PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

MATEMÁTICA FINANCIERA EN LA ESCUELA SECUNDARIA PARA LA ALFABETIZACIÓN FINANCIERA Y LA FORMACIÓN CIUDADANA. UNA PROPUESTA PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES EN TEMAS DE INTERÉS SIMPLE Y COMPUESTO.

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE
MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

PRESENTADA POR:

FREDDY CHUQUISANA MORA

ASESORA

DRA. NORMA VIOLETA RUBIO GOYCOCHEA

MIEMBROS DEL JURADO

DRA. ROSA CECILIA GAITA IPARRAGUIRRE

MG. CAROLINA RITA REAÑO PAREDES

LIMA - PERÚ

2015

Dedicada a mis padres

Ena y Raúl.

Agradecimientos

A mi asesora de tesis, Dra. Norma Rubio, por guiarme acertadamente.

A los profesores Cecilia Gaita, Carolina Reaño, Jesús Flores, Uldarico Malaspina y todos los que forman parte de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, por haber contribuido en mi formación profesional.

A los estudiantes del curso Números, Relaciones y Funciones de la Maestría en Enseñanza de la Matemáticas con mención en Educación Secundaria de la PUCP del ciclo 2014-2, por su entusiasta participación y colaboración.

A mis padres, por su inagotable apoyo incondicional.

A mis hermanos Jenny, Ena y Raúl, por formar parte de mis logros.

A mis tíos Higinia y Sixto, por estar pendientes de mí toda la vida.

A Marycruz Silva, por ayudarme y motivarme a seguir mis metas.

A Raúl Valenzuela, por enseñarme con el ejemplo a ser profesor.

Resumen

La presente tesis es una investigación cualitativa de tipo exploratoria y descriptiva que se enmarca en una corriente que nació en Europa y que actualmente viene expandiéndose en América Latina la cual relaciona la educación matemática con la formación ciudadana. Es así que esta tesis tiene dos ejes de investigación. El primer eje de investigación corresponde a la formación de ciudadanos a través de la matemática financiera; cuyo análisis se relaciona con los principios de la Educación Matemática Crítica y los indicadores según ejes de competencia ciudadana y educación matemática. El segundo eje de investigación corresponde a la enseñanza de temas de matemática financiera en la escuela secundaria, y se centra puntualmente en los temas de interés simple y compuesto; para lo cual se usa el primer, segundo y quinto nivel de análisis del Enfoque OntoSemiótico.

“Educación para la convivencia, la paz y la ciudadanía” es uno de los temas transversales propuestos en el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular del Perú 2009. Mientras que en el Nuevo Marco Curricular 2014 se considera como uno de los aprendizajes fundamentales que el estudiante “ejerce su ciudadanía”. Sin embargo, en ninguno de los dos currículos se precisa de qué manera se puede formar ciudadanos.

El Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular del Perú 2009 y el Nuevo Marco Curricular 2014 indican que los temas de interés simple y compuesto deben ser enseñados en la escuela secundaria. Sin embargo, no todos los libros han sido actualizados, y lo que es peor, no todos los profesores de matemática de secundaria han sido capacitados en esos temas.

Un grave problema que afecta a muchas familias peruanas en la actualidad es el sobreendeudamiento. Es decir, muchas personas o familias no han sabido manejar sus finanzas en estos últimos años. Esto último justifica la unión de ambos ejes de investigación, pues es necesario que todas las personas estudien los temas de interés simple y compuesto para la comprensión de cómo calcular intereses y montos, pero también se busca despertar la reflexión y la crítica; y así formar ciudadanos responsables en la toma de decisiones financieras, conscientes de sus consumos y habituados al ahorro.

Por lo tanto, durante toda la investigación se busca responder a la pregunta: ¿Cómo deben formarse los profesores de matemática de educación secundaria en temas de interés simple y compuesto para participar activamente en la alfabetización financiera dirigida a los futuros ciudadanos del Perú?

Introducción

La matemática financiera se encuentra presente en la vida cotidiana de todos los ciudadanos. Por ello, se vuelve indispensable la formación de estudiantes de secundaria en estos temas, para que de esta manera sea masivo este conocimiento. Así mismo, no debe enseñarse solamente como una presentación de fórmulas y ejercicios de aplicación, sino mediante clases donde el tema sea llevado de manera inductiva, y donde se creen espacios para la reflexión y la crítica que busquen la formación de ciudadanos responsables que sepan tomar decisiones en una economía de libre mercado.

En la actualidad, los cursos de matemática en la escuela secundaria del Perú tienen un desarrollo muy limitado en temas de matemática financiera en general, y temas de interés simple y compuesto en particular. Aun cuando los planes curriculares, en nuestro país, incluyen estos temas en la escuela secundaria, estos no están siendo implementados en la mayoría de instituciones educativas. Muchos libros de texto no han sido actualizados y, lo que es peor, muchos docentes de matemática no han estudiado temas de matemática financiera en su formación inicial o continua. Además, los textos de secundaria que sí contienen temas de matemática financiera, desarrollan los temas de interés simple y compuesto de manera tradicional: parten de la fórmula, que luego sirve para su aplicación directa en ejercicios rutinarios y no contextualizados, donde no hay lugar para el desarrollo del pensamiento crítico de los estudiantes.

Nuestro aporte en la presente tesis va dirigido a la formación de profesores de matemática de educación secundaria, quienes consideramos que son los llamados a ser los alfabetizadores financieros y tener como base una correcta formación en los temas de matemática financiera que deben estudiarse en la escuela secundaria. Para ello, proponemos unas sesiones de clase que sirvan para esta formación.

En el capítulo 1, presentamos los antecedentes para esta tesis haciendo un recorrido por diversas investigaciones que están relacionadas con la matemática financiera y formación ciudadana. Luego formulamos el problema de investigación y su justificación; el objetivo general y los objetivos específicos; y la pregunta de investigación.

El capítulo 2 corresponde al marco teórico y metodológico. Iniciamos con la Educación Matemática Crítica y la Formación Ciudadana; señalamos los indicadores según ejes de competencia ciudadana y su relación con la educación matemática; además, definimos algunos de los términos usados en este documento. Luego presentamos un resumen del Enfoque OntoSemiótico (EOS), haciendo un especial énfasis en los indicadores de idoneidad didáctica.

En el capítulo 3, identificamos las reflexiones de los profesores acerca del uso de la matemática (y en particular de la matemática financiera) en la formación de ciudadanos.

En el capítulo 4, organizamos los significados institucionales de referencia, pretendido e implementado de los temas interés simple y compuesto. Para el significado institucional de referencia y pretendido usamos las configuraciones epistémicas asociadas al análisis diversos textos de matemática que contienen los temas de interés simple y compuesto. Para el significado institucional implementado, nos guiamos del significado institucional de referencia y pretendido, los principios de la Educación Matemática Crítica y los criterios de idoneidad didáctica que propone el EOS.

En el capítulo 5, analizamos los resultados obtenidos en la implementación de un programa de formación de profesores en los temas de interés simple y compuesto. Realizamos el análisis de prácticas y las configuraciones epistémicas y cognitivas.

En el capítulo 6, utilizamos los criterios de idoneidad didáctica propuestos por el EOS para valorar el programa de formación docente en temas de interés simple y compuesto aplicado a los profesores becados por el PRONABEC.

En conclusiones y recomendaciones, presentamos de qué manera se pudieron alcanzar los objetivos planteados en el capítulo 1; y respondemos la pregunta de investigación. Además, compartimos algunas sugerencias relacionadas con el tema central de esta investigación.

Por último, esperamos que esta tesis sea nuestro inicio en una serie de investigaciones en temas de didáctica de la matemática financiera y formación ciudadana.

ÍNDICE

Capítulo 1: Antecedentes y planteamiento del problema de investigación

Resumen

En este capítulo se presenta los antecedentes para esta tesis haciendo un recorrido por diversas investigaciones que están relacionadas con la matemática financiera y la formación ciudadana. Luego, se formula el problema de investigación y su justificación. Seguidamente, establecemos el objetivo general y los objetivos específicos. Finalmente, se formula la pregunta de investigación.

1.1. Antecedentes

D'Ambrosio (1980, 1985) es uno de los primeros investigadores en tratar sobre la dimensión política de la educación matemática en sus artículos sobre etnomatemática. Por otro lado, Ernest (1991) ofrece una perspectiva de las matemáticas que, además de considerar su naturaleza, conecta tal conocimiento con un conjunto más complejo de visiones sobre la sociedad, la política y los diversos aspectos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Siguiendo esta línea de investigación, Skovsmose (1994) recopila el trabajo de más de una década, desarrollando temas como la matemática crítica, la competencia democrática, la alfabetización matemática y el conocer reflexivo. Así pues, estos tres investigadores sirven de referencia para los trabajos que relacionan la matemática con la sociedad, la política, la crítica y la reflexión.

Actualmente en Latinoamérica, la investigadora colombiana Vanegas (2013) y el investigador mexicano Aguilar (2014) estudian la relación entre educación matemática y ciudadanía. En la tesis titulada *Competencias ciudadanas y desarrollo profesional en matemáticas* Vanegas (2013) propone una caracterización a priori (utilizando una lista de indicadores) en base a cuatro ejes del desarrollo de la competencia ciudadana. Además, por el lado brasileño, un punto de coincidencia en los trabajos de Sousa, Torraca, y Nasser (2013), Kistemann y Pecoraro (2013), Coutinho y Teixeira (2013), Cardoso y Monteiro (2013), Castelli, Grando y Marasini (2013), y Kistemann (2013) es la importancia de la matemática financiera en la formación de ciudadanos críticos. Así pues, en esta nueva concepción, un curso de matemática financiera debe crear un espacio para la reflexión y no presentarse solamente como un uso repetitivo de fórmulas. Dentro de esta misma línea de investigación, Kistemann y Pecoraro (2013) y Kistemann (2013) coinciden en que la matemática financiera es una herramienta que sirve a los ciudadanos para la toma de decisiones en la vida cotidiana. Por otro lado, Castelli, Grando, y Marasini (2013), luego de realizar una investigación cualitativa, usando encuestas, encontraron que los profesores no tenían bien definido el significado de educación financiera, la cual incluye a la matemática financiera. Es por ello que debemos tener presente que un curso tradicional de matemática financiera no es suficiente para tener una educación financiera, como se advierte en Kistemann (2013). Además, Sousa et al. (2013) señalan que una de las carencias de los cursos tradicionales de matemática financiera, es que no hay aplicaciones que impliquen problemas del día a día. En esta nueva concepción de matemática financiera, donde se propone un curso que vaya más allá de las operaciones repetitivas y sirva como una oportunidad para la reflexión y la crítica; es necesario el uso de problemas contextualizados, basados en situaciones reales, como se indica en Kistemann, y Pecoraro (2013). Finalmente, uno de los problemas más graves para el desarrollo de matemática financiera en la escuela secundaria, es la falta de formación de los docentes en estos temas. Sousa et al. (2013) advierten en sus respectivas investigaciones, que los profesores no están preparados para enseñar matemática financiera de manera eficiente en la escuela secundaria.

1.2. Planteamiento del problema y justificación

El ciudadano de hoy en día vive en un mundo donde continuamente tiene que tomar decisiones relacionadas con temas de matemática financiera. Por ejemplo, al financiar la compra de una vivienda o auto, al ahorrar para una compra futura, al elegir su fondo de pensiones y hasta para decidir si compra un artículo con tarjeta de crédito o al contado.

Si se observa los siguientes titulares del diario peruano Gestión: “Uso de líneas de crédito de tarjetas bancarias es el más elevado en casi cinco años” (Martes, 18 de junio del 2013); “Apetito de la banca impulsaría sobreendeudamiento” (Lunes, 06 de enero del 2014); “Morosidad de tarjetas de crédito en máximo histórico” (Viernes, 07 de marzo del 2014) y; “Deuda de las familias se extiende a 2,3 veces sus ingresos, según el BCR” (Lunes, 26 de mayo del 2014), podemos darnos cuenta que muchos ciudadanos en nuestro país, no han sabido manejar sus finanzas personales. Es por ello, que cada vez se hacen más campañas que incentivan a que los consumidores estén bien informados. Sin embargo, se cree que el problema ahora radica en la formación, más que en la información, y es precisamente la matemática financiera, esa parte del conocimiento que se necesita para la formación de ciudadanos responsables en sus decisiones financieras. Por lo tanto, urge una alfabetización financiera a gran escala, que se pueda iniciar desde la escuela secundaria.

A nivel mundial, las recientes crisis financieras han despertado la preocupación por formar ciudadanos que sepan manejar, de manera responsable, sus finanzas personales. Es así que, ya en muchos países del mundo, la educación financiera forma parte del currículo de enseñanza básica y media. Muestra de ello es la prueba PISA 2012 que fue la primera en evaluar la competencia financiera, la cual se aplicó a 65 países sin incluir al Perú. Cabe señalar que en esta evaluación de la competencia financiera se hicieron preguntas de contexto real, cuya solución sólo requería operaciones aritméticas básicas. Esto no significa que la matemática financiera no sea un campo que se deba dominar para tener competencia financiera, todo lo contrario, es indispensable para la toma de decisiones responsables.

A nivel de Latinoamérica y el Caribe, la Corporación Andina de Fomento ha realizado un estudio sobre la educación financiera (CAF, 2013) donde indica que,

> A pesar de estos avances, los niveles de pobreza y desigualdad siguen siendo altos y la exclusión financiera continúa afectando a sectores, tanto de la población urbana

como rural, lo que puede dificultar el futuro desarrollo económico y social de la región.

Por otra parte, el crecimiento económico trae consigo la necesidad de que las personas sepan cómo manejar sus finanzas personales y beneficiarse de los mercados financieros más desarrollados. En este sentido, las iniciativas de educación financiera pueden convertirse en un complemento importante de los procesos de inclusión financiera y las medidas de reducción de la pobreza. p13.

En el Perú, la Superintendencia de Banca, Seguros y AFP (SBS) propuso que la educación financiera sea incluida en el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular (DCN 2009). Es así que el DCN 2009 (Perú, 2009) propone la revisión de los temas: interés simple, interés compuesto y modelos financieros, en el cuarto año de secundaria. Sin embargo, no todos los textos escolares se han actualizado.

El Marco Curricular Nacional 2014 (Perú, 2014), junto con los Mapas de Progreso y las Rutas de Aprendizaje, proponen que los ciudadanos tengan una formación matemática que les permita desempeñarse en la vida cotidiana y hacer frente a los problemas de la vida real, lo cual está acorde con las competencias y el marco conceptual de matemáticas del proyecto OCDE/PISA. Además, en Perú (2014), se indica que los ciudadanos deben saber aprovechar los beneficios de los productos financieros, pero de manera responsable. En este nuevo marco, los temas de matemática financiera deben ser revisados en el VII ciclo (es decir, en 3º, 4º y 5º de secundaria); sin embargo, en los libros entregados por el Ministerio de Educación del Perú a los estudiantes de las escuelas públicas el 2014, sólo se incluyen los temas de interés simple e interés compuesto en el texto de cuarto de secundaria, lo cual no es suficiente para hacer frente a los problemas de la vida real que muchas veces están relacionados con anualidades y planes de pagos.

Según el Diseño Curricular Básico Nacional para la Carrera Profesional de Profesor de Educación Secundaria en la Especialidad de Matemática (Perú, 2010), los futuros profesores de matemática de secundaria revisan los temas de interés simple y compuesto como parte del capítulo sucesiones y progresiones en el curso Matemática II del segundo semestre de estudio; sin embargo, el tema anualidades o algún otro modelo financiero, no forma parte de dicho currículo.

Con respecto a la ciudadanía, el Marco Curricular Nacional 2014 (Perú, 2014) considera como uno de los aprendizajes fundamentales que el estudiante "ejerce su ciudadanía" asociada a seis competencias, una de las cuales es "actúa responsablemente respecto a los recursos económicos" para lo cual el estudiante debe desarrollar las siguientes capacidades:

- Comprende las relaciones entre los elementos del sistema económico y financiero.
- Toma conciencia que es parte de un sistema económico.
- Gestiona los recursos de manera responsable.

En el DCN 2009 (Perú, 2009) se proponen temas transversales que responden a los problemas nacionales y de alcance mundial; uno de ellos es "educación para la convivencia, la paz y la ciudadanía". Así pues, los temas transversales deben ser previstos y desarrollados al interior de todas las áreas curriculares, incluso dentro de los cursos de matemáticas.

Se cree que para hacer masivos los conocimientos básicos de matemática financiera, estos temas deben ser tratados en la educación secundaria. Además, es muy importante que los cursos de matemática financiera estén enmarcados en la formación ciudadana, creando espacios para la reflexión, la crítica y la toma de decisiones. Es así que, la alfabetización financiera requiere la participación de los profesores de educación secundaria; sin embargo, uno de los problemas más graves para el desarrollo de esta alfabetización en la escuela secundaria, es la falta de formación de los docentes en estos temas.

Por todo lo expuesto, es pertinente que se plantee la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo deben formarse los profesores de matemática de educación secundaria en temas de interés simple y compuesto para participar activamente en la alfabetización financiera dirigida a los futuros ciudadanos del Perú?

1.3. Objetivos de la Investigación

1.3.1. Objetivo general

Valorar un programa de formación de profesores en temas de interés simple y compuesto, con un enfoque reflexivo y crítico, orientado a la formación de ciudadanos responsables en la toma de decisiones financieras.

1.3.2. Objetivos específicos

1. Identificar las reflexiones de los profesores de matemática de educación secundaria acerca del uso de la matemática (y en particular de la matemática financiera) en la formación de ciudadanos.
2. Desarrollar una propuesta de contenidos correspondiente al significado institucional pretendido para los temas interés simple y compuesto dirigido a profesores de matemática de educación secundaria.
3. Analizar los resultados obtenidos en la implementación de un programa de formación de profesores en los temas de interés simple y compuesto, dirigido a profesores de matemática de educación secundaria.

Capítulo 2: Marco Teórico y Metodológico

Resumen

En este capítulo se presenta un breve resumen del Enfoque Ontosemiótico, en el que hacemos un especial énfasis en los indicadores de idoneidad didáctica. También hacemos referencia a la Educación Matemática Crítica y la Formación Ciudadana. Luego, se presentan los indicadores según ejes de competencia ciudadana y su relación con la educación matemática. Seguidamente, se definen algunos de los términos usados en este documento. Finalmente, se describe la metodología usada para el logro de los objetivos propuestos, así como cada uno de los elementos que la componen.

2.1. La Educación Matemática Crítica y la Formación Ciudadana

La Educación Matemática Crítica (EMC) es una corriente filosófica dentro de la investigación en didáctica de las matemáticas que relaciona los usos de la matemática y la educación matemática en la sociedad, con los aspectos políticos, éticos y económicos; así como su relación con la justicia social, la equidad y la democracia.

La EMC surge dentro de la creación de la teoría crítica, la cual tiene sus inicios en la escuela de Frankfurt, sitio de gran importancia intelectual, pues en su momento esta escuela expresó la crisis de la cultura que se vivía desde mediados del siglo XX a consecuencia de la crítica a la razón, al hombre moderno y a la dialéctica de Hegel (quien simbolizaba a los pensadores filosóficos de la era moderna). Cabe señalar que el genocidio de la II guerra mundial da pie para hacer una profunda critica de la razón y cómo es ésta usada por el hombre. Además, Adorno y Horkheimer (1994) mencionan que las ideas planteadas por el racionalismo permitió el surgimiento y desarrollo tecnológico-científico de la sociedad occidental, dando la sensación de vivir en una realidad llena de ideales de progreso, igualdad y democracia, cuando en realidad tan sólo estamos en un mundo vacío, lleno de injusticias e imperfecciones; de igual forma los autores mencionan que las ideas de progreso, igualdad y democracia, finalmente terminan al servicio del capitalismo industrial, y la educación se vuelve en tan sólo un proceso de formación de mano de obra y de igualdad entendida desde la uniformidad, la cual posibilita el consumo.

Algunos académicos consideran al danés Ole Skovsmose como el “padre de la educación matemática crítica” por conducir a la EMC a un lugar prominente dentro del campo de la investigación en didáctica de las matemáticas. En Skovsmose (1994), el autor compila los resultados de sus investigaciones hasta ese momento y propone los principios de una filosofía de la educación matemática crítica.

Uno de los objetivos de la EMC está relacionado con la democratización de la educación, la formación del estudiante no sólo en espacios matemáticos formales o cognitivos, sino también como un ciudadano crítico, reflexivo y transformador de su propia realidad.

Según Rodríguez (2013), un ciudadano pertenece a una comunidad política y tiene el deber de participar en ella y la obligación de colaborar en sus actividades y desarrollo; pero también tiene el derecho de desarrollarse íntegramente y que el Estado le brinde una educación de calidad que le permita desarrollar todas sus capacidades. Así pues, dentro de la EMC, se interpreta a la educación matemática como un componente fundamental en la formación de ciudadanos capaces de construir y mantener sociedades democráticas.

La educación, en general, debe contribuir a formar ciudadanos que tengan una buena calidad de vida, que convivan en un clima de tolerancia, respeto, justicia y que integren sus conocimientos adquiridos en la comunidad en la valoración ética y moral. Mientras que, en particular la educación matemática no se debe quedar en lo abstracto, sino que el conocimiento siempre debe remitir al desarrollo de los propios sujetos del aprendizaje.

Cuando los ciudadanos poseen una alfabetización matemática se encuentran en una posición que les permite identificar, señalar, evaluar y criticar la manera en que la matemática se utiliza en su entorno político y social (Aguilar, 2014). De manera paralela, los ciudadanos sin una alfabetización matemática adecuada pueden ser víctimas del engaño producido a través de propuestas o discursos fundamentados matemáticamente. Además, en la vida cotidiana puede afectar las finanzas personales el no estar preparado matemáticamente a la hora de tomar decisiones relacionadas con el manejo del dinero.

Así pues, la EMC aboga por impulsar una educación matemática que permita a los ciudadanos entender, identificar y evaluar la manera en que la matemática se utiliza en su sociedad, y la forma en que es utilizada por sus líderes y gobernantes. Aquí se supone que la alfabetización matemática es una condición necesaria (aunque no suficiente) para construir sociedades con ciudadanos activos y capacitados para participar en las discusiones y decisiones que configuran a su sociedad.

2.1.1. Definición de términos

A continuación se definen los términos “educación financiera”, “competencia financiera”, “matemática financiera” y “alfabetización financiera” utilizados en el desarrollo de la presente tesis.

En su *Recommendation on Principles and Good Practices for Financial Education and Awareness*, la OCDE (2005) definía la **educación financiera** como,

> El proceso por el cual los consumidores/inversores financieros mejoran su comprensión de los productos, conceptos y riesgos financieros y, a través de la información, la instrucción o el asesoramiento objetivo, desarrollan las destrezas y la confianza para ser más conscientes de los riesgos y oportunidades financieras, tomar decisiones bien fundadas, saber a dónde acudir en busca de ayuda y llevar a cabo otras actuaciones eficaces para mejorar su bienestar financiero. (p. 4)

Según el marco PISA 2012 al que se refiere la OCDE (2013),

> La **competencia financiera** hace referencia al conocimiento y comprensión de los conceptos y riesgos financieros, y a las destrezas, motivación y confianza para aplicar dicho conocimiento y comprensión con el fin de tomar decisiones eficaces en distintos contextos financieros, mejorar el bienestar financiero de los individuos y la sociedad, y permitir la participación en la vida económica. (p. 12)

La **matemática financiera** es una rama de la matemática aplicada que se ocupa del estudio del valor del dinero en el tiempo y de las operaciones financieras; es decir, no es otra cosa que la aplicación de las matemáticas en el ámbito de las finanzas.

La **alfabetización financiera** es la habilidad de tener un juicio informado y tomar decisiones efectivas sobre el uso y manejo del dinero (Gómez-Soto, 2009).

En Mancebón y Pérez Ximénez (Julio, 2014), los autores afirman que la formación en matemáticas es clave para desarrollar habilidades financieras. Es decir, la matemática es el medio por cual se adquieren las destrezas financieras, siendo los estudiantes más capacitados en matemáticas los que obtuvieron mejores puntuaciones en las pruebas de evaluación de las habilidades financieras PISA 2012 en España.

2.2. Indicadores de desarrollo de competencia ciudadana y educación matemática

En Vanegas y Giménez (2010) los autores reflexionan sobre algunos significados que otorgan los futuros docentes a la competencia ciudadana y su relación con la educación matemática en la construcción de tareas. Para el análisis de los posicionamientos, realizan una caracterización a priori en base a cuatro ejes del desarrollo de la competencia ciudadana:

(1) Apropiación política, activa y crítica de saberes;
(2) Participación constructiva y responsable y uso de herramientas sociales;
(3) Apropiación de una perspectiva crítica a través de lo matemático;
(4) Práctica de la convivencia, democracia y la responsabilidad.

A cada eje se asocian unas categorías surgidas de los desarrollos teóricos y prácticas sobre competencia ciudadana; es decir, se formulan las bases para reconocer este sistema de categorías en el desarrollo profesional en los siguientes aspectos:

- Matemático/epistémico;
- Didáctico;
- Actitud profesional.

En cada categoría se establecen indicadores relacionados con tres tipos de conocimiento profesional que se codifican como se observa en las tablas (Vanegas, 2013).

En la presente tesis, se usa esta caracterización propuesta para relacionarla con las respuestas obtenidas por los profesores en la aplicación del Cuestionario 1 (ver anexo 1).

En las siguientes páginas se presentan las cuatro tablas que corresponden a cada uno de los ejes del desarrollo de la competencia ciudadana. Dichas tablas contienen las categorías e indicadores de ejes.

El eje 1, llamado de *apropiación política, activa y crítica de saberes*, no tiene que ver solamente con la aprehensión de las realidades próximas y generales sobre ciudadanía y matemáticas, sino también, con saber asignar un valor a las matemáticas para que puedan empoderar al alumnado. Y ello, implica tener claro qué sentido se da a la naturaleza de los saberes matemáticos que van a ser usados en el aula, implica desarrollar actitudes y pensamientos, los recursos, las posibilidades de las matemáticas de transformación del mundo que nos rodea.

Tabla 1. Eje 1: Apropiación política, activa y crítica de saberes

	CONOCIMIENTO MATEMÁTICO		CONOCIMIENTO DIDÁCTICO		ACTITUD PROFESIONAL	
Problematización humanizada	Adoptar una lógica de planteamiento y resolución de problemas humanos (Políticas y problemáticas de los gobiernos, economía; bienestar de las personas; relación entre clases sociales, etc.)	**P H M**	Contribuir a la construcción de ideas matemáticas aue ayuden al alumno a empoderarse (Reconocer y asumir un curriculo abierto, dar valor al contexto, reconocer la diversidad de procesos, y formas de construcción, etc.)	**P H D**	Valorar conocimiento y pensamiento matemático de forma humanista	**P H P**
Convivencia, identidad, solidaridad y cohesión social	Saber reconocer diferentes maneras de resolver problemas, y pensar matemáticamente	**C I M**	Reconocer ideas y emociones de otros. Construir identidad por medio de autonomía y cohesión	**C I D**	Identificar/rechazar o hacer valer recursos, derechos y necesidades	**C I P**
Reconocimiento de identidades colectivas, en cuanto apertura al otro	Reconocer el valor del conocimiento académico siendo etnomatemático. Identificar los diferentes roles y posibles funciones sociales de las matemáticas en la sociedad cambiante y compleja.	**I I M**	Conocer y valorar la importancia de modelos de enfoque investigativo y colaborativo. Reconocer la importancia de plantear actividades matemáticas que se relacionen con fenómenos sociales 7 tengan sentido para el alumnado	**I I D**	Identificar y reconocer situaciones de exclusión. Cuestionar el poder de las matemáticas y de la educación matemática en la sociedad y cómo se ejerce ese poder	**I I P**
Identidad democrática en tolerancia, respeto y negociación	Identificar el valor de la igualdad, el equilibrio y la equivalencia en matemáticas, así como su sentido histórico. Reconocer el valor de modelos multivariantes (en contextos económicos, culturales, políticos o sociales)	**I D M**	Tratar problemas y conflictos que superen discriminaciones y desigualdades	**I D D**	Identificar tipos de pregunta que pueden dar lugar a una comunicación negociada.	**I D P**
Reconocimiento de las construcciones matemáticas de pueblos y culturas	Conocer formas de resolver problemas asociados a culturas diferentes, reconocer cómo son o fueron sus modos de pensamiento para resolver problemas sociales Reconocer el papel de las matemáticas en la sociedad y en la cultura	**R C M**	Organizar herramientas que permitan discutir sobre el valor de experiencias multiculturales. Destacar concpeciones alternativas y representaciones sociales de orígen cultural	**R C D**	Reconocer elementos de identidad y deferencia cultural	**R C P**

Fuente: Vanegas (2013).

Para caracterizar este segundo eje, los autores pensaron en el desarrollo de unas matemáticas que se construyen desde la colaboración. Por ello, identificaron varios elementos: (a) accesibilidad, (b) sostenibilidad, (c) liderazgo deliberativo, (d) coherencia y compromiso, (e) coflexión, (f) transformación y movilización.

Tabla 2. Eje 2: Participación constructiva y responsable y uso de herramientas sociales

	CONOCIMIENTO MATEMÁTICO		CONOCIMIENTO DIDÁCTICO		ACTITUD PROFESIONAL	
Accesibilidad creativa y ubicación en el medio	Promover discusiones sobre el papel de las matemáticas en la conservación de la especie humana como construcción social.	A C M	Dar oportunidades para reconocer información científica relevante asociada a fenómenos en la toma de decisiones sobre el entorno.	A C D	Construir una actitud investigadora sobre su propia práctica.	A C P
Interpretar el valor de la sostenibilidad en el quehacer matemático	Valorar el debate sobre el uso de las matemáticas en la construcción de modelos que ayudan en la interpretación y transformación de de los recursos naturales y del patrimonio.	I S M	Construir colectivamente mapas de acciones para promover conciencia sobre el impacto social del uso de las matemáticas	I S D	Tener conciencia del impacto de las decisiones docentes, en cuanto al desarrollo de una educación matemática con funciones de diferenciación y exclusión. (usar las matemáticas como filtros sociales , prestigio académico, etc.)	I S P
Consideración abierta de liderazgos deliberativos	Contribuir a la construcción de creaciones matemáticas con argumentos deliberativos.	L D M	Fomentar situaciones en las que se usen argumentos matemáticos para la toma de decisiones. Análizar beneficios y pérdidas posibles en dicho proceso.	L D D	Intervenir y desarrollar proyectos sociales matemáticos que fomenten la cooperación y el diálogo igualitario.	L D P
Coherencia y compromiso	Resolver problemas discutiendo colectivamente y asumiendo un análisis epistémico, para realizar una toma de decisiones responsable.	C C M	Promover gestión que lleve a reflexión comprometida	C C D	Reconocer la importancia de la implicación en la construcción colectiva en los procesos de resolución de problemas	C C P
Coflexión	Discutir sobre la matemática como un saber construido socialmente.	D C M	Generar procesos colectivos de reflexión e interrogación grupal en el desarrollo de prácticas matemáticas.	D C D	Considerar los pensamientos, acciones y experiencias de los demás, en la toma de decisiones de la comunidad.	D C P
Transformación y movilización	Dialogar sobre procesos matemáticos que contribuyan a interpretar y mejorar relaciones sociales.	T M M	Implementar, procesos reguladores de evaluación y transformación del conocimiento	T M D	Asumir intencionalidad colectiva encaminada a mejoras grupales	T M P

Fuente: Vanegas (2013).

En un tercer eje, los autores consideran la formación para que todos puedan acceder a ser ciudadanos críticos en un sistema democrático. Ellos piensan que las sociedades que manifiestan tradiciones autoritarias, tienden a descuidar o desechar (o incluso a combatir activamente) el pensamiento crítico, la capacidad de tomar decisiones independientes y el poder de actuación de la población en general para una ciudadanía democrática, lo que afecta también a la educación matemática y el propio pensar sobre la matemática misma.

Tabla 3. Eje 3: Apropiación de una perspectiva crítica a través de lo matemático

	CONOCIMIENTO MATEMÁTICO		CONOCIMIENTO DIDÁCTICO		ACTITUD PROFESIONAL	
Reconocimiento del valor de las matemáticas como promoción del pensamiento crítico.	Interpretar y reconocer la modelización y aplicaciones matemáticas. Valorizar sistemas simbólicos Análizar y sintetizar informaciones	P C M	Reconocer actividades y acciones encaminadas a desarrollar la capacidad de análisis en el alumnado Desarrollar pruebas y refutaciones	P C D	Construir una actitud cuestionadora. Superar el reconocimento de transformaciones de conocimiento	P C P
Uso de las matemáticas para analizar aspectos críticos de la sociedad (lo global o el entorno próximo del alumnado)	Construir las matemáticas en conexión con el contexto social en el que operan. Leer críticamente elementos de la historia de la matemática	A C M	Establecer criterios de construcción y de análisis de secuencias didácticas y justificaciones de contenido	A C D	Asumir la capacidad de equivocarse. Interpretar el error de "otros" de forma positiva	A C P
Reconocimiento de evolución crítica de las matemáticas en sí mismas	Reconocer conexiones en la historia de las ideas científicas	E C M	Reconocer que la confrontación en el aula ayuda a cosntruir conocimiento	E C D	Reconocer el valor de procesos críticos y reflexivos en la historia científica	E C P
Valoración de la educación matematica para ser ciudadanos informados	Leer, interpretar y construir para elaborar conclusiones y decisiones. Establecer relaciones que permiten contrastes	M I M	Ayudar a Identificar normas y metanormas	M I D	Colaborar a convivir y resolver conflictos	M I P
Mantenimiento de legitimidad de la creación de conocimiento matemático	Incorporar la idea de que las matemáticas son parte integrante de la construcción tecnológica.	L C M	Interpretar y devolver construcciones del alumnado, dando legitimidad al alumno	L C D	Promover la preparación para la vida política y social Incorporar a lo familiar, y en todo lo vivencial	L C P

Fuente: Vanegas (2013).

En cuanto al eje 4, llamado de ciudadanía y práctica, los autores consideraron subcategorías asociadas a (a) responsabilidad, (b) transparencia y justicia, (c) participación y (d) pluralidad. Si bien estas componentes son difíciles de asumir en una práctica inicial de un futuro profesor, o estudiante universitario, en la que hay poca experiencia escolar, pueden mostrarse actitudes o posiciones abiertas a dicho posicionamiento. En los indicadores de los tres grandes tipos de conocimiento, los autores consideran que se identificarán prácticas matemáticas que se asocian a la construcción de identidades culturales.

Tabla 4. Eje 4: Práctica de la convivencia, democracia y la responsabilidad

	CONOCIMIENTO MATEMÁTICO		DIDÁCTICOS (E/A)		ACTITUD PROFESIONAL	
Responsabilidad cultural, en cuanto alcance lo más amplio posible.	Intervenir en proyectos de alcance ciudadano Interpretación de manipulaciones matemáticas en noticias	**ICM**	Incidir en las posibles relaciones de poder en las interacciones de clase	**RCD**	Asumir , identidad responsable Participación Intervención en comunidad de investigación y aprendizaje	**RCP**
Apertura Identificar educación para la justicia y la paz.	Reconocer elementos de la construcción de historia y actualidad así como sus alcances respecto a lo que permiten entender.	**EJM**	Distinguir ejemplos que ayudan como instrumentos intelectuales	**EJD**	Identificar elementos estéticos, y distinguirlos de lo utilitario	**EJP**
Participación constructiva efectiva	Presentación creativa de ideas o procesos investigativos	**PCM**	Planificar, organizar procesos participativos y discutir sus éxitos o fracasos	**PCD**	Potenciar la intervención, desarrollo de iniciativas, dar aportes, relevantes	**PAP**
Pluralidad, identidad y valoración de diferencias	Realizar análisis crítico de las mismas, explicitar antidiscriminación	**PIM**	Asumir reglas, establecer acuerdos superarlas, elaborarlas.	**PID**	Identificar y respetar, rechazar situaciones de exclusión, discriminación.	**PIP**
Reconocimiento de construcción de relaciones pacíficas	Identificar la contribución de descubrimientos científicos asociados a lo pacífico o no	**RPM**	Exponer ideas propias, asumir conflictos, respeto, construyo relaciones que contribuyen a la convivencia comunitaria	**RPD**	Mantener actitudes pacificadoras	**RPP**

Fuente: Vanegas (2013).

2.4. El Enfoque OntoSemiótico (EOS)

La presente tesis se enmarca en la teoría y metodología de investigación matemática del Enfoque OntoSemiótico (EOS); ya que este modelo aporta herramientas teóricas para realizar el análisis didáctico de los episodios de clase; además, porque el principal resultado esperado de la aplicación del modelo es llegar a una valoración fundamentada de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción, lo que está acorde con nuestro objetivo general. Cabe señalar que el EOS, al ser un enfoque integrador, toma elementos de la EMC; es así que el EOS y la EMC cuentan con un número importante de trabajos realizados desde esas perspectivas según González (2014).

Este modelo trata de aportar herramientas teóricas para analizar conjuntamente el pensamiento matemático, los ostensivos que le acompañan, las situaciones y los factores que condicionan su desarrollo. Así mismo, se tienen en cuenta facetas del conocimiento matemático que pueden ayudar a confrontar y articular distintos enfoques de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje y progresar hacia un modelo unificado de la cognición e instrucción matemática.

En Godino, Batanero, y Font (2009) se hace referencia a diversos trabajos realizados en el marco del enfoque ontosemiótico, en los que se han propuesto y desarrollado cinco niveles para el análisis didáctico de procesos de estudio. Estos niveles son el resultado de un trabajo de síntesis teórica de diferentes análisis parciales consolidados en el área de didáctica de la matemática:

1. Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas (significados sistémicos);
2. Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos;
3. Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas;
4. Identificación del sistema de normas y metanormas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio (dimensión normativa);
5. Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

En la presente tesis se usan tres niveles de análisis didáctico, los cuales se describen en las siguientes páginas.

2.4.1. Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas

En este nivel de análisis se asume una concepción pragmatista – antropológica de las matemáticas, tanto desde el punto de vista institucional (sociocultural) como personal (psicológico). Se aplica, sobre todo, a la planificación e implementación de un proceso de estudio, donde la actividad de resolución de problemas es adoptada como elemento central en la construcción del conocimiento matemático.

En la parte central de la Figura 1 se indican las relaciones dialécticas entre enseñanza y aprendizaje, que supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales e institucionales. Así mismo, la enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales, y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados.

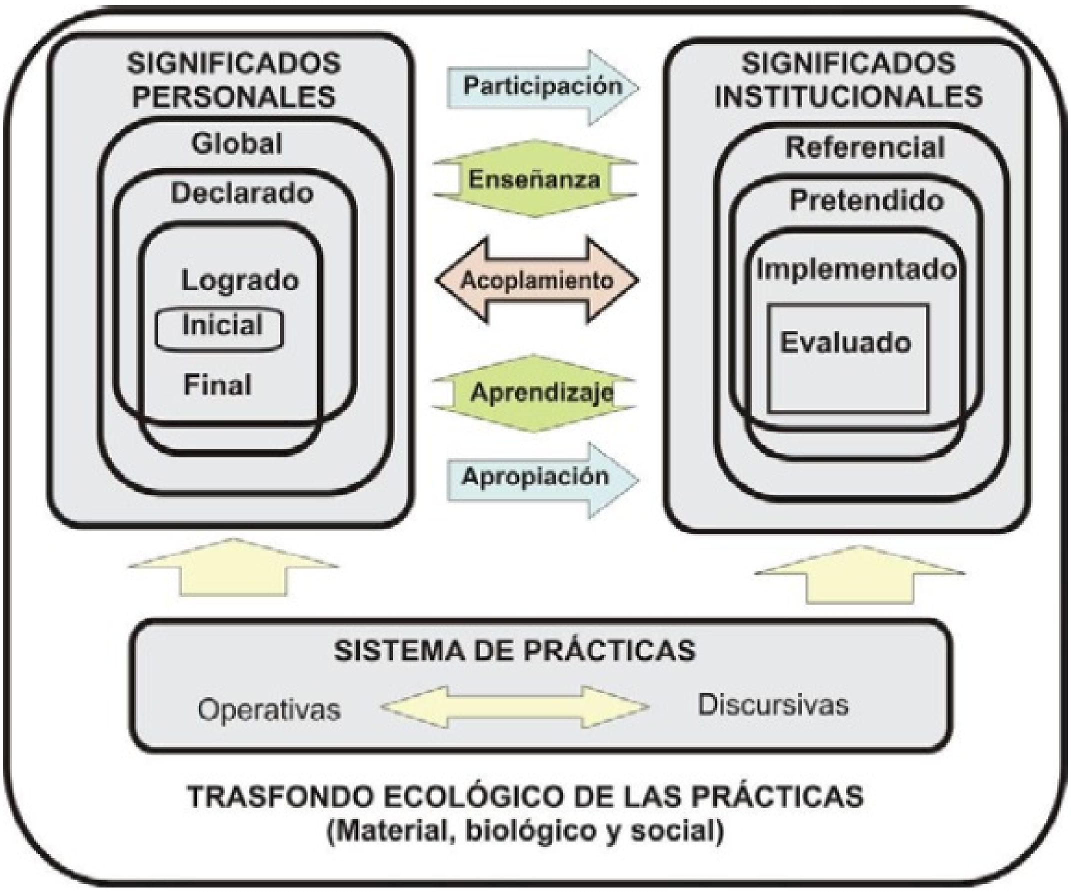


Figura 1. Tipos de significados institucionales y personales
Fuente: Godino, Batanero y Font (2009)

Con relación a los significados institucionales se tiene en cuenta los siguientes tipos:

- Implementado: en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
- Evaluado: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.
- Pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.
- Referencial: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico – epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto.

Respecto de los significados personales se proponen los siguientes tipos:

- Global: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático.
- Declarado: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
- Logrado: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen.

2.4.2. Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos

En este nivel se asume una noción interaccionista de objeto matemático y pragmatista del significado. Aquí los diversos medios de expresión, es decir los lenguajes, desempeñan un doble papel, a saber, de instrumentos del trabajo matemático y el de representación de los restantes objetos matemáticos.

Primer nivel: Configuraciones de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

Para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos. Si se considera, por ejemplo, los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación-problema (e.g., plantear y resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas) vemos el uso de lenguajes, verbales y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de conceptos, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella en tanto que acción compuesta, son satisfactorias. En consecuencia, cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática, activa un conglomerado formado por situaciones – problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulado en la configuración de la Figura 2 (Font y Godino, 2006, p. 69).

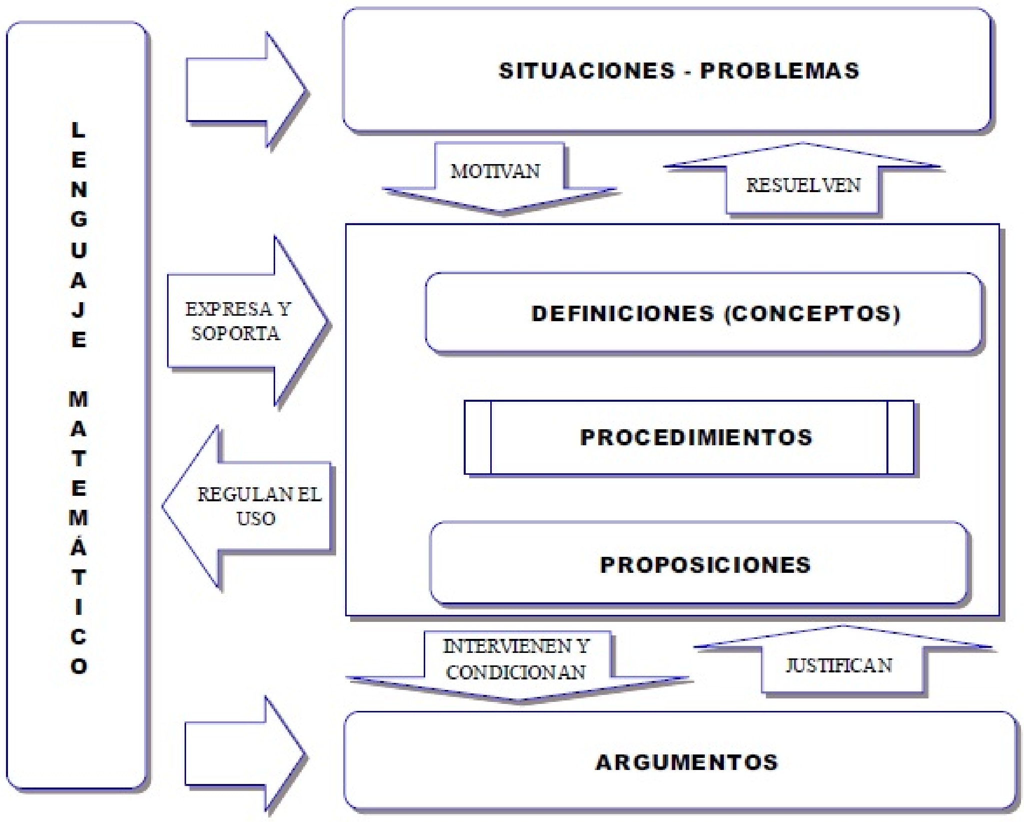


Figura 2. Configuración de objetos primarios
Fuente: Godino, Batanero y Font (2009)

Segundo nivel: Atributos contextuales

En el EOS la actividad matemática ocupa el lugar central y se modeliza en términos de sistema de prácticas operativas y discursivas. De estas prácticas emergen los distintos tipos de objetos matemáticos primarios, que están relacionados entre sí formando configuraciones. Por último, los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde cinco facetas o dimensiones duales, lo cual conlleva a la siguiente tipología de objetos secundarios: personal-institucional, unitario-sistémico, intenso-extensivo, expresión-contenido y ostensivo-no ostensivo. (Ver Figura 3)

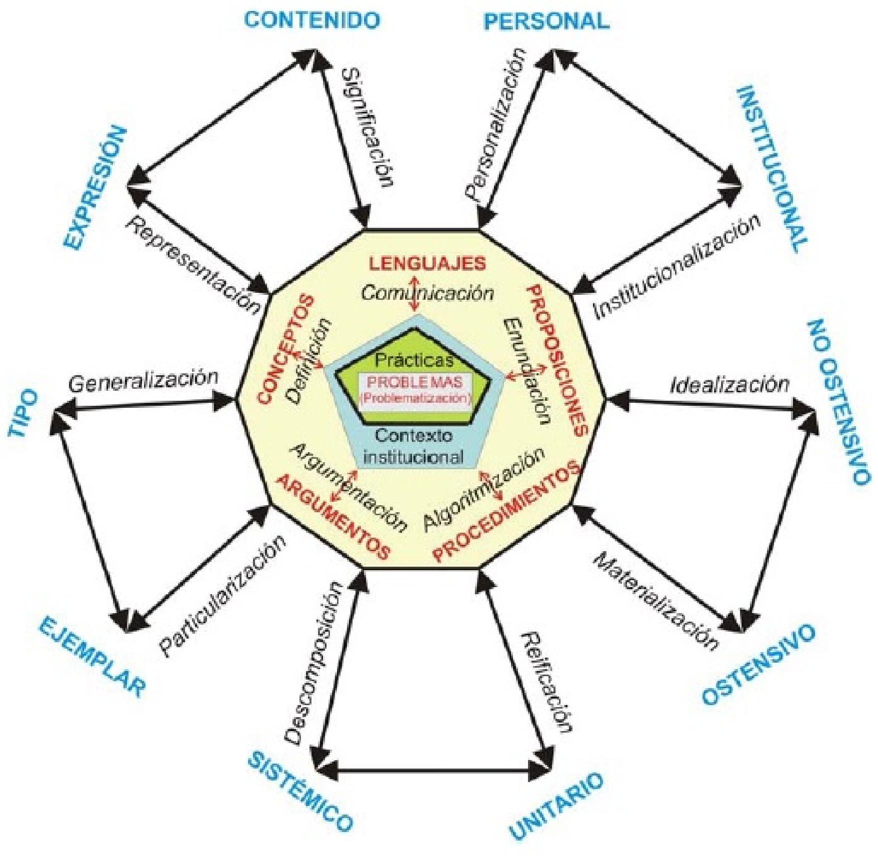


Figura 3. Configuración de objetos y procesos
Fuente: Godino, Batanero y Font (2009)

2.4.3. Criterios de idoneidad didáctica

La idoneidad didáctica, desglosada en una serie de idoneidades parciales, es concebida como criterio general de adecuación y pertinencia de las acciones realizadas por los agentes educativos, de los conocimientos puestos en juego y de los recursos usados en un proceso de estudio matemático. En cada una de las facetas o idoneidades parciales, se ha identificado un sistema de indicadores empíricos que constituye una guía para el análisis y reflexión sistemática y que aporta criterios para la mejora progresiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje. (Ver Figura 4)

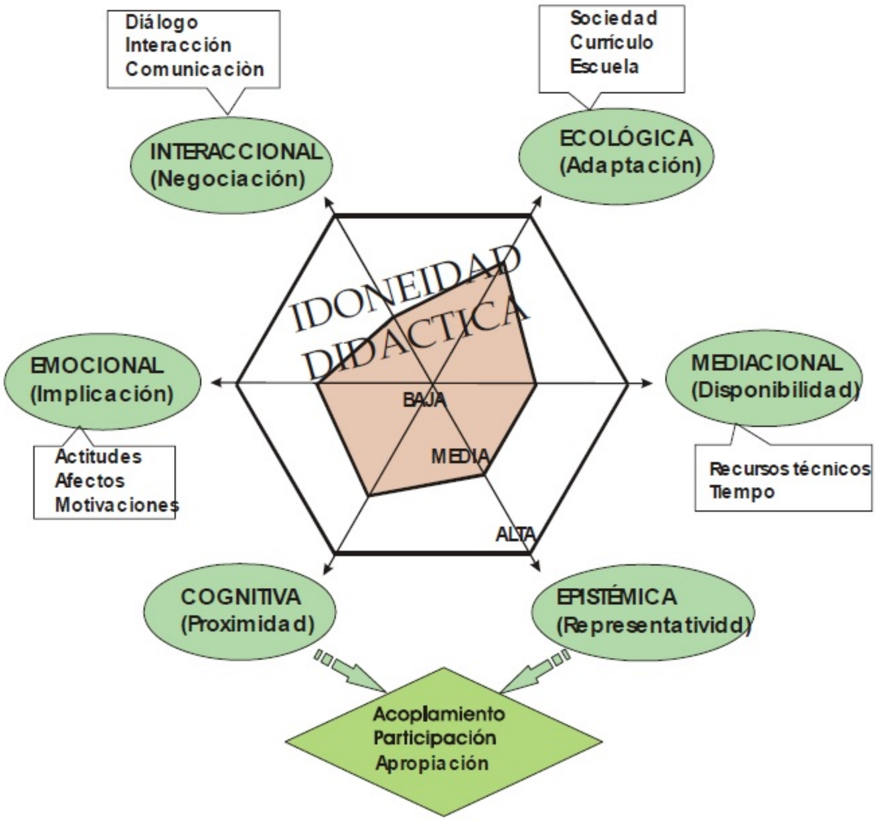


Figura 4. Componentes de la idoneidad didáctica
Fuente: Godino, Batanero y Font (2009)

2.5. Indicadores de idoneidad didáctica

La noción de idoneidad didáctica se puede aplicar al análisis de un proceso de estudio puntual implementado en una sesión de clase, a una unidad didáctica, o al desarrollo de un curso o una propuesta curricular (Godino, 2011).

Cada una de las seis facetas correspondientes a los criterios de idoneidad didáctica tiene sus respectivos componentes, y en esta parte se detallan (en las seis primeras tablas) los indicadores de idoneidad didáctica que corresponden a cada uno de dichos componentes.

Tabla 5. Componentes e indicadores de idoneidad epistémica

Idoneidad epistémica	
Se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.	
Componentes:	**Indicadores:**
Situaciones-problemas	- Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. - Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización)
Lenguajes	- Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismas. - Nivel del lenguaje adecuado a los estudiantes a que se dirige. - Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación.
Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	- Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen. - Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado. - Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos.
Argumentos	- Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen. - Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.
Relaciones	- Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí. - Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas.

Fuente: Godino (2011).

Tabla 6. Componentes e indicadores de idoneidad cognitiva

Idoneidad cognitiva	
Expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.	
Componentes:	**Indicadores:**
Conocimientos previos (Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	- Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio). - Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	- Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo. - Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes.

Aprendizaje: (Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	- Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos, comprensiones y competencias pretendidas: - Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia metacognitiva. - La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia. - Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.

Fuente: Godino (2011).

Tabla 7. Componentes e indicadores de idoneidad interaccional

Idoneidad interaccional	
Un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y por otra parte permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.	
Componentes:	**Indicadores:**
Interacción docente-discente	- El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.). - Reconoce y resuelve los conflictos de los alumnos (se hacen preguntas y respuestas adecuadas, etc.). - Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento. - Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. - Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase.
Interacción entre alumnos	- Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes. - Tratan de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos. - Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.
Autonomía	- Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos).
Evaluación formativa	- Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos.

Fuente: Godino (2011).

Tabla 8. Componentes e indicadores de idoneidad mediacional

Idoneidad mediacional	
Grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.	
Componentes:	**Indicadores:**
Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores)	- Se usan materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido. - Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	- El número y la distribución de los alumnos permiten llevar a cabo la enseñanza pretendida. - El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora). - El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido.
Tiempo (De enseñanza colectiva /tutorización; tiempo de aprendizaje)	- El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida. - Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema. - Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.

Fuente: Godino (2011).

Tabla 9. Componentes e indicadores de idoneidad afectiva

Idoneidad afectiva	
Grado de implicación (interés, motivación, …) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad afectiva está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.	
Componentes:	**Indicadores:**
Intereses y necesidades	- Las tareas tienen interés para los alumnos. - Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.
Actitudes	- Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. - Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Emociones	- Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas. - Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

Fuente: Godino (2011).

Tabla 10. Componentes e indicadores de idoneidad ecológica

Idoneidad ecológica	
Grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.	
Componentes:	**Indicadores:**
Adaptación al currículo	- Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.
Apertura hacia la innovación didáctica	- Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva. - Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo.
Adaptación socio-profesional y cultural	- Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes.
Educación en valores	- Se contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico.
Conexiones intra e interdisciplinares	- Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares.

Fuente: Godino (2011).

En las tablas anteriores se han identificado algunos indicadores de idoneidad para las seis facetas que se proponen en el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático. Dichas facetas no se deben considerar como factores independientes, ya que de hecho se producen interacciones entre las mismas. Es por ello que en la siguiente tabla se muestran los componentes e indicadores de interacciones entre facetas.

Tabla 11. Componentes e indicadores de idoneidad de interacciones entre facetas

Interacciones entre facetas	
Aquí incluimos algunos indicadores de idoneidad relativos a interacciones entre facetas.	
Componentes:	**Indicadores:**
Epistémica-ecológica	- El currículo propone el estudio de problemas de ámbitos variados como la escuela, la vida cotidiana y el trabajo.
Epistémica-cognitiva-afectiva	- El contenido del estudio (fenómenos explorados en las diferentes áreas de contenido, formulando y justificando conjeturas) tiene sentido para los estudiantes en los distintos niveles y grados. - Los estudiantes tienen confianza en sus habilidades para enfrentar problemas difíciles y mantienen su perseverancia aun cuando la tarea sea compleja. - Se estimula a los estudiantes a reflexionar sobre sus razonamientos durante los procesos de resolución de problemas de manera tal que son capaces de aplicar y adaptar las estrategias que han desarrollado en otros problemas y contextos. - Las tareas que los profesores seleccionan para evaluar son representativas de los aprendizajes pretendidos.

Epistémica-cognitiva mediacional	- El uso de recursos tecnológicos induce cambios positivos en el contenido de enseñanza, en los modos de interacción, motivación y en el aprendizaje de los estudiantes.
Cognitiva-afectiva-interaccional	- Las explicaciones dadas por los estudiantes incluyen argumentos matemáticos y racionales, no solamente descripciones de procedimientos. - Se incluyen contenidos motivadores, con adaptaciones razonables y apropiadas, que promueven el acceso y el logro de todos los estudiantes.
Ecológica-instruccional (papel del docente y su formación)	- El profesor es comprensivo y dedicado a sus estudiantes. - El profesor conoce y entiende profundamente las matemáticas que enseña y es capaz de usar ese conocimiento con flexibilidad en sus tareas de enseñanza. - El profesor tiene amplias oportunidades y apoyo para incrementar y actualizar frecuentemente sus conocimientos didáctico-matemáticos.

Fuente: Godino (2011).

El tiempo dedicado a la enseñanza y el aprendizaje, y su gestión por parte del profesor y de los estudiantes, es un componente determinante de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio. En la siguiente tabla se incluyen algunos indicadores de idoneidad temporal en relación a las facetas epistémica, cognitiva, instruccional y ecológica.

Tabla 12. Componentes e indicadores de idoneidad temporal

Idoneidad temporal y su relación con las restantes facetas	
El factor tiempo ha sido incluido como un recurso más en la faceta mediacional, junto con los recursos tecnológicos. Sin embargo, el tiempo interacciona también con las diversas facetas.	
Componentes:	**Indicadores:**
Temporal-epistémico	- El contenido y sus diversos significados se distribuyen de manera racional a lo largo del tiempo asignado al estudio.
Temporal-cognitivo	- Los objetivos de aprendizaje tienen en cuenta las etapas de desarrollo evolutivo de los estudiantes.
Temporal-instruccional	- La gestión del tiempo instruccional tiene en cuenta los diversos momentos requeridos para el desarrollo de los distintos tipos de aprendizajes (exploración, formulación, comunicación, validación, institucionalización, ejercitación, evaluación).
Temporal-ecológico	- El tiempo asignado al proceso de estudio en el diseño curricular es adecuado para lograr el aprendizaje del contenido programado.

Fuente: Godino (2011).

2.6. Metodología

La presente tesis es una investigación cualitativa de tipo exploratoria y descriptiva, según la clasificación propuesta por Toro & Parra (2010). Ya que inicialmente se realizó un estudio exploratorio para identificar los conocimientos de los profesores y los materiales que ellos usan, en relación a los temas de matemática financiera. Además, se describen detalladamente, situaciones, eventos, personas, interacciones y comportamientos observados.

La Educación Matemática Crítica (EMC) y el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) son los principales marcos teóricos utilizados. La EMC relaciona los usos de la matemática y la educación matemática en la sociedad, con la dimensión política y la formación ciudadana. Además, se incluyen los indicadores de competencia ciudadana y su relación con educación matemática. Por otro lado, el EOS brinda una serie de herramientas teóricas de análisis; es decir, este enfoque contiene niveles bien definidos de su estructura, configuraciones didácticas e idoneidades didácticas parciales, los cuales permiten el análisis de los problemas desde distintas dimensiones.

Para lograr el objetivo general *"Valorar un programa de formación de profesores en temas de interés simple y compuesto, con un enfoque reflexivo y crítico, orientado a la formación de ciudadanos responsables en la toma de decisiones financieras"* se propuso descomponerlo en tres objetivos específicos señalados.

Para el logro del objetivo específico 1 *"Identificar las reflexiones de los profesores matemática de educación secundaria acerca del uso de la matemática (y en particular de la matemática financiera) en la formación de ciudadanos;* se aplicó el Cuestionario 1 (ver Anexo1). Dicho cuestionario fue validado por una profesora del Instituto de Investigación para la Enseñanza de las Matemáticas (IREM), de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). Además, el cuestionario se aplicó a una muestra intencional, conformada por el grupo de profesores de matemática de la Carrera Pública Magisterial becados por el Programa Nacional de Becas y Crédito Educativo (PRONABEC), para estudiar la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas con mención en Educación Secundaria en la PUCP. Las respuestas obtenidas fueron clasificadas según los indicadores de competencia ciudadana y su relación con la educación matemática propuestos por Vanegas (2013). Luego de las tres sesiones de clase donde dichos profesores estudiaron los temas de interés simple y compuesto, se les asignó una tarea llamada Tarea 2, debido a que era la segunda tarea del curso del que formaban parte estas sesiones (ver Anexo 2); ahí se les plantearon preguntas sobre la relación entre matemática y la formación de ciudadanos.

Para el logro del objetivo específico 2 *"Desarrollar una propuesta de contenidos correspondiente al significado institucional pretendido para los temas interés simple y compuesto dirigido a profesores de matemática de educación secundaria"*; se organizó el significado institucional de referencia de los temas interés simple y compuesto a partir de la elaboración de configuraciones epistémicas de cada una de las tareas contenidas en los textos seleccionados de nivel escolar y universitarios, con la finalidad de determinar los objetos matemáticos emergentes e intervinientes. Guiados por el significado institucional de referencia, los criterios de idoneidad didáctica y principios de la Educación Matemática, Crítica se propuso el significado institucional pretendido que a la vez fue el significado institucional implementado. El resultado fue un programa que promueve la enseñanza de estos temas de matemática financiera de una manera realista, con uso de problemas contextualizados, que sirvan para la formación de un ciudadano crítico. Los materiales de clase propuestos para cada una de las sesiones se encuentran en los anexos 3, 7 y 11.

Para el logro del objetivo específico 3 "*Analizar los resultados obtenidos en la implementación de un programa de formación de profesores en los temas de interés simple y compuesto, dirigido a docentes de matemática de educación secundaria; para describir las prácticas, objetos y procesos involucrados*"; se recolectó toda la información de la implementación del programa que se desarrollo como parte del curso Números, Relaciones y Funciones, el cual forma parte del primer ciclo de estudio de los profesores de matemática becados por el PRONABEC para estudiar la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas con mención en Educación Secundaria de la PUCP. Cabe resaltar que las tres sesiones de clase donde se estudiaron los temas de interés simple y compuesto formaron parte de un programa completo que tuvo ocho sesiones de clase y duró cuatro semanas. Además, se usó la técnica del observador participante, donde el investigador se desempeñó como docente en la implementación del programa piloto, y se recolectó la información durante las clases mediante grabaciones de audio y toma de notas. Con toda la información recolectada, que incluye las soluciones de los estudiantes a los problemas propuestos y las tareas, se realizaron los análisis de práctica y las configuraciones epistémicas y cognitivas.

Finalmente, para el logro del objetivo general, se valoró la idoneidad didáctica del programa de formación de profesores en temas de interés simple y compuesto, usando los criterios de idoneidad didáctica, que corresponden al quinto nivel de análisis del EOS.

2.6.1. El escenario

Las clases propuestas fueron implementadas como parte del curso de Números, Relaciones y Funciones de la Maestría en Enseñanza de la Matemáticas con mención en Educación Secundaria de la PUCP en el ciclo 2014-2, y dirigido a profesores de secundaria becados por el PRONABEC.

2.6.2. Los Participantes

Se trabajó con la participación de un grupo de 16 profesores de educación matemática secundaria (5 mujeres y 11 hombres) quienes fueros los estudiantes en la implementación de las sesiones de clase. En adelante, a estos profesores participantes se les llamará "estudiantes".

Figura 5. Distribución de las localidades donde laboran los estudiantes
Fuente: Resultados del Cuestionario 1 (elaboración propia)

De acuerdo al Cuestionario 1 (ver Anexo 1), los estudiantes tienen en promedio 15 años de experiencia docente en los diferentes grados de educación secundaria. Ellos vienen de 14 diferentes provincias del Perú, pertenecientes a nueve departamentos como se muestra en la Figura 5.

Solamente dos estudiantes son egresados de institutos pedagógicos, mientras que el resto (el 88%) tuvieron formación universitaria.

Además, luego de revisar las respuestas al Cuestionario 1, en relación al aprendizaje de los temas de interés simple y compuesto en la formación inicial o continua de los estudiantes, se puede concluir que el 75% y el 63% de los estudiantes afirmaron que sí habían estudiado el tema interés simple e interés compuesto, respectivamente. Sin embargo, sólo el 69% había enseñado en alguna oportunidad el tema de interés simple, mientras que el 56% de los participantes afirmó que había enseñado el tema de interés compuesto.

2.6.3. La implementación

Se implementó el programa de formación de profesores en temas de interés simple y compuesto durante tres sesiones, como parte del curso Números, Relaciones y Funciones durante el ciclo 2014-2. Dicho curso formó parte del primer ciclo de estudio de los estudiantes becados por el PRONABEC para estudiar la Maestría en Enseñanza de la Matemáticas con mención en Educación Secundaria de la PUCP.

Cada una de las sesiones de clase tuvo una duración aproximada de una hora con cincuenta minutos, teniéndose en cuenta que el tiempo asignado sea el adecuado para lograr el aprendizaje del contenido programado.

Capítulo 3: Reflexiones de los profesores sobre el uso de las matemáticas para la formación de ciudadanos.

Resumen

En este capítulo se busca alcanzar el objetivo específico 1: Identificar las reflexiones de los profesores acerca del uso de la matemática (y en particular de la matemática financiera) en la formación de ciudadanos. Para lograr dicho objetivo se toma como referencia el Cuestionario 1, aplicado antes del inicio de las sesiones de clase, y la Tarea 2, que fue propuesta luego de haber implementado las tres sesiones de clase donde se desarrollaron los temas de interés simple y compuesto. Para el análisis de las respuestas del Cuestionario 1 se usa como referencia una categorización propia y una clasificación propuesta en Vanegas y Giménez (2010).

Si bien es cierto que los primeros trabajos acerca de la matemática crítica y la democracia se realizaron desde mediados del ciclo pasado en Europa, principalmente en Alemania y Dinamarca; actualmente existen investigadores latinoamericanos que están trabajando sobre la relación entre matemática y ciudadanía en Brasil, Colombia y México. Sin embargo, en el Perú se ha trabajado muy poco sobre esta línea de investigación que relaciona las matemáticas con la dimensión política, crítica y democrática. Aun así, los estudiantes, a quienes se les dirigió las sesiones de clase, tenían nociones de cómo las matemáticas podían servir para la formación de ciudadanos.

Durante la implementación del programa piloto se les preguntó a los estudiantes, en dos oportunidades, sobre el uso de las matemáticas en la formación de ciudadanos. En un primer momento, antes de iniciar las clases, como parte del cuestionario inicial (ver Anexo 1), les hicimos la siguiente pregunta a los estudiantes:

¿Cree usted que las matemáticas podrían servir para formar un mejor ciudadano?

Todos los estudiantes encuestados respondieron que sí. Además, les pedimos que ejemplifiquen sus respuestas:

En caso afirmativo, ejemplifique su respuesta.

A continuación se muestran las respuestas de los 16 estudiantes:

Ejemplificación de cómo las matemática sí podrían servir para formar un mejor ciudadano
Estudiante 1
Porque el ciudadano debe tomar buenas decisiones con respecto a ~~sus~~ economía financiera y por lo tanto la Matemática es útil en ese sentido.
Estudiante 2
Para administrar mejor la economía familiar y empresarial de ser el caso.
Estudiante 3
si porque la matemática es un instrumento que nos permite comprender y desenvolvernos en el mundo en que vivimos.

Figura 6. Reflexiones de los estudiantes 1 al 3

Ejemplificación de cómo las matemática sí podrían servir para formar un mejor ciudadano
Estudiante 4
Permiten que las personas reclamen sus derechos con fundamento
Estudiante 5
La matemática permite al sujeto a la abstracción lógica, deducir y resolver problemas de situación real.
Estudiante 6
Por supuesto, te ayuda a ser más organizado, ser metodico y sobre todo responsable en todo lo que hagas.
Estudiante 7
Estar preparado en casos prácticos comerciales, domésticos Prestamos a corto y largo Plazo. Ahorros a plazo fijo conviene o no.
Estudiante 8
porsupuesto que si, ya que los ciudadanos deben saber resolver proplemas cotidianos es decir matemática aplicada.

Figura 7. Reflexiones de los estudiantes 4 al 8

Ejemplificación de cómo las matemática sí podrían servir para formar un mejor ciudadano
Estudiante 9
Sí, porque todo lo quenos rodea tiene una relación directa con la matemática. Si no sabemos las operaciones básicas no podríamos tener un buen manejo de nuestro dinero.
Estudiante 10
PODRIA UTILIZAR LA MODELACIÓN MATEMÁTICA PARA RESOLVER PROBLEMAS DE LA VIDA COTIDIANA.
Estudiante 11
Se es un mejor ciudadano cuando se distribuye bien el dinero que se posee, cuando realiza sus pagos correctamente.
Estudiante 12
El dominio de los operaciones les permiten realizar calculos que les ayudan a administrar su economia familiar (sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, etc)

Figura 8. Reflexiones de los estudiantes 9 al 12

Ejemplificación de cómo las matemática sí podrían servir para formar un mejor ciudadano
Estudiante 13
Las matemáticas permiten tener una visión del desarrollo tecnológico y científico de una sociedad, conocerla permitiría valorar ello y contribuir a que sea más beneficioso a la sociedad.
Estudiante 14
Por ejemplo, un ciudadano que hace un presupuesto del mes, durante toda su vida lleva una economía responsable.
Estudiante 15
Un ciudadano con mejor forma de pensar
Estudiante 16
Sería Competente, para interpretar información de los medios de comunicación, interactuar en el contexto económico y social.

Figura 9. Reflexiones de los estudiantes 13 al 16

Es notorio que en varias de las respuestas existe un sesgo en relación con la matemática financiera y el manejo responsable del dinero, debido quizás a que los profesores ya sabían que esta clase era el inicio de las sesiones donde se iban a desarrollar estos temas.

A continuación, se presenta la clasificación de las repuestas, para lo cual se ha creado una categorización que sirva para relacionar la matemática financiera con la formación ciudadana.

Tabla 13. Clasificación de las respuestas sobre la relación entre matemática financiera y ciudadanía

Categorías	Expresiones relacionadas	Estudiante
Responsabilidad en el manejo del dinero.	- Administrar mejor la economía. - Llevar una economía responsable. - Tomar buenas decisiones.	1, 2, 9, 11, 12, 14 y 16
Aplicación de la matemática en contextos reales.	- Resolver problemas de la vida. - Estar preparado en casos prácticos.	5, 7, 8, 9 Y 10
Desarrollo cognitivo útil para la vida.	- Abstracción lógica y deducción. - Organizado, metódico y responsable. - Mejor forma de pensar.	5, 6 y 15
Desenvolvimiento y comprensión del mundo que está en constate cambio.	- Comprensión y desenvolvimiento del mundo en que vivimos. - Visión del desarrollo tecnológico y científico.	3, 13 y 16
Conciencia social y reconocimiento de derechos y deberes.	- Interpretar la información de los medios de comunicación. - Reclamar derechos.	4 y 16
Desarrollo de habilidades matemáticas prácticas.	- Realizar cálculos.	12

Según la clasificación en base a cuatro ejes del desarrollo de la competencia ciudadana propuesta en Vanegas y Giménez (2010), la cual forma parte del Marco Teórico y Metodológico (capítulo 2), se pueden categorizar todas las respuestas anteriores de tal manera que nueve ellas pertenecen al eje 1, tres al eje 2 y cuatro al eje 3. A diferencia de la clasificación hecha en la Tabla 13, donde se relaciona solamente la matemática financiera con la formación ciudadana, en la Tabla 14 se relaciona la matemática en general con la formación ciudadana.

Por ejemplo, a la respuesta del estudiante 16 le corresponde la categoría "Valoración de la educación matemática para ser ciudadanos informados" en el aspecto de conocimiento matemático, dentro del tercer eje; pues precisa que la matemática sirve para interpretar la información de los medios de comunicación.

En total, usando los indicadores de desarrollo de competencia ciudadana y educación matemática, se clasificó las respuestas de los estudiantes en 8 indicadores a los que les corresponde sus respectivos códigos señalados a continuación:

Tabla 14. Clasificación de las respuestas según la propuesta en Vanegas y Giménez

Eje	Código	Categoría	Tipo de conocimiento profesional	Estudiante
Eje 1: Apropiación política activa y crítica de los saberes	PHM	Problematización humanizada	Conocimiento matemático	5, 7, 8 y 14
	PHP	Problematización humanizada	Actitud profesional	6, 9, 10 y 13
	CIP	Convivencia, identidad, solidaridad y cohesión social	Actitud profesional	4
Eje 2: Participación constructiva y responsable uso de herramientas sociales	ISM	Interpretar el valor de la sostenibilidad en el quehacer matemático	Conocimiento matemático	11 y 12
	CCM	Coherencia y compromiso	Conocimiento matemático	1
Eje 3: Apropiación de una perspectiva crítica a través de lo matemático	PCP	Reconocimiento del valor de las matemáticas como promoción del pensamiento crítico.	Actitud profesional	3 y 15
	MIM	Valoración de la educación matemática para ser ciudadanos informados	Conocimiento matemático	16
	LCP	Mantenimiento de la legitimidad de la creación de conocimiento matemático	Actitud profesional	2

Cabe señalar que se han elegido los indicadores más cercanos a las respuestas dadas por los estudiantes, pero debe tenerse en cuenta que algunas de las respuestas brindadas podrían pertenecer a más de una categoría.

En un segundo momento, en el que se hicieron preguntas a los estudiantes relacionadas con el uso de las matemáticas para la formación de ciudadanos, fue en la Tarea 2 (véase el Anexo 2). En las partes III y IV de dicha tarea individual se les plantearon preguntas sobre la relación entra la matemática financiera y la formación de ciudadanos, después de implementar las sesiones de clase correspondientes a los temas de interés simple y compuesto.

Algunas de las respuestas a las partes III y IV de la Tarea 2 se muestran en las páginas siguientes.

Respuestas del estudiante 1 a las partes III y IV de la Tarea 2

Parte III

¿Cree usted que el estudio de los temas revisados en las clases de este curso puede influenciar al estudiante para ser un mejor ciudadano?

a.X Sí   b. No

Si su respuesta es afirmativa, indique qué temas y al menos tres razones.

En los temas de interés simple como en el de interés compuesto. Porque:

- ✓ (Estudiar los temas de matemática financiera) permite conocer acerca de los pagos que se puede realizar con una tarjeta de crédito al realizar una compra y poder tomar una mejor decisión, evitando sobre endeudarse.
- ✓ Permite tomar conciencia de asumir pagos con tarjetas de crédito en casos muy necesarios para evitar los endeudamientos.
- ✓ Permite evitar ser sorprendidos por posibles estafadores cuando existen ofrecimientos por una cantidad de dinero a altas tasas de interés, perdiendo en corto tiempo el capital, ello cuando hemos visto las preguntas de reflexión.

PARTE IV

1) *¿Qué aspecto cree usted que puede fomentar, dentro de una clase de matemática, el desarrollo de valores ciudadanos?*

a.X *Los contextos matemáticos, como por ejemplo:*
Interés simple e interés compuesto, se puede hablar del valor de responsabilidad al asumir los pagos de las deudas.

b.X *Los procesos matemáticos, como por ejemplo:*
Al plantear situaciones problemáticas contextualizadas de matemática financiera en relación a valores como compromiso, honestidad, etc.; y su impacto en la persona, su familia, comunidad y país.

c.X *La gestión del profesor, como por ejemplo:*
Cuando intervenimos en el aula y fomentamos la solidaridad entre los compañeros que saben con los compañeros que presentan dificultades en su aprendizaje.

d.X *Otros aspectos, como por ejemplo:*
Cuando los estudiantes hacen una colecta en la clase por la enfermedad, accidente o fallecimiento de un miembro de la comunidad educativa, estamos desarrollando la solidaridad con nuestros semejantes en momentos difíciles.

e. *No se puede fomentar, dentro de una clase de matemática, el desarrollo de valores*
Ciudadanos. Explique por qué.

2) *¿Qué valores ciudadanos cree usted que podrían desarrollarse en sus alumnos en las clases de matemáticas? Explique su respuesta.*

a) Responsabilidad.- Está relacionada con las obligaciones que debemos cumplir y que tienen repercusión en nuestras vidas, de nuestras familias, comunidad y país.
b) Solidaridad.- Se evidencia cuando realizamos acciones concretas para ayudar a un compañero en su aprendizaje o una necesidad imprevista, contribuyendo así al bienestar y desarrollo de la comunidad.
c) Compromiso.- Implica el cumplimiento de los acuerdos tomados para la clase y el de prepararse conscientemente, para contribuir al bienestar y desarrollo de nuestra familia, comunidad y país.
d) Participación.-El cumplimiento de nuestras obligaciones y ejecución de nuestros derechos, es una mejor forma de participar para el desarrollo de nuestra familia, comunidad y país.
e) Honestidad.- El no copiar las tareas y exámenes, estamos desarrollando la honestidad en los estudiantes que influirá en su desenvolvimiento en la sociedad.

Respuestas del estudiante 2 a las partes III y IV de la Tarea 2

<table>
<tr><td rowspan="4">Parte III</td><td>¿Cree usted que el estudio de los temas revisados en las clases de este curso puede influenciar al estudiante para ser un mejor ciudadano?</td></tr>
<tr><td>a.X Sí   b. No</td></tr>
<tr><td>Si su respuesta es afirmativa, indique qué temas y al menos tres razones.</td></tr>
<tr><td>- Que el estudiante aprenda a tener una cultura del ahorro, lo cual implica a generar una mejor calidad de vida.
- Que el estudiante aprenda a priorizar sus gastos, garantizando prioritariamente el satisfacer sus necesidades básicas.
- Una cultura financiera, permitirá garantizar a que el estudiante viva dignamente, ejerciendo su ciudadanía con respeto a los derechos de los demás y ejerciendo sus derechos ciudadanos.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">PARTE IV</td><td>1) ¿Qué aspecto cree usted que puede fomentar, dentro de una clase de matemática, el desarrollo de valores ciudadanos?</td></tr>
<tr><td>a.X Los contextos matemáticos, como por ejemplo:
Empleo adecuado y coherente de conceptos de porcentajes, interés simple y compuesto, anualidades, etc.

b.X Los procesos matemáticos, como por ejemplo:
En la cultura tributaria, en la responsabilidad en los gastos y en las adquisiciones de bienes.

c.X La gestión del profesor, como por ejemplo:
El docente, al promover trabajos colaborativos, fomenta la disciplina, responsabilidad, solidaridad.

d.X Otros aspectos, como por ejemplo:
Los estudiantes deben proponer y ejercer el cumplimiento de sus normas de convivencia, motivando la cultura del ahorro, uso y reciclaje de materiales, la responsabilidad en el manejo de sus gastos, priorizando la atención de sus necesidades básicas para garantizar estilos de vida saludables y un proyecto de vida.

e. No se puede fomentar, dentro de una clase de matemática, el desarrollo de valores Ciudadanos. Explique por qué.</td></tr>
<tr><td>2) ¿Qué valores ciudadanos cree usted que podrían desarrollarse en sus alumnos en las clases de matemáticas? Explique su respuesta.</td></tr>
<tr><td>La solidaridad mediante el trabajo colaborativo y cooperativo, la honestidad mediante la promoción del manejo responsable del dinero, la responsabilidad en el cumplimiento de pago de deudas contraídas.
La responsabilidad en el manejo presupuestal en la vida cotidiana está relacionada con las obligaciones que debemos cumplir y que tienen repercusión en la vida de la sociedad.
La tolerancia se expresa en el respeto por las respuestas obtenidas por sus compañeros, cuando el alumno reconoce y acepta las diferencias en cuanto a los procesos de solución de problemas.
La transparencia se da cuando el estudiante realiza acciones de interés común, que les encomiendan realizar sus compañeros, amigos, vecinos o maestros, debiendo informar a los interesados. Esto implica que el estudiante debe actuar con honestidad para no tener que ocultar nada que pueda avergonzarlos o poner en riesgo su prestigio personal ante los ojos de los demás.</td></tr>
</table>

Respuestas del estudiante 16 a las partes III y IV de la Tarea 2

<table>
<tr><td rowspan="4">Parte III</td><td>¿Cree usted que el estudio de los temas revisados en las clases de este curso puede influenciar al estudiante para ser un mejor ciudadano?</td></tr>
<tr><td>[a.X] Sí   [b.] No</td></tr>
<tr><td>Si su respuesta es afirmativa, indique qué temas y al menos tres razones.</td></tr>
<tr><td>Entre los temas que se trabajarían son: porcentajes, proporcionalidad, estadística, interés simple y compuesto, entre otros.
1. Trabajar el tema de interés simple y compuesto ayuda a concientizar a los ciudadanos sobre una cultura financiera, y les permita interpretar, analizar y sacar sus propias conclusiones sobre las oportunidades y amenazas que ofrecen las diferentes instituciones financieras.
2. Descodificar e interpretar la información cuantitativa de los diversos medios informativos, para proponer alternativas de solución a los diferentes problemas que afronta la sociedad.
3. Las matemáticas también posibilitan el desarrollo de capacidades para comprender y usar los distintos conjuntos numéricos, como son los números naturales, enteros, racionales; para transferir estos conocimientos en la solución de situaciones problemáticas de su contexto, y aportar al desarrollo económico y social de su comunidad.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">PARTE IV</td><td>1) ¿Qué aspecto cree usted que puede fomentar, dentro de una clase de matemática, el desarrollo de valores ciudadanos?</td></tr>
<tr><td>[a.X] Los contextos matemáticos, como por ejemplo:
Trabajar en las clases de matemática en contextos extra matemáticos que les permita a los estudiantes establecer relaciones entre las prácticas docentes en aula con las situaciones problemáticas de su contexto.
[b.X] Los procesos matemáticos, como por ejemplo:
En la clase de matemática se debe fomentar el desarrollo de competencias matemáticas como: interpretar, analizar y encontrar regularidades y establecer patrones para que los estudiantes sean capaces de interpretar el cambio, las relaciones que se manifiestan en los diversos contextos donde se desenvuelven y así tomen decisiones acertadas para su bienestar social y económico. En otra perspectiva también se deben desarrollar capacidades de como: matematizar, comunicar, argumentar, e interpretar para encontrar patrones y generalizar sus resultados que les permiten a los estudiantes resolver situaciones problemáticas de su contexto.
[c.X] La gestión del profesor, como por ejemplo:
La gestión del profesor se debe centrar en la implementación de prácticas docente tomando como base el dominio de los objetos matemáticos, para desarrollar capacidades en la solución de situaciones problemáticas del contexto real y matemático.
[d.X] Otros aspectos, como por ejemplo:
Trabajar las prácticas docentes bajo el enfoque de la resolución de problemas, donde el estudiante plante y resuelve problemas que involucres situaciones reales de su contexto.
[e.] No se puede fomentar, dentro de una clase de matemática, el desarrollo de valores Ciudadanos. Explique por qué.
En la clase de matemática siempre se va a desarrollar aprendizajes ciudadanos.</td></tr>
<tr><td>2) ¿Qué valores ciudadanos cree usted que podrían desarrollarse en sus alumnos en las clases de matemáticas? Explique su respuesta.</td></tr>
<tr><td>Deben desarrollarse los valores de responsabilidad, participación, transparencia y tolerancia; valores muy necesarios para una convivencia y deliberación democrática. Estos valores al ser internalizados por los estudiantes les permitirán actuar de manera responsable, ética y autónoma y solucionar los diversos problemas que les toca vivir.</td></tr>
</table>

Así pues, la Tarea 2 amplió la visión de los estudiantes de la relación que existe entre las matemáticas y la formación de ciudadanos.

En la Parte III, todos los estudiantes respondieron que el estudio de los temas revisados en las tres sesiones de clase sí puede influenciar al estudiante para ser un mejor ciudadano y dieron sus respectivas justificaciones, asociadas a los puntos revisados en dichas clases. Es así que enumeraron diferentes valores que se pueden formar a partir de la matemática.

En la pregunta 1 de la Parte IV las respuestas fueron diversas. A continuación se resume la información recolectada:

Tabla 15. Clasificación de las respuestas a la pregunta 1 de la Parte IV

	Respuestas de la pregunta 1- Parte IV				
	a	b	c	d	e
Profesor	Contextos Matemáticos	Procesos Matemáticos	Gestión del Profesor	Otros aspectos	No se puede fomentar
1	X	X	X	X	
2	X	X	X	X	
3			X		
4	X	X	X		
5	X				
6			X		
7			X		
8		X			
9	X	X	X	X	
10	X		X		
11		X	X		
12	X	X	X	X	
13	X		X		
14			X		
15		X			
16	X	X	X	X	

De este cuadro se puede concluir que seis estudiantes marcaron los tres primeros aspectos (contextos, procesos y gestión del profesor) incluso cinco agregaron la opción otros. Además, se puede observar que siete estudiantes indicaron solo una respuesta y que trece estudiantes marcaron la gestión (siendo el aspecto más elegido). Así pues, la mayoría le da importancia a la gestión del profesor como principal aspecto en el desarrollo de valores ciudadanos, luego le siguen en importancia, los procesos y contextos matemáticos.

En la segunda pregunta de la parte IV de la Tarea 2, los estudiantes indicaron una serie de valores que se pueden desarrollar a partir de las clases de matemáticas, tales como: responsabilidad, solidaridad, compromiso, participación, honestidad, tolerancia, transparencia, entre otros.

Finalmente, al responder la Parte V de la Tarea 2 donde tenían que proponer un problema que ayude a la formación de ciudadanía, los estudiantes enriquecieron su visión y ya no solamente lo relacionaron con matemática financiera, sino que presentaron una serie de problemas originales. Es así que seis estudiantes propusieron problemas relacionados con matemática financiera, mientras que los otros diez propusieron problemas en otro contexto. A continuación se muestran algunos de los problemas propuestos por los estudiantes:

Problema propuesto y resuelto por el estudiante 1

Problema: El Sr. Manuel tiene un capital de S/. 10 000 nuevos soles y desea depositarlo en una entidad financiera, para lo cual averigua que en su comunidad el Banco Azteca brinda una TREA de 5,5% a plazo fijo, siendo la más alta en su región, pero su amigo le comenta que ha abierto hace un mes una nueva entidad financiera “Los Ruiseñores” cerca a la comunidad donde viven, y que está pagando por plazo fijo una TREA de 15%, pero esta entidad financiera no está aún reconocida por la Superintendencia de Banca, Seguros y AFP. ¿Qué decisión debe tomar el Sr. Manuel?

Rpta. Lo más aconsejable es que el Sr. Manuel no acepte la propuesta de su amigo porque el riesgo de perder su capital es muy alto, al ponerlo en una entidad no reconocida por la Superintendencia de Banca, Seguros y AFP y existe antecedentes de entidades estafadoras que prometen pagar tasas muy altas para tener al inicio clientes, pero finalmente se retiran del lugar sin devolver a los clientes sus interese ni su capital.
Este problema ayudaría, a este ciudadano a no perder su capital de ahorro, y pueda desarrollarse dentro de un tiempo determinado con una mayor solvencia económica y pueda más adelante poder invertir.

Problema propuesto y resuelto por el estudiante 8

Problema

Un estudiante de la PUCP realiza un préstamo de S/.2000.00 para comprarse su Laptop de una entidad financiera, con el simple ánimo de contar con un equipo que le ayude en el desarrollo de sus clases. Dicho monto luego se convierte al cabo de un año en S/.2240.00 El estudiante en mención trabaja dando clases de Matemática a los estudiantes de ciclos inferiores, de esta manera ayuda en su hogar y no ocasiona más gastos en su hogar ya que sus padres tienen un sueldo de S/.1000.00 con la cual cubren sus matrículas por ciclos y no les alcanza. ¿Cuál es el interés cobrado al joven estudiante?
Los intereses han ascendido a 2240 – 2000 = 240, aplicando la fórmula que ya conocemos
Resulta $240 = 2000 \cdot r \cdot 1 \quad \rightarrow \quad r = 240 / 2000 = 0.12$
Respuesta =El interés es del 12 % anual

Explique cómo ayudaría este problema al desarrollo de este ciudadano.

- El estudiante es responsable y no afecta la economía de sus padres que no reciben un buen sueldo.
- Se traza objetivos en su vida académica y mejora su aprendizaje con la ayuda de la tecnología.
- Es autónomo y decide lo que le ayudara en su carrera.
- Es responsable porque trabaja en sus ratos libres para pagar su préstamo.
- Se identifica con sus compañeros de los ciclos inferiores y les brinda ayuda

Los estudiantes 1 y 8 siguen usando como referencia la matemática financiera al momento de relacionar matemática con ciudadanía. Sin embargo, el estudiante 3 propone un problema asociado a la ecología, como se muestra a continuación:

Problema propuesto y resuelto por el estudiante 3

GOTA A GOTA EL AGUA SE AGOTA

La cantidad fija de agua estimada en el planeta es de 1 400 000 000 km^3. De los cuales, el 97,2% es agua salada, un 2,5% se encuentra entre los casquetes de hielo y los glaciares. El resto, que no es mucha es agua dulce. Analiza y responda las siguientes preguntas:

a) ¿Qué cantidad de agua salada hay en el planeta?
b) ¿Qué cantidad de agua dulce hay en el planeta?
c) El agua dulce se encuentra superficial o subterráneamente. Si la primera representa el 0,7% de todas las aguas dulces. ¿Cuántos km^3 de agua dulce superficial existe en el planeta?
d) ¿Cuáles son las causas de la escasez del agua dulce en nuestro planeta?
e) ¿Cuáles son las consecuencias de la escasez del agua dulce en nuestro planeta?
f) ¿Qué debemos hacer para evitar que el agua dulce se agote en nuestro planeta?

SOLUCIÓN

La cantidad fija de agua estimada en el planeta es de 1 400 000 000 km^3. De los cuales, el 97,2% es agua salada, un 2,5% se encuentra entre los casquetes de hielo y los glaciares. El resto, que no es mucha es agua dulce. Analiza y responda las siguientes preguntas:

a) ¿Qué cantidad de agua salada hay en el planeta?
Agua salada = 97,2%(1 400 000 000 km^3)
Agua salada = 1 360 800 000 km^3
b) ¿Qué cantidad de agua dulce hay en el planeta?
Porcentaje de agua dulce = 100% - (97,2% + 2,5%)
Porcentaje de agua dulce = 0,3%
Agua dulce = 0,3%(1 400 000 000 km^3)
Agua dulce = 4 200 000 km^3
c) El agua dulce se encuentra superficial o subterráneamente. Si la primera representa el 0,7% de todas las aguas dulces. ¿Cuántos km^3 de agua dulce superficial existe en el planeta?
Agua dulce superficie = 0,7%(4 200 000 km^3)
Agua dulce superficie = 29 400 km^3
d) ¿Cuáles son las causas de la escasez del agua dulce en nuestro planeta?
   - El uso indiscriminado de este recurso en la agricultura
   - La contaminación causada por los efluentes domésticos e industriales.
   - La deforestación delirante
e) ¿Cuáles son las consecuencias de la escasez del agua dulce en nuestro planeta?
   - Enfermedades y muerte de personas.
   - La escasez en la producción de alimentos.
f) ¿Qué debemos hacer para evitar que el agua dulce se agote en nuestro planeta?
   - Medidas preventivas que procuren el uso racional y de conservación.
   - Reutilización de aguas residuales.
   - Mejorar el riego y las prácticas agrícolas.

"si no hay agua, no hay vida"

Para clasificar el problema del estudiante 3 ya no es suficiente la categorización propuesta en la Tabla 13 donde se relaciona ciudadanía con la matemática financiera, pues falta alguna categoría asociada con ecología.

En cada una de las sesiones de clase se entregó a los estudiantes un material de trabajo que contenía una la Parte B con preguntas de reflexión asociadas a los problemas matemáticos desarrollados en la Parte A, y estaban orientadas al cuidado del dinero. Además, se incluyó una Parte C con preguntas de competencia financiera, para lo cual se tomó como referencia las preguntas liberadas PISA 2012 (OECD, 2013).

El objetivo de las preguntas de la Parte B era generar el debate en clase mientras los estudiantes compartían y justificaban sus respuestas. En ese momento, el profesor se convertía en un moderador que buscaba la reflexión y la crítica. A manera de ejemplo, se muestra a continuación una pregunta de la Parte B de la primera sesión de clase.

PARTE B: PREGUNTAS DE REFLEXIÓN

a) Tomando en cuenta el contexto del caso "Préstamo entre familiares o amigos" ¿Usted cree que está bien que César, siendo cuñado de José, le cobre intereses por el préstamo que le dio?

A partir de esta pregunta se creó el siguiente diálogo en clases:

[1] Profesor:

A ver, ¿quienes creen que sí debería cobrarle intereses? uno, dos, … , diez estudiantes levantaron la mano. ¿Por qué creen que debería cobrarle intereses?

[2] Estudiante 1:

Porque va a trabajar con ese dinero.

[3] Profesor:

Porque va a servirle como un capital. ¿Alguien cree que no debería cobrarle intereses?

[4] Estudiante 2:

No debe cobrarle porque la usura es un delito y él está siendo usurero al cobrarle tan caro, puede ir a la cárcel inclusive.

[5] Estudiante 3:

A mí me parece bien que cobre intereses pero no tan alto.

[6] Profesor:

César, en vez de prestarle ese dinero a su cuñado podría haberlo depositado en un banco a plazo fijo y estaría seguro de ganar intereses. Al pedirle dinero José a César, *le está quitando la oportunidad de que su dinero crezca. Esa idea quiero que les quede clara, que es la idea del "costo de oportunidad" que está incluido en el marco curricular. El costo de oportunidad de César, al prestarle a su cuñado José, sería el dinero que él deja de ganar por prestarle a un familiar en vez de depositarlo en un banco. En pocas palabras, el costo de oportunidad "es la mejor alternativa dejada de lado". Por lo tanto, lo correcto sería que José compense el costo de oportunidad de César.*

[7] Estudiantes 4:

Un comentario. Yo le presté a un cuñado 100 soles al 20%…

En la [6] se aprovechó el contexto para introducir el concepto de "costo de oportunidad", el cual es un concepto de economía que se relaciona con el caso presentado.

En la [4] el estudiante 2 hace referencia a la usura. Dicho comentario dio pie a que en la siguiente clase el profesor precise qué es la usura y aclarar que las personas y empresas no financieras cometen el delito de usura al cobrar un interés mayor al fijado por el Banco Central de Reserva del Perú. Mientras que las entidades financieras son libres de cobrar cualquier tasa de interés a partir de 1991 en que se liberalizó el mercado financiero en el Perú.

En la [7] el estudiante 4 comparte con la clase una experiencia vivida relacionada al caso propuesto en clase.

Es así que el debate introduce conceptos extramatemáticos pero que están ligados al tema desarrollado en clase.

Para la Parte C del material de clase, los estudiantes compartían y justificaban sus respuestas, continuando así el debate iniciado en la Parte B. En la siguiente página se muestra un ejemplo de pregunta de la Parte C que corresponde a la segunda sesión.

PARTE C: CUIDADO Y MANEJO RESPONSABLE DEL DINERO

FALLO BANCARIO[1]

Abel tiene cuenta en el Banco de Zedland. Recibe este mensaje de correo electrónico.

> Estimado cliente del Banco de Zedland:
>
> Se ha producido un fallo en el servidor del Banco de Zedland y sus datos de acceso por Internet se han borrado.
>
> En consecuencia, no dispone usted de acceso a la banca por Internet.
>
> Lo que es más importante, su cuenta ha dejado de ser segura.
>
> Le rogamos que haga clic en el enlace de abajo y siga las instrucciones para restablecer el acceso. Le vamos a pedir que introduzca sus datos de banca por Internet.
>
> https://BancoZedland.com/
>
> Banco de Zedland

¿Cuál o cuáles de estas afirmaciones serían un buen consejo para Abel?
Para cada afirmación, rodea con un círculo "Sí" o "No".

Afirmación	¿Es esta afirmación un buen consejo para Abel?
Responder al mensaje electrónico y dar los datos de banca por internet.	Sí / No
Responder al mensaje electrónico y pedir más información.	Sí / No
Contactar con su banco y preguntar sobre el mensaje de correo electrónico.	Sí / No
Si el enlace es el mismo que la dirección web de su banco, hacer clic en el enlace y seguir las instrucciones.	Sí / No

[1] Ejemplo acondicionado de las preguntas liberadas de PISA 2012

Finalmente, las Parte B y C del material usado en las sesiones de clase, ayudan al cumplimiento de uno de los objetivos de la EMC, que está relacionado con la democratización de la educación, la formación del estudiante no sólo en espacios matemáticos formales o cognitivos, sino también como un ciudadano crítico, reflexivo y transformador de su propia realidad.

Capítulo 4: Significados institucionales de referencia, pretendido e implementado de los temas interés simple y compuesto.

Resumen

En la parte inicial de este capítulo se busca organizar el significado institucional de referencia y pretendido de los temas interés simple y compuesto. Para ello se usa la configuración epistémica, que es una herramienta del EOS que permite describir la estructura de los textos. Luego se detalla cómo se construye el significado institucional implementado.

4.1. Significado institucional de referencia

Al planificar el proceso de instrucción sobre interés simple y compuesto para un grupo de estudiantes, se comienza por delimitar "lo que es dicho objeto para las instituciones matemáticas y didácticas"; se acude, por tanto, a los textos matemáticos correspondientes, a las orientaciones curriculares, y en general a lo que "los expertos" consideran que son las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto, que se fija como objetivo instruccional. Todo ello constituye un sistema de prácticas histórico-epistemológico-didáctico que se designa como significado institucional de referencia del objeto.

Para este análisis, se usó la configuración epistémica, que es una herramienta del EOS que permite describir la estructura de los textos, puntualmente es este caso, el significado institucional de referencia que comprende el sistema de prácticas, procesos y objetos.

Luego de organizar el significado institucional de referencia, se usa como guía para delimitar el significado institucional pretendido.

4.1.1. Significado de referencia del tema interés simple

Para la organización del significado de referencia correspondiente al tema interés simple, se analizó el desarrollo de dicho tema en tres libros:

- Un libro orientado a la formación de profesores de matemática de educación secundaria
- Un libro de matemática financiera dirigido a estudiantes universitarios de carreras de negocios
- Un libro de cálculo aplicado a los negocios, también dirigido a estudiantes de carreras de negocios.

A continuación se presenta la primera configuración epistémica asociada al desarrollo del tema interés simple que presenta el libro "La Matemática de la Enseñanza Media" (Lages, Pinto, Wagner, y Morgado, 2000), el cual es un libro que muestra muy buena formalidad y rigor matemático. Este libro está orientado principalmente a la formación de profesores.

Configuración epistémica
Situación problema
Tipo de problema: Hallar los montos conociendo el capital, la tasa de interés y los tiempos. Un capital igual a 100, a un interés simple de 10% a mes evoluciona de acuerdo a la siguiente tabla: n 0   1   2   4   … C_n 100   120   130   140   … No existe dificultad en calcular el interés simple pues la tasa incide siempre sobre el capital inicial. En nuestro ejemplo, el interés es siempre el 10% de 100, o sea, 10.
Lenguaje
Verbal: Plazos pequeños, mora, interés simple, interés compuesto, intereses, capital, monto, momento, tasa, progresión aritmética, tasa de interés, monto, plazo, superior, menor, inferiores.

Simbólico:

$$100;\ 10\%;\ n;\ C_n;\ C_0;\ C_n = C_0 + niC_0$$

Gráfico:

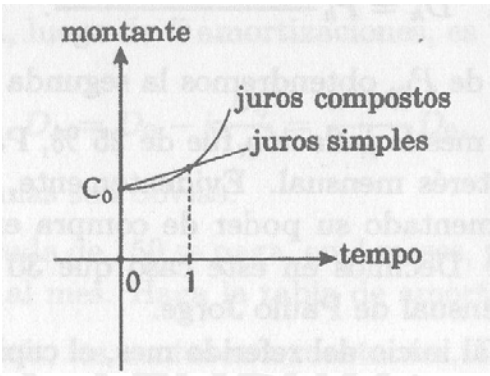


Figura 10
Fuente: Lages, Wagner y Morgado (2000)
Traducción: Montante = Monto. Juros compostos = interés compuesto. Juros simples = interés simple. Tempo = Tiempo.

Definiciones-conceptos:
En el régimen de interés simple, los intereses en cada momento son calculados sobre el capital y no sobre el monto del momento anterior.

Conceptos

Conceptos previos: porcentajes, progresión aritmética, interés compuesto.
Conceptos emergentes: interés simple.

Proposiciones

- El monto en interés simple es $C_n = C_0 + niC_0$.
- Un mismo capital inicial C_0 a una tasa de interés i, a interés simple y a interés compuesto, el monto a interés compuesto es superior al monto a interés simple, excepto si el plazo en menor que 1.

Procedimientos

- Secuencia inductiva para hallar la fórmula de interés simple.
- Comparación gráfica del comportamiento del monto, en función del tiempo, para el caso de un mismo capital inicial C_0 a una tasa de interés i, a interés simple y a interés compuesto.

Argumentos

- Tesis 1: Fórmula de monto en interés simple: $C_n = C_0 + niC_0$.
  Se usa el siguiente argumento:
  En el régimen de interés compuesto, los intereses en cada momento son calculados sobre el capital y sobre el monto del momento anterior. Por ejemplo, un capital igual a 100, a un interés simple de 10% al mes evoluciona como se muestra a continuación:

n	0	1	2	4	…
C_n	100	120	130	140	…

No existe dificultad en calcular el interés simple pues la tasa incide siempre sobre el capital inicial. En nuestro ejemplo, el interés es siempre el 10% de 100, o sea, 10.
Está claro entonces que, $C_n = C_0 + niC_0$, lo que hace que los valores de C_n formen una progresión aritmética.

- Tesis 2: Un mismo capital inicial C_0 a una tasa de interés i, a interés simple y a interés compuesto, el monto a interés compuesto es superior a monto a interés simple, excepto si el plazo en menor que 1.
  Se usa el siguiente argumento:
  En la Figura 10 se presenta el gráfico donde se muestra la evolución de un mismo capital inicial C_0 a una tasa de interés i, a interés simple y a interés compuesto.

La segunda configuración epistémica asociada al desarrollo del tema interés simple corresponde al libro "Manual de matemática financiera: texto, problemas y casos" (Aliaga, 1999), el cual se usa como libro de texto en cursos de nivel universitario dirigidos a estudiantes de carreras de negocios.

Configuración epistémica
Situación problema
Tipo de problema: Hallar el interés conociendo el capital, las tasas de interés y los tiempos. Calcular: a) el interés simple de un depósito de ahorro de S/. 5 000 colocado en el Banco Norte del 6 de julio al 30 de setiembre del mismo año ganando una tasa anual de interés simple del 36%. La tasa anual bajó al 24% a partir del 16 de julio y al 21% a partir del 16 de setiembre; b) con la misma información calcula nuevamente el interés, considerando que el banco abona los intereses en la libreta de ahorros cada fin de mes (capitalización).
Lenguaje
Verbal: Variaciones de tasa, fórmula, periodos de tiempo, interés simple, depósito de ahorro, tasa anual, interés, cada fin de mes. *Simbólico:* $5\,000;\ 6\%;\ n_k;\ i_k;\ I;\ P$ $I = Pi_1n_1 + Pi_2n_2 + \cdots + Pi_mn_m$ $I = P\sum_{k=1}^{m} i_kn_k$

Gráfico:

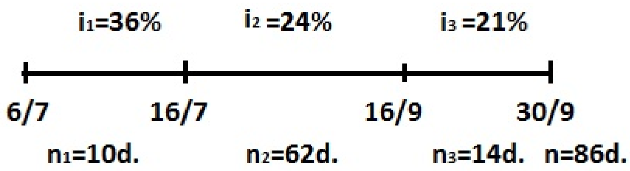


Tabla:

A partir de	i	Días	Acum.
6 julio	i_1=36%	n_1=10	10
16 julio	i_2=24%	n_2=62	72
16 setiembre	I_3=21%	n_3=14	86
30 setiembre			

Definiciones-conceptos:
En una operación a interés simple, el capital que genera los intereses permanece constante durante el tiempo de vigencia de la transacción. La capitalización, que es la adición del interés ganado al capital original, se produce únicamente al término de la operación.

Conceptos

Conceptos previos: porcentaje, interés compuesto.
Conceptos emergentes: tasas efectivas equivalentes, actualización y capitalización.

Proposiciones

- El interés simple con variaciones de tasa es:
-

$$I = P\sum_{k=1}^{m} i_k n_k$$

Procedimientos

- Secuencia deductiva para justificar la fórmula.
- Resolución del problema haciendo uso de la fórmula, ordenando la información con el apoyo de una línea de tiempo y una tabla.

Argumentos

Tesis 1:
El interés simple con variaciones de tasa es:

$$I = P\sum_{k=1}^{m} i_k n_k$$

Se usa el siguiente argumento: Siendo i_1, i_2, …, i_m, las tasas de interés vigentes durante n_1, n_2, …, n_m periodos respectivamente, tenemos: $$I = Pi_1n_1 + Pi_2n_2 + \cdots + Pi_mn_m$$ $$I = P[i_1n_1 + i_2n_2 + \cdots + i_mn_m]$$ $$I = P\sum_{k=1}^{m} i_kn_k$$

Por último, la tercera configuración epistémica asociada al desarrollo del tema el tema interés simple corresponde al libro "Cálculo aplicado a administración, economía, contaduría y ciencias sociales" (Hoffmann y Bradley, 1995), el cual se usa como libro de texto en cursos de nivel universitario dirigidos a estudiantes de carreras de negocios.

Configuración epistémica
Situación problema
Tipo de problema: Hallar el monto conociendo el capital, la tasa de interés y el tiempo. Suponga que se invierten US$1,000 a una tasa de interés anual del 8%. Calcule el saldo después de 10 años en caso de interés simple.
Lenguaje
Verbal: Inversión, interés anual simple, años, saldo. *Simbólico:* $$B(t) = P(1 + rt)$$
Conceptos
Conceptos previos: funciones lineales, modelos funcionales,. *Conceptos emergentes:* interés simple.
Proposiciones
• Si se invierten P dólares a una tasa de interés anual simple r (expresada como un decimal), el saldo $B(t)$ después de t años será $B(t) = P(1 + rt)$ dólares

Procedimientos
• Resolución del ejercicio aplicando directamente la fórmula de interés simple.
Argumentos
No presenta.

A continuación, a manera de síntesis, se resumen los diferentes puntos encontrados en las tres configuraciones epistémicas asociadas al tema interés simple, desarrolladas previamente.

Síntesis de las configuraciones epistémicas
Síntesis de las situaciones problema
Tipos de problema: En los libros analizados se encuentran diversos tipos de problemas. Inicialmente se pide hallar el interés o el monto, en varios de los casos se presentan ejercicios para introducir el tema. Luego se presentan ejercicios para encontrar el tiempo o la tasa de interés. Varios de los ejercicios están propuestos de tal manera que se necesita simplemente el reemplazo en la fórmula previamente definida. También se encuentra un problema donde la tasa de interés iba variando con el paso del tiempo. No hay problemas donde se pida la demostración de la fórmula.
Síntesis del lenguaje utilizado
Verbal: Comúnmente se encontran términos como capital, interés, tasa de interés, tiempo, periodo, meses, años, días, soles, dólares. *Simbólico:* No todos los libros usan las mismas letras o símbolos para representar los diferentes elementos involucrados en el tema, por ejemplo, algunos usan representan el capital con el símbolo C, mientras que otros usan P o P_0. También se presentan notaciones funcionales como *B(t)* en los libros donde se define el monto de interés simple como una función lineal afín que depende del tiempo. *Gráfico:* En algunos libros se encontra que la línea de tiempo sirve para ordenar la información y visualizar el traslado del dinero de un periodo a otro. *Definiciones-conceptos:* Todas las definiciones coinciden en indicar que el interés de cada periodo se calcula como un porcentaje del capital inicial.

Síntesis de los conceptos utilizados
Conceptos previos: en algunos casos, como conocimientos previos solo se requiere el tema porcentajes, mientras que en otros libros se asocia al tema progresión aritméticas, o en otros libros al tema función lineal afín. Solamente en un libro se encontró también el interés compuesto como concepto previo, pues en dicho libro se había revisado el tema interés compuesto previamente. *Conceptos emergentes:* En todos los casos el concepto emergente fue el interés simple.
Síntesis de las proposiciones
En todos los casos las proposiciones presentadas estaban asociadas a las fórmulas de interés y monto principalmente. Además se consideró la fórmula de interés para el caso de tasa de interés variable en el tiempo. Por otro lado, se encuentra una proposición que hacía referencia a la comparación del monto de interés simple con el monto de interés compuesto.
Síntesis de los procedimientos
En algunos casos, el único procedimiento encontrado fue el uso de operaciones básicas. También se encontraron secuencias inductivas y deductivas. Además, se observó el uso directo de fórmulas y resoluciones de ecuaciones de primer grado. Sin embargo, podría incluirse demostraciones donde sea necesario hacer uso de la inducción matemática, la progresión aritmética o la función lineal.
Síntesis de los argumentos
En varios de los libros analizados no se muestran argumentos de manera explícita. En algunos casos se deja como parte de la tarea del estudiante encontrar las demostraciones. Además, se observó que se usa las propiedades de progresión aritmética para la justificación de fórmulas, en otro caso se resume una fórmula con las propiedades de sumatoria. En los libros donde se presentó la fórmula de monto como una función lineal afín, no se demostró de manera explícita la fórmula. Además, podría hacerse uso de la inducción matemática para la demostración de la fórmula de interés y monto asociando el tema de interés simple como un caso particular de progresión aritmética.

Se quiere remarcar las dos formas como se relaciona el tema interés simple en los libros analizados con temas matemáticos que sirven como conceptos previos: La primera forma consiste en emerger el concepto de interés simple a partir de la progresión aritmética, la cual se eligió al momento de definir el significado pretendido e implementado en la presente tesis. La segunda forma consiste en relacionar el tema interés simple con una función lineal afín.

4.1.2. Significado institucional de referencia del tema interés compuesto

Para la organización del significado de referencia correspondiente al tema interés compuesto, se analizó el desarrollo de dicho tema en tres libros:

- Un libro orientado a la formación de profesores de matemática de educación secundaria.
- Un libro de cálculo aplicado a los negocios, dirigido a estudiantes universitarios de carreras de negocios.
- Un libro de matemática financiera, también dirigido a estudiantes de carreras de negocios.

La primera configuración epistémica está asociada al desarrollo del tema el tema interés compuesto que presenta el libro "La Matemática de la Enseñanza Media" (Lages, Pinto, Wagner, y Morgado, 2000). Como ya se dijo dicho líneas atrás, este es un libro que muestra muy buena formalidad y rigor matemático; y está orientado principalmente a la formación de profesores.

Configuración epistémica
Situación problema
Tipo de problema: Calcular haciendo uso directo de la fórmula Pedro invierte 150 reales con un interés de 12% al mes. ¿Cuál será el monto de Pedro tres meses después? *Tipo de problema: Calcular y luego tomar una decisión* Pedro tiene dos opciones de pago en la compra de un televisor: i) Tres cuotas mensuales R$ 160,00 cada una. ii) Siete cuotas mensuales de R$70,00 cada una. En ambos casos, la primera cuota se paga en el momento de la compra. Si el dinero rinde 2% al mes para Pedro, ¿Cuál es la mejor opción que Pedro posee? *Tipo de problema: Calcular el tiempo usando logaritmos* Invirtiendo su capital a un interés mensual de 8%, ¿en cuánto tiempo Ud. Doblará su capital inicial? *Tipo de problema: Cambio de tasa* La tasa anual de interés equivale al 12% al mes es I tal que $1 + I = (1 + 0,12)^{12}$. De ahí, $I \cong 2,90 = 290\%$ al año.
Lenguaje
Verbal: Capital, capital inicial, periodo de tiempo, interés, monto, tasa de interés, mensual, bimestral, trimestral, semestral, préstamo, deuda, reales, interés compuesto, progresión geométrica, razón, valor actual, valor futuro, multiplicar, dividir, fórmula, tasas equivalentes, tasas proporcionales, tasa nominal, tasa efectiva, capitalización, teorema, prueba, razón.

Simbólico:

$$C;\ J;\ M;\ i; = \frac{J}{C};\ R\$140{,}00;\ \frac{40}{100} = 0{,}40 = 40\%;\ J{=}iC;\ C_o;\ n;\ I$$

$$C_n = C_0(1+i)^n \ ;$$

$$F = A(1+i)^n \ ;$$

$$C_0(1+0{,}08)^n = 2C_0 \ ;$$

$$1{,}08^n = 2 \ ;$$

$$n = \frac{log\,2}{log\,1{,}08} \cong 9.$$

$$1 + I = (1+i)^n$$

Gráfico:

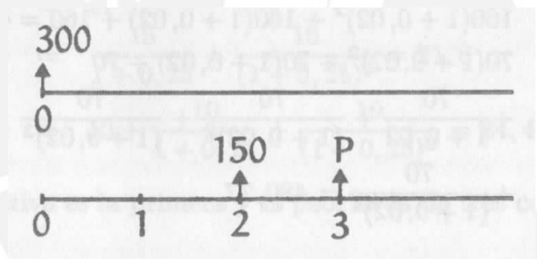


Figura 11
Fuente: Lages, Wagner y Morgado (2000)

Definiciones-conceptos:
En el régimen de interés compuesto de tasa i, un capital C_o se transforma, después de n periodos de tiempo, en un monto de $C_n = C_0(1+i)^n$.

Conceptos

- Conceptos previos: porcentajes, progresión geométrica.
- Conceptos emergentes: interés compuesto.

Proposiciones

- En el régimen de interés compuesto, los intereses en cada periodo son calculados, como es natural, sobre la deuda al inicio de ese periodo.
- En el régimen de interés compuesto de tasa i, un capital C_o se transforma, después de n periodos de tiempo, en un monto de $C_n = C_0(1+i)^n$.
- Si la tasa de interés relativa a un determinado periodo de tiempo es igual a i, la tasa de interés relativa a n periodos de tiempo es I tal que $1 + I = (1+i)^n$.

Procedimientos
• Razonamiento inductivo para hallar la fórmula de interés compuesto. • Resolución de problemas usando las fórmulas de interés compuesto y tasas equivalentes. • Resolución de problemas resolviendo ecuaciones planteadas a partir de igualación de valores equivalente. • Resolución de una ecuación exponencial haciendo uso de logaritmos.
Argumentos
• Tesis 1: En el régimen de interés compuesto de tasa i, un capital C_o se transforma, después de n periodos de tiempo, en un monto de $C_n = C_0(1+i)^n$. Se usa el siguiente argumento: Baste observar que los valores del capital crecen con una tasa constante i y, por lo tanto, forman una progresión geométrica de razón 1+ i. • Tesis 2: Si la tasa de interés relativa a un determinado periodo de tiempo es igual a i, la tasa de interés relativa a n periodos de tiempo es I tal que $1 + I = (1 + i)^n$. Se usa el siguiente argumento: La prueba de esta fórmula se encuentra en la sección 1.2, y se muestra como prueba de la siguiente tesis equivalente: "Si I es la tasa de crecimiento de una magnitud relativa al periodo de tiempo T e i es la tasa de crecimiento al periodo de tiempo t, y si $T = nt$, entonces $1 + I = (1 + i)^n$". La prueba es la siguiente: Sea capital G_o el valor inicial de la magnitud. Luego de un periodo de tiempo T, el valor de la magnitud será $G_0(1+I)^1$. Como un periodo de tiempo T equivale a n periodos de tiempo iguales a t, el valor de la magnitud será también igual a $G_0(1+I)^n$. Luego, $G_0(1+I)^1 = G_0(1+I)^n$ y $1 + I = (1+i)^n, lqqd.$

La segunda configuración epistémica asociada al desarrollo del tema el tema interés compuesto corresponde al libro "Cálculo aplicado a administración, economía, contaduría y ciencias sociales" (Hoffmann y Bradley, 1995), el cual se usa como libro de texto en cursos de nivel universitario dirigidos a estudiantes de carreras de negocios.

Configuración epistémica
Situación problema
Tipo de ejercicio: Hallar el monto conociendo el capital, la tasa de interés y el tiempo. Suponga que se invierten US$1,000 a una tasa de interés anual del 8%. Calcule el saldo después de 10 años en cada uno de los casos siguientes: - El interés se capitaliza trimestralmente. - El interés se capitaliza continuamente.

Tipo de ejercicio: Hallar el tiempo conociendo la tasa de interés y la relación entre el monto y el capital.

Qué tan rápido se duplicará el dinero si se invierte a una tasa de interés anual del 8% y el interés se capitaliza

- Trimestralmente
- Continuamente

Tipo de ejercicio: Hallar el capital conociendo el monto, la tasa de interés y el tiempo.

Qué cantidad debe invertirse ahora a una tasa de interés anual del 8% para que su saldo dentro de 20 años sea de US$10,000 si el interés se capitaliza

- Trimestralmente
- Continuamente

Lenguaje

Verbal:
Inversión, interés anual simple, años, saldo.

Simbólico:

$$B(t) = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}$$

$$B(t) = Pe^{kt}$$

Definiciones-conceptos:
Interés compuesto: Si se invierten P dólares a una tasa de interés anual r (expresada como un decimal) y el interés se capitaliza k veces por año, el saldo $B(t)$ después de t años será

$$B(t) = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt} \text{ dólares}$$

Interés compuesto continuamente: Si se invierten P dólares a una tasa de interés anual r (expresada como un decimal) y el interés se capitaliza continuamente, el saldo $B(t)$ después de t años será

$$B(t) = Pe^{kt} \text{ dólares}$$

Conceptos

Conceptos previos: función exponencial, modelos funcionales,.
Conceptos emergentes: interés compuesto.

Proposiciones

Interés compuesto

- Si se invierten P dólares a una tasa de interés anual r (expresada como un decimal) y el interés se capitaliza k veces por año, el saldo $B(t)$ después de t años será

$$B(t) = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt} \text{ dólares}$$

Interés compuesto continuamente

- Si se invierten P dólares a una tasa de interés anual r (expresada como un decimal) y el interés se capitaliza continuamente, el saldo $B(t)$ después de t años será

$$B(t) = Pe^{kt} \text{ dólares}$$

Valor presente del dinero futuro

- Si el interés se capitaliza k veces por año a una tasa de interés anual r, el valor presente de B dólares pagaderos dentro de t años es

$$P = B\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{-kt} \text{ dólares}$$

- Si el interés se capitaliza continuamente a una tasa de interés anual r, el valor presente de B dólares pagaderos dentro de t años es

$$P = Be^{-kt} \text{ dólares}$$

Procedimientos

- Resolución de ejercicios aplicando directamente la fórmula de correspondiente.

Argumentos

- Tesis 1: Si se invierten P dólares a una tasa de interés anual r (expresada como un decimal) y el interés se capitaliza k veces por año, el saldo $B(t)$ después de t años será

$$B(t) = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt} \text{ dólares}$$

  Se usa el siguiente argumento: Si la tasa de interés anual es r y el interés se capitaliza k veces por año, entonces el año se divide en k periodos de capitalización y la tasa de interés en casa periodo es $\frac{r}{k}$. Por lo tanto, el saldo al final del primer periodo es

$$P_1 = P + P\left(\frac{r}{k}\right) = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)$$

  El saldo al final del segundo periodo es

$$P_2 = P_1 + P_1\left(\frac{r}{k}\right) = P_1\left(1 + \frac{r}{k}\right) = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^2$$

  y en general, el saldo al final del periodo m-ésimo es

$$P_m = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^m$$

Como existen k periodos en un año, el saldo después de un año es

$$P\left(1+\frac{r}{k}\right)^{k}$$

Al final de t años, el interés ha sido capitalizado kt veces y el saldo está dado por la función

$$P = B\left(1+\frac{r}{k}\right)^{-kt}$$

- Tesis 2: Si se invierten P dólares a una tasa de interés anual r (expresada como un decimal) y el interés se capitaliza continuamente, el saldo $B(t)$ después de t años será

$$B(t) = Pe^{kt} \text{ dólares}$$

Se usa el siguiente argumento:

Sea $n = \frac{k}{r}$, entonces $k = nr$ y así:

$$B(t) = \lim_{k\to\infty} P\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} = \lim_{n\to\infty} P\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{rt} = Pe^{kt}$$

- Tesis 3: Si el interés se capitaliza k veces por año a una tasa de interés anual r, el valor presente de B dólares pagaderos dentro de t años es

$$P = B\left(1+\frac{r}{k}\right)^{-kt} \text{ dólares}$$

Se usa el siguiente argumento: Si el interés se capitaliza k veces por año, el saldo después de t años es

$$B(t) = P\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}$$

y el valor presente de B dólares dentro de t años es

$$P = B\left(1+\frac{r}{k}\right)^{-kt}$$

- Tesis 4: Si el interés se capitaliza continuamente a una tasa de interés anual r, el valor presente de B dólares pagaderos dentro de t años es

$$P = Be^{-kt} \text{ dólares}$$

Se usa el siguiente argumento: Si el interés se capitaliza continuamente, el saldo es

$$B(t) = Pe^{kt}$$

y el valor presente es

$$P = Be^{-kt}$$

Por último, la tercera configuración epistémica asociada al desarrollo del tema el tema interés compuesto corresponde al libro “Matemática Financiera” (Castagna, 1998), el cual se usa como libro de texto en cursos de matemática financiera a nivel universitario dirigidos a estudiantes de carreras de negocios.

Configuración epistémica
Situación problema
Tipo de problema: Uso de inducción matemática para demostrar una fórmula de interés compuesto. Demostremos por inducción completa que la fórmula para calcular el Monto Final en Interés Compuesto es: $$M = C.(1+i)^T$$
Lenguaje
Verbal: Inducción completa, monto final, interés compuesto. *Simbólico:* $$M = C.(1+i)^T$$
Conceptos
Conceptos previos: inducción matemática. *Conceptos emergentes:* interés compuesto.
Proposiciones
• Si se invierten P dólares a una tasa de interés anual simple r (expresada como un decimal), el saldo $B(t)$ después de t años será $B(t) = P(1+rt)$ dólares
Procedimientos
• Resolución del ejercicio aplicando directamente la fórmula de interés simple.
Argumentos
Se demuestra por inducción completa que la fórmula para calcular el Monto Final en Interés Compuesto es: $$M = C.(1+i)^T$$ Para $T = 1$ se cumple ya que calculamos anteriormente: $M = C.(1+i)$ se cumple

Supongamos que para $T = N$ se cumple y demostraremos que también se cumple para $T = N + 1$: Hipótesis) $M_N = C.(1 + i)^N$ Tesis) $M_{N+1} = C.(1 + i)^{N+1}$ Si nos situamos al comienzo del año $T = N + 1$, el Capital C_{N+1} con que empezamos dicho año es: $C_{N+1} = M_N = C.(1 + i)^N$ El Interés y el Monto generados durante el año $T = N + 1$ son: $I_{N+1} = C_{N+1}.i.1 = C_{N+1}.i$ $M_{N+1} = C_{N+1} + I_{N+1} = C_{N+1} + C_{N+1}.i = C_{N+1}.(1 + i)$ Sustituyendo C_{N+1} por lo que nos había dado, queda demostrada la Tesis: $M_{N+1} = C.(1 + i)^N.(1 + i) = C.(1 + i)^{N+1}$ Entonces, podemos decir que la fórmula para hallar el Monto Final con Interés Compuesto es: $M = C.(1 + i)^T$

A continuación, a manera de síntesis, resumimos los diferentes puntos encontrados en las tres configuraciones epistémicas asociadas al tema interés compuesto, desarrolladas previamente.

Síntesis de las configuraciones epistémicas
Síntesis de las situaciones problema
Tipos de problema: En los libros analizados se encuentran diversos tipos de problemas. Inicialmente se pide hallar el monto, en varios de los casos se presentan ejercicios para introducir el tema. Luego se presentan ejercicios para encontrar el interés. Varios de los ejercicios están propuestos de tal manera que se necesita simplemente el reemplazo en la fórmula previamente definida. Cebe señalar que se encontró un problema donde se pedía hallar las cuotas mensuales, sin embargo un problema de este tipo requeriría el conocimiento del tema anualidades, por tal motivo, la solución encontrada no es la adecuada. También se encontró un tipo de problema donde se pide el tiempo o número de periodos y para hallarlo es necesario la solución de una ecuación exponencial haciendo uso de logaritmos. Además, se encontró un problema a que pedía la demostración de la principal fórmula de interés compuesto, haciendo uso de inducción matemática.
Síntesis del lenguaje utilizado
Verbal: Comúnmente se encontraron términos como capital, interés, tasa de interés, tiempo, periodo, capitalización, meses, años, días, soles, dólares.

Simbólico: No todos los libros usan las mismas letras o símbolos para representar los diferentes elementos involucrados en el tema, por ejemplo, algunos usan representan el capital con el símbolo C, mientras que otros usan P o P_0. Además se presentan notaciones funcionales como B(t) en los libros donde se define el monto de interés compuesto como una función exponencial que depende del tiempo. *Gráfico:* En varios de los libros se encontró que la línea de tiempo sirve para ordenar la información y visualizar el traslado del dinero de un periodo a otro. *Definiciones-conceptos:* Todas las definiciones coinciden en indicar que el interés de cada periodo se calcula como un porcentaje del capital correspondiente al periodo anterior.
Síntesis de los conceptos utilizados
Conceptos previos: en algunos casos, como conocimientos previos solo se requería el tema porcentajes, mientras que en otros libros se asociaba al tema progresión geométrica o en otros libros al tema exponencial. En algunos casos se requería el conocimiento de logaritmos como concepto prevo. *Conceptos emergentes:* En todos los casos el concepto emergente fue el interés compuesto.
Síntesis de las proposiciones
En todos los casos las proposiciones presentadas estaban asociadas a la fórmula monto principalmente. Además se consideró la fórmula del monto para el caso de interés compuesto continuamente.
Síntesis de los procedimientos
En algunos casos, el único procedimiento encontrado era el uso de operaciones básicas. También se encontraron secuencias inductivas y deductivas. Además se observó el uso directo de fórmulas y resoluciones de ecuaciones exponenciales. Por otro lado, se encontró el uso de inducción matemática para la demostración de la fórmula de monto de interés compuesto.
Síntesis de los argumentos
En varios de los libros analizados no se muestran argumentos de manera explícita. En algunos casos se deja como parte de la tarea del estudiante encontrar las demostraciones. Además, se observó que se usa las propiedades de progresión geométrica para la justificación de fórmulas, así como también la inducción matemática. En los libros donde se presentó la fórmula de monto como una función exponencial del tiempo se demostró de manera inductiva la fórmula de interés compuesto; además, se dedujo la de monto para el caso de interés compuesto con capitalización continua.

Así como se hizo en el caso de interés simple, se quiere remarcar las dos formas como se relaciona el tema interés compuesto en los libros analizados con otros temas matemáticos que sirven como conceptos previos. La primera forma consiste en emerger el concepto de interés compuesto a partir de la progresión geométrica, la cual se eligió al momento de definir el significado pretendido e implementado en la presente tesis. La segunda forma consiste en relacionar el tema interés compuesto con una función exponencial.

4.2. Significado institucional pretendido

El significado institucional pretendido está conformado por el sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio de los temas interés simple y compuesto. Para este caso se realizó el análisis de dos libros usando la configuración epistémica..

4.2.1. Significado institucional pretendido del tema interés simple

Para la organización del significado de referencia correspondiente al tema interés simple, se analizó el desarrollo de dicho tema en dos libros:

- Un libro de texto de cuarto año de educación secundaria
- Un libro de Matemática usado por los estudiantes de carreras de letras de la PUCP en el primer ciclo de estudio.

A continuación presentamos la configuración epistémica asociada al desarrollo del tema el tema interés simple que presenta el libro Matemática 4 (Mejía, 2002), el cual es entregado gratuitamente por el Ministerio de Educación a los escolares de cuarto año de secundaria en las escuelas públicas del Perú.

Configuración epistémica
Situación problema
Tipo de problema: Hallar el monto conociendo el capital, la tasa de interés y el tiempo. Un capital de S/. 2 000 se coloca a un interés simple del 10% anual durante dos años. ¿En cuánto se convierte dicho capital?
Lenguaje
Verbal: Capital, interés simple, anual, años, tasa de interés anual. *Simbólico:* S/.2 000; 10%; 0,10; i; C_0; r; t; n;

$i = C_0.r.t$; $i = 2\,000 \cdot 0{,}10 \cdot 2 = S/.400$ *Definiciones-conceptos:* Cuando una persona deposita un capital en una institución financiera (banco, caja rural, caja municipal, etc.) durante un cierto tiempo, se genera intereses en beneficio de la persona. Dependiendo de que se sumen o no los intereses al capital, el interés se llama simple o compuesto.
Conceptos
Conceptos previos: porcentajes. *Conceptos emergentes:* interés simple.
Proposiciones
• En interés simple, si C_0 es el capital inicial, r es la tasa de interés anual y t es el tiempo, entonces el interés simple es: $i = C_0 \cdot r \cdot t.$
Procedimientos
• Uso de operaciones básicas para la resolución de ejercicios introductorios. • Resolución de ejercicios aplicando directamente las fórmulas de interés simple.
Argumentos
No presenta.

La segunda configuración epistémica asociada al desarrollo del tema el tema interés simple corresponde al libro "Matemática para no Matemáticos" (Gaita, Advíncula, Barrantes, Henostroza, Jabo, y Luna, 2009), el cual se usa como libro de texto en el curso Matemática Básica en la facultad de Estudios Generales Letras de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Este es un libro diferente a los textos tradicionales de matemáticas, pues empieza cada tema con una situación problema en vez de un listado directo de fórmulas.

Configuración epistémica
Situación problema
Tipo de problema: Hallar el monto y el interés conociendo el capital, la tasa de interés y el tiempo. Octavio ha decidido solicitar un préstamo al banco Mi Perú para amortizar el pago de las deudas que lo están abrumando. Para ello firma un contrato con el banco en los siguientes términos:

• El banco otorgará a Octavio S/. 10 224 en calidad de préstamo. • El banco impone una tasa de interés simple anual de 8,18%. • Octavio pagará al banco una cuota fija mensual por los siguientes 24 meses, de modo que pueda cumplir con cancelar el crédito solicitado, incluidos los intereses. a) ¿Cuál es el monto total que debe pagar Octavio al final de los dos años? b) ¿Cuál será el monto total correspondiente al interés que debe pagar Octavio al final de los dos años? .A que porcentaje del monto total pagado equivale? c) ¿Cuál es el valor de la cuota mensual que debe pagar Octavio?
Lenguaje
Verbal: Amortizar, préstamo, tasa de interés simple anual, cuota fija mensual, meses, crédito, años, monto total. *Simbólico:* S/.10 224; 8,18%; n; C_n; C_0; $C_n = C_0 + niC_0$ *Definiciones-conceptos:* El interés simple es el sistema en el cual la tasa de interés r se aplica en cada periodo al capital inicial P_0. Es decir, el valor $P(t)$ del capital luego de t períodos está dado por: $P(t) = P_0(1 + rt)$
Conceptos
Conceptos previos: porcentajes. *Conceptos emergentes:* interés simple.
Proposiciones
• (En interés simple) el valor $P(t)$ del capital luego de t períodos está dado por: $P(t) = P_0(1 + rt)$
Procedimientos
• Uso de operaciones básicas para la solución de la situación problema que ha servido para introducir el tema interés simple.
Argumentos
No presenta de manera explícita.

4.2.2. Significado institucional pretendido del tema interés compuesto

Para la organización del significado de referencia correspondiente al tema interés compuesto, hemos analizado el desarrollo de dicho tema en diversos libros que enumeramos a continuación:

- Un libro de texto de cuarto año de educación secundaria
- Un libro de Matemática usado por los estudiantes de carreras de letras de la PUCP en el primer ciclo de estudio.

A continuación presentamos la configuración epistémica asociada al desarrollo del tema el tema interés compuesto que presenta el libro Matemática 4 (Mejía, 2002), el cual es entregado gratuitamente por el Ministerio de Educación a los escolares de cuarto año de secundaria en las escuelas públicas del Perú.

Configuración epistémica
Situación problema
Tipo de ejercicio: Hallar el monto conociendo el capital, la tasa de interés y el tiempo. Un capital de S/. 2 000 se coloca a un interés compuesto del 10% anual durante dos años. ¿En cuánto se convierte dicho capital? *Tipo de ejercicio: Hallar el monto para periodos de capitalización no anual conociendo el capital, la tasa de interés y el tiempo.* Se depositan S/. 500 en un banco a una tasa de interés del 15% anual capitalizables mensualmente. ¿Cuál será el monto acumulado en 2 años? *Tipo de ejercicio: Hallar el interés para periodos de capitalización no anual conociendo el capital, la tasa de interés y el tiempo.* Determina el interés que gana en tres años un depósito de S/. 12 000 en una cuenta que paga: a) 12% de interés anual capitalizado bimestralmente. b) 15% de interés anual capitalizado trimestralmente. c) 20% de interés anual capitalizado semestralmente. d) 18% de interés anual capitalizado diariamente (360 días).
Lenguaje
Verbal: Capital, interés compuesto, capitalización, anual, años, tasa de interés anual, mensualmente, trimestralmente, semestralmente, diariamente. *Simbólico:* $C_f = C_0(1+i)^t$;

$$C_f = 2\,000 \cdot (1+0{,}10)^2 = S/.\,2\,420\ ;$$

$$C_f = C_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}\ ;$$

$$C_f = 500\left(1+\frac{0{,}15}{12}\right)^{12\cdot 2} \approx 673{,}68$$

Definiciones-conceptos:
Cuando una persona deposita un capital en una institución financiera (banco, caja rural, caja municipal, etc.) durante un cierto tiempo, se genera intereses en beneficio de la persona. Dependiendo de que se sumen o no los intereses al capital, el interés se llama simple o compuesto.

Conceptos
Conceptos previos: porcentajes. *Conceptos emergentes:* interés compuesto.
Proposiciones
• En interés compuesto, el capital final C_f, que se obtiene a partir de un capital inicial C_0 en t años a una tasa de interés anual r, es: $$C_f = C_0(1+r)^t$$ • La fórmula de interés compuesto para periodos de capitalización que no son anuales se expresa así: $$C_f = C_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt},$$ Donde C_f es el capital final, C_0 es capital inicial, t es el número de años, r es la tasa de interés anual y n es el número de periodos de capitalización que hay en un año.
Procedimientos
• Uso de operaciones básicas para la resolución de ejercicios introductorios. • Resolución de ejercicios aplicando directamente las fórmulas de interés compuesto e interés compuesto con periodos de capitalización no anual.
Argumentos
No presenta.

La segunda configuración epistémica asociada al desarrollo del tema el tema interés compuesto corresponde al libro “Matemática para no Matemáticos” (Gaita et al., 2009), el cual está dirigido a estudiantes del curso Matemática Básica en la facultad de Estudios Generales Letras de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Este es un libro presenta los temas partiendo de una situación problema en vez de presentar directamente las fórmulas correspondientes al nuevo tema, como sí lo hace la mayoría de textos.

Configuración epistémica
Situación problema
Tipo de problema: Hallar el monto y cuota mensual conociendo el capital, la tasa de interés y el tiempo. Octavio ha decidido solicitar un préstamo al banco Mi Perú para amortizar el pago de las deudas que lo están abrumando. Para ello firma un contrato con el banco en los siguientes términos: • El banco otorgará a Octavio S/. 10 224 en calidad de préstamo. • El banco impone una tasa de interés simple anual de 8,18%. • Octavio pagará al banco una cuota fija mensual por los siguientes 24 meses, de modo que pueda cumplir con cancelar el crédito solicitado, incluidos los intereses. Suponga ahora que la tasa de interés que cobra el banco es compuesta anualmente. ¿Cuál es el monto total que debe pagar Octavio al cabo de los dos años? Si Octavio prefiere pagar ese monto en cuotas mensuales iguales, ¿cuál sería el valor de la cuota mensual?
Lenguaje
Verbal: Amortizar, préstamo, tasa de interés simple anual, cuota fija mensual, meses, crédito, años, monto total. *Simbólico:* S/.10 224; 8,18%; n; C_n; C_0; $C_n = C_0 + niC_0$ *Definiciones-conceptos:* El interés compuesto es el sistema en el cual la tasa de interés r se aplica en cada periodo al capital acumulado en el período anterior. Así, si el capital inicial es P_0 , el valor $P(t)$ del capital luego de t períodos está dado por: $P(t) = P_0(1+r)^t$
Conceptos
Conceptos previos: porcentajes. *Conceptos emergentes:* interés compuesto.
Proposiciones
• (En interés compuesto) si e capital inicial es P_0 , el valor $P(t)$ del capital luego de t períodos está dado por: $P(t) = P_0(1+r)^t$

Procedimientos
• Uso de operaciones básicas para la solución de la situación problema que ha servido para introducir el tema interés compuesto.
Argumentos
No presenta de manera explícita.

Se desarrollo un material de estudio que resultó siendo el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente; para lo cual se tomo usó como guía los significados institucionales de referencia y pretendido, así como los conocimientos personales previamente adquiridos del profesor. Cabe señalar que dicho material de estudio correspondiente a los temas de interés simple y compuesto, se encuentra detallado en los anexos 3, 7 y 11, como parte del material de clase usado en las tres sesiones que corresponden a los temas de interés simple y compuesto.

4.2.3. El diseño de las sesiones de clase

En la planificación de las tres sesiones de clase propuestas se usaron los criterios de idoneidad didáctica; así como también, los principios de la educación matemática crítica y el papel de la matemática en la formación de ciudadanos responsables. Además, se tuvo como guía el significado institucional de referencia.

Se iniciaron las sesiones de clase con problemas contextualizados introductorios, luego desarrollamos los temas con problemas contextualizados de aplicación y al final se proponen problemas contextualizados de consolidación (idoneidad epistémica).

Los conceptos de interés simple e interés compuesto se infieren luego del desarrollo del razonamiento inductivo, llegando a formular conjeturas. El objetivo es presentar una situación del mundo real que el estudiante puede resolver con sus conocimientos previos (matemáticos y no matemáticos). Así se busca facilitar la construcción, por parte de los estudiantes, de los conceptos matemáticos nuevos que se a van estudiar (idoneidad cognitiva).

La metodología implícita en cada sesión de clase es la siguiente: el profesor propone problemas interesantes para los estudiantes, que ellos han de intentar resolver en parejas o grupos de tres. En el proceso, además de resolver los problemas, se van construyendo los conceptos de cada unidad. Estos conceptos se relacionan y organizan para ser primero aplicados a ejercicios básicos y después ser utilizados en la resolución de problemas contextualizados más complejos (idoneidad epistémica -cognitiva - afectiva).

Con respecto a los procesos de particularización y generalización, se pretende que los conceptos, propiedades y procedimientos surjan a partir de generalizaciones y de procesos de abstracción, es por ello que la argumentación deductiva es casi inexistente. El tipo de argumentación que se usa es de tipo inductivo.

Luego que los estudiantes terminan de resolver los ejercicios introductorios del caso planteado, ellos comparten sus respuestas y con la guía del profesor se confirman y comentan las soluciones halladas, así como también las fórmulas que ellos han encontrado de manera inductiva. Así pues, de esta manera se institucionaliza y formaliza el objeto matemático construido por los estudiantes (idoneidad interaccional).

Para que se asegure la creación de espacios para la reflexión, se introduce en el material de clase un apartado que contiene una serie de preguntas relacionadas con cada uno de los temas estudiados, donde se les pide la opinión personal a cada uno de los estudiantes y luego ellos comparten sus respuestas con toda la clase, propiciándose de esta manera el debate.

Además, se incluyó en el material de clase para cada sesión un apartado correspondiente a preguntas de competencia financieras que siguen el estilo se las preguntas liberadas por PISA 2012 que aparecen en OCDE (2013), en relación con dicha competencia. También en este caso se le pide a cada estudiante que respondan de manera individual para que luego se compartan sus respuestas como en el apartado anterior.

En el material que se entregó a los estudiantes al final de la cada clase, se encuentra la lista de fórmulas validadas en la institucionalización hecha en clase; además, dicho material contiene una serie de ejercicios con sus respectivas respuestas, para que los estudiantes practiquen.

4.2.4. El material de clase

En cada sesión de clase se entregó un material de trabajo a cada estudiante (ver anexos 3, 7 y 11). Para la preparación de dicho material se tomó en cuenta el significado institucional de referencia, los criterios de idoneidad didáctica, la educación matemática crítica y el papel de la matemática en la formación de ciudadanos responsable. A continuación se describe cada una de las partes que componen el material didáctico que se usó en las sesiones de clase:

ESTRUCTURA DEL MATERIAL USADO EN CLASE
PARTE A: CASO O TEORÍA
Se proponen situaciones que permiten valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional. Se parte de una serie de ejercicios contextualizados básicos que buscan una secuencia inductiva para que luego se pueda obtener la fórmula. Sin embargo, cuando no es posible una secuencia inductiva, se brinda la teoría necesaria para la introducción del nuevo tema, apoyándose en ejemplos básicos. Esta parte inicial puede ser resuelta por los estudiantes haciendo uso de sus conocimientos previos. Además, se presentan diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica y simbólica). Se promueve el uso de calculadoras científicas. En esta parte inicial, se pide a los estudiantes que formen parejas o grupos, así pueden discutir y ayudarse al momento de entender el nuevo tema o cuando resuelven los problemas. Los problemas propuestos son adecuados para el nivel educativo de los estudiantes. Además, se promueven situaciones donde los estudiantes tengan que argumentar. Los objetos matemáticos se relacionan y conectan entre sí. Trabajando esta parte del material, los estudiantes construyen su aprendizaje del tema matemático. Y es por ello esta parte del material se ha usado para el análisis de prácticas, objetos y procesos.
PARTE B: PREGUNTAS DE REFLEXIÓN
Se crea este espacio para la reflexión sobre preguntas relacionadas con el tema estudiado y su relación con la vida cotidiana. En esta parte, se pide a los estudiantes que respondan a las preguntas de manera individual, para que finalmente toda la clase comparta sus respuestas y las comente. Favorecemos la inclusión de los estudiantes en la dinámica de la clase. Se contempla la formación de valores democráticos y pensamiento crítico.
PARTE C: CUIDADO Y MANEJO RESPONSABLE DEL DINERO
Se plantean casos similares a los que fueron evaluados en las pruebas PISA 2012 en lo referente a la competencia financiera. También en esta parte, se pide a los estudiantes que respondan a las preguntas de manera individual, para que finalmente toda la clase comparta sus respuestas y las comente. Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes. Aquí también se contempla la formación de valores democráticos y pensamiento crítico.
PARTE D: INSTITUCIONALIZACIÓN
Si bien es cierto que se busca que los estudiantes sean los que construyan su aprendizaje del nuevo tema, luego de responder las preguntas matemáticas, comparten sus respuestas y se institucionalizan los resultados y fórmulas. En esta parte del material, que se les entregó al final de clase, se buscó que el nuevo tema tenga referencias institucionales, principalmente en las fórmulas halladas, para que no haya lugar a dudas.
PARTE E: EJERCICIOS
Al finalizar la clase, también se les entregó una lista de ejercicios de repaso con sus respectivas respuestas, a manera de actividades de ampliación y refuerzo. La lista de ejercicios es representativa de los aprendizajes pretendidos.

Capítulo 5: Resultados y Análisis Didáctico de las Sesiones Implementadas

Resumen

A lo largo de este capítulo se busca alcanzar el objetivo específico 3: Analizar los resultados obtenidos en la implementación de un programa de formación de profesores en los temas de interés simple y compuesto. Para ello, se empieza analizando las prácticas para cada una de las tres sesiones de clase, luego se realizan las configuraciones epistémicas para describir el significado institucional en cada uno de los temas y las configuraciones cognitivas para observar los significados personales.

En este capítulo se analizan las tres sesiones de clase implementadas a los profesores de matemática de secundaria becados por el PRONABEC para estudiar la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas con mención en Educación Secundaria en la PUCP.

5.1. Análisis epistémico a priori

Los análisis a priori permiten formular hipótesis sobre conflictos semióticos potenciales entre los cuales destacan, por su relevancia, aquellos que origina un libro de texto al dejar a cargo del alumno la realización de determinadas funciones semióticas que son básicas para la correcta interpretación del texto y que, de no producirse, pueden ocasionar una disparidad entre el significado personal global del alumno y el significado institucional pretendido. Un conflicto semiótico es la disparidad entre los contenidos atribuidos a una misma expresión por el alumno y la institución (Godino, 2002)

A partir de los problemas planteados y las resoluciones posibles, se realizó el análisis a priori. Este consiste en identificar objetos y significados puestos en juego en esa resolución, y a partir de ellos la detección de conflictos potenciales.

Conflictos potenciales de la primera sesión de clase. (Ver material usado y la solución experta de los problemas en las anexos 3 y 4 respectivamente)

a) No expresan el número de periodos *n* y la tasa de interés *i* en las mismas unidades de tiempo.
b) Toman la tasa de interés *i*=5% como *i*=5 en vez de *i*=0,05

Conflictos potenciales de la segunda sesión de clase. (Ver material usado y la solución experta de los problemas en las anexos 7 y 8 respectivamente)

a) No expresan el número de periodos *n* y la tasa de interés *i* en las mismas unidades de tiempo.
b) Toman la tasa de interés *i*=5% como *i*=5 en vez de *i*=0,05
c) Para encontrar la tasa de interés en otro periodo usan el producto, la división o la regla de tres.
d) Para hallar el número de periodos *n* usan el tanteo en vez de los logaritmos.

Conflictos potenciales de la tercera sesión de clase. (Ver material usado y la solución experta de los problemas en las anexos 11 y 12 respectivamente)

a) Para encontrar la tasa de interés en otro periodo usan el producto, la división o la regla de tres.
b) No toman en cuenta el valor del dinero en el tiempo, pues suman o restan dos cantidades de dinero que corresponden a momentos diferentes.

5.2. Análisis de prácticas de las sesiones de clase

El primer nivel de análisis del EOS pretende identificar las prácticas matemáticas realizadas en el proceso de instrucción.

Para el análisis descriptivo de las prácticas, previamente transcribimos los diálogos entre los profesores que guiaban la clase y los estudiantes (profesores de matemática de secundaria), al momento de comentar sus respuestas matemáticas en cada una de las sesiones de clases.

5.2.1. Identificación de las prácticas matemáticas para la sesión de clase de interés simple

Este análisis se apoya en la transcripción del discurso correspondiente a la sesión de clase del tema interés simple (ver Anexo 6).

Este caso se centra en el episodio de clase del tema de interés simple, dirigido a profesores de matemática de secundaria.

Durante esta clase se pretendió que los estudiantes aprendan el tema de interés simple, partiendo de ejercicios básicos contextualizados, que permitan la emergencia de las fórmulas usadas en este tema. Los estudiantes, distribuidos en grupos de tres, resolvieron la lista de problemas que se les entregó al inicio de clase. Para la resolución de problemas usaron operaciones básicas. Posteriormente lograron generalizar la fórmula que les permite hallar de manera directa el interés, así como también, la fórmula que les permite hallar de manera directa el monto.

El profesor (P_1) interviene para gestionar los turnos de intervención y contribuir a completar las explicaciones de los estudiantes. Desde el punto de vista de las prácticas matemáticas, varias de sus intervenciones son metamatemáticas (p. ej., consideraciones sobre el papel del contexto extramatemático en el aula de matemáticas, validación de la argumentación del estudiante E_5 en particular y de todos en general). Además, el profesor (P_1) institucionaliza los resultados hallados por los estudiantes, hace intervenciones relacionadas con la valoración de las prácticas matemáticas hechas. Finalmente, el profesor institucionaliza los conceptos que emergen al resolver los ejercicios que se les entregó al iniciar la clase, y propone una serie de ejercicios (con sus respectivas respuestas) para afianzar lo trabajado en clase.
La profesora (P_2) apoya en la gestión de la clase e interviene para hacer algunas recomendaciones y aclaraciones.

En general, los estudiantes E_i leyeron y entendieron los enunciados de los problemas propuestos dentro del caso planteado. Resolvieron los ejercicios grupos de tres usando las operaciones básicas. Comparten las respuestas halladas con toda la clase, al responder las preguntas que hace el profesor (P_1). Además, los estudiantes E_i lograron de manera inductiva (en la mayoría de casos) encontrar las fórmulas que permiten hallar de manera directa el interés y el monto.

El estudiante E_5 generaliza cómo hallar el interés simple mediante la fórmula [26].

El estudiante E_6 remarca la importancia de tener presente el grado al cual se va a enseñar este tema en secundaria [39].

El estudiante E_4 argumenta por qué se debe usar mejor la segunda fórmula presentada para hallar el interés [43].

El estudiante E_3 remarca el hecho de usar las mismas unidades de tiempo en la tasa de interés "*i*" y el número de periodos "*n*", cuando se usa la fórmula de interés [56].

5.2.2. Identificación de las prácticas matemáticas para la sesión de clase de interés compuesto – primera parte

Este análisis se apoya en la transcripción del discurso correspondiente a la sesión de clase del tema de interés compuesto – primera parte (ver Anexo 10).

Este caso se centra en el episodio de clase del tema interés compuesto – primera parte, dirigido a profesores de matemática de secundaria.

Durante esta clase se pretendió que los estudiantes aprendan el tema de interés compuesto, partiendo de ejercicios básicos contextualizados, que permitan la emergencia de las fórmulas usadas en este tema. Los estudiantes, distribuidos en parejas, resolvieron la lista de problemas que se les entregó al inicio de la clase. Para la resolución de problemas usaron operaciones básicas y de potencia. Posteriormente lograron generalizar la fórmula que les permite hallar de manera directa el monto, así como también, la fórmula que le permite hallar de manera directa el interés. Como última pregunta les pedimos encontrar el tiempo para que un capital se duplique, para lo cual deben plantear una ecuación donde deben hacer uso de logaritmos en la resolución.

El profesor (P) interviene para gestionar los turnos de intervención y contribuir a completar las explicaciones de los estudiantes. Desde el punto de vista de las prácticas matemáticas, varias de sus intervenciones son metamatemáticas (p. ej., consideraciones sobre el papel del contexto extramatemático en el aula de matemáticas, validación de la argumentación de E_1 en particular y de todos en general). Además, el profesor (P) institucionaliza los resultados hallados por los estudiantes, hace intervenciones relacionadas con la valoración de las prácticas matemáticas hechas. Finalmente, el profesor institucionaliza los conceptos que emergen al resolver los ejercicios que se les entregó al iniciar la clase, y propone una serie de ejercicios (con sus respectivas respuestas) para afianzar lo trabajado en clase.

En general, los estudiantes leyeron y entendieron los enunciados de los problemas propuestos dentro del caso planteado. Resuelven los ejercicios en parejas usando operaciones básicas, potencias y logaritmos. Comparten las respuestas halladas con toda la clase, al responder las preguntas que hace el profesor. Además, los estudiantes logran de manera inductiva (en la mayoría de casos) encontrar las fórmulas que permiten hallar de manera directa el monto y el interés.

Los estudiantes E_1 y E_2 indicaron que se dieron cuenta que las secuencia de respuestas halladas en las primeras preguntas formaban una progresión geométrica. [8] y [12]

Las operaciones de multiplicación, división y potencia se reflejan en los manifestado en [26], [21] y [29].

Reemplazan en las fórmulas encontradas para hallar respuestas [50]

La mayoría logró responder a la última pregunta donde era necesario plantear una ecuación y resolverla usando logaritmos como es el caso de E_1 [60].

5.2.3. Identificación de las prácticas matemáticas para la sesión de clase de interés compuesto – segunda parte

Este análisis se apoya en la transcripción del discurso correspondiente a la sesión de clase del tema interés compuesto - segunda parte (ver Anexo 14).

Este caso se centra en la segunda parte de la enseñanza del tema de interés compuesto a profesores de matemática de secundaria.

Durante esta clase se pretendió que los estudiantes aprendan cómo realizar cambios de tasas de interés compuestas; además, que aprenda a resolver problemas usando las fórmulas de capitalización y actualización. Los estudiantes, distribuidos en parejas, resolvieron la lista de problemas que se les entregó al inicio de clase. Para la resolución de problemas plantearon ecuaciones, despejaron variables, usaron operaciones básicas, potencias y raíces. También remplazaron en fórmulas definidas previamente.

El profesor (P) interviene para gestionar los turnos de intervención y contribuir a completar las explicaciones de los estudiantes. Desde el punto de vista de las prácticas matemáticas. Además, el profesor (P) institucionaliza los resultados hallados por los estudiantes E_i, hace intervenciones relacionadas con la valoración de las prácticas matemáticas hechas. Finalmente, el profesor institucionaliza los conceptos que emergen al resolver los ejercicios que fueron entregados al iniciar la clase, y propone una serie de ejercicios (con sus respectivas respuestas) para afianzar lo trabajado en clase.

En general, los estudiantes leyeron y entendieron los enunciados de los problemas propuestos dentro del caso planteado. Resuelven los ejercicios en parejas planteando ecuaciones, despejando variables, usando operaciones básicas, potencias y raíces. Comparten las respuestas halladas con toda la clase, al responder las preguntas que hace el profesor.

Los estudiantes E_1 y E_2 indicaron que usaron potencias [2] y [3], respectivamente.

Los estudiantes E_2 y E_1 indicaron que usaron radicales [7] y [8], respectivamente.

Los estudiantes E_1 y E_3 redondearon sus respuestas halladas [10] y [11], respectivamente.

Algunos responden, de manera correcta, que 120 días es equivalente a 1/3 de año. Es decir, saben expresar un determinado tiempo medido en diferentes períodos [25].

Algunos estudiantes hacen uso correcto de las fórmulas y responden bien a las preguntas [36], [37] y [39].

El estudiante E_4 luego de trabajar la última pregunta, interviene en la clase preguntando al profesor cómo sería si se tienen 20 cuotas [41].

5.3. Análisis de objetos y procesos matemáticos

Para analizar el desarrollo de la primera parte del material entregado en cada sesión de clase a los estudiantes, usaremos las configuraciones epistémicas, las cuales propone el EOS como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos en su versión institucional; además, usaremos las configuraciones cognitivas, las cuales propone el EOS como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos en su versión personal.

En el presente apartado, se presentan las configuraciones epistémicas y cognitivas para las siguientes tres sesiones de clase:

- Sesión de clase 1: Interés simple.
- Sesión de clase 2: Interés compuesto – Primera parte.
- Sesión de clase 3: Interés compuesto – Segunda parte.

5.3.1 Análisis de objetos y procesos matemáticos de la sesión de clase 1: Interés simple

A continuación se presenta la configuración epistémica correspondiente a la sesión de clase 1, Interés simple. La solución experta de la situación problema se encuentra el Anexo 4.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA DEL TEMA INTERÉS SIMPLE

SITUACIÓN PROBLEMA

CASO: PRÉSTAMO ENTRE FAMILIARES O AMIGOS

José es un padre de familia que no tiene trabajo fijo. Ha pensado en implementar un taller de carpintería, para lo cual necesita un capital de 5 000 soles. Como no cuenta con un ingreso fijo mensual, no puede pedir un préstamo bancario, es por ello que ha decidido pedirle dinero prestado a su cuñado César.

César ha aceptado prestarle a José, el capital que necesita, con las siguientes condiciones:

- Le deberá pagar el 5% de interés mensual, sobre el capital prestado.
- Le da la oportunidad para pagarle, en un máximo de 36 meses, el total del capital más los intereses generados.

A continuación, responder las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto deberá pagarle José a César, por concepto de intereses? Si decide pagar
   i. Al mes
   ii. A los dos meses
   iii. A los tres meses
   iv. Al año
   v. A los tres años

b) Definir una fórmula que nos permita hallar el interés “I”, que debe pagar José, por un capital “C”, a una tasa de interés mensual “i”, después de “n” meses.

c) Usar la fórmula definida en b) para responder ¿Cuánto deberá pagarle José a César, por concepto de intereses, si decide pagar en 3 años?

d) En el contexto del caso ¿Qué tasa de interés anual es equivalente a la tasa de interés del 5% mensual?

e) Definir una fórmula que nos permita hallar el interés "I", que debe pagar José, por un capital "C", a una tasa de interés anual de "i", después de "n" años.

f) Usar la fórmula definida en e) para responder ¿Cuánto deberá pagarle José a César, por concepto de intereses, si decide pagar en 3 años?

g) ¿La fórmula obtenida en b) es la misma que la obtenida en e)? En general, ¿Qué tienen en común el número de periodos "n" y la tasa "i", dentro de cada fórmula?

h) ¿Cuál es el monto total que debe pagar José a César por concepto de intereses y capital? Si decide pagar
   i. Al mes
   ii. A los dos meses
   iii. A los tres meses
   iv. Al año
   v. A los tres años

i) Sea "*M*" el monto total que se cancela del préstamo, que incluye capital e intereses, definir una fórmula que nos permita hallar el monto "*M*", que debe pagar César, por un capital "*C*", a una tasa de interés mensual "*i*", después de "*n*" meses.

j) ¿Cuántos meses deben transcurrir desde el inicio del préstamo, hasta que el monto total a pagar sea el doble del capital inicial?

LENGUAJE

Verbal:

Soles, ingreso, mensual, préstamo, capital, interés, meses, años, nomenclatura, fórmula, monto total, cancela, tasa de interés mensual, tasa de interés anual, equivalente, capital inicial, secuencia inductiva, reemplazar, regla de tres, multiplicar, periodos, unidades de tiempo, factorizar, simplificar, operar, doble, dividir, despejar.

Simbólico:

5 000; 5%; $\times$; $\div$; /; $+$; $-$; 0,05; 12; 24; C; i; I; I_n, n; M; M_j; $M=C+I$; $I=M-C$;

$$I = C.i.n$$

$$I_n = C.n.i$$

$$x = \frac{5\% * 12}{1} = 60\%$$

$$M = C(1 + i.n)$$

$$M_n = C.(1 + n.i)$$

$$M = 2C$$

$$5\,000(1 + 0{,}05.n) = 2(5\,000)$$

$$1 + 0{,}05.n = 2$$

$$0{,}05.n = 1$$

$$n = \frac{1}{0{,}05} = 20$$

CONCEPTOS

Conceptos previos: porcentajes, progresión aritmética.

Conceptos emergentes: interés simple.

PROPOSICIONES

- Para el caso de n meses el interés será igual al interés mensual multiplicado por el número de meses $I_n = C.n.i$.
- Otra forma de generalizar el interés es teniendo en cuenta que se crea una progresión aritmética, donde el primer término es $C.i$ y la razón es también $C.i$.
- Otra forma de generalizar el monto es teniendo en cuenta que se crea una progresión aritmética, donde el primer término es $C+C.i$ y la razón es $C.i$.
- Se debe considerar (en la fórmula de interés y monto) que el número de periodos "*n*" y la tasa "*i*" deben estar medios en las mismas unidades de tiempo.

PROCEDIMIENTOS

Secuencia inductiva para hallar la fórmula.

Desarrollo de una progresión aritmética.

Resolución de una ecuación lineal.

ARGUMENTOS

Tesis 1: $I_n = C.n.i$

Se usa el siguiente argumento:

Teniendo en cuenta que se crea una progresión aritmética, donde el primer término es C.i y la razón es también C.i; por lo tanto, el término del lugar n es:

$$I_n = C.i + (n-1).C.i$$

Factorizando “C”:

$$I_n = C.[i + (n-1).i]$$

Operando:

$$I_n = C.(i + n.i - i)$$

Simplificando:

$$I_n = C.n.i$$

Tesis 2: $M_n = C.(1 + n.i)$

Se usa el siguiente argumento:

Teniendo en cuenta que se crea una progresión aritmética, donde el primer término es *C*+*C.i* y la razón es *C.i*; por lo tanto, el término del lugar n es:

$$M_n = C + C.i + (n-1).C.i$$

Factorizando “*C*”:

$$M_n = C.[1 + i + (n-1).i]$$

Operando:

$$M_n = C.(1 + i + n.i - i)$$

Simplificando:

$$M_n = C.(1 + n.i)$$

En la primera sesión de clase participaron como estudiantes quince profesores, los cuales fueron distribuidos en cinco grupos de tres estudiantes cada uno.

Hemos elegido las soluciones de dos grupos (ver anexo 5) y a partir de ellas hemos realizado las configuraciones cognitivas para cada caso. Además, el caso completo y la solución experta de esta sesión de clase se encuentran en los anexos 3 y 4 respectivamente.

A continuación presentamos la configuración cognitiva correspondiente a dos grupos, de tres estudiantes cada uno (ver Anexo 5), que resolvieron los problemas de la sesión de clase 1:

Configuración cognitiva (Grupo 1)
Situación problema
Caso de la sesión 1: Préstamo entre familiares o amigos
Lenguaje
Verbal: Interés (tasa), capital, meses, años, periodo. *Simbólico:* 5%; S/.5000;

$$\frac{5}{100}(5000) = 250$$ $$360(250) = S/.9000$$ $$I = \left(\frac{i}{100}xC\right)n$$ $$M = C\left(1 + \frac{i}{100}n\right)$$ $$20 = n$$
Conceptos
Conceptos previos: porcentaje *Conceptos emergentes:* interés simple
Proposiciones
• $I = \left(\frac{i}{100}xC\right)n$ • $I = \left(\frac{i}{100}xC\right)nx12$ • $M = C\left(1 + \frac{i}{100}n\right)$ • La fórmula obtenida en b) y en e) no tienen nada en común. Dependen del periodo.
Procedimientos
Secuencia inductiva para hallar la fórmula. Resolución de una ecuación lineal.
Argumentos
No presenta de manera explícita.

Configuración cognitiva (Grupo 2)
Situación problema
Caso de la sesión 1: Préstamo entre familiares o amigos
Lenguaje
Verbal: Anual, mensual, periodo, tasa, capital. *Simbólico:* 5000; S/.250; 60%; 5%; $$I = \frac{C.t.r}{1200}$$

$$I = \frac{C.t.r}{100}$$ $$I = \frac{C.n.i}{100}$$ $$M = C + I$$ $$M = \frac{C(100 + in)}{100}$$ $$20 = n$$
Conceptos
Conceptos previos: porcentaje *Conceptos emergentes:* interés simple
Proposiciones
• $I = \frac{C.n.i}{100}$ • $M = \frac{C(100+in)}{100}$ • La fórmula obtenida en b) y en e) la misma.
Procedimientos
Resolución de una ecuación lineal.
Argumentos
No presenta.

Luego de revisar las soluciones y respuestas de los estudiantes se observa lo siguiente:

- Muchos de los estudiantes están acostumbrados a empezar un nuevo tema con la presentación de la fórmula y luego usarla para resolver ejercicios (razonamiento deductivo). Es por ello que solamente algunos entendieron la secuencia de los ejercicios planteados, que luego les permitía encontrar algunas fórmulas (razonamiento inductivo).
- Algunos estudiantes toman la tasa de interés expresada de la forma “*i*%”; sin embargo, las preguntas indican de manera clara que la tasa de interés es “*i*”. Es decir, para una tasa de interés “*i*” igual del 5%=5/100=0,05, algunos lo tomaron como *i*=5 y presentaron sus fórmulas indicando la tasa de interés como “*i*%” o su equivalente

"i/100". Cabe resaltar que eso no fue motivo de error en sus cálculos, ya que sus fórmulas estaban adecuadas a la manera cómo ellos entendían "i".

Los libros de enseñanza básica suelen expresar las tasas de interés de la forma "i%", mientras que los libros de enseñanza superior prefieren presentar las tasas de interés de la forma "i". La intención es que los estudiantes se acostumbren desde un principio a trabajar los temas de matemática financiera expresando la tasa de interés de la forma "i".

- Cuando se les pidió las fórmulas, respondieron directamente sin justificación, quizás porque los primeros ejercicios permitían la emergencia de las fórmulas y ya no creían necesario remarcar cómo las obtuvieron. Además, ninguno de los profesores hizo referencia a la relación del tema interés simple con el tema progresión aritmética, siendo este tema revisado en clases anteriores como parte del curso.

5.3.2 Análisis de objetos y procesos matemáticos de la sesión de clase 2: Interés compuesto – Primera parte

A continuación se presenta la configuración epistémica correspondiente a la sesión de clase 2, Interés compuesto – Primera parte. La solución experta de la situación problema se encuentra el Anexo 8.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA DEL TEMA INTERÉS COMPUESTO – PRIMERA PARTE

SITUACIÓN PROBLEMA

CASO: PRÉSTAMO BANCARIO

Abel es una persona que tiene un trabajo fijo, y tiene dentro de sus propiedades un departamento y un auto propios. Es por ello que no le fue difícil obtener un préstamo bancario de 5 000 soles, para cambiar algunos muebles de su departamento, con las siguientes condiciones:

- Se aplicará una tasa de interés compuesto mensual del 5%. Es decir, cada fin de mes los intereses se sumarán al capital, creándose un nuevo capital mensualmente.
- Abel se compromete a devolver el préstamo en un solo pago, el cual incluye el capital y los intereses generados.

A continuación, responder las siguientes preguntas:

a) En cada caso, halle el monto total que pagaría Abel si se compromete a realizar el pago luego de:

i. Un mes
ii. Dos meses
iii. Tres meses
iv. Doce meses
v. Tres años

b) ¿Hay diferencia en la forma de obtención del monto para este caso, comparado con el caso de interés simple?

c) Definir una fórmula que permita hallar el monto total "M", que debe pagar Abel, por un capital "C", a una tasa de interés compuesto mensual "i", después de "n" meses.

d) Usar la fórmula definida en c) para hallar el monto total que pagará Abel, correspondiente al préstamo de un capital de 5 000 soles, a una tasa de interés compuesto mensual del 5%, luego de 24 meses.

e) Definir una fórmula que permita hallar el interés "I", que debe pagar Abel, por un capital "C", a una tasa de interés compuesto mensual "i", después de "n" meses. Recomendación: Use la fórmula encontrada en c) y recuerde que el monto es la suma del capital más el interés.

f) Usar la fórmula definida en e) para hallar el interés que pagará Abel, correspondiente al préstamo de un capital de 5 000 soles, a una tasa de interés compuesto mensual del 5%, luego de 24 meses.

g) ¿Después de cuantos meses, el monto total que debe pagar Abel, será el doble del capital inicial?

LENGUAJE

Verbal:

Soles, meses, años, préstamo, tasa de interés compuesto mensual, capital, interés, porcentaje, forma decimal, monto total, suma, multiplicación, división, cociente, interés simple, progresión aritmética, interés compuesto, progresión geométrica, razón, primer término, fórmula, nomenclatura, logaritmo, base de logaritmo, propiedad, doble y despejar.

Simbólico:

5 000; 5%; 0,05; 12; 24; C; C_0; C_1; C_2; C_j; i; I; n; M; M_1; M_2; M_3; M_j; $M=C+I$; r; $I=M-C$;

$$M = C(1+i)^n \;;$$

$$I = C[(1+i)^n - 1]\;;$$

$$M = 2C \;\; ;$$

$$(1{,}05)^n = 2 \;\; ;$$

$$log(1{,}05)^n = log\, 2 \;\; ;$$

$$n.\, log\, 1{,}05 = log\, 2 \;\; ;$$

$$n = \frac{log\, 2}{log\, 1{,}05}$$

CONCEPTOS

Conceptos previos: porcentajes, interés simple, progresión aritmética, progresión geométrica.

Conceptos emergentes: interés compuesto.

PROPOSICIONES

- En el caso de interés simple, el comportamiento del monto es el de una progresión aritmética.
- En el caso de interés compuesto, el comportamiento del monto es el de una progresión geométrica.
- En el caso de interés simple, el interés siempre se calcula sobre el capital inicial.
- En interés compuesto, el interés se calcula sobre el nuevo capital que incluye los intereses acumulados hasta el periodo anterior.

PROCEDIMIENTOS

Secuencia inductiva para hallar la fórmula.

Desarrollo de una progresión geométrica.

Resolución de una ecuación exponencial haciendo uso de logaritmos.

ARGUMENTOS

Tesis 1: $M = C(1+i)^n$

Se usa el siguiente argumento:

Se forma una progresión geométrica donde $\frac{M_n}{M_{n-1}} = 1{,}05 = r$ y el primer término $M_1 = 5250$

Usando la fórmula de interés compuesto para el término de lugar *n*:

$$M_n = 5250(1{,}05)^{n-1} = C(1{,}05)(1{,}05)^{n-1} = C(1 + 0{,}05)^n$$

En general, podemos reemplazar la tasa de interés 0,05 por "i": $M_n = C(1+i)^n$

Finalmente, llamando al monto de periodo "*n*" simplemente "M": $M_n = M$, se puede expresar la fórmula del monto para interés compuesto como: $M = C(1+i)^n$

Tesis 2: $I = C[(1+i)^n - 1]$

Se usa el siguiente argumento:

Sabemos que: $M = C + I$, despejando el interés: $I = M - C$, reemplazando la fórmula del monto para interés compuesto: $I = C(1+i)^n - C$.

Finalmente, factorizando *C*: $I = C[(1+i)^n - 1]$

Para la segunda sesión de clase participaron como estudiantes dieciséis profesores, los cuales fueron agrupados en ocho parejas.
Se ha elegido las soluciones de dos las parejas (ver anexo 9) y a partir de estas se han realizado las configuraciones cognitivas para cada caso. Además, el caso completo y la solución experta de esta sesión de clase se encuentran en los anexos 7 y 8 respectivamente.

A continuación se presentan las configuraciones cognitivas correspondientes a dos parejas que resolvieron los problemas de la sesión de clase 2 (ver Anexo 9):

Configuración cognitiva (Pareja 7)
Situación problema
Caso de la sesión 2: Préstamo bancario
Lenguaje
Verbal: Montos, interés simple, interés, capital, mes, suma, restamos, ambos miembros. *Simbólico:* *M*; 5000; 5%; S/. 5250; $M = 5000(1+5\%)^{12} = S/.8979{,}28;$ $M = C(1+i)^n;$ $I = C[(1+i)^n - 1];$ $5000(1{,}05)^n = 10000\ ;$ $(1{,}05)^n = 2\ ;$

$$log(1{,}05)^n = log\,2\ \ ;$$ $$n.log\,1{,}05 = log\,2\ \ ;$$ $$n = \frac{log\,2}{log\,1{,}05} = 14{,}21$$
Conceptos
Conceptos previos: porcentaje, interés simple *Conceptos emergentes:* interés compuesto
Proposiciones
• $M = C(1+i)^n$; • $I = C[(1+i)^n - 1]$
Procedimientos
Secuencia inductiva para hallar la fórmula. Resolución de una ecuación exponencial haciendo uso de logaritmos.
Argumentos
• Tesis: $I = C[(1+i)^n - 1]$ Se justifica de la siguiente manera: Sabemos que $M = C(1+i)^n$ Restamos C a ambos lados: $M - C = C(1+i)^n - C$ $I = C[(1+i)^n - 1]$

Configuración cognitiva (Pareja 8)
Situación problema
Caso de la sesión 2: Préstamo bancario
Lenguaje
Verbal: Montos, interés simple, interés, capital, mes, suma, restamos, ambos miembros. *Simbólico:* *M*; *C*; *r*; *t*; 5000; 5%; S/. 5250; $M = C(1+r)^T$

$$M = 5000(1+5\%)^{12} = S/.8979{,}28;$$ $$I = C[(1+r)^T - 1];$$ $$M = 2C$$ $$C(1+r)^T = C\ \ ;$$ $$(1+0{,}05)^T = 2\ \ ;$$ $$T.\log 1{,}05 = \log 2\ \ ;$$ $$T = 14{,}2$$
Conceptos
Conceptos previos: porcentaje, interés simple *Conceptos emergentes:* interés compuesto
Proposiciones
• $M = C(1+r)^T$; • $I = C[(1+r)^T - 1]$
Procedimientos
Uso de operaciones básicas para resolver los problemas iniciales Uso de fórmula tomada de un libro Resolución de una ecuación exponencial haciendo uso de logaritmos.
Argumentos
• Tesis: $I = C[(1+r)^T - 1]$ Se justifica de la siguiente manera: $$M = C + I$$ $$C(1+r)^T = C + I$$ $$I = C[(1+r)^T - 1]$$

Luego de revisar las soluciones y respuestas de los profesores observamos lo siguiente:

- En esta sesión se volvió a observar que muchos de los estudiantes están acostumbrados a empezar un nuevo tema con la presentación de la fórmula y luego usarla para resolver ejercicios (razonamiento deductivo). Algunos buscaron en libros o internet las fórmulas para poder iniciar la solución de los ejercicios. Es por ello que solamente algunos entendieron la secuencia de los ejercicios planteados, que luego les permitía encontrar algunas fórmulas (razonamiento inductivo).

- A diferencia del tema anterior, ningún estudiantes toma la tasa de interés expresada de la forma "*i*%", ahora todos entienden la tasa de interés como "*i*". Es decir, si una tasa de interés "*i*" era del 5%, ya no lo toman como i=5, si no como i=5%=5/100=0,05. Esto se debe a que al final de la sesión anterior se hizo la observación pertinente de cómo tomar las tasas de interés.
- Algunos estudiantes usaron las fórmulas obtenidas de algún libro y no las que pudieron encontrar siguiendo la secuencia inductiva. Prueba de ello es que usaron otros símbolos para representar la tasa de interés y el tiempo, como r en vez de i o T en vez de n.
- Se encontró el típico error en el desarrollo de algunos estudiantes, al pensar que el cambio de tasa de interés compuesto a un periodo distinto se podía hacer con una multiplicando, como se hace en interés simple (conflicto semiótico del tipo cognitivo). En interés simple, para hacer un cambio de tasa mensual a tasa anual basta multiplicar la tasa de interés mensual por doce para encontrar la tasa de interés anual; sin embargo, dicho procedimiento sería incorrecto en el tema interés compuesto; es decir, la tasa de interés compuesto anual no es igual a la tasa de interés compuesto mensual por doce. Es recién en la siguiente sesión que se les enseña cómo hallar tasas equivalentes para usarlas en problemas de interés compuesto. Una de las parejas cometió este error de manara repetida, en las soluciones de las pregunta propuestas en esta sesión.
- Cuando se les pidió las fórmulas, respondieron directamente sin justificación, quizás porque los primeros ejercicios permitían la emergencia de las fórmulas y ya no creían necesario remarcar cómo las obtuvieron. Además, ninguno de los profesores hizo referencia a la relación del tema interés simple con el tema progresión aritmética, siendo este tema revisado en clases anteriores como parte del curso.

5.3.3. Análisis de objetos y procesos matemáticos de la sesión de clase 3: Interés compuesto – Segunda parte

A continuación se presenta la configuración epistémica correspondiente a la sesión de clase 3, Interés compuesto – Segunda parte. La solución experta de la situación problema se encuentra el Anexo 12.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA DEL TEMA INTERÉS COMPUESTO – SEGUNDA PARTE

SITUACIÓN PROBLEMA

TASAS EFECTIVAS EQUIVALENTES

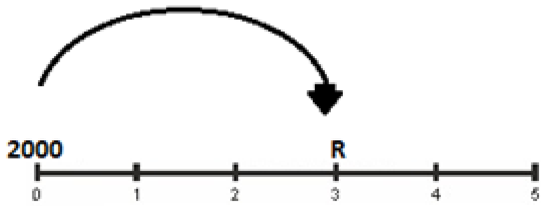
a) Defina una fórmula que permita hallar una TEA a partir de la TEM.
b) ¿Qué tasa de interés efectiva anual (TEA) es equivalente a la tasa de interés efectiva mensual (TEM) del 5%?
c) Defina una fórmula que permita hallar una TEM a partir de la TEA.
d) ¿Qué tasa de interés efectiva mensual (TEM) es equivalente a la tasa de interés efectiva anual (TEA) del 60%?

CASO: PAGO DIFERIDO

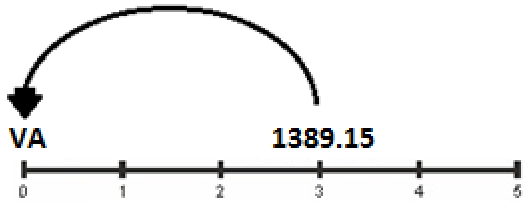
Una tienda vende electrodomésticos al crédito cobrando una TEM del 5%. Dicha tienda ofrece actualmente la siguiente promoción:

“Compra hoy y empieza a pagar dentro de 3 meses”.

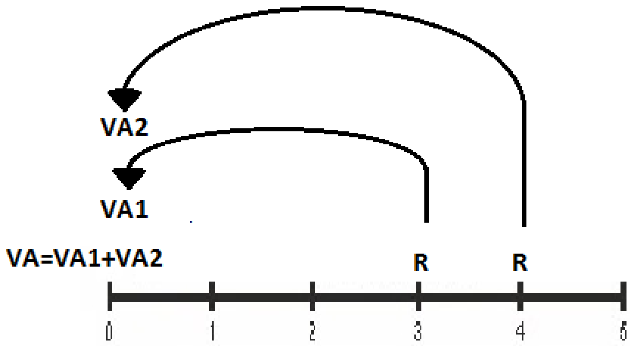
a) Arturo compra una refrigeradora, cuyo precio es de 2 000 soles. Si Arturo se acoge a dicha oferta y hace el pago en una sola cuota “R”. Halle el valor dicha cuota.



b) Arturo compra una cocina. Si Arturo se acoge a dicha oferta y hace el pago en una sola cuota R = 1 389,15 soles. Halle el precio de dicha cocina, al momento de efectuar la compra.



c) Con referencia a la pregunta anterior, una vez conocido el precio de la cocina en momento de la compra, si Arturo se compromete a pagar en dos cuotas mensuales iguales a "R", iniciando el pago luego de tres meses. Halle el valor de la cuota. Sugerencia: Use dos veces la fórmula de actualización para encontrar los VA1 y VA2. Luego sume ambas expresiones e iguale con el precio de la cocina en el momento de la compra.



LENGUAJE

Verbal:

Soles, meses, bimestre, semestre, años, tasa de interés compuesto mensual, tasa efectiva mensual, TEM, tasa efectiva anual, TEA, tasa efectiva bimestral, TEB, tasa efectiva semestral, TES, tasas efectivas equivalentes, capital, interés, porcentaje, exponente, monto, expresiones, fórmula, línea de tiempo, momento, periodo, capitalización, actualización, reformular, valor actual, valor futuro, valor equivalente, pago, pago diferido, cuota, dividir, primer miembro, ambos miembros, reemplazar, raíz, índice de raíz, datos, factorizar, operar, despejar y cociente.

Simbólico:

5%; 36%; 0,05; 1; 2; 6; 12; *C; M;* TEM; TEB; TES; TEA*; n; VA; VF; R;*

$$M = C(1 + \mathrm{TEA})^1$$
$$M = C(1 + \mathrm{TEM})^{12}$$
$$\mathrm{TEA} = (1 + \mathrm{TEM})^{12} - 1;$$
$$\mathrm{TEM} = \sqrt[12]{1 + \mathrm{TEA}} - 1;$$

$$VF = VA(1+i)^n$$
$$VA = \frac{VF}{(1+i)^n}$$

Gráfico:

Figura 12
Fuente: Material de trabajo de la Sesión de clase 3. Elaboración propia.

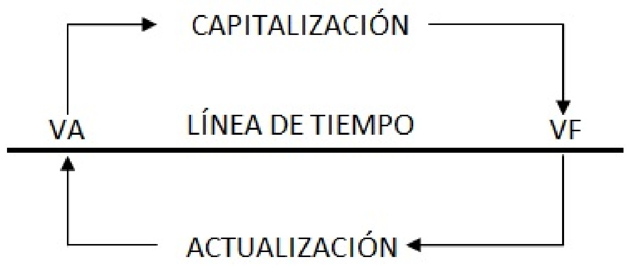


Figura 13
Fuente: Material de trabajo de la Sesión de clase 3. Elaboración propia.

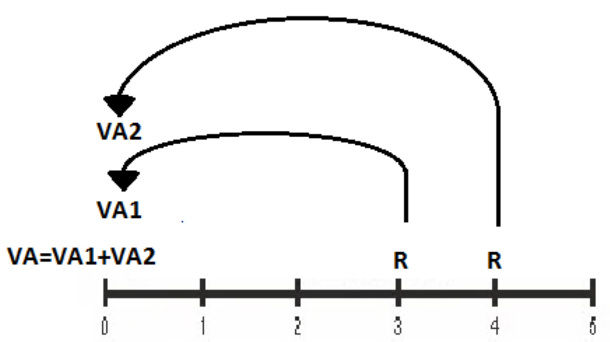


Figura 14
Fuente: Material de trabajo de la Sesión de clase 3. Elaboración propia.

CONCEPTOS

Conceptos previos: porcentajes, progresión geométrica e interés compuesto.

Conceptos emergentes: Tasas efectivas equivalentes, actualización y capitalización.

PROPOSICIONES

- $\text{TEA} = (1 + \text{TEM})^{12} - 1$
- $\text{TEM} = \sqrt[12]{1 + \text{TEA}} - 1$

PROCEDIMIENTOS

Planteamiento y resolución de ecuaciones a través de igualación de expresiones equivalentes.

Uso de las fórmulas de actualización y capitalización para resolver problemas.

ARGUMENTOS

Tesis 1: $\text{TEA} = (1 + \text{TEM})^{12} - 1$

Asumiendo un tiempo de 12 meses (un año), hallamos el monto usando la TEA:

$$M = C(1 + \text{TEA})^{1}$$

(Donde el “1” en el exponente indica un año)

Asumiendo un tiempo de 12 meses, hallamos el monto usando la TEM:

$$M = C(1 + \text{TEM})^{12}$$

Para que las tasas sean equivalentes, el monto debe ser el mismo en ambos casos, por ello igualamos ambas expresiones:

$$C(1 + \text{TEA})^{1} = C(1 + \text{TEM})^{12}$$

Luego de dividir ambos miembros entre “C”:

$$(1 + \text{TEA}) = (1 + \text{TEM})^{12}$$

Eliminando los paréntesis del primer miembro:

$$1 + \text{TEA} = (1 + \text{TEM})^{12}$$

Despejando la TEA:

$$\mathrm{TEA} = (1 + \mathrm{TEM})^{12} - 1$$

Tesis 2: $\mathrm{TEM} = \sqrt[12]{1 + \mathrm{TEA}} - 1$

Se usa el siguiente argumento:

Asumiendo un tiempo de 12 meses, hallamos el monto usando la TEM:

$$M = C(1 + \mathrm{TEM})^{12}$$

Asumiendo un tiempo de 12 meses (un año), hallamos el monto usando la TEA:

$$M = C(1 + \mathrm{TEA})^{1}$$

(Donde el "1" en el exponente indica un año)

Para que las tasas sean equivalentes, el monto debe ser el mismo en ambos casos, por ello igualamos ambas expresiones:

$$C(1 + \mathrm{TEM})^{12} = C(1 + \mathrm{TEA})^{1}$$

Luego de dividir ambos miembros entre "*C*":

$$(1 + \mathrm{TEM})^{12} = (1 + \mathrm{TEA})$$

Aplicando raíz de índice 12 en ambos miembros:

$$\sqrt[12]{(1 + \mathrm{TEM})^{12}} = \sqrt[12]{1 + \mathrm{TEA}}$$

Simplificando el primer miembro:

$$1 + \mathrm{TEM} = \sqrt[12]{1 + \mathrm{TEA}}$$

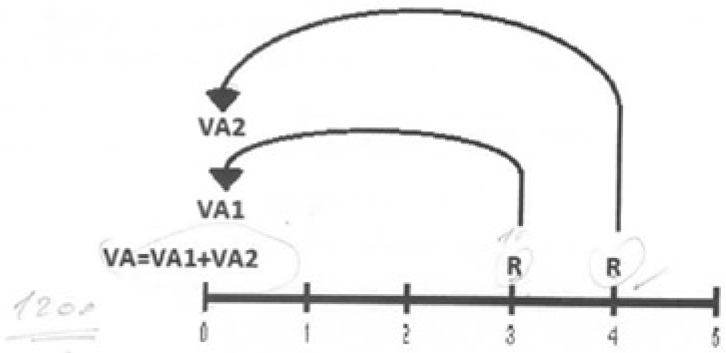
Despejando la TEM:

$$\mathrm{TEM} = \sqrt[12]{1 + \mathrm{TEA}} - 1$$

Para la tercera sesión de clase participaron como estudiantes dieciséis profesores, los cuales fueron agrupados en ocho parejas.

Se ha elegido la solución de una pareja de estudiantes (ver anexo 13) y a partir de ella hemos realizado la configuraciones cognitiva. Además, el caso completo y la solución experta de esta sesión de clase se encuentran en los anexos 11 y 12 respectivamente.

A continuación se presenta la configuración cognitiva correspondiente a la sesión de clase 3, Interés compuesto (segunda parte):

Configuración cognitiva
Situación problema
Ejercicios de tasas efectivas equivalentes y Caso: Pago diferido
Lenguaje
Simbólico: M; C; TEA; TEM; $C(1+TEM)^{12} = C(1+TEA);$ $TEA = (1+TEM)^{12} - 1;$ $TEA = 79\%;$ $\sqrt[12]{(1+TEM)^{12}} = \sqrt[12]{1+TEA};$ $1+TEM = \sqrt[12]{1+TEA};$ $TEM = \sqrt[12]{1+TEA} - 1$ $VF = (1+i)^n;$ $VA = \frac{VF}{(1+i)^n}$ *Gráfico:* 
Conceptos
Conceptos previos: porcentaje, interés compuesto. *Conceptos emergentes:* tasas efectivas equivalentes, actualización y capitalización.

Proposiciones

- $\text{TEA} = (1 + \text{TEM})^{12} - 1$
- $\text{TEM} = \sqrt[12]{1 + \text{TEA}} - 1$

Procedimientos

Razonamiento inductivo para hallar la fórmula.

Resolución de una ecuación exponencial haciendo uso de logaritmos.

Argumentos

Tesis 1: $\text{TEA} = (1 + \text{TEM})^{12} - 1$

Asumiendo un tiempo de 12 meses (un año), hallamos el monto usando la TEA:

$$M = C(1 + \text{TEA})^{1}$$

(Donde el "1" en el exponente indica un año)

Asumiendo un tiempo de 12 meses, hallamos el monto usando la TEM:

$$M = C(1 + \text{TEM})^{12}$$

Para que las tasas sean equivalentes, el monto debe ser el mismo en ambos casos, por ello igualamos ambas expresiones:

$$C(1 + \text{TEA})^{1} = C(1 + \text{TEM})^{12}$$

Luego de dividir ambos miembros entre "C":

$$(1 + \text{TEA}) = (1 + \text{TEM})^{12}$$

Eliminando los paréntesis del primer miembro:

$$1 + \text{TEA} = (1 + \text{TEM})^{12}$$

Despejando la TEA:

$$\text{TEA} = (1 + \text{TEM})^{12} - 1$$

Tesis 2: $\text{TEM} = \sqrt[12]{1 + \text{TEA}} - 1$

Se usa el siguiente argumento:

Asumiendo un tiempo de 12 meses, hallamos el monto usando la TEM:

$$M = C(1 + \text{TEM})^{12}$$

Asumiendo un tiempo de 12 meses (un año), hallamos el monto usando la TEA:

$$M = C(1 + \text{TEA})^{1}$$

(Donde el "1" en el exponente indica un año)

Para que las tasas sean equivalentes, el monto debe ser el mismo en ambos casos, por ello igualamos ambas expresiones:

$$C(1 + \text{TEM})^{12} = C(1 + \text{TEA})^{1}$$

Luego de dividir ambos miembros entre "*C*":

$$(1 + \text{TEM})^{12} = (1 + \text{TEA})$$

Aplicando raíz de índice 12 en ambos miembros:

$$\sqrt[12]{(1 + \text{TEM})^{12}} = \sqrt[12]{1 + \text{TEA}}$$

Simplificando el primer miembro:

$$1 + \text{TEM} = \sqrt[12]{1 + \text{TEA}}$$

Despejando la TEM:

$$\text{TEM} = \sqrt[12]{1 + \text{TEA}} - 1$$

En esta sesión de clase, a diferencia de las dos primeras, no se sigue una secuencia inductiva. La sesión tiene dos partes: en la primera parte se muestran dos ejemplos de cómo hallar tasas de interés compuestas equivalentes para que sirvan de modelo en ejercicios propuestos posteriormente; y en la segunda parte se redefine la fórmula para hallar el monto en interés compuesto.

Queda pendiente, para futuras investigaciones, la creación de problemas que sirvan para formar una secuencia inductiva el momento de enseñar cómo hallar tasas de interés compuesto equivalentes.

Luego de revisar las soluciones y respuestas de los estudiantes se observó lo siguiente:

- En la primera parte de esta sesión, casi todos los estudiantes respondieron correctamente a las preguntas asociadas a tasas equivales, tanto las que hacían referencia a encontrar una fórmula como las que pedían hallar respuestas numéricas.
- Se redefinió la fórmula de monto encontrada en la sesión anterior, y se usaron términos como valor actual (VA) y valor final (VF) en lugar de capital (C) y monto (M). Además de presentaron dos tipos de fórmulas: para capitalización y actualización.

  Al partir de las fórmulas y proponer problemas relacionados con dichas fórmulas, se trabaja de una manera que los estudiantes están más acostumbrados, es por ello que las respuestas obtenidas son prácticamente todas correctas.
- Es en esta clase donde prácticamente no se encontraron errores en las soluciones de los estudiantes, esto debido quizá a que los ejercicios eran muy similares a los que se presentaban inicialmente de manera resuelta como parte de la teoría.

Capítulo 6: Valoración de la idoneidad didáctica en las sesiones de clase

Resumen
En este capítulo se busca valorar el programa de formación de profesores en temas de interés simple y compuesto, con un enfoque reflexivo y crítico, orientado a la formación de ciudadanos responsables en la toma de decisiones financieras. Para lograr dicho objetivo se usan los criterios de idoneidad didáctica propuestos por el EOS, que permite valorar los componentes de cada una de las idoneidades parciales.

Luego de recabar toda la información a lo largo del presente trabajo y teniendo en cuenta los análisis realizados en los capítulos 3, 4 y 5; se puede valorar la implementación de las tres sesiones de clase.

Para esta valoración usamos como guía los criterios de idoneidad didáctica. A continuación, se describen los indicadores de idoneidad observados en la implementación de las tres sesiones de clase correspondientes a los temas de interés simple y compuesto.

Tabla 16. Aplicación de los componentes e indicadores de idoneidad epistémica

Idoneidad epistémica	
Componentes:	**Indicadores:**
Situaciones-problemas	- Se presentó una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. Al inicio de cada sesión se propusieron situaciones problema contextualizadas que tuvieron como objetivo la emergencia de los temas de interés simple y compuesto. Luego, el desarrollo de la unidad didáctica contenía problemas contextualizados de aplicación. Al finalizar las sesiones de clase, se entregó una lista de problemas propuestos contextualizados de consolidación. - Se propusieron situaciones de generación de problemas (problematización) en una terea propuesta (Tarea 2).
Lenguajes	- Se usaron diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismas. Por ejemplo, para la resolución de un problema debieron pasar de una configuración verbal a configuración simbólica o algebraica. También fue posible utilizar configuraciones gráficas al utilizar la línea de tiempo en el planteamiento de problemas. - Se usó un nivel del lenguaje adecuado a los estudiantes a quienes se dirigió el programa. - Se propusieron situaciones de expresión matemática e interpretación, relacionadas con las fórmulas usadas en interés simple y compuesto.
Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	- Las definiciones y procedimientos asociados a los temas de interés simple y compuesto fueron claros y correctos, y estuvieron adaptados al nivel educativo superior que se dirigió. - Se presentaron los enunciados y procedimientos fundamentales del tema interés simple y compuesto para el nivel educativo superior. - Se presentaron situaciones donde los estudiantes debían generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos.
Argumentos	- Las explicaciones y comprobaciones asociadas a los temas de interés simple y compuesto fueron adecuadas al nivel educativo superior. - Se promovieron situaciones donde el estudiante tuvo que argumentar; principalmente relacionadas con la obtención de las fórmulas. Como es el caso de las fórmulas para la obtención de interés y montos en los temas de interés simple y compuesto, o también para el caso de cambio de tasas efectivas.
Relaciones	- En el desarrollo de los temas de interés simple y compuesto, los problemas, definiciones, proposiciones y prácticas se relacionaron y conectaron entre sí. - Se buscó la identificación y articulación de los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas.

Tabla 17. Aplicación de los componentes e indicadores de idoneidad cognitiva

Idoneidad cognitiva	
Componentes:	**Indicadores:**
Conocimientos previos (Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	- Los estudiantes recibieron los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema. La profesora que estuvo a cargo de las primeras sesiones de clase enseñó los temas de progresión aritmética y geométrica. - Los contenidos pretendidos se pudieron alcanzar con los conocimientos previos de los estudiantes.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	- Se incluyeron actividades de ampliación y de refuerzo. Al final del material entregado se dejaron ejercicios propuestos con sus respectivas respuestas. - Se promovió el acceso y el logro de todos los estudiantes. Se estuvo pendiente de absolver dudas que pudieran presentarse en la resolución de problemas.
Aprendizaje: (Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	- Los diversos modos de evaluación (grupal e individual) sirvieron para indicar que los estudiantes lograron la apropiación de los conocimientos, comprensiones y competencias pretendidas: - Las evaluaciones propuestas tuvieron en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia. - Se difundieron los resultados de las evaluaciones y se usaron para tomar decisiones.

Tabla 18. Aplicación de los componentes e indicadores de idoneidad interaccional

Idoneidad interaccional	
Componentes:	**Indicadores:**
Interacción docente-discente	- El profesor hizo una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habló demasiado rápido y enfatizó los conceptos claves del tema). - El profesor reconoció y resolvió los conflictos de los estudiantes. Ellos hicieron preguntas y el profesor brindó respuestas adecuadas. - Se buscó llegar a consensos con base al mejor argumento. - Se usó diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. - Se diseñó la inclusión de los estudiantes en la dinámica de la clase; ya fuera durante el momento de compartir las soluciones de los problemas planteados o durante los espacios creados para la crítica y reflexión.
Interacción entre estudiantes	- Se favoreció el diálogo y la comunicación entre los estudiantes; ya fuera durante el momento de compartir las soluciones de los problemas planteados o durante los espacios creados para la crítica y reflexión. - Se dieron facilidades para que los estudiantes traten de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos. - Se favoreció la inclusión en el grupo y se evitó la exclusión.

Autonomía	- Se contemplaron momentos en los que los estudiantes asumieron la responsabilidad del estudio. Por ejemplo, en los espacios creados para que respondan individualmente a preguntas de crítica y reflexión; así como también en el desarrollo individual de la Tarea 2.
Evaluación formativa	- Se realizó una observación sistemática del progreso cognitivo de los estudiantes: en la resolución de ejercicios en clase y el desarrollo de la Tarea 2.

Tabla 19. Aplicación de los componentes e indicadores de idoneidad mediacional

Idoneidad mediacional	
Componentes:	**Indicadores:**
Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores)	- Se promovió el uso de calculadoras que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas a los temas de interés simple e interés compuesto. - Las definiciones y propiedades fueron contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos. Por ejemplo, se tomaron catálogos de compras y tarifarios de las mismas instituciones financieras para usarlos en el planteamiento de problemas.
Número de estudiantes, horario y condiciones del aula	- El número y la distribución de los estudiantes permitieron llevar a cabo la enseñanza pretendida. Se trabajó con 16 estudiantes en salones de clase con espacio para 40 estudiantes. - El horario del curso fue apropiado. Algunas sesiones fueron programadas los lunes de 8 a 10 de la mañana y otras los miércoles de 10 de la mañana a 12 del mediodía. - El aula y la distribución de los estudiantes fueron adecuadas para el desarrollo del proceso instruccional pretendido. Las carpetas permitieron que los estudiantes trabajen cómodamente de manera individual, en parejas o en grupos de tres.
Tiempo (De enseñanza colectiva /tutorización; tiempo de aprendizaje)	- El tiempo (presencial y no presencial) fue suficiente para la enseñanza pretendida. - Se dedicó suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema. - Se dedicó tiempo suficiente a los contenidos que presentaron más dificultad de comprensión. Es por ello que se programó una sola sesión para interés simple y dos para interés compuesto.

Tabla 20. Aplicación de los componentes e indicadores de idoneidad afectiva

Idoneidad afectiva	
Componentes:	**Indicadores:**
Intereses y necesidades	- Se propusieron tareas que fueron de interés para los estudiantes. - Se propusieron situaciones que permitieron valorar la utilidad de la matemática financiera en la vida cotidiana y profesional.
Actitudes	- Se propuso la participación en las actividades, la perseverancia y responsabilidad. - Se favoreció la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valoró en sí mismo y no por quién lo dijo.

Emociones	- Se promovió la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo hacia algunos temas de matemática. - Se resaltó la cualidad de precisión de la matemática financiera.

Tabla 21. Aplicación de los componentes e indicadores de idoneidad ecológica

Idoneidad ecológica	
Componentes:	**Indicadores:**
Adaptación al currículo	- Los contenidos, su implementación y evaluación se correspondieron con las directrices curriculares.
Apertura hacia la innovación didáctica	- Se innovó en base a la práctica reflexiva. - Se integró las nuevas tecnologías (calculadoras, computadoras y TIC) en el proyecto educativo.
Adaptación socio-profesional y cultural	- Los contenidos contribuyeron a la formación socio-profesional de los estudiantes.
Educación en valores	- Se contempló la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico. Incluso, se creó espacios para la reflexión y la crítica.
Conexiones intra e interdisciplinares	- Los contenidos se relacionaron con otros contenidos intra e interdisciplinares. Se tuvo apertura a la posibilidad de que se presentaran otros campos de conocimiento no matemático durante el desarrollo de los temas. Por ejemplo, un estudiante tocó el tema del delito de usura mientras dialogaban los estudiantes con el profesor, en uno de los espacios para la crítica y la reflexión.

Tabla 22. Aplicación de los componentes e indicadores de idoneidad de interacciones entre facetas

Interacciones entre facetas	
Componentes:	**Indicadores:**
Epistémica-ecológica	- Los planes de clase propusieron el estudio de problemas de ámbitos variados como la vida cotidiana y el trabajo.
Epistémica-cognitiva-afectiva	- Los estudiantes tuvieron confianza en sus habilidades para enfrentar problemas difíciles y mantuvieron su perseverancia aun cuando la tarea era compleja. - Se estimuló a los estudiantes a reflexionar sobre sus razonamientos durante los procesos de resolución de problemas de manera tal que fueran capaces de aplicar y adaptar las estrategias que han desarrollado en otros problemas y contextos. - Las tareas que se seleccionaron para evaluar fueron representativas de los aprendizajes pretendidos.
Cognitiva-afectiva-interaccional	- Las explicaciones dadas por los estudiantes incluyeron argumentos matemáticos y racionales, no solamente descripciones de procedimientos. - Se incluyeron contenidos motivadores, con adaptaciones razonables y apropiadas, que promovieron el acceso y el logro de todos los estudiantes.

Ecológica-instruccional (papel del docente y su formación)	- El profesor fue comprensivo y dedicado a sus estudiantes. - El profesor conocía y entendía profundamente los temas de matemática financiera y era capaz de usar ese conocimiento con flexibilidad en sus tareas de enseñanza. - El profesor tenía amplias oportunidades y apoyo para incrementar y actualizar frecuentemente sus conocimientos didáctico-matemáticos. En efecto, siendo en este caso un profesor cuyo campo de investigación es la didáctica de la matemática.

Tabla 23. Aplicación de los componentes e indicadores de idoneidad temporal

Idoneidad temporal y su relación con las restantes facetas	
Componentes:	**Indicadores:**
Temporal-epistémico	- Se distribuyó el contenido de los temas interés simple e interés compuesto de manera racional a lo largo del tiempo asignado al estudio.
Temporal-cognitivo	- Se propusieron objetivos de aprendizaje que tenían en cuenta las etapas de desarrollo evolutivo de los estudiantes.
Temporal-instruccional	- Se gestionó el tiempo instruccional teniendo en cuenta los diversos momentos requeridos para el desarrollo de los distintos tipos de aprendizajes (exploración, formulación, comunicación, validación, institucionalización, ejercitación y evaluación).
Temporal-ecológico	- El tiempo asignado fue suficiente para realizar todas las tareas propuestas en las sesiones de clase. Las respuestas de las partes B y C del material entregado se compartían y discutían en la parte final de cada sesión de clase.

Conclusiones y recomendaciones

Hemos identificado los temas de matemática financiera que han estudiado los profesores de matemática de secundaria en su formación inicial y continua. Luego de aplicar el Cuestionario 1 (ver Anexo 1), mostramos en el apartado 2.6.2, donde se describen a los participantes, que no todos los profesores han estudiado los temas de interés simple y compuesto. De manera similar, solamente algunos de ellos afirman que han enseñado los temas de interés simple y compuesto en la escuela secundaria.

Hemos alcanzado el objetivo específico 1, al identificar las reflexiones de los estudiantes acerca del uso de la matemática (y en particular de la matemática financiera) en la formación de ciudadanos. Mostramos en el capítulo 3 que todos los estudiantes están de acuerdo con que la enseñanza de la matemática puede servir para la formación de ciudadanos. Pudimos llegar a dicha conclusión luego de aplicar el Cuestionario 1 (ver Anexo 1) antes de iniciar las clases. Además, se pudo clasificar las respuestas obtenidas de dos formas: en primer lugar, agrupándolas según una lista de categorías que establecimos a partir de respuestas similares; y en segundo lugar, a partir de las categorías propuestas por Vanegas y Giménez (2010). Según esta última clasificación, la mayoría de las respuestas tenían relación con el Eje 1: Apropiación política activa y crítica de saberes. Además, luego de analizar las respuestas a la Tarea 2, notamos que los estudiantes habían incrementado su conocimiento sobre la relación que existe entre la ciudadanía y la matemática en general. Es así que vincularon diversos valores ciudadanos que pueden formarse a partir de las matemáticas tales como: responsabilidad, solidaridad, compromiso, participación, honestidad, tolerancia, transparencia, entre otros. Así como también, presentaron una serie de problemas originales, donde la matemática motivaba la formación ciudadana. Cabe señalar que varios de los problemas señalados no se referían a matemática financiera en particular, sino a la matemática en general.

Si bien es cierto que los estudiantes manifestaron que están de acuerdo con el uso de las matemáticas para la formación de ciudadanos, un aspecto importante es el dominio del objeto matemático por parte del profesor. Gracias al programa implementado, los estudiantes incrementaron su domino del tema interés simple y compuesto, incluso ellos mismos propusieron una secuencia de clase sobre el tema interés compuesto que fue parte de la Tarea 2 (ver Anexo 2). En la parte final de la tesis, a manera de ejemplo, compartimos una de las clases propuestas por los profesores (ver Anexo 15).

Hemos logrado el objetivo específico 2 al desarrollar una propuesta de contenidos correspondiente al significado institucional pretendido para los temas interés simple y compuesto dirigido a profesores de matemática de educación secundaria. En el capítulo 4 hemos organizado el significado institucional de referencia mediante el análisis de los temas interés simple y compuesto de una serie de libros de nivel secundaria y superior, para lo cual utilizamos la configuración epistémica. Es así que observamos dos formas distintas de cómo emerger los temas interés simple y compuesto: un es relacionándolos con las progresiones aritmética y geométrica, respectivamente; y otra es relacionándolos con la función lineal afín y la función exponencial.

Para la construcción del significado institucional pretendido hemos diseñado tres sesiones de clase, teniendo en cuenta el significado institucional de referencia, los principios de la EMC y los criterios de idoneidad didáctica. Además, pudimos implementar las tres sesiones de clase de temas de interés simple y compuesto, como parte de un curso de maestría dirigido al grupo de profesores becados por el PRONABEC, quienes pertenecían a diferentes regiones del país.

Durante la implementación de las sesiones de clase observamos que los estudiantes estaban entusiasmados y motivados al estudiar los temas de matemática financiera. Dicho entusiasmo también se vio reflejado en sus participaciones durante el espacio para las opiniones y reflexiones que se crearon durante las clases (Parte B del material de clase). De manera similar sucedió mientras que los estudiantes compartían sus respuestas a las preguntas referidas al cuidado del dinero (Parte C del material de clase).

Hemos logrado el objetivo específico 3 y luego completado el logro del objetivo general. Para todo ello, recopilamos toda la información de la implementación del programa de formación de profesores propuesto, analizamos las tres sesiones de clase que contienen los temas interés simple y compuesto (en particular, la Parte A del material de clase). Para ello hemos usado las herramientas que brinda el EOS: analizando las prácticas, realizando las configuraciones epistémicas y cognitivas de cada sesión de clase y valorando mediante el uso de los criterios de idoneidad didáctica.

Durante el desarrollo de las sesiones de clase, y en particular, mientras los estudiantes resolvían los problemas propuestos (dichos problemas estaban planteados de tal manera que los estudiantes no requerían saber previamente las fórmulas para su resolución), varios estudiantes sentían la necesidad de tener a mano algunas fórmulas que les permitieran responder de manera directa los problemas planteados, es por ello que se notó que algunos de los estudiantes buscaban en libros y en la Internet. De esta manera notamos que ellos estaban acostumbrados al desarrollo de los temas matemáticos de la manera tradicional, partiendo de las fórmulas. Sin embargo, luego se dieron cuenta que no era necesario conocer fórmulas previamente, y que los ejercicios seguían una secuencia inductiva que les permitía en algún momento inducir las fórmulas relacionadas con de interés simple y compuesto. Es por ello que sentimos una gran satisfacción cuando todos los estudiantes respondieron en la Tarea 2 (ver Anexo 2), que luego de recibir las sesiones de clase de los temas de interés simple y compuesto, estaban convencidos que se debería introducir estos temas partiendo de problemas en los cuales emerja de manera natural la fórmula. Es decir, ellos mismo indicaron que antes de las clases recibidas, hubieran enseñado estos temas partiendo de las fórmulas. (A manera de ejemplo se pueden ver las respuestas de un estudiante en el Anexo 15).

En las configuraciones cognitivas se encontró un conflicto al momento de representar las tasas de interés, algunos usaban la forma "*i*%", mientras que otros lo representaban como "*i*", que era la forma que indicaban los problemas propuestos. Luego que discutimos ese asunto en clase, los estudiantes ya tuvieron claro que el tema utilizaba la forma "*i*" para representar una tasa de interés. También se encontró un típico error en el desarrollo de algunos estudiantes, al pensar que el cambio de tasa de interés compuesto a un periodo distinto se podía hacer con una multiplicando, como se hace en interés simple (conflicto semiótico del tipo cognitivo). Luego, en las sesión de clase 3 aprendieron cómo hacer cambios de tasas para el caso de interés compuesto.

Hemos cumplido con el objetivo general, al valorar de las sesiones de clase tomando como referencia los indicadores de idoneidad didáctica que mostramos en el capítulo 6.

Como respuesta a nuestra pregunta de investigación: ¿Cómo deben formarse los profesores de matemática de educación secundaria en temas de interés simple y compuesto para participar activamente en la alfabetización financiera dirigida a los futuros ciudadanos del Perú?, podemos concluir los siguiente:

- Los profesores de matemática deben formarse desde el inicio de su carrera en temas de matemática financiera. Además, quienes no estudiaron los temas de matemática financiera, deben seguir programas de formación docente en dichos temas.

- Como mostramos en nuestra propuesta, el estudio de los temas de interés simple y compuesto debe hacerse de manera crítica, creando espacios para la reflexión.
- Se debe dejar de lado la enseñanza tradicional que proponía empezar un nuevo tema de matemática a partir de las fórmulas. Los temas de matemática financiera deben ser abordados a partir de la resolución de problemas contextualizados, donde se haga uso del razonamiento inductivo y las conjeturas.
- Se deben resolver problemas de contexto real. Incluso se pueden usar casos con información de los tarifarios de los bancos.
- Se debe promover el uso de la tecnología para facilitar la parte operativa. Así se puede hacer un mayor énfasis a la parte de interpretación y discusión de resultados. Cabe señalar, que dentro de la implementación de las sesiones de clase, los estudiantes tuvieron la oportunidad de usar el Excel; sin embargo, se notó que muy pocos estaban habituados al uso de dicho programa.
- Los profesores deben desarrollar la competencia del análisis didáctico (Rubio, 2012), para la identificación de objetos y procesos matemáticos. Incluso podrían llegar a valorar sus sesiones de clase.

Creemos necesario que el Ministerio de Educación del Perú implemente programas de capacitación docente donde los profesores de matemática de secundaria tengan la oportunidad de estudiar los temas de interés simple y compuesto. Además, si queremos una mejor formación en matemática financiera dirigida a todos los ciudadanos, los programas de capacitación deben ir más allá, incluyendo los temas de anualidades y planes de pago. A nuestro parecer, recién cuando se estudien y enseñen estos cuatro temas, podremos estar seguros de un cambio sustantivo en el desarrollo de una alfabetización financiera a gran escala en el Perú.

Existen diferentes perspectivas de análisis que relacionan las matemáticas con ciudadanía. Además, la literatura que se ha escrito sobre este tema es principalmente de origen europeo. En Latinoamérica, hay investigadores en Brasil, México y Colombia que vienen desarrollando trabajos sobre el uso de las matemáticas en la formación de ciudadanos, y grupos de investigación en Brasil que en particular vienen realizando trabajos que relacionan la matemática financiera con la formación de ciudadanos. Sin embargo, no hemos encontrado investigaciones peruanas sobre la relación que existe entre la matemática y la ciudadanía; es por ello que nos llamó la atención que todos los estudiantes hayan tenido reflexiones interesantes sobre el uso de las matemáticas en la formación de ciudadanos.

En nuestro país hay mucho por investigar sobre la relación de la matemática y la ciudadanía, y en particular sobre la relación entre la matemática financiera y la ciudadanía. Al ser investigaciones enmarcadas en el contexto social, no podemos guiarnos a plenitud por estudios realizados en el extranjero. Debemos fomentar investigaciones de este tipo en los grupos de investigación en didáctica de la matemática. Otra vez, el Ministerio de Educación es el llamado a promover este tipo de investigaciones, las cuales deberían ser interdisciplinarias de preferencia, debido a las diferentes dimensiones de análisis.

En cuanto al material didáctico que pudimos encontrar, vimos que normalmente los libros de matemática financiera encontrados en librerías o bibliotecas están dirigidos a estudiantes de carreras de negocios. No nos fue posible encontrar libros de matemática financiera dirigidos a las finanzas personales o al manejo del dinero en las familias. Los autores de libros de matemática financiera suelen ser ingenieros o profesionales de carreras orientadas a los negocios, como economistas, administradores o contadores. Es por ello que es necesario el desarrollo de trabajos de investigación en didáctica de la matemática financiera, orientada principalmente al nivel de enseñanza básica regular. Además, es necesaria la publicación de libros orientados a las finanzas personales, que traten temas de matemática financiera orientadas a las familias, y no solamente a los negocios. Por todo ello, esperamos que nuestro aporte ayude a llenar ese vacío. De todos modos, es una tarea pendiente la creación de materiales de trabajo que contengan ejercicios, o incluso casos de la vida real con datos de las mismas instituciones financieras, relacionados con el crédito y el ahorro de personas o familias.

El material didáctico que diseñamos aplicando los criterios de idoneidad didáctica y que usamos durante estas sesiones de clase se encuentra en los anexos de esta tesis. Esperamos que su uso pueda contribuir para la alfabetización financiera en el Perú.

Otra de las satisfacciones asociadas a esta investigación, es que un profesor asistente al XXXII Coloquio de la Sociedad Matemáticas Peruana 2014, luego de participar en nuestro minicurso “Matemática financiera en la escuela secundaria para la formación de ciudadanos responsables”, nos comunicó días después que había propuesto la enseñanza de temas de matemática financiera dentro de los cursos de matemática que se imparten para todas las carreras de la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga.

Queda de nuestra parte, seguir con investigaciones sobre didáctica de la matemática financiera, con un enfoque hacia la formación de ciudadanos responsables que sepan los beneficios del ahorro y los peligros del sobreendeudamiento.

Referencias Bibliográficas

Adorno, T. y Horkheimer, M. (1994) *Dialéctica de la Ilustración*. Madrid: Trotta S.A.

Aguilar, M. S. (2014). Educación matemática crítica en México: una argumentación sobre su relevancia. *DIDAC*, No. 64, 29-35.

Aliaga, C. (1999), *Manual de matemática financiera: texto, problemas y casos*. Cuarta edición. Lima. Universidad del Pacífico.

CAF (2013), *La educación financiera en América Latina y el Caribe. Situación actual y perspectivas*. Disponible en: http://publicaciones.caf.com/publicacion?id=1607

Cardoso, V. y Monteiro, R. (2013). Educação matemática para o consumo consciente. En *Actas del VII CIBEM*. (pp.554-560). Uruguay: CIBEM. Disponible en: http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/703.pdf

Castagna, A. (1998), *Matemática Financiera*. Montevideo: Universidad Católica del Uruguay Disponible en: http://www.biblioises.com.ar/Contenido/500/510/financiera_COMPLETO.pdf

Castelli, L., Grando, N. y Marasini, S.(2013). Concepções de professore de matemática sobre educação financiera. En *Actas del VII CIBEM*. (pp. 5784-5791). Uruguay: CIBEM. Disponible en: http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/802.pdf

Coutinho, C. y Teixeira, J. (2013). A educacão matemática e o seu papel na construção da educação financeira. En Actas del VII CIBEM. (pp.554-560). Uruguay: CIBEM. Disponible en: http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/759.pdf

D'Ambrosio, U. (1980). Mathematics and society: Some historical considerations pedagogical implications, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 11* (4), 479-488.

D'Amore, B. (2005). Conclusiones y perspectivas de investigación. *Relime* Semiótica, cultura y educación matemática. 301

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematies. *For the Learning of Mathematics, 5* (1), 44-48.

Ernest, P. (1991).*The philosophy of mathematics education*. London: Falmer Press.

Fernandes, J., Costa, K., Andrade, K. y Evangelista, J. (2013). Experiencia da aplicaçao de um material didatico que auxilie no ensino de matemática financeira no viés da resolução de problemas. En Actas del VII CIBEM. (pp. 7920-7926). Uruguay: CIBEM. Disponible en: http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/1219.pdf

Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémicacomo herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. EducaçaoMatemática Pesquisa, 8 (1), 67-98.

Gaita, C., Advíncula, E., Barrantes, E., Henostroza, J., Jabo, F. y Luna, M. (2009). *Matemáticas para no matemáticos*. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Gómez-Soto, F. (2009). Educación financiera: Retos y lecciones a partir de experiencias representativas en el Mundo. Documento preparado para el Proyecto Capital, Bogotá, Colombia. Disponible en: http://www.www.proyectocapital.org

Godino, J. D. (2002), Un enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 22(2/3), pp. 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics education*, 39(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino, J. D. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf

González, F. (2014). Historia Social de la Educación Matemática en Iberoamérica: Notas Históricas acerca del Doctorado en Educación Matemática de Venezuela. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *39*, 171-184. Disponible en: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2014/39/archivo15.pdf

Hoffmann, L. y Bradley, G. (1995). Cálculo aplicado a administración, economía, contaduría y ciencias sociales. Quinta edición. Bogotá: McGRAW-HILL INTERAMERICANA, S.A.

Kistemann, M. (2013). Situações-problema financiero-econômicas e os significados produzidos por individuos-consumidores. En *Actas del VII CIBEM*. (pp. 3380-3387). Uruguay: CIBEM. Disponible en: http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/500.pdf

Kistemann, M. y Pecoraro, L. (2013). Matemática financeira e tecnologia: espaços para o desenvolvimento da capacidade crítica dos educandos da educação de jovens e adultos. En Flores R. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 26. (pp. 1975-1982). México: CLAME.

Lages, E., Pinto, P., Wagner, E. y Morgado, A. (2000). *La Matemática de la Enseñanza Media* Vol. 2 Perú: IMCA.

Mancebón, M. J. y Pérez Ximénez, D. (Julio, 2014) Alfabetización financiera, competencia matemática y titularidad de la escuela. En Congreso PISA Finanzas para la vida. Madrid. España.

Mejía, C. (2012). *Matemática 4*. Perú : Santillana.

Mendonça, P. y Silva, A. (2013). A contribuição dos futuros professores de matemática-PARPOR para o desenvolvimiento dos conhecimentos ligados ao dia-a-dia comercial. En Actas del VII CIBEM. (pp.4829-4834). Uruguay: CIBEM. Disponible en: http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/1065.pdf

OCDE (2005), *Recommendation on Principles and Good Practices for Financial Education*, OECD Publishing. Disponible en: http://www.oecd.org/finance/financial-education/35108560.pdf

OECD (2013), *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Competencia Financiera*. Disponible en: http://www.mecd.gob.es

Perú, Ministerio de Educación (2009). *Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular*. Lima. Disponible en: http://www.minedu.gob.pe/

Perú, Ministerio de Educación (2010). *Diseño Curricular Básico Nacional para la Carrera Profesional de Profesor de Educación Secundaria en la Especialidad de Matemática.* Lima. Disponible en: http://www.minedu.gob.pe/

Perú, Ministerio de Educación (2014). *Marco Curricular Nacional, Propuesta para el diálogo – Segunda Versión*. Lima. Disponible en: http://www.minedu.gob.pe/

Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos*. (Tesis doctoral) Universitat de Barcelona, España

Skovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Sousa, G., Torraca, M.y Nasser, L. (2013). Matemática finaceira na formação de professores. En Flores R. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 26. (pp. 1515-1522). México: CLAME.

Toro, I. y Parra, D. (2010). *Fundamentos epistemológicos de la investigación cualitativa/cuantitativa*. Primera edición. Bogotá: Fondo editorial Universidad EAFIT.

Vanegas, Y. M. y Giménez, J. (2010). Aprender a enseñar matemáticas y educar en ciudadanía. En: M.L. Callejo, J.M. Goñi (Coords.). Educación matemática y ciudadanía. Serie: Didáctica de las matemáticas. Nº 282. (pp. 147-166). Barcelona: Graó

Vanegas, Y. M. (2013). Competencias ciudadanas y desarrollo profesional en matemáticas. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Barcelona, Barcelona, España.

Anexos

ANEXO 1

Cuestionario 1

Marque con una X, sobre la letra respectiva, la opción más cercana a su propia apreciación o responda a la pregunta según corresponda. Mucho agradeceremos que conteste el presente cuestionario con la mayor sinceridad posible. Las siete primeras preguntas son sobre su ejercicio profesional, las ocho siguientes son sobre uno de los temas a desarrollar en el presente curso y las dos últimas son de opinión.

1. Ud. se identifica como profesor de:

a.	Primaria	d.	Universidad
b.	Secundaria	e.	Otro:_________________
c.	Centro Pre Universitario		

2. ¿De qué especialidad egresó?

____

3. ¿De qué institución egresó?

____

4. ¿Cuál es su lugar de procedencia?

____

5. ¿Cuántos años de docencia ha ejercido hasta el momento?

a.	Menos de 3 años	d.	Entre 10 y 20 años
b.	Entre 3 y 5 años	e.	Más de 20 años
c.	Más de 5 pero menos de 10 años		

6. ¿A qué ciclo(s) y grado(s) ha enseñado recientemente?

Ciclo(s) _______________

Grado(s) _______________

Otros: _______________

7. ¿En qué tipo de institución labora o ha laborado recientemente? y ¿cómo se llama? Indique el lugar.

a.	Estatal	c.	Particular religioso
b.	Particular laico	d.	Otro:_________________

Nombre: ______________________________

Lugar: ________________________________

8. ¿Ud. ha enseñado el tema interés simple?

a.	Sí	b.	No

9. ¿Ud. ha enseñado el tema interés compuesto?

a.	Sí	b.	No

10. ¿Ud. ha enseñado algún otro tema de matemática financiera, aparte de interés simple y compuesto?

a.	Sí	b.	No

11. En caso de responder Sí a la pregunta 10, ¿qué tema(s) ha enseñado?

____

____

12. ¿Ud. ha estudiado el tema interés simple en su formación inicial o continua?

a.	Sí	b.	No

13. ¿Ud. ha estudiado el tema interés compuesto en su formación inicial o continua?

a.	Sí	b.	No

14. ¿Ud. ha estudiado algún otro tema de matemática financiera, aparte de interés simple y compuesto, en su formación inicial o continua?

a.	Sí	b.	No

15. En caso de responder Sí a la pregunta 14, ¿qué tema(s) ha estudiado?

____

____

16. ¿Cree usted que las matemáticas podrían servir para formar un mejor ciudadano?

a.	Sí	b.	No

En caso afirmativo, ejemplifique su respuesta:

____

____

____

17. ¿A usted le daría lo mismo recibir un premio de 1 000 soles hoy, que recibir dichos 1 000 soles dentro de un año?

a.	Sí	b.	No

¿Por qué?

____

____

____

____

ANEXO 2

Tarea 2

Indicaciones:

- La tarea se realizará de forma individual y se entregará en un archivo de Word. Dicho archivo se debe grabar en documentos del curso, carpeta Tarea 2, con el nombre del archivo ID_tarea2, hasta las 11:59pm del domingo 12 de octubre.
- En cada una de las preguntas de las partes I, II, III, IV y V, marque, resaltando el texto o letra usando , y/o complete su respuesta, según corresponda.
- En la tabla siguiente, escriba sus nombres, apellidos y su ID.

Nombres y apellidos	ID

PARTE I.

Considere que usted debe desarrollar el tema de interés compuesto con sus estudiantes de secundaria.

1) Señale si empezaría con:

a.	La fórmula de interés compuesto.
b.	Con una situación en la que emerja la fórmula de interés compuesto.
c.	De otro modo diferente a las respuestas a y b.
d.	No enseñaría este tema, aunque esté en el DCN.

2) Explique su sesión de clase, dependiendo de la respuesta dada en la pregunta 1; es decir,

si respondió "a", dada la fórmula, describa su sesión de clase completa;
si respondió "b", ¿cuál es la situación propuesta y de qué manera emerge la fórmula?;
si respondió "c", ¿en qué consiste esa manera diferente de presentación o gestión de la clase?;
si respondió "d", ¿por qué no enseñaría este tema?

(Máximo 2 páginas para responder la pregunta 2).

PARTE II.

La forma en que se impartieron las clases en este curso, ¿ha influenciado en sus respuestas de la parte I?

a. Sí b. No

Si su respuesta es afirmativa, indique cómo lo hubiera realizado antes de participar en estas clases.

PARTE III

¿Cree usted que el estudio de los temas revisados en las clases de este curso puede influenciar al estudiante para ser un mejor ciudadano?

a.	Sí	b.	No

Si su respuesta es afirmativa, indique qué temas y al menos tres razones.

PARTE IV

1) ¿Qué aspecto cree usted que puede fomentar, dentro de una clase de matemática, el desarrollo de valores ciudadanos?

a.	Los contextos matemáticos, como por ejemplo:
b.	Los procesos matemáticos, como por ejemplo:
c.	La gestión del profesor, como por ejemplo:
d.	Otros aspectos, como por ejemplo:
e	No se puede fomentar, dentro de una clase de matemática, el desarrollo de valores ciudadanos Explique por qué.

2) ¿Qué valores ciudadanos cree usted que podrían desarrollarse en sus alumnos en las clases de matemáticas?
   Explique su respuesta.

PARTE V

Escriba un problema y su solución de tal manera que sirva para desarrollar un buen ciudadano. Explique cómo ayudaría este problema al desarrollo de este ciudadano.

Nota: Puede considerar cualquier tema de matemática.

ANEXO 3

Material de trabajo de la sesión de clase 1 - Interés simple

INTERÉS SIMPLE

Indicaciones para la PARTE A: Los profesores deben seguir las siguientes instrucciones:

- Formar grupos de tres.
- Responder las preguntas propuestas en las hojas que se les proporcionan.
- Presentar los resultados en una breve exposición.

Nombres y apellidos	ID

PARTE A: CASO

CASO: PRÉSTAMO ENTRE FAMILIARES O AMIGOS

José es un padre de familia que no tiene trabajo fijo. Ha pensado en implementar un taller de carpintería, para lo cual necesita un capital de 5 000 soles. Como no cuenta con un ingreso fijo mensual, no puede pedir un préstamo bancario, es por ello que ha decidido pedirle dinero prestado a su cuñado César.

César ha aceptado prestarle a José, el capital que necesita, con las siguientes condiciones:

- Le deberá pagar el 5% de interés mensual, sobre el capital prestado.
- Le da la oportunidad para pagarle, en un máximo de 36 meses, el total del capital más los intereses generados.

A continuación, responder las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto deberá pagarle José a César, por concepto de intereses? Si decide pagar

   i. Al mes

   ii. A los dos meses

   iii. A los tres meses

iv. Al año

v. A los tres años

b) Definir una fórmula que nos permita hallar el interés “*I*”, que debe pagar José, por un capital “*C*”, a una tasa de interés mensual “*i*”, después de “n” meses.

c) Usar la fórmula definida en b) para responder ¿Cuánto deberá pagarle José a César, por concepto de intereses, si decide pagar en 3 años?

d) En el contexto del caso ¿Qué tasa de interés anual es equivalente a la tasa de interés del 5% mensual?

e) Definir una fórmula que nos permita hallar el interés “*I*”, que debe pagar José, por un capital “*C*”, a una tasa de interés anual de “*i*”, después de “*n*” años.

f) Usar la fórmula definida en e) para responder ¿Cuánto deberá pagarle José a César, por concepto de intereses, si decide pagar en 3 años?

g) ¿La fórmula obtenida en b) es la misma que la obtenida en e)? En general, ¿Qué tienen en común el número de periodos “*n*” y la tasa “*i*”, dentro de cada fórmula?

h) ¿Cuál es el monto total que debe pagar José a César por concepto de intereses y capital? Si decide pagar

   i. Al mes

   ii. A los dos meses

   iii. A los tres meses

   iv. Al año

   v. A los tres años

i) Sea “*M*” el monto total que se cancela del préstamo, que incluye capital e intereses, definir una fórmula que nos permita hallar el monto “*M*”, que debe pagar César, por un capital “*C*”, a una tasa de interés mensual “*i*”, después de “*n*” meses.

j) ¿Cuántos meses deben transcurrir desde el inicio del préstamo, hasta que el monto total a pagar sea el doble del capital inicial?

Indicaciones para la PARTE B y PARTE C: Los profesores deben seguir las siguientes instrucciones:

- Responder de manera individual las preguntas propuestas en las hojas que se les proporcionan.
- Compartir sus repuestas con toda la clase.

Nombres y apellidos	ID

PARTE B: PREGUNTAS DE REFLEXIÓN

a) Tomando en cuenta el contexto del caso "Préstamo entre familiares o amigos" ¿Usted cree que está bien que César, siendo cuñado de José, le cobre intereses por el préstamo que le dio?

b) Tomando en cuenta el contexto del caso "Préstamo entre familiares o amigos" ¿Qué habría de bueno o de malo en prestarse dinero, como lo hizo José, de un amigo o familiar, en vez de un una institución financiera?

c) Tomando en cuenta el contexto del caso "Préstamo entre familiares o amigos" ¿Qué habría de bueno o de malo en prestar dinero, como lo hizo César, a un amigo o familiar, en vez de ahorrarlo en institución financiera?

PARTE C: CUIDADO Y MANEJO RESPONSABLE DEL DINERO

OFERTA INSUPERABLE

Con relación al caso "Préstamo entre familiares o amigos", cuando José fue a la tienda para comprar las herramientas de trabajo de su taller, vio la siguiente oferta:

OFERTA INSUPERABLE
Llévate el nuevo televisor LCD 3D de 46 pulgadas más un Blu-ray de regalo por sólo 1 999 soles (Precio normal: 3 000 soles)

Él solo tiene un televisor antiguo en casa, así que se quedó pensando en si debe adquirir o no dicha oferta, con los 5 000 soles que obtuvo de préstamo.

¿Qué debería hacer José?

Decisión	¿Es correcta?
Comprar la oferta insuperable y ya no comprar ninguna herramienta.	Sí/No
Comprar la oferta insuperable y algunas herramientas.	Sí/No
Destinar el dinero que se ha prestado, exclusivamente para la inversión en herramientas.	Sí/No

PARTE D: INSTITUCIONALIZACIÓN

INTERÉS SIMPLE

Sea

I	:	Interés
C	:	Capital
i	:	Tasa de interés simple
n	:	Número de periodos de tiempo
M	:	Monto (Capital más interés)

$$I = C.i.n$$

$$M = C + I = C + C.i.n$$

$$M = C(1 + i.n)$$

Donde "*n*" e "*i*", están expresados en las mismas unidades de tiempo.

PARTE E: EJERCICIOS

1. Calcular a cuánto asciende el interés producido por un capital de 25 000 soles invertido durante 4 meses a una tasa de interés simple mensual del 6 %.
   Respuesta: El interés es de 6 000 soles.

2. Calcular el monto producido por 30 000 soles durante 90 días a una tasa de interés simple anual del 5 %.
   Respuesta: El monto es de 30 375 soles.

3. Al cabo de 8 meses, un capital ha generado 11 520 soles por concepto de intereses. La tasa de interés simple mensual es del 3 %. ¿Cuál es el capital?
   Respuesta: El capital es de 48 000 soles.

4. Un préstamo de 20 000 soles se convierte al cabo de tres meses en 22 400 soles. ¿Cuál es la tasa de interés simple mensual cobrada?
   Respuesta: La tasa de interés es del 4 %.

5. Un capital de 300 000 soles invertido a una tasa de interés simple anual del 8 % durante un cierto tiempo, ha supuesto unos intereses de 12 000 soles. ¿Cuánto tiempo ha estado invertido?
   Respuesta: El tiempo que ha estado invertido es de 0,5 años, es decir, 6 meses.

ANEXO 4

Solución experta de los ejercicios de la sesión de clase 1 - Interés simple

CASO: PRÉSTAMO ENTRE FAMILIARES O AMIGOS

a) *¿Cuánto deberá pagarle José a César, por concepto de intereses? Si decide pagar*

i. *Al mes*

$$I = 0{,}05 \times 5\,000 = 250$$

ii. *A los dos meses*

$$I = 0{,}05 \times 5\,000 \times 2 = 500$$

iii. *A los tres meses*

$$I = 0{,}05 \times 5\,000 \times 3 = 750$$

iv. *Al año*

$$I = 0{,}05 \times 5\,000 \times 12 = 3\,000$$

v. *A los tres años*

$$I = 0{,}05 \times 5\,000 \times 36 = 12\,000$$

b) *Definir una fórmula que nos permita hallar el interés "I", que debe pagar José, por un capital "C", a una tasa de interés mensual "i", después de "n" meses.*

Para el caso de un mes el interés será:

$$I = C.i$$

En general, luego de seguir una secuencia inductiva, para el caso de n meses el interés será igual al interés mensual multiplicado por el número de meses:

$$I = C.i.n$$

Otra forma de generalizar el interés es teniendo en cuenta que se crea una progresión aritmética, donde el primer término es *C.i* y la razón es también *C.i*; por lo tanto, el término del lugar n es:

$$I_n = C.i + (n-1).C.i$$

Factorizando "*C*":

$$I_n = C.[i + (n-1).i]$$

Operando:

$$I_n = C.(i + n.i - i)$$

Simplificando:

$$I_n = C.n.i$$

c) *Usar la fórmula definida en b) para responder ¿Cuánto deberá pagarle José a César, por concepto de intereses, si decide pagar en 3 años?*

Reemplazando en la fórmula *C*=5 000; *i*=0,05 y *n*=36 meses

$$I = 5\ 000 \times 0{,}05 \times 36 = 12\ 000$$

d) *En el contexto del caso ¿Qué tasa de interés anual es equivalente a la tasa de interés del 5% mensual?*

Usando regla de tres:

Si 5% se paga en un mes, ¿cuánto se de pagar en 12 meses?

$$\begin{array}{ccc} tasa & & meses \\ 5\% & \underline{\quad\quad} & 1 \\ x & \underline{\quad\quad} & 12 \end{array}$$

$$x = \frac{5\% * 12}{1} = 60\%$$

e) *Definir una fórmula que nos permita hallar el interés "I", que debe pagar José, por un capital "C", a una tasa de interés anual de "i", después de "n" años.*

Para el caso de un año el interés será:

$$I = C.i$$

En general, luego de seguir una secuencia inductiva, para el caso de n años el interés será igual al interés anual multiplicado por el número de años:

$$I = C.i.n$$

Otra forma de generalizar el interés es teniendo en cuenta que se crea una progresión aritmética, donde el primer témino es *C.i* y la razón es también *C.i*; por lo tanto, el término del lugar n es:

$$I_n = C.i + (n-1).C.i$$

Factorizando "*C*":

$$I_n = C.[i + (n-1).i]$$

Operando:

$$I_n = C.(i + n.i - i)$$

Simplificando:

$$I_n = C.n.i$$

f) Usar la fórmula definida en e) para responder ¿Cuánto deberá pagarle José a César, por concepto de intereses, si decide pagar en 3 años?

Sabemos, por la solución de la pregunta d), que la tasa anual es de 60%.

Reemplazando en la fórmula *C*=5 000; *i*=0,60 y *n*=3 años

$$I = 5\ 000 \times 0{,}60 \times 3 = 12\ 000$$

g) ¿La fórmula obtenida en b) es la misma que la obtenida en e)? En general, ¿Qué tienen en común el número de periodos "n" y la tasa "i", dentro de cada fórmula?

Las fórmula obtenidas en b) y e) son las mismas. Lo que se debe considerar en general es que el número de periodos "*n*" y la tasa "*i*" deben estar medios en las mismas unidades de tiempo. Es decir, si "*n*" está en meses se debe usar la tasa "*i*" mensual, y si "*n*" está en años se debe usar la tasa "*i*" anual.

h) ¿Cuál es el monto total que debe pagar José a César por concepto de intereses y capital? Si decide pagar

i. Al mes

$$M = C + I = 5\ 000 + 0{,}05 * 5\ 000 = 250$$

ii. A los dos meses

$$M = C + I = 5\ 000 + 0{,}05 * 5\ 000 * 2 = 500$$

iii. A los tres meses

$$M = C + I = 5\ 000 + 0{,}05 * 5\ 000 * 3 = 750$$

iv. Al año

$$M = C + I = 5\ 000 + 0{,}05 * 5\ 000 * 12 = 3\ 000$$

v. A los tres años

$$M = C + I = 5\ 000 + 0{,}05 * 5\ 000 * 36 = 12\ 000$$

i) Sea "M" el monto total que se cancela del préstamo, que incluye capital e intereses, definir una fórmula que nos permita hallar el monto "M", que debe pagar César, por un capital "C", a una tasa de interés mensual "i", después de "n" meses.

Por dato de la pregunta, sabemos que:

$$M = C + I$$

Por la fórmula encontrada en la pregunta e) sabemos que:

$$I = C.i.n$$

Luego reemplazamos la segunda expresión en la primera y tenemos:

$$M = C + C.i.n$$

Además, podemos factorizar "*C*" para obtener finalmente:

$$M = C(1 + i.n)$$

Otra forma de generalizar el monto es teniendo en cuenta que se crea una progresión aritmética, donde el primer término es *C+C.i* y la razón es *C.i*; por lo tanto, el término del lugar n es:

$$M_n = C + C.i + (n-1).C.i$$

Factorizando "*C*":

$$M_n = C.[1 + i + (n-1).i]$$

Operando:

$$M_n = C.(1 + i + n.i - i)$$

Simplificando:

$$M_n = C.(1 + n.i)$$

j) *¿Cuántos meses deben transcurrir desde el inicio del préstamo, hasta que el monto total a pagar sea el doble del capital inicial?*

Usando la fórmula:

$$M = C(1 + i.n)$$

Reemplazando *C*=5 000; *i*=0,05 y considerando que el monto debe ser el doble del capital:

$$M = 2C$$

$$5\,000(1 + 0{,}05.n) = 2(5\,000)$$

Dividiendo ambos miembros de la igualdad entre 5 000:

$$1 + 0{,}05.n = 2$$

Despejando "n":

$$0{,}05.n = 1$$

$$n = \frac{1}{0{,}05} = 20$$

$$n = 20 \text{ meses.}$$

ANEXO 5

Soluciones de dos grupos a los ejercicios de la sesión de clase 1 - Interés simple

Grupo 1

INTERÉS SIMPLE

Indicaciones para la PARTE A: Los profesores deben seguir las siguientes instrucciones:

- Formar grupos de tres.
- Responder las preguntas propuestas en las hojas que se les proporcionan.
- Presentar los resultados en una breve exposición.

Nombres y apellidos	ID
	02
	08
	15

PARTE A: CASO

CASO: PRÉSTAMO ENTRE FAMILIARES O AMIGOS

José es un padre de familia que no tiene trabajo fijo. Ha pensado en implementar un taller de carpintería, para lo cual necesita un capital de 5 000 soles. Como no cuenta con un ingreso fijo mensual, no puede pedir un préstamo bancario, es por ello que ha decidido pedirle dinero prestado a su cuñado César.
César ha aceptado prestarle a José, el capital que necesita, con las siguientes condiciones:

- Le deberá pagar el 5% de interés mensual, sobre el capital prestado.
- Le da la oportunidad para pagarle, en un máximo de 36 meses, el total del capital más los intereses generados.

A continuación, responder las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto deberá pagarle José a César, por concepto de intereses? Si decide pagar

i. Al mes 5% de S/5000 $\Rightarrow \frac{5}{100}(5000) =$ S/250.=

ii. A los dos meses $2(250) =$ S/500.--

iii. A los tres meses $3(250) =$ S/750.-

iv. Al año $12\ (250) = S/3000.=$

v. A los tres años $36\ (250) = S/9000.=$

b) Definir una fórmula que nos permita hallar el interés "I", que debe pagar José, por un capital "C", a una tasa de interés mensual "i", después de "n" meses.

$$I = \left(\frac{i}{100} \times C\right) n$$

i = interes (tasa)
C = Capital.
n = N° de meses.

c) Usar la fórmula definida en b) para responder ¿Cuánto deberá pagarle José a César, por concepto de intereses, si decide pagar en 3 años?

$$I = \left(\frac{5}{1\cancel{00}} \times 50\cancel{00}\right) 36 \Rightarrow S/9000.=$$

d) En el contexto del caso ¿Qué tasa de interés anual es equivalente a la tasa de interés del 5% mensual?

$5\% \times 12$ (año) $\Rightarrow 60\%$

e) Definir una fórmula que nos permita hallar el interés "I", que debe pagar José, por un capital "C", a una tasa de interés anual de "i", después de "n" años.

$$I = \left(\frac{i}{100} \times C\right) n \times 12$$

n = N° de años.

f) Usar la fórmula definida en e) para responder ¿Cuánto deberá pagarle José a César, por concepto de intereses, si decide pagar en 3 años?

$$I = \left(\frac{5}{100} \times 5000\right) 3 \times 12 \Rightarrow I = S/\ 90000.=$$

g) ¿La fórmula obtenida en b) es la misma que la obtenida en e)? En general, ¿Qué tienen en común el número de periodos "n" y la tasa "i", dentro de cada fórmula?

no tienen nada en comun.
Dependen del periodo.

h) ¿Cuál es el monto total que debe pagar José a César por concepto de intereses y capital? Si decide pagar

i. Al mes $M = 5000 + 1(250) = S/5250$

ii. A los dos meses

$M = 5000 + 2(250) = S/5500$

iii. A los tres meses

$M = 5000 + 3(250) = S/5750$

iv. Al año $M = 5000 + 12(250) = S/8000$

v. A los tres años

$M = 5000 + 36(250) = S/14000$

i) Sea "M" el monto total que se cancela del préstamo, que incluye capital e intereses, definir una fórmula que nos permita hallar el monto "M", que debe pagar César, por un capital "C", a una tasa de interés mensual "i", después de "n" meses.

$$M = C\left(1 + \frac{i}{100} n\right)$$

j) ¿Cuántos meses deben transcurrir desde el inicio del préstamo, hasta que el monto total a pagar sea el doble del capital inicial?

$$M = C\left(1 + \frac{i}{100} n\right) \Rightarrow 10\cancel{000} = 5\cancel{000}\left(\frac{5}{100} n\right)$$

$$\Rightarrow 2 = \left(\frac{5n}{100}\right)$$

$$20 = n.$$

Rpta: Deben transcurrir 20 meses.

Grupo 2

INTERÉS SIMPLE

Indicaciones para la PARTE A: Los profesores deben seguir las siguientes instrucciones:

- Formar grupos de tres.
- Responder las preguntas propuestas en las hojas que se les proporcionan.
- Presentar los resultados en una breve exposición.

Nombres y apellidos	ID
	7
	16
	14

PARTE A: CASO

CASO: PRÉSTAMO ENTRE FAMILIARES O AMIGOS

José es un padre de familia que no tiene trabajo fijo. Ha pensado en implementar un taller de carpintería, para lo cual necesita un capital de 5 000 soles. Como no cuenta con un ingreso fijo mensual, no puede pedir un préstamo bancario, es por ello que ha decidido pedirle dinero prestado a su cuñado César.
César ha aceptado prestarle a José, el capital que necesita, con las siguientes condiciones:

- Le deberá pagar el 5% de interés mensual, sobre el capital prestado.
- Le da la oportunidad para pagarle, en un máximo de 36 meses, el total del capital más los intereses generados.

A continuación, responder las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto deberá pagarle José a César, por concepto de intereses? Si decide pagar

i. Al mes

$$I = \frac{C.t.r}{1200} = \frac{5000 \times 1 \times 60}{1200} = S/\ 250$$

ii. A los dos meses

$$I = \frac{Ctr}{1200} = \frac{5000 \times 2 \times 60}{1200} = S/\ 500$$

iii. A los tres meses

$$I = \frac{C.t.r}{1200} = \frac{5000 \times 3 \times 60}{1200} = S/\ 750.-$$

iv. Al año

$$I = \frac{C.t.r}{100} = \frac{5000 \times 1 \times 60}{100} = S/\ 3000$$

v. A los tres años

$$I = \frac{C.t.r}{100} = \frac{5000 \times 3 \times 60}{100} = S/\ 9000$$

b) Definir una fórmula que nos permita hallar el interés "I", que debe pagar José, por un capital "C", a una tasa de interés mensual "i", después de "n" meses.

$$I = \frac{C.n.i}{\cancel{1200}} = I = \frac{C.n.i}{100}$$

c) Usar la fórmula definida en b) para responder ¿Cuánto deberá pagarle José a César, por concepto de intereses, si decide pagar en 3 años?

$$I = \frac{5000 \times 3 \times 60}{100} = S/\ 9000$$

d) En el contexto del caso ¿Qué tasa de interés anual es equivalente a la tasa de interés del 5% mensual?

60% anual $\longrightarrow$ 5% mensual.

e) Definir una fórmula que nos permita hallar el interés "I", que debe pagar José, por un capital "C", a una tasa de interés anual de "i", después de "n" años.

$$\boxed{I = \frac{C \times i.n}{100}}$$

f) Usar la fórmula definida en e) para responder ¿Cuánto deberá pagarle José a César, por concepto de intereses, si decide pagar en 3 años?

$$I = \frac{5000 \times 3 \times 60}{100} = S/\ \underline{9000}$$

g) ¿La fórmula obtenida en b) es la misma que la obtenida en e)? En general, ¿Qué tienen en común el número de periodos "n" y la tasa "i", dentro de cada fórmula?

n = periodo
i = tasa
C = Capital

lo mismo

h) ¿Cuál es el monto total que debe pagar José a César por concepto de intereses y capital? Si decide pagar

i. Al mes

$$\boxed{M = C + I}$$

$$C + \frac{Cin}{100}$$

$$C + \frac{C\,(1\times 12)\,n}{1200}$$

$M = 5000 + 250 =$ S/ 5250

ii. A los dos meses

$C + I = 5000 + 500 =$ S/ 5500

iii. A los tres meses

$C + I = 5000 + 750 =$ S/. 5750

iv. Al año

$C + I = 5000 + 3000 =$ S/ 8000

v. A los tres años

$C + I = 5000 + 9000 =$ S/ 14000

i) Sea "M" el monto total que se cancela del préstamo, que incluye capital e intereses, definir una fórmula que nos permita hallar el monto "M", que debe pagar César, por un capital "C", a una tasa de interés mensual "i", después de "n" meses.

$$M = C + I$$
$$C + \frac{C . i \times \cancel{12} . n}{1\cancel{200}}$$
$$C + \frac{C . i . n}{100}$$

$$M = \frac{100C + Cin}{100}$$
$$\boxed{M = \frac{C(100 + in)}{100}}$$

j) ¿Cuántos meses deben transcurrir desde el inicio del préstamo, hasta que el monto total a pagar sea el doble del capital inicial?

$$2\cancel{C} = \frac{\cancel{C}(100 + in)}{100}$$
$$200 = 100 + in$$
$$100 = in$$
$$\frac{100}{i} = n$$

$i = 5$ $$\frac{100}{5} = n$$
$$\boxed{20 = n}$$ //

ANEXO 6

Transcripción del episodio de la sesión de clase 1 - Interés simple

Sesión de clase de interés simple.			
Miércoles 10 de septiembre del 2014.			
Inicio de la sesión:	10:10 am.	Final de la sesión:	12:01 pm
Inicio del discurso:	11:22 am.	Final del discurso:	11:41 am
Participantes:			
P1 :	Profesor Freddy – investigador, observador participante.		
P2 :	Profesora Norma – profesora principal del curso.		
E_i :	Estudiante que interviene en i-ésimo orden. (Estudiantes)		
A :	Algunos. Dos o más estudiantes a la vez.		

Representación escrita del discurso de la clase

1 P_1: La idea es que podamos compartir las respuestas, y si tenemos una respuesta distinta no la cambiemos.

2 P_2: Se discute. No lo cambien, acá yo estoy de observadora.

3 P_1: En principio, como habrán visto, este caso se llamaba “préstamo entre familiares o amigos”, ¿a alguien se le ocurre por qué se llamaba así?, ¿por qué no era un préstamo bancario, creen?, ¿a alguien se le ocurre por qué?

4 E_1: Porque hay más confianza.

5 E_2: Está ofreciendo un mayor interés.

6 E_3: La persona a quien le das, da más confianza.

7 P_1: Se ha puesto un caso de este tipo y no de un banco que ha prestado a régimen de interés simple, porque realmente los bancos no usan interés simple, porque en sus préstamos no usan interés simple. Las aplicaciones en la vida cotidiana de interés simple, están muy relacionadas con préstamos entre familiares o amigos. Cuando uno se presta de un familiar o cuando le presta a un amigo, por una cuestión de facilidad no le aplica interés compuesto, le aplica simplemente una tasa de interés simple. Difícilmente uno va a ir a un banco y va a poder sacar un préstamo a una tasa de interés.

Una observación: normalmente, en los libros podría aparecer este tema de interés simple con un ejemplo de un banco que presta a interés simple. Eso no es real. Tratemos, en principio, de hacer esa salvedad, el interés simple no se usa en el sistema financiero, se usaría entre amigos o familiares.

Habría que tener presente que en interés simple siempre se aplica al capital inicial; es decir, si pasó cinco meses, el capital que se usa como referencia sigue siendo el capital que se prestó al inicio. Ya luego cuando veamos interés compuesto vamos a revisar en otras situaciones el capital va a ir aumentando.

8 E_4: Yo quisiera participar, creo que para precisar. [El interés simple] Se da en el caso en que yo presto a un familiar, yo le digo - yo te presto 5 000 pero mi interés me vas dando mensualmente, yo quiero ganar ese interés, yo quiero tener ese interés, yo te presto por tres años pero tú mensualmente me estás dando el 5% de interés - .

9 P_1: Está bien. En los libros también aparece que otro ejemplo típico de interés simple es aquel donde en cada periodo uno va cobrando sus intereses, entonces, ¿el capital, ahí, se va a mover [aumentar]? No, ¿no? Porque siempre termina retirando los intereses. No hay la posibilidad de que tu capital siga creciendo. Está muy esa observación. Esa también sería una situación, en la vida real, donde se aplique el interés simple, donde cada periodo uno va retirando sus intereses. Sería otro caso aplicativo de interés simple, que tiene mucho que ver con la vida real. Perfecto. Gracias.

¿Qué tal si compartimos nuestras respuestas?

En la pregunta a) tenemos, ¿cuánto debería pagar, por concepto de intereses?, al cabo de un mes, de dos meses, de tres meses. ¿Cuál fue su respuesta al cabo de un mes?

10 A: 250 [soles]

11 P_1: A los dos meses

12 A: 500 [soles]

13 P_1: A los tres meses

14 A: 750 [soles]

15 P_1: Al año

16 A: 3 000 [soles]

17 P_1: Y a los tres años

18 A: 9 000 [soles]

19 P_1: Si esto lo relacionamos con los temas con los que hemos revisado en las primeras clases, ¿podríamos formar una progresión también?

20 A: Sí

21 P_1: Sí podríamos forma una progresión. ¿De qué tipo?

22 A: Aritmética.

23 P_1: Una progresión aritmética ¿cierto? Donde la razón ¿cuál sería?

24 A: 250 [soles]

25 P_1: Sí. A medida que pasan los meses el interés va creciendo en 250 [soles].
Sí lo podemos relacionar con el tema de progresiones aritméticas.
Luego a partir de esta secuencia hemos podido llegar a una fórmula de manera inductiva, hemos estado tomando para un mes, para dos meses, así sucesivamente; y nos damos cuenta de que todo ello nos puede llevar a una fórmula que puede generalizar cómo encontrar el interés.
¿Cuál fue la fórmula que encontraron?

26 E_5: "*i*" sobre 100, por capital, todo por *n*. [P_1 lo escribe en la pizarra]

$$I = \frac{i}{100} \times C \times n \text{ PRIMERA FORMA}$$

27 P_1: De manera inductiva podemos llegar a esta generalización. Eso nos estaría dando el interés. "I" en mayúscula representa la cantidad de dinero. Los alumnos se confunden un poco en esto, porque una cosa es el interés y otra cosa es la tasa de interés. Acá siempre hay una distinción. A veces uno pone la tasa de interés de esta forma [*i*%=i/100, p. ej. tasa=*i*% entonces, para una tasa se 20%, *i*=20, así la tasa es 20/100], a veces uno lo coloca de esta otra forma [p. ej. tasa=*i* entonces, para una tasa se 20% *i*=20%=20/100=0,20]. Si estamos considerando una tasa de interés de 20% [en la primera forma] reemplazaremos i=20. [En la pizarra]

$$I = i \times C \times n \text{ SEGUNDA FORMA}$$

Si usamos la segunda forma, para una tasa del 20% reemplazamos *i*=0,20. Habitualmente en los libros de secundaria, en los libros de educación básica, aparece este formato [primera forma] que usan 100 como denominador. Yo preferiría que usemos esta forma [segunda forma], no es que esté mal [la primera forma], ninguna de las dos está mal, son formas distintas de presentarlo. Yo sé que quién escribió así, [usando la primera forma] cuando le dieran 20% va a escribir 20 sobre 100 [reemplazando *i*=20 en la fórmula]. A los libros de secundaria [algunos] les gusta más esta forma [primera forma]. Pero para unificar criterios, y en realidad, para luego, cuando se va complicando un poco más el tema, va a ser más fácil usar este formato. Así que usemos este de acá [segunda forma].

28 E_2: A mí me sucedió hace varios años una situación respecto a esa forma [primera forma] cuando les puse a los alumnos el 20% de interés, entonces el alumno dice – profesor 20% es 20 sobre 100, entonces puso 20 sobre 100 entre 100 – entonces eso generó un problema. Preferiría en todo caso que usemos la segunda forma porque ahí ya no se presentarían esas situaciones.

29 P_1: En todo caso yo introduciría el tema diciendo que la tasa de interés lo vamos a representar como un decimal, yo preferiría presentarlo así. A medida que el tema se vaya complicando va a ser más fácil ver la tasa de interés como un decimal. Usemos una calculadora para la parte operativa y no vamos a tener problema de trabajar con decimales.

30 E_1: Yo tuve un problema más bien contrario al que tuvo el colega. Lo puse así de esta manera *i* sobre 100 [primera forma] pero ellos no querían trabajar con fracciones. Mis alumnos me dijeron - con decimales entendemos mejor-. Yo lo trabajé de la segunda forma. Fue lo contrario en mi caso, pasó al revés.

31 P_2: ¿Cómo?

32 E_1: O sea, la fórmula la planteé al inicio de esa manera "*i*" sobre 100 [primera forma], pero los alumnos que estaban en segundo o tercero [de secundaria] dijeron - no queremos ver fracciones, queremos trabajar con decimales - . Algunas transformaciones hicimos [a la fórmula inicial], y al final se dieron cuenta que podían trabajar con el decimal. Les parecía mucho más cómodo trabajar con un decimal que con la fracción.

33 P_1: Esos son criterios, puntos de vista. A veces cuando uno no tiene calculadora a la mano, las fracciones son más fáciles de operar que los decimales. Pero bueno, tenemos que tomar alguna decisión, algún criterio para unificar y este formato [segunda forma] va a ser más amigable, aquí [para una tasa del] 20% es [reemplazado el valor de "*i*" por] 0,20, [para una tasa del] 5% es [reemplazado el valor de "*i*" por] 0,05.

34 P_2: Un momentito Freddy, antes de continuar. Porque van a estar interesados en eso. Hay muchos estudios sobre esto de fracciones. Hay investigaciones sobre fracciones y ese tipo de preferencias de los alumnos.

35 E_1: Hay chicos que odian las fracciones.

36 E_2: Lo bueno de la primera forma, es que si el capital es 5 000, 10 000 o 30 000 lo pueden simplificar.

37 P_1: Ambas versiones deben tener sus pro y contra.

38 P_2: Deberían enseñarle ambas, deberían entender. El asunto es que hay ahí un obstáculo.

39 E_6: Deberíamos ubicarnos. Si estamos en el primer grado [de secundaria] ellos conocen los números naturales, todavía no conocen los decimales. Entonces si estamos pasando al siguiente grado, ahí sí están habituados, ahí sí pueden manejar al 100% lo que es decimal. Entonces si estamos trabajando con número naturales y hacemos un cálculo, podríamos trabajar así [usando la primera forma].

40 P_1: ¿Dentro de qué año escolar se está planteando revisar estos temas? El nuevo marco curricular se sugiero que esto sea visto en tercero y cuarto de secundaria, si fueran esos años, ahí no vayan a tener problemas [de trabajar] con decimales.

41 E_6: En primero si está en los libros [haciendo referencia al tema de porcentajes y no al tema de intereses].

42 P_2: Pero ¿en el marco curricular que es lo último? Ahí no lo han visto. Siempre va quedar para ustedes la parte pedagógica, en qué momento. Ahora solamente la parte conceptual.

43 E_4: Cuando nosotros vemos "*i*" nuestra idea es de porcentaje. Ahora el asunto es que los colegas quieren ubicarla como *i*% [donde *i*%=20% se reemplaza *i*=20 sobre 100] quieren ubicarla de dos maneras. Me parece que esta forma no está bien [primera forma], sino esta otra [segunda forma].

44 P_1: Está bien que discutamos estos diferentes criterios, de eso se trata esta clase.

45 E_1: A gusto del cliente.

46 P_2: Primero tienen que ver con que chicos están trabajando. El contexto, eso es lo importante.

47 P_1: La siguiente [pregunta] nos pide que hallemos, usando la fórmula, en la pregunta c), que hallemos cuál sería en interés luego de tres años. ¿Qué respuesta obtuvieron?

48 A: 9 000 [soles]

49 P_1: En la pregunta d) nos piden a qué tasa de interés anual es equivalente una tasa de interés del 5% mensual. ¿Cuál fue su respuesta en este caso?

50 A: 60%

51 P_1: Se entiende esa parte. 60% anual. Sería simplemente multiplicar la tasa mensual del 5% por 12. Ese cambio no es muy difícil. Si tuviéramos una tasa del 24% anual, podríamos hallar su equivalente mensual, ya no sería multiplicación sino ¿en este caso?

52 A: Dividir.

53 P_1: La intención de esa pregunta es saber cómo hacer cambios de tasas, es para no crear tantas fórmulas. En los libros [algunos], no sé si han visto, aparecen, para el caso de interés simple, al principio aparecen tres fórmulas [manteniendo la tasa en años y separando los casos para el tiempo dado en días, meses o años], típicamente, pero en realidad podrían

aparecer hasta nueve fórmulas [si clasificamos para el caso de días, meses y años para la tasa de interés y para el tiempo]. La intención aquí es que sepamos cómo hacer un cambio de tasas para que luego manejemos una única fórmula.

La siguiente pregunta es: Defina una fórmula que nos permita hallar el interés que debe pagar, pero consideran una tasa de interés anual "*i*", donde "*n*" representa el número de años ¿cómo fue la fórmula a la que llegaron?

54 A: La misma. [Refiriéndose a la misma fórmula definida en la pregunta b)]

55 P_1: Es la misma fórmula.
Eso es lo que yo también quiero sugerir en este caso, no debería complicar con tantas fórmulas, con una única fórmula uno podría hacer todos los ejercicios para hallar el interés en el tema interés simple.

56 E_3: Donde deben usarse las mismas unidades de tiempo.

57 P_1: Justo esa pregunta también está ahí, ¿qué debe tener en común "*i*" y "*n*"?

58 E_1: Periodo de tiempo.

59 P_1: Si "*i*" es una tasa anual, "*n*" debería estar en número de años. Si "*i*" es una tasa diaria, "*n*" debería estar en número de días. Si tengo una tasa anual y el tiempo en número de meses, puedo pasar la tasa a mensual o el tiempo a años. Siempre se puede adecuar. Eso es lo que quiero, porque creo que eso simplifica un poco nuestro trabajo, para no llenar de fórmulas.

Con esta única fórmula, haciendo la salvedad de que la tasa de interés y el número de períodos deben estar expresados en las mismas unidades de tiempo, se puede trabajar siempre.

Lo siguiente nos pide una lista de preguntas para hallar los montos. ¿Cuáles con los montos que hallaron?
Para el mes

60 A: 5 250 [soles]

61 P_1: Para los dos meses

62 A: 5 500 [soles]

63 P_1: Para los tres meses

64 A: 5 750 [soles]

65 P_1: Para el año

66 A: 8 000 [soles]

67 P_1: Y finalmente, para los tres años

68 A: 14 000 [soles]

69 P_1: Y finalmente de manera inductiva, lleguemos a encontrar una fórmula. Para este caso, monto a qué sería igual. ¿Cuál fue la fórmula que encontraron?

70 A: [El monto] es igual a capital más interés

$$M = C + I \quad \text{[en la pizarra]}$$

71 P_1: Y luego.

72 A: El interés se reemplaza por el producto de "*C*" por "*i*" por "*n*". [P_1 escribe en la pizarra]

$$M = C + C \times i \times n$$

73 P_1: Incluso podemos hacer una versión ya factorizada: [En la pizarra]

$$M = C(1 + i.n)$$

De manera directa podemos hallar el monto.
De igual manera acá, también podemos tener una única fórmula para el monto. Siempre hay que tener presente quela tasa de interés y el número de periodos deben estar expresados en las mismas unidades de tiempo.
¿Alguien tuvo un problema aquí?
Esta primera parte de interés simple, como su nombre lo dice, es simple.

Luego les pido que usando la fórmula encuentren dentro de cuántos meses se va a duplicar el capital. El monto se va a convertir en el doble de lo que le prestaron. ¿A qué respuesta llegaron?

74 A: 20 [meses]

75 P_1: Una última observación, ¿Los montos [de cada periodo] también podrían formar una progresión?

76 A: Sí

77 P_1: Sí, es una progresión, y ¿la razón cuál sería?

78 E_3: El interés [refiriéndose al interés mensual que es igual a 250 soles].

79 P_1: Sí, sigue siendo la razón 250 [soles]. Se tiene una progresión aritmética.

ANEXO 7

Material de trabajo de la sesión de clase 2 - Interés compuesto primera parte

INTERÉS COMPUESTO

Indicaciones para la PARTE A: Los profesores deben seguir las siguientes instrucciones:

- Formar grupos de tres.
- Responder las preguntas propuestas en las hojas que se les proporcionan.
- Presentar los resultados en una breve exposición.

Nombres y apellidos	ID

PARTE A: CASO

CASO: PRÉSTAMO BANCARIO

Abel es una persona que tiene un trabajo fijo, y tiene dentro de sus propiedades un departamento y un auto propios. Es por ello que no le fue difícil obtener un préstamo bancario de 5 000 soles, para cambiar algunos muebles de su departamento, con las siguientes condiciones:

- Se aplicará una tasa de interés compuesto mensual del 5%. Es decir, cada fin de mes los intereses se sumarán al capital, creándose un nuevo capital mensualmente.
- Abel se compromete a devolver el préstamo en un solo pago, el cual incluye el capital y los intereses generados.

A continuación, responder las siguientes preguntas:

a) En cada caso, halle el monto total que pagaría Abel si se compromete a realizar el pago luego de:

   i. Un mes

   ii. Dos meses

   iii. Tres meses

iv. Doce meses

v. Tres años

b) ¿Hay diferencia en la forma de obtención del monto para este caso, comparado con el caso de interés simple?

c) Definir una fórmula que permita hallar el monto total "*M*", que debe pagar Abel, por un capital "*C*", a una tasa de interés compuesto mensual "*i*", después de "*n*" meses.

d) Usar la fórmula definida en c) para hallar el monto total que pagará Abel, correspondiente al préstamo de un capital de 5 000 soles, a una tasa de interés compuesto mensual del 5%, luego de 24 meses.

e) Definir una fórmula que permita hallar el interés "*I*", que debe pagar Abel, por un capital "*C*", a una tasa de interés compuesto mensual "*i*", después de "*n*" meses.
Recomendación: Use la fórmula encontrada en c) y recuerde que el monto es la suma del capital más el interés.

f) Usar la fórmula definida en e) para hallar el interés que pagará Abel, correspondiente al préstamo de un capital de 5 000 soles, a una tasa de interés compuesto mensual del 5%, luego de 24 meses.

g) ¿Después de cuantos meses, el monto total que debe pagar Abel, será el doble del capital inicial?

Indicaciones para la PARTE B y PARTE C: Los profesores deben seguir las siguientes instrucciones:

- Responder de manera individual las preguntas propuestas en las hojas que se les proporcionan.
- Compartir sus repuestas con toda la clase.

Nombres y apellidos	ID

PARTE B: PREGUNTAS DE REFLEXIÓN

a) En el contexto del caso "Préstamo bancario", si el banco le da la libertad a Abel de pagar el monto total del préstamo incluido intereses, en cualquier momento. ¿Qué le recomendaría a Abel?

b) Existen otras modalidades de préstamos que exigen menos requisitos a los clientes, pero ellos deben dejar alguna garantía, como joyas. Como no exigen muchos requisitos a sus clientes, normalmente estas instituciones aplican tasas de interés para los préstamos mayores que los bancos.
En relación al caso "Préstamo bancario", si Abel hubiera pedido el préstamo de 5000 soles a una financiera que brinda préstamos con garantía de joyas, bajo siguientes condiciones:
   - Se aplicará una tasa de interés compuesto mensual del 10%.
   - Se compromete a realizar un único pago total luego de un año.

   Responda las siguientes preguntas:

   i. Halle cuánto debería pagar de intereses en este caso. Luego, compare su respuesta con lo que pagaría de intereses si se presta del banco a una tasa de interés compuesto mensual del 5% por un año.

   ii. Al ser la tasa de interés compuesto mensual cobrada por la financiera (10%) el doble de la que cobra el banco (5%), ¿el interés que se debe pagar en un año es también el doble? Comente.

PARTE C: CUIDADO Y MANEJO RESPONSABLE DEL DINERO

FALLO BANCARIO[1]

Abel tiene cuenta en el Banco de Zedland. Recibe este mensaje de correo electrónico.

> Estimado cliente del Banco de Zedland:
>
> Se ha producido un fallo en el servidor del Banco de Zedland y sus datos de acceso por Internet se han borrado.
>
> En consecuencia, no dispone usted de acceso a la banca por Internet.
>
> Lo que es más importante, su cuenta ha dejado de ser segura.
>
> Le rogamos que haga clic en el enlace de abajo y siga las instrucciones para restablecer el acceso. Le vamos a pedir que introduzca sus datos de banca por Internet.
>
> https://BancoZedland.com/
>
> Banco de Zedland

¿Cuál o cuáles de estas afirmaciones serían un buen consejo para Abel?

Para cada afirmación, rodea con un círculo "Sí" o "No".

Afirmación	¿Es esta afirmación un buen consejo para Abel?
Responder al mensaje electrónico y dar los datos de banca por internet.	Sí / No
Responder al mensaje electrónico y pedir más información.	Sí / No
Contactar con su banco y preguntar sobre el mensaje de correo electrónico.	Sí / No
Si el enlace es el mismo que la dirección web de su banco, hacer clic en el enlace y seguir las instrucciones.	Sí / No

[1] Ejemplo acondicionado de las preguntas liberadas de PISA 2012

PARTE D: INSTITUCIONALIZACIÓN

INTERÉS COMPUESTO

Sea

I	:	Interés
C	:	Capital
i	:	Tasa de interés compuesto
n	:	Número de periodos de tiempo
M	:	Monto (Capital más interés)

$$M = C(1+i)^n$$

$$I = C(1+i)^n - C$$

$$I = C[(1+i)^n - 1]$$

Donde "*n*" e "*i*", están expresados en las mismas unidades de tiempo.

PARTE E: EJERCICIOS

1. Calcular a cuánto asciende el interés producido por un capital de 25 000 soles invertido durante 4 meses a una tasa de interés compuesto mensual del 6 %.
   Respuesta: El interés es de 6 561,92 soles.

2. Calcular el monto producido por 30 000 soles durante 120 días a una tasa de interés compuesto anual del 5 %.
   Respuesta: El monto es de 30 491,89 soles.

3. Al cabo de 8 meses, un capital ha generado 13 338,50 soles por concepto de intereses. La tasa de interés compuesto mensual es del 3 %. ¿Cuál es el capital?
   Respuesta: El capital es de 50 000 soles.

4. Un préstamo de 20 000 soles se convierte al cabo de cinco meses en 24 333,06 soles. ¿Cuál es la tasa de interés compuesto mensual cobrada?
   Respuesta: La tasa de interés es del 4 %.

5. Un capital de 10 000 soles invertido a una tasa de interés compuesto anual del 8 % durante un cierto tiempo, ha generado un monto de 13 091,31 soles. ¿Cuánto tiempo ha estado invertido?
   Respuesta: El tiempo que ha estado invertido es de 3,5 años, es decir, 3 años y 6 meses.

ANEXO 8

Solución experta de los ejercicios de la sesión de clase 2 - Interés compuesto primera parte

CASO: PRÉSTAMO BANCARIO

a) *En cada caso, halle el monto total que pagaría Abel si se compromete a realizar el pago luego de:*

Resolveremos cada parte de este ejercicio de dos formas.
Para la solución cada parte, usaremos la siguiente nomenclatura:
Definimos M_j como el monto luego de "*j*" meses.
Definimos C_j como el capital luego de "*j*" meses.

Además, sabemos que el monto es la suma del capital más el interés.

i. *Un mes*

Para el caso de un mes debemos considerar el capital inicial (C_0) y el interés es el resultado de multiplicar el capital inicial (C_0) por el porcentaje que corresponde la tasa de interés en forma decimal:

Primera forma:

$$M_1 = C_0 + i.C_0$$

Reemplazando los datos:

$$M_1 = 5\,000 + 0{,}05 * 5\,000 = 5\,250$$

Segunda forma:

O también:

$$M_1 = C_0 + i.C_0 = C_0(1 + i)$$

Reemplazando los datos:

$$M_1 = 5\,000(1 + 0{,}05) = 5\,000(1{,}05) = 5\,250$$

ii. *Dos meses*

Para el caso de dos meses debemos considerar como nuevo capital (C_1) al monto luego de un mes y el interés es el resultado de multiplicar el nuevo capital (C_1) por el porcentaje que corresponde la tasa de interés en forma decimal:

Primera forma:

$$M_2 = C_1 + i.C_1 = M_1 + i.M_1$$

Reemplazando los datos:

$$\mathrm{M}_2 = 5\,250 + 0{,}05 * 5\,250 = 5\,512{,}50$$

Segunda forma:

O también:

$$M_2 = C_1 + i.C_1 = C_1(1+i)$$

Pero como $C_1 = M_1$, entonces:

$$M_2 = M_1(1+i)$$

Además, de la solución anterior sabemos que:

$$M_1 = C_0(1+i)$$

Por lo tanto:

$$M_2 = C_0(1+i)(1+i)$$

Reemplazando los datos:

$$M_2 = 5\,000(1+0{,}05)(1+0{,}05) = 5\,512{,}50$$

iii. *Tres meses*

Para el caso de dos meses debemos considerar como nuevo capital (C_2) al monto luego de dos meses y el interés es el resultado de multiplicar el nuevo capital (C_2) por el porcentaje que corresponde la tasa de interés en forma decimal:

Primera forma:

$$M_3 = C_2 + i.C_2 = M_2 + i.M_2$$

Reemplazando los datos:

$$M_3 = 5\,512{,}50 + 0{,}05 * 5\,512{,}50 = 5\,788{,}125$$

Segunda forma:

O también:

$$M_3 = C_2 + i.C_2 = C_2(1+i)$$

Pero como $C_1 = M_1$, entonces:

$$M_3 = M_2(1+i)$$

Además, de la solución anterior sabemos que:

$$M_2 = C_0(1+i)(1+i)$$

Por lo tanto:

$$M_3 = C_0(1+i)(1+i)(1+i)$$

Reemplazando los datos:

$$M_3 = 5\,000(1+0{,}05)(1+0{,}05)(1+0{,}05) = 5\,788{,}125$$

iv. Doce meses

Primera forma:

Si seguimos siempre la primera forma se resolución de las partes anteriores, debemos notar que existe una progresión geométrica. Se puede llegar a dicha conjetura al notar que el cociente de dividir M_2 entre M_1 es igual al cociente de dividir M_3 entre M_2, cuyo resultado es la razón (*r*) de la progresión geométrica:

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{5\ 512{,}50}{5\ 250} = 1{,}05$$

$$\frac{M_3}{M_2} = \frac{5\ 788{,}125}{5\ 512{,}50} = 1{,}05$$

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{M_3}{M_2} = r = 1{,}05$$

Además, se puede considerar el primer término $M_1 = 5\ 250$

Con los elementos de la progresión geométrica y la fórmula del término de lugar "*n*", podemos definir el término M_n:

$$M_n = M_1(r)^{n-1}$$

Reemplazando *r* por 1,05:

$$M_n = 5\ 250(1{,}05)^{n-1}$$

De esta manera hallamos

$$M_{12} = 5\ 250(1{,}05)^{12-1} = 8\ 979{,}28$$

Segunda forma:

Si seguimos siempre la segunda forma se resolución de las partes anteriores, debemos notar que se cumple una secuencia:

$$M_1 = 5\ 000(1{,}05) = 5\ 250$$

$$M_2 = 5\ 000(1 + 0{,}05)(1 + 0{,}05) = 5\ 512{,}50$$

$$M_3 = 5\ 000(1 + 0{,}05)(1 + 0{,}05)(1 + 0{,}05) = 5\ 788{,}125$$

Se puede llegar a la siguiente conclusión:

$$M_n = 5\ 000(1 + 0{,}05)^n$$

Reemplazando para *n*=12

$$M_{12} = 5\ 000(1 + 0{,}05)^{12} = 8\ 979{,}28$$

v. *Tres años*

Primera forma:

Usando la conclusión de la primera forma de resolución de la parte anterior:

$$M_n = 5\,250(1{,}05)^{n-1}$$

Reemplazamos para n=36

$$M_{36} = 5\,250(1{,}05)^{36-1} = 28\,959{,}08$$

Segunda forma:

Usando la conclusión de la segunda forma de resolución de la parte anterior:

$$M_n = 5\,000(1+0{,}05)^n$$

Reemplazando para n=36

$$M_{36} = 5\,000(1+0{,}05)^{36} = 28\,959{,}08$$

b) *¿Hay diferencia en la forma de obtención del monto para este caso, comparado con el caso de interés simple?*

Sí, en el caso de interés simple, el comportamiento del monto es el de una progresión aritmética; mientras que en el caso de interés compuesto, el comportamiento del monto es el de una progresión geométrica.
La diferencia está en que en el caso de interés simple, el interés siempre se calcula sobre el capital inicial; sin embargo, en interés compuesto, el interés se calcula sobre el nuevo capital que incluye los intereses acumulados hasta el periodo anterior.

c) *Definir una fórmula que permita hallar el monto total "M", que debe pagar Abel, por un capital "C", a una tasa de interés compuesto mensual "i", después de "n" meses.*

Primera forma:

Si seguimos siempre la primera forma se resolución de las partes i, ii y iii de la pregunta "a", debemos notar que existe una progresión geométrica. Se puede llegar a dicha conjetura al notar que el cociente de dividir M_2 entre M_1 es igual al cociente de dividir M_3 entre M_2, cuyo resultado es la razón (r) de la progresión geométrica:

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{5\,512{,}50}{5\,250} = 1{,}05$$

$$\frac{M_3}{M_2} = \frac{5\,788{,}125}{5\,512{,}50} = 1{,}05$$

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{M_3}{M_2} = r = 1{,}05 = 1 + i$$

Además, se puede considerar el primer término $M_1 = 5\,250$

Con los elementos de la progresión geométrica y la fórmula del término de lugar "*n*", podemos definir el término M_n:

$$M_n = M_1(r)^{n-1}$$

Reemplazando r por 1+*i*:

$$M_n = M_1(1+i)^{n-1}$$

Pero M_1 es el resultado del capital inicial "*C*" multiplicado por (1+*i*): $M_1 = C(1+i)$

Por lo tanto:

$$M_n = C(1+i)(1+i)^{n-1}$$

Simplificando el producto de bases iguales:

$$M_n = C(1+i)^n$$

Finalmente, llamando al monto de periodo "*n*" simplemente "*M*": $M_n = M$, se puede expresar la fórmula del monto para interés compuesto como:

$$M = C(1+i)^n$$

Segunda forma:

Si seguimos siempre la primera forma de resolución de las partes i, ii y iii de la pregunta a), debemos notar que se cumple una secuencia:

$$M_1 = 5\,000(1{,}05) = 5\,250$$

$$M_2 = 5\,000(1+0{,}05)(1+0{,}05) = 5\,512{,}50$$

$$M_3 = 5\,000(1+0{,}05)(1+0{,}05)(1+0{,}05) = 5\,788{,}125$$

Se puede llegar a la siguiente conclusión:

$$M_n = 5\,000(1+0{,}05)^n$$

Para generalizar, reemplazando 5 000 por *C* y (1+0,05) por (1+*i*):

$$M_n = C(1+i)^n$$

Finalmente, llamando al monto de periodo "n" simplemente "*M*": $M_n = M$, se puede expresar la fórmula del monto para interés compuesto como:

$$M = C(1+i)^n$$

d) Usar la fórmula definida en c) para hallar el monto total que pagará Abel, correspondiente al préstamo de un capital de 5 000 soles, a una tasa de interés compuesto mensual del 5%, luego de 24 meses.

Usamos la fórmula:

$$M = C(1+i)^n$$

Reemplazando C=5 000; i=0,05 y n=24:

$$M = 5\,000(1 + 0{,}05)^{24} = 16\,125{,}50$$

e) *Definir una fórmula que permita hallar el interés "I", que debe pagar Abel, por un capital "C", a una tasa de interés compuesto mensual "i", después de "n" meses.*
Recomendación: Use la fórmula encontrada en c) y recuerde que el monto es la suma del capital más el interés.

Sabemos que el monto es el resultado de sumar el capital más el interés:

$$M = C + I$$

Despejando el interés:

$$I = M - C$$

Reemplazando M por $C(1+i)^n$:

$$I = C(1+i)^n - C$$

Finalmente, factorizando C:

$$I = C[(1+i)^n - 1]$$

f) *Usar la fórmula definida en e) para hallar el interés que pagará Abel, correspondiente al préstamo de un capital de 5 000 soles, a una tasa de interés compuesto mensual del 5%, luego de 24 meses.*

Usamos la fórmula:

$$I = C[(1+i)^n - 1]$$

Reemplazando C=5 000; i=0,05 y n=24:

$$I = 5\,000[(1{,}05)^{24} - 1] = 11\,125{,}50$$

g) *¿Después de cuantos meses, el monto total que debe pagar Abel, será el doble del capital inicial?*

Usando la fórmula:

$$M = C(1+i)^n$$

Reemplazando C=5 000; i=0,05 y considerando que el monto debe ser el doble del capital:

$$M = 2C$$

$$5\,000(1 + 0{,}05)^n = 2(5\,000)$$

Dividiendo ambos miembros de la igualdad entre 5 000 y sumando 1+0,05=1,05:

$$(1{,}05)^n = 2$$

Aplicando logaritmo en base diez en ambos miembros (podríamos haber usado cualquier otra base):

$$log(1{,}05)^n = log\, 2$$

Usando la propiedad de logaritmos que indica que el exponente del número puede pasar a multiplica a todo el logaritmo:

$$n.\, log\, 1{,}05 = log\, 2$$

Despejando n:

$$n = \frac{log\, 2}{log\, 1{,}05}$$

Luego de operar ayudados por una calculadora:

$$n = 14{,}2 \text{ meses}$$

Respuesta: Después de aproximadamente, 14 meses.

ANEXO 9

Soluciones de dos parejas a los ejercicios de la sesión de clase 2 - Interés compuesto primera parte

PAREJA 7

INTERÉS COMPUESTO

Indicaciones para la PARTE A: Los profesores deben seguir las siguientes instrucciones:

- Formar grupos de tres.
- Responder las preguntas propuestas en las hojas que se les proporcionan.
- Presentar los resultados en una breve exposición.

Nombres y apellidos	ID
	03
	01

PARTE A: CASO

CASO: PRÉSTAMO BANCARIO

Abel es una persona que tiene un trabajo fijo, y tiene dentro de sus propiedades un departamento y un auto propios. Es por ello que no le fue difícil obtener un préstamo bancario de 5 000 soles, para cambiar algunos muebles de su departamento, con las siguientes condiciones:

- Se aplicará una tasa de interés compuesto mensual del 5%. Es decir, cada fin de mes los intereses se sumarán al capital, creándose un nuevo capital mensualmente.
- Abel se compromete a devolver el préstamo en un solo pago, el cual incluye el capital y los intereses generados.

A continuación, responder las siguientes preguntas:

a) En cada caso, halle el monto total que pagaría Abel si se compromete a realizar el pago luego de:

i. Un mes

$M = 5000 + 5\%(5000) = 5000 + 250 =$ S/.5 250

ii. Dos meses

$M = 5250 + 5\%(5250) = 5250 + 262{,}5 =$ S/. 5 512,5

iii. Tres meses

$M = 5512{,}5 + 5\%(5512{,}5) = 5512{,}5 + 275{,}625 =$ S/.5788,125

iv. Doce meses

$M = 5000(1+5\%)^{12} = S/.\ 8\,979,28$

v. Tres años ($n = 36$)

$M = 5000(1+5\%)^{36} = S/.\ 28\,959,08$

b) ¿Hay diferencia en la forma de obtención del monto para este caso, comparado con el caso de interés simple?

si existe diferencia en los montos obtenidos entre el interés simple y este caso, ya que el interés se suma al capital cada mes lo que no ocurre con el interés simple.

c) Definir una fórmula que permita hallar el monto total "M", que debe pagar Abel, por un capital "C", a una tasa de interés compuesto mensual "i", después de "n" meses.

$M = C(1+i)^n$

d) Usar la fórmula definida en c) para hallar el monto total que pagará Abel, correspondiente al préstamo de un capital de 5 000 soles, a una tasa de interés compuesto mensual del 5%, luego de 24 meses.

$M = 5\,000(1+0{,}05)^{24}$

$M = 5000(1{,}05)^{24}$

$M = S/.\ 16.125,50$

e) Definir una fórmula que permita hallar el interés "I", que debe pagar Abel, por un capital "C", a una tasa de interés compuesto mensual "i", después de "n" meses.
Recomendación: Use la fórmula encontrada en c) y recuerde que el monto es la suma del capital más el interés.

Sabemos que: $M = C(1+i)^n$

Para encontrar el interés restamos C a ambos miembros:

$$\underbrace{M - C}_{} = C(1+i)^n - C$$

$$I = C\left[(1+i)^n - 1\right]$$

f) Usar la fórmula definida en e) para hallar el interés que pagará Abel, correspondiente al préstamo de un capital de 5 000 soles, a una tasa de interés compuesto mensual del 5%, luego de 24 meses.

$$I = 5\,000\left[(1+0{,}05)^{24} - 1\right]$$

$$I = 5\,000\left[(1{,}05)^{24} - 1\right]$$

$$I = S/.\ 11\,125{,}50$$

g) ¿Después de cuántos meses, el monto total que debe pagar Abel, será el doble del capital inicial?

$$5000\,(1+0{,}05)^n = 10\,000$$

$$(1{,}05)^n = 2$$

$$\operatorname{Log}(1{,}05)^n = \operatorname{Log} 2$$

$$n = \frac{\operatorname{Log} 2}{\operatorname{Log} 1{,}05}$$

$$n \approx 14{,}21 \text{ meses}$$

PAREJA 2

INTERÉS COMPUESTO

Indicaciones para la PARTE A: Los profesores deben seguir las siguientes instrucciones:

- Formar grupos de tres.
- Responder las preguntas propuestas en las hojas que se les proporcionan.
- Presentar los resultados en una breve exposición.

Nombres y apellidos	ID
	14
	15

los
2

PARTE A: CASO

CASO: PRÉSTAMO BANCARIO

Abel es una persona que tiene un trabajo fijo, y tiene dentro de sus propiedades un departamento y un auto propios. Es por ello que no le fue difícil obtener un préstamo bancario de 5 000 soles, para cambiar algunos muebles de su departamento, con las siguientes condiciones:

- Se aplicará una tasa de interés compuesto mensual del 5%. Es decir, cada fin de mes los intereses se sumarán al capital, creándose un nuevo capital mensualmente.
- Abel se compromete a devolver el préstamo en un solo pago, el cual incluye el capital y los intereses generados.

A continuación, responder las siguientes preguntas:

a) En cada caso, halle el monto total que pagaría Abel si se compromete a realizar el pago luego de:

i. Un mes

$M = C(1+i)^n =$

$M = 5000(1+0,05)^1 = 5250$

ii. Dos meses

$M = 5000(1+0,05)^2 = 5512$

iii. Tres meses

$M = 5000(1+0,05)^3 = 5788,125$

iv. Doce meses

$M = 5000(1+0.6) =$

$M = 8000$

v. Tres años

$M = 5000(1+0.6)^3 =$

$M = 20480$

b) ¿Hay diferencia en la forma de obtención del monto para este caso, comparado con el caso de interés simple?

Si, porque el interés se capitaliza.

c) Definir una fórmula que permita hallar el monto total “M”, que debe pagar Abel, por un capital “C”, a una tasa de interés compuesto mensual “i”, después de “n” meses.

$M = C(1+i)^n$

d) Usar la fórmula definida en c) para hallar el monto total que pagará Abel, correspondiente al préstamo de un capital de 5 000 soles, a una tasa de interés compuesto mensual del 5%, luego de 24 meses.

$M = 5000(1+0.6)^2$

$M = 12\,800$

e) Definir una fórmula que permita hallar el interés "I", que debe pagar Abel, por un capital "C", a una tasa de interés compuesto mensual "i", después de "n" meses.
Recomendación: Use la fórmula encontrada en c) y recuerde que el monto es la suma del capital más el interés.

$M = C(1+i)^n$ $\qquad$ $M = C + I$

$I = M - C$

$I = C(1+i)^n - C$

$\boxed{I = C[(1+i)^n - 1]}$

f) Usar la fórmula definida en e) para hallar el interés que pagará Abel, correspondiente al préstamo de un capital de 5 000 soles, a una tasa de interés compuesto mensual del 5%, luego de 24 meses.

$I = 5000\left[(1+0{,}6)^2 - 1\right]$

$I = 5000\left[(1{,}6)^2 - 1\right]$

$I = 7\,800.$

g) ¿Después de cuantos meses, el monto total que debe pagar Abel, será el doble del capital inicial?

$M = 2C$

$M = C(1+i)^n$

$2\cancel{C} = \cancel{C}(1+i)^n$

$(1+i)^n = 2$

$\ln(1+i)^n = \ln 2$

$n = \dfrac{\ln 2}{\ln(1{,}05)}$

$n = \dfrac{0{,}3010}{0{,}021}$

$n = 14{,}2 \Rightarrow$ 14 meses 6 días

ANEXO 10

Transcripción del episodio de la sesión de clase 2 - Interés compuesto primera parte

Sesión de clase de interés compuesto - parte 1.
Lunes 15 de septiembre del 2014.

Inicio de la sesión:	8:10 am.	Final de la sesión:	9:55 am
Inicio del discurso:	9:20 am.	Final del discurso:	9:43 am

Participantes:

P : Profesor Freddy – investigador, observador participante.
E_i : Estudiante que interviene en *i*-ésimo orden. (Estudiantes)
A : Algunos. Dos o más estudiantes a la vez.

Representación escrita del discurso de la clase

1 P: Ahora sí vamos a comentar las respuestas a las cuales han llegado ustedes. Todos tienen las hojas de pregunta y apuntaron sus respuestas. Me gustaría primero comentar las tres primeras respuestas de la primera página. Dice, en cada caso halle el monto total que pagaría Abel si se compromete a realizar el pago luego de un mes. ¿Luego de un mes cuánto pagaría?

2 A: 5 250 [soles]

3 P: Luego de dos meses,

4 A: 5 512,5 [soles]

5 P: En tres meses,

6 A: 5 788,125 [soles]

7 P: ¿Alguien tiene una respuesta distinta? Creo que no. En estos tres primeros valores, ¿ustedes encuentran alguna sucesión?, ¿alguien encontró alguna regla que se pueda generalizar? Antes de que me expliquen si encontraron alguna regla, me gustaría que levanten la mano las parejas que crean que hay alguna regla. ¿Quiénes sí encontraron alguna regla? Uno, dos, tres, cuatro. Justo la mitad dice que sí encontró alguna regla [cuatro de ocho parejas]. Alguien me explica ¿qué regla?

8 E_1: Una progresión geométrica.

9 P: Encontró una progresión geométrica, ¿cuya razón es?

10 E_1: 1,05.

11 P: ¿Ustedes?

12 E_2: Sí, nosotros también, multiplique el capital por la tasa de interés más uno, y este factor elevarlo al número de meses. Como mi compañero dice, es una progresión geométrica.

13 P: Cierto, es una progresión geométrica. Si lo vemos como una progresión geométrica, la razón sería…

14 E_2: 1,05

15 P: ¿Y cuál sería el primer término entonces?

16 E_3: Capital inicial

17 E_1: Capital inicial sería el término cero.

18 P: Aquí su compañero dice que el capital inicial sería el término cero y no el término uno. A ver, para un mes me dijeron que era 5 250, para dos meses, para dos meses 5 512,5. En la secuencia hemos notado que hay una progresión geométrica. ¿A qué le podría llamar el primer término? Hay muchas formas de trabajar en matemática. Un compañero de ustedes me decía que 5 250 sería su primer término y 5 000 [el capital inicial] sería su término de lugar cero. ¿Cómo lo tomaron ustedes?

19 E_2: El primer mes [el monto] el término uno.

20 P: Creo que en eso coincidimos, tomando 5 250 como primer término. ¿Cómo verificamos que realmente se forma una progresión geométrica?

21 E_1: Dividimos.

22 P: Dividimos ¿no? ¿Por qué sale ese 1,05? ese 1,05 justo es…

23 E_2: La tasa de interés más uno.

24 A: Ese 1,05 es justo uno más la tasa de interés. Está perfecto.

25 P: A ver, entonces ¿puedo generalizar? Porque ya de alguna manera, para la pregunta siguiente, cuando tenemos 12 meses, uno no podría hacer lo que hizo para los primeros meses, ya tendría que buscar una manera de generalizar. ¿Cómo hicieron ustedes para la pregunta iv?

26 E_2: Hemos ido trabajando, primero con a_1 hemos obtenido para el primer mes. Para el segundo mes hemos multiplicado por 1,05.

27 P: Y por lo tanto para doce meses. ¿Qué operación podría llevarlos a la respuesta? Para doce meses, 5 000 por…

28 E_2: 1,05

29 P: Por 1,05 elevado a…

30 A: elevado a la 12

31 P: Esa sería una manera directa. [En la pizarra]

$$M = 5\,000(1{,}05)^{12}$$

Otra forma de llegar a la respuesta sería: si estoy diciendo que se forma una progresión geométrica donde 5250 es el primer término y la razón es 1,05. Entonces, cualquier término, el término del lugar “*n*” sería 5250 por 1,05 elevado a la…

32 A: “*n*” menos uno.

33 P: A la “*n*” menos uno. [En la pizarra]

$$M_n = 5\,250(1{,}05)^{n-1}$$

Lo cual hubiera sido una operación que nos daba la misma respuesta. Porque hubiéramos puesto 5250 multiplicado por 1,05 elevado a la 11. Hubiéramos llegado exactamente a la misma respuesta. Que es ¿Cuánto fue la respuesta?

34 E_1: 8979,28 [soles]

35 P: Y así podríamos generalizar y reemplazar para 12 meses. Para 36 meses ¿a qué respuesta llegaron?

36 E_2: 28 959,08 [soles]

37 P: 28 959,08. Bueno, antes de formalizar toda esta generalización, había hecho una pregunta si hay diferencia en la forma de obtención del monto comparado con el caso de interés simple ¿cuál fue su respuesta?, ¿alguien nos puede explicar por qué es diferente?, ¿qué diferencia han encontrado?

38 E_2: Profesor, en el interés compuesto funciona el fenómeno que se llama de la bola de nieve. Es decir, en cada mes vamos añadiendo al capital del mes anterior [el interés que se generó en el último periodo] y a ese nuevo capital va a ser imponible la tasa de interés. Y así va a suceder cada mes.

39 P: Este capital va a crecer cada vez más.

40 E_2: Se va capitalizando.

41 P: Cierto, como los intereses van a formar parte del [nuevo] capital, a ese proceso se le llama capitalización. Y esto va a hacer que el monto siga un crecimiento más rápido que el de interés simple. El interés simple sigue un crecimiento que es el de una función lineal, y en este caso [para el interés compuesto] el monto sigue un crecimiento que sería el de una función exponencial. Es un crecimiento más rápido.

¿Cuál fue la fórmula que encontraron en la pregunta c)?, ¿alguno de ustedes me puede dar su respuesta?

42 E_1: Monto es igual a capital que multiplica a uno más "*i*", elevado a la "*n*".

$$M = C(1 + i)^n$$

43 P: No le he preguntado acá, pero al igual que en interés simple, esta "*i*" y "*n*" ¿qué tienen en común?

44 A: Tienen que estar expresados en el mismo periodo.

45 P: Cierto. Tienen que estar expresados en el mismo periodo. En nuestro ejemplo "*i*" es una tasa mensual y "*n*" esta en meses. No es tan fácil encontrar para este caso una tasa anual. Por ahí veo que algunos estaban trabajando para 12 meses o 36 meses [preguntas iv y v] con tasas anuales. Pero la tasa en años [que ellos creían correcta] no funcionaba, no daba la misma respuesta. En el caso de interés compuesto, la tasa anual no es el resultado de la tasa mensual multiplicada por doce. Pero esto lo vamos a ver en la siguiente clase porque es importante que sepamos cambiar una tasa de interés [compuesto] mensual a tasa de interés [compuesto] anual y viceversa, que son las tasas que se manejan en el mercado regularmente. Este no es un curso de matemática financiera orientada a los negocios como ven en las universidades, es un curso que tiene temas de matemática financiera orientada al uso doméstico, para la vida cotidiana. Y en la vida cotidiana, lo que uno ve en el mercado

son tasas mensuales y tasas anuales. En otros cursos les hablan de tasas bimestrales, trimestrales, semestrales, quincenales.

46 E_2: Profesor, en algunos lugares trabajan con tasas diarias.

47 P: Cierto. Justo eso lo vamos a ven en la siguiente clase, donde desarrollaremos una segunda parte del tema interés compuesto. Justo eso lo vamos a ver en la siguiente clase. Vamos a revisar los cambios de tasas, usando especialmente las tasas mensuales y anuales, y también haremos referencia a la tasa diaria.

48 E_4: Yo tengo una tarjeta de crédito y en el estado de cuenta siempre aparece una expresión sobre la tasa efectiva "TEA". ¿Qué relación tiene con lo que estamos viendo?

49 P: Justo eso también lo veremos en la siguiente clase. En la siguiente clase, a la tasa de interés compuesto mensual la vamos a llamar "tasa efectiva mensual" (TEM). Y a la tasa de interés compuesto anual la vamos a llamar "tasa efectiva anual" (TEA). Que es justo lo que usa el sistema financiero. El sistema financiero usa esas siglas.

A ver [para la pregunta c)] ¿cómo llegaron a esta fórmula? ¿Alguien usó progresión geométrica para llegar a esta fórmula?

Alguien podría decirme que se dio cuenta que iba multiplicando por 1,05 [sin hacer referencia de manera directa a una progresión geométrica]. Pero, ¿se podría haber llegado a través de la progresión geométrica? Sí. Podríamos haber dicho que el primer término era 5 250, que es lo mismo que decir que el primer término es el capital por uno más la tasa. Y la razón era uno más la tasa. [En la pizarra]

Primer término $M_1 = 5250 = C(1{,}05)$

Entonces $M_n = 5250(1{,}05)^{n-1} = C(1{,}05)(1{,}05)^{n-1} = C(1+i)^n$

Esta sería una forma de llegar a la fórmula. Esta sería una aplicación de progresión geométrica.

Bueno, usando esta fórmula se puede reemplazar para cualquier "n". Para 24 meses, que es la siguiente pregunta, la pregunta d) el monto era…

50 A: 16125,50

51 P: Bien. Basta que lo redondeemos en dos decimales cuando es cantidad de dinero.

Luego en la e) se pide que encontremos una fórmula para el interés. Yo he estado viendo sus apuntes y noto que muchos ya tienen la respuesta incluso factorizada. ¿Cómo hizo en su caso para llegar a la respuesta? [Mirando al estudiante E_1]

52 E_1: "*I*" igual a "*M*" menos "*C*"

53 P: Justo la pregunta nos sugería usar esta relación: [en la pizarra]

$$M = C + I$$

$$I = M - C$$

Y como ya teníamos una fórmula para el monto, reemplazamos: [en la pizarra]

$$I = C(1+i)^n - C$$

Finalmente factorizamos: [en la pizarra]

$$I = C[(1+i)^n - 1]$$

Un comentario que me estaba olvidando: he notado que algunos profesores han usado alguna otra fórmula que han encontrado por ahí, en algún libro de matemática financiera o en internet. Pero creo que lejos de ayudarse terminaban complicándose viendo versiones distintas de la fórmula de monto para interés compuesto. ¿Tenían otra fórmula por ahí?

En los libros aparece mucho esta fórmula para el monto: [en la pizarra]

$$M = C\left(1+\frac{i}{k}\right)^{n.k}$$

Aquí nos complicaban un poco. ¿Qué cosa es "*k*"?, ¿en nuestro caso era necesario encontrar el valor de *k*?
Como el objetivo es replicar esto temas en la escuela secundaria, hemos buscado simplificar las fórmulas y operaciones. En un curso universitario de matemática financiera, dirigido al área de negocios, desarrollan diferentes casos para las capitalizaciones mensuales, semestrales, bimestrales, trimestrales. Para poder generalizar la fórmula se usa esta "*k*". Esta "*k*" representa cuantas veces se capitalizan los intereses en un año. Además, usan siempre "*i*" como la tasa anual [Tasa nominal anual] y lo dividen entre cuántas capitalizaciones hay en el año y el exponente es el producto de número de años por número de capitalizaciones. [En sí, es otro enfoque].

A ver sigamos, la pregunta f) nos pedía que usemos esta fórmula hallada en d). Ojo que en la f) nos preguntaban el interés no el monto. ¿Cuánto era el monto?

54 E_2 16 125,50

55 P: ¿Y el interés?

56 A: 11 125,50

57 P: ¿Quienes llegaron a la g)? A ver, levanten la mano. Seis de las ocho parejas llegaron a la respuesta. ¿A qué respuesta llegaron?

58 E_3: 14,2

59 P: ¿Alguien llegó también a 14,2?, ¿cómo lo hicieron?, ¿quiere alguien salir a la pizarra? A ver si nos comenta cómo lo resolvió.

60 E_1: Como nos pedían calcular el monto [que es] el doble después de "*n*" meses, lo que hemos hecho es igualar el monto a dos veces el capital. [En la pizarra]

$$C(1+i)^n = 2C$$

$$(1+i)^n = 2$$

Despejando mediante logaritmo en base 10, hemos obtenido esta expresión: [en la pizarra]

$$n.log(1+i) = log\,2$$

$$n = \frac{log\,2}{log(1+i)}$$

Ahora vamos a reemplazarla por los datos del problema: [en la pizarra]

$$n = \frac{log\,2}{log(1{,}05)}$$

Esto es “*n*” igual a 14,21 meses.

61 P: ¿Alguien tiene una respuesta distinta?

62 E_5: Con logaritmo natural sale 14,4

63 P: ¿Redondearon en algún momento? Quizá hicieron un redondeo previo, por ello se alejan de la respuesta [14,21]. En realidad podría usarse logaritmo en cualquier base y siempre saldría la misma respuesta.

La otra versión sería la que encontró su compañero: [En la pizarra]

$$n = \log_{1{,}05} 2$$

Se puede usar propiedades de cambio de base para hallar la respuesta. Aunque hay calculadoras científicas que hallan logaritmos con cualquier base.

¿Qué tal para los alumnos esta parte de logaritmos?

64 E_2: Yo lo trabajé en primero de secundaria. Sí había chicos que respondían, pero la mayoría se equivocaba. Era demasiado prematuro.

ANEXO 11

Material de trabajo de la sesión de clase 3 - Interés compuesto segunda parte

INTERÉS COMPUESTO

(Continuación)

Indicaciones para la PARTE A: Los profesores deben seguir las siguientes instrucciones:

- Formar grupos de tres.
- Responder las preguntas propuestas en las hojas que se les proporcionan.
- Presentar los resultados en una breve exposición.

Nombres y apellidos	ID

PARTE A: TEORÍA Y CASO

TASAS EFECTIVAS EQUIVALENTES

En matemática financiera, la tasa de interés compuesta se llama “tasa efectiva”; es decir, a la tasa de interés compuesto mensual se le llama tasa efectiva mensual (TEM). Para el caso de la tasa efectiva anual le corresponde las siglas TEA.
En las instituciones financieras se usan con mayor frecuencia las tasas efectivas mensuales y anuales (TEM y TEA).

Veamos cómo obtener tasas efectivas equivalentes en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:
Si la tasa efectiva mensual es del 5%, ¿cuál es la tasa efectiva bimestral (TEB) equivalente?

Solución:
Asumiendo un tiempo de 2 meses, hallamos el monto usando la TEM:

$$M = C(1 + \mathrm{TEM})^2$$

(Donde el “2” en el exponente indica 2 meses)

Asumiendo un tiempo de 2 meses, hallamos el monto usando la TEB:

$$M = C(1 + \mathrm{TEB})^1$$

(Donde el “1” en el exponente indica un bimestre)

Para que las tasas sean equivalentes, el monto debe ser el mismo en ambos casos, por ello igualamos ambas expresiones:

$$\mathrm{C}(1 + \mathrm{TEM})^2 = \mathrm{C}(1 + \mathrm{TEB})^1$$
$$(1 + \mathrm{TEM})^2 = (1 + \mathrm{TEB})$$

$$(1+\mathrm{TEM})^2-1=\ \mathrm{TEB}$$

Para una TEM=5%

$$\mathrm{TEB}=(1+0{,}05)^2-1=0.1025$$

$$\mathrm{TEB}=10{,}25\%$$

Ejemplo 2:

¿Cuál es la tasa efectiva mensual (TEM) equivalente a una tasa efectiva semestral (TES) del 36%?

Asumiendo un tiempo de 6 meses, hallamos el monto usando la TEM:

$$M=C(1+\mathrm{TEM})^6$$

(Donde el “6” en el exponente indica 6 meses)

Asumiendo un tiempo de 6 meses, hallamos el monto usando la TES:

$$M=C(1+\mathrm{TES})^1$$

(Donde el “1” en el exponente indica un semestre)

Para que las tasas sean equivalentes, el monto debe ser el mismo en ambos casos, por ello igualamos ambas expresiones:

$$\mathrm{C}(1+\mathrm{TEM})^6=\ \mathrm{C}(1+\mathrm{TES})^1$$

$$(1+\mathrm{TEM})^6=\ (1+\mathrm{TES})$$

$$1+\mathrm{TEM}=\ \sqrt[6]{1+\mathrm{TES}}$$

$$\mathrm{TEM}=\ \sqrt[6]{1+\mathrm{TES}}-1$$

Para una TES=36%

$$\mathrm{TEM}=\ \sqrt[6]{1+0{,}36}-1=0{,}052583$$

$$\mathrm{TEM}=5{,}2583\%$$

a) Defina una fórmula que permita hallar una TEA a partir de la TEM.

b) ¿Qué tasa de interés efectiva anual (TEA) es equivalente a la tasa de interés efectiva mensual (TEM) del 5%?

c) Defina una fórmula que permita hallar una TEM a partir de la TEA.

d) ¿Qué tasa de interés efectiva mensual (TEM) es equivalente a la tasa de interés efectiva anual (TEA) del 60%?

LÍNEA DE TIEMPO

Una manera de organizar la información en matemática financiera, es mediante el uso de la línea de tiempo. En ella se indica el momento cero, que representa el inicio del primer periodo; luego el momento uno que representa el fin del primer periodo y el inicio del segundo periodo; y así sucesivamente.

CAPITALIZACIÓN Y ACTUALIZACIÓN

La fórmula para hallar el monto, vista en el tema interés compuesto, puede reformularse para relacionar el valor actual VA (o valor presente o valor inicial) con el valor futuro VF.

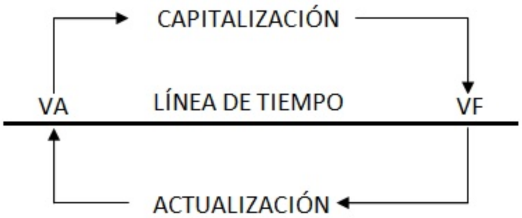
$$\mathrm{VF} = \mathrm{VA}(1+i)^n \qquad \text{(Fórmula de Capitalización)}$$

Donde "*n*" e "*i*" se encuentran expresados en la misma unidad de tiempo

De donde se deduce que:

$$\mathrm{VA} = \frac{\mathrm{VF}}{(1+i)^n} \qquad \text{(Fórmula de Actualización)}$$

En matemática financiera, el llevar una cantidad de dinero (VA) hacia un momento posterior (VF) se llama capitalizar. Mientras que, el llevar una cantidad de dinero (VF) hacia un momento anterior (VA) se llama actualizar. Dicho de otro modo, se puede observar que la capitalización implica valorizar el capital del presente al futuro, mientras que la actualización es el valor equivalente en la fecha actual, de un capital futuro.



Por ejemplo, 2 000 soles al ser capitalizados durante doce meses, a una TEM del 5%, se convierten en 3 591,71 soles.

$$\mathrm{VF} = 2\,000(1+0{,}05)^{12} = 3\,591{,}71$$

Mientras que 3 591,71 soles que nos ofrecen dentro de 12 meses, actualizado a una TEM del 5%, equivalen a 2 000 soles hoy.

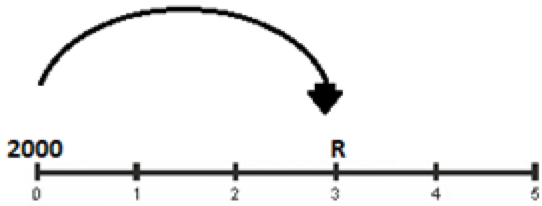
$$\mathrm{VA} = \frac{3\,591{,}71}{(1+0{,}05)^{12}} = 2\,000$$

CASO: PAGO DIFERIDO

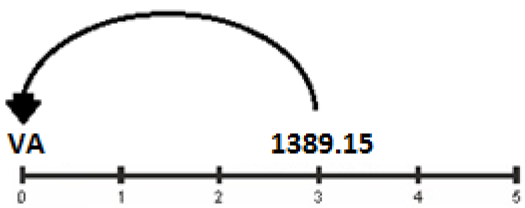
Una tienda vende electrodomésticos al crédito cobrando una TEM del 5%. Dicha tienda ofrece actualmente la siguiente promoción:

“Compra hoy y empieza a pagar dentro de 3 meses”.

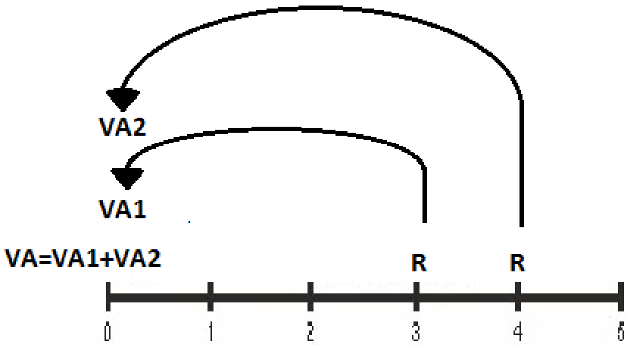
a) Arturo compra una refrigeradora, cuyo precio es de 2 000 soles. Si Arturo se acoge a dicha oferta y hace el pago en una sola cuota “*R*”. Halle el valor dicha cuota.



b) Arturo compra una cocina. Si Arturo se acoge a dicha oferta y hace el pago en una sola cuota *R* = 1 389,15 soles. Halle el precio de dicha cocina, al momento de efectuar la compra.



c) Con referencia a la pregunta anterior, una vez conocido el precio de la cocina en momento de la compra, si Arturo se compromete a pagar en dos cuotas mensuales iguales a "*R*", iniciando el pago luego de tres meses. Halle el valor de la cuota.
Sugerencia: Use dos veces la fórmula de actualización para encontrar los VA1 y VA2. Luego sume ambas expresiones e iguale con el precio de la cocina en el momento de la compra.



Indicaciones para la PARTE B y PARTE C: Los profesores deben seguir las siguientes instrucciones:

- Responder de manera individual las preguntas propuestas en las hojas que se les proporcionan.
- Compartir sus repuestas con toda la clase.

Nombres y apellidos	ID

PARTE B: PREGUNTAS DE REFLEXIÓN

a) ¿Por qué sería conveniente para una tienda que vende artículos al crédito, dar la oportunidad pagos diferidos?

b) ¿Recuerda haber oído de promociones que ofrecen la oportunidad de pagos diferidos? De ser así, ¿en qué época del año suelen presentarse estas promociones?

c) ¿Es conveniente para los consumidores realizar pagos diferidos?

PARTE C: CUIDADO Y MANEJO RESPONSABLE DEL DINERO

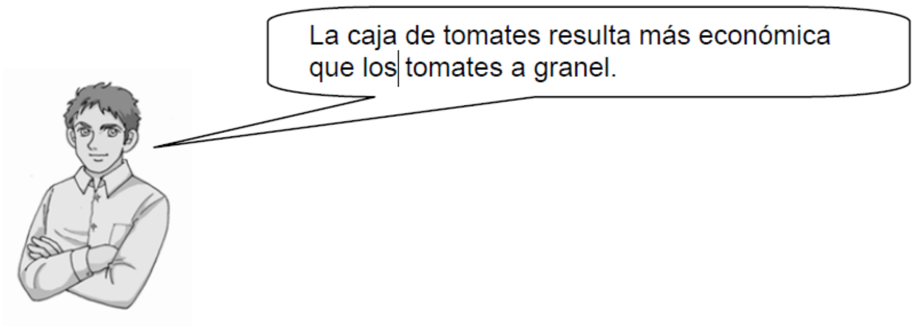
EN EL MERCADO[1]

Se pueden comprar tomates por kilos o por cajas.

2,75 zeds por kg

22 zeds por una caja de 10 kg

Pregunta 1: EN EL MERCADO



Da una razón que justifique esta afirmación.

....

....

....

Pregunta 2: EN EL MERCADO

Comprar una caja de tomates puede ser una mala decisión financiera para algunas personas. Explica por qué.

....

....

....

[1] Ejemplo acondicionado de las preguntas liberadas de PISA 2012

PARTE D: INSTITUCIONALIZACIÓN

INTERÉS COMPUESTO – PARTE 2

Cambio de TEM a TEA y de TEA a TEM:

$$\mathrm{TEA} = (1 + \mathrm{TEM})^{12} - 1$$

$$\mathrm{TEM} = \sqrt[12]{1 + \mathrm{TEA}} - 1$$

Capitalización y Actualización:

La fórmula para hallar el monto, vista en el tema interés compuesto, puede reformularse para relacionar el valor actual VA (o valor presente o valor inicial) con el valor futuro VF.

$$\mathrm{VF} = \mathrm{VA}(1 + i)^n \qquad \text{(Fórmula de Capitalización)}$$

Donde “*n*” e “*i*” se encuentran expresados en la misma unidad de tiempo

De donde se deduce que:

$$\mathrm{VA} = \frac{\mathrm{VF}}{(1 + i)^n} \qquad \text{(Fórmula de Actualización)}$$

PARTE E: EJERCICIOS

1. Halle la TEA equivalente a una TEM del 3,5%.
   Respuesta: La TEA es del 51,1069%.

2. Halle la TEM equivalente a una TEA del 45%.
   Respuesta: La TEM es del 3,1448%.

3. Hallar el precio al contado de un artículo que se financia a una TEM del 4%, en dos pagos: el primero de 2 000 soles al cumplirse dos meses desde el momento de la compra, y el segundo de 4 000 soles al cumplirse cinco meses desde el momento de la compra.
   Respuesta: El precio al contado es de 5 136,82 soles.

4. Al 31 de julio, una persona debe 10 523,60 soles por la deuda total de su tarjeta de crédito. Halle cuánto deberá pagar si desea cancelar dicha deuda el 20 de agosto del mismo año, si le cobran una TEM del 5%.
   Respuesta: Deberá pagar 10 871,53 soles.

5. Un televisor cuyo precio al contado es de 1 500 soles, es financiado en dos pagos mensuales iguales. Halle el pago mensual, si el primer pago se realiza después de un mes. Considere una TEM del 4%.
   Respuesta: El pago mensual es de 795,29 soles.

ANEXO 12

Solución experta de los ejercicios de la sesión de clase 3 - Interés compuesto segunda parte

TASAS EFECTIVAS EQUIVALENTES

a) *Defina una fórmula que permita hallar una TEA a partir de la TEM.*

Asumiendo un tiempo de 12 meses (un año), hallamos el monto usando la TEA:

$$M = C(1 + \mathrm{TEA})^1$$

(Donde el "1" en el exponente indica un año)

Asumiendo un tiempo de 12 meses, hallamos el monto usando la TEM:

$$M = C(1 + \mathrm{TEM})^{12}$$

Para que las tasas sean equivalentes, el monto debe ser el mismo en ambos casos, por ello igualamos ambas expresiones:

$$\mathrm{C}(1 + \mathrm{TEA})^1 = \mathrm{C}(1 + \mathrm{TEM})^{12}$$

Luego de dividir ambos miembros entre "*C*":

$$(1 + \mathrm{TEA}) = (1 + \mathrm{TEM})^{12}$$

Eliminando los paréntesis del primer miembro:

$$1 + \mathrm{TEA} = (1 + \mathrm{TEM})^{12}$$

Despejando la TEA:

$$\mathrm{TEA} = (1 + \mathrm{TEM})^{12} - 1$$

b) *¿Qué tasa de interés efectiva anual (TEA) es equivalente a la tasa de interés efectiva mensual (TEM) del 5%?*

Reemplazando la TEM del 5% en la fórmula hallada en la pregunta anterior:

$$\mathrm{TEA} = (1 + 0{,}05)^{12} - 1 = 0{,}795856$$

$$\mathrm{TEA} = 79{,}5856\%$$

c) *Defina una fórmula que permita hallar una TEM a partir de la TEA.*

Asumiendo un tiempo de 12 meses, hallamos el monto usando la TEM:

$$M = C(1 + \mathrm{TEM})^{12}$$

Asumiendo un tiempo de 12 meses (un año), hallamos el monto usando la TEA:

$$M = C(1 + \mathrm{TEA})^1$$

(Donde el "1" en el exponente indica un año)

Para que las tasas sean equivalentes, el monto debe ser el mismo en ambos casos, por ello igualamos ambas expresiones:

$$\mathrm{C}(1 + \mathrm{TEM})^{12} = \mathrm{C}(1 + \mathrm{TEA})^1$$

Luego de dividir ambos miembros entre "*C*":

$$(1 + \mathrm{TEM})^{12} = (1 + \mathrm{TEA})$$

Aplicando raíz de índice 12 en ambos miembros:

$$\sqrt[12]{(1 + \mathrm{TEM})^{12}} = \sqrt[12]{1 + \mathrm{TEA}}$$

Simplificando el primer miembro:

$$1 + \mathrm{TEM} = \sqrt[12]{1 + \mathrm{TEA}}$$

Despejando la TEM:

$$\mathrm{TEM} = \sqrt[12]{1 + \mathrm{TEA}} - 1$$

d) *¿Qué tasa de interés efectiva mensual (TEM) es equivalente a la tasa de interés efectiva anual (TEA) del 60%?*

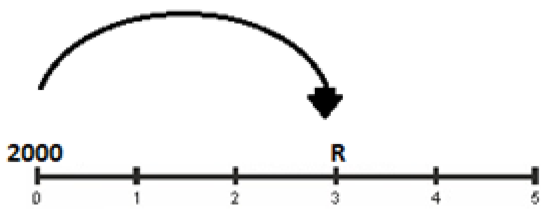
Reemplazando la TEA del 60% en la fórmula hallada en la pregunta anterior:

$$\mathrm{TEM} = \sqrt[12]{1 + 0{,}60} - 1 = 0{,}039944$$

$$\mathrm{TEM} = 3{,}9944\%$$

CAPITALIZACIÓN Y ACTUALIZACIÓN - CASO: PAGO DIFERIDO

a)



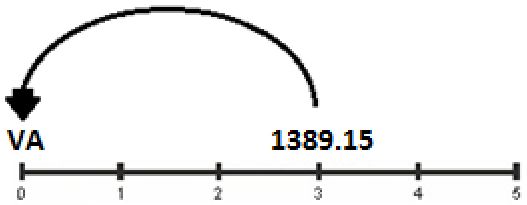
Utilizando la fórmula de capitalización:

$$\mathrm{VF} = \mathrm{VA}(1 + i)^n$$

Reemplazando los datos:

$$R = \text{VF} = 2\,000(1 + 0{,}05)^3 = 2\,315{,}25 \text{ soles}$$

b)



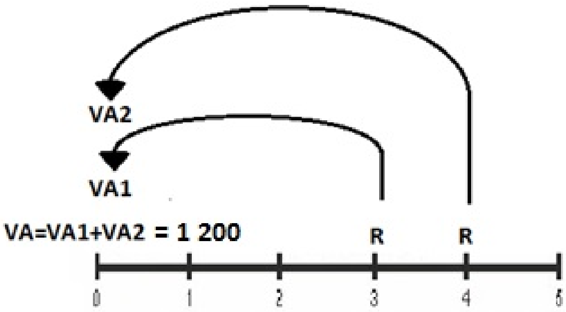
Utilizando la fórmula de actualización:

$$\text{VA} = \frac{\text{VF}}{(1 + i)^n}$$

Reemplazando los datos:

$$\text{VA} = \frac{1\,389{,}15}{(1 + 0{,}05)^3} = 1\,200 \text{ soles}$$

c) Utilizamos las respuesta de la pregunta anterior, es decir el valor actual es 1 200 soles:



Actualizando la primera cuota "*R*":

$$\text{VA1} = \frac{R}{(1 + 0{,}05)^3}$$

Actualizando la segunda cuota "*R*":

$$\text{VA2} = \frac{R}{(1 + 0{,}05)^4}$$

Sumando los dos valores actuales anteriores:

$$\text{VA} = \text{VA1} + \text{VA2}$$

Reemplazando los valores actuales de las cuotas e igualando la suma a 1 200 que representa el precio al contado de la cocina:

$$1200 = \frac{R}{(1+0{,}05)^3} + \frac{R}{(1+0{,}05)^4}$$

Factorizando "R":

$$1200 = R\left[\frac{1}{(1+0{,}05)^3} + \frac{1}{(1+0{,}05)^4}\right]$$

Operando la suma dentro de los corchetes:

$$1200 = R(1{,}68654)$$

Despejando "R":

$$\frac{1200}{1{,}68654} = R$$

Operando el cociente:

$$R = 711{,}52 \text{ soles}$$

ANEXO 13

Soluciones de una pareja a los ejercicios de la sesión de clase 3 - Interés compuesto primera parte

Escuela de Posgrado- PUCP
Maestría en Enseñanza de las Matemáticas
Mención en Educación Secundaria

Números, Relaciones y Funciones
MAT845
2014-2

INTERÉS COMPUESTO
(Continuación)

Indicaciones para la PARTE A: Los profesores deben seguir las siguientes instrucciones:

- Formar grupos de tres.
- Responder las preguntas propuestas en las hojas que se les proporcionan.
- Presentar los resultados en una breve exposición.

Nombres y apellidos	ID
	08
	15

PARTE A: TEORÍA Y CASO

TASAS EFECTIVAS EQUIVALENTES

En matemática financiera, la tasa de interés compuesta se llama "tasa efectiva"; es decir, a la tasa de interés compuesto mensual se le llama tasa efectiva mensual (TEM). Para el caso de la tasa efectiva anual le corresponde las siglas TEA.
En las instituciones financieras se usan con mayor frecuencia las tasas efectivas mensuales y anuales (TEM y TEA).

Veamos cómo obtener tasas efectivas equivalentes en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:

Si la tasa efectiva mensual es del 5%, ¿cuál es la tasa efectiva bimestral (TEB) equivalente?

Solución:

Asumiendo un tiempo de 2 meses, hallamos el monto usando la TEM:
$$M = C(1 + TEM)^2$$
(Donde el "2" en el exponente indica 2 meses)

Asumiendo un tiempo de 2 meses, hallamos el monto usando la TEB:
$$M = C(1 + TEB)^1$$
(Donde el "1" en el exponente indica un bimestre)

Para que las tasas sean equivalentes, el monto debe ser el mismo en ambos casos, por ello igualamos ambas expresiones:

$$C(1 + TEM)^2 = C(1 + TEB)^1$$
$$(1 + TEM)^2 = (1 + TEB)$$
$$(1 + TEM)^2 - 1 = TEB$$

Profesores: Norma Rubio- Freddy Chuquisana

Para una TEM=5%

$$\text{TEB} = (1+0{,}05)^2 - 1 = 0.1025$$

$$\text{TEB} = 10{,}25\%$$

Ejemplo 2:

¿Cuál es la tasa efectiva mensual (TEM) equivalente a una tasa efectiva semestral (TES) del 36%?

Asumiendo un tiempo de 6 meses, hallamos el monto usando la TEM:

$$\text{M} = \text{C}(1+\text{TEM})^6$$

(Donde el "6" en el exponente indica 6 meses)

Asumiendo un tiempo de 6 meses, hallamos el monto usando la TES:

$$\text{M} = \text{C}(1+\text{TES})^1$$

(Donde el "1" en el exponente indica un semestre)

Para que las tasas sean equivalentes, el monto debe ser el mismo en ambos casos, por ello igualamos ambas expresiones:

$$\text{C}(1+\text{TEM})^6 = \text{C}(1+\text{TES})^1$$
$$(1+\text{TEM})^6 = (1+\text{TES})$$
$$1+\text{TEM} = \sqrt[6]{1+\text{TES}}$$
$$\text{TEM} = \sqrt[6]{1+\text{TES}} - 1$$

Para una TES=36%

$$\text{TEM} = \sqrt[6]{1+0{,}36} - 1 = 0{,}052583$$

$$\text{TEM} = 5{,}2583\%$$

a) Defina una fórmula que permita hallar una TEA a partir de la TEM.

$$\left.\begin{aligned} M &= C(1+TEM)^{12} \\ M &= C(1+TEA)^{1} \end{aligned}\right\} \quad C(1+TEM)^{12} = C(1+TEA)^1$$

$$(1+TEM)^{12} = 1+TEA$$

$$\boxed{TEA = (1+TEM)^{12} - 1}$$

b) ¿Qué tasa de interés efectiva anual (TEA) es equivalente a la tasa de interés efectiva mensual (TEM) del 5%?

$$TEA = (1+TEM)^{12} - 1$$
$$TEA = (1+0{,}05)^{12} - 1$$
$$TEA = (1{,}05)^{12} - 1$$
$$TEA = 1{,}795856 - 1$$
$$TEA = 0{,}79585$$
$$\underline{\underline{TEA = 79\%}}$$

c) Defina una fórmula que permita hallar una TEM a partir de la TEA.

$$\left.\begin{array}{l} M = C(1+TEM)^{12} \\ M = C(1+TEA)^{1} \end{array}\right\}$$

$$\cancel{C}(1+TEM)^{12} = \cancel{C}(1+TEA)$$
$$(1+TEM)^{12} = 1+TEA$$
$$1+TEM = \sqrt[12]{1+TEA}$$
$$\boxed{TEM = \sqrt[12]{1+TEA} - 1}$$

d) ¿Qué tasa de interés efectiva mensual (TEM) es equivalente a la tasa de interés efectiva anual (TEA) del 60%?

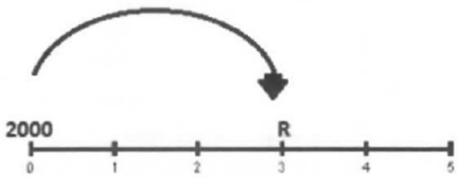
$$TEM = \sqrt[12]{1+0{,}6} - 1$$
$$TEM = \sqrt[12]{1{,}6} - 1$$
$$TEM = 1{,}0399 - 1$$
$$TEM = 0{,}0399$$
$$TEM = 0{,}04$$
$$TEM = 4\%$$

CASO: PAGO DIFERIDO

Una tienda vende electrodomésticos al crédito cobrando una TEM del 5%. Dicha tienda ofrece actualmente la siguiente promoción:

"Compra hoy y empieza a pagar dentro de 3 meses".

a) Arturo compra una refrigeradora, cuyo precio es de 2 000 soles. Si Arturo se acoge a dicha oferta y hace el pago en una sola cuota "R". Halle el valor dicha cuota.



$VF = VA(1+i)^n$

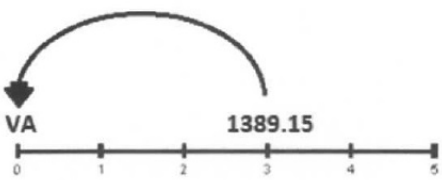
$VF = 2000(1+0{,}05)^3$

$VF = 2000(1{,}05)^3$

$VF = 2000(1{,}157625)$

$\boxed{VF = 2315{,}25}$

b) Arturo compra una cocina. Si Arturo se acoge a dicha oferta y hace el pago en una sola cuota R = 1 389,15 soles. Halle el precio de dicha cocina, al momento de efectuar la compra.



$VA = \dfrac{VF}{(1+i)^n}$

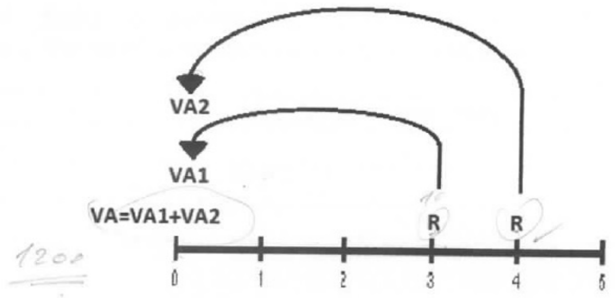
$VA = \dfrac{1389{,}15}{(1+0{,}05)^3}$

$VA = \dfrac{1389{,}15}{(1.05)^3}$

$VA = \dfrac{1389{,}15}{1{,}157625}$

$\boxed{VA = 1200}$

c) Con referencia a la pregunta anterior, una vez conocido el precio de la cocina en momento de la compra, si Arturo se compromete a pagar en dos cuotas mensuales iguales a "R", iniciando el pago luego de tres meses. Halle el valor de la cuota.
Sugerencia: Use dos veces la fórmula de actualización para encontrar los VA1 y VA2. Luego sume ambas expresiones e iguale con el precio de la cocina en el momento de la compra.



$$VF = VA(1+i)^n$$

$$VA = \frac{VF}{(1+i)^n}$$

$$VA1 = \frac{R}{(1+0,05)^3} \qquad VA2 = \frac{R}{(1+0,05)^4}$$

$$VA1 = \frac{R}{(1.05)^3} \qquad VA2 = \frac{R}{(1.05)^4}$$

$$VA1 = \frac{R}{1,157625} \qquad VA2 = \frac{R}{1.21550625}$$

Como

$$VA1 + VA2 = 1200$$

$$\frac{R}{(1,05)^3} + \frac{R}{(1.05)^4} = 1200$$

$$\frac{1.05R + R}{(1.05)^4} = 1200$$

$$R(1,05+1) = 1200(1.05)^4$$

$$2,05R = 1200(1.21550625)$$

$$R = \frac{1200(1,21550625)}{2.05}$$

$$R = \frac{1458,6075}{2,05}$$

$$R = 711,51$$

ANEXO 14

Transcripción del episodio de la sesión de clase 3 - Interés compuesto segunda parte

Sesión de clase de interés compuesto - parte 2.

Miércoles 17 de septiembre del 2014.

Inicio de la sesión:	10:20 am.	Final de la sesión:	11:59 am
Inicio del discurso:	11:42 am.	Final del discurso:	11:55 am

Participantes:

P : Profesor Freddy – investigador, observador participante.

E_i : Estudiante que interviene en *i*-ésimo orden. (Estudiantes)

A : Algunos. Dos o más estudiantes a la vez.

Representación escrita del discurso de la clase

1 P: Bueno, ahora compartamos nuestras respuestas. ¿Llegaron a la fórmula que permite hallar la tasa efectiva anual TEA? [a partir de la tasa efectiva mensual TEM], ¿cuál es la fórmula que encontraron? TEA a qué es igual…

2 E_1: Uno más TEM todo elevado a la doce, menos uno.

3 E_2: A la duodécima potencia. [El profesor escribe en la pizarra]

$$TEA = (1 + TEM)^{12} - 1$$

4 P: Luego tenemos un ejemplo, ¿qué respuesta obtuvieron en el ejemplo?

5 E_1:

$$\mathrm{TEA} = 79{,}5856\%$$

6 P: Mientras más decimales mejor.
Y en la siguiente, ¿cómo sería la respuesta de la pregunta c)?, que nos pide lo contrario [del caso anterior]. Si tenemos una TEA ¿cómo encontramos la TEM?, ¿cuál sería la respuesta?

7 E_2: Raíz duodécima de 1+TEA.

8 E_1: Menos uno. [El profesor escribe en la pizarra]

$$\mathrm{TEM} = \sqrt[12]{1 + \mathrm{TEA}} - 1$$

9 P: ¿Y en nuestro ejemplo? [d)]

10 E_1: 3,99 [%]

11 E_3: 4 [%]

12 P: Yo pondría al menos unos cuatro decimales. [En la pizarra]

$$\mathrm{TEM} = 3{,}9944\%$$

Sí cambia la respuesta cuando hacemos mucho redondeo [en menos cifras]. Como les comentaba en el texto [del material entregado] estas son las tasas que aparecen en los bancos. Cuando uno va a pedir un préstamo aparece la TEA o la TEM. O en los estados de cuenta como decía uno de sus compañeros en la clase anterior, aparecen las tasas presentadas de esta forma. Por eso es bueno que sepamos cómo hallar tasas equivalentes, de TEA a TEM y viceversa. Esas son las más importantes. En un curso de matemática financiera más extenso ven tasas que no son tan útiles en la vida cotidiana, como son tasa bimestral, tasa semestral, etc. También quiero que se dan cuenta que la relación entre las tasas en interés compuesto no es la misma que si hubiera sido el caso para interés simple. Por ejemplo una TEA del 60% es equivalente a una TEM del 3.99% y no es el resultado de dividirlo entre 12 como hubiera sido el caso con las tasas usadas en interés simple.

Noten que no les he hablado de capitalización mensual, capitalización diaria, porque yo quiero presentarles estos temas como si lo estaríamos dirigiendo a alumnos de educación secundaria. Mientras menos los compliquemos y sean más aplicativos para su realidad, mejor. En ningún momento les he hablado de capitalización, pero si queremos hablar un poco de ello quiero que noten lo siguiente: ¿el banco va a esperar todo un mes para capitalizar los intereses de las deudas?, ¿recién después de un mes se van a capitalizar los intereses?

13 E_2: Desde el primer día.

14 P: Cierto. En realidad detrás de estas tasas efectivas mensuales hay una tasa efectiva diaria. El banco capitaliza diariamente. [Lo normal es que los bancos capitalicen diariamente los intereses correspondientes a préstamos y mensualmente los intereses correspondientes a ahorros].

15 E_3: Hay opciones en los bancos donde empiezas a pagar desde el tercer mes, por ejemplo en el Banco de la Nación. No pagas el capital pero ya estás pagando los intereses [refiriéndose a los tres primeros meses].

16 P: Eso también vamos a ver, el caso de los pagos diferidos.

Paro quería comentarles que yo no les hablo de capitalizaciones, porque una tasa efectiva mensual ya tiene dentro de sí las capitalizaciones diarias. ¿Existiría una tasa efectiva diaria?

17 A: Sí.

18 P: ¿Podrían hallarla también?

19 A: Sí.

20 P: ¿Cómo? Como hemos hallado los casos anteriores. ¿Cada cuánto tiempo capitaliza un banco? Cada día [Para el caso de los préstamos, pero para ahorros lo hace cada mes]. También podemos hallar la tasa efectiva diaria TED, pero las que más se usan son las TEM y la TEA. Teniendo presente esta observación, podemos hacer cualquier problema para el caso de meses y de años. También me han preguntado ¿cuántos días se consideran en el año? En matemática financiera se considera años de 360 días y meses de 30 días.

Por ahí les dejé un ejemplo que hablaba de 120 días [ejercicios propuestos de la clase anterior]. ¿Cuántos años hay en 120 días?

21 A: Meses

22 P: ¿En meses, cuánto sería?

23 A: 4 meses

24 P: ¿En años?

25 A: Un tercio

26 P: Vean en que periodo esta la tasa, para ver cual nos conviene usar. Si la tasa esta en años, nos conviene el tiempo en años. Porque lo más complicado es el cambio de tasas. La tasa y el número de periodos deben estar expresados en las mismas unidades de tiempo.

27 E_2: Profesor, ¿cómo se considera el tiempo en cada día? Hasta que termina la tarde me parece. En los libros antiguos decía que hasta que se oculte el sol [haciendo referencia el momento en que se acaba un día y se considera el siguiente].

28 P: No sé, que yo sepa es hasta las 12 de la noche. Al menos cuando tengo que pagar una deuda yo creo que tengo tiempo hasta las 12pm. En todo caso podemos averiguar.

29 E_2: Claro, porque en algunos libros antiguos dice que se contabiliza el pago de letras hasta que el día termine, hasta que caiga el sol.

30 P: Bueno, que tal si averiguamos todos, esa es la idea de estas clases [buscar las respuestas a nuestras dudas que puedan aparecer].

31 E_2: Yo quiero comentar sobre un préstamo en una entidad bancaria: si uno quiere adelantar un pago, la letra que nos cobran es la última, no la que sigue. ¿Eso está bien?

32 P: Lo que pasa es que si consideramos esa letra en el valor actual, estaría bien. Si la actualizamos. ¿Por qué la última?, porque la idea es que se cancele el pago lo más pronto posible. No estaría mal, si se considera esta fórmula de actualización [vista en esta clase].

33 E_5: Una consulta, en la fórmula de valor actual y valor final ¿es la misma de monto y capital? Han cambiado el monto por el valor final y el capital por el valor actual.

34 P: Sí, justo la idea ahí es ir familiarizándonos con esos nombres, para que luego usemos Excel. De acá dos clases vamos a usar Excel y Excel usa esa nomenclatura: valor actual (VA) y valor final (VF). Para ir acostumbrándonos a esos nombres es que puse esa notación.

A ver, por favor. Y las respuestas del caso “Pago Diferido”. ¿Cuál es la respuesta de la parte a)?

35 A: 2 315,25 soles

36 P: ¿Alguien tuvo algún problema acá? En la b) ¿Qué tal? [¿Cuál fue la respuesta?]

37 E_2: 1 200 soles

38 P: Yo creo que todos obtuvieron lo mismo. La c) era más complicada, pero veo que ayudándoles un poco o indicándoles con mayor precisión [la intención de la pregunta] pudieron llegar a la respuesta.

39 E_1: 711,52

40 P: Aquí vi algunas pequeñas diferencias en sus respuestas por cuestión de decimales. ¿Alguien obtuvo una respuesta distinta? Bueno, esta pregunta tenía como intención que nos vayamos acostumbrando al tema “anualidades”. Estos pagos periódicos de la misma cantidad se le llaman anualidad. Un poco para introducir. Una vez que actualizan todos los “R” lo igualan con el capital inicial o con el valor actual.

41 E_4: ¿Qué pasa si yo quiero sacar para 20 cuotas?

42 P: Ya estaríamos en la clase siguiente. Pero muy bien.

43 E_4: Para eso necesitaríamos una fórmula.

44 P: Eso tiene mucha aplicación. Esa es la fórmula que vamos a encontrar la siguiente clase.

45 E_5: Pero hay otro tipo de pagos en que las cuotas son cada vez menores.

46 P: Eso también lo vamos a ver en el tema cronograma de pagos. Lo típico hoy en día es el caso de las cuotas iguales.

ANEXO 15

Solución de un estudiante a la Parte I y la Parte II de la Tarea 2

Indicaciones:

- La tarea se realizará de forma individual y se entregará en un archivo de Word. Dicho archivo se debe grabar en documentos del curso, carpeta Tarea 2, con el nombre del archivo ID_tarea2, hasta las 11:59pm del domingo 12 de octubre.
- En cada una de las preguntas de las partes I, II, III, IV y V, marque, resaltando el texto o letra usando , y/o complete su respuesta, según corresponda.
- En la tabla siguiente, escriba sus nombres, apellidos y su ID.

Nombres y apellidos	ID
	16

PARTE I.

Considere que usted debe desarrollar el tema de interés compuesto con sus estudiantes de secundaria.

1) Señale si empezaría con:

a.	La fórmula de interés compuesto.
b.**X**	Con una situación en la que emerja la fórmula de interés compuesto.
c.	De otro modo diferente a las respuestas a y b.
d.	No enseñaría este tema, aunque esté en el DCN.

2) Explique su sesión de clase, dependiendo de la respuesta dada en la pregunta 1; es decir,

si respondió “a”, dada la fórmula, describa su sesión de clase completa;
si respondió “b”, ¿cuál es la situación propuesta y de qué manera emerge la fórmula?;
si respondió “c”, ¿en qué consiste esa manera diferente de presentación o gestión de la clase?;
si respondió “d”, ¿por qué no enseñaría este tema?

(Máximo 2 páginas para responder la pregunta 2).

Respuesta a la pregunta 2

SITUACIÓN PROPUESTA

Carlos trabajador del Sector público de la Provincia de San Ignacio - Cajamarca, queriendo comprar un solar para construir su casa, entra al Programa “Préstamo Multired de descuento por planilla” del Banco de la Nación y solicita un crédito por S/. 12 000, él asume la propuesta del préstamo clásico para pagarlo en 48 meses, con una tasa de interés compuesto anual del 16%.

Responder las siguientes preguntas

Supongamos que Carlos pagaría el préstamo dentro de un año.

Partimos del concepto del interés compuesto, **donde los intereses que se obtienen al final de cada periodo de inversión no se retiran sino que reinvierten a añaden al capital inicial**, es decir se capitalizan, produciendo un capital final.

C= 12 000   i = 16% = 0.16   n = 4 años

Si Carlos pagaría el préstamo **dentro de un año**

I = 12 000 x 0.16 = 1920
C_1 = C + I
C_1 = 12 000 + 1920 = 13 920

Supongamos que Carlos pagaría el préstamo **dentro de dos años.**

I_2 = 13 920 x 0,16= 2 272, 2
$C_2 = 13\,920 + 2\,272,2 = \ 16\,147,2$

Supongamos que Carlos pagaría el préstamo dentro de tres años.
$I_3 = 16\,147{,}2x0{,}16 = 2583{,}552$
$C_3 = 16\,147,2 + 2\,583{,}552 = 18\,730,752$

Supongamos que Carlos pagaría el préstamo dentro de cuatro años.
$I_4 = 18730,752\ x0{,}16 = 2996,92032$
$C_4 = 18730,752 + 2\,583,552 = 21\,727,67232$ ***Respuesta***

Generaliza una fórmula para resolver esta clase de situaciones problemáticas con el interés compuesto.
Relacionamos todos los capitales acumulados de año por año

Años	***Primer año***	***Segundo año***	***Tercer año***	***Cuarto año***
Capital acumulado	13 920	16 147,2	18 730, 752	21 727, 67232
Razón geométrica	1,16		1, 16	

Se deduce que los capitales acumulados año por año se encuentran en una progresión geométrica de razón igual a 1,16

Los capitales se encuentran en progresión geométrica de razón = 1, 16

T_1 ; T_2 ; T_3 ; T_4
13920 ; 16 147, 2 ; 18730, 752 ; 21 727, 67232

Inductivamente podemos generalizar la fórmula:

Primer año:

I = C. i

C_1= C+ I

C_1= C+ Ci

$\boxed{C_1 = C(1+i)}$

Segundo año:

$I_2 = C(1+i)i$

$C_2 = C(1+i) + C(1+i)i$

$C_2 = C(1+i)(1+i)$

$\boxed{C_2 = C(1+i)^2}$

Tercer año:

$I_3 = C(1+i)^2 i$

$C_3 = C(1+i)^2 + C(1+i)^2 i$

$C_3 = C(1+i)^2(1+i)$

$\boxed{C_3 = C(1+i)^3}$

Con los capitales acumulados, encontramos un patrón y formamos la progresión geométrica de razón igual a $(1+i)$

$C\,(1+i)^1\,;\ C(1+i)^2\,;\ C(1+i)^3;\ C_3 = C(1+i)^3; \dots\dots\dots.; \dots\dots\dots.; \dots\dots\dots$

El interés compuesto para un capital inicial (C), y capital final acumulado (C_f), con una tasa (i), durante un periodo (n), se generaliza en la siguiente fórmula:

$$\boxed{C_f = C(1+i)^n}$$

PARTE II.

La forma en que se impartieron las clases en este curso, ¿ha influenciado en sus respuestas de la parte I?

a.**X** Sí b. No

Si su respuesta es afirmativa, indique cómo lo hubiera realizado antes de participar en estas clases.
Hubiera desarrollado la clase, mostrando a los estudiantes la fórmula de interés compuesto, enseguida aplicando la fórmula en la solución de ejemplos sencillos, para después resolver problemas de interés compuesto del contexto de los estudiantes.