno, denotado por $\textbf{sen}^{-1}$ o **arcsen** y llamada arco seno o seno inversa, es definida por:

$$\text{arcsen} : [-1 \, , \, 1] \longrightarrow [-\pi/2 \, , \, \pi/2] \, , \text{ donde } \text{arcsen}(x) = y \Leftrightarrow \text{sen}(y) = x.$$

Según la definición: para todo $y \in [-\pi/2 \, , \, \pi/2]$ existe un único $x \in [-1 \, , \, 1]$ tal que $\text{arcsen}(x) = y$.

Gráfica de $y = \text{arcsen}(x)$.

Composición del seno y su inversa:

$\text{sen}(\text{arcsen}((x)) = x, -1 \leq \; x \; \leq 1$

$\text{arcsen}(\text{sen}((x)) = x, \;\; -\pi/2 \; \leq \; x \; \leq \pi/2$

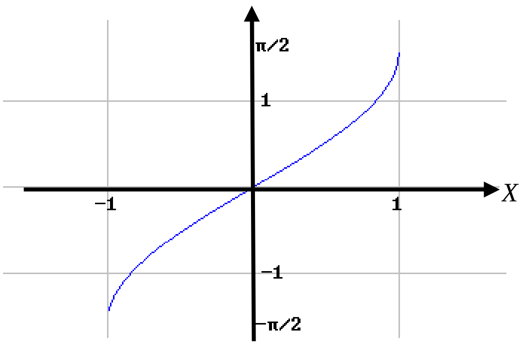


Figura 29

2.7.3. Inversa de la función la tangente:

La función tangente es inyectiva en el intervalo]–π/2 , π/2[, su rango es 3 y la función $y = \tan(x)$ es creciente (figura 30); por lo que la función tangente admite función inversa en este intervalo:

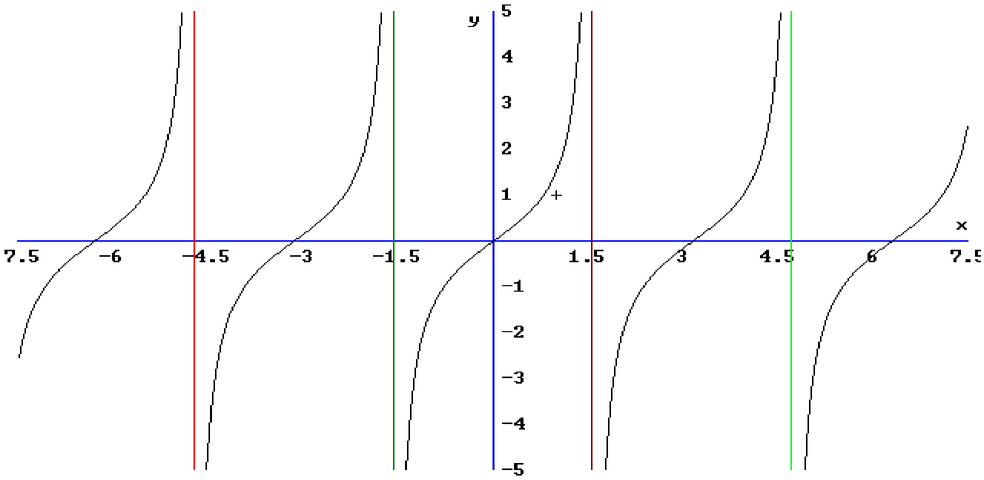


Figura 30: La función $y = \tan(x)$ es uno a uno en]–π/2 , π/2[

DEFINICIÓN: La función inversa de la tangente, denotado por $\mathbf{tan}^{-1}$ o **arctan** y llamada arco tangente o tangente inversa, es definida por:

$$\arctan : 3 \longrightarrow \,]-\pi/2 , \pi/2[\text{ , donde } \arctan(x) = y \Leftrightarrow \tan(y) = x$$

De la definición anterior, para todo $x \in 3$ existe un único $y \in \,]-\pi/2 , \pi/2[$ tal que $\arctan(x) = y$, y para todo $y \in \,]-\pi/2 , \pi/2[$, existe $x \in 3$ tal que $\arctan(x) = y$.

Identidades del tangente y arco tangente:

$\tan(\arctan(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}, \; -\infty \leq \boldsymbol{x} \leq +\infty$

$\arctan(\tan(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}, \; \pi/2 < \boldsymbol{x} < \pi/2$

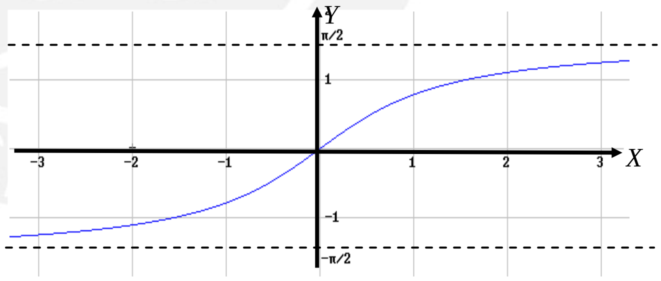


Figura 31

De la existencia de la función inversa de una función dada, de $y = f(x)$ se despeja $x = f^{-1}(y)$; lo que asegura que existe solución para x en la ecuación $y = f(x)$. Este argumento permite resolver ecuaciones con funciones trigonométricas $y = f(\theta)$, donde θ es número real 3 que usualmente indica la medida de un ángulo en radianes.

EJEMPLO: Resolver la ecuación sen(θ). tan(θ) = sen(θ); es decir, hallar los números reales θ que satisfacen o hacen verdadera la igualdad dada.

Para resolver dicha ecuación, recordamos propiedades de los números reales relacionadas con las operaciones que se indican en la ecuación; pues para θ en 3, sen(θ) y tan(θ) son también números reales. Según esto:

De sen(θ). tan(θ) = sen(θ), transponiendo términos y factorizando, se tiene sucesivamente que sen(θ). tan(θ) – sen(θ) = 0 y sen(θ)[tan(θ) – 1] = 0. De esto, considerando el producto de dos números igual a 0, se tiene sen(θ) = 0 o tan(θ) = 1.

La ecuación sen(θ) = 0, se resuelve despejando θ = arcsen(0) = 0. Pero la función seno no es inyectiva y considerando E(θ) = (u , 0), o sea $u = 1$ o $u = -1$, se tiene E(θ) = (1 , 0) o E(θ) = (–1 , 0), y teniendo que la función seno tiene periodo 2π, las soluciones para θ son: 0, π, 0+2kπ y π+2kπ, para todo k en 9, esto es: θ = kπ, para k en 9.

Análogamente, de la ecuación tan(θ) = 1 se tiene θ = arctan(1) = π/4, y como E(θ) = (u , u), o sea $u = \sqrt{2}/2$: o $u = -\sqrt{2}/2$, y considerando la periodicidad, se tiene: θ = π/4 + 2kπ ó θ = 5π/4 + 2kπ, para todo $k \in$ 9, es decir, θ = π/4 + kπ, con k en 9.

2.8. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS:

Una **identidad trigonométrica** es una expresión dada por una igualdad que relaciona valores de funciones trigonométricas válidas para todos los números reales θ donde las expresiones de la igualdad están definidas en 3.

De la definición de las funciones trigonométricas, para E(θ) = (u , v) en $\mathcal{C}_1(O)$, con $u^2 + v^2 = 1$, se tienen, entre otras, propiedades básicas o identidades básicas:

i) De sen(θ) = v y cos(θ) = u; resulta la identidad sen²(θ) + cos²(θ) = 1, para todo θ en 3.
ii) De sec(θ) = 1/cos(θ), se tiene la identidad sec(θ).cos(θ) = 1, para todo θ ≠ π/2 + πk, $k \in$ 9.

También, de identidades dadas se obtienen otras, tales como:

iii) De $\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$, dividiendo entre cos(θ), para θ ≠ π/2 + πk, $k \in$ 9, se tiene la identidad: $\tan^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta)$; o dividiendo entre sen(θ), para θ ≠ kπ con k en 9, se tiene la identidad: $1 + \cot^2(\theta) = \csc^2(\theta)$.

Aparte de estas identidades o propiedades básicas, que resultan de la definición de las funciones trigonométricas, existen otras identidades o propiedades que tienen utilidad en las aplicaciones de reducción o simplificación de expresiones con funciones trigonométricas, como veremos:

2.8.1. Identidades aditivas:

Son propiedades que relacionan los valores de las funciones trigonométricas para α y β en 3 con los valores para α + β, α – β, 2α o α/2.

TEOREMA (fundamental): Para α y β en 3, se cumple:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha).\cos(\beta) + \text{sen}(\alpha).\text{sen}(\beta).$$

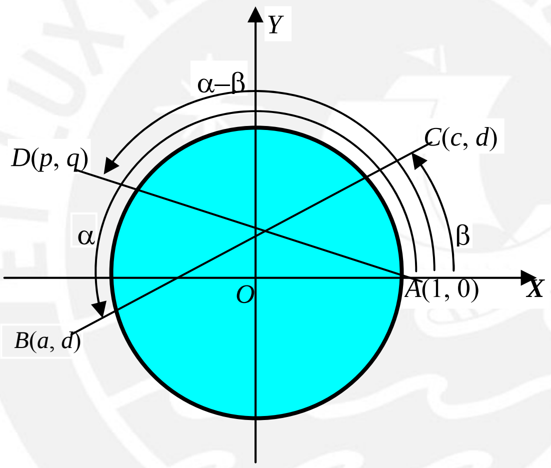
Demostración: Es suficiente tener α y β en $[0, 2\pi[$, con $\alpha > \beta$. Sean $E(0) = (1, 0)$, $E(\alpha) = (a, b)$, $E(\beta) = (c, d)$ y $E(\alpha - \beta) = (p, q)$. Por definición de las funciones coseno y seno, resultan: $a = \cos(\alpha)$, $c = \cos(\beta)$, $p = \cos(\alpha - \beta)$, $1 = \cos(0)$, $b = \text{sen}(\alpha)$, $d = \text{sen}(\beta)$, $q = \text{sen}(\alpha - \beta)$ y $0 = \text{sen}(0)$.

Además, como $\alpha - (\alpha - \beta) = \beta$, se tiene los arcos $\overparen{E(0)E(\alpha-\beta)}$ y $\overparen{E(\beta)E(\alpha)}$ tienen longitudes iguales.

Por lo tanto, $d(E(0), E(\alpha-\beta)) = d(E(\beta), E(\alpha))$, o sea

$\sqrt{(p-1)^2 + (q-0)^2} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$. De donde $(a-c)^2 + (b-d)^2 = (p-1)^2 + (q-0)^2$ o $a^2 + c^2 - 2ac + b^2 + d^2 - 2bd = p^2 - 2p + 1 + q^2$. Como $a^2 + b^2 = 1$, $p^2 + q^2 = 1$ y $c^2 + d^2 = 1$, se tiene: $2 - 2ac - 2bd = 2 - 2p$; esto es: $p = ac + bd$, en donde, reemplazando $p = \cos(\alpha - \beta)$, $a = \cos(\alpha)$, $b = \text{sen}(\alpha)$, $c = \cos(\beta)$ y $d = \text{sen}(\beta)$, resulta:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \text{sen}(\alpha)\,\text{sen}(\beta).$$



En la figura:

$.m(\overparen{AC}) = m(\overparen{BD}) = \beta$

$.m(\overparen{AB}) = \alpha$

$.m(\overparen{BD}) = \alpha - \beta$

$x^2 + y^2 = 1$

Figura 32

Del teorema anterior, se obtienen identidades que conducen al coseno, al seno y a la tangente de $\alpha + \beta$ y al seno y a la tangente de $\alpha - \beta$, a través del siguiente:

COROLARIO: Dados α y β en 3, donde las funciones dadas estén definidas, se cumplen:

i) $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha).\cos(\beta) - \text{sen}(\alpha).\text{sen}(\beta)$;

ii) $\text{Sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}(\alpha).\cos(\beta) - \cos(\alpha).\text{sen}(\beta)$ y $\text{Sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}(\alpha).\cos(\beta) + \cos(\alpha).\text{sen}(\beta)$;

iii) $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha).\tan(\beta)}$ y $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha).\tan(\beta)}$.

Demostración:

i) Como $\alpha + \beta = \alpha - (-\beta)$, la función coseno es función par y la función seno es impar, se tiene por el teorema:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos(\alpha).\cos(-\beta) + \text{sen}(\alpha).\text{sen}(-\beta)\\ &= \cos(\alpha).\cos(\beta) + \text{sen}(\alpha).(-\text{sen}(\beta)) = \cos(\alpha).\cos(\beta) - \text{sen}(\alpha).\text{sen}(\beta).\end{aligned}$$

ii) Por la propiedad de las cofunciones, el coseno es par, el seno es impar y el teorema:

$\text{Sen}(\alpha - \beta) = \cos(\pi/2 - (\alpha - \beta)) = \cos((\pi/2 - \alpha) - (-\beta))$

$= \cos(\pi/2 - \alpha).\cos(-\beta) + \text{sen}(\pi/2 - \alpha).\text{sen}(-\beta) = \text{sen}(\alpha).\cos(\beta) - \cos(\alpha).\text{sen}(\beta)$; y

$\text{Sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}(\alpha - (-\beta)) = \text{sen}(\alpha).\cos(-\beta) - \cos(\alpha).\text{sen}(-\beta) = \text{sen}(\alpha).\cos(\beta) + \cos(\alpha).\text{sen}(\beta)$.

iii) Con procedimientos análogos y por definición, se obtienen las identidades para la tangente.

2.8.2. Identidades de arco o ángulo doble:

Las identidades aditivas (de arcos o ángulos) inducen a otras identidades, como casos particulares: $2\alpha = \alpha + \alpha$, se llama **ángulo doble**.

Así, para α en 3 donde las funciones consideradas están definidas:

i) $\text{sen}(2\alpha) = \text{sen}(\alpha+\alpha) = \text{sen}(\alpha).\cos(\alpha) + \cos(\alpha).\text{sen}(\alpha) = 2.\text{sen}(\alpha).\cos(\alpha)$; es decir, se tiene la identidad: $\text{sen}(2\alpha) = 2\text{sen}(\alpha).\cos(\alpha)$.

ii) $\cos(2\alpha) = \cos(\alpha+\alpha) = \cos(\alpha).\cos(\alpha) - \text{sen}(\alpha).\text{sen}(\alpha) = \cos^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha)$

$= (1 - \text{sen}^2(\alpha)) - \text{sen}^2(\alpha) = 1 - 2\text{sen}^2(\alpha)$ o

$= \cos^2(\alpha) - (1 - \cos^2(\alpha)) = 2\cos^2(\alpha) - 1$; es decir, se tiene las identidades:

$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha)$, $\cos(2\alpha) = 1 - 2\text{sen}^2(\alpha)$ y $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$.

iii) $\tan(2\alpha) = \tan(\alpha + \alpha). = \dfrac{\tan(\alpha) + \tan(\alpha)}{1 - \tan(\alpha).\tan(\alpha)} = \dfrac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$, y se tiene la identidad:

$\tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$, para α tal que $\tan(\alpha) \neq \pm 1$.

2.8.3. Identidades de arco o ángulo mitad

Las funciones trigonométricas de **ángulo mitad** resulta de $2\alpha = \beta$, o sea $\alpha = \beta/2$, para β donde las funciones consideradas están definidas. Se tienen:

i) De $\cos(2\alpha) = 1 - 2\text{sen}^2(\alpha)$, se tiene: $\cos(\beta) = 1 - 2\text{sen}^2(\beta/2)$. Despejando $\text{sen}^2(\beta/2)$, resulta:

$\text{sen}^2(\beta/2) = \dfrac{1 - \cos(\beta)}{2}$; de donde $\text{sen}(\beta/2) = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos(\beta)}{2}}$, en donde signo se toma, según el cuadrante al que pertenece $E(\beta/2)$. Luego, resulta la identidad: $\text{sen}(\beta/2) = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos(\beta)}{2}}$.

ii) De $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$, se tiene: $\cos(\beta) = 2\cos^2(\beta/2) - 1$; de donde $\cos^2(\beta/2) = \dfrac{1 + \cos(\beta)}{2}$,

o sea: $\cos(\beta/2) = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos(\beta)}{2}}$, en donde signo se toma, según el cuadrante al que pertenece $E(\beta/2)$. Luego, resulta la identidad: $\cos(\beta/2) = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos(\beta)}{2}}$.

iii) Análogamente se tiene la identidad: $\tan(\frac{\theta}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}} = \frac{sen(\theta)}{1+\cos(\theta)} = \frac{1-\cos(\theta)}{sen(\theta)}$.

2.8.4. Identidades de productos a sumas

De las identidades aditivas del seno de la suma y de la diferencia:

sen(α+β) = sen(α).cos(β) + cos(α).sen(β) y sen(α – β) = sen(α).cos(β) – cos(α).sen(β),

sumando miembro a miembro, se tiene:

sen(α+β) + sen(α – β) = 2sen(α).cos(β), o sea: sen(α).cos(β) = $\frac{1}{2}$ [sen(α+β) + sen(α–β)]

Análogamente, de las identidades aditivas del coseno de la suma y de la diferencia:

cos(α– β) = cos(α).cos(β) + sen(α).sen(β) y cos(α + β) = cos(α).cos(β) – sen(α).sen(β);

sumando miembro a miembro, se tiene:

cos(α– β) + cos(α + β) = 2cos(α).cos(β), o sea: cos(α).cos(β) = $\frac{1}{2}$ [cos(α + β) + cos(α– β)];

restando miembro a miembro, se tiene:

cos(α– β) – cos(α + β) = 2sen(α).sen(β), o sea: sen(α).sen(β) = $\frac{1}{2}$ [cos(α – β) – cos(α + β)].

Resumiendo, se tienen las identidades para transformar productos a sumas o restas:

i) sen(α).cos(β) = $\frac{1}{2}$ [sen(α+β) + sen(α – β)]

ii) cos(α).cos(β) = $\frac{1}{2}$ [cos(α + β) + cos(α – β)]

iii) sen(α).sen(β) = $\frac{1}{2}$ [cos(α – β) – sen(α + β)].

2.8.5. Identidades de sumas a productos:

De las identidades aditivas del seno de la suma y de la diferencia:

sen(α+β) = sen(α).cos(β) + cos(α).sen(β) y sen(α – β) = sen(α).cos(β) – cos(α).sen(β),

de sumar miembro a miembro se tiene sen(α+β) + sen(α– β) = 2sen(α).cos(β). Si u = α + β y v = α – β, resolviendo para α y β se tiene: α = $\frac{u+v}{2}$ y β = $\frac{u-v}{2}$; y reemplazando en la igualdad anterior resulta la identidad: sen(u) + sen(v) = 2sen($\frac{u+v}{2}$).cos($\frac{u-v}{2}$).

También, al restar miembro a miembro las identidades anteriores y para u = α+β y v = α – β, se tiene la identidad: sen(u) – sen(v) = 2cos($\frac{u+v}{2}$).sen($\frac{u-v}{2}$).

Análogamente, de cos(α– β) = cos(α).cos(β) + sen(α).sen(β) y
cos(α + β) = cos(α).cos(β) – sen(α).sen(β),
sumando y restando miembro a miembro y para u = α+β y v = α – β, se tienen:

$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2\cos(\alpha).\cos(\beta)$ y $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2\text{sen}(\alpha).\text{sen}(\beta)$;

de donde resultan las identidades:

$\cos(v) + \cos(u) = 2\cos(\frac{u+v}{2}).\cos(\frac{u-v}{2})$ y $\cos(v) - \cos(u) = 2\text{sen}(\frac{u+v}{2}).\text{sen}(\frac{u-v}{2})$.

Resumiendo, se tienen las identidades para transformar sumas o diferencias de senos o de cosenos a productos de senos, de cosenos o de seno y coseno:

i) $\text{sen}(u) + \text{sen}(v) = 2\text{sen}(\frac{u+v}{2}).\cos(\frac{u-v}{2})$

ii) $\text{sen}(u) - \text{sen}(v) = 2\cos(\frac{u+v}{2}).\text{sen}(\frac{u-v}{2})$

iii) $\cos(v) + \cos(u) = 2\cos(\frac{u+v}{2}).\cos(\frac{u-v}{2})$

iv) $\cos(v) - \cos(u) = 2\text{sen}(\frac{u+v}{2}).\text{sen}(\frac{u-v}{2})$

Las identidades trigonométricas presentadas, sirven para resolver ecuaciones y para comprobar o verificar si diversas igualdades dadas son o no identidades. Para ilustración, consideremos:

EJEMPLO 1: ¿Para qué valores de θ en el intervalo $[0 , \pi]$ se cumple $2\cos(3\theta) = \sqrt{3}$?

Para resolver, por definición de coseno, de $2\cos(3\theta) = \sqrt{3}$ o $\cos(3\theta) = \sqrt{3}/2$, se tiene $3\theta = \pi/3$, o sea $\theta = \pi/9 \vee \theta = \pi - \pi/9 = 8\pi/9$, que son lo únicos valores de θ en $[0 , \pi]$.

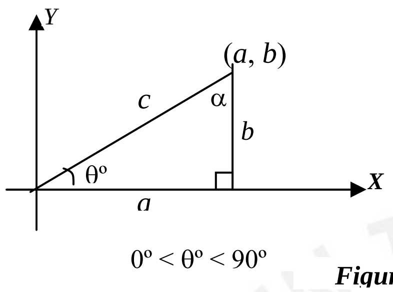
EJEMPLO 2: Resolver la ecuación $\cos(2\theta) + \text{sen}(\theta) = 1$.

En este caso, como $\cos(2\theta) = 1 - 2\text{sen}^2(\theta)$, reemplazando se tiene: $1 - 2\text{sen}^2(\theta) + \text{sen}(\theta) = 1$, o sea $2\text{sen}^2(\theta) - \text{sen}(\theta) = 0$. Factorizando $\text{sen}(\theta)(2\text{sen}(\theta) - 1) = 0$; es decir, $\text{sen}(\theta) = 0$ o $2\text{sen}(\theta) = 1$. Resolviendo cada ecuación resultante: $\text{sen}(\theta) = 0$ o $\text{sen}(\theta) = 1/2$, se tiene: ($\theta = 0$ o $\theta = \pi$), ($\theta = \pi/6$ o $\theta = 5\pi/6$), como soluciones en $[0 , 2\pi]$. Por la periodicidad de la función seno, se tiene las soluciones generales: $\theta = 2\pi k$, $\theta = \pi/6+2\pi k$, $\theta = 5\pi/6+2\pi k$ o $\theta = \pi+2\pi k$; $k \in 9$.

2.9. APLICACIONES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

2.9.1. Resolución de triángulos rectángulos:

Dado un punto $P = (a , b)$ en el plano cartesiano que no está en ninguno de los ejes, al determinar a en el eje X y b en el eje Y se tiene un **triángulo rectángulo** cuyos catetos tienen longitudes $|a|$ y $|b|$ y la hipotenusa tiene longitud c y forma con el eje X un ángulo de referencia de medida θ. Por 2.8.3, y como se ilustra en la **figura 33**, se tiene las seis relaciones o razones trigonométricas del ángulo $\widehat{\theta}$:



$$\alpha^o + \theta^o = 90^o \quad \text{y} \quad c^2 = a^2 + b^2$$

$$\text{sen}(\theta^o) = \frac{b}{c} \qquad \csc(\theta^o) = \frac{c}{b}$$

$$\cos(\theta^o) = \frac{a}{c} \qquad \sec(\theta^o) = \frac{c}{a}$$

$$\tan(\theta^o) = \frac{b}{a} \qquad \cot(\theta^o) = \frac{a}{b}$$

Figura 33

En el triángulo rectángulo formado en la **figura 33**, al cateto de longitud $|b|$ se denomina **cateto opuesto** al ángulo de medida θ, al cateto de longitud $|a|$ es el **cateto adyacente** a la misma

Luego, **resolver un triángulo rectángulo** es encontrar las longitudes de sus tres lados y las medidas de sus dos ángulos (pues, el tercer ángulo mide 90^o o $\pi/2$ rad), conociendo al menos la longitud de un lado alguno de los otros, usando algunas de las relaciones dadas anteriormente.

EJEMPLOS:

a) En la ilustración que se muestra, ***¿cuál es la altura del faro?***

En este caso, en el triángulo rectángulo ABC, utilizando la razón trigonométrica de 37°, que relaciona el cateto opuesto y el cateto adyacente, es decir tan(37°). Haciendo los cálculos correspondientes se obtiene de inmediato que la altura del faro es **12 m**

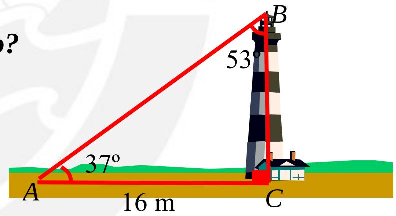


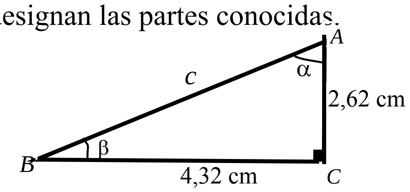
Figura 34

b) Resolver el triángulo rectángulo ABC, con $a = 4{,}32$ cm y $b = 2{,}62$ cm

Solución:

Dibujamos la figura 35 y, utilizando la notación, se designan las partes conocidas.

Figura 35



Despejando β: $\tan(\beta) = \dfrac{2{,}62}{4{,}32} \Rightarrow \beta = \arctan(\dfrac{2{,}62}{4{,}32}) = 31{,}2^o \approx 31^o10'$

Se despeja α: $\alpha = 90^o - 31^o10' = 58^o50'$

Se despeja c: $\text{sen}(\beta) = \dfrac{2{,}62}{c} \Rightarrow c = \dfrac{2{,}62}{sen(31{,}2^o)} \Rightarrow c = \dfrac{2{,}62}{0{,}518} = 5{,}05$ cm

o también, usando el teorema de Pitágoras: $c = \sqrt{(4{,}32)^2 + (2{,}62)^2} = 5{,}05$ cm.

Respuesta: $\beta = 31º10'$, $\alpha = 58º50'$, $c = 5{,}05$ cm

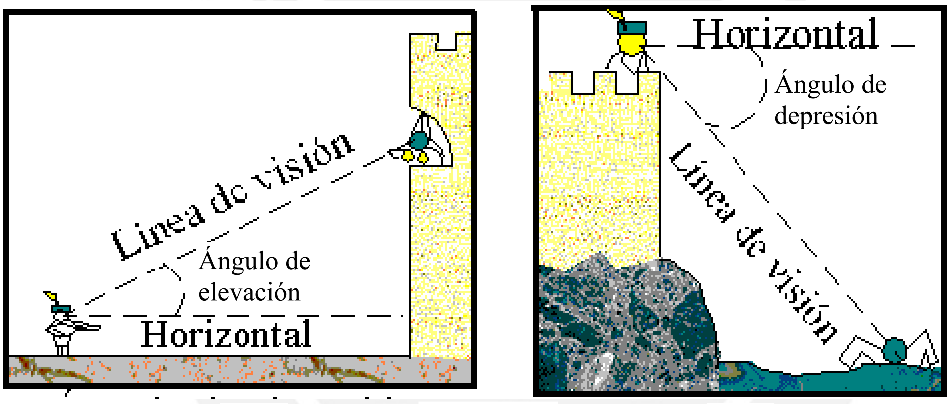
c) Una de las aplicaciones más comunes de la resolución de triángulos rectángulos son los ángulos de **elevación** y de **depresión,** que forman la línea de mira o punto de visión con la línea horizontal en una observación hacia arriba o hacia abajo. Para esto, es preciso identificar:

La horizontal: es la línea imaginaria paralela al horizonte o suelo plano que pasa por el ojo del observador.

Línea de Mira o Visión (Visual): es la línea imaginaria que pasa por el ojo del observador y el punto que está observando.

Ángulo de elevación: es el ángulo formado entre la línea horizontal y la línea de mira, cuando el objeto está situado por encima de la línea de mira (**fig. 36(a)**).

Ángulo de depresión: es el ángulo formado entre la línea horizontal y la línea de mira, cuando el objeto está situado por debajo de la línea de mira (**fig. 36(b)**).



(a) *Figura 36* **(b)**

En estos casos, se tienen situaciones como las siguientes ejemplos:

c_1) Desde lo alto de un cerro se observa un auto bajo un ángulo de depresión de 60º. Si el auto está detenido a $20\sqrt{3}$ m del pie del cerro, hallar la altura del cerro respecto a la pista donde se ubica el auto:

Ilustración

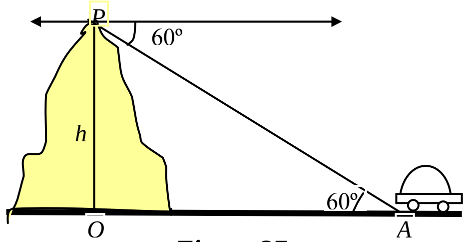


Figura 37

Solución:

Del triángulo rectángulo *AOP*

$$\text{Tan}(60º) = \frac{h}{20\sqrt{3}} \Rightarrow h = \tan(60º).(20\sqrt{3}\text{ m})$$

$$h = \sqrt{3}\,(20\sqrt{3}\text{ m})$$

$$h = 60 \text{ m}$$

c_2) Dos personas situadas a lados opuestos de un árbol de 40 m de altura observan la cima de la misma con ángulos de elevación de 30º y 45º respectivamente. ¿Qué distancia separa a los dos observadores?

Ilustración

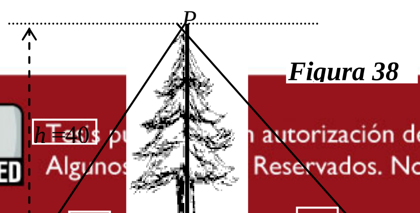


Figura 38

***Solución*:**

De la figura 38: $d(A , B) = d + d' = ??$

$\text{Tan}(60º) = 40/d' \Rightarrow d' = 40/\tan(60º)$

$d' = 40/\sqrt{3} = 40\sqrt{3}/3$

$\text{Tan}(45º) = 40/d \Rightarrow d = 40/\tan(45º)$

$d = 40/1 = 40$ m

Luego

2.9.2. Resolución de triángulos oblicuángulos:

Se considera un triángulo cualquiera, por lo que **resolver un triángulo** significa encontrar las longitudes de sus tres lados y las medidas de sus tres ángulos, conociendo la longitud de por lo menos un lado y dos de los ángulos. Para esto, se requiere algunas propiedades llamadas:

LEYES TRIGONOMÉTRICAS:

Dado un triángulo *ABC* en el plano, al ubicar uno de sus ángulos en posición normal, puede presentarse en cualesquiera de las posiciones (figura 39):

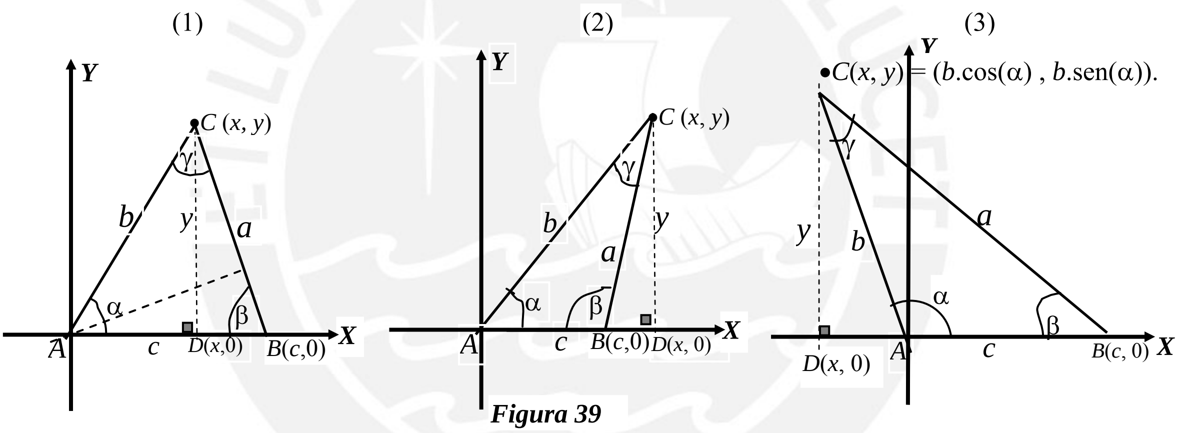


Figura 39

A. LEY DE LOS COSENOS:

En un triángulo *ABC*, si *a*, *b* y *c* son las longitudes de sus lados, α, β y γ son las medidas de los ángulos interiores opuestos, respectivamente, a los lados de longitudes dadas, entonces si se conocen las longitudes de dos lados y la medida del ángulo interior que forman dichos lados, se tienen las propiedades llamada **Ley de cosenos**:

i) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos(\alpha)$;

ii) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos(\beta)$; y

iii) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos(\gamma)$

Demostración:

i) Para un triángulo de la ***figura 39***, siendo α la medida del ángulo interior opuesto al lado de longitud *a*, se tiene:

$\cos(\alpha) = \dfrac{x}{b}$ y $\text{sen}(\alpha) = \dfrac{y}{b}$. Despejando x e y se tienen $x = b\cos(\alpha)$ e $y = b\,\text{sen}(\alpha)$.

Luego, $C = (b\cos(\alpha)\,,\, b\,\text{sen}(\alpha))$ y $d(C\,,B) = CB = a = \sqrt{(b.\cos\alpha - c)^2 + (b.\text{sen}\,\alpha - 0)^2}$;

de donde $a^2 = (b\cos(\alpha) - c)^2 + (b\,\text{sen}(\alpha))^2 = b^2\cos^2\alpha - 2bc\cos(\alpha) + c^2 + b^2\text{sen}^2(\alpha)$

$= b^2(\cos^2\alpha + \text{sen}^2(\alpha)) + c^2 - 2bc\cos(\alpha) = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$.

Procediendo en forma análoga se obtienen las igualdades ii) y iii).

Resumen:

El cuadrado de la longitud de un lado de un triángulo dado, es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos, menos el doble producto de las longitudes de estos lados por el coseno del ángulo que forman

EJEMPLO:

a) Si el triángulo ABC tiene sus lados de longitudes $a = 90$ m, $b = 70$ m y $c = 40$ m, calcular los valores de ángulos: α, β y γ.

Solución:

Ilustración

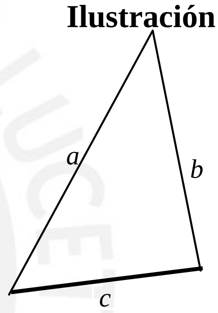


Figura 40

$.a^2 = b^2 + c^2 - 2ab.\cos(\alpha)$ (ley de cosenos)

$\cos(\alpha) = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ (se despeja cos(α))

$= \dfrac{70^2 + 40^2 - 90^2}{2(70)(40)} = -\dfrac{2}{7}$ (se sustituye y simplifica)

$\alpha = \arccos(-2/7) \approx 106{,}6^\circ \approx 107^\circ$ (se calcula α)

A continuación usamos la ley de cosenos para calcular β:

$.b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos(\beta)$ (ley de cosenos)

$\cos(\beta) = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow \cos(\beta) = \dfrac{90^2 + 40^2 - 70^2}{2(90)(40)} = \dfrac{2}{3}$ (se despeja, sustituye y simplifica)

$\beta = \arccos(2/3) \approx 48{,}2^\circ \approx 48^\circ$ (se calcula β)

Por último, como $\alpha + \beta + \gamma$ se tiene: $\gamma = 180^\circ - (107^\circ + 48^\circ) = 25^\circ$

Respuesta: $\alpha = 107^\circ$ $\beta = 48^\circ$ $\gamma = 25^\circ$

b) Un poste vertical de 20 metros de altura se encuentra fijo en una pendiente que forma un ángulo de 17º con la horizontal. Calcular la longitud mínima del cable que llegue desde la punta del poste a un lugar 36 m cuesta abajo de la base.

***Solución*:**

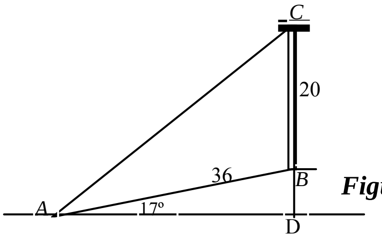


Figura 41

Según la figura se desea calcular AC:

$m(\widehat{ABD}) = 90^\circ - 17^\circ = 73^\circ$

$m(\widehat{ABC}) = 180^\circ - 73^\circ = 107^\circ$

Usando el triángulo ABC, estimamos AC, como sigue:

$(AC)^2 = 36^2 + 20^2 - 2(36)(20)\cos(107^\circ)$ (Ley de los cosenos)

$AC = \sqrt{2117} \approx 46$ m. Luego: La longitud mínima del cable es 46 m.

B. LEY DE LOS SENOS:

En un triángulo *ABC*, si *a*, *b* y *c* son las longitudes de sus lados, α, β y γ son las medidas de los ángulos interiores opuestos, respectivamente, a los lados de longitudes dadas, entonces si se conocen la longitud de un lado y las medidas de los ángulos interiores adyacentes a dicho lado o se conocen las longitudes de dos lados y la medida de un ángulo interior que no formen dichos lados, se tiene la propiedad llamada **Ley de senos**, cuya ilustración es dada en la figura 42:

$$\frac{sen(\alpha)}{a} = \frac{sen(\beta)}{b} = \frac{sen(\gamma)}{c}.$$

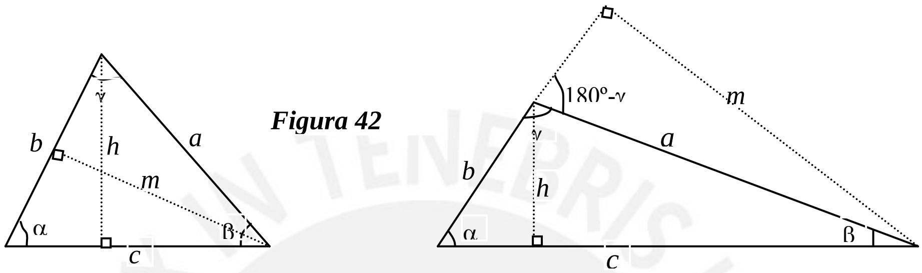


Figura 42

(1) Triángulo acutángulo (2) Triángulo obtusángulo

Demostración:

Trazando las alturas relativas a los vértices del triángulo, se forman tres parejas de triángulos rectángulos. En efecto, sean m y h las longitudes de las alturas trazadas de los vértices que forman los ángulos de medidas β y γ, respectivamente. Entonces, por 2.9.1, se tiene:

$\text{sen}(\alpha) = \frac{h}{b}$ y $\text{sen}(\beta) = \frac{h}{a}$, de donde $h = b\,\text{sen}(\alpha)$ y $h = a\,\text{sen}(\beta)$; o sea $b\,\text{sen}(\alpha) = a\,\text{sen}(\beta)$;

esto es: $\frac{sen(\alpha)}{a} = \frac{sen(\beta)}{b}$.

Análogamente, se tiene: $\text{sen}(\alpha) = \frac{m}{c}$ y $\text{sen}(\gamma) = \frac{m}{a}$, de donde $m = c\,\text{sen}(\alpha)$ y $m = a\,\text{sen}(\gamma)$,

o sea $c\,\text{sen}(\alpha) = a\,\text{sen}(\gamma)$; esto es: $\frac{sen(\alpha)}{a} = \frac{sen(\gamma)}{c}$.

Por lo tanto, de los resultados anteriores, se tiene la ley de los senos:

$$\boxed{\frac{sen(\alpha)}{a} = \frac{sen(\beta)}{b} = \frac{sen(\gamma)}{c}}$$

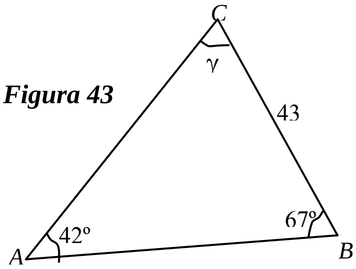
En cualquier triángulo, los cocientes de los senos de las medidas de los ángulos interiores entre las correspondientes longitudes de sus lados opuestos, son iguales o es una constante.

EJEMPLOS:

a) Resolver el triángulo *ABC*, si: α = 42º, β = 67º y *a* = 43 m.

Ilustración

Figura 43



Solución (hallando lado ***b***, por ley de senos**)**

$$\frac{sen(\alpha)}{a}=\frac{sen(\beta)}{b}\Rightarrow\frac{a}{sen(\alpha)}=\frac{b}{sen(\beta)}$$

$$\Rightarrow\frac{43}{sen(42^o)}=\frac{b}{sen(67^o)}\Rightarrow \mathrm{b}=\frac{43sen(67^o)}{sen(42^o)}$$

$\Rightarrow b\ =\ 59{,}15393$ ó $\mathbf{b\approx 59}$ **m.**

Hallando γ: conociendo la medida de dos ángulos interiores, puede evaluar la medida del tercero. En efecto: $\alpha+\beta+\gamma=180^o\Rightarrow\gamma=180^o-\alpha-\beta\Rightarrow\gamma=180^o-42-67\Rightarrow\gamma=$ **71º**.

Con el tercer ángulo calculado, establecemos la proporción para encontrar la longitud del lado que falta:

$$\frac{a}{sen(\alpha)}=\frac{c}{sen(\gamma)}\Rightarrow\frac{43}{sen(42^o)}=\frac{c}{sen(71^o)}\Rightarrow c=\frac{43.sen(71^o)}{sen(42^o)}\Rightarrow \mathrm{c}=60{,}761379\approx\mathbf{61\ m}$$

Respuesta: $b\ =59$ m $\qquad\gamma\ =71°\qquad c=\ 61$ m

b) Para medir la longitud máxima de un lago innavegable por su centro, se establece una línea base *AB* (en plano del lago) cuya longitud es de 48 m. Al medir los ángulos que se forman en *A* y *B* resultan 45º y 124º, respectivamente. ¿Cuál es la longitud del lago?

Solución

De la figura 44, se obtiene tiene que el ángulo en el vértice *C* y se utiliza la ley de senos.

Ángulo en *C*: $\gamma=180^o-(124^o+45^o)=11^o$

$$\frac{sen(11^o)}{48}=\frac{sen(45^o)}{d}$$

$$d=48.\frac{sen(45^o)}{sen(11^o)}=48.\frac{0{,}71}{0{,}19}\approx 179{,}4$$

Respuesta: El largo del lago es **1**79,4 m

Ilustración (lago)

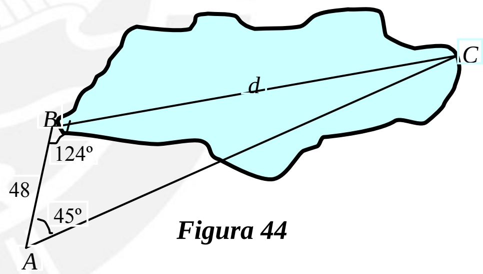


Figura 44

C. LEY DE TANGENTES:

En un triángulo *ABC*, si *a*, *b* y *c* son las longitudes de sus lados, α, β y γ son las medidas de los ángulos interiores opuestos a los lados de longitudes *a*, *b* y *c*, respectivamente, entonces si se conocen la longitud de dos de sus lados y un ángulo interior que forman dichos lados, se tiene la propiedad llamada **Ley de tangentes**, que se expresa a través de la igualdad:

$$(1)\ \frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\qquad(2)\ \frac{a+c}{a-c}=\frac{\tan\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}\qquad(3)\ \frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}.$$

Demostración: (probando a manera de ejemplo la igualdad (1))

De la ley de senos se obtiene: $\frac{a}{c}=\frac{sen(\alpha)}{sen(\gamma)}$ y $\frac{b}{c}=\frac{sen(\beta)}{sen(\gamma)}$. De donde por la propiedad de suma de fracciones: $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}=\frac{sen(\alpha)+sen(\beta)}{sen(\gamma)}$, y también: $\frac{a-b}{c}=\frac{sen(\alpha)-sen(\beta)}{sen(\gamma)}$.

Luego: $$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\frac{a+b}{c}}{\frac{a-b}{c}}=\frac{\frac{sen(\alpha)+sen(\beta)}{sen(\gamma)}}{\frac{sen(\alpha)-sen(\beta)}{sen(\gamma)}}=\frac{sen(\alpha)+sen(\beta)}{sen(\alpha)-sen(\beta)}=\frac{2sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$=\frac{sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\cdot\frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}=\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cot\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\frac{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

Las igualdades (2) y (3), se demuestran procediendo en forma análoga.

"La suma de las longitudes de dos lados de un triángulo es a su diferencia como la tangente de la semisuma de las medidas de los ángulos opuestos a estos lados es a la tangente de la semidiferencia de estos ángulos."

EJEMPLO:

En la gráfica mostrada hallar los elementos del triángulo *ABC* que se desconocen (aplicando la ley de las tangentes).

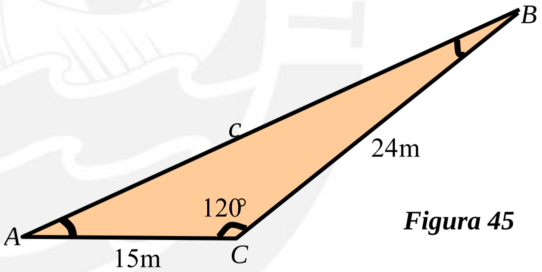


Figura 45

Solución:

Elementos del triángulo que se conocen:
$a = 24$ m $b = 15$ m y $\gamma = 120°$

Elementos del triángulo que se desconoce:
α, β y el lado de longitud "*c*"

Con los datos que se tiene se aplica la ley de las tangentes: $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$

Hallando $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$**:**

Se sabe que: $\alpha+\beta+\gamma=180° \Rightarrow \alpha+\beta+120°=180° \Rightarrow \alpha+\beta=60°$

Dividiendo ambos miembros entre 2, se obtiene: $\frac{\alpha+\beta}{2}=30°$

Hallando $(\alpha-\beta)$**:**

Reemplazando los elementos del triángulo que conoce en: $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$

$$\frac{24+15}{24-15}=\frac{\tan(30°)}{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \Rightarrow \frac{39}{9}=\frac{0{,}5774}{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \Rightarrow \tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\frac{9}{39}(0{,}5774)$$

$\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=0{,}1333$ (Con la calculadora científica se halla el ángulo $\frac{\alpha-\beta}{2}$)

Entonces: $\dfrac{\alpha - \beta}{2} = 7{,}5928°$. Despejando se tiene: $\alpha - \beta = 15{,}1854°$

Hallando β y α ***:***

Con los datos obtenidos se establece una ecuación de dos sistemas y se halla los valores:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 60° \\ \underline{\alpha - \beta} &\underline{= 15{,}1854°} \\ 2\alpha &= 75{,}1854° \\ \alpha &= 37{,}5927° \end{aligned}$$

Reemplazando en cualquiera de la ecuaciones:

$\alpha + \beta = 60° \Rightarrow 37{,}59° + \beta = 60° \Rightarrow \quad \beta = 60º - 37{,}59° \Rightarrow \beta = 22{,}4073°$.

Hallando "c":

En el triángulo *ABC* aplicamos la ley de cosenos: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos(\gamma)$

Se reemplazan los elementos conocidos y se opera:

$c^2 = 24^2 + 15^2 - 2(24)(15).\cos(120º) \Rightarrow c^2 = 576 + 225 - 720(-0{,}5)$

$c^2 = 801 + 360 \Rightarrow c^2 = 1\,161$. Luego, $c = \sqrt{1161} = 34{,}0735$ m

Respuesta:

$\alpha = 37{,}5927°$ $\quad\beta = 22{,}4073°$ $\quad c = 34{,}0735$ m

2.10. MODELO DIDÁCTICO

El "modelo didáctico" es una herramienta para abordar problemas educativos a través del vínculo entre el análisis teórico y la intervención práctica, que se dan a través de producciones teóricas de carácter pedagógico, psicológico, sociológico, curricular y; a través de materiales didácticos, experiencias prácticas de grupos innovadores, actuaciones concretas del profesor en clase, tendientes a transformar el proceso de enseñanza-aprendizaje dentro de un ambiente de (autonomía, respeto a la diversidad, igualdad, solidaridad, cooperación...), en la construcción del conocimiento por el alumno; donde el maestro es el promotor no directivo, sinérgico y productor de energía convivencial, atractivo, comprensivo y creador.

2.10.1. Modelo como Medio y material de aprendizaje individual y grupal

El Modelo Didáctico es un material o una unidad de estudio planeada para facilitar el logro de objetivos formulados para el proceso de enseñanza-aprendizaje, mediante la actividad del alumno con orientación del profesor, en el trabajo individual y/o grupal. El tiempo para aprender el contenido del modelo está en función de las capacidades previas del alumno y su dedicación, con miras a lograr objetivos educacionales propuestos.

Su elaboración se fundamenta en importantes criterios psicológicos y didácticos, como son: el principio de libertad, actividad, responsabilidad, autocontrol, el respeto a las diferencias individuales y el refuerzo positivo como clave para incrementar la actividad del alumno en el proceso de enseñanza-aprendizaje y desarrollo del autoaprendizaje. Para Gagné (1976) el modelo puede contener todos los materiales didácticos necesarios para pasar una prueba sobre el objetivo, contiene pruebas de "*práctica*", con las cuales el estudiante puede juzgar su propia condición (autoevaluarse). También, el propio modelo y sus instrucciones permiten al estudiante realizar su tarea de aprendizaje, con orientación del profesor en los puntos donde exprese dificultad.

2.10.2. Importancia y características del modelo didáctico

Los modelos didácticos, según su uso, están orientados para:

- La profundización del conocimiento de un tema determinado, para aquellos estudiantes que, habiendo cumplido con los objetivos básicos, desean avanzar o enriquecer su aprendizaje.

- Para la recuperación y reforzamiento, en caso de que no se hayan alcanzado los niveles de logro requeridos en el aula.

Coincidiendo con (Suárez, C. & Arizaga, R., 1999) entre las utilidades y características que tienen los materiales didácticos como los modelos didácticos, en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la Matemática, consideramos que:

- Ponen énfasis en la actividad individual de los alumnos, facilitando el logro de aprendizajes específicos, significativos y concretos.
- Utilizan un lenguaje claro y sencillo, promueve hábitos de estudio individual y grupal.
- Están dotados de un conjunto de estrategias metodológicas para estimular el autoaprendizaje.
- Invitan a la reconstrucción activa del conocimiento. Las actividades propuestas deben favorecer al análisis y síntesis y no sólo limitarse a la repetición de conceptos.
- Desarrollan contenidos graduados y flexible de acuerdo al ritmo del alumno.
- Tienen claro las características del alumno a quien va dirigido.
- Proponen actividades de autoevaluación, coevaluación, heteroevaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje.

A diferencia de la enseñanza expositiva del profesor, la enseñanza a través del Modelo Didáctico que proponemos, permite:

- Que el alumno conozca con antelación los objetivos a lograrse, el cual incrementa su motivación por el aprendizaje.

- Ofrecer varios métodos didácticos para que el alumno avance en forma sistemática bajo la asesoría del profesor.
- La participación activa de los alumnos en todas las tareas de aprendizaje.
- Atender las diferencias personales en el ritmo de aprendizaje y las actitudes, es decir se adapta al ritmo de aprendizaje.
- La presentación de los contenidos en una secuencia lógica y sistémica.
- Realizar las actividades de autoevaluación y coevaluación para la corrección inmediata de los errores cometidos.
- Reforzamiento o retroalimentación inmediata y constante de los temas no asimilados.
- Al profesor, disponer de mayor tiempo para la atención de los problemas académicos o personales de los alumnos.
- Evaluación preferentemente de carácter formativo sin descuidar el carácter sumativo.

2.10.3. Elaboración del modelo didáctico modular

En este trabajo el modelo está orientado a adolescentes que están finalizando los estudios de Educación Secundaria, y por tratarse de un material didáctico para el estudio bipersonal e individual, se consideran las siguientes partes:

Carátula: se menciona datos generales como: institución, tema, nombre del participante, número de unidad, fecha, nombre del docente, ciudad.

Descripción del modelo: En la descripción sumaria del modelo se menciona el contenido global del contenido del material elaborado.

Instrucciones: se dan las pautas y procedimientos a seguir durante el desarrollo del material el mismo que conduce a la consecución de los objetivos.

Esquema de contenido: aquí se da un informe esquemático del contenido a estudiar, indicando la secuencia, la interdependencia y jerarquía.

Metodología: se expresa casi siempre a través de un flujograma, que es la descripción gráfica de los procedimientos a seguir en el estudio, desde la recepción del modelo.

Requisitos: indica los temas esenciales que el alumno debe conocer al iniciar el desarrollo del modelo Didáctico.

Prueba de requisitos: valoración cuantitativa y cualitativa respecto al conocimiento previo que se tiene de los tópicos que serán fundamentales para abordar el nuevo tema.

Prueba de entrada: valoración cuantitativa y cualitativa del conocimiento que se van a desarrollar.

Motivación: son las actividades previas que se hace basándose en introducción al desarrollo del modelo.

Objetivo terminal y objetivos específicos: se indica el logro global y los logros operacionales en el estudio del modelo, se formulan en términos precisos.

Contenido: está constituido por los temas desarrollados en forma secuencial y sistemática en el material, es lo que el usuario debe aprender.

Actividades: comprenden las instrucciones del profesor, orientados a las acciones de aprendizaje de cada unidad modular.

Unidades de aprendizaje: es el desarrollo de los subtemas o tópicos dosificados, orientados al logro de los objetivos específicos.

Pos-prueba o prueba de salida: es un instrumento que permite evaluar el logro de los objetivos alcanzados al finalizar el trabajo con el material.

Resumen: fija las ideas o conceptos fundamentales desarrollados en el modelo, para que el alumno rememore lo que acaba de concluir de estudiar.

Actividades de retroalimentación: conjunto de acciones que el alumno debe realizar cuando sus resultados no fueron los esperados. Esta actividad también puede ser dada por el profesor ya sea en forma individual o grupal.

Clave de respuesta: los resultados de los ítem de la prueba de prerrequisitos, prueba de entrada y de salida del modelo, lo elaboran los mismos alumnos, como fruto de su trabajo individual y grupal para que cotejen sus resultados con sus colegas.

Ponderación de los resultados: es la cualificación de los resultados cuantitativos obtenidos en la prueba, es fundamental para el proceso de autoevaluación.

CAPÍTULO III

ASPECTOS METODOLÓGICOS

3.1. HIPÓTESIS

Las hipótesis de trabajo se formulan en concordancia con el problema y los objetivos previamente planteados.

3.1.1. Hipótesis principal

Con el desarrollo del modelo didáctico elaborado, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de conceptos, propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas a partir de puntos de la circunferencia unitaria en el plano cartesiano, se logra un aprendizaje significativo en los alumnos del quinto grado de secundaria.

3.1.2. Hipótesis específicos

1. El diseño y uso del modelo didáctico para el estudio de las funciones trigonométricas con procedimientos didácticos y metodológicos adecuados, permite tener una visión integral del proceso de aprendizaje de los alumnos.

2. El desarrollo del modelo didáctico durante las sesiones de clase de las funciones trigonométricas a partir de los puntos en una circunferencia unitaria en el plano cartesiano, facilita y motiva el aprendizaje de los alumnos.

3. El rendimiento académico de los alumnos que adquieren aprendizaje de las funciones trigonométricas a partir de puntos en la circunferencia unitaria con ayuda del modelo didáctico mejoran significativamente.

3.2. SISTEMA DE VARIABLES

VARIABLE INDEPENDIENTE	**La enseñanza de las funciones trigonométricas.** VARIACIÓN Enseñanza basado en el desarrollo de un modelo didáctico modular y método de coordenadas cartesianas (X). Enseñanza a través de relaciones entre lados del triángulo rectángulo (Z).
VARIABLE DEPENDIENTE	**Rendimiento académico de los alumnos del quinto grado de secundaria en tema de trigonometría.** VARIACIÓN Rendimiento académico deficiente. Rendimiento académico insuficiente. Rendimiento académico suficiente. Rendimiento académico satisfactorio. Rendimiento académico excelente
VARIABLES INTERVINIENTES	**Elementos del proceso enseñanza-aprendizaje** Docente Objetivos Contenidos Metodología Medios y materiales didácticos. Evaluación Entorno social Capacidad del alumno
VARIABLES EXTRAÑAS	Edad - Sexo Lugar de procedencia Condición socio económico. Actividad y apoyo de los padres.

3.3. OPERACIONALIZACIÓN DE LAS VARIABLES

3.3.1. Variables independientes:

A. Enseñanza de las Funciones Trigonométricas a través del modelo didáctico

La asignatura se desarrolla utilizando el modelo didáctico, cuando los elementos y acciones que se desarrollan por parte del docente y los alumnos cumplen con al menos del 90% de los siguientes indicadores.

DOCENTE:

♦ Etapa de planificación y preparación del tema:

- El docente planifica, diseña y elabora el material previo un diagnostico situacional de los alumnos.
- Fija los objetivos y metas susceptibles de ser alcanzados al finalizar el tema estudiado.

- Organiza los contenidos temáticos en forma coherente, con un nivel de profundidad adecuado.
- Presenta situaciones problemáticas previas al desarrollo de cada unidad del modelo.
- Prevé el uso de medios y materiales adicionales al modelo didáctico.
- Planifica y diseña los procedimientos de evaluación.

♦ Etapa de presentación de contenidos:

- Hace una diagnosis de requisitos para abordar el tema y realimenta los puntos débiles que tiene el alumno.
- Introduce adecuadamente al tema a través de ejercicios de motivación referidos al tema.
- Presta asesoría continua a los grupos de trabajo, absolviendo las dudas individuales y grupales.
- Permite la participación del alumno, a través de preguntas y dudas sobre el tema y lo resume de manera apropiada.
- Orienta el trabajo grupal e individual y realimenta el aprendizaje de los alumnos.
- Propicia el autoaprendizaje de los alumnos tanto grupal como individual.
- Propicia la autoevaluación, heteroevalución y coevaluación permanente.

♦ Etapa de fijación de contenidos:

- Se plantean ejercicios de aplicación de los temas desarrollados.
- En la etapa de coevaluación cumple el rol de moderador.
- Se realiza un resumen del tema tratado.
- Realiza actividades de reforzamiento y realimentación.

ALUMNOS:

♦ Etapa de planificación y preparación del tema:

- Participan en forma indirecta en la etapa de planificación, diseño y elaboración del material a través de sus respuestas en la prueba de diagnóstico.
- Tiene escasa participación en la fijación de objetivos y metas.

♦ Etapa de presentación de contenidos:

- Identifican y asimilan los requisitos antes de estudiar el tema.
- Los objetivos y contenidos temáticos conocen con antelación.
- Avanzan el estudio del tema de acuerdo ha sus habilidades y motivaciones individuales y grupales orientados por el profesor.
- Estudian el material impreso en forma cooperativa, poniendo dinamismo en su aprendizaje.
- Reciben asesoría continua de parte del docente, respecto de las dificultades individuales y grupales.
- Participan en forma activa, a través de preguntas y dudas sobre el tema y lo resumen de manera apropiada.
- Refuerzan su aprendizaje teniendo a su disposición el material de estudio adicional.

♦ Etapa de fijación de contenidos:

- Desarrollan los ejercicios de autoevaluación planteados en el modelo didáctico.
- Recapitula el tema estudiado.
- Participan en forma activa en la etapa de autoevaluación, heteroevalución y coevaluación permanente.

B. Enseñanza de las funciones trigonométricas a través de razones entre lados del triángulo rectángulo

La asignatura se desarrolla utilizando el método tradiconal, cuando los elementos y acciones que se desarrollan por parte del docente y los alumnos cumplen con al menos del 90% de los siguientes indicadores.

- El estudio de las funciones trigonométricas se da a partir de la relación entre lados del triángulo rectángulo respecto a uno de los ángulos agudos.
- Los alumnos avanzan el estudio del tema de acuerdo a la enseñanza que brinda el profesor.
- Se da énfasis en la comunicación oral. Los alumnos tienen escasa posibilidad de reforzar su aprendizaje con materiales de estudio y se ayudan con la lectura de algunos textos autorizados.
- Los objetivos y los contenidos de la asignatura sólo son conocidos por el profesor y pocas veces por los estudiantes.

- Los alumnos son receptores de la enseñanza impartida por el profesor, no es frecuente la realización de trabajos grupales e individuales.
- Se incide en la enseñanza de carácter conductual.
- Los alumnos reciben sólo evaluación sumativa.

3.3.2. Variable dependiente (Rendimiento académico de los alumnos)

DEFINICIÓN OPERACIONAL	**Rendimiento académico de los alumnos del quinto grado de secundaria.** Expresado en los puntajes obtenidos por los estudiantes en la prueba de requisitos, la eficiencia mostrada en el desarrollo de los talleres, en completar los espacios en blanco a lo largo del modelo, en resolver los ejercicios de autoevaluación tanto en forma individual como grupal, en el grupo experimental; y que se traduce en el índice académico logrado en la prueba de salida, estructurado de acuerdo a la taxonomía de Bloom.
INDICADORES	• Calificativos obtenidos en la prueba de requisitos. • Calificativos obtenidos en la evaluación de proceso. • Calificativos obtenidos en la evaluación de salida. • Actitudes durante las actividades de aprendizaje. • Participación en las actividades de autoevaluación.
ESCALA	EN ESCALA VIGESIMAL Rendimiento Deficiente [00 , 07] Rendimiento Insuficiente [08 , 10] Rendimiento Suficiente [11 , 13] Rendimiento Satisfactorio [14 , 18] Rendimiento Excelente [19 , 20]

3.3.3. Variables intervenientes: (elementos del proceso enseñanza-aprendizaje)

Estas variables son fundamentales en la ejecución de toda acción educativa, e influyen significativamente en el proceso de enseñanza-aprendizaje, generalmente afectan su viabilización.

DOCENTE: El profesor constituye una de las variables que más influye en el proceso de enseñanza y aprendizaje, tanto por el grado de conocimiento de la materia que imparte como por su estilo para presentar y organizar el material de aprendizaje como por su capacidad para comunicarse y transmitir valores a los alumnos. En la presente investigación, cada grupo estuvo a cargo de un docente titulado y nombrado, con 12 años de experiencia, con un mismo plan curricular.

OBJETIVOS: Lo que se espera que los alumnos logren durante el proceso de enseñanza, formulados en base a los objetivos de la asignatura y de los lineamientos de la política educativa. Los docentes trabajan con el mismo objetivo general, pero diferentes objetivos específicos.

CONTENIDOS: Capítulo de trigonometría, organizados en función del logro de los fines y objetivos, dentro del plan curricular.

MÉTODOS: En el grupo experimental se usa el método activo, con participación de los alumnos tanto individual como grupal, y con ayuda del modelo didáctico y otros materiales; mientras en el grupo de control se hace en forma expositiva por el profesor, con limitada participación de los alumnos.

EVALUACIÓN: Se aplica una prueba de requisitos a ambos grupos, las evaluaciones de proceso (o formativas cada grupo lo hace en forma independiente), y una prueba de salida se administra a ambos grupos; de acuerdo a lo establecido en el plan curricular.

ENTORNO: La experiencia académica de la presente investigación se llevó a cabo las aulas del colegio nacional de aplicación “Hermilio Valdizán”.

3.3. 4. Variables extrañas

Variables cuya influencia se ignoran durante el proceso de investigación, que son:

Sexo: masculino y femenino.

Edad: Fluctúan entre 15 y 18 años.

Lugar de procedencia: Distritos metropolitanos de Amarilis y Huanuco.

Condición socio económico: clase baja y clase media local.

Actividad y apoyo de los padres: Comerciantes, empleados públicos y agricultores.

3.4. DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

El diseño usado corresponde al tipo cuasi-experimental con muestras no aleatorias, pues los sujetos no son asignados al azar a los grupos, ni emparejados; sino dichos grupos ya están formados antes del experimento, son grupos intactos (la razón por la que surgen y la manera como se formaron fueron independientes o aparte del experimento) (Hernández, 1997). Pasos seguidos en el proceso de investigación:

1. La investigación se realiza con medición previa (pre-prueba) y medición posterior (post-prueba), con el grupo de control y el grupo experimental.

2. Para la elección de los grupos de estudio se toman en cuenta antecedentes académicos que tienen los alumnos en el cuarto Grado (promedios en tres asignaturas troncales del año anterior).

3. El grupo experimental y el grupo de control, se elige por simple sorteo, previa la constatación de que su antecedente académico es homogéneo, ello se lleva a cabo la primera quincena del mes de abril del año 2000, previo a la administración de la prueba de requisitos.

4. El esquema del diseño, se expresa de la siguiente manera:

Grupo experimental:	Y_1	X	Y_2
-------------------	-------	-------	-------
Grupo de control:	Y_3	Z	Y_4

Donde:

X: Enseñanza en asignaciones determinadas a través del método de coordenadas cartesianas y uso del modelo didáctico.

Z: Enseñanza a través de relaciones entre ángulos y lados del triángulo rectángulo.

Y_1, Y_3: Pre-prueba del grupo experimental y de control, respectivamente.

Y_2, Y_4: Prueba de salida del grupo experimental y de control, respectivamente.

-------------: El grupo experimental y de control son independientes

3.5. TIPO DE INVESTIGACIÓN

Siguiendo la clasificación de Investigación Educativa propuesta por (Schroeder, 1999) la presente investigación:

- **Por su finalidad:** es una investigación ***aplicada***, porque está orientado a resolver un problema práctico del fenómeno educativo.

- **Por su alcance temporal:** es una investigación ***diacrónica***, pues es el resultado de un estudio prolongado.
- **Por su profundidad**: es una investigación ***explicativa***, pues además de medir las variables, analiza las relaciones entre ellas y otros factores que intervienen.
- **Por su amplitud**: es de carácter ***micro educacional***.
- **Por sus fuentes**: es ***mixta***, puesto que utiliza datos obtenidas por fuentes primaria y secundarias.
- **Por su carácter**: lo predominante es lo ***cuantitativo***.
- **Por su naturaleza**: tiene los aspectos de ***empírica*** - ***experimental*** - ***documentales*** - ***encuestas***.
- **Por su marco**: predomina la investigación de ***campo***.
- **Tipo de estudio**: es una investigación ***evaluativa***, pues tiene como objeto apreciar e enjuiciar la consecución de un modelo de enseñanza.
- **Objeto al que se refiere**: es una investigación ***disciplinar***, pues se refiere al proceso de enseñanza-aprendizaje de un tema correspondiente a una asignatura.

3.6. POBLACIÓN Y MUESTRA

a) La población para fundamentar el problema:

Conformada por los alumnos de 8 secciones del quinto grado, con un total de 312 alumnos que estudian en el turno de mañana de cuatro centros educativos representativos de Huanuco: Colegio Nacional Leoncio Prado y Colegio Nacional Juana Moreno, y de Amarilis: Colegio Nacional José Carlos Mariátegui y Colegio Nacional César Vallejo.

b) Población de estudio

Conformada por 157 los alumnos (varones y mujeres) del Quinto Grado de Secundaria del Colegio Nacional de Aplicación “Hermilio Valdizán”, matriculados en el año académico 2 000.

c) Muestra y su elección.

Se eligió una muestra no probabilística, conformada por dos secciones del Quinto Grado de Secundaria del Colegio Nacional “Hermilio Valdizán”, elegidas previa comparación de sus antecedentes académicos del grado anterior. Donde tuvieron promedios equivalentes el 5to. grado “A” y el 5to. grado “B”, saliendo por sorteo:

grupo experimental 5to. “B” constituido por 40 alumnos y el grupo de control 5to. “A” constituido por 41 alumnos. Ambos del turno mañana.

3.7. CONTROL Y VALIDEZ DEL DISEÑO

3.7.1. Validez Interna

Para la manipulación de la variable independiente, se consideraron diversos criterios y procedimientos, entre ellos:

a) El nivel intelectual o de conocimiento de los sujetos, objeto de nuestra investigación, se obtiene de las Actas de Evaluación correspondiente al año académico 1999, correspondiente al Cuarto Grado, de las asignaturas de: Lenguaje, Matemática, y Biología, cuyos promedios por aula fueron: 12,39 para el 4º “B” y 12,47 para el 4º “A”; y en la asignatura de Matemática las dos secciones tienen 11 como promedio (**anexo 2**). Como estos promedios no tienen diferencia significativa, los consideramos equivalentes.

b) En la segunda sesión de clase del mes de abril, se tomó la prueba de requisitos. Siendo los promedios de los mismos: 09,81 en el quinto grado “A” y 09,75 en el quinto grado “B” (**Anexo Nº 6**); como se observa, también la diferencia entre los promedios no es significativa y podemos seguir considerando como equivalentes.

c) Los horarios de clase de los grupos de estudio están en el turno mañana, 6 horas lectivas durante la semana, divididas en tres sesiones de 2 horas pedagógicas de 45 minutos cada uno.

d) El objetivo de la prueba de requisitos es comprobar el bagaje de conocimientos que tienen consigo el alumno para incursionar en el estudio de las funciones trigonométricas. Los ítem de esta prueba fueron los mismos para el grupo de control y el grupo experimental y calificados por un mismo docente.

e) El grupo experimental y el grupo de control estuvieron dirigidos por distintos profesores. Estos docentes son titulados y con 12 años de experiencia cada uno.

f) En ambos grupos se desarrollan los mismos temas, diferenciándose en el tratamiento metodológico, en el enfoque del tema, denominación de las unidades, secuencia del desarrollo de los contenidos y en el uso de materiales auxiliares:

En el Grupo Experimental

- Funciones trigonométricas.
- Identidades y ecuaciones trigonométricas.
- Aplicaciones de las funciones trigonométricas.

En el Grupo de Control

- Sistema de medidas angulares y funciones trigonométricas de ángulos agudos.
- Funciones trigonométricas en el círculo trigonométrico, uso de tabla de valores naturales.
- Ángulos de elevación y ángulos de depresión, resolución de triángulos y de ecuaciones trigonométricas, vinculados a situaciones de la vida real.

De lo descrito, se infiere que se hizo un control adecuado de las variables extrañas, por lo que el diseño (y el experimento) es internamente válido.

3.7.2. Validez Externa

¿*Cómo generalizamos los hallazgos y resultados de la investigación*?

La población de estudio está constituida por los 156 alumnos del Quinto Grado de Secundaria del Colegio Nacional de Aplicación Hermilo Valdizán, y de los demás centros educativos del distrito metropolitano de Amarilis, y del distrito de Huánuco, que tienen características similares. La población, para la validez externa de la propuesta, es el conglomerado de alumnos de Educación Secundaria de la provincia y del departamento de Huanuco, y la región centro oriental del país.

3.8. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE COLECTA DE DATOS

En un orden sistemático tendiente a plasmar los objetivos de la investigación se tuvo en cuenta:

3.8.1. Metodología

La metodología general utilizada en la investigación, teniendo el plan de tesis, ha comprendido:

1) Recolección de información referido a fuentes secundarias: bibliografía especializada en didáctica y contenido matemático.

2) Análisis de información proporcionada por fuentes primarias: encuestas, cuestionarios, entrevistas y visitas.

3) Análisis de antecedentes y la consolidación de las contribuciones prioritarias.

4) Formulación del marco teórico contextual y de la temática con revisión de literatura pertinente.

5) Formulación de una propuesta alternativa para la enseñanza de las funciones trigonométricas.

6) Aplicación de la propuesta y comparación de los resultados.

7) Informe final de los resultados de la propuesta.

3.8.2. Técnicas

Observación: A lo largo del desarrollo del tema a través del modelo.

Análisis documental: Permite revisar el programa curricular, textos, tesis de grado, revistas y cuadernos.

Fichaje: Antes y después para dar sustento teórico a la propuesta de enseñanza.

Encuesta: Los alumnos del grupo experimental manifiestan sus inquietudes referidos al proceso de enseñanza-aprendizaje.

Encuesta: Los docentes y alumnos manifiestan en forma directa sus opiniones de los distintos componentes y problemas en la enseñanza-aprendizaje de la matemática.

Entrevista: Los docentes y alumnos expresan sus inquietudes sobre la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría.

Evaluación: Para ver el índice de rendimiento académico de los alumnos del grupo experimental y del grupo control, antes, durante y después del experimento.

3.8.3. Instrumentos

Notas de campo: Para registrar opiniones de los involucrados en el quehacer educativo.

Cuestionario: Registro de información de los usuarios del modelo didáctico.

Test: Pre-test (cuestionario de la prueba de requisitos) y post-test (cuestionario de la prueba de salida).

Fichas: Fichas textuales y de resumen.

3.8.4. Procedimiento

- Estudio de diagnóstico de la enseñanza-aprendizaje de la matemática.
- Marco teórico contextual, metodológico y de contenidos matemáticos.
- Diseño y elaboración del modelo didáctico.
- Aplicación de la estrategia de enseñanza a través del modelo didáctico
- Validación de los resultados obtenidos en el proceso enseñanza-aprendizaje.

3.8.5. Materiales complementarios

- **Materiales bibliográficos**: textos, revistas, folletos, etc.;
- **Materiales de escritorio**: papeles, cuadernos, lápices, etc.;
- **Materiales de impresión**: tinta, cinta y toner para impresora, impresora, fotocopiadora, etc.
- **Materiales de procesamiento automático de datos**: cintas, papeles, disquetes, CDs, etc.; Materiales de enseñanza: plumones, papelotes, materiales didácticos, modelos de enseñanza.

3.8.6. Tratamiento de datos

Para el tratamiento de datos se tuvo en cuenta los siguientes instrumentos: para la recolección de datos se utilizó guía de observación, entrevistas y encuestas; para la presentación y análisis de datos se utilizó cuadros y gráficos estadísticos, haciendo uso pertinente de recursos computacionales como: procesador de textos Ms Word 2000, hoja de cálculo Ms Excel 2000, programa estadístico SPSS, 9.0.

3.9. PROCESO DE EXPERIMENTACIÓN DE LA PROPUESTA

3.9.1. Procedimiento de experimentación

- Administración de una encuesta a los alumnos del Quinto Grado de Educación Secundaria, la misma que se llevó a cabo a finales del mes de junio (en el segundo bimestre del año lectivo).

- Procesamiento de la información y de los datos recolectados en la encuesta, que se ejecutó paralelo al proceso de experimentación.

- La experimentación del modelo se llevó a cabo durante 12 semanas, de los dos primeros bimestres, correspondiente al primer semestre del año escolar 2 000.

- Durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, dirige el grupo experimental el profesor investigador y el grupo de control un docente titulado de Matemática, del mismo nivel y tiempo de servicios.

- En el grupo experimental se trabaja con el modelo didáctico modular, con apoyo de materiales y recursos didácticos, y participación activa de los alumnos; siguiendo un estudio secuencial del tema con miras a lograr los objetivos y la meta previamente fijada.

- La resolución de los problemas se lleva a cabo en forma individual y en grupos de estudio cuyos integrantes se alternan en cada una de las sesiones de clase, supervisados por el profesor.

- Durante las sesiones de clase, el docente cumple el rol de asesor y orientador del aprendizaje de cada alumno y de los grupos de estudio, ayudando solucionar problemas individuales y grupales en el estudio de los temas a través del modelo; asimismo, hace un refuerzo del tema tratado para todo el aula, propiciando de esta forma aprendizajes homogéneos y significativos en los alumnos.

3.9.2. Tiempo y contenido del proceso de experimentación

Primera Semana: (03-04-00 a 12-04-00); Se administra la prueba de requisitos, luego se desarrolla los contenidos que corresponden a los ítem de la prueba de requisitos a manera de retroalimentación.

Segunda Semana: (17-04-00 a 21-04-00); Arcos orientados coterminales y función envolvente.

Tercera Semana: (24-04-00 a 28-04-00); Ángulos y sistema de medidas angulares.
Cuarta Semana: (01-05-00 a 05-05-00); Funciones Trigonométricas: Seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

Quinta Semana: (08-05-00 a 12-05-00); Propiedades y gráficas de las Funciones Trigonométricas.

Sexta Semana: (15-05-00 a 19-05-00); Funciones trigonométricas inversas. Trigonométricas.

Séptima Semana: (22-05-00 a 26-05-00); Identidades de adición, sustracción de arcos y cofunciones.

Octava Semana: (05-06-00 a 09-06-00); Identidades del doble y de la mitad.

Novena Semana: (12-06-00 a 16-05-00); Identidades de productos y factores de funciones trigonométricas.

Décima semana: (19-06-00 a 23-06-00); Ecuaciones trigonométricas.

Décima primera: (26-06-00 a 30-06-00); Resolución de triángulos rectángulos: Ángulos de elevación y depresión, rumbos.

Décima segunda semana: (10-04-00 a 14-04-00); Resolución de Triángulos oblicuángulos: Ley de los cosenos, de los senos y las tangentes.

Décima tercera semana: (17-04-00 a 21-04-00); Administración de la prueba de salida.

Estos contenidos de Modelo Didáctico desarrollados a través de unidades modulares se han plasmado teniendo en cuenta los planes o esquemas de aprendizaje (anexo 7).

3.9.3. Tratamiento de los grupos

Las sesiones de clase, tanto en el grupo experimental y de control se llevan a cabo tomando como referencia el programa oficial de matemática para el quinto año de secundaria, coincidiendo ambos grupos en el objetivo global del capítulo correspondiente a la Trigonometría.

En el grupo experimental se hace uso del modelo didáctico como material educativo para reforzar el aprendizaje, que se complementa con el uso de: papelotes, para presentar los contenidos conceptuales y procedimentales; reglas para hacer trazos lineales; compás para dibujar circunferencias; cuerdas flexibles, para trazos circulares y mostrar fenómenos periódicos; objetos de forma circular para manipular las medidas de ángulos y arcos orientados.

En el grupo de control se sigue solamente lo que manifiesta el programa.

La experimentación del trabajo se lleva de acuerdo al siguiente cuadro de horas:

Grupo	Horas Ped./semana	Nº de semanas	Total de horas	Turno
Experimental	06	12	72	Mañana
Control	06	12	72	Mañana

En el grupo de control todas las clases se desarrollan con la metodología tradicional. No se toma la prueba de entrada en cada subtema, no se usa material didáctico elaborado por el docente, desde la primera sesión se incursiona en el desarrollo de la temática, y todas las clases se realizan en forma expositiva. El alumno se limita a escuchar la enseñanza del profesor y cumple sólo con algunas tareas asignadas.

El grupo experimental, en la primera semana, se realiza las siguientes actividades:

- Administración de una prueba de requisitos.
- Proceso de reforzamiento en los conceptos previos que deben tener los alumnos para que se ubiquen en la lógica a seguir en el desarrollo del tema.

El grupo experimental, inicia el estudio de la trigonometría en la segunda semana de abril, a partir de la circunferencia unitaria en el sistema de coordenadas rectangulares con el modelo didáctico, cuyos contenidos fueron sistemáticamente elaborado, para cada sesión de aprendizaje.

Los esquemas de las sesiones de aprendizaje, que se concretizaron en el desarrollo de las unidades modulares del modelo, en el estudio de los tópicos correspondientes a la trigonometría se adjuntan (**en anexo 7**).

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

4.1. TRATAMIENTO Y ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE LOS DATOS

A continuación se describe en forma explícita los procedimientos estadísticos y de análisis que se han desarrollado con los resultados obtenidos del experimento.

4.1.1. Encuesta a la población de estudio

Para fundamentar con objetividad la problemática planteada, se administró una encuesta a los alumnos del Quinto Grado de Secundaria en la primera semana del mes de julio del 2000, al concluir el desarrollo del capítulo de trigonometría, los centros educativos que se consignan como población de estudio, dos centros educativos del distrito de Amarilis y dos del distrito de Huánuco.

OBJETIVO: Conocer los factores que influyen en el aprendizaje de las funciones trigonométricas en los alumnos del Quinto Grado de Secundaria y la opinión que tienen respecto a la enseñanza-aprendizaje recibida.

TABLA Nº 1: CUADRO RESUMEN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS DE LA ENCUESTA APLICADO A LOS (320) ALUMNOS DEL QUINTO GRADO DE SECUNDARIA

REACTIVOS	RESPUESTAS Y PORCENTAJES					TOTAL
1. Opinión sobre la asignatura	Difícil 100 31,25%	Aburrido 24 7,5%	Fácil 20 6,25%	Interesante 168 52,5%		320 100%
2. Opinión sobre el aprendizaje logrado	Excelente 20 6,25%	Bueno 42 13,125%	Regular 166 51,875%	Deficiente 92 28,75%		320 100%
3. Frecuencia de uso y elaboración de materiales didácticos	Por clase 12 3,75%	Semanal 38 11,875%	Mensual 82 25,625%	Bimestral 16 5%	No elabora 164 51,25%	320 100%
4. Estudio del curso fuera de horas de clase	1 hora 72 22,5%	2 horas 45 14,06%	3 horas 28 7,5%	> 3 horas 21 6,56%	< 1 hora 154 48,125%	320 100%
5. Factores que dificultan el aprendizaje	Muchas horas de clase 14 4,375%	Pocas horas de clase 30 9,375%	Falta de libros 50 15,625	Método del profesor 130 40,625%	Falta de base 96 30%	320 100%
6. Métodos o procedimientos de enseñanza utilizados por el docente-	Inductivo – deductivo 30 9,375%	Personalizado 32 10%	Estudios grupales 54 16,875%	Expositivo 168 52,5%	Estudio dirigido 36 11,25%	320 100%

FUENTE: Encuesta a alumnos de 4 Centros Educativos (Elaboración Propia)

INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS:

1. **Respecto a la opinión de la asignatura:** El 52,5% consideran que el curso de matemática es interesante, el 31,25% opinan que es difícil; es decir la mayoría de los alumnos resaltan la importancia de la matemática, y la consideración de difícil, es está relacionado con la enseñanza del docente y la tenencia de requisitos.

2. **La opinión sobre el aprendizaje logrado:** El 52,875% consideran que aprendieron la matemática (trigonometría) en forma regular, el 28,75% opinan que su aprendizaje logrado fue deficiente. Aquí se observa con objetividad que el aprendizaje de la matemática por los alumnos en general es deficiente.

3. **Sobre el uso de medio y materiales didácticos:** El 51,25% manifiestan que sus profesores de matemática no utilizan ni elaboran materiales didácticos para reforzar la enseñanza, mientras que el 25,625% opinan que utilizan algunos materiales. Esto es, los docentes de los colegios encuestado usan de manera muy esporádica medios y materiales educativo.

4. **Estudio del alumno fuera de hora de clases:** El 48,125% de los encuestados manifiestan que no estudian fuera de horas de clase; el 22,5% estudian a lo más 1 hora diaria. Los alumnos no tienen la posibilidad de estudiar fuera de aula, y es pertinente el uso de una enseñanza a través de modelos didácticos.

5. **Respecto a los factores que dificultan el aprendizaje:** El 40,625% de los alumnos consideran que es el método del profesor, el 30% opinan que les falta base; 15,625% restante atribuyen a la falta de bibliografía. La enseñanza usando modelos está orientada, a mejorar estas tres falencias que son fundamentales para plasmar un aprendizaje eficaz en de la matemática.

6. **Respecto a los métodos y procedimientos de enseñanza:** El 52,5% manifiestan que el profesor utiliza el método expositivo, el 16,875% dicen que el docente forma grupos para lograr el aprendizaje. Luego, la mayoría de los docentes utiliza la exposición como única estrategia didáctica, con pobres resultados.

4.1.2. Encuesta de opinión del proceso enseñanza-aprendizaje

Se aplicó a los alumnos del grupo experimental, al concluir el proceso de experimentación de nuestra propuesta, julio del 2000, para ver algunos aspectos relacionados al grado de satisfacción de los alumnos con el uso de la estrategia didáctica experimentada en la enseñanza de la trigonometría, el mismo que fue administrado por el coordinador de ciencias del plantel, que también cumplía la función de Director encargado.

OBJETIVO: Conocer la opinión sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la trigonometría llevado a través del modelo didáctico en el estudio de las funciones trigonométricas, sus propiedades y aplicaciones a partir de la circunferencia unitaria en el sistema de coordenadas rectangulares.

TABLA Nº 2: CUADRO RESUMEN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS DE LA ENCUESTA APLICADO A LOS (40) ALUMNOS DEL QUINTO GRADO "B" – GRUPO EXPERIMENTAL.

REACTIVOS	RESPUESTAS Y PORCENTAJES				TOTALES
	Muy buena	Buena	Regular	deficiente	
1. Aprendizaje logrado sobre trigonometría.	13 32,5%	20 50%	7 17,5%	0 00%	40 100%
2. Forma de enseñar del profesor	18 45%	14 35%	8 20%	0 00%	40 100%
3. Preparación académica del profesor	20 50%	15 37,5%	5 12,5%	0 00%	40 100%
4. Contenido del modelo didáctico.	17 42,5%	16 40%	7 17,5%	0 00%	40 100%
5. Método utilizado por el profesor.	18 45%	16 40%	6 15%	0 00%	40 100%
6. Motivación para seguir estudios superiores	16 40%	15 37,5%	9 22,5	0 00%	40 100%
7. Utilidad del modelo didáctico.	18 45%	15 37,5%	7 17,5%	0	40 100%
8. Resultados del apren-dizaje individual y grupal	14 35%	18 45%	8 20%	0 00%	40 100%

FUENTE: Elaboración Propia, con datos de la encuesta al grupo experimental.

INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS:

1. **Sobre el aprendizaje logrado de la Trigonometría:** El 50% consideran que su aprendizaje logrado lo considera buena, el 32,5% consideran que el aprendizaje que lograron fue muy bueno. Opinión refrendada en la prueba de salida, donde se obtuvo calificativos superiores que al grupo control.

2. **Forma de enseñar del profesor:** El 45% consideran que la forma de enseñar del profesor es muy buena, el 35% opinan que es buena. Opiniones que indican que la estrategia utilizada fue satisfactoria para el alumno.

3. **Respecto a la preparación académica del profesor:** El 50% consideran que la preparación del profesor es muy buena, el 37,5% considera que la preparación del profesor es buena. Es decir, los alumnos están de acuerdo y opinan en forma positiva respecto a la preparación del profesor.

4. **Respecto al contenido del modelo:** El 42,5% consideran que es muy buena y el 40% opinan que es buena. En consecuencia el material elaborado tiene acogida y aceptación por los alumnos para el logro de su aprendizaje.

5. **Respecto al método utilizado por el profesor:** El 45% responden que el método utilizado es muy bueno, el 40% manifiestan que el método es bueno. Es decir los alumnos tienen una opinión mayoritaria favorable al método.

6. **Respecto a la motivación para seguir estudios superiores:** El 40% tienen muy buena motivación para proseguir estudios, 37,5% tienen buena motivación y el restante 22,5% están motivados regularmente. Lo descrito nos expresa que los alumnos del grupo están motivados casi en su totalidad para seguir estudios superiores.

7. **Respecto a la utilidad del modelo didáctico:** El 45% califican de muy bueno la utilización del modelo didáctico en la enseñanza, el 37,5 considera que tiene buena utilidad y el 17,5% restante lo califica de regular su utilidad. Es decir, los alumnos tienen una opinión mayoritaria favorable a la utilidad del modelo.

8. **Resultados del aprendizaje individual y grupal:** El 35% expresan que el aprendizaje individual y grupal llevado a cabo fue muy buena, el 45% lo califica como buena y sólo el 20% lo considera regular. Es decir los alumnos mayoritariamente consideran que el método de individual y grupal a través del modelo facilitaron su aprendizaje.

4.1.3. Proceso de validación de la variable independiente

La variable independiente, **enseñanza de la trigonometría a través de modelo didáctico y método de coordenadas cartesianas**, ha sido observada y evaluado a través de una guía de cotejo de validación del proceso enseñanza-aprendizaje, que fue refrendado por un cuestionario de opinión respecto a la conformidad del proceso llevado a cabo en los alumnos del grupo experimental.

La variable independiente, **enseñanza de la trigonometría a través del triángulo rectángulo,** relación entre sus lados y ángulos, también fue observada y analizada a través de las respuestas de algunos ítem de la encuesta aplicada a los alumnos que desarrollaron el tema a través de triángulos rectángulos, donde se incluyen los alumnos del grupo de control.

El análisis realizado, nos da cuenta que las dos formas de enseñanza, motivo de estudio han cumplido con los requerimientos de validación del estudio.

4.1.4. Prueba de requisitos

Esta prueba consiste en un cuestionario de preguntas diversas que evalúa los conocimientos de diversos tópicos de matemática escolar que trae consigo el estudiante, los mismos que son necesarios para abordar el estudio eficaz de las funciones trigonométricas y sus diversas aplicaciones.

OBJETIVOS:

1. Verificar si los grupos cumplen con los requisitos para la validez interna, expresados en el conocimiento y evocación de los tópicos desarrollados en los temas previos, vistos los procesos anteriores, los mismos que sirven de base para el estudio del tema.

2. Posibilitar una realimentación en los temas que son insoslayables para entender con eficiencia los diversos conceptos, propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas, que se estudiará a través del modelo didáctico.

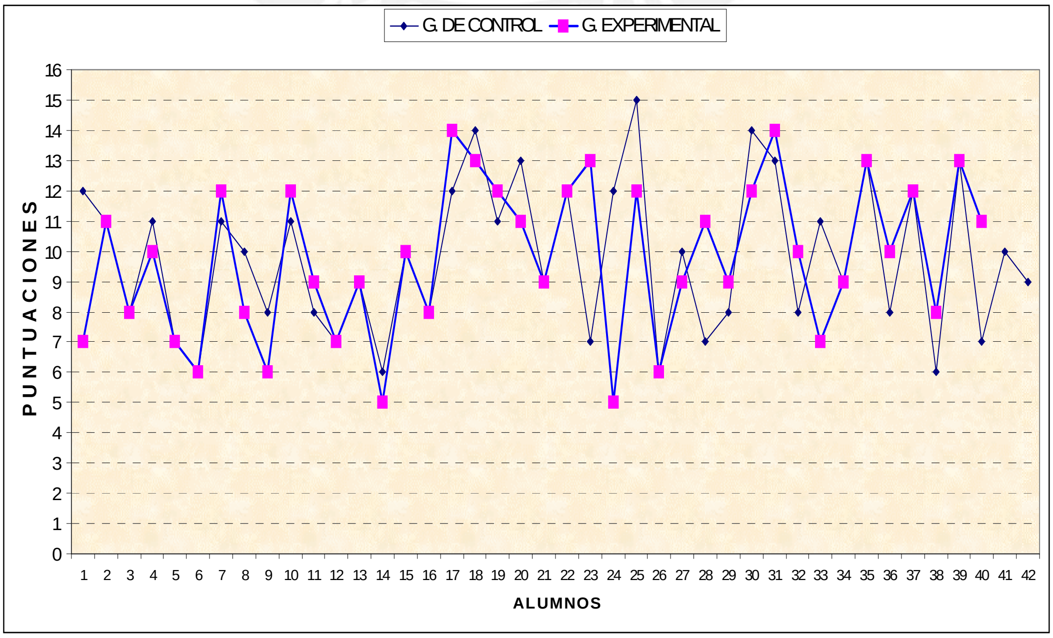
La administración y calificación de la prueba se realizó en la segunda semana de abril del año 2000, la calificación estuvo a cargo del docente investigador.

TABLA Nº 3: CUADRO DE RESULTADOS OBTENIDOS EN LA PRUEBA DE PRERREQUISITOS DEL GRUPO CONTROL Y GRUPO-EXPERIMENTAL.

	5to. Grado "A" (Grupo de Control)	5to. Grado "B" (Grupo Experimental)
Nº de alumnos	42	40
Nota mayor	15	14
Nota menor	06	05
Rango	9	9
Promedio	09,81	09,75
Varianza	6,30	6,50
Desviación estándar	2,51	2,55
Coeficiente de variación	25,6 %	26,15%

FUENTE: Elaboración Propia de resultados obtenidos en la prueba de requisitos.

GRÁFICA Nº 1: RESULTADOS DE LA PRUEBA DE REQUISITOS DEL GRUPO CONTROL Y EXPERIMENTAL



CONCLUSIONES:

1. Los alumnos tuvieron desacierto casi generalizado en: identificar una función; hallar el dominio y rango de una función; identificar las funciones par, impar, creciente y biyectiva; asimismo, en identificar los puntos simétricos en el plano. Tuvieron menos errores en: identificar una función periódica; hallar la distancia entre dos puntos del plano cartesiano; en identificar si un punto pertenece a un cuadrante o a una ecuación; asimismo, en calcular los elementos de un triángulo rectángulo.

2. En el 5to. Grado B se obtuvo 14 como calificativo mayor y como calificativo menor 05; mientras que en el 5to. Grado A se obtuvo 15 como nota mayor y como nota menor 06. Además, el promedio de los calificativos obtenidos en el 5to. Grado A es de 09,81; mientras que en el 5to. Grado B es de 09,75; el coeficiente de variación de las notas de las dos secciones son 0,256 y 0,2615 respectivamente, la diferencia entre los coeficientes de variación no es significativa (anexo 6). Estos resultados ratifican el rendimiento académico de los alumnos en el año anterior era deficiente y casi equivalentes, y refuerza el inicio de nuestra investigación.

3. El rendimiento académico en las dos secciones es deficiente y homogéneo en el conocimiento de los requisitos para abordar el estudio de las funciones trigonométricas. En consecuencia, es pertinente una realimentación para reforzar los temas que deben conocer los alumnos para abordar adecuadamente el desarrollo de las funciones trigonométricas en el grupo experimental.

Estimación del intervalo de confianza para la prueba de requisitos

Se toma el esquema de estimación de intervalos de confianza formulados por Córdova (1999) y Wayne (1995), según el cual para valores de medias: $\bar{y}_1$ e $\bar{y}_3$, de las muestras de tamaños n_1 y n_3, con varianzas muestrales S_1^2 y S_3^2 conocidas, el intervalo de confianza del (1 – α)% de $\mu_1 - \mu_3$ es:

$(\bar{y}_1 - \bar{y}_3) - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{s_1^2}{.n_1} + \frac{s_3^2}{n_3}} < \mu_1 - \mu_3 < (\bar{y}_1 - \bar{y}_3) + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{s_1^2}{.n_1} + \frac{s_3^2}{n_3}}$, donde $z_{1-\alpha/2}$ se obtiene a partir de la tabla de distribución normal estándar **Z** ~**N**(0 , 1) de manera que P(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$) = 1 – α/2.

Para el caso: $\bar{y}_1$ = 9,75 y $\bar{y}_3$ = 9,81; tamaños n_1 = 40 y n_3 = 42, y varianzas S_1^2 = 6,50 y S_3^2 = 6,30, el intervalo de confianza del 95% para $\mu_1 - \mu_3$ es:

$C[\,(9{,}81-9{,}75)-1{,}96.\sqrt{\frac{6{,}3}{42}+\frac{6{,}5}{40}} < \mu_1-\mu_3 < (9{,}81-9{,}75)+1{,}96.\sqrt{\frac{6{,}3}{42}+\frac{6{,}5}{40}}\,] = 0{,}95$

$C[\,(0{,}6)-1{,}96.\sqrt{0{,}3125} < \mu_1-\mu_3 < (0{,}6)+1{,}96.\sqrt{0{,}3125}\,] = 0{,}95$

$C[\,(0{,}6)-1{,}96(0{,}559) < \mu_1-\mu_3 < (0{,}6)+1{,}96(0{,}559)\,] = 0{,}95$

$C[\,(0{,}6)-1{,}1 < \mu_1-\mu_3 < (0{,}6)+1{,}1\,] = 0{,}95$

$C[-0{,}5 < \mu_1-\mu_3 < 1{,}7] = 0{,}95$, donde la notación de C[.] indica que el intervalo es un intervalo de confianza más que un enunciado de probabilidad.

El intervalo de confianza del 95% para $\mu_1-\mu_3$ es [–0,5 , 1,7]. En efecto, dado que $\mu_1-\mu_3 = 0 \in [-0{,}5\ ,\ 1{,}7]$, no **existe diferencia significativa entre las medias de las notas de las dos secciones, a un nivel de significación de 0,05, en consecuencia, no se rechaza** $\mu_1=\mu_3$**.**

Luego, de este resultado, se produce la separación en el tratamiento metodológico entre los grupos de estudio, y se vuelve a comparar una vez terminado el desarrollo del modelo didáctico.

4.1.5. Evaluación de salida

Ésta se tomó en la penúltima semana del mes de julio, después de haber concluido el dictado y estudio del capítulo de trigonometría para ambos grupos.

OBJETIVO:

1. Conocer el aprendizaje logrado referente a las funciones trigonométricas por los alumnos del grupo experimental que estudiaron el tema a partir de puntos en la circunferencia unitaria a través del Modelo Didáctico, y los alumnos del grupo de control que estudiaron la unidad dictada y expuesta por el profesor.

2. Comparar el nivel de conocimiento del tópico de funciones trigonométricas entre los alumnos integrantes del grupo de control y del grupo experimental, para deducir la confirmación o no de nuestra hipótesis de trabajo planteada con antelación y luego inferir conclusiones conducentes a la viabilidad del trabajo.

3. Determinar el nivel del logro de los objetivos y metas propuestos en el estudio del Modelo Didáctico y emitir juicios válidos con miras a optimizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

La elaboración de ítems de la prueba de salida se realizó de acuerdo a los niveles del dominio cognoscitivo de la taxonomía de Bloom, tal como se exhibe en el siguiente cuadro:

Ítems	1	2	3	4	5	6
a	conocimiento	Comprensión	Aplicación	Análisis	Síntesis	Evaluación
b	Conocimiento	Comprensión	Aplicación	Análisis	Síntesis	
c	Conocimiento	Comprensión	Aplicación	Análisis	Síntesis	
d	Conocimiento	Comprensión	Aplicación	Análisis	Síntesis	

La elaboración estuvo a cargo del profesor es del grupo de control y del grupo experimental (docente investigador), quienes también prepararon el solucionario. La prueba se administró en paralelo para los dos grupos de trabajo, como prueba bimestral cronogramada correspondiente al segundo bimestre, cuya duración fue de 2 horas pedagógicas (90 minutos).

La prueba fue controlada y administrada simultáneamente por dos docentes, luego calificado por un tercer docente de la especialidad a quien se le entregó las soluciones de las preguntas formuladas.

TABLA Nº 4: CUADRO RESUMEN DE LA PROBABILIDAD DEL RENDIMIENTO ACADÉMICO POR NIVELES:

	conocimiento	comprensión	Aplicación	Análisis	Síntesis	Total
Grupo Experimental	0,70	0,71	0,64	0,68	0,70	0,685
Grupo de control.	0,597	0,60	0,555	0,585	0,64	0,594

FUENTE: Elaboración Propia (datos de la prueba de salida.)

CONCLUSIONES:

1. En las preguntas de CONOCIMIENTO: Los alumnos del grupo experimental resolvieron los ítem en forma correcta en un 70%, mientras que el grupo de control resolvieron correctamente sólo en un 59,7%, existiendo una diferencia significativa entre los resultados obtenidos en ambos grupos.

2. En las preguntas de COMPRENSIÓN: Los alumnos del grupo experimental resolvieron en forma correcta en un 71%, mientras que el grupo de control resolvieron correctamente en un 60%, existiendo un nivel de comprensión aceptable a favor del grupo experimental.

3. En las preguntas de APLICACIÓN: Los alumnos del grupo experimental resolvieron en forma correcta en un 64%, mientras que el grupo de control resolvieron correctamente en un 55,5%; las puntuaciones bajan en los dos grupos, pero se mantiene la superioridad del grupo experimental.

4. En las preguntas de ANÁLISIS: Los alumnos del grupo experimental resolvieron en forma correcta en un 68%, mientras que el grupo de control resolvieron correctamente en un 58,5%, persiste la diferencia de puntuación a favor del grupo experimental en 10 puntos.

5. En las preguntas de SÍNTESIS: Los alumnos del grupo experimental resolvieron en forma correcta en un 70%, mientras que el grupo de control resolvieron correctamente en un 64%, las puntuaciones obtenidas son más próximos, con ligera ventaja del grupo experimental, en 4 puntos.

En las respuestas globales obtenidas por ambos grupos, los alumnos del grupo experimental resolvieron en forma correcta en un 68,5%, mientras que el grupo de control resolvieron correctamente en un 59,4%. Resultado que nos induce a afirmar con propiedad que la estrategia metodológica empleada tuvo mejores resultados, y que el rendimiento académico del grupo experimental es mejor al grupo de control.

a) **Análisis estadístico de resultados**: Para descripción de resultados se utilizaron:

TABLA Nº 5: RESUMEN DE ESTADÍSTICOS

	5to. Grado “A”(G.C.)	5to. Grado “B”(G.E.)
Nº de alumnos	41	40
Nota mayor	18	17
Nota menor	07	10
Rango	11	07
Promedio	11,88	13,70
Varianza	7,86	2,37
Desviación estándar	2,80	1,54
Coeficiente de variación	23,6 %	11,2 %

FUENTE: Elaboración Propia. (datos de la prueba de salida)

GRÁFICA Nº 2: RESULTADOS DE LA PRUEBA DE SALIDA DEL GRUPO CONTROL Y EXPERIMENTAL

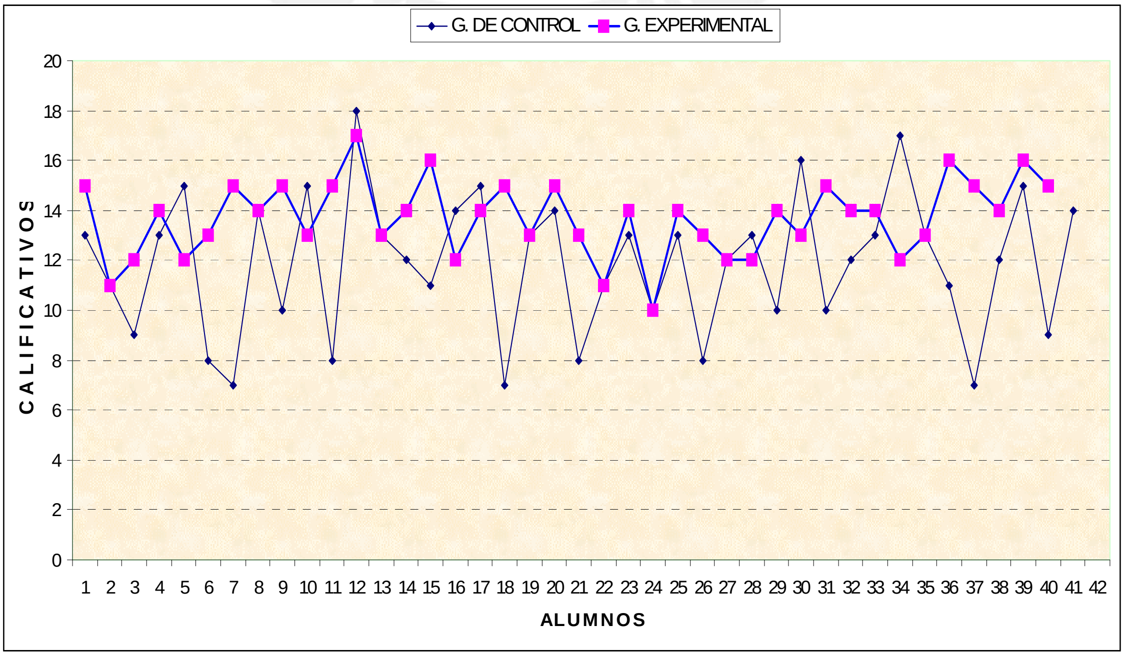


TABLA Nº 6: CUADRO COMPARATIVO DE EVOLUCIÓN DEL RENDIMIENTO ACADÉMICO

MEDIA DEL RENDIMIENTO ACADÉMICO			
	Grupo experimental	Grupo de control	Variación
Prueba de requisitos	09,75	09,81	00,06
Prueba de salida	13,70	11,88	01,82
Variación	+ 03,95	+ 02,07	

FUENTE: Elaboración Propia (resultados de la prueba de entrada y prueba de salida).

b) Estimación del intervalo de confianza para diferencia de medias

Siguiendo a Córdova (1999) y Daniel (1995), según el cual para valores de medias: $\bar{y}_2$ e $\bar{y}_4$, de las muestras independientes de tamaños n_2 y n_4, con varianzas muestrales S_2^2 y S_4^2 conocidas, el intervalo de confianza del (1 – α)% de $\mu_2 - \mu_4$ es:

$$C\left(\left(\bar{y}_2 - \bar{y}_4\right) - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{s_4^2}{.n_4} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_2 - \mu_4 < \left(\bar{y}_2 - \bar{y}_4\right) + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{s_4^2}{.n_4} + \frac{s_2^2}{n_2}}\right) = 1 - \alpha$$, donde

$z_{1-\alpha/2}$ se obtiene a partir de la tabla de distribución normal estándar **Z** ~ **N**(0 , 1) de manera que P(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$) = 1 – α/2.

Para el caso: $\bar{y}_2$=13,70 y $\bar{y}_4$= 11,88 que resultan de las muestras de tamaños n_2= 40 y n_4= 41, con varianzas S_2^2=2,37 y S_4^2=7,86, respectivamente, el intervalo de confianza del 95% para $\mu_2 - \mu_4$ es:

$$C[\left(13{,}70 - 11{,}88\right) - 1{,}96.\sqrt{\frac{7{,}86}{41} + \frac{2{,}37}{40}} < \mu_2 - \mu_4 < \left(13{,}70 - 11{,}88\right) + 1{,}96.\sqrt{\frac{7{,}86}{41} + \frac{2{,}37}{40}}] = 0{,}95$$

$$C[\left(1{,}82\right) - 1{,}96.\sqrt{0{,}251} < \mu_2 - \mu_4 < \left(1{,}82\right) + 1{,}96.\sqrt{0{,}251}] = 0{,}95$$

$$C[1{,}82 - 1{,}96(0{,}501) < \mu_2 - \mu_4 < 1{,}82 + 1{,}96(0{,}501)] = 0{,}95$$

$$C[1{,}82 - 0{,}98 < \mu_2 - \mu_4 < 1{,}82 + 0{,}98] = 0{,}95$$

$$C[0{,}84 < \mu_2 - \mu_4 < 2{,}80] = 0{,}95.$$

Donde la notación de C[.] indica que el intervalo es un intervalo de confianza más que un enunciado de probabilidad.

El intervalo de confianza del 95% para $\mu_2 - \mu_4$ es [0,84 , 2,80]; como $\mu_2 - \mu_4 \neq 0$ y $0 \notin$ [0,84 , 2,80], concluimos que **a un nivel de significación de 0,05 existe una diferencia significativa entre las medias de los rendimientos académicos de los grupos de control y experimental, en consecuencia, no se acepta** $\mu_2 = \mu_4$ **.**

c) Procedimiento de la Prueba de Hipótesis

Como mencionan (Mason/Lind/Marchal, 2001, p.311), "*existe un procedimiento de cinco pasos que sistematiza la prueba de hipótesis, al llegar al paso* 5, *se tiene ya la capacidad de tomar la decisión de rechazar o no la hipótesis*". Atendiendo este planteamiento que consideramos más coherente, sin la intención de desechar otros existentes, hemos optado seguir estos pasos para el contraste de nuestra hipótesis.

<u>**Paso 1:**</u> **Plantear la Hipótesis nula (Ho) y la hipótesis alternativa (H_1):** "P*ara someter a contraste una hipótesis es necesario, además de formular la hipótesis alternativa* (H_1), *formular la hipótesis nula* (Ho) *que viene ha ser la negación de la alternativa. Es preciso realizar este artificio debido a que es la única manera de probar la hipótesis*".

En términos sencillos lo que se ha desarrollado en este paso es la formalización de la hipótesis principal, y se ha hecho de la siguiente manera:

Hipótesis Nula (H_o):

El rendimiento académico de los alumnos que desarrollan el tema de las funciones trigonométricas a partir de la circunferencia unitaria en el sistema de coordenadas cartesianas con uso del modelo didáctico (Y_2), **no difiere significativamente** con el rendimiento académico de los alumnos que estudian el tema en forma tradicional y sin uso del modelo (Y_4), en el quinto grado de educación secundaria.

Expresado formalmente está dado por: $\mathbf{H_o : \mu_2 = \mu_4}$.

Hipótesis Alternativa (H_1):

El rendimiento académico de los alumnos que desarrollan el tema de las funciones trigonométricas a partir de la circunferencia unitaria en el sistema de coordenadas cartesianas con uso de modelo didáctico (Y_2), **es significativamente mayor** al rendimiento académico de los alumnos que estudian el tema en forma tradicional y sin uso del modelo (Y_4), en el quinto grado de educación secundaria.

Expresado formalmente está dado por: $\mathbf{H_1 : \mu_2 > \mu_4}$.

<u>Paso 2:</u> Selección del nivel de significación: el nivel de significación es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera, a esto se le denomina Error tipo 1, algunos autores utilizan el término nivel de riesgo en lugar de nivel de significación. A este nivel de riesgo se le denota mediante la letra griega alfa (α). "*Tradicionalmente se utiliza el nivel de significación de 0,05 para investigaciones sobre consumo o uso de servicios, 0,01 para el aseguramiento de calidad y precisión, y el de* 0,10 *para encuestas políticas*". Para efectos de la presente investigación se ha determinado: **α = 0,05.**

<u>Paso 3:</u> Escoger el valor estadístico de prueba: Como las muestras son grandes (n_2 y n_4 son mayores que 30). El estadístico de prueba se obtiene a través de la fórmula: $z = \dfrac{\bar{y}_2 - \bar{y}_4}{\sqrt{\dfrac{S_2^2}{n_2} + \dfrac{S_4^2}{n_4}}}$, cuya distribución consideramos aproximadamente normal estandarizado N(0 , 1).

<u>Paso 4:</u> Formular la regla de decisión: Una regla de decisión es un enunciado de las condiciones según las que se aceptan o rechazan la hipótesis nula, para el cual es imprescindible determinar el Valor Crítico, que es un número que divide la región de aceptación y la región de rechazo. Para α = 0.05 y una prueba unilateral de cola a la derecha, para la distribución Z, teniendo en cuenta $z_{1-\alpha} = z_{0,95} = 1,645$ se obtiene la región crítica. La región crítica de rechazo de la hipótesis nula es: R.C. = {Z > 1,645} y de aceptación de la hipótesis nula es: R.A. = {Z ≤ 1,645}.

<u>Paso 5:</u> Toma de decisión: Considerando los estadígrafos ya calculados se toma la decisión de aceptar o no la hipótesis nula, con los datos que se presenta en la tabla.

TABLA Nº 7

Grupos	$.n$	$\bar{y}$	S^2
Grupo Experimental	$n_2 = 40$	13,70	$S_2^2 = 2{,}3716$
Grupo de Control	$n_4 = 41$	11,88	$S_4^2 = 7{,}86$

FUENTE: Elaboración propia (datos extraídos de la tabla 5)

Realizando las operaciones correspondientes con los valores de la tabla, el estadístico de prueba se obtiene mediante:

$$z = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_4}{\sqrt{\frac{S_2^2}{n_2} + \frac{S_4^2}{n_4}}} = \frac{13{,}70 - 11{,}88}{\sqrt{\frac{2{,}3716}{40} + \frac{7{,}86}{41}}} = \frac{1{,}82}{0{,}501} = 3{,}63 \text{ (Z calculada)}$$

Como la regla de decisión planteada en el caso anterior es que se rechaza la hipótesis nula, si Z > 1,645.

Como Z calculada: z = 3,63 > 1,645 (ó z = 3,63 $\in$ R.C.), se rechaza la hipótesis nula H_o y se acepta la hipótesis alternativa H_1, que a la letra dice:

El rendimiento académico de los alumnos que desarrollan el tema de las funciones trigonométricas a partir de la circunferencia unitaria en el sistema de coordenadas cartesianas con uso de modelo didáctico, es significativamente mayor al rendimiento académico de los alumnos que estudian el tema en forma tradicional y sin uso del modelo didáctico, con un nivel de significación de 0,05.

4.2. DISCUSIÓN Y RESULTADOS

Nuestra hipótesis de trabajo para todo el proceso fue:

- Con el desarrollo del modelo didáctico elaborado en el proceso de enseñanza-aprendizaje de conceptos, propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas, a partir de puntos de la circunferencia unitaria en el sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, se logra un aprendizaje significativo de los alumnos del quinto grado de secundaria.

Tomando en cuenta la validez interna y el resultado de la prueba, inferimos:

- El resultado del rendimiento académico de los alumnos, que llevaron el proceso de su aprendizaje de la asignatura de matemática aplicando el modelo didáctico, muestra una mejora significativa en el aprendizaje de los alumnos en los niveles de: conocimiento, comprensión, análisis, síntesis y aplicación de las funciones trigonométricas.

- Los puntajes obtenidos por los 40 alumnos del grupo experimental en los ítems correspondientes al nivel de: conocimiento, comprensión, aplicación, análisis y síntesis son: 112, 113, 102, 109 y 112, respectivamente. Mientras los puntajes de los 41 alumnos del grupo de control en los ítems de los mismos niveles son: 98, 98, 91, 96 y 104, respectivamente.

- El promedio de los calificativos del grupo experimental resulta 13,70 y el promedio de calificativos del grupo control es 11,88; y, la aplicación de la prueba de hipótesis estadística por diferencia de medias ratifica nuestra hipótesis de trabajo, al aceptarse la hipótesis alternativa.

- La varianza del Grupo Experimental es 2,37 y del Grupo de Control 7,86; ello significa que en el grupo de control existe mayor dispersión de datos (calificativos) respecto a la media aritmética.

- El coeficiente de variación del grupo experimental es de 11,2% y el del grupo de control es del 23,6%; lo que significa que los calificativos del grupo experimental son más homogéneos o tiene menor variabilidad que los calificativos obtenidos en el grupo de control; es decir el grupo experimental tuvo mayor rendimiento académico y es más homogéneo.

CONCLUSIONES

A partir de los resultados obtenidos en el proceso de investigación, podemos concluir:

1. El uso del modelo didáctico para el estudio de las Funciones Trigonométricas con procedimientos didácticos y metodológicos adecuados a la enseñanza activa, permite tener una visión integral del proceso de aprendizaje de los alumnos y conduce a la adquisición de aprendizajes significativos y a mejorar el rendimiento académico, respecto de quienes abordaron el tema en forma pasiva, con exposición del profesor y participación casi nula del alumno en clase, como se constató durante el trabajo de campo.

2. Los alumnos que llevan a cabo el proceso de aprendizaje con modelo didáctico (grupo experimental) muestran mayor motivación y predisposición para el estudio y aprendizaje de los temas desarrollados y por el logro de los objetivos propuestos a diferencia de los alumnos del grupo de control, los mismos que se expresan en las actitudes que muestran para el aprendizaje, en la encuesta, y en los resultados de las evaluaciones de proceso y de salida.

3. El uso del modelo didáctico posibilitan un trabajo consciente, responsable, con libertad y autonomía del alumno, tanto individual como grupal. Donde el maestro tiene la misión de motivar y orientar el aprendizaje en clase. Asimismo, la relación profesor-alumno, alumno-alumno sufren cambios significativos, que se manifiestan en el cambio de conducta y los hábitos de estudio desarrollados en los alumnos del grupo experimental.

4. El desarrollo del modelo didáctico sobre funciones trigonométricas en clase, estimula el aprendizaje eficaz, eficiente y efectivo de la Matemática tanto en su aspecto formativo, funcional e instrumental. El mismo que ha sido comprobado con el análisis estadístico de la prueba de salida “por diferencia de medias”, del grupo experimental y de control, que arroja una diferencia estadísticamente significativa.

5. La aplicación de modelo didáctico durante las sesiones de clase de las Funciones Trigonométricas a partir de los puntos en una circunferencia unitaria en el sistema de coordenadas rectangulares facilita y motiva el aprendizaje de los alumnos, produciendo aprendizajes significativos; frente a la enseñanza tradicional llevado a partir de las razones en un triángulo rectángulo y sin uso de material y medios elaborado por el docente.

6. El estudio de las funciones trigonométricas a partir de la circunferencia unitaria en el sistema de coordenadas rectangulares tiene la ventaja de: manipular los puntos que le pertenecen, identificar su esencia periódica, deducir las relaciones e identidades trigonométricas, trazar sus gráficos e identificar sus propiedades; que introduce al estudiante en los fundamentos de las matemáticas superiores; tomando las relaciones entre elementos del triángulo como una aplicación particular.

SUGERENCIAS

+ Cuando se enseña las funciones trigonométricas en el quinto grado se debe tener en cuenta los requisitos que requiere el alumno para mejor comprensión de los tópicos que se desarrolle.

+ Para mejor comprensión las funciones trigonométricas se deben desarrollar en el sistema de coordenadas cartesianas, partiendo de los puntos de la circunferencia unitaria, simplificando la enseñanza y lograr aprendizajes significativos sobre el tema.

+ Repetir la experiencia de enseñanza de la matemática usando los modelos didácticos en nuevas muestras y poblaciones, y temas que posibiliten comparaciones cualitativas y cuantitativas, para ratificar y reforzar nuestras conclusiones fundamentales.

+ Propiciar el desarrollo de modelos didácticos como los elaborados en temas diversos para reforzar el aprendizaje de los diversos tópicos de la Matemática, en el nivel secundario y en otros niveles educativos.

+ Trabajar usando taxonomías o niveles de conocimiento en la categorización y adquisición de conocimientos en el proceso enseñanza-aprendizaje.

+ Propiciar la experimentación de estrategias de enseñanza individual y grupal acorde a las exigencias de la realidad, con miras a optimizar el aprendizaje de los alumnos.

+ Implementar el uso de las herramientas tecnológicas de actualidad: Calculadoras y software matemáticos, en la resolución de problemas referido a funciones trigonométricas y otros tópicos de la matemática en el nivel secundario.

+ Sugerir a las autoridades e instituciones educativas dar apoyo e incentivos a los docentes que propicien innovaciones en la enseñanza; tales como la elaboración y uso de modelos didácticos con miras a lograr resultados eficaces en su labor docente.

BIBLIOGRAFÍA

1. AUSUBEL, David, NOVAK, Joseph & HANESIAN, Helen (1992) Psicología Educativa. México: Trillas.

2. BIGGE, Morris I. (1979) *Teorías de Aprendizaje para Maestros*. México: Trillas

3. BLUM, Benjamín, (1990): *Taxonomía de los objetivos de la Educación*. Buenos Aires: Editorial Ateneo.

4. BOYER, Karl *(1968)* Historia de la matemática. *Madrid: Alianza Editorial.*

5. CÓRDOVA, Manuel (1999) *Estadística Inferencial*. Lima: Moshera S.A.

6. COHEN, Louis (2002) *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

7. CONSELHO NACIONAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICA (1970) *La Revolución de las Matemáticas Escolares*. Washington: OEA.

8. CASTELNUEVO, Enma (1990) *Didáctica de la Matemática Moderna*. México: Trillas.

9. DANIEL, Wayne (1995) *Estadística con aplicaciones a las ciencias sociales y a la educación*. Bogotá: McGraw-Hill Latinoamericana.

10. DAVIS, R. y Otros (1983) *Diseño de Sistemas de Aprendizaje*. México: Trillas.

11. DE GUZMAN, M. & GIL, D. (1993) *Enseñanza de las ciencias y la matemática. Tendencias e innovaciones*. Madrid: Editorial popular, S.A.

12. DEL CARMEN, Luis, (1996): *Análisis y secuenciación de los Contenidos Educativos*, ICE-HORSORI, Universitat de Barcelona, Primera Edición.

13. DELMO, Stela (1986) *Como estructurar los contenidos de aprendizaje en los materiales escritos. Educación* Hoy. Bogotá: CIEC, Año XVI, Nº 95, Octubre–diciembre, 79–80.

14. DOMÍNGUEZ, Zélia (1977) *Modelos para medir y evaluar en educación.* Madrid, Marcea, SA de ediciones.

15. ETAYO, J. & GARCÍA, J. (1995) *La enseñanza de las matemáticas en educación secundaria. Tratado de educación personalizada*. Madrid: Rialp, S.A.

16. FERRANDEZ, A. (1979) *La Educación Constantes y Problemas Actual*. Barcelona: SEAC.

17. GAGNÉ, Robert (1976) *La planificación de la enseñanza: sus principios*. México, D.F.: Trillas.

18. GAGNÉ, Robert (1975) *Principios básicos del aprendizaje para la instrucción*. México, D.F.: Diana.

19. GARCÍA HOZ, Víctor (1994) *Problemas y métodos de investigación en la educación personalizada. Tratado de educación personalizada*. Madrid: Rialp, S.A.

20. GARDNER, H. (1995) *Inteligencias múltiples: La teoría en la práctica*. Barcelona: Paidós.

21. GIMÉNEZ, Joaquín (1997) *Evaluación en matemáticas una integración de perspectivas.* Madrid: Síntesis S.A.

22 GOLEMAN, D. (1996): *Inteligencia Emocional*. Barcelona: Kairós.

23. GOMEZ, Pedro (1996) *La Problemática de las Matemáticas Escolares*. Bogotá: Iberoamericana.

24. GONZALES, R. (1971) *Psicología del Aprendizaje*. Lima: Editorial Universo

25. HERNÁNDEZ, Roberto; FERNÁNDEZ, Carlos & BAPTISTA, Pilar (1997) *Metodología de la investigación*. Colombia: Formas e impresos S.A.

26. LARA APARICIO, Miguel (1971) *Antología de las Matemáticas*. México: Universidad Autónoma.

27. LLINARES, Salvador(1990): *Teoría y Práctica en educación matemática.* Sevilla: Ediciones ALFAR.

28. MAILLO, Adolfo (1971) *La Enseñanza de las Matemáticas*. Madrid: Aguilar.

29. MASON, R.; LIND, D. & MARCHAL, W. (2001). *Estadística para Administración y Economía*. México, D.F.: Alfa Omega.

30. MATA GUEVARA, Luis (1994) *Aprendizaje Significativo como Linea de Investigación*. Maracaibo: Universo.

31. MINISTERIO DE EDUCACIÓN (1993) *Programación Curricular del Quinto Grado de Secundaria*: Lima.

32. NICHOLS, E. (1974) *Trigonometría Moderna*. México: Editorial Continental.

33. OGALDE, Isabel (2003*) Los materiales didácticos, medios y recursos de apoyo a la docencia*. México D.F.: Trillas.

34. OLIVARES, M. (1979) *Didáctica de la Matemática Moderna*. Editorial Oasis S.A.

35. ORLICH, Donald (1994) *Técnicas de enseñanza o modernización en el aprendizaje*. México: Noriega editores.

36. ORTON, Anthony (1990) *Didáctica de la Matemática. Cuestiones teoría y práctica en el aula.* España: Morata

37. PÉREZ, Rayman & GALLEGO, Rómulo (1995) *Corrientes constructivistas*. Colombia: Cooperativa editorial Magisterio.

38. PÉREZ DE ZAPATA, Amarilis (1997) *Seminario internacional de medición de la calidad en educación* (*Sistemas de evaluación y medición de la calidad de la educación*). Piura-Lima-Cusco: Ministerio de Educación.

39. PIAGET, J.; CHOQUET, G. & DIEUDONNE, J. (1986) *La enseñanza de las matemáticas modernas*. Madrid: Alianza Editorial.

40. PIAGET, Jean (1999) *Psicología de la inteligencia*. Madrid: Psique

41. POLYA, George. (1972) *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas S.A.

42. POOLE, B. (2001) *Tecnología Educativa: educar para la socio cultura de la comunicación y del conocimiento*. Bogotá: McGraw-hill.

43. RICO, Luis (2000) *Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas*. [Disponible en http:ued.uniandes.edu.co/servidor/ued/revistaema/vol1num1/ai-lrico.html]. Colombia: Universidad los Andes. Leído el 04 de octubre el 2000.

44. SAÉNZ, Jorge (1985) *Vectores, Geometría y Trigonometría.* Lima: PUCP.

45. SALKIND, Niel, (1997): *Métodos de investigación.* México: Prentice Hall.

46. SANTALÓ, Luis. & LLINARES, Salvador. (1994) *La enseñanza de las matemáticas en la educación Intermedia. Tratado de educación personalizada*. Madrid: Rialp, S.A.

47. SCHOOL MATHEMATICS STUDY GOUP (1965) *Matemática para la Escuela Secundaria. Funciones Elementales*. Washington: organización de los Estados Americanos.

48. SCHROEDER, Joachim (1999) *Lineamientos para la investigación educativa en el área de la matemática*. Lima: Ministerio de Educación.

49. SWOKOWSKI, Earl (1992) *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana.

50. VALIENTE VARDERAS, Santiago (2000) *Didáctica de la matemática. El libro de recursos*. Madrid: La muralla, S.A.

51. WAGNER, Eduardo & PERDIGAO DO CARMO, Manfredo (1999) *Trigonometría y Números Complejos.* Brasil: IMPA.

52. WEISS, Carol (1999). *Investigación Evaluativa. Métodos para determinar la eficiencia de los programas de acción.* México D.F.: Editorial Trillas

53. WENZELBURGER, Elfreiede” (1995) *V Simposio de Educación en Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamericana

A P É N D I C E

Anexo Nº 1: MATRIZ DE CONSISTENCIA

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	VARIABLES	DISEÑO	TÉCNICAS	INFORMANTE
Con la elaboración, implementación y desarrollo del modelo didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de conceptos, propiedades y aplicaciones de las Funciones Trigonométricas a partir de puntos de la circunferencia unitaria en el plano cartesiano; ¿se mejora significativamente el rendimiento académico de los alumnos del quinto grado de secundaria?	Comprobar que la implementación y desarrollo del modelo didáctico, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de conceptos, propiedades y aplicaciones de las Funciones Trigonométricas a partir de puntos de la circunferencia unitaria en el plano cartesiano, mejora significativamente el rendimiento académico de los alumnos del quinto grado de secundaria.	Con el desarrollo del modelo didáctico elaborado, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de conceptos, propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas a partir de puntos de la circunferencia unitaria en el plano cartesiano, se logra un aprendizaje significativo en los alumnos del quinto grado de secundaria.	**V.I** Enseñanza a través del modelo didáctico de las funciones trigonométricas. Enseñanza de las funciones trígono métricas a partir del triángulo rectángulo. **V.D.** Rendimiento académico de los alumnos del quinto grado de secundaria.	Y_1 X Y_2 Y_3 Z Y_4 Investigación cuasi-experimental de pre-prueba y post-prueba. Comprobación de hipótesis por diferencia de medias.	Fichaje. Entrevistas Encuestas Pruebas orales Pruebas escritas Guías de observación.	Docentes de matemática. Alumnos del quinto grado. Directivos de centros educativos. Personal administrativo.
¿Qué importancia tiene diseñar y elaborar un modelo didáctico para abordar un estudio secuencial de las Funciones Trigonométricas, siguiendo procedimientos metodológicos para la enseñanza individual y grupal, que mejore el aprendizaje de los alumnos?.	Diseñar y elaborar un modelo didáctico, para abordar un estudio secuencial de las funciones trigonométricas, considerando procedimientos didácticos y metodológicos adecuados al aprendizaje individual y grupal, atractivo a la lectura de los alumnos y que facilite la labor del docente en el aula.	El diseño y uso del modelo didáctico para el estudio de las funciones trigonométricas con procedimientos didácticos y metodológicos adecuados, permite tener una visión integral del proceso de aprendizaje de los alumnos.				
¿Qué efectos produce el desarrollo del modelo didáctico durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Funciones Trigonométricas a partir de los puntos de la circunferencia unitaria en el plano cartesiano en el quinto grado de secundaria?.	Desarrollar el modelo didáctico durante las sesiones de clase de las Funciones Trigonométricas a partir de puntos en una circunferencia unitaria en el plano cartesiano con uso de materiales y medios auxiliares, para motivar, facilitar y mejorar el rendimiento académico.	El desarrollo del modelo didáctico durante las sesiones de clase de las funciones trigonométricas a partir de los puntos en una circunferencia unitaria en el plano cartesiano, facilita y motiva el aprendizaje de los alumnos.				
¿Existe diferencia significativa, en cuanto a los resultados del rendimiento académico en el tema de Funciones Trigonométricas, usando el modelo didáctico?	Analizar y comparar resultados de mejoras del rendimiento académico logrados, por alumnos en el estudio de las Funciones Trigonométricas a partir de puntos de la circunferencia unitaria en el plano cartesiano, con desarrollo del modelo didáctico.	El rendimiento académico de los alumnos que adquieren aprendizaje de las funciones trigonométricas a partir de la circunferencia unitaria con ayuda del modelo didáctico mejoran significativamente.				

Anexo Nº 2

EXTRACTO DEL ACTA DE EVALUACIÓN DEL CUARTO GRADO "A" 1 999

	PROVINCIA: LUGAR:	ASIGNATURAS	LENGUAJE Y LIT.	MATEMÁTICA	BIOLOGÍA	PUNTAJE	PROMEDIO	SITUACIÓN FINAL
ORD	APELLIDOS Y NOMBRES	SEXO	A	F	J			
1	ACOSTA BUSTAMANTE, Armando	M	12	11	15	38	12.67	P
2	APAC TOLEDO, Robert Paul	M	13	13	15	41	13.67	P
3	ARANA CAMA, Lizbeth Marina	F	13	11	14	38	12.67	P
4	ARBILDO SORIA, Ivan	M	14	13	16	43	14.33	P
5	ASTUHUAMAN ABAD, Betsabé	M	13	9	13	35	11.67	A
6	ÁVILA ACERO, Vanessa	F	12	11	13	36	12.00	P
7	CABA TAMAYO, Randú Jesús	M	13	11	12	36	12.00	P
8	CABELLO MEDRANO, Diofanto	M	14	12	14	40	13.33	P
9	CARBAJAL ANDRADE, Juan	M	11	10	11	32	10.67	A
10	CISNEROS FLORES, Luisa	F	12	11	12	35	11.67	P
11	DAZA CABALLERO, Gladys Clarita	F	13	13	13	39	13.00	P
12	DEL ÁGUILA PÉREZ, Carlos	M	10	10	15	35	11.67	A
13	DEL ÁGUILA TRUJILLO, Helen	F	13	11	14	38	12.67	P
14	ESPINOZA CÁCERES, Belissa	F	12	10	13	35	11.67	A
15	ESPINOZA LIVIAS, Eleodoro	M	12	9	12	33	11.00	A
16	FERNANDEZ ACEVEDO, Vanesa	F	14	13	15	42	14.00	P
17	FLOMENO CARHUAPOMA, Josefino	M	13	12	14	39	13.00	P
18	GODOY POLIDO, Emily	F	13	13	13	39	13.00	P
19	GONZÁLES PÉREZ, Plero	M	15	14	12	41	13.67	P
20	HERRERA SINTI, Katia	F	12	10	14	36	12.00	A
21	HUERTO DE LA CRUZ, Yesenia	F	13	14	14	41	13.67	P
22	ILLATUPA RIVERA, Nancy edid	F	14	10	15	39	13.00	A
23	LIZANA QUISPE, Enrique	M	14	13	13	40	13.33	P
24	LOZANO SALINAS, Dario	M	13	10	15	38	12.67	A
25	MAZZINI OJEDA, Lauren	F	12	11	12	35	11.67	P
26	MONTENEGRO SANTACRUZ, Verónica	F	12	10	13	35	11.67	A
27	NAVARRO ROSSELL, Zoila Isabel	F	13	11	14	38	12.67	P
28	OSORIO HUALLPA, Alberto	M	11	13	16	40	13.33	P
29	PALOMINO FIGEREDO, Carlos	M	12	10	13	35	11.67	A
30	PAUCAR VICTOR, Miguel angel	M	14	13	14	41	13.67	P
31	PICÓN FERMÍN, Karen yanet	F	12	13	15	40	13.33	P
32	ROJAS TAMARIZ, Silvia Esther	F	13	13	14	40	13.33	P
33	SAMA CASTILLO, Cristhián	M	12	12	13	37	12.33	P
34	SANCHEZ HUAYPA, Leonardo	M	13	13	14	40	13.33	P
35	SANCHEZ MATOS, Lilia Karina	F	11	10	12	33	11.00	A
36	SOLÍS FLORES, Wilson Marcelo	M	10	12	13	35	11.67	A
37	TORRES SANTOS, Ivonne	F	13	9	12	34	11.33	A
38	URBINA FANO, Yezenia	F	11	10	13	34	11.33	A
39	VASQUEZ CUEVA, Leslie Mónica	F	13	11	15	39	13.00	P
40	VELASQUEZ CENTENO, Alan	M	10	12	11	33	11.00	A
41	ZACARÍAS PENADILLO, Wilmer	M	12	10	14	36	12.00	A
	PROMEDIO		12.49	11.39	13.54		12.47	

EXTRACTO DEL ACTA DE EVALUACIÓN DEL CUARTO GRADO "B" 1 999

	ASIGNATURAS		LENGUAJE Y LIT.	MATEMÁTICA	BIOLOGÍA	PUNTAJE	PROMEDIO	SITUACIÓN FINAL
ORD	APELLIDOS Y NOMBRES	SEXO	A	F	J		L	
1	ABAD GARCÍA, gregorio	M	10	10	13	33	11.00	A
2	ALVARADO RUEDA, Mayra Paola	F	12	12	14	38	12.67	P
3	BENANCIO CISNEROS, Jesús H.	F	11	11	13	35	11.67	P
4	CACHAY CASTIGLIONI, Aldo	M	13	13	15	41	13.67	P
5	CHAMORRO FERNÁNDEZ, Elizabeth	F	11	12	14	37	12.33	P
6	DÍAZ CONDEZO, Iris Andrés	M	11	10	13	34	11.33	A
7	ERRIBARREN GAMBOA, Elvis	M	12	11	14	37	12.33	P
8	ESPINOZA CAÑOLI, José	M	12	12	15	39	13.00	P
9	FELOMENO CARHUAMPMA, María	F	10	9	13	32	10.67	A
10	FERNÁNDEZ SOTO, Carlos Alberto	M	12	12	14	38	12.67	P
11	GABRIEL ARANDA, Verónica	F	10	11	14	35	11.67	A
12	GONZALES MAIMA, Bertzabé	F	12	13	15	40	13.33	P
13	GUZMÁN PARRA, Alvaro Andy	M	11	10	12	33	11.00	A
14	HUARCAYA HILARES, Liliana	F	13	13	15	41	13.67	P
15	JAÚRIGUI LIZAMA, César Manuel	M	13	12	14	39	13.00	P
16	LAVADO CAYLLAHUA, Silvia Marleny	F	14	11	14	39	13.00	P
17	LEIVA ECHAVARRÍA, Flor de María	F	12	10	13	35	11.67	A
18	LUCAS GAMERO, Paola Roxana	F	11	11	13	35	11.67	P
19	MAYER GARCÍA, Glenn	M	14	14	15	43	14.33	P
20	MEJÍA CALDERÓN, Karina Roció	F	12	11	14	37	12.33	P
21	MENDOZA RENQUILLO, Rolling	M	13	12	16	41	13.67	P
22	MENDOZA VALLE, Doris Yaneth	F	11	10	12	33	11.00	A
23	ORTEGA FLORES, Lizet	F	15	15	16	46	15.33	P
24	OSORIO BARZOLA, Verónica	F	13	14	15	42	14.00	P
25	PALACIOS ARAUJO, Elizabeth	F	9	9	10	28	9.33	R
26	PADILLA OROSCO, Abelardo	M	11	12	12	35	11.67	P
27	PALOMINO BAYLÓN, Maribel Lida	F	13	13	15	41	13.67	P
28	POZO MEZA, Kalina Mayra	F	12	11	14	37	12.33	P
29	RAMOS CARRIÓN, Robinson	M	9	9	12	30	10.00	A
30	REYES VILLARDUÑA, Jesús A.	M	13	13	14	40	13.33	P
31	RIVERA VERDE, Fernando	M	12	11	13	36	12.00	P
32	ROJAS BARCÓN, Liz Karina	F	14	13	14	41	13.67	P
33	ROJAS ROJAS, Iris Delsy	F	12	10	13	35	11.67	A
34	RUFINO MÉNDEZ, Elvis	M	13	13	16	42	14.00	P
35	SANTA CRUZ LLANOS, Lilian Ayda	F	13	11	13	37	12.33	P
36	SOLSOL ROBLES, María Magdalena	F	12	12	15	39	13.00	P
37	TARAZONA MACEDO, Diana	F	10	10	13	33	11.00	A
38	TELLO SOLÓRZANO, Joyce Amelia	F	11	11	14	36	12.00	P
39	TUCTO VARA, Mérylin	F	13	9	13	35	11.67	A
40	VALENCIA CALLUPE, Orlando	M	14	11	12	37	12.33	P
41	VENANCIO JORGE, Nancy Hildina	F	14	12	15	41	13.67	P
42	VILLANUEVA ELÍAS, Manuel	M	10	8	14	32	10.67	A
43	ZÁRATE RODIL, Roy Ytalo	M	13	12	15	40	13.33	P
	PROMEDIO		12	11.37	13.79		12.39	

Anexo Nº 3

LA ENCUESTA APLICADA A LOS DOCENTES DE MATEMÁTICA

1. Nombre del C.E. donde labora: ....

Condición de trabajo : Nombrado ☐ Contratado ☐

2. Posee usted Título Profesional: SÍ ☐ NO ☐

Su título Profesional lo obtuvo en: ISP ☐ UNIV. ☐ OTRO (especifique) ☐........

3. Años de servicio docente: de 0 a 4 ☐ de 5 a10 ☐ de 11 a 15 ☐ de 16 o más ☐

4. En el desarrollo de las clases de matemática en la secundaria, usted incide más en su:

a) Valor formativo y funcional
c) Valor formativo e instrumental
b) Valor funcional e instrumental
d) Valor formativo, funcional e instrumental

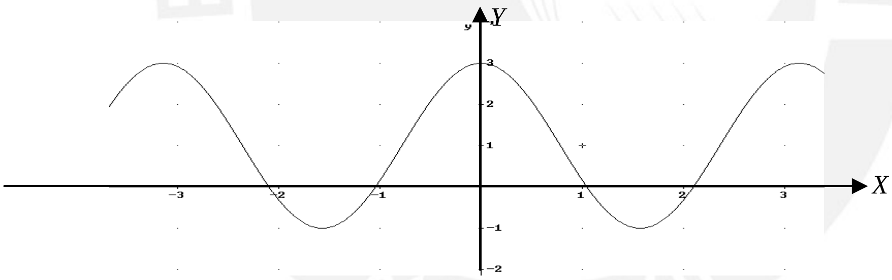
5. ¿En qué porcentaje usted logra los objetivos y contenidos programados para la enseñanza de la matemática en la educación secundaria durante el año:

a) Del 100% a 95% b) Del 94% al 85% c) Del 84% al 75% d) Del 75% o menos

6. Para usted, ¿qué son las funciones trigonométricas?:

a) Funciones algebraicas
c) Funciones Trascendentes
b) Funciones circulares
d) Relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo.

7. El gráfico mostrado representa a la función:



a) y = sen(x) +2 b) y = 2cos(2x) +1 c) y = 2cos(x) +1 d) y = cos(x) + 2

8. ¿Qué dificultades tienes cuando enseñas el tema de funciones trigonométricas?

a) Horas de clase insuficientes.

b) Falta bibliografía y material didáctico.

c) Los alumnos muestran poco interés por aprender Matemática.

d) Exceso de actividades extra – curriculares.

9. ¿Qué bibliografía utiliza usted como texto de consulta para preparar su clase de matemática en el Quinto Grado de Secundaria?

....

10. ¿Qué textos escolares recomienda usted a sus alumnos para que refuercen los temas del capítulo de trigonometría en el quinto grado de secundaria?

 ....
 ....

11. ¿Ha elaborado usted algún material didáctico o separata para optimizar su acción docente en el aprendizaje de la Matemática para sus alumnos?

SÍ ☐ ¿Cuántas? ☐ ¿Con qué frecuencia?: Mensual Bimestral Semestral Anual
NO ☐ ¿Por qué? ....
....

12. ¿Cuál de los métodos didácticos sueles utilizar con más frecuencia durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática?

a) Método expositivo - dialogal c) Método aula laboratorio
b) Método inductivo-deductivo d) Método de estudio dirigido

13. ¿Qué debe predominar en el profesor para que se logre en su plenitud los objetivos propuestos?

a) Conocer los contenidos de su curso a nivel superior.
b) Manejar diversos procedimientos didácticos y metodológicos.
c) Conocer, diseñar el aprendizaje de acuerdo a la realidad.
d) Reciclarse e innovarse con los avances curriculares y metodológicos.

14. ¿Usted usa calculadoras científicas o recursos informáticos para optimizar el aprendizaje de la Matemática de tus alumnos?

a) NO : Por qué: ....
b) SÍ: Por qué: ....
c) ¿Qué software matemático utilizas?
....

Anexo Nº 4

a) Encuesta aplicado a 320 alumnos del quinto grado de educación secundaria (población de estudio).

REACTIVOS	ALTERNATIVAS					TOTAL
1. Opinión sobre la asignatura	Difícil	Aburrido	Fácil	Interesante		
2. Opinión sobre el aprendizaje logrado	Excelente	Bueno	Regular	Deficiente		
3. Frecuencia de uso y elaboración de materiales didácticos	Por clase	Semanal	Mensual	Bimestral	No elabora	
4. Estudio del curso fuera de horas de clase	1 hora	2 horas	3 horas	> 3 horas	< 1 hora	
5. Factores que dificultan el aprendizaje	Muchas horas de clase	Pocas horas de clase	Falta de libros	Método del profesor	Falta de base	
6. Métodos o procedimientos de enseñanza utilizados por el docente-	Inductivo - deductivo	Personali-zado	Estudios grupales	Expositivo	Estudio dirigido	

b) Encuesta aplicado a 40 alumnos pertenecientes al grupo de experimental (muestra)

REACTIVOS	ALTERNATIVAS				TOTALES
	Muy buena	Buena	Regular	deficiente	
1. Aprendizaje logrado sobre trigonometría.					
2. Forma de enseñar del profesor					
3. Preparación académica del profesor					
4. Contenido del Modelo Didáctico.					
5. Método utilizado por el profesor.					
6. Motivación para seguir estudios superiores					
7. Utilidad del Modelo Didáctico.					
8. Resultados del aprendizaje individual y grupal					

Anexo Nº 5

LISTA DE COTEJO DEL PROCESO ENSEÑANZA - APRENDIZAJE

PARA EL DOCENTE		
ASPECTOS	APRECIACIÓN	
1.Planificación y preparación de clases.	**SI**	**NO**
Plantea los temas y las fechas de los temas a estudiar.		
Indican los prerrequisitos de los temas a tratar.		
Precisa los objetivos a lograr en el estudio.		
Prevé el uso de medios y materiales didácticos		
2. Proceso de desarrollo de contenidos		
El docente expresa lo fundamental del tema y su problemática		
El docente presta ayuda a algunos puntos no claros		
El docente ayuda y coordina con los alumnos		
Distribuye las tareas en grupos de estudio		
Da normas complementarias para el mejor aprovechamiento		
Acompaña su clase con abundante material didáctico		
Permite participación del alumno a través de preguntas sobre el tema.		
3. Proceso de evaluación y fijación		
El docente propicia la autoevaluación		
El docente actúa como moderador en el proceso de coevaluación		
El docente deja tareas individuales y grupales		
Participa del sistema de evaluación del tema		
Proponen lecturas adicionales de reforzamiento		

PARA EL ALUMNO		
ASPECTOS	APRECIACIÓN	
1.Planificación y preparación de clases.	SI	NO
Participan en la preparación del Modelo Didáctico		
Usan bibliografía adicional al Modelo Didáctico.		
Considera procedimientos de evaluación		
2. Proceso de presentación de contenidos		
Preparan y solucionan adecuadamente las tareas previas		
Sólo escucha las orientaciones y explicación del profesor		
En cada sesión los estudiantes exponen su avance		
Realizan discusiones sobre la resolución de ejercicios		
Con el apoyo del docente plantean y coordinan conclusiones		
Solicitan ayuda al docente para aclarar algunos puntos		
Hacen uso de técnicas de estudio para lograr su aprendizaje		
3. Proceso de evaluación y fijación		
Desarrollan en grupo las tareas planteadas en el modelo		
El representante de cada grupo expone sus resultados		
Participa en la evaluación a sus compañeros		
El representante de cada grupo plantea las dudas del tema		
El docente actúa como moderador		

Anexo Nº 6
PRUEBA DE REQUISITOS Y RESULTADOS

1. Diga, ¿cuáles de las siguientes conjuntos son funciones y cuáles no lo son?

   a) $f = \{ (1 , 1), (2 , 4), (3 , 9), ... \}$ c) $g = \{ (x , y) \in 3^2 / y^2 = 3x \}$

   b) $h = \{ (x , y) \in 3^2 / x^2 + y^2 = 4 \}$ d) $j = \{ (x , y) \in 3^2 / x.y = 6 \}$

2. Halle el dominio y el rango de la funciones e ilustre sus respectivos gráficos:

   a) $f(x) = 2x - 3$ b) $h(x) = x^2 - 1$ c) $g(x) = \sqrt{x-2}$ d) $j(x) = \dfrac{1}{x-1}$

3. ¿Cuáles de las siguientes funciones son periódicas?

   a) $\{ \ldots (2 , 7), (2\tfrac{1}{2} ,-3), (3 , 7), (3\tfrac{1}{2} , -3), (4 , 7), (4\tfrac{1}{2} , -3), ... \}$

   b) $\{ \ldots (-7 , -2), (-4 , -2), (-1 , -2), (2 , -2), (5 , -2), (8 , -2), \ldots \}$

   c) $\{ \ldots, (-5 , 2), (-3 , -1), (-1 , 2), (1 , -1), (3 , 2), (5 , -1), \ldots \}$

4. De las siguientes funciones reales, ¿cuáles son pares y cuáles son impares?.

   a) $f(x) = x^2 -2x + 1$ b) $g(x) = = x^2 - 1 \}$ c) $h(x) = \sqrt{x+1}$

5. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas?

   a) Si una función es biyectiva, entonces admite inversa :...............................

   b) Si una función es creciente, entonces es impar: ....

6. Dados los puntos $A = (1 , -2)$, $B = (-3 , 4)$ y $C = (3 , 3)$, encuentre:

   a) $d(A , B)$ b) $d(B , C)$ c) $d(A , C)$

7. Complete según usted crea conveniente:

   a) El simétrico del punto (–3 , 5) respecto al eje *X*, es el punto: ______

   b) El simétrico del punto (3 , –4) respecto al eje *Y*, es el punto: ______

   c) El simétrico del punto (–3 , 7) respecto al origen, es el punto: ______

8. Dado la función $y = f(x) = \sqrt[3]{2x-3}$ la inversa de *f* es la función:

   a) $g(x) = \dfrac{x^2+3}{2}$ b) $g(x) = \dfrac{x+3}{2}$ c) $g(x) = \dfrac{x^3+3}{2}$

9. a) En un triángulo rectángulo los ángulos agudos miden 30º y 60º, si la medida de la hipotenusa es 6m. La longitud de los catetos son: ....

b) Si un ángulo agudo de un triángulo rectángulo mide 45º complete los elementos de dicho triángulo: ....

10. De las afirmaciones ¿Cuál es verdadero (V) y cuál falso (F)?

    a) La pareja ordenada (8 , –4) pertenece al conjunto $\{(x , y) / 2y = x^2 \}$..... ( )

    b) La pareja ordenada (–2 , –7) corresponde al cuadrante IV..................... ( )

    c) $P(0{,}4 , 0{,}6)$ es un punto de la circunferencia es $x^2 + y^2 = 1$.................. ( )

RESULTADOS DE LA PRUEBA DE REQUISITOS DEL GRUPO EXPERIMENTAL Y DE CONTROL

GRUPO EXPERIMENTAL 5º B				GRUPO CONTROL – 5º A	
Nro	APELLIDOS Y NOMBRES	NOTA		APELLIDOS Y NOMBRES	NOTA
1	ABAD GARCÍA, Gregorio	7	1	ACOSTA BUSTAMANTE, Armando	12
2	ALVARADO RUEDA, Mayra Paola	11	2	APAC TOLEDO, Robert Paul	11
3	BENANCIO CISNEROS, Jesús H.	8	3	ARANA CAMA, Lizbeth Marina	8
4	CACHAY CASTIGLIONI, Aldo	10	4	ARBILDO SORIA, Ivan	11
5	CHAMORRO FERNÁNDEZ, Elizabeth	7	5	ASTUHUAMAN ABAD, Betsabé	7
6	DÍAZ CONDEZO, Iris Andrés	6	6	ÁVILA ACERO, Vanessa	6
7	ERRIBARREN GAMBOA, Elvis	12	7	CABA TAMAYO, Randú Jesús	11
8	FELOMENO CARHUAMPMA, María	8	8	CABELLO MEDRANO, Diofanto	10
9	FERNÁNDEZ SOTO, Carlos Alberto	6	9	CARBAJAL ANDRADE, Juan	8
10	GABRIEL ARANDA, Verónica	12	10	CISNEROS FLORES, Luisa	11
11	GONZALES MAIMA, Bertzabé	9	11	DAZA CABALLERO, Gladys C.	8
12	GUZMÁN PARRA, Alvaro Andy	7	12	DEL ÁGUILA PÉREZ, Carlos	7
13	HUARCAYA HILARES, Liliana	9	13	DEL ÁGUILA TRUJILLO, Helen	9
14	JAÚRIGUI LIZAMA, César Manuel	5	14	ESPINOZA CÁCERES, Belissa	6
15	LAVADO CAYLLAHUA, Silvia M.	10	15	ESPINOZA LIVIAS, Eleodoro	10
16	LEIVA ECHAVARRÍA, Flor de María	8	16	FERNANDEZ ACEVEDO, Vanesa	8
17	LUCAS GAMERO, Paola Roxana	14	17	FILOMENO CARHUAPOMA, Josefino	12
18	MAYER GARCÍA, Glenn	13	18	GODOY POLIDO, Emily	14
19	MEJÍA CALDERÓN, Karina Roció	12	19	GONZÁLES PÉREZ, Plero	11
20	MENDOZA RENQUILLO, Rolling	11	20	HERRERA SINTI, Katia	13
21	MENDOZA VALLE, Doris Yaneth	9	21	HUERTO DE LA CRUZ, Yesenia	9
22	ORTEGA FLORES, Lizet	12	22	ILLATUPA RIVERA, Nancy edid	12
23	OSORIO BARZOLA, Verónica	13	23	LIZANA QUISPE, Enrique	7
24	PALACIOS ARAUJO, Elizabeth	5	24	LOZANO SALINAS, Dario	12
25	PALOMINO BAYLÓN, Maribel Lida	12	25	MAZZINI OJEDA, Lauren	15
26	POZO MEZA, Kalina Mayra	6	26	MONTENEGRO SANTACRUZ, Verónica	6
27	RAMOS CARRIÓN, Robinson	9	27	NAVARRO ROSSELL, Zoila Isabel	10
28	REYES VILLARDUÑA, Jesús A.	11	28	OSORIO HUALLPA, Alberto	7
29	RIVERA VERDE, Fernando	9	29	PALOMINO FIGEREDO, Carlos	8
30	ROJAS BARCÓN, Liz Karina	12	30	PAUCAR VICTOR, Miguel angel	14
31	ROJAS ROJAS, Iris Delsy	14	31	PICÓN FERMÍN, Karen yanet	13
32	RUFINO MÉNDEZ, Elvis	10	32	ROJAS TAMARIZ, Silvia Esther	8
33	SANTA CRUZ LLANOS, Lilian Ayda	7	33	SAMA CASTILLO, Cristhián	11
34	SOLSOL ROBLES, María Magdalena	9	34	SANCHEZ HUAYPA, Leonardo	9
35	TARAZONA MACEDO, Diana	13	35	SANCHEZ MATOS, Lilia Karina	13
36	TELLO SOLÓRZANO, Joyce Amelia	10	36	SOLÍS FLORES, Wilson Marcelo	8
37	TUCTO VARA, Mérylin	12	37	TORRES SANTOS, Ivonne	12
38	VENANCIO JORGE, Nancy Hildina	8	38	URBINA FANO, Yezenia	6
39	VILLANUEVA ELÍAS, Manuel	13	39	VALENTÍN MEZA, Wendy Vaneza	13
40	ZÁRATE RODIL, Roy Ytalo	11	40	VASQUEZ CUEVA, Leslie Mónica	7
	NOTA MAYOR	14	41	VELASQUEZ CENTENO, Alan	10
	NOTA MENOR	5	42	ZACARÍAS PENADILLO, Wilmer	9
	PROMDIO	9,75		NOTA MAYOR	15
	VARIANZA	6,50		NOTA MENOR	6
	DESVIACIÓN ESTANDAR	2,55		PROMDIO	9,81
	COEF. DE VARIACIÓN	0,26		VARIAZA	6,30
	RANGO	9		DESVIACIÓN ESTANDAR	2,51
				COEF. DE VARIACIÓN	0,256
				RANGO	9

Anexo Nº 7: SESIONES DE APRENDIZAJE

ESQUEMA DE SESIÓN DE APRENDIZAJE Nº 01

I.- Datos Generales

1. Centro Educativo : Colegio Nacional de Aplicación Hermilio Valdizán
2. Asignatura : Matemática
3. Grado y Sección : 5º B
4. Profesor : Vilchez Guizado, Jesús

II.- Información sobre el proceso de enseñanza - aprendizaje

2.1 Tema: Arcos orientados y función envolvente en la circunferencia unitaria.

2.2 Unidad didáctica: Primera

2.3 Objetivo de la unidad: Definir arcos y ángulos orientados sobre la circunferencia unitaria, y definir la función envolvente.

2.4 Objetivos específicos:

1. Identificar la ecuación cartesiana de la circunferencia unitaria.
2. Distinguir los arcos orientados y puntos terminales en la circunferencia unitaria.
3. Determinar las coordenadas del punto terminal en una función envolvente.
4. Determinar las coordenadas de los extremos de los arcos notables en la $\mathcal{C}_1(O)$.
5. Identificar los Fenómenos periódicos y la perioricidad de la función E.

2.5 Fecha y tiempo: Del 17-04-00 al 21-04-00; 06 horas pedagógicas.

2.6 Metodología didáctica:

2.6.1 Métodos: Deductivo - inductivo, heurístico.

2.6.2 Procedimientos: Observación, comparación, abstracción y generalización.

2.6.3 Técnicas: Trabajo individual, trabajo en equipo, práctica grupal.

2.7 Medios y Materiales: Modelo Didáctico; hilo, círculo de triplay, compás, papelote, plumones y Cuaderno de Ejercicios.

III.- Contenidos

CONCEPTOS	PROCEDIMIENTO	ACTITUDES
FUNCIÓN ENVOLVENTE 1. La ecuación cartesiana de la circunferencia unitaria. 2. Arcos coterminales y función envolvente en la circunferencia unitaria. 3. Coordenadas del punto terminal en una función envolvente. 4. Coordenadas de los extremos de los arcos notables en la $\mathcal{C}_1(0)$. 5. Fenómenos periódicos y función periódica.	Deducen y aplican la ecuación de la circunferencia unitaria con centro en el origen de coordenadas. Identifican y definen arcos circulares, el dominio y rango de una función envolvente y arcos coterminales. Identifican las coordenadas de los extremos de los arcos notables sobre la circunferencia unitaria: $\theta = \pi/4, \pi/3, \pi/2, \pi/6$, etc. Determinan diversos fenómenos periódicos y los grafican. Resuelven ejercicios y problemas diversos sobre arcos en la circunferencia.	Manifiesta interés y atención en la hora de clase. Trabaja con honestidad y alegría. Persevera en la resolución de problemas con empeño y esfuerzo.

IV. Plan de ejecución del proceso enseñanza – aprendizaje

SITUACIÓN	ESTRATEGIA	MATERIALES	TIEMPO
PRUEBA DE ENTRADA Prof. →Alumno	Se administra una prueba de 05 ítems referidos al tema de medidas angulares que se desarrolla en la clase.	Modelo Didáctico, lapiceros, compás, papel graduada, hilo.	30’
MOTIVACIÓN Prof. →Alumno Alumno Profesor	1. Se realiza un trabajo taller grupal relacionar las medidas de la circunferencia y el diámetro de objetos circulares. 2. Se deduce el valor aproximado del número irracional π.	Modelo Didáctico Latas u otros objetos circulares. Centímetros.	30’

CONCEPTOS	PROCEDIMIENTO	ACTITUDES
FUNCIÓN ENVOLVENTE 1. La ecuación cartesiana de la circunferencia unitaria. 2. Arcos coterminales y función envolvente en la circunferencia unitaria. 3. Coordenadas del punto terminal en una función envolvente. 4. Coordenadas de los extremos de los arcos notables en la $\mathcal{C}_1(O)$. 5. Fenómenos periódicos y función periódica.	Deducen y aplican la ecuación de la circunferencia unitaria con centro en el origen de coordenadas. Identifican y definen arcos circulares, el dominio y rango de una función envolvente y arcos coterminales. Identifican las coordenadas de los extremos de los arcos notables sobre la circunferencia unitaria: $\theta = \pi/4, \pi/3, \pi/2, \pi/6$, etc. Determinan diversos fenómenos periódicos y los grafican. Resuelven ejercicios y problemas sobre arcos en la circunferencia.	Manifiesta interés y atención en la hora de clase. Trabaja con honestidad y alegría. Persevera en la resolución de problemas con empeño y esfuerzo.

IV. Plan de ejecución del proceso enseñanza – aprendizaje

SITUACIÓN	ESTRATEGIA	MATERIALES	TIEMPO
PRUEBA DE ENTRADA Prof. →Alumno	Se administra una prueba de 05 ítems referidos al tema de medidas angulares que se desarrolla en la clase.	Modelo Didáctico, lapiceros, compás, papel graduada, hilo.	30’
MOTIVACIÓN Prof. →Alumno Alumno Profesor	1. Se realiza un trabajo taller grupal relacionar las medidas de la circunferencia y el diámetro de objetos circulares. 2. Se deduce el valor aproximado del número irracional π.	Modelo Didáctico Latas u otros objetos circulares. Centímetros.	30’
INICIO Profesor	Recuperación de conocimientos previos mediante una breve lluvia de conceptos vertidos en el desarrollo de prerrequisitos. Se identifica la ecuación de la circunferencia unitaria en posición normal.	Modelo Didáctico Papelote Cuaderno de Ejercicios. hilo	30`
PROCESO Prof. →Alumno (Modelo Didáctico)	1. A partir del hilo de longitud L y el círculo de triplay, se define la $C_1(O)$ en 3^2. 2. Se definen los arcos coterminales sobre la circunferencia unitaria. 3. Se define y se identifican los arcos determinados sobre $C_1(O)$ por la función envolvente. 4. Se esclarecen las trayectorias periódicas que se determinan en la $C_1(O)$.	Modelo Didáctico Plumón Papelotes Transportador. Hilo. Circulo de triplay	90’
SALIDA	Los alumnos resuelven los ejercicios planteados con la asesoría del profesor, este aclarará las dudas que existan en los alumnos. Los alumnos resuelven los ejercicios de comprobación del aprendizaje. Discuten y comparan sus resultados obtenidos.	Modelo Didáctico Plumón , Reglas Guía de observación. Compás.. Hoja de ejercicios	60`
FIJACIÓN	El docente propicia la autoevaluación y coevaluación. Y da un resumen del tema desarrollado.	Modelo Didáctico Cuestionario Papelote.	30’

V.- Evaluación

CRITERIOS	INDICADORES	INSTRUMENTOS
Razonamiento, deducción, abstracción y demostración. Manejo de conceptos y algoritmos. Interpretación y representación gráfica. Resolución de problemas	Identifica y genera ejemplos. Esquemas y/o pasos para realizar ejercicios. Explica, define, representa y distingue los conceptos y relaciones. Formula, resuelve, elabora, traduce ejemplos a partir del contexto conceptual	Modelo Didáctico Exposición. Prácticas dirigidas Tareas domiciliarias

Bibliografía: -) SANTILLANA, (1999) Símbolo. Matemática secundaria 3 y 5.
-) NICHOLS, Eugene (1970) Trigonometría moderna)

ESQUEMA DE SESIÓN DE APRENDIZAJE Nº 02

I.- Información sobre el proceso de enseñanza - aprendizaje

1.1 Tema: Ángulos y arcos orientados: sus medidas.

1.2 Unidad didáctica: Segunda.

1.3 Objetivo de la unidad: Determinar las medidas de ángulos y arcos: sus equivalencias en distintos sistemas

1.4 Fecha y tiempo: 24-04-00 al 28-04-00; 06 horas pedagógicas.

1.5 Objetivos específicos:

1. Definir el ángulo trigonométrico a partir de los arcos de la circunferencia unitaria.
2. Establecer los sistemas de medidas angulares sexagesimal y radial.
3. Determinar con ayuda del círculo de triplay, el valor de un radián y su equivalencia en grados.
4. Deducir fórmulas para calcular la longitud de arco de circunferencia y sector circular.

1.6 Metodología didáctica:

1.6.1 Métodos: Deductivo – inductivo, heurístico, socrático, aula laboratorio.
1.6.2 Procedimientos: Observación, comparación, abstracción y generalización.
1.6.3 Técnicas: Trabajo individual, trabajo bipersonal, práctica individual y grupal.

1.7 Medios y Materiales: Modelo Didáctico; hilo, círculo de triplay, regla, compás, papelote, plumones y Cuaderno de Ejercicios.

II.- Contenidos

CONCEPTOS	PROCEDIMIENTO	ACTITUDES
ÁNGULO TRIGONOMÉTRICO 1.Definición del ángulo trigonométrico y su relación con arcos de la circunferencia unitaria; ángulo en posición normal 2. Sistemas de medidas angulares: sexagesimal y radial. 3. Cálculo del valor del radián y su equivalencia en grados. 4. Ángulo Central y Longitud de Arco de Circunferencia.	Identifican con ayuda de un círculo de madera la relación entre el ángulo central y el arco de circunferencia. Realizan conversiones de medidas angulares expresados en radianes a sexagesimales y viceversa. Resuelven ejercicios y problemas diversos sobre sistema de mediadas angulares.	Manifiesta interés y atención en la hora de clase. Trabaja con honestidad y alegría en el estudio del material. Persevera en la resolución de problemas con empeño y esfuerzo. Desarrolla el espíritu de colaboración.

III...Ejecución del proceso enseñanza – aprendizaje

SITUACIÓN	ESTRATEGIA	MATERIALES	TIEMPO
PRUEBA DE ENTRADA Prof. →Alum.	Se administra una prueba de 05 ítems referidos al tema de medidas angulares que se desarrolla en la unidad.	Modelo Didáctico lapiceros, papel, transportador, compás.	30’
MOTIVACIÓN Prof. →Alum. Alumno Profesor	1. Se recuerda la idea de ángulo aprendido en el Cuarto Grado de Secundaria. 2. Se recuerda el concepto de ángulo central en una circunferencia arbitraria. 3. Se formulan preguntas referentes al cálculo de ángulos.	Modelo Didáctico latas u otros objetos circulares. Centímetro.	30’
INICIO (Modelo Didáctico)	Se deduce el concepto de ángulo central en la circunferencia y se precisan las medidas angulares y su equivalencia.	Modelo Didáctico papelote Pizarra Cuaderno de Ejercicios.	30`

PROCESO Prof. →Alum. (Modelo Didáctico)	1. Se relaciona los arcos y el ángulo central que determinan el circulo unitario en un papelote. 2. Se da la idea de grado, minuto y segundo sexagesimal en la circunferencia unitaria. 3. Se define 1 radián y se identifica sistema radial de medida angular, estableciendo su equivalencia con la medida en grados. 4. Se deducen fórmulas para hallar la longitud de arco y área de sectores circulares.	Modelo Didáctico círculo de triplay, compás, transportador, papelotes, plumones, pizarra Cuaderno de Ejercicios, calculadora científica.	90’
SALIDA (Alumnos)	Completan los datos que faltan en las líneas punteadas durante una hora de clase, luego recibe cada grupo asesoría del profesor, en la siguiente clase 4 grupos elegidos en forma aleatoria exponen lo estudiado en la clase anterior para socializar el trabajo, durante 15 minutos cada uno.	Modelo Didáctico plumón Reglas Modelo Didáctico Guía de observación. Compás y Lápices.	60`
FIJACIÓN Profesor	El docente propicia la autoevaluación y coevaluación. Finalmente se hace un proceso de retroalimentación del tema, para que no queden dudas.	Tiza Papelote. Pizarra.	30’

IV.- Evaluación

CRITERIOS	INDICADORES	INSTRUMENTOS
Razonamiento, deducción, abstracción y demostración. Manejo conceptos, propiedades y algoritmos. Interpretación y representación gráfica. Resolución de problemas. Autoevaluación y coevaluación	Identifica y genera ejemplos. Desarrolla los ejercicios de autoevaluación y discute la validez de su procedimiento y el resultado obtenido. Explica, define, representa y distingue los conceptos y relaciones. Formula, resuelve, elabora, traduce ejemplos a partir del contexto conceptual	Modelo Didáctico Exposición. Prácticas grupales e individuales. Tareas domiciliarias

V.- Referencia bibliográfica

1. SANTILLANA, (1999) Símbolo. Matemática secundaria 3 y 5.
2. LONDOÑO, Nelson (1988) Matemática progresiva 5: Geometría analítica y trigonometría.
3. POÉMAPE, Alfonso (1999) Matemática 5.
4. BOYLE, Patrick (1990) Trigonometría con aplicaciones. Con ejercicios para calculadora.

ESQUEMA DE SESIÓN DE APRENDIZAJE Nº 03

I.- Información sobre el proceso de enseñanza - aprendizaje

1.1 Tema: Funciones trigonométricas: coseno, seno, tangente, cotangente, secante y cosecante..

1.2 Unidad didáctica: Tercera

1.3 Objetivo de la unidad: Definir las funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante, identificando sus dominios, rangos, gráficas y algunas propiedades.

1.4 Objetivos específicos:

1. Definir las funciones trigonométricas Seno y Coseno a partir de los puntos sobre la circunferencia unitaria, en término de éstos las otras cuatro funciones.
2. Identificar los valores y signos de las seis funciones trigonométricas en los cuatro cuadrantes del sistema de coordenadas rectangulares.
3. Establecer relaciones entre las funciones trigonométricas a partir de su definición.

1.5 Fecha y tiempo: 01-05-00 al 05-05-00, 06 horas pedagógicas.

1.6 Metodología didáctica:

2.6.1 Métodos: Deductivo – inductivo, heurístico, proyectos.

2.6.2 Procedimientos: Observación, comparación, abstracción y generalización.

2.6.3 Técnicas: Trabajo individual, trabajo en equipo, práctica grupal.

1.7 Medios y Materiales: Modelo Didáctico; círculo de triplay, regla, compás, papelote, plumones y Cuaderno de Ejercicios.

II.- Contenidos

CONCEPTOS	PROCEDIMIENTO	ACTITUDES
FUNCIONES: COSENO, SENO, TANGENTE, COTANGENTE, SECANTE Y COSECANTE 1. Definición de las SEIS funciones trigonométricas a partir de los puntos sobre la circunferencia unitaria. 2. Signos de las SEIS funciones trigonométricas en los cuatro cuadrantes del sistema de coordenadas. 3. Relaciones entre funciones trigonométricas a partir de su definición en la circunferencia unitaria.	Deducen a partir de los puntos pertenecientes a la circunferencia unitaria los conceptos de las funciones trigonométricas seno y coseno, y de éstos las otras cuatro funciones trigonométricas. Identifican los signos de las funciones trigonométricas en los cuadrantes. Establecen relaciones entre las funciones trigonométrica a partir de su definición como puntos de la circunferencia unitaria. Determinan los valores cuadrantales de las funciones trigonométricas. Resuelven ejercicios y problemas diversos sobre arcos en la circunferencia.	Manifiesta interés y atención en la hora de clase. Trabaja con honestidad y perseverancia. Persevera en la resolución de problemas con empeño y esfuerzo. Respeto a los demás y es flexible frente a las diferencias en proceder para resolver un mismo problema, es solidario y responsable en el trabajo.

IV. Ejecución del proceso enseñanza – aprendizaje

SITUACIÓN	ESTRATEGIA	MATERIALES	TIEMPO
PRUEBA DE ENTRADA Prof. →Alumno	Se administra una prueba de 07 ítems referidos al tema de las funciones trigonométricas seno y coseno.	Modelo Didáctico lapiceros, papel, reglas, compás.	30’
MOTIVACIÓN Prof. →Alumno Alumnos	1. Se identifica si un par ordenado pertenece o no a la gráfica de una función. 2. Se establecen relaciones entre las coordenadas de puntos en la circunferencia unitaria. 3. Se formulan preguntas referentes al problema planteado.	Modelo Didáctico latas u otros objetos circulares. Centímetros.	30’

INICIO Profesor Prof. →Alumno	Se identifica todos los elementos de la circunferencia unitaria en un papelote y los puntos de ella, según cuadrantes.	Modelo Didáctico papelote *Cuaderno de Ejercicios.*	30`
PROCESO Prof. →Alum. Profesor Alumno	1. Se extrae la idea y se formaliza la definición de circunferencia unitaria en un papelote: 2. Se definen las funciones trigonométricas seno y coseno, y de aquí las otras cuatro. 3. Se identifican los signos de las funciones seis trigonométricas, según cuadrantes. 4. Se identifican y demuestran las identidades trigonométricas básicas.	Modelo Didáctico papelotes Formulario. Círculo de triplay compás, regla, plumones, fichas, Cuaderno de Ejercicios. Programa Derive, calculadora científica	90’
SALIDA Prof. →Alumno Alumnos	En un tiempo de 45 minutos los mismos grupos resuelven los “**ejercicios de autoevaluación**”; luego dan alcance de sus resultados a sus compañeros de otros grupos para que comparen y homogenicen sus respuestas.	Modelo Didáctico Guía de observación. Compás.	60`
FIJACIÓN Alumnos	Se entrega la unidad modular a tratarse en la próxima clase, para que los alumnos estén repasando con antelación.	Modelo Didáctico	30’

V.- Evaluación

CRITERIOS	INDICADORES	INSTRUMENTOS
Razonamiento, deducción, abstracción y demostración. Manejo de conceptos y de algoritmos. Interpretación y representación gráfica. Resolución de problemas	Completan los espacios en blanco que se consignan en el modelo. Esquemas y/o pasos para realizar ejercicios. Explica, define, representa y distingue los conceptos y relaciones. Formula, resuelve, elabora, traduce ejemplos a partir del contexto conceptual	Modelo Didáctico Guía de observación Exposición. Prácticas dirigidas Tareas domiciliarias

V.- Referencia bibliográfica

1. SANTILLANA, (1999) Símbolo. Matemática secundaria 3 y 5.
2. LONDOÑO, Nelson (1988) Matemática progresiva 5: Geometría analítica y trigonometría.
3. POÉMAPE, Alfonso (1999) Matemática 5.
4. BOYLE, Patrick (1990) Trigonometría con aplicaciones. Con ejercicios para calculadora.

ESQUEMA DE SESIÓN DE APRENDIZAJE Nº 04

I.- Datos Generales

1. Centro Educativo : Colegio Nacional de Aplicación Hermilio Valdizán
2. Asignatura : Matemática
3. Profesor : Vilchez Guizado, Jesús

II.- Información sobre el proceso de enseñanza - aprendizaje

2.1 Tema: Propiedades, dominios y rangos, y gráficas correspondientes de las funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

2.2 Unidad didáctica: Cuarta.

2.3 Objetivo de la unidad: identificar las propiedades, dominios y rangos, gráficos de las funciones trigonométricas en el sistema de coordenadas rectangulares.

2.4 Objetivos específicos:

1. Determinar las propiedades de las funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante, a partir de la definición.
2. Trazar el gráfico de las funciones: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante identificando su dominio, rango, período y características.

2.5 Fecha y tiempo: 08-05-00 al 12-05-00; 06 horas pedagógicas.

2.6 Metodología didáctica:

2.6.1 Métodos: Deductivo – inductivo, heurístico.
2.6.2 Procedimientos: Observación, comparación, abstracción y generalización.
2.6.3 Técnicas: Trabajo individual, trabajo en equipo, práctica grupal.

2.7 Medios y Materiales: Modelo Didáctico; círculo de triplay, regla, compás, papelote, plumones y Cuaderno de Ejercicios.

III.- Contenidos

CONCEPTOS	PROCEDIMIENTO	ACTITUDES
PROPIEDADES Y GRÁFICAS:_ DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS SENO, COSENO, NCIÓN TANGENTE, COTANGENTE, SECANTE Y COSECANTE 1. Propiedades de las funciones seno y coseno 2. Líneas seno y coseno en la circunferencia unitaria. 3. Gráfico de la función seno y coseno , dominio, rango y características. 4. Propiedades de las funciones tangente y cotangente 5. Líneas tangente y cotangente en la circunferencia unitaria. 6. Gráfico de la función tangente y cotangente , dominio, rango y características. 7. Propiedades de las funciones secante y cosecante. 8. Gráfico de la función seno y coseno , dominio, rango y características.	Identifican las propiedades de las funciones seno y coseno. Analizan el comportamiento de las líneas seno y coseno en la circunferencia unitaria en el sistema de coordenadas rectangulares. Trazan las gráficas de la función seno y coseno e identifican sus propiedades. Identifican las propiedades de las funciones tangente y cotangente. Trazan y analizan el comportamiento de las líneas tangente y cotangente en la circunferencia unitaria. Trazan las gráficas de la función secante y cosecante e identifican sus propiedades. Determinan el dominio y rango de las funciones secante y cosecante. Trazan las gráficas de la función secante y cosecante e identifican sus propiedades.	Manifiesta interés y atención en la hora de clase. Trabaja con honestidad y alegría. Persevera en la resolución de problemas con empeño y esfuerzo.

IV. Ejecución del proceso enseñanza – aprendizaje

SITUACIÓN	ESTRATEGIA	MATERIALES	TIEMPO
PRUEBA DE ENTRADA Prof. →Alumno	Se administra una prueba de 07 ítems referidos a conceptos relacionados con las funciones trigonométricas: tangente, cotangente, secante y cosecante.	Lapiceros, papel, reglas, compás.	30’
MOTIVACIÓN Profesor Prof. →Alumno Alumno	1. Se identifica las asíntotas verticales en una función real de variable real. 2. Se identifica en la circunferencia trigonométrica ángulos de distintas medidas. 3. Se ubican puntos en la $\mathcal{C}_1(O)$ para cada ángulo o arcos, y se trazan líneas en el eje cartesiano para trazar las curvas correspondientes. 4. Se indica graficar las curvas correspondientes a ángulos o arcos.	Papelote Pizarra Cuaderno de Ejercicios. Mota	30’
INICIO Profesor Prof. →Alumno	1. Se explica sobre las líneas seno en el círculo unitario de triplay. 2. Se analiza la variación de la función tangente, cotangente, secante y cosecante en los cuatro cuadrantes.	Papelote Pizarra Cuaderno de Ejercicios. Mota	30`
PROCESO Profesor Alumnos Prof. →Alumno	1. Se resume en un cuadro, datos de los valores de las seis funciones analizadas. 2. Se procede a la construcción de la curva $y = \text{sen}(\theta)$ e $x = \cos(\theta)$. 3. A partir del gráfico $y = \tan(\theta)$ e $y = \cot(\theta)$, construido, se describe sus características. 4. A partir del gráfico $y = \sec(\theta)$ e $y = \csc(\theta)$, construido, se describe sus características.	Modelo Didáctico Papelotes Formulario. Círculo de triplay compás, regla, plumones, fichas, Cuaderno de ejercicios. Programa Derive, calculadora científica	90’
SALIDA Prof. →Alumno Alumnos	Los alumnos resuelven los ejercicios planteados con la asesoría del profesor, este aclarará las dudas que existan en los alumnos. Los alumnos resuelven los ejercicios de comprobación del aprendizaje. Discuten y comparan sus resultados obtenidos.	Plumón Reglas Modelo Didáctico Guía de observación. Compás. Hoja de ejercicios	60`
FIJACIÓN Alumnos	Los alumnos atienden la explicación y realizan el estudio del tema en el material impreso, completan los espacios en blanco y cotejan sus resultados.	Tiza Papelote. Cuaderno de Ejercicios	30’

V.- Evaluación

CRITERIOS	INDICADORES	INSTRUMENTOS
•Razonamiento, deducción, abstracción y demostración. •Manejo conceptos y de algoritmos. •Interpretación y representación gráfica. •Resolución de problemas	•Identifica y genera ejemplos. •Esquemas y/o pasos para realizar ejercicios. •Explica, define, representa y distingue los conceptos y relaciones. •Formula, resuelve, elabora, traduce ejemplos a partir del contexto conceptual	Modelo Didáctico Exposición. Prácticas dirigidas Tareas domiciliarias

V.- Referencia bibliográfica

1. SANTILLANA (1999) Símbolo. Matemática secundaria 3, 4 y 5.
2. LONDOÑO, Nelson (1988) Matemática progresiva 5: Geometría analítica y trigonometría.
3. POÉMAPE, Alfonso (1999) Matemática 5.
4. BOYLE, Patrick (1990) Trigonometría con aplicaciones. Con ejercicios para calculadora.

ESQUEMA DE SESIÓN DE APRENDIZAJE Nº 05

I.- Datos Generales

1. Centro Educativo : Colegio Nacional de Aplicación Hermilio Valdizán
2. Asignatura : Matemática
3. Profesor : Vilchez Guizado, Jesús

II.- Información sobre el proceso de enseñanza - aprendizaje

2.1 Tema: Funciones trigonométricas inversas.

2.2 Unidad didáctica: Quinta.

2.3 Objetivo de la unidad: Identificar y trazar las gráficas de las funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas

2.4 Objetivos específicos:

1. Definir la función arco coseno, trazar su gráfica e identificar sus propiedades.
2. Definir la función arco seno, trazar su gráfica e identificar sus propiedades.
3. Definir la función arco tangente, trazar su gráfica e identificar sus propiedades.
4. Resolver algunas ecuaciones con funciones trigonométricas inversas.

2.5 Fecha y tiempo: De 15-05-00 al 19.05-00; 06 horas pedagógicas

2.6 Metodología didáctica:

2.6.1 Métodos: Deductivo – inductivo, heurístico.

2.6.2 Procedimientos: Observación, comparación, abstracción y generalización.

2.6.3 Técnicas: Trabajo individual, trabajo en bipersonal, práctica individual y grupal.

2.7 Medios y Materiales: Modelo Didáctico; regla, compás, papelote, plumones y Cuaderno de Ejercicios, Software matemático, calculadora, papel milimetrado.

III.- Contenidos

CONCEPTOS	PROCEDIMIENTO	ACTITUDES
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS 4. Inversa de la función seno: arco seno. 5. Inversa de la función coseno: Arco Coseno. 6.Función arco tangente.	Determinan la inversa de la función seno: Arco seno. Determinan la inversa de la función coseno: Arco coseno. Determinan la inversa de la función tangente: Arco tangente.	Manifiesta interés y atención en la hora de clase. Trabaja con honestidad y alegría. Persevera en la resolución de problemas con empeño y esfuerzo.

IV. Ejecución del proceso enseñanza – aprendizaje

SITUACIÓN	ESTRATEGIA	MATERIALES	TIEMPO
PRUEBA DE ENTRADA Prof. →Alumno	Se administra una prueba de 05 ítem referidos a problemas de funciones trigonométricas inversas.	Modelo Didáctico Lapiceros, papel, reglas, compás.	30’
MOTIVACIÓN Profesor Alumnos	1. Identifican el gráfico de una función real. 2. Reflejan el gráfico respecto a la diagonal $y=x$, en el sistema de coordenadas rectangulares. 3. Analizan algunas propiedades de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente desde su gráfico.	Modelo Didáctico papelote Cuaderno de Ejercicios. Mota	30’
INICIO Profesor Prof. →Alumno	1. Se explica las condiciones que debe tener una función para que admita inversa. 2. Se analiza los posibles dominios donde la función trigonométrica admita inversa.	Modelo Didáctico papelote Cuaderno de Ejercicios. Mota	30`

PROCESO Docente Prof. →Alumno Alumnos	1. Se identifica el intervalo donde la función seno admite inversa, luego se traza su gráfico correspondiente a partir del gráfico del seno. 1. Se identifica el intervalo donde la función coseno admite inversa, luego se traza su gráfico correspondiente a partir del gráfico del coseno. 1. Se identifica y define la función arco tangente, luego se traza su gráfico correspondiente a partir del gráfico del tangente.	Modelo Didáctico. Papelotes Formulario. regla, plumones fichas, Cuaderno de Ejercicios. Programa Derive, calculadora científica	90’
SALIDA Alumnos Prof. →Alumno	Los alumnos resuelven los ejercicios planteados con la asesoría del profesor, este aclarará las dudas que existan en los alumnos. Resuelven los ejercicios de comprobación del aprendizaje, simbólica y gráficamente. Discuten y comparan sus resultados obtenidos.	Modelo Didáctico Plumón Reglas Modelo Didáctico Guía de observación. Compás. Hoja de ejercicios	60`
FIJACIÓN Alumnos	Los alumnos atienden la explicación y realizan el estudio del tema en el material impreso, completan los espacios en blanco y cotejan sus resultados.	Modelo Didáctico Papelote. Cuaderno de Ejercicios	30’

V.- Evaluación

CRITERIOS	INDICADORES	INSTRUMENTOS
Resolución de problemas. Razonamiento y demostración. Interpretación gráfica y comunicación.	Identifica y genera ejemplos. Esquemas y/o pasos para realizar ejercicios. Explica, define, representa y distingue los conceptos y relaciones. Formula, resuelve, elabora, traduce ejemplos a partir del contexto conceptual	Cuestionarios Exposición. Prácticas dirigidas Tareas domiciliarias

BIBLIOGRAFÍA

1. SANTILLANA (1999) Símbolo. Matemática secundaria 3, 4 y 5.

2. LONDOÑO, Nelson (1988) Matemática progresiva 5: Geometría analítica y trigonometría.

3. BOYLE, Patrick (1990) Trigonometría con aplicaciones. Con ejercicios para calculadora.

4. POÉMAPE, Alfonso (1999) Matemática 5.

ESQUEMA DE SESIÓN DE APRENDIZAJE Nº 06

I.- Datos Generales

1. Centro Educativo : Colegio Nacional de Aplicación Hermilio Valdizán
2. Asignatura : Matemática
3. Profesor : Vilchez Guizado, Jesús

II.- Información sobre el proceso de enseñanza - aprendizaje

2.1 Tema: Identidades trigonométricas: aplicaciones.

2.2 Unidad didáctica: Sexta.

2.3 Objetivo de la unidad: Deducir las identidades trigonométricas para suma y diferencia de ángulos, ángulo doble, ángulo mitad y transformaciones trigonométricas a partir de la identidad fundamental aplicando con pertinencia en la solución: de problemas diversos

2.4 Objetivos específicos:

1. Identificar y aplicar las identidades trigonométricas fundamentales.
2. Demostrar equivalencias trigonométricas y simplificar expresiones trigonométricas complejas.
3. Deducir las identidades trigonométricas para la adición y sustracción de ángulos.
4. Deducir fórmulas y resolver problemas donde intervienen ángulos dobles y ángulo mitad.
5. Demostrar identidades donde intervienen productos y factores con expresiones trigonométricas.
6. Resolver e interpreta gráficamente las soluciones particulares y generales de las ecuaciones trigonométricas.

2.5 Fecha y tiempo: Del 22-05-00 al 19-06-00; 24 horas pedagógicas.

2.6 Metodología didáctica:

2.6.1 Métodos: Deductivo – inductivo, heurístico.
2.6.2 Procedimientos: Observación, comparación, deducción y generalización.
2.6.3 Técnicas: Trabajo individual, trabajo en equipo, práctica grupal.

2.7 Medios y Materiales: Modelo didáctico; regla, compás, papelote, plumones y cuaderno de ejercicios, transportador, calculadora.

III.- Contenidos

CONCEPTOS	PROCEDIMIENTO	ACTITUDES
IDENTIDADES Y ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS 1. Identidades trigonométricas elementales. Aplicaciones.	Recuerdan las identidades trigonométricas básica y demuestran equivalencias trigonométricas elementales.	Manifiesta interés y atención en la hora de clase.
2.Identidades de Adición, sustracción y cofunciones.	Demuestran la identidad trigonométrica fundamental y deducen las identidades de Adición, sustracción y cofunciones.	Trabaja con honestidad y alegría.
3. Identidades de ángulo doble y ángulo mitad.	Deducen identidades de ángulo doble y ángulo mitad y desarrollan problemas.	
4. Identidades con productos y factores.	Deducen las identidades con productos y factores, y resuelven problemas	Persevera en la resolución de problemas con empeño y esfuerzo.
5. Ecuaciones trigonométricas.	Obtienen las soluciones particulares y generales de ecuaciones trigonométricas.	

IV. Ejecución del proceso enseñanza – aprendizaje

SITUACIÓN	ESTRATEGIA	MATERIALES	TIEMPO
PRUEBA DE ENTRADA Prof. →Alumno	Se administra una prueba de 10 ítem referidas a las identidades y ecuaciones trigonométricas	Modelo Didáctico Lapiceros, papel, reglas, compás.	90’
MOTIVACIÓN Prof. →Alumno Alumno	1. Resolución de un problema relacionado con la no linealidad de las funciones trigonométricas. 2. Se muestra y analiza gráficamente la valides de una identidad trigonométrica. 3. Se desarrolla un problema libre relacionado con el tema en estudio. 4. Resolución de problemas relacionado con una ecuación trigonométrica.	Modelo Didáctico Papelote Cuaderno de Ejercicios. Mota Calculadora	20’ 20’ 20’ 20’
INICIO Profesor Prof. →Alumno	1. Se explica la diferencia existente entre una identidad y una ecuación trigonométrica. 2. Se desarrolla cada tema partiendo de una situación problemática.	Modelo Didáctico Papelote Cuaderno de Ejercicios. Mota	30\` 30’
PROCESO Profesor Prof. →Alumno Alum. →Alum.	1. Se simplifican expresiones trigonometrías, demuestran identidades elementales y, se deducen identidades. 2. Se deducen identidades de suma y diferencia, ángulo mitad y doble. 3. Se deducen identidades de transformaciones trigonométricas de sumas, productos y factores entre funciones trigonométricas. 4. Se resuelven analítica y gráficamente las ecuaciones trigonométricas.	Modelo Didáctico Mota Papelotes Formulario. plumones fichas, Cuaderno de Ejercicios. calculadora científica	90’ 90’ 90’ 90’
SALIDA Alumno Prof. →Alumno	Los alumnos resuelven los ejercicios planteados con la asesoría del profesor, este aclarará las dudas que existan en los alumnos. Los alumnos resuelven los ejercicios de comprobación del aprendizaje. Discuten y comparan sus resultados obtenidos.	Modelo Didáctico Plumón Reglas Modelo Didáctico Guía de observación. Compás. Hoja de ejercicios.	45\` 45’ 45’ 45’
FIJACIÓN Profesor	Los alumnos atienden la explicación y realizan el estudio del tema en el material impreso, completan los espacios en blanco y cotejan sus resultados.	Tiza Papelote. Cuaderno de Ejercicios	30’ 30’ 30’ 30’

V.- Evaluación

CRITERIOS	INDICADORES	INSTRUMENTOS
Deducción, demostración, simplificación y cálculo. Manejo conceptos y de algoritmos. Interpretación y representación gráfica. Resolución de problemas	Identifica y simplifica identidades. Demuestra identidades. Calcula valores numéricos haciendo uso de identidades y transformaciones trigonométricas. Obtiene la solución particular y general de las ecuaciones trigonométricas. Formula, resuelve, elabora, traduce ejemplos a partir del contexto conceptual	Modelo Didáctico Exposición. Prácticas dirigidas Tareas domiciliarias

V.- Referencia bibliográfica

1. SANTILLANA (1999) Símbolo. Matemática secundaria 3, 4 y 5.
2. LONDOÑO, Nelson (1988) Matemática progresiva 5: Geometría analítica y trigonometría.
3. AYRES, Frank (1970) Trigonometría Plana y Esférica.

ESQUEMA DE SESIÓN DE APRENDIZAJE Nº 07

I.- Datos Generales

1. Centro Educativo : Colegio Nacional de Aplicación Hermilio Valdizán
2. Asignatura : Matemática
3. Profesor : VILCHEZ GUIZADO, Jesús

II.- Información sobre el proceso de enseñanza - aprendizaje

2.1 Tema: Aplicaciones de las funciones trigonométricas.

2.2 Unidad didáctica: Séptima

2.2 Objetivo de la unidad: Aplicar las funciones trigonométricas en la solución: de problemas de actividades cotidianas relacionados con la topografía, física y otros tópicos de la matemática

2.4 Objetivos específicos:

1. Identificar las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo en el sistema de coordenadas rectangulares.
2. Resolver ejercicios sobre resolución de triángulos rectángulos aplicado a distintas situaciones de la realidad.
3. Utilizar procedimientos intuitivos y analíticos para determinar los ángulos de depresión, elevación y rumbos.
4. Deducir analíticamente las leyes del coseno y seno, utilizando en forma adecuada en la resolución de triángulos oblicuángulos.
5. Definir en forma intuitiva la idea de vector geométrico en el plano, realizando operaciones de composición y descomposición de velocidades y fuerzas.

2.5 Fecha y tiempo: Del 26-06-00 al 14-07-00; 18 horas pedagógicas.

2.6 Metodología didáctica:

2.6.1 Métodos: Deductivo – inductivo, heurístico.
2.6.2 Procedimientos: Observación, comparación, deducción y generalización.
2.6.3 Técnicas: Trabajo individual, trabajo en equipo, práctica grupal.

2.7 Medios y Materiales: Modelo Didáctico; regla, compás, papelote, plumones y Cuaderno de Ejercicios.

III.- Contenidos

CONCEPTOS	PROCEDIMIENTO	ACTITUDES
APLICACIONES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS 1. Las razones trigonométricas en triángulos rectángulos en el sistema de coordenadas cartesianas.	Identifican las razones trigonométricas en triángulos rectángulos en el sistema de coordenadas cartesianas.	Manifiesta interés y atención en la hora de clase.
2. Resolución de triángulos rectángulos aplicado a distintas situaciones de la realidad.	Resuelven problemas de triángulos rectángulos aplicado a distintas situaciones de la realidad.	Trabaja con honestidad y alegría.
3. Estudio analítico de los ángulos de depresión, elevación y rumbos.	Identifican el ángulo de depresión, elevación e, identifican rumbos en el plano cartesiano.	
4. La ley del coseno y su aplicación en la resolución de triángulos oblicuángulos.	Deducen la ley del coseno y su aplicación en la resolución de triángulos oblicuángulos.	Persevera en la resolución de problemas con empeño y esfuerzo.
5. La ley del seno, y su aplicación en la resolución de triángulos oblicuángulos.	Deducen la ley del seno, y su aplicación en la resolución de triángulos oblicuángulos.	
6. Vector geométrico en el plano, operaciones de composición y descomposición de velocidades y fuerzas.	Determinan el vector geométrico en el plano cartesiano, aplican en la composición y descomposición de velocidades y fuerzas.	

IV. Ejecución del proceso enseñanza – aprendizaje

SITUACIÓN	ESTRATEGIA	MATERIALES	TIEMPO
PRUEBA DE ENTRADA Prof. →Alumno.	Se administra una prueba de 10 ítem referidos a resolución de triángulos rectángulos, ángulos de elevación y depresión, Rumbos, Resolución de triángulos y descomposición de fuerzas.	Modelo didáctico Lapiceros, papel, reglas, compás. Prueba escrita.	60’
MOTIVACIÓN Prof. →Alumno. Prof. →Alumno.	Se formula una serie de ejercicios de triángulos notables para que el alumno complete los datos.	**Modelo Didáctico** Papelote Cuaderno de Ejercicios.	30’
INICIO Profesor	Se formula un problema que relacionado con las dimensiones del aula para resolver a través de razones trigonométricas en triángulos rectángulos. Se formula un problema que relacionado con la realidad topografía del lugar, que se resuelve a través de razones trigonométricas en triángulos oblicuángulos.	**Modelo Didáctico** Papelote Pizarra Cuaderno de Ejercicios. Mota	30` 30’
PROCESO profesor Prof.→Alumno. alumno	Se identifican las razones trigonométricas en triángulos rectángulos en el sistema de coordenadas cartesianas. Se identifican el ángulo de depresión, elevación e, identifican rumbos en el plano cartesiano. Se demuestra analíticamente la ley del coseno y luego se aplica en la resolución de triángulos oblicuángulos. Se demuestra analíticamente la ley del seno y luego se aplica en la resolución de triángulos oblicuángulos.	**Modelo Didáctico** Mota Papelotes Formulario. plumones fichas, reglas, escuadras. Cuaderno de Ejercicios. Calculadora científica	90’ 90’
SALIDA Prof. →Alumno. Alum. →Alumno.	Los alumnos resuelven los ejercicios planteados con la asesoría del profesor, este aclarará las dudas que existan en los alumnos. Resuelven los ejercicios de comprobación del aprendizaje, sobre resolución de triángulos rectángulos. Resuelven los ejercicios de comprobación del aprendizaje, sobre resolución de triángulos oblicuángulos y vectores. Discuten y comparan sus resultados obtenidos.	**Modelo Didáctico** Plumón Reglas Guía de observación. Compás. Hoja de ejercicios.	60` 60’
FIJACIÓN Prof. →Alumno.	Los alumnos atienden la explicación y realizan el estudio del tema en el material impreso, completan los espacios en blanco y cotejan sus resultados.	**Modelo Didáctico** Papelote. Cuaderno de Ejercicios	30’

V.- Evaluación

CRITERIOS	INDICADORES	INSTRUMENTOS
Intuición y abstracción de las formas geométricas de la realidad física. Manejo de conceptos y de algoritmos de operaciones con vectores. Interpretación y representación gráfica. Resolución de problemas	Identifica y genera ejemplos de la realidad. Esquemas y/o pasos para realizar ejercicios. Explica, define, representa y distingue los conceptos y relaciones. Formula, resuelve, elabora, traduce ejemplos a partir del contexto conceptual	Modelo Didáctico Exposición. Prácticas dirigidas Tareas domiciliarias

V.- Referencia bibliográfica

1. SANTILLANA (1999) Símbolo. Matemática secundaria 3, 4 y 5.
2. LONDOÑO, Nelson (1988) Matemática progresiva 5: Geometría analítica y trigonometría.

Anexo Nº 8

PRUEBA DE SALIDA DEL PROCESO EXPERIMENTAL

1. CONOCIMIENTO: Complete las líneas punteadas según el caso:.

a) Si $E(\theta)=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$, entonces csc(θ) = ... tan(θ) = ...

b) $\cos(\frac{\theta}{2})$ = ...

c) .... = $\frac{2\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)}$

d) Si cos(θ) = $\frac{1}{2}$ y sen(α) = –1, entonces 2tan(α) – 3sec(θ) =..................................

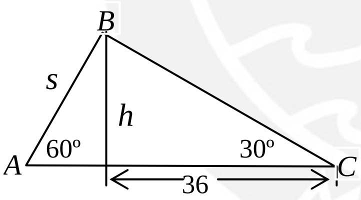
2. COMPRENSIÓN: Desarrolle los cuatro ejercicios usando los conocimientos conceptuales asimilados en la clase

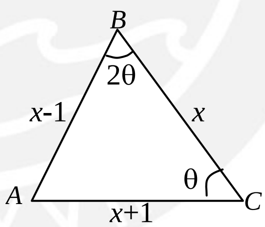
a) Encuentre el intervalo de “*x*” para que se cumpla: sen(θ) = $\frac{5x-3}{2}$

b) Sabiendo que $\frac{sen(7x)+sen(5x)+sen(3x)}{2.\cos(2x)+1}=A.sen(Bx)$, calcule: $\frac{A}{B}$

c) En la primera figura, determine el valor de ***s***.

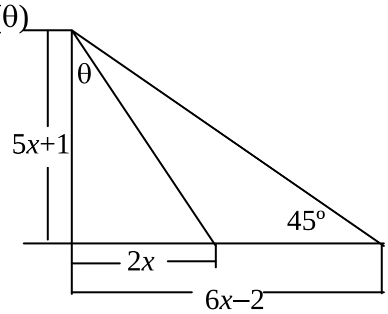
d) Halle las longitudes de los lados del triángulo en la segunda figura.





3. APLICACIÓN: Desarrollo los problemas utilizando los conceptos referidos a las funciones trigonométricas y resolución de triángulos rectángulos.

a) En el gráfico mostrado calcule el valor de tan(θ)



b) La diagonal mayor de un paralelogramo mide 35 cm, y forman ángulos de 25º y 32º con los lados. Determine la longitud de los lados del paralelogramo.

c) Desde un avión a 1200 m sobre el nivel del mar, se divisan dos barcos con ángulos de depresión de 37º y 23º, y que están hacia el oeste. Encuentre la distancia entre los dos barcos.

d) Al hacer la composición y/o descomposición de las fuerzas:

$|F_1| = 5$, $\theta_1 = 53º$; $|F_2| = 7$, $\theta_2 = 90º$ y $|F_3| = 10$, $\theta_3 = 217º$

Se obtiene como resultante: F_R = ... y θ_R = ...

4. ANÁLISIS: Desarrolle teniendo un criterio analítico los ejercicios que se formulan.

a) Indique a qué cuadrante pertenecen el lado terminal de los ángulos $\alpha = 7\pi/3$ rad y $\beta = 1500º$ y que relación existe entre ellos. Grafique.

b) Trace el gráfico de la función $y = \tan(\theta)$ e identifique 5 propiedades.

c) Ilustre la gráfica de la función y = 3.sen(x), compare con el gráfico de y = sen(x) e identifique su dominio y rango, valor mínimo y máximo, si es impar o par, desplazamiento de fase e intervalo de crecimiento y decrecimiento.

d) $\text{sen}(\alpha) = \frac{1}{2}$, $\cos(\beta) = \frac{3}{4}$, α en II-C y β en I-C. Hallar el valor de $\cos(\alpha + \beta)$

5. SÍNTESIS: Encuentre el resultado de cada uno de los ítem que se propone en forma simplificada.

a) Simplifique la expresión: $\text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$

b) Deducir la fórmula para sen(3θ), en términos de senθ.

c) Determine las soluciones de la ecuación $\sec(2x + \frac{\pi}{6}) = 2$.

d) Simplifique: $\dfrac{\cos(-\beta).\tan(-\beta)}{\cos(-\beta) + sen(-\beta).\cos(\beta) - \left[sen^2(-\beta) + \cos^2(-\beta)\right].\cos(-\beta)}$.

6. a) Diga usted ¿cuál de los 5 ítem anteriores los resolvió con solvencia y en cuál tuvo problemas?.

b) La afirmación: "*El cuadrado de la longitud de cualquier lado del triángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos el doble producto de las longitudes de ellos por el coseno del ángulo que forman*", corresponde a la:

1) Ley de las tangentes 2) Ley de los senos 3) Ley de los cosenos

RESULTADOS PRUEBA DE SALIDA) DEL GRUPO EXPERIMENTAL

	Nro.	ITEM 01	ITEM 02	ITEM 03	ITEM 04	ITEM 05	NOTAS
	1	3	4	2	3	3	15
	2	2	3	1	2	3	11
	3	3	2	3	2	2	12
	4	4	3	2	3	2	14
	5	2	2	3	2	3	12
	6	3	3	2	4	1	13
	7	3	2	4	3	3	15
	8	2	2	3	4	3	14
	9	4	3	2	3	3	15
	10	2	4	3	2	2	13
	11	4	3	2	4	2	15
	12	4	4	3	2	4	17
	13	2	3	2	3	3	13
	14	3	2	2	3	4	14
	15	2	3	4	4	3	16
	16	3	2	2	3	2	12
	17	2	4	3	2	3	14
	18	3	4	2	3	3	15
	19	2	3	2	3	3	13
	20	2	2	4	4	3	15
	21	4	3	2	2	2	13
	22	2	2	2	2	3	11
	23	3	3	2	3	3	14
	24	2	2	1	3	2	10
	25	3	2	3	3	3	14
	26	4	3	1	3	2	13
	27	2	3	2	2	3	12
	28	2	2	3	3	2	12
	29	3	4	4	1	2	14
	30	2	3	2	3	3	13
	31	4	2	4	2	3	15
	32	3	4	2	3	2	14
	33	3	3	2	3	3	14
	34	2	3	2	2	3	12
	35	3	2	3	2	3	13
	36	4	2	3	3	4	16
	37	2	3	4	2	4	15
	38	4	3	2	3	2	14
	39	2	4	3	3	4	16
	40	3	2	4	2	4	15
TOTAL		112	113	102	109	112	548

Promedio	13,7
Varianza	2,37
Desviación Estándar	1,54
Coeficiente de Variación	0,112

RESULTADOS DE LA PRUEBA DE SALIDA DEL GRUPO DE CONTROL

	Nro.	ITEM 01	ITEM 02	ITEM 03	ITEM 04	ITEM 05	NOTAS
	1	3	3	2	3	2	13
	2	2	3	1	2	3	11
	3	1	2	3	1	2	9
	4	2	3	2	3	3	13
	5	4	3	3	3	2	15
	6	3	2	1	0	2	8
	7	2	0	1	2	2	7
	8	3	3	3	3	2	14
	9	1	1	2	3	3	10
	10	2	3	4	3	3	15
	11	2	0	2	2	2	8
	12	4	3	4	3	4	18
	13	3	2	2	3	3	13
	14	1	3	3	3	2	12
	15	2	3	2	2	2	11
	16	2	3	2	3	4	14
	17	4	3	1	3	4	15
	18	2	2	1	0	2	7
	19	0	3	4	3	3	13
	20	4	3	2	2	3	14
	21	2	1	2	1	2	8
	22	0	3	2	3	3	11
	23	3	3	2	2	3	13
	24	2	3	2	0	3	10
	25	3	2	3	3	2	13
	26	1	1	2	2	2	8
	27	2	2	2	3	3	12
	28	3	2	3	2	3	13
	29	2	3	2	1	2	10
	30	3	4	4	3	2	16
	31	2	3	1	2	2	10
	32	2	3	2	3	2	12
	33	2	3	2	3	3	13
	34	4	3	4	3	3	17
	35	2	3	2	4	2	13
	36	3	1	2	2	3	11
	37	2	1	1	2	1	7
	38	3	2	1	3	3	12
	39	4	3	3	2	3	15
	40	3	2	1	2	1	9
	41	3	2	3	3	3	14
TOTALES		98	98	91	96	104	487

Promedio	11,88
Varianza	7,86
Desviación Estándar	2,80
Coeficiente de Variación	0,2360

Anexo Nº 9

COLEGIO NACIONAL DE APLICACIÓN HERMILIO VALDIZÁN

AUTOEVALUACIÓN

Nombre del evaluado: ....
Tema: ....
Fecha: ....
Señala con una X la calificación que tu crees que te corresponde

Í T E M	Muy Frecuente mente	frecuente mente	Algunas veces
1. Cumplí con las tareas que me asignó el profesor			
2. Aporté con ideas al trabajo grupal realizado			
3. Escucho con interés las consultas hechas por mis compañeros			
4. Acepto y utilizo diversas estrategias para resolver un problema			
5. Tomo en cuenta las ideas y sugerencias del profesor			
6. Participo en la resolución de ejercicios “para practica”			
7. Asimilé los conceptos y ejemplos de esta sección			
8. Llegué a conclusiones o elaboré conclusiones del tema			

COLEGIO NACIONAL DE APLICACIÓN HERMILIO VALDIZÁN

COEVALUACIÓN

Nombre del evaluado: ....

Tema: ....

Fecha: ....

Señala con una X la calificación que tu crees que te corresponde

Í T E M	Muy Frecuente mente	frecuente mente	Algunas veces
1. Participa en clase en las actividades del grupo			
2. Sabe escuchar a los demás			
3. Toma en cuenta las sugerencias y recomendaciones del profesor			
4. Encuentra ideas centrales e ideas centrales			
5. Respeta la opinión de los demás			
6. Sintetiza la información y controla el tiempo			
7. Se esfuerza por resolver las tareas asignadas			
8. Resuelve los problemas con seguridad y solvencia			

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE GRADUADOS

Modelo didáctico:

LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Para el Quinto Grado de Educación Secundaria

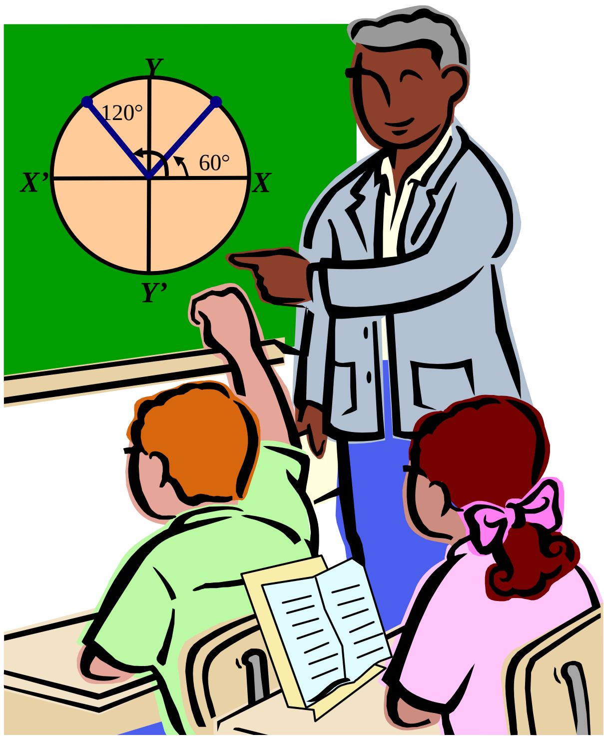
Autor: *Jesús VILCHEZ GUIZADO*

Lima - Perú

2 005

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

MODELO DIDÁCTICO



QUINTO GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

AUTOR: ***Jesús Vilchez Guizado***

DESCRIPCIÓN SUMARIA

Pág.

INSTRUCCIONES 

Este material es para desarrollar en clase, complementar y reforzar el estudio de las funciones trigonométricas. Con este propósito es necesario asimilar los temas desarrollados y resolver los ejercicios incompletos y propuestos.

Además, para lograr un aprendizaje eficaz del tema, es preciso:

1. *Elaborar un horario de estudio individual y grupal, organizando bien el tiempo disponible fuera del aula.*

2. *Observar con detenimiento los temas que se abordarán, en el esquema de contenido y en la secuencia de contenidos que se expresan en el flujograma.*

3. *Usar conocimientos previos y actitudes adecuadas para estudiar el tema, resolviendo las pruebas de requisitos y, luego, cotejar resultados con la clave de respuestas.*

4. *Leer detenidamente el objetivo terminal y los objetivos específicos que se pretende lograr con el presente estudio, procurar siempre tenerlos en cuenta durante su estudio.*

5. *Estudiar en forma secuencial y con honestidad los diferentes temas que se desarrolla en el texto con la orientación del profesor, asimilando los conceptos y ejemplos, completando los ejercicios inconclusos, y desarrollando los ejercicios que se le presenta al final de cada unidad, usando y aplicando los conceptos y propiedades aprendidos.*

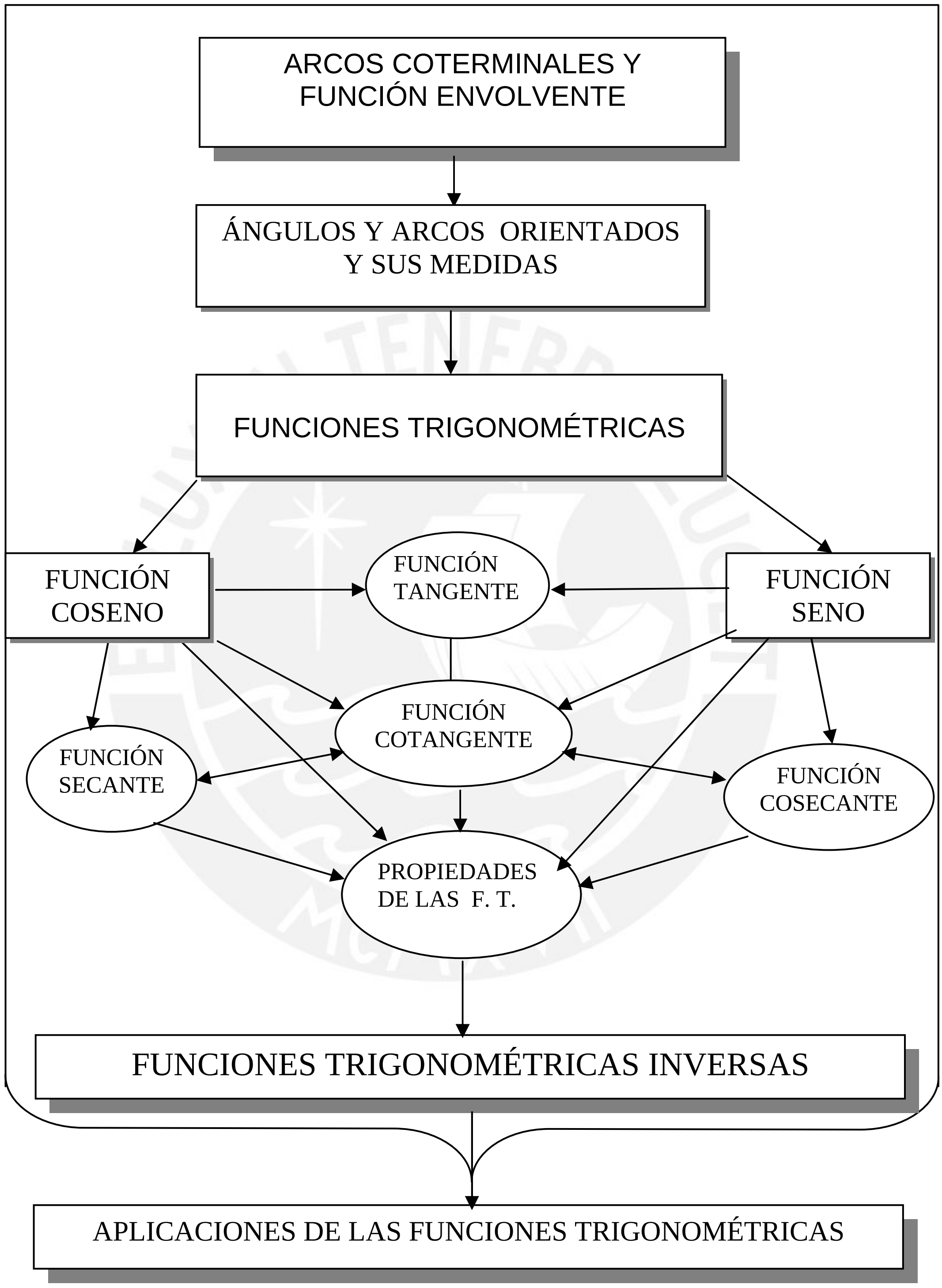
6. *Resolver la hoja de ejercicios de evaluación que se encuentran al final de cada unidad; comunicando las dificultades que se te presentan al profesor, a través de la hoja de consultas.*

¡RECORDAR!

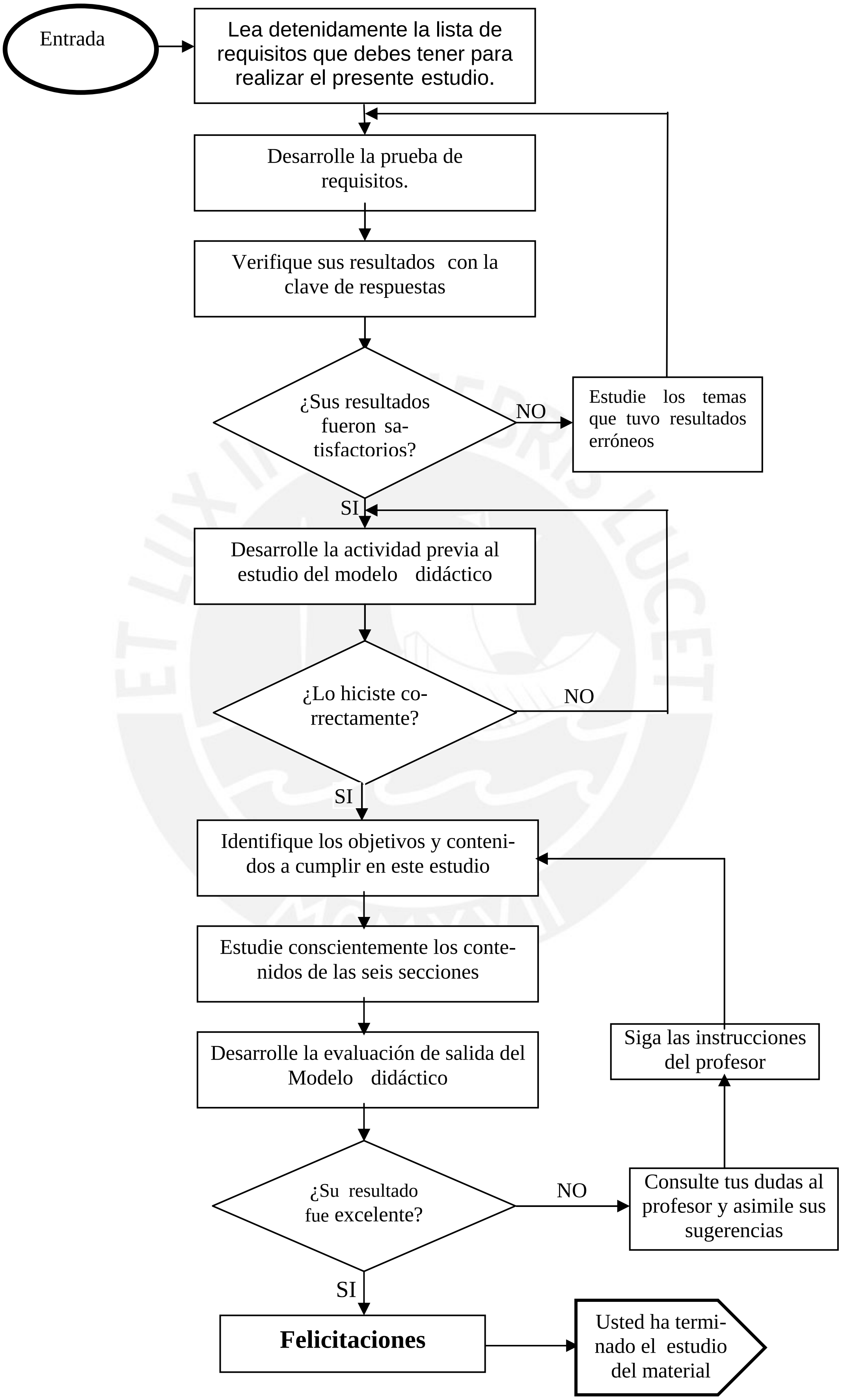
Lo que se aprende durante el estudio del presente material, servirá para tener un conocimiento amplio y profundo sobre las funciones trigonométricas y así elevar el rendimiento académico.

¿ *Qué temas estudiaremos sobre las funciones trigonométricas*?

ESQUEMA DE CONTENIDO DEL MODELO DIDÁCTICO



FLUJOGRAMA (METODOLOGÍA DE ESTUDIO DEL MODELO)



REQUISITOS: ¿*Qué necesitamos*?

Para aprender eficientemente las funciones trigonométricas, es necesario conocer los temas y cultivar las actitudes que a continuación se enumera, las mismas que se menciona en el programa oficial:

- Números reales y propiedades
- Productos y cocientes notables.
- Resolución de ecuaciones e inecuaciones.
- Sistema de coordenadas rectangulares (o plano cartesiano).
- Distancias entre dos puntos en el plano cartesiano.
- Simetrías en el sistema de coordenadas rectangulares
- Funciones reales de variable real.
- Dominio y rango de una función
- Composición de funciones.
- Funciones inyectivas, suryectivas y biyectivas.
- Funciones crecientes y decrecientes.
- Funciones inversas.
- Funciones pares e impares
- Funciones periódicas y no periódicas.
- Circunferencia unitaria, arcos, ángulos y medidas.
- Triángulos rectángulos notables y semejanza de triángulos rectángulos.
- Razones entre los lados de triángulos rectángulos.
- Destrezas operativas y motoras.
- Razonamiento.
- Abstracción.
- Responsabilidad.
- Puntualidad y honestidad.
- Exactitud.
- Cooperación.
- Perseverancia.
- Deseo de aprender.
- Codificación.
- Nivelación.
- Recuperación y transferencia.

PRUEBA DE REQUISITOS

Antes de incursionar en el estudio de las funciones trigonométricas, desarrolla cada uno de los siguientes ejercicios:

1. Resuelva las siguientes ecuaciones en el conjunto de números reales:

   a) $2x + 2 = 5$ c) $x^2 - 1 = 2$

   b) $10x + 1 > 8x + 5$ d) $\dfrac{x-2}{x+4} < 2$

2. Diga cuáles de los siguientes conjuntos definen funciones y cuáles no. Justifique su respuesta.

   a) $f = \{ (1, 1);\ (2, 4); (3, 9); \dots \}$ c) $g = \{ (x, y) \in 3^2 / y = 5 - 3x \}$

   b) $h = \{ (x, y) \in 3^2 / x^2 + y^2 = 4 \}$ d) $j = \{ (x, y) \in 3^2 / y = 3 \}$

3. Dado la función f: $3 \longrightarrow 3$, definido por $f(x) = x^2 - 2x + 1$, determine:

   a) $f(-7)$ b) $f(-\sqrt{3})$ c) $f(-2+\sqrt{3})$ d) $f(x+a) - f(x)$

4. Halle el dominio y el rango de la función real definida por:

   a) $\{(x, y) \in 3^2 / 2y = x^2 + 6\}$ c) $\{(x, y) \in 3^2 / y = \dfrac{1}{1-x^2}\}$

   b) $\{(x, y) \in 3^2 / y = \sqrt{x-2}\}$ d) $\{(x, y) \in 3^2 / y = \sqrt{4-x^2}\}$

5. ¿Cuáles de las siguientes funciones reales son crecientes o decrecientes, en el dominio indicado?. Explique gráficamente.

   a) $f :]-\infty, 0[\longrightarrow 3 / f(x) = x^2$ c) $f :]0, +\infty[\longrightarrow 3 / f(x) = x^2$.

   b) $f : 3 - \{1\} \longrightarrow 3 / f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ d) $f : 3 \longrightarrow 3 / f(x) = x^3$.

6. Cuáles de los siguientes funciones reales son pares y cuáles impares.

   a) $f = \{ (x, y) \in 3^2 / y = x^2 - 2x + 1 \}$ c) $h = \{ (x, y) \in 3^2 / y = \dfrac{1}{x^2} + 1 \}$

   b) $f = \{ (x, y) \in 3^2 / x.y = 2 \}$ d) $j = \{ (x, y) \in 3^2 / y = \sqrt{x+1} \}$

7. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsos?.

   a) Toda función real creciente es inyectiva.

   b) Si una función admite inversa, entonces es biyectiva.

   c) Toda función real biyectiva, es creciente.

   d) Si una función es periódica, entonces es impar.

8. Dados los puntos $A = (1\ ,\ -2)$, $B = (-3\ ,\ 4)$, $C = (3\ ,\ 3)$ y $D = (-4\ ,\ -3)$. Halle:

   a) $d(A\ ,B)$ b) $d(B\ ,C)$ c) $d(A\ ,D)$ d) $d(A\ ,C)$

9. Complete, según corresponde:

   a) El simétrico del punto $(-3\ ,5)$ respecto al eje X, es: ....

   b) El simétrico del punto $(3\ ,-4)$ respecto al eje Y, es: ....

   c) El simétrico del punto $(-3\ ,7)$ respecto al origen, es: ....

   d) El simétrico del punto $(-3\ ,4)$ respecto a la recta $x = y$, es: ....

10. a) En un triángulo rectángulo los ángulos agudos miden 30º y 60º, si la longitud de la hipotenusa es 6m. Encuentre la longitud de los catetos.

    b) Si un ángulo mide 73º15’, la medida del complemento y del suplemento de este ángulos son:

    c) Encuentre el perímetro de un cuadrado cuya diagonal mide $7\sqrt{2}$ cm..

    d) Escriba la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y que pasa por el punto $P(\sqrt{2}\ ,\ -\sqrt{2}\ )$.

11. ¿Es verdadero o falso

    a) La pareja ordenada $(8\ ,-4)$ es un elemento del conjunto $\{(x\ ,\ y) / 2y = x^2\ \}$.

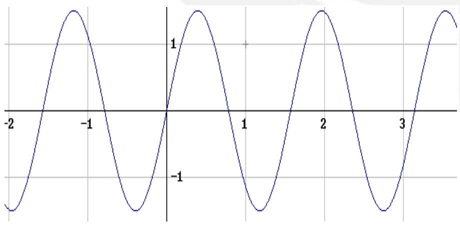
    b) La pareja ordenada $(-2\ ,7)$ corresponde al cuadrante IV.

    c) $\{\ (x\ ,y) / y^2 = x + 1\}$es una función.

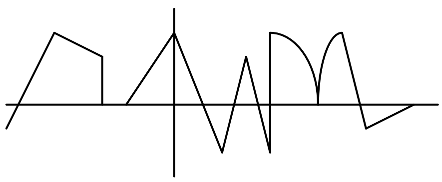
    d) P(0,4 , 0,6) es un punto de la circunferencia: $x^2 + y^2 = 1$.

12. Cuáles de las siguientes gráficos, representan a funciones periódicas.

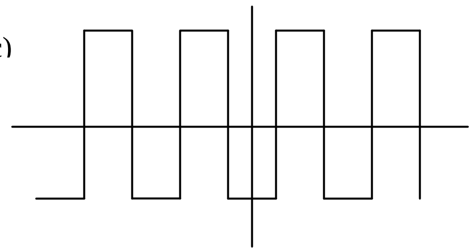
a)



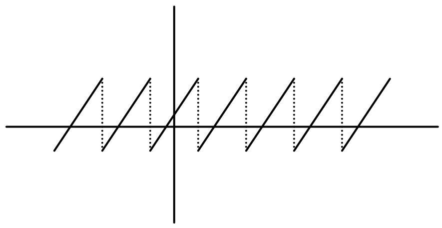
b)



c)



d)



¡Justifique sus respuesta! ....

¡*CONFIRME SUS RESPUESTAS EN LA SIGUIENTE PÁGINA*!

RESPUESTAS DE LA PRUEBA DE REQUISITOS

1. a) { 3/2}	b) $x > 2$	c) $\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$	d) $]-10, -4[\cup]-4, +\infty[$
2. a) función	b) No es función	c) función	d) función
3. a) 64	b) $2(2+\sqrt{3})$	c) $4(3-2\sqrt{3})$	d) $a^2 + 2a(x + 1)$
4. a) 3 y $[3, +\infty[$	b) $[2, +\infty[$	c) $3 - \{1, -1\}$	d) $[-2, 2]$ y $[0, +\infty[$
5. a) Decreciente	b) Decreciente	c) Creciente	d) Creciente
6. a) Ninguno	b) Impar	c) Par	d) Ningunos
7. a) Verdadero	b) Verdadero	c) Falso	d) Falso
8. a) $2\sqrt{13}$	b) $\sqrt{37}$	c) 5	d) $\sqrt{29}$
9. a) $(3, 5)$	b) $(3, 4)$	c) $(3, -7)$	d) $(5, -3)$
10. a) 3 y $3\sqrt{3}$	b) 16º45' y 106º45'	c) 28	d) $x^2 + y^2 = 4$
11. a) Falso	b) Falso	c) Falso	d) Falso
12. a) Periódica	b) No periódica	c) Periódica	d) Periódica

RECUPERACIÓN

Si al conocer la clave detectó las deficiencias que se tuvo al resolver la prueba de diagnóstico de requisitos, converse con el profesor y estudie los temas que más dificultades a constatado en el desarrollo de la prueba.

ACTIVIDADES QUE CONDUCEN AL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

PRIMERA ACTIVIDAD

TEMA: Situaciones matemáticas que inducen a la utilización de relaciones o razones trigonométricas en un sistema de coordenadas.

OBJETIVO: Encontrar la altura de la pared del colegio con la ayuda de algunas herramientas a la mano, y transferir esta idea al sistema de coordenadas rectangulares para establecer relaciones trigonométricas.

TRABAJO GRUPAL: Los alumnos se dividen en grupos de 4 integrantes cada uno y dan un nombre o seudónimo a cada grupo.

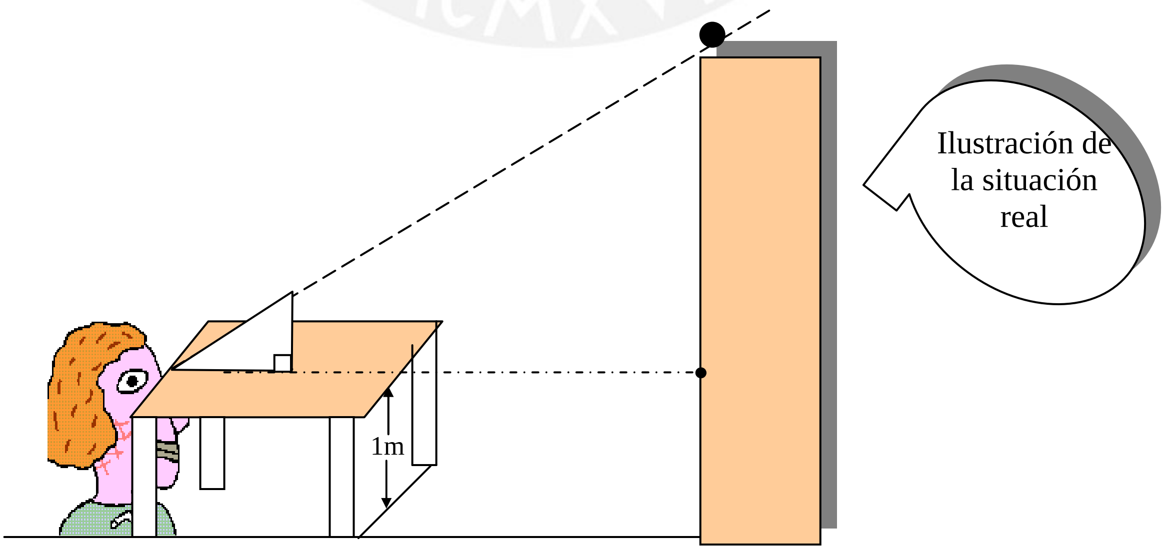
MATERIALES: Regla de 50cm, un listón, un cordel y un transportador, grapa, papel periódico, marcadores, papelote y pared del patio del colegio,.

PROCEDIMIENTO: Cada uno de los grupos disponen de: mesa, alambre flexible, cinta métrica; luego proceden a tomar la posición adecuada para ubicar la mesa, los 4 integrantes determinan la posición exacta para poder observar la cima del edificio y medir la distancia del punto de mira a la pared.

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO:

1. Cada grupo intenta con un proceso libre de resolver el problema (20 minutos).
2. Se discuten la pertinencia de algunas soluciones (20 minutos)
3. Si no hay respuestas correctas al problema, se sigue sugerencias y orientaciones del profesor.

   i) Sobre una mesa de 1m de altura, se coloca un triángulo rectángulo de alambre apoyado sobre un de sus catetos en la mesa; haciendo coincidir la línea de mira a la cima de la pared con la hipotenusa del triángulo rectángulo de alambre; como se tiene en el diagrama.



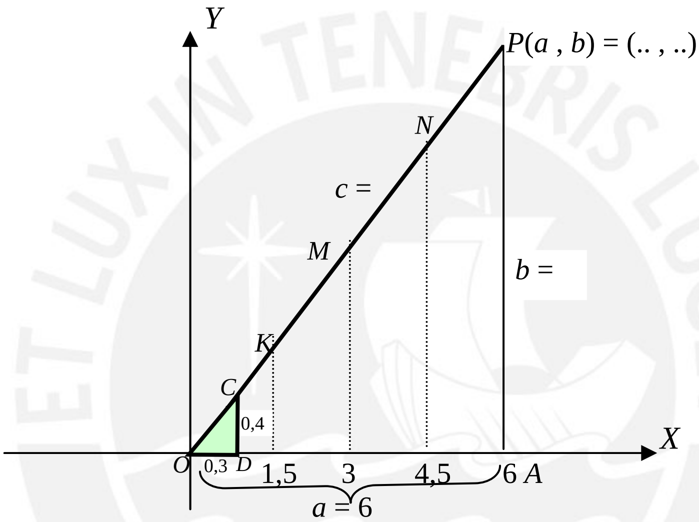
ii) Medir las longitudes de los catetos del triángulo y la distancia desde el punto de mira coincidente con el vértice del triángulo rectángulo, en el borde de la mesa, hasta la pared en forma horizontal (distancia del punto de mira a la pared). Sus datos anote en la siguiente tabla:

cateto horizontal	cateto vertical	distancia horizontal.
OD = 30 cm	DC = 40 cm	OA = 6 m

iii) Calcular la medida de la hipotenusa del triángulo construido de alambre.

iv) Compruebe que los triángulos rectángulos OPA y OCD son semejantes. Porque se puede constatar que sus ángulos interiores son congruentes. De esto se tiene según proporción: $\frac{PA}{CD} = \frac{OA}{OD}$.

v) De ii) y iv) se tiene: $PA = \frac{6}{0{,}3}(0{,}4) = (20)(0{,}4) = 8$ m



¡ Llevando al sistema de coordenadas del plano !

¿Cuál es la coordenada del punto A?...

¿Cuál es la coordenada del punto K?...

¿Cuál es la coordenada del punto M?..

¿Cuáles es la altura de la pared? ....

¿El triángulo OAP que se observa en el gráfico construido es? ....

Las coordenadas del punto P es: (a , b) = ...

Hallar $d(O , P)$ ....

Determine las medidas de los ángulos agudos del triángulo OAP..

Según ii), complete los casilleros en de la tabla, donde se consignan las coordenadas del punto P en la cima de la pared y la distancia de O a P. Asimismo las coordenadas de: C, K, M, N y P que se ubican en el segmento $\overline{OP}$.

a	b	c	a/c	b/c	b/a	a/b
0,3	0,4		3/5	4/5	4/3	3/4
1,5						
3						
4,5						
6						

EXTENSIÓN

-) Repita la relaciones dadas en la tabla asumiendo que las coordenadas del punto en la cima del edifico sean: $Q(b\ ,\ a)$ y $P'(-a\ ,\ b)$. ¿Qué relación tiene con la primera tabla?

-) Haga rotar una vuelta completa el segmento $\overline{OP}$ alrededor de O, ¿qué figura describe el punto P?

-) ¿Cómo son los puntos: P y Q respecto a la recta: $y = x$; P y P' respecto al eje Y.

-) Ubique las coordenadas de los puntos simétricos de P, K, M y N respecto al eje Y que se ubican en el segmento $\overline{OP}'$

EVALUACIÓN:

- Propuesta de solución se anota en un cartel.
- Exposición de la situación considerada por cada grupo: Análisis.
- Intervenciones orales en forma individual: Debate.
- Comportamientos observables durante el trabajo en equipo: Conclusiones.

FINALIDAD:

¿*Qué logramos con esta actividad y para qué nos sirvió esta primera actividad*?

1. Transferir una situación real concreta expresado en el problema, a un diagrama (segmento) para su matematización, trazando un sistema de coordenadas rectangulares y establecer relaciones métricas a través de semejanza de triángulos.

2. Relacionar las coordenadas del punto extremo del segmento (línea visual imaginaria) y otros puntos considerados pertenecientes al segmento de la línea de la visual.

3. Identificar las circunferencias que determinan los extremos y otros puntos del segmento al hacer la rotación en torno al origen de coordenadas.

4. Identificar en forma implícita las diversas razones entre las coordenadas de los puntos del segmento (visual), los mismos que serán el sustento de los conceptos de las funciones trigonométricas que estudiaremos con ayuda del presente Modelo didáctico.

SEGUNDA ACTIVIDAD

TEMA: *Introducción al estudio analítico de las funciones trigonométricas*.

OBJETIVO: Identificar el movimiento periódico a partir de un experimento físico.

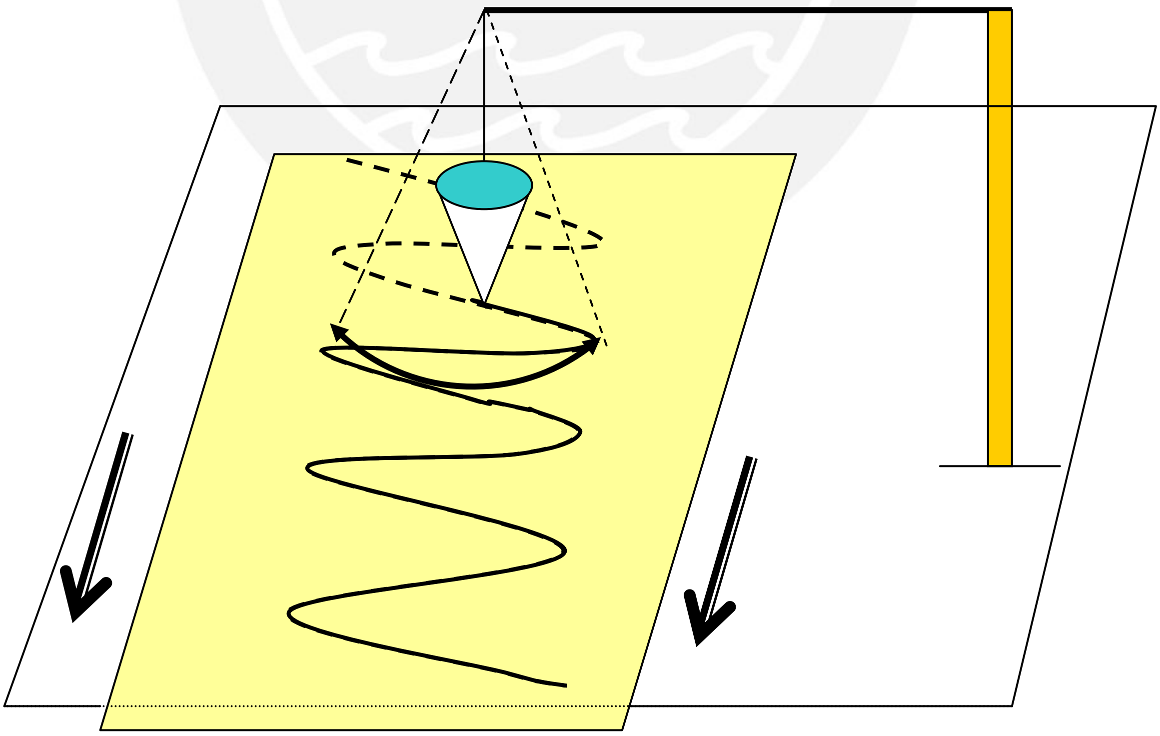
DISPOSICIÓN DE GRUPO: los alumnos forman grupos de dos integrantes cada uno y dan nombre a cada grupo.

MATERIALES: Porción de hilo, cono de cartón o plástico, arena fina, cordel, cinta métrica, papel periódico, papel milimetrado, marcadores y papelote.

PROCEDIMIENTO: Cada pareja de estudiante desarrolla la experiencia que a continuación se detalla:

1. Tome un cono hueco con un orificio en su vértice y suspéndalo de un hilo dejando el vértice hacia abajo; luego llene con arena fina.

2. Separe de la posición de equilibrio y suelte para que comience a oscilar derramando arena, como se muestra en la figura:



3. Al mover la hoja en sentido transversal (perpendicular) al movimiento del péndulo.

a) ¿Qué trayectoria describe la arena que cae del péndulo sobre el papel? ....
Describa (ilustre) gráficamente:

b) Si se varía el movimiento del péndulo, ¿qué ocurre? ....
Ilustre lo que observa al inicio y al ejecutar la acción. ¡ Describa!

c) ¿Si se varía el desplazamiento de la hoja de papel sobre la mesa que ocurre?
Ilustre lo que observa al inicio y al ejecutar la acción.

¡ Describa!

¡Explique a sus compañeros la importancia y las características del fenómeno analizado!

FINALIDAD:

¿Para qué se hizo y en qué servirá lo realizado en el presente taller?

El propósito del presente taller es:

- Hacer un breve preámbulo a la gráfica de las funciones periódicas que abordaremos en la sección: estudio analítico de las funciones trigonométricas.
- Observar y tener una idea clara del comportamiento y representación gráfica de un fenómeno periódico, característico de las funciones trigonométricas.
- Para cuando se llegue al tema de las funciones seno y coseno, el alumno identifique y trace con facilidad las gráficas correspondientes.

MODELO DIDÁCTICO DE

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

¿Qué aprenderemos al finalizar el estudio de este material?

OBJETIVO GENERAL:

Definir, a partir de arcos orientados sobre la circunferencia unitaria, las diversas funciones trigonométricas, identificando sus dominios y rangos, representando sus gráficas en el plano cartesiano, sus relaciones con ángulos orientados, estableciendo sus funciones inversas, las identidades, y aplicar al planteamiento y solución de problemas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Definir arcos y ángulos orientados sobre la circunferencia unitaria, y definir la función envolvente.
- Determinar los sistemas de medidas angulares y equivalencias de arcos y ángulos orientados.
- Definir las funciones trigonométricas seno y coseno a partir de puntos sobre la circunferencia unitaria, identificando sus propiedades y sus gráficas.
- Definir las funciones trigonométricas tangente, cotangente, secante y cosecante a partir de las funciones recíprocas de las funciones seno o coseno, identificando sus propiedades y gráficas.
- Determinar las funciones trigonométricas inversas, identificando sus dominios y rangos, gráficos y aplicarlos a la resolución de ecuaciones con funciones trigonométricas.
- Aplicar las leyes trigonométricas a la resolución de triángulos y a la solución de problemas.

CONTENIDOS:

1.1. *Arcos y ángulos orientados y la función envolvente*

1.2. *Sistemas de medidas angulares de arcos y ángulos orientados y sus equivalencias.*

1.3. *Funciones trigonométricas: seno y coseno, sus propiedades y sus gráficas.*

1.4. *Funciones trigonométricas tangente, cotangente, secante y cosecante, sus propiedades y sus gráficas.*

1.5. *Funciones trigonométricas inversas: arco seno, arco coseno y arco tangente. Sus gráficas y aplicaciones a la solución de ecuaciones con funciones trigonométricas. Solución de ecuaciones trigonométricas.*

1.6. *Resolución de triángulos y las leyes trigonométricas. Aplicaciones a la solución de problemas diversos.*

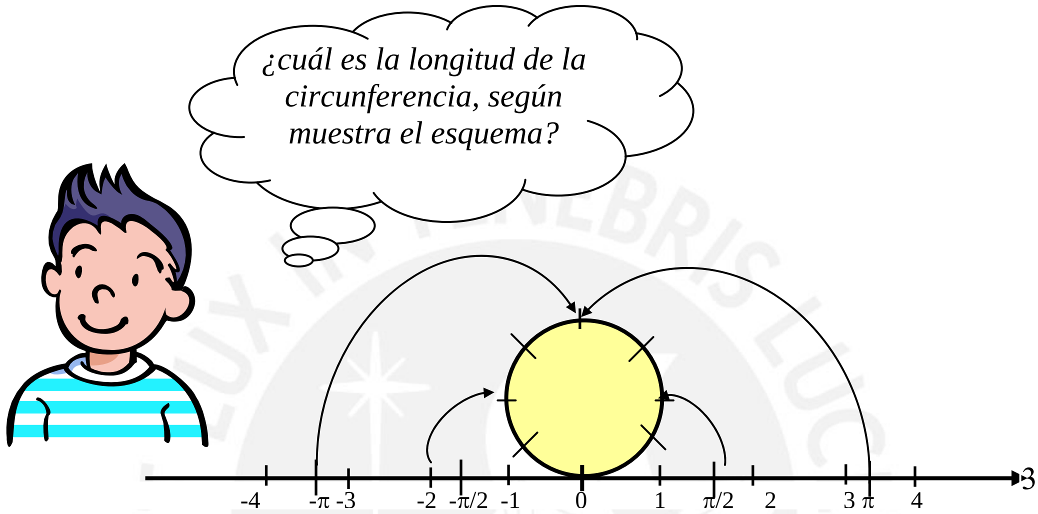
¿Sabías quién fue el iniciador de la trigonometría?

RECUERDA:

¡*Qué tu éxito en el aprendizaje de las ideas sobre los arcos orientados coterminales y función envolvente, depende de tu empeño, tu honestidad, y tu fuerza de voluntada para superarte*!

UNIDAD Nº 1

ARCOS ORIENTADOS Y FUNCIÓN ENVOLVENTE



Al término del estudio de esta UNIDAD se estará en condiciones de:

DEFINIR ARCOS Y ÁNGULOS ORIENTADOS SOBRE LA CIRCUNFERENCIA UNITARIA, Y DEFINIR LA FUNCIÓN ENVOLVENTE.

PRUEBA DE ENTRADA

1. Indique la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones en la circunferencia unitaria y diga ¿por qué? 2 pts

   a) $(A , \pi) = (A , 3\pi)$ b) $(A , \pi/2) = (A , 2\pi/3)$ c) $(A , \pi/4) = (A , 9\pi/4)$

2. Dibuje los arcos orientados en la circunferencia unitaria que corresponden a los siguientes recorridos, a partir de $A = (1 , 0)$: 3 pts

   a) $2\pi/3$ b) $5\pi/6$ c) $11\pi/3$ d) $-7\pi/3$.

3. Efectúe las siguientes sumas de trayectorias en la circunferencia unitaria, con $A = (1 , 0)$: 3 pts

   a) $(A , 5\pi/2) + (A , -5\pi)$ b) $(A , -5\pi/2) + (A , 15\pi/2)$

   c) $(A , 11\pi/4) + (A , 4\pi/3)$ c) $(A , -11\pi/4) + (A , 7\pi/3)$

4. Represente en la circunferencia unitaria los arcos orientados con $A = (1 , 0)$ y $B = (0 , 1)$, luego efectúe las sumas: 3 pts

   a) $(A , \pi/4) + (B , -\pi)$ b) $(A , \pi/2) + (B , 7\pi/2)$ c) $(B , 3\pi/4) + (A , 5\pi/6)$

5. Dado un punto $P = (a , -1/3)$) en la circunferencia unitaria: $\mathcal{C}_1(O)$; encuentre el valor de a, siendo P un punto del IV cuadrante. Luego, indique los puntos simétricos respecto al eje de las abscisas, al eje de las ordenadas y al origen de coordenadas. 3 pts

6. En $\mathcal{C}_1(O)$; ubique los puntos dados e identifique sus coordenadas: 3 pts

   a) $E(-\pi/2)$ b) $E(3\pi/2)$ c) $E(-5\pi/4)$ d) $E(\pi/3)$

7. Si $P = (x , y) \in \mathcal{C}_1(O)$; ¿a qué intervalo pertenecen x e y? 3 pts

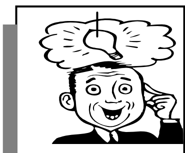
   a) $[-1 , 0]$ b) $]-1 , 1]$ c) $[0 , 1[$ d) $[-1 , 1]$

ESCALA DE PONDERACIÓN (CALIFICATIVO)

De 20 a 18: ¡**EXCELENTE**!, Pase a estudiar unidad modular 2 del modelo.
De 17 a 14: ¡**bueno /suficiente**!, repace los puntos donde tuvo dificultad en el material
De 13 a 11: ¡**regular/deficiente**! Estudie detenidamente los puntos que erraste.
De 10 a 0: ¡**deficiente**!, Estudie íntegramente esta unidad modular.

REQUISITOS

¡Para abordar el estudio de esta unidad es necesario recordar los siguientes temas:



1. *Puntos y distancias en el Sistema de coordenadas rectangulares.*
2. *Gráfica de funciones reales de variable real.*
3. *Simetrías entre puntos del sistema de coordenadas rectangulares.*
4. *Identificación de fenómenos periódicos y trayectorias.*
5. *Longitud de circunferencia, longitud de arco de circunferencia y sectores circulares.*
6. *Honradez, mucha concentración en el estudio y deseo de aprender.*

OBJETIVOS

1. *Deducir la ecuación cartesiana de la circunferencia unitaria.*
2. *Distinguir los arcos orientados y coterminales sobre la circunferencia.*
3. *Definir la función envolvente y determinar las coordenadas del extremo terminal de un arco orientado en posición normal.*
4. *Determinar las coordenadas de los extremos de los arcos notables en la* $\mathcal{C}_1(O)$.
5. *Definir e identificar fenómenos periódicos y resolver ejercicios de aplicación.*

CONTENIDOS

1. *Deducción de la ecuación cartesiana de la circunferencia unitaria.*
2. *Arcos orientados y arcos coterminales y la función envolvente sobre la circunferencia unitaria.*
3. *Coordenadas del punto terminal de un arco orientado en posición normal por la función envolvente.*
4. *Coordenadas de los extremos del arcos notables en la* $\mathcal{C}_1(O)$.
5. *Fenómenos periódicos y definición de una función periódica. Aplicaciones.*

DESARROLLO

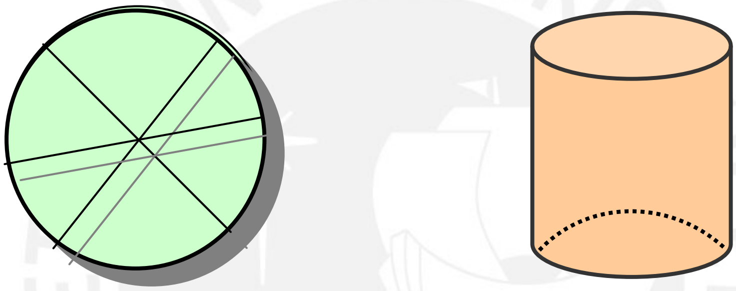
EXPLORACIÓN-MOTIVACIÓN-PROBLEMATIZACIÓN

ACTIVIDAD 1: Los estudiantes identifican objetos o fenómenos circulares que existen en su entorno. En forma libre y según conocimientos previos, identifican algunos elementos geométricos del círculo y lo representan gráficamente.

Cálculo del número π.

Todos cuentan al menos con un objeto de forma circular de distintos tamaños, un hilo y una regla graduada. Se realizan las siguientes actividades:

1. Con el hilo o cuerda flexible se envuelve el objeto circular, una vuelta, dos o tres veces. Se mide la cuerda que da una vuelta. Se anotan los resultados: ……………………...................……
2. Aproxime el diámetro de la circunferencia del objeto circular, midiendo con una regla graduada dos o tres veces. Se anotan las aproximaciones: ……………………......................……..
3. Se dividen la longitud de la circunferencia o contorno entre la longitud del diámetro, obtenidos. Los respectivos cocientes son: ……………………......................................
4. Se hacen comparaciones de los diversos resultados obtenidos por cada uno o por varios de los participantes. Conclusión: …………………………………………………



RESPONDA LAS SIGUIENTES PREGUNTAS:

1. ¿Cuál de las medidas es mayor: el diámetro o la longitud de circunferencia del objeto mostrado?
   Respuesta: ....
2. ¿Con qué aproximaciones se hacen las mediciones?:
   Respuesta..
3. ¿Con cuántas cifras decimales se ha aproximado el cociente?
   Respuesta: ………………………….........………………………….................…
4. Los resultados obtenidos, ¿Son aproximadamente iguales?
   Respuesta:..

RECUERDA: *El número que calculamos es el valor aproximado del número real π que es de gran utilidad en el estudio de las funciones trigonométricas*.

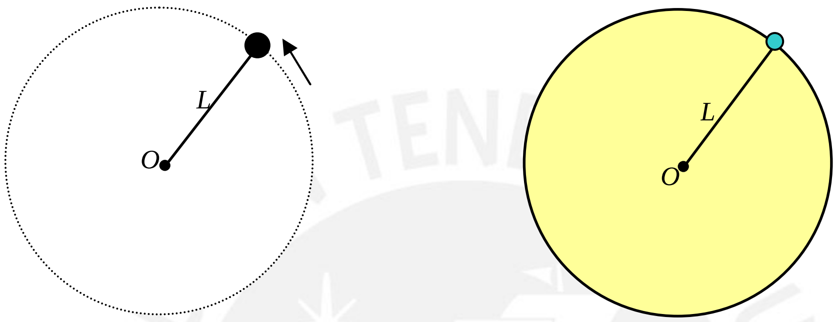
Usaremos el valor: π =3,14

1.1. ARCOS ORIENTADOS

ACTIVIDAD 2: Con un hilo de longitud *L*, suspendamos un objeto en un extremo, y fijando el otro extremo, hagamos girar el objeto suspendido, como se muestra en la **figura 1(a)**.

- ¿Cuál es la trayectoria que describe el objeto? ....
- ¿Cuántas veces pasa el objeto, durante el movimiento, por un punto? ....
- ¿Cuál es la distancia del extremo fijo a la trayectoria descrita por el objeto? ....
- ¿La longitud del hilo *L*, que nombre tiene? ....
- ¿Cuál es la longitud del hilo *L*, es su caso? ....

Haciendo coincidir el punto fijo del hilo con el centro del círculo de triplay y el objeto del otro extremo se desplaza por el borde del círculo, llamada ***circunferencia*** de centro *O* y radio *L*, como se tiene en la figura 1(b).



(a) ***Figura 1*** (b)

EJERCICIO: Reemplazando el hilo por un compás, y efectuar trazos diversos sobre una hoja de papel.

ACTIVIDAD 3: En una circunferencia dada, se fijan dos puntos distintos *M* y *N*. Identificar los arcos de circunferencia *MDN* y *MEN*, ambos de extremos *M* y *N*, que contiene a los puntos *D* y *E*, respectivamente:

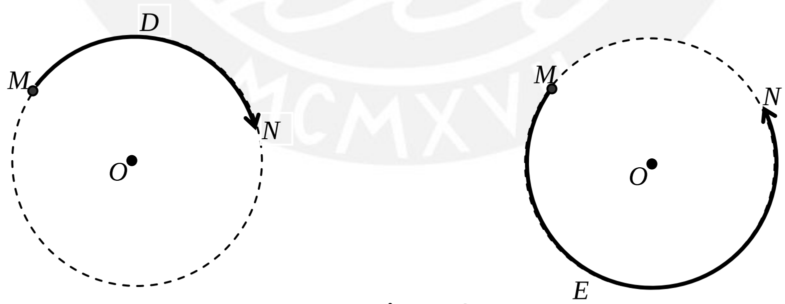


Figura 2

En estos arcos, definiremos ***arcos orientados*** con extremo inicial *M* y extremo terminal *N*, siguiendo puntos o trayectos de la circunferencia dada: Partiendo de *M* se recorre la circunferencia hasta llegar a *N*. ¿Cómo lograr esto? o ¿de qué maneras se puede hacer tal recorrido?.

Considerando los arcos anteriores, hay dos formas:

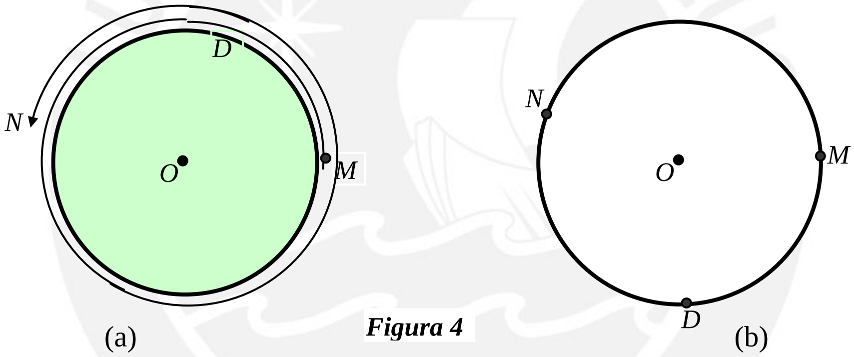
-) Partiendo de *M*, se sigue el trayecto de la circunferencia pasando por *D* y se llega a *N*; como se ilustra en Figura 3-(a). En este caso, decimos que se ha hecho un recorrido en ***sentido horario***, que llamaremos ***orientación negativa***;

-) Partiendo de *M*, se sigue el trayecto de la circunferencia pasando por *E* y se llega a *N*; como se ilustra en la Figura 3-(b). En este caso, decimos que se ha hecho un recorrido en ***sentido antihorario***, que llamaremos ***orientación positiva.***

(a) ***Figura 3*** (b)

¿Hay otras formas de unir los extremos *M* y *N*, partiendo de *M* y llegando a *N*, siguiendo algunos de los sentidos u orientaciones anteriores, en la circunferencia dada?

Sí, en sentido horario, partiendo de *M* se describe una vuelta, pasando por *D* y *N*, y se sigue el trayecto hasta llegar a *N*; o también, describiendo dos vueltas y se sigue hasta llegar a *N*. En estos dos procesos, se han descrito dos arcos orientados de extremos inicial *M* y terminal *N*.



(a) ***Figura 4*** (b)

-) Se puede hacer en sentido antihorario, como en la figura 4(a).

-) Presente en una gráfica dos procesos en sentido horario en la circunferencia de figura 4(b).

De los procesos anteriores, ¿Qué caracteriza a un arco de circunferencia orientado de extremo inicial *M* y extremo terminal *N*?

Conociendo los extremos inicial y terminal, un arco orientado queda caracterizado por:

-) El sentido u orientación del recorrido (***positivo*** o antihorario y ***negativo*** u horario); y

-) La longitud del trayecto recorrido, dado por un número real θ.

EJERCICIOS:

1. En los arcos de circunferencia anteriores, ¿Cómo se definen arcos orientados de extremo inicial *N* y extremo terminal *M*? ....

2. Una hormiguita recorre por el borde del disco de triplay que dispone y que tiene 1 dm de radio, y Jaimito observa que de un punto dado recorre la mitad del borde, luego regresa hasta dos tercios del trayecto anteriormente recorrido y, finalmente, de esta posición, regresa en sentido opuesto y da una vuelta completa. Caracterizar los arcos recorridos por la hormiguita.

3. Se tiene un sistema formado por tres poleas de 8 dm, de 6 dm y 2 dm de radio, unidos por fajas como se muestra en la figura 5. Si la polea más pequeña da 16 vueltas. Determine la longitud de arco que recorre en su rotación la polea de radio 8 dm.

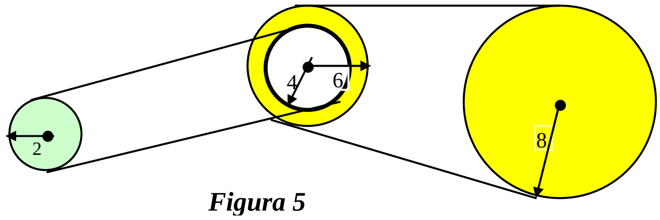


Figura 5

1.2. ARCO ORIENTADO EN POSICIÓN NORMAL

Para caracterizar y formalizar en forma más objetiva de lo que es un arco orientado, centremos la circunferencia de radio r = 1 en el origen O de un sistema cartesiano rectangular: Por el centro de una circunferencia de radio r = 1, se trazan dos rectas perpendiculares X e Y, llamadas eje X o de ***abscisas*** y eje Y o de ***ordenadas*** del sistema rectangular trazado.

En este sistema, el centro de la circunferencia es $O = (0 , 0)$ y un punto cualquiera $P = (x , y)$ de dicha circunferencia cumple: la distancia del centro O al punto P, es 1; es decir: d(P , O) = 1. Pero d(P , O) = $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2} = 1$. De esto, elevando al cuadrado, se cumple: $x^2 + y^2 = 1$, llamada la ecuación cartesiana de la circunferencia de centro $O = (0 , 0)$ y radio $r = 1$.

Además, para la circunferencia de centro (0 , 0) y radio 1 se tiene: su longitud es $2\pi\times1 = 2\pi$; el eje X la intercepta en los puntos: (1 , 0) y (–1 , 0), el eje Y la intercepta en los puntos (0 , 1) y (0 , –1).

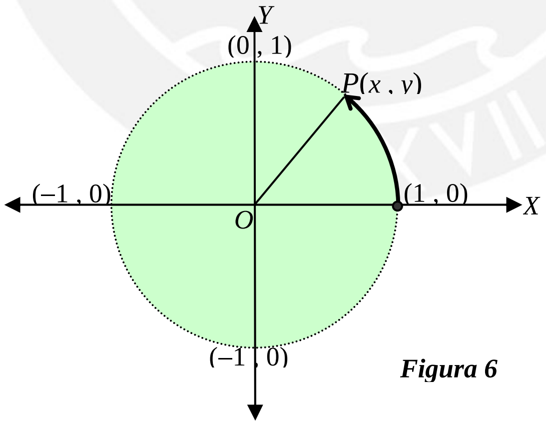


Figura 6

Resumiendo lo expresado anteriormente, se tiene la:

DEFINICIÓN: Una ***circunferencia unitaria*** de centro O = (0 , 0) y radio r = 1, denotada por $\mathcal{C}_1(O)$, es el conjunto de todos los puntos o el lugar geométrico de puntos $P = (x , y) \in 3^2$, tales que: $d(P , O) = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2} = 1$, o sea $x^2 + y^2 = 1$.

Es decir: $\mathcal{C}_1(O) = \{(x , y) \in 3^2 \,/\, x^2 + y^2 = 1\}$, o simplemente: $\mathcal{C}_1(O)$: $x^2 + y^2 = 1$.

De lo anterior, teniendo la circunferencia unitaria $\mathcal{C}_1(O)$ de centro $O = (0 , 0)$ y radio $r = 1$; fijando el punto $A = (1 , 0)$ y considerando un punto $M = (u , v)$ de $\mathcal{C}_1(O)$, o sea $u^2 + v^2 = 1$; se trata de caracterizar un arco orientado de extremo inicial A y extremo terminal M, siguiendo o recorriendo la circunferencia a partir de A y llegando a M en un cierto sentido.

EJERCICIOS: Resolver con orientación del profesor y en forma grupal:

1. Si a partir de A se desplaza 2/3 de vuelta, en sentido antihorario; entonces $M =$ ....

2. Determine la coordenada de M si, partiendo de A, se recorre 2 y 1/2 vuelta, en sentido horario, y se llega a M.

3. Partiendo de A se hace un recorrido de longitud 5π en $\mathcal{C}_1(O)$, en sentido positivo, el punto terminal del recorrido es $M =$ ....…..

4. ¿Cuál de las longitudes es mayor: Arco de media vuelta o el diámetro de la circunferencia?.

5. Si partiendo de A, se recorre un arco de longitud $3\pi/4$ y en sentido antihorario, el punto terminal es: ....…… . En este caso y considerando que un recorrido antihorario es positivo, el arco orientado descrito es determinado por el número $3\pi/4$.

6. Si partiendo de A, se recorre un arco de longitud $3\pi/4$ y en sentido horario, el punto terminal es: .... En este caso y considerando que un recorrido horario es negativo, el arco orientado es determinado por el número $-3\pi/4$.

7. El arco orientado, con punto inicial A y descrito por $-5\pi/6$ tiene como punto terminal: ....

8. El arco orientado de punto inicial $A = (1 , 0)$ y descrito por un recorrido de vueltas completas en $\mathcal{C}_1(O)$, tiene punto terminal: ……….; y es determinado por cualesquiera de los números: $2k\pi$, con k en 9. Además, interprete lo anterior para $k = 1 , -1, 2$ y -2.

De los ejercicios anteriores, resueltos con orientación del profesor, se resume la siguiente:

DEFINICIÓN: En la circunferencia $\mathcal{C}_1(O)$, un ***arco orientado en posición normal***, de punto inicial $A = (1 , 0)$ y descrito por el número real θ; se denota por (A , θ), es el recorrido en $\mathcal{C}_1(O)$ de un trayecto de longitud $|\theta|$, a partir de A y en sentido:

-) antihorario, si $\theta > 0$;

-) horario, si $\theta < 0$.

Además, si $\theta = 0$, el extremo terminal de (A , θ) es el mismo punto A.

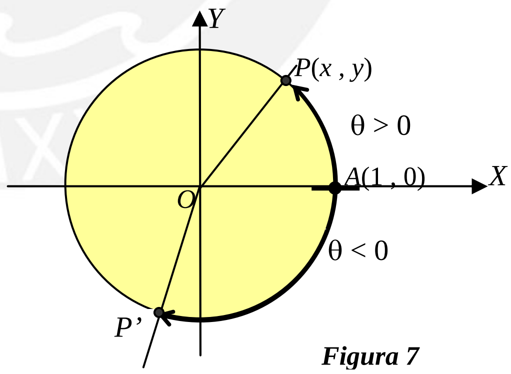


Figura 7

EJEMPLOS: (desarrollar y graficar, según los casos)

1) En una gráfica de la $\mathcal{C}_1(O)$, se tiene los siguientes arcos orientados en posición normal: $(A , \pi/2)$, $(A , -3\pi/4)$, $(A , 5\pi/4)$ y $(A , -11\pi/6)$.

Además, se tiene que sus extremos terminales son, respectivamente, los puntos: ……………

2) Determine los valores necesarios de θ en 3, de manera que el extremo terminal de (A , θ) sean los puntos de intersección de la $\mathcal{C}_1(O)$ con los ejes de coordenadas.

3) En la figura 8, se tiene los arcos orientados de extremo inicial $A = (1 , 0)$ y recorridos $\alpha = 3\pi/4$ y $\theta = -3\pi/4$. Se observa que $|\alpha| = |\theta|$

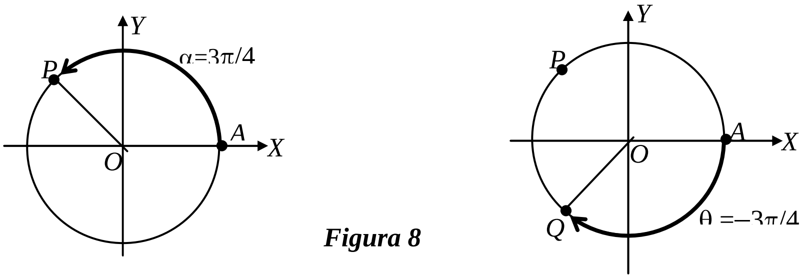


Figura 8

4) Si α y θ definen dos arcos orientados en posición normal en $\mathcal{C}_1(O)$ y extremo inicial $A = (1 , 0)$; entonces $\alpha + \theta$, $\alpha - \theta$ y $\theta - \alpha$ también definen arcos orientados en posición normal en $\mathcal{C}_1(O)$, con extremos iniciales A.

a) Haga una representación gráfica de los resultados indicados.

b) Para los arcos orientados $\pi/3$ y $3\pi/4$, $\pi/3 + 3\pi/4$ = ..., es un arco orientado.

c) Para los arcos orientados $3\pi/4$ y $-7\pi/4$, $3\pi/4 + (-7\pi/4)$ = ..., es un arco orientado.

d) Para los arcos orientados $-\pi/3$ y $-\pi/6$, $(-\pi/3) + (-\pi/6)$ = ..., es un arco orientado.

e) ¿Si los arcos orientados tienen la misma orientación, cual es la orientación de la suma?

f) ¿Si los arcos orientados tienen distinta orientación, cual es la orientación de la suma?

¡Indique en la $\mathcal{C}_1(O)$ de la ***figura 9*** las respuestas de los ejercicios de a) hasta f) !

5) En la $\mathcal{C}_1(O)$, consideremos los arcos orientados definidos por: $\alpha = \pi/6$, $\beta = -3\pi/4$, $\theta = 5\pi/4$, $\gamma = 13\pi/6$ y $\lambda = -\pi/3$ de extremo inicial $A = (1 , 0)$.

- Ubique estos arcos en la $\mathcal{C}_1(O)$ de la **figura 10**.
- ¿Coinciden los extremos terminales de algunos de ellos?
- ¿Cuál de los arcos tiene extremos terminales iguales?

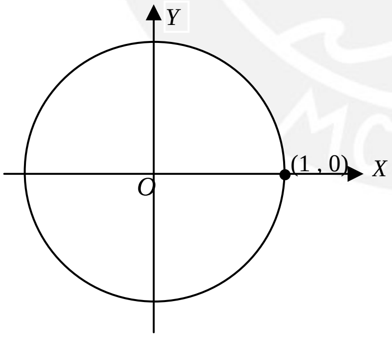


Figura 9

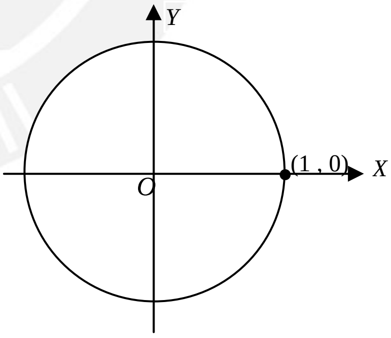


Figura 10

1.3. ARCOS ORIENTADOS COTERMINALES

En los ejemplos 2 y 5, anteriores, se tienen arcos orientados en posición normal distintos con extremos inicial $A = (1 , 0)$ y extremos terminales iguales. A tales arcos orientados llamaremos arcos orientados en posición normal coterminales.

También, en las circunferencias de la ***figura 11***, se tienen arcos orientados de extremo inicial $A = (1 , 0)$ y extremo terminal $B = (0 , 1)$; es decir, extremos terminales iguales. Dichos arcos son también arcos orientados en posición normal coterminales.

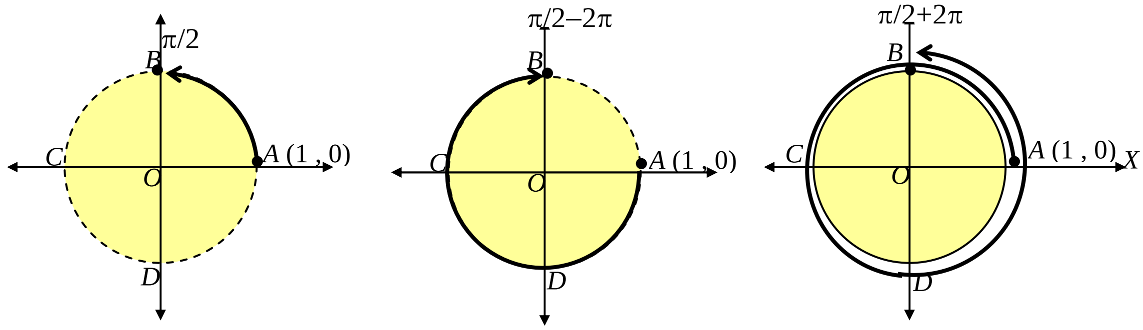


Figura 11

De la ***Figura 11***, los arcos orientados en posición normal: $\pi/2$, $-3\pi/2$ y $5\pi/2$, tienen extremos inicial $A = (1 , 0)$ y extremos final $B = (0 , 1)$; por lo que se denominan **arcos coterminales**.

En general los arcos orientados de las formas $(\pi/2 + 2k\pi)$, $\forall\ k \in 9$, son arcos coterminales.

En este caso, darse tres o cuatro valores distintos para k en 9, halle los extremos de los arcos obtenidos y comprobar la afirmación anterior.

Lo anterior formalizamos en la siguiente:

DEFINICIÓN: Dos o más arcos orientados en posición normal, (A, θ), (A, α), con puntos inicial fijo $A = (1 , 0)$ y que tienen el mismo punto terminal M, se llaman **arcos orientados coterminales**.

EJEMPLOS: Presentar en gráficos adecuados

1) Los arcos orientados en posición normal definidas por $\pi + 2k\pi$, para $k \in 9$, son coterminales en el extremo terminal $(-1 , 0)$.

2) Los arcos orientados en posición normal definidas por $3\pi/2 + 2k\pi$, para $k \in 9$, son coterminales en el extremo terminal $(0 , -1)$.

3) Dado el arco orientado en posición normal definido por el número real θ, su extremo terminal en el punto $P = (x , y)$. Entonces todos los arcos orientados en posición normal definidos por $\theta + 2k\pi$, para cada $k \in 9$, son arcos orientados coterminales en el extremo terminal $P = (x , y)$.

1.4. FUNCIÓN ENVOLVENTE

En ejemplos de la sección anterior, diversos arcos orientados en posición normal en $\mathcal{C}_1(O)$, fijado el punto inicial $A = (1 , 0)$, se han caracterizado por el número real θ que lo define, donde el signo de θ indica la orientación y su valor absoluto, $|\theta|$, determina la longitud del camino o del trayecto o porción de circunferencia recorrido para tener el arco orientado (A , θ), que dependa únicamente de θ.

Para esto, fijado $A = (1 , 0)$ en $\mathcal{C}_1(O)$, un arco orientado en posición normal definido por θ, se describe por el recorrido en la $\mathcal{C}_1(O)$, a partir de $A = (1 , 0)$ y en un cierto sentido u orientación dado por el signo de θ, de un camino o trayecto o porción de la circunferencia, y se termina en un único punto o extremo terminal, que se denota por E(θ) = (u , v) ∈ $\mathcal{C}_1(O)$; es decir, se tiene una función E de 3 en $\mathcal{C}_1(O)$, tal que a cada θ ∈ 3 le asigna un único punto E(θ), el punto terminal del arco orientado (A , θ) definido por θ. Formalizando, se tiene:

DEFINICIÓN: Dado un arco orientado en posición normal (A , θ) en $\mathcal{C}_1(O)$, se tiene una función E, llamada ***función envolvente*** o ***camino orientado***, que a cada número real θ le hace corresponder un único punto E(θ) = (u , v) en $\mathcal{C}_1(O)$, el extremo terminal del arco (A , θ); es decir, E : 3 $\longrightarrow$ $\mathcal{C}_1(O)$, donde E(θ) = (u , v), con $u^2 + v^2 = 1$

EJEMPLOS:

1) Partiendo de A = (1 , 0), el arco orientado (A , π/4) describe un camino de longitud π/4 hasta llegar al punto terminal E(π/4) = (u , v) en $\mathcal{C}_1(O)$, o sea $u^2 + v^2 = 1$.

Para determinar (u , v), como este punto divide al arco de circunferencia del primer cuadrante en su punto medio; es decir, está en la bisectriz del primer cuadrante, se tiene $u = v$ y $u^2 + u^2 = 2u^2 = 1$; de donde $u^2 = ½$ o $u = 1/\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Luego,

$$E(\pi/4) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ en } \mathcal{C}_1(O).$$

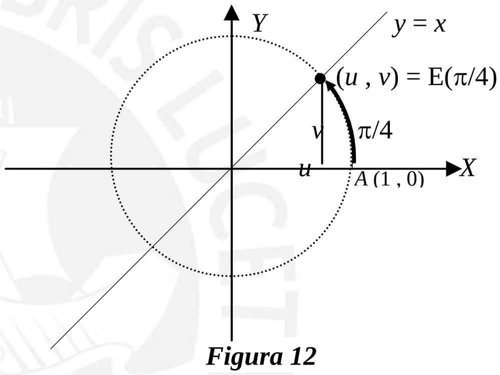


Figura 12

Además, considerando simetrías respecto a los ejes de coordenadas y al origen, teniendo E(π/4) en $\mathcal{C}_1(O)$; en el gráfico (Figura ***12***) y como ejercicio, describir los arcos orientados en posición normal (A , α), para A = (1 , 0), y determinar las coordenadas E(α) de los puntos terminales de los arcos orientados en posición normal (A , α), para α = 5π/4 , 7π/4, –π/4, y 3π/4.

2) Dado el arco orientado en posición normal definido por π/3, a partir de A = (1 , 0); para hallar las coordenadas de E(π/3) en $\mathcal{C}_1(O)$, punto terminal de dicho arco, en la semicircunferencia de longitud π, extremo inicial (1 , 0) y extremo final (–1 , 0) dividimos en tres partes de longitudes iguales a π/3, por los puntos E(π/3) y E(2π/3) en $\mathcal{C}_1(O)$.

Luego, las cuerdas de extremos E(0) y E(π/3), E(π/3) y E(2π/3) y E(2π/3) y E(π) son lados de un exágono regular inscrito en $\mathcal{C}_1(O)$ y tienen longitudes iguales a la del radio r = 1 de $\mathcal{C}_1(O)$; y los triángulos: de vértices E(0), E(π/3) y O, de vértices E(π/3), E(2π/3) y O y de vértices O, E(2π/3) y E(π) son equiláteros. De esto, si E(π/3) = (u , v), resulta que $2u = 1$, o sea $u = \frac{1}{2}$ ¿por qué?. Además, como $u^2 + v^2 = 1$ y $u = \frac{1}{2}$, se tiene $v = \frac{\sqrt{3}}{2}$; es decir, E(π/3) = ($\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$).

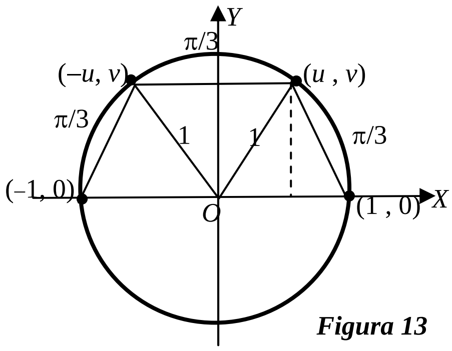
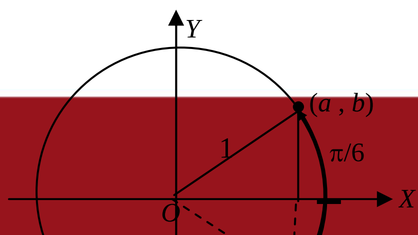


Figura 13

3) Dado el arco orientado en posición normal definido por



$\pi/6$, a partir de $A = (1 , 0)$; para hallar las coordenadas de E($\pi/6$) en $\mathcal{C}_1(O)$, como $\pi/6 = \frac{1}{2}(\pi/3)$, el arco de extremos E(0) y E($\pi/3$) dividimos en dos partes de longitudes iguales a $\pi/6$ por el punto E($\pi/6$), punto terminal de dicho arco. Entonces E($\pi/6$) = (a , b) está en la bisectriz del ángulo E($\pi/3$)OE(0), ángulo interior de un triángulo equilátero de lado 1. Luego, $b = \frac{1}{2}$ y, como $a^2 + b^2 = 1$, se tiene $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Por lo tanto E($\pi/6$) = ($\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$).

EJERCICIO: Por simetría en la circunferencia unitaria, con respecto al eje Y, al eje X, al origen y a la recta $x = y$; a partir de E($\pi/3$), determinar las coordenadas, en $\mathcal{C}_1(O)$, de:

E($5\pi/6$) = (... , ...), E($-2\pi/3$) = (... , ...), E($5\pi/3$) = (... , ...). E($-7\pi/6$) = (... , ...).

OBSERVACIÓN: De la definición expuesta, de la función envolvente, se tiene:

-) Para cada θ en 3, el punto E(θ) está en $\mathcal{C}_1(O)$ y es único. De esto, el dominio de la función E es 3, el conjunto de los números reales, y el rango es la circunferencia unitaria $\mathcal{C}_1(O)$.

Así, E($\pi/6$) = ($\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$), E($\pi/3$) = $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, E($\pi/4$) = $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, etc.

-) Las coordenadas (u , v) = E(θ) están en $\mathcal{C}_1(O)$, y cumplen $u^2 + v^2 = 1$, ecuación de la circunferencia unitaria. Además, de $u^2 + v^2 = 1$ se tiene $u^2 = 1 - v^2$ o $v^2 = 1 - u^2$.

Como $u^2 \geq 0$, $\forall\, u \in$ 3, entonces: $1 - v^2 \geq 0$ ó $v^2 \leq 1$. Luego: $-1 \leq v \leq 1$, o sea $v \in [-1 , 1]$

Como $v^2 \geq 0$, $\forall\, v \in$ 3, entonces $1 - u^2 \geq 0$ ó $u^2 \leq 1$. Luego: $-1 \leq u \leq 1$, o sea $u \in [-1 , 1]$.

-) Dado un punto (u , v) en $\mathcal{C}_1(O)$ y fijado $A = (1 , 0)$, siempre es posible describir un arco orientado de extremo inicial A y extremo terminal (u , v); es decir, siempre es posible hallar α en 3 tal que E(α) = (u , v). De esto, la función E es suryectiva.

-) Además, dado un punto (u , v) en $\mathcal{C}_1(O)$ y fijado $A = (1 , 0)$, es posible describir muchos arcos orientados con la propiedad anterior (***arcos orientados coterminales***); es decir, hay muchos valores α en 3 tal que E(α) = (u , v). De esto, la función E no es inyectiva.

Así, E(2π) = E(0) = E(-2π) = (1 , 0), también E($\pi/4$) = E($9\pi/4$) = E($-7\pi/4$) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, etc.

1.5. ARCOS ORIENTADOS NOTABLES

Dado un arco orientado en posición normal (A , α), con punto inicial $A = (1 , 0)$ y punto terminal E(α), descrito por α en 3, para el estudio de las funciones trigonométricas es necesario conocer o hallar las coordenadas de E(α) = (u , v) en $\mathcal{C}_1(O)$.

En general, para α dado en 3, conocer o hallar las coordenadas de (u , v) de E(α), no es fácil ni inmediato. Sin embargo, para ciertos valores α, las coordenadas de E(α) se determinan por simple observación en la $\mathcal{C}_1(O)$, cuando E(α) está en los ejes de coordenadas, llamados ***puntos cuadrantes***; o aplicando propiedades básicas de la geometría respecto a los arcos de circunferencia, medida de ángulos o propiedades de algunos polígonos regulares, tal como presentamos en los ejemplos 2 y 3, anteriores, por ejemplo. En estos casos diremos que los arcos orientados en posición normal (A, α) son ***arcos orientados notables.***

EJEMPLOS:

1) Teniendo que la longitud de la circunferencia unitaria $\mathcal{C}_1(O)$ es 2π, las longitudes de un cuarto, de la mitad, de tres medios de circunferencia, son: $\pi/2$, π y $3\pi/2$, respectivamente. De esto, los puntos terminales de los arcos orientados en posición normal definidos por $\pi/2$, π y $3\pi/2$, con punto inicial $A = (1, 0)$, están en los ejes de coordenadas y son $E(\pi/2) = (0, 1)$, $E(\pi) = (-1, 0)$ y $E(3\pi/2) = (0, -1)$, respectivamente; como se comprueba describiendo los arcos en la **figura 15**.

Además se tiene $E(2\pi) = (1, 0)$, $E(0) = (1, 0)$, $E(-2\pi) = (1, 0)$, $E(-\pi) = (-1, 0)$, $E(-\pi/2) = (0, -1)$.

2) También los números $\pi/6$, $\pi/4$ y $\pi/3$, como se ha visto, definen arcos orientados en posición normal con extremos inicial $A = (1, 0)$ y extremos terminales en los puntos:

$E(\pi/6) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $E(\pi/4) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $E(\pi/3) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, respectivamente.

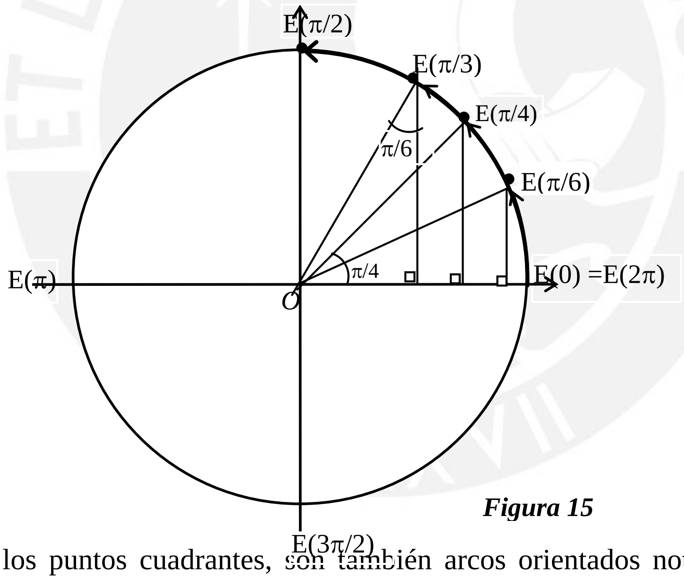


Figura 15

3) Además de los puntos cuadrantes, son también arcos orientados notables en $\mathcal{C}_1(O)$ los arcos orientados definidos por $\pm\pi/4$, $\pm\pi/2$, $\pm3\pi/4$, $\pm\pi/6$, $\pm\pi/3$, $\pm5\pi/4$, $\pm7\pi/6$, $\pm5\pi/6$, $\pm2\pi/3$, etc. De extremos inicial $A = (1, 0)$ y cuyos extremos terminales se hallan a partir de $E(\pi/6)$, $E(\pi/4)$ y $E(\pi/3)$, considerando simetrías respecto a los ejes X e Y, y al origen O. Tendremos que:

$E(\pi/3)$ =.............	$E(4\pi/3)$ =.............	$E(2\pi/3)$ =.............
$E(-\pi/3)$ =.............	$E(-4\pi/3)$ =.............	$E(-2\pi/3)$ =.............
$E(\pi/4)$ =.............	$E(3\pi/4)$ =.............	$E(5\pi/4)$ =.............
$E(\pi/4)$ =.............	$E(-3\pi/4)$ =.............	$E(-5\pi/4)$ =.............
$E(\pi/6)$ =.............	$E(5\pi/6)$ =.............	$E(7\pi/6)$ =.............
$E(-\pi/6)$ =.............	$E(-5\pi/6)$ =.............	$E(-7\pi/6)$ =.............

1.6. LA FUNCIÓN ENVOLVENTE ES FUNCIÓN PERIÓDICA

Anteriormente se ha observado que al describir un arco orientado en $\mathcal{C}_1(O)$, a partir de $A = (1\ ,\ 0)$, el extremo terminal de dicho arco puede estar definido por varios números reales α, y se tienen arcos orientados coterminales. Por ejemplo: E(2π) = E(0) = E(–2π) = (1 , 0) y E(π/4) = E(9π/4) = E(–7π/4) = $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, entre otros. De esto, si por ejemplo se pide hallar α y β en 3 tales que E(α) = (0 , 1) y E(β) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, por lo anterior, las soluciones existen y no son únicas

Por otro lado, como la longitud de $\mathcal{C}_1(O)$ es 2π, dado cualquier α en 3 se tienen arcos orientados (*A*, α), con extremos terminales E(α), donde corresponden las siguientes observaciones:

1. Si α = 0, E(0) = (1 , 0), y se tiene un arco orientado en posición normal nulo (*A*, 0).

2. Si 0 < α < 2π ó –2π < α < 0, el arco orientado (*A*, α) es parte de la $\mathcal{C}_1(O)$, descrito es sentido positivo o negativo, según el caso, con longitud 0 < |α| < 2π y extremo terminal E(α).

3. Si α = 2π ó α = –2π, el arco orientado (*A*, α) tiene extremo terminal (1 , 0), su longitud es 2π y corresponde a una vuelta de la circunferencia. Luego, E(2π) = E(–2π) = (1 , 0) = E(0).

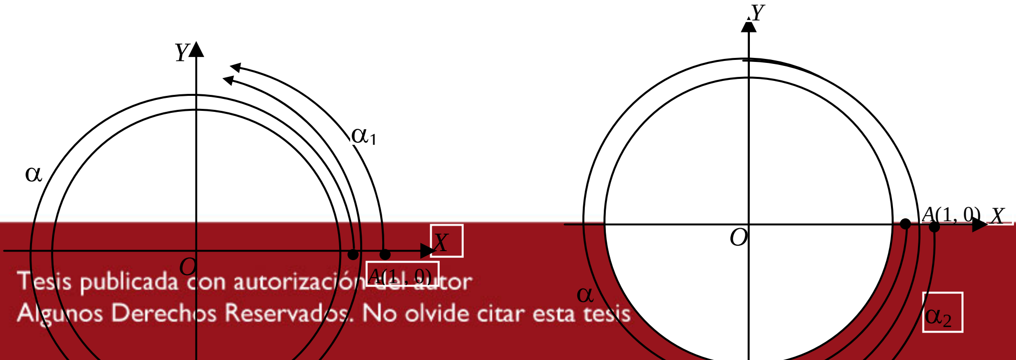
4. Si α > 2π ó α < –2π, esto es |α| > 2π, el arco orientado (*A*, α) tiene longitud mayor que la de $\mathcal{C}_1(O)$, es decir, al describir el arco orientado se considera más de una vuelta en $\mathcal{C}_1(O)$, pasando una o más veces por el punto *A* = (1 , 0) y se termina en un punto E(α) de $\mathcal{C}_1(O)$. En este caso, E(α) = E(θ), para un valor de θ con 0 < θ < 2π ó –2π < θ < 0

Son los casos, por ejemplo, , E(3π) = (–1 , 0) = E(π), con α = 3π = 2π + π, se tiene θ = π; E(–3π) = (–1 , 0) = E(–π), con α = –3π = (–2π) + (–π), se tiene θ = –π; E(9π/4) = $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ = E(π/4), con α = 9π/4 = 2π + π/4, se tiene θ = π/4; E(–17π/4) = $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$= E(–π/4), con α = –17π/4 = (–4π) + (–π/4), se tiene θ = –π/4; etc.

A manera de formalización:

i) Si el arco orientado (*A*, α) corresponde a más de *n* vueltas pero menos de *n* + 1 vueltas, en sentido positivo, se tiene 2*n*π < α < 2(*n*+1)π, para α > 0, con *n* > 0 en 9; para $\alpha_1 = \alpha - 2n\pi$ se tiene E(α) = E(α_1), con 0 < α_1 < 2π.

ii) Si el arco orientado (*A*, α) corresponde a más de *n* vueltas pero menos de *n* + 1 vueltas, en sentido negativo, se tiene 2(*n*+1)π < α < 2*n*π, para α > 0, con *n* < 0 en 9; para $\alpha_2 = \alpha - 2n\pi$ se tiene E(α) = E(α_2), con –2π < α_2 < 0.



$\alpha > 2\pi$ y $0 < \alpha_1 < 2\pi$ ***Figura 16*** $\alpha < -2\pi$ y $-2\pi < \alpha_2 < 0$

NOTA: Considerando la observación (4) anterior, un arco orientado en posición normal que describe un trayecto de más de una vuelta de la circunferencia unitaria, en cada vuelta se pasa por el punto $A = (1 , 0)$, y termina en un punto que corresponde a un arco de circunferencia de longitud menor que 2π.

EJEMPLO: Ilustre sobre las los siguientes arcos coterminales con los dados,

a) $E(\pi/2) = E(\pi/2 \pm 2\pi) = E(\pi/2 \pm 4\pi) = E(\pi/2 \pm 6\pi) =..... =E(\pi/2 \pm 2n\pi) = (\quad , \quad)$

b) $E(\pi/3) = E(\pi/3 \pm 2\pi) = E(\pi/3 \pm 4\pi) = E(\pi/3 \pm 6\pi) =..... =E(\pi/3 +2n\pi) = (\quad , \quad)$

c) $E(-5\pi/6) = E(-5\pi/6 \pm 2\pi) = E(-5\pi/6 \pm 4\pi) = E(-5\pi/6 \pm 6\pi) =..... =E(-5\pi/6 + 2n\pi) = (\ , \ )$

d) $E(0) = E(0 \pm 2\pi) = E(0 \pm 4\pi) = E(0 \pm 6\pi) =..... =E(0 + 2n\pi) = (\quad , \quad)$

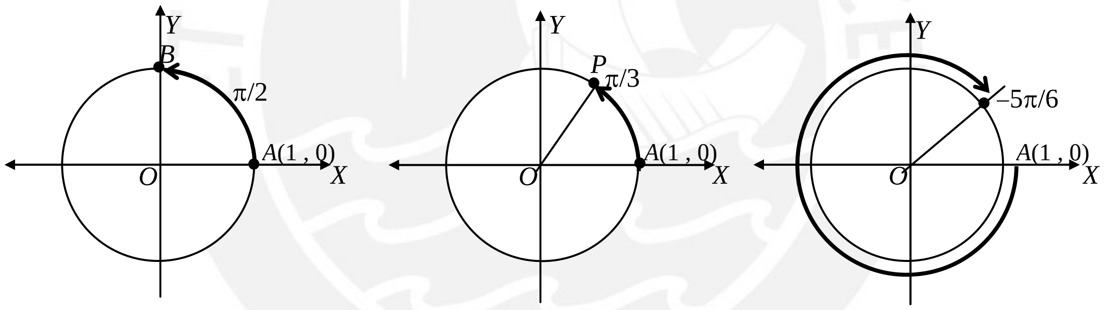


Figura 17

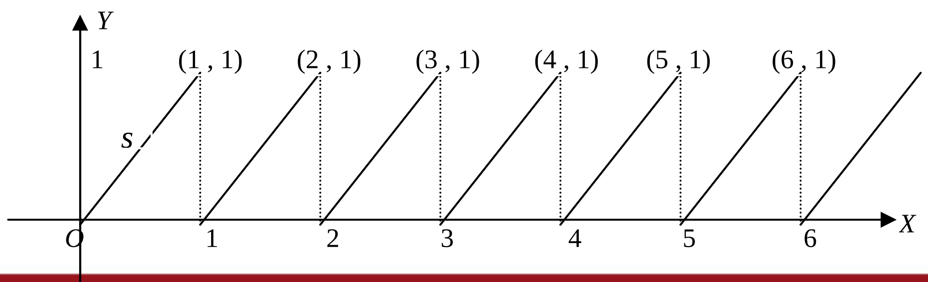
Todo lo anterior, se concluye en una propiedad que caracteriza a las funciones trigonométricas, que estudiaremos más adelante:

PROPIEDAD: La función envolvente E, de 3 en $\mathcal{C}_1(O)$, es una ***función periódica*** y cuyo ***periodo*** es 2π; es decir, $\forall\ \alpha \in 3$ se cumple: $E(\alpha + 2\pi) = E(\alpha)$ y $E(\alpha + \gamma) \neq E(\alpha)$ para $0 < \gamma < 2\pi$.

De la propiedad anterior se tiene: Para todo $\alpha \in 3$, se cumple $E(\theta) = E(\theta + 2k\pi)$; con $k \in 9$; es decir, $E(\alpha \pm 2\pi) = E(\alpha \pm 4\pi) = E(\alpha \pm 6\pi) =..... =E(\alpha + 2k\pi) = ... = E(\alpha)$, con $\alpha \in 3$.

Respecto a las funciones periódicas, ¡ RECUERDE !

1. El siguiente gráfico es el de una función periódica f , del intervalo $[0 , 6]$ en el intervalo $[0 , 1]$:

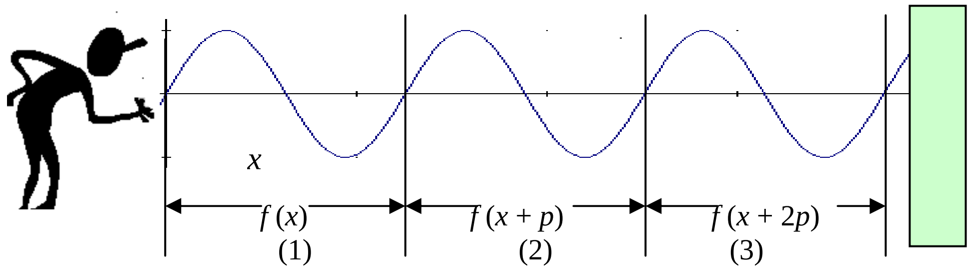


a) Hallar la regla de correspondencia de la función que representa la gráfica: $f(x) =$ ....

b) Dado el segmento s, ¿Cómo se obtienen las otras porciones de la gráfica?

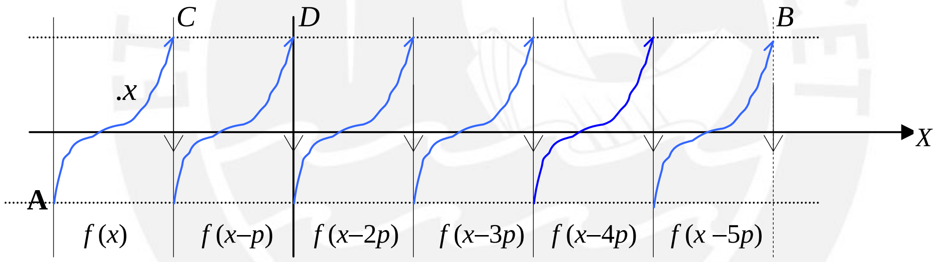
c) ¿Cuál es el periodo de la función dada?.

2. Hacer ondas con una cuerda fijando un extremo M, como se muestra en la figura:



La gráfica representa el movimiento de la curva dividido en tres secciones, tal que la forma (1) se desplaza a la derecha hasta la posición (2) y luego con otro desplazamiento alcanza la posición (3). ¿Cuánto se desplaza en cada caso?; es decir, $p =$ ----------

3. Una hormiga parte del suelo, del punto A hacia el punto B en una pared resbaladiza, siguiendo el trayecto de A hasta C. Cuando está por llegar a C, resbala verticalmente hasta el suelo, y se repite este proceso, describiendo trayectorias o caminos como se muestra en la figura:



La gráfica muestra una función creciente en cada una de las seis secciones que describe.
¿Qué de común tienen los trayectos que describen el movimiento de la hormiga? ....
¿Cómo se puede generar la gráfica dada, a partir de uno de los tramos descritos?
¿La gráfica dada, representa una función periódica?; ¿por qué? y ¿cuál es el periodo? ....

DEFINICIÓN: Diremos que la función f, con dominio en los números reales, es una función **periódica** si existe un número real $p \neq 0$, tal que $f(x) = f(x + p)$, para todo $x \in 3$, si $0 < k < p$, entonces $f(x + k) \neq f(x)$.

El número real positivo p que cumple la condición anterior se llama período de la función f.

EJERCICIOS:

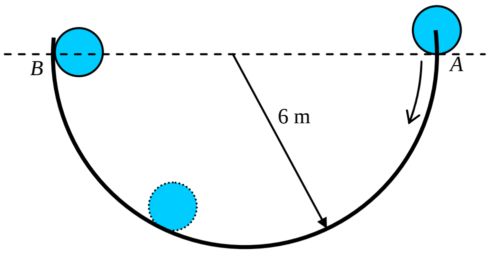
1) Según la definición de la función E sobre la $\mathcal{C}_1(O)$:
¿Es periódica la función "envolvente" E?..... ¿Cuánto es el período de E?..........., ¿Cuánto vale un período en la $\mathcal{C}_1(O)$?....... ¿Es cierto que para todo $\theta \in 3$: $E(\theta) = E(\theta + 2\pi)$?........... ¿Es 6π un período de E?......................., ¿lo serán -3π y -12π?. ....

2) Si $f(x \pm \pi) = f(x)$, ¿cuál es el período de la función f? ....

3) ¿Con la función $f(x) = x^3$, se puede definir una función periódica? .... ¡Ilustre!

....

4) En una superficie semicircular se suelta un balón de 20 cm de radio y se desplaza desde la posición "*A*" hasta la posición "*B*" como se muestra en la figura. Determine el número de vueltas que da el balón en todo el trayecto.



5) ¿Cuál de los siguientes fenómenos son periódicos y diga por qué? ....

a) El movimiento de rotación de la tierra alrededor de su eje.

b) El movimiento de traslación de la luna alrededor de la tierra.

c) El recorrido de las aguas del río Huallaga.

d) El recorrido que tu haces todos los días: casa-colegio-casa.

e) La secuencia de los años bisiestos.

6) Enumere 5 fenómenos periódicos que usted observa con frecuencia a su vida diaria. ¡explique!

....

....

....

....

....

Comprueba tus aprendizajes

1. Indique la verdad o falsedad referido a arcos orientados, ¿por qué? (2 pts)

a) $(A, \pi) = (A, 3\pi)$ b) $(A, \pi/2) = (A, 2\pi/3)$ c) $(A, \pi/4) = (A, 9\pi/4)$

2. Determine en la $\mathcal{C}_1(O)$ los puntos que corresponden a los siguientes recorridos: (3 pts)

a) $E(2\pi/3)$ b) $E(5\pi/6)$ c) $E(11\pi/3)$ d) $E(-7\pi/3)$.

3. Juanito tiene un animal salvaje sujeto con una soga de 25 m en el centro del estadio el animal al tratar de escapar de Juanito describe una circunferencia de $\mathcal{C}_{25}(O)$: (3 pts)

a) Si a un metro de Juanito el arco que describe la soga es $\pi/2$, ¿cuál es la distancia que recorre el animal y cuál es la coordenada del extremo terminal del arco? ....

b) Asumiendo que la coordenada del extremo inicial es (25 , 0) cual es la coordenada de su extremo final si a un metro del centro recorre $-3\pi/4$? ....

c) Al dar una vuelta completa ¿qué longitud tiene la trayectoria? ....

4. Represente en la circunferencia $\mathcal{C}_1(O)$ los arcos orientados y efectúe las sumas: (3 pts)

a) $\pi/2 + (-3\pi) = \ldots$ b) $3\pi/2 + 7\pi/2 = \ldots\ldots$ c) $-\pi/4 + 7\pi/6$

5. Dado un punto $P = (a\ ,\ -2/3)\ ) \in \mathcal{C}_1(O)$; encuentre el valor de a, siendo P un punto del IV cuadrante. Luego, indique los puntos simétricos respecto al eje abscisas, al eje de las ordenadas y al origen de coordenadas. 3 pts

6. En $\mathcal{C}_1(O)$; ubique los puntos e identifique sus coordenadas:

   a) $E(-\pi/3)$ b) $E(5\pi/2)$ c) $E(-7\pi/4)$ d) $E(2\pi/3)$ 2 pts

7. Si $P = (x\ ,\ y) \in \mathcal{C}_1(O)$; que valores reales puede tomar x e y.

   a) $[-1\ ,\ 0\ ]$ b) $]\ -1\ ,\ 1\ ]$ c) $[0\ ,\ 1\ [$ d) $[-1\ ,\ 1\ ]$ 2 pts

8. Tres poleas de diámetros 20 cm, 40 cm y 80 cm están conectados por una faja, cuántas vueltas dará la polea menor si la polea mayor da 5 vueltas. 2 pts

ASÍGNATE TUS PUNTAJES

¿Cuáles serían los puntajes que te asignas en el desarrollo de cada una de las preguntas de los Ejercicios de comprobación de tus aprendizajes? ¡Sé honesto!

Ítems	1	2	3	4	5	6	7	8	Nota
Puntaje									

RESUMEN DE LA UNIDAD Nº 1

En esta unidad, cuyo estudio acabamos de concluir, aprendimos a:

1. Identificar y manipular arcos orientados en torno al borde de un círculo (de triplay) o circunferencia.

2. Identificar las coordenadas para la intersección de la circunferencia unitaria con los ejes coordenados.

3. Descubrir diversos arcos orientados en torno a la circunferencia unitaria, identificando los puntos terminales en dicha circunferencia.

4. Ubicación de algunos puntos sobre la circunferencia unitaria para arcos notables en los distintos cuadrantes, teniendo en cuenta los signos y las simetrías.

5. *Identificar arcos orientados coterminales, dominio y rango de las funciones periódicas.*

6. *Identificar diferentes fenómenos periódicos y funciones periódicas.*

¿Tus resultados fueron satisfactorios al contrastar con el resultado obtenido por otros grupos de la clase, y con la respuesta del profesor?

Sí

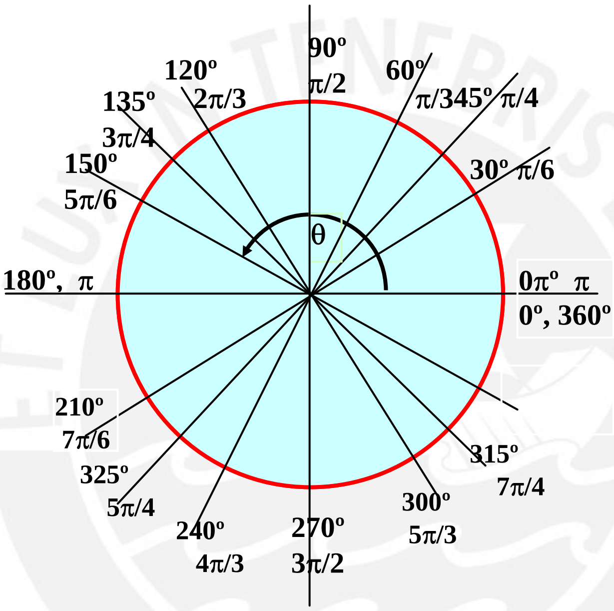
PASE A ESTUDIAR EL FASCINANTE TEMA DE LOS ÁNGULOS ORIENTADOS Y MEDIDAS ANGULARES QUE VIENE EN LA UNIDAD Nº 2

No

REPASE LOS PUNTOS QUE TUVO DIFICULTAD, Y SI SIGUE CON DUDAS CONSULTE AL PROFESOR

UNIDAD Nº 2

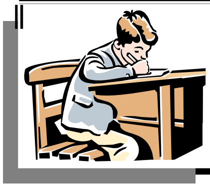
ÁNGULOS Y ARCOS ORIENTADOS: SUS MEDIDAS



Al término del estudio de esta UNIDAD se estará en condiciones de:

DETERMINAR LAS MEDIDAS DE ÁNGULOS Y ARCOS: SUS EQUIVALENCIAS EN DISTINTOS SISTEMAS

PRUEBA DE ENTRADA



Antes de iniciar esta segunda unidad, tienes a continuación cinco ejercicios previos para resolver

1. Un ciclista recorre 314,8 m sobre una pista circular de radio 8 m. ¿A cuántos radianes equivale el arco recorrido?

3 pts

2. a) Su equivalente de 150º en radianes es:

   b) Simplifique la expresión: $\dfrac{25^{\circ}+\frac{\pi}{72}\,rad}{\frac{\pi}{18}\,rad+20^{\circ}}$.

3 pts

3. a) Determine la medida de cada uno de los ángulos en posición normal, si la longitud de la circunferencia es 6π m.

3 pts

   i) 1/8 de vuelta ii) 5/12 de vuelta iii) 1/6 de vuelta iv) 11/8 de vuelta

   b) Una circunferencia tiene un radio de 18 cm. Halle la medida en radianes de un ángulo determinado por un arco de longitud 6π cm.

4. a) Determine el valor de la expresión "$a + b$", sabiendo que $a^{\circ}b' = 5^{\circ}40' + 4^{\circ}30'$.

   b) ¿Cuál es la medida en grados de un ángulo de $-5\pi/2$ radianes?

3 pts

5. a) Calcule el valor de x en grados sexagesimales si: $(3x-2)^{\circ} = \dfrac{\pi}{18}\,rad$.

4 pts

   b) ¿Cuántos radianes gira el minutero de un reloj en un lapso de 20 minutos?

6. Se ha ideado un nuevo sistema de medida angular denotado por C, donde se cumple: 9C = 10S, siendo S el sistema sexagesimal.

   a) ¿A cuánto equivale en el nuevo sistema C, un ángulo de una vuelta y 3/5 de vuelta?

   b) ¿A cuánto equivale en el sistema C, un ángulo de $\dfrac{7\pi}{18}\,rad$?

4 pts

   c) ¿A cuánto equivale en el nuevo sistema C, un ángulo de 84º?

ESCALA DE PONDERACIÓN (CALIFICATIVO)

De 20 a 17: ¡**EXCELENTE**!, pase a estudiar la UNIDAD Nº 3.

De 16 a 14: ¡**bueno /suficiente**!, repace los puntos que tuvo dificultad en el material

De 13 a 11: ¡**regular/deficiente**! Estudie detenidamente los puntos que erraste.

De 10 a 0: ¡**deficiente**!, Estudie íntegramente esta unidad.

REQUISITOS

¡Recuerda que para abordar el estudio de esta unidad es necesario que conozcas!

1. *Medidas angulares, arcos orientados y coterminales.*
2. *Longitud de arco y longitud de circunferencia.*
3. *Sub-unidades de medidas angulares en el sistema sexagesimal.*
5. *Regla de tres simple para conversión de unidades.*
6. *Medida de ángulos agudos de triángulos rectángulos notables.*

OBJETIVOS

¿Qué lograremos al estudiar esta unidad?

1. *Definir ángulos orientados a partir de los arcos orientados en la circunferencia unitaria.*

2. *Establecer los sistemas de medidas angulares sexagesimal y radial.*

3. *Determinar, con ayuda de material concreto, el valor de un radián y su equivalencia con otras medidas angulares.*

4. *Deducir fórmulas para calcular longitud de arcos de circunferencia.*

5. *Identificar ángulos en posición normal, coterminales y cuadrantales .*

CONTENIDOS

¿Qué aprenderemos a través de esta unidad?

1. *Definición del ángulo orientado a partir de arcos orientados en la circunferencia unitaria.*

2. *Sistemas de medidas angulares: sexagesimal y radial.*

3. *Equivalencias entre medidas de arcos y ángulos, en el sistema sexagesimal y radial.*

4. *Longitud de arcos orientado en la circunferencia y medida angular.*

5. *Ángulos en posición normal coterminales y cuadrantales.*

EXPLORACIÓN-MOTIVACIÓN-PROBLEMATIZACIÓN

TEMA: Ángulos en el círculo unitario

1. Tome el círculo de madera trace dos diámetros perpendiculares. El círculo queda dividido en cuatro partes equivalentes.
2. En la circunferencia unitaria (del círculo) ubique los arcos orientados de longitudes: $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $5\pi/6$, $-\pi/3$ y $-\pi/4$ en posición normal $A = (1\ ,\ 0)$ punto inicial y $E(\theta) = P$ (el punto terminal).
3. Trace de cada uno de estos puntos, segmentos al centro de la circunferencia: se trazan los ángulos $\widehat{AOP}$. Usando el transportador a partir del semieje positivo del eje X.

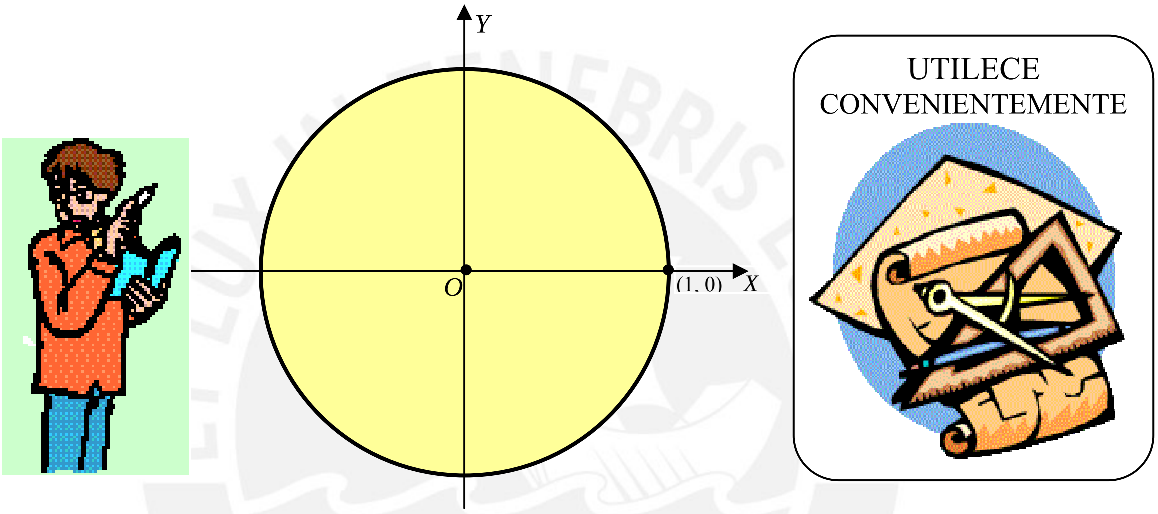


Figura 1

- El ángulo determinado por un arco orientado en el centro de la circunferencia se denomina ....

- Los cuatro ángulos se determinan en el círculo, al hacer la medición con el transportador, miden aproximadamente ....

- ¿Qué relación se puede establecer entre la longitud del arco y el ángulo central que se determina en el círculo?...

- ¿Será posible atribuir el signo negativo al ángulo central en el círculo unidad? ¿En qué caso ocurre ello? ....

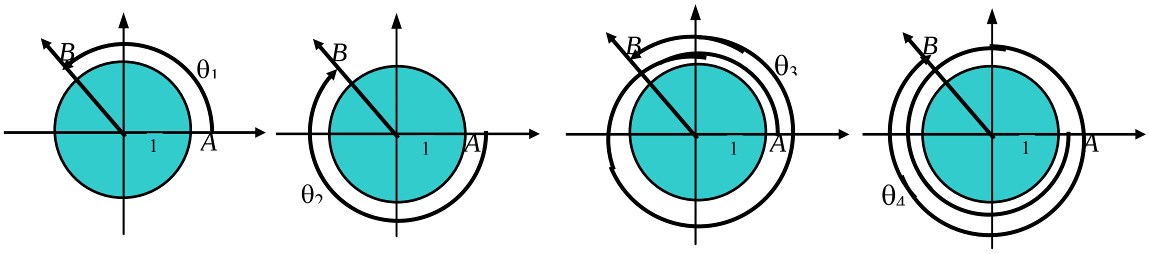
- ¿Al medir con el transportador el arco orientado de longitud $\pi/4$ qué medida del ángulo central determina en grados? ....

- ¿Cuáles son las medidas de los ángulos centrales determinados por los arcos orientados de longitudes: $\pi/8$, $\pi/6$, $3\pi/4$, $-7\pi/4$, $-5\pi/6$? ....
....

¡ Los ángulos descritos son ángulos orientados de vértice *O* !

2.1. ÁNGULOS Y ARCOS ORIENTADOS

En el estudio de la **trigonometría**, consideremos ángulos orientados, a partir de arcos orientados en la $\mathcal{C}_1(O)$. Como se ve en las figuras para valores θ en 3: hablaremos de ángulos orientados de lados inicial $\overrightarrow{OA}$, lados terminal $\overrightarrow{OB}$ y medida θ.



(A, θ_1) (A, θ_2) (A, θ_3) (A, θ_4)

Dado un ángulo $\widehat{AOB}$ cuyos lados son los rayos $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y el vértice O; trazamos la circunferencia unitaria $\mathcal{C}_1(O)$, de centro O y consideremos $A = (1 , 0)$ y $B = (u , v)$. Se tiene un arco orientado en posición normal de extremo inicial A y extremo terminal B, definido por un número real θ, tal que: $|\theta|$ es la longitud del arco, (figura 2).

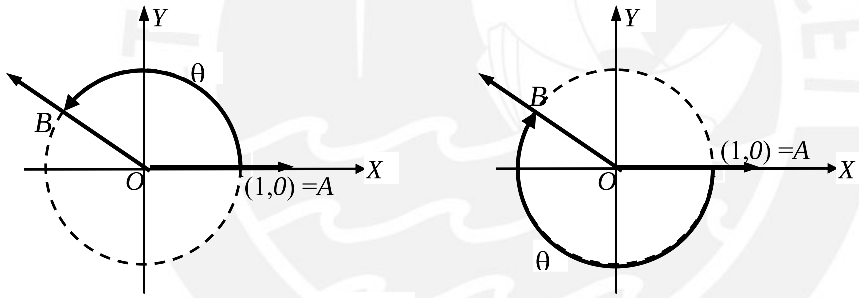


Figura 2

DEFINICIÓN: El ángulo $\widehat{AOB}$ asociado a un arco orientado (A , θ), en posición normal, llamaremos <u>ángulo orientado en posición normal de lado inicial $\overrightarrow{OA}$, lado terminal $\overrightarrow{OB}$ y medida θ</u> que se denota $(\widehat{AOB} , \theta)$ y se representa en la figura 3:

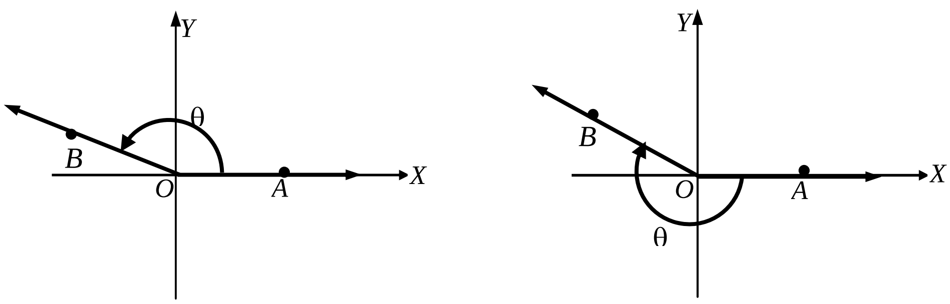


Figura 3

EJEMPLOS:

1) Para el arco orientado $(A, \pi/2)$ se tiene el $(A\widehat{O}B\ , \pi/2)$, ángulo orientado de lado inicial $\overrightarrow{OA}$, y lado terminal $\overrightarrow{OB}$ y de medida $\pi/2$ (figura 4).

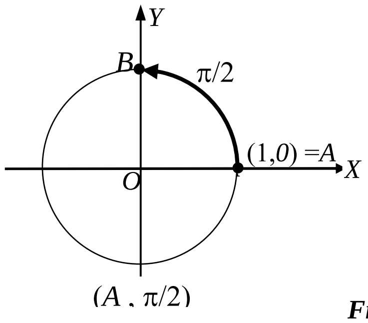
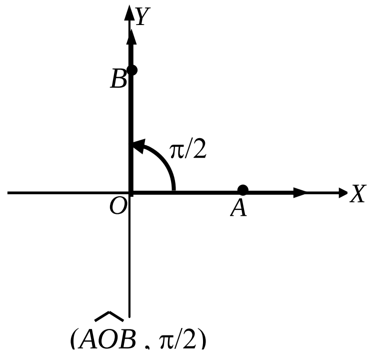


Figura 4



2) Para el arco orientado $(A, 2\pi/3)$ se tiene el $(A\widehat{O}B\ , 2\pi/3)$, ángulo orientado de lado inicial $\overrightarrow{OA}$, y lado terminal $\overrightarrow{OB}$ y de medida $2\pi/3$, (figura 5)

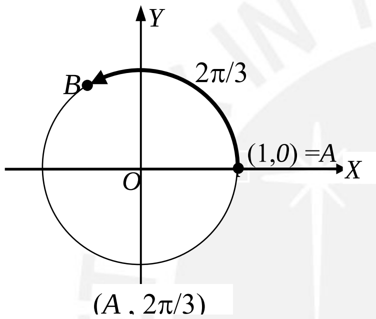
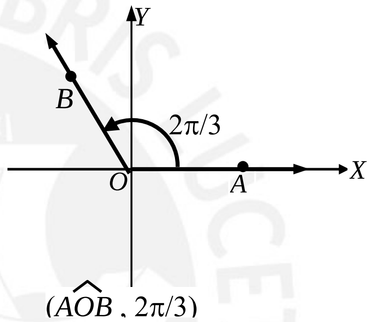


Figura 5



3) Para el arco orientado $(A, -\pi/4)$ se tiene el $(A\widehat{O}B\ , -\pi/4)$, ángulo orientado de lado inicial $\overrightarrow{OA}$, y lado terminal $\overrightarrow{OB}$ y de medida $|-\pi/4| = |\pi/4$, (figura 6).

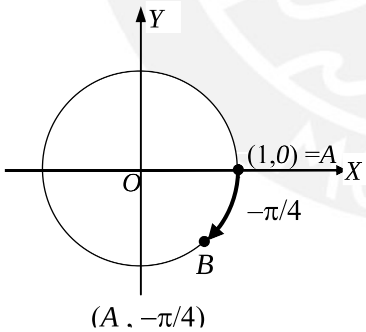
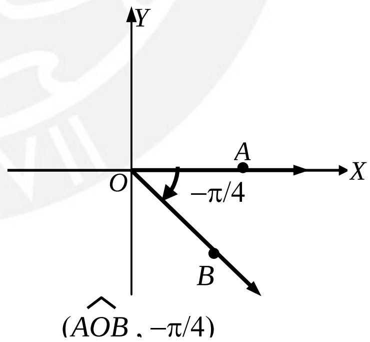


Figura 6



4) En la $\mathcal{C}_1(O)$, consideremos el arco orientado $(A, 8\pi/3)$ con un punto terminal P. Se tiene que $(A\widehat{O}P, 8\pi/3)$ es el ángulo orientado de lado inicial $\overrightarrow{OA}$ y lado terminal $\overrightarrow{OP}$ y medida $8\pi/3$ (fig. 7).

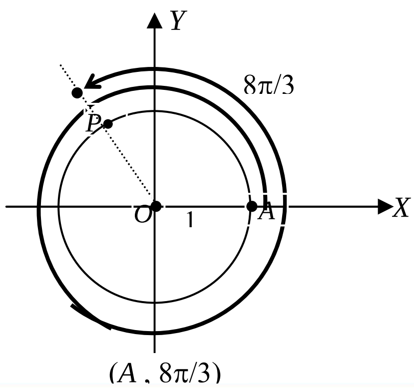
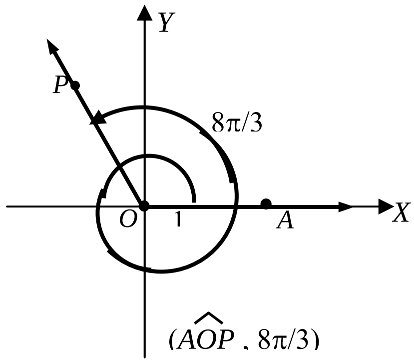
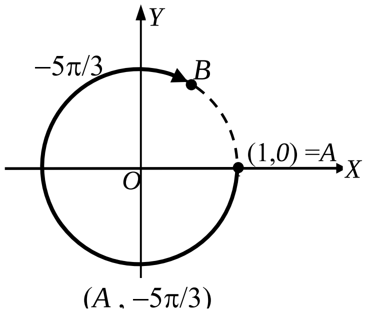


Figura 7



5) Para el arco orientado $(A, -5\pi/3)$, en posición normal se tiene el ángulo orientado $(\widehat{AOB}, -5\pi/3)$, cuyo lado terminal pasa por $B = (1/2\ ,\ \sqrt{3}/2)$, (figura 8):



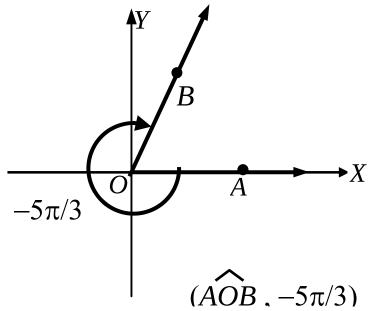
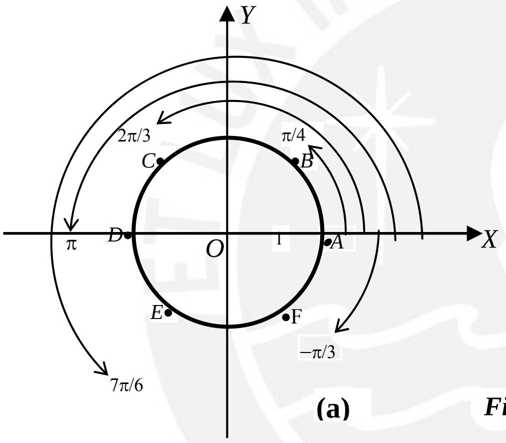
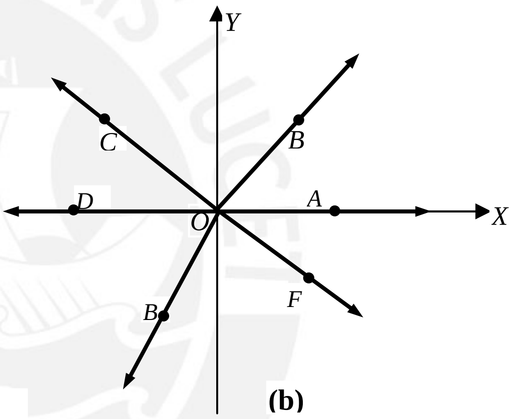


Figura 8

6) En la circunferencia unitaria de centro O (figura 9), se consideran seis arcos orientados: $(A, \pi/4)$, $(A, 2\pi/3)$, (A, π), $(A, 7\pi/6)$, $(A, -\pi/3)$ y $(A, 0)$ tienen los puntos terminales B, C, D, E, F y A, respectivamente. Grafique dichos arcos orientados en $\mathcal{C}_1(O)$ y los ángulos orientados definidos por estos arcos orientados.



(a) ***Figura 9***



(b)

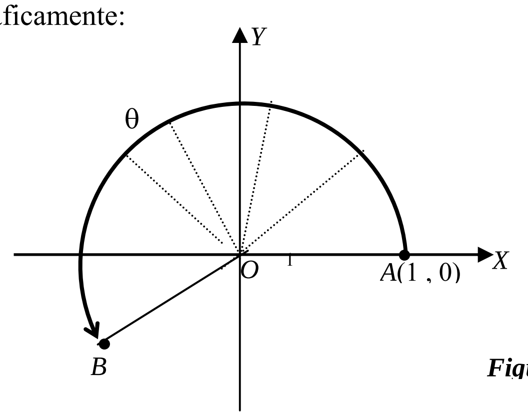
OBSERVACIÓN:

Un arco orientado $(A\ ,\ \theta)$ en posición normal, se genera por el trayecto que define $A = (1\ ,\ 0)$ al rotar $\overrightarrow{OA}$ alrededor del punto O un ángulo de $|\theta|$ radián (si $\theta > 0$, en sentido antihorario, y si $\theta < 0$ en sentido horario y si $\theta = 0$, el ángulo de rotación es 0).

De esto, un ángulo orientado $(\widehat{AOB}\ ,\ \theta)$, se genera por la rotación de $\overrightarrow{OA}$ alrededor de O un ángulo de $|\theta|$ radián, terminando en la posición $\overrightarrow{OB}$.

Gráficamente:

a)



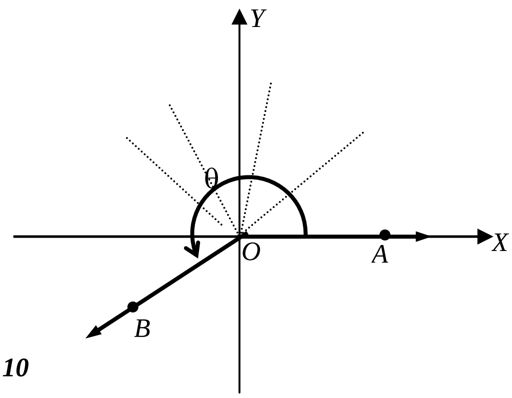


Figura 10

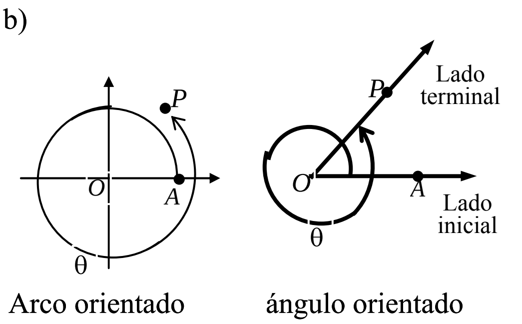


Figura 11

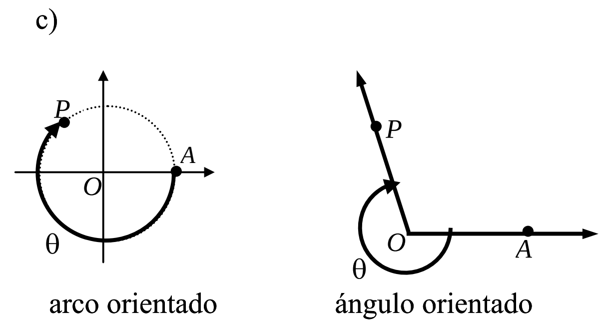


Figura 12

Además si $M\widehat{O}N$ es un ángulo orientado de la do inicial $\overrightarrow{OM}$ y lado terminal $\overrightarrow{ON}$ y de medida θ, en $\overrightarrow{OM}$, sea A tal que $\overrightarrow{OA}$ = 1. Se genera un arco orientado (A , θ) y en general un ángulo orientado de medida θ; por lo que hablaremos simplemente del arco orientado θ o del ángulo orientado θ, indistintamente, (figura 13).

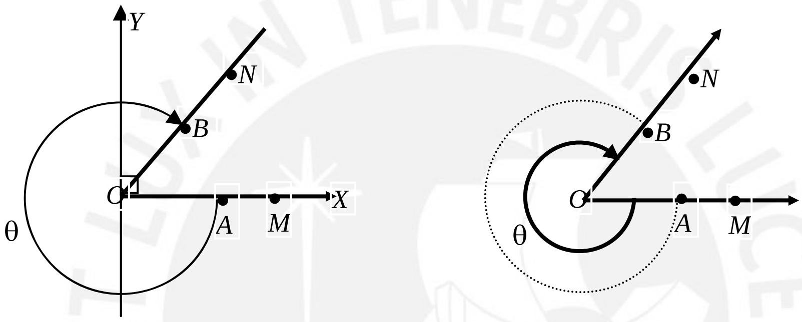


Figura 13

EJEMPLOS:

1) Los ángulos orientados de medidas π/4 y –2π/3 se grafican en la figura 14.

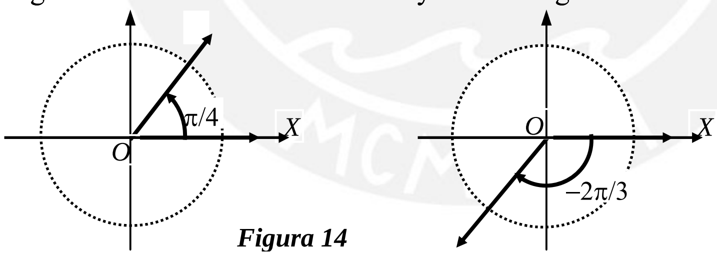


Figura 14

2) En las gráficas de la figura 15, se exhiben ángulos orientados: α, β y θ.

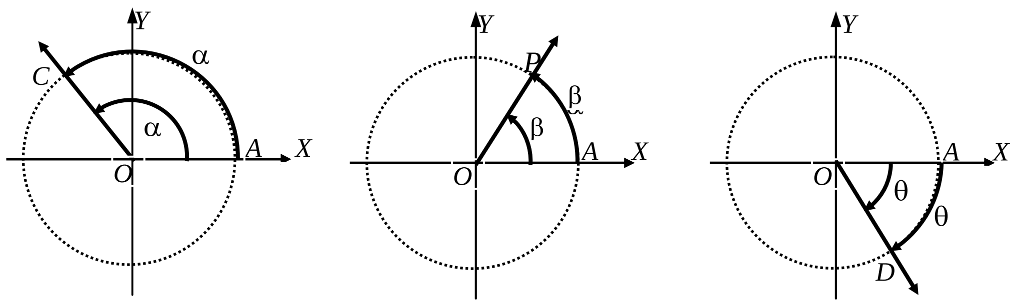


Figura 15

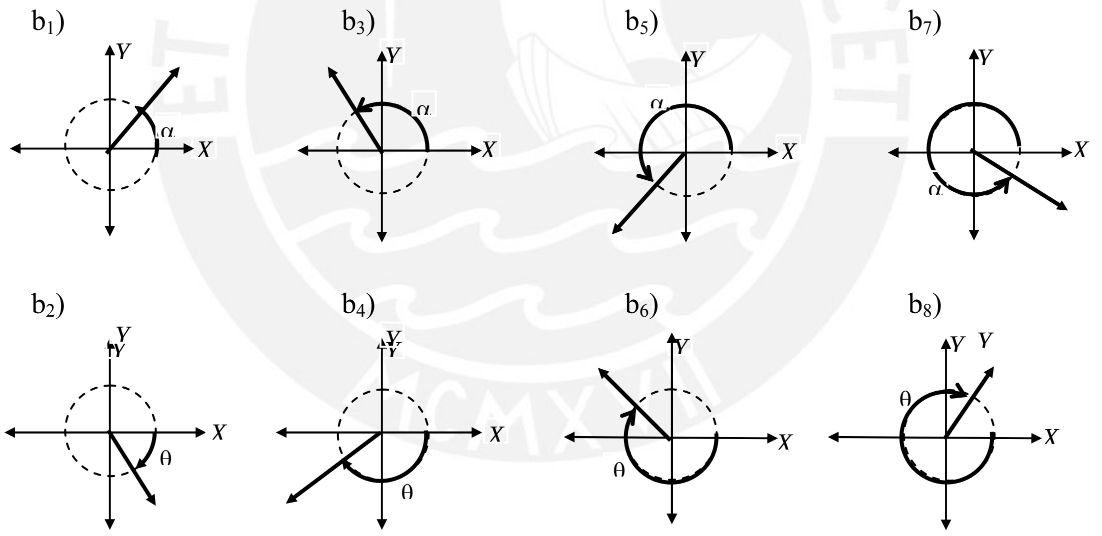
donde:

Vértices	Lado inicial	Lado terminal	Sentido de giro	Representación
O	$\overrightarrow{OA}$	$\overrightarrow{OC}$	antihorario (+)	β
O	$\overrightarrow{OA}$	$\overrightarrow{OP}$	antihorario (+)	α
O	$\overrightarrow{OA}$	$\overrightarrow{OD}$	horario (−)	θ

EJERCICIOS

a) Construya los arcos orientados en posición normal en la circunferencia unitaria, correspondientes a: $(A\ ,\ \pi/3)$, $(A,\ 3\pi/4)$, $(A\ ,\ -\pi/6)$ y $(A\ ,\ -2\pi/3)$; y, luego, construya los ángulos orientados en posición normal, correspondientes.

b) En cada ángulo orientas de la las figuras, los lados terminales están ubicados en un cuadrante determinado del sistema de coordenadas del plano. En cada caso, ¿qué valores pueden tener α? Así por ejemplo, en b_1) se tiene $0 < \alpha < \pi/2$, en b_2) se tiene: $-\pi/2 < \alpha < 0$, etc.



c) Construya los ángulos orientados en posición normal en el plano cartesiano, correspondientes a: $(A\hat{O}B\ ,\ 2\pi/3)$, $(A\hat{O}P\ ,\ 7\pi/3)$, $(A\hat{O}Q\ ,\ -3\pi/4)$ y $(A\hat{O}M\ ,\ -5\pi/3)$; y, luego, construya los arcos orientados en posición normal, correspondientes.

RECUERDE:
Todo arco orientado determina ángulo orientado y todo punto del lado terminal del ángulo describe al girar un arco orientado.

2.1.2. Ángulos coterminales

Recordando el concepto de arcos en posición normal coterminales:

a) Ubique los arcos orientados: $\pi/6$, $-11\pi/6$ y $13\pi/6$; luego asocie los ángulos orientados en posición normal correspondientes.

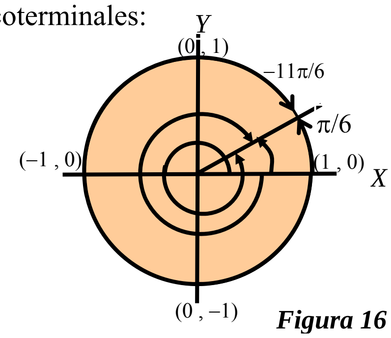


Figura 16

Los extremos terminales de cada arco son: E($\pi/6$), E($-11\pi/6$) y E($13\pi/6$).

Los lados terminales de los ángulos pasan por el punto ($\sqrt{3}/2$, $1/2$); además, los tres ángulos tienen el mismo lado terminal.

Luego, los tres ángulos en posición normal tienen un mismo lado terminal.

b) Grafica los ángulos de $\pi/4$, $9\pi/4$ y $-7\pi/4$. Los lados terminales pasan por el punto ...., es decir los lados terminales de los tres ángulos orientados coinciden.

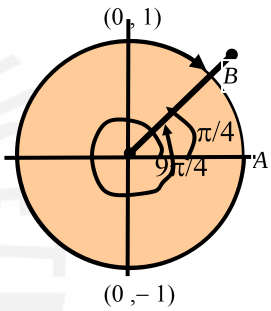


Figura 17

DEFINICIÓN: Si dos ángulos orientados en posición normal tienen el mismo lado terminal, se dice que los ángulos son ***coterminales.***

EJEMPLOS:

1) Los ángulos orientados de medidas: $\pi/3$, $-11\pi/3$, $13\pi/3$ y $-5\pi/3$ en posición normal, son coterminales pues :E($\pi/3$) = E($-11\pi/3$) = E($13\pi/3$) = E($-5\pi/3$) = ($1/2$, $\sqrt{3}/2$).

2) Los ángulos de: $\pi/4$, $-25\pi/36$, $-7\pi/4$ y $83\pi/36$ en posición normal, no son coterminales; pues los lados terminales no coinciden.

3) Determine si son coterminales los ángulos de $14\pi/3$ y $2\pi/3$, en posición normal.

Solución:

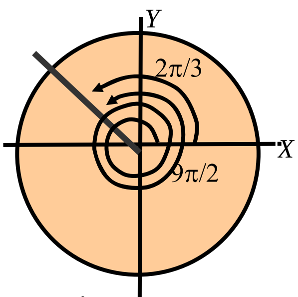


Figura 18

Construyamos dichos ángulos, figura 18.

El ángulo $14\pi/3 = 4\pi + 2\pi/3 = 2(2\pi) + 2\pi/3$; dos vueltas ($4\pi$) más $2\pi/3$.

Esto quiere decir que el lado terminal de $14\pi/3$ coincide con el lado terminal de $2\pi/3$, en posición normal.

Entonces: $14\pi/3$ y $2\pi/3$ son ángulos en posición normal coterminales. Además, $14\pi/3 - 2\pi/3 = 4\pi = 2(2\pi)$, dos vueltas.

4) Determina si son coterminales los ángulos orientados de medidas: $5\pi/2$ y $\pi/2$.

Solución: construyendo dichos ángulos (figura 19).

Se tiene que $5\pi/2 = 2\pi + \pi/2$. Esto quiere decir que el lado terminal del ángulo en posición normal $5\pi/2$ coincide con el de $\pi/2$.

Entonces: $5\pi/2$ y $\pi/2$ son ángulos coterminales. Además $5\pi/2 - \pi/2 = 2\pi$, una vuelta

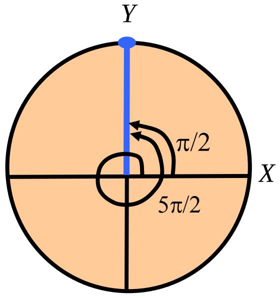


Figura 19

Es decir:

> Si α y β son ángulos coterminales, se cumple:
> $\alpha - \beta = n(2\pi), n \in 9$

EJEMPLOS:

- ✓ $25\pi/6$ y $\pi/6$ son coterminales porque: $25\pi/6 - \pi/6 = 4\pi = 2(2\pi) = 2$ vueltas
- ✓ 8π y 6π son coterminales porque: $8\pi - 6\pi = 2\pi$ (1 vuelta)
- ✓ 12π y 4π son coterminales porque: $12\pi - 4\pi = 8\pi = 4(2\pi) = 4$ vueltas
- ✓ $3\pi/2$ y $\pi/3$ no son coterminales porque: $3\pi/2 - \pi/3 = 7\pi/6$ (no es una vuelta)
- ✓ $3\pi/2$ y $-\pi/2$ son coterminales porque: $3\pi/2 - (-\pi/2) = 3\pi/2 + \pi/2 = 2\pi = 1$ vuelta

EJERCICIO: Determina si los ángulos son coterminales. Haz un gráfico en tu cuaderno.

a) 4π y $\pi/6$ b) $22\pi/9$ y $3\pi/10$ c) $19\pi/6$ y $-5\pi/6$ d) $10\pi/3$ y $-2\pi/3$

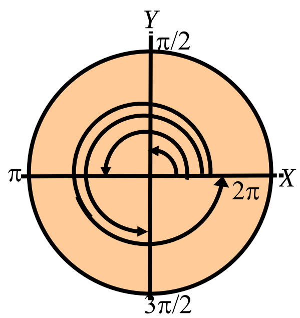


Figura 20

e) ¿Dónde se ubican los lados terminales de los ángulos: 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$, 2π?

- ✓ Como se muestra en la figura 20, se encuentran en los semiejes del eje de coordenadas.

> Un ángulo en posición normal se llama ***cuadrantal*** cuando su lado final coincide con un semieje.

Los que vemos en la gráfica son los más importantes. Pero existen muchos más.

¿Cómo saber si un ángulo es cuadrantal?

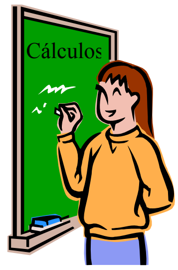
Si el ángulo es múltiplo de 90°, entonces es cuadrantal. Por ejemplo:

✓ 4π es cuadrantal porque: $4\pi = 8(\pi/2)$

✓ $5\pi/2$ es cuadrantal porque: $5\pi/2 = 5(\pi/2)$

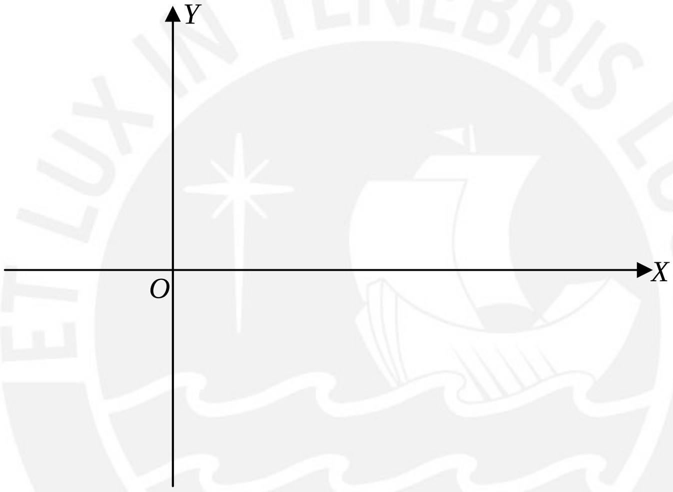
✓ $\dfrac{5\pi}{2}$ rad es cuadrantal porque: $\dfrac{5\pi}{2}$ rad $= 5 \cdot \dfrac{\pi}{2}$ rad

✓ $-\pi/2$ es cuadrantal porque: $-\pi/2 = (-1)(\pi/2)$



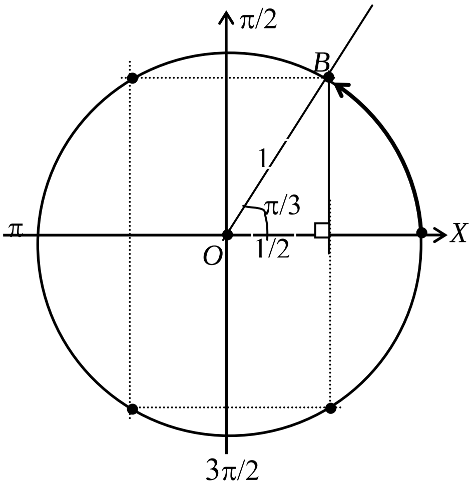
EJERCICIO: ¿Cuales de los siguientes ángulos son cuadrantales?

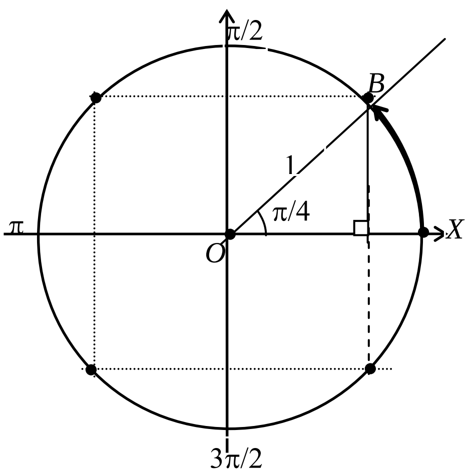
a) 6π b) $\dfrac{7\pi}{2}$ rad c) $-7\pi/15$ ¡Grafique en el sistema!

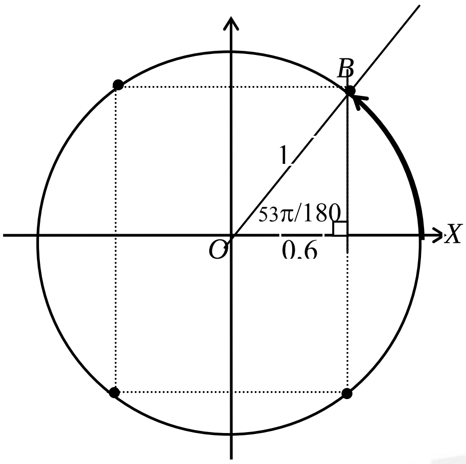


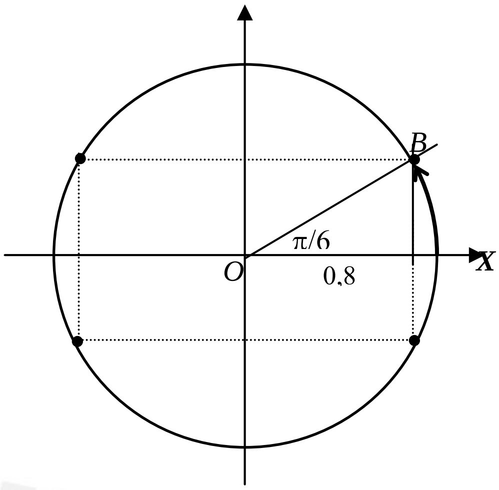
ACTIVIDADES

1. En las circunferencias dadas, identifique los arcos orientados y los ángulos en posición normal determinados, para cada uno de los puntos, dados por simetría de B respecto a los ejes coordenados.





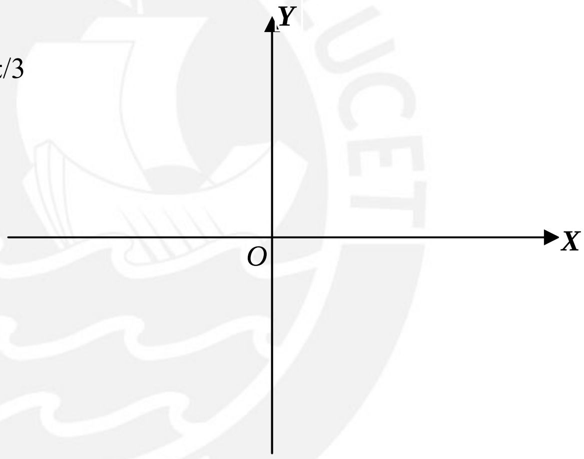




2. Determine el cuadrante al que pertenecen el lado terminal de los ángulos, cuyas medidas son:

a) $50\pi/9$, $62\pi/9$, $11\pi/6$ y $11\pi/4$

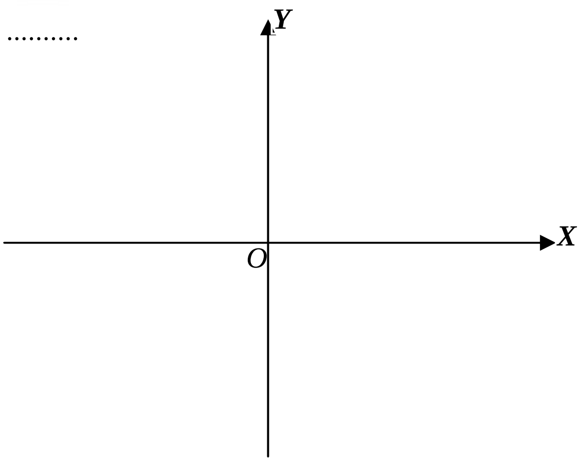
b) $-142\pi/45$, $3\pi/4$, $-7\pi/6$ y $-11\pi/3$



3. De los ángulos en posición normal, cuyas medidas angulares, son:

$46\pi/9$, $10\pi/9$, $-10\pi/9$ y $32\pi/3$

Resultan ser coterminales los ángulos: ....



4. Indique cuatro ángulos en posición normal coterminales con cada uno de los ángulos cuyas medidas son:

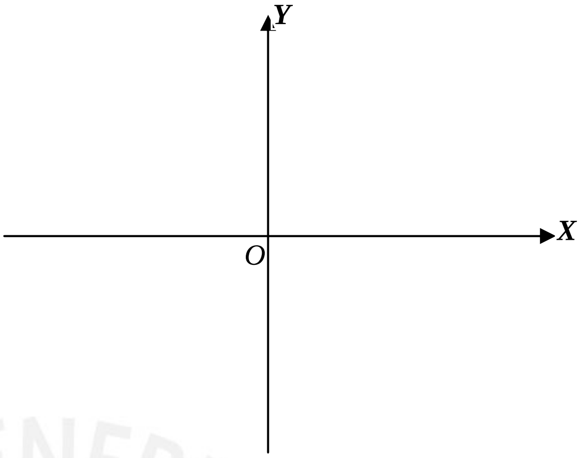
a) $\pi/6$

b) $-9\pi/20$

c) $5\pi/6$

d) $7\pi/6$

e) $-11\pi/6$

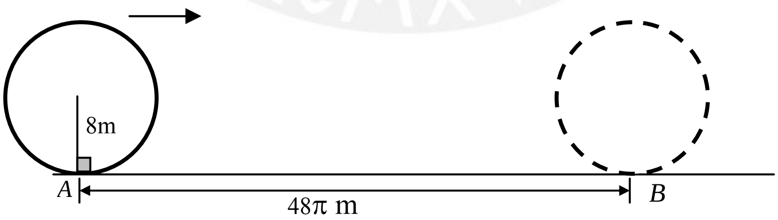


5. Exprese en grados las siguientes medidas angulares: a) $\pi/5$, b) 0,5 , c) $4\pi/3$ d) $5\pi/4$, e) $-3\pi/2$, f) $-11\pi/12$.

6. Una circunferencia tiene un radio de 20 cm: Halle la longitud del arco determinado por un ángulo de: a) $\pi/3$, b) 0,5 , c) $4\pi/3$, d) $5\pi/4$, e) $3\pi/2$.

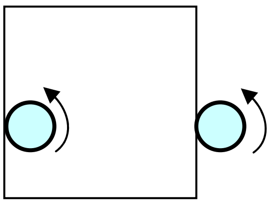
7. Una circunferencia tiene radio de 18 m: Halle la medida del ángulo central en radianes, que subtiende el arco cuya longitud es: a) 18 m, b) 1,8, c) 9 m, d) 36 m.

8. Del gráfico mostrado, calcule el ángulo que barre la rueda al trasladarse de la posición "*A*" hasta la posición "*B*"



9. Una rueda de 3 m de radio debe recorrer el perímetro interno de un cuadrado de 21 m de lado. Calcule el número de vueltas que debe realizar la rueda. Y si recorre externamente el perímetro del mismo cuadrado, ¿cuántas vueltas más daría?

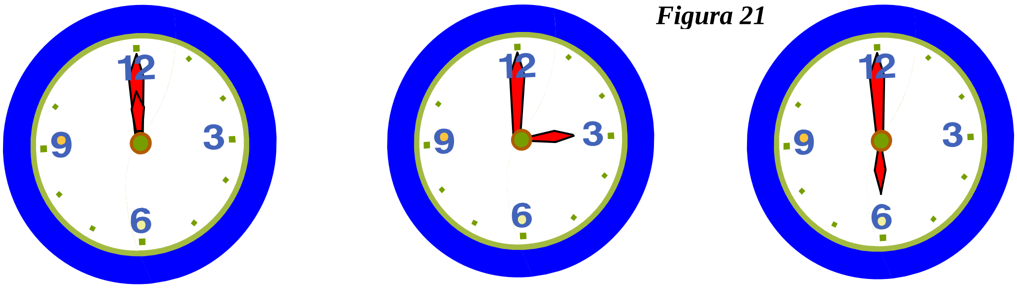
Ilustración



2.2. MEDICIÓN DE ARCOS Y ÁNGULOS: SISTEMA DE MEDIDAS

Las agujas de un reloj se mueven formando ángulos:

Figura 21



A las doce del medio día el ángulo es nulo y mide 0° o 0 rad

A las 3:00 p.m. el ángulo es recto y mide90° o $\pi/2$ rad

A las 6:00 a.m. el ángulo es llano y mide 180° o π rad

Para medir ángulos, el Sistema Internacional de Medidas establece como unidad el RADIÁN (rad), pero existen otros sistemas de medición tal como el sistema sexagesimal, cuya unidad es el GRADO SEXAGESIMAL (º).

2.2.1. Sistema radial o circular

Al definir arcos orientados en posición normal $(A\ ,\theta)$ en la $\mathcal{C}_1(O)$, dicho arco queda definido por el número θ. Así:

- $(A, \pi/4)$ corresponde a un arco de longitud $\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{8}$, la octava parte de la circunferencia unitaria.
- (A, π) corresponde a un arco de longitud $\pi = \frac{2\pi}{2}$, la mitad de la circunferencia unitaria.
- $(A, \pi/4)$ corresponde a un arco de longitud 2π, longitud de la circunferencia unitaria.
- $(A, -7\pi/2)$ corresponde a un arco de longitud $\left| -\frac{7\pi}{2} \right| = \left| -4\pi + \frac{\pi}{2} \right| = 4\pi - \frac{\pi}{2}$. Longitud de dos circunferencias unitarias menos la cuarta parte de ella.

En cada caso, ¿cuál es la orientación?

Luego, como la longitud de la circunferencia $\mathcal{C}_r(O)$ es $L = 2\pi r$, 2π veces el radio o 2π radios. Para $r = 1$ se tiene $L = 2\pi(1) = 2\pi$. En tal caso diremos que tal arco de circunferencia mide 2π radianes o simplemente 2π rad.

Además, el arco $(A, \pi/4)$ es la octava parte de la circunferencia unitaria, o sea a la octava parte de 2π rad, se dice que mide $2\pi/8$ rad $= \pi/4$ rad.

El arco (A, π) corresponde media circunferencia, o sea a la mitad de 2π rad, se dice que dicho arco mide: π rad.

En forma análoga, el arco $(A, -7\pi/2)$ corresponde a la longitud de circunferencia unitaria, menos un cuarto de circunferencia y su medida es: 4π rad $- \pi/2$ rad $= 7\pi/2$ rad, y como el ángulo es negativo se tiene: $-7\pi/2$. Análogamente se tiene para ángulos orientados.

Es decir, dado el ángulo ($\widehat{AOB}$, θ) orientado por un arco θ en una circunferencia unitaria, se dice que la medida del ángulo orientado $\widehat{AOB}$ es θ radianes que se escribe θ rad.

¿Qué es un RADIÁN?

Dado un ángulo $\widehat{POQ}$ con vértice en el centro de una circunferencia de radio r (en particular $r = 1$), tal que el arco $\overset{\frown}{PQ}$ contenido en el interior del ángulo $\widehat{POQ}$ tiene longitud r.
Entonces se dice que el ángulo $\widehat{POQ}$ mide un RADIÁN, o sea $m(\widehat{POQ}) = 1$ rad y el arco $\overset{\frown}{PQ}$ mide un radián: $m(\overset{\frown}{PQ}) = 1$ rad.

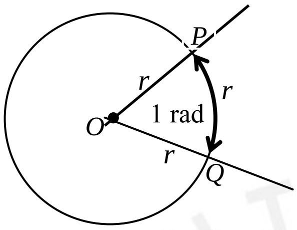
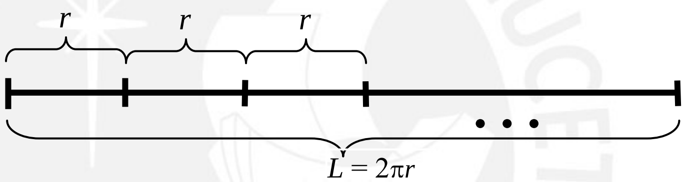


Figura 22

Como la longitud de una circunferencia es igual a $L = 2\pi r$ (r es el radio). Dicha longitud, ***¿en cuántos segmentos de longitud "r" puede ser dividida?***
Observa la ilustración siguiente:



Podemos responder a la pregunta del siguiente cálculo: $\dfrac{2\pi r}{r} = 2\pi$ segmentos de longitud r; es decir, L es 2π veces el radio r; esto es una ***circunferencia*** mide 2π rad**.**

Aquí, algunos ángulos o arcos en la circunferencia de medidas: π/4 rad, π/2 rad, 2π/3 rad, π rad, 3π/2 rad y 2π rad.

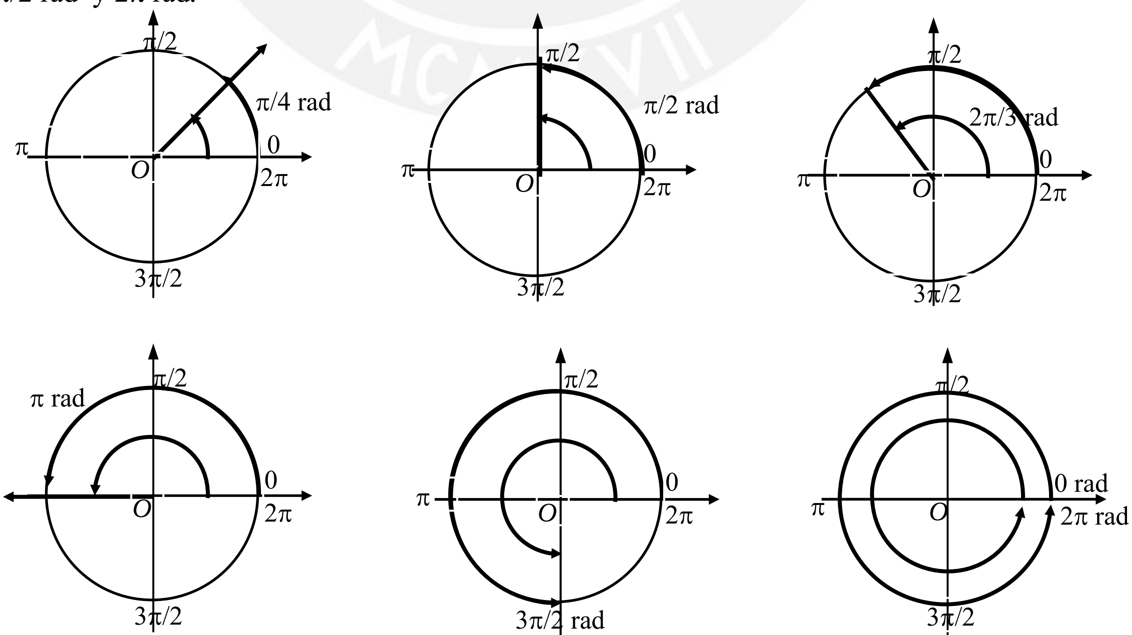


Figura 23

OBS: Para $r = 1$, la medida en radianes está dado por el valor de θ del arco que lo define.

2.2.2. Sistema sexagesimal (o inglés)

Se dijo que en este sistema, la unidad es el GRADO (º): Dividamos la circunferencia de centro *O*, radio *r* en 360 partes iguales. Sean *A* y B dos puntos consecutivos de dicha división. Se tiene el ángulo central, $\widehat{AOB}$, como se muestra en la figura 24. Se dice que el ángulo AOB o el arco AB mide "un grado" sexagesimal, y se denota: $m(\widehat{AOB}) = 1^{\circ} = m(\widehat{AB})$.

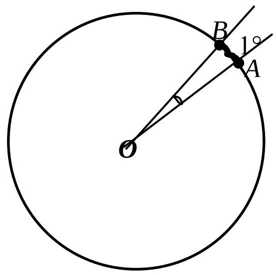


Figura 24

¿Cuántos grados sexagesimales hay en una circunferencia?

✓ Al quedar la circunferencia dividida en 360 arcos, determina 360 ángulos centrales; consecutivos, es decir, la circunferencia mide 360 grados sexagesimales (360º).

¿Cómo se miden los ángulos orientados en el sistema sexagesimal? ....

En 2.1 a un ángulo orientado ($\widehat{MON}$, θ) se le asocia un arco orientado (*A*, θ) y en 2.2.1, se tiene que la medida del ángulo es θ rad.

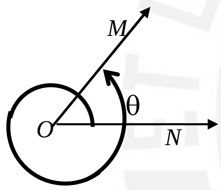
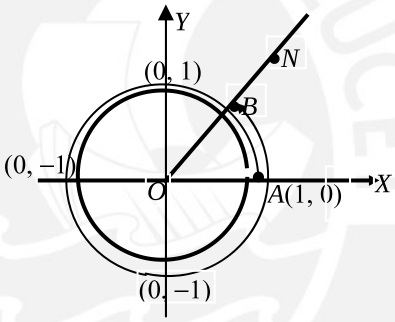


Figura 25



Para medir ángulos orientados en grados (º):

-) Se usa el transportador para medir ángulos entre 0º y 180º.

-) El resultado que una circunferencia mide 360º.

-) La orientación del ángulo (la orientación del arco: (+) si es en sentido antihorario y (–) si es en sentido horario), para el signo del resultado.

Como en arcos orientados:

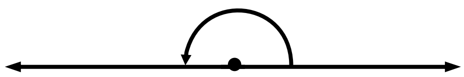
Ángulos positivos			Ángulos negativos
Los ángulos generados en el sentido antihorario o de las agujas del reloj	**Antihorario** (+)	**Horario** (–)	Los ángulos generados en el sentido horario o de las agujas del reloj

EJEMPLOS:

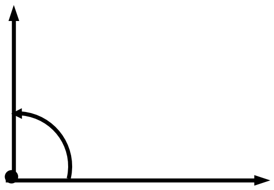
Consideremos los siguientes ángulos orientados:

a) **Ángulo nulo:** Su medida es 0 rad o 0º

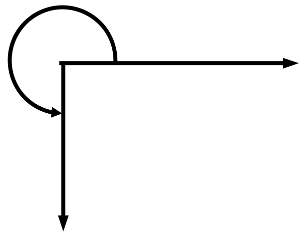
b) **Ángulo llano:** Su medida es π rad o 180º.



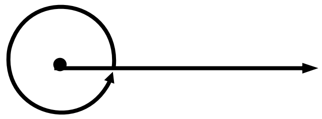
c) **Ángulo recto:** Su medida es π/2 rad o 90º



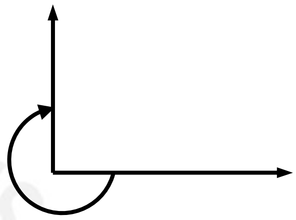
d) **Ángulo de una vuelta menos un recto:** Su medida es 3π/2 rad o 270º.



e) **Ángulo de una vuelta**: Su medida es 2π rad o 360º



f) **Ángulo de orientación negativa:** Su medida es π rad o 180º.



EJERCICIO:

Ubique los ángulos orientados en posición normal de medidas: –90°, –135º, –180°, –270°, –225º y –370°?

2.2.3. Grado y minuto sexagesimales

En muchos casos se acostumbra usar unidades submúltiplos del ángulo de 1º, dividiendo en 60 partes iguales. Se tienen ángulos más pequeños de medidas (1/60)º y se llama medidas de un minuto y se denota: (1/60)º = 1', o sea 1º = 60'.

Análogamente, un arco o ángulo de 1' al dividirlo en 60 partes iguales se obtienen arco o ángulo de medida (1/60)', se dice que tiene medida de un segundo, que se denota: (1/60)' = 1'', o sea 1' = 60''.

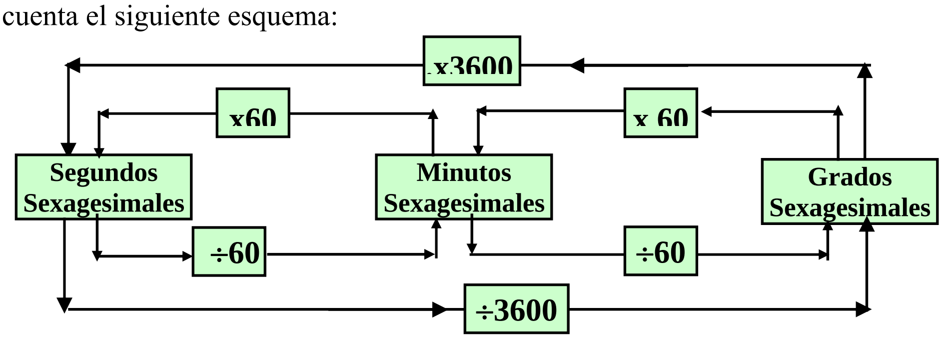
EQUIVALENCIAS

1° = 60' (60 minutos) o (1/60)º = 1'

1' = 60'' (60 segundos) o (1/60)' = 1''

1° = 3600'' (3 600 segundos) o (1/360)º = 1''

Para conversiones entre grados (º), minutos (') y segundos ('') sexagesimales tendremos en cuenta el siguiente esquema:



EJEMPLOS:

1) ¿Cuántos minutos corresponde la medida de un ángulo que mide 9°?

Solución:

Sabemos que: 1° = 60’. Luego 9º = 9(1º) = 9(60’) = (9x60)’ = 540’.

Luego: El ángulo que mide 9° corresponde a 540’, es decir 9º equivalen a 540’.

2) ¿A cuántos segundos mide un ángulo de 3°?

Solución:

Como: 1° = 3 600’’, 3º = 3(1º) = 3(3600’’) = (3x3600’’) = 10 800’’

Luego: El ángulo que mide 3°, en segundo mide 10 800’’

3) Convierte 7 200’’ a minutos y grados sexagesimales.

Solución:

Como: 1’’ = (1/60)’ y 1’’ = (1/3600)º, entonces:

7 200’’= 7600(1’’) = 7600(1/60’) = (7600x1/60)’ = 120’

7 200’’= 7600(1’’) = 7600(1/3600)º = (7600x1/3600)º = 2º.

Luego: 7 200’’ equivale a 120’ y a 2°.

4) Convierta 18º a minutos.

Solución:

18º = 18(1º) = 18(60’) = (18x60)’ = 1080’

5) Convierta 10 800 segundos sexagesimales a grados sexagesimales.

Solución:

10 800’’ = 10 800( ) = ... = ...º

6) Convierta 37,415º a grados, minutos y segundos sexagesimales.

Solución:

37,415º = 37º + 0,415º = ...º + 0,415(60’) = ...º + ...’

= .....º + ...’ + ...’ = ...º + ...’ + 0,9(60’’) = ...º + ...’ + ...’’

= ...º...’...’’.

RECUERDE:

Para convertir de segundos a minutos y de minutos a grados se dividen entre 60; mientras para convertir de grado a minutos y de minutos a segundos se multiplica por 60

2.3. RELACIÓN ENTRE SISTEMAS DE MEDIDA ANGULAR

Para un ángulo orientado dado, sea R su medida en radianes y sea S su medida en grados (º). Se tiene la siguiente relación:

$$2\pi \text{ rad} = 360^{o}$$
$$\text{R rad} = \text{S}^{o}$$

Es decir se tiene la siguiente proporción: $\dfrac{R\text{ rad}}{2\pi\text{ rad}} = \dfrac{S^{o}}{360}$ o $\dfrac{R\text{ rad}}{\pi\text{ rad}} = \dfrac{S^{o}}{180^{o}}$; de donde, convirtiendo de R o d S se despeja el otro valor, respectivamente; es decir, permite hacer conversiones de un sistema a otro, despejando: $R = \dfrac{\pi.S}{180}$ o $S = \dfrac{R.180}{\pi}$.

EJEMPLOS:

1) Para convertir 90º a radianes: De $R = \dfrac{\pi.S}{180}$, se tiene: $R = \dfrac{\pi.90^{o}}{180^{o}} = \dfrac{\pi}{2}$ rad.

2) Para convertir $\dfrac{\pi}{4}$ rad a grados: De $S = \dfrac{R.180}{\pi}$, se tiene: ....

3) Para convertir 60º a radianes. De $R = \dfrac{\pi.S}{180}$, si se divide: ....

4) Para convertir $\dfrac{\pi}{6}$ rad, a grados. De $S = \dfrac{R.180}{\pi}$, se tiene: ....

5) Para convertir 210º a radianes. De $R = \dfrac{\pi.S}{180}$, se tiene: $R = \dfrac{\pi.210^{o}}{180^{o}} =$ ....rad.

6) 315º = ... rad, se obtiene a partir de: ....

Representar gráficamente 1), 2), 3), 4), 5) y 6).

EJERCICIOS:

1) ¿Qué medidas tienen?

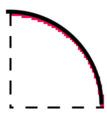
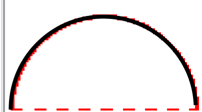
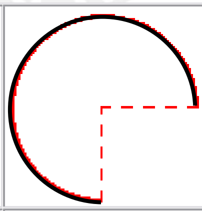
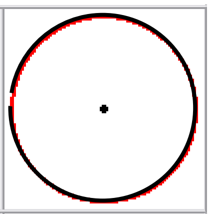
Gráfico de arcos				
Grados	...º	...º	...º	...º
Radianes	... rad	.... rad	..... rad	.... rad

Figura 26

2) Calcule el valor de $K = 36^{o} + 3\pi/5$ en radianes y grados sexagesimales.

Solución:

En radianes:

$$K = 36^{o} + \frac{3\pi}{5}rad = \frac{\pi}{180^{o}}(36^{o})rad + \frac{3\pi}{5}rad = \ldots.. + \frac{3\pi}{5}rad\ . = \ldots\ldots..\text{rad.}$$

En grados: $K = 36^{o} + \dfrac{3\pi}{5}rad = 36^{o} + \dfrac{3\pi}{5}\left(\dfrac{180^{o}}{\pi}\right) = 36^{o} + \ldots\ldots^{o} = \ldots..^{o}$

2.4. LONGITUD DE ARCOS DE CIRCUNFERENCIA

LONGITUD DE CIRCUNFERENCIA: Recordando que la circunferencia de radio r, tiene longitud $2\pi r$, y si $r = 1$, la longitud de $\mathcal{C}_1(O)$ es 2π, es decir, al dar una vuelta completa a la $\mathcal{C}_1(O)$ se recorre un trayecto de longitud 2π. De esto, al dividir la longitud de la circunferencia entre la longitud de un segmento diametral, resulta: $\dfrac{2\pi rs}{2r} = \pi$, es constante.

LONGITUD DE ARCO DE CIRCUNFERENCIA: En una circunferencia de radio r, sean θ la medida, en radianes, de un ángulo central $A\widehat{O}B$ y $\boldsymbol{s}$ la longitud del arco de circunferencia $\widehat{AB}$, contenido en el interior del ángulo. Se tiene que las medidas son proporcionales a 2π (la medida angular de la circunferencia) y a $2\pi r$ (longitud de la circunferencia) es decir: θ y s son proporcionales a 2π y $2\pi r$. Luego:

: $\dfrac{\theta}{2\pi} = \dfrac{s}{2\pi r}$ o $\dfrac{2\pi r}{2\pi} = \dfrac{s}{\theta}$, osea

simplificando $r = \dfrac{s}{\theta}$. De donde $\boxed{s = \theta.r}$, que permite calcular la longitud de un arco de medida θ rad, en una circunferencia de radio r.

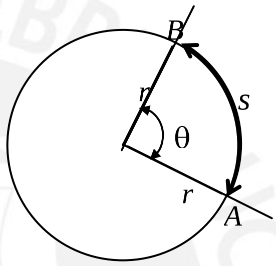


Figura 27

EJEMPLOS:

1) En una circunferencia de radio 4 cm, un ángulo central contiene en su interior un arco que mide $3\pi/4$ rad ¿Cuál es la longitud de dicho arco?

Solución:

Sea $\boldsymbol{s}$ la longitud de arco cuya medida es $3\pi/4$ rad; osea $\theta = 3\pi/4$ rad. Como $r = 4$ cm, en $\boldsymbol{s} = \theta.r$, se tiene: $s = (3\pi/4)(4 \text{ cm}) = 3\pi$ cm.

2) Un segmento de recta $\overline{OM}$ de 12 cm de longitud, al girar alrededor de uno de los extremos O, el otro extremo M describe un arco $\widehat{MM'}$ de 4π cm. ¿Qué medida tiene el arco de circunferencia descrito?

Solución:

Se tiene $r = 12$ cm y $s = 4\pi$ cm. En $s = \theta.r$, se tiene que hallar la medida θ del arco $\widehat{MM'}$. De $s = \theta.r$ se tiene: 4π cm $= \theta.12$ cm; es decir:

$\theta = 4\pi/12 = \pi/3$ rad o $\theta = 60º$.

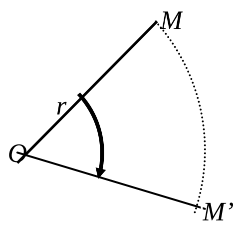


Figura 28

3) Un ángulo central, θ, subtiende un arco de 10 cm de longitud en una circunferencia de 4cm de radio, aproxime la medida de θ en grados.

Solución:

De: $s = r.\theta$, despejando θ y reemplazando valores: $\theta = s/r = 10/4 = 2,5$ rad.

Convirtiendo 2,5 rad a grados, se tiene: $\theta = 2{,}5\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{o} = \left(\dfrac{450}{\pi}\right)^{o} \approx 143{,}24^{o}$.

4) ¿Qué longitud de alambre se necesita para una circunferencia de 20 cm de radio?

Solución:

Se sabe longitud de circunferencia C es: $C = 2\pi r$. En consecuencia la longitud de alambre requerido es: $C = 2\pi(20\text{ cm}) = 40\pi\text{ cm} \approx 40(3{,}1416)\text{ cm} = 1256{,}64\text{ cm}$

5) ¿Qué ángulo forman las agujas del reloj a las 7 h y 45 minutos?

Solución:

- Establecemos una regla de tres simple para hallar el recorrido del minutero en 45 minutos.

60 min recorre —360º
45 min recorre —mº

$$m^{o} = \frac{360^{o}.45}{60} = 270^{o}$$

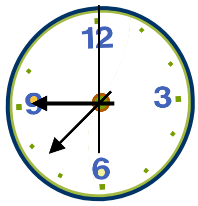


Figura 29

- Hallamos el recorrido del horario en 45 minutos:

Recorre	en 1 hora	en 45 minutos
Minutero	360º	270º
Horario	30º	x

$$x = \frac{30.270^{o}}{360} = 22{,}5^{o} = 22^{o}30'$$

- Observamos en la figura 29, que a las 7h 45min forman un ángulo α:

$\alpha = 90^{o} - (30 + x) \Rightarrow \alpha = 90^{o} - (52^{o}\ 30') = 37^{o}30'$

Respuesta: a las 7 h 45min las agujas del reloj forman un ángulo de **37º30’**

ACTIVIDADES

1. Un móvil se desplaza siguiendo la trayectoria de un arco circular que mide 20º y recorre una longitud de 3 km. El radio de la circunferencia es:..................

2. Una faja conecta una polea de 12 m de radio con una de 6 m. Si la polea mayor gira un arco de 10 rad, ¿cuál es la medida del arco que gira la polea más pequeña? ....

3. Complete en:

Medida angular: θ	Longitud de arco: s	Radio: r
2π	....	3
$\pi/4$	π	....
....	$12\pi/5$	10
120º	$4\pi/3$	....
60º	8π	....
....	3	6

4. Se va construir un tramo de vía, de un ferrocarril, de forma circular de modo que la trayectoria cambie de dirección 25º en una distancia de 120 m. ¿Qué radio debe usarse?

Comprueba tus aprendizajes

1. a) Un ciclista recorre 14,8 *rad* en una pista circular de 1 *km* de radio. ¿Cuántos kilómetros a recorrido? (2 pts)

   b) En una circunferencia de longitud 18 cm un arco tiene longitud de 3 cm. Halle la medida del ángulo central correspondiente, en radianes y grados.

2. a) Si $(\sqrt{x-1})^o$ equivale a $\dfrac{\pi}{20}rad$, halle el valor de x. (3 pts)

   b) Simplifique la expresión: $\dfrac{25^o + \frac{\pi}{72}rad}{\frac{\pi}{18}rad + 20^o}$.

3. a) Si las medidas de los ángulos interiores de un triángulo están en la relación 2:8:10, entonces la medida del menor de estos ángulos en radianes es: (3 pts)

   b) En un triángulo rectángulo los ángulos agudos miden $\pi n/30$ rad y $24n^o$ respectivamente. ¿Cuánto vale 'n'".

4. a) Calcule y exprese en radianes y grados sexagesimales la medida del ángulo central θ, el cual está subtendido por el arco de 7 cm en una circunferencia de radio 6cm. (2 pts)

   b) Una circunferencia tiene un radio de 18 cm. Halle la medida en radianes de un ángulo determinado por un arco de longitud 12 cm.

5. a) En un nuevo sistema "A" se cumple que 20 de sus unidades equivale a π/18 rad. ¿A cuantos grados sexagesimales equivale 20 unidades del sistema A?. (2 pts)

   b) Halle la medida en grados de un ángulo que es suplemento de un ángulo de (π+1)/2 radianes.

6. Un ángulo al ser medido por dos personas es $(x - 2)^o$ y $\dfrac{(x+2)}{12}$ rad, calcule la medida de este ángulo en radianes. (2 pts)

7. Se ha ideado un nuevo sistema de medida angular denotado por C, donde se cumple: 9C = 10S, siendo S el sistema sexagesimal.
   a) ¿A cuánto equivale en el nuevo sistema C, un ángulo de una vuelta y 3/4 de vuelta?
   b) ¿A cuánto equivale en el sistema C, un ángulo de 5π/12 rad?
   c) ¿A cuánto es igual en el nuevo sistema C, un ángulo de 44º? (3 pts)

8. a) Al convertir –40º al sistema radial se obtiene:
   i) –π/5 rad ii) –2π/9 rad iii) –2π/7 rad iv) –π/9 rad v) –5π/5 rad

   b) Un recorrido sobre la circunferencia unitaria de longitud 3π/20 en sentido horario, genera un ángulo centra de: i) 50º ii) 54º iii) 56º iv) 52º v) 60º (3 pts)

   c) Se tiene 3 ángulos consecutivos cuya suma es la cuarta parte de un ángulo llano, sabiendo que se halla en progresión aritmética y el mayor es igual al cuadrado del menor. La razón de esta progresión es: i) π/18 ii) π/19 iii) π/20 iv) π/25 v) π/22

ASÍGNATE TUS PUNTAJES

¿Cuáles serían los puntajes que te asignas en el desarrollo de cada uno de las preguntas de los Ejercicios de comprobación de tus aprendizajes? ¡sé honesto!

Ítems	1	2	3	4	5	6	7	8	Nota
Puntaje									

RESUMEN DEL LA UNIDAD Nº 2

¡En esta unidad, cuyo estudio acabamos de concluir, aprendimos:

1. *Relacionar y obtener la longitud y medida de arcos orientados y la medida del ángulos centrales correspondiente en la circunferencia unitaria.*

2. *Identificar el radián y el grado sexagesimal como unidades de medida angular.*

3. *Obtener equivalencias entre las unidades de medida angular: radial y sexagesimal, y deducción de reglas de conversión de un sistema a otro, aplicándolos a la solución de problemas.*

4. *Deducir fórmulas para calcular la longitud de arcos* **s** *en la circunferencia de radio* **r** *y de medida* θ.

5. *Identificar los ángulos en posición normal y ángulos cuadrantales en el sistema de coordenadas cartesianas.*

¿Tus resultados fueron satisfactorios al contrastar con el resultado obtenido por otros grupos de la clase, y con la respuesta del profesor?

Si

Entonces, estás expedito para estudiar las funciones trigonométricas, que viene a continuación en la Unidad Nº 3 *de este material*

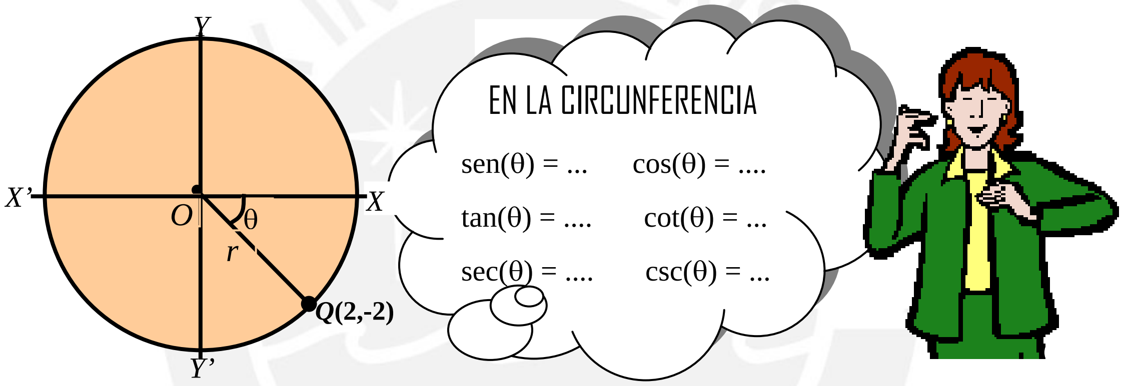
No

¡Repase detenidamente los puntos que tuvo dificultad, y si sigue con dudas consulte al profesor !

UNIDAD Nº 3

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

SENO, COSENO, COTANGENTE, TANGENTE, SECANTE Y COSECANTE



Al término del estudio de esta unidad se estará en condiciones de:

DEFINIR LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: SENO, COSENO, TANGENTE, COTANGENTE, SECANTE Y COSECANTE, IDENTIFICANDO SUS DOMINIOS, RANGOS, GRÁFICAS Y ALGUNAS PROPIEDADES.

PRUEBA DE ENTRADA

1. En la circunferencia unitaria $\mathcal{C}_1(O)$ de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, sean los puntos $A = (1 , 0)$ y $P = (u , v)$ tal que el arco $\overset{\frown}{AP}$ mide θ rad. Determine la verdad o la falsedad de las afirmaciones siguientes:
   2 pts
   a) sen(θ) = *v*;
   b) cos(θ) = *u*;
   c) tan(–θ) = tan(θ);
   d) sen(θ + 2π) = –*v*.

2. Si para un arco orientado de medida θ rad, en la $\mathcal{C}_1(O)$, con extremo inicial (1 , 0) y con extremo terminal el punto $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, entonces:
   2 pts
   a) cos(θ) = ... b) sen(θ) = ...
   c) cot(θ) = ……….... d) sec(θ) = ...……...

3. Si el punto E(θ) de la circunferencia unitaria es el extremo terminal del arco orientado (*A* ,θ), está en el segundo cuadrante y sen(θ) = 3/7, complete las igualdades:
   a) tan(θ) = ……..... c) cot(θ) = ……….... 2 pts
   b) sec(θ) = ……..... d) csc(θ) = ……….....

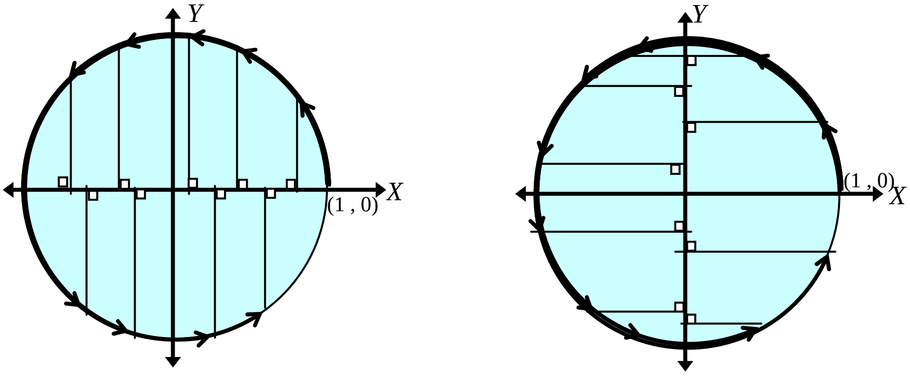
4. Dado el punto E(θ) = (–4/5 , 3/5), para θ en [0 , 2π]; entonces se tiene que:
   2 pts
   a) sen(θ) = ……... b) cos(θ) = ……... c) θ = …... o θ = ……..

5. ¿En qué cuadrante debe estar E(θ), punto de la circunferencia unitaria, para que sen(θ) y sec(θ) sean negativos?.
   2 pts

6. Si para θ en 3 se cumple sec(θ) = –3, entonces se tiene que:
   a) tan(θ) = ... c) cot(θ) ....
   b) csc(θ) = ... d) E(θ) está en el ....….. cuadrante
   2 pts

7. Para las condiciones dadas, determine los valores de las otras dos funciones restantes, entre cos(θ), sen(θ) y tan(θ)
   a) sen(θ) = –5/13 y 3π/2 < θ < 2π, cos(θ) = ... tan(θ) =...........
   b) tan(θ) = 3/4 y π < θ < 3π/2, cos(θ) = ... sen(θ) =........... 2 pts
   c) sen(θ) = 3/7 y π/2 < θ < π, cos(θ) = ... tan(θ) =...........
   d) cos(θ) = $4/\sqrt{30}$ y 3π/2 < θ < 2π, sen(θ) = ... tan(θ) =...........

8. Teniendo en cuenta las líneas verticales (seno) y horizontales (coseno) para cada arco orientado en las circunferencia unitaria, podemos afirmar que:



2 pts

a) La magnitud de las líneas seno en el primer cuadrante varía de 0 hasta 1.

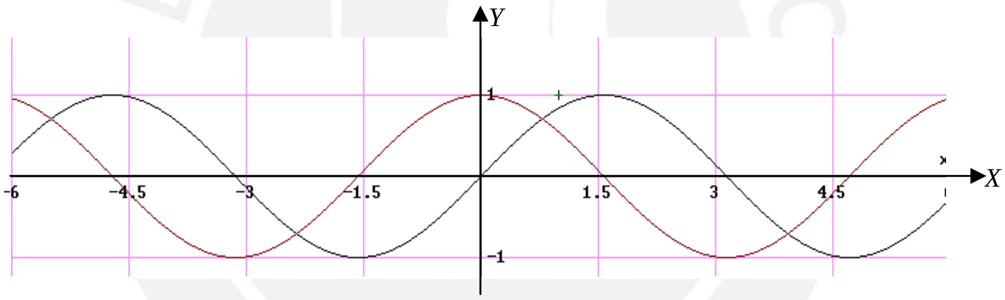
b) La magnitud de las líneas coseno en el primer cuadrante varía de ..... hasta ......

c) La magnitud de las líneas seno en el tercer cuadrante varía de ..... hasta ....

d) La magnitud de las líneas coseno en el tercer cuadrante varía de ..... hasta ....

e) La magnitud de las líneas coseno en el cuarto cuadrante varía de ..... hasta ....

9. Las dos curvas continuas representan las gráficas de las funciones seno y coseno:



a) Identifique cuál de las curvas representa a la gráfica de la función seno y cuál a la gráfica de la función coseno.
b) Indique los intervalos donde la gráfica de la función seno es creciente y otros intervalos donde sea decreciente.
c) Indique un intervalo donde la curva coseno es creciente y otro donde sea decreciente.
d) Indique, aproximadamente, en que puntos ambas curvas son iguales.

2 pts

e) ¿Cuál de las curvas es simétrica respecto al origen y cuál respecto al eje *Y* ?

10. Teniendo en cuenta las líneas en la figuras del ejercicio 8) ordene en orden ascendente los valores de las funciones: sen(10º), sen(70º), sen(140º), sen(21º) y sen(300º).

2 pts

ESCALA DE PONDERACIÓN (CALIFICATIVO)

De 20 a 18: ¡**EXCELENTE**!, pase a estudiar el módulo 1.4.
De 17 a 15: ¡**Bueno /Suficiente**!, repace los puntos que tuvo dificultad en el material
De 14 a 11: ¡**Regular/deficiente**! Estudie detenidamente los puntos que erraste.
De 10 a 0: ¡**Deficiente**!, estudie íntegramente esta unidad modular.

REQUISITOS

Para comprender el estudio de esta unidad es necesario conocer bien temas estudiados en unidades anteriores:

1. *Ecuación de la circunferencia unitaria en el sistema de coordenadas rectangulares.*
2. *Ubicar puntos simétricos en la circunferencia respecto al eje de coordenadas y al origen de coordenadas.*
3. *Arcos orientados y ángulos en posición normal sobre la circunferencia unitaria.*
4. *Función "envolvente" sobre la circunferencia unitaria.*
5. *Domino y rango de la función envolvente.*
6. *Fenómenos periódicos y funciones periódicas.*
7. *Medidas angulares, relación entre longitud de arco y ángulo central.*

OBJETIVOS Y CONTENIDOS

¿*Qué se pretende lograr en esta unidad*?

1. *Definir de las funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante, a partir de puntos de la circunferencia unitaria.*
2. *Determinar los valores y signos de las funciones en los cuatro cuadrantes de un sistema de coordenadas rectangulares.*
3. *Hallar los valores de las funciones trigonométricas de ángulos en posición normal y en el ángulo referencial.*
4. *Identificar las líneas seno, coseno, tangente y cotangente en la circunferencia unitaria y trazar las gráficas de las funciones seno, coseno, etc. identificando dominios, rangos y algunas propiedades.*
5. *Aplicar diversas relaciones entre las funciones trigonométricas en el planteamiento y Solución de problemas.*

DESARROLLO

EXPLORACIÓN-MOTIVACIÓN-PROBLEMATIZACIÓN

ACTIVIDAD 1:

Cálculo de las funciones trigonométricas a partir de un punto correspondiente al extremo terminal o final de un arco orientado θ en la $\mathcal{C}_1(O)$:

Se ha visto que la función envolvente E asocia a cada número real θ un punto $P = (u , v)$ en $\mathcal{C}_1(O)$ y se cumple: $u^2 + v^2 = 1$. Teniendo en cuenta esto:

1) ¿El punto $P = (-1/3 ,\ 2\sqrt{2}/3)$ pertenece a la circunferencia unitaria?

   Para esto, $(-1/3)^2 + (2\sqrt{2}/3)^2$ = ... Luego: ....

   Además, la abscisa de P es u = ... y la ordenada de P es v = ...

   También, ubique aproximadamente el punto P en $\mathcal{C}_1(O)$. Se tiene: P está en el …... cuadrante del sistema rectangular y el arco $\widehat{AP}$, con $A = (1 , 0)$, aproximadamente mide .... rad.

2) En $\mathcal{C}_1(O)$, halle el extremo terminal del arco orientado $\alpha = 11\pi/6$, en posición normal: ....

3) En $\mathcal{C}_1(O)$, halle el extremo terminal del arco orientado $\alpha = -5\pi/4$, en posición normal: ……

ACTIVIDAD 2:

Relación de un punto $Q = (a , b) \in 3^2$ con puntos en la $\mathcal{C}_1(O)$.

1) Trace el rayo: $\overrightarrow{OQ}$, con $O = (0 , 0)$.
2) Trace la circunferencia: $\mathcal{C}_r(O)$, con radio $r = OQ$.
3) Trace la circunferencia: $\mathcal{C}_1(O)$, de radio 1.
4) Ubique $\overrightarrow{OP} \cap \mathcal{C}_1(O) = \{P\}$.
5) Mostrar $\Delta\, OPA$ y $\Delta\, OQB$ son semejantes.
6) Se tiene las proporciones:

$$\frac{u}{1} = \frac{a}{r} \quad \text{y} \quad \frac{v}{1} = \frac{b}{r}$$

7) Dados: $Q = (a, b) \in 3^2$ y $P = (u , v) \in \mathcal{C}_1(O)$,

   se tiene: $u = \dfrac{a}{r}$ y $v = \dfrac{b}{r}$.

   $a = ru$ y $b = rv$

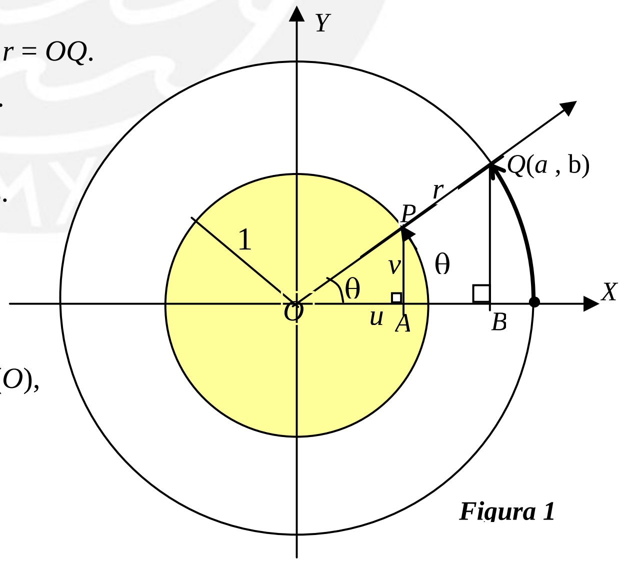


Figura 1

EN GENERAL:

Para cualquier punto $(a , b) \in 3^2$, se cumple: $(a , b) \in \mathcal{C}_r(O) \Leftrightarrow (a/r , b/r) = (u , v) \in \mathcal{C}_1(O)$.

De esto, si $P = (u , v) \in \mathcal{C}_1(O)$, se tiene $u^2 + v^2 = 1$; multiplicando por $r^2 > 0$, se tiene:

$r^2(u^2 + v^2) = r^2(1)$, $\quad (ru)^2 + (rv)^2 = r^2$.

Luego: $a^2 + b^2 = r^2$; es decir: $(a , b) \in \mathcal{C}_r(O) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = r^2$.

EJEMPLOS

1) Si $P = (1/3 , b) \in \mathcal{C}_1(O)$, halle el punto de intersección del rayo $\overrightarrow{OP}$ con la circunferencia $\mathcal{C}_3(O)$, de centro $O = (0 , 0)$ y radio $r = 3$: .... ¡Grafique!

Primero calcule "*b*", luego indique la ecuación de la $\mathcal{C}_3(O)$

Solución:

Dado que $P = (1/3 , b) \in \mathcal{C}_1(O)$, se tiene: $(1/3)^2 + b^2 = 1$

$1/9 + b^2 = 1$ y $b^2 = 1 - 1/9 = 8/9$. Luego

$b = \pm 2\sqrt{2}/3$ y

$(1/3 , 2\sqrt{2}/3) , (1/3 , -2\sqrt{2}/3) \in \mathcal{C}_1(O)$

Además:

$\mathcal{C}_3(O) \cap \overrightarrow{OP} = \{(1 , 2\sqrt{2})\}$ ó

$\mathcal{C}_3(O) \cap \overrightarrow{OP} = \{(1 , -2\sqrt{2})\}$

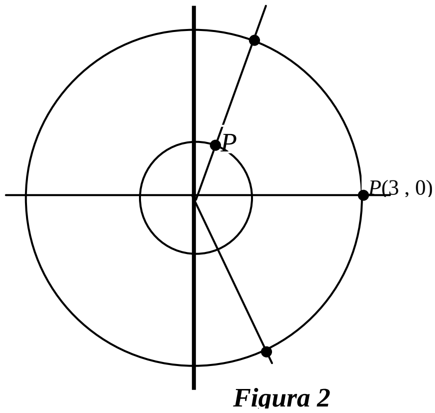


Figura 2

De aquí la prolongación del radio de una $\mathcal{C}_1(O)$, intercepta a toda circunferencia concéntrica.

2) En 3^2**,** sea $T = (-4 , 3)$, halle la intersección del rayo $\overrightarrow{OT}$ con la circunferencia unitaria de centro $O = (0 , 0)$.

Solución:

El radio *r* de la circunferencia que pasa por el punto *T*, es:

$r = d(O , T) = \sqrt{(-4)^2 + 3^3} = \sqrt{25} = 5$

para $P = (u , v)$ en $\mathcal{C}_1(O)$, cumple: $u^2 + v^2 = 1$, y

$\frac{u}{1} = \frac{-4}{5}$ y $\frac{v}{1} = \frac{3}{5}$, en consecuencia: $u = \frac{-4}{5}$ y $v = \frac{3}{5}$

es decir: $\overrightarrow{OT} \cap \mathcal{C}_1(O) = \{ (-4/5 , 3/5) \}$

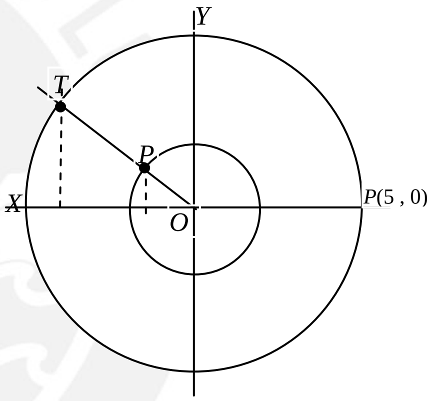


Figura 3

3) En la figura 4, $\overline{BD} \perp \overline{AC}$. Determine *a*, *b*, *c* y *d*.

Solución:

Puesto que el triángulo *ADB* recto en *D* y

$m(\widehat{A}) = 60º$, resulta $m(A\widehat{B}D) = 30º$ y

$c = AB = 2AD$, se tiene: $c = 2(6\sqrt{2}\text{ m}) = 12\sqrt{2}$ m;

también $d = BD = AD\sqrt{3}$, se tiene:

$$d = \frac{12\sqrt{2}}{2}\sqrt{3} = 6\sqrt{6}\text{ m}$$

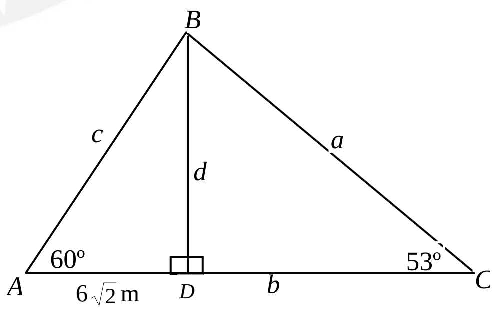


Figura 4

Por otro lado, el triángulo *BDC* es recto en *D*, $m(D\widehat{B}C) = 37º$, $m(\widehat{C}) = 53º$, de modo que por semejanza de triángulos:

$b = DC = (4/3)\,BD = (4/3)\,6\sqrt{6}\text{ m} = 8\sqrt{6}\text{ m}.$

$a = BC = (4/5)\text{BD} = (4/5)\,6\sqrt{6}\text{ m} = 24\sqrt{6}/5\text{ m}$

EJERCICIOS

1. Dado $M = (-3\ ,\ 2)$ halle el radio de la circunferencia con centro en el origen de coordenadas, determine la circunferencia unitaria concéntrica con la anterior, luego identifique el punto correspondiente a la circunferencia unitaria que se encuentra sobre $\overline{OM}$

2. Sea α un número real positivo que determina un arco orientado de extremo $E(\alpha) = (-3\ ,\ 4)$ y β un número real negativo de extremo $E(\beta) = (-3\ ,\ -4)$. Determine los puntos pertenecientes a la circunferencia unitaria que se ubican en los segmentos: $\overline{OE}(\alpha)$ y $\overline{OE}(\beta)$. Luego, determine las coordenadas de $E(\alpha+\beta)$ y $E(\alpha-\beta)$.

LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS O FUNCIONES CIRCULARES

En cada caso para θ dado:

i) $\theta = \pi/6$; **ii)** $\theta = \pi/3$; **iii)** $\theta = \pi/4$; **iv)** $\theta = \pi/2$;

v) $\theta = -\pi/6$; **vi)** $\theta = -4\pi/3$; **vii)** $\theta = -\pi$; **viii)** $\theta = -11\pi/6$.

a) Halle $E(\theta) = P = (u\ ,\ v)$ en $\mathcal{C}_1(O)$, el extremo terminal del arco orientado en posición normal definido por θ. ¿Se cumple $u^2 + v^2 = 1$?, …….., por qué?.........................

b) Identifique la ordenada y la abscisa de $E(\theta)$: Abscisa: ……… y ordenada: ……..........…..

c) Si θ es la medida de un ángulo central de lado inicial $\overrightarrow{OA}$, con $A = (1\ ,\ 0)$, y lado terminal $\overrightarrow{OP}$, trace una circunferencia de radio $r = 2$ y halle la intersección del ángulo $A\widehat{O}P$ con la circunferencia $\mathcal{C}_2(O)$.

Se sabe que $(u\ ,\ v) \in \mathcal{C}_1(O) \Leftrightarrow u^2 + v^2 = 1$

En efecto si $(a\ ,\ b) \in \mathcal{C}_2(O) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2^2$ y

$\dfrac{u}{1} = \dfrac{a}{2}$ y $\dfrac{v}{1} = \dfrac{b}{2}$. O sea $a = 2u$ y $b = 2v$

luego, el punto de intersección de $\overrightarrow{OP}$, con la $\mathcal{C}_2(O)$, es $Q = (a\ ,\ b) = (2u\ ,\ 2v)$ y $A' = (2\ ,\ 0)$.

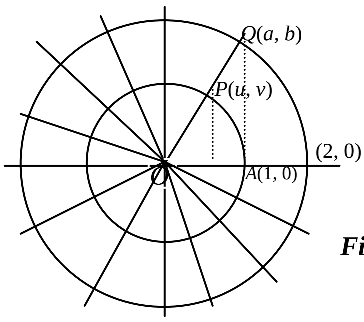


Figura 5

Según esto, si $\theta = \pi/6$, se tiene: $P = (1\ ,\ 0)$, $Q = (2\ ,\ 0)$; si $P = (-3/5\ ,\ 4/5)$, $Q = (-3\ ,\ 4)$; etc.

De los casos anteriores, nos interesa identificar la abscisa y la ordenada del punto $E(\theta)$, y se tienen:

3.1. LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

PROBLEMA: Teófilo hace volar su cometa sujeta de un cordel a 1 m sobre el suelo. El hilo está tenso y forma un ángulo de 53º y alarga 240 m.

a) Calcule la altura aproximada donde se encuentra la cometa,

b) Si se desprende una pieza metálica del cometa ¿a qué distancia de Teófilo cae al suelo?

Solución: Esquematizando se tiene el triángulo *ABC*, recto en *B*.

¿Qué elementos del triángulo conocemos?

✓ El ángulo en *A* mide 53°

✓ La hipotenusa: $AC = 240$ m.

¿Qué nos piden hallar?

✓ La $d(A , B) = AB$ y $d(B , C) = BC$ longitudes de los catetos adyacente y opuesto al ángulo dado de 53º, respectivamente.

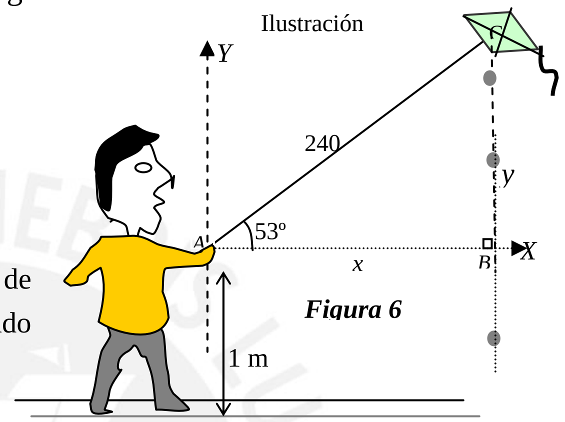


Figura 6

Si fijamos un sistema de ejes *X* e *Y*, con $A = (0 , 0)$, el semieje positivo contiene al rayo $\overrightarrow{AB}$, sea $C = (x , y)$. La pieza cae a $d(A , B) = x = 144$ m, $d(B , C) = y = 192$ m (las longitudes de los catetos e hipotenusa son proporcionales a: 3, 4 y 5), y la altura del cometa es: 92 +1 = 93 m

¿Cómo hallar estas coordenadas? El punto *C* tiene por coordenadas: (144 , 192)

Para resolver este problema y otros, se tiene la siguiente formalización:

EN LA CIRCUNFERENCIA UNITARIA:

Dado $E(\theta) = (u , v) \in \mathcal{C}_1(O)$, con $u^2 + v^2 = 1$.

1) Al valor *u*, abscisa de E(θ), se llama **coseno** de θ y se denota por cos(θ), es decir, $\cos(\theta) = u$.

2) Al valor *v*, ordenada de E(θ), se llama **seno** de θ y se denota por sen(θ), es decir, $\text{sen}(\theta) = v$.

3) De 1), 2) y de la expresión $u^2 + v^2 = 1$, resulta $(\cos(\theta))^2 + (\text{sen}(\theta))^2 = 1$, que se denota: $\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta) = 1$.

Las expresiones: $u = \cos(\theta)$ y $v = \text{sen}(\theta)$ para $E(\theta) = (u , v)$ en $\mathcal{C}_1(O)$, para cada valor de θ en ℜ, las coordenadas *u*, *v* se obtienen de manera únicas; es decir, definen las reglas de correspondencia de dos funciones. Se tiene:

1) FUNCIÓN COSENO: Es la función que a cada θ en 3, le hace corresponder la abscisa u de E(θ) = (u , v) y se denota:

$$\cos:\ 3 \longrightarrow 3\ /$$
$$\theta \longrightarrow \cos(\theta),\ \text{donde } \cos(\theta) = u, \text{ para } (u, v) = E(\theta)$$

2) FUNCIÓN SENO: Es la función que a cada θ en 3, le hace corresponder la ordenada v de E(θ) = (u , v) y se denota:

$$\cos:\ 3 \longrightarrow 3\ /$$
$$\theta \longrightarrow \text{sen}(\theta),\ \text{donde } \text{sen}(\theta) = v, \text{ para } (u, v) = E(\theta)$$

EJEMPLOS:

Por la definición, si E(θ) = (u , v)∈ $\mathcal{C}_1(O)$, se tiene: cos(θ) = u y sen(θ) = v y $u^2 + v^2 = 1$.
Según esto:

1) Para $E\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, se tiene: $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) =$ .... y $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) =$ ....

2) Como $E\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left(\frac{-1}{2}, \ldots\right)$, se tiene: $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) =$ .... y $\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3) Como $E\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \left(\ldots, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$, se tiene: $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\text{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right) =$ ....

4) Como $E\left(\frac{-3\pi}{2}\right) = (0, 1)$, se cumple: $\cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right) =$ .... y $\text{sen}\left(\frac{-3\pi}{2}\right) =$ ......

5) Como $E\left(\frac{-5\pi}{6}\right) = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$, entonces: $\cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) =$ .... y $\text{sen}\left(\frac{-5\pi}{6}\right) =$ ....

NOTA: Para todo número real θ, el par (u , v) define las coordenadas del punto E(θ) ∈ $\mathcal{C}_1(O)$, donde:

cos(θ) = u

sen(θ) = v

x

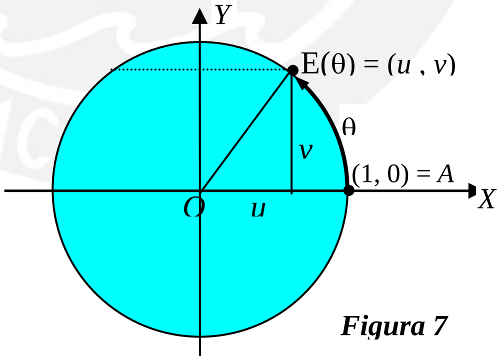


Figura 7

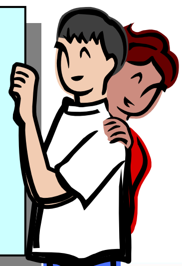
En particular, para θ = 0, se tiene sen(0) = 0 y cos(0) = 1; y para θ = π, se tiene: sen(π) = 0 y cos(π) = –1.

Además, halar: sen(π/2), cos(π/2), sen(3π/2) y cos(3π/2).

RECUERDA:

Dado E(θ) = (u , v) ∈ $\mathcal{C}_1(O)$, se tiene $u^2 + v^2 = 1$; y como cos(θ) = u y sen(θ) = v, se tiene: E(θ) = (cos(θ) , sen(θ)); es decir, $(\cos(\theta))^2 + (\text{sen}(\theta))^2 = 1$, y se denota:

$$\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta) = 1 \quad \text{ó} \quad \text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$



EJEMPLOS:

1) Si θ = –π/6, se tiene: $E(-\pi/6) = (\sqrt{3}/2, -1/2)$. De esto: cos(π/6)= $\sqrt{3}/2$ y sen(π/6) =1/2.

2) Dado θ = –5π/6, se tiene E(θ) = (… , ...). Luego: cos(θ) = …... y sen(θ)= …...

3) Si E(θ) = $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, entonces θ = … o θ = ... Luego: cos(θ) = ...…. y sen(θ) = ...

4) Si θ = 7π/4, se tiene $E(7\pi/4) = (\ldots\ ,\ \ldots)$, cos(7π/4) = …... y sen(7π/4) =...…....

5) Si sen(θ) = –1/2 y como $\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$, se tiene: $(-1/2)^2 + \cos^2(\theta) = 1$; de donde:
$\cos^2(\theta) = 1 - 1/4 = 3/4$, o sea, cos(θ) = $\pm\sqrt{3}/2$. Luego, ... = $\sqrt{3}/2$ o .... = $-\sqrt{3}/2$.

6) Si cos(θ) = 3/4 y sen(θ) < 0, de $\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ se tiene $\text{sen}^2(\theta) + (3/4)^2 = 1$, de donde $\text{sen}^2(\theta) = 1 - 9/16 = 7/16$. Luego, sen(θ) = $-\sqrt{7}/4$, pues: sen(θ) < 0.

SENO Y COSENO DE ÁNGULOS EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO:

Función seno y coseno para medidas angulares:

-) Si θ es la medida de un ángulo en radianes, tendremos: sen(θ rad) = sen(θ) y cos(θ rad) = cos(θ).

-) Si θ es la medida de un ángulo en grados (º), θº = α rad. Luego:
sen(θº) = sen(α rad) = sen (α) y, en forma análoga, cos(θº) = cos(α rad) = cos(α).

Sea *BAC* un triángulo con ángulo recto en *A*, como se da en la figura 8, las longitudes de sus catetos son: *b* = *AC*, *c* = *AB*, y de su hipotenusa es: *a* = *BC*.

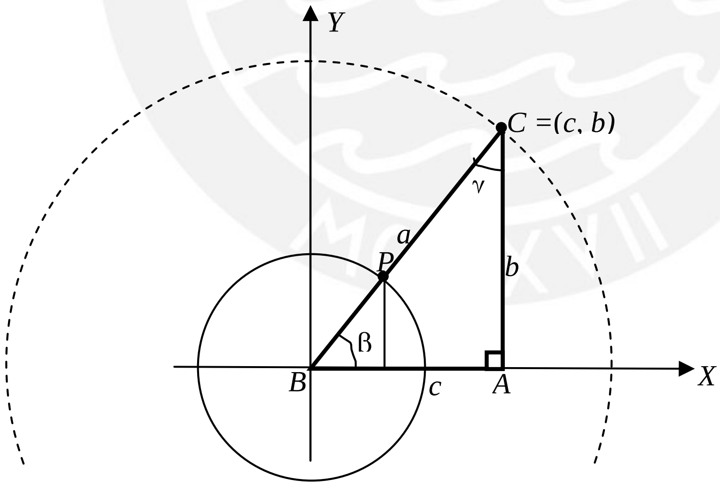


Figura 8

Consideremos que el ángulo interior en el vértice *B*, o sea el $\widehat{ABC}$, que mida β (en radianes). Con origen en *B*, se traza un sistema de coordenadas *X* que contiene al rayo $\overrightarrow{BA}$ e *Y* perpendicular a *X* en *B*. Se traza la circunferencia de centro *B*, radio *r* =1.

Entonces dicha circunferencia intercepta al rayo $\overrightarrow{BC}$ en el punto *P* = (*u* , *v*) donde:

$u = \frac{c}{a}$ y $v = \frac{b}{a}$, es decir E(β) = ($\frac{c}{a}$, $\frac{b}{a}$).

Luego, en el triángulo ABC, recto en A, se tiene: $\text{sen}(\beta) = \text{sen}(\widehat{B}) = \frac{b}{a}$, **cociente de la longitud del cateto opuesto entre la longitud de la hipotenusa**, y

$\cos(\beta) = \cos(\widehat{B}) = \frac{c}{a}$, **cociente de la longitud del cateto adyacente entre la longitud de la hipotenusa**.

Análogamente, si el ángulo interior en C mide γ rad; se tiene: $\text{sen}(\gamma) = \frac{c}{a}$ y $\cos(\gamma) = \frac{b}{a}$.

EJEMPLOS:

1) Dado $P = (x , -2)$ en el plano cartesiano. Si la distancia del origen de coordenadas a este punto es 5 cm y el rayo OP forma con el semieje X un ángulo de 15º. ¿Cuál es el valor de x?

Solución:

Por definición de coseno, se tiene: $\cos(15º) = x/5$, de aquí $x = 5\cos(15º)$, (usando la tabla trigonométrica o una calculadora científica) se tiene que $\cos(15º) = 0{,}996$. Reemplazando valores: $x = 5(0{,}996) = 4{,}83$

Luego, el valor de x es 4,83 cm.

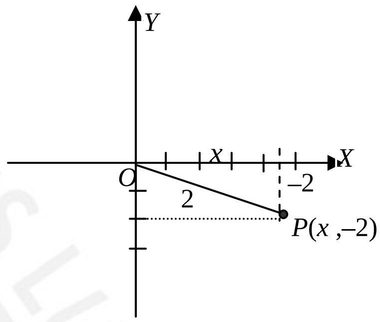


Figura 9

2) Si en el punto "*A*" se inicia una perforación como se indica en el gráfico, hasta llegar a B, siguiendo el trayecto indicado. ¿*A* qué profundidad "*h*" nos encontramos cuando nos ubicamos en el punto "*B*"?

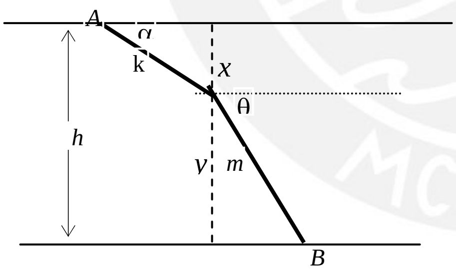


Figura 10

De la figura 10, se tiene que: $h = x + y$, $\text{sen}(\alpha) = x/k$ y $\text{sen}(\theta) = y/m$. De esto: $x = k.\text{sen}(\alpha)$, $y = m.\text{sen}(\theta)$

Luego: $h = k.\text{sen}(\alpha) + m.\text{sen}(\theta)$

3) Calcule la longitud "l"de la piscina que se muestra en la figura 10, en función de "m", "d", "h", "θ" y "ϕ", en caso fuera posible.

Según la figura se tiene: $l = x + d + w + z$

$\cos(\theta) = x/m$, entonces $x = m.\cos(\theta)$

$\cot(\phi) = w/h$, entonces: $w = h.\cot(\phi)$

$\cot(\phi) = z/(m.\text{sen}(\phi))$, de donde:

$z = m.\text{sen}(\phi).\cot(\phi)$

Luego: $l = m.\cos(\theta) + d + [h + m.\text{sen}(\theta)]\cot(\phi)$

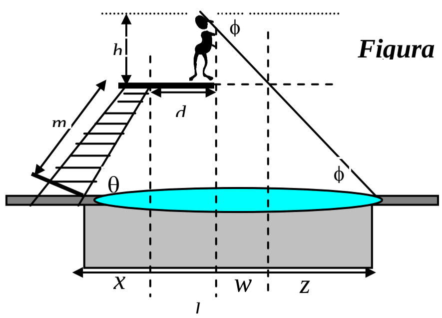


Figura 11

4) Una carretera en línea recta tiene una inclinación de 30º respecto a la horizontal, si un móvil viaja 1 km = 1000 m desde el inicio de la pendiente,

a) ¿a qué altura se encuentra respecto a la horizontal,

b) ¿cuál es la distancia horizontal recorrida por el móvil?

Solución:

¿Qué elementos del triángulo conocemos?

✓ El ángulo α = 30° en el ΔABC, recto en B, cuya hipotenusa es: $d(A\ ,P)$ = 1 000 m.

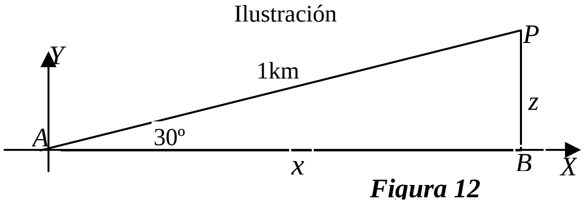


Figura 12

¿Qué nos piden hallar?

✓ La $d(A\ ,\ B)$, que vendría a ser la longitud del cateto adyacente al ángulo de 30° y $d(B\ ,\ P)$ cateto opuesto al ángulo de 30º.

En el ΔABC se tiene: $\cos(30º) = \dfrac{x}{1000}$. De donde $x = 1000.\cos(30º) = 1000(\sqrt{3}/2) = 500\sqrt{3}$;

$\text{sen}(30º) = \dfrac{z}{1000}$; de donde $z = 1000(1/2) = 500$. Luego: $d(B\ ,P)$ = 500 m.

Luego, el móvil se encuentra a una altura: z = 100 m y la distancia horizontal recorrida es: $x = 500\sqrt{3}$ m.

SIGNOS DE LOS VALORES SENO Y COSENO:

De la definición de las funciones seno y coseno, para θ en 3 en la circunferencia unitaria se tiene: $E(\theta) = (\cos(\theta)\ ,\ \text{sen}(\theta))$, con $\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$, en un sistema rectangular de coordenadas. Por otro lado, θ define un arco orientado $\overset{\frown}{AP}$ en posición normal de extremo inicial fijo $A = (1\ ,\ 0)$ y extremo terminal $P = E(\theta)$, cuyas coordenadas dependen de θ. Según esto:

i) Si $E(\theta)$ está en el eje X, entonces $E(\theta) = (1\ ,\ 0)$ o $E(\theta) = (-1\ ,\ 0)$;

ii) Si $E(\theta)$ está en el eje Y, entonces $E(\theta) = (0\ ,\ 1)$ o $E(\theta) = (0\ ,\ -1)$;

iii) Si $E(\theta) = (\cos(\theta)\ ,\ \text{sen}(\theta))$ está en el primer cuadrante, entonces $\cos(\theta) > 0$ y $\text{sen}(\theta) > 0$;

iv) Si $E(\theta) = (\cos(\theta)\ ,\ \text{sen}(\theta))$ está en el segundo cuadrante, entonces $\cos(\theta) < 0$ y $\text{sen}(\theta) > 0$;

v) Si $E(\theta) = (\cos(\theta)\ ,\ \text{sen}(\theta))$ está en el tercer cuadrante, entonces $\cos(\theta) < 0$ y $\text{sen}(\theta) < 0$; y

vi) Si $E(\theta) = (\cos(\theta)\ ,\ \text{sen}(\theta))$ está en el cuarto cuadrante, entonces $\cos(\theta) > 0$ y $\text{sen}(\theta) < 0$.

Lo detallado se resume en el siguiente cuadro:

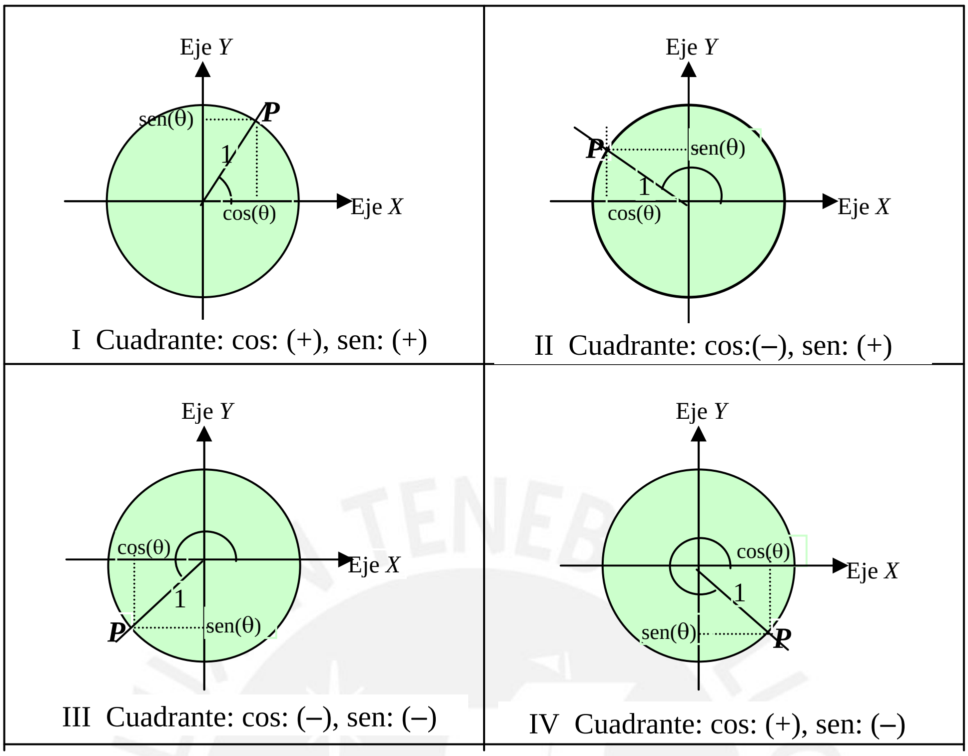


Figura 13

EJEMPLOS:

1) Dados: $\cos(\alpha) = 1/2$ y $0 < \alpha < \pi$. Halle $\text{sen}(\alpha)$.

A partir de: $\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, se tiene: $\text{sen}^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha)$, y reemplazando valores: $\text{sen}^2(\alpha) = 1 - (1/2)^2 = 3/4$, es decir $\text{sen}^2(\alpha) = 3/4$. Luego: $\text{sen}(\alpha) = \sqrt{3}/2$ o $\text{sen}(\alpha) = -\sqrt{3}/2$.

2) α y β son ángulos en posición normal. E(α) está en el II-C y E(β) en el III-C. $\cos(\alpha) = -3/5$ y $\text{sen}(\beta) = -12/13$, y si $k = \text{sen}(\alpha) + \cos(\beta)$, $h = 13\cos(\beta).\,\text{sen}(\alpha)$, entonces 65k + 6h es:.

Solución:

Según la condición: $k = (4/5) + (-5/13) = 27/65$ y $h = 13(-5/13)(4/5) = -4$

Luego: $75.k + 6.h = 65(27/65) + 6(-4) = 27 - 24 = 3$.

3) Dado $E(\theta) = (u, v)$ en $\mathcal{C}_1(O)$, halle todos los valores para θ en 3, tales que:

a) $u = \cos(\theta) = 0$; **b)** $v = \text{sen}(\theta) = 0$; **c)** $u = \cos(\theta) = -\sqrt{2}/2$; **d)** $v = \text{sen}(\theta) = \sqrt{3}/2$.

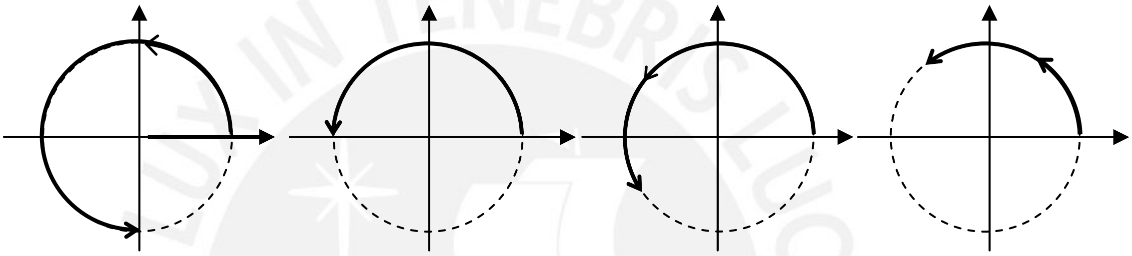
Solución:

a) Como $E(\theta) = (\cos(\theta), \text{sen}(\theta))$ y $\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$; para $\cos(\theta) = 0$ se tiene que $\text{sen}^2(\theta) + 0^2 = 1$ o $\text{sen}^2(\theta) = 1$, de donde $\text{sen}(\theta) = 1$ o $\text{sen}(\theta) = -1$; es decir, $E(\theta) = (0, 1)$ o $E(\theta) = (0, -1)$, esto es: $\theta = 0$, $\pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$, $7\pi/2$, ……., o $\theta = -\pi/2$, $-3\pi/2$, $-5\pi/2$, $-7\pi/2$, …… . Luego, $\theta = k\pi$, para k en 9, es solución de $u = \cos(\theta) = 0$ en 3. (Fig. 14-a)

b) Como en **a)**, para $v = \text{sen}(\theta) = 0$ se tiene que $0^2 + \cos^2(\theta) = 1$ o $\cos^2(\theta) = 1$, de donde $\cos(\theta) = 1$ o $\cos(\theta) = -1$; es decir, $E(\theta) = (1, 0)$ o $E(\theta) = (-1, 0)$, esto es: $\theta = \pi$, 2π, 3π, 5π, 7π, ….., o $\theta = 0$, $-\pi$, -2π, -3π, -4π, ….. Luego, $\theta = \pi/2 + k\pi$, para k en 9, es la Solución de $u = \cos(\theta) = 0$ en 3. (Figura 14-b)

c) Como en los dos casos anteriores, para $u = \cos(\theta) = -\sqrt{2}/2$ se tiene que $(-\sqrt{2}/2)^2 + \mathrm{sen}^2(\theta) = 1$ o $\mathrm{sen}^2(\theta) = 1/2$, de donde $\mathrm{sen}(\theta) = \sqrt{2}/2$ o $\mathrm{sen}(\theta) = -\sqrt{2}/2$; es decir, $E(\theta) = (-\sqrt{2}/2\ ,\ \sqrt{2}/2)$ o $E(\theta) = (-\sqrt{2}/2\ ,\ -\sqrt{2}/2)$, esto es: $\theta = 3\pi/4$, $3\pi/4 + 2\pi$, $3\pi/4 + 4\pi$, ….., o $\theta = 5\pi/4$, $5\pi/4 + 2\pi$, $5\pi/4 + 4\pi$, …. Luego, $\theta = 3\pi/4 + 2\pi k$, para k en 9, es el resultado de resolver $u = \cos(\theta) = -\sqrt{2}/2$ en 3. (Ver Figura 14-c)

d) Como en b), para $v = \mathrm{sen}(\theta) = \sqrt{3}/2$ se tiene que $(\sqrt{3}/2)^2 + \cos^2(\theta) = 1$ o $\cos^2(\theta) = 1/4$, de donde $\cos(\theta) = \pm 1/2$; es decir, $E(\theta) = (1/2\ ,\ \sqrt{3}/2)$ o $E(\theta) = (-1/2\ ,\ \sqrt{3}/2)$, esto es: $\theta = 2\pi/3$, $2\pi/3 + 2\pi$, $2\pi/3 + 4\pi$, $2\pi/3 + 6\pi$, ….., o $\theta = \pi/3$, $\pi/3 + 2\pi$, $\pi/3 + 4\pi$, $\pi/3 + 6\pi$, ….. Luego, $\theta = \pi/3 + 2\pi\, k$, para k en 9, es el resultado de resolver: $v = \cos(\theta) = \sqrt{3}/2$ en 3. (Figura 14-d)



(a) (b) (c) (d)

Figura 14

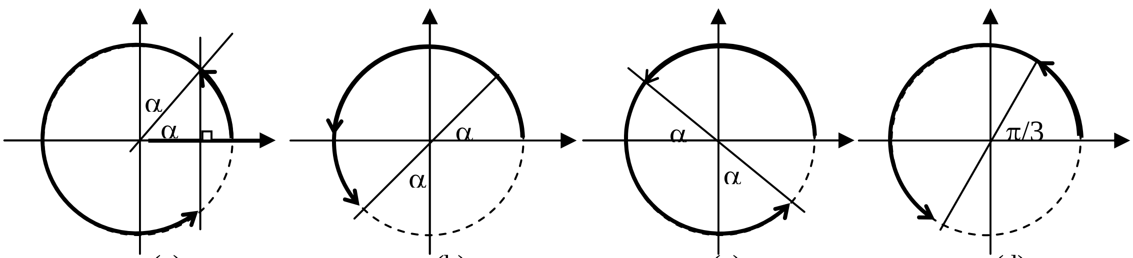
ACTIVIDAD

1) Los lados terminales de dos ángulos en posición normal que miden α y β, pasan por los puntos: $(-\sqrt{6}, \sqrt{3}\ )$ y $(1/5\ ,\ -2/\sqrt{5}\,)$, respectivamente.
Halle: $k = 3\cos^2(\alpha).\mathrm{sen}^3(\beta) - 5(\cos^2(\beta) - \mathrm{sen}^3(\alpha))$.

2) ¿Es cierto o falso? Si $\pi/2 < \alpha_1 < \alpha_2 < \pi$, entonces $0 < \mathrm{sen}(\alpha_1) < \mathrm{sen}(\alpha_2\ ) < 1$........................, ¡justifique su respuesta!

3) ¿Es cierto o falso? Si $\pi < \alpha_1 < \alpha_2 < 3\pi/2$, entonces $-1 < \cos(\alpha_1) < \cos(\alpha_2\ ) < 0$ ...., ¡justifique su respuesta!

4. Identifique las coordenadas de los extremos de los arcos en la circunferencia unitaria que se indican en la figura 15.



(a) (b) (c) (d)

Figura 15

3.2. FUNCIONES TANGENTE Y COTANGENTE

PROBLEMA 1) Cómo calculamos la altura *BC* de la torre de alta tensión, con los datos que aparecen en la gráfica.

Solución: El esquema corresponde a un triángulo rectángulo *ABC*, recto en *C*.

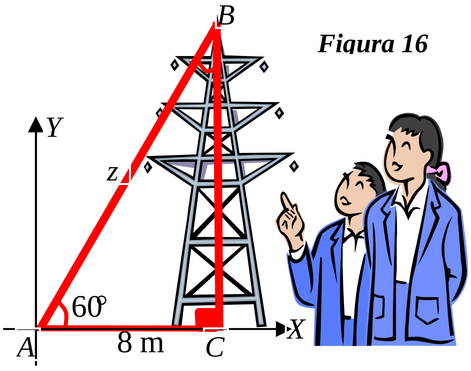


Figura 16

¿Qué elementos del triángulo conocemos?

- ✓ El ángulo en *A* mide α = 60°
- ✓ El cateto adyacente al ángulo α, es *d*(*A*, *C*) = 8 m.

¿Qué nos piden hallar?

- ✓ La altura $\overline{BC}$, que vendría a ser el cateto opuesto al ángulo en *A*.

Si fijamos un sistema de ejes con *A* = (0 , 0) y semieje positivo *X* que contiene al rayo $\overrightarrow{AC}$, entonces *B* = (8 , *h*) y *d*(*C* , *B*) = *h*, luego tenemos: sen(α) = $\frac{h}{z}$, cos(α) = $\frac{8}{z}$, despejando *z*:

$z = \dfrac{h}{sen(\alpha)} = \dfrac{8}{\cos(\alpha)}$; pero: α = 60º, entonces sen(α) = $\sqrt{3}/2$, cos(α) = 1/2.

Luego: $\dfrac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \dfrac{h}{8} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{h}{8} \Rightarrow h = 8\sqrt{3}$ m

Respuesta: La altura de la torre es $8\sqrt{3}$ m

PROBLEMA 2) Un avión despega de la pista y vuela siguiendo una trayectoria recta que forma el ángulo constante de 10º con el suelo horizontal. Cuando alcanza una altura de 200 m. ¿Cuál es la distancia horizontal recorrida por el avión? ¿Qué distancia a volado?

Solución: Esquematizando se tiene el triángulo *ABC*, recto en *B*.

Ilustración

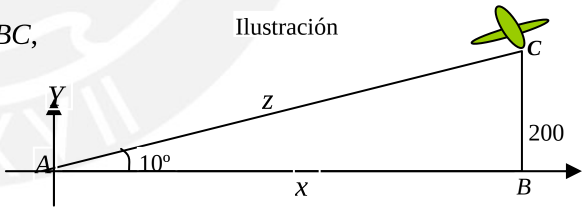


Figura 17

¿Qué elementos del triángulo conocemos?

- ✓ El ángulo α = 10°
- ✓ El cateto opuesto al ángulo *A*: *d*(*B*, *C*) = 200 m.

¿Qué nos piden hallar?

- ✓ La *d*(*A* , *B*) = *x*, que vendría a ser la longitud del cateto adyacente al ángulo dado de 10º, y d(*A* , *C*) = *z*, hipotenusa del triángulo *ABC*.

Fijamos un sistema de ejes con *A* = (0 , 0) la coordenada de *C* = (*x* , 200), en efecto *d*(*A* , *B*) = *x*, expresando los datos en términos de las funciones seno y coseno, tenemos:

$\dfrac{\cos(10^{o})}{sen(10^{o})} = \dfrac{x}{200}$, despejando $x = 200(\dfrac{\cos(10^{o})}{sen(10^{o})})$. Haciendo uso de la tabla de valores trigonométricos o una calculadora científica, resulta: $\dfrac{\cos(10^{o})}{sen(10^{o})} = 5{,}60$.

Luego: *x* = 200(5,60) = 1 120 m

La distancia "*z*" calculamos a partir de: $sen(10^{o}) = \dfrac{200}{z}$, de donde $z = \dfrac{200}{sen(10^{o})}$ = 1151,754 m.

Por lo tanto, la distancia horizontal es 1120 m y la distancia volada es 1151,754 m.

NOTA: Para θ en 3, sea P = E(θ) = (u , v) ∈ $\mathcal{C}_1(O)$. Se tiene: u = cos(θ), v = sen(θ) Dividiendo la ordenada v entre la abscisa u, para $u \neq 0$, o la abscisa u entre la ordenada v, para $v \neq 0$, de E(θ) = (u , v) ∈ $\mathcal{C}_1(O)$**,** se definen otras dos funciones circulares o trigonométricas**: tangente y cotangente**, respectivamente.

Para u = cos(θ) ≠ 0, el cociente $\frac{v}{u} = \frac{sen(\theta)}{\cos(\theta)}$, existe en 3

Para v = sen (θ) ≠ 0, el cociente $\frac{v}{u} = \frac{\cos(\theta)}{sen(\theta)}$, existe en 3

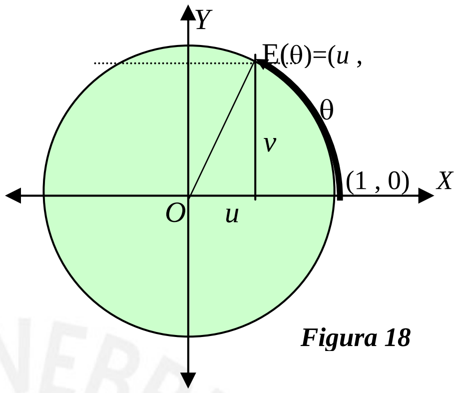


Figura 18

Recordando que: sen(θ) = 0 ⇔ θ = $k\pi$, k ∈ 9 y cos(θ) = 0 ⇔ θ = π/2 + $k\pi$, k ∈ 9

De esto, se tiene la siguiente FORMALIZACIÓN:

1) Al cociente $\frac{v}{u} = \frac{sen(\theta)}{\cos(\theta)}$, para $u \neq 0$, se llama la **tangente** de θ y se denota por tan(θ); es decir

tan(θ) = $\frac{sen(\theta)}{\cos(\theta)}$, definido para θ, tal que cos(θ) ≠ 0 ó θ ≠ $k\pi$, k ∈ 9.

2) al cociente $\frac{u}{v} = \frac{\cos(\theta)}{sen(\theta)}$, para $v \neq 0$, se llama la **cotangente** de θ y se denota por cot(θ); es decir cot(θ) = $\frac{\cos(\theta)}{sen(\theta)}$, definido para θ, tal que sen(θ) ≠ 0 ó θ ≠ π/2 + $k\pi$, k ∈ 9.

Expresiones que definen las reglas de correspondencia de las funciones:

DEFINICIÓN: Para θ en 3, dado el punto P = (u , v) = E(θ) ∈ $\mathcal{C}_1(O)$, se tiene las funciones:

1) FUNCIÓN TANGENTE: A cada θ en 3, con θ ≠ $k\pi$ para k ∈ 9, se le hace corresponder el cociente $\frac{v}{u} = \frac{sen(\theta)}{\cos(\theta)}$; es decir, para D = {θ ∈ 3 / θ = $k\pi$ con k ∈ 9}, se tiene la función:

$$\tan : \ 3 - D \longrightarrow 3 \ / \quad \theta \longrightarrow \tan(\theta), \ \text{donde} \ \tan(\theta) = \frac{v}{u} = \frac{sen(\theta)}{\cos(\theta)};$$

2) FUNCIÓN COTANGENTE: A cada θ en 3, con θ ≠ π/2 + $k\pi$ para k ∈ 9, se le hace corresponder el cociente $\frac{u}{v} = \frac{\cos(\theta)}{sen(\theta)}$, es decir, para M = {θ ∈ 3 / θ = π/2 + $k\pi$ con k ∈ 9}, se tiene la función:

$$\cot : \ 3 - M \longrightarrow 3 \ / \ \theta \longrightarrow tg(\theta), \ \text{donde} \ \cot(\theta) = \frac{u}{v} = \frac{\cos(\theta)}{sen(\theta)};$$

NOTAS: De la definición anterior:

1. La función tangente se dice que es el cociente de las funciones seno y coseno, por lo que se denota: $\tan = \dfrac{\text{sen}}{\cos}$;

2. La función cotangente es el cociente del coseno y seno, por lo que se denota $\cot = \dfrac{\cos}{\text{sen}}$; y

3. Como $\cot(\theta) = \dfrac{\cos(\theta)}{sen(\theta)} = \dfrac{1}{\dfrac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}} = \dfrac{1}{\tan(\theta)}$, es decir, $\cot(\theta) = \dfrac{1}{\tan(\theta)}$, de donde $\tan(\theta).\cot(\theta) = 1$ y se dice que las funciones tangente y cotangente son **funciones recíprocas**.

Replanteando los **problemas 1) y 2)** anteriores (página 73), tenemos:

Problema 1) De: $\dfrac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \dfrac{h}{8}$, se tiene $\tan(\alpha) = \dfrac{h}{8}$, ya que $\alpha = 60^{\circ}$, y $E(\alpha) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Luego la $\tan(60^{\circ}) = \dfrac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$. Por lo tanto: $\sqrt{3} = \dfrac{h}{8} \Rightarrow h = 8\sqrt{3}$.

Problema 2) De: $\dfrac{\cos(\alpha)}{sen(\alpha)} = \dfrac{x}{200}$, se tiene $\cot(\alpha) = \dfrac{x}{200}$, ya que $\alpha = 10^{\circ}$ y $E(\alpha) = (0{,}98\ ,\ 0{,}17)$.

Luego, la $\tan(60^{\circ}) = \dfrac{0{,}98}{0{,}17} = 5{,}60$. Por lo tanto: $5{,}60 = \dfrac{x}{200} \Rightarrow x = 1\,120$.

EJERCICIOS:

Si $E(\theta) = (u, v)$, se tienen: $\tan(\theta) = v/u$, para $u \neq 0$, y $\cot(\theta) = u/v$, para $v \neq 0$. Completar:

1) Dado $E\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, se tienen: $\tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right) =$ .... y $\cot\left(\dfrac{\pi}{6}\right) =$ ....

2) Para $E\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \left(\dfrac{-1}{2}, ..\right)$, resulta que: $\tan\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) =$ .... y $\cot\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) =$ ....

3) Si $E\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) = \left(\ldots, \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)$, entonces: $\tan\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) = -1$ y $\cot\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) =$ ....

4) Para $E\left(\dfrac{-3\pi}{2}\right) = (0, 1)$, se cumplen: $\tan\left(\dfrac{-3\pi}{2}\right) =$ .... y $\cot\left(\dfrac{-3\pi}{2}\right) =$ ....

5) Como $E\left(\dfrac{-5\pi}{6}\right) = \left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1}{2}\right)$, se tienen: $\tan\left(\dfrac{-5\pi}{6}\right) =$ .... y $\cot\left(\dfrac{-5\pi}{6}\right) =$ ....

6) Para $\theta = \pi/4$, se tiene que: $\tan(\theta) =$ .... y $\cot(\theta) =$ ....

7) Si $\tan(\theta) = -3/4$, entonces $\theta =$ ....

8) Si $\cot(\theta) = -1$ y $E(\theta)$ está en el segundo cuadrante, entonces $\theta =$ .... y $\text{sen}(\theta) =$ ……….

9) Para $\theta = 2\pi/3$; determine los valores de $\tan(\theta)$ y $\cot(\theta)$

Solución:

Para $\theta = 2\pi/3$, se tiene el punto $E\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = (u, v) = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ en la $\mathcal{C}_1(O)$.

Luego, por la definición anterior: $\tan(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$, y $\cot(\theta) = \dfrac{-1/2}{\sqrt{3}/2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$.

10) Según la figura 19 ¿cómo calculamos la altura de la torre de la iglesia, con los datos dados?

Imaginamos un sistema, el origen de un sistema de coordenadas en A, entonces $B = (6\ ,\ h)$, de aquí: $\tan(53º) = h/6$, despejando $h = 6.\tan(53º)$. (Recordando la razón entre longitud de los catetos del triángulo rectángulo de 53º y 37º), se tiene que $\tan(53º) = 4/3$. Luego, $h = 6(4/3) = 8$.

La altura es 8 m

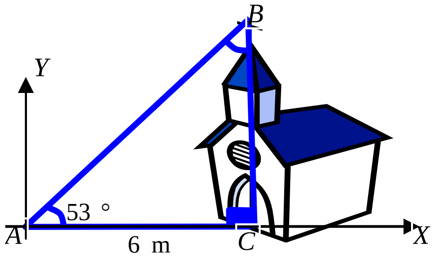


Figura 19

OBSERVACIÓN:

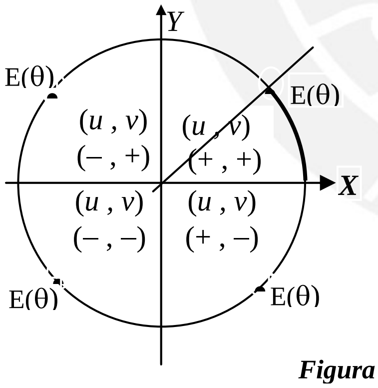
i) Si $E(\theta) = (\pm 1\ ,\ 0)$, está en el eje X, $\cot(\theta)$ no existe, es decir la función cotangente no está definida en $\theta = k\pi$, $k \in 9$.

ii) Si $E(\theta) = (0\ ,\ \pm 1)$, está en el eje X, $\tan(\theta)$ no existe, es decir la función tangente no está definido en $\theta = \pi/2 + k\pi$, $k \in 9$.

SIGNOS DE LOS VALORES DE tan y cot:

Con los signos de coordenadas en los cuadrantes, complete los signos de $\tan(\theta)$ y $\cot(\theta)$ en el cuadro de la derecha.•

Puntos del plano **F. Trigonométrica** **Signo en el Cuadrante**



	I-C	II-C	III-C	IV-C
$\tan(\theta) = \dfrac{v}{u}$				
$\cot(\theta) = \dfrac{u}{v}$				

Figura 20

EJEMPLOS:

1) Si $\cos(\theta) > 0$ y $\cot(\theta) < 0$, ¿en qué cuadrante se ubica $E(\theta)$?

Solución:

$\cos(\theta) > 0$ en los cuadrantes I y IV, $\cot(\theta) < 0$ en los cuadrantes II y IV.

Por lo tanto, $\cos(\theta) > 0$, $\cot(\theta) < 0$ y $E(\theta)$ se encuentra en el cuadrante IV.

2) Determine el cuadrante al que pertenece el punto terminal del arco orientado en posición normal definido por $-46\pi/9$.

Solución:

Se sabe que: –46π/9 = 2(–2π) + (–10π/9) = 2(–2π) + (–π – π/9). Por la periodicidad de la función envolvente, se tiene que E(–46π/9) = E(–10π/9) = E(–π – π/9), extremos de arcos coterminales en posición normal y E(–π – π/9) define un arco orientado en sentido horario de longitud π + π/9 en $\mathcal{C}_1(O)$. Luego, E(–46π/9) está en el 2do. cuadrante.

3) Determine el cuadrante al que pertenece el extremo terminal del arco orientado en posición normal definido por –3660º.

Solución:

Se sabe que: –3650º = 10(–360º) + (–60º). Por la periodicidad de la función envolvente, se tiene que el lado terminal del ángulo que mide (–3650º) es igual al lado terminal del ángulo que mide (–60º), siendo estos ángulos coterminales en posición normal y –60º define un ángulo orientado en sentido horario de medida 60º. Luego, está en el 4to. cuadrante. Y sen(–60º) = ..., cos(–60º) = ..., tan(–60º) = ..., cot(–60º) = ...

4) El punto *P* = (3 , –4) pertenece al lado final del ángulo α que está en posición normal. Calcule el valor de *M* = 6tan(α) – 4cot(α).

Solución:

Por definición de tangente y cotangente, se tiene: tan(α) = –4/3 y cot(α) = –3/4.
Luego *M* = 6(–4/3) – 4(–3/4) = –8 + 3 = –5.

5) Si se sabe que cos(α) < 0, cos(β) < 0, tan(β) = $\sqrt{5}$ y sen(α) = 0,6. Calcule el valor de cos(α) + $\cot^2(\beta)$.

Solución:

De las condiciones dadas:
cos(α) < 0 y sen(α) > 0, E(α) ∈ II-C; cos(β) < 0 y tan(β) > 0, E(β)∈ II-C.
Por dato: sen(α) = 6/10 = 3/5, tan(β) = $\sqrt{5}$.
Luego: cos(α) + $\cot^2(\beta)$ = 4/5 + $(1/\sqrt{5})^2$ = 4/5 + 1/5 = 5/5 = 1

3.3. FUNCIONES SECANTE Y COSECANTE

En algunas situaciones que consideran a las funciones seno o coseno, conviene expresarlas en términos de sus recíprocas: 1/sen y 1/cos, respectivamente. Veamos lo que significa esto:

PROBLEMA 1). En la figura que se muestra, calcula la distancia que hay desde el punto *A* a la manzana *B* y la altura *BC* a la que se encuentra la manzana.

Solución: En el triángulo *ABC* recto en *C*,

¿Qué elementos del triángulo conocemos?

- ✓ El ángulo en *A* mide 30°
- ✓ El cateto adyacente al ángulo *A*, *d*(*A* , *C*) = 15 m.

¿Qué nos piden hallar?

- ✓ La *d*(*A* , *B*) y *d*(*B* , *C*), longitudes de la hipotenusa cateto opuesto al ángulo dado de 30º.

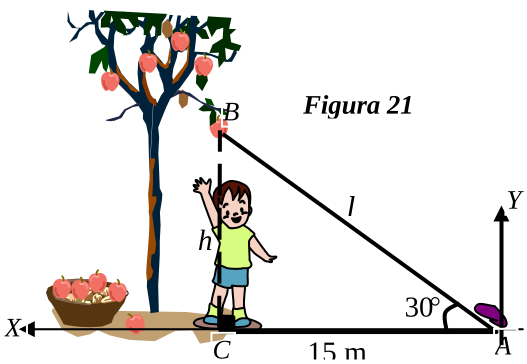


Figura 21

En el triángulo *ABC*, recto en *C*, sea *AB* = *l*,

$\cos(30º) = \dfrac{15}{l}$, es decir $l = 15.\dfrac{1}{\cos(30º)}$, en donde $\dfrac{1}{\cos(30º)}$ se denota por sec(30º), es decir,

d(*A* , *B*) = 15.sec(30º). Como cos(30º) = $\sqrt{3}$/2, se tiene: sec(30º) = 2/$\sqrt{3}$.

Luego *d*(*A* , *B*) = 15(2/$\sqrt{3}$) = 30/$\sqrt{3}$ = 10$\sqrt{3}$ m.

¿Cómo hallar la altura *h* = *BC*?

Para ello: $\tan(30º) = \dfrac{h}{15}$, siendo $h = 15.\tan(30º) = 15\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}$ m.

PROBLEMA 2). Sea (*x* , 25) un punto del lado terminal de un ángulo de 120º en posición normal. Determine a que distancia del origen se encuentra este punto.

Solución:

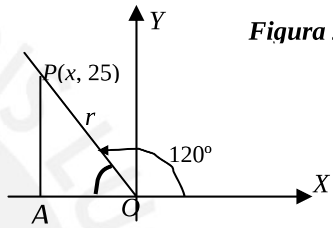


Figura 22

Se sabe que un ángulo de 120º tiene su lado terminal en el segundo cuadrante y sea *P* = (*x* , 25), se pide hallar *r* = *OP*. Según la gráfica construida se tiene que el triángulo *OAP* es rectángulo, donde:

De la figura, se tiene: sen(120º) = 25/*r*, o sea:

$\dfrac{1}{sen(120º)} = \dfrac{r}{25}$, denotando $\dfrac{1}{sen(120º)}$ por csc(120º) se tiene: csc(120º) = $\dfrac{r}{25}$, es decir:

$r = 25.\csc(120º)$. Como sen(120º) = $\sqrt{3}$/2, se deduce que: csc(120º) = 2/$\sqrt{3}$. Luego:

r = 25(2/$\sqrt{3}$) = 50/$\sqrt{3}$

PROBLEMA 3). Dado *P* = (4 , –3) ∈ 3^2, ubique el punto perteneciente a $\overline{OP}$ en la $\mathcal{C}_1(O)$.

Solución:

Se tienen *P* = (4 , –3) y M = (*u* , *v*); *u* > 0 y *v* < 0,

$OP = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$, según la figura se tiene que: Δ*OAM* y Δ*OBP*, son semejantes y se cumple: $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{AM}{BP} = \dfrac{OM}{OP} = \dfrac{1}{5}$. Por lo tanto:

$$u = \frac{1}{5}(4) = \frac{4}{5} \quad \text{y} \quad v = \frac{1}{5}(-3) = -\frac{3}{5}$$

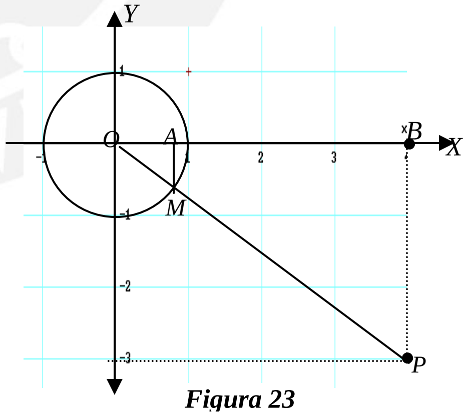


Figura 23

EJERCICIOS:

1) Para cualquier punto (*u* , *v*) ∈ $\mathcal{C}_1(O)$ ¿Los valores de la relación 1/*u* pueden ser 0, 1/3 y –1/5? ....¿por qué? ....

2) Para cualquier punto (*u* , *v*)∈ $\mathcal{C}_1(O)$¿Los valores de la relación 1/*v* pueden ser 1, 3, 2 y –2? .... ¿por qué? ....

3) Para qué valores de θ, con E(θ) en $\mathcal{C}_1(O)$ la razón v/u no está definido? ....

La formalización de lo anterior está en la siguiente:

DEFINICIÓN: Para θ en 3, dado el punto $P = (u\,,v) = E(\theta) \in \mathcal{C}_1(O)$, se tiene las funciones:

1) FUNCIÓN SECANTE: A cada θ en 3, con $\theta \neq k\pi$ para $k \in 9$, se le hace corresponder el cociente $\frac{1}{u} = \frac{1}{\cos(\theta)}$; es decir, para $D = \{\theta \in 3 \,/\, \theta = k\pi$ con $k \in 9\}$, se tiene la función:

$$\sec:\ 3 - D \longrightarrow 3 \ /\quad \theta \longrightarrow \sec(\theta),\ \text{donde}\ \sec(\theta) = \frac{1}{u} = \frac{1}{\cos(\theta)};$$

2) FUNCIÓN COSECANTE: A cada θ en 3, con $\theta \neq \pi/2 + k\pi$ para $k \in 9$, se le hace corresponder el cociente $\frac{1}{v} = \frac{1}{sen(\theta)}$, es decir, para $M = \{\theta \in 3 \,/\, \theta = \pi/2 + k\pi$ con $k \in 9\}$, se tiene la función:

$$\csc:\ 3 - M \longrightarrow 3 \ /\quad \theta \longrightarrow \csc(\theta),\ \text{donde}\ \csc(\theta) = \frac{1}{v} = \frac{1}{sen(\theta)};$$

NOTA: De la definición anterior:

1. La función secante se dice que es la recíproca de la función coseno, por lo que se denota: $\sec = \frac{1}{\cos}$.

2. La función cosecante es la recíproca de la función seno, que denotamos: $\csc = \frac{1}{sen}$; y

3. Como $\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}$ y $\csc(\theta) = \frac{1}{sen(\theta)}$, se tiene $\cos(\theta) = \frac{1}{\sec(\theta)}$ y $sen(\theta) = \frac{1}{\csc(\theta)}$, se dice que las funciones coseno con secante, y seno con la cosecante son **funciones recíprocas** y se cumplen: cos(θ).sec(θ) = 1 y sen(θ).csc(θ) = 1, para θ donde están definidas las funciones.

EJEMPLOS:

Si E(θ) = (u , v), se tienen: sec(θ) = 1/u, para $u \neq 0$, y csc(θ) = 1/v, para $v \neq 0$. Completar:

a) Para $E\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ se tienen: $\sec\left(\frac{\pi}{4}\right) =$ .... $\csc\left(\frac{\pi}{4}\right) =$ ....

b) Si $E\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \ldots\right)$, se cumplen: $\sec\left(\frac{2\pi}{3}\right) =$ .... $\csc\left(\frac{2\pi}{4}\right) =$ ....

c) Dado $E\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \left(\ldots, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$, se deduce: $\sec\left(\frac{7\pi}{4}\right) =$ .... $\csc\left(\frac{7\pi}{4}\right) =$ ....

d) Como $E\left(\frac{-3\pi}{2}\right) = (0\,,1)$ se tiene: $\sec\left(\frac{-3\pi}{2}\right) =$ .... $\csc\left(\frac{-3\pi}{2}\right) =$ ....

e) Si $E\left(\frac{-5\pi}{6}\right) = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$, entonces: $\sec\left(\frac{-5\pi}{6}\right) =$ ...... $\csc\left(\frac{-5\pi}{6}\right) =$ ....

EJERCICIO: Si $Q = (a , b) \in \mathcal{C}_r(O)$, y θ es la medida del $\widehat{AOQ}$, con $A = (1 , 0)$, en posición normal, se tiene: sec(θ) = ... y csc(θ) = ...

RECUERDE: Para todo número real θ, E(θ) = (u , v) en $\mathcal{C}_1(O)$. A partir de las funciones antes definidas: u = cos(θ) y v = sen(θ), se obtienen las funciones secante y cosecante, (figura 24).

$$\sec(\theta) = \frac{1}{u} \;,\; u \neq 0$$

$$\csc(\theta) = \frac{1}{v} \;,\; v \neq 0$$

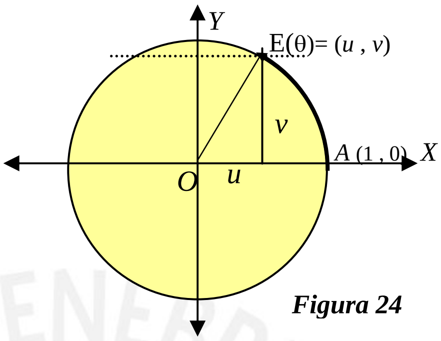


Figura 24

Además, según la figura 24:

¿Qué ocurre con la secante si u toma el valor cero?..

¿Qué ocurre con la cosecante si v toma el valor cero?...

TAREA:

Ubique los signos de los puntos en cada cuadrante del sistema de coordenadas, luego identifique y complete los signos de las funciones secante y cosecante en cada cuadrante, en el cuadro de la derecha.

Puntos del plano **F. Trigonométrica Signo en el Cuadrante**

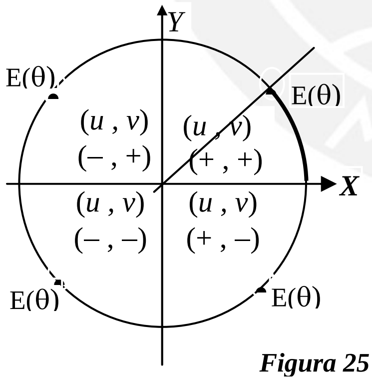


Figura 25

	I-C	II-C	III-C	IV-C
$\sec(\theta) = \frac{v}{u}$				
$\csc(\theta) = \frac{u}{v}$				

Note que los signos de la sec y csc son idénticos al de la función cos y sen, respectivamente.

EJERCICIOS:

1) Para θ = 2π/3, se tiene: E(2π/3) = (–1/2 , $\sqrt{3}$/2). Luego

sec(2π/3) = –2 csc(2π/3) = 2$\sqrt{3}$/3.

2) Si E(θ) = (5/13 , –12/13), entonces sec(θ) = ... y csc(θ) = ...

3) a) Si sec(θ) = 2, entonces θ = ...

b). Si csc(θ) = 5/3, entonces θ =.........

4) Para θ = 106º, E(θ) = (...,...). Luego, sec(θ) =......, csc(θ) =..........

5) Si sec(θ) >0 y cot(θ) < 0, ¿en qué cuadrante se ubicará E(θ)?

Solución:

Sec(θ) > 0 en los cuadrantes I y IV, cot(θ) < 0 en los cuadrantes II y IV.
Por lo tanto, sec(θ) > 0 y cot(θ) < 0 se encuentra en el cuadrante IV.

6) Encuentre el valor de la tan, sec, csc y cot, si sen(θ) = $-\sqrt{5}/3$ y tan(θ) > 0.

Solución: Como sen(θ) < 0 y tan(θ) > 0, sen(θ) = $-\sqrt{5}/3$, E(θ) está en el .... cuadrante; además cos(θ) = ...; luego:

tan(θ) = ... cot(θ) = ...

sec(θ) = ... csc(θ) = ...

7) Determine la secante y cosecante de θ, si cos(θ) = –5/13 y cot(θ) < 0.

Solución:

sec(θ) = ... csc(θ) = ...

3.4. RELACIONES ENTRE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

De las definiciones de: tangente, cotangente, secante y cosecante que se definen en términos de cos(θ) = *u* y sen(θ) = *v***,** para E(θ) = (*u* , *v*) en $\mathcal{C}_1(O)$, se tienen relaciones como:

1) $\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ (ecuación de la circunferencia unitaria)

De esto, dividiendo entre:

2) $\cos^2(\theta) \neq 0$, se tiene: $\dfrac{sen^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} + \dfrac{\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \dfrac{1}{\cos^2(\theta)}$, luego: $\tan^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta)$

3) $\text{sen}^2(\theta) \neq 0$, se tiene: $\dfrac{sen^2(\theta)}{sen^2(\theta)} + \dfrac{\cos^2(\theta)}{sen^2(\theta)} = \dfrac{1}{sen^2(\theta)}$, luego: $1 + \cot^2(\theta) = \csc^2(\theta)$

4) De la definición de funciones recíprocas: $\tan(\theta) = \dfrac{1}{\cot(\theta)}$, $\sec(\theta) = \dfrac{1}{\cos(\theta)}$ y

$\csc(\theta) = \dfrac{1}{sen(\theta)}$, se tienen: tan(θ).cot(θ) = 1, cos(θ).sec(θ) = 1 y sen(θ).csc(θ) = 1

OTRAS RELACIONES: Dados los arcos orientados θ y –θ , de extremo inicial *A* = (1 , 0); θ y –θ, tienen sentidos opuestos e igual longitud. Siendo sus extremos terminales los puntos E(θ) y E(–θ) sobre la $\mathcal{C}_1(O)$, simétricos con respecto al eje de las *X*, (figura 26):

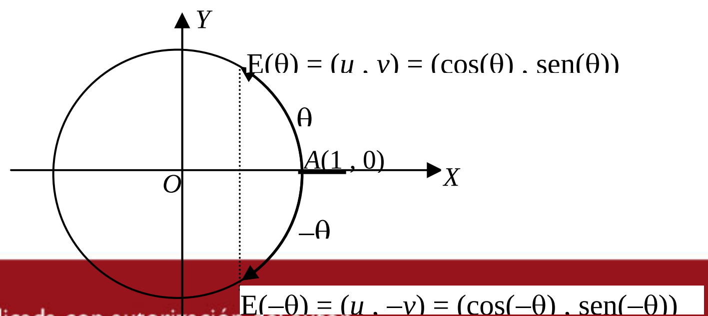


Figura 26

Según la figura 26, se tiene que:

5) cos(–θ) = u = cos(θ) , se dice que la función coseno es función par.

6) sen(–θ) = –v = –sen(θ), se dice que la función seno es función impar.

7) tan(–θ) = $\frac{-v}{u} = -\frac{v}{u}$ = ... se la función tangente es función impar

8) cot(–θ) = $\frac{-u}{v} = -\frac{u}{v}$ = ... y la función cotangente es función impar

9) sec(–θ) = $\frac{1}{\cos(-\theta)}$ = ... = ..., la función secante es un función par

10) csc(–θ) =........ = $-\frac{1}{sen(\theta)}$ =.........., la función cosecante es una función impar.

EJEMPLO: Sabiendo que cos(θ) = –1/2 y *tan*(θ) > 0, encuentre el valor de las funciones secante y cosecante.

Solución:

El punto E(θ) de la circunferencia $\mathcal{C}_1(O)$, E(θ) está en el III-C, puesto que es el único cuadrante en donde cos(θ) < 0 y *tan*(θ) > 0.

Hallamos sen(θ) a partir de: $\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta) = 1$, como sigue:

$(-1/2)^2 + \text{sen}^2(\theta) = 1 \Rightarrow \text{sen}^2(\theta) = 1 - 1/4 \Rightarrow \text{sen}^2(\theta) = 3/4 \Rightarrow |\text{sen}(\theta)| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, de donde:

sen(θ) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ó $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Como E(θ) está en el cuadrante III. Tomamos sen(θ) = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Conociendo los valores de cos(θ) y sen(θ), podemos encontrar los valores de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante, por definición:

tan(θ) = $\frac{sen(\theta)}{\cos(\theta)}$ = $\frac{....}{....}$ = -........... cot(θ) = $\frac{\cos(\theta)}{sen(\theta)}$ = $\frac{.....}{.....}$ = ...

sec(θ) = $\frac{1}{\cos(\theta)}$ = ... = ... csc(θ) = $\frac{1}{sen(\theta)}$ = $\frac{1}{....}$ = $\frac{...}{...}$

OBSERVACIÓN:

En la gráfica (figura 27), la $\mathcal{C}_1(O)$ intercepta al rayo BC en el punto $P = (u , v)$ donde: $u = \frac{c}{a}$ y $v = \frac{b}{a}$, es decir E(β) = ($\frac{c}{a}$, $\frac{b}{a}$). Luego en el triángulo ABC, recto en A, se tiene:

tan(β) = $\frac{b}{c}$, sec(β) = $\frac{a}{c}$, csc(β) = $\frac{a}{b}$,

tan(γ) = $\frac{c}{b}$, sec(γ) = $\frac{a}{b}$, sec(γ) = $\frac{a}{c}$

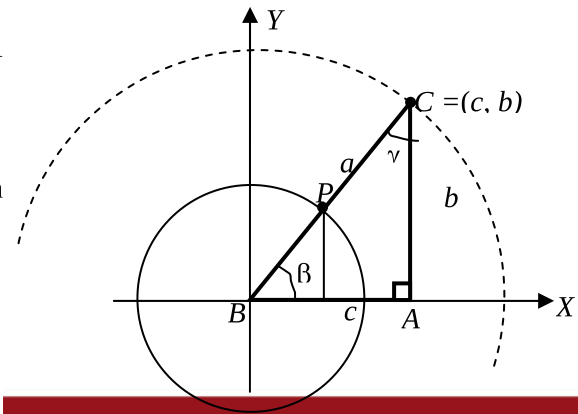


Figura 27

3.5. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS POR REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE: ÁNGULO DE REFERENCIA

ACTIVIDAD: Construya los ángulos α, β, θ Y γ en posición normal cuyo lado terminal pasa por el punto P: a) $P = (4 , -3)$, b) $P = (-2 , 3)$, c) $P = (-3 , -3)$, d) $P = (2 , y)$ con d(O , P) = 5.

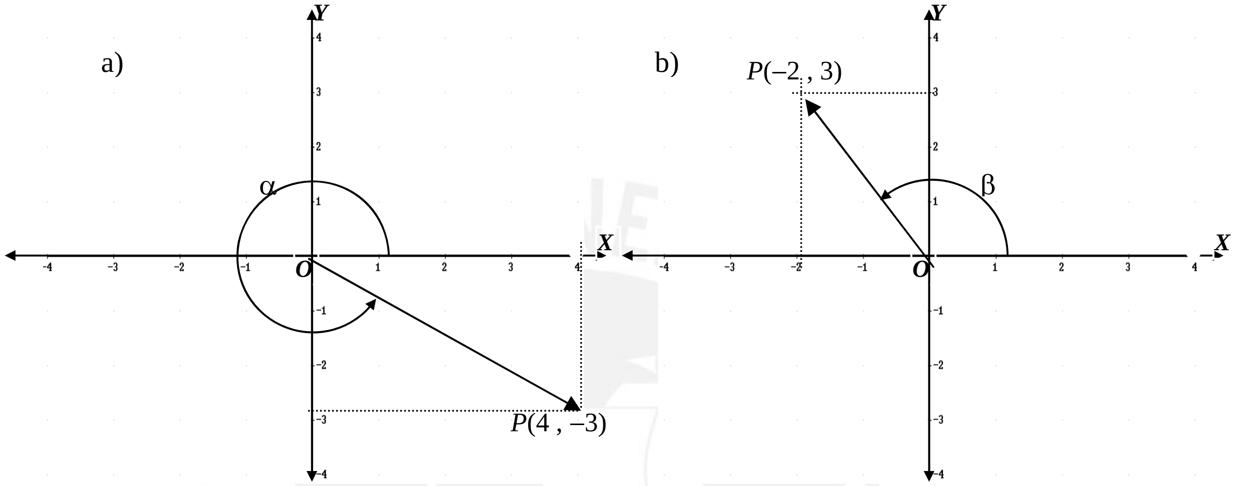
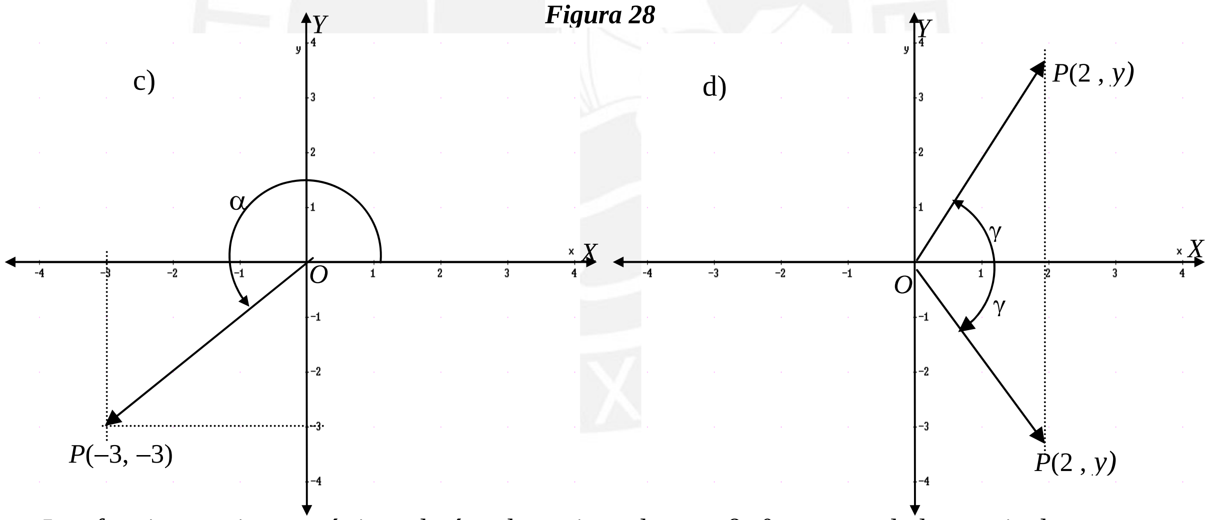


Figura 28



Las funciones trigonométricas de ángulos orientados: α, β, θ y γ, con lado terminal que pasan por los puntos dados en a), b) , c) y d) son:

sen(α) =......, cos(α) =......, tan(α) =......, cot(α) =......, sec(α) =......, csc(α) =........

sen(β) =......, cos(β) =......, tan(β) =......, cot(β) =......, sec(β) =......, csc(β) =........

sen(θ) =......, cos(θ) =......, tan(θ)=......, cot(θ) =......, sec(θ) =......, csc(θ) =........

sen(γ) =......, cos(γ) =... ..., tan(γ) =. ......, cot(γ) =... ..., sec(γ) =.... .., csc(γ) =........

¿Qué ocurre con los valores de las funciones trigonométricas si el ángulo en posición normal tiene lado terminal en uno de los semiejes? ....

RECUERDE:

¡Las funciones trigonométricas de los ángulos en posición normal se obtiene a partir de un punto $P \neq O$. Para $P = (a , b)$, si r es el radio vector, tal que: $a^2 + b^2 = r^2$: a través de las razones: a/r, b/r, a/b, b/a, r/a, r/c, respectivamente!

Los valores de las funciones trigonométricas de un arcos o ángulos orientados cuyos extremos o lados terminal no están en los ejes de coordenada, resultan de los valores de las funciones trigonométricas de su ángulo de referencia y cuyo signo depende de Y π/2 :ación del extremo o lado terminal.

Para esto:

a) Si θ es un arco o un ángulo orientado en posición normal y su extremo o lado terminal está en el primer cuadrante, el ángulo de referencia es el mismo ángulo $\widehat{AOP}$, siendo $A = (1\ ,\ 0)$ y P el extremo o un punto en el lado terminal.

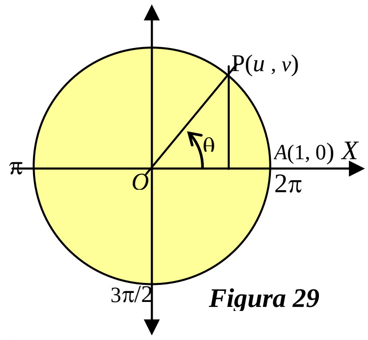
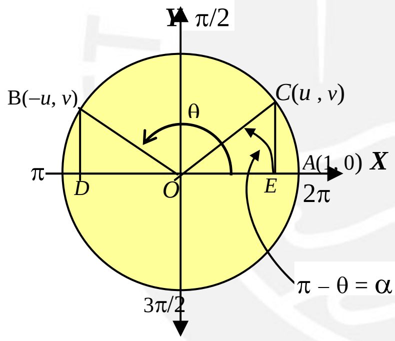


Figura 29

b) Dado un ángulo orientado $(\widehat{AOB}, \theta)$ en posición normal, con $A = (1, 0)$. Conociendo $u > 0$ y $v > 0$:

b_1) ***B* está en el II-cuadrante**: Se tiene el triángulo *ODB*, recto en *D* de la figura 30. Si $B = (-u\ ,\ v)$, el ángulo de referencia es $\widehat{AOC}$ que mide α, con $C = (u\ ,\ v)$ y siendo *C* el simétrico de *B* con respecto al eje *Y*.



$\widehat{COA}$ es el ángulo de referencia de θ (α)

Figura 30

De esto: $\text{sen}(\theta) = \text{sen}(\alpha)$, $\cos(\theta) = -\cos(\alpha)$

Siendo los valores de las otras funciones:

$$\tan(\theta) = -\tan(\alpha)\ ,\quad \cot(\theta) = -\cot(\alpha),\quad \sec(\theta) = \sec(\alpha),\quad \csc(\theta) = -\csc(\alpha).$$

EJEMPLOS:

1) Para $\theta = 3\pi/4$, en posición normal su lado terminal está en el II-cuadrante. Luego su ángulo de referencia mide: $\pi - 3\pi/4 = \pi/4$ en el I cuadrante.

Luego: $\text{sen}(3\pi/4) = \text{sen}(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos(3\pi/4) = -\cos(\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) Para $\theta = -7\pi/6$, en posición normal su lado terminal está en el II-cuadrante. Su ángulo de referencia mide: $7\pi/6 - \pi = \pi/6$ en el I-cuadrante.

Luego: $\text{sen}(-7\pi/6) = \text{sen}(\pi/6) = \frac{1}{2}$ y $\cos(-7\pi/6) = -\cos(\pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) Para $\theta = 480^\circ$, en posición normal su lado terminal está en el II-cuadrante.

Como $480^\circ = 360^\circ + 120^\circ$. Su ángulo de referencia mide: $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ en el I-cuadrante.

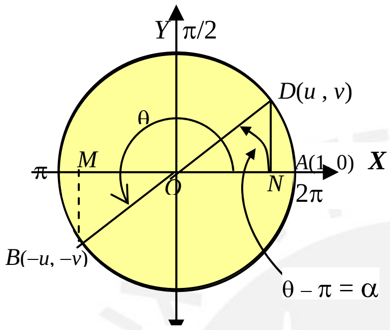
Luego: $\text{sen}(480^\circ) = \text{sen}(120^\circ) = \text{sen}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\cos(480^\circ) = \cos(120^\circ) = -\cos(60^\circ) = -\frac{1}{2}$

4) Para $\theta = -945^o$, en posición normal su lado terminal está en el II-cuadrante.
Como $-945^o = 2(-360^o) - 225^o$. Su ángulo de referencia mide: $225^o - 180^o = 45^o$ en el I-cuadrante.

Luego: $\text{sen}(-945^o) = \text{sen}(-225^o) = \text{sen}(135^o) = \text{sen}(45^o) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y

$\cos(-945^o) = \cos(-225^o) = -\cos(135^o) = -\cos(45^o) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b$_2$) ***B* está en el III-cuadrante**: Se tiene el triángulo *OMB*, recto en *M* de la figura 31. Si $B = (-u\ ,\ -v)$, el ángulo de referencia es $\widehat{AOD}$ que mide α, con $D = (u\ ,\ v)$ y siendo *D* el simétrico de *B* con respecto al origen de coordenadas.



$\widehat{DOA}$ es el ángulo de referencia de θ

Figura 31

Según la gráfica: $\text{sen}(\theta) = -\text{sen}(\alpha)$, $\cos(\theta) = -\cos(\alpha)$

Siendo los valores de las otras funciones:

$\tan(\theta) = \tan(\alpha)$, $\cot(\theta) = \cot(\alpha)$, $\sec(\theta) = -\sec(\alpha)$, $\csc(\theta) = -\csc(\alpha)$.

EJEMPLOS:

1) Para $\theta = 5\pi/4$, en posición normal su lado terminal está en el III-cuadrante. Luego su ángulo de referencia mide: $5\pi/4 - \pi = \pi/4$ en el I-cuadrante.

Luego: $\text{sen}(5\pi/4) = -\text{sen}(\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos(5\pi/4) = -\cos(\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

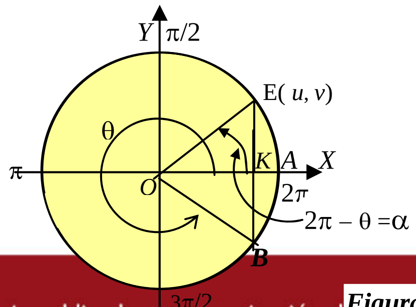
2) Para $\theta = -5\pi/6$, en posición normal su lado terminal está en el III-cuadrante. Su ángulo de referencia mide: $\pi - 5\pi/6 = \pi/6$ en el I-cuadrante.

Luego: $\text{sen}(-5\pi/6) = -\text{sen}(\pi/6) = -\frac{1}{2}$ y $\cos(-5\pi/6) = -\cos(\pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) Para $\theta = 960^o$, en posición normal su lado terminal está en el III-cuadrante.
Como $960^o = 2(360^o) + 240^o$. Su ángulo de referencia mide: $240^o - 180^o = 60^o$ en el I-cuadrante.

Luego: $\text{sen}(960^o) = \text{sen}(240^o) = -\text{sen}(60^o) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\cos(960^o) = \cos(240^o) = -\cos(60^o) = -\frac{1}{2}$.

b$_3$) ***B* está en el IV-cuadrante:** Se tiene el triángulo *OKB*, recto en *K* de la figura 32. Si $B = (u\ ,\ -v)$, el ángulo de referencia es $\widehat{EOA}$ que mide α, con $E = (u\ ,\ v)$ y siendo *E* el simétrico de *B* con respecto al eje *X*.



$\widehat{EOA}$ es el ángulo de referencia de θ

Figura 32

Según la gráfica, figura 32: sen(θ) = –sen(α) , cos(θ) = cos(α)

Siendo los valores de las otras funciones:

tan(θ) = –tan(α) , cot(θ) = –cot(α), sec(θ) = sec(α), csc(θ) = –csc(α).

EJEMPLOS:

1) Para θ = 5π/3 , en posición normal su lado terminal está en el IV-cuadrante. Luego su ángulo de referencia mide: 2π – 5π/3 = π/3 en el I-cuadrante.

Luego: sen(5π/3) = –sen(π/3) = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ y cos(5π/3) = cos(π/4) = $-\frac{1}{2}$

2) Para θ = –7π/3 , en posición normal su lado terminal está en el IV-cuadrante. Su ángulo de referencia mide: 7π/3 – 2π= π/3 en el I-cuadrante.

Luego: sen(–7π/3) = –sen(π/3) = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ y cos(–7π/3) = – cos(π/3) = $-\frac{1}{2}$

3) Para θ = 390º, en posición normal su lado terminal está en el IV-cuadrante.

Como 390º = 1(360º) + 30º. Su ángulo de referencia mide: 290º –360º = 30º en el I-C.

Luego: sen(390º) = –sen(30º) = $-\frac{1}{2}$ y cos(390º) = cos(30º) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

EJERCICIOS:

1) Para hallar cos(1560º). Dado que θ = 1560º, se tiene que θ = 4(360) + 120º, entonces α = 120º, cuyo lado terminal está en el II-C. De acuerdo a la regla descrita en b) el ángulo de referencia es: 180º – 120º = 60º. Luego, cos(1560º) = –cos(60º) = –1/2.

2) Para hallar sen(1650º). Al dividir 1650º entre 360, se tiene 1650º = 4(360º) + 210º, se tiene que α = 210º tiene lado terminal en el III-C. De acuerdo a la regla c) el ángulo de referencia es: 210º – 180º = 30º. Luego, sen(1650º) = –sen(30º) = –1/2.

3) Para hallar: tan(1005º), tenemos que 1005º = 2(360º) + 315º, entonces α = 315º de aquí el ángulo de referencia es: 360º –315º = 45º. Luego, tan(1005º) = –tan(45º) = $-\sqrt{2}$ /2

4) Dado cos(1665º), tenemos que 1665º = .4(....º) + ….º, entonces cos….º = cos(….º –180º) = cos.......º = ...

5) Dado sen(1050º), tenemos que 1050º = 2(....º) + ...º, entonces sen(...º) = sen(360º –....º) = sen....º = ...

6) Si cos(θ) > 0 y sen(θ) < 0, ¿en qué cuadrante se ubicará E(θ)?

Solución:

Cos(θ) > 0 en los cuadrantes I y IV, sen(θ) < 0 en los cuadrantes III y IV.

Por lo tanto, cos(θ) > 0 y sen(θ) < 0 se encuentra en el cuadrante IV.

7) Determine el cuadrante al que pertenece el final del arco: 5π/4.

Solución:

Se sabe que: $5\pi/4 = \pi + \pi/4$, entonces $5\pi/4$ está en el III-C; luego,

$\text{sen}(5\pi/4) = \text{sen}(5\pi/4–\pi) = \text{sen}(\pi/4)$, y $\cos(5\pi/4) = \cos(5\pi/4–\pi) = \cos(\pi/4)$. Como el seno y coseno son negativos en el III-C: $\text{sen}(5\pi/4)$ = ... y $\cos(5\pi/6)$ = ...

8) Determine el cuadrante al que pertenece el final del arco: $13\pi/6$.

Solución:

Se sabe que: $13\pi/6 = 2\pi + \pi/6$, entonces $13\pi/6$ está en el I-C; luego, $\text{sen}(13\pi/6) = \text{sen}(\pi/6)$, y $\cos(13\pi/6) = \cos(\pi/6)$. Como el seno y coseno en el I-C son positivos, resulta que:

$\text{sen}(13\pi/6)$ = ... y $\cos(13\pi/6)$ = ...

9) Determine el cuadrante al que pertenece el final del arco: $–25\pi/9$.

Solución:

Se sabe que: $–25\pi/9 = 1(–2\pi) + (–7\pi/9)$. Por tanto, el rayo que genera el arco da 1 vuelta completa en la dirección negativa y recorre $7\pi/9$ adicionalmente.

Para determinar el cuadrante al que pertenece el extremo terminal del arco orientado, basta con ubicar en el punto $(–7\pi/9)$. Como el arco de un cuadrante en sentido antihorario mide $–\pi/2$; se tiene: $–7\pi/9 = –\pi/2$ + ... Luego

El extremo terminal del arco orientado se encuentra en el .... cuadrante.

El signo de las coordenadas en el cuadrante .... es ....

10) Si $\text{sen}(\theta) = –3/4$ y θ está en el tercer cuadrante, entonces:

a) $\cos(\theta)$ =...................... b) $\tan(\theta)$ =...................... $\csc(\theta)$ = ...

11) Usando la identidad básica, que relaciona el seno, el coseno, encuentre el valor de $\text{sen}(\theta)$, si $\cos(\theta) = 1/2$ y $\theta \in$ IV-C.

Solución:

Según la condición del problema, el punto de la circunferencia $E(\theta)$ está en el cuadrante IV.

Procedamos a encontrar $\text{sen}(\theta)$ mediante la identidad pitagórica:

$\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta) = 1$. Reemplazando el valor de $\cos(\theta)$ se tiene:

$(1/2)^2 + \text{sen}^2(\theta) = 1 \Rightarrow \text{sen}^2(\theta) = 1 – 1/4 \Rightarrow \text{sen}^2(\theta) = 3/4 \Rightarrow |sen(\theta)| = \sqrt{3}/2$, de aquí:

$\text{sen}(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ó $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Tomamos $\text{sen}(\theta) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, puesto que $E(\theta)$ está en IV-C.

12) Determine los valores de las funciones trigonométricas seno y coseno y del ángulo en posición normal cuyo lado terminal pasa por el punto $(–3 , 4)$ del plano cartesiano.

Solución:

Según los signos del par ordenado el punto se ubica en el segundo cuadrante.

1º Procedamos a encontrar el radio de la circunferencia que con centro en el origen de coordenadas que pasa por el punto $(–3 , 4)$:

$r^2 = (–3)^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, luego: r = ...

2º Cálculo del valor de la función seno y coseno:

sen(θ) = ... y cos(θ) = ...

3º puesto que E(θ) se encuentra en el II cuadrante, tenemos que

θ = 90º + 37º = 127º.

3.7. GRÁFICA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Antes de proceder a graficar las funciones seno y coseno (con dominio en los números reales) bosquejemos una máquina productora de las funciones seno y coseno que se muestra a continuación:

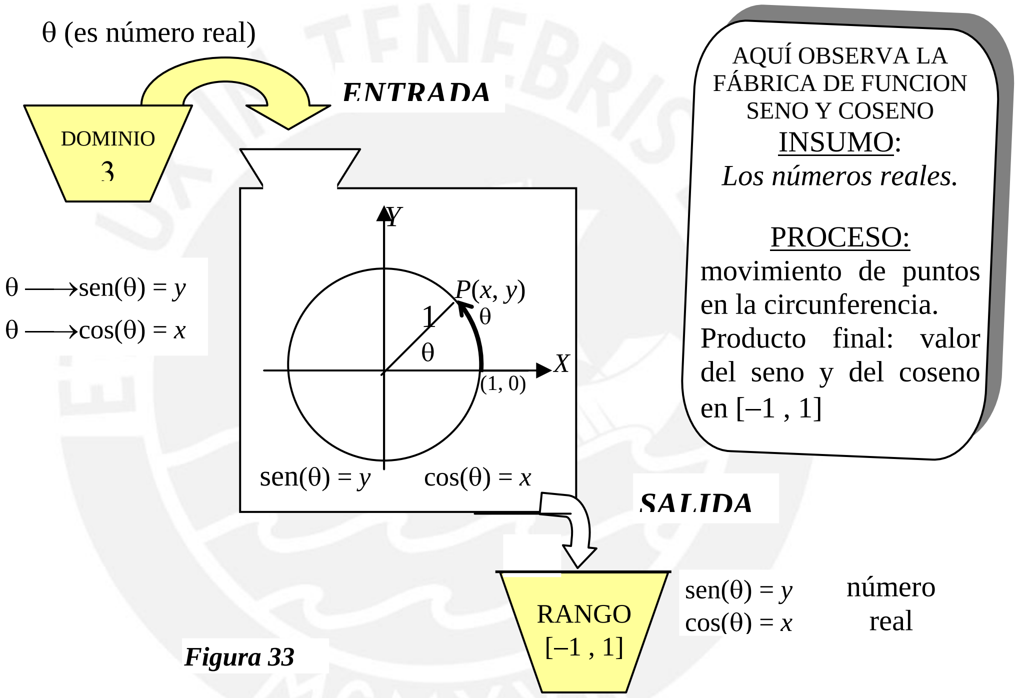


Figura 33

Ahora interesa hacer las gráficas de la función que asigna a cada número real θ, una de las componentes del par ordenado $(x, y) \in \mathcal{C}_1(O)$ de la máquina, identificando los pares (x , y) con puntos en el plano.

Así cuando la función envolvente E tiene período 2π, se tiene::

1) Gráfica de la función seno

La razón del estudio de las funciones trigonométricas es analizar su comportamiento, que se constituye en modelo matemático ideal para interpretar fenómenos periódicos.

Para $\theta \in \Re$, el punto $E(\theta) = (x , y) \in \mathcal{C}_1(O)$. La función seno, es la regla de que a cada θ le asigna y; es decir:

sen: 3 $\longrightarrow$ $[-1 , 1]$

θ $\longrightarrow$ $y = \text{sen}(\theta)$

Gráficamente, el seno de un arco θ viene a ser la ordenada del extremo terminal $E(\theta) = (x , y)$. Y para θ_i dados se tiene:

$\text{Sen}(\theta_1) = y_1$

$\text{sen}(\theta_2) = y_2$

$\text{sen}(\theta_3) = y_3$

$\text{sen}(\theta_4) = y_4$.

$\text{sen}(\theta_5) = y_5$.

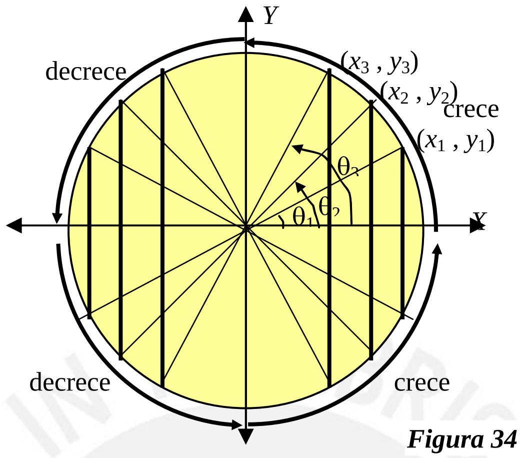


Figura 34

En el círculo ubique los arcos y ángulos correspondientes a: θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 y θ_5

Variación de los valores de la línea seno en los cuadrantes:

Cuadrante	Variación del ángulo	Variación de la línea seno	Variación de los valores de sen(θ)
I	$0 < \theta < \pi/2$	$0 < \text{sen}(\theta) < 1$	.crece de 0 a 1
II	$\pi/2 < \theta < \pi$	$0 < \text{sen}(\theta) < 1$	.... de 1 a 0
III	$\pi < \theta < 3\pi/2$	$-1 < \text{sen}(\theta) < 0$	.... de 0 a –1
IV	$3\pi/2 < \theta < 2\pi$	$-1 < \text{sen}(\theta) < 0$	.... de –1 a 0

Gráfica: Para trazar la gráfica de la función SENO (sinusoide):

1. Dibuje el sistema de coordenadas rectangulares, tome como unidad de escala la longitud del radio del círculo del triplay.
2. Haga coincidir el eje de las abscisas del sistema con el mismo eje del círculo de triplay y ubique cerca del eje vertical.
3. Identifique en la circunferencia del círculo unitario los arcos de longitudes 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$, $3\pi/4$, π, $3\pi/2$ y 2π.
4. Trace los segmentos en las coordenadas de cada $E(\theta)$: Líneas seno.
5. Sobre el eje de las abscisas ubique los números correspondientes a los mismos números reales: 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$, $3\pi/4$, π, $3\pi/2$ y 2π.
6. Trace las líneas verticales desde cada número considerado en la recta hasta que se intersequen con los trazos horizontales.
7. Ubique los puntos de intersección de las líneas horizontales y verticales trazados y una dichos puntos con una línea de trazo continuo.
8. Esto es la curva que representa gráficamente a la función seno, sobre el intervalo $[0 , 2\pi]$.
9. Al ubicar los puntos de la tabla en el sistema de coordenadas rectangulares, se obtiene lo que muestra la (figura 33), al mismo que denominaremos sinusoide:

Datos obtenidos:

θ	0	π/6	π/4	π/3	π/2	3π/4	π	3π/2	2π
y = sen(θ)	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	0	–1	0
y = sen(θ)	0	0,5	0,7	0,8	1	0,7	0	–1	0

De la tabla extraemos algunos puntos notables del gráfico de y = sen(θ), denominado senoide, se obtiene con ayuda del círculo de triplay en el sistema coordenado (figura 33):

(0 , 0), (π/6 , 0,5), (π/4 , 0,7), (π/3 . 0,8), (π/2 , 1), (3π/4 , 0,7), (π , 0), (3π/2 , –1), (2π , 0).

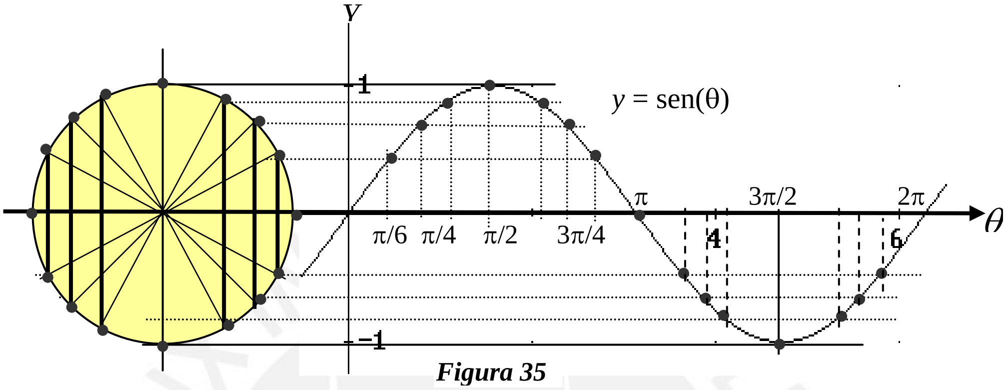


Figura 35

El gráfico construido, de la función y = sen(θ), muestra las siguientes características:

Dominio	3
Rango	....
Valores extremos	máximo: sen(π/2) = sen(5π/2) = ...= 1. mínimo: sen(3π/2) = sen(7π/2) = ...= –1.
Período	....
Intersección con el eje θ.	(0 , 0), (π , 0), (2π , 0), (3π , 0), (4π , 0); .....
Inyectividad	No es inyectiva

OBSERVE:

- La curva que representa a la función seno crece en el intervalo [0 , π/2] y [3π/2 , 2π], que corresponden al primer cuadrante y cuarto cuadrante.

- La curva que representa a la función seno decrece sobre el intervalo [π/2 ,3π/2], que corresponde al segundo y tercer cuadrante.

- Hay varios valores de θ, tal que E(θ) tienen la misma ordenada. Así, por ejemplo: para θ = π/6, la ordenada de E(π/6) = 1/2, para θ = 5π/6, la ordenada de E(5π/6) = 1/2, para θ = 13π/6, la ordenada de E(13π/6) = 1/2, etc.; es decir la función seno no es inyectiva.

2) Gráfica de la función Coseno

Para $\theta \in 3$, sea el punto $E(\theta) = P(x\ ,\ y) \in \mathcal{C}_1(O)$. La función coseno, es la regla de correspondencia que a cada θ se asigna x; es decir:

$$\cos: 3 \longrightarrow [-1\ ,\ 1] \quad / \quad \theta \longrightarrow x = \cos(\theta\ )$$

Gráficamente, el coseno de un arco θ viene a ser la abscisa del extremo terminal $E(\theta) = (x\ ,\ y)$. Y para θ_i, dados se tiene:

Así: $\cos(\theta_1) = x_1$

$\cos(\theta_2) = x_2$

$\cos(\theta_3) = x_3$

$\cos(\theta_4) = x_4$.

$\cos(\theta_5) = x_5$.

....

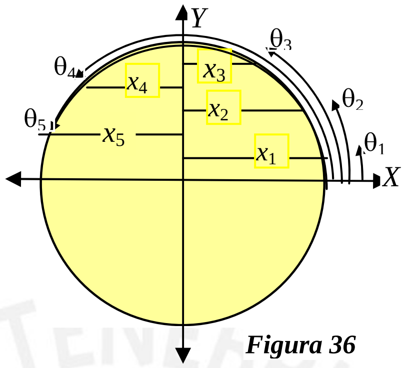


Figura 36

En el círculo de la izquierda ubique los ángulos e indique los arcos correspondientes: $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$

Variación de la línea del coseno en los cuadrantes:

Convendremos que cada vez que mencionemos al ángulo dirigido de una función trigonométrica, lo representaremos con θ, y al valor de la función con la letra x; también convendremos que $\pi \approx 3{,}1416$. Así, tenemos:

Cuadrante	Variación del ángulo	Variación de la línea coseno	Variación de los valores del coseno
I	$0 < \theta < \pi/2$	$1 > \cos(\theta) > 0$	decrece de ... a ...
II	$\pi/2 < \theta < \pi$	$0 > \cos(\theta) > -1$	decrece de .... a ....
III	$\pi < \theta < 3\pi/2$	$-1 < \cos(\theta) < 0$	crece de .... a ....
IV	$3\pi/2 < \theta < 2\pi$	$-1 < \cos(\theta) < 0$	crece de .... a ....

Gráfica: Para trazar la gráfica de la función coseno (cosenoide), procedemos:

a) Rotar un ángulo de $\pi/2$ rad en sentido antihorario a la circunferencia unitaria .

b) Calcular algunos valores de $f(\theta) = \cos(\theta)$ dando valores a θ en radianes (números reales)

c) Representar estos valores en una tabla, como se exhibe a continuación:

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$3\pi/2$	2π
$x = \cos(\theta)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	0	1
$x = \cos(\theta)$	1	0,86	0,7	0,5	0	$-0{,}7$	-1	0	1

Del cuadro tenemos algunos puntos importantes del gráfico de $f(\theta) = \cos(\theta)$, que se denomina cosenoide (figura 37):

$(0\ ,\ 1)$, $(\pi/6\ ,\ 0{,}86)$, $(\pi/4\ ,\ 0{,}7)$, $(\pi/3\ ,\ 0{,}5)$, $(\pi/2\ ,\ 0)$, $(3\pi/4\ ,\ -0{,}7)$, $(\pi\ ,\ -1\ )$, $(3\pi/2\ ,\ 0)$, $(2\pi\ ,\ 1)$.

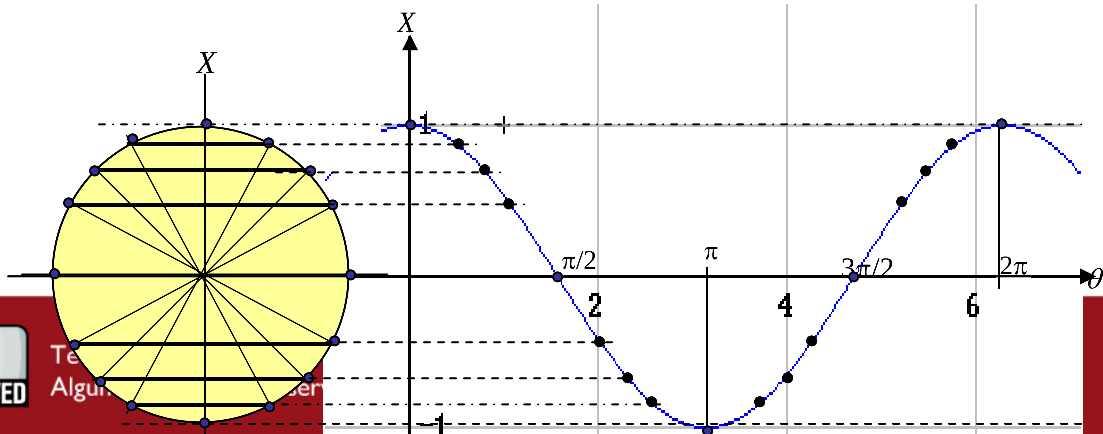


Figura 37

EJERCICIO:

Muestre gráficamente que sen(π/2+θ) = cos(θ), trasladando horizontalmente en el plano cartesiano la curva *y* = sen(θ) una distancia de π/2, hacia la izquierda.

....
....

d) La curva *x* = cos(θ), mostrada en la figura 37, tiene las siguientes características:

Dominio	....
....	[–1 , 1]
Valores extremos	máximo: cos(0) = cos(2π) = cos(4π) =..........= 1. mínimo: cos(π) = cos(3π) = cos(5π) ....= –1.
....	2π
Intervalo de	[0 , π]
Intervalo de	[π , 2π]
Intersección con el eje θ.	(π/2 , 0); (3π/2 , 0); (5π/2 , 0); ....
Inyectividad	....

- ¿Cuántos grados se hizo girar el disco de triplay para que las líneas seno se conviertan en líneas coseno? ....
....

- ¿Es posible trazar la gráfica de *y* = cos(θ) a partir de *y* = sen(θ). ¿Cómo lo haría?...........
....

- Si se grafican el seno y coseno en un mismo sistema de coordenadas, ¿se intersectán?, ¿cuáles son los puntos de intersección. ....

- ¿Cuánto valen los periodos de la funciones seno y coseno? ....
....

- La curva que representa al coseno (cosenoide) es simétrica respecto al ....

- Indique si es verdadero o falso la igualdad sen(θ + π/2) = cos(θ) ....

¿Por qué? ....

- ¿Si a la función $y = \text{sen}(\theta)$ multiplicamos por 3, qué es los que se altera el dominio o el rango? .... ¿qué sucede? ....

3) Variantes de las funciones seno y coseno

ACTIVIDAD:

En cada una de las tres gráficos que se muestran en la figura 38, identifique: el rango, el período, amplitud, desfasamiento y la ecuación de la función al que representa.

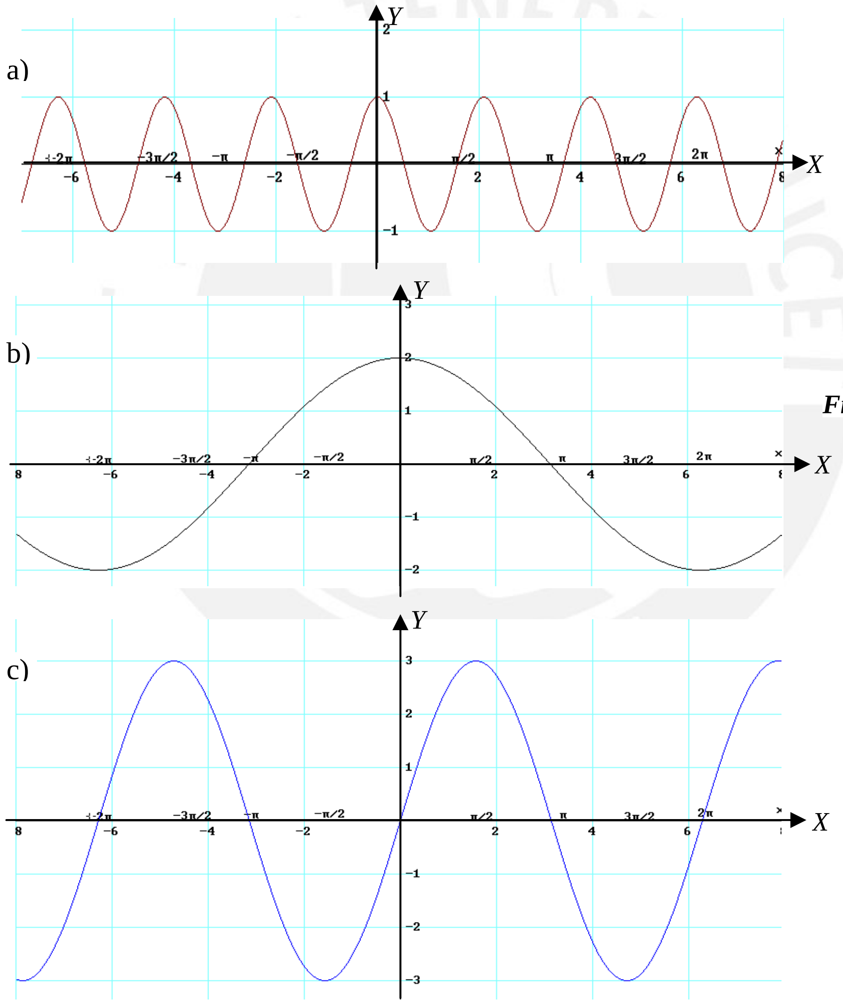


Figura 38

Las gráficas mostradas son las variantes de las funciones $y = \text{sen}(x)$ e $y = \cos(x)$, que consisten en alargamientos y encogimientos horizontales y verticales del sinusoide o cosenoide.

Estas variantes se usan con frecuencia en el análisis de ondas sonoras y de radio, rayos **X** y gamma, luz visible, radiaciones infrarrojas y ultravioleta, ondas sísmicas y oceánicas, circuitos de generadores eléctricos, vibraciones, construcción de puentes y edificios, entre otros.

Las gráficas de las funciones mostradas, se construyen a partir de las curvas: y = sen($\boldsymbol{x}$) o y = cos($\boldsymbol{x}$). Entre estas tenemos:

> ¡ *Las variantes de las funciones trigonométricas sirven para modelas (interpretar) diversos fenómenos de la realidad que en su mayoría tienen comportamiento periódico*!

1. Funciones de la forma $y = a\cos(x)$ e $y = a$ sen(x): Dilatación o contracción vertical

El efecto geométrico que se produce al graficar estas funciones, es de:

Un alargamiento vertical de la gráfica de la función seno o coseno, si $a > 1$.

Un encogimiento vertical de la gráfica de la función seno y coseno, si $0 < a < 1$.

Ejemplo 1: Si $f(\boldsymbol{x}) = \cos(\boldsymbol{x})$ y $g(x) = 3\cos(\boldsymbol{x})$ entonces $g(x) = 3f(x)$, donde $a = 3$, la gráfica de g es un alargamiento vertical de la gráfica de f.

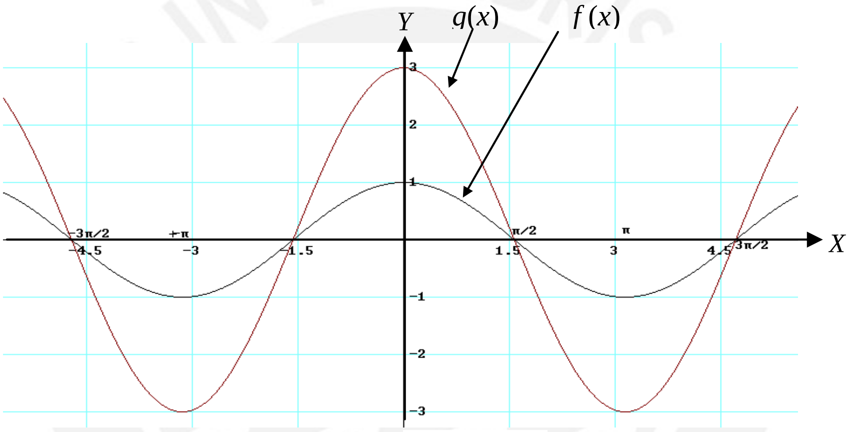


Figura 39

Ejemplo 2: Si $f(\boldsymbol{x}) = \cos(\boldsymbol{x})$ y $h(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\cos(\boldsymbol{x})$, entonces $h(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}f(\boldsymbol{x})$, donde $a = \frac{1}{2}$, la gráfica de g es un encogimiento vertical de la gráfica de f.

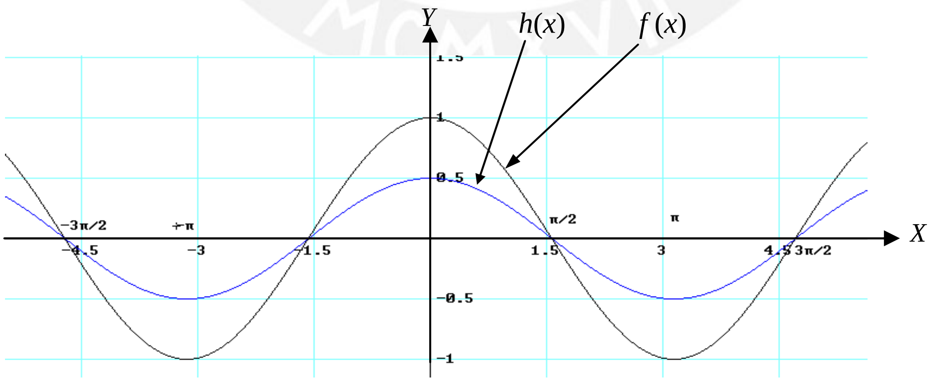


Figura 40

De las curvas de la figura 39 y 40, se tiene que:

El rango de $f(x)$ = ..., rango de $g(x)$ = ... rango de $h(x)$ = ...

La amplitud de $f(x)$ = ..., amplitud de $g(x)$ = ... amplitud de $h(x)$ =...........

La período de $f(x)$ = ..., período $g(x)$ = ... período de $h(x)$ = ...

Según la gráfica, el efecto que produce a, comparando $y = \cos(x)$ con $y = a.\cos(x)$. La gráfica de $y = a.\cos(x)$ se obtiene a partir de $y = \cos(x)$, multiplicando cada valor de la función por a. La gráfica de $y = a.\cos(\boldsymbol{x})$ corta al eje X en los mismos puntos que $y = \cos(\boldsymbol{x})$. Como $\cos(\boldsymbol{x})$ tiene período 2π, se cumple: $a.\cos(\boldsymbol{x} + 2\pi) = a.\cos(\boldsymbol{x})$. Es decir $y = a.\cos(\boldsymbol{x})$, también tiene período 2π.

Ejemplo 3: Las gráficas de las funciones $y = \frac{1}{2}\,\text{sen}(\boldsymbol{x})$ e $y = -2\text{sen}(\boldsymbol{x})$, comparando con la de $y = \text{sen}(\boldsymbol{x})$, resulta como se muestra a continuación:

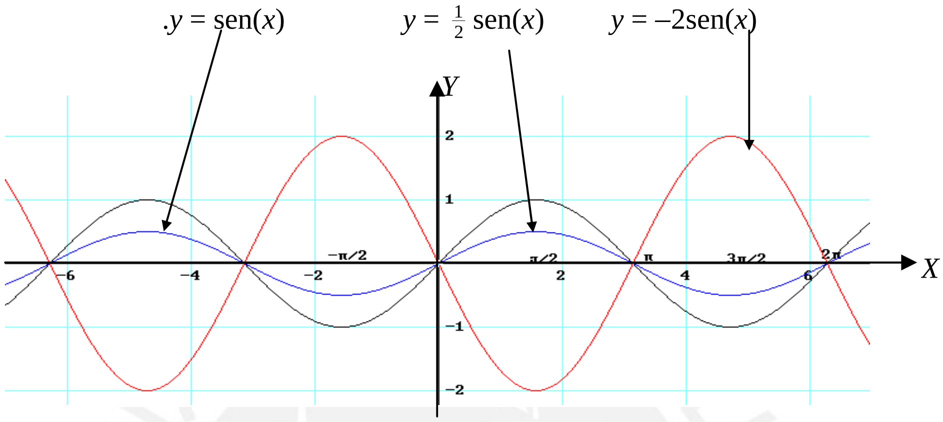


Figura 41

OBSERVACIÓN: Note que las curvas que se muestran en la figura 41, tienen el mismo período igual a: ...., pero su amplitud = ... y su rango = ... son diferentes.

2. Funciones de la forma $y = \cos(bx)$ e $y = \text{sen}(bx)$: Dilatación o contracción horizontal

El efecto geométrico que se produce al graficar estas funciones, es de:
Un alargamiento horizontal de la gráfica de la función seno y coseno, si $b > 1$.
Un encogimiento horizontal de la gráfica de la función seno y coseno, si $0 < b < 1$.

Ejemplo 4. Si $f(x) = \text{sen}(x)$ y $g(x) = \text{sen}(2x)$, $h(x) = \text{sen}(x/2)$, entonces $h(x) = f(x/2)$, donde $b = 1/2$, la gráfica de g es un alargamiento horizontal de la gráfica de f.

Ilustración

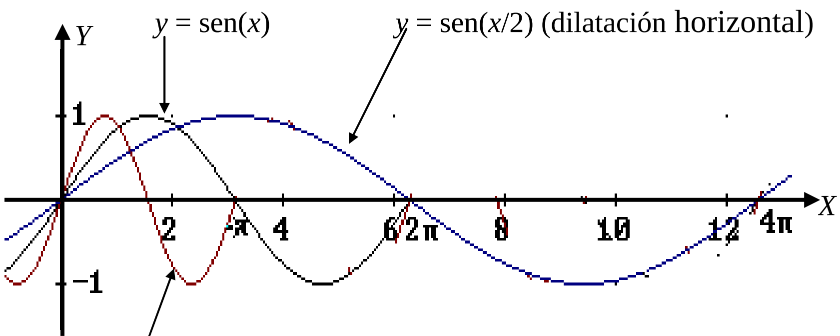


Figura 42

De las curvas de la figura 42, se tiene que:

El rango de $f(x)$ = ..., rango de $g(x)$ = ...… rango de $h(x)$ = ...
La amplitud de $f(x)$ = ..., amplitud de $g(x)$ = ... amplitud de $h(x)$ =...........

La período de $f(x)$ = ..., período $g(x)$ = ..., período de $h(x)$ = ...

Nuestro propósito es investigar el efecto que produce b. La gráfica de $y = \cos(b.x)$ o $y = \text{sen}(b.x)$ obtenemos a partir de la gráfica de $y = \cos(x)$ o $y = \text{sen}(x)$ multiplicando el valor de x por b. En este caso como se observa en la figura 42, la amplitud de las funciones no se altera, mientras que los períodos se alteran según el valor de b.

3. Funciones de la forma y = *a* cos(*bx*) e y = *a* sen(*bx*)

Considerando los números reales a y b distintos de cero, la amplitud es $|a|$. Si $b > 0$, entonces transcurre exactamente un ciclo cuando bx aumenta de 0 a 2π, lo que es lo mismo cuando x aumenta de 0 a $2\pi/b$. Si $b < 0$, entonces $-b > 0$ y transcurre un ciclo cuando bx aumenta de 0 a $2\pi/(-b)$. Así, el período de la función f, expresado por $f(x) = a\text{sen}(bx)$ o $f(x) = \cos(bx)$, es $2\pi/|b|$. O sea que $2\pi/|b|$ es el período de la gráfica de f.

¿Cuál es el período de $y = \text{sen}(2x)$? ...., ¿qué relación existe con el período de $y = \text{sen}(x)$?.................................

¿Cuál es el período de $y = \cos(x/3)$ ...., ¿qué relación existe con el período de $y = \cos(x)$? ....

RESUMEN:

Si $y = a\cos(bx)$ o $y = a\,\text{sen}(bx)$, con $b > 0$, se tiene: amplitud = $|a|$ período = $2\pi/|b|$.

Si $0 < b < 1$, la curva básica del seno o coseno, se alarga, o sea: período $> 2\pi$.

Si $b > 1$, la curva básica del seno o coseno, se comprime, o sea: período $< 2\pi$.

Ejemplo 5: Calcule la amplitud, el período y trace la gráfica de $y = 3\text{sen}(2x)$

Solución:

Con el teorema sobre amplitudes y períodos, con $a = 3$ y $b = 2$, se obtiene lo siguiente:

amplitud: $|a| = |3| = 3$ período: $2\pi/|b| = 2\pi/2 = \pi$

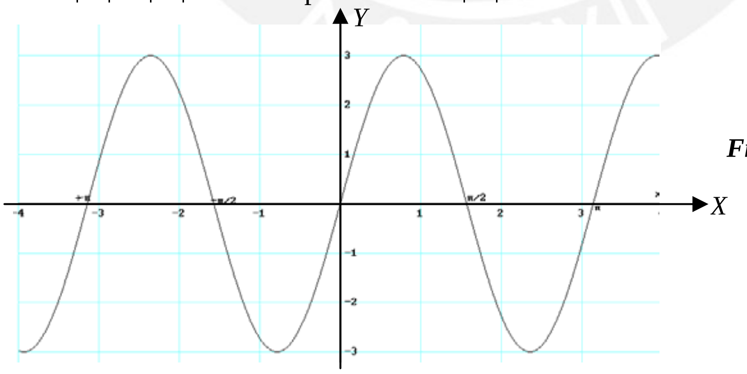


Figura 43

Observe, que el gráfico es exactamente una onda sinusoidal de amplitud 3 con período sobre el intervalo $[0, \pi]$.

Ejemplo 6: Calcule la amplitud, el período y el trazo de la función $y = 2\text{sen}(x/2)$

Solución:

Con el teorema sobre amplitudes y periodos, con a =2 y b = 1/2, se obtiene lo siguiente: amplitud: $|A| = |2| = 2$ periodo: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$

NOTA: Si $y = a\cos(bx)$ y si b es un número positivo grande, el periodo $2\pi/b$ es pequeño y las ondas sinusoidales son próximas entre sí, habiendo b ondas sobre el intervalo $[0, 2\pi]$; en cambio, si b es un número positivo pequeño, entonces el período $2\pi/b$ es grande y las ondas están alejadas.

4. Funciones de la forma: $y = a$ sen$(bx + c)$ e $y = a\cos(bx + c)$

Las gráficas son las mismas $y = a$sen(bx) e $y = a\cos(bx)$, desplazadas hacia la izquierda o hacia la derecha, la generalización de las funciones seno y coseno tiene la forma: $y = a$**sen**$(bx+c)$ = a**sen**$b(x+c/b)$ e $y = a.\cos(bx + c) = a.\cos b(x + c/b)$.

La constante c/b es el desfasamiento, donde las gráficas de $y = a$sen(bx) e $y = a\cos(bx)$ se desplazan c/b unidades hacia izquierda si $c/b > 0$, o hacia se desplazan hacia la derecha $|c/b|$ unidades si $c/b < 0$.

Generalización: Dado las funciones de la forma: $y = a$sen$(bx + c)$ e $y = a.\cos(bx + c)$, donde a y b son números reales distintos de cero, se tiene:

1) La amplitud es $|a|$ y su período es $2\pi/|b|$

2) Se puede calcular el desplazamiento de fase y el intervalo que contiene exactamente un ciclo, resolviendo las dos ecuaciones siguientes: $bx + c = 0$ y $bx + c = 2\pi$.

Ejemplo 7: Determine la amplitud, período y desfasamiento de $y = \frac{3}{2}$ sen$(2x+\pi)$.

Solución:

Tenemos que: $y = \frac{3}{2}$sen$(2x+\pi) = \frac{3}{2}$sen$2(x+\pi/2)$, de donde: amplitud = $\frac{3}{2}$, período = π desfasamiento = $\pi/2$ unidades hacia la izquierda.

Además, resolviendo: $2x+\pi = 0$ y $2x+\pi = 2\pi$, se tiene: $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$. De aquí, una onda sinusoidal de amplitud $\frac{3}{2}$ ocupa el intervalo $[-\pi/2 , \pi/2]$, como se muestra en la figura 44, si se traza esa onda y se repite luego a derecha e izquierda.

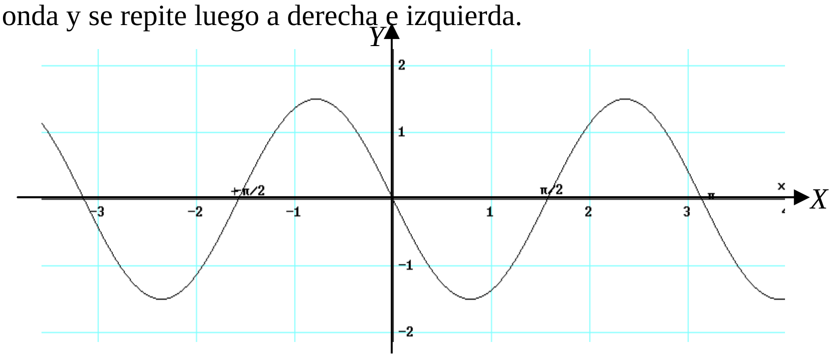


Figura 44

Ejemplo 8: Calcular la amplitud, período y desplazamiento de fase de $y = 3$sen$(2x + \pi/2)$.

Solución:

Como la ecuación tiene la forma $y = a.\text{sen}(bx)$ donde $a = 3$, $b = 2$ y $c = \pi/2$. Entonces: la amplitud es $|a| = 3$ y el período es $2\pi/|b| = 2\pi/2 = \pi$.

El desplazamiento de fase y el intervalo que contiene que contiene una onda sinusoidal se obtiene de las ecuaciones: $2x + \pi/2 = 0$ y $2x + \pi/2 = 2\pi$.

Despejando, $x = -\pi/4$ y $x = 3\pi/4$.

El desplazamiento es $-\pi/4$, y una onda sinusoidal de amplitud 3 ocupa el intervalo $[-\pi/4 , 3\pi/4]$, si se traza esa onda y se repite luego a derecha e izquierda, como se muestra en figura 45:

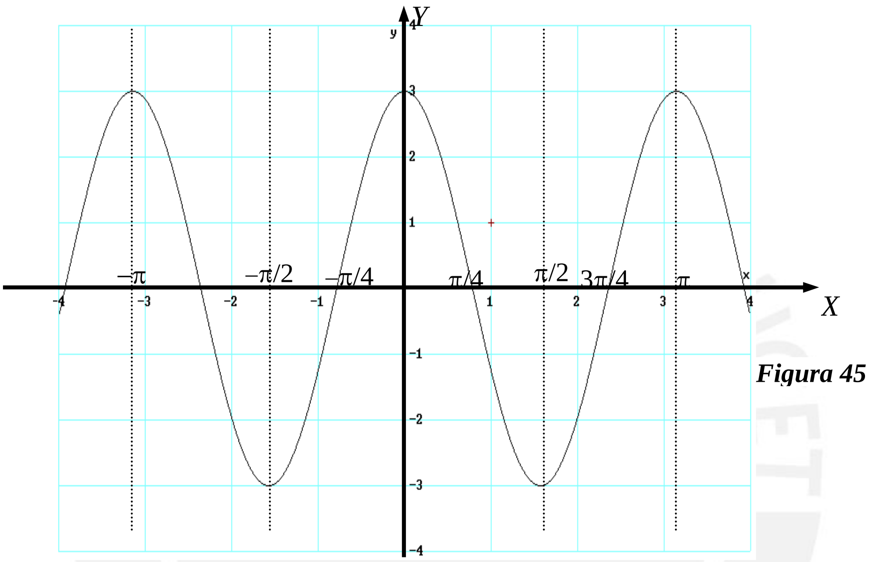


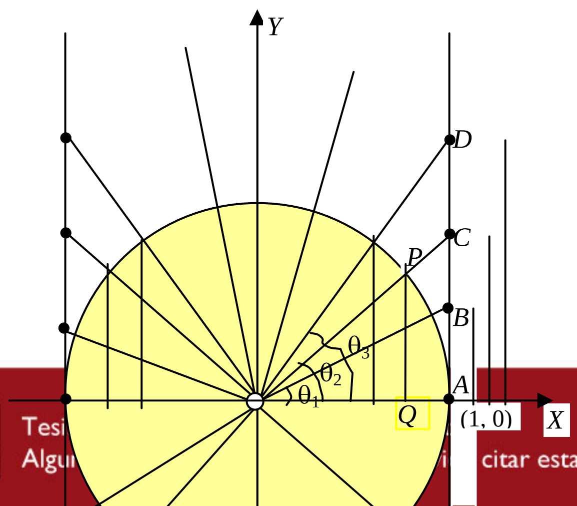
Figura 45

4) Gráfica de la función tangente

LÍNEAS TANGENTE: Tracemos dos rectas tangentes a $\mathcal{C}_1(O)$ por los puntos (1 , 0) y (–1 , 0). Al prolongar los radio vectores hasta la recta tangente, se determinan segmentos sobre la recta y determinan triángulos rectángulos.

En la figura 46, se tiene que el triángulo *OQP* es semejante a *OAC*. Entonces $\dfrac{y}{x} = \dfrac{AC}{OA} = \dfrac{AC}{1}$,

de aquí: $AC = \dfrac{y}{x} = \tan(\theta)$. Observe que las longitudes *AB*, *AC*, *AD*, etc. son iguales a la tangente del ángulo (arco) θ correspondiente en la $\mathcal{C}_1(O)$.



Según la figura:

En el triángulo *OAB*:

$\tan(\theta_1) = \dfrac{BA}{1} = BA$

En el triángulo *OAC*:

$\tan(\theta_2) = \dfrac{CA}{1} = CA$, etc.

....

Figura 46

¿Cómo varían las longitudes de los segmentos que se determinan en cada uno de los cuatro cuadrantes? ¿***Crecen o decrecen***? ¿**En relación al crecimiento del ángulo** (**o del arco**)?

Primer cuadrante: ....

Segundo cuadrante: ....

Tercer cuadrante: ....

Cuarto cuadrante: ....

Para $\theta \in 3$, $\theta \neq (2n + 1)\pi/2$, $n \in 9$, $E(\theta) = P(x , y) \in \mathcal{C}_1(O)$ la función tangente (tan) es la regla de correspondencia, tal que:

$$\tan: 3 - \{(2n+1)\pi/2\} \longrightarrow 3$$
$$\theta \longrightarrow y = \tan(\theta)$$

Para trazar la gráfica de la función tangente (tangentoide) procedemos:

1. Dibujar el sistema de coordenadas rectangulares, tomemos como unidad la longitud del radio del círculo de triplay.

2. Hagamos coincidir el eje de las abscisas del sistema con el mismo eje del círculo de triplay y ubiquemos éste a una distancia $\pi/2$ a la izquierda del origen de coordenadas.

3. Ubicando en la circunferencia del círculo unitario los arcos de longitudes $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $-\pi/6$, $-\pi/4$ y $-\pi/3$.

4. Prolongue el segmento trazados a cada punto considerado hasta la recta tangente al círculo, luego trace rectas horizontales paralelos al eje *X*.

5. Sobre el eje de las abscisas ubique los números correspondientes a los mismos números $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $-\pi/6$, $-\pi/4$ y $-\pi/3$.

6. Trace las líneas verticales desde cada número considerado hasta que se intersequen con los trazos horizontales.

Complete los datos en la siguiente tabla:

x	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$
$y = \tan(\theta)$	$-\infty$		-1		0		1	0	$+\infty$	
$(\theta, \tan(\theta))$					(0 , 0)					

7. Ubique los puntos de intersección de las líneas horizontales y verticales trazados y unamos dichos puntos con una línea de trazo continuo.

8. La curva hallada representa a la gráfica a la función tangente, sobre el intervalo abierto $]-\pi/2 , \pi/2[$.

9. Al ubicar los puntos de la tabla en el sistema de coordenadas rectangulares, se obtiene lo que muestra la (figura 47-a), que denominaremos el nombre de “tangentoide”.

Construcción de la curva $y = \tan(\theta)$

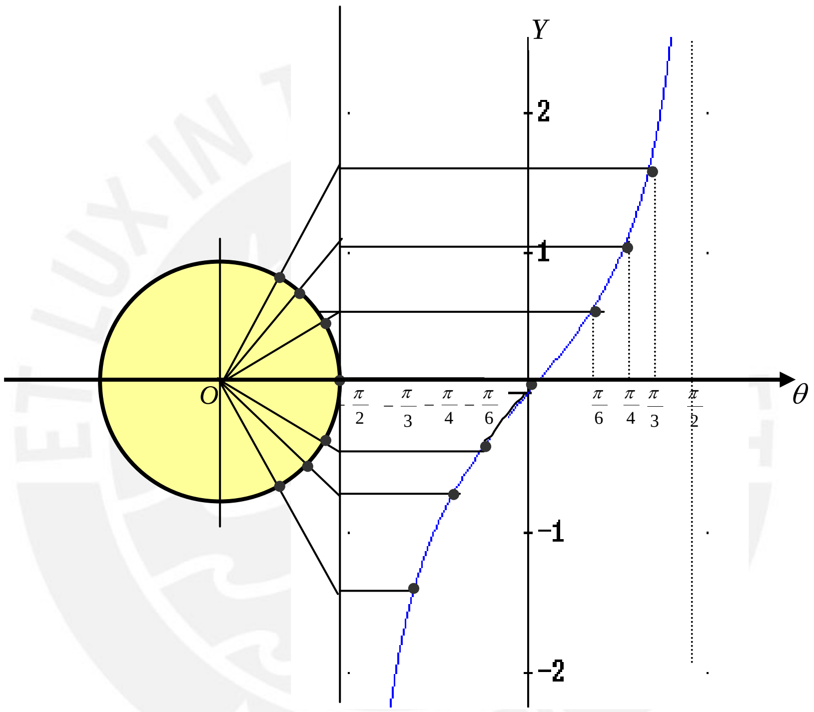


***Figura 47*-(a)**

NOTA: Usando software matemático DERIVE, podemos graficar correctamente una función, así:

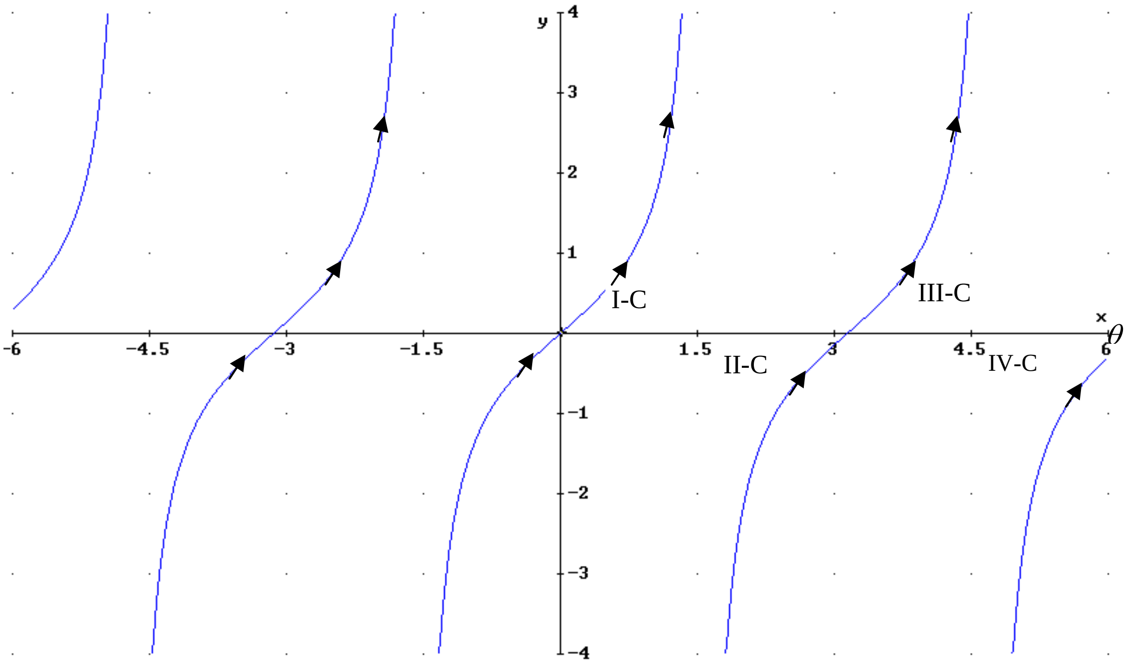


***Figura 47*-(b)**

De la gráfica mostrada, podemos deducir:

Dominio: .... rango: ....

La curva **tangentoide**, es discontinua en los puntos: ....

Es creciente en ....

Simetría: ....

Período: ....

Intersección con los ejes: ....

Inyectividad: ....

¿Las curvas de y = tan(θ) se cortan en algún punto?....................................

Del **gráfico de la función tangente,** resumimos su comportamiento en cada cuadrante:

Cuadrante	Variación del ángulo	Variación del gráfico de la tangente	Crecimiento de $y = \tan(\theta)$
I	$0 < \theta < \pi/2$	$0 < \tan(\theta) < +\infty$	Crece de ... a ...
II	$\pi/2 < \theta < \pi$	$-\infty < \tan(\theta) < 0$	.... de $-\infty$ a 0
III	$\pi < \theta < 3\pi/2$	$0 < \tan(\theta) < +\infty$	Crece de ... a ...
IV	$3\pi/2 < \theta < 2\pi$	$-\infty < \tan(\theta) < 0$	.... de $-\infty$ a 0

En las curvas que representan a la función tangente de la página anterior

1. Ubique la imagen de los números reales: $3\pi/4$, $5\pi/4$, $2\pi/3$ y $7\pi/4$.
2. Ubique la imagen de los números reales: $-3\pi/4$, $-5\pi/4$, $-2\pi/3$ y $-7\pi/4$.
3. Trace la recta horizontal $y = 1$, ¿qué relación existe entre este trazo y la pregunta del numeral 1? ....

4. Trace la recta horizontal $y = -1$, ¿qué relación existe entre este trazo y la pregunta del numeral 2? ....

5) Gráfica de la función cotangente

LÍNEAS COTANGENTE: Tracemos dos rectas horizontales, tangentes a $\mathcal{C}_1(O)$ ésta en (0 , 1) y (0 , –1). Al prolongar los radios se determinan triángulos rectángulos, semejantes como: *OQP* y *OGB*, entonces $\frac{x}{y} = \frac{..}{..} = \frac{..}{..}$, de aquí: $BG = \frac{..}{..} =$. Las longitudes de los segmentos *BF*, *BG*, *BH*, etc. son iguales a la .... del ángulo (o arco) correspondiente en la $\mathcal{C}_1(O)$.

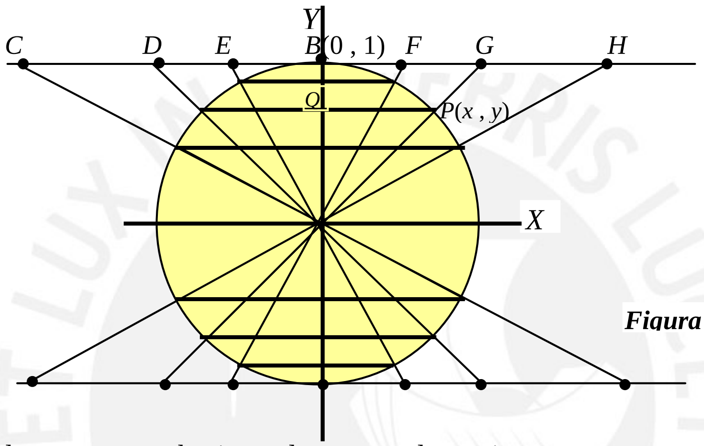


Figura 48

La longitud de los segmentos horizontales que se determinan representan a ....

La longitud de los segmentos horizontales: Decrece en los cuadrantes: .... y crece en los cuadrantes: ....

Para θ ∈ 3, θ ≠ *n*π, *n* ∈ 9 , E(θ) = *P*(*x* , *y*) ∈ $\mathcal{C}_1(O)$ la función cotangente (cot) es la regla de correspondencia, tal que:

$$\text{cot}: 3 - \{n\pi\} \longrightarrow 3$$

$$\theta \longrightarrow y = \cot(\theta)$$

Para trazar la gráfica de la función cotangente (cotangentoide), precedemos:

Calcular algunos valores de $f(\theta) = \cot(\theta)$, dando valores a θ en radianes (números reales), en los puntos donde está definido la función.

Por otro lado se debe tomar también en cuenta que $\cot(\theta) = \dfrac{1}{\tan(\theta)}$

θ	0	π/6	π/4	π/3	π/2	3π/4	π	3π/2	2π
y = cot(θ)	No ∃		1		0	–1	No ∃	0	No ∃

Variación de la función cotangente en los cuadrantes:

Cuadrante	Variación del ángulo	Variación de la cotangente	Comportamiento de la gráfica

I	$0 < \theta < \pi/2$	$0 < \cot(\theta) < +\infty$	decrece de .... a ...
II	$\pi/2 < \theta < \pi$	$-\infty < \cot(\theta) < 0$	decrece de ... a ....
III	$\pi < \theta < 3\pi/2$	$0 < \cot(\theta) < +\infty$	decrece de .... a ...
IV	$3\pi/2 < \theta < 2\pi$	$-1 < \cot(\theta) < 0$	decrece de ... a ....

Características del gráfico de la función cotangente:

- Dominio = 3 – { θ / θ = $n\pi$, $n \in$ 9 } y Rango = 3.
- La función es periódica, de período π
- La función es impar: $\cot(-\theta) = -\cot(\theta)$
- Es decreciente sobre todo su dominio
- Corta al eje de abscisas en los puntos: (π/2 , 0), (3π/2 , 0), (5π/2 , 0) ....
- No es simétrico con respecto al origen

De la tabla y de las características de la función tangente, trace usted la gráfica de la función cotangente **y = cot(θ)** *en el sistema de ejes que se exhibe en la* figura 49:

Gráfico de la función cotangente

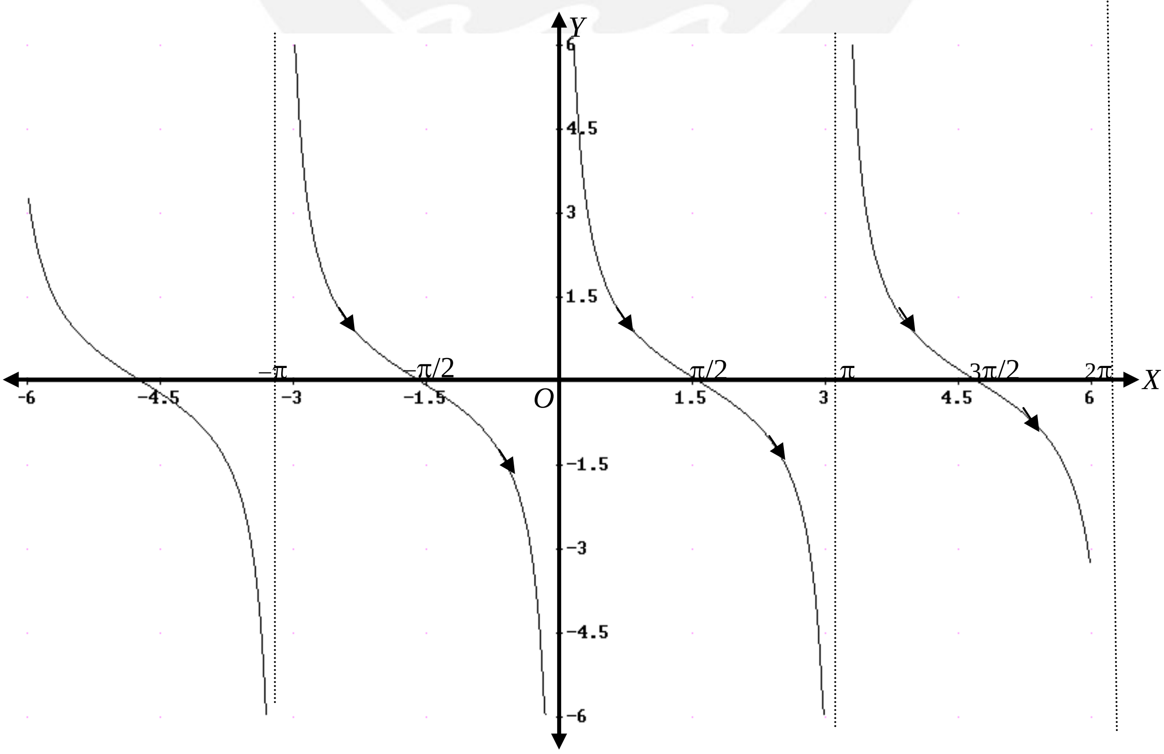


Figura 49

DE LO ESTUDIADO:

Indique 5 diferencias entre las características de la función tangente y cotangente, a partir de su representación gráfica ....

....

....

Indique ¿por qué la gráfica de la función tangente y cotangente no existen en ciertos puntos?:

....

....

....

¿A qué se denomina asíntota? ....

....

....

¿Cuáles son los períodos de la tangente y cotangente?...

¿Para que valores de θ, las curvas $y = \tan(\theta)$ e $y = \cot(\theta)$ se intersectan? ....

....

6) Gráfica de la función secante

Dado $\theta \in 3$, $\theta \neq (2n+1)\pi/2$ y el punto $E(\theta) = P(x\ ,\ y) \in \mathcal{C}_1(O)$. La función secante (sec) es la regla de correspondencia, tal que:

$$\sec: 3-\{(2n+1)\ \pi/2\} \longrightarrow 3 -]-1\ ,\ 1[$$

$$\theta \longrightarrow y = \sec(\theta)$$

Variación de la función secante en los cuadrantes:

Cuadrante	Variación del Ángulo o arco	Variación de la secante	Comportamiento del gráfico
I	$0 < \theta < \pi/2$	...< sec(θ) < ...	Crece de ... a ....
II	.... < θ <	$-\infty < \sec(\theta) < -1$	.... de $-\infty$ a -1
III	$\pi < \theta < 3\pi/2$	.... < sec(θ) <	Decrece de .... a ....
IV	.... < θ < 2π	$1 < \sec(\theta) < +\infty$	.... de $+\infty$ a 1

Gráfica: Para trazar la gráfica de la función secante (secantoide), procedemos:

a) Calculemos algunos valores de $f(\theta) = \sec(\theta)$, dando valores a θ en radianes.

b) A partir de los datos de la tabla y las características del gráfico, trace la curva correspondiente a $y = \sec(\theta)$:

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
$y = \sec(\theta)$	1	1,41	No ∃	–1,41	–1	–1,41	No ∃	1,41	1

De los datos del cuadro y las características que se menciona, a continuación, esboce la gráfica de $y = \sec(\theta)$, en el eje de coordenadas rectangulares que se exhibe en la siguiente página.

Dominio = 3 −{(2*n*+1)π/2} y

Rango = 3 −] –1 , 1[

No existe valores máximo ni mínimo

La función es periódica, de período 2π

La función es par: sec(–θ) = sec(θ)

Es creciente en el cuadrante I y II.

Es decreciente en el cuadrante III y IV.

La gráfica de la secante no corta al eje de abscisas

No es simétrico con respecto al eje *Y*.

No es inyectiva.

Según la características mencionadas, la gráfica de la función secante, resulta como se muestra en la figura 48, identifique las características de la curva.

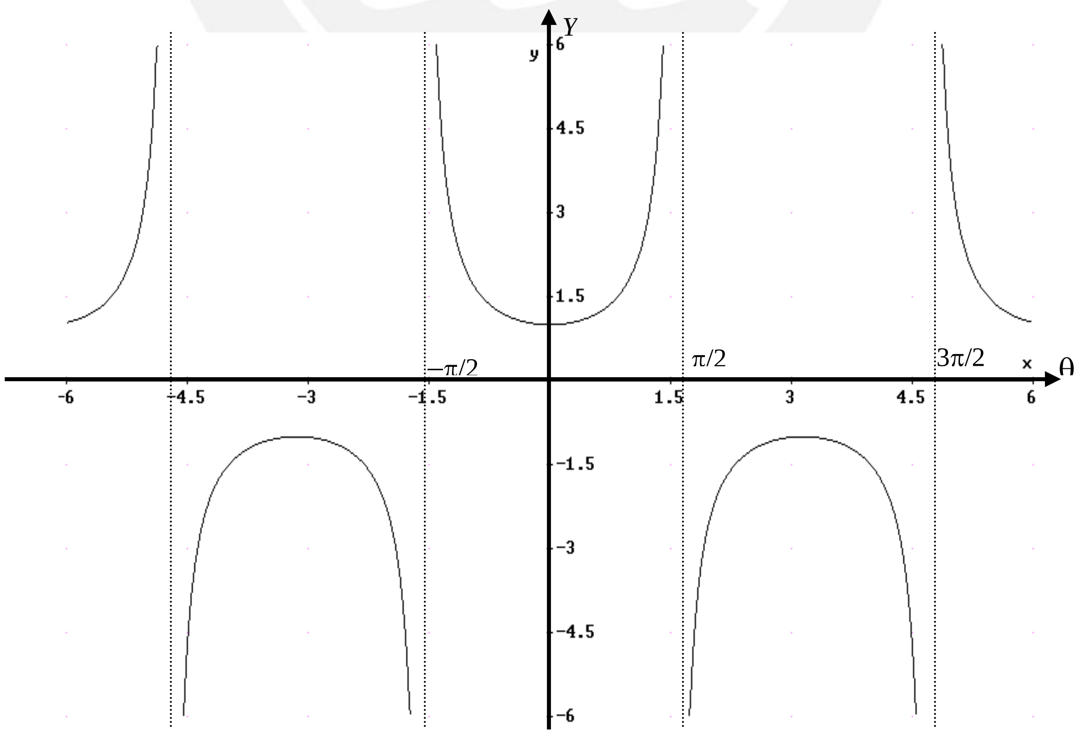


Figura 50

7) Gráfica de la función cosecante

Dado $\theta \in 3$, $\theta \neq n\pi$ y el punto $E(\theta) = P(x , y) \in \mathcal{C}_1(O)$. La función cosecante "csc" es la regla de correspondencia, tal que:

$$\csc: 3 - \{n\pi\} \longrightarrow 3 -]-1 , 1[$$

$$\theta \longrightarrow y = \csc(\theta) = 1/\text{sen}(\theta)$$

Variación de la función cosecante en los cuadrantes:

Cuadrante	Variación del ángulo	Variación de la cosecante	Comportamiento del gráfico
I	$0 < \theta < \pi/2$	$1 < \csc(\theta) < +\infty$	Decrece de ...... a ...
II	$\pi/2 < \theta < \pi$	$1 < \csc(\theta) < +\infty$	.... de 1 a $+\infty$
III	$\pi < \theta < 3\pi/2$	$-\infty < \csc(\theta) < -1$	Crece de ..... a ....
IV	$3\pi/2 < \theta < 2\pi$	$-\infty < \csc(\theta) < -1$	.... de -1 a $+\infty$

Para trazar la gráfica de la función cosecante procedemos a:

a) Calcular algunos valores de $f(\theta) = \csc(\theta)$, dando valores a θ en radianes (números reales)

b) Representar estos valores en una tabla, como se exhibe a continuación:

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
$y = \csc(\theta)$	No ∃	1,41	1	1,41	No ∃	–1,41	–1	–1,41	No ∃

De los datos de la tabla se tiene el gráfico de la función cosecante (cosecantoide):

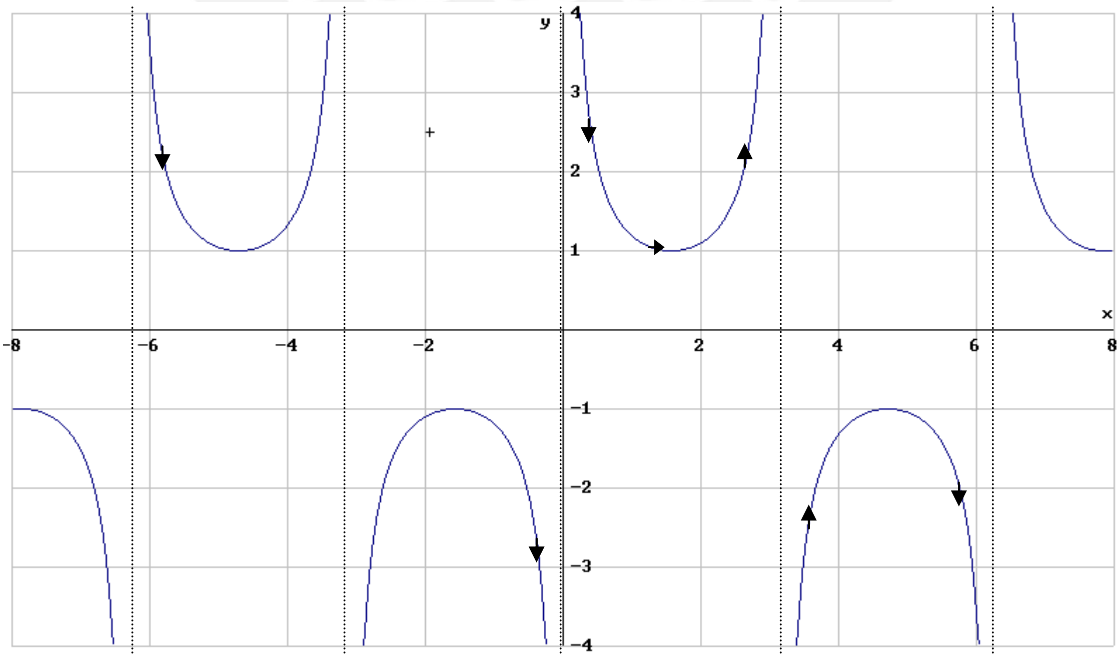


Figura 51

1. A partir del gráfico de la función $y = \csc(\theta)$, figura 51, describa las características de la función cosecante:

Dominio: ....

Rango: ....

Valores extremos: ....

Período: ....

Par o impar: ....

Decrecimiento: ....

Crecimiento: ....

Intersección con los ejes:...

Inyectividad: ....

2. Identifique la gráfica de la función $y = \csc(\theta)$, sobre el intervalo $]-0 , 2\pi[$..................
3. Identifique la gráfica de la función $y = \sec(\theta)$, sobre el intervalo $[0 , 3\pi/2[$.................

Por qué las funciones secante y cosecante no admiten gráfica en el intervalo $]-1 , 1[$

....

> **RECUERDA**:
> en esta sección hemos visto cómo se definen, se identifican las propiedades y se construyen las gráficas de las ***funciones trigonométricas*** a partir de arcos orientados y puntos en la circunferencia unitaria.

¡Ahora comprueba tus aprendizajes logrados en la unidad!

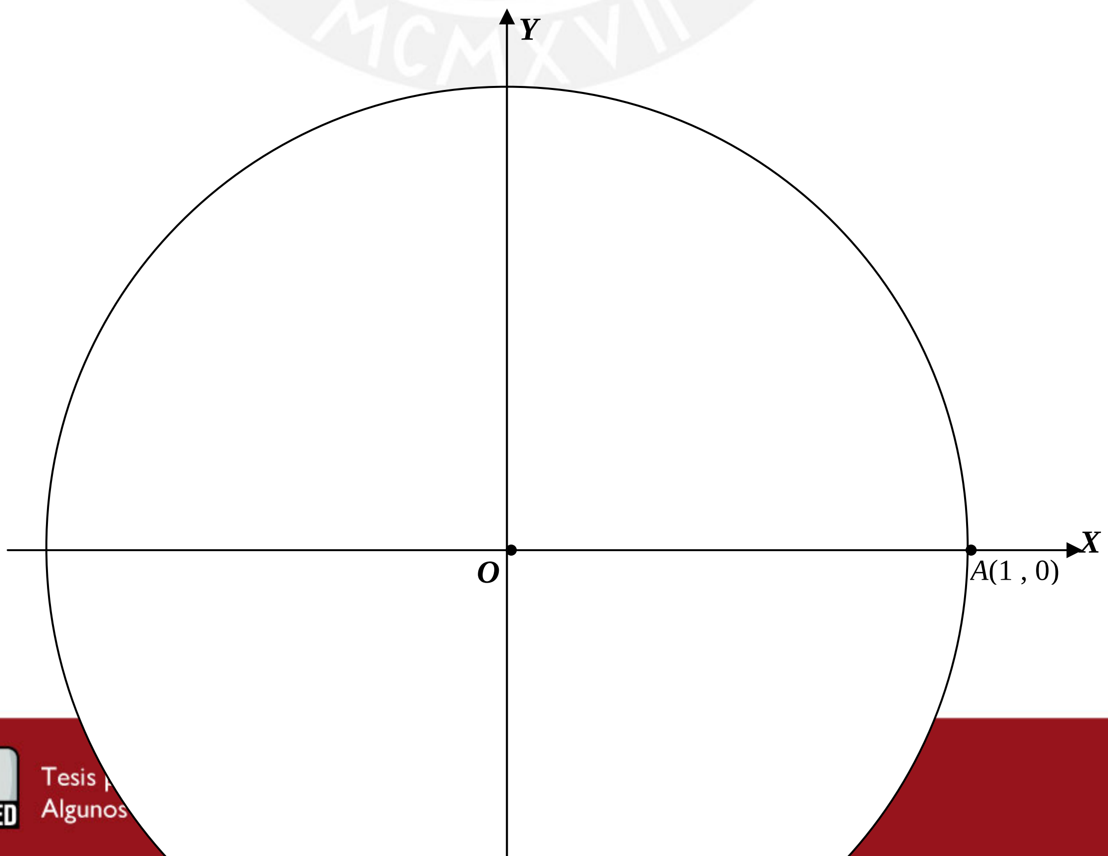
Comprueba tus Aprendizajes

1. En el siguiente cuadro, complete los valores de las funciones trigonométricas para los diferentes longitudes de arco (ángulos).

Grados	Números Reales	$E(\theta)$	$\cos(\theta)$	$\text{sen}(\theta)$	$\tan(\theta)$
0º	0	$(1,0)$	1	0	
30º	$\pi/6$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$			
45º	$\pi/4$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$			
60º	$\pi/3$	$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$			
90º	$\pi/2$	$(0,1)$			
120º	$2\pi/3$	$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$			

135º	3π/4	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
150º	5π/6	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
180º	π	$\left(-1, 0\right)$
210º	7π/6	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
225º	5π/4	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
240º	4π/3	$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
270º	3π/2	$\left(0, -1\right)$
300º	5π/3	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
315º	7π/4	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
330º	11π/6	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

2. En la circunferencia mostrada, ubique cada punto E(θ) hallado en el cuadro del ejercicio Nº 1 de esta sección.



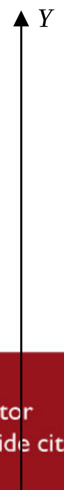
3. Indique los puntos simétricos de los puntos:
   a. del primer cuadrante respecto al eje *X*: ....
   b. del primer cuadrante respecto al eje *Y*: ....
   c. del primer cuadrante respecto al origen: ....

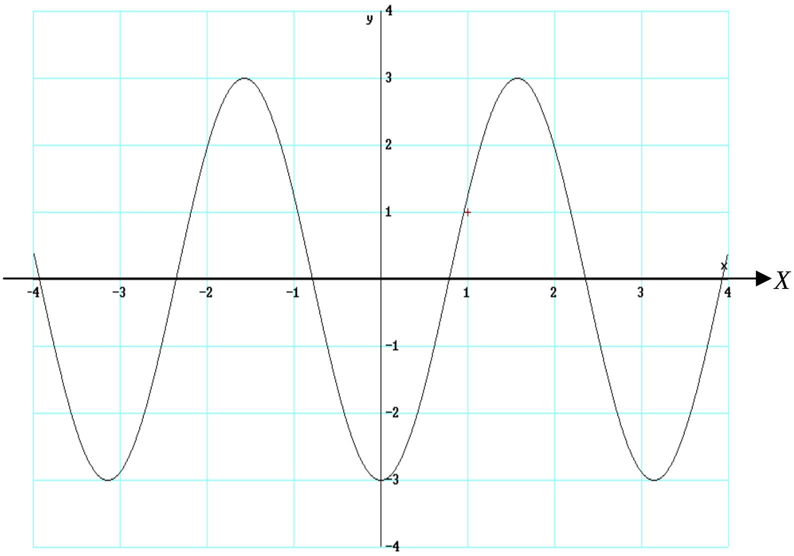
4. Explique como son los senos y cosenos, tangente y secante referente al signo al hacer a), b) y c) de la pregunta (3)
   i) seno:...
   ii) coseno:...
   iii) tangente:..
   iv) secante:..

5. Si $\cos(\theta) = -2/7$, determine el valor de la función seno y ubique el punto $(\cos(\theta) , \operatorname{sen}(\theta))$ en la $\mathcal{C}_1(O)$. ¡Haga en hoja a parte!
6. Dado un punto $(-5 , 12)$ del sistema de coordenadas rectangulares, calcule el valor del seno, coseno, cotangente, cosecante y θ en grados.

7. Indique cuáles de las siguientes proposiciones son falsos y cuáles son verdaderos.
   a) El seno es creciente en el cuarto cuadrante.
   b) La tangente aumenta en el tercer cuadrante a medida que el arco aumenta.
   c) La cosecante disminuye en el primer cuadrante a medida que el arco aumenta.
   d) La cotangente disminuye en el segundo cuadrante a medida que disminuye el arco.
   e) Las funciones recíprocas tienen el mismo signo.

8. Identifique el dominio, rango, su condición de par o impar, el período, y su ecuación de la función representada por la siguiente curva:





9. Si $\cos(\theta) = -2/7$, determine el valor de las otras cinco F.T., y ubique el punto de la forma $(\cos(\theta), \text{sen}(\theta))$ en la circunferencia unitaria del sistema de coordenadas rectangulares.

10. Determine el ángulo de referencia y determine los valores de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante, para los radio vectores de extremos en:
   a) $M = (5, -12)$ b) $N = (-3, 3)$ c) $P = (-3, -4)$.

ASÍGNATE TUS PUNTAJES

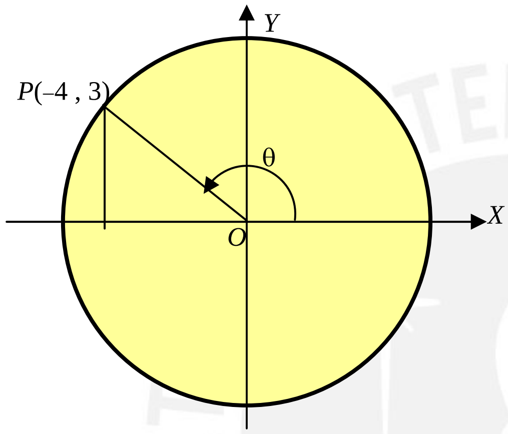
¿Cuáles serían los puntajes que te asignas en el desarrollo de cada una de las preguntas de los ejercicios de comprobación de tus aprendizajes?

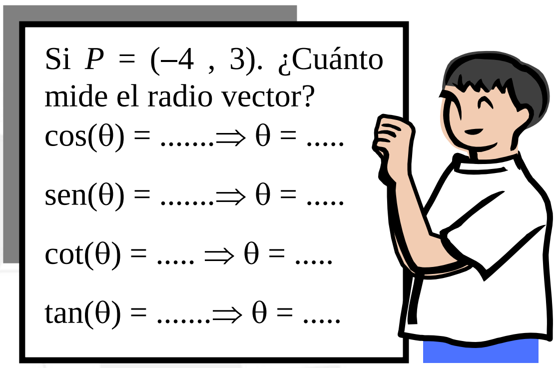
Ítem	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Nota
Ptje											

¡ ***QUÍTATE PUNTOS POR CADA ERROR QUE TENGAS*** !

UNIDAD Nº 4

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS





OBJETIVO:

Al término del estudio de esta unidad estará en condiciones de:

IDENTIFICAR Y TRAZAR LAS GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

REQUISITOS

¡*Para abordar el estudio de esta unidad es preciso que conozcas*!

1. *Funciones trigonométricas seno, coseno y tangente.*
2. *Gráfica y algunas propiedades de las funciones seno, coseno y tangente.*
3. *Funciones inyectivas y crecientes.*
4. *Inversa de funciones reales de variable real.*
5. *Composición de funciones reales de variable real inversas.*
6. *Gráfica de las funciones inversas.*

OBJETIVOS

¿*Qué lograremos en esta unidad*?

1. *Identificar gráficamente funciones invertibles.*
2. *Definir la función arco coseno, trazar su gráfica e identificar propiedades.*
3. *Definir la función arco seno, trazar su gráfica e identificar propiedades.*
4. *Definir la función arco tangente, trazar su gráfica e identificar propiedades.*
5. *Resolver algunas ecuaciones con funciones trigonométricas inversas.*

CONTENIDOS

¿*Qué aprenderemos a través de esta unidad*?

1. *Gráfica de una función real de variable real y de su inversa en un papelote.*
2. *Gráfica de las funciones:* $y = \text{sen}(x)$, $y = \cos(x)$ e $y = \tan(x)$.
3. *Identificación de intervalos donde la función coseno admite inversa, construcción de su gráfica e identificar sus propiedades y algunas aplicaciones.*
4. *Identificación de intervalos donde la función seno admite inversa, construcción de su gráfica e identificar sus propiedades y algunas aplicaciones.*
5. *Identificación del intervalo donde la función tangente admite inversa, construcción de su gráfica e identificar sus propiedades y algunas aplicaciones.*
6. *Intervalos donde las funciones: cotangente, secante y cosecante admiten inversas, construcción de su gráfico e identificar sus propiedades.*

DESARROLLO

EXPLORACIÓN-MOTIVACIÓN-PROBLEMATIZACIÓN

TEMA 1: Despejar la variable independiente en función de la dependiente.

1) Dado la función $y = 3x + 1$, para despejar x en términos de y, se transponen al primer miembro el término independiente 1, luego el factor 3; es decir de $y = 3x + 1$, se tiene $y - 1 = 3x$, luego: $\frac{y-1}{3} = x$, o sea: $x = \frac{y}{3} - \frac{1}{3}$. Aquí resulta que x es función de y, dado por $x = g(y) = \frac{y}{3} - \frac{1}{3}$ para $y \in 3$, luego $y = 3x + 1$ equivale a $x = \frac{y}{3} - \frac{1}{3}$. Además $y = 3x + 1$,para $x \in 3$ es una función inyectiva.

Gráficamente:

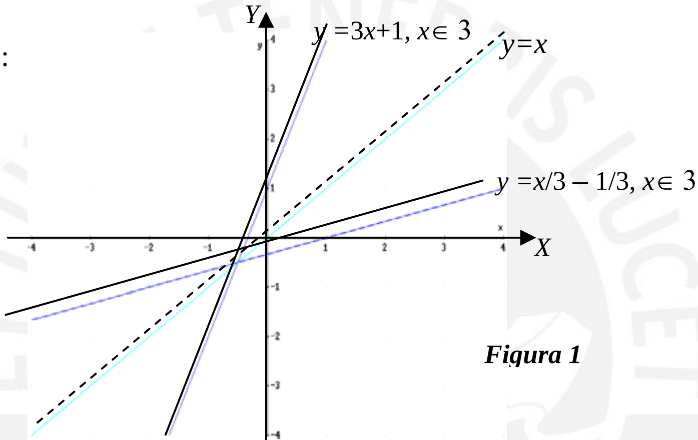


Figura 1

2) Dado la función $y = x^2 + 1$, al despejar x en términos de y, se tiene::

De $y = x^2 + 1$, $y - 1 = x^2$ o sea $|x| = \sqrt{y-1}$, que está definido para $y - 1 \geq 0$, o sea $y \geq 1$.

Por definición de valor absoluto, resulta: $x = \sqrt{y-1}$ ó $x = -\sqrt{y-1}$; que definen dos funciones: $x = \sqrt{y-1} = g(y)$ y $x = -\sqrt{y-1} = h(y)$, como $x \in 3$, la función $y = x^2 + 1$, no es inyectiva.

Pero si consideramos $x \geq 0$: la función $y = x^2 + 1$, equivale a $x = \sqrt{y-1}$ y es inyectiva.

Análogamente, si $x \leq 0$, la función $y = x^2 + 1$, equivale a $x = -\sqrt{y-1}$ y es inyectiva.

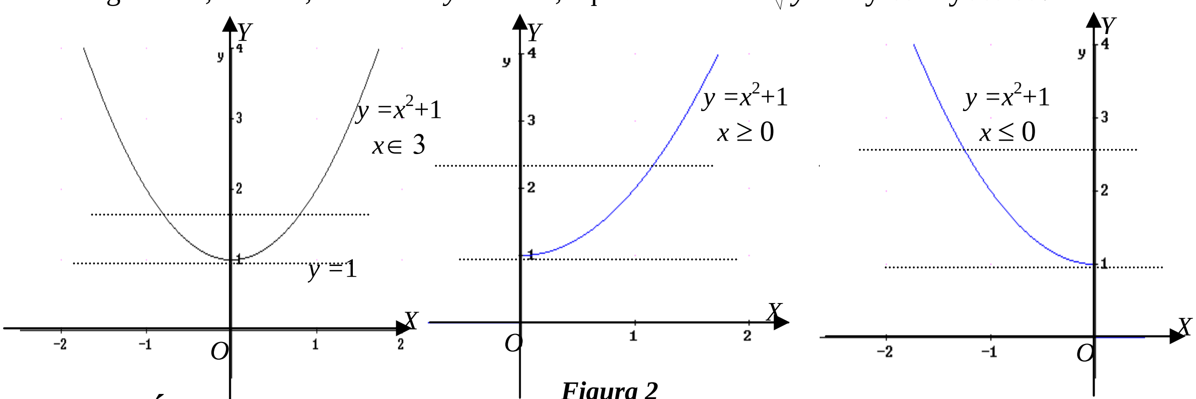


Figura 2

FUNCIÓN INVERSA:

Dada la función $y = f(x)$, con dominio A $\subset$ 3 y rango B $\subset$ 3, e inyectiva al despejar x de $y = f(x)$ resulta $x = g(y)$, intercambiando x e y, se tiene: $y = g(x)$ para $x \in$ B e $y \in$ A, se llama función inversa de f y se denota por f^{-1}. Luego: $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ o $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$.

EJEMPLOS

1) Si $y = 2x - 3/2$ es una función, cuya gráfica es una recta; la función inversa $x = (2y+3)/4$ ó $f^{-1}(x) = (2x+3)/4$ también tiene por gráfico una recta. Las gráficas de estas funciones, son simétricas respecto a la bisectriz $y = x$ de los ángulos del primer y tercer cuadrante.

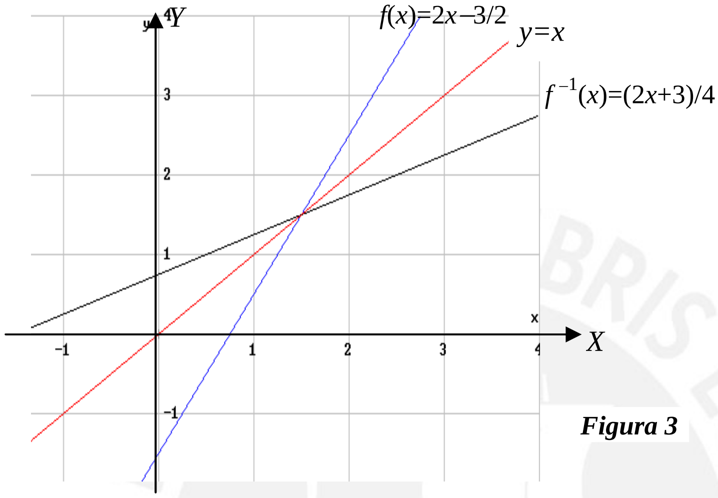


Figura 3

2) Dado $y = f(x) = x^2$ (función directa), cuyo gráfico es una parábola que se abre hacia arriba.
La recta $y = 2$, intercepta a la gráfica en dos puntos.
La función $y = f(x) = x^2$ no es inyectiva en todo su dominio.

Restringiendo el dominio a $[0, +\infty[$, al despejar x en términos de y, se obtiene: $x = \sqrt{y}$ y resulta $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, las gráficas de estas funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$, se exhibe en la figura.

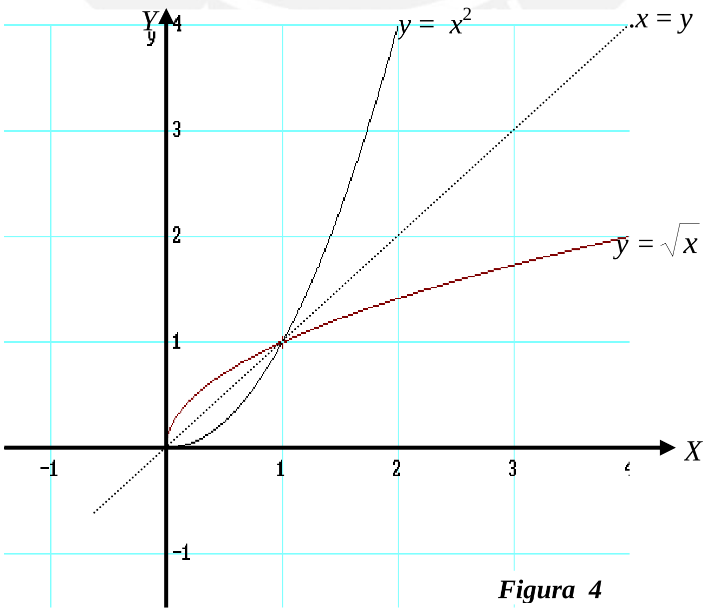


Figura 4

¡RECUERDE!:

Para proceder a estudiar las funciones trigonométricas inversas es preciso recordar que la función $y = f(x)$, con dominio A y rango B, sea inyectiva:

1. De $y = f(x)$ se tiene $x = g(y)$, o sea $x = f^{-1}(y)$ con $y = f(x)$.
y en el dominio de f.

EJERCICIOS

1) Analice si la función $y = \dfrac{x-1}{x+3}$, admite inversa en su dominio:

a) despeje x en términos de y, en caso fuera posible.
b) grafique la curva correspondiente
c) Identifique un intervalo donde la función es inyectiva

2) Con ayuda de la circunferencia unitaria, desarrolle según el caso amerite:

a) si $\text{sen}(\alpha) = 1/3$, entonces α = ...
b) si $\text{sen}(\alpha) = -1/2$ y $\cos(\propto) < 0$, entonces α = ...
c) si $\tan(\alpha) = -4/3$ y $\alpha \in\ ]\pi/2\ ,\ \pi[$, entonces α = ...
d) si $\cot(\alpha) = -1$ y $\text{sen}(\alpha) < 0$, entonces α = ...
e) si $\text{sen}(\alpha) = 0$, entonces α = ...
f) si $\cos(\alpha) = 0$, entonces α = ...
f) si $\propto = -7\pi/4$, entonces $\cot(\alpha)$ = ...

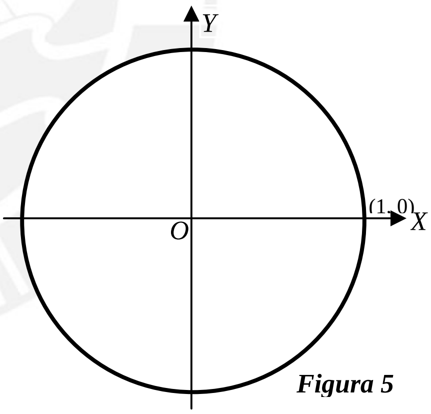


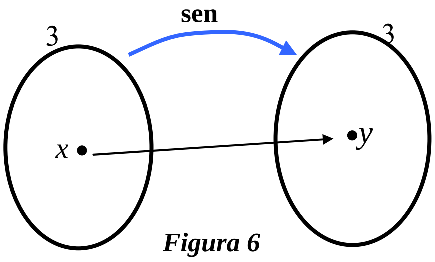
Figura 5

3) De las gráficas estudiadas en la unidad 3, ¿las funciones trigonométricas son inyectivas?................... ¿admiten inversa en todo su dominio? .... Al analizar las propiedades y gráficas de cada una de ellas, nos encontramos con la dificultad de que ninguna de las funciones trigonométricas es inyectiva, puesto que son periódicos. Pero podemos restringir adecuadamente el dominio de las funciones; de tal manera que estas funciones sean inyectivas, por lo que a las inversas de estas funciones inyectivas la llamaremos función inversa de la función trigonométrica en referencia, así tenemos:

4.1. LA FUNCIÓN INVERSA DEL SENO

Recordando la expresión: y = sen (x).

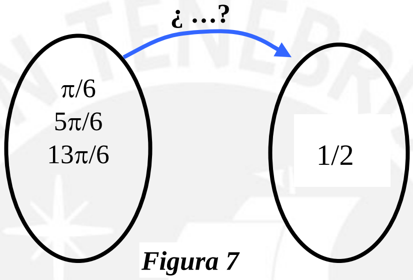
Dado $x \in$ 3, obtendremos el valor de sen(x) = y, como una regla de correspondencia, siendo E(x) = (, y).



y = sen(x)

Figura 6

Dado que el rango del seno es [–1 , 1], para $c \in$ [–1 , 1], resulta que sen(x) = c, para algún $x \in$ 3, es decir, dado el valor del sen(x) obtener número real "x".



$y = \text{sen}^{-1}(x)$
o
y = arcsen(x)

Figura 7

Por ejemplo, para x = π/6, 5π/6, 13π/6, 17π/6, etc. se tiene sen(x) = 1/2, es decir:

sen(π/6) = sen(5π/6) = sen(13π/6) = ...= 1/2; que asegura que la función seno, no es inyectiva.

Para despejar x de y = sen(x) y resulte x = g(y), necesitamos considerar un dominio adecuado en donde la función seno sea inyectiva y admita función inversa.

¿Cómo tener el dominio de la función seno a partir de su gráfica para que sea inyectiva?

Para los intervalos: [–3π/2 , –π/2], [–π/2 , π/2], etc., como dominio la función resulta inyectiva. Sea el intervalo [–π/2 , π/2] donde los valores de la función varía desde .... hasta 1, si x varía desde ...... hasta .... Esta función restringida usaremos para definir la **función inversa del seno.**

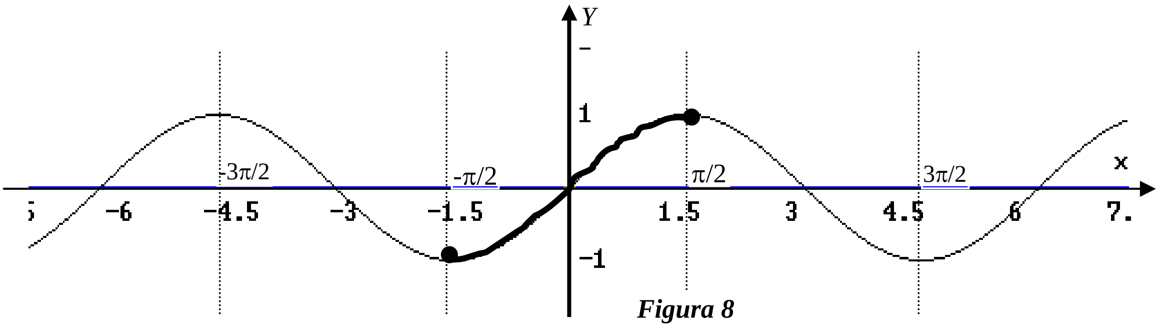


Figura 8

DEFINICIÓN: La función inversa de la función seno a la función: sen^{-1} o Arcsen, cuyo dominio es el intervalo: [–1 , 1] y el rango [–π/2 , π/2], definida por:

$$\text{Arcsen}(x) = \text{sen}^{-1}(x) = y \iff \text{sen}(y) = x.$$

Así, si $y = \text{sen}(x)$, tendremos que $x = \text{Arcsen}(y)$**.** De aquí: $y = \text{Arc sen}(x)$ es la función inversa de la función seno, donde para todo $y \in [-\pi/2 , \pi/2]$ existe un único $x \in [-1 , 1]$ tal que $\text{arcsen}(x) = y$.

OBSERVACIÓN: A la expresión: $\text{Arcsen}(x) = y$ se lee "*y* es el **arco** cuyo **seno** es *x*"

De la propiedad $y = \text{arcsen}(x) \Leftrightarrow \text{sen}(y) = x$, $y \in [-\pi/2 , \pi/2]$, $x \in [-1 , 1]$, se tiene:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{sen}(\text{sen}^{-1}(y)) = \text{sen}(\text{arcsen}(y)) = y, & \text{para } -1 \le y \le 1, \\ \text{sen}^{-1}(\text{sen}(x)) = \text{arcsen}(\text{sen}(x)) = x, & \text{para } -\pi/2 \le x \le \pi/2 \end{array}}$$

EJEMPLOS:

1) $\text{sen}(\text{arcsen}(1/2)) = 1/2$ o $\text{arcsen}(1/2) = y \Leftrightarrow \text{sen}(y) = 1/2$, para $y \in [-\pi/2 , \pi/2]$. Se cumple para $y = \pi/6$.

2) $\text{arcsen}[\text{sen}(-\pi/3)] = -\pi/3$ como $-\pi/3 \in [-\pi/2 , \pi/2]$, $\text{arcsen}(-\pi) = y \Leftrightarrow -\pi/3 = \text{sen}(y)$; se cumple para el único valor $y = -\sqrt{3}/2$, pues $\text{sen}(-\pi/3) = -\sqrt{3}/2$

3) Sin embargo, $\text{arcsen}(\text{sen}(3\pi/4)) \neq 3\pi/4$; pues $3\pi/4 \notin [-\pi/2 , \pi/2]$. Realizando cálculos $\text{sen}(3\pi/4) = \text{sen}(\pi - \pi/4) = \text{sen}(\pi/4)$, y luego, $\text{arcsen}(\text{sen}(3\pi/4)) = \pi/4$

4) En la gráfica de $y = \text{arcsen}(x)$; ubique los valores de: $\text{arcsen}(1/2)$, $\text{arcsen}(2)$ y $\text{arcsen}(-1/3)$, en caso de que sea posibles hallarlos.

5) $\text{arcsen}(\pi/3) + \text{sen}(-\pi/6) = \sqrt{3}/2 - 1/2 = (\sqrt{3} - 1)/2$.

6) Probar que $\text{arcsen}(1/\sqrt{5}) + \text{arcsen}(2/\sqrt{5}) = \pi/2$.

Para esto, sea $\alpha = \text{arcsen}(1/\sqrt{5})$ y $\beta = \text{arcsen}(2/\sqrt{5})$, entonces: $\text{sen}(\alpha) = 1/\sqrt{5}$ y $\text{sen}(\beta) = 2/\sqrt{5}$ con $E(\alpha)$ y $E(\beta)$ en el I-C. Hay que probar que $\alpha + \beta = \pi/2$, o que $\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}(\pi/2)$, ya que los senos de ángulos iguales son iguales.

Para resolver esto, veremos más adelantes ciertas propiedades:

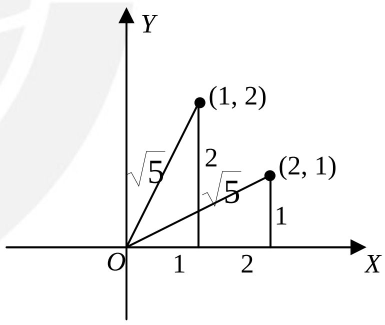


Figura 9

EJERCICIOS:

1. Encuentre los valores que corresponden a:

a) $\text{Arcsen}(3/5) =$ ………………

b) $\text{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2) =$ ……………

c) $\text{Arcsen}(-1/2) =$ ………..

d) $\text{Arcsen}(-12/13) =$ ………………

e) $\text{sen}^{-1}(\sqrt{2}/2) =$ ………………

f) $\text{Arcsen}(-1) =$ …………………

3. Halle $x \in [-\pi/2 , \pi/2]$, tal que $\text{sen}(2x) = -1/2$ ……………………………………

4. Halle $x \in [-\pi , 2\pi]$, tal que $\text{sen}(x/2) = \sqrt{3}/2$ ……………………………………

5. Determine el rango de la función $f(x) = 2\text{arcsen}[(4-6x)/11]$.

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN $y = \text{arcsen}(x)$: Para graficar la curva $y = \text{arcsen}(x)$, tomar los puntos: $(\pi/2 , 1)$, $(0 , 0)$, $(-\pi/2 , -1)$ de la gráfica $y = \text{sen}(x)$, con $-\pi/2 \le x \le \pi/2$; cuyas coordenadas intercambiadas: $(1 , \pi/2)$, $(0 , 0)$ y $(-1 , -\pi/2)$ están en la curva $y = \text{arcsen}(x)$. En la figura 10, trace las gráficas de la función seno y de arco seno en los ejes de coordenadas, figuras 10-(a) y 10-(b), respectivamente. A partir de los puntos descritos y haciendo un giro alrededor de la recta $y = x$, se obtiene la gráfica de y = Arc sen(x):

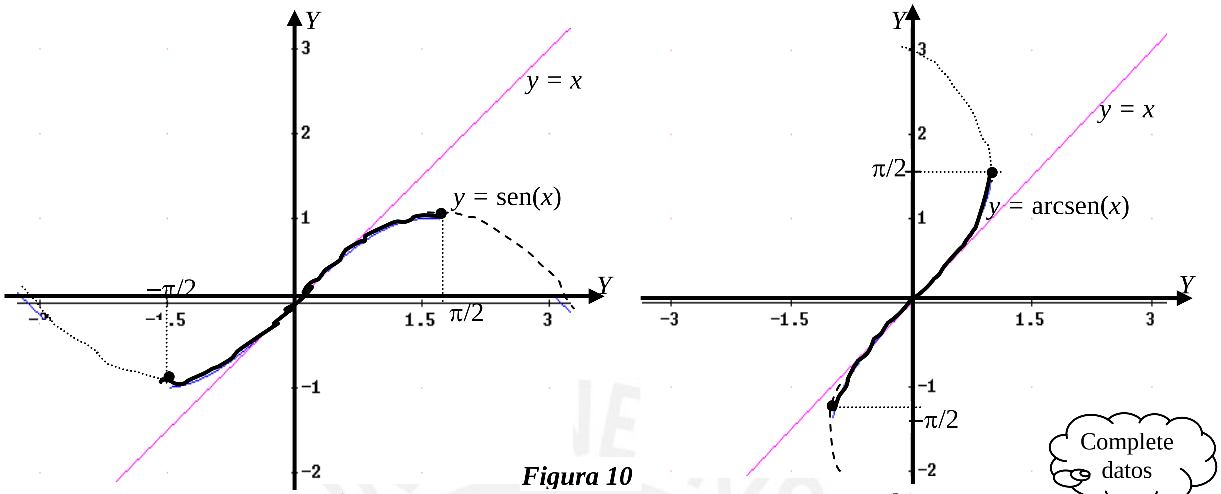


Figura 10

(a) (b)

x	$-\pi/2$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/2$
y=sen(x)	-1		$-1/2$	0	$1/2$		1

x	-1	1	$-1/2$	0			1
y =sen^{-1}(x)	$-\pi/2$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/2$

Recuerda que el gráfico de la función y = arcsen(x) que se construya en la ***figura 10***, deben satisfacer las siguientes propiedades:

- El dominio es el intervalo $[-1 , 1]$.
- El rango de arcsen es el intervalo $[-\pi/2 , \pi/2]$, es decir, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$.
- La función y = arcsen(x) se hace nula cuando $x = 0$.
- Los intervalos de signo constante son:

  Arcsen(x) > 0, para $x \in \,]0 , 1]$; arcsen(x) < 0, para $x \in [-1 , 0[$.
- La función y = srcsen(x) es creciente sobre el intervalo $[-1 , 1]$, obteniendo su valor mínimo, igual a $-\pi/2$ en el extremo izquierdo del intervalo; y, el valor máximo igual a $\pi/2$ en el extremo derecho del intervalo $[-1 , 1]$.
- La gráfica de la función y = arcsen(x) es simétrico respecto al origen de coordenadas, por ejemplo: los puntos $(\pi/2 , 1)$ y $(-1 , -\pi/2)$, pertenecen a la gráfica.

RECUERDE: que es esencial escoger el valor de y en el rango $[-\pi/2 , \pi/2]$ del arcsen.

Función	**Expresión equivalente**	**solución**
.y = arcsen(1/2)	sen(y) = 1/2 y $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$	$y = \pi/6$
.y = arcsen(–1/2)	.... y	....
.y = arcsen(–1)	.... y	....
.y = arcsen($-\sqrt{2}/2$)	.... y	....
.y = arcsen($-\sqrt{3}/2$)	.... y	....
.y = arcsen(0)	.... y	....

4.2. LA FUNCIÓN INVERSA DEL COSENO

¿Cómo restringir el dominio de la función coseno de modo que resulte inyectiva?

Al trazar una horizontal en $y = 1/2$, en la curva $y = \cos(x)$, se observa que
$\cos(-2\pi) = \cos(0) = \cos(2\pi) = 1$, por tanto la función coseno no es inyectiva.

Se observa que la función es inyectiva en los intervalos: $[-2\pi , -\pi]$, $[-\pi , 0]$, $[0 , \pi]$, $[\pi , 2\pi]$, etc. De estos consideremos el intervalo $[0 , \pi]$ donde los valores de la función varía desde ...... hasta -1, si x varía desde .... hasta ..... Esta función restringida sirve para definir la **función inversa del coseno.**

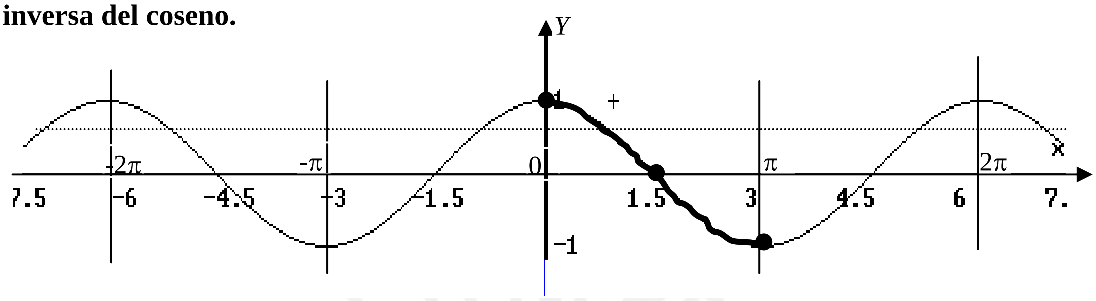


Figura 11

DEFINICIÓN: La función inversa de la función coseno es la función: $\cos^{-1}$ o Arccos, cuyo dominio es el intervalo: $[-1 , 1]$ y el rango $[0 , \pi]$, donde:

$$\text{Arccos}(x) = \cos^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \cos(y) = x.$$

Así, si $y = \cos(x)$ se tiene $x = \text{Arccos}(y)$. De donde: $y = \text{Arccos}(x)$ es la función inversa de $y = \cos(x)$. De esta manera para $y \in [0 , \pi]$ existe un único $x \in [-1 , 1]$ tal que $\arccos(x) = y$.

OBSERVACIÓN: A la expresión: $\arccos(x) = y$ se lee "y es el **arco** cuyo **coseno** es x"

De la propiedad $y = \arccos(x) \Leftrightarrow \cos(y) = x$, $y \in [0 , \pi]$, $x \in [-1 , 1]$, se tiene:

$$\cos(\cos^{-1}(y)) = \cos(\arccos(y)) = y, \quad \text{para } -1 \le y \le 1,$$
$$\cos^{-1}(\cos x) = \arccos(\cos(x)) = x, \quad \text{para } 0 \le x \le \pi,$$

EJEMPLOS:

1) $\cos[\arccos(3/5)] = 3/5$, puesto que $3/5 \in [-1 , 1]$.

2) $\text{Arccos}[\cos(\pi/4)] = \arccos(\sqrt{2}/2)$, puesto que $\pi/4 \in [0 , \pi]$ y $\sqrt{2}/2 \in [-1 , 1]$.

3) $\text{Arccos}[\cos(-\pi/3)] \neq -\pi/3$. Pues:
$\cos(-\pi/3) = \cos(\pi - 2\pi/3) = \cos(\pi/3)$, del cual, $\arccos(\cos(-\pi/3)) = \pi/3$

4) En la gráfica de $y = \arccos(x)$, determine: $\arccos(1/2)$, $\arccos(2)$ y $\arccos(-1/3)$, en caso de que sean posibles.

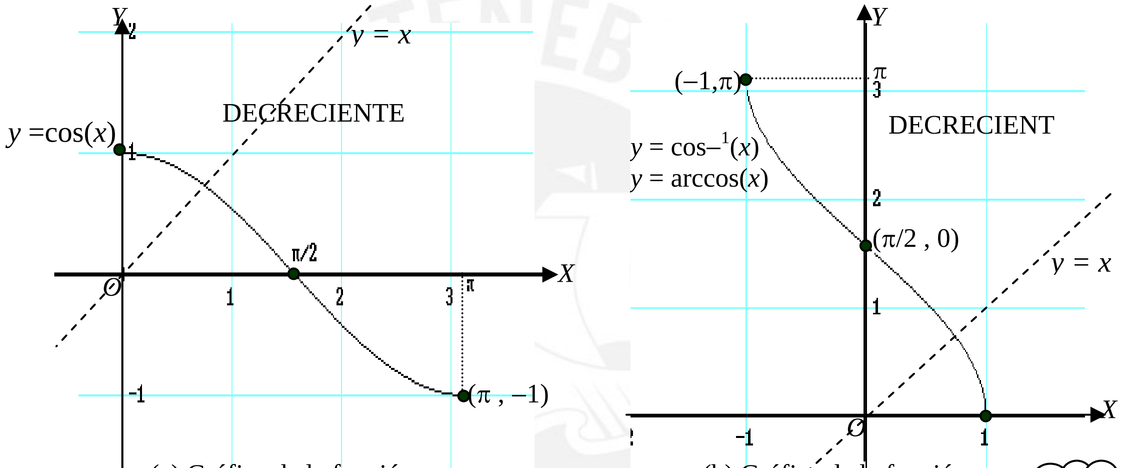
5) Para evaluar $\cos[\text{arcsen}(3/5)]$. Sea $\theta = \text{arcsen}(3/5)$, entonces $\text{sen}(\theta) = 3/5$, como θ está en el I-cuadrante, se tiene que $\cos(\theta) = 4/5$.

RECUERDE: que es esencial escoger el valor de y en el rango $[0 , \pi]$ de arccos.

Función	**Expresión equivalente**	**solución**
$.y = \arccos(1/2)$	$\cos(y) = 1/2$ y $0 \le y \le \pi$	$. y = \pi/3$
$.y = \arccos(-1/2)$	.... y	....

.y = arccos(1)	.... y	....
.y = arccos($-\sqrt{2}/2$)	.... y	....
.y = arccos($-\sqrt{3}/2$)	.... y	....
.y = arccos(0)	.... y	....

<u>GRÁFICA DE LA FUNCIÓN *y* = arccos(*x*):</u> Para graficar la curva y = arccos(x), tomaremos las coordenadas de cada punto de la gráfica y = cos(x), $0 \leq x \leq \pi$, intercambiando de posición las coordenadas: (0 , 1), (π/2 , 0), (π , –1) pertenecen a la gráfica de y = cos(x), se tiene que (1 , 0), (0 , π/2), (–1 , π) pertenecen a la gráfica de y = arccos(x). Estando la gráfica de y = cos(x) en los intervalos establecidos, se tiene la gráfica de y = Arccos(x), haciendo un giro alrededor de la recta $y = x$. (figura 12).



(a) Gráfica de la función coseno, restringida

(b) Gráfica de la función inversa del seno.

Figura 12

Complete datos

x	0	π/6	π/4	π/3	π/2	3π/4	5π/6
y=cos(x)	1				0		

	1			0		
y= arccos(x)	0			π/2		

Desde el gráfico, podemos anotar las siguientes propiedades de la función y = arccos(x):

- El dominio es el intervalo [.. , ..].
- El conjunto de valores o rango es el intervalo [... , π].
- La función arccos(x) toma valor cero: arccos(x) = 0, para x = ...
- El valor de la función : arcscos(x) ≥ ......, para todo $x \in [-1 , 1]$.
- La función arccos(x) es decreciente en el intervalo [–1 , 1], siendo su valor máximo igual a π, en el extremo .... del intervalo; y, el valor mínimo igual a ......, en el extremo derecho del intervalo [–1 , 1].
- La curva y = arccos(x) no es simétrica respecto al origen de coordenadas ni a los ejes coordenados.

EJERCICIOS

1. Encuentre los valores que corresponden a:

a) arccos(–4/5) = ... d) sen[arcsen(1/2)] +cos[arccos(1/3)] = ...

b) arccos(–5/13) = ... e) arcsen[sen(30º)] + arcos[cos(10º)] = ...

c) arccos(–1/2) = ... f) arcsen[sen(60º)] + arcos[cos(53º)] = ...

2. ¿Existe respuesta para Cos $^{-1}$(2,5)? .... ¿Por qué? ....

3. Evalúe el valor de sen[arccos(–2/3)]

4. Calcule: $5\tan[\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(41/41)]$

4.3. LA FUNCIÓN INVERSA DE LA TANGENTE

¿Cuál es un intervalo sobre el cual la función $y = \tan(x)$ es inyectiva?

Observe la gráfica $y = \tan(x)$ (figura 13), la función está definida por tramos:]–3π/2 , –π/2[,]–π/2 , π/2[,]π/2 , 3π/2[, etc. y tomamos el intervalo]–π/2 , π/2[para definir la **función inversa de la tangente.**

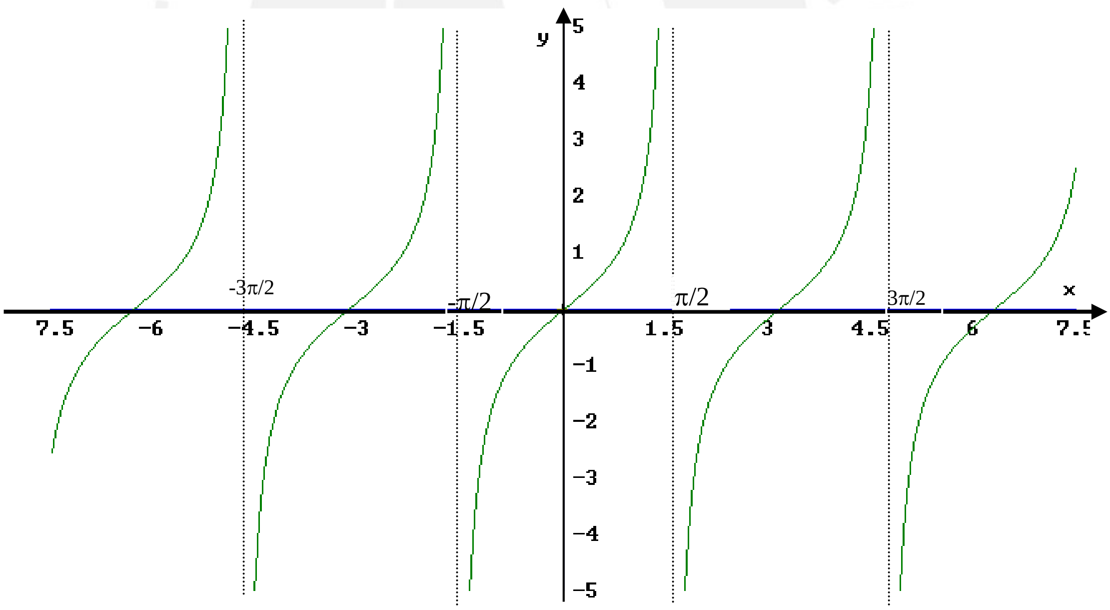


Figura 13

La función inversa de la tangente, denotado por **tan**$^{-1}$ o **arctan** se llama arco tangente y se define mediante:

arctan : 3 ⟶ **] –π/2 , π/2[, donde arctan(*x*) = *y* ⇔ tan(*y*) = *x***

Así, si $y = \tan(x)$ se tiene $x = \arctan(y)$. De esto $y = \operatorname{Arctan}(x)$ es la función inversa de $y = \tan(x)$.

De $y = \arctan(x)$ ⇔ $x = \tan(y)$, resulta:

$\tan(\tan^{-1}(x)) = \tan(\arctan(x)) = \boldsymbol{x}$, (***x*** es un número real cualquiera),
$\tan^{-1}(\tan(y)) = \arctan(\tan(y)) = \boldsymbol{y}$, si $-\pi/2 < \boldsymbol{y} < \pi/2$,

EJEMPLOS:

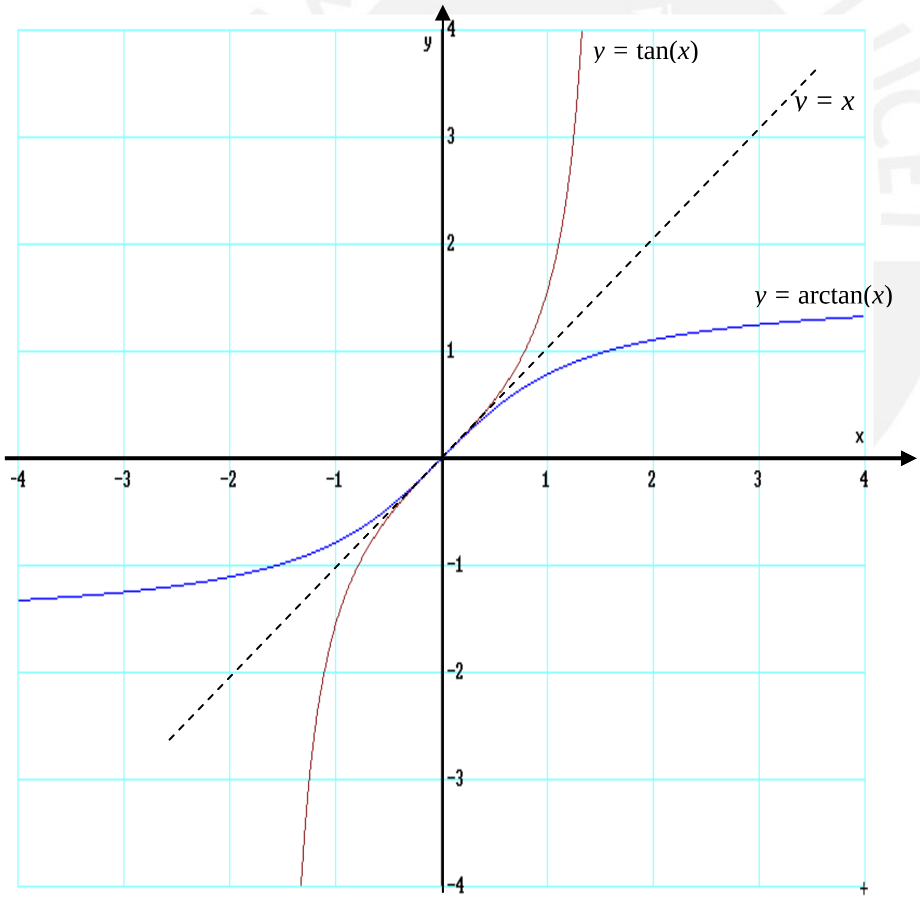
1) tan(arctan(1)) = tan(π/4) = 1

2) arctan(tan(π/3)) = arctan($\sqrt{3}$) = π/3

3) $\arctan\left(\tan(-3\pi/4)\right) \neq -3\pi/4$, puesto que el ángulo –3π/4 sale de los límites del intervalo]–π/2 , π/2[. Pero arctan[tan(–3π/4)] = arctan(tan(π –3π/4)) = arctan(1) = π/4, de donde arctan(tan(–3π/4) = π/4.

4) En la gráfica de la función *y* = arctan(*x*), determine: arctan(2), arctan(7) y arctan(–3), en caso de que sean posibles.

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN *y* = arctan(*x*): La gráfica de la curva *y* = arctan(*x*), coincide con la curva de la función *x* = arctan(*y*), cuando la variable *y* varía en el intervalo]–π/2 , π/2[, como se muestra a continuación (figura 14).



IMPORTANTE
Trace la gráfica de arco tangente reflejando la curva tangente dada respecto a la recta *y* = *x*, guíate en los puntos (–π/4 , –1), (0 , 0) y (π/4 , 1), pertenecen a la tangente, y sus correspondientes simétricos respecto a *y* = *x*, son (–1 , –π/4), (0 , 0) y (1 , π/4). Asimismo, la asíntotas verticales *x* =–π/2, *x* = π/2 se convierten asíntotas horizontales

Gráfica de la función tangente, restringida

Figura 14

En el gráfico anterior (figura 14), notamos algunas propiedades de la función arct*an*(*x*):

- El dominio es el conjunto ...... de los números reales.
- El conjunto de valores o rango es el intervalo]... , ...[.
- Los ceros de la función son: arct*an*(*x*) = 0, para *x* = ...

- Los intervalos de signo constante son:

  arctan(x) > 0, para $x \in$]... , ... [; arctan(x) < ..., para $x \in [-\infty, 0[$.
- La función arctan(x) es ...., sobre todo su dominio.
- La gráfica de arctan(x) es simétrico respecto al ....

4.4 FUNCIONES INVERSAS DE LA COT, SEC Y CSC

De manera análoga a como hemos razonado para las funciones inversas del seno, coseno y tangente, se procede para las funciones trigonométricas cotangente, secante, cosecante cuyas gráficas se construyen a partir de las funciones restringidas (figura 15):

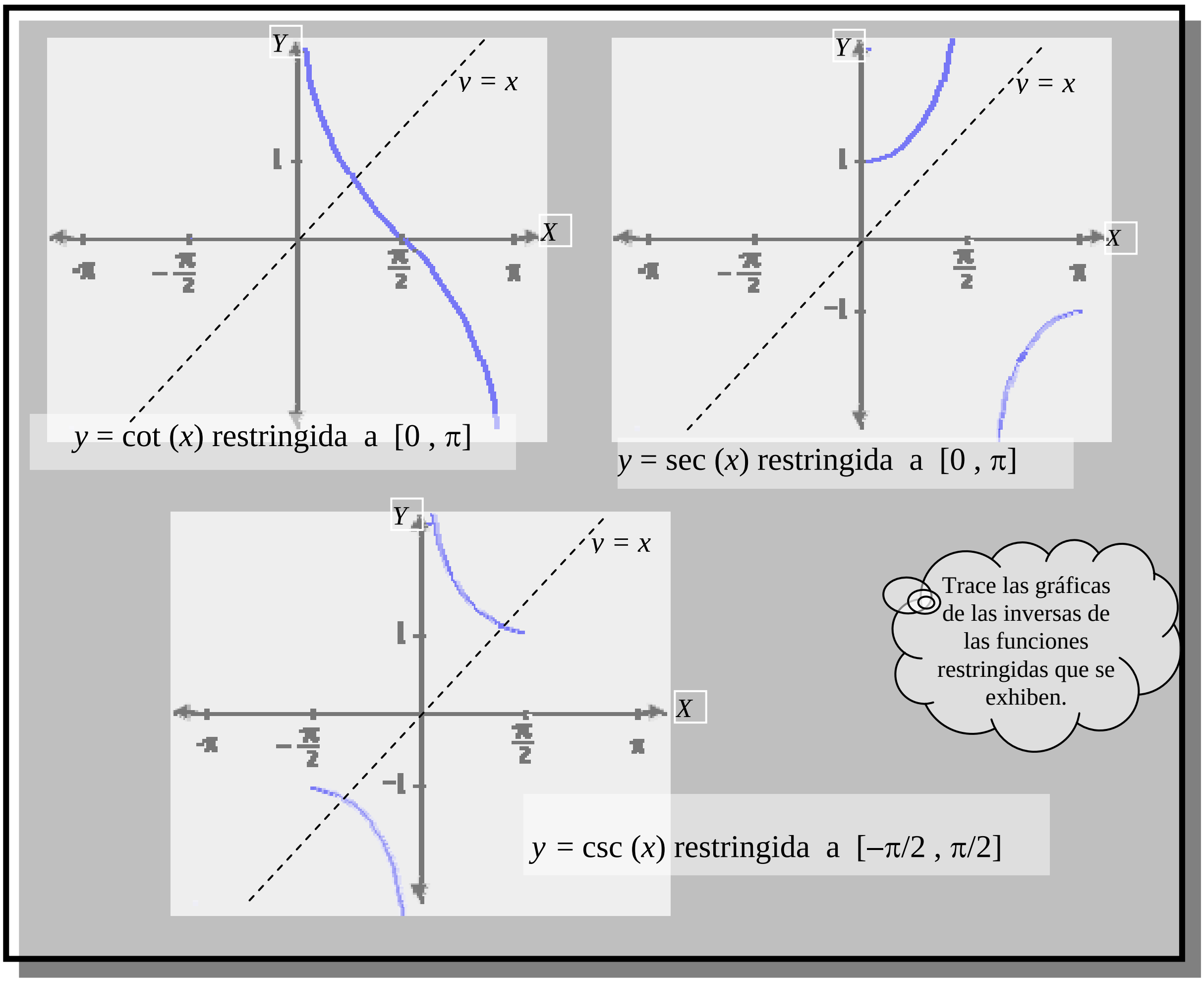


Figura 15

EJERCICIOS:

Halle el valor de x, en cada caso:

a) sen(x) = $-1/2$ b) cos(x) = $\sqrt{3}/2$ c) arcsen(x) = $\pi/2$ d) arctan(x) = 2.

e) sen($2x$) = $\sqrt{2}/2$, $x \in [0 , 2\pi]$ f) cos($x/2$) = -1.

Comprueba tus Conocimientos

1. ¿Cuáles de las siguientes funciones reales de variable real admiten inversa?

a) $f(x) = x^2 + 2$ b) $g(x) = 2x^3$

c) $h(x) = 2x - 5$ d) $i(x) = 1/x + 1$ 2pts

2. Calcule:

a) E = arctan(1) + arctan($\sqrt{3}$) b) E = arcsec(2) + arcsec($\sqrt{2}$)

c) E = arccos($\sqrt{3}$/2) + arcsen(–1/2) d) E = arcsen(5/7) + arccos(5/7) 2pts

3. Calcule:

a) cos(arcsen(0,8)) b) tan[$\frac{1}{2}$ arccos(1/2)] 2pts

c) cos[2arctan($\sqrt{3}$) – arcsen(1/2)] d) sen(2arcsen(x)), ($0 < x < 1$)

4. Calcule:

a) sen[arccos(–1/2) + arc(tan(4/3))] b) tan[arcsen(–1/3) – arccos(2/3)] 2pts

c) cos[arctan($\sqrt{3}$/2) – arcsen(12/13)] d) cot[arctan(–2/3)] + arccos[tan(–12/5)]

5. Analice el cumplimiento de las siguientes propiedades:

a) arctan(1) + arctan(1/2) = arctan(3) b) 2arccos(x) = arccos($2x^2$ –1), $0 \le x \le 1$. 2pts

c) sen[arccos(–1/2)] = –1/2 c) cos[arcsen(4/5) + arctan(3/4)] = 1

6. Demuestre las siguientes identidades:

a) 2arctan(1/2) = arctan(4/3) b) 2arctan(1/3) + arctan(1/7) = $\pi/4$ 2pts

c) arcsen(4/5) + arcsen(3/4) = $\pi/2$ d) arccos(12/13) + arctan(1/4) = arccot(43/32)

7. a) Pruebe que: si $-1 < x < 1$, entonces arcsen(x) + arccos(x) = $\pi/2$.

b) si sen(θ) = y con $0 < y < 1$. Exprese en términos del arcsen el arccos y el arctan

c) Determine la verdad o falsedad de: arcsen(3/5) = arccos(4/5) = arctan(3/4). 2pts

d) Halle el intervalo de variación de "θ" para arcsen[(θ+1)/2].

8. Completa en los espacios subrayados:

a) La función inversa de la tangente se denota ....

b) La función tangente inversa se define como la inversa de la función .... restringida al Dominio]–π/2 , π/2[.

c) El dominio de la función Tangente inversa es 2pts

d) El rango de la función Tangente inversa es ....

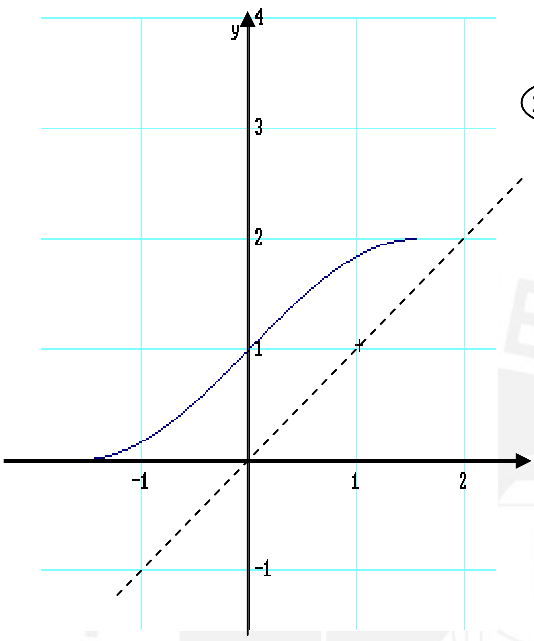
9. Trace el gráfico de las siguientes funciones:

a) $y = \text{arcsen}(x) + 1$ c) $y = \text{arctan}(x + 1)$ 2pts

b) $y = \text{arcsen}(2x)$ d) $y = \text{arccos}(3x)$

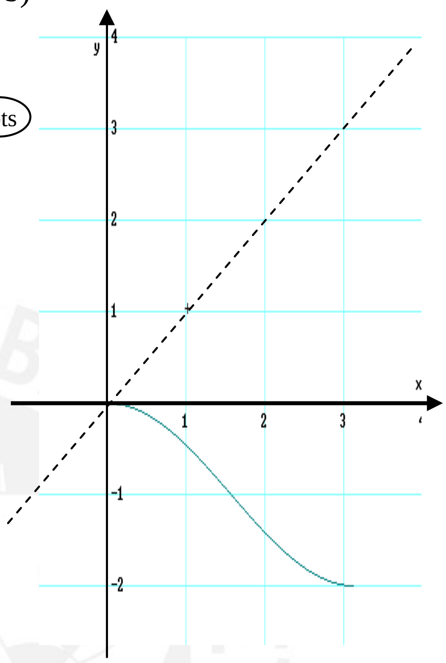
10. Dada las curvas: identifique dominio y rango, trace el gráfico de sus inversas, si es que existe:

a)



2pts

b)



ASÍGNATE TUS PUNTAJES

¿Cuáles serían los puntajes que te asignas en el desarrollo de cada uno de los ejercicios de comprobación de tus conocimientos?

Ítems	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	NOTA
Puntajes											

¡***QUÍTATE PUNTOS POR CADA ERROR QUE TENGAS***!

RESUMEN DE LA UNIDAD Nº 4

¡RECUERDA! que en esta unidad, cuyo estudio acabamos de concluir, aprendimos:

1. *Identificar analítica y gráficamente las funciones reales invertibles.*

2. *Definir la función inversa del coseno (arco coseno) a partir del coseno, trazar su gráfica e identificar sus propiedades.*

3. *Definir la función inversa del seno (arco seno) a partir del seno, trazar su gráfica e identificar sus propiedades.*

4. *Definir la función inversa de la tangente (arco tangente) a partir de la tangente, trazar su gráfica e identificar sus propiedades.*

5. *Trazar la gráfica de la inversa de una curva en el plano cartesiano.*

6. *Resolver ecuaciones con funciones trigonométricas inversas, aplicando propiedades..*

¿Tus resultados fueron satisfactorios al contrastar con el resultado obtenido por otros grupos de la clase, y con la respuesta del profesor?

SÍ

Entonces, estás expedito para estudiar las identidades trigonométricas, que viene a continuación en la Unidad 5 de este material

No

¡Repase detenidamente los puntos que tuvo dificultad, y si sigue con dudas consulte al profesor !

UNIDAD Nº 5

IDENTIDADES TRIGONOMÉTICAS: APLICACIONES

¿CÓMO RESOLVEMOS ESTAS ECUACIONES?

Si senθ = 1/2 , entonces θ = ...

¿Es cierto cos(2θ) = 2cos(θ) ?...........

Si tan(θ) = 1/2 , entonces θ = ...

Si sec^2(θ) = 2 , entonces θ = ...

Al término del estudio de esta unidad se estará en condiciones de:

DEDUCIR LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS PARA SUMA Y DIFERENCIA DE ÁNGULOS, ÁNGULO DOBLE, ÁNGULO MITAD Y TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS A PARTIR DE LA IDENTIDAD FUNDAMENTAL APLICANDO CON PERTINENCIA EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DIVERSOS

PRUEBA DE ENTRADA

Antes de iniciar el estudio de esta unidad, resuelva previamente los Diez ejercicios que se presentan

1. ¿Cuál de las expresiones dadas completa la igualdad: $\cos^2(\theta) - \text{sen}^2(\theta)$ = ...

   a) cos(θ) b) cos(θ).sen(θ) c) sen(2θ) d) cos(2θ). 2ptos

2. Al simplificar la expresión: $\dfrac{sen(2\theta)}{sen(\theta)} - \dfrac{\cos(2\theta)}{\cos(\theta)}$, se obtiene: 2ptos

   a) cos(θ) b) sen(θ) c) sec(θ) d) tan(θ).

3. La expresión $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta + \text{sen}\,\theta)$ es igual a: 2ptos

   a) cos(π/4 + θ) b) sen(π/4 – θ) c) cos(π/4 – θ) d) sen(π/4 + θ).

4. Determine el valor de E = 5sen(2*x*) + 7cos(2*x*) sabiendo que: tan(*x*) = 5/7. 2ptos

   a) 8 b) 6 c) 7 d) 11/3

5. Al simplificar : $\dfrac{sen(38^{o}) + sen(22^{o})}{\cos(38^{o}) + \cos(22^{o})}$, se obtiene: 2ptos

   a) cos(45º) b) tan(30º) c) sen(30º) d) cot(45º).

6. Si sen(α) = 1/3, cos(θ) =1/4, con α en II-C y θ en I-C. Determine cos(α + θ).

   a) $\dfrac{1-\sqrt{5}}{12}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{15}}{12}$ c) $2-\sqrt{13}$ d) $\dfrac{-2\sqrt{2}-\sqrt{15}}{12}$. 2ptos

7. Si tan(*x* + *y*) = 1/2 y tan(*x* – *y*) = 1/3, siendo *x* e *y* medidas de ángulos en grados el valor de *x* es: 2ptos

   a) 22º30' b) 18º30' c) 37º d) 26º30'.

8. Exprese: cos(3π/5) – cos(π/5) como producto de funciones:

   a) – 2sen(2π/5).sen(π/5) b) 2cos(2π/5).cos(π/5) 2ptos

   c) –2cos(π/5).cos(3π/5) d) –2sen(π/5).sen(π/2)

9. Al resolver la ecuación cot(θ).tan(2θ) = 3, se obtiene: 2ptos

   a) {π/6 , 5π/6} b) {π/4 , 3π/4} c) {π/3 , 2π/3} d) {π/6 , π/5}

10. Simplificando: $K = \dfrac{sen(\theta - \pi/2).\tan(\theta - \pi).\csc(\theta - \pi/2)}{\cos(\theta - 3\pi/2).\cot(-\theta - \pi).\sec(\theta - 3\pi/2)}$, se tiene: 2ptos

    a) $\cos^2(\theta)$ b) $\text{sen}^2(\theta)$ c) $\cot^2(\theta)$ d) $\tan^2(\theta)$.

ITEM	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	NOTA
PUNTOS											

ESCALA DE PONDERACIÓN (CALIFICATIVO)

De 20 a 17: ¡**EXCELENTE**!, pase a estudiar el módulo 3

De 16 a 14: ¡**Bueno /Suficiente**!, repace los puntos que tuvo dificultad en el material

De 13 a 11: ¡**Regular/deficiente**! Estudie detenidamente los puntos que erraste.

De 10 a 0: ¡**Deficiente**!, estudie íntegramente esta unidad modular.

REQUISITOS

¡Recuerda que para abordar el estudio de esta unidad es necesario que conozcas

1. *Definición de las funciones trigonométricas: coseno, seno y tangente.*
2. *Simetrías en la circunferencia unitaria respecto al eje de coordenadas y al origen de coordenadas.*
3. *Características de las funciones trigonométricas.*
4. *Domino y rango de la funciones trigonométricas.*
5. *Fenómenos periódicos y funciones periódicos.*
6. *Gráfica de las funciones trigonométricas.*
7. *Productos notables.*
8. *Identidades trigonométricas consecuencias de la definición.*

OBJETIVOS

¿*Qué aprenderemos a través de esta unidad*?

1. *Recordar y aplicar las identidades trigonométricas fundamentales.*
2. *Demostrar equivalencias trigonométricas y simplificar expresiones con funciones trigonométricas.*
3. *Deducir identidades trigonométricas para la adición y sustracción de ángulos.*
4. *Deducir fórmulas y resolver problemas donde intervienen ángulos dobles y ángulo mitad.*
5. *Transformar expresiones trigonométricas aditivas a productos y viceversa.*
6. *Resolver e interpretar gráficamente las soluciones particulares y generales de ecuaciones trigonométricas.*

CONTENIDOS

¿*Con el estudio de la unidad, debe lograr lo siguiente*?

1. *Relación entre las funciones trigonométricas que se derivan de la definición en la circunferencia unitaria y aplicaciones para simplificar.*
2. *Identidades de Adición, sustracción y cofunciones para ángulos (o arcos).*
3. *Identidades de ángulo (o arco) doble y ángulo mitad.*
4. *Identidades con productos y factores.*
5. *Ecuaciones trigonométricas.*

EXPLORACIÓN-MOTIVACIÓN-PROBLEMATIZACIÓN

1. Igualdades: identidades y ecuaciones condicionales.

a) Analice los valores x e y en 3, para los cuales se cumplen las igualdades:

i) $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x - 3)$ i) $x^2 - x - 12 = 0$ iii) $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$

iv) $2x - 3y = 5$ v) $x^3 - x = 0$ vi) $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 - 2x + 4)$

AFIRMACIÓN:

Si $f(x) = g(x)$, se cumple para cualquier número real x para el que estén definidas tanto f como g, la igualdad se llama identidad.

Si $f(x) = g(x)$ se cumple para algunos números reales x, para los que están definidas f y g, la expresión se llama ecuación.

Según las dos afirmaciones anteriores, cuales de los seis ejemplos, son identidades o simplemente ecuación:

Ecuaciones: ....

Identidades: ....

b) Para las funciones trigonométricas identifique ¿Cuáles de las siguientes igualdades son identidades y cuáles ecuaciones?

(1) $\csc^2(\theta) - 2 = 0$ (4) $\cos^2(\theta) = 1 - \text{sen}^2(\theta)$

(2) $\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ (5) $3\text{sen}(\theta) - 1 = 0$

(3) $\text{sen}(\theta) = \text{sen}(\theta + 6\pi)$ (6) $\text{sen}(\theta) = \cos(\theta)$

¡*En caso de que la igualdad sea una identidad, demuestre, si la igualdad es una ecuación trate de hallar las soluciones*!

2. Obtención de los valores del seno y coseno a partir de sus gráficas:

En la figura 1, se representan las gráficas de las funciones $y = \text{sen}(x)$ e $y = \cos(x)$.

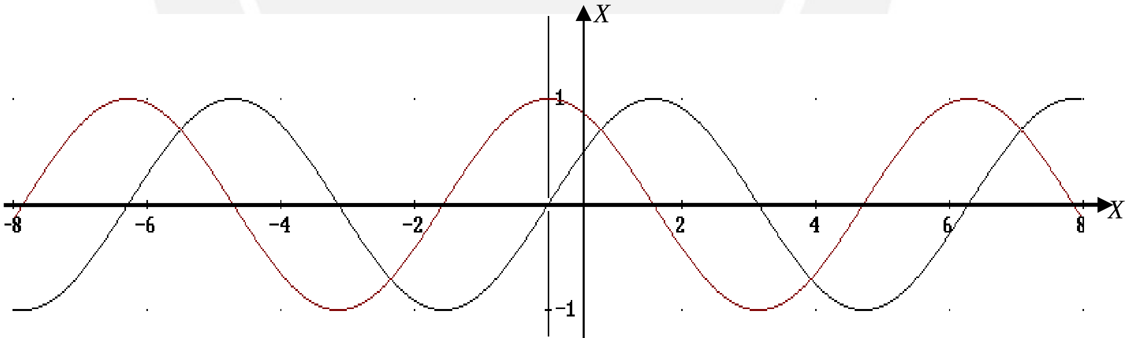


Figura 1

a) Identifique en la gráfica la curva que representa a la función: $y = \text{sen}(x)$ e $y = \cos(x)$.

b) Si $\cos(x) = 1$, entonces $x =$ ....; si $\text{sen}(x) = -1$, entonces $x =$ ....

c) Si $x = -4$, entonces $\cos(x) =$.................; si $x = 2$, entonces $\text{sen}(x) =$....................................

d) Identifique los puntos del $\text{sen}(x) = \cos(x)$: ....; y ¿qué expresión se tiene?................

e) ¿Qué números representan las abscisas de estos puntos? ....

f) ¿Qué números representan las ordenadas de estos puntos?...

g) ¿Si los puntos de intersección se transforman en medidas angulares, ¿qué representan las abscisas y ordenadas de cada punto?...

5.1. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Una igualdad de expresiones con funciones trigonométricas que se cumplen para todo valor donde están definidas las funciones trigonométricas dadas se denomina ***identidad trigonométrica.***

EJEMPLOS:

1) las siguientes expresiones trigonométricas:.

a) $\text{sen}^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta) = 1, \ \forall\ \theta \in 3.$

b) $\tan(\theta).\cot(\theta) = 1, \ \ \forall\ \theta \neq \pi n$ y $\theta \neq \pi/2 + \pi n, \ \ n \in 9.$

c) $\tan^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta), \ \forall\ \theta \neq \pi n, \ n \in 9.$

Son identidades trigonométricas, pues, las igualdades se cumplen para todos los valores de θ en el dominio indicado.

2) La expresión trigonométrica: $\cot^2(\alpha) + \tan^2(\alpha) = \sec^2(\alpha)$, ¿es una identidad trigonométrica?.

Solución:

Aquí, para $\alpha \neq \pi n$ y $\theta \neq \pi/2 + \pi n, \ n \in 9$, están definidas las funciones: tangente, cotangente y secante.

Para $\alpha = \pi/4$, tenemos: $\tan^2(\pi/4) = 1$, $\cot^2(\pi/4) = 1$ y $\sec^2(\pi/4) = 2$, luego: 1 + 1 = 2

Para $\alpha = \pi/6$, tenemos: $\tan^2(\pi/3) = 3$, $\cot^2(\pi/3) = 1/3$ y $\sec^2(\pi/3) = 4$, reemplazando en la igualdad, se tiene: $3 + 1/3 \neq 4$. Por tanto, la expresión dada, no es una identidad trigonométrica.

5.1.1. Identidades trigonométricas fundamentales

En la sección 3.4 de la unidad 3, hemos presentado algunas propiedades básicas, que resultan de la definición de las funciones trigonométricas y otras propiedades que resultan de algunas relaciones entre funciones trigonométricas.

Recordando estas, tenemos:

1) Para cualquier $(x , y) \in \mathcal{C}_1(O)$, se tiene $x^2 + y^2 = 1$, y para $\theta \in 3$. $\cos(\theta) = x$, $\text{sen}(\theta) = y$; de esto resulta que:

i) $\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta) = 1, \ \ \forall\ \theta \in 3.$

ii) $\tan^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta), \ \ \ \forall\ \theta \neq \pi n, n \in 9$. Se obtiene, dividiendo i) entre $\cos^2(\theta)$.

ii) $\cot^2(\theta) + 1 = \csc^2(\theta), \ \ \forall\ \theta \neq \pi/2 + \pi n, \ n \in 9$. Se obtiene, dividiendo i) entre $\text{sen}^2(\theta)$.

2) De las definiciones de la función tangente y cotangente:

i) $\tan(\theta) = \dfrac{sen(\theta)}{\cos(\theta)}$, para todo $\theta \neq \pi/2 + \pi n, \ n \in 9.$

ii) $\cot(\theta) = \dfrac{\cos(\theta)}{sen(\theta)}$, para todo $\theta \neq \pi n, n \in 9.$

3) De la definición la secante, cosecante y cotangente, resultan:

i) $\sec(\theta) = \dfrac{1}{\cos(\theta)}$, o $\sec(\theta).\cos(\theta) = 1$, para $\theta \neq \pi/2 + \pi n, \ n \in 9.$

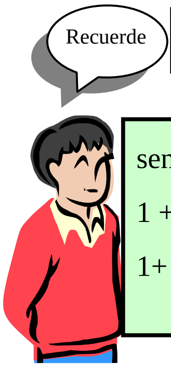
ii) $\csc(\theta) = \dfrac{1}{sen(\theta)}$ o $\csc(\theta).\text{sen}(\theta) = 1$, para $\theta \neq \pi n, n \in 9.$

iii) $\cot(\theta) = \dfrac{1}{\tan(\theta)}$ o $\tan(\theta).\cot(\theta) = 1$, para $\theta \neq \pi n$ y $\theta \neq \pi/2 + \pi n, \ n \in 9.$

4) Relaciones para opuestos de arcos o ángulos:

i) $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ ii) $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}(\theta)$ iii) $\tan(-\theta) = \; = -\tan(\theta)$

Resumen de algunas identidades fundamentales o básicas:



Pitagórica	**Por cociente**	**Recíprocas**
$\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$	$\tan(\theta) = \dfrac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}$	$\text{sen}(\theta).\csc(\theta) = 1$
$1 + \tan^2(\theta) = \sec^2\theta)$	$\tan(\theta) = \dfrac{\cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)}$	$\cos(\theta).\sec(\theta) = 1$
$1 + \cot^2(\theta) = \csc^2(\theta)$		$\tan(\theta).\cot(\theta) = 1$

5.2. IDENTIDADES DERIVADAS

Las identidades trigonométricas fundamentales sirven para convertir una expresión trigonométrica en otra equivalente, simplificar "expresiones trigonométricas" y para resolver ecuaciones.

RECUERDE:

¡*Las identidades trigonométricas son expresiones donde intervienen funciones trigonométricas equivalentes escrito de distintas maneras*!

Existen diversos tipos de ejercicios y problemas que se presentan en identidades trigonométricas, entre ellos destacan:

5.2.1. Problemas de demostración

Consiste en transformar una expresión trigonométrica hasta obtener la expresión que se ha dado como equivalente o idéntica. Para demostrar se elige la expresión de apariencia más "complejo", para llegar a la más simple mediante identidades. También se puede trabajar simultáneamente con los dos miembros (método indirecto) y transformarlas hasta obtener expresiones idénticas.

EJEMPLOS:

1) Exprese la función $\text{sen}(\theta)$ en términos de $\cos(\theta)$

Solución:

De: $\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta) = 1$, transponiendo término se tiene: $\text{sen}^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$,

Eliminando el exponente 2, obtenemos: $sen(\theta) = \pm\sqrt{1-\cos^2(\theta)}$.

2) Demuestre que: $\cos^4(\theta) + \text{sen}^4(\theta) = 1 - 2\text{sen}^2(\theta).\cos^2(\theta)$

Prueba:

Como: : $\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta) = 1$, $\forall\ \theta \in 3$ (identidad básica)

$(\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta))^2 = (1)^2$ (Elevando al cuadrado miembro a miembro)

$\cos^4(\theta) + 2\mathrm{sen}^2(\theta).\cos^2(\theta) + \mathrm{sen}^4(\theta) = 1$ (desarrollo del binomio al cuadrado)

$\cos^4(\theta) + \mathrm{sen}^4(\theta) = 1 - 2\mathrm{sen}^2(\theta).\cos^2(\theta)$ (transposición de términos)

3) Demuestre: $\tan(\theta) + \cot(\theta) = \sec(\theta).\csc(\theta)$, $\forall\theta \in 3-\{\pi/2 + 2n\pi, \pi+2n\pi\}$, $n\in 9$.

Demostración:

Se sabe que: $\tan(\theta) = \dfrac{sen(\theta)}{\cos(\theta)}$ y $\cot(\theta) = \dfrac{\cos(\theta)}{sen(\theta)}$. (definición de tan y cot)

$$\tan(\theta) + \cot(\theta) = \frac{sen(\theta)}{\cos(\theta)} + \frac{\cos(\theta)}{sen(\theta)}$$ (sumando m. a.m)

$$= \frac{sen^2(\theta)+\cos^2(\theta)}{sen(\theta).\cos(\theta)}$$ suma

$$= \frac{1}{sen(\theta).\cos(\theta)} = \frac{1}{sen(\theta)}.\frac{1}{\cos(\theta)}$$ Identidad y producto.

$$= \csc(\theta).\sec(\theta)$$ Definición de csc y sec.

4) Demuestre que: $\mathrm{sen}^6(\theta) + \cos^6(\theta) = 1 - 3\mathrm{sen}^2(\theta).\cos^2(\theta)$. ....

....

5) Demuestre que: $\cos(\theta) + \tan(\theta).\mathrm{sen}(\theta) = \sec(\theta)$.

Demostración: (complete los espacios)

$$\cos(\theta) + \tan(\theta).\mathrm{sen}(\theta) = ...+ \left(\frac{........}{........}\right). ......$$ Definición de tangente.

$$= \frac{........}{........} + \frac{........}{........}$$ Efectuando la suma

$$= \frac{..........+.......}{......}$$ Suma de fracciones homogéneas

$$= \frac{1}{.........} = ...$$ Definición de secante

6) Demuestre que: $\cot(\theta).(\cot(\theta) + \tan(\theta)) = \csc^2(\theta)$

Demostración: (justifique los pasos dados en la demostración)

$$\cot(\theta).(\cot(\theta) + \tan(\theta)) = \frac{1}{\tan(\theta)}\left(\frac{1}{\tan(\theta)} + \tan(\theta)\right)$$ ....

$$= \frac{1}{\tan^2(\theta)} + 1 = \frac{1+\tan^2(\theta)}{\tan^2(\theta)}$$ ....

$$= \frac{\sec^2(\theta)}{\tan^2(\theta)} = \frac{1/\cos^2(\theta)}{sen^2(\theta)/\cos^2(\theta)}$$ ....

$$= \frac{1}{sen^2(\theta)} = \csc^2(\theta)$$ ....

7) Demuestre que: $\left(\dfrac{1+\tan(\theta)}{1-\tan(\theta)}\right)^2 = \dfrac{1+2sen(\theta).\cos(\theta)}{1-2sen(\theta).\cos(\theta)}$ ....

....

5.2.2. Problemas de Simplificación

Se busca reducir o simplificar una expresión dada usando identidades conocidas o demostradas y operaciones algebraicas.

EJEMPLOS:

1) Simplifique: $E = \tan(\theta) + \dfrac{\sec(\theta)}{sen(\theta)}(2\cos^2(\theta) - 1)$.

Solución:

Como $\tan(\theta) = \dfrac{sen(\theta)}{\cos(\theta)}$ y $\sec(\theta) = \dfrac{1}{\cos(\theta)}$, se tiene:

$$E = \frac{sen(\theta)}{\cos(\theta)} + \frac{2\cos^2(\theta) - 1}{sen(\theta).\cos(\theta)}$$

$$E = \frac{sen^2(\theta) + 2\cos^2(\theta) - 1}{sen(\theta).\cos(\theta)}$$ Efectuando operaciones.

$$E = \frac{(1 - \cos^2(\theta)) + 2\cos^2(\theta) - 1}{sen(\theta).\cos(\theta)}$$ $sen^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$.

$$E = \frac{\cos(\theta)}{sen(\theta)} = \cot(\theta)$$ simplificando.

2) Simplifique la expresión : $\dfrac{sen^2(\theta) + 2sen(\theta) + 1}{\cos^2(\theta)}$

<u>Solución:</u>

$\dfrac{sen^2(\theta) + 2sen(\theta) + 1}{\cos^2(\theta)}$ = ... Desarrollo del cuadrado de un binomio

= .... $sen^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$.

= .... (diferencia de cuadrados)

= .... Simplificando factores iguales.

3) Simplifique la expresión: $E = \dfrac{1 - \tan(\beta) + \sec(\beta).\csc(\beta)}{1 - \cot(\beta) + \sec(\beta).\csc(\beta)}$

Solución:

$$E = \frac{1 - \tan(\beta) + \sec(\beta).\csc(\beta)}{1 - \cot(\beta) + \sec(\beta).\csc(\beta)} \Rightarrow E = \frac{1 - \dfrac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta} + \dfrac{1}{\cos\beta.\text{sen}\,\beta}}{1 - \dfrac{\cos\beta}{\text{sen}\,\beta} + \dfrac{1}{\cos\beta.\text{sen}\,\beta}}$$ Igualdad recíproca

$\Rightarrow E =$ .... Denominador común

$$\Rightarrow E = \frac{\cos\beta.\text{sen}\,\beta + 1 - \text{sen}^2\beta}{\cos\beta.\text{sen}\,\beta + 1 - \cos^2\beta}$$ Simplificando

$\Rightarrow\ E\ =$ .... Igualdad pitagórica

$\Rightarrow\ E = \dfrac{\cos\beta.(\text{sen}\,\beta + \cos\beta)}{\text{sen}\,\beta(\cos\beta + \text{sen}\,\beta)}$ Factorizando

Términos semejantes

$\Rightarrow E =$ ....Igualdad por cociente

4) Reduce la siguiente expresión: A = $(1-\text{sen}(\alpha))(\sec(\alpha)+\tan(\alpha))$.

Solución:

Efectuando la multiplicación indicada :

A = $(1-\text{sen}(\alpha))(\sec(\alpha)+\tan(\alpha))$ = sec(α)+tan(α) – sen(α).sec(α) – sen(α).tan(α),

Expresamos en términos de senos y cosenos.

$$A = \frac{1}{\cos(\alpha)} + \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \text{sen}(\alpha)\frac{\text{sen}(\alpha))}{\cos(\alpha)}.$$ Simplificando:

$$A = \frac{1}{\cos(\alpha)} - \frac{\text{sen}^2(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{1-\text{sen}^2(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\cos^2(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \cos(\alpha)$$

Luego: A = cos(α).

5.2.3. Problemas con condición dada

Dada una condición, se trata de simplificar otras expresiones en cuyo proceso se reemplaza dicha condición.

EJEMPLOS

1) Simplificar E = $(1 - \cot(\alpha))^2 + (1 - \tan(\alpha))^2$, sabiendo que: sec(α) – csc(α) = – 4.

Solución:

E = $(1 - 2\cot(\alpha) + \cot^2(\alpha)) + (1 - 2\tan(\alpha) + \tan^2(\alpha))$ desarrollando los cuadrados.

E = $(1 + \cot^2(\alpha)) - 2(\cot(\alpha) + \tan(\alpha)) + (1 + \tan^2(\alpha))$ asociando términos.

E = $\csc^2(\alpha) - 2(\sec(\alpha).\csc(\alpha)) + \sec^2(\alpha)$ usando identidades.

E = $(\csc(\alpha) - \sec(\alpha))^2$ Desarrollando binomio al cuadrado.

E = $(-4)^2 = 16$ Usando condición

2) Sabiendo que: 3sen(θ) + 4cos(θ) = 5. Calcular K = 3csc(θ) + 4sen(θ).

Solución:

Del dato: 3sen(θ) + 4cos(θ) = 5 se deduce $\sqrt{3^2+4^2} = 5$, entonces:

sen(θ) = $\dfrac{3}{5}$ y cos(θ) = $\dfrac{4}{5}$

Luego: $K = 3(\dfrac{5}{3}) + 4(\dfrac{5}{4}) = 5 + 5 = 10$

3) Sabiendo que tan(α) + cot(α) = 3. Calcular $\tan^3(\alpha) + \cot^3(\alpha)$.

Solución:

Sea: $M = \tan^3(\alpha) + \cot^3(\alpha)$, elevando al cubo:

$[\tan(\alpha) + \cot(\alpha)]^3 = 3^3 \Rightarrow \underbrace{\tan^3(\alpha) + \cot^3(\alpha)} + \underbrace{3\tan(\alpha).\cot(\alpha)}\underbrace{[\tan(\alpha) + \cot(\alpha)]} = 27$

M 1 3

Reemplazando valores: $M + 3(3) = 27$. Luego: $M = 18$

4) Si $\text{sen}^2(\alpha) + \text{sen}^2(\beta) = 1/8$, calcular: $\cos^2(\alpha).\cos^2(\beta) - \text{sen}^2(\alpha).\text{sen}^2(\beta)$.

Solución:

Sea: $E = \cos^2(\alpha).\cos^2(\beta) - \text{sen}^2(\alpha).\text{sen}^2(\beta)$, entonces:

$E = [1 - \text{sen}^2(\alpha)].[1 - \text{sen}^2(\beta)] - \text{sen}^2(\alpha).\text{sen}^2(\beta)$,

$E = 1 - \text{sen}^2(\alpha) - \text{sen}^2(\beta) + \text{sen}^2(\alpha).\text{sen}^2(\beta) - \text{sen}^2(\alpha).\text{sen}^2(\beta)$

$E = 1 - [\text{sen}^2(\alpha) + \text{sen}^2(\beta)] = 1 - 1/8 = 7/8$.

EJERCICIOS

1. Desarrolle según el caso, utilizando las identidades fundamentales:

a) Demuestre: $2\csc(\theta) = \dfrac{\text{sen}\,(\theta)}{1+\cos\,(\theta)} + \dfrac{1+\cos\,(\theta)}{\text{sen}\,(\theta)}$

b) Simplifique: $\dfrac{\sec\,(\theta) - \csc(\theta)}{\sec(\theta)+\csc(\theta)} + \dfrac{\tan\,(\theta) - 1}{\tan\,(\theta)+1}$

c) Simplifique: $G = [\cot(\alpha) + 1].[\cot(\alpha) - 1] - \cot^2(\alpha)$

d) Simplifique: $Q = \tan(\alpha)[1 - \cot^2(\alpha)] + \cot(\alpha)[1 + \tan^2(\alpha)]$

e) Si $\tan(\alpha) + \cot(\alpha) = 3$. Calcule: $\text{sen}^6(\alpha) + \cos^6(\alpha)$

f) Si $1 - \text{sen}^4(\alpha) - \cos^4(\alpha) = \frac{3}{2}\,\text{sen}(\alpha)$, $\alpha \in$ IV-C. Calcule $K = \cos(\alpha).\cot(\alpha)$

2. Si $\cos(\beta) = -3/5$ y $E(\beta)$ es un punto del II-C, determine el valor de las otras cinco funciones.

3. Si $\csc(\alpha) = 3$ y $E(\alpha)$ es un punto del IV-C, encontrar $\tan(\alpha)$.

4. Demuestre que: $\cot(\theta) - \tan(\theta) = \dfrac{2\cos^2(\theta) - 1}{sen(\theta).\cos(\theta)}$, $\forall\ \theta \neq$ ....

5. Demuestre: $\dfrac{1+\sec(\theta)}{sen(\theta)+\tan(\theta)} = \csc(\theta)$, $\forall\ \theta \neq$ ....

6. Si $\tan(\theta) + \cot(\theta) = 3$. Calcule: $E = \dfrac{\sec^2(\theta)}{\cot(\theta)} + \dfrac{\cos^2(\theta)}{\tan(\theta)}$, $\forall\ \theta \neq$ ....

7. Simplifique: $E = \left(\dfrac{\sec(\theta)+\tan(\theta)}{\cos(\theta)+\cot(\theta)}\right) + \left(\cot(\theta) + \dfrac{sen(\theta)}{\cos(\theta)+1}\right)$, $\forall\ \theta \neq$ ....

Comprueba tus Aprendizajes

1. Complete la tabla de relación de dos a dos, entre las funciones trigonométricas:

	sen(θ)	cos(θ)	tan(θ)	cot(θ)	sec(θ)	csc(θ)

sen(θ) =						
cos(θ) =	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}$					
tan(θ) =						
cot(θ) =						
sec(θ) =						
csc(θ) =						

2. Demuestre las siguientes identidades:

a) $\dfrac{\cos^2(\theta)-3\cos(\theta)+2}{sen^2(\theta)}=\dfrac{2-\cos(\theta)}{1-sen(\theta)}$ b) $\dfrac{\tan(\theta)}{sen(\theta)-2\tan(\theta)}=\dfrac{1}{\cos(\theta)-2}$

c) $\dfrac{2sen^2(\theta)+3\cos(\theta)-3}{sen^2(\theta)}=\dfrac{2.\cos(\theta)-1}{1+\cos(\theta)}$ d) $\dfrac{\sec^4(\theta)-1}{\tan^2(\theta)}=2+\tan^2(\theta)$

3. Halle el valor de θ en 3 para las siguientes igualdades o identidades:

a) $\sqrt{1-\cos^2(\theta)}=1$ b) $\sqrt{1-sen^2(\theta)}=1$ c) cot(θ) = tan(θ)

d) $\dfrac{sen(\theta)}{\sqrt{1-sen^2(\theta)}}=2$ e) sec(θ) = csc(θ) f) sen(θ) = cos(θ)

4. Sabiendo que tan(α) + cot(α) = 3. Calcule E = $\sec^2(\alpha)+\csc^2(\alpha)+\tan^4(\alpha)+\cot^4(\alpha)$.

5. Simplifique la expresión: $K=\dfrac{sen(\theta)+\cos(\theta)+\tan(\theta)-\cot(\theta)}{1-\sec(\theta)+\csc(\theta)}$.

6. Si cos(θ) – sen(θ) = $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$, calcule el valor de: $K=\dfrac{\tan(\theta)+\cot(\theta)}{\sec^2(\theta)+\csc^2(\theta)}$

7. Si sec(θ).csc(θ) = $2\sqrt{2}$, calcule $\text{sen}^6(\theta)+\cos^6(\theta)$.

ASÍGNATE TUS PUNTAJES

¿*Cuáles serían los puntajes que te asignas en el desarrollo de cada uno de las preguntas de los Ejercicios de comprobación de tus Aprendizajes*?

Ítems	1(3pts)	2(3pts)	3(3pts)	4(3pts)	5(3pts)	6 (3pts)	7(2pts)	NOTA
Puntaje								

¡ *quítate puntos por cada error que tengas* !

5.3. IDENTIDADES PARA SUMAS Y DIFERENCIA

5.3.1. Identidades de adición y sustracción para el coseno

Las propiedades trigonométricas analizadas y estudiadas hasta el momento se refieren a una variable $\alpha \in 3$. Ahora veremos propiedades para dos variables α y β, que se inicia con "**identidad del coseno de la diferencia**":

Esta propiedad nos permitirá calcular, por ejemplo cos(15º) = cos(60º − 45º) o
cos(π/12) = cos(π/4 − π/6) o cos(π/12) = cos(π/3 − π/4), etc.

Propiedad Fundamental: Dados α y β, en 3, se cumple:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha).\cos(\beta) + \text{sen}(\alpha).\text{sen}(\beta).$$

Para esto sean α, β en 3:

i) Si $\alpha = \beta$, se tiene $\alpha - \beta = 0$ y $\cos(\alpha - \beta) = \cos(0) = 1 = \cos(\alpha).\cos(\alpha) + \text{sen}(\alpha).\text{sen}(\alpha) = \text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

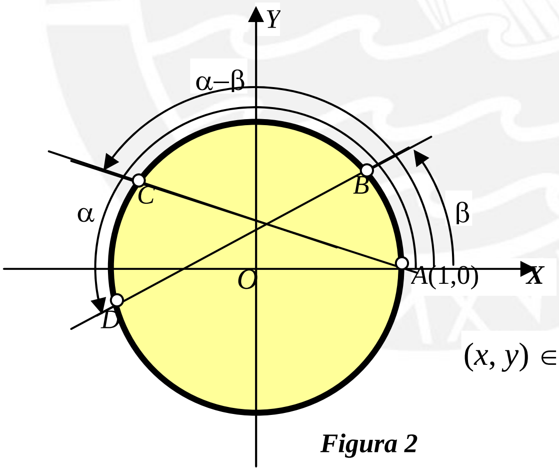
ii) Si $\alpha \neq \beta$, sea $\alpha > \beta$ o $\alpha - \beta > 0$, por la periodicidad de las funciones trigonométricas seno y coseno, consideramos: α , $\beta \in \,]0\,,\,2\pi[$.

En la $\mathcal{C}_1(O)$ se tienen: E(0) = (1 , 0), E(α) = (a , b), E(β) = (c , d) y E($\alpha-\beta$) = (e , f); y por definición del coseno y seno, se tiene:

$a = \cos(\alpha)$, $c = \cos(\beta)$, $e = \cos(\alpha-\beta)$, $1 = \cos(0)$.

$b = \text{sen}(\alpha)$, $d = \text{sen}(\beta)$, $f = \text{sen}(\alpha-\beta)$, $0 = \text{sen}(0)$, es decir: $a^2 + b^2 = \text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ y $\text{sen}^2(\beta) + \cos^2(\beta) = 1$.

Por otro lado, en la figura 2, $m(\overset{\frown}{AB}) = \beta$, $m(\overset{\frown}{AD}) = \alpha = m(\overset{\frown}{AC}) + m(\overset{\frown}{CD})$, $m(\overset{\frown}{AC}) = \alpha-\beta$ y $m(\overset{\frown}{CD}) = \beta$. Luego también $m(\overset{\frown}{AC}) = m(\overset{\frown}{BD}) = \alpha - \beta$, de esto: d($A$, C) = d(B , D).



HACIENDO USO DE UN COMPÁS, Compruebe que:
d(B, D) = d(A , C)
y
d(A, B) = d(C , D)

$(x, y) \in \mathcal{C}_1(O)$: $x^2 + y^2 = 1$

Figura 2

Luego:

$$d(D\,,B) = d(A\,,C) \Rightarrow \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2} = \sqrt{(1-e)^2 + (0-f)^2}$$

$$\Rightarrow (c-a)^2 + (d-b)^2 = (1-e)^2 + (0-f)^2$$

$$\Rightarrow c^2 - 2ac + a^2 + d^2 - 2bd + b^2 = 1 - 2e + e^2 + f^2$$

$$\Rightarrow (c^2 + d^2) + (a^2 + b^2) - 2ac - 2bd = 1 - 2e + (e^2 + f^2)$$

Y como $c^2 + d^2 = 1$, $a^2 + b^2 = 1$ y $e^2 + f^2 = 1$, la ecuación se transforma en

$$e = a.c + d.b$$

Al sustituir e, a, c, b y d, por las expresiones trigonométricas: cos($\alpha-\beta$), cos(β), cos(α), sen(β) y sen(α), respectivamente, obtenemos:

$$\boxed{\mathbf{\cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta).\cos(\alpha) + \text{sen}(\beta).\text{sen}(\alpha) = \cos(\alpha).\cos(\beta) + \text{sen}(\alpha).\text{sen}(\beta)}}$$

Propiedad derivada:

Dado α y β en 3, si sustituimos β por –β en la igualdad de la propiedad anterior, resulta:

cos(α+β) = cos(α–(–β)) = cosα.cos(–β) + sen(α).sen(–β) = cos(α).cos(β) – sen(α).sen(β).

Luego: cos(α + β) = cos(α).cos(β) – sen(α).sen(β)

EJEMPLOS:

1) Determine cos(π/12).

Solución:

Como $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, y sen(π/4) = $\frac{\sqrt{2}}{2}$, cos(π/4) = $\frac{\sqrt{2}}{2}$, sen(π/6) = $\frac{1}{2}$ y cos(π/6) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

entonces: cos(π/12) = cos(π/4 – π/6).

= cos(π/4) cos(π/6) + sen(π/4).sen(π/6) (propiedad fundamental).

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

2) Halle cos(8º). ¡Para esto recordar el seno y coseno de 45º y 53º!. Entonces:

Solución:

cos(8º) = cos(53º–45º) = cos(53º) cos(45º) + sen(53º).sen(45º)

$$= \frac{3}{5}.\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{4}{5}.\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

3) Calcule cos(7º). ¡Recordando el seno y coseno de: 37º y 30º!

Solución:

Procediendo en forma análoga a los ejemplos 1) y 2), se obtiene: cos(7º) = $\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$.

4) Para β ∈ 3, se cumple que: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$ = sen(β), $sen\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos(\beta)$ y

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cot(\beta)$.

Solución:

-) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos(\frac{\pi}{2}).\cos(\beta) + sen(\frac{\pi}{2}).sen(\beta)$ = (0).cos(β)+ (1)sen(β) = sen(β).

Luego:

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \text{sen}(\beta).}$$

-) También según la igualdad anterior se tiene:

$sen\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right] = sen\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$. = $\cos(\beta)$, es decir:

$$sen\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos(\beta)$$

-) Para terminar, usando los dos resultados anteriores, se tiene:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\frac{sen(\pi/2-\beta)}{\cos(\pi/2-\beta)}=\frac{\cos(\beta)}{sen(\beta)}=\cot(\beta)\text{, es decir:}$$

O sea:

$$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cot(\alpha)}$$

OBSERVACIÓN:

En los resultados anteriores, si β es la medida de un ángulo agudo, 0 < β < π/2, entonces π/2 – β es la medida de su ángulo complementario. La expresión cos(π/2–β) = sen(β), indica que el coseno de (π/2 – β) es el seno de β, es decir: el "coseno" de un ángulo es el "seno" de su ángulo complementario, análogamente, la cotangente es la tangente de su complemento, y la cosecante es la secante de su complemento.

OTRAS PROPIEDADES:

Para α, β ∈ 3, se cumplen:

1) sen(α – β) = sen(α).cos(β) – sen(β).cos(α)

2) sen(α + β) = sen(α).cos(β) + sen(β).cos(α)

3) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha).\tan(\beta)}$

4) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha).\tan(\beta)}$

Prueba:

1) Por el ejemplo anterior:

$$sen(\alpha-\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right],\quad \text{pero } \frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)=\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-(-\beta) \text{ y se tiene}$$

$$=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-(-\beta)\right]=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).\cos(-\beta)+sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).sen(-\beta)$$

= sen(α).cos(β) + cos(α).sen(–β) = sen(α).cos(β) – cos(α).sen(β)

Luego:

sen(α – β) = sen(α).cos(β) – cos(α).sen(β)

Análogamente:

2) sen(α+β) = sen(α–(–β)) = sen(α).cos(β) – cos(α).sen(–β) = sen(α).cos(β) + cos(α).sen(β),

luego:

sen(α + β) = sen(α).cos(β) + cos(α).sen(β)

3) $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{sen(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \dfrac{sen(\alpha).\cos(\beta) - \cos(\alpha)sen(\beta)}{\cos(\alpha).\cos(\beta) + sen(\alpha)sen(\beta)}$ (propiedades anteriores):

$$= \frac{\dfrac{sen(\alpha).\cos(\beta)}{\cos(\alpha).\cos(\beta)} - \dfrac{\cos(\alpha)sen(\beta)}{\cos(\alpha).\cos(\beta)}}{\dfrac{\cos(\alpha).\cos(\beta)}{\cos(\alpha).\cos(\beta)} + \dfrac{sen(\alpha)sen(\beta)}{\cos(\alpha).\cos(\beta)}} = \frac{\dfrac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \dfrac{sen(\beta)}{.\cos(\beta)}}{1 + (\dfrac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)})(\dfrac{sen(\beta)}{\cos(\beta)})}$$

(dividendo entre cos(α).cos(β)) y simplificando

Luego:

$$\boxed{\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha).\tan(\beta)}}$$

4) $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{sen(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \dfrac{sen(\alpha).\cos(\beta) + \cos(\alpha)sen(\beta)}{\cos(\alpha).\cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta)}$ (propiedades anteriores)

$$= \frac{\dfrac{sen(\alpha).\cos(\beta)}{\cos(\alpha).\cos(\beta)} + \dfrac{\cos(\alpha)sen(\beta)}{\cos(\alpha).\cos(\beta)}}{\dfrac{\cos(\alpha).\cos(\beta)}{\cos(\alpha).\cos(\beta)} - \dfrac{sen(\alpha)sen(\beta)}{\cos(\alpha).\cos(\beta)}} = \frac{\dfrac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)} + \dfrac{sen(\beta)}{.\cos(\beta)}}{1 - (\dfrac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)})(\dfrac{sen(\beta)}{\cos(\beta)})}$$

(dividendo entre cos(α).cos(β)) y simplificando

Luego:

$$\boxed{\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha).\tan(\beta)}}$$

Las identidades anteriores se resumen en:

<u>Identidades para la suma y diferencia de números reales:</u>

$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha).\cos(\beta) - sen(\alpha).sen(\beta), \quad \forall\ \alpha, \beta \in 3.$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha).\cos(\beta) + sen(\alpha).sen(\beta)\ , \forall\ \alpha, \beta \in 3.$

$sen(\alpha + \beta) = sen(\alpha).\cos(\beta) + \cos(\alpha).sen(\beta), \quad \forall\ \alpha, \beta \in 3.$

$sen(\alpha - \beta) = sen(\alpha).\cos(\beta) - \cos(\alpha).sen(\beta), \quad \forall\ \alpha, \beta \in 3.$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha).\tan(\beta)} \text{ y } \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha).\tan(\beta)}\ ;\ \alpha, \beta \neq \pi/2 + n\pi$$

<u>Identidades de cofunciones:</u>

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = sen(\beta). \qquad sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha) \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot(\alpha)$$

EJEMPLOS:

1) Simplifique: $\cos(\alpha - \pi)$.

Solución:

$\cos(\alpha - \pi) = \cos(\alpha).\cos(\pi) + sen(\alpha).sen(\pi)$ (propiedad fundamental)

$= \cos(\alpha).(-1) + \text{sen}(\alpha).(0)$ (evaluando seno y coseno en π)

$= -\cos(\alpha)$ (efectuando el producto)

2) Encuentre el valor de $tan(75^\circ)$

Solución:

Como $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$, usando la fórmula de la suma de ángulos, tenemos:

$$tan(75^\circ) = tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan(45^\circ) + \tan(30^\circ)}{1 - \tan(45^\circ).\tan(30^\circ)} = \frac{1 + \sqrt{3}/3}{1 - (1)(\sqrt{3}/3)} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6}$$

Luego, $tan(75^\circ) = 2 + \sqrt{3}$

3) Compruebe: $\dfrac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha).sen(\beta)} = \tan(\alpha) + \cot(\beta)$, para $\alpha \neq \pi k$, $\beta \neq \pi/2 + 2\pi k$, $K \in 9$.

Prueba:

$\dfrac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha).sen(\beta)}$ = ... (coseno de la diferencia)

$= \dfrac{\cos(\alpha).\cos(\beta)}{\cos(\alpha).sen(\beta)} + \dfrac{sen(\alpha).sen(\beta)}{\cos(\alpha).sen(\beta)}$ (..................................)

$= \dfrac{\cos(\beta)}{sen(\beta)} + \dfrac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha).}$ (simplificando $\cos\alpha$ y $\text{sen}\beta$)

$= \cot(\beta) + \tan(\alpha)$ (..................................)

4) Calcule el valor de $\tan(\alpha)$, si $\tan(\alpha - \beta) = \sqrt{3}$ y $\tan(\beta) = 1$.

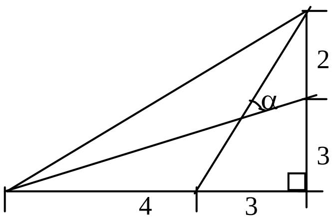
Solución:

Sabemos que: $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha).\tan(\beta)}$. Luego, $\sqrt{3} = \dfrac{\tan(\alpha) - 1}{1 + \tan(\alpha)}$, de aquí:

$\sqrt{3} + \sqrt{3}\tan(\alpha) = \tan(\alpha) - 1$, despejando: $\tan(\alpha) = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}}$

EJERCICIOS:

1. En el gráfico mostrado calcule $\tan(\alpha)$



2. Siendo $\alpha + \beta = 45^\circ$ y $\tan(\alpha) = 4/5$. Calcule $\tan(\beta)$.

3. Si $\cos(\alpha + x) = 5\cos(\alpha - x)$. Determine $\tan(\alpha).\tan(x)$

Comprueba tus Aprendizajes

1. En cada uno de los siguientes casos calcule el valor de α, si se sabe que se encuentra en el primer cuadrante:

a) sen(α).cos(10º) + cos(α).sen(10º) = sen(53º)

b) sen(α).cos(32º) + cos(α).sen(32º) = cos(40º) (3pts)

c) cos(α).cos(45º) – sen(α).sen(45º) = cos(–59º)

d) cos(α).cos(75º) + cos(α).sen(15º) = cos(35º).

2. Calcule el valor exacto de: (4pts)

a) sen(15º) b) cos(145º) c) tan(125º)

3. Calcule el valor exacto de: (4pts)

a) sen(67º) b) cos(8º) c) cot(7º).

4. Calcule: a) $\dfrac{\tan(110^\circ) - \tan(50^\circ)}{1+\tan(110^\circ).\tan(50^\circ)}$ b) $\dfrac{\tan(27^\circ)+\tan(18^\circ)}{1-\tan(27^\circ).\tan(18^\circ)}$ (3pts)

5. Simplifique: a) $\dfrac{\sqrt{2}.\cos(\theta+45^\circ)}{sen(\theta)} - ctg(\theta)$ b) $\dfrac{sen(40^\circ) - sen(20^\circ)}{sen(80^\circ)}$ (3pts)

6. Dados $sen(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ y $\cos(\beta) = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, halle:

a) cos(α–β) b) sen(α–β) c) cos(α + β) d) tan(α–β) (3pts)

ASÍGNATE TUS PUNTAJES

¿Cuáles serían los puntajes que te asignas en el desarrollo de cada uno de las preguntas de los Ejercicios de comprobación de tus Aprendizajes?

Ítems	1	2	3	4	5	6	NOTA
Puntaje							

5.4. IDENTIDADES DEL DOBLE Y DE LA MITAD

Deducimos a partir de las identidades de la adición, válidos para todo número real α donde están definidos la funciones trigonométricas correspondientes, como casos particulares.

5.4.1 Identidades del doble

a) Como: sen(α + β) = sen(α).cos(β) + cos(α).sen(β), ∀ α, β ∈ 3. En particular, si α = β, se tiene sen(α + α) = sen(2α). Luego: sen(α + α) = 2sen(α).cos(α).

b) Como: cos(α + β) = sen(α).cos(β) + cos(α).sen(β), ∀ α, β ∈ 3. En particular, si α = β, se tiene cos(α + α) = cos(2α). Luego cos(2α) = $\cos^2$(α) – sen^2(α).

Además, usando la identidad: $\cos^2$(α) + sen^2(α) = 1, se tiene: sen^2(α) = 1 – $\cos^2$(α) ó $\cos^2$(α) = 1 – sen^2(α). Reemplazando en la identidad anterior se tiene:

cos(2α) = 1– sen^2(α) – sen^2(α) = 1 – 2sen^2(α) ó cos(2α) = 1– 2sen^2(α).

c) De tan(α + β) = $\dfrac{1+\tan(\alpha).\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha).\tan(\beta)}$, ∀ α, β ∈ 3. En particular, si α = β, se tiene

tan(α + α) = tan(2α). Luego, tan(2α) = $\dfrac{1+\tan(\alpha).\tan(\alpha)}{1-\tan(\alpha).\tan(\alpha)} = \dfrac{1+\tan^2(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$, α ≠ π/4 + kπ

EJEMPLOS:

1) Compruebe que: $\dfrac{1-\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}$ = $\cos^2$(α) – sen^2(α)

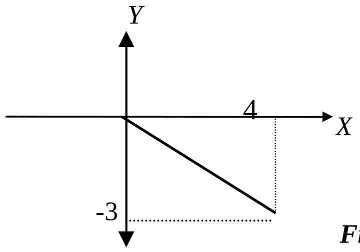
Prueba:

$$\frac{1-\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} = \frac{1-\dfrac{sen^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}}{1+\dfrac{sen^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}} = \frac{\cos^2(\alpha)-sen^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)+sen^2(\alpha)} = \frac{\cos^2(\alpha)-sen^2(\alpha)}{1}$$

Luego: $\dfrac{1-\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}$ = $\cos^2$(α) – sen^2(α)

2) Halle el valor de sen(2α) y cos(2α), si tan(α) = –3/4 y E(α) en el IV cuadrante.

Teniendo en cuenta el triángulo de referencia, en el plano cartesiano se identifica el signo y el radio vector r:



$r = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

sen(α) = –3/5

cos(α) = 4/5

Figura 3

Luego, usando identidades del doble para el seno y coseno, se tiene:

sen(2α) = 2 sen(α).cos(α) = 2(–3/5)(4/5) = –24/25

cos(2α) = 2$\cos^2$(α) – 1 = 2$(4/5)^2$ – 1 = 32/25 – 1 = 7/25.

3) Si sen(β) = 1/3, halle cos(2β).

Solución:

cos(2β) = $\cos^2$(β) – sen^2(β) = (1 – sen^2(β)) – sen^2(β) = 1 – 2 sen^2(β)

Reemplazando dato: $\cos(2\beta) = 1 - 2(1/3)^2 = 1 - 2/9 = 7/9$.

5.4.2. Identidades de la mitad

En las identidades anteriores del coseno para el doble obtuvimos:

$\cos(2\alpha) = 1 - 2sen^2(\alpha)$ y $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$

Haciendo $\theta = 2\alpha$, se tiene $\alpha = \theta/2$ y $\cos(\theta) = 1 - 2sen^2(\theta/2)$ ó $\cos(\theta) = 2\cos^2(\theta/2) - 1$.

De donde: $2sen^2(\theta/2) = 1 - \cos(\theta)$ ó $2\cos^2(\theta/2) = 1 + \cos(\theta)$, despejando:

$$sen^2(\theta/2) = \frac{1-\cos(\theta)}{2} \quad \text{ó} \quad \cos^2(\theta/2) = \frac{1+\cos(\theta)}{2}$$

Luego: $\boxed{|sen(\theta/2)| = \sqrt{\dfrac{1-\cos(\theta)}{2}}}$ ó $\boxed{|\cos^2(\theta/2)| = \sqrt{\dfrac{1+\cos(\theta)}{2}}}$

En cada expresión, el signo se determina de acuerdo con el cuadrante al que pertenece $\theta/2$.

La identidad para la tangente de la mitad se obtiene del cociente entre el seno y coseno de la mitad:

$$\left|\tan(\frac{\theta}{2})\right| = \frac{|sen(\theta/2)|}{|\cos(\theta/2)|} = \sqrt{\frac{(1-\cos(\theta))/2}{(1+\cos(\theta))/2}} = \sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}}.,\ \text{para } \theta \neq (2n+1)\pi,\ n \in 9.$$

En $\left|\tan(\frac{\theta}{2})\right| = \sqrt{\dfrac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}}.$, con $\cos(\theta) \neq -1$ y $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$, se tiene: $-1 < \cos(\theta) \leq 1$, o sea: $0 < 1 + \cos(\theta)$. Luego:

$$\left|\tan(\frac{\theta}{2})\right| = \sqrt{\frac{((1-\cos(\theta))(1+\cos(\theta))}{((1+\cos(\theta))(1+\cos(\theta))}} = \sqrt{\frac{1-\cos^2(\theta)}{(1+\cos(\theta))^2}} = \sqrt{\frac{sen^2(\theta)}{(1+\cos(\theta))^2}} = \frac{|sen(\theta)|}{1+\cos(\theta)}$$

Aquí: $sen(\theta/2)$ y $\tan(\theta/2)$, tienen el mismo signo. Es decir: $\left|\tan(\frac{\theta}{2})\right| = \dfrac{sen(\theta)}{1+\cos(\theta)}$, $\theta \neq (2n+1)\pi$

También para $\cos(\theta) \neq 1$, con $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$, se tiene: $-1 < \cos(\theta) < 1$, y $1 - \cos(\theta) > 0$.

Luego:

$$\left|\tan(\frac{\theta}{2})\right| = \sqrt{\frac{((1-\cos(\theta))(1-\cos(\theta))}{((1+\cos(\theta))(1-\cos(\theta))}} = \sqrt{\frac{(1-\cos(\theta))^2}{1-\cos^2(\theta)}} = \sqrt{\frac{(1-\cos(\theta))^2}{sen^2(\theta)}} = \frac{1-\cos(\theta)}{|sen(\theta)|}$$

como $sen(\theta/2)$ y $\tan(\theta/2)$, tienen el mismo signo, se tiene: $\left|\tan(\frac{\theta}{2})\right| = \dfrac{1-\cos(\theta)}{sen(\theta)}$, $\theta \neq n\pi$

Resumiendo:

$\cos(\frac{\theta}{2}) = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos(\theta)}{2}}$, $\forall\ \theta \in 3$	$sen(\frac{\theta}{2}) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos(\theta)}{2}}$, $\forall\ \theta \in 3$
$\tan(\frac{\theta}{2}) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}} = \dfrac{sen(\theta)}{1+\cos(\theta)} = \dfrac{1-\cos(\theta)}{sen(\theta)}$, para $\theta \neq \pi+2n\pi$ y $\theta \neq n\pi$, $n\in 9$	

4) Calcule el valor de sen(165º)

Solución:

Se sabe que 165º = 330º/2, entonces:

$$\text{Sen}(165º) = \text{sen}\left(\frac{330º}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(330º)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

5) Compruebe que: $sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\tan(\theta) - sen(\theta)}{2\tan(\theta)}$, para $\theta \neq n\pi$, $n\in 9$

Prueba:

$\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{2}}$ Identidad del seno para la mitad.

$sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos(\theta)}{2}$ elevando al cuadrado m.c.m.

=............................ (dividiendo y multiplicando: $\tan(\theta) \neq 0$)

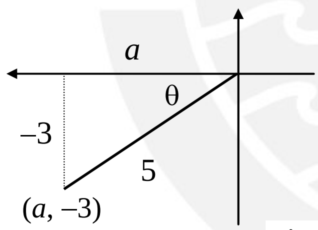
= .... (efectuando el producto indicado: $\tan(\theta) = \frac{sen(\theta)}{\cos(\theta)}$

= .... (simplificando el cociente).

6) Halle el valor exacto de cot(θ/2), si sen(θ) = –3/5 y 180º < θ < 270º

Solución:

Dibujemos un triángulo de referencia en el tercer cuadrante del plano cartesiano



$$a = -\sqrt{5^2 - (-3)^2} = -\sqrt{16} = -4$$

$$\cos(\theta) = -4/5$$

Figura 4

Si 180º < θº < 270º, entonces 90º < θ/2 < 135º

Por lo tanto, θ/2 pertenece al segundo cuadrante, en el que la cotangente es negativo, y

$$\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\tan(\theta/2)} = \frac{sen(\theta)}{1-\cos(\theta)} = \frac{-3/5}{1-(-4/5)} = -\frac{1}{3}$$

EJERCICIOS

1. Calcule el valor de tan(3π/8)

2. Dado sen(θ) = –1/4 y 180º < θº < 270º, determine:

a) sen(2θ) b) cos(2θ) c) tan(2θ)

3. Dado cos(θ) = –3/4 y 270º < θº < 360º, determine:

a) sen(2θ) b) cos(2θ) c) tan(2θ)

4. Si cot(4θ) = 12/5 y 4θ es un arco de lado terminal en el I-C. Halle:

a) sen(2θ) b) cos(8θ) c) tan(2θ)

Comprueba tus Aprendizajes

1. Calcule los valores de sen(2θ), cos(2θ) y tan(2θ), usando la información dada y las identidades convenientemente, sin usar calculadora ni tablas, si:
   a) cos(θ) = 4/5 , 0º < θ < 90º b) sen(θ) = 3/5 , 90º < θ < 180º 4 pts
   c) sen(θ) = –4/5 , 90º < θ < 180º d) tan(θ) = –5/12 , –π/2 < θ < 0

2. Calcule los valores de sen(θ/2), cos(θ/2) y tan(θ/2), usando la información dada y las identidades necesarias, sin usar calculadora ni tablas, si:
   a) cos(θ) = 1/3 , 0º < θ < 90º b) sen(θ) = 4/5 , 0º < θ < 90º 4 pts
   c) cos(θ) = –1/4 , 180º < θ < 270º d) tan(θ) = –3/4 , –π < θ < –π/2

3. Si θ es la medida de un ángulo cuyo lado terminal está en el cuarto cuadrante, ¿cuál es el signo de sen(θ/2) y de cos(θ/2)?
   a) Los dos son positivos b) Sólo sen(θ/2) es positivo
   c) Sólo cos(θ/2) es positivo d) Los dos son negativos 4 pts

4. Si θ > 37º es un ángulo del primer cuadrante, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones es cierta?
   a) sen(2θ) es positivo b) cos(2θ) es positivo 4 pts
   c) cos(3θ) es positivo d) tan(2θ) es positivo

5. Dados $sen(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ y $\cos(\beta) = \frac{1}{\sqrt{10}}$, siendo α y β en]0 , π/2[, calcule:
   a) cos(2β) b) sen(α/2) c) cos(2α + β) d) tan(α – 2β) 4 pts

ASÍGNATE TUS PUNTAJES

¿Cuáles serían los puntajes que te asignas en el desarrollo de cada uno de las ítem de comprobación de tus aprendizajes?

Ítems	1(4pts)	2(4pts)	3(4pts)	4(4pts)	5(4pts)	NOTA
Puntaje						

¡*Quítate puntos por cada error que tengas***!**

5.5. IDENTIDADES DE SUMAS Y PRODUCTOS

Para desarrollar y comprender estas identidades, es preciso recordar las identidades para la suma y diferencia:.

5.5.1. Identidades de productos a sumas

Se trata de expresar el producto de senos, de cosenos, seno y coseno en formas de la suma o diferencias de senos o de cosenos o de senos y cosenos.

1. PRODUCTO DE SENO Y COSENO: Para α y β en 3, se cumple:

$$\text{sen}(\alpha).\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\text{sen}(\alpha+\beta) + \text{sen}(\alpha-\beta)].$$

Se sabe:

$\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}(\alpha).\cos(\beta) + \cos(\alpha).\text{sen}(\beta)$ y $\text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}(\alpha).\cos(\beta) - \cos(\alpha).\text{sen}(\beta)$

sumando miembro a miembro estas resulta: $\text{sen}(\alpha+\beta) + \text{sen}(\alpha-\beta) = 2.\text{sen}(\alpha).\cos(\beta)$

De donde: $\text{sen}(\alpha).\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\text{sen}(\alpha+\beta) + \text{sen}(\alpha-\beta)]$

2. PRODUCTO DE COSENOS: Para α y β en 3: $\cos(\alpha).\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha).\cos(\beta) - \text{sen}(\alpha).\text{sen}(\beta)$ y $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha).\cos(\beta) + \text{sen}(\alpha).\text{sen}(\beta)$

sumando miembro a miembro estas resulta: $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2.\cos(\alpha).\cos(\beta)$

Luego: $\cos(\alpha).\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$.

3. PRODUCTO DE SENOS: Para α y β en 3: $\text{sen}(\alpha).\text{sen}(\beta) = \frac{1}{2}[\text{sen}(\alpha-\beta) - \text{sen}(\alpha+\beta)]$.

$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha).\cos(\beta) - \text{sen}(\alpha).\text{sen}(\beta)$ y $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha).\cos(\beta) + \text{sen}(\alpha).\text{sen}(\beta)$

restando miembro a miembro estas resulta: $\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\text{sen}(\alpha).\text{sen}(\beta)$

Luego: $\text{sen}(\alpha).\text{sen}(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$.

RESUMIENDO:

1) $\text{sen}(\alpha).\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\text{sen}(\alpha+\beta) + \text{sen}(\alpha - \beta)]$
2) $\cos(\alpha).\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$
3) $\text{sen}(\alpha).\text{sen}(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \text{sen}(\alpha + \beta)]$.

EJEMPLOS

1) Exprese en forma de suma $\text{sen}(3\theta).\cos(2\theta)$.

Solución:

Por 1) $\text{sen}(\alpha).\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$, para este caso tenemos $\alpha = 3\theta$ y $\beta = 2\theta$,

en efecto: $\text{sen}(3\theta).\cos(2\theta) = \frac{1}{2}[\cos(3\theta + 2\theta) + \text{sen}(3\theta - 2\theta)] = \frac{1}{2}[\cos(5\theta) + \text{sen}(\theta)]$

2) Evalúe el valor de: $\text{sen}(105º).\text{sen}(15º)$ y $\cos(105º).\cos(15º)$

Solución:

i) Por 3), $\text{sen}(\alpha).\text{sen}(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$, en consecuencia

$$\text{sen}(105º).\text{sen}(15º) = \frac{1}{2}[\cos(105º - 15º) - \cos(105º + 15º)] = \frac{1}{2}[\cos(90º) - \cos(120º)]$$

$$= \frac{1}{2}[0 - (-1/2)] = \frac{1}{2}(1/2) = 1/4$$

ii) Por 2), $\cos(\alpha).\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$, en consecuencia

$$\text{sen}(105º).\text{sen}(15º) = \frac{1}{2}[\cos(105º - 15º) + \cos(105º + 15º)] = \frac{1}{2}[\cos(90º) + \cos(120º)]$$

$$= \frac{1}{2}[0 - 1/2] = \frac{1}{2}(-1/2) = -1/4.$$

5.5.2. Identidades de sumas a productos

Resultan de las identidades de productos a sumas y se resume en la propiedad:

Para u y v en 3, se cumple: i) $\text{Sen}(u) + \text{sen}(v) = 2\text{sen}(\frac{u+v}{2}).\cos(\frac{u-v}{2})$

ii) $\text{sen}(u) - \text{sen}(v) = 2\cos(\frac{u+v}{2}).\text{sen}(\frac{u-v}{2})$

iii) $\cos(v) + \cos(u) = 2\cos(\frac{u+v}{2}).\cos(\frac{u-v}{2})$

iv) $\cos(u) - \cos(v) = -2\text{sen}(\frac{u+v}{2}).\text{sen}(\frac{u-v}{2})$

Para α y β en 3, se hace: $\alpha + \beta = u$ y $\alpha - \beta = v$, entonces $\alpha = \frac{u+v}{2}$ y $\beta = \frac{u-v}{2}$

i) SUMA DE SENOS: $\text{sen}(\frac{u+v}{2}).\cos(\frac{u-v}{2}) = \frac{1}{2}[\text{sen}(u) + \text{sen}(v)]$,

luego: $\text{sen}(u) + \text{sen}(v) = 2\text{sen}(\frac{u+v}{2}).\cos(\frac{u-v}{2})$

ii) DIFERENCIA DE SENOS: $\text{sen}(u) - \text{sen}(v) = \text{sen}(u) + \text{sen}(-v) = 2\text{sen}(\frac{u-v}{2}).\cos(\frac{u+v}{2})$

iii) SUMA DE COSENOS: $\cos(\frac{u+v}{2}).\cos(\frac{u-v}{2}) = \frac{1}{2}[\cos(u) + \cos(v)]$,

luego: $\cos(u) + \cos(v) = 2\cos(\frac{u+v}{2}).\cos(\frac{u-v}{2})$

iv) DIFERENCIA DE COSENOS: $\text{sen}(\frac{u+v}{2}).\text{sen}(\frac{u-v}{2}) = \frac{1}{2}[-\cos(u) + \cos(v)]$,

luego: $\cos(u) - \cos(v) = -2\text{sen}(\frac{u+v}{2}).\text{sen}(\frac{u-v}{2})$

EJEMPLOS:

1) Exprese como producto la diferencia $\text{sen}(9\theta) - \text{sen}(5\theta)$.

Solución:

Por ii), $\text{sen}(u) - \text{sen}(v) = 2\cos(\frac{u+v}{2}).\text{sen}(\frac{u-v}{2})$, entonces

$$\text{sen}(9\theta) - \text{sen}(5\theta) = 2\cos(\frac{9\theta + 5\theta}{2}).\text{sen}(\frac{9\theta - 5\theta}{2}).$$

$$= 2\cos(7\theta).\text{sen}(2\theta)$$

2) Calcule: cos(105º) – cos(15º)

Solución:

Por iv), $\cos(u) - \cos(v) = -2\text{sen}(\frac{u+v}{2}).\text{sen}(\frac{u-v}{2})$.

En efecto: $\cos(165º) - \cos(75º) = -2\text{sen}\frac{165º+75º}{2}.\text{sen}\frac{165º-75º}{2}$

$= -2\text{sen}(120º).\text{sen}(45º)$

$= -2(\sqrt{3}/2)(\sqrt{2}/2) = -\sqrt{6}/2$

3) Calcule: cos(105º) + cos(15º)

Solución:

Por iii), $\cos(u) + \cos(v) = 2\cos(\frac{u+v}{2}).\cos(\frac{u-v}{2})$.

En efecto: $\cos(105º) + \cos(15º) = 2\text{sen}(\frac{105º+15º}{2}).\text{sen}\frac{105º-15º}{2}$

$= 2\cos(60º).\cos(45º)$

$= 2(1/2)(\sqrt{2}/2) = \sqrt{2}/2$

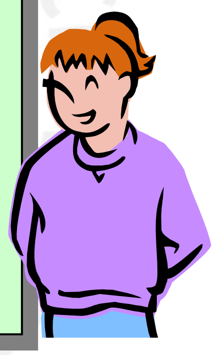
¡ RECUERDE !

i) $\text{sen}(u) + \text{sen}(v) = 2\text{sen}(\frac{u+v}{2}).\cos(\frac{u-v}{2})$

ii) $\text{sen}(u) - \text{sen}(v) = 2\cos(\frac{u+v}{2}).\text{sen}(\frac{u-v}{2})$

iii) $\cos(u) + \cos(v) = 2\cos(\frac{u+v}{2}).\cos(\frac{u-v}{2})$

iv) $\cos(u) - \cos(v) = -2\text{sen}(\frac{u+v}{2}).\text{sen}(\frac{u-v}{2})$



EJERCICIOS:

1. Dado: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Demuestre: a) $\tan(\alpha) + \tan(\beta) + \tan(\gamma) = \tan(\alpha).\tan(\beta).\tan(\gamma)$

b) $\text{sen}(\alpha) + \text{sen}(\beta) + \text{sen}(\gamma) = 4\cos(\alpha/2).\cos(\beta/2).\cos(\gamma/2)$

2. Demuestre que: $1 + \cos(2\alpha) + \cos(4\alpha) + \cos(6\alpha) = 4\cos(\alpha).\cos(2\alpha).\cos(3\alpha)$

Comprueba tus Aprendizajes

1. Sin usar calculadora ni tabla, halle el valor de:

a) sen(105º) – sen(15º) b) cos(165º).sen(75º)

c) cos(285º) + cos(195º) d) cos(15º).cos(75º)

e) cos(π/3) + cos(π/4) f) cos(– π/3).cos(– π/6)

3 pts

2. Calcule: a) cos(– π/3).cot(– π/4). cot(– π/6).

b) cos(π/12).cos(π/8). cot(π/6).cot(π/10). (2 pts)

c) cos(π/24).cot(π/12). cot(5π/6).

3. Convierta en producto, las expresiones:

a) sen(4α) + sen(2θ) b) cos(3α) – cos(θ) (2 pts)

c) sen(4α) – sen(2θ)

4. Convierta en producto, las expresiones:

a) sen(50º) +.sen(40º) b) cos(70º) – cos(20º) (2 pts)

c) sen(55º) – sen(25º) d) cos(55º) + cos(25º)

5. Convierta en producto, las expresiones:

a) sen(53º).sen(37º) b) cos(400º).sen(30º) (3 pts)

c) sen(150º).cos(120º) d) sen(50º).sen(35º)

6. Convierta en producto, las expresiones:

a) sen(π/4). sen(π/8) b) cos(π/12). cos(π/8) (3 pts)

c) sen(7π/12).sen(13π/24) d) cos(π/15). cos(π/10)

7. Demuestre que:

a) 2sen(45º).cos(15º) = $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$

b) cos(220º) + cos(100º) + cos(20º) = 0 (3 pts)

c) sen(130º) + cos(110º) + cos(10º) = 0

d) 1 + cos(2θ) + cos(4θ) + cos(6θ) = 4cos(θ).cos(2θ).cos(3θ)

ASÍGNATE TUS PUNTAJES

¿*Cuáles es el calificativo que te asignas en el desarrollo de lo ejercicios de comprobación del aprendizaje logrado*?

ÍTEM	1	2	3	4	5	6	7	NOTA
Puntaje								

¡*Quítate puntos por cada error que tengas*!

5.6. APLICACIONES A ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Ya tenemos experiencia en la resolución de ecuaciones y algunas con funciones trigonométricas. En esta sección desarrollaremos ecuaciones con funciones trigonométricas con expresiones en donde se necesitan más las diferentes identidades estudiadas.

Repasando:

a) $x^4 - x^2 + 1 = 0$, en 3 ....

b) cos(θ) = sen(θ), en 3..

c) $\tan^2(x) = 3$, ...

d) Determine θ en 3 o en grados:

$\cos(\theta) = \sqrt{3}/2 \quad \Rightarrow \quad \theta =$ ..... ó ....

$\text{sen}(\theta) = -0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \theta =$ ..... ó ....

$\tan(\theta) = -1 \quad \Rightarrow \quad \theta =$ ...... ó ....

$\sec(2\theta) = -2 \quad \Rightarrow \quad 2\theta =$ .... $\Rightarrow \theta =$ .... ó ....

Definición: Una ecuación trigonométrica es toda igualdad entre expresiones trigonométricas que se verifica para un conjunto de valores θ (o medida de ángulos), denominado conjunto solución de la ecuación.

EJEMPLOS:

Halle θ en 3, tal que:

1) $2\text{sen}(\theta) = \text{sen}(2\theta)$

2) $2\text{sen}(\theta) + 2 = 3$

3) $\tan(\theta) = -1$

4) $\text{sen}(2\beta) + 2\text{sen}(\beta) = \cos(\beta) + 1$, en el $[0, \pi]$.

Solución:

1) $2\text{sen}(\theta) = \text{sen}(2\theta)$

a) $\theta = 0$, es una solución de la ecuación, pues: $2\text{sen}(0) = \text{sen}(2(0)) \Rightarrow 2\text{sen}(0) \Rightarrow 2(0) = 0$

b) ¿$\theta = \pi/4$ es solución?

Prueba: $2\text{sen}(\pi/4) = \text{sen}2(\pi/4) \Rightarrow 2(\sqrt{2}/2) = 1 \Rightarrow \sqrt{2} = 1$, absurdo.

Al graficar las funciones: $y = 2\text{sen}(\theta)$ e $y = \text{sen}(2\theta)$, éstas se interceptan cuando $2\text{sen}(\theta) = \text{sen}(2\theta)$, es decir, las abscisas de los puntos son soluciones de la ecuación dada.

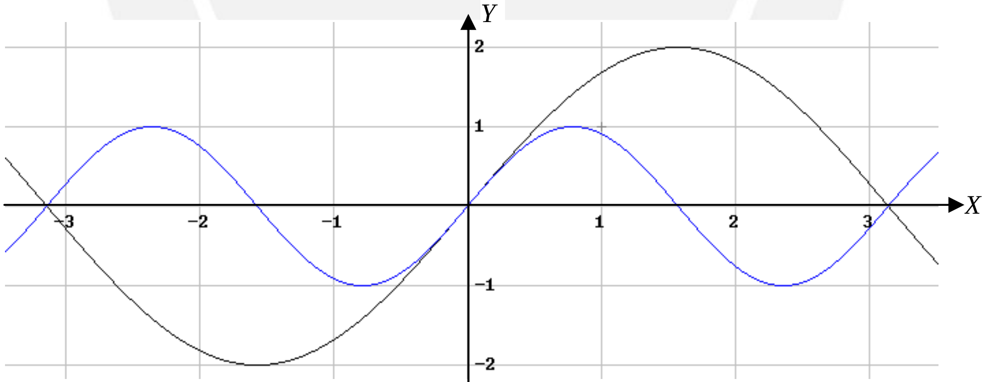


Figura 5

Resolviendo formalmente:

Partimos de: $2\text{sen}(\theta) = \text{sen}(2\theta)$, como $\text{sen}(2\theta) = 2\cos(\theta).\text{sen}(\theta)$, se tiene que $2\text{sen}(\theta) = 2\cos(\theta).\text{sen}(\theta)$, transponiendo términos y factorizando resulta:

$2\text{sen}(\theta) - 2\cos(\theta).\text{sen}(\theta) = 0$ o $2\text{sen}(\theta)(1 - \cos(\theta)) = 0$

Por la propiedad en 3: $\text{sen}(\theta) = 0$, $1 - \cos(\theta) = 0$ o $\cos(\theta) = 1$.

De esto: $\theta = k\pi$ o $\theta = 2k\pi$

Por lo tanto, el conjunto solución es: C.S. = $\{\theta \in 3 / \ \theta = k\pi,\ k \in 9\}$

2) $2\text{sen}(\theta) + 2 = 3$

Solución:

Transponiendo términos de: 2sen(θ) + 2 = 3, se tiene 2sen(θ) = 1. Osea sen(θ) = 1/2 y se tiene que E(θ) = (u , 1/2) en $\mathcal{C}_1(O)$, y como seno es positivo en el I y II cuadrante, entonces: θ = π/6 y θ = 5π/6. De esto: C.S. = {π/6 + 2kπ, 5π/6 + 2kπ, ∀ k ∈ 9 }

3) tan(θ) = –1

Solución:

Si E(θ) = (u , v) en $\mathcal{C}_1(O)$, siendo $\frac{v}{u}$ = –1, o sea v = –u. Luego, E(θ) tiene como extremo terminal el punto: (–u , u) ó (u , –u) que pertenecen al II y IV cuadrante, respectivamente. En efecto: θ = 3π/4 y θ = 7π/4, en [0 , 2π]

4) sen(2β) + 2sen(β) = cos(β) + 1, en [0 , π].

Solución:

Para esto se tiene: sen(2β) = 2sen(β) cos(β); o sea: 2sen(β) cos(β) + 2sen(β) – cos(β) –1 = 0; de esto: cos(β) [2sen(β) – 1] + (2sen(β) – 1) = 0, luego: (2sen(β) – 1)(cos(β) + 1) = 0

Igualando a cero cada factor, se tiene:

2sen(β) – 1 = 0 ⇒ 2sen(β) = 1 ⇒ sen(β) = 1/2 ⇒ β = π/6:

cos(β) + 1 = 0 ⇒ cos(β) = –1 ⇒ β = 3π/4.

Luego, C.S: = {π/6, 3π/4}

¡Ubique las soluciones de los ejemplos 2), 3), y 4) en las $\mathcal{C}_1(O)$, de figura 6¡

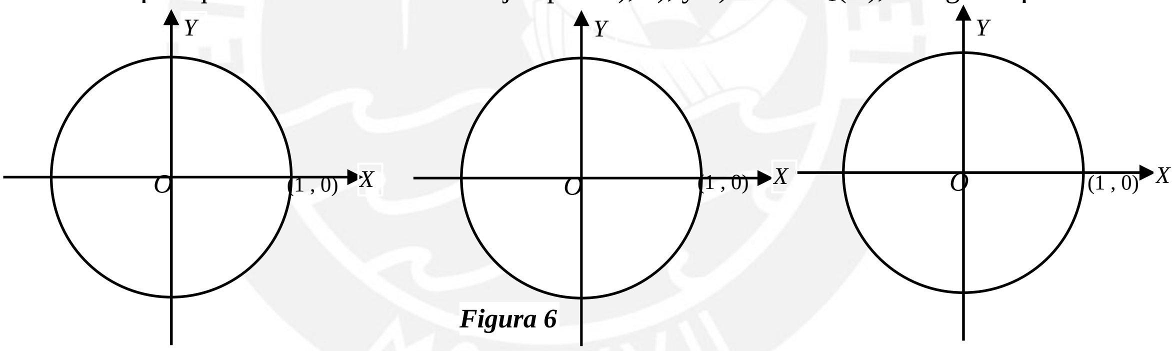


Figura 6

Resolver una ecuación trigonométrica, significa hallar todos los valores de θ que satisfacen la igualdad. Estos valores θ se denominan soluciones o raíces de la ecuación y el conjunto formado por estos, conjunto solución.

5) Resolver la ecuación: 3cos(θ) = 1 – sen^2(θ).

Solución:

Aquí, como 1 – sen^2(θ) = cos^2(θ), la ecuación resulta 3cos(θ) = cos^2(θ),

transfiriendo y factorizando: 3cos(θ) – cos^2(θ) = 0 , cos(θ)(3 – cos(θ)) = 0.

Igualando cada factor a cero: cos(θ) = 0 o 3 = cos(θ), y como –1 ≤ cos(θ) ≤ 1, para todo θ.

Se tiene: cos(θ) = 0 ⇒ θ = π/2 + kπ, k ∈ 9.

Es decir: C.S. = {θ / θ = π/2 + kπ, k ∈ 9}

6) Halle las soluciones de: 3cos^2(θ) + 2cos(θ) – 2 = 0, en el intervalo: [0 , 3π/2]

Solución:

En este caso si denotamos: $z = \cos(\theta)$, resulta: $z^2 + 2z - 2 = 0$, una ecuación cuadrática cuyas raíces son: $z_1 = -1$ y $z_2 = 2/3$. Luego, $\cos(\theta) = -1$ o $\cos(\theta) = 2/3$.

De esto: $\theta = \pi$ o $\theta = \arccos(2/3)$

7) Halle las soluciones de: $4\cos^2(\theta).\cot(\theta) = 3\cot(\theta)$, en el $[0, 2\pi]$

Solución:

Igualando a cero y factorizando obtenemos:

$4\cos^2(\theta).\cot(\theta) - 3\cot(\theta) = 0$ y $\cot(\theta)[4\cos^2(\theta).- 3] = 0$

Igualando a cero cada uno de los factores, obtenemos: $\cot(\theta) = 0$ o $4\cos^2(\theta).- 3 = 0$, de esto:

Para: $\cot(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2, 3\pi/2$ y $4\cos^2(\theta).- 3 = 0 \Rightarrow \cos^2(\theta) = 3/4 \Rightarrow \cos(\theta) = \pm\sqrt{3}/2$,

para la última igualdad: $\cos(\theta) = \sqrt{3}/2 \Rightarrow \theta = \pi/6, 11\pi/6$ y $\cos(\theta) - \sqrt{3}/2 \Rightarrow \theta = 5\pi/6, 7\pi/6$

Luego: C.S. = $\{\pi/2, 3\pi/2, \pi/6, 11\pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6\}$

8) Resuelva la ecuación $3\cos^2(\alpha) + \cos(\alpha) - 2 = 0$

Solución:

Tenemos una ecuación cuadrática donde la incógnita es la función $\cos(\alpha)$ y los coeficientes son: $a = 3$, $b = 1$ y $c = -2$. Para el efecto aplicamos la fórmula general de una ecuación cuadrática y resolvemos:

$$\cos(\alpha) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{6} = \frac{-1 \pm 5}{6} \rightarrow \begin{cases} (\cos(\alpha))_1 = 2/3 \\ (\cos(\alpha))_2 = -1 \end{cases}$$

Sabemos que $\cos\alpha$ es positivo en el primer y cuarto cuadrante, y negativo en el segundo y en el tercero. Entonces

$$(\cos(\alpha))_1 = \frac{2}{3} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 48{,}19^\circ \approx 48^\circ = 4\pi/15 \\ \alpha_2 = -48{,}19^\circ \approx -48^\circ = -4\pi/15 \end{cases} \text{ y } (\cos\alpha)_2 = -1 \rightarrow \alpha_3 = \pi$$

C.S. = $\{4\pi/15 + 2k\pi, -4\pi/15 + 2k\pi, \pi + 2k\pi, \forall\, k \in 9\}$

9) Resolver la ecuación: $\operatorname{sen}(\alpha) + \cos(\alpha) = 1$.

Solución:

Expresando $\cos(\alpha)$ en términos de $\operatorname{sen}(\alpha)$: $\cos(\alpha) = \sqrt{1 - sen^2(\alpha)}$, y reemplazando en la igualdad original:

$$sen(\alpha) + \sqrt{1 - sen^2(\alpha)} = 1, \text{ ó } \sqrt{1 - sen^2(\alpha)} = 1 - sen(\alpha)$$

elevando al cuadrado miembro a miembro:

$1 - \operatorname{sen}^2(\alpha) = 1 - 2\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\alpha)$ ....

$2\operatorname{sen}^2(\alpha) - 2\operatorname{sen}(\alpha) = 0$ ....

$2\operatorname{sen}(\alpha)[\operatorname{sen}(\alpha) - 1] = 0$ ....

$2\operatorname{sen}(\alpha) = 0 \vee \operatorname{sen}(\alpha) - 1 = 0$ ....

$\operatorname{sen}(\alpha) = 0 \vee \operatorname{sen}(\alpha) = 1$ ....

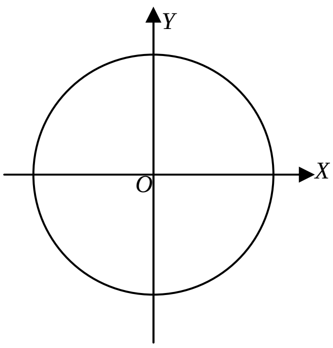


Figura 7

$\alpha = k\pi \;\vee\; \alpha = \pi/2 + 2k\pi$ ....

C.S. = $\{k\pi,\;\; \pi/2 + 2k\pi\}$

10) Resuelva la ecuación: $\text{sen}(2\alpha) + 2\text{sen}(\alpha) = \cos(\alpha) + 1$, en $[-\pi\,,\,3\pi]$

Ubique la solución en la $\mathcal{C}_1(O)$

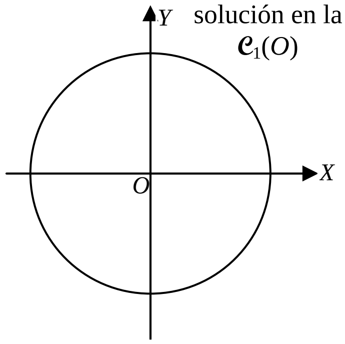


Figura 8

Solución:

$2\text{sen}(\alpha).\cos(\alpha) + 2\text{sen}(\alpha) = \cos(\alpha) + 1$ ....

$(2\text{sen}(\alpha))(\cos(\alpha) + 1) - (\cos(\alpha) + 1) = 0$ ....

$(2\text{sen}(\alpha) - 1)(\cos(\alpha) + 1) = 0$ ....

$\text{sen}(\alpha) = 1/2 \qquad \cos(\alpha) = -1$ ....

$\alpha = \pi/6,\, 5\pi/6 \quad \vee \quad \alpha = \pi$ ....

C.S: = $\{\pi/6,\;\; 5\pi/6,\;\; \pi\}$

11) Halle las raíces de: $\csc^2(\alpha) - \cot(\alpha) = 1$, en el intervalo $[0\,,\,2\pi]$

Solución:

Trasponiendo términos y factorizando.

$(1 + \cot^2(\alpha)) - \cot(\alpha) - 1 = 0$

$\cot^2(\alpha) - \cot(\alpha) = 0, \quad \cot(\alpha)(\cot(\alpha) - 1) = 0$

Igualando a cero cada factor:

$\cot(\alpha) = 0 \vee (\cot(\alpha) - 1) = 0$

$\cot(\alpha) = 0 \;\Rightarrow \alpha = \pi/2,\, 3\pi/2$

$\cot(\alpha) = 1 \;\Rightarrow \alpha = \pi/4,\, 5\pi/4$

C.S: = $\{\pi/2,\;\; 3\pi/2,\; \pi/4,\, 5\pi/2\}$

Ubique la solución en la $\mathcal{C}_1(O)$

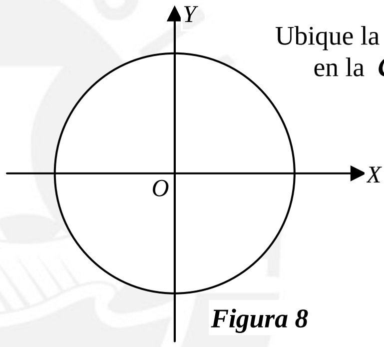


Figura 8

> ¡ *IMPORTANTE* !
>
> *Como se ha visto en los ejemplos, no existe una forma ni una regla única para resolver ecuaciones con funciones trigonométricas.*
>
> *Depende de las expresiones que se tienen en la ecuación; por ello se consideran las identidades transformadas en factores como una sola función.*

12) Resuelva la ecuación: $\text{sen}(2\alpha) = \text{sen}(\alpha)$, α en el intervalo $[0\,,\,2\pi]$

Solución:

De $\text{sen}2(\alpha) = \text{sen}(\alpha)$, se tiene $2\text{sen}(\alpha).\cos(\alpha) = \text{sen}(\alpha)$, transponiendo términos: $2\text{sen}(\alpha).\cos(\alpha) - \text{sen}(\alpha) = 0$, factorizando: $\text{sen}(\alpha)\,(2\cos(\alpha) - 1) = 0$.

Igualando a 0 cada uno de los factores:

$\text{sen}(\alpha) = 0 \qquad 2\cos(\alpha) - 1 = 0$

$\text{sen}(\alpha) = 0 \qquad \cos(\alpha) = 1/2$

Luego: $\alpha = 0,\, \pi \quad \vee \quad \alpha = \pi/3,\;\; 5\pi/3$

Ubique la solución en la $\mathcal{C}_1(O)$

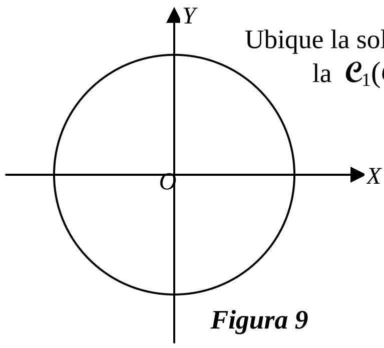


Figura 9

Siendo: C.S. = {0, π, π/3, 5π/3}

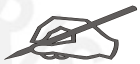
13) Resuelva la ecuación $\cos^2(\beta) = \cos(\beta) + \text{sen}^2(\beta)$, tal que $\beta \in [\pi/2 , 2\pi]$.

Solución:

$\cos^2(\beta) = \cos(\beta) + \text{sen}^2(\beta) \Rightarrow \cos^2(\beta) = \cos(\beta) + 1 - \cos^2(\beta)$	Igualdad pitagórica
$\Rightarrow 2\cos^2(\beta) - \cos(\beta) - 1 = 0$	transposición
$\Rightarrow (\cos(\beta) - 1)(2\cos(\beta) + 1) = 0$	ecuación cuadrática
$\Rightarrow (\cos(\beta) - 1) = 0 \quad (2\cos(\beta) + 1) = 0$	....
$\Rightarrow \cos(\beta) = 1$ ó $\cos(\beta) = -1/2$	....
$\Rightarrow \beta = 0$ ó $\beta = 2\pi/3, 4\pi/3$	....

Luego, C.S. = { 2π/3, 4π/3 }

Comprueba tus Aprendizajes



1. Halle el valor de α para que: sen(2α) = sen(α), en 3 — 3 pts
2. Resuelva la ecuación: $\text{sen}^2(\alpha) + 2\cos(\alpha) = -2$, en [0 , 2π] — 4 pts
3. Resuelva la ecuación: tan(α) – sec(α) = 1, en [0 , 2π] — 3pts
4. Resuelva la ecuación: cos(3α) – cos(α) = sen(α), en [0 , π] — 3 pts
5. Resuelva: $\dfrac{\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)} = 1$ en el [0, 360º] — 4 pts
6. Resuelva: $\sec^2(\theta) + 8 = 6\sec(\theta)$ en el [0 , 270º] — 3 pts

ASÍGNATE TUS PUNTAJES

¿Cuáles calificativo a los Ejercicios de control del Aprendizaje?

Ítem	1(3pts)	2(4pts)	3(3pts)	4(3pts)	5(4pts)	6(3pts)	NOTA
Puntaje							

¡QUÍTATE PUNTOS POR CADA ERROR QUE TENGAS!

PRUEBA DE SALIDA DE LA UNIDAD Nº 5

Haciendo uso de los conocimientos adquiridos en la unidad Nº 5 *resuelva cada uno de los ejercicios que a continuación se menciona*

1. Complete los espacios con líneas punteadas en cada una de las igualdades: — 2 pts

a) $\dfrac{\cos(\beta)}{sen(\beta)}$ = ...   c) .... = sen(α).cos(θ) + cos(α).sen(θ)

b) .... = $\dfrac{2.\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)}$ d) $sen(\dfrac{\theta}{2})$ = ...

2. Demuestre las identidades siguientes:

a) $\dfrac{1-2\cos(x)-3\cos^2(x)}{sen^2(x)}=\dfrac{1-3\cos(x)}{1-\cos(x)}$, para $x \neq n\pi,\ n \in 9$.

b) $\dfrac{\cot(\alpha)-\tan(\alpha)}{sen(\alpha).\cos(\alpha)}=\csc^2(\alpha)-\sec^2(\alpha)$ para $x \neq n\pi,\ \pi/2 + \pi n,, n \in 9$. (2 pts)

c) $[\tan(\alpha) + \cot(\alpha)][(\cos(\alpha) + sen(\alpha)] = \csc(\alpha) + \sec(\alpha)$, para $\alpha \neq n\pi,\ \pi/2 + \pi n,\ n \in 9$.

d) $(\sec^2(x) - \tan^2(x)).(\csc^2(x) - \cot^2(x)) = 1$, para $x \neq n\pi,\ \pi/2 + \pi n,\ n \in 9$.

3. Simplifique: (2 pts)

a) cos(68º).cos(23º) + sen(68º).sen(23º) c) cos(47º).sen(10º) – sen(47º).cos(10º)

b) cos(20º) +cos(100º) +cos(140º) d) $\dfrac{sen\,48^o + sen\,42^o}{\cos 48^o + \cos 42^o}$

4. Dados E(α) en el I-C y E(β) en el IV-C, con sen(α) = $-\sqrt{3}/2$ y cos(β) = 1/3, calcule: (2 pts)

a) sen(α + β) b) tan(α – β)

c) cos(α– β) d) el cuadrante en que se ubica E(α + β)

5. Calcule: a) cos(165º) b) sen(22,5º) c) sec(105º) d) tan(74º) (2 pts)

6. Represente en términos de suma de funciones trigonométricas: (2 pts)

a) 2.sen(48º).cos(20º) c) cos(3π/5).cos(π/5)

b) cos(5*x*).sen(2*x*) d) sen(*x* + π/4).cos(2*x* – π/4)

7. Si cos(θ) = 12/13, 270º < θ < 360º. Calcule: (2 pts)

a) sen(2θ) b) cos(2θ) c) sen(θ/2) d) cos(θ/2)

8. Resuelva las ecuaciones con exactitud en el intervalo indicado (2 pts)

a) $4sen^2(\theta).\cos(\theta) - \cos(\theta) = 0$, [0 , π] b) $2.sen^2(\theta) + 5\cos(\theta) + 1 = 0$, [0º, 360º]

c) $1 - sen(\theta) = \sqrt{3}\cos(\theta)$, [0 , 2π] d) $\cot(\alpha) - 3\tan(\alpha) = 5\csc(\alpha)$, [0º, 360º]

9. Transforme las expresiones en productos: (2 pts)

a)cos(35º) + cos(25º) b) tan(75º) – tan(15º)

c) sen(*x*+π/3) – sen(*x*–π/3) d) sen(5*x*).sen(4*x*) + sen(4*x*).sen(3*x*) – sen(2*x*).sen(*x*).

10. Haciendo el uso adecuado de las identidades, simplifique: (2 pts)

a) sen(θ –30º) + sen(θ +150º) b) cot(α – 90º).[sen(α – 270º) – sen(180º – α)]

c) $\dfrac{sen(\pi - x).\tan(x-\pi/2)}{\cos(3\pi/2 - x).ctg(\pi - x)}$ d) $sen^4(\theta) + \cos^2(\theta) + sen^2(\theta).\cos^2(\theta)$

ASÍGNATE TUS PUNTAJES

¿Cuál es el calificativo que te asignas en el desarrollo de cada uno de las preguntas de los Ejercicios correspondiente a lo aprendido en la unidad Nº 5?

Ítems	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	NOTA

Puntajes											

¿Tu calificativo es QUINCE (15) o más?

SI, felicitaciones, termine esta sección y pase a estudiar la unidad Nº 6

NO, entonces estudie los puntos que tuviste dificultad en aprender en el desarrollo de la unidad Nº 5.

RESUMEN DE LA UNIDAD Nº 5

¡Recuerda, que en esta unidad se desarrolló las identidades trigonométricas y sus aplicaciones, donde debe saber:

1. *Deducir las identidades trigonométricas fundamentales a partir de la definición de las funciones trigonométricas en la circunferencia unitaria.*

2. *Demostrar equivalencias trigonométricas y simplificar expresiones trigonométricas complejas.*

3. *Deducir las identidades trigonométricas para la adición y la diferencia.*

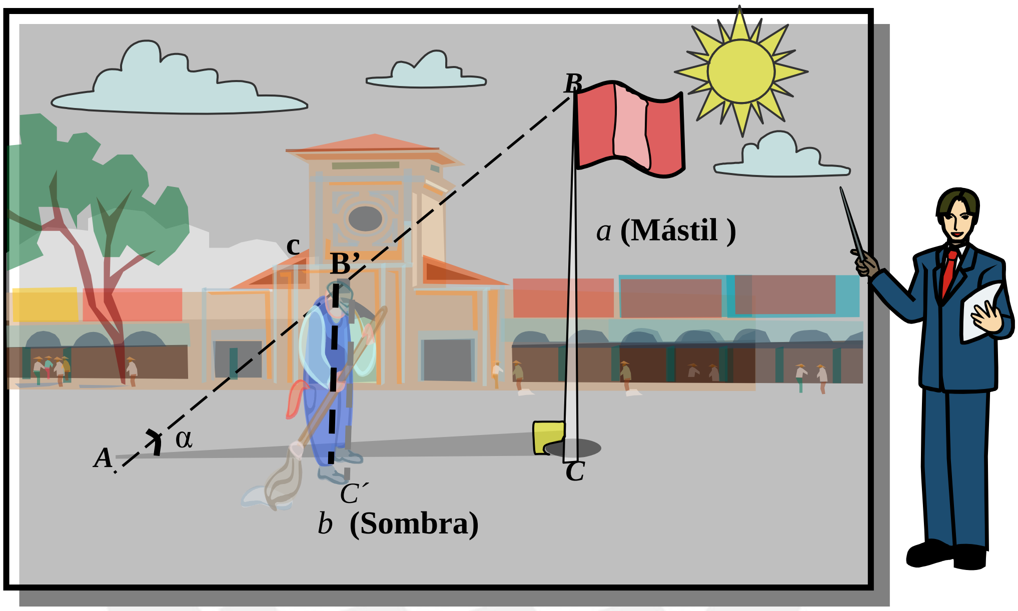
4. *Deducir fórmulas y resolver problemas donde intervienen los dobles y mitades.*

5. *Demostrar identidades de transformación de suma a producto y de producto a suma con expresiones trigonométricas.*

6. *Resolver e interpretar gráficamente las soluciones particulares y generales de las ecuaciones trigonométricas.*

UNIDAD Nº 6

APLICACIONES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTICAS



Al término del estudio de esta unidad se estará en condiciones de:

APLICAR LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ACTIVIDADES COTIDIANAS RELACIONADOS CON LA TOPOGRAFÍA, FÍSICA Y OTROS TÓPICOS DE LA MATEMÁTICA

PRUEBA DE ENTRADA

Antes de iniciar esta unidad, tienes a continuación Diez problemas sobre aplicaciones de las funciones trigonométricas

1. Resolver los triángulos rectángulos con ángulo recto en el vértice C, usando la información dada:
   a) $\alpha = 23º$, $a = 54$ b) $b = 50$, $c = 165$

2. Determine la altura de un árbol (que crece al nivel del suelo en forma vertical) si desde una distancia de 30 m, su cima se observa con un ángulo de 60º, con respecto a la horizontal.

3. En un punto situado a 439 metros de la base de un edificio, el ángulo entre la horizontal y la recta que pasa por la cúspide del edificio (ángulo de elevación) es 31º. ¿Cuál es la altura del edificio?.

4. Un barco sale del puerto y navega a una velocidad de 42 km/h en la dirección $N52ºE$. Dos horas después cambia de dirección y navega con rumbo $N32ºE$ a la misma velocidad. Determine la distancia y la dirección del barco respecto al puerto 3,5 horas después.

5) Utiliza la ley de los senos o cosenos en resolver los ejercicios
   i) $\beta = 68º$, $\gamma = 30º$, $c = 32$, determina a; ii) $a = 2\sqrt{61}$, $b = 8$, $c = 10$, determina γ.

6. Una asta de bandera está clavada verticalmente sobre una superficie plana horizontal y desde una parte del terreno, a una distancia de 24 m del pie del asta, su ángulo de elevación es de 53º. Halle su altura.

7. Dos lados adyacentes de un paralelogramo forman un ángulo de 35º10’ y tienen 3 y 8 metros de longitud. ¿Cuál es la longitud del diagonal menor del paralelogramo?. ¿Cuál es la longitud del diagonal mayor del paralelogramo?.

8. Dos móviles salen al mismo tiempo de una ciudad, y viajan por carreteras rectas que forman un ángulo de 84º entre sí. Las velocidades de los vehículos son 60km/h y 45km/h, respectivamente. ¿A qué distancia aproximadamente se encuentran 20 minutos después?.

9. Los ángulos de elevación de un globo visto desde dos puntos A y B en el suelo a nivel, son 24º10’ y 47º40’, respectivamente. Los puntos A y B están separados 8,4 km, y el globo se encuentra entre ellos, en el mismo plano vertical. Calcule la altura del globo respecto al suelo.

10. Se obliga descender a un avión, después de 2,5 horas de vuelo a 500 km/h, con una dirección verdadera de 30º. Determinar qué tan al norte y qué tan al este de su punto de partida se encuentra el avión; esto es, descomponer el vector desplazamiento en su componente horizontal y vertical.

ESCALA DE PONDERACIÓN (CALIFICATIVO)

De 20 a 17: ¡EXCELENTE!, no hace falta que estudies esta unidad.

De 16 a 14: ¡Bueno /Suficiente!, estudie los puntos que tuvo dificultad en las pruebas

De 13 a 11: ¡Regular/deficiente! Estudie detenidamente los puntos de la unidad que erraste.

De 10 a 0: ¡Deficiente!, Estudie íntegramente esta unidad.

REQUISITOS

¡Recuerda que para abordar el estudio de esta unidad es necesario conocer todo lo referido a:

1. *Funciones trigonométricas: coseno, seno y tangente.*
2. *Puntos simétricos en el sistema de coordenadas rectangulares.*
3. *Proyección de los puntos del plano cartesiano sobre los ejes de coordenadas.*
4. *Distancia entre dos puntos en el sistema de coordenadas rectangulares.*
5. *El teorema de Pitágoras y relaciones métricas en triángulos rectángulos.*
6. *Elementos de los triángulos rectángulos notables.*
7. *Identificación de los puntos cardinales.*

OBJETIVOS

¿Qué lograremos a través de esta unidad?

1. *Identificar las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo en el sistema de coordenadas rectangulares.*
2. *Resolver ejercicios sobre Solución: de triángulos rectángulos aplicado a distintas situaciones de la realidad.*
3. *Utilizar procedimientos intuitivos y analíticos para determinar los ángulos de depresión, elevación y rumbos.*
4. *Deducir analíticamente las leyes del coseno y seno, utilizando en forma adecuada en la Solución: de triángulos oblicuángulos.*
5. *Deducir la ley de tangentes la fórmula de Herón para hallar el área de regiones triangulares.*

CONTENIDOS

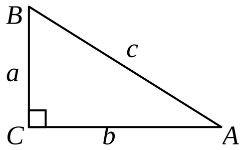
¿Qué temas estudiaremos a través de esta unidad?

1. *Las razones trigonométricas en triángulos rectángulos en el sistema de coordenadas cartesianas.*
2. *Solución de triángulos rectángulos aplicado a distintas situaciones de la realidad.*
3. *Estudio analítico de los ángulos de depresión, elevación y rumbos.*
4. *La ley del coseno y su aplicación en la solución: de triángulos oblicuángulos.*
5. *La ley del seno, y su aplicación en la solución: de triángulos oblicuángulos.*
6. *Ley de tangentes, la fórmula de Heron y aplicaciones.*

EXPLORACIÓN-MOTIVACIÓN-PROBLEMATIZACIÓN

NOTA: Resolver un triángulo es hallar la longitud de sus tres lados, la medida de sus tres ángulos y el área de la región triangular; conociendo algunas informaciones o datos y algunas propiedades.

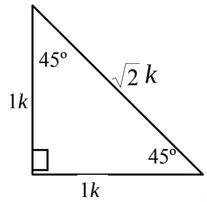
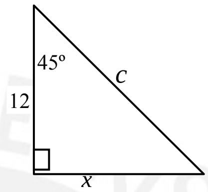
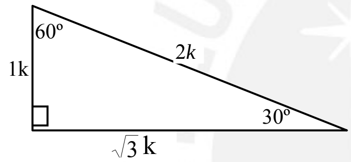
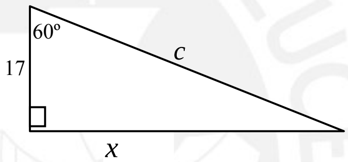
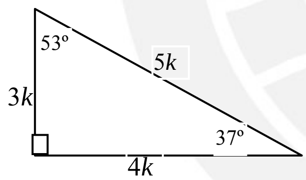
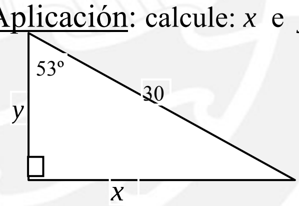
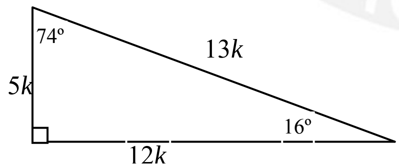
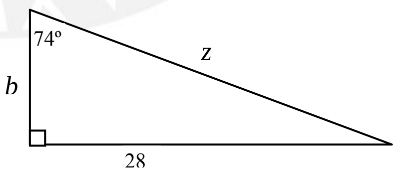
1. Para resolver un triángulo rectángulo, se tiene el teorema de Pitágoras, la suma de las medidas de sus ángulo agudos (90º) y la fórmula del área de su región.



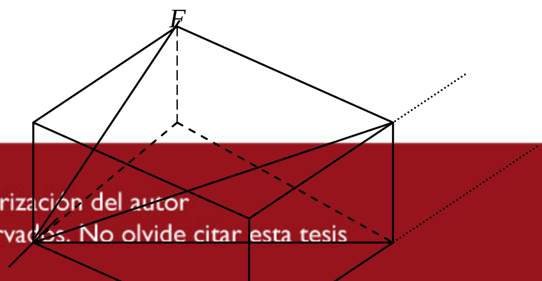
$$.a^2 + b^2 = c^2$$
$$.m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = 90^{\circ}$$
$$\text{Área} = \tfrac{1}{2}a.b.$$

Algunos triángulos rectángulos notables:

Para:

Ángulo agudo de: 45º 	Aplicación: calcule: x y c. 
Ángulo agudo de: 30º y 46º 	Aplicación: calcule: x y c. 
Ángulo agudo de: 53º y 37º 	Aplicación: calcule: x e y. 
Ángulo agudo de: 74º y 16º 	Aplicación: calcule: b y z. 

2. **DIMENSIONES DEL AULA**: El aula del quinto grado tiene base rectangular y las dimensiones 10 m x 6 m x 3 m. Calcule la longitud de la diagonal trazado del lado lateral $\overline{AF}$, de la base $\overline{AC}$, la medida del ángulo θ, y la longitud diagonal $\overline{AI}$ del aula, trazado.



G E I

3 m

A θ D C

10 m 6 m **Figura 1**

B

Solución:

De la figura:

En el triángulo *AEF*, recto en *E*: $AF = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ m

En el triángulo *ABC*, recto en *B*: $AC = \sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{100+36} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}$ m.

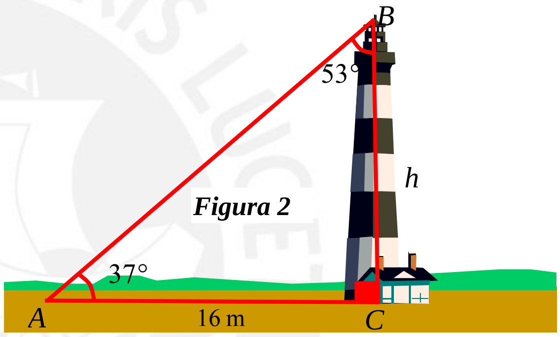
En el triángulo *ACI*, recto en *C*: $AI^2 = 136 + 9 = 145 \Rightarrow AI = \sqrt{145}$ m

3. En la ilustración que se exhibe a la derecha, el faro es perpendicular al suelo, ¿cuál es la altura del faro y cuanto mide $\overline{AB}$?

Solución:

En este caso consideremos el triángulo *ABC*, recto en *C*, en donde se conocen las medidas de los ángulos, la longitud del cateto $\overline{AC}$. Se trata de hallar la longitud del cateto $\overline{BC}$.

Para el ángulo en *A*, cuya medida es 37º, la función que relaciona los otros datos y *h* es: tan(37º) = *h*/16, o sea *h* = 16.tan(37º) y por 1) se tiene tan(37º) = 3*k*/4*k* = 3/4. Por tanto: *h*=16(3/4) = 12 m.



¿Cómo hallar *AB*? Podemos usar la función seno: sen(37º) = *h*/*AB* de donde: *AB* = *h*/sen(37º), es decir: *AB* = 12/(3/5) = 20. Luego *AB* = 20 m.

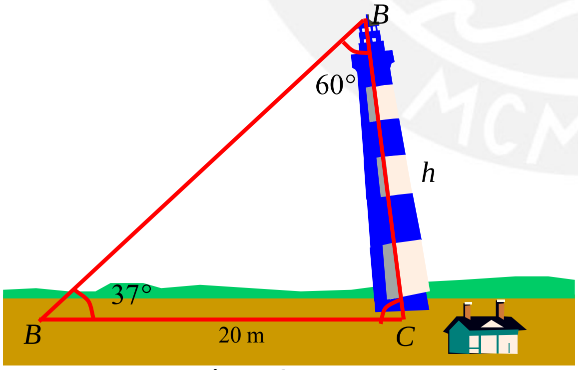


Figura 3

También puede presentarse otra situación: el faro está inclinado, formando con el suelo un ángulo como se tiene en la figura 3.

¿Cuál es la medida del ángulo en *C*? y ¿cómo podriamos calcular la longitud del faro? ....

En este caso, del trángulo *ABC* se conocen las medidas de dos ángulos interiores, la longitud de un lado. Falta conocer las longitudes de dos lados y él área.. La medida del ángulo en *C* es: 180º – (37º+60º) = 180º – 97º = 83º, para hallar la longitud de los lados usaremos las leyes trigonométricas que abordaremos más adelante.

6.1. SOLUCIÓN: DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

La trigonometría se creó para ayudar a resolver problemas en los que intervienen medidas de ángulos y longitudes de lados de triángulos.

Recordar que un sistema de coordenadas cartesiana rectangulares, para un punto *P*(*a* , *b*), del plano, se forma un triángulo rectángulo *ABC*, donde d(*A* , *B*) = *c*, d(*B* , *C*) = *a* y d(A , C) = b = $\sqrt{a^2 + c^2}$ y $\widehat{ABC}$ es un ángulo cuya medida es θ, figura 4. Se tienen::

$$\cos(\theta) = \frac{c}{b}, \quad \sec(\theta) = \frac{b}{c}; \quad \text{sen}(\theta) = \frac{a}{b}; \quad \csc(\theta) = \frac{b}{a}; \quad \tan(\theta) = \frac{a}{c}, \ \cot(\theta) = \frac{a}{c}$$

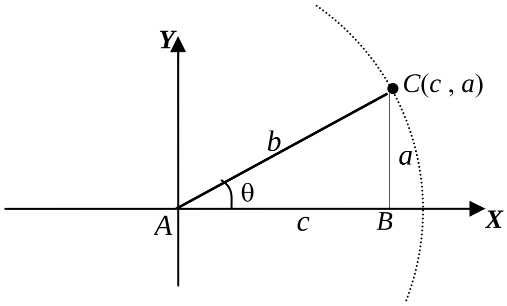


Figura 4

RECUERDA: **resolver un triángulo rectángulo** es encontrar las longitudes de sus tres lados y las medidas de sus dos ángulos, cuyo tercer ángulo mide 90º o π/2 rad, conociendo al menos la longitud de un lado y un ángulo, usando una de las relaciones dadas anteriormente.

EJEMPLOS:

1) En el triángulo rectángulo ACB: γ = 90º, α = 37º y b = 16. Calcule los otros elementos.

Solución:

Como la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180º y

α + γ = 90º +37º = 127º, entonces β = 180º – (α + γ) = 180º – 127º = 53º. De la figura 5:

$\tan(37º) = \dfrac{a}{16} \Rightarrow a = (16).\tan(37º) = (16)(3/4) = 12.$

Para hallar el lado c, usemos la función coseno,

$\cos(37º) = \dfrac{16}{c} \Rightarrow c = \dfrac{16}{\cos(37º)} \approx \dfrac{16}{0{,}8} = 20.$

El área de la región triangular se obtiene de: $a.b/2$:

Es decir, área = (12x16)/2 = 96 u^2.

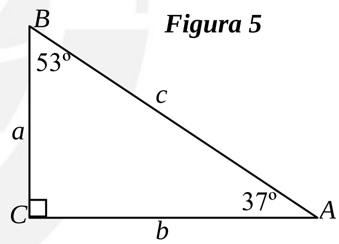


Figura 5

2) Resuelva el triángulo rectángulo que se muestra a la derecha.

Solución:

Resolviendo: Sea α la medida del ángulo en A. Entonces cos(α) = 36/39 = 12/13.

Luego, por triángulos notables: α = 16º. Para el ángulo en B, su medida es β, siendo β = 90º – 16º = 74º.

Para el cateto $\overline{BC}$ con a = BC, se tiene sen(16º) = a/39.

O sea a = 39.sen(16º) = 39(5/13) = 15.

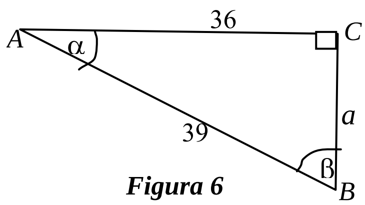


Figura 6

3) ¿Qué ángulo se elevó un avión respecto a la horizontal para que, al recorrer 1200 m, alcanza una altitud de 160 m?

Solución:

Sea α la medida del ángulo con que se eleva el avión, figura 7.

Entonces sen(α) = 160/1200 = 2/15.

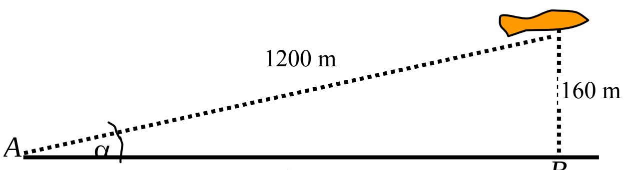


Figura 7

Luego usando calculadora o tabla de valores: $\alpha = 7{,}66^{\circ} \approx 8^{\circ}$

APLICACIONES

Las aplicaciones más comunes de la solución de triángulos rectángulos están referida a los ángulos de **ELEVACIÓN** y de **DEPRESIÓN,** que forman la línea de mira o punto de visión con la línea horizontal en una observación hacia arriba o hacia abajo.

6.1.1. Ángulo de elevación y de depresión

Jaimito observa desplazarse una tortuga en el suelo, y al mismo tiempo observa volar un ave, como se muestra en la figura 8.

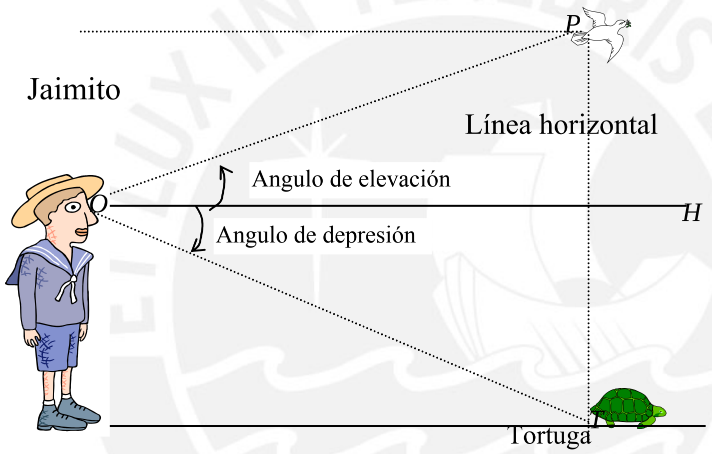


Figura 8

En el gráfico mostrado en la figura 8:

¿Cuál es el ángulo que forma la línea horizontal con respecto a las líneas de la visual dirigida a la tortuga? y ¿Cuál la que forma la línea horizontal con la visual dirigida al ave? ....

¿Qué ángulo forma la línea horizontal con respecto a la líneas de la visual dirigida al ave? ¿Qué medidas tienen cada una de ellas? ....

¿Cuál es la distancia entre la Jaimito y la tortuga? ....

Para resolver problema de ángulos de elevación y de depresión, es preciso identificar:

La horizontal: la línea imaginaria paralela al horizonte o suelo plano que pasa por el ojo del observador, en la figura 8 (ojo de Jaimito – punto *H*).

Línea de Mira o Visión (Visual): la línea imaginaria que pasa por el ojo del observador y el punto que está observando en la figura 8 (ojo de Jaimito-paloma o el ojo de Jaimito-tortuga), .

Ángulo de elevación: el ángulo formado entre la línea horizontal y la línea de mira, cuando el objeto está situado por encima de la línea de mira, $\widehat{HOP}$, en figura 8.

Ángulo de depresión: es el ángulo formado entre la línea horizontal y la línea de mira, cuando el objeto está situado por debajo de la línea de mira, $\widehat{HOT}$, en la figura 8.

1) Desde la azotea de un edificio de 100 m de alto sobre el nivel del mar, se observa una lancha navegando directamente hacia el edificio. Si el ángulo de depresión de la lancha cambia de 25º a 40º durante un período de observación. ¿Cuál es la distancia aproximada que recorre la lancha en este período de observación?.

Solución:

En la figura 9, sea P el punto de observación y sean A y B las posiciones de la lancha que corresponden a los ángulos 25º y 40º, respectivamente. Si d es la distancia que recorre la lancha, en el período de observación, k la distancia de B a C. Si α y β representan los ángulos PAC y PBC, respectivamente, entonces: $\alpha = 25º$ y $\beta = 40º$.

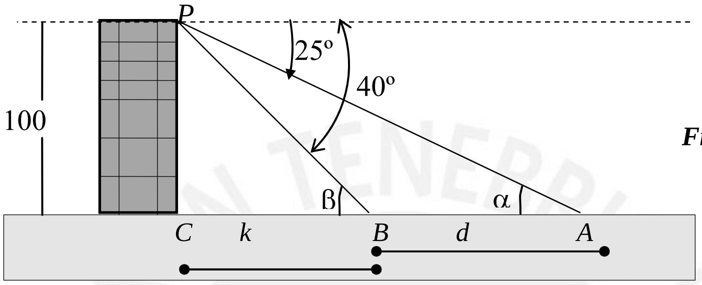


Figura 9

En el triángulo rectángulo BCP: $\cot(\beta) = \cot(40º) = \frac{k}{100} \Rightarrow k = 100.\cot(40º)$ ……….. (*)

En el ΔACP: $\cot(\alpha)=\cot(25º) = \frac{d+k}{100} \Rightarrow d + k = 100.\cot(25º) \Rightarrow d = 100.\cot(25º) - k$ ... (**)

Reemplazando (*) en (**) se tiene que

$d = 100.\cot(25º) - 100.\cot(40º) = 100(\cot(25º) - \cot(40º)) \approx 100(2{,}145 - 1{,}192) = 95$

Respuesta: la lancha recorre 95 m.

2) El tripulante de un avión que sobrevuela a 600 m de altura divisa el ancho de una laguna con ángulos de depresión 70º y 30º. Determine a que distancia horizontal de la orilla más próxima sobrevuela el avión y cuál es el ancho de la laguna?

Ilustración

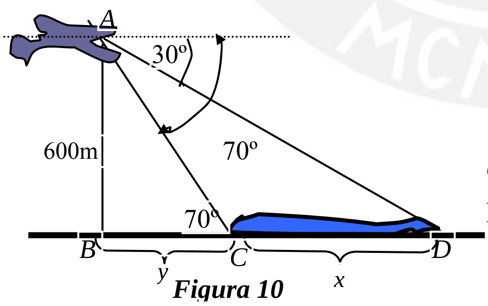


Figura 10

Solución:

Sean $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ las líneas de mira tales que $x = CD$ es el ancho de la laguna, $y = BC$, es la distancia horizontal la orilla al lado más cercano del avión.

i) Por tanto calculamos primero el valor de "y**"** en el triángulo ABC, recto en B se tiene:

$\tan(70º) = 600 / y$, de esto $y = 600 / \tan(70º)$, haciendo uso de calculadora, se tiene:

$y = 600/2{,}7475$. Luego: **218,40 m**

ii) Para calcular "x**"** en el triángulo ABD, recto en B se tiene:

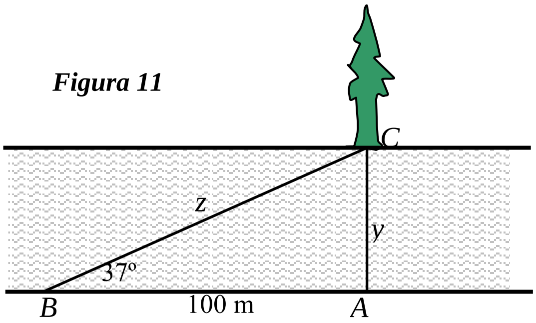
$\tan(30º) = 600\text{m} / (x + y) \quad \Rightarrow \tan(30º) = 600 / (x + 218{,}40)$. De esto

$x + 218{,}40 = 600 / \tan(30º) \Rightarrow x + 218{,}40 = 600 / 0{,}577$

Luego: $x = 1\,039{,}30 - 218{,}40 \Rightarrow$ $\boldsymbol{x = 620{,}83}$ **m**

3) Desde un punto A en la orilla del río Huallaga se ve un árbol de pino justo enfrente. Si caminamos 100 m río abajo, por la orilla recta del río, llegamos a un punto B desde el que se ve el pino formando un ángulo de 37º con nuestra orilla. Calcular el ancho del río y la distancia del punto B al árbol.

Figura 11



.***Solución:*** Según la figura 11:

En el triángulo rectángulo BAC, se tiene:

$\tan(37º) = \dfrac{AC}{100}$, entonces $\dfrac{3}{4} = \dfrac{y}{100}$, luego $y = 75$ m

También:

$\cos(37º) = \dfrac{100}{BC}$, entonces $\dfrac{4}{5} = \dfrac{100}{z}$, luego, $z = 125$ m

Respuesta: El ancho del río es de 75 m y la distancia del punto B al pino es de 125 m.

4) Halla la altura del hito P, sobre la roca de la figura y el ancho del río, suponiendo que la roca se encuentra verticalmente sobre la orilla. Desde A hasta B hay 40 m, y con un teodolito se mide la inclinación con que se ve P desde A (60º) y desde B (45º).

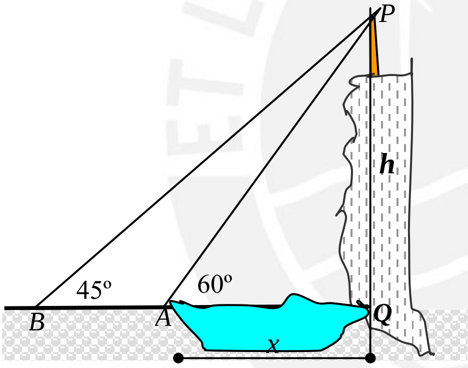


Figura 12

Solución:

En el triángulo AQP se cumple:

$\tan(60º) = \dfrac{h}{x}$, entonces $\sqrt{3} = \dfrac{h}{x}$, luego $h = \sqrt{3}\,.x$

En el triángulo BQP :

$\tan(45º) = \dfrac{h}{x+40}$, entonces$1 = \dfrac{h}{x+40}$, luego $h = x+40$

Igualando las dos expresiones anteriores y despejando x:

$\sqrt{3}\,.x = h = x + 40$, se tiene $(\sqrt{3} - 1)x = 40$, luego:

$x = \dfrac{40}{\sqrt{3}-1} = 54{,}64$ m

Calculamos la altura: $h = \sqrt{3}\,.x = 94{,}6$ m.

Respuesta: El punto está a una altura de 94,6 m y el ancho del río es de 54,64 m.

EJERCICIOS

1. Desde un punto a 1 m del piso se observa la cima del edificio con un ángulo de 30º, si avanzamos 30 m, hacia el edifico, el ángulo de elevación de la cima mide 45º. Halle la altura del edificio.

Solución: Ilustración

En el triángulo *APC* recto en *P*, se tiene:

tan(30º) = ... (1)

En el triángulo *BPC* recto en *P*, se tiene:

tan(45º) = ... (2)

De (1) y (2), se obtiene:

....

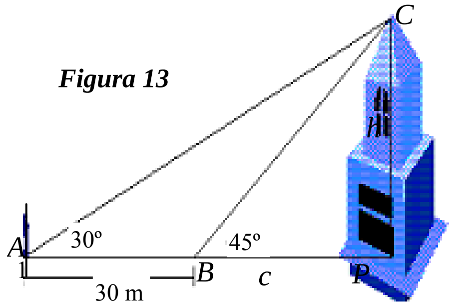


Figura 13

2. En la figura mostrada. Calcule la altura de ambos edificios.

Solución:
En la figura se tiene que *AC* es lado común de los triángulos *ACB* y *ACD*, como *OD* = 110 m, también *AC* = 110 m.
Luego, las alturas *OA* y *DB* = *DC* + *CB*, obtenemos de:
tan(27º) = *OA*/110 = ...
tan(17º) = *CB*/110 = ...

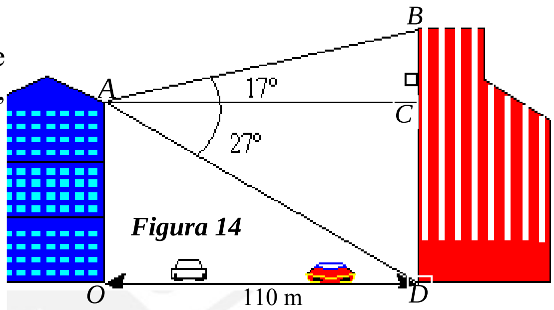


Figura 14

3. Un árbol tiene determinada sombra cuando el sol se observa bajo un ángulo de elevación de 50º, (figura 15). ¿Bajo que ángulo proyectará una sombra el doble que la anterior?

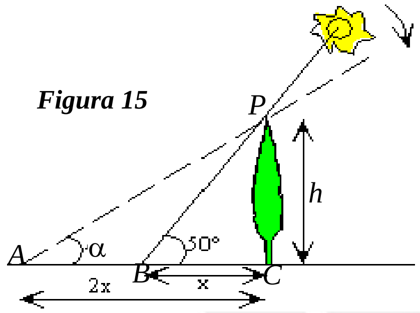


Figura 15

Solución:
Se pide hallar α, para ello se tienen dos triángulos rectángulos: *ACP* y *BCP*:
En efecto:
i) tan(50º) = *h*/*x* ⇒ *h* = ...
ii) tan(α) = *h*/2*x* ⇒ *h* = ...
igualando i) e ii): ....
....
....

4. En la figura, halla la altura del puente, sabiendo que tiene 17 m de largo.

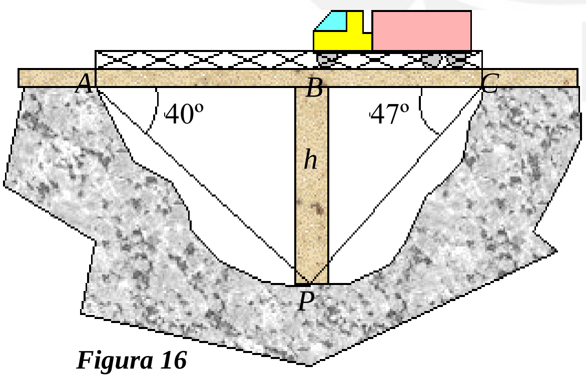


Figura 16

Solución:
En la figura: *ABP* y *CBP* son triángulos rectángulos de lado común:
Sea *x* = *AB* y (17 – *x*) = *BC*, entonces:
tan(40º) = *h*/*x* ⇒ *h* =..........
tan(47º) = *h*/(17–*x*) ⇒ *h* =......
Igualando: ....

6.1.2. Rumbos

En problemas relacionados con navegación o topografía, se suele especificar el rumbo (o dirección) de un punto *O* a un punto *P* mencionando el ángulo (de 0º a 90º) que forma el segmento $\overline{AP}$ con la línea NORTE-SUR que pasa por *A*. También se menciona si *P* está al norte o al sur, y al este o al oeste de *A*, (figura 17), existen cuatro posibilidades de orientación, denominado, puntos cardinales.

El rumbo *P* respecto a *A* es 30º al este del norte, que convendremos representar como *N*30º*E*. También se dice el rumbo (o dirección) *N*30º*E*, de *A* a P_1. Los rumbos de P_2, P_3, y P_4 respecto del punto *A* se indican de la misma forma en la figura 17.

¡Recuerde que cuando se usa esta notación para rumbos y direcciones, siempre debe aparecer N y S a la izquierda del ángulo, y O y E a la derecha!

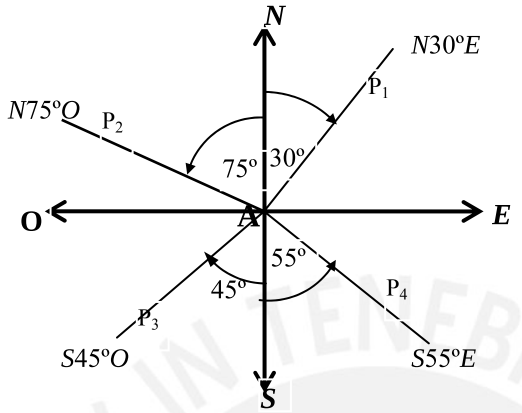


Figura 17

1) De un puerto salen dos barcos al mismo tiempo, uno de ellos con rumbo *N*23º*E*, a una velocidad de 11 km/h; el segundo navega en dirección *S*67º*E* a 15 km/h. Calcule aproximadamente el rumbo desde el segundo barco hacia el primero, una hora después.

Solución:

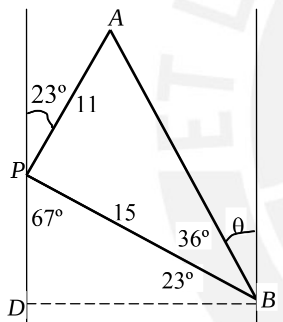


Figura 18

Hagamos el esquema indicando las posiciones del primer y segundo barco en los puntos *A* y *B* respectivamente, después de una hora. El punto *P* representa al puerto.
Nuestro objetivo es calcular el rumbo de *B* a *A*.

$m(\widehat{APB}) = 180º - (23º + 67º) = 90º$, de aquí, el triángulo *APB* es rectángulo, recto en *P*. Luego:

$\tan(\beta)=\dfrac{11}{15}$, de donde $\beta = \arctan(\dfrac{11}{15}) = \arctan(0{,}73)$, y usando calculadora: $\beta \approx 36º$.

De acuerdo con la ilustración $m(\widehat{PBD}) = 90º - m(\widehat{BPD}) = 90º - 67º = 23º$

$m(\widehat{ABD}) = m(ABP) + m(\widehat{PBD}) \approx 36º + 23º = 59º$

$\theta = 90º - m(\widehat{ABD}) \approx 90º - 59º = 31º$

Respuesta: el rumbo de *B* a *A* es, aproximadamente, *N*31º*O*.

2) La altura de un poste es de 150 m y el piso a uno de sus lados tiene una pendiente hacia arriba, con un ángulo de 15º. Calcule la longitud de los cables si uno de ellos ha de unirse a la parte superior del poste y asegurarse en un punto sobre la pendiente a 30 m de su base, y el otro ha de conectarse a la mitad del poste y asegurarse en un punto a 30m de su base.

Ilustración

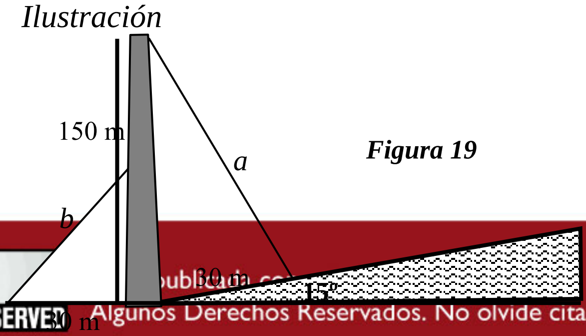
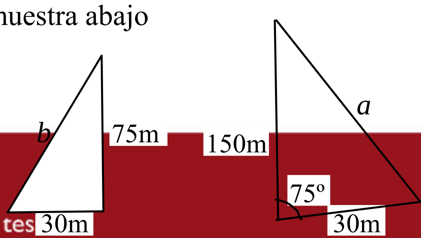


Figura 19

De la ilustración se tienen dos triángulos oblicuo y un triángulo rectángulo. Como se muestra abajo



Para hallar la longitud (b) del cable en la figura del triángulo rectángulo, usando el teorema de Pitágoras, se tiene:

.$b^2 = 30^2 + (150/2)^2 = 900 + 5625 = 6525$, luego: $b = \sqrt{6525}$ = ...

Para el cálculo de la longitud (a) del cable en la figura del triángulo oblicuángulo, necesitamos establecer algunas propiedades, que veremos más adelante.

3) (Ubicando un incendio). Desde un punto de observación A, un guardabosques divisa un incendio en dirección $S37ºO$. Desde un punto B, a 4km hacia el oeste de A, otro guardacostas ve el mismo incendio con una dirección $S53ºE$. ¿A qué distancias del incendio están los guardabosques?

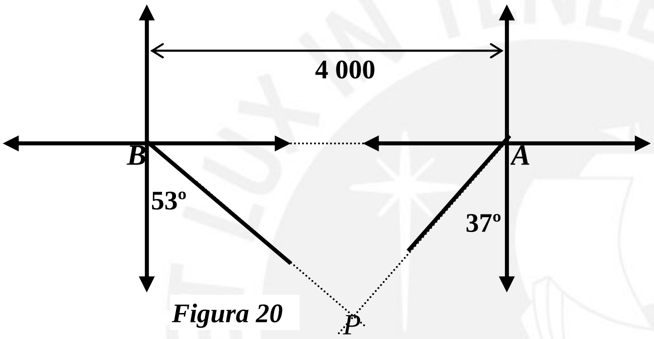


Figura 20

Solución:

Sea P el lugar del incendio.

Según la ilustración el triángulo APB es rectángulo notable de 53º y 37º, es decir:

$5k = 4000$, entonces $k = 4000/5 = 800$.

De aquí: $AP = 4(800) = 3200$ m y

$BP = 3(800) = 2400$ m

Respuesta: Los guardacostas estaban a 3,2km y 2,4 km del lugar del incendio.

4) Suponga que el brazo de un autómata de 3 m de longitud que puede girar alrededor del origen en un plano de coordenadas. Si su mano del autómata está en (3 , 0), y a continuación gira un ángulo de 60º. ¿Cuál es nuevo lugar de la mano?

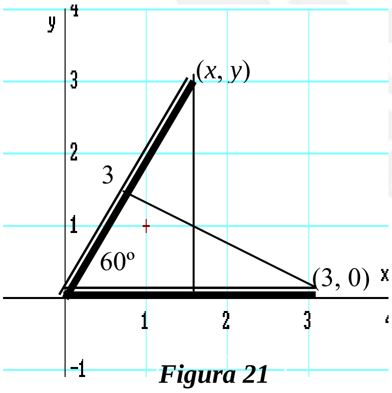


Figura 21

Solución:

Según la ilustración el punto (x , y) es el nuevo lugar de la mano del autómata.

De donde:

$x = 3\cos(60º) = 3(1/2) = 3/2$

$y = 3\text{sen}(60º) = 3(\sqrt{3}/2) = 3\sqrt{3}/2$

Respuesta: el nuevo lugar de la mano se ubica en:

$(x , y) = (3/2 , 3\sqrt{3}/2)$

Comprueba tus Aprendizajes

1. Desde un punto A, que está a 12m sobre el piso, el ángulo de elevación de la parte superior del edifico es 37º, y el ángulo de depresión a la base de construcción es 12º50’. Calcule la altura aproximada del edificio. 3 pts

2. Cuando un globo aerostático sube verticalmente, su ángulo de elevación desde un punto P, sobre terreno horizontal a 110 km de distancia a Q, directamente abajo del globo, cambia de 22º30’ a 37º. ¿Qué ascenso aproximado alcanza el globo durante la observación? 3 pts

3. Estando al pie en la orilla de un acantilado en 45m sobre el nivel del mar, el ángulo de elevación de la visual a una embarcación lejos de la costa es 9,07º. ¿A qué distancia del pie del acantilado está la nave? 4 pts

4. Un barco sale de un puerto a la 1:00 pm y viaja en dirección *N34ºO* a una velocidad de 24 km/h. Otro barco sale a la 1:30 pm y viaja en dirección *N56ºE* a una velocidad de 18 km/h.

   a) ¿A qué distancia se encuentran aproximadamente los barcos a las 3:00 pm?. 3 pts

   b) ¿Cuál es la dirección aproximada en grados sexagesimales desde el primer barco al segundo a las 3:00 pm?.

5. En sus prácticas de paracaidismo, Daniel tiene que deslizarse a través de una cuerda que está sujeta, por un extremo, a una torre de 37,2 m de altura y por otro, al suelo. Si Daniel observa el extremo sujeto al suelo con un ángulo de depresión de 37º, ¿cuál es la distancia que recorre Daniel? 4 pts

6. Una escalera está apoyada en una pared formando un ángulo de 50º con la horizontal. Si la base de la escalera está 3,2 m de la base de la pared, ¿cuál es la longitud de la escalera? 3 pts

ASÍGNATE TUS PUNTAJES

¿Cuáles serían los puntajes que te asignas en el desarrollo de cada uno de las preguntas de Comprobación de tus Aprendizajes?

ÍTEMS	1(3PTS)	2(3PTS)	3(4PTS)	4(3PTS)	5(4PTS)	6(3PTS)	NOTA
Puntajes							

¡*QUÍTATE PUNTOS POR CADA ERROR QUE TENGAS*!

6.2. SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

NOTA: Si tenemos un triángulo cualquiera, **resolver este triángulo** significa encontrar las longitudes de sus tres lados y las medidas de sus tres ángulos, conociendo la longitud de por lo menos un lado y algunos dos de los otros elementos. Para esto, se requiere algunas propiedades que llamaremos leyes trigonométricas que se dan a través de la ley de senos, ley de cosenos y ley de tangentes.

6.2.1 Ley de los Senos

Observa el triángulo de la figura 22.
Como se puede observa en el triángulo ABC se conocen la longitud del lado $\overline{AC}$ y las medidas de los ángulos en los vértices A y B (α y β).

A partir de estos datos conocidos se pueden calcular las longitudes de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ y la medida del ángulo en C, usando la **ley de senos**.

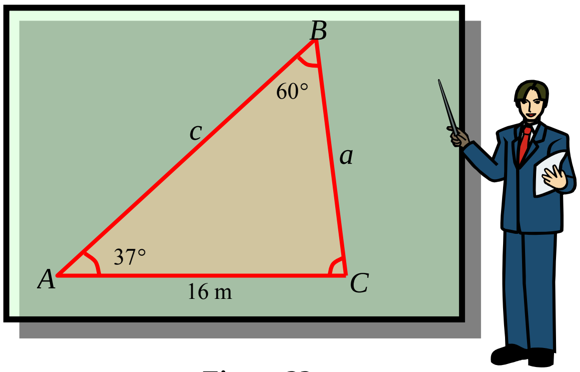


Figura 22

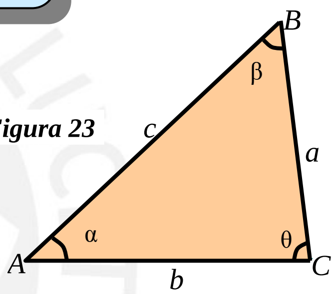
a) Resolución: de triángulos aplicando la ley de senos

Recordando, los elementos básicos de todo triángulo son:

✓ Sus 3 lados ($AB = c$, $BC = a$, $CA = b$).

✓ Sus 3 ángulos interiores (α , β , θ).

Figura 23



Para resolver un triángulo:

✓ Debemos conocer por lo menos 3 de sus elementos básicos, uno de los cuales es necesariamente la longitud de uno de los lados.

✓ En todo triángulo se cumple que la suma de las medidas de sus ángulos internos es 180° (o πrad).

¡ *Ahora pasemos a enunciar en forma formal la ley de los senos*!

b) La ley de senos

TEOREMA: En cualquier triángulo ABC, si a, b y c son las longitudes de sus lados; α, β y γ son las medidas de los ángulos opuestos a los lados de longitud a, b y c respectivamente, entonces se cumple:

$$\boxed{\frac{sen(\alpha)}{a} = \frac{sen(\beta)}{b} = \frac{sen(\gamma)}{c}.}$$

Demostración:

Con origen en A, sea un sistema de coordenadas cartesianas, B está contenido en el eje X. Siendo: $A = (0 , 0)$, $B = (c , 0)$, $C = (x , y)$. Consideremos la recta que pasa por C paralela al eje Y, y que corta al eje X en el punto D, como $AC = b$.

Se tiene $C = (b.\cos(\alpha) , b.\text{sen}(\alpha)) = (x , y)$. Donde $x = b.\cos(\alpha)$, $y = b.\text{sen}(\alpha)$

Sea D el pie de la perpendicular de C sobre X. Entonces en el triángulo BDC, recto en D, se tiene: $\text{sen}(\beta) = \dfrac{y}{a}$ o sea $y = a.\text{sen}(\beta)$

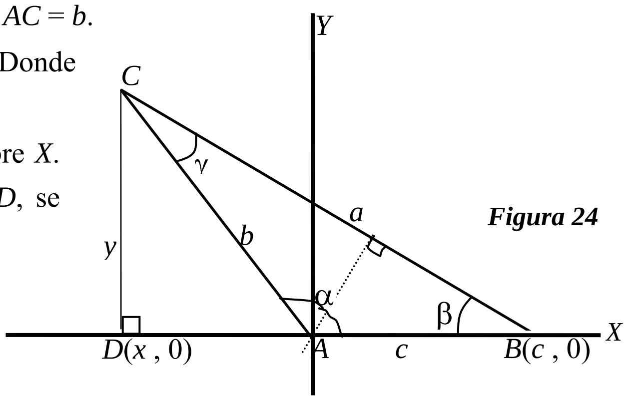


Figura 24

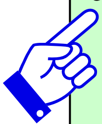
Luego, $b.\text{sen}(\alpha) = a.\text{sen}(\beta)$, de donde: $\dfrac{sen(\alpha)}{a} = \dfrac{sen(\beta)}{b}$

Análogamente se tiene: $\boxed{\dfrac{sen(\alpha)}{a} = \dfrac{sen(\gamma)}{c}}$ o $\boxed{\dfrac{sen(\beta)}{b} = \dfrac{sen(\gamma)}{c}}$

Para resolver un triángulo con la ley de senos, se deben conocer los valores de tres de las cuatro variables, despejando el valor de la cuarta variable.

1) dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos (LLA); o bien, dos ángulos y cualquier lado(AAL o ALA).

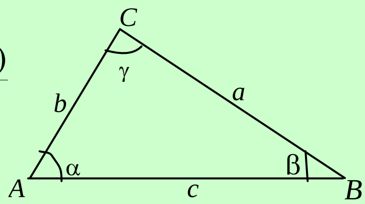
2) dos lados y el ángulo entre ellos (LAL); o bien los tres lados (LLL).



RECUERDA: "*En todo triángulo, las longitudes de los lados son directamente proporcionales a los senos de las medidas de sus ángulos opuesto a dichos lados*"

En todo ΔABC:

$$\frac{sen(\alpha)}{a} = \frac{sen(\beta)}{b} = \frac{sen(\gamma)}{c}$$



EJERCICIOS

Con los datos que tienes en cada figura halla los elementos que faltan de los triángulos.

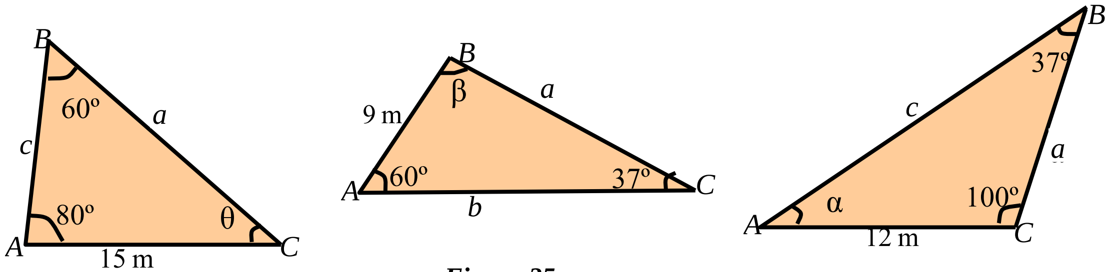


Figura 25

EJEMPLOS:

1) Halla la distancia entre las ciudades *A* y *B* con los datos del esquema (figura 26):

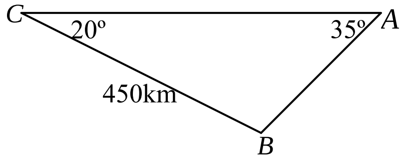


Figura 26

Solución:

Aplicando la ley de senos, tenemos:

$$\frac{AB}{sen(20^o)} = \frac{BC}{sen(35^o)}$$, reemplazando datos, resolviendo con uso de calculadora:

De $\frac{AB}{sen(20^o)} = \frac{450}{sen(35^o)}$, se tiene: $AB = \frac{(450)(0{,}342)}{0{,}5736} = 268{,}3$

Respuesta: La distancia entre las ciudades *A* y *B* es 268,3 km.

2) Un topógrafo quiere hallar la longitud de un puente y realiza con su teodolito las mediciones que se muestra en la figura. ¿Cuánto mide el puente?.

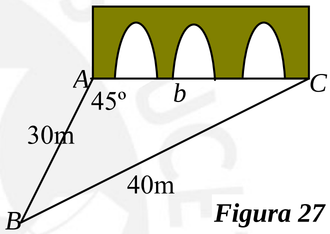


Figura 27

Solución:

Con los datos que se tiene, hallamos la medida del ángulo en *C*:

$$\frac{sen(\theta)}{30} = \frac{sen(45^o)}{40} \text{, o sea } sen(\theta) = \frac{(30).sen(45^o)}{40} = \frac{3\sqrt{2}}{8} \approx 0{,}53$$

como sen(θ) = 0,53 $\Rightarrow$ θ = arc sen(0,53) = 32º.

Hallamos β en *B*: β + 32º + 45º = 180º, entonces β = 180º – 77º = 103º.

Por el teorema del seno calculamos *b*:

$$\frac{sen(\beta)}{b} = \frac{sen(45^o)}{40},\ \frac{sen(103^o)}{b} = \frac{sen(45^o)}{40} \text{ y } b = \frac{40.sen(103^o)}{sen(45^o)} = \frac{40(0{,}97)}{0{,}707} \approx 59$$

Respuesta: El puente mide 59 m

3) Resolver el triángulo *ABC*, si α = 42º, β = 67º y *a* = 43 m.

Solución:

Por la ley de senos, se sabe que:

$$\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)} \text{; o sea } \frac{43}{sen(42^o)} = \frac{b}{sen(67^o)}.$$

De donde $b = \frac{43.sen(67^o)}{sen(42^o)} = \frac{43.(0{,}92)}{0{,}67} = 59{,}0771 \approx 59$. Luego *b* = 59 m

Por otro lado, se conoce la medida de dos ángulos y puede evaluarse el tercero:

γ = 180º – α – β = 180º – (42º – 67º) = 180º – 109º = 71º

Además, por la ley de senos:

$$\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{c}{sen(\gamma)}, \text{ o sea } \frac{43}{sen(42^o)} = \frac{c}{sen(71^o)}.$$

De donde $c = \dfrac{43.sen(71^o)}{sen(42^o)} = \dfrac{43(0{,}9455)}{0{,}67} = \dfrac{40{,}657}{0{,}67} = 60{,}68 \approx 61$. Luego $c = 61$ u

Por lo tanto se tiene: $b = 59$ m, $\gamma = 71$ º, $c = 61$ m.

4) Un árbol está en una ladera que tiene una inclinación de 12º con la horizontal. A una distancia de 45 m colina abajo desde el pie del árbol, el ángulo de elevación hasta su parte superior es de 39º. ¿Cuánto es la altura del árbol?.

Solución:

Sea h la altura del árbol. Por la ley de senos:

$$\frac{h}{sen(27^o)} = \frac{45}{sen(51^o)}, \text{ se deduce:}$$

$$h = \frac{45.sen(27^o)}{sen(51^o)} \approx 26{,}2879 \approx 26{,}3\ m.$$

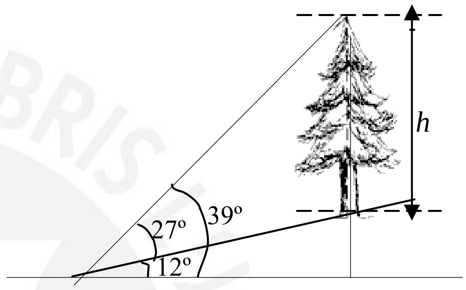


Figura 28

Respuesta: La altura del árbol es de: 26,3 m.

Comprueba tus aprendizajes

1. Si en un triángulo $a = 8$, $b = 10$ y $\alpha = 41º$, entonces $\beta = ?$

2. Sabiendo que $a = 50$, $\alpha = 65º$ y $\beta = 40º$. Halle el valor de b.

3. El diagonal mayor de un paralelogramo mide 35cm y forma ángulos de 25º y 35º con sus lados. Determine las longitudes de los lados del cuadrilátero.

4. Encuentre el perímetro de un pentágono inscrito en una circunferencia de 12,6 metros de radio.

5. Dos puntos de vigilancia, *A* y *B* (separados 10 kilómetros) están establecidos a lo largo de una costa para vigilar los embarques que arriben en un límite de 3 km. Si el punto *A* reporta

un barco S a un ángulo *BAS* de 37º y el puerto *B* reporta el mismo barco a un ángulo *ABS* de 20º, ¿a qué distancia estará el barco del punto *A*? ¿A qué distancia estará el barco de la playa (suponiendo que esta se encuentra en línea recta entre los dos puntos de observación)?

6. En todo triángulo inscrito en una circunferencia de radio "*r*", se cumple:

Se cumple: $\frac{c}{sen(\theta)} = \frac{b}{sen(\beta)} = \frac{a}{sen(\alpha)} = 2r$

Luego, sabiendo que :

$\beta = 70°$, $C = 30°$, $c = 5$ m

Calcule: α, a, b y r.

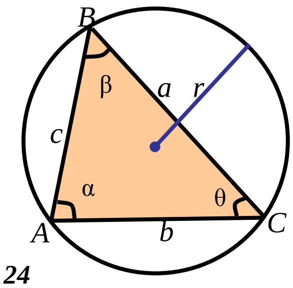


Figura 24

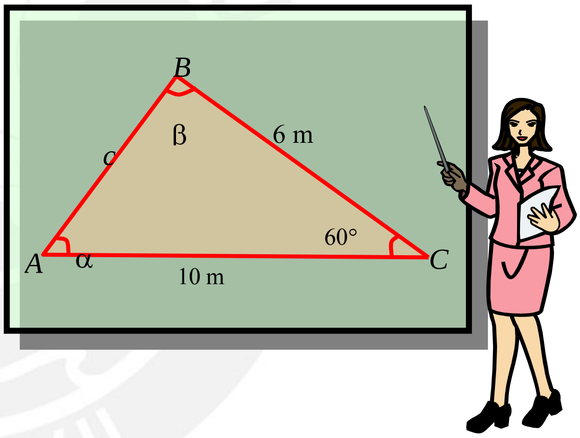
6.2.2. Ley de los Cosenos

En la gráfica, se conocen la longitud de dos lados y la medida del ángulo que formas éstos.
Donde $\alpha + \beta + 60 = 180$, siendo $\beta = 120 - \alpha$.
Por la ley de senos, se tiene:

$$\frac{sen(\alpha)}{6} = \frac{sen(120-\alpha)}{10}$$

Pero este cálculo resulta muy tedioso.

Para una solución inmediata de este tipo de problemas, tenemos la ley de cosenos, que se enuncia a continuación:



La ley de cosenos

TEOREMA: En cualquier triángulo *ABC*, si *a*, *b* y *c* son las longitudes de los lados; α, β y γ son las medidas de los ángulos opuestos a los lados dados, respectivamente, entonces:

(1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos(\alpha)$

(2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos(\beta)$

(3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos(\gamma)$

Demostración:

Consideremos el triángulo *ABC* en el plano coordenado con vértice *A* en posición estándar y *B* = (*c* , 0), como se muestra en la figura. Sea (*x*, *y*) las coordenadas del punto *C*.

Ilustración

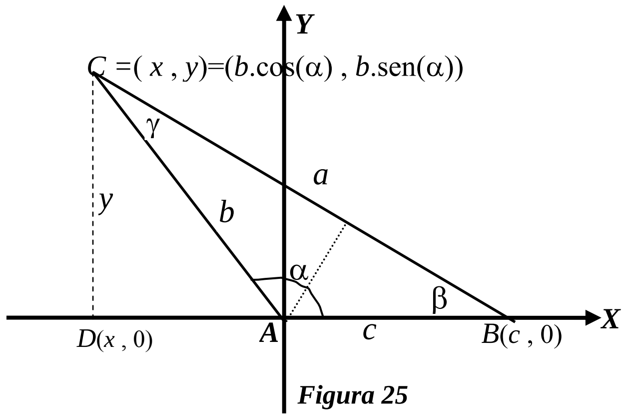


Figura 25

Del gráfico mostrado:

$\text{Cos}(\alpha) = \dfrac{x}{b}$ y $\text{sen}(\alpha) = \dfrac{y}{b}$. Despejando x e y, tenemos: $x = b.\cos(\alpha)$ e $y = b.\text{sen}(\alpha)$ y las coordenadas del punto C es $(b.\cos(\alpha)\ ,\ b.\text{sen}(\alpha))$.

$$CB = a = \sqrt{(b.\cos(\alpha) - c)^2 + (b.sen(\alpha) - 0)^2} \text{ ; o sea}$$

Así,

$$\begin{aligned} a^2 &= (b.\cos(\alpha) - c)^2 + (b.\text{sen}(\alpha))^2 \\ &= b^2\cos^2(\alpha) - 2bc.\cos(\alpha) + c^2 + b^2\text{sen}^2(\alpha) \\ &= b^2(\cos^2(\alpha) + \text{sen}^2(\alpha)) + c^2 - 2bc.\cos(\alpha) \\ &= b^2 + c^2 - 2b.c.\cos(\alpha). \end{aligned}$$

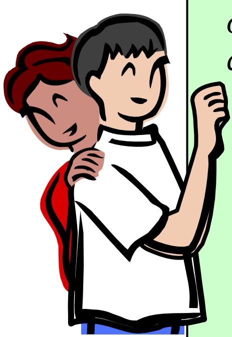
Por lo tanto: $a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.\cos(\alpha)$.

Asimismo, la medida de los tres ángulos, se obtiene a partir de:

$$\cos(\alpha) = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}, \qquad \cos(\beta) = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2ac}, \qquad \cos(\gamma) = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}$$

respectivamente.

El resultado es la primera fórmula enunciada en la ley de los cosenos. Las otras dos fórmulas podemos deducir haciendo un procedimiento análogo al anterior.

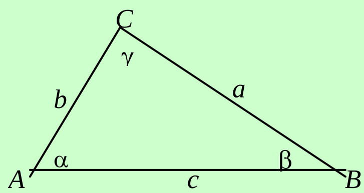


RECUERDE:

"*En todo triángulo, el cuadrado de la longitud de uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados menos el doble producto de las longitudes de dichos lados por el coseno del ángulo comprendido entre ellos*".

En todo ΔABC:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab.\cos(\gamma)$$



Los problemas que usan la ley de cosenos, corresponden a los casos:

- Se conocen las medidas de dos lados del triángulo y el ángulo que ellos forman.
- Se conocen las medidas de los tres lados del triángulo.
- Se conocen las medidas de dos lados y la medida del ángulo no incluido.

EJECICIOS

En cada uno de los triángulos halla los elementos que desconocemos (aplica la ley de cosenos). Calcula la medida del ángulo usando tabla o calculadora, según el caso.

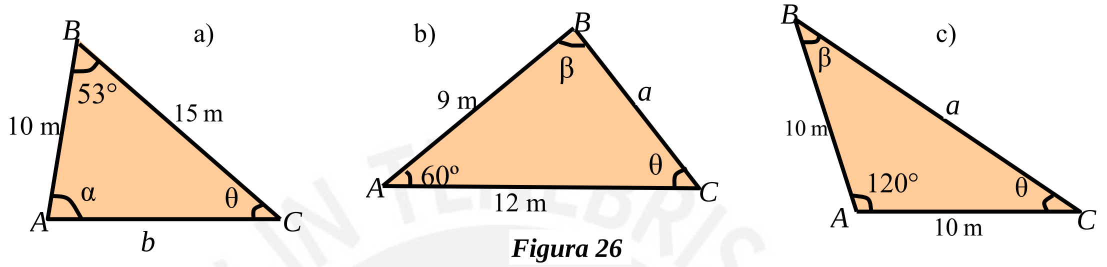


Figura 26

EJEMPLOS:

1) Resuelva el triángulo *ABC*, dados $a = 43$, $b = 29$ y $\gamma = 28º$.

Solución:

Faltan conocer el lado c y los ángulos α, β.

Resolviendo para c:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2b.a.\cos(\gamma)$$

$$= 43^2 + 29^2 - 2.43.29\cos(28º) = 1849 + 841 - 2494(0{,}8829) = 488 \text{ (con calculadora)}$$

Luego, $c = 22$.

Hallando el valor de α, conociendo c: $a^2 = b^2 + c^2 - 2a.b.\cos(\alpha)$, y despejando $\cos(\alpha)$, se tiene:

$\cos(\alpha) = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2.a.b}$, reemplazando valores $\cos(\alpha) = \dfrac{29^2 + 22^2 - 43^2}{2(29)(22)} \approx -0{,}411$, de donde

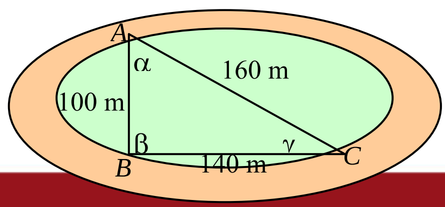
$\alpha = \arccos(-0{,}411)$, haciendo uso de calculadora: $\boldsymbol{\alpha \approx 114º}$.

Finalmente, β, obtenemos a partir de: $\beta = 180º - (\alpha + \gamma) = 180º - (114º + 28º) = \mathbf{38º}$.

2) Durante una carrera de atletismo, tres jueces *A*, *B* y *C*, se ubican en distintos puntos de la pista de forma oval, de modo que medidas las distancias que hay entre ellos en línea recta, el juez A dista 100 m del juez *B*, éste dista 140 m de *C*; y este último dista 160 m del juez A. ¿Cuánto miden los ángulos del triángulo que se forma al unir los puntos que representan las posiciones de los jueces?

Solución:

De acuerdo a los datos del problema, la posición de los jueces determinan un triángulo *ABC*, en el cual a



= 140 m; b = 160 m y c = 100 m, como se muestra en la figura 27.

Luego, por medio de la ley de cosenos:

Figura 27

$a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.\cos(\alpha)$, despejando cos(α) y reemplazando valores:

$\cos(\alpha) = \dfrac{160^2 + 100^2 - 140^2}{2(160)(100)} = \dfrac{16000}{32000} = \dfrac{1}{2}$. De donde **α = 60º.**

Del mismo modo: $\cos(\beta) = \dfrac{140^2 + 100^2 - 160^2}{2(140)(100)} = \dfrac{4000}{28000} = \dfrac{1}{7} \approx 0{,}14286$.

de donde β = arcos(0,14286) = 81,79º ≈ 82º. Es decir **β = 82º.**

Asimismo, γ = 180º − (α + β) = 180º – (60º + 82º) = 180º – 142º = 38º

Por lo tanto, las medidas de los ángulos son: **α = 60º, β = 82º, γ = 38º.**

3) Desde un punto en tierra firme, dos islas están a 3,25 km y a 4,65 km de distancia. Si el ángulo visual entre las islas es de 109º42'. Halle la distancia entre ellos.

Solución:

Sea d, la distancia entre las islas, como se muestra en la figura:

Por la ley de cosenos, usando calculadora, se tiene

$d^2 = (3{,}25)^2 + (4{,}65)^2 - 2(3{,}25)(4{,}65).\cos(109º42')$

$d = \sqrt{3{,}25^2 + 4{,}65^2 - 6{,}5(4{,}65).\cos(109º42')}$

$\approx \sqrt{42{,}373704}$

$\approx 6{,}5095088 \approx 6{,}51$

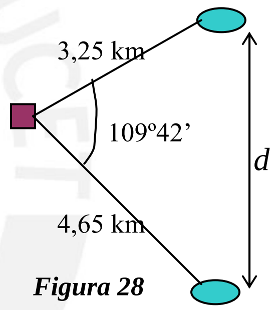


Figura 28

Respuesta: Las islas distan aproximadamente 6,51 km.

4) Dos fuerzas de 30 N y 70 N actúan sobre un punto del plano. Si el ángulo formado por las fuerzas es de 40º, ¿cuál es la magnitud y dirección (con respecto a la fuerza de 70 N) de la resultante?.

Solución:

Representemos un diagrama en el que los vectores geométricos representan las fuerzas.

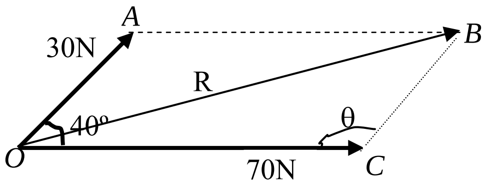


Figura 29

Ya que los ángulos adyacentes de un paralelogramo son suplementarios, $m(\widehat{AOB})$ = 180º − 40º = $m(\widehat{OCB})$. La longitud del vector resultante R, hallamos por medio de la ley de cosenos.

$R^2 = 30^2 + 70^2 - 2(30)(70)\cos(140º)$

$$R = \sqrt{30^2 + 70^2 - 2(30)(70)\cos 140^{o}} = \sqrt{9025} = 95 \text{ N}$$

Para encontrar θ, la dirección de R usaremos la ley de los senos

$$\frac{sen(\theta)}{30} = \frac{sen(140^{o})}{95} \Rightarrow \text{sen}(\theta) = \frac{30.sen(140^{o})}{95} \Rightarrow \theta = sen^{-1}\frac{30.sen(140^{o})}{95} \approx 12^{o}.$$

Respuesta: Magnitud: 95 N, dirección 12º.

EJECICIO

Es necesario conocer las distancias desde un punto *C* hasta dos puntos *A* y *B*, pero esta distancia no puede medirse directamente. El segmento *CA* se prolonga 75 m hasta un punto *D*; el segmento *CB* se prolonga 225 m hasta el punto *E*. Se miden las distancias: *AB* = 300 m, *DB* = 326 m y *DE* = 488 m. Encontrar *AC* y *BC*.

NOTA: Los elementos buscados del triángulo ABC pueden encontrarse una vez que se hayan calculado las medidas de los ángulos *BAC* y *ABC*. El primer ángulo es el suplemento del $\widehat{BAD}$ y el segundo es el suplemento de la suma del $\widehat{ABD}$ y $\widehat{DBE}$.

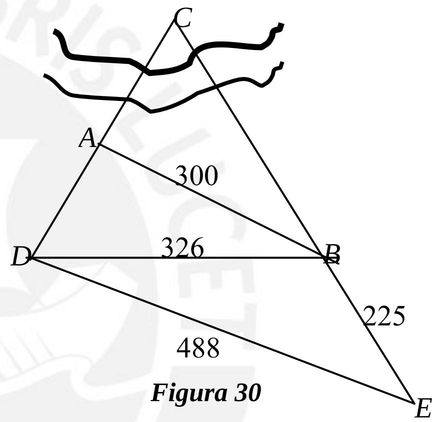


Figura 30

Comprueba tus aprendizajes

1. ¿Cuánto miden los ángulos de un triángulo *ABC* cuyos lados tienen longitud: *a* = 20 m, *b* = 30 m y *c* = 40 m?.

2. Si en el triángulo *ABC*, si α = 38º43’, *a* = 9,72 y *b* = 11,84, calcule *c*.

3. Dos lados adyacentes de un paralelogramo forman un ángulo de 35º10’ y tienen 3 y 8 metros de longitud. ¿Cuál es la longitud del diagonal menor del paralelogramo?.

4. En una maniobra naval, un barco avanza 20 km en la dirección *N*50º*E*, después avanza 15km al *N*10º*O*. Un segundo barco partirá del mismo punto, pero ha de efectuar una travesía recta para encontrarse con la primera embarcación. ¿Qué recorrido hará y en qué dirección debe navegar este segundo barco?

5. Si se inscribe un heptágono regular en una circunferencia de radio 48 centímetros, encuentre la longitud del lado del polígono regular.

6. La magnitud de la resultante de dos fuerzas de 115 N y 215 N es de 275 N. Encontrar el ángulo formado por las direcciones de las fuerzas componentes.

7. Entre dos ciudades *A* y *B* hay aproximadamente 200 kilómetros. Un piloto a 80 kilómetros de *A*, se da cuenta de que se ha desviado 8º20’ desde su salida de esa ciudad. ¿A qué distancia de la ciudad *B* se encuentra en ese momento?

ASÍGNATE TUS PUNTAJES

¿Cuáles serían los puntajes que te asignas en el desarrollo de cada uno de las preguntas de comprobación de tus Aprendizajes?

Items	1(2pts)	2(3pts)	3(3pts)	4(3pts)	5(3pts)	6 (3pts)	7 (3pts)	NOTA
Puntajes								

¡Quítate puntos por cada error que tengas!

6.2.3 Ley de las Tangentes

Según la figura 31, si se toma un punto “*A*” (ubicado en la parte inferior del terreno), un punto “*B*” (ubicado en la parte superior del terreno) y un punto “*C*” (ubicado en el pie de la colina), hemos formado un triángulo.

Si las distancias *AC* y *BC* son respectivamente 15 m y 24 m además el ángulo en *C* mide 120°. Por la ley de cosenos se puede calcular *c*, luego por ley de senos α, y finalmente β.

Pero existe una tercera ley: ley de tangentes que facilitan la solución de problemas. Pero que es de poco uso.

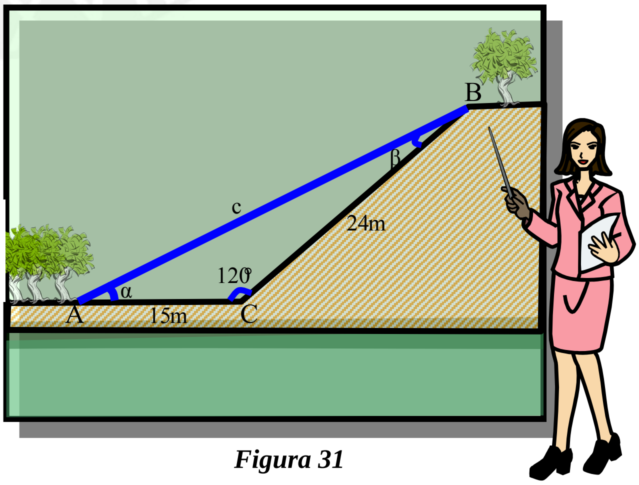


Figura 31

La ley de la tangente

En un triángulo ABC, si a, b y c son las longitudes de sus lados, α, β y γ son las medidas de los ángulos interiores opuestos a los lados de longitudes a, b y c, respectivamente, se cumplen:

$$(1)\ \frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \qquad (2)\ \frac{a+c}{a-c}=\frac{\tan\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)} \qquad (3)\ \frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}.$$

¡*Estas igualdades se llaman ley de tangentes*!

Demostración: (probamos a manera de ejemplo la igualdad (1)):

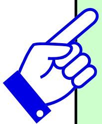
De la ley de senos se tiene: $\frac{a}{c}=\frac{sen(\alpha)}{sen(\gamma)}$ y $\frac{b}{c}=\frac{sen(\beta)}{sen(\gamma)}$. De donde:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}=\frac{sen(\alpha)+sen(\beta)}{sen(\gamma)},\ \text{y}\qquad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}=\frac{sen(\alpha)-sen(\beta)}{sen(\gamma)}.$$

Luego: $$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\frac{a+b}{c}}{\frac{a-b}{c}}=\frac{\frac{sen(\alpha)+sen(\beta)}{sen(\gamma)}}{\frac{sen(\alpha)-sen(\beta)}{sen(\gamma)}}=\frac{sen(\alpha)+sen(\beta)}{sen(\alpha)-sen(\beta)}=\frac{2sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$=\frac{sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\cdot\frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}=\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cot\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\frac{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

Procediendo en forma análoga se prueban: $\frac{a+c}{a-c}=\frac{\tan\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}$ y $\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}$.



RECUERDE:

"La suma de las longitudes de dos lados de un triángulo es a su diferencia como la tangente de la semisuma de las medidas de los ángulos opuestos a estos lados es a la tangente de la semidiferencia de las medidas de estos ángulos."

EJERCICIO

Con los datos que se dan en las figuras halle los elementos de los triángulos que se desconocen:

-) Para hallar las medidas de los ángulos utilice la ley de las tangentes.

-) Para hallar la longitud del tercer lado utilice la ley del coseno.

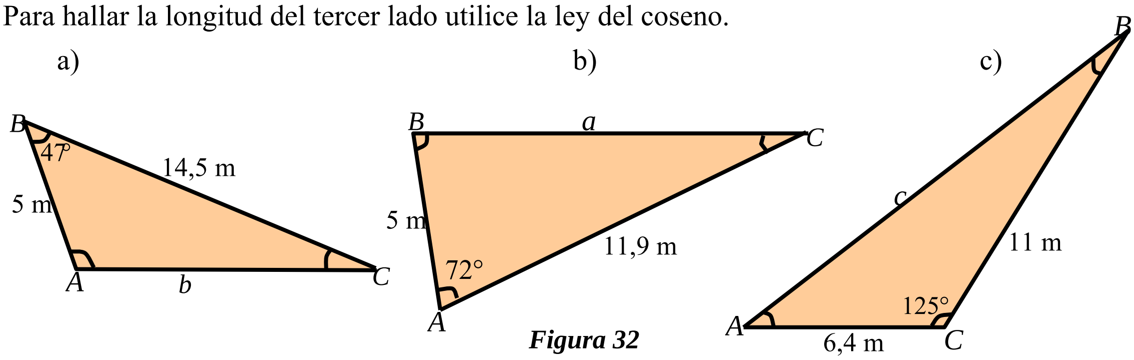
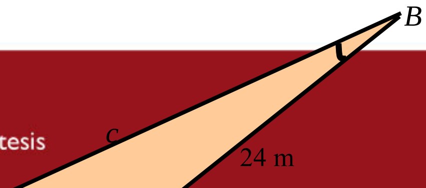


Figura 32

EJEMPLO: En la gráfica mostrada hallar los elementos del triángulo ABC que se desconocen (aplicando la ley de las tangentes).



Solución:

Elementos del triángulo que conocemos:
$a = 24$ m $\quad b = 15$ m y $\quad \gamma = 120°$

Elementos del triángulo que desconocemos:

Figura 33

α, β y el lado de longitud "c"

Por la ley de las tangentes: $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$, donde: α + β + γ =180°, es decir: α + β + 120º = 180 y α + β = 60°. Luego: $\dfrac{\alpha+\beta}{2} = 30°$ y, reemplazando en la ley de tangentes

$\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$, se tiene: $\dfrac{24+15}{24-15} = \dfrac{\tan(30^o)}{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$ ó $\dfrac{39}{9} = \dfrac{0{,}5774}{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$.

De donde $\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \dfrac{9}{39}(0{,}5774) \approx 0{,}1333$.

Usamos la calculadora científica, para hallar el ángulo $\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, se tiene: $\dfrac{\alpha-\beta}{2} = 7{,}5928°$ y despejando: α – β = 15,1854°.

Para hallar β y α, se tiene el sistema:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 60° \\ \underline{\alpha - \beta = 15{,}1854°} \end{cases}$$

De donde 2α = 75,1854°, o sea α = 37,59°.

Luego, reemplazando el valor de α, en 37,59° + β = 60°, se tiene: β = 60° – 37,59° =22,41.

Finalmente, para hallar *c*:

En el triángulo *ABC* aplicamos la ley de tangentes: $\dfrac{a+c}{a-c} = \dfrac{\tan\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}$ ó $\dfrac{c+a}{c-a} = \dfrac{\tan\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)}$, se tiene: $\dfrac{c+24}{c-24} = \dfrac{\tan\left(\frac{120+37{,}59}{2}\right)}{\tan\left(\frac{120-37{,}59}{2}\right)}$ ó $\dfrac{c+24}{c-24} = \dfrac{\tan(78{,}795^o)}{\tan(41{,}205^o)} = \dfrac{5{,}05}{0{,}875} \approx 5{,}77$ (usando calculadora)

Luego, $\dfrac{c+24}{c-24} = 5{,}77$ ó c + 24 = (5,77)(*c* – 24), transponiendo términos:

4,77*c* = 162,48, luego *c* = 162,48/1,77 = 34,06 ≈ 34. luego: *c* = 34 m

Respuesta: α = 37,5927° $\quad$ β = 22,4073° $\quad$ *c* = 34 m

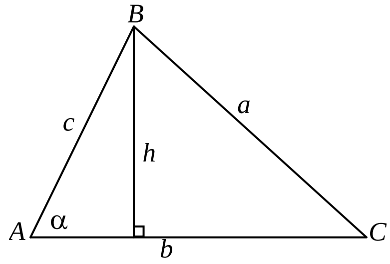
6.2.4. Fórmula de Herón

La trigonometría también nos facilita hallar el área de ciertas regiones poligonales, como la de la región triangular, a través de la fórmula deducida por Herón, que se expresa en término de sus lados:

El área de la región triangular cuyos lados miden *a*, *b* y *c* es:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Donde, $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, es el semiperímetro del triángulo *ABC*.



Demostración

Si A es el área de la región, trazando las altura relativa al lado $\overline{AC}$: $A = \dfrac{1}{2}bh$

Pero sen(α) = *h*/*c* o sea $h = c$.sen(α).

Luego: $A = \dfrac{1}{2}b.c sen(\alpha) = \dfrac{1}{2}b.c.sen[2(\pi/2)] = \dfrac{1}{2}.b.c(2sen(\pi/2).\cos(\pi/2))$, es decir:

$$A = b.c.sen(\pi/2).\cos(\pi/2) = b.c.\sqrt{\frac{1-coos(\alpha)}{2}}.\sqrt{\frac{1+coos(\alpha)}{2}}$$

Despejando el cos(α), en la ley de los cosenos tenemos: $\cos(\alpha) = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. De esto:

$$1+\cos(\alpha) = 1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$1-\cos(\alpha) = 1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{2bc} = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$= \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

De donde

$$A = bc.\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}}.\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}}$$

$$= \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{16}}$$

$$= \sqrt{(\frac{b+c+a}{2})(\frac{b+c-a}{2})(\frac{a+c-b}{2})(\frac{a+b-c}{2})}$$

$$= \sqrt{(\frac{b+c+a}{2})(\frac{b+c+a}{2}-a)(\frac{a+c+b}{2}-b)(\frac{a+b+c}{2}-c)}$$

como $s = \dfrac{1}{2}(a+b+c)$, se tiene que $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

EJEMPLOS:

1) Calcule el área de la región triangular *ABC*, dados: $a =$ 4,5 m, $b =$ 3,2 m y $\gamma = 44º$.

Solución:

Como el ángulo γ tiene por lados a y b, puede emplearse directamente la fórmula y, haciendo uso de una calculadora científica:

$$A = \frac{1}{2}a.b.\text{sen}(\gamma) = \frac{1}{2}(4,5)(3,2)\ \text{sen}(44º) = \frac{1}{2}(4,5)(3,2)(\ 0,695\ ) = \ 5\text{m}^2.$$

2) Un campo triangular tiene lados de 125 cm, 160 cm, y 225 cm. Calcule el área del campo.

Solución:

Para utilizar la fórmula de Herón, consideremos $a = 125$, $b = 160$ y $c = 225$.

En efecto, tendremos:

$$s = \frac{1}{2}(125 + 160 + 225) = \frac{1}{2}(510) = 255$$

$$s - a = 225 - 125 = 130$$

$$s - b = 225 - 160 = 95$$

$$s - c = 255 - 225 = 30$$

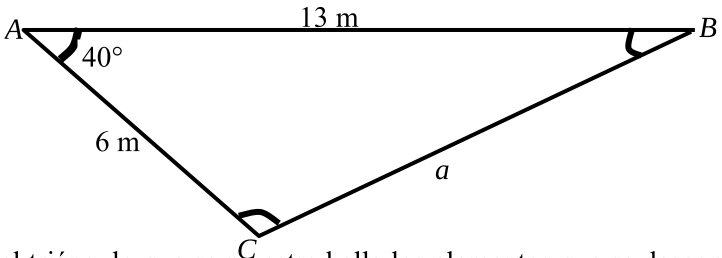
Sustituyendo en la fórmula de Herón obtenemos:

$$A = \sqrt{(255)(130)(95)(30)} = \sqrt{94477500} \approx 9\ 720\ \text{cm}^2.$$

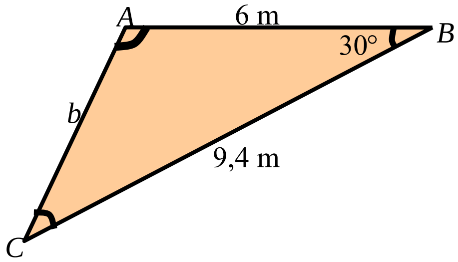
Respuesta: área del campo triangular es: 9 720 cm^2.

Comprueba tus aprendizajes

1. En el triángulo *ABC*, si c = 13 m y *b* = 6 m, el ángulo que forman dichos lados es de 40°. Halla los demás elementos del triángulo (aplica la ley de las tangentes para hallar los ángulos).



2. En el triángulo que se muestra halla los elementos que se desconocen (para hallar los ángulos aplica la ley de las tangentes).



3. Calcule el área de la región triangular *ABC*, en los siguientes casos:

a) $\alpha = 60º$, $b = 20$, $c = 30$ b) $\gamma = 45$, $b = 10$, $a = 15$

4. Un terreno de forma triangular tiene lados de longitud *a*, *b* y *c*, en metros. Calcule el área del terreno en m^2, si:

a) $a = 11,5$ m; $b = 14$ m, $c = 20$ m b) $a = 32$ m, $b = 35$ m, $c = 50$ m.

5. Halle el área de una región triangular cuyos lados medidos (en centímetros) están expresados en números enteros pares consecutivos y cuyo ángulo menor mide la mitad de la medida del ángulo mayor.

6. Si, dado un triángulo *ABC*, *K* es el área de su región triangular, *R* el radio de la circunferencia circunscrita y *r* el radio de la circunferencia inscrita, demuestre que: a) $K = 2R^2.\text{sen}(\alpha).\text{sen}(\beta).\text{sen}(\gamma)$, b) $K = r.R.[\text{sen}(\alpha) + \text{sen}(\beta) + \text{sen}(\gamma)]$.

Sugerencia: en solucionar el problema aplique: ley de senos, ley de cosenos y luego la fórmula de Herón.

ASÍGNATE TUS PUNTAJES

¿Cuáles serían los puntajes que te asignas en el desarrollo de cada uno de las preguntas de los Ejercicios de comprobación de tus aprendizajes?

ÍTEM	1	2	3	4	5	6	NOTA
Puntaje							

PRUEBA DE SALIDA DE LA UNIDAD Nº 6

1. Resolver los triángulos rectángulos con ángulo recto en el vértice C, usando la información dada:

a) $\alpha = 23º$, $a = 54$ b) $\alpha = 53º$ $c = 43$ c) $\beta = 22º$ $b = 12$

2. Resuelva cada uno de los problemas de triángulos rectángulos:

a) Un río de 1 kilómetro de ancho fluye a razón de 1,5 km/h. Si un hombre rema a través del río, siempre en dirección hacia la orilla opuesta, ¿qué tan lejos llegará a tierra, río abajo, si su velocidad de remar en agua tranquila es de 4km/h?.

b) Si un tren sube una cuesta que tiene un ángulo constante de 1º23', ¿Cuántos metros habrá subido al avanzar 1,5 km?

3. problemas de ángulos de elevación y depresión

a) Desde un punto de observación, los ángulos de depresión de dos botes alineados con ese punto son 18º y 28º. Halle la distancia entre los dos botes si el punto de observación está a 2000 metros de altura.

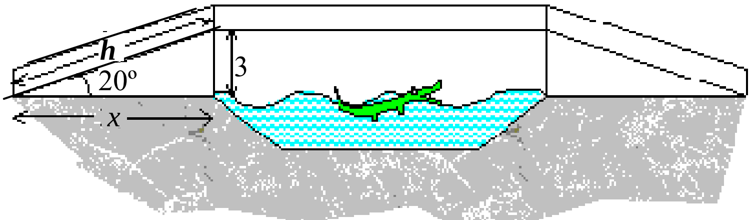
b) Un hombre observa que el ángulo de elevación de una torre es β. Recorre las dos terceras partes de la distancia que lo separa de la torre y desde ese punto el ángulo de elevación es 2β. Halle β.

4. Resuelva los siguientes problemas de Rumbos

a) Una ciudad *A* está a 785 kilómetros y a *S*19º*O* de la ciudad *B*. Otra ciudad *C* está a 214 kilómetros y a *S*29º*E* de la ciudad B. Encuentre la distancia entre las ciudades *A* y *C*.

b) Un automóvil viaja por una pista triangular cuyos lados miden 2km, 4km y 3km de longitud, respectivamente. El primer lado se recorre en dirección N20ºO, el segundo en dirección *S*θº*O*, donde θº es el ángulo agudo, en grados. Calcule la dirección en que se recorrió el tercer lado.

5. Se desea construir un puente sobre el río Huallaga, que mide 40 m de ancho, de manera que quede a una altura de 3 m sobre el agua y que las rampas de acceso tengan una inclinación de 20º, como se muestra en la figura. ¿Cuál debe ser la longitud de la baranda?, ¿a qué distancia del cauce se situará el comienzo de la rampa?



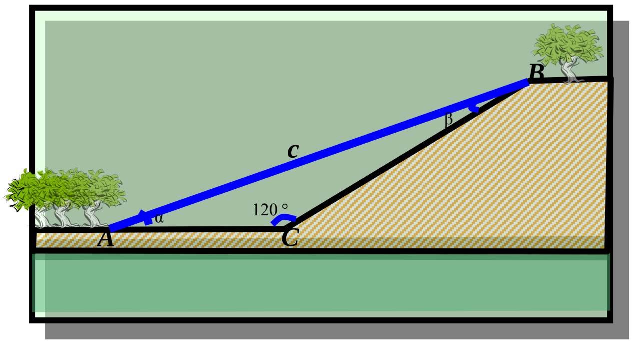
6. Desarrolle los problemas siguientes, usando la Ley de los senos:
   a) El diagonal mayor de un paralelogramo mide 35cm, y forma ángulos de 25º y 32º con los lados. Determine los lados del paralelogramo.

   b) Un terreno triangular tiene lados de 420 m, 350 m, y 180 m de longitud. ¿Cuál es el ángulo más pequeño del terreno?

7. Desarrolle los problemas siguientes, usando la ley de los cosenos:
   a) El punto *A* es inaccesible desde *B*. En el punto *C*, el ángulo *ACB* mide 72º. Se sabe que *C* está a 52 m de *A* y a 64 m de *B*. Encuentre la distancia entre *A* y *B*.

   b) Dos carreteras rectas se cruzan a formando un ángulo de 81º. Un auto se encuentra a 100 m de la intersección, y otro vehículo esta a 150 m del cruce, viaja por la otra carretera. ¿Cuál es la distancia entre los autos?

8. Desarrolle los problemas siguientes, usando la Ley de las tangentes:
   a) Resuelva el triángulo *ABC*, si $a = 9$ m, $b = 8$ m y $\gamma = 120º$.
   b) En la figura calcule *c*, sabiendo que d(*A* , *C*) = 24 m y d(*C* , *B*) = 36 m.



9. Desarrolle los problemas según el caso:

a) Un niño tira un carrito en un terreno plano, ejerciendo una fuerza de 20 N sobre la manija que forma un ángulo de 30º con la horizontal. Calcule el trabajo efectuado al tirar del carrito a lo largo de 100m.

b) Un automóvil que pesa 2000 N está detenido en una carretera suave, inclinada 5º con respecto a la horizontal. Encuentre la fuerza paralela a la carretera que es necesaria para evitar que el auto ruede cuesta abajo. Sin considerar la fricción.

10. Desarrolle los problemas referentes a fuerzas y trabajo.

a) Una fuerza de 76 N actúa con un ángulo de 60º sobre un objeto ubicado en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares. ¿Cuál es el par de fuerzas con direcciones ***x*** e ***y*** que tienen un efecto equivalente sobre el objeto?

b) Determine la magnitud en Newton de la resultante de dos fuerzas de 5N y 8N, respectivamente, que actúan sobre un mismo punto y forman un ángulo de 120º entre sí.

Tiene OCHO (8) o más ejercicios correctamente resueltos

Si:

Entonces el estudio de la trigonometría a través de este materia,l para usted a terminado.

No:

Entonces vuelva a estudiar detenidamente los temas que tuvo dificultad en la unidad Nº **6**

PUEDE DESCANSAR

EVALUACIÓN DE SALIDA DEL MODELO DIDÁCTICO

A. Prueba:

Poniendo a flote todos tus conocimientos adquiridos en el estudio de este material, resuelva los problemas que a continuación se le presentan:

1. Indique los extremos terminales de las trayectorias sobre la circunferencia unitaria:

a) $(A, 3\pi/4)$ b) $(A, -7\pi/3)$ c) $(A, -17\pi/6)$

2. En cada uno de los enunciados, indique usted cuál es verdadero y cuál falso.

a) $E(-7\pi) = E(\pi)$ y $E(-\pi/6) = E(13\pi/6)$

b) $E(3\pi/4)$ y $E(5\pi/4)$ es simétrica con respecto al eje de las abscisas.

c) El punto $P = (\sqrt{35}/7, -\sqrt{14}/7)$ pertenece a la circunferencia unitaria en posición normal.

3. a) Halle el equivalente en radianes de 54º.

b) La medidas de tres ángulos están en progresión aritmética cuya razón es 20º. Si la suma de medidas de los ángulos mayores es 200º, halle la suma de las medidas de los tres ángulos en el sistema centesimal "C", con 9C = 10S.

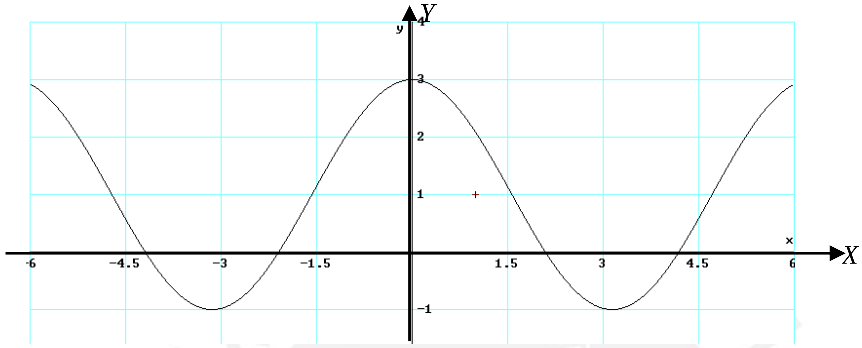
c) Calcule la medida de un ángulo en grados sexagesimales, si su medida en grados centesimales y en radianes es tal que: $\frac{10}{9C} - \frac{9}{10S} = \frac{R}{2\pi}$.

4. a) Si $E(\theta) = (\sqrt{3}/2, -1/2)$ entonces $\text{sen}(\theta)$ = ... $\tan(\theta)$ = ...

b) si sen(θ) = 1/3 y π/2 < θ < π, entonces cos(θ) = ... cot(θ) =.....................
c) si tan(θ) = 2/3 y π < θ < 3π/2, entonces sec(θ) = ... cos(θ) = ...

5. a) Si sen(θ) = 3/5, calcule el valor de la expresión $8(tan^2(\theta) + \sec^2(\theta))$.
   b) Si E(α) = (–4 , 3) y E(β) = (–3 , –4), calcule: M = – sen(α).cos(β) + sen(β).cos(α).
   c) Dado tan(θ) = $\sqrt{5}/6$, y 3π/2 < θ < 2π, entonces determine: cos(θ).

6. En la gráfica mostrada, identifique: a) el dominio y rango, b) período y condición de par o impar, c) simetría y amplitud.

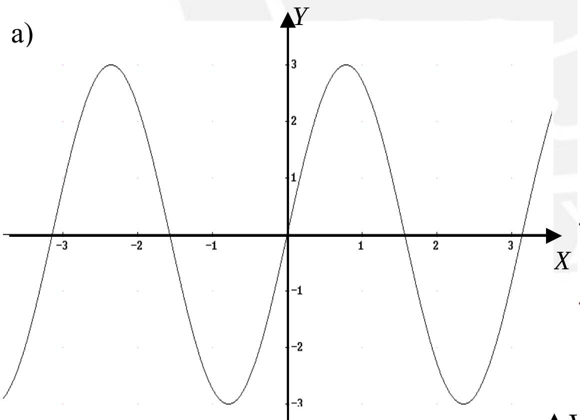


7. Identifica las abscisas de los puntos donde se interceptan las gráficas de las funciones:
   a) seno y coseno
   b) tangente y cotangente
   c) secante y cosecante

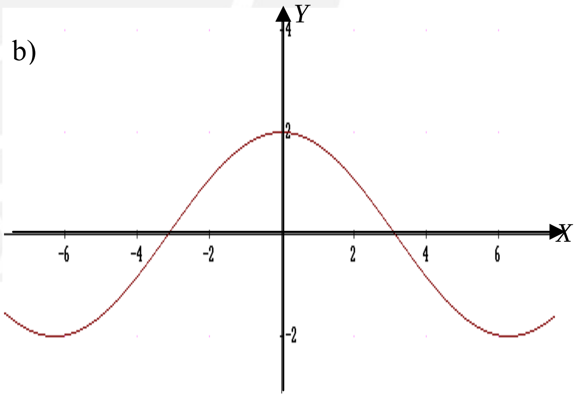
8. Calcule los valores de las expresiones: a) arctan($-\sqrt{3}$) + arccos($-\sqrt{3}/2$)
   b) arctan(–1) + arccot($\sqrt{3}$) c) cos[arctan(15/8) – arcsen(7/25)]

9. Identifique la función cuyo gráfico se aproxima al siguiente:

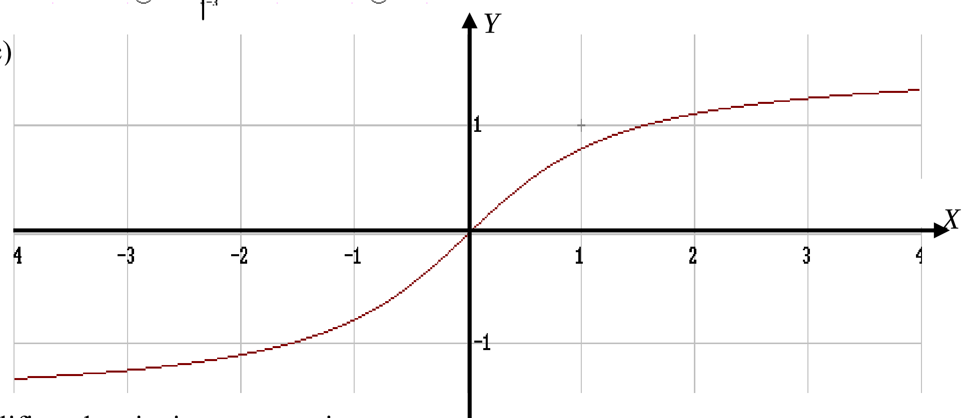
a)



b)



c)



10. Simplifique las siguientes expresiones:

a) Si α es el ángulo cuyo lado terminal pasa por (3 , –1), determine: $E = \sqrt{10}\csc(\alpha) + \cot(\alpha)$.

b) $\dfrac{2sen^2(\theta) - \cos^2(\theta) + 1}{sen(\theta)}$ c) $M = \dfrac{sen(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta) + sen(\alpha).sen(\beta)} - \tan(\alpha)$.

11. a) Evalué el valor de tan(π/12)
b)Si $sen(\alpha) = 3/5$ y $\cos(\beta) = 4/5$, con E(α) en II-C y E(β) en I-C. Determine cos(α + β).
c) Si (–3 , –4) y (4 , –3) son puntos del lado terminal de los ángulos en posición normal α y β, respectivamente, halle: $E = \csc(\alpha + \beta) + \cot(\alpha + \beta)$.

12. a) Encuentre el valor de: cos(θ/2) y cot(θ/2), si sen(θ) = –3/5, π < θ < 3π/2.
b) Si cos(θ) = 3/5 y θ es agudo. Calcule el valor de la expresión : $E = \dfrac{\tan(2\theta)}{\sec(2\theta)+1}$.
c) Halle α, tal que: sen(3α).cos(α) + sen(α).cos(3α) = $\sqrt{3}$ /2.

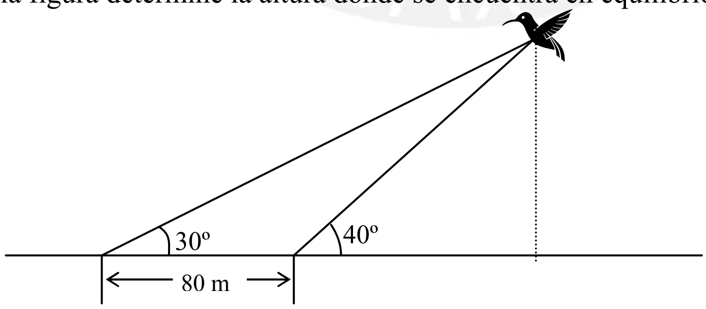
13. a) Determine el valor numérico de: $N = \dfrac{1}{sen(10^{o})} - 4sen(70^{o})$, sin usar tabla ni calculadora.
b) Si 5sen(α/2) – 3cos(α/2) = 0, halle el valor de: $P = 5/\csc(\alpha) - 3/\sec(\alpha)$.
c) Simplifique la expresión: $\dfrac{sen(4\theta)+sen(2\theta)}{\cos(4\theta)+\cos(2\theta)}$, por transformación de suma a producto.

14. Indique las cuatro características del comportamiento de cada una de las funciones trigonométricas en el primer cuadrante:
a) la función coseno b) la función tangente c) la función cosecante.

15. a) La suma de los tres primeros valores de θ, tales que: 1 + 4sen(θ).sen(2θ) = 8cos(θ).
b) Determine la solución general de la ecuación: cos(θ) + cos(θ)sen(θ) = sec(θ) + sec(θ)sen(θ).
c) Encuentra la solución de la ecuación: $\csc^2(\theta) - \cot^2(\theta) = 1$, con $0 < \theta < 2\pi$.

16. a) Los árboles más grandes de América crecen en la selva peruana; su altura es mayor que el largo de un campo del fútbol. Si los ángulos de elevación entre dos puntos colineales distantes 38 metros a su cima son 37º y 45º. ¿Cuál es la altura del árbol más grande?
b) Desde lo alto de un faro de 50 m de altura se ve un nadador bajo un ángulo de depresión de 25º. ¿A qué distancia se encuentra?
c) Un avión vuela 100 m en dirección *S*38º10'*E*. ¿Qué distancia hacia el sur y qué distancia hacia el este a recorrido?.

17. a) En la figura determine la altura donde se encuentra en equilibrio el picaflor, sobre el suelo.



b) Halle las componentes rectangulares de una fuerza de 525Nque forma un ángulo de 37º con la horizontal.
c) Demetrio recorre 80 km en la dirección *N*53º*O*, luego $80\sqrt{2}$ km en la dirección *SO* y finalmente 120 km hacia el este. ¿A qué distancia se encuentra Demetrio de su posición inicial?

18. a) Determine la medida del ángulo mayor de un triángulo cuyos lados miden 6m, 8m y 13 m.

b) Los lados de un triángulo miden 10 m, 11 m y 12 m. Calcule la medida del ángulo mayor de dicho triángulo.

c) Halle el área de una región triangular cuyos lados medidos (en metros) están expresados en números enteros pares consecutivos y cuyo ángulo menor mide la mitad de la medida del ángulo mayor.

19. a) El ángulo en una esquina de un terreno de forma triangular es 74º, y los lados que se cortan en esa esquina tienen 175 m y 150 m de longitud. Calcule la longitud del tercer lado.
b) Dos lados adyacentes de un paralelogramo se cortan formando un ángulo de 35º10' y tienen longitudes 3 y 8 cm. Determine la longitud de sus diagonales.
c) La magnitud de la resultante de dos fuerzas de 115 N y 215 N es de 275 N. Encuentre la medida del ángulo formado por las direcciones de las fuerzas componentes.

20. a) En un triángulo dos de sus lados miden 30 y 25 cm, y el ángulo comprendido entre ellos es de 35º. i) calcula la medida del tercer lado, ii) calcula la altura que parte del vértice del ángulo de 35º, iii) calcula el área del triángulo.

b) Tres circunferencias cuyos radios respectivos miden 11,5, 15 y 22,5 m, son tangentes exteriores entre sí. Encuentre las medidas de los tres ángulos que se forman cuando se unen los centros de las circunferencias.

c) Los lados de un terreno triangular miden 32 m, 28 m y 40 m, determine el área y el costo del terreno sabiendo que el metro cuadrado está valorizado en 16 nuevos soles.

¡ PASE USTED A LA SIGUIENTE PÁGINA!

B. Clave de Respuestas:

	a)	b)	c)
1)	$(-\sqrt{2}/2\ ,\ \sqrt{2}/2)$	$(-1/2\ ,\ \sqrt{3}/2)$	$(-\sqrt{3}/2\ ,-1/2)$
2)	Verdadero, falso	Falso	Verdadero
3)	$3\pi/10$ rad	300º	6º
4)	$\text{sen}(\theta) = -1/2$, $\tan(\theta) = \sqrt{3}/3$	$\cos(\theta) = -2\sqrt{2}/3$ $\cot(\theta) = -2\sqrt{2}$	$\sec(\theta) = -\sqrt{13}/3$ $\cos(\theta) = -3\sqrt{13}/13$
5)	481/50	$M = -7/25$	$\cos(\theta) = \sqrt{5}/\sqrt{41}$
6)	dominio = 3 rango = [–1, 3]	período = 2π, par	simétrico resp. al eje Y, amplitud = 2
7)	$\pi/4$, $-3\pi/4$ y $5\pi/4$	$\pi/4$, $-\pi/4$, $3\pi/4$, $-3\pi/4$, $5\pi/4$ y $7\pi/4$	$\pi/4$, $-3\pi/4$ y $5\pi/4$.
8)	$17\pi/12$	$7\pi/12$	297/425
9)	.$y = 2\cos(x/2)$	.$y = 3\text{sen}(2x)$	.$y = \arctan(x)$
10)	-13	$3\text{sen}(\alpha)$	$\tan(\beta)$

11)	$2 - \sqrt{3}$	$-1/7$	8
12)	$\cos(\theta/2) = \sqrt{10}/10$ $\tan(\theta/2) = 3$	3/4	$\pi/8$
13)	-1	3	$\tan(3\theta)$
14)	decreciente	creciente	creciente
15)	$13\pi/3$	$\{ \theta / \theta = n\pi, n \in 9 \}$	$\pi/4$, $\pi/2$, $5\pi/4$ y $3\pi/2$
16)	114 m	107,23 m	78,6 km hacia el sur 61,8 km hacia el este
17)	164 m	420N y 315 N	40 km
18)	136º	$3\sqrt{39}/7$	$15\sqrt{7}$
19)	181,5 m	5,8 cm y 10,6 cm	71º
20)	i) 17,2 m ii) 25 m iii) 215 m^2	43º10', 61º20', 75º30'	445 m^2 y S/. 7120

C. Relación entre los ítem y niveles del dominio cognoscitivo de la Taxonomía de Bloom en la prueba de salida del Modelo Didáctico.

ITEM	NIVEL	CONTENIDO MODULAR
01	Conocimiento	1
02	Comprensión	2
03	Aplicación	2
04	Análisis	3
05	Síntesis	3
06	Análisis	3
07	Comprensión	3
08	Conocimiento	4
09	Análisis	4
10	Conocimiento	5.1
11	Aplicación	5.2
12	Comprensión	5.3

13	Análisis	5.4
14	Comprensión	5.4
15	Síntesis	5.5
16	Aplicación	6.1.1
17	Análisis	6.1.2
18	Conocimientos	6.2.1
19	Comprensión	6.2.2
20	Aplicación	6.2.3-4

D. Ponderación de los Resultados de la Prueba de Salida.

1. De acuerdo al número de ítem resueltos satisfactoriamente, estimado lector, la siguiente tabla muestra cuál es la valoración que te corresponde:

Número de Ítem Acertados	Valoración
de 20 a 18	Excelente
de 17 a 15	Bueno / suficiente
de 14 a 13	Regular / insuficiente
de 12 o menos	Malo / Deficiente

2. Si has resuelto satisfactoriamente 18 o más ítems de la Prueba de Salida, quiere decir que has logrado un dominio excelente de los Objetivos propuestos.

¡FELICITACIONES POR ELLO!.

3. Si has resuelto entre 15 y 16 ítem correctamente, quiere decir que has logrado un buen dominio de los objetivos del propuestos.

¡PONGA MUCHO EMPEÑO Y FUERZA DE VOLUNTAD!.

4. Si tu respuestas están entre 13 y 14 ítem acertados, quiere decir que tu dominio del tema es regular. Debes volver a estudiar aquellos contenidos, cuyos ítem has errado. Verifique cuáles son valiéndote de la tabla que se te proporciona en el presente material.

5. Si sólo has respondido 12 o menos de los ejercicios de la Prueba de Salida en forma satisfactoria, su rendimiento o logro de los objetivos a sido insuficiente. Debes volver a estudiar íntegramente el material.

¿Asimilaste los conceptos, propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas; contestando todas las preguntas correctamente y resolviendo todos los problemas expresadas en la prueba de salida del Modelo Didáctico?

Si

Entonces ha concluido para usted el estudio de este material, correspondiente a la Trigonometría

¡AHORA PODEMOS DESCANSAR!

BIBLIOGRAFÍA: MODELO DIDÁCTICO

PARA EL ALUMNO:

1. COVEÑAS NAQUICHE, Manuel (2000) *Matemática* 5. Lima:

2. DE LA CRUZ SOLÓRZANO, Máximo (2000) *Matemática* 5. Lima.

3. ROJAS POÉMAPE, Alfonso (2000) Matemática 5. Lima:

4. SANTILLANA (2000) Símbolo Matemática 4. Lima:

5. SANTILLANA (2000) Símbolo Matemática 5. Lima:

PARA EL DOCENTE:

1. BOYLE, Patrick (1990) *Trigonometría con Aplicaciones: Con ejercicios para calculadora.* México D.F. : Harla.

2. HAASER, N., LASALLE, J. & SUVILLAN, J. (1980) *Análisis Matemático I.* Curso de introducción. México D.F.: Editorial Trillas

3. NICHOLS, E. & GARLAND, E. (1975) *Trigonometría Moderna*. México: Editorial Continental S.A.

4. SWOKOWSKI, E. (1996) *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México D.F:: Editorial Iberomaricana, S.A. de C.V.

5. TSIPKIN, A. (1985) *Manual de matemáticas para la enseñanza media*. Moscú: Editorial Mir.

6. SAÉNZ, Jorge (S/A) *Vectores, geometría y trigonometría*. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

7. SCHOOL MATHEMATICS STUDY GOUP (1965) *Matemática para la Escuela Secundaria. Funciones Elementales*. Washington: organización de los Estados Americanos.