PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE POSGRADO

Integración estocástica y tiempo local

Tesis para optar el grado de
Magíster en Matemáticas.

Autor
Juan Arturo Mogollón Aparicio.

Asesor
Dr. Jonathan S. Farfán Vargas.

Jurado
Dr. Johel V. Beltrán Ramírez.
Dr. Luis H. Valdivieso Serrano.

LIMA-PERÚ
2017

Integración estocástica y tiempo local

Juan Arturo Mogollón Aparicio.

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Escuela de Posgrado, de la PUCP, como parte de los requisitos para obtener el grado académico de Magíster en Matemática.

Miembros del jurado:

Dr. Johel V. Beltrán Ramírez. (presidente)

Dr. Luis H. Valdivieso Serrano. (miembro)

Dr. Jonathan S. Farfán Vargas. (asesor)

Lima - Perú

Diciembre - 2017

A mi hijo:

Johann Smith quien ha sido y es mi motivación, inspiración y felicidad. A mi amada Deisy quien me ha acompañado, me apoya y alienta en este proceso, sin dudar en ningún instante de ver cumplidas mis metas.

A mis padres Socorro y Arturo.

A mis hermanos John, Gin, Héctor y Omar por su apoyo emocional durante el tiempo en que escribía esta tesis.

Agradecimientos

Un eterno agradecimiento a mi querido hermano John, por el apoyo brindado durante mis estudios de maestría, por ser tan reponsable y haberme brindado esta hermosa oportunidad de estudiar.
Agradecer a mi asesor el Dr. Jhonatan Farfán Vargas por su dedicada y excelente labor de docente, por su enorme paciencia durante la realización de este trabajo, por su profesionalismo, compromiso, enseñanza y compartir sus conocimientos.
Agradezco a los profesores Dr. Percy Fernández y Dr. Roland Rabanal por sus orientaciones brindadas y tiempo disponible que tuvieron para despejar dudas durante mis estudios en el programa de maestría.
Un especial agradecimiento a mis compañeros y amigos de la maestría Ivan Suarez, Joel Mendoza, José Palomino, Daniel Sánchez, David Sánchez y Carlos Hurtado.

Resumen

En el presente trabajo presentamos una construcción del movimiento browniano para lo cual probaremos en forma detallada los teoremas de extensión de Kolmogorov y el de Kolmogorov-Censot, luego hacemos una construcción detallada y autocontenida de la integral estocástica en la que los integradores son martingalas continuas cuadrado integrables. Esta es una posible extensión a la clásica integral de Itô en la cual el integrador es un movimiento browniano. En este contexto de integración estocástica enunciaremos y probaremos la fórmula de Itô y algunas de sus consecuencias. Finalmente trabajaremos con el tiempo local, la fórmula de Tanaka y estudiaremos una particular prueba.

Palabras Claves: Movimiento browniano. Integral estocástica. Proceso progresivamente medible. Filtración. Martingala. Fórmula de Itô. Tiempo local.

Abstract

In this investigation we show a construction of the Brownian motion, which includes detailed proofs of the Kolmogorov's extension theorem and Kolmogorov-Censot theorem. In addition, we will show a detailed construction and self-contained of the stochastic integral in wich integrators are continuous square integrable martingales. This is one of the possible extensions to classical Itô's integral in which the integrator is a Brownian motion. In this contex of stochastic integration we prove an Itô's formula version. Finally, we study a relationship between local time and Tanaka's formula.

Keywords: Brownian motion. Stochastic integration. Progressively measurable process. Filtration. Martingale. Itô's formula. Local time.

Índice general

Introducción

Uno de los procesos estocásticos más interesantes y fundamentales es el movimiento browniano, nombre dado al movimiento irregular de las partículas de polen suspendidas en agua observado por Robert Brown en 1823. Este proceso fue estudiado por A. Einstein (1905) en el contexto de una teoría cinemática para el movimiento irregular del polen sumergido en agua y por Bachelier (1900) en el contexto de la economía financiera. La observación de Brown fue formalizada matemáticamente por N. Wiener (1923), quien empieza definiendo el movimiento browniano como un proceso estocástico y nos brinda la primera prueba de su existencia. Es por esta razón que se le conoce también como proceso de Wiener. El matemático francés P. Lévy (1948) también llevó a cabo un estudio brillante de sus trayectorias que inspiraron prácticamente a toda la investigación posterior sobre los procesos estocásticos hasta hoy.

En el presente trabajo comenzamos enunciando el concepto de movimiento browniano estándar unidimensional y a partir de sus características probamos unas propiedades básicas. Sin embargo no es trivial mostrar que el movimiento browniano exista pero hay herramientas que permiten probar la existencia del movimiento browniano. Hay dos teoremas de gran interés en el estudio e importancia para la construcción del movimiento browniano, esta parte del trabajo tiene como objetivo abordar estos teoremas conocidos como el teorema de extensión de Kolmogorov y el teorema de Kolmogorov-Censot para la construcción del movimiento browniano. Hoy en día se conocen muchas maneras de construir un movimiento browniano desde la primera dada por N. Wiener, así como en la brindada por el teorema 3 pagina 9 de [18], las brindadas en el capítulo 2 de [13] y en el capítulo 3 de [20]. Además probamos que las trayectorias del movimiento browniano no son diferenciables en cualquier punto.

En seguida estudiamos la construcción de la integral estocástica. Recordemos que los trabajos realizados por el matemático japonés Kyosi Ito publicados en los años 1940-1946, en los cuales presenta una serie de artículos introduce dos de los conceptos más recientes de la teoría moderna de la probabilidad: la integral estocástica y las ecuaciones diferenciales estocásticas. Nosotros detallamos el sentido de la integral estocástica que se presenta en este trabajo y es necesaria si tenemos en cuenta la naturaleza del integrador y del integrando. En contraste con la integral de Lebesgue-Stieljes el integrando y el integrador de la integral estocástica considerados aquí son procesos estocásticos. De esta forma iniciamos la integral estocástica para procesos simples como integrandos y probando sus propiedades básicas. Luego extendemos para procesos progresivamente medibles. El caso especial en que el integrador es un movimiento browniano fue estudiado por Itô (1944) y el caso en que el integrador es una martingala cuadrado integrable que empieza en cero fue estudiado por Kunita y Watanabe (1967). Para casos más generales puede consultar para mayores detalles los libros [13], [26], [18] y la tesis [25].

Un resultado muy importante en el cálculo estocástico es la fórmula de Itô , que es como una contraparte a la regla de la cadena para la integral ordinaria y resultado fundamental en matemática financiera. Considerada una de las joyas del cálculo estocástico la fórmula de Itô es usada en nuestro trabajo en el desarrollo de la prueba del teorema de caracterización de Levy; teorema que nos ayuda a caracterizar si un proceso dado es un movimiento browniano.

Para finalizar estudiamos el concepto de tiempo local y describimos en nuestro trabajo una construcción alternativa de tiempo local dado en términos de la integral estocástica, mediante la fórmula de Tanaka.

P. Lévy demostró que los procesos $\{\max_{0\leq s\leq t} B_s - B_t; t \in [0,\infty)\}$ y $\{|B_t|; t \in [0,\infty)\}$ tiene la misma ley, nosotros estudiaremos una prueba particular, la cual muestra que el par de procesos $\left(\{\sup_{0\leq s\leq t} B_s - B_t; t \in [0,\infty)\}, \{\sup_{0\leq s\leq t} B_s\}\right)$ y $(\{|B_t|; t \in [0,\infty)\}, \{L_t(0); t \in [0,\infty)\})$ también tienen la misma ley.

El presente trabajo está estructurado de la siguiente manera:

En el capítulo 1, se presenta la definición de movimiento browniano unidimensional y algunas propiedades básicas. Posteriormente explicamos en forma prolija y detallada la construcción del movimiento browniano.

En el capítulo 2, se define y enuncia algunas propiedades de martingalas continuas cuadrado integrables. Además enunciamos sin probar una versión del teorema de descomposición de Doob-Meyer.

En el capítulo 3, se desarrolla la teoría de integración estocástica teniendo como integradores a las martingalas continuas cuadrado integrables. Desarrollamos una descripción de la construcción de la integral estocástica para procesos simples probando las principales propiedades, para después extender la teoría a procesos progresivamente medibles.

En el capítulo 4, enunciamos y probamos la fórmula de Ito y el teorema de caracterización de Lévy.

Finalmente, en el capítulo 5, destacamos la conexión del tiempo local y la fórmula de Tanaka. Además estudiamos una conexión entre el tiempo local y movimiento browniano.

Si bien es cierto la teoría que se presenta ya ha sido probada en la literatura citada, se ha tratado de ordenar, completar, clarificar y mantener una notación uniforme a su versión original.

El lector interesado en aplicaciones de la integral estocástica en problemas financieros tales como la valuación de reclamos contingentes europeos, la valuación de reclamos contingentes americanos y la resolución del problema de consumo e inversión óptimos de un agente en el mercado puede consultar [25].

Capítulo 1

Movimiento browniano

El primer estudio matemático del movimiento browniano fue en el contexto del modelado de las fluctuaciones de los precios del mercado y es debido al matemático Louis Bachelier en 1900. Debido a la falta del formalismo de la teoría de la probabilidad en aquellos años, el trabajo de Bachelier fue ignorado durante muchos años. La descripción del movimiento browniano como fenómeno físico es atribuido a Robert Brown y fue explicado por Einstein en 1905. La primera construcción matemática rigurosa de este proceso es debido a Norbert Wiener y en su honor el movimiento browniano es también llamado proceso de Wiener.

1.1. Movimiento browniano estándar unidimensional

Definición 1.1 *Un proceso estocástico* $B : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ *es llamado un movimiento browniano estándar en* $\mathbb{R}$ *si satisface las siguientes condiciones :*

1. $B(0) = 0$, *c.s.*

2. *El proceso estocástico* $B(t)$ *tiene incrementos estacionarios. De manera más precisa, para cualesquiera* $0 \leq s < t$*, la variable aleatoria* $B(t) - B(s)$ *tiene distribución normal con media cero y varianza* $t - s$: $B(t) - B(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.

3. *El proceso* $B(t)$ *tiene incrementos independientes. Es decir, para cualquier entero* $n \geq 2$ *y cualesquiera* $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$*, las variables aleatorias* $B(t_1)$, $B(t_2) - B(t_1)$, $B(t_3) - B(t_2)$,...,$B(t_n) - B(t_{n-1})$*, son independientes.*

4. *Con probabilidad* 1*, las trayectorias* $B(\cdot,\omega)$ *son continuas. Es decir,*

$$P\left(\{\omega\in\Omega;\ B(\cdot,\omega)\ \textit{es continua}\ \}\right)=1.$$

1.2. Propiedades del movimiento browniano

Proposición 1.2 *Sea* $B(t)$ *un movimiento browniano estándar en* $\mathbb{R}$*.*

1. *Para cada* $t>0$*,* $B(t)$ *tiene distribución normal con media cero y varianza* t*.*
2. *Para cualesquiera* $s,t\geq 0$*, tenemos* $E[B(s)B(t)]=\min\{s,t\}$*.*
3. *Si fijamos* $t_0\geq 0$*, el proceso estocástico* $\tilde{B}(t)=B(t+t_0)-B(t_0)$ *es también un movimiento browniano estándar en* $\mathbb{R}$*.*
4. *Para cada número real* $\lambda>0$*, el proceso estocástico* $\tilde{B}(t)=\dfrac{B(\lambda t)}{\sqrt{\lambda}}$ *es también un movimiento browniano estándar en* $\mathbb{R}$*.*

Prueba.

1. Como $B(t)$ es un movimiento browniano unidimensional, de las condiciones 1. y 2. de la definición 1.1, tenemos $B(t)=B(t)-B(0)\sim\mathcal{N}(0,t)$.
2. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad que $0\leq s\leq t$. De esto resulta :
   - Para $t=s$: $E[B(s)B(t)]=E[B^2(s)]=s=\min\{t,s\}$.
   - Para $t>s$:

$$\begin{aligned}E[B(s)B(t)] &= E[B(s)(B(s)+B(t)-B(s)]\\ &= E[B^2(s)]+E[(B(s)(B(t)-B(s))]\\ &= s+E[B(s)]E[(B(t)-B(s))]\\ &= s+0=s=\min\{s,t\},\end{aligned}$$

   donde la tercera igualdad se debe a que $E[B^2(s)]=s$ (pues $B(s)\sim\mathcal{N}(0,s)$) y a que $B(s)$ y $B(t)-B(s)$ son independientes.

3. Probemos que el proceso $\tilde{B}(t)$ satisface las condiciones de la definición 1.1.

- Primero, observamos que $\tilde{B}(0) = B(t_0) - B(t_0) = 0$.
- Ahora, si $t > s \geq 0$ entonces
$$\tilde{B}(t) - \tilde{B}(s) = B(t + t_0) - B(s + t_0) \sim \mathcal{N}(0, s).$$
- Sean $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$. Entonces $0 < t_1 + t_0 < t_2 + t_0 < \ldots < t_n + t_0$. Como $B(t)$ tiene incrementos independientes, resulta que las variables aleatorias $B(t_{k+1} + t_0) - B(t_k + t_0)$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, son independientes. De este modo, las variables aleatorias
$$\tilde{B}(t_{k+1}) - \tilde{B}(t_k) = B(t_{k+1} + t_0) - B(t_k + t_0), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$
son independientes .
- Finalmente, como para cada $\omega \in \Omega$, $\tilde{B}(\cdot, t) = B(\cdot + t_0, \omega)$ y $B(t)$ tiene trayectorias continuas, entonces $\tilde{B}(t)$ también tiene trayectorias continuas.

De los resultados obtenidos concluimos que $\tilde{B}(t)$ es también un movimiento browniano estándar en $\mathbb{R}$.

4. Probemos que el proceso $\tilde{B}(t)$ satisface las condiciones de la definición 1.1.

- $\tilde{B}(0) = \dfrac{B(0)}{\sqrt{\lambda}} = 0$ c.s.
- Si $t > s \geq 0$:
$$\tilde{B}(t) - \tilde{B}(s) = \frac{B(\lambda t) - B(\lambda s)}{\sqrt{\lambda}}.$$
Teniendo en cuenta que $B(\lambda t) - B(\lambda s) \sim \mathcal{N}(0, \lambda(t-s))$ entonces $\dfrac{B(\lambda t) - B(\lambda s)}{\sqrt{\lambda}} \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.
- Sean $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, entonces $0 \leq \lambda t_1 < \lambda t_2 < \ldots < \lambda t_n$ y como $B(t)$ tiene incrementos independientes, las variables aleatorias
$$B(\lambda t_1), B(\lambda t_2) - B(\lambda t_1), \ldots B(\lambda t_k) - B(\lambda t_{k-1})$$
son independientes. Luego las variables aleatorias
$$\tilde{B}(t_1) = \frac{B(\lambda t_1)}{\sqrt{\lambda}}, \tilde{B}(t_{k+1}) - \tilde{B}(t_k) = \frac{B(\lambda t_{k+1}) - B(\lambda t_k)}{\sqrt{\lambda}}, \; k = 1, \ldots n-1,$$
son independientes.

- Ya que las trayectorias $B(\cdot,\omega)$ son continuas c.s. entonces las trayectorias $\tilde{B}(\cdot,\omega) = \dfrac{B(\lambda\cdot,\omega)}{\sqrt{\lambda}}$ también lo son.

$\square$

1.3. Construcción del movimiento browniano

Un primer obstáculo que encontramos con el movimiento browniano es probar su existencia. En la actualidad se conocen varias maneras de construir un movimiento browniano. Mostraremos como la construcción de este proceso puede ser obtenida a través del teorema de extensión de Kolmogorov unido al criterio de Kolmogorov-Censot que garantiza la continuidad de las trayectorias.

1.3.1. Construcción de Kolmogorov

Sea $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$ el espacio de todas las funciones $\omega : [0,\infty) \to \mathbb{R}$.

Un subconjunto $C \subset \mathbb{R}^{[0,\infty)}$ se llama ***cilindro finito dimensional*** si existen un entero $n \geq 1$, un subconjunto finito $T = \{t_1,\ldots,t_n\} \subset [0,\infty)$ y un conjunto $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$C = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)};\ (\omega(t_1),\omega(t_2),\ldots,\omega(t_n)) \in A\}. \tag{1.1}$$

El conjunto A es llamado una ***base*** del cilindro finito dimensional.

A partir de aquí escribiremos cilindro para referirnos al cilindro finito dimensional.

Ejemplo 1.3 *El conjunto*

$$C = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)}; \left(\omega(\pi), \omega(\frac{7}{\sqrt{\pi}}), \omega(999)\right) \in (-\infty,3) \times (4,+\infty) \times \mathbb{R}\},$$

es un cilindro ya que tiene la forma dada por la expresión (1.1)*, con*

$$n = 3, \quad T = \{\pi, \frac{7}{\sqrt{\pi}}, 999\} \ y \ \ A = (-\infty,3) \times (4,+\infty) \times \mathbb{R}.$$

Observación 1.4

- *Notemos que un cilindro admite diferentes maneras de ser representado. Por ejemplo el cilindro*

$$C = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)}; \omega\left(\sqrt{e}\right) \in (-\infty, 2]\},$$

también puede ser representado como

$$C = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)}; \big(\omega(\sqrt{e}), \omega(2)\big) \in (-\infty, 2] \times \mathbb{R}\}.$$

En la primera representación tenemos $n = 1$, $t = \sqrt{e}, A = (-\infty, 2]$ *mientras que en la segunda representación tenemos* $n = 2$, $t_1 = \sqrt{e}, t_2 = 2$, $A = (-\infty, 2] \times \mathbb{R}$.

- *Además, si la expresión* (1.1) *es una representación del cilindro* C *y* $\{t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(n)}\}$ *es una permutación de* $\{t_1, \dots, t_n\}$, *entonces el cilindro* C *también admite la representación*

$$C = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)}; (\omega(t_{\sigma(1)}), \dots, \omega(t_{\sigma(n)})) \in \sigma(A)\},$$

donde $\sigma(A) = \{(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)});\ (X_1, \dots, X_n) \in A\}$

Observación 1.5

Sea C_1, C_2 *dos cilindros con las siguientes representaciones:*

$$\begin{aligned} C_1 &= \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)}; (\omega(t_1), \omega(t_2), \dots, \omega(t_k)) \in B_1\} \\ C_2 &= \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)}; (\omega(s_1), \omega(s_2), \dots, \omega(s_j)) \in B_2\}. \end{aligned}$$

Sea $T = \{t_1, \dots, t_k\} \cup \{s_1, \dots, s_j\}$. *Existe un ordenamiento de los elementos de* T :

$$T = \{\gamma_1, \dots, \gamma_l\} \quad \text{tal que}$$

$\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ *es una permutación de* $\{t_1, \dots, t_k\}$ *y* $\{\gamma_{l-j+1}, \dots, \gamma_l\}$ *es una permutación de* $\{s_1, \dots, s_j\}$. *En particular, por la observación anterior* C_1 *admite una representación usando los tiempos* $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ *y* C_2 *una representación con los tiempos* $\{\gamma_{l-j+1}, \dots, \gamma_l\}$.

Denotemos por $\mathcal{A}_0$ a la colección de todos estos cilindros finito dimensionales.

Lema 1.6 $\mathcal{A}_0$ *es una álgebra sobre* $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$.

Prueba.

- En primer lugar, observamos que $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$ es un cilindro pues basta tomar $n = 1, t_1 = 0$ y $A = \mathbb{R}$ en (1.1). Esto muestra que $\mathcal{A}_0$ es no vacía.

- Si C es un cilindro dado por (1.1) su complemento es

$$C^c = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)}; (\omega(t_1), \omega(t_2), ..., \omega(t_n)) \in A^c\},$$

dado que $A^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ se sigue que $C^c \in \mathcal{A}_0$.

- Sean C_1 y $C_2 \in \mathcal{A}_0$ de la forma

$$C_1 = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)}; (\omega(t_1), \omega(t_2), ..., \omega(t_k)) \in B_1\},$$

$$C_2 = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)}; (\omega(s_1), \omega(s_2), ..., \omega(s_j)) \in B_2\},$$

para algunos $T_1 = \{t_1, ..., t_k\} \subset [0, \infty), T_2 = \{s_1, ..., s_j\} \subset [0, \infty),\ B_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ y $B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^j)$.

Sea $T_3 = T_1 \cup T_2 = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_l\}$. Por lo expuesto anteriormente en la observación (1.5), podemos suponer que $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k) = (t_1, t_2, \ldots, t_k)$ y $(\gamma_{l-j+1}, \gamma_{l-j+2}, \ldots, \gamma_{l-1}, \gamma_l) = (s_1, \ldots s_j)$. De esta forma, C_1 y C_2 pueden ser expresados como

$$C_1 = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)}; (\omega(\gamma_1), \omega(\gamma_2), ..., \omega(\gamma_l)) \in \overline{B}_1\},$$

$$C_2 = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)}; (\omega(\gamma_1), \omega(\gamma_2), ..., \omega(\gamma_l)) \in \overline{B}_2\},$$

donde $\overline{B}_1 = B_1 \times \mathbb{R}^{l-k}$ y $\overline{B}_2 = B_2 \times \mathbb{R}^{l-j}$. Luego,

$$C_1 \cup C_2 = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)}; (\omega(\gamma_1), \omega(\gamma_2), ..., \omega(\gamma_k)) \in \overline{B}_1 \cup \overline{B}_2\}.$$

Dado que $\overline{B}_1 \cup \overline{B}_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^l)$, $C_1 \cup C_2 \in \mathcal{A}_0$.

De esta manera concluimos que $\mathcal{A}_0$ es una álgebra. $\square$

Denotemos por $\mathcal{R}_0^{[0,\infty)}$ el σ-álgebra generado por los cilindros finito dimensionales, es decir, $\mathcal{R}_0^{[0,\infty)} = \sigma(\mathcal{A}_0)$.

Antes de enunciar el teorema de extensión de Kolmogorov recordaremos algunos resultados previos que utilizaremos en la demostración.

El siguiente teorema como caso especial del teorema de Carathéodory, es tomado del trabajo de Cadenas de Markov y Teoría de Potencial(ver [4]).

Teorema 1.7 *Sea* $P_0 : \mathcal{A}_0 \to [0, 1]$ *una función tal que* $P_0(\emptyset) = 0$, $P_0(\mathbb{R}^{[0,\infty)}) = 1$. *Supongamos que se cumplen las siguientes dos propiedades.*

i) Si C_1 y C_2 son cilindros disjuntos entonces $P_0\left(C_1 \cup C_2\right) = P_0\left(C_1\right) + P_0\left(C_2\right)$.

ii) Si $\{C_n\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión de cilindros tales que* $C_n \downarrow \emptyset$ *entonces* $P_0(C_n) \to 0$.

Entonces, existe una única probabilidad $P : \mathcal{R}_0^{[0,\infty)} \to [0,1]$ *de modo que* $P(C) = P_0(C)$ *para todo cilindro* C.

La demostración del siguiente resultado se encuentra en [5][Pag 174.]

Teorema 1.8 (Teorema de regularidad de la medida) *Supongamos que* μ *es una medida en* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $\mu(A) < \infty$, *si* A *es acotado.*

a) Para $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *y* $\epsilon > 0$, *existe un cerrado* C *y un abierto* G *tal que* $C \subset A \subset G$ *y* $\mu\left(G \setminus C\right) < \epsilon$.

b) Si $\mu(A) < \infty$, *entonces* $\mu(A) = \sup \mu(K)$, *el supremo extendido sobre los subconjuntos compactos* K *de* A.

Con los resultados previos pasamos a enunciar y demostrar el teorema de extensión de Kolmogorov, el cual es una herramienta fundamental en los cimientos de la teoría de la probabilidad, ya que permite construir un espacio de probabilidad para contener una variedad de procesos aleatorios $(X_t)_{t\in T}$, tanto en el caso discreto (cuando el conjunto de tiempos T es como los enteros $\mathbb{Z}$) y en el caso continuo (cuando el conjunto de tiempos T es como $\mathbb{R}$). En particular, se puede utilizar para construir rigurosamente un proceso para el movimiento browniano, conocido también como el proceso de Wiener. Nosotros sin embargo, nos vamos a centrar en este tema cuando $T = [0,\infty)$.

Teorema 1.9 (Teorema de extensión de Kolmogorov) *Supongamos que para todo entero* $n \geq 1$ *y para cualesquiera* $t_1, \ldots, t_n \in [0,\infty)$ *distintos dos a dos se tiene una medida de probabilidad* $\mu_{t_1,t_2,\ldots,t_n}$ *en* $\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\right)$. *Asumamos que se cumplen las siguientes condiciones (condiciones de compatibilidad):*

1. Si $n \geq 1$ *es un entero,* $t_1, \ldots, t_n \in [0,\infty)$ *y* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *entonces para cualquier permutación* φ *de* $\{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\mu_{t_{\varphi(1)},t_{\varphi(2)},\ldots,t_{\varphi(n)}}(A_{\varphi(1)} \times \ldots \times A_{\varphi(n)}) = \mu_{t_1,\ldots,t_n}(A_1 \times \ldots \times A_n)$$

2. Si $n \geq 1$ es un entero y $t_1, \ldots, t_n \in [0, \infty)$ entonces para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$,

$$\mu_{t_1,\ldots,t_{n-1}}(A) = \mu_{t_1,\ldots,t_n}(A \times \mathbb{R}). \tag{1.2}$$

Entonces existe una única medida de probabilidad P sobre el espacio $\left(\mathbb{R}^{[0,\infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)})\right)$ tal que

$$P\left(\{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)}; \left(\omega(t_1) \in A_1, \ldots, \omega(t_n) \in A_n\right) \in A\}\right) = \mu_{t_1,\ldots,t_n}\left(A_1 \times \ldots \times A_n\right),$$

para cualquier entero $n \geq 1$, cualesquiera $t_1, \ldots, t_n \in [0, \infty), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Prueba. Definamos una función $P : \mathcal{A}_0 \to [0, 1]$ del siguiente modo.

$$P(C) = \mu_{t_1,\ldots,t_n}(A), \tag{1.3}$$

para C en $\mathcal{A}_0$ con representación

$$C = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)}; (\omega(t_1), \omega(t_2), ..., \omega(t_n)) \in A\} \tag{1.4}$$

Antes de entrar en detalles de la prueba, hagamos una sinopsis de los pasos principales a seguir. Primero mostraremos que si C es un cilindro entonces $P(C)$ es independiente de la representación (1.4) de C. Luego probaremos que satisfacen las condiciones del teorema 1.7 para garantizar que existe una única extensión de P (también denotada por P) definida en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)})$ tal que $\left(\mathbb{R}^{[0,\infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)}), P\right)$ es un espacio de probabilidad. Sentado el lineamiento general de la prueba, pasamos a obrar formalmente.
Veamos que $P(C)$ no depende de la representación de C.
Supongamos que $C \in \mathcal{A}_0$ admita dos representaciones:

$$C = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)};\ (\omega(t_1), \omega(t_2), ..., \omega(t_n)) \in B_1\}$$

y

$$C = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)};\ (\omega(s_1), \omega(s_2), ..., \omega(s_j)) \in B_2\},$$

para algún entero $n \geq 1, \quad T_1 = \{t_1, \ldots, t_n\} \subset [0, +\infty), B_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, y algún entero $j \geq n, \quad T_2 = \{s_1, \ldots, s_n\} \subset [0, +\infty\rangle, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^j)$. Sea $T_1 \cup T_2 = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l\}$. De lo expuesto en la observación 1.5 podemos suponer que $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l) = (t_1, \ldots, t_n)$ y $(\gamma_{l-j+1}, \ldots, \gamma_{l-1}, \gamma_l) = (s_1, \ldots, s_j)$ así C puede ser representado también como:

$$C = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,+\infty)}; (\omega(\gamma_1), \omega(\gamma_2), \ldots, \omega(\gamma_l)) \in \overline{B}_1\} \tag{1.5}$$

donde $\overline{B}_1 = B_1 \times \mathbb{R}^{l-n}$. Dadas las condiciones de consistencia

$$\mu_{t_1,\ldots,t_n}(B_1) = \mu_{\gamma_1,\ldots,\gamma_l}(\overline{B}_1).$$

Por otro lado

$$C = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,+\infty)};\ (\omega(\gamma_1), \omega(\gamma_2), \ldots, \omega(\gamma_l)) \in \overline{B}_2\} \tag{1.6}$$

donde $\overline{B}_2 = \mathbb{R}^{l-j} \times B_2$ y $\mu_{s_1,\ldots,s_n}(B_2) = \mu_{\gamma_1,\ldots,\gamma_l}(\overline{B}_2)$. Notemos ahora que

$$(\omega(\gamma_1), \ldots, \omega(\gamma_l)) \in \overline{B}_1 \leftrightarrow \omega \in C \leftrightarrow (\omega(\gamma_1), \ldots, \omega(\gamma_l)) \in \overline{B}_2,$$

y así

$$\overline{B}_1 = \overline{B}_2. \tag{1.7}$$

De esta manera concluímos que

$$\begin{aligned} \mu_{t_1,\ldots,t_n}(B_1) &= \mu_{\gamma_1,\ldots,\gamma_l}(\overline{B}_1) \\ &= \mu_{\gamma_1,\ldots,\gamma_l}(\overline{B}_2) \\ &= \mu_{s_1,\ldots,s_j}(B_2). \end{aligned}$$

Esto prueba que P está bien definida.

- Ahora probemos la condición $i)$ del teorema 1.7. Sean C_1 y C_2 dos cilindros disjuntos. Asumamos que C_1 es representado por (1.5) , C_2 por (1.6) y que

$$C_1 \cup C_2 = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)}; (\omega(\gamma_1), \omega(\gamma_2), ..., \omega(\gamma_k)) \in \overline{B}_1 \cup \overline{B}_2\}.$$

Si $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ entonces $\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 = \emptyset$. Así,

$$\begin{aligned} P(C_1 \cup C_2) &= \mu_{\gamma_1,\ldots,\gamma_l}(\overline{B}_1 \cup \overline{B}_2) = \mu_{\gamma_1,\ldots,\gamma_l}(\overline{B}_1) + \mu_{\gamma_1,\ldots,\gamma_l}(\overline{B}_2) \\ &= P(C_1) + P(C_2). \end{aligned}$$

- Ahora probemos la condición $ii)$ del teorema 1.7. Para tal fin, es suficiente mostrar que si $\{C_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente de cilindros,

$$\lim_{n\to\infty} P(C_n) = \epsilon > 0 \quad \text{entonces} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset.$$

En efecto, como P es aditiva, la sucesión $\{P(C_n)\}_{n\geq 1}$ es decreciente y

$$\lim_{n\to\infty} P(C_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n) = \epsilon.$$

Notemos que existe un conjunto numerable $\mathbb{T} = \{t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots\}$, una sucesión creciente $\{k_n\}_{n\geq 1}$ de enteros positivos y una sucesión de conjuntos Borel $\{B_n\}_{n\geq 1}$ tales que $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k_n})$ y

$$C_n = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,+\infty)}; \quad (\omega(t_1), \ldots, \omega(t_{k_n})) \in B_n\},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. En virtud del teorema de regularidad 1.8, para cada n existe un conjunto compacto G_n tal que

$$G_n \subset B_n \quad \text{y} \quad \mu_{t_1,\ldots,t_{k_n}}(B_n \backslash G_n) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}.$$

Sea $D_n = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,+\infty)}; \quad (\omega(t_1), \ldots, \omega(t_{k_n})) \in G_n\}$. Entonces

$$P(C_n \backslash D_n) = \mu_{t_1,\ldots,t_{k_n}}(B_n \backslash G_n) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $H_n = \bigcap_{j=1}^{n} D_j$. Entonces $\{H_n\}_{n\geq 1}$ es decreciente y

$$\begin{aligned} P(C_n \setminus H_n) &= P(C_n \cap H_n^c) = P\left(\bigcup_{j=1}^{n} (C_n \cap D_j^c)\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} P(C_n \setminus D_j) \leq \sum_{j=1}^{n} P(C_j \setminus D_j) \text{ pues } \{C_n\}_{n\geq 1} \text{ es decreciente .} \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \frac{\epsilon}{2^{j+1}} < \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Ya que $H_n \subset C_n$ y $P(C_n \setminus H_n) < \frac{\epsilon}{2}$, se sigue que $P(H_n) > \frac{\epsilon}{2}$ para todo $n \geq 1$. Como $P(C_n) \downarrow \epsilon$ entonces $P(C_n) \geq \epsilon$ para todo $n \geq 1$.

Sea $\{\omega_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de elementos $\mathbb{R}^{[0,+\infty)}$ tal que para cada n, $\omega_n \in H_n$, entonces como $\{H_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente, para cada entero $j \geq 1, \omega_n \in H_j$ para $n \geq j$. Esto implica que el vector $\big(\omega_n(t_1), \ldots, \omega_n(t_{k_j})\big) \in G_j$ para todo $n \geq j$. Además como G_1 es un compacto, existe una subsucesión $\{n_{1_i}\}_{i\geq 1}$ tal que $\lim_{i\to\infty} \omega_{n_{1_i}}(t_1)$ existe. Como G_2 es compacto, existe una además una subsucesión $\{n_{2_i}\}_{i\geq 1}$ de $\{n_{1_i}\}_{i\geq 1}$ tal que

$\lim\limits_{i\to\infty} \omega_{n_{2_i}}(t_2) = \omega(t_2)$ existe. Procediendo de esta manera y aplicando el usual método de la diagonal de Cantor, una subsucesión $\{n_i\}_{i\geq 1}$ es obtenida tal que $\lim\limits_{i\to\infty} \omega_{n_i}(t_j) = \omega(t_j)$ para todo entero $j \geq 1$. Sea $\omega(t) = 0$ para t que no pertenece $\{t_1, t_2, \ldots\}$. Luego para cada j, G_j es compacto, $\big(\omega(t_1), \ldots, \omega(t_{k_j})\big) \in G_j$ y así $\omega \in H_j$. De esta forma $\omega \in \bigcap\limits_{j\geq 1} H_j \subset \bigcap\limits_{j\geq 1} C_j$ implicando que $\bigcap\limits_{j\geq 1} C_j \neq \emptyset$. $\square$

Fijemos ν, una medida de probabilidad en $\mathbb{R}$. Para $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, sea $\mu_{t_1,t_2,\ldots,t_n}$ la medida de probabilidad en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ definida como

$$\mu_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(U) = \int_{\mathbb{R}} \int_U \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} e^{\left[-\frac{(u_i-u_{i-1})^2}{2(t_i-t_{i-1})}\right]} du_1 \cdots du_n d\nu(u_0) \tag{1.8}$$

donde $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $t_0 = 0$, y usamos la siguiente convención para el integrando

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}}\, e^{-\frac{(u_1-u_0)^2}{2t_1}} du_1\Big|_{t_1=0} = d\delta_{u_0}(u_1) \tag{1.9}$$

donde δ_{u_0} es la medida delta de Dirac de u_0.

Observación 1.10 *La familia de medidas de probabilidad definidas en la ecuación* (1.8) *satisfacen las condiciones de consistencia del teorema 1.9.*

Ahora aplicamos el teorema de extensión 1.9 a la familia de probabilidades anteriormente definidas y conseguimos una medida de probabilidad P en $(\mathbb{R}^{[0,\infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)}))$.
Definamos el proceso estocástico $X(t)$ como

$$X(t,\omega) = w(t),\ w \in \mathbb{R}^{[0,\infty)}. \tag{1.10}$$

El proceso $X(t)$ satisface las siguientes propiedades:

a) Para cualesquiera $0 \leq s < t$, la variable aleatoria está normalmente distribuida con media cero y varianza $t - s$.

b) El proceso $X(t)$ tiene incrementos independientes, es decir, para cualesquiera $0 = t_0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ las variables aleatorias

$$X(t_i) - x(t_{i-1}),\ i = 1, \ldots, n \quad \text{son independientes.}$$

Además, por las ecuaciones (1.8) y (1.9) con $n = 1$ y $t_1 = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} P\big(X(0) \in U\big) &= \int_{\mathbb{R}} \int_U \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}}\, e^{-\frac{(u_1-u_0)^2}{2t_1}} du_1 \Big|_{t_1=0} d\nu(u_0), \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_U d\delta_0(u_1) \right) d\nu(u_0), \\ &= \int_{\mathbb{R}} \delta_{u_0}(U) d\nu(u_0) = \nu(U), \quad U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Por lo tanto ν es la distribución inicial del proceso estocástico $X(t)$. Notemos que $X(t)$ con $\nu = \delta_0$ satisface las condiciones $1), 2)$ y $3)$ de la definición del movimiento browniano estándar.

El teorema de extensión de Kolmogorov no brinda información sobre la continuidad c.s. de las trayectorias del proceso. Las distribuciones finito dimensionales por sí mismas no pueden determinar si un proceso posee o no trayectorias continuas. Para conseguir la continuidad c.s. de las trayectorias hacemos uso de un resultado conocido como el teorema de Kolmogorov-Censot. Antes de enunciar el teorema recordemos algunas definiciones.

El siguiente resultado tiene importancia para la prueba del teorema de Kolmogorov-Censot. Una prueba de este resultado se encuentra en [16].

Lema 1.11 *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$. Toda función uniformemente continua $f : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ admite una extensión continua $\Psi : \overline{\mathbf{X}} \to \mathbb{R}$, donde $\overline{\mathbf{X}}$ es el conjunto de los puntos adherentes a $\mathbf{X}$. La función Ψ es la única extensión continua de f a $\overline{\mathbf{X}}$ y es uniformemente continua.*

Definición 1.12 *Decimos que X es una versión o modificación de Y si, para cada $t \in [0, \infty)$,*

$$P\left(\{\omega \in \Omega; \quad X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}\right) = 1.$$

El siguiente resultado da una condición suficiente para que un proceso estocástico tenga una modificación continua.

Teorema 1.13 (Teorema de Kolmogorov-Censot.) *Sean $T > 0$ y $X = \{X_t; \quad 0 \leq t \leq T\}$ un proceso estocástico sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Asuma que existen constantes $\alpha, \beta, c > 0$ tales que se satisface la siguiente desigualdad*

$$E|X_t - X_s|^{\alpha} \leq c|t-s|^{1+\beta}, \qquad \textit{para cualesquiera } s,t \in [0,T]. \tag{1.11}$$

Entonces existen una modificación continua $Y = \{Y_t; \quad 0 \leq t \leq T\}$ *de* X, *una variable aleatoria* $h(\omega)$ *estrictamente positiva a.s. y una constante* $\delta > 0$ *tales que :*

$$P\left[\left\{\omega\ ; \quad \sup_{\substack{0<t-s<h \\ s,t\in[0,T]}} \left\{\frac{|Y_t(\omega) - Y_s(\omega)|}{|t-s|^\gamma}\right\} \leq \delta\right\}\right] = 1, \tag{1.12}$$

para todo $\gamma \in \left(0, \dfrac{\beta}{\alpha}\right)$.

Prueba. Por simplicidad en la notación, tomaremos $T = 1$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por la desigualdad de Chebyshev y (1.11),

$$P[|X_t - X_s| \geq \varepsilon] \ \leq \ \frac{E\left[|X_t - X_s|^\alpha\right]}{\varepsilon^\alpha} \leq \frac{c|t-s|^{1+\beta}}{\varepsilon^\alpha}.$$

Esto muestra que X_s converge a X_t en probabilidad cuando $s \to t$. Fijemos $\gamma \in \left(0, \dfrac{\beta}{\alpha}\right)$ y sea $\delta = \beta - \alpha\gamma > 0$. Tomando $\varepsilon = |t-s|^\gamma$ en (1.13), obtenemos

$$P\Big[|X_t - X_s| \geq |t-s|^\gamma\Big] \leq \frac{c|t-s|^{1+\beta}}{|t-s|^{\beta-\delta}} = c|t-s|^{1+\delta}. \tag{1.13}$$

Para cada entero $n \geq 0$, sea

$$Z_n = \max_{1\leq k\leq 2^n} \left|X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}\right|.$$

Para cualquier $r \geq 0$,

$$\begin{aligned}
P\Big[\{Z_n \geq r\}\Big] \ &= \ P\left[\bigcup_{k=1}^{2^n}\left\{\left|X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}\right| \geq r\right\}\right], \\
&\leq \ \sum_{k=1}^{2^n} P\left[\left\{\left|X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}\right| \geq r\right\}\right]
\end{aligned}$$

Tomando $r = \left(\dfrac{1}{2^n}\right)^\gamma$,

$$\begin{aligned}
P\left[\left\{Z_n \geq \left(\frac{1}{2^n}\right)^\gamma\right\}\right] \ &\leq \ \sum_{k=1}^{2^n} P\left[\left\{|X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| \geq \left(\frac{1}{2^n}\right)^\gamma\right\}\right] \\
&\leq \ c\sum_{k=1}^{2^n}\left(\frac{1}{2^n}\right)^{1+\delta} \\
&= \ c\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{2^{n(1+\delta)}} = c\frac{2^n}{2^{n(1+\delta)}} = \frac{c}{2^{n\delta}}.
\end{aligned}$$

De lo cual, observamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left[\left\{Z_n \geq \left(\frac{1}{2^n}\right)^{\gamma}\right\}\right] \leq c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n\delta}} = c \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\delta}}\right)^{n} < \infty.$$

Por el teorema de Borell-Cantelli, tenemos que

$$P\left[\left\{Z_n \geq \left(\frac{1}{2^{n\gamma}}\right) \quad \text{infinitas veces}\right\}\right] = 0$$

o equivalentemente

$$P\left[\left\{Z_n \geq \left(\frac{1}{2^{n\gamma}}\right) \quad \text{finitas veces}\right\}\right] = 1.$$

Entonces existe un conjunto medible Ω_2 con $P(\Omega_2) = 1$, tal que para cada $\omega \in \Omega_2$ existe $N(\omega) \in \mathbb{N}$ con

$$Z_n(\omega) < \frac{1}{2^{n\gamma}} \text{ para todo } n \geq N(\omega). \tag{1.14}$$

Para cada entero $n \geq 1$, consideremos la partición

$$D_n = \left\{\frac{k}{2^n} \quad ; \quad k = 0, 1, 2, ..., 2^n\right\} \text{ de } [0, 1],$$

y sea $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ el conjunto de racionales diádicos en $[0, 1]$. Fijamos $\omega \in \Omega_2$, $n \geq N(\omega)$. Afirmamos que para todo $m > n$, se tiene que

$$|X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq 2 \sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{2^{\gamma j}}, \tag{1.15}$$

para cualesquiera $s, t \in D_m$ y $0 < t - s < \frac{1}{2^n}$.

En efecto, si $m = n + 1$ entonces tenemos $t = \frac{k}{2^m}$, $s = \frac{k-1}{2^m}$, y

$$2 \sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{2^{\gamma j}} = \frac{1}{2^{\gamma m - 1}} > \frac{1}{2^{\gamma m}} > Z_m(\omega)$$

para algún $k \in \{0, 1, \ldots, 2^n\}$. Así (1.15) sigue de (1.14).

Supongamos ahora que (1.15) es válido para $m = n + 1, \ldots, M - 1$. Queremos mostrar que (1.15) es válido para M. Consideremos $s < t$ con $s, t \in D_M$. Sean

$$t^{(1)} = \text{máx}\{u \in D_{M-1} \ ; \ u \leq t\} \quad \text{y} \quad s^{(1)} = \text{mín}\{u \in D_{M-1} \ ; \ u \geq s\}.$$

Observamos que

$$s \leq s^{(1)} \leq t^{(1)} \leq t, \quad s^{(1)} - s \leq \frac{1}{2^M} \quad \text{y} \quad t - t^{(1)} \leq \frac{1}{2^M}.$$

Entonces, de (1.14),

$$|X_{s^{(1)}}(\omega) - X_s(\omega)| < \frac{1}{2^{\gamma M}} \text{ y } \quad |X_t(\omega) - X_{t^{(1)}}(\omega)| < \frac{1}{2^{\gamma M}}.$$

De (1.15) con $m = M - 1$,

$$|X_{t^{(1)}}(\omega) - X_{s^{(1)}}(\omega)| \leq 2 \sum_{j=n+1}^{M-1} \frac{1}{2^{\gamma j}}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |X_t(\omega) - X_s(\omega)| &\leq |X_t(\omega) - X_{t^{(1)}}(\omega)| + |X_{t^{(1)}}(\omega) - X_{s^{(1)}}(\omega)| + |X_{s^{(1)}}(\omega) - X_s(\omega)| \\ &\leq \frac{1}{2^{\gamma M}} + 2 \sum_{j=n+1}^{M-1} \frac{1}{2^{\gamma j}} + \frac{1}{2^{\gamma M}} = 2 \sum_{j=n+1}^{M} \frac{1}{2^{\gamma j}}, \end{aligned}$$

y así tenemos (1.15) para M. Esto concluye la prueba de lo afirmado.

Ahora, mostraremos que $\{X_t(\omega)\ ;\ t \in D\}$ es uniformemente continua en t para cada $\omega \in \Omega_2$. Sea $h(\omega) = \frac{1}{2^{N(\omega)}}$. Para cualesquiera $s, t \in D$ con $(t - s) \in (0, h(\omega))$, escogemos $n \geq N(\omega)$ tal que $(t - s) \in \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]$. Entonces, de la desigualdad (1.15) obtenemos

$$\begin{aligned} |X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq 2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{\gamma j}} &\leq \frac{2}{2^{(n+1)\gamma}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\gamma j}} \\ &\leq \frac{2}{2^{(n+1)\gamma}} \frac{1}{1 - 2^{-\gamma}} \\ &\leq 2|t - s|^{\gamma} \frac{1}{1 - 2^{-\gamma}} \\ &= \tilde{\delta}|t - s|^{\gamma}, \end{aligned}$$

donde $\tilde{\delta} = \frac{2}{1 - 2^{-\gamma}}$. Por lo tanto tenemos continuidad uniforme de $X(\cdot, \omega)$ sobre D.

Por el lema 1.11, $X(\cdot, \omega)\big|_D : D \to \mathbb{R}$ admite una única extensión continua

$$\tilde{X}(\cdot, \omega) : [0, 1] \to \mathbb{R}.$$

Sea $Y : [0, 1] \to \mathbb{R}$ un proceso estocástico definido por

$$Y(t, \omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \notin \Omega_2,\ t \in [0, 1], \\ \tilde{X}(t, \omega) & \text{si } \omega \in \Omega_2,\ t \in [0, 1]. \end{cases}$$

El proceso $Y(t)$ es por lo tanto continuo. Además, satisface

$$|Y_t(\omega) - Y_s(\omega)| \leq \tilde{\delta}|t - s|^{\gamma}, \quad t - s \in (0, h(\omega)),$$

y así (1.12) queda establecida.

Veamos ahora que Y es una modificación de X.

i) Si $t \in D$ entonces $\{Y_t = X_t\} \supset \Omega_2$ y luego $Y_t = X_t$ c.s.

ii) Si $t \in [0,1] \cap D^c$, tomando una sucesión $\{s_n\}_{n\geq 1} \subseteq D$ con $s_n \downarrow t$, tenemos que:

- X_{s_n} converge a X_t en L^1, ya que $X_{s_n} - X_t \sim \mathcal{N}(0, s_n - t)$.
- X_{s_n} converge a Y_t c.s, ya que para cada $\omega \in \Omega_2$, $Y_{s_n}(\omega) = X_{s_n}(\omega)$ y Y tiene trayectorias continuas.

tenemos $Y_t = X_t$ c.s. $\square$

Verifiquemos que se cumple (1.11) para un proceso X_t definido en (1.10). Teniendo en cuenta que $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, La función generadora de momentos de $X(t) - X(s)$ es dada por

$$m(r) = E[e^{r(X_t - X_s)}] = e^{\frac{t-s}{2}r^2}$$

entonces

$$E\big(|X_t - X_s|^4\big) = \frac{d^4}{dr^4} m(r)\Big|_{r=0} = 3(t-s)^2.$$

Observamos que X_t satisface (1.11) con $\alpha = 4$, $\beta = 1$ y $c = 3$. Así, por el teorema de de Kolmogorov-Censot, existe una modificación B_t de X_t con trayectorias continuas c.s. Además B_t satisface $1), 2)$ y 3)y es un movimiento browniano.

Por definición de $B(t,\omega)$, las trayectorias del movimiento browniano son continuas c.s. en cambio esto no sucede con la diferenciabilidad. El siguiente resultado prueba que con probabilidad uno las trayectorias no son diferenciables en ningún punto. Seguimos la clásica exposición de Dvoretzky, Erdös, Kakutani de 1961 expuesta en [20].

Teorema 1.14 *Sea $B(t)$ un movimiento browniano en $\mathbb{R}$. Entonces las trayectorias de $B(t)$ son no diferenciables en cualquier punto c.s.*

Prueba.

Procedemos por reducción al absurdo. Fijemos un entero $n \geq 1$ y definamos

$$A_n = \{\omega \in \Omega\,, B(\cdot,\omega) \text{ no es diferenciable en ningún punto del intervalo } [0,n)\}.$$

Supongamos que $B(t)$ es diferenciable en algún $t_0 \in [0,n]$, entonces existen $\delta,\ L>0$ tales que $|B(t)-B(t_0)| \leq L|t-t_0|$, para todo $t \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$. Sean $k > \frac{4}{\delta}$ un número entero y j el menor entero tal que $t_0 \leq \frac{j}{k}$. Entonces $\frac{j+3}{k} \leq t_0+\delta$. Para $i = j+1, j+2, j+3$ conseguimos

$$\begin{aligned}
\left|B\Big(\frac{i}{k}\Big) - B\left(\frac{i-1}{k}\right)\right| &\leq \left|B\left(\frac{i}{k}\right) - B(t_0)\right| + \left|B(t_0) - B\Big(\frac{i-1}{k}\Big)\right| \\
&\leq L\left(\left|\frac{i}{k} - t_0\right| + \left|\frac{i-1}{k} - t_0\right|\right) \\
&\leq L\left(\frac{4}{k} + \frac{3}{k}\right) = \frac{7L}{k}.
\end{aligned}$$

Ahora definamos

$$C_m^L = \bigcap_{k=m}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{kn} \bigcap_{i=j+1}^{j+3} \left\{ \left|B\Big(\frac{i}{k}\Big) - B\Big(\frac{i-1}{k}\Big)\right| \leq \frac{7l}{k} \right\}$$

y así tenemos $\Omega \setminus A_n = \bigcup_{L=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m^L$. Con el fin de probar nuestra afirmación, basta mostrar que $P(C_m^L) = 0$ para cualesquiera $m, L \geq 1$.

Si $k \geq m$,

$$\begin{aligned}
P(C_m^L) &\leq P\left(\bigcup_{j=1}^{kn} \bigcap_{i=j+1}^{j+3} \left\{ \left|B\Big(\frac{i}{k}\Big) - B\Big(\frac{i-1}{k}\Big)\right| \leq \frac{7L}{k} \right\} \right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{nk} P\left(\bigcap_{i=j+1}^{j+3} \left\{ \left|B\Big(\frac{i}{k}\Big) - B\Big(\frac{i-1}{k}\Big)\right| \leq \frac{7L}{k} \right\} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{nk} P\left(\left\{ \left|B\Big(\frac{i}{k}\Big) - B\Big(\frac{i-1}{k}\Big)\right| \leq \frac{7L}{k} \right\} \right)^3 \\
&= nkP\left(\left\{ |B(\frac{1}{k})| \leq \frac{7L}{k} \right\} \right)^3 = nkP\left(\left\{ |B(1)| \leq \frac{7L}{\sqrt{k}} \right\} \right)^3 \\
&= nk\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-7L}{\sqrt{k}}}^{\frac{7L}{\sqrt{k}}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx \right]^3 \leq nk\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-7L}{\sqrt{k}}}^{\frac{7L}{\sqrt{k}}} dx \right]^3 \\
&= kn\Big(\frac{14L}{\sqrt{2\pi k}} \Big)^3 = n\left(\frac{14L}{\sqrt{2\pi}} \right)^3 \frac{1}{\sqrt{k}}.
\end{aligned}$$

notemos que $n\left(\frac{14L}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \frac{1}{\sqrt{k}} \to 0$ cuando $k \to \infty$. Así, concluimos la prueba. $\square$

1.4. Movimiento browniano adaptado

Definición 1.15 *Una familia de σ-álgebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ en Ω es llamada una filtración en el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ si se cumple*

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, \quad \text{para cualesquiera} \quad 0 \leq s < t < \infty.$$

*Al espacio $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$ se le llama **espacio de probabilidad filtrado**.*

Definición 1.16 *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si, para cada $t \geq 0$, la variable aleatoria X_t es $\mathcal{F}_t$-medible.*

Todo proceso estocástico X_t determina una filtración natural $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t\geq 0}$ dada por

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\big(\{X_s; 0 \leq s \leq t\}\big), \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Esta definición es conocida como la filtración generada por el proceso X_t.
Sea $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ una filtración en el espacio $(\Omega, \mathcal{F})$.

Definición 1.17 *Sea $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ una filtración. Definimos $\mathcal{F}_{t^+} = \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$ como el σ-ágebra de eventos inmediatamente después de $t \geq 0$. Decimos que la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ es continua por la derecha si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$ para todo $t \geq 0$.*

Definición 1.18 *Se dice que la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ satisface las condiciones usuales si ella es continua por la derecha y $\mathcal{F}_0$ contiene a todos los eventos P-nulos en $\mathcal{F}$.*

Definición 1.19 *Un movimiento browniano estándar unidimensional con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ o un $\mathcal{F}_t$-movimiento browniano estándar unidimensional es un proceso estocástico $\mathcal{F}_t$-adaptado $X : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes condiciones:*

1. *$P(\{\omega \in \Omega\,;\, X(0, \omega) = 0\}) = 1$.*

2. *Para cualesquiera $0 \leq s < t$, la variable aleatoria $X(t) - X(s)$ tiene distribución normal con media cero y varianza $t - s : X(t) - X(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.*

3. *Para cualesquiera $t > s \geq 0$, la variable aleatoria $X(t) - X(s)$ es independiente de $\mathcal{F}_s$.*

4. Con probabilidad uno, las trayectorias $X(\cdot,\omega)$ son funciones continuas, es decir,

$$P\left(\{\omega \in \Omega;\ X(\cdot,\omega)\ \textit{es continua}\ \}\right) = 1.$$

Teorema 1.20 *Un $\mathcal{F}_t$-movimiento browniano estándar unidimensional es también un movimiento browniano estándar unidimensional.*

Este resultado es consecuencia inmediata del siguiente lema.

Lema 1.21 *Si $X(t)$ es un proceso estocástico $\mathcal{F}_t$-adaptado tal que $X(t) - X(s)$ es independiente de $\mathcal{F}_s$ para cualesquiera $0 \leq s < t$, entonces $X(t)$ es un proceso con incrementos independientes .*

Prueba. Sean $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. Debemos probar la independencia de las variables aleatorias $X(t_1)$, $X(t_2)-X(t_1), \ldots, X(t_n)-X(t_{n-1})$. Para simplificar la notación usaremos la siguiente notación

$$Y_1 = X(t_1),\, Y_2 = X(t_2) - X(t_1), \ldots, Y_n = X(t_n) - X(t_{n-1}).$$

Dado que Y_i es $\mathcal{F}_{t_i}$-medible para $i = 1, \ldots, n$,

$$\sigma\left((Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1})\right) = (\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1}\}) \subset \mathcal{F}_{t_{n-1}}$$

Además, ya que $\mathcal{F}_{t_{n-1}}$ y $\sigma(Y_n)$ son independientes, $\sigma\left((Y_1, \ldots, Y_{n-1})\right)$ y $\sigma(Y_n)$ son independientes. En consecuencia, la distribución de probabilidad $P_{(Y_1,\ldots,Y_{n-1},Y_n)}$ del vector aleatorio $(Y_1, \ldots, Y_{n-1}, Y_n)$ satisface que

$$P_{(Y_1,\ldots,Y_{n-1},Y_n)} = P_{(Y_1,\ldots,Y_{n-1})} \times P_{Y_n}.$$

Por el mismo argumento tenemos que $P_{(Y_1,\ldots,Y_{n-2},Y_{n-1})} = P_{(Y_1,\ldots,Y_{n-2})} \times P_{Y_{n-1}}$ y así sucesivamente, con lo cual finalmente obtenemos que

$$P_{(Y_1,\ldots,Y_{n-1},Y_n)} = P_{Y_1} \times \ldots \times P_{Y_{n-1}} \times P_{Y_n}.$$

Esto prueba la independencia de $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. $\square$

Teorema 1.22 *Un movimiento browniano estándar unidimensional $B(t)$ es también un $\mathcal{F}_t^B$-movimiento browniano estándar.*

Este resultado es consecuencia inmediata del siguiente lema, cuya prueba puede ser encontrada en [20].

Lema 1.23 *Sea $X(t)$, un proceso estocástico con incrementos independientes. Sea $\mathcal{F}_t^X$ la filtración generada por $X(t)$. Entonces para cada par $s, t \in [0, +\infty)$ tal que $0 \leq s < t$, el incremento $X_t - X_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s^X$.*

Capítulo 2

Martingalas

En esta parte del trabajo introducimos el concepto de martingala y estudiamos algunas de sus principales propiedades. Este concepto fue introducido en la teoría de las probabilidades por Paul Pierre Lévy, y una gran parte de su desarrollo se debe a la teoría realizada por Joseph Leo Dobb.

Definición 2.1 *Sean* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espacio de probabilidad y* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *una filtración en dicho espacio de probabilidad. Un proceso estocástico* (X_t) *de valores reales definida en* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *es una martingala relativa a la filtración* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *o una* $\mathcal{F}_t$*-martingala si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Para todo* $t \geq 0, \quad E|X_t| < \infty$.

2. *El proceso* (X_t) *es adaptado a la filtración* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

3. $E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ *c. s. para cualesquiera* $t > s \geq 0$.

Una $\mathcal{F}_t$*-supermartingala es un proceso estocástico* (X_t) *que satisface las condiciones* 1., 2. *y*

3'.

$$E[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s \text{ c.s. para cualesquiera } \quad t > s \geq 0.$$

Una $\mathcal{F}_t$*-submartingala es un proceso estocástico* (X_t) *que satisface las condiciones* 1., 2. *y*

3".

$$E[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s \text{ c.s. para cualesquiera } t > s \geq 0.$$

Teorema 2.2 *Si $B(t)$ es un $\mathcal{F}_t$-movimiento browniano, entonces es una $\mathcal{F}_t$-martingala.*

Prueba. Para ver este hecho, verificamos que $B(t)$ es una martingala:

1. Para cada $t \geq 0, \quad E[|B(t)|] < \infty$, pues $B(t) \sim N(0,t)$.

2. Por otro lado, $B(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible ya que $B(t)$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, el movimiento browniano $B(t)$ es adaptado a $\mathcal{F}_t$.

3. Para cualesquiera $t > s \geq 0$,

$$\begin{aligned} E[B(t)|\mathcal{F}_s] &= E[B(t)-B(s)|\mathcal{F}_s] + E[B(s)|\mathcal{F}_s] \\ &= E[B(t)-B(s)] + B(s) \\ &= B(s), \end{aligned}$$

   La segunda igualdad es debido a que $B(t)-B(s)$ es independiente de $\mathcal{F}_s$ y $B(s)$ es $\mathcal{F}_s$-medible.

Esto muestra que $B(t)$ es una $\mathcal{F}_t$-martingala. □

2.1. Variación cuadrática de martingalas cuadrado integrables

En esta sección aplicamos la descomposición de Doob-Meyer a submartingalas de la forma X_t^2, donde X_t es una martingala cuadrado integrable con trayectorias continuas. Esta descomposición es esencial en la construcción de la integral estocástica. Decimos que dos procesos aleatorios son equivalentes si ellos son indistinguibles. Usamos la misma notación para el proceso y la clase de equivalencia que representa.
Fijemos una filtración $\mathcal{F}_t$. A partir de aquí en esta sección vamos a referirnos a las $\mathcal{F}_t$-martingalas sólo como martingalas.

Definición 2.3 *Se dice que una martingala continua por la derecha (M_t) es cuadrado integrable si $E(M_t^2) < \infty$ para todo $t \geq 0$. Denotemos por $\mathcal{M}_2$ al espacio de todas las clases de equivalencia de martingalas cuadrado integrables que empiezan en cero y por $\mathcal{M}_2^c$ la subclase de martingalas continuas en $\mathcal{M}_2$.*

Lema 2.4 *Sean $(M_t)_{t\geq 0}$ una $\mathcal{F}_t$-martingala y $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa tal que, para todo $t \geq 0$, $\varphi(M_t)$ es integrable. Entonces $\varphi(M_t)$ es una $\mathcal{F}_t$-submartingala.*

Sea (A_t) un proceso estocástico. Se dice que (A_t) es un proceso creciente si cumple:

i) (A_t) es $\mathcal{F}_t$-adaptado;

ii) Para cada $t \geq 0$, A_t es integrable;

iii) $A_0 = 0$;

iv) Las trayectorias de (A_t) son crecientes y continuas por la derecha.

Una prueba del siguiente resultado puede ser encontrada en [20].

Teorema 2.5 (Teorema de descomposición de Doob-Meyer) *Supongamos que la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ satisface las condiciones usuales. Sea (X_t) una $\mathcal{F}_t$-submartingala continua positiva. Entonces existen dos únicos procesos (M_t) y (A_t) tales que:*

- *(M_t) es una $\mathcal{F}_t$-martingala continua;*
- *(A_t) es un proceso creciente continuo;*
- *$X_t = M_t + A_t$ para todo $t \geq 0$.*

Si $M_t \in \mathcal{M}_2^c$ entonces por el lema 2.4 M_t^2 es una $\mathcal{F}_t$-submartingala continua positiva. Por el teorema 2.5, existen dos únicos procesos N_t y A_t tales que:

- $M_t^2 = N_t + A_t$ para todo $t \geq 0$.
- N_t es una martingala continua con $N_0 = 0$.
- A_t es un proceso creciente continuo.

Definición 2.6 *El proceso A_t en la anterior descomposición es conocido como la variación cuadrática de M_t y es denotado por $\langle M \rangle_t$.*

Ejemplo 2.7 *Sea B un $\mathcal{F}_t$-movimiento browniano. Para $0 \leq s < t$,*

$$\begin{aligned} E[B_t^2|\mathcal{F}_s] &= E[(B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s] + 2E[B_tB_s|\mathcal{F}_s] - E[B_s^2|\mathcal{F}_s] \\ &= E((B_t - B_s)^2) + 2B_s^2 - B_s^2 = B_s^2 + t - s. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $B_t^2 - t$ es una martingala y $\langle B\rangle_t = t$ debido a la unicidad de la descomposición de Doob-Meyer.

Es claro que las combinaciones lineales de elementos de $\mathcal{M}_2^c$ son también elementos de $\mathcal{M}_2^c$. Si tomamos dos elementos X y Y de $\mathcal{M}_2$, entonces ambos procesos

$$(X+Y)^2 - \langle X+Y\rangle \quad \text{y} \quad (X-Y)^2 - \langle X-Y\rangle \quad \text{son martingalas.}$$

Observación 2.8 *Sean $M \in \mathcal{M}^2$ y $t \in [0,\infty)$. entonces para $t \geq s$ se cumple que*

$$E[(M_t - M_s)^2\,|\mathcal{F}_s] = E[M_t^2 - M_s^2\,|\mathcal{F}_s] = E[\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s\,|\mathcal{F}_s] \tag{2.1}$$

Si $X \in \mathcal{M}^2$ y $0 \leq s < t \leq u < v$ entonces

$$E[(X_v - X_u)(X_t - X_s)] \;=\; E[E[X_v - X_u|\mathcal{F}_u](X_t - X_s)] = 0$$

Ahora introducimos una métrica en $\mathcal{M}_2^c$

Definición 2.9 *Para cualesquiera $X,\ Y \in \mathcal{M}_2^c$ y $t \in [0,\infty)$, definimos*

$$\|X\|_t = \Big(E(X_t^2)\Big)^{1/2} \qquad y \tag{2.2}$$

$$\|X - Y\| = d_{\mathcal{M}}(X,Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|X-Y\|_n \wedge 1}{2^n}, \tag{2.3}$$

donde $\|X - Y\|_n \wedge 1 = \text{mín}\{\|X-Y\|_n, 1\}$.

Observemos que la función $t \longmapsto \|X\|_t$ en $[0,\infty)$ es no decreciente porque X^2 es una submartingala. Además, $d_{\mathcal{M}}(X,Y)$ es una seudométrica en $\mathcal{M}_2^c$, la cual se convierte en métrica si identificamos procesos indistinguibles. Con el fin de probar que $d_{\mathcal{M}}$ es una métrica, necesitamos mostrar, en particular que $d_{\mathcal{M}}(X,Y) = 0$ implica que $X_t - Y_t$ es indistinguible de cero. Si $d_{\mathcal{M}}(X - Y) = 0$, entonces $X_n - Y_n = 0$ c.s. para cada entero positivo n. Dado que $X_t - Y_t$ es una martingala,

$$X_t - Y_t = E[X_n - Y_n|\mathcal{F}_t] = 0 \quad P-\text{c.s. para cada} \quad 0 \leq t \leq n.$$

Ya que X y Y son continuas por la derecha, ellos son indistinguibles. Las otras propiedades requeridas de métrica también las cumple $d_{\mathcal{M}}$
La siguiente proposición muestra que $\mathcal{M}_2^c$ es completo. Una prueba de este resultado se encuentra en [13] (proposición 5.23).

Proposición 2.10 *El espacio $\mathcal{M}_2^c$ con la métrica $d_{\mathcal{M}}$ es completo.*

Ahora recordemos que para $t \geq 0$, una partición Δ_t de $[0,t]$ es un conjunto ordenado y finito $\Delta_t = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ tal que $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$, y que la norma de Δ_t es definida por

$$\delta\Delta_t = \text{máx}\{\ |t_{j+1} - t_j|\ ;\ j = 0, 1, \ldots, k-1\}.$$

Para cualquier proceso X denotamos como $m_T(X, \Delta_t)$ el módulo de continuidad :

$$m_T(X, \Delta_t) = \text{máx}\{|X_t - X_s|; 0 \leq s, t \leq T,\ |t-s| < \delta\}.$$

Si X es un proceso continuo c.s. entonces, para todo $T > 0$, se cumple que $m_T(X, \Delta_t) \to 0$ c.s cuando $\delta \to 0$.

Lema 2.11 *Sea $X \in \mathcal{M}_2$ que satisface $|X_s| \leq C < \infty$ para todo $s \in [0,t]$ c.s. Sea $\Delta_t = \{0 = t_0, t_1, \ldots, t_m = t\}$ una partición de $[0,t]$. Entonces*

$$E\Big(\sum_{k=1}^{m} |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^2\Big)^2 \leq 6C^4.$$

Prueba. Sea $X \in \mathcal{M}_2$. Ahora

$$E\Big(\sum_{k=1}^{m} |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^2\Big)^2 = E\Big(\sum_{k=1}^{m} |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^4\Big) + 2E\left(\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=k+1}^{m} (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})^2 (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2\right)$$

Luego, usando la propiedad de martingalas, tenemos para $0 \leq k \leq m-1$,

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{j=k+1}^{m} |X_{t_j} - X_{t_{j-1}}|^2\ \Big|\mathcal{F}_{t_k}\right] &= E\left[\sum_{j=k+1}^{m} (X_{t_j}^2 - X_{t_{j-1}}^2)\ |\mathcal{F}_{t_k}\right] \\ &\leq E[X_{t_m}^2\ |\mathcal{F}_{t_k}] \leq C^2. \end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned} & E\left[\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=k+1}^{m} (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})^2 (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2\right] \\ = \ & E\left[\sum_{k=1}^{m-1} (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2 \sum_{j=k+1}^{m} E\Big[\ (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})^2 \Big| \mathcal{F}_{t_k}\ \Big]\right] \\ \leq \ & C^2 E\left[\sum_{k=1}^{m-1} (X_{t_k} - X_{t_{k-2}})^2\right] \leq C^4. \end{aligned} \tag{2.4}$$

También tenemos que:

$$E\left(\sum_{k=1}^{m}|X_{t_k}-X_{t_{k-1}}|^4\right)\leq 4C^2E\left[\sum_{k=1}^{m}\left(X_{t_k}-X_{t_{k-1}}\right)^2\right]\leq 4C^4. \tag{2.5}$$

Las desigualdades (2.4) y (2.5) implican que

$$E\left(\sum_{k=1}^{m}|X_{t_k}-X_{t_{k-1}}|^2\right)^2\leq 6C^4.$$

□

Lema 2.12 *Sea $X\in\mathcal{M}_2^c$ que satisface $X_s\leq C<\infty$ para todo $s\in[0,\infty)$ P-c.s. Para particiones $\Delta_t=\{0=t_0,t_1,\ldots,t_m=t\}$ de $[0,t]$ tenemos que*

$$\lim_{\delta\Delta_t\to 0}E\left(\sum_{k=1}^{m}|X_{t_k}-X_{t_{k-1}}|^4\right)=0$$

Prueba. Para cualquier partición Δ_t, podemos escribir

$$\sum_{k=1}^{m}|X_{t_k}-X_{t_{k-1}}|^4\leq\sum_{k=1}^{m}|X_{t_k}-X_{t_{k-1}}|^2m_t^2(X,\delta\Delta_t),$$

donde $m_t(X,\delta)=\sup\{|X_r-X_s|;\ 0\leq r<s\leq t, s-r\leq\delta\}$. La desigualdad de Holder implica

$$E\left(\sum_{k=1}^{m}|X_{t_k}-X_{t_{k-1}}|^4\right)\leq\left(E\left(\sum_{k=1}^{m}|X_{t_k}-X_{t_{k-1}}|^2\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(E\left(m_t^4(X,\delta\Delta_t)\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Cuando $\delta\Delta_t$ tiende a cero, el primer factor del lado derecho permanece acotado y el segundo termino tiende a cero debido a la continuidad uniforme en $[0,t]$ de las trayectorias de X y por el teorema de convergencia acotada. □

El siguiente teorema será usado en la prueba de la fórmula de Itô.

Teorema 2.13 *Sea $X\in\mathcal{M}_c^2$. Para particiones $\Delta_t=\{0=t_0,t_1,\ldots,t_m=t\}$ de $[0,t]$, tenemos que*

$$\lim_{\delta\Delta_t\to 0}\sum_{k=1}^{m}|X_{t_k}-X_{t_{k-1}}|^2$$

converge en probabilidad a $\langle X\rangle_t$. Esto es, para todo $\epsilon>0$, $\eta>0$ existe un $\delta>0$ tal que

$$P\left(\left|\sum_{k=1}^{m}|X_{t_k}-X_{t_{k-1}}|^2-\langle X\rangle_t\right|>\epsilon\right)<\eta$$

cuando $\delta\Delta_t<\delta$.

Prueba. En primer lugar consideremos el caso acotado:

$$|X_s| \leq C < \infty \text{ se cumple para todo } s \in [0,t],\ P - c.s.$$

Para cualquier partición $\Delta_t = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_m\}$.

$$\begin{aligned}
& E\left(\sum_{k=1}^{m} |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^2 - \langle X\rangle_t\right)^2 \\
= \ & E\left[\sum_{k=1}^{m} \ \{|X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^2 - (\langle X\rangle_{t_k} - \langle X\rangle_{t_{k-1}})\ \}\right]^2 \\
= \ & \sum_{k=1}^{m} E\left[\ |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^2 - (\langle X\rangle_{t_k} - \langle X\rangle_{t_{k-1}})\ \right]^2 \\
\leq \ & 2\sum_{k=1}^{m} E\left[\ |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^4 + (\langle X\rangle_{t_k} - \langle X\rangle_{t_{k-1}})^2\ \right] \\
= \ & 2\sum_{k=1}^{m} E[\ |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^4] + 2\sum_{k=1}^{m} E\left(\langle X\rangle_{t_k} - \langle X\rangle_{t_{k-1}}\right)^2 \\
\leq \ & 2E\left(\sum_{k=1}^{m} \ |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^4\right) + 2E\left[\langle X\rangle_t\, m_t\left(\langle X\rangle, \delta\Delta_t\right)\right].
\end{aligned}$$

Cuando $\delta\Delta_t \to 0$, el primer término del lado derecho en la desigualdad anterior converge a cero por el lema 2.12. El segundo término también lo hace, por el teorema de convergencia acotada y de la continuidad uniforme de las trayectorias de $\langle X\rangle$. Convergencia en L^2 implica convergencia en probabilidad, así esto prueba el teorema para martingalas uniformemente acotadas.

Ahora supongamos que $X \in \mathcal{M}_2^c$ no es necesariamente acotada.

Definamos una sucesión de tiempos de parada para $n = 1, 2, \ldots$ como

$$\tau_n = \inf\{|X_t| \geq n \ \text{ o } \ \langle X\rangle_t \geq n\}.$$

Ahora $X_t^n = X_{t\wedge\tau_n}$ es una martingala acotada relativa a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$.

Del mismo modo, $\{X_{t\wedge\tau_n}^2 - \langle X\rangle_{t\wedge\tau_n}; t \in [0,\infty)\}$ es una martingala acotada. De la unicidad de la descomposición de Doob-Meyer, vemos que

$$\langle X^{(n)}\rangle_t = \langle X\rangle_{t\wedge\tau_n}.$$

Por lo tanto para particiones $\Delta_t = \{0 = t_0, t_1, \ldots, t_m = t\}$ de $[0,t]$; tenemos

$$\lim_{\delta\Delta_t \to 0} E\left(\sum_{k=1}^{m} \left(X_{t_k\wedge\tau_n} - X_{t_{k-1}\wedge\tau_n}\right)^2 - \langle X\rangle_{t\wedge\tau_n}\right)^2 = 0$$

Ya que $\tau_n \uparrow \infty$ c.s., tenemos para cualquier t fijo que $\lim\limits_{n\to\infty} P(\tau_n < t) = 0$.

Esto muestra que $\sum\limits_{k=1}^{m} |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^2$ converge a $\langle X \rangle_t$ en probabilidad. $\square$

Capítulo 3

Integración estocástica

Fijemos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ que satisface las condiciones usuales.

Sea M_t una martingala continua cuadrado integrable tal que $M_0 = 0$ c.s.

En el presente capítulo, nuestro objetivo es definir una integral estocástica de la forma

$$I_T(X) = \int_0^T X_t(\omega)\, dM_t(\omega) \tag{3.1}$$

para una apropiada clase de integrandos X.

Sea $M_t \in \mathcal{M}_2^c$. En esta sección definimos la integral estocástica $\int_0^t X_s dM_s$, también denotada como $I_t(X)$, para una clase de integrandos X_t.

Para tal fin definimos una medida μ_M en el espacio medible $([0,\infty)\times\Omega, \mathcal{B}([0,\infty))\times\mathcal{F})$ que será de mucha utilidad en esta construcción

Definición 3.1 *La medida μ_M en $(\,[0,\infty)\times\Omega,\ \mathcal{B}([0,\infty))\times\mathcal{F})$ es definida como*

$$\mu_M(A) \;=\; \int_\Omega\int_0^\infty 1_A(t,\omega)\, d\langle M\rangle_t(\omega)\, P(d\omega) = E\left[\int_0^\infty 1_A(t,\omega)\, d\langle M\rangle_t(\omega)\right]. \tag{3.2}$$

Definición 3.2 *Un proceso estocástico X es progresivamente medible con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ si para cada $t\in[0,\infty)$ y $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, se cumple que*

$$\{(s,\omega); 0\leq s\leq t,\ \omega\in\Omega,\ X_s(\omega)\in A\}\subset\mathcal{B}([0,\infty))\times\mathcal{F}.$$

Es decir, el proceso

$$\begin{aligned} X\big|_{[0,t]\times\Omega} : [0,t]\times\Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (s,\omega) &\longmapsto X_s(\omega) \end{aligned}$$

es $\mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{F}_t|\mathcal{B}(\mathbb{R})$*-medible para todo* $t \geq 0$.

Observación 3.3 *Sea* X_t *un proceso progresivamente medible.*

- *Si el proceso* X_t *es además acotado, entonces para todo* $t \in [0,\infty)$ *la integral* $\int_0^t X_s ds$ *es* $\mathcal{F}_t$*-medible.*
- *Todo proceso progresivamente medible es medible.*

Definición 3.4 *Fijemos un intervalo* $J = [0,T]$ *(con* $T > 0$*) o* $[0,\infty)$. *Denotaremos por* $\mathcal{L}_J^q$ *a la clase de todos los procesos* X_t *progresivamente medibles tales que*

$$\int_J E|X_t|^q dt < \infty. \tag{3.3}$$

Note que $X_t \in \mathcal{L}_J^1$. si sólo si X_t es integrable con respecto a la medida producto $\lambda \times P$, donde λ es la medida de Lebesgue.
La prueba de siguiente resultado puede ser visto en

Lema 3.5 *Sea* $X_t \in \mathcal{L}_J^1$. *Entonces existe* $\Omega_1 \in \mathcal{F}$ *con* $P(\Omega_1) = 1$ *tal que para todo* $\omega \in \Omega_1$ *se cumple:*

a) La función $t \longmapsto X_t(\omega)$ *es Borel medible e integrable en* J.

b) La función $t \longmapsto Y_t = \int_{\{s\leq t\}} X_s ds$ *es continua en* t. *Además, el proceso* Y_t *es progresivamente medible.*

Decimos que dos procesos medibles y $\mathcal{F}_t$-adaptados X y Y son μ_M-equivalentes si

$$X(t,\omega) = Y(t,\omega) \quad \mu_M\text{-c.s.}$$

Note que esto introduce una relación de equivalencia. La clase de equivalencia determinada por X es usualmente denotada por $[X]$ y consiste del conjunto de todos los procesos que son μ_M-equivalentes a X. Para cada $t > 0$ y cada proceso medible y $\mathcal{F}_t$-adaptado X, definimos

$$||X||_{\mu_M,T} = \left(E\int_0^T X_t^2 \, d\langle M\rangle_t\right)^{1/2} = \left(\int X^2 1_{[0,T]\times\Omega} \, d\mu_M\right)^{1/2}$$

siempre que el lado derecho sea finito. Note que $||X||_{\mu_M,T}$ es la $L^2(\mu_M)$-norma para la restricción del proceso X (considerado como una función del par (t,ω) al espacio $[0,T]\times\Omega$ Además $||X-Y||_{\mu_M,T} = 0$ para todo $T > 0$ si y sólo si X y Y son μ_M-equivalentes.

Definición 3.6 *Denotaremos por* $\mathcal{L} = \mathcal{L}(M)$ *al conjunto de* μ_M*-clases de equivalencia* $[X]$ *de todos los procesos medibles* $\mathcal{F}_t$*-adaptados, para los cuales*

$$||X||_{\mu_M,T} < \infty, \ \ \textit{para todo}\, T > 0. \tag{3.4}$$

De manera similar, denotaremos por $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}^*(M)$ *al conjunto de las* μ_M*-clases de equivalencia de procesos progresivamente medibles que satisfacen* (3.4)*, para todo* $T > 0$*. Para cada par de procesos* X*,* $Y \in \mathcal{L}$*, definimos*

$$d_{\mathcal{L}}(X,Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(1 \wedge ||X-Y||_{\mu_M,n}).$$

Note que $d_{\mathcal{L}}$ *es una métrica en* $\mathcal{L}$*.*

Observación 3.7 *Notemos las siguientes relaciones.*

- *Todas las clases de equivalencia, normas y métricas anteriores dependen de la martingala* M*.*
- *El conjunto* $\mathcal{L}$ *contiene a todos los procesos acotados, medibles* $\mathcal{F}$*-adaptados.*
- *El conjunto* $\mathcal{L}^*$ *contiene a todos los procesos acotados y progresivamente medibles.*

3.1. Integral estocástica de procesos simples

Definición 3.8 *Se dice que el proceso estocástico* $\mathcal{F}_t$*-adaptado* X *es un proceso simple si existe una sucesión estrictamente creciente de números reales* $\{t_n\}_{n\geq 0}$ *con* $t_0 = 0$ *y* $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$*, también como una sucesión de variables aleatorias* $\{\xi_n\}_{n\geq 0}$ *con* $\sup_{n\geq 0} |\xi_n(\omega)| \leq C < \infty$*, para todo* $\omega \in \Omega$ *tales que* ξ_n *es* $\mathcal{F}_{t_n}$*-medible para cada* $n \geq 0$ *y* X *es de la forma*

- $X(0,\omega) = \xi_0(\omega)$ *para* $\omega \in \Omega$*;*
- $X(t,\omega) = \xi_i(\omega)$ *para* $t \in (t_i, t_{i+1}], i = 0, 1, 2, \ldots$ *y* $\omega \in \Omega$*.*

Esto es,

$$X(t,\omega) = \xi_0(\omega)\,1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(\omega)\,1_{(t_i,t_{i+1}]}(t) \tag{3.5}$$

con $t \in [0,\infty)$ *y* $\omega \in \Omega$*.*

Note que si X es un proceso simple y $t \in (t_i, t_{i+1}]$ entonces X_t es $\mathcal{F}_{t_i}$-medible.

Denotaremos por $\mathbb{S}_0 = \mathbb{S}_0(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ la colección de todos los procesos simples. La clase de procesos simples son progresivamente medibles y acotados, así tenemos que $\mathbb{S}_0 \subseteq \mathcal{L}^*(M) \subseteq \mathcal{L}(M)$. Nosotros ahora procedemos a definir la integral estocástica $\int_0^t X_s(\omega) dM_s$ para $X \in \mathbb{S}_0$. Sea $X \in \mathbb{S}_0$ de la forma (3.5). La integral estocástica, también llamada integral de Itô de X con respecto a M es un proceso estocástico, denotado por $I_t(X)$ o $X \cdot M$, definido por

$$I_t(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i (M_{t \wedge t_{i+1}} - M_{t \wedge t_i}), \quad \text{para todo}\, t \geq 0. \tag{3.6}$$

Note que para cada $t \in [0, \infty)$ existe un único $n = n(t)$ tal que $t \in [t_n, t_{n+1}]$. Así la ecuación anterior toma la forma

$$I_t(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + \xi_n (M_t - M_{t_n}) \tag{3.7}$$

Observación 3.9 *Aunque el proceso puede ser representado como en la forma* (3.5) *con diferentes* ξ_n *y* t_n, *la definición de la integral no depende de la representación escogida de* X.

3.1.1. Propiedades elementales

Sean $X, Y \in \mathbb{S}_0$ y $0 \leq s < t$. Se cumplen las siguientes propiedades:

i) El proceso $I(X)$ tiene valor inicial cero, es decir, $I_0(X) = 0$, c.s.

ii) El proceso $I(X)$ es una $\mathcal{F}_t$-martingala.

iii) $E\big[[I_t(X)]^2\big] = E \int_0^t X_u^2 d\langle M \rangle_u$, para todo $t \geq 0$.

iv) $\|I(X)\| = \|X\|_{\mathcal{L}}$.

v) $E\big[(I_t(X) - I_s(X))^2 | \mathcal{F}_s\big] = E\big[\int_s^t X_u^2 d\langle M \rangle_u | \mathcal{F}_s\big]$ c.s.

vi) La integral es lineal en el integrando, esto es, $I_t(aX + bY) = aI_t(X) + bI_t(Y)$ para $a, b \in \mathbb{R}$.

Prueba.

i) Sea $t = 0$, usando la definición de $I(X)$ tenemos

$$I_0(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i(M_{0\wedge t_{i+1}} - M_{0\wedge t_i}) = 0.$$

ii) Para cada ω fijado es claro de la definición de $I_t(X)$ ser continua si M es continua y la combinación lineal de martingalas es una martingala.

Así, para probar que $I_t(X)$ es una martingala es suficiente probar el siguiente enunciado: Si M es una martingala, $u < v$ y ξ es una variable aleatoria $\mathcal{F}_u$-medible entonces $Z_k = \xi(M_{k\wedge v} - M_{k\wedge u})$ es una martingala. La acotación de ξ y la integrabilidad de M garantiza la integrabilidad de Z_k.

De este hecho, para cualesquiera $0 \leq s < t < \infty$ y cualquier entero $i \geq 1$, tenemos en la notación de ecuación (2.5),

$$E\big[\xi_i(M_{t\wedge t_{i+1}} - M_{t\wedge t_i})|\mathcal{F}_s\big] = \xi(M_{s\wedge t_{i+1}} - M_{s\wedge t_i}), \quad \text{P-c.s.}; \tag{3.8}$$

lo cual puede ser verificado por separado para los siguientes casos:

a) Para $s \leq t_i$ y cuando

b) Para $t_i < s$ puede suceder que $t_i < s \leq t_i$ o $t_{i+1} < s$.

En el primer caso, si $s \leq t_i$ y tomando $Z_t = \xi_i(M_{t\wedge t_{i+1}} - M_{t\wedge t_i})$,

$$\begin{aligned} E[Z_t|\mathcal{F}_s] &= E\big[\xi_i(M_{t\wedge t_{i+1}} - M_{t\wedge t_i})|\mathcal{F}_s\big] = E\big[\xi_i E\big[M_{t\wedge t_{i+1}} - M_{t\wedge t_i}|\mathcal{F}_{t_i}\big]|\mathcal{F}_s\big] \\ &= 0 = \xi_i(M_{s\wedge t_{i+1}} - M_{s\wedge t_i}) \end{aligned}$$

pues para $t < t_i$, $\quad M_{t\wedge t_{i+1}} - M_{t\wedge t_i} = 0$ y en el caso donde $t_i \leq t$ junto a la propiedad de martingala de M resulta $E[M_{t\wedge t_{i+1}} - M_{t\wedge t_i}|\ \mathcal{F}_{t_i}] = E[M_{t\wedge t_{i+1}}|\ \mathcal{F}_{t_i}] - M_{t_i} = 0$. En el segundo caso, si $t_i < s$, entonces $t > s > t_i$, se sigue que ξ es $\mathcal{F}_s$- medible y $M_{t\wedge t_i} = M_{t_i} = M_{s\wedge t_i}$ es también $\mathcal{F}_s$-medible. Entonces

$$\begin{aligned} E[Z_t|\mathcal{F}_s] = E\big[\xi_i(M_{t\wedge t_{i+1}} - M_{t\wedge t_i})|\mathcal{F}_s\big] &= \xi_i E[M_{t\wedge t_{i+1}} - M_{t\wedge t_i}|\mathcal{F}_s] \\ &= \xi_i(E[M_{t\wedge t_{i+1}}|\mathcal{F}_s] - M_{s\wedge t_i}) \\ &= \xi_i(M_{s\wedge t_{i+1}} - M_{s\wedge t_i}) = Z_s. \end{aligned}$$

En la peúltima igualdad, ya sea $t_{i+1} \leq s$ en cuyo caso $M_{t\wedge t_{i+1}} = M_{t_{i+1}} = M_{s\wedge t_{i+1}}$ es $\mathcal{F}_s$-medible, o si $t_i \leq s < t_{i+1}$ en cuyo caso usamos la propiedad de martingala de M.

Nosotros hemos probado que $I(X) = \{I_t(X), \mathcal{F}_t;\, t \in [0,\infty)\}$ es una martingala continua.

iii) Elevamos al cuadrado $I(X)$,

$$
\begin{aligned}
&\big[I_t(X)\big]^2\\
&= \underbrace{\Big[\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})\Big]^2}_{A} + \underbrace{\big[\xi_n(M_t - M_{t_n})\big]^2}_{B} + \underbrace{2\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})\xi_n(M_t - M_{t_n})}_{C}.
\end{aligned}
$$

Ahora trabajando en cada uno de los sumandos A, B y C.

$$
\begin{aligned}
A = \Big[\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})\Big]^2 &= \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i^2(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2}_{D}\\
&+ 2\underbrace{\sum_{0\leq i<j\leq n-1} \xi_i\xi_j(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})}_{E}.
\end{aligned}
$$

Afirmamos que cada término de la última suma E tiene esperanza cero. Dado que $i < j$, $t_{i+1} \leq t_j$ y ξ_i, ξ_j son $\{\mathcal{F}_{t_j}\}$-medibles,

$$
\begin{aligned}
E[\xi_i\xi_j(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})] &= E\big[E[\xi_i\xi_j(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})\,|\mathcal{F}_{t_j}]\big]\\
&= E[\xi_i\xi_j(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})E[(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})\,|\mathcal{F}_{t_j}]] = 0
\end{aligned}
$$

pues la esperanza condicional es nula por la propiedad de martingala de M.

Ahora trabajando con $D = \Big[\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})\Big]^2$ y nos concentramos en $E\Big[\xi_i^2(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2\Big]$ de esta forma

$$
\begin{aligned}
E\Big[\xi_i^2(M_{t_{i+1}} - M_{t_{i+1}})^2\Big] &= E\Big[E[\xi_i^2(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2|\mathcal{F}_{t_i}]\Big]\\
&= E\Big[\xi_i^2\, E[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2\,|\mathcal{F}_{t_i}]\Big]\\
&= E\Big[\xi_i^2\, E[\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i}\,|\mathcal{F}_{t_i}]\Big]\\
&= E\Big[E[\xi_i^2\,(\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i})\,|\mathcal{F}_{t_i}]\Big]\\
&= E\Big[\xi_i^2\,(\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i})\Big] = E\Big[\int_{t_i}^{t_{i+1}} X_u^2 d\langle M\rangle_u\Big]
\end{aligned}
$$

Ahora Calculamos la esperanza de B y obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
E\big[\xi_n^2(M_t - M_{t_n})^2\big] &= E\Big[E\big[\xi_n^2(M_t - M_{t_n})^2|\mathcal{F}_{t_n}\big]\Big] \\
&= E\Big[\xi_n^2 E\big[(M_t - M_{t_n})^2|\mathcal{F}_{t_n}\big]\Big] \\
&= E\Big[\xi_n^2 E\big[(\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_{t_n})|\mathcal{F}_{t_n}\big]\Big] \\
&= E\Big[E\big[\xi_n^2(\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_{t_n})|\mathcal{F}_{t_n}\big]\Big] \\
&= E\Big[\xi_n^2(\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_{t_n})\big]\Big] = E\Big[\int_{t_n}^t X_u^2 d\langle M\rangle_u\Big],
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} E\Big[\int_{t_i}^{t_{i+1}} X_u^2 d\langle M\rangle_u\Big] + E\Big[\int_{t_n}^t X_u^2 d\langle M\rangle_u\ \Big] &= E\Big[\int_{t_0}^{t_1} X_u^2 d\langle M\rangle_u + \dots \\
&\quad + \int_{t_{n-1}}^{t_n} X_u^2 d\langle M\rangle_u + \int_{t_n}^t X_u^2 d\langle M\rangle_u\Big] \\
&= E\Big[\int_{t_0}^t X_u^2 d\langle M\rangle_u\Big]
\end{aligned}$$

Por último calculamos la esperanza de C, observando que $0 \leq t_i < t_{i+1} \leq t_n < t$,

$$\begin{aligned}
E[\xi_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})\xi_n(M_t - M_{t_n})] &= E\big[E[\xi_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})\xi(M_t - M_{t_n})\ |\mathcal{F}_{t_n}\big] \\
&= E\big[\xi_i\xi_n(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})E[M_t - M_{t_n}\ |\mathcal{F}_{t_n}]\big] = 0
\end{aligned}$$

iv

$$\begin{aligned}
\|I(X)\| &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \wedge \|I(X)\|_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \wedge \big[E(\ I(X_n^2)\ )\big]^{1/2}}{2^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \wedge \big[E\int_0^n X^2(s,\omega)d\langle M\rangle_s(\omega)\big]^{1/2}}{2^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \wedge \|X\|\|_{\mu_M,n}}{2^n} = \|X\|_{\mathcal{L}}
\end{aligned}$$

v) Con $0 \leq s < t < \infty$, m y n elegidos de modo que $s \in [t_{m-1}, t_m)$ y $t \in [t_n, t_{n+1})$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
& E[(I_t(X) - I_s(X))^2 \,|\mathcal{F}_s] \\
= \;& E\Big[\{\xi_{m-1}(M_{t_m} - M_s) + \sum_{i=m}^{n-1} \xi_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + \xi_n(M_t - M_{t_n})\}^2 \, \mathcal{F}_s\Big] \\
= \;& E\Big[\xi_{m-1}^2(M_{t_m} - M_s)^2 + \sum_{i=m}^{n-1} \xi_i^2(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 + \xi_n^2(M_t - M_{t_n})^2 \,|\mathcal{F}_s\Big] \\
= \;& E\Big[\xi_{m-1}^2(\langle M\rangle_{t_m} - \langle M\rangle_s) + \sum_{i=m}^{n-1} \xi_i^2(\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i})^2 + \xi_n^2(\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_{t_n})^2 \,|\mathcal{F}_s\Big] \\
= \;& E[\int_s^t X_\mu^2 d\langle M\rangle_\mu \,|\mathcal{F}_s]
\end{aligned}
$$

□

3.2. Integral estocástica de procesos progresivamente medibles

Ahora extendemos la integral estocástica considerando integrandos un poco más generales y para empezar probamos el siguiente resultado de aproximación que nos dice que un proceso arbitrario X acotado, medible y $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptado puede ser aproximado en cierto sentido por una sucesión de procesos simples.

Lema 3.10 *Sea X un proceso acotado, medible $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptado. Entonces existe una sucesión $\{X^{(m)}\}_{m\geq 1}$ de procesos simples tal que*

$$\lim_{m\to\infty} E\int_0^T |X_t^{(m)} - X_t|^2 dt = 0, \quad \textit{para todo } T > 0. \tag{3.9}$$

Prueba. Supongamos que hemos encontrado para cada $T \in [0,\infty)$ una sucesión de procesos simples $\{X^{(n,T)}\}_{n\geq 1}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} E\int_0^T |X_t^{(n,T)} - X_t|^2 dt = 0, \text{ se cumple.}$$

Entonces para cada m entero positivo existe otro entero n_m tal que

$$E\int_0^m |X_t^{(n_m,m)} - X_t|^2 dt \leq \frac{1}{m}.$$

Debemos verificar que la sucesión con elementos $X^m = X^{(n_m,m)}$ tiene la propiedad afirmada.

Fijado $T > 0$, elegimos $m > T$ y verificamos que

$$E\int_0^T |X_t^{(n)} - X_t|^2 dt \leq E\int_0^m |X_t^{(n)} - X_t|^2 dt \leq \frac{1}{m}.$$

Procedemos en tres pasos:

i) Si X es continuo. Para cada $n \geq 1$ consideramos una sucesión de procesos simples

$$X_t^{(n)}(\omega) = X_0(\omega)1_{\{0\}}(t) + \sum_{k=0}^{2^n-1} X_{\frac{KT}{2^n}}(\omega)1_{(\frac{KT}{2^n},\frac{(K+1)T}{2^n}]}(t).$$

Como $X_t^{(n)}$ converge a X , $X_t^{(n)}$ son acotados y $m([0,T)) \times P(\Omega) < \infty$, entonces esta sucesión tiene la propiedad deseada en vista del teorema de convergencia acotada y así se satisface $\lim_{n\to\infty} E\int_0^T |X_t^{(n)} - X_t|^2 dt = 0$.

ii) Ahora supongamos que X es progresivamente medible, procedemos en primer lugar aproximando con procesos continuos, progresivamente medibles para los cuales aplicamos el resultado anterior.

Definimos los procesos continuos F como

$$F_t(\omega) = \int_0^t X_s(\omega)ds. \tag{3.10}$$

Entonces para cada entero m suficientemente grande tal que $t - \frac{1}{m} \geq 0$, el proceso

$$Y_t^{(m)}(\omega) = \frac{F_t(\omega) - F_{(t-\frac{1}{m})}(\omega)}{\frac{1}{m}},$$

es continuo, acotado y $\{\mathcal{F}_t\}$-medible para $t \geq 0$ y $\omega \in \Omega$. El teorema fundamental del cáculo implica que $\lim_{m\to\infty} Y_t^m(\omega) = X_t(\omega)$ para $m\times P$-almost all $(t,\omega) \in [0,T)\times\Omega$. Además en virtud del resultado en el item i), para cada $m \geq 1$ existe una sucesión de procesos simples $\{Y^{(m,n)}\}_{n\geq 1}$ $n \geq 1$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} E\int_0^T |Y_t^{(m,n)} - Y_t^{(m)}|^2 dt = 0.$$

Ahora consideremos el conjunto producto

$$A = \{(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega;\ \lim_{m\to\infty} Y_t^m(\omega) = X_t(\omega)\}^c.$$

que es $\mathcal{B}([0,T]) \times \mathcal{F}_T$-medible.

Para cada $\omega \in \Omega$ la sección transversal $A_\omega = \{t \in [0,T]; (t,\omega) \in A\}$ está en $\mathcal{B}([0,T])$ y así por el teorema fundamental del cálculo, para cada ω el conjunto de t para el cual $Y_t^m(\omega)$ no converge a $X_t(\omega)$ cuando $m \to \infty$ tiene medida de Lebesgue cero.

Por el teorema de convergencia acotada tenemos que

$$\lim_{m\to\infty} E\int_0^T |Y_t^{(m)} - X_t|^2 dt = 0.$$

Por último para cada $m \geq 1$, existe n_m tal que

$$E\int_0^T |X^n - Y^{(n_m,m)}|^2 dt \leq \frac{1}{m}$$

y

$$\begin{aligned} 0 &\leq E\int_0^T |X_t - Y^{(n_m,m)}|^2 dt \\ &\leq 2E\int_0^T |X_t - X^{(m)}|^2 dt + 2E\int_0^T |X^{(m)} - Y^{(n_m,m)}|^2 dt \end{aligned}$$

y así la sucesión $\{Y^{(m,n_m)}\}_{m\geq 1}$ de procesos simples puede ser elegida para la cual

$$\lim_{m\to\infty} E\int_0^T |Y_t^{(m,n_m)} - X_t|^2 dt = 0.$$

iii) Para finalizar supongamos que X es un proceso medible y adaptado. No podemos garantizar que el proceso continuo $F = \{F_t; t \in [0,\infty)\}$ en (3.10) es progresivamente medible. Sin embargo el proceso X tiene una modificación Y progresivamente medible(Ver proposición 1.1.12 de [13]). Afirmamos que el proceso progresivamente medible

$$\{G_t = \int_0^t Y_s ds, \mathcal{F}_t\,;\, 0 \leq t \leq T\} \tag{3.11}$$

es una modificación de F. Definamos el proceso medible $\Psi_t(\omega) = 1_{\{X_t(\omega)\neq Y_t(\omega)\}}$; $0 \leq t \leq T$, $\omega \in \Omega$, de Fubini tenemos :

$$\begin{aligned} E\int_0^T \Psi_t(\omega)dt &= \int_\Omega \int_0^T \Psi_t(\omega)dtdP \\ &= \int_0^T \int_\Omega 1_{\{X_t(\omega)\neq Y_t(\omega)\}}(\omega)dPdt = \int_0^T P(\{X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\})dt = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\int_0^T \Psi_t(\omega)dt = 0$ para P-c.s.$\omega \in \Omega$. Ahora

$$\{F_t \neq G_t\} \subset \{\omega; \int_0^T \Psi_t(\omega)dt > 0\}, \qquad \text{para todo } \ t \in [0,T] \tag{3.12}$$

G_t es $\{\mathcal{F}_t\}$-medible y por lo asumido, $\{\mathcal{F}_t\}$ contiene todos los subconjuntos P-nulos. Por lo tanto, F_t es también $\{\mathcal{F}_t\}$-medible. Ser adaptable y continuo implica ser progresivamente medible y podemos repetir el argumento anterior.

□

Para la prueba del siguiente resultado puede consultar [13], pag9.

Proposición 3.11 *Sean X un proceso progresivamente medible y τ un tiempo de parada de la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$. Entonces la variable aleatoria X_τ, definida en el conjunto $\{\omega; \tau(\omega) < \infty\}$ es $\mathcal{F}_\tau$-medible y el proceso de parada $X_{\tau\wedge t}$, $t \in [0,\infty)$ es progresivamente medible con respecto a la filtración.*

Lema 3.12 *Sea A_t un proceso continuo, creciente y adaptado a la filtración de la martingala M_t. Si X es un proceso progresivamente medible que satisface*

$$E\int_0^T X_t^2 dA_t < \infty \qquad \textit{para cada } \ T > 0,$$

entonces existe una sucesión $\{X^{(n)}\}_{n\geq 1}$ de procesos simples tal que

$$\lim_{n\to 0} E\int_0^T |X_t^{(n)} - X_t|^2 dA_t = 0, \quad \textit{para todo } \ T > 0.$$

Prueba. Supongamos sin pérdida de generalidad que X es acotado, esto es

$$|X_t(\omega)| \leq C < \infty, \quad \text{para todo } \ t \in [0,\infty)\,, \omega \in \Omega. \tag{3.13}$$

De aquí en adelante $T > 0$ es fijo, asumimos sin pérdida de generalidad que

$$X_t(\omega) = 0, \qquad \forall t > T \ \omega \in \Omega. \tag{3.14}$$

Ahora describimos un tiempo de cambio. Dado que A_t es creciente, tenemos que $A_t(\omega)+t$ es estrictamente creciente en $t \geq 0$ para c.s. $\omega \in \Omega$, entonces $A_t(\omega)+t$ tiene inversa. Sea $T_s(\omega)$ la función inversa continua, estrictamente creciente definida para $s \geq 0$ tal que

$$A_{T_s(\omega)}(\omega) + T_s(\omega) = s, \quad \text{para todo } s \geq 0.$$

En particular, $T_s(\omega) \leq s$ y $\{\omega; T_s(\omega) \leq t\} = \{\omega; A_t(\omega) + t \geq s\} \in \mathcal{F}_t$. Así, para cada $s \geq 0$, T_s es un tiempo de parada acotado para $\{\mathcal{F}_t\}$. Tomando s como nuestro tiempo variable, definimos una nueva filtración $\mathcal{G}_s$ como:

$$\mathcal{G}_s = \mathcal{F}_{T_s} \quad s \geq 0.$$

Definimos un proceso de cambio de tiempo

$$Y_s(\omega) = X_{T_s}(\omega) \qquad s \geq 0 \quad \omega \in \Omega,$$

el cual es adaptado a $\mathcal{G}_s$ debido a que X es progresivamente medible. El lema (3.10) implica que, dado cualquier $\epsilon > 0$ y $R > 0$, existe un proceso simple $\{Y_s^\epsilon, \mathcal{G}_s; 0 \leq s < \infty\}$ para el cual

$$E\int_0^R |Y_s^\epsilon - Y_s|^2 ds < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.15}$$

Pero de (3.14) y (3.13) se sigue que

$$\begin{aligned} E\int_0^\infty Y_s^2 ds &= E\int_0^\infty X_{T_s}^2 ds \\ &= E\int_0^\infty 1_{\{T_s<T\}} X_{T_s}^2 ds \\ &= E\int_0^\infty 1_{\{A_t+T\geq s\}} X_{T_s}^2 ds \\ &= E\int_0^{A_T+T} X_{T_s}^2 ds \\ &\leq E\int_0^{A_T+T} C^2 ds = C^2 E(A_T+T) = C^2[E(A_T)+T] < \infty, \end{aligned}$$

eligiendo R en (3.15) suficientemente grande colocando $Y_s^\epsilon = 0$ para $s > R$, podemos obtener

$$E\int_0^\infty |Y_s^\epsilon - Y_s|^2 ds < \epsilon.$$

Ahora Y_s^ϵ es simple y además por el hecho de que se anula para $s > R$, existe una partición $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n \leq R$ con

$$Y_s^\epsilon(\omega) = \xi_0(\omega) 1_{\{0\}}(s) + \sum_{j=1}^n \xi_{s_{j-1}}(\omega)\, 1_{(s_{j-1},s_j]}(s) \quad 0 \leq s < \infty,$$

donde cada ξ_{s_j} es medible con respecto $\mathcal{G}_{s_j} = F_{T_{s_j}}$ y acotada en valor absoluto por una constante digamos K. Volviendo al tiempo original observamos que

$$Y_{t+A_t}^\epsilon(\omega) = \xi_0 1_{\{0\}}(t) + \sum_{j=1}^n \xi_{s_{j-1}} 1_{(T_{s_{j-1}(\omega)}, T_{s_j}(\omega)]}(t) \qquad t \in [o,\infty),$$

es medible y adaptado, debido a ξ_{s_j} restringido a $\{\omega \in \Omega; T_{s_j} < t\}$ es $\mathcal{F}_t$-medible (ver lema 1.2.15). Definamos $X_t^\epsilon = Y_{t+A_t}^\epsilon$ Tenemos

$$\begin{aligned} E\int_0^T |X_t^\epsilon - X_t|^2 dA_t &\leq E\int_0^T |X_t^\epsilon - X_t|^2 dA_t + E\int_0^T |X_t^\epsilon - X_t|^2 dt \\ &\leq E\int_0^\infty |Y_s^\epsilon - Y_s|^2 ds < \epsilon. \end{aligned}$$

Para finalizar, debemos mostrar como aproximar

$$\eta_t(\omega) = \xi_{s_{j-1}}(\omega) 1_{(T_{s_{j-1}}(\omega), T_{s_j}(\omega)]}, \quad t \in [0,\infty),\ \omega \in \Omega.$$

por procesos simples. Recordemos que $T_{s_{j-1}} \leq T_{s_j}$ y colocando

$$T_{s_{j-1}}^{(m)}(\omega) = \sum_{k=1}^{1+2^{m+1}} \frac{k}{2^m} 1_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^m})}(T_{s_{j-1}}(\omega)),$$

$$T_{s_j}^{(m)}(\omega) = \sum_{k=1}^{1+2^{m+1}} \frac{k}{2^m} 1_{[\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m})}(T_{s_j}(\omega)),$$

definimos

$$\begin{aligned} \eta_t^{(m)}(\omega) &= \xi_{s_{j-1}}(\omega)\, 1_{(T_{s_{j-1}}^{(m)}(\omega), T_{s_j}^{(m)}(\omega)]}(t) \\ &= \sum_{k=1}^{2^{m+1}} \xi_{s_{j-1}}(\omega)\, 1_{\{T_{s_{j-1}} < \frac{k-1}{2^m} \leq T_{s_j}\}}(\omega)\, 1_{(\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m}]}(t), \quad \xi_{s_{j-1}} \text{ es } \mathcal{F}_{T_{s_{j-1}}} - \text{medible.} \end{aligned}$$

Debido a que $\{T_{s_{j-1}} < \frac{k-1}{2^m} \leq T_{s_j}\} \in \mathcal{F}_{\frac{k-1}{2^m}}$ y $\xi_{s_{j-1}}$ restringida a $\{T_{s_{j-1}} < \frac{k-1}{2^m}\}$ es $\mathcal{F}_{\frac{k-1}{2^m}}$−medible, $\eta^{(m)}$ es simple. Además,

$$E\int_0^\infty |\eta_t^{(m)} - \eta_t|^2 dA_t \leq K^2[E(A_{T_{s_j}^{(m)}} - A_{T_{s_j}}) + E(A_{T_{s_{j-1}}^{(m)}} - A_{T_{s_{j-1}}})] \leq K^2 cte \to 0,$$

cuando $m \to \infty$. □

Proposición 3.13 *El conjunto $\mathbb{S}_0$ de procesos simples es denso en $\mathcal{L}^*$ con respecto a la métrica de la definición 3.6.*

Prueba. Basta tomar $A = \langle M \rangle$ en el lema 3.12. □

Teorema 3.14 *Sea $M \in \mathcal{M}_2^c$. Para todo $X \in \mathcal{L}^*$, existe un único proceso $I(X) \in \mathcal{M}_2^c$ con la propiedad $\|I(X^n) - X(M)\| \to 0$ para cada sucesión $\{X^n\}_{n\geq 1}$ en $\mathbb{S}_0$ tal que $\|X^n - X\| \to 0$.*

Prueba. En primer lugar mostraremos la existencia del proceso $I(X)$. Sea $X \in \mathcal{L}^*$, la proposición 3.13 implica la existencia de una sucesión $\{X^{(n)}\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{S}_0$ tal que

$$\|X^{(n)} - X\|_{\mathcal{L}} \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Por la linealidad de la integral y la isometría ($\|I(X)\| = \|X\|_{\mathcal{L}}$) tenemos :

$$\|I(X^{(n)}) - I(X^{(m)})\| = \|I(X^{(n)} - X^{(m)})\| = \|X^{(n)} - X^{(m)}\|_{\mathcal{L}}.$$

Dado un $\epsilon > 0$, elegimos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|X^{(n)} - X\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{\epsilon}{2}$ para $n \geq n_0$. Entonces si $m,\, n \geq n_0$,

$$\|X^{(n)} - X^{(m)}\|_{\mathcal{L}} \leq \|X^{(n)} - X\|_{\mathcal{L}} + \|X - X^{(m)}\|_{\mathcal{L}} \leq \epsilon.$$

Para $X_n \in \mathcal{S}_0$ la integral estocástica $I(X^{(n)})$ fue definida en (3.6). Consecuentemente $\|X^{(n)} - X^{(m)}\|_{\mathcal{L}} \to 0$ cuando $n, m \to \infty$. En otras palabras $\{I(X^{(n)})\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy que yace en el espacio $\mathcal{M}_2^c$. Ya que este espacio es completo (Proposición (2.10)) existe un proceso límite $Y = \lim_{n\to\infty} I(X^{(n)})$ en $\mathcal{M}_2^c$ definida módulo indistinguibilidad. A este proceso Y lo llamamos $I(X) = \{I_t(X); t \in [0, \infty)\}$ tal que

$$\|I(X^n) - I(X)\| \to 0 \text{ cuando } \quad n \to \infty.$$

Veamos ahora la unicidad. Sea $Z^{(n)}$ otra sucesión en $\mathcal{S}_0$ que converge a X en $\mathcal{L}^*$. Debemos mostrar que $Y = \lim_{n\to\infty} I(Z^{(n)})$ en $\mathcal{M}_2^c$. Esto sigue de la desigualdad triangular y la isometría:

$$\begin{aligned}
\|Y - I(Z^{(n)})\| &\leq \|Y - I(X^{(n)})\| + \|I(X^{(n)}) - I(Z^{(n)})\| \\
&= \|Y - I(X^{(n)})\| + \|X^{(n)} - Z^{(n)}\|_{\mathcal{L}} \\
&\leq \|Y - I(X^{(n)})\| + \|X^{(n)} - X\|_{\mathcal{L}} + \|X - Z^{(n)}\|_{\mathcal{L}}
\end{aligned}$$

Todos los términos de la última desigualdad de la última línea se anulan cuando $n \to \infty$. Esto muestra que $I(Z^{(n)}) \to Y$, así existe un único proceso $Y = I(X)$. $\square$

Ahora nosotros podemos enunciar formalmente la definición de la integral estocástica.

Definición 3.15 *Para $X \in \mathcal{L}^*$, la integral estocástica de X con respecto a la martingala $M \in \mathcal{M}_2^c$ es la única martingala cuadrado integrable $I(X) = \{I_t(X), \mathcal{F}_t;\ t \in [0, \infty)\}$ la cual satisface que $\lim_{n\to\infty} \|I(X^{(n)} - I(X))\| = 0$, para cada sucesión $\{X^{(n)}\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{S}_0$ con $\lim_{n\to\infty} \|X^{(n)} - X\|_{\mathcal{L}} = 0$. Escribimos*

$$I_t(X) = \int_0^t X_s dM_s; \quad t \in [0, \infty).$$

3.2.1. Propiedades elementales

Sean $X, Y \in \mathcal{L}^*$ y $0 \leq s < t$. Se cumplen las siguientes propiedades:

i) La integral es lineal en el integrando, esto es, $I_t(aX + bY) = aI_t(X) + bI_t(Y)$ para $a, b \in \mathbb{R}$.

ii) El proceso $I(X)$ tiene valor inicial cero, es decir, $I_0(X) = 0$, c.s.

iii) El proceso $I(X)$ es una $\mathcal{F}_t$-martingala.

iv) (Propiedad de isometría.) Para todo $t \geq 0$,

$$E\big[[I_t(X)]^2\big] = E\int_0^t X_u^2 d\langle M\rangle_u. \tag{3.16}$$

v) $\|I(X)\| = \|X\|_{\mathcal{L}}$.

vi) $E\big[(I_t(X) - I_s(X))^2|\mathcal{F}_s\big] = E\big[\int_s^t X_u^2 d\langle M\rangle_u|\mathcal{F}_s\big]$ c.s.

Prueba. Dado el par de procesos X_t, $Y_t \in \mathcal{L}^*$, podemos encontrar dos sucesiones $X_t^{(n)}$, $Y_t^{(n)} \in \mathbb{S}_0$ tal que $X_t^{(n)} \to X_t$ y $Y_t^{(n)} \to Y_t$ en $\mathcal{L}^*$. Entonces

$$aX_t^{(n)} + bY_t^{(n)} \to aX_t + bY_t \quad \text{en } \mathcal{L}^*,$$

lo cual justifica la linealidad de la integral para cualquier $X, Y \in \mathcal{L}^*$.

Para $X_t \in \mathbb{S}_0$, hemos probado que

$$E\big[(I_t(X) - I_s(X))^2|\mathcal{F}_s\big] = E\big[(I_t^2(X) - I_s^2(X))|\mathcal{F}_s\big] = E\big[\int_s^t X_\mu^2 d\langle M\rangle_\mu|\mathcal{F}_s\big],\ c.s. \tag{3.17}$$

Si $X_t \in \mathcal{L}^*$, podemos encontrar una sucesión $X_t^{(n)}$ tal que $X_t^{(n)} \to X_t$ en $\mathcal{L}^*$. Para cualquier $A \in \mathcal{F}_s$,

$$\begin{aligned}\int_A \big(I_t^2(X) - I_s^2(X)\big)dP &= \lim_{n\to\infty}\int_A \big(I_t^2(X) - I_s^2(X)\big)dP \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_A\int_s^t \big(X_u^n\big)^2 d\langle M\rangle_u = \int_A\int_s^t X_u^2 d\langle M\rangle_u.\end{aligned}$$

Esto prueba que (3.17) se cumple para todo $X_t \in \mathcal{L}^*$.

El proceso $\int_0^t X_u^2 d\langle M\rangle_u$ es $\mathcal{F}_t-$adaptado. Así, debido a la unicidad en la descomposición de Doob-Meyer, para todo $X \in \mathcal{L}^*$,

$$\langle I(X)\rangle_t = \int_0^t X_u^2 d\langle M\rangle_u.$$

□

Observación 3.16 *También se puede tratar con integrales estocásticas a lo largo de un segmento* $[s,t]$*, donde* $0 \leq s < t$*. Sea un proceso* X_u *definida para* $u \in [s,t]$*. Podemos considerar el proceso* $\tilde{X}_u$ *el cual es igual a* X_u *para* $s \leq u \leq t$ *y cero para* $u < s$ *y* $u > t$*. Si* $\tilde{X}_u \in \mathcal{L}^*$*, podemos definir*

$$\int_s^t X_u dM_u = \int_0^t \tilde{X}_u dM_u.$$

Para $X_u \in \mathcal{L}^*$*,* $\int_s^t X_u dM_u = I_t(X) - I_s(X)$*.*

La prueba del siguiente resultado puede ser vista en la sección 6,6 [15] y en el capítulo 6 de [12].

Lema 3.17 *Sea* M_t *una martingala continua cuadrado integrable. Entonces para cualquier proceso estocástico* Y_t *continuo, acotado y adaptado se cumple que*

$$\lim_{\delta\Delta_t \to 0} \sum_{k=1}^{m} Y_{t_k}(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 = \int_0^t Y_t d\langle M \rangle_t, \quad \textit{en probabilidad,}$$

donde $\Delta_t = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ *es una partición de* $[0,t]$*.*

Capítulo 4

Fórmula de Itô

En esta parte del trabajo, demostraremos dos resultados que son de fundamental importancia: la fórmula de Itô, que es la versión estocástica del teorema fundamental del cálculo y el teorema de caracterización de Lévy.

4.1. Fórmula de Itô

La regla de la cadena en el cálculo diferencial es dada por la fórmula

$$\frac{d}{dt}f(g(t)) = f'(g(t))g'(t) \tag{4.1}$$

para funciones diferenciables f y g. En términos del teorema fundamental del cálculo (4.1) se escribe como

$$f(g(t)) - f(g(0)) = \int_0^t f'(g(s))g'(s)ds.$$

El cálculo estocástico trata con funciones aleatorias es decir con procesos estocásticos, en él se define la fórmula de Itô que es una contraparte a la fórmula del cálculo Newton-Leibnitz.

Teorema 4.1 (Fórmula de Itô unidimensional) *Sea $M \in \mathcal{M}_2^c$. Supongamos que la función $f : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase $C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R})$, es decir, que sus derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ existen y son continuas en $[0,\infty) \times \mathbb{R}$. Entonces, c.s., tenemos para cada t,*

$$f(t, M_t) - f(0, M_0) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, M_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, M_s)dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, M_s)d\langle M\rangle_s. \tag{4.2}$$

Prueba. Fijemos un $t > 0$ y sea $\{\Delta^n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de particiones de $[0,t]$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \delta\Delta^n = 0$. Por la expansión de Taylor,

$$\begin{aligned}
f(t, M_t) - f(0, M_0) &= \sum_j [f(t^n_{j+1}, M_{t^n_{j+1}}) - f(t^n_j, M_{t^n_j})] \\
&= \sum_j [f(t^n_{j+1}, M_{t^n_{j+1}}) - f(t^n_j, M_{t^n_{j+1}}) + f(t^n_j, M_{t^n_{j+1}}) - f(t^n_j, M_{t^n_j})] \\
&= \sum_j \Big\{ \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t^n_i, M_{t^n_j}) + A^n_j\right](t^n_{j+1} - t^n_j) + \frac{\partial f}{\partial x}(t^n_j, M_{t^n_j})\,(M_{t^n_{j+1}} - M_{t^n_j}) \\
&+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t^n_j, M_{t^n_j}) + B^n_j\right](M_{t^n_{j+1}} - M_{t^n_j})^2\Big\}, \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
A^n_j(\omega) &= \frac{\partial f}{\partial t}(\tau_j, M_{t^n_{j+1}}) - \frac{\partial f}{\partial t}(t^n_j, M_{t^n_j}) \quad \text{y} \qquad (4.4)\\
B^n_j(\omega) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t^n_j, M_{\eta_j}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t^n_j, M_{t^n_j}), \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

para algunas variables aleatorias τ_j y η_j con valores en $[t^n_j, t^n_{j+1}]$.

Para cada ω, las funciones

$$\begin{aligned}
(s,r) &\longrightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(s, M_r)(\omega) \quad \text{y} \\
(s,r) &\longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, M_r)(\omega),
\end{aligned}$$

son uniformemente continuas en $[0,t]\times[0,t]$ y por lo tanto $\sup_j |A^n_j(\omega)|$ y $\sup_j |B^n_j(\omega)|$ tienden a cero cuando $n\to\infty$. En consecuencia, cuando $n\to\infty$,

$$\sum_j A^n_j(\omega)(t_{j+1} - t_j) \to 0.$$

Además, por el teorema 2.13,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_j (M_{t_{j+1}} - M_{t_j})^2 = \langle M\rangle_t \quad \text{en probabilidad.}$$

Y entonces

$$\lim_{n\to\infty}\sum_j B^n_j(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})^2 = 0.$$

Por la continuidad de $s \to \dfrac{\partial f}{\partial t}(s, M_s)(\omega)$, cuando $n\to\infty$,

$$\sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_j, M_{t_j})\right)(t_{j+1} - t_j) + \sum_j A^n_j(\omega)(t_{j+1} - t_j) \quad\longrightarrow\quad \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, M_s)ds$$

Por otro lado,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_j \frac{\partial f}{\partial x}(t_j, M_{t_j})(M_{t_{j+1}} - M_{t_j}) \quad = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, M_s)dMs \quad \text{en} \quad L^2.$$

Además, como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_j, M_{t_j})$ es continua y por el lema 3.17, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_j, M_{t_j})(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})^2 \quad = \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, M_s)d\langle M\rangle_s \text{ en probabilidad.}$$

Luego la expresión en el lado derecho de (4.3) converge en probabilidad hacia el lado derecho de (4.2) y por lo tanto (4.2) se cumple c.s.

$\square$

El siguiente resultado nos permite caracterizar si un proceso estocástico $X(t)$ definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con filtración $\{\mathcal{F}_t;\, t \geq 0\}$ es un movimiento browniano con repecto a P.

Teorema 4.2 (Caracterización de Lévy del movimiento browniano) *Sea* $X(t)$ *que satisface las siguientes condiciones:*

L1) $P(X_0 = 0) = 1$;

L2) El proceso X_t es una $\mathcal{F}_t$-martingala continua cuadrado integrable.

L3) La variación cuadrática de X_t es dada por $\langle X\rangle_t = t$.

Entonces el proceso estocástico X_t es un $\mathcal{F}_t$-movimiento browniano.

Prueba. Comprobemos que X_t satisface las condiciones de la definición 1.19.

- Las trayectorias del proceso X_t comienzan en cero c.s. debido a la suposición $L1$). Además el proceso X_t dado es continuo, por lo tanto las trayectorias son continuas.

- Ahora probaremos que el proceso X_t tiene incrementos estacionarios. Empezamos aplicando la fórmula de *Itô* al proceso X_t, sea $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo y la función $f(t,x) = e^{i\lambda x + \frac{1}{2}\lambda^2 t}$, $\langle X\rangle_t = t$ por la condición $L3$).

$$f(t, X_t) - f(0, X_0) \quad = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)d_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)d\langle X\rangle_s.$$

obteniendo,

$$f(t,X_t) = e^{i\lambda X_t + \frac{1}{2}\lambda^2 t} = 1 + i\lambda \int_0^t e^{i\lambda X_s + \frac{1}{2}\lambda^2 s}\, dX_s.$$

Esto muestra que $f(t,X_t) = e^{i\lambda X_t + \frac{1}{2}\lambda^2 t}$ es una martingala. Entonces

$$E[f(t,X_t)|\mathcal{F}_s] = f(s,X_s) \quad \text{para} \quad 0 \leq s < t.$$

De esta forma $E[e^{i\lambda X_t + \frac{1}{2}\lambda^2 t}|\,\mathcal{F}_s] = e^{i\lambda X_s + \frac{1}{2}\lambda^2 s}$ o en forma equivalente $E[e^{i\lambda(X_t - X_s)}|\,\mathcal{F}_s] = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)}$. Al tomar esperanza en ambos lados conseguimos

$$\Psi_{X_t - X_s}(\lambda) = E[e^{i\lambda(X_t - X_s)}] = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)},$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Esta igualdad muestra que $X_t - X_s$, con $0 \leq s < t$ tiene distribución normal con media cero y varianza $t - s$.

- Probaremos ahora que el proceso tiene incrementos independientes. Procederemos por inducción matemática, observamos que $E[e^{i\lambda(X_t - X_s)}|\,\mathcal{F}_s] = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)}$ podemos reescribirlo como

$$E[e^{i\lambda X_t}|\,\mathcal{F}_s] = e^{i\lambda X_s} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)} \quad \text{para } s < t.$$

En particular para $t_1 < t_2$ tenemos que

$$E[e^{i\lambda X_{t_2}}\,|\mathcal{F}_{t_1}] = e^{i\lambda X_{t_1}}\, e^{-\frac{1}{2}\lambda^2(t_2 - t_1)} \tag{4.6}$$

Sea $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ y para cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\begin{aligned} &i\lambda_1 X_{t_1} + i\lambda_2(X_{t_2} - X_{t_1}) + \ldots + i\lambda_{n-1}(X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}}) + i\lambda_n(X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \\ &\quad = i(\lambda_1 - \lambda_2)X_{t_1} + i(\lambda_2 - \lambda_3)X_{t_2} + \ldots + i(\lambda_{n-1} - \lambda_n)X_{t_{n-1}} + i\lambda_n X_{t_n}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Ahora para cualesquiera $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$ y haciendo uso de (4.6) y (4.7) podemos probar que

$$E\Big[e^{i\lambda_1 X_{t_1} + i\lambda_2(X_{t_2} - X_{t_1}) + \ldots + i\lambda_n(X_{t_n} - X_{t_{n-1}})}\Big]$$

$$\begin{aligned}
&= E\Big[e^{i(\lambda_1-\lambda_2)X_{t_1} + i(\lambda_2-\lambda_3)X_{t_2} + \ldots + i(\lambda_{n-1}-\lambda_n)X_{t_{n-1}} + i\lambda_n X_{t_n}}\Big] \\
&= E\Big[E\Big[e^{i(\lambda_1-\lambda_2)X_{t_1} + i(\lambda_2-\lambda_3)X_{t_2} + \ldots + i(\lambda_{n-1}-\lambda_n)X_{t_{n-1}} + i\lambda_n X_{t_n}}\ |\mathcal{F}_{t_{n-1}}\Big]\Big] \\
&= E\Big[e^{i(\lambda_1-\lambda_2)X_{t_1} + i(\lambda_2-\lambda_3)X_{t_2} + \ldots + i(\lambda_{n-1}-\lambda_n)X_{t_{n-1}}} E\Big[e^{i\lambda_n X_{t_n}}\ |\mathcal{F}_{t_{n-1}}\Big]\Big] \\
&= E\Big[e^{i(\lambda_1-\lambda_2)X_{t_1} + i(\lambda_2-\lambda_3)X_{t_2} + \ldots + i(\lambda_{n-1}-\lambda_n)X_{t_{n-1}}} e^{i\lambda_n X_{t_{n-1}}} e^{-\frac{1}{2}\lambda_n^2(t_n - t_{n-1})}\Big] \\
&= E\Big[e^{i(\lambda_1-\lambda_2)X_{t_1} + i(\lambda_2-\lambda_3)X_{t_2} + \ldots + i\lambda_{n-1}X_{t_{n-1}}}\Big] e^{-\frac{1}{2}\lambda_n^2(t_n - t_{n-1})},
\end{aligned}$$

repetiendo el mismo argumento inductivamente obtenemos

$$E\left[e^{i\lambda_1 X_{t_1}+i\lambda_2(X_{t_2}-X_{t_1})+\ldots+i\lambda_n(X_{t_n}-X_{t_{n-1}})}\right] = e^{-\frac{1}{2}\lambda_1^2 t_1} e^{-\frac{1}{2}\lambda_2^2(t_2-t_1)} \ldots e^{-\frac{1}{2}\lambda_n^2(t_n-t_{n-1})},$$

para todo $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$. Esta última igualdad implica que

$$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \quad \text{son independientes.}$$

Queda así completa la prueba. $\square$

Capítulo 5

Tiempo local y la fórmula de Tanaka

En este capítulo B y W son movimientos brownianos unidimensionales. Para cada $x \in \mathbb{R}$ obtendremos una descomposición conocida como la fórmula de Tanaka, de la submartingala positiva $|B - x|$ como la suma de otro movimiento browniano $\hat{B}$ y un proceso creciente continuo $L(\cdot, x)$. Este último es conocido como el tiempo local de B en x.

En esta parte del trabajo exponemos una conexión entre la fórmula de Itô y el tiempo local para un movimiento browniano unidimensional. Una y posiblemente la más útil línea de estudio proviene del deseo de ampliar el alcance de la fórmula de Itô.

Nosotros estudiaremos una fórmula análoga a la de Itô para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) = |t - x|$ (que no es diferenciable) y pueda ser usada para generalizar esta. Ella es conocida como la fórmula de Tanaka. Mostraremos luego, usando este resultado, una caracterización del tiempo local como el supremo de otro movimiento browniano.

5.1. Tiempo local

El concepto y construcción de tiempo local en el contexto del movimiento browniano en $\mathbb{R}$ es debido a P. Lévy y juega un rol importante en diversos desarrollos de la teoría del movimiento browniano. Lévy definió el tiempo local del movimiento browniano en el punto x como el límite

$$\begin{aligned} L(t,x) &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\epsilon}\int_0^t 1_{(x-\epsilon,x+\epsilon)}(B_s)ds \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\epsilon}\lambda\{s\in[0,t]; B_s\in(x-\epsilon,x+\epsilon)\}, \end{aligned}$$

donde λ es la medida de Lebesgue. La idea básica es que $L(t,x)$ es una medición del tiempo que las trayectorias B_s del proceso B permanecen en una vecindad de x hasta el instante t. La primera prueba de existencia de L es gracias a H.F.Trotter ([13]).

5.2. Fórmula de Tanaka

Para cada $x\in\mathbb{R}$, sea la función f_x definida por $f_x(y)=(y-x)^+$ que no es diferenciable, por lo tanto no podemos aplicar la fórmula de Itô. Así nuestro objetivo es estudiar una fórmula análoga a la fórmula de Itô para la función f_x. La idea a seguir será la de aproximar la función f_x con una sucesión de funciones suaves $\{f_n\}_{n\geq 1}$ tal que $f_n\to f_x$, aplicar la fórmula de Itô a cada f_n y hacer tender al límite. Esta idea la formalizamos con el siguiente resultado.

Teorema 5.1 *Para cada $t\in[0,\infty)$ y $x\in\mathbb{R}$, existe el siguiente límite*

$$L(t,x) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\epsilon}\int_0^t 1_{(x-\epsilon,x+\epsilon)}(B_s)ds \quad \text{en } L^2(P). \tag{5.1}$$

Además, se cumple que

$$(B_t-x)^+-(B_0-x)^+ = \int_0^t 1_{[x,\infty)}(B_s)dBs+\frac{1}{2}L(t,x) \quad c.s. \tag{5.2}$$

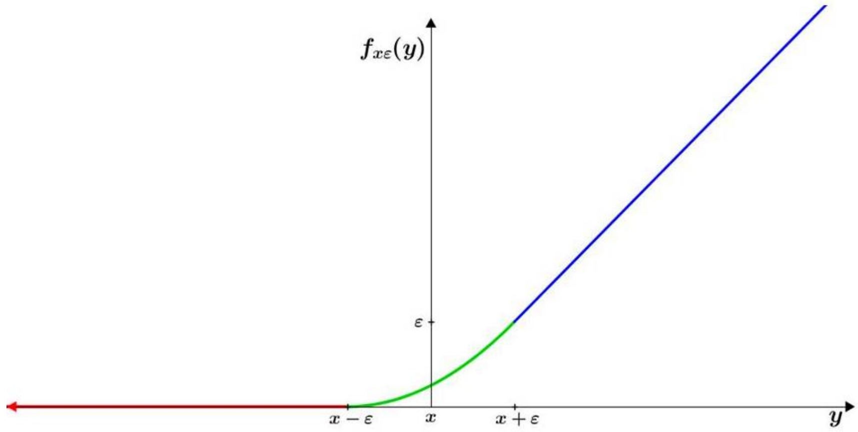
Prueba. Para cada $x\in\mathbb{R}$, definimos la función

$$\begin{aligned} f_x:\mathbb{R} &\longrightarrow [0,\infty) \\ y &\longmapsto f_x(y)=(y-x)^+. \end{aligned}$$

Aproximamos f_x con la función $f_{x,\epsilon}$, con $\epsilon>0$, definida como sigue :

$$f_{x,\epsilon}(y)=\begin{cases} 0, & \text{si } y\leq x-\epsilon; \\ \dfrac{(y-x+\epsilon)^2}{4\,\epsilon}, & \text{si } x-\epsilon\leq y\leq x+\epsilon; \\ y-x, & \text{si } y\geq x+\epsilon. \end{cases} \tag{5.3}$$

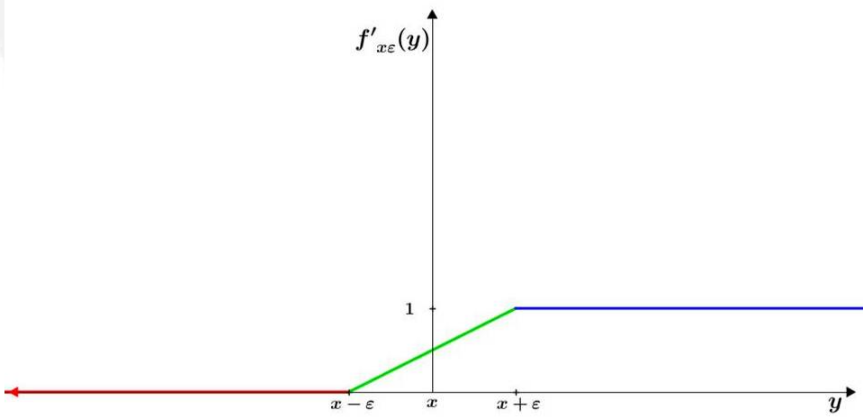
Figura 5.1: Gráfica de la función



Derivando $f_{x,\epsilon}$ obtenemos

$$f'_{x,\epsilon}(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } \; y \leq x - \epsilon; \\ \dfrac{(y - x + \epsilon)}{2\,\epsilon}, & \text{si } \; x - \epsilon \leq y \leq x + \epsilon; \\ 1, & \text{si } \; y \geq x + \epsilon, \end{cases} \tag{5.4}$$

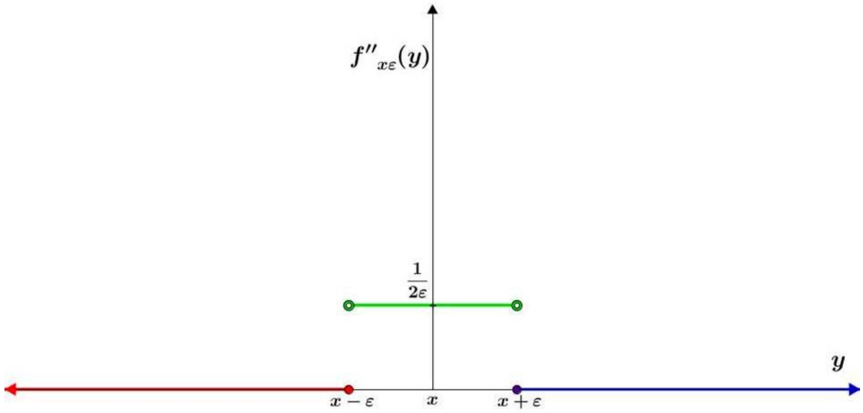
Figura 5.2: Gráfica de la primera derivada de la función.



$$f''_{x,\epsilon}(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } \; y < x - \epsilon; \\ \dfrac{1}{2\,\epsilon}, & \text{si } \; x - \epsilon < y < x + \epsilon; \\ 0, & \text{si } \; y > x + \epsilon. \end{cases} \tag{5.5}$$

Notemos que $f_{x,\epsilon}$ no es de clase C^2 ya que $f''_{x,\epsilon}$ no está definido en $x + \epsilon$ y en $x - \epsilon$.

Figura 5.3: Gráfica de la segunda derivada de la función.



Sea Φ de clase C^∞, definida por

$$\Phi(y) = \begin{cases} c\, e^{\left[\frac{-1}{(1-y^2)}\right]}, & \text{si } \ |y| < 1; \\ 0, & \text{si } \ |y| \geq 1; \end{cases}$$

donde c es tal que $c \int_{-1}^{1} \Phi(y) dy = 1$.

Para cada $n \geq 1$, definamos la función Φ_n por

$$\Phi_n(y) = n\Phi(ny).$$

Notemos que la sucesión de funciones $\Phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son de clase C^∞ con soporte compacto en $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$.

Para cada $n \geq 1$, sea $g_n = \Phi_n * f_{x,\epsilon}$ esto es ,

$$g_n(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{x,\epsilon}(y - z)\Phi_n(z)dz. \tag{5.6}$$

Entonces

i) $g_n \in C^\infty$.

ii) $g_n \to f_{x,\epsilon}$ uniformemente en $\mathbb{R}$.

iii) $g_n' \to f_{x,\epsilon}'$ uniformemente en $\mathbb{R}$.

iv) $g_n'' \to f_{x,\epsilon}''$ converge puntualmente excepto en $x + \epsilon,\ x - \epsilon$.

Para cada $t \geq 0$, aplicando la fórmula de Itô a g_n, obtenemos

$$g_n(B_t) - g_n(B_0) = \int_0^t g_n'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t g_n''(B_s)ds \ \text{ c.s.} \tag{5.7}$$

Para cada $t \geq 0, (s,\omega) \in [0,\infty) \times \Omega$, cuando $n \to \infty$,

$$1_{[0,t]}\, g_n'(B(s,\omega)) \text{ converge a } \quad 1_{[0,t]} f_{x,\epsilon}'(B(s,\omega))$$

uniformemente en $[0,\infty) \times \Omega$.

Por la propiedad de isometría

$$\int_0^t g_n'(B_s)dB_s \text{ converge a } \int_0^t f_{x,\epsilon}'(B_s)dB_s \text{ en } L^2(P).$$

Por otra parte, puesto que $P(B_s = x+\epsilon) = 0,\ P(B_s = x-\epsilon) = 0$ para cada $s \geq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} g_n''(B_s) = f_{x,\epsilon}''(B_s) \ \text{ c.s. para cada s} \geq 0 \text{ fijo.}$$

Por el teorema de Tonelli, c.s. para cada $\omega \in \Omega$ existe $A \in \mathcal{F}$ tal que:

- $P(A) = 1$.
- Para todo $\omega \in A$ se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty} g_n''(B_s) = f_{x,\epsilon}''(B_s)\ \lambda - \text{c.s. para s} \in [0,\infty).$$

Sea $\omega \in A$, dado que $|g_n''(y)| \leq \dfrac{1}{2\epsilon}$ para todo y, se sigue por el teorema de convergencia acotada que $\int_0^t g_n''(B_s(\omega))ds$ converge a $\int_0^t f_{x,\epsilon}''(B_s(\omega))ds$. En particular, $\int_0^t g_n''(B_s)ds$ converge a $\int_0^t f_{x,\epsilon}''(B_s)ds$ c.s.

Además, como $\left|\int_0^t g_n''(B_s)ds\right| \leq \int_0^t |g_n''(B_s)|ds \leq \dfrac{t}{2\epsilon}$ en $L^2(P)$.

Así, haciendo $n \to \infty$ en la ecuación (5.7), obtenemos para cada x y t,

$$\begin{aligned} f_{x,\epsilon}(B_t) - f_{x,\epsilon}(B_0) &= \int_0^t f_{x,\epsilon}'(B_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t f_{x,\epsilon}''(B_s)ds \\ &= \int_0^t f_{x,\epsilon}'(B_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{2\epsilon} 1_{(x-\epsilon,x+\epsilon)}(B_s)ds \text{ c.s.} \end{aligned} \tag{5.8}$$

Cuando $\epsilon \to 0$,

$$f_{x,\epsilon}(B_t) - f_{x,\epsilon}(B_0) \ \text{ converge a } (B_t - x)^+ - (B_0 - x)^+ \quad \text{c. s.}$$

Puesto que

$$|f_{x,\epsilon}(B_t) - f_{x,\epsilon}(B_0)| \leq |B_t - B_0|.$$

Y por el teorema de convergencia dominada,

$$f_{x,\epsilon}(B_t) - f_{x,\epsilon}(B_0) \ \text{ converge a } (B_t - x)^+ - (B_0 - x)^+ \text{ en } \quad L^2(P). \tag{5.9}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
E\Big|\int_0^t f'_{x,\epsilon}(B_s)dB_s - \int_0^t 1_{[x,\infty)}(B_s)dB_s\Big|^2 &= E\Big[\int_0^t \big[f'_{x,\epsilon}(B_s) - 1_{[x,\infty)}(B_s)\big]^2 ds\Big] \\
&\leq E\Big[\int_0^t 1_{(x-\epsilon,x+\epsilon)}(B_s)ds\Big] \\
&= \int_0^t E\big[1_{(x-\epsilon,x+\epsilon)}(B_s)\big]ds \\
&= \int_0^t P(B_s \in (x-\epsilon, x+\epsilon))ds \\
&\leq \int_0^t \frac{2\epsilon}{\sqrt{2\pi s}}ds = c\epsilon,
\end{aligned}$$

donde c es constante. En particular, cuando $\epsilon \to 0$,

$$E\Big[\int_0^t \big[f'_{x,\epsilon}(B_s) - 1_{[x,\infty)}(B_s)\big]^2 ds\Big] \to 0$$

Por la propiedad de isometría,

$$\int_0^t f'_{x,\epsilon}(B_s)dB_s \;\text{ converge a }\; \int_0^t 1_{[x,\infty)}(B_s)dB_s \text{ en } L^2(P). \tag{5.10}$$

Así de la ecuación (5.8), cuando $\epsilon \to 0$, y de los resultados obtenidos en (5.9) y (5.10) tenemos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}
(B_t - x)^+ - (B_0 - x)^+ &= \int_0^t 1_{[x,\infty)}(B_s)dBs + \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{2\epsilon}\, 1_{(x-\epsilon,x+\epsilon)}(B_s)ds \\
&= \int_0^t 1_{[x,\infty)}(B_s)dBs + \frac{1}{2}L(t,x). \qquad (5.11)
\end{aligned}$$

Esto termina la prueba. □

Observación 5.2 *Notemos que la igualdad* (5.11) *implica implicitamente que el límite existe en* L^2.

Una consecuencia inmediata del resultado anterior es la fórmula de Tanaka la cual enunciamos a continuación.

Teorema 5.3 (Fórmula de Tanaka) *Para cada* $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}$, *tenemos*

$$|B_t - x| - |B_0 - x| = \int_0^t sgn(B_s - x)dB_s + L(t,x) \quad c.s. \tag{5.12}$$

Donde $sgn(x) = 1_{\{x>0\}} - 1_{\{x<0\}}$.

Prueba. Puesto que $-B$ es un movimiento browniano, él tiene un tiempo local en $-x$, el cual lo denotamos por $L^{-}(t,-x)$. Aplicando (5.1), a $-B$ y $-x$ en vez de B y x obtenemos que

$$\begin{aligned} L^{-}(t,-x) &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\epsilon}\int_0^t 1_{(-x-\epsilon,-x+\epsilon)}(-B_s)ds \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{-1}{2\epsilon}\int_{-x-\epsilon}^{-x+\epsilon} B_s ds = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\epsilon}\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} B_s ds = L(t,x). \end{aligned}$$

De esta forma c.s. $L^{-}(t,-x) = L(t,x)$. Utilizando (5.2) con $-B$ y $-x$, obtenemos después de algunos signos conmutados:

$$\begin{aligned} (-B_t + x)^{+} - (-B_0 + x)^{+} &= \int_0^t 1_{[-x,\infty)}(-B_s)d(-B_s) + \frac{1}{2}L^{-}(t,-x) \\ (B_t - x)^{-} - (B_0 - x)^{-} &= -\int_0^t 1_{(-\infty,x]}(B_s)dB_s + \frac{1}{2}L(t,x). \end{aligned}$$

De la adición de este útimo resultado con (5.2), obtenemos

$$|B_t - x| - |B_0 - x| = \int_0^t sgn(B_s - x)dB_s + L(t,x), \tag{5.13}$$

puesto que

$$\int_0^t 1_{\{0\}}(B_s)dB_s = 0 \quad c.s.$$

□

Finalizamos esta sección con la conexión de la fórmula de Tanaka y el teorema de descomposición de Doob-Meyer. Notemos que $B_t - x$ es una martingala y la función $h \to |h|$ es convexa, el proceso $|B_t - x|$ es una submartingala. De acuerdo al teorema de Doob-Meyer podemos descomponer $|B_t - x|$ de manera única como

$$|B_t - x| = |B_0 - x| + M_t^x + A_t^x$$

donde para cada x, el proceso M^x es una martingala continua y A^x es un proceso creciente con $M_0^x = A_0^x = 0$. Haciendo la comparación con la fórmula de Tanaka podemos hacer la identificación $M_t^x = \int_0^t sgn(B_s - x)dB_s$ y $A_t^x = L(t,x)$.

5.3. Tiempo local y movimiento browniano

En esta sección empezamos con el siguiente resultado debido a A. Skorohod, el cual es enunciado para una función continua arbitraria.

Lema 5.4 (La ecuación de Skorohod)

Sean $z \geq 0$ un número dado, $y(\cdot) = \{y(t); t \in [0,\infty)\}$ una función continua con $y(0) = 0$. Existe una única función continua $k : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ tal que cumple las siguientes condiciones

i) $x(t) = z + y(t) + k(t) \geq 0, \quad t \in [0,\infty),$

ii) $k(0) = 0, \quad k(\cdot)$ *es creciente y*

iii) $\displaystyle\int_0^\infty 1_{\{x(s)>0\}} dk(s) = 0.$

Esta función es dada por

$$k(t) = \max\left\{0, \sup_{0\leq s\leq t}\{-(z + y(s))\}\right\}, \; t \in [0,\infty). \tag{5.14}$$

Prueba.

Empezamos probando la unicidad. Supongamos que existen dos funciones continuas $k(\cdot)$ y $\hat{k}(\cdot)$ que satisfacen las condiciones $i), ii)$ y $iii)$ del lema, con

$$\begin{aligned} x(t) &= z + y(t) + k(t), \; t \in [0,\infty) \\ \hat{x}(t) &= z + y(t) + \hat{k}(t), \; t \in [0,\infty. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que existe un número $T > 0$ con $x(T) > \hat{x}(T)$.

Sea $\tau = \sup\{0 \leq t \leq T; x(t) = \hat{x}(t)\}$. Por la continuidad de $x(t)$ y $\hat{x}(t)$, $x(t) = \hat{x}(t)$ y $x(t) > \hat{x}(t) \geq 0$ para todo $t \in (\tau, T]$.

Como $(\tau, T) \subset \{x(s) > 0\}$, por la condición $iii)$, tenemos que:

$$0 = \int_0^\infty 1_{\{x(s)>0\}} dk(s) \;\; \geq \;\; \int_\tau^T 1 dk(s) \geq = k(T) - k(\tau).$$

Entonces $k(\tau) = k(T)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 0 < x(T) - \hat{x}(T) &= k(T) - \hat{k}(T) \\ &\leq k(\tau) - \hat{k}(\tau) = x(\tau) - \hat{x}(\tau), \end{aligned}$$

entonces $x(\tau) > \hat{x}(\tau)$, lo cual contradice lo afirmado anteriormente.

Se sigue que $x(T) \leq \hat{x}(T)$ para todo $T \geq 0$, así $k(t) \leq \hat{k}(t)$ para todo $t \geq 0$. De manera similar podemos concluir que $k(t) \geq \hat{k}(t)$, con lo queda probada la unicidad de $k(t)$.

Ahora, sea $k(\cdot)$ definida como en la ecuación (5.14). Es fácil ver que $k(\cdot)$ satisface las condiciones $i)$ y $ii)$ del lema.

Para verificar que satisface la condición $iii)$, es suficiente mostrar que

$$\int_0^\infty 1_{\{x(s)>\epsilon\}} dk(s) = 0 \ \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

Sea $(t_1, t_2) \subset \{s \geq 0, x(s) > \epsilon\}$ y notemos que, para $t_1 \leq s \leq t_2$

$$-(z + y(s)) = k(s) - x(s) \leq k(t_2) - \epsilon.$$

Sin embargo,

$$k(t_2) = \max\{\, k(t_1), \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} -(z + y(s)) \,\} \leq \max\{\, k(t_1),\ k(t_2) - \epsilon \}\,.$$

Lo cual muestra que $k(t_2) = k(t_1)$. $\square$

Observación 5.5 *La condición iii) del lema, nos dice que* $k(\cdot)$ *sólo puede crecer (estrictamente) en puntos del conjunto* $\{t \geq 0; x(t) = 0\}$

Recordando la fórmula de Tanaka

$$L(t,x) = |B_t - x| - |B_0 - x| - \int_0^t sgn(B_s - x) dB_s, \quad t \in [0, \infty).$$

Para $x = 0$ y $B_0 = 0$, tenemos que

$$|B_t| = \int_0^t sgn(B_s) dB_s + L(t, 0); \quad t \in [0, \infty), \tag{5.15}$$

denotemos $L^0 = L^0(B)$ el tiempo local en cero para B.
Definamos el proceso M como $M(t) = -\int_0^t sgn(B_s) dB_s$.

Lema 5.6 *El proceso* M *anteriormente definido, es un movimiento browniano.*

Prueba. Obviamente, $P(M_0 = 0) = 1$ y M es una martingala continua con repecto a P y a la filtración $\mathcal{F}_t = \sigma(M_s; s \leq t)$. (ver teorema 4.6.2 de [15]) Además

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t [sgn(B_s)]^2 ds = \int_0^t 1 ds = t, \quad t \in [0, \infty) \tag{5.16}$$

De acuerdo al teorema de caracterización de Levy, M es un $\mathcal{F}_t$-movimiento browniano estandár con repecto a la misma medida de probabilidad P. $\square$

Así podemos escribir $M = \tilde{B}$ y escribir la fórmula de Tanaka como

$$|B_t| = \tilde{B}_t + L(t,0)(B),\ t \in [0, \infty).$$

Lema 5.7 *Con probabilidad uno, para cada* ω*, se tiene que* $L(t,0)(\omega)$ *satisface las condiciones* $i), ii)$ *y* $iii)$ *del lema 5.4 con* $z = 0$ *e* $y(t) = -\tilde{B}_t(\omega)\, t \in [0,\infty)$.

Prueba. Notemos que con $Y = -\tilde{B}$, $z = 0$ y $K = L(t,0)$ se cumple

- $\tilde{B}_t + L(t,0) = |B_t| \geq 0$.
- $L(0) = 0,\ L(\cdot)$ es creciente, pues si $t > s$ entonces

$$L_t = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2\epsilon}\int_0^t 1_{\{\epsilon,\epsilon\}}(B(w))dw \quad \geq \quad \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2\epsilon}\int_0^s 1_{\{\epsilon,\epsilon\}}(B(u))du = L_s \text{ en } L^2(P).$$

- En primer lugar notemos que el conjunto $\mathcal{L}_\omega(0) = \{0 \leq t \leq \infty; B_t(\omega) = 0\}$ es cerrado, el complemento de $\mathcal{L}_\omega(0)$ es unión contable de intervalos abiertos $\bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}} I_\alpha$.

  Para probar que $\int_0^\infty 1_{\mathbb{R}-\{0\}}(B_t)dL_t(0) = 0$; c.s. es suficiente mostrar que

$$\int_{I_\alpha} dL_t(\omega) = 0 \quad \text{para cada } \alpha \in \mathbb{N}.$$

  Para cada $t > 0$,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2\epsilon}\int_0^t 1_{(\epsilon,\epsilon)}(B_s)ds = L_t \text{ en } L^2.$$

  Denotemos $A^{t,\epsilon} = \frac{1}{2\epsilon}\int_0^t 1_{(-\epsilon,\epsilon)}(B_s)ds$.

  Ahora tomemos una sucesión $\epsilon_n^0 \downarrow 0$.

  Sea $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ una numeración de $\mathbb{Q} \cap [0,\infty)$.

  Para t_1, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} A^{t_1,\epsilon_n^0} \quad = \quad L_{t_1} \text{ en } L^2.$$

  Existe una subsucesión ϵ_n^1 de $\epsilon_n^0 \downarrow 0$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} A^{t_1,\epsilon_n^1} \quad = \quad L_{t_1} \text{ c.s..}$$

  Para t_2, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} A^{t_2,\epsilon_n^1} \quad = \quad L_{t_2} \text{ en } L^2.$$

  Existe una subsucesión ϵ_n^2 de ϵ_n^1 tal que

$$\lim_{n\to\infty} A^{t_2,\epsilon_n^2} \quad = \quad L_{t_2} \text{ c.s..}$$

  Repitiendo este argumento, construímos las sucesiones $\epsilon_n^0, \epsilon_n^1, \epsilon_n^2, \epsilon_n^3, \ldots$ tal que

- ϵ_n^k es subsucesión de ϵ_n^{k-1} para todo $k \geq 1$.
- $\lim_{n\to\infty} A^{t_j,\epsilon_n^k} = L_{t_j}$ c.s. para todo $k \geq 1$ y $1 \leq j \leq k$.

Finalmente, podemos concluir que para todo $t \in \mathbb{Q} \cap [0,\infty)$,

$$\lim_{n\to\infty} A^{t,\epsilon_n^n} = L_t \text{ c.s.}$$

$\square$

Proposición 5.8

Sea B un movimiento browniano y definamos el proceso $\{M_t^B = \sup_{0\leq s\leq t} B_s\,; t \in [0,\infty)\}$. Entonces tenemos la siguiente relación

$$L(t,0)(B) \overset{\mathcal{L}}{=} M_t^B,$$

donde $\overset{\mathcal{L}}{=}$ denota que los procesos tienen la misma ley.

Prueba. En primer lugar podemos escribir la fórmula de Tanaka como

$$|B_t| = \tilde{B}_t + L(t,0)(B). \tag{5.17}$$

Ahora aplicamos el lema 5.4 al proceso $\tilde{B}$, obteniendo

$$X_t = \tilde{B}_t + K_t \quad \text{para todo } \ t \in [0,\infty), \tag{5.18}$$

donde $X \geq 0$ y K es estrictamente creciente en el conjunto $\{X_t = 0\}$. Comparando las expresiones (5.17) y (5.18) notamos que el par $(|B_t|, L^0)$ es de hecho la solución de la ecuación de Skorohod para el proceso $\tilde{B}$, así tenemos que

$$X_t = |B_t| \text{ y } \quad K_t = L(t,0)(B).$$

Además, nosotros conocemos del lema 5.4 que

$$L(t,0)(B) = \max\left\{0\,, \sup_{0\leq s\leq t}(-\tilde{B}_s)\right\}. \tag{5.19}$$

Observemos que en la ecuación (5.19) $L(t,0)(B)$ es un tiempo local para $\tilde{B}$. Dado que B y $\tilde{B}$ son movimientos brownianos tenemos

$$B \overset{\mathcal{L}}{=} \tilde{B}.$$

Usando esta propiedad y la simetría del movimiento browniano obtenemos

$$L(t,0)(B) = \text{máx}\left\{0\,,\ \sup_{0\le s\le t}(-\tilde{B}_s)\right\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \text{máx}\left\{0\,,\ \sup_{0\le s\le t}(-B_s)\right\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \text{máx}\left\{0\,,\ \sup_{0\le s\le t}(B_s)\right\}$$

En el útimo paso hemos usado el hecho $(\tilde{B}_s)_{s\le t}$ y $(B_s)_{s\le t}$ son movimientos brownianos y por lo tanto el supremo es igual en ley. De esta forma se ha probado que $L(t,0)(B) \stackrel{\mathcal{L}}{=} M_t^B$.

□

Teorema 5.9

Sean B un movimiento browniano, $M_t^B = \sup_{0\le s\le t} B_s$ y L^0 el tiempo local en cero. Entonces para el par de procesos se cumple que

$$\{\left(M_t^B - B_t, M^B\right); t\in[0,\infty)\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{\left(|B_t|, L^0(B)\right); t\in[0,\infty)\}.$$

Prueba. De la ecuación (5.19) y de la fórmula de Tanaka obtenemos en particular

$$|B_t| = \tilde{B}_t + \text{máx}\left\{0\,,\ \sup_{0\le s\le t}(-\tilde{B}_s)\right\}. \tag{5.20}$$

Ahora realicemos un cambio de notación.

Denotemos B por $\hat{B}$ y $\tilde{B}$ por $-B$.

Teniendo en cuenta que B es un movimiento browniano, tenemos

$$|\hat{B}_t| = -B_t + \text{máx}\left\{0\,,\ \sup_{0\le s\le t}(-B_s)\right\}.$$

Podemos ver esta ecuación como la ecuación de Skorohod aplicada al movimiento browniano $-B$. También tenemos que

$$\text{máx}\left\{0\,,\ \sup_{0\le s\le t}(-B_s)\right\} = \text{máx}\left\{0\,,\ \sup_{0\le s\le t}(B_s)\right\} = M_t^B,$$

así

$$|\hat{B}_t| = -B_t = M_t^B.$$

Por otro lado, $M_t^B - B_t = -B_t + M_t^B$.

Así obtenemos

$$(M_t^B - B_t, M_t^B) = \left(|\hat{B}|, M_t^B\right).$$

Del lema 5.4 y de la fórmula de Tanaka conocemos que M^B es tiempo local para $\hat{B}$ de esta forma $M_t^B = L(t,0)(\hat{B})$. Esto nos da

$$(M_t^B - B_t, M_t^B) = \left(|\hat{B}|, L^0(\hat{B})\right).$$

y, dado que B y $\hat{B}$ tiene la misma ley, hemos probado que el par de procesos dados tienen la misma ley, esto es

$$\{\left(M_t^B - B_t, M^B\right); t \in [0,\infty)\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{\left(|B_t|, L^0(B)\right); t \in [0,\infty)\}.$$

$\square$

Conclusiones

Hemos estudiado en forma prolija y exhaustiva la construcción del movimiento browniano estándar , poniendo énfasis en el rol que juegan el teorema de Consistencia de Kolmogorov y el teorema de Kolmogorov-Censot. Un interesante resultado estudiado fue la no diferenciabilidad de casi todas las trayectorias brownianas en ningún punto, propiedad importante en el presente trabajo pues tiene como implicancia el hecho de no poder usar las trayectorias brownianas como integradores en el sentido de Riemann-Stieltjes.

Hicimos un estudio de un caso especial de integración estocástica que tiene como integrando a procesos progresivamente medibles y como integradores a martingalas continuas cuadrado integrables así como varias de sus propiedades y presentar de la forma mas breve posible el concepto de integral estocástica lo que nos condujo a estudiar algunos resultados técnicos.

Otro resultado importante en el presente trabajo lo constituye la fórmula de Itô que constituye como la contraparte a la regla de la cadena del cálculo estocástico y presentamos algunas aplicaciones concretas de la fórmula de Itô. Una de ellas fue en el teorema de caracterización de Lévy del movimiento browniano que establece que un proceso cualquiera (X_t) es un $\mathcal{F}_t$-movimiento browniano si sólo si empieza en cero y (X_t) es una martingala continua cuadrado integrable con variación cuadrática de $(X)_t$ dada por $\langle X\rangle_t = t$.

En la parte final del trabajo hemos estudiado una conexión entre tiempo local y el movimiento browniano, donde hemos visto que el tiempo local en cero de un movimiento browniano no es después del todo un objeto matemático extraño ya que es el supremo de otro movimiento browniano.

Bibliografía

[1] Ash,R.B. *Real Analysis and Probabilidad.* Academic Press, New York, 1972.

[2] Ash,R.B. & Gardner M.F., *Topics in Stochastic Processes.* Academic Press, London, 1975.

[3] Athreya, K.B. & Lahiri, S.N. *Measure theory and probability theory.* Springer Science+Business, 2006.

[4] Beltrán,J. *Cadenas de Markov y Teoría de Potencial.* 28^0 Colóquio Brasileiro de Matemática, Publicaciones Matemáticas, IMPA, 2011.

[5] Billingsley, P. *Probability and Measure.* 3rd ed ,John Wiley & Sons, New York, 1995.

[6] BJÖRK, T. *The Pedestrian's Guide to Local Time.* Department of Finance, Stockholm School of Economics, 2015.

[7] Borovkov, Alexandr A. *Probability Theory.* Springer-Verlag, London, 2013.

[8] Capasso, V. & Baksteim D. *Continuous-Time Stochastic Processes:theory, models, and applications to finance,biology, and medicine.* Birkhäuser Boston, 2005.

[9] Chung, K.L. *A Course in Probability Theory.* 3rd ed, Academic Press, New York, 1974.

[10] Chung,K. & Willians R. *Introduction to Stochastic Integration.* Second Edition ,Birkhäuser Boston, 1990.

[11] Folland, G.B. *Real Analysis: Modern techniques and their applications* Second Edition ,John Wiley & Sons, New York, 1999.

[12] Gopinath Kallianpur *Stochastic Filtering Theory.* Springer-Verlag, 1980.

[13] Karatzas I. & , Shreve S. *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Second edition, Springer-Verlag, 1991.

[14] Klebaner,F.C. *Introduction to Stochastic Calculus With Applications.* Second Edition, Imperial College Press, 2005.

[15] Kuo, H.-H. *Introduction to Stochastic Integration.* Springer, 2006.

[16] Lima,E.L. *Curso de Análise.* vol. 1 ,12^a edicão Projeto Euclides, IMPA, 2007

[17] Misturini, R. *Movimento browniano, integral de Itô e introdução às equações diferenciais estocásticas.* Dissertacião de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul (2010). http://hdl.handle.net/10183/24926

[18] Morters, P. & Peres, Y. *Brownian Motion.* Cambridge University Press, New York, 2010.

[19] Resnick, S.I. *A Probability Path.* Birkhäuser Boston, 1999.

[20] Schilling R.& Partzsch L. *Brownian Motion.* Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin/Boston, 2012.

[21] Shreve,S.E. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models.* Editorial Board, 2004.

[22] Sondermann,Dieter. *Introduction to Stochastic Calculus for Finance.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

[23] Steele,J.M. *Stochastic Calculus and Financial Aplications.* Springer-Verlag New York, 2001.

[24] Tao. T. *An introduction to measure theory.* American Mathematical Soc., 2011.

[25] Valdivieso, L.H. *La integral estocástica, Fundamentos y aplicaciones en finanzas.* Tesis de licenciatura. Pontificia Universidad Católica del Perú, (1997).

[26] Yeh, J. *Martingales and stochastic analysis.* World Scientific Publishing, 1995.