

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ**  
**FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA**



PONTIFICIA  
**UNIVERSIDAD  
CATÓLICA**  
DEL PERÚ

**ESTUDIO DEL EFECTO DEL FLUIDO SOBRE LAS FRECUENCIAS  
NATURALES Y MODOS DE VIBRACIÓN DE UN AGITADOR 4PBT45  
MEDIANTE SIMULACIÓN NUMÉRICA**

Tesis para optar el Título de Ingeniero Mecánico, que presenta el bachiller:

**Jean Pierre Ackermann Zambrano**

**ASESOR: Dr. Ing. Quino Martín Valverde Guzmán**

Lima, Diciembre del 2014

## RESUMEN

En el presente trabajo, se estudian los efectos de diferentes fenómenos físicos sobre las frecuencias naturales de un agitador 4PBT45 (modificado en estudios preliminares para obtener un bajo consumo de potencia y alto grado de mezcla) utilizando la herramienta de simulación computacional ANSYS Mechanical, a partir de escenarios simplificados en diferentes condiciones de operación. El proyecto comienza con el análisis de los álabes aislados, para luego estudiar el comportamiento del impulsor por separado y verificar qué sucede con los modos de vibración. Se realiza la simplificación del impulsor a un rotor axisimétrico, con la misma masa y momento de inercia polar, para comparar los efectos en contraste con el agitador original, a través de escenarios estáticos y dinámicos en vacío de cada uno de los modelos. Además, se realiza el modelamiento numérico del agitador estático sumergido y se prueban diferentes propiedades de fluidos. Prácticamente, las variables que se monitorean son: cómo gobiernan las frecuencias locales de los álabes sobre el impulsor, en base al factor de participación de masa; cuáles modos de vibración se ven afectados por la rotación en vacío y cuánto varían las frecuencias debido a dicho fenómeno y por qué; cuán factible es reemplazar el impulsor por un disco y en qué casos da buenos resultados; y cuánto repercute el efecto del fluido envolvente sobre las frecuencias naturales en el sistema estático y cómo se comportan para diferentes tipos de fluidos. En general, se determina que las frecuencias naturales varían en diferentes cantidades dependiendo del fenómeno estudiado. Algunas frecuencias tienden a disminuir o a aumentar en diferentes grados conforme se incrementan las revoluciones, mientras que otras se mantienen constantes. También, se determina que casi todas las frecuencias disminuyen entre 0.5% y 20% por el efecto del fluido dependiendo principalmente de la densidad del mismo y del modo de vibrar. Por otro lado, se encuentra una expresión analítica que permite calcular la frecuencia natural bajo el efecto de un fluido B, conociendo la frecuencia dentro de un fluido A, a partir de la relación de sus densidades, bajo ciertas hipótesis y condiciones. Además, se consigue una variación entre 1% y 6% entre las frecuencias obtenidas mediante simulación numérica y las calculadas analíticamente, reduciendo el sistema a un grado de libertad, para los modos más importantes. Por último, se conocen los alcances de la herramienta computacional en este tipo de simulaciones y sus limitaciones para desarrollar escenarios más complejos.

## INDICE

<b>LISTADO DE FIGURAS</b>	<b>7</b>
<b>LISTADO DE TABLAS</b>	<b>9</b>
<b>LISTADO DE ECUACIONES</b>	<b>10</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>12</b>
Objetivos	<b>13</b>
Alcances y limitaciones de la tesis	<b>14</b>
<b>1. DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO</b>	<b>15</b>
1.1. Antecedentes y consideraciones	<b>17</b>
1.2. Motivación por el tema	<b>18</b>
1.3. Potencial del análisis modal para agitadores	<b>19</b>
1.4. Requerimientos previos	<b>21</b>
<b>2. CONCEPTOS GENERALES</b>	<b>22</b>
2.1. Vibraciones mecánicas	<b>22</b>
2.1.1 Definición	<b>22</b>
2.1.2 Clasificación	<b>23</b>
2.1.2.1 Vibración libre	<b>23</b>
2.1.2.2 Vibración libre amortiguada	<b>24</b>
2.1.3 Frecuencia natural	<b>25</b>
2.1.4 Resonancia	<b>25</b>
2.1.5 Vibraciones en equipos rotativos	<b>25</b>
2.1.5.1 Vibraciones transversales	<b>26</b>
2.1.5.2 Vibraciones torsionales	<b>27</b>
2.1.5.3 Vibraciones longitudinales	<b>28</b>
2.2. Diagrama de Campbell	<b>28</b>
2.3. Introducción al análisis modal	<b>29</b>
2.4. Efecto de adherencia de masa en un cuerpo sumergido	<b>31</b>
<b>3. CONCEPCIÓN DEL MODELO</b>	<b>33</b>
3.1. Simplificación del rotor	<b>33</b>
3.2. Efecto de la gravedad	<b>35</b>
3.3. Independencia de malla	<b>36</b>
3.4. Mallado	<b>39</b>
3.4.1. Malla del agitador	<b>39</b>
3.4.2. Malla del fluido	<b>40</b>
<b>4. SIMULACIÓN y RESULTADOS</b>	<b>43</b>
4.1. Los álabes	<b>43</b>
4.2. El impulsor	<b>45</b>
4.3. El eje-rotor simplificado	<b>49</b>

4.4.	Obtención del Diagrama de Campbell	53
4.5.	El eje-impulsor	58
4.5.1.	Simulación estática	58
4.5.2.	Simulación con velocidad rotacional	62
4.6.	Análisis sumergido en agua	66
4.6.1	Eje-rotor simplificado	69
4.6.2	Eje-impulsor	72
4.6.3	Eje-impulsor con velocidad rotacional	74
4.7.	Efecto y comparación con otros fluidos	74
4.8.	Cálculo analítico de las principales frecuencias naturales	81
4.8.1.	Modo de flexión	82
4.8.2.	Modo de torsión	84
4.8.3.	Modo axial	86
4.8.4.	Modo de flexión al medio del eje	88
	<b>PRINCIPALES APORTES</b>	<b>90</b>
	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>91</b>
	<b>RECOMENDACIONES Y TRABAJOS FUTUROS</b>	<b>95</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>96</b>

## LISTADO DE FIGURAS

- Figura 1.** Geometría inicial del agitador y el fluido.
- Figura 2.** Esquema para el estudio de vibraciones.
- Figura 3.** Eje con excentricidad.
- Figura 4.** Eje con desalineamiento angular.
- Figura 5.** Eje con traslación circular.
- Figura 6.** Deformación torsional en eje uniforme.
- Figura 7.** Diagrama de Campbell.
- Figura 8.** Frecuencias naturales con sus respectivas deformaciones modales.
- Figura 9.** Sólido sumergido y la superficie de interacción.
- Figura 10.** Equivalencia entre impulsor y simplificación.
- Figura 11.** Eje –rotor simplificado con el efecto de la gravedad.
- Figura 12.** Modelos acoplados a través de la geometría y la solución.
- Figura 13.** Malla 1 con 701 elementos.
- Figura 14.** Malla 2 con 12732 elementos.
- Figura 15.** Malla 3 con 145786 elementos.
- Figura 16.** Mallas definidas para el impulsor y rotor simplificado.
- Figura 17.** Sección transversal del mallado del fluido para la simplificación.
- Figura 18.** Sección transversal del mallado del fluido para el impulsor.
- Figura 19.** Comparación entre mallas de ambos modelos.
- Figura 20.** Elemento FLUID220 con la distribución de nodos.
- Figura 21.** Elemento FLUID221 con la distribución de nodos.
- Figura 22.** Álabes separados de todo el conjunto.
- Figura 23.** Impulsor separado del eje.
- Figura 24.** Geometría del agitador simplificado a un eje - disco.

**Figura 25.** Inserción de la velocidad rotacional en el análisis modal..

**Figura 26.** Tabla para ingresar los valores de las velocidades rotacionales.

**Figura 27.** Cambios en los ajustes del análisis.

**Figura 28.** Diagrama de Campbell Del eje-rotor simplificado.

**Figura 29.** Diagrama de Campbell para las primeras frecuencias.

**Figura 30.** Modo torsional empotrado y con velocidad de rotación.

**Figura 31.** Pasos para la rotación con el sistema de referencia rotacional.

**Figura 32.** Se deben insertar comandos tanto en el estructural como el modal.

**Figura 33.** Es necesario insertar comandos APDL tanto la geometría como en el análisis modal.

**Figura 34.** Simplificación y fluido (negativo del tanque).

**Figura 35.** Eje-impulsor con el fluido.

**Figura 36.** Esquema para cálculo analítico de las frecuencias.

**Figura 37.** Reducción del agitador flexionado a un grado de libertad.

**Figura 38.** Comparación entre la simplificación y el agitador a flexión.

**Figura 39.** Reducción del agitador a torsión a un grado de libertad.

**Figura 40.** Comparación en el modo torsional.

**Figura 41.** Reducción a un grado de libertad de la deformación longitudinal del agitador.

**Figura 42.** Detalle de la deformación del disco para el modo axial.

**Figura 43.** Reducción a un grado de libertad de la flexión al medio del eje.

**Figura 44.** Comparación entre la deformación de la simplificación y el eje-impulsor.

## LISTADO DE TABLAS

- Tabla 1.** Comparación experimental entre frecuencias naturales sumergidas y en vacío con elementos finitos.
- Tabla 2.** Comparación entre las frecuencias sin gravedad y con gravedad.
- Tabla 3.** Variación de las frecuencias con respecto a diferentes mallados.
- Tabla 4.** Error porcentual entre las diferentes mallas planteadas.
- Tabla 5.** Estadísticas generales de la malla a utilizar en las simulaciones.
- Tabla 6.** Frecuencias naturales y sus respectivos modos de un álabe aislado.
- Tabla 7.** Frecuencias naturales y sus respectivos modos de vibración del impulsor.
- Tabla 8.** Frecuencias naturales del eje-rotor simplificado y sus modos.
- Tabla 9.** Variación de las frecuencias naturales con respecto a la velocidad de rotación.
- Tabla 10.** Frecuencias y modos del eje-impulsor.
- Tabla 11.** Frecuencias del eje-impulsor con velocidad rotacional para dos sistemas de referencia distintos.
- Tabla 12.** Comparación de frecuencias naturales en vacío y sumergidas en agua del eje-rotor simplificado.
- Tabla 13.** Comparación de frecuencias naturales en vacío y sumergidas en agua del eje-impulsor.
- Tabla 14.** Propiedades de los diferentes fluidos referenciales.
- Tabla 15.** Frecuencias naturales con todos los fluidos estudiados.
- Tabla 16.** Variación en la frecuencia natural con respecto al vacío para cada fluido.
- Tabla 17.** Variación porcentual de las frecuencias naturales con respecto al vacío.
- Tabla 18.** Valores obtenidos a través de la aproximación para la razón de densidades

## LISTADO DE ECUACIONES

- Ec. 2.1** Ecuación general de movimiento diferencial.
- Ec. 2.2** Ecuación de movimiento para vibración libre.
- Ec. 2.3** Solución de la ecuación diferencial para vibración libre.
- Ec. 2.4** Frecuencia natural circular.
- Ec. 2.5** Ecuación general de movimiento para vibración libre amortiguada.
- Ec. 2.6** Solución de la ecuación diferencial para vibración libre amortiguada (Sub-amortiguamiento).
- Ec. 2.7** Frecuencia amortiguada.
- Ec. 2.8** Solución de la ecuación diferencial para vibración libre amortiguada (Amortiguamiento crítico).
- Ec. 2.9** Solución de la ecuación diferencial para vibración libre amortiguada (Sobre-amortiguado)
- Ec. 2.10** Frecuencia natural torsional de un eje con dos masas a los extremos.
- Ec. 2.11** Ecuación general de movimiento matricial.
- Ec. 2.12** Ecuación de movimiento matricial para vibración libre.
- Ec. 2.13** Vector desplazamiento.
- Ec. 2.14** Vector velocidad.
- Ec. 2.15** Vector aceleración.
- Ec. 2.16** Ecuación de movimiento matricial en función de la frecuencia circular.
- Ec. 2.17** Solución de la ecuación matricial para vibración libre.
- Ec. 2.18** Ecuación general matricial de movimiento con el efecto del fluido.
- Ec. 2.19** Masa de aporte generada por la presión hidrostática.
- Ec. 3.1** Igualdad de momentos de inercia angular entre impulsor y simplificación.
- Ec. 3.2** Igualdad de masas entre impulsor y simplificación.
- Ec. 4.1** Frecuencia natural.
- Ec. 4.2** Frecuencia natural con aporte de masa virtual del fluido.

- Ec. 4.3** Fracción de la frecuencia natural en vacío con la frecuencia natural en el fluido.
- Ec. 4.4** Aporte de masa virtual en función de la frecuencia natural en vacío y en el fluido 1.
- Ec. 4.5** Aporte de masa virtual en función de la frecuencia natural en vacío y en el fluido 2.
- Ec. 4.6** Razón de aportes de masa de los fluidos 1 y 2.
- Ec. 4.7** Razón de aportes de masa entre los fluidos en función de las densidades y volúmenes.
- Ec. 4.8** Razón de densidades en función de las frecuencias naturales en vacío y en los fluidos 1 y 2.
- Ec. 4.9** Rigidez equivalente para la flexión de un agitador empotrado.
- Ec. 4.10** Momento de inercia de la sección transversal del eje.
- Ec. 4.11** Masa equivalente para la flexión de un agitador empotrado.
- Ec. 4.12** Frecuencia natural del sistema equivalente.
- Ec. 4.13** Rigidez torsional de un agitador empotrado.
- Ec. 4.14** Momento de inercia polar de la sección del eje.
- Ec. 4.15** Frecuencia natural del sistema torsional equivalente.
- Ec. 4.16** Rigidez equivalente para la deformación longitudinal de un agitador empotrado.
- Ec. 4.17** Masa equivalente para la deformación longitudinal de un agitador empotrado.
- Ec. 4.18** Masa equivalente para la flexión al medio del eje de un agitador empotrado.
- Ec. 4.19** Rigidez equivalente para la flexión al medio del eje de un agitador empotrado.

## INTRODUCCIÓN

En el entorno ingenieril, hay muchos fenómenos de diferentes características relacionados con la interacción de una estructura y un fluido que lo envuelve, más aun si la estructura está en movimiento. A través de los años y debido a este tipo de fenómenos, la tecnología y su avance permiten idealizar casos reales a través de softwares de simulación basados en modelos matemáticos que nos plantean una solución muy aproximada a la realidad. Hay muchas formas de afrontar asuntos vibracionales en cuanto a equipos de diferentes configuraciones, además de métodos de simplificación que facilitan los cálculos analíticos que pueden ser referenciales e incluso muy aproximados; sin embargo, hay situaciones que poseen casos muy particulares y con condiciones tan versátiles que es necesario este tipo de herramientas para, de alguna manera, describir lo más aproximado posible las condiciones reales de los elementos que se estén estudiando siempre y cuando haya un respaldo analítico de por medio. Cuando se quiere analizar la respuesta de vibración de un componente sumergido en algún tipo de fluido se realizan diferentes pruebas experimentales a través de tablas y coeficientes para determinar el comportamiento de este frente a dichas condiciones; por otro lado, si bien hay diferentes formas de aproximar y de considerar los efectos, no es posible disponer de un cálculo general que se pueda aplicar a este tipo de circunstancias.

En los últimos años, diversas técnicas numéricas se han desenvuelto considerablemente en diferentes ramas incluyendo la fluidodinámica y el análisis estructural, la primera desarrollada a través del método de volúmenes finitos mientras que el tema estructural a través del método de elementos finitos. Este último, cuenta con la disciplina computacional para realizar el estudio en cuestión de una manera efectiva, reduciendo de manera trascendente la construcción de prototipos y ensayos experimentales que permiten predecir el comportamiento de los componentes estructurales estudiados. Debido a esto, esta herramienta computacional (ANSYS) permite, en el presente proyecto, estudiar este tipo de fenómenos debido a la complejidad que abarca, gracias a su versatilidad y a la amplia gama de físicas que se pueden desarrollar y complementar.

En las operaciones de mezclado en la industria, el impulsor PBT (Pitch Blade Turbine) es uno de los más utilizados gracias a su diseño, el cual provee la combinación de los flujos axial y radial, generando altos niveles de corte y buenos grados de mezcla, además de su fácil limpieza. El agitador que es motivo de estudio (4PBT45) tiene un impulsor PBT de 4 paletas planas con un ángulo de inclinación de  $45^\circ$  con respecto a su plano horizontal; no obstante, cabe resaltar que el modelo a utilizar, a lo largo del proyecto, cuenta con unas modificaciones basadas en estudios preliminares bajo criterios de optimización de mezcla<sup>1</sup>.

## Objetivos

El presente proyecto tiene como objetivo principal encontrar, a través de la simulación, el comportamiento de las frecuencias naturales de un agitador PBT cuando es sumergido en un fluido determinado. Esto conlleva, al tratarse de un componente rotativo, a verificar el comportamiento de dichas frecuencias frente al efecto de rotación en vacío; verificar también hasta qué punto se puede simplificar el modelo para seguir obteniendo buenos resultados y qué sucede con los modos de vibración sus frecuencias en general.

Los objetivos específicos del presente trabajo son los siguientes:

- Determinar las frecuencias naturales en los álabes o paletas y determinar los modos de vibrar en estos componentes.
- Determinar las frecuencias naturales en el impulsor aislado y los modos de vibrar.
- Generar una simplificación del conjunto eje-rotor y determinar sus frecuencias naturales.
- Extraer el diagrama de Campbell de la simplificación para visualizar el comportamiento de las frecuencias naturales con respecto a la velocidad de rotación.
- Determinar las frecuencias naturales del conjunto eje-impulsor en estado estático y rotacional, conociendo los límites de la herramienta computacional.
- Determinar el efecto de la presencia de agua en el entorno del agitador simplificado a un disco y el real sobre sus respectivas frecuencias naturales.

---

<sup>1</sup> **ARRIETA VALDERRAMA, Gustavo.** *Optimización multi-objetivo del desempeño de un agitador de líquidos miscibles con impulsor PBT variando ángulo, la posición y velocidad de rotación del impulsor, utilizando ANSYS CFX, MECHANICAL y DESIGN EXPLORER.* 2012.

- Comparar el efecto de diferentes fluidos sobre las frecuencias naturales en un mismo componente para diferentes modos de vibrar.

### Alcances y limitaciones de la tesis

- No se consideran el tanque ni sus frecuencias naturales.
- El estudio se limita al agitador (eje-impulsor) y al efecto del fluido, y no a todo el conjunto de componentes que implica el ensamble como: motor, transmisión, cojinetes, soportes, uniones soldadas o empernadas, anclaje, etc.
- La sección circular del eje que iría conectada a la transmisión se considera rígida.
- Las propiedades físicas en todo el modelo se consideran constantes.
- No se consideran el amortiguamiento estructural en los componentes ni el amortiguamiento viscoso del fluido, ya que, si bien influyen en la frecuencia amortiguada del sistema en funcionamiento ( $\omega_d$ ), no influyen en los valores de las frecuencias naturales ( $\omega_0$ ), las cuales dependen exclusivamente de la rigidez y de la masa del sistema.
- El fluido envolvente se define a partir de la densidad, la velocidad del sonido y la viscosidad, donde este último no es considerado en el modelo matemático de la simulación.
- El modelo no considera la cohesión entre moléculas del fluido ni la adhesión entre el fluido y la superficie del agitador, solo considera el efecto de la presión hidrostática sobre las superficies.
- Las dimensiones de deformación en los modos de vibración son referenciales y proporcionales.
- El modelo no es validado experimentalmente puesto que el objetivo de la tesis es visualizar el comportamiento de las frecuencias naturales debido al entorno (fluido) de un solo componente estructural (agitador) y no en cuanto al conjunto tanque-motor-transmisión-agitador, y así poder encontrar correlación entre los cálculos analíticos y los obtenidos mediante la simulación, para luego validar el modelo creado para el escenario sumergido.

## CAPÍTULO 1

### DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO

El estudio comienza con una geometría ya definida que cuenta con el eje, el impulsor y el fluido donde se encuentran inmersos, el cual tiene la forma del negativo del tanque. Una vez lista la geometría, se realiza un rotor equivalente axisimétrico para poder simplificar mejor la simulación y aprovechar los límites de la herramienta; por lo tanto, se tienen dos cads a lo largo del estudio: el agitador PBT (eje-impulsor) y la simplificación (eje-rotor simplificado), ambos con sus respectivos fluidos. A partir de ello, es necesario ver cuánto afecta la fuerza de la gravedad en la simulación modal, ya que, de ser mínima, se puede despreciar en todos los escenarios estudiados. Luego, se pasa a lo que se conoce como independencia de malla, fase en la cual se pretende determinar cuánto afecta el mallado en los resultados y hasta qué punto es necesario refinar los elementos para obtener buenos resultados. Una vez definida la malla a utilizar en ambos cads, esta se mantiene a lo largo del trabajo, inclusive hasta cuando se analizan componentes por separado.

El análisis comienza con la simulación modal de los álabes aislados, el cual nos indica cómo son sus modos de vibración y cuáles son las frecuencias naturales para dichos modos. Luego se hace exactamente lo mismo con el impulsor PBT, donde se ve el comportamiento de los álabes en conjunto y lo que sucede con el valor de las frecuencias naturales. Una vez desarrollados los análisis locales, se pasa a la simulación del conjunto eje-impulsor o eje-rotor simplificado. Para ambos casos, se realizan análisis modales estáticos y con velocidad rotacional para ver cómo se comportan las frecuencias naturales de cada uno y qué es lo que sucede con los modos de vibración; además se obtiene el

diagrama de Campbell y se conocen algunos límites de la herramienta computacional. Luego de realizar las simulaciones en vacío, se procede con el análisis sumergido estático de ambos modelos, para obtener la variación de las frecuencias naturales, la cual es el objetivo principal del estudio. A partir de ello, se llega a la limitación del software; dado que no es posible realizar el escenario sumergido que incluya, al mismo tiempo, velocidad rotacional. Como pasos posteriores, se realizan escenarios con propiedades de fluidos distintas para evaluar en que grado afectan a las frecuencias naturales y en cuáles modos de vibrar es más considerable dicha variación. Por último, se realizan cálculos analíticos de las frecuencias cuyos modos de vibración se pueden reducir a un grado de libertad, para comparar los valores con los obtenidos en las simulaciones y ver cuánto es el error porcentual de la aproximación.

A partir de lo mencionado anteriormente, la distribución de capítulos se presenta de la siguiente manera:

- Capítulo 2 – Conceptos generales: se desarrollan los conceptos para mejorar el manejo de términos y definiciones relacionados a cada una de las partes del estudio como las vibraciones mecánicas con sus respectivos escenarios, el diagrama de Campbell y una introducción a los conceptos y ecuaciones del análisis modal; además, se introduce el aspecto teórico del efecto de adherencia de masa en un cuerpo sumergido.
- Capítulo 3 – Concepción del modelo: se desarrollan etapas previas a la simulación de los escenarios, en las cuales se concibe el modelo que se utiliza a lo largo del estudio; entre estas están la simplificación del rotor, el efecto de la gravedad, la independencia de malla y el mallado definitivo de los componentes.
- Capítulo 4 – Simulación y resultados: se desarrollan las configuraciones de las simulaciones de cada una de las fases (álabes, impulsor, simplificación, efecto de la rotación, efecto del fluido, etc.), se interpretan los resultados y se encuentran conclusiones parciales; además, se modelan escenarios para diferentes fluidos y se calculan las frecuencias analíticamente.

## 1.1 Antecedentes y consideraciones

El proyecto cuenta con una geometría inicial (Figura 1), basada en un trabajo anterior cuyo resultado fue la optimización a través de herramientas CFD<sup>2</sup>; es decir, un estudio exclusivamente fluido dinámico optimizado a partir de criterios de homogenización, donde lo que se busca es un bajo consumo de potencia y alto grado de mezcla. De esta manera, las condiciones geométricas y de operación son las obtenidas a partir de dichos resultados; además, solamente es necesaria la geometría, ya que el enfoque de este proyecto es estructural realizado con el método de elementos finitos. Las dimensiones del cad optimizado y las condiciones de funcionamiento son las siguientes:

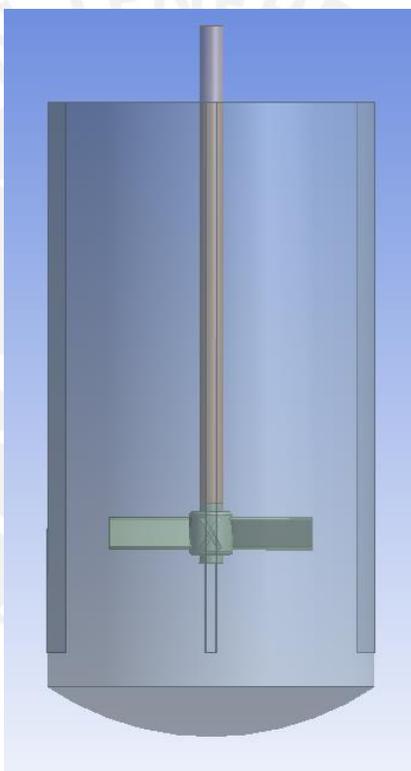


Figura 1. Geometría inicial del agitador y el fluido

- La velocidad de rotación del impulsor es de 350 rpm.
- El ancho de los álabes es de 40 mm.

<sup>2</sup> **ARRIETA VALDERRAMA, Gustavo.** *Optimización multi-objetivo del desempeño de un agitador de líquidos miscibles con impulsor PBT variando ángulo, la posición y velocidad de rotación del impulsor, utilizando ANSYS CFX, MECHANICAL y DESIGN EXPLORER.* 2012.

- El ángulo de inclinación de los álabes es de  $60^\circ$  respecto al plano del rotor ( $45^\circ$  antes de la optimización).
- El diámetro del eje es de 25.4 mm.
- La posición del impulsor es 225 mm medidos desde la base del tanque.
- Se tienen 4 álabes en el impulsor y 4 deflectores en el tanque colocados uniformemente cada  $90^\circ$ .
- La longitud de los álabes es 110 mm.
- El espesor de los álabes es 5 mm.
- El diámetro del impulsor es de 220 mm.

Por otro lado, la simulación cuenta con simplificaciones y limitaciones regidas por el alcance del estudio como: las restricciones de los grados de libertad, las propiedades de los fluidos estudiados, la utilización de un modelo simplificado del impulsor con la misma masa y momento de inercia rotacional, la disgregación de las partes de un solo componente y la coherencia entre sus resultados, y el cálculo analítico de las principales frecuencias naturales reducidas a un grado de libertad.

## 1.2 Motivación por el tema

Aprender y explorar sobre las capacidades de esta herramienta computacional con aplicaciones directas en ingeniería; además, aportar nuevos conocimientos e incentivar al aprendizaje asistido con herramientas computacionales, generando una competencia individual de los estudiantes, debido a que estas forman parte de una tecnología moderna e innovadora para la industria.

Desarrollar estudios relacionados con la simulación, permite generar un panorama mucho más amplio que la ingeniería tradicional, anticipando cualquier modificación de diseño antes de su producción; lo cual permite reducir costos notablemente en las áreas de ingeniería de las empresas. Todo ello debido a diferentes bancos de prueba virtuales que se pueden estudiar por separado de acuerdo a alguna solicitud de trabajo, obviamente respaldados por una memoria de cálculo que se base en las normas tradicionales.

Finalmente, los problemas de vibraciones en la industria pueden ser generados por una infinidad de circunstancias como: resonancia, velocidades críticas, desbalance, desalineamiento, soldadura, distorsión, excentricidad, falta o pérdida de rigidez, fisura en

componentes de transmisión o en cojinetes, turbulencia, etc. Debido a ello, es común complementar a un análisis de vibraciones de campo con un análisis modal o armónico desarrollado con elementos finitos, para poder respaldar las causas probables y sobretodo poder plantear soluciones, principalmente modificaciones en cuanto al diseño. Esto incentiva a adentrarse en la buena utilización de herramientas computacionales, sobretodo en estudios que aún no se han desarrollado con claridad en el ámbito de vibraciones.

### 1.3 Potencial del análisis modal para agitadores

A nivel industrial, se utilizan agitadores de diversas características para aplicaciones en procesos de minería, petróleo, alimenticios y hasta procesos de mezclado tradicionales. Este tipo de componentes presentan muchas veces problemas de vibraciones de diferente índole, dentro de los cuales la frecuencia natural entra a tallar un papel importante cuando, debido a las condiciones de operación, se ven modificadas de su valor inicial.

El análisis modal con el método de elementos finitos permite desarrollar un cálculo estructural considerando la masa y rigidez del sistema, el cual puede ser una estructura o un componente mecánico (en este caso un agitador), para mejorar las condiciones de operación y evitar las vibraciones excesivas debidas a la cercanía de las frecuencias naturales con respecto a las velocidades de operación. Normalmente, la bibliografía plantea que las frecuencias de excitación estén alejadas un 15% por lo menos de las frecuencias naturales; debido a ello, es importante conocer dichas frecuencias cuando se diseña en ingeniería para luego contrastarlas con las de operación y así evitar trabajar en el rango crítico. Es importante mencionar también que dependiendo de las condiciones de operación y características del componente, estas frecuencias naturales se ven afectadas por las rpm, así como por el entorno envolvente. Este escenario complejo que se plantea involucrando fluidos, condiciones de operación, y frecuencias naturales que dependen de velocidades de operación, dan cavidad a la importancia del análisis modal frente a dichas circunstancias brindando una simplificación considerable en la ingeniería en cuanto a cálculos, lo cual permite enfocarse en la parte conceptual y el diseño, sin profundizar en operaciones experimentales o pruebas y error.

En general, las ventajas se pueden puntualizar de la siguiente manera:

- Se obtienen las frecuencias naturales para diferentes escenarios.
- Ayuda a plantear cambios en los diseños reduciendo considerablemente el tiempo y los costos relacionados con la experimentación.
- Se puede apreciar cuan sensibles son las frecuencias naturales con respecto a cambios de diferentes parámetros en el diseño.
- Es posible modelar geometrías o diseños complejos.
- Es muy versátil frente al análisis tradicional y evita la fase de prototipado.

Por otro lado, las desventajas serían las siguientes:

- Es necesario manejar la teoría que abarca la utilización del software, así como conocimientos previos en el manejo de la herramienta.
- Es necesaria cierta experiencia y especialización en el tema.
- Dependiendo del tamaño del modelo, se pueden consumir recursos computacionales considerables, lo cual conlleva a inversiones iniciales.
- Según más complejo sea el modelo, más recursos computacionales serán necesarios y el costo aumenta.
- Existe la posibilidad de obtener resultados erróneos si no se ingresan con bastante criterio y cautela los datos de entrada.
- La interpretación de datos requiere normalmente de experiencia y criterio, así como conocimientos previos en vibraciones.
- Normalmente es necesario el uso de hardware potente para reducir el tiempo computacional.
- Si es necesario estudiar muchos escenarios, el tiempo en ingreso de datos, simulación e interpretación de resultados puede llegar a ser considerable.

#### 1.4 Requerimientos previos

Para realizar este tipo de estudios con elementos finitos en la parte estructural, sobre todo si se utilizan elementos acústicos para modelar el fluido, es necesario manejar conocimientos variados desde la depuración del CAD y los conceptos de vibraciones, hasta el lenguaje de programación de la herramienta, dado que no es posible realizar este tipo de simulaciones con la interface actual.

El software para la depuración de la geometría es ANSYS DESIGN MODELER, dado que es un CAD robusto que cuenta con muchas herramientas de reparación, ya que, normalmente, los cads tradicionales se enfocan en la ingeniería de detalle y en las dimensiones, y no tanto en calidad geométrica y simplificaciones las cuales son necesarias para poder realizar simulaciones con elementos finitos en donde es necesario un perfecto mallado de los componentes.

ANSYS Mechanical es el software más utilizado a nivel mundial en la parte estructural, que cuenta con una infinidad de herramientas para realizar simulaciones que interaccionen con diferentes físicas. De la misma manera, cuenta con una amplia gama de materiales y solvers que permiten manipular con criterio los recursos computacionales mejorando la eficiencia del proyecto realizado.

## CAPÍTULO 2

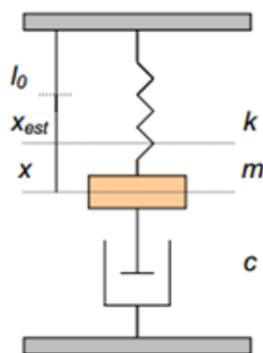
### CONCEPTOS GENERALES

#### 2.1 Vibraciones mecánicas

##### 2.1.1 Definición

La vibración es la variación de un parámetro de posición con respecto al tiempo, a partir de una posición de equilibrio en estado estable. Su característica más fundamental es que tiene un comportamiento periódico, que normalmente se concibe como un movimiento armónico simple. Las fuerzas en los sistemas mecánicos tienden a ser variables con el tiempo, normalmente periódicas, y responden variando el estado de equilibrio, lo cual genera cambios que alteran su funcionamiento normal, que pueden acortar la vida el equipo o simplemente presentar molestias generales en el ambiente en que opera.

La configuración tradicional de un sistema de vibraciones se muestra en la figura 2, en donde se puede apreciar la masa que participa, la rigidez que normalmente se presenta como un resorte y un amortiguador con un coeficiente de amortiguación constante.



#### NOTACIÓN:

- K: Constante de rigidez elástica
- m: masa principal
- c: coeficiente de amortiguación
- F: Resultante de las fuerzas exteriores
- $l_0$ : Longitud inicial del muelle
- $x_{est}$ : Deformación en equilibrio estático
- x: Desplazamiento

Figura 2. Esquema para el estudio de vibraciones<sup>3</sup>.

<sup>3</sup> MARTÍNEZ RAMÍREZ, Elvira; FLÓREZ GARCÍA, Mercedes. Física aplicada a la ingeniería: 2011

La mayoría de casos se modelan de dicha forma para que sea amigable el estudio adecuado de las vibraciones. Según ese esquema, la ecuación general de equilibrio dinámico establece a la ecuación diferencial de movimiento (Ec. 2.1).

$$mx'' + cx' + kx = F \quad \text{Ec. 2.1}$$

Donde  $F$  es la fuerza externa aplicada, mientras que los demás términos son la fuerza inercial, la de amortiguamiento y la elástica intrínsecos al sistema.

### 2.1.2 Clasificación

Las vibraciones se denominan libres cuando no hay fuerzas externas que exciten al sistema. Por otro lado, son forzadas cuando existen excitaciones externas que varían a lo largo del tiempo. Además, se pueden presentar en conjunto con fuerzas de amortiguamiento que disipen energía durante el movimiento vibratorio o simplemente libre de amortiguamiento. No obstante, respecto a los fines del presente proyecto, el enfoque serán las vibraciones libres y pueden presentarse de dos formas:

#### 2.1.2.1 Vibración libre

Para este tipo de escenario la ecuación diferencial 2.1 se simplifica a la ecuación 2.2.

$$mx'' + kx = 0 \quad \text{Ec. 2.2}$$

La igualdad es equivalente a cero, ya que las fuerzas de excitación externas son nulas. La ecuación 2.2 tiene como solución a la ecuación 2.3.

$$x = a \sin(\omega_n t + \varphi) \quad \text{Ec. 2.3}$$

Donde  $a$  viene a ser la amplitud de la respuesta,  $\omega_n$  la frecuencia natural y  $\varphi$  el ángulo de fase entre la excitación y la respuesta del sistema. Con esto, la frecuencia natural se determina a partir de la ecuación 2.4.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{Ec. 2.4}$$

### 2.1.2.2 Vibración libre amortiguada

Este tipo de escenario es más real, debido a que todo componente o sistema disipa energía cuando vibra; en otras palabras, si se da una condición inicial, el componente deja de vibrar luego de disiparse toda la energía, disminuyendo la amplitud de deformación gradualmente. Ahora, la ecuación diferencial se manifiesta con la componente de amortiguamiento (Ec. 2.5).

$$mx'' + cx' + kx = 0 \quad \text{Ec. 2.5}$$

Dependiendo del nivel de amortiguamiento, existen tres diferentes casos:

#### Subamortiguado

La solución de la amplitud para la ecuación diferencial es de la siguiente forma:

$$x = ae^{-\frac{c}{2m}t} \sin(\omega_{nr}t + \varphi) \quad \text{Ec. 2.6}$$

Mientras que la frecuencia amortiguada o frecuencia natural amortiguada se expresa de la siguiente manera:

$$\omega_{nr} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \quad \text{Ec. 2.7}$$

#### Críticamente amortiguado

Esta condición hace que la oscilación sea lo más breve posible. En otras palabras, el valor crítico es el menor valor de amortiguamiento para que el conjunto no oscile. En muchas aplicaciones, se suele utilizar el amortiguamiento crítico para evitar vibraciones excesivas y conseguir atenuarlas lo más rápido posible. La solución a la ecuación diferencial es:

$$x = e^{-\frac{ccr}{2m}t} x (C1 + C2 t) \quad \text{Ec. 2.8}$$

#### Sobreamortiguado

No hay presencia de oscilación, ya que el sistema vuelve a la posición de equilibrio. Conforme es mayor el amortiguamiento, más tiempo se alcanza el equilibrio. La solución a la ecuación diferencial es:

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

Ec. 2.9

### 2.1.3 Frecuencia natural

La frecuencia natural es una magnitud intrínseca a un sistema, en la cual tiende a oscilar con una amplitud máxima. Todo sistema o componente cuenta con muchas frecuencias naturales de diferentes grados y cuando es excitado a una de estas, la amplitud de vibración es máxima.

### 2.1.4 Resonancia

La resonancia es el caso o situación cuando la frecuencia de la fuerza de excitación externa coincide con la frecuencia natural del sistema, lo cual produce que para un sistema mecánico determinado, las amplitudes de deformación sean notables. Esto generalmente, ocasiona fallas estructurales catastróficas que terminan en rotura de los componentes del sistema. Cabe resaltar que cuando existe este fenómeno, no hace falta si quiera que las fuerzas excitadoras sean grandes, ya que depende de las características del material y geométricas del conjunto sometido a vibración.

### 2.1.5 Vibraciones en equipos rotativos

Las máquinas rotativas están expuestas a vibraciones que se originan por infinidad de causas. Debido a ello, es común en la práctica de la ingeniería analizar este tipo de componentes vinculados a las vibraciones.

La parte principal para analizar en una máquina rotativa es el conjunto eje-rotor y para evitar trabajar dentro de la zona de resonancia es necesario estudiar los diferentes escenarios que se pueden formar durante su funcionamiento, ya que la variedad en las condiciones de trabajo hace que se generen diversos sistemas dinámicos, lo cual conlleva a diferentes frecuencias naturales.

#### Velocidad crítica

Se llama velocidad crítica cuando la velocidad de giro provoca valores altos en la amplitud de vibración. Otra forma común de concebir este fenómeno es que normalmente las velocidades críticas tienen a coincidir con las frecuencias naturales del rotor o todo el sistema. Según esto, las velocidades de trabajo no deben ser iguales a las frecuencias

naturales. Lo que normalmente se aplica en los diseños es que las frecuencias de funcionamiento de los equipos rotativos sean mayores a las frecuencias naturales del ensamble, ya que en ese caso las amplitudes de vibración son menores.

Lo que suele suceder es que, en el momento del arranque o la parada, el componente rotativo pasa por las frecuencias naturales. De esta manera, el paso por la frecuencia natural del conjunto se realiza de manera rápida, lo cual hace que el número de ciclos por el paso de la resonancia sea pequeño y la oscilación no genere grandes amplitudes. Por otro lado, hay que tener en consideración las frecuencias de excitación externas que pueden aparecer, las cuales pueden depender de la turbulencia, como la frecuencia de vorticidad, o el thrust, que esta a la misma frecuencia de la rotación; además, están las frecuencias de paso de las paletas que se deben tomar en cuenta, ya que dependen tanto de las rpm como del número de álabes.

#### 2.1.5.1 Vibraciones transversales

Suelen ser muy comunes a nivel industrial y las principales causas de estas vibraciones son:

- Descentrado transversal del rotor: el cual está basado en la excentricidad.

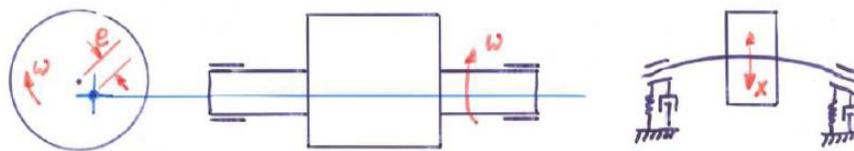


Figura 3. Eje con excentricidad<sup>4</sup>.

<sup>4</sup> ALENCASTRE, Jorge. *Apuntes del curso Vibraciones: 2012*.

- Descentrado angular del rotor: el cual se debe al mal alineamiento angular del rotor respecto al eje.

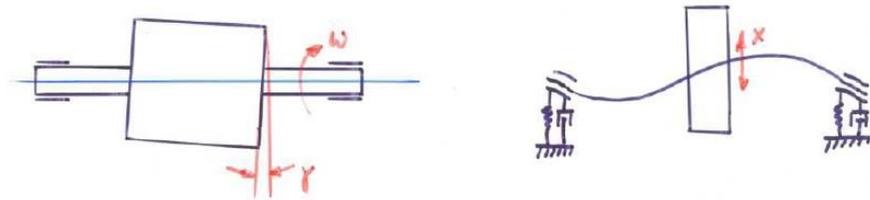


Figura 4. Eje con desalineamiento angular<sup>5</sup>.

- Efectos giroscópicos del rotor: que se basa en la traslación circular de la cantidad de movimiento angular; es decir, el eje no solo gira sobre sí mismo sino que forma un círculo.



Figura 5. Eje con traslación circular<sup>6</sup>.

### 2.1.5.2 Vibraciones torsionales

Para el estudio de vibraciones en este caso (eje uniforme), se toma en cuenta la posición del nodo, que es el apoyo intermedio, ya que la frecuencia natural dependerá de la posición de este.

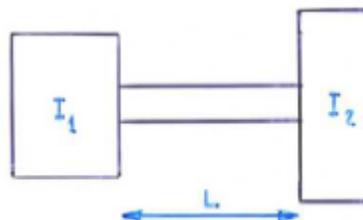


Figura 6. Deformación torsional en eje uniforme<sup>7</sup>.

<sup>5</sup> ALENCASRE, Jorge. *Apuntes del curso Vibraciones: 2012.*

<sup>6</sup> ALENCASRE, Jorge. *Apuntes del curso Vibraciones: 2012.*

Por otro lado, la frecuencia natural para este sistema se expresa de la siguiente manera:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{G I_p (I_1 + I_2)}{L I_1 I_2}} \quad \text{Ec. 2.10}$$

### 2.1.5.3 Vibraciones longitudinales

Este tipo de vibraciones longitudinales o axiales tienden a no ser significativas, ya que las amplitudes en que se presentan son en menor grado con respecto a las antes mencionadas; por ello, no suelen presentar preocupación durante la operación.

## 2.2 Diagrama de Campbell

Este diagrama representa en el eje de las abscisas la velocidad de rotación en rpm y en las ordenadas el valor de las frecuencias naturales en Hz. Muestra prácticamente cómo se comportan las frecuencias naturales del rotor conforme aumenta la velocidad de rotación. Se puede apreciar que la línea inclinada que parte del origen es la de resonancia; por ello, cada punto de intersección con cada una de las curvas trazadas vendría a ser una velocidad crítica.

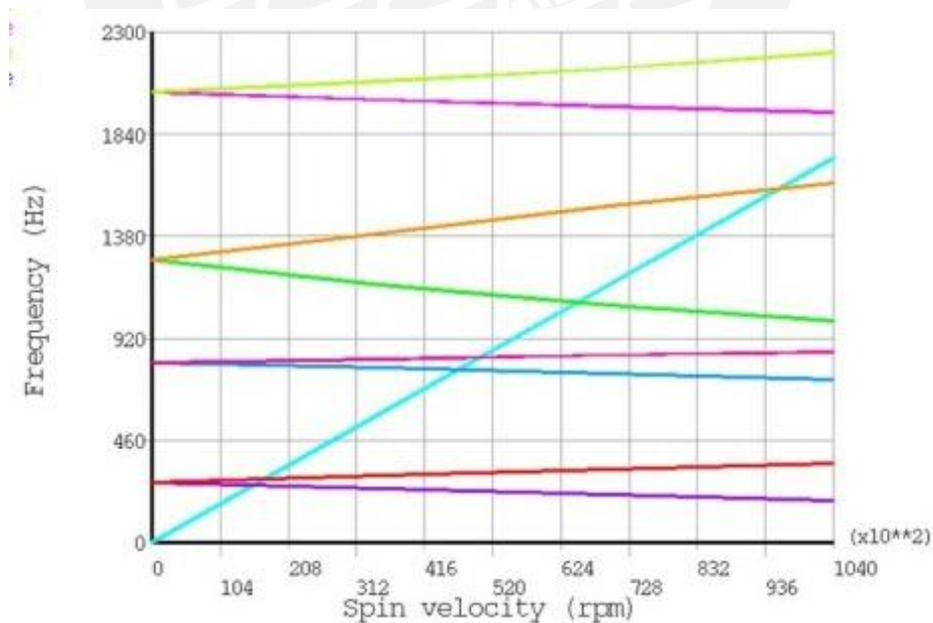


Figura 7. Diagrama de Campbell<sup>8</sup>.

<sup>7</sup> ALENCASTRE, Jorge. *Apuntes del curso Vibraciones: 2012*.

<sup>8</sup> ANSYS INC. *ANSYS Mechanical Help. 2012*.

### 2.3 Introducción al análisis modal

El análisis modal es una técnica (la más fundamental de todos los análisis dinámicos con elementos finitos) usada para determinar las características de vibración de cualquier tipo de estructura:

- La frecuencia natural, que nos dice a qué frecuencias la estructura tiende a vibrar de manera natural.
- Las formas de los modos, que nos da a entender en qué forma la estructura tiende a vibrar a cada frecuencia.
- Los factores de participación del modo, que da la cantidad de masa que participa en una dirección dada para cada modo.

Uno de los beneficios que nos brinda esta herramienta es que permite diseñar para evitar vibraciones de resonancia o que se vibre a una frecuencia específica; además da una idea a los ingenieros de como el diseño responderá a diferentes tipos de cargas dinámicas; por otro lado, ayuda también en los controles de solución de otros tipos de análisis dinámicos. Cuando se habla de un modo, se refiere a una frecuencia natural con su correspondiente forma de vibrar. Una estructura puede tener muchos modos por encima de la cantidad de grados de libertad del modelo, por ejemplo véase la figura 8:

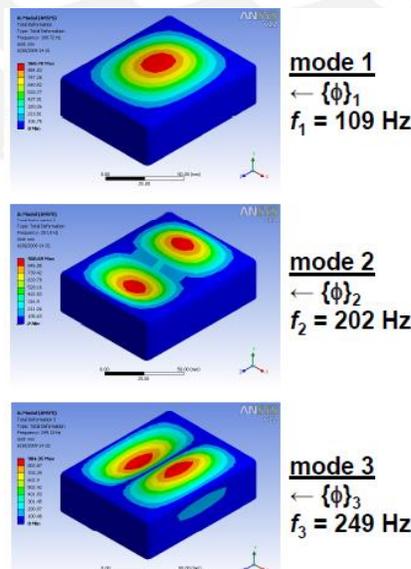


Figura 8. Frecuencias naturales con sus respectivas deformaciones modales<sup>9</sup>.

<sup>9</sup> ANSYS INC. *Mechanical Dynamics*: 2011.

Este tipo de análisis tiene ciertas restricciones y supuestos que hay que tener en cuenta desde un inicio. La primera es que toda la estructura tiene un comportamiento lineal en todo momento; es decir, la masa se conserva y la rigidez es constante. Otro punto importante es que es posible considerar el amortiguamiento de la estructura en un estudio estático; sin embargo, si es que el sistema es rotatorio es necesario utilizar solvers que permitan el amortiguamiento en su solución; además, en todo momento no hay presencia de excitaciones que varíen en el tiempo como fuerzas, desplazamientos, presiones o temperaturas aplicadas; en otras palabras, siempre se resuelve como vibración libre.

La manera de desarrollar lo que está detrás de este análisis modal con elementos finitos viene a partir de lo que nos dice la teoría pero solo que, al ser modelado con muchas ecuaciones, se trabaja de forma matricial. Por ello se tiene la ecuación de movimiento general de la siguiente forma:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\} \quad \text{Ec. 2.11}$$

Además, si se asume vibración libre y se ignora el amortiguamiento, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{u}\} + \cancel{[C]\{\dot{u}\}} + \cancel{[K]\{u\}} &= \cancel{\{F\}} \\ [M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} &= \{0\} \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.12}$$

Igual que en un análisis analítico lineal, se asume un movimiento armónico como solución de la ecuación diferencial siendo los vectores:

$$\{u\} = \{\emptyset\}_i \sin(\omega_i t + \theta_i) \quad \text{Ec. 2.13}$$

$$\{\dot{u}\} = \omega_i \{\emptyset\}_i \cos(\omega_i t + \theta_i) \quad \text{Ec. 2.14}$$

$$\{\ddot{u}\} = -\omega_i^2 \{\emptyset\}_i \sin(\omega_i t + \theta_i) \quad \text{Ec. 2.15}$$

Reemplazando los vectores en la ecuación 2.12 y simplificando:

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} &= \{0\} \\ -\omega_i^2 [M]\{\emptyset\}_i \sin(\omega_i t + \theta_i) + [K]\{\emptyset\}_i \sin(\omega_i t + \theta_i) &= \{0\} \\ (-\omega_i^2 [M] + [K])\{\emptyset\}_i &= \{0\} \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.16}$$

A partir de la Ec. 2.16, como no es posible que el vector propio de deformación sea nulo, ya que implicaría que no existe vibración, se llega a la ecuación 2.17.

$$\det([K]-\omega_i^2[M]) = \{0\} \tag{Ec. 2.17}$$

Esta ecuación es un problema de valores propios, en la cual se deben encontrar las  $n$  raíces para la frecuencia y los vectores propios, donde  $n$  vendría a ser el número de grados de libertad del sistema.

#### 2.4 Efecto de adherencia de masa en un cuerpo sumergido

Cuando un cuerpo se encuentra sumergido en un fluido determinado, este tiene un efecto inercial sobre el componente, razón por la cual el comportamiento dinámico del cuerpo sumergido cambia; debido a esto, la vibración se ve condicionada por la interacción fluido-estructura.

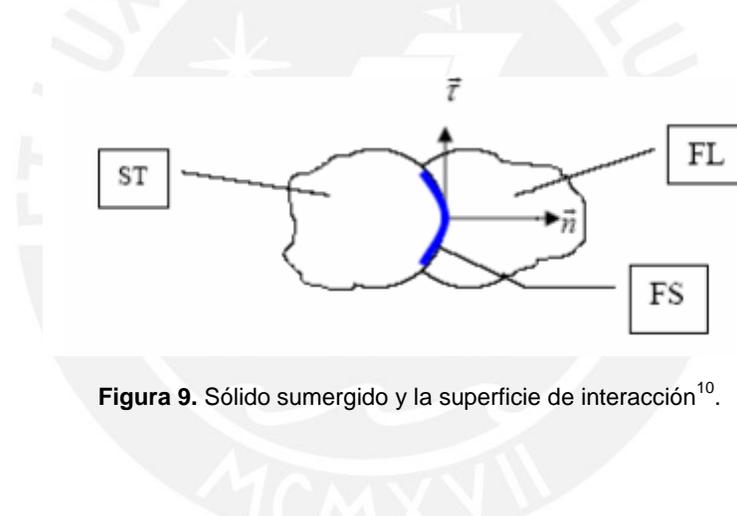


Figura 9. Sólido sumergido y la superficie de interacción<sup>10</sup>.

En otras palabras, lo que sucede es que el efecto de la presión hidrostática distribuida uniformemente sobre las superficies del cuerpo sumergido modifica la matriz de masa en la ecuación dinámica de la siguiente manera:

$$([m_i] + [m_{ai}])a'' + i\omega_i[c_i]a' + \omega_i^2[m_i]a = 0 \tag{Ec. 2.18}$$

Donde  $m_{ai}$  es la masa virtual que depende de la distribución de presiones y del modo en la superficie de interacción (Ec. 2.19).

$$m_{ai} = \int p_j(r)X_i(r)ndFS \tag{Ec. 2.19}$$

<sup>10</sup> THOMAS, M; LAKIS, A.; MARCOUILLER, L. *Effect of added mass on submerged vibrated plates*: 2007.

A partir de la adherencia de masa, se puede afirmar lo siguiente:

- El total de la masa del sistema aumenta.
- Las frecuencias naturales del sistema disminuyen.

Por otro lado, existen pruebas experimentales en planchas sumergidas en agua que se excitan a diferentes frecuencias capturando las respuestas de vibración para obtener las nuevas frecuencias naturales, las cuales se comparan con las obtenidas a través del método de elementos finitos en vacío para ver cuánto varían (tabla 1).

Plate	Mode 1 (Hz)		Mode 2 (Hz)		Mode 3 (Hz)		Mode 4 (Hz)		Mode 5 (Hz)	
	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)
1	39.80	40.04	92.30	98.57	225.50	246.42	284.00	313.49	318.00	358.12
2	10.29	11.18	44.21	45.75	67.58	69.75	145.01	149.85	187.63	195.67
3	6.20	6.33	33.14	33.33	39.40	39.57	104.80	106.14	110.00	111.29
4	38.59	40.64	74.61	76.76	107.77	112.19	163.80	169.79	208.23	220.76
5	233.95	256.11	309.40	305.00	478.54	499.75	608.57	707.89	735.86	775.93

**Tabla 1.** Comparación experimental entre frecuencias naturales sumergidas y en vacío con elementos finitos<sup>11</sup>.

De la tabla 1, se puede apreciar que las frecuencias capturadas de las planchas sumergidas (1) son menores con respecto a las obtenidas con elementos finitos en vacío (2) y en diferentes proporciones dependiendo del modo de vibrar.

<sup>11</sup> THOMAS, M; LAKIS, A.; MARCOUILLER, L. *Effect of added mass on submerged vibrated plates*: 2007.

## CAPÍTULO 3

### CONCEPCIÓN DEL MODELO

#### 3.1 Simplificación del rotor

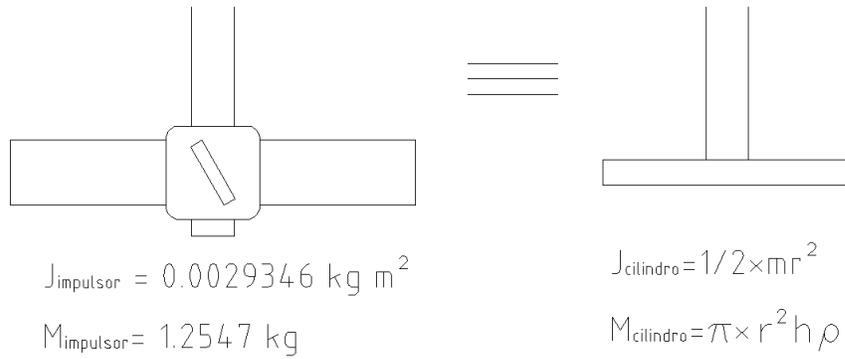
Una de las primeras etapas para la simulación de un elemento de máquinas rotacional es la simplificación inicial del impulsor a un cuerpo axisimétrico; es decir, a un cuerpo cilíndrico que tenga la misma masa del impulsor y que posea el mismo momento de inercia polar para facilitar el análisis en cuanto a geometría, calidad de mallado, número de elementos, simplificación de las ecuaciones, y sistema de referencia. La masa del impulsor es de 1.2547 kg y cuenta con un momento de inercia polar de 0.0029346 kg m<sup>2</sup>. Estos datos son obtenidos a través del *Desing Modeler* (CAD vinculado a ANSYS) cuyas propiedades son las de un acero estructural:

$$E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$$

$$G = 7.6923 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

Si se considera un disco con la misma masa y momento de inercia angular respecto al eje de rotación siendo  $r_{\text{cilindro}}$  y  $h_{\text{cilindro}}$ , el radio y altura de la simplificación del agitador, respectivamente (figura 10), se obtienen los valores a partir de las ecuaciones 3.1 y 3.2.



**Figura 10.** Equivalencia entre impulsor y simplificación.

$$J_{\text{impulsor}} = J_{\text{cilindro}}$$

**Ec. 3.1**

$$2.9346 \times 10^{-3} = \frac{1}{2} \times m \times r_{\text{cilindro}}^2$$

$$2.9346 \times 10^{-3} = \frac{1}{2} \times 1.2547 \times r_{\text{cilindro}}^2$$

$$r_{\text{cilindro}} = 6.8394 \times 10^{-2} \text{ m} = 68.39 \text{ mm}$$

Además,

$$M_{\text{impulsor}} = M_{\text{cilindro}}$$

**Ec. 3.2**

$$1.2547 = \pi \times r_{\text{cilindro}}^2 \times h_{\text{cilindro}} \times \rho$$

Y reemplazando  $r_{\text{cilindro}}$ ,

$$1.2547 = \pi \times (6.8394 \times 10^{-2})^2 \times h_{\text{cilindro}} \times 7850$$

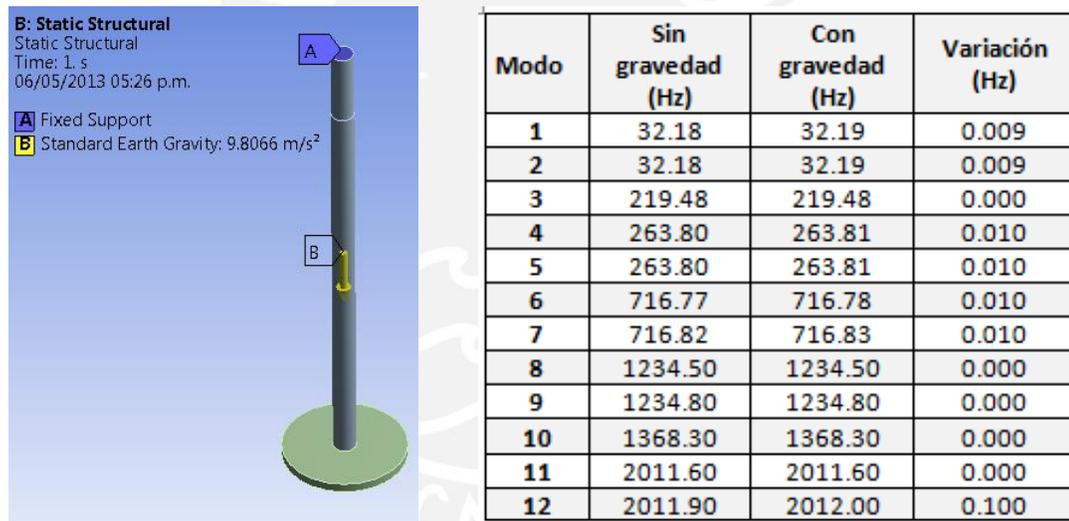
$$h_{\text{cilindro}} = 1.087 \times 10^{-2} \text{ m} = 10.87 \text{ mm}$$

Estas características del disco creado a partir de la simplificación, serán utilizadas para crear un CAD equivalente al impulsor PBT y poder realizar diversas simulaciones.

### 3.2 Efecto de la gravedad

Cuando se realiza un análisis estructural de cualquier índole, es común ingresar como parte de las condiciones de borde el valor y dirección de la gravedad; sin embargo, cuando las condiciones lo permiten, es posible despreciarla. En este caso, el agitador (el CAD estudiado) contiene una masa de 3.33 kg incluyendo el impulsor y el eje, la cual es muy pequeña como para considerar los efectos inerciales; no obstante, parte del estudio es determinar si hay un efecto relevante sobre los resultados para luego considerar la gravedad en cada uno de los casos estudiados. La siguiente tabla muestra para el modelo del agitador simplificado, los valores de las frecuencias de los primeros 12 modos con y sin efectos de la gravedad, así como la variación en cada una de estas.

**Tabla 2.** Comparación entre las frecuencias sin gravedad y con gravedad.



**Figura 11.** Eje – rotor simplificado con el efecto de la gravedad.

Como se puede observar, el efecto de la gravedad para el CAD estudiado es mínimo sobre el valor de las frecuencias razón por la cual, en todas las situaciones a lo largo del trabajo no será considerada. Cabe resaltar que el fin de validar esta simplificación es disminuir el tiempo computacional en todos los casos simulados, dado que en ANSYS las plataformas de simulación estructural y de análisis modal están separadas y cada vez que se requieren cargas inerciales o cargas previas al estudio de vibraciones es necesario ingresar las condiciones de borde en la plataforma *Static Structural* para luego obtener los resultados en la plataforma *Modal* vinculando cada uno de los sistemas como se muestra en la figura 12.

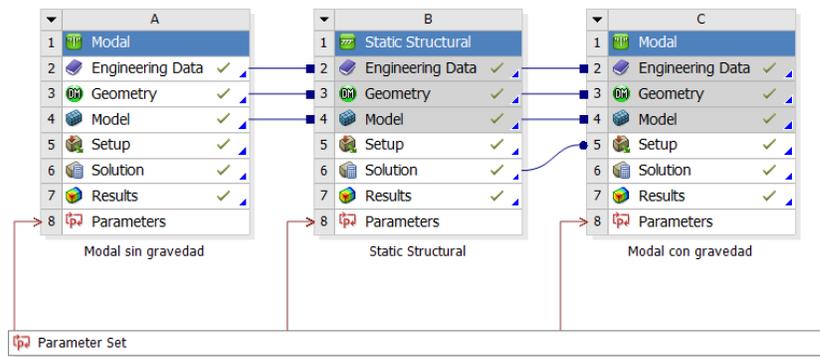


Figura 12. Modelos acoplados a través de la geometría y la solución.

### 3.3 Independencia de Malla

En la simulación, una de las fases que ayuda considerablemente en nuestros resultados es la determinación de la independencia de malla, la cual trata básicamente de encontrar la calidad y cantidad de los elementos adecuados, de tal manera que la mejora de ambos nos dé buenos resultados a tal punto que si aumentamos dichos parámetros los resultados no tienen una variación considerable; es decir, que el valor de los resultados es, a partir de ese punto, independiente de si se aumenta la cantidad de elementos o si se mejora la calidad de estos. En las siguientes imágenes y en la tabla 3, se pueden observar el tamaño y las características de la malla, así como la cantidad de elementos utilizados en cada caso y el promedio de la evaluación de la métrica del mallado para el cual se utiliza la calidad ortogonal (*Orthogonal Quality*).

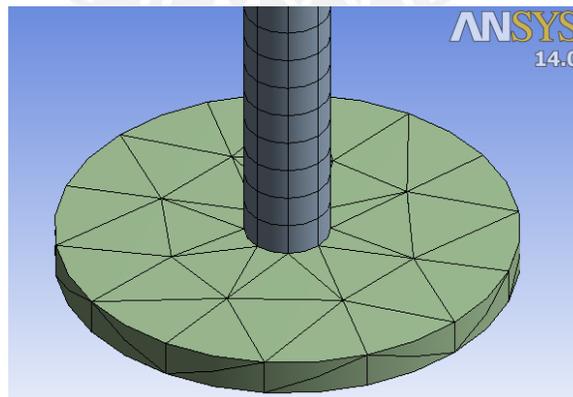


Figura 13. Malla 1 con 701 elementos.

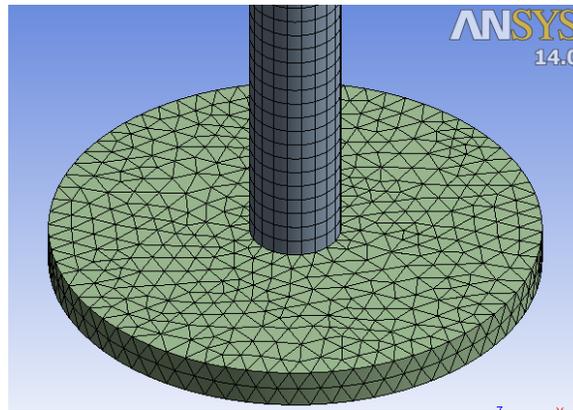


Figura 14. Malla 2 con 12732 elementos.

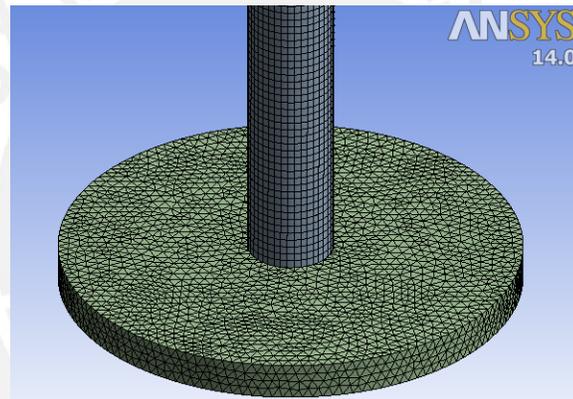


Figura 15. Malla 3 con 145786 elementos.

	Modos											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<b>Malla 1</b> 701 Elementos Average 0.88	32.16	32.16	219.63	263.86	263.93	725.99	726.20	1289.30	1289.90	1417.10	2092.40	2093.50
<b>Malla 2</b> 12732 Elementos Average 0.89	32.18	32.18	219.48	263.80	263.80	716.77	716.82	1234.50	1234.80	1368.30	2011.60	2011.90
<b>Malla 3</b> 145786 Elementos Average 0.92	32.17	32.17	219.46	263.76	263.76	716.21	716.21	1231.70	1231.70	1366.30	2007.90	2007.90
	<b>Frecuencias (Hz)</b>											

Tabla 3. Variación de las frecuencias con respecto a diferentes mallados.

Se toman las frecuencias de los 12 primeros modos para comparar el efecto del mallado y, como se puede apreciar, el aumento de la cantidad de elementos es notable (701 – 12732 – 145786) mientras que la calidad no varía considerablemente. Por otro lado, la calidad ortogonal (*Orthogonal Quality*) trata básicamente en el ángulo formado entre el vector que une el centroide del elemento con el centroide de una cara, y el vector perpendicular a dicha cara a través de un producto escalar, el cual, como se puede intuir, para valores bajos nos da una baja calidad mientras que para valores cercanos a la unidad (misma dirección) el elemento viene a ser casi perfecto. Según el espectro de la métrica del mallado de ANSYS con este criterio, a partir de valores de 0.7 de promedio (*Average*) se puede considerar un mallado de muy buena calidad siempre y cuando el valor mínimo presente en la malla sea mayor a 0.1.

Variación	Error %												Error % Promedio
Malla 1 - Malla 2	-0.06	-0.03	0.07	0.02	0.05	1.27	1.29	4.25	4.27	3.44	3.86	3.90	1.86
Malla 2 - Malla 3	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.08	0.09	0.23	0.25	0.15	0.18	0.20	0.10

**Tabla 4.** Error porcentual entre las diferentes mallas planteadas.

Como se puede ver en la tabla 4, el error porcentual promedio de los 12 modos es de 1.86 % entre las mallas 1 y 2 con una diferencia de 12031 elementos, mientras que entre la 2 y 3, dicho error es de 0.1 % con una diferencia de 133054 elementos. Esto implica que entre la malla 2 y 3 los resultados no varían sustancialmente dentro de los límites estudiados a diferencia de la variación entre la malla 1 y 2; por ello, para disminuir el tiempo computacional y al mismo tiempo obtener buenos resultados, es ideal realizar la simulación con el mallado 2. Otra de las observaciones es que a medida de que el modo de vibración es más complejo el error porcentual es mayor, dado que los desplazamientos relativos de los nodos son mayores entre sí y estos se ajustan mejor a un valor de frecuencia determinado conforme la malla es más fina; sin embargo, dentro del rango estudiado, con el segundo mallado no son considerables dichos efectos.

### 3.4 Mallado

Luego de haber demostrado la independencia de malla, se definen cada una de las operaciones utilizadas durante el mallado, considerando que, en el caso sumergido, hay dos cuerpos presentes: el agitador y el fluido.

#### 3.4.1 Malla del agitador

En el agitador, para mejorar la calidad de la malla, se hace la configuración geometría de tal manera que se consideren al eje y al impulsor como dos cuerpos diferentes pero que conforman parte de uno solo para poder utilizar diferentes métodos en cada uno de estos. Por ejemplo, el eje es un cuerpo que se puede mallar mediante un barrido (*Sweep Method*) que genera una malla de muy buena calidad; cabe resaltar que ANSYS Mechanical detecta automáticamente los cuerpos en los cuales se puede aplicar este método, no obstante debe existir otro limitante que regule el tamaño de los elementos y es por ello que se utiliza “*Edge Size*” del tipo que permite hacer número de divisiones el cual se deja en 20 a lo largo de toda la circunferencia del eje.

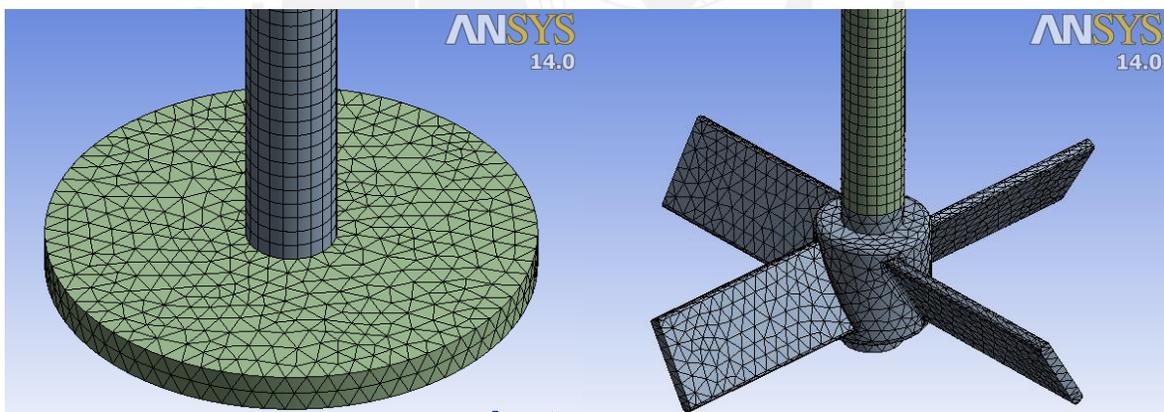


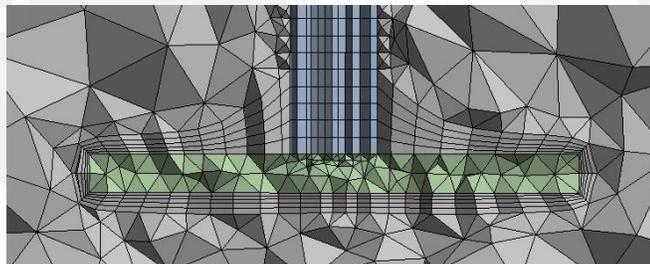
Figura 16. Mallas definidas para el impulsor y rotor simplificado.

Tanto el impulsor, como la simplificación, se mallan de la misma forma y se elige el método de mallado tetraédrico (*Patch Conforming Method*) que normalmente es utilizado en geometrías complejas porque es el que posee mayor flexibilidad geométrica. Además del método, hace falta delimitar el tamaño de los elementos ya seleccionados previamente en la demostración de independencia de malla; por ello, se utiliza “*Body Sizing*” para que estos tengan un tamaño de 6 mm en todo el volumen del impulsor.

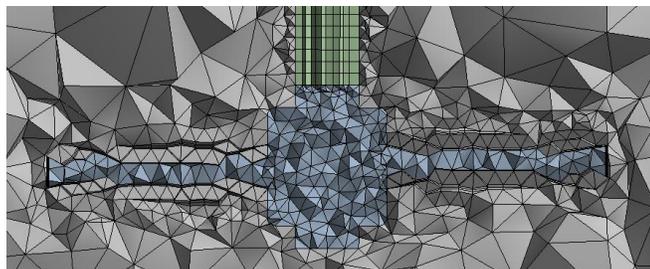
Toda esta fase sirve para poder hacer los diferentes casos de simulación desde el álabe del agitador hasta el agitador completo (incluyendo el disco como simplificación e incluso el impulsor aislado) en el análisis modal, el cual va a permitir determinar los modos de vibración y las frecuencias naturales en vacío, es decir, sin un fluido en el entorno; sin embargo, cuando se quiera ver el efecto de este se tiene que hacer un mallado adicional.

### 3.4.2 Malla del fluido

Cuando se realiza un estudio en donde interviene la interacción fluido-estructura, es recomendable mallar con capas de fluido paralelas a las caras de la estructura en la zona de mayor importancia. Este tipo de mallado se conoce como “*Inflation*” y mejora los efectos en esta interface; por otro lado, esto permite darle propiedades específicas a los elementos acústicos para más adelante poder modelar el efecto del fluido sobre los modos y frecuencias del agitador. Cabe resaltar que se realizan 5 capas con una tasa de crecimiento de 1.2 conforme aumenta la distancia desde la interface, debido a que lo más importante del mallado del fluido es la parte más cercana al agitador, como se puede apreciar en las figuras 17 y 18.



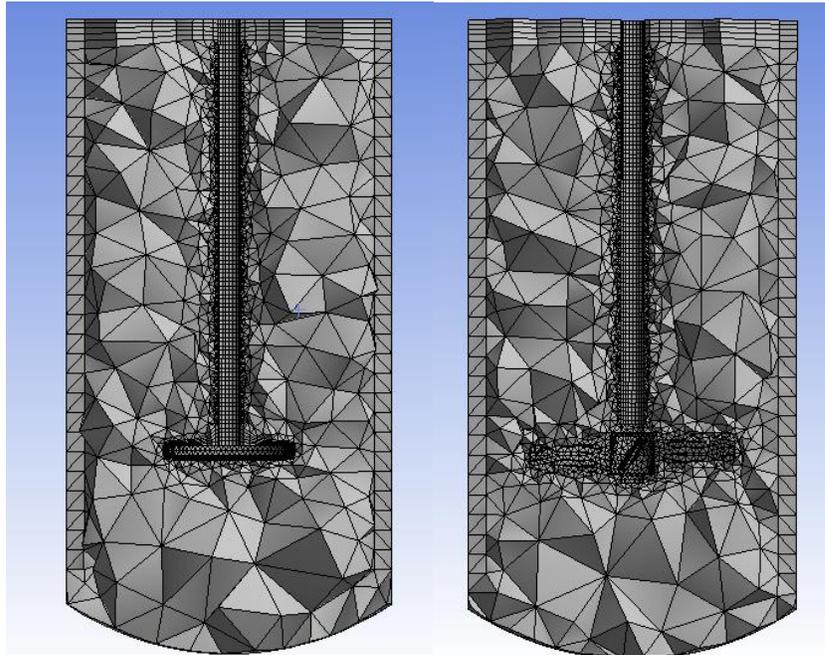
**Figura 17.** Sección transversal del mallado del fluido para la simplificación.



**Figura 18.** Sección transversal del mallado del fluido para el impulsor.

Otra de las zonas en las que se debe considerar utilizar la misma técnica de mallado es en la superficie libre del fluido que, igual que en el caso anterior, permite ingresar con mayor facilidad las propiedades respectivas a dicha interface (superficie libre). El resto del

fluido es mallado con elementos tetraédricos de mayor tamaño pero de buena calidad para no aumentar el tiempo computacional de las simulaciones. En la figura 19, se muestran unas vistas de sección del volumen del fluido mallado en las cuales se pueden apreciar las partes más densas de elementos.



**Figura 19.** Comparación entre mallas de ambos modelos.

Como se puede apreciar, el volumen de fluido considerado es el del tanque, donde las zonas colindantes al agitador contienen mayor cantidad de elementos; el resto contiene elementos de mayor tamaño dado que el estudio se limita al efecto del fluido sobre las frecuencias naturales del agitador y no al comportamiento del fluido en sí. Por último, en la tabla 5 se muestran los resultados estadísticos del mallado para cada una de las configuraciones.

	Simplificación	Simplificación con fluido	Impulsor	Impulsor con fluido
Nodos	38345	125720	42582	143386
Elementos	12819	69114	15200	84070
<b>Métrica de Mallado: <i>Orthogonal Quality</i></b>				
Promedio	0.895	0.813	0.827	0.760

**Tabla 5.** Estadísticas generales de la malla a utilizar en las simulaciones.

Además, los elementos que se modelan como fluidos son los siguientes:

- FLUID220: es un elemento 3D sólido de 20 nodos que cuenta con un comportamiento de presión cuadrática. Se suele utilizar para modelar fluidos y la interface fluido-estructura (Figura 20).

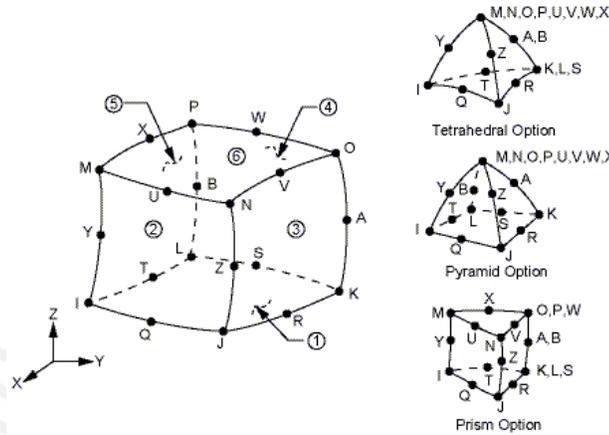


Figura 20. Elemento FLUID220 con la distribución de nodos<sup>12</sup>.

- FLUID221: es un elemento 3D sólido de 10 nodos que cuenta con las mismas propiedades y el mismo comportamiento que el FLUID220, ya que ambos están orientados a análisis acústicos (Figura 21).

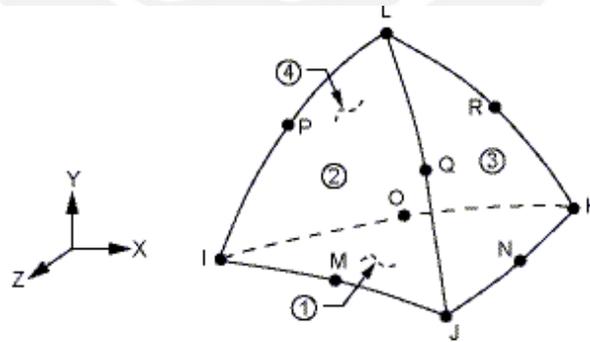


Figura 21. Elemento FLUID221 con la distribución de nodos<sup>13</sup>.

<sup>12</sup> ANSYS INC. *ANSYS Mechanical Help*. 2012.

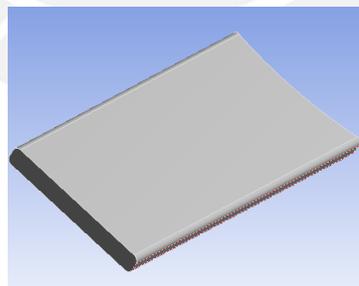
<sup>13</sup> ANSYS INC. *ANSYS Mechanical Help*. 2012.

## CAPITULO 4

### SIMULACIÓN Y RESULTADOS

#### 4.1 Los álabes

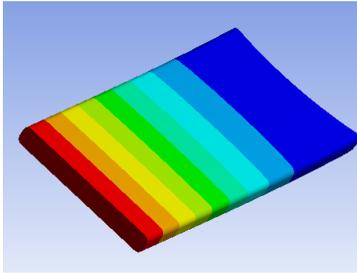
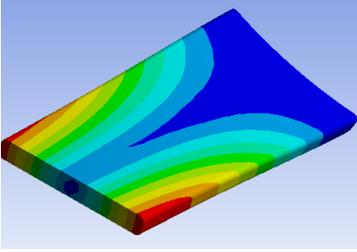
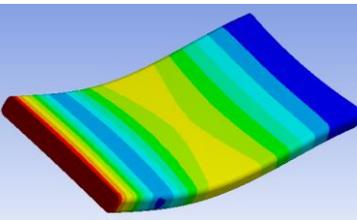
El inicio del estudio se centra en visualizar el comportamiento de un álabe del impulsor aislado; esto sirve para poder obtener las frecuencias principales de las paletas y compararlas más adelante con el modelo completo. Debido a la estabilidad al tener una longitud pequeña de 89 mm y una masa de aproximadamente 135 gr las frecuencias a determinar son muy altas; es por ello que solo se obtienen las 3 primeras formas de vibrar que vendrían a ser la de flexión, la torsional y la que corresponde al primer armónico.



**Figura 22.** Álabe separado de todo el conjunto.

El método de mallado utilizado es el mismo que el que se determinó en la independencia de malla para mantener los resultados coherentes; es decir, que se malló con elementos tetraédricos de 6 mm. Una consideración importante es que, debido a que el interés en esta parte es netamente ver el comportamiento del álabe inclinado, se asume un empotramiento en la zona ligada al cubo del impulsor que, dentro del setup del análisis

estructural, vendría a ser un “*Fixed Support*”. Como esta simulación es completamente estática, el método para la extracción de modos a utilizar en el análisis modal es el de “*Block Lanczos*”. En la tabla 6, se muestran las frecuencias obtenidas y la deformación.

Modo	Frecuencia (Hz)	Deformación
1	550.33	
2	2436.60	
3	3379.40	

**Tabla 6.** Frecuencias naturales y sus respectivos modos de un álabe aislado.

Estos resultados nos sirven para contrastar la presencia de dichas frecuencias tanto en el impulsor como en el agitador completo; sin embargo, lo más probable es poder encontrar los 3 modos en el estudio del impulsor por separado, ya que, en el caso del agitador, se tendrían que extraer una gran cantidad de estos para obtener resultados alrededor de los 3000 Hz, los cuales escaparían al rango de estudio, el cual es solamente con fines comparativos.

## 4.2 El Impulsor

Una forma gradual de encontrar congruencias en el estudio vibracional, en cualquier tipo de estructuras, es analizando diferentes componentes que forman parte de un todo para luego poder hacer simplificaciones que no modifiquen considerablemente nuestros resultados. El impulsor, para esta investigación, se considera el cubo con las cuatro paletas inclinadas y, dado que no interviene el eje, los modos obtenidos tratan básicamente sobre el comportamiento de los álabes en conjunto, incluyendo los casos de simetría.

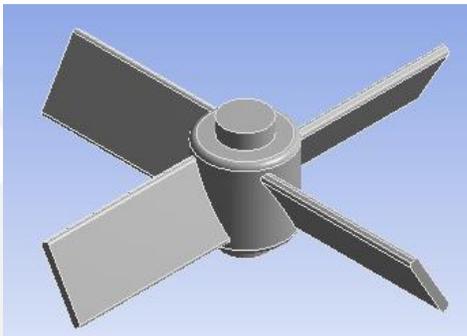
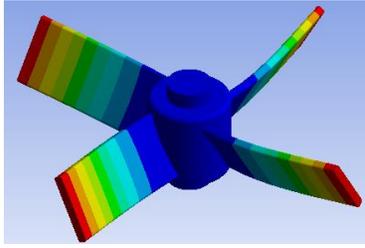
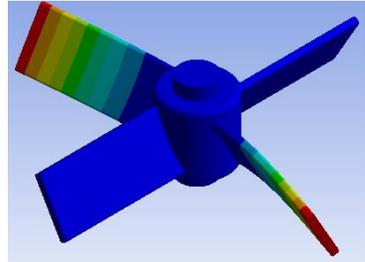
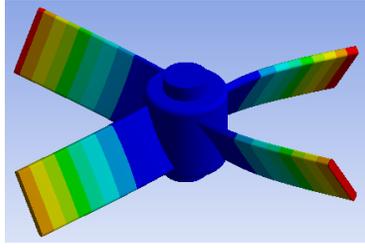
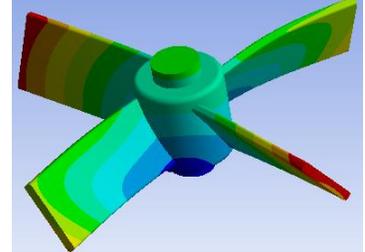
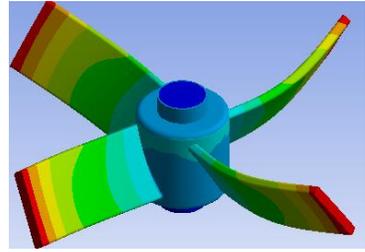
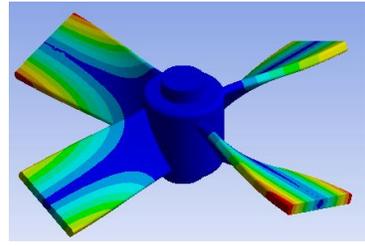
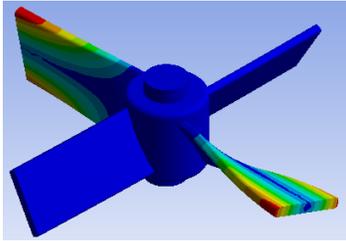
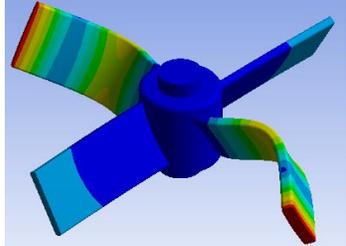


Figura 23. Impulsor separado del eje.

Como se puede observar en la figura 23, la parte del eje que se encuentra dentro del cubo es utilizada solamente para poder ingresar el soporte que, al igual que en el caso del álabe por separado, se considera empotramiento (*Fixed Support*). El método de mallado es el determinado anteriormente y, al ser considerado un análisis estático, el solver a utilizar en la plataforma de análisis modal es nuevamente el de "*Block Lanczos*". En la tabla 7, se muestran las frecuencias y las deformaciones de los 12 primeros modos de vibración.

Modo	Frecuencia (Hz)	Deformación
1	508.58	
2 - 3	526.56 - 526.97	
4	531.31	
5 - 6	1683.90 - 1684.50	
7	2062.10	
8 - 9	2388.40 - 2390.90	

10 - 11	2405.50 - 2406.10	
12	3243.00	

**Tabla 7.** Frecuencias naturales y sus respectivos modos de vibración del impulsor.

En los resultados obtenidos, se pueden observar diferentes características que relacionan las deformaciones obtenidas con las de los álabes aislados:

- El primer modo que aparece en el impulsor, de 508.58 Hz, es el que presenta el movimiento de los álabes en flexión, el mismo modo de flexión de la paleta pero con 550.33 Hz; esto sucede debido a que, a pesar de ser el mismo modo de vibrar, el sistema cambia al ser 4 los álabes que participan en el movimiento axial del agitador y esto hace que la masa efectiva que actúa en el movimiento sea mayor; es decir, el factor de participación de masa en dicho desplazamiento aumenta y por ende, la frecuencia determinada disminuye.
- Los modos 2 y 3, igual que en el caso anterior, tratan sobre la flexión de las paletas, solo que en esta ocasión, como se puede observar, intervienen dos álabes opuestos cuyas posiciones están desfasadas 180 grados (cuando una está inclinada hacia arriba la otra lo está hacia abajo) y esto hace que el factor de participación de masa disminuya para que la frecuencia quede alrededor de los 526 Hz.
- El modo 4 es parecido a los anteriores con la diferencia de que ahora las paletas opuestas están en fase y las otras dos están desfasadas 180 grados, participando todas al mismo tiempo; esto explica por qué la frecuencia se mantiene en 531.31 muy cercana a los modos 2 y 3.

- Los casos 5 y 6 no son considerados relevantes para el estudio comparativo, dado que estos, cuando se cuente con la presencia del eje, van a ser absorbidos por la flexión de este como se ve más adelante.
- El séptimo modo, que a simple vista es parecido al primero, en realidad tiene una deformación torsional, la cual viene acompañada por la flexión de los álabes debido a la inercia de estos. Esta frecuencia natural ya es superior a los 2000 Hz porque la rigidez torsional del impulsor aislado es muy alta.
- Entrando ya a las deformaciones torsionales de los álabes, aparecen los modos 8 y 9, en los cuales participan las 4 paletas, no obstante, la diferencia entre uno y otro es que mientras en el primero todos giran en el mismo sentido, en el segundo solo los opuestos están en fase. Por otro lado, como la frecuencia torsional de los álabes aislados ya estaba alrededor de los 2400 Hz, todos estos modos torsionales tienen apenas 10 Hz de diferencia aproximadamente debido a la variación del factor de participación de masa en el plano del impulsor que es mínimo.
- Igual que el caso anterior, las frecuencias torsionales de las paletas por separado vuelven a aparecer y con valores muy cercanos; sin embargo, en los modos 10 y 11 se deforman solamente las opuestas con un desfase de 180 grados. Nuevamente en este tipo de formas de vibrar, se puede apreciar como la frecuencia natural de un componente por separado puede predominar en el comportamiento dinámico del sistema.
- Por último, el modo 12, que en realidad es uno de los que pertenecen al primer armónico de la paleta, muestra nuevamente como afecta, de manera predominante, la frecuencia aislada de estos componentes en los valores de las frecuencias naturales del conjunto.

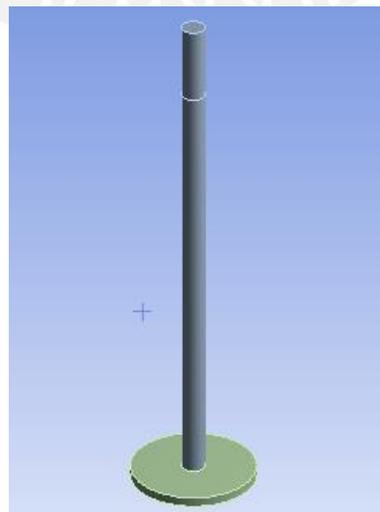
Cabe resaltar que en las estructuras es común obtener dos modos con la misma forma y frecuencia pero que ocurren en direcciones ortogonales y, debido a que están en planos perpendiculares, son linealmente independientes y por lo tanto suceden de forma distinta. Estos casos (por ejemplo el 2 y 3), que analíticamente se pueden encontrar como uno solo, es necesario diferenciarlos y considerarlos como modos distintos para que más adelante, cuando intervenga la velocidad rotacional en la cual predominan el efecto giroscópico y coriolis, se vea cómo afectan estos fenómenos a las frecuencias. Por otro lado, se puede apreciar que a lo largo de todos los resultados encontrados, los modos de

vibrar y las frecuencias naturales en los álabes aislados se superponen, reemplazan, absorben o combinan, formando así el comportamiento dinámico del nuevo sistema de tal manera que, de ser posible, se simplificaría, sabiendo cuales son las frecuencias de interés o cuánto repercuten en el estudio realizado.

#### 4.3 El eje-rotor simplificado

Luego de haber definido las frecuencias intrínsecas al impulsor y al comportamiento de los álabes, el estudio se centra en analizar todo el agitador en conjunto; sin embargo, hay que recalcar una diferencia fundamental entre los dos casos que se estudian a continuación: el agitador en su verdadera magnitud, que incluye al eje e impulsor, y la simplificación definida anteriormente por el eje y un disco que cuenta con la misma masa y momento de inercia angular.

El caso simplificado se utiliza normalmente en la rotodinámica para visualizar el comportamiento de los componentes rotativos frente a diferentes velocidades de operación; además permite determinar las frecuencias principales dado que el disco es una equivalencia que participa en lugar del impulsor, dejando de lado la influencia de los álabes, para poder obtener resultados generales que normalmente son suficientes para algunas circunstancias, como modos o deformaciones torsionales, axiales y de flexión. El modelo del agitador completo se utiliza para visualizar cuales frecuencias se desplazan, cuales aparecen, como se comportan todos los álabes, etc. Sin embargo, este tema se desarrolla más adelante.



**Figura 24.** Geometría del agitador simplificado a un eje - disco.

En esta parte, la geometría se tiene que modelar como si fuera un solo elemento, haciendo indiferencia del contacto entre estos dos componentes, y es que, si bien un caso real implica verdaderas dimensiones incluyendo el montaje, la transmisión y el contacto entre estos, es de mucha ayuda cuando se trabaja con elementos finitos simplificar parámetros generales de tal manera que se pueda ahorrar tiempo computacional; además, hay que hacer una evaluación de las simplificaciones según el estudio que se esté realizando para que los resultados no varíen demasiado. Como se puede apreciar en la figura 24, la geometría está dividida en dos sólidos y si se envía el modelo al *Mechanical* directamente para la simulación, es seguro que se creen contactos automáticos y eso es exactamente lo que se quiere evitar, ya que los contactos no generan interconexión nodal, y lo que se desea es que se analice como si fuera un solo cuerpo, lo cual, al momento de mallar generaría dicha interconexión que haría coincidir los nodos de un componente con el otro, mejorando los resultados. En otras palabras, cuando se malla como un solo cuerpo los nodos coinciden mientras que cuando se malla por separado no necesariamente sucede la coincidencia, peor aún si un cuerpo tiene una malla mucho más densa que la del otro, y es que cuando se trabaja con elementos finitos se tiene que hacer una interpolación nodal y si la separación entre estos es muy marcada hay un arrastre de error. Si bien lo mencionado puede ser considerable según sea la situación, para efectos prácticos se utiliza el comando “*Form new part*” y evitamos cualquier tipo de inconvenientes en cuanto a la interacción entre componentes y todo vendría a conformar un nuevo sólido. Como la malla viene a ser de la misma manera que en las etapas anteriores, se procede a ingresar las condiciones de borde que nuevamente son dos: estático o rotacional.

Como en los casos previos, al considerar un análisis estático, se restringe con un empotramiento que impide el movimiento todos los grados de libertad, en este caso, en la sección transversal del eje. De la misma manera, se utiliza el método “*Block Lanczos*” y se obtienen los resultados de los 12 primeros modos que se muestran en la tabla 8.

Modo	Frecuencia (Hz)	Deformación
1 - 2	32.18 - 32.18	
3	219.48	
4 - 5	263.80 - 263.80	
6 - 7	716.71 - 716.79	
8 - 9	1234.20 - 1234.60	
10	1368.10	
11 - 12	2011.20 - 2011.70	

**Tabla 8.** Frecuencias naturales del eje-rotor simplificado y sus modos.

En términos generales, se puede observar cómo un componente de dimensiones y masa pequeñas, se puede disgregar en varios grados de libertad obteniendo modos complejos como el 11 y 12 aunque a frecuencias muy altas; no obstante, como se menciona anteriormente, solo se extraen con fines comparativos. Los resultados muestran observaciones interesantes que se pueden mencionar para que más adelante sea más digerible la comparación:

- Los dos primeros modos, son los más predecibles y tal vez los más importantes, ya que son los que en la operación podrían presentarse con mayor facilidad (se estaría hablando alrededor de 1800 rpm). El tipo de deformación o modo es de flexión a una frecuencia de 32.18 Hz, la cual se calcula analíticamente más adelante.
- El modo 3 es el referente a la torsión del agitador teniendo en cuenta que se encuentra empotrado; de esta manera, si se asume un desplazamiento torsional se puede apreciar que los mayores desplazamientos relativos están en el disco y no en el eje (el cual cuenta con un giro nulo en el empotramiento), debido a que la frecuencia natural de este sistema viene a ser calculada a partir de una oscilación angular, resultado que cambia cuando existe una excitación a partir del eje como se verá con velocidad angular.
- Los modos 4 y 5, vendrían a ser la equivalencia del primer armónico del eje, el cual, como se puede apreciar, se deforma como si tuviera dos apoyos virtuales que se denominan nodos, los cuales hacen que más adelante se pueda simplificar el sistema a un grado de libertad de manera referencial. Obviamente la frecuencia obtenida, que está alrededor de los 263 Hz, es ya bastante alta por las condiciones del sistema, así como las demás frecuencias.
- Los casos 6, 7, 8 y 9 son los modos correspondientes al segundo armónico del eje con una diferencia en la deformación del disco tal que en los modos 6 y 7, el tercer nodo está en el mismo disco mientras que en el 8 y 9 está un poco desplazado hacia el eje haciendo que el disco gire en sentido contrario al de los casos anteriores y por ello la frecuencia es mayor; además se puede apreciar que mientras en los primeros hay tres nodos, en los modos 8 y 9 hay 4.
- El décimo modo de vibración es el que corresponde al desplazamiento axial, de forma que el eje se comporta como un resorte y debido a las masas pequeñas comparadas con la rigidez de nuestro sistema, la frecuencia ya está en 1368.10 Hz, la cual es calculada analíticamente más adelante.
- Los últimos dos modos obtenidos no son más que la proyección del tercer armónico sobre el eje e implica que, si parte del estudio se centraba en obtener más frecuencias, se hubieran tenido  $n$  modos armónicos a mayores frecuencias.

Como se ha podido observar, las deformaciones se centran en el eje como armónicos y en el disco como lo que se denomina “el cabeceo”. Estas frecuencias, principalmente las primeras, son de vital importancia cuando se requiere ver el comportamiento de los elementos de máquinas rotativos; sin embargo, este desarrollo se lleva a cabo como si fuera estático cuando en realidad nuestro componente funciona con una velocidad angular.

#### 4.4 Obtención del Diagrama de Campbell

Como se mencionó anticipadamente, haber simplificado nuestro sistema a un cilindro no solo nos permite visualizar el comportamiento de manera general del impulsor junto con el eje, sino que nos ayuda a simplificar la simulación de manera considerable, permitiéndonos utilizar mejor las herramientas de ANSYS Mechanical (como los sistemas de referencia), así como poder obtener analíticamente las frecuencias de manera más sencilla debido a su configuración en comparación con la del impulsor; además, debido a las características de los álabes, estos siempre responden a frecuencias más elevadas que todo el conjunto, lo cual es demostrado más adelante. Por todo esto, es práctica usual, cuando se estudia rotodinámica a través de elementos finitos, proceder con un rotor equivalente en forma de un disco o cilindro.

Cuando el estudio ya no es estático sino que tiene una velocidad rotacional, cambian muchas cosas respecto al “Set Up” anterior (Véase la figura 25).

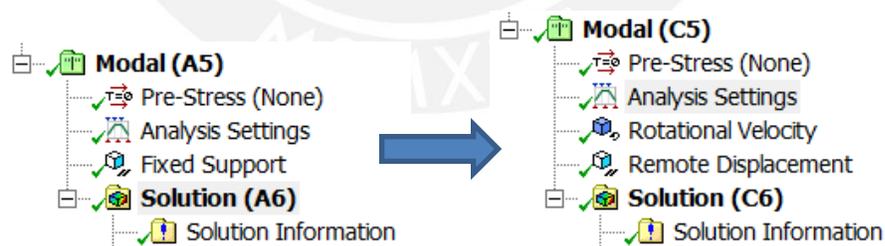


Figura 25. Inserción de la velocidad rotacional en el análisis modal.

- Lo primero que se debe que tomar en cuenta es que, como nuestro componente a analizar es axisimétrico, se puede utilizar un sistema de referencia estacionario.
- Al utilizar el sistema de referencia estacionario, se tiene que dejar libre el grado de libertad axial para que el agitador pueda girar. Esto se obtiene ya no con la restricción “*Fixed Support*” en la sección del eje sino con “*Remote Displacement*”

que permite restringir desde un punto determinado cualquiera de los 6 grados de libertad, dejando libre en este caso el eje Y.

- La velocidad rotacional se agrega en cualquier dirección y cuerpo que se desee; no obstante, cuando se va a extraer el diagrama de Campbell, como en esta ocasión, se tienen que ingresar los valores de la velocidad angular a través de una tabla conocida como “*Tabular data*” (Figura 26).

Tabular Data				
	Points	<input checked="" type="checkbox"/> X [rpm]	<input checked="" type="checkbox"/> Y [rpm]	<input checked="" type="checkbox"/> Z [rpm]
1	1	0.	1.	0.
2	2	0.	350.	0.
3	3	0.	900.	0.
4	4	0.	1800.	0.
5	5	0.	2700.	0.
*				

Figura 26. Tabla para ingresar los valores de las velocidades rotacionales.

- En los detalles de configuración “*Analysis Settings*” se cambia lo siguiente (Figura 27):
  - Extraemos la cantidad de modos que sea necesaria para realizar el diagrama de Campbell, en este caso 10 serían suficientes.
  - Como hay velocidad de giro se tiene que activar el amortiguamiento, para luego poder activar el efecto coriolis.
  - Se tiene que activar la opción que permite almacenar las soluciones complejas dado que se está trabajando con amortiguamiento.
  - En este caso ya no se utiliza el método directo “*Block Lanczos*” sino el que normalmente es usado para estudios de rotodinámica: “*Reduced Damped*”.
  - Por último, se activa la pestaña del “*Campbell Diagram*” para las 5 velocidades que hemos ingresado.

Details of “Analysis Settings”	
<input checked="" type="checkbox"/> <b>Options</b>	
Max Modes to Find	10
Limit Search to Range	No
<input checked="" type="checkbox"/> <b>Solver Controls</b>	
Damped	Yes
Solver Type	Reduced Damped
Store Complex Solution	Yes
<input checked="" type="checkbox"/> <b>Rotordynamics Controls</b>	
Coriolis Effect	On
Campbell Diagram	On
Number of Points	5
Mode Reuse	Program Controlled

Figura 27. Cambios en los ajustes del análisis.

Luego de haber modificado todo el “Set Up” se manda a simular, obteniendo cada una de las frecuencias para los 10 primeros modos, evaluadas en todas las velocidades rotacionales establecidas como se muestran en la tabla 9.

Modo	Frecuencia (Hz)				
	1	350	900	1800	2700
1	32.124	32.09	32.035	31.945	31.855
2	32.125	32.16	32.214	32.304	32.393
3	263.33	262.72	261.75	260.16	258.55
4	263.34	263.95	264.9	266.46	267.99
5	715.76	713.77	710.61	705.45	700.31
6	715.8	717.79	720.96	726.14	731.31
7	1232.8	1230.7	1227.4	1222	1216.8
8	1233.1	1235.2	1238.7	1244.6	1250.8
9	1367.2	1367.2	1367.2	1367.2	1367.2
10	1449.7	1449.7	1449.7	1449.7	1449.7
<b>RPM</b>	<b>1</b>	<b>350</b>	<b>900</b>	<b>1800</b>	<b>2700</b>

Tabla 9. Variación de las frecuencias naturales con respecto a la velocidad de rotación.

Con estos resultados, se puede obtener el diagrama de Campbell directamente desde ANSYS; no obstante, para visualizar y maniobrar mejor el gráfico, se realiza en Excel como se muestra en la figura 28.

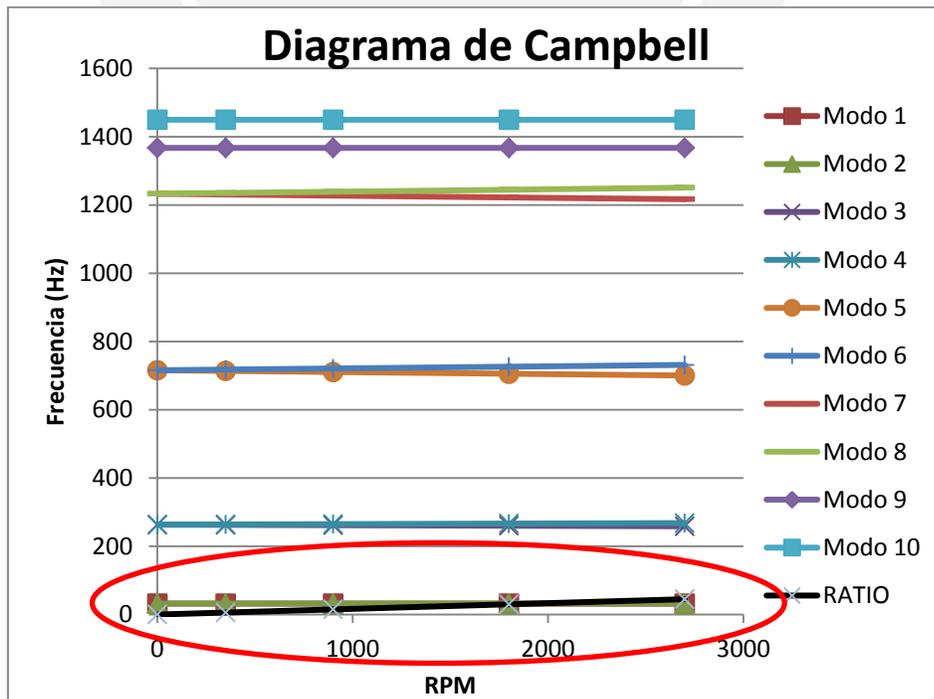


Figura 28. Diagrama de Campbell del eje-rotor simplificado.

En términos generales, podemos ver el comportamiento de las frecuencias naturales a lo largo de las rpm del agitador. Hay modos como el 9 o 10 que no cambian conforme aumenta la velocidad angular mientras que todos los demás, los que tienen una forma de vibrar exactamente igual pero en un plano perpendicular, muestran una variación. Lo que sucede es que, en un sistema rotativo, una cosa es la dirección de rotación de la estructura y otra es la dirección de rotación de la vibración, las cuales pueden ocurrir en la misma dirección o en sentidos opuestos, todo esto ocasionado por el efecto giroscópico del rotor que se esté analizando; es por ello que la suma de estos dos efectos son distintos, pueden ocurrir por separado y, por lo tanto, ambos deben ser considerados. Por otro lado, se puede visualizar que para dos modos que parten desde el mismo valor a 0 rpm, una frecuencia aumenta mientras la otra disminuye, y si se visualiza el movimiento de cada par de modos, la vibración que va en contra al sentido de rotación disminuye mientras que la que va en el mismo sentido aumenta. El hecho de que la frecuencia de un determinado modo aumente o disminuya se debe a la suma de los efectos de la vibración y la rotación cuando se producen en la misma dirección o en sentidos opuestos.

En el figura 28, se puede ver también la recta con nombre RATIO, la cual es la razón unitaria entre las rpm y la frecuencia (el mismo valor pero con cambio de unidades); por tanto, la intersección de cualquiera de las curvas halladas con dicha recta vendrían a ser las velocidades críticas. Para mejorar la visualización de esto, se hace un acercamiento en la zona de interés que se encuentra encerrada dentro de la elipse, obteniendo la figura 29.

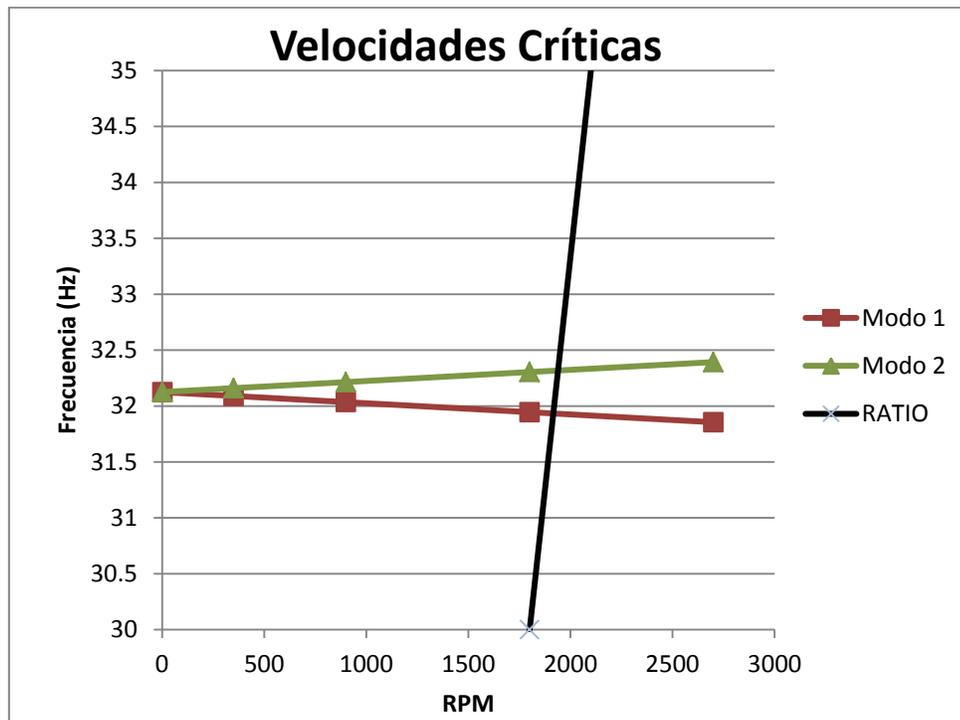


Figura 29. Diagrama de Campbell para las primeras frecuencias.

En el gráfico, se ve el eje vertical desde los 30 Hz y se puede determinar a partir de las intersecciones que las dos velocidades críticas son 1916 y 1939 rpm para los modos 1 y 2, respectivamente. Obviamente estos valores, aparte de ser lejanos de la velocidad de operación, se van separando a una tasa muy baja debido a las condiciones de nuestro sistema; en otras palabras, un aumento de la longitud del eje o disminución del diámetro, o un mayor peso del impulsor harían variar en mayor grado dicha separación, lo cual no ocurre en este caso debido a que nuestro componente de estudio es bastante compacto.

Otra de las cosas que se pueden apreciar es que el modo de deformación axial (modo 9), no disminuye ni aumenta porque la forma de vibrar es independiente del efecto giroscópico y, por tanto, de las rpm. Por último, el modo 10 que corresponde al torsional, aumenta su frecuencia de excitación abruptamente hasta los 1449.7 Hz de manera constante (en el escenario estático la frecuencia del modo torsional era de 219.48 Hz) y esto se debe básicamente a la rigidización del eje debido al cambio de modo de vibración generado por la rotación, para focalizarse en la deformación torsional del eje y casi nada en el desplazamiento angular del impulsor, debido a que ahora la inducción del movimiento viene desde la sección transversal. El nuevo modo torsional se muestra en la figura 30.

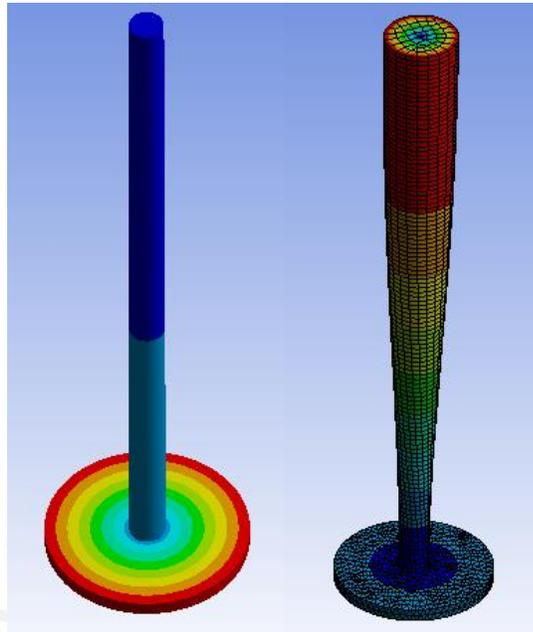


Figura 30. Modo torsional empotrado y con velocidad de rotación.

## 4.5 El eje-impulsor

### 4.5.1 Simulación estática

En esta etapa se simula el agitador completo siguiendo la misma metodología antes mencionada como el mallado, la unión de la geometría para modelarlo como un solo sólido y evitar contactos, y las dos fases muy importantes: estático y rotacional. Ahora que se considera el impulsor en su verdadera magnitud se van a ver diversos modos referentes a cada uno de los modelos analizados previamente como el comportamiento del eje, el cabeceo del disco y las flexiones de los álabes. Nuevamente, si se va a realizar una simulación estática, se restringe con “*Fixed Support*” en la sección transversal del eje, además de utilizar el método para la extracción de modos “*Block Lanczos*” para cuando se utilizan matrices simétricas.

Como se ha podido notar, la información requerida en todos los “*Set Up*” estáticos es la misma, planteando siempre las mismas condiciones de borde, las cuales cambian solamente cuando el escenario es rotacional. En la tabla 10, se pueden apreciar los 12 primeros modos incluyendo los ortogonales, igual que en los casos anteriores.

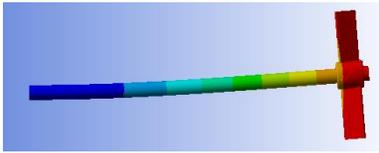
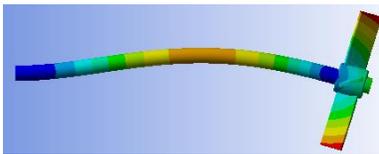
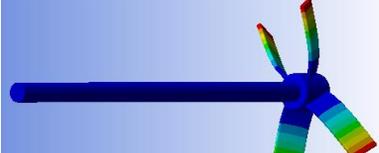
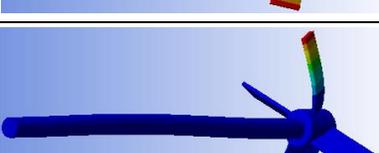
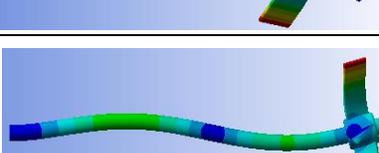
Modo	Frecuencia (Hz)	Deformación
1 - 2	33.07 - 33.07	
3	211.03	
4 - 5	261.53 - 261.53	
6	531.16	
7 - 8	543.45 - 543.65	
9 - 10	772.85 - 772.88	
11	874.31	
12	1403.20	

Tabla 10. Frecuencias y modos del eje-impulsor.

Luego de observar los modos con sus respectivas frecuencias y deformaciones relativas se pueden agregar los siguientes comentarios específicos:

- Las primeras dos frecuencias de 33.07 Hz, que no son más que las mencionadas con anterioridad referentes a la flexión del eje, obedecen a la misma deformación del agitador simplificado con una diferencia de 0.89 Hz, haciendo que el disco sea una simplificación válida para estos modos (estos son los equivalentes a los dos primeros de la tabla 8). La explicación radica en que, si se aprecian ambas imágenes, el eje es el que se flexiona mas no hay movimiento relativo en el disco o impulsor; en ambas imágenes se puede visualizar que todo el impulsor se mantiene en rojo de manera uniforme, por ser el mayor desplazamiento relativo, por lo tanto, el hecho de que la misma masa sea la que está a un extremo nos da un valor muy bueno en la aproximación.
- El segundo modo es el torsional y este presenta una frecuencia de 211.03 Hz, 8.45 Hz menor que la equivalente en la tabla 8; no obstante, existe una explicación que se centra en los álabes. Cuando se visualiza el movimiento del modo 2 en el disco, se puede notar que la deformación torsional la absorbe el eje, mientras que el disco se limita simplemente a rotar (un grado de libertad); sin embargo, cuando se visualiza el comportamiento del impulsor minuciosamente, los álabes se flexan un poco, respecto al giro del rotor, debido a la inercia de estos, haciendo que el modo varíe y, por ende, la frecuencia cambie.
- Los modos 4 y 5 nuevamente son iguales a los casos 4 y 5 de la simplificación, dejando una diferencia entre frecuencias de 2.27 Hz. Este valor y la comparación de ambos modos nos demuestra que la aproximación es buena; sin embargo, hay que resaltar que mientras el disco tiene su masa distribuida a lo largo de su volumen, el agitador la tiene distribuida en el cubo y en las paletas, los cuales afectan al factor de participación de masa en el plano en que se esté realizando el modo. Para estos modos, la diferencia entre frecuencias no fue muy marcada dado que la forma de vibrar no es tan compleja empero cuando sean más complicados (segundo o tercer armónico) el efecto de participación de masa cambiará y variará las frecuencias en mayor grado.
- El sexto modo en el agitador es exactamente el mismo, y a la misma frecuencia de 531 Hz, que el cuarto modo solo del impulsor en la tabla 7, demostrando que no importa el cambio dimensional del componente estudiado sino el comportamiento y

la participación en determinado modo; es decir, en dicha forma de vibrar del impulsor el eje ni se inmuta, pudiendo variar su longitud hasta cero sin alterar la frecuencia que es intrínseca al impulsor.

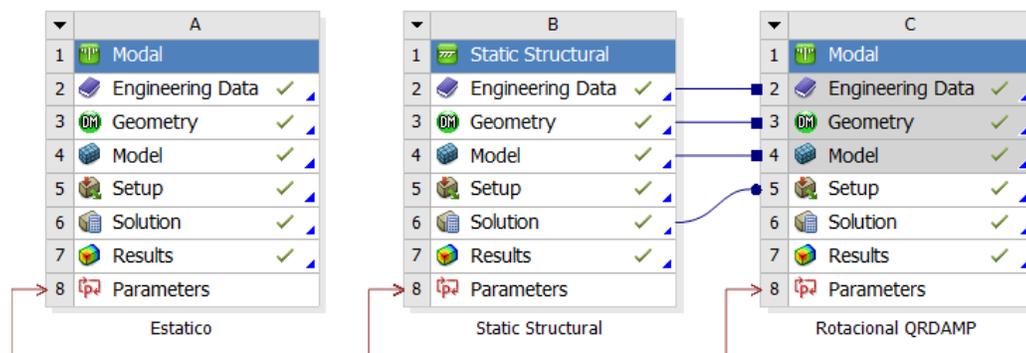
- Para los casos 7 y 8, la situación es muy parecida pero con ciertas variantes. Si bien estos modos son los mismos que los que se ven en el impulsor por separado (2 y 3 de la tabla 7), presentan una variación de aproximadamente 17 Hz y es que, cuando se visualiza el movimiento detalladamente, al ser la forma de vibrar no simétrica como el caso anterior (modo 6), se induce un poco de movimiento en el eje haciendo que el cubo tenga un desplazamiento muy pequeño en sentido contrario al de los álabes, disminuyendo la participación de la masa en ese plano.
- Los modos 9 y 10, corresponden al segundo armónico del eje que también se presentan en el caso simplificado como los modos 6 y 7 de la tabla 8, dando una variación entre estos de 56 Hz. Ahora, como se puede notar, la diferencia es más marcada por la masa efectiva en el plano en el que se da el modo, la cual varía en mayor grado debido al cambio en la geometría, y por ello la aproximación es menos precisa a mayores frecuencias.
- El modo 11 es el que combina una frecuencia torsional del disco, en este caso el cubo del impulsor, con la flexión de los álabes al mismo tiempo. Esta es más alta que la torsional del modo 2, ya que la matriz de rigidez aumenta por la flexión de los álabes, cuya frecuencia es alta, llegando a 874 Hz.
- El último modo es parecido al modo 12 del caso del disco pero con una diferencia de 169 Hz y es que, a parte de la masa efectiva que actúa en dicho plano, los 4 nodos que se pueden apreciar no tienen la misma distribución que en el otro caso, debido al cambio geométrico, variando considerablemente la frecuencia.

En términos generales, se puede apreciar cómo algunas frecuencias tienen correlación con la simplificación, otras con las del impulsor, que a su vez dependen de las frecuencias de los álabes, otras que son equivalentes pero que se ven afectadas por las nuevas características geométricas y otras que se combinan. Se aprecia también cómo algunos modos desaparecen siendo reemplazados mientras que en otros las frecuencias solo se desplazan; por lo tanto, en ciertas ocasiones, es de considerable importancia encontrar y visualizar estos efectos que no son diferentes a los principios que se aplican como absorsores en la práctica de la ingeniería.

#### 4.5.2 Simulación con velocidad rotacional

Debido a las condiciones que se tienen en esta fase, es difícil afrontar este tipo de problemas dado que empiezan a surgir límites en cuanto a la herramienta computacional. Se sabe que se tienen dos sistemas de referencia para realizar la simulación: estacionario y rotacional; no obstante, ninguno de los dos nos puede dar resultados exactos aunque sí bastante aproximados, y por ello se verán los resultados rápidamente.

El primer caso es cuando utilizamos el sistema de referencia estacionario, el cual es recomendado para estructuras axisimétricas, y el “*Set Up*” se define exactamente de la misma manera como el realizado con el caso simplificado con velocidad angular; es decir, mismas condiciones de borde, mismas restricciones, mismo método de extracción de modos, etc. El arrastre de error aparece a partir de que el agitador con sus dimensiones reales no es axisimétrico, y por ello el método de extracción de modos en la plataforma del análisis modal no considera muy bien los efectos giroscópicos tal y como deberían ser. El segundo caso es un poco más complejo, dado que se tienen que realizar dos etapas: una estructural y otra modal (Ver figura 31).



**Figura 31.** Pasos para la simulación con sistema de referencia rotacional.

Cuando se utiliza un sistema de referencia rotacional, los efectos de velocidad angular del componente y el efecto coriolis se tienen que ingresar mediante comandos APDL en la plataforma “*Static Structural*” considerando un apoyo empotrado como en los casos iniciales, debido a que ahora el sistema de referencia es el que rota y el eje tiene que estar fijo al sistema, y de esta manera se consideran los efectos inerciales. Luego en la plataforma “*Modal*”, con este paso previo, solo es necesario ingresar mediante otro comando APDL el solver a utilizar y la extracción de modos. Visto desde el *Mechanical* se obtendría lo que se muestra en la figura 32.

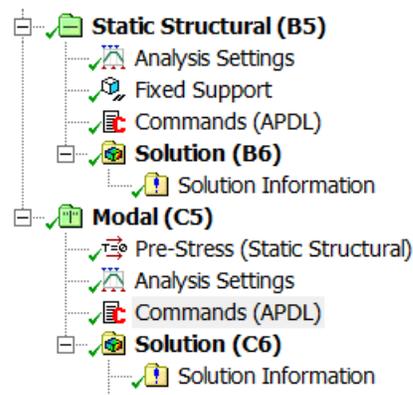


Figura 32. Se deben insertar comandos tanto en el estructural como el modal.

En donde el primer comando insertado en el “*Static Structural*” es:

<code>coriolis, yes, , , no, no</code>	(Permite activar el efecto coriolis para un sistema de referencia rotacional)
<code>omega, , 36.6519</code>	(Permite activar la velocidad rotacional en el eje Y en rad/s, ingresando el valor de 350 rpm)

Mientras el otro comando que esta insertado en el “Modal” es:

<code>modopt, qrdamp, 13, , , on</code>	(Set up mediante código del análisis modal que permite determinar el solver o método, en este caso QRDAMP, los 13 modos a calcular y la inclusión de las soluciones complejas)
<code>mexpand, 13</code>	(Especifica el número de modos a expandir para visualizarlos)

El problema de utilizar el sistema de referencia rotacional es que, al insertar la velocidad angular en la parte estructural, los efectos no son los mismos sobre las deformaciones torsionales por el hecho de ser diferentes las condiciones de borde entre “*Fixed Support*” y “*Remote Displacement*”, y es que en realidad los modos cambian, como se puede apreciar en la tabla 11.

Modo	Estático	Dinámico	
	LANB	QRDAMP Sta. Ref.	QRDAMP Rot. Ref.
	Frecuencia (Hz)		
1	33.07	32.98	32.56
2	33.07	33.05	32.56
3	211.03	260.47	211.03
4	261.53	261.69	261.48
5	261.53	531.16	261.48
6	531.16	543.10	531.19
7	543.45	543.77	543.48
8	543.65	770.96	543.68
9	772.85	772.62	772.84
10	772.88	803.71	772.87
11	874.31	1399.40	874.35
12	1403.20	1403.20	1403.20
13	1403.20	1501.80	1403.20

**Tabla 11.** Frecuencias del eje-impulsor con velocidad rotacional para dos sistemas de referencia distintos.

En la tabla 11, se pueden ver 3 escenarios diferentes que son el estático (resuelto con el método *Block Lanczos* y la condición de empotramiento), el dinámico con sistema de referencia estacionario (resuelto con el método *Reduced Damped* y el desplazamiento angular libre en el eje axial) y el dinámico con sistema de referencia rotacional (resuelto con el método *Reduced Damped* y la condición de empotramiento), los cuales presentan una serie de frecuencias que tienen las siguientes características:

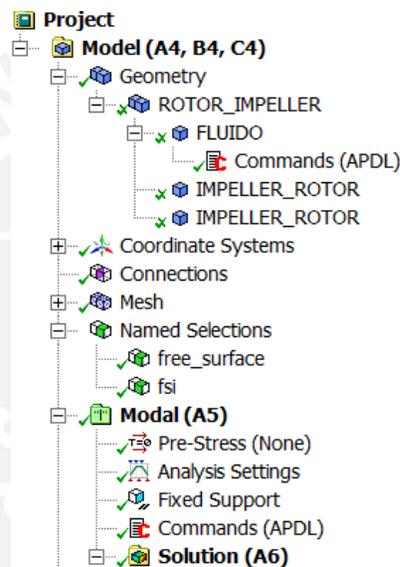
- La simulación estática nos sirve para solamente para comparar los efectos, ya que fue desarrollada en etapas previas.
- Los dos casos dinámicos se simularon a 350 rpm solo para fines comparativos.
- Igual que en el caso de la simplificación, todas las frecuencias siguen la misma relación excepto las torsionales. Se puede visualizar que todos excepto los modos 3 y 11 están alrededor de sus valores referenciales.
- Para el escenario con sistema de referencia estacionario, una frecuencia disminuye, mientras otra aumenta siguiendo la misma tendencia que el caso simplificado (Si se van aumentando las rpm la diferencia se hace más marcada).
- Para el escenario con sistema de referencia rotacional, esta diferencia no es tan perceptible debido a que no está orientado a realizar el diagrama de Campbell, a diferencia del estacionario, sino para ver los efectos inerciales por la rotación.

- El modo 3 de 211.03 Hz pertenece a una forma de vibrar torsional en la que no participa la flexión en los álabes. Como se puede apreciar, en el sistema de referencia estacionario se incluye el cambio del modo por la velocidad rotacional y el efecto en la rigidez (uno se basa en el desplazamiento angular del impulsor mientras que el otro en la deformación del eje casi sin movimiento del impulsor), y por ello la frecuencia sube hasta 1501.80 Hz. En cambio, con el otro sistema el modo se mantiene aunque se incluyan los efectos inerciales por la rotación, dándonos el valor de la frecuencia alrededor de los valores estáticos. Es por ello que las simulaciones con sistemas de referencia rotacional son utilizadas cuando se comparan diferentes diseños o modelos para poder visualizar cambios considerables en las frecuencias naturales.
- Con el modo 11 a 874.31 Hz, cuya deformación torsional incluye flexión de los álabes, sucede exactamente lo mismo que con el modo 3 con la diferencia de que en el segundo escenario la forma de vibrar no cambia considerablemente por la presencia de los álabes; aun así, este valor sigue siendo aproximado por las limitaciones del sistema de referencia estacionario frente a estructuras no axisimétricas.

Por todo lo mencionado, se puede decir que el caso estático tiene los valores de las frecuencias bien establecidas y sin ningún inconveniente, mientras que los otros dos casos son netamente referenciales, uno por la limitación de la geometría que debe ser axisimétrica (*Stacionary Reference*) y otro por que considera los efectos inerciales y es usado normalmente con fines comparativos debido a sus condiciones de borde (*Rotational Reference*); sin embargo, es bueno mostrar este tipo de resultados para conocer los límites de la herramienta utilizada en estos enfoques y poder orientar este tipo de trabajos a través de simplificaciones o simulaciones en paralelo como se ha venido realizando.

#### 4.6 Análisis sumergido en agua

Cuando se va a simular una estructura sumergida, se deben tener en cuenta consideraciones que en los casos previos no se han desarrollado, desde la geometría hasta el solver y es que la interface de *ANSYS Mechanical*, con las opciones que tiene, cuando se quiere realizar este tipo de estudios no es suficiente y se debe recurrir a comandos APDL para completar las condiciones de la simulación. En la figura 33, se muestra el “Setup” dentro del Mechanical con los procedimientos de manera esquemática para realizar este tipo de simulaciones.



**Figura 33.** Es necesario insertar comandos APDL tanto la geometría como en el análisis modal.

La geometría del proyecto ahora cuenta con un volumen adicional que es el del fluido, el cual es el volumen interno del tanque menos el del agitador (disco o impulsor); este, al igual que en los casos anteriores, no debe presentar contacto con ninguna de las otras dos partes porque la interacción fluido-estructura es definida mediante comandos; en otras palabras, es necesario utilizar la opción “*Form new part*” a pesar de tratarse de un fluido y una estructura, para poder realizar este tipo de simulación. Luego, hay que tener en cuenta que en *ANSYS Mechanical* todos los materiales a simular son por defecto *Structural Steel* y por ello al componente llamado “FLUIDO” se le tienen que cambiar las propiedades del material a través de un comando, además de definir ciertas características de los elementos. Lo que realiza el primer comando, que se encuentra dentro del componente FLUIDO, es borrar todas las propiedades del material de ese componente para luego definir nuevas propiedades según el fluido que se está utilizando

(en este caso el agua). Luego de haber definido las propiedades, se deben seleccionar los tipos de elementos a utilizar para esta situación como los elementos acústicos (FLUID220 y FLUID221) con sus respectivas características que nos permiten simular el efecto de un fluido sobre una estructura. El comando APDL con la explicación de los códigos es el siguiente:

<code>mpdele,all,matid</code>	<i>(Borra todas las propiedades lineales del material)</i>
<code>mp,dens,matid,998.2</code>	<i>(Define la densidad del material en kg/m<sup>3</sup>)</i>
<code>mp,sonc,matid,1483</code>	<i>(Define la velocidad del sonido del material en m/s)</i>
<code>mp,visc,matid,0.001002</code>	<i>(Define la viscosidad del material en kg/m.s)</i>
<code>et,matid,221</code>	<i>(Define el elemento FLUID221-Tetraedro)</i>
<code>keyo,matid,2,1</code>	<i>(Elementos sin características FSI)</i>
<code>et,matid+1,220</code>	<i>(Define el elemento FLUID220-Hex/Prisma/Tetra)</i>
<code>keyo,matid+1,2,1</code>	<i>(Elementos sin características FSI)</i>

La malla a utilizar es la que se determinó en la sección de mallado incluyendo los *inflations* para la zona de interface entre el fluido y la estructura (Fluid-Structure Interaction o FSI) y la superficie libre del fluido. Por otro lado, para esta parte es necesario generar *Named Selections* que permiten realizar agrupaciones de todo tipo de componentes y así poder darles ciertas condiciones o características a lo largo de la simulación; por ello se crean dos, uno con el nombre de *fsi* para las superficies del fluido que están en contacto con el componente (o el cuerpo del disco según sea el caso) y otro con el nombre de *free\_surface* para la superficie del fluido que está libre.

La simulación se realiza de manera estática con la condición de empotramiento al igual que en los casos anteriores mediante la opción “*Fixed Support*” y todo lo demás, incluyendo el “*Set Up*” del análisis modal, se realiza mediante un comando APDL. El segundo comando, que se encuentra dentro del análisis modal, sirve para cambiar los elementos y sus características en las diferentes interfaces, así como la cantidad de modos a extraer y el solver a utilizar como se muestra a continuación:

<code>/prep7</code>	<i>(Nos establece en la interface del preprocesador)</i>
<code>*get,ntype,etyp,,num,max</code>	<i>(Consigue el máximo número de elementos y nombra el parámetro como ntype)</i>
<code>ntype = ntype + 1</code>	<i>(Redefine el parámetro ntype)</i>
<code>et,ntype,220</code>	<i>(Define el elemento ntype como FLUID220)</i>
<code>keyo,ntype,2,0</code>	<i>(Elementos con características FSI)</i>

<code>cmsel,s,fsi</code>	<i>(Selecciona los nodos del named selection fsi)</i>
<code>esln</code>	<i>(Selecciona los elementos ligados a los nodos activos)</i>
<code>nsle</code>	<i>(Selecciona los nodos ligados a los elementos activos)</i>
<code>esel,r,ename,,220</code>	<i>(De los elementos activos selecciona los elementos FLUID220)</i>
<code>emodif,all,type,ntype</code>	<i>(Modifica los elementos seleccionados a ntype que son FLUID220 con características FSI)</i>
<code>cm,efsi,elem</code>	<i>(Crea el conjunto de elementos de FSI con nombre efsi)</i>
<code>allsel</code>	<i>(Selecciona todo)</i>
<code>cmsel,s,free_surface</code>	<i>(Selecciona los nodos del named selection free_surface)</i>
<code>esln</code>	<i>(Selecciona los elementos ligados a los nodos activos)</i>
<code>nsle</code>	<i>(Selecciona los nodos ligados a los elementos activos)</i>
<code>esel,r,ename,,220</code>	<i>(De los elementos activos selecciona los elementos FLUID220)</i>
<code>cm,efree,elem</code>	<i>(Crea el conjunto de elementos de la superficie libre con nombre efree)</i>
<code>allsel</code>	<i>(Selecciona todo)</i>
<code>/solu</code>	<i>(Nos establece en la interface del solucionador)</i>
<code>cmsel,s,fsi</code>	<i>(Selecciona los nodos del named selection fsi)</i>
<code>cmsel,s,efsi</code>	<i>(Selecciona los elementos de FSI)</i>
<code>sf,all,fsi</code>	<i>(Especifica las cargas superficiales en los nodos seleccionados para FSI)</i>
<code>allsel</code>	<i>(Selecciona todo)</i>
<code>cmsel,s,free_surface</code>	<i>(Selecciona los nodos del named selection free_surface)</i>
<code>cmsel,s,efree</code>	<i>(Selecciona los elementos de la superficie libre)</i>
<code>sf,all,free</code>	<i>(Especifica las cargas superficiales en los nodos seleccionados para la superficie libre)</i>
<code>allsel</code>	<i>(Selecciona todo)</i>
<code>modopt,unsym,12,,,on</code>	<i>(Set up mediante código del análisis modal que permite determinar el solver o método, en este caso UNSYM que es recomendado para estructuras sumergidas, los 12 modos a calcular y la inclusión de las soluciones complejas)</i>
<code>mxpand,12</code>	<i>(Especifica el número de modos a expandir para visualizarlos)</i>

Cabe resaltar que las demás superficies del fluido que no se incluyen en el set up (las que están en contacto con el tanque) se consideran en contacto con superficies rígidas por defecto de los elementos acústicos.

#### 4.6.1 Eje-rotor simplificado

A partir de dicho procedimiento, se pueden determinar las nuevas frecuencias de los componentes que se estén analizando, los cuales son los dos casos ya determinados con anterioridad: el agitador con impulsor y el simplificado con un disco. Es por ello que se realizan dos simulaciones en paralelo para determinar la influencia de un fluido, en este caso el agua, sobre el comportamiento vibracional; es decir, sobre las frecuencias naturales del sistema y los modos de vibración, afectando a la masa, en diferente magnitud y forma según cual sea el diseño de nuestro sistema. En la figura 34, se aprecia el modelo del agitador simplificado con el volumen negativo del tanque.

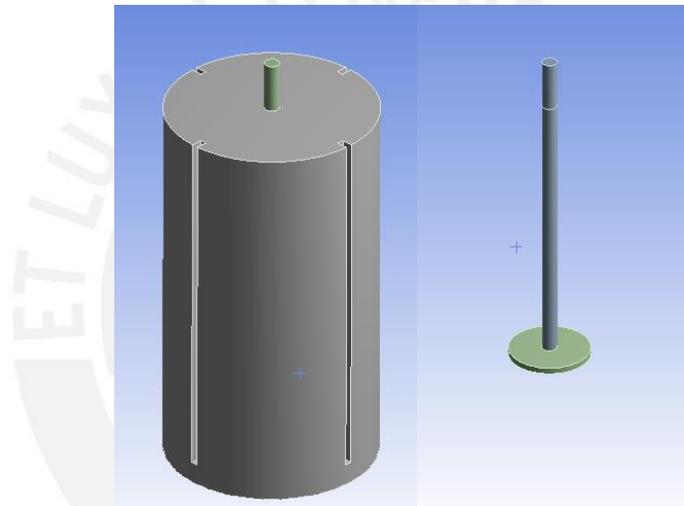


Figura 34. Simplificación y fluido (negativo del tanque).

Luego de realizar la simulación y extraer los 12 primeros modos, se pueden comparar los resultados obtenidos con el análisis modal que se realiza sin ningún comando, el cual, dicho sea de paso, es una simulación en vacío; es decir, sin presencia de un fluido en el entorno de nuestro componente. Los modos determinados, con sus respectivas frecuencias, siguen la misma relación y tienen los mismos comportamientos; además, se aprecian la deformación axial, torsional y las frecuencias cuyos modos suceden en planos ortogonales, como se muestran en la tabla 12.

Modo	En vacío	En agua	Variación (%)
	Frecuencia (Hz)		
1	32.18	31.97	0.66
2	32.18	31.97	0.66
3	219.48	219.48	0.00
4	263.80	257.96	2.21
5	263.80	257.96	2.21
6	716.71	670.23	6.49
7	716.79	670.34	6.48
8	1234.20	1165.60	5.56
9	1234.60	1165.90	5.56
10	1368.10	1158.90	15.29
11	2011.20	1980.10	1.55
12	2011.70	1980.60	1.55

**Tabla 12.** Comparación de frecuencias naturales en vacío y sumergidas en agua del eje-rotor simplificado.

La tendencia en el comportamiento de las frecuencias es clara: todas disminuyen. La explicación se centra fundamentalmente en el efecto de la presión hidrostática del fluido sobre la estructura, generando un aporte de masa ficticio en el componente o, en otras palabras, masa virtual que se adhiere debido a la presión del líquido. Como se podía intuir, todas las frecuencias descienden en diferentes proporciones y estas dependen a su vez del modo de vibrar, a partir de los cuales se puede mencionar lo siguiente:

- Los modos que suceden en dos planos ortogonales tienen la misma variación de frecuencia como se debería de esperar.
- Los dos primeros modos, que son los de flexión en voladizo, tienen un delta de frecuencia de 0.21 Hz dando una variación porcentual de 0.66% la cual es tan baja que casi no tiene un valor trascendental sobre el comportamiento del componente.
- El tercer modo, al ser el torsional, nos muestra un resultado interesante al presentar una variable nula entre la existencia del fluido y la del vacío; sin embargo, hay que tener en cuenta el porqué de esta situación. La explicación radica en el aporte de masa ficticio generado por la presión del fluido desplazado a lo largo de la forma de vibrar; por ello, como en el modo torsional de la simplificación no se desplaza un volumen del fluido al vibrar, la frecuencia se mantiene en el mismo valor.
- Los modos 4 y 5 tienen una variación de 5 Hz que sigue siendo muy pequeña para el valor nominal de las frecuencias (disminuye en 2.21%) empero muestra que conforme la deformación es mayor, el efecto del fluido repercute en mayor grado.

- En los casos 6 y 7 ya existe una reducción de 46.45 Hz que, dentro de los 12 modos extraídos, presentan unas de las mayores variaciones porcentuales (6.5%). Esto nuevamente respalda que conforme mayor es la deformación relativa, mayor es la disminución de la frecuencia.
- Los modos 8 y 9 siguen la misma tendencia aunque ahora la frecuencia disminuyó en 68.6 Hz y la variación porcentual es de 5.56%; no obstante, hay que tener dos cosas en claro: mientras mayor sea el valor de la frecuencia en vacío menor es la variación porcentual, lo cual es muy importante saber para la operación, y mientras menor sea el desplazamiento relativo al momento de vibrar (conforme el modo es más complejo menor es la deformación) menor es el efecto del fluido y, por ende, menor el delta de frecuencia.
- El modo 10, de deformación axial, nos muestra un delta de frecuencia de 211.2 Hz, el cual representa una disminución porcentual de 15.29%. Este valor bastante elevado se debe a la cantidad de volumen que desplazaría la superficie del disco en la dirección axial, ya que hay más área donde participa la presión, la cual es mucho mayor, como se puede intuir, respecto a los otros modos.
- En los modos 11 y 12, los resultados siguen la misma tendencia solo que la variación es menor (31.1Hz) con respecto al de los casos 8 y 9 a pesar de vibrar con más grados de libertad, todo ello debido al menor desplazamiento relativo antes mencionado.

Luego de todo lo mencionado, se puede acotar de manera general que la presencia del fluido disminuye todas las frecuencias gracias al aporte de masa virtual del fluido generado por la presión hidrostática y a la variación en los desplazamientos que también se ven afectados. Además, se observa que la variación se da en diferentes proporciones que dependen del modo de vibrar, en el cual conforme más grandes son los desplazamientos, mayor es el efecto del fluido sobre las frecuencias naturales.

#### 4.6.2 Eje-impulsor

En el caso del agitador considerando el impulsor (figura 35) se puede proyectar el mismo tipo de resultados con exactamente los mismo efectos antes mencionados; no obstante, la presencia de los álabes cambian considerablemente a todas las frecuencias que involucran un desplazamiento de estos.

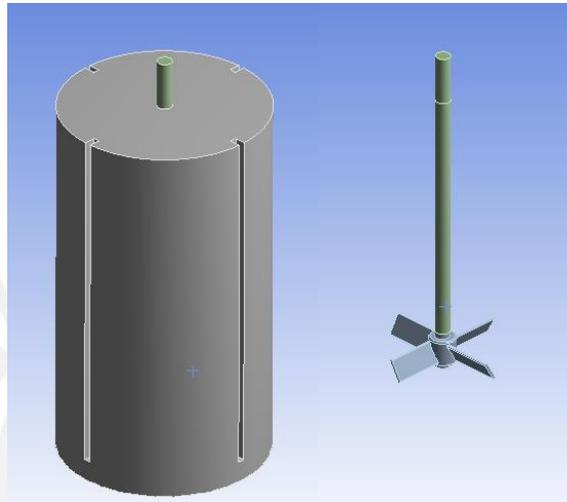


Figura 35. Eje-impulsor con el fluido.

En la tabla 13, distribuida de la misma forma que la anterior, se muestran los efectos del agua ahora sobre los modos del agitador empotrado con la variación porcentual respecto a la simulación en vacío.

Modo	En vacío	En agua	Variación (%)
	Frecuencia (Hz)		
1	33.07	31.68	4.19
2	33.07	31.68	4.19
3	211.03	175.57	16.80
4	261.53	256.33	1.99
5	261.53	256.34	1.98
6	531.16	425.00	19.99
7	543.45	456.94	15.92
8	543.65	457.07	15.93
9	772.85	763.94	1.15
10	772.88	763.99	1.15
11	874.31	808.16	7.57
12	1403.20	1393.10	0.72

Tabla 13. Comparación de frecuencias naturales en vacío y sumergidas en agua del eje-impulsor.

Según estos resultados se puede mencionar lo siguiente:

- Cuando los modos de flexión del eje suceden, los álabes, al tener una inclinación de 60 grados, van desplazando más volumen de agua que lo que desplaza la simplificación, ya que hay mayor área que viaja contra el fluido haciendo que los dos primeros modos sufran mayores efectos.
- El modo torsional obviamente muestra otro tipo de efectos. Ahora, al deformarse torsionalmente, los álabes desplazan volumen de agua, a diferencia del disco que no desplazaba nada, teniendo una variación porcentual de 16.8%.
- Los modos 4 y 5, o 9 y 10, tienen un efecto menor con respecto a sus modos equivalentes en el simplificado debido al cabeceo. Casi todos estos modos tienen un nodo que hace que el impulsor o disco cabeceen; es por ello que, cuando se produce este movimiento, la superficie del disco, que es plana y cerrada, arrastra más fluido que la del impulsor, en la que solo influye el desplazamiento de los álabes.
- Los modos 6, 7 y 8, intrínsecos a los álabes, tienen una variación notable, como se podía intuir ya que debido a su superficie, el aporte de masa ocasionada por la presión hidrostática es bastante considerable y llega a disminuir las frecuencias hasta en un 20%.
- El modo 11 no es muy diferente al tercer caso, pues como se trata de una deformación torsional pero con los álabes flexionados, es certero que la frecuencia disminuya en un grado considerable.

Luego de todo lo mencionado, sucede exactamente lo mismo que con el caso simplificado a diferencia de que, al ser la geometría y los modos diferentes, las frecuencias cambian en distintas proporciones, en algunos casos en mayor grado por la superficie de los álabes y en otros en menor grado por el hecho de que el cabeceo del disco genera un mayor aporte de masa virtual del fluido que el del impulsor.

#### 4.6.3 Eje-impulsor con velocidad rotacional

Es posible, dentro de este estudio, ligar dos de los efectos desarrollados hasta ahora: la rotación y el fluido envolvente; no obstante, hay que entender las limitaciones:

- La primera limitante es que los elementos acústicos no cuentan con matrices giroscópicas y por ello, al momento de incluir la rotación, el efecto de rotación del fluido no estaría considerado.
- Por otro lado, al ser modelado con elementos acústicos, no se pueden incluir los efectos de turbulencia generados por la agitación y, por ende, la excitación externa debido a dicha turbulencia no se consideraría.
- Se tendría que simular el modelo del eje-impulsor, ya que el efecto del disco no tendría mucho sentido al estar rotando bajo el agua porque no desplazaría nada del fluido; sin embargo, ya de por sí hay limitaciones en realizar la simulación de este modelo rotando, existiendo un arrastre de error de por medio.

Dichas estas premisas, se cree conveniente no considerar estas facetas de la simulación a pesar de que los efectos inerciales, el efecto giroscópico en el agitador y el aporte de masa si fueran considerados. Por otro lado, se realizan pruebas para verificar dichas hipótesis y los valores muestran los resultados esperados; es decir, simplemente se hacía una suma del efecto giroscópico en la rotación libre, el aporte de masa virtual y las cargas inerciales del fluido sobre las frecuencias, estos dos últimos igual como si el agitador estuviera empotrado (caso estático), sin considerar la turbulencia, la fuerza del empuje axial ni el desplazamiento del agua con los efectos viscosos; por lo tanto, dichos resultados no se toman en cuenta para este estudio.

#### 4.7 Efecto y comparación con otros fluidos

En esta etapa se realizan dos cosas muy importantes: la primera es la validación del “Set Up” para modelar una estructura inmersa obteniendo sus frecuencias naturales y la segunda es el efecto de otros fluidos sobre el mismo agitador; por lo tanto, se muestran a través de tablas los valores comparativos de las frecuencias para poder visualizar las tendencias. Además, el modelo a utilizar, debido a que ya se vieron los efectos del agua y las variaciones de las frecuencias en cada caso, será el de la simplificación, que permite el desarrollo más rápido de la simulación, pudiendo extrapolar los efectos sobre el agitador con el impulsor. Por otro lado, los fluidos a utilizar para la comparación son

netamente con fines ilustrativos (se incluye hasta el mercurio para tener un cambio notable) y con propiedades muy diferentes para que los efectos sean más perceptibles. Las propiedades a 20°C de los fluidos a utilizar se muestran en la tabla 14.

Propiedades	Vacío	Aire	Metanol	Agua	Mercurio
Densidad (kg/m <sup>3</sup> )	0	1.2041	786.3	998.02	13595
V. del sonido (m/s)	-	343.21	1089	1483	1450
Viscosidad (kg/m.s)	0	0.0000182	0.0005455	0.001002	0.001548

**Tabla 14.** Propiedades de los diferentes fluidos referenciales.

Como ya se sabe, cuando se realiza un análisis modal con elementos finitos, este considera que el componente analizado está en vacío; es decir, el entorno no influye en nada sobre nuestros resultados. Cuando se realiza el “Set up” junto con el comando APDL para modelar el agitador como una estructura sumergida, se le dan propiedades al entorno de tal manera que se ven los efectos de este frente a las frecuencias naturales; no obstante, lo interesante es saber qué es lo que sucede si las propiedades que se ingresan del fluido envolvente son las del aire. A partir de lo mencionado, los resultados se muestran en la tabla 15.

Modos	Frecuencia (Hz)				
	Vacío	Aire	Metanol	Agua	Mercurio
1	32.18	32.18	32.01	31.97	29.60
2	32.18	32.18	32.01	31.97	29.60
3	219.48	219.48	219.48	219.48	219.48
4	263.80	263.79	259.18	257.96	200.53
5	263.80	263.79	259.19	257.96	200.55
6	716.71	716.62	679.29	670.23	471.12
7	716.79	716.70	679.40	670.34	471.26
8	1234.20	1234.00	1176.50	1165.60	1034.70
9	1234.60	1234.30	1176.90	1165.90	1035.00
10	1368.10	1367.70	1181.20	1158.90	1092.30
11	2011.20	2010.90	1993.60	1980.10	1921.00
12	2011.70	2011.40	1993.80	1980.60	1921.30

**Tabla 15.** Frecuencias naturales con todos los fluidos estudiados.

En primera instancia se ve que los valores de las frecuencias simuladas con aire son prácticamente los mismos que en vacío. Esto hace que la simulación del agitador como sólido sumergido tenga coherencia y nos de buenos resultados en las pruebas con otros

fluidos, pudiendo asegurar que los valores obtenidos en las simulaciones desarrolladas con la misma metodología tengan un sustento para poder realizar conjeturas. En términos generales se puede apreciar lo siguiente:

- Las frecuencias siempre tienden a disminuir por la presencia de un fluido envolvente.
- Conforme la densidad es mayor, el efecto de aporte de masa virtual es mayor.
- El modo 3, debido a su forma de vibrar torsional, no varía a pesar de cambiar los fluidos, ya que la presión hidrostática no participa en dicho movimiento del disco.
- Las frecuencias naturales entre el aire y el vacío son prácticamente iguales mientras que entre el agua y el metanol, al tener propiedades no tan diferentes, muestran resultados aproximados; dejando el caso del mercurio como el que presenta las variaciones más altas por su alta densidad.

Otra forma de ver los resultados, para tener una idea de la variación entre modo y modo, se muestra en la tabla 16, la cual presenta el delta de frecuencia respecto al vacío.

Modos	$\Delta$ Frecuencia (Hz) respecto al vacío			
	Aire	Metanol	Agua	Mercurio
1	0.00	0.17	0.21	2.59
2	0.00	0.17	0.21	2.58
3	0.00	0.00	0.00	0.00
4	0.01	4.62	5.84	63.27
5	0.01	4.61	5.84	63.25
6	0.09	37.42	46.48	245.59
7	0.09	37.39	46.45	245.53
8	0.20	57.70	68.60	199.50
9	0.30	57.70	68.70	199.60
10	0.40	186.90	209.20	275.80
11	0.30	17.60	31.10	90.20
12	0.30	17.90	31.10	90.40

**Tabla 16.** Variación en la frecuencia natural con respecto al vacío para cada fluido.

- El aire prácticamente tiene un aporte de masa despreciable de tal manera que también justifica todos los análisis modales que se desarrollen en vacío pudiéndose aplicar directamente a la realidad, e incluso en los cálculos analíticos.
- Los primeros modos presentan una variación pequeña debido al poco efecto de la presión sobre la forma de vibrar, a diferencia del modo 10, el cual tiene un aporte

de masa considerable, llegando a disminuir la frecuencia hasta en 275 Hz en el caso del mercurio.

Debido a que muchas veces es una buena referencia la variación porcentual, en la tabla 17, se muestran las variaciones con respecto al vacío.

Modos	Variación porcentual con respecto al vacío (%)			
	Aire	Metanol	Agua	Mercurio
1	0.00	0.52	0.66	8.03
2	0.00	0.52	0.66	8.03
3	0.00	0.00	0.00	0.00
4	0.00	1.75	2.21	23.98
5	0.00	1.75	2.21	23.98
6	0.01	5.22	6.49	34.27
7	0.01	5.22	6.48	34.25
8	0.02	4.68	5.56	16.16
9	0.02	4.67	5.56	16.17
10	0.03	13.66	15.29	20.16
11	0.01	0.88	1.55	4.48
12	0.01	0.89	1.55	4.49

Tabla 17. Variación porcentual de las frecuencias naturales con respecto al vacío.

Nuevamente, se aprecia cómo en algunos modos se puede desprestigiar la presencia del fluido, mientras que en otros si es necesario considerar dichos efectos de manera obligatoria para su operación.

A partir de lo mencionado, teniendo en cuenta todos los resultados obtenidos y comparados entre los fluidos, se puede plantear un esquema de cálculo basado en un grado de libertad que muestre solamente de manera esquemática el efecto de aporte de masa virtual del fluido sobre el agitador simplificado y encontrar una correlación que pueda aproximar los valores dentro de un rango determinado y con sus respectivas restricciones. Así pues, se parte de la premisa que se plantea de la siguiente manera:

Sea el modo 1 de deformación del componente a una frecuencia natural determinada (Ec. 4.1).

$$f = \frac{1}{2\pi} \times \sqrt{\frac{K}{M}}$$

Ec. 4.1

Donde  $f$  es la frecuencia natural,  $K$  es la rigidez y  $M$  es la masa participante de dicho modo. A partir de esto, se tienen dos fluidos de propiedades diferentes y cuyos efectos sobre la frecuencia en el mencionado modo 1 son de diferentes grados. Asumiendo que el efecto del fluido repercute solamente como una masa adicional al sistema, se obtiene la ecuación 4.2.

$$f_{f1} = \frac{1}{2\pi} \times \sqrt{\frac{K}{M+m_{a1}}} \quad \text{Ec. 4.2}$$

Donde  $m_{a1}$  es el aporte de masa virtual del fluido 1 para el mismo modo, obteniendo la frecuencia  $f_{f1}$ . Dividiendo ambas frecuencias de las ecuaciones 4.1 y 4.2, se obtiene:

$$\frac{f}{f_{f1}} = \sqrt{\frac{M+m_{a1}}{M}} \quad \text{Ec. 4.3}$$

Y despejando  $m_{a1}$ ,

$$m_{a1} = M \left( \left( \frac{f}{f_{f1}} \right)^2 - 1 \right) \quad \text{Ec. 4.4}$$

De la misma manera, para el fluido 2 se obtiene:

$$m_{a2} = M \left( \left( \frac{f}{f_{f2}} \right)^2 - 1 \right) \quad \text{Ec. 4.5}$$

Dividiendo ambas masas de las ecuaciones 4.4 y 4.5, se obtiene:

$$\frac{m_{a1}}{m_{a2}} = \frac{\left( \frac{f}{f_{f1}} \right)^2 - 1}{\left( \frac{f}{f_{f2}} \right)^2 - 1} \quad \text{Ec. 4.6}$$

A partir de la ecuación 4.6, se puede plantear que la masa de aporte virtual de un fluido es igual al producto de su densidad por un volumen ficticio que ocupa para el modo determinado; con esto se obtiene:

$$\frac{\rho_1 V_{a1}}{\rho_2 V_{a2}} = \frac{\left(\frac{f}{f_{f1}}\right)^2 - 1}{\left(\frac{f}{f_{f2}}\right)^2 - 1} \quad \text{Ec. 4.7}$$

En este punto es donde el esquema de cálculo se limita considerablemente, ya que dichos volúmenes ficticios son diferentes para cada fluido, debido a que, como es un artificio suponer que hay una masa que se adhiere y que al mismo tiempo cuenta con un volumen determinado, este último, sigue siendo dependiente de las propiedades que definen dicho fluido; es decir, de la densidad, que tiene influencia trascendente por la presión hidrostática y la velocidad del sonido que nos determina el comportamiento de las ondas en el fluido. Dicho esto, si se considera que las densidades entre fluidos no difieren de manera considerable, se puede aproximar que ambos volúmenes son iguales. De la ecuación 4.7 se tendría:

$$\frac{\rho_1 V_{a1}}{\rho_2 V_{a2}} \approx \frac{\rho_1 V}{\rho_2 V} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\left(\frac{f}{f_{f1}}\right)^2 - 1}{\left(\frac{f}{f_{f2}}\right)^2 - 1} \quad \text{Ec. 4.8}$$

A partir de esta expresión (Ec. 4.8), conociendo el valor de la frecuencia natural en un fluido de un modo determinado, se podría encontrar el valor de la frecuencia para el mismo modo en un segundo fluido conociendo solamente la relación de sus densidades, obviamente respetando las hipótesis antes mencionadas.

Por último, esta expresión resultante se aplica a los resultados obtenidos en los diferentes fluidos estudiados en el presente proyecto para ver cuáles son los márgenes de error. Según esto, se tienen las siguientes relaciones entre densidades:

- Aire/Agua: 0.0012
- Metanol/Agua: 0.7878
- Mercurio/Agua: 13.6219

A continuación, en la tabla 18, se muestran los valores resultantes utilizando la ecuación 4.8 con las frecuencias obtenidas en la tabla 15 como datos de entrada.

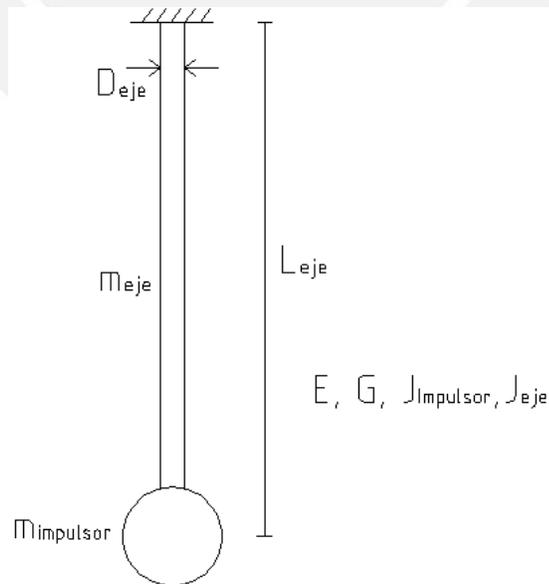
Modos	Relación de densidades		
	Aire/Agua	Metanol/Agua	Mercurio/Agua
1	0.0046	0.7870	13.5369
2	0	0.7908	13.69487927
3	----	----	----
4	0.0016	0.7854	15.9546
5	0.0016	0.7837	15.9471
6	0.0017	0.7888	9.1585
7	0.0017	0.7887	9.1602
8	0.0026	0.8293	3.4892
9	0.0040	0.8280	3.4857
10	0.0014	0.8675	1.4449
11	0.0094	0.5601	3.0358
12	0.0094	0.5698	3.0430

**Tabla 18.** Valores obtenidos a través de la aproximación para la razón de densidades.

Con dichos resultados lo primero que se puede apreciar es que los valores en la relación aire/agua están en el orden de la relación de densidades real; lo mismo sucede con las relaciones metanol/agua y mercurio/agua. Luego, conforme el modo de vibrar sea más complejo; es decir, menos se puede aproximar a un grado de libertad, mayor es el margen de error entre los valores de la tabla 18 con las proporciones de las densidades reales. Por otro lado, el modo tres no puede ser calculado debido a que no presenta variación respecto a diferentes fluidos, lo cual ya se explica anteriormente. También se puede visualizar que los resultados se ajustan más en el caso metanol/agua, debido a que las densidades son mucho más cercanas con respecto a las otras relaciones, lo cual genera resultados bastante aproximados. Por último, aún para un mismo modo de vibrar, los desplazamientos relativos que nos muestra como resultado el análisis modal pueden cambiar de manera más notoria si la deformación implica gran desplazamiento del fluido aun cuando las densidades no sean muy diferentes.

#### 4.8 Cálculo analítico de las principales frecuencias naturales

En un elemento estructural, o en un conjunto de elementos se pueden calcular las frecuencias naturales de diferentes maneras y una de estas es reduciendo el sistema a un grado de libertad. Si bien es la manera más sencilla de afrontar este tipo de circunstancias, cuando el sistema lo permite, es la mejor forma de obtener dichos valores para cada uno de los modos analizados. Un elemento, por más pequeño que sea, cuenta con una distribución de masa a lo largo de su volumen que puede ser idealizado como un número infinito de masas, resortes y amortiguadores que, para casos en los que se sabe que el comportamiento es sencillo y el amortiguamiento moderado, se pueden configurar como una sola masa con una rigidez determinada. Esta aproximación puede dar resultados muy cercanos a los reales, siempre y cuando el comportamiento de nuestro diseño lo permita; es por ello que se realizan los cálculos para los modos que tienden a vibrar de la forma en que se pueda dar dicha aproximación. Por otro lado, se ve la comparación de los valores obtenidos analíticamente frente a los de la simulación; no obstante, cabe resaltar que conforme el modo sea más complejo el error porcentual será mayor. En la figura 36, se muestra el esquema, a partir del cual se realizan los cálculos, con sus respectivos datos.



**Figura 36.** Esquema para cálculo analítico de las frecuencias.

$$D_{eje} = 0.0254 \text{ m}$$

$$L_{eje} = 0.52168 \text{ m}$$

$$m_{impulsor} = 1.2547 \text{ kg}$$

$$m_{eje} = 2.0751 \text{ kg}$$

$$J_{impulsor} = 2.9346 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

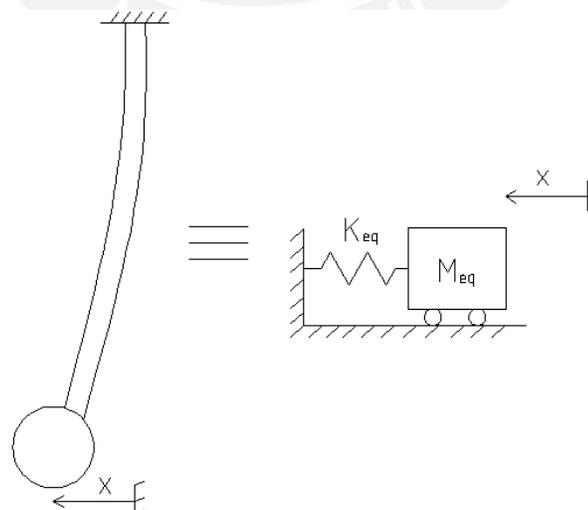
$$J_{eje} = \frac{1}{2} \times 2.0751 \times \left(\frac{D_{eje}}{2}\right)^2 = 1.6735 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$$

$$E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$G = 7.6923 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

#### 4.8.1 Modo de Flexión

El agitador, ya sea el modelo simplificado o con el impulsor, puede ser idealizado de acuerdo a una viga empotrada donde la masa del impulsor se encuentra al extremo como una buena aproximación para un sistema de un grado de libertad. Este modo de vibración es conocido como el cabeceo del agitador y es normalmente el primero en presentarse durante su operación. Para ello, se cuenta con el esquema de la figura 37.



**Figura 37.** Reducción del agitador flexionado a un grado de libertad.

La rigidez para dicha geometría está representada por la ecuación 4.9:

$$K_{eq} = \frac{3 \times E \times I_{sección}}{L_{eje}^3} \quad \text{Ec. 4.9}$$

Donde el momento de inercia de la sección del eje vendría a ser:

$$I_{sección} = \frac{\pi \times \left(\frac{D_{eje}}{2}\right)^4}{4} = 2.043 \times 10^{-8} \text{ m}^4 \quad \text{Ec. 4.10}$$

Por otro lado, se calcula la masa equivalente del sistema (4.11):

$$M_{eq} \approx m_{impulsor} + \frac{1}{3} \times m_{eje} = 1.9464 \text{ kg} \quad \text{Ec. 4.11}$$

Dado que aproximadamente un tercio de la masa del eje participa en el modo analizado. Luego se obtiene la frecuencia natural del sistema equivalente a partir de la ecuación 4.12:

$$f_n = \frac{1}{2 \times \pi} \times \sqrt{\frac{K_{eq}}{M_{eq}}} \quad \text{Ec. 4.12}$$

$$f_n = \frac{1}{2 \times \pi} \times \sqrt{\frac{3 \times 2 \times 10^{11} \times 2.043 \times 10^{-8}}{1.9464 \times 0.52168^3}}$$

$$f_n = 33.52 \text{ Hz}$$

El valor de esta frecuencia se puede comparar con los dos casos obtenidos en la simulación, siendo el del disco 32.18 Hz mientras que el agitador PBT presenta una frecuencia de 33.07 Hz para el mismo modo (Ver figura 38). Esto muestra un error de 4.16% y 1.3% respectivamente, los cuales son valores aceptables, a pesar del grado de libertad que tendría el impulsor frente al eje y de la reducción del modelo vibratorio, que respaldan el primer modo el cual vendría a ser uno de los más importantes.

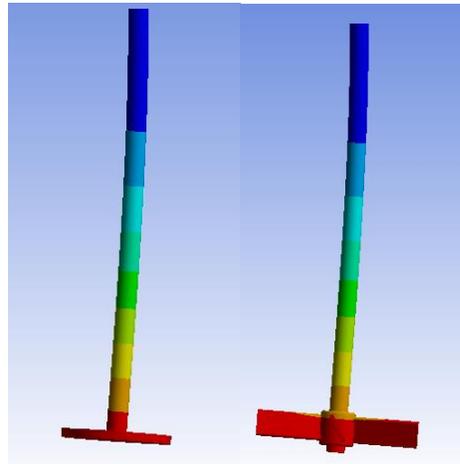


Figura 38. Comparación entre la simplificación y el agitador a flexión.

#### 4.8.2 Modo de Torsión

Otra de las formas de idealizar el sistema para determinar las frecuencias naturales de importancia es considerando una barra empotrada en un extremo y en el otro el impulsor ya sea simplificado o el modelo original, dado que el caso simplificado cuenta con el mismo momento de inercia polar que el agitador respecto al eje de rotación. El esquema de la reducción a un grado de libertad se muestra en la figura 39.

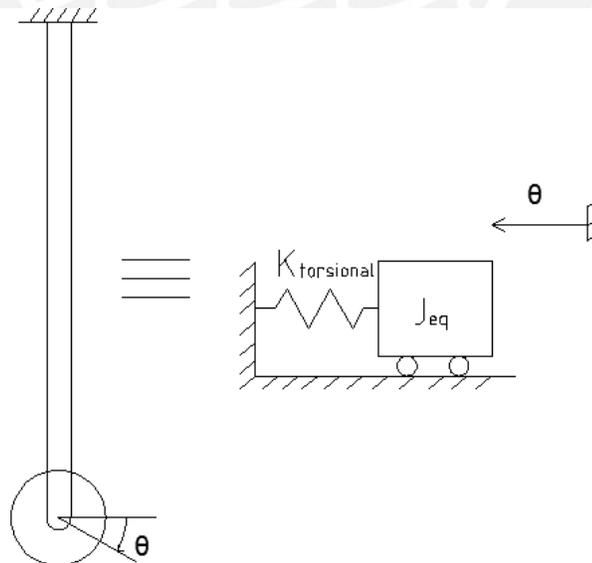


Figura 39. Reducción del agitador a torsión a un grado de libertad.

La rigidez, en este caso torsional, está representada por la ecuación 4.13:

$$K_{Torsional} = \frac{G \times I_{polar}}{L_{eje}} \quad \text{Ec. 4.13}$$

Donde el momento de inercia polar de la sección del eje vendría a ser:

$$I_{polar} = \frac{\pi \times D_{eje}^4}{32} = 4.0863 \times 10^{-8} \text{ m}^4 \quad \text{Ec. 4.14}$$

Por lo tanto, la frecuencia natural torsional para el sistema equivalente se calcula a partir de la ecuación 4.15:

$$f_n = \frac{1}{2 \times \pi} \times \sqrt{\frac{K_{Torsional}}{J_{eq}}} = \frac{1}{2 \times \pi} \times \sqrt{\frac{G \times I_{polar}}{(J_{impulsor} + J_{eje}) \times L_{eje}}} \quad \text{Ec. 4.15}$$

$$f_n = \frac{1}{2 \times \pi} \sqrt{\frac{7.6923 \times 10^{10} \times 4.0863 \times 10^{-8}}{(2.9346 \times 10^{-3} + 1.6735 \times 10^{-4}) \times 0.52168}}$$

$$f_n = 221.82 \text{ Hz}$$

Luego de obtener este valor, contrastamos con los obtenidos de la simulación, los cuales son 219.48 Hz y 211.03 Hz para el caso del disco y el impulsor, respectivamente (Figura 40). Nuevamente los errores son de 1.07% y 5.11% los cuales son probablemente causa de la reducción en el sistema equivalente para el cálculo analítico. Por otro lado, cuando el agitador está girando y la inducción del movimiento viene a partir de la sección transversal, el modo torsional cambia así como la frecuencia natural aumenta, como se ha visto previamente, y se puede apreciar que el momento de inercia polar y la longitud para hallar la rigidez que se deben considerar en un cálculo tentativo son menores que los del eje; en otras palabras, este aumento de la frecuencia se debe al cambio del modo de vibrar por efecto de la velocidad de rotación, y por ello la frecuencia llega hasta 1449.7 Hz.

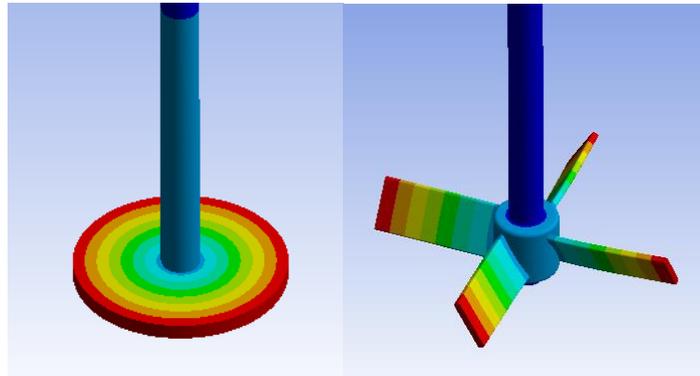


Figura 40. Comparación en el modo torsional.

#### 4.8.3 Modo Axial

El modo de vibración axial o longitudinal también se puede idealizar de la misma manera como en los casos anteriores a un grado de libertad, considerando que aproximadamente un tercio de la masa del eje, el cual se comporta como un resorte, participa en dicho modo. Cabe resaltar que en este caso solo se puede realizar la aproximación de la simplificación, ya que en el impulsor se cuenta con los álabes, los cuales participarían considerablemente de dicho modo. Para este caso, el esquema de un grado de libertad se representa en la figura 41.

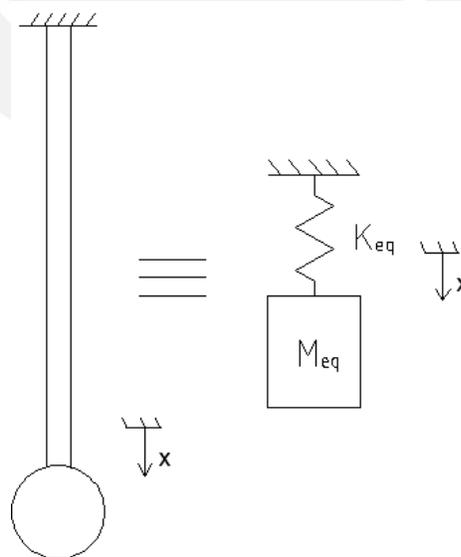


Figura 41. Reducción a un grado de libertad de la deformación longitudinal del agitador.

Para el sistema equivalente, la rigidez viene a ser (Ec. 4.16):

$$K_{eq} = \frac{E \times A_{sección}}{L_{eje}} \quad \text{Ec. 4.16}$$

Además, la masa equivalente se obtiene a partir de la ecuación 4.17:

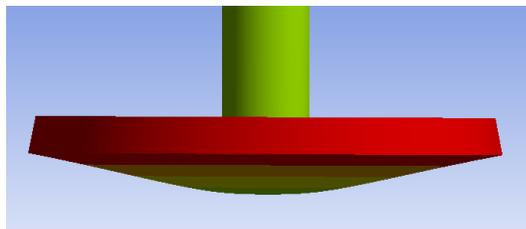
$$M_{eq} \approx m_{impulsor} + \frac{1}{3} \times m_{eje} = 1.9464 \text{ kg} \quad \text{Ec. 4.17}$$

Reemplazando las ecuaciones 4.16 y 4.17 en la ecuación 4.12 se obtiene:

$$f_n = \frac{1}{2 \times \pi} \times \sqrt{\frac{2 \times 10^{11} \times \pi \times \left(\frac{0.0254}{2}\right)^2}{1.9464 \times 0.52168}}$$

$$f_n = 1590 \text{ Hz}$$

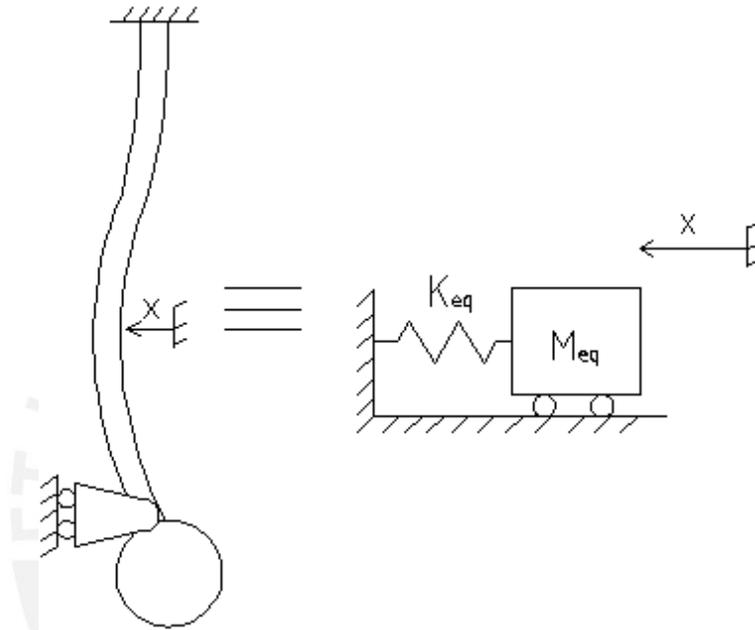
Como se puede apreciar, el valor de la frecuencia determinada frente al de la simulación (1368.1Hz) da un error de 16.22%, y este es un cambio considerable en la frecuencia natural; sin embargo, la explicación radica en que el comportamiento determinado para dicho modo no es una buena aproximación para modelar como un grado de libertad, dado que si bien el eje se puede aproximar a un resorte con masa, la masa del disco no tiene un comportamiento rígido la cual tiene una deformación axial considerable, y que conlleva a que el sistema tendría que aproximarse a uno de dos grados de libertad, para tener un valor más cercano, o que simplemente la rigidez calculada sea menor en cierto factor debido al comportamiento flexible del disco (Figura 42).



**Figura 42.** Detalle de la deformación del disco para el modo axial.

**4.8.4** Modo de flexión al medio del eje

Este modo se puede configurar como una barra empotrada con un apoyo simple en el extremo, y para calcular la frecuencia como un sistema equivalente de un grado de libertad se deben considerar la masa equivalente y la rigidez para dicha configuración, como se muestra en la figura 43.



**Figura 43.** Reducción a un grado de libertad de la flexión al medio del eje.

La masa equivalente se aproxima mediante:

$$M_{eq} \approx \frac{1}{2} \times m_{eje} = 1.0375 \text{ kg} \tag{Ec. 4.18}$$

Y la rigidez equivalente se obtiene a partir de la ecuación 4.19:

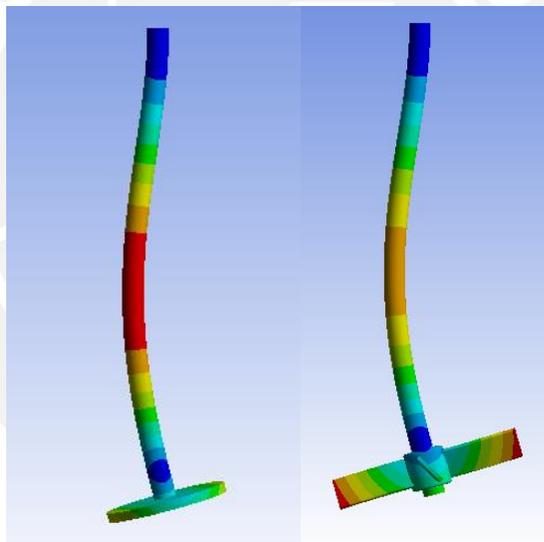
$$K_{eq} = \frac{768 \times E \times I_{sección}}{7 \times L_{eje}^3} \tag{Ec. 4.19}$$

Por lo tanto, el cálculo de la frecuencia natural del sistema equivalente se determina reemplazando las ecuaciones 4.18 y 4.19 en la ecuación 4.12:

$$f_n = \frac{1}{2 \times \pi} \times \sqrt{\frac{K_{eq}}{M_{eq}}} = \frac{1}{2 \times \pi} \times \sqrt{\frac{768 \times 2 \times 10^{11} \times 2.043 \times 10^{-8}}{7 \times 0.52168^3 \times 1.0375}}$$

$$f_n = 277.65 \text{ Hz}$$

Obviamente que, a pesar de que el valor calculado analíticamente es muy cercano a los obtenidos en la simulación (263.8 Hz para el disco y 261.53 Hz para el impulsor), hay un arrastre de error de 5.2% y 6.1%, respectivamente, por no considerar la masa del impulsor al extremo, debido a que, si bien el factor de participación de masa es bajo, influye sobre el valor de la frecuencia calculada (Figura 44).



**Figura 44.** Comparación entre la deformación de la simplificación y el eje-impulsor.

## PRINCIPALES APORTES

Respecto a los aportes más relevantes que se obtienen a partir del presente estudio se pueden mencionar los siguientes:

- Incentivar en temas relacionados a las vibraciones y a las nuevas tecnologías, y al vínculo entre estas para mejorar la eficiencia en los procesos.
- Dar a conocer cuáles son los límites de las herramientas computacionales actuales referentes al tema y demostrar los alcances que se tienen para cada escenario.
- Explorar un tema no muy profundizado y ampliar el panorama de las vibraciones a un nivel más aplicativo en la industria relacionada con fluidos y componentes rotativos, complementándolo con el método de elementos finitos.
- Dar a conocer el nivel de variación de las frecuencias naturales debido a diferentes fenómenos físicos.
- Contrastar el método analítico básico de un grado de libertad en la determinación de las frecuencias principales con los resultados obtenidos con elementos finitos.
- Visualizar que existen frecuencias naturales con modos locales y el efecto de participación de masa debido a la forma de vibrar.

## CONCLUSIONES

En el presente estudio, se tiene como objetivo principal visualizar el comportamiento de las frecuencias naturales de un agitador 4PBT45 cuando es sumergido en un fluido, además de observar el efecto de la rotación sobre dichas frecuencias, todo ello analizado con simulación numérica a través del método de elementos finitos. El desarrollo se basa en comparaciones, correlaciones y validaciones parciales a través de cálculos básicos, además de la comprobación dentro del software de los comandos APDL utilizados. Luego de obtener los resultados a través de múltiples simulaciones, examinarlos y realizar comentarios para cada escenario estudiado, se pueden alcanzar las siguientes conclusiones:

- Las herramientas computacionales nos permiten predecir de manera adecuada el comportamiento de los componentes estructurales frente a diferentes condiciones físicas.
- Para un mismo modo de vibrar de los álabes aislados, el factor de participación de masa en el conjunto cambia (aumenta) y por ende las frecuencias relativas a estos tienden a disminuir.
- Es posible simplificar y validar el modelo de un agitador a un disco con la misma masa y momento de inercia polar respecto al eje axial, ya que nos da resultados muy aproximados. En general, el modelo siempre se ajusta a la simplificación, cuando los álabes no participan considerablemente en los modos, lo cual no ocurre en las frecuencias más importantes como el modo a flexión o el torsional.
- Las frecuencias naturales tienden a cambiar respecto a la velocidad de rotación debido al efecto giroscópico dependiendo del modo de vibrar. Las frecuencias de estos modos que suelen variar, tienden a disminuir o a aumentar dependiendo del sentido de giro de la vibración. Cuando se da en sentido opuesto a la rotación, disminuyen debido a la precesión giroscópica, mientras que en el mismo sentido aumentan el valor de las frecuencias conforme las revoluciones son mayores. Por otro lado, la masa del rotor y el grado de esbeltez del eje, el cual depende de la sección transversal y su longitud, hacen que la variación de las frecuencias sea más considerable a mayor velocidad de giro. En otras palabras, un eje compacto, con dimensiones y masas pequeñas genera menos impacto en las frecuencias naturales que un eje largo con un rotor en el extremo de masa considerable, lo

cual hace que sea más propenso al efecto giroscópico y, por ende, la variación se produzca en un mayor grado.

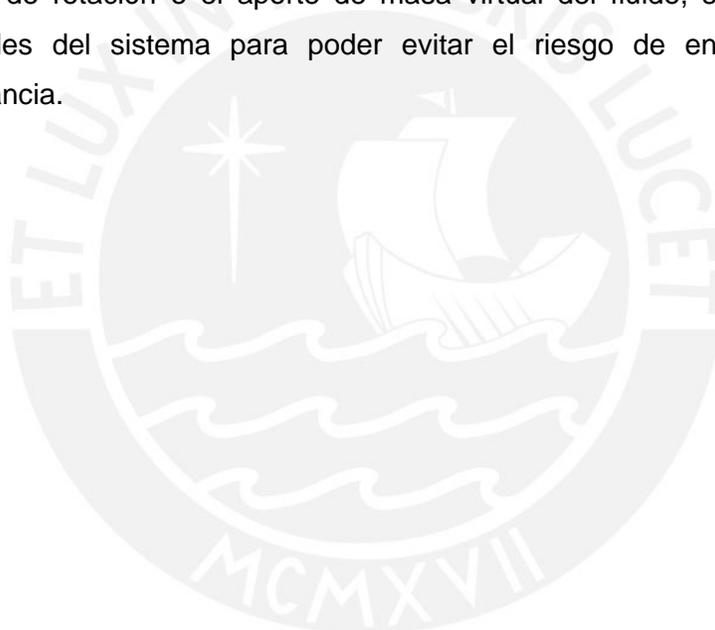
- Las frecuencias naturales en el conjunto eje-impulsor son coherentes con los valores obtenidos en la simplificación, el rotor y los álabes por separado. En otras palabras, se puede concluir que los modos de las frecuencias de las diferentes partes de un componente tienden a aparecer por separado o en combinación en los modos del conjunto con valores apenas diferentes debido al cambio de la rigidez y al factor de participación de masa.
- La herramienta computacional utilizada presenta límites cuando se quiere visualizar el comportamiento de las frecuencias respecto a la velocidad rotacional en el modelo eje-impulsor. Si se utiliza un sistema de referencia estacionario, el cual se limita prácticamente a modelos axisimétricos (como el simplificado), puede arrastrar errores numéricos cuando se modifica la matriz de amortiguamiento para dar el efecto coriolis; por ello, se puede utilizar de manera referencial o comparativa. Si se modela con un sistema de referencia rotacional, no se presentan cambios con respecto a la velocidad de giro; ya que, se utiliza en modelos no necesariamente axisimétricos para calcular las frecuencias bajo los efectos inerciales, debido a la rotación, en los álabes y el eje.
- Las propiedades del fluido en el que se sumerge el agitador y los modos de vibración son los que ocasionan la disminución de las frecuencias naturales en diferentes grados. Las propiedades repercuten en el efecto de aporte de masa mientras que los modos de vibración en cuánto disminuyen las frecuencias por la interacción entre las superficies del agitador y el fluido.
- En el escenario de la simplificación del impulsor sumergida en agua, se puede concluir que el modo torsional no se ve afectado, debido a que en su forma de vibrar no desplaza nada de fluido y, por ende, el efecto del aporte de masa por la presión hidrostática no afecta al sistema. Caso contrario se da en el modo de deformación axial, debido a que en esta forma de vibrar, es cuando el disco desplaza e interactúa con la mayor parte del fluido y sobre una superficie mucho más amplia, razón por la cual la frecuencia a dicho modo disminuye en un 15% mientras que las demás tienen una variación de entre 1% y 5%.
- Los álabes y sus superficies interactúan en un mayor grado con el fluido en el escenario sumergido del eje-impulsor, haciendo que el efecto sobre las

frecuencias sea mucho mayor. Debido a esto, en el modo torsional, la variación es de 16.8% gracias a la presencia de los álabes y, de la misma manera, en las frecuencias intrínsecas a estos, se tienen variaciones entre 15% y 20%.

- Otro de los límites de la herramienta computacional es que no considera la cohesión ni la adhesión del fluido sobre las superficies del agitador. Mientras la cohesión depende solamente de la naturaleza del fluido a nivel molecular, la adhesión depende tanto del fluido como de las características de la superficie. Esto hace que sea demasiado complejo el tratar de considerar cuánto de masa del fluido se está adhiriendo físicamente en cada escenario, ya que se tendrían que realizar pruebas experimentales, lo cual escapa de los límites de la tesis; sin embargo, cabe resaltar que, para los fluidos estudiados, dicha película de adherencia es despreciable con respecto al peso del agitador.
- No es posible simular el escenario sumergido con rotación con la metodología planteada, ya que los elementos acústicos no cuentan con matrices giroscópicas y con esto al momento de incluir la rotación, el efecto del desplazamiento del fluido no se considera. Por otro lado, con el presente método no es posible modelar la turbulencia generada por la agitación y, de esta manera, no existiría excitación externa. Además, si el agitador sumergido se encuentra en movimiento, sería necesario considerar el amortiguamiento por los efectos viscosos del fluido.
- El modelo matemático utilizado para todos los fluidos en cuestión es coherente y queda respaldado por la igualdad de valores de las frecuencias naturales que se encuentran al comparar el efecto del aire en el entorno del modelo con el análisis modal estándar (en vacío).
- En la simulación del modelo simplificado sumergido en diferentes fluidos, se puede concluir que conforme mayor sea la densidad del fluido, más pronunciada será la disminución de la frecuencia natural, para un mismo modo de vibración. Por ello, las variaciones porcentuales con respecto al vacío del metanol (entre 0.5% y 13.6%) y del agua (entre 0.6% y 15.3%) son cercanas debido a sus densidades, mientras que en el caso del mercurio, cuya densidad es mucho mayor, la variación es más notable (entre 4.5% y 20%).
- Dependiendo del modo de vibración, el modelo se puede ajustar a un cálculo analítico de un grado de libertad con resultados muy coherentes, sobre todo en las frecuencias donde el impulsor se comporta como una masa compacta al extremo

del eje (modo a flexión, torsional, etc.); mientras que, cuando participan los álabes en la forma de vibrar, existen más grados de libertad en el movimiento, lo cual hace que no sea posible dicha aproximación.

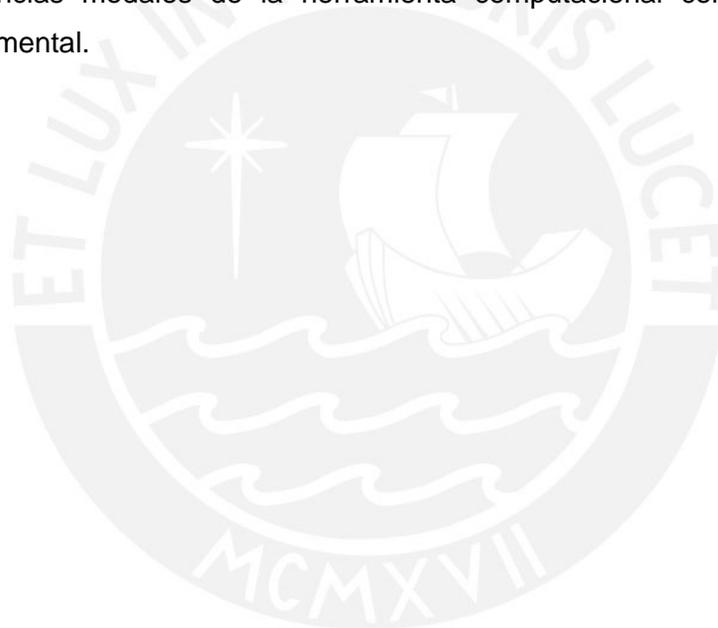
- La ecuación 4.8, encontrada analíticamente en el capítulo 4, permite determinar el valor de la frecuencia natural en un fluido determinado, conociendo el valor de la frecuencia en un segundo fluido para un mismo modo de vibración, a través de la relación de sus densidades; siempre y cuando se cumpla con las hipótesis y limitaciones planteadas durante su desarrollo.
- Es necesario tener en cuenta, al momento de diseñar o implementar este tipo de componentes, cuánto repercuten algunas condiciones de operación, como el efecto de rotación o el aporte de masa virtual del fluido, sobre las frecuencias naturales del sistema para poder evitar el riesgo de entrar en la zona de resonancia.



## RECOMENDACIONES Y TRABAJOS FUTUROS

Como en todo proyecto, existen pasos posteriores o complementarios que se pueden realizar a partir del trabajo presentado, utilizando información relacionada, así como la metodología y los resultados obtenidos. Debido a ello se puede recomendar lo siguiente:

- Realizar un modelo que incluya todo el conjunto de un ensamble más el efecto del fluido, para determinar el comportamiento global de las frecuencias naturales del conjunto y locales, las cuales se verán afectadas por la masa de agua.
- Realizar estudios similares que abarquen experimentación en modelos más sencillos para evitar la complejidad en las pruebas y poder contrastar las frecuencias modales de la herramienta computacional con un análisis modal experimental.



## Bibliografía

**ARRIETA VALDERRAMA, Gustavo.** *Optimización multi-objetivo del desempeño de un agitador de líquidos miscibles con impulsor PBT variando ángulo, la posición y velocidad de rotación del impulsor, utilizando ANSYS CFX, MECHANICAL y DESIGN EXPLORER.* Tesis para optar por el Título de Ingeniero Mecánico. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú, Facultad de Ciencias e Ingeniería, 2012.

**ANSYS INC.** *Mechanical Dynamics.* 2011.

**ANSYS INC.** *ANSYS Mechanical Help.* 2012.

**ANSYS INC.** *ANSYS Meshing.* 2012.

**ANSYS INC.** *ANSYS Acoustics extension.* 2011.

**Engineering Simulation and Scientific Software.** *RotorDynamics.* 2011

**DA FONSECA LOPES, Zeferino.** *El método de los elementos finitos: una introducción.* Fondo Editorial Biblioteca URU. Universidad Rafael Urdaneta, Maracaibo, Venezuela, 2011.

**ALENCASTRE, Jorge.** *Apuntes del curso Vibraciones.* Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima: 2012.

**PINELLI, Alfredo.** *Simulación numérica y modelización de procesos tecnológicos y ambientales.* CIEMAT, España, 2010.

**HUTTON, David.** *Fundamentals of Finite Element Analysis.* McGraw – Hill, First edition, New York, 2004.

**MARTÍNEZ RAMÍREZ, Elvira; FLÓREZ GARCÍA, Mercedes.** *Física aplicada a la ingeniería.* Universidad Politécnica de Madrid. Madrid: 2011

**LAFITA BABIO, Felipe; MATA CORTÉS, Hilario.** *Introducción a la teoría de vibraciones mecánicas.* Editorial Labor, S.A., Primera edición, Barcelona 1968.

**EHRICH, Fredric.** *Handbook of rotordynamics.* Krieger publishing company, Segunda edición, Malabar, 1999.

**ADAMS, Maurice L., Jr.** *Rotating Machinery Vibration from analysis to troubleshooting.* Marcel Dekker, Inc., Case Western University, Cleveland, Ohio 2001.

**CHILDS, Dara.** *Turbomachinery Rotordynamics: phenomena, modeling and analysis.* John Wiley and Sons, Inc., Texas A & M University, College Station, Texas 1993.

**PEREIRA, José Carlos.** *Introdução à dinâmica de Rotores.* Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis: 2013.

**THOMSON, William T.** *Teoría de Vibraciones: Aplicaciones.* Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A., University of California, Santa Barbara, California 1982.

**SPYRAKOS, Constantine.** *Finite Element Modeling in Engineering Practice.* Algor Publishing Division., West Virginia University, Virginia 1996.

**ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R..** *El Método de elementos finitos: formulación básica y problemas lineales.* McGraw – Hill, Cuarta Edición, Universidad de Gales, Swansea 1994.

**BLACK, Henry.** *Effects of fluid-filled clearance spaces on centrifugal pump and submerged motor vibrations.* Heriot-Watt University, Edinburgh, U.K. 1979.

**THOMAS, M; LAKIS, A.; MARCOUILLER, L.** *Effect of added mass on submerged vibrated plates.* École de technologie Supérieure, Montréal. 2007.

**CHANDRASEKARAN, Anjur.** *Virtual Mass of Submerged Structures.* Univ. of Roorkee, India. 1972.

