



PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

Representación y Clasificación de Productos Tensoriales Torcidos

Tesis para optar el grado de Doctor en Matemática

Autor

Jack Denne Arce Flores

Asesor

Dr. Christian Holger Valqui Haase PUCP

Co-Asesor

Dr. Juan José Guccione UBA

Miembros del Jurado

Dr. Percy Fernández PUCP

Dr. Julio Alcántara PUCP

Dr. Nicolás Andruskiewitsch UNC

Lima-Perú

2017

Representación y Clasificación de Productos Tensoriales Torcidos

Jack Denne Arce Flores

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Como parte de los requisitos para obtener el grado de Doctor en Matemática.

Miembros del jurado:

Dr. Percy Fernandez (presidente)

Dr. Julio César Alcántara Bode (miembro)

Dr. Nicolas Andruskiewitsch (miembro)

Dr. Juan José Guccione (co-asesor)

Dr. Christian Holger Valqui Haase (asesor)

Lima-Perú
2017

Resumen

Esta tesis estudia la clasificación de los productos tensoriales torcidos de dos álgebras asociativas con unidad A y B , es decir, las estructuras de álgebra que puede adoptar el producto tensorial de espacios vectoriales subyacentes $A \otimes B$, compatibles con las estructuras de A y B .

En primer lugar desarrollamos la teoría básica que se encuentra dispersa en varios artículos de investigación y establecemos como primer resultado propio, la dualidad que existe entre las aplicaciones de torcimiento de un producto tensorial torcido y su álgebra opuesta. Este resultado parece haber sido conocido entre los expertos del área sin embargo no se encuentra ninguna prueba en la literatura.

Luego estudiamos el caso en que uno de los factores del producto tensorial torcido tiene dimensión finita. Por ejemplo si A tiene dimensión finita, se establece que bajo estas condiciones definir una aplicación de torcimiento de A con B es equivalente a definir un par de representaciones matriciales (ρ, ϕ) , una de B y otra de A^{op} . La primera tiene coeficientes en A y la segunda tiene coeficientes en $\text{End}_K(B)$. Además, obtenemos una representación matricial fiel del producto tensorial torcidos en $M_n(B)$. Estas representaciones constituyen el resultado principal propio en el segundo capítulo. Como aplicación describimos los productos tensoriales torcidos estudiados por Cibils, Jara et al. y Guccione et al. en términos del par de representaciones (ρ, ϕ) y deducimos las condiciones que permiten a los autores en cada uno de los casos lograr una clasificación (parcial o total).

A continuación nos enfocamos en las aplicaciones de torcimiento de K^n con K^m . Establecemos una caracterización de estas aplicaciones de torcimiento en términos de matrices con coeficientes en K , la cual se debe a que ambas álgebras son conmutativas y de dimensión finita. Tal caracterización nos permite clasificar completamente las aplicaciones de torcimiento de rango reducido 1 que en nuestro lenguaje se ve muy diferente de la clasificación alcanzada por Jara et al.. Luego desarrollamos herramientas para el estudio de dos familias de productos tensoriales torcidos: las estándar y las casi-estándar. Estas herramientas permiten estudiar la relación entre las aplicaciones de torcimiento estándar, y casi-estándar, con las álgebras de camino de Quivers, y establecen una generalización del resultado obtenido por Cibils para $n = 2$.

Para finalizar utilizamos todos de los resultados obtenidos para clasificar los productos tensoriales torcidos en el caso de dimensiones bajas, incluyendo todas las aplicaciones de torcimiento de K^3 con K^3 .

Índice general

Introducción	v
1 Preliminares	1
1.1 Productos tensoriales torcidos	1
1.2 Cálculo Gráfico	5
1.3 Propiedades generales de los productos tensoriales torcidos.	6
1.3.1 Dualidad	7
1.3.2 Restricciones	10
1.4 Ejemplos	14
1.4.1 Ejemplos de la teoría clásica	14
1.4.2 Ejemplos de la Teoría de Álgebra de Hopf	15
2 Representación de productos tensoriales torcidos	18
2.1 $B \otimes_{\chi} A$ con $\dim B < \infty$	18
2.2 Representación canónica	21
2.3 $A \otimes_{\chi} C$ con $\dim C < \infty$	28
2.4 Extensión de aplicaciones de torcimiento	29
2.5 Cambio de base	35
2.6 Ejemplos	36
2.6.1 Duplicados no-conmutativos de conjuntos finitos	36
2.6.2 Estructuras de Factorización con un factor de dimensión 2	37
2.6.3 Aplicaciones de torcimiento con K^n	38
2.6.4 Extensiones de aplicaciones de torcimiento con K^m a aplicaciones de torcimiento con K^n	40
2.6.5 Extensiones polinomiales no conmutativas truncadas	42
3 Clasificación de productos tensoriales torcidos de K^n con K^m	44
3.1 Productos tensoriales torcidos de K^n con K^m	45
3.1.1 Isomorfismo de aplicaciones de torcimiento	48
3.1.2 Representaciones en álgebras de matrices.	48
3.2 Aplicaciones de torcimiento de K^m con K^2	50
3.3 Resultados Misceláneos	53
3.3.1 Propiedades generales.	53
3.3.2 Matrices-0, 1 idempotentes estándar.	54
3.3.3 Matrices idempotentes de rango 1	55
3.3.4 Columnas de 1's en Γ_{χ}	55

3.4	Columnas estándar y casi-estándar	58
3.5	Rango reducido 1.	74
3.6	Quiver asociado a aplicaciones de torcimiento estándar y casi-estándar	77
3.6.1	Caracterización de los productos tensoriales torcidos estándar	77
3.6.2	Construcción iterativa de los productos tensoriales torcidos casi-estándar	79
3.6.3	Radical de Jacobson de un producto tensorial torcido casi-estándar	82
3.7	Clasificación en dimensiones bajas.	83
3.7.1	Aplicaciones de torcimiento de K^2 con K^2	84
3.7.2	Aplicaciones de torcimiento de K^3 con K^2	85
3.7.3	Aplicaciones de torcimiento de K^3 con K^3	87
	Apéndice A: Producto Vectorial	103
	Apéndice B: Aplicaciones de torcimiento casi-estándar de K^3 con K^3	105
	Bibliografía	112



Introducción

El estudio de los productos tensoriales torcidos de dos álgebras asociativas con unidad, corresponde al estudio de las estructuras de álgebra definidas en $A \otimes_K B$ compatibles con las estructuras de A y B . Para ser más precisos, si A y B son dos K -álgebras asociativas con unidad, donde K es un anillo conmutativo, un producto tensorial torcido de A con B es una estructura de álgebra definida en $A \otimes_K B$, con unidad $1 \otimes 1$, tal que las aplicaciones canónicas $i_A: A \rightarrow A \otimes_K B$ y $i_B: B \rightarrow A \otimes_K B$ son morfismos de K -álgebras y satisfacen $a \otimes b = i_A(a)i_B(b)$. Esta estructura fue introducida independientemente en [25] y [16], y se ha estudiado formalmente por muchas personas con diferentes motivaciones (además de las referencias anteriores véase también [4], [5], [7], [6], [31], [20], [26], [22], [18]).

Por un lado, una serie de construcciones clásicas y recientemente construidas encajan en esta construcción. Por ejemplo, las extensiones de Ore, las álgebras de grupo torcidas, los productos smash, etcetera (para las definiciones y propiedades de estas estructuras referimos a [27] y [23]). Y por último, pero no menos importante, los productos tensores torcidos surgen como una herramienta para la construcción de las álgebras a partir de otras más simples. Por otro lado, en geometría algebraica clásica, el anillo de coordenadas $\mathcal{O}(M \times N)$, de la variedad producto $M \times N$, se factoriza como el producto tensorial $\mathcal{O}(M) \otimes \mathcal{O}(N)$ de los correspondientes anillos coordenados de las variedades factores. Por lo tanto, el producto tensorial puede considerarse como el objeto algebraico que corresponde a un producto cartesiano a nivel geométrico. Sin embargo, desde una perspectiva no conmutativa esta construcción tiene un impedimento: al tomar productos tensoriales estamos introduciendo cierta conmutatividad "artificial". Esto es, si consideramos los elementos de A , vistos dentro de $A \otimes B$ mediante la inclusión $a \mapsto a \otimes 1$, conmutan automáticamente con los elementos de B . Si bien esto tiene perfecto sentido a nivel clásico, no tenemos ninguna razón para imponer dicha restricción dentro de un marco de no conmutatividad.

Reemplazando el producto tensorial clásico $A \otimes B$ por un producto tensorial torcido $A \otimes_\chi B$, podemos liberarnos de esta conmutatividad, y sin embargo mantener en gran medida un comportamiento análogo al que debería tener el producto geométrico, en particular preservando la estructura algebraica original de cada uno de los factores. Este hecho fue, a grandes rasgos, lo que inspiró el desarrollo de la geometría trezada por parte de Shahn Majid y otros a principios de los 90, aunque ellos emplearon categorías monoidales trezadas en vez de productos tensoriales torcidos. Mediante el reemplazo de los productos tensoriales por sus análogos torcidos, se consigue un nuevo candidato, auténticamente no conmutativo, para ser la versión algebraica de un producto cartesiano no conmutativo. Por supuesto, este mayor grado de generalidad no puede obtenerse sin renunciar a algo a cambio. En nuestro caso, la generalidad se obtiene a expensas de la unicidad, ya que observamos que para un par de álgebras A y B dadas, por lo general existen muchos productos tensoriales torcidos $A \otimes_\chi B$ no isomorfos. Por ejemplo, en [10, Corollary 4.2] se demostró que la determinación de todos los productos tensoriales torcidos de A con $k[X]/\langle X^5 \rangle$ que están

determinados por la fórmula

$$(1 \otimes X)(a \otimes 1) = a \otimes X + \gamma_1^2(a) \otimes X^2 + \gamma_1^3(a) \otimes X^3 + \gamma_1^4(a) \otimes X^4,$$

donde $\gamma_1^j: A \rightarrow A$ ($j = 2, 3, 4$) son aplicaciones k -lineales, es equivalente a hallar todos los pares (δ_1, δ_2) de derivaciones de A , tales que $[\delta_1] \cup [\delta_2] = 0$, donde $[\delta_i]$ es la clase de δ_i en el grupo de cohomología $H^1(A)$ y \cup denota el producto cup. A pesar de estas dificultades, este problema fue considerado para diferentes tipos de álgebras en [8], [10], [12] y [14].

El primer artículo en atacar de manera sistemática el problema básico de determinar todos los productos tensoriales de A con B fue [8], donde C. Cibils estudia y resuelve por completo el caso $A = K^m$ y $B := K \times K$. Luego, en [12], se analiza el caso $B := K^n$ y se obtienen resultados de clasificación parcial.

En el primer capítulo de la tesis aprovechamos que los productos tensoriales torcidos de A con B están en correspondencia biunívoca con las aplicaciones lineales $\chi: B \otimes A \rightarrow A \otimes B$ que verifiquen las siguientes condiciones:

- (1) $\chi(1 \otimes a) = a \otimes 1$, para todo $a \in A$,
- (2) $\chi \circ (B \otimes \mu_A) = (\mu_A \otimes B) \circ (A \otimes \chi) \circ (\chi \otimes A)$,
- (3) $\chi(b \otimes 1) = 1 \otimes b$, para todo $b \in B$,
- (4) $\chi \circ (\mu_B \otimes A) = (A \otimes \mu_B) \circ (\chi \otimes B) \circ (B \otimes \chi)$.

que son equivalentes a requerir que la aplicación $\mu_\chi := (\mu_A \otimes \mu_C) \circ (A \otimes \chi \otimes C)$ sea un producto asociativo en $A \otimes B$. En este caso, se dice que la aplicación χ es una aplicación de torcimiento de A con B . A lo largo de la presente tesis, consideraremos únicamente a la aplicación de torcimiento χ como nuestro principal objeto de estudio con vistas a describir y clasificar en algunos casos los productos tensoriales torcidos. De esta manera, el primer resultado de la tesis corresponde a la dualidad que existe entre las aplicaciones de torcimiento de A con B y las aplicaciones de torcimiento de B^{op} con A^{op} . Este resultado parece a ver sido conocido entre los expertos del area sin embargo no se encuentra ninguna prueba en la literatura.

El segundo capítulo de la tesis corresponde al desarrollo de los resultados obtenidos en [1]. Aquí se estudian los productos tensoriales torcidos cuando uno de los factores es de dimensión finita y se establece que cada aplicación de torcimiento se encuentra en correspondencia biunívoca, salvo cambios de base, con un par de representaciones matriciales, una de A y otra de B^{op} . La primera tiene coeficientes en A y la segunda tiene coeficientes en $\text{End}_K(A)$. Además se establece una representación matricial fiel con coeficientes en A del producto tensorial torcido $A \otimes_\chi B$.

En particular, cuando K es un cuerpo y las álgebras involucradas son de dimensión finita sobre K , como en [8], [10], [12] y [14], dado un producto tensorial torcido C de A con B y fijada una base $\{b_1, \dots, b_n\}$, existen aplicaciones $\gamma_i^j: A \rightarrow A$, satisfaciendo ciertas condiciones que varían en cada caso, tales que

$$\chi(a \otimes b_i) = \sum_{j=1}^n b_j \otimes \gamma_i^j(a), \quad \text{para todo } a \in A \text{ y todo } i.$$

En la Proposición 2.2.5 y en el Corolario 2.2.2 mostramos que estas condiciones son satisfechas si y solo si las aplicaciones $\hat{\rho}_\chi$ y $\hat{\phi}_\chi$, introducidas en estos resultados, son representaciones matriciales con coeficientes en $\text{End}_K(A)$ y A , respectivamente. Los primeros pasos en el estudio de los productos tensoriales torcidos considerados en [8], [10], [12] y [14] fueron determinar las

condiciones que requieren las aplicaciones γ_i^j por cálculos directos. Usando que $\hat{\rho}_\chi$ y $\hat{\phi}_\chi$ deben ser representaciones, surgen estas condiciones de forma natural en cada uno de los ejemplos, como se muestra en la Sección 2.6.

El tercer capítulo de la tesis corresponde al desarrollo de los resultados obtenidos en el artículo [2]. Aquí consideramos $A = K^m$ y $B = K^n$. Entonces cada aplicación de torcimiento $\chi: K^n \otimes K^m \rightarrow K^m \otimes K^n$ determina y es determinada por escalares únicos λ_{ij}^{kl} , tales que

$$\chi(e_i \otimes f_j) = \sum_{k,l} \lambda_{ij}^{kl} f_k \otimes e_l \quad \text{para todo } e_i \text{ y } f_j.$$

Dada una aplicación χ , para todo $i, l \in \mathbb{N}_m^*$ y $j, k \in \mathbb{N}_n^*$, denotemos por $A(i, l) \in M_n(K)$ y $B(j, k) \in M_m(K)$ las matrices definidas por

$$A(i, l)_{kj} := \lambda_{ij}^{kl} =: B(j, k)_{li}.$$

En la Proposición 3.1.4 mostramos que χ es una aplicación de torcimiento si y solo si estas matrices satisfacen ciertas condiciones (fácilmente verificables). Esto transforma el problema de hallar todas las aplicaciones de torcimiento en un problema de álgebra lineal. Cuando se intenta hallar todas las aplicaciones de torcimiento de K^3 con K^3 usando este abordaje del álgebra lineal, se encuentra que casi todos los casos de aplicaciones de torcimiento tienen una forma muy especial. Llamaremos a estas aplicaciones de torcimiento estándar y demostraremos que los productos tensoriales torcidos correspondientes resultan isomorfas a ciertas álgebras de quiver truncadas con radical de cuadrado cero. Además, existen aplicaciones de torcimiento de un segundo tipo, las cuales llamamos aplicaciones de torcimiento casi-estándar. Estas producen álgebras que corresponden a deformaciones formales del caso estándar. Estas deformaciones existen, siempre que el quiver correspondiente tenga un triángulo que no es un ciclo. Además, podemos construir una tercera familia de aplicaciones de torcimiento cuando $n = m$, y mostramos que el álgebra resultante es isomorfa a $M_n(K)$.

Estas tres familias cubren casi todas las aplicaciones de torcimiento de K^3 con K^3 . Encontramos, además, algunas extensiones de las álgebras correspondientes a la tercera familia en el caso de K^2 con K^2 , y un caso adicional, completando la clasificación de productos torcidos de K^3 con K^3 .

La tesis está organizada como sigue: en el Capítulo 1 desarrollamos la teoría básica de los productos tensoriales torcidos: en la Sección 1.1 revisamos la noción de producto tensorial torcido de álgebras asociativas con unidad. En la Sección 1.3 analizamos la dualidad que existe con los productos tensoriales torcidos del álgebra opuesta (Proposición 1.3.3) y también vemos cuándo y como se puede restringir una aplicación de torcimiento a una subálgebra (Proposición 1.3.4). En la Sección 1.4 analizamos algunos ejemplos de aplicaciones de torcimiento que aparecen en distintas áreas de la matemática.

En el Capítulo 2 estudiamos los productos tensoriales torcidos, uno de cuyos factores es de dimensión finita. Es decir, si χ es una aplicación de torcimiento de B con A , en este capítulo consideramos que B tiene dimensión finita como espacio vectorial. En la Sección 2.1 presentamos en detalle como se expresa la aplicación de torcimiento χ cuando B es un álgebra de dimensión finita. En la Sección 2.2 presentamos una definición alternativa para el producto tensorial torcido con un factor de dimensión finita en términos de dos representaciones matriciales de álgebras, una de A y otra de B^{op} . La primera tendrá coeficientes en A y la segunda coeficientes en $\text{End}_K(A)$. Además, esto permite establecer una presentación matricial fiel con coeficientes en A del producto tensorial torcido $B \otimes_\chi A$. Cuando A es de dimensión finita en lugar de B , se tiene una situación simétrica, que es presentada en la Sección 2.3. En la Sección 2.4 extendemos aplicaciones de torcimiento a producto de álgebras. En la Sección 2.6 presentamos los productos tensoriales

torcidos estudiados en [8], [12], [10] en términos de las representaciones $\hat{\rho}_\chi$ y $\hat{\phi}_\chi$ y deducimos las condiciones que permiten a los autores en cada uno de los casos lograr una clasificación (parcial o total).

El Capítulo 3 está organizado como sigue: en la Sección 3.1 presentamos la caracterización en términos de matrices de las aplicaciones de torcimiento de K^n con K^m y algunos resultados básicos, especialmente sobre isomorfismos de aplicaciones de torcimiento y una representación básica sobre $M_n(K)$. En la Sección 3.2 presentamos una demostración de los resultados de [8] en nuestro lenguaje. En la Sección 3.3 demostramos algunos resultados básicos sobre matrices idempotentes $A(i, l)$, y prestamos atención especial al caso $\text{rk} = 1$, donde surge una familia de álgebras isomorfas a $M_n(K)$. En la Sección 3.4 definimos las columnas y aplicaciones de torcimiento estándar y casi-estándar y demostramos algunos resultados sobre ellas. En la Sección 3.5 clasificamos completamente el caso de rango reducido 1. En la Sección 3.6 exploramos las relaciones entre las aplicaciones de torcimiento estándar y las álgebras de caminos de Quivers, y también el caso de aplicaciones de torcimiento casi-estándar. En la Sección 3.7 usamos todos los resultados para clasificar las aplicaciones de torcimiento en el caso de dimensiones bajas, incluyendo todas las aplicaciones de torcimiento que no son casi-estándar en el caso K^3 con K^3 . En el apéndice proveemos una lista de todas las aplicaciones de torcimiento estándar y casi-estándar de K^3 con K^3 .



Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo hacemos un repaso de las nociones necesarias para leer esta tesis. En la primera sección revisamos la noción de producto tensorial torcido de álgebras asociativas con unidad. En la segunda sección presentamos dos resultados propios, la Proposición 1.3.3 y la Proposición 1.3.4, la primera corresponde a la dualidad de aplicaciones de torcimiento y la segunda a las extensiones de las aplicaciones de torcimiento, ambas necesarias para el desarrollo de la tesis, mientras que en la tercera sección presentamos algunos ejemplos en distintas áreas de la matemática donde aparecen los productos tensoriales torcidos.

En esta tesis se trabaja en la categoría de módulos sobre un anillo conmutativo arbitrario K . Para cada par de K -módulos V y W , $V \otimes W$ denota a $V \otimes_K W$.

1.1 Productos tensoriales torcidos

En esta sección A y C son álgebras unitarias. Salvo indicación de lo contrario consideraremos a $A \otimes C$ como un (A, C) -bimódulo vía las *acciones regulares* $a(a' \otimes c) := aa' \otimes c$ y $(a \otimes c) \cdot c' := a \otimes cc'$.

La siguiente definición de producto tensorial torcido de álgebras unitarias fue introducida en [6], [4], [16], [18].

Definición 1.1.1. *Un producto tensorial torcido de A con C es una estructura de álgebra asociativa con unidad en el espacio vectorial $A \otimes C$, tal que las inclusiones canónicas*

$$\begin{aligned} \iota_A: A &\rightarrow A \otimes C & e & \iota_C: C \rightarrow A \otimes C \\ a &\mapsto a \otimes 1_C & & c \mapsto 1_A \otimes c, \end{aligned}$$

son homomorfismos de álgebras, y

$$(a \otimes 1_C) \cdot (1_A \otimes c) = a \otimes c \quad \text{para todo } a \in A, \quad c \in C.$$

Observación 1.1.2. *El elemento $1 \otimes 1$ es el elemento unidad de cada producto tensorial torcido de A con C .*

Observación 1.1.3. *En términos de aplicaciones se tiene la igualdad*

$$\mu \circ (\iota_A \otimes \iota_C) = \text{id}_A \otimes \text{id}_C = \text{id}_{A \otimes C}. \tag{1.1.1}$$

Consideremos en el producto tensorial torcido $(A \otimes C, \mu)$ el producto de un elemento c de C con un elemento a de A . La formula

$$\chi := \mu \circ (\iota_C \otimes \iota_A). \quad (1.1.2)$$

define una aplicación lineal $\chi: C \otimes A \rightarrow A \otimes C$. La ecuación (1.1.1) junto con la ecuación (1.1.2) muestran que la estructura del producto tensorial torcido está determinada por el producto de los elementos de C con los elementos de A .

La siguiente proposición establece la relación que existe entre la multiplicación μ del producto tensorial torcido de A con C , las aplicaciones de multiplicación μ_A, μ_C de las álgebra A y C , respectivamente, y la aplicación χ definida en (1.1.2).

Proposición 1.1.4. *En cada producto tensorial torcido $(A \otimes C, \mu)$, vale que*

$$\mu = (\mu_A \otimes \mu_C) \circ (A \otimes \chi \otimes C). \quad (1.1.3)$$

Demostración. La prueba es directa, pues solo apela a la estructura de (A, C) -bimódulo del producto tensorial torcido y el empleo adecuado de las aplicaciones μ_A, μ_C y los homomorfismos de álgebras ι_A, ι_C . Veamos a continuación la prueba en detalle.

Un cálculo directo muestra que μ es un morfismo de (A, C) -bimódulos y que

$$(A \otimes \mu_C) \circ (\iota_A \otimes C) = \text{id}_{A \otimes C} \quad \text{y} \quad (\mu_A \otimes C) \circ (A \otimes \iota_C) = \text{id}_{A \otimes C}.$$

Por otro lado, μ es un morfismo de (A, C) -bimódulos si y solo si

$$\mu \circ (\mu_A \otimes C \otimes A \otimes \mu_C) = (\mu_A \otimes \mu_C) \circ (A \otimes \mu \otimes C).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} (\mu_A \otimes \mu_C) \circ (A \otimes \chi \otimes C) &= (\mu_A \otimes \mu_C) \circ (A \otimes \mu \otimes C) \circ (A \otimes \iota_C \otimes \iota_A \otimes C) \\ &= \mu \circ (\mu_A \otimes C \otimes A \otimes \mu_C) \circ (A \otimes \iota_C \otimes \iota_A \otimes C) \\ &= \mu \circ ((\mu_A \otimes C) \circ (A \otimes \iota_C)) \otimes ((A \otimes \mu_C) \circ (\iota_A \otimes C)) \\ &= \mu \circ (\text{id}_{A \otimes C} \otimes \text{id}_{A \otimes C}) = \mu. \end{aligned}$$

□

La ecuación (1.1.3) permite deducir algunas de las propiedades que debe satisfacer una aplicación lineal χ cualquiera para determinar un producto tensorial torcido.

Proposición 1.1.5. *Sea $(A \otimes C, \mu)$ un producto tensorial torcido. La aplicación lineal*

$$\chi: C \otimes A \rightarrow A \otimes C,$$

definida por $\chi := \mu \circ (\iota_C \otimes \iota_A)$, satisface las siguientes propiedades:

- (1) $\chi(1 \otimes a) = a \otimes 1$, para todo $a \in A$,
- (2) $\chi \circ (C \otimes \mu_A) = (\mu_A \otimes C) \circ (A \otimes \chi) \circ (\chi \otimes A)$,
- (3) $\chi(c \otimes 1) = 1 \otimes c$, para todo $c \in C$,
- (4) $\chi \circ (\mu_C \otimes A) = (A \otimes \mu_C) \circ (\chi \otimes C) \circ (C \otimes \chi)$.

Demostración. En efecto, tomemos $a, a' \in A$ y $c, c' \in C$. Veamos primero que χ satisface el ítem (1).

$$\chi \circ \iota_A(a) = \chi(1_C \otimes a) = \mu \circ (\iota_C(1_C)\iota_A(a)) = \mu((1 \otimes 1) \otimes (a \otimes 1)) = a \otimes 1.$$

Análogamente, se verifica que χ satisface el ítem (3).

Mostremos que se satisface el ítem (2). En efecto,

$$\begin{aligned} \chi \circ (C \otimes \mu_A) &= \mu \circ (\iota_C \otimes \iota_A) \circ (C \otimes \mu_A) = \mu \circ (\iota_C \otimes (\iota_A \circ \mu_A)) \\ &= \mu \circ (((A \otimes C) \circ \iota_C) \otimes (\mu \circ (\iota_A \otimes \iota_A))) \\ &= \mu \circ ((A \otimes C) \otimes \mu) \circ (\iota_C \otimes \iota_A \otimes \iota_A) \\ &= \mu \circ (\mu \otimes (A \otimes C)) \circ (\iota_C \otimes \iota_A \otimes \iota_A) \\ &= \mu \circ (\chi \otimes \iota_A) \\ &= \mu \circ ((A \otimes C) \otimes \iota_A) \circ (\chi \otimes A) \\ &= \mu \circ (((\mu_A \otimes C) \circ (A \otimes \iota_C)) \otimes ((A \otimes C) \circ \iota_A)) \circ (\chi \otimes A) \\ &= \mu \circ (\mu_A \otimes C \otimes A \otimes C) \circ (A \otimes \iota_C \otimes \iota_A) \otimes (\chi \otimes A) \\ &= (\mu_A \otimes C) \circ (A \otimes \mu) \circ (A \otimes \iota_C \otimes \iota_A) \circ (\chi \otimes A) \\ &= (\mu_A \otimes C) \circ (A \otimes \chi) \circ (\chi \otimes A), \end{aligned}$$

como queríamos. La prueba de que χ satisface la propiedad (4) es similar. \square

La siguiente proposición muestra que es suficiente considerar una aplicación $\chi: C \otimes A \rightarrow A \otimes C$ que satisfaga las condiciones de la Proposición 1.1.5 para construir un producto tensorial torcido de A con C .

Proposición 1.1.6. *Sean A y C dos álgebras asociativas con unidad, y $\chi: C \otimes A \rightarrow A \otimes C$ una aplicación lineal que satisface las siguientes condiciones*

- (1) $\chi(1 \otimes a) = a \otimes 1$, para todo $a \in A$,
- (2) $\chi \circ (C \otimes \mu_A) = (\mu_A \otimes C) \circ (A \otimes \chi) \circ (\chi \otimes A)$,
- (3) $\chi(c \otimes 1) = 1 \otimes c$, para todo $c \in C$,
- (4) $\chi \circ (\mu_C \otimes A) = (A \otimes \mu_C) \circ (\chi \otimes C) \circ (C \otimes \chi)$.

La aplicación $\mu := (\mu_A \otimes \mu_C) \circ (A \otimes \chi \otimes C)$ define un producto tensorial torcido en $A \otimes C$.

Demostración. Sea $\chi: C \otimes A \rightarrow A \otimes C$ una aplicación lineal que satisface las condiciones (1) – (4). La aplicación μ es un producto asociativo de $A \otimes C$ si y solo si se satisface la siguiente igualdad

$$\mu \circ (\mu \otimes (A \otimes C)) = \mu \circ ((A \otimes C) \otimes \mu).$$

Estableceremos esta igualdad mostrando que ambos lados son iguales a

$$(\mu_A \otimes \mu_C) \circ (A \otimes \mu_A \otimes \mu_C \otimes C) \circ (A \otimes A \otimes \chi \otimes C \otimes C) \circ (A \otimes \chi \otimes \chi \otimes C).$$

Por un lado tenemos

$$\mu \circ (\mu \otimes (A \otimes C)) = (\mu_A \otimes \mu_C) \circ (A \otimes \chi \otimes C) \circ (((\mu_A \otimes \mu_C) \circ (A \otimes \chi \otimes C)) \otimes A \otimes C)$$

$$\begin{aligned}
&= (\mu_A \otimes \mu_C) \circ (A \otimes \chi \otimes C) \circ (\mu_A \otimes \mu_C \otimes A \otimes C) \circ (A \otimes \chi \otimes C \otimes A \otimes C) \\
&= (\mu_A \otimes \mu_C) \circ (\mu_A \otimes \chi \circ (\mu_C \otimes A) \otimes C) \circ (A \otimes \chi \otimes C \otimes A \otimes C).
\end{aligned}$$

La condición (4) que satisface la aplicación χ nos permite escribir esta última igualdad como sigue:

$$\begin{aligned}
&(\mu_A \otimes \mu_C) \circ (\mu_A \otimes ((A \otimes \mu_C) \circ (\chi \otimes C) \circ (C \otimes \chi)) \otimes C) \circ (A \otimes \chi \otimes C \otimes A \otimes C) \\
&= (\mu_A \otimes \mu_C) \circ (\mu_A \otimes A \otimes \mu_C \otimes C) \circ (A^{\otimes 2} \otimes ((\chi \otimes C) \circ (C \otimes \chi)) \otimes C) \circ (A \otimes \chi \otimes C \otimes A \otimes C).
\end{aligned}$$

Por otro lado, por la asociatividad de μ_A

$$\begin{aligned}
(\mu_A \otimes \mu_C) \circ (\mu_A \otimes A \otimes \mu_C \otimes C) &= [\mu_A \circ (\mu_A \otimes A)] \otimes [\mu_C \circ (\mu_C \otimes C)] \\
&= [\mu_A \circ (A \otimes \mu_A)] \otimes [\mu_C \circ (\mu_C \otimes C)] \\
&= (\mu_A \otimes \mu_C) \circ (A \otimes \mu_A \otimes \mu_C \otimes C).
\end{aligned}$$

Finalmente, se tiene que

$$\begin{aligned}
(A^{\otimes 2} \otimes C \otimes \chi \otimes C) \circ (A \otimes \chi \otimes C \otimes A \otimes C) &= ((A^{\otimes 2} \otimes C) \circ (A \otimes \chi)) \otimes ((\chi \otimes C) \circ (C \otimes A \otimes C)) \\
&= A \circ \chi \otimes \chi \otimes C.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mu \circ (\mu \otimes (A \otimes C)) = (\mu_A \otimes \mu_C) \circ (A \otimes \mu_A \otimes \mu_C \otimes C) \circ (A \otimes A \otimes \chi \otimes C \otimes C) \circ (A \otimes \chi \otimes \chi \otimes C).$$

De manera completamente similar, empleando la asociatividad de la aplicación μ_C y la condición (2) que satisface la aplicación χ se obtiene que

$$\mu \circ ((A \otimes C) \otimes \mu) = (\mu_A \otimes \mu_C) \circ (A \otimes \mu_A \otimes \mu_C \otimes C) \circ (A \otimes A \otimes \chi \otimes C \otimes C) \circ (A \otimes \chi \otimes \chi \otimes C).$$

Para terminar, notemos que el elemento $1 \otimes 1$ es la unidad de la multiplicación y que las condiciones (1) y (3) que satisface la aplicación χ implican que las inclusiones ι_A y ι_C son homomorfismos de álgebras. \square

Las Proposiciones 1.1.5 y 1.1.6, muestran que para construir un producto tensorial torcido de A con C es suficiente elegir una aplicación lineal $\chi: C \otimes A \rightarrow A \otimes C$ que satisfaga las condiciones (1)-(4) de la Proposición 1.1.6.

Definición 1.1.7. Una aplicación lineal $\chi: C \otimes A \rightarrow A \otimes C$ es llamada aplicación de torcimiento de C con A si satisface las siguientes condiciones:

- (1) $\chi(1 \otimes a) = a \otimes 1$, para todo $a \in A$,
- (2) $\chi \circ (C \otimes \mu_A) = (\mu_A \otimes C) \circ (A \otimes \chi) \circ (\chi \otimes A)$.
- (3) $\chi(c \otimes 1) = 1 \otimes c$, para todo $c \in C$,
- (4) $\chi \circ (\mu_C \otimes A) = (A \otimes \mu_C) \circ (\chi \otimes C) \circ (C \otimes \chi)$,

La Definición 1.1.7, nos permite reescribir las Proposiciones 1.1.5 y 1.1.6 de manera conjunta en el siguiente resultado.

Proposición 1.1.8. Sean A y C dos álgebras asociativas con unidad, y $\chi: C \otimes A \rightarrow A \otimes C$ una aplicación lineal. Entonces la aplicación χ es una aplicación de torcimiento si y solo si la aplicación $\mu_\chi := (\mu_A \otimes \mu_C) \circ (A \otimes \chi \otimes C)$ define un producto tensorial torcido $(A \otimes C, \mu_\chi)$.

Observación 1.1.9 (Propiedad Universal). *El producto tensorial torcido $A \otimes_{\chi} C$ tiene la siguiente propiedad universal: Sean $f: A \rightarrow B$, $g: C \rightarrow B$ dos homomorfismos de álgebras tales que $g \otimes f = (f \otimes g) \circ \chi: C \otimes A \rightarrow B$. Entonces existe un único homomorfismo de álgebras $F: A \otimes_{\chi} C \rightarrow B$ tal que $F \circ \iota_A = f$ y $F \circ \iota_C = g$. En efecto, basta definir $F(a \otimes c) = f(a)g(c)$*

Observación 1.1.10. *Sean A y C dos álgebras asociativas con unidad, entonces la aplicación flip*

$$\begin{aligned} \tau: C \otimes A &\rightarrow A \otimes C \\ c \otimes a &\mapsto a \otimes c, \end{aligned}$$

satisface de manera trivial las condiciones (1) – (4) de la Definición 1.1.7 para ser una aplicación de torcimiento. El producto tensorial torcido inducido por esta aplicación de torcimiento es el producto tensorial clásico de álgebras A con C .

Definición 1.1.11. *Sean $\chi: C \otimes A \rightarrow A \otimes C$ y $\chi': C' \otimes A' \rightarrow A' \otimes C'$ dos aplicaciones de torcimiento. Un morfismo $F_{gh}: \chi \rightarrow \chi'$, de χ a χ' , es un par (g, h) de homomorfismos de álgebras $g: C \rightarrow C'$ y $h: A \rightarrow A'$ tales que $\chi' \circ (g \otimes h) = (h \otimes g) \circ \chi$.*

Observación 1.1.12. *Sean χ y χ' como en la Definición 1.1.11. Si $F_{gh}: \chi \rightarrow \chi'$ es un morfismo de aplicaciones de torcimiento, entonces la aplicación $h \otimes g: A \otimes_{\chi} C \rightarrow A' \otimes_{\chi'} C'$ es un homomorfismo de álgebras.*

Observación 1.1.13. *Sean $h: A \rightarrow A'$ y $g: C \rightarrow C'$ dos isomorfismos de álgebras. Si*

$$\chi': C' \otimes A' \rightarrow A' \otimes C',$$

es una aplicación de torcimiento, entonces $\chi := (h^{-1} \otimes g^{-1}) \circ \chi' \circ (g \otimes h)$ también lo es. Más aún $F_{gh}: \chi \rightarrow \chi'$ es un isomorfismo.

1.2 Cálculo Gráfico

Algunas de las pruebas de esta sección utilizan el conocido cálculo gráfico para categorías monoidales y trenzadas. Como es usual los morfismos serán compuestos de arriba hacia abajo y los productos tensoriales serán representados mediante la concatenación horizontal en el orden correspondiente. La aplicación identidad de un espacio vectorial será representada por una línea vertical. Dada un álgebra A , el siguiente diagrama



representa a la multiplicación. La aplicación χ será representada por el diagrama



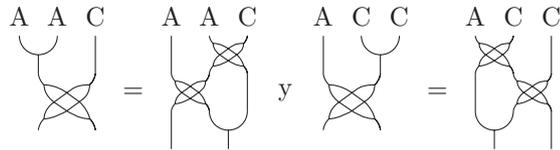
La aplicación flip τ será representada por el diagrama



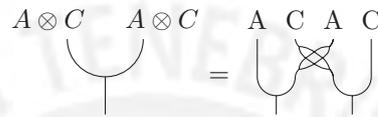
Finalmente, una aplicación arbitraria $g: A \rightarrow B$ será representada por



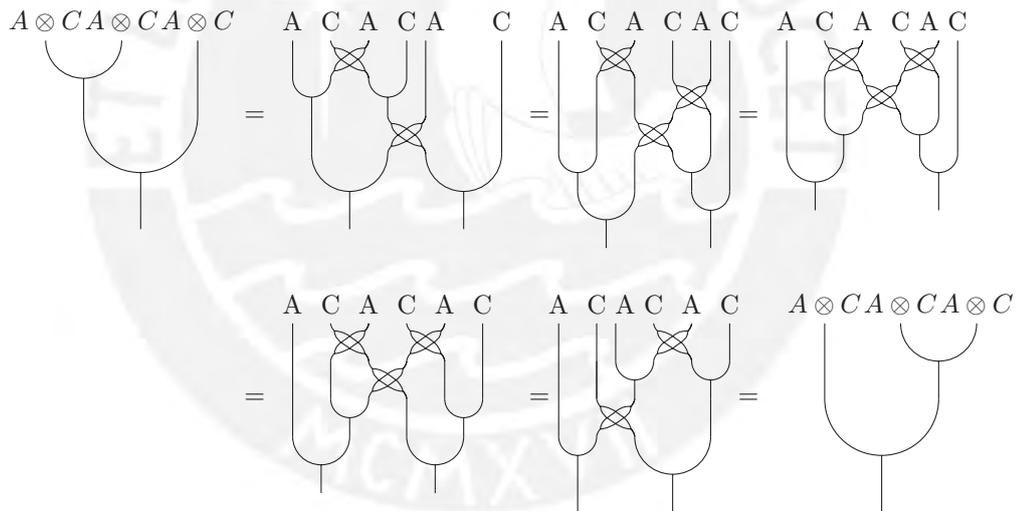
Por ejemplo las condiciones (2) – (4) de la Proposición 1.1.6 se pueden escribir en términos de equivalencia de diagramas como se muestra a continuación



La aplicación $\mu := (\mu_A \otimes \mu_C) \circ (A \otimes \chi \otimes C)$ definida en la Proposición 1.1.6 se puede representar por el siguiente diagrama



De esta manera, podemos presentar parte de la prueba de la Proposición 1.1.6, la concerniente a la asociatividad de la aplicación $\mu := (\mu_A \otimes \mu_C) \circ (A \otimes \chi \otimes C)$, empleando el cálculo gráfico.



1.3 Propiedades generales de los productos tensoriales torcidos

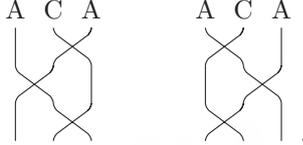
En esta sección presentamos dos propiedades importantes de los productos tensoriales torcidos que serán empleadas, a lo largo de esta tesis, para una mejor comprensión de los mismos. La primera propiedad establece una correspondencia biunívoca entre las aplicaciones de torcimiento de A con C y las aplicaciones de torcimiento de C^{op} con A^{op} . La segunda propiedad establece cuándo la *proyección* de una aplicación de torcimiento χ de un producto directo $B \times C$ de álgebras con A puede definir una aplicación de torcimiento de B con A .

1.3.1 Dualidad

Las aplicaciones flip son aplicaciones de torcimiento bastante simples, lo cual permite obtener de manera elemental propiedades, gráficamente sencillas, como la siguiente

$$(A \otimes \tau_{AC}) \circ (\tau_A \otimes C) \circ (A \otimes \tau_{CA}) = (\tau_{CA} \otimes A) \circ (C \otimes \tau_A) \circ (\tau_{AC} \otimes A),$$

que en términos de diagramas se escribe en la forma



El siguiente lema presenta algunas de las propiedades gráficamente sencillas que utilizaremos en la prueba del resultado principal de esta sección.

Lema 1.3.1. Sean A y C dos álgebras asociativas con unidad, entonces las aplicaciones τ_{AC} , τ_{CA} , τ_A y τ_C satisfacen las siguientes condiciones

$$(A \otimes \tau_{AC}) \circ (\tau_A \otimes C) \circ (A \otimes \tau_{CA}) = (\tau_{CA} \otimes A) \circ (C \otimes \tau_A) \circ (\tau_{AC} \otimes A), \quad (1.3.4)$$

$$(\tau_{AC} \otimes A) \circ (A \otimes \tau_{AC}) \circ (\tau_A \otimes C) = (C \otimes \tau_A) \circ (\tau_{AC} \otimes A) \circ (A \otimes \tau_{AC}), \quad (1.3.5)$$

$$(C \otimes \tau_{AC}) \circ (\tau_{AC} \otimes C) \circ (A \otimes \tau_C) = (\tau_C \otimes A) \circ (C \otimes \tau_{AC}) \circ (\tau_{AC} \otimes C), \quad (1.3.6)$$

$$(\tau_{AC} \otimes C) \circ (A \otimes \tau_C) \circ (\tau_{CA} \otimes C) = (C \otimes \tau_{CA}) \circ (\tau_C \otimes A) \circ (C \otimes \tau_{AC}). \quad (1.3.7)$$

Demostración. La prueba de estos resultados es directa y solo presentaremos una de ellas. Sean $a, a' \in A$ y $c \in C$ entonces

$$\begin{aligned} (A \otimes \tau_{AC}) \circ (\tau_A \otimes C) \circ (A \otimes \tau_{CA})(a \otimes c \otimes a') &= (A \otimes \tau_{AC}) \circ (\tau_A \otimes C)(a \otimes \tau_{CA}(c \otimes a')) \\ &= (A \otimes \tau_{AC}) \circ (\tau_A \otimes C)(a \otimes a' \otimes c) \\ &= (A \otimes \tau_{AC})(a' \otimes a \otimes c) \\ &= (a' \otimes c \otimes a) \\ &= (\tau_{CA} \otimes A)(c \otimes a' \otimes a) \\ &= (\tau_{CA} \otimes A) \circ (C \otimes \tau_A)(c \otimes a \otimes a') \\ &= (\tau_{CA} \otimes A) \circ (C \otimes \tau_A)(\tau_{AC}(a \otimes c) \otimes a') \\ &= (\tau_{CA} \otimes A) \circ (C \otimes \tau_A) \circ (\tau_{AC} \otimes A)(a \otimes c \otimes a'). \end{aligned}$$

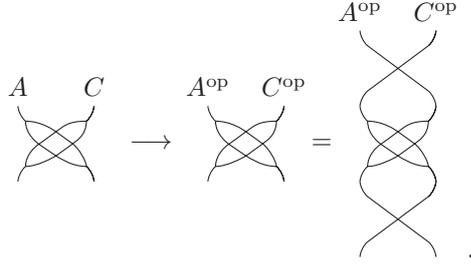
En consecuencia se tiene que la primera igualdad es satisfecha. \square

La correspondencia biunívoca que existe entre el conjunto de aplicaciones de torcimiento de A con C y el conjunto de aplicaciones de torcimiento de C^{op} con A^{op} viene dada por la siguiente flecha

$$\begin{aligned} \{\chi \mid \chi: C \otimes A \rightarrow A \otimes C, \text{ torcimiento}\} &\longleftrightarrow \{\tilde{\chi} \mid \tilde{\chi}: A^{\text{op}} \otimes C^{\text{op}} \rightarrow C^{\text{op}} \otimes A^{\text{op}}, \text{ torcimiento}\} \\ \chi &\longleftrightarrow \tilde{\chi} := \tau \circ \chi \circ \tau, \end{aligned}$$

donde τ es el flip.

En términos de diagramas esta correspondencia se expresa como sigue



Sea χ una aplicación de torcimiento de C con A . Como vimos en la Definición 1.1.7, la aplicación χ debe satisfacer las siguientes condiciones

$$\chi \circ (\mu_C \otimes A) = (A \otimes \mu_C) \circ (\chi \otimes C) \circ (C \otimes \chi), \quad (1.3.8)$$

$$\chi \circ (C \otimes \mu_A) = (\mu_A \otimes C) \circ (A \otimes \chi) \circ (\chi \otimes A). \quad (1.3.9)$$

Lema 1.3.2. Si $\chi: C \otimes A \rightarrow A \otimes C$ es una aplicación de torcimiento de C con A , entonces

$$(\chi \otimes A) \circ (C \otimes \tau_A) \circ (\tau_{AC} \otimes A) = (A \otimes \tau_{AC}) \circ (\tau_A \otimes C) \circ (A \otimes \chi), \quad (1.3.10)$$

$$(A \otimes \chi) \circ (\tau_{CA} \otimes A) \circ (C \otimes \tau_A) = (\tau_A \otimes C) \circ (A \otimes \tau_{CA}) \circ (\chi \otimes A), \quad (1.3.11)$$

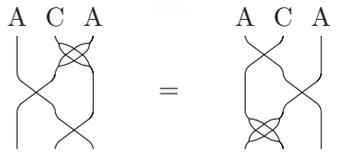
$$(\chi \otimes C) \circ (C \otimes \tau_{CA}) \circ (\tau_C \otimes A) = (A \otimes \tau_C) \circ (\tau_{CA} \otimes C) \circ (C \otimes \chi), \quad (1.3.12)$$

$$(C \otimes \chi) \circ (\tau_C \otimes A) \circ (C \otimes \tau_{AC}) = (\tau_{AC} \otimes C) \circ (A \otimes \tau_C) \circ (\chi \otimes C). \quad (1.3.13)$$

Demostración. La prueba de estos resultados es directa y solo presentaremos una de ellas. Sean $a, a' \in A$ y $c \in C$ y escribamos $\chi(c \otimes a) = \sum a_{(1)} \otimes c_{(1)} \in A \otimes C$, entonces

$$\begin{aligned} (\chi \otimes A) \circ (C \otimes \tau_A) \circ (\tau_{AC} \otimes A) (a' \otimes c \otimes a) &= (\chi \otimes A) \circ (C \otimes \tau_A) (c \otimes a' \otimes a) \\ &= (\chi \otimes A) (c \otimes a \otimes a') \\ &= \sum a_{(1)} \otimes c_{(1)} \otimes a' \\ &= \sum (A \otimes \tau_{AC}) (a_{(1)} \otimes a' \otimes c_{(1)}) \\ &= \sum (A \otimes \tau_{AC}) \circ (\tau_A \otimes C) (a' \otimes a_{(1)} \otimes c_{(1)}) \\ &= (A \otimes \tau_{AC}) \circ (\tau_A \otimes C) \left(a' \otimes \sum a_{(1)} \otimes c_{(1)} \right) \\ &= (A \otimes \tau_{AC}) \circ (\tau_A \otimes C) \circ (A \otimes \chi) (a' \otimes c \otimes a). \end{aligned}$$

La ecuación (1.3.10) se expresa diagramáticamente en la forma



□

Proposición 1.3.3. Sean A y C dos álgebras asociativas con unidad. Si una aplicación lineal $\chi: C \otimes A \rightarrow A \otimes C$ es de torcimiento, entonces la aplicación lineal $\tilde{\chi}: A^{\text{op}} \otimes C^{\text{op}} \rightarrow C^{\text{op}} \otimes A^{\text{op}}$ definida por $\tilde{\chi} := \tau \circ \chi \circ \tau$ también es una aplicación de torcimiento.

Demostración. Probaremos primero que la aplicación lineal $\tilde{\chi}$ satisface las condiciones (1) y (3) de la Definición 1.1.7. En efecto, sean $a \in A$ y $c \in C$, entonces se tiene

$$\tilde{\chi}(a \otimes 1) = \tau \circ \chi(1 \otimes a) = \tau(a \otimes 1) = 1 \otimes a,$$

lo cual corresponde a la condición (1) de la Definición 1.1.7, y

$$\tilde{\chi}(1 \otimes c) = \tau \circ \chi(c \otimes 1) = \tau(1 \otimes c) = c \otimes 1,$$

lo cual corresponde a la condición (3) de la Definición 1.1.7.

Las condiciones (2) y (4) de la Definición 1.1.7 para la aplicación $\tilde{\chi}$ se escriben como sigue:

$$(2) \tilde{\chi} \circ (\mu_{A^{\text{op}}} \otimes C^{\text{op}}) = (C^{\text{op}} \otimes \mu_{A^{\text{op}}}) \circ (\tilde{\chi} \otimes A^{\text{op}}) \circ (A^{\text{op}} \otimes \tilde{\chi}),$$

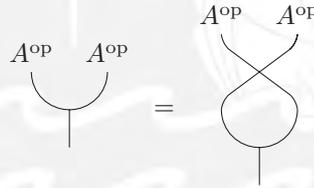
$$(4) \chi \circ (A^{\text{op}} \otimes \mu_{C^{\text{op}}}) = (\mu_{C^{\text{op}}} \otimes A^{\text{op}}) \circ (C^{\text{op}} \otimes \tilde{\chi}) \circ (\tilde{\chi} \otimes C^{\text{op}}),$$

y necesitan de un tratamiento diferente al empleado en la prueba de las condiciones (1) y (3).

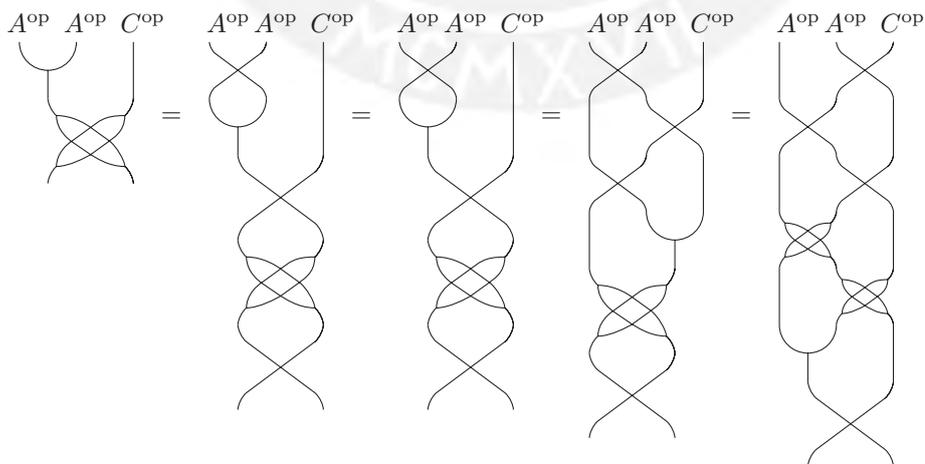
Antes de iniciar con la prueba de la condición (2), debemos recordar que la aplicación de multiplicación de A^{op} viene dada por

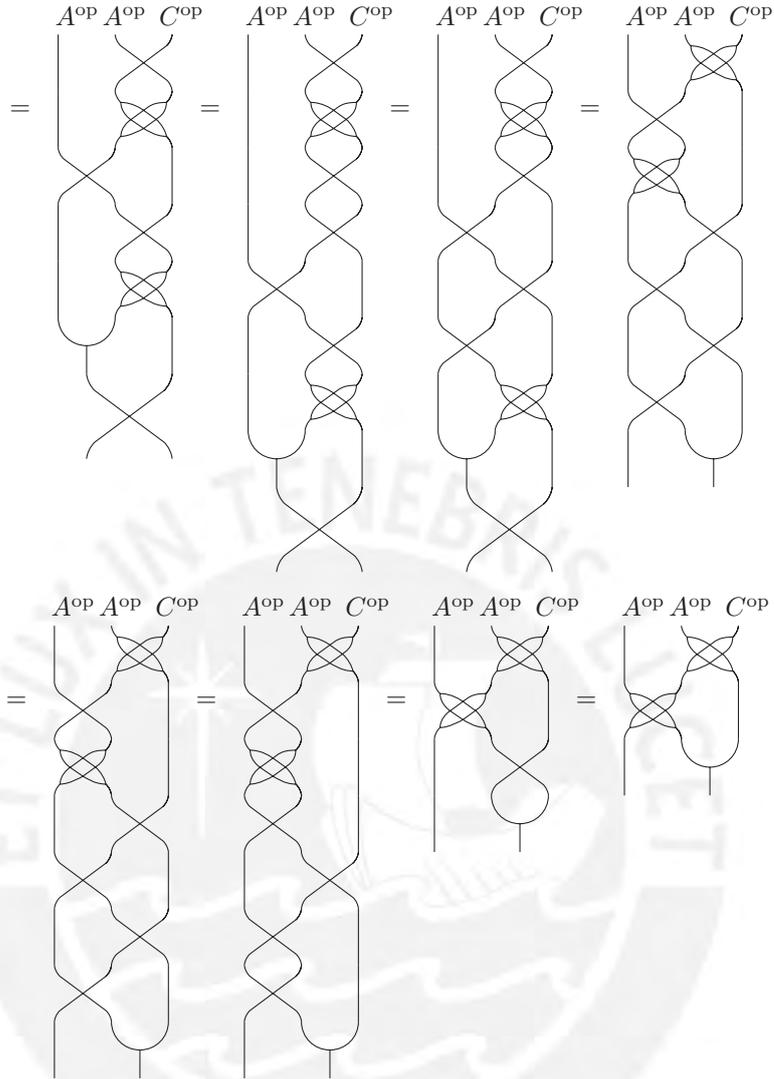
$$\mu_{A^{\text{op}}} = \mu_A \circ \tau_A \tag{1.3.14}$$

es decir, los siguientes diagramas son iguales



Ahora utilizaremos el cálculo gráfico para dar una prueba de que la aplicación $\tilde{\chi}$ satisface la condición (2) de la Proposición 1.1.5.





Finalmente, la prueba de la condición (4) es completamente similar a la de la condición (2). \square

1.3.2 Restricciones

En esta sección estudiamos las aplicaciones de torcimiento χ de $B \times C$ con A que originan aplicaciones de torcimiento de B con A y de C con A , las cuales recibirán el nombre de *proyecciones* de χ .

Proposición 1.3.4. *Sea $\chi: (B \times C) \otimes A \rightarrow A \otimes (B \times C)$ una aplicación de torcimiento. Denotemos por $\iota_B, \iota_C, p_B, p_C$ las inclusiones y proyecciones canónicas. La aplicación $\chi_B: B \otimes A \rightarrow A \otimes B$, definida por*

$$\chi_B := (A \otimes p_B) \circ \chi \circ (\iota_B \otimes A),$$

es una aplicación de torcimiento si y solo si $(A \otimes p_B) \circ \chi \circ (\iota_C \otimes A) = 0$. Más aún, en este caso F_{p_B, id_A} es un morfismo de aplicaciones de torcimiento de χ a χ_B . Diremos que $p_B(\chi) := \chi_B$ es la aplicación de torcimiento de B con A inducida por χ y que χ es una extensión de χ_B .

Corolario 1.3.5. Sea $\chi: (B \times C) \otimes A \rightarrow A \otimes (B \times C)$ una aplicación de torcimiento. Denotemos por $\iota_B, \iota_C, p_B, p_C$ las inclusiones y proyecciones evidentes. La aplicación $\chi_C: C \otimes A \rightarrow A \otimes C$, definida por

$$\chi_C := (A \otimes p_C) \circ \chi \circ (\iota_C \otimes A),$$

es una aplicación de torcimiento si y solo si $(A \otimes p_C) \circ \chi \circ (\iota_B \otimes A) = 0$. Más aún, en este caso F_{p_B, id_A} es un morfismo de aplicaciones de torcimiento de χ a χ_C . Diremos que $p_C(\chi) := \chi_C$ es la aplicación de torcimiento de C con A inducida por χ y que χ es una extensión de χ_C .

Prueba de la Proposición 1.3.4. Debido a que χ es una aplicación de torcimiento

$$\begin{aligned} \chi((1_B, 0) \otimes a) &= \chi((1_B, 1_C) \otimes a) - \chi((0, 1_C) \otimes a) \\ &= a \otimes (1_B, 1_C) - \chi((0, 1_C) \otimes a) \\ &= a \otimes (1_B, 0) + a \otimes (0, 1_C) - \chi((0, 1_C) \otimes a). \end{aligned}$$

Pero si χ_B es una aplicación de torcimiento, entonces

$$\chi((1_B, 0) \otimes a) = a \otimes (1_B, 0),$$

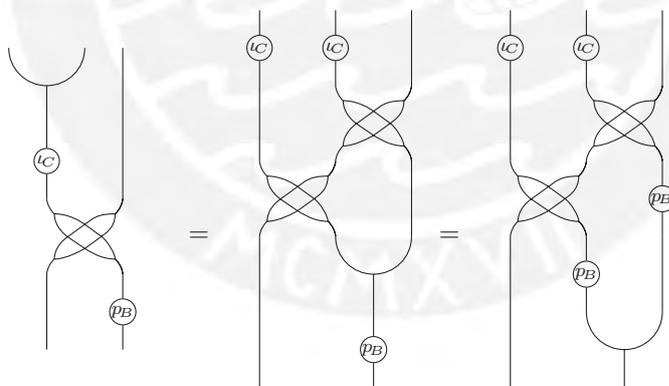
por lo tanto,

$$\chi((0, 1_C) \otimes a) = a \otimes (0, 1_C) \quad \text{y} \quad (A \otimes p_B) \circ \chi((0, 1_C) \otimes a) = 0.$$

Es decir,

$$(A \otimes p_B) \circ \chi \circ (\iota_C \otimes A) (1_C \otimes a) = 0.$$

Por otro lado, la condición (4) de la Proposición 1.1.6 implica



$$(A \otimes p_B) \circ \chi \circ (\iota_C \otimes A) \circ (\mu_C \otimes A) = (A \otimes \mu_B) \circ (A \otimes p_B \otimes B) \circ (\chi \otimes B) \circ (\iota_C \otimes ((A \otimes p_B) \circ \chi \circ (\iota_C \otimes A)))$$

Evaluando en $c \otimes 1_C \otimes a$ para todo $c \in C$ y $a \in A$, concluimos que

$$(A \otimes p_B) \circ \chi \circ (\iota_C \otimes A) = 0.$$

Recíprocamente, supongamos que la aplicación χ es una aplicación de torcimiento que satisface la igualdad $(A \otimes p_B) \circ \chi \circ (\iota_C \otimes A) = 0$. Veamos que χ_B es una aplicación de torcimiento de B

con A .

Veamos primero que la aplicación χ_B satisface la condición (1) de la Definición 1.1.7

$$\begin{aligned}
\chi_B(b \otimes 1_A) &= (A \otimes p_B) \circ \chi \circ (\iota_B \otimes A)(b \otimes 1_A) \\
&= ((A \otimes p_B) \circ \chi)((b, 0) \otimes 1_A) \\
&= (A \otimes p_B)(1_A \otimes (b, 0)) \\
&= 1_A \otimes b.
\end{aligned}$$

La condición (2) también es satisfecha, como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
\chi_B \circ (\mu_B \otimes A) &= (A \otimes p_B) \circ \chi \circ (\iota_B \otimes A) \circ (\mu_B \otimes A) \\
&= (A \otimes p_B) \circ \chi \circ (\iota_B \circ \mu_B \otimes A) \\
&= (A \otimes p_B) \circ \chi \circ (\mu \circ (\iota_B^{\otimes 2}) \otimes A) \\
&= (A \otimes p_B) \circ \chi \circ (\mu \otimes A) \circ (\iota_B^{\otimes 2} \otimes A) \\
&= (A \otimes p_B) \circ (A \otimes \mu) \circ (\chi \otimes (B \times C)) \circ ((B \times C) \otimes \chi) \circ (\iota_B^{\otimes 2} \otimes A) \\
&= (A \otimes (p_B \circ \mu)) \circ (\chi \otimes (B \times C)) \circ (\iota_B \otimes (\chi \circ (\iota_B \otimes A))) \\
&= (A \otimes \mu_B) \circ (A \otimes p_B^{\otimes 2}) \circ (\chi \otimes (B \times C)) \circ (\iota_B \otimes (\chi \circ (\iota_B \otimes A))) \\
&= (A \otimes \mu_B) \circ (((A \otimes p_B) \circ \chi) \otimes p_B) \circ (\iota_B \otimes (\chi \circ (\iota_B \otimes A))) \\
&= (A \otimes \mu_B) \circ (((A \otimes p_B) \circ \chi) \otimes B) \circ (\iota_B \otimes A \otimes p_B) \circ (B \otimes (\chi \circ (\iota_B \otimes A))) \\
&= (A \otimes \mu_B) \circ (\chi_B \otimes B) \circ (B \otimes \chi_B).
\end{aligned}$$

Por otro lado, las condiciones (3) y (4) de la Definición 1.1.7 son satisfechas cuando la aplicación χ satisface la hipótesis $(A \otimes p_B) \circ \chi \circ (\iota_C \otimes A) = 0$.

En efecto,

$$\begin{aligned}
\chi_B(1_B \otimes a) &= (A \otimes p_B) \circ \chi \circ (\iota_B \otimes A)(1_B \otimes a) \\
&= ((A \otimes p_B) \circ \chi)((1 - 1_C) \otimes a) \\
&= ((A \otimes p_B) \circ \chi)(1 \otimes a) - ((A \otimes p_B) \circ \chi)(1_C \otimes a) \\
&= ((A \otimes p_B) \circ \chi)(1 \otimes a) \\
&= (A \otimes p_B)(a \otimes 1) \\
&= a \otimes 1_B.
\end{aligned}$$

y finalmente verificamos la condición (4):

$$\begin{aligned}
\chi_B \circ (B \otimes \mu_A) &= (A \otimes p_B) \circ \chi \circ (\iota_B \otimes A) \circ (B \otimes \mu_A) \\
&= (A \otimes p_B) \circ \chi \circ ((B \times C) \otimes \mu_A) \circ (\iota_B \otimes A^{\otimes 2}) \\
&= (A \otimes p_B) \circ (\mu_A \otimes (B \times C)) \circ (A \otimes \chi) \circ (\chi \otimes A) \circ (\iota_B \otimes A^{\otimes 2}) \\
&= (\mu_A \otimes p_B) \circ (A \otimes \chi) \circ ((\chi \circ (\iota_B \otimes A)) \otimes A) \\
&= (\mu_A \otimes B) \circ (A \otimes ((A \otimes p_B) \circ \chi)) \circ ((\chi \circ (\iota_B \otimes A)) \otimes A) \\
&= (\mu_A \otimes B) \circ (A \otimes ((A \otimes p_B) \circ \chi)) \circ (A \otimes (B \times C) \otimes A) \\
&\quad \circ ((\chi \circ (\iota_B \otimes A)) \otimes A) \\
&= (\mu_A \otimes B) \circ (A \otimes ((A \otimes p_B) \circ \chi)) \circ (A \otimes (\iota_B \circ p_B + \iota_C \circ p_C) \otimes A) \\
&\quad \circ ((\chi \circ (\iota_B \otimes A)) \otimes A) \\
&= (\mu_A \otimes B) \circ (A \otimes ((A \otimes p_B) \circ \chi)) \circ (A \otimes \iota_B \otimes A) \\
&\quad \circ (A \otimes p_B \otimes A) \circ ((\chi \circ (\iota_B \otimes A)) \otimes A) \\
&\quad + (\mu_A \otimes B) \circ (A \otimes ((A \otimes p_B) \circ \chi)) \circ (A \otimes \iota_C \otimes A) \\
&\quad \circ (A \otimes p_C \otimes A) \circ ((\chi \circ (\iota_B \otimes A)) \otimes A) \\
&= (\mu_A \otimes B) \circ (A \otimes ((A \otimes p_B) \circ \chi)) \circ (A \otimes \iota_B \otimes A) \\
&\quad \circ (A \otimes p_B \otimes A) \circ ((\chi \circ (\iota_B \otimes A)) \otimes A) \\
&= (\mu_A \otimes B) \circ (A \otimes \chi_B) \circ (\chi_B \otimes A).
\end{aligned}$$

□

Corolario 1.3.6. Sea $\chi: A \otimes (B \times C) \longrightarrow (B \times C) \otimes A$ una aplicación de torcimiento. Denotemos por $\iota_B, \iota_C, p_B, p_C$ las inclusiones y proyecciones evidentes. La aplicación $\chi_B: A \otimes B \longrightarrow B \otimes A$, definida por

$$\chi_B := (p_B \otimes A) \circ \chi \circ (A \otimes \iota_B),$$

es una aplicación de torcimiento si y solo si $(p_C \otimes A) \circ \chi \circ (A \otimes \iota_B) = 0$. Más aún, en este caso $F_{\text{id}_A, B}$ es un morfismo de aplicaciones de torcimiento de χ a χ_B . Diremos que $p_B(\chi) := \chi_B$ es la aplicación de torcimiento de B con A inducida por χ y que χ es una extensión de χ_B .

Corolario 1.3.7. Sea $\chi: A \otimes (B \times C) \longrightarrow (B \times C) \otimes A$ una aplicación de torcimiento. Denotemos por $\iota_B, \iota_C, p_B, p_C$ las inclusiones y proyecciones evidentes. La aplicación $\chi_C: A \otimes C \longrightarrow C \otimes A$, definida por

$$\chi_C := (p_C \otimes A) \circ \chi \circ (A \otimes \iota_C),$$

es una aplicación de torcimiento si y solo si $(p_B \otimes A) \circ \chi \circ (A \otimes \iota_C) = 0$. Más aún, en este caso $F_{\text{id}_A, C}$ es un morfismo de aplicaciones de torcimiento de χ a χ_C . Diremos que $p_C(\chi) := \chi_C$ es la aplicación de torcimiento de C con A inducida por χ y que χ es una extensión de χ_C .

1.4 Ejemplos

En esta sección, mostraremos diferentes ejemplos para ilustrar la teoría de productos tensoriales torcidos. Esta estructura aparece en varias áreas de la matemática. Comenzaremos con los ejemplos clásicos de la teoría de anillos, luego pasaremos por la teoría de números, donde veremos que los cuaterniones son productos tensoriales torcidos de dos copias del cuerpo de los números complejos. Por último, vemos algunos ejemplos de la teoría de álgebras de Hopf que pueden ser de interés para la física, como la obtención de la cuantización del espacio de fases, que puede ser descrita vía los productos tensoriales torcidos de una manera natural.

1.4.1 Ejemplos de la teoría clásica

Ejemplo 1.4.1 (El producto tensorial clásico). Como vimos antes, para cualquier par de álgebras A y C , la aplicación flip

$$\begin{aligned} \tau: C \otimes A &\rightarrow A \otimes C \\ c \otimes a &\mapsto a \otimes c \end{aligned}$$

satisface de manera trivial las condiciones (1) - (4) de la Definición 1.1.7. El producto tensorial torcido inducido por esta aplicación de torcimiento es el producto tensorial clásico de álgebras $A \otimes C$.

Ejemplo 1.4.2 (Producto tensorial graduado). Sean $A = \bigoplus_{n \geq 0} A^n$ y $C = \bigoplus_{n \geq 0} C^n$ dos álgebras graduadas positivamente. Consideremos la aplicación definida para todo par de elementos homogéneos $a \in A^m$ y $c \in C^n$ por

$$\tau_{gr}(c \otimes a) := (-1)^{mn} a \otimes c.$$

La extensión lineal de τ_{gr} es una aplicación de torcimiento, y el producto tensorial torcido inducido es exactamente el producto tensorial graduado $A \otimes_{gr} C$.

Ejemplo 1.4.3 (Álgebra de grupo torcida). Sea G un grupo discreto actuando a izquierda vía automorfismos sobre un álgebra A , entonces la función $\chi: kG \otimes A \rightarrow A \otimes kG$, definida por

$$\chi(g \otimes a) := (g \cdot a) \otimes g,$$

es una aplicación de torcimiento. El producto tensorial torcido $A \otimes_{\chi} kG$ es el álgebra de grupo torcida $A \star G$.

Ejemplo 1.4.4 (Álgebras de grupo de un emparejamiento de grupos, [3]). Sean H y G dos grupos, α una acción a izquierda del grupo H sobre el conjunto G y β una acción a derecha del grupo G sobre el conjunto H tales que $H_{\alpha} \bowtie_{\beta} G$, es el producto de Takeuchi (o bicruzado) de H con G (ver [17]). Consideremos la siguiente notación $\alpha(g, h) := g \triangleright h$ y $\beta(g, h) := g \triangleleft h$, y definamos la aplicación $\chi: kG \otimes kH \rightarrow kH \otimes kG$ por

$$\chi(g \otimes h) := g \triangleright h \otimes g \triangleleft h$$

para todo $g \in G$ y $h \in H$. La aplicación χ es una aplicación de torcimiento, y se tiene $kH \otimes_{\chi} kG \cong k[H \bowtie G]$.

Ejemplo 1.4.5 (Extensiones de Ore [23]). Sea A una K -álgebra, y $B = K[t]$ el anillo de polinomios en una variable. Consideremos dos aplicaciones lineales $\sigma: A \rightarrow A$ y $\delta: A \rightarrow A$. La función $\chi: K[t] \otimes A \rightarrow A \otimes K[t]$, definida por

$$\chi(t \otimes a) := \sigma(a) \otimes t + \delta(a) \otimes 1,$$

es una aplicación de torcimiento si y solo si σ es un endomorfismo de A y δ es una σ -derivación.

Ejemplo 1.4.6 (Álgebra de cuaterniones generalizada). Sean a y c dos elementos del cuerpo de base K , y sean $A := K[x]/(x^2 - a)$ y $C := K[y]/(y^2 - c)$. Identifiquemos x e y con sus imágenes en A y C , respectivamente. Definamos la aplicación $\chi: C \otimes A \rightarrow A \otimes C$ por

$$\chi(y \otimes x) := -x \otimes y.$$

El producto tensorial torcido $A \otimes_{\chi} C$ es isomorfo a el álgebra de cuaterniones generalizada ${}^a K^c$. Como un caso particular de este ejemplo, cuando $K = \mathbb{R}$ y $a = c = -1$, las álgebras A y C son ambas isomorfas al cuerpo de los números complejos \mathbb{C} y el producto tensorial torcido $A \otimes_{\chi} C$ es el álgebra usual de cuaterniones \mathbb{H}

Ejemplo 1.4.7 (Álgebra de Matrices [4]). Asumamos que nuestro cuerpo K contiene una raíz primitiva n -ésima de la unidad q . Entonces el anillo de matrices $M_n(K)$ puede factorizarse por completo como un producto tensorial torcido $M_n(K) = K\mathbb{Z}_n \otimes_{\chi} K\mathbb{Z}_n$, donde consideramos las dos copias de $K\mathbb{Z}_n$ generada por

$$g := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q^{n-1} \end{pmatrix}, \quad y \quad h := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

respectivamente. Estos elementos satisfacen $hg = qgh$, entonces podemos definir el producto tensorial torcido χ como la única extensión lineal a $K\mathbb{Z}_n \otimes_{\chi} K\mathbb{Z}_n$ de la aplicación definida en los generadores por

$$\begin{aligned} \chi(1 \otimes 1) &:= 1 \otimes 1, & \chi(1 \otimes g) &:= g \otimes 1 \\ \chi(h \otimes 1) &:= 1 \otimes h, & \chi(h^i \otimes g^k) &:= q^{ik} \cdot g^k \otimes h^i \end{aligned}$$

1.4.2 Ejemplos de la Teoría de Álgebra de Hopf

Para trabajar con coálgebras usaremos la notación sigma de Sweedler: si c es un elemento de una coálgebra (C, Δ, ϵ) , escribiremos al elemento $\Delta(c) = \sum_i a_i \otimes b_i \in C \otimes C$ de la siguiente forma

$$\Delta(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}$$

Así el axioma de coasociatividad de C dado por $(\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta = (\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$ se puede expresar como

$$(c_{(1)})_{(1)} \otimes (c_{(1)})_{(2)} \otimes c_{(2)} = c_{(1)} \otimes (c_{(2)})_{(1)} \otimes (c_{(2)})_{(2)} = c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}, \quad c \in C$$

Ejemplo 1.4.8 (El producto smash). Sea C una biálgebra con comultiplicación Δ y counidad ϵ . Las propiedades de la coasociatividad y counidad se escriben en la forma

$$\begin{aligned}(C \otimes \Delta) \circ \Delta &= (\Delta \otimes C) \circ \Delta, \\ (\epsilon \otimes C) \circ \Delta &= \text{id}_C \\ (C \otimes \epsilon) \circ \Delta &= \text{id}_C.\end{aligned}$$

Sea A una C -módulo álgebra, es decir, A es un álgebra con una acción $\triangleright: C \otimes A \rightarrow A$ tal que

$$\begin{aligned}c \triangleright (aa') &= (c_{(1)} \triangleright a) (c_{(2)} \triangleright a'), \\ c \triangleright 1 &= \epsilon(c)1, \\ 1 \triangleright a &= a,\end{aligned}$$

para todos los elementos $a, a' \in A$, $c \in C$. Tenemos el siguiente resultado:

Lema 1.4.9. Dada una biálgebra C , y A una C -módulo álgebra, la aplicación definida por

$$\begin{aligned}\chi: C \otimes A &\rightarrow A \otimes C \\ c \otimes a &\mapsto (c_{(1)} \triangleright a) \otimes c_{(2)}\end{aligned}$$

es una aplicación de torcimiento.

Para el producto tensorial torcido $A \otimes_{\chi} C$ dado por esta aplicación de torcimiento, la multiplicación puede ser descrita explícitamente como

$$(a \otimes c)(a' \otimes c') = a(c_{(1)} \triangleright a') \otimes c_{(2)}c'$$

El álgebra $A \otimes_{\chi} C$ es el producto smash clásico de la bialgebra C y una módulo álgebra asociada a \triangleright .

Ejemplo 1.4.10 (Producto cruzado). Sean A y C un par dual de álgebras de Hopf, es decir, supongamos que A y C son dos álgebras de Hopf provistas de una aplicación de paridad

$$\langle -, - \rangle: C \otimes A \rightarrow K$$

tal que

$$\begin{aligned}\langle \Delta(c), a \otimes a' \rangle &= \langle c, aa' \rangle \\ \langle cc', a \rangle &= \langle c \otimes c', \Delta(a) \rangle,\end{aligned}$$

donde $\langle -, - \rangle: C \otimes C \otimes A \otimes A \rightarrow K$ es la función definida por

$$\langle c \otimes c', a \otimes a' \rangle := \langle c, a \rangle \langle c', a' \rangle.$$

Entonces, podemos definir la acción a izquierda del álgebra C sobre A por

$$c \triangleright a := \langle c, a_{(2)} \rangle a_{(1)}.$$

Se puede mostrar fácilmente que A tiene una estructura de C módulo álgebra a izquierda bajo esta acción, y que la aplicación $\chi: C \otimes A \rightarrow A \otimes C$ definida por

$$\chi(c \otimes a) := (c_{(1)} \triangleright a) \otimes c_{(2)} = \langle c_{(1)}, a_{(2)} \rangle a_{(1)} \otimes c_{(2)}$$

es una aplicación de torcimiento. El correspondiente producto tensorial torcido $A \otimes_{\chi} C$, también llamado producto cruzado de A y C , es usado como una descripción de los operadores diferenciales no conmutativos sobre A .

Ejemplo 1.4.11 (Bialgebras cuasi-triangulares, [27]). Recordemos la definición de un álgebra de Hopf cuasi-triangular. Una **biálgebra (o álgebra de Hopf) cuasi-triangular** es un par (H, R) , donde H es una bialgebra (álgebra de Hopf) y $R = R^1 \otimes R^2 \in H \otimes H$ un elemento que satisface:

$$(QT1) \Delta(R^1) \otimes R^2 = R^{13}R^{23},$$

$$(QT2) \epsilon(R^1)R^2 = 1,$$

$$(QT3) R^1 \otimes \Delta(R^2) = R^{13}R^{12},$$

$$(QT4) R^1\epsilon(R^2) = 1,$$

$$(QT5) \Delta^{\text{cop}}(h)R = R\Delta(h) \text{ para todo } h \in H,$$

donde R^{12} , R^{13} y R^{23} son los elementos de $H \otimes H \otimes H$ dados por

$$R^{12} := R^1 \otimes R^2 \otimes 1, \quad R^{13} := R^1 \otimes 1 \otimes R^2, \quad R^{23} := 1 \otimes R^1 \otimes R^2.$$

Observación 1.4.12. Si (H, R) es un álgebra de Hopf cuasi-triangular, entonces el elemento R es invertible, y $R^{-1} = S(R^1) \otimes R^2$. Un álgebra de Hopf cuasi-triangular es llamada **triangular** cuando $R^{-1} = \tau(R) = R^2 \otimes R^1$.

Asumamos que tenemos una biálgebra H y un elemento $R \in H \otimes H$ tal que las propiedades (QT1)–(QT5) son satisfechas, y consideremos dos H -módulo álgebras a izquierda A y C . Entonces la aplicación $\chi = \chi_R: C \otimes A \rightarrow A \otimes C$, definida por

$$\chi_R(c \otimes a) := R^2 \cdot a \otimes R^1 \cdot c,$$

es una aplicación de torcimiento.

Ejemplo 1.4.13 (Doble de Drinfeld). Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita, con antípoda S . Denotemos con H^* el álgebra de Hopf dual, con antípoda S^* y sean \bar{S} y \bar{S}^* las inversas de S y S^* , respectivamente. Considere la acción coadjunta a izquierda de H sobre H^* , dada por

$$h \triangleright f = h_{(1)} \rightharpoonup f \leftarrow \bar{S}h_{(2)} = \langle h_{(1)}, f_{(3)} \rangle \langle \bar{S}(h_{(2)}), f_{(1)} \rangle f_{(2)}, \quad (1.4.15)$$

y la acción coadjunta a derecha de H sobre H^* dada por

$$f \triangleleft h = \bar{S}h_{(1)} \rightharpoonup f \leftarrow h_{(2)} = \langle \bar{S}(h_{(1)}), f_{(3)} \rangle \langle h_{(2)}, f_{(1)} \rangle f_{(2)}. \quad (1.4.16)$$

Estas acciones convierten al álgebra de Hopf co-opuesta H^{cop} en una H -módulo álgebra a izquierda y H en una H^{cop} -módulo álgebra a derecha. El **Doble de Drinfeld** de H es el álgebra de Hopf que tiene como espacio vectorial subyacente $H^{\text{cop}} \otimes H$ y estructura de álgebra dada por

$$(f \otimes h)(f' \otimes h') := f(h_{(1)} \triangleright f'_{(2)}) \otimes (h_{(2)} \triangleleft f'_{(1)})h'. \quad (1.4.17)$$

La estructura de coálgebra es la natural sobre el producto tensorial, y la antípoda está dada por

$$S(f \otimes h) := (Sh_{(2)} \rightharpoonup Sf_{(1)}) \otimes (f_{(2)} \rightharpoonup Sh_{(1)}).$$

Definimos $\chi: H \otimes H^{\text{cop}} \rightarrow H^{\text{cop}} \otimes H$ por

$$\chi(h \otimes f) := (h_{(1)} \otimes f_{(2)}) \otimes (h_{(2)} \otimes f_{(1)}).$$

Se puede verificar que χ es una aplicación de torcimiento, y que la estructura de álgebra inducida por χ en $H^{\text{cop}} \otimes H$ coincide con la estructura de álgebra de $D(H)$. En otras palabras, el Doble de Drinfeld puede ser descrito como un producto tensorial torcido $H^{\text{cop}} \otimes_{\chi} H$.

Capítulo 2

Representación de productos tensoriales torcidos

En este capítulo estudiamos el producto tensorial torcido de álgebras asociativas con unidad cuando uno de los factores es de dimensión finita, es decir si χ es una aplicación de torcimiento de B con A , en esta sección consideramos que B tiene dimensión finita como espacio vectorial. En la primera sección presentamos en detalle como se expresa la aplicación de torcimiento χ cuando B es un álgebra de dimensión finita. Los resultados obtenidos en la primera sección son aprovechados para presentar una definición alternativa para el producto tensorial torcido con un factor de dimensión finita en términos de dos representaciones matriciales de álgebras, una de A y otra de B^{op} . La primera tendrá coeficientes en A y la segunda coeficientes en $\text{End}_K(A)$. Además, esto nos permite establecer una presentación matricial fiel con coeficientes en A del producto tensorial torcido $B \otimes_{\chi} A$. Por último y debido a la Proposición 1.3.3 podemos obtener otra equivalencia cuando consideramos que A es de dimensión finita en lugar del álgebra B .

2.1 $B \otimes_{\chi} A$ con $\dim B < \infty$

Sea B un álgebra de dimensión finita sobre el cuerpo K . Fijemos una base $\mathcal{B} := \{b_1, \dots, b_n\}$ de B . Recordemos que las constantes de estructura λ_{ij}^k con $1 \leq i, j, k \leq n$ de B con respecto a \mathcal{B} , son escalares que satisfacen las siguientes ecuaciones

$$b_i b_j = \sum_{k=1}^n \lambda_{ij}^k b_k.$$

Debido a que la multiplicación de B es asociativa, los escalares λ_{ij}^k satisfacen

$$\sum_{l=1}^n \lambda_{ij}^l \lambda_{lk}^m = \sum_{l=1}^n \lambda_{jk}^l \lambda_{il}^m.$$

Más aún, debido a que B es un álgebra con unidad, si $1 = \sum_j \alpha_j b_j$, entonces

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_{ji}^k = \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_{ij}^k = \delta_{ki}.$$

Una aplicación lineal $\chi: A \otimes B \rightarrow B \otimes A$ determina de manera única aplicaciones $\gamma_i^j: A \rightarrow A$, donde $1 \leq i, j \leq n$, tales que

$$\chi(a \otimes b_i) = \sum_{j=1}^n b_j \otimes \gamma_i^j(a), \quad \text{para todo } i. \quad (2.1.1)$$

Proposición 2.1.1. *La aplicación χ es una aplicación de torcimiento si y solo si las aplicaciones γ_j^i tienen las siguientes propiedades:*

- (1) $\gamma_i^j(1) = \delta_{ij}1$,
- (2) $\gamma_i^k(aa') = \sum_j \gamma_j^k(a)\gamma_i^j(a')$,
- (3) $\alpha_k \text{id} = \sum_i \alpha_i \gamma_i^k$,
- (4) $\sum_k \lambda_{ij}^k \gamma_k^m = \sum_k \sum_l \lambda_{kl}^m \gamma_j^l \circ \gamma_i^k$.

Más precisamente, las condiciones (1) y (2) se satisfacen si y solo si χ es compatible con la estructura de álgebra de A , y las condiciones (3) y (4) se satisfacen si y solo si lo es con la de B .

Demostración. Supongamos que la aplicación χ es una aplicación de torcimiento. La condición (1) de la Definición 1.1.7 implica

$$\begin{aligned} b_i \otimes 1 &= \chi(1 \otimes b_i) \\ &= \sum_{j=1}^n b_j \otimes \gamma_i^j(1). \end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtiene el ítem (1)

$$\gamma_i^j(1) = \delta_{ij}1.$$

Veamos el ítem (3), como

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n b_j \otimes \alpha_j a &= 1 \otimes a \\ &= \chi(a \otimes 1) \\ &= \chi\left(a \otimes \left(\sum_i \alpha_i b_i\right)\right) \\ &= \sum_i \alpha_i \chi(a \otimes b_i) \\ &= \sum_i \alpha_i \left(\sum_{j=1}^n b_j \otimes \gamma_i^j(a)\right) \\ &= \sum_{j=1}^n b_j \otimes \left(\sum_i \alpha_i \gamma_i^j(a)\right), \end{aligned}$$

es cierto que,

$$\alpha_j \text{id}_A = \sum_i \alpha_i \gamma_i^j.$$

Las condiciones (2) y (4) corresponden a los items (2) y (4) de la Definición 1.1.7.

(2) A partir de la Definición 1.1.7, se tiene por un lado

$$\begin{aligned} \chi \circ (\mu_A \otimes B)(a \otimes a' \otimes b_i) &= \chi(aa' \otimes b_i) \\ &= \sum_{k=1}^n b_k \otimes \gamma_i^k(aa'), \end{aligned}$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned} (B \otimes \mu_A) \circ (\chi \otimes A) \circ (A \otimes \chi)(a \otimes a' \otimes b_i) &= (B \otimes \mu_A) \circ (\chi \otimes A) \circ (a \otimes \chi(a' \otimes b_i)) \\ &= (B \otimes \mu_A) \circ (\chi \otimes A) \circ \left(a \otimes \sum_{j=1}^n (b_j \otimes \gamma_i^j(a')) \right) \\ &= \sum_{j=1}^n (B \otimes \mu_A) \circ (\chi(a \otimes b_j) \otimes \gamma_i^j(a')) \\ &= \sum_{j=1}^n (B \otimes \mu_A) \circ \left(\sum_{k=1}^n (b_k \otimes \gamma_j^k(a)) \otimes \gamma_i^j(a') \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n b_k \otimes \gamma_j^k(a) \gamma_i^j(a') \\ &= \sum_{k=1}^n b_k \otimes \left(\sum_{j=1}^n \gamma_j^k(a) \gamma_i^j(a') \right). \end{aligned}$$

De esta manera, comparando los resultados obtenemos la condición (2)

$$\gamma_i^k(aa') = \sum_{j=1}^n \gamma_j^k(a) \gamma_i^j(a').$$

(4) A partir de la Definición 1.1.7 se tiene por un lado

$$\begin{aligned} \chi \circ (A \otimes \mu_B)(a \otimes b_i \otimes b_j) &= \chi(a \otimes b_i b_j) \\ &= \chi \left(a \otimes \sum_{k=1}^n \lambda_{ij}^k b_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_{ij}^k \chi(a \otimes b_k) \\ &= \sum_{m=1}^n b_m \otimes \left(\sum_{k=1}^n \lambda_{ij}^k \gamma_k^m(a) \right), \end{aligned}$$

y por otro lado,

$$(\mu_B \otimes A) \circ (B \otimes \chi) \circ (\chi \otimes B)(a \otimes b_i \otimes b_j) = (\mu_B \otimes A) \circ (B \otimes \chi)(\chi(a \otimes b_i) \otimes b_j)$$

$$\begin{aligned}
&= (\mu_B \otimes A) \circ (B \otimes \chi) \left(\sum_{k=1}^n (b_k \otimes \gamma_i^k(a)) \otimes b_j \right) \\
&= \sum_{k=1}^n (\mu_B \otimes A) (b_k \otimes \chi(\gamma_i^k(a) \otimes b_j)) \\
&= \sum_{k=1}^n (\mu_B \otimes A) \left(b_k \otimes \sum_{l=1}^n (b_l \otimes \gamma_j^l(\gamma_i^k(a))) \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (b_k b_l \otimes \gamma_j^l(\gamma_i^k(a))) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\sum_{m=1}^n \lambda_{kl}^m b_m \otimes \gamma_j^l \circ \gamma_i^k(a) \right) \\
&= \sum_{m=1}^n b_m \otimes \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \lambda_{kl}^m \gamma_j^l \circ \gamma_i^k(a) \right).
\end{aligned}$$

De esta manera, comparando los resultados obtenemos la condición (4)

$$\sum_{k=1}^n \lambda_{ij}^k \gamma_k^m = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \lambda_{kl}^m \gamma_j^l \circ \gamma_i^k.$$

Réciprocamente, si la familia de aplicaciones de aplicaciones lineas $\{\gamma_i^j : A \rightarrow A\}$ satisface las condiciones (1)– (4) de la Proposición 2.1.1 los cálculos realizados líneas antes son suficientes para probar que la aplicación χ definida vía la ecuación 2.3.2 define una aplicación de torcimiento. \square

2.2 Representación canónica

En esta sección presentamos una representación matricial de los productos tensoriales torcidos.

Recordemos que la representación regular a izquierda de una K – álgebra C es el morfismo $l : C \rightarrow \text{End}_K(C)_C$ definido por $l(c) := l_c$, donde $l_c \in \text{End}_K(C)$ es la aplicación definida por $l_c(d) := cd$ para todo $d \in C$. Debido a que $l_c(1) = c$ para todo $c \in C$, la representación es fiel. De esta manera, para cada álgebra L la aplicación $l^L : B^{\text{op}} \otimes L \rightarrow \text{End}(B^{\text{op}} \otimes L)_L$, definida por

$$\begin{array}{ccc}
B^{\text{op}} \otimes L & \xrightarrow{l^L} & \text{End}_K(B^{\text{op}} \otimes L)_L, \\
& \searrow l & \nearrow i \\
& & \text{End}_K(B^{\text{op}} \otimes L)_{B^{\text{op}} \otimes L}
\end{array}$$

donde i es la inclusión canónica, es una representación fiel, llamada la *representación canónica* de $B^{\text{op}} \otimes L$.

Desde ahora, escribiremos E para el conjunto de endomorfismos K – lineales de A , $\text{End}_K(A)$, y denotaremos con \mathcal{B}' a la base $\{b_1^{\text{op}}, \dots, b_n^{\text{op}}\}$ de B^{op} .

Proposición 2.2.1. Los items (3) y (4) de la Proposición 2.1.1 se satisfacen si y solo si la aplicación

$$\begin{array}{ccc} B^{\text{op}} & \xrightarrow{\rho_B} & B^{\text{op}} \otimes E \\ b_k^{\text{op}} & \longmapsto & \sum_j b_j^{\text{op}} \otimes \gamma_k^j, \end{array}$$

es un morfismo de K -álgebras.

Demostración. Supongamos que los items (3) y (4) de la Proposición 2.1.1 son satisfechos, entonces

$$\begin{aligned} \rho_B(b_j^{\text{op}} b_i^{\text{op}}) &= \rho_B((b_i b_j)^{\text{op}}) \\ &= \rho_B\left(\sum_{k=1}^n \lambda_{ij}^k b_k^{\text{op}}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_{ij}^k \rho_B(b_k^{\text{op}}) \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_{ij}^k \left(\sum_m b_m^{\text{op}} \otimes \gamma_k^m\right) \\ &= \sum_m b_m^{\text{op}} \otimes \left(\sum_{k=1}^n \lambda_{ij}^k \gamma_k^m\right), \\ &= \sum_m b_m^{\text{op}} \otimes \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \lambda_{kl}^m \gamma_j^l \circ \gamma_i^k\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\sum_m \lambda_{kl}^m b_m^{\text{op}}\right) \otimes (\gamma_j^l \circ \gamma_i^k) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (b_l^{\text{op}} b_k^{\text{op}}) \otimes (\gamma_j^l \circ \gamma_i^k) \\ &= \left(\sum_{l=1}^n b_l^{\text{op}} \otimes \gamma_j^l\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k^{\text{op}} \otimes \gamma_i^k\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene

$$\rho_B(b_j^{\text{op}} b_i^{\text{op}}) = \rho_B(b_j^{\text{op}}) \rho_B(b_i^{\text{op}}).$$

Ahora, veamos que preserva la unidad

$$\begin{aligned} \rho_B(1) &= \rho_B\left(\sum_k \alpha_k b_k^{\text{op}}\right) \\ &= \sum_k \alpha_k \rho_B(b_k^{\text{op}}) \\ &= \sum_k \alpha_k \left(\sum_m b_m^{\text{op}} \otimes \gamma_k^m\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_m \left(b_m^{\text{op}} \otimes \sum_k (\alpha_k \gamma_k^m) \right) \\
&= \sum_m (b_m^{\text{op}} \otimes \alpha_m \text{id}) \\
&= \sum_m (\alpha_m b_m^{\text{op}} \otimes \text{id}) \\
&= 1 \otimes \text{id}.
\end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que la aplicación ρ_B es un morfismo de K -álgebras. Por un lado, se tiene

$$\begin{aligned}
\rho_B(b_j^{\text{op}} b_i^{\text{op}}) &= \rho_B \left(\sum_{k=1}^n \lambda_{ij}^k b_k^{\text{op}} \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \lambda_{ij}^k \rho_B(b_k^{\text{op}}) \\
&= \sum_{k=1}^n \lambda_{ij}^k \left(\sum_m b_m^{\text{op}} \otimes \gamma_k^m \right) \\
&= \sum_m b_m^{\text{op}} \otimes \left(\sum_{k=1}^n \lambda_{ij}^k \gamma_k^m \right).
\end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene

$$\begin{aligned}
\rho_B(b_j^{\text{op}}) \rho_B(b_i^{\text{op}}) &= \left(\sum_{l=1}^n b_l^{\text{op}} \otimes \gamma_j^l \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k^{\text{op}} \otimes \gamma_i^k \right) \\
&= \left(\sum_{l=1}^n b_l^{\text{op}} \otimes \gamma_j^l \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k^{\text{op}} \otimes \gamma_i^k \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (b_l^{\text{op}} b_k^{\text{op}}) \otimes (\gamma_j^l \circ \gamma_i^k) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\sum_m \lambda_{kl}^m b_m^{\text{op}} \right) \otimes (\gamma_j^l \circ \gamma_i^k) \\
&= \sum_m b_m^{\text{op}} \otimes \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \lambda_{kl}^m \gamma_j^l \circ \gamma_i^k \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^n \lambda_{ij}^k \gamma_k^m = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \lambda_{kl}^m \gamma_j^l \circ \gamma_i^k, \quad \text{para todo } m.$$

Ahora, veamos que se satisface la condición (3). Por un lado, se tiene

$$1 \otimes \text{id} = \sum_m (\alpha_m b_m^{\text{op}} \otimes \text{id})$$

$$= \sum_m (b_m^{\text{op}} \otimes \alpha_m \text{id}).$$

Por otro lado, se tiene

$$\begin{aligned} \rho_B(1) &= \rho_B \left(\sum_k \alpha_k b_k^{\text{op}} \right) \\ &= \sum_k \alpha_k \left(\sum_m b_m^{\text{op}} \otimes \gamma_k^m \right) \\ &= \sum_m \left(b_m^{\text{op}} \otimes \sum_k (\alpha_k \gamma_k^m) \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\alpha_m \text{id} = \sum_k \alpha_k \gamma_k^m, \quad \text{para todo } m.$$

□

Los siguientes resultados se utilizan para construir una representación matricial de B^{op} en las matrices $n \times n$ con coeficientes en E , $M_n(E)$, que codifica las condiciones (3) y (4) de la Proposición 2.1.1. Consideremos la aplicación biyectiva E -lineal a derecha

$$\begin{array}{ccc} B^{\text{op}} \otimes E & \xrightarrow{\xi_{\mathcal{B}'}} & E^n, \\ b_k^{\text{op}} \otimes 1 & \longmapsto & e_k \end{array}$$

donde $\{e_1, \dots, e_n\}$ es la base canónica de E^n .

Corolario 2.2.2. *Los items (3) y (4) de la Proposición 2.1.1 se satisfacen si y solo si la aplicación*

$$\begin{array}{ccc} B^{\text{op}} & \xrightarrow{\ddot{\rho}_B} & \text{End}(E^n)_E \\ b^{\text{op}} & \longmapsto & \xi_{\mathcal{B}'} \circ l^E(\rho_B(b^{\text{op}})) \circ \xi_{\mathcal{B}'}^{-1} \end{array}$$

es una representación de B^{op} o, equivalentemente, si la aplicación $\hat{\rho}_B: B^{\text{op}} \rightarrow M_n(E)$, que aplica cada $b^{\text{op}} \in B^{\text{op}}$ en la matriz de $\ddot{\rho}(b^{\text{op}})$ respecto de la base canónica, es una representación matricial.

Demostración. Debido a que l^E es fiel y $\xi_{\mathcal{B}'}$ es biyectiva, esto es una consecuencia inmediata de la Proposición 2.2.1. □

Definición 2.2.3. *Por definición, para cada elemento b_k en \mathcal{B} la matriz de estructura de b_k con respecto a (B, \mathcal{B}) es la matriz $[b_k]_{\mathcal{B}} := \left(\lambda_{kj}^i \right)_{ij}$, donde los escalares λ_{uv}^w 's ($1 \leq u, v, w \leq n$) son las constantes de estructura de B con respecto a \mathcal{B} .*

Observación 2.2.4. *Veamos que aspecto tiene la matriz $\hat{\rho}_B(b_k^{\text{op}})$*

$$\hat{\rho}_B(b_k^{\text{op}})(e_j) = \xi_{\mathcal{B}'} \circ l^E(\rho_B(b_k^{\text{op}})) \circ \xi_{\mathcal{B}'}^{-1}(e_j)$$

$$\begin{aligned}
&= \xi_{\mathcal{B}'} \circ l^E(\rho_B(b_k^{\text{op}}))(b_j^{\text{op}} \otimes 1) \\
&= \xi_{\mathcal{B}'} \left(\left(\sum_l b_l^{\text{op}} \otimes \gamma_k^l \right) \cdot (b_j^{\text{op}} \otimes 1) \right) \\
&= \xi_{\mathcal{B}'} \left(\sum_l b_l^{\text{op}} b_j^{\text{op}} \otimes \gamma_k^l \right) \\
&= \xi_{\mathcal{B}'} \left(\sum_l \left(\sum_i \lambda_{jl}^i b_i^{\text{op}} \otimes \gamma_k^l \right) \right) \\
&= \sum_i \left(\sum_l \lambda_{jl}^i \xi_{\mathcal{B}'}(b_i^{\text{op}} \otimes 1) \cdot \gamma_k^l \right) \\
&= \sum_i e_i \cdot \left(\sum_l \lambda_{jl}^i \gamma_k^l \right).
\end{aligned}$$

Así, obtenemos la matriz

$$\hat{\rho}_B(b_k^{\text{op}}) = \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^n \lambda_{1l}^1 \gamma_k^l & \cdots & \sum_{l=1}^n \lambda_{nl}^1 \gamma_k^l \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{l=1}^n \lambda_{1l}^n \gamma_k^l & \cdots & \sum_{l=1}^n \lambda_{nl}^n \gamma_k^l \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^n \gamma_k^l [b_l^{\text{op}}]_{\mathcal{B}'} \quad \text{para todo } k,$$

donde $[b_j^{\text{op}}]_{\mathcal{B}'}$ es la matriz de estructura de b_j^{op} con respecto a $(B^{\text{op}}, \mathcal{B}')$.

Proposición 2.2.5. Las condiciones (1) y (2) de la Proposición 2.1.1 se satisfacen si y solo si la aplicación $\phi_\chi: A \rightarrow \text{End}(B \otimes A)_A$, definida por $\phi_\chi(a)(b_k \otimes 1) := \sum_j b_j \otimes \gamma_k^j(a)$, es un morfismo de K -álgebras o, equivalentemente, si la aplicación $\hat{\phi}_\chi: A \rightarrow M_n(A)$, que envía $a \in A$ a la matriz $\phi_\chi(a)$ con respecto a la base $\mathcal{B} \otimes 1 := \{b_1 \otimes 1, \dots, b_n \otimes 1\}$ de $B \otimes A$, es una representación matricial.

Demostración. Supongamos que las condiciones (1) y (2) de la Proposición 2.1.1 son satisfechas, entonces

$$\begin{aligned}
\phi_\chi(aa')(b_k \otimes 1) &= \sum_j b_j \otimes \gamma_k^j(aa') \\
&= \sum_j b_j \otimes \left(\sum_l \gamma_l^j(a) \gamma_k^l(a') \right) \\
&= \sum_l \left(\left(\sum_j b_j \otimes \gamma_l^j(a) \right) \cdot \gamma_k^l(a') \right) \\
&= \sum_l ((\phi_\chi(a)(b_k \otimes 1)) \cdot \gamma_k^l(a')) \\
&= \sum_l (\phi_\chi(a)((b_k \otimes 1) \cdot \gamma_k^l(a'))) \\
&= \phi_\chi(a) \left(\sum_l (b_k \otimes \gamma_k^l(a')) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \phi_\chi(a) (\phi_\chi(a')(b_k \otimes 1)) \\
&= (\phi_\chi(a) \phi_\chi(a')) (b_k \otimes 1).
\end{aligned}$$

Ahora, veamos que preserva la unidad si y solo si se cumple la condición (1) de la Proposición 2.1.1,

$$\begin{aligned}
\phi_\chi(1)(b_k \otimes 1) &= \sum_j b_j \otimes \gamma_k^j(1) \\
&= \sum_j b_j \otimes \delta_{jk} \cdot 1 = \sum_j \delta_{jk} b_j \otimes 1 \\
&= b_k \otimes 1.
\end{aligned}$$

Veamos como es la matriz $\phi_\chi(a)$ con respecto a la base $\mathcal{B} \otimes 1$

$$\begin{aligned}
\phi_\chi(a)(b_j \otimes 1) &= \sum_i b_i \otimes \gamma_j^i(a) = \sum_i (b_i \otimes 1) \cdot \gamma_j^i(a) \\
&= \begin{pmatrix} \gamma_j^1(a) \\ \gamma_j^2(a) \\ \vdots \\ \gamma_j^n(a) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Así, obtenemos la representación matricial

$$\hat{\phi}_\chi(a) = \begin{pmatrix} \gamma_1^1(a) & \gamma_2^1(a) & \cdots & \gamma_n^1(a) \\ \gamma_1^2(a) & \gamma_2^2(a) & \cdots & \gamma_n^2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_1^n(a) & \gamma_2^n(a) & \cdots & \gamma_n^n(a) \end{pmatrix}$$

Un cálculo directo muestra que la condición (2) de la Proposición 2.1.1 se satisface si y solo si $\hat{\phi}$ es multiplicativa. \square

Observación 2.2.6. *A partir de la definición de ϕ_χ se sigue que $\phi_\chi(a)(b \otimes 1) = \chi(a \otimes b)$ para todo $b \in B$. En efecto,*

$$\begin{aligned}
\phi_\chi(a)(b \otimes 1) &= \phi_\chi(a) \left(\sum_j \beta_j b_j \otimes 1 \right) = \sum_j \beta_j \phi_\chi(a)(b_j \otimes 1) \\
&= \sum_j \beta_j \sum_i b_i \otimes \gamma_j^i(a) \\
&= \sum_i \beta_j \chi(a \otimes b_j) \\
&= \chi(a \otimes b).
\end{aligned}$$

En particular $\phi_\chi(a)(1 \otimes 1) = 1 \otimes a$, lo cual implica que ϕ_χ es inyectiva.

Corolario 2.2.7. *Considere el isomorfismo de A -módulos a derecha*

$$\begin{array}{ccc} B \otimes A & \xrightarrow{\dot{\xi}_{\mathcal{B}}} & A^n, \\ b_k \otimes 1 & \longmapsto & f_k \end{array}$$

donde $\{f_1, \dots, f_n\}$ es la base canónica de A^n . Si χ es una aplicación de torcimiento, entonces la aplicación

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_{\chi} A & \xrightarrow{\chi l_{\mathcal{B}}^A} & \text{End}(A^n)_A \\ b \otimes a & \longmapsto & \dot{\xi}_{\mathcal{B}} \circ l_{b \otimes 1} \circ \phi_{\chi}(a) \circ \dot{\xi}_{\mathcal{B}}^{-1} \end{array}$$

es una representación de $B \otimes_{\chi} A$ en $\text{End}(A^n)_A$.

Demostración. Debido a la propiedad universal del producto tensorial torcido en la Observación 1.1.9, solo debemos probar que

$$\chi l_{\mathcal{B}}^A((1 \otimes a) \cdot (b_i \otimes 1)) = \chi l_{\mathcal{B}}^A((1 \otimes a)) \chi l_{\mathcal{B}}^A((b_i \otimes 1)).$$

Para esto calculamos

$$\begin{aligned} \phi_{\chi}(a) \circ l_{b_i \otimes 1}(b_k \otimes 1) &= \phi_{\chi}(a) \left(\sum_t \lambda_{ik}^t b_t \otimes 1 \right) \\ &= \sum_t \lambda_{ik}^t (\phi_{\chi}(a)(b_t \otimes 1)) \\ &= \sum_t \lambda_{ik}^t \left(\sum_j b_j \otimes \gamma_t^j(a) \right) \\ &= \sum_j \left(b_j \otimes \left(\sum_t \lambda_{ik}^t \gamma_t^j(a) \right) \right) \\ &= \sum_j \left(b_j \otimes \left(\sum_t \sum_l \lambda_{il}^j \gamma_k^l \circ \gamma_i^t(a) \right) \right) \\ &= \sum_t \sum_l \left(\left(\sum_j \lambda_{il}^j b_j \right) \otimes (\gamma_k^l \circ \gamma_i^t(a)) \right) \\ &= \sum_t \sum_l (b_i b_l \otimes (\gamma_k^l \circ \gamma_i^t(a))) \\ &= \sum_t \left((b_t \otimes 1) \cdot \left(\sum_l b_l \otimes \gamma_k^l(\gamma_i^t(a)) \right) \right) \\ &= \sum_t ((b_t \otimes 1) \cdot (\phi_{\chi}(\gamma_i^t(a))(b_k \otimes 1))) \\ &= \left(\sum_t l_{b_t \otimes 1} \circ \phi_{\chi}(\gamma_i^t(a)) \right) (b_k \otimes 1). \end{aligned}$$

Así, obtenemos

$$\phi_\chi(a) \circ l_{b_i \otimes 1} = \sum_t l_{b_i \otimes 1} \circ \phi_\chi(\gamma_i^t(a)),$$

y debido a que la aplicación $\xi_{B'}$ es biyectiva se concluye la prueba. \square

Observación 2.2.8. Podemos utilizar la Observación 2.2.6 para mostrar que

$$l_{b \otimes 1} \circ \phi_\chi(a)(b' \otimes 1) = (b \otimes 1) \cdot \chi(a \otimes b') \quad \text{para todo } a \in A \text{ y } b, b' \in B.$$

Así, obtenemos $l_{b \otimes 1} \circ \phi_\chi(a)(1 \otimes 1) = b \otimes a$, lo cual implica que χl_B^A es una aplicación inyectiva.

Corolario 2.2.9. Si χ es una aplicación de torcimiento, entonces las fórmulas

$$\varphi_\chi(a) := \begin{pmatrix} \gamma_1^1(a) & \cdots & \gamma_n^1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_1^n(a) & \cdots & \gamma_n^n(a) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \varphi_\chi(b_k) := \begin{pmatrix} \lambda_{k1}^1 \cdot 1_A & \cdots & \lambda_{kn}^1 \cdot 1_A \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{k1}^n \cdot 1_A & \cdots & \lambda_{kn}^n \cdot 1_A \end{pmatrix},$$

para todo $a \in A$ y $1 \leq k \leq n$, definen una representación fiel $\varphi_\chi: B \otimes_\chi A \rightarrow M_n(A)$.

Demostración. Es suficiente notar que las matrices de $\chi l_B^A(1 \otimes a)$ y $\chi l_B^A(b_k \otimes 1)$ en la base canónica de A^n , son las matrices $\varphi_\chi(a)$ y $\varphi_\chi(b_k)$, respectivamente. \square

2.3 $A \otimes_\chi C$ con $\dim C < \infty$

Tal como mencionamos en la introducción de este capítulo, la Proposición 1.3.3 nos permite obtener otra representación matricial cuando consideramos que el segundo factor del producto tensorial torcido $A \otimes_\chi C$ es de dimensión finita en lugar del primero factor.

Sea C un álgebra de dimensión finita y consideremos $A \otimes_\chi C$ el producto tensorial torcido de un álgebra A con C , entonces vía la Proposición 1.3.3 tenemos el producto tensorial torcido $C^{\text{op}} \otimes_{\tilde{\chi}} A^{\text{op}}$ donde el primer factor C^{op} es de dimensión finita. De esta manera tenemos las representaciones asociadas vía el Corolario 2.2.2 y la Proposición 2.2.5

$$\hat{\rho}_{C^{\text{op}}}: C \rightarrow M_n(\text{End}_K(A)) \quad \hat{\phi}_{\tilde{\chi}}: A^{\text{op}} \rightarrow M_n(A^{\text{op}})$$

Así, recuperamos las siguientes representaciones matriciales de C y A

$$\hat{\rho}_C := \hat{\rho}_{C^{\text{op}}}: C \rightarrow M_n(\text{End}_K(A)) \quad \hat{\phi}_\chi := t \circ \hat{\phi}_{\tilde{\chi}} \circ \text{op}: A \rightarrow M_n(A),$$

donde, $t: M_n(A) \rightarrow M_n(A)$ es la aplicación transpuesta.

Si fijamos una base $\mathcal{B} := \{c_1, \dots, c_n\}$ de C y las constantes de estructura λ_{ij}^k con $1 \leq i, j, k \leq n$ de C con respecto a \mathcal{B} , entonces la aplicación de torcimiento $\chi: C \otimes A \rightarrow A \otimes C$ determina de manera única aplicaciones $\gamma_i^j: A \rightarrow A$, donde $1 \leq i, j \leq n$, tales que

$$\chi(c_i \otimes a) = \sum_{j=1}^n \gamma_i^j(a) \otimes c_j, \quad \text{para todo } i. \quad (2.3.2)$$

De esta manera, obtenemos el siguiente corolario

Corolario 2.3.1. Si χ es una aplicación de torcimiento, entonces las formulas

$$\varphi_\chi(a) := \begin{pmatrix} \gamma_1^1(a) & \cdots & \gamma_1^n(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_n^1(a) & \cdots & \gamma_n^n(a) \end{pmatrix} \quad y \quad \varphi_\chi(b_k) := \begin{pmatrix} \lambda_{k1}^1 \cdot 1_A & \cdots & \lambda_{kn}^n \cdot 1_A \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{k1}^1 \cdot 1_A & \cdots & \lambda_{kn}^n \cdot 1_A \end{pmatrix},$$

para todo $a \in A$ y $1 \leq k \leq n$, definen una representación fiel $\varphi_\chi: A \otimes_\chi C \longrightarrow M_n(A)$.

2.4 Extensión de aplicaciones de torcimiento

Sean A , B y C tres K -álgebras con B y C de dimensión finita. Escribamos $D := B \times C$. Sea $i_B: B \rightarrow D$, $i_C: C \rightarrow D$, $p_B: D \rightarrow B$ y $p_C: D \rightarrow C$ las aplicaciones canónicas. En esta sección estudiaremos por un lado las aplicaciones de torcimiento $\psi: A \otimes D \longrightarrow D \otimes A$ tales que la aplicación $\Theta := (p_B \otimes A) \circ \psi \circ (A \otimes i_B)$ es de torcimiento, y por otro lado las aplicaciones de torcimiento tales que Θ y la aplicación $\Upsilon := (p_C \otimes A) \circ \psi \circ (A \otimes i_C)$, son aplicaciones de torcimiento.

Fijemos las bases $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ y $\mathcal{C} := \{c_1, \dots, c_m\}$ de B y C , respectivamente, y denotemos por \mathcal{D} la base ordenada $\{b_1, b_2, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m\}$ de D , donde identificamos b_i con $(b_i, 0)$ y c_i con $(0, c_i)$. Así, $\mathcal{D} = \{d_1, \dots, d_{m+n}\}$, donde

$$d_i := \begin{cases} b_i & \text{si } i \leq n, \\ c_{i-n} & \text{si } i > n. \end{cases}$$

Las matrices de estructura de los elementos de D con respecto a la base (D, \mathcal{D}) son

$$[b_k]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} [b_k]_{\mathcal{B}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1 \leq k \leq n) \quad y \quad [c_l]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [c_l]_{\mathcal{C}} \end{pmatrix} \quad (1 \leq l \leq m).$$

Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m$ los escalares tales que

$$1_D = (1_B, 1_C) = \sum_{k=1}^n \alpha_k b_k + \sum_{l=1}^m \beta_l c_l.$$

Cada aplicación $\psi: A \otimes D \longrightarrow D \otimes A$ determina de manera única aplicaciones $\tilde{\gamma}_i^j$ ($1 \leq i, j < m+n$), tales que

$$\psi(a \otimes d_i) = \sum_{j=1}^{m+n} d_j \otimes \tilde{\gamma}_i^j(a) \quad (2.4.3)$$

Sean λ_{ij}^k ($1 \leq i, j, k \leq n$) y η_{ij}^k ($1 \leq i, j, k \leq m$) las constantes de estructura de B con respecto a \mathcal{B} y de C con respecto a \mathcal{C} , respectivamente. Escribamos

$$B_k^{(1)} := \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^n \lambda_{1l}^1 \tilde{\gamma}_k^l & \cdots & \sum_{l=1}^n \lambda_{nl}^1 \tilde{\gamma}_k^l \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{l=1}^n \lambda_{1l}^n \tilde{\gamma}_k^l & \cdots & \sum_{l=1}^n \lambda_{nl}^n \tilde{\gamma}_k^l \end{pmatrix} \in M_n(E) \quad (1 \leq k \leq n),$$

$$B_k^{(2)} := \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^m \eta_{1l}^1 \tilde{\gamma}_k^{l+n} & \cdots & \sum_{l=1}^m \eta_{ml}^1 \tilde{\gamma}_k^{l+n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{l=1}^m \eta_{1l}^m \tilde{\gamma}_k^{l+n} & \cdots & \sum_{l=1}^m \eta_{ml}^m \tilde{\gamma}_k^{l+n} \end{pmatrix} \in M_m(E) \quad (1 \leq k \leq n),$$

$$C_k^{(1)} := \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^n \lambda_{1l}^1 \tilde{\gamma}_{k+n}^l & \cdots & \sum_{l=1}^n \lambda_{nl}^1 \tilde{\gamma}_{k+n}^l \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{l=1}^n \lambda_{1l}^n \tilde{\gamma}_{k+n}^l & \cdots & \sum_{l=1}^n \lambda_{nl}^n \tilde{\gamma}_{k+n}^l \end{pmatrix} \in M_n(E) \quad (1 \leq k \leq m)$$

y

$$C_k^{(2)} := \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^m \eta_{1l}^1 \tilde{\gamma}_{k+n}^{l+n} & \cdots & \sum_{l=1}^m \eta_{ml}^1 \tilde{\gamma}_{k+n}^{l+n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{l=1}^m \eta_{1l}^m \tilde{\gamma}_{k+n}^{l+n} & \cdots & \sum_{l=1}^m \eta_{ml}^m \tilde{\gamma}_{k+n}^{l+n} \end{pmatrix} \in M_m(E) \quad (1 \leq k \leq m).$$

Supongamos que ψ es una aplicación de torcimiento. La representación $\hat{\rho}_\psi: D^{\text{op}} \rightarrow M_{m+n}(E)$ del Corolario 2.2.2 viene dada por

$$\hat{\rho}_\psi(b_k^{\text{op}}) = \begin{pmatrix} B_k^{(1)} & 0 \\ 0 & B_k^{(2)} \end{pmatrix} \quad (1 \leq k \leq n) \quad (2.4.4)$$

y

$$\hat{\rho}_\psi(c_k^{\text{op}}) = \begin{pmatrix} C_k^{(1)} & 0 \\ 0 & C_k^{(2)} \end{pmatrix} \quad (1 \leq k \leq m). \quad (2.4.5)$$

Lema 2.4.1. *La aplicación $\hat{\rho}_\psi: D^{\text{op}} \rightarrow M_{m+n}(E)$ definida por (2.4)-(2.5) es una representación si y solo si las siguientes condiciones se satisfacen:*

$$B_i^{(l)} B_j^{(l)} = \sum_{k=1}^n \lambda_{ji}^k B_k^{(l)} \quad \text{para } l \in \{1, 2\} \text{ y } 1 \leq i, j \leq n, \quad (2.4.6)$$

$$C_i^{(l)} C_j^{(l)} = \sum_{k=1}^m \eta_{ji}^k C_k^{(l)} \quad \text{para } l \in \{1, 2\} \text{ y } 1 \leq i, j \leq m, \quad (2.4.7)$$

$$B_i^{(l)} C_j^{(l)} = C_j^{(l)} B_i^{(l)} = 0 \quad \text{para } l \in \{1, 2\}, 1 \leq i \leq n \text{ y } 1 \leq j \leq m, \quad (2.4.8)$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i B_i^{(1)} + \sum_{j=1}^m \beta_j C_j^{(1)} = \text{id}_{M_n(E)} \quad (2.4.9)$$

y

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i B_i^{(2)} + \sum_{j=1}^m \beta_j C_j^{(2)} = \text{id}_{M_m(E)}. \quad (2.4.10)$$

Demostración. Veamos la primera condición. Se tiene por un lado

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_\psi(b_i^{\text{op}} b_j^{\text{op}}) &= \begin{pmatrix} B_i^{(1)} & 0 \\ 0 & B_i^{(2)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_j^{(1)} & 0 \\ 0 & B_j^{(2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B_i^{(1)} B_j^{(1)} & 0 \\ 0 & B_i^{(2)} B_j^{(2)} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_\psi(b_i^{\text{op}} b_j^{\text{op}}) &= \sum_k \lambda_{ji}^k \hat{\rho}_\psi(b_k^{\text{op}}) = \sum_k \lambda_{ji}^k \begin{pmatrix} B_k^{(1)} & 0 \\ 0 & B_k^{(2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_k \lambda_{ji}^k B_k^{(1)} & 0 \\ 0 & \sum_k \lambda_{ji}^k B_k^{(2)} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

lo cual prueba la condición (2.4.6).

Veamos la segunda condición. Se tiene por un lado

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_\psi(c_i^{\text{op}} c_j^{\text{op}}) &= \begin{pmatrix} C_i^{(1)} & 0 \\ 0 & C_i^{(2)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_j^{(1)} & 0 \\ 0 & C_j^{(2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_i^{(1)} C_j^{(1)} & 0 \\ 0 & C_i^{(2)} C_j^{(2)} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_\psi(c_i^{\text{op}} c_j^{\text{op}}) &= \sum_k \eta_{ji}^k \hat{\rho}_\psi(c_k^{\text{op}}) = \sum_k \eta_{ji}^k \begin{pmatrix} C_k^{(1)} & 0 \\ 0 & C_k^{(2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_k \eta_{ji}^k C_k^{(1)} & 0 \\ 0 & \sum_k \eta_{ji}^k C_k^{(2)} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

lo cual prueba la condición (2.4.7).

Veamos la tercera condición. Se tiene por un lado

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_\psi(b_i^{\text{op}} c_j^{\text{op}}) &= \begin{pmatrix} B_i^{(1)} & 0 \\ 0 & B_i^{(2)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_j^{(1)} & 0 \\ 0 & C_j^{(2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B_i^{(1)} C_j^{(1)} & 0 \\ 0 & B_i^{(2)} C_j^{(2)} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

y por otro lado

$$\hat{\rho}_\psi(b_i^{\text{op}} c_j^{\text{op}}) = \hat{\rho}_\psi(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

lo cual prueba la primera igualdad de la condición (2.4.8).

Veamos la segunda igualdad. Se tiene por un lado

$$\hat{\rho}_\psi(c_j^{\text{op}} b_i^{\text{op}}) = \begin{pmatrix} C_j^{(1)} & 0 \\ 0 & C_j^{(2)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_i^{(1)} & 0 \\ 0 & B_i^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C_j^{(1)} B_i^{(1)} & 0 \\ 0 & C_j^{(2)} B_i^{(2)} \end{pmatrix},$$

y por otro lado

$$\hat{\rho}_\psi(c_j^{\text{op}} b_i^{\text{op}}) = \hat{\rho}_\psi(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

lo cual prueba la segunda igualdad de la condición (2.4.8). Por último, veamos la cuarta y la quinta condición. Se tiene por un lado

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_\psi(1_D) &= \hat{\rho}_\psi \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k b_k + \sum_{l=1}^m \beta_l c_l \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha_k \begin{pmatrix} B_k^{(1)} & 0 \\ 0 & B_k^{(2)} \end{pmatrix} + \sum_{l=1}^m \beta_l \begin{pmatrix} C_l^{(1)} & 0 \\ 0 & C_l^{(2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \alpha_k B_k^{(1)} + \sum_{l=1}^m \beta_l C_l^{(1)} & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^n \alpha_k B_k^{(2)} + \sum_{l=1}^m \beta_l C_l^{(2)} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y por otro lado

$$\hat{\rho}_\psi(1_D) = \begin{pmatrix} \text{id}_{M_n(E)} & 0 \\ 0 & \text{id}_{M_m(E)} \end{pmatrix},$$

lo cual prueba las condiciones (2.4.9) y (2.4.10) □

La representación $\hat{\phi}_\psi: A \rightarrow M_{m+n}(A)$ de la Proposición 2.2.5 viene dada por

$$\hat{\phi}_\psi(a) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_1^1(a) & \dots & \tilde{\gamma}_{n+m}^1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\gamma}_1^{n+m}(a) & \dots & \tilde{\gamma}_{n+m}^{n+m}(a) \end{pmatrix} \text{ para } a \in A, \quad (2.4.11)$$

Escribamos

$$\hat{\phi}_\psi(a) = \begin{pmatrix} \Gamma_0^0(a) & \Gamma_1^0(a) \\ \Gamma_0^1(a) & \Gamma_1^1(a) \end{pmatrix},$$

con $\Gamma_0^0(a) \in M_n(K)$, $\Gamma_1^0(a) \in M_{n \times m}(K)$, $\Gamma_0^1(a) \in M_{m \times n}(K)$ y $\Gamma_1^1(a) \in M_m(K)$.

Observación 2.4.2. La ecuación (2.4.3) muestra que $\Gamma_1^0 = 0$ si y solo si $\psi(A \otimes C) \subseteq C \otimes A$.

Lema 2.4.3. La aplicación $\hat{\phi}_\psi: A \rightarrow M_{m+n}(A)$ definida por (2.4.11), es una representación si y solo si las siguientes condiciones se satisfacen:

$$\Gamma_0^0(1) = I_n, \quad \Gamma_1^1(1) = I_m, \quad \Gamma_1^0(1) = 0, \quad \Gamma_0^1(1) = 0 \quad (2.4.12)$$

y

$$\Gamma_q^p(aa') = \Gamma_0^p(a)\Gamma_q^0(a') + \Gamma_1^p(a)\Gamma_q^1(a') \text{ para } a, a' \in A \text{ y } 0 \leq p, q \leq 1. \quad (2.4.13)$$

Demostración. La prueba de este lema es directa, solo se debe realizar el producto de matrices. □

Lema 2.4.4. Sea $\psi: A \otimes D \longrightarrow D \otimes A$ una aplicación K -lineal y sean $\tilde{\gamma}_i^j$ ($1 \leq i, j \leq m+n$) las aplicaciones determinadas por la igualdad (2.4.3). Sea $i_B: B \rightarrow D$ y $p_B: D \rightarrow B$ las inclusión canónica y la proyección canónica, respectivamente, y suponga que la aplicación $\Theta := (p_B \otimes A) \circ \psi \circ (A \otimes i_B)$ es de torcimiento. Entonces ψ es una aplicación de torcimiento si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones

$$B_i^{(2)} B_j^{(2)} = \sum_{k=1}^n \lambda_{ji}^k B_k^{(2)} \quad \text{para } 1 \leq i, j \leq n, \quad (2.4.14)$$

$$C_j^{(1)} = 0, \quad (2.4.15)$$

$$C_i^{(2)} C_j^{(2)} = \sum_{k=1}^m \eta_{ji}^k C_k^{(2)} \quad \text{para } 1 \leq i, j \leq m, \quad (2.4.16)$$

$$B_i^{(2)} C_j^{(2)} = C_j^{(2)} B_i^{(2)} = 0 \quad \text{para } 1 \leq i \leq n \text{ y } 1 \leq j \leq m, \quad (2.4.17)$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i B_i^{(2)} + \sum_{j=1}^m \beta_j C_j^{(2)} = \text{id}_{M_m(E)}, \quad (2.4.18)$$

$$\Gamma_1^p(aa') = \Gamma_0^p(a)\Gamma_1^0(a') + \Gamma_1^p(a)\Gamma_1^1(a') \quad \text{para } a, a' \in A \text{ y } 0 \leq p \leq 1, \quad (2.4.19)$$

$$\Gamma_0^1(aa') = \Gamma_0^1(a)\Gamma_0^0(a') + \Gamma_1^1(a)\Gamma_0^1(a') \quad \text{para } a, a' \in A, \quad (2.4.20)$$

$$\Gamma_1^0(a)\Gamma_0^1(a') = 0 \quad \text{para } a, a' \in A, \quad (2.4.21)$$

y

$$\Gamma_1^1(1) = I_m, \quad \Gamma_1^0(1) = 0, \quad \Gamma_0^1(1) = 0. \quad (2.4.22)$$

Demostración. Debido al Corolario 2.2.2, Proposición 2.2.5, Lema 2.4.1 y Lema 2.4.3, sabemos que ψ es una aplicación de torcimiento si y solo si las condiciones (2.4.6)-(2.4.10), (2.4.12) y (2.4.13) son satisfechas completamente. Puesto que $\Gamma_0^0(a) = \hat{\phi}_\Theta(a)$ y Θ es una aplicación de torcimiento, obtenemos

$$\Gamma_0^0(aa') = \Gamma_0^0(a)\Gamma_0^0(a') \quad \text{y} \quad \Gamma_0^0(1) = I_n.$$

Así, las condiciones (2.4.12) y (2.4.13) son equivalentes a las condiciones (2.4.19)-(2.4.22). Más aún, siempre que Θ es una aplicación de torcimiento y $B_i^{(1)} = \hat{\rho}_\Theta(b_i^{op})$, tenemos que

$$B_i^{(1)} B_j^{(1)} = \sum_{k=1}^n \lambda_{ji}^k B_k^{(1)} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i B_i^{(1)} = \text{id}_{M_n(E)}.$$

Entonces, la condición (2.4.6) es satisfecha para $l = 1$, y la condición (2.4.9) se convierte en en

$$\sum_{j=1}^m \beta_j C_j^{(1)} = 0.$$

De esta manera, si ψ es una aplicación de torcimiento, entonces

$$\hat{\rho}_\psi(1_C) = \sum_{j=1}^m \beta_j \hat{\rho}_\psi(c_j) = \sum_{j=1}^m \beta_j \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_j^{(2)} \end{pmatrix},$$

puesto que $\hat{\rho}_\psi$ es una representación, y entonces $C_j^{(1)} = 0$. Recíprocamente, si las condiciones (2.4.14)-(2.4.22) son satisfechas completamente y Θ es una aplicación de torcimiento, entonces un cálculo directo muestra que las condiciones (2.4.6)-(2.4.10), (2.4.12) y (2.4.13) son satisfechas, lo cual prueba que ψ es una aplicación de torcimiento. \square

Teorema 2.4.5. Sea $\psi: A \otimes D \rightarrow D \otimes A$ una aplicación y $\tilde{\gamma}_i^j$ ($1 \leq i, j \leq m+n$) las aplicaciones determinadas por la ecuación (2.4.3). Sean $i_B: B \rightarrow D$ y $p_B: D \rightarrow B$ la inclusión y proyección canónicas, respectivamente, y supongamos que la aplicación $\Theta := (p_B \otimes A) \circ \psi \circ (A \otimes i_B)$ es de torcimiento. Entonces ψ es una aplicación de torcimiento si y solo si las siguientes condiciones se satisfacen

$$B_i^{(2)} B_j^{(2)} = \sum_{k=1}^n \lambda_{ji}^k B_k^{(2)} \quad \text{para } 1 \leq i, j \leq n, \quad (2.4.23)$$

$$C_j^{(1)} = 0, \quad (2.4.24)$$

$$C_i^{(2)} C_j^{(2)} = \sum_{k=1}^m \eta_{ji}^k C_k^{(2)} \quad \text{para } 1 \leq i, j \leq m, \quad (2.4.25)$$

$$B_i^{(2)} C_j^{(2)} = C_j^{(2)} B_i^{(2)} = 0 \quad \text{para } 1 \leq i \leq n \text{ y } 1 \leq j \leq m, \quad (2.4.26)$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i B_i^{(2)} + \sum_{j=1}^m \beta_j C_j^{(2)} = \text{id}_{M_m(E)}, \quad (2.4.27)$$

$$\Gamma_1^0 = 0, \quad (2.4.28)$$

$$\Gamma_1^1(aa') = \Gamma_1^1(a)\Gamma_1^1(a') \quad \text{para } a, a' \in A, \quad (2.4.29)$$

$$\Gamma_0^1(aa') = \Gamma_0^1(a)\Gamma_0^1(a') + \Gamma_1^1(a)\Gamma_0^1(a') \quad \text{para } a, a' \in A, \quad (2.4.30)$$

y

$$\Gamma_1^1(1) = I_m, \quad \Gamma_0^1(1) = 0. \quad (2.4.31)$$

Demostración. \Leftarrow) Debido al Lema 2.4.4, esta implicación es clara.

\Rightarrow) Nuevamente debido al Lema 2.4.4 es suficiente mostrar que $\Gamma_1^0 = 0$ o, equivalentemente, que $\psi(A \otimes C) \subseteq C \otimes A$. Módulo un cambio de base, podemos asumir que $b_1 = 1_B$. En este caso, a partir de $C_i^{(1)}$ obtenemos:

$$\tilde{\gamma}_{i+n}^j = \sum_{l=1}^n \delta_{jl} \tilde{\gamma}_{i+n}^l = \sum_{l=1}^n \lambda_{1l}^j \tilde{\gamma}_{i+n}^l = (C_i^{(1)})_{j1} = 0$$

para $i \in \{1, \dots, n\}$ y $j \in \{1, \dots, m\}$, como queríamos. \square

Observación 2.4.6. Para cada elemento a en A , escribamos

$$\varphi_B(a) := \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_1^1(a) & \dots & \tilde{\gamma}_n^1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\gamma}_1^n(a) & \dots & \tilde{\gamma}_n^n(a) \end{pmatrix},$$

$$\varphi_C(a) := \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_{n+1}^{n+1}(a) & \dots & \tilde{\gamma}_{n+m}^{n+1}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\gamma}_{n+1}^{n+m}(a) & \dots & \tilde{\gamma}_{n+m}^{n+m}(a) \end{pmatrix}$$

y

$$\Delta(a) := \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_1^{n+1}(a) & \dots & \tilde{\gamma}_n^{n+1}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\gamma}_1^{n+m}(a) & \dots & \tilde{\gamma}_n^{n+m}(a) \end{pmatrix}.$$

Si las hipótesis de la Proposición 2.4.5 son satisfechas, entonces

$$\varphi_\psi(a) = \begin{pmatrix} \varphi_B(a) & 0 \\ \Delta(a) & \varphi_C(a) \end{pmatrix} \quad \text{para todo } a \in A. \quad (2.4.32)$$

Además, puesto que φ_ψ es una representación, las siguientes igualdades son satisfechas

$$\begin{aligned} \varphi_B(aa') &= \varphi_B(a)\varphi_B(a'), \\ \varphi_C(aa') &= \varphi_C(a)\varphi_C(a') \end{aligned}$$

y

$$\Delta(aa') = \Delta(a)\varphi_B(a') + \varphi_C(a)\Delta(a'),$$

para todo $a, a' \in A$.

Corolario 2.4.7. *Supongamos que las hipótesis de la Proposición 2.4.4 son satisfechas. Sea $i_C: C \rightarrow D$ y $p_C: D \rightarrow C$ la inclusión y la proyección canónica, respectivamente. Si la aplicación $\Upsilon := (p_C \otimes A) \circ \psi \circ (A \otimes i_C)$ es de torcimiento, entonces ψ es una aplicación de torcimiento si y solo si $\psi = \Theta \oplus \Upsilon$*

Demostración. Usar la Proposición 2.4.5 y Observación 2.4.2 aplicados a B y C . □

2.5 Cambio de base

La representación introducida en la Sección 2.2 depende de la elección de una base en B . En esta sección analizamos como las representaciones φ_χ y $\hat{\rho}_\chi$ se comportan bajo el cambio de base.

Sea A, B y C álgebras sobre un cuerpo K y sea $f: B \rightarrow C$ un morfismo de álgebras. Asumamos que B y C son finito dimensionales y fijamos las bases $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ y $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_m\}$ de B y C , respectivamente. Consideremos la matriz

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) := \begin{pmatrix} \zeta_1^1 \cdot 1_A & \cdots & \zeta_n^1 \cdot 1_A \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_1^m \cdot 1_A & \cdots & \zeta_n^m \cdot 1_A \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(A),$$

donde los escalares $\zeta_i^j \in K$ son determinados por las igualdades

$$f(b_j) = \sum_{i=1}^m \zeta_j^i \cdot c_i.$$

Proposición 2.5.1. *Sean $\chi: A \otimes B \rightarrow B \otimes A$ y $\varpi: A \otimes C \rightarrow C \otimes A$ aplicaciones de torcimiento. La aplicación*

$$f \otimes A: B \otimes_\chi A \rightarrow C \otimes_\varpi A$$

es un morfismo de álgebras si y solo si

$$\varpi_\varpi(a) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) \varphi_\chi(a) \quad \text{para todo } a \in A, \quad (2.5.33)$$

donde φ_ϖ y φ_χ son las representaciones definidas en Corolario 2.2.9.

Demostración. Sean $\gamma_i^j: A \rightarrow A$ ($1 \leq i, j \leq n$) y $\tilde{\gamma}_i^j: A \rightarrow A$ ($1 \leq i, j \leq m$) las aplicaciones determinadas por la igualdad (2.3.2) aplicada a χ y ϖ , respectivamente. Un cálculo directo usando la Observación (1.12) muestra que $f \otimes A$ es un morfismo si y solo si

$$\sum_{i=1}^n \zeta_i^j \cdot \gamma_k^i(a) = \sum_{u=1}^m \zeta_k^u \cdot \tilde{\gamma}_u^j(a) \quad \text{para todo } a \in A. \quad (2.5.34)$$

Pero esto ocurre si y solo si las condiciones (2.5.33) son satisfechas. \square

Observación 2.5.2. *Sea*

$$\widehat{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) := \begin{pmatrix} \zeta_1^1 \cdot \text{id} & \dots & \zeta_n^1 \cdot \text{id} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_1^m \cdot \text{id} & \dots & \zeta_n^m \cdot \text{id} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(E).$$

Un cálculo directo usando (2.5.33) muestra que bajo las hipótesis de la Proposición 2.5.1, tenemos

$$\hat{\rho}_{\varpi}(f(b)^{op}) \widehat{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) = \widehat{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) \hat{\rho}_{\chi}(b^{op}),$$

para todo $b \in B$.

Corolario 2.5.3. *Sea $\mathcal{B}' := \{b'_1, \dots, b'_n\}$ otra base para B y sean φ'_χ y $\hat{\rho}'_\chi$ las representaciones asociadas a χ de acuerdo a los Corolarios 2.2.2 y 2.2.9, pero usando la base \mathcal{B}' en lugar de \mathcal{B} . Sea $M := M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\text{id}_B)$ y $\widehat{M} := \widehat{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\text{id}_B)$. Entonces*

$$\varphi'_\chi(a) = M \varphi_\chi(a) M^{-1} \quad \text{and} \quad \hat{\rho}'_\chi(b^{op}) = \widehat{M} \hat{\rho}_\chi(b^{op}) \widehat{M}^{-1}, \text{ para todo } a \in A \text{ y } b \in B.$$

Demostración. Se obtiene luego de realizar el producto de matrices empleando la ecuación (2.5.33) de la Proposición 2.5.1 y la Observación 2.5.2. \square

2.6 Ejemplos

2.6.1 Duplicados no-conmutativos de conjuntos finitos

Consideremos el álgebra $B = \frac{K[X]}{\langle X^2 - X \rangle}$ con base $\mathcal{B} = \{1, X\}$. Las matrices de estructura de 1 y X con respecto a (B, \mathcal{B}) (ver Definición 2.2.3) son las matrices

$$[X]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad [1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Consideremos la aplicación $\chi: A \otimes B \rightarrow B \otimes A$. Si procedemos como en la Sección 2.1 determinamos las aplicaciones $\gamma_2^1: A \rightarrow A$ y $\gamma_2^2: A \rightarrow A$ tales que

$$\chi(a \otimes X) = 1 \otimes \gamma_2^1(a) + X \otimes \gamma_2^2(a).$$

Debido al Corolario 2.2.2 y Proposición 2.2.5 sabemos que la aplicación χ es un torcimiento si y solo si las aplicaciones $\hat{\rho}_\chi: B^{op} \rightarrow M_n(E)$ y $\hat{\phi}_\chi: A \rightarrow M_n(A)$ son representaciones matriciales. Los productos tensoriales torcidos asociados $A \otimes_\chi B$ fueron estudiados en [8], donde son llamados *Non-Commutative Duplicates* (En realidad, se estudian los productos tensoriales torcidos $B \otimes_\chi A$, donde se obtienen los mismos resultados, tomando las álgebras opuestas).

La aplicación $\hat{\rho}_B: B^{\text{op}} \rightarrow M_2(E)$ es dada por la matrices

$$\hat{\rho}_B(X) = \begin{pmatrix} \gamma_2^1 & 0 \\ \gamma_2^2 & \gamma_2^1 + \gamma_2^2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{\rho}_B(1) = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix}.$$

Las igualdades $\hat{\rho}_B(X) = \hat{\rho}_B(X^2) = \hat{\rho}_B(X)^2$ determinan las condiciones

- (1) $\gamma_2^1 \circ \gamma_2^1 = \gamma_2^1$,
- (2) $\gamma_2^2 \circ \gamma_2^1 + \gamma_2^1 \circ \gamma_2^2 + \gamma_2^2 \circ \gamma_2^2 = \gamma_2^2$,
- (3) $(\gamma_2^1 + \gamma_2^2)^2 = \gamma_2^1 + \gamma_2^2$,

que las aplicaciones γ_2^1, γ_2^2 deben satisfacer para que $\hat{\rho}_B$ sea una representación.

Por otro lado, la aplicación $\hat{\phi}_\chi$ es dada por las matrices

$$\hat{\phi}_\chi(a) := \begin{pmatrix} a & \gamma_2^1(a) \\ 0 & \gamma_2^2(a) \end{pmatrix} \quad \text{para } a \in A.$$

Un cálculo directo muestra que $\hat{\phi}_\chi$ es una representación si y solo las aplicaciones γ_2^1 y γ_2^2 satisfacen

- (4) $\gamma_2^1(1) = 0$,
- (5) $\gamma_2^2(1) = 1$,
- (6) $\gamma_2^1(ab) = a\gamma_2^1(b) + \gamma_2^1(a)\gamma_2^2(b)$,
- (7) $\gamma_2^2(ab) = \gamma_2^2(a)\gamma_2^2(b)$.

Es fácil verificar que las condiciones (1) y (2) implican la condición (3), mientras que las condiciones (5) y (6) implican la condición (4). Además, las condiciones establecidas son satisfechas si y solo si $f := \gamma_2^2$ es un endomorfismo de A y $\delta := \gamma_2^1$ es una (id, f) -derivación satisfaciendo $f = f^2 + \delta \circ f + f \circ \delta$ (compare con [8, Definition 2.7]).

Finalmente, la representación φ_χ en el Corolario 2.2.9 viene dada por las matrices

$$\varphi_\chi(a) := \begin{pmatrix} a & \gamma_2^1(a) \\ 0 & \gamma_2^2(a) \end{pmatrix} \quad \text{para } a \in A, \quad \varphi_\chi(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \varphi_\chi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.6.2 Estructuras de Factorización con un factor de dimensión 2

Dado un polinomio $P(X) := X^2 - \alpha X + \beta \in K[X]$ consideremos el álgebra $B = \frac{K[X]}{\langle P(X) \rangle}$ con la base $\mathcal{B} = \{1, X\}$. Las constantes de estructura de 1 y X con respecto a (B, \mathcal{B}) son las matrices

$$[X]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad [1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considere la aplicación $\chi: A \otimes B \rightarrow B \otimes A$. Procedemos como antes y determinamos las aplicaciones $\gamma_2^1: A \rightarrow A$ y $\gamma_2^2: A \rightarrow A$ tales que

$$\chi(a \otimes X) = 1 \otimes \gamma_2^1(a) + X \otimes \gamma_2^2(a).$$

Como antes, χ es una aplicación de torcimiento si y solo si las aplicaciones $\hat{\rho}_\chi: B^{\text{op}} \rightarrow M_n(E)$ y $\hat{\phi}_\chi: A \rightarrow M_n(A)$ son representaciones matriciales. Los productos tensoriales torcidos asociados $A \otimes_\chi B$ (respectivamente $B \otimes_\chi A$) fueron estudiados en [14], donde fueron llamados *quantum duplicates*. Las aplicaciones f y δ consideradas en dicho artículo corresponden a las aplicaciones γ_2^2 y γ_2^1 , respectivamente.

La aplicación $\hat{\rho}_B: B^{\text{op}} \rightarrow M_2(E)$ viene dada por las matrices

$$\hat{\rho}_B(X) = \begin{pmatrix} \gamma_2^1 & -\beta\gamma_2^2 \\ \gamma_2^2 & \gamma_2^1 + \alpha\gamma_2^2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{\rho}_B(1) = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix}.$$

Las igualdades $\hat{\rho}_B(X)^2 = \hat{\rho}_B(X^2) = \alpha\hat{\rho}_B(X) - \beta\hat{\rho}_B(1)$ determinan las condiciones

$$(1) \quad \gamma_2^1 \circ \gamma_2^1 - \beta\gamma_2^2 \circ \gamma_2^2 = \alpha\gamma_2^1 - \beta \text{id},$$

$$(2) \quad \gamma_2^1 \circ \gamma_2^2 + \gamma_2^2 \circ \gamma_2^1 + \alpha\gamma_2^2 \circ \gamma_2^2 = \alpha\gamma_2^2,$$

que las aplicaciones γ_2^1, γ_2^2 deben satisfacer para que $\hat{\rho}_B$ sea una representación

Por otro lado, la aplicación $\hat{\phi}_\chi$ es dada por las matrices

$$\hat{\phi}_\chi(a) = \begin{pmatrix} a & \gamma_2^1(a) \\ 0 & \gamma_2^2(a) \end{pmatrix} \quad \text{para } a \in A.$$

Un cálculo directo muestra que $\hat{\phi}_\chi$ es una representación si y solo si las aplicaciones γ_2^1 y γ_2^2 satisfacen

$$(3) \quad \gamma_2^2(1) = 1,$$

$$(4) \quad \gamma_2^1(ab) = a\gamma_2^1(b) + \gamma_2^1(a)\gamma_2^2(b),$$

$$(5) \quad \gamma_2^2(ab) = \gamma_2^2(a)\gamma_2^2(b).$$

Además, las condiciones son satisfechas si y solo si $f := \gamma_2^2$ es un endomorfismo de A y $\delta := \gamma_2^1$ es una (id, f) -derivación satisfaciendo

$$P(\delta) = \beta f^2 \quad \text{y} \quad f \circ \delta + \delta \circ f = \alpha(f - f^2),$$

(compare con [14, Lemma 1.1]).

Finalmente la representación φ_χ en el Corolario 2.2.9 es dada por las matrices

$$\varphi_\chi(a) = \begin{pmatrix} a & \gamma_2^1(a) \\ 0 & \gamma_2^2(a) \end{pmatrix} \quad \text{para } a \in A, \quad \varphi_\chi(X) = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \varphi_\chi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.6.3 Aplicaciones de torcimiento con K^n

Sean $B := K^n$ y $\mathcal{B}_2 = \{e_1, \dots, e_n\}$ la base canónica de B . Las matrices de estructura de e_1, \dots, e_n con respecto a (B, \mathcal{B}) son las matrices e_{11}, \dots, e_{nn} , donde e_{ii} es la matriz con 1 en la i -ésima entrada de la diagonal principal y 0 en las otras entradas. Dado un producto tensorial torcido $\chi: B \otimes A \rightarrow A \otimes B$ tenemos aplicaciones $\tilde{\gamma}_i^j: A \rightarrow A$ ($1 \leq i, j \leq n$) definidas por la ecuación

$$\chi(a \otimes e_i) = \sum_{j=1}^n e_1 \otimes \tilde{\gamma}_i^j(a).$$

Como antes, χ es una aplicación de torcimiento si y solo si las aplicaciones $\hat{\rho}_\chi: B^{\text{op}} \rightarrow M_n(E)$ y $\hat{\phi}_\chi: A \rightarrow M_n(A)$ son representaciones matriciales. Los productos tensoriales torcidos $A \otimes_\chi B$ fueron estudiados en [12]. Las aplicaciones E_{ji} consideradas en dicho artículo corresponde a las aplicaciones $\tilde{\gamma}_j^i$.

La aplicación $\hat{\rho}_B: B^{\text{op}} \rightarrow M_n(E)$ está dada por las matrices

$$\hat{\rho}_B(e_i) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_i^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{\gamma}_i^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{\gamma}_i^n \end{pmatrix}.$$

Las igualdades

$$\hat{\rho}_B(e_i)^2 = \hat{\rho}_B(e_i), \quad \hat{\rho}_B(e_i)\hat{\rho}_B(e_j) = 0 \quad \text{y} \quad \hat{\rho}_B(e_1) + \dots + \hat{\rho}_B(e_n) = \text{id}$$

determinan las condiciones

- (1) $\tilde{\gamma}_i^p \circ \tilde{\gamma}_j^p = \delta_{ij}\tilde{\gamma}_i^p$ ($1 \leq i, j, p \leq n$),
- (2) $\sum_{j=1}^n \tilde{\gamma}_j^i = \text{id}_A$ para $i = 1, \dots, n$,

que las aplicaciones $\tilde{\gamma}_{ij}^p$ deben satisfacer para que la aplicación $\hat{\rho}_B$ sea una representación.

Por otro lado, la aplicación $\hat{\phi}_\chi$ viene dada por las matrices

$$\hat{\phi}_\chi(a) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_1^1(a) & \dots & \tilde{\gamma}_n^1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\gamma}_1^n(a) & \dots & \tilde{\gamma}_n^n(a) \end{pmatrix} \quad \text{para } a \in A.$$

Un cálculo directo muestra que $\hat{\phi}_\chi$ es una representación si y solo si las aplicaciones $\tilde{\gamma}_j^i$ satisfacen

- (3) $\tilde{\gamma}_j^i(ab) = \sum_{p=1}^n \tilde{\gamma}_p^i(a)\tilde{\gamma}_j^p(b)$ para $i, j = 1, \dots, n$,
- (4) $\tilde{\gamma}_j^i(1_A) = \delta_{ij}1_A$ para $i, j = 1, \dots, n$.

Las condiciones (1)–(4) corresponden a las condiciones (6)–(9) en [12].

Cuando $n = 2$, tenemos el isomorfismo $\frac{k[X]}{(X^2 - X)} \simeq K^2$ el cual envía X a e_2 . Usando la proposición 2.5.1 un cálculo directo muestra que las aplicaciones f y δ en el primer ejemplo satisfacen

$$f = \tilde{\gamma}_2^2 - \tilde{\gamma}_2^1 \quad \text{y} \quad \delta = \tilde{\gamma}_2^1.$$

La matriz de representación $\hat{\phi}_\chi$ puede ser usada para definir un par $(Q_\chi, \mathcal{R}_\chi)$ donde Q_χ es un quiver y \mathcal{R}_χ es una representación del quiver Q_χ , como sigue

Definición 2.6.1. *El quiver Q_χ es definido como sigue: El conjunto de vértices de Γ_χ es $\{v_1, \dots, v_n\}$. Los vértices v_i y v_j son unidos por una flecha con inicio en v_j si y solo si $\tilde{\gamma}_j^i \neq 0$*

Definición 2.6.2. *Sea Q_χ el quiver asociado a $\hat{\phi}_\chi$. La representación \mathcal{R}_χ de Q_χ es definida por la familia de espacios vectoriales $\{V_i\}_{i \in Q_\chi^0}$ y la familia de aplicaciones K -lineales $\{f_\alpha\}_{\alpha \in Q_\chi^1}$, donde*

$$V_i = A, \quad f_\alpha = \tilde{\gamma}_j^i: V_j \rightarrow V_i, \quad j = s(\alpha), i = t(\alpha).$$

Observación 2.6.3. La aplicación χ es una aplicación de torcimiento si y solo si el par $(Q_\chi, \mathcal{R}_\chi)$ es admisible de orden n (ver [12, Definición 1.7])

- (1) Las condiciones (1)–(2) corresponden a splitted condition (ver [12, Proposición 1.6])
- (2) La condición (3) corresponde a unital condition (ver [12, Proposición 1.6])
- (3) La condición (4) corresponde a factorizable condition (ver [12, Proposición 1.6])

2.6.4 Extensiones de aplicaciones de torcimiento con K^m a aplicaciones de torcimiento con K^n

Consideremos una aplicación de torcimiento $\chi: A \otimes K^n \rightarrow K^n \otimes A$ definida por $\chi(a \otimes e_j) = \sum_{i=1}^n e_i \otimes \tilde{\gamma}_j^i(a)$ y supongamos que existen $m < n$ tal que la aplicación $\Theta: A \otimes K^m \rightarrow K^m \otimes A$ definida por $\Theta(a \otimes e_j) = \sum_{i=1}^m e_i \otimes \tilde{\gamma}_j^i(a)$ for $j \in \{1, \dots, m\}$ es una aplicación de torcimiento. Escribamos

$$C_j^{(1)} = \hat{\rho}_B(e_j) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_j^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{\gamma}_j^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{\gamma}_j^m \end{pmatrix}, \quad \text{para } j \in \{m+1, \dots, n\}.$$

Entonces, vía la Proposición 2.4.4, tenemos $C_j^{(1)} = 0$ para $j \in \{m+1, \dots, n\}$. Así, $\tilde{\gamma}_j^i = 0$ para $i \in \{1, \dots, m\}$ y $j \in \{m+1, \dots, n\}$. Además, la representación $\hat{\phi}_\chi$ resulta ser

$$\hat{\phi}_\chi(a) = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_\Theta(a) & 0 \\ \Delta(a) & \hat{\phi}_{K^{n-m}}(a) \end{pmatrix} \quad \text{para todo } a \in A, \quad (2.6.35)$$

donde

$$\Delta(a) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_1^{m+1}(a) & \dots & \tilde{\gamma}_m^{m+1}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\gamma}_1^n(a) & \dots & \tilde{\gamma}_m^n(a) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \varphi_{K^{n-m}}(a) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_{m+1}^{m+1}(a) & \dots & \tilde{\gamma}_n^{m+1}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\gamma}_{m+1}^n(a) & \dots & \tilde{\gamma}_n^n(a) \end{pmatrix},$$

para $a \in A$.

En particular, Los productos tensoriales torcidos que se obtienen de un quiver de rango 1 con un ciclo de longitud 2 y son estudiados en [12, teorema 4.6], son extensiones de un producto tensorial torcido generado por la aplicación de torcimiento $\Theta: A \otimes K^2 \rightarrow K^2 \otimes A$.

Por otro lado, cuando la aplicación $\Upsilon: A \otimes K^{n-m} \rightarrow K^{n-m} \otimes A$ definida por $\Upsilon(a \otimes e_j) = \sum_{i=m+1}^n e_i \otimes \tilde{\gamma}_j^i(a)$ para $j \in \{m+1, \dots, n\}$ es una aplicación de torcimiento, escribamos

$$B_j^{(2)} = \hat{\rho}_B(e_j) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_j^{m+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{\gamma}_j^{m+2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{\gamma}_j^n \end{pmatrix}, \quad \text{para } j \in \{1, \dots, m\}.$$

Entonces, vía el Corolario 2.4.7, resulta que $B_j^{(2)} = 0$ para $j \in \{1, \dots, m\}$. Así, $\tilde{\gamma}_j^i = 0$ para $i \in \{m+1, \dots, n\}$ y $j \in \{1, \dots, m\}$. Además, la representación φ_χ resulta ser

$$\varphi_\chi(a) = \begin{pmatrix} \varphi_\Theta(a) & 0 \\ 0 & \varphi_\Upsilon(a) \end{pmatrix} \quad \text{para todo } a \in A, \quad (2.6.36)$$

Los productos tensoriales torcidos en el caso $m = 2$ y para los cuales Υ proviene de un quiver de rango 1 sin ciclos de longitud 2 fueron estudiados en [12, teorema 4.6], y corresponden a extensiones de productos tensoriales torcidos generados por alguna aplicación de torcimiento $\Theta: A \otimes K^2 \rightarrow K^2 \otimes A$. Por ejemplo, las aplicaciones de torcimiento para las cuales $\varphi_\Upsilon = \text{id}$ fueron estudiadas en [12, Corollary 4.3].

Ahora, construiremos extensiones de K^2 a K^3 . Considere una aplicación de torcimiento $\chi: K^3 \otimes K^3 \rightarrow K^3 \otimes K^3$ definida por

$$\chi(a \otimes e_j) = e_1 \otimes \tilde{\gamma}_j^1(a) + e_2 \otimes \tilde{\gamma}_j^2(a) + e_3 \otimes \tilde{\gamma}_j^3(a) \quad j \in \{1, 2, 3\}$$

y supongamos que la aplicación $\Theta: K^3 \otimes K^2 \rightarrow K^2 \otimes K^3$ definida por

$$\Theta(a \otimes e_j) = e_1 \otimes \tilde{\gamma}_j^1(a) + e_2 \otimes \tilde{\gamma}_j^2(a) \quad j \in \{1, 2\}$$

es una aplicación de torcimiento. Entonces, vía la Proposición 2.4.5, nosotros sabemos que $\tilde{\gamma}_3^1 = \tilde{\gamma}_3^2 = 0$.

Por otro lado, las aplicaciones de torcimiento $K^3 \otimes K^2 \rightarrow K^2 \otimes K^3$ fueron clasificadas en [12, teorema 4.2]. Así, una vez elegido Θ existen $a_1, a_2, a_3 \in K$ y una aplicación $u: \{1, \dots, 3\} \rightarrow \{1, \dots, 3\}$ tales que $\sum_{j=1}^2 \tilde{\gamma}_j^i = \text{id}_A$ para $i = 1, 2$,

$$\tilde{\gamma}_1^1(a) = \sum_{p=1}^3 [(1 - a_p) f_p^*(a) + a_p f_{u(p)}^*(a)] f_p, \quad (2.6.37)$$

$$\tilde{\gamma}_2^1(a) = \sum_{p=1}^3 [a_p f_p^*(a) - a_p f_{u(p)}^*(a)] f_p, \quad (2.6.38)$$

y

$$\tilde{\gamma}_2^2(a) = \sum_{p=1}^3 [a_p f_p^*(a) + (1 - a_p) f_{u(p)}^*(a)] f_p, \quad (2.6.39)$$

$$\tilde{\gamma}_1^2(a) = \sum_{p=1}^3 [(1 - a_p) f_p^*(a) - (1 - a_p) f_{u(p)}^*(a)] f_p, \quad (2.6.40)$$

donde $\{f_1, f_2, f_3\}$ es la base canónica de K^m y $\{f_1^*, f_2^*, f_3^*\}$ es la base dual.

Con el fin de obtener una aplicación de torcimiento $\chi: K^3 \otimes K^3 \rightarrow K^3 \otimes K^3$ consideremos Θ en un caso particular, supongamos que $a_1 = a_2 = 0, a_3 = 1$ y $u(1) = 2, u(3) = 1, u(2) = 2$, y definamos

$$\tilde{\gamma}_1^3(a) = (f_2^*(a) - f_1^*(a)) f_2, \quad (2.6.41)$$

$$\tilde{\gamma}_2^3(a) = (f_3^*(a) - f_1^*(a)) f_3, \quad (2.6.42)$$

$$\tilde{\gamma}_3^3(a) = \sum_{p=1}^3 [f_1^*(a)] f_p. \quad (2.6.43)$$

Así, obtenemos una aplicación de torcimiento χ de rango reducido 2.

2.6.5 Extensiones polinomiales no conmutativas truncadas

Sea $B := \frac{K[Y]}{\langle Y^n \rangle}$ con la base $\mathcal{B} = \{1, Y, Y^2, \dots, Y^{n-1}\}$. Las matrices de estructura de 1 e Y con respecto a (B, \mathcal{B}) son las matrices

$$[Y]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad [1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Dada una aplicación $\chi: B \otimes A \rightarrow A \otimes B$ tenemos aplicaciones únicas $\tilde{\gamma}_i^j: A \rightarrow A$ ($0 \leq i, j \leq n-1$) tales que

$$\chi(a \otimes Y^i) = \sum_{j=0}^{n-1} Y^j \otimes \tilde{\gamma}_i^j(a).$$

Sabemos que χ es una aplicación de torcimiento si y solo si $\hat{\rho}_\chi: B^{\text{op}} \rightarrow M_n(E)$ y $\hat{\phi}_\chi: A \rightarrow M_n(A)$ son representaciones matriciales. Los productos tensoriales torcidos asociados $A \otimes_\chi B$ fueron estudiados en [10]. Las aplicaciones $\tilde{\gamma}_i^j: A^{\text{op}} \rightarrow A^{\text{op}}$ consideradas en dicho artículo se encuentran relacionadas a las aplicaciones $\tilde{\gamma}_j^i: A \rightarrow A$ vía las ecuaciones $\tilde{\gamma}_i^j(a^{\text{op}}) = \tilde{\gamma}_j^i(a)$ para $0 \leq i, j < n$ y todo $a \in A$.

La aplicación $\hat{\rho}_B: B^{\text{op}} \rightarrow M_n(E)$ viene dada por las matrices

$$\hat{\rho}_B(Y^i) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_i^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{\gamma}_i^1 & \tilde{\gamma}_i^0 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{\gamma}_i^2 & \tilde{\gamma}_i^1 & \tilde{\gamma}_i^0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\gamma}_i^{n-1} & \tilde{\gamma}_i^{n-2} & \tilde{\gamma}_i^{n-3} & \dots & \tilde{\gamma}_i^0 \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones

$$\hat{\rho}_B(Y^r) = \hat{\rho}_B(Y^{r-i})\hat{\rho}_B(Y^i), \quad \hat{\rho}_B(Y^n) = 0 \quad \text{y} \quad \hat{\rho}_B(1) = \text{id}$$

determinan las condiciones

- (1) $\tilde{\gamma}_0^j = \delta_{0j} \text{id}$,
- (2) $\tilde{\gamma}_r^j = \sum_{l=0}^j \tilde{\gamma}_{r-i}^{j-l} \circ \tilde{\gamma}_i^l$ para $j < n$, $1 < r < n$ y $0 < i < r$,
- (3) $\sum_{l=0}^j \tilde{\gamma}_{n-i}^{j-l} \circ \tilde{\gamma}_i^l = 0$ para $j < n$ y $0 < i < n$,

que las aplicaciones $\tilde{\gamma}_{ij}^p$ deben satisfacer para que $\hat{\rho}_B$ sea una representación.

Por otro lado, la aplicación $\hat{\phi}_\chi$ viene dada por las matrices

$$\hat{\phi}_\chi(a) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_0^0(a) & \dots & \tilde{\gamma}_{n-1}^0(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\gamma}_0^{n-1}(a) & \dots & \tilde{\gamma}_{n-1}^{n-1}(a) \end{pmatrix} \quad \text{for } a \in A.$$

Un cálculo directo muestra que $\hat{\phi}_\chi$ es una representación si y solo si las aplicaciones $\tilde{\gamma}_j^i$ satisfacen

$$(4) \tilde{\gamma}_j^i(ab) = \sum_{p=1}^n \tilde{\gamma}_p^i(a) \tilde{\gamma}_j^p(b) \text{ para } i, j = 0, \dots, n-1,$$

$$(5) \tilde{\gamma}_j^i(1_A) = \delta_{ij} 1_A \text{ para } i, j = 0, \dots, n-1.$$

Las condiciones (1)–(5) corresponden a las condiciones (2)(a)–(d) en [10, Proposition 1.2] y la asunción $\gamma_j^r = 0$ para $r \geq n$ hecha en dicho artículo.



Capítulo 3

Clasificación de productos tensoriales torcidos de K^n con K^m

En este último capítulo de la tesis estudiamos los productos tensoriales torcidos de dos álgebras conmutativas, con lo cual ya no tendremos que trabajar con el álgebra opuesta de alguna de ellas como ocurrió en los dos primeros capítulos. Específicamente, trabajaremos con las álgebras conmutativas K^n y K^m . En la primera sección detallamos en este caso particular como se expresan las matrices que corresponden a las aplicaciones γ_j^i del Corolario 2.3.1. Para esto elegimos la representación canónica de la Sección 2.2, cuando el segundo factor es un álgebra de dimensión finita. En la segunda sección detallamos los isomorfismos que fueron presentados en la Sección 2.5 del Capítulo 2 cuando las álgebras involucradas corresponden a K^n y K^m , respectivamente. En la tercera sección aprovechamos que la aplicación $\pi_j(e_i) = \tilde{\gamma}_i^j$ de la Subsección 2.6.3 es una representación de K^n en el álgebra de matrices $M_n(K)$ para establecer una representación matricial del producto tensorial torcido $K^n \otimes_\chi K^m$ en el álgebra de matrices $M_n(K)$. A partir de la sección cuatro comenzamos el trabajo de clasificación de los productos tensoriales torcidos de K^n con K^m . Comenzamos estableciendo el resultado de clasificación en [8] empleando las herramientas presentadas hasta la sección tres. Desde la sección cinco desarrollamos herramientas que nos permiten caracterizar en términos de quivers las familias estándar y casi-estándar (Definición 3.45 y 3.69) de productos tensoriales torcidos de K^n con K^m , lo cual nos permite obtener una generalización del resultado obtenido por Cibils en [8, Teorema 4.2]. Además, si consideremos la familia de productos tensoriales torcidos estándar de rango reducido 1 presentamos en nuestro lenguaje una versión diferente de la clasificación obtenida en [12].

A continuación introducimos algunas de las notaciones que utilizaremos a lo largo de este capítulo.

- $K^\times := K \setminus \{0\}$.
- Para cada número natural i , denotaremos $\mathbb{N}_i^* := \{1, \dots, i\}$.
- Denotaremos por $E^{ij} \in M_n(K)$ a las matrices con el valor 1 en la entrada i, j y 0 en las otras entradas. De esta manera, $\{E^{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$ es la base canónica de $M_n(K)$.
- Por simplicidad escribiremos $\mathbb{1} = \mathbb{1}_n = \mathbb{1}_{K^n} := (1, \dots, 1)^T$.
- El símbolo τ_{nm} sera usado para denotar a la aplicación flip $K^n \otimes K^m \longrightarrow K^n \otimes K^m$.

3.1 Productos tensoriales torcidos de K^n con K^m

Sea $\chi: K^m \otimes K^n \longrightarrow K^n \otimes K^m$ una aplicación lineal y sean $\{e_1, \dots, e_m\}$ y $\{f_1, \dots, f_n\}$ las bases canónicas de K^m y K^n , respectivamente. Entonces existen escalares λ_{ij}^{kl} , tales que

$$\chi(e_i \otimes f_j) = \sum_{k,l} \lambda_{ij}^{kl} f_k \otimes e_l \quad \text{para todo } e_i \text{ y } f_j. \quad (3.1.1)$$

Dada una aplicación χ , para todo $i, l \in \mathbb{N}_m^*$ y $j, k \in \mathbb{N}_n^*$, denotemos por $A(i, l) \in M_n(K)$ y $B(j, k) \in M_m(K)$ las matrices definidas por

$$A(i, l)_{kj} := \lambda_{ij}^{kl} =: B(j, k)_{li}. \quad (3.1.2)$$

Si es necesario especificar estas aplicaciones, escribiremos $A_\chi(i, l)$ y $B_\chi(j, k)$. Más aún, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\chi$ denotará la familia de matrices $(A(i, l))_{i, l \in \mathbb{N}_m^*}$ y $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\chi$ denotará la familia de matrices $(B(j, k))_{j, k \in \mathbb{N}_n^*}$.

Observación 3.1.1. Las matrices $B(j, k)$ corresponden a la representación matricial, con respecto a la base canónica, de las aplicaciones $\tilde{\gamma}_k^j$ que fueron introducidas en la Subsección 2.5.3.

Notación 3.1.2. Para cada $i, l \in \mathbb{N}_m^*$ escribiremos $J_i(l) := \{j \in \mathbb{N}_n^* : A(i, l)_{jj} = 1\}$. Si no existe peligro de confusión (como por ejemplo, cuando trabajemos con las matrices $A(1, l), \dots, A(m, l)$ de una columna fija de \mathcal{A}), escribiremos J_i en lugar de $J_i(l)$. Similarmente, para cada $i, l \in \mathbb{N}_n^*$ denotemos $\tilde{J}_u(k) := \{i \in \mathbb{N}_m^* : B_\chi(u, k)_{ii} = 1\}$, y escribamos \tilde{J}_u en lugar de $\tilde{J}_u(k)$ cuando no exista peligro de confusión.

Observación 3.1.3. Sea $\tilde{\chi} := \tau_{mn} \circ \chi \circ \tau_{nm}$. Un cálculo directo muestra que

$$A_{\tilde{\chi}}(i, l)_{kj} = B_\chi(i, l)_{kj} \quad \text{y} \quad B_{\tilde{\chi}}(j, k)_{li} = A_\chi(j, k)_{li}$$

para cada aplicación $\chi: K^m \otimes K^n \longrightarrow K^n \otimes K^m$. Más aún $\tilde{\chi}$ es una aplicación de torcimiento si y solo si χ lo es, (ver Proposición 1.3.3). En este caso, la aplicación

$$\theta: K^n \otimes_\chi K^m \longrightarrow K^m \otimes_{\tilde{\chi}} K^n,$$

definida por $\theta(f_j \otimes e_i) := e_i \otimes f_j$, es un isomorfismo de álgebras. Diremos que las aplicaciones χ y $\tilde{\chi}$ son duales una de la otra.

Proposición 3.1.4. La aplicación χ es una aplicación de torcimiento si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones:

- (1) $\delta_{ii'} A(i, l) = A(i, l) A(i', l)$ para todo i, i' y l ,
- (2) $\delta_{jj'} B(j, k) = B(j, k) B(j', k)$ para todo j, j' y k ,
- (3) $A(i, l) \mathbb{1} = \delta_{il} \mathbb{1}$ para todo i y l ,
- (4) $B(j, k) \mathbb{1} = \delta_{jk} \mathbb{1}$ para todo j y k .

Demostración. Un cálculo directo muestra que

$$\chi \circ (\mu_{K^m} \otimes K^n) = (K^n \otimes \mu_{K^m}) \circ (\chi \otimes K^m) \circ (K^m \otimes \chi)$$

si y solo si

$$\delta_{ii'} \lambda_{ij}^{kl} = \sum_{u=1}^n \lambda_{iu}^{kl} \lambda_{uj}^{ul} \quad \text{para todo } i, i', j, k, l,$$

que es equivalente a la condición (1), y que

$$\chi \circ (K^m \otimes \mu_{K^n}) = (\mu_{K^n} \otimes K^m) \circ (K^n \otimes \chi) \circ (\chi \otimes K^n)$$

si y solo si

$$\delta_{jj'} \lambda_{ij}^{kl} = \sum_{u=1}^m \lambda_{ij}^{ku} \lambda_{uj'}^{kl} \quad \text{para todo } i, j, j', k, l,$$

que es equivalente a la condición (2). Finalmente es directo verificar que

$$\chi \circ (K^m \otimes \eta_{K^n}) = \eta_{K^n} \otimes K^m \quad \text{y} \quad \chi \circ (\eta_{K^m} \otimes K^n) = K^n \otimes \eta_{K^m}$$

si y solo si las condiciones (3) y (4) son verificadas. \square

Observación 3.1.5. La condición (1) establece que para cada $l \in \mathbb{N}_m^*$, las matrices $A(1, l), \dots, A(m, l)$ conforman una familia de ortogonales idempotentes, y la condición (2) establece que para cada $k \in \mathbb{N}_n^*$, las matrices $B(1, k), \dots, B(n, k)$ conforman también una familia de matrices ortogonales idempotentes. La condición (1) implica que la condición (3) se verifica si y solo si $\mathbb{1}_{K^n}$ pertenece a la imagen de $A(i, i)$ para todo i . Similarmente, si la condición (2) es satisfecha, entonces la condición (4) se verifica si y solo si $\mathbb{1}_{K^m} \in \text{Im } B(j, j)$ para todo j .

Proposición 3.1.6. Para una aplicación $\chi: K^m \otimes K^n \rightarrow K^n \otimes K^m$ valen las siguientes equivalencias:

- (1) $\sum_{i=1}^m B(j, k)_{li} = \delta_{jk}$ si y solo si $\sum_{i=1}^m A(i, l)_{kj} = \delta_{jk}$.
- (2) $\sum_{j=1}^n A(i, l)_{kj} = \delta_{il}$ si y solo si $\sum_{j=1}^n B(j, k)_{li} = \delta_{il}$.
- (3) $\delta_{jj'} B(j, k) = B(j, k) B(j', k) \iff \sum_{h=1}^m A(i, h)_{kj'} A(h, l)_{kj} = \delta_{jj'} A(i, l)_{kj}$ para todo i y l .
- (4) $\delta_{ii'} A(i, l) = A(i, l) A(i', l) \iff \sum_{h=1}^n B(j, h)_{li'} B(h, k)_{li} = \delta_{ii'} B(j, k)_{li}$ para todo j y k .

Demostración. Los items (1) y (3) se obtienen inmediatamente a partir de la igualdad (3.1.2),

$$\sum_{i=1}^m B(j, k)_{li} = \sum_{i=1}^m A(l, i)_{kj} \quad \text{y} \quad \sum_{h=1}^m B(j, k)_{lh} B(j', k)_{hi} = \sum_{h=1}^m A(i, h)_{kj'} A(h, l)_{kj}.$$

La prueba de los items (2) y (4) es similar. \square

Corolario 3.1.7. La aplicación χ es una aplicación de torcimiento si y solo si las siguientes condiciones son satisfechas:

- (1) $\delta_{ii'} A(i, l) = A(i, l) A(i', l)$ para todo i, i' y l ,
- (2) $A(i, l) \mathbb{1} = \delta_{il} \mathbb{1}$ para todo i y l ,
- (3) $\sum_{i=1}^m A(i, l) = \text{id}$ para todo l ,

$$(4) \sum_{h=1}^m A(i, h)_{kj} A(h, l)_{kj'} = \delta_{jj'} A(i, l)_{kj} \text{ para todo } i, j, j', k \text{ y } l.$$

Demostración. Las condiciones (1) y (2) son las condiciones (1) y (3) de la Proposición 3.1.4, y, debido a los items (1) y (3) de la Proposición 3.1.6, las condiciones (2) y (4) son equivalentes a las condiciones (4) y (2) de la Proposición 3.1.4, respectivamente. \square

Observación 3.1.8. La observación 3.1.3 y el hecho de que χ es una aplicación de torcimiento si y solo si $\tilde{\chi}$ también lo es, muestra que existe un corolario similar con las matrices $B(j, k)$ en lugar de las matrices $A(i, l)$.

Observación 3.1.9. La condición (4) del Corolario 3.1.7 implica que el vector $(A(i, 1)_{kj}, \dots, A(i, m)_{kj})$ es ortogonal al vector $(A(1, l)_{kj'}, \dots, A(m, l)_{kj'})$ para cada i, j, j', k y l con $j \neq j'$.

Observación 3.1.10. Sean $X_1, \dots, X_k \in M_n(K)$ tales que $\sum_{j=1}^k X_j = \text{id}_n$. Un cálculo directo muestra que si $\sum_{j=1}^k \text{rk}(X_j) \leq n$, entonces los X_i son idempotentes ortogonales, lo cual significa que $X_i X_j = \delta_{ij} X_i$ para todo i, j .

Observación 3.1.11. Sean $X_1, \dots, X_k \in M_n(K)$ matrices idempotentes tales que $\sum_{i=1}^k X_i = \text{id}_n$. Entonces los X_i son matrices idempotentes ortogonales. En efecto, debido a que $\text{rk}(X_i) = \text{Tr}(X_i)$ y

$$\sum_i \text{Tr}(X_i) = \text{Tr}\left(\sum_i X_i\right) = \text{Tr}(\text{id}) = n,$$

la observación 3.1.10 implica el resultado.

Proposición 3.1.12. Una aplicación $\chi: K^m \otimes K^n \rightarrow K^n \otimes K^m$ es una aplicación de torcimiento si y solo si las siguientes condiciones son satisfechas:

- (1) $A(i, l)$ es idempotente para todo i y l ,
- (2) $\sum_{i=1}^m A(i, l) = \text{id}$ para todo l ,
- (3) $A(i, l)\mathbb{1} = \delta_{il}\mathbb{1}$ para todo i y todo l ,
- (4) $\sum_{h=1}^m A(i, h)_{kj} A(h, l)_{kj} = A(i, l)_{kj}$ para todo i, j, k y l .

Demostración. A partir de la Observación 3.1.11, Proposición 3.1.6 y Corolario 3.1.7. \square

Definición 3.1.13. Las matrices $\Gamma_\chi \in M_m(K)$, de \mathcal{A} -rangos, y $\tilde{\Gamma}_\chi \in M_n(K)$, de \mathcal{B} -rangos, están definidas por

$$\Gamma_\chi := \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \cdots & \gamma_{mm} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{\Gamma}_\chi := \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_{11} & \cdots & \tilde{\gamma}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\gamma}_{n1} & \cdots & \tilde{\gamma}_{nn} \end{pmatrix},$$

donde $\gamma_{il} := \text{rk}(A(i, l))$ y $\tilde{\gamma}_{jk} := \text{rk}(B(j, k))$.

Corolario 3.1.14. Si χ es una aplicación de torcimiento, entonces las matrices de rangos tiene las siguientes propiedades:

- (1) $\delta_{il} \leq \gamma_{il} \leq n$ para todo i y l .
- (2) $\sum_{i=1}^m \gamma_{il} = n$ para todo l .

(3) $\delta_{jk} \leq \tilde{\gamma}_{jk} \leq m$ para todo j y k .

(4) $\sum_{j=1}^n \tilde{\gamma}_{jk} = m$ para todo k .

Demostración. Los items (1) y (2) se obtienen a partir de los items (1) y (3) del Corolario 3.1.7 y los items (3) y (4) de las correspondientes propiedades de las matrices $B(j, k)$. \square

Observación 3.1.15. Sea $r < m$ y n números naturales. A partir de la Proposición 1.3.4 se obtiene que una aplicación de torcimiento

$$\chi: (K^r \times K^{m-r}) \otimes K^n \longrightarrow K^n \otimes (K^r \times K^{m-r})$$

es una extensión de una aplicación de torcimiento $\tilde{\chi}$ de K^r con K^m , si y solo si $\gamma_{il} = 0$ para todo $i > r$ y $l \leq r$. Más aún, en este caso $\mathcal{A}_{\tilde{\chi}} = (A_{\tilde{\chi}}(i, l))_{1 \leq i, l \leq r}$.

3.1.1 Isomorfismo de aplicaciones de torcimiento

Proposición 3.1.16. Dos aplicaciones de torcimiento $\chi, \chi': K^m \otimes K^n \longrightarrow K^n \otimes K^m$ son isomorfas si y solo si existen $\sigma \in S_m$ y $\varsigma \in S_n$ tales que

$$A_{\chi'}(i, l)_{kj} = A_{\chi}(\sigma(i), \sigma(l))_{\varsigma(k)\varsigma(j)}$$

o, equivalentemente,

$$B_{\chi'}(j, k)_{li} = B_{\chi}(\varsigma(j), \varsigma(k))_{\sigma(l)\sigma(i)}.$$

Demostración. Por definición χ y χ' son isomorfas si y solo si existe un homomorfismo de álgebras $g: K^m \rightarrow K^m$ y $h: K^n \rightarrow K^n$ tal que $\chi' = (h^{-1} \otimes g^{-1}) \circ \chi \circ (g \otimes h)$. Debido a que los automorfismos de K^n y K^m vienen dados por permutaciones de sus entradas, existen $\varsigma \in S_n$ y $\sigma \in S_m$ tales que $g(e_i) = e_{\sigma(i)}$ y $h(f_j) = f_{\varsigma(j)}$ para todo $i \in \mathbb{N}_m^*$ y $j \in \mathbb{N}_n^*$. Entonces

$$\begin{aligned} \chi'(e_i \otimes f_j) &= (h^{-1} \otimes g^{-1})\chi(e_{\sigma(i)} \otimes f_{\varsigma(j)}) \\ &= \sum_{k,l} \lambda_{\sigma(i)\varsigma(j)}^{\varsigma(k)\sigma(l)} (h^{-1} \otimes g^{-1})(f_{\varsigma(k)} \otimes e_{\sigma(l)}) \\ &= \sum_{k,l} \lambda_{\sigma(i)\varsigma(j)}^{\varsigma(k)\sigma(l)} f_k \otimes e_l. \end{aligned}$$

Así, el resultado se obtiene inmediatamente de (3.1.1) y (3.1.2). \square

3.1.2 Representaciones en álgebras de matrices

En esta sección $\chi: K^m \otimes K^n \longrightarrow K^n \otimes K^m$ denotará una aplicación de torcimiento y λ_{ij}^{kl} , $A(i, l)$ y $B(j, k)$ serán como al inicio de la Sección 3.1.

Proposición 3.1.17. Para cada $1 \leq u \leq m$ las fórmulas

$$\rho_u(f_j \otimes 1) := E^{jj} \quad \text{y} \quad \rho_u(1 \otimes e_i) := A(i, u)$$

definen una representación $\rho_u: K^n \otimes_{\chi} K^m \longrightarrow M_n(K)$. Similarmente, para cada $1 \leq v \leq n$ las fórmulas

$$\tilde{\rho}_v(1 \otimes e_i) := E^{ii} \quad \text{y} \quad \tilde{\rho}_v(f_j \otimes 1) := B(j, v)$$

definen una representación $\tilde{\rho}_v: K^n \otimes_{\chi} K^m \longrightarrow M_m(K)$.

Demostración. Claramente la restricción de ρ_u a $K^n \otimes K \cdot \mathbf{1}$ es un morfismo de álgebras. Más aún, las condiciones (1) y (3) del Corolario 3.1.7, implican que la restricción de ρ_u a $K \cdot \mathbf{1} \otimes K^m$ es un morfismo de álgebras. Consecuentemente, ya que

$$(1 \otimes e_i)(f_j \otimes 1) = \sum_{k,l} \lambda_{ij}^{kl} f_k \otimes e_l = \sum_{k,l} \lambda_{ij}^{kl} (f_k \otimes 1)(1 \otimes e_l),$$

para probar que ρ_u define una representación, es suficiente observar que, a partir de (3.1.2) y la condición (4) del Corolario 3.1.7, se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{k,l} \lambda_{ij}^{kl} E^{kk} A(l, u) &= \sum_{k,l,s} \lambda_{ij}^{kl} A(l, u)_{ks} E^{ks} \\ &= \sum_{k,l,s} A(i, l)_{kj} A(l, u)_{ks} E^{ks} \\ &= \sum_k A(i, u)_{kj} E^{kj} \\ &= A(i, u) E^{jj}. \end{aligned}$$

La prueba para $\tilde{\rho}_v$ es similar. □

Observación 3.1.18. *Es posible dar una descripción completa de la imagen de ρ_u y $\tilde{\rho}_v$. Para esto, observamos que si $A(i, u)_{kj} \neq 0$ para algún i, j y k , entonces $E^{kj} \in \text{Im}(\rho_u)$. En efecto,*

$$E^{kj} A(i, u)_{kj} = E^{kk} A(i, u) E^{jj} = \rho_u((f_k \otimes 1)(1 \otimes e_i)(f_j \otimes 1)).$$

Por lo tanto,

$$E^{kj} = \rho_u \left(\frac{(f_k \otimes 1)(1 \otimes e_i)(f_j \otimes 1)}{A(i, u)_{kj}} \right).$$

Entonces, la imagen de ρ_u es el álgebra de matrices de incidencia del pre orden sobre $\{1, \dots, n\}$ dado por $k \leq j$ si y solo si $k = j$ o existe i tal que $A(i, u)_{kj} \neq 0$. Por consiguiente, ρ_u es sobreyectiva si y solo si para todo $k \neq j$ existe i con $A(i, u)_{kj} \neq 0$. Similarmente, la imagen de $\tilde{\rho}_v$ es el álgebra de matrices de incidencia del pre orden sobre $\{1, \dots, m\}$ dado por $l \leq i$ si y solo si $l = i$ o existe j tal que $B(j, v)_{li} \neq 0$.

Observación 3.1.19. *Sea $x_{ji} := f_j \otimes e_i$. Un cálculo directo muestra que en $K^n \otimes_\chi K^m$*

$$x_{ki} x_{jl} = \lambda_{ij}^{kl} x_{kl} = A(i, l)_{kj} x_{kl} = B(j, k)_{li} x_{kl}.$$

De hecho, se puede mostrar que todo ideal bilatero del álgebra $K^n \otimes_\chi K^m$ es generado por estos monomios. En efecto, sea I un ideal bilatero y sea $\sum_{r,s} \alpha_{rs} x_{rs} \in I$. Entonces

$$(f_j \otimes 1) \left(\sum_{r,s} \alpha_{rs} x_{rs} \right) (1 \otimes e_i) = \sum_{r,s} \alpha_{rs} (f_j \otimes 1)(f_r \otimes 1)(1 \otimes e_s)(1 \otimes e_i) = \alpha_{ji} x_{ji},$$

de esta manera, si $\alpha_{ji} \neq 0$, entonces $x_{ji} \in I$. Esto muestra que el ideal I es linealmente generado por un conjunto de elementos x_{ji} .

3.2 Aplicaciones de torcimiento de K^m con K^2

En esta sección emplearemos los resultados obtenidos hasta ahora para establecer que los métodos desarrollados hasta el momento trabajan correctamente, reproduciendo el elegante resultado obtenido por Cibils en [8], quien clasifica completamente las aplicaciones de torcimiento de K^m con K^2 , estableciendo una correspondencia con quivers coloreados Q_f . Para esto primero demuestra que las aplicaciones de torcimiento de K^m con K^2 corresponden a los llamados 2-entrelazados luego prueba el siguiente resultado

Teorema 3.2.1 ([8], Theorem 3.15). *Sea $A = K^E$ el álgebra del conjunto finito E . El conjunto Y_A de 2-entrelazados de A esta en biyección con los quivers univaluados sobre el conjunto E provisto con una coloración.*

Nosotros probaremos directamente usando nuestros métodos la biyección entre las aplicaciones de torcimientos de K^m con K^2 y los quivers coloreados Q_f .

El primer paso para obtener estos resultados es describir el quiver Q_f . Consideremos una aplicación

$$\chi: C \otimes \frac{K[X]}{\langle X(1-X) \rangle} \longrightarrow \frac{K[X]}{\langle X(1-X) \rangle} \otimes C,$$

donde $C := K^m$. En [8, Sección 3] se prueba que χ es una aplicación de torcimiento si y solo si existe un morfismo de álgebras $f: C \rightarrow C$ y una derivación idempotente $\delta: C \rightarrow {}^f C$ (donde ${}^f C$ es C dotado con la estructura de C -bimodulo dada por $c \cdot c' \cdot c'' := f(c)c'c''$), satisfaciendo $f = f^2 + \delta f + f \delta$, tal que

$$\chi(e_i \otimes X) = X \otimes f(e_i) + 1 \otimes \delta(e_i) = X \otimes (f + \delta)(e_i) + (1 - X) \otimes \delta(e_i),$$

donde $(e_i)_{i \in \mathbb{N}_m^*}$ es la base canónica de C . Con nuestras notaciones, se escribe

$$\chi(e_i \otimes f_1) = \sum_l (\lambda_{i1}^{1l} f_1 \otimes e_l + \lambda_{i1}^{2l} f_2 \otimes e_l) = \sum_l (A(i, l)_{11} f_1 \otimes e_l + A(i, l)_{21} f_2 \otimes e_l),$$

donde f_1 es la clase de X en $k[X]/\langle X(1-X) \rangle$ y f_2 es la clase de $1 - X$ en $k[X]/\langle X(1-X) \rangle$. Por lo tanto,

$$f(e_i) = \sum_l (A(i, l)_{11} - A(i, l)_{21}) e_l \quad \text{y} \quad \delta(e_i) = \sum_l A(i, l)_{21} e_l. \quad (3.2.3)$$

El quiver Q_f en [8] se construye de la siguiente manera. Debido a que f es un morfismo de álgebras, existe una única aplicación de conjuntos $\varphi: \mathbb{N}_m^* \rightarrow \mathbb{N}_m^*$, tal que

$$f(e_l) = \sum_{\{i: \varphi(i)=l\}} e_i. \quad (3.2.4)$$

Por definición, el quiver Q_f de f tiene como conjunto de vertices \mathbb{N}_m^* y una flecha de i hacia $\varphi(i)$ para cada $i \in \mathbb{N}_m^*$. Como demuestra la Proposición 3.2.3, podemos obtener este quiver directamente a partir de la matriz de \mathcal{A} -rangos.

Observación 3.2.2. *Sea $A \in M_2(K)$ tal que $A^2 = A$, $A\mathbf{1} = \mathbf{1}$ y $\text{rk}(A) = 1$, entonces existe $a \in K$ tal que*

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 - a \\ a & 1 - a \end{pmatrix}.$$

Proposición 3.2.3. Sea χ una aplicación de torcimiento y sea f como en 3.2.4. La matriz de adyacencia del quíver Q_f es $M(\chi) := (\Gamma_\chi - \text{id})^T$, donde Γ_χ es como en la Definición 3.1.13.

Demostración. Sea $l \in \mathbb{N}_m^*$. A partir del Corolario 3.1.14 se tiene que $\text{rk}(A(l, l)) = 2$ y $A(i, l) = 0$ para todo $i \neq l$, o $\text{rk}(A(l, l)) = 1$ y existe un único $i \neq l$ tal que $\text{rk}(A(i, l)) = 1$ y $A(j, l) = 0$ para todo $j \notin \{i, l\}$. De esta manera, si $\text{rk}(A(l, l)) = 2$ entonces $A(l, l) = \text{id}$, y además $A(l, l)_{11} - A(l, l)_{21} = 1$. Por otro lado si $\text{rk}(A(l, l)) = 1$, entonces debido a la Proposición 3.1.4 y a la Observación 3.2.2 existe $a_l \in K$ tal que $A(l, l) = \begin{pmatrix} a_l & 1-a_l \\ a_l & 1-a_l \end{pmatrix}$, y por lo tanto $A(l, l)_{11} - A(l, l)_{21} = 0$. Más aún, debido a que $A(i, l) + A(l, l) = \text{id}$, se tiene $A(i, l) = \begin{pmatrix} 1-a_l & a_l-1 \\ -a_l & a_l \end{pmatrix}$, y de esta manera $A(i, l)_{11} - A(i, l)_{21} = 1$. Finalmente, si $\text{rk}(A(j, l)) = 0$, entonces $A(j, l)_{11} - A(j, l)_{21} = 0$. Así, a partir de la primera igualdad de (3.2.3) y la igualdad (3.2.4),

$$M(\chi)_{il} = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi(i) = l, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

lo cual concluye la prueba. \square

Corolario 3.2.4. Un vértice i de Q_f es un loop vertex si y solo si $\text{rk}(A(i, i)) = 2$.

Durante el resto de esta sección, para cada $i \in \mathbb{N}_m^*$ denotemos por a_i a la entrada $A(i, i)_{11}$. Deseamos determinar todas las posibles matrices $A(i, l)$ que pueden aparecer en una aplicación de torcimiento de K^m con K^2 :

- (1) Si $\text{rk}(A(l, l)) = 2$, entonces $A(l, l) = \text{id}$ y $A(i, l) = 0$ para todo $i \neq l$.
- (2) Si $\text{rk}(A(l, l)) = 1$, entonces existe $i \neq l$ tal que

$$A(l, l) = \begin{pmatrix} a_l & 1-a_l \\ a_l & 1-a_l \end{pmatrix}, \quad A(i, l) = \begin{pmatrix} 1-a_l & a_l-1 \\ -a_l & a_l \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A(h, l) = 0 \text{ para } h \notin \{i, l\}.$$

Ahora tenemos muchas posibilidades:

- Si $\text{rk}(A(i, i)) = 2$, entonces $A(l, i) = 0$, y de esta manera, debido a (3.1.2) y al ítem (2) de la Proposición 3.1.4, se tiene

$$a_l - a_l^2 = B(1, 1)_{ll} - (B(1, 1)^2)_{ll} = 0, \quad (3.2.5)$$

lo cual implica que $a_l \in \{0, 1\}$.

- Si $\text{rk}(A(i, i)) = 1$, entonces se tiene $A(i, i) = \begin{pmatrix} a_i & 1-a_i \\ a_i & 1-a_i \end{pmatrix}$, y, nuevamente debido a (3.1.2) y al ítem (2) de la Proposición 3.1.4, se tiene

$$(1 - a_l)(1 - a_i - a_l) = B(1, 1)_{li} - (B(1, 1)^2)_{li} = 0 \quad (3.2.6)$$

y

$$a_l(a_i + a_l - 1) = B(2, 2)_{li} - (B(2, 2)^2)_{li} = 0. \quad (3.2.7)$$

De esta manera $a_i + a_l = 1$. Si $A(l, i) \neq 0$, entonces no podemos obtener condiciones adicionales sobre a_l , mientras que si $A(l, i) = 0$, entonces, debido a (3.2.5), tenemos $a_l \in \{0, 1\}$, y por ende existen únicamente dos casos: $a_l = 0$ y $a_i = 1$ o $a_l = 1$ y $a_i = 0$.

A continuación recordamos la definición de coloración sobre Q_f en [8, Definition 3.12], pero tomamos la coloración opuesta.

Definición 3.2.5. Una coloración de Q_f es un elemento $c = \sum_i c_i e_i \in C$ tal que:

- (1) Para una componente reducida del quiver ida y vuelta con vértices i y j los coeficientes c_i y c_j satisfacen $c_i + c_j = 1$.
- (2) Para otras componentes conexas:
 - (a) En el caso en que i no es un loop vertex $c_i \in \{0, 1\}$.
 - (b) Para cada flecha que no tiene un loop vertex como codominio, un valor extremo es 0 y el otro es 1.
 - (c) En un loop vertex i tenemos $c_i = 0$.

Dada una aplicación de torcimiento $\chi: K^m \otimes K^2 \rightarrow K^2 \otimes K^m$ consideremos las matrices $A(i, l) := A_\chi(i, l)$. Debido a la Proposición 3.2.3 y la Definición 3.2.5, el elemento $c := (c_1, \dots, c_m) \in C$ dado por $c_l := A(l, l)_{21}$ es una coloración. Recíprocamente, dada una coloración $c = (c_1, \dots, c_m) \in C$ sobre un quiver univaluado Q_f cuyo conjunto de vértices es \mathbb{N}_m^* , es posible construir matrices $A(i, l) \in M_2(K)$ de la siguiente manera: si l es un loop vertex, entonces $A(l, l) := \text{id}$ y $A(i, l) := 0$ para $i \neq l$. En cualquier otro caso

- Escribimos $A(l, l) := \begin{pmatrix} a_l & 1-a_l \\ a_l & 1-a_l \end{pmatrix}$, donde $a_l := c_l$,
- Para el codominio $t(l)$ de una flecha que inicia en l , escribimos $A(t(l), l) := \begin{pmatrix} 1-a_l & a_l-1 \\ -a_l & a_l \end{pmatrix}$,
- para todo $i \notin \{t(l), l\}$, escribimos $A(i, l) := 0$.

Para verificar que estas matrices definen una aplicación de torcimiento, debemos verificar las condiciones de la Proposición 3.1.4, donde las matrices $B(j, k)$ son definidas vía la ecuación (3.1.2). Las condiciones (1) y (3) son satisfechas por construcción. La condición (2) es equivalente a la siguiente

$$\sum_i A(i, l)_{kj} = \delta_{jk} \quad \text{para todo } l, j \text{ y } k,$$

la cual es satisfecha, pues

$$\sum_i A(i, l)_{kj} = \begin{cases} A(l, l)_{kj} = \delta_{jk}, & \text{si } \text{rk}(A(l, l)) = 2 \\ A(l, l)_{kj} + A(t(l), l)_{kj} = \delta_{jk}, & \text{si } \text{rk}(A(l, l)) = 1. \end{cases}$$

Finalmente verificamos la condición (4), la cual es equivalente a la siguiente expresión

$$\delta_{jj'} A(i, l)_{kj} = \sum_u A(i, u)_{kj'} A(u, l)_{kj} \quad \text{para todo } i, j, j', k \text{ y } l. \quad (3.2.8)$$

Cuando $t(l) = l$, se tiene que $A(u, l) = \delta_{ul} \text{id}$ para todo u , lo cual implica que se satisface la igualdad (3.2.8). Supongamos que $t(l) \neq l$. Consideremos los siguientes tres casos: $i = l$, $i = t(l)$ y $i \notin \{l, t(l)\}$. Si $i = l$, entonces la igualdad (3.2.8) se puede escribir de la siguiente manera

$$\delta_{jj'} A(l, l)_{kj} = A(l, l)_{kj'} A(l, l)_{kj} + A(l, t(l))_{kj'} A(t(l), l)_{kj} \quad \text{para todo } j, j' \text{ y } k;$$

si $i = t(l)$, entonces la igualdad (3.2.8) se puede escribir de la siguiente manera

$$\delta_{jj'} A(t(l), l)_{kj} = A(t(l), l)_{kj'} A(l, l)_{kj} + A(t(l), t(l))_{kj'} A(t(l), l)_{kj} \quad \text{para todo } j, j' \text{ y } k;$$

y finalmente, si $i \notin \{l, t(l)\}$, entonces la igualdad (3.2.8) se puede escribir de la siguiente manera

$$0 = A(i, t(l))_{kj'} A(t(l), l)_{kj} \quad \text{para todo } j, j' \text{ y } k.$$

Todas estas condiciones son fácilmente verificadas si usamos el hecho que (c_1, \dots, c_m) es una coloración,

$$A(l, l) = \begin{pmatrix} a_l & 1 - a_l \\ a_l & 1 - a_l \end{pmatrix}, \quad A(t(l), l) = \begin{pmatrix} 1 - a_l & a_l - 1 \\ -a_l & a_l \end{pmatrix},$$

y que

- si $t(t(l)) = t(l)$, entonces $A(t(l), t(l)) = \text{id}$;
- si $t(t(l)) \neq t(l)$, entonces $A(t(l), t(l)) = \begin{pmatrix} 1 - a_l & a_l \\ 1 - a_l & a_l \end{pmatrix}$;
- si $t(l) = l$, entonces $A(l, t(l)) = \begin{pmatrix} a_l & -a_l \\ a_l - 1 & 1 - a_l \end{pmatrix}$ y $A(u, t(l)) = 0$ para todo $u \notin \{l, t(l)\}$;
- si $t(l) \neq l$, entonces $a_l \in \{0, 1\}$, $A(t(t(l)), t(l)) = \begin{pmatrix} a_l & -a_l \\ a_l - 1 & 1 - a_l \end{pmatrix}$ y $A(u, t(l)) = 0$ para todo $u \notin \{t(l), t(t(l))\}$.

3.3 Resultados Misceláneos

A lo largo de esta sección $\chi: K^m \otimes K^n \rightarrow K^n \otimes K^m$ denotará una aplicación y λ_{ij}^{kl} , $A(i, l)$ y $B(j, k)$ serán como al inicio de la sección 3.1. También asumiremos que las matrices $A(i, l)$ y $B(j, k)$ son idempotentes para todo $i, l \in \mathbb{N}_m^*$ y $j, k \in \mathbb{N}_n^*$. Los siguientes resultados serán usados en nuestra búsqueda de la clasificación de los productos tensoriales torcidos $K^n \otimes_\chi K^m$.

3.3.1 Propiedades generales

Observación 3.3.1. Debido a que las matrices $A(i, l)$ son idempotentes, se tiene $\text{rk}(A(i, l)) = \text{Tr}(A(i, l))$. Por lo tanto,

$$\text{rk}(A(i, l)) = \sum_j A(i, l)_{jj} = \sum_j B(j, j)_{li}.$$

Similarmente, $\text{rk}(B(j, k)) = \sum_i B(j, k)_{ii} = \sum_i A(i, i)_{kj}$.

Observación 3.3.2. Las matrices de rango Γ_χ y $\tilde{\Gamma}_\chi$, introducidas en la Definición 3.1.13, tienen la misma traza. En efecto,

$$\text{Tr}(\Gamma_\chi) = \sum_i \text{rk}(A(i, i)) = \sum_{i, j} \lambda_{ij}^{ji} = \sum_j \text{rk}(B(j, j)) = \text{Tr}(\tilde{\Gamma}_\chi).$$

3.3.2 Matrices-0,1 idempotentes estándar

Definición 3.3.3. Una matriz-0,1 $A \in M_n(K)$ es llamada una matriz-0,1 idempotente estándar si existe $r \in \mathbb{N}_n^*$ y una matriz $C \in M_{n-r \times r}(K)$ que tiene exactamente una entrada no nula en cada fila, tal que

$$A = \begin{pmatrix} \text{id}_r & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.3.9)$$

donde id_r es la identidad de $M_r(K)$.

Definición 3.3.4. Dos matrices $A, A' \in M_n(K)$ son equivalentes vía permutaciones idénticas en filas y columnas si existe una permutación $\sigma \in S_n$ tal que $A_{\sigma(k)\sigma(j)} = A'_{kj}$ para todo k, j .

Observación 3.3.5. Una matriz $A \in M_n(K)$ es equivalente vía permutaciones idénticas en filas y columnas a una matriz-0,1 idempotente estándar si y solo si es una matriz-0,1 con exactamente una entrada no nula en cada fila, que satisface la siguiente condición: para cada j , si $A_{jj} = 0$, entonces $A_{kj} = 0$ para todo k .

Notación 3.3.6. Sea $A \in M_n(K)$ una matriz-0,1 tal que $A\mathbb{1} = \mathbb{1}$. Para cada k tal que $A_{kk} = 0$, denotemos por $c_k = c_k(A)$ el único índice tal que $A_{kc_k} = 1$.

Proposición 3.3.7. Sea $A \in M_n(K)$ una matriz-0,1. Si A es idempotente y $A\mathbb{1} = \mathbb{1}$, entonces A es equivalente vía permutaciones idénticas en filas y columnas a una matriz-0,1 idempotente estándar.

Demostración. Sea $r := \text{Tr}(A) = \text{rk}(A)$, se tiene r veces la entrada 1 y $n - r$ veces la entrada 0 sobre la diagonal de A . Aplicando una permutación idéntica en filas y columnas podemos asumir que las primeras r entradas de la diagonal son iguales a 1. Debido a que $A\mathbb{1} = \mathbb{1}$, cada fila de la matriz tiene un único 1, y el resto de entradas iguales a cero. Así, la primeras r filas de A son como en (3.3.9). Ahora, $r = \text{rk}(A)$ implica que, nuevamente como en (3.3.9), el bloque inferior derecho de A es la matriz nula y por lo tanto el bloque inferior izquierdo es una matriz C que satisface las condiciones requeridas. \square

Observación 3.3.8. Si A satisface las condiciones de la Proposición 3.3.7, entonces $A_{c_k c_k} = 1$ para cada k tal que $A_{kk} = 0$.

Corolario 3.3.9. Suponga que χ es una aplicación de torcimiento. Si $A(l, l)$ es una matriz-0,1, entonces $A(l, l)$ es equivalente vía permutaciones idénticas en filas y columnas a una matriz-0,1 idempotente estándar.

Proposición 3.3.10. Suponga que χ es una aplicación de torcimiento y sea $l \in \mathbb{N}_m^*$. Si

$$\text{rk}(A(i, l)) \text{rk}(A(l, i)) = 0 \quad \text{para todo } i \neq l,$$

entonces $A(l, l)$ es una matriz-0,1.

Demostración. El ítem (4) del Corolario 3.1.7 y el hecho de que $A(i, l)A(l, i) = 0$ para todo $i \neq l$, implican que

$$A(l, l)_{kj} = \sum_{i=1}^m A(l, i)_{kj} A(i, l)_{kj} = A(l, l)_{kj}^2.$$

Así, $A(l, l)_{kj} \in \{0, 1\}$ para todo k, j . \square

Corolario 3.3.11. Si χ es una aplicación de torcimiento y Γ_χ es una matriz triangular inferior o superior, entonces cada una de las matrices $A(l, l)$ es una matriz-0,1.

Observación 3.3.12. La Proposición 3.3.10 y los corolarios 3.3.9 y 3.3.11 son válidos para las matrices $B(j, j)$ (en el segundo corolario reemplazamos Γ_χ por $\tilde{\Gamma}_\chi$).

3.3.3 Matrices idempotentes de rango 1

Observación 3.3.13. Al iniciar la Sección 3.2 observamos que si $A \in M_2(K)$ satisface $A^2 = A$, $A\mathbf{1} = \mathbf{1}$ y $\text{rk}(A) = 1$, entonces existe un elemento $a \in K$ tal que

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ a & 1-a \end{pmatrix}.$$

En general, si $A \in M_n(K)$ tal que $A^2 = A$, $A\mathbf{1} = \mathbf{1}$ y $\text{rk}(A) = 1$, entonces existen $a_1, \dots, a_n \in K$ con $\sum a_j = 1$, tales que

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Proposición 3.3.14. Si $\text{rk}(A(i, i)) = 1$ para algún $i \in \mathbb{N}_m^*$, entonces existe $j \in \mathbb{N}_n^*$ tal que $\tilde{\Gamma}_{jk} \neq 0$ para todo k . Más aún, si tal j es único, entonces $A(i, i)_{st} = \delta_{tj}$ para todo s, t . Una condición similar se satisface cuando se consideran $B(j, j)$ y Γ .

Demostración. Debido a que $\text{Tr}(A(i, i)) = \text{rk}(A(i, i)) = 1$, entonces existe j tal que $A(i, i)_{jj} \neq 0$. La Observación 3.3.13 implica que

$$B(j, k)_{ii} = A(i, i)_{kj} = A(i, i)_{jj} \neq 0, \quad \text{para todo } k.$$

Esto implica que $\tilde{\Gamma}_{jk} \neq 0$ para todo k . Si j es único, entonces para cada $l \neq j$ existe k tal que $\tilde{\Gamma}_{lk} = 0$, y por lo tanto, nuevamente debido a la Observación 3.3.13, se tiene

$$A(i, i)_{hl} = A(i, i)_{kl} = B(l, k)_{ii} = 0 \quad \text{para todo } h.$$

El argumento para $B(j, j)$ y Γ es el mismo. □

3.3.4 Columnas de 1's en Γ_χ

Proposición 3.3.15. Suponga que χ es una aplicación de torcimiento y que $n = m$. Si $\text{Diag}(\Gamma_\chi) = (1, 1, \dots, 1)$, entonces $\Gamma_\chi = \tilde{\Gamma}_\chi$ es la matriz \mathfrak{J}_n cuyas entradas son todas iguales a 1.

Demostración. A partir de la Observación 3.3.2 y la condición (3) de la Proposición 3.1.14, se tiene $\text{Diag}(\tilde{\Gamma}_\chi) = (1, \dots, 1)$. En otras palabras, $\text{rk}(B(j, j)) = 1$ para todo j . Supongamos por contradicción que $\Gamma_\chi \neq \mathfrak{J}_n$. Entonces los ítems (1) y (2) del Corolario 3.1.7 establecen la existencia de un par de números i, l tales que $A(i, l) = 0$. Por lo tanto, la Observación 3.3.13 implica que la columna i de $B(j, j)$ es cero para todo j . Entonces $\text{Diag}(A(i, i)) = (0, \dots, 0)$, lo cual, debido a que $A(i, i)$ es idempotente, implica que $A(i, i) = 0$, una contradicción. Para $\tilde{\Gamma}_\chi$ se procede de una manera similar. □

Proposición 3.3.16. Sea χ una aplicación de torcimiento y que $n = m$ y sea $l \in \mathbb{N}_m^*$. Suponga que Γ_χ es la matriz \mathfrak{J}_n cuyas entradas son todas iguales a 1, y que existe k tal que $A(l, l)_{kj} \neq 0$ para todo j . Sea $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in K^n \setminus \{0\}$. Si $\mathbf{v}^T \in \text{Im}(A(i, l))$ para algún i , entonces $v_k \neq 0$ para todo k .

Demostración. Como $\text{rk}(A(i, l)) = 1$ y $\mathbf{v}^T \in \text{Im}(A(i, l))$, existe $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in K^n$ tal que $A(i, l) = \mathbf{v}^T \mathbf{w}$. Supongamos por contradicción que existe $v_k = 0$. Entonces $A(i, l)_{kj} = v_k w_j = 0$

para todo j . Debido a (3.1.2) esto significa que $B(j, k)_{li} = 0$ para todo j , y de esta manera

$$\det \begin{pmatrix} B(1, k)_{l1} & \dots & B(1, k)_{li} & \dots & B(1, k)_{ln} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(n, k)_{l1} & \dots & B(n, k)_{li} & \dots & B(n, k)_{ln} \end{pmatrix} = 0. \quad (3.3.10)$$

Por otro lado, la Observación 3.1.8 y la Proposición 3.3.15 implican que $(B(1, k), \dots, B(n, k))$ es una familia completa de matrices de idempotentes ortogonales de rango 1. Si esto ocurre, entonces la familia $(B(1, k)^T, \dots, B(n, k)^T)$ también lo es. Como $B(j, k)_{ll} = A(l, l)_{kj} \neq 0$, se tiene que el vector $(B(j, k)_{l1}, \dots, B(j, k)_{ln})^T$ genera $\text{Im}(B(j, k)^T)$, para todo j , el determinante de (3.3.10) no puede ser cero, lo cual es una contradicción y concluye la prueba. \square

Teorema 3.3.17. Sean $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ n elementos invertibles de K^n . Si

$$\det(\mathbf{v}_1^T \ \dots \ \mathbf{v}_n^T) = 1,$$

entonces existe una aplicación de torcimiento $\xi: K^n \otimes K^n \rightarrow K^n \otimes K^n$ con

$$A_\xi(i, l) := (-1)^{i-1} (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i)^T (\mathbf{v}_l \cdot (\mathbf{v}_1 \times \dots \times \widehat{\mathbf{v}}_i \times \dots \times \mathbf{v}_n)) \quad \text{para todo } i, l,$$

donde, como es usual, $\widehat{\mathbf{v}}_i$ significa que el término \mathbf{v}_i es omitido. Más aún, $\Gamma_\chi = \mathfrak{J}_n$ y el producto tensorial torcido $K^n \otimes_\chi K^n$ es isomorfo como álgebra a $M_n(K)$.

Demostración. Afirmamos que las matrices $A_\chi(i, j)$ idempotentes de rango 1 satisfacen las siguientes condiciones:

- (1) $A_\xi(i, o)A_\xi(j, o) = \delta_{ij}A_\xi(i, o)$,
- (2) $A_\xi(i, j)1_{K^n}^T = \delta_{ij}1_{K^n}^T$,
- (3) $\sum_{i=1}^n A_\xi(i, o) = \text{id}$.

En efecto, debido a la proposición A.1

$$\mathbf{v}_l \cdot (\mathbf{v}_1 \times \dots \times \widehat{\mathbf{v}}_i \times \dots \times \mathbf{v}_n) = \tau(\mathbf{v}_l) (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_1) \times \dots \times (\widehat{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i}) \times \dots \times (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_n),$$

y tenemos

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_l \cdot (\mathbf{v}_1 \times \dots \times \widehat{\mathbf{v}}_i \times \dots \times \mathbf{v}_n)) (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j)^T &= \tau(\mathbf{v}_l) \det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j \\ \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_{i-1} \\ \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_n \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{i-1} \tau(\mathbf{v}_l) \delta_{ij} \det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{i-1} \delta_{ij} \det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{i-1} \delta_{ij}.
\end{aligned}$$

Esto implica que la matriz $A(i, l)$ es idempotente con imagen $K(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i)^\top$ y núcleo $\langle (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j)^\top : j \neq i \rangle$, lo cual implica los items (1), (2) y (3) (para (2) usamos que $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = 1_{K^n}$). Observe también que

$$A_\chi(i, l)_{jk} = (-1)^{i+k} v_{lj}^{-1} v_{ij} v_{lk} \det \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1,k-1} & v_{1,k+1} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{i-1,1} & \cdots & v_{i-1,k-1} & v_{i-1,k+1} & \cdots & v_{i-1,n} \\ v_{i+1,1} & \cdots & v_{i+1,k-1} & v_{i+1,k+1} & \cdots & v_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{n,k-1} & v_{n,k+1} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}$$

donde escribimos $\mathbf{v}_j = (v_{j1}, \dots, v_{jn})$ para cada j . Ahora consideremos los vectores \mathbf{w}_i ($1 \leq i \leq n$) determinados por la igualdad

$$\begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_n \end{pmatrix} := (\mathbf{v}_1^\top \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n^\top),$$

y definamos las matrices

$$B_\xi(j, k) := (-1)^{j-1} (\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_j)^\top (\mathbf{w}_k \cdot (\mathbf{w}_1 \times \cdots \times \widehat{\mathbf{w}}_j \times \cdots \times \mathbf{w}_n))$$

Se puede verificar que $A_\xi(i, l)_{kj} = B_\xi(j, k)_{li}$. Más aún, argumentando como en el caso de las matrices $A_\xi(i, j)$, se puede probar que

$$B_\xi(i, o) B_\xi(j, o) = \delta_{ij} B_\xi(i, o) \quad \text{para todo } i, j, o.$$

A partir de esto se obtiene inmediatamente que las matrices $A_\xi(i, l)$ satisfacen la condición (4) del Corolario 3.1.7, lo cual termina la prueba de la existencia de χ . Claramente, $\Gamma_\chi = \mathfrak{J}_n$. Por lo tanto solo resta probar que $K^n \otimes_\xi K^n$ es isomorfa a $M_n(K)$. La Observación 3.1.18 implica que es suficiente probar que para cualquier l y todo k, j existe i tal que $A(i, l)_{jk} \neq 0$. Si esto ocurre la representación ρ_l es un morfismo sobreyectivo entre dos álgebras de la misma dimensión, y por lo tanto es un isomorfismo. De esta manera, fijemos l, k, j . A partir de la igualdad $\sum_i A(i, l) = \text{id}$ es posible garantizar que existe i tal que $A(i, l)_{kk} \neq 0$. Así,

$$A(i, l)_{jk} = \frac{(v_i)_j}{(v_i)_k} A(i, l)_{kk} \neq 0,$$

como queríamos. □

Observación 3.3.18. *De hecho la aplicación de torcimiento construida en el Teorema 3.3.17 es única por definición. Esto puede ser probado de la siguiente manera. Si tenemos dos aplicaciones de torcimiento χ y $\tilde{\chi}$ con $\Gamma_\chi = \Gamma_{\tilde{\chi}} = \mathfrak{J}_n$ que satisfacen $A_\chi(i, l_0) = A_{\tilde{\chi}}(i, l_0)$ para un l_0 fijo y para todo i , y todas las entradas de $A_\chi(i, l_0)$ son no nulas, entonces $\chi = \tilde{\chi}$. La prueba se obtiene usando la igualdad (3.1.2), la Proposición 3.3.15 y la Observación 3.3.13.*

Proposición 3.3.19. Sea (A_1, \dots, A_n) una familia completa de matrices idempotentes ortogonales de $M_n(K)$ y sea $l \in \mathbb{N}_n^*$. Supongamos que $\text{rk}(A_i) = 1$ para todo i , que la imagen de cada A_i es generada por un elemento inversible $\mathbf{v}_i \in K^n$ y que $A_i \mathbb{1} = \mathbb{1}$. Entonces existe una única aplicación de torcimiento $\chi: K^n \otimes K^n \rightarrow K^n \otimes K^n$ tal que $A(i, l)_\chi = A_i$ para todo i .

Demostración. Claramente podemos elegir $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ de tal manera que $\mathbf{v}_i = \mathbb{1}$ y que $\det(\mathbf{v}_1^T \dots \mathbf{v}_n^T) = 1$. Como $\mathbf{v}_i^T(\mathbf{v}_1 \times \dots \times \widehat{\mathbf{v}}_i \times \dots \times \mathbf{v}_n)\mathbf{v}_i = (-1)^{l-1} \delta_{il} = (-1)^{l-1} A_i \mathbf{v}_i$, un cálculo directo muestra que

$$A_i = (-1)^{l-1} \mathbf{v}_i^T(\mathbf{v}_1 \times \dots \times \widehat{\mathbf{v}}_i \times \dots \times \mathbf{v}_n) \quad \text{para todo } i.$$

Así, la existencia de χ se obtiene del Teorema 3.3.17. La unicidad es directa a partir de la Observación 3.3.18. \square

3.4 Columnas estándar y casi-estándar

Definición 3.4.1. El soporte de una matriz $A \in M_n(K)$ es el conjunto

$$\text{Supp}(A) := \{(i, j) \in \mathbb{N}_n^* \times \mathbb{N}_n^* : a_{ij} \neq 0\},$$

y el soporte de la fila k de A es el conjunto $\text{Supp}(A_{k*}) := \{j \in \mathbb{N} : a_{kj} \neq 0\}$.

Definición 3.4.2. Una familia $(A(i, l))_{i, l \in \mathbb{N}_m^*}$ de matrices $A(i, l) \in M_n(K)$, es llamada un pre-torcimiento de K^m con K^n si satisface las condiciones (1), (2) y (3) del Corolario 3.1.7.

A lo largo de esta sección $\mathcal{A} = (A(i, l))_{i, l \in \mathbb{N}_m^*}$ denotará un pre-torcimiento de K^m con K^n .

Definición 3.4.3. Diremos que la columna l_0 de \mathcal{A} es una columna estándar si

- (1) $A(l_0, l_0)$ es una matriz-0, 1,
- (2) $\text{Supp}(A(i, l_0)) \subseteq \text{Supp}(A(l_0, l_0)) \cup \text{Supp}(\text{id})$ para todo i .

Observación 3.4.4. Supongamos que $(A(i, l_0))_{i \in \mathbb{N}_m^*}$ es una columna estándar de \mathcal{A} y sea $k \in \mathbb{N}_n^*$. El Corolario 3.3.9 implica que la matriz $A(l_0, l_0)$ es equivalente vía permutaciones idénticas en filas y columnas a una matriz-0, 1 idempotente estándar. Así, a partir del ítem (2) de la Definición 3.4.3 se tiene que todas las matrices $A(i, l_0)$ son equivalentes, vía la misma permutación, a matrices triangulares idempotentes. Por consiguiente,

- (1) Para cada índice i , se tiene $A(i, l_0)_{kk} \in \{0, 1\}$.
- (2) $A(i, l_0)_{kk} = 1$ para exactamente un i . Denotemos este índice por $i(k) = i(k, l_0)$.
- (3) Si $i \neq i(k)$ y $i \neq l_0$, entonces $A(i, l_0)_{kj} = 0$ para todo j .
- (4) $A(i, l_0)_{kj} = -1$ si y solo si $i = i(k) \neq l_0$ y $j = c_k(A(l_0, l_0))$. Más aún, $A(i, l_0)_{kj'} = 0$ para todo $j' \notin \{k, c_k(A(l_0, l_0))\}$.
- (5) $A(i, l_0)_{kj} \in \{1, 0, -1\}$ para todo i, k, j , y $A(i, l_0)_{kj} = 1$ implica $i = l_0$ or $j = k$.

Observación 3.4.5. A partir de la Observación 3.4.4 se obtiene que cada columna estándar $A(i, l_0)_{i \in \mathbb{N}_m^*}$ de un pre-torcimiento de K^m con K^n puede ser obtenida de la siguiente manera:

(1) Elija una matriz $A \in M_n(K)$, la cual es equivalente a vía permutaciones idénticas en filas y columnas a un matriz-0,1 idempotente estándar, y escribamos $A(l_0, l_0) := A$.

(2) Escribamos $J_{l_0} := \{k \in \mathbb{N}_n^* : A(l_0, l_0)_{kk} = 1\}$.

(3) Para todo $i \in \mathbb{N}_n^* \setminus \{l_0\}$ elijamos $J_i \subseteq \mathbb{N}_n^* \setminus J_{l_0}$ tales que

$$\bigcup_{i=1}^m J_i = \mathbb{N}_n^* \quad y \quad J_i \cap J_{i'} = \emptyset \quad \text{si } i \neq i'.$$

(4) Para $i \neq l_0$ definamos $A(i, l_0) \in M_n(K)$ a través de

$$A(i, l_0)_{kj} := \begin{cases} 1 & \text{si } k \in J_i \text{ y } j = k, \\ -1 & \text{si } k \in J_i \text{ y } j = c_k, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

A continuación generalizaremos la noción introducida en el ítem (2) de la Observación 3.4.4.

Observación 3.4.6. Sea $l_0 \in \mathbb{N}_m^*$ y $k \in \mathbb{N}_n^*$. Si $A(i, l_0)_{kk} \in \{0, 1\}$ para todo i , entonces existe un único índice i_0 , el cual denotaremos por $i(k) = i(k, l_0) = i(k, l_0, A)$, tal que $A(i_0, l_0)_{kk} = 1$. Así, $A(i, l_0)_{kk} = \delta_{ii_0}$.

Definición 3.4.7. Diremos que una aplicación de torcimiento $\chi: K^m \otimes K^n \rightarrow K^n \otimes K^m$ es estándar si las columnas de \mathcal{A}_χ son columnas estándar. En este caso también diremos que el producto tensorial torcido $K^n \otimes_\chi K^m$ es estándar.

Proposición 3.4.8. Una aplicación de torcimiento χ es una aplicación de torcimiento estándar si y solo si la aplicación $\tilde{\chi}$, introducida en la Observación 3.1.3, también lo es.

Demostración. Debido a la Observación 3.1.3 se tiene $\mathcal{A}_{\tilde{\chi}} = \mathcal{B}_\chi$. Así, como la aplicación $\tilde{\chi}$ es una aplicación de torcimiento, solo debemos verificar que las columnas l_0 de \mathcal{B}_χ son columnas estándar para todo $l_0 \in \mathbb{N}_n^*$. La condición (1) de la Definición 3.4.3 es una consecuencia inmediata de la condición (1) de la Observación 3.4.4. Para la condición (2) es suficiente considerar el caso $i \neq l_0$. La condición (4) de la Observación 3.4.4, implica que $B_\chi(i, l_0)_{kj} \in \{1, 0, -1\}$ para todo j, k y que $B_\chi(i, l_0)_{kj} \neq 1$ para $j \neq k$. Como $\sum_{j=1}^m B_\chi(i, l_0)_{kj} = 0$, esto implica que si $B_\chi(i, l_0)_{kk} = 0$, entonces la fila k se anula. Por otro lado $B_\chi(i, l_0)_{kk} = 1$ y entonces existe exactamente un índice j' tal que $B_\chi(i, l_0)_{kj'} = -1$. Por último, resta verificar que $j' = c_k(B_\chi(l_0, l_0))$. Empleando que $B_\chi(i, l_0)$ es idempotente, obtenemos que

$$-1 = B_\chi(i, l_0)_{kj'} = \sum_{j=1}^m B_\chi(i, l_0)_{kj} B_\chi(i, l_0)_{jj'} = B_\chi(i, l_0)_{kj'} - B_\chi(i, l_0)_{j'j'} = -1 - B_\chi(i, l_0)_{j'j'}.$$

Escribamos $i_0 := i(j', l_0, \mathcal{A}_{\tilde{\chi}})$. Como $B_\chi(i_0, l_0)_{j'j'} = 1$ la igualdad anterior implica que $i \neq i_0$. Así,

$$0 = \sum_{j=1}^m B_\chi(i, l_0)_{kj} B_\chi(i_0, l_0)_{jj'} = B_\chi(i, l_0)_{kj'} - B_\chi(i_0, l_0)_{j'j'} = B_\chi(i, l_0)_{kj'} - 1,$$

donde la primera igualdad es satisfecha pues $B_\chi(i, l_0) B_\chi(i_0, l_0) = 0$. Entonces, $B_\chi(i_0, l_0)_{kj'} = 1$, y por ende $i_0 = l_0$, pues $j' \neq k$. Por lo tanto, $j' = c_k(B_\chi(l_0, l_0))$, como queríamos. \square

Observación 3.4.9. Sea χ una aplicación de torcimiento y sean $i \neq l$ y $k \neq j$. Entonces $A_\chi(i, l)_{kj} = -1$ si y solo si $B_\chi(k, k)_{li} = 1$ y $A_\chi(l, l)_{kj} = 1$. En efecto, la condición (4) de la Observación 3.4.4, implica que

$$A_\chi(i, l)_{kj} = -1 \Rightarrow B_\chi(k, k)_{li} = A_\chi(i, l)_{kk} = 1.$$

De esta manera, la Proposición 3.4.8 y la Observación 3.1.3 implican que la aplicación $\tilde{\chi}$ es una aplicación de torcimiento estándar y $\mathcal{A}_{\tilde{\chi}} = (B_\chi(i, l))_{i, l \in \mathbb{N}_n^*}$, se obtiene también que $A_\chi(l, l)_{kj} = 1$. Recíprocamente,

$$1 = B_\chi(k, k)_{li} = A_\chi(i, l)_{kk} \Rightarrow \exists! j \text{ tal que } A_\chi(i, l)_{kj} = -1.$$

Así, $j = c_k(A_\chi(l, l))$.

Teorema 3.4.10. Sea $(A(i))_{i \in \mathbb{N}_n^*}$ y $(B(k))_{k \in \mathbb{N}_n^*}$ dos familias de matrices-0,1 idempotentes $A(i) \in M_n(K)$ y $B(k) \in M_m(K)$, tales que, para todo i y k ,

$$(1) \quad A(i)\mathbb{1} = \mathbb{1} \text{ y } B(k)\mathbb{1} = \mathbb{1},$$

$$(2) \quad A(i)_{kk} = B(k)_{ii}.$$

La familia $\mathcal{A}_\chi = (A_\chi(i, l))_{i, l \in \mathbb{N}_n^*}$, de matrices $A_\chi(i, l) \in M_n(K)$ definida por

$$A_\chi(i, l)_{kj} := \begin{cases} A(l)_{kj} & \text{si } i = l, \\ B(k)_{li} & \text{si } k = j, \\ -1 & \text{si } i \neq l, k \neq j \text{ y } A(l)_{kj} = B(k)_{li} = 1, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

define la única aplicación de torcimiento estándar

$$\chi: K^m \otimes K^n \longrightarrow K^n \otimes K^m,$$

tal que $A_\chi(i, i) = A(i)$ y $B_\chi(k, k) = B(k)$.

Demostración. La unicidad se satisface debido a la definición de \mathcal{A}_χ . Escribamos $B_\chi(j, k)_{li} := A_\chi(i, l)_{kj}$. Observemos que $B_\chi(k, k) = B(k)$. Debemos verificar que las condiciones (1)–(4) de la Proposición 3.1.4 son satisfechas y que χ es estándar. Para la condición (3) debemos verificar que

$$\delta_{il} = \sum_j A_\chi(i, l)_{kj} \quad \text{para todo } i, l \text{ y } k. \quad (3.4.11)$$

Cuando $i = l$ se cumple pues la estamos asumiendo. Cuando $i \neq l$ y $B(k)_{li} = 0$, tenemos que $A_\chi(i, l)_{kj} = 0$ para todo j , y de esta manera la igualdad (3.4.11) es satisfecha. Finalmente, cuando $i \neq l$ y $B(k)_{li} = 1$, tenemos que $A_\chi(i, l)_{kk} = 1$, $A_\chi(i, l)_{kc_k} = -1$ (donde $c_k = c_k(A(l))$) y $A_\chi(i, l)_{kj} = 0$ para $j \notin \{k, c_k\}$, y nuevamente la igualdad (3.4.11) se cumple. La prueba de la condición (4) es completamente similar. Debido a que $B_\chi(j, k)_{li} = A_\chi(i, l)_{kj}$, las condiciones (3) y (4) nos dicen que $\sum_i A_\chi(i, l) = \text{id}$ y $\sum_j B_\chi(j, k) = \text{id}$ para todo l y para todo k . Por lo tanto, la Observación 3.1.10 implica que para verificar la condición (1) es suficiente probar que

$$\sum_i \text{rk}(A_\chi(i, l)) \leq n \quad \text{para todo } l. \quad (3.4.12)$$

Fijemos $l \in \mathbb{N}_m^*$. Las matrices $B(k)$ son equivalentes, vía permutaciones idénticas en filas y columnas, a matrices-0, 1 idempotente estándar, de esta manera para cada k existe un único i tal que $A_\chi(i, l)_{kk} = B(k)_{li} = 1$. Así, $\sum_i \#\{k : A_\chi(i, l)_{kk} = 1\} = n$. Por lo tanto, para concluir que la desigualdad (3.4.12) es satisfecha es suficiente mostrar que

$$\text{rk}(A_\chi(i, l)) \leq \#\{k : A_\chi(i, l)_{kk} = 1\} \quad \text{para todo } i.$$

Pero, para $i = l$ se tiene que $\text{rk}(A_\chi(l, l)) = \#\{k : A_\chi(l, l)_{kk} = 1\}$, pues $A(l)$ es una matriz-0, 1 idempotente, mientras que, para $i \neq l$, a partir de

$$A_\chi(i, l)_{kk} \in \{0, 1\} \quad \text{y} \quad A_\chi(i, l)_{kk} = 0 \text{ implica que } A_\chi(i, l)_{kj} = 0 \text{ para todo } j,$$

se obtiene que $\#\{k : A_\chi(i, l)_{kk} = 1\}$ es el número de filas no nulas de $A_\chi(i, l)$, el cual es mayor o igual a $\text{rk}(A_\chi(i, l))$. Esto concluye la prueba de la condición (1) de la Proposición 3.1.4. La prueba de la Condición (2) es completamente similar. \square

Notación 3.4.11. Para todo $l \in \mathbb{N}_m^*$, escribamos

$$F_0(\mathcal{A}, l) := \{k \in \mathbb{N}_n^* : A(i, l)_{kj} = \delta_{il}\delta_{kj}, \text{ para todo } i \text{ y } j\}.$$

y para todo $i, l \in \mathbb{N}_m^*$, escribamos $F(A(i, l)) := \{j \in \mathbb{N}_n^* : A(i, l)_{jj} = 1\}$.

Observación 3.4.12. La notación $F(A(i, l))$ fue introducida en la Notación 3.1.2, donde se llamaba $J_i(l)$, pero en algunos lugares preferiremos usar la expresión completa $F(A(i, l))$ para ser mas precisos.

Definición 3.4.13. Diremos que la condición (4) del Corolario 3.1.7 es satisfecha en la columna l_0 de \mathcal{A} si

$$\sum_{h=1}^m A(i, h)_{kj} A(h, l_0)_{kj'} = \delta_{jj'} A(i, l_0)_{kj} \quad \text{para todo } i, j, j' \text{ y } k. \quad (3.4.13)$$

Proposición 3.4.14. Si la columna l_0 de \mathcal{A} es una columna estándar, entonces la condición (4) del Corolario 3.1.7 es satisfecha en la columna l_0 de \mathcal{A} si y solo si $F(A(v, l_0)) \subseteq F_0(\mathcal{A}, v)$ para todo $v \in \mathbb{N}_m^*$.

Demostración. \Rightarrow Sea $v \in \mathbb{N}_m^*$ y $k \in \mathbb{N}_n^*$. Si $k \in F(A(v, l_0))$, entonces $A(v, l_0)_{kk} = \delta_{vv}$ para todo $u \in \mathbb{N}_m^*$ (ver la Observación 3.4.4). De esta manera, a partir de la condición (3.4.13) con $j = k$, obtenemos

$$A(i, v)_{kj} = \sum_{u=1}^m A(i, u)_{kj} A(u, l_0)_{kk} = \delta_{jk} A(i, l_0)_{kj} = \delta_{jk} A(i, l_0)_{kk} = \delta_{jk} \delta_{iv}$$

para todo i, j , lo cual nos dice que $k \in F_0(\mathcal{A}, v)$, como deseábamos.

\Leftarrow Fijemos $k \in \mathbb{N}_n^*$. Si $i(k, l_0) = l_0$, se tiene $k \in F(A(l_0, l_0)) \subseteq F_0(\mathcal{A}, l_0)$, y entonces la condición (3.4.13) es satisfecha si y solo si

$$A(i, l_0)_{kj} \delta_{kj'} = \delta_{jj'} A(i, l_0)_{kj} \quad \text{para todo } i, j \text{ y } j'.$$

Pero esto es cierto para $i \neq l_0$, pues $A(i, l_0)_{kj} = 0$, y también para $i = l_0$, pues $A(l_0, l_0)_{kj} = \delta_{kj}$.

Si $h_0 := i(k, l_0) \neq l_0$, entonces la condición (3.4.13) es satisfecha si y solo si

$$A(i, h_0)_{kj} A(h_0, l_0)_{kj'} + A(i, l_0)_{kj} A(l_0, l_0)_{kj'} = \delta_{jj'} A(i, l_0)_{kj} \quad \text{para todo } i, j \text{ y } j', \quad (3.4.14)$$

pues para $h \notin \{h_0, l_0\}$ tenemos que $A(h, l_0)_{kj'} = 0$ para todo j' . Para probar que (3.4.14) es satisfecha, tenemos que considerar los casos $j = k$, $j = c_k = c_k(A(l_0, l_0))$ y $j \notin \{k, c_k\}$. Usaremos que se satisface $A(i, h_0)_{kj} = \delta_{ih_0} \delta_{kj}$ para todo i, j , pues $k \in F(A(h_0, l_0)) \subseteq F_0(\mathcal{A}, h_0)$.

- Si $j = k$, entonces debemos probar que

$$A(i, h_0)_{kk}A(h_0, l_0)_{kj'} + A(i, l_0)_{kk}A(l_0, l_0)_{kj'} = \delta_{kj'}A(i, l_0)_{kk} \quad \text{para todo } i \text{ y all } j'.$$

Pero esto se verifica, pues la observación 3.4.4 y a la proposición 3.3.7, implican que

$$A(i, h_0)_{kk} = \delta_{ih_0}, \quad A(h_0, l_0)_{kj'} = \delta_{kj'} - \delta_{j'c_k}, \quad A(i, l_0)_{kk} = \delta_{ih_0} \quad \text{y} \quad A(l_0, l_0)_{kj'} = \delta_{j'c_k}.$$

- Debido a que $A(i, h_0)_{kc_k} = 0$ para todo i , cuando $j = c_k$, la prueba se reduce a verificar que se satisface la siguiente igualdad

$$A(i, l_0)_{kc_k}A(l_0, l_0)_{kj'} = \delta_{c_kj'}A(i, l_0)_{kc_k} \quad \text{para todo } i \text{ y all } j'.$$

Pero esto se verifica, pues $A(l_0, l_0)_{kj'} = \delta_{j'c_k}$.

- Si $j \notin \{k, c_k\}$, entonces ambos lados de la ecuación (3.4.14) se anulan.

De esta manera, la condición (3.4.13) es satisfecha en todos los casos. \square

Corolario 3.4.15. *Sea $\chi: K^m \otimes K^n \rightarrow K^n \otimes K^m$ una aplicación k -lineal tal que \mathcal{A}_χ es un pre-torcimiento. Si cada columna de \mathcal{A}_χ es estándar, entonces χ es una aplicación de torcimiento si y solo si $F(A(i, l)) \subseteq F_0(A, i)$ para todo $i, l \in \mathbb{N}_m^*$.*

Fijados dos conjuntos X, Y , denotaremos por $M_{X, Y}(K)$ el conjunto de funciones de $X \times Y$ a K . También denotaremos por id_X la matriz identidad en $M_X(K) := M_{X, X}(K)$.

Proposición 3.4.16. *Sea $l \in \mathbb{N}_k^*$ y sean $A(1), \dots, A(k) \in M_n(K)$ matrices tales que $A(l)$ es una matriz-0,1 idempotente con $A(l)\mathbf{1} = \mathbf{1}$. Escribamos $J_l := \{k : A(l)_{kk} = 1\}$ y $J_l^c := \mathbb{N}_n^* \setminus J_l$. Para cada i escribamos*

$$X_i := A(i)|_{J_l \times J_l}, \quad Y_i := A(i)|_{J_l \times J_l^c}, \quad U_i := A(i)|_{J_l^c \times J_l} \quad \text{y} \quad W_i := A(i)|_{J_l^c \times J_l^c}.$$

Las matrices $A(i)$ son idempotentes ortogonales tales que $\sum_i A(i) = \text{id}$ si y solo si las siguientes condiciones son satisfechas:

- (1) $X_i = 0$ para todo $i \neq l$,
- (2) $Y_i = 0$ para todo i ,
- (3) $W_i W_j = \delta_{ij} W_i$ para todo i ,
- (4) $U_i = -W_i U_l$ para todo $i \neq l$,
- (5) $\sum_i W_i = \text{id}_{J_l^c}$.

Más aún, si las matrices $A(i)$ satisfacen las condiciones requeridas, entonces $A(i)\mathbf{1} = \delta_{il}\mathbf{1}$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $J_l = \mathbb{N}_r^*$, donde $r := \text{rk}(A(l))$. Entonces $A(l) = \begin{pmatrix} \text{id}_r & 0 \\ U_l & 0 \end{pmatrix}$ y $A(i) = \begin{pmatrix} X_i & Y_i \\ U_i & W_i \end{pmatrix}$. Sea $i \neq l$. Un cálculo directo muestra que $A(l)A(i) = 0$ si y solo si $X_i = 0$ y $Y_i = 0$. Bajo esta condición, $A(i)A(l) = 0$ si y solo si $U_i = -W_i U_l$. Si suponemos que todas las condiciones previas son satisfechas para todo $i \neq l$, tenemos que $A(i)A(j) = \delta_{ij}A(i)$ si y solo si $W_i W_j = \delta_{ij}W_i$, y, bajo las mismas condiciones, $\sum_i A(i) = \text{id}_n$ si y solo si $\sum_i W_i = \text{id}_{J_l^c}$. La última afirmación se obtiene a partir de que $U_i = -W_i U_l$ y $U_l \mathbf{1}_{J_l} = \mathbf{1}_{J_l^c}$. \square

Definición 3.4.17. Sea $l_0 \in \mathbb{N}_m^*$. Para todo $i, u, v \in \mathbb{N}_m^*$, escribamos $D_{(i,l_0)}^{uv} = D_{(i)}^{uv} := A(i, l_0)|_{J_u \times J_v}$, donde $J_i := J_i(l_0)$. Diremos que $(A(i, l_0))_{i \in \mathbb{N}_m^*}$ es una columna casi-estándar de \mathcal{A} si

- (1) $A(l_0, l_0)$ es una matriz-0, 1,
- (2) $A(i, l_0)_{kk} \in \{0, 1\}$ para todo i y k ,
- (3) $D_{(i)}^{uv} = 0$ si $u \neq i$ y $v \notin \{i, l_0\}$,
- (4) Para $u, i \in \mathbb{N}_m^*$, $v \in \mathbb{N}_m^* \setminus \{l_0\}$ y $k \in J_u$, se tiene $\# \text{Supp}((D_{(i)}^{uv})_{k*}) \leq 1$. Más aún, si $d \in \text{Supp}((D_{(i)}^{uv})_{k*})$, entonces $c_d = c_k$, donde $c_d := c_d(A(l_0, l_0))$ y $c_k := c_k(A(l_0, l_0))$. Si es necesario escribiremos $d^{(v)}$ o $d_k^{(v)}$ en lugar de d .

Observación 3.4.18. Sea $k \in J_{l_0}$ y sea $i \neq l_0$. Las condiciones (1) y (2) de la Proposición 3.4.16 implican que $A(i, l_0)_{kj} = 0$ para todo j . Por lo tanto, $D_{(i)}^{l_0 v} = 0$ para todo $v \in \mathbb{N}_m^*$. Además, esto implica que $F(A(l_0, l_0)) = F_0(\mathcal{A}, l_0)$.

Observación 3.4.19. Como $\sum_{i \in \mathbb{N}_m^*} A(i, l_0) = \text{id}$, el ítem (2) de la Definición 3.4.17 implica que $\mathbb{N}_m^* = \bigcup_{i=1}^m J_i$ y $J_i \cap J_{i'} = \emptyset$ si $i \neq i'$. Más aún, la Observación 3.3.1 implica que $\#(J_i) = \text{rk}(A(i, l_0))$ para todo i .

Observación 3.4.20. A partir de la igualdad $\sum_i A(i, l_0) = \text{id}$, se obtiene que $\sum_i D_{(i)}^{uu} = \text{id}$ para todo $u \in \mathbb{N}_m^*$, lo cual vía la condición (3) implica que $D_{(u)}^{uu} = \text{id}$ para todo $u \neq l_0$ (La Proposición 3.3.7, implica también que $D_{(l_0)}^{l_0 l_0} = \text{id}$).

Observación 3.4.21. Nuevamente, a partir de la igualdad $\sum_i A(i, l_0) = \text{id}$, se tiene que $\sum_i D_{(i)}^{uv} = 0$ para todo $u \neq v$ en \mathbb{N}_m^* , lo cual vía la condición (3) implica que $D_{(u)}^{uv} = -D_{(v)}^{uv}$ para todo $u \in \mathbb{N}_m^*$ y $v \in \mathbb{N}_m^* \setminus \{u, l_0\}$.

La Observación 3.4.18 es válida para pre-torcimientos que satisfacen la condición (1) de la Definición 3.4.17, mientras que las Observaciones 3.4.20 y 3.4.21 son válidas para pre-torcimientos que satisfacen las condiciones (1) y (3) de la misma definición.

Observación 3.4.22. Como $A(l_0, l_0)$ es una matriz-0, 1 se obtiene inmediatamente que $D_{(l_0)}^{uv} = 0$ para todo $u \in \mathbb{N}_m^*$ y $v \in \mathbb{N}_m^* \setminus \{l_0\}$. Combinando este resultado con la Observación 3.4.18 y 3.4.21 se obtiene que las condiciones (3) y (4) en la Definición 3.4.17 pueden ser reemplazadas por las siguientes

- (3') $D_{(i)}^{uv} = 0$ si $i \neq l_0$ y $u, v \notin \{i, l_0\}$,
- (4') $\# \text{Supp}((D_{(v)}^{uv})_{k*}) \leq 1$ para $u, v \in \mathbb{N}_m^* \setminus \{l_0\}$ y $k \in J_u$. Más aún, si $d \in \text{Supp}((D_{(v)}^{uv})_{k*})$, entonces $c_d = c_k$, donde $c_d := c_d(A(l_0, l_0))$ y $c_k := c_k(A(l_0, l_0))$,

respectivamente.

Observación 3.4.23. Cada columna estándar de \mathcal{A} es una columna casi-estándar de \mathcal{A} .

Ejemplo 3.4.24. Supongamos por ejemplo que $n = 10$, $J_{l_0} = \{1, 2\}$ y $J_i = \{5, 6, 7\}$. Si la columna l_0 de \mathcal{A} es casi-estándar, entonces la matriz $A(i, l_0)$ puede tener entradas no nulas solamente en la entradas indicadas con estrellas. En este ejemplo y en el ejemplo 3.4.27 más adelante, los elementos de cada familia J_u son consecutivos, pero esto no tiene por que ocurrir.

$$A(i, l_0) = \begin{matrix} & J_{l_0} & & J_i & & \\ J_{l_0} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & \star & \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & \star & \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star \\ \star & \star \\ \star & \star \\ \star & \star & 0 & 0 & \star & \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & \star & \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & \star & \star & \star & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & & & & & \\ J_i & & & & & & & & & \end{matrix}$$

Lema 3.4.25. *Supongamos que la columna l_0 de \mathcal{A} satisface las condiciones (1)–(3) de la Definición 3.4.17. Elija $i, u \in \mathbb{N}_m^* \setminus \{l_0\}$ y $k \in J_u$. Si $A(i, l_0)_{kc_k} \neq 0$, entonces existen índices $v \in \mathbb{N}_m^* \setminus \{l_0\}$ y $j \in J_v$ tales que $(D_{(i)}^{uv})_{kj} \neq 0$. Más aún, si $u \neq i$, entonces necesariamente $v = i$.*

Demostración. La Observación 3.4.18 implica que $A(i, l_0)_{jc_k} = 0$ para todo $j \in J_{l_0}$. Así,

$$\sum_{v \in \mathbb{N}_m^* \setminus \{l_0\}} \sum_{j \in J_v} A(i, l_0)_{kj} A(i, l_0)_{jc_k} = \sum_{j \in \mathbb{N}_n^*} A(i, l_0)_{kj} A(i, l_0)_{jc_k} = A(i, l_0)_{kc_k} \neq 0.$$

Por lo tanto, la condición (3) de la Definición 3.4.17 implica la existencia de $v \in \mathbb{N}_m^* \setminus \{l_0\}$ y $j \in J_v$ tales que $(D_{(i)}^{uv})_{kj} = A(i, l_0)_{kj} \neq 0$. \square

Para $u \in \mathbb{N}_m^* \setminus \{l_0\}$ y $k \in J_u = J_u(l_0)$, escribamos

$$\mathcal{X}_k := \{v \in \mathbb{N}_m^* \setminus \{u, l_0\} : \text{Supp}((D_{(u)}^{uv})_{k*}) \neq \emptyset\} \quad \text{y} \quad d^{(\mathcal{X}_k)} := \{d^{(v)} : v \in \mathcal{X}_k\}.$$

Lema 3.4.26. *Supongamos que la columna l_0 de \mathcal{A} es casi-estándar. Sea $k \in \mathbb{N}_n^* \setminus J_{l_0}$ y escribamos $u := i(k, l_0)$. Entonces las siguientes condiciones son satisfechas:*

- (1) $\text{Supp}(A(l_0, l_0)_{k*}) = \{c_k\}$,
- (2) Si $v \notin \{u, l_0\}$ y $v \notin \mathcal{X}_k$, entonces $\text{Supp}(A(v, l_0)_{k*}) = \emptyset$, mientras que si $v \notin \{u, l_0\}$ y $v \in \mathcal{X}_k$, entonces $\text{Supp}(A(v, l_0)_{k*}) = \{c_k, d^{(v)}\}$ y $A(v, l_0)_{kc_k} + A(v, l_0)_{kd^{(v)}} = 0$.
- (3) Si $v = u$, entonces $\text{Supp}(A(v, l_0)_{k*}) \subseteq \{k, c_k\} \cup d^{(\mathcal{X}_k)}$.

Demostración. (1) Es directa.

(2) La definición de columna casi-estándar y la Observación 3.4.21, implican que

$$\text{Supp}(A(v, l_0)_{k*}) \subseteq \text{Supp}((D_{(v)}^{ul_0})_{k*}) \cup \text{Supp}((D_{(u)}^{uv})_{k*}) \quad \text{y} \quad \#\text{Supp}((D_{(u)}^{uv})_{k*}) \leq 1.$$

Así, la condición (2) del Corolario 3.1.7 reduce la prueba a demostrar que $\text{Supp}((D_{(v)}^{ul_0})_{k*}) \subseteq \{c_k\}$.

Como $D_{(v)}^{ui} = 0$ para $i \notin \{v, l_0\}$, se tiene

$$D_{(v)}^{ul_0} D_{(l_0)}^{l_0 l_0} + D_{(v)}^{uv} D_{(l_0)}^{vl_0} = A(v, l_0) A(l_0, l_0)|_{J_u \times J_{l_0}} = 0.$$

Como $D_{(l_0)}^{l_0 l_0} = \text{id}$, se satisface

$$D_{(v)}^{ul_0} = -D_{(v)}^{uv} D_{(l_0)}^{vl_0}.$$

Así, si $\text{Supp}((D_{(v)}^{uv})_{k*}) = \emptyset$, entonces $\text{Supp}((D_{(v)}^{ul_0})_{k*}) = \emptyset$. De otro modo $\text{Supp}((D_{(v)}^{uv})_{k*}) = \{d^{(v)}\}$ y entonces

$$(D_{(v)}^{ul_0})_{k*} = -(D_{(v)}^{uv})_{kd^{(v)}} (D_{(l_0)}^{vl_0})_{d^{(v)*}}.$$

Combinando esto con la siguiente igualdad

$$\text{Supp}((D_{(l_0)}^{vl_0})_{d^{(v)*}}) = \text{Supp}(A(l_0, l_0)_{d^{(v)*}}) = \{c_{d^{(v)}}\} = \{c_k\},$$

Obtenemos que $\text{Supp}((D_{(v)}^{ul_0})_{k*}) = \{c_k\}$, como deseábamos .

(3) Usando que $A(u, l_0)_{k*} = \delta_{k*} - \sum_{i \neq u} A(i, l_0)_{k*}$ obtenemos que

$$\text{Supp}(A(u, l_0)_{k*}) \subseteq \{k\} \cup \bigcup_{i \neq u} \text{Supp}(A(i, l_0)_{k*}),$$

lo cual, combinado con los items (1) y (2), termina la demostración. \square

Ejemplo 3.4.27. *Las matrices*

$$A(1, 1) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(2, 1) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 - \lambda_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ -1 - \lambda_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_3 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_4 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y $A(3, 1) := \text{id} - A(1, 1) - A(2, 1)$ forman una columna casi-estándar de cada pre-torcimiento de K^3 con K^8 que los incluya (por ejemplo si tomamos $A(1, 2) = A(3, 2) = A(1, 3) = A(2, 3) = 0$ y $A(2, 2) = A(3, 3) = \text{id}$). En este ejemplo $J_1 = \{1, 2\}$, $J_2 = \{3, 4, 5\}$ y $J_3 = \{6, 7, 8\}$.

Teorema 3.4.28. *Supongamos que la columna l_0 de \mathcal{A} es casi-estándar. Entonces la condición (4) del corolario 3.1.7 es satisfecha en la columna l_0 de \mathcal{A} (es decir, la condición (3.4.13) es satisfecha) si y solo si las siguientes condiciones son satisfechas:*

- (1) $J_i = F(A(i, l_0)) \subseteq F_0(\mathcal{A}, i)$ para todo $i \in \mathbb{N}_m^*$.
- (2) Si $(D_{(u)}^{uv})_{kd} \neq 0$ y $u \neq v \neq l_0$, entonces
 - (a) $A(u, v)_{kj} = \delta_{kj} - \delta_{jd}$ para todo j ,
 - (b) $A(v, v)_{kj} = \delta_{jd}$ para todo j ,
 - (c) $A(i, v)_{kj} = 0$ para $i \notin \{u, v\}$ y para todo j .

Demostración. \Rightarrow Los argumentos ofrecidos en la prueba de la Proposición 3.4.14 muestran que la condición (1) es satisfecha. Entonces únicamente debemos probar la condición (2). La condición (3) de la Definición 3.4.17 implica que

$$A(i, l_0)_{kd} = 0 \quad \text{para } i \notin \{u, v\}, \quad (3.4.15)$$

lo cual, considerando que $\sum_i A(i, l_0) = \text{id}$ y $k \neq d$, implica que

$$A(v, l_0)_{kd} = -A(u, l_0)_{kd} = -(D_{(u)}^{uv})_{kd} \neq 0. \quad (3.4.16)$$

Más aún, a partir de la condición (1) se tiene $k \in J_u \subseteq F_0(\mathcal{A}, u)$, y entonces

$$A(i, u)_{kj} = \delta_{iu}\delta_{kj} \quad \text{para todo } i \text{ y } j. \quad (3.4.17)$$

Las ecuaciones (3.4.15) y (3.4.17), permiten escribir la igualdad (3.4.13) con $j' = d$ como sigue

$$\delta_{iu}\delta_{kj}A(u, l_0)_{kd} + A(i, v)_{kj}A(v, l_0)_{kd} = \delta_{jd}A(i, l_0)_{kd} \quad \text{para todo } i \text{ y } j. \quad (3.4.18)$$

Cuando $i = u$, a partir de (3.4.16) y (3.4.18), se obtiene que

$$\delta_{kj}A(u, l_0)_{kd} - A(u, v)_{kj}A(v, l_0)_{kd} = \delta_{jd}A(u, l_0)_{kd} \quad \text{para todo } j,$$

lo cual corresponde al ítem (a), pues $A(u, l_0)_{kd} \neq 0$. Por otro lado, cuando $i \neq u$, la igualdad (3.4.18) se reduce a

$$A(i, v)_{kj}A(v, l_0)_{kd} = \delta_{jd}A(i, l_0)_{kd} \quad \text{para todo } j,$$

lo cual combinado con las ecuaciones (3.4.15) y (3.4.16), nos permite obtener los ítems (b) y (c).

⇐) Debemos demostrar que

$$\sum_{h \in \mathbb{N}_m^*} A(i, h)_{kj}A(h, l_0)_{kj} = A(i, l_0)_{kj} \quad \text{para todo } i, k \text{ y } j. \quad (3.4.19)$$

Fijemos $k \in \mathbb{N}_n^*$ y escribamos $u := i(k, l_0)$. Si $k \in F(A(l_0, l_0)) = F_0(\mathcal{A}, l_0)$, entonces $A(i, l_0)_{kj} = \delta_{il_0}\delta_{kj}$ para todo i y j , entonces la igualdad (3.4.19) se verifica trivialmente. De esta manera podemos asumir que $u \neq l_0$. Así, a partir del Lema 3.4.26 obtenemos,

$$(3) \text{ Supp}(A(l_0, l_0)_{k*}) = \{c_k\},$$

$$(4) \text{ Si } h \notin \{u, l_0\} \text{ y } h \notin \mathcal{X}_k, \text{ entonces } \text{Supp}(A(h, l_0)_{k*}) = \emptyset, \text{ mientras que si } h \notin \{u, l_0\} \text{ y } h \in \mathcal{X}_k, \text{ entonces } \text{Supp}(A(h, l_0)_{k*}) = \{c_k, d^{(h)}\} \text{ y } A(h, l_0)_{kc_k} + A(h, l_0)_{kd^{(h)}} = 0,$$

$$(5) \text{ Si } h = u, \text{ entonces } \text{Supp}(A(h, l_0)_{k*}) \subseteq \{k, c_k\} \cup d^{(\mathcal{X}_k)}.$$

Así, si $j' \notin \{k, c_k\} \cup d^{(\mathcal{X}_k)}$ ambos lados de la igualdad (3.4.19) son iguales a cero. Por otro lado, la condición (1) implica que $A(i, u)_{kj} = \delta_{jk}\delta_{iu}$, y así la igualdad (3.4.19) se convierte en

$$\delta_{jk}\delta_{iu}A(u, l_0)_{kj'} + \sum_{h \in \mathbb{N}_m^* \setminus \{u\}} A(i, h)_{kj}A(h, l_0)_{kj'} = \delta_{jj'}A(i, l_0)_{kj'} \quad \text{para todo } i, j \text{ y } j'. \quad (3.4.20)$$

Esta igualdad se satisface para $j' = k$ pues las condiciones (3)–(5) implican $A(h, l_0)_{kk} = 0$ para todo $h \in \mathbb{N}_m^* \setminus \{u\}$. Ahora, supongamos que $j' = d^{(v)}$ con $v \in \mathcal{X}_k$. Las condiciones (3)–(5) implican que $A(h, l_0)_{kd^{(v)}} = 0$ si $h \notin \{v, u\}$. Más aún, a partir de la definición de \mathcal{X}_k se tiene $v \neq u$, y entonces la Observación 3.4.21 implica que

$$A(u, l_0)_{kd^{(v)}} = -A(v, l_0)_{kd^{(v)}}.$$

Por lo tanto, para todo j la igualdad (3.4.20) se escribe

$$(A(i, v)_{kj} - \delta_{iu}\delta_{jk})A(v, l_0)_{kd^{(v)}} = \begin{cases} -\delta_{jd^{(v)}}A(v, l_0)_{kd^{(v)}} & \text{si } i = u, \\ \delta_{jd^{(v)}}A(v, l_0)_{kd^{(v)}} & \text{si } i = v, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como $(D_{(u)}^{uv})_{kd^{(v)}} \neq 0$ y $u \neq v \neq l_0$, esta igualdad es satisfecha por el ítem (2). Supongamos ahora que $j' = c_k$. La condición (4) implica que $h \notin \{u, l_0\}$ y $A(h, l_0)_{kc_k} \neq 0$ si y solo si $h \in \mathcal{X}_k$. Así, el ítem (c) de la condición (2) y que $A(l_0, l_0)_{kc_k} = 1$, cuando $i \neq u$; permite escribir la ecuación (3.4.20) como

$$\delta_{jk}\delta_{iu}A(u, l_0)_{kc_k} + A(i, l_0)_{kj} + \sum_{h \in \{i\} \setminus \{u, l_0\}} A(i, h)_{kj}A(h, l_0)_{kc_k} = \delta_{jc_k}A(i, l_0)_{kc_k}, \quad (3.4.21)$$

mientras que, el ítem (a) de la condición (2) y que $A(l_0, l_0)_{kc_k} = 1$, cuando $i = u$; permiten escribir la misma ecuación como

$$\delta_{jk}A(u, l_0)_{kc_k} + A(u, l_0)_{kj} + \sum_{h \in \mathcal{X}_k} (\delta_{kj} - \delta_{jd^{(h)}})A(h, l_0)_{kc_k} = \delta_{jc_k}A(u, l_0)_{kc_k}. \quad (3.4.22)$$

Si $i = l_0$, entonces la igualdad (3.4.21) se satisface debido a que $\delta_{l_0u} = 0$ y $A(l_0, l_0)_{kj} = \delta_{jc_k}$. Supongamos ahora que $i \notin \{u, l_0\}$. Como $\delta_{iu} = 0$ y $A(l_0, l_0)_{kc_k} = 1$, la ecuación (3.4.21) se convierte en

$$A(i, i)_{kj}A(i, l_0)_{kc_k} + A(i, l_0)_{kj} = \delta_{jc_k}A(i, l_0)_{kc_k} \quad \text{para todo } j. \quad (3.4.23)$$

Si $i \notin \mathcal{X}_k$, entonces la igualdad es trivial pues la condición (4) implica que $\text{Supp}(A(i, l_0)_{k*}) = \emptyset$. Por otro lado, el ítem (b) de la condición (2) implica que si $i \in \mathcal{X}_k$, entonces $A(i, i)_{kj} = \delta_{jd^{(i)}}$, entonces la igualdad (3.4.23) se obtiene facilmente a partir del siguiente resultado que proviene de la condición (4),

$$\text{Supp}(A(i, l_0)_{k*}) = \{c_k, d^{(i)}\} \quad \text{y} \quad A(i, l_0)_{kc_k} + A(i, l_0)_{kd^{(i)}} = 0.$$

Resta considerar el caso $i = u$. Si $j = c_k$, entonces la igualdad (3.4.22) es claramente satisfecha, mientras que si $j = k$, entonces esta es satisfecha pues

$$\sum_{h \in \mathbb{N}_m^*} A(h, l_0)_{kc_k} = 0 \quad \text{y} \quad A(l_0, l_0)_{kc_k} = A(u, l_0)_k = 1.$$

Supongamos que $j = d^{(v)}$ con $v \in \mathcal{X}_k$. En este caso la igualdad (3.4.22) se satisface, pues, la condición (4) y la Observación 3.4.21, implican

$$A(v, l_0)_{kc_k} = -A(v, l_0)_{kd^{(v)}} = A(u, l_0)_{kd^{(v)}}.$$

Finalmente, si $j \notin \{k, c_k\} \cup d^{(\mathcal{X}_k)}$, entonces la igualdad (3.4.22) es trivial. \square

Definición 3.4.29. Diremos que la columna l_0 de \mathcal{A} tiene rango reducido r si existen exactamente r índices $i \neq l_0$ tales que $A(i, l_0) \neq 0$. En este caso escribiremos $\text{rank}_{\mathcal{A}}(l_0) = r$. Si \mathcal{A} es asociado con una aplicación χ como al inicio de la Sección 3.1, entonces usaremos $\text{rank}_{\chi}(l_0)$ como un sinónimo de $\text{rank}_{\mathcal{A}}(l_0)$.

Observación 3.4.30. Sea $\mathcal{A} = (A(i, l))_{i, l \in \mathbb{N}_m^*}$ un pre-torcimiento de K^m con K^n . Si la columna l de \mathcal{A} tiene rango reducido 1 y $A(l, l)$ es una matriz-0, 1, entonces la columna l de \mathcal{A} es estándar.

Observación 3.4.31. Sean $l_0, u \in \mathbb{N}_m^*$ y sea $k \in J_u$. Supongamos que \mathcal{A} es una familia de matrices asociada con una aplicación de torcimiento de K^m con K^n y que las condiciones (1) y (2) de la Definición 3.4.17 son satisfechas para la columna l_0 de \mathcal{A} . La Observación 3.4.6 implica que $A(v, l_0)_{kk} = \delta_{uv}$ para todo v . Por lo tanto, si empleamos la condición (4) del Corolario 3.1.7 con $j' = k$, obtenemos

$$A(i, u)_{kj} = \delta_{iu}\delta_{kj} \quad \text{para todo } i \text{ y } j. \quad (3.4.24)$$

Las siguiente proposición es una variante de la Observación 3.4.30

Proposición 3.4.32. *Sea $l_0 \in \mathbb{N}_m^*$. Supongamos que \mathcal{A} es una familia de matrices asociada a una aplicación de torcimiento de K^m con K^n y que las condiciones (1) y (2) de la Definición 3.4.17 son satisfechas para la columna l_0 de \mathcal{A} .*

- (a) *Si la condición (3) es satisfecha, entonces la columna l_0 de \mathcal{A} es casi-estándar.*
- (b) *Si el rango reducido de la columna l_0 de \mathcal{A} es menor o igual a 2, entonces la columna l_0 de \mathcal{A} es casi-estándar.*

Demostración. Como en la Definición 3.4.17, para todo $i, u, v \in \mathbb{N}_m^*$ escribamos $D_{(i)}^{uv} := A(i, l_0)|_{J_u \times J_v}$, donde $J_i := J_i(l)$.

(a) Debemos probar que si la condición (3) de la Definición 3.4.17 es satisfecha, entonces la condición (4') de la Observación 3.4.22 también lo es. Comenzaremos probando que

$$\# \text{Supp}((D_{(v)}^{uv})_{k*}) \leq 1 \quad \text{para todo } u, v \in \mathbb{N}_m^* \setminus \{l_0\} \text{ y } k \in J_u. \quad (3.4.25)$$

La Observación 3.4.20 muestra que esta condición se verifica para $u = v = i$. Entonces, podemos asumir que $u \neq v$. Supongamos lo contrario, es decir que existe $d_1 \neq d_2$ en $\text{Supp}((D_{(v)}^{uv})_{k*})$. Como $A(i, l_0)_{kd_1} = 0$ para $i \notin \{u, v\}$ y $A(v, l_0)_{kd_1} = -A(u, l_0)_{kd_1} \neq 0$, la condición (4) del Corolario 3.1.7 con $i = u$, $l = l_0$ y $j = j' = d_1$ implica

$$A(v, v)_{kd_1} - A(v, u)_{kd_1} = 1.$$

Un argumento similar muestra que la condición (4) del Corolario 3.1.7(4) con $i = u$, $l = l_0$, $j = d_1$ y $j' = d_2$, implican

$$A(v, v)_{kd_1} - A(v, u)_{kd_1} = 0,$$

lo cual es una contradicción.

Solo falta verificar que si $d \in \text{Supp}((D_{(v)}^{uv})_{k*})$, entonces $c_d = c_k$. Cuando $v = u$ esto se verifica debido a la Observación 3.4.20. Supongamos que $v \neq u$. Afirmamos que

$$\text{Supp}(A(v, l_0)_{k*}) = \{d, c_d\}. \quad (3.4.26)$$

Por un lado $\text{Supp}((D_{(v)}^{uv})_{k*}) = \{d\}$ y $D_{(v)}^{ui} = 0$ para $i \notin \{v, l_0\}$, es satisfecha si y solo si

$$\text{Supp}((D_{(v)}^{ul_0})_{k*}) = \{c_d\}.$$

Con el fin de comprobar esto, observemos que $A(v, l_0)A(l_0, l_0) = 0$ implica que

$$D_{(v)}^{ul_0}D_{(l_0)}^{l_0l_0} + D_{(v)}^{uv}D_{(l_0)}^{vl_0} = \sum_i D_{(v)}^{ui}D_{(l_0)}^{il_0} = 0.$$

Como $D_{(l_0)}^{l_0l_0} = \text{id}$ y $\text{Supp}((D_{(v)}^{uv})_{k*}) = \{d\}$, se tiene

$$(D_{(v)}^{ul_0})_{k*} = -(D_{(v)}^{uv})_{kd}(D_{(l_0)}^{vl_0})_{d*}.$$

Si combinamos este resultado con

$$\text{Supp}((D_{(l_0)}^{vl_0})_{d*}) = \text{Supp}(A(l_0, l_0)_{d*}) = \{c_d\},$$

se obtiene que $\text{Supp}((D_{(v)}^{ul_0})_{k*}) = \{c_d\}$, como necesitábamos.

Debido al Lema 3.4.25, si $A(h, l_0)_{kc_k} \neq 0$, entonces $h \in \{u, v, l_0\}$. Entonces el ítem (4) del Corolario 3.1.7 con $j = d$, $j' = c_k$ y $i = v$ implica

$$A(v, l_0)_{kd} + A(v, v)_{kd}A(v, l_0)_{kc_k} + A(v, u)_k A(u, l_0)_{kc_k} = 0,$$

donde estamos usando que $A(l_0, l_0)_{kc_k} = 1$. Pero la ecuación (3.4.24) implica que $A(v, u)_{kd} = \delta_{vu}\delta_{kd} = 0$, y entonces, necesariamente $A(v, l_0)_{kc_k} \neq 0$, lo cual, debido a la ecuación (3.4.26), implica que $c_k = c_d$.

(b) Si el rango reducido de la columna l_0 de \mathcal{A} es menor que 2, entonces la columna es estándar y el resultado es trivial (ver Observación 3.4.23). De esta manera podemos asumir que el rango reducido es 2. Debido al ítem (a) y la Observación 3.4.22, es suficiente probar que $D_{(i)}^{uv} = 0$, cuando $i \neq l_0$ y $u, v \notin \{i, l_0\}$. Como el rango reducido de la columna l_0 es 2, existen dos índices $i_0, i_1 \neq l_0$ tales que $A(i, l_0) \neq 0$ si y solo si $i \in \{l_0, i_0, i_1\}$. Entonces debemos probar que $D_{(i_a)}^{i_b i_b} = 0$ para $a \in \{0, 1\}$ y $b := 1 - a$. Elijamos $k \in J_{i_b}$. Primero probaremos que se cumple una de las dos condiciones siguientes

$$\text{Supp}(A(i_b, l_0)_{k*}) \subseteq \{k, c_k\} \quad \text{o} \quad \exists! d \text{ tal que } d \in \text{Supp}(A(i_b, l_0)_{k*}) \setminus \{k, c_k\}. \quad (3.4.27)$$

Supongamos por contradicción que existe $d \neq e \in \text{Supp}(A(i_b, l_0)_{k*}) \setminus \{k, c_k\}$. Observemos primero que $A(l_0, l_0) + A(i_a, l_0) + A(i_b, l_0) = \text{id}$ y $\text{Supp}(A(l_0, l_0)_{k*}) = \{c_k\}$, para $f \notin \{k, c_k\}$, implican

$$A(i_a, l_0)_{kf} = -A(i_b, l_0)_{kf}. \quad (3.4.28)$$

Así, la ecuación (3.4.24) implica que $A(i_b, i_b)_{kd} = 0$. Más aún, como $\text{Supp}(A(l_0, l_0)_{k*}) = \{c_k\}$, se tiene

$$A(l_0, l_0)_{kd} = A(l_0, l_0)_{ke} = 0.$$

Por lo tanto, a partir de la condición (4) del Corolario 3.1.7 con $j = j' = d$ y $i = i_b$, obtenemos que

$$A(i_b, i_a)_{kd}A(i_a, l_0)_{kd} = \sum_u A(i_b, u)_{kd}A(u, l_0)_{kd} = A(i_b, l_0)_{kd} \neq 0,$$

lo cual implica que $A(i_b, i_a)_{kd} \neq 0$. Por otro lado, la condición (4) del Corolario 3.1.7 con $j = d$, $j' = e$ y $i = i_b$, implican que

$$A(i_b, i_a)_{kd}A(i_a, l_0)_{ke} = \sum_u A(i_b, u)_{kd}A(u, l_0)_{ke} = 0,$$

de esta manera, necesariamente $A(i_a, l_0)_{ke} = 0$. Pero esto es imposible, pues $A(i_a, l_0)_{ke} = -A(i_b, l_0)_{ke} \neq 0$. Por lo tanto, la condición (3.4.27) es satisfecha.

Afirmamos que si existe tal d , entonces $d \in J_{i_a}$. En efecto, debido a que $k \in J_{i_b}$ tenemos que $A(i_a, l_0)_{kk} = 0$, y de esta manera, la igualdad (3.4.28), implica que si $d \in \text{Supp}(A(i_b, l_0)_{k*}) \setminus \{k, c_k\}$, entonces $\text{Supp}(A(i_a, l_0)_{k*}) = \{c_k, d\}$. Ahora usamos que la matriz $A(i_a, l_0)$ es idempotente, y obtenemos

$$\begin{aligned} A(i_a, l_0)_{kd} &= A(i_a, l_0)_{k*}A(i_a, l_0)_{*d} \\ &= A(i_a, l_0)_{kc_k}A(i_a, l_0)_{c_k d} + A(i_a, l_0)_{kd}A(i_a, l_0)_{dd} \\ &= A(i_a, l_0)_{kd}A(i_a, l_0)_{dd}, \end{aligned}$$

pues $A(i_a, l_0)_{c_k d} = 0$ debido a la Observación 3.4.18. De esta manera $A(i_a, l_0)_{dd} = 1$, lo cual significa que $d \in J_{i_a}$, como afirmamos. Por lo tanto,

$$\text{Supp}(A(i_a, l_0)_{k*}) \subseteq J_{l_0} \cup J_{i_a},$$

lo cual implica que $\text{Supp}((D_{(i_a)}^{i_b i_b})_{k*}) = \text{Supp}(A(i_a, l_0)_{k*}) \cap J_{i_b} = \emptyset$ para todo $k \in J_{i_b}$, como queríamos. \square

Definición 3.4.33. Diremos que una aplicación de torcimiento $\chi: K^m \otimes K^n \longrightarrow K^n \otimes K^m$ es casi-estándar si las columnas de \mathcal{A}_χ son casi-estándar.

Proposición 3.4.34. Una aplicación de torcimiento $\chi: K^m \otimes K^n \longrightarrow K^n \otimes K^m$ es casi-standard si y solo si la aplicación $\tilde{\chi}$, introducida en la Observación 3.1.3, es una aplicación de torcimiento casi-estándar.

Demostración. Debido a la Proposición 3.4.32, la Observación 3.1.3 y que χ es una aplicación de torcimiento si y solo si $\tilde{\chi}$ también lo es, para probar la Proposición 3.4.34 es suficiente verificar que si toda columna de \mathcal{A}_χ es casi-estándar, entonces cada columna de $\mathcal{A}_{\tilde{\chi}} = \mathcal{B}_\chi$ satisface las condiciones (1), (2) y (3) de la Definición 3.4.17. Supongamos que cada columna de \mathcal{A}_χ es casi-estándar. Empleando la igualdad (2.3) es fácil verificar que las condiciones (1) y (2) son satisfechas para las columnas de \mathcal{B}_χ . Por lo tanto, la Observación 3.4.22 nos indica que solo debemos probar que $\tilde{D}_{(j)}^{uv} := B_\chi(j, k)|_{\tilde{J}_u \times \tilde{J}_v}$ (donde $\tilde{J}_u := \tilde{J}_u(k)$) son matrices nulas para $j \neq k$ y $u, v \notin \{j, k\}$. De esta manera la prueba se reduce a probar que

$$B_\chi(j, k)_{ls} = A_\chi(s, l)_{kj} = 0 \quad \text{para todo } k \notin \{j, u, v\}, j \notin \{u, v\}, l \in \tilde{J}_u \text{ y } s \in \tilde{J}_v.$$

Por otro lado, se tiene que

$$l \in \tilde{J}_u \text{ y } s \in \tilde{J}_v \quad \text{si y solo si} \quad A_\chi(l, l)_{ku} = 1 \text{ y } A_\chi(s, s)_{kv} = 1,$$

y, en este caso,

$$j \notin \{u, v\} \quad \text{si y solo si} \quad A_\chi(l, l)_{kj} = 0 \text{ y } A_\chi(s, s)_{kj} = 0,$$

para esto es suficiente verificar que si $k \notin \{j, u, v\}$ y la columna l de \mathcal{A}_χ es casi-estándar, entonces

$$\left. \begin{array}{l} A_\chi(l, l)_{ku} = 1 \\ A_\chi(s, s)_{kv} = 1 \\ A_\chi(l, l)_{kj} = 0 \\ A_\chi(s, l)_{kj} \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A_\chi(s, s)_{kj} \neq 0.$$

Claramente $s \neq l$. Más aún $k \in J_w(l)$ con $w \neq s$ pues en otro caso se tendría que $A_\chi(s, l)_{kj} = 0$ debido al ítem (1) del Teorema 3.4.28. Supongamos que $k \notin J_l(l)$ y $j \notin \{k, c_k(A_\chi(l, l))\}$. Entonces, gracias al Lema 3.4.26 se tiene que $j \notin J_l(l) \cup J_w(l)$. Por lo tanto, debido a la condición (3) de la Definición 3.4.17 y a la Observación 3.4.21, se tiene

$$j \in \text{Supp}((D_{(s)}^{ws})_{k*}) = \text{Supp}((D_{(w)}^{ws})_{k*}) \quad \text{y} \quad w \neq s \neq l.$$

De esta manera, a partir de la condición (2b) del Teorema 3.4.28 obtenemos que $A_\chi(s, s)_{kj} = \delta_{jj} \neq 0$, como queríamos. Para finalizar la prueba debemos verificar que $k \notin J_l(l)$ y $j \notin \{k, c_k(A_\chi(l, l))\}$. Por un lado, como $A_\chi(l, l)_{ku} = 1$, se tiene que $k \notin J_l(l)$, lo cual implica que $A_\chi(l, l)_{kk} = 0$; $j \neq k$, pues debido a la condición (1) del Teorema 3.4.28, si $j = k$, entonces $A_\chi(s, s)_{kv} = \delta_{ss}\delta_{kv} = 0$; y $j \neq c_k(A_\chi(l, l))$, de esta manera $A_\chi(l, l)_{kj} = 0$. \square

Proposición 3.4.35. Cada columna casi-estándar $A(i, l_0)_{i \in \mathbb{N}_m^*}$ de un pre-torcimiento de K^m con K^n puede ser obtenida de la siguiente manera:

(1) Elija una matriz $A \in M_n(K)$, que sea equivalente vía permutaciones idénticas de filas y columnas a una matriz-0,1 idempotente estándar y escriba $A(l_0, l_0) := A$.

(2) Escriba $J_{l_0} := \{k \in \mathbb{N}_n^* : A(l_0, l_0)_{kk} = 1\}$ y $J_{l_0}^c := \mathbb{N}_n^* \setminus J_{l_0}$.

(3) Para todo $i \in \mathbb{N}_m^* \setminus \{l_0\}$ elija $J_i \subseteq \mathbb{N}_n^* \setminus J_{l_0}$ tales que

$$\bigcup_{i=1}^m J_i = \mathbb{N}_n^* \quad y \quad J_i \cap J_{i'} = \emptyset \quad \text{si } i \neq i'.$$

(4) Escriba $F := \{i \in \mathbb{N}_m^* : J_i \neq \emptyset\}$ y elija $D_{(i)}^{ij} \in M_{J_i \times J_j}(K)$ para $i \neq j$ en $F \setminus \{l_0\}$, tales que

(a) $D_{(r)}^{ri} D_{(i)}^{ij} = 0$ para todo $r \neq i \neq j$,

(b) $\# \text{Supp}((D_{(i)}^{ij})_{k*}) \leq 1$ para todo $i \neq j$ y $k \in J_i$,

(c) Si $d \in \text{Supp}((D_{(i)}^{ij})_{k*})$, entonces $c_d = c_k$, donde $c_d := c_d(A(l_0, l_0))$ y $c_k := c_k(A(l_0, l_0))$.

(5) Escriba

(a) $D_{(j)}^{ij} := -D_{(i)}^{ij}$ para todo $i \neq j$ in $F \setminus \{l_0\}$,

(b) $D_{(i)}^{ii} := \text{id}_{J_i}$ para todo $i \in F \setminus \{l_0\}$,

(c) $D_{(i)}^{rj} := 0$ para todo $i, j, r \in F \setminus \{l_0\}$ tales que $i \notin \{j, r\}$,

(6) Para cada $i \in F \setminus \{l_0\}$ defina $W^{(i)} \in M_{J_{l_0}^c \times J_{l_0}^c}(K)$ por

$$W_{kj}^{(i)} := (D_{(i)}^{uv})_{kj} \quad \text{para } k \in J_u \text{ y } j \in J_v \text{ (Observe que } u, v \neq l_0).$$

(7) Escriba $C := A(l_0, l_0)|_{J_{l_0}^c \times J_{l_0}}$. Para cada $i \in F \setminus \{l_0\}$, defina $A(i, l_0)$ como la única matriz que satisface

$$A(i, l_0)|_{J_{l_0}^c \times J_{l_0}^c} = W^{(i)}, \quad A(i, l_0)|_{J_{l_0}^c \times J_{l_0}} = -W^{(i)}C \quad y \quad A(i, l_0)|_{J_{l_0} \times \mathbb{N}_n^*} = 0.$$

(8) Para $i \notin F$ escriba $A(i, l_0) := 0$.

Demostración. Probaremos primero que la construcción nos da una columna casi-estándar de un pre-torcimiento. Comenzamos verificando que las condiciones (1), (2) y (3) del Corolario 3.1.7 son satisfechas en la columna l_0 . Debido a la Observación 3.1.11 y la Proposición 3.4.16, es suficiente probar que $\sum_{i \in F \setminus \{l_0\}} W^{(i)} = \text{id}_{J_{l_0}^c}$ y $W^{(i)^2} = W^{(i)}$ para todo $i \in F \setminus \{l_0\}$. Pero la primera igualdad se obtiene del ítem (5), mientras que la segunda igualdad, se obtiene de los ítems (4)(a) y (5).

Solo falta verificar que las condiciones (1) y (4) de la Definción 3.4.17 y las condiciones (3') y (4') de la Observación 3.4.22 se satisfagan. La condición (1) es clara; la condición (2) se obtiene

de (5)(b), (5)(c) y (7); la condición (3'), se obtiene de (5)(c); y la condición (4'), se obtiene de (4)(b), (4)(c) y (5)(b).

Ahora, verificaremos que cualquier columna casi-estándar de matrices idempotentes puede ser construida con este método. Para esto, aplicamos primero una permutación idéntica en filas y columnas, si es necesario, para asumir que $A(l_0, l_0)$ es una matriz-0, 1 idempotente estándar. Entonces empleamos la Proposición 3.4.16, la Definición 3.4.17 y las Observaciones 3.4.18, 3.4.20 y 3.4.21, para mostrar, que las matrices $A(i, l_0)$ pueden ser construidas como afirma la proposición. \square

Observación 3.4.36. *Supongamos que hemos realizado los pasos indicados en los puntos (1)–(3) de la Proposición 3.4.35. Un algoritmo para construir las matrices $D_{(i)}^{ij}$ que satisfacen el ítem (4) de la Proposición 3.4.35 es el siguiente:*

- Escribamos $\bar{F} := F \setminus \{l_0\}$ y fijemos un orden total en $\bar{\Delta}_{\bar{F}} := (\bar{F} \times \bar{F}) \setminus \{(x, x) : x \in \bar{F}\}$.
- Para incrementar $(i, j) \in \bar{\Delta}_{\bar{F}}$ realizamos la siguiente construcción para todo $k \in J_i$, lo cual produce las matrices $D_{(i)}^{ij}$:
 - (a) Si $k \in \text{Supp}((D_{(r)}^{ri})_{t*})$ para algún $t \in J_r$ y $(r, i) < (i, j)$, entonces escribamos $(D_{(i)}^{ij})_{k*} := 0$.
 - (b) Sea $\mathcal{D}_i^j := \{d \in J_j : c_d = c_k \text{ y } (D_{(j)}^{jr})_{d*} = 0 \text{ para todo } (j, r) < (i, j)\}$. Si $\mathcal{D}_i^j = \emptyset$, entonces escribamos $(D_{(i)}^{ij})_{k*} := 0$. De otro modo elegimos $d \in \mathcal{D}_i^j$ y $\lambda \in K$ y escribimos $(D_{(i)}^{ij})_{kv} := \lambda \delta_{vd}$ para todo $v \in J_j$.

Esta construcción garantiza que para un par (i, j) fijado se tiene que $D_{(r)}^{ri} D_{(i)}^{ij} = 0$ para todo $(r, i) < (i, j)$ y $D_{(i)}^{ij} D_{(v)}^{jr} = 0$ para $(j, r) < (i, j)$. También se desprende de la construcción que para d y λ arbitrarios, se tiene todas las posibles familias $(D_{(i)}^{ij})_{(i, j) \in \bar{\Delta}_{\bar{F}}}$ que satisfacen el ítem (4) de la Proposición 3.4.35.

Sea $\chi: K^m \otimes K^n \rightarrow K^n \otimes K^m$ una aplicación de torcimiento y sea $r < m$. Gracias a la Proposición 1.3.4 sabemos que existe una aplicación de torcimiento

$$\tilde{\chi}: K^r \otimes K^n \rightarrow K^n \otimes K^r$$

tal que $\mathcal{A}_{\tilde{\chi}} = (A_{\tilde{\chi}}(i, l))_{1 \leq i, l \leq r}$ si y solo si $A_{\chi}(i, l) = 0$ para todo $i > r$ y $l \leq r$. Ahora supongamos que tenemos una aplicación de torcimiento

$$\tilde{\chi}: K^r \otimes K^n \rightarrow K^n \otimes K^r.$$

Sea $\mathcal{A} = (A(i, l))_{1 \leq i, l \leq m}$ un pre-torcimiento el cual es una extensión de la familia $\mathcal{A}_{\tilde{\chi}} = (A_{\tilde{\chi}}(i, l))_{1 \leq i, l \leq r}$ tal que

- $A(i, l) = 0$ si $i > r$ y $l \leq r$,
- para $l > r$, la columna l de \mathcal{A} es una columna casi-estándar.

En el siguiente teorema damos condiciones necesarias y suficientes para que \mathcal{A} defina una aplicación de torcimiento.

Teorema 3.4.37. Sea \mathcal{A} como líneas arriba. Para todo $u, v, l \in \mathbb{N}_m^*$ con $l > r$, escribamos $D_{(i,l)}^{uv} := A(i, l)|_{J_u \times J_v}$. La familia \mathcal{A} define una aplicación de torcimiento si y solo si

(1) Para todo $i \in \mathbb{N}_m^*$,

$$\bigcup_{l>r} F(A(i, l)) \subseteq F_0(\mathcal{A}, i).$$

(2) Si $(D_{(u,l)}^{uv})_{kd} \neq 0$, con $u \neq v \neq l$, entonces

- (a) $A(u, v)_{kj} = \delta_{kj} - \delta_{jd}$ para todo j ,
- (b) $A(v, v)_{kj} = \delta_{jd}$ para todo j ,
- (c) $A(i, v)_{kj} = 0$ para $i \notin \{u, v\}$ y para todo j .

Más aún, existen $u \neq v \neq l$ tales que $D_{(u,l)}^{uv} \neq 0$ si y solo si la columna l no es una columna estándar.

Demostración. La última afirmación es una consecuencia inmediata de la Definición 3.4.3 de columna estándar.

\Leftarrow) Solo debemos mostrar que la condición (4) del Corolario 3.1.7 es satisfecha. Para $l \leq r$ se satisface, pues

$$\sum_{h=1}^m A(i, h)_{kj} A(h, l)_{k'j'} = \sum_{h=1}^r A(i, h)_{kj} A(h, l)_{k'j'} = \delta_{jj'} A(i, l)_{kj},$$

debido a que $A(h, l) = 0$ cuando $h > r$ y χ es una aplicación de torcimiento; mientras que para $l > r$ se emplea el Teorema 3.4.28.

\Rightarrow) Se obtiene inmediatamente a partir del Teorema 3.4.28. \square

Proposición 3.4.38. Sea \mathcal{A} un pre-torcimiento de K^m con K^n . Supongamos que $A(i, i) = \text{id}$ para todo $i \in \mathbb{N}_{m-1}^*$. Entonces \mathcal{A} es la familia \mathcal{A}_χ de matrices asociadas con una aplicación de torcimiento χ si y solo si $(A(l, m))_{l \in \mathbb{N}_m^*}$ es una columna estándar.

Demostración. \Rightarrow) Debido a las hipótesis es claro que la matriz de rangos Γ_χ introducida en la Definición 3.1.13 tiene la forma

$$\Gamma_\chi = \begin{pmatrix} n \text{id}_{m-1} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}, \quad (3.4.29)$$

Por lo tanto, Γ_χ satisface las hipótesis de la Proposición 3.3.10 para $l = m$, y de esta manera $A(m, m)$ es una matriz-0, 1. Solo falta verificar que el ítem (2) de la Definición 3.4.3 es satisfecho para $l_0 = m$, i.e., que

$$A(k, m)_{ij} \neq 0 \Rightarrow A(m, m)_{ij} \neq 0 \quad \text{para } k < m \text{ y } i \neq j;$$

sin embargo esta se verifica inmediatamente debido a que

$$A(m, m)_{ij} = \sum_t A(t, t)_{ij} = \sum_t B_\chi(j, i)_{tt} = \text{rk}((B_\chi(j, i))) \quad \text{para todo } i \neq j,$$

y $B_\chi(j, i)_{mk} = A(k, m)_{ij}$.

\Leftarrow) A partir de la Observación 3.4.18 se obtiene que $F(A(m, m)) = F_0(\mathcal{A}, m)$ y $A(i, i) = \text{id}_n$ implica que $F_0(\mathcal{A}, i) = \mathbb{N}_n^*$ para todo $i < m$. Entonces gracias al Teorema 3.4.37 obtenemos el resultado que queríamos. \square

3.5 Rango reducido 1

En [12] se estudia el caso de las aplicaciones de torcimiento χ en las cuales todas las columnas de \mathcal{A}_χ tienen rango reducido menor o igual a 1 (ver Definición 3.4.29). En esta sección empleamos las herramientas desarrolladas, que son completamente diferentes a las desarrolladas en [12], para describir estas aplicaciones de torcimiento.

Proposición 3.5.1. *Sea $\chi: K^m \otimes K^n \rightarrow K^n \otimes K^m$ una aplicación de torcimiento. Supongamos que $\text{rank}_\chi(l) = 1$ y $A_\chi(i, l) \neq 0$ donde $i \neq l$. Entonces las siguientes condiciones son satisfechas:*

- (1) *Si $A_\chi(l, i) = 0$, entonces la columna l de \mathcal{A}_χ es estándar. Más aún, si $A_\chi(l, l)_{kk} = 0$, entonces $A_\chi(i, i)_{kj} = \delta_{kj}$ para todo j .*
- (2) *Si $A_\chi(l, i) \neq 0$ y $\text{rrank}_\chi(i) = 1$, entonces existe una aplicación de torcimiento $\psi: K^2 \otimes K^n \rightarrow K^n \otimes K^2$ con $A_\psi(a, b) := A_\chi(f(a), f(b))$, donde $a, b \in \{1, 2\}$, $f(1) := i$ y $f(2) := l$.*

Demostración. (1) La Proposición 3.3.10 implica que las matrices $A_\chi(l, l)$ son matrices-0, 1, y claramente se obtiene

$$A_\chi(l, l) + A_\chi(i, l) = \text{id} \Rightarrow \text{Supp}(A_\chi(i, l)) \subseteq \text{Supp}(A_\chi(l, l)) \cup \text{Supp}(\text{id}).$$

De esta manera la columna l de \mathcal{A}_χ es estándar. La última afirmación se obtiene a partir de la Proposición 3.4.14, pues $A_\chi(l, l)_{kk} = 0$ implica $k \in F(A_\chi(i, l))$.

(2) La familia de matrices $(A_\psi(a, b))_{1 \leq a, b \leq 2}$ satisface las condiciones del Corolario 3.1.7. En efecto, las tres primeras condiciones se obtienen directamente, mientras que la última se obtiene fácilmente, debido a que si $v \in \{i, l\}$ se tiene

$$\sum_{h=1}^m A_\chi(u, h)_{kj} A_\chi(h, v)_{kj'} = A_\chi(u, i)_{kj} A_\chi(i, v)_{kj'} + A_\chi(u, l)_{kj} A_\chi(l, v)_{kj'}.$$

□

Proposición 3.5.2. *Sea $\mathcal{A} = (A(i, l))_{1 \leq i, l \leq m}$ un pre-torcimiento de K^m con K^n . Para cada columna l cuyo rango reducido es 1, denotemos por $i(l)$ el único $i(l) \neq l$ tal que $A(i(l), l) \neq 0$. Si $\text{rrank}_\mathcal{A}(l) \leq 1$ para todo l , existe una aplicación de torcimiento $\chi: K^m \otimes K^n \rightarrow K^n \otimes K^m$ con $\mathcal{A}_\chi = \mathcal{A}$ si y solo si para cada $l \in \mathbb{N}_m^*$ tal que $\text{rrank}_\mathcal{A}(l) = 1$ se satisfacen las siguientes condiciones:*

- (1) *Si $A(l, i(l)) = 0$, entonces:*
 - (a) *$A(l, l)$ es equivalente a una matriz-0, 1 idempotente estándar vía permutaciones idénticas en filas y columnas,*
 - (b) *$A(i(l), i(l))_{kj} = \delta_{kj}$ para todo j , cuando $A(j, j)_{kk} = 0$.*
- (2) *Si $A(l, i(l)) \neq 0$, entonces existe una aplicación de torcimiento $\psi: K^2 \otimes K^n \rightarrow K^n \otimes K^2$ con $A_\psi(a, b) := A_\chi(f(a), f(b))$, donde $a, b \in \{1, 2\}$, $f(1) := i$ y $f(2) := j$.*

Demostración. Las condiciones son necesarias debido a a la Proposición 3.5.1 y al Corolario 3.3.9. Por otro lado, un cálculo rutinario muestra que si \mathcal{A} satisface los ítems (1) y (2), entonces también se satisface el ítem (4) del Corolario 3.1.7. □

Asociamos a cada quiver Q_χ una aplicación de torcimiento $\chi: K^m \otimes K^n \longrightarrow K^n \otimes K^m$ de la siguiente manera. Los vértices son $1, \dots, m$ y la matriz de adyacencia de Q_χ es la matriz-0, 1 con 1 en la entrada (i, l) si y solo si $i \neq l$ y $A_\chi(i, l) \neq 0$.

La Proposition 3.5.2 permite construir todas las aplicaciones de torcimiento $\chi: K^m \otimes K^n \longrightarrow K^n \otimes K^m$ de rango reducido 1 (esto significa que cada columna de \mathcal{A}_χ tiene rango reducido menor o igual a 1, y al menos una de estas columnas tiene rango reducido 1). Para esto es suficiente considerar las aplicaciones de torcimiento con quiver asociado conexo, debido a que toda aplicación de torcimiento es suma directa de aplicaciones de torcimiento restringidas a cada componente conexa.

Observación 3.5.3. *Si χ es una aplicación de torcimiento de rango reducido 1, entonces cada componente conexa del quiver Q_χ tiene a lo más un ciclo propio orientado. En efecto, esto se obtiene a partir de que cada vértice del quiver es la cabeza de a lo más una flecha que proviene de otro vértice, pues el rango reducido de χ es 1.*

Las aplicaciones de torcimiento de K^n con K^m con rango reducido 1 fueron clasificadas completamente en [12] vía tres teoremas que corresponden a cada una de las tres posibilidades para una componente conexa Q de una quiver Q_χ :

- (1) Q no contiene un ciclo de longitud 2.
- (2) Q es un ciclo de longitud 2.
- (3) Q contiene propiamente un ciclo de longitud 2.

Según [12], las aplicaciones de torcimiento K^n con K^m se encuentran en correspondencia biunívoca con las representaciones partidas, unitarias y factorizables del quiver Q .

Teorema 3.5.4 ([12], Theorem 2.13). *Sea $A = K^m$ y Q un quiver de rango reducido 1 sin ciclos de longitud 2. Una representación partida, unitaria y factorizable de Q esta únicamente definida por un conjunto de aplicaciones idempotentes $u_i: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ con $i \in Q^0$, satisfaciendo las siguientes condiciones: Si $\alpha \in Q^1$ no es un ciclo cerrado y $p \in \{1, \dots, m\}$, entonces $u_{s(\alpha)}(p) = p$ o $u_{t(\alpha)}(p) = p$.*

Teorema 3.5.5 ([12], Theorem 4.2). *Sea $A = K^m$ y sea Q un ciclo de longitud 2. Entonces el conjunto de K -endomorfismos lineales $\varphi := \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_{\alpha_1}, \varphi_{\alpha_2}\}$ define una representación partida, unitaria y factorizable de Q si y solo si existen $a_1, a_2, \dots, a_m \in K$ y una aplicación $u: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ tal que*

$$\varphi_1 = \sum_{p=1}^m \left[a_p f_p^* + (1 - a_p) f_{u(p)}^* \right] f_p, \quad \varphi_{\alpha_1} = \sum_{p=1}^m \left[a_p (f_p^* - f_{u(p)}^*) \right] f_p, \quad (3.5.30)$$

$$\varphi_2 = \sum_{p=1}^m \left[(1 - a_p) f_p^* + a_p f_{u(p)}^* \right] f_p, \quad \varphi_{\alpha_2} = \sum_{p=1}^m \left[(1 - a_p) (f_p^* - f_{u(p)}^*) \right] f_p, \quad (3.5.31)$$

y, además, ellas satisfacen las siguientes condiciones:

- (1) Si $u(p) = p$, entonces $a_p = 0$.
- (2) Si $u(p) \neq p$, entonces $a_p + a_{u(p)} = 1$. Además, si $u^2(p) \neq p$, entonces $a_p \in \{0, 1\}$

Observación 3.5.6. *Estos dos teoremas corresponden a los dos primeros casos, que con nuestras herramientas desarrolladas son fáciles de describir: En el primer caso la Proposición 3.5.1 nos dice que todas las columnas son estándar. De esta manera es suficiente considerar las aplicaciones de torcimiento estándar compatibles con la elección del quiver Q en el sentido de que $A_\chi(i, l) \neq 0$ si y solo si la matriz de adyacencia de Q tiene 1 en la entrada (i, l) . En el segundo caso χ se obtiene a partir de una aplicación de torcimiento $\psi: K^2 \otimes K^n \rightarrow K^n \otimes K^2$, como en la Condición (2) de la Proposición 3.5.2.*

Definición 3.5.7 ([12], Definition 4.5). *La Data $\mathcal{D}(u, a)$ es definida por*

- (1) *Las aplicaciones $u_1, u_2, \dots, u_n: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$, donde $u_1 = u_2 = u$ y para cada $i \geq 3$ las aplicaciones u_i son idempotentes.*
- (2) *Los elementos $a_1, \dots, a_m \in K$ satisfacen las condiciones (1) y (2) del Teorema 3.5.5.*

Teorema 3.5.8 ([12], Theorem 4.6). *La data $\mathcal{D}(u, a)$ define una representación partida, unitaria y factorizable de Q si y solo si, para todo $\alpha \in Q^1 \setminus \{\alpha_1, \alpha_2\}$ y todo punto $p \in \{1, \dots, m\}$ tal que $u_{s(\alpha)}(p) \neq p$ y $u_{t(\alpha)} \neq p$, se satisface solo una de las siguientes condiciones:*

- (1) $s(\alpha) = 1$ y $a_p = 1$.
- (2) $s(\alpha) = 2$ y $a_p = 0$.

Usando nuestros métodos podemos realizar una construcción distinta de todas las aplicaciones de torcimiento correspondientes al tercer caso.

Proposición 3.5.9. *Sea Q un quiver con n vértices, conexo que contiene propiamente un lazo cerrado de longitud 2, tal que cada vértice del quiver es la cabeza de a lo más una flecha que proviene de otro vértice y sea ψ una aplicación de torcimiento de K^2 con K^n tal que $A_\psi(1, 2) \neq 0 \neq A_\psi(2, 1)$, entonces existe, salvo isomorfismos, una única aplicación de torcimiento χ de K^n con K^m de rango reducido 1 tal que A_χ coincide con la familia $\mathcal{A} = (A(i, l))_{i, l \in \mathbb{N}_m^*}$ de matrices $A(i, l) \in M_n(K)$ definida como sigue*

- (1) *Si el ciclo de longitud 2 del quiver Q se encuentra en los vértices i, j , denotemos*

$$A(h, i) := 0 \quad \text{y} \quad A(h, j) := 0 \quad \text{para} \quad h \notin \{i, j\},$$

y

$$A(f(a), f(b)) := A_\psi(a, b), \quad \text{donde} \quad a, b \in \{1, 2\}, \quad f(1) := i \quad \text{y} \quad f(2) := j.$$

- (2) *Para cada vértice $l \in Q_0 \setminus \{i, j\}$, elijamos una columna estándar $(A(u, l))_{u \in Q_0}$ tal que*

- $A(u, l) \neq 0$ si y solo si Q tiene una flecha de u hacia l ,
- $F(A(v, l)) \subseteq F_0(\mathcal{A}, v)$ para todo $v \in Q_0$ y $l \in Q_0 \setminus \{i, j\}$.

Demostración. La Proposición 3.4.37 garantiza que la familia \mathcal{A} define una aplicación de torcimiento. Por otro lado, las Proposiciones 3.5.1, 3.5.2 y la Observación 3.5.3 muestran que si χ es una aplicación de torcimiento de rango reducido 1 tal que \mathcal{A}_χ satisface las condiciones (1) y (2), entonces el quiver Q_χ contiene un ciclo de longitud 2 y existe una aplicación de torcimiento ψ de K^2 con K^m . \square

3.6 Quiver asociado a aplicaciones de torcimiento estándar y casi-estándar

En esta sección construiremos los quivers que caracterizan completamente a las aplicaciones de torcimiento estándar. Más aún, el quiver indica como es posible generar una aplicación de torcimiento casi-estándar a partir de uno estándar.

3.6.1 Caracterización de los productos tensoriales torcidos estándar

El propósito de esta sección es caracterizar completamente los productos tensoriales torcidos estándar de K^n con K^m . En particular, probaremos que estas corresponden a álgebras con radical de Jacobson cuadrado igual cero. El resultado principal generaliza el resultado obtenido por Cibils en [8, Teorema 4.2]. Sea

$$\chi: K^m \otimes K^n \longrightarrow K^n \otimes K^m$$

una aplicación de torcimiento estándar. Como mencionamos en la Observación 3.1.19, para cada $j \in \mathbb{N}_n^*$ y $i \in \mathbb{N}_m^*$ denotaremos por x_{ji} al producto $f_j \otimes e_i$. Además, en dicha observación vimos que

$$x_{ki}x_{jl} = A_\chi(i, l)_{kj}x_{kl}.$$

Observación 3.6.1. Debido a la Observación 3.4.4 obtenemos que

$$A_\chi(i, l)_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in J_l(l), i = l \text{ y } j = k, \\ 1 & \text{si } k \notin J_l(l), i = l \text{ y } j = c_k(A_\chi(l, l)), \\ 1 & \text{si } k \notin J_l(l), i = i(k, l, \mathcal{A}_\chi) \text{ (lo cual significa que } k \in F(A_\chi(i, l))) \text{ y } j = k, \\ -1 & \text{si } k \notin J_l(l), i = i(k, l, \mathcal{A}_\chi) \text{ y } j = c_k(A_\chi(l, l)), \\ 0 & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

lo cual en términos de los x_{ij} se escribe

$$x_{ki}x_{jl} = \begin{cases} x_{kl} & \text{si } k \in J_l(l), i = l \text{ y } j = k, \\ x_{kl} & \text{si } k \notin J_l(l), i = l \text{ y } j = c_k(A(l, l)), \\ x_{kl} & \text{si } k \notin J_l(l), i = i(k, l, \mathcal{A}) \text{ y } j = k, \\ -x_{kl} & \text{si } k \notin J_l(l), i = i(k, l, \mathcal{A}) \text{ y } j = c_k(A(l, l)), \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Observación 3.6.2. La Observación 3.6.1 implica que $x_{ki}x_{jl} = 0$, si $j \notin J_l(l)$, $k = j$ y $i = l$, si $j \notin J_l(l)$ y $k \neq j$, o si $k \notin J_i(i)$ y $l \neq i$. Por lo tanto, $I := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_m^*} \bigoplus_{j \notin J_l(l)} Kx_{jl}$ es un ideal bilátero de cuadrado cero de $K^n \otimes_\chi K^m$. Además, la Observación 3.1.19 implica que cada ideal bilátero incluyendo propiamente a I tiene un elemento idempotente x_{jl} , y por lo tanto este no es un ideal nilpotente. Así, I es el radical de Jacobson $J(K^n \otimes_\chi K^m)$ de $K^n \otimes_\chi K^m$.

Sea xQ el quiver cuyo conjunto de vértices es ${}^xQ_0 := \{(j, i) \in \mathbb{N}_n^* \times \mathbb{N}_m^* : j \in J_i(i)\}$, y cuyo conjunto de flechas es ${}^xQ_1 := \{\alpha_{jl} : l \in \mathbb{N}_m^* \text{ y } j \in \mathbb{N}_n^* \setminus J_l(l)\}$, y con aplicaciones fuente y meta $s, t: {}^xQ_1 \longrightarrow {}^xQ_0$ definidas por

$$s(\alpha_{jl}) := (j, i(j, l, \mathcal{A}_\chi)) \quad \text{y} \quad t(\alpha_{jl}) := (i(l, j, \mathcal{B}_\chi), l) = (c_j(A_\chi(l, l)), l).$$

La buena definición de las aplicaciones s y t es debida a la Proposición 3.4.14 y a la Observación 3.3.8, respectivamente.

Observación 3.6.3. La condición (4) de la Observación 3.4.4 implica que en el quiver XQ existe una flecha del vértice (k, i) hacia el vértice (j, l) si y solo si $A_\chi(i, l)_{kj} = -1$.

A continuación calculamos los productos $x_{ki}x_{jl}$ en términos de las aplicaciones s y t . Debido a los cálculos obtenidos en la observación 3.6.1, se satisfacen las siguientes condiciones:

$$(a) \text{ Si } k \in J_i(i) \text{ y } j \in J_l(l), \text{ entonces } x_{ki}x_{jl} = \begin{cases} x_{jl} & \text{si } (k, i) = (j, l), \\ -x_{kl} & \text{si } (k, i) = s(\alpha_{kl}) \text{ y } (j, l) = t(\alpha_{kl}), \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

$$(b) \text{ Si } k \notin J_i(i) \text{ y } j \in J_l(l), \text{ entonces } x_{ki}x_{jl} = \begin{cases} x_{ki} & \text{si } (j, l) = t(\alpha_{ki}), \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

$$(c) \text{ Si } k \in J_i(i) \text{ y } j \notin J_l(l), \text{ entonces } x_{ki}x_{jl} = \begin{cases} x_{jl} & \text{si } (k, i) = s(\alpha_{jl}), \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

$$(d) \text{ Si } k \notin J_i(i) \text{ y } j \notin J_l(l), \text{ entonces } x_{ki}x_{jl} = 0.$$

Teorema 3.6.4. El producto tensorial torcido $K^n \otimes_\chi K^m$ es isomorfo al álgebra de radical de cuadrado cero $K^XQ / \langle {}^XQ_1^2 \rangle$.

Demostración. Para cada vértice $(j, l) \in {}^XQ_0$ escribamos $\text{In}(j, l) := \{\alpha_{ki} \in {}^XQ_1 : (j, l) = t(\alpha_{ki})\}$. Un cálculo directo y largo usando las condiciones (a)–(d) muestran que la aplicación $\phi: {}^XQ_0 \cup {}^XQ_1 \rightarrow K^n \otimes_\chi K^m$, definida por

$$\phi(j, l) := x_{jl} + \sum_{\text{In}(j, l)} x_{ki} \quad \text{para } (j, l) \in {}^XQ_0 \quad \text{y} \quad \phi(\alpha_{jl}) := x_{jl} \quad \text{para } \alpha_{jl} \in {}^XQ_1,$$

se extiende a un morfismo de álgebras $\phi: K^XQ \rightarrow K^n \otimes_\chi K^m$. Debido a que los elementos x_{jl} generan linealmente $K^n \otimes_\chi K^m$, el morfismo ϕ es sobreyectivo. Más aún, el ítem (d) implica que un camino de longitud 2 de XQ tiene imagen cero. Como ambas álgebras $K^XQ / \langle {}^XQ_1^2 \rangle$ y $K^n \otimes_\chi K^m$ tienen la misma dimensión, la aplicación inducida

$$\bar{\phi}: K^XQ / \langle {}^XQ_1^2 \rangle \rightarrow K^n \otimes_\chi K^m$$

es un isomorfismo de álgebras, como queríamos. \square

La siguiente observación generaliza la version correcta de [8, Teorema 4.6].

Observación 3.6.5. El quiver ${}^XQ = ({}^XQ_0, {}^XQ_1)$ asociado con la aplicación de torcimiento estándar χ de K^m con K^n satisface las siguientes condiciones:

$$(1) \quad {}^XQ_0 \subseteq \mathbb{N}_n^* \times \mathbb{N}_m^* \text{ y para todo } l \in \mathbb{N}_m^* \text{ existe } j \in \mathbb{N}_n^* \text{ tal que } (j, l) \in {}^XQ_0,$$

$$(2) \quad {}^XQ_1 = \{\alpha_{jl} : (j, l) \in (\mathbb{N}_n^* \times \mathbb{N}_m^*) \setminus {}^XQ_0\},$$

$$(3) \quad \text{Para todo } (j, l) \in (\mathbb{N}_n^* \times \mathbb{N}_m^*) \setminus {}^XQ_0 \text{ existen } i \in \mathbb{N}_m^* \text{ y } k \in \mathbb{N}_n^* \text{ tales que } s(j, l) = (j, i) \text{ y } t(j, l) = (k, l).$$

Recíprocamente, si $Q = (Q_0, Q_1)$ es un quiver que satisface las condiciones (1), (2) y (3), entonces existe una única aplicación de torcimiento estándar χ de K^m con K^n , tal que $Q = {}^x Q$. En efecto, empleamos el Teorema 3.4.10 para construir la aplicación χ a partir de Q . Es suficiente determinar las familias de matrices $(A(l))_{l \in \mathbb{N}_m^*}$ y $(B(j))_{j \in \mathbb{N}_n^*}$ de matrices $0, 1$ idempotentes $A(l) \in M_n(K)$ y $B(j) \in M_m(K)$ tales que:

- (1) $\{(j, l) \in \mathbb{N}_n^* \times \mathbb{N}_m^* : A(l)_{jj} = 1\} = Q_0$,
- (2) si $(j, l) \notin Q_0$ y $t(\alpha_{jl}) = (k, l)$, entonces $A(l)_{jk} = 1$,
- (3) si $(j, l) \notin Q_0$ y $s(\alpha_{jl}) = (j, i)$, entonces $B(j)_{li} = 1$,
- (4) $A(l)\mathbb{1} = \mathbb{1}$, $B(j)\mathbb{1} = \mathbb{1}$ y $A(l)_{jj} = B(j)_u$, para todo l y j .

Para esto definamos la fila j de $A(l)$ y la fila l de $B(j)$ como sigue:

- (1) Si $(j, l) \in Q_0$, entonces escribamos $A(l)_{jh} := \delta_{jh}$,
- (2) si $(j, l) \notin Q_0$, entonces escribamos $A(l)_{jh} := \delta_{kh}$, donde k es definido por $t(\alpha_{jl}) = (k, l)$,
- (3) si $(j, l) \in Q_0$, entonces escribamos $B(j)_{lh} := \delta_{lh}$,
- (4) si $(j, l) \notin Q_0$, entonces escribamos $B(j)_{lh} := \delta_{ih}$, donde i es definido por $s(\alpha_{jl}) = (j, i)$.

3.6.2 Construcción iterativa de los productos tensoriales torcidos casi-estándar

El propósito de esta subsección es presentar un método para construir los productos tensoriales casi-estándar de K^m con K^n . Emplearemos las notaciones de las secciones previas, para ser precisos aquellas introducidas en la Sección 3.4. El Teorema 3.4.10 nos permite asociar de manera evidente una aplicación de torcimiento estándar $\hat{\chi}$ a cada aplicación de torcimiento casi-estándar χ . Esto nos permite asociar un Quiver ${}^x Q := \hat{x} Q$ a cada aplicación de torcimiento casi-estándar $\chi: K^m \otimes K^n \rightarrow K^n \otimes K^m$. A partir de la construcción en el Teorema 3.4.10, se tiene

$$A_{\hat{\chi}}(l, l) = A_{\chi}(l, l) \quad \text{and} \quad A_{\hat{\chi}}(i, l)_{kk} = B_{\hat{\chi}}(k, k)_{li} = B_{\chi}(k, k)_{li} = A_{\chi}(i, l)_{kk}$$

para todo i, l y k . Por lo tanto, $J_i(l)$ de $\hat{\chi}$ coincide con $J_i(l)$ de χ para todo i y l ; y entonces la construcción de $\mathcal{A}_{\hat{\chi}}$ puede ser realizada fácilmente usando la Observación 3.4.5.

Proposición 3.6.6. Sea $\chi: K^m \otimes K^n \rightarrow K^n \otimes K^m$ una aplicación de torcimiento casi-estándar y sean $u, l \in \mathbb{N}_m^*$ y $k, d \in \mathbb{N}_n^*$. Supongamos que $A_{\chi}(u, l)_{kd} \neq 0$ y sea $v \in \mathbb{N}_m^*$ tal que $d \in J_v(l)$. Si $A_{\chi}(u, l)_{kk} = 1$ y $A_{\hat{\chi}}(u, l)_{kd} = 0$, entonces u, v y l son tres elementos diferentes de \mathbb{N}_m^* , $k \in J_u(l)$, $d \notin \{k, c_k\}$, donde $c_k = c_k(A_{\chi}(l, l))$ y

$$A_{\chi}(u, l)_{kd} = -A_{\chi}(v, l)_{kd} = A_{\chi}(v, l)_{kc_k}. \quad (3.6.32)$$

Más aún, $c_d = c_k$, donde $c_d = c_d(A_{\chi}(l, l))$, y existen las siguientes flechas en el quiver de $\hat{\chi}$:

- α_{kv} , de (k, u) hacia (d, v) ,
- α_{kl} , de (k, u) hacia (c_k, l) ,

- α_{dl} , de (d, v) hacia (c_d, l) .

Demostración. La igualdad $A_\chi(u, l)_{kk} = 1$ implica que $k \in J_u(l)$. Más aún, $u \neq l$, pues en otro caso se tiene

$$0 \neq A_\chi(l, l)_{kd} = \delta_{kd} \Rightarrow d = k \Rightarrow A_{\hat{\chi}}(l, l)_{kd} = A_\chi(l, l)_{kk} = 1,$$

lo cual contradice que $A_{\hat{\chi}}(u, l)_{kd} = 0$. También, debido a esta igualdad, para probar que $d \notin \{k, c_k\}$, es suficiente observar que

$$A_{\hat{\chi}}(u, l)_{kk} = B_{\hat{\chi}}(k, k)_{lu} = B_\chi(k, k)_{lu} = A_\chi(u, l)_{kk} = 1,$$

y que $A_{\hat{\chi}}(u, l)_{kc_k} = -1$ debido al Teorema 3.4.10. Como $u \neq l$ y $d \notin \{k, c_k\}$, la condición (3) del Lema 3.4.26 implica que $v \neq l$ y $v \neq u$. Además, como $A_\chi(u, l)_{kd} \neq 0$, la condición (4) de la Definición 3.4.17 implica que $c_d = c_k$. La primera igualdad en (3.6.32) se obtiene a partir de la Observación 3.4.21 mientras que la segunda se obtiene de la condición (2) del Lema 3.4.26 y la condición (2) del Corolario 3.1.7. Más aún, α_{kl} , α_{dl} y α_{kv} son flechas de ${}^x Q$ pues $k \notin J_l(l)$, $d \notin J_l(l)$ y $k \notin J_v(v)$ debido a la condición (2b) del Teorema 3.4.28. Además, los vértices de inicio y codominio de estas flechas satisfacen las condiciones de la proposición pues:

- $c_v(B_{\hat{\chi}}(k, k)) = u$, pues $B_{\hat{\chi}}(k, k)_{vu} = B_\chi(k, k)_{vu} = A_\chi(u, v)_{kk} = 1$,
- $c_k(A_{\hat{\chi}}(v, v)) = d$, pues $A_{\hat{\chi}}(v, v)_{kd} = A_\chi(v, v)_{kd} = 1$,
- $c_l(B_{\hat{\chi}}(k, k)) = u$, pues $B_{\hat{\chi}}(k, k)_{lu} = B_\chi(k, k)_{lu} = A_\chi(u, l)_{kk} = 1$,
- $c_k(A_{\hat{\chi}}(l, l)) = c_k$, pues $A_{\hat{\chi}}(l, l) = A_\chi(l, l)$,
- $c_l(B_{\hat{\chi}}(d, d)) = v$, pues $B_{\hat{\chi}}(d, d)_{lv} = B_\chi(d, d)_{lv} = A_\chi(v, l)_{dd} = 1$,
- $c_d(A_{\hat{\chi}}(l, l)) = c_d$, pues $A_{\hat{\chi}}(l, l) = A_\chi(l, l)$,

donde en el primer y segundo ítem las últimas igualdades se satisfacen debido a la condición (2) del Teorema 3.4.28. \square

Definición 3.6.7. Sean $\chi: K^m \otimes K^n \rightarrow K^n \otimes K^m$ una aplicación de torcimiento casi-estándar, $u, v, l \in \mathbb{N}_m^*$, $k \in J_u(l)$ y $d \in J_v(l)$. Supongamos que $u \neq l \neq v$ y que existen las siguientes flechas en el quíver de $\hat{\chi}$:

- α_{kv} , de (k, u) hacia (d, v) ,
- α_{kl} , de (k, u) hacia (c_k, l) (donde $c_k = c_k(A_\chi(l, l))$),
- α_{dl} , de (d, v) hacia (c_d, l) (donde $c_d = c_d(A_\chi(l, l))$).

Si $c_d = c_k$ y $\text{Supp}(D_{(u,l)}^{uv}) = \emptyset$, entonces para cada $\lambda \in K$ definamos la aplicación

$$\chi_1: K^m \otimes K^n \rightarrow K^n \otimes K^m,$$

por

$$\begin{aligned} A_{\chi_1}(u, l)_{kd} &:= \lambda, \\ A_{\chi_1}(v, l)_{kd} &:= -\lambda, \\ A_{\chi_1}(v, l)_{kc_k} &:= \lambda, \\ A_{\chi_1}(u, l)_{kc_k} &:= A_\chi(u, l)_{kc_k} - \lambda, \\ A_{\chi_1}(i, t)_{js} &:= A_\chi(i, t)_{js} \quad \text{cuando } (i, t, j, s) \notin \{(u, l, k, d), (v, l, k, d), (v, l, k, c_k), (u, l, k, c_k)\}. \end{aligned}$$

Si es necesario ser más precisos la aplicación χ_1 será denotada por $\Lambda_{(k,u),(d,v),(c_k,l)}^\lambda(\chi)$.

Proposición 3.6.8. *A partir de la definición de xQ , la existencia de las flechas α_{kv} , α_{kl} y α_{dl} implican que $k \in J_u(u) \setminus (J_v(v) \cup J_l(l))$, $d \in J_v(v) \setminus J_l(l)$ y $c_k \in J_l(l)$. Por lo tanto, u , v y l son tres elementos distintos de \mathbb{N}_m^* y k , c_k y d son tres elementos distintos de \mathbb{N}_n^* . Más aún,*

$$A_\chi(u, l)_{kd} = 0, \quad A_\chi(v, l)_{kd} = 0 \quad \text{y} \quad A_\chi(v, l)_{kc_k} = 0.$$

Demostración. En efecto, las primeras dos igualdades se satisfacen pues $(D_{(u,l)}^{uv})_{kd} = 0$ y $(D_{(v,l)}^{uv})_{kd} = -(D_{(u,l)}^{uv})_{kd}$ debido a la Observación 3.4.21; y la tercera igualdad se satisface pues, en caso contrario, debido al Lema 3.4.25 existen $j \in J_v(l)$ tal que $(D_{(v,l)}^{uv})_{kj} \neq 0$ (lo cual es imposible pues, la Observación 3.4.21, implica $(D_{(u,l)}^{uv})_{kj} = -(D_{(v,l)}^{uv})_{kj} \neq 0$). \square

Observación 3.6.9. *Si $\lambda = 0$ en la Definición 3.6.7, se tiene $\chi_1 = \chi$.*

Teorema 3.6.10. *Sea χ una aplicación de torcimiento que satisface las condiciones hechas en la Definición 3.6.7, entonces χ_1 es una aplicación de torcimiento casi-estándar.*

Demostración. En efecto, como k , c_k y d son tres elementos diferentes de \mathbb{N}_n^* , se tiene $A_{\chi_1}(i, t)_{jj} = A_\chi(i, t)_{jj}$ para todo i, t y j . Entonces $F(A_{\chi_1}(i, l)) = F(A_\chi(i, l))$ para todo i y l . En otras palabras $J_i(t)$ no depende de λ . Más aún, si χ_1 es una aplicación de torcimiento casi-estándar, entonces clamaramente $\hat{\chi}_1 = \hat{\chi}$. Además, $A_{\hat{\chi}}(u, l)_{kd} = 0$, pues $\text{Supp}(A_{\hat{\chi}}(u, l)_{k*}) = \{k, c_k\}$, mientras que, debido a la Observación 3.6.3, se tiene $A_{\hat{\chi}_1}(u, l)_{kc_k} = -1$, lo cual debido a la Observación 3.4.9 implica que $A_{\chi_1}(u, l)_{kk} = A_{\hat{\chi}_1}(u, l)_{kk} = 1$. Por lo tanto, si $\lambda \neq 0$, entonces las hipótesis de la Proposición 3.6.6 son satisfechas por χ_1 , demostrando que es una aplicación de torcimiento casi-estándar. \square

Observación 3.6.11. *Si χ es una aplicación de torcimiento que satisface las condiciones hechas en la Definición 3.6.7, entonces χ_1 es una aplicación de torcimiento (casi-estándar), y se cumple $\Gamma_{\chi_1} = \Gamma_\chi$ y $\tilde{\Gamma}_{\chi_1} = \tilde{\Gamma}_\chi$.*

Proposición 3.6.12. *Sean χ , χ_1 , u , v , l , k , d , α_{kv} , α_{kl} , α_{kd} y λ como en la Definición 3.6.7. Supongamos que $\lambda \neq 0$. Si χ_1 es una aplicación de torcimiento casi-estándar, entonces*

- (1) $A_{\chi_1}(i, u)_{kj} = A_{\hat{\chi}}(i, u)_{kj}$ y $A_{\chi_1}(i, v)_{kj} = A_{\hat{\chi}}(i, v)_{kj}$ para todo i, j ,
- (2) $A_{\chi_1}(u, l)$, $A_{\chi_1}(v, l)$, $B_{\chi_1}(d, k)$ y $B_{\chi_1}(c_k, k)$ son matrices idempotentes.

Más aún, la condición (2) implica que χ_1 es una aplicación de torcimiento (casi-estándar).

Demostración. La Observación 3.6.10 implica que $A_{\chi_1}(u, l)_{kk} = A_\chi(u, l)_{kk} = 1$, y de esta manera, la condición (1) del Teorema 3.4.28, implica que

$$A_{\chi_1}(i, u)_{kj} = \delta_{iu}\delta_{kj} = A_{\hat{\chi}}(i, u)_{kj} \quad \text{para todo } i, j.$$

Por otro lado, A partir del Teorema 3.4.28 se tiene

$$A_{\hat{\chi}_1}(i, v)_{kj} := \begin{cases} A_{\chi_1}(v, v)_{kj} & \text{si } i = v, \\ A_{\chi_1}(i, v)_{kk} & \text{si } k = j, \\ -1 & \text{si } i \neq v, j \neq k \text{ y } A_{\chi_1}(v, v)_{kj} = A_{\chi_1}(i, v)_{kk} = 1, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Así, para terminar la prueba del ítem (1) es suficiente mostrar que para todo $i \neq v$ y $j \neq k$,

$$A_{\chi_1}(v, v)_{kj} = \delta_{jd}, \quad A_{\chi_1}(i, v)_{kk} = \delta_{iu} \quad \text{y} \quad A_{\chi_1}(i, v)_{kj} = -\delta_{iu}\delta_{jd}.$$

Pero debido a que $A_{\chi_1}(u, l)_{kd} \neq 0$, esto se obtiene fácilmente a partir de la condición (2) del Teorema 3.4.28. El ítem (2) se obtiene inmediatamente de los ítems (1) y (2) de la Proposición 3.1.4. Recíprocamente, Las Proposiciones 3.1.6 y 3.1.12, y la condición (2) de la Proposición 3.6.12 son suficientes para que χ_1 sea una aplicación de torcimiento, pues $\sum_i A_{\chi_1}(i, h) = \text{id}_{K^n}$ para todo h y $A_{\chi_1}(i, h)\mathbb{1} = \mathbb{1}$ para todo i y h . Finalmente un cálculo directo muestra que las condiciones (1)–(4) de la Definición 3.4.17 son satisfechas. \square

Corolario 3.6.13. *Bajo las condiciones hechas en la Definición 3.6.7, si χ es estándar, entonces χ_1 es una aplicación de torcimiento casi-estándar.*

Demostración. Cuando $\lambda = 0$ es obvio, mientras que cuando es distinto de 0, realizando unos cálculos rutinarios se obtiene que $A_{\chi_1}(u, l)$, $A_{\chi_1}(v, l)$, $B_{\chi_1}(d, k)$ y $B_{\chi_1}(c_k, k)$ son matrices idempotentes. \square

Observación 3.6.14. *Un cálculo sencillo muestra que si χ_1 de la Definición 7.7 es una aplicación de torcimiento, entonces la construcción χ_1 a partir de χ corresponde a una deformación formal en el sentido de Gerstenhaber. Para ser más precisos, la aplicación de multiplicación μ_{χ_1} de χ_1 viene dada por*

$$\mu_{\chi_1}(a \otimes b) = \mu_0(a \otimes b) + \lambda \mu_1(a \otimes b),$$

donde μ_0 es la multiplicación en $D := K^n \otimes_{\chi} K^m$ y $\mu_1 : D \otimes D \rightarrow D$ es la aplicación definida por

$$\begin{aligned} \mu_1(x_{ku} \otimes x_{dl}) &= 1 \\ \mu_1(x_{kv} \otimes x_{c_k l}) &= 1 \\ \mu_1(x_{kv} \otimes x_{dl}) &= -1 \\ \mu_1(x_{ku} \otimes x_{c_k l}) &= -1 \end{aligned}$$

y

$$\mu_1(x_{pq} \otimes x_{rs}) = 0 \quad \text{cuando } (x_{pq}, x_{rs}) \notin \{(x_{ku}, x_{dl}), (x_{kv}, x_{dl}), (x_{ku}, x_{c_k l}), (x_{kv}, x_{c_k l})\}.$$

Observación 3.6.15. *Cada aplicación de torcimiento casi-estándar se obtiene de una aplicación de torcimiento estándar y la aplicación repetida de la construcción de la Definición 3.6.7, de esta manera añadiendo parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$, obtenemos aplicaciones de torcimiento casi-estándar $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots$.*

Observación 3.6.16. *Sea $\chi : K^m \otimes K^n \rightarrow K^n \otimes K^m$ una aplicación de torcimiento casi-estándar. Para cada $u, l, v \in \mathbb{N}_m^*$ y $k, d \in \mathbb{N}_n^*$ tales que u, l y v son tres elementos diferentes de \mathbb{N}_m^* , $k \in J_u(u)$, $d \in J_v(v)$ y $A_{\chi}(u, l)_{kd} \neq 0$, el quiver de $\hat{\chi}$ tiene un triángulo con vértices (k, u) , (d, v) y (c_k, l) , y flechas α_{kv} , α_{kl} y α_{dl} , de (k, u) hacia (d, v) , (k, u) hacia (c_k, l) , y (d, v) hacia (c_k, l) , respectivamente. En efecto, debido a la condición (4) de la Definición 3.4.17 se tiene que $c_k = c_d$, de esta manera la Definición 3.6.7 establece el triángulo deseado.*

3.6.3 Radical de Jacobson de un producto tensorial torcido casi-estándar

Sea $\chi : K^m \otimes K^n \rightarrow K^n \otimes K^m$ una aplicación de torcimiento casi-estándar. Para cada $j \in \mathbb{N}_n^*$ y $l \in \mathbb{N}_m^*$, sean x_{jl} como en la Observación 3.1.19. En esta sección probaremos que, como en el caso cuando χ es estándar, el ideal de Jacobson $J(C)$ de $C := K^n \otimes_{\chi} K^m$ es el ideal $I := \bigoplus_{j \notin J_l(l)} Kx_{jl}$ de C (desafortunadamente cuando χ no es estándar el ideal I puede no ser un ideal de cuadrado cero). Como una consecuencia existe una subálgebra $A \simeq \frac{C}{J(C)}$ de C tal que $C = A \oplus J(C)$.

Teorema 3.6.17. Sea χ , C y I como mencionamos antes. Entonces I es el ideal de Jacobson de C .

Demostración. Para cada $j, k \in \mathbb{N}_n^*$ y $i, l \in \mathbb{N}_m^*$, si $i \neq l$ or $k \neq j$, entonces

$$x_{ki}x_{jl} = A_\chi(i, l)_{kj}x_{kl} \in I.$$

En efecto, si $k \notin J_l(l)$, la igualdad se consigue a partir de la definición de I , y si $k \in J_l(l)$, la igualdad es verificada pues a partir de la condición (1) del Teorema 3.4.28 se obtiene que $A_\chi(i, l)_{kj} = 0$. De esta manera, I es un ideal bilátero de C . Para culminar la demostración es suficiente mostrar que

$$x_{j_1 l_1} \cdots x_{j_{n+1} l_{n+1}} = 0 \quad \text{para cada } x_{j_1 l_1}, \dots, x_{j_{n+1} l_{n+1}} \in I. \quad (3.6.33)$$

Como los l_i pertenecen a \mathbb{N}_m^* , existen $u < v$ tal que $l_u = l_v$. Claramente podemos asumir que si $v > u + 1$, entonces $l_{u+1} \neq l_v$. Un argumento inductivo muestra que

$$x_{j_u l_u} \cdots x_{j_v l_v} = \prod_{h=u}^{v-1} A_\chi(l_h, l_v)_{j_h, j_{h+1}} x_{j_u l_v}.$$

Como $j_u \notin J_{l_u}(l_u)$ se tiene

$$A_\chi(l_u, l_v)_{j_u, j_{u+1}} = \delta_{c_{j_u}, j_{u+1}} \quad \text{donde } c_{j_u} = c_k(A_\chi(l_u, l_v)).$$

Por lo tanto, si $j_{u+1} \neq c_{j_u}$ la igualdad (3.6.33) es satisfecha. Por otro lado, si $j_{u+1} = c_{j_u} \in J_{l_v}(l_v)$, entonces $v > u + 1$ (pues $j_{u+1} \notin J_{l_{u+1}}(l_{u+1})$), y la igualdad (3.6.33) se satisface pues

$$A_\chi(l_{u+1}, l_v)_{j_{u+1}, j_{u+2}} = \delta_{l_{u+1}, l_v} \delta_{j_{u+1}, j_{u+2}} = 0$$

debido a la condición (1) del Teorema 3.4.28. \square

Corolario 3.6.18. Bajo la hipótesis del Teorema 3.6.17, el álgebra cociente $\frac{C}{J(C)}$ es isomorfa al producto directo $\prod_{j \in J_l(l)} Kx_{jl}$ de cuerpos, y existe una subálgebra $A \simeq \frac{C}{J(C)}$ de C tal que $C = A \oplus J(C)$.

Demostración. La primera afirmación se obtiene a partir de que para cada $i, l \in \mathbb{N}_m^*$, $k \in J_i(i)$ y $j \in J_l(l)$, con $j \neq k$,

$$\begin{aligned} x_{jl}x_{jl} &= A(l, l)_{jj}x_{jl} = x_{jl}, \\ x_{ki}x_{jl} &= A(i, l)_{kj}x_{kl} \in I \text{ si } k \notin J_l(l) \end{aligned}$$

y

$$x_{ki}x_{jl} = A(i, l)_{kj}x_{kl} = 0 \text{ si } k \in J_l(l).$$

La segunda afirmación se obtiene aplicando directamente el teorema Wedderburn-Malcev ([28, Chapter 11]). \square

Observación 3.6.19. Si $\chi: K^m \otimes K^n \rightarrow K^n \otimes K^m$ es una aplicación de torcimiento casi-estándar que no es estándar, entonces $J(C)^2 \neq 0$.

3.7 Clasificación en dimensiones bajas

En esta sección determinamos las aplicaciones de torcimiento de K^3 con K^3 . Para lograr esto es conveniente describir en primer lugar y en detalle las aplicaciones de torcimiento de K^2 con K^2 y las aplicaciones de torcimiento de K^2 con K^3 .

3.7.1 Aplicaciones de torcimiento de K^2 con K^2

Teorema 3.7.1. Si $\chi: K^2 \otimes K^2 \rightarrow K^2 \otimes K^2$ es una aplicación de torcimiento, entonces $K^2 \otimes_{\chi} K^2$ es isomorfa a una de las siguientes álgebras

- (1) K^4 ,
- (2) El álgebra de caminos del Quiver $Q: \begin{array}{c} \bullet \\ \longrightarrow \\ \bullet \end{array}$.
- (3) El álgebra de caminos del Quiver $Q: \begin{array}{c} \bullet \\ \rightleftarrows \\ \bullet \end{array}$.
- (4) $M_2(K)$.

Demostración. Primero emplearemos nuestros resultados para obtener manera directa una clasificación de todas las aplicaciones de torcimiento $\chi: K^2 \otimes K^2 \rightarrow K^2 \otimes K^2$. Esta clasificación ya se obtuvo en [24]. Debido al Corolario 3.1.14 y la Proposición 3.1.16 podemos suponer que la matriz de rango \mathcal{A}_{χ} es una de las siguientes:

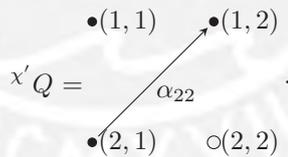
$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \Gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Primer caso Si la matriz de rango \mathcal{A}_{χ} es Γ_1 , entonces $A(1, 1) = A(2, 2) = \text{id}$. Por lo tanto, χ es el flip y $K^2 \otimes_{\chi} K^2 \cong K^4$.

Segundo caso Si la matriz de rango \mathcal{A}_{χ} es Γ_2 , entonces χ es una aplicación de torcimiento estándar (use la Proposición 3.3.10 y la Observación 3.4.30), y se puede verificar fácilmente que χ es equivalente vía permutaciones idénticas en filas y columnas a la aplicación de torcimiento χ' con

$$A_{\chi'}(1, 1) = \text{id}, \quad A_{\chi'}(2, 1) = 0, \quad A_{\chi'}(2, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_{\chi'}(1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

o, lo que es lo mismo, a una aplicación de torcimiento estándar con quiver



Aquí los puntos representan los vértices de ${}^{\chi'}Q$, y el círculo en blanco en la coordenada $(2, 2)$, indica que la flecha α_{22} inicia en la fila 2 y termina en la columna 2. De esta manera es fácil recuperar las matrices de $\mathcal{A}_{\chi'}$ a partir de ${}^{\chi'}Q$. Se tiene:

$$A(1, 1) = \text{id}, \quad A(2, 1) = 0, \quad A(2, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A(1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De aquí en adelante simplemente representaremos los quivers de esta aplicación de torcimiento y de sus aplicaciones de torcimiento equivalentes como



donde existe un punto en la posición (j, i) cuando (j, i) es un vértice (es decir, $j \in J_i(i)$); y existe un círculo blanco en la posición (j, l) cuando el quiver tiene una flecha α_{jl} que inicia en la fila j y termina en la columna l (que además es única). Los quivers asociados con las aplicaciones de torcimiento estándar de K^3 con K^2 y de K^3 con K^3 serán representados por diagramas construidos siguiendo las mismas instrucciones.

Tercer caso Si la matriz de rangos A_χ es Γ_3 , entonces debido a la condición (3) del Corolario 3.1.7 y la Observación 3.2.2, existen elementos $a, a' \in K$, tales que

$$\begin{aligned} A_\chi(1, 1) &= \begin{pmatrix} a & 1-a \\ a & 1-a \end{pmatrix}, & A_\chi(2, 1) &= \begin{pmatrix} 1-a & a-1 \\ -a & a \end{pmatrix}, \\ A_\chi(1, 2) &= \begin{pmatrix} 1-a' & a'-1 \\ -a' & a' \end{pmatrix}, & A_\chi(2, 2) &= \begin{pmatrix} a' & 1-a' \\ a' & 1-a' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De esta manera, a partir de la ecuación (3.1.2) se tiene que $B_\chi(1, 1) = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a' & a' \end{pmatrix}$. La Proposición 3.3.15 y la Observación 3.2.2 implican que $a' = 1 - a$ y se tiene

$$\begin{aligned} A_\chi(1, 1) &= \begin{pmatrix} a & 1-a \\ a & 1-a \end{pmatrix}, & A_\chi(2, 1) &= \begin{pmatrix} 1-a & a-1 \\ -a & a \end{pmatrix}, \\ A_\chi(1, 2) &= \begin{pmatrix} a & -a \\ a-1 & 1-a \end{pmatrix}, & A_\chi(2, 2) &= \begin{pmatrix} 1-a & a \\ 1-a & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si empleamos nuevamente la ecuación (3.1.2) obtenemos que $B_\chi(i, j) = A_\chi(i, j)$ para $i, j = 1, 2$, lo cual permite verificar fácilmente que las condiciones de la Proposición 3.1.4 son satisfechas. Por lo tanto una familia de aplicaciones de torcimiento es parametrizada por $a \in K$. Empleando la Proposición 3.1.16 se puede observar que las aplicaciones de torcimiento correspondientes a a y $1 - a$ son isomorfas. Más aún, si empleamos nuevamente la Proposición 3.1.16, se puede verificar que este es el único isomorfismo entre estas aplicaciones de torcimiento. Si $a \in \{0, 1\}$, entonces la aplicación de torcimiento es estándar y el quiver es uno de los siguientes



Debido a la Observación 3.6.2 el radical de Jacobson de $K^2 \otimes_{\chi'} K^2$ es un k -espacio vectorial de dimensión dos. Por otro lado, La Proposición 3.1.17 y la Observación 3.1.18 implican que para $a \notin \{0, 1\}$, el morfismo $\rho_1: K^2 \otimes_{\chi} K^2 \rightarrow M_2(K)$, dado por

$$\rho_1(f_j \otimes 1) := E^{jj} \quad \text{and} \quad \rho_1(1 \otimes e_i) := A_\chi(i, 1),$$

es un isomorfismo de álgebras. □

3.7.2 Aplicaciones de torcimiento de K^3 con K^2

Ahora emplearemos los resultados para clasificar todas las aplicaciones de torcimiento χ de K^3 con K^2 (debido a la Observación 3.1.3, la Proposición 3.4.8 y la Proposición 3.4.34, esto origina inmediatamente una clasificación similar para las aplicaciones de torcimiento de K^2 con K^3).

Teorema 3.7.2. Si $\chi: K^3 \otimes K^2 \rightarrow K^2 \otimes K^3$ es una aplicación de torcimiento, entonces χ es una aplicación de torcimiento estándar y corresponde a uno de los casos del siguiente cuadro

Cuadro 3.1: Aplicaciones de torcimiento estándar de K^3 con K^2

#	$\sum \text{Tr}$	quiver	Γ_χ	$\tilde{\Gamma}_\chi$	# equiv.
1.	6	$\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	1
2.	5	$\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \cdot & \nearrow & \circ \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	12
3.	4	$\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \nearrow & \bullet & \circ \\ \circ & & \circ \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	6
4.	4	$\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \nearrow & \bullet & \circ \\ \circ & & \circ \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	12
5.	4	$\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \cdot & \bullet & \circ \\ \cdot & \circ & \bullet \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	6
6.	4	$\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \cdot & \bullet & \circ \\ \cdot & \circ & \bullet \end{array}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	12
7.	3	$\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \cdot & \bullet & \circ \\ \cdot & \circ & \bullet \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	12

Aquí $\sum \text{Tr} := \sum_i \text{Tr}(A(i, i)) = \sum_j \text{Tr}(B(j, j))$ y # equiv. indica la cantidad de aplicaciones de torcimiento estándar equivalentes (De ahora en adelante diremos que dos aplicaciones de torcimiento estándar de K^m con K^n son equivalentes si ellas son isomorfas).

o corresponde a un valor de $a \notin \{0, 1\}$ en el tercer caso de la Subsección 3.7.1. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 A_\chi(1, 1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & A_\chi(2, 1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & A_\chi(3, 1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 A_\chi(1, 2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & A_\chi(2, 2) &= \begin{pmatrix} a & 1-a \\ a & 1-a \end{pmatrix}, & A_\chi(3, 2) &= \begin{pmatrix} 1-a & a-1 \\ -a & a \end{pmatrix}, \\
 A_\chi(1, 3) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & A_\chi(2, 3) &= \begin{pmatrix} a & -a \\ a-1 & 1-a \end{pmatrix}, & A_\chi(3, 3) &= \begin{pmatrix} 1-a & a \\ 1-a & a \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

y obtenemos un álgebra isomorfa a $K^2 \oplus M_2(K)$.

Demostración. Debido al Corolario 3.1.14 y la Proposición 3.1.16 podemos asumir que la matriz de rangos \mathcal{A}_χ corresponde a una de las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, & \Gamma_2 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \Gamma_3 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \Gamma_4 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 \Gamma_5 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, & \Gamma_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, & \Gamma_7 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Debido a la Proposición 3.3.10, excepto eventualmente en los casos Γ_5 y Γ_6 , las matrices $A_\chi(l, l)$ son matrices-0, 1, lo cual, debido a la Observación 3.4.30 implica que χ es una aplicación de torcimiento estándar. De esta manera podemos enumerar todas las posibles aplicaciones de torcimiento estándar (para esto empleamos el método que presentamos en la Observación 3.6.5):

Si $\Gamma_\chi = \Gamma_5$, entonces χ es una suma directa del flip de K con K^2 y una aplicación de torcimiento χ' de K^2 con K^2 con $\Gamma_{\chi'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, y el álgebra del producto tensorial torcido es isomorfa a $K^2 \oplus A$, donde A es el producto tensorial torcido $K^2 \otimes_{\chi'} K^2$. Así que es estándar (recuperando el caso #5 en la lista),

Si $\Gamma_\chi = \Gamma_6$, entonces de la Proposición 3.3.10 y la Observación 3.4.30 se tiene que la primera columna de A_χ es una columna estándar, así que

$$A_\chi(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_\chi(3, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

o

$$A_\chi(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_\chi(3, 1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Debido a la Proposición 3.1.16 podemos asumir, y lo haremos, que $A_\chi(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Más aún, la Observación 3.1.15 implica que las matrices $A_\chi(i, j)$ para $i, j \in \{2, 3\}$ definen una aplicación de torcimiento χ' de K^2 con K^2 , tal que $\Gamma_{\chi'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, la cual es estándar, o corresponde a un valor de $a \notin \{0, 1\}$ en el tercer caso de la Subsección 3.7.1. Por otro lado, el Teorema 3.4.37 muestra que

$$\{2\} = F(A_\chi(3, 1)) \subseteq F_0(A_\chi, 3).$$

Por lo tanto, $A_\chi(3, 3)_{22} = 1$ y la aplicación de torcimiento es estándar, correspondiendo al sexto caso en la lista.

Si $\Gamma_\chi = \Gamma_7$, entonces la aplicación de torcimiento es necesariamente estándar (pues las columnas de Γ_7 tienen rango reducido 1), pero ninguna aplicación de torcimiento estándar χ satisface $\Gamma_\chi = \Gamma_7$, entonces no existen aplicaciones de torcimiento en este caso. \square

3.7.3 Aplicaciones de torcimiento de K^3 con K^3

Nuestro siguiente propósito es construir (salvo isomorfismos) todas las aplicaciones de torcimiento de K^3 con K^3 . Debido a que en el apéndice listamos todas las aplicaciones de torcimiento estándar y casi-estándar de K^3 con K^3 , en esta sección únicamente necesitamos construir todas las aplicaciones que no son casi-estándar. Para llevar a cabo esta tarea, además de los resultados anteriores, utilizaremos la Observación 3.4.30 y los siguientes resultados:

Proposición 3.7.3. *Sea $\chi: K^m \otimes K^3 \rightarrow K^3 \otimes K^m$ una aplicación de torcimiento y sean i_1, i_2 y i_3 tres elementos diferentes de \mathbb{N}_m^* tales que $A_\chi(i_2, i_1) \neq 0 \neq A_\chi(i_3, i_1)$.*

(1) *Si la columna i_1 de A_χ no es casi-estándar y $A_\chi(i_1, i_1)$ es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces $A_\chi(i_2, i_3) \neq 0 \neq A_\chi(i_3, i_2)$ y ni la columna i_2 ni la columna i_3 de A_χ son columnas casi-estándar.

(2) Si la columna i_1 de A_χ no es casi-estándar y $A_\chi(i_1, i_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces

$$A_\chi(i_2, i_1)_{22} = A_\chi(i_2, i_2)_{22} = A_\chi(i_2, i_3)_{22}, \quad A_\chi(i_3, i_1)_{22} = A_\chi(i_3, i_2)_{22} = A_\chi(i_3, i_3)_{22},$$

y existe $z \in K^\times$ y $\alpha \in K^\times \setminus \{1\}$ tal que

$$A_\chi(i_2, i_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\alpha - z & \alpha & z \\ \alpha - 1 - \frac{\alpha(1-\alpha)}{z} & \frac{\alpha(1-\alpha)}{z} & 1 - \alpha \end{pmatrix}$$

y

$$A_\chi(i_3, i_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha + z - 1 & 1 - \alpha & -z \\ \frac{\alpha(1-\alpha)}{z} - \alpha & -\frac{\alpha(1-\alpha)}{z} & \alpha \end{pmatrix}.$$

Demostración. Supongamos que estamos bajo las hipótesis del ítem (2). Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $i_1 = 1$, $i_2 = 2$ y $i_3 = 3$. Debido al Corolario 3.1.14, se tiene que $\sum_{i=1}^n \gamma_{i1} = 3$. Por lo tanto, $A_\chi(i, 1) = 0$ para $i > 3$ y $\text{Tr}(A_\chi(i, 1)) = \gamma_{i1} = 1$ para $i \leq 3$. Más aún, los ítems (1) y (3) del Corolario 3.1.7, implican que $A_\chi(1, 1)A_\chi(i, 1) = 0$ para todo $i > 1$ y $A_\chi(1, 1) + A_\chi(2, 1) + A_\chi(3, 1) = \text{id}_3$. Entonces, existe $\alpha \in K$ tal que

$$A_\chi(2, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & \alpha & * \\ * & * & 1 - \alpha \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_\chi(3, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 1 - \alpha & * \\ * & * & \alpha \end{pmatrix}.$$

Más aún, el ítem (b) de la Proposición 3.4.32 implica que $\alpha \notin \{0, 1\}$. Sea $z := A_\chi(2, 1)_{23}$. Como la suma de las entradas de cada fila de $A_\chi(2, 1)$ y $A_\chi(3, 1)$ es cero,

$$A_\chi(2, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\alpha - z & \alpha & z \\ * & * & 1 - \alpha \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_\chi(3, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha + z - 1 & 1 - \alpha & -z \\ * & * & \alpha \end{pmatrix}.$$

Además, debido a que las matrices triangulares inferiores tienen como entradas en la diagonal a 0 ó 1, necesariamente $z \neq 0$. De esta manera, es claro que ambas matrices tienen la forma deseada, pues $\text{rk}(A_\chi(2, 1)) = \text{rk}(A_\chi(3, 1)) = 1$. Sin embargo, la primera fila de $B_\chi(2, 2)$ es $(0, \alpha, 1 - \alpha, 0, \dots, 0)$, la primera fila de $B_\chi(1, 2)$ es $(1, -(\alpha + z), (\alpha + z) - 1, 0, \dots, 0)$ y la primera fila de $B_\chi(3, 2)$ es $(0, z, -z, 0, \dots, 0)$. Un cálculo directo empleando estos resultados junto con la Observación 3.1.8, implican que $B(1, 2) + B(2, 2) + B(3, 2) = \text{id}_n$, y que, la condición (2) de la Proposición 3.1.4, implica que las columnas de $B(2, 2)$ son ortogonales a la primera fila de $B(1, 2)$ y $B(3, 2)$, lo cual muestra que

$$B(2, 2) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1 - \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 - \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 - \alpha & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & * & & * \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ * & * & * & * & & * \end{pmatrix},$$

con lo cual terminamos con la prueba del ítem (2) vía (3.1.2). Más aún

$$A_\chi(2, 3)_{22} = B(2, 2)_{32} = \alpha \quad \text{y} \quad A_\chi(3, 2)_{22} = B(2, 2)_{23} = 1 - \alpha.$$

El ítem (1) se obtiene inmediatamente a partir de esta observación y la Proposición 3.1.16. \square

Nuestro siguiente propósito es determinar salvo isomorfismo todas las aplicaciones de torcimiento $\chi: K^3 \otimes K^3 \rightarrow K^3 \otimes K^3$ que no son casi-estándar. Debido a la Proposición 3.1.16, podemos asumir que los valores de la diagonal de Γ_χ son no crecientes. De esta manera, a lo largo de esta subsección emplearemos χ para denotar una aplicación de torcimiento con esta restricción y veremos las condiciones para que χ no sea casi-estándar. Organizaremos nuestra búsqueda de acuerdo a los valores de $\sum \text{Tr} := \sum_i \text{Tr}(A_\chi(i, i))$.

$\sum \text{Tr} = 9, 8$ or 7

Teorema 3.7.4. *Todas las aplicaciones de torcimiento $\chi: K^3 \otimes K^3 \rightarrow K^3 \otimes K^3$ con $\sum \text{Tr} \geq 8$ son estándar. Salvo isomorfismos, la única familia de aplicaciones de torcimiento no casi-estándar de K^3 con K^3 con $\sum \text{Tr} = 7$ se obtienen tomando*

$$\begin{aligned} A_\chi(1,1) &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & A_\chi(2,1) &:= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & A_\chi(3,1) &:= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_\chi(1,2) &:= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & A_\chi(2,2) &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & a & b \end{pmatrix}, & A_\chi(3,2) &:= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & -b \\ 0 & -a & a \end{pmatrix}, \\ A_\chi(1,3) &:= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & A_\chi(2,3) &:= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & -a \\ 0 & -b & b \end{pmatrix}, & A_\chi(3,3) &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & a \\ 0 & b & a \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde $a \in K \setminus \{0, 1\}$ y $b := 1 - a$. Independientemente de a , se tiene $K^3 \otimes_\chi K^3 \simeq K^5 \times M_2(K)$.

Demostración. Bajo la hipótesis de la diagonal de Γ_χ se tiene $(3, 3, 3)$, $(3, 3, 2)$, $(3, 3, 1)$ o $(3, 2, 2)$. La Proposición 3.4.38 implica que en los tres primeros casos la aplicación χ corresponde, necesariamente, a una aplicación de torcimiento estándar. En el último caso Γ_χ es equivalente vía permutaciones idénticas en filas y columnas a una de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Debido a la Proposición 3.3.10 en los dos primeros casos las matrices diagonales son matrices-0, 1, entonces la Observación 3.4.30 implica que las aplicaciones de torcimiento que obtenemos son estándar. La última aplicación de torcimiento χ es la suma directa del flip de K con K^3 y la aplicación de torcimiento $\chi': K^2 \otimes K^3 \rightarrow K^3 \otimes K^2$. Más aún, el análisis que desarrollamos en la Subsección 3.7.2 nos permite concluir que si χ' no es casi-estándar, entonces $K^3 \otimes_{\chi'} K^2$ es isomorfo a $K^2 \times M_2(K)$. Por lo tanto, en este caso $K^3 \otimes_\chi K^3 \simeq K^5 \times M_2(K)$. \square

$\sum \text{Tr} = 6$

Teorema 3.7.5. *Salvo isomorfismos, la única familia de aplicaciones de torcimiento no casi-estándar de K^3 con K^3 con $\sum \text{Tr} = 6$ se obtienen tomando*

$$A_\chi(1,1) := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_\chi(2,1) := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_\chi(3,1) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_\chi(1,2) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_\chi(2,2) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & a & b \end{pmatrix}, \quad A_\chi(3,2) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & -b \\ 0 & -a & a \end{pmatrix},$$

$$A_\chi(1,3) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_\chi(2,3) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & -a \\ 0 & -b & b \end{pmatrix}, \quad A_\chi(3,3) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & a \\ 0 & b & a \end{pmatrix},$$

donde $a \in K \setminus \{0, 1\}$ y $b := 1 - a$.

Demostración. La diagonal de Γ_χ es $(2, 2, 2)$ o $(3, 2, 1)$. Trataremos cada caso por separado:

Diag(Γ_χ) = (2, 2, 2) Debido a la Proposición 3.1.16 podemos asumir que Γ_χ es una de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Más aún, la Proposición 3.3.10 y la Observación 3.4.30, implican que cada aplicación de torcimiento cuya matriz de rangos corresponde a la última matriz es estándar, y, nuevamente debido a la Proposición 3.1.16, se tiene que cada aplicación de torcimiento cuya matriz de rango es la primera o segunda matriz de la lista es isomorfa a la aplicación de torcimiento cuya matriz de rangos es la tercera matriz. Por lo tanto, únicamente consideraremos el caso

$$\Gamma_\chi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Debido a la Proposición 3.3.10 y la Observación 3.4.30, se tiene que la primera columna de \mathcal{A}_χ es estándar. De esta manera, las hipótesis del Teorema 3.4.37 son satisfechas. El Teorema 3.4.37 y la Observación 3.1.15, implican que χ es una aplicación de torcimiento si y solo si las matrices $A_\chi(2,2)$, $A_\chi(3,2)$, $A_\chi(3,3)$ y $A_\chi(2,3)$ definen una aplicación de torcimiento de K^2 con K^3 , y $F(A_\chi(2,1)) \subseteq F_0(\mathcal{A}_\chi, 2)$ (en efecto, también necesitamos que $F(A_\chi(i,1)) \subseteq F_0(\mathcal{A}_\chi, i)$ para $i \in \{1, 3\}$, pero para $i = 3$ es trivial y para $i = 1$ se obtiene a partir de la Observación 3.4.18). Debido a que estamos buscando las aplicaciones de torcimiento que no son casi-estándar, los argumentos desarrollados en la Subsección 3.7.2 nos permiten asumir que

$$A_\chi(2,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1-a \\ 0 & a & 1-a \end{pmatrix}, \quad A_\chi(3,2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & -a & a \end{pmatrix},$$

$$A_\chi(3,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix}, \quad A_\chi(2,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & -a \\ 0 & a-1 & 1-a \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, se tiene $F_0(\mathcal{A}_\chi, 2) = \{1\}$ y entonces, necesariamente

$$A_\chi(2,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad A_\chi(2,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En ambos casos se tiene $A_\chi(1,1) := \text{id}_3 - A_\chi(2,1)$, $A_\chi(3,1) = 0$, $A_\chi(1,2) = 0$ y $A_\chi(1,3) = 0$ (lo cual es forzado). Obtenemos que una aplicación de torcimiento no es casi-estándar cuando

$a \notin \{0, 1\}$. En el primer caso

$$\tilde{\Gamma}_\chi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

mientras que en el segundo caso

$$\tilde{\Gamma}_\chi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si tomamos en cuenta la Proposición 3.4.34, y aplicamos los mismos argumentos para $\tilde{\chi}$, podemos concluir que χ no es una aplicación de torcimiento casi-estándar con $\text{Diag}(\Gamma_\chi) = (2, 2, 2)$ si y solo si $\tilde{\chi}$ tampoco lo es.

Diag(Γ_χ) = (3, 2, 1) Si χ no es una aplicación de torcimiento casi-estándar, entonces a partir de la última afirmación en el caso anterior, sabemos que $\text{Diag}(\tilde{\Gamma}_\chi) = (3, 2, 1)$. La matriz de rangos Γ_χ es una de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Debido a la Proposición 3.3.14, se tiene que las matrices Γ_χ y $\tilde{\Gamma}_\chi = \Gamma_{\tilde{\chi}}$ deben ser ambas iguales a una de las dos últimas matrices. Sin embargo, el Corolario 3.3.11, Proposición 3.4.8 y la Observación 3.4.30, implican que si Γ_χ o $\tilde{\Gamma}_\chi$ es la última matriz, entonces χ es una aplicación de torcimiento estándar. Entonces la única posibilidad de la aplicación de torcimiento χ para no ser casi-estándar es que ambas matrices Γ_χ y $\tilde{\Gamma}_\chi$ sean iguales a la segunda de las últimas matrices. En este caso, el Corolario 3.3.11 implica que $A_\chi(l, l)$ es una matriz-0, 1 para $l \in \{1, 2, 3\}$. Por lo tanto, debido a la Observación 3.4.30 las dos primeras columnas de \mathcal{A}_χ son estándar. Más aún, usando el Corolario 3.3.9 y la igualdad (3.1.2) se obtiene

$$A_\chi(1, 3) = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}, \quad A_\chi(2, 3) = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_\chi(1, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & * & 0 \\ 1 & * & * \end{pmatrix}.$$

A partir de esto y de que $\text{rk}(A_\chi(1, 3)) = \text{rk}(A_\chi(2, 3)) = 1$ y $A_\chi(1, 3) + A_\chi(2, 3) + A_\chi(3, 3) = \text{id}_3$, se obtiene mediante un cálculo directo que $A(i, 3)_{kk} \in \{0, 1\}$ para $i, k \in \{1, 2, 3\}$. De esta manera, podemos aplicar la Proposición 3.4.32(b), para obtener que χ es casi-estándar. \square

$\sum \text{Tr} = 5$

Teorema 3.7.6. *Salvo isomorfismos, la única familia de aplicaciones de torcimiento que no es casi-estándar de K^3 con K^3 con $\sum \text{Tr} = 5$ se obtiene tomando*

$$A_\chi(1, 1) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & a & b \end{pmatrix}, \quad A_\chi(2, 1) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & -b \\ 0 & -a & a \end{pmatrix}$$

$$A_\chi(1, 2) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & -a \\ 0 & -b & b \end{pmatrix}, \quad A_\chi(2, 2) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & a \\ 0 & b & a \end{pmatrix},$$

donde $a \in K \setminus \{0, 1\}$ y $b := 1 - a$, tomando $A_\chi(1, 3)$ y $A_\chi(2, 3)$ como en la Proposición 3.7.3 con $z \in K^\times$, $i_1 = 3$, $i_2 = 1$ y $i_3 = 2$, y tomando $A_\chi(3, j) := \text{id}_3 - A_\chi(1, j) - A_\chi(2, j)$ para $j \in \{1, 2, 3\}$.

Demostración. La diagonal de Γ_χ es o $(2, 2, 1)$ o $(3, 1, 1)$. Debido a a la Proposición 3.1.16 podemos asumir que, en el primer caso la matriz de rango Γ_χ es una de las siguientes

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.7.34)$$

mientras que, en el segundo caso, la matriz de rango Γ_χ es una de las siguientes

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.7.35)$$

Como $\tilde{\Gamma}_\chi$ tiene al menos un 1 en la diagonal, la Proposición 3.3.14 implica que la matriz de rango Γ_χ no puede ser ni la primera en (3.7.34) ni las tres primeras en (3.7.35). Más aún, debido a la Proposición 3.3.10, si Γ_χ es la primera o la segunda matriz de la segunda fila en (3.7.35), entonces $A_\chi(l, l)$ es una matriz-0, 1 para $l \in \{1, 2, 3\}$. Entonces, en el primer caso, La Observación 3.4.30 implica que χ es una aplicación de torcimiento estándar; mientras que, en el segundo caso, la Observación 3.4.30 implica que las dos primeras columnas de \mathcal{A}_χ son estándar y el Corolario 3.3.9, implica que la matriz $A_\chi(3, 3)$ es una de las siguientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.7.36)$$

De esta manera, como $A_\chi(2, 1) = 0$, podemos aplicar el ítem (1) de la Proposición 3.7.3 con $i_1 = 3$, $i_2 = 1$ y $i_3 = 2$, y obtenemos que la última columna de \mathcal{A}_χ es casi-estándar. Por lo tanto, si χ no es casi-estándar, entonces Γ_χ es una de las últimas seis matrices en (3.7.34) y la última de las matrices en (3.7.35). Como $\text{Tr}(\tilde{\Gamma}_\chi) = \text{Tr}(\Gamma_\chi)$, debido a la Proposición 3.4.8, lo mismo sucede con $\tilde{\Gamma}_\chi$. Además, los mismos argumentos muestran que

- (1) si Γ_χ es la segunda matriz en (3.7.34), entonces la tercera columna de \mathcal{A}_χ es estándar,
- (2) si Γ_χ es la tercera o cuarta matriz en (3.7.34), entonces la primera y tercera columna de \mathcal{A}_χ son estándar,
- (3) si Γ_χ es la quinta matriz en (3.7.34), entonces la segunda columna de \mathcal{A}_χ es estándar y la tercera columna de \mathcal{A}_χ es casi-estándar,
- (4) si Γ_χ es la sexta matriz en (3.7.34), entonces $A_\chi(3, 3)$ es una de (3.7.36),
- (5) si Γ_χ es la séptima matriz en (3.7.34), entonces la tercera columna de \mathcal{A}_χ es casi-estándar.

Si Γ_χ es la segunda matriz en (3.7.34), entonces χ es casi-estándar. En efecto, en cualquier otro caso el ítem (1) implica que χ es una extensión de una aplicación de torcimiento no casi-estándar χ' de K^2 con K^3 . Por lo tanto, debido al análisis realizado en la Subsección 3.7.2, existe $a \in K \setminus \{0, 1\}$ tal que

$$A_\chi(1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & -a \\ 0 & a-1 & 1-a \end{pmatrix}, \quad A_\chi(2, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix}, \quad A_\chi(3, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $F_0(\mathcal{A}_\chi, 2) = \{1\}$, lo cual es imposible pues $F(A_\chi(2, 3)) \subseteq F_0(\mathcal{A}_\chi, 2)$ debido al ítem (1) del Teorema 3.4.37 y $\#F(A_\chi(2, 3)) = 2$ debido a la Observación 3.4.19.

Si Γ_χ es la tercera o cuarta matriz en (3.7.34), entonces debido al ítem (2) se tiene que la primera columna de \mathcal{A}_χ es estándar y χ es la extensión de una aplicación de torcimiento de K^2 con K^3 , la cual es necesariamente estándar pues, en otro caso, la Proposición 3.4.8 implica que es el dual de alguna aplicación de torcimiento de la única familia de aplicaciones de torcimiento no casi-estándar de K^3 con K^2 obtenida en el análisis realizado en la Subsección 3.7.2 (lo cual resulta imposible, pues implica que $\gamma_{23} = 1$). Por lo tanto, en estos casos χ es estándar.

Si Γ_χ es la quinta matriz en (3.7.34), entonces χ es casi-estándar. Para esto debido al ítem (3), solo debemos demostrar que la primera columna de \mathcal{A}_χ es casi-estándar. Debido a la Proposición 3.1.16 podemos asumir que

$$A_\chi(2, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{y así } A_\chi(1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A partir de esto y debido a la igualdad (3.1.2) y la Proposición 3.1.4, y que $A_\chi(3, 2) = 0 = A_\chi(2, 1)$ se obtiene que

$$B_\chi(1, 1) = \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}, \quad B_\chi(2, 2) = \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix},$$

$$B_\chi(3, 3) = \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 1 & 0 & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}, \quad B_\chi(1, 3) = \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ -1 & 1 & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Debido a la Observación 3.3.13 ni $\text{rk}(B_\chi(1, 1))$ ni $\text{rk}(B_\chi(2, 2))$ pueden ser iguales a 1. Por lo tanto,

$$\text{rk}(B_\chi(1, 1)) = 2 = \text{rk}(B_\chi(2, 2)) \quad \text{y así } \text{rk}(B_\chi(3, 3)) = 1.$$

Más aún, podemos asumir que $\text{rk}(B_\chi(1, 3)) = 1$, pues, en cualquier otro caso (módulo equivalencias), $\tilde{\Gamma}$ es uno de los casos 2, 3 o 4 de (3.7.34), y por lo tanto la aplicación de torcimiento χ es casi-estándar. Entonces,

$$B_\chi(3, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y } B_\chi(1, 3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$A_\chi(3, 3)_{33} = B_\chi(3, 3)_{33} = 0, \quad A_\chi(3, 3)_{31} = B_\chi(1, 3)_{33} = 0, \quad \text{y así } A_\chi(3, 3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces la diagonal principal de $B_\chi(1, 1)$ es $(*, 1, 0)$ y la diagonal principal de $B_\chi(2, 2)$ es $(*, 1, 1)$. Como ambas matrices tienen rango 2, se tiene que la diagonal principal de $B_\chi(1, 1)$ es $(1, 1, 0)$ y la diagonal principal de $B_\chi(2, 2)$ es $(0, 1, 1)$. Más aún, $B_\chi(2, 1)_{33} = A_\chi(3, 3)_{12} = 1$ implica $B_\chi(2, 1) \neq 0$, lo cual, junto con $\text{rk}(B_\chi(1, 1)) = 2$, implica que $B_\chi(3, 1) = 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A_\chi(1, 1)_{31} = B_\chi(1, 3)_{11} = 0, \quad A_\chi(1, 1)_{33} = B_\chi(3, 3)_{11} = 1, \quad A_\chi(1, 1)_{11} = B_\chi(1, 1)_{11} = 1, \\ A_\chi(1, 1)_{22} = B_\chi(2, 2)_{11} = 0 \quad \text{y} \quad A_\chi(1, 1)_{13} = B_\chi(3, 1)_{11} = 0. \end{aligned}$$

Además, $\text{rk}(B_\chi(2, 2)) = 2$ implica que o $B_\chi(1, 2) = 0$ o $B_\chi(3, 2) = 0$, y entonces

$$A_\chi(1, 1)_{21} = B_\chi(1, 2)_{11} = 0 \quad \text{o} \quad A_\chi(1, 1)_{23} = B_\chi(3, 2)_{11} = 0.$$

Usando todo esto y que cada fila de $A_\chi(1, 1)$ suma 1, obtenemos que

$$A_\chi(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad A_\chi(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En ambos casos $A_\chi(1, 1)$ es una idempotente estándar, y por lo tanto, debido a la Observación 3.4.30, la primera columna de \mathcal{A}_χ es estándar, como queríamos.

Supongamos ahora que Γ_χ es la sexta matriz en (3.7.34) y que la aplicación de torcimiento χ no es casi-estándar. La Observación 3.1.15 implica que χ es una extensión de una aplicación de torcimiento χ' de K^2 con K^3 . Claramente, si la tercera columna de \mathcal{A}_χ es casi-estándar, entonces χ' debe ser una aplicación de torcimiento no casi-estándar. Sin embargo, debido al ítem (4), al aplicar el ítem (1) de la Proposición 3.7.3 con $i_1 = 3$, $i_2 = 1$ y $i_3 = 2$, se obtiene que este es también el caso si la tercera columna de \mathcal{A}_χ no es casi-estándar. Por lo tanto, debido al análisis realizado en la Subsección 3.7.2, podemos asumir que existe $\alpha \in K \setminus \{0, 1\}$, tal que

$$\begin{aligned} A_\chi(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 - \alpha \\ 0 & \alpha & 1 - \alpha \end{pmatrix}, \quad A_\chi(1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\alpha \\ 0 & \alpha - 1 & 1 - \alpha \end{pmatrix} \\ A_\chi(2, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha & \alpha - 1 \\ 0 & -\alpha & \alpha \end{pmatrix}, \quad A_\chi(2, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha & \alpha \\ 0 & 1 - \alpha & \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si la tercera columna de \mathcal{A}_χ es casi-estándar, entonces debido a la Observación 3.4.19 y al Teorema 3.4.37, se tiene

$$F(A_\chi(1, 3)) \cap F(A_\chi(2, 3)) = \emptyset \quad \text{y} \quad F(A_\chi(1, 3)) \cup F(A_\chi(2, 3)) \subseteq F_0(\mathcal{A}_\chi, 2) = \{1\},$$

lo cual es imposible, pues esto implica que $2 = \text{rk}(A_\chi(1, 3)) + \text{rk}(A_\chi(2, 3)) \leq 1$. Por lo tanto, no es casi-estándar. En los dos últimos casos de (3.7.36) un cálculo directo usando la Proposición 3.1.16 y la condición (2) de la Proposición 3.7.3 conduce a la contradicción $A_\chi(1, 2)_{11} \neq 0$. Por lo tanto, $A_\chi(3, 3)$ es la primera matriz, y entonces necesariamente existe $z \in K^\times$ tal que $A_\chi(1, 3)$ y $A_\chi(2, 3)$ son como en la condición (2) de la Proposición 3.7.3. Finalmente $A_\chi(3, 1)$ y $A_\chi(3, 2)$ son determinadas por la igualdad $\sum_{i=1}^3 A_\chi(i, j) = \text{id}_3$. Como estas matrices satisfacen las condiciones del Corolario 3.1.7, obtenemos una familia de aplicaciones de torcimiento que no son casi-estándar parametrizadas por $\alpha \in K \setminus \{0, 1\}$ y $z \in K^\times$. Además un cálculo directo muestra que

$$\tilde{\Gamma}_\chi = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.7.37)$$

El mismo argumenteo muestra que si $\tilde{\Gamma}_\chi$ es la sexta matriz en (3.7.34), entonces Γ_χ es la matriz del lado derecho de la igualdad (3.7.37).

Supongamos ahora que Γ_χ es la séptima matriz en (3.7.34). Afirmamos que χ es casi-estándar. El ítem (5) implica que la tercera columna de \mathcal{A}_χ es casi-estándar. Más aún, debido a la condición (2) de la Definición 3.4.17, la Observación 3.4.19, la condición (3) de la Proposición 3.1.4 y la Proposición 3.1.16, podemos asumir que

$$A_\chi(1,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & \lambda \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_\chi(2,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda - 1 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_\chi(3,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

para algún $\lambda \in K$. Usando esto y que $A_\chi(1,2) = A_\chi(2,1) = 0$, obtenemos

$$B_\chi(1,1) = \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_\chi(2,2) = \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ * & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B_\chi(3,3) = \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ * & * & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La Observación 3.3.13 implica que ni $\text{rk}(B_\chi(1,1))$ ni $\text{rk}(B_\chi(2,2))$ puede ser igual a 1. Por lo tanto

$$\text{rk}(B_\chi(1,1)) = 2 = \text{rk}(B_\chi(2,2)), \quad \text{y así} \quad B_\chi(3,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Más aún, $B_\chi(1,2) \neq 0$, pues $B_\chi(1,2)_{33} = A_\chi(3,3)_{21} = 1$. Debido a que

$$\text{rk}(B_\chi(1,2)) + \text{rk}(B_\chi(2,2)) + \text{rk}(B_\chi(3,2)) = 3,$$

tenemos $\text{rk}(B_\chi(1,2)) = 1$ y $B_\chi(3,2) = 0$. Por lo tanto,

$$\tilde{\Gamma}_\chi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & * \\ * & 2 & * \\ * & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si χ no es casi-estándar, entonces $\tilde{\Gamma}_\chi$ no puede ser la sexta matriz en (3.7.34), pues en cualquier otro caso Γ_χ es la sexta matriz en (3.7.35). Pero ya hemos demostrado que en los otros casos $\tilde{\chi}$ es casi-estándar y por lo tanto, debido a la Proposición 3.4.34, concluimos que χ es también casi-estándar.

Supongamos finalmente, que χ es una aplicación de torcimiento que no es casi-estándar de K^3 con K^3 y Γ_χ es la última matriz en (3.7.35). La Proposición 3.4.34 implica que $\tilde{\chi}$ no es casi-estándar, y por lo tanto $\tilde{\Gamma}_\chi$ es necesariamente la sexta matriz en (3.7.34) o la última matriz en (3.7.35). En el primera caso obtenemos una familia de aplicaciones de torcimiento que no son casi-estándar χ dual a la familia encontrada anteriormente, cuando analizamos el caso en que Γ_χ es la sexta matriz en (3.7.34); mientras que, en el segundo caso, la Proposición 3.3.14, implica que

$$A_\chi(2,2) = A_\chi(3,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que, debido a la condición (1) de la Proposición 3.7.3, implica que las dos últimas columnas de \mathcal{A}_χ son casi-estándar. Como la primera columna de \mathcal{A}_χ tiene rango reducido 0, concluimos que χ es casi-estándar. \square

$\sum \text{Tr} = 4$

Teorema 3.7.7. *Todas las aplicaciones de torcimiento de K^3 con K^3 con $\sum \text{Tr} = 4$ son aplicaciones de torcimiento casi-estándar.*

Demostración. Debido a la Proposición 3.1.16 para demostrar esto es suficiente verificar que χ es casi-estándar si su matriz de rangos Γ_χ es una de las siguientes matrices:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.7.38}$$

Debido a la Proposición 3.3.14, se tiene que la matriz de rangos Γ_χ no puede ser la primera matriz de la primera fila. La matriz Γ_χ tampoco puede ser la segunda matriz de la segunda fila, pues en caso contrario esta sería una extensión de una aplicación de torcimiento χ' de K^2 con K^3 con $\Gamma_{\chi'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, pero $\sum \text{Tr} = 2$ es imposible debido a la Observación 3.3.2. Si Γ_χ es la tercera, cuarta o quinta matriz, entonces, la Observación 3.1.15, implica que χ es una extensión de una aplicación de torcimiento χ' de K^2 con K^3 , que es necesariamente estándar (ver los argumentos en el análisis de los casos en los cuales Γ_χ es la tercera o cuarta matriz en (3.7.34)). Además, en los primeros dos casos, la Proposición 3.3.10 y la Observación 3.4.30, implican que la tercera columna de \mathcal{A}_χ es estándar; mientras que, si Γ_χ es la quinta matriz, entonces, la Proposición 3.3.10, implica que la matriz $A_\chi(3,3)$ es una de las matrices en (3.7.36), y entonces, aplicando la condición (1) de la Proposición 3.7.3 con $i_1 = 3$, $i_2 = 1$ y $i_3 = 2$, obtenemos que la última columna de \mathcal{A}_χ es casi-estándar (pues la primera fila de \mathcal{A}_χ es estándar). Por lo tanto, si χ no es casi-estándar, entonces necesariamente Γ_χ es una de las últimas cuatro matrices. Debido a las Proposiciones 3.1.16 y 3.4.34, lo mismo ocurre cuando $\Gamma_{\bar{\chi}}$ es una de las matrices anteriores. En particular $B_\chi(3,1) = 0$, y entonces $A_\chi(i,l)_{13} = 0$ para todo i, l . Por lo tanto, debido a la Observación 3.3.13, se tiene

$$A_\chi(2,2) = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_\chi(3,3) = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix},$$

Además, debido nuevamente a la Observación 3.3.13, y la igualdad $A_\chi(3,1) = 0$ se deduce que

$$B_\chi(2,2) = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B_\chi(3,3) = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $A_\chi(3,3)_{22} = B_\chi(2,2)_{33} = 0$ y $B_\chi(3,3)_{22} = A_\chi(2,2)_{33} = 0$. De esta manera,

$$A_\chi(3,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B_\chi(3,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.7.39}$$

donde hemos empleado nuevamente la Observación 3.3.13. Como

$$A_\chi(3, 2)_{22} = B_\chi(2, 2)_{23} = 0, \quad A_\chi(3, 2)_{33} = B_\chi(3, 3)_{23} = 0, \quad A_\chi(3, 2)_{13} = 0$$

y $\text{Tr}(A_\chi(3, 2)) = \text{rk}(A_\chi(3, 2)) = 1$, se tiene

$$A_\chi(3, 2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$A_\chi(1, 2) = \text{id} - A_\chi(2, 2) - A_\chi(3, 2) = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix},$$

donde para la última igualdad usamos que $\text{rk}(A_\chi(1, 2)) = 1$, y entonces

$$A_\chi(2, 2) = \text{id} - A_\chi(1, 2) - A_\chi(3, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde la última igualdad se deduce de la Observación 3.3.13. Entonces, como $A_\chi(3, 1) = 0$, aplicando la condición (1) de la Proposición 3.7.3 con $i_1 = 2$, $i_2 = 1$ y $i_3 = 3$, obtenemos que la segunda columna de \mathcal{A}_χ es casi-estándar. Debido a esto y a la primera igualdad en (3.7.39) podemos aplicar la condición (1) de la Proposición 3.7.3 con $i_1 = 3$, $i_2 = 1$ y $i_3 = 2$, para obtener que la última columna de \mathcal{A}_χ también es casi-estándar. Argumentando como antes obtenemos que

$$B_\chi(1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}, \quad B_\chi(3, 2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B_\chi(2, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$A_\chi(1, 1)_{21} = B(1, 2)_{11} = 0, \quad A_\chi(1, 1)_{23} = B(3, 2)_{11} = 1 \quad \text{y} \quad A_\chi(1, 1)_{22} = B(2, 2)_{11} = 0.$$

Dado que, además $A_\chi(1, 1)_{13} = 0$, se tiene

$$A_\chi(1, 1) = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ * & * & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ * & * & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde para la segunda igualdad usa que $\text{Tr}(A_\chi(1, 1)) = \text{rk}(A_\chi(1, 1)) = 2$, y para la última, que $\text{rk}(A_\chi(1, 1)) = 2$ y que la suma de los elementos de cada fila de $A_\chi(1, 1)$ es igual a 1. Entonces, la Observación 3.4.30, implica que la primera columna de \mathcal{A}_χ es estándar. \square

$\sum \text{Tr} = 3$

Teorema 3.7.8. *Sea $\chi: K^3 \otimes K^3 \rightarrow K^3 \otimes K^3$ una aplicación de torcimiento. Supongamos que $\sum \text{Tr} = 3$. Si χ satisface las condiciones requeridas en los ítems (1), (2) o (3) líneas abajo, entonces χ no es casi-estándar. Más aún, cada aplicación de torcimiento que no es casi-estándar de K^3 con K^3 , tal que $\sum \text{Tr} = 3$, es equivalente a una de las descritas en (1), (2) y (3).*

(1) Existen vectores invertibles $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in K^3$ con $\det(\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_3^T) = 1$, donde $\mathbf{v}_3 := \mathbf{1}$, tal que

$$A_\chi(1, l) := (\mathbf{v}_l^T \cdot \mathbf{v}_1)^T (\mathbf{v}_l \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)),$$

$$A_\chi(2, l) := -(\mathbf{v}_l^T \cdot \mathbf{v}_2)^T (\mathbf{v}_l \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3))$$

and

$$A_\chi(3, l) := (\mathbf{v}_l^T \cdot \mathbf{v}_3)^T (\mathbf{v}_l \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2))$$

para todo l .

(2) Existe $a \in K \setminus \{0, 1\}$ tal que

$$A_\chi(1, 1) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ a & b & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix}, \quad A_\chi(2, 1) = \begin{pmatrix} b & 0 & -b \\ -a & 0 & a \\ -a & 0 & a \end{pmatrix}, \quad A_\chi(3, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -b & b \\ 0 & a & -a \\ 0 & -b & b \end{pmatrix},$$

$$A_\chi(1, 2) = \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ -b & b & 0 \\ -b & b & 0 \end{pmatrix}, \quad A_\chi(2, 2) = \begin{pmatrix} b & 0 & a \\ b & 0 & a \\ b & 0 & a \end{pmatrix}, \quad A_\chi(3, 2) = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ 0 & a & -a \\ 0 & -b & b \end{pmatrix},$$

$$A_\chi(1, 3) = \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ -b & b & 0 \\ a & -a & 0 \end{pmatrix}, \quad A_\chi(2, 3) = \begin{pmatrix} b & 0 & -b \\ b & 0 & -b \\ -a & 0 & a \end{pmatrix}, \quad A_\chi(3, 3) = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & a & b \\ 0 & a & b \end{pmatrix},$$

donde $b := 1 - a$.

(3) Existe $a \in K \setminus \{0, 1\}$ tal que

$$A_\chi(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_\chi(2, 2) = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & a & b \\ 0 & a & b \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad A_\chi(3, 3) = \begin{pmatrix} 0 & b & a \\ 0 & b & a \\ 0 & b & a \end{pmatrix},$$

donde $b := 1 - a$, y existen $x, y, z \in K^\times$ con $y = \frac{a(1-a)}{x}$ tal que

$$A_\chi(2, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a - z & a & z \\ \frac{-b(a+z)}{z} & \frac{ab}{z} & b \end{pmatrix}, \quad A_\chi(3, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ z - b & b & -z \\ \frac{a(b-z)}{z} & \frac{-ab}{z} & a \end{pmatrix},$$

$$A_\chi(1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & -a - x & x - b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_\chi(3, 2) = \begin{pmatrix} 0 & x & -x \\ 0 & b & -b \\ 0 & -a & a \end{pmatrix},$$

$$A_\chi(1, 3) = \begin{pmatrix} 1 & y - b & -a - y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_\chi(2, 3) = \begin{pmatrix} 0 & -y & y \\ 0 & a & -a \\ 0 & -b & b \end{pmatrix}.$$

Demostración. La Proposición 3.3.15 implica que $\Gamma_\chi = \tilde{\Gamma}_\chi = \mathfrak{J}_3$. Debido a la Observación 3.3.13 se tiene que cada matriz $A_\chi(i, i)$ y cada matriz $B_\chi(j, j)$ tiene sus tres filas iguales y, además, la suma de los elementos de cada fila es igual a 1. Por lo tanto, para cada una de estas matrices se tiene las siguientes posibilidades: es equivalente a una matriz-0, 1 idempotente estándar vía permutaciones idénticas en filas y columnas; tiene todas las entradas diferentes de cero; o, tiene dos columnas diferentes de cero o una columna diferente de cero. Supongamos que una de las matrices

$A_\chi(l, l)$ tiene todas sus entradas diferentes de cero. La Proposición 3.3.16 implica que la imagen de cada $A_\chi(i, l)$ es generada por un elemento inversible $\mathbf{v}_i \in K^n$. Entonces, la Proposición 3.3.19 implica que la aplicación de torcimiento χ se obtiene como en el Teorema 3.3.17 con $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ y \mathbf{v}_3 tal que $\mathbf{v}_l = \mathbf{1}$ y $\det(\mathbf{v}_1^T \dots \mathbf{v}_n^T) = 1$. Supongamos ahora que dos de las matrices $A_\chi(1, 1)$, $A_\chi(2, 2)$ y $A_\chi(3, 3)$ son matrices-0, 1 diferentes. Como $\text{Tr}(B_\chi(j, k)) = \text{rk}(B_\chi(j, k))$, esto implica que todas las matrices $B_\chi(j, k)$ tienen ceros y unos en las entradas de sus diagonales. Además, debido a la Observación 3.3.13 se tiene que cada $B_\chi(j, j)$ es una matriz-(0, 1). Por lo tanto, las hipótesis de la Proposición 3.4.32 son satisfechas para todas las columnas de \mathcal{B}_χ , y entonces $\tilde{\chi}$ es una aplicación de torcimiento casi-estándar. Recíprocamente, la Proposición 3.4.34 implica que la aplicación de torcimiento χ también lo es. Supongamos ahora que dos de las matrices $A_\chi(1, 1)$, $A_\chi(2, 2)$ y $A_\chi(3, 3)$ son matrices-0, 1 iguales. Debido a la Proposición 3.1.16 podemos asumir que ellas son $A_\chi(1, 1)$ y $A_\chi(2, 2)$ y que

$$A_\chi(1, 1) = A_\chi(2, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando la igualdad (3.1.2) y que $\text{Tr}(B_\chi(j, k)) = 1$ para todo $j, k \in \mathbb{N}_3^*$, obtenemos que

$$B_\chi(j, k)_{33} = \begin{cases} -1 & \text{si } j = 1, \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces $A_\chi(3, 3)_{kj} = B_\chi(jk)_{33} \neq 0$ para todo $i, j \in \mathbb{N}_3^*$ y estamos en el primer caso considerado en esta subsección. Entonces restan dos casos:

- (1) Las tres matrices $A_\chi(1, 1)$, $A_\chi(2, 2)$ y $A_\chi(3, 3)$ tienen exactamente una columna nula.
- (2) Una de ellas es una matriz-0, 1 y las otras dos tienen exactamente una columna nula.

Consideremos el primer caso. Afirmamos que las columnas nulas de $A_\chi(1, 1)$, $A_\chi(2, 2)$ y $A_\chi(3, 3)$ son diferentes. Supongamos que esto no sea cierto. Debido a la Proposición 3.1.16 podemos asumir que

$$A_\chi(1, 1) = \begin{pmatrix} a & 1-a & 0 \\ a & 1-a & 0 \\ a & 1-a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_\chi(2, 2) = \begin{pmatrix} b & 1-b & 0 \\ b & 1-b & 0 \\ b & 1-b & 0 \end{pmatrix}$$

con $a, b \in K \setminus \{0, 1\}$. Usando nuevamente la igualdad (3.1.2) y que $\text{Tr}(B_\chi(j, k)) = 1$ para todo $j, k \in \mathbb{N}_3^*$, obtenemos que

$$B_\chi(j, k)_{33} = \begin{cases} 1-a-b & \text{si } j = 1, \\ a+b-1 & \text{si } j = 2, \\ 1 & \text{si } j = 3. \end{cases}$$

Entonces

$$A_\chi(3, 3) = \begin{pmatrix} 1-a-b & a+b-1 & 1 \\ 1-a-b & a+b-1 & 1 \\ 1-a-b & a+b-1 & 1 \end{pmatrix}$$

lo cual contradice que $A_\chi(3, 3)$ tiene exactamente una columna nula. Por lo tanto la afirmación es cierta. Nuevamente, debido a la Proposición 3.1.16 podemos asumir que

$$A_\chi(1, 1) = \begin{pmatrix} a & 1-a & 0 \\ a & 1-a & 0 \\ a & 1-a & 0 \end{pmatrix}, \quad A_\chi(2, 2) = \begin{pmatrix} b & 0 & 1-b \\ b & 0 & 1-b \\ b & 0 & 1-b \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_\chi(3, 3) = \begin{pmatrix} 0 & c & 1-c \\ 0 & c & 1-c \\ 0 & c & 1-c \end{pmatrix}$$

con $a, b, c \in K \setminus \{0, 1\}$. La igualdad (3.1.2) y la Observación 3.3.13 implican que

$$\begin{aligned} B_\chi(1,1) &= \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ a & b & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix}, & B_\chi(2,1) &= \begin{pmatrix} 1-a & * & * \\ * & 0 & * \\ * & b & c \end{pmatrix}, & B_\chi(3,1) &= \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 1-b & * \\ * & * & 1-c \end{pmatrix} \\ B_\chi(1,2) &= \begin{pmatrix} a & * & * \\ * & b & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix}, & B_\chi(2,2) &= \begin{pmatrix} 1-a & 0 & c \\ 1-a & 0 & c \\ 1-a & 0 & c \end{pmatrix}, & B_\chi(3,2) &= \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 1-b & * \\ * & * & 1-c \end{pmatrix} \\ B_\chi(1,3) &= \begin{pmatrix} a & * & * \\ * & b & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix}, & B_\chi(2,3) &= \begin{pmatrix} 1-a & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & c \end{pmatrix}, & B_\chi(3,3) &= \begin{pmatrix} 0 & 1-b & 1-c \\ 0 & 1-b & 1-c \\ 0 & 1-b & 1-c \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Como $\text{Tr}(B_\chi(j, k)) = 1$ esto implica que $b = 1 - a$ y $c = a$. Además, nuevamente debido a la igualdad (3.1.2),

$$\begin{aligned} A_\chi(1,2) &= \begin{pmatrix} a & * & * \\ * & 1-a & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix}, & A_\chi(2,1) &= \begin{pmatrix} b & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & 1-b \end{pmatrix}, & A_\chi(3,1) &= \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & c & * \\ * & * & 1-c \end{pmatrix} \\ A_\chi(1,3) &= \begin{pmatrix} a & * & * \\ * & 1-a & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix}, & A_\chi(2,3) &= \begin{pmatrix} b & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & 1-b \end{pmatrix}, & A_\chi(3,2) &= \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & c & * \\ * & * & 1-c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Afirmamos que $A_\chi(1,2)_{13} = A_\chi(1,2)_{23} = 0$. Supongamos por ejemplo que $A_\chi(1,2)_{23} \neq 0$. Como la segunda fila de $A_\chi(1,2)$ es no nula y $\text{rk}(A_\chi(1,2)) = 1$, existe $\lambda \in K$ tal que

$$\lambda A_\chi(1,2)_{23} = A_\chi(1,2)_{33} = 0 \quad \text{y} \quad \lambda A_\chi(1,2)_{21} = A_\chi(1,2)_{31}.$$

Pero entonces $\lambda = 0$ y por lo tanto $B_\chi(1,3)_{21} = A_\chi(1,2)_{31} = 0$, lo cual es imposible pues $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $\text{rk}(B_\chi(1,3)) = 1$. Por lo tanto la afirmación es cierta. Similarmente

$$A_\chi(1,3)_{13} = A_\chi(1,3)_{23} = A_\chi(2,1)_{12} = A_\chi(2,3)_{32} = A_\chi(3,1)_{21} = A_\chi(3,2)_{31} = 0.$$

Usando esto y que $A_\chi(l, l)\mathbf{1} = 0$ para todo $i \neq 0$, obtenemos que

$$\begin{aligned} A_\chi(1,1) &= \begin{pmatrix} a & 1-a & 0 \\ a & 1-a & 0 \\ a & 1-a & 0 \end{pmatrix}, & A_\chi(2,1) &= \begin{pmatrix} 1-a & 0 & a \\ 1-a & 0 & a \\ 1-a & 0 & a \end{pmatrix}, & A_\chi(3,1) &= \begin{pmatrix} 0 & a & 1-a \\ 0 & a & 1-a \\ 0 & a & 1-a \end{pmatrix} \\ A_\chi(1,2) &= \begin{pmatrix} a & 1-a & 0 \\ a & 1-a & 0 \\ a & 1-a & 0 \end{pmatrix}, & A_\chi(2,2) &= \begin{pmatrix} 1-a & 0 & a \\ 1-a & 0 & a \\ 1-a & 0 & a \end{pmatrix}, & A_\chi(3,2) &= \begin{pmatrix} 0 & a & 1-a \\ 0 & a & 1-a \\ 0 & a & 1-a \end{pmatrix} \\ A_\chi(1,3) &= \begin{pmatrix} a & 1-a & 0 \\ a & 1-a & 0 \\ a & 1-a & 0 \end{pmatrix}, & A_\chi(2,3) &= \begin{pmatrix} 1-a & 0 & a \\ 1-a & 0 & a \\ 1-a & 0 & a \end{pmatrix}, & A_\chi(3,3) &= \begin{pmatrix} 0 & a & 1-a \\ 0 & a & 1-a \\ 0 & a & 1-a \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

para algún $a \notin \{0, 1\}$, lo que da una familia de aplicaciones de torcimiento parametrizadas por $a \in K$.

Consideremos ahora el segundo caso. Debido a la Proposición 3.1.16 podemos asumir que

$$A_\chi(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.7.40}$$

y que la primera columna no es casi-estándar. La condición (2) de la Proposición 3.7.3 y la Observación 3.3.13 implican que existen $z \in K^\times$ y $\alpha \in K^\times \setminus \{1\}$ tales que

$$A_\chi(2,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\alpha - z & \alpha & z \\ \frac{(\alpha-1)(\alpha+z)}{z} & \frac{\alpha(1-\alpha)}{z} & 1-\alpha \end{pmatrix}, \quad A_\chi(3,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha + z - 1 & 1 - \alpha & -z \\ \frac{\alpha(1-\alpha-z)}{z} & \frac{\alpha(\alpha-1)}{z} & \alpha \end{pmatrix}, \quad (3.7.41)$$

$$A_\chi(2,2) = \begin{pmatrix} * & \alpha & * \\ * & \alpha & * \\ * & \alpha & * \end{pmatrix}, \quad A_\chi(3,3) = \begin{pmatrix} * & 1-\alpha & * \\ * & 1-\alpha & * \\ * & 1-\alpha & * \end{pmatrix}, \quad (3.7.42)$$

$$A_\chi(2,3) = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & \alpha & * \\ * & * & * \end{pmatrix}, \quad A_\chi(3,2) = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & 1-\alpha & * \\ * & * & * \end{pmatrix}. \quad (3.7.43)$$

Así, a partir de la igualdad (3.1.2) y la Observación 3.3.13, se obtiene

$$B_\chi(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_\chi(2,2) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 0 & \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}, \quad B_\chi(3,3) = \begin{pmatrix} 0 & 1-\alpha & \alpha \\ 0 & 1-\alpha & \alpha \\ 0 & 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, nuevamente, debido a la igualdad (3.1.2) y la Observación 3.3.13, se tiene

$$A_\chi(2,2) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 0 & \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_\chi(3,3) = \begin{pmatrix} 0 & 1-\alpha & \alpha \\ 0 & 1-\alpha & \alpha \\ 0 & 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}. \quad (3.7.44)$$

Usando la igualdad (3.1.2), que $B_\chi(3,2)\mathbb{1} = B_\chi(2,3)\mathbb{1} = 0$ y que $\text{rk}(B_\chi(3,2)) = \text{rk}(B_\chi(2,3)) = 1$, se obtiene

$$B_\chi(3,2) = \begin{pmatrix} 0 & z & -z \\ 0 & 1-\alpha & \alpha-1 \\ 0 & -\alpha & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B_\chi(2,3) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha(1-\alpha)}{z} & \frac{\alpha(\alpha-1)}{z} \\ 0 & \alpha & -\alpha \\ 0 & \alpha-1 & 1-\alpha \end{pmatrix}.$$

Entonces, como $\text{id} = \sum_i B_\chi(i,j)$, se tiene

$$B_\chi(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha - z & \alpha + z - 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B_\chi(1,3) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{(\alpha-1)(\alpha+z)}{z} & \frac{\alpha(1-\alpha-z)}{z} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando ahora la igualdad (3.1.2) y que $A_\chi(3,2)\mathbb{1} = A_\chi(2,3)\mathbb{1} = 0$, obtenemos que existen $x, y \in K$, tales que

$$A_\chi(3,2) = \begin{pmatrix} 0 & x & -x \\ 0 & 1-\alpha & \alpha-1 \\ 0 & -\alpha & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_\chi(2,3) = \begin{pmatrix} 0 & -y & y \\ 0 & \alpha & -\alpha \\ 0 & \alpha-1 & 1-\alpha \end{pmatrix}. \quad (3.7.45)$$

Entonces, como $\text{id} = \sum_i A_\chi(i,j)$, se tiene

$$A_\chi(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha - x & \alpha + x - 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_\chi(1,3) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha + y - 1 & -\alpha - y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.7.46)$$

Finalmente, nuevamente, debido a la igualdad (3.1.2), se tiene

$$B_\chi(2, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\alpha - x & \alpha & x \\ \alpha + y - 1 & -y & 1 - \alpha \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B_\chi(1, 3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha + x - 1 & 1 - \alpha & -x \\ -\alpha - y & y & \alpha \end{pmatrix}.$$

Como $\text{rk}(B_\chi(2, 1)) = 1$ se tiene $xy = \alpha(1 - \alpha)$. Entonces $x, y \in K^\times$ y $y = \frac{\alpha(1-\alpha)}{x}$. Recíprocamente un cálculo directo muestra que si $\mathcal{A} = (A_\chi(i, l))_{i, l \in \mathbb{N}_3^*}$, donde las matrices $A(i, l)$ son las matrices de (3.7.40), (3.7.41), (3.7.44), (3.7.45) y (3.7.46), donde $\alpha \in K^\times \setminus \{1\}$ y $x, y, z \in K^\times$ con $y = \frac{\alpha(1-\alpha)}{x}$, entonces \mathcal{A} satisfacen las condiciones de la Proposition 3.1.12. \square



Apéndice A: Producto Vectorial

Denotemos con una juxtaposición la multiplicación de dos matrices y con un \bullet la multiplicación en K^n . De esta manera,

$$(a_1, \dots, a_n) \bullet (b_1, \dots, b_n) = (a_1 b_1, \dots, a_n b_n).$$

Además, un elemento $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in K^n$ es invertible con respecto a la aplicación de multiplicación \bullet si y solo si $\mu_n(\mathbf{a}) := a_1 \cdots a_n \neq 0$. En este caso denotaremos por \mathbf{a}^\bullet al elemento inverso $(a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1})$ de \mathbf{a} .

Recordemos que el *producto vectorial* es la operación $(n-1)$ -aria

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}) \mapsto \mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1}$$

en K^n , determinada por

$$(\mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1}) \mathbf{x}^T = \det \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{n-1} \end{pmatrix}$$

para todo $\mathbf{x} \in K^n$. Aquí, X^T denota la matriz transpuesta de X .

A partir de la definición se sigue inmediatamente que $\mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1}$ es ortogonal al subespacio $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1} \rangle$ generado por $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$, y que $\mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1} = 0$ si $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ no son linealmente independientes. Es conocido (y además muy fácil de verificar) que

$$\mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1} = \det \begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_n \\ v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n-1,1} & \cdots & v_{n-1,n} \end{pmatrix},$$

donde $\{e_1, \dots, e_n\}$ es la base canónica estándar de K^n , $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, \dots, v_{in})$ y el determinante es calculado como la extensión de Laplace a lo largo de la primera fila. De esta manera, se puede obtener inmediatamente que si X es la matriz con filas $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ y columnas $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$, entonces

$$(\mathbf{y}_1^T \times \cdots \times \widehat{\mathbf{y}_j^T} \times \cdots \times \mathbf{y}_n^T) \bullet e_j = (\mathbf{x}_1 \times \cdots \times \widehat{\mathbf{x}_j} \times \cdots \times \mathbf{x}_n) \bullet e_j \quad \text{para todo } j. \quad (\text{A.47})$$

Proposición A.1. Si $\mathbf{x} \in K^n$ es un elemento invertible, entonces

$$\mathbf{x} \bullet (\mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1}) = \mu_n(\mathbf{x}) (\mathbf{x}^\bullet \bullet \mathbf{v}_1) \times \cdots \times (\mathbf{x}^\bullet \bullet \mathbf{v}_{n-1}),$$

para todo $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1} \in K^n$, donde $\mu_n(\mathbf{x}) = x_1 \cdots x_n$.

Demostración. Este resultado es una consecuencia inmediata de la siguiente propiedad

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\mathbf{x} \cdot (\mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1}))^T &= (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})(\mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1})^T \\ &= \det \left(\begin{array}{c} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^T \quad \mathbf{v}_1^T \quad \cdots \quad \mathbf{v}_{n-1}^T \end{array} \right) \\ &= \tau(\mathbf{x}) \det \left(\begin{array}{c} \mathbf{y}^T \quad (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1)^T \quad \cdots \quad (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_{n-1})^T \end{array} \right) \\ &= \tau(\mathbf{x}) \mathbf{y}((\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1) \times \cdots \times (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_{n-1}))^T \end{aligned}$$

para todo $\mathbf{y} \in K^n$.

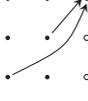
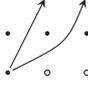
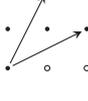
□



Apéndice B: Aplicaciones de torcimiento casi-estándar de K^3 con K^3

A continuación presentamos la lista de aplicaciones de torcimiento casi-estándar de K^3 con K^3 . Con este propósito, primero construimos las aplicaciones de torcimiento estándar y empleamos el método presentado en la Observación 3.6.5, y entonces construimos el resto de aplicaciones de torcimiento casi-estándar usando de manera recursiva el método desarrollado en la Subsección 3.6.2. No es posible una iteración arbitraria de pasos en esta construcción pues las condiciones que aparecen en el ítem (2) de la Proposición 3.6.12 no serán satisfechas (ver por ejemplo el último ítem de la siguiente lista).

Cuadro 3.2: Aplicaciones de torcimiento casi-estándar de K^3 con K^3

#	$\sum \text{Tr}$	quiver	Γ_χ	$\tilde{\Gamma}_\chi$	# equiv.	quasi-st.
1.	9		$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	1	—
2.	8		$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	36	—
3.	7		$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	18	—
4.	7		$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	18	—
5.	7		$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	18	—
6.	7		$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	18	—

continúa en la siguiente página ...

#	$\sum \text{Tr}$	quiver	Γ_χ	$\tilde{\Gamma}_\chi$	# equiv.	quasi-st.
7.	7		$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	18	—
8.	7		$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	36	—
9.	7		$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	18	—
10.	7		$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	36	—
11.	7		$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	36	—
12.	7		$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	36	—
13.	7		$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	36	—
14.	7		$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	18	—
15.	7		$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	36	—
16.	7		$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	18	—
17.	6		$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	36	—
18.	6		$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	36	—

continúa en la siguiente página ...

#	$\sum \text{Tr}$	quiver	Γ_χ	$\tilde{\Gamma}_\chi$	# equiv.	quasi-st.
19.	6		$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	36	–
20.	6		$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	36	$\chi_1 = \Lambda_{(3,1),(2,2),(1,3)}^{\lambda_1}(\chi)$
21.	6		$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	36	–
22.	6		$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	36	–
23.	6		$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	36	–
24.	6		$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	36	–
25.	6		$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	36	–
26.	6		$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	36	–
27.	6		$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	36	–
28.	6		$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	36	–
29.	6		$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	36	–
30.	6		$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	36	–

continúa en la siguiente página ...

#	$\sum \text{Tr}$	quiver	Γ_χ	$\tilde{\Gamma}_\chi$	# equiv.	quasi-st.
31.	6		$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	36	—
32.	6		$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	36	—
33.	6		$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	36	—
34.	6		$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	36	—
35.	6		$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	36	—
36.	6		$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	36	—
37.	6		$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	36	—
38.	6		$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	36	—
39.	6		$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	36	—
40.	6		$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	36	—
41.	6		$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	36	—
42.	6		$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	36	—

continúa en la siguiente página ...

#	$\sum \text{Tr}$	quiver	Γ_χ	$\tilde{\Gamma}_\chi$	# equiv.	quasi-st.
43.	6		$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	36	–
44.	6		$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	36	–
45.	6		$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	36	–
46.	6		$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	12	–
47.	6		$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	12	–
48.	6		$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	36	–
49.	5		$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	9	–
50.	5		$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	18	–
51.	5		$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	36	$\chi_1 = \Lambda_{(3,1)(1,2)(2,3)}^{\lambda_1}(\chi)$
52.	5		$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	18	$\chi_1 = \Lambda_{(3,1)(1,2)(2,3)}^{\lambda_1}(\chi)$ $\chi_2 = \Lambda_{(3,1)(2,3)(1,2)}^{\lambda_2}(\chi)$
53.	5		$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	18	–
54.	5		$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	36	$\chi_1 = \Lambda_{(3,2)(2,1)(1,3)}^{\lambda_1}(\chi)$

continúa en la siguiente página ...

#	$\sum \text{Tr}$	quiver	Γ_χ	$\tilde{\Gamma}_\chi$	# equiv.	quasi-st.
55.	5		$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	18	$\chi_1 = \Lambda_{(2,1)(3,2)(1,3)}^{\lambda_1}(\chi)$ $\chi_2 = \Lambda_{(3,2)(2,1)(1,3)}^{\lambda_2}(\chi)$
56.	5		$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	36	—
57.	5		$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	36	—
58.	5		$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	36	—
59.	5		$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	18	—
60.	5		$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	18	—
61.	5		$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	36	—
62.	5		$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	36	—
63.	5		$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	36	—
64.	5		$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	36	—
65.	5		$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	36	—
66.	5		$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	36	$\chi_1 = \Lambda_{(3,2)(1,1)(2,3)}^{\lambda_1}(\chi)$

continúa en la siguiente página ...

#	$\sum \text{Tr}$	quiver	Γ_χ	$\tilde{\Gamma}_\chi$	# equiv.	quasi-st.
67.	5		$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	36	–
68.	5		$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	36	$\chi_1 = \Lambda_{(3,2)(1,1)(2,3)}^{\lambda_1}(\chi)$
69.	5		$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	36	–
70.	5		$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	36	–
71.	5		$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	36	–
72.	5		$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	36	–
73.	5		$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	36	–
74.	5		$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	36	$\chi_1 = \Lambda_{(3,2)(1,1)(2,3)}^{\lambda_1}(\chi)$
75.	5		$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	36	–
76.	5		$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	36	$\chi_1 = \Lambda_{(3,2)(1,1)(2,3)}^{\lambda_1}(\chi)$
77.	4		$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	36	$\chi_1 = \Lambda_{(2,1)(3,3)(1,2)}^{\lambda_1}(\chi)$
78.	4		$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	36	$\chi_1 = \Lambda_{(2,1)(3,3)(1,2)}^{\lambda_1}(\chi)$ $\chi_2 = \Lambda_{(2,1)(1,2)(3,3)}^{\lambda_2}(\chi)$

continúa en la siguiente página ...

#	$\sum \text{Tr}$	quiver	Γ_χ	$\tilde{\Gamma}_\chi$	# equiv.	quasi-st.
79.	4		$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	36	$\chi_1 = \Lambda_{(2,1)(3,3)(1,2)}^{\lambda_1}(\chi)$ $\chi_2 = \Lambda_{(3,3)(2,1)(1,2)}^{\lambda_2}(\chi)$
80.	4		$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	36	$\chi_1 = \Lambda_{(2,1)(3,3)(1,2)}^{\lambda_1}(\chi)$ $\chi_2 = \Lambda_{(3,3)(2,1)(1,2)}^{\lambda_2}(\chi)$ $\chi_3 = \Lambda_{(2,1)(1,2)(3,3)}^{\lambda_3}(\chi_2)$
81.	4		$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	36	-
82.	3		$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	6	$\chi_1 = \Lambda_{(1,1)(2,2)(3,3)}^{\lambda_1}(\chi)$ $\chi_2 = \Lambda_{(1,1)(3,3)(2,2)}^{\lambda_2}(\chi)$ $\chi_3 = \Lambda_{(3,3)(1,1)(2,2)}^{\lambda_3}(\chi)$ $\chi_4 = \Lambda_{(3,3)(1,1)(2,2)}^{\lambda_4}(\chi_1)$ $\chi_5 = \Lambda_{(3,3)(2,2)(1,1)}^{\lambda_5}(\chi_1)$ $\chi_6 = \Lambda_{(3,3)(2,2)(1,1)}^{\lambda_6}(\chi_2)$ $\chi_7 = \Lambda_{(2,2)(3,3)(1,1)}^{\lambda_7}(\chi_2)$ $\chi_8 = \Lambda_{(2,2)(1,1)(3,3)}^{\lambda_8}(\chi_3)$ $\chi_9 = \Lambda_{(2,2)(3,3)(1,1)}^{\lambda_9}(\chi_4)$ $\chi_{10} = \Lambda_{(2,2)(1,1)(3,3)}^{\lambda_{10}}(\chi_6)$

Bibliografía

- [1] Jack Arce, *Representations of twisted tensor products*, arXiv:1505.01232.
- [2] Jack Arce, Jorge A. Guccione, Juan J. Guccione, and Christian Valqui, *Twisted tensor products of K^n with K^m* , arXiv:1603.01222.
- [3] A. Agore and G. Militaru, *Schreier type theorems for bicrossed products*, Cent. Eur. J. Math. **10** (2012), no. 2, 722–739, DOI 10.2478/s11533-011-0128-6. MR2886568
- [4] Tomasz Brzeziński and Shahn Majid, *Coalgebra bundles*, Comm. Math. Phys. **191** (1998), no. 2, 467–492, DOI 10.1007/s002200050274. MR1604340
- [5] ———, *Quantum geometry of algebra factorisations y coalgebra bundles*, Comm. Math. Phys. **213** (2000), no. 3, 491–521, DOI 10.1007/PL00005530. MR1785427
- [6] Andreas Cap, Hermann Schichl, and Jiří Vanžura, *On twisted tensor products of algebras*, Comm. Algebra **23** (1995), no. 12, 4701–4735, DOI 10.1080/00927879508825496. MR1352565 (96k:16039)
- [7] P. Cartier, *Produits tensoriels tordus*, Exposé au Séminaire des groupes quantiques de l' École Normale Supérieure, Paris (Unknown Month 1991).
- [8] Claude Cibils, *Non-commutative duplicates of finite sets*, J. Algebra Appl. **5** (2006), no. 3, 361–377, DOI 10.1142/S0219498806001776. MR2235816 (2007d:16020)
- [9] Jorge A. Guccione and Juan J. Guccione, *Hochschild homology of twisted tensor products*, K-Theory **18** (1999), no. 4, 363–400, DOI 10.1023/A:1007890230081. MR1738899 (2001a:16016)
- [10] Jorge A. Guccione, Juan J. Guccione, and Christian Valqui, *Non commutative truncated polynomial extensions*, J. Pure Appl. Algebra **216** (2012), no. 11, 2315–2337, DOI 10.1016/j.jpaa.2012.01.021. MR2927170
- [11] ———, *Twisted planes*, Comm. Algebra **38** (2010), no. 5, 1930–1956, DOI 10.1080/00927870903023105. MR2642035 (2011h:16031)
- [12] P. Jara, J. López Peña, G. Navarro, and D. Ştefan, *On the classification of twisting maps between K^n and K^m* , Algebr. Represent. Theory **14** (2011), no. 5, 869–895, DOI 10.1007/s10468-010-9222-x. MR2832263 (2012g:16053)
- [13] Javier López Peña, *Factorization structures. A cartesian for non commutative geometry*, PhD Thesis **81** (2010), no. 1, 1–23, DOI 10.1112/jlms/jdp055. MR2580451 (2010m:16035)
- [14] Óscar Cortadellas, Javier López Peña, and Gabriel Navarro, *Factorization structures with a two-dimensional factor*, J. Lond. Math. Soc. (2) **81** (2010), no. 1, 1–23, DOI 10.1112/jlms/jdp055. MR2580451 (2010m:16035)
- [15] Shahn Majid, *Physics for algebraists: noncommutative and noncocommutative Hopf algebras by a bicross-product construction*, J. Algebra **130** (1990), no. 1, 17–64, DOI 10.1016/0021-8693(90)90099-A. MR1045735 (91j:16050)
- [16] D. Tambara, *The coendomorphism bialgebra of an algebra*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **37** (1990), no. 2, 425–456. MR1071429 (91f:16048)
- [17] M. Takeuchi, *Matched pairs of groups and bismash products of Hopf algebras*, Comm. Algebra **9** (1981), no. 2, 841–882.
- [18] A. Van Daele and S. Van Keer, *The Yang-Baxter and pentagon equation*, Compositio Math. **91** (1994), no. 2, 201–221. MR1273649 (95c:16052)
- [19] Murray Gerstenhaber, *On the deformation of rings and algebras*, Ann. of Math. (2) **79** (1964), 59–103. MR0171807
- [20] Jorge A. Guccione and Juan J. Guccione, *Hochschild homology of twisted tensor products*, K-Theory **18** (1999), no. 4, 363–400, DOI 10.1023/A:1007890230081. MR1738899

- [21] P. Jara, J. López Peña, G. Navarro, and D. Ştefan, *On the classification of twisting maps between K^n and K^m* , *Algebr. Represent. Theory* **14** (2011), no. 5, 869–895, DOI 10.1007/s10468-010-9222-x. MR2832263
- [22] Pascual Jara Martínez, Javier López Peña, Florin Panaite, and Freddy van Oystaeyen, *On iterated twisted tensor products of algebras*, *Internat. J. Math.* **19** (2008), no. 9, 1053–1101, DOI 10.1142/S0129167X08004996. MR2458561
- [23] Christian Kassel, *Quantum groups*, *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 155, Springer-Verlag, New York, 1995. MR1321145
- [24] Javier López Peña and Gabriel Navarro, *On the classification and properties of noncommutative duplicates*, *K-Theory* **38** (2008), no. 2, 223–234, DOI 10.1007/s10977-007-9017-y. MR2366562
- [25] Shahn Majid, *Physics for algebraists: noncommutative and noncocommutative Hopf algebras by a bicrossproduct construction*, *J. Algebra* **130** (1990), no. 1, 17–64, DOI 10.1016/0021-8693(90)90099-A. MR1045735
- [26] ———, *Algebras and Hopf algebras in braided categories*, *Advances in Hopf algebras (Chicago, IL, 1992)*, *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, vol. 158, Dekker, New York, 1994, pp. 55–105. MR1289422
- [27] Susan Montgomery, *Hopf algebras and their actions on rings*, *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, vol. 82, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1993. MR1243637
- [28] Richard S. Pierce, *Associative algebras*, *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 88, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982. *Studies in the History of Modern Science*, 9. MR674652
- [29] Tomasz Brzeziński and Shahn Majid, *Coalgebra bundles*, *Comm. Math. Phys.* **191** (1998), no. 2, 467–492, DOI 10.1007/s002200050274. MR1604340
- [30] ———, *Quantum geometry of algebra factorisations and coalgebra bundles*, *Comm. Math. Phys.* **213** (2000), no. 3, 491–521, DOI 10.1007/PL00005530. MR1785427
- [31] S. Caenepeel, Bogdan Ion, G. Militaru, and Shenglin Zhu, *The factorization problem and the smash biproduct of algebras and coalgebras*, *Algebr. Represent. Theory* **3** (2000), no. 1, 19–42, DOI 10.1023/A:1009917210863. MR1755802