

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO



**DISEÑO Y SIMULACIÓN DE UN SISTEMA DE CONTROL  
DE FORMACIÓN DE VEHÍCULOS AUTÓNOMOS  
MARÍTIMOS DE BAJA VELOCIDAD**

Tesis para optar el grado de Magister en Ingeniería de  
Control y Automatización

**Autor** : J. Alfredo Durand Cárdenas

**Asesor de tesis**: Antonio Morán Cárdenas. Ph.D.

LIMA - PERÚ

2016



Esta tesis está dedicada a mis padres, como una muestra de mi amor y admiración.

## AGRADECIMIENTOS

En primer lugar deseo expresar mi agradecimiento a los profesores de la Pontificia Universidad Católica del Perú, de quienes recibí un significativo apoyo y orientación a lo largo de estos dos últimos años. En especial al Dr. Antonio Morán, por las observaciones e ideas que contribuyeron cada vez a un mejor desarrollo del presente documento de tesis.

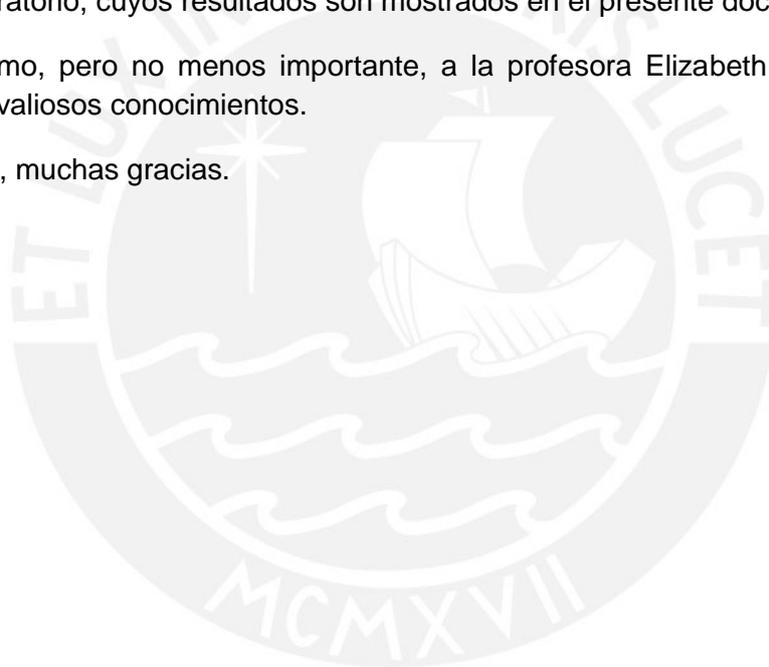
Asimismo, agradezco a mis padres por su comprensión y aliento a lo largo de toda mi vida.

Quisiera agradecer también al Consejo Nacional de Ciencia, Tecnología en Innovación tecnológica (Concytec), por la beca de estudios ofrecida para llevar la maestría en Ingeniería de Control y Automatización.

A mis compañeros de aula. En especial a Luis Bardalez, Cayetano Cáceres y Max Correa, con quienes compartí ideas y opiniones durante las actividades y pruebas de laboratorio, cuyos resultados son mostrados en el presente documento de tesis.

Por último, pero no menos importante, a la profesora Elizabeth Villota, de quien obtuve valiosos conocimientos.

A todos, muchas gracias.



## RESUMEN

El presente trabajo tiene por objetivo sentar las bases necesarias para el desarrollo, diseño, control e implementación de un sistema multiagente, específicamente sobre un conjunto de robots marítimos. Este tipo de sistema tiene varias aplicaciones. Desde el punto de vista académico, el proceso de establecer un patrón de formación deseado consiste en una tarea laboriosa y desafiante. Por otro lado, la idea de usar estos robots como un conjunto permite a las industrias navales y agencias meteorológicas reducir horas de trabajos de campo e investigación. Sin embargo, para lograr estos propósitos es necesario saber las características que presentan estos sistemas y las herramientas de software y hardware con las que se cuenta, de manera que se pueda elaborar una estrategia de control de formación. Esta información es detallada en la presente tesis, cuya estructura es la siguiente:

El capítulo I presenta el Estado del arte de los vehículos autónomos de superficie. Se explica cómo se inició el interés por el estudio de dichos vehículos y los modelos que se han ido desarrollando en esta área de la robótica marítima. Teniendo en cuenta ello, se presenta adicionalmente un resumen de las técnicas y algoritmos empleados para lograr un adecuado control de formación de un sistema constituido por varios robots, en el que se señalan algunas diferencias.

En el capítulo II se obtuvo el modelo matemático de un vehículo de superficie. En él se definen los sistemas de referencia necesarios para describir el movimiento del robot marítimo y se obtienen las ecuaciones cinemáticas y dinámicas mediante el uso de una matriz de rotación, la aplicación de las leyes de Newton, y principios de hidrodinámica e hidrostática. Así también, se explican los modelos usados para las perturbaciones que afectan al robot.

El proceso de las pruebas experimentales es detallado en el Capítulo III. Se explica brevemente las características de los sensores y actuadores empleados, y además, se presentan los parámetros a tener en cuenta en las simulaciones desarrolladas.

En el capítulo IV se presenta el diseño del controlador de formación. Se usan 2 enfoques para poder comparar los resultados obtenidos con cada una de las estrategias. Asimismo, en cada una de ellas se analiza la controlabilidad y estabilidad del esquema de formación deseado.

El modelo que permite relacionar las fuerzas requeridas por el sistema con las fuerzas permitidas por los actuadores se explica detalladamente en el capítulo V.

El capítulo VI presenta los resultados obtenidos con los controladores diseñados en el entorno de MATLAB-Simulink. Se muestra también el efecto de las perturbaciones sobre la formación y se distinguen las principales diferencias entre una y otra estrategia.

Finalmente, se mencionan las conclusiones generales y trabajos futuros planteados, así como también se sugieren algunas recomendaciones.

## ÍNDICE

INTRODUCCIÓN .....	1
CAPITULO I: ESTADO DEL ARTE .....	1
1.1. Introducción .....	1
1.2. Estado del arte de los vehículos autónomos de superficie .....	2
1.2.1. Sistemas totalmente actuados .....	6
1.2.2. Sistemas subactuados .....	6
1.3. Estado del arte de los sistemas de control de formación .....	7
1.3.1. Enfoque basado en comportamientos y el campo potencial .....	7
1.3.2. La estrategia líder-seguidor .....	9
1.3.3. El uso de coordenadas generalizadas .....	9
1.3.4. El método de la estructura virtual .....	9
1.3.5. Otras estrategias para el control de formación .....	10
1.4. Motivación y Justificación .....	11
1.5. Objetivo de la tesis .....	11
1.5.1. Objetivo General .....	11
1.5.2. Objetivos específico .....	11
CAPITULO II: MODELO MATEMÁTICO DEL VEHÍCULO AUTÓNOMO DE SUPERFICIE .....	12
2.1. Sistemas de referencia .....	12
2.2. Cinemática del vehículo .....	13
2.3. Dinámica del vehículo .....	16
2.4. Fuerzas hidrodinámicas .....	21
2.5. Fuerzas hidrostáticas .....	24
2.6. Fuerzas del viento y de las olas .....	25
2.7. Fuerzas de control .....	27
2.8. Ecuaciones de movimiento .....	27
CAPÍTULO III: IDENTIFICACIÓN DEL VEHÍCULO DE SUPERFICIE .....	30
3.1. Conceptos generales .....	30
3.1.1. Sensores .....	30
3.1.2. Actuadores .....	31
3.2. Calibración de motores .....	32
3.3. Cálculo de la resistencia del vehículo de superficie .....	34
3.4. Obtención de los parámetros del vehículo de superficie .....	36
CAPÍTULO IV: DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL DE FORMACIÓN .....	40
4.1. Introducción .....	40
4.2. Estrategia usando Multiplicadores de Lagrange .....	40
4.2.1. Planteamiento del Problema .....	41
4.2.2. Torques debido a las restricciones .....	41
4.2.3. Ley de seguimiento para el líder .....	43
4.2.4. Restricciones para el líder y seguidor .....	46
4.2.5. Estabilización y unificación de las restricciones .....	47

4.2.6. Diseño del controlador para el sistema multiagente .....	48
4.3. Estrategia de control No Lineal .....	51
4.3.1. El controlador $l - \alpha$ .....	51
4.3.2. El controlador $l - l$ .....	55
4.3.3. Dinámica Cero del vehículo de superficie .....	58
4.3.4. Diseño del controlador de formación no lineal .....	60
CAPÍTULO V: DISTRIBUCIÓN DE FUERZAS DE CONTROL .....	61
5.1. Obtención de las fuerzas de saturación en los actuadores .....	61
5.2. Modelo de las hélices .....	62
5.3. Modelo matemático del motor + ESC .....	63
5.4. Compensación mediante Zona muerta inversa .....	63
5.5. Estructura general de distribución de fuerzas .....	65
CAPÍTULO VI: RESULTADOS DE SIMULACIÓN .....	69
6.1. Caso de estudio: Dos robots en formación sin perturbaciones .....	69
6.1.1. Resultados con un Control No Lineal.....	70
6.1.2. Resultados con el enfoque de Lagrange .....	73
6.2. Caso de estudio: Tres robots en formación con Control No Lineal.....	76
6.2.1. Resultados sin perturbaciones externas .....	76
6.2.2. Efecto de las fuerzas de viento .....	79
CONCLUSIONES GENERALES .....	83
RECOMENDACIONES Y TRABAJOS FUTUROS .....	84
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	85

## INTRODUCCIÓN

La robótica en la actualidad constituye un campo de estudio desafiante y muy amplio debido a sus diversas aplicaciones. Su alcance se extiende sobre el rubro de la minería, construcción, vigilancia, seguridad, medicina, e incluso en la milicia. Dentro de cada una de estas áreas surgen varios problemas de investigación, generando así la necesidad de buscar una solución cada vez más rápida, segura y eficiente.

En particular, por ejemplo, el desarrollo de los vehículos autónomos de superficie es una aplicación de la robótica en el área naval. Estos sistemas operan en la superficie del agua y permiten tomar mediciones, así como realizar diferentes tareas en una variedad de condiciones ambientales. Para ello, su diseño e implementación debe tener en cuenta el tiempo necesario para cumplir la misión, la cantidad de energía a consumir, el medio de comunicación, entre otros aspectos.

Si bien es cierto que cuando se tiene en cuenta las consideraciones anteriores, sí es posible lograr el objetivo propuesto, en muchos casos la tarea requerida se vuelve demasiado exigente para un único vehículo. Frente a ello se plantea desarrollar un sistema constituido por varios robots en donde el control necesario de actuación no se aplica sobre un único robot, sino sobre todos los del grupo con el fin de lograr de manera coordinada un patrón de formación deseado.

El diseño del sistema de control de formación que resuelva el problema cumpliendo los requerimientos necesarios no sólo debe considerar la dinámica compleja propia de un vehículo marítimo, sino también las no linealidades, condiciones ambientales externas, evasión de obstáculos y las interacciones que deben ocurrir entre los robots que constituyen la formación. En ese sentido, debido a todos estos factores, son necesarias las técnicas de control avanzado.

En consecuencia, el objetivo general de la presente memoria de tesis es diseñar un sistema de control de formación y realizar su validación mediante simulaciones.

## CAPÍTULO I: ESTADO DEL ARTE

### 1.1. Introducción

Los vehículos autónomos de superficie (ASV, por sus siglas en inglés) son vehículos que operan sobre la superficie del agua sin una tripulación a bordo. Son de gran importancia en el área naval, y dependiendo de las características y funcionalidades que posea puede tener un alto o bajo costo.

El desarrollo de este tipo de vehículos marítimos comenzó desde 2da Guerra Mundial, pero no es desde los años 90 que aparecen mayor cantidad de proyectos con respecto al estudio de estos sistemas. En parte se debió a los avances tecnológicos, aunque también se originó con el objetivo de garantizar una mayor seguridad en el ámbito naval.



Figura 1.1. Aplicaciones de un vehículo autónomo de superficie (ASV)  
(Bertram, 2008)

Hasta el momento los vehículos de superficie desarrollados varían entre los 2m y 15m. de longitud y con velocidades de 2 hasta aproximadamente 30 nudos en aguas calmadas. Asimismo, se vienen mejorando técnicas existentes de control y navegación para tener ASVs de gran aceptación y que garanticen mayor seguridad, así como rangos de comunicación más amplios, una autonomía más desarrollada y mayor confiabilidad.

### 1.2. Estado del arte de los vehículos autónomos de superficie

El interés en el desarrollo de los vehículos de superficie se inició con la finalidad de explorar e investigar los recursos marítimos. Con este propósito se desarrollaron muchas misiones con proyectos alrededor de todo el mundo. En los años 1950, por ejemplo, el proyecto DRONE de la Marina de los Estados Unidos se construyó y probó un barco para el rastreo de minas operado de manera remota. Luego, por los años sesenta, se comenzaron a usar barcos teledirigidos para prácticas de

lanzamiento de proyectiles. Esto permitió que el área de estudio de los vehículos de superficie se siga expandiendo.

Posteriormente, las aplicaciones se extendieron a misiones de reconocimiento y vigilancia con el desarrollo del vehículo autónomo de búsqueda (ASH), después llamado *Owl*, y el robot *Roboski*. (Figura 1.2). Cabe resaltar que el modelo *Owl MK II* fue desarrollado después por la compañía Navtec Inc. (Bertram, 2008)

Así también se desarrolló el vehículo de superficie *Spartan*, cuyo casco es de aproximadamente 7m, y pesa 2 toneladas. El prototipo fue lanzado exitosamente y operado de manera remota en el Golfo Pérsico en Diciembre del 2003. Es un robot marítimo que participó en misiones de combate (R. Yan, S. Pang, 2010).

En el 2005, la compañía francesa ACSA desarrolló 2 vehículos de superficie originalmente elaborados para trabajar a distancias alejadas de la costa y de manera remota: *Basil* y el *MiniVAMP*. El desarrollo del proyecto dio como resultado el robot *Basil II*, cuya autonomía alcanzaba las 12 horas y tenía un alcance de 15 Km para las comunicaciones, equipado con paneles solares, baterías y motores eléctricos.



Figura 1.2. Vehículos marítimos en operación. *Roboski* (izquierda) y robot de búsqueda *Owl MK II* (derecha) (Bertram, 2008)

Si bien es cierto que la tecnología ligada a los vehículos de superficie ha ido desarrollándose y mejorando con el tiempo, esta todavía es un área de investigación amplia pues abarca el problema de control, la tecnología de sensores, el sistema de navegación a usar, entre otros factores.

En la actualidad, muchas empresas están presentes en la fabricación de estas plataformas. Algunas de ellas son:

- *Deep Ocean Engineering, Inc.*: Además de vender al mercado equipos diseñados para operaciones bajo el agua, desarrollan también vehículos de superficie entre los cuales algunos permiten ser operados de manera remota y con aplicaciones militares, académicas, reconocimiento, etc.

El modelo *USV I-1650*, por ejemplo, cuenta con una batería capaz de generar la energía necesaria por 4 horas, una antena remota omnidireccional para comunicaciones en un rango hasta de 2Km, un casco de una aleación de

aluminio no corrosiva, así como 2 motores DC. Tiene dimensiones de 1.65m x 0.7m, pesa 30 Kg y es capaz de alcanzar los 10 nudos.



Figura 1.3. Vehículo de superficie (*Deep Ocean Inc. USV I-1650*)

- *ASV unmanned marine systems*: Es uno de los mayores proveedores en cuanto a sistemas marítimos no tripulados. Abarcan tanto el concepto de diseño, construcción, operación y mantenimiento, desarrollando equipos de formas y tamaños variados, como los mostrados en la figura siguiente:



Figura 1.4. Vehículos marítimos fabricados por *ASV unmanned marine systems*. Modelos *C-Target 3*, *C-Target 9* y *C-Target 13* (de izquierda a derecha)

El modelo *C-Target 3* (3.5m. x 1.4m. x 1.3m.) pesa aproximadamente 325 Kg, tiene una propulsión de 30hp y puede alcanzar los 25 nudos. La comunicación es por UHF. Por otro lado, los modelos *C-Target 6* y *C-Target 9* son de alta velocidad, con longitudes de 9.6 m y 12.9m respectivamente.



Figura 1.5. Vehículo de superficie modelo *Hydrone-RCV* (*Seafloor Systems Inc.*)

- Seafloor Systems Inc.: Provee equipos de inspección hidrográfica además de vehículos de superficie. Uno de ellos es el mostrado en la Figura 1.5, el cual es una plataforma de levantamiento hidrográfico a control remoto portátil. Alcanza los 20 nudos actuado por 2 motores sin escobillas. Pesa cerca de 15 Kg.

Como se puede notar, las funcionalidades y forma de los vehículos de superficie desarrollados es variada. En la actualidad, se está trabajando en posibles alternativas para el abastecimiento de energía y el desempeño. Prueba de ello es el equipo mostrado en la Figura 1.6, el cual incluso ha sido nominado para un premio a la innovación en el desarrollo e implementación del mismo.



Figura 1.6. Vehículo de superficie modelo *C-Enduro* (ASV *unmanned marine systems*)

En el mercado es de gran utilidad saber con qué vehículo contar. Es por eso que se pueden clasificar también a las embarcaciones de acuerdo a su velocidad máxima de operación. Con este propósito, comúnmente se usa el número de Froude.

$$F_n = \frac{U}{\sqrt{gL}} \quad (1.1)$$

Donde  $U$  es la velocidad del barco,  $L$  es la longitud del barco que se encuentra sumergida, y  $g$  es la aceleración de la gravedad.

La presión que lleva el barco puede ser hidrostática o hidrodinámica, tal que las fuerzas correspondientes son:

- *La fuerza de empuje* debido a la presión hidrostática (proporcional al desplazamiento del barco)
- *La fuerza hidrodinámica* debido a la presión hidrodinámica (aproximadamente proporcional al cuadrado de la velocidad)

Luego, puede clasificarse los vehículos marítimos de acuerdo a:

- Vehículos de desplazamiento ( $F_n < 0.4$ ): La fuerza de empuje es la dominante.
- Vehículos de semidesplazamiento ( $0.4 - 0.5 < F_n < 1.0 - 1.2$ ): La fuerza de empuje no es la dominante a la velocidad máxima de operación.

- Vehículos de planeación ( $F_n > 1.0 - 1.2$ ): La fuerza hidrodinámica mayormente compensa el peso del barco.

El desarrollo de estos robots marítimos está abarcando cada vez más áreas de estudio, porque al desear que estos equipos cuenten cada vez con una mejor autonomía y sean más confiables, se requiere unir los conceptos de electrónica, mecánica, programación y control. En ese sentido, también se viene trabajando y explotando las funcionalidades de estos equipos en el área académica.

De acuerdo a las características y objetivos del proyecto de investigación, estos equipos pueden trabajar en diferentes rangos de comunicación, estar equipados de Hardware específico, o contar con la opción de ser operados de manera remota. Sin embargo, una parte importante en la selección de un vehículo de superficie es conocer el tipo y cantidad de actuadores con los que cuenta, ya que esta decisión determinará las técnicas de control a implementarse en el sistema. Además, dependiendo de la configuración y número de actuadores con que cuenta el robot, estos sistemas pueden ser subactuados o totalmente actuados.

### 1.2.1. Sistemas totalmente actuados

En los vehículos de superficie que son totalmente actuados, todos los grados de libertad (GDL) pueden ser controlados simultáneamente.



Figura 1.7. Vehículo *Cybership II*.

Como ejemplo de este tipo de vehículos se puede señalar al *Cybership-II*, el cual es una réplica a menor escala de un buque en operación (Skjetne et al. 2004). Posee dos hélices principales, dos paletas o timones ubicados en popa, y una tercera hélice de proa. (Figura 1.7).

### 1.2.2. Sistemas subactuados

Cuando los vehículos de superficie son subactuados quiere decir que puede realizarse un control sobre un número de GDL menor a los que posee el sistema para su movimiento. Como ejemplo puede señalarse el vehículo de superficie *Echoboat* mostrado en la Figura 1.8, el cual posee sólo 2 hélices de propulsión. Al

girar las hélices se genera la fuerza necesaria para mover el pequeño barco. Si las velocidades de las hélices son iguales hay un desplazamiento lineal ( $u$ ), pero si es diferente hay un torque, permitiendo que el barco gire ( $r$ ). A pesar de lograr el desplazamiento y giro del vehículo, no es posible realizar un control independiente para la velocidad lateral ( $v$ ).

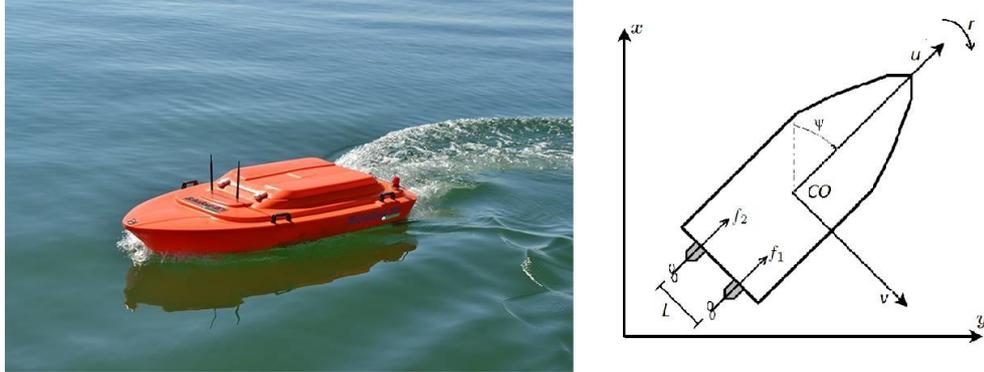


Figura 1.8. Modelo Echoboat-RC de la compañía Seafloor. Vehículo en operación (izquierda) y su configuración de actuadores (derecha).

### 1.3. Estado del arte de los Sistemas de Control de Formación

Existen diferentes técnicas para abordar el problema del control de formación (Chen, Wang. 2005), entre los cuales se tienen:

#### 1.3.1. Enfoque basado en comportamientos y el campo potencial

Es una estrategia que se centra en robots (agentes) que, a pesar de ser modelados con variables de estado relativamente pequeñas, son capaces de presentar comportamientos de apariencia compleja y además corrigen gradualmente sus acciones mediante vínculos sensorio-motoras. Este enfoque considera que cada agente dentro del análisis posee un esquema motor (*motor schema*), el cual genera un vector representando la respuesta de comportamiento deseado a una entrada sensorial.

El concepto de esquema se origina en la Psicología y la Neurociencia, el cual está basado en el ciclo de acción – percepción (Arkin. 1987). Los valores esperados a partir de las entradas sensoriales proveen los planes (esquemas) para una apropiada acción motora, la cual, después de ejecutarse genera nueva data leída desde los sensores, la que es realimentada al sistema dando nuevos valores esperados. Este ciclo de cognición (la alteración del modelo interno), dirección (selección de los comportamientos motores adecuados), y la acción (los cambios generados en los alrededores y la disponibilidad de nueva data sensorial) es central para la forma en el que los esquemas deben interactuar con los alrededores.

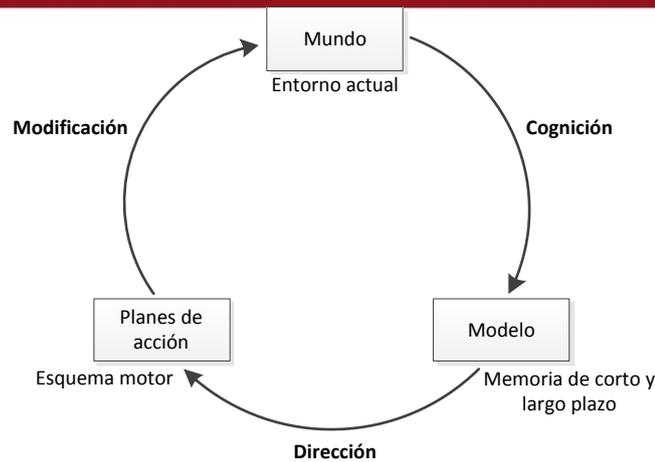


Figura 1.9. Ciclo de acción – percepción (Arkin, 1987)

Más significativamente, la percepción debe ser vista como orientada a una acción. No es necesario procesar toda la data disponible de los sensores, sino solo la que es requerida para cumplir la tarea programada. Esto se logra, justamente, especificando esquemas.

En síntesis, un esquema puede definirse como un comportamiento asociado a cada robot que recibe información de los sensores como entrada, y genera una acción como salida, la cual resulta ser un vector que define cómo debe moverse el robot.

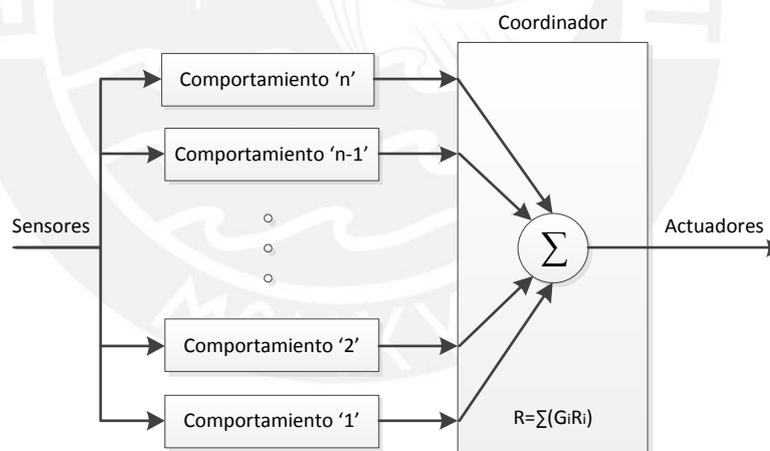


Figura 1.10. Arquitectura esquema-motor (Busquets, p.13. 2003)

Por otro lado, los esquemas motores de cada robot usan un mecanismo de coordinación cooperativa (Busquets, 2003). La forma en que son coordinados los diferentes comportamientos se realiza por medio de una suma vectorial. Cada esquema contribuye a la reacción total por medio de un factor de ganancia  $G_i$ , mientras que cada vector de salida  $R_i$  es multiplicado por su factor de ganancia de comportamiento y sumado con el resto para producir un único vector de salida enviado a los actuadores. Asimismo, algunos posibles esquemas motores incluyen la evasión de obstáculos, la evasión de colisiones, el mantenimiento de una formación geométrica, entre otras.

### 1.3.2. La estrategia líder – seguidor

En este caso se asume que solo es conocida la información local de los sensores para cada robot en la formación. Hay 2 tipos de controladores por realimentación para mantener la formación de los robots. El primero es llamado el controlador  $l - \alpha$ , en el cual el objetivo de control es mantener una longitud deseada  $l_{12}^d$  y un ángulo relativo deseado  $\alpha_{12}^d$  entre el líder y el seguidor, como es mostrado en la Figura 1.11. Es posible diseñar un controlador tal que estas dos variables converjan exponencialmente a sus valores deseados.

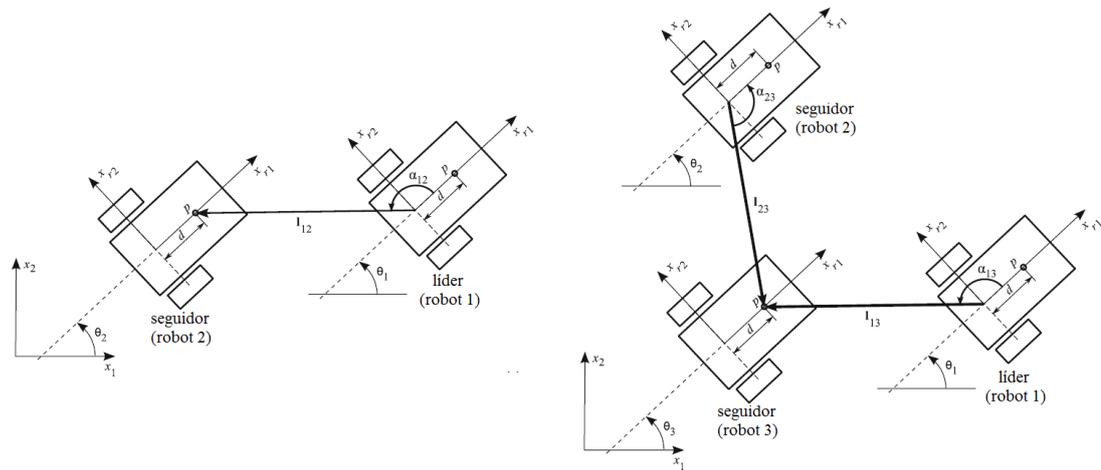


Figura 1.11. Planteamiento del controlador  $l - \alpha'$  (izquierda) y el controlador  $l - l'$  (derecha) (Fahimi. 2009)

El segundo diseño para la formación es el controlador  $l - l'$ , el cual debe garantizar que un seguidor mantenga las longitudes deseadas  $l_{13}^d$  y  $l_{23}^d$  entre él y dos líderes

### 1.3.3. El uso de coordenadas generalizadas

Las coordenadas generalizadas definen a un robot mediante su posición ( $L$ ), orientación ( $O$ ), y su forma ( $S$ ) con respecto a un punto de referencia en la formación. La trayectoria de toda la formación como grupo se puede especificar con el uso de estas coordenadas  $\{L, O, S\}$ , lo que permite una forma conveniente de especificar la configuración y permite controlar el grupo como una sola entidad. (Spry, Hedrick. 2004)

### 1.3.4. El método de la estructura virtual

Es una estrategia que es muy usada en robótica móvil y también para lograr el control de formación de pequeños satélites. Las técnicas de control en este caso fuerzan a un grupo de robots a comportarse como si fueran partículas que constituyen una estructura rígida. Sin embargo, esta no existe físicamente, y por eso es llamada una estructura virtual.

En esta estructura los robots mantienen una relación geométrica semirrígida uno con respecto a otro y también con respecto a un sistema de referencia. (Tan, Lewis. 1996)

Para entender mejor el problema de control, se plantea lo siguiente: dado un cierto número de robots, una solución al problema de moverse manteniendo la formación, es cumpliendo simultáneamente dos objetivos: a) Avanzar en una dirección determinada, y b) mantener la geometría de la estructura virtual impuesta para todo momento. Esta relación geométrica se muestra en la Figura 1.12.

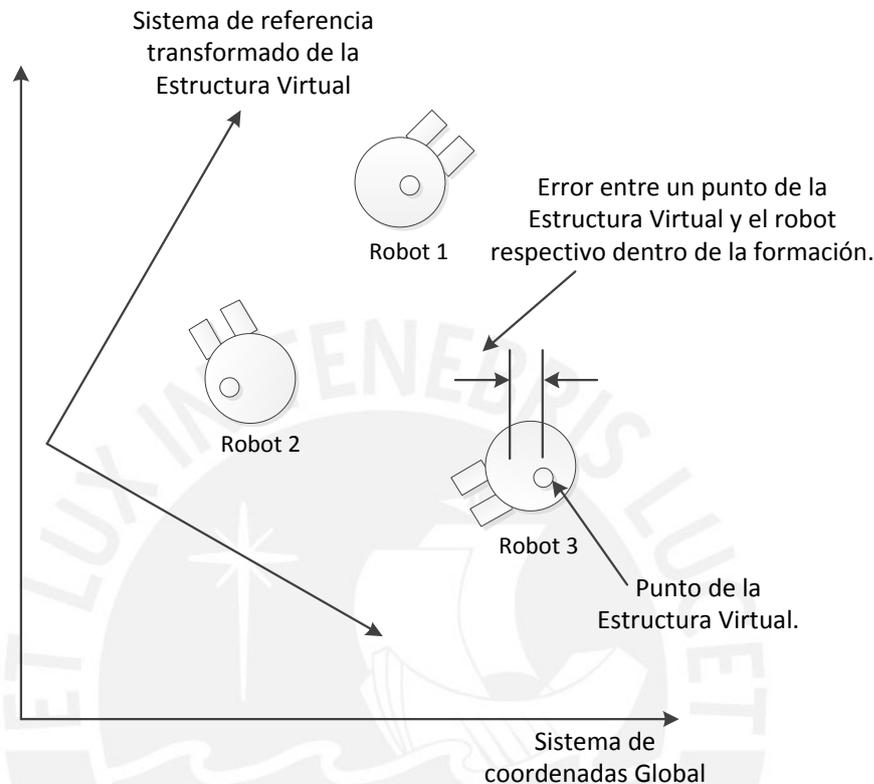


Figura 1.12. Relación geométrica entre los robots y la estructura virtual (Tan, Lewis. 1996)

### 1.3.5. Otras estrategias para el control de formación

Existen muchos otros métodos para lograr un control de formación de un sistema multiagente. Por ejemplo, en el caso de que estos robots se muevan en una formación a lo largo de trayectorias periódicas o constantes se puede formular como un regulador de salidas no lineal y permite ser resuelto usando técnicas conocidas. (Gazi. 2003)

En el caso de trabajar con un grupo de vehículos marítimos, el control de formación se ha dividido en una tarea geométrica y en una dinámica. La primera asegura que cada vehículo converja a su posición en la formación, y la segunda asegura que todos viajen siguiendo una trayectoria de referencia con la velocidad deseada (Skjetne et al.2002)

Así también se han desarrollado técnicas de control de formación usando multiplicadores de Lagrange, los cuales son usados para establecer las

restricciones de formación que debe cumplir el sistema multiagente al momento de desplazarse (Ihle, Jouffroy, Fossen. 2006)

Por otro lado, también se han usado los algoritmos genéticos y el aprendizaje por refuerzo (*reinforcement learning*) en robots móviles. Con la primera técnica se diseña el control, mientras que el aprendizaje permite re-establecer la formación cuando existen obstáculos (Kobayashi, Tomita, Kojima. 2003). En este sentido, los sistemas inteligentes también se han desarrollado para abordar el problema del control de formación, así como los trabajos desarrollados con la lógica difusa y el entrenamiento de redes neurodifusas. (Hong, Shin. 2001)

#### 1.4. Motivación y Justificación

Como es sabido, muchas labores son desarrolladas de una mejor manera si se logra cooperativa o coordinadamente. En el caso que abarca la presente tesis por ejemplo, al trabajar no solo con un vehículo marítimo sino con varios en una formación geométrica deseada, se consigue abarcar en menos tiempo una mayor área de estudio, y por tanto, de una manera más rápida la tarea que se esté realizando.

Es importante resaltar también que en el proceso de realizar esta tarea, se busca ser eficiente, y para esto, es necesario buscar la manera óptima en la que trabajen todos los robots marinos que pertenecen a la formación.

Lo que impulsa a desarrollar el presente tema de tesis es justamente proponer un algoritmo que tenga en cuenta las condiciones mencionadas para el problema de formación de robots marinos de superficie.

#### 1.5. Objetivos

##### 1.5.1. Objetivo General

- Diseñar un sistema de control de formación de vehículos marítimos de superficie subactuados para la toma de mediciones de variables marítimas.

##### 1.5.2. Objetivos Específicos

- Obtener el modelo matemático que describa el comportamiento de un vehículo marítimo de superficie
- Diseñar un sistema de control con el que se logre realizar una formación geométrica deseada de vehículos marítimos.
- Diseñar un sistema de control de formación considerando perturbaciones externas.
- Validar el diseño del controlador de formación y analizar su desempeño mediante simulaciones.
- Analizar el efecto de las leyes de control diseñadas y realizar una comparación señalando principales diferencias.

## CAPÍTULO 2

## MODELO MATEMÁTICO DEL VEHÍCULO AUTÓNOMO DE SUPERFICIE

En el presente capítulo se detalla el procedimiento para obtener el modelo matemático de un vehículo de superficie. Se explica y resalta la diferencia entre los sistemas de referencia a usar para el análisis del movimiento y, adicionalmente, se hace una identificación de las fuerzas actuantes sobre el robot marítimo mediante las leyes de Newton y conceptos de hidrodinámica e hidrostática.

## 2.1. Sistemas de Referencia

Cuando se analiza el movimiento de un vehículo de superficie, es necesario definir los siguientes sistemas de referencia para describir su movimiento:

- *ECI (Earth-centered inertial)*  $\{i\} = (x_i, y_i, z_i)$ : Es un sistema de referencia inercial para navegación terrestre; es decir, un sistema de referencia que no experimenta aceleración, en el cual se pueden aplicar las leyes de Newton. El origen de este sistema está ubicado en el centro de la Tierra.

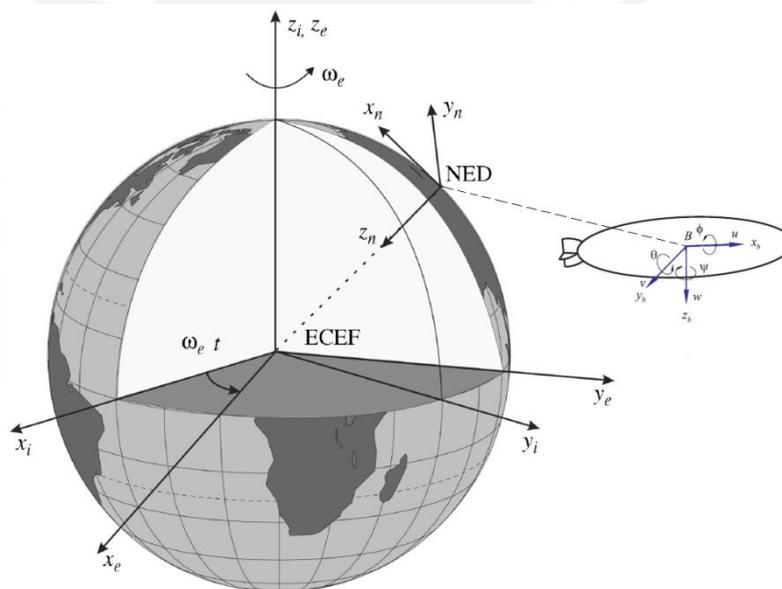


Figura 2.1. Sistemas de referencia. (Fossen, 2011)

- *ECEF (Earth-centered Earth-fixed)*  $\{e\} = (x_e, y_e, z_e)$ : Es un sistema de referencia cuyo origen  $o_e$  está fijo al centro de la Tierra, pero sus ejes rotan con respecto al sistema ECI, el cual es fijo en el espacio. Esta velocidad de rotación es aproximadamente igual a  $w = 7.2921 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ . Para embarcaciones que se mueven a bajas velocidades, esta velocidad de rotación de la Tierra es despreciable y, por tanto, el sistema  $\{e\}$  se puede considerar inercial, por lo que este sistema de referencia es usado para describir el movimiento en viajes intercontinentales.
- *NED (North-East-Down)*  $\{n\} = (x_n, y_n, z_n)$ : Es un marco de referencia que está ubicado sobre la superficie de la Tierra y su nombre indica las siglas en inglés

Norte-Este-Abajo. El eje  $X$  apunta al norte, el eje  $y$  apunta hacia el Este, y el eje  $z$  apunta hacia abajo normal a la superficie de la Tierra. De esta forma el plano  $x - y$  es tangente en la superficie de la Tierra. Asimismo, la posición de este sistema de referencia  $\{n\}$  respecto al marco  $\{e\}$  es determinado por la longitud  $l$  y latitud  $\mu$ .

Cuando se analiza el movimiento de los vehículos de superficie dentro de pequeñas áreas, esto quiere decir considerando latitud y longitud constantes, la Tierra se puede considerar como plana y un plano tangente a la superficie puede considerarse como inercial, de manera que también se pueden aplicar las leyes de Newton.

- *Body*  $\{b\} = (x_b, y_b, z_b)$ : Es el sistema de referencia que se encuentra unido al cuerpo, y cuyo origen generalmente se puede hacer coincidir con un punto que se encuentra en el plano principal de simetría, o en algún otro punto conveniente. Los ejes  $x_b, y_b, z_b$  se eligen de manera que coincidan con los ejes principales de Inercia, siendo  $x_b$  el eje longitudinal (que va de atrás hacia adelante),  $y_b$  el eje transversal y  $z_b$  el eje dirigido hacia el fondo marino. (Figura 2.2) El sistema de referencia que está unido al centro de gravedad se denota como  $\{g\}$ .

## 2.2. Cinemática del vehículo marítimo

En navegación marítima y robótica submarina existe la convención de la SNAME (*Society of Naval Architects and Marine Engineers*) para expresar la posición, orientación del vehículo y las fuerzas que ejercen sobre él. Esta notación se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 2.1: Notación del movimiento de vehículos marinos (SNAME, 1950)

Movimiento	Nombre		Posición	Velocidad	Fuerza
	Español	Inglés			
Traslación en $x$	Avance	Surge	$x$	$u$	$X$
Traslación en $y$	Desvío	Sway	$y$	$v$	$Y$
Traslación en $z$	Movimiento vertical	Heave	$z$	$w$	$Z$
Rotación en $x$	Balanceo	Roll	$\phi$	$p$	$K$
Rotación en $y$	Cabeceo	Pitch	$\theta$	$q$	$M$
Rotación en $z$	Guiñada	Yaw	$\psi$	$r$	$N$

Al considerar navegación plana (sistema  $\{n\} \approx \{i\}$ ), la posición y orientación del vehículo con respecto al inercial es expresada por el siguiente vector:

$$\eta = \begin{bmatrix} r_o^n \\ \theta \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Donde  $r_o^n = [x, y, z]^T$  representa la posición del sistema de referencia  $\{b\}$  con respecto a  $\{n\}$  y  $\Theta = [\phi, \theta, \psi]^T$  mide la orientación relativa entre estos 2 marcos de referencia.

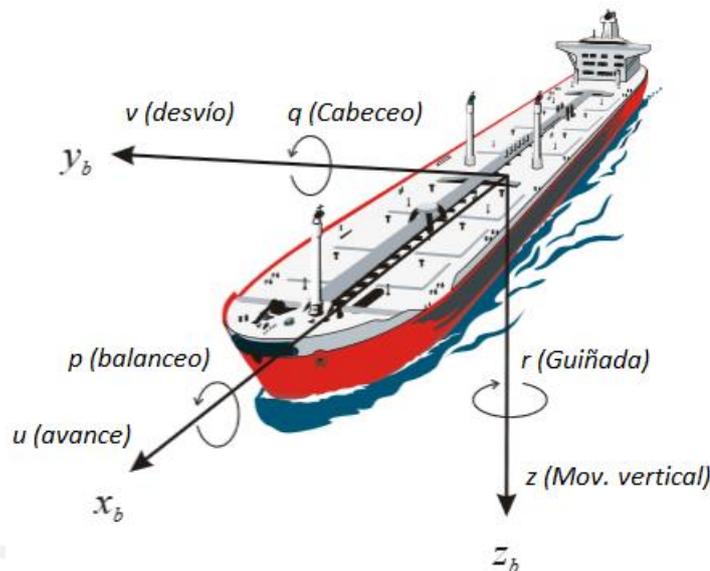


Figura 2.2. Descripción del movimiento del vehículo marítimo sobre cada eje (Fossen. 2011)

Las velocidades lineal y angular del vehículo se expresa mediante el siguiente vector:

$$v = \begin{bmatrix} \vec{v}_{b/n}^b \\ \vec{w}_{b/n}^b \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Donde:

$\vec{v}_{b/n}^b = [u, v, w]^T$ : Velocidad lineal del sistema unido al robot ( $\{b\}$ ) respecto al inercial ( $\{i\}$ ) expresado en  $\{b\}$

$\vec{w}_{b/n}^b = [p, q, r]^T$ : Velocidad angular del sistema unido al robot ( $\{b\}$ ) respecto al inercial ( $\{i\}$ ) expresado en  $\{b\}$

### 2.2.1. Matrices de Rotación

Ya que para describir el movimiento de un vehículo de superficie es necesario establecer sistemas de referencia, tanto las posiciones y velocidades deben poder calcularse con respecto a cada uno de dichos sistemas.

Este procedimiento se logra con las matrices de rotación. Al analizar el movimiento de un vehículo de superficie, los sistemas de referencia de interés son el inercial  $\{i\}$  y el sistema unido al cuerpo  $\{b\}$ .

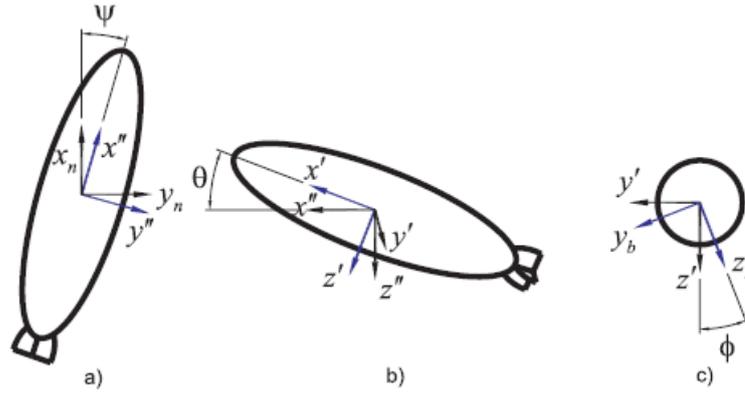


Figura 2.3. Secuencia de rotaciones de ángulos de Euler: a) Guiñada, b) Cabeceo y c) Balanceo. El esquema del robot aparece en la orientación final después de la correspondiente rotación. (Moreno et al. 2014)

Por ejemplo, dado un vector expresado en coordenadas de  $\{b\}$ , este mismo es expresado en el sistema inercial mediante la matriz  $R_b^n$ . Si además se tiene en cuenta que los ángulos  $\phi$  y  $\theta$  son muy pequeños se tiene:

$$R_b^n = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & -s\psi c\phi + c\psi s\theta s\phi & s\psi s\phi + c\psi c\phi s\theta \\ s\psi c\theta & c\psi c\phi + s\psi s\theta s\phi & -c\psi s\phi + s\psi c\phi s\theta \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R(\psi)$$

### 2.2.2. Transformación de velocidades

La transformación que relaciona el vector de velocidad lineal en un marco de referencia inercial  $\{i\}$  y el marco de referencia  $\{b\}$  unido al cuerpo se puede expresar según Fossen (2011):

$$\dot{r} = \vec{v}$$

Por otro lado, también se usa una transformación que relacionan las velocidades angulares del cuerpo y las velocidades medidas en el sistema inercial, la cual es:

$$\dot{\theta} = \vec{w}$$

Donde, al considerar el movimiento de un vehículo de superficie sólo en el plano  $(x, y)$ , se tiene:

$$\begin{bmatrix} 0 & s\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Estas últimas expresiones se pueden resumir de la siguiente forma:

$$\dot{\eta}$$

Donde:

$$J_{(v)}^{6 \times 6} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_b^n & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_\theta \end{bmatrix}^{6 \times 6} \Rightarrow J_{(v)}^{3 \times 3} = \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{3 \times 3} \quad (2.4)$$

### 2.3. Dinámica del vehículo marítimo

Para analizar el movimiento del vehículo de superficie es necesario encontrar las expresiones para las fuerzas que actúan sobre él. Con el objetivo de usar las leyes de Newton, se halla la dinámica del robot marítimo con respecto al centro de gravedad (CG) y luego mediante transformaciones, con respecto al punto CO, en el cual se encuentra el sistema de referencia unido al cuerpo.

#### 2.3.1. Dinámica del sistema con respecto al centro de gravedad CG

##### 2.3.1.1. Movimiento de traslación con respecto al Centro de Gravedad (CG)

A partir de la figura 2.4 se tiene la siguiente relación entre vectores:  $\vec{r}_{g/i} = \vec{r}_{b/i} + \vec{r}_g$

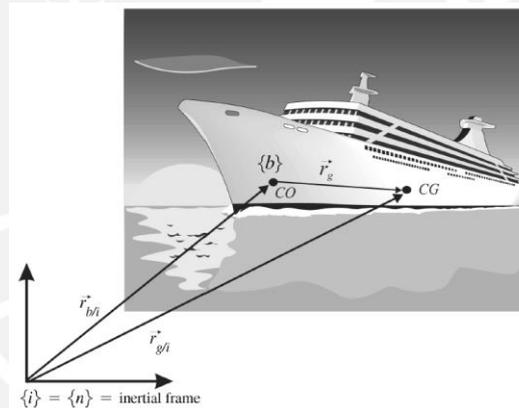


Figura 2.4. Definición de los orígenes de coordenadas CO y CG (Fossen. 2011)

Donde:

$\vec{r}_{g/i}$ : posición de CG respecto al sistema inercial

$\vec{r}_{b/i}$ : posición de CO respecto al sistema inercial

$\vec{r}_g$ : vector de posición desde CO hacia CG

Es importante resaltar que se está considerando una navegación de tipo plana (*flat navigation*); es decir, el tipo de navegación que abarca pequeñas áreas, excluyendo viajes de país a país, o mucho menos intercontinentales. Por tanto, el sistema NED  $\{n\}$  es considerado inercial.

$$\vec{r}_{g/n} = \vec{r}_{b/n} + \vec{r}_g$$

Se deriva la posición  $\vec{r}_{g/i}$  con respecto al tiempo, teniendo en cuenta que  $\{b\}$  es un sistema de referencia en movimiento

$$\frac{d\vec{r}_{g/n}}{dt} = \vec{v}_{g/n} = \vec{v}_{b/n} + \vec{\omega}_{b/n} \times \vec{r}_g + \vec{v}_{rel\,g/b}$$

Dado que se está analizando un cuerpo rígido, no hay velocidad relativa del sistema de referencia  $\{g\}$  respecto de  $\{b\}$ .

A partir de la segunda ley de Newton, las fuerzas actuantes en el CG del cuerpo son descritas por:

$$\vec{f}_g = \frac{d}{dt}(m\vec{v}_{g/n})$$

Expresando la derivada del vector velocidad  $\vec{v}_{g/n}$  con respecto al sistema  $\{b\}$ , el movimiento de traslación resulta:

$$\begin{aligned} \vec{f}_g^b &= m \left[ \frac{d}{dt}(\vec{v}_{g/n}) + \vec{\omega}_{b/n} \times \vec{v}_{g/n} \right] \\ &= m[\dot{\vec{v}}_{g/n} + \vec{\omega}_{b/n} \times \vec{v}_{g/n}] = m[\dot{\vec{v}}_{g/n} + \mathcal{S}(\vec{\omega}_{b/n})\vec{v}_{g/n}] \end{aligned} \quad (2.5)$$

### 2.3.1.2. Movimiento de rotación alrededor de CG

La dinámica rotacional sigue el mismo enfoque explicado anteriormente. De la segunda ley de Newton:

$$\vec{m}_g = \frac{d}{dt}(I_g \vec{\omega}_{g/i}) = \frac{d}{dt}(I_g \vec{\omega}_{g/n})$$

La velocidad angular del sistema  $\{g\}$  con respecto al inercial ( $\vec{\omega}_{g/i}$ ) es igual a la velocidad de  $\{b\}$  respecto al inercial ( $\vec{\omega}_{b/i}$ ) por tratarse de un cuerpo rígido. Por tanto:

$$\vec{m}_g = \frac{d}{dt}(I_g \vec{\omega}_{b/n})$$

Se expresa la derivada de este vector con respecto al sistema  $\{b\}$ . El movimiento rotacional es entonces descrito por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \vec{m}_g^b &= \frac{d}{dt}(I_g \vec{\omega}_{b/n}) + \vec{\omega}_{b/n} \times (I_g \vec{\omega}_{b/n}) \\ &= I_g(\dot{\vec{\omega}}_{b/n}) - (I_g \vec{\omega}_{b/n}) \times \vec{\omega}_{b/n} = I_g(\dot{\vec{\omega}}_{b/n}^b) - \mathcal{S}(I_g \vec{\omega}_{b/n}^b) \vec{\omega}_{b/n}^b \end{aligned} \quad (2.6)$$

Las ecuaciones de Newton (2.5) y (2.6) pueden ser representadas de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & I_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\vec{v}}_{g/n}^b \\ \dot{\vec{\omega}}_{b/n}^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m\mathcal{S}(\vec{\omega}_{b/n}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathcal{S}(I_g \vec{\omega}_{b/n}^b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_{g/n}^b \\ \vec{\omega}_{b/n}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{f}_g^b \\ \vec{m}_g^b \end{bmatrix}$$

O también, de manera más compacta se tiene:

$$\mathbf{M}_{RB}^{CG} \begin{bmatrix} \dot{\vec{v}}_{g/n}^b \\ \dot{\vec{w}}_{b/n}^b \end{bmatrix} + \mathbf{C}_{RB}^{CG} \begin{bmatrix} \vec{v}_{g/n}^b \\ \vec{w}_{b/n}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{f}_g^b \\ \vec{m}_g^b \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

### 2.3.2. Dinámica del Sistema con respecto al centro CO

Con el objetivo de tomar ventaja de las propiedades geométricas del vehículo marítimo, es deseable derivar las ecuaciones de movimiento con respecto al centro CO. Ya que las fuerzas y momentos hidrodinámicos en la mayoría de casos son calculados con respecto a este centro, las leyes de Newton también se formulan aquí.

Para ello se obtendrán las ecuaciones de movimiento con respecto a CO mediante una transformación de coordenadas, la cual se deriva de la expresión para la velocidad  $\vec{v}_{g/n}$  en el sistema  $\{b\}$ :

$$\vec{v}_{g/n}^b = \vec{v}_{b/n}^b + \vec{w}_{b/n}^b \times \vec{r}_g^b = \vec{v}_{b/n}^b - \vec{r}_g^b \times \vec{w}_{b/n}^b = \vec{v}_{b/n}^b + \mathbf{S}^T(\vec{r}_g^b) \vec{w}_{b/n}^b$$

A partir de aquí se sigue que:

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_{g/n}^b \\ \vec{w}_{b/n}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{S}^T(\vec{r}_g^b) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_{b/n}^b \\ \vec{w}_{b/n}^b \end{bmatrix} = \mathbf{H}(\vec{r}_g^b) \begin{bmatrix} \vec{v}_{b/n}^b \\ \vec{w}_{b/n}^b \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Donde  $\vec{r}_g^b = [x_g, y_g, z_g]^T$  y  $\mathbf{H}(\vec{r}_g^b)$  es una matriz de transformación.

Para obtener las ecuaciones de movimiento respecto al centro CO, se multiplica  $\mathbf{H}^T(\vec{r}_g^b)$  por la izquierda a la expresión matricial obtenida en la sección (2.3.1.2)

$$\mathbf{H}^T(\vec{r}_g^b) \mathbf{M}_{RB}^{CG} \begin{bmatrix} \dot{\vec{v}}_{g/n}^b \\ \dot{\vec{w}}_{b/n}^b \end{bmatrix} + \mathbf{H}^T(\vec{r}_g^b) \mathbf{C}_{RB}^{CG} \begin{bmatrix} \vec{v}_{g/n}^b \\ \vec{w}_{b/n}^b \end{bmatrix} = \mathbf{H}^T(\vec{r}_g^b) \begin{bmatrix} \vec{f}_g^b \\ \vec{m}_g^b \end{bmatrix}$$

De la transformación de coordenadas:

$$\mathbf{H}^T(\vec{r}_g^b) \mathbf{M}_{RB}^{CG} \left( \mathbf{H}(\vec{r}_g^b) \begin{bmatrix} \dot{\vec{v}}_{b/n}^b \\ \dot{\vec{w}}_{b/n}^b \end{bmatrix} \right) + \mathbf{H}^T(\vec{r}_g^b) \mathbf{C}_{RB}^{CG} \left( \mathbf{H}(\vec{r}_g^b) \begin{bmatrix} \vec{v}_{b/n}^b \\ \vec{w}_{b/n}^b \end{bmatrix} \right) = \mathbf{H}^T(\vec{r}_g^b) \begin{bmatrix} \vec{f}_g^b \\ \vec{m}_g^b \end{bmatrix}$$

Se agrupan términos:

$$\mathbf{M}_{RB}^{CO} \begin{bmatrix} \dot{\vec{v}}_{b/n}^b \\ \dot{\vec{w}}_{b/n}^b \end{bmatrix} + \mathbf{C}_{RB}^{CO} \begin{bmatrix} \vec{v}_{b/n}^b \\ \vec{w}_{b/n}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{f}_b^b \\ \vec{m}_b^b \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Donde:

a)  $\mathbf{M}_{RB}^{CO}$ : Matriz de inercia del sistema de cuerpo rígido

$$\mathbf{M}_{RB}^{CO} = \mathbf{H}^T(\vec{r}_g^b) \mathbf{M}_{RB}^{CG} \mathbf{H}(\vec{r}_g^b) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{S}^T(\vec{r}_g^b) & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & I_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{S}^T(\vec{r}_g^b) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{RB}^{CO} = \begin{bmatrix} m\mathbf{I}_{3x3} & \mathbf{0}_{3x3} \\ m\mathbf{S}(\vec{r}_g^b) & I_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3x3} & \mathbf{S}^T(\vec{r}_g^b) \\ \mathbf{0}_{3x3} & \mathbf{I}_{3x3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\mathbf{I}_{3x3} & m\mathbf{S}^T(\vec{r}_g^b) \\ m\mathbf{S}(\vec{r}_g^b) & I_g - m\mathbf{S}^2(\vec{r}_g^b) \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta que  $I_b$  es el momento de inercia respecto al origen del centro CO:

$$I_b = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix}$$

Y usando el teorema de Steiner, se puede reducir la expresión para  $\mathbf{M}_{RB}^{CO}$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{RB}^{CO} &= \begin{bmatrix} m\mathbf{I}_{3x3} & m\mathbf{S}^T(\vec{r}_g^b) \\ m\mathbf{S}(\vec{r}_g^b) & I_b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz_g & -my_g \\ 0 & m & 0 & -mz_g & 0 & mx_g \\ 0 & 0 & m & my_g & -mx_g & 0 \\ 0 & -mz_g & y_g & I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ mz_g & 0 & -mx_g & -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -my_g & mx_g & 0 & -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.10)$$

b)  $\mathbf{C}_{RB}^{CO}$ : Matriz de coriolis y fuerzas centrípetas

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{RB}^{CO} &= \mathbf{H}^T(\vec{r}_g^b) \mathbf{C}_{RB}^{CG} \mathbf{H}(\vec{r}_g^b) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3x3} & \mathbf{0}_{3x3} \\ \mathbf{S}(\vec{r}_g^b) & \mathbf{I}_{3x3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m\mathbf{S}(\vec{w}_{b/n}^b) & \mathbf{0}_{3x3} \\ \mathbf{0}_{3x3} & -\mathbf{S}(I_g \vec{w}_{b/n}^b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3x3} & \mathbf{S}^T(\vec{r}_g^b) \\ \mathbf{0}_{3x3} & \mathbf{I}_{3x3} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_{RB}^{CO} &= \begin{bmatrix} m\mathbf{S}(\vec{w}_{b/n}^b) & \mathbf{0}_{3x3} \\ m\mathbf{S}(\vec{r}_g^b) \mathbf{S}(\vec{w}_{b/n}^b) & -\mathbf{S}(I_g \vec{w}_{b/n}^b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3x3} & \mathbf{S}^T(\vec{r}_g^b) \\ \mathbf{0}_{3x3} & \mathbf{I}_{3x3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} m\mathbf{S}(\vec{w}_{b/n}^b) & -m\mathbf{S}(\vec{w}_{b/n}^b) \mathbf{S}^T(\vec{r}_g^b) \\ m\mathbf{S}(\vec{r}_g^b) \mathbf{S}(\vec{w}_{b/n}^b) & m\mathbf{S}(\vec{r}_g^b) \mathbf{S}(\vec{w}_{b/n}^b) \mathbf{S}^T(\vec{r}_g^b) - \mathbf{S}(I_g \vec{w}_{b/n}^b) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El término cuadrático satisface:

$$m\mathbf{S}(\vec{r}_g^b) \mathbf{S}(\vec{w}_{b/n}^b) \mathbf{S}^T(\vec{r}_g^b) = -m\mathbf{S}(\vec{w}_{b/n}^b) \mathbf{S}^2(\vec{r}_g^b)$$

Según el teorema de Steiner:

$$I_b = I_g - m\mathbf{S}^2(\vec{r}_g^b)$$

De manera que:

$$\mathbf{C}_{RB}^{CO} = \begin{bmatrix} m\mathbf{S}(\vec{w}_{b/n}^b) & -m\mathbf{S}(\vec{w}_{b/n}^b) \mathbf{S}^T(\vec{r}_g^b) \\ m\mathbf{S}(\vec{r}_g^b) \mathbf{S}(\vec{w}_{b/n}^b) & -\mathbf{S}(I_b \vec{w}_{b/n}^b) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Es posible mover el término  $m\mathbf{S}(\vec{w}_{b/n}^b)$  desde  $\mathbf{C}_{RB\{11\}}^{CO}$  hacia  $\mathbf{C}_{RB\{12\}}^{CO}$ , usando la siguiente propiedad del producto cruz:

$$\mathbf{S}(\vec{v}_{b/n}^b) \vec{w}_{b/n}^b = -\mathbf{S}(\vec{w}_{b/n}^b) \vec{v}_{b/n}^b$$

Del mismo modo puede agregarse el término  $-m\mathcal{S}(\vec{v}_{b/n}^b)$  sobre  $\mathcal{C}_{RB}^{CO}$ , ya que:

$$\mathcal{S}(\vec{v}_{b/n}^b)\vec{v}_{b/n}^b = \mathbf{0}_{3 \times 3}$$

En consecuencia:

$$\mathcal{C}_{RB}^{CO} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & -m\mathcal{S}(\vec{v}_{b/n}^b) - m\mathcal{S}(\vec{w}_{b/n}^b)\mathcal{S}(\vec{r}_g^b) \\ -m\mathcal{S}(\vec{v}_{b/n}^b) + m\mathcal{S}(\vec{r}_g^b)\mathcal{S}(\vec{w}_{b/n}^b) & -\mathcal{S}(I_b\vec{w}_{b/n}^b) \end{bmatrix}$$

Reemplazando términos de las velocidades lineal  $[u, v, w]^T$  y angular  $[p, q, r]^T$ , así como también el momento de inercia respecto al centro CO:

$$\mathcal{C}_{RB}^{CO} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & m(y_g q + z_g r) & -m(x_g q - w) & -m(x_g r + v) \\ 0 & 0 & 0 & -m(y_g p + w) & m(z_g r + x_g p) & -m(y_g r - u) \\ 0 & 0 & 0 & -m(z_g p - v) & -m(z_g q + u) & m(x_g p + y_g q) \\ -m(y_g q + z_g r) & m(y_g p + w) & m(z_g p - v) & 0 & -(qI_{yz} + pI_{xz} - rI_z) & -(rI_{yz} - pI_{xy} + qI_y) \\ m(x_g q - w) & -m(z_g r + x_g p) & m(z_g q + u) & qI_{yz} + pI_{xz} - rI_z & 0 & -(rI_{xz} + qI_{xy} - pI_x) \\ m(x_g r + v) & m(y_g r - u) & -m(x_g p + y_g q) & rI_{yz} - pI_{xy} + qI_y & rI_{xz} + qI_{xy} - pI_x & 0 \end{bmatrix}$$

Con el objetivo de reducir las expresiones para las matrices de cuerpo rígido  $M_{RB}$  y de coriolis  $C_{RB}$ , se tienen en cuenta 2 consideraciones:

1. El sistema de referencia  $\{b\}$  soldado al cuerpo se escoge coincidente al centro de gravedad, de manera que:  $[x_g, y_g, z_g]^T = [0, 0, 0]^T$
2. Como se aprecia en la figura 1.X, plano  $X_b Z_b$  es un plano de simetría y por tanto:

$$I_{xy} = I_{yz} = 0$$

Con estas aproximaciones, y definiendo el vector de velocidad generalizado expresado en  $\{b\}$  como  $\mathbf{v} = [(\vec{v}_{b/n}^b)^T, (\vec{w}_{b/n}^b)^T]^T = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]^T$ , la dinámica del sistema queda como sigue:

$$\vec{\tau}_{RB} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_x & 0 & -I_{xz} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{zx} & 0 & I_z \end{bmatrix} \dot{\mathbf{v}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & mw & -mv \\ 0 & 0 & 0 & -mw & 0 & mu \\ 0 & 0 & 0 & mv & -mu & 0 \\ 0 & mw & -mv & 0 & -(pI_x - rI_z) & -qI_y \\ -mw & 0 & mu & pI_{xz} - rI_z & 0 & -(rI_{xz} - pI_x) \\ mv & -mu & 0 & qI_y & rI_{xz} - pI_x & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v} \quad (2.12)$$

Donde  $\tau_{RB} = [X, Y, Z, K, M, N]^T$  es el vector de fuerzas y momentos generalizado, el cual está constituido por fuerzas y momentos hidrodinámicos, fuerzas y momentos hidrostáticos, fuerzas generalizadas debido al oleaje y viento, además de torques de control.

En resumen:

$$\vec{\tau}_{RB} = \vec{\tau}_{hyd} + \vec{\tau}_{hys} + \vec{\tau}_{viento} + \vec{\tau}_{olas} + \vec{\tau}_{control} \quad (2.13)$$

## 2.4. Fuerzas hidrodinámicas

Son el tipo de fuerzas generadas entre las olas del agua y el barco. Son bastante complejas pues dependen de muchas variables como son las características del fluido, la temperatura, presión, la forma geométrica del robot marino, entre otras.

Está constituida por 3 fuerzas:

### 2.4.1. Fuerzas de masa añadida ( $\vec{\tau}_{ma}$ )

Es una fuerza que se opone al movimiento del cuerpo en el fluido y puede depender de su velocidad o aceleración. Esta masa añadida se suele asociar con la cantidad de fluido que se encuentra alrededor del robot marino, y que debe acelerarse cuando éste también lo hace.

Generalmente la masa añadida es obtenida a partir de la experimentación y se denota por  $M_A$ , la cual tiene la siguiente expresión:

$$M_A = - \begin{bmatrix} X_{\dot{u}} & X_{\dot{v}} & X_{\dot{w}} & X_{\dot{p}} & X_{\dot{q}} & X_{\dot{r}} \\ Y_{\dot{u}} & Y_{\dot{v}} & Y_{\dot{w}} & Y_{\dot{p}} & Y_{\dot{q}} & Y_{\dot{r}} \\ Z_{\dot{u}} & Z_{\dot{v}} & Z_{\dot{w}} & Z_{\dot{p}} & Z_{\dot{q}} & Z_{\dot{r}} \\ K_{\dot{u}} & K_{\dot{v}} & K_{\dot{w}} & K_{\dot{p}} & K_{\dot{q}} & K_{\dot{r}} \\ M_{\dot{u}} & M_{\dot{v}} & M_{\dot{w}} & M_{\dot{p}} & M_{\dot{q}} & M_{\dot{r}} \\ N_{\dot{u}} & N_{\dot{v}} & N_{\dot{w}} & N_{\dot{p}} & N_{\dot{q}} & N_{\dot{r}} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Donde cada coeficiente, de acuerdo a la notación de *Society of Naval Architects and Marine Engineers (SNAME, 1950)*, está relacionado con la fuerza hidrodinámica que genera. Por ejemplo:

$$Y = -Y_{\dot{u}}\dot{u}$$

Se interpreta como la fuerza hidrodinámica de masa añadida  $Y$  a lo largo del eje 'y' debido a una aceleración  $\dot{u}$  en la dirección  $x$ .

Adicionalmente, debido a que el sistema de referencia unido al cuerpo  $\{b\}$  también rota con respecto al inercial  $\{n\}$ , a la masa añadida  $M_A$  le corresponde una matriz de Coriolis  $C_A(\mathbf{v})$ , la cual puede adoptar diferentes formas. Al igual que en el caso de  $C_{RB}(\mathbf{v})$ , se emplea una que hace que esta matriz sea antisimétrica.

Si la masa añadida  $M_A$  puede expresarse en términos de cuatro submatrices:

$$M_A = - \begin{bmatrix} M_{A11} & M_{A12} \\ M_{A21} & M_{A22} \end{bmatrix}$$

Entonces, la matriz de Coriolis correspondiente resulta de la siguiente forma:

$$C_A(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{S}(M_{A11}\mathbf{v}_1 + M_{A12}\mathbf{v}_2) \\ -\mathbf{S}(M_{A11}\mathbf{v}_1 + M_{A12}\mathbf{v}_2) & -\mathbf{S}(M_{A21}\mathbf{v}_1 + M_{A22}\mathbf{v}_2) \end{bmatrix}$$

Reemplazando términos:

$$C_A(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & -a_1 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_2 & 0 & -b_3 & b_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 & b_3 & 0 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 & -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Donde:

$$\begin{aligned} a_1 &= X_{\dot{u}}u + X_{\dot{v}}v + X_{\dot{w}}w + X_{\dot{p}}p + X_{\dot{q}}q + X_{\dot{r}}r \\ a_2 &= Y_{\dot{u}}u + Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{w}}w + Y_{\dot{p}}p + Y_{\dot{q}}q + Y_{\dot{r}}r \\ a_3 &= Z_{\dot{u}}u + Z_{\dot{v}}v + Z_{\dot{w}}w + Z_{\dot{p}}p + Z_{\dot{q}}q + Z_{\dot{r}}r \\ b_1 &= K_{\dot{u}}u + K_{\dot{v}}v + K_{\dot{w}}w + K_{\dot{p}}p + K_{\dot{q}}q + K_{\dot{r}}r \\ b_2 &= M_{\dot{u}}u + M_{\dot{v}}v + M_{\dot{w}}w + M_{\dot{p}}p + M_{\dot{q}}q + M_{\dot{r}}r \\ b_3 &= N_{\dot{u}}u + N_{\dot{v}}v + N_{\dot{w}}w + N_{\dot{p}}p + N_{\dot{q}}q + N_{\dot{r}}r \end{aligned}$$

Combinando ambas expresiones obtenidas, la fuerza de masa añadida es:

$$\vec{\tau}_{ma} = -M_A \dot{\mathbf{v}} - C_A(\mathbf{v})\mathbf{v} \quad (2.16)$$

#### 2.4.2. Amortiguamiento potencial inducido por radiación: $\vec{\tau}_{ap}$

Es la fuerza que se debe a la energía disipada hacia la superficie de las olas. Depende de la velocidad relativa entre el barco y las olas ( $\mathbf{v}_r$ ). Suele despreciarse porque es pequeña comparada con otras fuerzas de amortiguamiento.

$$\vec{\tau}_{ap} = D_{p(\mathbf{v}_r)}\mathbf{v}_r \quad (2.17)$$

#### 2.4.3. Amortiguamiento viscoso: $\vec{\tau}_{visc}$

Son el resultado de la fricción que ejerce la viscosidad del fluido sobre el cuerpo. Pueden subdividirse en 4 tipos de fuerzas.

- *Amortiguamiento debido a la fricción con la superficie* explicado por la teoría de capa límite laminar y que es modelado de manera lineal. El perfil de velocidad del fluido cambia cuando entra en contacto con el robot marino.

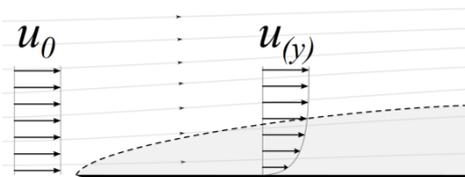


Figura 2.5. Ejemplo de capa límite laminar

En el caso se presenten flujos turbulentos habrá una contribución de los movimientos de alta frecuencia usualmente referidos como fricción no lineal.

- *Amortiguamiento por el drift de las olas*, el cual puede interpretarse como una resistencia añadida para los vehículos de superficie que avanzan sobre las olas. Es el tipo de amortiguamiento que contribuye en mayor medida sobre el eje longitudinal (*surge*), debido a que es proporcional al cuadrado de la altura de las olas. Estas fuerzas son pequeñas comparadas con el amortiguamiento cuando se generan vórtices.
- *Amortiguamiento debido al desprendimiento de vórtices*, debido a bordes afilados en algunas zonas del robot marítimo. Este amortiguamiento puede ser modelado como:

$$f(u) = \frac{1}{2} \rho C_D(R_n) A |u| u \quad (2.18)$$

Donde  $u$  es la velocidad del vehículo,  $A$  es la sección recta proyectada bajo el agua,  $\rho$  es la densidad del agua, y  $C_D(R_n)$  es el coeficiente de drag, que a su vez depende del número de Reynolds:

$$R_n = \frac{uD}{\nu} \quad (2.19)$$

Donde  $D$  es la longitud característica del vehículo, y  $\nu$  es el coeficiente de viscosidad cinemático ( $\nu = 1.56 \times 10^{-6}$  para agua salada a 5°C con salinidad de 5%)

- *Fuerzas de sustentación*, las cuales provienen de dos mecanismos físicos. El primero es debido a la circulación del agua sobre el casco del vehículo. El segundo es un efecto no lineal (*arrastré de flujo cruzado*), el cual actúa debido a la transferencia de momento entre el barco y el agua.

Estas 4 fuerzas, constituyentes del amortiguamiento viscoso, están en función de las velocidades relativas del barco con respecto al agua y contribuyen al amortiguamiento de manera lineal y no lineal. Por lo general, es difícil separar estos efectos de manera que es conveniente representarlo de la siguiente manera:

$$\vec{\tau}_{visc} = (D_V + D_{n(v_r)}) \mathbf{v}_r \quad (2.20)$$

Considerando que el efecto de aguas es muy pequeño, se toma la velocidad relativa del barco ( $\mathbf{v}_r$ ) igual a la velocidad total ( $\mathbf{v}$ ). Asimismo, una aproximación a groso modo es asumir que el robot marítimo realiza un movimiento desacoplado, lo cual sugiere que la estructura de la matriz de amortiguamiento sólo consista de términos lineales o cuadráticos en la diagonal.

Por tanto, la expresión para las fuerzas de amortiguamiento se resume en:

$$\vec{\tau}_{ap} + \vec{\tau}_{visc} = (D_{p(v)} + D_V + D_{n(v)}) \mathbf{v} = (D_{(v)}) \mathbf{v} \quad (2.21)$$

Donde:

$$\begin{bmatrix} X_{|u|u}|u| \\ Y_{|v|v}|v| \\ Z_{|w|w}|w| \\ K_{|p|p}|p| \\ M_{|q|q}|q| \\ N_{|r|r}|r| \end{bmatrix}$$

Finalmente, las fuerzas hidrodinámicas tienen la siguiente forma:

$$\vec{\tau}_{hyd} = \vec{\tau}_{ma} + \vec{\tau}_{ap} + \vec{\tau}_{visc} = -M_A \dot{v} - C_A(v)v - (D) v$$

### 2.5. Fuerzas hidrostáticas

Son llamadas también fuerzas de restauración, las cuales son necesarias para la estabilidad estática del sistema. Un vehículo que sea estable en esta situación resistirá inclinaciones con respecto a su estado estable o puntos de equilibrio en su movimiento vertical, balanceo y cabeceo.

Para un vehículo de superficie, las fuerzas de restauración dependen de la *altura metacéntrica*, la localización del centro de gravedad **G** y el centro de flotación **B**, así como también del área de la superficie mojada  $A_{wp}$ .

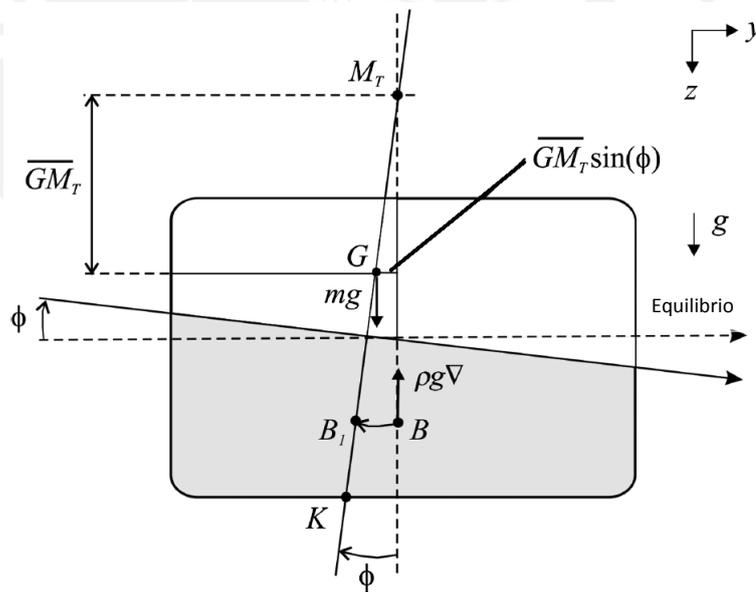


Figura 2.6. Estabilidad metacéntrica transversal. Una figura similar se obtiene para representar la estabilidad metacéntrica lateral, simplemente reemplazando  $M_T$  y  $\phi$  por  $M_L$  y  $\theta$ . (Fossen. 2011)

La altura metacéntrica  $\overline{GM}_i$ , donde  $\{T, L\}$ , es la distancia entre el centro de gravedad **G**, y el metacentro el cual se define como el punto en el cual una línea

vertical imaginaria a través de **CB** intersecta otra línea vertical imaginaria a través del nuevo centro **CB** cuando el cuerpo es desplazado o girado en el agua. (Ver Figura 2.6)

Las fuerzas actuantes sobre el cuerpo con respecto al sistema inercial  $\{n\}$ , son la fuerza de gravedad ( $\mathbf{f}_g = [0, 0, mg]^T$ ) y la fuerza de empuje ( $\mathbf{f}_b = -[0, 0, \rho g V_{sum}]^T$ ). La fuerza hidrostática en la dirección de *movimiento vertical* es:

$$\mathbf{f}_r^b = mg - \rho g(V + \delta V_{(z)}) = -\rho g \delta V_{(z)}$$

Donde el factor  $\delta V_{(z)}$  es debido a las variaciones en la posición  $z$ , lo cual puede ser escrito como:

$$\delta V_{(z)} = \int_0^z A_{wp}(\zeta) d\zeta \approx A_{wp(0)} z$$

Se expresa la fuerza total con respecto al sistema  $\{b\}$  usando la inversa de la matriz de rotación calculada en la sección 2, de forma que:

$$\mathbf{f}_r^b = \mathbf{R}_b^n(\Theta_{nb})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g A_{wp(0)} z \end{bmatrix} = -\rho g A_{wp(0)} z \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\theta) \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Adicionalmente, a partir de la Figura 2.6 es posible notar que las alturas metacéntricas son brazos de momento para generar torques de balanceo y cabeceo, relacionados con la fuerza de empuje expresada en el sistema  $\{b\}$ . Así:

$$\mathbf{m}_r^b = \mathbf{r}_r^b \times \left( \mathbf{R}_b^n(\Theta_{nb})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g V \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -\overline{GM}_L \sin(\theta) \\ \overline{GM}_T \sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \times \left( -\rho g V \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\theta) \cos(\phi) \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathbf{m}_r^b = -\rho g V \begin{bmatrix} \overline{GM}_T \sin(\phi) \cos(\theta) \cos(\phi) \\ \overline{GM}_L \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(\phi) \\ (\overline{GM}_T - \overline{GM}_L \cos(\theta)) \sin(\theta) \sin(\phi) \end{bmatrix}$$

Las fuerzas hidrostáticas, por lo tanto, presentan la siguiente expresión:

$$\vec{\tau}_{hys} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_r^b \\ \mathbf{m}_r^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho g A_{wp(0)} z \sin(\theta) \\ -\rho g A_{wp(0)} z \cos(\theta) \sin(\phi) \\ -\rho g A_{wp(0)} z \cos(\theta) \cos(\phi) \\ -\rho g V \overline{GM}_T \sin(\phi) \cos(\theta) \cos(\phi) \\ -\rho g V \overline{GM}_L \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(\phi) \\ -\rho g V (\overline{GM}_T - \overline{GM}_L \cos(\theta)) \sin(\theta) \sin(\phi) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

## 2.6. Fuerzas del viento y las olas

Son las fuerzas generadas por el ambiente que rodea al robot marítimo. Se consideran en este caso como perturbaciones externas y actuantes en cada uno de los ejes del sistema de coordenadas local:  $\{x_b, y_b, z_b\}$

Las fuerzas del viento pueden expresarse mediante un modelo que tiene en cuenta la velocidad del viento y el ángulo con el que incide sobre el barco, de acuerdo a la Figura 2.7. Matemáticamente, se expresa según la siguiente ecuación:

$$\vec{\tau}_{viento} = \frac{1}{2} \rho_{aire} V_{rw}^2 \begin{bmatrix} C_{X(\gamma_{rw})} A_{FW} \\ C_{Y(\gamma_{rw})} A_{LW} \\ C_{N(\gamma_{rw})} A_{LW} L_{oa} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Donde:  $V_{rw} = \sqrt{u_{rw}^2 + v_{rw}^2}$ ,  $\gamma_{rw} = -atan2(v_{rw}, u_{rw})$

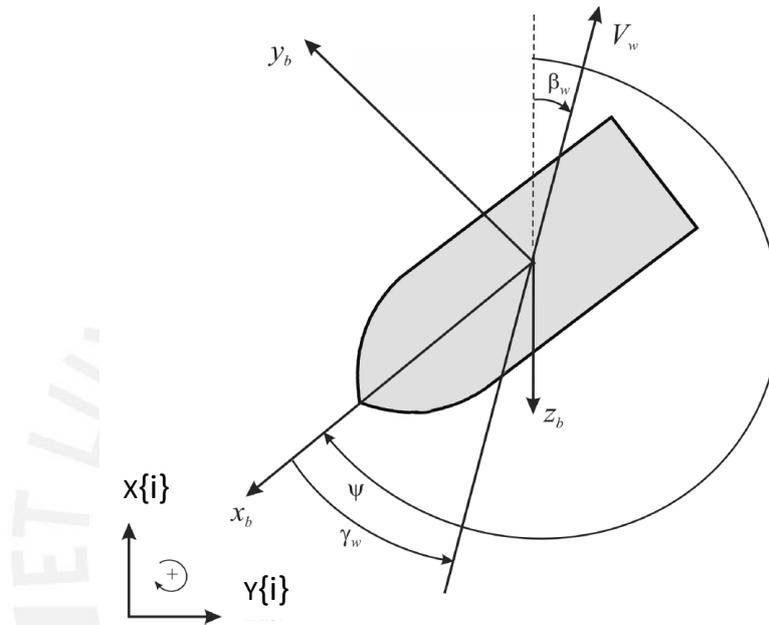


Figura 2.7. Velocidad del viento  $V_w$ , dirección del viento  $\beta_w$ , y ángulo de ataque del viento  $\gamma_w$ . (Fossen. 2011)

Los parámetros relacionados a este tipo de fuerzas son:

$A_{FW}$ : Área frontal proyectada por encima de la superficie del agua y sobre el robot.

$A_{LW}$ : Área lateral proyectada por encima de la superficie del agua y sobre el robot.

$L_{oa}$ : Longitud total del barco.

$C_X, C_Y, C_N$ : coeficientes de viento.

Mientras que las velocidades relativas pueden definirse según:

$$u_{rw} = u - u_w, \quad v_{rw} = v - v_w$$

Y las componentes de  $V_w$  en las direcciones  $x$  y  $y$ , son:

$$u_w = V_w \cos(\beta_w - \psi), \quad v_w = V_w \sin(\beta_w - \psi)$$

Por otro lado, las fuerzas de las olas pueden considerarse de tipo senoidal, donde la amplitud es variante con el tiempo, y la frecuencia de valor relativamente alto. En

aguas calmadas, las perturbaciones debido a estas fuerzas se expresan de la siguiente forma:

$$\vec{\tau}_{olas} = \begin{bmatrix} a_1 \sin(w_1 t + \phi_1) \\ a_2 \sin(w_2 t + \phi_2) \\ a_3 \sin(w_3 t + \phi_3) \end{bmatrix}$$

Otro tipo de perturbaciones alrededor de un robot marítimo en operación son las fuerzas de corrientes, las cuales son producidas por la gravedad, fricción del viento, y la variación de la densidad del agua en varias partes del agua. Asimismo, es importante resaltar que los efectos de este tipo de fuerzas no se consideran en las simulaciones presentadas, puesto que las pruebas experimentales se realizaron en una piscina, donde las aguas son calmadas.

### 2.7. Fuerzas de control

El barco cuenta con 2 hélices, las cuales están separadas una distancia  $L$ . Cuando giran las 2 hélices a la vez y a una misma velocidad, el movimiento es lineal y la fuerza resultante es  $F = f_1 + f_2$ . Mientras que si sólo gira una de ellas o las velocidades con las que giran es diferente, entonces se generan momentos de actuación.

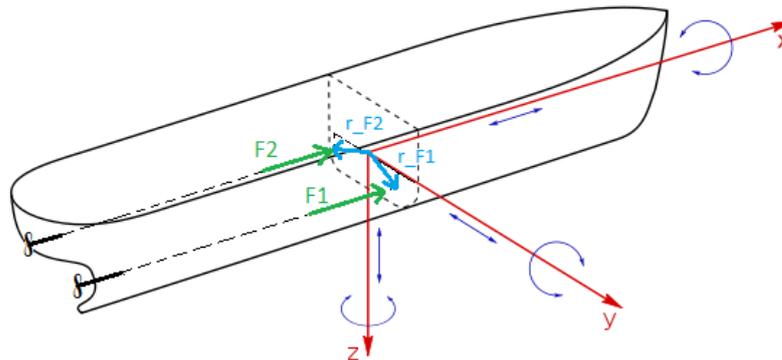


Figura 2.8. Los torques, debido al giro de las hélices, generan un movimiento de cabeceo y guiñada. Fuente: propia.

Estos momentos son calculados de la siguiente forma:

$$\vec{\tau}_{control} = \begin{bmatrix} \vec{f}_{act} \\ \vec{\tau}_{act} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{f}_2 + \vec{f}_1 \\ \vec{r}_{f_2} \times \vec{f}_2 + \vec{r}_{f_1} \times \vec{f}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 + f_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (f_2 - f_1)h \\ \frac{(f_2 - f_1)L}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F\bar{F}G \\ T \end{bmatrix}$$

### 2.8. Ecuaciones de movimiento del vehículo de superficie

El sistema de análisis es el vehículo de superficie Echoboat-RCV de la marca Seafloor como se muestra en la Figura 1.8. La dinámica del modelo del barco puede reducirse a uno de 3GDL considerando el análisis de su movimiento sólo en el plano. Esto se logra mediante una fuerza de empuje que se estabiliza con el peso

del barco, y teniendo en cuenta también que las perturbaciones generan un movimiento de balanceo y cabeceo muy pequeño comparado con el efecto de otras fuerzas actuantes sobre el cuerpo. Esto quiere decir que:

$$z \approx 0, \phi \approx 0^\circ, \theta = 0^\circ$$

Con un movimiento de avance, desvío y guiñada del vehículo marítimo, y valiéndose de las características que presenta dicho vehículo, se puede tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- La región superior del cuerpo es en gran aproximación igual a la zona inferior, por lo que el plano  $X_b Y_b$  puede considerarse también un plano de simetría. Dado que en la sección 2.2 se observó que el plano  $X_b Z_b$  es un plano de simetría, entonces todos los productos de inercia son nulos.

$$I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = 0$$

De manera que las matrices de cuerpo rígido y coriolis quedan reducidas a:

$$\mathbf{M}_{RB} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{RB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -mv \\ 0 & 0 & mu \\ mv & -mu & 0 \end{bmatrix}$$

- La masa añadida en el movimiento de avance no depende de los movimientos de desvío y guiñada y viceversa, por lo que la matriz de masa añadida toma la forma siguiente:

$$\mathbf{M}_A = - \begin{bmatrix} X_{\dot{u}} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{\dot{v}} & 0 \\ 0 & 0 & N_{\dot{r}} \end{bmatrix}$$

Con lo que la matriz de Coriolis correspondiente es:

$$\mathbf{C}_A(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & Y_{\dot{v}}v \\ 0 & 0 & -X_{\dot{u}}u \\ -Y_{\dot{v}}v & X_{\dot{u}}u & 0 \end{bmatrix}$$

- Las pruebas realizadas sobre el vehículo marítimo se hicieron sobre una piscina, donde las aguas son calmadas, y por tanto los coeficientes cuadráticos de amortiguamiento se pueden aproximar a cero. En consecuencia, la matriz de amortiguamiento resulta:

$$\mathbf{D}_{(v)} = \mathbf{D} = - \begin{bmatrix} X_{\dot{u}} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{\dot{v}} & 0 \\ 0 & 0 & N_{\dot{r}} \end{bmatrix}$$

- Como la distancia ' $z$ ', y los ángulos ' $\phi$ ' y ' $\theta$ ' son pequeños, entonces:

$$\sin(\theta) \approx \theta, \cos(\theta) \approx 1, \sin(\phi) \approx \phi$$

Con lo que las fuerzas hidrostáticas quedan reducidas a:

$$\vec{\tau}_{hys} = \begin{bmatrix} \rho g A_{wp(0)} z \sin(\theta) \\ -\rho g A_{wp(0)} z \cos(\theta) \sin(\phi) \\ -\rho g V (\overline{GM}_T - \overline{GM}_L \cos(\theta)) \sin(\theta) \sin(\phi) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \rho g A_{wp(0)} z \theta \\ -\rho g A_{wp(0)} z \phi \\ -\rho g V (\overline{GM}_T - \overline{GM}_L \cos(\theta)) \theta \phi \end{bmatrix}$$

$$\vec{\tau}_{hys} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Las fuerzas de control están dadas por:

$$\vec{\tau}_{control} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ T \end{bmatrix}$$

Estas consideraciones permiten establecer el modelo matemático de 3GDL que describe la dinámica del vehículo de superficie en el sistema de coordenadas local  $\{b\}$ , dado por las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{M}_{RB} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}_{RB(v)} \mathbf{v} = \vec{\tau}_{RB} = \vec{\tau}_{hyd} + \vec{\tau}_{hys} + \vec{\tau}_{viento} + \vec{\tau}_{olas} + \vec{\tau}_{control}$$

$$\mathbf{M}_{RB} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}_{RB(v)} \mathbf{v} = -\mathbf{M}_A \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{C}_A(\mathbf{v}) \mathbf{v} - (\mathbf{D}_{(v)}) \mathbf{v} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_u \\ W_v \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ T \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{M}_{RB} + \mathbf{M}_A) \dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{C}_{RB(v)} + \mathbf{C}_A(\mathbf{v})) \mathbf{v} + (\mathbf{D}_{(v)}) \mathbf{v} = \begin{bmatrix} F + W_u \\ W_v \\ T \end{bmatrix}$$

Reemplazando términos, se tiene la ecuación general de movimiento expresado en el sistema de referencia adherido al robot  $\{b\}$ :

$$\begin{bmatrix} m - X_{\dot{u}} & 0 & 0 \\ 0 & m - Y_{\dot{v}} & 0 \\ 0 & 0 & I_z - N_{\dot{r}} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{v}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(m - Y_{\dot{v}})v \\ 0 & 0 & (m - X_{\dot{u}})u \\ (m - Y_{\dot{v}})v & -(m - X_{\dot{u}})u & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}$$

$$+ \begin{bmatrix} -X_u & 0 & 0 \\ 0 & -Y_v & 0 \\ 0 & 0 & -N_r \end{bmatrix} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} F + W_u \\ W_v \\ T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C} \mathbf{v} + \mathbf{D} \mathbf{v} = \boldsymbol{\tau}^{\{b\}} \quad (2.26)$$

donde puede definirse:

$$m_{11} = m - X_{\dot{u}}, \quad m_{22} = m - Y_{\dot{v}}, \quad m_{66} = I_z - N_{\dot{r}}$$

$$d_{11} = -X_u, \quad d_{22} = -Y_v, \quad d_{66} = -N_r$$

### CAPÍTULO III: IDENTIFICACIÓN DEL VEHÍCULO AUTÓNOMO DE SUPERFICIE

En las secciones anteriores se abordó el estado del arte de los vehículos de superficie, así como las técnicas que son mayormente empleadas en la tarea del control de formación. Posteriormente, se analizó el modelo matemático con el cual se trabajó en el presente documento de tesis, identificando los sistemas de referencia relacionados al vehículo, y sus parámetros en la ecuación de movimiento.

Teniendo en cuenta los puntos mencionados, y con el objetivo de diseñar un sistema de control de formación para una cantidad determinada de robots marítimos, es necesario tener conocimiento del hardware involucrado. Los sensores con los que puede contar un vehículo de superficie permitirán medir la posición y orientación del mismo, así como también velocidades y aceleraciones en algunos casos; mientras que los actuadores se encargan de activar un elemento final de control, el cual permitirá al robot desplazarse.

En la presente tesis, los sensores y actuadores con los que se trabajó presentan determinadas características, como se detallan a continuación.

#### 3.1. Conceptos generales.

##### 3.1.1. Sensores.

Constituye el hardware requerido para tener conocimiento de las variables físicas medibles, las cuales son la posición y orientación del vehículo de superficie  $\{x, y, \psi\}$ . En ese sentido, es importante contar con una unidad de medida inercial (IMU), el cual, como se muestra en la Figura 3.1 tiene incorporado un sensor de presión, un giroscopio, un acelerómetro y un magnetómetro.

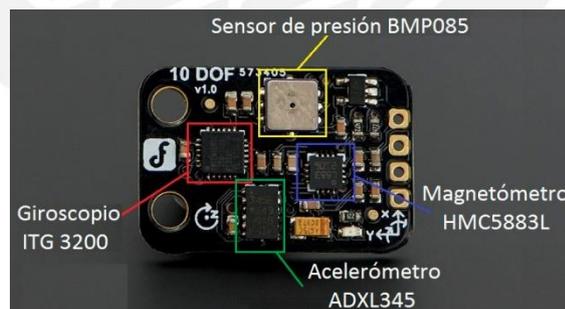


Figura 3.1. Sensores integrados en el IMU.

Entre las principales características que presenta este sensor, se tiene:

- Posee un amplio rango de voltaje de entrada que varía entre 3 y 8V. (En las pruebas realizadas se trabajó con un voltaje de 3.3V.)
- El tipo de comunicación es por medio de I2C.
- Es compatible con microcontroladores Arduino y el tamaño es relativamente pequeño (26 x 18mm.)

### 3.1.2. Actuadores

Las señales de control permiten maniobrar el robot marítimo de acuerdo a un esquema de referencia deseado. El vehículo de superficie tomado como plataforma de desarrollo en la presente tesis es el modelo Echoboat-RC, de la compañía Seafloor (ver Figura 1.8), el cual cuenta con 2 motores sin escobillas. Estos a su vez son controlados mediante un dispositivo llamado ESC (*Electronic Speed controller*, por sus siglas en inglés), el cual recibe una señal generada desde un microcontrolador Arduino.



Figura 3.2. Motor sin escobillas: Leopard LBP56110 640KV (izquierda). Conexión con Arduino (derecha)

El tipo de señal recibida es mediante una modulación por posición de pulso (PPM, por sus siglas en inglés), la cual puede verse propiamente como una serie de pulsos pero de longitud fija, y entre cada uno de dichos pulsos hay pausas de longitud variable. La información en este tipo de señal está codificada como la longitud de un pulso más la longitud de la siguiente pausa. Los pulsos usualmente son alrededor de 500us. de longitud, y las pausas varían entre los 500 y 1500 us. En suma, por tanto, se obtienen valores entre 1000 y 2000us. de longitud en un canal.



Figura 3.3. Batería de ácido-plomo.

Por otro lado, en cuanto al suministro de energía, los motores son alimentados por una batería de ácido-plomo, resistente a vibraciones y calor, y cuyo voltaje nominal es de 12V. (ver Figura 3.3) Las especificaciones técnicas de esta fuente energía se detalla en los Anexos.

### 3.2. Calibración de motores

Con el objetivo de realizar pruebas experimentales con los motores, se estableció el siguiente diagrama de conexión.

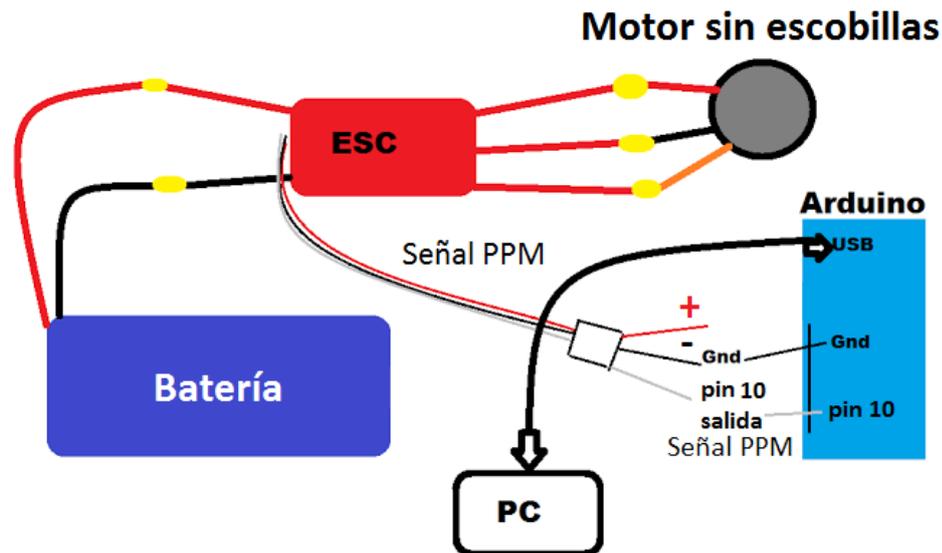


Figura 3.4. Esquema de conexión de los motores. (Manual de usuario de un ESC, HobbyKing, Inc.)

El voltaje suministrado por la batería a carga completa fue aproximadamente de 13.8V. Su conexión se realizó directamente con el ESC, el cual a su vez se unió al motor mediante 3 conectores, como se muestra en la Figura 3.4.

La señal de PPM es enviada mediante el microcontrolador Arduino, y para ello fue necesario en primer lugar calibrar cada uno de los motores haciendo uso del programa disponible en la web (ver Ref. 27), en el cual las señales mínima y máxima se adecuaron a 1000 y 2000. La velocidad de comunicación se realizó a 115200 baud y la conexión de los motores izquierdo y derecho se realizó con los pines 10 y 9 del microcontrolador, respectivamente.

Esta señal se hizo variar en el rango mencionado, correspondiente a una entrada porcentual de 0% a 100%, e ingresada desde teclado usando una interfase elaborada en C#. (Figura 3.5) Para esto se utilizó el programa desarrollado en Arduino disponible en el Anexo 3.

Se observó que a medida que la señal PPM cambiaba de valor, las hélices giraban a cierta velocidad en una relación directa.

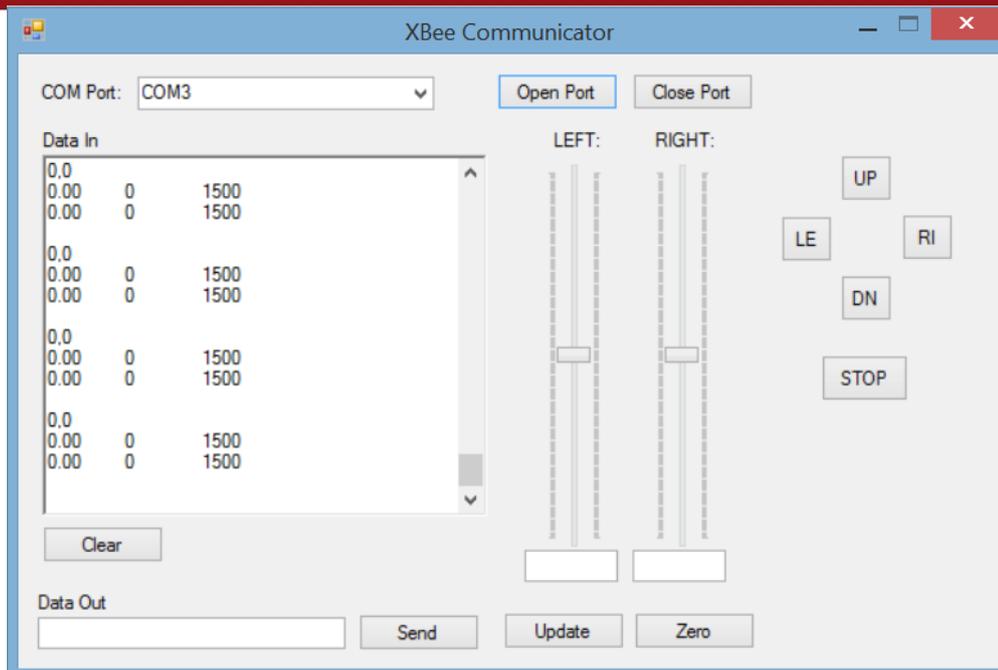


Figura 3.5. Entorno en C#

Como puede verse en la Figura 3.6, la velocidad en revoluciones por minuto (RPM) obtenida para la hélice izquierda es ligeramente mayor que la derecha para un valor fijo de PPM. En consecuencia, es de esperarse que las fuerzas de empuje que generan sean también ligeramente distintas.

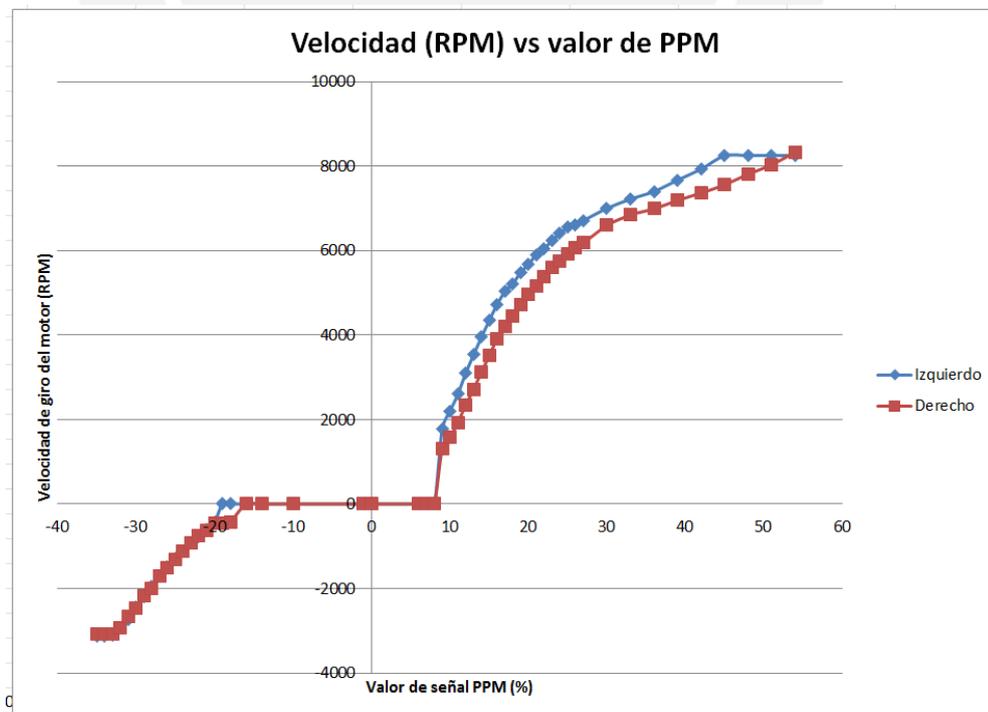


Figura 3.6. Relación entrada - salida del sistema Motor + ESC.

También se aprecia en la figura anterior que hay una zona muerta (ZM), lo que quiere decir que para un rango de valores de PPM, las hélices no giran y, por tanto, el robot marítimo no se desplaza. Del mismo modo, hay una saturación de la señal, lo que permite ingresar valores propios solamente entre 1325 y 1770.

Las características que presentan las curvas mostradas en la Figura 3.6 se resumen en la siguiente tabla.

Tabla 3.1

VARIABLE	UNIDAD[RPM]
$RPM_{max_{Der}}$	8035
$RPM_{min_{Der}}$	-3070
$RPM_{max_{Izq}}$	8250
$RPM_{min_{Izq}}$	-3100
$ZM_{min_{Der}}$	-450
$ZM_{max_{Der}}$	1300
$ZM_{min_{Izq}}$	-420
$ZM_{max_{Izq}}$	1770

Adicionalmente, en la siguiente tabla se detallan las especificaciones técnicas de los motores empleados en las pruebas.

Tabla 3.2.

LBP56110 Series											
Model	Max Amps	Max voltage	Max Power	KV (RPM /Volt)	Resis-tance	No-load Current (15V)	Diameter × Length (mm)	Mounting hole depth	Length of extend Shaft	Shaft Diameter (mm)	Weight
LBP56110 /2Y	170A	44V	7600W	780	0.0072	3.7A	Φ55.8×110	8mm	30mm	Φ8.0	1160g
LBP56110 /3D	210A	36V	7600W	950	0.0055	4.3A	Φ55.8×110	8mm	30mm	Φ8.0	1160g
LBP56110 /4D	158A	48V	7600W	720	0.0092	3.1A	Φ55.8×110	8mm	30mm	Φ8.0	1160g
LBP56110 /4.5D	140A	54V	7600W	640	0.0149	3.0A	Φ55.8×110	8mm	30mm	Φ8.0	1160g

### 3.3. Cálculo de la resistencia del vehículo de superficie:

Con el objetivo de hallar la fuerza de empuje máximo que generan ambas hélices sobre el robot marítimo, se necesita en primer lugar definir e identificar ciertas eficiencias presentes en el proceso de propulsión del robot en el agua.

La eficiencia en el eje ( $\eta_s$ ) es la relación entre la potencia entregada ( $P_D$ ) y la potencia suministrada por el motor ( $P_B$ ). Dado que el eje no presenta significativa fricción al momento de girar, es adecuado considerar este valor igual a 0.94.

La eficiencia de rotación relativa ( $\eta_R$ ) es la razón entre la potencia generada únicamente por las hélices, en aguas abiertas ( $P_{D_{open}}$ ); y la potencia debido a las

mismas hélices pero unidas al robot marítimo ( $P_D$ ). Este valor puede considerarse entre 0.99 y 1.05 (Sampson. 2008). En este caso, se toma  $\eta_R = 1.04$ .

La eficiencia de la hélice propiamente ( $\eta_0$ ), la cual relaciona la potencia generada por el empuje ( $P_T$ ) y la potencia debido a las hélices en aguas abiertas ( $P_{D_{open}}$ ). Se considera de valor igual a 0.9.

La eficiencia del casco ( $\eta_H$ ). Es la relación entre la potencia efectiva ( $P_E$ ) y la potencia generada por el empuje ( $P_T$ ). Este valor puede variar entre 0.98 y 1.05 (Sampson. 2008). Se escoge para este caso, un valor de 0.98. Además, se debe tener en cuenta que la potencia efectiva es igual a la resistencia del robot marítimo ( $R$ ) multiplicada por la velocidad a la que se desplaza ( $v$ ).

Estas definiciones pueden entenderse con mayor detalle a partir de la Figura 3.7.

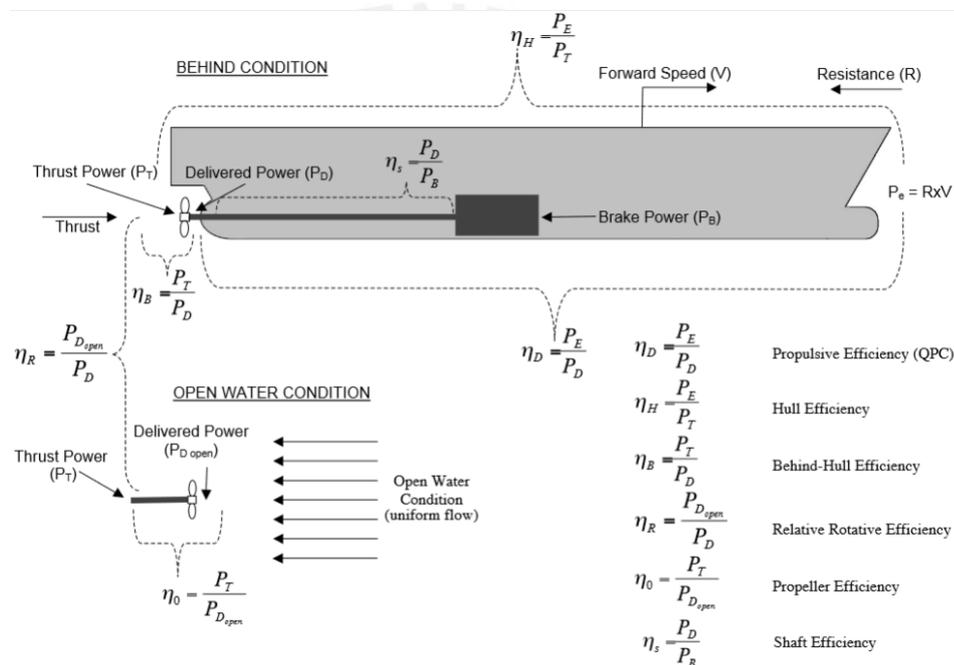


Figura 3.7 Eficiencias en la propulsión. (Sampson, 2008)

En consecuencia, la potencia efectiva es igual a:

$$P_E = Rv = \eta_H P_T = \eta_H \eta_0 \eta_R \eta_s P_B \quad (3.1)$$

Para hallar la potencia  $P_E$  se utilizó el siguiente criterio:

- El voltaje suministrado por la batería al inicio de la prueba experimental fue igual a 13.8V.
- El valor de la corriente en esta condición, de acuerdo a la Tabla 3.2 es igual a 3ª, sin embargo ya que el voltaje no alcanza lo 15V de acuerdo a lo señalado, entonces se considera una corriente aproximada de 2A.

Por tanto,  $P_E$  es aproximadamente igual a  $13.8(2) = 27.6 W$ .

Se asume que este valor de potencia es alcanzado por el robot marítimo cuando se desplaza a su máxima velocidad, la cual de acuerdo a la hoja de datos es igual a 2.57 m/s.

Considerando los valores de eficiencia mencionados anteriormente, la resistencia del vehículo de superficie es igual a:

$$R = \frac{\eta_H \eta_O \eta_R \eta_S P_B}{v} = \frac{0.98(0.9)(1.04)(0.94)(27.6)}{2.57} = 9.25N. \quad (3.2)$$

Este resultado permite considerar una fuerza de empuje ( $T$ ) mayor al valor obtenido. En este caso, se propuso:

$$T_{max} = 10N. \quad (3.3)$$

### 3.4. Obtención de los parámetros del vehículo de superficie

La ecuación de movimiento de un vehículo de superficie mostrada en (2.26) indica que son necesarios los valores correspondientes a la matriz de inercia, matriz de Coriolis y matriz de amortiguamiento. Estos seis parámetros pueden ser hallados usando el siguiente criterio.

- Con respecto a la matriz de inercia:

El parámetro  $m_{11}$ , de acuerdo a la ecuación 2.26, es igual a la masa del barco más un término de masa añadida ( $X_{\dot{u}}$ ) Este segundo término, como se explicó en la sección 2.4, es una fuerza opuesta al movimiento del robot, a causa de una aceleración en la dirección longitudinal al barco.

Ya que se trata de una fuerza de amortiguamiento, se considera igual a un 10% del valor de la masa total, la cual de acuerdo a la Hoja de datos del vehículo de superficie, es igual a 23 Kg, con lo que  $X_{\dot{u}} = -2.3Kg$

El primer parámetro en la ecuación de movimiento, resulta, por tanto:

$$m_{11} = 23Kg - (-2.3Kg.) = 25.3Kg. \quad (3.4)$$

El mismo razonamiento se aplica en el cálculo del parámetro  $m_{22}$ . Sin embargo, dado que en este caso la fuerza de amortiguamiento es transversal al movimiento, su efecto será mayor. Por tanto, se considera que:

$$m_{22} = 23Kg - (-40\%(23Kg.)) = 32.2 Kg. \quad (3.5)$$

Con respecto al tercer parámetro ( $m_{66}$ ), el momento de inercia es calculado de manera aproximada considerando que el robot está constituido por dos masas:  $m_a$  y  $m_b$ . Como la parte posterior del robot marítimo posee un espacio más amplio y es el lugar donde se encuentra la batería y el hardware, entonces se asume que  $m_a = 14.4 Kg$  y  $m_b = 8.6Kg$ . (Figura 3.8)

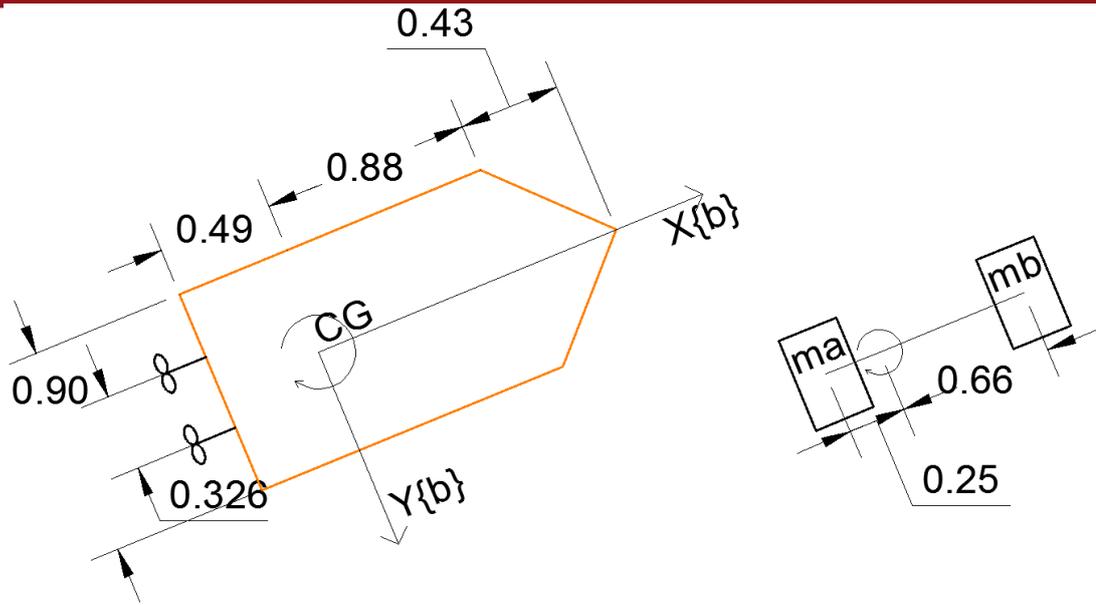


Figura 3.8. Dimensiones del robot marítimo y aproximación para el cálculo del momento de inercia (Fuente: propia)

En consecuencia, el momento de inercia  $I_z$  aproximado del vehículo de superficie alrededor del centro de gravedad es:

$$I_z = m_b(0.655^2) - m_a(0.245^2) = 2.82 \text{ Kg.m}^2$$

Y el factor de amortiguamiento  $N_{\dot{r}}$  se considera un 10% de  $I_z$ , con lo que se tiene:

$$m_{66} = I_z - (-0.1I_z) = 2.53 \text{ Kg.m}^2 \quad (3.6)$$

- Con respecto a la matriz de amortiguamiento:

La primera de las 3 ecuaciones obtenidas en (2.26) analiza el movimiento en el eje longitudinal. Reescribiendo la ecuación, se tiene:

$$m_{11}\dot{u} - m_{22}vr + d_{11}u = F_u$$

El término ' $m_{22}vr$ ' en esta ecuación puede eliminarse cuando el robot se desplaza a velocidad constante en una determinada dirección, dando como resultado una ecuación diferencial de 1er orden. En estas condiciones, el amortiguamiento puede aproximarse mediante el efecto del desprendimiento de vórtices, expresado por la ecuación (2.18):

$$d_{11}u = f(u) = \frac{1}{2}\rho C_{D(R_n)}A|u|u \quad (3.7)$$

Donde  $A$  es la superficie mojada del vehículo,  $u$  es la velocidad con la que éste se desplaza,  $R_n$  es el número de Reynolds,  $\rho$  es la densidad del agua, y  $C_D$  es el coeficiente de drag.

El área mojada se calculó con la ayuda de la Figura 3.9. Esta superficie constituye dos lados curvos de magnitud  $\theta r$  cada una, y dos lados de longitud 1.5m. La dimensión curva resulta igual a 41.65cm, y por tanto, el área  $A$  es aproximadamente igual a  $0.6247 \text{ m}^2$ .

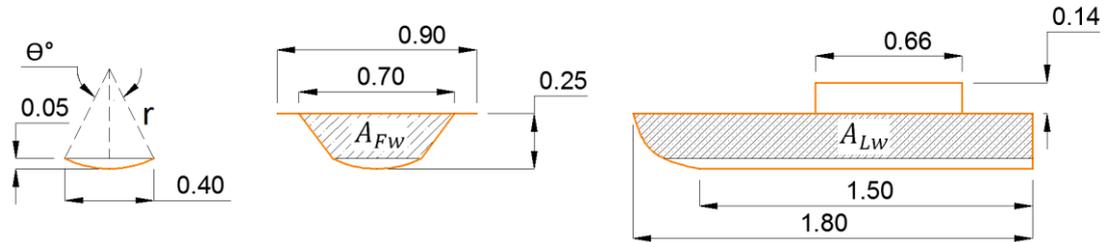


Tabla 3.9 – Dimensiones del robot marítimo. (Fuente: propia)

El coeficiente de drag se consideró igual a 0.006 haciendo una aproximación de los resultados experimentales obtenidos para cuerpos de revolución con la relación longitud/diámetro igual a dos (Cheng-Wen Lin et al. 1995).

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, el índice de amortiguamiento  $d_{11}$  a la velocidad máxima de  $2.57 \text{ m/s}$  ( $v_{m\acute{a}x}$ ) es:

$$d_{11}|_{v=2.57} = \frac{0.5(0.006)(1024)(0.6247)(2.57^2)}{2.57} = 4.93 \text{ Kg/s.}$$

Similarmente, realizando el mismo cálculo para una velocidad relativamente pequeña:

$$d_{11}|_{v=1} = \frac{0.5(0.006)(1024)(0.6247)(1^2)}{1} = 1.91 \text{ Kg/s.}$$

De manera que se propone un parámetro de amortiguamiento  $d_{11}$  igual a:

$$d_{11} \cong 3.5 \text{ Kg/s.} \tag{3.8}$$

Este valor resulta aproximadamente igual al 15% de la masa del robot marítimo, de manera que, usando el mismo razonamiento, se propone que los otros dos parámetros de amortiguamiento  $d_{22}$  y  $d_{66}$  sean el 25% de  $m_{22}$  y  $m_{66}$ , respectivamente. Así:

$$d_{22} = 0.25 \left( 32.2 \frac{\text{Kg}}{\text{s}} \right) = 8.05 \text{ Kg/s.} \tag{3.9}$$

$$d_{66} = 0.25 \left( 2.53 \frac{\text{Kg}}{\text{s}} \right) = 0.633 \text{ Kg. m/s.} \tag{3.10}$$

Por otro lado, otros dos parámetros importantes a tener en cuenta son el área frontal proyectada ( $A_{Fw}$ ) y el área lateral proyectada ( $A_{Lw}$ ). De la Figura 3.9, puede deducirse que  $A_{Fw} = 0.11 \text{ m}^2$  y  $A_{Lw} \cong 0.38 \text{ m}^2$ .

En resumen, todos los parámetros involucrados en el comportamiento dinámico del vehículo marítimo se muestran en la Tabla 3.3.

Tabla 3.3. Parámetros del ASV

$m$ : masa del barco	23 Kg
$m_{11}$	25.3 Kg.
$m_{22}$	32.2 Kg.
$m_{66}$	2.53 Kg.m <sup>2</sup>
$d_{11}$	3.5 Kg/s.
$d_{22}$	8.05 Kg/s.
$d_{66}$	0.633 Kg.m/s.
$L_{oa}$ : longitud total	1.8m.
$a$ : ancho	0.9 m.
$h$ : alto	0.39 m.
$d$ : distancia desde CG hasta la proa	1.31 m.
$A_{FW}$ : Area frontal proyectada	0.11m <sup>2</sup>
$A_{LW}$ : Area transversal proyectada	0.38m <sup>2</sup>
$v_a$ : velocidad máxima de avance	5 kts ~ 2.57 m/s.

Tabla 3.4 – Parámetros de las hélices

$d_{helic}$ : distancia entre hélices	0.326m.
$\phi$ : diámetro	3.22"
$p$ : pitch	1.4

## CAPÍTULO IV: DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL DE FORMACIÓN

### 4.1. Introducción

Como se ha detallado anteriormente, existen diferentes abordajes para afrontar el problema del control de formación de un sistema multiagente. Entre las principales estrategias se encuentran la del líder seguidor, el método de la estructura virtual, el enfoque de Lagrange, y los sistemas inteligentes.

En este capítulo se han formulado dos técnicas que proponen una solución al problema del control de formación. Ambas tienen en cuenta que el vehículo de superficie sobre el cual recae la señal de control es de tipo subactuado. Esto quiere decir que el robot marítimo es controlado únicamente mediante hélices que al girar producen una fuerza longitudinal. Esta particularidad hace también que el diseño del sistema de control de formación sea rigurosamente analizado para lograr su validación mediante simulaciones.

El primer enfoque, desarrolla una ley de control en base a los conceptos de Mecánica Lagrangiana en el que se imponen restricciones al movimiento del sistema total, con el objetivo de lograr un patrón de formación deseado con un líder y varios seguidores. Se obtiene luego una función de restricción unificada, la cual se estabiliza usando controladores de tipo proporcional o proporcional-derivativo. Posteriormente con la función de restricción estabilizada y los parámetros de control hallados, se pueden obtener simultáneamente las fuerzas de actuación sobre todos los agentes en la formación.

La segunda estrategia, al igual que la primera, requiere que un agente dentro de la formación se considere el líder de la misma y que siga una trayectoria predeterminada. El segundo agente es el seguidor, el cual requiere saber las posiciones y velocidades del líder en todo momento. El algoritmo desarrollado se presenta en dos pasos. En primer lugar se expresa una distancia y ángulo relativos del líder con respecto al seguidor en función de las fuerzas actuantes sobre el robot marítimo. Posteriormente se define una dinámica del error con la cual se espera garantizar la estabilidad del sistema controlado según Lyapunov. El objetivo de control es lograr que la distancia de separación y ángulo entre el líder y el seguidor sean iguales a los valores deseados propuestos a priori. Asimismo, debido a que el sistema es subactuado se hace un análisis de estabilidad de la dinámica interna y controlabilidad.

### 4.2. Estrategia usando multiplicadores de Lagrange.

Este enfoque trata el problema de control de formación como un sistema multicuerpo sujeto a restricciones, y en donde el controlador es diseñado siguiendo los principios de la mecánica Lagrangiana y las fuerzas de restricción. Del mismo modo, constituye un procedimiento simple pero también riguroso, porque a medida que se consideran más agentes en el análisis hay una mayor demanda computacional. Además es importante resaltar que la potencialidad de esta técnica recae en la interpretación física.



Figura 4.1. Diagrama esquemático de la metodología de control (Peymani & Fossen. 2012)

El procedimiento de diseño involucra imponer restricciones de posición y velocidad, tales que en el tiempo converjan a los valores deseados. Al haber más de un agente en la formación, todas las restricciones se unifican en una sola, la cual permite, posteriormente, calcular los torques de actuación. Esta metodología se describe en la Figura 4.1

#### 4.2.1. Planteamiento del problema

Como es sabido, para que se genere el patrón de formación entre los vehículos de superficie, el robot o robots seguidores deben mantener su posición relativa al líder mientras éste sigue un camino deseado. Este enfoque, considerando lo anterior, descompone el problema en 2 partes:

- 1) *Seguimiento de trayectoria*, en el cual el líder sigue un cierto camino pero con una determinada velocidad.
- 2) *Sincronización*: del seguidor con respecto al líder, tal que se logra el patrón de formación deseado.

#### 4.2.2. Torques debido a las restricciones

Si se tienen por ejemplo ' $n$ ' vehículos de superficie, cada uno de ellos al trasladarse en el espacio presentará una energía cinética y también una energía potencial. Con ello, el Lagrangiano del sistema total resulta ser:

$$L = T - U = \sum_{i=1}^n T_i - U_i \quad (4.1)$$

Y existen también relaciones cinemáticas entre los robots, las cuales están dadas por la *funciones de restricción*  $C_{(\eta)}$ :

$$C_{(\eta)} = 0$$

Donde  $\eta$  son las coordenadas generalizadas del sistema total:  $\eta = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n]^T$ , y se aprecia que para cumplir el esquema de formación entre los robots la restricción sólo depende de  $\eta$ .

Las fuerzas que mantienen estas restricciones añaden Energía Potencial al sistema (Lanczos.1952. - Cáp. 3, sección 5), de manera que el Lagrangiano del sistema queda expresado de la siguiente forma:

$$\bar{L} = T - (U + \lambda^T C_{(\eta)}) = L - \lambda^T C_{(\eta)} \quad (4.2)$$

Donde  $\lambda$  es el **multiplicador de Lagrange**. Con esta expresión se calcula las ecuaciones de movimiento utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\eta}_i} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \eta_i} = 0 \\ = & \frac{d}{dt} \frac{\partial (L - \lambda^T C_{(\eta)})}{\partial \dot{\eta}_i} - \frac{\partial (L - \lambda^T C_{(\eta)})}{\partial \eta_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \eta_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\eta}_i} (\lambda^T C_{(\eta)}) + \frac{\partial (\lambda^T C_{(\eta)})}{\partial \eta_i} = 0 \end{aligned}$$

Dado que las restricciones sólo dependen de las coordenadas generalizadas:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\eta}_i} (\lambda^T C_{(\eta)}) = 0$$

En el mismo sentido,  $\lambda$  no depende de  $\eta$ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\eta}_i} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \eta_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \eta_i} + \lambda^T \frac{\partial C_{(\eta)}}{\partial \eta_i}$$

La ecuación del movimiento resulta:

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \eta_i} \right)^T + = & \left( \tau_{ext}^T - \lambda^T \frac{\partial C_{(\eta)}}{\partial \eta_i} \right)^T = \vec{\tau}_{ext} - W^T \lambda \\ & C_{(\eta)} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Donde:

$\tau_i$  es el vector de fuerzas externas generalizadas.

$W^T \lambda$ : torque debido a la restricción  $C_{(\eta)}$  impuesta en el movimiento

Ahora bien, puede suceder que el movimiento esté sujeto a dos tipos de restricciones, holonómicas o no holonómicas.

Las restricciones del primer tipo son las que se expresan en términos de las coordenadas generalizadas, y se denotan con la letra  $G$ :

$$G(\eta, t) = 0, \quad l < n$$

Y la fuerza total que generan tiene la forma:

Por otro lado, las restricciones que incluyen las velocidades generalizadas son las de tipo cinemáticas:

$$\dot{\eta},$$

Cuando  $\dot{\eta}$ , no es integrable, se dice que la restricción es no holonómica; sin embargo, si dicha restricción es lineal con respecto a las velocidades, entonces:

$$\dot{\eta}, \quad \dot{\eta}$$

Y la fuerza debido a ella tiene la forma:

En resumen, si el robot está sujeto a 'l' restricciones holonómicas y ' ' restricciones cinemáticas, entonces la fuerza de restricción total expresada por medio de los actuadores será:

$$-\left( \begin{bmatrix} A & \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} K \\ T \end{bmatrix}$$

### 4.2.3. Ley de seguimiento para el líder

Como el robot líder debe seguir determinada trayectoria, es necesario un sistema de navegación, en el cual el ángulo del robot marítimo converja a cierto valor deseado  $\psi$

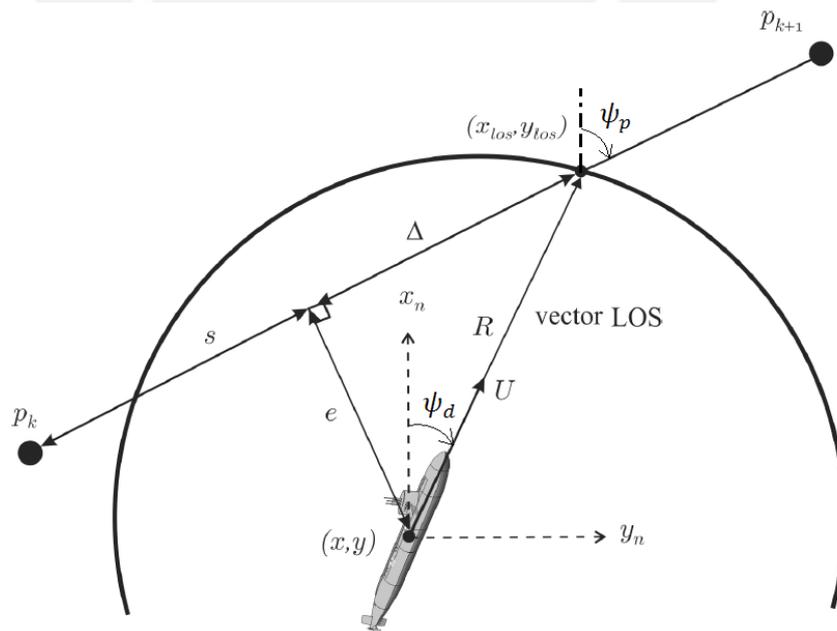


Figura 4.2. Geometría para el Sistema de navegación. (Fossen. 2011)

4.2.3.1. Seguimiento de una trayectoria recta por tramos

Basado en el método de dirección de línea de visión (**LOS Guidance System**, en inglés), el valor deseado ( $\psi_d$ ) de la orientación en este caso, se puede calcular a partir de la figura 4.2 tal que:

$$2 \left( - \right)$$

Donde:

pendiente de la trayectoria establecida

error transversal entre el centro de masa del robot y la trayectoria.

error longitudinal entre el centro de masa del robot y la trayectoria.

$\Delta$ : distancia frontal (lookahead distance), la cual especifica el punto en la trayectoria por delante del robot, hacia el cual dicho robot debe moverse.

: conjunto de puntos con los cuales es caracterizada la trayectoria que el robot líder debe seguir.

Los errores pueden ser definidos usando un único vector el cual puede obtenerse también de la Figura 4.2. Así:

$$\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi_p) & \sin(\psi_p) \\ \sin(\psi_p) & \cos(\psi_p) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} - (\psi_p)$$

Y su vector derivada es:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -(\psi_p) \dot{\psi}_p \\ \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa \dot{\psi}_p \\ -(\psi_p) \dot{\mathbf{p}} \end{pmatrix}$$

Como el en cada tramo de la trayectoria predefinida:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dots - (\psi_p) \dot{\mathbf{p}}$$

Donde:  $\dots = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix}$

4.2.3.2. Seguimiento de una curva parametrizada

En el caso que el robot líder deba seguir una trayectoria curva en general, es posible calcular el ángulo deseado  $\psi_d$  del robot marítimo usando la ecuación (4.7), pero teniendo en cuenta dos consideraciones.

En primer lugar la trayectoria a seguir debe estar parametrizada, de manera que la posición del robot marítimo se determine según:  $(\bar{w}) [x(\bar{w}) \quad \bar{w}]$ . Seguidamente, el valor de se halla como el ángulo tangente a la trayectoria en cada instante de tiempo (ver Figura 4.3). Con lo que:

$$2 \left( y(\bar{w}) \quad \bar{w} \right)$$

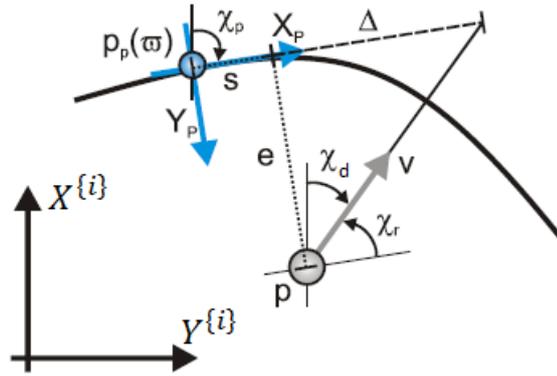


Figura 4.3. Variables en el seguimiento de una trayectoria parametrizada (Breivik & Fossen. 2008)

Es importante resaltar también que si se considera el movimiento del robot en aguas tranquilas y una velocidad nula en el eje transversal al robot ( $v = 0$ ), entonces el ángulo de curso  $\chi$  es igual al ángulo de cabeceo  $\psi$  (Fossen. 2011). En este sentido, el ángulo de orientación deseado  $\chi_d$  se obtiene combinando las ecuaciones (4.7) y (4.10)

Los errores  $\epsilon$  de acuerdo a la Figura 4.3, son:

$$\begin{bmatrix} \epsilon \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi_p) & \sin(\psi) \\ \sin(\psi_p) & \cos(\psi) \end{bmatrix} (\mathbf{p} - \mathbf{p}(\bar{w})) - (\psi_p) (\mathbf{p} - \mathbf{p}(\bar{w}))$$

A diferencia del caso de seguimiento anterior, el ángulo  $\psi$  en este caso no es constante, y por tanto:

$$\dot{\epsilon} = \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\epsilon} \end{bmatrix} = \dot{\psi} - (\psi_p) (\dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{p}}(\bar{w}))$$

Y además:

$$\ddot{\epsilon} = \dot{\epsilon} \dot{\psi} + \ddot{\psi} - (\psi_p) (\ddot{\mathbf{p}} - \ddot{\mathbf{p}}(\bar{w})) \dot{\psi} - (\psi_p) (\ddot{\mathbf{p}} - \ddot{\mathbf{p}}(\bar{w}))$$

Con el objetivo de reducir el error  $\epsilon$  a cero,  $\dot{\psi}$  y  $\ddot{\psi}$  pueden colaborar uno con respecto a otro. Esto se logra haciendo que la variable parametrizada  $\bar{w}$  cumpla la siguiente condición (Breivik & Fossen. 2008):

$$\ddot{\bar{w}} = \frac{(\dot{\epsilon} + \ddot{\psi})}{(\psi_p)}$$

Donde  $U(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$  es la velocidad del vehículo,  $\psi_p$  es un parámetro pequeño positivo, y  $|\mathbf{p}(\bar{w})| = \sqrt{x(\bar{w})^2 + y(\bar{w})^2}$

#### 4.2.4. Restricciones para el líder y seguidor

- Robot líder:

Restricciones cinemáticas:

Como uno de los objetivos de control es lograr que el robot marítimo alcance la velocidad deseada, se plantea:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} u_1 - u_d \\ v_1 - v_{d1} \end{bmatrix} = \mathbb{O}^{2 \times 1}$$

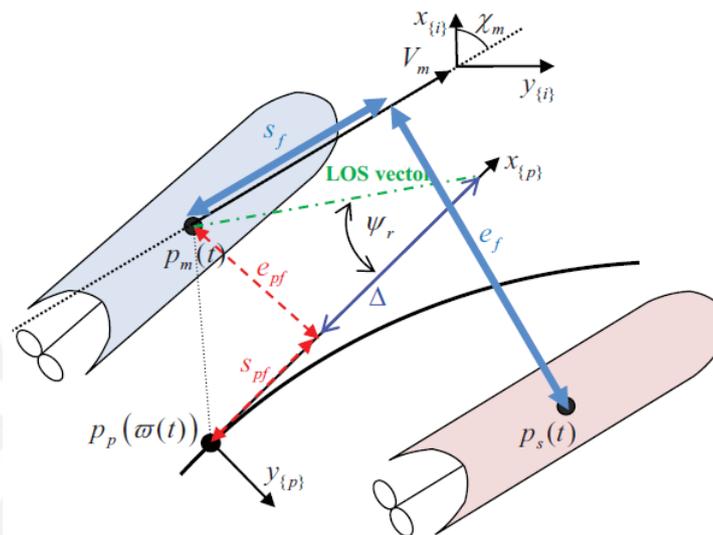


Figura 4.4. Geometría de la formación de 2 vehículos de superficie (Peymani & Fossen. 2012)

Restricciones holonómicas:

Además de las condiciones impuestas para las velocidades, es necesario también que se cumpla:

- La orientación  $\psi_1$  del robot debe converger a un valor deseado  $\psi_d$ , dado por el sistema de navegación.
- El vector de error entre la posición del robot y la trayectoria debe tender a cero.

Matemáticamente:

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} \psi_1 - \psi_{des} \\ \epsilon_{pf} \end{bmatrix} = \mathbb{O}^{3 \times 1}$$

- Robot seguidor:

Restricciones cinemáticas:

El robot seguidor debe alcanzar la velocidad del robot líder, para que la distancia entre ellos sea constante y mantener la formación invariante en el tiempo. Se plantea, por tanto:

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_{d2} \end{bmatrix} = \mathbb{O}^{2 \times 1}$$

Restricciones holonómicas:

- La orientación del seguidor  $\psi_2$  debe ser la misma que la del líder  $\psi_1$ .

- El vector  $\varepsilon_f$  debe coincidir con el vector  $\varepsilon_d$ , estableciendo la formación deseada.

$$\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} \psi_2 - \psi_1 \\ \varepsilon_f - \varepsilon_d \end{bmatrix} = \mathbb{O}^{3 \times 1}$$

El vector  $\varepsilon_d = [s_d, e_d]^T$  tiene las componentes del patrón de formación deseado, mientras que el vector  $\varepsilon_f = [s_f, e_f]^T$  representa la distancia entre el seguidor y el camino estimado a seguir del líder (ver Figura 4.4), el cual tiene la siguiente representación:

$$\varepsilon_f = \begin{bmatrix} s_f \\ e_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi^*) & \sin(\psi^*) \\ -\sin(\psi^*) & \cos(\psi^*) \end{bmatrix} (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}^*) = \underline{R}_{(\psi^*)}^T (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}^*) \quad (4.15)$$

Donde:

$\mathbf{p}^* = \mathbf{p}_{líder} = \mathbf{p}_1$ : es la posición estimada de la trayectoria

$\psi^* = \chi_{líder} = \psi_{líder} + \beta_{líder}$ : es la orientación estimada ( $\beta \cong \frac{v}{U}$ : ángulo de drift)

Y el vector derivada es:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_f &= \underline{R}_{(\psi^*)}^T \underline{S}^T (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}^*) \dot{\psi}^* + \underline{R}_{(\psi^*)}^T (\dot{\mathbf{p}}_2 - \dot{\mathbf{p}}^*) \\ \dot{\varepsilon}_f &= \underline{S}^T \varepsilon_f \dot{\psi}^* + \underline{R}_{(\psi^*)}^T (\dot{\mathbf{p}}_2 - \dot{\mathbf{p}}^*) \end{aligned} \quad (4.16)$$

#### 4.2.5. Estabilización y unificación de las restricciones

Con el objetivo de imponer las restricciones en el sistema total, se estabilizan las restricciones holonómicas a nivel de velocidades para obtener una sola función de restricción sobre el robot. Esto se logra de la siguiente forma:

$$\Phi^{10 \times 1} = \begin{bmatrix} \Phi_1^{5 \times 1} \\ \Phi_2^{5 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 \\ \dot{G}_1 + p_{G_1} G_1 \\ K_2 \\ \dot{G}_2 + p_{G_2} G_2 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Reemplazando las expresiones para las restricciones:

$$\Phi^{10 \times 1} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 - u_d \\ v_1 - v_{d1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_{des} \\ \dot{\varepsilon}_{pf} \end{bmatrix} + p_{G_1} \begin{bmatrix} \psi_1 - \psi_{des} \\ \varepsilon_{pf} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_{d2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{\psi}_2 - \dot{\psi}_1 \\ \dot{\varepsilon}_{f2} - \dot{\varepsilon}_{d2} \end{bmatrix} + p_{G_2} \begin{bmatrix} \psi_2 - \psi_1 \\ \varepsilon_{f2} - \varepsilon_{d2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Expresando en términos de coordenadas generalizadas:

$$\Phi^{10 \times 1} = W\dot{\eta} + a_{(t)} \quad (4.19)$$

Para el caso, en que el robot líder siga una trayectoria recta por tramos, se tiene:

$$W = \begin{bmatrix} \underline{R}_{(\psi_1)}^T & \mathbb{O}^{2 \times 1} & \mathbb{O}^{2 \times 3} \\ 0 & 1 & \mathbb{O}^{1 \times 3} \\ \underline{R}_{(\psi_p)}^T & \mathbb{O}^{2 \times 1} & \mathbb{O}^{2 \times 3} \\ \underline{A} & \underline{R}_{(\psi_1)}^T & \mathbb{O}^{2 \times 1} \\ \underline{B} & 0 & 1 \\ \mathbb{O}^{2 \times 3} & \underline{R}_{(\psi^*)}^T & \mathbb{O}^{2 \times 1} \end{bmatrix}, \quad a_{(t)} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -u_{d1} \\ -v_{d1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\dot{\psi}_d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + p_{G_1} G_1 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ -v_{d2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{R}_{(\psi^*)}^T \dot{\mathbf{p}}^* + \underline{S}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{f_2} \dot{\psi}^* \end{bmatrix} + p_{G_2} G_2 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Donde:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -\cos(\psi_1) & -\sin(\psi_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = [0 \quad 0 \quad -1]$$

La función unificada  $\Phi$  debe ser siempre cero, y se estabiliza haciendo  $\dot{\Phi} = u_\Phi$  donde  $u_\Phi = -p_\Phi \Phi$ , siendo  $p_\Phi$  definida positiva. Por tanto:

$$\dot{\Phi} + p_\Phi \Phi = \mathbb{O}^{(l+m)x1} \quad (4.21)$$

Reemplazando (4.19) en (4.21):

$$\mathbb{O}^{(l+m)x1} = \dot{\Phi} + p_\Phi \Phi = \frac{d}{dt}(W\dot{\eta} + a) + p_\Phi \Phi = \dot{W}\dot{\eta} + W\ddot{\eta} + \dot{a} + p_\Phi \Phi \quad (4.22)$$

#### 4.2.6. Diseño del controlador para el sistema multiagente

Teniendo en cuenta la ecuación de movimiento del robot marítimo obtenida en el capítulo 2, y las fuerzas debido a las restricciones (ecuación 4.6); la expresión resultante con respecto un sistema de referencia unido al robot (Sistema {b}) es:

$$M\dot{v} + Cv + Dv = \boldsymbol{\tau}_{control}^{\{b\}} + \boldsymbol{\tau}_{viento}^{\{b\}} + \boldsymbol{\tau}_{olas}^{\{b\}}$$

Sin pérdida de generalidad, si el sistema está constituido por un líder y sólo un seguidor, se tiene:

$$M\dot{v} + Cv + Dv = \boldsymbol{\tau}_{control}^{\{b\}} + \boldsymbol{\tau}_{ext.}^{\{b\}}$$

Donde:

$$M = \begin{bmatrix} M & \mathbb{O}^{3 \times 3} \\ \mathbb{O}^{3 \times 3} & M \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C & \mathbb{O}^{3 \times 3} \\ \mathbb{O}^{3 \times 3} & C \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D & \mathbb{O}^{3 \times 3} \\ \mathbb{O}^{3 \times 3} & D \end{bmatrix}$$

Expresando el sistema en el eje de coordenadas globales (Sistema {i}):

$$M_\eta \ddot{\eta} + \mathbf{n}_{(v,\eta,\dot{\eta})} = R_{(\psi)} \boldsymbol{\tau}^{\{i\}} - R_{(\psi)} W^T \boldsymbol{\lambda} \quad (4.23)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{(v,\eta,\dot{\eta})} &= \mathbf{C}_{\eta(v,\eta)}\dot{\eta} + \mathbf{D}_{\eta(v,\eta)}\dot{\eta} + \mathbf{g}_{\eta(\eta)} \\ \mathbf{M}_{\eta} &= \mathbf{R}_{(\psi)}\mathbf{M}_i\mathbf{R}_{(\psi)}^T \\ \mathbf{C}_{\eta(v,\eta)} &= \mathbf{R}_{(\psi)}[\mathbf{C}_{i(v)} - \mathbf{M}_i\mathbf{R}_{(\psi)}^T\dot{\mathbf{R}}_{(\psi)}]\mathbf{R}_{(\psi)}^T \\ \mathbf{D}_{\eta(\eta)} &= \mathbf{R}_{(\psi)}\mathbf{D}_i\mathbf{R}_{(\psi)}^T \\ \mathbf{g}_{\eta(\eta)} &= \mathbf{R}_{(\psi)}\mathbf{g}(\eta) \end{aligned}$$

Resolviendo para  $\ddot{\eta}$ :

$$\ddot{\eta} = \mathbf{M}_{\eta}^{-1} \left( \mathbf{R}_{(\psi)}\boldsymbol{\tau}_{ext}^{\{i\}} - \mathbf{R}_{(\psi)}\mathbf{W}^T\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{n}_{(v,\eta,\dot{\eta})} \right)$$

Multiplicando por  $\mathbf{W}$ :

$$\mathbf{W}\ddot{\eta} = \mathbf{W}_{(\eta)}\mathbf{M}_{\eta}^{-1} \left( \mathbf{R}\boldsymbol{\tau}_{ext}^{\{i\}} - \mathbf{R}\mathbf{W}^T\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{n}_{(v,\eta,\dot{\eta})} \right) \quad (4.24)$$

Reemplazando la expresión para  $\mathbf{W}\ddot{\eta}$  de la ecuación (4.22):

$$-\mathbf{W}\ddot{\eta} - \dot{\mathbf{a}} - p_{\Phi}\Phi = \mathbf{W}_{(\eta)}\mathbf{M}_{\eta}^{-1} \left( \mathbf{R}\boldsymbol{\tau}_{ext}^{\{i\}} - \mathbf{R}\mathbf{W}^T\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{n}_{(v,\eta,\dot{\eta})} \right)$$

Reordenando:

$$\mathbf{W}\mathbf{M}_{\eta}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{W}^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{W}\mathbf{M}_{\eta}^{-1} \left( \mathbf{R}\boldsymbol{\tau}_{ext}^{\{i\}} - \mathbf{n}_{(v,\eta,\dot{\eta})} \right) + \mathbf{W}\ddot{\eta} + \dot{\mathbf{a}} + p_{\Phi}\Phi \quad (4.25)$$

Las fuerzas de actuación se pueden obtener directamente utilizando la pseudoinversa de la matriz  $\mathbf{W}\mathbf{M}_{\eta}^{-1}$ , definida en Peymani & Fossen (2012) como  $(\mathbf{W}\mathbf{M}_{\eta}^{-1})^+ = \mathbf{M}_{\eta}\mathbf{W}^+ = \mathbf{M}_{\eta}(\mathbf{W}^T\mathbf{W})^{-1}\mathbf{W}^T$

Multiplicando la expresión anterior (4.25) por  $(\mathbf{W}\mathbf{M}_{\eta}^{-1})^+$ :

$$\mathbf{R}\mathbf{W}^T\boldsymbol{\lambda} = \left( \mathbf{R}\boldsymbol{\tau}_{ext}^{\{i\}} - \mathbf{n}_{(v,\eta,\dot{\eta})} \right) + \mathbf{M}_{\eta}\mathbf{W}^+(\mathbf{W}\ddot{\eta} + \dot{\mathbf{a}} + p_{\Phi}\Phi) \quad (4.26)$$

Finalmente, si no se consideran perturbaciones externas, la ley de control para el sistema expresado en el eje de coordenadas  $\{b\}$  unido al robot es:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{control}^{\{b\}} &= -\mathbf{W}^T\boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\tau}_{control}^{\{b\}} &= \mathbf{R}^T\mathbf{n}_{(v,\eta,\dot{\eta})} - \mathbf{M}\mathbf{R}^T\mathbf{W}^+(\mathbf{W}\ddot{\eta} + \dot{\mathbf{a}} + p_{\Phi}\Phi) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Es importante resaltar en este punto, que debido a que no hay dinámica para tener una velocidad determinada en la dirección transversal al robot marítimo, entonces no es posible aplicar en su totalidad el vector de fuerzas de actuación obtenido en la ecuación (4.27). Esto es, debido a la subactuación del robot se debe cumplir:

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{control(2,1)}^{\{b\}} &= 0 \\ \boldsymbol{\tau}_{control(5,1)}^{\{b\}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

Planteada esta restricción para los torques de actuación, y resolviendo la ecuación de movimiento, se tienen las ecuaciones diferenciales tanto para la velocidad deseada del líder ( $v_{d_{líder}}$ ) y la velocidad deseada del seguidor ( $v_{d_{seguidor}}$ )

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}_{d_{líder}}(t) + p_{\Phi_{1(2,2)}} v_{d_{líder}}(t) &= \left(-\frac{2}{m_{22}}\right) g_{líder}(t) \\ \dot{v}_{d_{seg}}(t) + p_{\Phi_{2(2,2)}} v_{d_{seg}}(t) &= \left(-\frac{2}{m_{22}}\right) g_{seg}(t) \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

Donde:

$$g_{líder}(t) = \frac{m_{22}}{2} \left( -u_{líder} r_{líder} - p_{\Phi_{1(2,2)}} v_{líder} \right) + \frac{m_{22}}{2} \sin(\psi_{líder} - \psi_p) * f_{líder(1,1)} - \frac{m_{22}}{2} \cos(\psi_1 - \psi_p) f_{líder(2,1)} + (d_{22} v_{líder} + m_{11} u_{líder} r_{líder})$$

$$g_{seg}(t) = \frac{m_{22}}{2} \left( -u_{seg} r_{seg} - p_{\Phi_{2(2,2)}} v_{seg} \right) + \frac{m_{22}}{2} \sin(\psi_{seg} - \psi^*) * f_{seg(1,1)} - \frac{m_{22}}{2} \cos(\psi_2 - \psi^*) f_{seg(2,1)} + (d_{22} v_{seg} + m_{11} u_{seg} r_{seg})$$

Y además:

$$f_{líder} = \begin{bmatrix} p_{G_1(2,2)} & 0 \\ 0 & p_{G_1(3,3)} \end{bmatrix} \dot{\epsilon}_{pf} + \begin{bmatrix} p_{\Phi_1(4,4)} & 0 \\ 0 & p_{\Phi_1(5,5)} \end{bmatrix} \left( \dot{\epsilon}_{pf} + \begin{bmatrix} p_{G_1(2,2)} & 0 \\ 0 & p_{G_1(3,3)} \end{bmatrix} \epsilon_{pf} \right)$$

$$f_{seg} = -R(\psi^*) \begin{bmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \epsilon_f (\dot{\psi}^*)^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \epsilon_f (\dot{\psi}^*) + \begin{bmatrix} p_{G_2(2,2)} & 0 \\ 0 & p_{G_2(3,3)} \end{bmatrix} \dot{\epsilon}_f + \begin{bmatrix} p_{\Phi_2(4,4)} & 0 \\ 0 & p_{\Phi_2(5,5)} \end{bmatrix} \left( \dot{\epsilon}_f + \begin{bmatrix} p_{G_2(2,2)} & 0 \\ 0 & p_{G_2(3,3)} \end{bmatrix} (\epsilon_f - \epsilon_d) \right)$$

La convergencia de la función de restricción total llevará a que las velocidades deseadas  $v_{d_{líder}}$  y  $v_{d_{seguidor}}$  también sean iguales a cero.

En otras palabras se resuelve el problema de la subactuación imponiendo una restricción de velocidad ( $v - v_{des}$ ) en la dirección transversal al robot (Peymani & Fossen. 2011).

La ecuación (4.29) muestra que si se propone una velocidad deseada para el líder  $u_{líder}$ , y además es posible que la velocidad  $v_{(t)}$  pueda ser hallada mediante integración, entonces, los torques de actuación lograrán que el robot marítimo converja a la velocidad deseada exponencialmente. Además, la dinámica para el GDL  $v$  y las fuerzas de control son globalmente acotadas (Peymani & Fossen. 2011).

En cuanto a la formación, del mismo modo es posible afirmar que los torques de actuación encontrados mediante esta técnica hacen que los errores geométricos  $[\epsilon_f^T, \epsilon_{pf}^T]^T$  sean global y exponencialmente estables (Peymani & Fossen. 2012).

### 4.3. Estrategia de Control No Lineal

Existen dos esquemas geométricos de formación para implementar esta técnica (Fahimi, Rineesh & Nataraj, 2008). El primero es llamado el controlador ' $l - \alpha$ '. En este esquema se definen como parámetros la distancia relativa deseada y el ángulo de mira deseado de un vehículo con respecto a uno de sus vecinos en la formación. Con este esquema de formación se puede definir la estructura de formación de vehículos que siguen una línea recta o se encuentran en uno de los lados de una estructura de formación bidimensional.

Sin embargo, es importante notar que cuando un vehículo de superficie está restringido a mantenerse fijo con respecto a más de un vehículo en la formación, se necesita un segundo esquema con el objetivo de definir las distancias deseadas del robot respecto a dos de sus vecinos. Este esquema es el que se desarrolla en el diseño del controlador ' $l - l'$ '.

Para diseñar estos dos tipos de controladores, es necesario en primer lugar determinar las ecuaciones de movimiento para el vehículo de superficie, pero con respecto al sistema de coordenadas globales  $\{i\}$ . Esto se logra usando las relaciones cinemáticas entre las velocidades expresadas en el sistema unido al cuerpo  $(u, v, r)$  y las velocidades en el sistema inercial  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ . El resultado es:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{1}{m_{11}}(f_x + F\cos(\psi)) \\ \ddot{y} &= \frac{1}{m_{11}}(f_y + F\sin(\psi)) \\ \ddot{\psi} &= \frac{1}{I_{zz}}(f_\psi + T) \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

Donde:

$$\left. \begin{aligned} f_x &= m_r d_{22} v \sin(\psi) - d_{11} u \cos(\psi) + \dot{\psi} (v \cos(\psi) - m_r u \sin(\psi)) m_d \\ f_y &= m_r d_{22} v \cos(\psi) - d_{11} u \sin(\psi) + \dot{\psi} (v \sin(\psi) + m_r u \cos(\psi)) m_d \\ f_\psi &= -m_d u v - d_{66} \dot{\psi} \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

Y además:

$$m_d = m_{22} - m_{11}, \quad m_r = \frac{m_{11}}{m_{22}}$$

A continuación, se presenta el diseño de ambos tipos de controladores.

#### 4.3.1. El controlador $l - \alpha$

En la Figura 4.5, se muestra un sistema de 2 vehículos vecinos en una formación. Al inicio se encuentran separados una distancia  $l_{12}$ , la cual está definida entre el centro de masa del robot 1 y un punto ( $P$ ) ubicado en el segundo robot. Este punto está a una distancia  $d$  del centro de masa del robot 2.

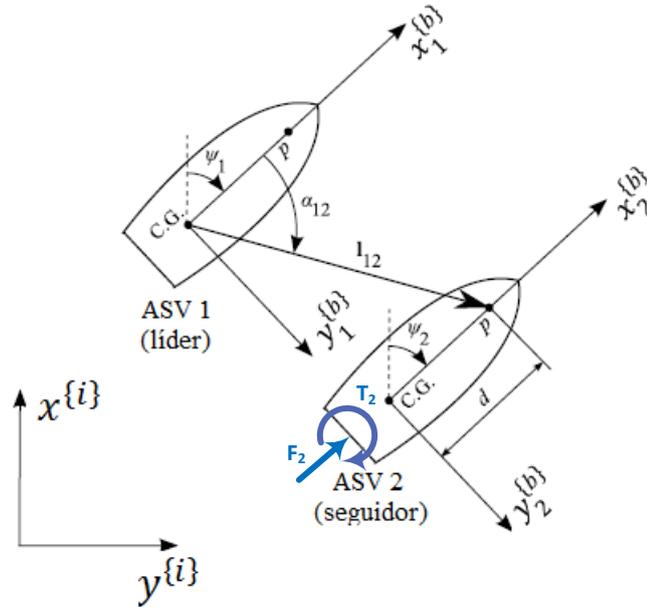


Figura 4.5. Esquema del controlador  $l - \alpha$  (Fahimi. 2009)

El problema puede plantearse como sigue. Durante la formación se desea que el robot 2 mantenga siempre una distancia relativa deseada  $l_{12}^d$  y un ángulo de mira deseado  $\alpha_{12}^d$  respecto al robot 1. Con el objetivo de lograr esto, se debe diseñar una ley de control para la fuerza  $F_2$  y el torque  $T_2$ , los cuales son generados mediante el giro de las hélices. Para lograr ello, en primer lugar, es necesario expresar la distancia de separación  $l_{12}$  y el ángulo de mira  $\alpha_{12}$  en función de las fuerzas de control  $\{F_2, T_2\}$

A partir de la figura 4.5 se calcula la aceleración del punto  $p_2$ :

$$\begin{aligned} \vec{a}_{p_2} &= \vec{a}_{p_1} + \vec{a}_{p_2^1} \\ \vec{a}_{p_2} &= (\vec{a}_1 + \ddot{\alpha}_0 \hat{k} \times \vec{l}_{12} - \dot{\alpha}_0^2 \vec{l}_{12}) + (2\dot{\alpha}_0 \hat{k} \times \dot{\vec{l}}_{12}) + \ddot{\vec{l}}_{12} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Donde  $\vec{a}_1$  es la aceleración del centro de masa del vehículo 1, y el ángulo  $\alpha_0$  es definido como:

$$\alpha_0 = \psi_1 + \alpha_{12}$$

Por otro lado, la aceleración del punto  $p_2$  en el vehículo 2 también se puede escribir en términos de la aceleración del centro de masa del vehículo 2:

$$\vec{a}_{p_2} = \vec{a}_2 + \ddot{\psi}_2 \hat{k} \times \vec{d} - \dot{\psi}_2^2 \vec{d} \quad (4.33)$$

De las ecuaciones (4.32) y (4.33) se despeja  $\ddot{\vec{l}}_{12}$  y  $\ddot{\alpha}_{12}$ , y se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\vec{l}}_{12} &= (\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1) \sin(\alpha_0) + (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) \cos(\alpha_0) + d\ddot{\psi}_2 \sin(\gamma_1) - d\dot{\psi}_2^2 \cos(\gamma_1) + l_{12} \dot{\alpha}_0^2 \\ \ddot{\alpha}_{12} &= \frac{1}{l_{12}} [(\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1) \cos(\alpha_0) - (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) \sin(\alpha_0) + d\ddot{\psi}_2 \cos(\gamma_1) + d\dot{\psi}_2^2 \sin(\gamma_1) - 2\dot{l}_{12} \dot{\alpha}_0 - l_{12} \ddot{\psi}_1] \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

Donde el valor del ángulo  $\gamma_1$  es:

$$\gamma_1 = \psi_1 + \alpha_{12} - \psi_2$$

Las expresiones correspondientes a las aceleraciones  $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$  obtenidas en el sistema de ecuaciones (4.30) se reemplazan en (4.33), lo que resulta en:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{l}_{12} \\ \ddot{\alpha}_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_l \\ f_\alpha/l_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/l_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\gamma_1) & \sin(\gamma_1) \\ -\sin(\gamma_1) & \cos(\gamma_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/m_{11} & 0 \\ 0 & 1/I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_2 \\ T_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \ddot{l}_{12} \\ \ddot{\alpha}_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_l \\ f_\alpha/l_{12} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\cos(\gamma_1)}{m_{11}} & \frac{\sin(\gamma_1)}{I_z} d \\ \frac{\sin(\gamma_1)}{m_{11}l_{12}} & \frac{\cos(\gamma_1)}{I_z l_{12}} d \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{l\alpha}} \begin{bmatrix} F_2 \\ T_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Al definir  $z = [l_{12}, \alpha_{12}]^T$ , entonces:

$$\ddot{z} = \mathbf{f}_{l\alpha} + \mathbf{B}_{l\alpha} \mathbf{u} \quad (4.36)$$

Donde:

$$\begin{aligned} f_l &= \frac{1}{m_{11}} (f_x \cos(\alpha_0) + f_y \sin(\alpha_0)) + \frac{1}{I_z} f_\psi d \sin(\gamma_1) - \ddot{x}_1 \cos(\alpha_0) - \ddot{y}_1 \sin(\alpha_0) \\ &\quad - d \dot{\psi}_2^2 \cos(\gamma_1) + l_{12} \dot{\alpha}_0^2 \\ f_\alpha &= \frac{1}{m_{11}} (-f_x \sin(\alpha_0) + f_y \cos(\alpha_0)) + \frac{1}{I_z} f_\psi d \cos(\gamma_1) + \ddot{x}_1 \sin(\alpha_0) - \ddot{y}_1 \cos(\alpha_0) \\ &\quad + d \dot{\psi}_2^2 \sin(\gamma_1) - 2l_{12} \dot{\alpha}_0 - l_{12} \ddot{\psi}_1 \end{aligned}$$

- Diseño del controlador y estabilidad según Luapunov:

Como puede apreciarse se ha logrado expresar las variables del problema  $\{l_{12}, \alpha_{12}\}$  en función de la señal de actuación deseada  $\{F_2, T_2\}$ , de manera que ahora se puede diseñar un controlador no lineal basado en estas ecuaciones. Para esto se establece una dinámica del error de segundo orden:

$$\ddot{e}_i + 2\sqrt{k_i(e_i)}\dot{e}_i + k_i(e_i) = 0 \quad (4.37)$$

Donde  $e_1$  y  $e_2$  son los errores de salida definidos como:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{12} - l_{12}^d \\ \alpha_{12} - \alpha_{12}^d \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Y además  $k_i$  es definido como una función del error. Debe tener un valor pequeño para un error grande de manera que la rapidez de convergencia sea adecuada, y debe tener un valor lo suficientemente grande cuando el error se hace cero para un aceptable offset en presencia de perturbaciones externas. (Fahimi, Rineesh & Nataraj. 2008)

La siguiente función cumple el criterio expuesto:

$$k_{i(e_i)} = n\lambda_i + \frac{(1-n)\lambda_i^2}{\lambda_i + a_i e_i^2} \quad (4.39)$$

Donde:

$$\begin{aligned} e_i = 0 &\Rightarrow k_i = \lambda \\ e_i \rightarrow \infty &\Rightarrow k_i = n\lambda \quad (n \ll 1) \end{aligned}$$

El parámetro  $a_i$  se escoge positivo y mide cuán rápido se incrementa el controlador a medida que el error se aproxima a cero. Se propone la siguiente función de Lyapunov candidata:

$$V = \frac{1}{2} \left( \dot{e}_i^2 + n\lambda_i e_i^2 + \frac{\lambda_i^2(1-n)}{a_i} \log \left( \frac{\lambda_i + a_i e_i^2}{\lambda_i} \right) \right)$$

Se calcula la derivada de  $V$  con respecto al tiempo:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \left[ 2\dot{e}_i \ddot{e}_i + 2n\lambda_i e_i \dot{e}_i + 2\lambda_i^2(1-n) \left( \frac{e_i \dot{e}_i}{\lambda_i + a_i e_i^2} \right) \right]$$

De la ecuación dinámica del error (4.37) y la expresión (4.39) para  $k_i$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} \left[ 2\dot{e}_i \left( -2\sqrt{k_{i(e_i)}} \dot{e}_i - k_{i(e_i)} e_i \right) + 2n\lambda_i e_i \dot{e}_i + 2e_i \dot{e}_i (k_{i(e_i)} - n\lambda_i) \right] \\ \dot{V} &= \frac{1}{2} \left[ -4\sqrt{k_{i(e_i)}} \dot{e}_i^2 \right] = -2\sqrt{k_{i(e_i)}} \dot{e}_i^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

Como se puede notar, al ser el valor de  $k_i > 0$ , la expresión para  $\dot{V}$  siempre es no positiva. No es estrictamente negativa porque al tomar por ejemplo el punto  $(e_i, \dot{e}_i) = (0, 0.5)$ , la función  $\dot{V}$  es cero.

Esto quiere decir que la dinámica del error es estable con un punto de equilibrio  $(e_i, \dot{e}_i) = (0, 0)$ .

- Análisis de controlabilidad:

Teniendo en cuenta las expresiones para los errores definidos en (4.38), estas se reemplazan en el sistema de ecuaciones (4.36) y se resuelve para  $F_2$  y  $T_2$ :

$$\ddot{\mathbf{z}} = \ddot{\mathbf{e}} + \ddot{\mathbf{z}}^d = \mathbf{f}_{l\alpha} + \mathbf{B}_{l\alpha} \mathbf{u}$$

Multiplicando por  $\mathbf{B}_{l\alpha}^{-1}$  por la izquierda, se obtiene:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} F_2 \\ T_2 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{l\alpha}^{-1} \left( \underbrace{- \begin{bmatrix} 2\sqrt{k_1} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{k_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{e}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{z}_{12}^d \\ \ddot{z}_{12}^d \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{z}}^d} - \mathbf{f}_{l\alpha} \right) \quad (4.41)$$

Esta ley de control puede implementarse en Simulink, como se muestra en diagrama de bloques de la Figura 4.6.

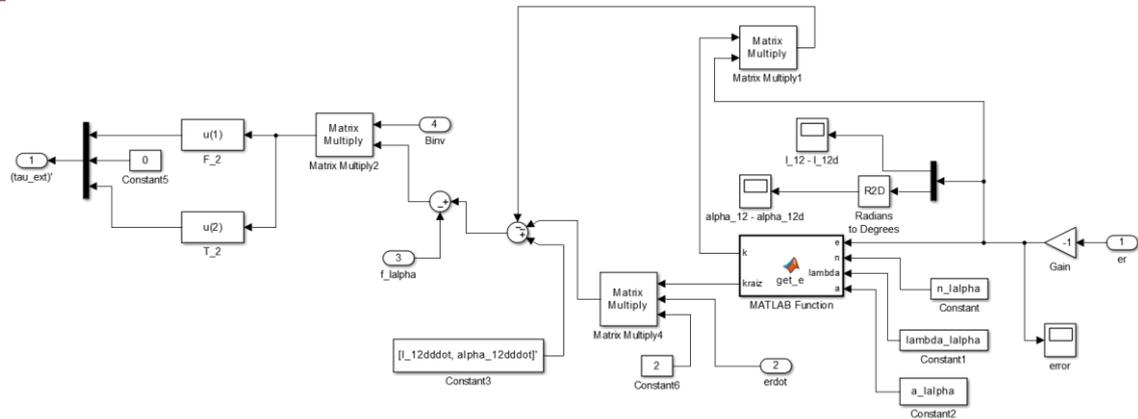


Figura 4.6. Esquema en Simulink del controlador ' $l - \alpha$ ' (fuente: propia)

Importante notar que la matriz  $B_{l\alpha}$  debe ser invertible, y para ello su determinante tendrá que ser diferente de cero:

$$\det(B_{l\alpha}) = \frac{d}{m_{11}l_z l_{12}} \neq 0 \quad (4.42)$$

**Este resultado permite afirmar que la distancia  $d$  entre el punto de control del vehículo 2 y su centro de masa no pueden coincidir, puesto que de ser así el esquema de formación no sería controlable.**

Finalmente, se puede concluir que las variables  $l_{12}$  y  $\alpha_{12}$  van a converger en el tiempo a sus respectivos valores deseados, porque las leyes de control propuestas garantizan tal condición. Sin embargo, el modelo de 3GDL del vehículo de superficie tiene sólo 2 entradas, y el sistema presenta 1GDL sobre el cual no se puede actuar. Esto quiere decir que la estabilidad de las salidas no necesariamente garantiza la estabilidad de la dinámica interna del sistema. Este análisis se investiga en la sección 4.3.3.

### 4.3.2. El controlador $l - l$

En la Figura 4.7 se muestra un sistema de 3 vehículos de superficie. El robot 3 es el seguidor, y los otros dos en la formación son los líderes 1 y 2. El vehículo seguidor se encuentra separado a una distancia  $l_{13}$  respecto al líder 1, y a una distancia  $l_{23}$  respecto al líder 2. Notar que estas distancias están asociadas con el punto de control del robot 3 ( $p_3$ ) y los centros de masa de los otros 2 robots.

De manera similar al diseño del controlador anterior, se puede plantear el problema como sigue. Durante la formación se desea que el robot 3 mantenga siempre las distancias relativas deseadas  $l_{13}^d$  y  $l_{23}^d$  respecto a los robots líderes. Con el objetivo de lograrlo, se debe diseñar una ley de control para la fuerza  $F_3$  y el torque  $T_3$  sobre el robot seguidor. En primer lugar, es necesario expresar las distancias de separación  $l_{13}$  y  $l_{23}$  en función de la fuerzas de control  $\{F_3, T_3\}$ .

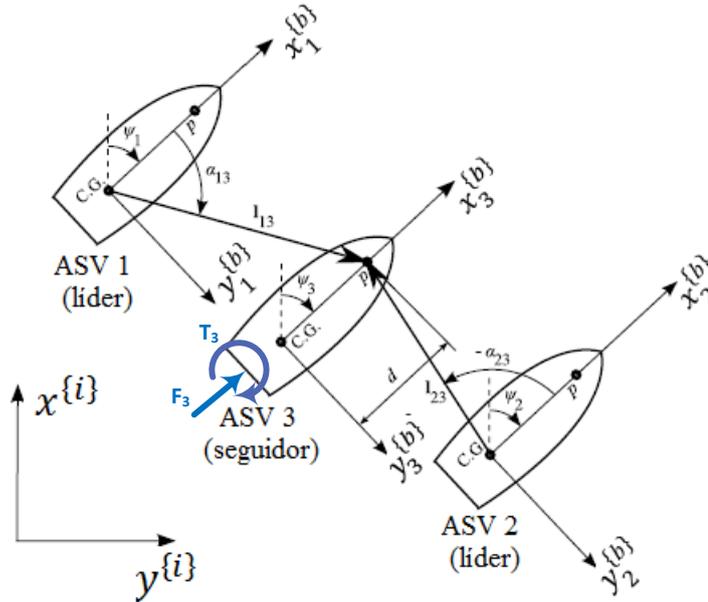


Figura 4.7. Esquema del controlador  $l - l$  (Fahimi. 2009)

Se repite el procedimiento realizado en el diseño del controlador anterior, pero esta vez sobre los vehículos de superficie 1 y 3, y luego entre 2 y 3. Las ecuaciones cinemáticas se resuelven para  $\{\ddot{l}_{13}, \ddot{\alpha}_{13}\}$  y  $\{\ddot{l}_{23}, \ddot{\alpha}_{23}\}$ , con lo que se obtiene:

$$\begin{cases} \ddot{l}_{13} = (\ddot{y}_3 - \ddot{y}_1) \sin(\alpha_1) + (\ddot{x}_3 - \ddot{x}_1) \cos(\alpha_1) + d\ddot{\psi}_3 \sin(\gamma_2) - d\dot{\psi}_3^2 \cos(\gamma_2) + l_{13}\dot{\alpha}_1^2 \\ \ddot{l}_{23} = (\ddot{y}_3 - \ddot{y}_2) \sin(\alpha_2) + (\ddot{x}_3 - \ddot{x}_2) \cos(\alpha_2) + d\ddot{\psi}_3 \sin(\gamma_3) - d\dot{\psi}_3^2 \cos(\gamma_3) + l_{23}\dot{\alpha}_2^2 \end{cases} \quad (4.43)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \psi_1 + \alpha_{13}, & \gamma_2 = \psi_1 + \alpha_{13} - \psi_3 \\ \alpha_2 = \psi_2 + \alpha_{23}, & \gamma_3 = \psi_2 + \alpha_{23} - \psi_3 \end{cases} \quad (4.44)$$

También es importante notar que a partir de la dinámica encontrada para el sistema de formación total, se requiere que el seguidor tenga conocimiento de las posiciones, velocidades y aceleraciones de ambos líderes. (Figura 4.7)

Las expresiones para las aceleraciones del vehículo seguidor en el sistema de coordenadas global  $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$  obtenidas en el sistema de ecuaciones (4.30) se reemplazan en (4.43), lo que resulta en:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{l}_{13} \\ \ddot{\alpha}_{13} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_1 \\ f_{\alpha 1}/l_{13} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/l_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\gamma_2) & \sin(\gamma_2) \\ -\sin(\gamma_2) & \cos(\gamma_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/m_{11} & 0 \\ 0 & 1/I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_3 \\ T_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_2 \\ f_{\alpha 2}/l_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/l_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\gamma_3) & \sin(\gamma_3) \\ -\sin(\gamma_3) & \cos(\gamma_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/m_{11} & 0 \\ 0 & 1/I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_3 \\ T_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Con respecto a las distancias:

$$\begin{bmatrix} \ddot{l}_{13} \\ \ddot{l}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\gamma_2) & \sin(\gamma_2) \\ \cos(\gamma_3) & \sin(\gamma_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/m_{11} & 0 \\ 0 & 1/I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_3 \\ T_3 \end{bmatrix}$$

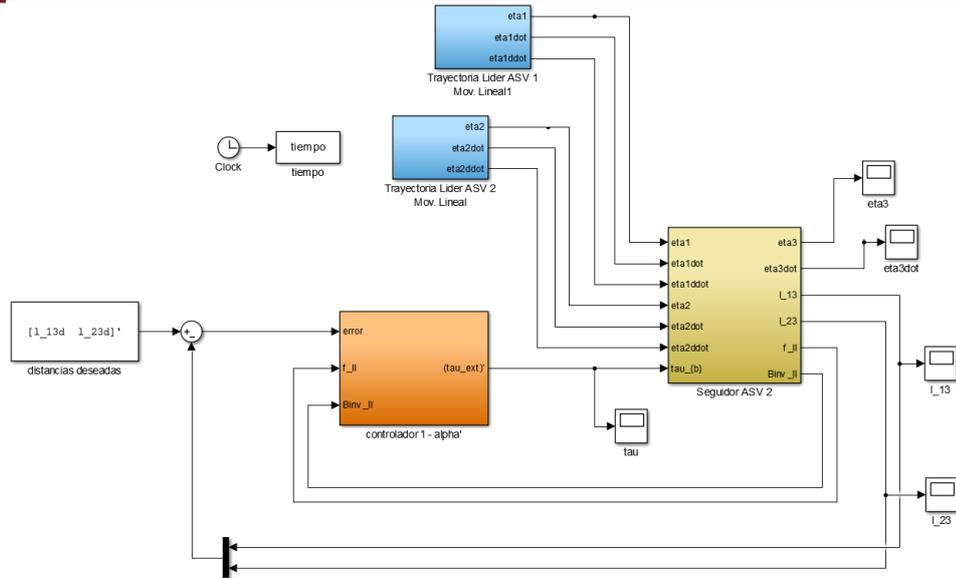


Figura 4.8. Diagrama de bloques del sistema de formación entre dos robots líderes y 1 seguidor. (Aplicación del controlador 'l - l') Fuente: propia.

Se define:  $z = [l_{13}, l_{23}]^T$ , tal que:

$$\ddot{z} = f_u + B_{uu}$$

Donde:

$$\begin{bmatrix} \ddot{l}_{13} \\ \ddot{l}_{23} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}}_{f_u} + \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\gamma_2) & d \sin(\gamma_2) \\ m_{11} & I_z \\ \cos(\gamma_3) & d \sin(\gamma_3) \\ m_{11} & I_z \end{bmatrix}}_{B_{uu}} \begin{bmatrix} F_3 \\ T_3 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Y además:

$$f_1 = \frac{1}{m_{11}} (f_x \cos(\alpha_1) + f_y \sin(\alpha_1)) + \frac{1}{I_z} f_\psi d \sin(\gamma_2) - \ddot{x}_1 \cos(\alpha_1) - \ddot{y}_1 \sin(\alpha_1) - d \dot{\psi}_3^2 \cos(\gamma_2) + l_{13} \dot{\alpha}_1^2$$

$$f_2 = \frac{1}{m_{11}} (f_x \cos(\alpha_2) + f_y \sin(\alpha_2)) + \frac{1}{I_z} f_\psi d \sin(\gamma_3) - \ddot{x}_2 \cos(\alpha_2) - \ddot{y}_2 \sin(\alpha_2) - d \dot{\psi}_3^2 \cos(\gamma_3) + l_{23} \dot{\alpha}_2^2$$

- Estabilidad y controlabilidad:

En este caso, también se ha logrado expresar las variables del problema  $\{l_{13}, l_{23}\}$  en función de la señal de actuación deseada  $\{F_3, T_3\}$ . Para diseñar el controlador, se establece la dinámica del error de segundo orden siguiente:

$$\ddot{e}_i + 2\sqrt{k_{i(e_i)}}\dot{e}_i + k_{i(e_i)}e_i = 0 \quad (4.46)$$

Se consideran los siguientes errores de salida:

$$e_1 = l_{13} - l_{13}^d, \quad e_2 = l_{23} - l_{23}^d \quad (4.47)$$

Donde es importante resaltar que para garantizar la estabilidad de la dinámica del error con un punto de equilibrio en  $(e_i, \dot{e}_i) = (0,0)$ , se considera la función de Lyapunov candidata semejante a la propuesta en la sección anterior. Para lograr el control, sin embargo, se debe manipular los parámetros  $\{k_i, a_i, \lambda_i\}$

Ahora, teniendo en cuenta las expresiones para los errores definidos en (4.47), éstas se reemplazan en el sistema de ecuaciones (4.38) y se resuelve para  $F_3$  y  $T_3$ :

$$\ddot{\mathbf{z}} = \ddot{\mathbf{e}} + \ddot{\mathbf{z}}^d = \mathbf{f}_{11} + \mathbf{B}_{11}\mathbf{u}$$

Multiplicando por  $\mathbf{B}_{11}^{-1}$  por la izquierda, se obtiene la siguiente Ley de Control:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} F_3 \\ T_3 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{11}^{-1} \left( - \underbrace{\begin{bmatrix} 2\sqrt{k_1} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{k_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{e}}} - \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{l}_{13}^d \\ \ddot{l}_{23}^d \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{z}}^d} - \mathbf{f}_{11} \right) \quad (4.48)$$

En este caso, para que la matriz  $\mathbf{B}_{11}$  sea invertible no sólo es necesario que la distancia  $d$  sea diferente de cero, sino que el valor de  $\sin(\gamma_3 - \gamma_2) = \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$  tampoco sea cero. Esto es equivalente a la condición en el que los orígenes de los sistemas de coordenadas de los robots 1 y 2 y el punto de control del robot seguidor 3 son colineales.

$$\det(\mathbf{B}_{11}) = \frac{d \sin(\gamma_3 - \gamma_2)}{m_{11} l_z l_{12}} \neq 0 \quad (4.49)$$

Por tanto, el sistema es controlable mientras se cumpla esta última condición. Además, se garantiza la convergencia de las variables  $l_{13}$  y  $l_{23}$  a sus respectivos valores deseados.

### 4.3.3. Dinámica cero del vehículo de superficie

Los controladores no lineales propuestos garantizan que se logre el patrón de formación deseado. Esto debido a la estabilidad de Lyapunov analizada en las secciones anteriores. En otras palabras, el punto de control P del seguidor permanece en una posición fija con respecto al líder que sigue durante el movimiento de la formación. Sin embargo, el robot marítimo puede oscilar alrededor de este punto de control, y así el sistema se vuelve inestable. (ver Figura 4.9)

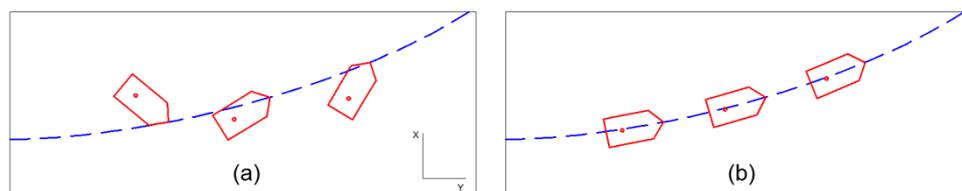


Figura 4.9. Análisis de la dinámica cero. (a) Punto de control oscilante respecto a la trayectoria. (b) Seguimiento deseado.

Ya que las variables generalizadas  $[x, y, \psi]^T$  no son dependientes, se puede estudiar la estabilidad mediante cualquiera de ellas. Sin embargo, se escoge para el análisis la variable  $\delta$ , definido como el ángulo entre la orientación del robot y la velocidad del punto de control  $P$ . (ver Figura 4.10)

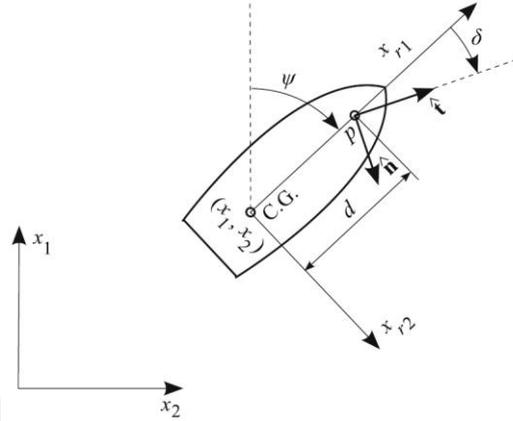


Figura 4.10. Geometría para el análisis de la dinámica cero (Fahimi. 2009).

La velocidad y aceleración del punto de control  $P$  pueden ser escritas según:

$$\mathbf{v}_P = u_P \hat{\mathbf{t}}, \quad \mathbf{a}_P = \dot{u}_P \hat{\mathbf{t}} + \frac{u_P^2}{\rho} \hat{\mathbf{n}}$$

Debido a la subactuación del robot marítimo, la segunda ecuación de movimiento del sistema obtenido en (2.26) no es afectada por ningún torque de control, de manera que se escoge esta ecuación para el análisis de la Dinámica cero en función de la variable  $\delta$ . (Fahimi, Rineesh & Nataraj. 2008) El resultado es:

$$\begin{aligned} \ddot{\delta} + \left( \frac{d_{22} - m_{11}u_P \cos(\delta)}{m_{22}d} \right) \dot{\delta} + \left( \frac{m_{22}\dot{u}_P + d_{22}u_P}{m_{22}d} \right) \sin(\delta) - \left( \frac{m_{22} \frac{u_P^2}{\rho} + m_{11}u_P r_P}{m_{22}d} \right) \cos(\delta) \\ = - \left( \frac{d_{22}r_P + m_{22}\dot{r}_P}{m_{22}} \right) \end{aligned} \quad (4.50)$$

Donde  $r_P$  es la rapidez de cambio de la dirección de la velocidad del punto de control  $P$ . Luego de linealizar alrededor de  $\delta = 0$ , se tiene:

$$\ddot{\delta} + \left( \frac{d_{22}}{m_{22}} \right) \dot{\delta} + \left( \frac{m_{22}\dot{u}_P + d_{22}u_P}{m_{22}d} \right) \delta = - \left( \frac{d_{22}r_P + m_{22}\dot{r}_P}{m_{22}} \right) \quad (4.51)$$

La estabilidad de la trayectoria de la variable  $\delta$  determina la estabilidad de la dinámica cero del robot (Fahimi, Rineesh & Nataraj. 2008).

En el caso en que el líder se desplace a velocidad constante, se tiene:

$$u_P = \bar{u}_P, \quad \dot{u}_P = 0 \quad (4.52)$$

La ecuación (4.51) se resume a:

$$\ddot{\delta} + c\dot{\delta} + \left(\frac{c}{d}\bar{u}_p\right)\delta = -(cr_p + \dot{r}_p) \quad (4.53)$$

Donde  $c = d_{22}/m_{22}$ , y cuyas raíces de su ecuación característica determinan la estabilidad del sistema. Estas raíces presentan la siguiente forma:

$$r_{1,2} = -\left(\frac{c}{2}\right) \pm \sqrt{\Delta}, \quad \Delta = \left(\frac{c}{2}\right)^2 - \frac{c}{d}\bar{u}_p \quad (4.54)$$

La estabilidad se garantiza si se cumple una de las siguientes 2 condiciones: Cuales quiera de las raíces deben ser reales negativos, o en todo caso, complejos conjugados con parte real negativa.

Analizando ambos casos se concluye que la dinámica cero del ASV es estable para un movimiento rectilíneo ( $\bar{u}_p > 0$ ). La dinámica se torna amortiguada cuando  $0 < \bar{u}_p < \frac{cd}{2}$ , críticamente amortiguada si  $\bar{u}_p$  coincide con el valor de  $\frac{cd}{2}$ , y subamortiguada cuando  $\bar{u}_p > \frac{cd}{2}$ .

De este modo es importante resaltar, a partir de estas condiciones, que la distancia  $d$  desde el punto de control del robot hacia su centro de masa, determina el tipo de respuesta de la dinámica cero. Un mayor valor del parámetro  $d$ , permite ampliar el rango de velocidades del robot.

#### 4.3.4. Diseño del controlador de formación no lineal

Teniendo en cuenta el diseño de los 2 tipos de controladores explicados anteriormente, se puede realizar el diseño del sistema de control de formación para un número de agentes mucho mayor del que involucre sólo un líder y su correspondiente seguidor.

En este caso, es necesario establecer una estructura de formación, en donde el líder, como es sabido, sigue una trayectoria predefinida, el robot 2 sigue al robot 1 mediante un controlador ' $l - \alpha$ ', y seguidamente, un tercer robot sigue a los dos primeros agentes mediante un controlador ' $l - l$ '. A partir de aquí, se redefine cuáles de los seguidores serán considerados como nuevos líderes. Por ejemplo, para un patrón de formación deseado entre 6 robots marítimos, se tiene:

Tabla 4.1.

Robot	Esquema	Sigue a:
1	--	Una trayectoria establecida
2	$l - \alpha$	Robot 1
3	$l - l$	Robots 1 y 2
4	$l - \alpha$	Robot 2
5	$l - l$	Robots 3 y 4
6	$l - l$	Robots 3 y 5

## CAPÍTULO V: DISTRIBUCIÓN DE FUERZAS DE CONTROL

Los algoritmos presentados en el capítulo anterior muestran el procedimiento para obtener las señales de control requeridas. Sin embargo, como también ocurre en varios sistemas, las fuerzas necesarias para cumplir con el objetivo de control no siempre son las fuerzas disponibles por los actuadores. Esto ocurre por las características que pueden presentar los elementos finales de control.

Los actuadores con los que cuenta el robot marítimo en este caso, son dos motores sin escobillas, los cuales, como se detalló en el Capítulo III, presentan una zona muerta y además se saturan a cierto valor de PPM ingresado (ver Tabla 3.1). Esto implica que es necesario diseñar un modelo matemático que relacione fuerzas entrantes requeridas por el sistema y fuerzas permitidas por los actuadores. Este procedimiento en la literatura actual es conocido como “*Control Allocation*”, cuya traducción al español es considerada en el presente capítulo de Tesis como la Distribución o Asignación de las fuerzas de control.

Con el objetivo de obtener un modelo general para esta distribución de fuerzas, es necesario en primer lugar identificar las fuerzas máximas y mínimas de empuje que se obtienen con los motores. En segundo lugar, diseñar un modelo matemático de los motores (incluido el ESC) y un modelo para las hélices. Finalmente, proponer un modelo de compensación para la zona muerta de los motores. Estos puntos son tratados a continuación:

### 5.1. Obtención de las fuerzas de saturación en los actuadores

Cuando el motor alcanza su mayor velocidad, la hélice genera una fuerza de empuje sobre el robot marítimo, la cual es máxima. Este valor se puede calcular según la siguiente ecuación: (Sørensen & Smogeli. 2009)

$$T = \text{sgn}(n)K_t\rho D^4 n^2 \quad (5.1)$$

Donde:

$K_t$ : coeficiente de empuje, estrictamente positivo.

$n$ : velocidad angular del eje (rev/s.)

$D$ : diámetro de la hélice

$\rho$ : densidad del agua

Esta fuerza fue considerada igual a 10N, como se resalta en la ecuación 3.3. Como el ASV posee 2 actuadores, es adecuado considerar que cada hélice genera la mitad de la fuerza total. Por tanto, la fuerza de saturación en cada uno de los actuadores, cuando el barco se desplaza hacia adelante, se asume igual a 5N.

Teniendo en cuenta este valor de fuerza, y conocidos los demás parámetros en la ecuación 5.1, se calcula el coeficiente de empuje sobre cada hélice:

$$K_{T_{izq}} = \frac{T_{m\acute{a}x}}{\rho D_{izq}^4 n_{izq}^2} = \frac{5N}{\left(1024 \frac{Kg}{m^3}\right) (3.22 \times 2.54m)^4 \left(\frac{8250}{60} rev/s.\right)} = 0.0058 \quad (5.2)$$

De la misma forma, y a partir de la Tabla 3.1, se tiene el coeficiente de empuje en la hélice derecha:

$$K_{T_{izq}} = \frac{T_{m\acute{a}x}}{\rho D_{izq}^4 n_{izq}^2} = \frac{5N.}{\left(1024 \frac{Kg}{m^3}\right) (3.22 \times 2.54m)^4 \left(\frac{8035}{60} rev/s.\right)} = 0.0061 \quad (5.3)$$

Sin embargo, como se observa en la curva experimental de los motores (Figura 3.6), hay una ligera variación entre las velocidades obtenidas por las hélices para una señal de entrada fija de PPM. Por tanto, como también se explicó en el Capítulo III, se puede considerar que la fuerza de empuje de retroceso es ligeramente diferente entre la generada por la hélice izquierda y la derecha.

Estas fuerzas de empuje, cuando el barco retrocede, corresponden a los valores de saturación de los motores cuando giran en sentido inverso ( $F_{sat}^-$ ), y se calculan usando el siguiente criterio:

- Para la hélice izquierda:

La ecuación 5.1 permite plantear una relación directa entre la fuerza de empuje  $T$  y la velocidad angular de la hélice  $n_{m\acute{a}x}$ , de manera que se plantea lo siguiente:

$$\frac{T_{m\acute{a}x}}{(n_{m\acute{a}x}^+)^2} = \frac{|F_{sat}^-|}{|n_{m\acute{a}x}^-|^2}$$

Reemplazando valores:

$$\frac{5 N.}{\left(\frac{8250}{60} rev/s.\right)^2} = \frac{|F_{sat}^-|}{\left|\frac{3100}{60} rev/s.\right|^2} \Rightarrow F_{sat}^- = -0.706 N. \quad (5.4)$$

- Para la hélice derecha, y usando la Tabla 3.1:

$$\frac{5 N.}{\left(\frac{8035}{60} rev/s.\right)^2} = \frac{F_{sat}^-}{\left|\frac{3070}{60} rev/s.\right|^2} \Rightarrow F_{sat}^- = -0.7299 N. \quad (5.5)$$

## 5.2. Modelo de las hélices

Este modelo matemático relaciona la velocidad del eje del motor con la velocidad de salida de las hélices. Se observó durante las pruebas experimentales que ante un cambio en la señal de PPM hacia el motor, la velocidad angular  $w$  respondió al cambio rápidamente; y por tanto, es adecuado considerar que la dinámica de la hélice es mucho más rápida que la dinámica propia del ASV.

De esta manera, el modelo más adecuado para representar este comportamiento es el de un sistema de 1er orden, con una constante de tiempo pequeña ( $\tau = 0.05$ ), y cuya función de transferencia es:

$$G_{h\acute{e}lice(s)} = \frac{w_{out(s)}}{w_{in(s)}} = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (5.6)$$

La constante de tiempo propuesta hace que la velocidad de salida  $w_{out}$  alcance la velocidad de referencia  $w_{in}$  en un tiempo aproximado de 0.2 seg.

### 5.3. Modelo matemático del motor + ESC

El modelo para el motor, incluido el ESC, se obtiene mediante una función matemática que se ajusta al comportamiento de la Figura 3.6, donde se relaciona el valor de la señal PPM que ingresa al motor y la velocidad angular ( $w$ ) que alcanza la hélice.

En el caso que la señal entrante a los motores sea de valor positivo, las curvas más próximas que se ajustan a los datos experimentales son:

$$\left. \begin{aligned} w_{izq. aproxim.}^+ &= 0.1677(PPM^3) - 19.597(PPM^2) + 808.5(PPM) - 4022.9 \\ w_{der. aproxim.}^+ &= 0.14168(PPM^3) - 17.243(PPM^2) + 754.51(PPM) - 4385.9 \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Y para el caso de la señal PPM de valor negativo, se obtuvo:

$$\left. \begin{aligned} w_{izq. aproxim.}^- &= -0.37587(PPM^3) - 33.962(PPM^2) - 784.93(PPM) - 5569.8 \\ w_{der. aproxim.}^- &= -0.49037(PPM^3) - 42.7(PPM^2) - 1006.6(PPM) - 7444.1 \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

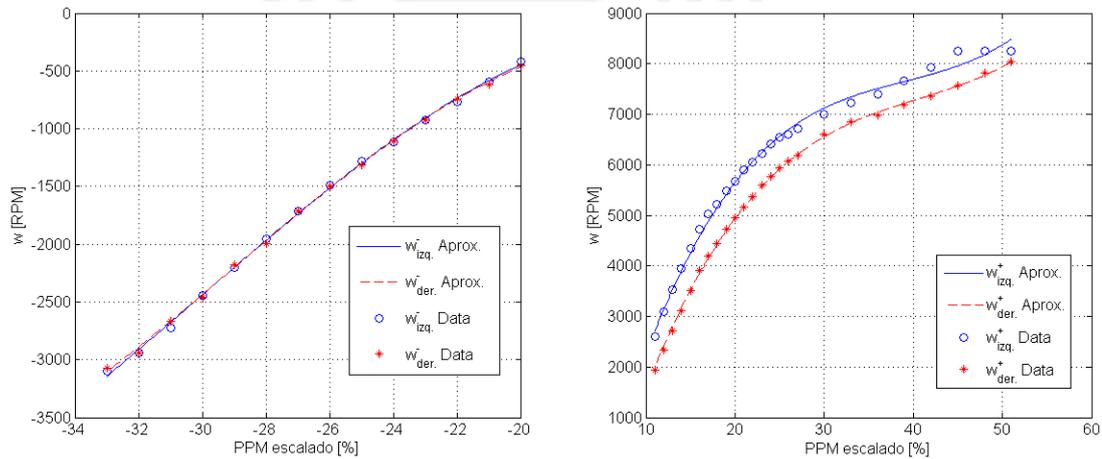


Figura 5.1. Aproximación de datos experimentales mediante funciones polinomiales.

Es importante resaltar que para los casos en los cuales la señal PPM se hizo variar entre -20 y 9, se obtuvo respuesta por parte de solo un motor. Por este motivo, y tal como se muestra en la Figura 5.1, se consideró que la zona muerta para ambos actuadores se encuentra en el rango de -20 y 11.

### 5.4. Compensación mediante Zona muerta inversa

Con el objetivo de disminuir el efecto de la zona muerta, el cual es parte de las características del modelo correspondiente a los actuadores, es necesario proponer una técnica de compensación. El método usado en el presente trabajo consiste en añadir una función inversa de zona muerta, lo cual es posible encontrando las correspondientes funciones inversas de las ecuaciones (5.7) y (5.8) halladas en la sección anterior. (Andrighetto et al. 2008)

A pesar de que la compensación perfecta puede resultar muy difícil de obtener, es posible reducir los efectos negativos de la zona muerta, si tal compensación es adecuada. (Valdiero. 2005). Este procedimiento requiere que en el rango cercano a una velocidad angular nula ( $w = 0$ ), la relación entre las variables  $PPM$  y velocidad sea modificada por una curva suave, tal como se observa en la Figura 5.2.

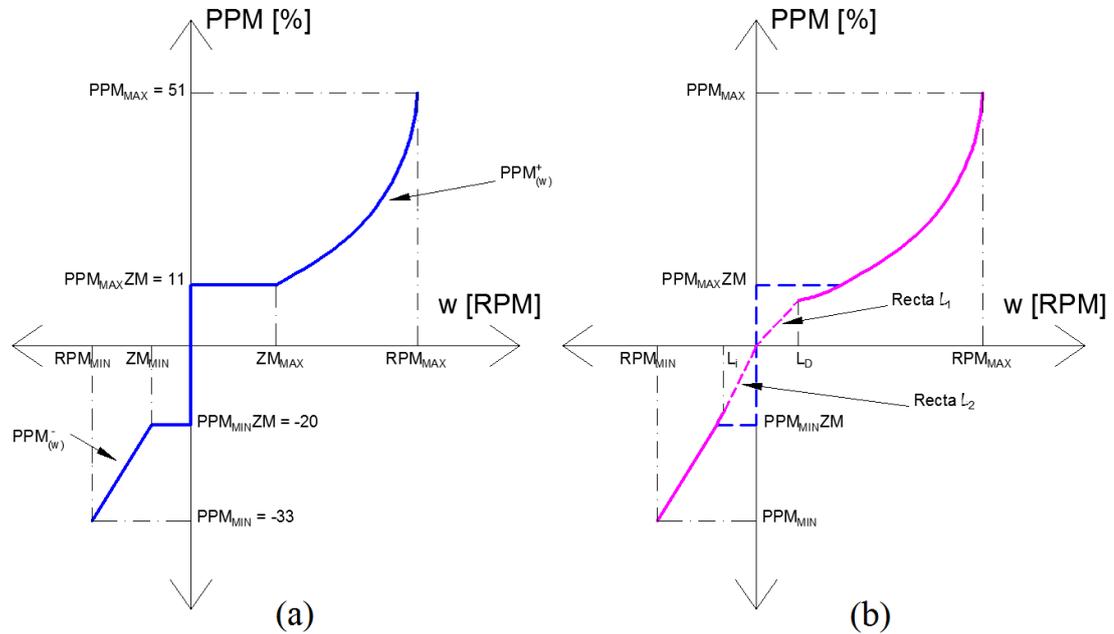


Figura 5.2. (a) Función inversa de zona muerta. (b) Diseño de compensación. (Fuente: propia)

En un caso ideal es correcto afirmar que la velocidad angular  $w$  es nula sólo en el caso que no se ingrese un valor de PPM. Por dicha razón, la curva suave usada en la compensación debe cruzar el punto  $(0,0)$ . En ese sentido, se propuso como función de compensación dos rectas con un punto común en el origen. La discontinuidad mostrada en línea azul punteada es reemplazada por líneas rectas y extrapolando las funciones inversas de las ecuaciones (5.7) y (5.8). (ver Figura 5.2 (b))

Las funciones inversas  $w_1$  y  $w_2$  en cada hélice con respecto a la zona de velocidad angular positiva, son:

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \sqrt[3]{\frac{PPM - PPM_{MAX,ZM}}{PPM_{MAX} - PPM_{MAX,ZM}}} \cdot RPM_{MAX} \\ w_2 &= \sqrt[3]{\frac{PPM - PPM_{MIN,ZM}}{PPM_{MIN} - PPM_{MIN,ZM}}} \cdot RPM_{MIN} \end{aligned} \right\}$$

Y en el caso de velocidades negativas:

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= -\sqrt[3]{\frac{PPM - PPM_{MAX,ZM}}{PPM_{MAX} - PPM_{MAX,ZM}}} \cdot RPM_{MAX} \\ w_2 &= -\sqrt[3]{\frac{PPM - PPM_{MIN,ZM}}{PPM_{MIN} - PPM_{MIN,ZM}}} \cdot RPM_{MIN} \end{aligned} \right\}$$

Las líneas rectas  $L_1$  y  $L_2$  se obtienen sabiendo que son conocidos dos puntos en cada caso: el punto (0,0) y el punto que se obtiene al extrapolar las ecuaciones (5.9) ó (5.10)

En el caso de la hélice izquierda, y teniendo en cuenta a partir de la Figura 5.2 que  $L_{d_{izq.}} = 500 \text{ RPM}$  y  $L_{i_{izq.}} = -225 \text{ RPM}$ , se tiene:

$$\left. \begin{aligned} L_{1_{izq.}} &: \frac{PPM_{izq.aprox.}^+ |_{(w=L_{D_{izq.}})}}{L_{D_{izq.}}} w = 0.0026w \\ L_{2_{izq.}} &: \frac{PPM_{izq.aprox.}^- |_{(w=L_{I_{izq.}})}}{L_{I_{izq.}}} w = 0.082w \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

Con respecto a la hélice derecha, donde  $l_{d_{izq.}} = 315 \text{ RPM}$  y  $l_{i_{izq.}} = -180 \text{ RPM}$ :

$$\left. \begin{aligned} L_{1_{der.}} &: \frac{PPM_{der.aprox.}^+ |_{(w=L_{D_{der.}})}}{L_{D_{der.}}} w = 0.0088w \\ L_{2_{der.}} &: \frac{PPM_{der.aprox.}^- |_{(w=L_{I_{der.}})}}{L_{I_{der.}}} w = 0.0993w \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

### 5.5. Estructura general de distribución de fuerzas

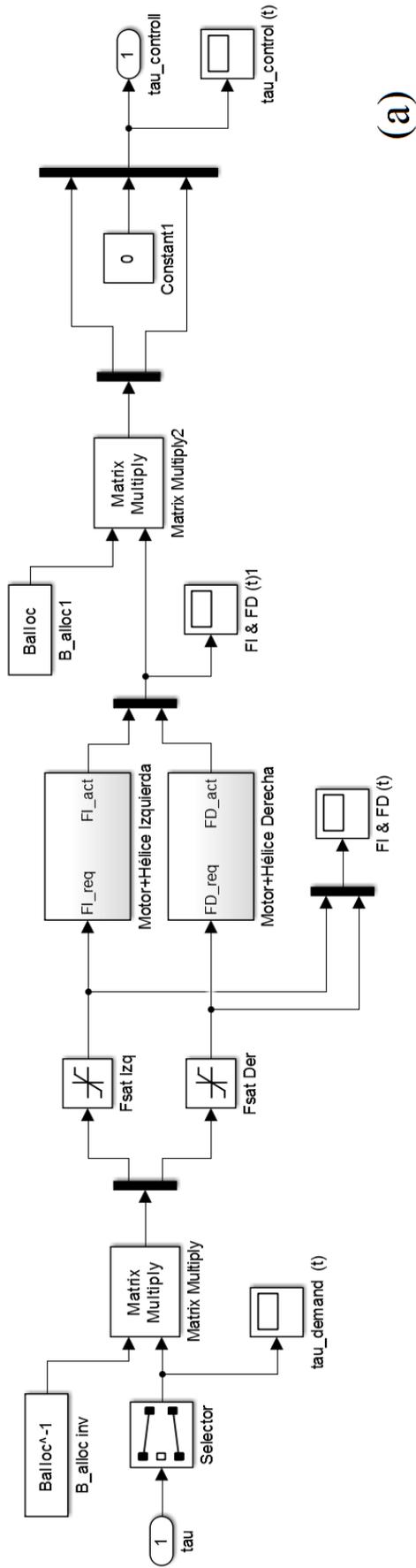
Dado que el vehículo de superficie posee 3GDL, las fuerzas generalizadas que actúan sobre él está constituida por una fuerza  $F_1$  en la dirección  $x^{\{b\}}$ , una segunda fuerza  $F_2$  en la dirección transversal  $y^{\{b\}}$ , y un torque  $T_3$  en su centro de gravedad.

La fuerza  $F_2$  es nula, como se explicó en el capítulo IV, y por tanto las fuerzas sobre el robot son  $F_1$  y  $T_3$ . Sin embargo, debido a los actuadores con los que se cuenta, sólo se permite aplicar fuerzas longitudinales sobre el ASV, las cuales corresponderían a las fuerzas de empuje que genera cada hélice al girar a cierta velocidad angular ( $F_{hél.izq.}, F_{hél.der.}$ ). Esta distribución de fuerzas de control se obtiene mediante la siguiente ecuación:

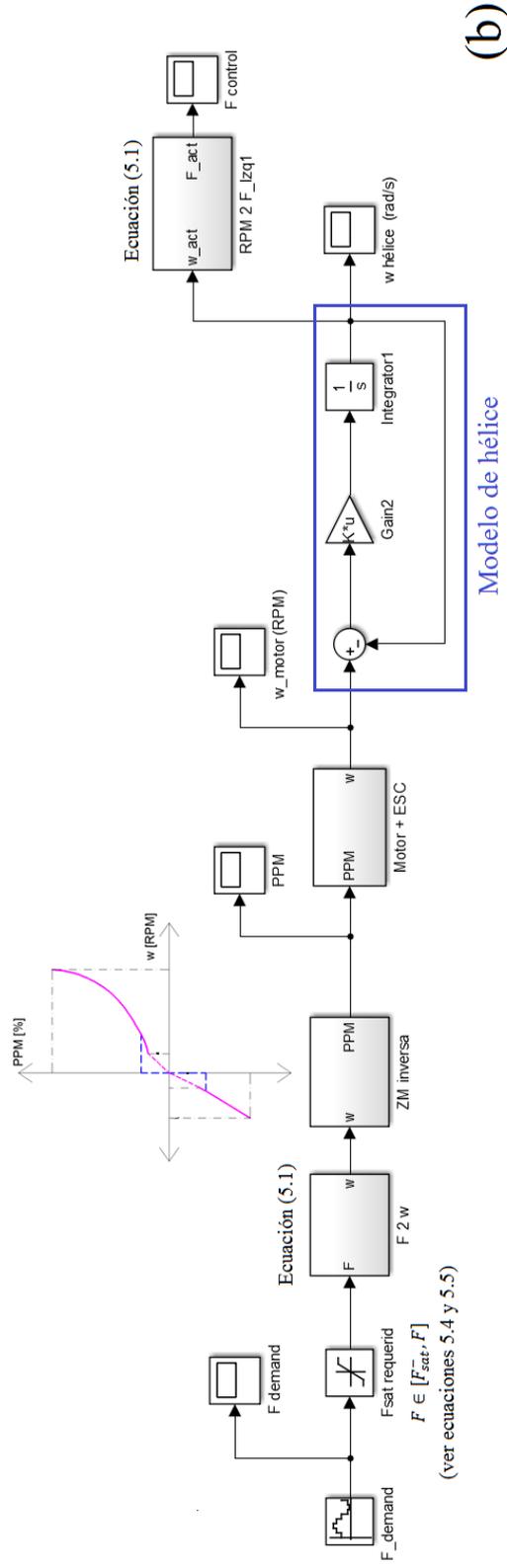
$$\begin{bmatrix} F_1 \\ T_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{d_{helic}}{2} & -\frac{d_{helic}}{2} \end{bmatrix}}_{B_{alloc}} \begin{bmatrix} F_{hél.izq.} \\ F_{hél.der.} \end{bmatrix}$$

Donde  $B_{alloc}$  se define como la matriz de distribución de fuerzas, y  $d_{helic}$  es un parámetro conocido del sistema. (ver Tabla 3.3)

De esta forma, el modelo buscado puede resumirse en el diagrama elaborado en Simulink presentado en la Figura 5.3 (a), el cual a su vez muestra los subsistemas que constituyen este modelo y que se explicaron detalladamente en las secciones anteriores (Figura 5.3 (b))



(a)



(b)

Figura 5.3. (a) Modelo de distribución de fuerzas de control. (b) Modelo del motor + hélice considerando zona muerta inversa.

La validación del modelo del motor + hélice, incluyendo la compensación con el diseño de una zona muerta inversa, se hizo a través de una variación de tipo senoidal en la fuerza requerida por el sistema. Las simulaciones desarrolladas arrojaron los siguientes resultados satisfactorios:

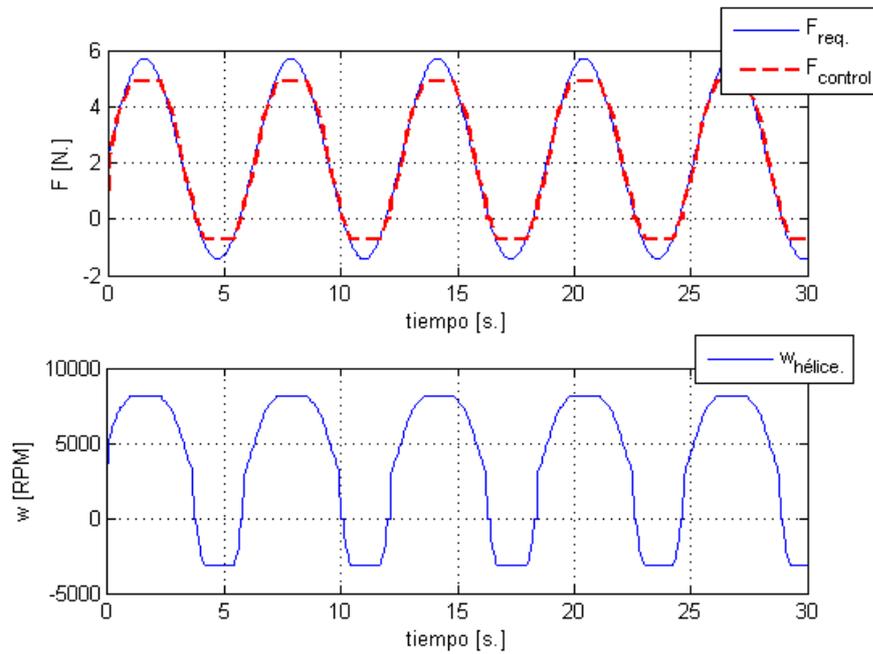


Figura 5.4. Fuerza demandada  $F_{req}$  y fuerza permitida  $F_{control}$  en la hélice izquierda (arriba). Velocidad angular de salida en la hélice (abajo)

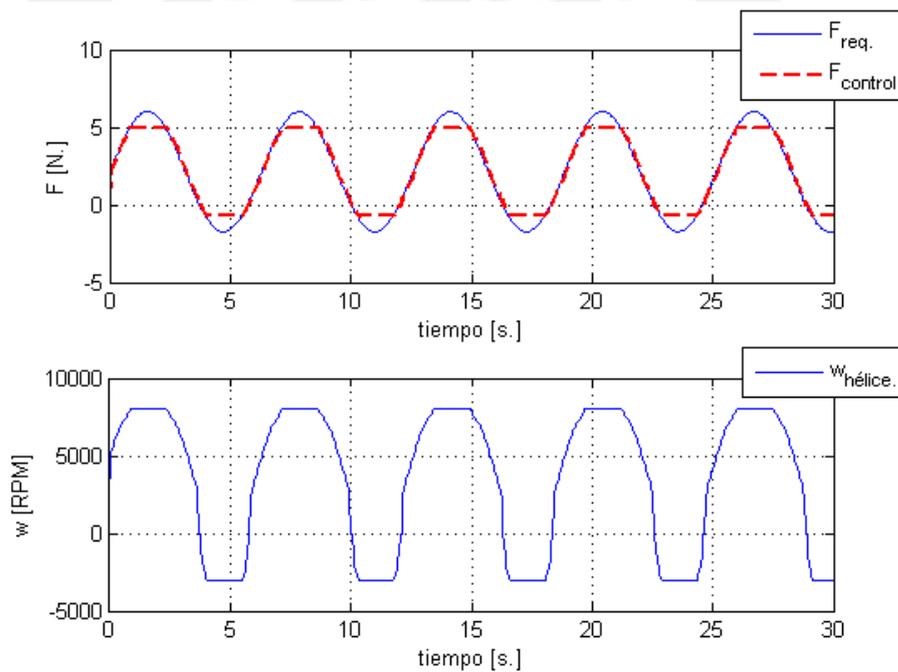


Figura 5.5. Fuerza demandada  $F_{req}$  y fuerza permitida  $F_{control}$  en la hélice derecha (arriba). Velocidad angular de salida en la hélice (abajo)

Es importante notar de las figuras anteriores que la fuerza demandada  $F_{req}$  no está saturada. Esto se hizo con el propósito de observar con mayor detalle que en el rango de las fuerzas permitidas por el actuador ( $[-0.706N, 5N.]$  y  $[-0.7299N, 5N.]$ ), hay una aproximación bastante adecuada entre las señales de entrada y salida.

Por otro lado, con respecto a las velocidades angulares, se observó que efectivamente se encuentran dentro del rango esperado. A pesar que el sistema presenta zona muerta, los efectos negativos que trae consigo esta no linealidad fueron reducidos en buena forma.

En consecuencia, es adecuado considerar el modelo de la Figura 5.3 como el modelo de Distribución de Fuerzas de control, y su desempeño se evalúa en el capítulo siguiente.



## CAPÍTULO VI: RESULTADOS DE SIMULACIÓN

En los siguientes casos, teniendo en cuenta los parámetros del ASV mostrados en la Tabla 3.1, las matrices de inercia, coriolis y de amortiguamiento son:

$$M = \begin{bmatrix} 25.3 & 0 & 0 \\ 0 & 32.2 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5318 \end{bmatrix}, C_{(v)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -32.2v \\ 0 & 0 & 25.3u \\ 32.2v & -25.3u & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 3.5 & 0 & 0 \\ 0 & 8.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0.633 \end{bmatrix}$$

La trayectoria deseada para el líder está determinada por un conjunto de puntos, (a menos que se indique lo contrario), los cuales se consideran en este caso:

$$X_k = [0 \ 0 \ 32 \ 59]$$

$$Y_k = [0 \ 18 \ 42 \ 48]$$

Durante el recorrido, cuando el ángulo de la trayectoria a seguir cambia de valor, el algoritmo de seguimiento, dado por la ecuación (4.7), necesita tener una lógica de cambio. En otras palabras, se necesita determinar una forma de identificar que el robot marítimo está por alcanzar un cambio de rumbo en la trayectoria. Se define el parámetro de cambio  $L$ , el cual debe cumplir la siguiente condición:

$$s_k - s < L$$

Donde:

$s_k$ : distancia longitudinal entre la posición del robot y el punto  $p_K = [X_K, Y_K]$  más próximo de la trayectoria predefinida.

$s$ : error longitudinal definido en la sección 4.2.3.

El valor propuesto para  $L$ , por tanto, es igual a 0.35m.

La distancia  $\Delta$ , definida en la ecuación (4.7), se considera igual a 3.6m.

A partir del análisis realizado en el Capítulo anterior, los valores permitidos de fuerza y torque máximos son:

$$F_{izq.m\acute{a}x} = F_{der.m\acute{a}x} = 5 \text{ N.}$$

$$F_{izq.m\acute{i}n} = -0.706 \text{ N}, \quad F_{der.m\acute{i}n} = -0.7299 \text{ N.}$$

### 6.1. Caso de estudio: Dos robots en formación sin perturbaciones

Este análisis constituye el caso más simple de formación, en donde se tiene un líder y un único seguidor, cuyas condiciones iniciales son:

$$\eta_{1o} = [-3, -12.9, 0]^T, \quad v_{1o} = [0, 0, 0]^T$$

$$\eta_{2o} = [-7.0118, -16.7504, 0.6981]^T, \quad v_{2o} = [0, 0, 0]^T$$

A partir de la Figura 4.5, es posible deducir que la distancia de separación  $l_{12_o}$  y el ángulo  $\alpha_{12_o}$  entre los robots 1 y 2, es igual a:

$$l_{12_o} = 4.2544, \quad \alpha_{12_o} = 225^\circ$$

Se considera también en este caso, que los robots se encuentran en reposo al inicio del análisis, con lo que:

$$v_{1o} = [0,0,0]^T, v_{2o} = [0,0,0]^T$$

La velocidad deseada para el líder  $u_d$  se propone igual a 0.5 m/s.

### 6.1.1. Resultados con un Control No Lineal

Parámetros del controlador:

**Para el líder (1):** El seguimiento de trayectoria se hace mediante el enfoque de Lagrange e imponiendo 5 restricciones sobre su movimiento, de las cuales dos son cinemáticas y tres son holonómicas con los pesos siguientes:

$$p_G = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}, \quad p_\Phi = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.024 \end{bmatrix}$$

**Para el seguidor (2):** El robot 2 sigue al líder 1 mediante un controlador  $l - \alpha$ , el cual tiene los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} n_{l\alpha} &= 0.01 \\ \lambda_{l\alpha} &= [18.5, 4]^T \\ a_{l\alpha} &= [5000, 5000]^T \end{aligned}$$

Siendo los valores deseados los siguientes:

$$l_{12}^d = 2.2, \quad \alpha_{12}^d = \frac{3\pi}{2}$$

El patrón de formación se logra satisfactoriamente, como se aprecia en la Figura 5.1. A pesar de haber un cambio en la dirección de la trayectoria, no ocurren problemas, lo que garantiza que el control es adecuado. En el primer cambio de dirección ( $t \cong 78.3$  s.), el seguidor se nota más afectado, puesto que como se observa, para lograr mantener el patrón de formación, este ASV se acerca al líder primero para después seguir la trayectoria esperada.

El segundo cambio de dirección en la ruta tiene un menor efecto negativo en ambos ASVs, los cuales logran mantener la formación a lo largo de la trayectoria definida para el líder y durante todo el tiempo de simulación.

Numéricamente, los efectos y cambios ocurridos pueden verse también en las Figuras 6.2, 6.3, 6.4 y 6.5.

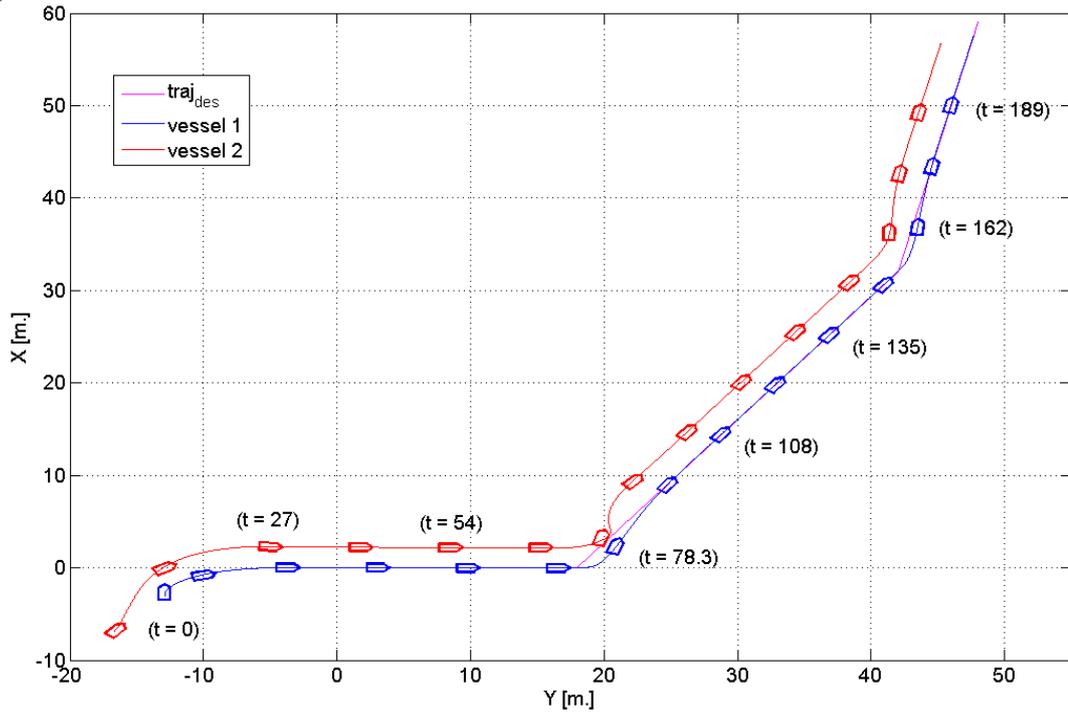


Figura 6.1. Formación en el tiempo entre el robot líder y seguidor

Los valores de distancia  $l_{12}$  y ángulo  $\alpha_{12}$  entre el líder y el seguidor se muestran en la Figura 5.2. El error transversal entre la posición del líder y la trayectoria converge siempre a cero a pesar de un cambio en la dirección, y el comportamiento de los valores para  $l_{12}$  y  $\alpha_{12}$  garantizan el patrón de formación esperado.

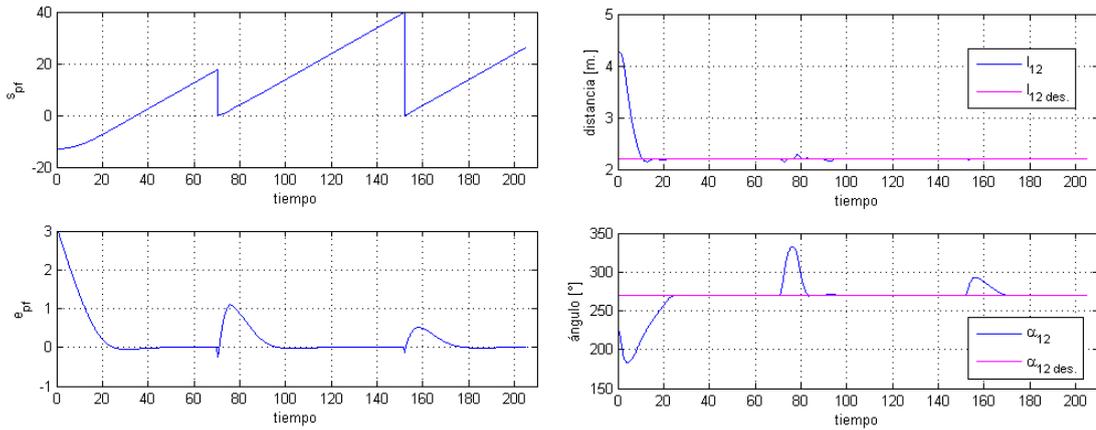


Figura 6.2. Errores longitudinal  $s_{pf}$  y transversal  $e_{pf}$  entre el líder y la trayectoria descrita (izquierda). Convergencia de  $l_{12}$  y  $\alpha_{12}$  en el tiempo (derecha).

Las velocidades de ambos robots se presentan en la Figura 6.3. Se observa que el robot líder alcanza la velocidad deseada propuesta  $u_d = 0.5m/s$ , al igual que el seguidor. Asimismo, debido a la subactuación de los robots, las velocidades  $v_1$  y  $v_2$  eran de esperarse igual a cero.

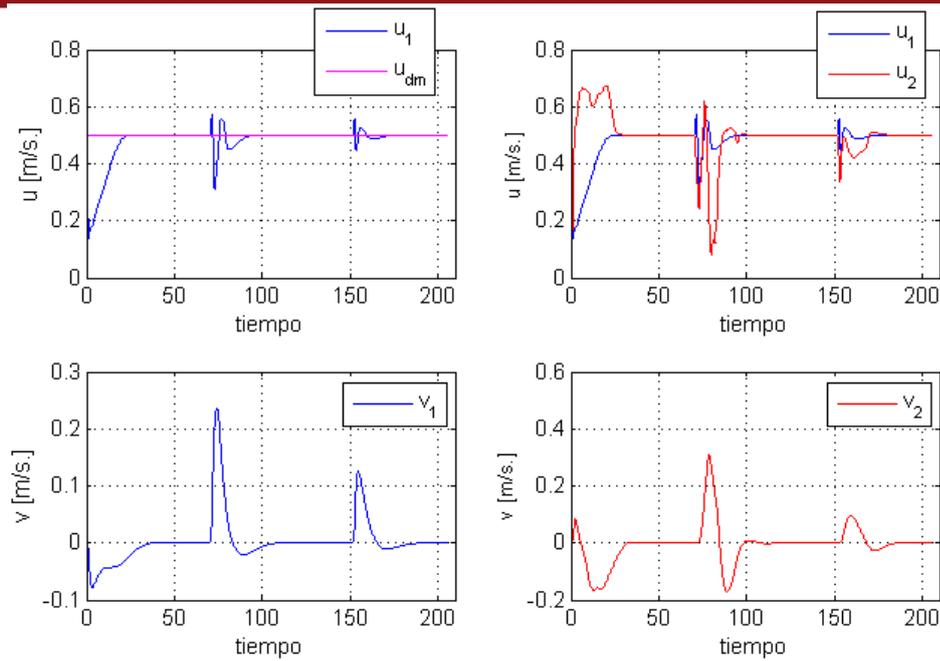


Figura 6.3. Velocidades lineales del líder (azul) y seguidor (rojo)

Los valores de las fuerzas, por otro lado, presentan el comportamiento de la Figura 6.4. La convergencia de las variables  $F_{izq}$  y  $F_{der}$  implica que luego de un cambio de dirección y después de alcanzar la estabilidad, las hélices giran juntas a la misma velocidad angular.

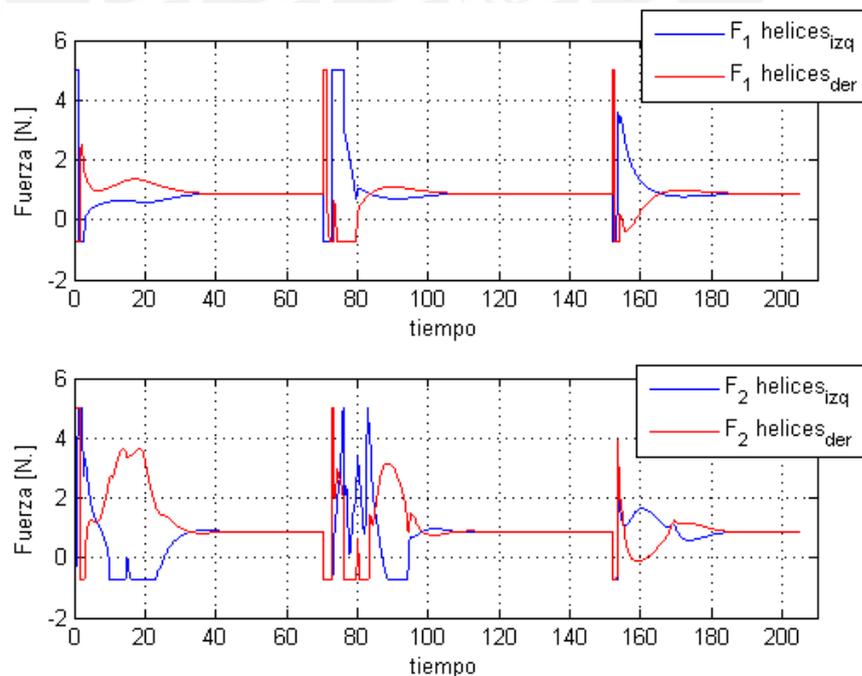


Figura 6.4. Fuerzas de empuje generadas por cada hélice. Para el robot líder (arriba). Para el robot seguidor (abajo)

### 6.1.2. Resultados con el enfoque de Lagrange

En este caso, de acuerdo a la metodología explicada en la sección 4.2, se necesita la posición y orientación estimada del líder. Esta orientación  $\psi_2^*$ , de acuerdo a la ecuación (4.15), depende del ángulo de drift  $\beta$ , el que a su vez necesita que la velocidad inicial del líder  $u_{1_0}$  sea distinta de cero.

Por tanto, con el objetivo de hacer una comparación entre los enfoques desarrollados, se considera en este caso una velocidad  $u_{1_0}$  pequeña. De manera que se propone:  $v_{1_0} = [0.1, 0, 0]^T$

**Para el líder (1):** El seguimiento de trayectoria sigue el mismo criterio de la sección 6.1.1 anterior, donde los parámetros  $p_{G1}$  y  $p_{\Phi1}$  se consideran en este caso:

$$p_{G1} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}, \quad p_{\Phi1} = \begin{bmatrix} 14.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.024 \end{bmatrix}$$

**Para el seguidor (2):** El robot 2 trata de seguir al líder siguiendo la formación deseada establecida por  $\varepsilon_d = [-1.3, -2.2]^T$ . Los parámetros del controlador son:

$$p_{G2} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0513 & 0 \\ 0 & 0 & 1.1673 \end{bmatrix}, \quad p_{\Phi2} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0237 \end{bmatrix}$$

Además de estos parámetros, con el objetivo de lograr un error en estado estable igual a cero, se planteó también un control integral aunque solo sobre los errores longitudinal  $s_d$  y transversal  $e_d$  entre el seguidor y el líder. En otras palabras, a las dos últimas columnas de la expresión  $a(t)$  en la ecuación (4.20) se le agrega el siguiente término:

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbb{O}^{1 \times 2} \\ \mathbb{O}^{2 \times 1} & p_{G2i} \end{bmatrix} \int G_2,$$

Donde se consideró:

$$p_{G2i} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 1.093 \end{bmatrix}$$

La formación en el tiempo se muestra en la Figura 6.5. Aquí se aprecia que la formación deseada se logra sólo en el primer tramo de la trayectoria definida para el robot líder. Luego que hay un cambio de rumbo ( $t \cong 90$  s.), los ASV se encuentran más próximos uno del otro, y a pesar que esta nueva separación se mantiene con el tiempo ( $t > 95$  s.), no es el resultado esperado. Otra razón por la que el control no respondió en forma adecuada es debido a las trayectorias descritas por ambos ASVs, lo que sugiere muy seguras colisiones. En términos numéricos, estos efectos se presentan en las Figuras 6.6, 6.7 y 6.8.

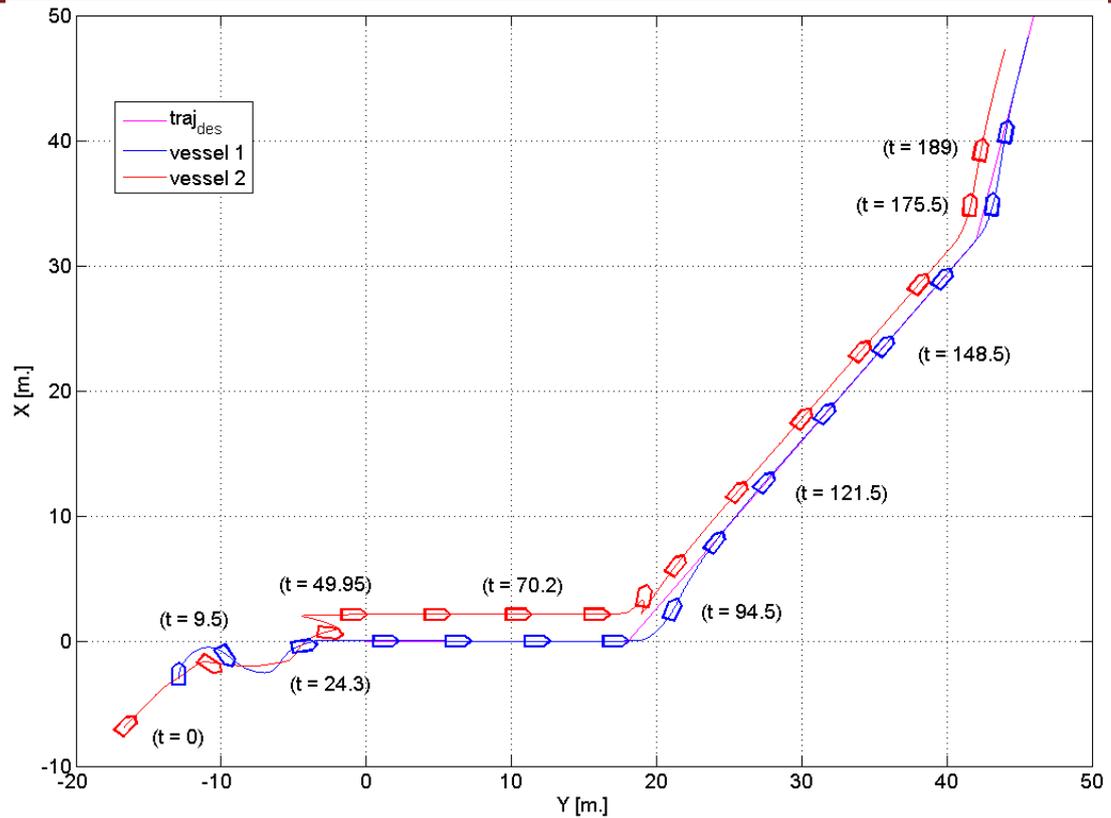


Figura 6.5. Formación en el tiempo entre el robot líder y seguidor

Por otro lado, en cuanto a la convergencia de  $e_f$  y  $s_f$ , se puede notar a partir de la Figura 6.6 que la distancia de separación longitudinal  $s_f$  entre los robots siempre converge a pesar de los cambios de dirección en la trayectoria. Sin embargo lo mismo no ocurre con la distancia de separación transversal  $e_f$ , puesto que puede verse, a partir de la misma figura, que sólo en el primer tramo del trayecto total se logra lo esperado. Esto quiere decir que para lograr un mejor desempeño del controlador, debe seguir proponiéndose otros valores para  $p_\phi$  y  $p_G$ .

Por otro lado, se puede ver en la Figura 6.6 que las restricciones en las velocidades sí se cumplen aunque con una mayor distorsión al inicio del análisis, en comparación con el resultado obtenido usando un controlador no lineal (ver Figuras 6.3 y 6.7)

En la Figura 6.8 se muestran las fuerzas de empuje generadas por cada hélice y en cada robot. En comparación con el resultado de la Figura 6.4, se puede notar que al inicio del análisis los actuadores hacen girar el motor a su máxima velocidad por mayor tiempo (aprox 20 s.) antes de llegar a la convergencia. Durante el 2do y 3er tramo del trayecto las fuerzas obtenidas usando ambas estrategias de control son similares.

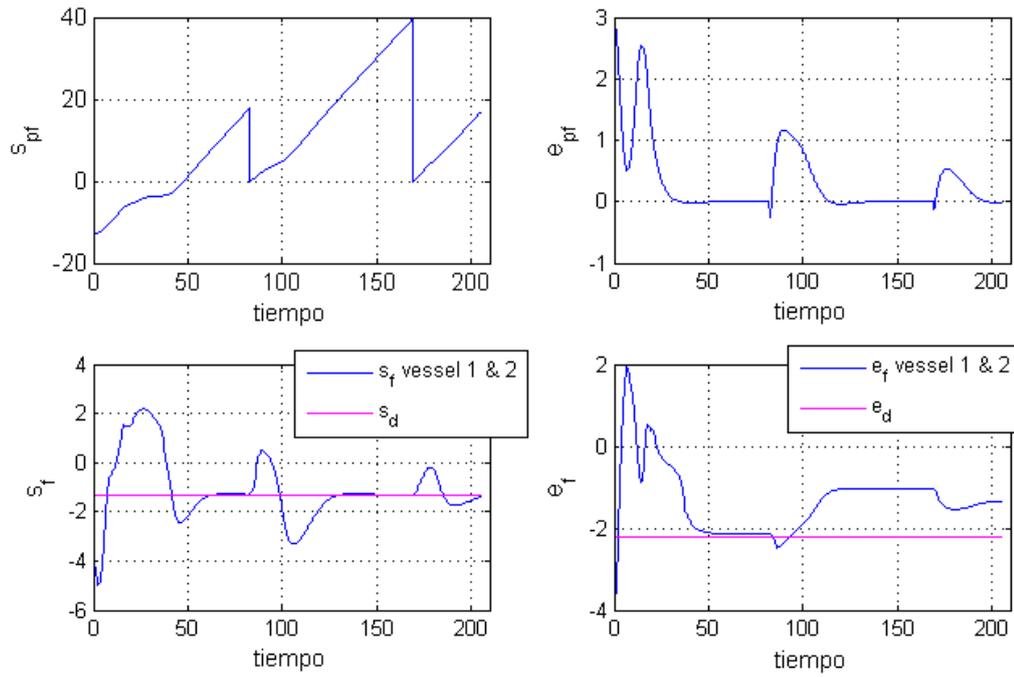


Figura 6.6. Errores longitudinal  $s_{pf}$  y transversal  $e_{pf}$  entre el líder y la trayectoria descrita (parte superior). Convergencia de los errores longitudinal  $s_f$  y transversal  $e_f$  entre el líder y seguidor (parte inferior).

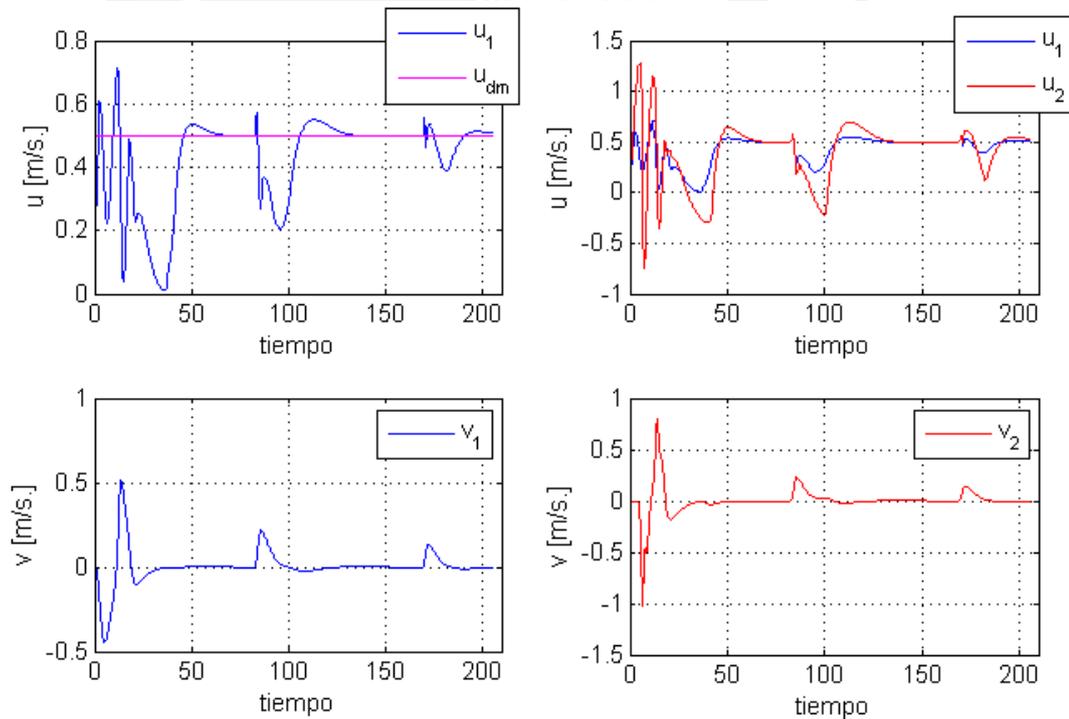


Figura 6.7. Velocidades lineales del líder (azul) y seguidor (rojo)

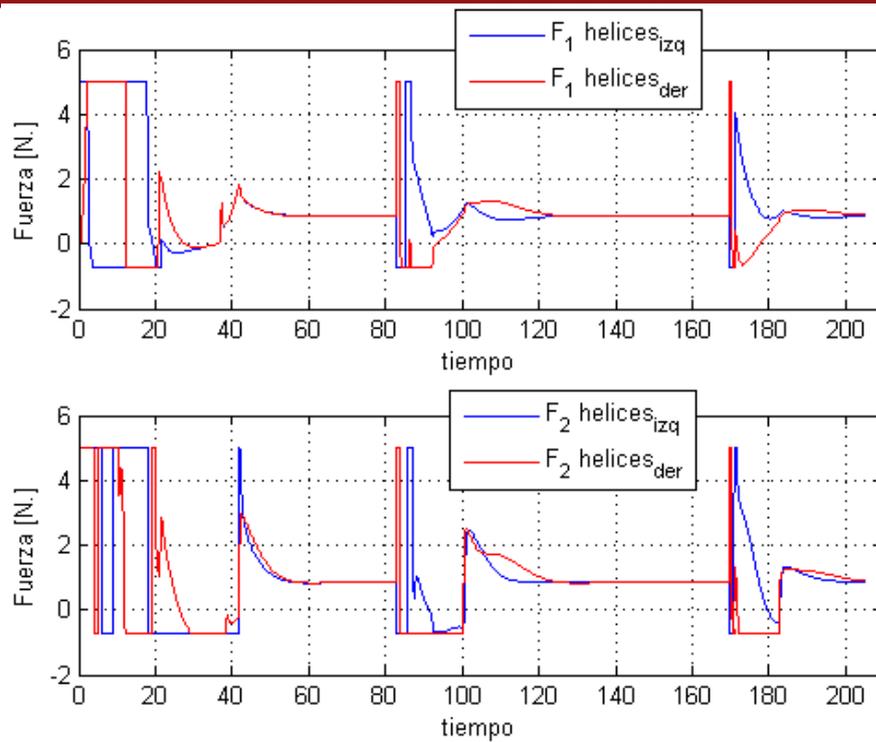


Figura 6.8. Fuerzas de empuje generadas por cada hélice. Para el robot líder (arriba). Para el robot seguidor (abajo)

## 6.2. Caso de estudio: Tres robots en formación con Control No Lineal

### 6.2.1. Resultados sin perturbaciones externas

**Para el líder (1):** El seguimiento de trayectoria se hace mediante el enfoque de Lagrange siguiendo el mismo criterio anterior, donde se considera:

$$p_G = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}, \quad p_\Phi = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.024 \end{bmatrix}$$

**Para el seguidor (2):** El robot 2 sigue al líder 1 mediante un controlador  $l - \alpha$ , con los siguientes parámetros:

$$n_{l\alpha} = 0.01$$

$$\lambda_{l\alpha} = [18.5, 4]^T$$

$$a_{l\alpha} = [5000, 5000]^T$$

Y los valores deseados:

$$l_{12}^d = 2.2, \quad \alpha_{12}^d = \frac{3\pi}{2}$$

**Para el seguidor (3):** El robot 3 sigue a los vehículos 1 y 2 mediante un controlador 'l - l' con los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} n_{ll} &= 0.04 \\ \lambda_{l\alpha} &= [5, 5]^T \\ a_{l\alpha} &= [6000, 6000]^T \end{aligned}$$

Los valores deseados son:

$$l_{13}^d = 2.7295, \quad l_{23}^d = 4.7802$$

Los robots parten del reposo con las siguientes condiciones iniciales de posición:

$$\begin{aligned} \eta_{1o} &= [-3, -12.9, 0]^T \\ \eta_{2o} &= [-7.0118, -16.7504, 0.6981]^T \\ \eta_{3o} &= [-6.2, -14.21, \pi/2]^T \end{aligned}$$

Con lo que:

$$\begin{aligned} l_{12o} &= 4.2544, \quad \alpha_{12o} = 225^\circ \\ l_{13o} &= 3.2, \quad l_{23o} = 3.935 \end{aligned}$$

La formación en el tiempo se muestra en la Figura 6.9, donde se obtuvieron resultados satisfactorios.

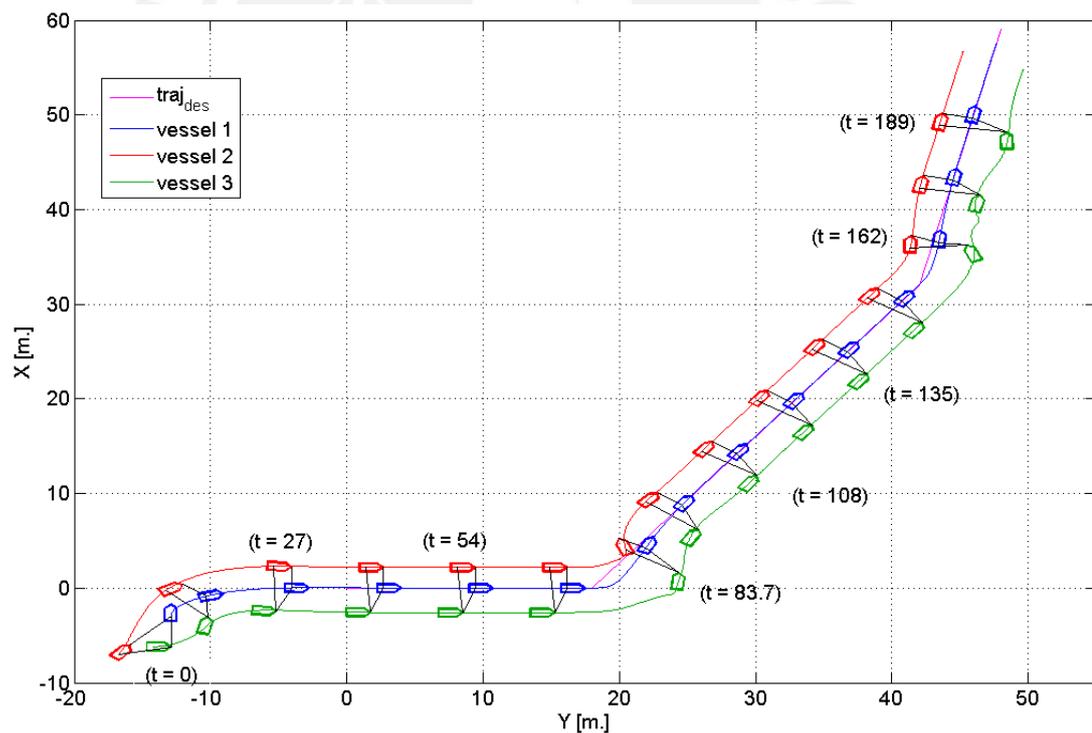


Figura 6.9. Formación en el tiempo entre el robot líder y 2 seguidores.

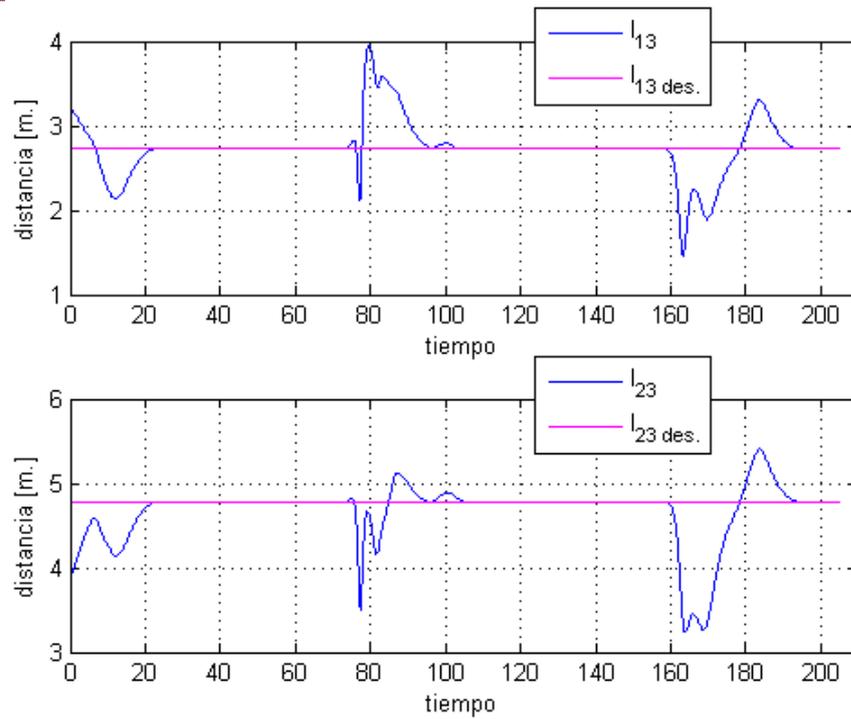


Figura 6.10. Variación en el tiempo de  $l_{13}$  y  $l_{23}$ .

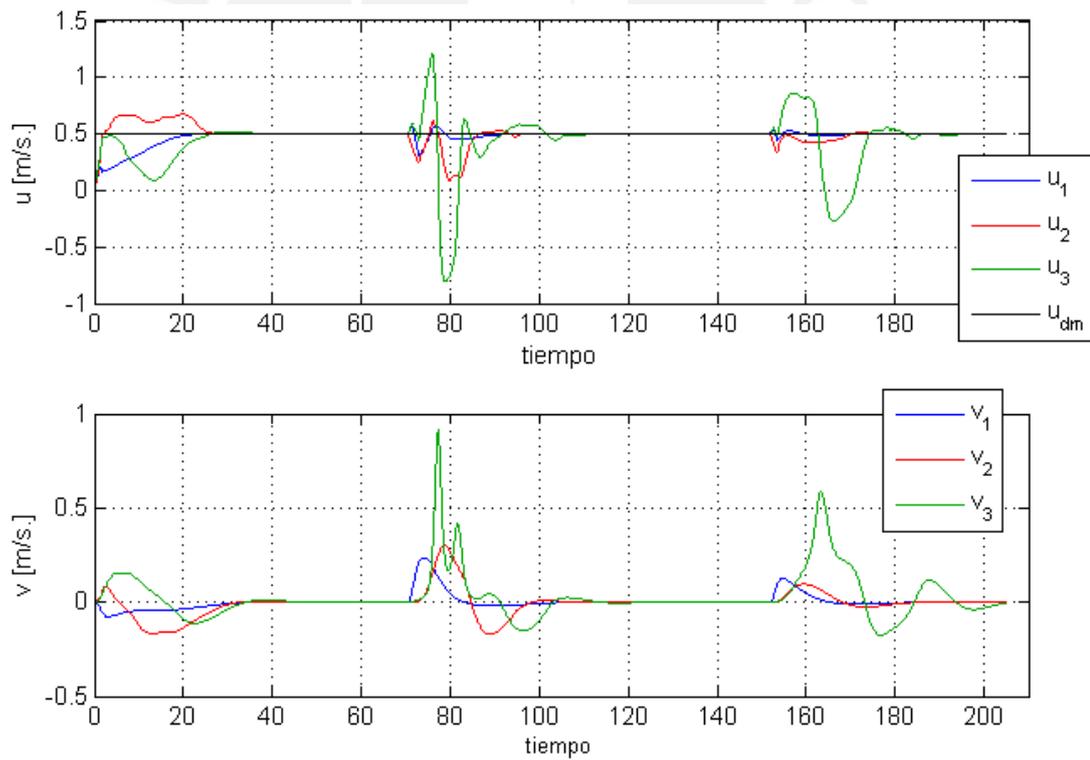


Figura 6.11. Velocidades lineales y transversales del líder 1 (azul), seguidor 2 (rojo) y seguidor 3 (verde).

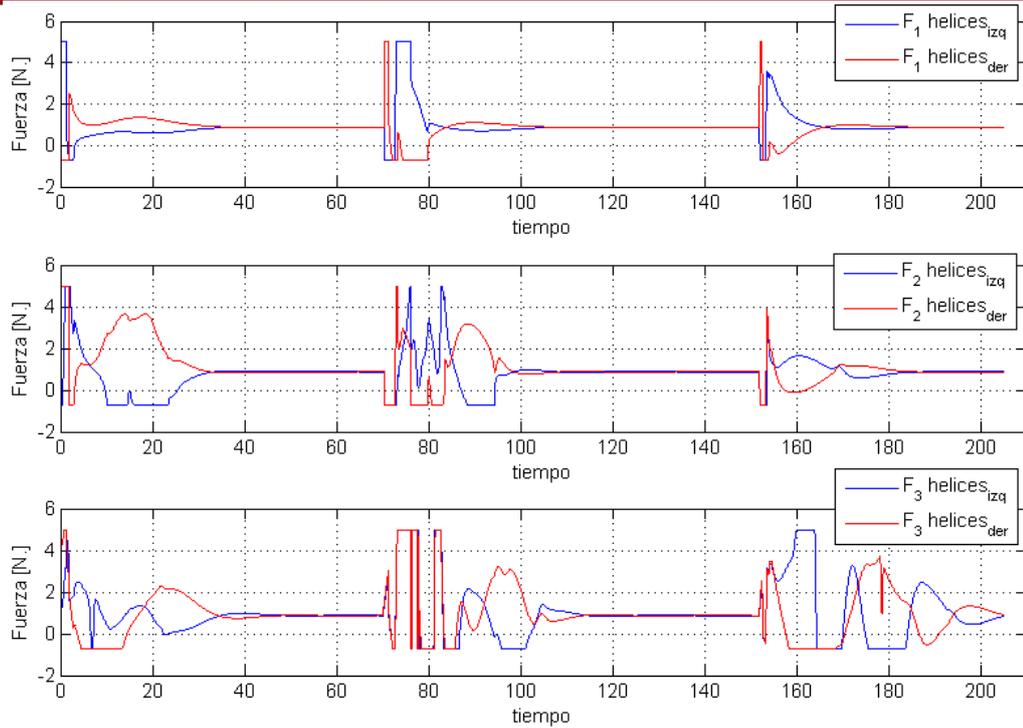


Figura 6.12. Fuerzas de empuje generadas por las hélices en cada robot de la formación.

### 6.2.2. Efecto de las fuerzas de viento

Las pruebas de velocidad desarrolladas con el robot marítimo se realizaron en una piscina de dimensiones 25m. x 50m en las instalaciones de La Marina de Guerra del Perú. En dicho lugar, las corrientes de viento correspondían a una brisa ligera, donde de acuerdo al número de Beaufort (Fossen. 2011), la velocidad del viento se aproxima a 4 nudos ( $\cong 2.05 \text{ m/s}$ ). Asimismo, la dirección del viento se consideró igual a  $60^\circ$  con respecto al eje X (ver Figura 6.13)

Teniendo en cuenta lo anterior, se determinaron las siguientes condiciones:

**Para el líder (1):** El seguimiento usa los mismos parámetros de la sección 6.2.1:

$$p_G = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}, \quad p_\Phi = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.024 \end{bmatrix}$$

**Para el seguidor (2):** El robot 2 sigue al líder 1 mediante un controlador  $l - \alpha$ . Los parámetros en este caso, varían con respecto al caso sin perturbaciones:

$$n_{l\alpha} = 0.0073$$

$$\lambda_{l\alpha} = [18.51, 4.01]^T$$

$$a_{l\alpha} = [6100, 3500]^T$$

Los valores deseados se mantienen iguales con respecto al caso sin perturbaciones.

**Para el seguidor (3):** Los parámetros del controlador ' $l - l'$ ' son:

$$n_{ll} = 0.04$$

$$\lambda_{l\alpha} = [5, 5]^T$$

$$a_{l\alpha} = [5927, 6010]^T$$

Las distancias  $l_{13d}$  y  $l_{23d}$  son las mismas con respecto al caso sin perturbaciones, al igual que las condiciones iniciales de posición y velocidad.

Estos parámetros permiten lograr el patrón de formación que se muestra en la Figura 6.13. Como se puede observar, el comportamiento en el tiempo no es alterado drásticamente comparado con el caso en el que no se consideraron las perturbaciones. Sin embargo, cuando ocurre el cambio de dirección en la trayectoria, el seguidor 2 (en rojo) demora aproximadamente 28 segundos en estabilizarse nuevamente, mientras que al seguidor 3 (en verde) le toma alrededor de 41 segundos para lograr lo mismo.

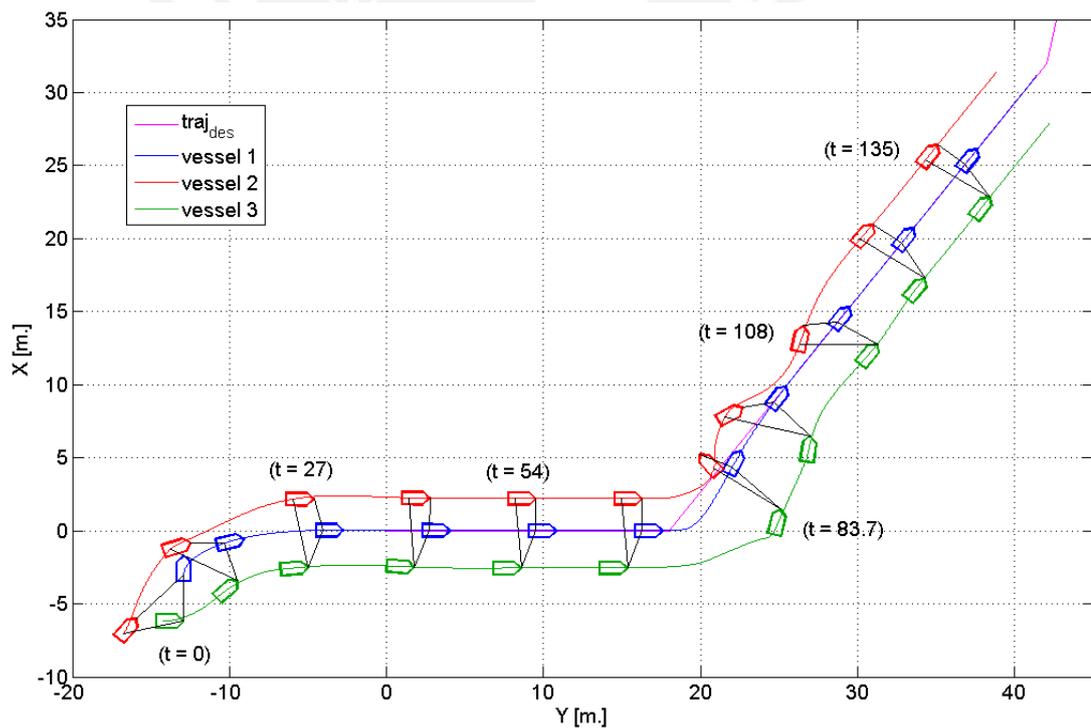


Figura 6.13. Formación en el tiempo.

Por otro lado, las variaciones de los errores, velocidades y fuerzas se presentan en las Figuras 6.14, 6.15 y 6.16, respectivamente.

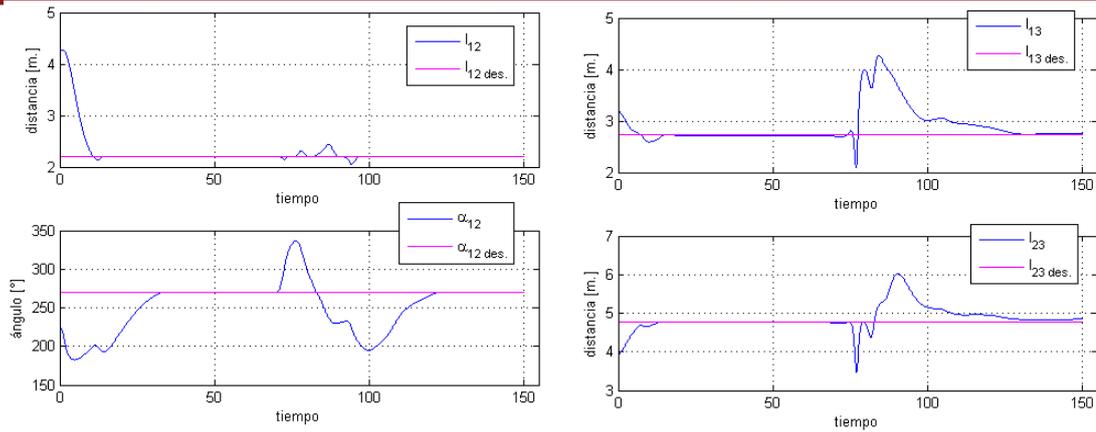


Figura 6.14. Variación en el tiempo de  $l_{12}$  y  $\alpha_{12}$ . (izquierda) Variación de  $l_{13}$  y  $l_{23}$ . (derecha)

La distancia  $l_{12}$  y el ángulo  $\alpha_{12}$  de separación entre el ASV 1 y el ASV 2 logran la estabilidad a pesar del cambio de dirección, al igual que las distancias  $l_{13}$  y  $l_{23}$ . Se observa que a los robots seguidores les toma más tiempo esta vez en volver a tener el patrón de formación deseado. (ver Figura 6.14). Por otro lado, no hay inconvenientes con las restricciones propuestas para las velocidades, tal como se aprecia en la Figura 6.11. Debido a la subactuación de los ASV, también era de esperarse que en la estabilidad, la velocidad  $v \cong 0$  m/s.

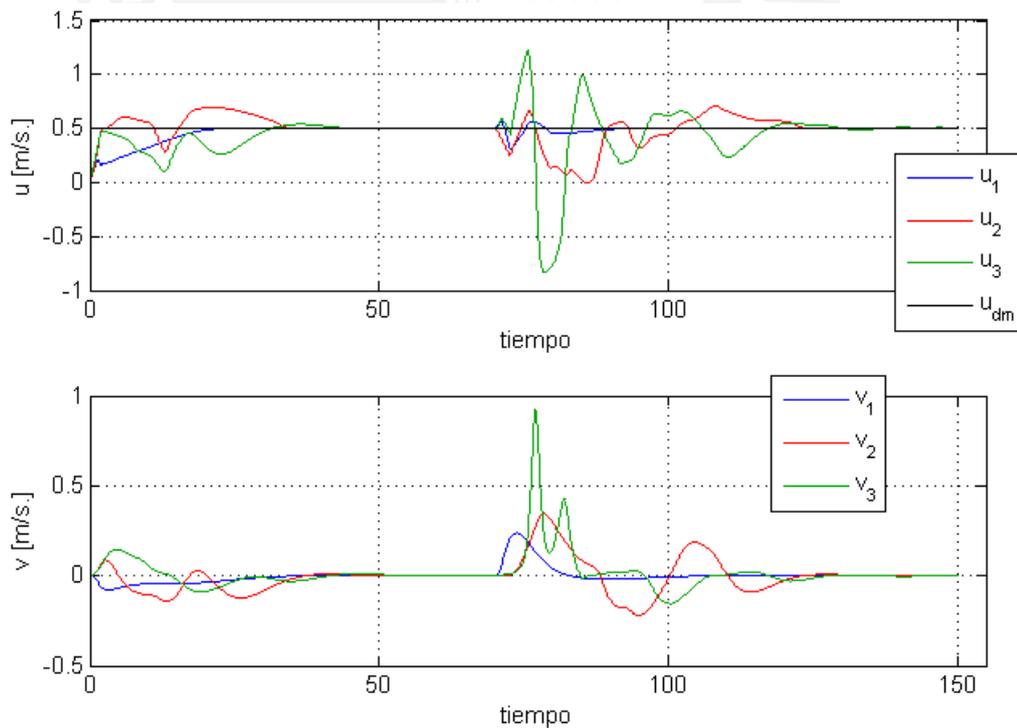


Figura 6.11. Velocidades lineales y transversales del líder 1 (azul), seguidor 2 (rojo) y seguidor 3 (verde).

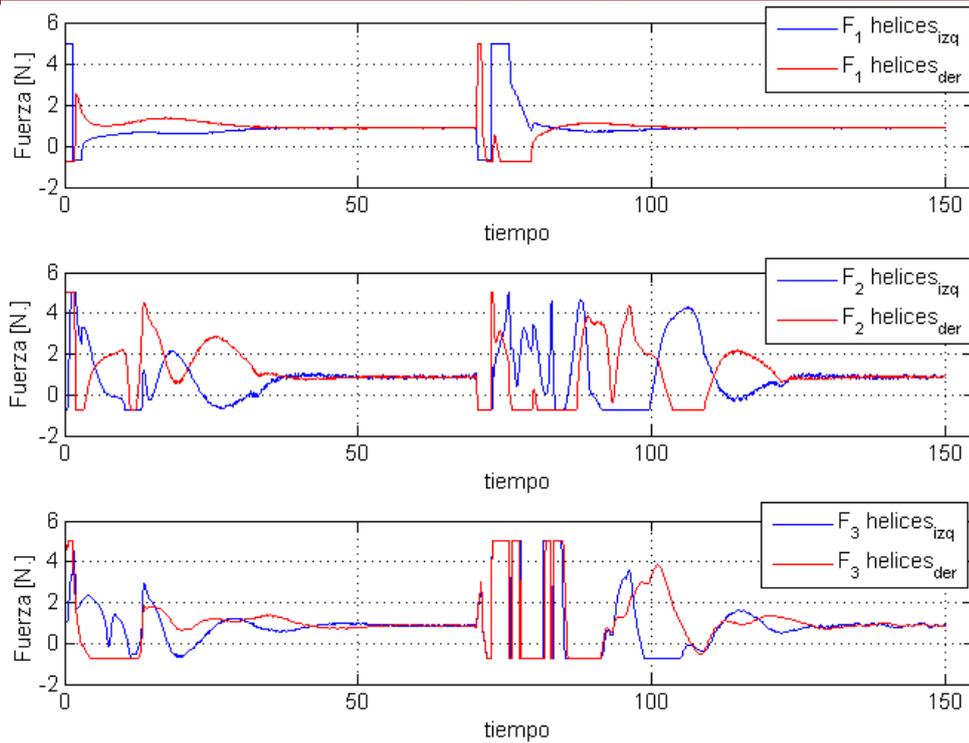


Figura 6.16. Fuerzas de empuje generadas por las hélices en cada robot de la formación.

Con respecto a las fuerzas que generan las hélices, se puede notar a partir de la Figura 6.16 que en la estabilidad las fuerzas tienen pequeñas variaciones y no alcanza un valor fijo. Esto debido a que en todo momento hay una interacción con las fuerzas del viento, pero el controlador logra el propósito deseado. Cuando hay un cambio de dirección en la trayectoria, a los robots seguidores les toma más tiempo estabilizarse.

## CONCLUSIONES GENERALES

1. Se obtuvo un modelo matemático del vehículo de superficie bajo el análisis de diferentes tipos de fuerzas que actúan sobre él. Asimismo, teniendo conocimiento de la masa del robot, y realizando una estimación de la resistencia que éste ofrece al desplazarse (Capítulo III), se obtuvieron los parámetros necesarios en las ecuaciones de movimiento
2. Se diseñó un sistema de control de formación usando dos diferentes estrategias. Para poder resaltar las ventajas y desventajas que trae consigo un método con respecto al otro, se analizó el caso más simple de formación, el cual constituye un líder y un único seguidor. (Sección 6.1)

Los resultados muestran que la metodología en la que se imponen restricciones tiene efectos negativos en el control mucho más notorios con respecto a la técnica que usa una realimentación de estados no lineal. (Figuras 6.1 y 6.5) Del mismo modo, en base a los resultados se puede afirmar que la sintonización de parámetros debe ser realizada con cierta precisión.

En el primer caso, cada vez que se realiza un cambio en los parámetros de control  $p_{G1}$ ,  $p_{G2}$ ,  $p_{\Phi1}$  y  $p_{\Phi2}$ , el resultado puede variar en gran medida. Esto se corrobora con la expresión para la Ley de control obtenida en la ecuación 4.27. Al variar el parámetro  $p_G$ , cambia también la función de restricción:  $\Phi$ . Mientras que, si cambia  $\Phi$ , se altera la expresión de las fuerzas  $\tau_{control}^{\{b\}}$ .

Por otro lado, con el controlador no Lineal, la variación de parámetros es distinta al caso anterior. La sintonización se realiza en el líder de manera independiente a la del seguidor. Mientras que  $p_{G1}$  y  $p_{\Phi1}$  permiten que el líder siga de forma adecuada la trayectoria deseada;  $n_{l\alpha}$ ,  $\lambda_{l\alpha}$  y  $a_{l\alpha}$ , por otro lado, tratan que el seguidor se mueva de tal forma que se logre el patrón de formación deseado.

3. Se consideró los efectos de las fuerzas del viento en el diseño del sistema de control para 3 robots marítimos (Sección 6.2). En este caso, sin embargo, fue necesario reajustar los parámetros de los controladores no lineales, observando resultados satisfactorios (Figuras 6.14, 6.15 y 6.16).

Si bien no se consideraron otras fuerzas de perturbación, esto fue debido al entorno real en que se realizaron las pruebas de velocidad con el robot marítimo. Como se detalló en la sección 6.2.2, el robot operó sobre una piscina, en la cual las fuerzas de oleaje y corrientes de agua se tomaron en cuenta despreciables.

4. Se validó el modelo del ASV y el diseño de los controladores mediante las simulaciones realizadas en el Capítulo VI, en donde se muestran mejores resultados con un control no lineal, debido a la garantía de estabilidad por Lyapunov, y al diseño independiente de los controladores.

## RECOMENDACIONES Y TRABAJOS FUTUROS

1. Los resultados mostrados en el Capítulo VI mostraron que el desempeño de los controladores, y por tanto la respuesta del sistema, cambiaba en cierta forma cuando se presentaba un cambio en la dirección de la trayectoria. De esta manera se sugiere diseñar un control adaptivo, donde en cada cambio de dirección de la ruta deseada, se actualicen los parámetros de dichos controladores.
2. Validar el diseño de los controladores para el caso de trayectorias curvas, donde la ley de seguimiento puede ser implementada de acuerdo a la sección 4.2.3.2.
3. Incluir un observador de estados, donde las señales medidas provengan del IMU (descrito en la sección 3.1.1)
4. Validar el diseño de los controladores no lineales estudiados, para una mayor cantidad de ASVs en formación. Identificar los robots líderes y seguidores en dicha formación, usando como opción de implementación la metodología explicada en la sección 4.3.4,
5. Validar el modelo de distribución de fuerzas de control presentado en el capítulo V, de manera que se pueda incluir en el modelo general de control de formación. Esto permitiría garantizar que el sistema trabaje con señales de control físicamente realizables.

**REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:**

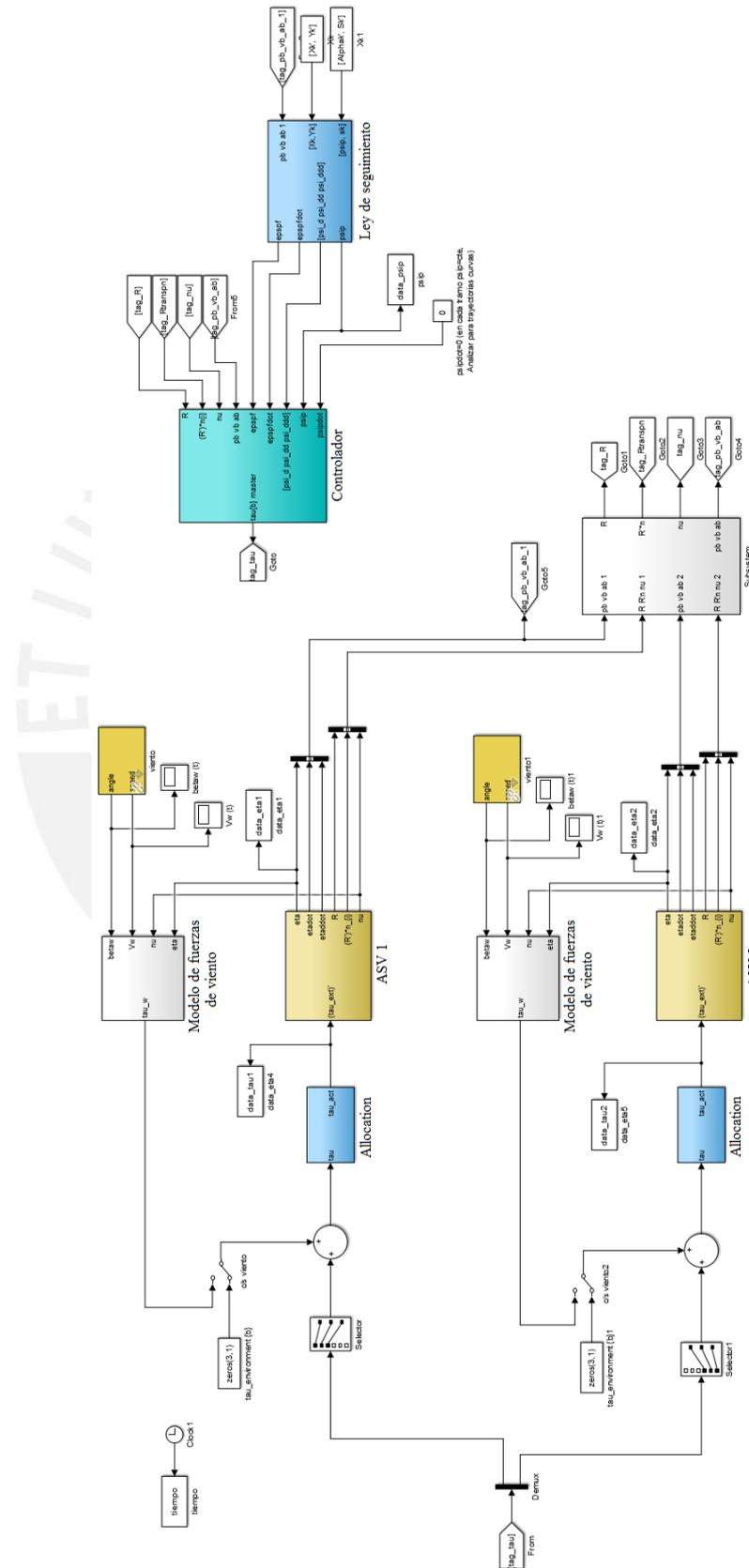
1. Andrighetto, P. Valdiero, A. (2008). "Dead Zone Compensation in Pneumatic Servo Systems," *ABCM Symp. Ser. Mechatronics*, vol. 3, no. 1996, pp. 501–509.
2. Arkin, R. (1987). "Motor schema based navigation for a mobile robot: An approach to programming by behavior," *Proceedings. 1987 IEEE Int. Conf. Robot. Autom.*, vol. 4, pp. 264–271.
3. Bertram, V. (2008). "Unmanned Surface Vehicles - A Survey". *Ski. Selsk. Copenhagen, Denmark*, pp. 1–14.
4. Breivik, M. Fossen, T. (2008) "Guidance laws for planar motion control," *Proc. IEEE Conf. Decis. Control*, pp. 570–577.
5. Busquets, D. (2003). *A Multiagent Approach to Qualitative Navigation in Robotics*. Doctoral thesis. Departament de Llenguatges I Sistemes Informàtics, Universitat Politècnica de Catalunya. Barcelona, España.
6. Chen, Y.-Q. Wang, Z. (2005). "Formation control: a review and a new consideration," *2005 IEEE/RSJ Int. Conf. Intell. Robot. Syst.*, no. 435, pp. 3181–3186.
7. Fahimi, F. Nataraj, C. (2008) "Formation Controllers for underactuated surface vessels ans zero dynamics stability" vol. 36, no. 3.
8. Fahimi, F. (2009). *Autonomous Robots. Modeling, Path Planning and Control*.
9. Fossen, T. (2011). *Handbook of Marine Craft Hydrodynamics and Motion Control*, no. 1.
10. Gazi, V. (2003). "Formation control of a multi-agent system using decentralized nonlinear servomechanism," *42nd IEEE Int. Conf. Decis. Control (IEEE Cat. No.03CH37475)*, vol. 3, no. December, pp. 2531–2536.
11. Hong, S. Shin, S. Ahn, D. (2001). "Formation control based on artificial intelligence for multi-agent coordination," in *ISIE 2001. 2001 IEEE International Symposium on Industrial Electronics Proceedings (Cat. No.01TH8570)*, vol. 1, pp. 429–434.
12. Ihle, I. Jouffroy, J. Fossen, T. (2006). "Formation Control of Marine Surface Craft: A Lagrangian Approach," *IEEE J. Ocean. Eng.*, vol. 31, no. 4, pp. 922–934.
13. Kobayashi, F. Tomita, N. Kojima, F. (2003). "Re-formation of mobile robots using genetic algorithm and reinforcement learning," *SICE 2003 Annu. Conf. (IEEE Cat. No.03TH8734)*, vol. 3, pp. 2902–2907.
14. Lanczos, Cornelius. (1949) *The Variational Principles of Mechanics*. Mathematical Expositions No. 4. University of Toronto. Canadá.
15. Moreno, H. Saltarén, R. Puglisi, L. Carrera, I. Cárdenas, P. Álvarez, C. (2014). "Robótica submarina: Conceptos, elementos, modelado y control," *RIAI - Rev.*

*Iberoam. Autom. e Inform. Ind.*, vol. 11, no. 1, pp. 3–19.

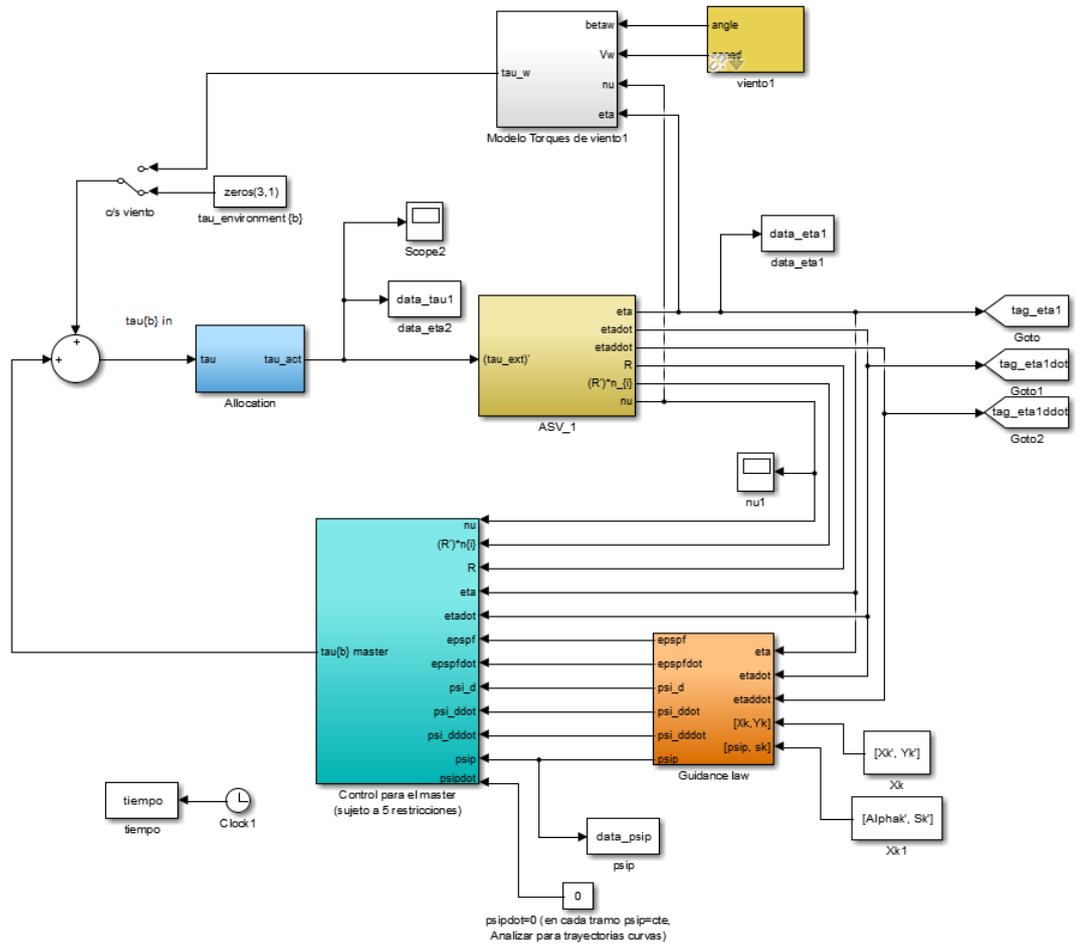
16. Peymani, E. Fossen, T. (2011) “A Lagrangian framework to incorporate positional and velocity constraints to achieve path-following control,” *Proc. IEEE Conf. Decis. Control*, no. 1, pp. 3940–3945.
17. Peymani, E. Fossen, T. (2012). “Leader-follower formation of marine craft using constraint forces and lagrange multipliers,” *Proc. IEEE Conf. Decis. Control*, pp. 2447–2452.
18. Sampson, Rod. *Resistance & Propulsion (I). Propeller hull interaction*. School of Marine Science and Technology. Universidad de Newcastle, Reino Unido. Feb. 2008.
19. Skjetne, R. Moi, S. Fossen, T. (2002). “Nonlinear formation control of marine craft,” in *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, 2002.*, 2002, vol. 2, pp. 1699–1704.
20. R. Skjetne, Smogeli Ø. Fossen, T. (2004) “A Nonlinear Ship Manoeuvring Model: Identification and adaptive control with experiments for a model ship,” *Model. Identif. Control*, vol. 25, no. 1, pp. 3–27.
21. Skjetne, R. (2005). *The maneuvering problem*. PhD. Thesis.
22. Sørensen, A. Smogeli, Ø. (2009). “Torque and power control of electrically driven marine propellers,” *Control Eng. Pract.*, vol. 17, no. 9, pp. 1053–1064.
23. Spry, S. Hedrick, J. K. (2004). “Formation control using generalized coordinates,” *2004 43rd IEEE Conf. Decis. Control (IEEE Cat. No.04CH37601)*, vol. 3, pp. 2441–2446.
24. Tan, K-H. Lewis, M. A. (1996). “Virtual structures for high-precision cooperative mobile robotic control,” *Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. Intell. Robot. Syst. IROS '96*, vol. 1, pp. 132–139.
25. Valdiero, A. Guenther, R. De Negri, V. (2006). “NEW METHODOLOGY FOR IDENTIFICATION OF THE DEAD ZONE IN PROPORTIONAL DIRECTIONAL HYDRAULIC VALVES,” *Mech. Eng.*, vol. 2, pp. 377–384.
26. Yan, R. Pang, S. Sun, H. Pang, Y. (2010). “Development and missions of unmanned surface vehicle,” *J. Mar. Sci. Appl.*, vol. 9, no. 4, pp. 451–457.
27. Mechatronics Project Site. Project 2. ESC Calibration & Programming. [en línea]. Disponible en: <<http://robots.dacloughb.com/project-2/esc-calibration-programming/>> Consultado el 02/02/2016.

ANEXOS

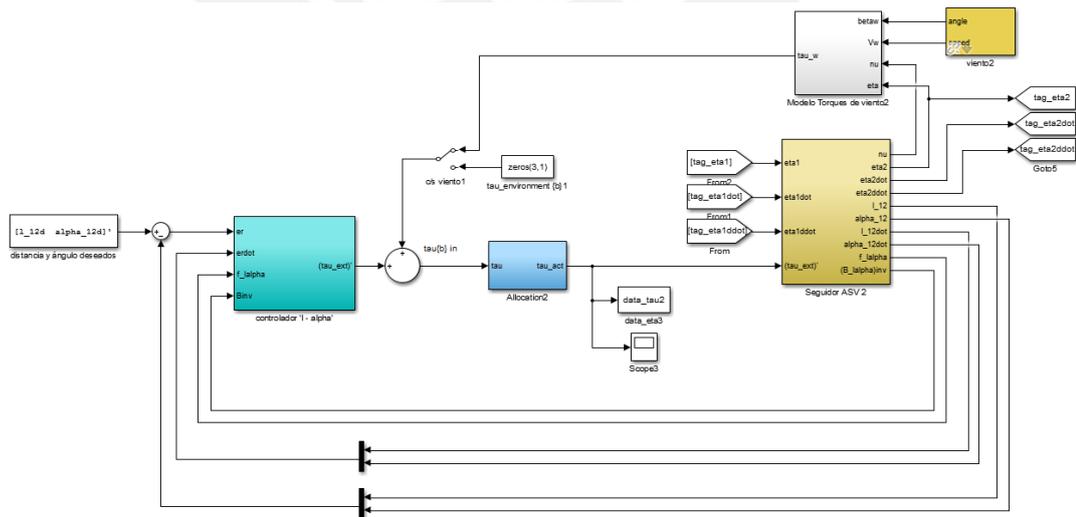
1. Diagrama de bloques para el control de 2 robots en formación (Enfoque de Lagrange).



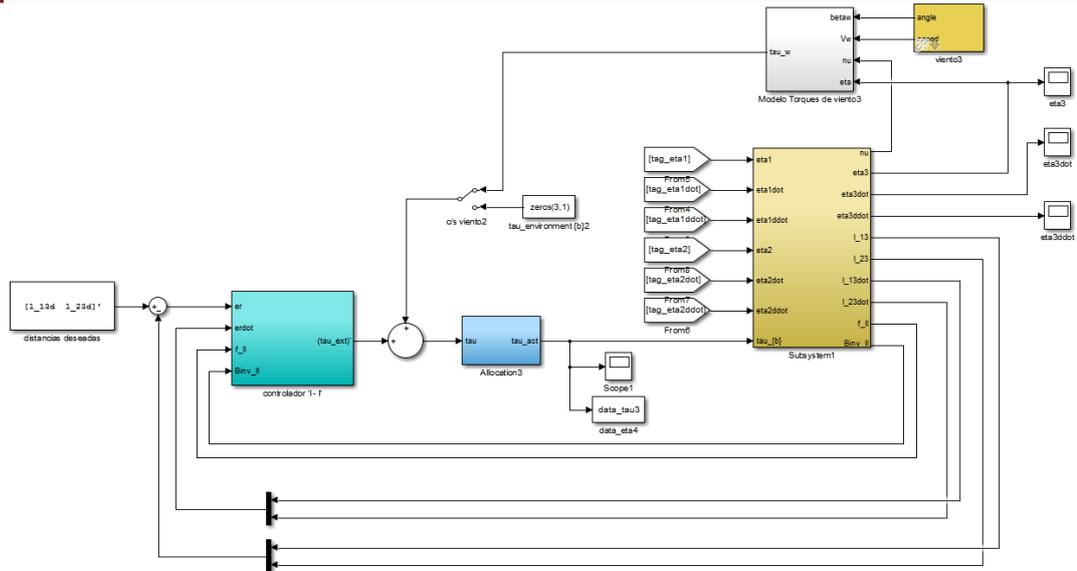
## 2. Diagrama de bloques para el control de 3 robots en formación (Enfoque No Lineal).



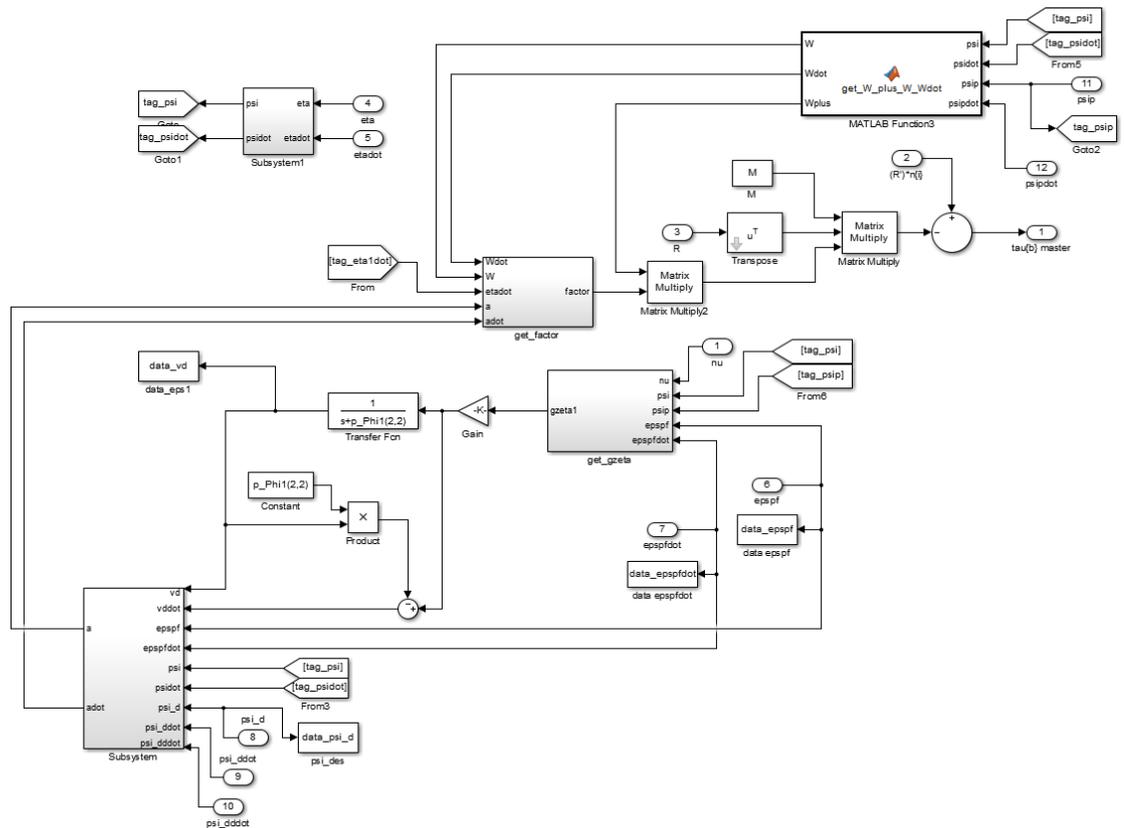
### 2.1 Diagrama de bloques para el robot líder



### 2.2 Diagrama de bloques para el robot seguidor 2



2.3 Diagrama de bloques para el robot seguidor 3



2.4 Estructura del controlador para el robot líder

### 3. Programa para pruebas de velocidad. (Elaborado en Arduino)

```

#include <Servo.h>

#define MAX_SIGNAL 2000 // valor máximo escalado de señal PPM
#define MIN_SIGNAL 1000 // valor mínimo escalado de señal PPM
#define motorLeft_PIN 10 // Conexión entre Arduino y motores
#define motorRight_PIN 9

String receiveString; int receiveLeft, receiveRight;
boolean receiveComplete; boolean leftReceived, rightReceived;
unsigned long last_time;

int MID_SIGNAL = (MAX_SIGNAL + MIN_SIGNAL)/2; //1500: motor no gira

int scale(int value) {
    return MID_SIGNAL + value*(MAX_SIGNAL - MIN_SIGNAL)/200;
}

int saturate(int value) {
    int v1 = value<100?value:100;
    return (v1>-100?v1:-100);
}

Servo motorLeft;
Servo motorRight;

void setup() {
    Serial.begin(115200);
    receiveComplete = false;
    receiveString = "";
    motorLeft.attach(motorLeft_PIN);
    motorRight.attach(motorRight_PIN);
    motorLeft.writeMicroseconds(MID_SIGNAL);
    motorRight.writeMicroseconds(MID_SIGNAL);
    last_time = millis();
}

void loop() {
    if(receiveComplete) {
        if(leftReceived && rightReceived) {
            receiveLeft = saturate(receiveLeft);
            receiveRight = saturate(receiveRight);
            motorLeft.writeMicroseconds(scale(receiveLeft));
            motorRight.writeMicroseconds(scale(receiveRight));

            Serial.print(receiveLeft); // Mostrando datos generados
            Serial.print('\t');
            Serial.print(scale(receiveLeft));
            Serial.println('\t');
            Serial.print(receiveRight);
            Serial.print('\t');
            Serial.print(scale(receiveRight));
            Serial.println();
        }
    }
}

```

```
receiveComplete = false;
leftReceived = false;
rightReceived = false;
receiveLeft = 0;
receiveRight = 0;
receiveString = "";
last_time = millis();
}

if(millis()-last_time>1000) {
    last_time = millis();
    motorLeft.writeMicroseconds(MID_SIGNAL);
    motorRight.writeMicroseconds(MID_SIGNAL);
}
}

void serialEvent() { // El ingreso de PPM se ingresa x
teclado
while(Serial.available()) {
    char inChar = (char)Serial.read();

    if(inChar == '\n') {
        receiveRight = receiveString.toInt();
        rightReceived = true;
        receiveString = "";
        receiveComplete = true;
    }

    else if(inChar == ',') {
        receiveLeft = receiveString.toInt();
        leftReceived = true;
        receiveString = "";
    }

    else if(inChar < 128) {
        receiveString += inChar;
    }
}
}
```

**[En archivo digital]**

**Anexo 4.** HobbyKing ESC. Manual de usuario.

**Anexo 5.** Batería Universal UB12350. Especificaciones técnicas.

**Anexo 6.** Hoja de datos de las hélices. Marca Octura.

**Anexo 7.** Diagramas y Códigos fuente desarrollados en Matlab-Simulink

- Dos robots en formación con el enfoque de Lagrange
- Dos robots en formación con un control no lineal
- Tres robots en formación. Efecto de las perturbaciones

**Anexo 8.** Código fuente de calibración y prueba de motores (Realizado en Arduino)

**Anexo 9.** Imágenes de instrumentos empleados para pruebas

**Anexo 10.** Hoja de datos del vehículo de superficie.

**Anexo 11.** Especificaciones técnicas de los motores.

**Anexo 12.** Documento de tesis.