

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO



PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

ÁREA EFECTIVA DE RADIACIÓN (Sd) PARA UN PISTON
AXISIMÉTRICO RADIANDO EN UN PLANO INFINITO.

Tesis para optar el grado académico de Magíster en Física Aplicada

Autor:

Luis Angelo Velarde Criado

ASESOR: DR. JORGE MORENO RUIZ

Jurado:

Mag. Miguel Piaggio Henderson

Mag. Richard Rivera Campos

Dr. Jorge Moreno Ruiz

Lima, Agosto del 2016

RESUMEN

El cálculo exacto y la determinación experimental del Área de Efectiva de Radiación (Sd) siempre ha sido un tema sumamente importante para establecer los parámetros del altavoz. Incluso si el Integral de Rayleigh de difracción se puede utilizar para evaluar la presión sonora en cualquier punto, es muy difícil obtener un valor preciso para el Sd, debido a la solución de la integral de superficie. En este trabajo, proponemos un método simplificado usando herramientas computacionales y la simetría cilíndrica en la mayoría de los pistones, con el fin de reducir las dificultades matemáticas. Entonces, las soluciones para diferentes tipos de pistón se comparan con otras obtenidas en diferentes enfoques experimentales con el fin de analizar la precisión de este nuevo enfoque.



AGRADECIMIENTOS

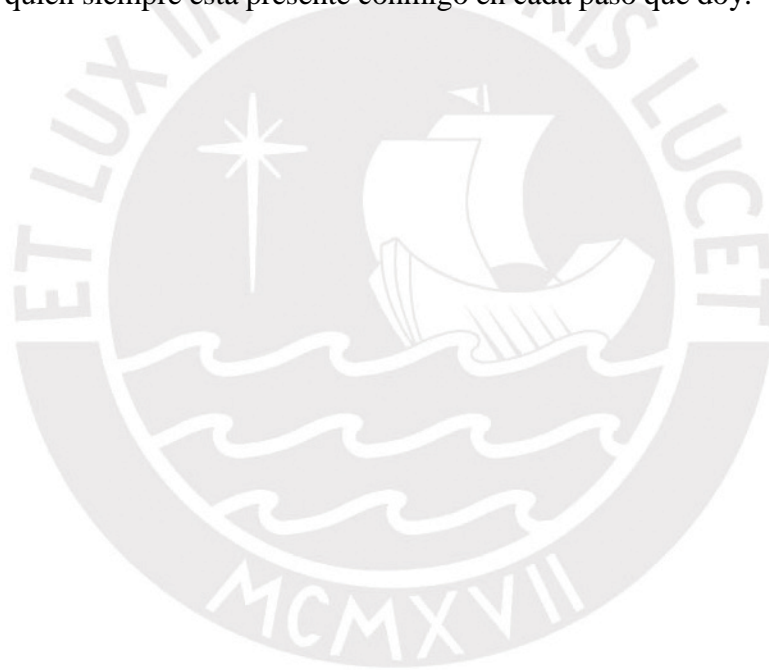
A mi asesor, sin cuya guía esta tesis no hubiese sido posible.

A papá, mamá y mi hermanito, que les debo todo lo que soy.

A mi esposa, sin cuyo apoyo no podría haber realizado este trabajo

A Sergio, Diego y Matías que son mi inspiración y mi fuerza para seguir adelante.

A Dios, quien siempre está presente conmigo en cada paso que doyo.



INDICE

1	Introducción:	2
2	Definición del Área Efectiva de Radiación (SD) :	2
3	Solución teórica para un pistón axisimétrico genérico en un plano infinito:	3
3.1	La ecuación de Rayleigh-Sommerfeld y el trabajo en coordenadas cilíndricas	3
3.2	Campo cercano:	6
3.3	Área Efectiva de Radiación:	8
3.3.1	Relación Presión-Aceleración:	8
3.4	Cálculo de β :	8
3.4.1	Pistón Convexo, Cóncavo y Cónico:	8
4	Resultados	9
5	Conclusiones	10
6	Referencias	11
Anexo 1		13
Anexo 2		15

1 Introducción:

Tal y como menciona Klippel [5] el Área efectiva de radiación (S_D) es uno de los parámetros más importantes de un altavoz, dado que permite determinar el Nivel de Potencia Acústica y la eficiencia del mismo. Sin embargo, a lo largo del tiempo se han definido muchas formas de determinar su valor considerando planteamientos empírico-experimentales y propuestas teórico-prácticas. Son claves los trabajos de Small y Moreno [4], así como el más reciente trabajo de Klippel [5].

Dado que la intención del presente trabajo es partir del análisis teórico para proponer un método simplificado para la determinación del Área Efectiva de Radiación (S_D), debemos empezar por la definición de la misma y a partir de ella plantear el análisis de un pistón plano colocado en un plano infinito. Finalmente S_D se determinará en el caso de un pistón axisimétrico no plano con diferentes características.

2 Definición del Área Efectiva de Radiación (S_D) :

De acuerdo con Beranek [4] [5], el parámetro S_D ayuda a determinar la presión sonora en el eje y la potencia acústica radiada total. Además, se necesita un valor preciso del S_D para calcular los parámetros de Thiele-Small con un cierto grado de fiabilidad.

Para entender y calcular el área de radiación efectiva (S_D) es necesario determinar la presión radiada por un pistón circular plano con radio "a" en cierto punto "L". El valor de "L" dependerá de si el cálculo se realiza en el campo cercano o en el campo lejano.

Como Klippel [1] menciona, con el fin de determinar el S_D , es necesario encontrar el radio del pistón plano que genera la misma presión sonora en un punto distante (campo lejano) de un pistón axisimétrico genérico. Este pistón irradia independientemente del volumen ocupado de manera uniforme siempre teniendo en cuenta que sus componentes están en la dirección del eje de simetría.

Como Moreno [3] describe, el área de radiación efectiva se puede calcular a partir de la relación de la presión de campo cercano a la aceleración del diafragma.

Moreno [3] también dice, que existe un "método práctico", que consiste, en tomar el diámetro en el centro de la zona envolvente.

3 Solución teórica para un pistón axisimétrico genérico en un plano infinito:

El análisis del pistón plano se hace en diferentes libros relacionados con el tema, desde Morse en [6], Kinsler en [7] y, finalmente, Blackstock en [8]. Todos ellos muestran estrategias similares para analizar el caso de un pistón plano sobre un plano o sonodector infinito.

Se considera la existencia de un pistón que está inicialmente libre en su posición de manera que todo el pistón vibra o se desplaza en la misma manera, con la misma velocidad o aceleración y de forma normal a la superficie.

Además se considera que el plano sobre el que se encuentra montado el pistón es un sonodector infinito, que está destinado a restringir el campo sonoro en el lado frontal del pistón, o de forma más general desacoplar el campo de sonido en los lados frontal y posterior.

Es importante considerar que el pistón tiene un movimiento uniforme y armónico en el tiempo, es decir: $u_p = u_0 e^{j\omega_0 t}$ donde u_p es la velocidad del pistón. En este caso, además se considera que u_0 es constante. Para un caso más general, como el que se planteará posteriormente, se debe tomar en cuenta que la velocidad variará radialmente para preservar las condiciones de simetría asumidas desde el inicio del presente trabajo.

Como consideración final a tratar, se tiene que, aunque la velocidad podría no ser normal a la superficie, se considerará sólo la componente normal dado que esta es la que produce la radiación sonora. Esto implica que el producto dentro de la integral que inicialmente se toma como $u_0 dS$, luego se considerará como $\mathbf{u}_0 \cdot d\mathbf{S}$ de manera que se considere como efectiva a la componente normal de la velocidad.

3.1 La ecuación de Rayleigh-Sommerfeld y el trabajo en coordenadas cilíndricas

El modelo general para la presión sonora producida por la vibración de un pistón montado en un plano rígido infinito, es denominada la Integral de Rayleigh-Sommerfeld. Si la forma del pistón es arbitraria y la componente normal de la velocidad es u_p ; está será una función arbitraria dependiente del tiempo.

$$p(x, y, z; t) = \rho_0 \int_S \frac{\dot{u}_p \left(x', y'; t - \frac{R}{c} \right)}{2\pi R} dS \tag{1}$$

Donde R es la distancia al punto L donde se determina la presión sonora.

Este cálculo que consiste básicamente en una integral, suele ser muy compleja y se suele recurrir al cálculo numérico. Es en este sentido donde se buscará determinar un modelo y una forma sencilla de cálculo.

Es importante en esta parte analizar correctamente el pistón axisimétrico de forma genérica, para lo cual se plantean 2 gráficos que permiten ver el pistón desde diferentes perspectivas. Luego, a partir de este análisis se podrá evaluar la integral de Rayleigh-Sommerfeld.

En los gráficos presentados se debe tomar en cuenta que aunque el pistón trata de representar una forma axisimétrica similar a la de un parlante, esto no resta generalidad dado que la dimensión d correspondiente a la altura respecto al eje z donde se encuentra el anillo depende del radio del mismo únicamente.

Adicionalmente se considera que los anillos en esta aproximación son planos y la velocidad por lo tanto, aunque se considerará no uniforme se mantendrá perpendicular a la superficie de cada diferencial de anillo considerado.

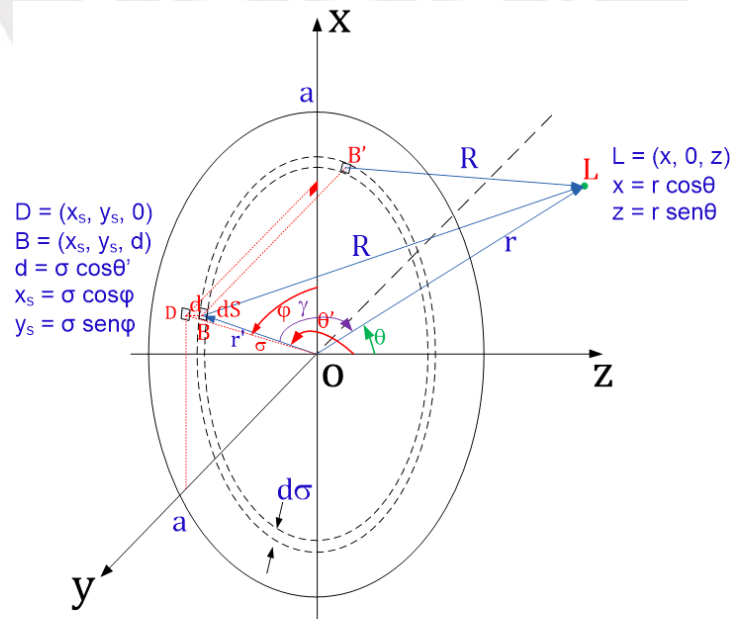


Figura 1: Pistón axisimétrico circular. Perspectiva que muestra un anillo de ancho $d\sigma$ a una altura d sobre el plano XY

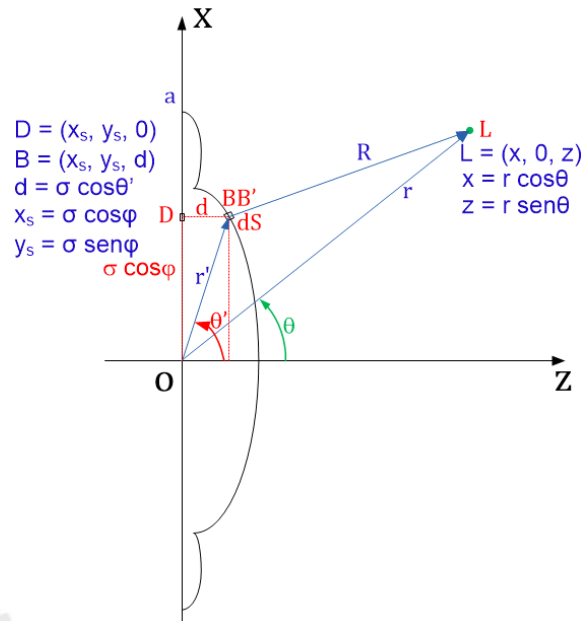


Figura 2: Pistón axisimétrico circular. Perspectiva lateral viendo el plano al plano XZ mostrando la altura del anillo y la diferencial de superficie respecto al eje Z

Con las gráficas se puede definir las características de la integral de Rayleigh-Sommerfeld para el pistón plano axisimétrico de forma genérica. La expresión puede verse a continuación en la ecuación (2):

$$p(x, y, z; t) = \rho_0 \int_S \frac{\dot{u}_p \left(x', y'; t - \frac{R}{c} \right)}{2\pi R} dS \tag{2}$$

Las consideraciones tomadas serán las siguientes:

- El radio σ del pistón es una variable en coordenadas circulares.
- El espesor del anillo será $d\sigma$.
- El valor de R se obtendrá considerando a las variable σ y d :

$$R = |r - r'| = \sqrt{(r \text{sen}\theta - \sigma \text{cos}\varphi)^2 + \sigma^2 \text{sen}^2\varphi + (r \text{cos}\theta - d)^2} \tag{3}$$

- El diferencial de superficie se da por la simetría en el anillo: $dS = 2\sigma d\sigma d\varphi$ considerando la proyección de los anillos sobre el plano XY
- Los intervalos de las variables son: $0 < \sigma < a$ considerando todo el radio del pistón y $0 < \varphi < \pi$ considerando la simetría.
- Se asumirá velocidad uniforme.

Primero se desarrollará la expresión (3) para introducirla en la integral.

$$R = \sqrt{r^2 + \sigma^2 + d^2 - 2r\sigma \cos\theta \cos\varphi - 2rd \cos\theta} \quad (4)$$

Sin embargo, se utilizará el ángulo γ entre los vectores \mathbf{r} y \mathbf{r}' de manera que:

$$\cos\gamma = \cos\theta' \cos\theta + \sin\theta' \sin\theta \cos(\theta' - \theta) \quad (5)$$

Finalmente se obtendrá:

$$R = \sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr' \cos\gamma} \quad (6)$$

Donde:

$$r' = \sqrt{\sigma^2 + d^2} \quad (7)$$

Entonces, se desarrollará la expresión exponencial:

$$\frac{e^{-jkR}}{R} = \frac{e^{-jk\sqrt{r'^2+r^2-2rr'\cos\gamma}}}{\sqrt{r'^2+r^2-2rr'\cos\gamma}} \quad (8)$$

Esta expresión ha sido revisada por Hasegawa [9] [10] en su estudio de los pistones cóncavos. Sin embargo, está basada en la consideración del estudio del campo cercano, que no constituye el total de este análisis.

3.2 Campo cercano:

El análisis realizado por Hasegawa ya contempla el caso de campo cercano. Pese a esto, se considerará el análisis en el que se basa Hasegawa, es decir, el encontrado en el tratado de Watson sobre funciones de Bessel [11]

Según Watson [16], de acuerdo a las expresiones de Gegenbauer contenidas en su tratado, si se toma en cuenta que para campo cercano $r' > r$, es posible transformar la expresión exponencial en:

$$\frac{e^{-jk\sqrt{r'^2+r^2-2rr'\cos\gamma}}}{\sqrt{r'^2+r^2-2rr'\cos\gamma}} = j \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \frac{K_{m+1/2}(kr')}{\sqrt{r'}} \frac{I_{m+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} P_m(\cos\gamma) \quad (9)$$

Pero esta expresión puede ser definida en términos de las funciones esféricas correspondientes, tanto de Bessel como de Hankel utilizando lo desarrollado por Abramowitz [12] y mencionado en la página de referencias del software Mathematica® [13]. La expresión final se puede colocar en la Integral de Rayleigh-Sommerfeld para su desarrollo:

$$p(x, y, z; t) = \frac{jk\rho_0 c_0 u_0 e^{j\omega_0 t}}{2\pi} \int_S -jk \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) h_m^{(1)}(kr') j_m(kr) P_m(\cos\gamma) dS \quad (10)$$

Es importante mencionar que aún se sigue considerando que la velocidad es constante a lo largo del radio del pistón dado que este se asume rígido y con un movimiento libre.

Con la finalidad de resolver la ecuación se procederá de la misma forma que Hasegawa plantea.

$$P_m(\cos\gamma) = P_m[\cos\theta' \cos\theta + \sin\theta' \sin\theta \cos(\varphi)] \quad (11)$$

$$P_m(\cos\gamma) = P_m(\cos\theta') P_m(\cos\theta) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p P_m^p(\cos\theta') P_m^{-p}(\cos\theta) \cos(p\varphi) \quad (12)$$

Entonces se puede regresar a la expresión principal en (10)

$$= \frac{k^2 \rho_0 c_0 u_0 e^{j\omega_0 t}}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) j_m(kr) \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^a \sigma h_m^{(1)}(kr') \left[P_m(\cos\theta') P_m(\cos\theta) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p P_m^p(\cos\theta') P_m^{-p}(\cos\theta) \cos(p\varphi) \right] d\sigma d\varphi \quad (13)$$

Expresión que será partida en 2 y se eliminará uno de los términos para reducirla.

La nueva expresión será:

$$= \frac{k^2 \rho_0 c_0 u_0 e^{j\omega_0 t}}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) j_m(kr) \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^a \sigma h_m^{(1)}(kr') P_m(\cos\theta') P_m(\cos\theta) d\sigma d\varphi \right\} \quad (14)$$

Uno de los términos se reduce pues se pueden extraer los elementos que no dependen del ángulo φ :

$$= k^2 \rho_0 c_0 u_0 e^{j\omega_0 t} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) j_m(kr) P_m(\cos\theta) \int_0^a \sigma h_m^{(1)}(kr') P_m(\cos\theta') d\sigma \quad (15)$$

Sin embargo con la finalidad de utilizar diferentes geometrías necesitamos incluir los términos d y σ con las expresiones que relacionan r' y $\cos\theta'$. Luego de esto se obtiene la siguiente expresión:

$$= k^2 \rho_0 c_0 u_0 e^{j\omega_0 t} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) j_m(kr) P_m(\cos\theta) \int_0^a \sigma h_m^{(1)}\left(k\sqrt{d^2 + \sigma^2}\right) P_m\left(\frac{d}{\sqrt{d^2 + \sigma^2}}\right) d\sigma \quad (16)$$

3.3 Área Efectiva de Radiación:

3.3.1 Relación Presión-Aceleración:

A continuación, se va a determinar para el caso del pistón axisimétrico la relación entre la presión en el eje z y el producto de la aceleración y la densidad considerada. Para efectos de análisis la relación entre estos parámetros será denominada β para el pistón.

$$\beta_{\text{pistón plano base}} = \frac{p}{\rho_0 \cdot \text{acc}} \quad (17)$$

Dónde:

- p es la presión sonora en el punto en campo cercano
- ρ_0 es la densidad del aire ($\rho_0 = 1.18 \text{kg/m}^3$)
- acc es la aceleración del pistón.

Como en los casos previos, se procederá a plantear la expresión para un pistón plano axisimétrico de forma genérica. Para el campo cercano, se puede combinar la expresión (15) con la expresión de aceleración en el caso de velocidad uniforme.

$$\beta_{\text{p.axisimétrico CC}} = -jk \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) j_m(kz) \int_0^a \sigma h_m^{(1)}(k\sqrt{d^2 + \sigma^2}) P_m\left(\frac{d}{\sqrt{d^2 + \sigma^2}}\right) d\sigma \quad (18)$$

3.4 Cálculo de β :

Ahora que se cuenta con una expresión para β , se procederá a determinar las expresiones exactas para casos particulares de manera que se puedan contrastar con resultados prácticos obtenidos, como es el caso de los obtenidos por Moreno [3].

3.4.1 Pistón Convexo, Cóncavo y Cónico:

Las siguientes figuras describen la geometría para estos casos:

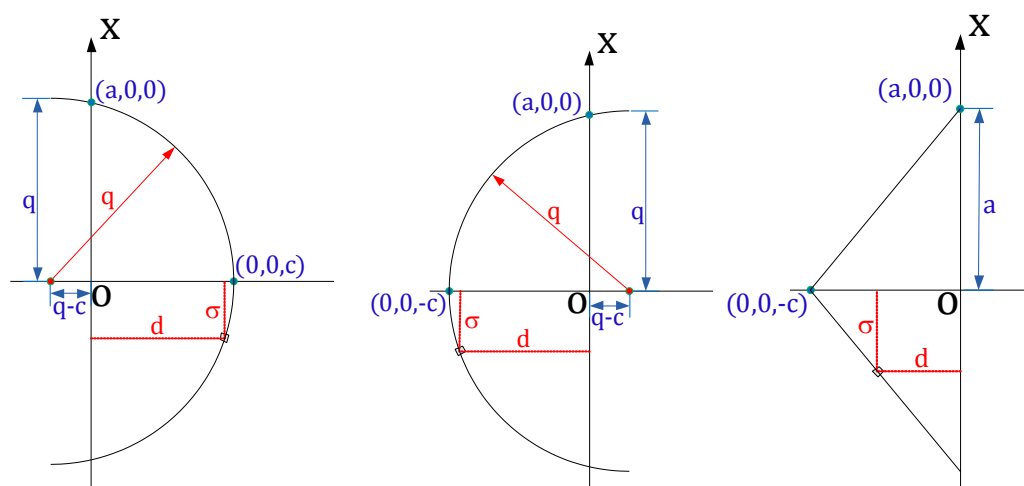


Figura 3: Vista lateral de los pistones axisimétricos convexo, cóncavo, y cónico.

En la siguiente tabla se mostrarán los parámetros necesarios para el cálculo de β :

Table 1: Parámetros del pistón

Pistón	Convexo	Cóncavo	Cónico
Ecuaciones Base	$x^2 + y^2 + [z + (q - c)]^2 = q^2$	$x^2 + y^2 + [z - (q - c)]^2 = q^2$	$\frac{a}{\sigma} = \frac{c}{c - d}$
$d = f(\sigma)$	$d = f(\sigma) = \sqrt{q^2 - \sigma^2} - q'$	$d = f(\sigma) = \sqrt{q^2 - \sigma^2} + q'$	$d = f(\sigma) = c \left(1 - \frac{\sigma}{a}\right)$
Expresiones adicionales	$q = \frac{a^2 + c^2}{2c} \quad q' = \frac{a^2 - c^2}{2c}$	$q = \frac{a^2 + c^2}{2c} \quad q' = \frac{a^2 - c^2}{2c}$	

4 Resultados

Estas expresiones pueden ser resueltas utilizando el Matemática. Se han desarrollado algunos cálculos con la finalidad de mostrar cómo se implementan estas soluciones.

Primero, se calculan las expresiones de β para diferentes clases de pistones con la finalidad de verificar la linealidad de la relación entre la presión y la aceleración en baja frecuencia:

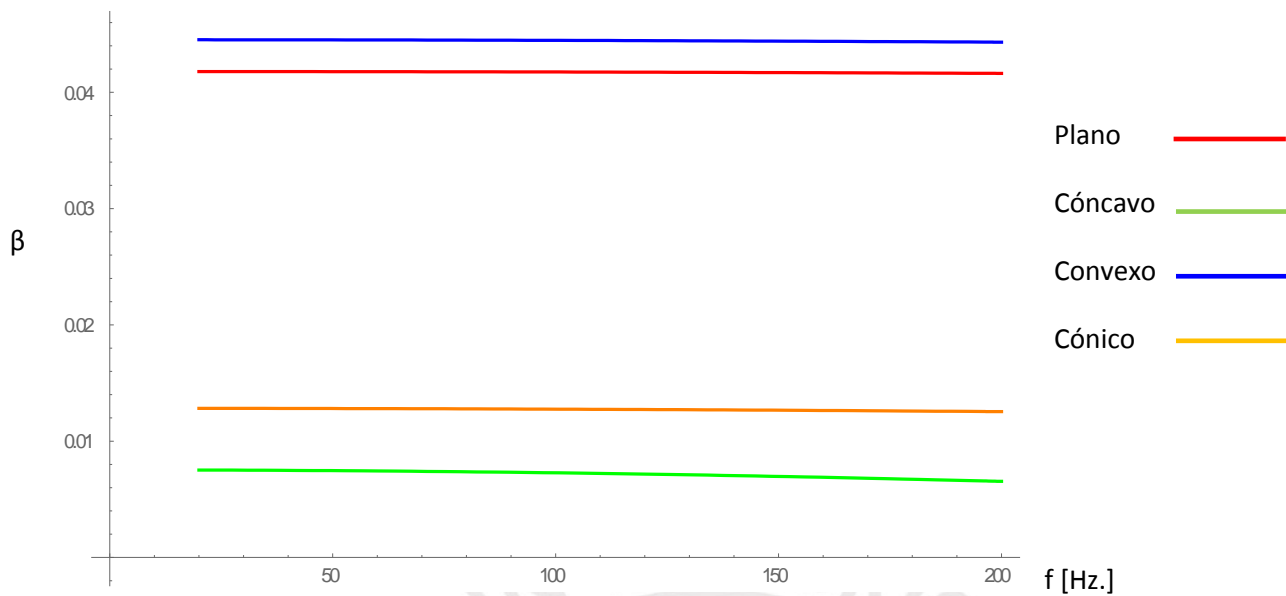


Figura 4: Valor de β para diferentes pistones axisimétricos.

Sin embargo, también podemos comparar el valor de β para una única frecuencia (en este caso 100Hz) a lo largo del eje Z.

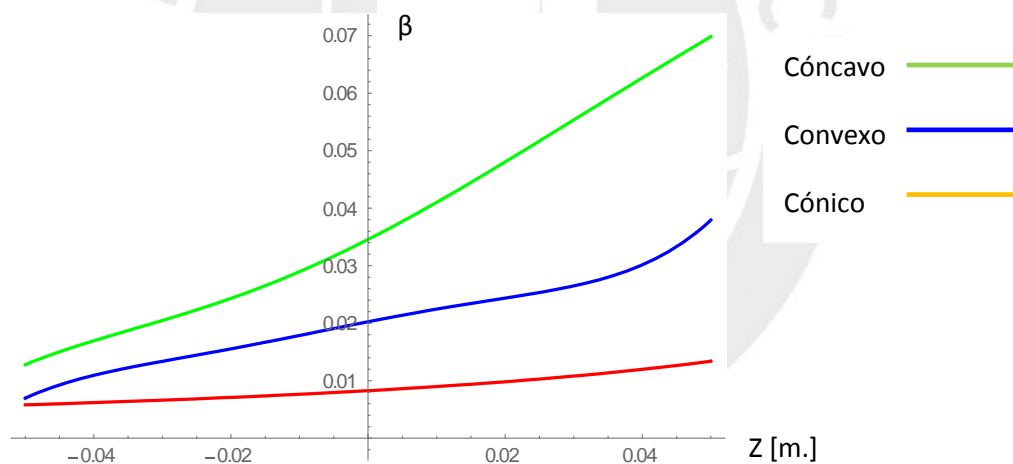


Figura 5: Valor de β a lo largo del eje Z para la frecuencia 100Hz.

5 Conclusiones

Aun cuando este es un análisis teórico, se demuestra que se puede desarrollar un método sencillo de cálculo del área efectiva de radiación para un pistón axisimétrico genérico que a su vez constituye también un punto de partida para el trabajo con parlantes.

Este método pudo mostrar una relación lineal entre la presión y la aceleración, sin embargo se trabajó considerando velocidad uniforme. Se puede utilizar como

ejemplo las expresiones de Greenspan [14] para el caso de velocidad no uniforme pero eso implicaría la necesidad del cálculo experimental de la velocidad promedio en el pistón.

Para los cálculos de campo lejano es posible utilizar las mismas expresiones a partir de las ecuaciones de Abramowitz [12] tomando en cuenta una perspectiva y aproximación diferente al utilizarlas.

Se han encontrado diferentes aproximaciones, pero se ha desarrollado esta, con la intención de contribuir con un método diferente que no requiere demasiada potencia computacional. El software Mathematica® no requiere demasiada potencia de cómputo y los polinomios de Legendre son las únicas fórmulas recursivas que toman algo de tiempo para desarrollarlas. Para los gráficos planos realizados, se necesitaron alrededor de 5 minutos para incluir 20 polinomios, pero se logra convergencia en los resultados con menos polinomios. La función NIntegrate en el software Mathematica® realiza algoritmos adaptativos, los cuales subdividen las regiones de integración de forma recursiva en función de la necesidad.

6 Referencias

- [1] W. Klippel y J. Schlechter, «Dynamical Measurement of the Effective Radiation Area SD,» de *128th Convention Audio Engineering Society*, London, 2010.
- [2] R. H. Small, «Direct-Radiator Loudspeaker System Analysis,» *Journal of Audio Engineering Society*, vol. 20, pp. 383-395, 1972.
- [3] J. N. Moreno, S. Jonsson and R. Moscoso, "Measurement of the Effective Radiating Surface Area of a Loudspeaker using a Laser Velocity Transducer," in *96th Convention Audio Engineering Society preprint*, Amsterdam, 1994.
- [4] L. L. Beranek, *Acoustics*, Amer Inst of Physics; Rev Sub edition, 1986.
- [5] L. L. Beranek y T. J. Mellow, *Acoustics: Sound Fields and Transducers*, Oxford: Elsevier Inc., 2012.
- [6] P. M. Morse y K. U. Ingard, *Theoretical Acoustics*, Princeton, Now Jersey: Princeton University Press., 1986.
- [7] L. E. Kinsler, A. R. Frey, A. B. Coppens y J. V. Sanders, *Fundamentos de Acústica*, México: Limusa S.A., 1992.
- [8] D. T. Blackstock, *Fundamentals of Physical Acoustics*, Austin, Texas: John Wiley & Sons, Inc., 2000.
- [9] T. Hasegawa, N. Inoue y K. Matsuzawa, «A new theory for the radiation from a concave piston source,» *Journal Acoustical Society of America*, vol. 82, nº 2, pp. 706-708, 1987.
- [10] T. Hasegawa, K. Matsuzawa y N. Inoue, «A new expansion for the velocity

- potential of a circular concave piston,» *Journal Acoustical Society of America*, vol. 79, n° 4, pp. 927-931, 1986.
- [11] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge: University Press, 1922.
- [12] M. Abramowitz y I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Washington: National Bureau of Standards - U.S. Government Printing Office, 1972.
- [13] Wolfram Research, Inc., *Mathematica®*, Version 10.0 ed., Champaign, Illinois: Wolfram Research, Inc., 2015.
- [14] M. Greenspan, «Piston radiator: Some extensions of the theory,» *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 65, n° 3, pp. 608-621, 1979.



Anexo 1

Propuesta y evaluación de negocio en torno al método simplificado de determinación de Área Efectiva de Radiación (Sd)

1. Definición del Negocio:

El desarrollo realizado en la presente publicación permite definir una perspectiva de negocio a tomar en cuenta. La propuesta está basada en la mejora del proceso de diseño de parlantes y otros dispositivos de radiación sonora gracias a la posibilidad de contar con una herramienta que permita el cálculo preciso de sus parámetros de construcción. Esto nos da como resultado el acercamiento a las empresas de diseño de parlantes y audífonos, o a otros interesados en el diseño de estos dispositivos, dado que aunque existen programas para el diseño de parlantes, el área efectiva de radiación es un parámetro que debe ingresarse normalmente y se basa en reglas empíricas.

La Misión del negocio sería el ofrecer una herramienta práctica y sencilla para el diseño de parlantes y audífonos con la precisión que otorga el cálculo teórico de los parámetros de diseño.

La Visión del negocio estaría orientada a ser la herramienta de referencia o predilecta para el diseño de parlantes y audífonos en el mercado nacional y mundial.

2. Estudio del Mercado:

El cálculo de los parámetros de Thiele-Small utiliza el valor del área efectiva de radiación por lo que es indispensable contar con su valor exacto. Es claro entonces que el espectro es grande en el caso de los fabricantes de parlantes independientemente de la calidad del dispositivo. Sin embargo, si consideramos también a los audífonos, este espectro será mucho mayor. Empezando en JBL, RCF, Electro Voice, Yamaha, Mackie, Phillips, Pioneer, Logitech, Jawbone, Bose, entre otros, hay una enorme cantidad de empresas de parlantes que estarían en mejorar sus procesos de construcción a partir de una mejor evaluación de los parámetros. Así también, empresas como: Audio Technica, Beats, Bose, Beyerdynamic, V-Moda, Sony, Monster, Panasonic, JVC y Sennheiser, entre otras cuentan con departamentos de investigación orientados a la mejora de sus productos, por lo que esta herramienta les sería de gran beneficio.

Otros programas para la evaluación de los parámetros de Thiele-Small y otros cálculos electroacústicos tienen un costo de alrededor de \$2,500.00 como es el caso de la plataforma PULSE Basic Electroacoustics, de Brüel&Kjaer

3. Análisis estratégico:

La principal fortaleza del software que se pudiese desarrollar a partir de la presente publicación sería la precisión en los cálculos relacionados con el área efectiva de radiación, al ser este cálculo teórico, sólo toma en cuenta el error propio de las reglas de recursión utilizadas en los diferentes cálculos planteados, pero no requiere

aproximaciones propias del uso de elementos diferenciales o aproximaciones basadas en cálculo numérico.

Es importante mencionar que la empresa Sennheiser, con quien se ha tenido contacto y apoyo en la entrega de muestras para ensayos, ha mostrado un claro interés en la investigación realizada, validando de esta forma la propuesta de negocio aquí presentada.



Anexo 2

Artículo aceptado en Congreso Internacional de Acústica 2016

Se anexa en las siguientes páginas el paper aceptado en el evento, en idioma inglés, tal como ha sido solicitado.



Electroacoustics and Audio Engineering: Paper ICA2016-810**Effective radiation area (S_d) for an axisymmetric piston radiating in an infinite baffle****Angelo Velarde^(a), Jorge Moreno^(b)**^(a) Pontificia Universidad Católica del Perú-Engineering Department, Perú, angelo.velarde@pucp.pe^(b) Pontificia Universidad Católica del Perú-Physics Department, Perú, jmoreno@pucp.edu.pe**Abstract**

Exact calculation and experimental determination of the Effective Radiation Area (S_D) has always been a very important topic in order to establish loudspeaker parameters. Even if the Rayleigh Diffraction Integral can be used to evaluate sound pressure at any point, is very difficult to obtain a precise value for the S_D because of the solution of the surface integral. This paper, propose an easier method using computational tools and the cylindrical symmetry in most of the pistons, in order to reduce the mathematical difficulties. Then, the obtained solutions for different kind of piston are compared with other solutions obtained in different experimental approaches in order to determine the accuracy of this new approach.

Keywords: Axisymmetric Piston, Effective radiation area.

Effective radiation area (S_d) for an axisymmetric piston radiating in an infinite baffle

1 Introduction

As Klippel [1] mentioned, the effective radiation area (S_d) is one of the most important parameters for a loudspeaker, since it helps to determine the sound power level and the efficiency. However, over the time, has been defined many ways to determine its value considering empirical and experimental approaches and the theoretical and practical proposals. In this matter, the papers from Small [2] and Moreno [3] are very important as well as the latest work of Klippel [1].

Since the intention of this paper is to deduce, from theoretical analysis; a simplified method of determining the effective radiation area (S_d), the process will begin by defining S_d and then, calculating the case of a flat piston placed in an infinite baffle plane. Finally S_d will be determined in the case of an axisymmetric non-flat piston with different shapes.

2 The effective radiation area (S_d)

In accordance with Beranek [4] [5], the S_d parameter helps determine the sound pressure on the axis and total acoustic power output. A precise value of S_d is required to calculate the parameters of Thiele-Small with a certain degree of reliability.

To understand and to calculate the effective radiation area (S_d) is necessary to determine the radiated pressure for a flat circular piston with radius "a" at certain point "L". The value of "L" will depend if the calculation is performed in the near field or in the far field.

As Klippel [1] mention, in order to determine the S_d , it is desired to find the radius of the flat piston that generates the same sound pressure at a distant point (far field) than a generic axisymmetric piston. This piston radiates independently from the occupied volume in a uniform way always considering the components in the direction of the symmetry axis.

As Moreno [3] describes, the effective radiating area can be calculated from the ratio of the nearfield pressure to diaphragm acceleration.

Moreno [3] also says, that some "ruler method" exist, that consist, in taking the diameter in the middle of the surround area.

3 Theoretical solution for a generic axisymmetric piston in an infinite baffle

Analysis of the flat piston is made in different books related to the subject, from Morse [6], Kinsler [7] and finally Blackstock [8]. All of them show similar strategies to analyze the case of a flat piston on an infinite baffle.

It is considered the existence of a piston which is initially free in position so that the whole piston vibrates or moves in the same way, with the same speed or acceleration and so normal to the surface.

Additionally it is considered that the plane whereon is mounted the piston is an infinite baffle, which is intended to restrict the sound field in the front side of the piston, or more generally decouple the sound field in the front and rear sides.

It is important to realize that the piston has a uniform and harmonious movement in time, ie: $u_p = u_0 e^{j\omega_0 t}$ where u_p is the piston speed. In this case, it is also considered that u_0 is constant. For a more general case, you should note that the speed varies radially to preserve the symmetry conditions assumed from the beginning of this work.

As a final consideration, it will be taken into account only the normal component because this is what produces the sound radiation. This implies that the product within the integral initially taken as $u_0 dS$, $u_0 \cdot dS$ then considered so that it is considered as effective to the normal component of velocity.

3.1 Rayleigh-Sommerfeld equation and cylindrical coordinates

The general model for the sound pressure produced by the vibration of a piston mounted in an infinite baffle is called the Rayleigh-Sommerfeld Integral. If the piston shape is arbitrary and the normal velocity component is u_p ; we will have a time-dependent arbitrary function.

$$p(x, y, z; t) = \rho_0 \int_S \frac{\dot{u}_p \left(x', y'; t - \frac{R}{c} \right)}{2\pi R} dS \quad (1)$$

R is the distance to the point where the sound pressure L will be determined.

This calculation is basically an integral, usually very complex and is often used numerical calculation methods. Therefore, a simple method of calculation will be sought.

It is important to analyze the axisymmetric piston generically, and for this purpose, 2 graphics have been prepared to let you see the piston from different perspectives. Then, from this analysis we can evaluate the integral of Rayleigh-Sommerfeld.

In the graphs presented should take note that although the piston is drawn similar to an speaker, this does not detract generality since the parameter d corresponding to the height in the z axis depends only on the radius.

Additionally, it is considered that the rings in this approach are flat and the speed, even if is non uniform will be maintained perpendicular to the surface of each differential ring.

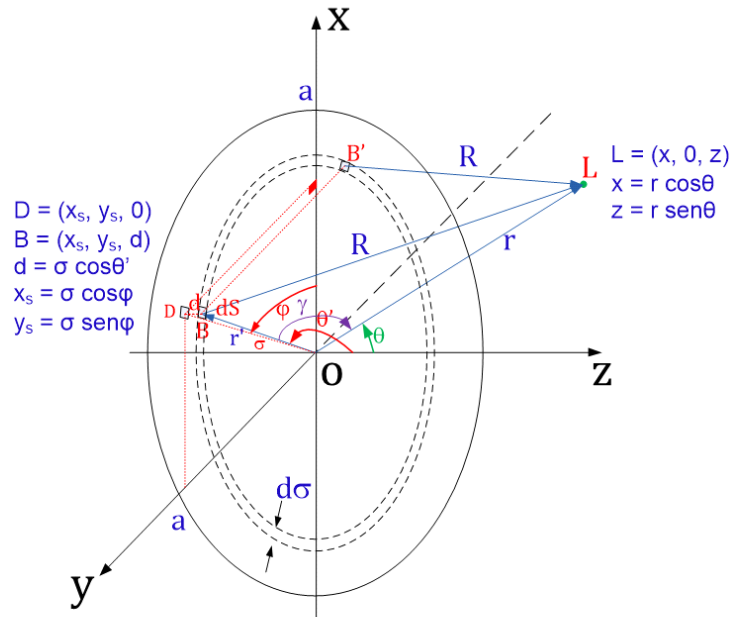


Figure 1: Circular axisymmetric piston. Ring with a width $d\sigma$ at a height d on the XY plane

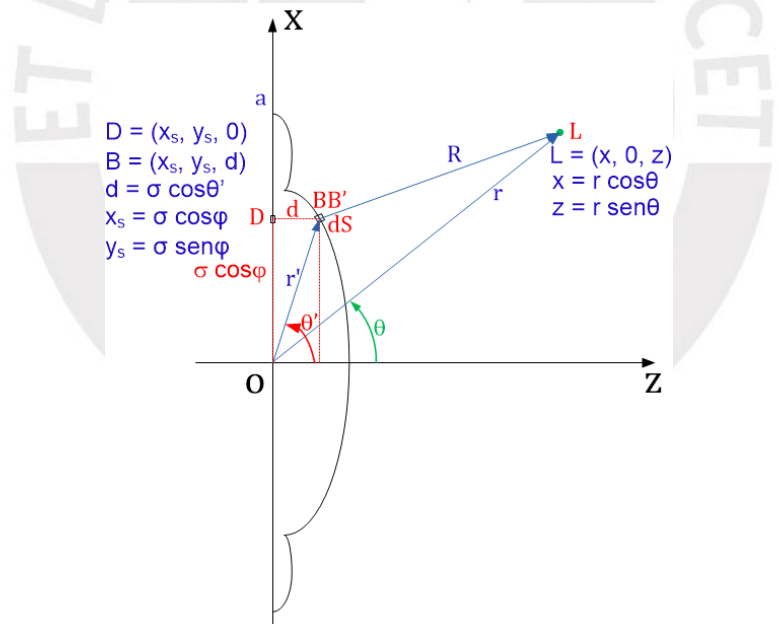


Figure 3: Circular axisymmetric piston. Side perspectives seeing XZ plane showing the height of the ring and the differential surface perpendicular to the axis Z.

From the figures, we can define the characteristics of the Rayleigh-Sommerfeld integral for the plane axisymmetric piston. That expression can be seen below in equation (2)

$$p(x, y, z; t) = \rho_0 \int_S \frac{\dot{u}_p(x', y'; t - \frac{R}{c})}{2\pi R} dS \quad (2)$$

The considerations taken shall be as follows:

- The radius σ of the piston is a variable in circular coordinates.
- The thickness of the ring will be $d\sigma$.
- The value of R is obtained considering the variables σ and d :

$$R = |r - r'| = \sqrt{(r\text{sen}\theta - \sigma\text{cos}\varphi)^2 + \sigma^2\text{sen}^2\varphi + (r\text{cos}\theta - d)^2} \quad (3)$$

- The surface differential is obtained again by symmetry in the ring: $dS = 2\sigma d\sigma d\varphi$ considering the projection of the rings on the XY plane.
- The ranges of the variables are: $0 < \sigma < a$ for the entire radius of the piston and $0 < \varphi < \pi$ considering symmetry.
- Speed is initially assumed uniform.

First the expression (3) is developed for introduction into the integral.

$$R = \sqrt{r^2 + \sigma^2 + d^2 - 2r\sigma\text{sen}\theta\text{cos}\varphi - 2rd\text{cos}\theta} \quad (4)$$

However, we will use the angle γ between vectors r y r' . So that:

$$\text{cos}\gamma = \text{cos}\theta'\text{cos}\theta + \text{sen}\theta'\text{sen}\theta\text{cos}(\theta' - \theta) \quad (5)$$

We finally obtain:

$$R = \sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'\text{cos}\gamma} \quad (6)$$

Where:

$$r' = \sqrt{\sigma^2 + d^2} \quad (7)$$

Then, we can develop the exponential expression:

$$\frac{e^{-jkR}}{R} = \frac{e^{-jk\sqrt{r'^2+r^2-2rr'\text{cos}\gamma}}}{\sqrt{r'^2+r^2-2rr'\text{cos}\gamma}} \quad (8)$$

This expression has been treated by Hasegawa [9] [10] in his studies of the concave pistons. However, his work is based on the near field expressions, which only fulfilled part of our analysis.

3.2 Near field

The analysis by Hasegawa already contemplates the case of near field. Despite this, we are going to consider the analysis which is based Hasegawa, this is, the treaty found in Watson on Bessel functions [11]

According to Watson [11], the terms of Gegenbauer contained in his treatise, take into account that for near field $r' > r$, it is possible to transform the exponential expression into:

$$\frac{e^{-jk\sqrt{r'^2+r^2-2rr'\cos\gamma}}}{\sqrt{r'^2+r^2-2rr'\cos\gamma}} = j \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \frac{K_{m+1/2}(kr')}{\sqrt{r'}} \frac{I_{m+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} P_m(\cos\gamma) \quad (9)$$

But this expression can be defined in terms of the corresponding spherical functions, both Bessel and Hankel using the work developed by Abramowitz [12]. This work is cited in the references page for Mathematica [13]. The final expression can be placed in the Rayleigh-Sommerfeld Integral for its development

$$p(x, y, z; t) = \frac{jk\rho_0 c_0 u_0 e^{j\omega_0 t}}{2\pi} \int_S -jk \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) h_m^{(1)}(kr') j_m(kr) P_m(\cos\gamma) dS \quad (10)$$

It is noteworthy that we still continue assuming that the velocity is constant along the radius of the piston since this movement is considered rigid and free.

In order to solve this equation we will proceed in the same way that Hasegawa did before.

$P_m(\cos\gamma)$ can be modified through the addition theorem for the Legendre Polynomials [12]. Then the expression will be:

$$P_m(\cos\gamma) = P_m[\cos\theta' \cos\theta + \text{sen}\theta' \text{sen}\theta \cos(\varphi)] \quad (11)$$

$$P_m(\cos\gamma) = P_m(\cos\theta') P_m(\cos\theta) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p P_m^p(\cos\theta') P_m^{-p}(\cos\theta) \cos(p\varphi) \quad (12)$$

Then we can come back to the main expression in (10):

$$= \frac{k^2 \rho_0 c_0 u_0 e^{j\omega_0 t}}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) j_m(kr) \cdot \quad (13)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \sigma h_m^{(1)}(kr') \left[P_m(\cos \theta') P_m(\cos \theta) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p P_m^p(\cos \theta') P_m^{-p}(\cos \theta) \cos(p\varphi) \right] d\sigma d\varphi$$

This expression can be divided in two and then we can reduce one of the terms. Now the new expression is:

$$= \frac{k^2 \rho_0 c_0 u_0 e^{j\omega_0 t}}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (2m + 1) j_m(kr) \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^a \sigma h_m^{(1)}(kr') P_m(\cos \theta') P_m(\cos \theta) d\sigma d\varphi \right\} \quad (14)$$

One of the integrals can be reduced extracting the terms with no dependencies of φ :

$$= k^2 \rho_0 c_0 u_0 e^{j\omega_0 t} \sum_{m=0}^{\infty} (2m + 1) j_m(kr) P_m(\cos \theta) \int_0^a \sigma h_m^{(1)}(kr') P_m(\cos \theta') d\sigma \quad (15)$$

But in order to use different geometries we need to include terms d and σ with the expressions that relate these with r' and $\cos \theta'$. After these modifications we have the following expression:

3.3 Effective radiation area

3.3.1 Pressure-Acceleration rate

Then, it will be determined in the case of axisymmetric piston, the relationship between the pressure in the z axis and the product of the acceleration and density considered. For analysis purposes, this relationship will be called β for the piston.

$$\beta_{\text{pistón plano base}} = \frac{p}{\rho_0 \cdot \text{acc}} \quad (16)$$

As in the previous cases, we will proceed with the axisymmetric piston expression. Now, for the near field we can combine (15) with the acceleration expression if we have a uniform speed:

$$\beta_{\text{p.axisimétrico CC}} = -jk \sum_{m=0}^{\infty} (2m + 1) j_m(kz) \int_0^a \sigma h_m^{(1)}(k\sqrt{d^2 + \sigma^2}) P_m\left(\frac{d}{\sqrt{d^2 + \sigma^2}}\right) d\sigma \quad (17)$$

3.4 β calculation:

Now that we have the expression for β , we will proceed to determine the exact expressions in some particular cases, so they can be compared with theoretical and practical results achieved, for the previous work of Moreno [3].

3.4.1 Convex Piston, Concave Piston and Conical Piston

The next figures show the geometry for this case:

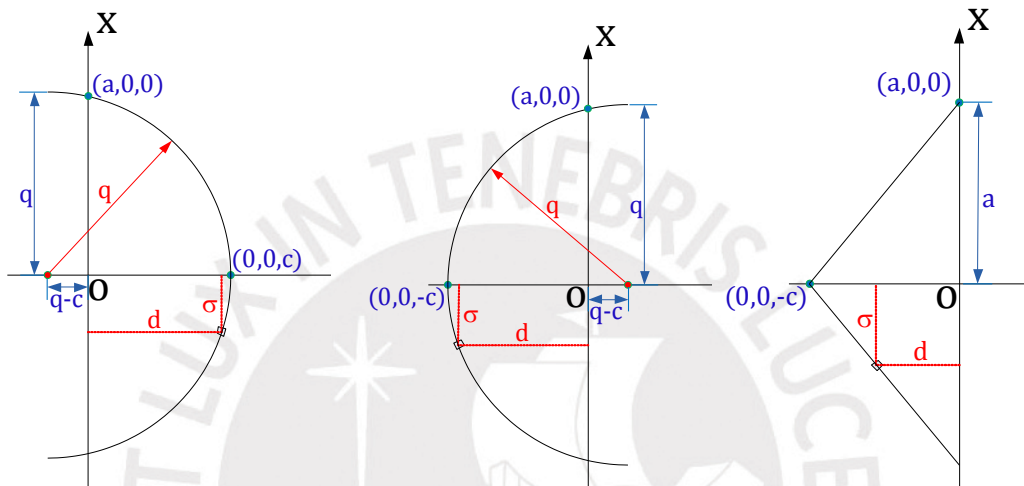


Figure 4: Lateral view for the axisymmetric convex, concave and conical pistons.

In the next table we will show the necessary parameters for the β calculation:

Table 1: Piston parameters

Piston	Convex	Concave	Conical
Base Equations	$x^2 + y^2 + [z + (q - c)]^2 = q^2$	$x^2 + y^2 + [z - (q - c)]^2 = q^2$	$\frac{a}{\sigma} = \frac{c}{c - d}$
$d = f(\sigma)$	$d = f(\sigma) = \sqrt{q^2 - \sigma^2} - q'$	$d = f(\sigma) = \sqrt{q^2 - \sigma^2} + q'$	$d = f(\sigma) = c \left(1 - \frac{\sigma}{a}\right)$
Additional expressions	$q = \frac{a^2 + c^2}{2c}$ $q' = \frac{a^2 - c^2}{2c}$	$q = \frac{a^2 + c^2}{2c}$ $q' = \frac{a^2 - c^2}{2c}$	

4 Results

These expressions can be solved using Mathematica. We have develop some calculations in order to show how we implemented the solutions:

First, we calculate β expressions for different kind of pistons in order to verify the linear relation between pressure and acceleration in low frequencies:

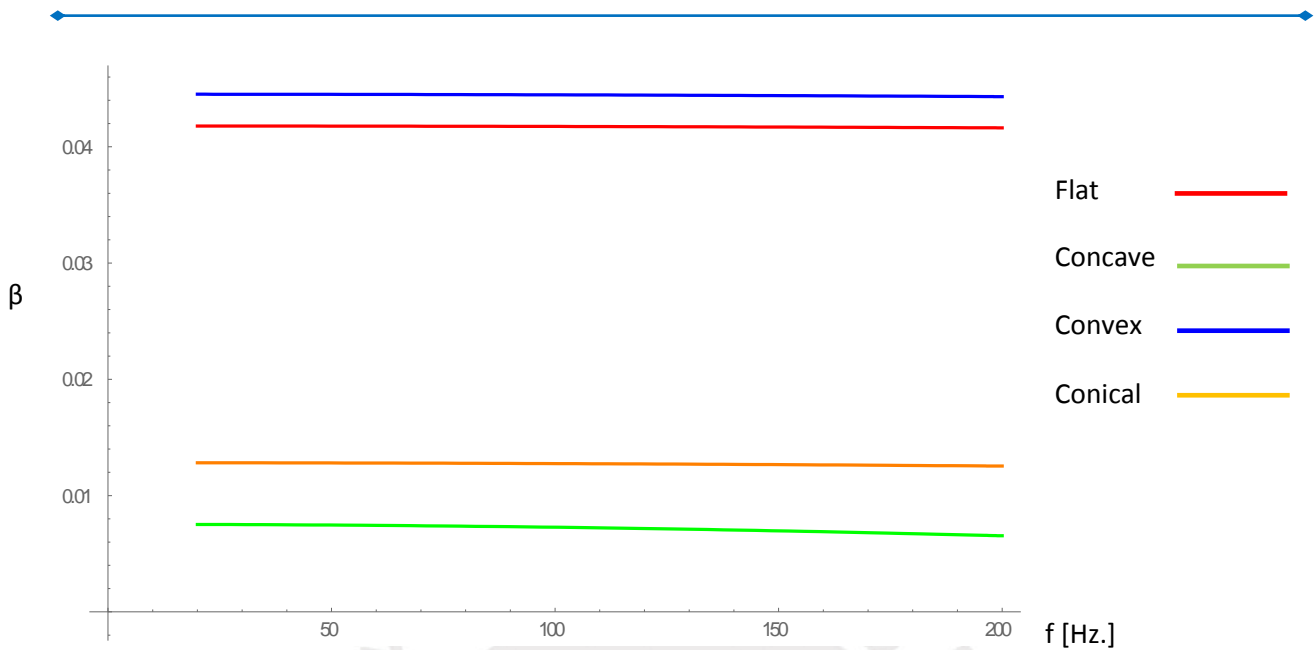
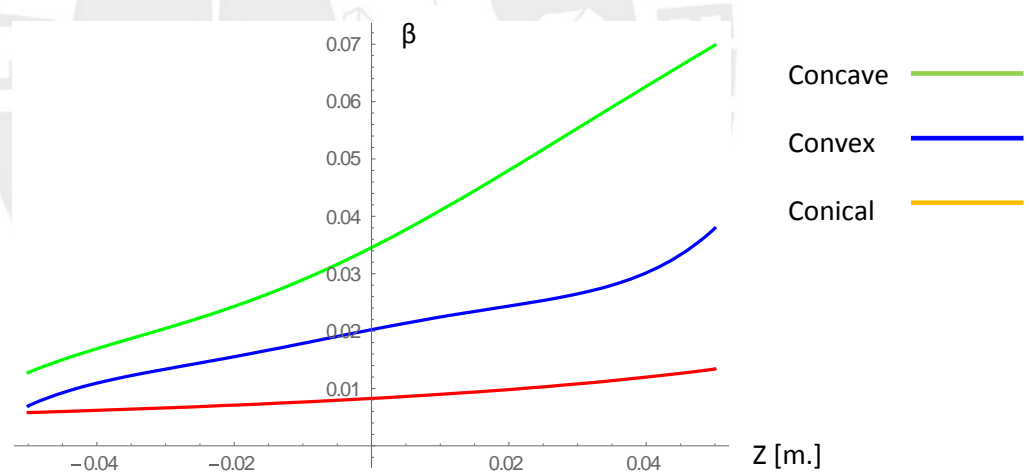


Figure 4: β value for different axisymmetric pistons.

However, we can also compare the value of β for one frequency (in this case 100Hz) along the Z axis.



5 Conclusions

Even if this is a theoretical analysis, it will allow to develop an easier method to calculate the effective radiating area for any axisymmetric piston including and is a start to work with loudspeakers as well.

This method could show the linear relation between pressure and acceleration, but is working with uniform speed. We can use for example the Greenspan [14] expressions for non uniform speed but it implies the necessity of an experimental calculation for the average speed in the piston.

For the calculations in the far field we can use the same expressions but we need to use the Abramowitz [12] equations from a different perspective in order to apply them.

We have found many different approaches, but we developed this, in order to contribute with a different method with no complex requirements of computational power. Mathematica does not require too much computational power and the Legendre Polynomials are the only recursive formulas that takes some time to be calculated. For plane graphics, for example, we need around 5 minutes in order to include 20 polynomials, but we found a convergent solution with less elements. Function NIntegrate in the Mathematica performs adaptive algorithms, which recursively subdivide the integration region as needed.

References

- [1] W. Klippel y J. Schlechter, «Dynamical Measurement of the Effective Radiation Area SD,» de *128th Convention Audio Engineering Society*, London, 2010.
- [2] R. H. Small, «Direct-Radiator Loudspeaker System Analysis,» *Journal of Audio Engineering Society*, vol. 20, pp. 383-395, 1972.
- [3] J. N. Moreno, S. Jonsson and R. Moscoso, "Measurement of the Effective Radiating Surface Area of a Loudspeaker using a Laser Velocity Transducer," in *96th Convention Audio Engineering Society preprint*, Amsterdam, 1994.
- [4] L. L. Beranek, *Acoustics*, Amer Inst of Physics; Rev Sub edition, 1986.
- [5] L. L. Beranek y T. J. Mellow, *Acoustics: Sound Fields and Transducers*, Oxford: Elsevier Inc., 2012.
- [6] P. M. Morse y K. U. Ingard, *Theoretical Acoustics*, Princeton, Now Jersey: Princeton University Press., 1986.
- [7] L. E. Kinsler, A. R. Frey, A. B. Coppens y J. V. Sanders, *Fundamentos de Acústica*, México: Limusa S.A., 1992.
- [8] D. T. Blackstock, *Fundamentals of Physical Acoustics*, Austin, Texas: John Wiley & Sons, Inc., 2000.
- [9] T. Hasegawa, N. Inoue y K. Matsuzawa, «A new theory for the radiation from a concave piston source,» *Journal Acoustical Society of America*, vol. 82, nº 2, pp. 706-708, 1987.
- [10] T. Hasegawa, K. Matsuzawa y N. Inoue, «A new expansion for the velocity potential of a circular concave piston,» *Journal Acoustical Society of America*, vol. 79, nº 4, pp. 927-931, 1986.
- [11] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge: University Press, 1922.
- [12] M. Abramowitz y I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Washington: National Bureau of Standards - U.S. Government Printing Office, 1972.
- [13] Wolfram Research, Inc., *Mathematica*, Version 10.0 ed., Champaign, Illinois: Wolfram Research, Inc., 2015.
- [14] M. Greenspan, «Piston radiator: Some extensions of the theory,» *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 65, nº 3, pp. 608-621, 1979.