

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE POSGRADO



PUCP

**SIMETRÍA AXIAL MEDIADO POR EL GEOGEBRA: UN ESTUDIO
CON ALUMNOS DE PRIMER GRADO DE EDUCACIÓN
SECUNDARIA**

Tesis para optar el grado de Magister en Enseñanza de las Matemáticas

Presentada por : Daysi Julissa García Cuéllar

Dirigido por : Dra. Jesús Victoria Flores Salazar

Jurado : Dr. Sado Ag Almouloud

Mg. Miguel Gonzaga Ramírez

Lima – Perú

2014



A mis padres, hermanos y esposo por su apoyo incondicional en cada momento de mi vida.

A mi hermana Sumiko porque en esos diez años juntas, me enseñaste a ser perseverante, a tener fortaleza y sobre todo a amar la vida.

AGRADECIMIENTOS

A mi estimada asesora, la Dra. Jesús Victoria Flores Salazar, por su constante apoyo, guía, colaboración y comprensión durante toda la elaboración de esta investigación y en todos los cursos en que fue mi maestra.

Al Dr. Sado Ag Almouloud, de la Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo en Brasil, por sus valiosas contribuciones para la evolución de la tesis.

Al Mg. Miguel Gonzaga, por su colaboración en la revisión de la definición del objeto matemático de esta tesis y por su constante apoyo en los cursos en que fue mi maestro.

A la Dra. María José Ferreira Da Silva y a la Dra. Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, ambas profesoras de la Escuela de Posgrado en Educación Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo en Brasil, por sus invaluable aportes para el análisis de las actividades propuestas en esta investigación.

Al Mg. Pablo Monfort Vinuesa, de la Universidad de Extremadura en España, por su apoyo en la clasificación de las variables que ayudaron para el análisis colectivo.

A mis profesores y profesoras de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por contribuir en mi formación académica y personal.

A la Hna. María Luisa Ponce de León y a la Sra. Cecilia Peña Nieves, directora y directora académica del Colegio Sagrado Corazón - Sophianum. Por su apoyo al permitirme aplicar en esta casa de estudios las actividades propuestas.

A mis compañeras y amigas Nery Escobar, Gloria Buenaño y Julia Martín, por su apoyo constante y a las dos primeras por ser observadoras de la parte experimental.

A mis padres por su cariño, apoyo constante y ánimos para seguir creciendo en lo profesional y personal.

A Daniel Proleón, por su apoyo incondicional en cada uno de los proyectos que hemos emprendido juntos. Gracias por tu amor, paciencia, amistad, compañía y por compartir el amor por la Educación Matemática.

A mis hermanos, Henry, Jackeline, Pamela, Akira y Arisa. Por su apoyo y compañía en cada momento.

A mis amigos y compañeros de la maestría, en especial a Mg. Juan Carlos Sandoval Peña, Mg. Enrique Huapaya Gómez y Mg. Luis Daniel Chumpitaz Malpartida, que compartimos el gusto por la investigación y la enseñanza de la matemática. Gracias por sus consejos y apoyo.



La autora

RESUMEN

La presente investigación tiene como objetivo propiciar el proceso de génesis instrumental, específicamente propiciar la instrumentación de la simetría axial mediada por el ambiente de geometría dinámica Geogebra en alumnos de 12 y 13 años de edad del primer grado de Educación Secundaria del Colegio Sagrado Corazón - Sophianum. Debido a que nuestro estudio está centrado en el proceso de la instrumentación nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: *¿alumnos de primer grado de educación secundaria instrumentan la noción de simetría axial cuando desarrollan actividades mediadas por el Geogebra?*

Para este estudio tomamos como marco teórico al Enfoque Instrumental de Rabardel y como marco metodológico a algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue. Nos centramos en la instrumentación que forma parte del proceso de la Génesis Instrumental en el que usamos la noción de esquemas de Vergnaud para analizar los posibles esquemas de utilización que movilizan las alumnas al desarrollar las actividades propuestas. Como resultado de las acciones podemos inferir que ellas lograron instrumentar la noción y las propiedades de la simetría axial y lograron una instrumentalización local de algunas herramientas del Geogebra que fueron utilizadas en el aprendizaje de la simetría axial.

Palabras claves: Simetría axial. Instrumentación. Esquemas de utilización. Geogebra.

RESUMO

A presente pesquisa tem como objetivo facilitar o processo de Gênese Instrumental, especificamente facilitar a instrumentação da simetria axial mediada pelo ambiente de geometria dinâmica Geogebra em alunos de 12 e 13 anos de idade na primeira série do ensino médio da escola Sagrado Coração - Sophianum. Nosso estudo centra-se no processo de instrumentação nós consideramos a seguinte questão de pesquisa: alunos da primeira série do ensino medio instrumentan o conceito de simetria axial no desenvolvimento de atividades mediadas pelo Geogebra?

Para este estudo tivemos como referencial teórico a Abordagem Instrumental de Rabardel e como o quadro metodológico alguns aspectos da Engenharia Didática de Artigue. Nós nos centramos na parte de instrumentação do processo de Gênese Instrumental em onde usamos a noção de esquemas de Vergnaud para analisar os possíveis esquemas de utilização que mobilizem os alunos a desenvolver as atividades propostas. Como resultado das ações dos alunos, podemos inferir que foi possível instrumentar as propriedades da simetria axial e também uma instrumentalização local de algumas ferramentas do Geogebra que foram utilizadas na aprendizagem da simetria axial.

Palavras-chave: simetria axial. Instrumentação. Esquemas de utilização. Geogebra

ABSTRACT

This research has the objective to facilitate the Instrumental Genesis process, specifically to facilitate the instrumentation of the axial symmetry mediated by dynamic geometry environment Geogebra in students 12 and 13 years old in the first grade of secondary at Sagrado Corazon - Sophianum College. Because our study focuses on the instrumentation process we ask the following research question: first grade students of secondary instrumented the concept of axial symmetry when developing activities mediated by Geogebra?

For this study we had a theoretical framework from the Instrumental Approach of Rabardel and some aspects of Didactics Engineering of Artigue as a methodological framework. We focus on the instrumentation that is a part of the Instrumental Genesis process which we use the notion of schemes to Vergnaud to analyze the possible utilization schemes that mobilize students when to do the activities proposed. As a result of the actions of the students, we can infer that was possible the properties of the axial symmetry and a local instrumentation of some Geogebra tools that were used to learn the axial symmetry.

Keywords: Axial symmetry. Instrumentation. Utilization schemes. Geogebra.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1. SIMETRÍA EN RELACIÓN CON OTRAS ÁREAS	5
FIGURA 2. VENTANA INICIAL DEL GEOGEBRA 4.2.....	11
FIGURA 3. VENTANA DE GEOGEBRA 4.2 PARA EL ESTUDIO DE LA SIMETRÍA	12
FIGURA 4. HERRAMIENTAS DE SIMETRÍA EN EL GEOGEBRA.....	12
FIGURA 5. HERRAMIENTA REFLEJA OBJETO EN RECTA.....	13
FIGURA 6. APLICANDO LA HERRAMIENTA DE SIMETRÍA AXIAL	14
FIGURA 7. HERRAMIENTA NUEVO PUNTO	14
FIGURA 8. HERRAMIENTA RECTA PERPENDICULAR.....	14
FIGURA 9. APLICANDO LA HERRAMIENTA RECTA PERPENDICULAR.....	15
FIGURA 10. HERRAMIENTA SEGMENTO ENTRE DOS PUNTOS.....	15
FIGURA 11. HERRAMIENTA DISTANCIA O LONGITUD.....	15
FIGURA 12. LONGITUD DEL SEGMENTO AB	16
FIGURA 13. HERRAMIENTA ÁNGULO.....	16
FIGURA 14. APLICACIÓN DE LA HERRAMIENTA ÁNGULO.....	16
FIGURA 15. HERRAMIENTA INTERSECCIÓN DE DOS OBJETOS.....	17
FIGURA 16. APLICACIÓN DE LA HERRAMIENTA INTERSECCIÓN DE DOS OBJETOS.....	17
FIGURA 17. FIGURA DE APLICACIÓN DE LA HERRAMIENTA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS	18
FIGURA 18. COMPONENTES LA GÉNESIS DEL INSTRUMENTO.....	21
FIGURA 19. ISOMETRÍA TRANSFORMA RECTAS EN RECTAS.....	35
FIGURA 20. ISOMETRÍA TRANSFORMA RECTAS PERPENDICULARES EN RECTAS PERPENDICULARES.....	35
FIGURA 21. ISOMETRÍA ENTRE RECTAS ES BIYECTIVA.....	36
FIGURA 22. SIMETRÍA AXIAL.	37
FIGURA 23. SIMETRÍA AXIAL.	38
FIGURA 24. SIMETRÍA AXIAL DE UN TRIÁNGULO.....	38
FIGURA 25. SIMETRÍA AXIAL	39
FIGURA 26. SIMETRÍA AXIAL.	39

FIGURA 27. SIMETRÍA AXIAL	41
FIGURA 28. SIMETRÍA AXIAL (2).....	41
FIGURA 29. TEXTO GENERADOR	42
FIGURA 30. DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD	52
FIGURA 31. RESPUESTA DE MAYRA EN LA ACTIVIDAD 1A.....	52
FIGURA 32. RESPUESTA DE MAYRA EN LA ACTIVIDAD 1A.....	53
FIGURA 33. RESPUESTA DE MARCIA EN LA ACTIVIDAD 1A.....	53
FIGURA 34. RESPUESTA DE MARCIA EN LA ACTIVIDAD 1A.....	54
FIGURA 35. RESPUESTA DE MARCIA EN LA ACTIVIDAD 1A.....	54
FIGURA 36. OPCIÓN CORRECTA DE LA ACTIVIDAD.....	56
FIGURA 37. OPCIÓN ELEGIDA POR MAYRA EN LA ACTIVIDAD 1A	56
FIGURA 38. RESPUESTA DE MAYRA PARA LA ACTIVIDAD 1 A.....	57
FIGURA 39. OPCIÓN ELEGIDA POR MARCIA EN LA ACTIVIDAD 1A	57
FIGURA 40. RESPUESTA DE MARCIA PARA LA ACTIVIDAD 1 A.....	57
FIGURA 41. OPCIÓN ELEGIDA POR ALESSANDRA EN LA ACTIVIDAD 1A.....	58
FIGURA 42. RESPUESTA DE ALESSANDRA PARA LA ACTIVIDAD 1 A.....	58
FIGURA 43. ARRASTRANDO EL EJE DE SIMETRÍA.....	61
FIGURA 44. REPUESTAS DE MAYRA SOBRE LA ACTIVIDAD 1B.....	63
FIGURA 45. REPUESTAS DE MAYRA SOBRE LA ACTIVIDAD 1B.....	63
FIGURA 46. PROCEDIMIENTO REALIZADO POR MAYRA.....	64
FIGURA 47. REPUESTAS DE MAYRA SOBRE LA ACTIVIDAD 1B.....	64
FIGURA 48. REPUESTAS DE MARCIA SOBRE LA ACTIVIDAD 1B	65
FIGURA 49. REPUESTAS DE MARCIA SOBRE LA ACTIVIDAD 1B	66
FIGURA 50. REPUESTAS DE MARCIA SOBRE LA ACTIVIDAD 1B.....	66
FIGURA 51. PROCESO REALIZADO POR MARCIA EN EL GEOGEBRA EN LA ACTIVIDAD 1B	66
FIGURA 52. REPUESTAS DE ALESSANDRA SOBRE LA ACTIVIDAD 1B.....	68
FIGURA 53. REPUESTAS DE ALESSANDRA SOBRE LA ACTIVIDAD 1B.....	68
FIGURA 54. PROCESO REALIZADO POR ALESSANDRA EN EL GEOGEBRA EN LA ACTIVIDAD 1B	68
FIGURA 55. REPUESTAS DE ALESSANDRA SOBRE LA ACTIVIDAD 1B.....	69

FIGURA 56. ANÁLISIS DEL PROCESO REALIZADO POR ALESSANDRA EN EL GEOGEBRA EN LA ACTIVIDAD 1B	69
FIGURA 57. REPUESTAS DE ALESSANDRA SOBRE LA ACTIVIDAD 1B.....	70
FIGURA 58. TRAZO DEL EJE DE SIMETRÍA.....	72
FIGURA 59. SOLUCIÓN DE MAYRA EN LA ACTIVIDAD 1C.....	72
FIGURA 60. RESPUESTA DE MAYRA EN LA ACTIVIDAD 1C.....	73
FIGURA 61. RESPUESTA DE MAYRA EN LA ACTIVIDAD 1C.....	73
FIGURA 62. SOLUCIÓN DE MARCIA EN LA ACTIVIDAD 1C.....	74
FIGURA 63. RESPUESTA DE MARCIA EN LA ACTIVIDAD 1C.....	75
FIGURA 64. RESPUESTA DE MARCIA EN LA ACTIVIDAD 1C.....	75
FIGURA 65. SOLUCIÓN DE ALESSANDRA EN LA ACTIVIDAD 1C.....	76
FIGURA 66. RESPUESTA DE ALESSANDRA EN LA ACTIVIDAD 1C.....	76
FIGURA 67. RESPUESTA DE ALESSANDRA EN LA ACTIVIDAD 1C.....	77
FIGURA 68. TRAZO DE EJES EN LAS FIGURAS SIMÉTRICAS	78
FIGURA 69. TRAZO DE RECTAS REALIZADO POR MAYRA EN LA ACTIVIDAD 1D.....	79
FIGURA 70. RESPUESTAS DE MAYRA EN LA ACTIVIDAD 1D.....	80
FIGURA 71. TRAZO DE RECTAS REALIZADO POR MARCIA EN LA ACTIVIDAD 1D	81
FIGURA 72. RESPUESTAS DE MARCIA EN LA ACTIVIDAD 1D	81
FIGURA 73. TRAZO DE RECTAS REALIZADO POR ALESSANDRA EN LA ACTIVIDAD 1D	82
FIGURA 74. RESPUESTAS DE ALESSANDRA EN LA ACTIVIDAD 1D.....	83
FIGURA 75. CONCLUSIONES DE MAYRA EN LA ACTIVIDAD 1E.....	84
FIGURA 76. CONCLUSIONES DE MARCIA EN LA ACTIVIDAD 1E.....	85
FIGURA 77. CONCLUSIONES DE ALESSANDRA EN LA ACTIVIDAD 1E.....	86
FIGURA 78. TRAZO DEL SIMÉTRICO DE LA FIGURA.....	88
FIGURA 79. CUADRO ESTADÍSTICO DE LAS RESPUESTAS EN LA ACTIVIDAD 2A	89
FIGURA 80. GRAFICO REALIZADO POR MAYRA EN LA ACTIVIDAD 2A.....	90
FIGURA 81. GRAFICO REALIZADO POR MARCIA EN LA ACTIVIDAD 2A.....	91
FIGURA 82. GRAFICO REALIZADO POR ALESSANDRA EN LA ACTIVIDAD 2A.....	92
FIGURA 83. SOLUCIÓN DE LA ACTIVIDAD N° 2B.....	94
FIGURA 84. CUADRO ESTADÍSTICO DE LAS RESPUESTAS EN LA ACTIVIDAD 2B (LANZÓN MONOLÍTICO)	95

FIGURA 85. CUADRO ESTADÍSTICO DE LAS RESPUESTAS EN LA ACTIVIDAD 2B (LANZÓN MONOLÍTICO)	96
FIGURA 86. CUADRO ESTADÍSTICO DE LAS RESPUESTAS EN LA ACTIVIDAD 2B (ESTELA DE RAIMONDI)	97
FIGURA 87. CUADRO ESTADÍSTICO DE LAS RESPUESTAS EN LA ACTIVIDAD 2B (ESTELA DE RAIMONDI)	98
FIGURA 88. SOLUCIÓN DE MAYRA EN LA ACTIVIDAD N° 2B	99
FIGURA 89. SOLUCIÓN DE MARCIA EN LA ACTIVIDAD N° 2B.....	100
FIGURA 90. SOLUCIÓN DE ALESSANDRA EN LA ACTIVIDAD N° 2B	101
FIGURA 91. SOLUCIÓN DE LA ACTIVIDAD N° 2C.....	103
FIGURA 92. CUADRO ESTADÍSTICO DE LA ELECCIÓN DE LOS ARCHIVOS ELEGIDOS EN LA ACTIVIDAD 2C	104
FIGURA 93. CUADRO ESTADÍSTICO DE LAS RESPUESTAS DE LAS ALUMNAS EN LA ACTIVIDAD 2C.....	105
FIGURA 94. PROCEDIMIENTO DE MAYRA EN LA ACTIVIDAD 2C.....	106
FIGURA 95. RESPUESTAS DE MAYRA EN LA ACTIVIDAD 2C	107
FIGURA 96. PROCEDIMIENTO DE MARCIA EN LA ACTIVIDAD 2C	107
FIGURA 97. RESPUESTAS DE MARCIA EN LA ACTIVIDAD 2C	108
FIGURA 98. PROCEDIMIENTO DE ALESSANDRA EN LA ACTIVIDAD 2C.....	108
FIGURA 99. RESPUESTAS DE ALESSANDRA EN LA ACTIVIDAD 2C	109

LISTAS DE TABLAS

TABLA 1. ESPECIFICACIÓN DE LAS HERRAMIENTAS DEL GEOGEBRA	13
TABLA 2. VARIABLES DIDÁCTICAS PRESENTES EN LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS	27
TABLA 3. RESUMEN DEL SURGIMIENTO Y EVOLUCIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO	32
TABLA 4. LIBROS DE PRIMER GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA	40
TABLA 5. TIPO DE TAREAS Y TÉCNICAS PRESENTES EN EL LIBRO HIPERVÍNCULOS 1.....	43
TABLA 6. TIPO DE TAREAS Y TÉCNICAS PRESENTES EN EL LIBRO MATEMÁTICA PARA PENSAR 1.....	45
TABLA 7. TIPO DE TAREAS Y TÉCNICAS PRESENTES EN EL LIBRO MATEMÁTICA 1.	45
TABLA 8. DESCRIPCIÓN DE LOS ENCUENTROS DE APLICACIÓN DE LAS ACTIVIDADES.....	48
TABLA 9. VARIABLES CUALITATIVAS	89
TABLA 10. VARIABLES CUALITATIVAS	95
TABLA 11. VARIABLES CUALITATIVAS	95
TABLA 12. VARIABLES CUALITATIVAS.....	96
TABLA 13. VARIABLES CUALITATIVAS	97
TABLA 14. VARIABLES CUALITATIVAS	104

INDICE

CONSIDERACIONES INICIALES	1
CAPITULO 1: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....	3
1.1 Antecedentes	3
1.2 El Geogebra	10
1.3 Justificación	18
1.4 Pregunta y objetivos de la investigación	19
CAPITULO 2: EL ENFOQUE INSTRUMENTAL Y LA INGENIERÍA DIDÁCTICA	20
2.1 Aspectos del Enfoque Instrumental:	20
2.2 Aspectos de la Ingeniería Didáctica	25
CAPITULO 3: LA SIMETRÍA	29
3.1 Aspectos históricos	29
3.2 Estudio de la simetría	34
3.3 Enseñanza de la simetría axial.....	40
CAPITULO 4: EXPERIMENTO Y ANÁLISIS	47
4.1 Escenario de la investigación	47
4.2 Sujetos de la investigación	47
4.3 Descripción de las actividades	47
4.4 Análisis de las actividades	48
CONSIDERACIONES FINALES.....	111
REFERENCIAS	114
APENDICES	117

CONSIDERACIONES INICIALES

Esta tesis forma parte del proyecto *Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em ambientes tecnológicos PEA-MAT/DIMAT* desarrollado entre la PUCP y la PUC-SP/Brasil que cuenta con el apoyo del Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

El presente trabajo de investigación aborda el estudio del proceso de instrumentación de la simetría axial mediada por el software de geometría dinámica Geogebra. Este estudio permite contribuir en la enseñanza de la simetría axial bajo entornos computacionales y ayudar en el aprendizaje de este objeto matemático, ya que como lo menciona Ferreira (2005) es uno de los temas que no se trabajan en profundidad en las clases de matemática.

A continuación presentamos nuestro trabajo, que se desarrolla en cuatro capítulos:

En el primer capítulo, presentamos algunas investigaciones relacionadas con el aprendizaje de la simetría axial y sobre la importancia de la geometría dinámica, para lo cual realizamos una descripción del software Geogebra y de las herramientas utilizadas para el estudio de la simetría. También formulamos pregunta de investigación y los objetivos, general y específicos, trazados para la presente investigación.

En el segundo capítulo, tratamos aspectos del Enfoque Instrumental de Rabardel (1995), específicamente el proceso de instrumentación de la simetría axial. Además, presentamos algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) que es la base metodológica del presente trabajo.

En el tercer capítulo, hacemos un estudio de la simetría axial desde el punto de vista histórico. Además, presentamos el objeto matemático y el punto de vista didáctico en donde realizamos un estudio de los libros de primero de secundaria.

En el último capítulo, caracterizamos a nuestro escenario y nuestros sujetos de investigación. En este capítulo presentamos las actividades propuestas en la investigación, y sus respectivos análisis *a priori* y *a posteriori*.

Para concluir, presentamos las consideraciones finales del trabajo de investigación como por ejemplo que las alumnas que participaron en la investigación lograron conjeturar

algunas propiedades de la simetría axial y aplicarlas en la actividad N° 2, lo cual nos da indicios, de acuerdo al Enfoque Instrumental de Rabardel (1995), que las alumnas están instrumentadas con la noción de simetría axial ya que consiguieron justificar sus observaciones con las propiedades de este objeto matemático.



CAPITULO 1: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo presentamos la problemática de investigación relacionada con nuestro objeto de estudio que es la simetría. Para ello realizamos una revisión del Diseño Curricular Nacional así como también, los resultados de la Evaluación Nacional 2004 que fue la última evaluación censal hecha por la Unidad de Medición de la Calidad Educativa del Ministerio de Educación del Perú a alumnos de Educación Secundaria, para así determinar cómo están los alumnos en el estudio de la geometría en general. Con el fin de poder tener una idea de cómo está siendo enseñada este objeto matemático en las escuelas, hacemos una revisión de libros del primer año de secundaria. A su vez, presentamos algunas investigaciones relacionadas al estudio de la simetría y de la utilización de la geometría dinámica en el proceso de enseñanza y aprendizaje de este objeto de estudio, debido a que nuestra investigación está interesada en el estudio de la simetría mediado por el software Geogebra. Finalmente, presentamos la pregunta de investigación y sus respectivos objetivos.

1.1 Antecedentes

La enseñanza de la geometría es uno de los retos de los docentes en la actualidad, dado que es una de las ramas de la matemática que a pesar de estar presente en el Diseño Curricular Nacional (DCN, 2009) pensamos que está siendo desarrollada de manera superficial por el poco tiempo que se le dedica en las aulas y/o tiene carencias en su enseñanza, así lo menciona el Ministerio de Educación del Perú (MINEDU),

Se ha observado que los docentes desarrollan en menor tiempo y con menor profundidad las capacidades referidas a geometría. Si consideramos que las experiencias de aprendizaje no se circunscriben únicamente al último grado que se está cursando, sino que son la acumulación integradora de las experiencias a lo largo de toda la escolaridad, el que no se trabaje la geometría con el tiempo y la profundidad requeridas desde los grados anteriores puede ser una de las causas que influye negativamente en el aprendizaje de los estudiantes en este eje (MINEDU, 2005, p. 98).

En los resultados de la evaluación nacional del año 2004 realizada por la Unidad de la Medición de la Calidad Educativa (UMC) del Ministerio de Educación, se puso de manifiesto que sólo el 2,9% los alumnos que estaban finalizando el quinto grado de secundaria se encontraban en el nivel de suficiente en el componente de geometría y medición, que es el nivel esperado para todos los alumnos dicho grado. Esto muestra la

prioridad que se da al cálculo y no al desarrollo de capacidades fundamentales como las de resolución de problemas, comunicación matemática, razonamiento y demostración.

[...] Y, ante la ausencia de un enfoque pedagógico, la mayoría de profesores optó por trabajar asociando la matemática con la capacidad de calcular. En primaria, lo fundamental era el dominio de los cálculos aritméticos y, en secundaria, el cálculo algebraico, geométrico y trigonométrico. Este regreso a lo básico prevalece hasta hoy en día en la práctica docente, hecho que puede comprobarse por la existencia de estudios que señalan que casi el 85% de los ejercicios resueltos por los estudiantes en sus cuadernos de trabajo y de clase se centran en la aplicación de algoritmos convencionales (MINEDU, 2005, p.18).

Por lo dicho anteriormente, se puede notar que el componente de Geometría y Medición del DCN (2009) es uno de los que necesitan mayor profundidad por lo descuidado que ha estado. Desde nuestra experiencia profesional, hemos notado que en los años de escolaridad hay temas como las transformaciones geométricas en el plano, geometría analítica, entre otros; que no se enseñan a pesar que están en el currículo del Perú, pensamos que esto puede suceder por falta de tiempo o porque se profundizó otros temas.

Una de las transformaciones geométricas en el plano es la simetría axial, está presente en otras áreas como por ejemplo: En la música clásica, donde existen composiciones en las que podemos encontrar distribuciones de las notas generadas mediante simetría. Algunas composiciones como: “El Preludio” de Johann Sebastian Bach, “la Sonata en G mayor” de Domenico Scarlatti, Lotosblume de Robert Schumann, o Die Meistersinger de Richard Wagner. En la arqueología, encontramos simetría en las diferentes manifestaciones culturales de nuestros antepasados, un ejemplo es la Estela de Raimondi que se encuentra en el Museo Nacional de Antropología y Arquitectura de Lima. En el arte, como la simetría percibida en las distintas obras artísticas de los teselados del holandés M. C. Escher (Figura 1). En la biología, como la simetría presente en las hojas, en las flores y en animales. También la encontramos en la física, como la simetría que se puede observar en los gráficos de los movimientos armónicos simples.

[...] la simetría impregna toda la ciencia y ocupa un lugar prominente en la química, la biología, la fisiología y la astronomía. La simetría abarca desde el mundo íntimo de la estructura de la materia hasta el inmenso dominio cósmico, pasando por el universo abstracto de las matemáticas (Lederman, L. 1996, p.229).

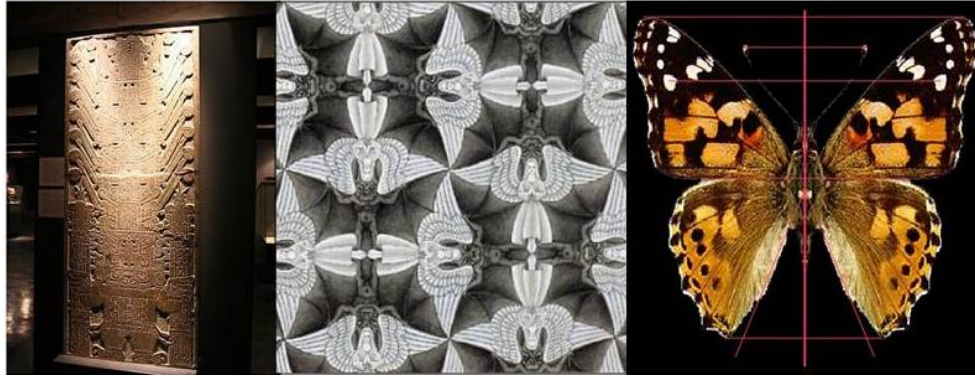


Figura 1. Simetría en relación con otras áreas

Fuente: http://inmitacs.files.wordpress.com/2010/11/simetria-fullinit_.jpg

Consideramos que la simetría es un contenido matemático importante debido a que tiene relación con el aprendizaje de otros contenidos de los últimos años de educación secundaria y/o primeros ciclos universitarios, como por ejemplo: el estudio de la parábola, elipse e hipérbola, así como también en el estudio de las funciones inversas y funciones pares. La simetría proporciona oportunidades para que los alumnos visualicen la geometría en el mundo desde el arte, la naturaleza, las construcciones arquitectónicas, como ya lo hemos mencionado anteriormente, pero lo más importante es que permite la exploración de regularidades y/o patrones que representan la esencia del conocimiento matemático.

En Educación Matemática, la investigación de Jaime (1993), ha tomado este contenido matemático como foco de estudio, la autora sostiene que hay pocas investigaciones hacia contenidos geométricos y de las existentes, en su mayoría, toman como foco de estudio a los polígonos y los conceptos relacionados con estos. Es por ello, que se interesa por el estudio de las isometrías del plano (simetrías, traslaciones y rotaciones).

La investigadora propone actividades para la enseñanza de la simetría que están elaboradas según los niveles de razonamiento geométrico y las fases de aprendizajes propuestas por Van Hiele. Toma como referencia para la elaboración de dichas actividades, los errores de los alumnos en el aprendizaje de la simetría que fueron investigados en el marco de un proyecto inglés *Concepts in Secondary Mathematics and Science* donde se aplicó de un test a 1 026 alumnos entre 13 y 15 años de edad. Estos errores están divididos en dos grupos: El primero, errores cuyo origen está en el concepto de simetría (Falta de equidistancia al eje de

cada punto y su figura, falta de perpendicularidad respecto al eje del segmento que une un punto y su imagen y la combinación de los dos errores anteriores); el segundo grupo, errores cuyo origen está en una interpretación reducida o deformada de la simetría (dibujo de la imagen paralela a la figura original aunque ésta no sea paralela al eje, desplazamiento horizontal o vertical de la figura aunque el eje de simetría este inclinado y la combinación de los dos errores anteriores). Jaime (1993) recomienda implementar suficientes actividades para la enseñanza de las isometrías en el plano, a partir de los modelos de ejercicios que propone la autora.

Esta investigación es importante para nuestro estudio, porque brinda un panorama sobre la enseñanza de la simetría y estudios de los errores comunes que presentan los alumnos en su aprendizaje. Además, presenta actividades que podremos tomar en cuenta para la elaboración de la secuencia de actividades.

Otra investigación que nos proporciona aportes es la de Ferreira (2005), que hace un análisis en los documentos curriculares como la Propuesta Curricular Nacional del Brasil, también analiza las actividades que algunos textos escolares presentan sobre el tema de isometrías y con ello el estudio de la simetría, dicho análisis se basó en los cuatro niveles de complejidad del campo conceptual simetría dado por Vergnaud, el primero basado en el concepto simétrico y relacionado a las propiedades que la figura posee, misma forma, misma medida, misma distancia, o sea una única figura que posee un eje de simetría; el segundo nivel, trata a la simetría como relación entre dos figuras distintas cuyos puntos tienen igual distancia al eje de simetría; el tercer nivel da énfasis a las propiedades y el cuarto nivel ocurre la sustitución de la simetría por isometría, o sea la simetría se vuelve miembro de un grupo de transformaciones geométricas que preserva propiedades específicas. Además, la investigadora realiza una propuesta para el aprendizaje de las isometrías dando mayor énfasis a la simetría para la enseñanza del nivel medio de horario nocturno con alumnos de 16 años de edad.

Esta investigación aporta a la nuestra, porque muestra una problemática que se presenta en el estudio de la simetría con relación al currículo. La investigadora manifiesta que no hay un estudio profundo de la simetría en los textos escolares y que es abordada sólo por un análisis gráfico, como una biyección del plano en el plano y sin el concepto formal. Por

ello, nos menciona que la simetría es uno de los contenidos que no se llega a profundizar dentro de los libros de textos escolares del nivel medio en Brasil y que necesita mayor estudio. Este problema no es indiferente a nuestro país, y este estudio corrobora que existe una problemática en la enseñanza y aprendizaje en este objeto matemático.

Las siguientes investigaciones, muestran una óptica diferente sobre la enseñanza y aprendizaje de la simetría, porque utilizan ambientes de geometría dinámica. Ulian (2008), hace un estudio sobre las transformaciones geométricas en el plano, mediado por el CABRI-GEOMÈTRE, dando énfasis a la simetría axial y a la rotación. Propone un módulo inicial dedicado al reconocimiento de las herramientas del software y cuatro módulos más, siendo dos de ellos dedicados a la simetría axial dado que se propuso investigar ¿en qué medida los recursos y herramientas del software CABRI-GEOMÈTRE favorecen el aprendizaje de las transformaciones geométricas, en especial la simetría axial y la rotación, para los alumnos del octavo año de enseñanza fundamental? Para su investigación utilizó la psicogénesis de Piaget. La investigadora concluye que el CABRI-GEOMÈTRE favorece el aprendizaje de las transformaciones geométricas dado que los alumnos, en su proceso de indagación y construcción, van apropiándose de un vocabulario adecuado y presentan sus soluciones con argumentos apoyados en la observación de propiedades invariantes de la simetría en el CABRI-GEOMÈTRE.

Consideramos que la investigadora pudo utilizar un referente teórico que le brindara mayor exactitud de cómo la apropiación de los recursos y herramientas del CABRI-GEOMÈTRE favorece el aprendizaje de la noción de simetría axial, pues no se puede asegurar que los alumnos hayan aprendido con sólo haber resuelto las actividades propuestas. Sin embargo, esta investigación nos muestra la importancia del uso de la geometría dinámica en el aprendizaje de este objeto matemático pues la autora sostiene que el uso del recurso tecnológico ayudó a obtener buenos resultados. Lo cual nos incentiva en la realización de nuestra investigación con un software de geometría dinámica.

En ese mismo sentido, Salazar (2009) investigó cómo alumnos de segundo año de enseñanza media se apropian de las nociones de transformaciones geométricas en el espacio, cuando interactúan en un ambiente de geometría dinámica como lo es el CABRI 3D. Para su investigación consideró en Enfoque Instrumental de Rabardel (1995) y la teoría

de Registros de Representación Semiótica de Duval (1998) puesto que sus interrogantes fueron ¿De qué forma los alumnos se apropian de las herramientas y/o recursos del ambiente Cabri 3D cuando estudian algunas transformaciones en el espacio? ¿Cómo la integración del Cabri 3D interfiere en el proceso de aprendizaje de esas transformaciones en el espacio? Entre sus principales resultados encontramos: que la falta de experiencia de los alumnos de interactuar con el Cabri 3D no fue ninguna barrera para que ellos trabajen bien con el software; se pudo constatar que el instrumento y el objeto pueden cambiar de función en el desarrollo de la actividad y se identificó indicios del surgimiento de actividades instrumentales colectivas. Salazar (2009) considera necesarias otras investigaciones en Geometría plana y/o espacial basadas en el Enfoque Instrumental y en las interacciones con otros ambientes de geometría dinámica.

Esta investigación proporciona un camino para la nuestra, dado queremos enfocarnos en una de las transformaciones geométricas en el plano, la simetría axial; desde un ambiente de geometría dinámica como lo es el Geogebra ya que es un software libre, es decir, no requiere licencia para su uso, cuenta con herramientas necesarias para el estudio de la simetría axial y porque existen diversos estudios que muestran que el uso de este software es favorable en la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Otra investigación que nos parece importante por el marco teórico para el trabajo con tecnologías es la de Chumpitaz (2013). El autor realiza un estudio sobre el proceso de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediados por el software Geogebra en estudiantes de ingeniería. Uno de los objetivos que el investigador planteó investigar es analizar las acciones de los estudiantes cuando instrumentalizan al Geogebra y a la función definida por tramos, utilizando como referencial teórico el Enfoque Instrumental y como metodología de investigación la Ingeniería Didáctica. Entre sus principales conclusiones, el autor señala que: los estudiantes movilizan esquemas preexistentes con respecto al uso del software Geogebra que están relacionados al uso de otros softwares; el investigador sostiene que el aspecto dinámico del Geogebra en la secuencia de aprendizaje permitió minimizar dificultades en identificar el dominio de la función definida por tramos y realizar transformaciones de ésta.

En cuanto al proceso instrumentalización de algunas herramientas del Geogebra, el investigador centra su estudio en nuevo punto, selección de objetos, recta que pasa por dos puntos, entre otros; brindándonos un panorama de trabajo con el software Geogebra. El investigador recomienda al igual que Salazar (2009), que se deben realizar futuros estudios basados en el Enfoque Instrumental que utilizan ambientes de Geometría Dinámica. En nuestro caso, queremos centrarnos en el estudio de la simetría axial utilizando el Enfoque Instrumental y centrándonos en el proceso de instrumentación de este enfoque.

Otro estudio que trata sobre el Enfoque Instrumental es el de Trouche (2003). El investigador realiza un estudio sobre las calculadoras simbólicas en el aprendizaje del límite de una función. Lo importante de este estudio es que el investigador profundiza en el aspecto colectivo, es decir, no se centra en un alumno sino que toma en cuenta sus interacciones en el desarrollo de una actividad planteada. Trouche denomina “Orquestación instrumental” al proceso que tiene relación con la organización de los diversos recursos que el profesor establece con el objetivo de propiciar la génesis instrumental de sus alumnos. En su estudio el autor sostiene que el papel decisivo de la orquestación instrumental está dado por: un conjunto de objetivos (en relación con un tipo de tarea o ambiente de trabajo), un tipo de configuración (o estructura general del artefacto) y un conjunto de modos de explotación (vinculado a la posible organización de esta configuración.)

El investigador sostiene que la noción de orquestación instrumental permite afrontar la gestión didáctica de los instrumentos con el fin de concebir la integración de los artefactos dentro de las instituciones de enseñanza. Una integración asumiendo opciones didácticas no sólo en relación con la construcción de sistemas individuales de instrumentos, sino también para su gestión colectiva.

Esta investigación nos brinda una visión más colectiva dentro del trabajo con tecnologías en el aula ya que el ser humano es un ente social por naturaleza, además nos ayudará a observar, en algunos momentos de la parte experimental, si ocurre la Orquestación Instrumental con los alumnos.

Como hemos mencionamos, en párrafos anteriores, nuestro estudio se centrará en el proceso de instrumentación de la simetría mediada axial por el Geogebra. Por ello, a continuación presentamos algunos aspectos de este Software de Geometría dinámica.

1.2 El Geogebra

Las tecnologías de la información y comunicación (TIC) están inmersas en diversos ámbitos como el laboral, el cultural, el social y el educativo. Es en este último que las TIC generan nuevas formas de trabajo, recursos y procesos de enseñanza - aprendizaje. Por ello, se presenta la necesidad de investigar el uso de las TIC en el aula.

Para Gallegos y Peña (2012), la integración y la utilización de las TIC es el centro de muchas investigaciones en Educación Matemática.

La integración y utilización de las TIC en el proceso educativo de matemáticas es un asunto que viene ocupando el trabajo de los investigadores en educación matemática. La investigaciones tratan de determinar los posibles beneficios que la utilización de las TIC conlleva, así como diversas metodologías y entornos interactivos multimedia de aprendizaje que produzcan mejoras en los procesos de enseñanza y aprendizaje (Gallegos et al. 2012, p.11).

Nuestra investigación quiere proponer actividades para el estudio de la simetría utilizando el Geogebra tal como nos menciona el Ministerio de Educación del Perú, en sus Orientaciones para el trabajo pedagógico (2007);

[...]La tecnología desempeña también un papel importante en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Herramientas como un programa informático de “Geometría dinámica”, capacitan para modelizar una gran variedad de figuras de dos dimensiones y para tener una experiencia interactiva con ellas. La visualización y el razonamiento espacial se enriquecen mediante la interacción con animaciones de ordenador y en otros contextos tecnológicos (p. 30).

Estas orientaciones nos muestran el importante papel que juega las tecnologías en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Así mismo, la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) recomienda:

Los objetos geométricos también se pueden investigar e interpretar mediante Geometría de las transformaciones. Como ayuda a obtener imágenes de las figuras a través de diferentes transformaciones, los alumnos pueden utilizar objetos físicos, figuras trazadas en papel de seda, espejos u otras superficies reflectoras, figuras dibujadas en papel cuadriculado o programas de geometrías dinámica (NCTM, 2000, p.239).

Por lo mencionado anteriormente, consideramos un software de geometría dinámica que contiene herramientas para el trabajo con simetrías es el Geogebra. Este ambiente ofrece una amplia variedad de opciones para desarrollar contenidos no sólo de geometría sino también de álgebra, análisis y estadística. Es sencillo y fácil de utilizar, lo que facilita desarrollar actividades a través de las herramientas y/o recursos que ofrece. Permite abordar la geometría y otros aspectos de las matemáticas, a través de la experimentación y la manipulación de distintos elementos, facilitando la realización de construcciones para deducir resultados y propiedades a partir de la observación directa.

La ventana inicial de Geogebra, en su versión 4.2, presenta aspectos como muestra la figura 2.

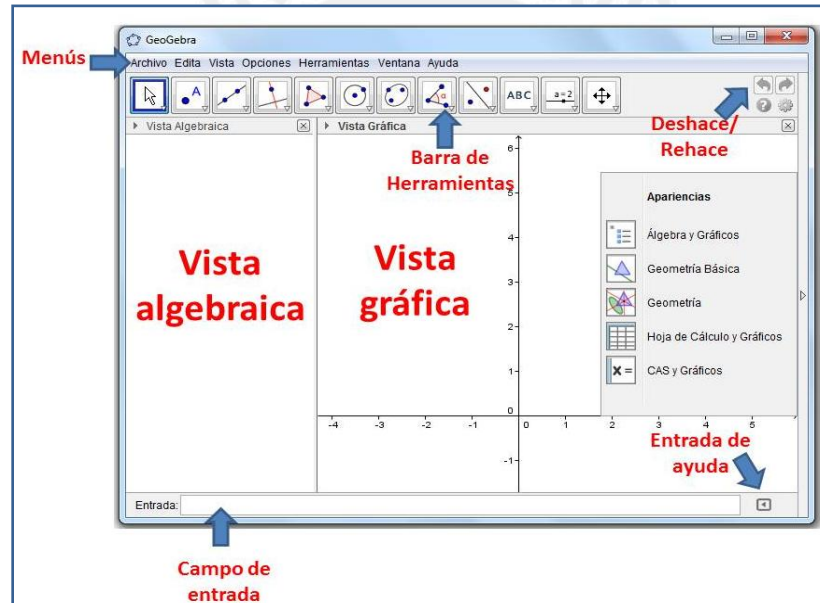


Figura 2. Ventana inicial del Geogebra 4.2

Debido que nuestra investigación está enfocada al estudio de la simetría axial, utilizaremos sólo la vista de geometría, como se muestra a continuación:

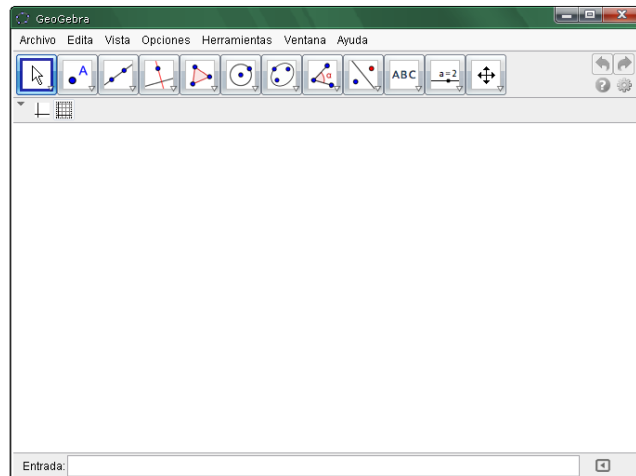


Figura 3. Ventana de Geogebra 4.2 para el estudio de la simetría

Además, el Geogebra presenta en su barra de herramientas una opción denominada transformaciones en la cual se encuentran las herramientas para simetría denominadas: refleja objeto en recta y refleja objeto por punto, como se muestran a continuación en la figura 4.

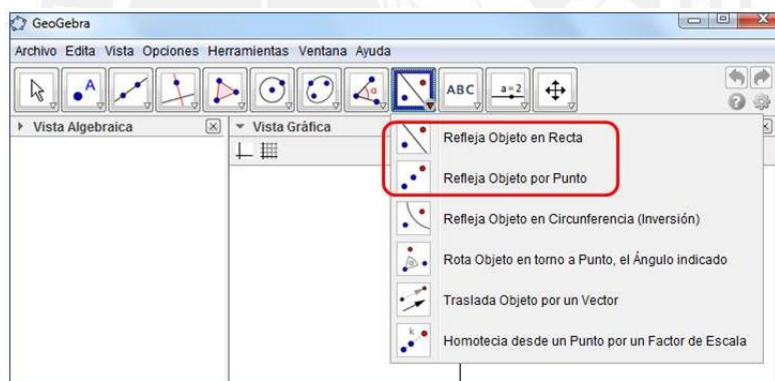


Figura 4. Herramientas de simetría en el Geogebra

Puesto que nuestra investigación pone énfasis en el estudio de la simetría axial mediado por el Geogebra, consideramos pertinente presentar otras opciones de la barra de herramientas como el punto, recta perpendicular, distancia o longitud, segmento entre dos puntos, ángulos, circunferencia, intersección de dos objetos y recta que pasa por dos puntos, ya que los alumnos no sólo se pueden basar en dos herramientas si no en otras herramientas que les permitan, apropiarse de las propiedades de la simetría axial mediante la manipulación del Geogebra.

Tabla 1. Especificación de las herramientas del Geogebra

Herramienta	Icono	Construcción
Refleja objeto en recta		Realiza la simetría axial de un objeto a través de una recta o eje.
Nuevo punto		Crea un punto en el plano.
Recta perpendicular		Selecciona una recta (semirrecta o segmento) y un punto, donde quedará definida la recta que pasa por el punto y es perpendicular a la primera recta.
Segmento entre dos puntos		Selecciona dos puntos en los cuales se establece un segmento con tales extremos.
Distancia o longitud		Mide la distancia entre dos puntos, dos rectas o un punto y una recta y la expone como texto dinámico en la vista gráfica.
Ángulo		Crea ángulos realizando selecciones de diversas maneras, entre tres puntos cuyo vértice es el segundo de ellos.
Intersección de dos objetos		Selecciona dos objetos, para crear todos los puntos de intersección (si los hubiese o fuese posibles).
Recta que pasa por dos puntos		Marca dos puntos; y se traza la recta que pasa por ellos.

A continuación presentaremos algunos ejemplos del uso de estas herramientas que serán utilizadas en el desarrollo de actividades que propondremos en la parte experimental:

1. *Herramienta refleja objeto en recta:* Esta herramienta se utiliza para la simetría axial, para utilizarla (ver figura 5) debemos tener un objeto y una recta que será el eje de simetría.

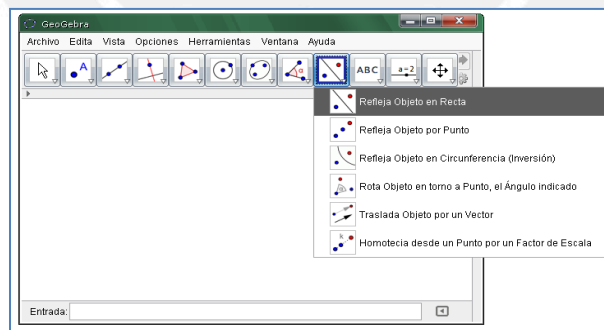


Figura 5. Herramienta refleja objeto en recta

Por ejemplo, en la figura 6, mostramos el polígono simétrico al polígono ABCDEF por medio de una simetría axial.

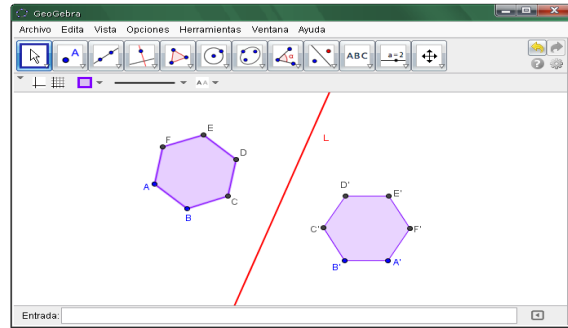


Figura 6. Aplicando la herramienta de simetría axial

2. *Herramienta nuevo punto:* Permite la creación de un punto en la vista gráfica.



Figura 7. Herramienta nuevo punto

3. *Herramienta recta perpendicular:* Permite crear una recta perpendicular a un segmento, recta o circunferencia, para ello se debe especificar a qué objeto será perpendicular y en qué punto.

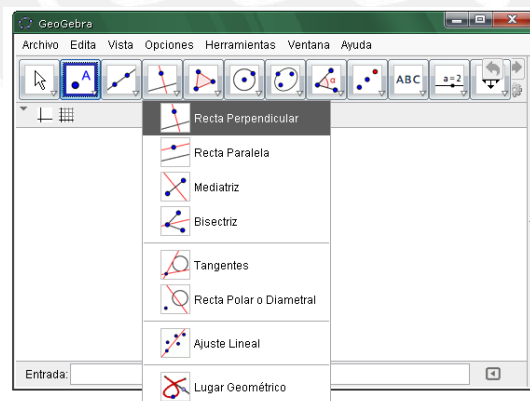


Figura 8. Herramienta recta perpendicular

En la figura 9 se muestra un ejemplo de la creación de una recta L perpendicular al segmento dado AB.

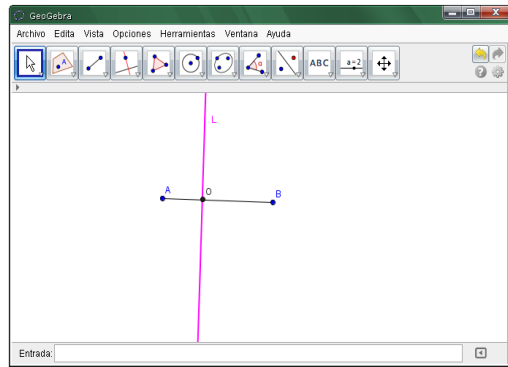


Figura 9. Aplicando la herramienta recta perpendicular

4. *Herramienta segmento entre dos puntos:* Permite crear un segmento. Para ello, se debe hacer clic en la herramienta y luego clic en dos lugares distintos de la zona gráfica y automáticamente aparecerán los puntos extremos del segmento. La figura 10, muestra la creación del segmento AB.

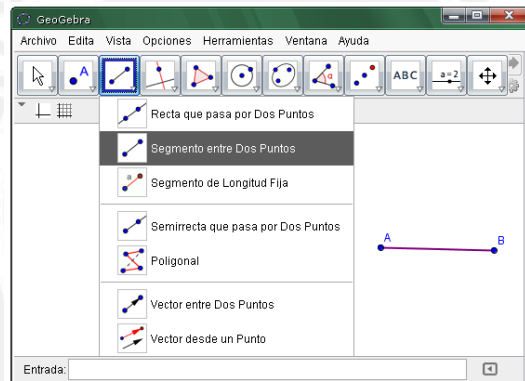


Figura 10. Herramienta segmento entre dos puntos

5. *Herramienta distancia o longitud:* esta herramienta permite determinar la longitud de un segmento, el lado de un polígono o la distancia entre dos puntos.

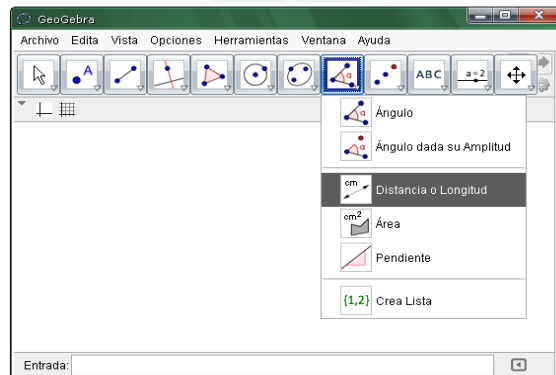


Figura 11. Herramienta distancia o longitud

La figura 12 muestra un ejemplo de cómo determinar la longitud de un segmento AB utilizando esta herramienta.

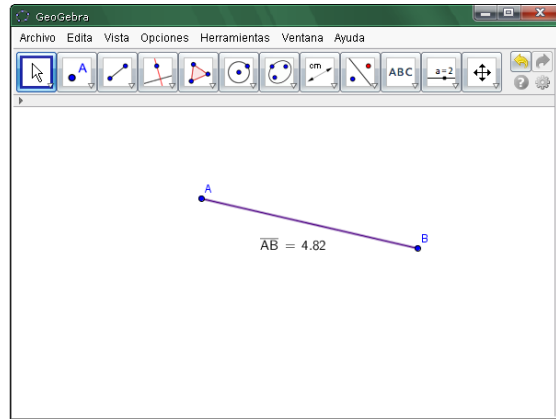


Figura 12. Longitud del segmento AB

6. *Herramienta ángulo:* esta herramienta permite crear un ángulo y automáticamente nos da la medida de éste. Para ello, debemos hacer clic en tres puntos.

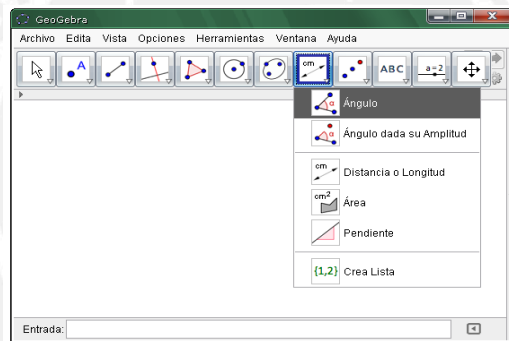


Figura 13. Herramienta ángulo

La figura 14 muestra la medida del ángulo ABC creado con la herramienta ángulo y las medidas de los ángulos internos del triángulo DEF.

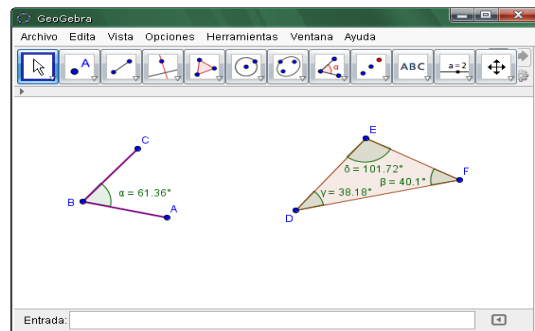


Figura 14. Aplicación de la herramienta ángulo

7. *Herramienta intersección de dos objetos*: crea el punto de intersección entre dos objetos. Para ello se debe de hacer clic en la herramienta y luego clic en cada uno de los objetos, de esta manera, automáticamente se crea el punto de intersección de ambos.

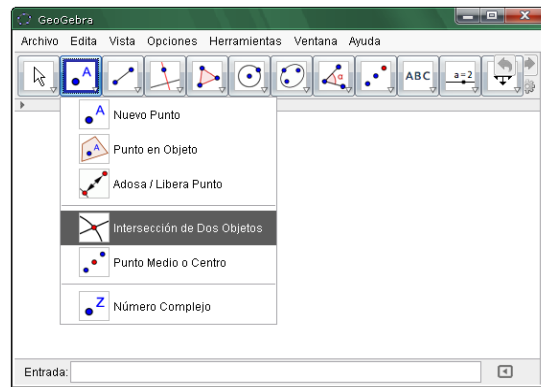


Figura 15. Herramienta intersección de dos objetos

La figura 16 muestra la creación del punto I que es el punto de intersección entre la recta L y el segmento AB.

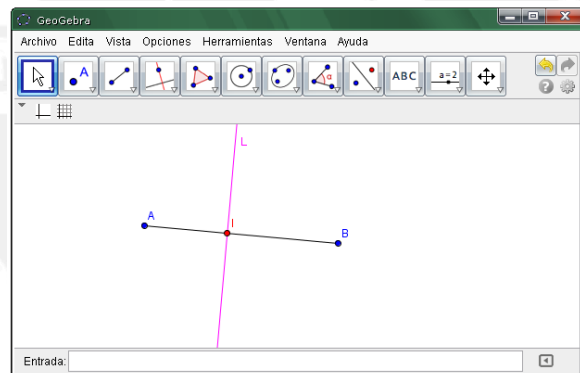


Figura 16. Aplicación de la herramienta intersección de dos objetos

8. *Herramienta recta que pasa por dos puntos*: crea una recta dado dos puntos. Se debe realizar clic en dos lugares distintos de la zona gráfica, creándose dos puntos y automáticamente aparecerá la recta

La figura 17 muestra la creación de la recta L que pasa por los puntos A y B.

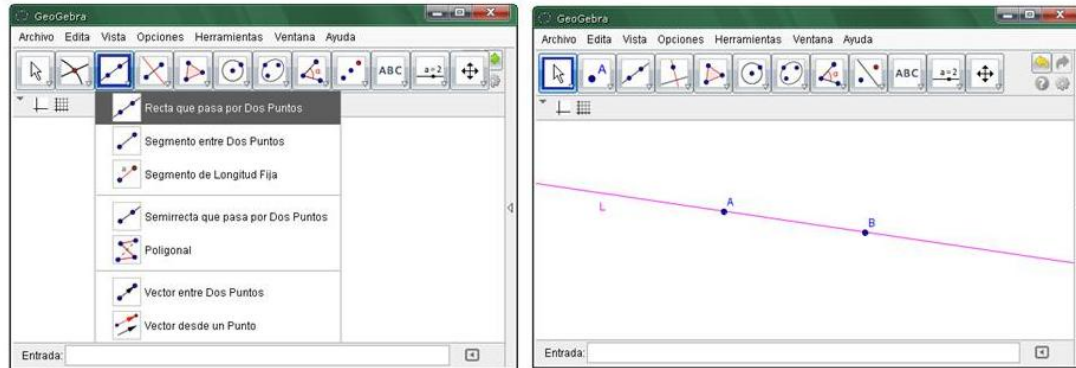


Figura 17. Figura de aplicación de la herramienta recta que pasa por dos puntos

Las herramientas que han sido presentadas son aquellas que se utilizarán para el desarrollo de las actividades en la parte experimental de nuestra investigación.

A continuación presentamos nuestra justificación para el presente estudio.

1.3 Justificación

En la actualidad el avance tecnológico en diversos campos científicos como el educativo es constante. Nuestros alumnos son nativos digitales, es decir, nacen rodeados de tecnología como Smartphone, tablets, laptops, juegos online, por dar unos ejemplos; es por ello que necesitamos de un marco teórico que nos dé soporte en el estudio de las relaciones entre los sujetos, instrumentos y conocimientos.

Por tanto, consideramos para nuestro estudio el Enfoque Instrumental dado por Rabardel (1995), debido a que nuestro interés es identificar y analizar los posibles esquemas de utilización de los alumnos en el proceso de Instrumentación de la simetría axial por medio de un software de Geometría Dinámica como lo es el Geogebra.

Además, las diversas investigaciones como las de Jaime (1993), Ferreira (2005) y Ulian (2008) nos muestran que existe una problemática en la enseñanza y aprendizaje de la simetría y otras investigaciones como la de Salazar (2009) y Chumpitaz (2013) que nos brindan información sobre el importante papel que tiene la tecnología en el aprendizaje de la Geometría.

Por todo lo anteriormente mencionado, vemos pertinente hacer un estudio de la simetría pero a través de una óptica diferente, es decir desde actividades que ayuden al estudiante a conjeturar las propiedades de la simetría, mediado por un ambiente de geometría dinámica como lo es el Geogebra.

1.4 Pregunta y objetivos de la investigación

A continuación presentamos nuestra pregunta de investigación y los objetivos de ésta.

Pregunta de la investigación.

¿Alumnos de primer grado de educación secundaria instrumentan la noción de simetría axial cuando desarrollan actividades mediadas por el Geogebra?

Objetivo general.

Propiciar la instrumentación de la noción simetría axial mediado por el Geogebra en alumnos de primer grado de educación secundaria.

Objetivos específicos.

Para alcanzar el objetivo general pretendemos lograr los siguientes objetivos específicos:

- Diseñar una secuencia de actividades en la que se utilice el Geogebra como mediador para el aprendizaje de la noción de simetría axial.
- Identificar por medio de las acciones de los alumnos, los posibles esquemas de utilización desarrollados.
- Analizar las acciones de los alumnos en el proceso de aprendizaje de la noción y de las propiedades de la simetría axial utilizando el software Geogebra.

En el siguiente capítulo presentamos algunos aspectos del Enfoque Instrumental y de la Ingeniería Didáctica que son nuestros referenciales teóricos y metodológicos, respectivamente.

CAPITULO 2: EL ENFOQUE INSTRUMENTAL Y LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

En este capítulo presentamos el marco teórico y metodológico de nuestra investigación.

2.1 Aspectos del Enfoque Instrumental:

Para nuestra investigación utilizaremos el Enfoque Instrumental como el referencial teórico dada por Rabardel (1995), ya que nos proporciona las directrices necesarias para el estudio en escenarios de enseñanza y aprendizaje con tecnologías.

Para Salazar (2009), las nociones claves de este Enfoque son las siguientes:

Esquema: Que según Vergnaud (1990), es una organización invariante de la conducta del sujeto para una clase determinada de situaciones.

Artefacto: Es un objeto material o abstracto, destinado a dar sustento a la actividad del sujeto en la ejecución de un cierto tipo de tarea.

Para Rabardel (1995), el artefacto puede entenderse como una cosa susceptible de uso, elaborada para inscribirse en actividades intencionales, es decir, la intencionalidad es causa de su existencia. Según el autor, existen dos tipos de restricciones del artefacto:

- i) *Las restricciones de estructura:* se traducen, para el sujeto, en acciones de puesta de posición relativa de las piezas entre sí, de mantener en posición.
- ii) *Las restricciones de funcionamiento:* se traducen en acciones en condición funcional del artefacto. Se subdividen en:
 - Restricciones de modalidades de existencia; el artefacto opone al sujeto un conjunto de restricciones que debe a la vez identificar, comprender y administrar.
 - Restricciones de intencionalidad; las restricciones de este nivel están relacionadas con la especificidad del artefacto en cuanto se destina a producir transformaciones.
 - Restricciones de estructura de la acción; relacionadas con la pre estructuración de la acción del usuario.

Instrumento: es lo que un sujeto construye a partir del artefacto (figura 18). Es entonces una entidad mixta que contiene a la vez un artefacto, material o no, y esquemas de utilización construidos por el sujeto durante su interacción.

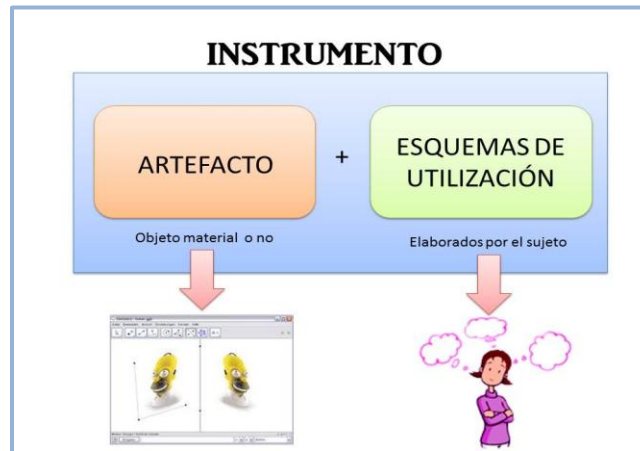


Figura 18. Componentes la Génesis del instrumento

De acuerdo a Rabardel (1995), el Enfoque Instrumental estudia la diferencia que existe entre el artefacto, instrumento y los procesos que desenvuelven la transformación progresiva del artefacto en instrumento, transformación que denominó como proceso Génesis Instrumental.

El autor considera tres polos importantes en la Génesis instrumental, estos son:

- El sujeto, que puede ser un usuario, operario, trabajador o agente.
- El instrumento, que se refiere de la herramienta, maquinas, sistemas, utensilio, etc.
- El objeto, al cual va dirigida la acción con ayuda del instrumento. Este puede ser la materia prima, realidad, objeto de la actividad o trabajo.

Sin embargo, el autor no deja de mencionar un cuarto polo, uno destinado al trabajo colectivo,

Finalmente, la evolución de las tecnologías contemporáneas conduce a hacer parecer un cuarto polo para describir situaciones nuevas relacionadas con la aparición de software destinado al trabajo colectivo (groupware). En efecto, esos nuevos tipos de dispositivos están orientadas hacia las dimensiones colectivas de trabajo, y tratan de permitir y facilitar el trabajo en común. A las relaciones habituales entre sujetos, objetos e instrumentos, vienen a agregarse las interacciones del sujeto con los otros sujetos, las colaboraciones y las cooperaciones. Este modelo tripolar se convierte en un modelo cuadripolar (Rabardel, 2011, p.115).

Como se menciona en la cita anterior, se ve la necesidad de incrementar un cuarto polo, el cual no es profundizado por Rabardel pero sí por Trouche (2003) que luego toma ese cuarto polo y lo denomina como orquestación instrumental.

La metáfora de la orquestación es fructífera, ya que pone en relieve la importancia de los instrumentos para el desarrollo de la actividad matemática y hace hincapié en la responsabilidad del maestro con respecto a estos instrumentos. Revela la necesidad de no sólo el diseño de buenos problemas matemáticos, sino también orquestaciones que tienen en cuenta los aspectos técnicos del entorno correspondiente. Ayuda a identificar y diseñar las formas adecuadas de enseñar el uso de la tecnología (Trouche, 2010, p.675).

En cuanto a la génesis instrumental, Rabardel (1995) sostiene que ésta consta de dos dimensiones: La instrumentalización y la instrumentación.


La instrumentalización:


Está dirigida hacia la parte artefactual del instrumento, consta de enriquecimiento de las propiedades del artefacto por parte del sujeto. Es decir, es el resultante de la atribución de una función al artefacto por parte del sujeto.

Según el autor, la instrumentalización consta de dos niveles. El primero, es la instrumentalización local, relacionada con una acción singular y con circunstancias de su desarrollo. El artefacto es instrumentalizado momentáneamente. El segundo nivel, la función adquirida se conserva de manera durable como propiedad de artefacto en relación con una clase de acciones, de objeto de la actividad y de situaciones. La instrumentalización es durable o permanente.

Respecto a la instrumentalización Trouche (2004) sugiere tres estadios:

- Estadio de descubrimiento y selección de las teclas y comandos relevantes: Por ejemplo, cuando el sujeto identifica en la barra herramienta el ícono distancia o

longitud  para medir un segmento en el Geogebra.

- Estadio de personalización: Por ejemplo, cuando un estudiante utiliza el ícono  para mover la gráfica de una figura y hacerla visible en la ventana gráfica del software.
- Estadio de transformación: Por ejemplo, cuando el estudiante crea en la barra de herramientas del Geogebra una “macro” o cuando se seleccionan en la barra de herramienta solo los iconos que se van a utilizar para determinada actividad.

La instrumentación:

Según Rabardel (1995) está dirigida hacia el sujeto. Se refiere a la construcción de esquemas de utilización por parte del sujeto, relativos a la ejecución de ciertas tareas.

En este proceso se lleva a cabo la asimilación de nuevos artefactos a los esquemas y la acomodación de los esquemas para dar nuevos significados a los artefactos.

El investigador utiliza la noción de esquema redefinida por Vergnaud (1996), el cual menciona que un esquema es una organización invariante de la conducta del sujeto para una clase determinada de situación.

Vergnaud (1996 citado en Sureda, P. & Otero, M., 2011) sostiene que los esquemas tienen los siguientes componentes:

1. *Metas y anticipaciones*, un esquema se dirige siempre a una clase de situaciones en las cuales el sujeto puede descubrir una posible finalidad de su actividad y, eventualmente, submetas.
2. *Reglas de acción* del tipo “si... entonces” que constituyen la parte verdaderamente generadora del esquema, aquella que permite la generación y la continuidad de secuencias de acciones del sujeto; son reglas de búsqueda de información y de control de los resultados de acción.

3. *Invariantes operatorios* (teoremas en acto y conceptos en acto). De acuerdo con Vergnaud (1996):

Se designan por las expresiones conceptos en acto y teoremas en acto, a los conocimientos contenidos en los esquemas; podemos igualmente designarlos por la expresión más global de invariantes operatorios (p.160)

Estas invariantes operatorios dirigen el reconocimiento, por parte del sujeto, de los elementos pertinentes de la situación; son los conocimientos contenidos en los esquemas; son aquellos que constituyen la base, implícita o explícita, que permite obtener la información pertinente y de ella inferir, la meta a alcanzar y las reglas de acción adecuadas.

Los conceptos en acto, (categoría de pensamiento considerada como pertinente) y los teoremas en actos (proposiciones consideradas como verdaderas).

Además, el autor sostiene:

Estas invariantes operatorios (conceptos en acto y teoremas en acto), son en particular, la base conceptual implícita (o explícita) de los esquemas debido a que permiten seleccionar la información pertinente y, a partir de ella y de la meta a atender, inferir las reglas de acción más adecuadas para abordar una situación (Vergnaud, 1990. p.148).

De la cita anterior, podemos inferir la importancia de los invariantes operatorios y las reglas de acción en el estudio de los esquemas de los sujetos. Es por ello, que centramos nuestro análisis en estos componentes para poder estudiar el proceso de instrumentación de la simetría axial por parte de las alumnas. Es por ello, que estos tres componentes de los esquemas serán utilizados para el análisis a priori de las actividades N°1 y N°2 de la parte experimental de nuestra investigación.

Además Rabardel (1995), denomina esquemas de utilización a los esquemas relacionados con la utilización de un artefacto y distingue tres tipos de esquemas:

- **Los esquemas de uso**, orientado a las tareas, depende de la actividad específica y están relacionados al artefacto.

- **Los esquemas de acción instrumentadas**, permiten al sujeto entender las potencialidades y restricciones del propio artefacto, constituyéndose en técnicas que hacen posible resolver eficazmente una tarea específica.
- **Los esquemas de acción colectiva instrumentada**, toma en cuenta la especificación de los tipos de acciones o de actividades cuando un colectivo comparte un mismo instrumento o trabaja con una misma clase de instrumento.

Nuestra investigación, se centra en el proceso de instrumentación, debido a que se quiere determinar si los alumnos se apropian del concepto de simetría cuando desarrollan actividades mediadas por el Geogebra.

2.2 Aspectos de la Ingeniería Didáctica

Artigue (1995) compara la Ingeniería Didáctica con el trabajo de un ingeniero:

[...] el trabajo del ingeniero que, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico (p.33).

De acuerdo con la investigadora, el docente al igual que el ingeniero debe de analizar sus secuencias didácticas en el aula con la finalidad de lograr el aprendizaje de sus alumnos.

Además, Douady (1995) sostiene que la ingeniería didáctica designa, de igual forma, una metodología particularmente interesante por tener en cuenta la complejidad de la clase.

Para Almouloud (2007), la Ingeniería Didáctica se apoya en un esquema experimental basado en la concepción, realización, observación y análisis de una secuencia de enseñanza, además de la validación, que es la comprobación o no de los supuestos asumidos en el estudio, mediante el análisis a priori y a posteriori. Además de eso, el método es caracterizado como experimental porque puede ser utilizado en investigaciones que estudian los procesos de enseñanza y aprendizaje de un objeto matemático.

La ingeniería didáctica de Artigue (1995) tiene las siguientes fases:

- **Análisis preliminar:**

Se realiza el análisis distinguiendo tres dimensiones: epistémico, cognitivo y didáctico.

En nuestra investigación, la dimensión epistémica la desarrollamos mediante una reseña histórica de la simetría, también presentamos una definición formal de la simetría, ambas se encuentran desarrolladas ampliamente en el capítulo Simetría. En la dimensión cognitiva, presentamos algunas investigaciones cuyo objeto de estudio es la simetría con el uso de geometría dinámica. En la dimensión didáctica analizamos los libros de texto del primer grado de educación secundaria utilizados por alumnos de 12 y 13 años de edad, ya mencionados en el tercer capítulo de nuestra investigación.

- **Concepción y análisis a priori:**

Se realiza el conjunto de supuestos sobre lo que harán los alumnos. El investigador actúa sobre determinadas variable.

Artigue (1995) distingue dos tipos de variables potenciales manipuladas por el investigador:

- Las variables *macrodidácticas* o *globales*, relativas a la organización global de la ingeniería.
- Las variables *microdidácticas* o *locales*, relativas a la organización local de la ingeniería, esto es, la organización de una sesión o de una fase.

En nuestra investigación, utilizamos variables microdidácticas, ya que elaboramos una secuencia de actividades sobre simetría axial mediada por el Geogebra. Además, proponemos posibles resultados esperados antes de la presentación de la propuesta didáctica.

En la tabla 2 se muestra las variables microdidácticas de cada una de las actividades propuestas:

Tabla 2. Variables didácticas presentes en las actividades propuestas

Actividad	Variable didáctica	
1	A	Eje de simetría vertical y en la mitad de la figura
	B	Eje de simetría vertical y figuras con cuadrículas
	C	Eje de simetría oblicuo y figura sin cuadrículas
	D	Eje de simetría oblicuo, vertical y horizontal. Figura no simétrica.
2	A	Eje de simetría vertical, figura horizontal y cuadrículas.
	B	Eje de simetría vertical, figura horizontal, sin cuadrícula.
	C	Eje de simetría vertical, sin cuadrícula figura horizontal y con medidas ya establecidas.

En el cuadro anterior podemos observar cada una de las variables previstas para las actividades propuestas.

- **Experimentación:**

De acuerdo con la investigadora, en esta etapa predomina el acercamiento entre el docente investigador y la población de alumnos sujetos de la investigación. También se aplican los instrumentos diseñados por el investigador y se lleva a cabo los registros de observación de la experiencia.

En nuestra investigación, en esta fase, realizamos la explicitación de las condiciones de cómo se realiza la investigación con las alumnas seleccionadas. Aplicamos los instrumentos elaborados y realizamos el registro de observaciones de los encuentros realizados.

- **Análisis a posteriori y validación:**

Según Artigue (1995), en esta etapa, se realiza el análisis de los datos recolectados durante los diferentes momentos de la experiencia.

En esta fase, analizamos los datos recolectados en los dos encuentros realizados con las alumnas en el laboratorio de informática y los contrastamos con el análisis a priori para validar la investigación.

Para recolectar la información para nuestra investigación, utilizamos: Fichas de observación, grabaciones en video y los archivos de las actividades hechas por cada alumna. A continuación explicamos en qué consisten cada uno de ellos.

Ficha de observación

La ficha de observación está elaborada en tres secciones. La primera relacionada con la interacción del alumno con el Geogebra. La segunda, sobre las acciones de los alumnos respecto a la simetría axial, aquí se presenta también una tabla donde las observadoras podrán marcar si las alumnas realizan algunas acciones previstas para las actividades, como por ejemplo reconocer el eje de simetría; finalmente, la tercera sección es sobre algunos aspectos relevantes en el desarrollo de las actividades, aquí se deja libre para que las observadoras registren sus acotaciones sobre el desarrollo de cada actividad propuesta.

Durante los dos encuentros, contamos con dos observadoras, la profesora de matemática del aula de primer grado de secundaria y la asesora del área de matemática de la institución educativa Sagrado Corazón Sophianum - Lima. El papel de las observadoras es registrar por escrito, sin ningún tipo de intervención, las acciones de los alumnos cuando realizan las actividades propuestas por el investigador.

Estas observaciones son registradas en cada encuentro y para cada una de las actividades.

Grabaciones

Son hechas en cada encuentro, para registrar las observaciones en video y poderlas analizar luego. Éstas brindan información del grupo investigado pero también de algunos sujetos elegidos al azar y así poder analizar sus acciones en cada actividad realizada.

Los archivos trabajados por las alumnas en el Geogebra son grabados en una carpeta para poder analizar sus construcciones.

A continuación en el capítulo 3, presentamos nuestro objeto de estudio que es la simetría axial, desde tres dimensiones: epistémico, cognitivo y didáctico.

CAPITULO 3: LA SIMETRÍA

En el presente capítulo se realizará el estudio de la simetría desde tres aspectos: histórico, en el que se realizará una reseña histórica del surgimiento de la simetría; cognitivo, donde se introduce la noción funcional de la simetría y finalmente el aspecto didáctico, en el que se realizará el estudio de tres libros utilizados en primero de educación secundaria en la enseñanza de la simetría.

3.1 Aspectos históricos

Presentamos el surgimiento y la evolución de la noción de transformaciones en el plano, ya que la simetría está inmersa en dicha evolución. Nos basamos para esta parte de la investigación en Martínez (2012).

La historia de las transformaciones en el plano, pertenece a la historia de la geometría y para hablar de su historia comenzaremos desde las civilizaciones antiguas como lo es Grecia y por tanto de los libros de Euclides.

En la antigua Grecia, los XIII libros de los elementos de Euclides tratan sobre las nociones de Geometría, en especial el libro I podemos encontrar veintitrés definiciones, cinco postulados y cuarenta y ocho proposiciones que dan base a la Geometría. La proposición cuatro de este primer libro es la que ahora llamamos el primer criterio de congruencia de triángulos, donde se describe una práctica utilizando movimientos: “Si dos triángulos tienen dos lados respectivos iguales, y tienen los ángulos comprendidos iguales, también tendrán las bases iguales, y los triángulos serán iguales, y los ángulos restantes serán iguales, concretamente los opuestos a los lados iguales” (Euclides, 1991, p. 209).

En el mundo Árabe, encontramos los maravillosos mosaicos que nos muestran una simetría casi perfecta y el dominio de la regla y compás de los artesanos musulmanes. Debido a que la religión musulmana prohíbe la representación de seres vivos, los artistas y artesanos musulmanes se enfocaron en las figuras geométricas. La diversidad de patrones geométricos en la decoración islámica, hace distinguir dos elementos. El primero, el uso de polígonos estrellados que se entrelazan y se conectan entre sí, aprovechando sus

propiedades de simetría. El segundo, la superposición de teselaciones en planos paralelos, las cuales se relacionan. Una muestra de esto la podemos encontrar en la Alhambra, donde podemos encontrar diecisiete formas posibles de decoración en el plano de forma periódica, lo cual quiere decir que en esta fortaleza podemos encontrar diecisiete grupos de simetrías en el plano.

En la edad media, encontramos expresiones artísticas como la de Filippo Brunelleschi (1377 – 1416), fue el primer artista que estudió y utilizó intensamente la matemática. Su pasión por ellas le llevo al descubrimiento de perspectivas cónicas. Otro artista que encontramos en este periodo es Leonardo de Vinci (1452 - 1519), que realiza un estudio anatómico buscando la proporcionalidad del cuerpo humano, el canon clásico o ideal de belleza, usando ángulo de 90° y la simetría. Alberto Durero (1471 - 1528) fue matemático, hizo hincapié en la geometría en todas sus obras, escribió “Instrucción en la medida con regla y compás” para ayudar a los artistas sobre la perspectiva. A través de estos personajes, la geometría proyectiva aparece como herramienta de estudio de la geometría y precursora de la idea de transformaciones en el plano.

En la edad moderna, encontramos a Gerard Desargues (1591 – 1661) precursor de la idea de transformación en geometría y de la utilización de propiedades invariantes. En 1639 escribe “Brouillon Project d’une atteinte aux événements des rencontres d’un cône avec un plan” que fue un primer borrador de los resultados de intersectar un cono con un plano. Esta obra sienta las bases de la geometría proyectiva y da lugar al teorema que lleva su nombre, el teorema de Desargues: “se dice que dos triángulos están en perspectiva desde un punto si las rectas que unen los puntos son concurrentes. También se dice que dos triángulos están en perspectiva desde una recta si los pares formados por rectas correspondientes se cortan en puntos alineados”. Posteriormente, Pascal (1623 – 1662) redacta sus tratados sobre cónicas retomando los métodos de Desargues.

En el siglo XVII, la geometría analítica fue introducida por Pierre de Fermat y por Descartes como un método general para resolver problemas geométricos y particularmente para estudiar las curvas y superficies. La noción de los ejes de coordenadas que tenemos actualmente no es la que tenía Descartes, si no que para él solo teníamos la coordenada X y posteriormente calcula la Y mediante la ecuación correspondiente. Pero la idea fundamental

de ecuación de una curva es puesta en evidencia de forma más clara por Fermat. Su método se funda en el reconocimiento de una correspondencia biyectiva entre los puntos del plano y sus coordenadas y asocia las ecuaciones a las curvas.

Una de las características principales de la geometría que se desarrolló durante la segunda mitad del siglo XIX, fue el entusiasmo con que estudiaron los matemáticos una gran variedad de transformaciones. Las más conocidas fueron las que constituyen el grupo de transformaciones que define la llamada geometría proyectiva. Los orígenes de esta geometría estaban ya, en realidad, en las obras de Pascal y de Desargues, pero hasta comienzos del siglo XIX no se produjo su desarrollo sistemático, desarrollo debido especialmente a Poncelet (Boyer, 2007, p. 661).

Poncelet (1788- 1867) fue considerado como uno de los fundadores de la geometría proyectiva por su obra “Tratado de las propiedades proyectivas de las figuras (1822)”. Este tratado desarrolla el método de las transformaciones que llevarían a otros matemáticos como Michel Chasles (1793 – 1880), a realizar nuevas investigaciones sobre la teoría de las transformaciones. Él busca la transformación más general que poseen los invariantes.

En la edad contemporánea, tras conocer la idea de transformación geométrica, a partir de la geometría proyectiva, llega la necesidad de clasificar estas transformaciones y de los elementos invariantes que las caracterizan. Esta clasificación se llevó a cabo, gracias a los trabajos de Galois (1811 – 1832) sobre teoría de grupos que tiene su origen en el estudio de las sustituciones de las raíces de una ecuación algebraica, aunque debido a su pronta muerte, no tuvo gran importancia hasta que llegó a las manos de Lagrange (1736 – 1813) que impresionado por el concepto de grupo, dedicó la mayor parte de su vida a desarrollarlo y a aplicarlo.

Estas ideas sobre las relaciones entre la Geometría y la teoría de grupos conducirán a Klein (1849 – 1925) en el Programa de Erlangen (1872) a proponer un estudio de esas relaciones, describiendo aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes bajo la acción de un grupo concreto de transformaciones.

Según Alsina, Pérez y Ruiz (1989), Camille Jordan (1838 – 1922) hizo el primer estudio importante sobre grupos infinitos en su Memoria sobre los grupos de movimientos, entre 1868 y 1869. Esto dio origen a los estudios de transformaciones geométricas mediante el concepto de grupo.

Luego el estudio de Klein de grupo de transformaciones ha habido una gran cantidad de matemáticos que han seguido estudiando a este grupo, como John Henry Constantine Whitehead (1904 – 1960), que definió geometría como el estudio de la invarianza bajo un grupo de transformaciones por lo que la idea de Euclides, se ve modificada por estudiar el espacio con una estructura intrínseca que consta de un conjunto de relaciones, las cuales pueden estar definidas con la ayuda de un conjunto de transformaciones.

Los estudios del matemático Benoît Mandelbrot (1924 – 2010), sobre los fractales mostraron un nuevo campo donde estaban muy presentes las transformaciones geométricas lo cual dieron un auge para continuar los estudios sobre esta teoría.

En la actualidad, podemos seguir evidenciando estudios sobre estas transformaciones, tal es el caso de los matemáticos John Griggs Thompson y Jacques Tits que en el 2008 consiguieron el premio Abel de las ciencias por una investigación sobre simetrías en la teoría de grupos.

A continuación presentamos la tabla 2 que muestra el resumen de lo explicado anteriormente.

Tabla 3. Resumen del surgimiento y evolución de las transformaciones en el plano

Antigua Grecia	<ul style="list-style-type: none"> • Los libros de los elementos de Euclides (325 a.C. – 265 a.C.), constan de XIII libros. • Destacamos el Libro I: Los Fundamentos de la Geometría. Teoría de los triángulos, paralelas y el área. • Se definen los criterios de congruencia e igualdad de triángulos a partir de la Geometría Estática, al revés, de cómo se explican en estos momentos a partir de una Geometría Dinámica.
Mundo Árabe	<ul style="list-style-type: none"> • La geometría es muy importante en el Islam. • La forma perfecta es el círculo, que representa a Dios y se utiliza como patrón para realizar otros motivos. • Los patrones geométricos más destacados, que son utilizados en el arte y decoración islámica, son: <ul style="list-style-type: none"> - El uso de polígonos estrellados - La superposición de teselaciones en planos paralelos.
Edad media	<ul style="list-style-type: none"> • Filippo Brunelleschi (1377 – 1416): Fue el primer artista que estudió y utilizó intensivamente las matemáticas. Su pasión por ellas le llevo al descubrimiento de la perspectiva cónica. • Leonardo de Vinci (1452 – 1519): En su Studio, se realiza un

	<p>estudio anatómico buscando la proporcionalidad del cuerpo humano, el canon clásico o ideal de belleza, usando el ángulo de 90° y la simetría.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Alberto Durero (1471 – 1528): Hizo hincapié en todas sus obras en la geometría y en la medida. Escribió un libro sobre geometría: “Instrucción en la medida con regla y compás” (1525).
<p>Edad moderna</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Gerard Desargues (1591 – 1661): Fue el precursor de la idea de transformación geométrica y el de figura invariante con sus propiedades. Escribe el Primer borrador sobre los resultados de intersecar un cono con un plano que sientan las bases de la geometría proyectiva y da lugar al teorema que lleva su nombre: TEOREMA DE DESARGUES. • La geometría analítica fue introducida en el siglo XVII por Pierre Fermat (1601-1665) y por Descartes, para el estudio de curvas y superficies. • Poncelet (1788 – 1867) fue considerado como uno de los fundadores de la geometría proyectiva, de especial importancia su obra Tratado de las propiedades proyectivas de las figuras (1822). • Poncelet desarrolla el método de las transformaciones, que llevarían a otros matemáticos como Michel Chasles (1793 – 1880), a realizar nuevas investigaciones.
<p>Edad contemporánea</p>	<ul style="list-style-type: none"> • La clasificación de las transformaciones se debe gracias a los trabajos de Galois (1811 – 1832) sobre teoría de grupos. • Debido a la pronta muerte de Galois, fue Lagrange (1736 – 1813) que impresionado por el concepto de grupo, dedicó la mayor parte de su vida a desarrollarlo y a aplicarlo. • Klein (1849 – 1925) propone un estudio de esas relaciones. Describiendo aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes bajo la acción de un grupo concreto de transformaciones.
<p>Actualidad</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Benoît Mandelbrot (1924 – 2010), que con sus estudios sobre los fractales mostró un nuevo campo donde estaban muy presentes las transformaciones geométricas y que dieron un auge para continuar los estudios sobre esta teoría. • En la actualidad, podemos seguir estudiando a estas transformaciones, como es el caso de los matemáticos John Griggs Thompson y Jacques Tits que en 2008 consiguieron el premio Abel de las ciencias por una investigación sobre simetrías en teoría de grupos.

Fuente: Adaptado de Martínez (2012), p.6.

La revisión de algunos aspectos históricos de la simetría nos ayuda a entender el surgimiento de este concepto, cuáles fueron las cuestiones matemáticas que ayudaron en la aparición de éste, las dificultades que lo involucran, el ámbito en que se aplicaban o se aplican, así como también el marco temporal en que apareció y como fue evolucionando hasta la actualidad.

3.2 Estudio de la simetría

Para nuestra investigación utilizamos aspectos de Lima (1995) para el estudio del objeto matemático.

Introduciremos la noción de Isometrías en el plano, simetría entorno a un punto (simetría central) y simetría entorno a una recta (simetría axial) que es el objeto matemático de nuestra investigación. Hacemos este estudio, dado que la Simetría pertenece al grupo de las Isometrías tal como lo explica el autor.

Isometrías en el plano

El autor denota con $d(A, B)$ o \overline{AB} la distancia del punto A al punto B en el plano Π , o sea, la longitud del segmento de recta AB .

Recordemos que el punto C pertenece al segmento de recta AB si, y solamente si,

$$d(A, B) = d(A, C) + d(C, B).$$

Una isometría entre los planos Π y Π' es una función $T: \Pi \rightarrow \Pi'$ que preserva distancias. Esto significa que, para puntos cualesquiera $X, Y \in \Pi$, haciendo $X' = T(X)$ y $Y' = T(Y)$, se tiene que $d(X', Y') = d(X, Y)$.

1. *Toda isometría $T: \Pi \rightarrow \Pi'$ es una función inyectiva pues*

$$X \neq Y \Rightarrow d(X, Y) > 0 \Rightarrow d(X', Y') = d(X, Y) > 0 \Rightarrow X' \neq Y' \Rightarrow T(x) \neq T(y)$$

Una isometría es también sobreyectiva. Esto será probado a continuación.

2. *Toda isometría $T: \Pi \rightarrow \Pi'$ transforma rectas en rectas, es decir, si $r \subset \Pi$ es una recta, entonces $T(r) \subset \Pi'$ también es una recta.*

En efecto, sea $r \subset \Pi$ una recta. Tomemos dos puntos distintos A y B en r , tomemos $A' = T(A), B' = T(B)$ por **1**) $A' \neq B' \Rightarrow$ y llamemos r' a la recta en el

plano Π' que pasa por A' y B' . Dado cualquier $X \in r$, uno de los tres puntos A, B y X está entre los otros dos puntos. Digamos que B está entre A y X , o sea, que $B \in AX$. (Los otros dos casos son tratados análogamente). Entonces $\overline{AX} = \overline{AB} + \overline{BX}$ luego, tomando $X' = T(X)$, y por ser T una isometría, tenemos que $\overline{A'X'} = \overline{A'B'} + \overline{B'X'}$. Así los puntos A', B' y X' son colineales. Esto muestra que $X \in r$ implica $X' \in r'$. Luego, la restricción de T a r es una isometría entre r y r' . Como toda isometría entre rectas es sobreyectiva, se tiene $T(r) = r'$.

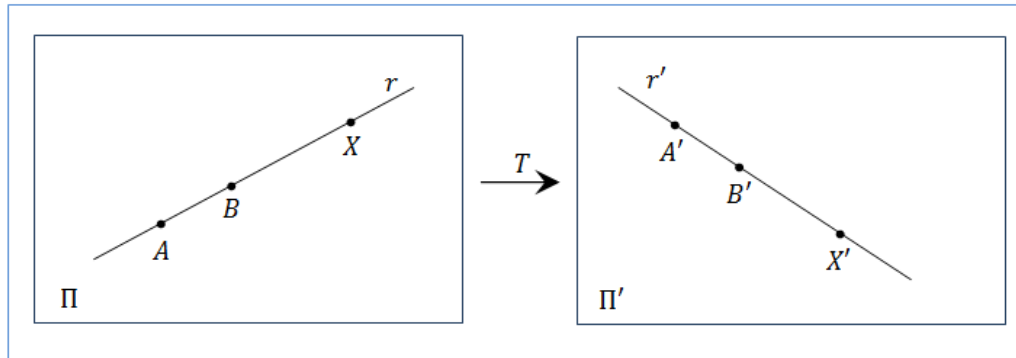


Figura 19. Isometría transforma rectas en rectas.
Fuente: Lima (1995) p.15.

3. Toda isometría $T: \Pi \rightarrow \Pi'$ transforma rectas perpendiculares en rectas perpendiculares.

En efecto, dadas las rectas perpendiculares r y s en Π , consideremos: el punto A de intersección de r y s , dos puntos B y C en r , equidistantes de A , y un punto cualquiera D sobre s , donde $D \neq A$. La isometría T transforma la mediana AD del triángulo isósceles BCD en la mediana $A'D'$ del triángulo isósceles $B'C'D'$, luego $A'D'$ es perpendicular a $B'C'$, o sea $r' = T(r)$ es perpendicular a $s' = T(s)$.

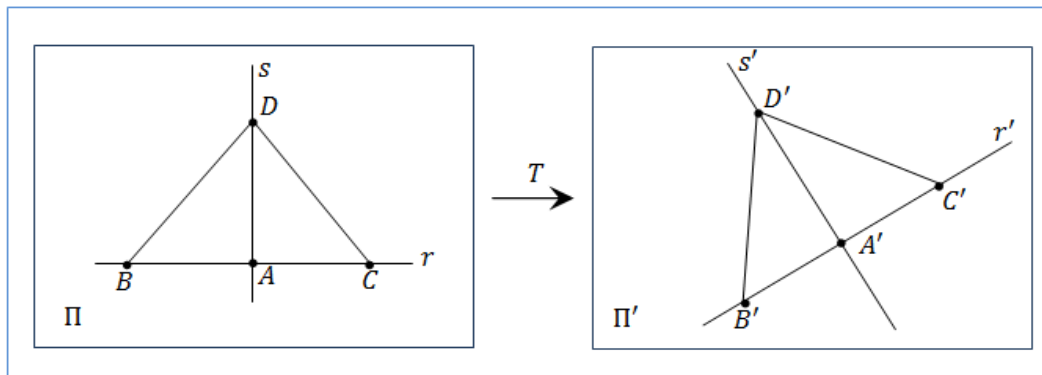


Figura 20. Isometría transforma rectas perpendiculares en rectas perpendiculares.
Fuente: Lima (1995) p.15.

4. Toda isometría $T: \Pi \rightarrow \Pi'$ es una biyección cuya inversa $T^{-1}: \Pi' \rightarrow \Pi$ es también una isometría.

En efecto, ya vimos que T es inyectiva. Para probar la sobreyectividad, tomamos un punto arbitrario $X' \in \Pi'$ y procuramos determinar un punto $X \in \Pi$ tal que $T(X) = X'$. Para eso, trazamos una recta cualquiera r en Π . La imagen de r por T es una recta r' en el plano Π' .

i) Si $X' \in r'$ entonces, por definición de imagen existe un punto $X \in r$ tal que $T(X) = X'$.

ii) Caso contrario si $X' \notin r'$, sea s' la perpendicular bajada desde X' sobre r' .

Llamaremos Y' al punto de intersección de r' con s' . Como $Y' \in r'$, existe $Y \in r$ tal que $T(Y) = Y'$. Sea s la recta perpendicular a r pasando por Y . La imagen de s por la isometría T es perpendicular a r' y contiene a Y' . Luego $T(s) = s'$. Como $X' \in s'$, existe $X \in s$ tal que $T(X) = X'$.

i), ii) demuestran que $T: \Pi \rightarrow \Pi'$ es sobreyectiva.

En 1) Se demostró que T es inyectiva, Luego T es biyectiva.

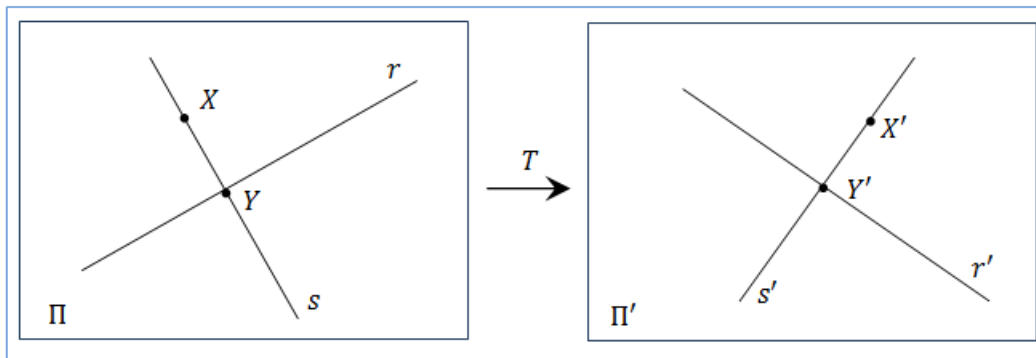


Figura 21. Isometría entre rectas es biyectiva.

Fuente: Lima (1995) p.16.

Es evidente que si $T: \Pi \rightarrow \Pi'$ y $S: \Pi' \rightarrow \Pi''$ son isometrías entre planos entonces la compuesta $S \circ T: \Pi \rightarrow \Pi''$ es también una isometría, pues, si $x, y \in \pi$, por la isometría de T y de S , se tiene que:

$$d(X, Y) = d(T(X), T(Y)) = d(S(T(X)), S(T(Y)))$$

El ejemplo más obvio de isometría es la función identidad $Id: \Pi \rightarrow \Pi$. Veamos ahora algunos otros ejemplos.

Simetría central o entorno de un punto

Tomemos un punto A en el plano Π . La simetría entorno de A es la función $S_A: \Pi \rightarrow \Pi$ así definida:

$S_A(A) = A$ y, para $X \neq A$, $S_A(X) = X'$ es el simétrico de X relativamente a A . En otras palabras, A es el punto medio del segmento de recta XX' . Para ver que S_A es una isometría, basta ver que dados $X, Y \in \Pi$, los triángulos AXY y $AX'Y'$ son congruentes, pues $\overline{AX} = \overline{AX'}$, $\overline{AY} = \overline{AY'}$ y los ángulos $\widehat{XAY} = \widehat{X'AY'}$ son opuestos por el vértice. Luego $\overline{XY} = \overline{X'Y'}$

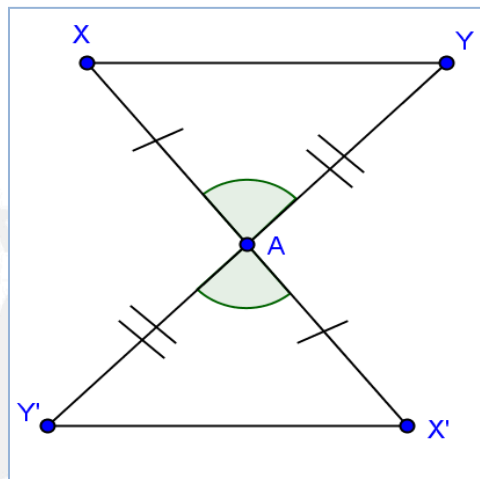
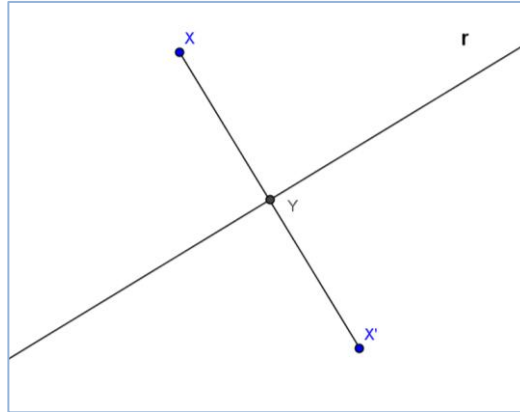


Figura 22. Simetría axial.
 Fuente: Lima (1995) p.17.

Simetría axial o entorno a una recta

Sea r una recta en el plano π . La reflexión en torno a la recta r es la función $R_r: \Pi \rightarrow \Pi$ así definida:

$R_r(X) = X$ para todo $X \in r$ y, para $X \notin r$, $R_r(X) = X'$, es tal que la mediatriz del segmento XX' es la recta r . En otras palabras, sea Y el pie de la perpendicular bajada de X sobre r . Entonces Y es el punto medio del segmento XX' .



Para probar que R_r es una isometría, consideramos dos casos:

Primero: X e Y están del mismo lado de la recta r en el plano Π . Entonces trazamos los segmentos XA y X'A', paralelos a r, con A y A' sobre YY'. Los triángulos rectángulos XAY y X'A'Y' tienen los catetos con la misma longitud, luego lo mismo ocurre con sus hipotenusas, esto es, esto es $\overline{XY} = \overline{X'Y'}$.

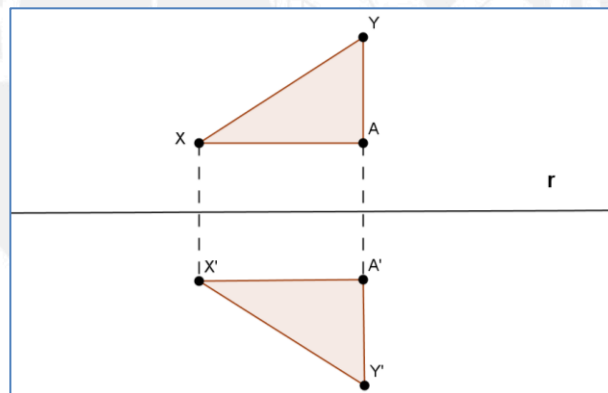


Figura 24. Simetría axial de un triángulo.
Fuente: Lima (1995) p.18.

Segundo caso: X, Y están en lados opuestos de la recta r. Sean A y B los puntos de intersección de XY y XX' con la recta r. Los triángulos rectángulos ABX y ABX' tienen el cateto AB en común y $\overline{BX} = \overline{BX'}$. Luego sus hipotenusas tienen la misma longitud: y $\overline{AX} = \overline{AX'}$. Análogamente $\overline{AY} = \overline{AY'}$. Así los triángulos AXX' y AYY' son isósceles, por lo tanto sus medianas son bisectrices $\alpha = \alpha'$ y $\beta = \beta'$. Por otro lado, $\alpha = \beta'$ como ángulos opuestos por el vértice.

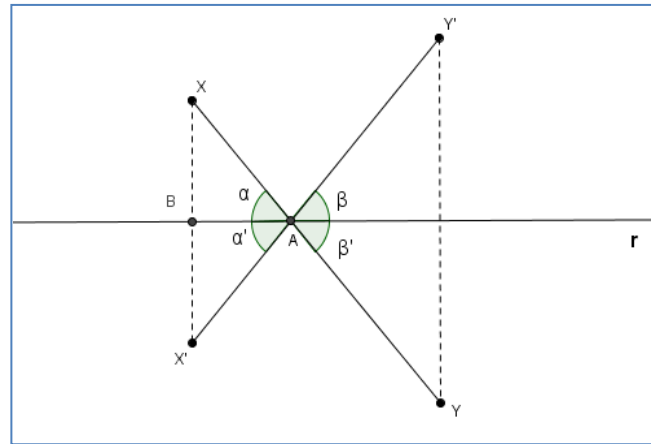


Figura 25. Simetría axial
Fuente: Lima (1995) p.18.

Entonces $\alpha + \alpha' = \beta + \beta'$. Como $\beta + \beta'$ es el suplemento del ángulo $\widehat{XAY'}$, entonces $\alpha + \alpha'$ también es el suplemento de $\widehat{X'AY}$, luego X', A e Y' son colineales. Por lo tanto:

$$\overline{X'Y'} = \overline{X'A} + \overline{AY'} = \overline{XA} + \overline{AY} = \overline{XY}$$

Se observa que, los puntos fijos de la reflexión $R_r : \Pi \rightarrow \Pi$ son los puntos de la recta r , es decir $\forall x \in r: R_r(X) = X$. Para todo los $X \in \Pi$ se tiene que $R_r(R_r(X)) = X$, luego $R_r \circ R_r =$ identidad, o sea $(R_r)^{-1} = R_r$.

Un hecho geométrico importante a respecto de la reflexión $R_r : \Pi \rightarrow \Pi$ es que ella transforma el triángulo ABC en un triángulo $A'B'C'$ en el cual el sentido de rotación de los vértices $A' \rightarrow B' \rightarrow C'$ es el opuesto del sentido $A \rightarrow B \rightarrow C$.

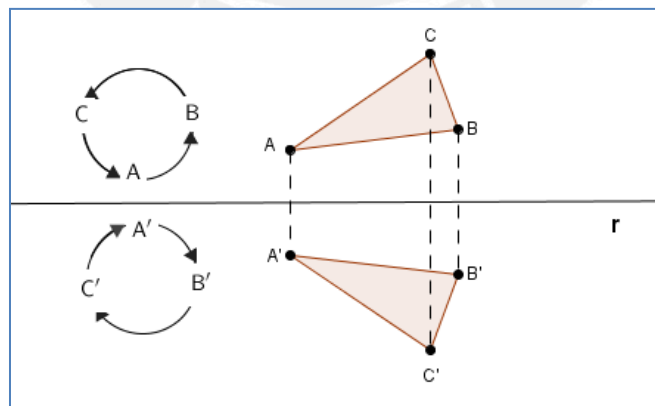


Figura 26. Simetría axial.
Fuente: Lima (1995) p.19.

Este estudio del aspecto formal de la simetría ayuda a nuestra investigación para reconocer las propiedades que están inmersas en este objeto matemático ya que pertenece al grupo de las Isometrías.

3.3 Enseñanza de la simetría axial

Para tener una referencia sobre cómo se desarrolla el tema de simetría en las escuelas, hacemos un estudio de algunos libros de textos de las editoriales con más presencia en las aulas del primer grado de educación secundaria en el Perú. Estos libros son: Hipervínculo 1 de la editorial Santillana edición 2013, Matemática para pensar 1 de la editorial Norma edición 2013 y Matemática primer grado de educación secundaria brindado a los alumnos por el Ministerio de educación del Perú edición 2008.

Tabla 4. Libros de primer grado de educación secundaria

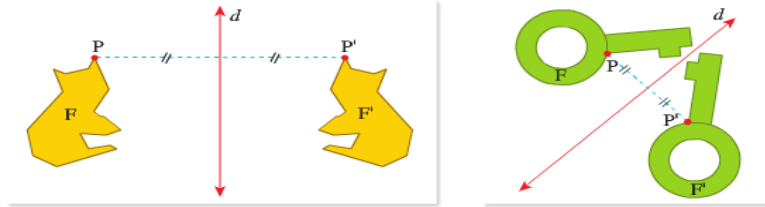
Libro de texto	Editorial
Hipervínculo 1	Santillana (2013)
Matemática para pensar 1	Norma (2013)
Matemática 1	Bruño (Ministerio de educación)

De los libros mencionados en la tabla anterior, mostraremos como dichos libros presentan la noción de simetría axial

El libro **Hipervínculo 1** es el que utilizan las alumnas entre 12 y 13 años de edad de primer grado de educación secundaria del colegio Sagrado Corazón – Sophianum, las cuales serán nuestros sujetos de estudio. Este libro presenta las siguientes actividades introductorias al estudio de la simetría axial.

4.2. Simetría axial

Marlene dibujó figuras simétricas utilizando como referencia la recta d .



- La figura F' es simétrica a la figura F . La recta d se llama eje de simetría.
- Las figuras simétricas se encuentran a igual distancia del eje de simetría. F y F' son iguales, pero tienen distinta orientación. Además $\overline{PP'} \perp d$

Una **simetría axial** respecto a una recta d es un movimiento que asocia a cada punto P otro punto P' , de modo que el segmento PP' es perpendicular a la recta d y la recta d pasa por el punto medio del segmento PP' .

Figura 27. Simetría axial
Fuente: Hipervínculo 1, p. 338.

En la Figura 27, se puede observar que el concepto de simetría axial y sus propiedades es presentado a los alumnos sin realizar actividades que permitan deducir, analizar, verificar y descubrir estos conceptos.

Posteriormente a esta introducción, presenta dos ejemplos donde prima el análisis gráfico, es decir, cómo realizar el simétrico de una figura o de un polígono, cómo determinar el eje de simetría de una figura.

Otro libro revisado es el de **Matemática para pensar 1** (2013). Éste presenta las siguientes actividades introductorias a la tema de simetría:

Simetría axial

Es la simetría alrededor de un eje. En ella dos puntos P y P' son simétricos respecto a un eje ℓ , si el segmento PP' es perpendicular a ℓ y los puntos P y P' equidistan del eje ℓ .

Hay figuras en las que podemos ubicar uno o más ejes de simetría.

Ejemplo 4:

En la figura mostrada traza todos los ejes de simetría.

Eje de simetría

eje de simetría

Se ubican los puntos medios de los segmentos formados por cada vértice con su correspondiente en la figura simétrica y se traza una recta a través de estos, hay que verificar que corte a la figura en partes iguales.

Tu turno: Traza e indica el número de ejes de simetría de cada figura.

Figura 28. Simetría axial (2)
Fuente: Matemática para pensar 1, p. 191.

Como se puede observar en la figura 28, este libro también presenta la simetría y sus propiedades. No se aprecia actividades donde el alumno pueda deducir, algunas propiedades de la simetría axial. Posteriormente, presentan cuatro actividades resueltas de los cuales tres son de simetría axial, estos ejercicios sirven de modelo para resolver otras que se encuentran en su libro de actividades.

Un tercer libro que hemos considerado es el de **Matemática 1 (2008)** que es dado por el Ministerio de Educación del Perú, presenta un texto generador (figura 29) sobre la simetría axial:

SIMETRÍA AXIAL	
TEXTO GENERADOR	<p>En las construcciones incas y en otras todavía más antiguas se observa, tallados en la piedra, unos hoyos horizontales, cercanos unos de otros. Algunos investigadores piensan que estos hoyos servían para observar el cielo durante la noche. En efecto, si se los llena con agua, funcionan como espejos que reflejan las estrellas y otros astros. De ese modo se observa con mucha precisión el desplazamiento de los astros, que se reflejan en la superficie del agua. Así, se obtiene información que permite medir el tiempo, ubicar las estaciones, etc. La observación de figuras reflejadas se emplea actualmente en algunos tipos de telescopios. Y todo eso tiene relación estrecha con el estudio de la simetría, tal como lo hace la matemática.</p>
	<ul style="list-style-type: none"> ▪ ¿En qué lugares se hallan espejos de agua? ▪ Haz un esquema de la manera cómo funciona un espejo de agua en la observación de los astros. ▪ ¿Puedes mencionar otro ejemplo que muestre el uso de la reflexión de figuras en la vida diaria?

Figura 29. Texto generador

Fuente: Matemática del primer grado de educación secundaria del Ministerio de Educación, p. 137.

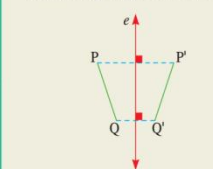
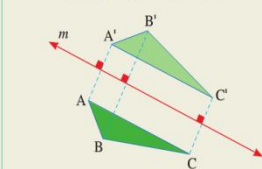
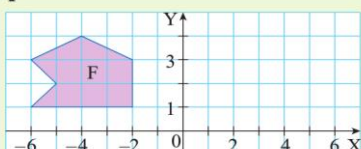
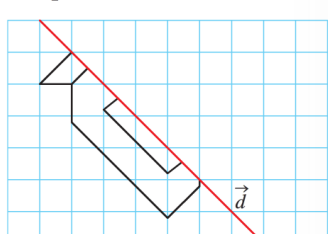
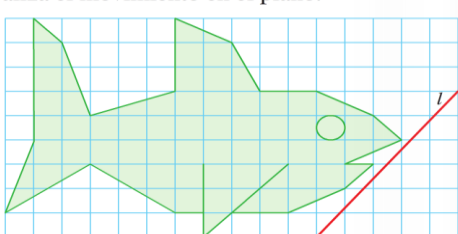
Este libro presenta actividades como el doblado de papel donde el doblado da una idea de la eje de simetría desde el punto de vista sintética, actividades de indagación como ¿cuántos ejes de simetría tiene un cuadrado?, lo cual consideramos que es importante porque el alumno va descubriendo que una figura puede tener más de un eje de simetría. Consideramos que las actividades de indagación ayudan a conjeturar las propiedades de la simetría.

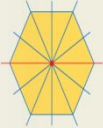



Como se puede apreciar en los textos anteriores, el concepto y las propiedades de la simetría se presentan sin dejar al estudiante deducirlas, también se puede observar que son pocas actividades y la mayoría es sólo de producir imágenes de forma mecánica sin buscar desarrollar capacidades, dado que dan ejemplos de solución a las actividades que se proponen.

A continuación analizaremos las tareas y las técnicas empleadas en cada uno de los libros de textos, mencionados anteriormente.

En el libro de texto **Hipervínculo 1**, podemos observar las siguientes tareas:

Tabla 5. Tipo de tareas y técnicas presentes en el libro Hipervínculos 1.

Tipo de tarea	Gráfico	Técnica
<p>Tarea 1: construir el simétrico de una figura.</p>	<p>Ejemplo Construyo el simétrico de un segmento y un polígono</p> <p>a) Construye el simétrico del segmento PQ respecto a la recta e.</p>  <p>$\overline{P'Q'}$ es simétrico de \overline{PQ} respecto a la recta e.</p> <p>b) Dibuja el simétrico del triángulo ABC respecto a la recta m.</p>  <p>$\triangle A'B'C'$ es simétrico de $\triangle ABC$ respecto a la recta m.</p> <p>Reproduce y transforma la figura F. Luego, realiza lo que se pide.</p>  <p>118 Aplica una simetría con respecto al eje de las ordenadas y luego, una simetría con respecto al eje de las abscisas.</p> <p>180 Reproduce la figura en tu cuaderno y completa su simétrico respecto a la recta d.</p>  <p>218 Reproduce la figura. Utiliza el eje de simetría l y realiza el movimiento en el plano.</p> 	<p>Reproducir el simétrico de la figura a través del eje de simetría y ayudado por las cuadrículas.</p>

<p>Tarea 2: Determinar el eje de simetría de una figura</p>	<p>Ejemplo Determino ejes y centros de simetría</p> <p>Determina los ejes y centros de simetría de cada figura.</p> <p>a)  Tiene 6 ejes de simetría. Tiene 1 centro de simetría.</p> <p>b)  No tiene eje de simetría. Tiene 1 centro de simetría.</p>	<p>Utilizar reglas para hacer medidas y poder trazar el eje de simetría en cada figura</p>
	<p>Reproduce y traza el eje de simetría de cada figura.</p> <p>112 </p> <p>113 </p>	

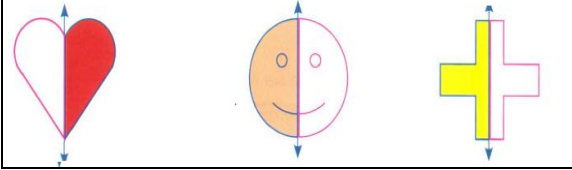
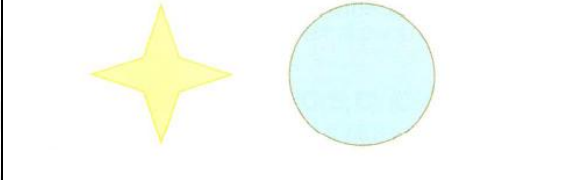
Como se puede observar en la tabla 5, solo hay dos tipos de tareas que se le propone a los alumnos, los cuales tienen relación con los ejemplos que se les propone.

En la sección denominada “más actividades” presenta veintiún ejercicios de transformaciones en el plano; sin embargo, sólo seis de ellas están referidas al estudio de la simetría y en las cuales se da énfasis al gráfico del simétrico de la figura y a determinar el eje de simetría, más no se da énfasis en reconocer las propiedades debido a que ya la dan por entendidas al momento de dar el concepto. No toman en cuenta el concepto de simetría para la solución de problemas contextualizados o de situaciones reales. Se observa que las actividades que se plantean sobre simetría buscan una reproducción o memorización de los ejemplos que se presentan en un inicio ya que los ejercicios propuestos son muy parecidos a ellos. Sin embargo, en los ejercicios resueltos se puede observar la existencia de ejes de coordenadas (Ejercicio 118 de la tabla 5) lo cual puede llevar a problemas en el aprendizaje de este objeto matemático porque los alumnos deberían tener como aprendizajes previos al eje de coordenadas, el par ordenado y su ubicación en el plano.

Consideramos que las actividades propuestas en el libro Hipervínculo presentan poco grado de dificultad para los alumnos ya que los ejes de simetría se encuentran en forma vertical u horizontal con respecto a la figura sólo un ejercicio presenta al eje de manera oblicua pero con cuadrículas de fondo que de cierto modo ayudan a la reproducción del simétrico. Con estos ejercicios pensamos que el alumno no es consciente de la perpendicularidad respecto al eje de simetría y el segmento que une los puntos de una figura con los de su imagen.

En el libro de texto **Matemática para pensar 1**, encontramos las siguientes tipos de tareas y técnicas:

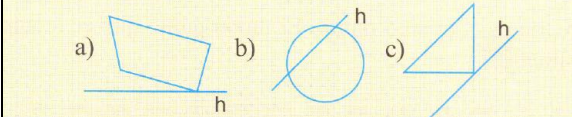
Tabla 6. Tipo de tareas y técnicas presentes en el libro Matemática para pensar 1.

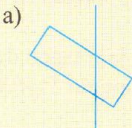

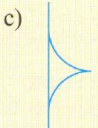
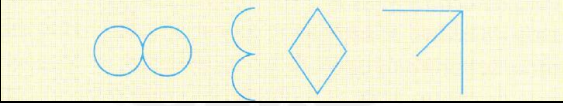
Tipo de tarea	Gráfico	Técnica
Tarea 1: construir el simétrico de una figura.	<p>Tu turno: Completa las siguientes figuras en tu cuaderno utilizando la reflexión.</p> 	Reproducir el simétrico de la figura a través del eje de simetría.
Tarea 2: Determinar el eje de simetría de una figura	<p>Marca los ejes de simetría de las siguientes figuras y da como respuesta cual tiene el menor número.</p> 	Utilizar reglas para hacer medidas y poder trazar el eje de simetría en cada figura.

Estos ejercicios muestran énfasis en la reproducción del simétrico de una figura y en determinar el o los ejes de simetría de una figura. El libro presenta pocas actividades a ser desarrolladas por los alumnos. Consideramos necesario que el alumno se enfrente a una mayor cantidad de actividades de la simetría axial para su mayor comprensión. Así mismo, creemos que al igual que el libro anterior, éste no muestra actividades para que los alumnos descubran las propiedades de la simetría axial.

El último libro que hemos considerado es **Matemática 1**, éste contiene los siguientes tipos de tareas y técnicas:

Tabla 7. Tipo de tareas y técnicas presentes en el libro Matemática 1.

Tipo de tarea	Gráfico	Técnica
Tarea 1: construir el simétrico de una figura.	<p>2. Reproduce los dibujos <i>a</i>, <i>b</i>, y <i>c</i>, y construye con otro color una figura simétrica de cada uno con respecto a la recta <i>h</i>.</p> 	Reproducir el simétrico de la figura a través del eje de simetría ya dado o indicado.

	<p>3. a) Dibuja un cuadrado $ABCD$ y en el mismo dibujo, traza con otro color su imagen con respecto a la recta AB.</p> <p>b) Siempre en el mismo dibujo, con otro color, dibuja la imagen de $ABCD$ con respecto a la recta BC.</p> <p>c) Continúa el mismo trabajo con los otros lados del cuadrado $ABCD$.</p> <p>4. Traza una recta d y tres puntos P, Q, R alineados (que no pertenezcan a d). Construye P', Q' y R' simétricos de P, Q y R con respecto a la recta d. ¿Qué conclusión obtienes?</p> <p>5. ABC es un triángulo y M un punto interior de éste. Construye los puntos simétricos de M con respecto a cada uno de sus lados.</p> <p>6. Completa por simetría, con respecto a la recta, los siguientes dibujos, para obtener figuras simétricas.</p> <p>a)  b)  c) </p>	
<p>Tarea 2: Determinar el eje de simetría de una figura</p>	<p>1. Reproduce las siguientes figuras en tu cuaderno. Traza en cada una de ellas un eje de simetría. Hay varias respuestas posibles.</p> 	<p>Utilizar reglas para hacer medidas y poder trazar el eje de simetría en cada figura.</p>

Como se puede observar en la tabla 7, las actividades planteadas en el libro de Matemática 1, también presentan dos tipos de tareas y ninguna de ellas está dada a la indagación para el descubrimiento de la noción y propiedades de la simetría axial

A continuación presentamos el experimento y sus análisis *a priori* y *a posteriori* según la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) y el marco referencial del Enfoque Instrumental de Rabardel (1995).

CAPITULO 4: EXPERIMENTO Y ANÁLISIS

En este capítulo describiremos a los sujetos de nuestra investigación, así como también a nuestro escenario y cada una de las actividades propuestas con sus respectivos análisis a priori y a posteriori según la Ingeniería Didáctica y el Enfoque Instrumental.

4.1 Escenario de la investigación

Para la realización de las actividades propuestas, utilizamos como escenario la sala de informática del colegio Sagrado Corazón - Sophianum.

El Colegio Sophianum era en sus inicios un colegio para mujeres. Actualmente, se encuentra con un proyecto coeducativo, que busca la igualdad entre varones y mujeres con valores cristianos y con nivel de excelencia académica.

El colegio sólo tiene un turno en todos los niveles (inicial, primaria y secundaria). Sexto de primaria es considerada como secundaria básica y se encuentra en el pabellón de secundaria. Actualmente, toda la secundaria está conformada por mujeres. Todos los grados de secundaria tienen dos secciones a excepción de primero, cuarto y quinto de secundaria que sólo cuenta con una sección.

4.2 Sujetos de la investigación

Nuestro estudio será realizado con las 36 alumnas de 12 y 13 años de edad del primero de secundaria del colegio Sagrado Corazón – Sophianum.

Las alumnas trabajarán de manera individual en una computadora en la sala de informática que será fija en los dos encuentros propuestos, además anotarán sus observaciones y conclusiones en la ficha de actividades con la que cada una trabajará.

Durante la aplicación de las actividades habrá dos docentes observadoras del área de matemática que registrarán en la ficha de observación los sucesos que acontecerán durante el desarrollo de las actividades y que servirán para nuestro análisis y estudio.

4.3 Descripción de las actividades

La tabla 4 muestra las actividades propuestas que serán realizadas en dos encuentros en la sala de informática.

Tabla 8. Descripción de los encuentros de aplicación de las actividades

Actividad	Encuentro	contenido
Actividad N° 0	I	Introducción al Geogebra
Actividad N° 1	I y II	Simetría Axial
Actividad N° 2	II	Aplicaciones

Estas actividades son diseñadas de manera secuencial. Para familiarizar a las alumnas con el Geogebra realizamos la actividad N°0, para que las alumnas desarrollen esquemas de utilización nuevos y los preexistentes de la simetría axial realizamos la actividad N° 1 y finalmente, proponemos la actividad N° 2 que consta de tres actividades.

En el primer encuentro se desarrollarán las actividades N°0 y N°1 desde el inciso A hasta el inciso C, en el segundo encuentro se realizará la actividad N° 1 D y E, así como también toda la actividad N° 2.

Realizaremos el análisis de cada una de las actividades. Para la actividad N° 1 se analiza las acciones de tres alumnas que llamaremos Mayra, Marcia y Alessandra. En la actividad N°2 presentamos un análisis colectivo e individual. En el análisis colectivo se analizan las acciones de las 36 alumnas y nos servirá para determinar si en esta actividad surge la orquestación Instrumental. En el análisis individual, se analizan las acciones de las alumnas Mayra, Marcia y Alessandra, ya antes mencionadas.

4.4 Análisis de las actividades

A continuación presentamos el análisis *a priori* y *a posteriori* de cada una de las actividades.

Como la investigación se centra en el proceso de instrumentación de la simetría axial, en el análisis *a priori* mostraremos los posibles esquemas de utilización que las alumnas desarrollan cuando trabajan las actividades N° 1 y N° 2 de esta parte experimental. Tomaremos en cuenta los componentes de los esquemas dado por Vergnaud (1996):

- i. **Metas:** que estarán dadas por los objetivos de cada una de las actividades propuestas.

- ii. **Conceptos en acto:** Los conocimientos previos que las alumnas movilizan para aprender sobre la noción de simetría
- iii. **Reglas de acción:** A la secuencia de pasos que las alumnas realizan para desarrollar la actividad planteada.

Para el análisis *a posteriori* estudiaremos de los esquemas de utilización que movilizan las alumnas de manera grupal e individual.

La actividad N° 0 no será analizada dado que nuestro estudio se centra en el proceso de instrumentación de la simetría axial y la apropiación del Geogebra no será analizada en el trabajo. En la actividad N° 1 centraremos nuestro análisis en los posibles esquemas de utilización de tres alumnas Marcia, Mayra y Alessandra; sin embargo, en la actividad N° 2 se realizaremos un análisis mixto, es decir, haremos un análisis cualitativo con las tres alumnas y otro donde tomaremos en cuenta lo colectivo (36 alumnas), ya que queremos identificar, si además de la instrumentación (Génesis Instrumental individual), hubo una Orquestación Instrumental como lo afirma Trouche (2013).







Actividad N° 0:

Tiene por objetivo introducir a las alumnas en el manejo de algunas herramientas del Geogebra que podrían necesitar para el desarrollo de las actividades. Estas son: nuevo punto, punto medio o centro, distancia o longitud, recta que pasa por dos puntos, recta paralela, recta perpendicular, polígono, polígono regular y ángulo.



En seguida presentamos la actividad N° 0 que se les entregó a las alumnas en su ficha de trabajo:

Actividad N° 0: Conociendo el Geogebra


Creando puntos, segmentos y rectas:

- Con la herramienta  crea dos puntos en el plano. Denómíalos A y B, traza el segmento que se forma al unir ambos puntos y determina su distancia haciendo uso de la herramienta distancia o longitud  .
- Determina el punto medio del segmento AB, haciendo uso de la herramienta punto medio  y denomínalo con la letra O. Comprueba que los segmentos AO y OB tiene la misma distancia.
- Crea un recta que pase por los puntos A y B, haz uso de la herramienta recta que pasa por dos puntos  . Luego traza una recta paralela a ésta, utiliza la herramienta recta paralela  .
- Traza la recta perpendicular a la recta que pasa por los puntos A y B, haciendo uso de la herramienta recta perpendicular  .

Creando polígonos:

- Crea un polígono regular de seis lados, utiliza la herramienta polígono regular  .
- Utilizando la herramienta polígono  , crea un polígono de ocho lados. Haz clic izquierdo a uno de los vértices del polígono y selecciona la herramienta renombrar y cambia el nombre de los vértices a A1, A2, A3, así sucesivamente.

Midiendo ángulos:

- Abre el archivo actividad0.ggb y con la herramienta ángulo  mide los ángulos de presentes en la actividad.

Consideramos pertinente la realización de esta actividad porque necesitamos que las alumnas exploren y se apropien de algunas herramientas del Geogebra ya que serán usadas en las siguientes actividades.

En el desarrollo de esta actividad, las alumnas lograron familiarizarse con algunas herramientas del Geogebra lo cual permitió el desarrollo de las actividades posteriores. Cabe mencionar que las alumnas llegaron a manipular sin problemas las herramientas que se tenían previstas.

Sin embargo, la herramienta que tuvo un ligero grado de dificultad fue la de medir ángulos dado que por la naturaleza del software, este toma en cuenta el sentido y en algunos casos en lugar de medir un ángulo interno medían el externo. Luego las alumnas se dieron cuenta y lograron medir ángulos internos con esta herramienta.

Actividad N° 1:

Para el análisis de esta sección que consta de las actividades 1A, 1B, 1C, 1D y 1E. Se tomará en cuenta las acciones de tres alumnas Mayra, Marcia y Alessandra.

Actividad N°1 A:

Utilizando lápiz y papel

Observa la figura y completa su otra mitad:



Al completar cada una de las figuras, ¿Qué relación encuentras entre el lado dibujado y el anterior? Anota tus observaciones _____

Análisis a priori:

La actividad tiene como objetivo que las alumnas reconozcan la equidistancia y construyan la otra mitad de las figuras dadas. Las variables didácticas para esta actividad son: el eje de simetría vertical y en la mitad de la figura.

Conceptos en acto: Las alumnas pueden movilizar la noción de medio, mitad, equidistancia.

Reglas de acción: Pensamos que las alumnas pueden dibujar la otra mitad de las figuras preservando el tamaño, forma y medidas.

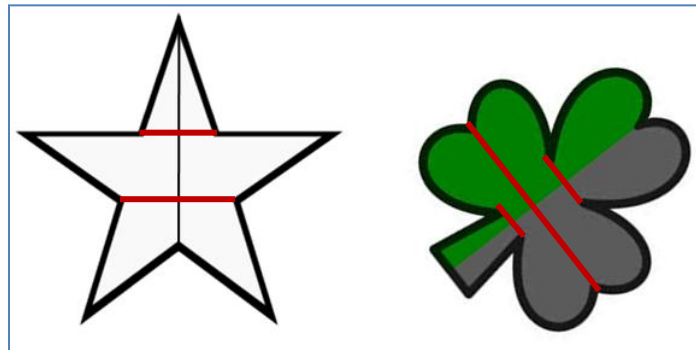


Figura 30. Desarrollo de la actividad

La figura 30, muestra una posible solución de la actividad.

Análisis a posteriori:

MAYRA:

La alumna llegó a cerrar la figura pero no conservó las medidas como se puede observar en la figura 31.

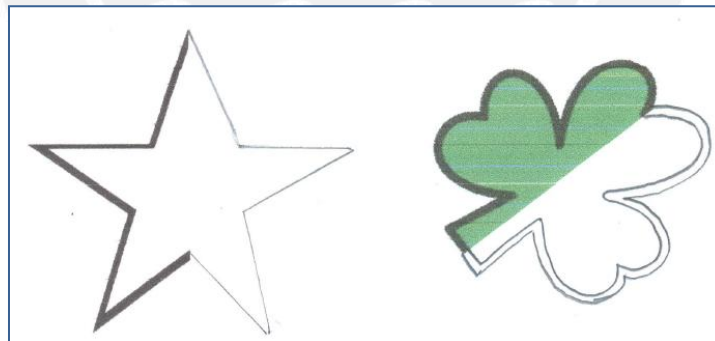


Figura 31. Respuesta de Mayra en la actividad 1A

Mayra trató de conservar la forma de las figuras sin embargo no las medidas, esto se puede evidenciar en la figura 31. No tomó en cuenta la equidistancia con lo previsto en el análisis *a priori*; sólo conservó la forma más no la medida ni el tamaño.

Al completar cada una de las figuras, ¿Qué relación encuentras entre el lado dibujado y el anterior? Anota tus observaciones

El lado izquierdo es exacto

Figura 32. Respuesta de Mayra en la actividad 1A

De la figura 32, creemos que Mayra al decir que el lado izquierdo es exacto está manifestando que el lado que ella dibujo no tiene las mismas medidas.

Las acciones hechas por Mayra fueron dibujar la otra mitad de cada una de las figura. Sin embargo, no se percató de la equidistancia y no conservó el tamaño ni las medidas. Entre los conceptos que movilizó la alumna no estuvo la noción de mitad como figuras de igual forma, tamaño y medida. Eso nos da indicios que Mayra no tiene muy en claro la noción de equidistancia. Por tanto, Mayra no cumplió con lo esperado ni con las reglas de acción *a priori*.

MARCIA:

La alumna traza una recta, va realizando medidas y finalmente completa las figuras con su otra mitad. Esto se observa en la figura 33.

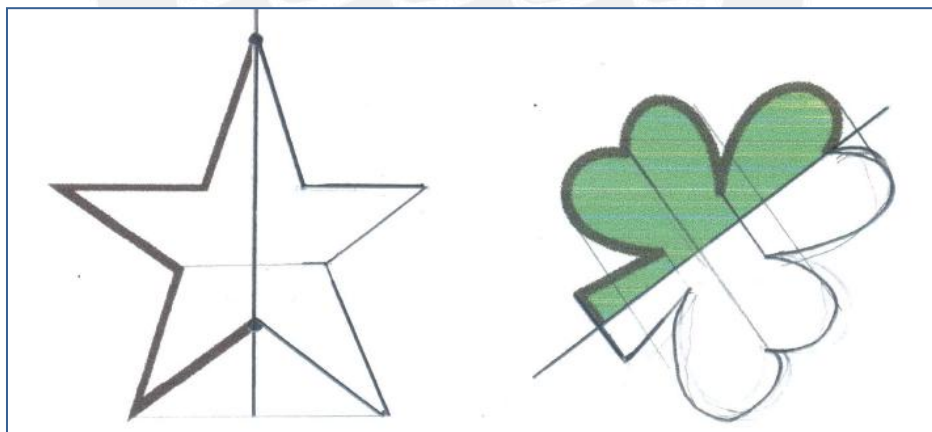


Figura 33. Respuesta de Marcia en la actividad 1A

Marcia mostró por medio de sus acciones que movilizó algunos esquemas preexistentes sobre la noción de simetría axial porque reconoció que entre ambas mitades debe estar una recta (eje de simetría), a su vez trazó segmentos perpendiculares a esta recta como lo mencionó en su ficha de trabajo (figura 34).

Al completar cada una de las figuras, ¿Qué relación encuentras entre el lado dibujado y el anterior? Anota tus observaciones

Que son idénticos usando la recta perpendicular.

Figura 34. Respuesta de Marcia en la actividad 1A

Como lo esperado *a priori*, Marcia logró conservar, forma, tamaño, medida y logró darse cuenta de la equidistancia con la recta que trazó. La alumna, logra cubrir con lo esperado *a priori* para esta actividad. Sus acciones, nos da indicios de que ya tenía esquemas preexistentes de la noción de simetría axial probablemente como el reflejo sobre una recta.

ALESSANDRA:

Alessandra completó las figuras pero no pudo reconocer la equidistancia, tampoco conservó medidas ni tamaños de las figuras dadas, tal como lo muestra la figura 35.

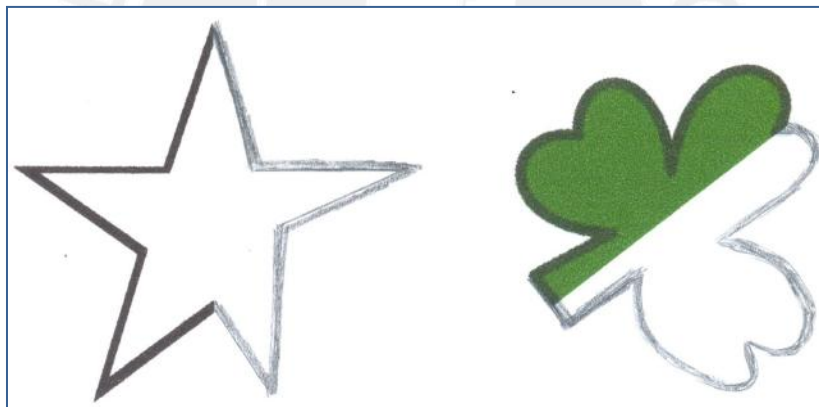


Figura 35. Respuesta de Marcia en la actividad 1A

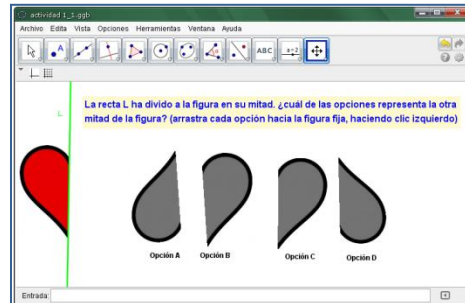
Alessandra no cumplió con lo esperado *a priori* puesto que, no reconoció la equidistancia ni tampoco mantuvo la forma, ni el tamaño ni las medidas de ambas figura (estrella y trébol). Lo que quiere decir que no se cumplieron las posibles reglas de acción y no se movilizaron los conceptos en actos que planteamos *a priori* en esta actividad.

A continuación presentamos la segunda parte de la actividad 1A, donde se utiliza el Geogebra.

Actividad N°1 A: (segunda parte)

Utilizando el Geogebra

Abre el archivo actividad1_1.ggb. Arrastra haciendo clic izquierdo cada una de las opciones hacia la figura fija.
¿Cuál opción completa la figura? Justifica tu respuesta



Análisis a priori:

La actividad tiene como objetivo que las alumnas reconozcan la equidistancia al eje de simetría pero esta vez de utilizando el Geogebra. Las variables didácticas para esta actividad son: el eje de simetría vertical y en la mitad de la figura.

Conceptos en actos: Las alumnas pueden movilizar la noción de medio, mitad, equidistancia.

Reglas de acción: Pensamos que las alumnas pueden elegir y arrastrar las opciones haciendo clic izquierdo del mouse. Mediante movilización de las opciones, observar y elegir la opción que completa la figura.

En la figura 36, podemos observar que la opción correcta es la C porque al juntarlas completan la figura y ambos lados son iguales.

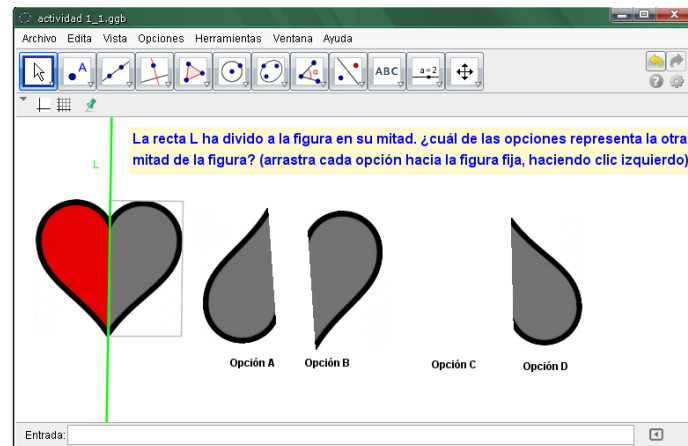


Figura 36. Opción correcta de la actividad

Esperamos que las alumnas realicen esta actividad sin dificultad e identifiquen la equidistancia a la recta L (eje de simetría).

Análisis a posteriori:

MAYRA:

La alumna arrastró las opciones y dio como respuesta la opción C. Esto se puede observar en el archivo de Marcia que se muestra en la figura 37.

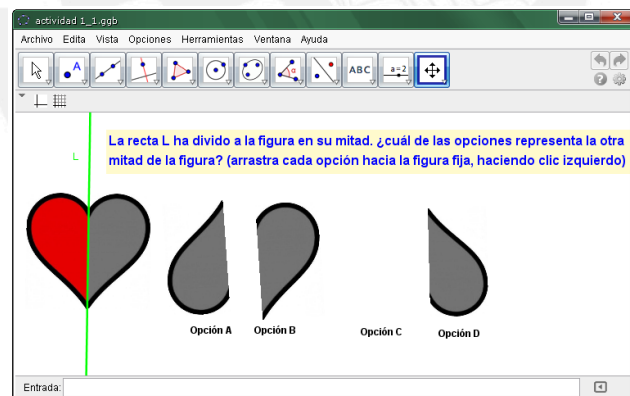


Figura 37. Opción elegida por Mayra en la actividad 1A

Mayra logró dar la respuesta correcta, es decir, la opción C. Por tanto, reconoce que esta opción es la otra mitad de la figura y que la recta L se encuentra entre ambas partes, en otras palabras, logró movilizar los conceptos en actos que se plantearon *a priori*. Esto se puede evidenciar en la figura 38.

✓ Abre el archivo actividad1_1.ggb. La recta L ha dividido a la figura en su mitad. ¿cuál de las opciones representa la otra mitad de la figura? Justifica tu respuesta (Arrastra haciendo clic izquierdo cada una de las opciones hacia la figura fija).

Opción C, porque encaja con la otra parte de la figura.

Figura 38. Respuesta de Mayra para la actividad 1 A

Mayra logró reconocer la respuesta correcta pero en su justificación da como respuesta la opción C porque encaja con la otra figura. Sin embargo, no identifica la equidistancia a la recta L.

MARCIA:

Marcía arrastró las opciones y también eligió la opción C como la correcta (figura 39).

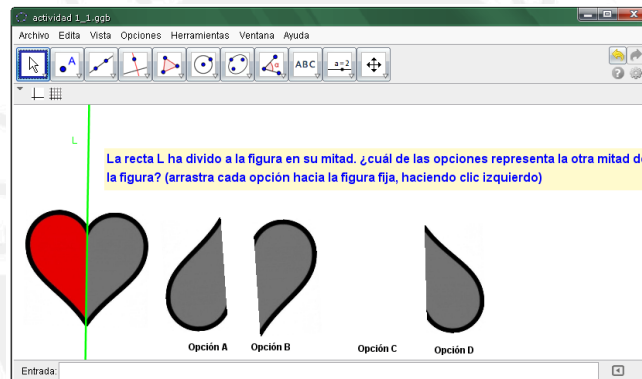


Figura 39. Opción elegida por Marcia en la actividad 1A

Marcia logró reconocer que la otra mitad de la figura era la opción C. Ella sustentó su elección diciendo que era la única opción que estaba recta (figura 40), eso nos da indicios que la alumna está asociando, que siempre debe tener una perpendicularidad con respecto a la recta L, lo creemos dado que en la actividad anterior mostró que tenía esquemas preexistentes de simetría axial. Por tanto, ella moviliza conceptos en acto como perpendicularidad y mitad.

✓ Abre el archivo actividad1_1.ggb. La recta L ha dividido a la figura en su mitad. ¿cuál de las opciones representa la otra mitad de la figura? Justifica tu respuesta (Arrastra haciendo clic izquierdo cada una de las opciones hacia la figura fija).

Es la C porque es la otra mitad de la figura de posición rectilínea.

Figura 40. Respuesta de Marcia para la actividad 1 A

En su justificación de Marcia habla sobre una posición rectilínea y eso nos da indicios que moviliza la noción de perpendicularidad, es decir que ambos lados al unirse por medio de la recta L deberían de estar rectos.

ALESSANDRA:

Alessandra como sus compañeras, también eligió la opción C como la correcta. Tal como lo muestra la figura 41. Realizó reglas de acción como arrastrar las figuras de cada opción y llevarlas hacia la recta L.

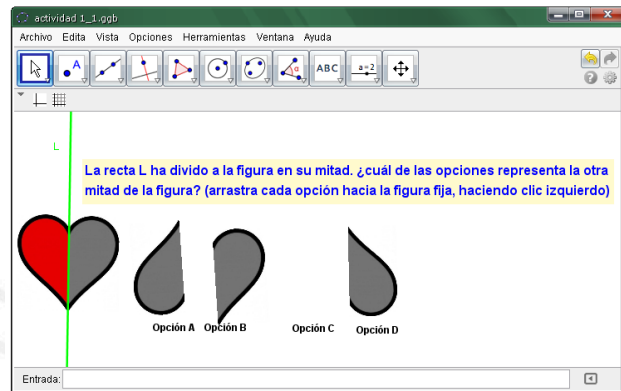


Figura 41. Opción elegida por Alessandra en la actividad 1A

Como se esperaba *a priori*, Alessandra logró identificar que la opción C es la otra mitad de la figura que está dividida por la recta L. Por lo escrito en su ficha (figura 42), creemos que Alessandra al decir “porque son más largar” está teniendo una noción de que la figura a elegir debe tener la misma medida que la que se le presentó por tanto utilizó el concepto en acto de mitad.

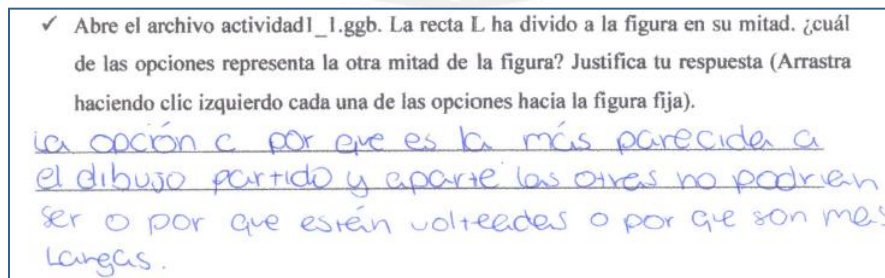


Figura 42. Respuesta de Alessandra para la actividad 1 A

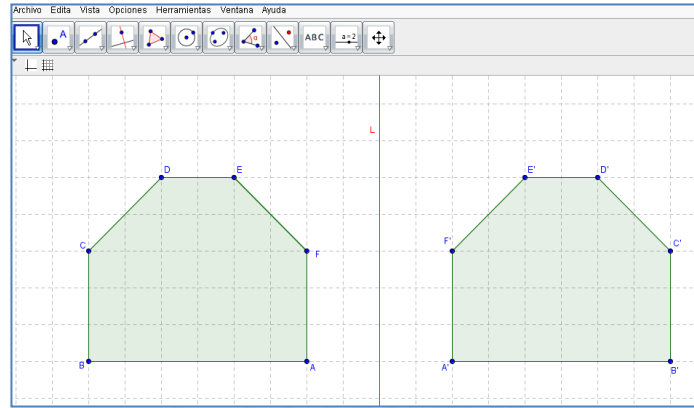
También al igual que Mayra y Marcia, Alessandra argumentó su elección diciendo que la opción C es la única que es parecida a la primera parte de la figura pues tiene las mismas medidas.

En conclusión, en esta actividad se logró con el objetivo previsto en el análisis *a priori*. Las tres alumnas identificaron a la opción C, como la otra mitad de la figura dividida por la recta L. Además, observamos que no tuvieron problemas con la herramienta arrastre del Geogebra a pesar de no haber sido introducido este recurso en la actividad N° 0, pensamos que esto podría ser porque conocen otros softwares y posiblemente ya tienen esquemas de utilización preexistentes para esta herramienta.



Actividad N°1 B:

Abre el archivo actividad1_2_1.ggb. Moviliza la recta L haciendo clic izquierdo sin soltar el mouse. Responde:



¿Explique qué sucede con las figuras cuando mueves la recta L a la izquierda o a la derecha?

¿Qué sucede con las figuras cuando la recta L pasa por el lado FA de la primera figura?

¿Qué sucede con las figuras cuando la recta L se ubica en la mitad de la primera figura?

Coloca la recta a tres cuadrículas a la derecha de la primera figura y traza el segmento FF'. Luego, traza el punto de intersección del segmento y la recta, nómbralo como punto M. Mide los segmentos FM y MF'. ¿Cómo son las medidas?

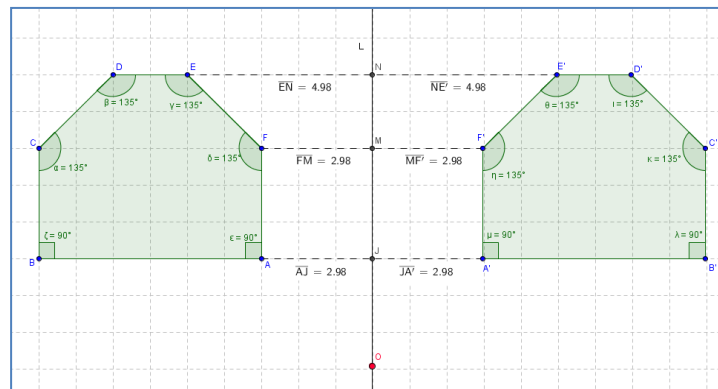
¿Sucede lo mismo entre el segmento EE'? _____, por qué

Mueve la recta de izquierda a derecha ¿Qué sucede? Anota tus observaciones.

Mide los ángulos internos de las figuras. ¿Qué sucede con las medidas de los ángulos cuando movilizas la recta L? Explica.

Abre el archivo 1_2_2.ggb. Mueve el punto O, haciendo clic sobre él sin soltar el mouse. Anota tus observaciones: _____

De lo observado ¿A qué conclusión has llegado con respecto al recta y las figuras?



Análisis a priori:

En la actividad N° 1B deseamos que las alumnas identifiquen las propiedades que debe cumplir la recta L (eje de simetría): la equidistancia de cada uno de los puntos del polígono ABCDEF y el polígono A'B'C'D'E'F', respectivamente; Esto independientemente de la posición de la recta L. También que los ángulos internos del polígono ABCDEF y A'B'C'D'E'F' no varían. Las variables didácticas en esta actividad son: Eje de simetría vertical y figuras con cuadrículas.

Concepto en acto: Posiblemente las alumnas movilen nociones como segmentos, ángulos, polígono, punto medio, medida de un segmento.

Reglas de acción: Pensamos que las alumnas pueden arrastrar la recta L (el eje de simetría) de izquierda a derecha y observar la equidistancia del polígono ABCDEF y el polígono A'B'C'D'E'F' con respecto a la recta L. Trazar los puntos medios de FF', EE' y AA', luego trazar los segmentos FM, MF', EN y NE', medir dichos segmentos y luego arrastrar la recta L para observar que por más que ésta se movilece los segmentos tienen la misma medida y siempre son perpendiculares a la recta L. Finalmente, medir los ángulos internos del polígono ABCDEF y el polígono A'B'C'D'E'F', arrastrar la recta L y observar que los ángulos interiores no varían.

En la siguiente figura 43 se puede observar lo explicado anteriormente.

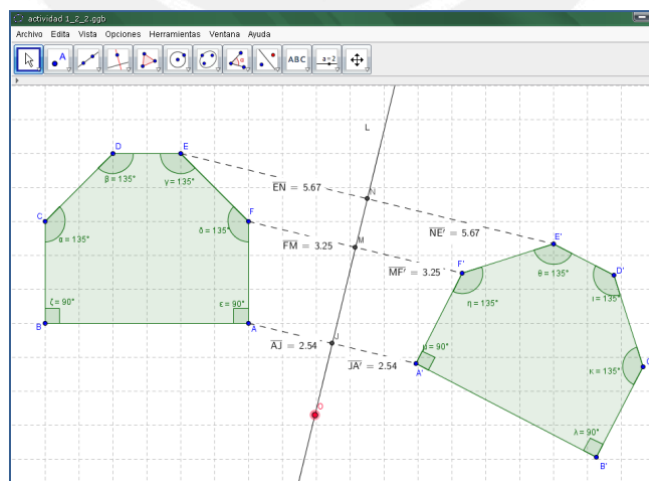


Figura 43. Arrastrando el eje de simetría

Análisis a posteriori:

MAYRA:

La alumna arrastró la recta L de izquierda a derecha y notó que el polígono $A'B'C'D'E'F'$ se aleja de la recta si va hacia la derecha o se acerca al polígono $ABCDEF$ si mueve la recta hacia la izquierda.

Luego, al movilizar la recta hacia el lado FA del polígono $ABCDEF$ observó que ambas figuras se juntan y parecieran que formaren una sola. Al arrastrar la recta L hacia la mitad del polígono $ABCDEF$, ella manifestó que se sobreponen y forman una sola figura.

Trazó los segmentos FM y MF' , los midió y se pudo percatar que ambas segmentos tienen igual longitud y manifestó que esto se debe porque la recta se mantiene fija y que estas medidas varían si se arrastra la recta L .

Con respecto a las medidas de los ángulos internos de ambos polígonos $ABCDEF$ y $A'B'C'D'E'F'$ sostuvo que se mantienen igual a pesar de que se arrastre la recta L ya que sólo cambia la distancia y no la figura.

Cuando movilizó el punto O en el archivo `1_2_2.ggb`, la alumna sostuvo que la figura rotó, las medidas de los segmentos variaron mientras que las medidas de los ángulos internos del polígono se mantuvieron.

A la conclusión que llegó con respecto a la recta L y los polígonos es que los polígonos mantienen su medida a pesar que se arrastre dicha recta.

Con relación a lo esperado en nuestro análisis *a priori* para esta actividad:

Mayra reconoció la equidistancia de los puntos del polígono $ABCDEF$ respectivamente con los puntos del polígono $A'B'C'D'E'F'$ con respecto a la recta L . Esto lo podemos observar en la figura 44, que vemos a continuación.

Coloca la recta a tres cuadrículas a la derecha de la primera figura y traza el segmento FF' . Luego, traza el punto de intersección del segmento y la recta, nómbralo como punto M. Mide los segmentos FM y MF' ¿Cómo son las medidas?
 _____ Son iguales _____ ¿Si se realiza el procedimiento anterior sucede lo mismo entre los segmentos EN y NE' ? Si, por qué
La recta L se mantiene fija en un solo espacio.

Figura 44. Respuestas de Mayra sobre la actividad 1B

Ya que consigue completar correctamente los espacios en blanco, podemos deducir que la alumna está reconociendo la equidistancia de los puntos a la recta L.

Además, la alumna reconoció que los ángulos internos de las figuras no varían (como se puede evidenciar en la figura 45) pues escribe su justificación.

Mide los ángulos internos de las figuras. ¿Qué sucede con las medidas de los ángulos cuando se movilizas la recta L? Explica. Se mantienen igual ya que solo cambia la distancia y no la figura, es por eso que no altera la medida de los ángulos.

Figura 45. Respuestas de Mayra sobre la actividad 1B

Por la justificación que escribe la alumna podemos reconocer que probablemente reconoció que las medidas de los ángulos son invariantes en una simetría.

Las acciones utilizadas por Mayra nos dan indicios que la génesis instrumental se dio en Mayra porque en términos de Rabardel muestra una instrumentalización local de las herramientas del Geogebra utilizadas en esta parte para el estudio de la simetría axial tales como: segmento entre dos puntos, distancia o longitud, ángulo e intersección de dos objetos.

En la figura 46, podemos observar el procedimiento realizado por Mayra en el Geogebra.

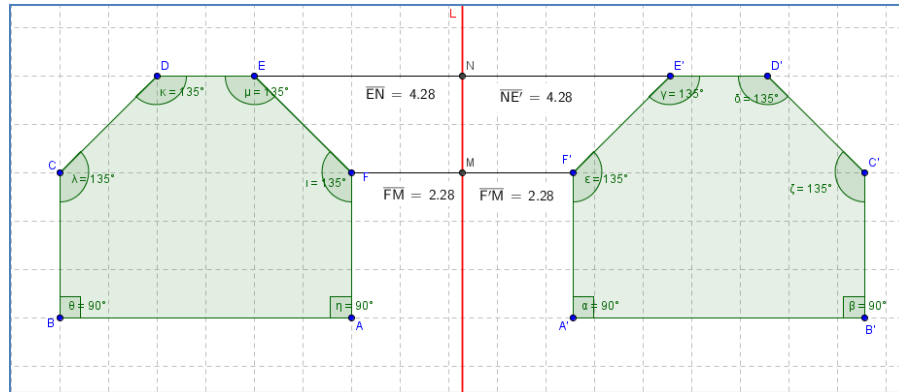


Figura 46. Procedimiento realizado por Mayra

Por medio de las acciones de Mayra, antes mencionadas, y los conceptos movilizados como ángulos, polígonos, segmentos y longitud de segmentos; podemos afirmar que los posibles esquemas de utilización desarrollados por Mayra para esta actividad son: equidistancia de un punto de la figura con su simétrico respecto a la recta, ángulos interiores de las figuras son invariantes y que el simétrico es invariante en forma y tamaño de la figura, los que nos da indicios de que la alumna está instrumentándose con la noción de simetría axial. Esto último se observar en la siguiente respuesta (Fig. 47) de la alumna.

¿Qué sucede con las figuras cuando la recta L se ubica en la mitad de la primera figura? Se sobrepone y forman aparentemente una sola figura.

Figura 47. Respuestas de Mayra sobre la actividad 1B

Mayra al escribir que las figuras se sobrepone pensamos que está recociendo que son de igual tamaño, forma y medidas.

MARCIA:

Realizó las siguientes acciones:

Arrastró la recta L observó que los polígonos ABCDEF y A'B'C'D'E'F' se desplazan a mayor o menor distancia según la posición de la recta.

Cuando la recta L pasa por el lado FA del polígono $ABCDEF$, ella manifestó que ambas figuras se unen a través de la recta L . Si la recta se ubica en el centro del polígono $ABCDEF$ observó que ambas figuras forman una sola.

Trazó los segmentos FM y MF' y realizó la medición de ambos, observó que las medidas son iguales y que cambian según la posición o lugar donde se encuentre la recta L .

Con respecto a las medidas de los ángulos internos de ambos polígonos $ABCDEF$ y $A'B'C'D'E'F'$ manifiesta que las medidas de dichos ángulo no cambian aunque se desplace la recta L .

Al arrastrar el punto O en el archivo `1_2_2.ggb`, observó que los polígonos $ABCDEF$ y $A'B'C'D'E'F'$ cambian de posición pero que sus ángulos internos mantienen sus medidas.

Manifestó que la recta influye mucho con respecto a las medidas y que con ella se puede tener figuras semejantes.

Con relación a los objetivos trazados en nuestro análisis *a priori* para esta actividad, Marcia reconoció la equidistancia de los puntos del polígono $ABCDEF$ respectivamente con los puntos del polígono $A'B'C'D'E'F'$ con respecto a la recta L . Esto se evidencia en la figura 48.

Coloca la recta a tres cuadrículas a la derecha de la primera figura y traza el segmento FF' . Luego, traza el punto de intersección del segmento y la recta, nómbralo como punto M . Mide los segmentos FM y MF' ¿Cómo son las medidas?
Ambas medidas son iguales = 3 ¿Si se realiza el procedimiento anterior sucede lo mismo entre los segmentos EN y NE' ? Si, por qué
al igual que la primera ambas no poseen iguales medidas pero sí el mismo resultado

Figura 48. Respuestas de Marcia sobre la actividad 1B

En la figura anterior, Marcia escribe que las medidas de los segmentos FM y MF' son iguales, así como también las medidas de los segmentos EN y NE' . Por tanto, reconoció la equidistancia a la recta L .

La alumna evidenció que los ángulos internos ambos polígonos no varían a pesar de que se desplace la recta L como lo manifestó en el siguiente texto:

Mide los ángulos internos de las figuras. ¿Qué sucede con las medidas de los ángulos cuando se movilizas la recta L? Explica. NO cambia la medida de los ángulos aunque desplaces la recta L, en otras palabras se mantiene la medida de los ángulos.

Figura 49. Repuestas de Marcia sobre la actividad 1B

Sobre el eje de simetría Marcia descubrió que esta recta tiene influencia con respecto a las figuras, como se puede observar en la figura 50.

De todo lo observado ¿A qué conclusión has llegado con respecto al recta y las figuras? que la recta influye mucho con respecto a la medida de las figuras y con la recta muchas figuras pueden tener figuras semejantes a las mismas

Figura 50. Repuestas de Marcia sobre la actividad 1B

Como se puede observar la alumna, reconoció la importancia de la recta L (eje de simetría) con respecto a las distancia y a la creación del simétrico de una figura.

Marcia utilizó herramientas del Geogebra como elige y mueve, ángulo distancia y longitud, esto nos da indicios que ella está instrumentalizada localmente en el uso del Geogebra.

En la figura 51 se muestra el proceso que realizó Marcia en el Geogebra.

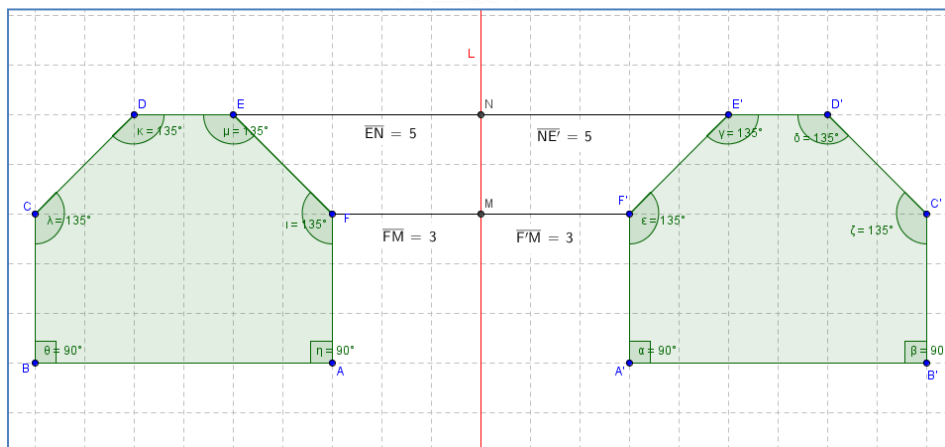


Figura 51. Proceso realizado por Marcia en el Geogebra en la actividad 1B

Por las acciones y los conceptos movilizados por Marcia como: ángulos, polígonos, recta, segmento y longitud de segmentos. Podemos decir que los posibles esquemas de utilización que desarrolló Marcia son: equidistancia de un punto de la figura con su simétrico respecto a la recta, los ángulos interiores de los polígonos son invariantes y reconoce la importancia del eje de simetría para formar el simétrico de una figura. De lo anterior, observamos algunos indicios de que Marcia está instrumentada con el objeto matemático.

ALESSANDRA:

La alumna movilizó la recta L y evidenció que cuando la mueve a la derecha el polígono A'B'C'D'E'F' se aleja del polígono ABCDEF y cuando se mueve la recta L hacia la izquierda el polígono A'B'C'D'E'F' se acerca más a la recta L.

Arrastró la recta L hacia el segmento FA del polígono ABCDEF y manifestó que ambos polígonos se juntan como si fuera uno solo y que cuando arrastraba la recta L hacia la mitad del polígono ABCDEF, ambos polígonos se sobreponían.

Trazó los segmentos FM y MF' y realizó la medición de ambos; y luego evidenció que las medidas son iguales.

Con respecto a las medidas de los ángulos internos de ambos polígonos ABCDEF y A'B'C'D'E'F' sostuvo, que no sucede ningún cambio de medida porque la figura no se agranda ni se achica.

Al movilizar el punto O en el archivo1_2_2.ggb, observó que las medidas entre polígonos ABCDEF y A'B'C'D'E'F' cambian en términos de la alumna aumentan o disminuyen.

Llegó a la conclusión de que cuando arrastra la recta L, los ángulos internos de las figuras no cambian de medida y que la distancia entre las figuras cambian según lo arrastre.

Con relación a los objetivos que nos habíamos propuesto en nuestro análisis *a priori* para esta actividad observamos que no se han cumplido por completo en Alessandra, por lo siguiente:

Mide los ángulos internos de las figuras. ¿Qué sucede con las medidas de los ángulos cuando se movilizas la recta L? Explica. nada sigue con la misma medida por que la figura no se agranda ni se achica solo la distancia entre ambas figuras cambia

Figura 52. Respuestas de Alessandra sobre la actividad 1B

Alessandra reconoció que los ángulos internos de ambos polígonos son invariantes. Esto se puede observar en la figura 53.

A diferencia de lo esperado en el análisis *a priori* sobre la recta L, que era el reconocimiento de las propiedades del eje de simetría, la alumna sólo pudo concluir que los ángulos internos de las figuras son invariantes cuando se mueve la recta L, esto se evidencia en la siguiente figura.

De todo lo observado ¿A qué conclusión has llegado con respecto al recta y las figuras? que cuando se mueve la recta no cambia la medida de los ángulos internos, solo cambia la medida entre cada segmento.

Figura 53. Respuestas de Alessandra sobre la actividad 1B

Alessandra realiza una acción que no se encuentra dentro de las reglas de acción previstas para esta actividad, dado que ubica mal el punto de intersección entre la recta L y el segmento EE' el cual lo denomina punto n, como se muestra en la figura 54.

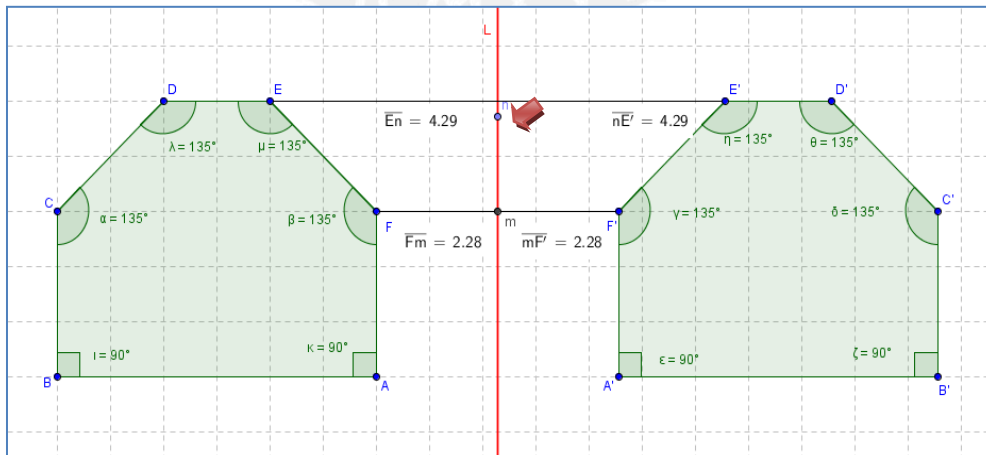


Figura 54. Proceso realizado por Alessandra en el Geogebra en la actividad 1B

Pensamos que asume que n es el punto medio de EE' y que las longitudes de los segmentos En y nE' son iguales, dado que ella mide que $En = nE' = 4,29$. La figura muestra la conclusión a la que llegó la alumna.

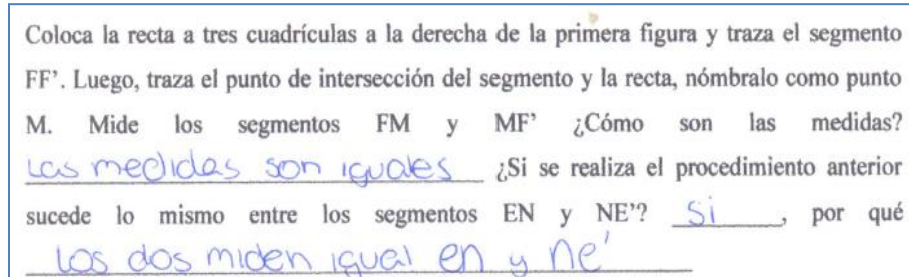


Figura 55. Respuestas de Alessandra sobre la actividad 1B

La medidas son iguales porque si se trazan los segmentos En y nE' formaríamos dos triángulos congruente como muestra la figura 56.

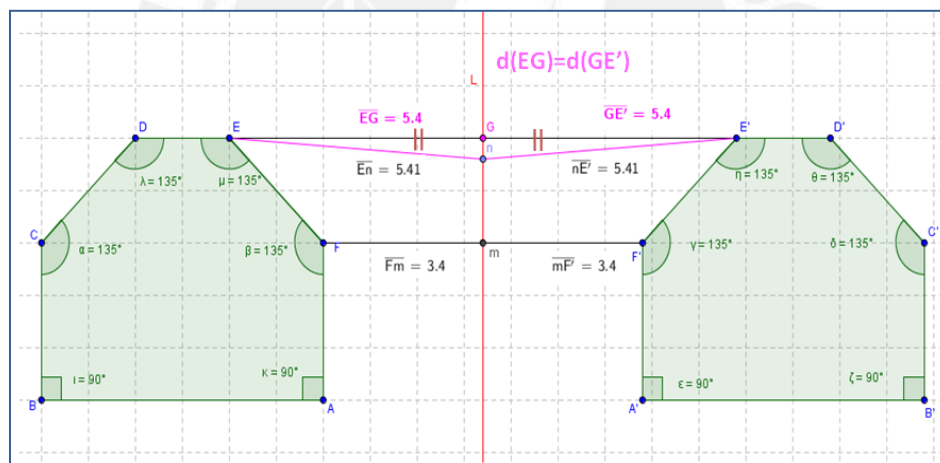


Figura 56. Análisis del proceso realizado por Alessandra en el Geogebra en la actividad 1B

Sin embargo, el punto de intersección entre la recta L con el segmento EE' de manera perpendicular sería el punto G y las longitudes de los segmentos EG y GE' es 5,4. Ella llegó a una conclusión errada porque la propiedad es que la distancia del segmento EG debe ser igual al segmento GE' , no EN y NE como ella mencionó.

Además, Alessandra no logró reconocer la equidistancia de los puntos de los polígonos a la recta L porque distrae su atención con la variación de las medidas en cada uno de los momentos en que ella desplaza la recta L y no enfoca su atención en $FM = MF'$ por

más que se arrastre la recta L, la figura 57 muestra lo que Alessandra segura sobre las medidas de los segmentos.

Mueve la recta de izquierda a derecha ¿Qué sucede con las medidas de los segmentos?
Anota tus observaciones.
cuando lo mueves a la derecha las medidas se agrandan, y cuando lo mueves a la izquierda la distancia se acorta más.

Figura 57. Respuestas de Alessandra sobre la actividad 1B

Sin embargo, podemos observar que Alessandra utilizó algunas herramientas del Geogebra como: elige y mueve, ángulo, distancia y longitud.

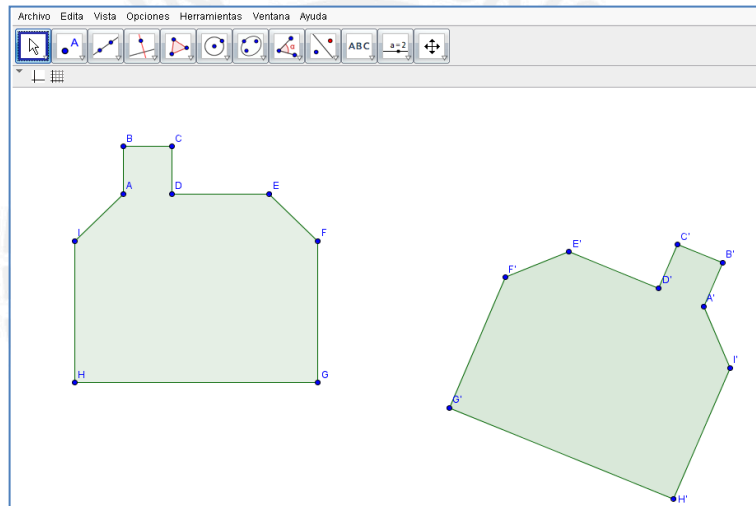
Por lo anterior, podemos decir que Alessandra muestra indicios de que se encuentra instrumentalizada localmente con algunas herramientas del Geogebra pero no está instrumentada con las propiedades de simetría axial.

En esta actividad podemos decir que las alumnas Mayra y Marcia han cumplido con lo esperado *a priori*. Además, dichas alumnas siguieron con las reglas de acción previstas y movilizaron los conceptos en acto para formar esquemas de utilización de la noción de Simetría axial, pero Alessandra sólo logro una instrumentalización local del Geogebra y no formó los esquemas de utilización deseados.

Actividad N°1 C:

Abre el archivo actividad1_3.ggb. Utilizando la herramienta punto medio, traza los puntos medios de los segmentos AA', BB', CC', DD', EE', FF', GG', HH' e II'. Con la herramienta recta, traza la recta que pasa por los puntos medios marcados anteriormente. Anota tus observaciones.

Traza el segmento AA' y mide un ángulo que se forma entre la intersección del segmento y la recta. ¿Cuánto mide el ángulo? _____ Traza BB' y mide un ángulo que se forma entre la intersección del segmento y la recta. ¿Cuánto mide el ángulo? _____ ¿qué puedes concluir con respecto a los ángulos que se forman entre la intersección de la recta y los segmentos trazados? justifica. _____



Análisis a priori:

La actividad tiene como objetivo trazar el eje de simetría pero no vertical sino con inclinación y sin cuadrículas. Las variables didácticas en esta actividad son: Eje de simetría vertical y figuras sin cuadrículas.

Concepto en acto: Las alumnas pueden movilizar la noción de recta, segmentos, punto medio, ángulos, perpendicularidad.

Reglas de acción: Pensamos que las alumnas pueden elegir la herramienta punto medio y traza los puntos medios de los segmentos AA', BB', CC', DD', EE', FF', GG', HH' e II'. Luego, traza la recta que pasa por los puntos medios marcados anteriormente.

Finalmente, medir los ángulos que se forman entre la intersección de la recta y los segmentos trazados, observar que siempre son ángulos rectos.

En la figura 58, se muestra la solución ideal para esta actividad.

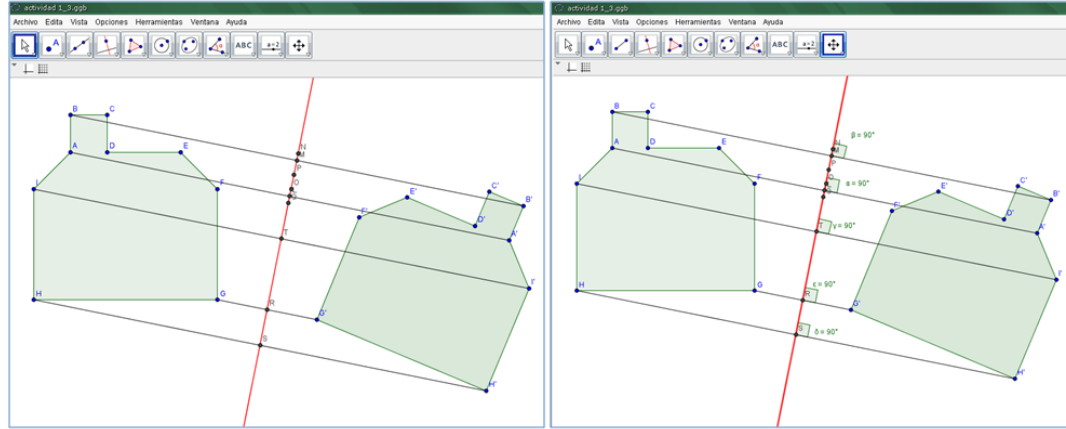


Figura 58. Trazo del eje de simetría

Análisis a posteriori:

A continuación presentamos el desarrollo de Mayra, Marcia y Alessandra.

MAYRA:

La alumna, ubicó los puntos medios de AA', BB', CC', DD', EE', FF', GG', HH' e II', luego trazó una recta que pasa por los puntos medio. Finalmente, midió los ángulo formados entre las intersecciones de los segmentos AA' y BB' con la recta tal como lo muestra la figura 59.

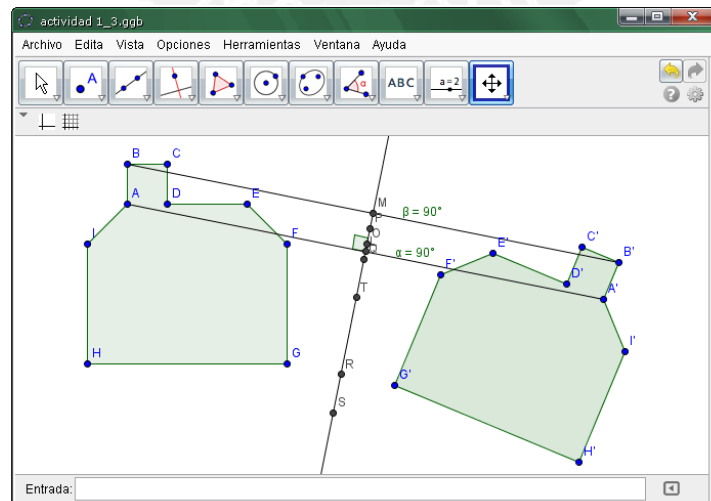


Figura 59. Solución de Mayra en la actividad 1C

Mayra logró darse cuenta que la recta contiene a todos los puntos medios que trazó, tal como lo expresa en su ficha de trabajo (figura 60)

Abre el archivo actividad1_3.ggb. Utilizando la herramienta punto medio, traza los puntos medios de los segmentos AA', BB', CC', DD', EE', FF', GG', HH' e II'. Con la herramienta recta, traza la recta que pasa por los puntos medios marcados anteriormente. Anota tus observaciones.

Todos los puntos están dentro de la recta

Figura 60. Respuesta de Mayra en la actividad 1C

A su vez Mayra logró reconocer que en la intersección entre los segmentos AA' y BB' con la recta que ella trazó anteriormente siempre forman ángulos rectos. Tal como lo expresa en la figura 61.

Traza el segmento AA' y mide un ángulo que se forma entre la intersección del segmento y la recta. ¿Cuánto mide el ángulo? 90° Traza BB' y mide un ángulo que se forma entre la intersección del segmento y la recta ¿Cuánto mide el ángulo? 90° ¿qué puedes concluir con respecto a los ángulos que se forman entre la intersección de la recta y los segmentos trazados? justifica. Todos los ángulos son rectos (90°). Las rectas son perpendiculares.

Figura 61. Respuesta de Mayra en la actividad 1C

Por lo mencionado anteriormente, podemos decir que Mayra desarrolló la actividad como el análisis *a priori* porque logró reconocer que la recta contiene a todos los puntos medios y también, la perpendicularidad de los segmentos trazados con respecto a la recta. Sus acciones nos dan indicios de que Mayra logró una Génesis instrumental, debido a que está siendo instrumentada con algunas propiedades de la noción de simetría axial.

Por las acciones seguidas por Mayra, ya mencionadas anteriormente, y los conceptos movilizados, que fueron apareciendo en el desarrollo de la actividad, tales como recta, punto medio y ángulo recto; creemos que los posibles esquemas de utilización desarrollados por Mayra son: equidistancia y perpendicularidad.

En términos de Rabardel, Mayra logró una instrumentalización local de las herramientas punto medio, recta que pasa por dos puntos, ángulo, intersección de dos objetos y segmento entre dos puntos.

MARCIA:

Las acciones realizadas por la alumna fueron:

Trazó los puntos medios de AA' , BB' , CC' , DD' , EE' , FF' , GG' , HH' e II' y luego utilizando la herramienta recta que pasa por dos puntos, traza la recta que contiene a todos los puntos medios.

También haciendo uso de la herramienta recta que pasa por dos puntos. Realizó las rectas que pasan por los puntos A y A' así como también la recta que pasa por B y B' . Posteriormente, midió los ángulos formados en la intersección de la recta AA' , BB' con la recta que contiene los puntos medios. Tal como se muestra en la figura 62.

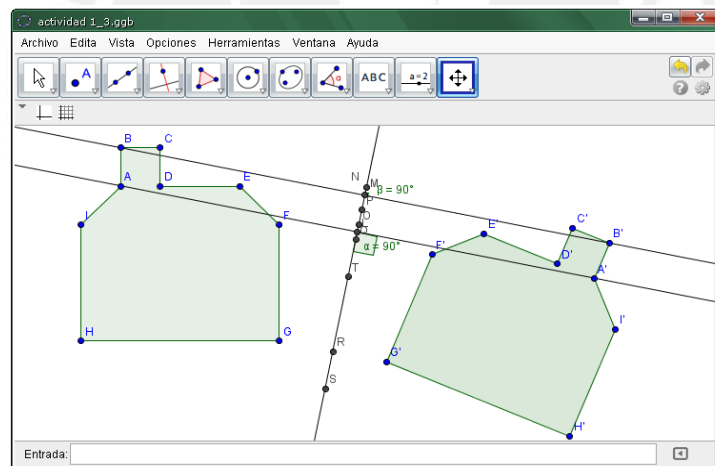


Figura 62. Solución de Marcia en la actividad 1C

Marcía logró identificar que la recta que había trazado contiene a todos los puntos medios de ambos polígonos como lo menciona en su ficha de trabajo (figura 63)

Abre el archivo actividad1_3.ggb. Utilizando la herramienta punto medio, traza los puntos medios de los segmentos AA', BB', CC', DD', EE', FF', GG', HH' e II'. Con la herramienta recta, traza la recta que pasa por los puntos medios marcados anteriormente. Anota tus observaciones.

Todos los puntos se unen a través de una recta.

Figura 63. Respuesta de Marcia en la actividad 1C

A su vez también observó que los ángulos siempre en la intersección de dos rectas se forman ángulos y en este caso son rectos, tal como lo escribe en su ficha de trabajo (figura 64).

Traza el segmento AA' y mide un ángulo que se forma entre la intersección del segmento y la recta. ¿Cuánto mide el ángulo? 90° Traza BB' y mide un ángulo que se forma entre la intersección del segmento y la recta. ¿Cuánto mide el ángulo? 90° ¿qué puedes concluir con respecto a los ángulos que se forman entre la intersección de la recta y los segmentos trazados? justifica. que nunca varía su medida y a través de una recta se puede originar ángulos.

Figura 64. Respuesta de Marcia en la actividad 1C

Por la figura anterior, reconocemos que Marcia logró reconocer la perpendicularidad y la equidistancia a la recta L.

Con respecto a nuestro análisis a priori, Marcia logró los objetivos previstos para esta actividad. Las acciones de Marcia nos dan indicios que la génesis instrumental se ha dado en ella, ya que está siendo instrumentada la noción de simetría axial. Por sus acciones seguidas y la movilización de conceptos como punto medio, recta y ángulo recto; consideramos que los posibles esquemas de utilización son: recta que contiene a todos los puntos medios, equidistancia y perpendicularidad.

También la alumna, ha logrado una instrumentación local de algunas herramientas del Geogebra como: ángulo, recta que pasa por dos puntos y punto medio.

ALESSANDRA:

La alumna siguió las siguientes acciones:

Trazó todos los puntos medios entre los vértices de los polígonos ABCDEFGHI y A'B'C'D'E'F'G'H'I' uno a uno. Luego, trazo una recta que pase por los puntos medios y los segmentos AA' y BB'. Finalmente, midió los ángulos que se forman en la intersección de los segmentos AA', BB' con la recta.

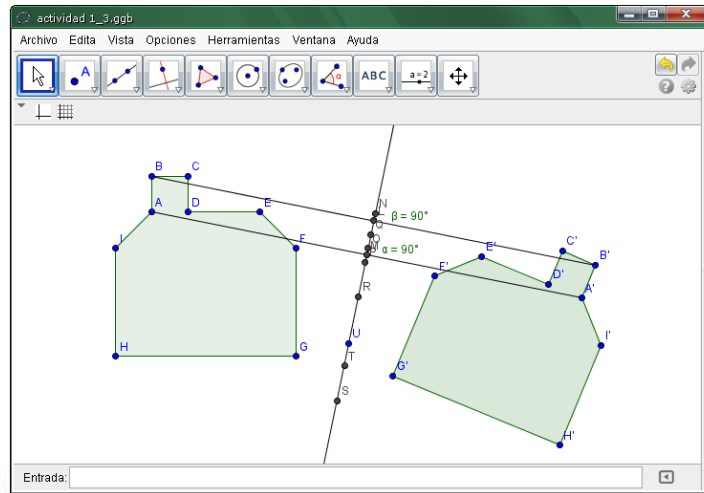


Figura 65. Solución de Alessandra en la actividad 1C

Alessandra reconoció que la recta contiene a todos los puntos medios que trazó. Tal como lo manifestó en su ficha de trabajo (figura 66).

Abre el archivo actividad1_3.ggb.Utilizando la herramienta punto medio, traza los puntos medios de los segmentos AA', BB', CC', DD', EE', FF', GG', HH' e II'. Con la herramienta recta, traza la recta que pasa por los puntos medios marcados anteriormente. Anota tus observaciones.

la recta contiene a todos los puntos medios

Figura 66. Respuesta de Alessandra en la actividad 1C

La alumna también reconoció que los ángulos que se forman en la intersección de los segmentos AA', BB' con la recta trazada miden 90°, tal como lo menciona en la figura 67.

Traza el segmento AA' y mide un ángulo que se forma entre la intersección del segmento y la recta. ¿Cuánto mide el ángulo? Mide 90 Traza BB' y mide un ángulo que se forma entre la intersección del segmento y la recta ¿Cuánto mide el ángulo? Mide 90 ¿qué puedes concluir con respecto a los ángulos que se forman entre la intersección de la recta y los segmentos trazados? justifica. que los angulos son iguales ya que miden los 2 90°

Figura 67. Respuesta de Alessandra en la actividad 1C

Las acciones realizadas por Alessandra en esta actividad, nos da indicios que la alumna ha sido instrumentada en las propiedades como la perpendicularidad de los segmentos formados entre un punto de la figura y su simétrico respecto al eje de simetría. Los posibles esquemas de utilización que desarrollo son: perpendicularidad y equidistancia.

Actividad N°1 D:

Abre el archivo actividad1_4.ggb. ¿En qué figuras puedes trazar una recta que las divida en la mitad? ¿por qué? Justifica.

En qué figuras puedes traza una recta que las divida en la mitad

Figura 1

Figura 2

Figura 3

Figura 4

Figura 5

Análisis a priori:

La actividad tiene como objetivo reconocer y trazar el eje de simetría de cada una de las figuras que esta se pueda trazar. Las variables didácticas en esta actividad son: Eje de simetría vertical, horizontal u oblicuo y figuras no simétricas.

Conceptos en acto: Las alumnas pueden movilizar las nociones de punto medio, recta, mitad.

Reglas de acción: Pensamos que las alumnas pueden elegir dos pares de puntos de una de las figuras de tal manera que sean simétrico y trazar su punto medio, ya obtenidos dos puntos medios trazar la recta que pasa por ellos. Este proceso se repetirá en cada figura.

A continuación mostramos las gráfica donde se muestran los posibles ejes de simetría que las alumnas deben trazar en el desarrollo de esta actividad, como se puede observar la figura 2 de la actividad no tiene eje debido a que no es simétrica.

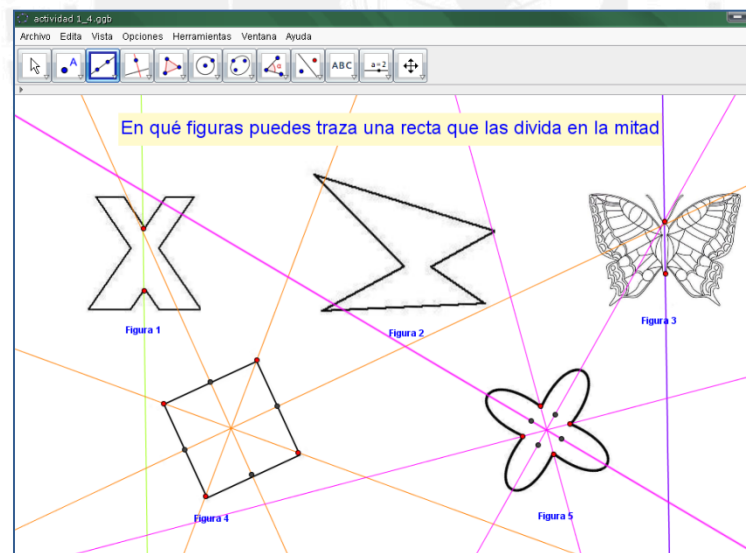


Figura 68. Trazo de ejes en las figuras simétricas

Análisis a posteriori:

MAYRA:

La acción seguida por la alumna fue trazar rectas en las figuras 1; 3; 4 y 5, utilizando la herramienta recta que pasa por dos puntos del Geogebra.

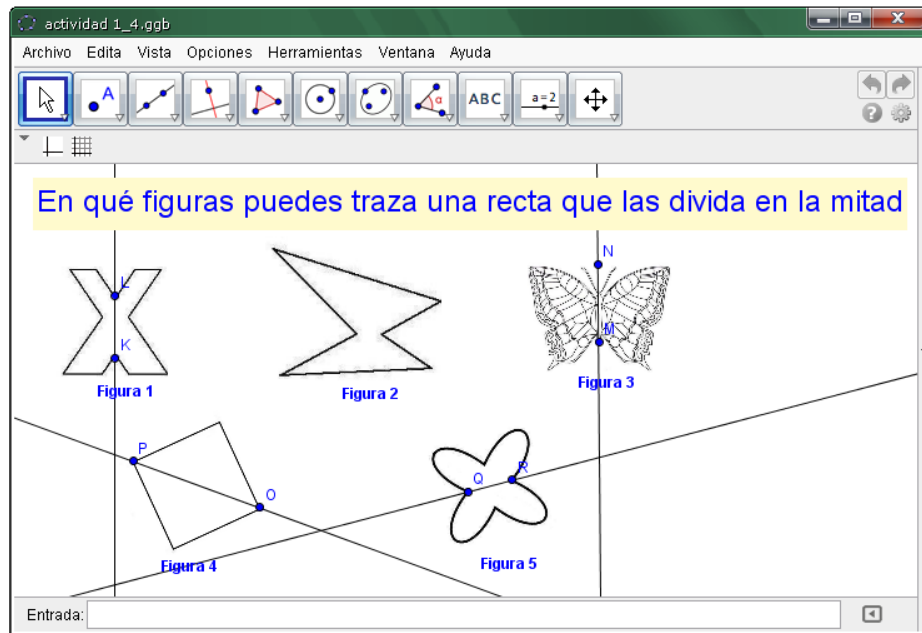


Figura 69. Trazo de rectas realizado por Mayra en la actividad 1D

Mayra reconoció los ejes de simetría de las figuras 1; 3; 4 y 5. También pudo darse cuenta que la figura 2 no tenía eje de simetría. Sin embargo, en las figuras 4 y 5, sólo pudo reconocer un solo eje de simetría.

La alumna justificó si pudo o no trazar una la recta en cada una de las figuras como se muestra en la figura 70.

ACTIVIDAD N° 1 D: Abre el archivo actividad1_4.ggb. ¿En qué figuras puedes trazar una recta que las divida en su mitad? ¿Por qué? Justifica.

- (1) Si, porque al partir a la mitad encajan por su tamaño y lados
- (2) No, porque la parte de arriba de la figura es más grande, y no encajaría
- (3) Si, porque la figura es igual en la derecha e izquierda.
- (4) Si, porque sus lados son exactos y al dividirlos serían partes iguales.
- (5) Si, porque sus ángulos y lados son iguales!

Figura 70. Respuestas de Mayra en la actividad 1D

Como se puede evidenciar, sus justificaciones están dando énfasis a lo visual pero algunos términos que utiliza nos dan indicios de posibles esquemas de utilización como igual medida, forma y tamaño, esto es cuando utiliza las palabras “partes iguales”, “encajan por su tamaño y lados”. Por ello podemos decir, que la Mayra está siendo instrumentada con la noción de simetría axial.

Con respecto a nuestro análisis a priori, ella logró trazar las rectas correctamente aunque no en el procedimiento que habíamos previsto.

MARCIA:

Las acciones de Marcía fueron que trazó rectas utilizando la herramienta recta que pasa por dos puntos en las figuras 1; 3; 4; 5 como se muestra en la figura 71.

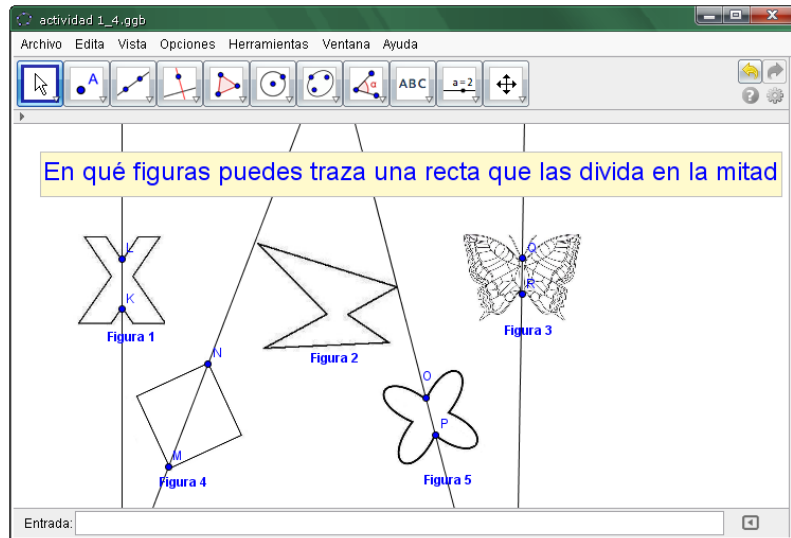


Figura 71. Trazo de rectas realizado por Marcia en la actividad 1D

Marcia logró reconocer que en la **Figura 2** no se puede trazar una recta que divida en su mitad a la figura. Sin embargo, trazo la recta pedida en las figuras 1; 3; 4 y 5.

Para justificar el por qué trazó la recta en las figuras mencionadas anteriormente, ella sostuvo lo siguiente (figura 72):

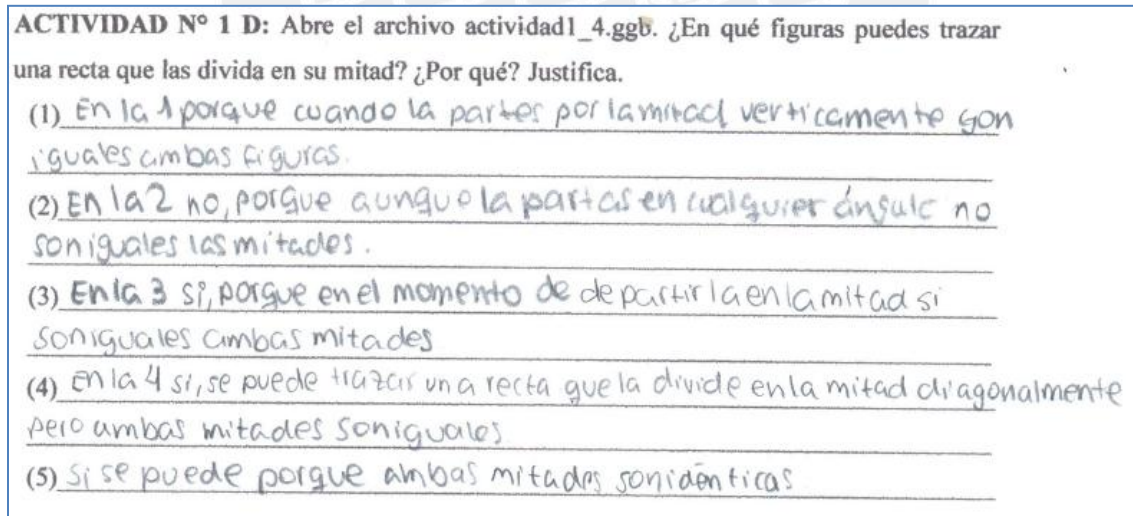


Figura 72. Respuestas de Marcia en la actividad 1D

De la figura anterior, se puede evidenciar que Marcía trazó la recta varias veces en la figura 2 sin lograr dividirla en su mitad. También creemos que la alumna ha desarrollado posibles esquemas de utilización como igualdad de tamaño, forma y medida, en especial cuando dice “ambas mitades son idénticas”.

Marcia logró con el objetivo previsto en nuestro análisis a priori para esta actividad, pero no con el procedimiento que habíamos planteado, sino más de exploración.

ALESSANDRA:

Alessandra trazó rectas en todas las figuras incluida la **Figura 2** que es una figura que no tiene simetría (figura 73)

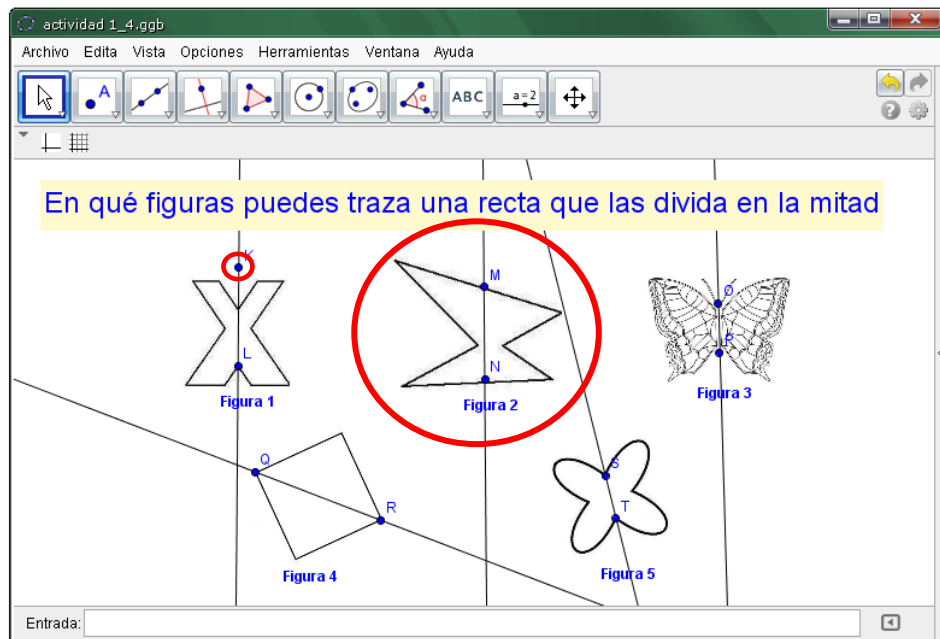


Figura 73. Trazo de rectas realizado por Alessandra en la actividad 1D

De la figura 73, se puede observar que Alessandra utilizó la herramienta “recta que pasa por dos puntos”. En la figura 1 de la actividad ella utiliza el punto L y K para trazar dicha recta; sin embargo, el punto K se encuentra fuera de la figura 1. Por lo cual, podríamos decir que, ella trazo las rectas por una simple inspección.

En la **Figura 2** no hay simetría pero Alessandra trazó una recta. Al justificar, ella menciona que dicha figura no se le puede trazar una recta que la divida en su mitad (Ver figura 74).

ACTIVIDAD N° 1 D: Abre el archivo actividad1_4.ggb. ¿En qué figuras puedes trazar una recta que las divida en su mitad? ¿Por qué? Justifica.

(1) En la figura 1 si se puede por que la X es del mismo grosor por los dos lados

(2) En la figura 2 no se puede por que la figura es muy desigual y no se podria partir a la mitad

(3) En la figura 3 si se podria por que la mariposa es igual por los 2 lados

(4) En la figura 4 si se puede por que es un cuadrado volteado y se puede partir a la mitad

(5) En la figura 5 si se puede por que esa forma es exactamente igual en sus cuatro lados.

Figura 74. Respuestas de Alessandra en la actividad 1D

Por sus acciones, ratificamos la idea de que Alessandra trazó rectas de manera intuitiva o exploratoria. Sin embargo, reconoció a cuales de las figuras sí se les puede trazar una recta que la divida en su mitad. Lo que nos da indicios que ha sido instrumentada con la noción de simetría axial.

En esta actividad las tres alumnas han coincidido que las figuras a las cuales se podían trazar una recta que las divida en su mitad son la 1; 3; 4 y 5. Con lo cual cumplen con el objetivo esperado para esta actividad.

Actividad N°1 E:

Análisis a priori:

La actividad tiene como objetivo reflexionar sobre lo aprendido, es decir, formalizar los elementos y las propiedades de la simetría axial.

Análisis a posteriori:

En esta actividad, se introduce los términos: eje de simetría a la recta L, simétrico a la figura simétrica. A su vez, esta actividad sirve para formalizar la noción de simetría axial a partir de las conclusiones de las alumnas.

Presentamos las conclusiones a las cuales llegaron Mayra, Marcia y Alessandra, después de realizar toda la actividad N° 1A, B, C y D.

Conclusiones de MAYRA:

Mayra llegó a las conclusiones:

- A pesar de que se muevan las figuras las medidas de las distancias de un punto de la figura y su simétrico con respecto al eje de simetría son iguales.
- La medida de los ángulos internos de la figura y su simétrico no varían.
- La forma y las medidas de la figura y su simétrico permanece.
- Los segmentos que unen los puntos de la figura con su respectivo simétrico siempre son perpendiculares al eje de simetría

Estas conclusiones las podemos observar en las respuestas que dio Mayra en su ficha de trabajo (figura 75).

¿Qué propiedades cumple la recta o eje de simetría?
 A pesar de que varía la distancia, las medidas siguen siendo iguales.

¿Los ángulos internos de la figuras varían al realizar su simétrico?
 No, ya que solo varía la distancia.

¿Cómo son las distancias de un punto de la figura hacia la recta y de la recta al simétrico del punto?
 Son iguales que la segunda es el reflejo de la primera figura

¿La forma de la figura y la medida de sus lados varían cuando se realiza su simétrico?
 No, es su reflejo y sirve como un espejo.

¿Qué medida tiene el ángulo que se forma en la intersección del segmento que une un punto de la figura con su simétrico con respecto a la recta o eje de simetría?
 90°, es decir es un ángulo recto que forma una recta perpendicular.

Figura 75. Conclusiones de Mayra en la actividad 1E

De la figura anterior, y las acciones de Mayra en las anteriores actividades podemos decir que la alumna presenta indicios de una Instrumentación de la noción de simetría axial, ya que reconoce sus propiedades.

Conclusiones de MARCIA:

Marcia llegó a las siguientes conclusiones:

- Las medidas de los ángulos internos no varían
- La distancia de un punto de la figura con su simétrico respecto al eje de simetría siempre es la misma.
- La forma y el tamaño de una figura no varía en su simétrico.
- Los segmentos que unen los puntos de la figura con sus simétricos siempre son perpendiculares al eje de simetría.

Estas conclusiones las podemos observar en la figura 76.

¿Qué propiedades cumple la recta o eje de simetría?	que se pueda realizar figuras idénticas igual a la primera y se pueda detectar medidas de las distancias
¿Los ángulos internos de la figuras varían al realizar su simétrico?	NO, porque solo cambia la posición de la recta.
¿Cómo son las distancias de un punto de la figura hacia la recta y de la recta al simétrico del punto?	son iguales según sea la distancia.
¿La forma de la figura y la medida de sus lados varían cuando se realiza su simétrico?	NO, porque solo se hace el simétrico
¿Qué medida tiene el ángulo que se forma en la intersección del segmento que une un punto de la figura con su simétrico con respecto a la recta o eje de simetría?	siempre se formará un ángulo de 90°

Figura 76. Conclusiones de Marcia en la actividad 1E

Por las conclusiones a las que llegó Marcia y las acciones realizadas en las demás actividades podemos decir que la alumna presenta indicios de una Instrumentación de la noción de simetría axial.

Conclusiones de ALESSANDRA:

Alessandra al finalizar la actividad N° 1, llega a las siguientes conclusiones:

- Las medidas de las distancias de un punto de la figura y su simétrico con respecto al eje de simetría son iguales.

- La medida de los ángulos internos de la figura y su simétrico no varían.
- La forma y las medidas de la figura permanecen en su simétrico.
- Los segmentos que unen los puntos de la figura con su respectivo simétrico siempre son perpendiculares al eje de simetría

Lo anterior se puede observar en la figura 77.

¿Qué propiedades cumple la recta o eje de simetría?
 el eje de simetría hace variar las medidas hasta quedar las 2 con las medidas iguales

¿Los ángulos internos de la figuras varían al realizar su simétrico?
 no por que lo que se mueve es la figura mas no los angulos internos.

¿Cómo son las distancias de un punto de la figura hacia la recta y de la recta al simétrico del punto?
 son iguales por que al ser el reflejo de la otra figura, tiene que estar exactamente ubicado en el mismo lugar

¿La forma de la figura y la medida de sus lados varían cuando se realiza su simétrico?
 no, todo sigue igual las medidas y su simétrico

¿Qué medida tiene el ángulo que se forma en la intersección del segmento que une un punto de la figura con su simétrico con respecto a la recta o eje de simetría?
 siempre va ser un ángulo de 90 grados, por lo tanto siempre va ser perpendicular.

Figura 77. Conclusiones de Alessandra en la actividad 1E

Como podemos apreciar, la alumna logra a reconocer las propiedades del eje de simetría como la equidistancia, la perpendicularidad y que los ángulos son invariantes.

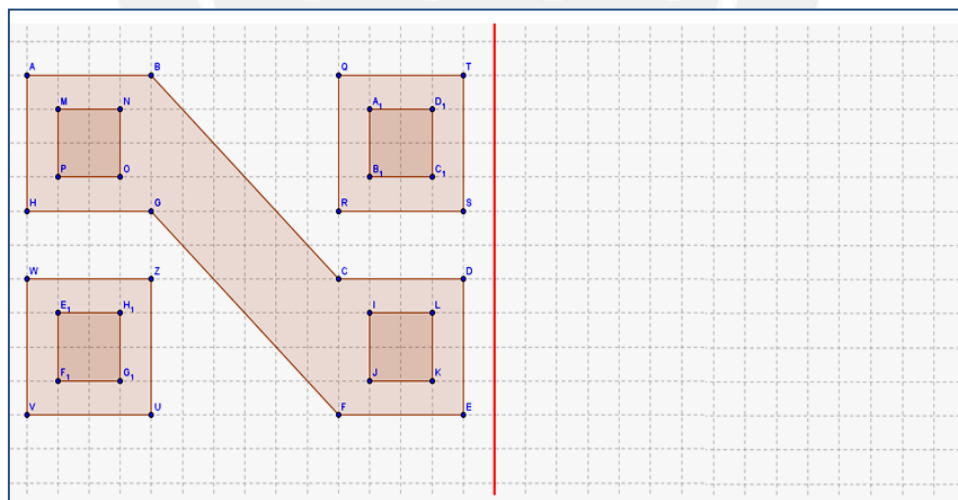
A continuaciones presentamos el análisis de la actividad N°2 de esta parte experimental.

Actividad N°2:

Para el análisis de esta sección que consta de las actividades 2A, 2B y 2C. Se realizará un análisis mixto, es decir, en un primer momento se hará un análisis colectivo, con las acciones de las 36 alumnas y así determinar si surge la orquestación instrumental y luego, uno individual de las acciones de Mayra, Marcia y Alessandra para analizar sus posibles esquemas de utilización.

Actividad N°2 A:

Realiza el simétrico del diseño incaico:



Análisis a priori:

La actividad tiene como objetivo realizar el simétrico de un diseño y verificar que la figura y su simétrico son equidistantes al eje de simetría. Las variables didácticas en esta actividad son: Eje de simetría vertical, figura horizontal y con cuadrícula.

Esta actividad está propuesta para realizarse con lápiz y papel, y contiene cuadrículas para que las alumnas puedan mantener la equidistancia de cada uno de los puntos del diseño y su simétrico con respecto al eje de simetría.

Concepto en acto: Las alumnas pueden movilizar la noción de Simetría axial, eje de simetría, medida de segmentos, equidistancia.

Reglas de acción: Pensamos que las alumnas pueden realizar el simétrico de cada punto de la figura manteniendo la equidistancia al eje de simetría. Luego trazar el simétrico del diseño con el uso de una regla.

La siguiente figura muestra como las alumnas deberían trazar el simétrico del diseño incaico.

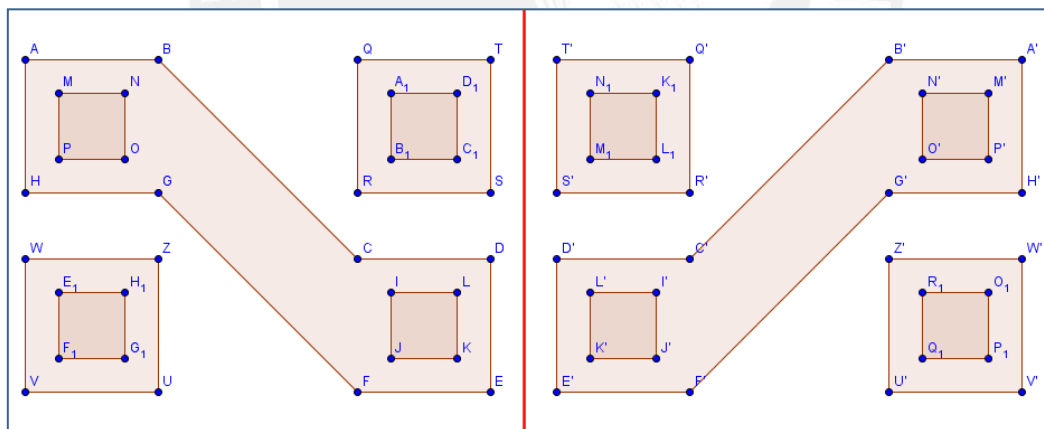


Figura 78. Trazo del simétrico de la figura

Análisis a posteriori:

ANÁLISIS COLECTIVO DE LA ACTIVIDAD N° 2A

Para este análisis hemos utilizado las variables estadísticas cualitativas que se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 9. Variables cualitativas

Variables
Traza el simétrico correctamente
Traza el simétrico pero con errores al colocar los puntos
Traza el simétrico sin ubicar sus puntos
Realiza una traslación

Los resultados que se obtuvieron de las respuestas en esta actividad se muestran en el siguiente gráfico de barras para variables cualitativas.

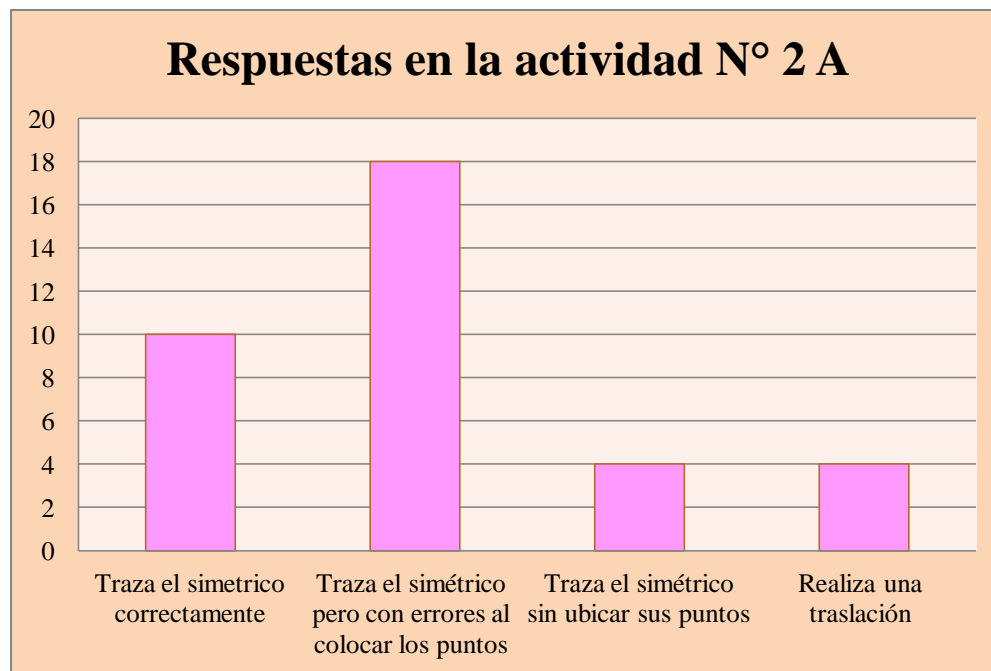


Figura 79. Cuadro estadístico de las respuestas en la actividad 2A
Fuente: Fichas de trabajo

De la figura 79, se puede deducir que 10 alumnas lograron trazar correctamente el simétrico del diseño, que 18 de ellas respetan la orientación del simétrico pero se equivocan al ubicar los puntos simétricos, 4 alumnas trazan la figura simétrica pero no ubican ningún punto y que 4 no utilizan una simetría sino una traslación del diseño.

Por lo anterior, podemos inferir que sólo diez de las alumnas posiblemente lograron instrumentarse en la noción de simetría axial pudiendo aplicarla en una situación. Por otro lado, dieciocho lograron trazar el simétrico pero con errores al colocar sus puntos,

esto nos da indicios que dichas alumnas todavía no se encuentran instrumentadas con la noción de simetría axial y sus propiedades, al igual que las cuatro alumnas que realizaron una traslación.

A continuación presentamos las acciones de cada alumna y sus análisis respectivos.

MAYRA:

Las acciones de Mayra fueron que realizó el simétrico del diseño dado, respetó la orientación de la figura simétrica pero al momento de ubicar cada uno de los puntos del simétrico cometió algunos errores al ubicar los puntos simétricos como Q', T', R', S', entre otros. Esto se observa en la figura 80 que se muestra a continuación.

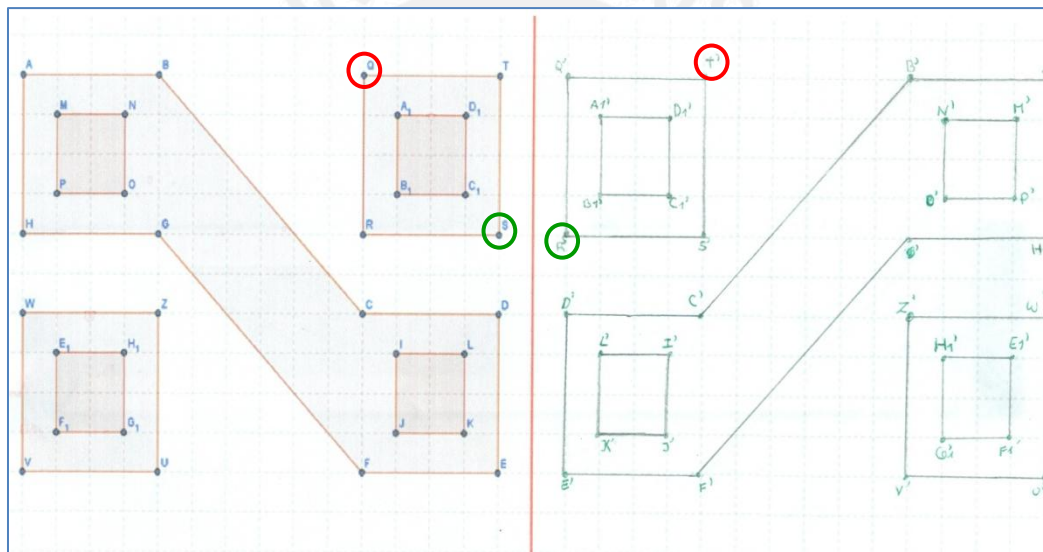


Figura 80. Grafico realizado por Mayra en la actividad 2A

Mayra sólo logró realizar la figura simétrica mas no pudo ubicar todos los puntos correctamente, podría ser porque no utilizó la noción de equidistancia de los puntos hacia el eje de simetría. Por ello no logró con lo esperado para esta actividad en nuestro análisis *a priori*, por ello no podemos decir que Mayra ha instrumentado las propiedades de la simetría axial como la equidistancia entre los punto respecto a la recta.

MARCIA:

Marcía logró realizar el simétrico del diseño dado como muestra la figura 81

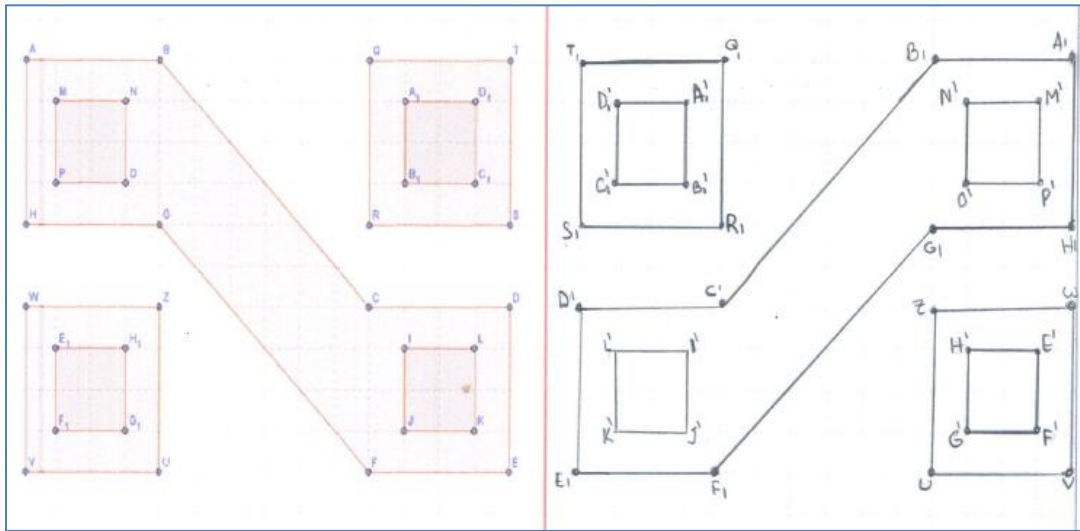


Figura 81. Grafico realizado por Marcia en la actividad 2A

Marcia, sí cumplió con lo esperado para esta actividad en nuestro análisis *a priori*. Puesto que en sus acciones, realizó el simétrico del diseño dado, respetó la orientación del simétrico y ubicó correctamente cada uno sus puntos simétricos manteniendo la equidistancia respecto al eje de simetría. Esto nos da indicios que Marcia esta instrumentada con la noción de simetría ya que ha formado esquemas de utilización de este objeto matemático y lo puede aplicar en situaciones dadas.

ALESSANDRA:

Alessandra, no logró realizar el simétrico del diseño dado. Esto se evidencia en la figura 82.

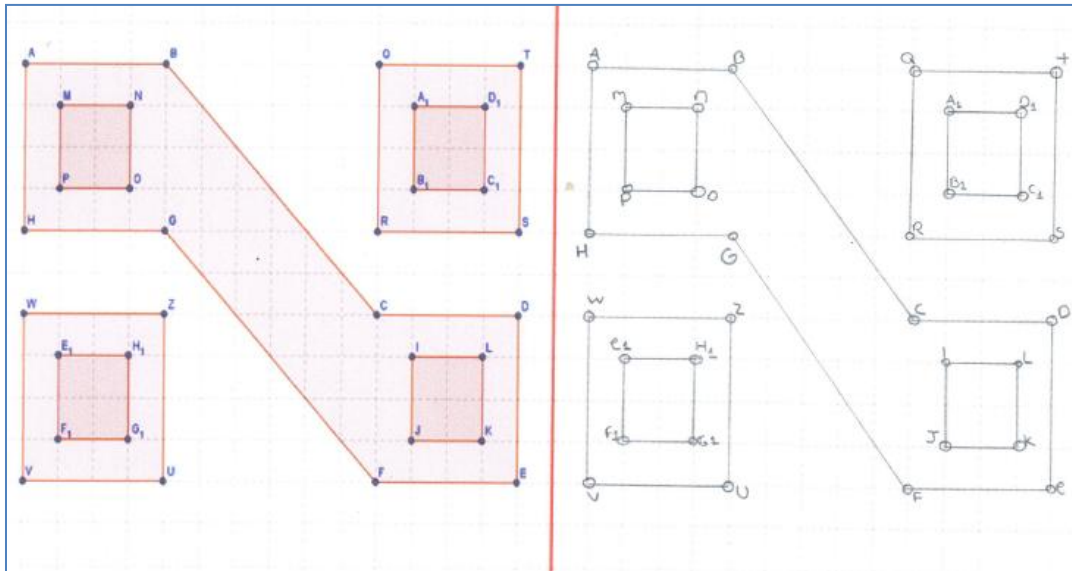


Figura 82. Grafico realizado por Alessandra en la actividad 2A

Alessandra no logró los objetivos trazados *a priori* para esta actividad, ya que no logró realizar el simétrico respetando la orientación de éste, creemos que fue porque dentro de sus reglas de acción no trazó el simétrico de cada uno de los puntos de la figura. Lo que ella realizó es una traslación del diseño y esto se evidencia en como ella ubica los puntos del diseño. Esas acciones nos muestran que Alessandra no se encuentra instrumentalizada con la noción de simetría axial, ya que no la puede aplicar en algunas situaciones.

Actividad N°2 B:

Observa detenidamente cada una de las figuras y luego llena los casilleros de abajo:



Figura: Lanzón monolítico

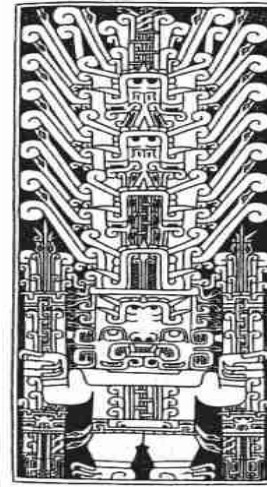


Figura: Estela de Raimondi

Fuente: Sociomundo civilización, p. 187.

¿Existe simetría en el lanzón monolítico?

- En caso sea *afirmativo*, traza su eje de simetría utilizando una regla.
- En caso sea *negativo*, justifica tu respuesta. _____

¿Existe simetría en la estela de Raimondi?

- En caso sea *afirmativo*, traza su eje de simetría utilizando una regla.
- En caso sea *negativo*, justifica tu respuesta. _____

Análisis a priori:

La actividad tiene como objetivo reconocer y trazar el eje de simetría de una figura. Las variables didácticas en esta actividad son: Eje de simetría vertical, figura horizontal y sin cuadrícula.

Conceptos en acto: Las alumnas pueden movilizar la noción de mitad y equidistancia.

Reglas de acción: Pensamos que las alumnas pueden elegir dos pares de puntos de una de las figuras de tal manera que sean opuestos y trazar su punto medio, ya obtenidos dos puntos medios trazar la recta que pasa por ellos.

La manera que esperamos que las alumnas contesten en esta actividad es que en la imagen del lanzón monolítico no se puede trazar un eje de simetría debido a que no

existe simetría, ya que por ejemplo no existe puntos simétricos de los puntos de la mano izquierda respecto a un eje vertical y en la imagen de la Estela de Raimondi sí se debe trazar el eje de simetría vertical puesto que cada punto del lado izquierdo tendría su simétrico respecto a este eje.

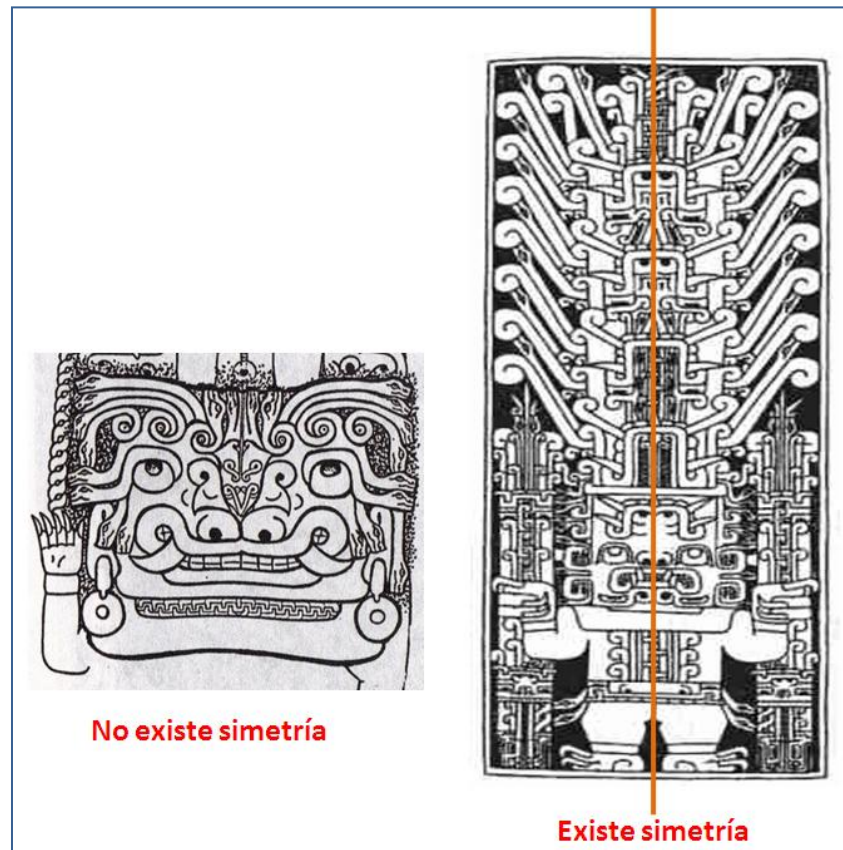


Figura 83. Solución de la actividad N° 2B

Análisis a posteriori:

ANÁLISIS COLECTIVO DE LA ACTIVIDAD N° 2B

Esta actividad, en la que participan 36 alumnas, la hemos dividido el análisis en dos partes. La primera relacionada al Lanzón Monolítico y la segunda, a la Estela de Raimondi.

Análisis del Lanzón Monolítico

Para esta actividad hemos considerado las siguientes variables estadísticas cualitativas:

Tabla 10. Variables cualitativas

Variables
Sí hay simetría
No hay simetría

A la pregunta si el lanzón tiene simetría, las respuestas del colectivo fueron las siguientes (Figura 84):

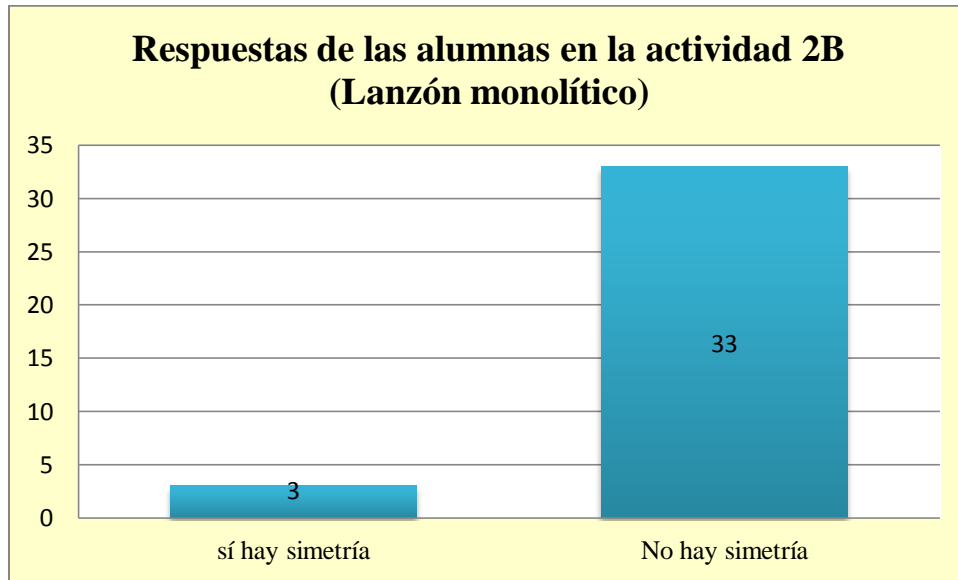


Figura 84. Cuadro estadístico de las respuestas en la actividad 2B (Lanzón Monolítico)
Fuente: Fichas de trabajo

Como se puede observar 33 alumnas contestaron que en la figura no hay simetría y 3 contestaron que sí tenía simetría, la cual era una respuesta errada. Por lo anterior, podemos decir que la mayoría, es decir 33 de 36 alumnas lograron cubrir uno de los objetivos *a priori*, que era reconocer la no existencia de simetría en el Lanzón Monolítico.

Para el análisis de la justificación de la actividad hemos utilizado las siguientes variables estadísticas cualitativas:

Tabla 11. Variables cualitativas

Variables
Justifica con propiedades
No justifica con propiedades

A priori, queríamos que las alumnas utilicen las propiedades de la simetría axial para justificar la existencia o no en el lanzón monolítico. Los resultados nos muestran que todas las alumnas responden priorizando lo visual, es decir, por alguna característica de los objetos, más no con el uso de propiedades. (Figura 85)

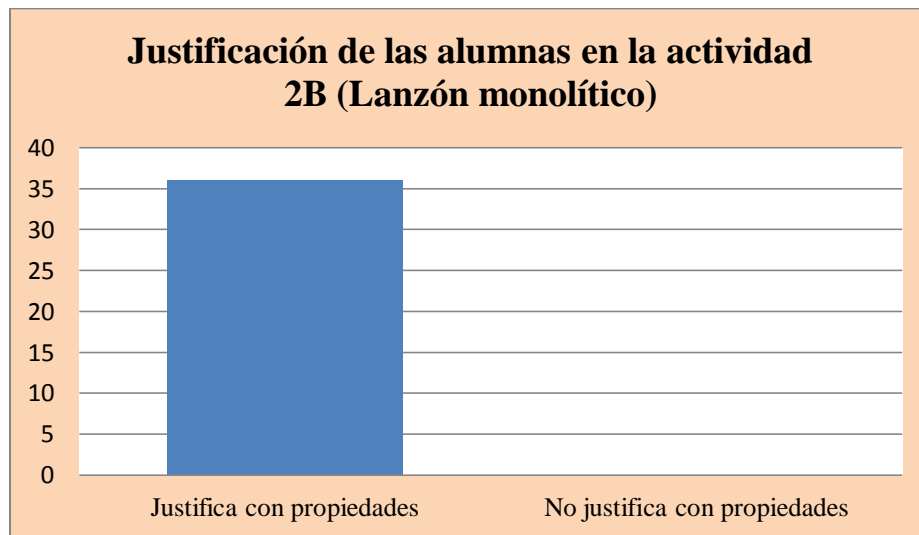


Figura 85. Cuadro estadístico de las respuestas en la actividad 2B (Lanzón Monolítico)
Fuente: Fichas de trabajo

Creemos que el motivo es porque como la pregunta era abierta, era posible que las alumnas enfocaran su atención en lo visual.

Análisis de la Estela de Raimondi

Para el análisis de esta parte de la actividad hemos seleccionado las siguientes variables estadísticas:

Tabla 12. Variables cualitativas

Variables
Sí hay simetría
No hay simetría

Con respecto a la existencia de simetría en la estela de Raimondi, las respuestas fueron las siguientes (figura 86):

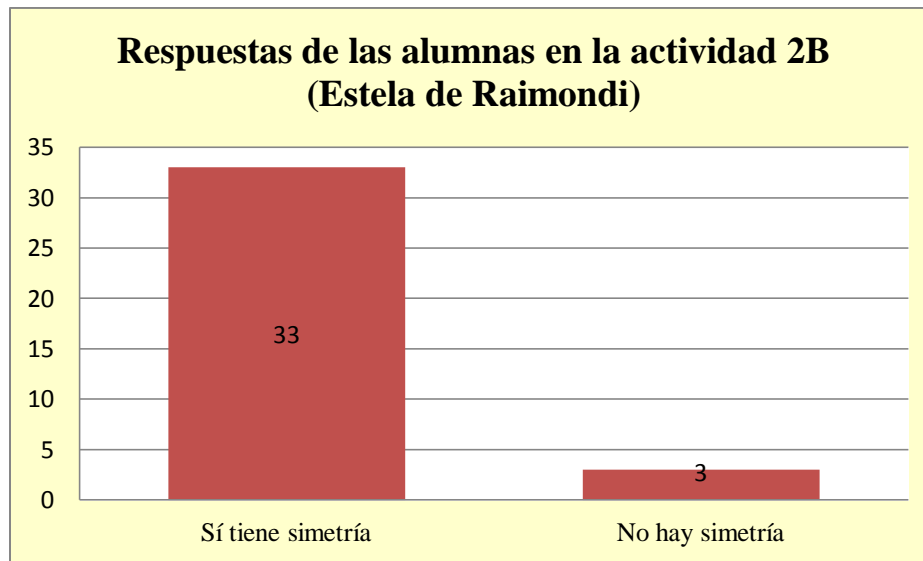


Figura 86. Cuadro estadístico de las respuestas en la actividad 2B (Estela de Raimondi)

Fuente: Fichas de trabajo

Como se puede observar 33 alumnas contestaron que en la Estela de Raimondi sí hay simetría y sólo 3 de ellas manifestaron que no tenía simetría. Comparando con nuestro análisis a priori, 33 alumnas de un total de 36 cumplieron el objetivo de reconocer que es una figura simétrica.

Para el análisis del trazo del eje de simetría, hemos considerado las siguientes variables estadísticas:

Tabla 13. Variables cualitativas

Variables
Traza el eje de simetría correctamente
Traza el eje de simetría incorrectamente
No traza el eje de simetría

Como la indicación era trazar el eje de simetría en caso la figura tuviera simetría podemos encontrar los siguientes resultados de los trazos (Figura 87):

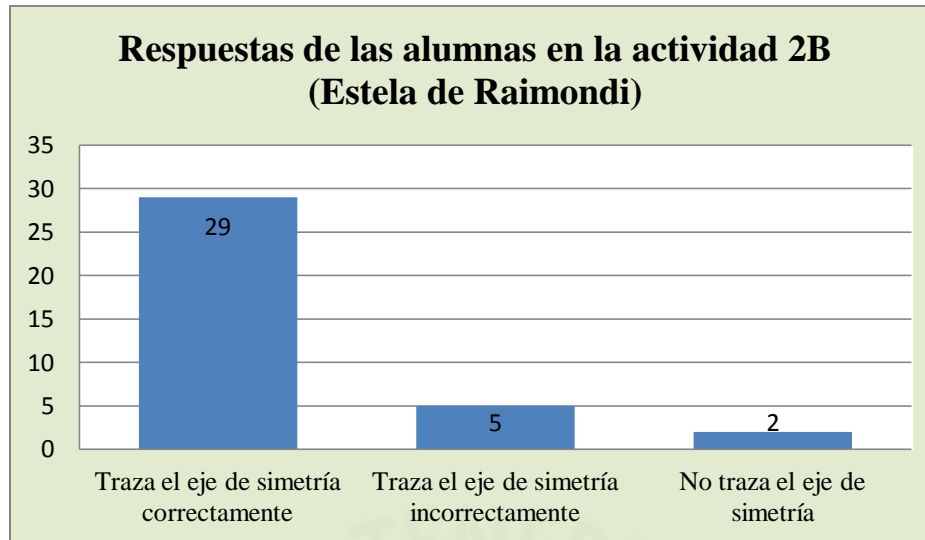


Figura 87. Cuadro estadístico de las respuestas en la actividad 2B (Estela de Raimondi)
 Fuente: Fichas de trabajo

Como se puede ver en la figura anterior 29 alumnas trazaron el eje de simetría correctamente en la Estela de Raimondi. Hubo 5 alumnas que en algunos casos a pesar de reconocer la existencia de la simetría, no trazaron correctamente el eje de simetría de la figura y solo 2 alumnas no trazaron el eje de simetría. Por ello, podemos decir que sólo veintinueve alumnas lograron con el objetivo a priori previsto para esta actividad y que se encuentran instrumentadas con la noción de simetría.

En términos de Trouche (2003), no podemos tener indicios que en esta actividad se generó una orquestación instrumental, dado que en el desarrollo las alumnas no tuvieron interacción entre ellas y además porque esta actividad no estuvo mediada por el Geogebra.

ANÁLISIS INDIVIDUAL DE LA ACTIVIDAD N° 2B

A continuación presentamos lo realizado por Mayra, Marcía y Alessandra:

MAYRA:

La alumna realizó las siguientes reglas de acción:

Mayra no trazó un eje de simetría en el Lanzón Monolítico y lo justificó guiándose de lo visual, ya que sustenta que si la figura fuera simétrica y trazara un eje, ambos lados en que queda dividida la figura deberían ser idénticas. Sin embargo, ella se percató que en el lado

izquierdo de la figura hay una mano y adornos que no se encuentran en el lado derecho por ello no hay simetría. Esto se muestra en la figura 88.

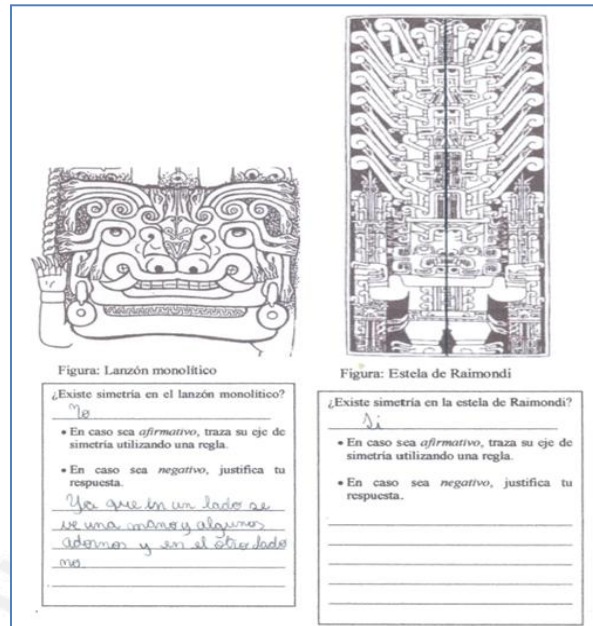


Figura 88. Solución de Mayra en la actividad N° 2B

En la estela de Raimondi, Mayra trazó una recta que vendría a hacer el eje de simetría, como la indicación era que si no existía simetría justifique por qué y su respuesta fue afirmativa, ella ya no justificó.

Con respecto a nuestro análisis *a priori*, Mayra logró identificar que la primera figura no tenía simetría y que la segunda sí, mas no justificó haciendo uso de propiedades que era lo que se esperaba dentro de las reglas de acción previstas. Por ello, podríamos decir que Mayra tiene nociones de simetría axial pero aún no está instrumentada con sus propiedades.

MARCIA:

Las acciones seguidas por Marcía fueron el no traza el eje de simetría en el Lanzón Monolítico, pero sí en la Estela de Raimondi.

Marcia reconoció que el Lanzón Monolítico es una figura que no tiene simetría pero en su justificación dio énfasis a lo visual, ya que ella menciona que si se trazará una recta ambas partes en que queda dividida la figura deberán ser iguales, la alumna observa que eso no ocurre (Figura 89).

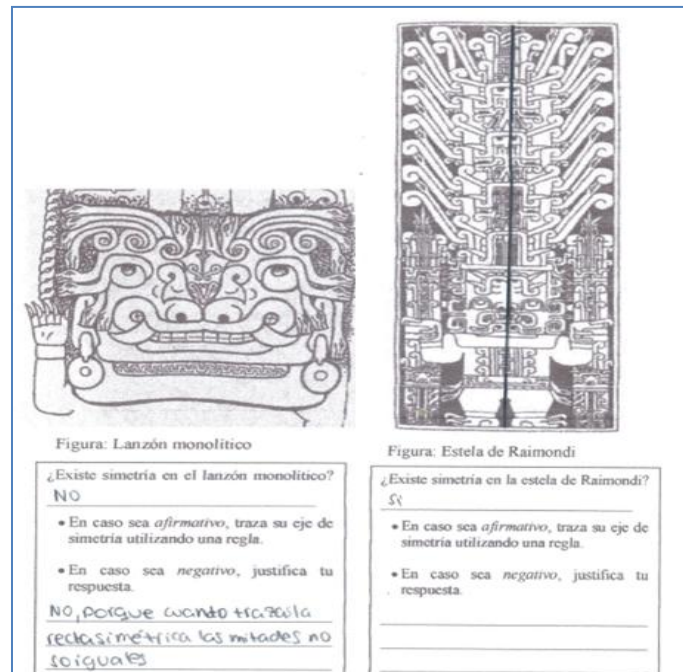


Figura 89. Solución de Marcia en la actividad N° 2B

En la Estela de Raimondi, mencionó que sí existe simetría y es por ello que trazó su eje de simetría.

Con respecto a lo esperado en nuestro análisis a priori Marcia logró identificar la figura que tenía simetría y la que no tenía simetría; sin embargo, no pudo justificar con el uso de propiedades. Por ello podríamos decir que la alumna tiene nociones sobre la simetría axial mas no se encuentra instrumentada con sus propiedades ya que no las utilizó para justificar su proceso.

ALESSANDRA:

La alumna, al igual que sus compañeras, trazó una recta en la Estela de Raimondi pero que no era el eje de simetría de la figura que no se esperaba dentro de las reglas de acción previstas para esta actividad. En el Lanzón Monolítico, no puedo justificar que dicha figura no tenía simetría con el uso de propiedades de la simetría axial, tal como se muestra en la figura 90.

<p>Figura: Lanzón monolítico</p> <p>¿Existe simetría en el lanzón monolítico?</p> <p><u>no</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • En caso sea <i>afirmativo</i>, traza su eje de simetría utilizando una regla. • En caso sea <i>negativo</i>, justifica tu respuesta. <p><u>no por que aun lado tiene una mano y al otro no, aun lado tiene como una liana y al otro lado no.</u></p>	<p>Figura: Estela de Raimondi</p> <p>¿Existe simetría en la estela de Raimondi?</p> <p><u>si</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • En caso sea <i>afirmativo</i>, traza su eje de simetría utilizando una regla. • En caso sea <i>negativo</i>, justifica tu respuesta.

Figura 90. Solución de Alessandra en la actividad N° 2B

Por las acciones de Alessandra, podemos deducir que todavía no tiene claras las propiedades de la simetría axial, por lo cual podemos decir que no se encuentra instrumentada con las propiedades; sin embargo reconoce si una figura tiene o no simetría axial, ello nos muestra que la alumna tiene algunas nociones de simetría, esto debe de ocurrir porque la alumna posiblemente se encuentre en la etapa de asimilación de este nuevo concepto.

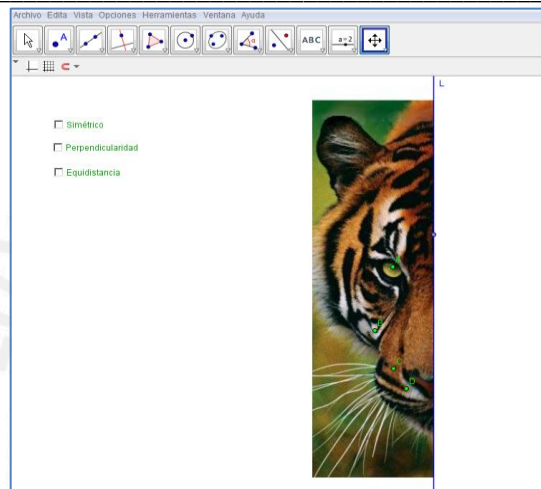
Actividad N°2 C:

Abre el archivo actividad2_C.ggb y haciendo clic en cada una de las casillas de control verificaras que el tigre es simétrico.

Luego **elige uno** de los siguientes archivos: actividad2_C1.ggb, actividad2_C2.ggb o actividad2_C3.ggb. Responde: ¿El felino que se encuentra en el archivo que elegiste cumple con la simetría? _____ . Da dos justificaciones que reafirmen tu respuesta.

Primera justificación: _____

Segunda justificación: _____



Análisis a priori:

La actividad tiene como objetivo reconocer las propiedades de la simetría axial. Las variables didácticas en esta actividad son: Eje de simetría vertical, figura horizontal y con medidas ya establecidas.

Conceptos en acto: Las alumnas pueden movilizar la noción de eje de simetría, equidistancia, perpendicularidad.

Reglas de acción: Pensamos que las alumnas pueden hacer clic en cada una de las casillas de control, para verificar las propiedades de la simetría y determinar si el tigre es simétrico. Luego elegir un archivo de los siguientes actividad2_C1.ggb, actividad2_C2.ggb o actividad2_C3.ggb. Determinar si el felino es simétrico o no y haciendo uso de las propiedades justificar el porqué es o no simétrico.

En la figura 91 podemos observar que los dos felinos que se encuentran en los archivos actividad2_C1.ggb y actividad2_C2.ggb, no son simétricos porque no cumple con la propiedad de la equidistancia, la perpendicularidad del eje de simetría con el segmento que une un punto de la figura inicial con su simétrico. Por el contrario el felino que se encuentra en el archivo actividad2_C3.ggb, si cumple con las propiedades y por ende es simétrico.

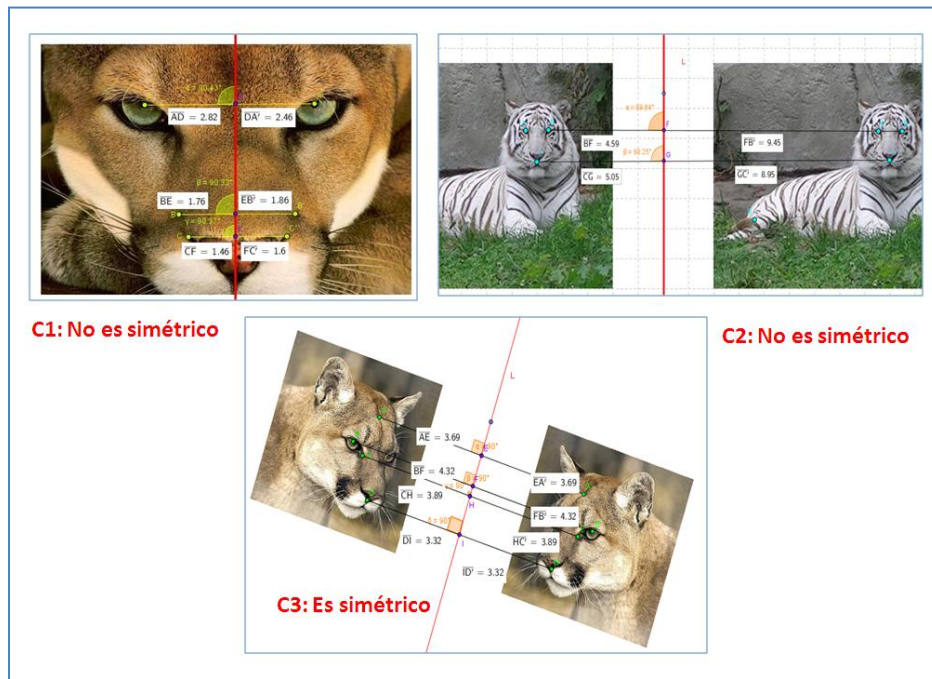


Figura 91. Solución de la actividad N° 2C

En el archivo actividad2_C1.ggb, la imagen del felino no muestra simetría porque no cumple la perpendicularidad entre el que podría ser el eje de simetría y el segmento que se forma entre uno de los puntos del lado izquierdo con quien vendría a ser su simétrico en el lado derecho. Tampoco cumple la equidistancia y además, en el lado izquierdo el felino presenta una pata que no se encuentra en lado derecho.

En el archivo actividad2_C2.ggb, la imagen del felino no muestra simetría porque no cumple la perpendicularidad entre el que podría ser el eje de simetría y el segmento que se forma entre uno de los puntos del lado izquierdo con quien vendría a ser su simétrico en el lado derecho. Además no cumple la equidistancia de los puntos con respecto a la recta y la orientación con respecto al eje no varía.

En el archivo actividad2_C3.ggb, la imagen del felino sí cumple con la perpendicularidad, la equidistancia respecto al eje de simetría y el cambio de orientación respecto al eje, por tanto sí presenta simetría.

Análisis a posteriori:

Presentamos el análisis colectivo e individual de esta actividad.

ANÁLISIS COLECTIVO DE LA ACTIVIDAD N° 2C

En esta actividad las alumnas tuvieron que elegir entre tres archivos para poder realizar su procedimiento, siendo el archivo C1 el de mayor frecuencia (Figura 92).

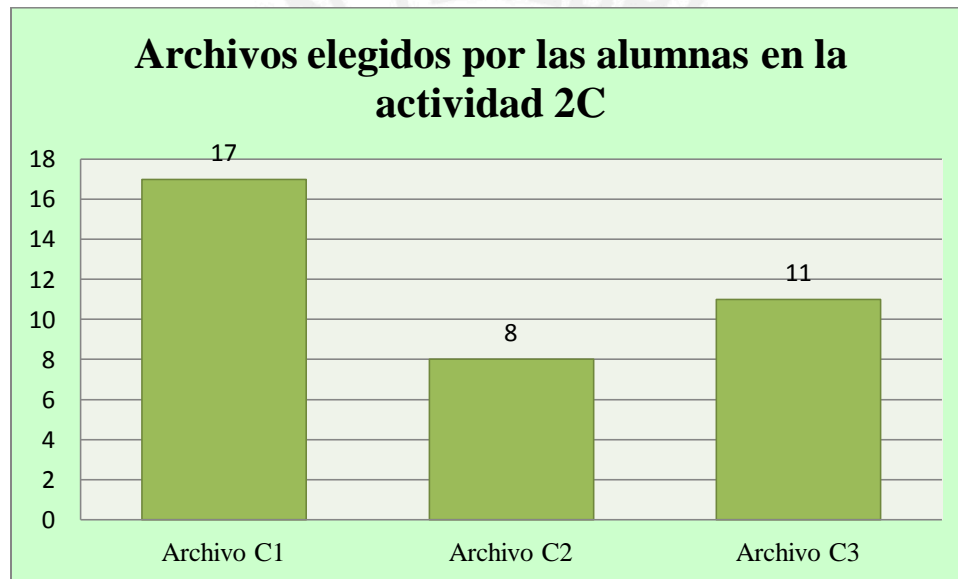


Figura 92. Cuadro estadístico de la elección de los archivos elegidos en la actividad 2C
Fuente: Fichas de trabajo

Las variables estadísticas que utilizamos para el análisis de esta actividad son los siguientes:

Tabla 14. Variables cualitativas

Variables
Justifica con propiedades
No justifica con propiedades

Al margen del archivo elegido, lo que queríamos con esta actividad es que las alumnas justificaran utilizando las propiedades de la simetría axial y determinen si la figura del felino elegido es simétrica o no.

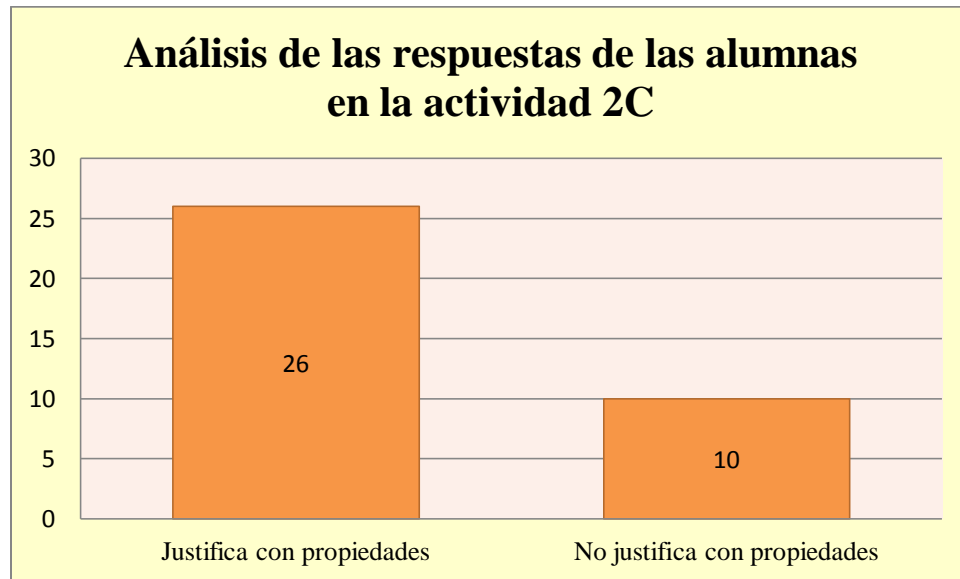


Figura 93. Cuadro estadístico de las respuestas de las alumnas en la actividad 2C
Fuente: Fichas de trabajo

Como se puede observar en la figura 93, 26 alumnas utilizaron propiedades para justificar que el felino de su archivo elegido era simétrico o no y 10 alumnas todavía utilizaron una justificación que daba énfasis a lo visual.

Por lo anterior, consideramos que veintiséis alumnas cumplieron con lo esperado *a priori* para esta actividad. El hecho que las alumnas utilizaran correctamente las propiedades de la simetría axial en esta actividad y no en la actividad N° 2B, nos muestra que cuando las alumnas tienen un modelo y a su vez la actividad se basa en este, las alumnas logran aplicar las propiedades.

En términos de Trouche (2003), podemos tener indicios que en esta actividad se generó una orquestación instrumental, dado que la actividad tenía archivos para elegir y eso incentivó a que las alumnas pudieran compartir sus reflexiones. También porque hubo un archivo modelo que se expuso a las alumnas que Trouche lo denomina sherpa-alumno y esto ayudó a que se cumpliera con el objetivo previsto.

ANÁLISIS INDIVIDUAL DE LA ACTIVIDAD N° 2C

A continuación presentamos lo realizado por Mayra, Marcía y Alessandra:

MAYRA:

Mayra realizó las siguientes acciones:

Escogió el archivo C1, midió ángulos, trazó segmentos, midió segmentos y trazó puntos de intersección entre los segmentos y la recta. Como se puede observar en la figura 94.

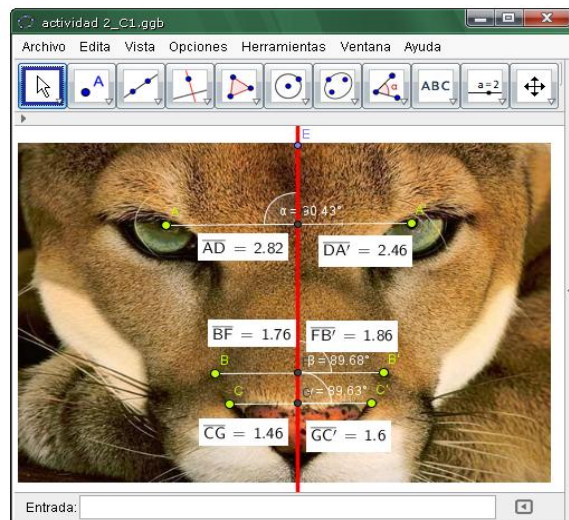


Figura 94. Procedimiento de Mayra en la actividad 2C

Mayra logró reconocer que el Felino que se encuentra en el archivo C1 no cumplía con la simetría. Para determinarlo ella hizo medida de ángulos, segmentos, trazó puntos de intersección lo cual nos da indicios que se instrumentalizó localmente con algunas herramientas del Geogebra que le permitieron realizar estos procedimientos.

La alumna manifestó que no se cumplía que los ángulos formados entre la intersección de los segmentos que trazó y el supuesto eje de simetría midieran 90° . También que la medida de los puntos de la figura no eran equidistantes con el eje de simetría (figura 95).

ACTIVIDAD N° 2C: ¿Felinos simétricos?

Abre el archivo actividad2_C.ggb y haciendo clic en cada una de las casillas de control verifícaras que el tigre es simétrico.

Luego elige uno de los siguientes archivos: actividad2_C1.ggb, actividad2_C2.ggb o actividad2_C3.ggb. Responde: ¿El felino que se encuentra en el archivo que elegiste cumple con la simetría? No. Da dos justificaciones que reafirmen tu respuesta.

Primera justificación: No se cumple el criterio de perpendicularidad ya que sus ángulos miden: $90.43^\circ - 89.68^\circ$ y 89.63° . Tendrían que medir 90° .

Segunda justificación: La distancia de cada lado con el eje es diferente: ($\overline{AD} = 2.82 - \overline{DA'} = 2.46$), ($\overline{BE} = 1.76 - \overline{EB'} = 1.86$) y ($\overline{CF} = 1.46 - \overline{CF'} = 1.6$).

Figura 95. Respuestas de Mayra en la actividad 2C

Por sus acciones, antes mencionadas, y por la movilización de conceptos como eje de simetría, equidistancia y perpendicularidad, usadas para el desarrollo de esta actividad, podemos darnos cuenta que Mayra ha logrado ser instrumentada con la noción de simetría axial y que puede aplicar sus propiedades.

MARCIA:

Las acciones de Marcia fueron:

Elegió el archivo C1, trazó segmentos, puntos de intersección, midió segmentos y ángulos (Figura 96).

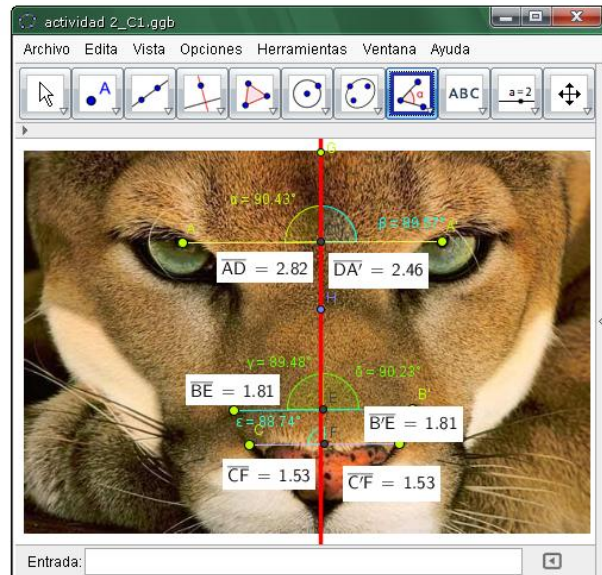


Figura 96. Procedimiento de Marcia en la actividad 2C

Marcía ha logrado identificar que el felino que se encuentra en el archivo C1 no cumple con la simetría; Sin embargo, no logró justificar utilizando las propiedades de la simetría axial y se basó en lo observado en el imagen. Esto se puede evidenciar en la figura 97.

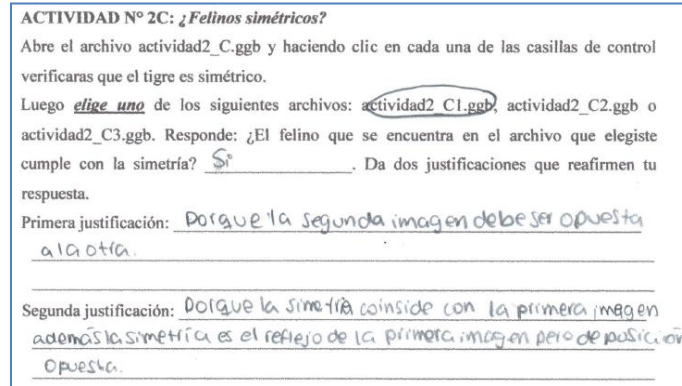


Figura 97. Respuestas de Marcía en la actividad 2C

Por las reglas de acción de Marcía podemos deducir que ella se encuentra instrumentalizada localmente con algunas herramientas del Geogebra como segmento entre dos puntos, ángulo, distancia o longitud; pero todavía no logra instrumentar la noción de simetría axial ya que no puede justificar su conclusión con el uso de las propiedades.

ALESSANDRA:

Las reglas de acción usadas por Alessandra fueron:

Elegió el archivo C1. Trazó segmentos, puntos de intersección y midió la longitud de los segmentos (Figura 98).

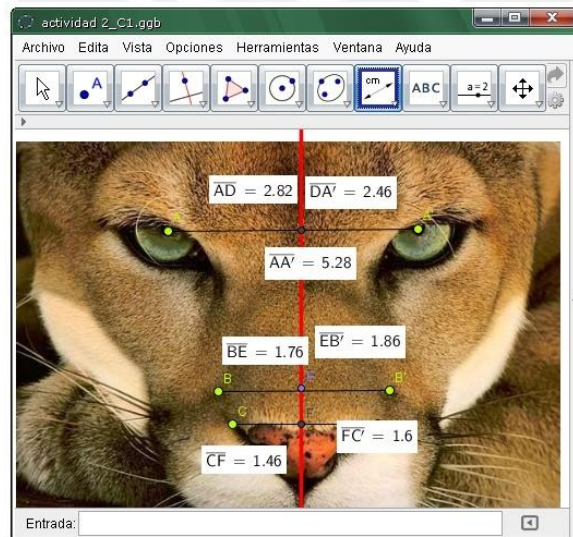


Figura 98. Procedimiento de Alessandra en la actividad 2C

La alumna reconoció que el felino del archivo C1 no tiene simetría, que era uno de nuestros objetivos a priori; Sin embargo, sólo utilizó la propiedad de equidistancia de los puntos al eje de simetría. Por ello no podemos decir con certeza que Alessandra se encuentra instrumentada con la noción de simetría porque sólo utiliza una propiedad de la simetría como se muestra en la figura 99.

ACTIVIDAD N° 2C: ¿Felinos simétricos?

Abre el archivo actividad2_C.ggb y haciendo clic en cada una de las casillas de control verificaras que el tigre es simétrico.

Luego elige uno de los siguientes archivos: actividad2_C1.ggb, actividad2_C2.ggb o actividad2_C3.ggb. Responde: ¿El felino que se encuentra en el archivo que elegiste cumple con la simetría? NO. Da dos justificaciones que reafirmen tu respuesta.

Primera justificación: tambien en la parte de los ojos una mide 2.82 y otro 2.46 son muy diferentes

Segunda justificación: en la parte de la nariz una parte es más larga que la otra por que uno es 1.76 y la otra 1.86 son diferentes

Figura 99. Respuestas de Alessandra en la actividad 2C

Podemos inferir que Alessandra ha logrado una instrumentalización local algunas herramientas del Geogebra como ángulo, segmentos entre dos puntos, distancia o longitud e intersección de dos objetos.

PRINCIPALES RESULTADOS DEL EXPERIMENTO

En el primer encuentro, cuando se llevó a cabo la actividad N°0, el Geogebra era un artefacto para las alumnas que por primera trabajaban bajo un ambiente de Geometría Dinámica. Sin embargo, su fácil manipulación permitió que las alumnas se familiaricen con algunas herramientas como ángulo, recta que pasa por dos puntos y punto medio, llegando a una instrumentalización local en términos de Rabardel (1995).

En la actividad 1A, pudimos darnos cuenta, por medio de las acciones de las alumnas, tenían esquemas preexistentes de la noción de simetría como lo mostrado por Marcia que para completar la figura, ella primero trazó el eje de simetría y luego rectas perpendiculares a éste.

En la actividad 1C, Mayra, Marcia y Alessandra cumplieron con los objetivos trazados a priori sin ningún problema. Creemos que es porque las indicaciones del trabajo eran específicas y las alumnas pudieron concentrarse en el cumplimiento del objetivo esperado. Por el contrario, en la actividad 1D, donde pedíamos justificar si es que se podía trazar una recta que divida a cada una de las figuras en su mitad, las alumnas dieron énfasis a lo visual mas no al uso de las propiedades de la simetría axial que era lo que se deseaba. Creemos que esto sucedió porque se dejó abierta la posibilidad de que las alumnas den cualquier respuesta en base a sus observaciones.

La actividad 2C, nos muestra que cuando las alumnas tienen un modelo que en términos de Trouche (2003) el sherpa-alumno, dirige a las alumnas en el logro de los objetivos planteados. Esto logró que en esta actividad 26 de las 36 alumnas lograran con éxito el objetivo planteado. A su vez, en esta actividad se ve claramente una Orquestación Instrumental porque hay un archivo modelo (sherpa – alumno) que se proyecta a las alumnas, una actividad a realizar bajo un medio tecnológico y existe un objetivo previsto. Además, esta actividad ayudó a reforzar el uso de las propiedades de la simetría axial, ya que las alumnas en la actividad N° 2B donde también se deseaba que las alumnas justificaran sus procedimientos con el uso de las propiedades sólo se guiaron por lo visual.

CONSIDERACIONES FINALES

La enseñanza de la Geometría necesita mayor estudio, en especial el estudio de las transformaciones en el plano y específicamente el de la simetría. Existen investigaciones sobre la geometría y el uso de las tecnologías pero muy pocas en el estudio en sí de la simetría con la Geometría Dinámica, que fue lo que motivó a la realización de nuestro estudio.

Para orientar la investigación, utilizamos algunos aspectos de la Ingeniería didáctica propuesta por Artigue (1995). Por ello, hemos desarrollado nuestro estudio en las cuatro fases que esta metodología nos propone: Análisis preliminar, concepción y análisis a priori, experimentación y Análisis a posteriori y validación. En ese sentido presentamos algunos estudios de la simetría y la Geometría Dinámica como aliados para el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática, en especial de la Geometría.

El trabajar con tecnologías y saber de la existencia de un enfoque de estudio de la matemática con las tecnologías, nos brinda un rumbo a nuestra investigación este fue el Enfoque Instrumental de Rabardel (2011), que nos da una perspectiva para que por medio de las acciones de las alumnas podamos tener indicios de la movilización o creación de esquemas mediados por el uso de las tecnologías.

Para el análisis del proceso de instrumentación dentro de la Génesis Instrumental consideramos los conceptos en acto y las reglas de acción que nos permite identificar los posibles esquemas de utilización que van movilizando las alumnas.

Como resultado de las acciones de las alumnas podemos inferir que ellas lograron una instrumentalización local de algunas de las herramientas del Geogebra que ayudaron en el aprendizaje de la simetría axial y en algunos casos lograron una instrumentación de la noción de simetría axial.

En nuestro objetivo general nos propusimos propiciar la Génesis instrumental, específicamente la instrumentación de la simetría axial mediada por el Geogebra, lo cual lo pudimos realizar por medio de la noción de esquema de Vergnaud (1996). Específicamente de los invariantes operatorios y las reglas de acción seguidas por las alumnas en el desarrollo de las actividades propuestas.

Con respecto a la pregunta que nos planteamos al inicio de nuestro estudio ¿Alumnos de primer grado de educación secundaria instrumentan la noción de simetría axial cuando desarrollan actividades mediadas por el Geogebra? luego de nuestra experimentación, podemos decir, que los alumnos instrumentan la noción de simetría mediada por el Geogebra, ya que por medio de sus acciones pudimos observar cómo aprendieron esta noción mediante actividades planteados por el Geogebra, además mediante sus conclusiones escritas en su ficha de actividades pusieron de manifiestos las conjeturas a las cuales llegaban, reconociendo propiedades de este objeto matemático.

Logramos cumplir con nuestro primer objetivo específico que fue diseñar una secuencia de actividades en las que se utilice al Geogebra como mediador para el aprendizaje de la noción de simetría axial. También logramos incorporar tres actividades a lápiz y papel en las cuales las alumnas aplicaron lo aprendido, es decir, la noción de simetría axial y sus propiedades.

En nuestro segundo objetivo específico nos propusimos identificar por medio de las acciones de las alumnas, los posibles esquemas de utilización desarrollados por ellas. Consideramos que los posibles esquemas de utilización desarrollados por las alumnas ayudaron a que percibamos indicios del desarrollo del proceso de Génesis Instrumental, especialmente de la instrumentación de la noción de simetría axial y sus propiedades, lo que brindó subsidios para lograr el tercer objetivo específico que fue analizar las acciones de los alumnos en el proceso de aprendizaje.

En la experimentación hemos podido observar que las alumnas estuvieron motivadas en el uso del Geogebra y que tenían predisposición para la realización de las actividades.

Con nuestro estudio dejamos abiertas las posibilidades para futuros trabajos que puedan considerar lo siguiente:

- Estudiar el aprendizaje de la simetría con otros softwares de Geometría dinámica y estudiar ambos procesos de la Génesis instrumental, la instrumentación y la instrumentalización.
- Identificar los errores comunes de los alumnos en el aprendizaje de la simetría axial y también la simetría central o puntual.

- Estudiar el aprendizaje de la simetría central mediado por el Geogebra en ambos procesos de la Génesis instrumental, la instrumentación y la instrumentalización.
- Ampliar estudios del aprendizaje de la simetría mediado por el Geogebra pero analizando la Orquestación Instrumental que abarca lo colectivo de trabajar con tecnologías o la Teoría Antropológica de lo Didáctico.



REFERENCIAS

- Almouloud, S.A. (2007). *Fundamentos da didática da matemática*. Curitiba: Ed. UFPR.
- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L.& Gomez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Grupo editorial Iberoamérica.
- Boyer, C. (2007). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial.
- Chumpitaz, Luis (2013). *Génesis instrumental: Un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediado por el software Geogebra con estudiantes de ingeniería*. (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.
- Editorial Norma (2013). *Matemática para pensar I*. Lima: Grupo editorial Norma S.A.C
- Editorial Santillana (2013). *Matemática- Hipervinculos I*. Lima: Santillana S.A
- Euclides (1991). *Elementos: libros I – IV* (trad. Por M. Puertas). Madrid: Editorial Gregos S.A
- Ferreira, Paula (2005). *Isometrias: Análise de documentos curriculares e uma proposta de situações de aprendizagem para o ensino médio*. (Tesis de maestría). Pontificia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.
- Gallegos, D y Peña, A. (2012). *Las TIC en geometría, una nueva forma de enseñar*. Bogotá: Ediciones de la U.
- Jaime, Adela (1993). *Aportes a la interpretación y aplicación del modelo Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*. (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, Valencia, España.
- Ledermann, L. (1996). *La partícula divina: Si el universo es la respuesta, ¿cuál es la pregunta?* Barcelona: Grijalbo Mondadori, S.A.
- Lima, E. (1995). *Isometrías*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

- Martinez, M. (2012). Movimientos simetría. (Tesis de máster universitario, Universidad de Granada). Recuperado de <http://fqm193.ugr.es>
- Perú, Ministerio de Educación del Perú (2008). *Matemática para el primer grado de educación secundaria*. Lima.
- Perú, Ministerio de Educación (2009). *Diseño Curricular Nacional de EBR*. Lima.
Recuperado de:
<http://www.minedu.gob.pe/normatividad/reglamentos/DisenoCurricularNacional.pdf>
- Perú, Ministerio de Educación (2005). Unidad de Medición de la Calidad. *Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil 2004. Informe pedagógico de resultados. Formación matemática: Tercer grado y Quinto de secundaria*. Recuperado de:
<http://www2.minedu.gob.pe/>.
- Perú, Ministerio de Educación (2007). *Orientaciones para el trabajo Pedagógico (OTP)*. Lima.
- National Council of Teachers Of Mathematics. (2000). *Principios y estándares para la educación matemática*. Traducido por Sociedad Andaluza de Educación Matemática. Sevilla.
- Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies: une approche cognitive des instruments contemporains*. Université Paris. Armand Colin. Recuperado de <http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/>
- Rabardel, P. (2011). *Los hombres y las tecnologías: Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. (Trad. por M. Acosta). Colombia: Universidad Industrial de Santander.
- Salazar, Jesús V. F. (2009). *Gênese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de transformações geométricas no espaço*. (Tesis doctoral). Pontificia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

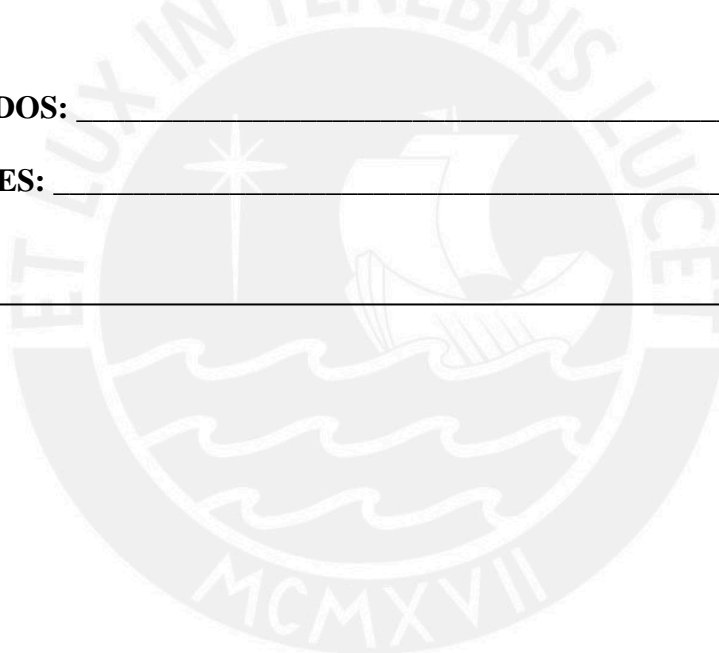
- Sureda, P. y Otero, M. (2011). Nociones fundamentales de la Teoría de los Campos Conceptuales. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, Julio-1-14. Recuperado de <http://estudiosterritoriales.org>
- Trouche, L (2003). *From artefact to instrument: Mathematics teaching mediated by symbolic calculator*. Recuperado de <http://ens-lyon.academia.edu/LucTrouche/>
- Trouche, L. (2004). *Managing the Complexity of Human/Machine Interaction in a Computer Based Learning Environment (CBLE). Guiding Student's Process command through instrumental orchestrations*. University Montpellier II. Recuperado de http://www.academia.edu/attachments/3693391/download_file.
- Trouche, L (2010). *Handheld technology for mathematics education: flashback into the future*. Recuperado de <http://ens-lyon.academia.edu/LucTrouche/>
- Ulian, Cristina. (2008). *Possibilidades da aprendizagem de transformações geométricas com o uso do Cabri-Geomètre*. (Tesis maestría, Pontificia Universidade Católica de São Paul). Recuperado de <http://www.pucsp.br/pos/edmat>
- Vergnaud, G. (1990). *La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (23) : 133-170. La Pensée Sauvage, Marseille.
- Vergnaud, G. (1996). A teoria dos campos conceptuais. En Jean Brun (org), *Didáctica das matemáticas*. (pp. 155-189). Lisboa : Horizontes pedagógicos.

APENDICES

FICHA DE TRABAJO







APELLIDOS: _____

NOMBRES: _____





Actividad N° 0: Conociendo el GeoGebra


Creando puntos, segmentos y rectas:

- Con la herramienta  crea dos puntos en el plano. Denóminalos A y B, traza el segmento que se forma al unir ambos puntos y determina su distancia haciendo uso de la herramienta distancia o longitud  .
- Determina el punto medio del segmento AB, haciendo uso de la herramienta punto medio  y denomínalo con la letra O. Comprueba que los segmentos AO y OB tiene la misma distancia.
- Crea un recta que pase por los puntos A y B, haz uso de la herramienta recta que pasa por dos puntos  . Luego traza una recta paralela a ésta, utiliza la herramienta recta paralela  .
- Traza la recta perpendicular a la recta que pasa por los puntos A y B, haciendo uso de la herramienta recta perpendicular  .

Creando polígonos:

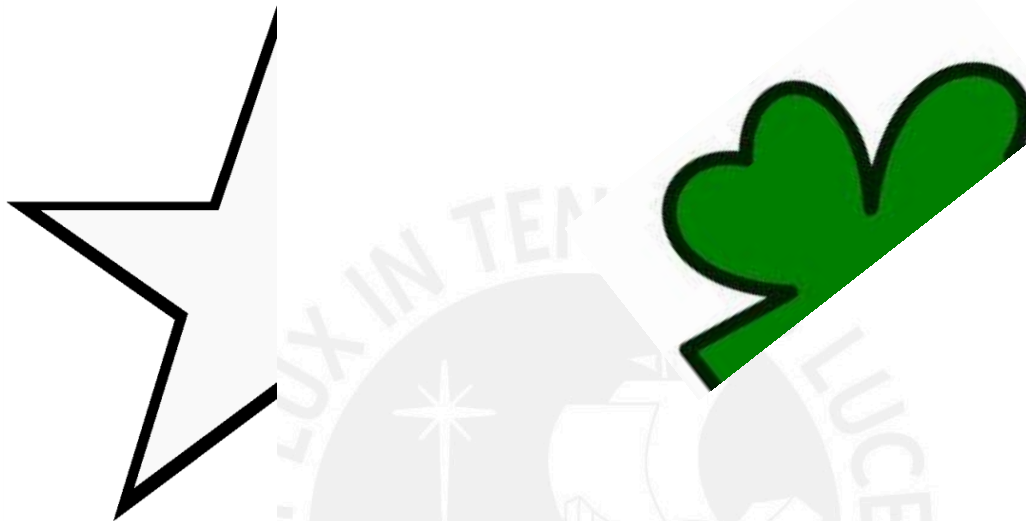
- Crea un polígono regular de seis lados, utiliza la herramienta polígono regular  .
- Utilizando la herramienta polígono  , crea un polígono de ocho lados. Haz clic izquierdo a uno de los vértices del polígono y selecciona la herramienta renombrar y cambia el nombre de los vértices a A1, A2, A3, así sucesivamente.

Midiendo ángulos:

- Abre el archivo actividad0.ggp y con la herramienta ángulo  mide los ángulos de presentes en la actividad.

ACTIVIDAD N° 1: EXPLORANDO FIGURAS

ACTIVIDAD N° 1 A: Observa las figuras y en cada una completa su otra mitad:



Al completar cada una de las figuras, ¿Qué relación encuentras entre el lado dibujado y el anterior? Anota tus observaciones

- ✓ Abre el archivo actividad1_1.ggb. La recta L ha dividido a la figura en su mitad. ¿cuál de las opciones representa la otra mitad de la figura? Justifica tu respuesta (Arrastra haciendo clic izquierdo cada una de las opciones hacia la figura fija).

ACTIVIDAD N° 1 B: Abre el archivo actividad1_2_1.ggb. Moviliza la recta L haciendo clic izquierdo sin soltar el mouse. Responde:

¿Explique qué sucede con las figuras cuando mueves la recta L a la izquierda o a la derecha?

¿Qué sucede con las figuras cuando la recta L pasa por el lado FA de la primera figura?

¿Qué sucede con las figuras cuando la recta L se ubica en la mitad de la primera figura?

Coloca la recta a tres cuadrículas a la derecha de la primera figura y traza el segmento FF' . Luego, traza el punto de intersección del segmento y la recta, nómbralo como punto M. Mide los segmentos FM y MF' ¿Cómo son las medidas? _____ ¿Si se realiza el procedimiento anterior sucede lo mismo entre los segmentos EN y NE' ? _____, por qué _____

Mueve la recta de izquierda a derecha ¿Qué sucede con las medidas de los segmentos? Anota tus observaciones.

Mide los ángulos internos de las figuras. ¿Qué sucede con las medidas de los ángulos cuando se movilizas la recta L? Explica. _____

Abre el archivo 1_2_2.ggb. Mueve el punto O, haciendo clic sobre él sin soltar el mouse. Anota tus observaciones: _____

De todo lo observado ¿A qué conclusión has llegado con respecto al recta y las figuras?

ACTIVIDAD N° 1 C:

Abre el archivo actividad1_3.ggb.Utilizando la herramienta punto medio, traza los puntos medios de los segmentos AA', BB', CC', DD', EE', FF', GG', HH' e II'. Con la herramienta recta, traza la recta que pasa por los puntos medios marcados anteriormente. Anota tus observaciones.

Traza el segmento AA' y mide un ángulo que se forma entre la intersección del segmento y la recta. ¿Cuánto mide el ángulo? _____ Traza BB' y mide un ángulo que se forma entre la intersección del segmento y la recta. ¿Cuánto mide el ángulo?_____ ¿qué puedes concluir con respecto a los ángulos que se forman entre la intersección de la recta y los segmentos trazados? justifica._____

ACTIVIDAD N° 1 D: Abre el archivo actividad1_4.ggb. ¿En qué figuras puedes trazar una recta que las divida en su mitad? ¿Por qué? Justifica.

(1)_____

(2)_____

(3)_____

(4)_____

(5)_____

ACTIVIDAD N° 1 E: Actividad de síntesis:

Después de haber realizado la actividad N°1, hemos conocido a la simetría axial.

¿Qué propiedades cumple la recta o eje de simetría?

¿Los ángulos internos de la figuras varían al realizar su simétrico?

¿Cómo son las distancias de un punto de la figura hacia la recta y de la recta al simétrico del punto?

¿La forma de la figura y la medida de sus lados varían cuando se realiza su simétrico?

¿Qué medida tiene el ángulo que se forma en la intersección del segmento que une un punto de la figura con su simétrico con respecto a la recta o eje de simetría?

ACTIVIDAD N° 2: APLICANDO LO APRENDIDO

ACTIVIDAD N° 2 A: *Simetría en los diseños textiles*

El arte textil incaico es una de las más antiguas tradiciones textiles de los Andes y llegó a ser una de las más desarrolladas durante el apogeo inca, debido al uso de diferentes materiales y técnicas (resultado de su cultura híbrida adquirida gracias a las conquistas de otras etnias andinas). Los incas lograron producir una gran variedad de prendas de vestir y elementos de uso cotidiano.

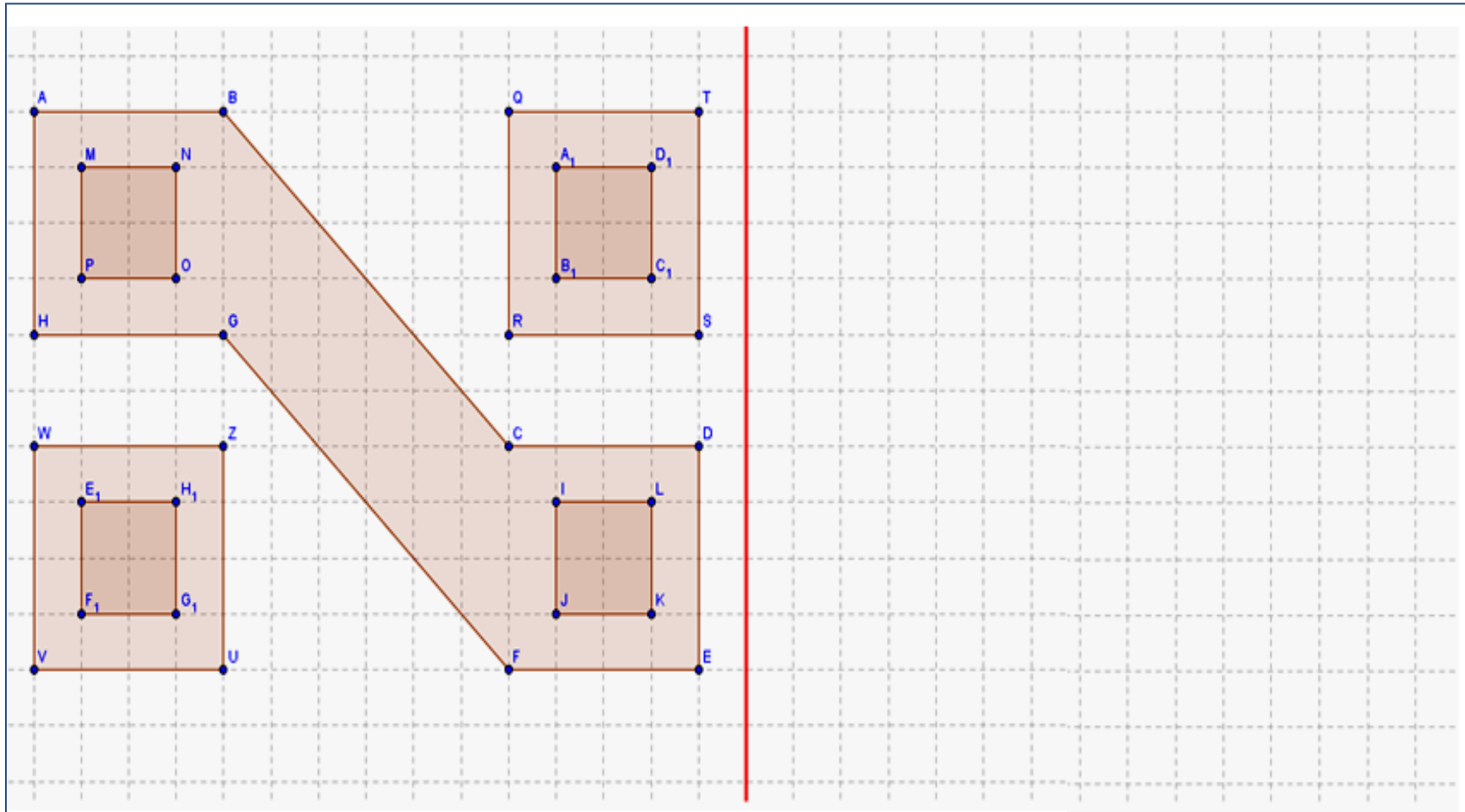
Los textiles incas se caracterizan por sus diseños geométricos o tocapu y por la fineza de su técnica. Los incas destacaron por sus tapices y sus mantos de plumas, también de diseños geométricos. Tuvieron un extraordinario sentido de la simetría, reflejado en la repetición de figuras estilizadas dispuestas de una manera sumamente ordenada.



Figura: Tocapu incaico

Fuente: Historia, geografía y economía para pensar 2, p124.

Realiza el simétrico del diseño incaico:



ACTIVIDAD N° 2B: Simetría en la escultura

Observa detenidamente cada una de las figuras y luego llena los casilleros de abajo:



Figura: Lanzón monolítico

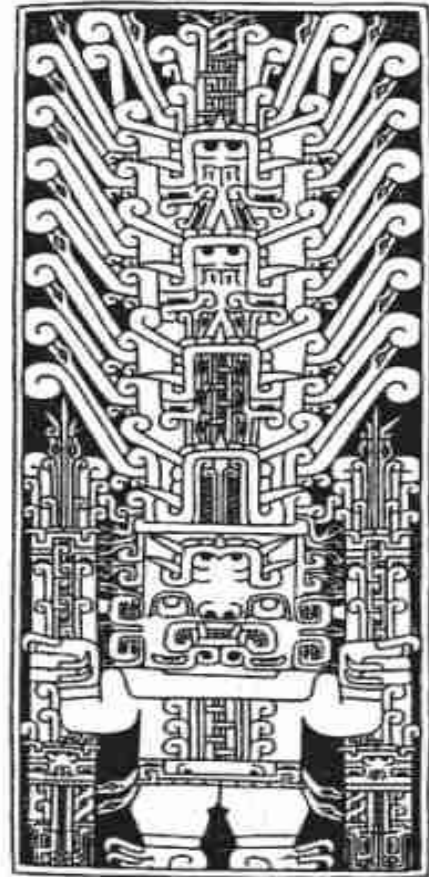


Figura: Estela de Raimondi

Fuente: Sociomundo civilización, p. 187.

<p>¿Existe simetría en el lanzón monolítico?</p> <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin-bottom: 10px;"/> <ul style="list-style-type: none"> • En caso sea <i>afirmativo</i>, traza su eje de simetría utilizando una regla. • En caso sea <i>negativo</i>, justifica tu respuesta. <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/>	<p>¿Existe simetría en la estela de Raimondi?</p> <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin-bottom: 10px;"/> <ul style="list-style-type: none"> • En caso sea <i>afirmativo</i>, traza su eje de simetría utilizando una regla. • En caso sea <i>negativo</i>, justifica tu respuesta. <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/>
---	--

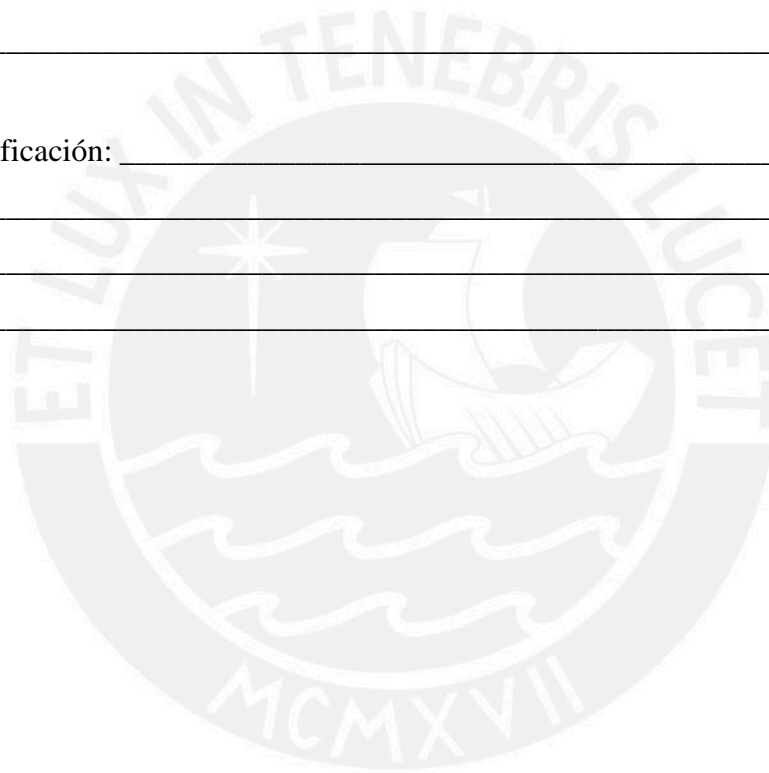
ACTIVIDAD N° 2C: ¿Felinos simétricos?

Abre el archivo actividad2_C.ggb y haciendo clic en cada una de las casillas de control verificaras que el tigre es simétrico.

Luego **elige uno** de los siguientes archivos: actividad2_C1.ggb, actividad2_C2.ggb o actividad2_C3.ggb. Responde: ¿El felino que se encuentra en el archivo que elegiste cumple con la simetría? _____. Da dos justificaciones que reafirmen tu respuesta.

Primera justificación: _____

Segunda justificación: _____



FICHA DE OBSERVACIÓN

Nombres y apellidos del observador: _____

Fecha de observación: _____ Tiempo observación: _____

Interacción estudiante - Geogebra

1. Marque con un aspa donde corresponda:

Acciones	Actividades					
	0	1				2
		a	b	c	d	c
Usa el cursor del mouse						
Usa la barra de herramienta						
Mide ángulos						
Mide longitudes						
Arrastra el objeto geométrico						

Interacción alumnas – simetría axial

2. Marque con un aspa donde corresponda:

Dificultades observadas en las acciones de las alumnas	Actividades							
	0	1				2		
		a	b	c	d	a	b	c
En reconocer el eje de simetría.								
Para determinar el equidistancia al eje de un punto de la figura inicial y su simétrico.								
Para reconocer que los ángulos internos de la figura no varían en su simétrico.								
Para identificar la perpendicularidad entre el eje de simetría y los segmentos que une un punto de la figura con su respectivo simétrico.								

Aspectos relevantes en el desarrollo de las actividades:

3. Actividad 1A

4. Actividad 1B

5. Actividad 1C

6. Actividad 2 A

7. Actividad 2 B

8. Actividad 2 C

