Pontificia Universidad Católica del Perú

Escuela de Graduados

‘Presentación de los Números Complejos: Enfoques e Interpretaciones’

Tesis
para optar el Grado de
Magister en la Enseñanza de la Matemática

Presentada por:
Luis Alberto Bustamante Donayre

LIMA - PERÚ
2000

A mí madre

Agradecimiento

Quiero expresar mi profunda gratitud a mis profesores de la Maestría en la Enseñanza de la Matemática por sus estimables enseñanzas y, en especial, al profesor Uldarico Malaspina Jurado en reconocimiento a sus valiosas orientaciones en la elaboración del presente trabajo.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Desde que los números complejos aparecieron en el siglo XVI, tardaron dos siglos en ser, en cierta manera, aceptados. Aunque las aportaciones formales de Bombelli, Wessel, Argand, Gauss, Euler y Hamilton contribuyeron a una aceptación parcial de los matemáticos, los incomprendidos números complejos todavía eran considerados por los matemáticos del siglo XIX como entes espurios[1]. Este hecho histórico corrobora que el concepto de número complejo no es muy fácil de asimilar.

El presente trabajo tiene por objeto encontrar un enfoque en donde los números complejos aparezcan de una manera precisa, clara y natural[2], de modo que pueda ser útil a los docentes y a quienes inician el estudio de este interesante campo.

Hay razones para creer que las presentaciones habituales que se hacen de los números complejos resultan, desde un punto de vista didáctico, poco apropiadas.

La simple introducción de la unidad imaginaria i, como parte de un binomio complejo $a+bi$, toma el aspecto – a los ojos del lector – de un elemento ilegítimo que sólo ayuda a salvar las apariencias de la operación "imposible" $\sqrt{-1}$; y, además, esta aparente ilegitimidad resulta reforzada

[1] *Vid*. Bell, E.T.; *Historia de las Matemáticas,* Fondo de Cultura Económica, México, 1995, p. 185
[2] Operacionalmente, como se podrá inferir, identificaremos *claro* con *significativo* y *natural* con *heurístico.*

con el nombre de "número imaginario"[3]. De esto se desprende lo incomprensible que resulta el hecho de poder "sumar" un número real (el término a del binomio complejo) con un número de naturaleza distinta llamado imaginario puro (el término bi).

Todo ello permanece como un misterio inescrutable por carecer de un enfoque motivador para su esclarecimiento.

Veamos lo que nos dice al respecto el profesor José-Paulo Q. Carneiro:

> "Una manera muy común de introducir los complejos para un principiante es definir: <<*Un número complejo es un objeto de la forma* $a+bi$*, donde* a *y* b *son reales,* $i^2 = -1$*, y quedan mantenidas las leyes operatorias básicas del álgebra*>>. Se trata de una definición correcta, y de un método que presenta una innegable ventaja: el principiante puede empezar inmediatamente a multiplicar y a dividir complejos sin dificultad: <<*Ponga en la forma* $a+bi$ .....>>. Pero, ¿será tan importante este objetivo calculador? A nuestro ver, en esta forma de presentar los complejos se pierde la magnífica oportunidad de presentarlos inmediatamente como entes geométricos. La experiencia de clase muestra también que muchas veces esta oportunidad no se recupera, aunque más tarde aparezca la "forma trigonométrica". El principiante permanece con una visión excesivamente formal y "algebrizante" (en el mal sentido del "algebrismo"), y no se le ocurre aplicar conocimientos de números complejos a problemas de Geometría, como se hace desde Gauss.
>
> Además, en este tipo de presentación, ¿quién es i? El importantísimo número i "cae del cielo", en una especie de golpe bajo. Antes, ningún cuadrado podía ser igual a -1; ahora, por definición, puede serlo; y está acabado. Una vez más, se pierde la oportunidad de reconocer enseguida que $a+bi$ no es más que la manera usual de escribir cualquier vector del plano en términos de la base canónica formada por (1; 0) y (0; 1), y que la ecuación $i^2 = -1$, en vez de ser una monstruosidad incomprensible – sólo apoyada por la autoridad del profesor – traduce sólo una rotación de un ángulo recto (positivo) en torno al origen"[4]

Asimismo, Ian Stewart, en lenguaje irónico, escribe:

---

[3] *Vid*. *e.g*. Bolton; W, *Complex Numbers*, Longman Scientific & Technical, 1995, England, p. 2

“The complex numbers arise if we wish to solve the equation $x^2+1=0$. We introduce a new number i, defined so that $i^2=-1$. In order to be able to add and multiply we must have numbers of the form $a+bi$ for real a and b. Finally we observe that if the laws of arithmetic are assumed to hold, nothing seems to go wrong. And as a bonus, we can divide as well.

This is all very fine, but it doesn’t explain very much. It doesn’t even *prove* that the laws *do* hold. And the number i can seem mysterious: which is why the real numbers are called ‘real’ and the imaginary numbers ‘imaginary’. This is a great pity – not so much because it is a slight on the imaginaries, but because it lends the real numbers an air of respectability that they by no means deserve!”[5]

[Los números complejos aparecen cuando queremos resolver la ecuación $x^2+1=0$. Introducimos un número nuevo, definido como $i^2=-1$. Para poder sumar y multiplicar debemos tener números de la forma $a+bi$ con a y b reales. Finalmente, observamos que, al suponer que las leyes de la aritmética se cumplen, nada parece ir mal. Y, por añadidura, podemos dividir igualmente bien.

Todo esto está muy bonito, pero no explica mucho. Ni siquiera *prueba* que las leyes *realmente* se cumplen. Y el número i puede parecer misterioso: los números reales se llaman “reales” y los números imaginarios “imaginarios”. ¡Ésta es una gran pena, no tanto porque sea un menosprecio para los imaginarios, sino porque les da a los números reales un aire de respetabilidad que de ningún modo merecen!]

Otra forma de introducir los números complejos es presentarlos como pares ordenados de números reales definiendo sus operaciones de adición y multiplicación como siguen:[6]

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

Esta segunda forma, sin duda irrefutable desde un punto de vista matemático, resulta empero sorprendente para un lector no habituado a presentaciones axiomáticas. La regla de la multiplicación de pares ordenados aparenta ser un tanto caprichosa en comparación con la relativa

[4] Carneiro, José-Paulo Q.; *Números Complejos y Ecuaciones Polinomiales,* XX Jornadas de Resolución de Problemas, Seminario Internacional, Ministerio de Cultura y Educación, República Argentina, 1997, p. 5
[5] Stewart, Ian; *Concepts of Modern Mathematics,* Dover Publications, Inc., New York, 1995, p. 89

simplicidad que presenta la multiplicación de dos números racionales o reales. El lector no percibe claramente la relación que existe entre esta definición y el problema que inicialmente se plantea sobre la existencia de los números complejos.

Ilustremos esto último con la siguiente declaración de J.V. Uspensky:

> "Mientras que la definición adoptada para la adición de los números complejos es aceptada inmediatamente como natural por los estudiantes, estos se quedan perplejos por el carácter aparentemente artificioso de la definición de multiplicación y siempre preguntan las razones por las que se adopta. Puesto que los números complejos son pares ordenados de nuevos objetos para los que las nociones de igualdad, adición y multiplicación no están definidas inicialmente, es privilegio nuestro definir estas nociones como nos plazca, esforzándonos solamente por hacerlo de modo tal que todas las propiedades fundamentales de las operaciones algebraicas con números reales conserven su validez para los números complejos, y que, además, los números complejos sujetos a tales propiedades puedan reemplazar a los números <<imaginarios>> hasta ahora sin sentido."[7]

En esta declaración de Uspensky se revelan tanto la insatisfacción del discente en la interpretación del nuevo concepto como la displicencia que existe en resolver este problema didáctico. Ya que resulta poco motivador encontrarse con una regla que aparentemente no tiene una génesis ni un objetivo, no es de extrañar que aquel estudiante insatisfecho mire los números complejos con una cierta suspicacia.

---

[6] *Vid. e.g.* Hahn, Lian-shin; *Complex Numbers and Geometry*, The Mathematical Association of America, 1994, U.S.A., p. 5 ; Uspensky, J.V., *Teoría de Ecuaciones*, Ed. Limusa, 1987, México, p. 2 y ss.

[7] Uspensky J. V.; *op. cit.*, p. 3

En virtud de lo expuesto, pretendemos alcanzar los siguientes objetivos:

1) Analizar y revisar los conceptos relacionados con los números complejos a partir de conocimientos previos siguiendo un método interactivo basado en preguntas motivadoras que induzcan a la reflexión.
2) Con la determinación de un contexto adecuado y, comenzando por un proceso intuitivo de visualización geométrica, solucionar la ecuación $x^2+1=0$ sin exigir la introducción de un elemento i llamado imaginario.
3) Precisar la interpretación geométrica de las operaciones de los números complejos definiendo transformaciones en el plano.
4) Mostrar que, a partir del enfoque adoptado en este trabajo, podemos llegar a las presentaciones conocidas y a otras formas equivalentes de los números complejos.

Para el cumplimiento de estos objetivos nos apoyaremos en los alcances que nos ofrece el constructivismo como actividad organizadora en la elaboración de conocimientos significativos y en el método heurístico como proceso inductivo, en donde la matemática aparece como una ciencia experimental.[8]

[8] En este sentido, nos referimos a una *experiencia lógico matemática*, distinguiéndose esencialmente de una *experiencia física*. *Vid*. Piaget, Jean; *La Enseñanza de las Matemáticas*, Editorial Aguilar, 1971, p. 28

Con el fin de superar los inconvenientes que se generan por las formas tradicionales que hemos descrito en la presentación de los números complejos, se cumplirán los objetivos trazados con la elaboración de un módulo autoinstructivo dirigido al docente de educación secundaria en la especialidad de matemática así como también a los profesores de los niveles de bachillerato y de cursos universitarios introductorios.

Siguiendo los objetivos mencionados, describiremos sucintamente las ideas relevantes desarrolladas en el módulo:

Las fuentes históricas[9], expuestas en el primer capítulo del módulo, nos conducen a un punto de partida en esta presentación didáctica y a plantear el problema de la *existencia de los números imaginarios* [10].

La dilucidación del concepto *existencia* nos permite señalar la importancia que tiene en matemática la determinación de un contexto adecuado en la descripción de un cierto objeto o propiedad. Así, adoptando una postura experimental, se demuestra que el conjunto de los números reales resulta insuficiente para solucionar la ecuación $\omega^2 + 1 = 0$ y que esto induce a intentar una solución en otro conjunto. Por medio de la descripción de distintos sistemas numéricos, los cuales se pueden interpretar como sucesivas extensiones $(N \subset Z \subset Q \subset \Re)$, y suponiendo que ω existe, se

[9] *Vid.* Nahin, Paul J.; *An Imaginary Tale: The Story of* $\sqrt{-1}$, Princeton University Press, NJ, 1998; Perdigao do Carmo; *Trigonometria – Números Complexos*, Graftex, Rio de Janeiro, 1992, pp. 109-114

[10] Hay una sutil diferencia semántica entre "número imaginario" y "número complejo". Este último término fue introducido por Gauss y es el que se adopta formalmente al definir el conjunto como sistema numérico.

plantea la búsqueda de una extensión de $\Re$ siguiendo un camino inductivo y enfatizando la visualización geométrica; esto es:

a) como ω no pertenece a la recta $\Re$, entonces ω está ubicado fuera de esta recta;

b) si ω pertenece a una extensión de $\Re$, ésta deberá contener a la recta $\Re$ y al elemento ω situado fuera de la recta;

c) dado que una recta y un punto exterior a ella están contenidos en un plano único, suponemos que este conjunto *extensión de* $\Re$ está representado por un plano C.

Una vez establecido el plano como la representación del conjunto extensión de $\Re$ (el cual llamamos C), llegamos a determinar – reforzando ideas a través de analogías - que sus elementos z son pares ordenados de números reales. Es decir, los elementos del conjunto C son de la forma:

$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in C\,, \quad x \in \Re\,,\ y \in \Re$$

Debiendo precisar el carácter de *número* para los elementos $z \in C$, pretendemos entonces que C sea un *sistema numérico*. Para ello, C debe tener definidas dos operaciones binarias, “adición” y “multiplicación”, debiéndose cumplir las propiedades asociativa y conmutativa para ambas operaciones y la propiedad distributiva de la “multiplicación” respecto a la “adición”. [11]

En virtud de ello, habiendo identificado al conjunto C como un espacio $\Re \times \Re$ e identificando a los elementos de C como vectores en el plano, introducimos las siguientes operaciones que nos llevarán a determinar el espacio vectorial C:

- Dados: $z_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, $z_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ con $z_1, z_2 \in C$,

$$z_1 + z_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} \qquad \text{......... (1)}$$

- Dado: $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ con $z \in C$, $r \in \Re$;

$$rz = r\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rx \\ ry \end{bmatrix} \qquad \text{......... (2)}$$

Si bien aquí tenemos en (1) definida la operación binaria de “adición en C”, todavía no tenemos definida una operación binaria de “multiplicación en C” para todo $z_1, z_2 \in C$. Por lo tanto debemos construirla.

Basándonos en una visualización geométrica[12], expresada en la composición de la operación (2) con la definición de ortogonal $z^{\perp}$ de un vector $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ como $z^{\perp} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$, extendemos el concepto de “multiplicación de *real* por un vector en C” al concepto de “multiplicación de un *vector en* C por un vector en C” , definiendo entonces la “multiplicación en C” de la siguiente manera:

- Dados: z_1, z_2 en C, $z_1 z_2 = x_1 z_2 + y_1 z_2^{\perp}$ .... (3)

[11] *Vid.* Adler, Irving; *La Nueva Matemática,* Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1970, p. 31
[12] *Vid.* Nahin, Paul J.; *Op.Cit*, pp. 84-87; Budden, F. J.; *Números Complejos,* Editorial Alhambra, Madrid, 1971, pp. 297–299; *Cfr*. Hardy, G. H.; *A Course of Pure Mathematics*, Cambridge University Press, 1967, pp.78-83

Considerando cada vector $z_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ y $z_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$, la definición (3) queda expresada como:[13]

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 \\ x_1y_2 + x_2y_1 \end{bmatrix}$$

Al demostrarse que el conjunto de los números reales forma un sistema relativo a las operaciones binarias (1) y (3), definidas en C, se establece que C es una extensión de $\Re$, en donde la recta $\Re$ debe coincidir con el eje horizontal X; es decir, se prueba que necesariamente los elementos $z \in \Re \subset C$ son de la forma $z = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$.

Una vez fijado el contexto y las operaciones definidas en él, formulamos la siguiente interrogante:

¿Existe un $\omega \in C$ *tal que* $\omega^2 + 1 = 0$*?*

Establecidos los elementos neutros aditivo y multiplicativo en C como los números $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ respectivamente, planteamos la ecuación en la siguiente forma:

$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, la cual es posible resolver, llegando a las soluciones:

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ y } \omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

[13] Esta presentación de la multiplicación resulta equivalente a la mostrada en la página 4.

A partir de ello, y sólo entonces[14], denominamos al sistema numérico C *sistema de números complejos*, en el cual la ecuación $\omega^2 + 1 = 0$ tiene solución. Vemos también que el sistema numérico C tiene estructura de campo, con lo cual lo llamamos también *Campo de Números Complejos.*

Al término de esta introducción (ver pág. 16), se puede apreciar en un cuadro esquemático el camino que nos lleva a solucionar la ecuación $\omega^2 + 1 = 0$.

Para poder interpretar geométricamente las operaciones de los números complejos en el plano, e introduciendo antes los conceptos de *módulo*, *vector unitario* y *conjugado*, definimos, para todo $z \in C$, las transformaciones del plano C:[15]

a) *Traslación de* z es la transformación $T(z) = z + \alpha$, dado un $\alpha \in C$.

b) *Rotación de* z es la transformación $U(z) = \upsilon_R z$, en donde υ_R es el *unitario de rotación* de la transformación U.

c) *Dilatación de* z es la transformación $H(z) = rz$, en donde $r \in \Re$.

Definimos, además, *ángulo de rotación* del unitario de rotación υ_R, al

valor $\theta_R \in \Re$ que satisface la igualdad: $\upsilon_R = \begin{bmatrix} \cos\theta_R \\ \operatorname{sen}\theta_R \end{bmatrix}$.

[14] En las presentaciones habituales de los números complejos no se soluciona esta ecuación, sino *se da por hecho* que existe un sistema C en el cual se muestra que necesariamente $i^2 = -1$ o bien $(0,1)^2 = (-1,0)$.
[15] *Cfr.* Haaser/LaSalle/Sullivan; *Análisis Matemático 1*, Ed. Trillas, México, 1970, pp. 160-185

Con las tres transformaciones definidas, se llega a mostrar que la adición en C se interpreta como una traslación en el plano C y que la multiplicación en C se interpreta como una composición de rotación y dilatación, esto es, con la transformación compuesta:

$[U \circ H](z) = U(H(z))$.[16]

En el último capítulo del módulo, mostramos que, a partir del enfoque adoptado en este trabajo, podemos llegar a otras presentaciones equivalentes de los números complejos: binómica, polar y matricial.

Para llegar a la forma binómica[17], en virtud de las propiedades de vectores en C estudiadas, escribimos el vector $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ en la forma $\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Identificando $\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow a \in \Re$ y $i^2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow -1$, llegamos a la representación:

$z = a + bi$, $a \in \Re$, $b \in \Re$, $i^2 = -1$.

Para llegar a la forma polar, nos valemos del concepto de rotación de z_0 a z definido en el módulo.

[16] En la notación polar (o forma trigonométrica), es frecuente introducir la idea gráfica de multiplicación de complejos mostrando una dilatación compuesta con un giro; sin embargo, esta representación gráfica no se está mostrando con precisión, pues las transformaciones del plano no han sido definidas.

[17] La forma ordinaria de introducción de la forma binómica no explica cómo podemos “sumar” términos reales con términos imaginarios (es como querer “sumar” números reales con vectores de $\Re^2$) y tampoco dice mucho acerca de la naturaleza de la unidad imaginaria i.

Partiendo del vector $z_0 = \begin{bmatrix} \rho \\ 0 \end{bmatrix}$, con un ángulo de rotación θ, transformamos la expresión convenientemente:

$$z = z_0 \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} = z_0 \begin{bmatrix} \cos\theta + 0 \\ 0 + \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \right)$$

$$z = \begin{bmatrix} \rho \\ 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \operatorname{sen}\theta \right)$$

Identificamos:

$\begin{bmatrix} \rho \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \rho$, $\begin{bmatrix} \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \cos\theta$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = i$ con $i^2 \leftrightarrow -1$.

Como es una rotación, el módulo no varía y podemos escribir: $\|z\| = \|z_0\| = \rho$. Luego, relacionando estos resultados con los elementos geométricos de la forma polar, llegamos a establecer:

$z = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, en donde $\rho = \|z\|$ y θ es el *argumento* de z.

A continuación, se define la relación de Euler $e^{i\theta} := \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$, se estudian las raíces enésimas de la unidad $w^n = 1$, $n \in Z^+$ y se trata sobre las ecuaciones polinomiales y el teorema fundamental del álgebra.

Para llegar a presentar los números complejos como matrices $M_{2\times 2}$, nos basamos en la rotación $U(z) = \upsilon_R z$, desde donde, operando algebraicamente, llegamos a identificar el unitario de rotación con la matriz de rotación de orden 2×2 obteniendo de esta manera:[18]

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_R \\ \operatorname{sen}\theta_R \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta_R & -\operatorname{sen}\theta_R \\ \operatorname{sen}\theta_R & \cos\theta_R \end{pmatrix}.$$

Si en la expresión anterior, hacemos $x = \cos\theta_R$, $y = \operatorname{sen}\theta_R$,

tenemos: $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Esto nos induce a la idea de que, para todo $z \in C$, podemos identificar un elemento equivalente en $M_{2\times 2}$.

Para garantizar la validez de esta afirmación, en el módulo se demuestra que las operaciones se corresponden según la identificación establecida.

Por último, mostramos de una manera sucinta, y a nivel informativo, que los números complejos se pueden presentar como clases residuales de polinomios. [19]

Esta última presentación, que llamamos forma modular, requiere de un conocimiento previo de aritmética modular y álgebra de polinomios. Se justifica su inclusión en este trabajo por tratarse de una forma poco conocida, que permite ver cómo se interrelacionan algunos conceptos de la aritmética y el álgebra y puede despertar la curiosidad intelectual del lector.

---

[18] Partiendo de la definición de *unitario de rotación* que damos en el módulo, llegamos fácilmente a la matriz de rotación. Generalmente, en los textos que tratan este tema, se llega a la matriz de rotación por un método más complicado de descomposición de vectores ortogonales.

[19]*Vid.* Kline, Morris; *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, pp. 1075-1082, Alianza Editorial, 1972; Adler, Irving; *Op.Cit.* pp. 251-259; Stewart, Ian; *Op.Cit.* pp. 89-91

Con relación a las perspectivas que abre este trabajo, consideramos que éste puede contribuir a un mayor alcance en la interpretación de los conceptos numéricos y a una enseñanza más eficiente en el campo de los sistemas numéricos en general. La presentación de los diversos enfoques desarrollados en el módulo puede conducir al lector a una mayor flexibilidad, tanto en la comprensión como en el manejo de los conceptos matemáticos. Asimismo, el método empleado en el desarrollo del módulo autoinstructivo podrá servir de modelo en la preparación del material didáctico del docente y en la conducción de su clase.

En cuanto al contenido general de este trabajo, haremos sucintamente la siguiente descripción:

En el Capítulo 1, se exponen los puntos referentes a las bases epistemológicas, a la estrategia, al medio y al sujeto participativo mencionados en esta introducción.

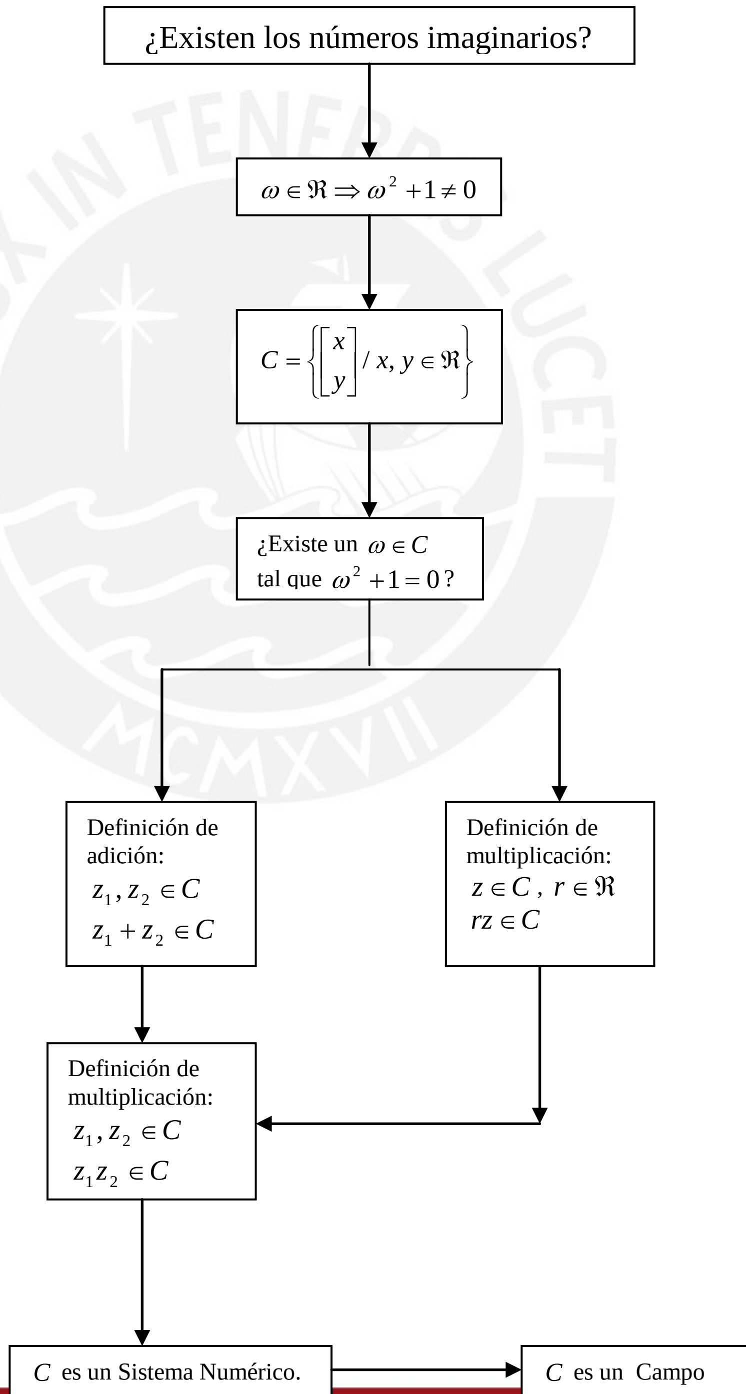
En el Capítulo 2, se desarrolla el módulo autoinstructivo y se exponen las conclusiones.

En la parte final, se presentan dos apéndices, cuyos contenidos pueden resultar motivadores en la presentación de los números complejos, tanto en su aspecto utilitario como en su aspecto recreativo:

En el Apéndice 1, se muestran algunas aplicaciones de los números complejos a las funciones trigonométricas, a la Mecánica y a la Ingeniería.

En el Apéndice 2, se presentan algunas curiosidades y problemas relacionados con los números complejos.

BÚSQUEDA DE ω



CAPITULO 1

CONSIDERACIONES FUNDAMENTALES

CAPÍTULO 1

CONSIDERACIONES FUNDAMENTALES

1.1. <u>Bases Epistemológicas:</u>

Dada la naturaleza de nuestro proyecto, nos interesa situarnos en principio en un marco cognitivo estructuralista, en el cual *el conocimiento lógico matemático está constituido por relaciones que crea el sujeto e introduce en o entre los objetos. El conocimiento lógico matemático se inventa o construye; su fuente está principalmente en el sujeto y en la manera como éste organiza la realidad*. *Su origen está en los actos que el sujeto realiza con los objetos y no en los objetos mismos. Los objetos sólo son un medio que permite que ocurra la construcción.*[20]

A partir de ello, enfocamos nuestro proyecto en el *constructivismo*, que es un movimiento pedagógico contemporáneo, el cual - oponiéndose a la concepción pasiva del aprendizaje - considera que el aprendizaje es un proceso de transformaciones y reestructuraciones de los conocimientos previos, apoyándose además en algunos medios e interacciones.[21]

Esta definición nos revela que el conocimiento es una representación mental que el sujeto hace del mundo circundante. El constructivismo plantea que el conocimiento no es, pues, una mera copia de la realidad; sino que éste es construido por el sujeto en un proceso dinámico de

[20] Malaspina Jurado, Uldarico; *Piaget entre nosotros*, Fondo Editorial PUCP, 1997, p. 250
[21] *Vid.* González Moreyra, Raúl; *El Constructivismo, sus Fundamentos y Aplicación Educativa,* Cuadernos CEDHUM, Lima – Perú, 1995, p. 11 y ss.

intercambio con el entorno. Como resultado final de este proceso, el sujeto habrá logrado configurar representaciones mentales de la realidad que ha interpretado.

Cabe anotar que esta realidad interpretada, referida en el párrafo anterior, tiene funcionalmente una connotación amplia y se puede situar en distintos niveles de abstracción; esto es, que el sujeto puede empezar a establecer - en niveles muy concretos – relaciones entre objetos físicos de la naturaleza para, tal vez más adelante, relacionar objetos ideales – no físicos - y establecer también relaciones entre ellos. Con respecto a *interpretar* una realidad en el contexto matemático, podemos entenderlo como el acto de *atribuir significado a las expresiones matemáticas de modo que éstas adquieran sentido en función del propio objeto matemático o en función del fenómeno o problemática real de que se trate.*[22] El concepto de interpretación resulta, pues, valioso dada la importancia del aprendizaje significativo que nos concierne.

Cabe aclarar que, desde el punto de vista epistemológico, el conocimiento de las relaciones matemáticas que el sujeto construye no involucra la realidad intrínseca de los objetos mismos, ya sean físicos o ideales. La realidad de los objetos matemáticos – desde una perspectiva ontológica - sigue siendo, más bien, problemática.[23]

[22] Delgado Rubí, Juan R.; *Cuestiones de Didáctica de la Matemática*, Ed. Homo Sapiens, Rosario, 1997, p. 73
[23] *Vid.* Changeux, Jean-Pierre & Connes, Alain; *Conversations on Mind, Matter and Mathematics*, Princeton University Press, U.S.A., 1995; Barrow, John D.; *¿Por qué el mundo es matemático?*, Grijalbo, Barcelona, 1997; Davis, Philip & Hersh, Reuben; *Experiencia Matemática*, Ed. Labor, Barcelona, 1989, pp. 261-292

1.2. Bases Metodológicas:

1.2.1. Formulación de la Estrategia:

Para la formulación de la estrategia, procuraremos proporcionar planteamientos que permitan al usuario construir conceptos[24] que lleven en forma natural a aceptar las definiciones. Los conceptos no deben quedar aislados. Así, todo concepto deberá estar relacionado con la estructura de la que forma parte para que sea significativo.

En este sentido:

a) Consideramos que el conocimiento se construye a través de las transformaciones y reestructuraciones de los conocimientos previos.
b) Propiciamos la formación de estructuras conceptuales con los contenidos matemáticos, relacionando unos conceptos con otros.
c) Seleccionamos el método heurístico para la construcción del conocimiento y la reestructuración de los conceptos.

1.2.2. Características del Método:

El método heurístico es un proceso inductivo, en donde la matemática aparece como una ciencia experimental o inductiva.

[24] Definiremos *concepto* como la construcción mental que se forma a través de un proceso de abstracción sobre experiencias con objetos – reales o ideales -. En Matemática, estos objetos pueden ser: cosas, acciones sobre cosas, relaciones entre cosas o sistemas organizados de cosas (estructuras).

La esencia del método heurístico está en plantear preguntas, de modo que las respuestas conduzcan a afirmaciones consistentes, en base a la intuición, que luego se complementen con rigor lógico.

Las cuestiones a las cuales recurriremos con este método serán en su mayor parte de respuesta accesible, aunque no evidentes, de modo que al pensarlas y resolverlas se llegue a lo que se espera que se descubra.

El término “heurística” viene del griego *heuriskein* que significa descubrir o encontrar. Éste se refiere a un proceso de búsqueda interna a través del cual uno descubre la naturaleza y el significado de la experiencia. Así, la investigación heurística es un proceso que empieza con una pregunta o un problema que el sujeto busca responder o resolver. [25]

En lo que se refiere a la intuición, que desempeña un papel importante en el proceso heurístico, existe en nosotros una capacidad tácita que nos permite sentir la unidad o totalidad de algo entendido por las cualidades de sus componentes. La intuición viene a ser la conexión entre el conocimiento implícito inherente en lo tácito y el conocimiento explícito observable y descriptible. La intuición hace posible el conocimiento inmediato sin la intervención de los pasos de la lógica y el razonamiento y permite la percepción de cosas como totalidades. Todo acto de realización, integración, unidad o totalidad de algo requiere intuición. Esencialmente, la intuición guía al sujeto o investigador en el descubrimiento de modelos y significados y lo conduce a profundizar y extender el conocimiento.[26]

[25] *Vid.* Moustakas, Clark; *Heuristic Research,* Sage Publications, London, 1990, pp. 9, 15
[26] *Ibid.* p. 23

1.3 Características del Medio o Material Educativo:

Definiremos *Material Educativo* como *el conjunto de recursos diversos, de tipo impreso, audiovisual y/o concreto que facilitan, refuerzan, optimizan e incluso permiten ciertas situaciones de enseñanza y experiencias de aprendizaje.* [27]

En el presente trabajo se pretende alcanzar los objetivos mediante la elaboración de un módulo autoinstructivo.

Definiremos un Módulo Autoinstructivo como un *conjunto de actividades planeadas para facilitar la consecución de un objetivo o conjunto de objetivos*.[28]

Se elige la elaboración de nuestro trabajo a través de un módulo autoinstructivo por las siguientes razones:[29]

i) Facilita el logro de aprendizajes específicos y concretos.

ii) Motiva o promueve hábitos de trabajo.

iii) Se avanza de acuerdo con el ritmo del usuario.

iv) Es muy flexible en fecha, lugar y tiempo de aplicación.

Para la elaboración del módulo consideraremos los aspectos actitudinales, aspectos estructurales y la redacción.

---

[27] *Formación Magisterial*; Programa Interdisciplinario de Investigación Educativa, INTEREDU, 1992, p. 24
[28] Domínguez, Zelia; *Módulos para medir y evaluar en educación,* Narcea, Madrid, 1977, p. 14
[29] *Vid.* Delolme N, Stella; *Cómo estructurar los Contenidos de Aprendizaje en los Materiales Autoinstructivos*, Revista ENLACE, UNED, Costa Rica, 1987

a) Aspectos actitudinales:

El aspecto relevante que consideramos en el aprendizaje de la matemática es, en principio, la actitud dinámico participativa.

Para fomentar la actitud dinámica, el material pertinente se adecuará para dicho fin. Una participación activa del lector debe entenderse como una permanente respuesta del mismo hacia los estímulos que se dan en el texto, para lo cual el material reunirá las siguientes características:

a.1) Ser motivador:

Se mostrará que cada tema abordado responde de alguna manera a los intereses concernientes al desarrollo temático. Se recurrirá a temas que puedan despertar el interés del lector, como referencias históricas y planteamientos de interrogantes.

a.2) Ser efectivo:

Esto nos sugiere anteponer, cuando sea conveniente, las presentaciones conceptuales o intuitivas a las definiciones rigurosas, sobre todo para inducir el concepto o propiedad y reforzarlo. Asimismo, se tendrá en cuenta en qué circunstancia es más recomendable una presentación axiomática que una fundamentación intuitiva o discursiva que a veces lleva a una sucesión de interrogantes y oscurece más los conceptos. Debe quedar claro, además, que ser efectivo no implica sacrificar el rigor.

a.3) Ser constructivo:

El lector, para abordar exitosamente un tema nuevo, debe cumplir con un dominio de contenidos o prerrequisitos. Al inicio de un tema novedoso, el usuario tiene un bagaje conceptual que no se encuentra necesariamente en la memoria activa. Por lo tanto, el material facilitará la evocación del concepto previo mediante la presentación de casos muy simples de temas precedentes que guarden relación con el tema nuevo por tratarse.

b) Aspectos estructurales:

Desde el punto de vista estructural, el módulo mostrará las siguientes características:

b.1) Caracterización del usuario:

Considerando las características de los destinatarios del módulo autoinstructivo, se está teniendo en cuenta el grado de desarrollo cognoscitivo del usuario, de modo que le sea posible seguir constructivamente el desarrollo de los temas propuestos.

b.2) Definición del propósito general del texto:

El propósito del material se presentará en un enunciado breve que explicará en términos generales qué se pretende lograr con ese material. Nos servirá para indicar, en sentido amplio, el espíritu de la acción docente. (Está indicado en el prefacio del módulo, página 34).

b.3) Reconocimiento de posibles limitaciones u obstáculos:

El texto autoinstructivo estará condicionado por factores muy concretos y reales de espacio, tiempo y contexto. Al planificar el texto, los factores restrictivos que podemos considerar son:

- Limitaciones de tiempo.
- Limitaciones presupuestarias.
- Limitaciones de recursos técnicos y humanos.
- Limitaciones de los usuarios.

b.4) Determinación de Objetivos:

La selección de los contenidos y la forma de su presentación estará orientada siempre por los objetivos explícitos ya enunciados. (pág. 6)

b.5) Orden en los contenidos:

El orden en los contenidos será de tal modo que siempre quede claro y explícito al usuario en qué sentido se le pide que avance y cuáles son las relaciones entre los distintos temas o conceptos que se le presentan.

La longitud y profundidad que se dará al tratamiento de cada concepto o grupo de conceptos será en función de la caracterización del usuario y los objetivos de la materia.

c) La redacción:

Debemos considerar que un módulo autoinstructivo, como todo medio escrito, presenta posibilidades y limitaciones.

En cuanto a sus posibilidades:

- Es visual y basado principalmente en el lenguaje verbal y simbólico.
- Supera las barreras de espacio y tiempo.
- Permite la permanencia de lo registrado.
- Permite un alto nivel de abstracción en la conceptualización.
- Permite una elaboración previa cuidadosa.
- Permite la inclusión de imágenes y la utilización de recursos visuales espaciales.

En cuanto a sus limitaciones:

- Por parte del emisor, exige gran cuidado en el diseño y máxima claridad y precisión en la redacción.
- Por parte del receptor, exige un buen manejo de la habilidad de lectura.
- No implica el contacto directo y la relación de diálogo emisor-receptor.
- Limita la intervención activa del receptor.

Esto nos lleva a plantear los siguientes criterios prácticos para la redacción de este módulo de aprendizaje:

c.1) *Individualización del lector:*

El autor se dirigirá al lector en forma directa y personal, tal como si estuviera frente a él.

c.2) *Redacción sencilla y comprensible*

La seriedad de la información científica no implica oscuridad. Se preferirán las construcciones simples, evitando complejidades innecesarias y más bien enfatizando el aspecto intuitivo.

c.3) *Uso de un lenguaje coloquial y amigable:*

Se utilizará un estilo que, sin perder seriedad y nivel académico, se acerque a la conversación cotidiana.

c.4) *Uso de preguntas abiertas o retóricas:*

Se formularán preguntas al lector sin la expectativa de que las conteste inmediatamente. Son muy útiles para abrir un tema o párrafo nuevo, pues invitan a la reflexión e inquietan al lector sugiriendo que la respuesta puede encontrarse en el transcurso del tema o párrafo.

c.5) *Uso de ejemplos, analogías y comparaciones:*

Se trata de que el lector comprenda una nueva explicación estableciendo un paralelo directo con otro que ya le sea familiar. Se evitará caer en comparaciones arbitrarias o demasiado simplificadoras, ya que se podría estar transmitiendo conocimientos en forma confusa.

c.6) *Proposición de ejercicios:*

De esta manera se promueve la intervención del lector en forma directa, haciendo del desarrollo del tema un proceso interactivo y de autoevaluación.

En síntesis, se puede destacar que lo importante de nuestro medio didáctico radica en:

i) Lograr que el módulo tenga la capacidad para motivar al lector, a fin de que él pueda llevar adelante por sí mismo su proceso de aprendizaje.

ii) Lograr que el módulo tenga la eficacia para hacer comprender al lector los temas desarrollados, para que los extrapole a situaciones diferentes y le permita plantear y resolver problemas nuevos.

1.4 Elección del Usuario del Material Educativo:

Dadas las características metodológicas propuestas para el contenido del Módulo Autoinstructivo por elaborar, consideramos que éste se destinará a profesores de Educación Secundaria, especialidad de Matemática, así como también a los profesores de los niveles de bachillerato y de cursos universitarios introductorios.

Consideramos esta elección por razones de orden funcional. En general, se considera actualmente que el maestro ha de convertirse en un facilitador del aprendizaje y en un *amplificador cognitivo*.[30]

El profesor de matemática debe ser consciente de que el alumno necesita tener información, experiencia y habilidades previas para cualquier concepto nuevo. Todo concepto debe trabajarse en el tiempo necesario para su dominio y el profesor, con los recursos didácticos necesarios, tomará en cuenta que – en el sentido didáctico - las reglas no se dan, sino que se descubren. Estas condiciones pueden resultar reforzadas si el profesor toma el módulo autoinstructivo de este trabajo como un modelo de acción didáctica.

La elaboración de este módulo autoinstructivo está inspirado en la idea de una labor docente comprometida con un proceso continuo de investigación, búsqueda y perfeccionamiento permanente.

> "La función del maestro debe apuntar a la calificación permanente en función del rol que le compete, a partir de la comprensión crítica de ese rol según las exigencias globales y coyunturales que plantea la sociedad y teniendo en cuenta sus condiciones de ser humano, ciudadano y profesional.
>
> Es por esto que la formación del magisterio no puede restringirse a una etapa que termina después de un periodo de cuatro o cinco años, sino que supone un proceso continuo, abierto y flexible, que siga al profesor durante todo el ejercicio de su carrera."[31]

Esta permanente preocupación por la investigación y la capacitación tiene el poder de modificar positivamente el comportamiento del docente y mejorar así su enseñanza, a la vez que centra su atención en la creatividad

---

[30] *Vid. Formación Magisterial*; INTEREDU, 1992, p. 56

[31] Capella Riera, Jorge; *Consideraciones y propuestas en torno a la capacitación y perfeccionamiento de los profesores*, Educación – PUCP. Dep. de Educación, 1992, p.74

e imaginación. Además, los materiales de capacitación sirven como modelo para que el docente los adopte en el aula.[32]

[32] *Vid.* Moffitt, John Clifton; *Perfeccionamiento docente*, Ed. Troquel, Buenos Aires, 1971, p.56

MÓDULO AUTOINSTRUCTIVO

LOS NÚMEROS COMPLEJOS:
Enfoques e interpretaciones

$$i^2 + 1 = 0$$

Luis Bustamante Donayre

CONTENIDO

PREFACIO

Dedico este material autoinstructivo al docente que se encamina en la noble misión de la enseñanza con un verdadero espíritu de vocación de estudio y de humildad ante el saber.

Sin pretender ser exhaustivo, este trabajo tiene como objeto enfatizar la reflexión del lector; habida cuenta de la importancia de una comprensión cabal de los conceptos como sólido fundamento de un conocimiento certero y fecundo.

El tema que trataremos se refiere a los números complejos y sus interpretaciones. Este tema es, muchas veces, mal comprendido o abordado de un modo superficial. Por eso, en esta obra, el tema comenzará a desarrollarse a partir de su génesis. Así, a pesar del importante desarrollo de la matemática logrado hasta hoy, la problemática que se desprende de este enfoque histórico sigue teniendo vigencia en la actualidad, más que todo por falta de información. Por eso, a modo de exploración, comenzaremos a abordar el tema a partir del concepto de *existencia* en matemática y, de allí, llegaremos a descubrir importantes propiedades que después nos llevarán a la posibilidad de poder *construir* un sistema numérico al que llamaremos, justamente, sistema de números complejos.

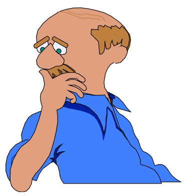
El propósito de este trabajo, empero, va más allá de la descripción de los números complejos. Tiene, por un lado, un fin integrador. Los distintos enfoques e interpretaciones que encontraremos para los números complejos están en relación con temas como vectores, estructuras algebraicas, transformaciones geométricas, matrices, ecuaciones polinomiales, aritmética modular y otros.

El otro aspecto que se destaca en este trabajo es el referente al método heurístico. Este método consiste en un proceso en donde la matemática aparece como una ciencia experimental o inductiva. La esencia del método heurístico está en plantear preguntas, de modo que las respuestas conduzcan a afirmaciones consistentes.

En el desarrollo de este módulo, el lector encontrará preguntas en recuadros, aparentemente desconectadas con la ilación del texto. Estas preguntas forman el entramado del proceso heurístico. Para obtener el máximo resultado de este material autoinstructivo, el lector deberá detenerse en estas interrogantes, reflexionar sobre ellas y no seguir avanzando la lectura del texto hasta haber intentado dilucidar el problema que éstas plantean. Lo primordial, en este proceso, es la activa participación del usuario, la cual se revela en la confrontación entre el aporte del lector y los contenidos que son captados en el desarrollo del módulo.

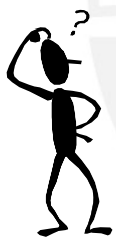
Finalmente, en un sentido didáctico, el lector docente podrá incorporar las experiencias de este método y adaptarlas a su labor pedagógica.

LEYENDA DE ICONOS



Pregunta en recuadro

Pregunta formulada en el texto



Ejercicio propuesto

Ejemplo numérico

Clave o sugerencia

CAPÍTULO UNO
HISTORIA DE UN FANTASMA

En el siglo XVI, unos algebristas italianos se encontraron con un ente advenedizo. Nadie sabía qué significaba, ni cómo había aparecido; pero allí estaba, perturbando la razón del más sesudo pensador y del más diestro calculador. Aun en el siglo XIX, cuando Gauss dio a conocer su interpretación geométrica, todavía había matemáticos que discutían sobre la posibilidad de su existencia. Sin embargo, a pesar de la resistencia que ocasionaba, este intruso - lejos de perderse - echó raíces en el universo matemático.

Esta es la historia de $\sqrt{-1}$.

A todos los números que contuvieran el símbolo $\sqrt{-1}$ como factor o sumando se les llamó – y se les sigue llamando hasta hoy - *números imaginarios,* formando lo que se denomina *el sistema de los números complejos*.

Podemos comenzar nuestra historia cuando Cardano, en su libro *Ars Magna* (1545), resuelve el problema de dividir el número 10 en dos partes de modo que su producto sea 40. Para ello se plantea la ecuación: $x(10-x)=40$, esto es: $x^2-10x+40=0$; completando cuadrados tenemos: $(x-5)^2-25+40=0$, es decir: $(x-5)^2=-15$; y de allí, operando como si los números fuesen reales: $(x-5)=\pm\sqrt{-15}$, es decir: $x=5\pm\sqrt{-15}$, como solución buscada. Pero veamos cómo lo interpreta Cardano:

> "Dejando de lado toda la tortura mental implicada, multiplique $\left(5+\sqrt{-15}\right)$ por $\left(5-\sqrt{-15}\right)$. El producto es $25-(-15)=40$. Así progresa la sutileza aritmética cuyo objetivo es tan refinado como inútil."

El estudio de las ecuaciones de tercer grado obligaría al uso de los números complejos. Con el método que Cardano desarrolló para solucionar las ecuaciones de tercer grado, se requería necesariamente de los números complejos, aun en el caso de tener tres raíces reales como solución. Así, los números complejos venían a ser algo así como un "mal necesario" en la solución de ecuaciones, cuyo objetivo aparentemente válido era llegar a resultados reales.

Bombelli (1526-1572), discípulo de Cardano, comprendió mejor el álgebra de los complejos. Al retomar el estudio de las ecuaciones de tercer grado, introdujo su cantidad *piu di meno*, que correspondía a $\sqrt{-1}$, y enunció, en forma de versos, las reglas de operación con ella. A pesar de que Bombelli considerara los números complejos como sofisticados e inútiles, él operó libremente con ellos.

La primera formulación escrita sobre el teorema fundamental del álgebra fue dada en el año 1600 por Peter Rothe, matemático de Nuremberg, en su obra *Arithmetica Philosophica*, en donde afirma que una ecuación tiene como máximo tantas raíces como su grado.

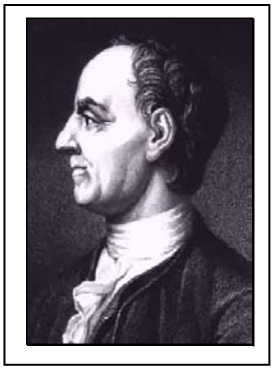
A partir de Albert Girard, quien hace referencia del teorema fundamental del álgebra en su obra *L' Invention Nouvelle en Algèbre* (1629), se nota un cambio de actitud con respecto a los números complejos:

> "Podríamos preguntar, ¿para qué sirven estas soluciones imposibles (raíces complejas)? Yo respondo: Para tres cosas - para la validez de las reglas generales, debido a su utilidad y por no haber otras soluciones."

Más adelante, René Descartes, en su obra *Géométrie* (s. XVII), acepta que una ecuación tiene tantas raíces como su grado si admitimos las raíces imaginarias. Descartes introdujo en su libro el término *números imaginarios*:

> "Ni las raíces verdaderas ni las falsas (negativas) son siempre reales, a veces éstas son imaginarias."

Con Euler, en 1749, las investigaciones sobre el teorema fundamental del álgebra alcanzaron otro nivel. En su *Investigación sobre las Raíces Imaginarias de una Ecuación* mostró primeramente que si $a+\sqrt{-1}$ es una raíz de una ecuación, entonces lo mismo sucede con $a-\sqrt{-1}$. Enseguida, mostró que toda ecuación de grado impar tiene por lo menos una raíz real, y que una ecuación de grado par o no posee raíces reales o posee pares de raíces reales. Luego demostró que todas las raíces no reales son de la forma: $a+b\sqrt{-1}$. Para ello, fue necesario estudiar cuidadosamente las operaciones con los números complejos, incluyendo potencias imaginarias, logaritmos de números complejos, funciones trigonométricas de argumento complejo, etc.



A pesar de sus trabajos realizados con los números complejos, Euler afirma:

> "Como todos los números concebibles son o mayores que cero, o menores que cero, o iguales que cero, es claro que las raíces cuadradas de números negativos no pueden estar incluidas entre los números posibles. Y esta circunstancia nos conduce al concepto de que tales números, por su propia naturaleza, son imposibles, y son llamados generalmente números imaginarios, pues existen solamente en la imaginación."

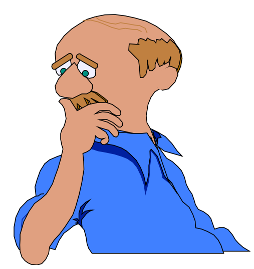
Finalmente, le correspondió a Wessel, un matemático y topógrafo noruego, producir en 1797 una interpretación consecuente y útil de los números complejos. La geometría de las operaciones complejas se podía traducir a rotaciones y traslaciones en un plano de coordenadas cartesianas, en donde los ejes perpendiculares representaban las partes real e imaginaria.

Poco después, en 1806, el matemático francés Argand llegó independientemente a las mismas conclusiones (a las que también había llegado Gauss). Debido a la escasa difusión del trabajo que Wessel había desarrollado con anterioridad, se suele llamar a esta interpretación –con cierta injusticia- el diagrama de Argand.

Y así, vamos llegando a una interpretación de los números complejos cada vez más avanzada. En la década de 1830 a 1840 los algebristas ingleses reconocieron claramente el carácter puramente abstracto y formal del álgebra elemental. Así, en los cuaternios de Hamilton, una forma de "hipercomplejos", se destaca el inicio de una álgebra no conmutativa.

Sólo a partir de entonces, en el contexto de un concepto muy generalizado de número, se pudo ya concebir de un modo más favorable la idea de número complejo.

1) ¿A qué cree que se debía la resistencia de los matemáticos a aceptar los números complejos?
2) ¿Por qué Euler, a pesar de sus importantes aportes sobre el particular, finalmente manifiesta que los llamados "números imaginarios" sólo pueden existir en la imaginación?
3) ¿Está de acuerdo el lector con esta última declaración de Euler?
4) ¿Cómo un número negativo puede tener raíz cuadrada? ¿No es esto una ficción?
5) ¿Existen verdaderamente los números imaginarios?
6) ¿Qué entendemos, finalmente, por existencia? ¿Cuándo decimos que un objeto matemático *existe*?



CAPÍTULO DOS
¿ABORDANDO UN MUNDO IMAGINARIO?

De la historia que acabamos de leer parece surgir una pregunta que, aun hoy en día, todavía nos puede inquietar.

Esta pregunta, que fue el origen de toda la suspicacia que los números imaginarios generaron, será para nosotros la fuente de este inquietante mundo matemático que vamos a descubrir.

¿Existen verdaderamente los números imaginarios?

Ante todo, cuando nos preguntamos si algo existe es porque tenemos alguna idea de ello. ¿Existen los fantasmas? Pues, para intentar una respuesta debemos darnos un punto de partida. Podemos decir por ejemplo que son seres invisibles, quizás inmateriales, que en ocasiones se dejan ver o sentir. Y aunque esto es muy vago, por algo debemos comenzar. Asimismo, para hablar de números imaginarios, y su posible existencia, podemos en un principio llamar *número imaginario* a todo aquel número que de alguna manera contenga $\sqrt{-1}$; es decir, que contenga un número que elevado al cuadrado resulte –1.

Es posible que para mucha gente sea un enigma el que un número elevado al cuadrado dé como resultado un valor negativo y se les hace difícil imaginar una raíz cuadrada para cualquier número negativo. En consecuencia, esto induce a pensar que $i = \sqrt{-1}$ realmente no existe, y más bien es una conveniente ficción matemática.

La dificultad en aceptar la idea de número imaginario radica en comprender lo que es *existencia.* En matemática, la existencia o no existencia de un cierto concepto, digamos de un cierto objeto matemático, depende del contexto en el cual se plantea la cuestión. Si hablamos de números, podemos estar refiriéndonos a varios contextos diferentes.
Repasemos intuitivamente los más conocidos:

- Números Naturales: Estos son los números 0, 1, 2, 3, 4, ... Intuitivamente, responden a la pregunta: "¿cuántos?".

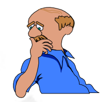
- Números Enteros: Estos son números como ... –3, -2, -1, 0, 1, 2,... y son posibles respuestas a la pregunta "¿cuántos elementos más tiene el conjunto A que el conjunto B?". Esto incluye a los números positivos (cuando A tiene más elementos que B) y a los números negativos (cuando B tiene más elementos que A).

- Números Racionales: Estos son números como ... $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{8}$, $-\frac{3}{11}$, 0, -5, ...

  Son conceptos abstractos que describen *razones*. No es una descripción de cantidad de elementos en el sentido que lo hacen los números naturales o los números enteros, más bien se refiere a una comparación de conjuntos en el sentido de “cuánto más grande (o más pequeño) es A que B” y no de “cuántos elementos más (o menos) tiene A que B”. Una particularidad de los números racionales es que tienen una expresión decimal finita o periódica.

- Números Reales*:* Son conceptos abstractos que describen *medidas de cantidades continuas*, como son longitud, volumen, peso, etc. Se incluye a los racionales y a los números con expresión decimal infinita no periódica.

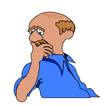
¿Existe algún número entre 0 y 1?



De lo anteriormente expuesto, podemos darnos cuenta de que hay objetos matemáticos que existen en un contexto y no existen en otro.

Por ejemplo, si nos ubicamos en el contexto de los números naturales, o en el de los números enteros, no encontraremos un número comprendido entre cero y uno. Pero, si nos referimos a números racionales o a números reales, sí lo encontraremos. Lo importante es saber a qué clase de número nos estamos refiriendo para poder contestar si existe o no alguno que cumpla tal condición. Es más, también depende de la clase de objeto matemático el que la cuestión sea coherente o no.

¿Existe algún número primo entre 0 y 1?



Por ejemplo, al preguntarnos si existe un número primo entre 0 y 1; en el contexto de los números naturales, la pregunta tiene respuesta negativa *y además* tiene sentido; pero, en el contexto de los números racionales, *no tiene sentido alguno*, pues el concepto de número primo se remite al criterio de divisibilidad, propio de los números naturales y enteros.

En todo caso, estos cuatro contextos son ordinariamente captados en uno solo que simplemente llamamos ”número”, de modo que si hay solución en uno de los cuatro contextos, consideramos el hecho con mucha naturalidad. Sin embargo, por allá y por entonces, en la Grecia de Pitágoras, el concepto intuitivo de número era distinto al actual, ni pensar en los números negativos y mucho menos en los irracionales. Y, aunque pudieron ignorar los negativos, al querer calcular la longitud de la diagonal de un cuadrado se encontraron con el insólito número $\sqrt{2}$, lo cual no encajaba con la idea que tenían de número[1] (ver Fig. 1).

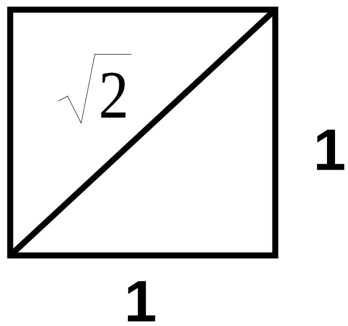
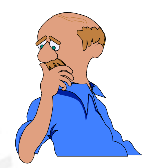


Fig. 1

¿Podía decirse que $\sqrt{2}$ no existe? ¿Era razonable pensar en la diagonal de un cuadrado con una longitud que no existe?



Bueno. Dejemos a los antiguos griegos con su problema. Volvamos a nuestros cuatro contextos y tratemos de resolver la ecuación $\omega^2 + 1 = 0$. ¿Es posible resolverla? Parece que no. Pero no debemos saltar a la conclusión de que tal número ω no existe, pues, si no encontramos solución en los números reales, no tenemos porqué excluir la *posibilidad* de un quinto contexto, de naturaleza más extensa, en donde sí pueda haber solución para la ecuación $\omega^2 + 1 = 0$.

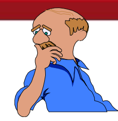
Sin embargo, debemos considerar que este quinto contexto, si es que existe, no puede ser una construcción arbitraria. Si reflexionamos un poco nos podemos dar cuenta que el concepto ordinario de “número”, el cual hemos querido conservar, se corresponde con la idea de una sucesión de elementos ordenados que usualmente son representados en una recta que ahora, referido a este último contexto, podemos llamar *recta de los números reales*.

Búsqueda de ω

Vamos a explorar un poco y suponer que, en la recta de los números reales, existe un ω, tal que $\omega^2 + 1 = 0$. Si ω pertenece a la recta de los números reales, naturalmente debe estar comprendido entre dos números reales.

[1] El descubrimiento de la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado hace entrar en crisis la concepción discontinua del mundo de los pitagóricos y, al mismo tiempo, les hace pensar que la geometría es más perfecta que la aritmética.

¿Existirán tales números reales?



Formularemos la siguiente cuestión:

Si $\omega^2 + 1 = 0$, ¿puede estar ω comprendido entre dos números reales? ¿Es posible encontrar los números $p, q \in \Re$ de modo que se cumpla $p < \omega < q$?

Pongamos la ecuación del siguiente modo:

$$\omega^2 + 1 = 0$$

$$\omega \cdot \omega + 1 = 0$$

$$\omega \cdot \omega = -1 \qquad \text{(obviamente } \omega \neq 0)$$

$$\omega = \frac{-1}{\omega}$$

De esto nos queda la expresión: $\omega = -\frac{1}{\omega}$ .....[1]

Veamos el caso $p > 0$, $q > 0$:

$p < \omega < q$ .....[2]

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{\omega} > \frac{1}{q}$$

$$-\frac{1}{p} < -\frac{1}{\omega} < -\frac{1}{q}$$

Reemplazando el valor obtenido en [1] en esta última expresión:

$-\frac{1}{p} < \omega < -\frac{1}{q}$ .....[3]

De las expresiones [2] y [3], tenemos: $\omega < q$ y $-\frac{1}{p} < \omega$, es decir:

$$-\frac{1}{p} < \omega < q$$

$$-\frac{1}{p} < q$$

$$-1 < pq$$

Análogamente, de [2] y [3]: $p < \omega$ y $\omega < -\frac{1}{q}$, es decir:

$$p < \omega < -\frac{1}{q}$$

$$p < -\frac{1}{q}$$

$$pq < -1$$

De estos dos resultados contradictorios se deduce que ω no puede estar comprendido entre dos números reales positivos.[2] (El lector puede comprobar esta imposibilidad para los casos $p<0$, $q<0$ y $p<0$, $q>0$ de manera similar a la efectuada)

¿Hay una segunda forma de comprobar que ω no está en la recta de números reales?

Supongamos que $\omega > 0$:

$$\omega > 0$$

$$\frac{1}{\omega} > 0$$

$$-\frac{1}{\omega} < 0$$

Pero según la expresión [1], $\omega = -\frac{1}{\omega}$, entonces:

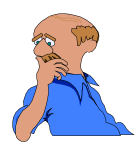
$$\omega < 0$$

Esta contradicción prueba que ω no puede ser un número real positivo. (El lector puede comprobar esta imposibilidad para el caso de $\omega < 0$)

Por otro lado, si estudiamos las propiedades de los números reales, veremos que todo número real al cuadrado es no negativo, esto es: $\forall u \in \Re$, $u^2 \geq 0$ y, en consecuencia, $u^2+1 \geq 1$. Como $\omega^2+1=0$, concluimos nueva-mente que ω no puede ser un número real, es decir : $\omega \notin \Re$.

Al saber que $\omega \notin \Re$, estamos ahora convencidos de que el conjunto de los números reales resulta insuficiente para encontrar alguna solución ω de la ecuación $\omega^2+1=0$.

¿En dónde debería estar ω?



Según hemos estado viendo, los sistemas numéricos que hemos descrito resultan ser extensiones cada uno del anterior. Así, el conjunto de los números enteros se puede interpretar como una extensión del conjunto

[2] El suponer que ω cumple con las propiedades de desigualdad, que son propias de los números reales, nos lleva a una contradicción.

de los números naturales[3]. A su vez, los números racionales se pueden entender como una extensión de los números enteros, y lo mismo sucede en el caso de los números reales con respecto a los números racionales (ver Fig. 2).

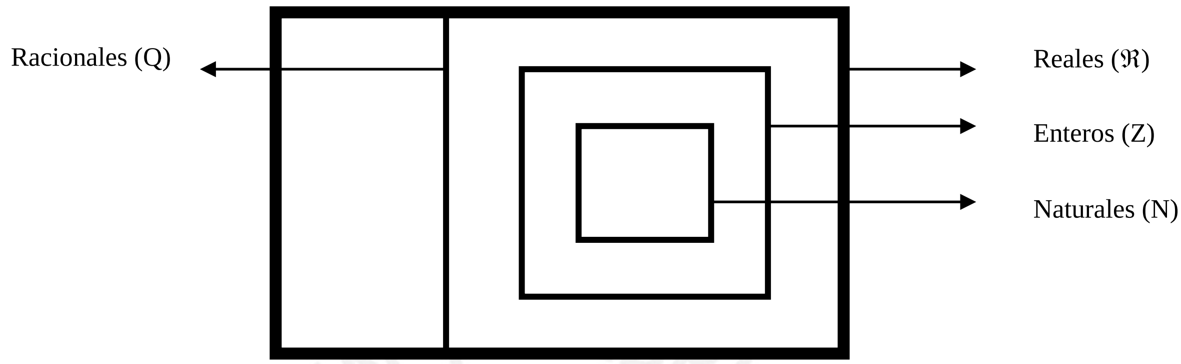


Fig. 2

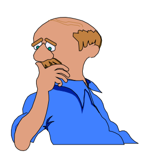
De este modo, queremos también que ω, que como ya vimos no pertenece al conjunto de números reales, se encuentre al menos en una extensión de este conjunto. Así, debemos construir un sistema numérico más completo que $\Re$ al cual pertenezca ω.

Naturaleza de la extensión de $\Re$

Si reflexionamos sobre la naturaleza de una extensión de los números reales, debemos pensar en un conjunto C con ω como elemento; pero que además incluya a todos los números reales. Empezaremos a construir este conjunto C en el que esperaremos encontrar el elemento ω. Por lo que hemos dicho, la primera característica que tendrá el conjunto C es la siguiente:

El conjunto C debe incluir a $\Re$.

¿Podría pensarse en una interpretación geométrica del conjunto C?



[3] Esto significa que las operaciones y propiedades que son válidas para el conjunto de los números naturales también lo son para los números enteros.

Geométricamente, podríamos representar al conjunto C como una región que *contiene* la recta $\Re$ de los números reales y además un punto ω exterior a ella (ver Fig. 3).[4]

Esto nos permite suponer lo siguiente:

La región C es un plano.[5]

REGIÓN C

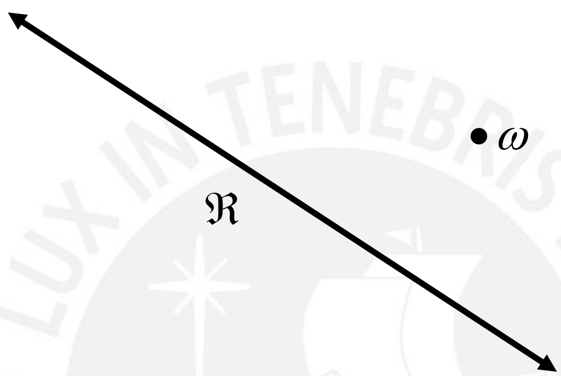
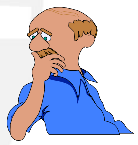


Fig. 3

¿Cuál es la naturaleza de los elementos que pertenecen a esta región C?



Pensemos en una carretera, rectilínea si se quiere, sobre la cual queremos recoger a un pasajero en un determinado punto de ella.

¿Cuántos datos necesitamos conocer para ubicar al pasajero?

Si quisiéramos tener toda la información para saber dónde recoger al pasajero, sólo necesitaríamos un dato. Estrictamente, un número real. Por ejemplo, x = 40,28372. Esto puede ser equivalente a decir que estará a 40 Km 283 m 72 cm del punto de partida. Y esto es suficiente.

Lo anteriormente dicho es válido cuando estamos en una región rectilínea o unidimensional, como puede ser una carretera. Pero si estamos en una región plana, por ejemplo en el mar, y queremos ubicar a un cierto bañista, tal vez un único dato sea insuficiente.

---

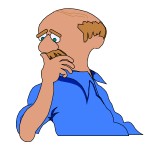
[4] Al haber una relación biunívoca entre los números reales y los puntos de la recta $\Re$, el punto que representa a $\omega \notin \Re$ debe estar necesariamente fuera de la recta de los números reales.

[5] La recta $\Re$ y el punto ω, exterior a ella, están contenidos en un plano único C.

¿Cuántos datos necesitamos conocer para determinar la posición del bañista?

En realidad, si queremos tener toda la información para determinar la posición del bañista, necesitaremos dos datos. Estrictamente, dos números reales. Para ilustrar esto, digamos que, desde un punto de partida de la orilla, caminamos una cierta distancia en un sentido paralelo a la playa (sentido x) y luego nos desplazamos otra distancia mar adentro, es decir en un sentido perpendicular a la orilla (sentido y).

¿Podemos variar alguno de los datos y llegar a la misma posición del bañista?



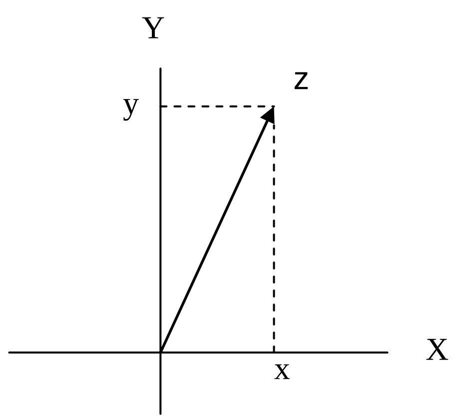
Debemos tener en cuenta que si variamos alguna de las distancias de desplazamiento (*x* o *y*), no alcanzaremos exactamente al bañista. Esto nos dice que estas distancias deben ser *únicas.*

Así pues, con estos ejemplos podemos considerar que para denotar a los elementos de la región plana C necesitaremos, pues, dos números reales. Esto significa que cada elemento de la región C estaría representado por un par ordenado de números reales. Digamos que cada elemento z de este conjunto C quedará determinado por dos *únicos* números reales x, y; que podemos considerar como un vector $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ en el plano (ver Fig. 4). De este modo, determinando la región plana C como un conjunto $\Re \times \Re$, seguirá la siguiente definición:

DEFINICIÓN 1

Se llama *vector en* C al elemento $z \in C$ tal que $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, en donde x, y son números reales únicos, denominados *componentes* del vector z.

(D$_1$)



Representación gráfica usual del vector $z \in C$, el cual parte del origen de coordenadas del plano C, con sus componentes x, y en ejes perpendiculares entre sí.

Fig. 4

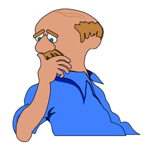
Como los números reales x, y deben ser únicos, podemos enunciar la siguiente propiedad:

PROPIEDAD 1

Dados $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$; vectores en C,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \qquad (P_1)$$

Bien, entonces ¿ya tenemos resuelto el problema propuesto?



Debemos tener en cuenta que hasta el momento sólo hemos intentado describir la naturaleza de este conjunto C con su elemento ω. Ni siquiera sabemos si hay una solución para la ecuación $\omega^2 + 1 = 0$.

Estamos suponiendo entonces que, si ω existe, éste pertenecerá a un conjunto C tal que para cada $z \in C$ se tiene que $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ en donde $x \in \Re$, $y \in \Re$.

Adoptaremos, entonces, un enfoque vectorial con una notación fija, en donde $z_i \in C$ tiene como componentes los números reales correspondientes $x_i \in \Re$, $y_i \in \Re$.

Así, para n elementos de C:

$$z_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} , \quad z_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad z_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad \ldots\ldots, \quad z_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO TRES
DESCUBRIENDO UN NUEVO MUNDO

Para seguir avanzando en nuestra indagación, es importante definir la naturaleza del elemento ω. Nos interesa, pues, probar que ω funciona como número; o, más exactamente, que el conjunto C funciona como *sistema numérico*.

Para poder continuar en nuestra búsqueda, debemos entonces precisar qué entendemos por sistema numérico. Ante todo, debemos recordar que, hasta el momento hemos estado refiriéndonos a contextos, cada vez más amplios, pero siempre formados por *números*. Si queremos que este nuevo contexto C esté formado por números, debemos exigir ciertas características comunes a todos los contextos en donde se han presentado números. Si observamos atentamente cómo se comportan los números naturales, descubriremos que ellos cumplen ciertas reglas que se preservan en los demás contextos, que vienen a ser *extensiones* del conjunto de números naturales. A estos contextos, con esas características comunes, les vamos a llamar *sistemas numéricos*.

Ahora podemos precisar nuestra argumentación; y es que, al inquirir sobre la existencia de una cierta naturaleza de números estaremos planteando la posibilidad de que un conjunto de objetos matemáticos esté formando un *sistema numérico.*

Pero, ¿qué es exactamente un sistema numérico?

Si, como hemos dicho, un sistema numérico debe tener las propiedades de los números naturales, y las de todos los demás contextos que hemos citado, entonces seguirá la siguiente definición:

Un sistema numérico es cualquier colección de objetos sobre la cual se definen dos operaciones binarias, que llamamos "adición" $(\oplus)$ y "multiplicación" $(\otimes)$, tales que la "adición" es conmutativa y asociativa, la "multiplicación" es conmutativa y asociativa, y la "multiplicación" es distributiva con respecto a la "adición".

Simbólicamente, Ω es un sistema numérico si dados $a,b,c \in \Omega$ cualesquiera con las operaciones binarias $\oplus$, $\otimes$, definidas en Ω cumplen con las propiedades:

I) $a \oplus b = b \oplus a$

II) $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$

III) $a \otimes b = b \otimes a$

IV) $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$

V) $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$

Si algún conjunto Ω cumple con estas cinco propiedades, entonces Ω es un sistema numérico. Esto lo podemos ilustrar con los números naturales, que sabemos cumplen estas propiedades. Por ejemplo, para los números naturales 2, 3, 7 la aplicación de las propiedades es:

I) $2+3=3+2$
II) $(2+3)+7=2+(3+7)$
III) $2\times 3=3\times 2$
IV) $(2\times 3)\times 7=2\times(3\times 7)$
V) $(3+7)\times 2=3\times 2+7\times 2$

Estas ecuaciones se verifican porque el conjunto N es un sistema numérico en donde sabemos que 2, 3, 7$\in \mathrm{N}$.

El conjunto C como sistema numérico

Vemos así que, para que el conjunto C sea un sistema numérico, deberá cumplir con estas cinco propiedades; y para ello deberá tener definidas, al menos, dos operaciones binarias correspondientes a $\oplus$, $\otimes$, las que podemos llamar *adición y multiplicación en* C.

Comencemos con la *adición*:

Dados: $z_1=\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}$, $z_2=\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\end{bmatrix}$ con $z_1, z_2 \in C$

¿cómo podríamos definir la operación "+" para determinar "z_1+z_2"?

Una idea muy natural puede ser la noción de suma vectorial, la cual visualizamos en siguiente figura:

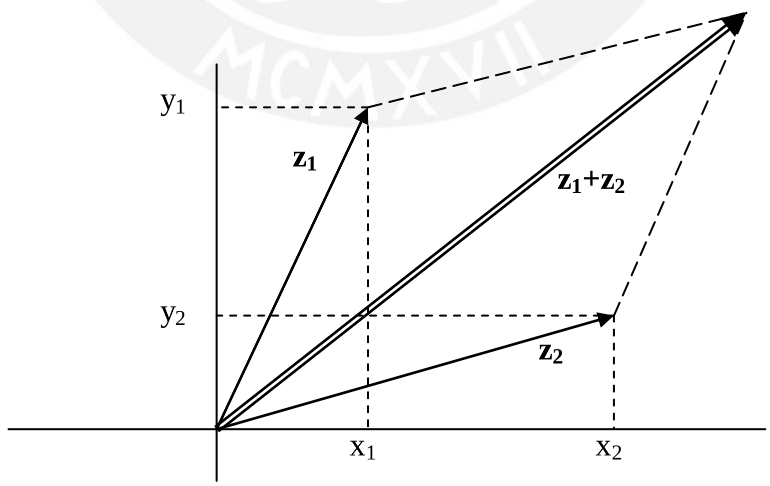


Fig. 5

La representación de elementos de C como flechas resulta muy útil porque nos conduce a una definición apropiada de adición para nuestro conjunto C. Existen muchas situaciones prácticas en las que encontramos estas flechas. Por ejemplo, en Física una fuerza puede ser representada como una flecha. La longitud y el sentido de la flecha indican respectivamente la magnitud y el sentido de la fuerza. Si dos fuerzas actúan sobre un cuerpo en un mismo punto, el efecto es el mismo que si actuara sobre él una única fuerza denominada *suma* o *resultante* de las dos fuerzas. Una manera de hallar esta suma es representar las dos fuerzas como flechas en el origen y luego completar el paralelogramo que tiene las dos flechas como lados. La diagonal del paralelogramo, trazada desde el origen, es la resultante de las dos fuerzas (ver Fig. 5).

En la figura 5, podemos observar que cada vector, o flecha, tiene una componente x y una componente y. En virtud de las propiedades geométricas del paralelogramo, podemos notar que cada componente de la resultante será igual a la suma de las componentes respectivas de cada vector.

Así pues, siguiendo la regla del paralelogramo, se puede verificar fácilmente que el vector $z_1 + z_2$ se ubica en la posición $x_1 + x_2$ para el eje horizontal y en $y_1 + y_2$ para el eje vertical.

Podemos considerar dos elementos de C como vectores que siguen la regla del paralelogramo y definir la adición en C:

DEFINICIÓN 2

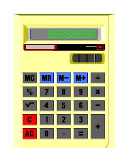
Dados: $z_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, $z_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$, se define la *adición* $z_1 + z_2$ en C:

$$z_1 + z_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} \qquad (D_2)$$

Por ejemplo:

Dados: $z_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ 11 \end{bmatrix}$, $z_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$, hallaremos $z_1 + z_2$:

$$z_1 + z_2 = \begin{bmatrix} -6+8 \\ 11+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 16 \end{bmatrix}$$



Sin embargo, debemos ver si esta definición de adición en C es consistente con la noción de sistema numérico.

Veamos si la adición en C cumple con la propiedad conmutativa:

$$z_1 + z_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + x_1 \\ y_2 + y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = z_2 + z_1$$

Siendo así, podemos enunciar la propiedad:

PROPIEDAD 2

Para todo $z_1, z_2 \in C$;

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \qquad (P_2)$$

Dejaremos como ejercicio la comprobación de la propiedad asociativa de la adición, la cual enunciamos a continuación:

PROPIEDAD 3

Para todo $z_1, z_2, z_3 \in C$;

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \qquad (P_3)$$

Otro detalle importante es que también resulta útil la idea de que los vectores se pueden “estirar” o “acortar”.

Volviendo al ejemplo de las fuerzas que se estudian en Física, una fuerza se puede duplicar, triplicar o, en general, multiplicar. Ya hemos visto que una fuerza se puede representar por una flecha. Entonces podemos observar que (ver Fig. 6):

(a) Dada una flecha se puede,
(b) *estirar* la flecha multiplicándola por un número real mayor que 1,
(c) *acortar* la flecha multiplicándola por un número real menor que 1,
(d) *anular* la flecha multiplicándola por cero,
(e) *invertir* su sentido multiplicándola por un número real menor que cero.

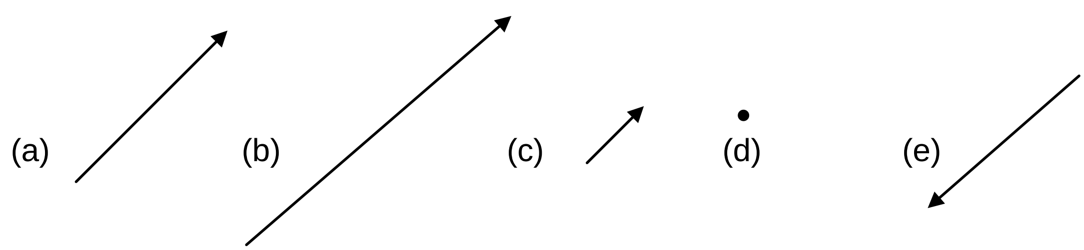


Fig. 6

En vista de ello, definimos la *multiplicación* de un elemento de $\Re$ por un elemento de C considerando las condiciones anteriormente descritas:

DEFINICIÓN 3

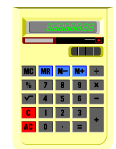
Dado $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ y $r \in \Re$, se define la *multiplicación* rz en C:

$$rz = r\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} rx \\ ry \end{bmatrix} \qquad (D_3)$$

Veamos un ejemplo:

Dados: $r = 5$, $u = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ hallaremos ru:

$$ru = 5\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\times -2 \\ 5\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 15 \end{bmatrix}$$



Si graficamos los vectores u y ru veremos que, efectivamente, la flecha se ha "estirado" como corresponde al caso (a). Lo mismo podremos comprobar si desarrollamos ejemplos para los demás casos.

Pero, una observación importante de lo que ocurre con esta operación, definida para cualquiera de los casos que se apliquen, es que la flecha se transforma cambiando su tamaño pero nunca cambia su línea de acción; es decir que la flecha transformada resulta siempre *colineal* a la flecha original. Para ilustrar esto, supongamos que estamos conduciendo por una vía rectilínea (la velocidad equivale a una flecha) y luego aceleramos (multiplicamos por un número real *mayor* que la unidad), la velocidad se va a incrementar, pero seguiremos en la línea de la vía (flecha estirada y colineal). Lo mismo pasará si frenamos (multiplicamos por un número real *menor* que la unidad) o incluso si retrocedemos (multiplicamos por un número negativo). El acelerador y el freno le aplican un factor (número real) al movimiento del vehículo y este conserva su línea de movimiento.

De acuerdo, entonces, con lo que hemos definido, *multiplicar una flecha por un número real equivale a obtener otra flecha en la misma línea de acción que la flecha original.*

Los números reales, representados en una recta, sólo tienen un dato o componente. Al multiplicar una flecha por un número real, estamos estirando o acortando la flecha en su misma dirección, la única que le puede dar el número real.

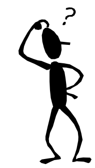
Ejercicios:
Probar las siguientes propiedades:

Dados: $r, s \in \Re; \quad z, z_1, z_2 \in C;$

a) $r(sz) = (rs)z$ (P$_4$)

b) $(r+s)z = rz + sz$ (P$_5$)

c) $r(z_1 + z_2) = rz_1 + rz_2$ (P$_6$)



Vayamos un poco más lejos y veamos ahora si se puede “multiplicar” una flecha por otra flecha. Sabemos que una multiplicación de un número real por una flecha nos determina una flecha “estirada” en su misma dirección (pág. 52). Como cada flecha o vector está determinada por dos números reales, esto nos lleva a suponer que una “multiplicación” de una flecha por otra podría consistir en una suerte de “estiramiento compuesto” o adición de dos flechas “estiradas”. Así, la flecha resultante de estos “estiramientos” nos determinaría una “flecha producto”.

Vamos, pues, a precisar la idea que estamos concibiendo acerca de este “producto”; pero antes de continuar, debemos dejar claro qué se entiende por vector perpendicular o, más propiamente, *vector ortogonal* .

DEFINICIÓN 4

Dado $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, llamamos al vector $z^{\perp} \in C$ *vector ortogonal de* z:

$$z^{\perp} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^{\perp} := \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \qquad \text{(D}_4\text{)}$$

Veamos un ejemplo de vector ortogonal.

Hallar el vector ortogonal de $u = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

Según lo que hemos definido, $u^{\perp} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$

Si graficamos los vectores u y $u^{\perp}$, los podemos observar con más claridad (ver Fig. 7).

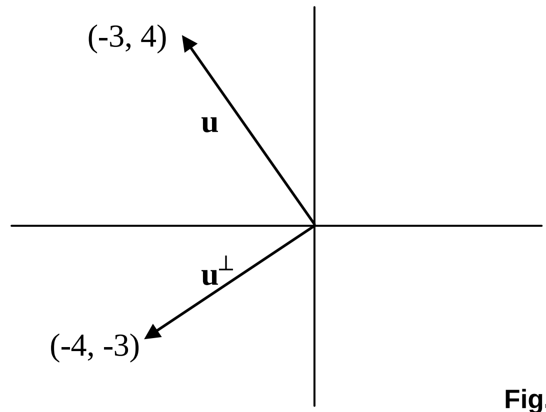


Fig. 7

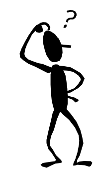
Puede notarse en la figura 7 que el vector ortogonal $\mathbf{u}^{\perp}$ equivale al vector **u** rotado un cuarto de vuelta en el sentido antihorario.

Ejercicios:
Probar las siguientes propiedades:

Dados: $z, z_1, z_2 \in C$;

a) $\left(z^{\perp}\right)^{\perp} = (-1)z$ (P7)

b) $z_1^{\perp} + z_2^{\perp} = (z_1 + z_2)^{\perp}$ (P8)

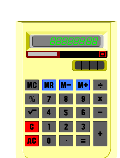


Volviendo a nuestro "producto" de dos vectores, supongamos que queremos "multiplicar" el vector $u = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ por $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

Según lo que hemos estado planteando, podríamos "estirar" el vector $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ en su mismo sentido cuatro veces (primera componente de u), luego estirar el vector perpendicular $v^{\perp} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}^{\perp} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$ tres veces (segunda componente de u) y finalmente obtener la suma de estos nuevos vectores.

Esto se puede escribir como:

$$4v + 3v^{\perp} = 4\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}^{\perp} = 4\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} =$$



$$= \begin{bmatrix} 8 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8-15 \\ 20+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 26 \end{bmatrix}$$

Esta operación nos indica, que hemos obtenido la resultante de sumar el vector $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, cuadriplicado en su mismo sentido según la primera componente de u, y luego el vector perpendicular $v^{\perp} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}^{\perp} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$, triplicado según la segunda componente de u (Ver Fig. 8).

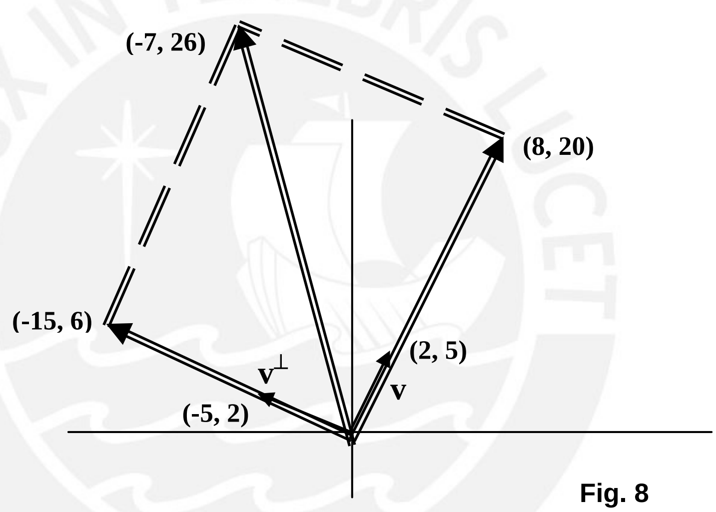


Fig. 8

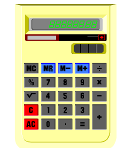
Basándonos en el procedimiento desarrollado, estamos en condiciones de dar una definición formal de multiplicación en C.

DEFINICIÓN 5a

Dados: $z_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ y $z_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$, definimos *multiplicación* $z_1 z_2$ en C:

$$z_1 z_2 := x_1 z_2 + y_1 z_2^{\perp} \qquad \text{(D}_{5a}\text{)}$$

Por ejemplo, dados los vectores:



$$z_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad z_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$z_1 z_2 = 4 z_2 + (-1) z_2^{\perp} =$$

$$= 4\begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix}^{\perp} = 4\begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} -3 \\ -7 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -28 \\ 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28+3 \\ 12+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 \\ 19 \end{bmatrix}$$

Vemos que en la expresión (D_{5a}) aparecen las componentes x_1, y_1, correspondientes a z_1; ¿se puede escribir esta definición considerando también las componentes x_2, y_2, correspondientes a z_2?

La expresión (D_{5a}) puede ser escrita de la siguiente manera:

$$z_1 z_2 = x_1 z_2 + y_1 z_2^{\perp} = x_1 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + y_1 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}^{\perp} =$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + y_1 \begin{bmatrix} -y_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y_1 y_2 \\ x_2 y_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{bmatrix}$$

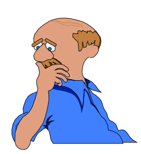
lo que nos permite definir la multiplicación en una forma alternativa:

DEFINICIÓN 5b

Dados $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$; definimos *multiplicación* $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ en C,:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{bmatrix} \qquad (D_{5b})$$

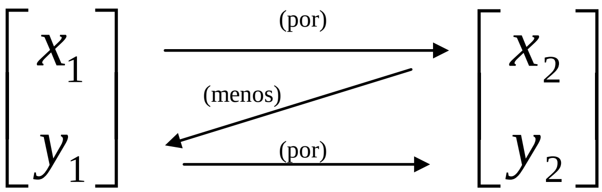
¿El conjunto C es un sistema numérico?



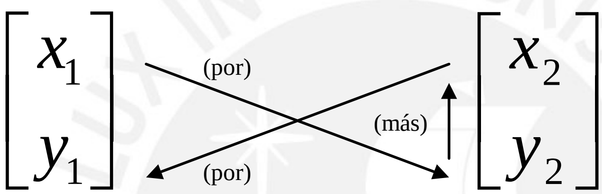
¿Podemos pensar en algún procedimiento o esquema que nos ayude a efectuar esta multiplicación?

Una regla práctica para la obtención de este resultado se puede apreciar en los siguientes diagramas:

Primera componente: (diferencia de productos)



Segunda componente: (suma de productos)

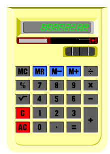


Ejemplo:

Dados los vectores en C:

$$z_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad z_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$z_1 z_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\times(-7)-(-1)\times 3 \\ 4\times 3+(-7)\times(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 \\ 19 \end{bmatrix}$$



Ejercicio:

Probar : $z(z^{\perp}) = (zz)^{\perp}$

¿Será cierto que dados $z_1, z_2 \in C$, se cumple:

$z_1 z_2^{\perp} = z_1^{\perp} z_2 = (z_1 z_2)^{\perp}$?

Veamos:

$$z_1 z_2^{\perp} = x_1 z_2^{\perp} + y_1 (z_2^{\perp})^{\perp} = x_1 z_2^{\perp} + y_1(-1) z_2 = x_1 z_2^{\perp} + (-1) y_1 z_2 =$$

$$= -y_1 z_2 + x_1 z_2^{\perp} = \begin{bmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{bmatrix} z_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}^{\perp} z_2 = z_1^{\perp} z_2$$

$$z_1^{\perp} z_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}^{\perp} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_1 x_2 - x_1 y_2 \\ -y_1 y_2 + x_1 x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 y_2 - y_1 x_2 \\ x_1 x_2 - y_1 y_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ x_1 y_2 + y_1 x_2 \end{bmatrix}^{\perp} = \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \right)^{\perp} = (z_1 z_2)^{\perp}$$

Siendo afirmativa la respuesta, podemos enunciar la siguiente propiedad:

PROPIEDAD 9

Dados $z_1, z_2 \in C$,

$$z_1 z_2^{\perp} = z_1^{\perp} z_2 = (z_1 z_2)^{\perp} \qquad (P_9)$$

¿La definición de multiplicación en C corresponde a un sistema numérico?

Veamos si la multiplicación en C cumple con la propiedad conmutativa:

Dados: $z_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ y $z_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$, según la definición ($D_{5b}$):

$$z_1 z_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 x_1 - y_2 y_1 \\ x_2 y_1 + x_1 y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = z_2 z_1$$

Siendo así, enunciamos la propiedad:

PROPIEDAD 10

Para todo $z_1, z_2 \in C$;

$$z_1 z_2 = z_2 z_1 \qquad (P_{10})$$

Enunciaremos ahora una propiedad importante de la multiplicación en C cuya prueba dejamos a cargo del lector:

PROPIEDAD 11

$z\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}z=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, para todo $z \in C$ (P11)

Veamos si la adición y multiplicación en C cumplen con la propiedad distributiva:

Dados: $z_1=\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$, $z_2=\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$, z_3 en C, según (D2) y (D5a)

$$(z_1+z_2)z_3=\left(\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}\right)z_3=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{bmatrix}z_3=(x_1+x_2)z_3+(y_1+y_2)z_3^{\perp}=$$

$$=x_1z_3+x_2z_3+y_1z_3^{\perp}+y_2z_3^{\perp}=(x_1z_3+y_1z_3^{\perp})+(x_2z_3+y_2z_3^{\perp})=z_1z_3+z_2z_3$$

Siendo así, enunciamos la propiedad:

PROPIEDAD 12

Para todo $z_1,z_2,z_3 \in C$;

$(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$ (P12)

Veamos si la multiplicación en C cumple con la propiedad asociativa:

Dados: z_1,z_2,z_3 en C; según (D5a), (P9) y (P12):

$$(z_1z_2)z_3=(x_1z_2+y_1z_2^{\perp})z_3=$$

$$=x_1z_2z_3+y_1z_2^{\perp}z_3=$$

$$=x_1(z_2z_3)+y_1(z_2z_3)^{\perp}=$$

$$=z_1(z_2z_3)$$

Siendo así, enunciamos la propiedad:

PROPIEDAD 13

Para todo $z_1,z_2,z_3 \in C$;

$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$ (P13)

Al haber cumplido con las cinco propiedades correspondientes a un sistema numérico; esto es, las dos propiedades conmutativas y asociativas para la adición y la multiplicación definidas según (D_2) y (D_5) respectivamente y la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición, entonces:

El conjunto C es un sistema numérico.

El sistema C como extensión de $\Re$

Recordemos que, para buscar una extensión de $\Re$, hemos supuesto un conjunto, representado por un plano C, el cual hemos llamado *conjunto* C; de modo que todos los puntos de la recta $\Re$ están en el plano C.

Recordemos también que en este plano C se han fijado dos ejes perpendiculares de referencia para determinar cada punto del plano y además se han definido las operaciones *adición* y *multiplicación*, que satisfacen las propiedades de un *sistema numérico*.

Pero, ¿el sistema C es una extensión de $\Re$?

Preguntarnos si el sistema C es una extensión de $\Re$ equivale a preguntarnos si $\Re$ es un *subsistema* de C; es decir, si $\Re$ mismo forma un sistema relativo a las operaciones binarias definidas en C.

Para decirlo más claramente:

Siendo $\Re \subset C$, con las operaciones de *adición* y *multiplicación definidas en* C, decimos que $\Re$ es un *subsistema* de C si y sólo si, $\forall z_1, z_2 \in \Re \subset C$:

i) $z_1 + z_2 \in \Re \subset C$

ii) $z_1 z_2 \in \Re \subset C$

Para ilustrar la idea, comencemos graficando la recta $\Re$ de los números reales, con $t_1, t_2 \in \Re$ (ver Fig. 9).

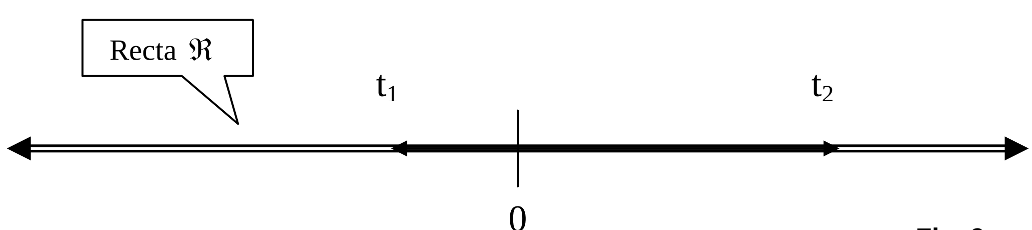


Fig. 9

Si queremos que la recta $\Re$, con vectores $t \in \Re$ como números reales, esté en el plano C, con $z_1, z_2 \in \Re \subset C$, es claro que el punto origen de la recta $\Re$ debe coincidir con el punto origen del plano C.[6] Por lo tanto; la recta $\Re$, subsistema de C, deberá al menos pasar por el origen de coordenadas del plano C (ver Fig. 10).[7]

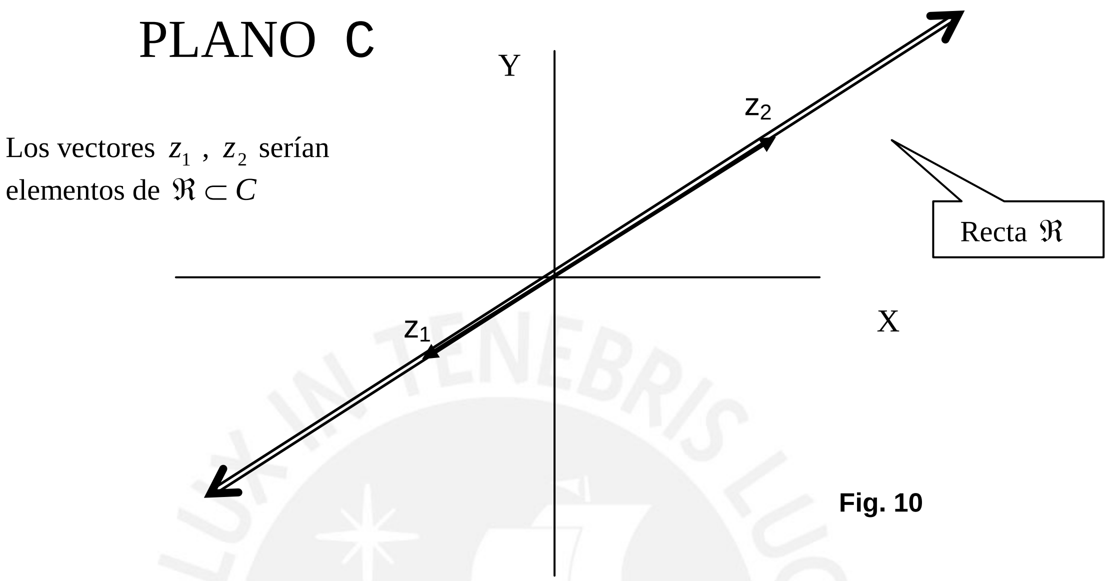


Fig. 10

Dados los vectores $z_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, $z_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$, en $\Re \subset C$; se tiene la ecuación de la recta[8] $\Re$: $y = mx$ en el plano C, en donde m es su pendiente.

Para z_1 , z_2 en $\Re$, debe cumplirse según la ecuación de la recta $\Re$:

$y_1 = mx_1$ ....(1)

$y_2 = mx_2$ ....(2)

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (1) y (2):

$(y_1 + y_2) = m(x_1 + x_2)$ ....(3)

Según la ecuación (3), el vector $\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$ está en la recta $\Re$.

Luego, según (D_2):

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = z_1 + z_2 \in \Re \subset C$$

[6] De no ser así, ningún vector en C estaría en la recta $\Re$. (Recordemos que los vectores en C parten del origen de coordenadas)

[7] Observemos que, en principio, planteamos el caso general de una recta $\Re$ que pasa por el origen.

[8] Para el caso de la ecuación $x = 0$, correspondiente a la recta vertical Y, puede verificarse que esta recta no satisface la condición (ii) de subsistema .

Por consiguiente, la condición (i) de subsistema queda satisfecha.

Para analizar la segunda condición, consideraremos dos casos:

(a) $z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \vee \ z_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $z_1 \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \ z_2 \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

<u>Caso (a)</u> $z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \vee \ z_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; tomando z_2 como vector nulo y según (P_{11}):

$$z_1 z_2 = z_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \Re \subset C$$

Lo cual satisface la condición (ii) de subsistema.

<u>Caso (b)</u> $z_1 \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \ z_2 \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

Para que $\Re$ sea un subsistema de C, según la condición (ii), debe cumplirse que $z_1 z_2 \in \Re \subset C$.

Sabemos que:

$$z_1 z_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{bmatrix}$$

Para $z_1 z_2 \in \Re$, según la ecuación de la recta $\Re$:

$$x_1 y_2 + x_2 y_1 = m(x_1 x_2 - y_1 y_2) \quad ....(4)$$

Siendo $z_1, z_2 \in \Re$, sustituimos los valores de y_1, y_2 de las ecuaciones (1) y (2) en la ecuación (4):

$$x_1(mx_2) + x_2(mx_1) = m[(x_1 x_2 - (mx_1)(mx_2)]$$

$$mx_1 x_2 + mx_1 x_2 = mx_1 x_2 - m^3 x_1 x_2$$

$$m^3 x_1 x_2 + mx_1 x_2 = 0$$

$$m(m^2 + 1) x_1 x_2 = 0$$

Como $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$:

$$m(m^2 + 1) = 0$$

$$m = 0 \ \vee \ m^2 + 1 = 0$$

Como la ecuación $m^2 + 1 = 0$ no tiene solución en $\Re$, nos queda como único valor de m:

$m = 0$

Reemplazando esta última expresión en la ecuación de la recta $y = mx$, nos queda:

$y = 0x = 0$, para todo $x \in \Re$

Esto nos dice que, para satisfacer la condición (ii), todos los elementos $z \in \Re \subset C$ deben ser de la forma:

$$z = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \in \Re \subset C$$

En consecuencia, $\Re$ es un subsistema de C si sus elementos son de la forma $z = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \in \Re \subset C$. Es decir, la recta $\Re$ que representa el sistema de los números reales coincide necesariamente con el eje X del plano C.

La ubicación de la recta $\Re$ coincide entonces con el eje X (ver Fig. 11).

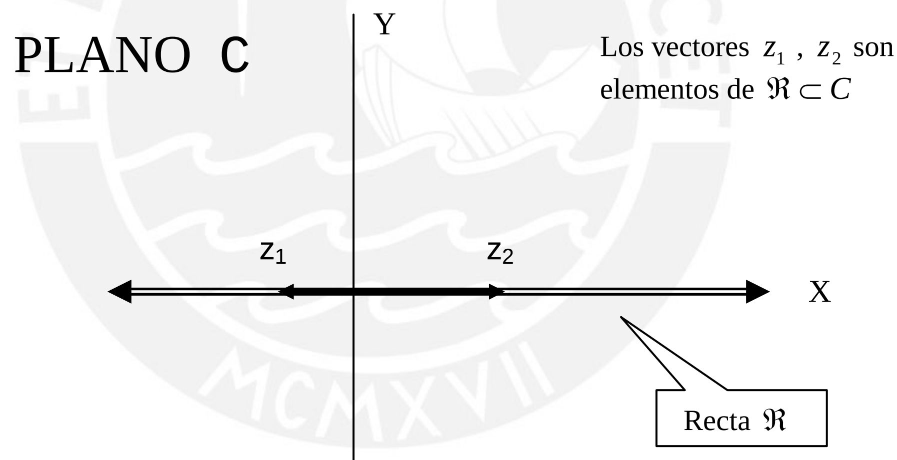


Fig. 11

Verifiquemos esta afirmación para los vectores $z_1, z_2 \in \Re \subset C$:

$$z_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; z_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

i) $\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \Re \subset C$

ii) $\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \times x_2 - 0 \times 0 \\ x_1 \times 0 + x_2 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \Re \subset C$

Por consiguiente:

El sistema C es una extensión del sistema $\Re$.

NOTA:

Vemos que los elementos de la forma $\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$, que obviamente se encuentran en el eje X, se identifican con los *números reales* .

Por otro lado, los elementos $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, en donde $y \neq 0$ y que por tanto no se encuentran en el eje X, se denominan *números imaginarios.*

De acuerdo con esto, dado un $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in C$, suele llamarse al número x *parte real de* z y al número y *parte imaginaria de* z.

Elementos neutros en el sistema C

Nos interesa saber ahora si nuestro flamante sistema numérico C tiene elementos neutros.

Para aclarar la idea, por ejemplo, en el sistema de los números reales, los elementos neutros para la adición y la multiplicación son respectivamente el "0" y el "1", pues: $\forall x \in \Re$: $x + 0 = x$; $x \times 1 = x$

Es decir , si elegimos cualquier elemento del sistema, el resultado de efectuar cada operación con su respectivo elemento neutro es el mismo número original, cualquiera sea éste.

Para encontrar los elementos neutros en el sistema numérico C, supongamos un elemento neutro para la adición $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ y un elemento neutro $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ para la multiplicación.

Así, debe cumplirse:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{para todo } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in C$$

Encontremos entonces estos elementos neutros, si es que existen:
Para el caso de la adición, según (D_2):

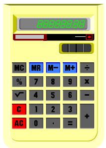
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + x_0 \\ y + y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

de donde, según (P_1), se desprende:

$$x + x_0 = x \Rightarrow x_0 = 0$$
$$y + y_0 = y \Rightarrow y_0 = 0 \quad ,$$

por lo tanto, *el elemento neutro para la adición* es $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Por ejemplo:



$$\begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+0 \\ 8+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Para el caso de la multiplicación, según (D_{5b}):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx_1 - yy_1 \\ xy_1 + x_1 y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$ (evidentemente, nos interesa $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$)

de donde, según (P_1), se desprende el sistema de ecuaciones:

$xx_1 - yy_1 = x$ ..... (1)

$xy_1 + x_1 y = y$ ..... (2)

Multiplicando la primera ecuación por x y la segunda ecuación por y:

$$x^2 x_1 - xyy_1 = x^2$$
$$xyy_1 + x_1 y^2 = y^2$$

Sumando miembro a miembro:

$x_1(x^2 + y^2) = x^2 + y^2$, de donde:

$$x_1 = 1$$

Reemplazando en las ecuaciones (1) y (2):

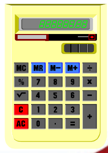
$$x(1) - yy_1 = x \qquad \wedge \qquad xy_1 + (1)y = y$$
$$yy_1 = 0 \qquad\qquad\qquad xy_1 = 0$$

Luego:

$$y_1 = 0$$

por lo tanto, *el elemento neutro para la multiplicación* es $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Por ejemplo:



$$\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times 1-5\times 0\\2\times 0+1\times 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times 1\\1\times 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$$

Nos resta saber si los elementos neutros para la adición y la multiplicación en C son únicos.

Para el caso de la adición, supondremos que existe un $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, tal que: $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$, para todo $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in C$

Según la definición de adición en C:

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+x'\\y+y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

de donde, según (P_1), se desprende:

$\begin{matrix}x+x'=x\Rightarrow x'=0\\y+y'=y\Rightarrow y'=0\end{matrix}$, de donde: $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, lo cual contradice la hipótesis.

En consecuencia, el elemento neutro para la adición en C es único.

La prueba de unicidad del elemento neutro para la multiplicación en C se deja a cargo del lector.

Ahora, estamos en condiciones de precisar nuestra interrogante:

¿Existe un $\omega\in C$ tal que $\omega^2+1=0$?

Sabemos que, en el sistema de los números reales, el 0 es el elemento neutro para la suma y el 1 es el elemento neutro para la multiplicación.

Pero en este problema, la ecuación $\omega^2+1=0$ está planteada en un sistema C. Por lo tanto, la ecuación de este problema tiene sentido[9] sólo si identificamos los elementos "1" y "0" de la ecuación como miembros del sistema C. Entonces identificaremos al "0" como su elemento neutro para la adición, o sea el $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, y al "1" como su elemento neutro para la multiplicación, o sea el $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.

[9] Aceptemos la notación exponencial ω^n para indicar que $\omega\in C$ se multiplica n veces por sí mismo.

Así pues, la ecuación $\omega^2 + 1 = 0$, adecuadamente planteada en el sistema C, se escribiría con ω como $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$, "1" como $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, "0" como $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, del siguiente modo:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{donde es claro que } \alpha, \beta \in \Re$$

¿Existirá alguna solución para esta ecuación?

Veamos:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha^2 - \beta^2 \\ \alpha\beta + \alpha\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha^2 - \beta^2 + 1 \\ 2\alpha\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En virtud de (P_1), tenemos las ecuaciones en $\Re$:

$\alpha^2 - \beta^2 + 1 = 0$....(1)

$2\alpha\beta = 0$...............(2)

De la ecuación (2), se desprende que $\alpha = 0 \vee \beta = 0$.

-Si $\beta = 0$, nos quedará en la ecuación (1):

$\alpha^2 + 1 = 0$; la cual, ya sabemos, no tiene solución en $\Re$

-Si $\alpha = 0$, nos quedará en la ecuación (1):

$$-\beta^2 + 1 = 0$$

$$\beta^2 - 1 = 0$$

$$(\beta + 1)(\beta - 1) = 0$$

De donde, se obtienen dos soluciones para β:

$$\begin{cases} \beta_1 = 1 \\ \beta_2 = -1 \end{cases}$$

De modo que las soluciones para la ecuación originalmente planteada como $\omega^2 + 1 = 0$ son:

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Con lo cual podemos decir, finalmente, que SÍ existe un ω en C tal que $\omega^2 + 1 = 0$.

Diremos ahora que el sistema numérico C que hemos construido se denomina *Sistema de Números Complejos* .

Llegado a este punto, ilustramos los **Sistemas Numéricos** en la siguiente figura:

$$N \subset Z \subset Q \subset \Re \subset C$$

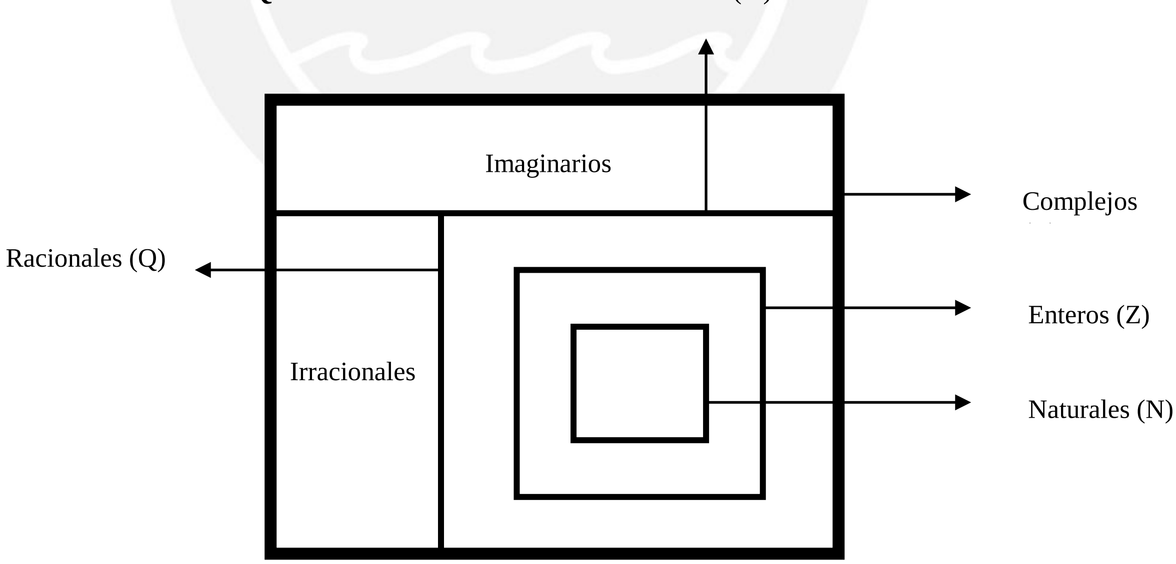


Fig. 12

CAPÍTULO CUATRO
EXPLORANDO EL NUEVO MUNDO

Así, con un sistema numérico C que admite alguna solución para $\omega^2+1=0$, podemos ver que, en realidad, hemos encontrado dos números ω_1, ω_2 que satisfacen la ecuación $\omega^2+1=0$. Cualquiera de estos dos números cumplirá con satisfacer dicha ecuación, pero podemos elegir uno de ellos como elemento preferente. Elijamos, pues, el número $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ y llamémosle i. Así, este número se denotará como: $i=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

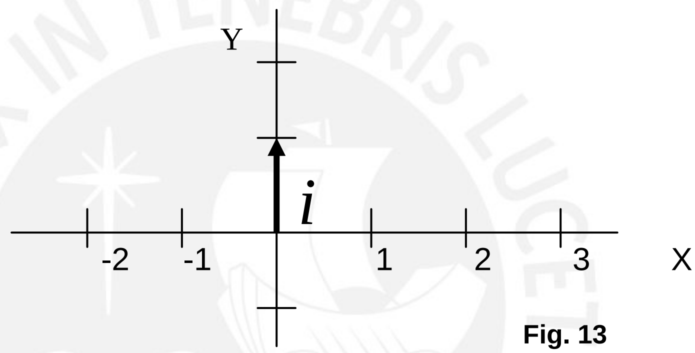


Fig. 13

En la representación del número i en el plano C (ver Fig.13), podemos observar que i se parece a la unidad, sólo que en vez de estar sobre el eje horizontal, está sobre el eje vertical. Así pues, al número i le vamos a llamar *unidad imaginaria*.

Dejemos por un momento la unidad imaginaria y atendamos algunos conceptos importantes que nos servirán para completar algunas ideas.

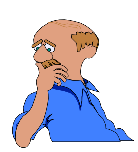
Opuesto de un Número Complejo

Volviendo al sistema numérico $\Re$, recordemos que para todo $\alpha \in \Re$, existe un $-\alpha \in \Re$ tal que: $\alpha + -\alpha = 0$. A este elemento $-\alpha$ se le llama el *opuesto* de α.

Así pues, por ejemplo, el opuesto de 4 es –4 y la suma 4 + (-4) = 0.

El lector puede verificar que el opuesto $-\alpha$ de cada número α es único.

¿Ocurre lo mismo en C?



Literalmente, podemos decir que para todo número real existe su opuesto, de modo que la suma de estos dos números es igual al elemento neutro de la adición en $\Re$.

¿Existirá para cada elemento en C un único elemento opuesto tal que la suma de los dos sea el elemento neutro en C?

Pensemos en un $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in C$.

Para los números x, y en $\Re$, existen $-x \in \Re, -y \in \Re$ tales que:

$$x + (-x) = 0$$

$$y + (-y) = 0$$

Entonces podemos escribir, según (P_1) :

$$\begin{bmatrix} x + (-x) \\ y + (-y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es decir, que para un $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in C$ podemos encontrar un $\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} \in C$ tal que:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El elemento opuesto de $z \in C$ puede denotarse como $-z$, de modo que,

DEFINICIÓN 6

Dado $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, llamamos al número $-z \in C$ el *opuesto* de z:

$$-z = -\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$, de modo que: $z + (-z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (D_6)

Ejercicio:
Verificar que: $(-1)z = -z$

Unicidad del Opuesto de un Número Complejo

Para probar la unicidad del opuesto en C, supongamos que para un $z \in C$ existe un $z' \neq -z$ tal que:

$$z + z' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Poniendo: $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $z' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, esta igualdad se escribirá como:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x + x' \\ y + y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De donde:

$$\begin{matrix} x + x' = 0 \\ y + y' = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x' = -x \\ y' = -y \end{matrix}$$

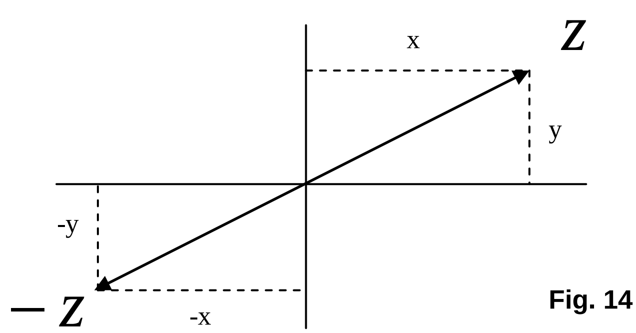
En consecuencia:

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$, es decir: $z' = -z$

Lo cual contradice la hipótesis y prueba la unicidad del opuesto en C.

Interpretación Geométrica del Opuesto de un Número Complejo

Dado un número complejo $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in C$, su opuesto $-z = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} \in C$ está ubicado simétricamente con respecto al origen de coordenadas del plano C (ver Fig. 14).



Interpretación Geométrica del Opuesto de un Número Complejo.

Fig. 14

Conjugado de un Número Complejo

La simetría de un punto en el plano C también puede darse con respecto a un solo eje. Por ejemplo, si tenemos el número $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in C$ podemos encontrar un número $\bar{z}$ en el punto simétrico respecto al *eje horizontal* (ver Fig. 15).

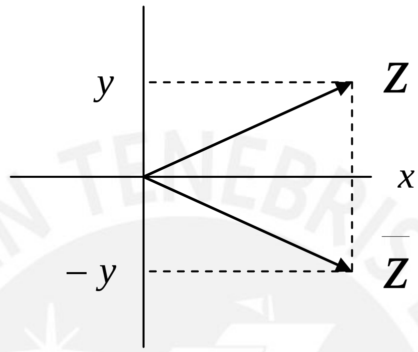


Fig. 15

Este número $\bar{z}$, que se representa como un punto "reflejado" respecto al eje horizontal, se conoce como el *conjugado* de z, tal como lo definimos:

<u>DEFINICIÓN 7</u>

Dado $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, llamamos al número $\bar{z} \in C$ *conjugado de* z:

$$\bar{z} := \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} \qquad (D_7)$$

La interpretación geométrica del conjugado de z, que es el "reflejo" de z respecto al eje horizontal, está representada en la figura 15.

Ejemplo:

El conjugado de $z_0 = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ es $\overline{z_0} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$

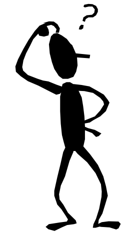
Ejercicios:

Probar que:

a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

b) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$

c) $\bar{\bar{z}} = z$



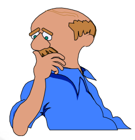
Veremos más adelante que el conjugado de un número complejo tiene diversas aplicaciones interesantes.

Inverso de un Número Complejo

En el sistema numérico $\Re$, vemos también que para cada $\alpha \in \Re$, $\alpha \neq 0$, existe un $\alpha^{-1} \in \Re$ tal que: $\alpha \times \alpha^{-1} = 1$. A este elemento α^{-1} se le llama el *inverso* de α.

El lector puede verificar que el inverso α^{-1} de cada número real $\alpha \neq 0$ es único.

¿Ocurre lo mismo en C?



Así pues, por ejemplo, el inverso de 4 es 0,25, y el producto de estos dos números es $4 \times 0{,}25 = 1$.

Literalmente, podemos decir que para todo número real diferente de cero existe su inverso, de modo que el producto de estos dos números es igual al elemento neutro de la multiplicación en $\Re$.

¿Existirá para cada elemento diferente de “cero” en C un único elemento inverso tal que el producto de los dos sea el elemento neutro de la multiplicación en C? [10]

Dado un $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in C$, siendo $z \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, ¿existirá un $z' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \in C$ tal que: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$?

Supongamos que existe un $z' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \in C$ que cumple tal condición. Así:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} xx' - yy' \\ xy' + x'y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De allí tenemos:

[10] Notar que la restricción “diferente de cero” es necesaria porque si el multiplicando fuera cero, el producto no podría ser el elemento neutro de la multiplicación en C. (Ver la propiedad P_{11})

$$xx' - yy' = 1......(1)$$

$$xy' + x'y = 0.....(2)$$

Multiplicando los dos miembros de la ecuación (1) por x, y los dos miembros de la ecuación (2) por y:

$$x^2x' - xyy' = x$$

$$xyy' + x'y^2 = 0$$

De allí, sumando miembro a miembro:

$$x^2x' + x'y^2 = x$$

$$x'(x^2 + y^2) = x$$

De donde:

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Análogamente, obtenemos:

$$y' = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

En consecuencia, el elemento inverso z' de $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in C$ es:

$$z' = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{x^2 + y^2} \\ \dfrac{-y}{x^2 + y^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{x^2 + y^2}\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix},$$ lo que resultará posible siempre que $x \neq 0 \vee y \neq 0$, es decir si $z \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; de acuerdo con la condición del enunciado.

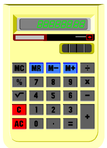
Quedando establecida la existencia de un inverso, podemos denotar como z^{-1} al inverso de $z \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

DEFINICIÓN 8

Dado $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $z \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, llamamos al número $z^{-1} \in C$ *inverso de* z:

$$z^{-1} := \frac{1}{x^2 + y^2}\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}, \text{ de modo que: } zz^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (D_8)$$

Ejemplo:



Hallar el inverso de $z = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$

Aplicando (D_8):

$$z^{-1} = \frac{1}{2^2 + (-5)^2} \begin{bmatrix} 2 \\ -(-5) \end{bmatrix}$$

$$z^{-1} = \frac{1}{4+25} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$z^{-1} = \frac{1}{29} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

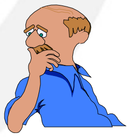
$$z^{-1} = \begin{bmatrix} 2/29 \\ 5/29 \end{bmatrix}$$

De modo que:

$$zz^{-1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/29 \\ 5/29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 2/29 - (-5) \times 5/29 \\ 2 \times 5/29 + 2/29 \times (-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/29 + 25/29 \\ 10/29 - 10/29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29/29 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dejamos como ejercicio la prueba de la unicidad del inverso en C.

¿Cómo interpretar geométricamente el inverso de un número complejo?



Con el conjunto C, hemos llegado a un sistema en donde se definen dos operaciones binarias, adición y multiplicación, que con z_1, z_2, z_3, arbitrarios en C, poseen las siguientes propiedades:

1) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
2) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
3) Existe $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in C$ tal que $z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = z, \forall z \in C$
4) $\forall z \in C,$ existe $-z \in C$, tal que $z + (-z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
5) $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$
6) $z_1 z_2 = z_2 z_1$

7) Existe $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \in C$, tal que $z\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = z, \forall z \in C$

8) $\forall z \in C$, diferente de $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, existe un $z^{-1} \in C$ tal que $zz^{-1} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

9) $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$

Estas nueve propiedades califican al sistema C como una estructura algebraica llamada *campo*. Ahora podemos referirnos al sistema C, como al *Campo de los Números Complejos*.

¿Podemos definir en C operaciones inversas de la adición y la multiplicación?

Para el caso de la operación inversa de la adición:

DEFINICIÓN 9a

Dados $z_1, z_2 \in C$, definimos *sustracción* $z_1 - z_2$ en C:

$$z_1 - z_2 := z_1 + (-z_2) \qquad (D_{9a})$$

Así, considerando dos números complejos $\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$; tenemos:

$$\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix} + \left(-\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-x_2\\-y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1 - x_2\\y_1 - y_2\end{bmatrix}$$

lo que nos permite definir la sustracción en la siguiente forma:

DEFINICIÓN 9b

Dados $\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$; definimos *sustracción* $\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$ en C:

$$\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix} := \begin{bmatrix}x_1 - x_2\\y_1 - y_2\end{bmatrix} \qquad (D_{9b})$$

Para el caso de la operación inversa de la multiplicación, definimos:

DEFINICIÓN 10a

Dados $z_1, z_2 \in C$, $z_2 \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, definimos *división* $\frac{z_1}{z_2}$ en C:

$$\frac{z_1}{z_2} := z_1 z_2^{-1} \qquad (D_{10a})$$

NOTA:

También denotaremos el cociente, como en los números reales, con los signos "÷" y "/ ". Así la división $\frac{z_1}{z_2}$ puede también denotarse como $z_1 \div z_2$ o como ${}^{z_1}\!/_{z_2}$.

Considerando dos números complejos $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$, tenemos:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \div \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{x_2^2 + y_2^2}\begin{bmatrix} x_2 \\ -y_2 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{x_2^2 + y_2^2}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ -y_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{x_2^2 + y_2^2}\begin{bmatrix} x_1 x_2 - y_1(-y_2) \\ x_1(-y_2) + x_2 y_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{x_2^2 + y_2^2}\begin{bmatrix} x_1 x_2 + y_1 y_2 \\ x_2 y_1 - x_1 y_2 \end{bmatrix}$$

lo que nos permite definir la división en una forma alternativa:

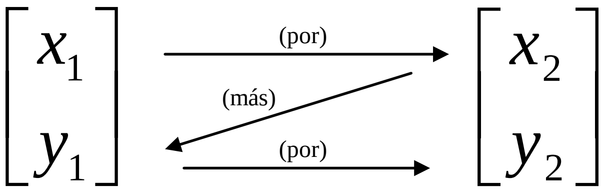
DEFINICIÓN 10b

Dados $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, definimos *división* $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \div \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ en C:

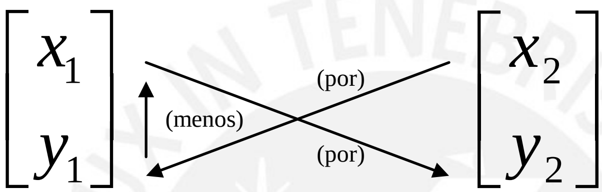
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \div \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} := \frac{1}{x_2^2 + y_2^2}\begin{bmatrix} x_1 x_2 + y_1 y_2 \\ x_2 y_1 - x_1 y_2 \end{bmatrix} \qquad (D_{10b})$$

Una regla práctica que ayuda a la obtención de este resultado se puede apreciar en los siguientes diagramas:

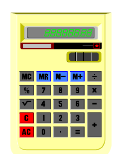
Primera componente: (suma de productos)



Segunda componente: (diferencia de productos)



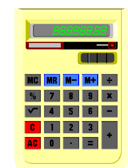
Ejemplos de resta y cociente en C:



a) $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-(-2) \\ 5-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \div \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{(-2)^2 + 1^2} \begin{bmatrix} 3 \times (-2) + 5 \times 1 \\ -2 \times 5 - 3 \times 1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{5} \begin{bmatrix} -6+5 \\ -10-3 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 \\ -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 \\ -13/5 \end{bmatrix}$

CAPÍTULO CINCO
EPPUR, SI MUOVE![*]



Volvamos ahora a la unidad imaginaria i y multipliquémosla consecutivamente por sí misma.

$$i^2 = ii = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\times 0 - 1\times 1 \\ 0\times 1 + 0\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$i^3 = iii = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\times 0 - 0\times 1 \\ -1\times 1 + 0\times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$i^4 = iiii = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\times(-1) - 0\times 0 \\ -1\times 0 + (-1)\times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Según podemos observar en este último resultado, i^4 es equivalente al elemento neutro en C. En consecuencia, las siguientes multiplicaciones, que podemos llamar "potencias de i", nos volverán a dar, cíclicamente, los mismos resultados, esto es: $i^5 = i^4 \cdot i = i$, $i^6 = i^4 \cdot i^2 = i^2$, etc.

Tratemos de visualizar estos resultados en un gráfico:

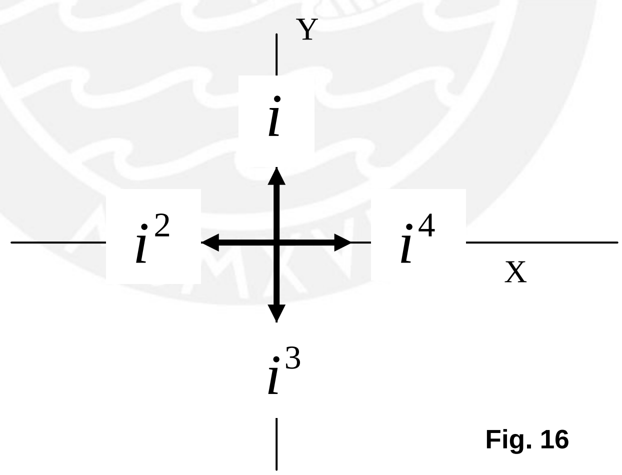


Fig. 16

Podemos notar en la figura 16 que cada vez que multiplicamos por i, obtenemos consecutivamente vectores ortogonales. Esto se puede interpretar, intuitivamente, como una rotación de un cuarto de vuelta por cada multiplicación por i. Así, después de cuatro multiplicaciones, cerramos el ciclo en la posición original, tal como se describió algebraicamente.

---

[*] ¡*Y sin embargo, se mueve!* (Palabras atribuidas a Galileo, obligado a retractarse por haber afirmado que la Tierra giraba alrededor del Sol)

Puede resultar útil el concepto de “rotación” en el *plano complejo*[8]. Todos tenemos una idea de lo que es una rotación, pero ¿cómo entendemos formalmente una rotación?

Hemos visto que las operaciones definidas en C tienen una visualización geométrica y nos interesa ahora su formalización.
Precisaremos los argumentos introduciendo algunos conceptos.

Empecemos definiendo lo que es el *módulo* de un número complejo y lo que es un *vector unitario en* C.

El concepto de *módulo* está relacionado con la idea intuitiva que tenemos de tamaño o magnitud (ver Fig.17). El módulo es, naturalmente, un número real.

DEFINICIÓN 11

Dado el número complejo $z=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\in C$, se denomina *módulo de* z al número real $\|z\|\geq 0$ tal que $\|z\|:=\sqrt{x^2+y^2}$ (D$_{11}$)

Por ejemplo:

Si $z_1=\begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}$, el módulo de z_1 es:

$$\|z_1\|=\left\|\begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}\right\|=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{169}=13$$

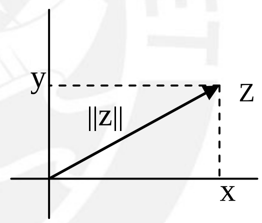


Fig. 17

Dados dos números complejos z_1 y z_2, ¿será el módulo del producto igual al producto de sus módulos? Es decir, ¿se cumple que: $\|z_1z_2\|=\|z_1\|\cdot\|z_2\|$? Veamos:

$$\|z_1z_2\|=\left\|\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right\|=\left\|\begin{bmatrix} x_1x_2-y_1y_2 \\ x_1y_2+x_2y_1 \end{bmatrix}\right\|=\sqrt{(x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2}=$$

$$=\sqrt{x_1^2x_2^2-2x_1x_2y_1y_2+y_1^2y_2^2+x_1^2y_2^2+2x_1y_2x_2y_1+x_2^2y_1^2}=$$

$$=\sqrt{x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2}=\sqrt{x_1^2(x_2^2+y_2^2)+y_1^2(x_2^2+y_2^2)}=$$

$$=\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}=\|z_1\|\cdot\|z_2\|$$

Siendo afirmativa la respuesta, podemos enunciar la siguiente propiedad:

---

[8] Llamamos *plano complejo* al plano C, el cual representa al *campo de los números complejos*.

PROPIEDAD 14

Dados: $z_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ y $z_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ en C,

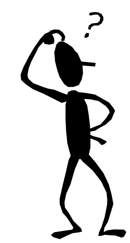
$$\|z_1 z_2\| = \|z_1\| \cdot \|z_2\|$$

(P$_{14}$)

Con esta propiedad, el lector puede comprobar la identidad:

$$\left\| \frac{z_1}{z_2} \right\| = \frac{\|z_1\|}{\|z_2\|}$$

Ejercicios:



a) Probar : $\|z\| = 0 \Leftrightarrow z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) Probar : $\|z\| = \|-z\| = \|\overline{z}\|$

c) Probar : $\|z\| = 1 \Leftrightarrow z^{-1} = \overline{z}$

d) Verificar que: $z^{-1} = \dfrac{1}{\|z\|^2}\overline{z}$

e) Si $z + z^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, calcular $\|z\|$

f) Probar : $z\overline{z} = \begin{bmatrix} \|z\|^2 \\ 0 \end{bmatrix}$

g) Basándose en el ejercicio (f), probar (P$_{14}$).

h) Determinar los números complejos cuyos cuadrados son iguales a sus conjugados.

i) Interpretar geométricamente el inverso de $z \in C$

j) Probar: $\|z_1 + z_2\|^2 + \|z_1 - z_2\|^2 = 2\|z_1\|^2 + 2\|z_2\|^2$

k) Si $\|z_1\| = \|z_2\|$, probar: $\dfrac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} = \lambda \cdot i$, $\lambda \in \Re$

l) Probar : $\|z_1 + z_2\| \le \|z_1\| + \|z_2\|$ (desigualdad triangular)

(Ver: Propiedades del *conjugado* y del *módulo*)

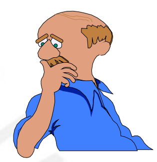
Veamos ahora la siguiente definición:

DEFINICIÓN 12
Se denomina *vector unitario en* C a todo vector
$\upsilon \in C$ tal que $\|\upsilon\| = 1$ (D$_{12}$)

Los vectores neutro multiplicativo $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y la unidad imaginaria $i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ son vectores unitarios, pues:

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1, \qquad \|i\| = \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

¿Existen infinitos vectores unitarios?



Llamaremos *unitario* υ_k *de un vector no nulo* z_k al vector unitario que sigue la misma dirección y sentido que el vector z_k (ver Fig. 18).

Esto lo podemos definir más propiamente de la siguiente manera:

DEFINICIÓN 13
Dado el vector no nulo $z_k \in C$,
llamamos al vector unitario $\upsilon_k \in C$ *unitario del vector* z_k, si existe un valor único $t \in \Re^+$ tal que $z_k = t\upsilon_k$ (D$_{13}$)

Con esta definición, procedamos a hallar el unitario υ_k de un vector genérico z_k:

Poniendo $z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$ y $\upsilon_k = \begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{bmatrix}$, la expresión $z_k = t\upsilon_k$, se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t\alpha_k \\ t\beta_k \end{bmatrix}$$

De donde se obtiene:

$$x_k = t\alpha_k$$
$$y_k = t\beta_k$$

De allí:

$$x_k^2 = t^2 \alpha_k^2$$
$$y_k^2 = t^2 \beta_k^2$$

Sumando miembro a miembro estas dos igualdades:

$$x_k^2 + y_k^2 = t^2(\alpha_k^2 + \beta_k^2)$$
$$\|z_k\|^2 = t^2 \|\upsilon_k\|^2$$
$$\|z_k\|^2 = t^2 (1)^2$$

De esta expresión obtenemos:

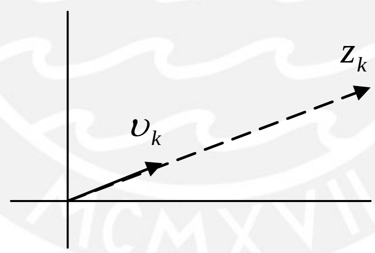
$$t = \|z_k\|$$

Reemplazando este valor en la expresión $z_k = t\upsilon_k$ resulta:

$$z_k = \|z_k\| \upsilon_k \qquad (P_{15})$$

de donde se obtiene el unitario de z_k:

$$\upsilon_k = \frac{1}{\|z_k\|} z_k$$

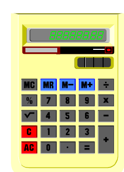


υ_k (de módulo 1) es el unitario de z_k.

Fig. 18

Ejemplo:

Hallar el unitario del vector: $z_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \end{bmatrix}$



$$\|z_1\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{(-3)^2 + 8^2} = \sqrt{73}$$

$$\upsilon_1 = \frac{1}{\|z_1\|} z_1 = \frac{1}{\sqrt{73}} \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\upsilon_1 = \begin{bmatrix} -3/\sqrt{73} \\ 8/\sqrt{73} \end{bmatrix}$$

Si υ_1, υ_2 son dos vectores unitarios en C, ¿el producto $\upsilon_1\upsilon_2$ es también un vector unitario en C?

Efectivamente, aplicando la propiedad (P14), se verifica que: $\|\upsilon_1\upsilon_2\| = \|\upsilon_1\|\|\upsilon_2\| = 1\times 1 = 1$

por lo tanto $\upsilon_1\upsilon_2$ es un vector unitario. De modo que lo enunciamos como propiedad:

PROPIEDAD 16

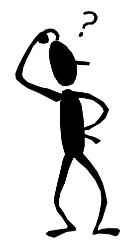
Si υ_1, υ_2 son dos vectores unitarios en C, el producto $\upsilon_1\upsilon_2$ también es un vector unitario en C (P16)

El lector podrá verificar análogamente que si υ_1, υ_2 son dos vectores unitarios en C, el cociente $\dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$ también es un vector unitario en C.

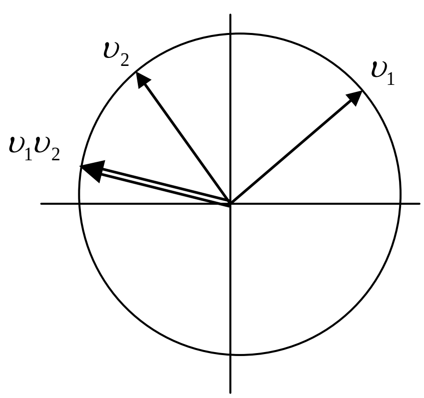
Ejercicios:

a) Dado un vector unitario υ_1, hallar el vector unitario υ_2 tal que la suma de υ_1 y υ_2 es otro vector unitario, es decir: $\|\upsilon_1 + \upsilon_2\| = 1$

b) Probar que: $z_1 = z_2^{\perp} \Leftrightarrow \upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$



Retomemos ahora el punto al que habíamos llegado en la página 80, cuando nos referíamos a las operaciones y a la visualización geométrica de estas operaciones en el plano complejo. Hemos visto que, según (P16), el producto de dos vectores unitarios es un vector unitario. Esto puede interpretarse como “giros” en un círculo de radio unitario (ver Fig. 19).



El producto en C de los vectores unitarios υ_1 y υ_2 es otro vector unitario $\upsilon_1\upsilon_2$.

Fig. 19

Pero no sólo con multiplicaciones en C se puede llegar a un unitario a partir de otro.

Pensemos en un vector unitario: $\upsilon = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

A partir de éste, ¿de qué maneras podría llegarse a los otros unitarios:

$\begin{bmatrix} -\alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\alpha \\ -\beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\beta \\ \alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\beta \\ -\alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \end{bmatrix}$?

¿Habrá otras maneras equivalentes?

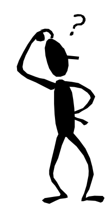
Por ejemplo, el segundo y el quinto unitario son, respectivamente, el opuesto y el ortogonal del vector unitario υ.

$$-\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ -\beta \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}^{\perp} = \begin{bmatrix} -\beta \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Sin embargo, no resulta tan simple llegar a otros unitarios. ¿Cómo llegaríamos, por ejemplo, al séptimo unitario: $\begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \end{bmatrix}$?

En este caso, el séptimo unitario es el *opuesto del ortogonal* del vector unitario υ, tal como podemos apreciar:

$$-\left(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}^{\perp}\right) = -\begin{bmatrix} -\beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \end{bmatrix}$$



Dejamos como ejercicio solucionar el resto de casos (¿podemos encontrar otras soluciones equivalentes?).

Pero, volviendo a los ejemplos que hemos desarrollado, vemos que estos pueden enfocarse de una manera más atrayente. Este efecto de "convertir" un elemento de C en otro nos lleva al terreno de las *funciones de* C *en* C.

Con este concepto, podemos reformular las llegadas al segundo y al quinto unitario con las funciones $f : C \to C$, $g : C \to C$ del modo que sigue:

$$f\left(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\alpha \\ -\beta \end{bmatrix} \qquad g\left(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\beta \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Para el tercer caso, podemos pensar en una función $h : C \to C$ que cumplirá:

$$h\left(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}\right) = -\left(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}^{\perp}\right) = -\begin{bmatrix} -\beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \end{bmatrix}$$

(Si observamos atentamente, esta función produce un efecto equivalente a la aplicación de las dos anteriores. Más adelante volveremos a este punto)

Desarrollemos mejor la idea de las *funciones de* C *en* C.

Pensemos en otra función $f : C \to C$, $f(z) = z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Podemos tomar algunos puntos:

$$f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Para visualizar esta función, se pueden considerar conjuntos de puntos en el plano (ver Fig. 20).

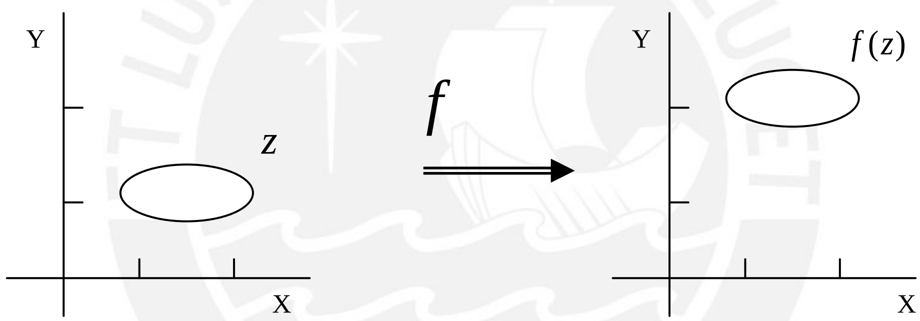


Fig. 20

El “convertir” un número $z \in C$ en otro se interpreta como un cambio de posición de puntos en el plano.

En la figura 20 hemos podido apreciar que el conjunto de puntos $f(z)$ se ubica en $z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e interpretamos que el conjunto de puntos z se ha “movido” una unidad hacia arriba.

De este modo, podemos considerar la idea de “movimiento” en el plano: un punto se traslada, o rota alrededor de otro, etc.

A estas funciones que nos dan esta idea de cambio de posición o movimiento en el plano las llamamos *transformaciones del plano complejo.*

DEFINICIÓN 14

Se llama *transformación del plano complejo* a una función F con dominio en
C y rango en C. (D14)

Por ejemplo: $F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+1 \\ y \end{bmatrix}$

$F\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $F\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}$, $F\left(\begin{bmatrix} 10 \\ -3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 11 \\ -3 \end{bmatrix}$, etc.

Interpretamos que la transformación F del ejemplo "lleva" cada punto del plano una unidad a la derecha (ver Fig. 21).

Veamos otro ejemplo: $G\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$

$G\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$, $G\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 16 \end{bmatrix}$, $G\left(\begin{bmatrix} 10 \\ -3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 20 \\ -6 \end{bmatrix}$, etc.

Interpretamos que la transformación G del ejemplo "estira" cada conjunto de puntos del plano "duplicando su tamaño" (ver Fig. 22).

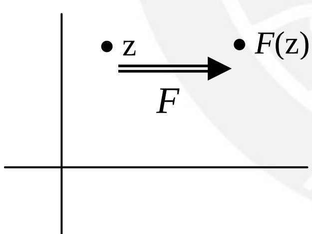


Fig. 21

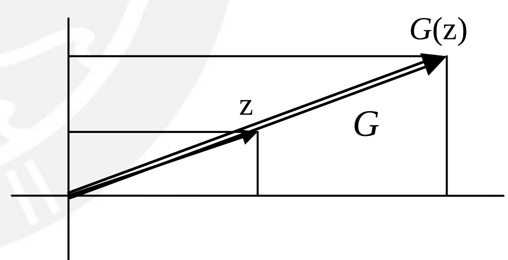
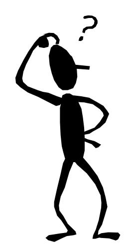


Fig. 22

Ejercicios:
Analizar e interpretar las transformaciones:



a) $P(z) = z + z^{\perp}$

b) $Q(z) = i\bar{z}$

c) $R(z) = z_1 z + z_2$, donde z_1 y z_2 son complejos fijos dados. (Considere los casos especiales de esta transformación)

Supongamos ahora que queremos producir un efecto equivalente al de las dos transformaciones, es decir que "lleve" y también "estire". ¿Es

posible construir una sola transformación que produzca esta acción conjunta?

Esta transformación equivalente se conoce como *composición de transformaciones.*

DEFINICIÓN 15

Se llama *composición de las transformaciones* F *y* G *del plano complejo* a la transformación $[F \circ G]$ con la regla de correspondencia:

$$[F \circ G]\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = F\left(G\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)\right) \qquad (D_{15})$$

Ejemplo:

Para $F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x \\ 3y \end{bmatrix}$ y $G\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+1 \\ y-1 \end{bmatrix}$,

$$[F \circ G]\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = F\left(G\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)\right) = F\left(\begin{bmatrix} x+1 \\ y-1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2(x+1) \\ 3(y-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+2 \\ 3y-3 \end{bmatrix}$$

Transformaciones notables

Vamos a definir algunas importantes transformaciones en C:

DEFINICIÓN 16

Se llama *traslación* a la transformación T en C tal que, dado un $\alpha \in C$,

$T(z) = z + \alpha$, para todo $z \in C$ $\qquad (D_{16})$

Siendo $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\alpha = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$; esto es equivalente a escribir:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, sea la traslación en C, $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 \\ y-1 \end{bmatrix}$.

$T\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$, $T\left(\begin{bmatrix} 10 \\ -8 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 11 \\ -9 \end{bmatrix}$, etc.

Esta transformación T "traslada" cada punto de C una unidad a la derecha y una unidad abajo o, dicho de otra manera, "mueve" cada punto del plano según el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (ver Fig. 23).

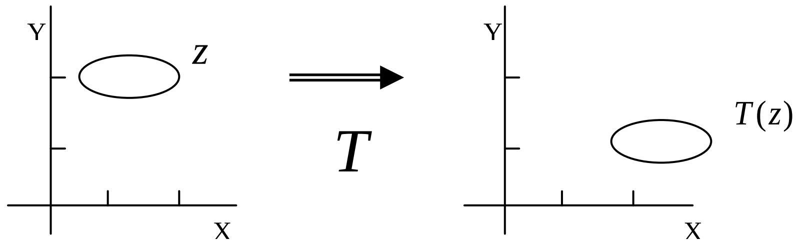
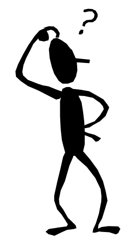


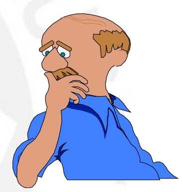
Fig. 23



Ejercicio:
Probar que:

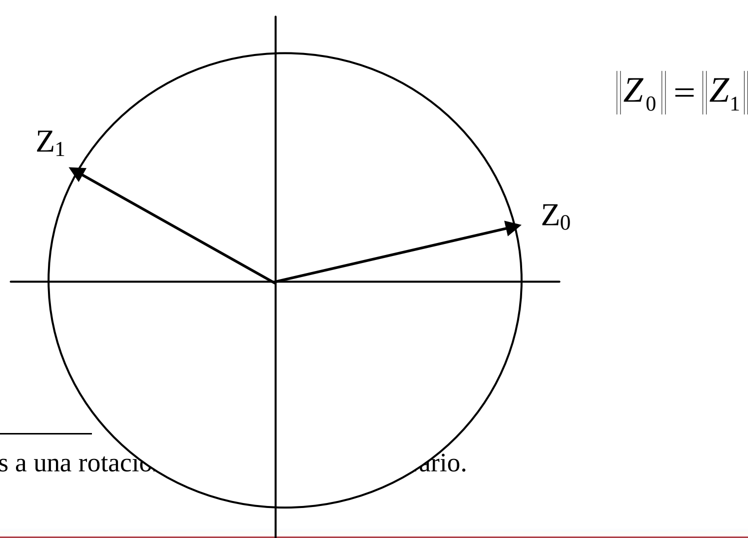
$$T(z_1 + z_2) = T(z_1) + z_2 = T(z_2) + z_1$$

¿Qué relación podemos encontrar entre la adición en C y la traslación?



La siguiente transformación en C que vamos a tratar es la *rotación alrededor del origen*.[9]

Para poder definir lo que es una rotación en C, empecemos por una idea gráfica. Debe entenderse que un punto z_0 habrá rotado a la posición z_1 en el plano complejo si su distancia al origen permanece invariable (ver Fig. 24).



[9] Siempre que nos refiramos a una rotacio... ...ario.

Fig. 24

Podemos comenzar expresando una rotación de z_0 a z_1 con la igualdad:

$$\|z_0\| = \|z_1\|$$

Pero esta igualdad no nos define el sentido de la rotación. Necesitamos una transformación que relacione el vector original con el vector rotado.

Veamos lo que sucede si multiplicamos ambos miembros de esta igualdad por el producto de los unitarios correspondientes υ_0, υ_1:

$$\upsilon_0 \upsilon_1 \|z_0\| = \upsilon_0 \upsilon_1 \|z_1\|$$
$$\upsilon_1 \upsilon_0 \|z_0\| = \upsilon_0 \upsilon_1 \|z_1\|$$
$$\upsilon_1 z_0 = \upsilon_0 z_1$$

De donde encontramos:

$$z_1 = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_0} z_0$$ (Necesariamente $\upsilon_0 \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, ¿por qué?)

Como sabemos, el cociente de dos vectores unitarios es otro vector unitario. Por tanto, podemos hacer $\frac{\upsilon_1}{\upsilon_0} = \upsilon_R$, quedando la expresión como:

$$z_1 = \upsilon_R z_0$$

En esta expresión podemos notar que el vector unitario υ_R actúa como un operador que hace que z_0 pase a ser z_1, es decir que z_0 *rote* a la posición z_1.

Podemos decir entonces que el vector unitario υ_R es un *unitario de rotación.*

Con este precedente, pasemos ahora a definir lo que es rotación.

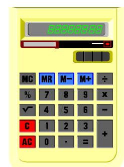
DEFINICIÓN 17

Se llama *rotación* a la transformación U en C tal que, dado un vector unitario $\upsilon_R \in C$ llamado *unitario de rotación de* U,

$U(z) = \upsilon_R z$, para todo $z \in C$ (D$_{17}$)

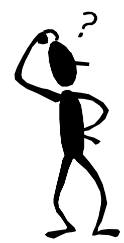
Ejemplos:

1) ¿En qué vector se transforma el vector $z_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ si lo multiplicamos por el unitario de rotación $\upsilon_R = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$?



$$U(z_0) = \upsilon_R z_0 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \times (-1) - \frac{4}{5} \times 4 \\ \frac{3}{5} \times 4 + (-1) \times \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{19}{5} \\ \frac{8}{5} \end{bmatrix}$$

(Como es una rotación, el vector rotado $U(z_0)$ conserva el módulo del vector z_0. Es decir, se verifica que $\|z_0\| = \|U(z_0)\| = \sqrt{17}$)



2) Dados los vectores $z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \end{bmatrix}$ y $z_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ 24 \end{bmatrix}$, hallar el unitario de rotación que transforma z_0 en z_1.

Cuando nos referimos a una rotación, es natural pensar en un ángulo de giro. Resulta, pues, útil considerar el concepto de *ángulo de rotación.* Decimos que para cada ángulo de rotación podemos encontrar exactamente una posición correspondiente a dicha rotación.

Para exponerlo más apropiadamente, diremos que para cada *ángulo de rotación* existe uno y sólo un *unitario de rotación* correspondiente a dicho ángulo de rotación.

Simbólicamente, se define una función $\Psi : \Re \to C$ tal que: $\upsilon_R = \Psi(\theta_R)$, siendo $\theta_R \in \Re$ el ángulo de rotación (ver Fig. 25).

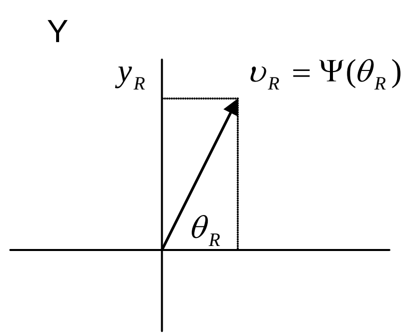


Fig. 25

x_R X

Como $\upsilon_R = \begin{bmatrix} x_R \\ y_R \end{bmatrix}$ es un vector unitario, tenemos que su módulo $\|\upsilon_R\|$ es igual a la unidad, es decir que: $\|\upsilon_R\|^2 = x_R^2 + y_R^2 = 1$.

Por propiedades trigonométricas[10], podemos convenir entonces que $x_R = \cos\theta_R$, $y_R = \operatorname{sen}\theta_R$; con lo cual: $\Psi(\theta_R) = \upsilon_R = \begin{bmatrix} x_R \\ y_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_R \\ \operatorname{sen}\theta_R \end{bmatrix}$

DEFINICIÓN 18

Se llama *ángulo de rotación* del unitario de rotación υ_R, al valor $\theta_R \in \Re$ que satisface la igualdad:

$$\upsilon_R = \begin{bmatrix} \cos\theta_R \\ \operatorname{sen}\theta_R \end{bmatrix} \qquad (D_{18})$$

De este modo, dado el ángulo de rotación $\theta_R \in \Re$ y el vector $z_0 \in C$ (ver Fig. 26), podemos obtener el vector rotado:

$$z_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_R \\ \operatorname{sen}\theta_R \end{bmatrix} z_0$$

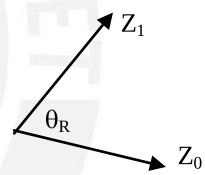
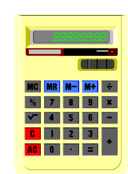


Fig. 26

Ejemplo: Hallar el vector z_1 que resulta de rotar $z_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ un ángulo $\theta = 60°$ en sentido antihorario (ver Fig. 27).

$$z_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_R \\ \operatorname{sen}\theta_R \end{bmatrix} z_0 = \begin{bmatrix} \cos 60° \\ \operatorname{sen} 60° \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \times 3 - \sqrt{3}/2 \times 4 \\ 1/2 \times 4 + 3 \times \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 - 4\sqrt{3} \\ 4 + 3\sqrt{3} \end{bmatrix}$$



$$z_1 \approx \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3{,}93 \\ 9{,}20 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -1{,}96 \\ 4{,}60 \end{bmatrix}$$

La rotación de ángulo $\theta = 60°$ transforma el vector z_0 en el vector z_1

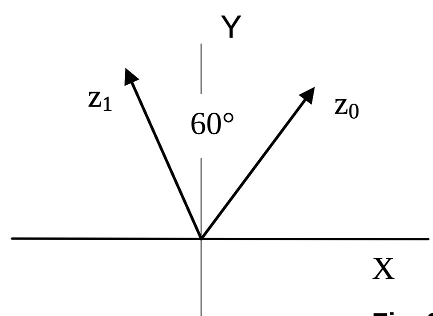


Fig. 27

[10] Para todo $\theta_R \in \Re$, se cumple la identidad: $\cos^2\theta_R + \operatorname{sen}^2\theta_R = 1$, como expresión análoga a $x_R^2 + y_R^2 = 1$.

Con todo este precedente, vayamos ahora a una descripción más precisa de las rotaciones consecutivas que estábamos tratando al comienzo del capítulo.

¿Cuál es el unitario de rotación correspondiente a una rotación de 90° ?

Tenemos que: $\upsilon_R = \begin{bmatrix} \cos\theta_R \\ \operatorname{sen}\theta_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90° \\ \operatorname{sen} 90° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = i$

Así, dado $z_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$, la rotación producida con un ángulo de $\theta_R = 90°$ resulta:

$$z_1 = \upsilon_R z_0 = iz_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \times x_0 - 1 \times y_0 \\ 0 \times y_0 + x_0 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_0 \\ x_0 \end{bmatrix} = z_0^{\perp}$$

En donde se aprecia que $iz_0 = z_0^{\perp}$

En consecuencia, podemos decir que multiplicar la unidad imaginaria i por un vector Z_0 genera una rotación de 90° sobre dicho vector, lo que nos da el ortogonal $Z_0^{\perp}$ (ver Fig. 28).

La unidad imaginaria i es el unitario de rotación de ángulo $\theta = 90°$.
El vector z_0 se transforma en el vector $z_0^{\perp}$.

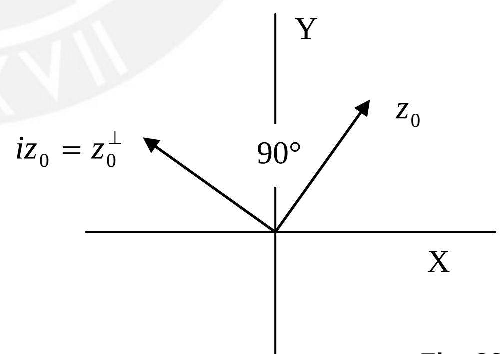


Fig. 28

¿Cuál es el unitario de rotación correspondiente a una rotación de 180°?

Tenemos que: $\upsilon_R = \begin{bmatrix} \cos\theta_R \\ \operatorname{sen}\theta_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 180° \\ \operatorname{sen} 180° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Así, dado $z_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$, la rotación producida con un ángulo de $\theta_R = 180°$ resulta:

$$z_1 = \upsilon_R z_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} z_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\times x_0 - 0\times y_0 \\ -1\times y_0 + x_0\times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_0 \\ -y_0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = -z_0$$

También sabemos que $i^2 z_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = -z_0$

En consecuencia, una multiplicación por i^2 genera dos veces una rotación de 90°, es decir una rotación de 180° (ver Fig. 29).

El valor i^2 es el unitario de rotación de ángulo $\theta = 180°$. El vector z_0 se transforma en el vector $-z_0$

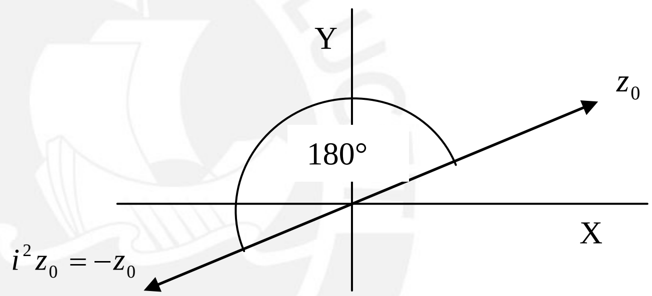


Fig. 29

Análogamente a los casos anteriores, el lector puede verificar que una multiplicación por i^3 genera tres veces una rotación de 90°, es decir una rotación de 270° correspondiente a $i^3 z_0 = -iz_0$.

Finalmente, el unitario de rotación para una rotación de 360° es:

$\upsilon_R = \begin{bmatrix} \cos\theta_R \\ \operatorname{sen}\theta_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 360° \\ \operatorname{sen} 360° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 0° \\ \operatorname{sen} 0° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, que es la unidad o elemento neutro de la multiplicación en C.

Así, dado el vector z_0, la rotación producida con un ángulo de $\theta_R = 360°$ resulta:

$z_1 = \upsilon_R z_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} z_0 = z_0$; que, como sabemos, equivale al producto: $i^4 z_0 = z_0$.

Con esto, cerramos un ciclo de multiplicaciones por i y el vector z_0 da una vuelta completa alrededor del origen, quedando en la posición original.

Según estamos observando, si a un vector z_0 lo multiplicamos sucesivamente por i, se producirán respectivamente sucesivas rotaciones de 90° de este vector.

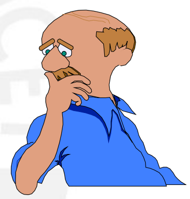
Dicho de otra manera, el *multiplicar* n veces $iiii...i = i^n$ se corresponde con *sumar* n veces $90° + 90° + 90° + ... + 90° = n(90°)$

Así, por ejemplo, si a un vector z_0 lo multiplicamos por i^7, es decir por i siete veces, este vector habrá rotado 90° siete veces, es decir $7 \times 90° = 630°$.

Esto es, $i^7 z_0 = i^3 i^4 z_0 = i^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} z_0 = i^3 z_0 = -z_0^{\perp}$

Esta posición, como ya hemos visto, corresponde a una rotación de 270°, la que es equivalente a 270°+360°= 630°

Esto, que se cumple para i, que es un unitario de rotación particular, ¿se cumplirá para todo unitario de rotación υ_R y su respectivo ángulo de rotación θ_R?



Por lo que estamos observando, parece que si a un vector z_0 en C lo multiplicamos sucesivamente por un unitario de rotación υ_R, se producirán respectivamente sucesivas rotaciones θ_R de este vector.

Precisemos mejor nuestra conjetura:

Parece que el *multiplicar* n veces $\upsilon_R \upsilon_R \upsilon_R ... \upsilon_R = \upsilon_R{}^n$, se corresponde con *sumar* n veces $\theta_R + \theta_R + \theta_R + ... + \theta_R = n\theta_R$

Esto resulta obvio si lo razonamos de la siguiente manera:

Si el producto de un vector z_0 por un unitario de rotación υ_R genera una rotación de ángulo θ_R, el siguiente producto por el mismo unitario de rotación υ_R generará una nueva rotación de ángulo θ_R, es decir que tendremos $2\theta_R$ a partir de la posición original. Finalmente, repitiendo el producto n veces tendremos una rotación $n\theta_R$ a partir de la posición original.

Esto nos lleva también a la consideración, más general, de que se apliquen sucesivamente dos unitarios de rotación diferentes, es decir:

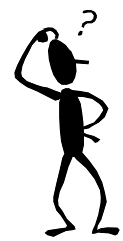
Si el producto de un vector z_0 por un unitario de rotación υ_R genera una rotación de ángulo θ_R y el siguiente producto por otro unitario de rotación υ_S genera una nueva rotación de ángulo θ_S, tendremos una rotación $\theta_R + \theta_S$ a partir de la posición original.

Estos razonamientos, basados en la visión intuitiva de rotación en un plano, nos permiten confiar plenamente en que podremos demostrar nuestras conjeturas.

Dejamos entonces a cargo del lector las pruebas de las siguientes propiedades:[11]

$$\upsilon_R \upsilon_S = \begin{bmatrix} \cos(\theta_R + \theta_S) \\ \operatorname{sen}(\theta_R + \theta_S) \end{bmatrix} \qquad (P_{17})$$

$$\upsilon_R{}^n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta_R) \\ \operatorname{sen}(n\theta_R) \end{bmatrix}, \ n \in Z^+ \qquad (P_{18})$$



La tercera transformación que nos va a interesar en el plano complejo es la *dilatación*[12] en C.

Esta transformación tiene que ver con la idea - que ya habíamos tratado intuitivamente - de "estiramiento" de flechas[13]. Decimos que un vector se dilata[14] cuando cambia su magnitud sin cambiar su dirección o línea de acción.

Para definir la transformación *dilatación*, recordemos la multiplicación de un elemento de $\Re$ por un elemento de C:

Dado $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ con $z \in C$ y $r \in \Re$; definimos[15] en (D_3) la multiplicación de un número real por un vector en C: $rz = r\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rx \\ ry \end{bmatrix}$

DEFINICIÓN 19

Se llama *dilatación* a la transformación H en C tal que, dado un $r \in \Re$,

$H(z) = rz$, para todo $z \in C$ $\qquad$ (D_{19})

---

[11] Recordemos que z^n es una notación equivalente a la expresión $zzz...z$, n veces

[12] Esta transformación se denomina también *homotecia en el plano.*

[13] Ver páginas 51, 52.

[14] En este contexto, el término *dilatación* tiene una acepción más amplia que la corriente. También puede significar, como veremos, un encogimiento o contracción del vector.

[15] Ver Capítulo 3, página 52.

La dilatación en C se puede visualizar en la siguiente figura:

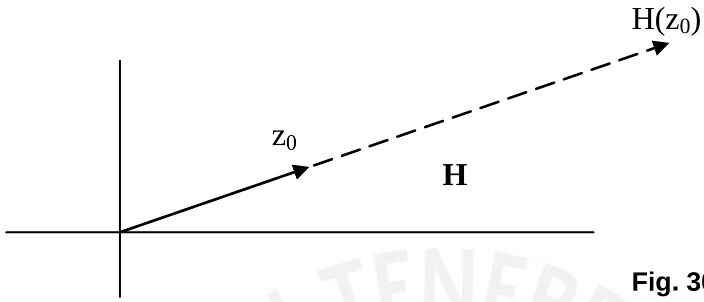


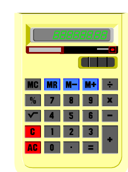
Fig. 30

En la figura 30, el vector z_0 se dilata hasta convertirse en $H(z_0)$, que es el vector resultante según la transformación $H(z) = rz$, para algún $r \in \Re$.

El ejemplo presentado en el gráfico corresponde a un $r > 1$. Sin embargo, debemos señalar que cuando $r = 1$ el vector no sufre alteración (podríamos hablar de una dilatación neutra) y cuando $0 < r < 1$ el vector se "contrae" (podríamos llamarle una dilatación inversa). Asimismo, cuando $r < 0$ el vector cambia de sentido y cuando $r = 0$ el vector, simplemente, se reduce al origen.

Ejemplo:

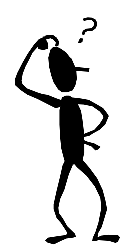
Dado $z_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$, con la transformación de dilatación: $H(z) = 10z$, $z \in C$,



tenemos:

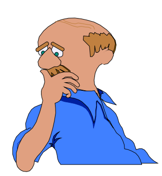
$$H(z_1) = 10z_1 = 10\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Ejercicios:
Probar que:



a) $U(z_1 + z_2) = U(z_1) + U(z_2)$
b) $U(z_1 z_2) = z_1 U(z_2) = z_2 U(z_1)$
c) $H(z_1 + z_2) = H(z_1) + H(z_2)$
d) $H(z_1 z_2) = z_1 H(z_2) = z_2 H(z_1)$

¿Qué relación podemos encontrar entre la multiplicación en C y la rotación y la dilatación?



El lector recordará que las operaciones de adición y multiplicación, definidas en C, también realizan cambios en el plano complejo, tales como “mover” o “estirar”; por lo cual, resulta razonable enfocar el concepto de operaciones en C usando el criterio de transformaciones del plano.

Si en la suma $z+z_0$ fijamos $z_0 \in C$ para todo $z \in C$, esto es equivalente a definir una traslación $T: C \to C$, $T(z) = z + z_0$.

Así pues, fijando uno de los sumandos, una adición en C se puede presentar como una *traslación* en el plano complejo.

Por ejemplo, en la suma $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$ interpretamos que el punto situado una unidad a la izquierda y cuatro unidades arriba del origen se ha “movido” dos unidades a la derecha y cinco unidades arriba, dando como posición final una unidad a la derecha y nueve unidades arriba del origen (ver Fig. 31).

.

El vector z_0 de la traslación genera un “desplazamiento” desde A hasta B, lo cual es equivalente a la suma $z + z_0$ desde el origen.

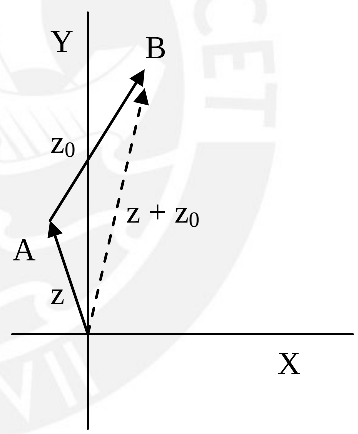


Fig. 31

En el producto $z\ z_0$, fijemos $z_0 \in C$ para todo $z \in C$.

Según (P15), este producto se puede escribir como $zz_0 = z\|z_0\|\upsilon_0$.

Haciendo $\|z_0\| = r$, escribimos $zz_0 = zr\upsilon_0 = (rz)\upsilon_0 = H(z)\upsilon_0$

Hasta aquí, lo que tenemos es una dilatación de $z \in C$, según la transformación H, multiplicada por un vector unitario υ_0.

Haciendo $\upsilon_0 = \upsilon_R$ (unitario de rotación), y según (D17), tenemos:

$zz_0 = H(z)\upsilon_R = \upsilon_R H(z) = U(H(z))$

En consecuencia, fijando uno de los factores, una multiplicación en C se puede presentar como una *composición* $[U \circ H](z) = U(H(z))$ de una *rotación* U con una *dilatación* H en el plano complejo.

Ejemplo:

Si tenemos los vectores $z_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $z_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$, en el producto $z_1 z_2$ podemos considerar que z_1 va a ser transformado por z_2 (ver Fig. 32).[16]

Calculamos el módulo de z_2:

$$\|z_2\| = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 4$$

Calculamos el unitario de z_2 según (P_{15}):

$$\upsilon_2 = \frac{1}{\|z_2\|} z_2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

Podemos hallar el ángulo de rotación del unitario υ_2 según (D_{18}):

$$\upsilon_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_R \\ \operatorname{sen}\theta_R \end{bmatrix}, \text{ de donde: } \begin{matrix} \cos\theta_R = 1/2 \\ \operatorname{sen}\theta_R = \sqrt{3}/2 \end{matrix} \Rightarrow \theta = 60°$$

En el producto $z_1 z_2$, el vector z_1 resulta dilatado cuatro veces y luego girado 60°.

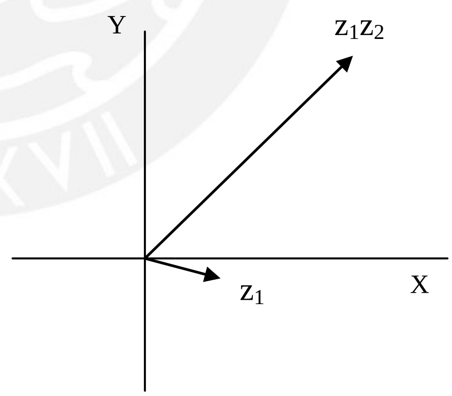


Fig. 32

Estamos entendiendo esta transformación compuesta en el sentido que primero se produce una dilatación y luego una rotación.[17] Así, en el ejemplo

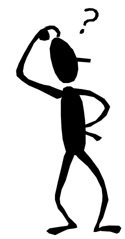
[16] La propiedad conmutativa de la multiplicación en C nos permite elegir indistintamente qué vector va a ser transformado. Estrictamente hablando, es la composición $[U \circ H](z)$ quien transforma a z_1.

[17] La composición de transformaciones es, en general, no conmutativa.

anterior dijimos que el vector z_1 resultaba dilatado cuatro veces y luego girado 60°. ¿Podríamos considerar el sentido inverso y decir que esta transformación compuesta equivale a primero girar y luego dilatar? En otras palabras, ¿esta transformación compuesta es conmutativa?

Intuitivamente podemos visualizar cada uno de los casos y darnos cuenta que "estirar y luego girar" es equivalente a "girar y luego estirar".

Dejamos a cargo del lector la prueba de esta conmutatividad.



Ejercicio:

Probar que:

$[U \circ H](z) = [H \circ U](z)$

CAPÍTULO SEIS
A TRAVÉS DEL ESPEJO*

A partir de las definiciones y propiedades que hemos estado desarrollando en el contexto de un espacio vectorial, en donde cada número complejo es un vector representado en el plano C, veremos que podemos llegar a expresar los números complejos en otras formas equivalentes; esto es: en forma de binomio, en forma polar y en forma de matriz cuadrada. En la forma binómica, un número complejo es expresado como un binomio, donde un término es la parte real y el otro tiene la parte imaginaria. En la forma polar, y con un énfasis más bien geométrico, el número complejo está representado por las coordenadas polares del punto que lo representa en el plano, es decir, por una distancia y un ángulo. En la forma matricial, los números complejos son expresados como un tipo especial de matrices cuadradas.

Por último, mostraremos, de una manera sucinta y a nivel informativo, que los números complejos también pueden ser expresados como clases residuales de polinomios. Esta última representación, que llamamos forma modular, tiene una naturaleza muy independiente de las anteriores y además, para su estudio, requiere de un conocimiento previo de aritmética modular y álgebra de polinomios, temas sobre los cuales no vamos a insistir. De todos modos, la hemos incluido porque es una forma poco conocida, permite ver cómo se interrelacionan algunos conceptos de la aritmética y el álgebra y puede despertar la curiosidad intelectual del lector.

* Del título de la obra *Through the Looking-Glass and what Alice found There* de Lewis Carroll

a) Forma Binómica de los Números Complejos

Pensemos en dos vectores z_1 y z_2 en C, que están sobre el eje X (ver Fig.33).

Como ya hemos visto, estos vectores pertenecen a la recta $\Re$ en el plano C; es decir, son números reales en C:

$$z_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \Re \subset C,$$

$$z_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \Re \subset C$$

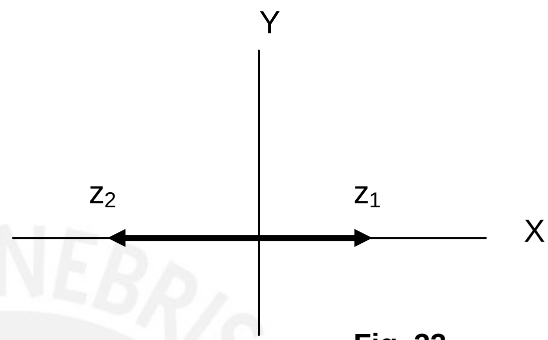


Fig. 33

Tal como se vio en el Cap. 4, la suma y el producto de z_1 y z_2 son respectivamente:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \Re \subset C$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \times x_2 - 0 \times 0 \\ x_1 \times 0 + x_2 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \Re \subset C$$

Esto nos permite manejar una notación en donde vamos a poder *identificar* operacionalmente el número complejo $\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$ con el número real r, es decir que podemos hacer: $\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow r, \quad r \in \Re$

En virtud de las propiedades anteriormente estudiadas, si ahora tenemos un número complejo $z_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$, éste puede escribirse de la siguiente forma:

$$z_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + 0 \\ 0 + y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix} + y_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si identificamos $\begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix}$ con el número real x_0 y usamos la notación adoptada anteriormente $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = i$, resulta:

$z_0 = x_0 + y_0 i$, $x_0 \in \Re$, $y_0 \in \Re$.

Busquemos ahora una forma de identificar el número complejo i.

Como el número i no es de la forma $\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$, no podemos identificarlo con un número real r; pero obtenemos una identificación indirecta con la siguiente operación:

$$i^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow -1$$

Así, llegamos a la denominada *forma binómica* de los números complejos, que usualmente se representa como:

$$z = a + bi; \quad a \in \Re, \; b \in \Re, \; i^2 = -1.$$

Esta forma permite operar con los números complejos *como si fueran* binomios de números reales, facilitando de este modo sus operaciones.

Así, para multiplicar $z_1 = 2 + 3i$ con $z_2 = 11 + 4i$, procedemos así:

$$z_1 z_2 = (2+3i)(11+4i) = 22 + 8i + 33i + 12i^2 = 22 + 8i + 33i + 12(-1) = 10 + 41i$$

Como es natural, este resultado es el mismo que cuando operamos con vectores en C:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 11 - 3\times 4 \\ 2\times 4 + 11\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 41 \end{bmatrix}$$

Ahora, si tenemos dos números complejos, por ejemplo $z_1 = 3 + 4i$ y $z_2 = 2 + 5i$, y queremos dividir z_1 por z_2, nos encontramos con el inconveniente de tener un binomio de la forma $a + bi$ como divisor. Sin embargo, si multiplicamos dividendo y divisor por el conjugado de z_2, resulta un número real como divisor y entonces la división se hace muy fácil.

En efecto, si $z_2 = x_2 + y_2 i$, el conjugado de z_2 se escribe $\overline{z_2} = x_2 - y_2 i$, y el producto de ellos resulta:

$z_2 \overline{z_2} = (x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i) = x_2^2 - (y_2 i)^2 = x_2^2 + y_2^2 = \|z_2\|^2$; que, como sabemos, es un número real.

Así, para dividir z_1 por z_2 multiplicaremos dividendo y divisor por el conjugado de z_2, que para este caso es el número $2-5i$, obteniéndose finalmente un número real como divisor:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+4i}{2+5i} = \frac{(3+4i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)} = \frac{6-15i+8i-20i^2}{4-25i^2} =$$

$$= \frac{6-15i+8i-20(-1)}{4-25(-1)} = \frac{26-7i}{29} =$$

$$= \frac{26}{29} - \frac{7}{29} i$$

Como es de esperar, este mismo resultado también es obtenido cuando operamos con vectores en C:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \div \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2^2+5^2} \begin{bmatrix} 3\times 2 + 4\times 5 \\ 2\times 4 - 3\times 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{29} \begin{bmatrix} 26 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26/29 \\ -7/29 \end{bmatrix}$$

Ejercicios:

a) Dados: $z_1 = 4+7i$, $z_2 = -5+8i$, hallar:

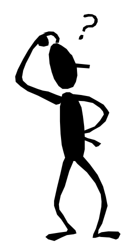
$z_1 + z_2$

$z_1 z_2$

z_1 / z_2

$z_1^2 + z_2^2$

$z_1^{-1} + z_2^{-1}$



b) Dados los imaginarios z_1, z_2; si $z_1 + z_2 \in \Re$, $z_1 z_2 \in \Re$, probar que $z_1 = \overline{z_2}$.

c) Dados los puntos en el plano C: $2+i$, $4+3i$; hallar los valores posibles de un tercer punto para que los tres puntos en el plano formen un triángulo equilátero.

d) El centro de un cuadrado es el punto $-2+i$ y un vértice es $1+3i$. Hallar los otros vértices.

e) Hallar: $\dfrac{1+i}{1+2i}+\dfrac{1-i}{1-2i}$

f) Hallar el conjunto solución de la ecuación: $z+\overline{z}=8$

b) Forma Polar y Exponencial de los Números Complejos. Ecuaciones Polinomiales.

Forma Polar

Si tenemos un vector de la forma $z_0 = \begin{bmatrix} \rho \\ 0 \end{bmatrix}$, es decir sobre el eje X, en donde $\rho \geq 0$, éste estará representado por la figura 34.

El módulo de este vector es:

$$\|z_0\| = \sqrt{\rho^2 + 0} = \rho$$

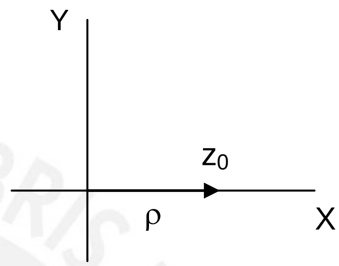


Fig. 34

Si aplicamos una rotación U, según un ángulo de rotación θ (ver Fig. 35), obtenemos:

$$U(z_0) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} z_0 = z$$

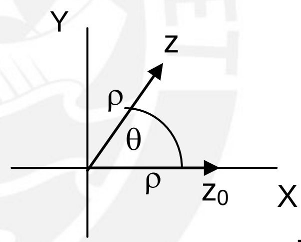


Fig. 35

Esto también puede escribirse como:

$$z = z_0 \begin{bmatrix} \cos\theta + 0 \\ 0 + \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \right)$$

$$z = \begin{bmatrix} \rho \\ 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \operatorname{sen}\theta \right) \qquad \text{............(1)}$$

Análogamente a lo desarrollado en la parte (a), podemos identificar:

$$\begin{bmatrix} \rho \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \rho, \quad \begin{bmatrix} \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \cos\theta, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = i \ \text{ con } \ i^2 \leftrightarrow -1 \qquad \text{............(2)}$$

Como la transformación aplicada es una rotación:

$$\|z\| = \|z_0\| = \rho \qquad \text{............(3)}$$

La forma polar se basa en una interpretación geométrica, en donde el número complejo z, representado por un punto Z en el plano, está determinado por su distancia desde el origen de coordenadas y por el ángulo que forma el segmento dirigido al punto Z con un eje de referencia.

En la figura 36, al número complejo z lo representamos por el punto Z, a la longitud del segmento OZ (distancia desde el origen) la llamamos *módulo de* z y al ángulo XOZ lo llamamos *argumento* de z.

Considerando las expresiones (1), (2) y (3), identificamos la longitud del segmento OZ con el módulo $\|z\| = \rho$, identificamos el argumento de z con el ángulo de rotación θ y podemos escribir en la forma polar:

$$z = \rho\left(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$$

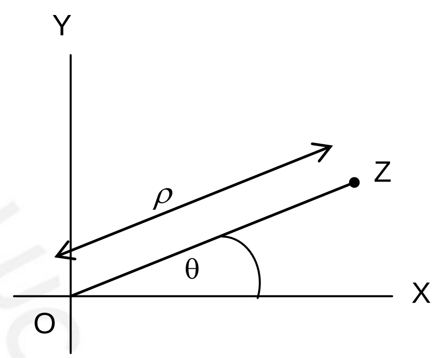


Fig. 36

Si z_1 y z_2 son vectores en C, el producto se puede expresar:

$$z_1 z_2 = \left(\|z_1\|\upsilon_1\right)\cdot\left(\|z_2\|\upsilon_2\right) = \|z_1\|\|z_2\|\upsilon_1\upsilon_2$$

Según (P$_{12}$), $\upsilon_1\upsilon_2 = \begin{bmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2)\\ \mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)\end{bmatrix}$,

por lo tanto:

$$z_1 z_2 = \|z_1\|\|z_2\|\upsilon_1\upsilon_2 = \|z_1\|\|z_2\|\begin{bmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2\\ \mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)\end{bmatrix}$$

Lo cual, en la notación polar, se escribe:

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2))$$

Esta expresión nos dice que el producto de dos números complejos es otro complejo cuyo módulo es igual al producto de sus módulos y su argumento igual a la suma de sus argumentos.

La forma polar utiliza también la notación abreviada:
$z = \rho\ cis\theta$, en donde $cis\theta = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$.
Así, la propiedad anterior se puede escribir:

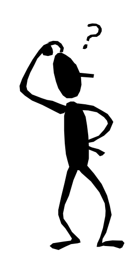
$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\ cis(\theta_1+\theta_2)$$

Ejercicios:

a) Probar que: $z^n = \rho^n\ cis(n\theta)$, $n \in Z^+$ (Propiedad de De Moivre)

b) Probar que: $z^n + z^{-n} = 2\cos(n\theta)$, $\|z\| = 1$. [Denotamos $z^{-n} = \left(z^{-1}\right)^n$]

c) Encontrar una fórmula para la suma de números complejos en la forma polar.



Forma Exponencial

Hagamos: $cis\theta = f(\theta)$
Por las propiedades anteriores, podemos afirmar que:
$f(\theta_1)f(\theta_2) = f(\theta_1 + \theta_2)$
$(f(\theta))^n = f(n\theta)$

Si pensamos ahora en una función $g(\theta) = e^{i\theta}$, podemos considerar que:
$g(\theta_1)g(\theta_2) = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)} = g(\theta_1 + \theta_2)$
$(g(\theta))^n = (e^{i\theta})^n = e^{i(n\theta)} = g(n\theta)$

Esto nos permite identificar la función g con la función f, y definir:

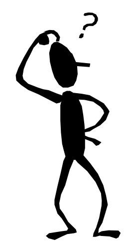
$e^{i\theta} := cis\theta$ (Relación de Euler)[21]

Ejercicios:
Probar que:

a) $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

b) $e^{i\pi} + 1 = 0$

c) $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2} \Leftrightarrow \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$, $k \in Z$



Raíces enésimas de la unidad

Si en el sistema de los números reales, resolvemos la ecuación:
$x^2 = 1$, $x \in \Re$,
encontraremos que las soluciones son:
$x_1 = 1$, $x_2 = -1$, pues: $1^2 = 1$ y $(-1)^2 = 1$

Si resolvemos la siguiente ecuación:
$x^3 = 1$, $x \in \Re$,
encontraremos como única solución:
$x_1 = 1$, pues: $1^3 = 1$ (en este caso no hay solución negativa)

[21] El valor de θ debe darse necesariamente en radianes.

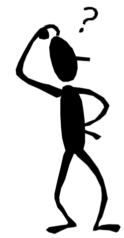
En la ecuación genérica:

$x^n = 1, \quad x \in \Re, \; n \in Z^+,$

podemos decir que las soluciones son las siguientes:

Si n es par; $x_1 = 1, \; x_2 = -1$, y

si n es impar, $x_1 = 1$. (Probarlo)



Volvamos ahora al sistema de los números complejos y planteemos:

$z^3 = 1, \quad z \in C$.

La solución obvia para esta ecuación es $z_1 = 1$. Pero, ¿será la única solución en C?

Podemos ver que también hay otras soluciones en C para esta ecuación.

Por ejemplo:

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 3\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 =$$

$$= -\frac{1}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i + \frac{9}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8} =$$

$$= 1$$

Análogamente, también podemos verificar que:

$$\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = 1.$$

NOTA:

Hemos hecho esta operación usando la forma binómica; sin embargo, en general, una potenciación en los números complejos se puede hacer de modo más conveniente expresando el número en la forma polar.

Así, el lector puede comprobar que, para el número $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$, el módulo y el argumento son respectivamente: $\rho = 1$ y $\theta = 120°$.

Aplicando la propiedad de De Moivre, la operación resulta:

$$\left(1\cdot\left(\cos 120° + i\,\mathrm{sen}\,120°\right)\right)^3 = 1^3 \cdot \left(\cos(3\times 120°) + i\,\mathrm{sen}(3\times 120°)\right) =$$

$$= \cos 360° + i\,\mathrm{sen}\,360° = 1 + i(0) =$$

$$= 1$$

Así, estamos viendo que en la ecuación $z^3 = 1, \; z \in C$, existen las soluciones:

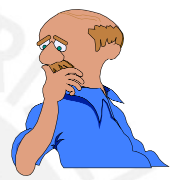
$$z_1 = 1, \quad z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Sin embargo, lo que nos interesa realmente no es tener estas soluciones, sino encontrar un camino para llegar a todas ellas (no sabemos si son sólo tres); y además queremos resolver el problema de un modo general, pues también podrían plantearse las ecuaciones para $z \in C$: $z^4 = 1$, $z^5 = 1$, $z^6 = 1$, etc.

Veamos, entonces, la siguiente definición:

Se denomina *raíz enésima de la unidad* al número complejo w tal que $w^n = 1$, $n \in Z^+$

¿Es w un vector unitario?



Planteándolo con vectores en C:

$$w^n = \rho^n \begin{bmatrix} \cos(n\theta) \\ \text{sen}(n\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho^n \cos(n\theta) \\ \rho^n \text{sen}(n\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$, de donde

$\rho^n \cos(n\theta) = 1$ ...(1)

$\rho^n \text{sen}(n\theta) = 0$ ...(2)

De (2), $\text{sen}(n\theta) = 0 \Rightarrow n\theta = m\pi$, $m \in Z$

Para el caso de m par, hacemos, $m\pi = 2k\pi$, $k \in Z$ ....(3)

Reemplazando en (1):

$\rho^n \cos(n\theta) = \rho^n \cos(2k\pi) = \rho^n \times 1 = 1$

De donde:

$\rho = 1$ (luego, w es un vector unitario)

En el caso de m impar, no hay solución con $\rho \in \Re^+$ en la ecuación (1), pues: $\rho^n \cos(n\theta) = \rho^n \cos((2k+1)\pi) = \rho^n \cos\pi = \rho^n(-1) = -\rho^n < 0$.

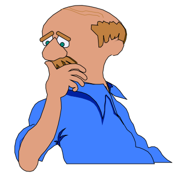
Luego, de (3): $\theta = \dfrac{2k\pi}{n}$.

Por consiguiente:

Las raíces enésimas de la unidad son todas las raíces de la forma:

$$w_k = cis\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad k \in Z$$

¿Cuántas raíces enésimas tiene la unidad?



Ejemplo:
Hallar las raíces cúbicas de la unidad:

Como $n = 3$, tenemos:
:

$$w_k = cis\left(\frac{2k\pi}{3}\right), \ k \in Z$$

Para $k = 0$, $w_0 = cis(0) = \cos(0) + i\,\mathrm{sen}(0) = 1 + i(0) = 1$

Para $k = 1$, $w_1 = cis\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Para $k = 2$, $w_2 = cis\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(estas son las soluciones anteriormente mostradas para $z^3 = 1$)

Si continuamos el proceso, o tomamos valores negativos para k, encontraremos que los valores de w_k se repiten. En consecuencia, la unidad tiene tres raíces cúbicas (ver Fig. 37).

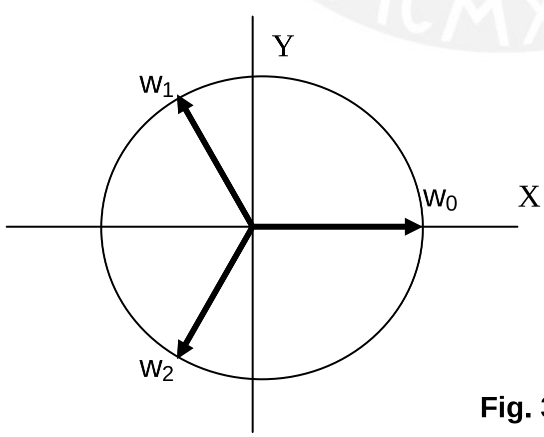


Fig. 37

Ubicación similar tendrían las n raíces de la ecuación $z^n = 1$; es decir, habría n vectores ubicados en la circunferencia unitaria en los extremos de los arcos de longitud $\frac{2\pi}{n}$, siendo uno de ellos el punto (1, 0).

Ejercicios:

a) Probar que la unidad tiene n raíces enésimas.

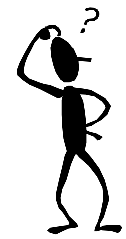
b) ¿El número i es una raíz enésima de la unidad? Si es así, ¿a qué valor de n corresponde?

c) Probar que $\rho_1 cis\theta_1 = \rho_2 cis\theta_2 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \wedge \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$, $k \in Z$

d) Encontrar una fórmula para hallar las raíces enésimas de un número real x.

e) Hallar las raíces enésimas de i. Interpretar gráficamente la solución.

f) Encontrar una fórmula para hallar las raíces enésimas de un número complejo z.



Ecuaciones Polinomiales

La idea de raíces de un número, se extiende a las raíces de un polinomio o, más propiamente, a las soluciones de una ecuación polinomial.

DEFINICIÓN

En el conjunto de los números complejos, se llama *ecuación polinomial* de grado k a la ecuación algebraica[22] de la forma:

$$a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0 ,$$

en donde $a_0, a_1, a_2, ..., a_k$ son coeficientes complejos y $a_k \neq 0$

Por ejemplo, cualquier ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$ es una ecuación polinomial y, como sabemos, admite dos soluciones.

Igualmente sabemos que, por los aportes de los algebristas desde el Renacimiento, las ecuaciones de tercer grado admiten tres soluciones y las de cuarto grado cuatro soluciones.

Es natural conjeturar que cualquier ecuación polinomial de grado n admite entonces n soluciones, en general complejas.

Para ello, veamos lo que nos dice el Teorema Fundamental del Álgebra, demostrado por Gauss en 1799:

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

En el conjunto de números complejos, toda ecuación polinomial de grado $n \geq 1$ *tiene solución*.

Con este enunciado, queremos decir que la ecuación polinomial de grado $n \geq 1$ $P_n(x) = 0$, puede descomponerse en $P_{n-1}(x) \cdot (x - x_1) = 0$, es decir que x_1 es una solución de la ecuación $P_n(x) = 0$.

[22] La ecuación *algebraica* se distingue de las otras ecuaciones en que no incorpora funciones trascendentes, como las funciones trigonométricas, logarítmicas o exponenciales.

Ejercicios:

a) Probar que el producto de dos raíces enésimas de la unidad es una raíz enésima de la unidad.

b) Probar que, si w es una raíz enésima de la unidad, w^{-1} también es una raíz enésima de la unidad.

c) Probar que, en el conjunto de los números complejos, toda ecuación polinomial de grado $n \geq 1$ admite n soluciones.

d) Probar que toda ecuación polinomial de coeficientes reales, de grado impar, tiene *al menos* una solución real.

(Ver: Propiedades del *conjugado*)

e) Encontrar una solución general para la ecuación:

$x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1 = 0$; $n = 1,2,3,\ldots$

(Ver: Raíces enésimas de la unidad)

f) Probar que la siguiente ecuación tiene *a lo sumo* una solución real.

$x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1 = 0$; $n = 1,2,3,\ldots$

(Ver: Raíces enésimas de la unidad)

c) Forma Matricial de los Números Complejos

Una matriz $A_{m\times n}$ puede considerarse como un arreglo rectangular de números reales ubicados en m filas y n columnas. Al número que está en la *i-ésima* fila y la *j-ésima* columna de la matriz lo llamamos a_{ij}. Decimos que el *orden* de la matriz $A_{m\times n}$ es $m\times n$. Esta matriz también puede denotarse en la forma genérica $A=(a_{ij})_{m\times n}$.

Así, una matriz $A_{2\times 3}$ tiene la forma: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

Si una matriz A es de orden $n\times n$ (número de filas igual a número de columnas), entonces decimos que la matriz A es una *matriz cuadrada* de orden n.

Por ejemplo, las matrices A y B son matrices cuadradas de órdenes 2 y 3, respectivamente:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\; B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Igualdad de Matrices

Dos matrices $m\times n$, $A=(a_{ij})_{m\times n}$ y $B=(b_{ij})_{m\times n}$, son *iguales* si $a_{ij}=b_{ij}$ para $i=1,2,\ldots,m$ y $j=1,2,\ldots,n$.

Ejemplo:

Las matrices $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix}$ son iguales si

$a=u$, $b=v$, $c=w$, $d=x$, $e=y$, $f=z$.

Suma de Matrices

Definimos la suma de matrices como:

$A+B=(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$, para $i=1,2,\ldots,m$ y $j=1,2,\ldots,n$.

(Las matrices A y B deben ser del mismo orden)

Ejemplo:

Si $A=(a_{ij})_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $B=(b_{ij})_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 7 \\ 11 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

$$A+B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 9 & 0 & 7 \\ 11 & 6 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 0 & 5 \\ 12 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

Producto de una Matriz por un Número Real

Definimos el producto de una matriz $A=(a_{ij})_{m\times n}$ por un número real α a la matriz $(\alpha a_{ij})_{m\times n}$ denotada como αA.

Ejemplo:

Si $A=(a_{ij})_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $\alpha=7$, entonces:

$$7A=(7a_{ij})_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 7\times 3 & 7\times 0 & 7\times(-2) \\ 7\times 1 & 7\times 4 & 7\times 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 21 & 0 & -14 \\ 7 & 28 & 35 \end{pmatrix}$$

Producto de Matrices

Definimos el producto[23] de las matrices $A=(a_{ij})_{m\times n}$ y $B=(b_{jk})_{n\times p}$ como:

$AB=(a_{ij})_{m\times n}(b_{jk})_{n\times p}=(c_{ik})_{m\times p}$, para $i=1,2,...,m$; $j=1,2,...,n$; $k=1,2,...,p$; donde: $(c_{ik})_{m\times p}=(a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+a_{i3}b_{3k}+...+a_{in}b_{nk})_{m\times p}$ (Los órdenes de las matrices A y B deben ser de la forma $m\times n$ y $n\times p$ respectivamente)

Ejemplo:

Si $E=(e_{ij})_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $F=(f_{jk})_{3\times 1}=\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$EF=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\times(-5)+(-1)\times 6+0\times 7 \\ 3\times(-5)+2\times 6+1\times 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -26 \\ 4 \end{pmatrix}$$

En el caso particular de las matrices cuadradas de orden 2, la suma y el producto toman la siguiente forma:

Dadas las matrices A y B:

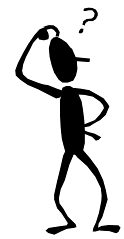
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix},\quad AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

[23] Esta operación de matrices es, en general, no conmutativa.

Ejercicios:

a) Si $\begin{pmatrix} a+b & c+d \\ c-d & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$, hallar a, b, c y d.



b) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$, hallar $A+B$ y AB

c) Sean $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Demostrar que $PQ \neq QP$.

d) Si a y b son dos números reales, sabemos que si $ab = 0$ entonces $a = 0 \vee b = 0$. Sin embargo, esto no se cumple para las matrices. Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, encontramos que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. ¿Podría el lector mostrar otro ejemplo?

e) Definiendo valores numéricos para dos matrices de la forma $E = (e_{ij})_{2\times 2}$ y $F = (f_{ij})_{2\times 1}$, hallar EF.

Representación de los Números Complejos

Según ya hemos visto, en el sistema C, si tenemos un vector z_0, podemos generar una rotación a z_1 por la transformación: $U(z_0) = \begin{bmatrix} \cos\theta_R \\ \operatorname{sen}\theta_R \end{bmatrix} z_0 = z_1$ según el ángulo de rotación θ_R (ver Fig. 38).

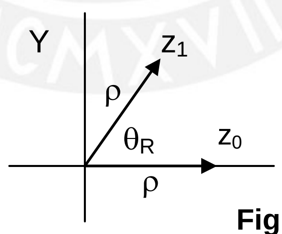


Fig. 38

Poniendo $z_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$, $z_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ tenemos la expresión vectorial:

$$U(z_0) = \begin{bmatrix} \cos\theta_R \\ \operatorname{sen}\theta_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} \cos\theta_R x_0 - \operatorname{sen}\theta_R y_0 \\ \cos\theta_R y_0 + \operatorname{sen}\theta_R x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad .....(1)$$

Si identificamos el vector z_1 del sistema C con una matriz columna de orden 2×1, esto es: $z_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, podemos escribir, según (1):

$$z_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_R x_0 - \operatorname{sen}\theta_R y_0 \\ \operatorname{sen}\theta_R x_0 + \cos\theta_R y_0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta_R x_0 - \operatorname{sen}\theta_R y_0 \\ \operatorname{sen}\theta_R x_0 + \cos\theta_R y_0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz columna, a su vez, puede ser expresada como el siguiente producto de matrices:

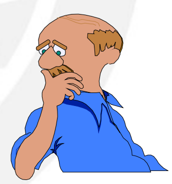
$$\begin{pmatrix} \cos\theta_R x_0 - \operatorname{sen}\theta_R y_0 \\ \operatorname{sen}\theta_R x_0 + \cos\theta_R y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_R & -\operatorname{sen}\theta_R \\ \operatorname{sen}\theta_R & \cos\theta_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Esto nos permite expresar:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_R & -\operatorname{sen}\theta_R \\ \operatorname{sen}\theta_R & \cos\theta_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \text{.... (2)}$$

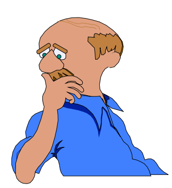
lo cual sugiere que la matriz cuadrada de segundo orden $\begin{pmatrix} \cos\theta_R & -\operatorname{sen}\theta_R \\ \operatorname{sen}\theta_R & \cos\theta_R \end{pmatrix}$, que multiplica a la matriz columna $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, se la conozca como la *matriz de rotación* según el ángulo de rotación θ_R.

¿Es posible entonces representar los números complejos como matrices?



Esto nos lleva a la idea de que los números complejos pueden ser expresados como matrices, con sus operaciones definidas de adición y multiplicación; pero ello exigiría que estas matrices fueran todas del mismo orden.

¿De qué orden tendrían que ser estas matrices?



En principio, las matrices representativas de los números complejos deberán ser necesariamente matrices cuadradas (¿Por qué?)

Según (2), podemos apreciar que el operador $\begin{pmatrix} \cos\theta_R & -\operatorname{sen}\theta_R \\ \operatorname{sen}\theta_R & \cos\theta_R \end{pmatrix}$ representa un unitario de rotación. Es decir, que el unitario de rotación en C puede identificarse con la matriz de rotación que ya hemos definido:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_R \\ \operatorname{sen}\theta_R \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta_R & -\operatorname{sen}\theta_R \\ \operatorname{sen}\theta_R & \cos\theta_R \end{pmatrix}.$$

Con lo cual, poniendo $x = \cos\theta_R$, $y = \operatorname{sen}\theta_R$, resulta natural suponer que para todo $z \in C$, podemos identificar un elemento equivalente en $M_{2\times 2}$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Sin embargo, no estamos del todo convencidos. ¿Cómo podemos asegurar que los números complejos se pueden representar en esta forma matricial?

Debemos para esto probar que esta representación de z en $M_{2\times 2}$ es consistente con las operaciones de adición y multiplicación definidas en C.

Así, identificando $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}$ y $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}$, verificaremos las operaciones correspondientes:

1) <u>Prueba de la Suma</u>:

a) Operando como vectores en C:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

b) Operando matricialmente:

$$\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & -(y_1 + y_2) \\ y_1 + y_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Resultados que se corresponden según la identificación establecida:

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & -(y_1 + y_2) \\ y_1 + y_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

2) <u>Prueba del Producto</u>:

a) Operando como vectores en C:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 \\ x_1y_2 + x_2y_1 \end{bmatrix}$$

b) Operando matricialmente:

$$\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & x_1(-y_2) - y_1x_2) \\ y_1x_2 + x_1y_2 & y_1(-y_2) + x_1x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & -(x_1y_2 + y_1x_2) \\ x_1y_2 + y_1x_2 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix}$$

Resultados que se corresponden según la identificación establecida:

$$\begin{bmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 \\ x_1y_2 + y_1x_2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & -(x_1y_2 + y_1x_2) \\ x_1y_2 + y_1x_2 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix}$$

En consecuencia, los números $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in C$ pueden ser expresados como matrices cuadradas de la forma $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ con las operaciones matriciales definidas en $M_{2\times 2}$.

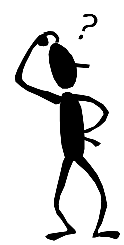
Ejercicios:

Utilizando la representación matricial de números complejos:

a) Comprobar que los números complejos conforman un campo, identificando los inversos, elementos identidad y unidad imaginaria.

b) Definir el ortogonal, el unitario y el conjugado de un número complejo.

c) Hallar $U(z_0)$ con $z_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ para un ángulo de rotación de 60°.



d) Forma Modular de los Números Complejos

Para abordar esta parte se requiere algún conocimiento de aritmética modular y álgebra de polinomios. La forma modular que estamos tratando presenta a los números complejos como clases residuales de polinomios.

Para esto, debemos expresar qué se entiende por *congruencia de polinomios*. Si consideramos que hay una familia de polinomios *congruentes* relativos a un cierto polinomio $d(x)$, estamos diciendo que este polinomio $d(x)$ divide exactamente a la diferencia de dos cualesquiera de estos polinomios. Esto es, dados dos polinomios $u(x)$ y $v(x)$, decimos que $u(x)$ es *congruente* con $v(x)$, relativo al polinomio $d(x)$, si y sólo si existe el polinomio $q(x)$ tal que: $u(x)-v(x)=d(x)\cdot q(x)$.

Llamaremos a este polinomio $d(x)$ el *módulo* de esta congruencia.

Por ejemplo, si tenemos $d(x)=2x+1$, decimos que los polinomios $u(x)=2x^3+x^2+9x+6$ y $v(x)=2x^2-4x-1$ son congruentes relativos al módulo $d(x)=2x+1$, pues:

$$u(x)-v(x)=(2x^3+x^2+9x+6)-(2x^2-4x-1)=2x^3-x^2+13x+7,$$

diferencia que contiene exactamente al módulo $d(x)=2x+1$. Esto es:

$$2x^3-x^2+13x+7=(2x+1)(x^2-x+7)=d(x)\cdot q(x).$$

Por consiguiente, análogamente a la Aritmética Modular, decimos que dos polinomios $u(x)$ y $v(x)$ son congruentes relativos a $d(x)$, cuando tienen el mismo residuo al ser dividido cada uno por $d(x)$. Así, son congruentes toda una familia o *clase residual de polinomios*, de la cual su *representante* es el *residuo* $r(x)$. Obviamente, el residuo de una clase residual es congruente con los miembros de la misma clase.

Una congruencia entre $u(x)$ y $v(x)$, relativa a $d(x)$, se denota como:

$$u(x)\equiv v(x),\ \text{módulo } d(x).$$

Nuestra idea ahora es construir un sistema S que tenga el mismo comportamiento que el sistema C de los números complejos, de modo que cada número complejo pueda ser identificado con cada uno de los miembros de este sistema S.

En el sistema de los números complejos, la ecuación $\omega^2+1=0$ tiene solución. Esto nos sugiere definir una congruencia entre polinomios de modo que $x^2+1\equiv 0$. Obviamente, esto se cumple si elegimos el módulo como $d(x)=x^2+1$. En consecuencia, en el sistema S, cada número complejo debe ser equivalente a una clase residual de polinomios de módulo $d(x)=x^2+1$. Como el grado del residuo $r(x)$ es menor que el grado del divisor $d(x)$, es claro que el residuo, como representante de clase de polinomios, será siempre un binomio $m+nx$ en donde $m,n\in\Re$.

La consecuencia de esto es que, con el módulo x^2+1, necesariamente la expresión x^2 resulta congruente con el número real –1, esto es, $x^2 \equiv -1$.

La forma como se llega a esta congruencia resulta de dividir x^2 por el módulo x^2+1, obteniéndose el residuo $r(x) = -1$.

$$\begin{array}{r|l} x^2+1-1 & x^2+1 \\ \cline{2-2} \underbrace{-1}_{\text{r(x)}} & \underbrace{1}_{\text{q(x)}} \end{array}$$

De este modo: $x^2 \equiv -1$, $\text{módulo}\,(x^2+1)$.

Esta congruencia resulta análoga a la igualdad $i^2 = -1$ que vimos en la parte (a) de este capítulo; lo que nos permite considerar que el binomio $m+nx$, como clase residual de polinomios, estaría representando un número complejo.

Si esto no nos ha convencido, veamos entonces la correspondencia entre la forma binómica $a+bi$ y la forma modular $m+nx$, $\text{módulo}\,(x^2+1)$:

a) Si tenemos los números complejos a_1+b_1i, a_2+b_2i, sabemos que la suma y el producto de estos números resultan iguales a:

<u>Suma</u>: $(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i) = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$ ....(1)

<u>Producto</u>: $(a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i) = (a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$ ....(2)

b) Para el caso de las clases residuales de S: m_1+n_1x, m_2+n_2x, $\text{módulo}\,(x^2+1)$, la suma y el producto de estas clases residuales resultan congruentes a:

<u>Suma</u>: $(m_1+n_1x)+(m_2+n_2x) \equiv (m_1+m_2)+(n_1+n_2)x$ ....(3)

<u>Producto</u>: $(m_1+n_1x)\cdot(m_2+n_2x) \equiv m_1m_2+(m_1n_2+m_2n_1)x+n_1n_2x^2$

Para obtener el representante del producto, lo dividimos por x^2+1:

$$\begin{array}{l|l} n_1n_2x^2+(m_1n_2+m_2n_1)x+m_1m_2 & x^2+1 \\ \cline{2-2} \underbrace{(m_1n_2+m_2n_1)x+(m_1m_2-n_1n_2)}_{\text{r(x)}} & \underbrace{n_1n_2}_{\text{q(x)}} \end{array}$$

Ordenando el residuo $r(x)$, el producto queda finalmente:

$(m_1+n_1x)\cdot(m_2+n_2x) \equiv (m_1m_2-n_1n_2)+(m_1n_2+m_2n_1)x$ ....(4)

Comparando las expresiones (1) – (3) y (2) – (4), se puede apreciar que las sumas y los productos presentan respectivamente formas equivalentes con relación a los valores dados.

Esto nos permite identificar: $a \leftrightarrow m$, $b \leftrightarrow n$

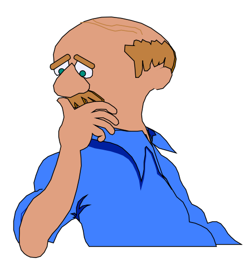
De esta manera, los números complejos $a+bi$ pueden ser expresados como clases residuales de S: $a+bx$; es decir, identificamos:

$a+bi \leftrightarrow a+bx$, módulo (x^2+1).

Así, vemos que todos los números complejos tienen representación como clases residuales:

$a+bx$, módulo (x^2+1), en donde $a,b \in \Re$.

1) ¿Existen verdaderamente los números imaginarios?
2) Si una ecuación no tiene solución, ¿se debe entonces a que no estamos en el sistema adecuado?
3) ¿Cómo solucionamos la ecuación $x^2+1=0$?
4) ¿Cómo es posible que en la expresión del número complejo $a+bi$ se puedan sumar un término real y un término imaginario?
5) ¿Cómo podemos interpretar la multiplicación de dos números complejos?
6) ¿De qué manera ayuda saber que los números complejos se pueden representar de varias formas?
7) ¿Es posible que exista alguna clase de "números complejos" con representación de vectores en el espacio $\Re^n$, $n>2$?



EPÍLOGO

¿Hemos llegado al final del camino? ¿Podemos continuar extendiendo nuestros sistemas numéricos y encontrar campos cada vez más amplios?

Hoy en día sabemos que una forma de "hipercomplejo" como $a+bi+cj$ sólo nos permitiría realizar "sumas" pero no podríamos definir algún tipo de "multiplicación" con él. El matemático irlandés William Hamilton (1805-1865) lo intentó por mucho tiempo, sin éxito, hasta que finalmente llegó a definir los *cuaternios*. Estos fueron los primeros hipercomplejos que llegaron a establecerse y eran números de la forma $a+bi+cj+dk$. Estos números podían sumarse de la misma forma que los complejos; pero la multiplicación no era conmutativa, así que no podían ser una extensión de los números complejos. Más adelante, Arthur Cayley (1821-1895) encuentra los *octonios*, esta vez de dimensión ocho, pero éstos no sólo no tenían multiplicación conmutativa, sino tampoco asociativa.

Finalmente, Karl Weierstrass (1815-1897) demostró en 1863 que la única extensión de los números reales, en donde se puede dar una multiplicación conmutativa, es el campo de los números complejos. Esta demostración apareció publicada en 1873 en el libro de Hermann Hankel: *Theorie der complexen Zahlensysteme*.

En conclusión, no podemos extender el campo complejo. Pero esto no nos debe afligir, porque este campo es completo. Según hemos visto, el Teorema Fundamental del Álgebra nos asegura que toda ecuación polinómica con coeficientes complejos y de cualquier grado tiene solución.

Los números complejos, pues, constituyen la expresión más cabal de los sistemas numéricos.

TABLA DE DEFINICIONES

(D_1)	Vector en C	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in C,\ \ x \in \Re,\ y \in \Re$	p. 46
(D_2)	Adición en C	$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$	p. 50
(D_3)	Multiplicación de un real por un vector en C	$r\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rx \\ ry \end{bmatrix}$	p. 52
(D_4)	Vector Ortogonal en C	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^{\perp} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$	p. 53
(D_{5a})	Multiplicación en C	$z_1 z_2 = x_1 z_2 + y_1 z_2^{\perp}$	p. 55
(D_{5b})	Multiplicación en C	$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{bmatrix}$	p. 56
(D_6)	Elemento Opuesto de z	$-z = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	p. 70
(D_7)	Conjugado de z	$\bar{z} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$	p. 72
(D_8)	Elemento Inverso de z	$z^{-1} = \dfrac{1}{x^2 + y^2}\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$	p. 74
(D_{9a})	Sustracción en C	$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$	p. 76
(D_{9b})	Sustracción en C	$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{bmatrix}$	p. 76

(D$_{10a}$)	División en C	$\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$	p. 77
(D$_{10b}$)	División en C	$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \div \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{x_2^2 + y_2^2} \begin{bmatrix} x_1 x_2 + y_1 y_2 \\ x_2 y_1 - x_1 y_2 \end{bmatrix}$	p. 77
(D$_{11}$)	Módulo de z	$\lVert z \rVert = \sqrt{x^2 + y^2}$	p. 80
(D$_{12}$)	Vector Unitario $\upsilon \in C$	$\lVert \upsilon \rVert = 1$	p. 82
(D$_{13}$)	Unitario υ_k de $z_k \in C$	$\exists! t \in \Re^+$ tq $z_k = t\upsilon_k$	p. 82
(D$_{14}$)	Transformación de C	Se llama *transformación del plano complejo* C a una función F con dominio en C y rango en C	p. 86
(D$_{15}$)	Composición de Transformaciones de C	$[F \circ G]\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = F\left(G\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)\right)$	p. 88
(D$_{16}$)	Traslación de z	$T(z) = z + \alpha$	p. 88
(D$_{17}$)	Rotación de z	$U(z) = \upsilon_R z$	p. 90
(D$_{18}$)	Ángulo de rotación de υ_R	θ_R tal que $\upsilon_R = \begin{bmatrix} \cos\theta_R \\ \operatorname{sen}\theta_R \end{bmatrix}$	p. 92
(D$_{19}$)	Dilatación de z	$H(z) = rz$, $r \in \Re$	p. 96

TABLA DE PROPIEDADES

(P_1)	Unicidad	$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$	p. 47
(P_2)	Conmutativa	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$	p. 51
(P_3)	Asociativa	$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$	p. 51
(P_4)	Asociativa	$r(sz) = (rs)z$	p. 53
(P_5)	Distributiva	$(r+s)z = rz + sz$	p. 53
(P_6)	Distributiva	$r(z_1 + z_2) = rz_1 + rz_2$	p. 53
(P_7)	Ortogonal	$\left(z^{\perp}\right)^{\perp} = (-1)z$	p. 54
(P_8)	Ortogonal	$z_1^{\perp} + z_2^{\perp} = (z_1 + z_2)^{\perp}$	p. 54
(P_9)	Ortogonal	$z_1 z_2^{\perp} = z_1^{\perp} z_2 = (z_1 z_2)^{\perp}$	p. 58
(P_{10})	Conmutativa	$z_1 z_2 = z_2 z_1$	p. 58
(P_{11})	Multiplicación cero	$z\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	p. 59
(P_{12})	Distributiva	$(z_1 + z_2)z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$	p. 59
(P_{13})	Asociativa	$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$	p. 59
(P_{14})	Módulos	$\lVert z_1 z_2 \rVert = \lVert z_1 \rVert \cdot \lVert z_2 \rVert$	p. 81
(P_{15})	Unitario	$z_k = \lVert z_k \rVert \upsilon_k$	p. 83
(P_{16})	Unitarios	$\upsilon_1 \upsilon_2$ es unitario	p. 84

(P_{17})	Ángulos de rotación	$\upsilon_R \upsilon_S = \begin{bmatrix} \cos(\theta_R + \theta_S) \\ \mathrm{sen}(\theta_R + \theta_S) \end{bmatrix}$	p. 96
(P_{18})	Ángulos de rotación	$\upsilon_R{}^n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta_R) \\ \mathrm{sen}(n\theta_R) \end{bmatrix}$	p. 96

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE ALFABÉTICO

CONCLUSIONES

1) La aplicación del método heurístico permite la reestructuración de conceptos a partir de conocimientos previos.

2) Es posible llegar a una mejor definición de conceptos siguiendo un proceso inductivo o experimental.

3) En la enseñanza de problemas matemáticos, las referencias históricas contienen elementos generadores para el inicio de un proceso inductivo.

4) Se puede solucionar la ecuación $\omega^2 + 1 = 0$ sin recurrir a la introducción de un elemento $\sqrt{-1}$ denominado imaginario.

5) Es posible encontrar una solución para $\omega^2 + 1 = 0$ comenzando con un proceso intuitivo de visualización geométrica.

6) La notación vector columna $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ para los números complejos resulta operativamente más conveniente que la notación usual de par ordenado $z = (x, y)$.

7) La definición de multiplicación en C (D_{5a}) permite demostraciones más sencillas de las propiedades asociativa y distributiva.

8) La definición de rotación en el plano complejo $z_1 = \upsilon_R z_0$ resulta mejor definida partiendo de la condición $\|z_0\| = \|z_1\|$.

9) Desde un punto de vista heurístico, es más conveniente llegar a una presentación matricial de los números complejos a partir de la matriz de rotación en un espacio vectorial.

10) El estudio de los números complejos permite la integración de importantes conceptos matemáticos, como son las estructuras algebraicas, el álgebra vectorial, las transformaciones geométricas, el álgebra de matrices y el estudio de clases residuales de polinomios.

APÉNDICES

APÉNDICE 1

ALGUNAS APLICACIONES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Desde un punto de vista aplicativo, podemos reconocer que los números complejos contribuyen ciertamente a la solución de problemas en la ciencia y la tecnología. La aplicación de los números complejos no se limita a la solución de problemas matemáticos, en donde son un medio de solución para ciertas situaciones matemáticas que originalmente se refieren al campo real, sino también al campo de la física y la ingeniería. Las aplicaciones que los números complejos tienen en diversas áreas de la tecnología moderna, hacen ver al lector que un sistema matemático diferente, y quizás inicialmente extraño, contribuye a resolver problemas tan reales como lo hacen otros sistemas conocidos; y de esta manera comprender de un modo paulatino que pueden existir otros modelos matemáticos, no sólo lógicamente válidos, sino también aplicables a la realidad.

En esta sección, presentaremos algunas aplicaciones de los números complejos a las funciones trigonométricas, a la Mecánica y a la Ingeniería. Este contenido es sólo una pequeña parte de las tantas aplicaciones prácticas de los números complejos, las que pueden ser consultadas más ampliamente en libros especializados.[*]

Nuestro propósito es mostrar objetivamente que los números complejos son naturalmente útiles cuando son elegidos como modelos adecuados en diferentes situaciones problemáticas. De este modo, podrá servir de guía para el docente de educación secundaria, bachillerato y ciclos básicos universitarios en la presentación de los números complejos como modelo matemático útil.

[*] *Vid.* Budden, F. J.; *Op. Cit,* pp. 84 –159, 221-292;
Nahin, Paul; *Op. Cit.*, pp. 84-141; Bolton, W.; *Op. Cit.*, pp. 23-109

I) Aplicaciones de los Números Complejos a la Trigonometría

a) *Funciones Trigonométricas de Ángulos Múltiples*:

Según la propiedad de De Moivre, para $n=2$:

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\,\mathrm{sen}(2\theta) \qquad \text{....(1)}$$

Si desarrollamos el cuadrado de este binomio, obtenemos:

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 = \cos^2\theta + 2i\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + (i\,\mathrm{sen}\,\theta)^2$$

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 = (\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta) + i(2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta) \qquad \text{....(2)}$$

De las ecuaciones (1) y (2):

$$\cos(2\theta) + i\,\mathrm{sen}(2\theta) = (\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta) + i(2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

De donde, por igualación de las partes real e imaginaria:

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta$$

$$\mathrm{sen}(2\theta) = 2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Estas dos ecuaciones son las conocidas identidades trigonométricas para un ángulo doble.

En general, podemos hallar las funciones trigonométricas, no sólo de 2θ sino de $n\theta$, con $n \in Z^+$:

Según la propiedad de De Moivre:

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta) \qquad \text{...(3)}$$

Según el Teorema del Binomio: $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n =$

$$= \binom{n}{0}(\cos\theta)^{n-0}(i\,\mathrm{sen}\,\theta)^0 + \binom{n}{1}(\cos\theta)^{n-1}(i\,\mathrm{sen}\,\theta)^1 + \binom{n}{2}(\cos\theta)^{n-2}(i\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 +$$

$$+ \binom{n}{3}(\cos\theta)^{n-3}(i\,\mathrm{sen}\,\theta)^3 + \ldots + \binom{n}{n-1}(\cos\theta)^1(i\,\mathrm{sen}\,\theta)^{n-1} + \binom{n}{n}(\cos\theta)^0(i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n \qquad \text{...(4)}$$

De las ecuaciones (3) y (4): $\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta) =$

$$= \binom{n}{0}(\cos\theta)^{n-0}(i\,\mathrm{sen}\,\theta)^0 + \binom{n}{1}(\cos\theta)^{n-1}(i\,\mathrm{sen}\,\theta)^1 + \binom{n}{2}(\cos\theta)^{n-2}(i\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 +$$

$$+ \binom{n}{3}(\cos\theta)^{n-3} + \ldots + \binom{n}{n-1}(\cos\theta)^1(i\,\mathrm{sen}\,\theta)^{n-1} + \binom{n}{n}(\cos\theta)^0(\mathrm{sen}\,\theta)^n$$

Igualando $\cos(n\theta)$ con los términos de orden impar (parte real) y $\mathrm{sen}(n\theta)$ con los términos de orden par (parte imaginaria):

$$\cos(n\theta) = (\cos\theta)^n - \binom{n}{2}(\cos\theta)^{n-2}(\text{sen}\,\theta)^2 + \binom{n}{4}(\cos\theta)^{n-4}(\text{sen}\,\theta)^4 - \ldots$$

$$\text{sen}(n\theta) = n(\cos\theta)^{n-1}\,\text{sen}\,\theta - \binom{n}{3}(\cos\theta)^{n-3}(\text{sen}\,\theta)^3 + \binom{n}{5}(\cos\theta)^{n-5}(\text{sen}\,\theta)^5 - \ldots$$

De estas dos ecuaciones se puede obtener $\text{tg}(n\theta)$:

$$\text{tg}(n\theta) = \frac{\text{sen}(n\theta)}{\cos(n\theta)} = \frac{n(\cos\theta)^{n-1}\,\text{sen}\,\theta - \binom{n}{3}(\cos\theta)^{n-3}(\text{sen}\,\theta)^3 + \ldots}{(\cos\theta)^n - \binom{n}{2}(\cos\theta)^{n-2}(\text{sen}\,\theta)^2 + \ldots}$$

Poniendo $\dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \text{tg}\,\theta$:

$$\text{tg}(n\theta) = \frac{n\,\text{tg}\,\theta - \binom{n}{3}(\text{tg}\,\theta)^3 + \binom{n}{5}(\text{tg}\,\theta)^5 - \ldots}{1 - \binom{n}{2}(\text{tg}\,\theta)^2 + \binom{n}{4}(\text{tg}\,\theta)^4 - \ldots}$$

Por ejemplo, podemos obtener las funciones trigonométricas de los ángulos triples:

$$\cos(3\theta) = (\cos\theta)^3 - \binom{3}{2}(\cos\theta)^{3-2}(\text{sen}\,\theta)^2 =$$

$$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta) =$$

$$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\text{sen}(3\theta) = 3(\cos\theta)^{3-1}\,\text{sen}\,\theta - \binom{3}{3}(\cos\theta)^{n-3}(\text{sen}\,\theta)^3 =$$

$$= 3\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}^3\theta = 3(1-\text{sen}^2\theta)\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}^3\theta =$$

$$= 3\,\text{sen}\,\theta - 4\,\text{sen}^3\theta$$

$$\text{tg}(3\theta) = \frac{3\,\text{tg}\,\theta - \binom{3}{3}(\text{tg}\,\theta)^3}{1 - \binom{3}{2}(\text{tg}\,\theta)^2} = \frac{3\,\text{tg}\,\theta - \text{tg}^3\theta}{1 - 3\,\text{tg}^2\theta}$$

b) *Ángulos Múltiples y Potencias de Funciones Trigonométricas*:

Se sabe, por la propiedad de Moivre:

$$z^n = (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)$$

$$z^{-n} = (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^{-n} = \cos(n\theta) - i\,\mathrm{sen}(n\theta)$$

De donde:

$$z^n + z^{-n} = 2\cos(n\theta) \qquad ...(1)$$

$$z^n - z^{-n} = 2i\,\mathrm{sen}(n\theta) \qquad ...(2)$$

Desarrollemos el siguiente binomio:

$$(z+z^{-1})^n = \binom{n}{0} z^{n-0}(z^{-1})^0 + \binom{n}{1} z^{n-1}(z^{-1})^1 + \binom{n}{2} z^{n-2}(z^{-1})^2 + $$
$$+ \binom{n}{3} z^{n-3}(z^{-1})^3 + ... + \binom{n}{n-1} z^1(z^{-1})^{n-1} + \binom{n}{n} z^0(z^{-1})^n$$

$$(z+z^{-1})^n = \binom{n}{0} z^n + \binom{n}{1} z^{n-1}z^{-1} + \binom{n}{2} z^{n-2}z^{-2} + $$
$$+ \binom{n}{3} z^{n-3}z^{-3} + ... + \binom{n}{n-2} z^2 z^{-(n-2)} + \binom{n}{n-1} zz^{-(n-1)} + \binom{n}{n} z^{-n}$$

$$(z+z^{-1})^n = \binom{n}{0} z^n + \binom{n}{1} z^{n-2} + \binom{n}{2} z^{n-4} + \binom{n}{3} z^{n-6} + ... + \binom{n}{n-2} z^{4-n} + \binom{n}{n-1} z^{2-n} + \binom{n}{n} z^{-n}$$

Por propiedad de los coeficientes binomiales, sabemos que:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

En virtud de esta propiedad, podemos agrupar los términos con coeficientes equivalentes:

$$\binom{n}{0} z^n + \binom{n}{1} z^{n-2} + \binom{n}{2} z^{n-4} + \binom{n}{3} z^{n-6} + ... + \binom{n}{n-2} z^{4-n} + \binom{n}{n-1} z^{2-n} + \binom{n}{n} z^{-n}$$

En caso de ser n impar, el número de términos del desarrollo es *par* y queda expresado completamente por todas las parejas agrupadas en binomios:

$$(z+z^{-1})^n = \binom{n}{0}(z^n+z^{-n}) + \binom{n}{1}(z^{n-2}+z^{-(n-2)}) + \binom{n}{2}(z^{n-4}+z^{-(n-4)}) + \ldots + \binom{n}{\frac{n-1}{2}}(z+z^{-1})$$

En caso de ser n par, el número de términos del desarrollo es *impar* y queda expresado por todas las parejas agrupadas en binomios más el término central:

$$(z+z^{-1})^n = \binom{n}{0}(z^n+z^{-n}) + \binom{n}{1}(z^{n-2}+z^{-(n-2)}) + \binom{n}{2}(z^{n-4}+z^{-(n-4)}) + \ldots$$

$$\ldots + \binom{n}{\frac{n-2}{2}}(z^2+z^{-2}) + \binom{n}{\frac{n}{2}}$$

Según la ecuación (1), reemplazamos $z^n + z^{-n}$ por la expresión $2\cos(n\theta)$ en cada una de las ecuaciones:

Ecuación con n impar:

$$(2\cos\theta)^n = \binom{n}{0}(2\cos(n\theta)) + \binom{n}{1}(2\cos((n-2)\theta)) + \binom{n}{2}(2\cos((n-4)\theta)) + \ldots + \binom{n}{\frac{n-1}{2}}(2\cos\theta)$$

$$2^{n-1}\cos^n\theta = \binom{n}{0}\cos(n\theta) + \binom{n}{1}\cos((n-2)\theta) + \binom{n}{2}\cos((n-4)\theta) + \ldots + \binom{n}{\frac{n-1}{2}}\cos\theta$$

Para n impar:

$$\cos^n\theta = \frac{1}{2^{n-1}}\left(\binom{n}{0}\cos(n\theta) + \binom{n}{1}\cos((n-2)\theta) + \binom{n}{2}\cos((n-4)\theta) + \ldots + \binom{n}{\frac{n-1}{2}}\cos\theta\right)$$

Ecuación con n par:

$$(2\cos\theta)^n = \binom{n}{0}(2\cos(n\theta)) + \binom{n}{1}(2\cos((n-2)\theta)) + \binom{n}{2}(2\cos((n-4)\theta) + \ldots$$

$$\ldots + \binom{n}{\frac{n-2}{2}}(2\cos(2\theta)) + \binom{n}{\frac{n}{2}}$$

$$2^{n-1}\cos^n\theta = \binom{n}{0}\cos(n\theta) + \binom{n}{1}\cos((n-2)\theta) + \binom{n}{2}\cos((n-4)\theta) + \ldots + \binom{n}{\frac{n-2}{2}}\cos(2\theta) + \frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}$$

Para n par:

$$\cos^n\theta = \frac{1}{2^{n-1}}\left(\binom{n}{0}\cos(n\theta) + \binom{n}{1}\cos((n-2)\theta) + \binom{n}{2}\cos((n-4)\theta) + \ldots + \binom{n}{\frac{n-2}{2}}\cos(2\theta) + \frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}\right)$$

Para mostrar cómo se aplica este desarrollo, expresaremos $\cos^3\theta$ y $\cos^4\theta$ en términos de ángulos múltiples.

Ejemplo 1:

$$\cos^3\theta = \frac{1}{2^{3-1}}\left(\binom{3}{0}\cos(3\theta) + \binom{3}{1}\cos((3-2)\theta)\right)$$

$$\cos^3\theta = \frac{1}{4}\left(\cos(3\theta) + 3\cos\theta\right)$$

Ejemplo 2:

$$\cos^4\theta = \frac{1}{2^{4-1}}\left(\binom{4}{0}\cos(4\theta) + \binom{4}{1}\cos((4-2)\theta) + \frac{1}{2}\binom{4}{2}\right)$$

$$\cos^4\theta = \frac{1}{8}\left(\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3\right)$$

Estas ecuaciones resultan particularmente útiles en cálculo integral. Veamos el siguiente caso:

Ejemplo 3:

Calcular: $\int \cos^5\theta\ d\theta$

$$\cos^5\theta = \frac{1}{2^{5-1}}\left(\binom{5}{0}\cos(5\theta) + \binom{5}{1}\cos((5-2)\theta) + \binom{5}{2}\cos((5-4)\theta)\right)$$

$$\cos^5\theta = \frac{1}{16}\left(\cos(5\theta) + 5\cos(3\theta) + 10\cos\theta\right)$$

$$\int \cos^5\theta\ d\theta = \int \frac{1}{16}\left(\cos(5\theta) + 5\cos(3\theta) + 10\cos\theta\right)\ d\theta$$

$$\int \cos^5\theta\ d\theta = \frac{1}{16}\left[\frac{1}{5}\int \cos(5\theta)d(5\theta) + 5\times\frac{1}{3}\int \cos(3\theta)d(3\theta) + 10\int(\cos\theta)d\theta\right]$$

$$\int \cos^5\theta\ d\theta = \frac{1}{16}\left[\frac{1}{5}\operatorname{sen}(5\theta) + \frac{5}{3}\operatorname{sen}(3\theta) + 10\operatorname{sen}\theta\right] + C$$

$$\int \cos^5\theta\ d\theta = \frac{1}{80}\operatorname{sen}(5\theta) + \frac{5}{48}\operatorname{sen}(3\theta) + \frac{5}{8}\operatorname{sen}\theta + C$$

Siguiendo un camino similar también podemos llegar a una expresión general de la potenciación de $\operatorname{sen}\theta$ en función de ángulos múltiples.

Las ecuaciones (1) y (2) también se pueden aplicar para valores particulares de n sin gran dificultad.

Ilustraremos esto con dos ejemplos:

Ejemplo 4:

Expresar $\operatorname{sen}^3\theta$ en términos de ángulos múltiples.

Aplicamos la ecuación (2) para $n=1$:

$$2i\operatorname{sen}\theta = z - z^{-1}$$
$$(2i\operatorname{sen}\theta)^3 = (z - z^{-1})^3$$
$$8i^3\operatorname{sen}^3\theta = z^3 - 3z^2z^{-1} + 3z(z^{-1})^2 - (z^{-1})^3$$
$$8(-i)\operatorname{sen}^3\theta = z^3 - 3z + 3z^{-1} - z^{-3}$$
$$-8i\operatorname{sen}^3\theta = (z^3 - z^{-3}) - 3(z - z^{-1})$$

Aplicando nuevamente la ecuación (2) para $n=3$ y $n=1$:

$$-8i\operatorname{sen}^3\theta = 2i\operatorname{sen}(3\theta) - 3(2i\operatorname{sen}\theta)$$

Finalmente llegamos a la expresión:

$$\operatorname{sen}^3\theta = -\frac{1}{4}\operatorname{sen}(3\theta) + \frac{3}{4}\operatorname{sen}\theta$$

Ejemplo 5:

Hallar $\int \cos^3\theta\operatorname{sen}^5\theta\, d\theta$:

Partimos de las ecuaciones (1) y (2):

$$(2\cos\theta)^3(2i\operatorname{sen}\theta)^5 = (z+z^{-1})^3(z-z^{-1})^5$$
$$(2^3\cos^3\theta)(2^5i^5\operatorname{sen}^5\theta) = (z+z^{-1})^3(z-z^{-1})^3(z-z^{-1})^2$$
$$2^8i\cos^3\theta\operatorname{sen}^5\theta = [(z+z^{-1})(z-z^{-1})]^3(z-z^{-1})^2$$
$$2^8i\cos^3\theta\operatorname{sen}^5\theta = [(z^2-z^{-2})]^3(z-z^{-1})^2$$
$$2^8i\cos^3\theta\operatorname{sen}^5\theta = (z^6 - 3z^4z^{-2} + 3z^2z^{-4} - z^{-6})(z^2 - 2zz^{-1} + z^{-2})$$
$$2^8i\cos^3\theta\operatorname{sen}^5\theta = (z^6 - 3z^2 + 3z^{-2} - z^{-6})(z^2 + z^{-2} - 2)$$
$$2^8i\cos^3\theta\operatorname{sen}^5\theta = z^8 + z^4 - 2z^6 - 3z^4 - 3 + 6z^2 + 3 + 3z^{-4} - 6z^{-2} - z^{-4} - z^{-8} + 2z^{-6}$$
$$2^8i\cos^3\theta\operatorname{sen}^5\theta = (z^8 - z^8) - 2(z^6 - z^{-6}) - 2(z^4 - z^{-4}) + 6(z^2 - z^{-2})$$

De la ecuación (2):

$$2^8i\cos^3\theta\operatorname{sen}^5\theta = 2i\operatorname{sen}(8\theta) - 2(2i\operatorname{sen}(6\theta)) - 2(2i\operatorname{sen}(4\theta)) + 6(2i\operatorname{sen}(2\theta))$$
$$2^7\cos^3\theta\operatorname{sen}^5\theta = \operatorname{sen}(8\theta) - 2\operatorname{sen}(6\theta) - 2\operatorname{sen}(4\theta) + 6\operatorname{sen}(2\theta))$$
$$\cos^3\theta\operatorname{sen}^5\theta = \frac{1}{128}\operatorname{sen}(8\theta) - \frac{1}{64}\operatorname{sen}(6\theta) - \frac{1}{64}\operatorname{sen}(4\theta) + \frac{3}{64}\operatorname{sen}(2\theta))$$

Calcularemos la integral:

$$\int \cos^3\theta\operatorname{sen}^5\theta\, d\theta = \int\left(\frac{1}{128}\operatorname{sen}(8\theta) - \frac{1}{64}\operatorname{sen}(6\theta) - \frac{1}{64}\operatorname{sen}(4\theta) + \frac{3}{64}\operatorname{sen}(2\theta)\right)d\theta$$
$$\int \cos^3\theta\operatorname{sen}^5\theta\, d\theta =$$
$$= \frac{1}{128}\int\operatorname{sen}(8\theta)d\theta - \frac{1}{64}\int\operatorname{sen}(6\theta)d\theta - \frac{1}{64}\int\operatorname{sen}(4\theta)d\theta + \frac{3}{64}\int\operatorname{sen}(2\theta)d\theta$$
$$\int \cos^3\theta\operatorname{sen}^5\theta\, d\theta = -\frac{1}{1024}\cos(8\theta) + \frac{1}{384}\cos(6\theta) + \frac{1}{256}\cos(4\theta) - \frac{3}{128}\cos(2\theta) + C$$

II) Aplicaciones de los Números Complejos a la Mecánica y a la Ingeniería

a) Aceleración centrípeta de una partícula:

Calcularemos la magnitud y dirección de la aceleración producida por el movimiento circular de una partícula.

Para ello, precisaremos que las condiciones de movimiento son que la partícula se mueve sobre una circunferencia de radio r, con una velocidad angular constante ω (ver Fig. 1).

Empezaremos calculando su velocidad v.

Definiremos la velocidad v como la derivada de la función compleja z, que representa el *vector posición* de la partícula, con respecto a la variable real t, la cual representa el *tiempo.*

De este modo:

$v = \dfrac{dz}{dt}$, para $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$; siendo $r = \|z\|$ una constante.

$$v = \frac{d}{dt}\left[r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)\right]$$

$$v = r\left(\frac{d}{dt}(\cos\theta) + i\frac{d}{dt}(\text{sen}\,\theta)\right)$$

$$v = r\left(-\text{sen}\,\theta\frac{d\theta}{dt} + i\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$v = \frac{d\theta}{dt}r\left(-\text{sen}\,\theta + i\cos\theta\right)$$

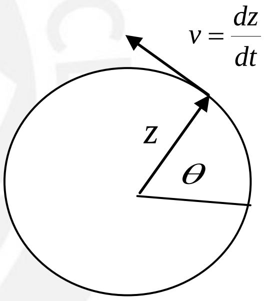


Fig. 1

Considerando que la partícula se mueve con una velocidad angular constante $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$:

$$v = \omega\cdot r\left(-\text{sen}\,\theta + i\cos\theta\right)$$

Multiplicando por $(-i)(i) = -i^2 = 1$:

$$v = -i\cdot\omega\cdot r\left(-i\,\text{sen}\,\theta + i^2\cos\theta\right)$$

$$v = -i\cdot\omega\cdot r\left(-i\,\text{sen}\,\theta - \cos\theta\right)$$

$$v = i\cdot\omega\cdot r\left(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta\right)$$

$$v = i\cdot\omega\cdot z$$

$$v = i(\omega\cdot z)$$

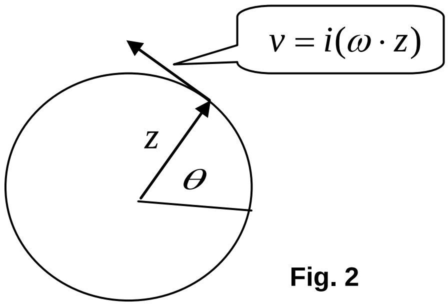


Fig. 2

Tal como se ilustra en la figura 2, el operador i del vector velocidad $i\cdot(\omega\cdot z)$ indica que éste forma un ángulo de 90° con el vector posición z.

Calcularemos ahora su aceleración a.

Definiremos la aceleración a como la derivada de la función compleja v, que representa el vector *velocidad* de la partícula, con respecto a la variable real t, la cual representa el *tiempo*.

De este modo:

$a = \frac{dv}{dt}$, para $v = i\omega \cdot z$, siendo $i\omega$ una constante.

$$a = \frac{d}{dt}(i\omega \cdot z)$$

$$a = i\omega \frac{dz}{dt} = i\omega \cdot v$$

$$a = i\omega(i\omega \cdot \cdot z)$$

$$a = i^2\omega^2 z = (-1)\omega^2 z$$

$$a = -\omega^2 z$$

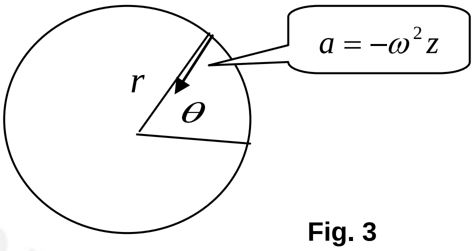


Fig. 3

Tal como se ilustra en la figura 3, el operador (-1) del vector aceleración $a = (-1)\omega^2 z$ indica que éste tiene un sentido opuesto al del vector posición z.

Decimos entonces que la aceleración apunta hacia el centro; es decir, es *centrípeta*.

b) *Diferencia de fase en corrientes alternas:*

Tenemos un generador de fuerza electromotriz alterna conectado con una resistencia R (ver Fig. 4).

El *potencial* en cualquier instante del tiempo t viene dado por:

$v = \hat{v}\,\mathrm{sen}(\omega \cdot t)$,

en donde: $\hat{v}$ es el potencial máximo, ω es la frecuencia, y t es el tiempo medido desde que la diferencia de potencial es cero.

La *intensidad* [1] de corriente que pasa a través de la resistencia R en un tiempo t viene dada por:

$$i = \frac{v}{R} = \frac{\hat{v}\,\mathrm{sen}(\omega \cdot t)}{R} = \frac{\hat{v}}{R}\mathrm{sen}(\omega \cdot t) = \hat{i}\,\mathrm{sen}(\omega \cdot t),$$

en donde $\hat{i}$ es la intensidad de corriente máxima.

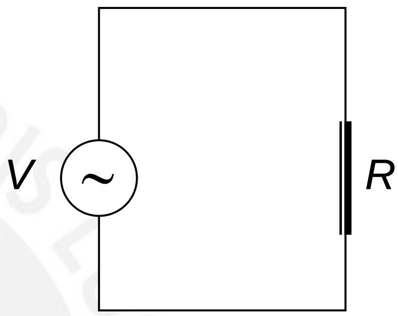


Fig. 4

De estas ecuaciones, también podemos escribir:

$v = \hat{i}R\,\mathrm{sen}(\omega \cdot t)$

En virtud de estas ecuaciones, podemos pensar en vectores de módulos $\hat{v}$, $\hat{i}$.

Identificando la dirección que toman estos vectores para un tiempo $t = 0$ con el eje X del plano complejo, y al valor $\omega \cdot t$ con el argumento de un vector en C, entonces dichos vectores de módulos $\hat{v}$, $\hat{i}$ – llamados *vectores rotatorios* o *fasores* – serán respectivamente: $V = \hat{v} \cdot cis(\omega \cdot t)$, $I = \hat{i} \cdot cis(\omega \cdot t)$.

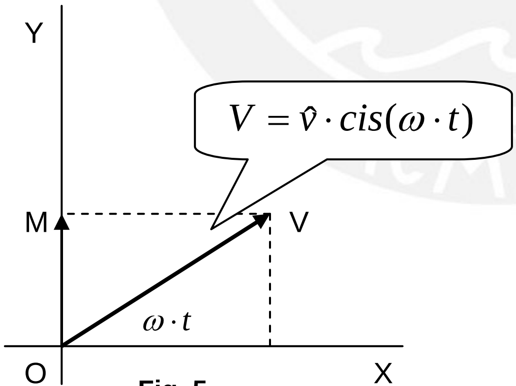


Fig. 5

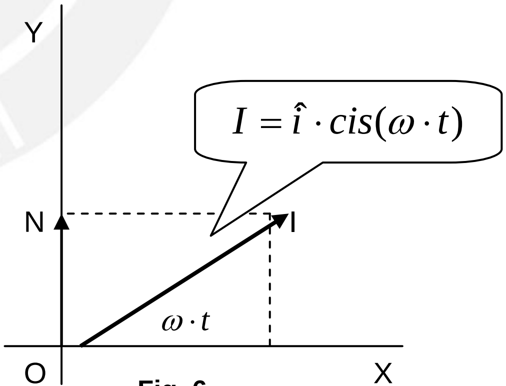


Fig. 6

En la figuras 5 y 6, OM y ON representan respectivamente el potencial y la intensidad de corriente en un instante t. Es claro que cuando $t = 0$ entonces el potencial y la intensidad de corriente también son cero.

[1] En las aplicaciones a la ingeniería eléctrica, se conviene denotar la intensidad de corriente con el símbolo i . La unidad imaginaria se representa con la letra j .

Según la figura 5, vemos que $OM = OV\,\text{sen}(\omega \cdot t)$, que es justamente la representación del potencial $v = \hat{v}\,\text{sen}(\omega \cdot t)$ en un instante t. Asimismo, en la figura 6, $ON = OI\,\text{sen}(\omega \cdot t)$ representa la intensidad de corriente $i = \hat{\imath}\,\text{sen}(\omega \cdot t)$.

La relación entre los fasores V, I es:
$V = \hat{v} \cdot cis(\omega \cdot t) = \hat{\imath} R \cdot cis(\omega \cdot t) = R(\hat{\imath} \cdot cis(\omega \cdot t)) = RI$, siendo la resistencia $R \in \Re$.

Diremos que los fasores V, I *están en fase* cuando mantienen sus direcciones iguales.

Veamos un caso en donde los fasores no están en fase. Esto puede ocurrir cuando se aplica una fuerza electromotriz alterna a una inducción L, en donde $\hat{v} = (\omega L)\hat{\imath}$. (A la magnitud ωL se le llama *reactancia*).

Se puede dar el siguiente caso:

$i = \hat{\imath}\,\text{sen}(\omega \cdot t)$

$v = \hat{v}\,\text{sen}(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2})$

El fasor V difiere en 90° del fasor I (ver Fig. 7) (decimos que el vector voltaje está adelantado con respecto al vector intensidad).

Tenemos entonces que:

$V = \hat{v} \cdot cis(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2})$

$V = (\omega L)\hat{\imath} \cdot cis(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2})$

$V = (\omega L)\hat{\imath} \cdot cis(\omega \cdot t) \cdot cis(\frac{\pi}{2})$

$V = \hat{\imath} \cdot cis(\omega \cdot t)(\omega L) \cdot cis(\frac{\pi}{2})$

Denotando la unidad imaginaria como $j = cis(\frac{\pi}{2})$:

$V = (\hat{\imath} \cdot cis(\omega \cdot t))(\omega L j)$

$V = I \cdot (\omega L j)$

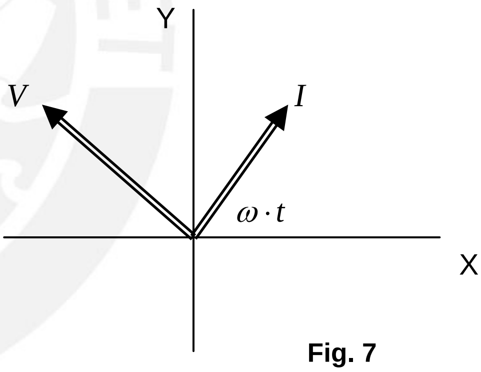


Fig. 7

Esta ecuación nos indica que, para obtener el fasor del potencial partiendo del fasor de intensidad debemos multiplicar por el número complejo $\omega L j$. Este número complejo es un ejemplo de *operador de impedancia*.

Para un caso general, el *operador de impedancia* se expresa con el número complejo:
$z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}(\cos\varphi + j\,\text{sen}\,\varphi)$, en donde φ es el ángulo de fase en que el voltaje adelanta a la intensidad de corriente.

APÉNDICE 2

MISCELÁNEA

La presentación de los números complejos también puede ser motivadora y sugerente.* Por ello, mostraremos algunos casos que pueden ser estimulantes para los estudiantes. La presentación de estos casos supone que el estudiante debe estar familiarizado con las formas binómica, trigonométrica y exponencial de los números complejos, así como debe manejar conceptos como representaciones vectoriales y series geométricas.

Generalmente, se acostumbra presentar ejercicios de números complejos de un modo tradicionalmente algebraico y sin ninguna proyección al uso de la imaginación y las ideas creativas. De allí, pensamos que estos temas motivadores pueden inducir a una mayor flexibilidad y afirmación en la comprensión de estos conceptos.

Para la presentación de estos casos, el docente debe ser consciente del nivel en que los estudiantes están trabajando y, convenientemente, decidirá en qué parte del desarrollo de su programa pueden ser introducidos.

---

* Vid. Gamow, George; *Uno, dos, tres, ..., infinito: realidades y especulaciones de la ciencia*; Espasa-Calpe, Madrid, 1969, pp. 46-49
Nahim, Paul J.; *An Imaginary Tale: The Story of the Square Root of Minus One*, Princeton University, 1ra. Ed., 1998, pp. 107-109, pp. 27-28

l) Búsqueda del tesoro

En una isla, un viajero encontró un viejo pergamino en donde se mostraba la ubicación de un tesoro. Las instrucciones eran las siguientes:

Sobre la costa norte de la isla veréis un roble y un pino solitarios. Veréis también una vieja horca. Partid desde la horca y caminad hacia el roble contando los pasos. Bajo el roble debéis girar hacia la derecha en ángulo recto y dar el mismo número de pasos. Clavad una estaca en el suelo. Ahora debéis volver hacia la horca y caminar hasta el pino contando los pasos. Bajo el pino debéis voltear hacia la izquierda en ángulo recto y fijaos bien en dar el mismo número de pasos y luego poned otra estaca en el suelo. Cavad a medio camino entre las dos estacas. Allí está el tesoro.

Pero había pasado demasiado tiempo desde que se escribieran las instrucciones y la erosión había desintegrado la horca, no dejando ni siquiera rastro del lugar donde estuvo.

La historia cuenta que este viajero, desesperado de intentar vanamente hallar el tesoro, tuvo que dejar la isla con las manos vacías.

Lamentablemente, el viajero no conocía los números complejos. De haberlos conocido, tal vez hubiese podido hallar el tesoro. ¿Usted qué cree?

Si suponemos conocida la ubicación de la horca, y seguimos las instrucciones del pergamino, podemos hacer este croquis:

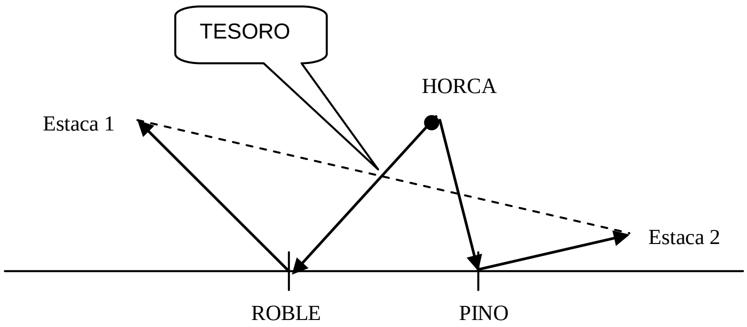


Fig. 8

Para dibujar este croquis (ver Fig. 8), hemos ubicado la horca en un punto arbitrario y, partiendo de ésta hemos seguido las instrucciones, es decir llegando al roble volteamos a la derecha y llegando al pino volteamos a la izquierda, en cada caso contando el mismo número de pasos desde la horca. Una vez ubicadas las dos estacas, el tesoro se encontraría en el punto medio del segmento que las une.

Sin embargo, desconocemos la ubicación de la horca. ¿Desconoceremos por tanto la ubicación del tesoro?

Para salir de dudas, representemos los puntos del problema como vectores en el plano complejo, como se ilustra en la siguiente figura:

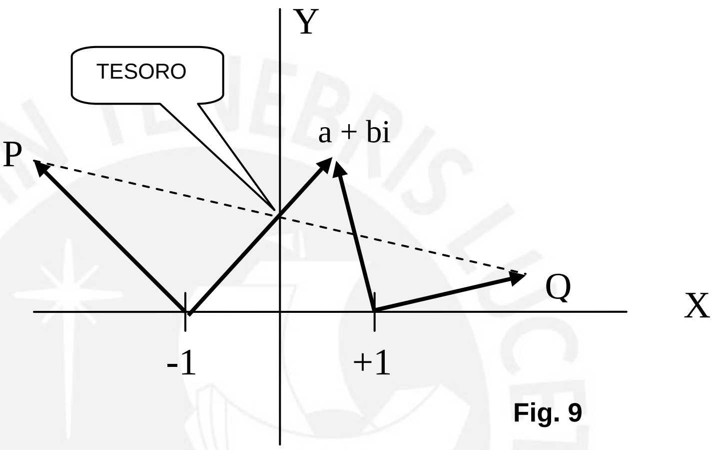


Fig. 9

Hemos considerado que el roble y el pino están respectivamente en los puntos “-1” y “+1” del eje horizontal. La horca ha sido ubicada en un punto genérico “a+bi” y las estacas están representadas ahora por los puntos “P” y ”Q”.

De la figura 9, se puede ver fácilmente que los puntos “P” y ”Q” pueden expresarse cada uno como una transformación compuesta (que incluye traslación y rotación) de “a+bi”.

De este modo, tenemos:

$$P = -1 + (a + 1 + bi)i = -1 + ai + i + bi^2 = -1 + ai + i - b$$
$$Q = 1 + (a - 1 + bi)(-i) = 1 - ai + i - bi^2 = 1 - ai + i + b$$

El tesoro estará ubicado en el punto medio del segmento PQ, es decir:

$$TESORO = \frac{P+Q}{2} = \frac{(-1 + ai + i - b) + (1 - ai + i + b)}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

Este resultado nos indica que la ubicación del tesoro es independiente de la ubicación de la horca.

II) Caminata en el plano complejo

Pensemos en el siguiente problema:

Supongamos que empezamos a caminar en línea recta y damos un primer paso de un metro de longitud, luego damos el segundo paso de medio metro, el siguiente de un cuarto de metro y así sucesivamente (ver Fig. 10). La pregunta es: ¿cuál es el valor de la distancia desde el origen hasta el punto límite para un número infinito de pasos?

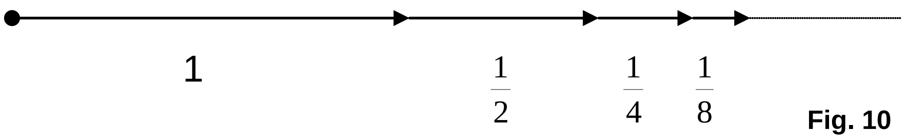


Fig. 10

Tenemos así que la longitud total es la suma de todos los segmentos:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

Lo cual queda expresado como sigue:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots$$

Esto es lo que llamamos una serie geométrica convergente, y la solución se puede dar de inmediato:

Siendo la razón $q = \frac{1}{2}$:

$$S = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Decimos que cada paso dado a lo largo de la recta equivale a un término de la serie. La distancia límite desde el punto de origen será pues dos metros.

Podemos pensar en extender este caso al plano, planteando el problema como sigue:

Damos un primer paso de un metro de longitud, luego damos el segundo paso de medio metro pero girando un ángulo θ en sentido antihorario, el siguiente paso será de un cuarto de metro girando nuevamente un ángulo θ en sentido antihorario y así sucesivamente (ver Fig. 11). La pregunta es: ¿cuál será la distancia desde el origen para un número infinito de pasos?

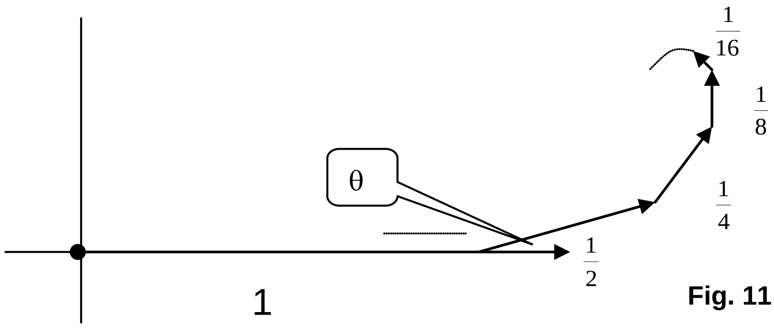


Fig. 11

El vector posición correspondiente al enésimo paso estará dado por la siguiente suma:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2}e^{i\theta} + \frac{1}{4}e^{2i\theta} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}e^{(n-1)i\theta}$$

Cuando $n \to \infty$ podemos ver que también se trata de una serie geométrica convergente de razón $q = \frac{1}{2}e^{i\theta}$, cuyo valor estará dado por la fórmula[2]:

$$S_\infty = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{i\theta}}$$

Encontrar la distancia desde el origen es hallar el módulo de S_∞, pudiendo verificarse siguiente resultado:

$$\|S_\infty\| = \left\|\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{i\theta}}\right\| = \frac{2}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$$

El ejemplo visto en la recta puede considerarse como caso particular de $\|S_\infty\|$ para $\theta = 0$, en donde resulta una distancia $\|S_\infty\| = 2$. Como en este caso $\cos\theta = 1$, este valor $\|S_\infty\| = 2$ resulta máximo[3] para todo θ.

Otro caso interesante es un movimiento oscilante en línea recta, es decir con $\theta = 180°$, en donde encontramos que $\|S_\infty\| = \frac{2}{3}$.

[2] Esta fórmula, válida para $q = \frac{1}{2}$, también resulta válida para el valor complejo $q = \frac{1}{2}e^{i\theta}$.

[3] Intuitivamente, podemos percibir que el valor de esta distancia es máximo “desenrollando” toda la cadena de vectores sobre la horizontal.

III) Solución gráfica de las raíces complejas de una ecuación cuadrática

Consideremos la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \Re$.

Sabemos que las dos soluciones de la ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ son, o ambas reales o ambas complejas, dependiendo del valor del llamado discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Así, si $\Delta \geq 0$ las soluciones son reales y si $\Delta < 0$ las soluciones son complejas.

Considerando el caso de $\Delta < 0$, en donde las soluciones son complejas, podemos observar que el gráfico de la función cuadrática correspondiente $f(x) = ax^2 + bx + c$ no cruza el eje horizontal (en donde el valor de la ordenada para esta función sería $y = f(x) = 0$), es decir las soluciones "no aparecen" en el plano de la parábola. Sin embargo, las soluciones existen en el campo complejo y lo que vamos a tratar es la posibilidad de una solución gráfica de estas soluciones complejas.

Veamos el caso de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, con $a > 0$, en donde las soluciones complejas son: $p + iq$ y $p - iq$, con $q \neq 0$. Esto nos permite escribir la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ del siguiente modo:

$f(x) = a(x - p - iq)(x - p + iq)$, es decir:

$f(x) = a[(x - p)^2 + q^2]$

De aquí se desprende que:

$f(x) \geq aq^2 > 0$ (lo cual nos indica que no hay solución real para la ecuación planteada).

Por lo tanto, para $x = p$ obtenemos el valor mínimo $f(x) = aq^2$, siendo el punto (p, aq^2) el vértice de la parábola que representa la función $f(x)$ (ver Fig. 12).

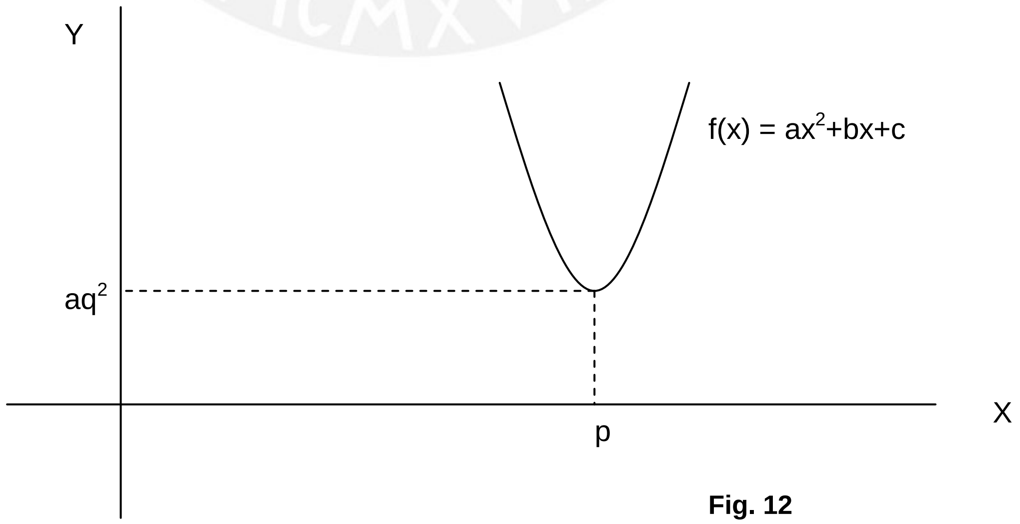


Fig. 12

Este resultado nos indica que podemos hallar gráficamente el valor p de las soluciones complejas $p \pm iq$ conociendo la ubicación del vértice de la parábola que es el punto mínimo del gráfico de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Nos falta ver ahora cómo encontrar el valor q.

Para esto, fijémonos en la ecuación $f(x) = a[(x-p)^2 + q^2]$. Podemos ver en esta ecuación que se puede llegar a una expresión sencilla para el punto $x = p + q$. Esto es:

$$f(p+q) = a[(p+q-p)^2 + q^2]$$
$$f(p+q) = a(q^2 + q^2)$$
$$f(p+q) = 2aq^2$$

Esta expresión nos señala que podemos hallar gráficamente el valor de $p+q$ (y por lo tanto de q) en un punto de ordenada $2aq^2$, el cual es precisamente el doble del obtenido para el valor p. Con esto, describiremos en un diagrama (ver Fig. 13) el procedimiento para determinar gráficamente los puntos de posición p y $p+q$ sobre el eje X:

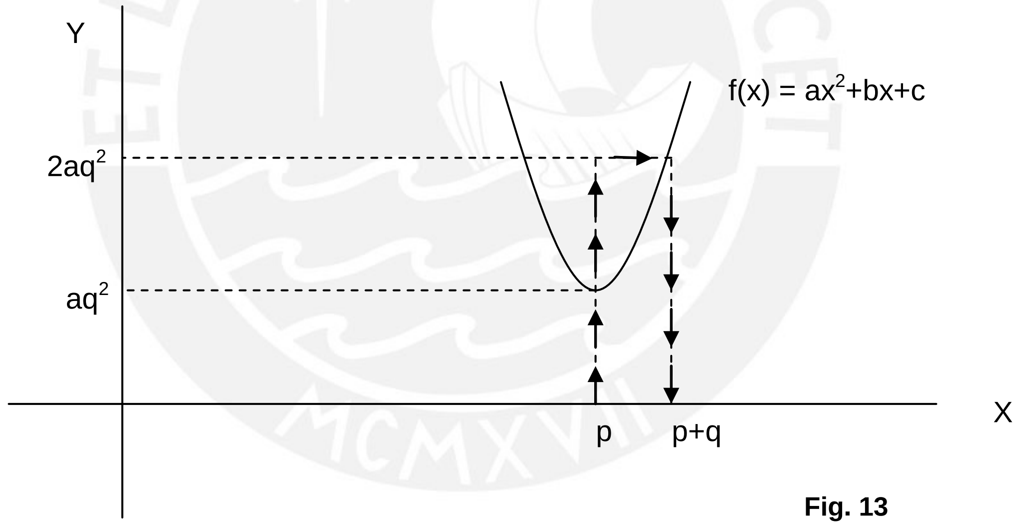


Fig. 13

Por ejemplo, intentemos hallar gráficamente las soluciones complejas de la ecuación cuadrática $x^2 - x + 1 = 0$.

Las coordenadas del vértice o punto mínimo del gráfico de la función cuadrática $f(x) = x^2 - x + 1$ son:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{2} = \frac{1}{2}; \qquad y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$$

Es decir, el vértice de la parábola está en el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ (ver Fig. 14)

Desde el punto $p = \frac{1}{2}$, levantamos una perpendicular hasta una altura igual al doble de la ordenada del punto mínimo, es decir $2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$.

Desde el punto obtenido $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, trazamos una línea horizontal, que cortará el gráfico de la función cuadrática $f(x)$ en dos puntos. Tomando el punto de intersección derecho, trazamos una vertical hasta el eje X, en donde encontramos el punto que hemos llamado $p+q$. Este punto está aproximadamente en la posición $x \approx 1{,}37$. El valor de q resulta ser la distancia:

$$q = p + q - p \approx 1{,}37 - 0{,}5 \approx 0{,}87 .$$

De estos resultados, encontramos que las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 - x + 1 = 0$ son:

$$x = p \pm iq \approx 0{,}5 \pm 0{,}87i .$$

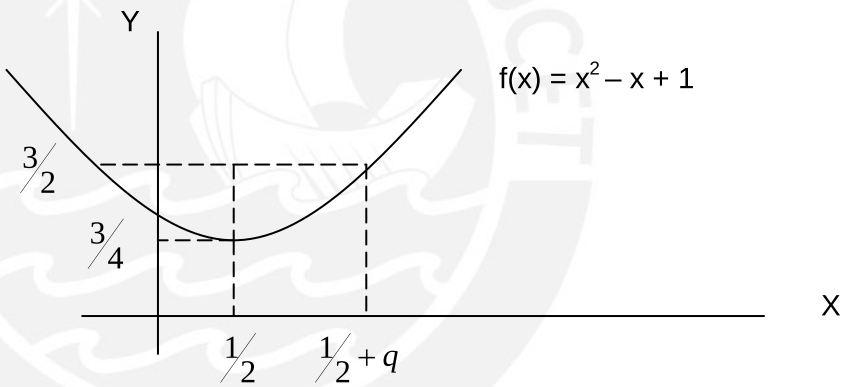


Fig. 14

BIBLIOGRAFÍA

Adler, Irving; *La Nueva Matemática*, Edit. Univ. De Bs. Aires. 4ta. Ed., 1970

Bell, E.T.; *Historia de las Matemáticas*, Fondo de Cultura Económica, México, 1995

Bolton, W.; *Complex Numbers*, Longman Scientifical & Technical, 1995

Budden, F.J.; *Números Complejos*, Edit. Alhambra Barcelona 1ra. Ed., 1971

Capella R., Jorge; *Consideraciones y propuestas en torno a la Capacitación de los Profesores*, PUCP, Dep. de Educación, 1992

Carneiro, J.P.; *Números Complejos y Ecuaciones Polinomiales*, Seminario 17– 21/11/97, San Carlos de Bariloche, Argentina

Delgado, Juan; *Cuestiones de Didáctica de la Matemática*, Homo Sapiens, Rosario, 1997

Delolme N, Stella; *Cómo estructurar los Contenidos de Aprendizaje en los Materiales Autoinstructivos*, Revista ENLACE, UNED. Costa Rica, 1987

Domínguez, Zelia; *Módulos para Medir y evaluar en Educación*, Narcea, Madrid, 1977

Gamow, George; *Uno, dos, tres, ..., infinito*, Espasa-Calpe, Madrid, 1969

Gonzales, M.R.; *El Constructivismo: Sus Fundamentos y Aplicación Educativa*; CEDEIS, 1991

Hahn, Liang-Shin; *Complex Numbers and Geometry*; Maa Spectrum Series 2da. Ed., 1994

Hardy, G.H.; *A Course of Pure Mathematics*, Cambridge University Press, 1967

Hasser/La Salle/Sullivan; *Análisis Matemático*; Edit. Trillas, 1ra. Ed. 1970

INTEREDU; *Formación Magisterial*, Programa Interdisciplinario de Investigación Educativa, 1992

Kline, Morris; *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, Alianza Editorial, 1972

Malaspina, Uldarico; *Piaget entre Nosotros*, Fondo Editorial PUCP, 1997

Moffitt, J. Clifton; *Perfeccionamiento Docente*; Troquel, Buenos Aires, 1971

Moustakas, Clark; *Heuristic Research*; Sage Publications, London, 1990

Nahim, Paul J.; *An Imaginary Tale: The Story of the Square Root of Minus One*, Princeton University, 1ra. Ed., 1998

Perdigao do Carmo; *Trigonometria, Números Complexos*; Graftex, Rio de Janeiro, 1992

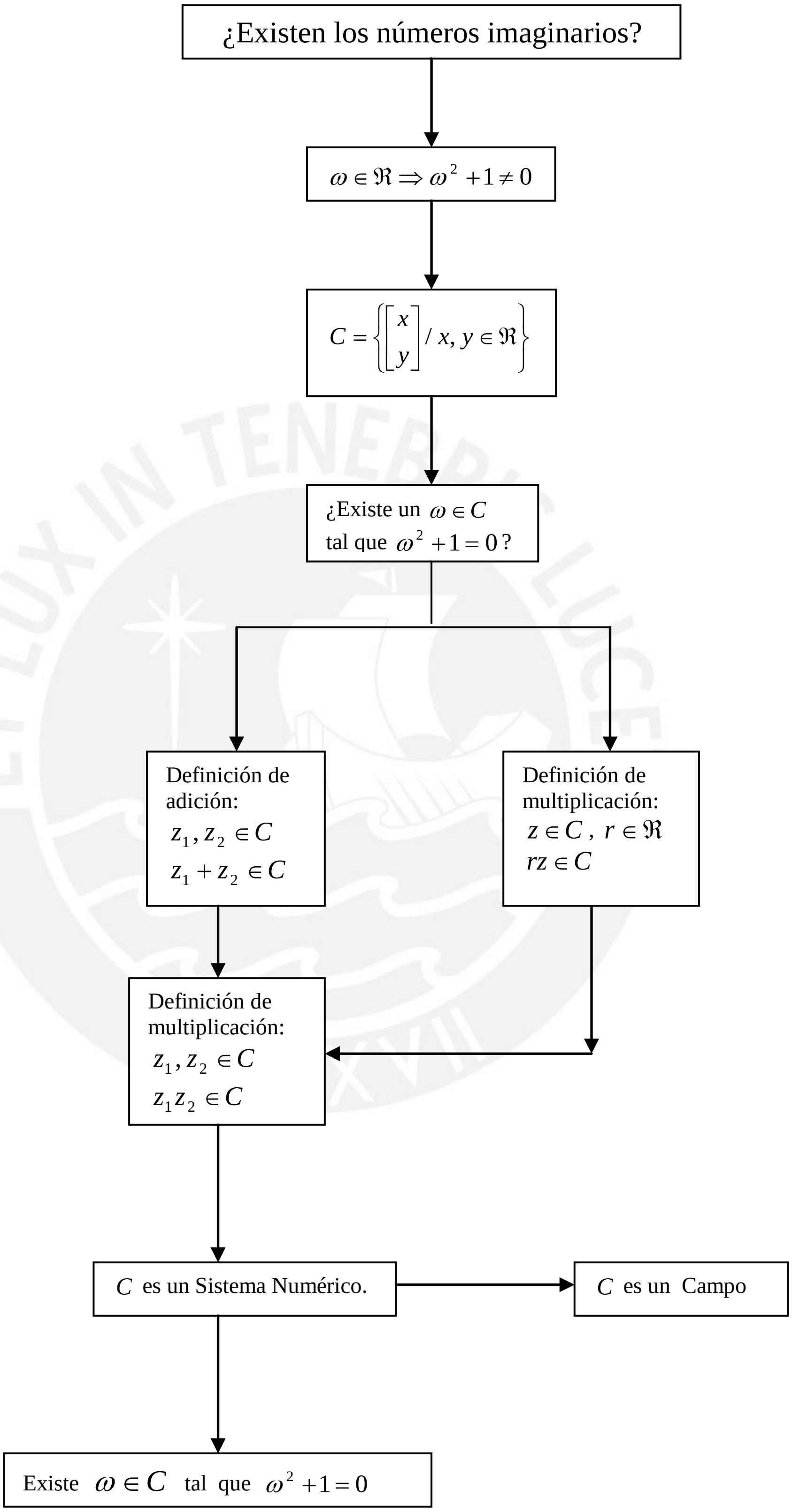
Piaget, Jean; *La Enseñanza de las Matemáticas*, Editorial Aguilar, 1971

Stewart, Ian; *Concepts of Modern Mathematics*, Dover Publications, NY, 1995

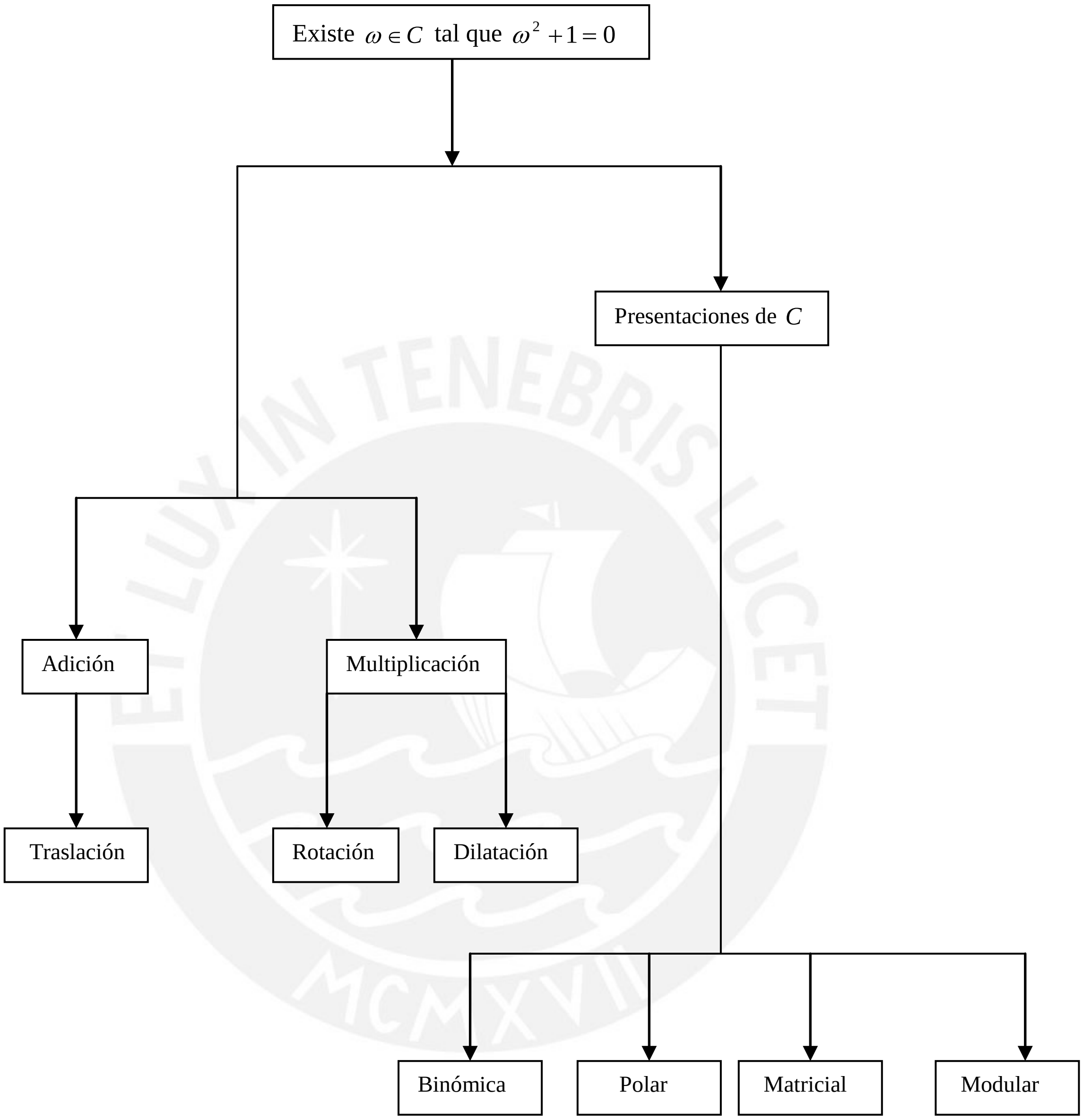
Uspensky, J.V.; *Teoría de Ecuaciones*; Limusa, México, 1987

Zubieta R , F.; *La Moderna Enseñanza Dinámica de las Matemáticas*, Edit. Trillas 1ra. Ed. 1972

BÚSQUEDA DE ω



CUADRO No. 2


Existe $\omega \in C$ tal que $\omega^2 + 1 = 0$
Presentaciones de C
Adición
Multiplicación
Traslación
Rotación
Dilatación
Binómica
Polar
Matricial
Modular