PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

ANÁLISIS DEL TRATAMIENTO DEL ÁLGEBRA EN EL PRIMER AÑO DE SECUNDARIA: SU CORRESPONDENCIA CON LOS PROCESOS DE ALGEBRIZACIÓN Y MODELIZACIÓN.

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

PRESENTADA POR:

MYRIAN LUZ RICALDI ECHEVARRIA

ASESORA DE TESIS:

MAG. CECILIA GAITA IPARRAGUIRRE

MIEMBROS DEL JURADO:

DRA. JESÚS FLORES SALAZAR.

MAG. CECILIA GAITA IPARRAGUIRRE

DR. EMILIO GONZAGA RAMÍREZ.

LIMA - PERÚ

2011

Dedicatoria:

A mis padres,
por su permanente
e incondicional apoyo.

Mi eterno cariño.

Agradecimiento:

A la Magister Cecilia Gaita Iparraguirre, mi asesora de tesis, por su valiosa y permanente orientación. Estimada profesora gracias por todo el apoyo brindado durante el desarrollo de la presente investigación.

RESUMEN

El presente trabajo de investigación analiza el tratamiento que se da al álgebra en el primer año de secundaria.

La investigación es de tipo cualitativo y utiliza como marco teórico fundamental la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), además de algunos aportes del Enfoque Ontosemiótico para el análisis de la idoneidad didáctica del proceso de estudio. El estudio fue realizado con 63 estudiantes del primer año de secundaria de un colegio privado en la ciudad de Lima.

La investigación describe y analiza las diferentes organizaciones matemáticas y didácticas presentes en libros de textos y programas curriculares, además de incluir una entrevista estructurada a los docentes sobre su práctica pedagógica. La problemática detectada es que los contenidos se presentan aislados, mayormente se utilizan técnicas algorítmicas y existe sólo interés por el manejo tecnológico puntual, perdiéndose la oportunidad de aprovechar las situaciones que amplíen el conocimiento.

En este contexto, la investigación describe y analiza si el tratamiento del álgebra en el primer año de secundaria corresponde a un proceso de algebrización y si la modelización está presente en el proceso de instrucción estudiado. Además, pretende mostrar que el álgebra puede surgir como instrumento para modelizar y resolver situaciones específicas de complejidad creciente.

Luego de este análisis, se propone un modelo didáctico alternativo en el que se considerará la introducción de los temas algebraicos a través de tipos de problemas.

Finalmente, se concluye que las situaciones que tradicionalmente se plantean en aula tienen un carácter fuertemente aislado y no refuerzan la importancia

de la justificación de los procedimientos empleados. Además, también se refuerza la idea de que los modelos planteados para una situación son específicos para esa situación; no se plantea la generalidad de los mismos. En referencia al análisis epistémico, concluimos que el desarrollo de algoritmos para resolver ecuaciones particulares fue el hecho que abrió caminos hacia la construcción de significado y hacia la generalidad. Desde la llamada matemática sabia, se consideran los polinomios como una estructura con propiedades y relaciones especiales. Por otro lado, a nivel escolar no se expone un tratamiento riguroso al tema de polinomios; afirmamos esto porque los temas se presentan por separado en forma aislada, sin que formen parte de una estructura (anillo de polinomios); esto evidencia los procesos transpositivos y de adaptación para su estudio a nivel escolar. En vista de ello, consideramos que debiera buscarse un punto intermedio, a fin de evitar generar conflictos en estudios posteriores a otro nivel. Frente a esto la TAD tampoco propone un tratamiento riguroso y estructural de los contenidos algebraicos, sino más bien plantea introducir el álgebra como un instrumento de modelización de situaciones planteadas en tipos de problemas.

En la modelización de los problemas, se debe primero distinguir lo que es propio de cada problema, y lo que es común a todos ellos; para luego verbalizar y escribir en forma simbólica las relaciones cuantitativas que se presentan. Además, la evaluación de la pertinencia de los problemas luego del contraste de las respuestas esperadas y los resultados observados, nos lleva a sugerir la revisión de un problema, debido a que no cumple con admitir sólo soluciones algebraicas.

INTRODUCCIÓN

El estudio del álgebra está presente a lo largo de toda la escolaridad llegando incluso hasta el nivel universitario. Sin embargo, a pesar de su presencia explícita en los programas curriculares, los estudiantes muestran dificultades asociadas a la resolución de problemas que implican la aplicación comprensiva de conocimientos algebraicos. En este contexto, son muchas las investigaciones desarrolladas abordando diversos aspectos dentro del álgebra. Esto evidencia el interés de docentes e investigadores por mejorar la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, el cual es considerado en la mayoría de los casos como un contenido cuyo aprendizaje tiene un fin en sí mismo.

La presente investigación pretende focalizar su atención en analizar si el tratamiento del álgebra en el primer año de secundaria corresponde a un proceso de algebrización y si la modelización está presente en el proceso de instrucción estudiado. Además de mostrar que el álgebra puede surgir como instrumento para modelizar y resolver situaciones específicas de complejidad creciente.

Abordaremos nuestro estudio desde una perspectiva epistemológica e institucional, considerando los fenómenos didácticos a partir de la modelización de la componente matemática. Para ello, nos situaremos dentro del marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), la cual nos suministrará las herramientas de análisis matemático y didáctico necesarias para reconstruir una posible evolución del dominio de investigación "álgebra". A su vez, considerando que necesitábamos algunos elementos para el análisis didáctico consideramos los aportes de Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006) en lo que respecta de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio.

Hemos estructurado el contenido de la tesis de la siguiente manera.

En el primer capítulo, presentamos el problema de investigación, el cual incluye la justificación, los antecedentes, los objetivos e hipótesis.

El segundo capítulo presenta el marco teórico de la investigación, en el que se detallan aportes de la TAD y algunos elementos para el análisis de la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

El tercer capítulo describe la metodología, las fases generales de la investigación y el diseño de los instrumentos que se emplearán.

En el cuarto capítulo, se describe y analiza epistemológicamente el dominio de investigación "algebra escolar", considerando su desarrollo histórico y su relación con el álgebra abstracta. Aquí consideramos el anillo de polinomios y, especialmente, a la factorización de polinomios como el tema central que permite obtener las raíces de una ecuación; lo cual nos lleva a conjeturar que la presentación de tareas asociadas a la búsqueda de raíces pueda ser el foco de atención cuando se trabaje la noción de polinomio en la escuela.

Luego en el quinto capítulo, se presenta y analiza el tratamiento del álgebra a nivel escolar, desde la revisión de textos escolares, programas curriculares, además de una entrevista estructurada a los docentes sobre su práctica pedagógica. En este capítulo, se analiza también la idoneidad epistémica de los textos seleccionados, estableciendo un paralelo de estos con libros de matemática formal.

El sexto capítulo muestra el diseño, la implementación, y la evaluación de la propuesta de organización didáctica. Aquí propondremos un modelo didáctico alternativo en el que se considerará la introducción de los temas algebraicos a través de tipos de problemas de complejidad creciente, utilizados esencialmente como instrumentos de modelización.

Finalmente, en el último capítulo presentaremos las reflexiones de la práctica realizada y las conclusiones de la investigación. Algunas de las conclusiones finales se señalan a continuación:

En la educación secundaria del Perú, se estudian organizaciones o praxeologías matemáticas puntuales y rígidas, centradas en el bloque práctico-técnico, es decir, que en la mayoría de los casos sólo conducen a la aplicación de algoritmos algebraicos, ignorando su procedencia se construyen en forma aislada, sin establecer relaciones en cuanto a las formas de proceder en cada caso, ni justificaciones a los procedimientos empleados. Tales cuestiones obstaculizan el desarrollo de la modelización algebraica y el logro de adecuados niveles de algebrización a nivel escolar.

Desde la llamada matemática sabia, se consideran los polinomios como una estructura con propiedades y relaciones especiales. Frente a esto la TAD propone introducir el álgebra como un instrumento de modelización de situaciones planteadas en tipos de problemas, en lugar de, presentar un tratamiento riguroso y estructural de los contenidos algebraicos.

En la modelización de los problemas planteados, se debe primero distinguir lo que es propio de cada problema, y lo que es común a todos ellos; asimismo, se debe asegurar que estos admitan sólo soluciones algebraicas.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS.

ÍNDICE DE GRÁFICAS.

ANEXOS.

CAPÍTULO 1. El problema de investigación.

1. 1. Justificación del estudio y formulación del problema.

El actual Diseño Curricular de Educación Básica del Perú considera como uno de sus componentes el conocimiento de los números, relaciones y funciones y, las propiedades de las operaciones aritméticas y de los conjuntos.

Para el primer año de educación secundaria se señalan como temas específicos el estudio de los patrones numéricos, las ecuaciones lineales con una incógnita y el valor numérico de expresiones algebraicas; además se consideran las siguientes capacidades específicas a lograr por los estudiantes:

a) Identifica patrones numéricos, los generaliza y simboliza.

b) Representa de diversas formas la dependencia funcional entre variables: verbal, tablas, gráficos, etc.

c) Resuelve problemas de traducción simple y compleja que involucran ecuaciones lineales con una incógnita.

Consideramos que el logro de estas capacidades debe darse a la par que se consigue un nivel de abstracción a través de actividades de clase, en donde el tratamiento matemático y didáctico del dominio de investigación "álgebra" lleve a la generalización y modelización. Esto mostrará al estudiante que la interpretación y justificación son actividades propias del quehacer matemático.

Pese a que incluso desde la primaria se empiezan a estudiar las herramientas algebraicas, los resultados de las evaluaciones muestrales realizadas por la UMC (Unidad de medición de la calidad) del Ministerio de Educación del Perú, muestran que no se evidencia dominio de este campo de conocimientos. Por el contrario, nuestra realidad muestra que los estudiantes poseen marcadas carencias en la interpretación y el uso del dominio de investigación "álgebra".

Creemos que la mayoría de nuestros alumnos aprenden a operar expresiones algebraicas y resolver ecuaciones de primer grado con un marcado énfasis algorítmico, sin buscar relacionarlos con procesos de modelación o acercarlos a formas de pensamiento matemático de tipo inductivo, argumentativo, conjetural o demostrativo.

Desde una concepción del quehacer matemático como la Teoría Antropológica de lo Didáctico, se suministran las herramientas de análisis matemático y didáctico necesarias para reconstruir una posible evolución del dominio de investigación “álgebra”. Así, se pretende mostrar cómo se inicia el estudio del álgebra en el primer año de secundaria en el Perú, a través del análisis de sus diferentes organizaciones matemáticas y didácticas en libros de textos y programas curriculares, además de una entrevista estructurada a los docentes sobre su práctica pedagógica. Luego, se propondrá un modelo didáctico alternativo en el que se considerará la introducción de los temas algebraicos a través de tipos de problemas de complejidad creciente, utilizados esencialmente como instrumentos de modelización.

El estudio permitirá analizar, si es que como lo revelan las investigaciones desarrolladas en otros contextos (Gascón, 1993), también en nuestra realidad se presenta la introducción del Álgebra como una generalización de la aritmética, y permitirá describir e identificar potenciales conflictos, condiciones y restricciones relacionados a su tratamiento didáctico.

1.2. Antecedentes.

Gascón, J. (1993) identifica el álgebra escolar con un simbolismo algebraico que amplía y generaliza un lenguaje aritmético. Para Gascón, J. (1993), existe un modelo epistemológico dominante en la institución escolar que identifica el "álgebra escolar" con una obra que prolonga y generaliza unilateralmente la "aritmética escolar", una especie de "aritmética generalizada".
Por ello, considerando el modelo clásico de análisis-síntesis, propone una reconstrucción de la génesis del álgebra escolar a partir de los problemas verbales y de la modelización matemática. Pone especial énfasis en la potencialidad para resolver y fundamentar métodos de resolución, en clases de problemas. Concluye en su investigación que una actividad matemática algebrizada debe permitir la manipulación de la estructura de los problemas,

unificando los tipos de técnicas y tecnologías utilizadas para la producción de nuevos problemas.
Este trabajo sirvió de base a las investigaciones de Pilar Bolea y Noemí Ruíz.

Bolea, P. (2003), en su tesis doctoral sobre el Proceso de Algebrización de las Organizaciones Matemáticas escolares, caracteriza el álgebra escolar definiendo algunos indicadores del grado de algebrización de una obra matemática. Además, define cuatro etapas fundamentales en el proceso de modelización algebraica. Algunas de las conclusiones de su trabajo son que el álgebra elemental debería aparecer inicialmente como un instrumento algebraico que genere organizaciones matemáticas cada vez más algebrizadas, que existe dualidad entre las OM(organizaciones matemáticas) algebrizadas y las modelizaciones algebraicas, que en las instituciones escolares españolas se da el fenómeno de la atomización del proceso de estudio y que el modelo que identifica el álgebra escolar con una prolongación y generalización unilateral de la aritmética escolar constituye la base de la tecnología didáctica del profesor respecto a la enseñanza del álgebra escolar.
Esta investigación es importante para la investigación que se quiere realizar por sus referentes en relación al proceso de algebrización del tema de estudio, y porque además, también está enmarcado dentro del marco teórico en el que nos apoyaremos, la TAD.

De acuerdo a Ruíz, N.; Bosh, M. & Gascón, J. (2010), la iniciación al álgebra requiere de la elaboración previa de un MER (Marco epistemológico de referencia) capaz de articular la introducción del álgebra elemental en los primeros años de la educación secundaria. Este modelo se formuló como una sucesión de OM cada vez más amplias y completas.
La investigación planteaba el problema de cómo introducir el álgebra en la primera etapa de la ESO (educación secundaria obligatoria). Como resultado, se obtuvo un desarrollo teórico y una propuesta experimental sobre la introducción del instrumento algebraico de manera funcional, tomando como punto de partida los problemas aritméticos. Esta propuesta muestra la

relación entre "lo numérico" y el álgebra, a través de los "Programas de Cálculo Aritmético".

En un estudio sobre la iniciación al álgebra desde la TAD, Olfos, R. (2002) muestra cómo se inicia en las aulas chilenas el álgebra escolar, en el contexto de un cambio paradigmático. Esto ocurre en el tránsito del octavo grado básico a primero medio, donde la matemática pasa del ámbito numérico al ámbito del álgebra. El trabajo muestra un panorama general de las aulas, considerando alumnado, profesores e instituciones observadas. Luego, se presentan las organizaciones matemáticas y las organizaciones didácticas desarrolladas en tales aulas. Se contrasta la dimensión fáctica con la dimensión curricular establecida en los programas de estudio y en los textos escolares. Se concluye proponiendo un conjunto de hipótesis, acerca de los procesos de reconstrucción de las organizaciones matemáticas en las aulas referidas a la iniciación al álgebra, las que se pondrán a prueba en una etapa futura de análisis.

Algunas conclusiones de este trabajo fueron que se enfatiza la manipulación de expresiones simbólicas por sobre la comprensión del significado y el uso que pudiera dársele al álgebra. Al igual que en las investigaciones de Gascón, se confirmó que el álgebra se identifica como una aritmética generalizada.

Esta investigación será relevante para el trabajo que pretendemos realizar porque brinda pautas metodológicas para identificar y analizar las praxeologías de diferentes instituciones, además de herramientas teóricas para el análisis de las diferentes praxeologías involucradas.

Las dificultades en el uso del álgebra trascienden la Educación Básica. Así, según Alurralde, F. & Ibarra, L. (2009) los estudiantes del primer año de la universidad tienen dificultades en el uso de las variables para el planteamiento de diversas situaciones. Esto se basa en un estudio sobre la producción de los estudiantes en la primera evaluación que se realizó en Algebra Lineal y Geometría Analítica, en el primer año de la carrera de ingeniería en la Universidad Nacional de Salta.

El objetivo de dicha investigación fue identificar las herramientas algebraicas que utilizaban los estudiantes en la resolución de los problemas propuestos

respecto al uso de las letras en sus diversas formas. Esto se hizo a través del análisis de las respuestas a ejercicios relacionados al uso de letras sobre los temas de matrices, sistemas de ecuaciones, determinantes y álgebra vectorial.
Las respuestas de los estudiantes a las situaciones propuestas se analizaron de acuerdo a las siguientes categorías: La interpretación de las letras involucradas, la simbolización en una situación en la que aparece cierta caracterización de la letra, la manipulación de las letras que aparecen en una expresión y la expresión del conjunto solución.
La investigación concluyó que la mayor dificultad en los alumnos que cursaban primer año de ingeniería en la Universidad Nacional de Salta, en cuanto al uso de las letras en álgebra, se presentaba en las generalizaciones, cuando deben utilizar las letras como números generales y cuando deben utilizar las letras como variables en la relación funcional.
Los autores identifican algunas restricciones impuestas por el sistema de enseñanza. Entre ellos destacan el poco tiempo que se dispone en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los temas mencionados y la necesidad de evaluar. Estas causas llevan a su atomización, situación que refuerza la interpretación del álgebra como una aritmética generalizada y no como instrumento de modelización.
Este trabajo es relevante para la investigación que se pretende realizar por su relación con el tema de estudio álgebra (en cuanto al tratamiento de las letras dentro del contexto algebraico). Además, la metodología de trabajo seguida será la misma en la que se enmarcará la presente investigación.

Teniendo en cuenta estas investigaciones, además de los referentes formales en el Diseño Curricular Nacional, buscaremos analizar qué sucede en nuestra realidad escolar. Es decir, se quiere analizar si el modelo dominante del álgebra en las instituciones escolares peruanas, en general es el modelo de la aritmética generalizada o no. Nuestra investigación se circunscribe al análisis del tratamiento del álgebra escolar en el primer año de secundaria sobre la base de las pautas metodológicas de la teoría antropológica de lo didáctico y del enfoque ontosemiótico de la instrucción y la cognición, las mismas que nos proporcionan todo un marco de análisis de las praxeologías matemáticas y didácticas para la institución escolar.

Formulación del problema.

En el presente trabajo se busca analizar si el tratamiento del álgebra escolar en el primer año de secundaria corresponde a un proceso de algebrización o si el encuentro con tópicos algebraicos es a través de una aritmetización del álgebra. En este proceso se analizará también el papel que juega la modelización.

1. 3. Objetivos de la investigación.

Objetivos generales.

1. Analizar si el tratamiento del álgebra en el primer año de secundaria corresponde a un proceso de algebrización y si la modelización está presente en el proceso de instrucción estudiado.
2. Mostrar que el álgebra puede surgir como instrumento para modelizar y resolver situaciones específicas de complejidad creciente.

Objetivos específicos.

- Analizar los lineamientos curriculares propuestos en el DCN (Diseño curricular nacional) respecto al tratamiento del álgebra escolar.
- Analizar si los tipos de tareas y técnicas propuestos en los libros de texto y actividades de clase son pertinentes para el estudio de temas algebraicos.
- Identificar la tecnología dominante en los libros de texto y actividades de clase respecto al estudio del álgebra.
- Identificar las condiciones y restricciones de origen didáctico y matemático que dificultan el proceso de estudio del álgebra.
- Diseñar una organización didáctica pertinente para el estudio introductorio del álgebra, integrando los diferentes momentos de su proceso de estudio, basados en el principio de que el álgebra escolar

debe aparecer para atender a la necesidad de resolver situaciones específicas.

1. 4. Cuestiones de investigación.

¿Qué elementos teóricos justifican el actual tratamiento del álgebra?
¿Cuál es la importancia que se da y qué papel debería tener la modelización en el tratamiento introductorio del álgebra?
¿Se reconstruyen las organizaciones matemáticas escolares que aparecen propuestas en el DCN y en los libros de texto? ¿Estos son coherentes entre sí?
¿Cuál es el grado de algebrización de las organizaciones matemáticas que corresponden al tratamiento de las ecuaciones de primer grado?
¿Qué características específicas debería tener el proceso de estudio del álgebra para que las organizaciones matemáticas involucradas en su estudio tengan un carácter algebrizado?

1. 5. Hipótesis de la investigación.

- La actividad matemática que se realiza en el primer año de secundaria, en el tratamiento del álgebra, es desarticulada y no existe coherencia entre las organizaciones didácticas institucionales (las que surgen del diálogo, el convenio y la regulación en el seno de un grupo de individuos ante cierta clase de problemas)
- La enseñanza del álgebra se presenta como una generalización de la aritmética.
- Las organizaciones matemáticas escolares en el tratamiento del álgebra, no muestran la modelización algebraica como proceso de algebrización progresivo y continuo.
- Existen restricciones de origen matemático y didáctico que impiden algebrizar la organización matemática ecuaciones de primer grado.

CAPÍTULO 2. Marco teórico.

En este capítulo presentamos algunas reflexiones teóricas sobre la teoría de transposición didáctica y la teoría antropológica de lo didáctico, propuestas por Chevallard (1991); además, de algunos aportes del enfoque ontosemiótico de la instrucción y la cognición matemática (EOS) de Godino, Font y Wilhelmi (2006). Estas teorías nos brindaran herramientas de análisis que nos permitirán caracterizar la serie de transformaciones a las que son sometidos los conocimientos algebraicos al pasar de una institución a otra, resaltar el papel de las instituciones en un sistema didáctico y analizar la idoneidad didáctica de un proceso de estudio para mejorar su funcionamiento.

2.1. Teoría de transposición didáctica.

Según Chevallard, Y.; Bosch, M. & Gascón, J. (1997); la transposición didáctica es el conjunto de transformaciones adaptativas que sufre una obra para ser enseñada en el aula, considerando tanto un eslabón anterior como otro posterior. La primera etapa de la transposición tiene lugar en la propia comunidad matemática, viene luego la transposición de la obra matemática que se transforma para adaptarse a una institución didáctica concreta. Luego, vienen una tercera etapa que se desarrolla dentro del proceso didáctico mismo y que, con el tiempo, puede originar transformaciones importantes en la obra matemática.

Chevallard, Y. (1997), distingue tres tipos de saberes: *saber científico*, que es producido por los científicos; *saber a enseñar*, que es pensado y seleccionado en la noosfera (educadores, autores, etc); y saber enseñado, que resulta del trabajo realizado en aula por el profesor.

Esto lo mostramos en el siguiente esquema:

2.2. Teoría antropológica de lo didáctico.

La TAD fue uno de los primeros enfoques en considerar, como objeto de estudio e investigación, no sólo las actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula, sino todo el proceso que va desde la creación y utilización del saber matemático hasta su incorporación en la escuela como saber enseñado. Dicho objeto de estudio incluye además todas las instituciones que participan en este proceso.

Nuestro trabajo va a desarrollarse bajo el marco teórico de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), que surge del desarrollo de la teoría de transposición didáctica de Chevallard. Bajo esta perspectiva, la actividad matemática debe ser interpretada como una actividad humana junto a las demás, y no considerarla solo como la construcción de un sistema de conceptos, como la utilización de un lenguaje o como un proceso cognitivo. La TAD privilegia la dimensión institucional del conocimiento matemático, ubicando la actividad matemática y, por tanto, la actividad de estudio de la matemática, dentro del conjunto de actividades humanas. Esto porque considera que las praxeologías no dependen, en primera instancia, de las personas individualmente, sino de las *instituciones* en las que actúan. Considera que una institución es un dispositivo social en el que "viven" distintas praxeologías – maneras de hacer y de pensar determinadas – y en el que las personas "entran", convirtiéndose en *sujetos* de las instituciones, para hallar las condiciones apropiadas de desarrollo de sus actividades

Alurralde, F. & Ibarra, L. (2009), indican que:

> El enfoque antropológico precisará explicitar un modelo general de las matemáticas institucionales, que incluya la matemática escolar como un caso particular y de un modelo de las actividades matemáticas institucionales que incluya la enseñanza- aprendizaje escolar de las matemáticas como una actividad matemática institucional particular. (p. 1).

Bosch, M.; Portabella, M.; Gascón, J. & Bolea, P. (1998), tomando como referencia los programas de investigación propuestos por Lakatos, plantean situar la teoría antropológica de lo didáctico dentro del enfoque epistemológico. Sus elementos principales son:

Tabla 1: Principales elementos del enfoque epistemológico.

Núcleo firme: Constituido por un modelo de la actividad matemática y de la actividad didáctica. Sus principios fundamentales son: • La existencia de fenómenos didácticos no reducibles a fenómenos de otro tipo y específicos de las matemáticas. • La necesidad de considerar como objeto primario de investigación la actividad matemática institucionalizada y, en particular, la actividad matemática que se enseña y la que se pretende enseñar. • La ambición de construir la didáctica de las matemáticas como ciencia experimental autónoma, con su correspondiente metodología científica y con la creación de un marco teórico específico.	**Cinturón protector:** Incluye supuestos adyacentes que protegen el núcleo firme y que sí se pueden modificar. Sus postulados son: • Para estudiar el funcionamiento (y los disfuncionamientos) del sistema didáctico, así como los distintos fenómenos didácticos vinculados, es necesario empezar analizando las actividades matemáticas que se desarrollan en las distintas instituciones de enseñanza y también aquellas actividades que legitiman o motivan el proceso de enseñanza. • Toda actividad matemática contiene actividades didácticas. Toda actividad didáctica, en cuanto actividad de estudio (que incluye la producción, enseñanza y difusión de conocimientos matemáticos) es una actividad matemática (lo didáctico es lo matemático en sentido amplio).	**Heurística positiva:** Considera las líneas de investigación, cuestionamientos planteados. Un tipo de problema de investigación que se propone es: • Analizar las organizaciones matemáticas que son propuestas para ser estudiadas en la escuela, las que son efectivamente construidas en el aula y las organizaciones didácticas del profesor y de los alumnos que permiten llevar a cabo los procesos de estudio correspondientes.

Para el caso específico del presente trabajo nos abocaremos al análisis de los elementos que componen el núcleo firme, el cual según Bosch, M.; Portabella, M.; Gascón, J. & Bolea, P. (1998) tiene los siguientes componentes:

a) Un <u>modelo</u> general de la actividad matemática considerada como un proceso de estudio de campos de problemas. La noción central de esta teoría es la de organización o praxeología matemática compuesta por los siguientes elementos:

- Los tipos de problemas.
- Un conjunto estructurado de técnicas que permiten abordarlos.

- Un discurso tecnológico que describe, explica y justifica las técnicas.
- Un segundo y último nivel justificador, la teoría, que da sentido a los problemas planteados, permite interpretar las técnicas y fundamenta las descripciones y demostraciones tecnológicas.

b) Un modelo del proceso de estudio, que incluye la creación o recreación de una praxeología matemática. Dicho proceso de estudio se organiza a través de seis momentos que forman parte de la llamada teoría de los momentos didácticos:

- El momento del primer encuentro.
- El momento exploratorio.
- El momento del trabajo de la técnica.
- El momento tecnológico-teórico.
- El momento de la institucionalización.
- El momento de la evaluación.

Sobre la heurística positiva, en este trabajo describiremos el estudio introductorio del álgebra a través del análisis de sus componentes y las relaciones dinámicas que se dan en su organización matemática y didáctica; además de analizar sus condiciones de existencia institucional.

2.2.1. Elementos de la teoría antropológica de lo didáctico que se emplearán en la investigación.

Praxeología: estructuración o modelo único y coherente de toda actividad humana regularmente realizada, sobre los modos de hacer y saber. El término praxis hace referencia al saber hacer, es decir, los tipos de problemas o tareas que se estudian y las técnicas que se construyen para solucionarlos. El término logos, se identifica con el saber e incluye las descripciones y explicaciones que nos permiten entender las técnicas, esto es, el discurso tecnológico y la teoría que da sentido a los problemas planteados. Tipos de tareas, técnica, tecnología y teoría son los elementos que componen una praxeología. (Bosch, Espinoza & Gascón, 2003).

Organizaciones Matemáticas (OM): es la realidad matemática que se pretende estudiar. Las praxeologías u organizaciones matemáticas, tienen dos componentes uno práctico-técnico, formado por tareas y técnicas; y otro tecnológico-teórico, formado por tecnologías y teorías. (Parra, Otero & Elichiribehety, 2006).

Chevallard (1989), introdujo la distinción de diferentes tipos de OM, según el grado de complejidad de sus componentes:

- Organizaciones puntuales (OMP): están generadas por lo que se considera en la institución como un único tipo de tareas y está definida a partir del bloque práctico-técnico.
- Organizaciones locales (OML): es el resultado de integrar diversas praxeologías puntuales. Cada praxeología local está caracteriza por una tecnología, que sirve para justificar, explicar, relacionar entre sí y producir las técnicas de todas las praxeologías puntuales que la integran.
- Organizaciones regionales (OMR): se obtienen mediante la coordinación, articulación y posterior integración de diversas praxeologías locales con una teoría matemática en común.
- Organizaciones globales (OMG): surgen agregando varias praxeologías regionales a partir de la integración de diferentes teorías. (Chevallard, 1999, citado en Bosch, García, Gascón y Ruíz, 2006, p. 39).

Por otro lado, las organizaciones matemáticas (OM) reconstruidas y estudiadas en una determinada institución, relativas a una noción matemática, en general, no coinciden con la OM efectivamente reconstruida en el aula, y ésta, a su vez, raramente coincide con la OM efectivamente aprendida.

Por esto la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) (Chevallard, 1999), propone que se elabore una OM de referencia, que actúe como un punto de observación del análisis de las diferentes OM que se proponen, reconstruyen y aprenden. Bosch, M.; Espinoza, L. & Gascón, J. (2003), definen una OM de referencia como "un modelo de OM" que permite analizar las reconstrucciones propuestas en los programas oficiales y en los libros de texto sobre ciertos "temas" de estudio, cuestiones o nociones.

La siguiente figura muestra el proceso transpositivo que define lo que es posible estudiar o reconstruir en una clase de matemática.

Figura 1: Sucesión de OM. Adaptado de Bosch & Gascón (2006).

Organizaciones Didácticas (OD): se refiere a la forma en que una realidad matemática se pretende estudiar. Las praxeologías u organizaciones didácticas, tienen al igual que las organizaciones matemáticas dos componentes uno práctico-técnico, formado por tareas y técnicas, y el otro tecnológico-teórico, formado por tecnologías y teorías. (Parra et al, 2006).

En la reconstrucción de una OM hay ciertas situaciones didácticas que están necesariamente presentes. Chevallard denomina a estos tipos de situaciones, momentos de estudio o momentos didácticos, cuyo cumplimiento es debido a la puesta en ejecución de técnicas didácticas determinadas.

Modelización algebraica: es el proceso de reconstrucción y articulación de praxeologías de complejidad creciente, tienen su origen en el cuestionamiento de las razones de ser de las organizaciones matemáticas que se desea reconstruir y articular. La modelización algebraica permite, además, describir, generalizar y justificar procesos de resolución de problemas, así como unificar técnicas y tipos de problemas que aparecen inicialmente desconectados, para luego conducir a una ampliación y transformación progresiva del sistema inicial que se estudia, con la incorporación de nuevos tipos de problemas, nuevas técnicas de resolución, nuevas interpretaciones, nuevos vínculos con otros sistemas, etc.

Las modelizaciones algebraicas se caracterizan porque permiten modelizar todos los componentes de una obra, en particular las técnicas. Una vez modelizadas algebraicamente las técnicas pueden ser manipuladas como nuevos objetos matemáticos, esto permite cuestionarse sobre la justificación, alcance e interpretación de los resultados.

Siguiendo a Chevallard y Gascón, la modelización matemática, y en particular la modelización algebraica, se desarrolla en cuatro etapas fundamentales (Bolea, 2003):

- Problemática inicial, que comprende la situación problemática a analizar y las cuestiones o preguntas iniciales que nos formulamos al respecto.
- Construcción del modelo, consiste en identificar y definir las variables involucradas en el problema y las relaciones entre ellas.
- Trabajo del modelo, se basa en manipular las relaciones establecidas, buscar e interpretar nuevas relaciones en pos de responder alguna de las preguntas formuladas inicialmente.
- Producción de problemas nuevos, donde a partir de la modelización del sistema inicial, se simplifica la tarea de plantear nuevas cuestiones, investigar e interpretar nuevos problemas que amplían el conocimiento del sistema estudiado inicialmente.

Álgebra: es un instrumento de estudio de organizaciones previamente constituidas, o, en términos de la TAD, es una técnica.

Entenderemos, el álgebra escolar como un proceso de modelización que, a partir de una OM inicial (el sistema) construye una nueva OM (modelo) que permitirá, entre otras cosas, estudiar (describir, estructurar, relacionar con otras OM, entender, etc.) la OM de partida.

Con origen en el modelo clásico de análisis-síntesis, Gascón, J. (1993) propone una reconstrucción de la génesis del álgebra escolar a partir de los problemas verbales y de la modelización matemática. Pone énfasis en la potencialidad para trabajar, resolver o fundamentar métodos de resolución, en clases de problemas.

Desde este punto de vista, una actividad matemática algebrizada permitirá la manipulación global de la estructura de los problemas, unificando los tipos de técnicas y tecnologías utilizadas y produciendo nuevos problemas.

Técnica matemática: son las maneras de hacer que nos permiten realizar las tareas de forma sistematizada y segura. Las técnicas nos deben permitir convertir un tipo de tarea inicialmente problemática, en tareas realizadas regularmente con éxito. Chevallard, Y.; Bosch, M. & Gascón, J. (1997), aclaran que, aunque los algoritmos constituyen un tipo particular de técnica, es importante no confundir ambas nociones. En general, la aplicación de una técnica matemática siempre mantiene cierto grado de indeterminación aún cuando su definición sea precisa.

Tecnología: es el discurso interpretativo- justificativo de las técnicas y de su ámbito de aplicabilidad o validez, su principal función es aportar elementos para modificar la técnica con el fin de ampliar su alcance, superando así sus limitaciones y permitiendo en algunos casos la producción de una nueva técnica. (Chevallard, Bosch & Gascón, 1997).

Presentamos algunos resultados de la TAD en torno al algebra:

- Se caracterizan las modelizaciones algebraicas dentro de la noción de modelización matemática (Chevallard, 1989), además se considera que no existe un criterio de demarcación que permita precisar los límites entre una obra algebrizada y una obra prealgebraica. Se postula, que la algebrización de una obra matemática es una cuestión de grado, por ello se intenta caracterizar el proceso de algebrización con ayuda de la noción de modelización algebraica.

  Se dice que una organización matemática está algebrizada cuando pueda ser considerada como un modelo algebraico de otra obra matemática. Esquemáticamente, se parte de un sistema inicial, matemático o extramatemático, que se quiere estudiar, se somete primero a una modelización matemática y, luego a una modelización algebraica de la obra matemática. De esta forma se asegura la construcción de una organización matemática algebrizada. (Bosch, et al, 1998).
- Las modelizaciones (más o menos) algebraicas se distinguen de otros tipos de modelizaciones matemáticas, que podemos llamar *"prealgebraicas",* por

tres rasgos característicos fuertemente relacionados entre sí (Bosch, et al, 1998, p. 7):

(1) Las modelizaciones algebraicas modelizan explícitamente las técnicas matemáticas que forman parte del sistema inicial y que juega el papel de sistema a modelizar. Una vez modelizadas algebricamente, las técnicas pueden ser manipuladas como nuevos objetos matemáticos, lo que posibilita el rápido desarrollo de las mismas.

(2) La tematización de las técnicas, que en las obras prealgebraicas permanecen como objetos paramatemáticos (herramientas transparentes útiles para actuar, pero que no se consideran como objetos matemáticos que deban estudiarse por sí mismos) permite plantear cuestiones relativas a la justificación, alcance e interpretación de las mismas.

(3) Las modelizaciones algebraicas modelizan integramente todas los componentes de la obra matemática que hace el papel de sistema, en lugar de limitarse a modelizar aisladamente algunos de dichas componentes.

- El considerar el proceso de algebrización como una técnica didáctica o técnica de estudio, ha mostrado la profunda interdependencia entre la naturaleza y la estructura de las organizaciones matemáticas que pueden vivir en una institución didáctica determinada y los procesos de estudio que es posible llevar a cabo con dichas organizaciones. Es decir, se ha puesto de manifiesto hasta qué punto la algebrización de una obra matemática puede ser considerada como un instrumento que permite llevar a cabo un proceso de estudio. (Bolea, Bosch y Gascón, 1998, citado en Bosch, et al, 1998).

2.2.2. La modelización matemática en la teoría antropológica de lo didáctico.

La TAD postula que "gran parte de la actividad matemática puede identificarse (…) con una actividad de modelización matemática" (Chevallard, Bosch & Gascón, 1997, p. 51). Esto significa que la modelización no es sólo una dimensión de la actividad matemática sino, que la mayoría de actividades matemáticas son actividades de modelización. La noción de modelización no debe restringirse sólo a la matematización de situaciones extramatemáticas; dentro de la misma matemática es un aspecto esencial.

En el marco de la TAD los problemas importantes son aquellos que pueden reproducirse y desarrollarse en tipos de problemas más amplios y complejos; es decir, aquellos que puedan generar un conjunto amplio y rico de organizaciones matemáticas, que permitan el desarrollo de una actividad matemática y que considere las restricciones que la institución escolar impone.

En conclusión, para la TAD la modelización es un proceso de reconstrucción y articulación de organizaciones de complejidad creciente (puntual, local y regional), que deben tener su origen en el cuestionamiento de las razones de ser de las organizaciones matemáticas que se estudian.

2.2.3. Algebrización de una organización matemática.

Bolea, P.; Bosch, M. & Gascón, J. (2001), describen 4 *indicadores del grado de algebrización* de una organización matemática, los que se cumplen de manera creciente y progresiva a medida que avanzamos en los niveles de algebrización:

(1) Primera etapa del proceso de algebrización: *la manipulación de la estructura global de los problemas.* Consiste en describir los problemas resolubles con determinadas técnicas, considerándolos como problemas aislados. Por lo general se plantea una expresión algebraica y su correspondiente resolución a través de un trabajo aritmético, sin mediar en la búsqueda de expresiones algebraicas equivalentes u otro tipo de simplificaciones.

Para ilustrar presentamos un ejemplo del trabajo de Ruíz, Bosch y Gascón (2010):

Piensa un número, súmale el doble de su consecutivo, suma 15 al resultado y, por último, resta el triple del número pensado inicialmente. ¿Qué resultado se obtiene? ¿Qué pasa si se cambia el número pensado inicialmente?

(2) Segunda etapa del proceso de algebrización: *la tematización de las técnicas y nueva problemática al nivel tecnológico.* Consiste en plantear y estudiar problemas relacionados con la descripción, la interpretación, la justificación y el alcance de las técnicas que integran la obra. Se plantea una expresión algebraica, pero además se analizan las propiedades, todas las posibilidades de existencia de una solución y el instrumento de resolución en forma general.

Como ejemplo presentamos una situación planteada en el trabajo de Ruíz, Bosch & Gascón. (2010):

Marta piensa un número. Le suma el doble de su consecutivo, le resta 17 al resultado y, por último, lo divide todo entre 3. Si el resultado final es 4 unidades mayor que el doble del número pensado, ¿se puede determinar qué número pensó Marta?

(3) Tercera etapa del proceso de algebrización: *unificación y reducción de los tipos de problemas, técnicas y tecnologías.* Consiste en el planteamiento de nuevas cuestiones tecnológicas que amplían enormemente la clase a la que pertenece un problema. Dependiendo de la naturaleza del problema y del contexto en el que se formule, las cuestiones de este tipo pueden multiplicarse.

Ejemplo tomado de Ruíz, M.; Bosch, M. & Gascón, J. (2010):

En un banco nos proponen el siguiente plan de inversiones: nos dan un 5% cada trimestre y nos descuentan un 1% al final del año en concepto de comisión. ¿Cuál será el capital al final del año si la inversión inicial ha sido de 1000 €? ¿Y de aquí a 3 años? ¿Qué capital inicial debería invertir para que este se hubiese triplicado al final del año?¿Qué porcentaje deberíamos negociar con el banco cada trimestre para duplicar el capital inicial a final del año?¿Cuánto tiempo ha de pasar para que el capital inicial se triplique?

(4) Cuarta etapa del proceso de algebrización: *emergencia de tipos de problemas independientes del sistema modelizado.* Consiste en independizarse del sistema del cual la obra es un modelo algebraico y generar tipos de problemas muy alejados del contexto de dicho sistema. Ya no se piensa en la resolución del problema con un número como resultado, sino en la construcción de un modelo independiente del sistema inicial.

Ejemplo de Ferreyra, N.; Rechimont, E.; Parodi, C. & Castro, N. (2010):

Hay cinco cajas con caramelos. Se quita $1/n_1$ de los caramelos de la primera caja y se agregan a la segunda. Luego se quita $1/ n_2$ de los caramelos que hay ahora en la segunda caja y se agregan a la tercera. Más tarde, se quita $1/n_3$ de los caramelos que hay ahora en la tercera caja y se agregan a la cuarta. Finalmente, se quita $1 /n_4$ de los caramelos que hay ahora en la cuarta caja y se agregan a la quinta. Si todas las cajas terminan con una misma cantidad K de caramelos cada una. ¿Cuántos caramelos había inicialmente en cada caja?, ¿Qué características debe tener k?

Considerando las investigaciones revisadas, en el nivel secundaria y para un mismo curso se llega hasta un segundo nivel de algebrización. La exigencia requerida para el tratamiento didáctico y de generalidad en los otros dos niveles de algebrización se plantea en trabajos aplicados a nivel universitario de futuros profesores de matemática, donde el paso por cada una de estas etapas se da a partir de una situación abordable en un mismo curso y para un mismo tema.

En el caso de nuestra propuesta, plantearemos situaciones abordables hasta un segundo nivel de algebrización, debido a que sólo aplicaremos la propuesta con estudiantes de primer año de secundaria, quedando como una cuestión abierta el planteamiento de situaciones abordables a un nivel superior para estudiantes universitarios o de los últimos grados del nivel secundario.

2.3. Idoneidad didáctica de un proceso de estudio.

Considerando que necesitamos algunos elementos para el análisis de la idoneidad epistémica y ecológica de los contenidos enseñados, además de referentes relacionados con los conocimientos cognitivos previos; damos algunos alcances de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio y de las dimensiones que éste comprende.

Godino, et al. (2006), conciben la idoneidad didáctica como la articulación coherente y eficaz de las distintas dimensiones implicadas en los procesos de estudio matemático: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica.

- Idoneidad epistémica, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
- Idoneidad cognitiva, expresa el grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.
- Idoneidad interaccional, grado en que las configuraciones y trayectorias didácticas funcionan adecuadamente. Esta idoneidad permite, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y por otra parte permite resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.
- Idoneidad mediacional, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje.
- Idoneidad afectiva, grado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad afectiva está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.
- Idoneidad ecológica, grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

A continuación mostramos la relación de todas las dimensiones antes señaladas:

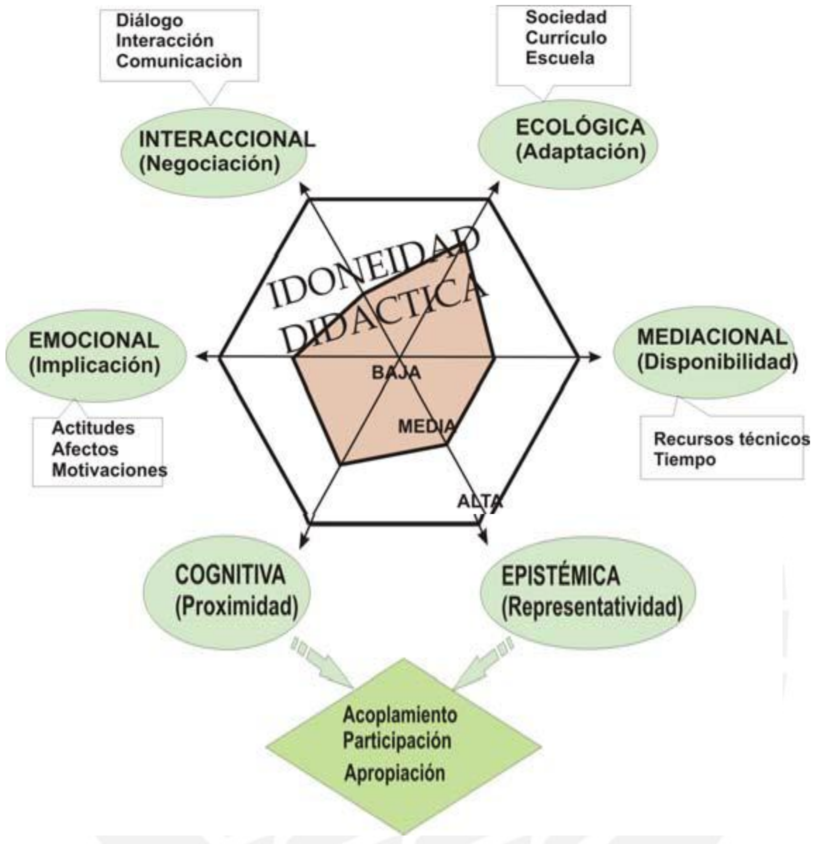


Figura 2: Del artículo: Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de de estudio de las Matemáticas de Juan D. Godino, Delisa Bencomo, Vicenç Font y Miguel R. Wilhelmi.

CAPÍTULO 3. Metodología de Investigación.

3.1. Descripción de la metodología seleccionada.

Según la estrategia de investigación aplicada, la metodología de trabajo será cualitativa de tipo etnográfico, modalidad que pasamos a explicar.

La investigación etnográfica constituye la descripción y el análisis de un campo social específico. Su meta principal es captar el punto de vista, las motivaciones y expectativas que los actores otorgan a sus propias acciones sociales. El comportamiento social involucra diversos grados y niveles de observación participante, esta permite a su vez confrontar lo que la gente dice de lo que hace, y distinguir la norma de la práctica real. La relevancia de este tipo de investigación es que permite ver muchos aspectos subjetivos que difícilmente se cuantifican o miden objetivamente.

Por otro lado, una de sus limitaciones es que por ser de naturaleza interpretativa puede estar afectada por prejuicios, que cuestionen la validez y la confiabilidad de la investigación. Por ello, para probar su confiabilidad y validez es importante que los hallazgos se comprueben por diversos medios y que se repitan las entrevistas e instrumentos para procurar su consistencia. (Rodríguez, G; Gil, J. & García, E, 1999).

En el siguiente cuadro mostramos la correlación que hay entre la etnografía y la TAD como metodología de investigación:

Tabla 2: Correlación entre la etnografía y la TAD.

INDICADORES	ETNOGRÁFICO	TAD
El propósito de la investigación.	Comprender las relaciones entre comportamiento y cultura. La aproximación etnográfica, nos lleva a considerar los significados que se generan en una cierta cultura y comunidad que vive en una institución dada, con restricciones propias a los modos de uso del saber	Nuestros objetivos: 1. Analizar si el tratamiento del álgebra en el primer año de secundaria corresponde a un proceso de algebrización y si la modelización está presente en el proceso de instrucción estudiado. 2. Mostrar que el álgebra puede surgir como instrumento para modelizar y resolver situaciones específicas de complejidad creciente.

La naturaleza del proceso de investigación.	Estudio de los contextos, énfasis en la ocurrencia de los procesos y cambios naturales. Tiene en cuenta el carácter evolutivo del estudio.	El estudio incluye el análisis de las praxeologías matemáticas y didácticas presentes en la institución escolar (tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías), en relación al dominio de investigación tratamiento del álgebra escolar.
Métodos de recolección de datos.	Observación participante, entrevistas no estructuradas, colecciones de documentos, interacción discursiva y contrastación de opiniones de los miembros.	Entrevista estructurada.* Observaciones de carácter no participante recopilando los datos en video, audio y registros escritos. Análisis de los materiales teóricos y prácticos que se ofrecen a los estudiantes (libros de texto). Análisis del programa analítico con los contenidos por unidad.
Sobre la muestra de investigación.	Estudio de un reducido número de casos.	La muestra de investigación corresponde a dos aulas de 35 alumnos cada una del primer año de secundaria.
Métodos de análisis de datos.	Se conoce los resultados de investigaciones y teorías paralelas que pueden ayudar en la interpretación y comprensión, se comparan los hallazgos con los de otros investigadores para corroborarlos o *contrastarlos* con los mismos. Descripción sistemática de las características que tienen las variables de los fenómenos en juego, de la codificación y formación de categorías conceptuales, del descubrimiento y validación de asociaciones entre los fenómenos, de la comparación de construcciones lógicas y postulados que emergen de los fenómenos de un ambiente con otros de ambientes o situaciones similares.	Interpretación y explicación de los significados en cada una de las praxeologías analizadas, considerando las investigaciones previas de la TAD y, algunas herramientas de análisis del enfoque ontosemiótico de la instrucción y la cognición matemática.

* Entrevista en las que a todos los entrevistados se les hacen las mismas preguntas con la misma formulación y en el mismo orden. Los entrevistados tienen plena libertad para manifestar su respuesta. Se trata de un cuestionario de preguntas abiertas.

3.2. Fases generales de la metodología.

La metodología de investigación tiene un modelo para el proceso de estudio, que incluye la recreación de una praxeología matemática, este proceso de estudio se organiza a través de seis momentos:

a) El momento del primer encuentro con la organización que está en juego.
b) El momento exploratorio del tipo tareas, relaciona un determinado tipo de problemas con la construcción de una técnica adecuada para abordarlos.
c) El momento de trabajo de la técnica, se refiere al dominio y nueva creación de técnicas matemáticas.
d) El momento de la constitución del entorno tecnológico-teórico (que justifique y explique las técnicas aplicadas y que permita la construcción de nuevas técnicas).
e) El momento de la institucionalización(que delimita y precisa aquellos elementos constituyentes de la organización matemática construida)
f) El momento de la evaluación de la praxeología construida. Este momento se articula con el momento de la institucionalización: la suposición de relaciones institucionales transcendentes a las personas. (Bosch, et al, 1998, p.3).

3.3. Descripción de las fases generales en el contexto de la investigación que se propone.

Tabla 3: Fases generales y fases de la investigación.

FASES GENERALES	FASES DE LA INVESTIGACIÓN
El momento del primer encuentro	Exploración y reconocimiento de la problemática en base a los estudios previos y al marco teórico de la TAD.
El momento exploratorio	**Construcción del modelo epistemológico de referencia (MER**) del conocimiento matemático: álgebra escolar, esta construcción es imprescindible para estudiar el saber matemático antes de que se transforme para ser enseñado. Una OM de referencia actúa como un punto de observación del análisis de las diferentes OM que se proponen, reconstruyen y aprenden. Bosch, Espinosa y Gascón (2003) definen una OM de referencia como “un modelo de OM” que

	permite analizar las reconstrucciones propuestas en los programas oficiales y en los libros de texto sobre ciertos "temas" de estudio, cuestiones o nociones.
El momento del trabajo de la técnica.	**Descripción, completamiento y análisis de las OM empíricas (mediante la utilización del modelo).** Descripción y análisis de las organizaciones matemáticas presentes en el currículo y desarrolladas en aula: • Observaciones de carácter no participante recopilando los datos en video, audio y registros escritos. • Revisión y análisis de los materiales teóricos y prácticos que se ofrecen a los estudiantes (libros de texto). • Revisión con carácter descriptivo de los planes de estudios, DCN y otros documentos formales que direccionan la práctica didáctica y matemática en el aula. **Revisión y validación de la OM de referencia a partir de los datos empíricos.**
El momento tecnológico-teórico	**Construcción de la "OD de referencia" asociada a la OM** • Analizar la manera de completar las organizaciones escolares existentes y proponer formas de articularlos. • Diseño de una organización didáctica para el estudio introductorio del álgebra, basada en el principio que el álgebra escolar debe aparecer para atender a la necesidad de resolver situaciones específicas. Considerando además las restricciones y condiciones impuestas por la institución. **Revisión y validación de la OD de referencia a partir de los datos empíricos**.
El momento de la institucionalización.	Se realiza la experimentación en aula de la OD diseñada. • Experimentación de la organización didáctica, reformulación de la actividad propuesta para promover la investigación y la posible adquisición del hábito de conjeturar y desarrollar modelos generales para problemas y soluciones particulares e inducir a la generalidad.
El momento de la evaluación	• Se revisará la pertinencia de la OD a partir de su puesta en práctica.

3.4. Diseño de instrumentos que se emplearán en la investigación.

Tabla 4: Diseño de instrumentos

Instrumentos	Finalidad	Características	Insumos necesarios
Entrevista estructurada.	Obtener datos empíricos que apoyen la existencia en la educación secundaria de una aritmética generalizada y de la OD alternativa llamada “modelización algebraica”.	Preguntas de desarrollo que exploren las ideas que tiene el profesor sobre su práctica en aula en relación al tratamiento del álgebra y su correspondencia con los procesos de algebrización y la modelización.	Lectura de modelos en el marco de la TAD, referidos al mismo instrumento.
Ficha técnica del investigador	Observar y analizar la manera de hacer.	A través de preguntas: ¿Qué hacen? ¿Cómo lo hacen exactamente? Sobre las tareas: ¿Están claramente identificados? ¿Son explícitos? ¿Proporcionan una buena muestra de las situaciones matemáticas encontradas? ¿Aparecen como aisladas, sin relación con el resto de las actividades? Sobre las técnicas: ¿Se elaboran efectivamente, o solamente se bosquejan? ¿Son fáciles de usar? ¿Su alcance es satisfactorio? Sobre las tecnologías: Las formas de justificación ¿Se adaptan a sus condiciones de utilización? ¿Se favorecen las justificaciones explicativas? ¿se explotan se forma óptima los resultados tecnológicos disponibles?	Observación de clase. Diseño curricular nacional. Libros de texto.

	Evaluar lo que la observación y el análisis han revelado. Desarrollar nuestra propia solución, intentado mejorar, sobre ciertos puntos juzgados negativamente.	Sobre las teorías: ¿Existen elementos teóricos explícitos? ¿Implícitos? ¿Qué permiten aclarar? ¿Justificar? ¿Para qué sirve todo eso?	Diseño curricular nacional. Libros de texto. Instrumentos de evaluación.

CAPÍTULO 4. Análisis histórico- epistemológico.

4.1. Desarrollo histórico del álgebra según algunas civilizaciones.

En este capítulo, estableceremos algunos elementos necesarios para realizar un esquema de la génesis y desarrollo histórico del álgebra.

El álgebra que se estudia en las aulas escolares es el resultado de un proceso de transposición didáctica (Chevallard, 1997), la matemática sabia se transforma en una matemática a ser enseñada y ésta a su vez en la matemática escolar aprendida.

Teniendo en cuenta que este proceso de transposición se desarrolla también a nivel temporal, consideramos necesario dar una mirada histórica a la evolución de las ideas fundamentales y, determinar el marco en el cual se desarrolló la construcción de los conocimientos relativos al álgebra. Mostraremos en esta descripción que el orden lógico no es necesariamente el orden histórico, ni tampoco el orden didáctico.

A continuación describimos los principales aportes algebraicos dados por algunas civilizaciones.

4.1.1. Civilizaciones antiguas: Egipto y Babilonia.

La historia del álgebra comenzó en el antiguo Egipto y Babilonia, donde se lograron resolver ecuaciones lineales ($ax = b$), cuadráticas ($ax^2 + bx = c$), e indeterminadas: $x^2 + y^2 = z^2$, con varias incógnitas.

El álgebra egipcia se centró casi exclusivamente en la resolución de ecuaciones lineales y su desarrollo fue notablemente inferior a la babilónica. La mayoría de los problemas que se conservan en los papiros Rhind y de Moscú están relacionados con cuestiones cotidianas. La mayoría de ellos son de tipo aritmético y respondían a situaciones concretas de la vida diaria; sin embargo, encontramos algunos que podemos clasificar como algebraicos, pues no se refiere a ningún objeto concreto. En éstos, de una forma retórica, obtenían una solución realizando operaciones con los datos de forma análoga a como hoy resolvemos dichas ecuaciones. Las ecuaciones más utilizadas por los egipcios eran de la forma: $x+ax=b$, $x + ax + bx = 0$ donde *a y b* eran números conocidos y x la incógnita, llamada aha o montón. Mostramos una ecuación lineal que aparece en el papiro de Rhid:

"Un montón y un séptimo del mismo es igual a 24".
En notación moderna, la ecuación sería: $x + (1 / 7)\, x = 24$.

Utilizaban para su solución el método de la falsa posición, como a continuación detallamos: Supongamos que la solución fuera 7. Al sustituir este valor en x nos daría:

$7 + 1/7 \cdot 7 = 8$, y como nuestra solución es *24*, es decir, *8·3*, la solución es $21=3 \cdot 7$, ya que $3 \cdot (7+1/7 \cdot 7)=24$.

Para el cálculo de la mayoría de operaciones utilizaban numerosas operaciones con fracciones unitarias (fracciones cuyo numerador era uno).

A finales del siglo IX, el matemático egipcio Abu Kamil enunció y demostró varias identidades del álgebra; además, resolvió problemas que planteaban las ecuaciones: $x + y + z = 10$, $x^2 + y^2 = z^2$.

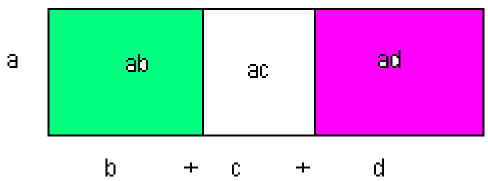
Por otro lado, los babilonios casi no le prestaron atención a las ecuaciones lineales, trabajaron más los sistemas de ecuaciones lineales y las ecuaciones de segundo grado. Resolvían cualquier ecuación cuadrática empleando esencialmente los mismos métodos que hoy se enseñan, mostrando además gran habilidad para resolver ciertas ecuaciones indeterminadas. Alrededor del año 1700 a. C ya conocían reglas para resolver ecuaciones de segundo grado en forma de problemas, como el de hallar dos números conociendo su suma s y su producto p. Como no conocían los números negativos cuya aceptación como tales fue muy posterior, tampoco consideraban las posibles raíces negativas de las ecuaciones de segundo grado. No se preocuparon por justificar y demostrar las reglas utilizadas, sólo se interesaban por disponer de métodos prácticos para resolver problemas concretos.

Los problemas de estas civilizaciones antiguas se caracterizaban, en general por suponer la existencia de una solución, eran problemas contextualizados, se enunciaban y resolvían en forma retórica a través de un ejemplo. En particular el álgebra babilónica tuvo un alto nivel de desarrollo numérico, y se considera que sus métodos de resolución eran en principio geométricos.

4.1.2. Grecia.

Los griegos fueron los primeros en establecer que las proposiciones de la Matemática debían tener valor universal. Los problemas se formulaban en lenguaje retórico y se resolvían en términos de longitudes y áreas; además, utilizaban procedimientos geométricos para obtener raíces irracionales (representados por segmentos de recta) en una época en que los números irracionales no eran conocidos.

Empleando un álgebra geométrica, resolvían correctamente ecuaciones de segundo grado y llegaron a demostrar importantes resultados algebraicos, como por ejemplo: a(b+c+d) = ab+ ac+ ad



Sessa, C. (2005), señala que en el desarrollo geométrico de Euclides, los enunciados de las proposiciones son generales y están expresados en lenguaje natural; los datos correspondientes a objetos geométricos son genéricos y las demostraciones están indicadas con letras, los teoremas son demostrados rigurosamente, y los problemas son resueltos mediante procedimientos generales en los que se justifica su validez.

Diofanto de Alejandría, se considera el creador del Álgebra, pues fue el primero en publicar un tratado que incluye la resolución en números enteros de las ecuaciones indeterminadas de primer grado con dos incógnitas, y un gran número de problemas sobre ecuaciones de primer y segundo grado. Además, dio un gran aporte al lenguaje algebraico, creando el álgebra sincopada y usando por primera vez un símbolo literal para representar una incógnita en una ecuación.

En ese momento histórico se comienzan a sentar las bases de la generalización, aún sin la existencia de un lenguaje simbólico.

4.1.3. Arabia e India.

La palabra árabe al-jabru que significa 'reducción', es el origen de la palabra álgebra. Además, en el mundo islámico se le llamó "ciencia de la reducción y el equilibrio".

Los árabes introdujeron la numeración y el álgebra, recogiendo la herencia de los griegos y asimilando el espíritu práctico de las matemáticas desarrolladas por los hindúes. Los algebristas árabes resolvieron ecuaciones (especialmente cuadráticas) en forma algebraica y con validación geométrica.

Puig, L. (2003), destaca que los problemas no se resuelven sólo para encontrar su solución, sino para analizar clases de problemas que pueden resolverse con ese procedimiento de resolución u otro similar. Este aspecto, no había aparecido en el álgebra babilónica y constituye un avance importante en el tratamiento de lo algebraico entre los árabes.

Entre los matemáticos árabes sobresalen Al- Khuarizmi (siglo IX), cuyo libro fue una presentación sistemática de la teoría fundamental de ecuaciones, con ejemplos y demostraciones incluidas. Algunos autores consideran que el título de padre del álgebra se lo tiene más merecido Al-Khuarizmi que Diofanto, por sus aportes a los métodos de resolución de problemas y ecuaciones.

Por otro lado, Mohamed ben Musa compuso el primer tratado de álgebra que apareció entre los árabes, el mismo que contenía la adición, sustracción y la multiplicación de expresiones algebraicas con una incógnita, potencias de segundo grado y hasta raíces cuadradas. Otro poeta y matemático árabe que hizo un gran aporte fue Omar Khayam (1048 d. C- 1131 d.c), quien descubrió un método geométrico para resolver ecuaciones cúbicas mediante la intersección de una parábola con una circunferencia.

En la India, destacan Brahmagupta (siglo VII) a quien se le atribuye encontrar la solución general de la ecuación diofántica lineal ax +by= c, siendo a, b y c enteros. Bhaskara, otro matemático hindú, varios siglos después (siglo XII), mostró un gran dominio en el tratamiento de problemas indeterminados y cuadráticos, a través de su libro el Lilavati.

Entre los métodos de resolución empleados por los hindúes figuran, entre otros, la regla de tres y el método de inversión para resolver ecuaciones que consiste en realizar todas las operaciones en orden inverso. El siguiente es un ejemplo tomado del Aryabhatiya:

Dime, hermosa niña de ojos radiantes, ¿ cuál es el número que multiplicado por 3, aumentado en las 3/4 partes del producto, dividido después entre 7 y disminuido en 1/3 del cociente, multiplicado por sí mismo, restándole 52; extrayendo la raíz cuadrada, sumándole 8 y dividiéndole por 10 , da el número 2 ?"(Boyer, C, 1996)

La solución es 28 y se puede obtener partiendo del número 2 y realizando todas las operaciones inversas, en orden inverso al que aparecen en el enunciado del problema, es decir de atrás hacia delante:

$$(2 \times 10 - 8)^2 + 52 = 196$$

$$\sqrt{196} = 14$$

$$\left(14 \times \frac{3}{2} \times 7 \times \frac{4}{7}\right) \div 3 = 28$$

Como los problemas matemáticos eran originados por situaciones de índole práctico sólo les interesaban los números positivos.
Los árabes y los hindúes se desarrollaron básicamente en:

- La aplicación de reglas sencillas para el cálculo, que formaron la algoritmia, nombre que se daba a la aritmética del siglo XIII, derivado del nombre el algebrista árabe Al- Khuarizmi.
- La resolución de problemas prácticos que requerían la aplicación de números, como por ejemplo la resolución de ecuaciones.
- El estudio de series.

La manera de trabajar entre los griegos y los pueblos orientales tuvo algunas diferencias. Así, la introducción del razonamiento deductivo, las resoluciones generales mediante demostraciones de teoremas, el rigor matemático, son características de los griegos. Mientras que la matemática oriental ha sido más intuitiva y analógica (después de comprender una línea particular de argumento puede inferir varios tipos de razonamiento similares), con un lenguaje más sincopado; situación que les permitió situarse de manera diferente frente a los problemas y admitir la posibilidad de que las ecuaciones tengan más de una solución.

4.1.4. Occidente.

Leonardo de Pisa, conocido como Fibonacci, vivió a comienzos del siglo XII y publicó el Liber quadratorum, un trabajo sobre ecuaciones indeterminadas de segundo grado.
En el siglo XIV, Oresme empezó a trabajar la representación gráfica de la función lineal, representó magnitudes físicas en el plano mediante segmentos en forma horizontal (para los valores de la variable independiente) y vertical (para los de la dependiente).
El periodo comprendido entre finales del siglo XV y mediados del siglo XVII, se caracterizó por un avance notable en la notación algebraica.
En el siglo XV, el matemático francés Nicolás Chuquet introdujo en Europa occidental el uso de los números negativos y una notación exponencial muy

parecida a la que usamos hoy en día, la cual utilizó indistintamente exponentes positivos o negativos.

A principios del siglo XVI los matemáticos italianos Scipione del Ferro, Tartaglia y Gerolamo Cardano resolvieron la ecuación cúbica general en función de las constantes que aparecían en la ecuación. Ludovico Ferrari, alumno de Cardano, encontró la solución exacta para la ecuación de cuarto grado y, como consecuencia, ciertos matemáticos de los siglos posteriores intentaron encontrar la fórmula de las raíces de las ecuaciones de quinto grado y superior. Sin embargo, a principios del siglo XIX el matemático noruego Abel Niels y el francés Évariste Galois demostraron la inexistencia de dicha fórmula.

Según Lages, E. (1998), con respecto al descubrimiento de soluciones para las ecuaciones de tercer y cuarto grado, habría que señalar el contexto de competencia y conflicto en que se divulgaron algunas de sus soluciones. Así tenemos a Ferro, quién sólo compartió con su discípulo Antonio María Fiore la solución de las situaciones: $x^3 + px = q$ y $x^3 = px + q$. En 1535, Fiore desafío a Tartaglia para una contienda matemática; el resultado de dicha contienda fue el éxito rotundo de Tartaglia, quien logró deducir una solución general para las ecuaciones cúbicas del tipo: $x^3 + mx^2 = h$.

Cardano publicó el libro "Ars Magna", basándose en los manuscritos de Ferro, ya que por un juramento hecho a Tartaglia estaba impedido de publicar la solución de Tartaglia. En 1545, apareció el "Ars Magna", publicación que generó una reacción negativa en Tartaglia, por considerarla un robo intelectual y la falta a una promesa. Históricamente podemos entender las razones de Tartaglia, pues la fórmula de la ecuación de tercer grado es conocida como "fórmula de Cardano", debido a que fue primeramente publicada en el "Ars Magna", a pesar que Cardano indicó que la fórmula fue descubierta por Ferro y redescubierta por Tartaglia.

En el "Ars Magna", Cardano aceptó los números negativos y enunció las leyes que lo rigen, al mismo señaló la existencia de un nuevo tipo de número al que denominó ficticio o sofisticado.

Francisco Viete (1540- 1603), creó el álgebra moderna. Fue el primero en emplear letras para designar cantidades desconocidas y conocidas, creó algunos símbolos matemáticos y generalizó su empleo a todas las operaciones que estaban en uso en su tiempo.

Con Vieta se produjo un cambio sustancial al usar letras tanto para las incógnitas (vocales), como para los valores conocidos(consonantes); utiliza los signos germánicos + (para la suma) y – (para la resta); mientras que el resto de las operaciones y los exponentes de las incógnitas, los continúan indicando mediante palabras o abreviaturas. Por lo anterior, se identifica con Viete el comienzo del álgebra simbólica, que va más allá de la existencia de letras y signos, y que busca relacionar algo con lo que lo representa. En ese momento, encontramos por primera vez una distinción clara entre el concepto de parámetro y la idea de incógnita.

Viete, utiliza las letras no sólo para designar las incógnitas, sino también para designar los datos y realizar operaciones con ellos. Además, considerando el tipo de razonamiento decide llamar al álgebra "el arte analítica", para él el álgebra era un método para el estudio de diversas formas generales de las ecuaciones.

Según Boyer, C. (1996), Viete conocía también algunas de las relaciones que hay entre las raíces y los coeficientes de una ecuación algebraica, pero aquí se encontró con dificultades derivadas de no admitir ni coeficientes ni raíces negativas.

Stevin, utilizó para las potencias una notación puramente simbólica, así escribía 2 en vez de Q (cuadrado), 3 para C (cubo), 4 en lugar de QQ(cuadrado-cuadrado); además proponía que este tipo de notación se extendiera a las potencias fraccionarias.

Por otro lado, Descartes, creador de la geometría analítica, formuló la interpretación de las raíces negativas y nos legó el método de coeficientes indeterminados y el teorema que llevan su nombre.

El álgebra continúa avanzando, y en 1572 el boloñes Raffaele Bombelli introdujo los números imaginarios y complejos, necesarios para resolver un caso de la ecuación de tercer grado.

Fermat (1601- 1665), inventó el método de máximos y mínimos y el cálculo de probabilidades; además, resolvió el problema de la determinación de la tangente a un arco por un método que no difiere de las derivadas que empleamos actualmente. Fermat representó gráficamente las soluciones de las ecuaciones indeterminadas y con él se establece que la ecuación de primer grado (con dos variables) representa una línea recta.

Hasta aquí, notamos dos avances importantes: el progreso del lenguaje simbólico con Descartes, y el hecho que se pueda resolver una ecuación mediante un cambio de registro de representación.

Leibniz (1616- 1703) en Alemania y Newton (1647-1727) en Inglaterra en forma paralela desarrollaron el cálculo infinitesimal, que es un poderoso método de investigación analítica.

Niels Henrik Abel (1802- 1829), demostró la imposibilidad de resolver las ecuaciones de quinto grado usando raíces, además, desarrolló un método general para la construcción de funciones periódicas recíprocas de la integral elíptica.

Evariste Galois (1811- 1832), hizo descubrimientos muy avanzados, en particular, determinó la condición necesaria y suficiente para que un polinomio sea resuelto por radicales, esto fue escrito la noche anterior a morir en un duelo. Sus demostraciones mostraban métodos diferentes a los presentados por Abel.

Gauss, inventó un método que muestra el tratamiento de las letras como variables y que permite encontrar las infinitas soluciones de las ecuaciones diofánticas lineales. En los tiempos de Gauss, el foco de atención se trasladó de las ecuaciones polinómicas, al estudio de la estructura de sistemas matemáticos abstractos, cuyos axiomas estaban basados en el comportamiento de objetos matemáticos, como los números complejos que los matemáticos habían encontrado al estudiar las ecuaciones polinómicas.; dos ejemplos de dichos sistemas son los grupos y las cuaternas. Los grupos comenzaron como sistemas de permutaciones y combinaciones de las raíces de polinomios, pero evolucionaron para llegar a ser uno de los más importantes conceptos unificadores de las matemáticas en el siglo XIX. Las cuaternas fueron descubiertas por el matemático y astrónomo irlandés William Rowan Hamilton, quien desarrolló la aritmética de los números complejos para las cuaternas. Especificamos que, mientras los números complejos son de la forma: a +bi, las cuaternas son de la forma a+ bi+ cj+ dk.

Después del descubrimiento de Hamilton, el matemático alemán Hermann Grassmann empezó a investigar los vectores. El físico estadounidense J. W. Gibbs encontró en el álgebra vectorial un sistema de gran utilidad para los físicos, del mismo modo que Hamilton había hecho con las cuaternas. La amplia influencia de este enfoque abstracto llevó a George Boole a escribir "Investigación sobre las leyes del pensamiento" (1854), un tratamiento algebraico de la lógica básica.

Desde entonces, el álgebra moderna también llamada álgebra abstracta ha seguido evolucionando y se han obtenido resultados importantes con aplicaciones en todas las ramas de las ciencias.

A partir de ese momento, las fórmulas y transformaciones se ven como objetos de estudio en sí mismos, no sólo como procesos. Además, los objetos que se estudian en el álgebra son mucho más abstractos y generales.

Del análisis histórico realizado, consideramos que los conocimientos algebraicos surgieron inicialmente como una herramienta para resolver problemas, y luego se transformaron en objetos de estudio.

En contraposición con esto, es común que en la educación escolar se observe el proceso inverso. El álgebra en numerosas ocasiones se presenta a los estudiantes como un lenguaje complejo y acabado, en consecuencia, los estudiantes llegan a manipular las expresiones algebraicas a través de reglas sin notar la conexión con las situaciones que estos objetos pueden describir y resolver.

Esta consideración histórica es la que pretendemos reafirmar, mostrando el álgebra como un instrumento para modelizar y resolver problemas. Para esto, apoyándonos en las herramientas de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, nuestro trabajo considera el estudio de los efectos transpositivos de los saberes en un proceso histórico. Además, creemos que la noción de transposición didáctica actúa sobre praxeologías matemáticas dotadas de una dinámica compleja y en un proceso de reorganización permanente.

4.2. Evolución de los principales conocimientos algebraicos.

A continuación presentamos descriptivamente, manera de síntesis, la evolución de los principales conocimientos algebraicos vinculados a nuestro objeto de investigación.

En su relación con la aritmética:

En el contexto de la numeración de posición, la aparición del cero, constituye una pieza esencial y evidencia un esfuerzo de abstracción lograda por los hindúes.

La utilidad de la noción anterior se hace evidente cuando se combinan las operaciones aritméticas entre sí con el planteamiento de identidades como: $1+2+3+\ldots+(n-1)+n=n(n+1)/2$.

En relación al tratamiento de las ecuaciones:

Los babilonios resuelven igualdades algebraicas, del tipo $ax=b$, $x(x+a)=b$, pero sin explicar ni justificar los procedimientos empleados.

Los griegos resolvieron ecuaciones de segundo grado, pero en el contexto de problemas de construcción geométrica. Además, descubrieron cómo utilizar secciones cónicas para resolver algunas ecuaciones cúbicas. Sin embargo, esto no lo sabían como un hecho general, sino que explotaban sus consecuencias en casos concretos. Actualmente conocemos que si una cónica interseca a otra cónica, los puntos de intersección están determinados por una ecuación de tercer o cuarto grado (dependiendo de las cónicas).

Se inicia el estudio de la solución de ecuaciones cúbicas, en el marco de la búsqueda de soluciones a los problemas clásicos de construcción con regla y compás, en particular el problema de la duplicación del cubo.

En la búsqueda de soluciones de las ecuaciones de la forma $x^2+1=0$ Cardano concluye que su solución era un número imposible, y por ello lo llamó número imaginario.

La solución algebraica de las ecuaciones cúbicas y cuarticas se dio en el renacimiento, con los aportes de Ferro, Tartaglia, Fiore y Cardano.

Lagrange, con su estudio de las funciones simétricas intentó hallar el procedimiento para resolver ecuaciones quínticas; sin embargo, fracasó en el intento. Posteriormente Gauss estableció un precedente para demostrar la insolubilidad de la quíntica. Siendo finalmente Abel quien demostró que la ecuación de quinto grado no es soluble por radicales.

En este contexto de métodos de solución de ecuaciones, se evidencian los nexos entre el álgebra y la geometría; así como los métodos numéricos por aproximación como formas de solución.

Respecto a los usos de las variables:

Diofanto analiza las ecuaciones considerando la variable como incógnita (dato desconocido manipulado como cantidad conocida). Además, empleó un símbolo único para la variable desconocida (στ) y representó las potencias de esta como δς para el cuadrado, δδς para el duplo del cuadrado, χς para el cubo, δχς para la quinta potencia; pero carecía de notación para representar a la vez varias incógnitas, lo que le impidió dar soluciones completas a otras situaciones.

Los matemáticos árabes del periodo medioeval desarrollaron métodos sofisticados para resolver ecuaciones, pero los expresaban en palabras, no en símbolos.

El francés Nicolás Chuquet, utilizaba notación exponencial (superíndices) para potencias de la incógnita, pero no tenía un símbolo explícito para la propia incógnita. Posteriormente Descartes reparó la notación, sin embargo utilizaba xx para el cuadrado.

Se da luego un cambio fundamental cuando Francois Vieta introduce el uso de las consonantes B, C, D, F,G ,… para representar cantidades conocidas, y las vocales A, E, I, … para representar incógnitas. El aporte de Viete fue sumamente importante, ya que permitió la institucionalización de un simbolismo algebraico que, aunque deficiente en cuanto a notación de operaciones y exponentes, permitió el tratamiento de ecuaciones algebraicas generales. Antes de Viete sólo se resolvían cuestiones particulares.

La resolución de ecuaciones algebraicas:

Viete, observó las relaciones que existen entre las raíces y los coeficientes de una ecuación polinómica, esto permitió avances en los métodos de factorización para la solución de ecuaciones polinómicas. Una de las limitaciones de sus estudios fue que reconocía como válidas sólo las soluciones reales positivas. Posteriormente cuando se llega a la aceptación de las raíces negativas y complejas, será posible concluir con toda generalidad que los coeficientes de una ecuación polinómica son funciones simétricas de las raíces.

La notación de Viete fue perfeccionada por Descartes y Newton. Este último escribió las potencias de la incógnita exactamente como hacemos ahora, incluyendo la notación para exponentes fraccionarios y negativos.

A su vez, Leibniz y Newton designan mediante una letra el grado de la ecuación y por la letra con subíndice a_k el coeficiente de x^k en una ecuación. Con este aporte, se considera de manera general el problema de la resolución de una ecuación algebraica cualquiera.

$a_0 + a_1x + \ldots + a_n x^n = 0.$

Se pasó así al estudio de cuestiones más generales y abstractas, es decir, se calculan ciertas cosas que no son números como si fueran números. Se hace evidente que el desarrollo de algoritmos para resolver ecuaciones abrió caminos hacia la construcción de significados y hacia la generalidad.

La teoría de grupos y el álgebra abstracta.

Del intento por resolver ecuaciones algebraicas, en especial la ecuación de quinto grado surgió el estudio de la teoría de grupos. En 1832, Evariste Galois formalizó el estudio de las raíces complejas de polinomios, desarrollando la noción de grupo abstracto. A su vez, estudió algunas de las propiedades fundamentales de los grupos, mostrando además su valor en las matemáticas. Galois también estableció un precedente para demostrar que algunos problemas no podrían ser solubles por métodos particulares.

Siendo finalmente, Abel quien demuestra que la ecuación de quinto grado no es soluble por radicales.

Por otro lado, los trabajos de Lagrange, Abel, Galois y otros, sobre el estudio de las permutaciones y la invarianza de las funciones simétricas de las raíces, constituyeron la clave para una teoría general de solución de ecuaciones por fórmula algebraica y la materia prima para los primeros estudios de grupos.

Algunas de las aplicaciones de la teoría de grupos se dan en el estudio de los movimientos del plano, el trabajo con números y operaciones con números complejos.

La construcción de la teoría de los números complejos, se debe a Hamilton (1840), en base a los trabajos de Wessel, Gauss y Argand. La interpretación geométrica de los números complejos y la necesidad de representar las transformaciones que se pueden hacer con los vectores, generó el uso simbólico para sus rotaciones y sus operaciones. En ese momento, los objetos del cálculo no eran sólo números. A su vez, la construcción de significado para los números complejos (que surgen de la solución algebraica de ecuaciones polinómicas), se constituyó en un punto de apoyo para la caracterización de las raíces. Esto, permitió garantizar la existencia de raíces para tales ecuaciones; lo cual no sólo da solidez a la teoría de ecuaciones, sino proporciona solución a problemas en el cálculo como la integración por fracciones parciales o la solución de ecuaciones diferenciales.

Otra idea aparecida a comienzos del siglo XIX, fue el estudio con ternas (a, b, c) o con sistemas (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5,… a_n) más generales.

Aparece el método axiomático, en la que se caracteriza a las estructuras algebraicas con las diversas relaciones que se imponen entre las operaciones dadas.

Tabla 5: Evolución de los principales conocimientos algebraicos.

De la solución de ecuaciones

- Los matemáticos hindúes descubrimiento el cero, que puede asociarse al elemento neutro de las estrucuturas de grupo y anillo .
- Los babilonios resuelven ecuaciones de la forma ax=b, x(x+a) = b., pero sin justificar sus resultados.
- Los griegos resuelven las ecuaciones de segundo grado en contextos geométricos.
- Con la solución de ecuaciones de la forma $x^2 + 1 = 0$ surgen los números imaginarios.
- Se resuelven ecuaciones cúbicas y cuárticas, en cuanto a la técnica empleada las de cuarto grado se trataban de reducir a grado 3.
- Lo que aparecen primero fueron los problemas y los métodos. Después fue inventada la notación simbólica.
- Viete , en el siglo XIX, usa usan letras para representar incógnitas o variables y otras letras para representar coeficientes o constantes. Esto permitió la institucionalización de un simbolismo algebraico que permitió el tratamiento de ecuaciones algebraicas generales.
- Abel , demuestra que la ecuación de quinto grado no es soluble por radicales.

Al álgebra abstracta

- Se observan las relaciones que existen entre las raíces y los coeficientes de una ecuación polinómica, lo que permitió avances en los métodos de factorización.
- Se aceptan las raíces negativas y complejas.
- Se formaliza el estudio de las raíces complejas de polinomios.
- La teoría de grupos nace resolviendo el problema de solubilidad de ecuaciones de quinto grado .
- La teoría de grupos se desarrolla con los trabajos de Galois, Lagrange, Abel y Gauss.
- En el siglo XIX Cayley introdujo el concepto abstracto de grupo.
- Aparece el enfoque axiomático, que caracteriza a las estructuras algebraicas, sus diversas relaciones y operaciones.
- Se amplia el dominio del álgebra mediante el concepto de ley de composición, a nuevos objetos matemáticos como vectores, cuaterniones y matrices.

4.3. Análisis epistemológico desde el álgebra abstracta.

Considerando la estrecha relación existente entre el álgebra abstracta y nuestro tema de investigación, presentamos algunos alcances teóricos del álgebra abstracta y de su organización estructural que muestran claramente sus vínculos con el álgebra a nivel escolar. Tomaremos como referente de lo que actualmente se entiende como saber sabio algunos elementos teóricos presentados por Herstein, I. (1988).

Definición de anillo: Se dice que un conjunto no vacío R es un anillo si tiene dos operaciones + y · tales que:

(a) a, b Є R implica que a + b Є R.

(b) a + b = b + a para a, b Є R.

(c) (a + b) + c = a + (b + c) para a, b, c Є R.

(d) Existe un elemento 0 Є R tal que a + 0 = a para todo a Є R.

(e) Dado a Є R, existe un b Є R tal que a + b = 0 (b se expresará como –a).

(f) a, b Є R implica que a . b Є R.

(g) a. (b . c) = (a. b) . c para a, b, c Є R.

(h) a (b + c) = a. b + a. c y (b + c) . a = b. a + c. a para a, b, c Є R.

Consideramos a continuación algunas reglas conocidas que no se exigen para un anillo general.

En primer lugar, no se postuló la existencia de un elemento 1 Є R tal que a . 1 = 1. a = a para todo a Є R. Cuando además se cumple con esta condición decimos que R es un anillo con unidad.

En segundo lugar, tenemos la propiedad que enuncia que siempre que a . b=0 se concluye que a = 0 o bien b= 0. No es necesario que esto sea cierto en un anillo en general. Cuando es válido, el anillo se llama dominio de integridad.

En tercer lugar, si en un anillo se cumple la ley conmutativa de la multiplicación, a. b = b. a ∀ a, b Є R se dice que el anillo es conmutativo.

Definición de campo. Un campo F es un anillo conmutativo con elemento unidad 1 tal que, para todo a Є F distinto de cero existe un elemento a^{-1} Є F de tal modo que a. a^{-1} = 1.

En otras palabras, un campo es un anillo conmutativo en el cual se puede dividir libremente entre elementos distintos de cero.

Anillo de polinomios. Sea F un campo; el anillo de polinomios en x sobre F, que siempre se expresará como F[x], es el conjunto de todas las expresiones formales $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$, donde los a_i, llamados coeficientes del polinomio p(x), están en F. En F[x] se definen la igualdad, la suma y el producto de dos polinomios para hacer de F[x] un anillo conmutativo.

A continuación definiremos de manera formal la igualdad, la suma y el producto de polinomios:

Igualdad. Se define que $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ y $q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1} x^{n-1} + b_m x^m$ son iguales si y sólo si sus coeficientes correspondientes son iguales, es decir, si y sólo si $a_i = b_i$ para todo $i \geq 0$

Adición. Si $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ y $q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{m-1} x^{m-1} + b_m x^m$, se define $p(x) + q(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{s-1} x^{s-1} + c_s x^s$, donde para cada i, $c_i = a_i + b_i$. Así que los polinomios se suman sumando sus coeficientes correspondientes.

Multiplicación. Si $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ y $q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1} x^{n-1} + b_m x^m$, se define $p(x) . q(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_t x^t$ donde los c_i se determinan multiplicando la expresión formalmente, utilizando las leyes distributivas y las reglas de los exponentes $x^u x^v = x^{u+v}$, y reduciendo términos.

De manera más formal:

$c_i = a_i b_0 + a_{i-1} b_1 + \ldots + a_1 b_{i-1} + a_0 b_i$ para todo i.

Además:

Lema. F[x] es un anillo conmutativo con unidad.

Presentamos a continuación algunas definiciones asociadas a los polinomios: grado de un polinomio, polinomio mónico, ideal en un anillo, divisibilidad, máximo común divisor y polinomios primos entre sí.

Definición. Si $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x_n$ y $a_n \neq 0$, entonces el grado de p(x), denotado por grd p(x) es n. De modo que, el grado de un polinomio p (x) es el exponente más grande de x presente en la expresión p(x) con coeficiente no nulo.

Definición. $f(x) \in F[x]$ es un polinomio mónico si el coeficiente de su potencia con mayor exponente es 1. Así que si f(x) es mónico significa que tiene la siguiente forma:

$f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$

Definición. Sea R un anillo. Un subconjunto no vacío I de R se llama ideal de R si:

a) I es un subgrupo aditivo de R.

b) Dados $r \in R$, $a \in I$, entonces $ra \in I$ y $ar \in I$.

De las dos definiciones previas enunciamos que si I es un ideal de F[x] , entonces existe solamente un polinomio mónico de grado mínimo en I.

Definición. Si f(x) y g(x) ≠0 Є F[x], entonces se dice que g(x) divide a f(x), expresado como g(x) \ f(x), si f(x) = a(x) g(x) para algún a(x) Є F[x]. Para obtener cierta clase de unicidad, se exigirá que el máximo común divisor siempre sea un polinomio mónico.

Definición. Se dice que el polinomio d(x) Є F[x] es el máximo común divisor de f(x), g(x) Є F[x], (donde no son a la vez f(x) = 0 y g(x) = 0) si d(x) es un polinomio mónico tal que:

(a) d(x) \f(x) y d(x) \ g(x).

(b) Si h(x) \ f(x) y h(x) \ g(x), entonces h(x) \ d(x).

Esta definición se complementa con el siguiente teorema en el cual se muestra la existencia y la forma del máximo común divisor.

Teorema. Dados f(x) y g(x) ≠0 en F[x], entonces su máximo común divisor d(x) Є F[x] existe; además, d(x) = a (x) f(x) + b(x) g(x) para ciertos a(x), b(x) Є F[x].

Definición. Se dice que dos polinomios f(x), g(x) en F[x] son primos entre sí si su máximo común divisor es 1.

Esta presentación nos muestra el carácter estructural y riguroso del tema de polinomios dado desde la llamada matemática sabia.

Dentro del estudio de las estructuras algebraicas, consideramos al anillo de polinomios, y especialmente a la factorización de polinomios como el tema central que permite obtener las raíces de una ecuación. Quizás esto de pie para pensar en el futuro que la presentación de tareas asociadas a la búsqueda de raíces pueda ser el foco de atención cuando se trabaje la noción de polinomio en la escuela.

4.4. Naturaleza matemática de la variable y de la igualdad.

Para el análisis de las características de uso de las variables y de la igualdad en los libros de textos seleccionados, y en el diseño de la propuesta de organización didáctica, consideramos necesario presentar el aporte dado por Godino y Font (2003). Estos autores nos proponen una clasificación en cuanto a usos de la variable y la igualdad que a continuación detallamos.

4.4.1. Variable.

Godino, J. & Font, V. (2003), establecen que una variable es un símbolo que se coloca en lugar de cualquier elemento de un conjunto, sean de números u otros objetos.

Dentro de las matemáticas, las variables son importantes porque permiten expresar regularidades y relaciones generales entre los objetos de una manera eficaz. Algunos usos de las variables son los siguientes:

- **Las variables como incógnitas**: cuando se usa para representar un número u otro objeto matemático desconocido que se manipula como si fuera conocido. Su valor se puede determinar con exactitud, considerando las restricciones propias del problema.

  Ejemplo:

  ¿Cuánto vale x para que sea cierta la igualdad $5x + 2 = 2x + 5$?
- **Las variables como indeterminadas o expresión de patrones generales**: cuando la variable se usa en enunciados que son ciertos para todos los números u objetos, aparece en generalizaciones y métodos generales.

  Ejemplo:

  Para todos los números reales se cumple que $x \cdot y = y \cdot x$
- **Las variables para expresar cantidades que varían conjuntamente***:* cuando el cambio en una variable determina el cambio de la otra, evidenciándose la dependencia entre las mismas.

  Ejemplo:

  En la expresión $y = 4x + 6$, cuando cambia x también lo hace y.
- **Las variables como constantes o parámetros***:* cuando un objeto matemático conocido (número, conjunto, figura, etc) se manipula como desconocido y puede asumir cualquier valor.

  Ejemplo:

Es el caso de la letra *a* en la fórmula de la función de proporcionalidad y = ax. En un primer momento, se considera que la letra *a* no varía y que sólo lo hacen de manera conjunta la x y la y; no habiendo diferencia entre tener y = ax o y = 2x. En un segundo momento, se ha de considerar que *a* puede variar y tomar cualquier valor, con lo que obtenemos la familia de todas las funciones de proporcionalidad.

4.4.2. Igualdad.

Godino, J. & Font, V. (2003), en un documento de didáctica para maestros señalan que el signo "=" indica que lo que se encuentra a la izquierda de este signo, llamado primer miembro de la igualdad, y lo que se encuentra a su derecha, llamado segundo miembro de la igualdad, son dos maneras de designar al mismo objeto, o son dos escrituras diferentes del mismo.

Con esta consideración, y teniendo en cuenta la naturaleza de los elementos que intervienen en una igualdad se pueden considerar las siguientes variantes:

- Si en la igualdad aparecen variables y la igualdad es verdadera para cualquier valor que tomen las variables, se dice que se trata de una identidad.

  Ejemplo:

  $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

- Si la igualdad es verdadera sólo para algunos valores de la variable se dice que es una ecuación.

  Ejemplo:

  $2x+13 = 27$.

- Si la igualdad se usa para expresar la relación de dependencia entre dos o más variables, en este caso se denomina fórmula.

  Ejemplo:

  $v = \frac{e}{t}$. En este caso tiene que identificar la pregunta, entender cómo se combinan los datos y efectuar sus cálculos.

CAPÍTULO 5. Tratamiento del álgebra en la escuela.

En este capítulo proporcionaremos algunos elementos para el análisis del funcionamiento didáctico del tratamiento del álgebra escolar en el primer año de secundaria.

En nuestro caso realizaremos un análisis de:

- El tratamiento algebraico en el DCN (diseño curricular nacional).
- El contenido de algunos textos de uso en el primer año de secundaria y de su idoneidad epistémica.
- Las prácticas docentes en el tratamiento del álgebra.

5.1. Descripción del tratamiento algebraico en los programas curriculares del nivel secundario.

El DCN (Diseño Curricular Nacional), señala que el área curricular de matemática se orienta a desarrollar el pensamiento matemático y el razonamiento lógico del estudiante desde los primeros grados, con la finalidad que vaya desarrollando las capacidades que requiere para plantear y resolver con actitud analítica los problemas de su contexto y de la realidad.

En el mismo documento se indica que para desarrollar el pensamiento matemático, resulta relevante el análisis de procesos de casos particulares, búsqueda de diversos métodos de solución, formulación de conjeturas, presentación de argumentos para sustentar las relaciones, extensión y generalización de resultados, y la comunicación usando el lenguaje matemático.

En el caso del área de matemática, las capacidades explicitadas para cada grado involucran los procesos transversales de razonamiento y demostración, comunicación matemática y resolución de problemas, siendo este último el proceso a partir del cual se formulan las competencias del área en los tres niveles.

Para fines curriculares, el área de matemática en este nivel se organiza en función de:

• Números, relaciones y funciones
• Geometría y medición
• Estadística y probabilidad.

A continuación lo que literalmente menciona el DCN, respecto a cada una de estas organizaciones matemáticas:

Número, relaciones y funciones

Se refiere al conocimiento de los números, relaciones y funciones y a las propiedades de las operaciones y conjuntos.

Los estudiantes deben internalizar, comprender y utilizar varias formas de representar patrones, relaciones y funciones, de manera real. Asimismo, deben desarrollar habilidades para usar modelos matemáticos para comprender y representar relaciones cuantitativas.

Geometría y medición

Se relaciona con el análisis de las propiedades, los atributos y las relaciones entre objetos de dos y tres dimensiones. Se trata de establecer la validez de conjeturas geométricas por medio de la deducción y la demostración de teoremas y criticar los argumentos de los otros; comprender y representar traslaciones, reflexiones, rotaciones y dilataciones con objetos en el plano de coordenadas cartesianas; visualizar objetos tridimensionales desde diferentes perspectivas y analizar sus secciones trasversales. La Medida le permite comprender los atributos o cualidades mensurables de los objetos, así como las unidades, sistemas y procesos de medida mediante la aplicación de técnicas, instrumentos y fórmulas apropiados para obtener medidas.

Estadística y probabilidad

Se orienta a desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos, seleccionar y utilizar métodos estadísticos para el análisis de dichos datos, y formular y responder preguntas a partir de la organización y representación de los mismos. El manejo de nociones de estadística y probabilidad les permite comprender y aplicar conceptos de espacio muestral y distribuciones en casos sencillos.

En cuanto al estudio del álgebra, el DCN propone su estudio en todos los niveles de la educación básica, dentro de la componente denominada Números, Relaciones y Funciones. Creemos que esto se debe a su consideración como objeto de estudio en sí mismo, lo que constituiría una restricción para usar el álgebra como un instrumento de modelización.

Teniendo en cuenta el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular del Perú del año 2009, hemos elaborado la siguiente tabla que organiza las capacidades y los conocimientos involucrados para el álgebra a lo largo de toda la educación secundaria.

Tabla 6: El álgebra en el DCN del Perú.

Grado	Capacidades	Conocimientos
I	**Comunicación matemática** • Identifica patrones numéricos, los generaliza y simboliza. • Matematiza situaciones de contexto real, utilizando los números naturales, enteros o racionales y sus propiedades. **Resolución de problemas** • Resuelve problemas de traducción simple y compleja que involucran ecuaciones lineales con una incógnita. • Calcula el valor numérico de expresiones algebraicas.	**Álgebra** • Patrones numéricos. • Ecuaciones lineales con una incógnita. • Valor numérico de Expresiones algebraicas.
	Razonamiento y demostración. • Reduce expresiones algebraicas utilizando la teoría de exponentes.	

II	**Comunicación matemática** • Interpreta el significado de números naturales, enteros y racionales en diversas situaciones y contextos. • Representa mediante lenguaje algebraico enunciados verbales de diversos contextos. **Resolución de problemas** • Resuelve problemas que involucran ecuaciones lineales con una incógnita. • Reduce expresiones algebraicas factorizando por el método del factor común.	**Álgebra** • Variable y simbolización de enunciados verbales mediante el lenguaje algebraico. • Teoría básica de exponentes. • Reducción de términos semejantes. • Operaciones de adición, multiplicación y división de polinomios. • Factorización de expresiones algebraicas por el factor común.
III	**Razonamiento y demostración** • Aplica eficientemente productos y cocientes notables para realizar expresiones algebraicas. • Factoriza expresiones algebraicas con el método del aspa simple. • Identifica productos y cocientes notables en expresiones algebraicas. • Establece, analiza y comunica relaciones y representaciones matemáticas en la solución de un problema. **Resolución de problemas** • Identifica el grado de expresiones algebraicas.	**Álgebra** • Grado de expresiones algebraicas. • Métodos clásicos y Ruffini para la división de polinomios. Teorema del residuo. • Productos y cocientes notables. • Ecuaciones cuadráticas. • Modelos cuadráticos. • Factorización por el método del aspa simple.
IV	**Razonamiento y demostración.** • Transforma expresiones algebraicas mediante el uso de la teoría avanzada de exponentes. **Resolución de problemas** • Resuelve problemas que involucran el uso de estrategias de cálculo para transformar expresiones con	**Álgebra** • Transformación de expresiones que involucran fracciones algebraicas. • Inecuaciones lineales y cuadráticas con una incógnita. • Teoría avanzada de exponentes.

IV	fracciones algebraicas. • Resuelve problemas que implican sistemas de ecuaciones con dos y tres incógnitas. • Resuelve inecuaciones lineales y cuadráticas con una incógnita. • Resuelve ecuaciones exponenciales y logarítmicas. • Resuelve problemas que implican el cálculo de las ecuaciones de la recta y el ángulo entre rectas.	Sistema de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas. • Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
V	**Resolución de problemas** • Resuelve sistemas de ecuaciones mediante métodos gráficos y de Gauss. • Resuelve problemas de inecuaciones lineales de dos incógnitas mediante métodos gráficos. • Resuelve ecuaciones trigonométricas. • Resuelve problemas de programación lineal con dos variables mediante métodos gráficos. • Resuelve problemas que involucran modelos exponenciales y logarítmicos. • Resuelven problemas que implican la ecuación de la circunferencia. • Resuelve problemas que implican la recta tangente a la circunferencia. • Resuelve problemas de posiciones relativas de dos circunferencias no concéntricas. • Resuelve problemas que implican la ecuación de la elipse. • Resuelve problemas que implican la ecuación de la parábola.	**Álgebra** • Método gráfico y método de Gauss para la resolución de sistemas de ecuaciones. • Inecuaciones lineales de dos incógnitas. • Introducción a la programación lineal. • Ecuaciones trigonométricas.

De la tabla anterior podemos inferir que:

- Sólo en el primer año de secundaria, se propone el estudio de patrones y el establecimiento de generalizaciones. Para este mismo grado se plantea el cálculo de valores numéricos y la traducción de enunciados verbales. Esto evidencia la consideración del álgebra como un lenguaje, pues se priorizan los procesos de simbolización.

- A medida que se avanza en los grados de la educación secundaria, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones. Además que hay una orientación hacia el cálculo operativo.
- Es una buena guía para organizar, planificar e interpretar la enseñanza a lo largo de la escolaridad obligatoria. Los rasgos inherentes a los procesos de simbolización, la manipulación de las expresiones algebraicas y el uso de algoritmos para resolver problemas son los tres puntos en torno a los cuales gira la programación propuesta en el DCN para nuestro dominio de investigación: el álgebra escolar.

Además consideramos que:

- El trabajo previo es un requisito para desarrollar la modelización, por lo que es necesario considerar capacidades a largo plazo que permitan el estudio de situaciones iniciales, la construcción de modelos, la formulación de respuestas y nuevas preguntas en un periodo de tiempo superior a un año.
- El álgebra escolar debe incluir el estudio de patrones (numéricos, geométricos y de cualquier otro tipo), las funciones, y la capacidad de analizar situaciones con la ayuda de símbolos, a largo de toda la escolaridad. Su estudio en un solo grado es insuficiente para lograr la formalización y generalización de situaciones diversas.
- Nuestro DCN, no propone articulaciones entre conocimientos básicos estructurados en el estudio de los sistemas algebraicos y analíticos para el desarrollo de un pensamiento algebraico y variacional, donde los conceptos de ecuación y función sean fundamentales. Además, aunque se proponen el trabajo en torno a procesos generales de pensamiento (como los de resolución de problemas, la modelación algebraica, el uso de conceptos y procedimientos) en diversos contextos (específicos de las

matemáticas, cotidianos y de otras disciplinas), no se formulan pautas metodológicas de cómo llevarlas a cabo.

5.2. Textos seleccionados para el análisis epistémico.

Los libros escolares constituyen, para la mayoría de docentes, una fuente inmediata donde se acumula la experiencia práctica de los profesores y en cierta medida los resultados de investigaciones. En consecuencia, el análisis crítico de los textos escolares, la evaluación de su pertinencia, idoneidad, adecuación, etc. debe ser un componente importante a considerar al momento de evaluar el desarrollo de la actividad de estudio.

Danisova, E. (2007), expresa que un libro de texto es una publicación para ayudar al profesor con un contenido metódicamente adaptado y limitado por el currículo , un recurso fundamentalmente didáctico que ayuda a desarrollar un proceso educacional y que se constituye en un instrumento que colabora para implementar el control y la evaluación del proceso de aprendizaje del alumno.

Diversos autores concuerdan que el papel que los profesores asignan al libro de texto es central. Así, en el informe Cockcroft (1985), se afirma que los libros de texto constituyen una ayuda inestimable para el profesor en el trabajo diario del aula.

Para propósitos de nuestra investigación, describiremos y analizaremos tres libros de texto en relación al tratamiento del álgebra escolar en el primer año de secundaria.

Los libros revisados serán:

- Matemática 1. Editorial Santillana.
- Matemática 1. Editorial Norma.
- Matemática 1. Texto oficial del MINEDU (Ministerio de Educación).

Las prácticas matemáticas relacionadas al álgebra escolar se analizarán considerando:

- Los distintos usos de las letras y de la igualdad en la presentación de contenidos.
- La construcción y el uso de distintos modelos de solución de ecuaciones.
- Los procesos de solución de problemas y su relación con los procesos de modelización.

Presentamos a continuación el análisis para cada uno de los textos antes señalados.

5.2.1. Matemática 1 de editorial Santillana.

El libro está dividido en 12 unidades, además cada unidad tiene la siguiente estructura:

- **Apertura y conocimientos previos.** Énfasis en la motivación inicial.
- **Páginas de contenidos.** Metodología basada en la comprensión.
- **Páginas de actividades.** Práctica, refuerzo y ampliación.
- **Solución de problemas.** Estrategias para la resolución de problemas.
- **Actividades finales.** Organizadas por capacidades del área.

En la unidad 6, de título introducción al álgebra, se presenta la siguiente secuencia de contenidos:

Lenguaje simbólico: lenguaje numérico y lenguaje algebraico.

↓

Expresiones algebraicas: valor numérico y término algebraico.

↓

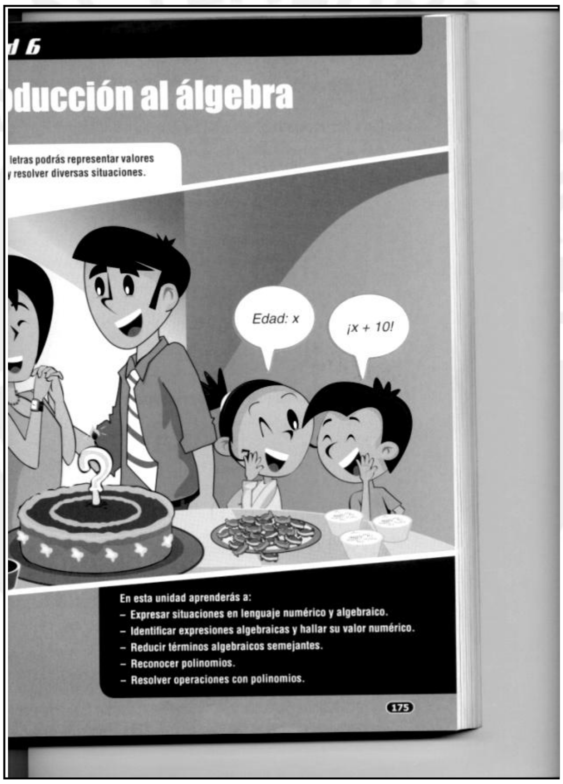
Polinomio: grado relativo, grado absoluto y polinomio homogéneo.

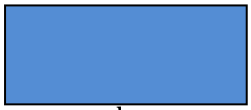
↓

Operaciones con monomios: adición y sustracción, multiplicación, potenciación y división.

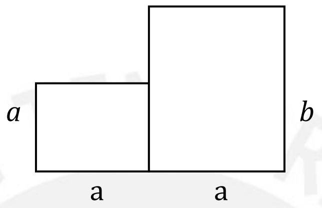
Mostramos a continuación la estructura de esta unidad considerando qué contiene, las actividades que propone y el análisis de lo presentado:

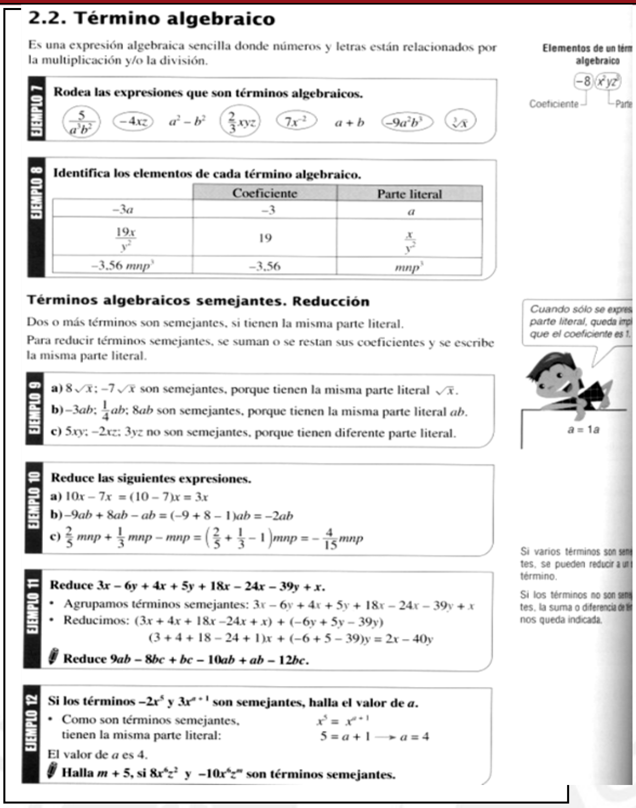
Tabla 7: Estructura de la unidad 6 del libro de Matemática 1 de Editorial Santillana

Apertura y conocimientos previos. Según el texto, en esta parte el énfasis está en la motivación inicial.	
Contenidos	Una situación que vincula el tema de estudio con la realidad, sin embargo es de observar que luego no se hace referencia a ella. Se presentan los conocimientos previos que se consideran necesarios para el aprendizaje de la unidad.
Actividades que propone	**Como motivación inicial,** propone una situación familiar de celebración, se muestra en el centro de una torta el signo **?** **,** y dos niños intentando adivinar la edad de una persona. Uno de los niños dice**: x** y el otro dice**: x + 10**.  Figura 3 Tomada del libro de Matemática 1. Santillana, p-175 **Dentro de los conocimientos previos, s**e expone el proceso a seguir para sumar, restar, multiplicar y dividir números racionales, además se presenta el algoritmo de la potenciación de números racionales.
Análisis de lo presentado.	Considerando la clasificación sobre los usos de la variable de Godino, J. & Font, V. (2003), analizamos lo siguiente: En la motivación: **La variable se usa como incógnita**, pues representa números uno de cuyos valores posibles hace verdadera la expresión. En la presentación de los conocimientos previos:

Análisis de lo presentado	**El uso de la variable es como indeterminada**, pues es el caso en que la variable se usa en enunciados que son ciertos para todos los números. La variable se usa para representar propiedades. Así: *Expresa el resultado como una sola potencia:* $x^9.x^3.x^7.x$ $\frac{x^3.x^2.x^6}{x^9}$ $\frac{(a^3)^4.a^{2^3}.a}{a^9:a^7}$ *Expresa el área del rectángulo:* a  b las alternativas son: a. b , ab, ba, a+b En los primeros casos, notamos, **a partir de propiedades aritméticas un intento de generalización,** en este caso lo que se quiere es representar cualquier número y validar lo que se cumplía para números específicos. En el caso del área del rectángulo, se considera la posibilidad de marcar varias alternativas y generar diálogo en torno al significado de cada representación.

Páginas de contenidos. Metodología basada en la comprensión.	
Contenidos	Contextos problemáticos resueltos y situaciones que permiten la aplicación de lo aprendido.
Actividades que propone.	• Empieza con la comparación de situaciones donde se aplica el ***lenguaje numérico*** (situaciones que inducen la aplicación de operaciones aritméticas) y el ***lenguaje algebraico*** (uso de letras para expresar cantidades desconocidas), a través de situaciones de cálculo en el primer caso y de representación en el segundo. Así: *El peso de una ballena equivale al cuadrado de seis multiplicado por cinco toneladas. Luego, el peso de la ballena es: $(6)^2 . 5= 180$* *El doble de nueve disminuido en cinco: 2(9)- 5* *Cuatro veces un número aumentado en seis: 4 x +6.* En este último ejercicio de representación el álgebra se usa como lenguaje, además que la **variable se emplea como incógnita**, es decir, para representar números desconocidos. • En la parte final de la página 178, se indica lo siguiente:

Actividades que propone.	*Cuando un número va seguido de una o varias letras, entendemos que se están multiplicando* *$3x = 3.\ x$* *$2ab = 2.\ a.\ b$* *$5x^2\ y = 5.\ x^2\ .\ y$* El texto está definiendo la operación de multiplicación de monomios y, además, hace aclaración sobre las diferentes formas de notación. • Partiendo de una situación relacionada a la representación del área de una figura, se pregunta. *¿Cuál es la representación para el área total de la figura del margen?*  Para hallar el área total de la figura, se halló el área del cuadrado y el área del rectángulo. Área del cuadrado: a^2 y área del rectángulo: ab. Luego el área total será: a^2 + ab. Luego se plantea la pregunta ¿cuál es el área total de la figura anterior, si a = 2 cm y b= 3? Con esto se buscó inducir el significado del valor numérico, presentándose luego ejemplos desarrollados. • Se presenta también la definición de término algebraico y polinomio, el algoritmo para reducir términos semejantes y para hallar los grados absoluto y relativo de polinomios.



2.2. Término algebraico

Es una expresión algebraica sencilla donde números y letras están relacionados por la multiplicación y/o la división.

EJEMPLO 7 **Rodea las expresiones que son términos algebraicos.**

$\frac{5}{a^3b^2}$ $-4xz$ $a^2 - b^2$ $\frac{2}{3}xyz$ $7x^{-2}$ $a + b$ $-9a^2b^3$ $\sqrt[3]{x}$

EJEMPLO 8 **Identifica los elementos de cada término algebraico.**

	Coeficiente	Parte literal
$-3a$	-3	a
$\frac{19x}{y^2}$	19	$\frac{x}{y^2}$
$-3{,}56\ mnp^3$	$-3{,}56$	mnp^3

Términos algebraicos semejantes. Reducción

Dos o más términos son semejantes, si tienen la misma parte literal.

Para reducir términos semejantes, se suman o se restan sus coeficientes y se escribe la misma parte literal.

EJEMPLO 9

a) $8\sqrt{x}$; $-7\sqrt{x}$ son semejantes, porque tienen la misma parte literal $\sqrt{x}$.

b) $-3ab$; $\frac{1}{4}ab$; $8ab$ son semejantes, porque tienen la misma parte literal ab.

c) $5xy$; $-2xz$; $3yz$ no son semejantes, porque tienen diferente parte literal.

EJEMPLO 10 **Reduce las siguientes expresiones.**

a) $10x - 7x = (10 - 7)x = 3x$

b) $-9ab + 8ab - ab = (-9 + 8 - 1)ab = -2ab$

c) $\frac{2}{5}mnp + \frac{1}{3}mnp - mnp = \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3} - 1\right)mnp = -\frac{4}{15}mnp$

EJEMPLO 11 **Reduce $3x - 6y + 4x + 5y + 18x - 24x - 39y + x$.**

- Agrupamos términos semejantes: $3x - 6y + 4x + 5y + 18x - 24x - 39y + x$
- Reducimos: $(3x + 4x + 18x - 24x + x) + (-6y + 5y - 39y)$
  $(3 + 4 + 18 - 24 + 1)x + (-6 + 5 - 39)y = 2x - 40y$

Reduce $9ab - 8bc + bc - 10ab + ab - 12bc$.

EJEMPLO 12 **Si los términos $-2x^5$ y $3x^{a+1}$ son semejantes, halla el valor de a.**

- Como son términos semejantes, tienen la misma parte literal: $x^5 = x^{a+1}$; $5 = a + 1 \longrightarrow a = 4$

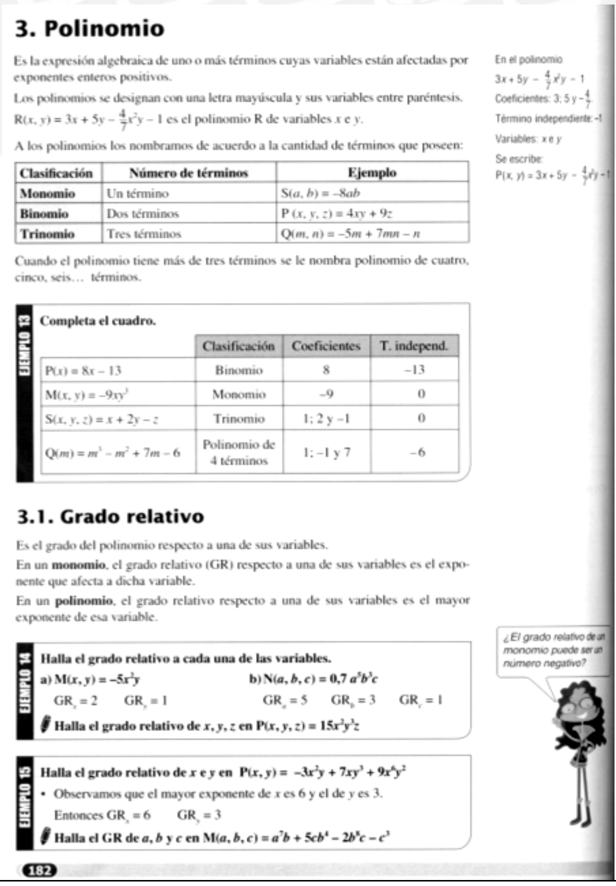
El valor de a es 4.

Halla $m + 5$, si $8x^6z^2$ y $-10x^6z^m$ son términos semejantes.

Figura 4: Tomada del libro de Matemática 1. Santillana, p- 180

Actividades que propone.

La presentación de estos contenidos se da como contenidos acabados y en todos los casos la presentación teórica está acompañada de ejemplos.



3. Polinomio

Es la expresión algebraica de uno o más términos cuyas variables están afectadas por exponentes enteros positivos.

Los polinomios se designan con una letra mayúscula y sus variables entre paréntesis.

$R(x, y) = 3x + 5y - \frac{4}{7}x^2y - 1$ es el polinomio R de variables x e y.

A los polinomios los nombramos de acuerdo a la cantidad de términos que poseen:

Clasificación	Número de términos	Ejemplo
Monomio	Un término	$S(a, b) = -8ab$
Binomio	Dos términos	$P(x, y, z) = 4xy + 9z$
Trinomio	Tres términos	$Q(m, n) = -5m + 7mn - n$

Cuando el polinomio tiene más de tres términos se le nombra polinomio de cuatro, cinco, seis… términos.

EJEMPLO 13 **Completa el cuadro.**

	Clasificación	Coeficientes	T. independ.
$P(x) = 8x - 13$	Binomio	8	-13
$M(x, y) = -9xy^3$	Monomio	-9	0
$S(x, y, z) = x + 2y - z$	Trinomio	1; 2 y -1	0
$Q(m) = m^3 - m^2 + 7m - 6$	Polinomio de 4 términos	1; -1 y 7	-6

3.1. Grado relativo

Es el grado del polinomio respecto a una de sus variables.

En un **monomio**, el grado relativo (GR) respecto a una de sus variables es el exponente que afecta a dicha variable.

En un **polinomio**, el grado relativo respecto a una de sus variables es el mayor exponente de esa variable.

EJEMPLO 14 **Halla el grado relativo a cada una de las variables.**

a) $M(x, y) = -5x^2y$ — $GR_x = 2$ $GR_y = 1$

b) $N(a, b, c) = 0{,}7\,a^5b^3c$ — $GR_a = 5$ $GR_b = 3$ $GR_c = 1$

Halla el grado relativo de x, y, z en $P(x, y, z) = 15x^2y^3z$

EJEMPLO 15 **Halla el grado relativo de x e y en $P(x, y) = -3x^2y + 7xy^3 + 9x^6y^2$**

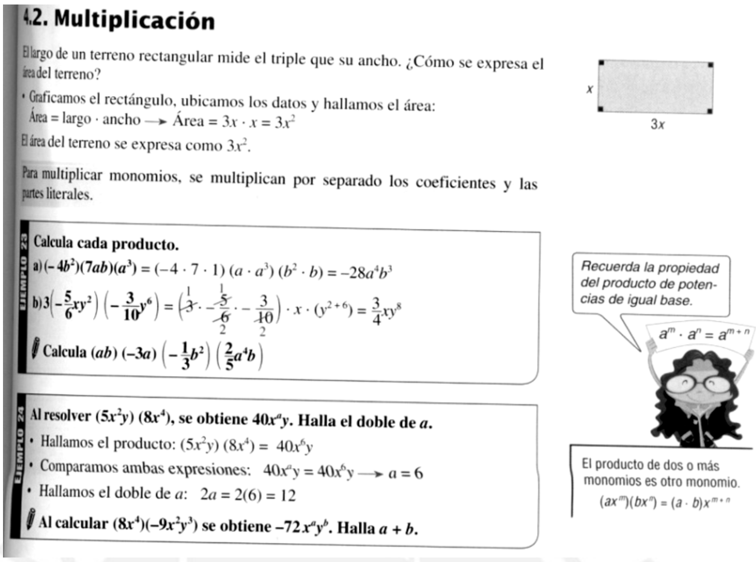
- Observamos que el mayor exponente de x es 6 y el de y es 3.
  Entonces $GR_x = 6$ $GR_y = 3$

Halla el GR de a, b y c en $M(a, b, c) = a^7b + 5cb^4 - 2b^8c - c^3$

Figura 5: Tomada del libro de Matemática 1.Santillana, p-182.

<table>
<tr>
<td>Actividades que propone.</td>
<td>

- La última parte de la presentación de los contenidos desarrolla las operaciones con monomios; pero, en este caso, para cada operación se empiezan con situaciones que necesitan la aplicación de un algoritmo para poder resolverlas.



4.2. Multiplicación

El largo de un terreno rectangular mide el triple que su ancho. ¿Cómo se expresa el área del terreno?

- Graficamos el rectángulo, ubicamos los datos y hallamos el área:
  Área = largo · ancho → Área = $3x \cdot x = 3x^2$

El área del terreno se expresa como $3x^2$.

Para multiplicar monomios, se multiplican por separado los coeficientes y las partes literales.

EJEMPLO 23

Calcula cada producto.

a) $(-4b^2)(7ab)(a^3) = (-4 \cdot 7 \cdot 1)(a \cdot a^3)(b^2 \cdot b) = -28a^4b^3$

b) $3\left(-\frac{5}{6}xy^2\right)\left(-\frac{3}{10}y^6\right) = \left(\cancel{3}^{1} \cdot -\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{6}_{2}} \cdot -\frac{3}{\cancel{10}_{2}}\right) \cdot x \cdot (y^{2+6}) = \frac{3}{4}xy^8$

Calcula $(ab)(-3a)\left(-\frac{1}{3}b^2\right)\left(\frac{2}{5}a^4b\right)$

EJEMPLO 24

Al resolver $(5x^2y)(8x^4)$, se obtiene $40x^ay$. Halla el doble de a.

- Hallamos el producto: $(5x^2y)(8x^4) = 40x^6y$
- Comparamos ambas expresiones: $40x^ay = 40x^6y \rightarrow a = 6$
- Hallamos el doble de a: $2a = 2(6) = 12$

Al calcular $(8x^4)(-9x^2y^3)$ se obtiene $-72x^ay^b$. Halla $a + b$.

Figura 6: Tomada del libro de Matemática 1. Santillana, p-187.

</td>
</tr>
<tr>
<td>Análisis de lo presentado.</td>
<td>

Con respecto a Godino, J. & Font, V. (2003), consideramos la clasificación sobre los usos de la variable y analizamos lo siguiente:
Las variables se usan como expresión de un patrón general o como indeterminada, en el cálculo del perímetro y del área total.

Además, considerando la naturaleza de los elementos que intervienen en una igualdad notamos que:
La igualdad se emplea como una fórmula, es decir, para expresar la relación de dependencia entre dos o más variables, cuando calcula el perímetro y el área total de figuras.
La igualdad se usa como identidad, para el caso de la reducción de términos y la aplicación de algoritmos en algunas operaciones,

En referencia a Chevallard, Y. (1999) y a los elementos de las praxeologías matemáticas consideramos:
En cuanto a las técnicas, en los problemas se enfatiza la aplicación de reglas sintácticas de transformación de expresiones; mostrándose un marcado énfasis en la aplicación de algoritmos. Sólo para el caso de las operaciones con monomios y el valor numérico se muestra la necesidad de la presentación de la técnica para dar solución a situaciones específicamente propuestas.
En cuanto a las tareas y los tipos de problemas éstas no justifican la presentación de otras técnicas. Al definir expresiones algebraicas no se especifica el campo numérico de trabajo.

</td>
</tr>
</table>

	En cuanto a las tecnologías, se nota el carácter aislado de algunas de las justificaciones. Notamos pues que para el caso de este texto, la introducción al álgebra se da a través de su uso como lenguaje, además consideramos que, es necesario que los docentes tengan una visión del álgebra escolar más amplia que la que resulta de las generalizaciones aritméticas y el manejo de expresiones literales.
Páginas de actividades. Práctica, refuerzo y ampliación.	
Contenidos	Ejercicios y problemas organizados por contenidos y clasificados por niveles de dificultad.

Las actividades propuestas corresponden a un primer nivel de algebrización, algunas incluyen el simple reconocimiento de definiciones o la aplicación de algoritmos en situaciones cercanamente similares a las dadas como ejemplos desarrollados.

Actividades que propone.

efuerzo y ampliación

NIVEL I NIVEL II NI

Lenguaje simbólico

Completa.

	Lenguaje usual	Lenguaje algebraico
28	El duplo de un número aumentado en doce.	
29	El cubo de un número disminuido en 10.	
30	La raíz cuadrada de un número disminuida en 7.	
31	La tercera parte del producto de dos números.	
32	La cuarta parte de la suma de dos números.	

Escribe como expresión algebraica.

33 La suma de a, b y c.

34 La diferencia de los cuadrados de m y n.

35 La suma de tres números consecutivos.

36 Un número par, si x es cualquier número natural.

37 Tenía S/. a y cobré S/. b. Si uso todo el dinero que tengo en comprar n bicicletas, ¿cuánto cuesta cada bicicleta?

38 En el primer piso del hotel hay m habitaciones; en el segundo piso el doble de habitaciones que en el primero, y en el tercero la cuarta parte de lo que hay en el primero. Si el hotel tiene tres pisos, ¿cuántas habitaciones hay?

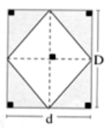
39 Sea y un número natural par. ¿Cuál es la suma de y con los dos números pares consecutivos?

40 Compré m cuadernos por S/. x soles. Si hubiera comprado dos cuadernos más por el mismo monto, ¿cuál sería el nuevo precio por cuaderno?

41 El área del rectángulo menos el área del rombo.

D = diagonal mayor del rombo

d = diagonal menor del rombo



Valor numérico

Halla el valor numérico.

42 $-3x + 5$, cuando $x = 2$

43 $2x^3 + 4x^2 - 5x - 12$, cuando $x = 3$

44 $-24m^2n^3p$, cuando $m = 1$, $n = -1$ y $p = \frac{1}{2}$

45 $\sqrt{2bc^2}$, cuando $b = 2$ y $c = 3$

46 $c^3 - 2c^2d + 3cd^2 - d^3$, cuando $c = 1$ y $d = \frac{1}{4}$

47 $\frac{a}{c} + \frac{b}{d}$, siendo $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ y $d = 5$

48 $\sqrt{b} + \sqrt{n} + \sqrt{b \cdot n}$, cuando $b = 4$ y $n = 16$

Calcula el VN de las siguientes fórmulas.

49 El volumen de un cilindro de radio r y altura se calcula usando la siguiente fórmula:

$V = \pi r^2 h$ donde $\pi = 3{,}14$

Halla el volumen de un cilindro cuyo radio mide 4 cm y cuya altura mide 7 cm.

50 Si un móvil viaja a velocidad constante: $v =$
Donde: v = velocidad, d = distancia y t = tiempo
Si $d = 90$ m y $t = 15$ s, ¿cuál es la velocidad?

51 Si el movimiento es acelerado: $d = v_i t + \frac{at^2}{2}$
Donde: d = distancia, v_i = velocidad inicial, t = tiempo y a = aceleración.
Cuando $v_i = 6$ m/s, $t = 3$ s y $a = 4$ m/s^2, ¿cuál es la distancia recorrida?

Término algebraico

Escribe (V) verdadero o (F) falso.

52 $-\frac{1}{5}ab$ es un término algebraico.

53 $a - b$ es un término algebraico.

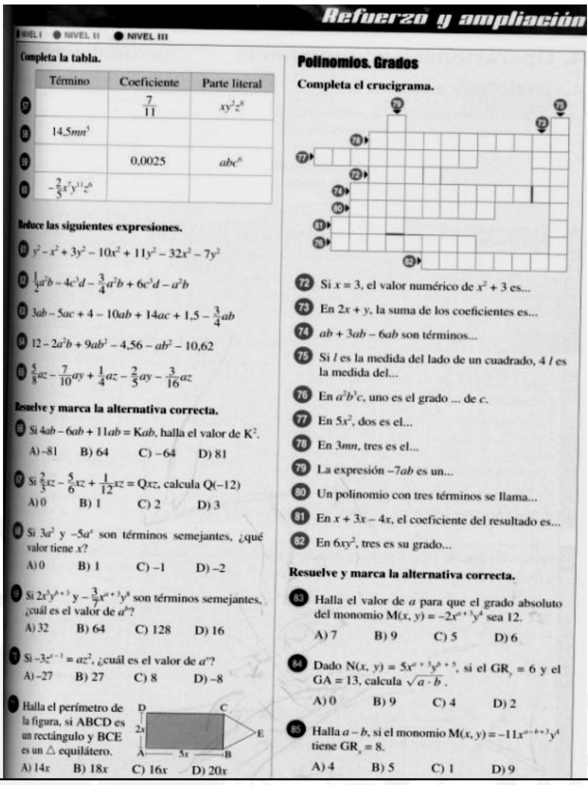
54 $-\frac{3}{4}x^2 + 2x - 1$ es una expresión algebraica.

55 $\frac{1}{3}$ es el coeficiente de $3x^2y^3$.

56 $y^2 - 2y^2 + 1$ tiene 3 términos.

Figura 7: Tomada del libro de Matemática 1. Santillana, p-184.

Actividades que propone.	Figura 8: Tomada del libro de Matemática 1. Santillana, p-185.



Refuerzo y ampliación

NIVEL I ● NIVEL II ● NIVEL III

Completa la tabla.

	Término	Coeficiente	Parte literal
57		$\frac{7}{11}$	xy^2z^8
58	$14,5mn^5$		
59		0,0025	abc^6
60	$-\frac{2}{5}x^7y^{11}z^6$		

Reduce las siguientes expresiones.

61 $y^2-x^2+3y^2-10x^2+11y^2-32x^2-7y^2$

62 $\frac{1}{2}a^2b-4c^3d-\frac{3}{4}a^2b+6c^3d-a^2b$

63 $3ab-5ac+4-10ab+14ac+1,5-\frac{3}{4}ab$

64 $12-2a^2b+9ab^2-4,56-ab^2-10,62$

65 $\frac{5}{8}az-\frac{7}{10}ay+\frac{1}{4}az-\frac{2}{5}ay-\frac{3}{16}az$

Resuelve y marca la alternativa correcta.

66 Si $4ab-6ab+11ab=Kab$, halla el valor de K^2.
A) –81 B) 64 C) –64 D) 81

67 Si $\frac{2}{3}xz-\frac{5}{6}xz+\frac{1}{12}xz=Qxz$, calcula Q(–12)
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

68 Si $3a^2$ y $-5a^x$ son términos semejantes, ¿qué valor tiene x?
A) 0 B) 1 C) –1 D) –2

69 Si $2x^5y^{b+3}$ y $-\frac{3}{7}x^{a+3}y^8$ son términos semejantes, ¿cuál es el valor de a^b?
A) 32 B) 64 C) 128 D) 16

70 Si $-3z^{x-1}=az^2$, ¿cuál es el valor de a^x?
A) –27 B) 27 C) 8 D) –8

71 Halla el perímetro de la figura, si ABCD es un rectángulo y BCE es un △ equilátero.
A) $14x$ B) $18x$ C) $16x$ D) $20x$

Polinomios. Grados

Completa el crucigrama.

72 Si $x=3$, el valor numérico de x^2+3 es...

73 En $2x+y$, la suma de los coeficientes es...

74 $ab+3ab-6ab$ son términos...

75 Si l es la medida del lado de un cuadrado, $4\,l$ es la medida del...

76 En a^2b^3c, uno es el grado ... de c.

77 En $5x^2$, dos es el...

78 En $3mn$, tres es el...

79 La expresión $-7ab$ es un...

80 Un polinomio con tres términos se llama...

81 En $x+3x-4x$, el coeficiente del resultado es...

82 En $6xy^2$, tres es su grado...

Resuelve y marca la alternativa correcta.

83 Halla el valor de a para que el grado absoluto del monomio $M(x,y)=-2x^{a+3}y^4$ sea 12.
A) 7 B) 9 C) 5 D) 6

84 Dado $N(x,y)=5x^{a+3}y^{b+5}$, si el $GR_y=6$ y el $GA=13$, calcula $\sqrt{a\cdot b}$.
A) 0 B) 9 C) 4 D) 2

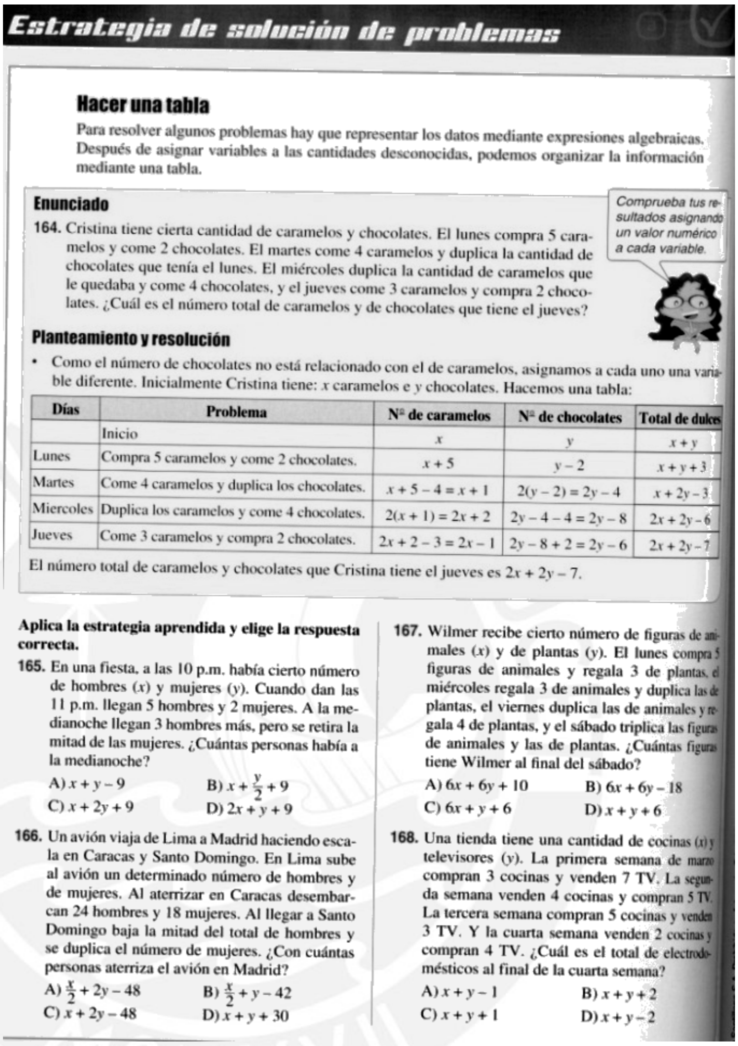
85 Halla $a-b$, si el monomio $M(x,y)=-11x^{a-b+3}y^4$ tiene $GR_x=8$.
A) 4 B) 5 C) 1 D) 9

Análisis de lo presentado.	En referencia a Chevallard, Y. (1999) y a los elementos de las praxeologías matemáticas de la teoría antropológica de lo didáctico presentamos el siguiente análisis: **En cuanto a los tipos de problemas**, no se presenta ningún problema en donde se genere la necesidad de utilizar elementos algebraicos para construir y reconstruir nuevos tipos de problemas; éstas en la mayoría de los casos son presentados como conocimientos acabados. **En cuanto a las técnicas**, éstas son independientes para cada problema, no tienen ninguna relación entre sí. El énfasis está en la aplicación de algoritmos. Las actividades propuestas son variadas e incluyen las capacidades específicas: relaciona, reduce, expresa, resuelve, completa, calcula y pinta.

Solución de problemas. Estrategias para la resolución de problemas	
Contenidos.	Situaciones que propician la búsqueda de estrategias de solución. Se presentan los pasos para resolver problemas.
Actividades que propone.	Se plantea el siguiente problema: *Cristina tiene cierta cantidad de caramelos y chocolates. El lunes compra 5 caramelos y come 2 chocolates. El martes come 4 caramelos y duplica la cantidad de chocolates que tenía el lunes. El miércoles duplica la cantidad de caramelos que le quedaba y come 4 chocolates, y el jueves come 3*

caramelos y compra 2 chocolates. ¿Cuál es el número total de caramelos y de chocolates que tiene el jueves? La actividad propuesta especifica que la estrategia es hacer una tabla:

Figura 9: Tomada del libro de Matemática 1. Santillana, p-192.



Estrategia de solución de problemas

Hacer una tabla

Para resolver algunos problemas hay que representar los datos mediante expresiones algebraicas. Después de asignar variables a las cantidades desconocidas, podemos organizar la información mediante una tabla.

Enunciado

164. Cristina tiene cierta cantidad de caramelos y chocolates. El lunes compra 5 caramelos y come 2 chocolates. El martes come 4 caramelos y duplica la cantidad de chocolates que tenía el lunes. El miércoles duplica la cantidad de caramelos que le quedaba y come 4 chocolates, y el jueves come 3 caramelos y compra 2 chocolates. ¿Cuál es el número total de caramelos y de chocolates que tiene el jueves?

Comprueba tus resultados asignando un valor numérico a cada variable.

Planteamiento y resolución

- Como el número de chocolates no está relacionado con el de caramelos, asignamos a cada uno una variable diferente. Inicialmente Cristina tiene: x caramelos e y chocolates. Hacemos una tabla:

Días	Problema	Nº de caramelos	Nº de chocolates	Total de dulces
	Inicio	x	y	$x+y$
Lunes	Compra 5 caramelos y come 2 chocolates.	$x+5$	$y-2$	$x+y+3$
Martes	Come 4 caramelos y duplica los chocolates.	$x+5-4=x+1$	$2(y-2)=2y-4$	$x+2y-3$
Miercoles	Duplica los caramelos y come 4 chocolates.	$2(x+1)=2x+2$	$2y-4-4=2y-8$	$2x+2y-6$
Jueves	Come 3 caramelos y compra 2 chocolates.	$2x+2-3=2x-1$	$2y-8+2=2y-6$	$2x+2y-7$

El número total de caramelos y chocolates que Cristina tiene el jueves es $2x+2y-7$.

Aplica la estrategia aprendida y elige la respuesta correcta.

165. En una fiesta, a las 10 p.m. había cierto número de hombres (x) y mujeres (y). Cuando dan las 11 p.m. llegan 5 hombres y 2 mujeres. A la medianoche llegan 3 hombres más, pero se retira la mitad de las mujeres. ¿Cuántas personas había a la medianoche?

A) $x+y-9$ B) $x+\frac{y}{2}+9$
C) $x+2y+9$ D) $2x+y+9$

166. Un avión viaja de Lima a Madrid haciendo escala en Caracas y Santo Domingo. En Lima sube al avión un determinado número de hombres y de mujeres. Al aterrizar en Caracas desembarcan 24 hombres y 18 mujeres. Al llegar a Santo Domingo baja la mitad del total de hombres y se duplica el número de mujeres. ¿Con cuántas personas aterriza el avión en Madrid?

A) $\frac{x}{2}+2y-48$ B) $\frac{x}{2}+y-42$
C) $x+2y-48$ D) $x+y+30$

167. Wilmer recibe cierto número de figuras de animales (x) y de plantas (y). El lunes compra 5 figuras de animales y regala 3 de plantas, el miércoles regala 3 de animales y duplica las de plantas, el viernes duplica las de animales y regala 4 de plantas, y el sábado triplica las figuras de animales y las de plantas. ¿Cuántas figuras tiene Wilmer al final del sábado?

A) $6x+6y+10$ B) $6x+6y-18$
C) $6x+y+6$ D) $x+y+6$

168. Una tienda tiene una cantidad de cocinas (x) y televisores (y). La primera semana de marzo compran 3 cocinas y venden 7 TV. La segunda semana venden 4 cocinas y compran 5 TV. La tercera semana compran 5 cocinas y venden 3 TV. Y la cuarta semana venden 2 cocinas y compran 4 TV. ¿Cuál es el total de electrodomésticos al final de la cuarta semana?

A) $x+y-1$ B) $x+y+2$
C) $x+y+1$ D) $x+y-2$

Actividades que propone.

Hay una sección denominada de actividades finales, donde las situaciones presentadas están clasificadas por capacidad y niveles de dificultad, además los tipos de problemas planteados son del mismo tipo que los previamente señalados. Hacia el final de la unidad también se incluye una sección con notas históricas, datos curiosos y razonamiento matemático.

Análisis de lo presentado.

Considerando la clasificación sobre los usos de la variable de Godino, J. & Font, V. (2003):

Se uso la variable como incógnitas, para representar la cantidad inicial de caramelos y chocolates, se buscaron relaciones matemáticas entre las cantidades conocidas y desconocidas y, se plantearon expresiones algebraicas para cada caso.

El uso de la tabla fue como un recurso de ordenamiento de la

Análisis de lo presentado.	información, que junto con un dibujo o esquema de la situación nos permite visualizar el problema; pero que no llega al empleo de patrones ni justificaciones de las soluciones dadas. Teniendo en cuenta la teoría antropológica de lo didáctico y el análisis de algunos elementos de las praxeologías matemáticas: **En cuanto a la tecnología**, la situación propuesta muestra un intento por justificar el uso de variables a través de la actividad de modelización. Este hecho, lo consideramos necesario e importante.

5.2.2. Reto. mate 1 de editorial Norma.

El libro está dividido en 12 unidades, cada unidad comprende:

- **Presentación de la unidad.** Imagen que conduce a los(as) estudiantes a observar y explorar una situación real o imaginaria para descubrir intuitivamente la presencia de la matemática en ella. Incluye una sección llamada **nos preparamos** que permite ejercitar habilidades matemáticas con poco contenido matemático y de forma recreativa.
- **Desarrollo de temas.** A través de situaciones y actividades breves se incentivan la interpretación y el análisis, que permiten elaborar las nociones que sirven de enlace para el posterior desarrollo teórico. Se presenta la información del contenido matemático organizada en subtítulos y con ejemplos, presentándose además ejercicios de nivel básico organizados en forma secuencial.
- **Hazlo tú.** Sección de ejercicios de nivel intermedio que busca integrar parcialmente los diversos aspectos teóricos desarrollados en el tema. Los ejercicios se organizan por capacidad y nivel de dificultad.
- **Otra mirada.** Sección de ejercicios de nivel avanzado. Tiene el propósito de integrar todos los puntos desarrollados en la teoría, organizados también por capacidades. Incluye la sección **conexiones**, que muestra aplicaciones reales de los contenidos desarrollados.
- **De todo un poco.** Sección que busca fortalecer lo aprendido en la unidad a través de ejercicios y preguntas que integran las habilidades y conceptos previamente presentados, organizados todos ellos por niveles de dificultad.

En la unidad 10 de título introducción al álgebra se presenta la siguiente secuencia de contenidos:

Expresiones algebraicas: características y clases de expresiones algebraicas, traducción de enunciados verbales, valor numérico, dominio y rango de una expresión.

↓

Polinomios de un término: grado de un monomio, adición y sustracción de monomios, multiplicación, potenciación y división de monomios.

↓

Otros polinomios y operaciones: grado de un polinomio, adición y sustracción de polinomios, multiplicación y potenciación de polinomios.

↓

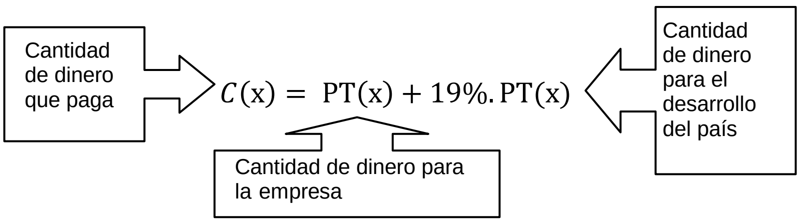
Ecuaciones: características y resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita, resolución de ecuaciones con valor absoluto y resolución de problemas.

↓

Inecuaciones: características y resolución de inecuaciones de primer grado, resolución de problemas.

Para las expresiones algebraicas:

Tabla 8: Presentación de la unidad 10 para el tema de expresiones algebraicas.

Presentación de la unidad	
Contenidos.	En la sección ¨*nos preparamos*¨ se presenta la siguiente situación relacionada a compras que incluyen el IGV: *Para calcular el precio de venta de cualquier artículo, se utiliza una expresión, que está formada por números (valores constantes) y letras (valores variables), los cuales están relacionados por operaciones.* 

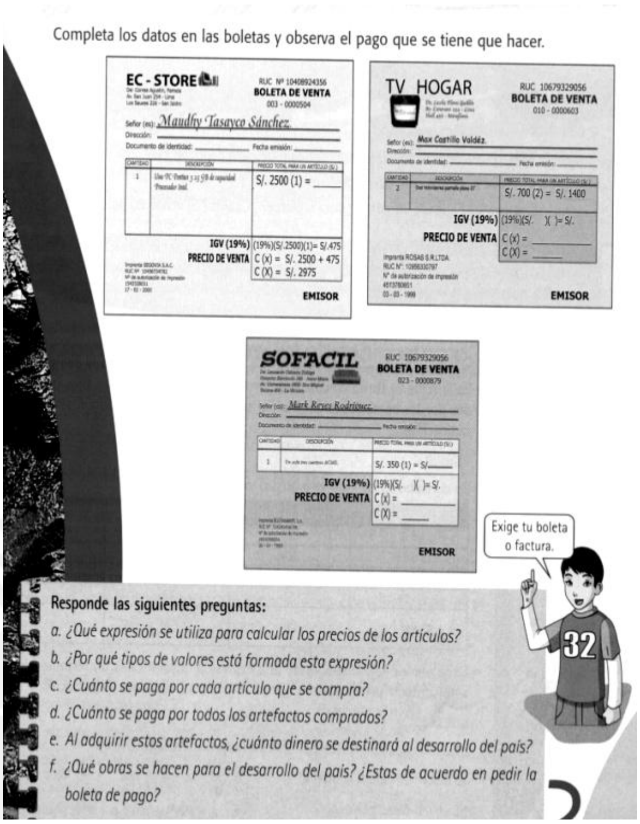
<table>
<tr><td>Actividades que propone.</td><td>Se presenta luego la siguiente información y algunas preguntas.

Completa los datos en las boletas y observa el pago que se tiene que hacer.
Responde las siguientes preguntas:
a. ¿Qué expresión se utiliza para calcular los precios de los artículos?
b. ¿Por qué tipos de valores está formada esta expresión?
c. ¿Cuánto se paga por cada artículo que se compra?
d. ¿Cuánto se paga por todos los artefactos comprados?
e. Al adquirir estos artefactos, ¿cuánto dinero se destinará al desarrollo del país?
f. ¿Qué obras se hacen para el desarrollo del país? ¿Estás de acuerdo en pedir la boleta de pago?

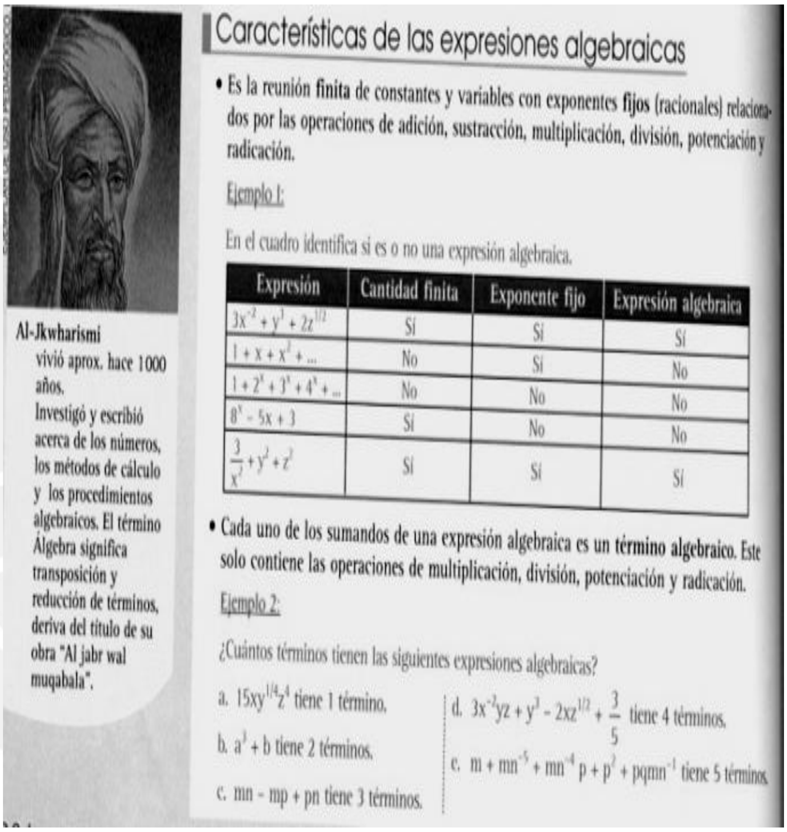
Figura 10: Tomada del libro Reto. mate 1, p -295.</td></tr>
<tr><td>Análisis de lo presentado.</td><td>Considerando la clasificación sobre los usos de la variable de Godino, J. & Font, V. (2003):
La variable se usa para expresar cantidades que varían conjuntamente (funcional), es decir, mostrando la relación de dependencia entre variables cuando el cambio en una variable determina el cambio en la otra.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Desarrollo de temas</th></tr>
<tr><td>Contenidos.</td><td>Presenta problemas resueltos y situaciones que permiten la aplicación de lo aprendido, en relación a las características de las expresiones algebraicas, clases de expresiones algebraicas, traducción de enunciados verbales a expresiones algebraicas, valor numérico, y dominio y rango de una expresión.
Finalmente, se presentan algunas situaciones sobre suficiencia de datos y de conexiones matemáticas con la química y la física.</td></tr>
<tr><td>Actividades propuestas.</td><td>Se parte de la siguiente situación en relación a la compra y venta de polos:</td></tr>
</table>

Actividades propuestas.

La Sra. Luisa invierte 480 soles en confeccionar 100 polos (P) para venderlos a 8 soles cada uno.
¿Cuántos polos vende? ¿Cómo podrías expresar esta cantidad? ¿Es una cantidad fija?
Si vende todos, ¿cuánto es el monto total de venta?
¿Cómo expresas su ganancia?. Si vende 30 polos, ¿gana o pierde?, ¿cuánto? . Si vende 90 polos, ¿gana o pierde? ¿Cuánto?

- El libro empieza presentando las características y clases de expresiones algebraicas, la traducción de enunciados verbales a expresiones algebraicas y el algoritmo seguido para el cálculo del valor numérico, dominio y rango de una expresión. Todo esto en un contexto netamente matemático.



Características de las expresiones algebraicas

- Es la reunión **finita** de constantes y variables con exponentes **fijos** (racionales) relacionados por las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Ejemplo I:

En el cuadro identifica si es o no una expresión algebraica.

Expresión	Cantidad finita	Exponente fijo	Expresión algebraica
$3x^{-2}+y^{3}+2z^{1/2}$	Sí	Sí	Sí
$1+x+x^{2}+...$	No	Sí	No
$1+2^{x}+3^{x}+4^{x}+...$	No	No	No
$8^{x}-5x+3$	Sí	No	No
$\frac{3}{x^{2}}+y^{2}+z^{2}$	Sí	Sí	Sí

- Cada uno de los sumandos de una expresión algebraica es un **término algebraico**. Este solo contiene las operaciones de multiplicación, división, potenciación y radicación.

Ejemplo 2:

¿Cuántos términos tienen las siguientes expresiones algebraicas?

a. $15xy^{1/4}z^{4}$ tiene 1 término.

b. $a^{3}+b$ tiene 2 términos.

c. $mn-mp+pn$ tiene 3 términos.

d. $3x^{-2}yz+y^{3}-2xz^{1/2}+\frac{3}{5}$ tiene 4 términos.

e. $m+mn^{-5}+mn^{-4}p+p^{2}+pqmn^{-1}$ tiene 5 términos.

Al-Jkwharismi
vivió aprox. hace 1000 años.
Investigó y escribió acerca de los números, los métodos de cálculo y los procedimientos algebraicos. El término Álgebra significa transposición y reducción de términos, deriva del título de su obra "Al jabr wal muqabala".

Figura 12: Tomada del libro Reto. mate 1, p -296.

Clases de expresiones algebraicas

Las expresiones algebraicas con exponentes enteros reciben el nombre de expresiones algebraicas racionales. Estas, según la forma de sus exponentes, se clasifican en:

a. **Entera** o polinomios, si sus términos tienen una variable con exponente positivo o cero, es decir, número natural ($\mathbb{Z}^+$ o 0). No tienen letras en el denominador.

b. **Fraccionaria**, si al menos en uno de sus términos hay una variable con exponente negativo ($\mathbb{Z}^-$). Tienen letras en el denominador.

Ejemplo 5:

a. $P(x) = 3x^2 - y^5$, racional entera. b. $P(x; y; z) = 4xyz^{-2}$, racional fraccionaria.

- Las expresiones **algebraicas racionales enteras** se denotan con letras mayúsculas, y, entre paréntesis, y al lado derecho, la variable. Según el número de términos pueden ser: polinomios de un término (**monomio**), de 2 términos (**binomio**), de 3 términos (**trinomio**), en general **polinomios.**

Ejemplo 6:

En cada caso identifica a qué clase pertenece y cuál es su variable.

a. $P(x) = 3xyz$; polinomio de 1 término o monomio, su variable es x.

b. $P(x; y) = -4x^2y + 2y^2 - 5 + x^3$; polinomio de 4 términos, sus variables son x e y.

c. $P(x) = a + b$; polinomio de 1 término (término independiente), su variable x.

Actividades propuestas.

Figura 13: Tomada del libro Reto. mate 1, p -297.

Valor numérico, dominio y rango de una expresión

- Dominio de una variable es el conjunto de valores que puede tomar la variable.
- Valor numérico (V N) de una expresión algebraica es lo obtenido luego de reemplazar las variables por los números de su dominio y de operar dicha expresión.
- Rango es el conjunto de valores numéricos que puede tener la expresión algebraica.

Ejemplo 8:

Expresión algebraica	Dominio	Valor numérico	Rango
$8x - 24, x \in \mathbb{N}$	$\{0; 1; 2; 3; ...\}$	$x = 0 \rightarrow 8(0) - 24 = -24$	$\{-24; -16; -8; ...\}$
		$x = 1 \rightarrow 8(1) - 24 = -16$	
		$x = 2 \rightarrow 8(2) - 24 = -8$ ...	

Figura 14: Tomada del libro Reto. mate 1, p -298.

- Se plantean además algunas situaciones para fijar los contenidos conceptuales presentados que involucran las capacidades específicas de completar, relacionar, resolver, traducir y/o expresar.

Actividades propuestas.

Recuerda

Potencias

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$a^0 = 1;\ a \neq 0$

0^0 no está definido

Ley de signos de la división

Si los factores tienen signos iguales: $(+) \div (+) = +$

$(-) \div (-) = +$

Si los factores tienen signos diferentes: $(+) \div (-) = -$

$(-) \div (+) = -$

División de potencias de la misma base

$a^m \div a^n = a^{m-n};\ m \in \mathbb{Q}$ y $n \in \mathbb{Q}$

Cuidado

Es diferente $(-3)^0$ y -3^0, pues $(-3)^0 = 1$ y $-3^0 = -(3^0) = -1$

Potenciación de monomios

Es un caso particular de la multiplicación de monomios, donde la base (monomio) se multiplicará las veces que indique el exponente.

Ejemplo 6:

Con los siguientes monomios o expresiones algebraicas resuelve las operaciones indicadas.

$P(x; y; z) = -3x^2yz^3 \qquad Q(x; y) = -\frac{2}{3}x^{-3}y^5$

a. $[P(x; y; z)]^3 =$

$= (-3x^2yz^3)^3$

$= (-3x^2yz^3)(-3x^2yz^3)(-3x^2yz^3)$

$= (-3)^3(x^2yz^3)^3 = -27x^6y^3z^9$

b. $[Q(x; y)]^2 =$

$= \left(-\frac{2}{3}x^{-3}y^5\right)^2$

$= \left(-\frac{2}{3}x^{-3}y^5\right)\left(-\frac{2}{3}x^{-3}y^5\right)$

$= \left(-\frac{2}{3}\right)^2(x^{-3}y^5)^2 = \frac{4}{9}x^{-6}y^{10}$

c. $[P(x; y; z) \cdot Q(x; y)]^2 =$

$= [-3x^2yz^3 \cdot -\frac{2}{3}x^{-3}y^5]^2$

$= [2x^{2-3}y^{1+5}z^3]^2$

$= [2x^{-1}y^6z^3]^2 = 4x^{-2}y^{12}z^6$

División de monomios

Para efectuar la división de monomios se dividen los coeficientes aplicando la ley de signos y luego, con la parte literal, se aplica la división de potencias de la misma base.

Ejemplo 7:

Si $P(m; n) = 40m^5n^4$; $Q(m; n) = -8m^4n^2$; $R(m; n) = \frac{4}{3}m^2n$ y $S(m; n) = -\frac{2}{3}mn$, resuelve:

a. $P(m; n) \div Q(m; n) = 40m^5n^4 \div -8m^4n^2$

$= (40 \div -8)\frac{m^5n^4}{m^4n^2}$

$= -5m^{5-4}n^{4-2}$

$= -5mn^2$

b. $R(m; n) \div S(m; n) = \frac{4}{3}m^2n \div -\frac{2}{3}mn$

$= \left(\frac{4}{3} \div -\frac{2}{3}\right)\frac{m^2n}{mn}$

$= -2m^{2-1}n^{1-1}$

$= -2m$

Observa y completa

1 **Completa los datos en la tabla.**

Monomios	Coeficiente	Parte literal	GR(x)	GR(y)	GR(a)	GA
$E(x) = 3x^2y$	$3y$	x^2	2	-	-	2
$S(x; y) = \frac{x^3ya}{8}$	$\frac{a}{8}$	x^3y	3	1	-	4
$T(y) = 4abx^3y$	$4abx^3$	y	-	1	-	1
$I(x; y) = \frac{6x^{m+1}y^m}{5}$	$\frac{6}{5}$	$x^{m+1}y^m$	$m+1$	m	No tiene	$2m+1$
$M(x; y; a) = -0{,}2x^3y^2a^5$	$-0{,}2$	$x^3y^2a^5$	3	2	5	10
$A(x; y) = -3\sqrt{2}x^{m+2}y^{5-n}$	$-3\sqrt{2}$	$x^{m+2}y^{5-n}$	$m+2$	$5-n$	-	$7+m-n$

2 **Resuelve:**

a. Si $Q(x; y; z) = -5x^2y^{m-2}z^3$; GA = 6, calcula m^m.

Como el GA = 6

$2 + m - 2 + 3 = 6 \rightarrow m = 3$

Luego, $m^m = 3^3 = 27$

b. Halla el GA de $3x^{m+n-5}y^{n-3}$, si GR(x) = 5 y GR(y) = 2.

GA = 7

Figura 15: Tomada del libro Reto. mate 1, p -304.

Reduce los términos semejantes en las siguientes expresiones:

a. $\underline{6ab^2} - \underline{2a^2b} + \underline{3ab^2} + \underline{a^2b} - \underline{7ab^2}$

$(6 + 3 - 7)ab^2 + (-2 + 1)a^2b$

$2ab^2 - a^2b$

b. $9m^5 - 6m^5 - 2m^5 =$ m^5

c. $-3x^3y^5 + 2x^3y^5 + 7x^3y^5 - 2x^3y^5 =$ $4x^3y^5$

d. $\frac{3}{4}y^3 + \frac{5}{4}y^3 - \frac{13}{4}y^3 =$ $-5/4y^3$

e. $\frac{7}{3}a^4b^2 - \frac{5}{2}a^4b^2 - \frac{11}{6}a^4b^2 + a^4b^2 =$ a^4b^2

f. $0{,}2xy - 0{,}3y + \frac{1}{3}xy - \frac{y}{5}$

$\frac{8}{15}xy - \frac{1}{2}y$

g. $5pq^2 + 3p^2q - 3pq^2 - 2pq^2 =$ $3p^2q$

h. $3x^5 - 5x^3y^2 + 1{,}4x^5 - 2{,}3x^3y^2 =$ $4{,}4x^5 - 7{,}3x^3y^2$

i. $a^m + a^m + a^m =$ $3a^m$

j. $0{,}\widehat{1}xy - 0{,}\widehat{2}xy + 0{,}\widehat{3}xy =$ $0{,}\widehat{2}xy$

Efectúa las siguientes operaciones:

a. $3x^4y$ más $8x^4y$

$(3 + 8)x^4y$

$11x^4y$

b. $-2y^2z^3$ menos $-6y^2z^3$

$(-2 + 6)y^2z^3$

$-4y^2z^3$

c. De $-\frac{7}{2}x^3y^4$ resta $-\frac{15}{2}x^3y^4$

$4x^3y^4$

d. Resta $-\frac{13}{4}x^2y^5z$ de $0{,}\widehat{3}x^2y^5z$

$\frac{43}{12}x^2y^5z$

e. Resta $4x^7z$ de la suma de x^7z y $-4x^7z$

$-7x^7z$

f. De la suma de $2{,}4xz^3$ y $1{,}\widehat{2}xz^3$, resta $-2{,}\widehat{2}xz^3$

$5{,}8\widehat{2}xz^3$

g. Suma la diferencia de $1{,}8yz^2$ y $-0{,}5z^2$, con la diferencia de z^2 y $-3{,}2yz^2$.

$[1{,}8yz^2 - -0{,}5z^2] + [z^2 - -3{,}2yz^2]$

$\underline{1{,}8}yz^2 + 0{,}5z^2 + z^2 + \underline{3{,}2}yz^2$

$5yz^2 + 1{,}5z^2$

Realiza en forma directa las siguientes operaciones:

a. $(3x^2y)(4y^3z^2)(2x^2y^3z) =$ $\mathbf{24x^4y^7z^3}$

b. $\left(-\frac{2}{3}x^2y^3z\right)\left(-\frac{3}{4}xy^2z^3\right) =$ $\frac{1}{2}x^3y^5z^4$

c. $(0{,}1x^2y)(0{,}\widehat{3}x^3y)(-10y^2) =$ $-0{,}\widehat{3}x^5y^4$

d. $(-2x^3y)^2 =$ $4x^6y^2$

e. $\left(-x^3\frac{y}{2}\right)(2xy^2)^2 =$ $-2x^5y^5$

f. $(-2xy^2)(-2xy^2)^2(-2xy^2)^3 =$ $64x^6y^{12}$

g. $(-3x^2y^3z^2)^3(xyz) =$ $-27x^7y^{10}z^7$

h. $\left(-\frac{2}{3}x^3yz^2\right)^2\left(\frac{3}{2}x^5y^2z\right) =$ $\frac{2}{3}x^{11}y^4z^5$

i. $(0{,}2x^6y)^2(1{,}3xy^1)^3 =$ $0{,}087x^{15}y^5$

Con $A(x; y) = 36x^5y^3$; $B(x; y) = -\frac{12}{5}x^4y^2$; $C(x; y) = -4x^3y^2$; $D(x; y) = \frac{4}{3}xy$ calcula:

a. $A(x; y) \div B(x; y)$

$36x^5y^3 \div -\frac{12}{5}x^4y^2$

$\left(36 \div -\frac{12}{5}\right)x^{5-4}y^{3-2}$

$-15xy$

b. $B(x; y) \div C(x; y)$

$\frac{3}{5}x$

c. $B(x; y) \times \frac{C(x; y)}{D(x; y)}$

$\frac{36}{5}x^6y^3$

d. $A(x; y) \times \frac{B(x; y)}{C(x; y)}$

$\frac{108}{5}x^6y^3$

En cada recuadro escribe el factor que falta.

a. $15a^3b^2c^4 \cdot$ $\mathbf{3a^2b^4c^3}$ $= 45a^5b^6c^7$

b. $(-8n^{-3}p^4)$ $(-10m^3n^4p) = 80m^3np^5$

c. $(6x^3y)(-15xy^4)($ $\frac{2}{3}x^4y^2z^3$ $) = -60x^8y^7z^3$

d. $($ $-30m^5p^5q^3$ $)(-12m^2n^4)(-p^3n^4) = -360m^7n^8p^8q^3$

Figura 16: Tomada del libro Reto. mate 1, p -305.

Análisis de lo presentado.

Teniendo en cuenta la definición de expresión algebraica, desde la llamada matemática sabia, creemos que hay una caracterización vaga de expresión algebraica. Tal vez sea menos vaga y más riguroso presentar primero la noción de término algebraico y, partir de él, una expresión algebraica como suma o resta de tales términos.

Además, considerando la naturaleza matemática de la variable de Godino, J. & Font, V. (2003) analizamos lo siguiente::

La variable se usa como incógnita, esto lo inferimos de la siguiente pregunta planteada en el texto.

¿Qué son las variables?

Las letras de una expresión algebraica se llaman variables, porque ellas pueden tomar cualquier valor de un conjunto de

Análisis de lo presentado.

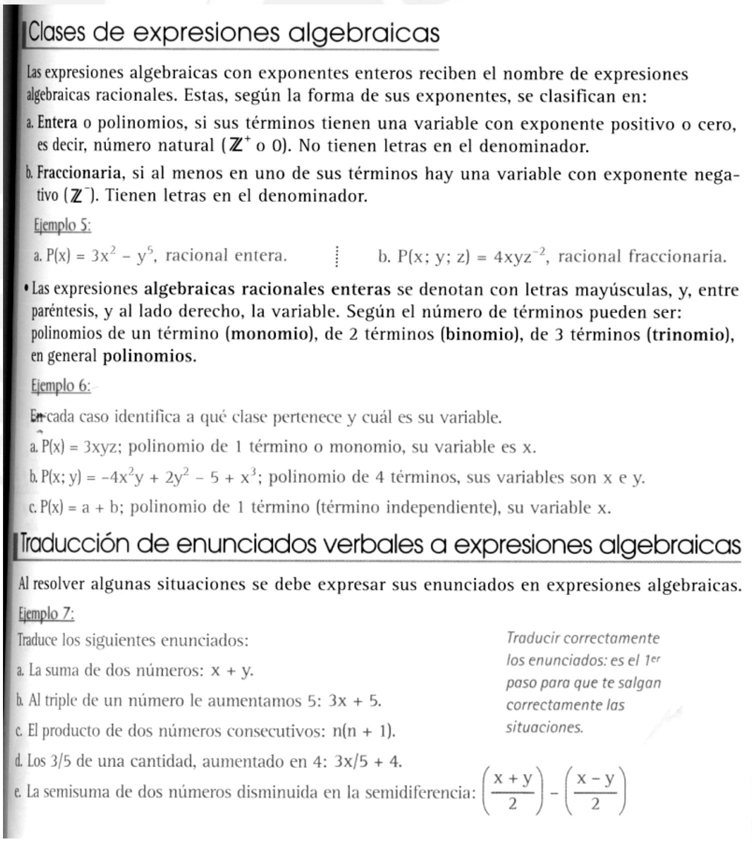
valores numéricos posibles.

En este caso, l**a variable se emplea como incógnita**, es decir, el objeto matemático desconocido se manipula como si fuera conocido. Esto es evidente en el caso de la traducción de enunciados verbales. las letras se usan para expresar cantidades desconocidas y variables, que pueden tomar un conjunto de valores posibles dentro de cierto intervalo.

Las expresiones algebraicas presentadas usan notación funcional. Sin embargo, esta presentación se reduce a la aplicación de las variables como incógnitas, donde la asignación de determinados valores a una de las variables hace que le corresponda otro valor a la otra, está notación se reduce al cálculo de valores numéricos. No se garantiza el uso relacional y de generalización que debería tener este tipo de notación.

Considero que el estudio de las funciones debería centrarse en indagar relaciones en contextos significativos para los alumnos.

Las situaciones de traducción de enunciados verbales a expresiones algebraicas se dan como contenidos acabados, formulando ejemplos y situaciones similares para representar.



Clases de expresiones algebraicas

Las expresiones algebraicas con exponentes enteros reciben el nombre de expresiones algebraicas racionales. Estas, según la forma de sus exponentes, se clasifican en:

a. **Entera** o polinomios, si sus términos tienen una variable con exponente positivo o cero, es decir, número natural ($\mathbb{Z}^+$ o 0). No tienen letras en el denominador.

b. **Fraccionaria**, si al menos en uno de sus términos hay una variable con exponente negativo ($\mathbb{Z}^-$). Tienen letras en el denominador.

Ejemplo 5:

a. $P(x) = 3x^2 - y^5$, racional entera.

b. $P(x; y; z) = 4xyz^{-2}$, racional fraccionaria.

- Las expresiones **algebraicas racionales enteras** se denotan con letras mayúsculas, y, entre paréntesis, y al lado derecho, la variable. Según el número de términos pueden ser: polinomios de un término (**monomio**), de 2 términos (**binomio**), de 3 términos (**trinomio**), en general **polinomios.**

Ejemplo 6:

En cada caso identifica a qué clase pertenece y cuál es su variable.

a. $P(x) = 3xyz$; polinomio de 1 término o monomio, su variable es x.

b. $P(x; y) = -4x^2y + 2y^2 - 5 + x^3$; polinomio de 4 términos, sus variables son x e y.

c. $P(x) = a + b$; polinomio de 1 término (término independiente), su variable x.

Traducción de enunciados verbales a expresiones algebraicas

Al resolver algunas situaciones se debe expresar sus enunciados en expresiones algebraicas.

Ejemplo 7:

Traduce los siguientes enunciados:

a. La suma de dos números: $x + y$.

b. Al triple de un número le aumentamos 5: $3x + 5$.

c. El producto de dos números consecutivos: $n(n + 1)$.

d. Los 3/5 de una cantidad, aumentado en 4: $3x/5 + 4$.

e. La semisuma de dos números disminuida en la semidiferencia: $\left(\frac{x+y}{2}\right) - \left(\frac{x-y}{2}\right)$

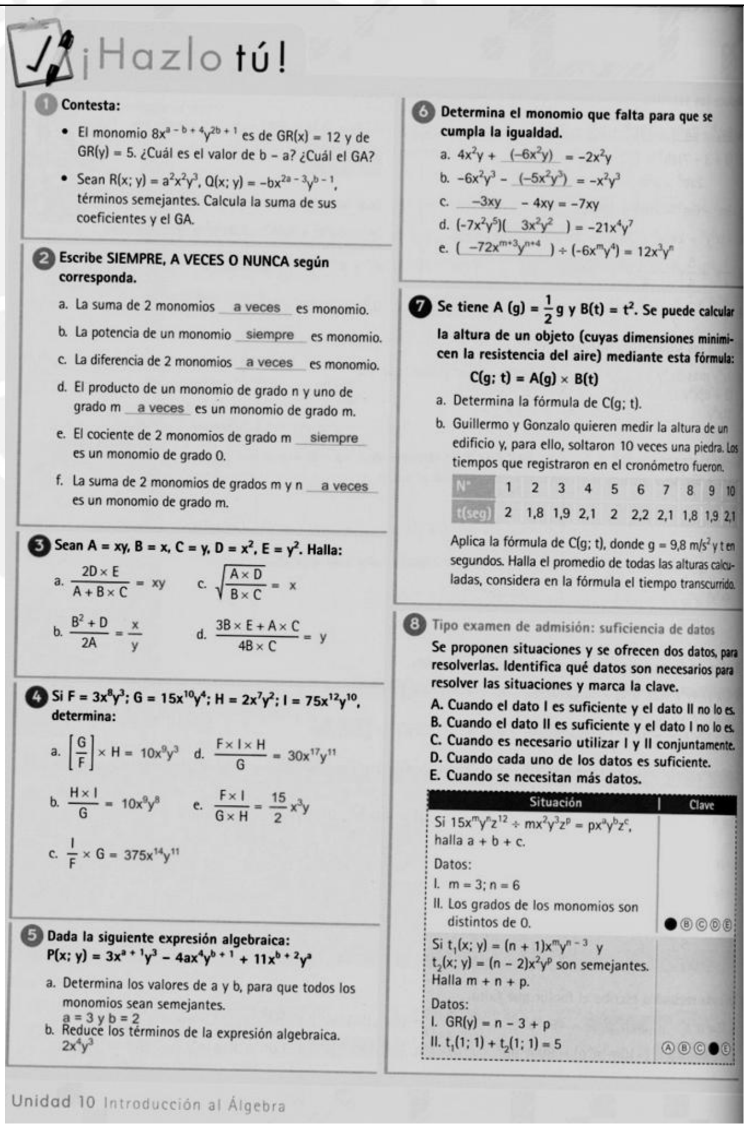
Traducir correctamente los enunciados: es el 1er paso para que te salgan correctamente las situaciones.

Figura 17: Página completa tomada del libro Reto. mate 1, p -297.

Considerando los aportes de Chevallard, Y. (1999) y los elementos de las praxeologías matemáticas podemos afirmar :

Análisis de lo presentado.	**En cuanto a la tecnología, s**e presentan operaciones y propiedades, pero no se justifican. lo previamente presentado, así en: 3xy +5xy = 8xy, podríamos verificarlo haciendo que x= 2, y= -3. Luego, reemplazando nos quedaría: 3(2)(-3) +5(2)(-3) = 8(2) (-3) -18 – 30 = - 48 - 48 = - 48 **En cuanto a las técnicas**, no se presentan tareas que hagan que estos resultados o contenidos sean necesarios, todo se reduce a la aplicación aislada de algoritmos. Además, no se presentan especificaciones sobre el campo numérico de trabajo.

Hazlo tú, otra mirada	
Contenidos	Ejercicios de nivel intermedio y avanzado (según los autores), sobre los temas tratados, dosificados por capacidad y nivel de dificultad.
Actividades propuestas.	Figura 18: Tomada del libro Reto. mate 1, p -306.



¡Hazlo tú!

1 Contesta:

- El monomio $8x^{a-b+4}y^{2b+1}$ es de GR(x) = 12 y de GR(y) = 5. ¿Cuál es el valor de b – a? ¿Cuál el GA?
- Sean $R(x; y) = a^2x^2y^3$, $Q(x; y) = -bx^{2a-3}y^{b-1}$, términos semejantes. Calcula la suma de sus coeficientes y el GA.

2 Escribe SIEMPRE, A VECES O NUNCA según corresponda.

a. La suma de 2 monomios __a veces__ es monomio.
b. La potencia de un monomio __siempre__ es monomio.
c. La diferencia de 2 monomios __a veces__ es monomio.
d. El producto de un monomio de grado n y uno de grado m __a veces__ es un monomio de grado m.
e. El cociente de 2 monomios de grado m __siempre__ es un monomio de grado 0.
f. La suma de 2 monomios de grados m y n __a veces__ es un monomio de grado m.

3 Sean $A = xy$, $B = x$, $C = y$, $D = x^2$, $E = y^2$. Halla:

a. $\frac{2D \times E}{A + B \times C} = xy$ c. $\sqrt{\frac{A \times D}{B \times C}} = x$

b. $\frac{B^2 + D}{2A} = \frac{x}{y}$ d. $\frac{3B \times E + A \times C}{4B \times C} = y$

4 Si $F = 3x^8y^3$; $G = 15x^{10}y^4$; $H = 2x^7y^2$; $I = 75x^{12}y^{10}$, determina:

a. $\left[\frac{G}{F}\right] \times H = 10x^9y^3$ d. $\frac{F \times I \times H}{G} = 30x^{17}y^{11}$

b. $\frac{H \times I}{G} = 10x^9y^8$ e. $\frac{F \times I}{G \times H} = \frac{15}{2}x^3y$

c. $\frac{I}{F} \times G = 375x^{14}y^{11}$

5 Dada la siguiente expresión algebraica:
$P(x; y) = 3x^{a+1}y^3 - 4ax^4y^{b+1} + 11x^{b+2}y^a$

a. Determina los valores de a y b, para que todos los monomios sean semejantes.
a = 3 y b = 2
b. Reduce los términos de la expresión algebraica.
$2x^4y^3$

6 Determina el monomio que falta para que se cumpla la igualdad.

a. $4x^2y + \underline{(-6x^2y)} = -2x^2y$
b. $-6x^2y^3 - \underline{(-5x^2y^3)} = -x^2y^3$
c. $\underline{-3xy} - 4xy = -7xy$
d. $(-7x^2y^5)(\underline{3x^2y^2}) = -21x^4y^7$
e. $(\underline{-72x^{m+3}y^{n+4}}) \div (-6x^my^4) = 12x^3y^n$

7 Se tiene $A(g) = \frac{1}{2}g$ y $B(t) = t^2$. Se puede calcular la altura de un objeto (cuyas dimensiones minimicen la resistencia del aire) mediante esta fórmula:

$C(g; t) = A(g) \times B(t)$

a. Determina la fórmula de C(g; t).
b. Guillermo y Gonzalo quieren medir la altura de un edificio y, para ello, soltaron 10 veces una piedra. Los tiempos que registraron en el cronómetro fueron.

N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t(seg)	2	1,8	1,9	2,1	2	2,2	2,1	1,8	1,9	2,1

Aplica la fórmula de C(g; t), donde $g = 9{,}8\ m/s^2$ y t en segundos. Halla el promedio de todas las alturas calculadas, considera en la fórmula el tiempo transcurrido.

8 Tipo examen de admisión: suficiencia de datos

Se proponen situaciones y se ofrecen dos datos, para resolverlas. Identifica qué datos son necesarios para resolver las situaciones y marca la clave.

A. Cuando el dato I es suficiente y el dato II no lo es.
B. Cuando el dato II es suficiente y el dato I no lo es.
C. Cuando es necesario utilizar I y II conjuntamente.
D. Cuando cada uno de los datos es suficiente.
E. Cuando se necesitan más datos.

Situación	Clave
Si $15x^my^nz^{12} \div mx^2y^3z^p = px^ay^bz^c$, halla a + b + c. Datos: I. m = 3; n = 6 II. Los grados de los monomios son distintos de 0.	● Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
Si $t_1(x; y) = (n + 1)x^my^{n-3}$ y $t_2(x; y) = (n - 2)x^2y^p$ son semejantes. Halla m + n + p. Datos: I. GR(y) = n – 3 + p II. $t_1(1; 1) + t_2(1; 1) = 5$	Ⓐ Ⓑ Ⓒ ● Ⓔ

Unidad 10 Introducción al Álgebra

<table>
<tr>
<td>Análisis de lo presentado.</td>
<td>
Teniendo en cuenta los aportes de Chevallard, Y. (1999) y el análisis de algunos de los elementos de las praxeologías matemáticas consideramos:
En cuanto a los tipos de problemas, estas son de completamiento de tablas, relación y/o comparación de datos, aplicación de algoritmos; buscan la fijación de contenidos conceptuales. Su principal objetivo es familiarizar al estudiante con el vocabulario y la fijación de conceptos, propiedades y características en relación a las expresiones algebraicas.

Por otro lado, en el siguiente problema:

1 Contesta:
• El monomio $8x^{a-b+4}y^{2b+1}$ es de GR(x) = 12 y de GR(y) = 5. ¿Cuál es el valor de b – a? ¿Cuál el GA?
• Sean $R(x; y) = a^2x^2y^3$, $Q(x; y) = -bx^{2a-3}y^{b-1}$, términos semejantes. Calcula la suma de sus coeficientes y el GA.

Se presupone la comprensión total de la noción de expresión algebraica, pues en este caso se incluyen letras en los exponentes (antes en el libro se afirmó que los exponentes debían ser fijos). Se presenta un vacio conceptual que puede generar restricciones y conflictos posteriores.
</td>
</tr>
</table>

Para los <u>monomios.</u>

Tabla N° 9: Presentación de la unidad 10 para el tema de monomios.

<table>
<tr>
<th colspan="2">Desarrollo de temas.</th>
</tr>
<tr>
<td>Contenidos.</td>
<td>
• Situación inicial relacionada con la compra de perfumes, formas de representación de datos y lectura de información relacionados en una tabla.
La situación inicial propuesta es:
Carla ha comprado una cantidad de perfumes a 50 soles cada uno. Si la diferencia del número de perfumes para caballeros con el número de perfumes para damas es 4. Contesta a las siguientes preguntas: ¿Se conoce el número de perfumes que compró Carla ? ¿Cómo se obtiene la inversión en perfumes de caballero? ¿Cuál fue la inversión total?

<table>
<tr><th>Artículo</th><th>Costo unitario</th><th>Cantidad</th><th>Inversión</th></tr>
<tr><td>Perfume de caballeros</td><td>50</td><td>x+4</td><td>50(x+4)</td></tr>
<tr><td>Perfume de damas</td><td>50</td><td>x</td><td>50x</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Contenidos.

- Contextos problemáticos resueltos y otros que buscan la aplicación de lo aprendido, en relación al grado de un polinomio, reducción de términos, adición y sustracción de monomios, multiplicación de monomios, potenciación y división de monomios.

Finalmente algunas situaciones sobre comparación cuantitativa y conexiones con la estadística y geometría.

6 Tipo examen de admisión: comparación cuantitativa

Marca la clave según corresponda.

Ⓐ P > Q Ⓒ P = Q

Ⓑ P < Q Ⓓ No se puede determinar

En los polinomios m y n ∈ IN.

$P(x; y; z) = abx^{m+5}z^{n} + 2x^{m-2}y^{n+5}z^{n-2} - 3y^{m+8} + ax^{m-6}z^{n+1};$

$Q(x; y; z) = mx^{m+4}z^{n+1} + 5x^{m+4}yz^{n} - nx^{n+8}y^{m+3}z^{n-1} - by^{m}.$

P	Q	Clave
GR(x)	GR(y)	● Ⓑ Ⓒ Ⓓ
GA(P)	GA(Q)	Ⓐ Ⓑ Ⓒ ●
GR(y)	GR(x)	Ⓐ Ⓑ Ⓒ ●
GR(z)	GR(z)	Ⓐ Ⓑ ● Ⓓ
GR(x) + GR(z)	GR(y) + GR(z)	● Ⓑ Ⓒ Ⓓ
GA(P) – GR(z)	GA(Q)– GR(x)	Ⓐ Ⓑ Ⓒ ●

CONEXIONES

ESTADÍSTICA

La gráfica muestra información sobre una encuesta realizada a una cierta cantidad de alumnos de un colegio.

- **El número de estudiantes que prefieren tenis es 192**
  - a. ¿Cuál es el número de estudiantes que prefieren básquet?
  - b. Si $\sqrt[5]{am} \in$ IN, ¿Cuántos prefieren fútbol?

GEOMETRÍA

El área del terreno mostrado es de 256 m² y se desea cercarlo. El metro lineal de una reja de metal cuesta S/. 90. Halla el costo para cercar dicho terreno.

a. S/. 13 230

X. S/. 12 240

c. S/. 14 320

d. S/. 12 420

e. S/. 4 420

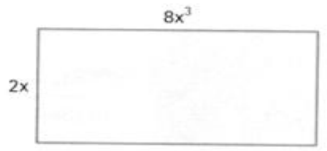


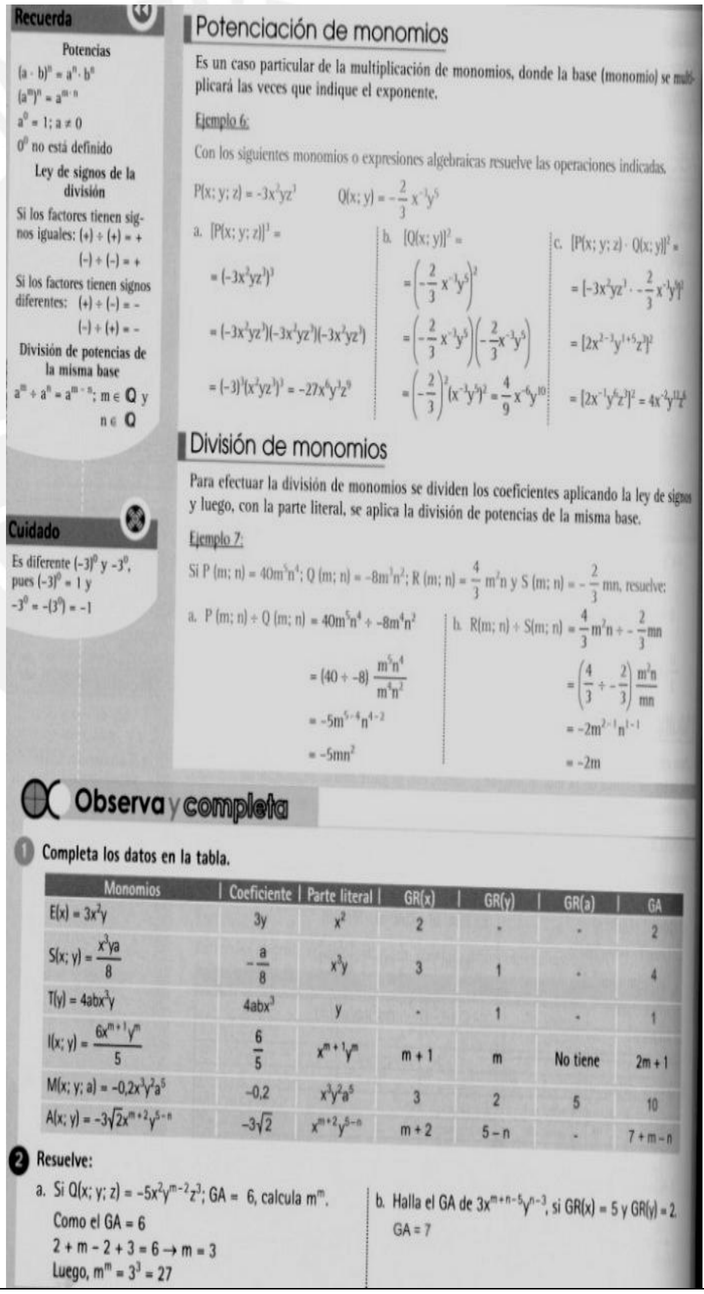
Figura 19: Tomada del libro Reto. mate 1, p -307.

Actividades que propone.

- La presentación de estos temas es explicativa, indicándose, según el caso, algoritmos para las operaciones con monomios. Cada explicación sobre los modos de hacer se acompaña de ejemplos. Sólo para el caso de la adición y sustracción, se usaron figuras para visualizar y analizar las relaciones establecidas, a manera de otro registro de representación.

- Se proponen actividades en relación a las siguientes capacidades específicas resuelve, completa, reduce, efectúa y analiza.

Figura 20: Tomada del libro Reto. mate 1, p - 304.



Recuerda

Potencias

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$a^0 = 1; a \neq 0$

0^0 no está definido

Ley de signos de la división

Si los factores tienen signos iguales: $(+) \div (+) = +$

$(-) \div (-) = +$

Si los factores tienen signos diferentes: $(+) \div (-) = -$

$(-) \div (+) = -$

División de potencias de la misma base

$a^m \div a^n = a^{m-n}; m \in \mathbb{Q}$ y $n \in \mathbb{Q}$

Cuidado

Es diferente $(-3)^0$ y -3^0, pues $(-3)^0 = 1$ y $-3^0 = -(3^0) = -1$

Potenciación de monomios

Es un caso particular de la multiplicación de monomios, donde la base (monomio) se multiplicará las veces que indique el exponente.

Ejemplo 6:

Con los siguientes monomios o expresiones algebraicas resuelve las operaciones indicadas.

$P(x; y; z) = -3x^2yz^3$ $\quad Q(x; y) = -\frac{2}{3}x^{-3}y^5$

a. $[P(x; y; z)]^3 =$

$= (-3x^2yz^3)^3$

$= (-3x^2yz^3)(-3x^2yz^3)(-3x^2yz^3)$

$= (-3)^3(x^2yz^3)^3 = -27x^6y^3z^9$

b. $[Q(x; y)]^2 =$

$= \left(-\frac{2}{3}x^{-3}y^5\right)^2$

$= \left(-\frac{2}{3}x^{-3}y^5\right)\left(-\frac{2}{3}x^{-3}y^5\right)$

$= \left(-\frac{2}{3}\right)^2(x^{-3}y^5)^2 = \frac{4}{9}x^{-6}y^{10}$

c. $[P(x; y; z) \cdot Q(x; y)]^2 =$

$= [-3x^2yz^3 \cdot -\frac{2}{3}x^{-3}y^5]^2$

$= [2x^{2-3}y^{1+5}z^3]^2$

$= [2x^{-1}y^6z^3]^2 = 4x^{-2}y^{12}z^6$

División de monomios

Para efectuar la división de monomios se dividen los coeficientes aplicando la ley de signos y luego, con la parte literal, se aplica la división de potencias de la misma base.

Ejemplo 7:

Si $P(m; n) = 40m^5n^4$; $Q(m; n) = -8m^4n^2$; $R(m; n) = \frac{4}{3}m^2n$ y $S(m; n) = -\frac{2}{3}mn$, resuelve:

a. $P(m; n) \div Q(m; n) = 40m^5n^4 \div -8m^4n^2$

$= (40 \div -8)\frac{m^5n^4}{m^4n^2}$

$= -5m^{5-4}n^{4-2}$

$= -5mn^2$

b. $R(m; n) \div S(m; n) = \frac{4}{3}m^2n \div -\frac{2}{3}mn$

$= \left(\frac{4}{3} \div -\frac{2}{3}\right)\frac{m^2n}{mn}$

$= -2m^{2-1}n^{1-1}$

$= -2m$

Observa y completa

1. Completa los datos en la tabla.

Monomios	Coeficiente	Parte literal	GR(x)	GR(y)	GR(a)	GA
$E(x) = 3x^2y$	$3y$	x^2	2	-	-	2
$S(x; y) = \frac{x^3ya}{8}$	$-\frac{a}{8}$	x^3y	3	1	-	4
$T(y) = 4abx^3y$	$4abx^3$	y	-	1	-	1
$I(x; y) = \frac{6x^{m+1}y^m}{5}$	$\frac{6}{5}$	$x^{m+1}y^m$	$m+1$	m	No tiene	$2m+1$
$M(x; y; a) = -0{,}2x^3y^2a^5$	$-0{,}2$	$x^3y^2a^5$	3	2	5	10
$A(x; y) = -3\sqrt{2}x^{m+2}y^{5-n}$	$-3\sqrt{2}$	$x^{m+2}y^{5-n}$	$m+2$	$5-n$	-	$7+m-n$

2. Resuelve:

a. Si $Q(x; y; z) = -5x^2y^{m-2}z^3$; GA = 6, calcula m^m.

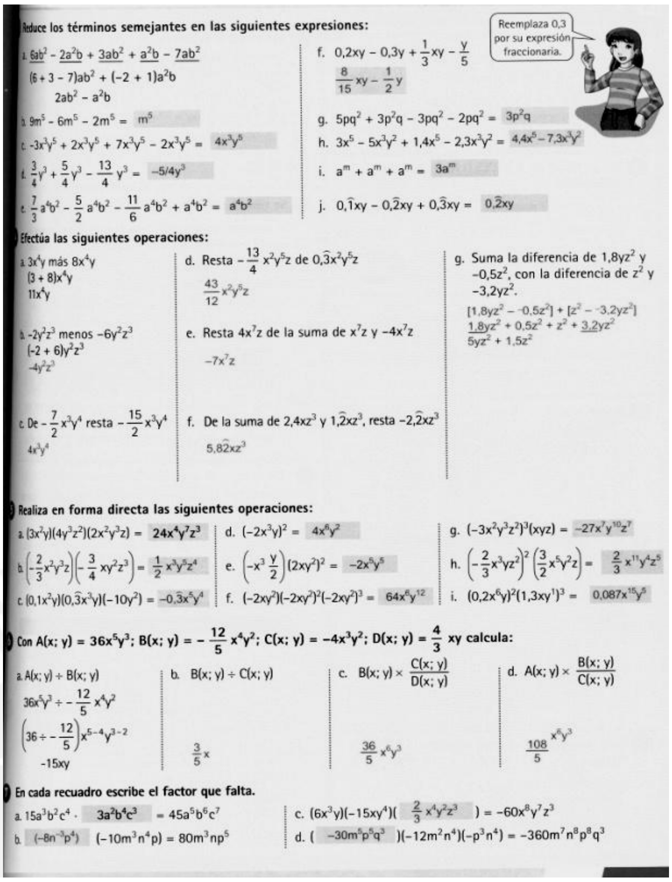
Como el GA = 6

$2 + m - 2 + 3 = 6 \rightarrow m = 3$

Luego, $m^m = 3^3 = 27$

b. Halla el GA de $3x^{m+n-5}y^{n-3}$, si GR(x) = 5 y GR(y) = 2.

GA = 7



Reduce los términos semejantes en las siguientes expresiones:

a. $6ab^2 - 2a^2b + 3ab^2 + a^2b - 7ab^2$
$(6 + 3 - 7)ab^2 + (-2 + 1)a^2b$
$2ab^2 - a^2b$

b. $9m^5 - 6m^5 - 2m^5 =$ m^5

c. $-3x^3y^5 + 2x^3y^5 + 7x^3y^5 - 2x^3y^5 =$ $4x^3y^5$

d. $\frac{3}{4}y^3 + \frac{5}{4}y^3 - \frac{13}{4}y^3 =$ $-5/4y^3$

e. $\frac{7}{3}a^4b^2 - \frac{5}{2}a^4b^2 - \frac{11}{6}a^4b^2 + a^4b^2 =$ a^4b^2

f. $0,2xy - 0,3y + \frac{1}{3}xy - \frac{y}{5}$
$\frac{8}{15}xy - \frac{1}{2}y$

g. $5pq^2 + 3p^2q - 3pq^2 - 2pq^2 =$ $3p^2q$

h. $3x^5 - 5x^3y^2 + 1,4x^5 - 2,3x^3y^2 =$ $4,4x^5 - 7,3x^3y^2$

i. $a^m + a^m + a^m =$ $3a^m$

j. $0,\widehat{1}xy - 0,\widehat{2}xy + 0,\widehat{3}xy =$ $0,\widehat{2}xy$

Efectúa las siguientes operaciones:

a. $3x^4y$ más $8x^4y$
$(3 + 8)x^4y$
$11x^4y$

b. $-2y^2z^3$ menos $-6y^2z^3$
$(-2 + 6)y^2z^3$
$-4y^2z^3$

c. De $-\frac{7}{2}x^3y^4$ resta $-\frac{15}{2}x^3y^4$
$4x^3y^4$

d. Resta $-\frac{13}{4}x^2y^5z$ de $0,\widehat{3}x^2y^5z$
$\frac{43}{12}x^2y^5z$

e. Resta $4x^7z$ de la suma de x^7z y $-4x^7z$
$-7x^7z$

f. De la suma de $2,4xz^3$ y $1,\widehat{2}xz^3$, resta $-2,\widehat{2}xz^3$
$5,8\widehat{2}xz^3$

g. Suma la diferencia de $1,8yz^2$ y $-0,5z^2$, con la diferencia de z^2 y $-3,2yz^2$.
$[1,8yz^2 - -0,5z^2] + [z^2 - -3,2yz^2]$
$1,8yz^2 + 0,5z^2 + z^2 + 3,2yz^2$
$5yz^2 + 1,5z^2$

Realiza en forma directa las siguientes operaciones:

a. $(3x^2y)(4y^3z^2)(2x^2y^3z) =$ $24x^4y^7z^3$

b. $\left(-\frac{2}{3}x^2y^3z\right)\left(-\frac{3}{4}xy^2z^3\right) =$ $\frac{1}{2}x^3y^5z^4$

c. $(0,1x^2y)(0,\widehat{3}x^3y)(-10y^2) =$ $-0,\widehat{3}x^5y^4$

d. $(-2x^3y)^2 =$ $4x^6y^2$

e. $\left(-x^3\frac{y}{2}\right)(2xy^2)^2 =$ $-2x^5y^5$

f. $(-2xy^2)(-2xy^2)^2(-2xy^2)^3 =$ $64x^6y^{12}$

g. $(-3x^2y^3z^2)^3(xyz) =$ $-27x^7y^{10}z^7$

h. $\left(-\frac{2}{3}x^3yz^2\right)^2\left(\frac{3}{2}x^5y^2z\right) =$ $\frac{2}{3}x^{11}y^4z^5$

i. $(0,2x^6y)^2(1,3xy^1)^3 =$ $0,087x^{15}y^5$

Con $A(x; y) = 36x^5y^3$; $B(x; y) = -\frac{12}{5}x^4y^2$; $C(x; y) = -4x^3y^2$; $D(x; y) = \frac{4}{3}xy$ calcula:

a. $A(x; y) \div B(x; y)$
$36x^5y^3 \div -\frac{12}{5}x^4y^2$
$\left(36 \div -\frac{12}{5}\right)x^{5-4}y^{3-2}$
$-15xy$

b. $B(x; y) \div C(x; y)$
$\frac{3}{5}x$

c. $B(x; y) \times \frac{C(x; y)}{D(x; y)}$
$\frac{36}{5}x^6y^3$

d. $A(x; y) \times \frac{B(x; y)}{C(x; y)}$
$\frac{108}{5}x^6y^3$

En cada recuadro escribe el factor que falta.

a. $15a^3b^2c^4 \cdot$ $3a^2b^4c^3$ $= 45a^5b^6c^7$

b. $(-8n^{-3}p^4)$ $(-10m^3n^4p) = 80m^3np^5$

c. $(6x^3y)(-15xy^4)($ $\frac{2}{3}x^4y^2z^3$ $) = -60x^8y^7z^3$

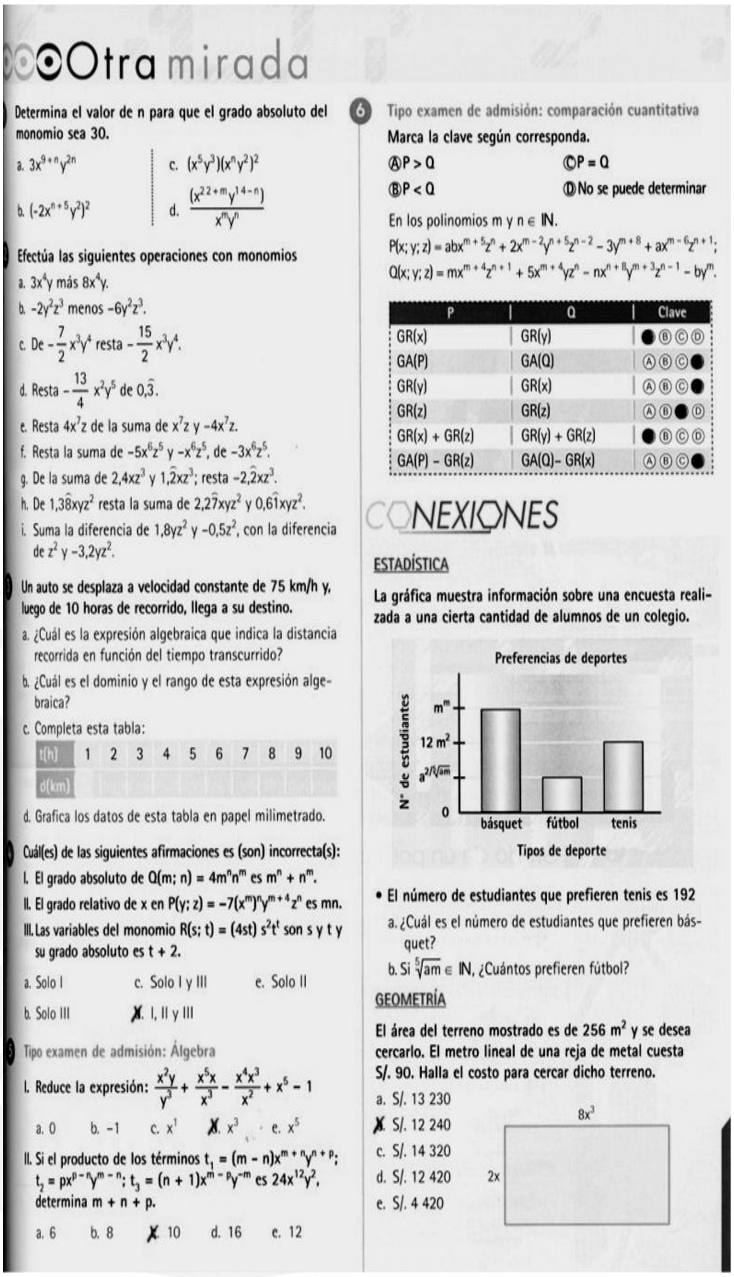
d. $($ $-30m^5p^5q^3$ $)(-12m^2n^4)(-p^3n^4) = -360m^7n^8p^8q^3$

Figura 21: Tomada del libro Reto. mate 1, p -305.

Análisis de lo presentado.	Considerando la naturaleza matemática de la variable de Godino, J. & Font, V. (2003) analizamos lo siguiente:: **El uso de las variables** para el caso de las operaciones con monomios es **como indeterminada**, con fines de notación y manipulación sobre la base de algoritmos. Considerando los elementos de las praxeologías de Chevallard, Y. (1999): **Las técnicas** aplicadas son independientes entre sí, además en cuanto a **la tecnología**, no hay ningún intento por justificar el uso de las variables ni la aplicación de los algoritmos Las operaciones algebraicas se presentaron como ampliación de las propiedades aritméticas.

Hazlo tú, otra mirada.	
Contenidos.	Situaciones de contexto que implican la interpretación de información y la relación de datos algo más compleja que la simple aplicación de algoritmos, dosificados por capacidad y nivel de dificultad.

Actividades propuestas.



Otra mirada

1. **Determina el valor de n para que el grado absoluto del monomio sea 30.**

a. $3x^{9+n}y^{2n}$

b. $(-2x^{n+5}y^2)^2$

c. $(x^5y^3)(x^ny^2)^2$

d. $\frac{(x^{22+m}y^{14-n})}{x^my^n}$

2. **Efectúa las siguientes operaciones con monomios**

a. $3x^4y$ más $8x^4y$.

b. $-2y^2z^3$ menos $-6y^2z^3$.

c. De $-\frac{7}{2}x^3y^4$ resta $-\frac{15}{2}x^3y^4$.

d. Resta $-\frac{13}{4}x^2y^5$ de $0,\widehat{3}$.

e. Resta $4x^7z$ de la suma de x^7z y $-4x^7z$.

f. Resta la suma de $-5x^6z^5$ y $-x^6z^5$, de $-3x^6z^5$.

g. De la suma de $2,4xz^3$ y $1,\widehat{2}xz^3$; resta $-2,\widehat{2}xz^3$.

h. De $1,3\widehat{8}xyz^2$ resta la suma de $2,2\widehat{7}xyz^2$ y $0,6\widehat{1}xyz^2$.

i. Suma la diferencia de $1,8yz^2$ y $-0,5z^2$, con la diferencia de z^2 y $-3,2yz^2$.

3. **Un auto se desplaza a velocidad constante de 75 km/h y, luego de 10 horas de recorrido, llega a su destino.**

a. ¿Cuál es la expresión algebraica que indica la distancia recorrida en función del tiempo transcurrido?

b. ¿Cuál es el dominio y el rango de esta expresión algebraica?

c. Completa esta tabla:

t(h)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d(km)										

d. Grafica los datos de esta tabla en papel milimetrado.

4. **Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) incorrecta(s):**

I. El grado absoluto de $Q(m; n) = 4m^nn^m$ es $m^n + n^m$.

II. El grado relativo de x en $P(y; z) = -7(x^m)^ny^{m+4}z^n$ es mn.

III. Las variables del monomio $R(s; t) = (4st)\,s^2t^t$ son s y t y su grado absoluto es t + 2.

a. Solo I   c. Solo I y III   e. Solo II

b. Solo III   ~~d.~~ I, II y III

5. Tipo examen de admisión: Álgebra

I. **Reduce la expresión:** $\frac{x^2y}{y^3} + \frac{x^5x}{x^3} - \frac{x^4x^3}{x^2} + x^5 - 1$

a. 0   b. −1   c. x^1 ~~d.~~ x^3 e. x^5

II. **Si el producto de los términos** $t_1 = (m - n)x^{m+n}y^{n+p}$; $t_2 = px^{p-n}y^{m-n}$; $t_3 = (n + 1)x^{m-p}y^{-m}$ **es** $24x^{12}y^2$, **determina m + n + p.**

a. 6   b. 8   ~~c.~~ 10   d. 16   e. 12

6. Tipo examen de admisión: comparación cuantitativa

Marca la clave según corresponda.

Ⓐ P > Q   Ⓒ P = Q

Ⓑ P < Q   Ⓓ No se puede determinar

En los polinomios m y n ∈ ℕ.

$P(x; y; z) = abx^{m+5}z^n + 2x^{m-2}y^{n+5}z^{n-2} - 3y^{m+8} + ax^{m-6}z^{n+1}$;

$Q(x; y; z) = mx^{m+4}z^{n+1} + 5x^{m+4}yz^n - nx^{n+8}y^{m+3}z^{n-1} - by^m$.

P	Q	Clave
GR(x)	GR(y)	● Ⓑ Ⓒ Ⓓ
GA(P)	GA(Q)	Ⓐ Ⓑ Ⓒ ●
GR(y)	GR(x)	Ⓐ Ⓑ Ⓒ ●
GR(z)	GR(z)	Ⓐ Ⓑ ● Ⓓ
GR(x) + GR(z)	GR(y) + GR(z)	● Ⓑ Ⓒ Ⓓ
GA(P) − GR(z)	GA(Q) − GR(x)	Ⓐ Ⓑ Ⓒ ●

CONEXIONES

ESTADÍSTICA

La gráfica muestra información sobre una encuesta realizada a una cierta cantidad de alumnos de un colegio.

Preferencias de deportes

N° de estudiantes

m^m

$12\,m^2$

$a^{2/\sqrt[5]{am}}$

0

básquet   fútbol   tenis

Tipos de deporte

- **El número de estudiantes que prefieren tenis es 192**

a. ¿Cuál es el número de estudiantes que prefieren básquet?

b. Si $\sqrt[5]{am} \in \mathbb{N}$, ¿Cuántos prefieren fútbol?

GEOMETRÍA

El área del terreno mostrado es de 256 m² y se desea cercarlo. El metro lineal de una reja de metal cuesta S/. 90. Halla el costo para cercar dicho terreno.

a. S/. 13 230

~~b.~~ S/. 12 240

c. S/. 14 320

d. S/. 12 420

e. S/. 4 420

$8x^3$

$2x$

Figura 22: Tomada del libro Reto. mate 1, p -307.

Análisis de lo presentado.

En referencia al aporte teórico de Chevallard, Y. (1999) consideramos:

En cuanto al tipo de problemas, las actividades y ejercicios de esta sección buscaron la fijación de contenidos previos, no hay situaciones problemáticas sino simplemente ejercicios.

Sólo al final de la sección en la parte titulada conexiones, se plantean dos problemas diferentes, una en relación a una lectura de gráfico (registro de representación) y la otra a un problema geométrico donde los datos se expresan como monomios.

5.2.3. Matemática. Primer año de Educación Secundaria. Texto oficial del Ministerio de educación.

Para el análisis de este texto hemos considerado 6 indicadores que describen lo siguiente: el tratamiento de la situación problemática inicial, el concepto de ecuación, el concepto de inecuación, la definición de variable, los tipos de tareas y problemas propuestos y algunos comentarios. Estos indicadores, se presentan en dos tablas que describen por unidades cada uno de estos aspectos.

Pretendemos identificar el grado de algebrización de los temas introductorios del álgebra escolar, y qué tipo de organización matemática está presente en el libro de texto que utilizan todas las instituciones escolares nacionales del Perú desde el año 2008.

El libro está dividido en 7 unidades, además cada unidad tiene la siguiente estructura:

- **Recupero mis saberes.** Revisión de pre-requisitos a través de problemas de contexto real.
- **Texto generador.** Texto introductorio que enmarca el tema de unidad.
- **Desarrollo de la unidad.** Presentación teórica de la unidad, ilustrada con ejemplos.
- **Curiosidades matemáticas.** Situaciones ingeniosas y lúdicas que implican la aplicación de conocimientos matemáticos.
- **Actividades.** Ejercicios y problemas de aplicación de lo aprendido.
- **Historia de la matemática.** Aspectos históricos vinculados a los temas de unidad.
- **Autoevaluación.** Ejercicios y problemas de autoayuda.
- **Metacognición.** Busca reflexionar sobre el aprendizaje de la unidad.

Los contenidos matemáticos de las tres primeras unidades son el sistema de los números naturales, el sistema de los números enteros y el sistema de los números racionales. Se incluye, además, en cada uno de ellos la resolución de ecuaciones e inecuaciones en N, Z y R respectivamente. A continuación detallamos la secuencia de contenidos de las tres primeras unidades donde se incluyen contenidos algebraicos.

Para la unidad 1: sistema de los números naturales.

Se presenta la siguiente secuencia de contenidos:

Situación problemática una de cuyas estrategias de solución necesita el planteo y aplicación de ecuaciones.

↓

Definición de ecuación y conceptos asociados en N

↓

Presentación de estrategias de solución a través del planteo y solución de ecuaciones.

↓

Ejemplos asociados a la aplicación del algoritmo de solución de ecuaciones.

↓

Planteo de una situación problemática

↓

Resolución de inecuaciones

Para la unidad 2: sistema de los números enteros.

Se presenta la siguiente secuencia de contenidos:

Resolución de ecuaciones de primer grado en Z.

↓

Definición de desigualdades en Z.

↓

Propiedades de las desigualdades.

↓

Inecuaciones en Z

↓

Resolución de problemas.

Para la unidad 3: sistema de los números racionales.

Se presenta la siguiente secuencia de contenidos:

Definición de ecuación en Q.

↓

Ecuaciones equivalentes.

↓

Resolución de ecuaciones con el modelo de la balanza.

↓

Resolución de ecuaciones con el modelo de los operadores.

↓

Ecuaciones compatibles, indeterminadas e incompatibles.

↓

Resolución de inecuaciones.

A continuación mostramos descriptivamente lo detallado anteriormente.

Tabla 9: Presentación de temas algebraicos del libro para el primer año de secundaria del Ministerio de Educación.

Indicador.	Texto.		
	Primera unidad.	Segunda unidad	Tercera unidad.
Se desarrolla el tema de ecuación como:	Sub unidad.	Sub unidad.	Sub unidad.
Situación problemática inicial.	**Para las ecuaciones:** La mamá de Luis compró en la feria medias para él y sus hermanos. Como no le alcanzó el dinero regresó a su casa y envió a Luis con un billete de 50 nuevos soles para pagar y recoger el paquete. Le entregan el paquete y le dan dos nuevos soles de vuelto. Luis regresa a su casa pensando cómo haría para saber cuántos pares de medias ha comprado su mamá, si cada par cuesta 4 soles y no debe mirar el interior del paquete. **Para las inecuaciones:** Lucía propone la siguiente situación. Si al doble de lo que tengo en el bolsillo se le agrega 5 nuevos soles tengo menos de 45 nuevos soles. ¿Cuánto tengo en el bolsillo?	No se presenta.	No se presenta para el caso de ecuaciones. Para las inecuaciones se presenta lo siguiente: Mi mamá me manda al mercado con diez nuevos soles para comprar arroz. El kilogramo de arroz cuesta 3 soles. ¿Cuántos kilogramos exactos puedo comprar? La respuesta no es 3,3 kg, porque nos piden kilogramos exactos. Tampoco la única respuesta posible es 3, porque no se indica gastar todo el dinero y se podría comprar 1 ó 2 kilogramos. Entonces, la respuesta debería ser: " puedo comprar como máximo 3 kilogramos" Esta situación se puede representar así: Si compro x kilogramos de arroz, debo pagar 3x soles sin sobrepasar los 10 soles, entonces: $3x \leq 10$
Concepto de ecuación.	La igualdad en la que aparecen números y operaciones indicadas, además de una cantidad desconocida, se llama ecuación.	Resolver una ecuación es hallar su conjunto solución, es decir, el conjunto de números que al	Una ecuación es una igualdad de dos expresiones algebraicas. **No se indica previamente qué es una expresión**

Concepto de ecuación.		reemplazar por la incógnita hace verdadera la igualdad.	**algebraica**. Las soluciones de la ecuación son los valores de las incógnitas para los que el valor numérico del primer miembro es igual al valor numérico del segundo miembro. Se habla de ecuaciones equivalentes: *dos ecuaciones en las que toda solución de la primera es solución de la segunda y toda solución de la segunda es a la vez solución de la primera, son ecuaciones equivalentes.*
Concepto de inecuación.	No se presenta.	Se indica que *para resolver una inecuación se utiliza las propiedades que tienen las desigualdades.* Anteriormente, se indicó como propiedades de las desigualdades: *Si a ambos miembros de una desigualdad se les suma, se les resta, se les multiplica o se les divide por un mismo número entero positivo, y existen los cocientes, la desigualdad se mantiene.*	Desigualdades que tienen incógnitas.
Definición de variable.	La cantidad desconocida se llama incógnita de la ecuación. El uso de la variable en este caso es como incógnita.	No se presenta.	En una ecuación, cada una de las letras que aparece en sus miembros se llama incógnita.

Considerando el aporte de la teoría antropológica de lo didáctico, en cuanto al análisis de los elementos de las praxeologías matemáticas, analizamos lo siguiente:

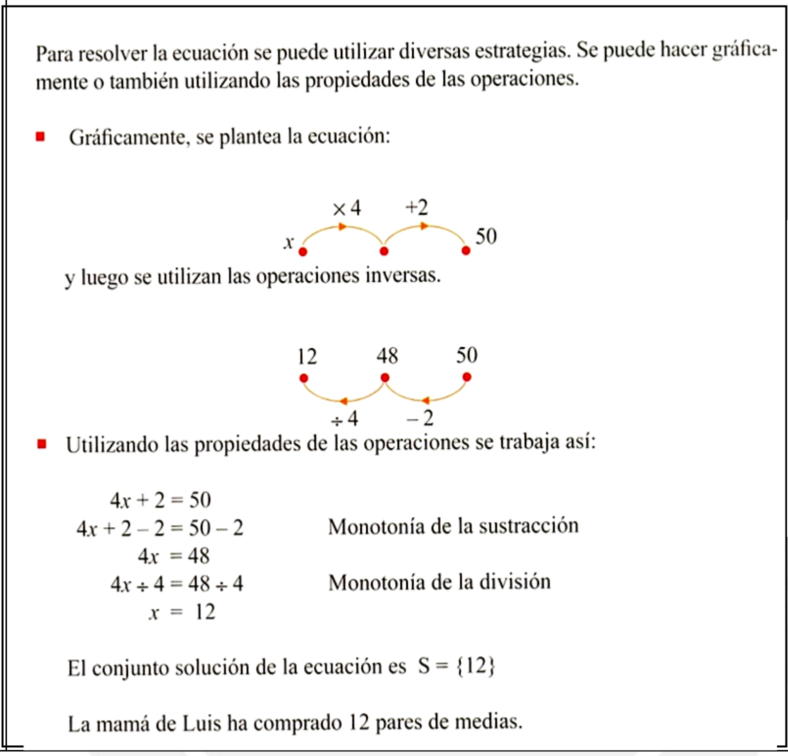
<table>
<tr><td>Primera unidad.</td><td>En cuanto al tipo de tareas o problemas.
Plantea dos métodos para resolver ecuaciones:
1ro: Utilizando operaciones inversas.
2do: Utilizando las propiedades de las operaciones. (algoritmo para resolver ecuaciones).

Para resolver la ecuación se puede utilizar diversas estrategias. Se puede hacer gráficamente o también utilizando las propiedades de las operaciones.
■ Gráficamente, se plantea la ecuación:
$x \xrightarrow{\times 4} \bullet \xrightarrow{+2} 50$
y luego se utilizan las operaciones inversas.
$12 \xleftarrow{\div 4} 48 \xleftarrow{-2} 50$
■ Utilizando las propiedades de las operaciones se trabaja así:
$4x + 2 = 50$
$4x + 2 - 2 = 50 - 2$ Monotonía de la sustracción
$4x = 48$
$4x \div 4 = 48 \div 4$ Monotonía de la división
$x = 12$
El conjunto solución de la ecuación es $S = \{12\}$
La mamá de Luis ha comprado 12 pares de medias.

Figura 23: Tomada del libro Matemática Primer Grado de Educación Secundaria. Editorial Bruño, p -36.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Comentarios:
La introducción algebraica se da a través del estudio del tema de ecuaciones, no hay menciones ni definiciones de términos algebraicos ni expresiones algebraicas.
El uso de la variable se da en su uso como incógnita según la clasificación de Godino.
En esta primera unidad, lo interesante puede ser el inicio de la unidad con situaciones que exigen el planteo y solución de ecuaciones. Sin embargo, esta presentación es atómica no se vincula con conocimientos previos ni se parte de este conocimiento para la generación de otros nuevos.
Las tareas propuestas son mayormente de fijación de lo aprendido y algorítmicas.</td></tr>
<tr><td>Segunda unidad.</td><td>En cuanto al tipo de tareas o problemas.
Los tipos de tareas son básicamente algorítmicos, se presentan como secuencia de pasos o estrategias para resolver situaciones similares.
Se plantea como estrategia el inventar problemas que se traduzcan en una ecuación dada. Ejemplo:
Si la ecuación es:
100 – 3x = 70 tenemos tres enunciados diferentes para la ecuación dada:
a) Compré tres libros del mismo precio, pagué con un billete de 100 nuevos soles y me dieron de vuelto 70 nuevos soles, ¿cuánto cuesta cada libro?
b) Mi padre nos da propinas iguales a mí y a mis dos hermanos. Si nos da un billete</td></tr>
</table>

Segunda unidad.

de 100 nuevos soles y nos dice que le devolvamos 70 nuevos soles. ¿Cuánto es la propina de cada uno?

c) Si a 100 se le quita el triple de un número, queda 70. ¿Qué número se le quita?.

Forma un grupo con 3 ó 4 compañeras o compañeros. Desarrollen las actividades, discutan sus soluciones y compárenlas con las de los otros grupos.

1 La casa de Óscar está construida en un terreno rectangular cuyo largo es 12 metros más que su ancho. Si Óscar sabe que el perímetro de su terreno es de 56 metros,

a) ¿cuáles son las dimensiones de ese terreno?
b) ¿cuánto mide el área del terreno?
c) si se construye el cuadrado más grande que se puede en ese terreno, ¿cuál es el perímetro de ese cuadrado?

2 Asocia cada una de las ecuaciones siguientes con uno de los enunciados. Si para alguna ecuación no encuentras el enunciado adecuado, inventa uno.

a) $x + 2x = 120$ — 1) Un número más su mitad es igual a 120.
b) $5x - 5 = 120$ — 2) El triple de un número menos su tercera parte es igual a 120.
c) $x + \frac{x}{2} = 120$ — 3) Un número más su doble es igual a 120.
d) $3x - \frac{x}{3} = 120$ — 4) Si al quíntuplo de un número le restamos 5, obtenemos 120.
e) $\frac{x}{2} + 2x = 120$ — 5) …

3 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x - 3 = 19$
b) $5x - 11 = 14$
c) $-2x + (-15) = -27$
d) $-14 - 4x = -30$
e) $\frac{2x-5}{3} = -7$
f) $\frac{3x+2}{5} = \frac{2x-1}{3}$

4 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $2x + 8 < 14$
b) $11 - 3x > -10$
c) $\frac{-2x-5}{3} < -7$

5 Escribe una ecuación cuyo conjunto solución sea:

a) $S = \{-3\}$
b) $S = \{+5\}$
c) $S = \{\ \}$

6 Escribe una inecuación cuyo conjunto solución sea:

a) $S = \{2, 3, ...\}$
b) $S = \{ x \in \mathbb{Z} / x$ es mayor que $-2 \}$
c) $S = \phi$

En tu vida cotidiana te darás cuenta de que lo aprendido sirve para dar solución a situaciones parecidas a las que te proponemos.
Los ejercicios marcados desarróllalos en grupo y también puedes preguntar a tu profesor o profesora.

1 Si un globo sonda asciende a razón de 50 metros por minuto y a las 11 horas estaba a 4 000 metros de altura, ¿a qué altura...:

a) ... estaba a las 10h 30 min?
b) ... estaba a las 10h 50 min?
c) ... estará a las 12h 15 min?
d) ... estará a las 13 horas?

2 Los padres de María compraron, hace siete días, acciones de una compañía por 3 400 nuevos soles. Desde ese momento, las acciones han bajado diariamente, una misma cantidad de nuevos soles. Si ahora valen S/. 3 190, ¿cuántos nuevos soles han bajado cada día?

Figura 24: Tomada del libro Matemática Primer Grado de Educación Secundaria. Editorial Bruño, p -67.

Comentarios:

Resulta valioso para el caso de este texto el definir el campo numérico de trabajo y analizar en el camino las posibilidades para la insolubilidad de algunas ecuaciones. Además de aclarar que no existe un método único para resolver ecuaciones.
A pesar de esto, no se genera la necesidad de plantear nuevos problemas; además, que estos se presentan como contenidos acabados, sin ningún vínculo con lo previo ni con lo posterior.
No hay justificaciones para las técnicas aplicadas.
La mayor parte de situaciones se reducen a la ejercitación de algoritmos.

Tercera unidad.

En cuanto al tipo de problemas o tareas.

Se plantean situaciones de fijación para algoritmos presentados previamente. No hay justificaciones para las técnicas aplicadas ni relación entre los problemas, todos los problemas corresponden, básicamente, al mismo modelo.
Se explican dos métodos para resolver ecuaciones:
1ro: Utilizando operaciones inversas. Llamado modelo de los operadores.
2do: Utilizando el modelo de la balanza, esto basándose en la explicación de lo que son las ecuaciones equivalentes.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CON EL MODELO DE LA BALANZA

Veremos ahora que la balanza es un buen modelo para trabajar las ecuaciones.

Representamos la ecuación $2x + 3 = x + 8$ mediante la siguiente balanza, donde la incógnita $x =$ (botella) y cada ○ = 1.

$2x + 3 = x + 8$

Si a ambos platillos de la balanza (miembros de la ecuación) le agregamos la misma cantidad de elementos (le sumamos la misma expresión), el equilibrio se mantiene (las ecuaciones son equivalentes).

$(2x + 3) + 2 = (x + 8) + 2$
$2x + 5 = x + 10$

$(2x + 3) + (x + 2) = (x + 8) + (x + 2)$
$3x + 5 = 2x + 10$

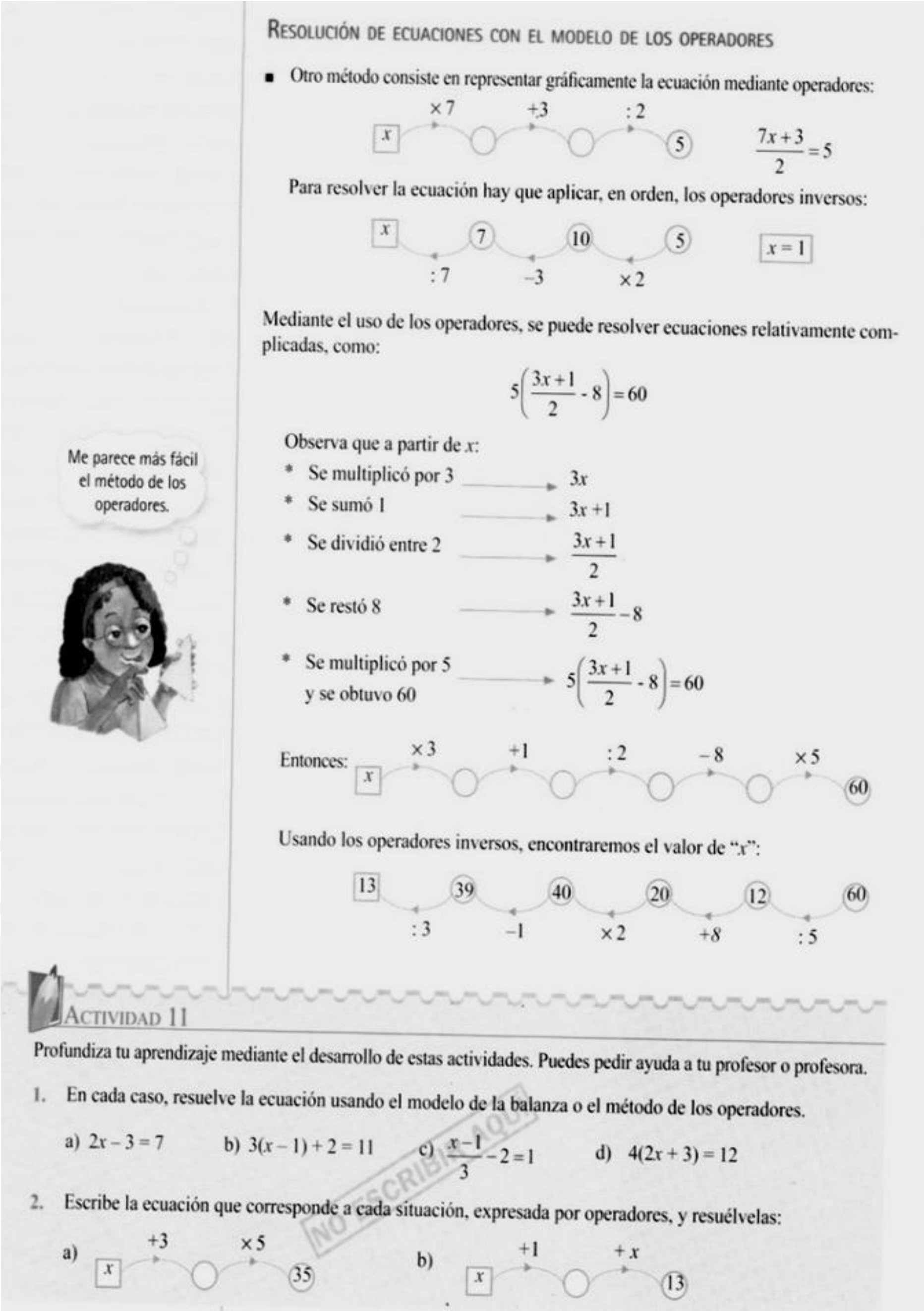
Lo mismo ocurre si a ambos platillos (miembros de la ecuación) le quitamos la misma cantidad de elementos (le restamos la misma expresión), el equilibrio permanece (las ecuaciones son equivalentes).

$(2x + 3) - 3 = (x + 8) - 3$
$2x = x + 5$

$(2x + 3) - x = (x + 8) - x$
$x + 3 = 8$

Si a los dos miembros de la última ecuación equivalente ($x + 3 = 8$) le restamos 3, tendremos $x + 3 - 3 = 8 - 3$; es decir, $x = 5$, que viene a ser la solución de todas estas ecuaciones equivalentes y, por lo tanto, solución de la ecuación original: $2x + 3 = x + 8$

Figura 25: Tomada del libro Matemática Primer Grado de Educación Secundaria. Editorial Bruño, p - 88.



RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CON EL MODELO DE LOS OPERADORES

■ Otro método consiste en representar gráficamente la ecuación mediante operadores:

$\boxed{x} \xrightarrow{\times 7} \bigcirc \xrightarrow{+3} \bigcirc \xrightarrow{:2} 5 \qquad \frac{7x+3}{2}=5$

Para resolver la ecuación hay que aplicar, en orden, los operadores inversos:

$\boxed{x} \xleftarrow{:7} 7 \xleftarrow{-3} 10 \xleftarrow{\times 2} 5 \qquad \boxed{x=1}$

Mediante el uso de los operadores, se puede resolver ecuaciones relativamente complicadas, como:

$$5\left(\frac{3x+1}{2}-8\right)=60$$

Observa que a partir de x:

* Se multiplicó por 3 $\longrightarrow 3x$
* Se sumó 1 $\longrightarrow 3x+1$
* Se dividió entre 2 $\longrightarrow \frac{3x+1}{2}$
* Se restó 8 $\longrightarrow \frac{3x+1}{2}-8$
* Se multiplicó por 5 y se obtuvo 60 $\longrightarrow 5\left(\frac{3x+1}{2}-8\right)=60$

Entonces: $\boxed{x} \xrightarrow{\times 3} \bigcirc \xrightarrow{+1} \bigcirc \xrightarrow{:2} \bigcirc \xrightarrow{-8} \bigcirc \xrightarrow{\times 5} 60$

Usando los operadores inversos, encontraremos el valor de "x":

$\boxed{13} \xleftarrow{:3} 39 \xleftarrow{-1} 40 \xleftarrow{\times 2} 20 \xleftarrow{+8} 12 \xleftarrow{:5} 60$

ACTIVIDAD 11

Profundiza tu aprendizaje mediante el desarrollo de estas actividades. Puedes pedir ayuda a tu profesor o profesora.

1. En cada caso, resuelve la ecuación usando el modelo de la balanza o el método de los operadores.

   a) $2x-3=7$ b) $3(x-1)+2=11$ c) $\frac{x-1}{3}-2=1$ d) $4(2x+3)=12$

2. Escribe la ecuación que corresponde a cada situación, expresada por operadores, y resuélvelas:

   a) $\boxed{x} \xrightarrow{+3} \bigcirc \xrightarrow{\times 5} 35$ b) $\boxed{x} \xrightarrow{+1} \bigcirc \xrightarrow{+x} 13$

Figura 26: Tomada del libro Matemática Primer Grado de Educación Secundaria. Editorial Bruño, p **-90**.

Comentarios:

Los dos modelos presentados para la resolución de ecuaciones: de la balanza y de las operaciones inversas, pudieron ser vinculadas y aprovechadas para generar otro tipo de tareas que vayan generando la necesidad de nuevos conocimientos. Cabe mencionar que justamente el modelo de las operaciones inversas fue ampliamente aprovechado como generador de un modelo para la introducción del álgebra a través de situaciones de cálculo aritmético por el grupo de investigadores de la Teoría antropológica de lo didáctico.

5.2.4. Aspectos algebraicos comparativos en los texto.s seleccionados.

Considerando la clasificación de Godino, J. & Font, V. (2003) sobre la naturaleza matemática de la variable; el análisis de algunos elementos de las praxeologías matemáticas propuestas por Chevallard, Y. (1999) y los niveles de algebrización de las organizaciones matemáticas de Bolea, P.; Bosch, M. & Gascón, J. (2001); presentamos algunas conclusiones en paralelo para cada uno de los textos seleccionados tomando en cuenta como referente aspectos algebraicos de la matemática a este nivel escolar.

De lo analizado en los tres textos vemos que en la mayoría de ellos se llega sólo al primer grado de algebrización, pues no se establece de manera explícita el significado de variable, de expresiones algebraicas, ni la relación entre los diferentes métodos presentados. Existe una manipulación pero sólo de los algoritmos, no hay justificaciones ni caracterización de los diferentes tipos de tareas para generar nuevas técnicas que resuelvan situaciones nuevas.

En referencia a los usos de las variables, está es diferenciada según el texto seleccionado.

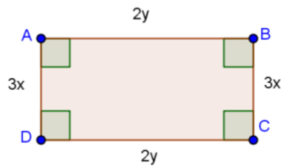
A continuación detalladas algunos aspectos comparativos presentados en los tres libros de textos analizados.

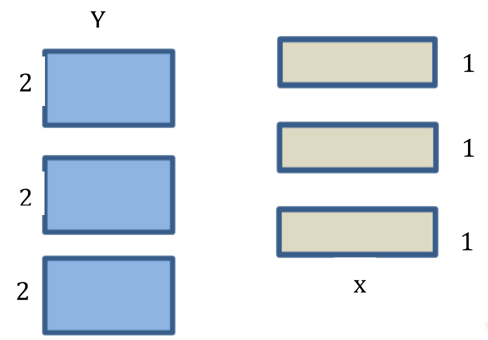
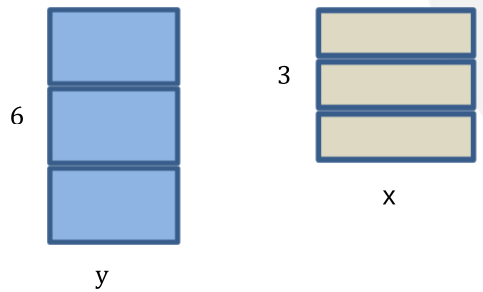
Tabla 10: Resumen de lo analizado en los tres textos.

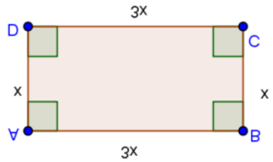
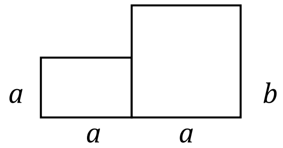
	Matemática 1 de editorial Santillana.	**Reto. Mate 1 de editorial Norma.**	**Matemática 1. Texto oficial del MINEDU.**
Concepción del álgebra.	En el texto se prioriza la concepción del álgebra como un lenguaje, es decir, se priorizan las actividades y tareas que favorecen los procesos de simbolización y el manejo adecuado de símbolos, a partir de enunciados verbales.	En el texto se presenta el álgebra a través de una mirada funcional, es decir, se presenta el álgebra desde el punto de vista de las aplicaciones lo que lleva a la formación de funciones. Sin embargo se presenta como un estudio estático, inicialmente se da sentido a las letras en términos de magnitudes pero luego no se muestran relaciones entre ellas.	El álgebra es considerada como un objeto matemático con sus propias reglas y situaciones. Sin embargo, no es presentada en un solo capítulo del texto, sino más bien reaparece en el estudio de cada uno de los conjuntos numéricos: N, Z y Q. Específicamente, el álgebra se introduce a través del estudio de las ecuaciones e inecuaciones, en cada uno de los sistemas numéricos antes señalados.
Sobre el uso de las variables.	Se usan: • **Como incógnitas**, para expresar cantidades desconocidas, uno de cuyos valores hace verdadera la expresión. • Para representar propiedades que hacen referencia al uso de variables **como indeterminada**. Esto quiere decir que la variable se	Se usan: • Para expresar **cantidades que varían conjuntamente**, es decir, para relacionar variables cuando el cambio de una determina el cambio de la otra. • **Como incógnitas**, para expresar cantidades desconocidas uno de cuyos valores hace verdadera la expresión.	Se usan: • Sólo **como incógnita**, para representar cantidades desconocidas cuyo valor se halla a través de la resolución algorítmica de la ecuación.

	usa en enunciados que son ciertos para todos los números.		
Sobre los tipos de problemas o tareas.	La mayoría de problemas son semejantes en planteamiento y solución. En algunos casos se presentan algunas situaciones desafiantes que buscan aplicar lo aprendido en contextos diferentes, pero sólo a nivel de aplicación de una técnica, pues estos no se relacionan con los nuevos conocimientos ni generan la necesidad de su aprendizaje. Como ejemplo de tareas tenemos la resolución de una ecuación de primer grado. Las tareas y los problemas se presentan después de la presentación de los procedimientos. **En cuanto al nivel de algebrización:** Las actividades propuestas se presentan : En un primer nivel de algebrización, es decir, de descripción de los problemas	Las situaciones problemas, o bien son ejemplos que sirven para ilustrar definiciones o bien son problemas propuestos al final de cada unidad con el objeto de que los alumnos apliquen algoritmos. Se presentan luego de la explicación de procedimientos, para reforzar el aprendizaje de conceptos o la mecanización de algoritmos, no se proponen situaciones que permitan la construcción de conceptos a partir de algún tipo de tarea. Además los tipos de problemas aparecen aislados, sin relación con el resto de las actividades propuestas. Al inicio de cada unidad, se plantean problemas interesantes contextualizados de aplicación de los contenidos matemáticos de la unidad. **En cuanto al nivel de algebrización:** Las actividades propuestas quedan en un primer nivel de algebrización, es decir, en el planteo de una expresión algebraica y su correspondiente resolución a través de un	Los problemas se presentan previos a las técnicas para atender a la necesidad de situaciones específicas que generan la necesidad de usar los elementos algebraicos: ecuaciones e inecuaciones. Sin embargo, se busca sólo fijar procedimientos que atienden a problemas aislados. La mayor parte de las tareas son situaciones problemáticas contextualizadas, siendo los contextos reales, cercanos al estudiante y por tanto idóneos desde el punto de vista ecológico (entorno del texto en cuestión). **En cuanto al nivel de algebrización:** Se llega al primer grado de algebrización, pues no se establece de manera explícita el significado de variable, de expresiones algebraicas, ni

	resolubles con determinadas técnicas, considerándolos como problemas aislados. En algunos casos en un segundo nivel con la tematización de las técnicas y nueva problemática al nivel tecnológico, es decir planteando y estudiando problemas relacionados con la descripción, la interpretación, la justificación y el alcance de las técnicas que integran la obra.	trabajo aritmético, sin mediar en la búsqueda de expresiones algebraicas equivalentes u otro tipo de simplificaciones. En algunas situaciones se plantean modificaciones para adaptar algunos procedimientos a otras tareas.	la relación entre los diferentes métodos presentados. Existe una manipulación de las ecuaciones e inecuaciones, no hay justificaciones ni caracterización de los diferentes tipos de tareas para generar nuevas técnicas que resuelvan situaciones nuevas.
Sobre las técnicas y las tecnologías.	**En cuanto a la técnica:** • Son procedimientos de fijación de los conceptos o algoritmos presentados. • Se pone énfasis en la aplicación de algoritmos para operar sobre expresiones algebraicas, es decir, se introducen reglas para realizar operaciones. • Sólo para el caso de las operaciones con monomio y el valor numérico se muestran situaciones que plantean la necesidad de sumar monomios en un contexto inicialmente geométrico. Sin	**En cuanto a la técnica:** • El énfasis está dado en la aplicación de procedimientos para manipular las expresiones algebraicas. • Para el caso de las operaciones con monomios, la presentación del tema es explicativa, se acompaña de ejemplos para aclarar conceptos o procedimientos. Sólo en el caso de la adición y la sustracción se usaron figuras para visualizar y analizar las relaciones establecidas, a manera de otro registro de representación.	**En cuanto a la técnica:** • La mayor parte de las situaciones son aplicaciones algorítmicas o problemas contextualizados • Para resolver ecuaciones plantea: 1ro: Utilizar operaciones inversas. Llamado modelo de los operadores. 2do: Utilizar el modelo de la balanza, esto basándose en la explicación de lo que son las ecuaciones equivalentes. 3ro: Utilizar las propiedades de las operaciones. (Algoritmo para resolver ecuaciones). • Se plantean como procedimientos

Sobre las técnicas y las tecnologías.	embargo, el alcance de sus aplicaciones es limitado. Así, para las operaciones de adición y sustracción con monomios se plantea la siguiente tarea: ¿Cómo se expresa el perímetro del rectángulo?  El perímetro de una figura se calcula sumando sus lados. Perímetro= 3x+2y+3x+2y = 6x + 4y El perímetro del rectángulo se expresa por 6x+4y. **En cuanto a la tecnología:** Este procedimiento se presenta sin justificación, se asume cómo conocido o entendido sin una explicación que lo respalde. A continuación un intento de justificación de este procedimiento.	**En cuanto a la tecnología:** • Las justificaciones, se basan en la aceptación de reglas algorítmicas que resultan de ampliar en algunos casos propiedades aritméticas, siendo su alcance limitado y restringiéndose solamente a explicaciones de cómo aplicar algoritmos. Los procedimientos aplicados son independientes entre sí, además que no hay ningún intento por justificar el uso de las variables ni la aplicación de algoritmos.	de fijación de conceptos el inventar problemas que se traduzcan en una ecuación dada. **En cuanto a la tecnología:** • El uso de modelos es un intento por justificar los algoritmos aplicados, esto resulta particularmente valioso en este texto. Sin embargo, estos no presentan un carácter vinculante son aislados y se presentan como contenidos acabados. • No hay justificaciones para los procedimientos aplicados, ni relación entre los problemas, todos corresponden básicamente al mismo tipo.

Sobre las técnicas y las tecnologías.	 El área de cada rectángulo azul es 2y, el de cada rectángulo gris es x. Si juntamos los rectángulos azules tendremos:  La suma de todas las áreas como: $6y + 3x$ Para la multiplicación de monomios: El largo de un terreno rectangular mide el triple que su ancho. ¿Cómo		

Sobre las técnicas y las tecnologías.	se expresa el área del terreno? Graficamos el rectángulo, ubicamos los datos y hallamos el área.  Área= largo. Ancho Área= 3x. x = 3x ^{2} Este último resultado tampoco es justificado. ¿Por qué 3x. x es 3 x^2 ? Para el valor numérico se partió de una situación relacionada a la representación del área de una figura, se pregunta. *¿Cuál es la representación para el área total de la figura del margen?*  Para hallar el área total de la figura, se halló el área del cuadrado y el área del rectángulo. Área del cuadrado: a^2		

Sobre las técnicas y las tecnologías.	Área del rectángulo: ab. Luego el área total será: a^2 + ab. Luego se plantea la pregunta, ¿cuál es el área total de la figura anterior, si a = 2 cm y b= 3? Con esto se buscó inducir el significado del valor numérico, presentándose luego ejemplos desarrollados. Las justificaciones se limitan a la ejemplificación del procedimiento a seguir.		
Sobre el campo numérico.	No se especifica, pero se puede deducir por los ejemplos presentados que solo se trabajará con números enteros.	No se especifica, pero se puede deducir por los ejemplos presentados que solo se trabajará con números enteros.	El campo numérico está explícitamente especificado. La organización del texto se divide por unidades tres de los cuáles son: el sistema de los números naturales, el sistema de los números enteros y el sistema de los números racionales; dentro de cada uno de ellos se aborda el estudio de las ecuaciones e inecuaciones. Esto resultó útil ya que permitió en algunos casos analizar la imposibilidad de solución de algunas ecuaciones.

Secuencia de contenidos.	*Lenguaje simbólico: lenguaje numérico y lenguaje algebraico.* ↓ *Expresiones algebraicas: valor numérico y término algebraico.* ↓ *Polinomio: grado relativo, grado absoluto y polinomio homogéneo.* ↓ *Operaciones con monomios: adición y sustracción, multiplicación, potenciación y división.*	*Expresiones algebraicas: características y clases de expresiones algebraicas, traducción de enunciados verbales, valor numérico, dominio y rango de una expresión.* ↓ *Polinomios de un término: grado de un monomio, adición y sustracción de monomios, multiplicación, potenciación y división de monomios.* ↓ *Otros polinomios y operaciones: grado de un polinomio, adición y sustracción de polinomios, multiplicación y potenciación de polinomios.* ↓ *Ecuaciones: características y resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita, resolución de ecuaciones con valor absoluto y resolución de problemas.* ↓ *Inecuaciones: características y resolución de inecuaciones de primer grado, resolución de problemas.*	Para la unidad 1: Sistema de los números naturales. *Situación problemática una de cuyas estrategias de solución necesita el planteo y aplicación de ecuaciones.* ↓ *Definición de ecuación y conceptos asociados en N* ↓ *Presentación de estrategias de solución a través del planteo y solución de ecuaciones.* ↓ *Ejemplos asociados a la aplicación del algoritmo de solución de ecuaciones.* ↓ *Planteo de una situación problemática* ↓ *Resolución de inecuaciones.*

De la tabla anterior deducimos que los argumentos, las técnicas y tecnologías no son el objeto de estudio más importante, su lugar es tomado por la operatividad de las expresiones algebraicas (manipulación de ecuaciones, operatividad de monomios y polinomios, cálculo del valor numérico y del grado de expresiones algebraicas). Hay ausencia de cuestionamiento tecnológico, pues los procedimientos se usan sin problematizar su dominio de validez y sin modificaciones para adaptar los procedimientos a otro tipo de tareas. A continuación, mostramos un esquema síntesis que considera cómo los aspectos analizados se presentan de manera global en los tres textos.

Figura 27: Aspectos algebraicos presentes en los textos analizados.

Concepción del álgebra

- Álgebra como lenguaje.
- Álgebra funcional estática
- Objeto matemático parte de los sistemas numéricos.

El uso de variables

- Como incógnita.
- Como indeterminadas.
- Para expresar cantidades que varían conjuntamente

Los tipos de problemas y tareas.

- Buscan fijar los conceptos o algoritmos presentados.
- Abordan algunos problemas contextualizados.
- Los problemas son aislados, no se buscan simplificaciones u expresiones equivalentes que generen nuevos tipos de problemas.

Las técnicas y las tecnologías

- Aplicación de algoritmos, sin justificaciones y en algunos casos de alcance limitado.
- Uso de los modelos de las operaciones inversas y de la balanza para la resolución de ecuaciones.

El campo numérico

- Se especifica sólo en el texto del Ministerio de Educación.

A continuación, recordemos algunos supuestos y nociones teóricas que constituyen el Enfoque Ontosemiótico (EOS) sobre el conocimiento y la instrucción matemática relativos a la idoneidad epistémica.

La idoneidad epistémica, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia. Precisaremos que los significados institucionales implementados lo constituyen el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente; los significados institucionales pretendidos, es el sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio. Además, el significado de referencia es el sistema de prácticas que se usan como referencia para elaborar el significado pretendido. La determinación de dicho significado requiere realizar un estudio histórico – epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto.

Considerando esto, precisaremos a continuación algunas ideas derivadas del análisis epistémico de cada uno de los textos seleccionados.

5. 3. Análisis de la idoneidad epistémica de los textos seleccionados.

Comenzaremos nuestro análisis haciendo una breve descripción de algunos aspectos matemáticos considerados en los libros revisados en comparación con otros de educación superior, donde el álgebra es concebida como un área de la matemática construida en base a estructuras.

Tabla 11: Descripción de aspectos matemáticos considerados en el libro de la Editorial Santillana.

Aspecto matemático considerado.	**Descripción.**
Álgebra.	Se concibe el álgebra como un lenguaje, se priorizan las actividades y tareas que favorecen los procesos de simbolización y el manejo adecuado de símbolos, a partir de enunciados verbales.
Expresión algebraica.	Una expresión algebraica es un arreglo de números y letras relacionados entre sí por operaciones matemáticas.
Monomios.	Es una expresión algebraica de un término cuyas variables están afectadas por exponentes enteros positivos.
Polinomios.	Es la expresión algebraica de uno o más términos cuyas variables están afectadas por exponentes enteros positivos. Los polinomios se designan con una letra mayúscula y sus variables entre paréntesis. Ejemplo: R(x,y)=$3x+5y-\frac{4}{7}x^2y-1$
Variables.	No se define. Sin embargo, se indican cómo las letras en general y en el caso de los elementos de un término algebraico como, $-8\ x^2y^3$ se menciona lo marcado como la parte literal.
Ecuación.	Una ecuación es una igualdad algebraica que contiene algún término desconocido llamado variable o incógnita. Los elementos de una ecuación son: Variable o incógnita, es la letra cuyo valor es desconocido. Grado, es el máximo exponente con que figura la variable. Miembros, son las expresiones que hay a cada lado de la igualdad. Términos, son los sumando que forman los miembros. Resolver una ecuación significa encontrar el valor de la incógnita que satisface la igualdad. No se especifica el campo numérico, sin embargo, las situaciones planteadas se desarrollan en Q.

Tabla 12: Descripción de aspectos matemáticos considerados en el libro de la Editorial Norma.

Aspecto matemático considerado.	Descripción.
Álgebra.	El álgebra se presenta de manera funcional, desde el punto de vista de las aplicaciones, lo que lleva a la formación de funciones. Sin embargo se presenta como un estudio estático, inicialmente se da sentido a las letras en términos de magnitudes pero luego no se muestran relaciones entre ellas.
Expresión algebraica.	Es la reunión finita de constantes y variables con exponentes fijos (racionales) relacionados por las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.
Monomios.	La expresión algebraica formada por las operaciones de multiplicación, división, potenciación o radicación, todas a la vez o solo algunas, es llamada monomio. Dos o más monomios se pueden sumar o restar siempre y cuando sean semejantes. La definición de términos semejantes fue dada previa a la presentación de monomios como, los términos que tienen la misma parte literal sin importar su coeficiente.
Polinomios.	La expresión algebraica formada por la adición o la sustracción de dos o más monomios es un polinomio.
Variables.	Las letras de una expresión algebraica se llaman variables, porque ellas pueden tomar cualquier valor de un conjunto de valores numéricos posibles.
Dominio y rango de una expresión.	Dominio de una variable es el conjunto de valores que puede tomar la variable. Rango es el conjunto de valores numéricos que puede tener la expresión algebraica.
Ecuación.	La igualdad de dos expresiones algebraicas donde por lo menos hay un número desconocido llamado incógnita se llama ecuación. Una ecuación se considera un enunciado abierto que puede convertirse en una proposición verdadera para determinado(s) valor(es) de la incógnita. Dichos valores forman el conjunto solución (CS). A veces, se puede dar el caso que una ecuación no tiene solución. Las situaciones planteadas se desarrollan en Q, aunque estas no se indican explícitamente.

Tabla 13: Descripción de aspectos matemáticos considerados en el texto oficial del MINEDU.

Aspecto matemático considerado	**Descripción.**
Álgebra.	El álgebra es considerada como un objeto matemático con sus propias reglas y situaciones. Sin embargo, no es presentada en un solo capítulo del texto, sino más bien reaparece en el estudio de cada uno de los conjuntos numéricos: N, Z y Q. Específicamente, el álgebra se introduce a través del estudio de las ecuaciones e inecuaciones, en cada uno de los sistemas numéricos antes señalados.
Variable.	La cantidad desconocida se llama incógnita de la ecuación. Generalmente, a la incógnita se la representa por x.
Ecuación.	En la primera unidad del libro se indica: La igualdad en la que aparecen números y operaciones indicadas, además de una cantidad desconocida, se llama ecuación. Resolver una ecuación es encontrar el conjunto de números que reemplazados en la incógnita hacen que la igualdad sea verdadera. Ese conjunto se llama conjunto solución de la ecuación. En la tercera unidad se indica: Una ecuación es una igualdad de dos expresiones algebraicas. Las soluciones de la ecuación son los valores de las incógnitas para los que el valor numérico del primer miembro es igual al valor numérico del segundo miembro. Se trabajan con ecuaciones e inecuaciones cuyas soluciones están específicamente en N, Z y Q.

A continuación presentamos los libros de Sullivan y Herstein con la intención de poner en evidencia que se ha producido el proceso de transposición didáctica desde la llamada matemática sabia a la matemática del contexto escolar.

Tabla 14: Descripción de aspectos matemáticos considerados en el libro de Álgebra y trigonometría de Sullivan Michael.

Aspecto matemático considerado.	**Descripción.**
Álgebra.	Se indica explícitamente que el álgebra se ha descrito como una generalización de la aritmética donde se usan letras para representar números reales**.**
Expresión algebraica.	A la letra el texto indica: Las constantes y las variables se combinan usando las operaciones de suma, resta, multiplicación y división para formar expresiones algebraicas. Los siguientes son ejemplos de expresiones algebraicas. $$x+3, \quad \frac{3}{1-t}, \quad 7x-2y$$ *Para evaluar una expresión algebraica, se sustituye el valor numérico de cada variable.*
Monomio.	Un monomio en una variable es el producto de una constante por una variable elevada a una potencia entera no negativa. Un monomio es de la forma: $$ax^k$$ Donde a es una constante, x es una variable y k ≥ 0 es un entero. La constante a se llama coeficiente del monomio. Si a≠ 0, entonces k se llama grado del monomio.
Polinomios.	Un polinomio en una variable es una expresión algebraica de la forma: $$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$ Donde a_n, a_{n-1}, a_1, a_0 son constantes, llamadas coeficientes del polinomio, n≥ 0 es un entero y x es una variable. Si $a_n \neq 0$, recibe el nombre de coeficiente principal y n se llama grado del polinomio. Los monomios que forman un polinomio se llaman términos.

Variable.	Si la letra se usa para representar cualquier número de un conjunto de números dados, se llama variable.
Dominio.	El conjunto de valores que toma una variable se llama **dominio de la variable.** Así el dominio de la variable x en la expresión $\frac{5}{x-2}$ es $\{x/x \neq 2\}$ ya que si x =2, el denominador es 0, que no está definido. En este caso el ejemplo es parte de la definición.
Ecuación.	Una ecuación en una variable es una proposición en la que dos expresiones, donde al menos una contiene la variable, son iguales. Las expresiones se llaman lados de la ecuación. Como una ecuación es una proposición, podría ser verdadera o falsa, dependiendo del valor de la variable. A menos que se restrinja de otra manera, los valores admisibles de la variable son los del dominio de la variable. Los valores admisibles de la variable, si los hay, que proporcionan una proposición verdadera se llaman soluciones o raíces de la ecuación. Resolver una ecuación significa encontrar todas sus soluciones. Se trabaja en el conjunto de los números reales.

Tabla 15: Descripción de aspectos matemáticos considerados en el libro de Álgebra Abstracta de I.N. Herstein.

Aspecto matemático considerado.	**Descripción.**
Álgebra abstracta.	Sea una colección S de objetos, a los que se les dota de una estructura algebraica, suponiendo que pueden combinarse los elementos de este conjunto S de una o de varias maneras, para obtener de nuevo elementos de dicho conjunto. A estas formas de combinar elementos de S se les llama operaciones en S. Luego, se trata de condicionar la naturaleza de S imponiendo ciertas reglas sobre cómo se comportan estas operaciones en S. Tales reglas suelen denominarse los axiomas que definen la estructura particular en S. En la práctica existen muchos sistemas axiomáticos básicos, como los grupos, los anillos y los campos. En este contexto, un axioma es una de varias reglas que describen una estructura matemática dada. Un axioma es verdadero en el sistema que se esté estudiando, porque se ha impuesto su veracidad por hipótesis.
Polinomios.	Se enuncia el concepto de polinomio y el conjunto de todos los polinomios sobre un campo de la siguiente manera: Sea F un campo; el anillo de polinomios en x sobre F, que siempre se expresará como F[x], es el conjunto de todas las expresiones formales $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$, donde los a_i, llamados coeficientes del polinomio p(x), están en F. En F[x] se definen la igualdad, la suma y el producto de dos polinomios para hacer de F[x] un anillo conmutativo. A continuación definiremos de manera formal la igualdad , suma y multiplicación de polinomios: ***Igualdad***. Se define que $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ y $q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1} x^{n-1} + b_m x^m$ son iguales si y sólo si sus coeficientes correspondientes son iguales, es decir, si y sólo si $a_i = b_i$ para todo $i \geq 0$ ***Adición.*** Si $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ y $q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{m-1} x^{m-1} + b_m x^m$, se define, $p(x) + q(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{s-1} x^{s-1} + c_s x^s$, donde para cada i, $c_i = a_i + b_i$. Así que los polinomios se suman sumando sus coeficientes correspondientes.

	Multiplicación. Si $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ y $q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1} x^{n-1} + b_m x^m$, se define, $p(x) \,.\, q(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_t x^t$ donde los c_i se determinan multiplicando la expresión formalmente, utilizando las leyes distributivas y las reglas de los exponentes $x^u x^v = x^{u+v}$, y reduciendo términos. De manera más formal, $c_i = a_i b_0 + a_{i-1} b_1 + \ldots + a_1 b_{i-1} + a_0 b_i$ para todo i.
Polinomio mónico.	$f(x) \in F[x]$ es un polinomio mónico si el coeficiente de su potencia con mayor exponente es 1. Así que si f(x) es mónico significa que tiene la siguiente forma: $f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ Además si I es un ideal de F [x], existe solamente un polinomio mónico de grado mínimo en I.
Dominio de integridad.	Un anillo conmutativo R es un dominio integral si a. b = 0 en R implica que a = 0 o bien b= 0. Ejemplo: El conjunto de los números enteros es un dominio integral.

Analicemos la adaptación y pertinencia de los contenidos algebraicos presentados en los tres libros de secundaria considerando como referentes:

Las definiciones presentadas en el libro de Sullivan.

En relación a la definición de expresión algebraica, consideramos que las definiciones presentadas no son adecuadas.

En el libro de editorial Santillana, se define expresión algebraica como arreglo de números y letras; el término arreglo implica un cierto orden, por lo que en el texto faltaría especificar cuál es el criterio de orden. Así, nos preguntamos: ¿Es $3x^3 + 2x^5 - x$, una expresión algebraica?, hace falta pues una definición previa aclarando el significado de este término.

Además, lo pertinente sería referirnos a constantes y variables en lugar de números y letras; el uso adecuado de estos términos facilitaría que más adelante el alumno reconozca que las variables expresan relaciones generales.

En el libro de editorial Norma, indica que una expresión algebraica es la reunión finita de constantes y variables con exponentes fijos relacionados por las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación. La definición es general, parece que se refiere a expresiones algebraicas racionales e irracionales; sin embargo, las situaciones presentadas son restringidas, pues sólo se refieren a expresiones algebraicas racionales. Además, en la definición la referencia a exponentes fijos puede generar que los estudiantes no comprendan realmente la definición y que simplemente apliquen algoritmos a cada situación sin comprender realmente el porqué de su procedimiento. Así pues, se tendría que aclarar a qué se refiere cuando dice que un exponente es fijo. Por ejemplo: a- 2b +1 se presenta como exponente y se pide hallar a y b.

Consideramos que la definición dada en el libro de editorial Norma debió presentarse no sólo verbalmente (texto), sino también, de manera simbólica o con una expresión analítica del mismo.

El libro del Ministerio de Educación no hace referencia a la definición de expresión algebraica; sin embargo, en la tercera unidad se indica que una ecuación es una igualdad de dos expresiones algebraicas, no habiéndose presentado la necesaria definición previa de este concepto. Por lo tanto, esta definición originaría un vacío conceptual que dificultaría la comprensión.

Sobre la definición de dominio y rango de una expresión, el libro de editorial Norma lo define correctamente en relación a lo propuesto por el libro de Sullivan; sin embargo, considero que adicionalmente se debió complementar la definición con algunos ejemplos. Los otros textos no presentan ninguna definición, además no se hace ninguna restricción sobre el dominio de validez de las expresiones.

Las definiciones presentadas en el libro de Herstein.

Sobre la definición de monomios esta es adecuada en el caso de los libros de las editoriales Santillana y Norma. Por otro lado, en el libro del Ministerio de Educación no hay una definición para ello, esto no genera ningún problema pues según el enfoque del texto no es necesario conocer su definición.

En referencia a la definición de polinomios, la definición dada en los dos primeros libros es pertinente. Consideramos que debió acompañarse a las definiciones la presentación de la misma en notación simbólica. Este concepto tampoco está presente en el libro del Ministerio de Educación pero tampoco era necesario.

La clasificación de Godino, J.; & Font, V. (2003).

En cuanto al uso de la variable, identificamos en los libros de Editorial Norma y del Ministerio de Educación su uso como incógnita. En el libro de editorial Norma la variable adopta cualquier valor para hacer verdadera o falsa una proposición, en este contexto se refiere adecuadamente a variable y no a incógnita. En el libro del Ministerio de Educación sólo usa la letra x para representar las variables, esto induce a una falsa generalización al sesgar su representación sólo al uso de esta letra. Por otro lado, el libro de editorial Santillana señala que las variables son las letras, y que el conjunto de éstas recibe el nombre de parte literal, esta denominación no es adecuada matemáticamente.

La TAD (Teoría antropológica de lo didáctico).

Sobre la definición de ecuación, consideramos como referencia la definición cuyo significado sea cercano al carácter funcional que pretendemos darle al estudio del álgebra desde el punto de vista de la TAD que a la vez tiene como prioridad las actividades de modelización.

Por lo tanto, del análisis deducimos que las definiciones pertinentes son las que se encuentran en los textos de editorial Norma y en el texto de Algebra de Sullivan, las mismas que coinciden con los significados propuestos por Godino, J. & Font, V. (2003), quiénes proponen redefinir el concepto de ecuación como una función proposicional donde cada uno de los valores que puede tomar la variable para hacer verdadera la proposición es una solución de dicha sentencia abierta. Los autores arriba mencionados hacen distinción entre el conjunto de sustitución, conjunto de todos los valores posibles que puede tomar la variable, y el conjunto solución, valores del conjunto de sustitución para los que es verdadera la función proposicional.

Los libros de editorial Santillana y el libro del Ministerio de Educación mencionan la definición tradicional de ecuación como la igualdad de expresiones algebraicas que contienen algún término desconocido, en este contexto restringido se considera la letra x como incógnita, es decir, como valor particular desconocido.

5.4. Análisis de las prácticas docentes en el tratamiento del álgebra.

Consideramos que la práctica del docente en el aula tiene estrecha relación con sus concepciones y con su experiencia previa.

Por ello, creemos pertinente tener otro referente sobre el tratamiento del álgebra a nivel escolar en el primer año de secundaria, en este caso nos referimos a la visión crítica del docente sobre su práctica pedagógica y los resultados que esta muestra. Esta información la pretendemos recabar a través de una entrevista estructurada, cuyas respuestas nos darán mayores elementos de análisis, pues constituyen al mismo tiempo una mirada crítica y autocrítica sobre cómo se enseña el objeto de estudio: algebra escolar.

A continuación se presentan algunos resultados de la entrevista estructurada aplicada a cinco profesores en relación a su práctica pedagógica:

En cuanto a la experiencia de trabajo de los profesores entrevistados abordando temas algebraicos, tenemos que dos de los profesores han enseñado álgebra por 10 años, el resto tiene entre 3 y 7 años de experiencia.

Un profesor señaló además que el álgebra está inmersa en toda la matemática, lo cual implicaría de alguna manera que no la considera un área o dominio de aprendizaje específico sino una herramienta presente a lo largo de la educación escolar.

Los profesores señalan que, según su experiencia, la enseñanza del álgebra se presenta a lo largo de toda la secundaria, dependiendo los temas del grado y la programación. Dos de ellos además acotan que han enseñado álgebra en quinto y sexto grado de primaria.

En cuanto a la inversión en horas de clase, dos de los profesores entrevistados señalaron que dedicaban entre 2 y 3 horas pedagógicas de clase semanales a la enseñanza del álgebra, una profesora indicó que todo un bimestre, otro docente indicó que casi siempre y, el último docente que el número de horas de clase depende de la programación y del año.

Todos los profesores consideraron necesaria la introducción del álgebra en la secundaria, sin embargo las razones que proponen son diferentes:

Una profesora indicó que es necesaria su introducción porque es valioso como conocimiento y además las situaciones propuestas motivan al estudiante; esto devela un tipo de docente que considera a las situaciones algebraicas como un fin en sí mismo, o como un recurso interesante para despertar la atención del estudiante, no se buscan interconexiones, ni justificaciones, ni ampliaciones de técnicas utilizadas o la producción de nuevos problemas, sino simplemente su aplicación inmediata.

Por otro lado, tres docentes señalan necesaria su introducción pues describe técnicas que aisladas permiten resolver algunas situaciones específicas, estos docentes señalan textualmente que muchos problemas de geometría, trigonometría y aritmética necesitan del dominio de conocimientos algebraicos. Esto indica una posición de considerar al álgebra como un dominio de conocimiento aplicable a diversos contextos. Finalmente, una docente identifica el álgebra con un lenguaje que usa símbolos para representar objetos abstractos no conocidos.

En referencia a cómo suelen enseñar el tema de álgebra, tres docentes mencionaron los siguientes recursos didácticos: material concreto y técnicas lúdicas para fijar conceptos, y un poco de historia sobre el aporte de algunos personajes. Los otros tres docentes señalaron temas específicos de ejercicios con variables y procedimientos mecánicos cómo la resolución de ecuaciones.

Del diálogo con los profesores se concluye que su praxis en aula se corresponde con lo previamente desarrollado en ese tema y, que este respondía a cuestiones institucionales (del colegio) ó formas de trabajo previamente validadas por su experiencia.

Considerando los problemas que suelen plantearse en el estudio del álgebra, los docentes entrevistados señalan como dificultades: encontrar aplicaciones en contextos reales a situaciones que involucran los grados relativos y absolutos, fijar las leyes de signos y la multiplicación de monomio, y los ejercicios con variables (el docente no da mayores detalles).

No hay preocupación de los docentes por unificar los procedimientos para producir nuevos tipos de problemas que requieran nuevas técnicas de solución.

En relación a si los estudiantes evidencian haber aprendido álgebra; cuatro docentes responden positivamente, sólo un docente aclara la presencia de un grupo de estudiantes que generalmente siempre tienen dificultades y otro docente señala porcentualmente que desde su experiencia los estudiantes de instituciones educativas particulares demuestran mayor aprendizaje de tópicos algebraicos.

Sobre los temas algebraicos donde demuestran mayor logro de aprendizaje, los docentes entrevistados indicaron: el estudio del grado relativo y absoluto, reducción de términos algebraicos, valor numérico, ecuaciones, productos notables y leyes de exponentes. En el caso de nuestro estudio sólo los cuatro primeros están presentes en el trabajo del primer año de secundaria.

Considerando si estaban o no de acuerdo con la forma como el álgebra se presenta en los textos escolares, el 100% de los docentes entrevistados indicaron que no estaban de acuerdo y señalaban como justificación los necesarios cambios en los siguientes aspectos:

la incorporación de problemas aplicados en contextos reales, reconocen la excesiva importancia dada a la aplicación de reglas algorítmicas. Un docente además señaló que los textos deberían ser más entretenidos y que deberían presentar el álgebra de otra forma. Por otro lado, dos docentes mencionaron que algunos libros consideran temas no idóneos al nivel cognitivo de desarrollo de los estudiantes.

A la pregunta ¿considera necesario hacer cambios en la introducción del álgebra? Cuatro de los cinco docentes entrevistados contestaron que si era necesario hacer cambios, luego propusieron las siguientes posibilidades para el estudio introductorio del álgebra en el primer año de secundaria:

El trabajo con material concreto al menos al inicio para asegurar la comprensión de conceptos, proponer situaciones contextualizadas y motivantes para el estudiante, y que sean aplicables a la geometría, la trigonometría y/o la aritmética; además aprovechar del buen uso del recurso histórico. Sólo un docente señaló que no era necesario hacer ningún cambio.

Como resultado del contraste entre las evidencias, lo que dicen los profesores y algunos elementos del marco teórico, presentamos lo siguiente:

Sobre su experiencia enseñando álgebra, los docentes señalaron que según su experiencia la enseñanza del álgebra se presenta a lo largo de toda la secundaria. Esto se correlaciona con lo presentado de la revisión del DCN, donde los tópicos algebraicos se presentan a lo largo de la educación secundaria. Los libros de texto revisados también confirman esta situación pues, en la mayoría de ellos se señala específicamente una unidad bajo el título de introducción al álgebra ó simplemente álgebra. Por lo tanto, concluiríamos que las prácticas identificadas como algebraicas han sido muy utilizadas y aplicadas en un dominio amplio de temporalidad a lo largo de la educación secundaria; pero sólo a nivel técnico puntual.

En cuanto a la inversión en horas de clase, los libros de primero de secundaria revisados, necesitan aproximadamente un bimestre para desarrollar los temas propuestos. De esto deducimos que los contenidos dependen del grado de estudio y de la programación propuesta en cada institución escolar.

En cuanto a la necesidad de introducir el álgebra a nivel escolar, consideramos que el grupo de docentes entrevistados prioriza en el álgebra las actividades y tareas que favorecen los procesos de simbolización, y las aplicaciones para resolver situaciones locales, asociando cada una de estas concepciones a los distintos usos de la variable y a los elementos que en la actualidad se consideran manifestaciones del pensamiento algebraico: habilidades para resolver problemas, habilidades para abstraer, representar, procesar, comunicar y habilidades para razonar. Por otro lado notamos que la introducción al álgebra se presenta como una generalización de las prácticas aritméticas.

Respecto a los problemas que suelen presentarse en el estudio del álgebra, los docentes están evidentemente mucho más preocupados por el manejo técnico local, sólo para responder a situaciones que en la mayoría de los casos se quedan en el campo abstracto. La modelización algebraica se queda en el trabajo en el modelo, perdiéndose la oportunidad de aprovechar las situaciones que amplíen el conocimiento del sistema estudiado inicialmente. Esta situación es la misma que se expone en los libros de textos analizados, donde los contenidos atomizados mayormente utilizan técnicas algorítmicas que no muestran interconexiones; sólo en el texto del Ministerio de Educación se presenta un intento por presentar situaciones cercanas al estudiante, pero en forma aislada.

En relación a si los estudiantes evidencian haber aprendido álgebra, este grupo de docentes considera que no todos los alumnos aprenden igual y que tal vez el contexto institucional condicione los niveles de logro de los estudiantes. Esto último se corresponde con la posición de la TAD, según la cual, el objeto primario de investigación a nivel escolar es la actividad matemática desde una perspectiva institucional.

Considerando la necesidad de cambios en la introducción del álgebra en el nivel secundaria, notamos que el interés de los docentes está en el aprendizaje comprensivo de las definiciones básicas. Por ello, proponen recursos metodológicos, a fin de lograr dominio y aplicación en diversos contextos de los contenidos propuestos. Sin embargo, aquí también hay una concepción que prioriza el contenido o dominio de destrezas y aplicaciones como fin en sí mismo; confirmando con ello, el carácter aislado de las técnicas, cuando lo que se debería intentar es darle unidad más allá de lo meramente algorítmico para que los alumnos aprendan a formular conjeturas, generalizar enunciados e investigar el alcance de la solución de un problema particular.

CAPÍTULO 6. Diseño, implementación y evaluación de la propuesta de organización didáctica.

6.1. Caracterización de los sujetos.

La propuesta se aplicó al finalizar el cuarto bimestre del año escolar 2010, con estudiantes de dos secciones del primer año de secundaria. Cada sección era mixta y estaba formada por estudiantes varones y mujeres, cuyas edades fluctuaban entre 12 y 13 años. Al momento de la aplicación las dos secciones ya habían trabajado temas introductorios de álgebra llegando hasta el desarrollo de las técnicas operativas del cálculo ecuacional.

A continuación se presentan algunos datos específicos de la aplicación de la propuesta según las secciones:

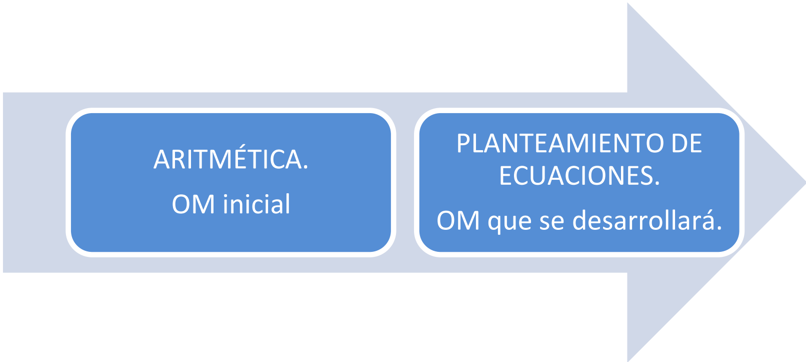
Grupo 1: I-B, de 30 estudiantes (17 alumnas y 13 alumnos). Las fechas de ejecución fueron el 24 y 25 de noviembre del 2010, la primera fecha con una duración de 60 minutos, y la segunda con 90 minutos.

Grupo 2: I- D, de 33 estudiantes (15 alumnas y 18 alumnos). Las fechas de ejecución fueron el 26 de noviembre del 2010, con una duración de 60 minutos y el 30 de noviembre, con una duración de 90 minutos.

6.2. Diseño de la organización didáctica.

Nuestra propuesta pretende presentar el álgebra como un instrumento para profundizar el estudio de determinadas OM (organizaciones matemáticas) previamente construidas. En particular, busca plantear y abordar cuestiones tecnológicas relativas a la descripción, generalización, justificación, y dominio de validez de las técnicas matemáticas, así como a la estructura y organización de los tipos de problemas y a la estructura del conjunto de las soluciones de los mismos. Se pretende que los estudiantes identifiquen en los distintos problemas, variables que hagan que ciertos conocimientos no sean suficientes para su resolución, de manera que surjan nuevas técnicas como necesarias.

Considerando las investigaciones previas de Bolea, P. (2010), hemos elegido como OM que pueden tomarse como sistema inicial a modelizar, una secuencia de actividades que parten de una situación aritmética llegando hasta el planteamiento algebraico de ecuaciones.



Las actividades se agruparon como tipos de problemas de la siguiente manera:

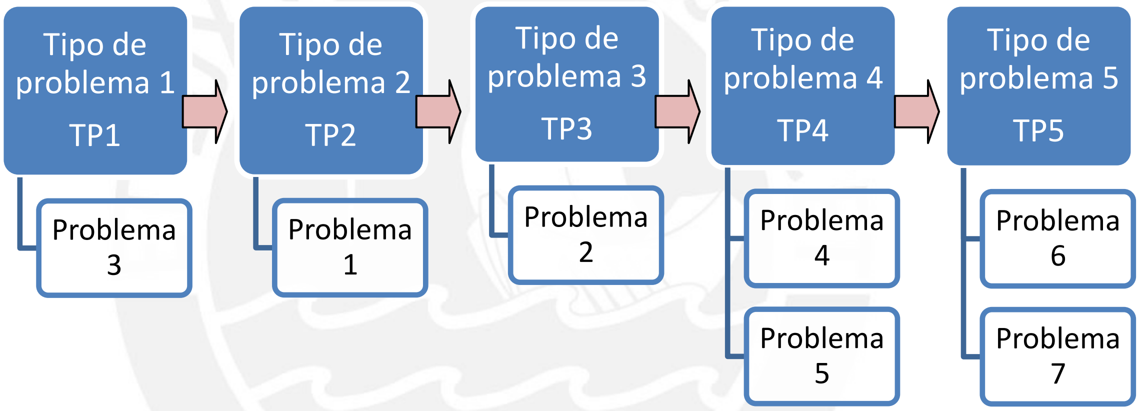


Figura 28: Organizador visual de los tipos de problemas propuestos

Para la implementación se diseñó el instrumento que a continuación detallamos, en éste se consideraron las preguntas 2 y 3 para un desarrollo individual y las preguntas 1, 4, 5, 6 y 7 para su desarrollo en grupos de trabajo.

6.2.1. Secuencia de los tipos de problemas y respuestas esperadas.

Tipo de problema 1 (TP1).

Problema que puede resolverse mediante una cadena de operaciones aritméticas (+, −, X, /) sobre cantidades conocidas, se pueden ejecutar a partir de las indicaciones dadas.

Problema:

3. Pedir a los alumnos que hagan la siguiente secuencia de operaciones:
    - Escribe un número.
    - Súmale el número que le sigue.
    - Suma 9 al resultado anterior.
    - Divide entre 2.
    - Resta el número inicial.

    Plantear luego las siguientes preguntas:

    ¿Qué resultado se obtiene? Realicen la misma secuencia anterior para otro número inicial. ¿Qué resultado obtienen? ¿Cómo explican este resultado?

Aporte de la situación:

Los elementos tecnológicos- teóricos que permiten describir, justificar e interpretar esta práctica matemática elemental se reducen esencialmente a las propiedades de las operaciones aritméticas y de las relaciones entre ellas.

En cuanto a la técnica:

Si el número es 15, se obtiene: (15+ 16 +9) : 2 – 15 = 20 – 15 = 5

Si se toma inicialmente el número 26: (26+27+9) : 2 -26 = 31-26= 5

La resolución aritmética de este problema, proporciona siempre el mismo resultado numérico, 5, el cual es independiente del número pensado.

Aparece, una cuestión tecnológica que se formula a través de la pregunta, ¿por qué todos obtienen el mismo resultado? esto hará que necesitemos de una formulación simbólica del problema, con el uso de una expresión algebraica y a partir de ella construir nuevas técnicas (simplificación) para justificar la solución que se encuentra.

En este momento definiremos "expresión algebraica" como la formulación simbólica de una situación aritmética, la "simplificación de expresiones algebraicas" como la operación de transformarlo en otra equivalente de un uso más sencillo. Se hace necesario también introducir variables que permitan explicitar y manipular la secuencia de operaciones pedida, definir el campo numérico de trabajo, señalar la jerarquía de las operaciones, las reglas de uso de paréntesis y las propiedades de las relaciones entre operaciones.

Solución ideal:

La solución esperada de los estudiantes es:

[x+ (x+1) +9]: 2- x= (2x +10) : 2 – x = x + 5 – x = 5

Qué se espera que respondan los alumnos:

Los estudiantes deben llegar, por comparación de resultados con sus compañeros, a comprobar que todos obtienen el mismo resultado. En ese proceso, tal vez se generen errores en cuanto al cálculo de las operaciones por elegir números altos, sin embargo puede tomarse ello para aclarar dudas. Con la última pregunta algunos pueden plantear la posibilidad de trabajar con variables, sobre todo considerando la experiencia previa del trabajo con ecuaciones. Sin embargo, al tener que dividir (2x +10): 2 creemos que se puede generar conflicto y diálogo en torno a cómo efectuarlo. Esto abre la posibilidad al trabajo de modelizar la situación a través de una expresión algebraica y la necesidad de conocer los procedimientos a seguir en el caso de las operaciones con estas expresiones.

Tipo de problema 2(TP2).

Este problema se puede resolver aritméticamente, mediante las propiedades de las operaciones aritméticas y las relaciones entre ellas. Estas operaciones y propiedades son los elementos tecnológico- teóricos que permiten describir, justificar e interpretar este problema.

Problema.

1. Una empresa de turismo dispone de dos tipos de vehículos: 4 vehículos tipo A con capacidad para 6 personas y 10 vehículos tipo B. Para trasladar un grupo de turistas, usó todos los de tipo A y todos los del tipo B. Si no quedaron asientos vacíos en ninguno de los vehículos, ¿Es posible saber cuántos asientos para turistas tienen los vehículos tipo B, si se transportaron 144 turistas en total? Muestre sus cálculos y explique su respuesta.

Aporte de la situación:

El problema plantea el relacionar diversos datos como los tipos de vehículos y número de asientos por vehículos, las operaciones que las vinculan y la condición del problema “que no quedan asientos vacíos en ninguno de los vehículos”.

En cuanto a la técnica:

Se caracteriza por la realización de una cadena finita de operaciones simples en los que cada resultado numérico es calculable e interpretado en términos del enunciado y está formulado mediante una expresión del lenguaje natural.

A diferencia del caso anterior, en esta situación se requiere interpretar el texto, la presencia de diversos datos y de ciertas condiciones entre ellas hacen de esta situación algo más compleja.

Solución ideal:

Si son 144 turistas en total y con el uso del vehículo tipos A se ubican a 24 turistas, luego quedan por ubicar 144 – 24, es decir, 120 turistas. Estos últimos se ubicarán, en 10 vehículos, luego el número de turistas por vehículo tipo B será el resultado de 120 entre 10, es decir, 12. Siendo finalmente la respuesta que los vehículos tipo B tienen 12 asientos.

Qué se espera que respondan los alumnos:

Los alumnos pueden llegar a formular la solución aritmética señalada como ideal haciendo uso de recursos gráficos o manipulando los datos, llegando al resultado esperado mediante el cálculo operativo aritmético. Un posible error podría ser el relacionar los datos numéricos de manera inadecuada, lo cual reflejaría dificultades en la comprensión debido a la falta de claridad en la redacción o por presentar dificultades en la lectura comprensiva.

Tipo de problema 3(TP3).

A partir de lo anterior, con este nuevo tipo de problema se plantea la necesidad de considerar y tratar el uso de variables. Se tratan las técnicas o procesos de resolución como objetos de estudio en sí mismos, es decir, que se manipulan las variables de manera independiente al significado que tienen. La situación culmina con su modelización para dar respuesta a la última pregunta.

Problema

2. Una empresa de turismo dispone de dos tipos de vehículos, el alquiler del tipo A cuesta S/.80 y el alquiler del tipo B cuesta S/. 120. Si la diferencia del número de vehículos tipo A con el número de vehículos tipo B es 4.

a) ¿Cómo representas la cantidad de vehículos de cada tipo?

b) Completa los datos que faltan en la siguiente tabla.

Tipo de vehículo	Costo unitario	Cantidad	Gasto total
Tipo A	80		
Tipo B	120		

c) ¿Cómo se obtiene el gasto de alquiler para todos los vehículos del tipo A?

d) ¿Cómo se obtiene el gasto de alquiler para todos los vehículos del tipo B?

e) ¿Cuánto fue la inversión total?

En este caso, como consecuencia de la naturaleza (más o menos) algebraica de la modelización en cuestión, se trabaja en un primer nivel de algebrización, el de la manipulación de variables en la estructura global del problema.

En cuanto a la técnica:

Este problema analiza la información a través del recurso gráfico, utiliza la expresión algebraica para representar el gasto total para cada tipo de vehículo, para luego manipular estas expresiones a través de técnicas de simplificación previamente abordadas. El problema busca encontrar una cantidad desconocida, sabiendo las relaciones que está tiene con otras cantidades conocidas.

Solución ideal:

a) ¿Cómo representas la cantidad de vehículos de cada tipo?

Tipo A = x. Tipo B = x +4

b) Completa los datos que faltan en la siguiente tabla.

Tipo de vehículo	Costo unitario	Cantidad	Gasto total
Tipo A	80	x	80x
Tipo B	120	x+4	120(x + 4)

c) ¿Cómo se obtiene el gasto de alquiler para todos los vehículos del tipo A?
   Multiplicando el costo unitario por la cantidad de vehículos del tipo A, quedando expresado como: 80x
d) ¿Cómo se obtiene el gasto de alquiler para todos los vehículos del tipo B?
   Multiplicando el costo unitario por la cantidad de vehículos del tipo B, quedando expresado como: 120(x + 4)
e) ¿Cuánto fue la inversión total? 80x + 120(x + 4)= 200x + 480

Qué se espera que respondan los alumnos:

Para el enunciado "si la diferencia del número de vehículos tipo A con el número de vehículos tipo B es 4" se espera que los estudiantes brinden diferentes interpretaciones:

Tipo A = x. Tipo B = x +4

Tipo A = x-4. Tipo B = x

Tipo A = x. Tipo B = y luego: x – y = 4

Tipo A = x+4 Tipo B = x

Para cada uno de los casos, se obtendrá una expresión algebraica diferente que representa la inversión total, aquí cabe hacer la aclaración que todo dependerá del valor de la variable "x"

Sobre la base del mismo tipo de problema anterior, se plantean dos expresiones que traducen sus relaciones al lenguaje algebraico y se plantean ecuaciones que requieren de procesos de transformación.

Tipo de problema 4 (TP4).

Son problemas que ameritan relacionar y distinguir datos para el planteamiento correcto de ecuaciones, en cada uno de los casos se presentan condiciones que exigen un buen manejo algebraico y ecuacional. El nivel de complejidad es mayor en relación al tipo de problema anterior.

Problema.

4. Una empresa de turismo dispone de dos tipos de vehículos: tipo A y tipo B. Para trasladar 80 turistas usa 4 vehículos tipo A y 6 vehículos tipo B. Sabiendo que no quedan asientos vacíos, ¿cuántos asientos para turistas tiene cada tipo de vehículo, si los vehículos tipo B tienen 5 asientos menos que los del tipo A?

Problema.

5. Para dirigirse a un aeropuerto, un grupo de 90 turistas puede emplear vehículos con capacidades para 6 u 8 personas. Si la diferencia entre el número de vehículos de 8 y 6 asientos es 1. ¿Cuántos vehículos de cada tipo necesitan si no deben quedar asientos vacíos?

Aporte de las situaciones:

Los problemas planteados van más allá de la representación algebraica, pues cada una de ellas se resuelve mediante ecuaciones para lo cual necesitan relacionar información. Aquí, se busca extrapolar la relación aritmética del total de asientos obtenida mediante el producto del número de asientos por vehículo, con el número de vehículos. En las situaciones se intercambian un dato por una incógnita, así en la situación 4 el dato es el número de vehículos y la incógnita el número de asientos, en cambio, en la situación 5 el dato es el número de asientos y la incógnita es el número de vehículos de cada tipo.

En cuanto a la técnica:

El estudio de este tipo de problemas se plantea como una igualdad; sin embargo, no sólo aplicarán técnicas de simplificación con la manipulación de variables, sino que además deberán transformarlo en un nuevo objeto matemático denominado ecuación. Aquí se aplicarán técnicas que constituirán el cálculo ecuacional, basado esencialmente en la transposición de términos y en el despeje de la incógnita que se quiere hallar.

El paso de las técnicas de simplificación a situaciones donde emerge un nuevo tipo de problemas que aplican las técnicas al nivel de ecuación, permite señalar que estos planteamientos están en un segundo nivel de algebrización.

Solución ideal:

Situación 4:

Tipo	# vehículos	# asientos	Total de asientos
A	4	x	4x
B	6	x -5	6(x-5)
			80

Luego:

4x + 6(x-5) = 80

4x+6x-30 = 80

10x = 80+30

10x = 110

x= 11

Los vehículos tipo A tienen 11 asientos y los vehículos tipo B tienen 6 asientos cada uno.

Situación 5:

Tipo	# asientos	# vehículos	Total de asientos
A	6	x	6x
B	8	x -1	8(x-1)
			90

Luego:

6x + 8(x-1) = 90

6x +8x -8 = 90

14x = 90+8

14x = 98

x= 7

Necesitan 7 vehículos tipo A y 6 vehículos tipo B.

Qué se espera que respondan los alumnos:

Se espera que los alumnos logren interpretar los enunciados "los vehículos tipo B tienen 5 asientos menos que los del tipo A" y "la diferencia entre el número de vehículos de 8 y 6 asientos es 1". Sin embargo, consideramos interesante trabajar e invertir tiempo sobre las posibles interpretaciones dadas al mismo. Algunos posibles errores estarían ligados al cálculo operacional con las expresiones algebraicas y a dificultades de comprensión del enunciado planteado.

Tipo de problema 5(TP5)

Se presentan dos problemas que aumentan el nivel de complejidad en el sentido que su manipulación requiere del dominio de otro tipo de técnicas y además de uno de ellos emerge un nuevo tipo de problema de manipulación de expresiones con el aparente empleo de dos variables.

Problema.

6. Una empresa de turismo dispone de 6 vehículos con capacidad para 4 personas y otros con capacidad para 10 personas. Debe trasladar un grupo de pasajeros, para ello usa todos los vehículos para 4 personas. Sabiendo que no quedan asientos vacíos. ¿Cuántos vehículos para 10 personas se necesitan, si el número total de pasajeros es el séxtuplo del número de vehículos con capacidad para 10 personas, aumentado en 64?

Problema.

7. En una agencia de turismo se han vendido 20 paquetes turísticos a dos precios distintos: los de "Lima Tours" a S/. 80 y los de "Lima Around Tours" a S/. 120, con las que ha obtenido un ingreso de S/. 1920. ¿Cuántos paquetes turísticos se han vendido de cada precio?

Aporte de las situaciones:

El primer problema plantea la necesidad de formular una ecuación, pero no para igualarla a un valor numérico, sino para ser igualada a otra expresión algebraica obtenida de la interpretación de los datos previos.

El segundo problema presenta una variación, porque la información relevante que permite plantear la ecuación no está dada de manera explícita; esta se deduce del análisis de la relación parte- todo formulada sobre la relación entre el número total de paquetes vendidos y los paquetes vendidos por cada agencia.

En cuanto a la técnica:

A nivel tecnológico seguimos en el segundo nivel de algebrización, pues todavía no llegamos a la generalización del cálculo ecuacional; sin embargo, podemos afirmar que se amplían y completan las situaciones anteriormente formuladas. La simplificación algebraica y el empleo de la técnica ecuacional son las características de estas situaciones aunque con una mayor exigencia en cuanto al tipo de relaciones entre los datos y las variables.

Solución ideal:

Situación 6:

Tipo	# vehículos	# asientos	Total de asientos
A	6	4	24
B	X	10	10x

De las condiciones del problema:

$24+ 10x = 6x + 64$

$4x = 40$

$x= 10$

Luego, se necesitan 10 vehículos para 10 personas.

Situación 7:

Sea x el número de paquetes turísticos de Lima Tours, luego (20-x) será el número de paquetes turísticos de Lima Around. Lo recaudado por la venta de los paquetes de Lima Tours es 80x, mientras que lo recaudado por Lima Around es 120(20-x). Luego como el total recaudado es S/. 1920, planteamos:

$$80x + 120(20-x) = 1920$$

$$80x + 2400 - 120x = 1920$$

$$-40x = 1920 - 2400$$

$$-40x = -480$$

$$x = 12$$

Luego, se venden 12 paquetes turísticos de Lima Tours y 8 paquetes de Lima Around.

Qué se espera que respondan los alumnos:

Para el primer problema los alumnos podrían tener dificultades al relacionar datos en el problema; sin embargo, esperamos que una vez planteada la ecuación los alumnos no incurran en errores de manipulación de las variables ni en el cálculo de lo pedido. Además, las variadas posibilidades de planteo, darían riqueza al análisis de la solución analizando su unicidad y validez.

En el segundo problema, los estudiantes podrían responder a lo planteado tanteando a través de la suma de los múltiplos de 80 y 120 que sumados den 1920. Algunos podrían incluso relacionar la descomposición del número 1920 con los múltiplos de 80 y 120, esto también ofrecería interesantes posibilidades para analizar su unicidad.

Todas las actividades fueron diseñadas con el principio de que el álgebra escolar apareciera para atender la necesidad de resolver situaciones específicas, a través de situaciones agrupadas en tipos de problemas. Con el trabajo de los estudiantes se conseguiría identificar las técnicas aplicadas, el uso que hacen de la variable y las diferentes justificaciones- explicaciones empleadas. Además, se recogerán evidencias sobre el dominio o no dominio de las técnicas de planteo y resolución de ecuaciones que fueron previamente desarrolladas en el periodo escolar.

Otro aspecto importante sería valorar las ventajas del trabajo cooperativo para aclarar dudas, generar diálogo y analizar las rutas de pensamiento y justificación que emplean nuestros estudiantes.

A partir de lo anterior, recordamos nuestro quinto objetivo específico:

O5: Diseñar una organización didáctica pertinente para el estudio introductorio del álgebra, integrando los diferentes momentos de su proceso de estudio, basados en el principio de que el álgebra escolar debe aparecer para atender a la necesidad de resolver situaciones específicas.

6.2.2. Categorías que se considerarán en el análisis de los resultados.

A continuación, describiremos las categorías de análisis que permitirán explorar aspectos relacionados con la organización didáctica propuesta en esta investigación.

Tabla 16: Categorías de análisis.

Categorías	Descripción	Respuestas esperadas.
Las técnicas. TÉCNI.	Se refiere a la identificación de la técnica de solución empleada. Estas son: Identificación de datos, asociación del enunciado verbal de un problema a un planteamiento que lo representa, y resolución del problema empleando diferentes procedimientos. Al mismo tiempo se identificarán los errores frecuentemente presentados.	Los estudiantes reconocen y discriminan la información dada de la cuestión por hallar, haciendo uso de diversos procedimientos aritméticos y/o geométricos. Sin embargo, es posible que presenten dificultades para identificar algunos datos y relacionar la información presentada.
La variable: VA.	Se refiere a los usos de la variable como incógnita, como indeterminada, para expresar cantidades	Los estudiantes identifican las variables involucradas en cada enunciado, consideramos que la mayoría no señalará

	que varían conjuntamente, o como parámetro o constantes. Además, se analizará si se define explícitamente lo que representa cada una de las variables.	explícitamente lo que representan, debido a que por prácticas institucionales asumen que los problemas deben tener la misma estructura.
La tecnología: JUST.	Se refiere al empleo de justificaciones y explicaciones de los procedimientos empleados o de las soluciones encontradas.	Los estudiantes no encontraran justificaciones pertinentes a los procedimientos aplicados o explicaciones de algunos resultados, porque en su práctica ésta no es priorizada, la mayor parte de procesos son algorítmicos y aplicados sin reflexión.

A continuación mostramos, las categorías de análisis que cada uno de los siete problemas de la propuesta de organización didáctica permite explorar.

Tabla 17: Categorías de análisis en cada tipo de problema.

Categorías	TP2	TP3	TP1	TP4		TP5	
	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6	Problema 7
TÉCNI.	X	X	X	X	X	X	X
VA.	X	X		X	X	X	X
JUST.		X	X				

6.3. Descripción de la implementación

La propuesta se implementó en el colegio SS.CC Recoleta, a fines del cuarto bimestre del año escolar 2010, con 63 alumnos del primer año de secundaria de las secciones B y D.

La primera parte de la propuesta se desarrollo durante 30 minutos en forma individual. Para la segunda los estudiantes se organizaron en grupos de 3, y tuvieron 60 minutos de trabajo colaborativo.

Cada una de las partes tuvo una actividad conjunta de cierre de identificación de las mayores dificultades y presentación de las soluciones de algunos estudiantes. Esta última actividad no está incluida en los tiempos mencionados anteriormente.

Se indicó a los alumnos que detallaran sus soluciones y que las desarrollaran sobre la base de todas sus experiencias previas en el área.

A continuación se detallan algunas observaciones de la aplicación de la propuesta en su **ejecución individual en el I-B**:

Sobre el problema 1:

1. Una empresa de turismo dispone de dos tipos de vehículos: 4 vehículos tipo A con capacidad para 6 personas y 10 vehículos tipo B. Para trasladar un grupo de turistas, usó todos los de tipo A y todos los del tipo B. Si no quedaron asientos vacíos en ninguno de los vehículos, ¿Es posible saber cuántos asientos para turistas tienen los vehículos tipo B, si se transportaron 144 turistas en total? Muestre sus cálculos y explique su respuesta.

- Tres alumnos presentaron dos soluciones una aritmética y otra algebraica.
- Una alumna usó íconos en forma de cuadrados para representar los vehículos, al final respondió correctamente a la pregunta.
- La solución aritmética presentada por la mayoría fue:

  Tipo A: 4 vehículos para 6 personas, luego 6x 4= 24 asientos

  Tipo B: 10 vehículos.

  Total de personas: 144. Como ya se ocuparon 24 asientos quedan:

  144- 24= 120 asientos que deben ocuparse con los 10 vehículos tipo B, luego 120: 10 = 12 asientos por vehículo para que al final no queden asientos vacíos.
- La solución algebraica mayormente desarrollada por los estudiantes fue:

  Tipo A: 4 vehículos con capacidad para 6 personas

  Tipo B: 10 vehículos con capacidad para 10 personas. Luego,

4. 6 + 10x = 144

24 + 10x = 144

10x = 120

x = 12

- Algunos alumnos en su sustentación sobre los métodos empleados, indicaron que eligieron trabajar con ecuaciones, porque les daba más orden para organizar la información y además les permitía verificar su respuesta.

Sobre el problema 2:

2. Una empresa de turismo dispone de dos tipos de vehículos, el alquiler del tipo A cuesta S/.80 y el alquiler del tipo B cuesta S/. 120. Si la diferencia del número de vehículos tipo A con el número de vehículos tipo B es 4.

   a) ¿Cómo representas la cantidad de vehículos de cada tipo?

   b) Completa los datos que faltan en la siguiente tabla.

Tipo de vehículo	Costo unitario	Cantidad	Gasto total
Tipo A	80		
Tipo B	120		

   c) ¿Cómo se obtiene el gasto de alquiler para todos los vehículos del tipo A?

   d) ¿Cómo se obtiene el gasto de alquiler para todos los vehículos del tipo B?

   e) ¿Cuánto fue la inversión total?

- 4 alumnos dejaron en blanco el segundo problema.
- 1 alumno uso de manera incorrecta las variables, no considerando la relación de diferencia entre el número de vehículos de cada tipo.
- Una alumna planteó la representación de la cantidad de vehículos de cada tipo con dos variables diferentes "x" e "y", contestó correctamente los ítems a, b, c, d, y e; pero su respuesta en el último ítem: 80x + 120 y, consideraba un valor específico para x (8) y otro valor específico para y (4), con lo cual daba como respuesta S/. 1520.

- Otra alumna planteó correctamente los ítems a, b, c, y d. Dejando en blanco la respuesta de la última pregunta.
- Sólo 10 estudiantes completaron toda la segunda pregunta correctamente.
- Dos alumnos preguntaron si el segundo problema tenía relación con el primero, en el sentido de si los datos del primero podían usarse en el segundo problema.
- Cuatro alumnos preguntaron si en los problemas necesariamente tenían que llegar a un valor numérico; dudaron de su respuesta al ver que ésta era una expresión algebraica. Lo que evidencia que los alumnos consideraban que la naturaleza de la actividad era aritmética. Esto era previsible pues según Perry, P. (1999), la naturaleza de las respuestas hace que estas se dividan en dos grupos: actividad aritmética, donde el foco de la actividad es encontrar respuestas numéricas particulares; mientras, en la actividad algebraica el foco es deducir procedimientos y relaciones, además de expresarlos en forma general. Los alumnos esperaban una respuesta numérica, al parecer su poca experiencia previa con resultados algebraicos o situaciones como las presentadas les hizo dudar de lo que habían obtenido.
- Algunos alumnos concluyeron que el signo = puede representar no sólo la acción de escribir el resultado sino también una relación de equivalencia.

  En todos los casos, estuvieron de acuerdo de que el uso de la letra está destinado principalmente a representar valores.

A continuación se detallan algunas observaciones de la aplicación de la propuesta en su **<u>ejecución grupal en el I-B</u>:**

Sobre el problema 3:

3. Pedir a los alumnos que hagan la siguiente secuencia de operaciones:
   - Escribe un número.
   - Súmale el número que le sigue.
   - Suma 9 al resultado anterior.
   - Divide entre 2.
   - Resta el número inicial.

   Plantear luego las siguientes preguntas:

   ¿Qué resultado se obtiene? Realicen la misma secuencia anterior para otro número inicial. ¿Qué resultado obtienen? ¿Cómo explican este resultado?

- Sobre la secuencia de operaciones, tres grupos intentaron establecer diferencias en el resultado, en el caso que el número inicial fuera par o impar. En el caso de un grupo, esto se debió a que al inicio cometieron error en el cálculo lo que les hizo suponer que habían dos resultados diferentes, en caso el número inicial sea par o impar.
- Además, un grupo trabajó intentando ampliar el campo numérico y especularon sobre los resultados en caso se elija un número entero o racional. Este grupo indicó que llegaron a la conclusión de que el resultado siempre era el mismo.
- Este problema resultó interesante por la discusión generada, surgieron algunas ideas como que si se suponía que el número inicial era decimal ¿Cuál sería su consecutivo?. Además, se generó mucho diálogo en el intento por responder a la pregunta de justificación.

Sobre el problema 4:

4. Una empresa de turismo dispone de dos tipos de vehículos: tipo A y tipo B. Para trasladar 80 turistas usa 4 vehículos tipo A y 6 vehículos tipo B. Sabiendo que no quedan asientos vacíos, ¿cuántos asientos para turistas tiene cada tipo de vehículo, si los vehículos tipo B tienen 5 asientos menos que los del tipo A?

- Fue el problema en la que los estudiantes encontraron menos dificultades, además fue resuelta por la mayoría.
- Justificaron su solución indicando que comprendían el significado de la ecuación y el rol de las variables; además que relacionaban el significado con el contexto de la situación problemática.

Sobre los problemas 5, 6 y 7:

5. Para dirigirse a un aeropuerto, un grupo de 90 turistas puede emplear vehículos con capacidades para 6 u 8 personas. Si la diferencia entre el número de vehículos de 8 y 6 asientos es 1. ¿Cuántos vehículos de cada tipo necesitan si no deben quedar asientos vacíos?

6. Una empresa de turismo dispone de 6 vehículos con capacidad para 4 personas y otros con capacidad para 10 personas. Debe trasladar un grupo de pasajeros, para ello usa todos los vehículos para 4 personas. Sabiendo que no quedan asientos vacíos. ¿Cuántos vehículos para 10 personas se necesitan, si el número total de pasajeros es el séxtuplo del número de vehículos con capacidad para 10 personas, aumentado en

7. En una agencia de turismo se han vendido 20 paquetes turísticos a dos precios distintos: los de “Lima Tours” a S/. 80 y los de “Lima Around Tours” a S/. 120, con las que ha obtenido un ingreso de S/. 1920. ¿Cuántos paquetes turísticos se han vendido de cada precio?

- Los alumnos indicaron que notaron similitudes entre las diferentes soluciones, señalaron que el contexto era el mismo; aunque se dieron cuenta que la pregunta era diferente para cada caso, en algunos casos asignaron una variable al número de vehículos y en otros al número de asientos.
- Los alumnos exploraban diferentes métodos de solución y, una vez que resolvían el problema, comparaban las trayectorias de solución seguidas con sus compañeros. Creemos que el seguimiento del trayecto de

razonamiento de otros en la solución de un problema, es una buena manera de desarrollar razonamientos lógicos y verificar estrategias.

- En la mayoría de los casos, discutían sobre el significado de la ecuación y el rol de las variables; además, que en algunos casos relacionaban su respuesta con el contexto de la situación problemática.
- Las situaciones planteadas permitían que los alumnos comiencen a utilizar variables y ecuaciones sabiendo de donde provienen.
- Después de realizada cada sección, se socializaron y discutieron los resultados jerarquizando el uso de las distintas estrategias para cada situación problemática.

Ahora detallaremos algunas observaciones de la aplicación de la propuesta en su **ejecución individual en el I-D**:

Sobre el problema 1:

1. Una empresa de turismo dispone de dos tipos de vehículos: 4 vehículos tipo A con capacidad para 6 personas y 10 vehículos tipo B. Para trasladar un grupo de turistas, usó todos los de tipo A y todos los del tipo B. Si no quedaron asientos vacíos en ninguno de los vehículos, ¿Es posible saber cuántos asientos para turistas tienen los vehículos tipo B, si se transportaron 144 turistas en total? Muestre sus cálculos y explique su respuesta.

- Los estudiantes indicaron que les fue sencillo llegar a la solución, algunos señalaron que lo resolvieron planteando una ecuación; por otro lado, otros no lo consideraron necesario.

Sobre el problema 2:

2. Una empresa de turismo dispone de dos tipos de vehículos, el alquiler del tipo A cuesta S/.80 y el alquiler del tipo B cuesta S/. 120. Si la diferencia del número de vehículos tipo A con el número de vehículos tipo B es 4.

a) ¿Cómo representas la cantidad de vehículos de cada tipo?

b) Completa los datos que faltan en la siguiente tabla.

Tipo de vehículo	Costo unitario	Cantidad	Gasto total
Tipo A	80		
Tipo B	120		

c) ¿Cómo se obtiene el gasto de alquiler para todos los vehículos del tipo A?

d) ¿Cómo se obtiene el gasto de alquiler para todos los vehículos del tipo B?

e) ¿Cuánto fue la inversión total?

- Cuatro alumnos preguntaron ¿A qué se refieren con cantidad?
- Tres alumnos preguntaron si los datos de un problema podían ser usados en la solución del otro.
- Dos alumnos tenían dudas sobre el significado de la pregunta ¿cuánto fue la inversión total?
- Un alumno preguntó si la inversión total debía ser un valor numérico o podía quedar indicado como una expresión algebraica. Luego 6 alumnos manifestaron que también dudaron sobre su respuesta, porque esperaban que esta fuera un valor numérico específico.

Ahora algunas observaciones de la aplicación de la propuesta en su **ejecución grupal en el I-D**:

Sobre el problema 3:

3. Pedir a los alumnos que hagan la siguiente secuencia de operaciones:
    - Escribe un número.
    - Súmale el número que le sigue.
    - Suma 9 al resultado anterior.
    - Divide entre 2.
    - Resta el número inicial.

    Plantear luego las siguientes preguntas:

    ¿Qué resultado se obtiene? Realicen la misma secuencia anterior para otro número inicial. ¿Qué resultado obtienen? ¿Cómo explican este resultado?

- Al principio se veía que varios grupos empezaron trabajando individualmente.
- Un grupo preguntó, si al hablar de un número se refería a un número de un dígito o varios.
- Un grupo usó monedas para seguir la secuencia de operaciones aritméticas de la pregunta número tres.
- Los grupos probaban con números grandes y pequeños, un grupo concluyó que en la penúltima indicación debía salir un número par, para que se pudiera dividir entre dos.
- Otro grupo trabajó con dos grupos de números: los pares e impares.
- Otro grupo también estableció distinción entre números naturales, enteros, y racionales; probando incluso la secuencia de operaciones para números decimales y fracciones.

Sobre el problema 4:

4. Una empresa de turismo dispone de dos tipos de vehículos: tipo A y tipo B. Para trasladar 80 turistas usa 4 vehículos tipo A y 6 vehículos tipo B. Sabiendo que no quedan asientos vacíos, ¿cuántos asientos para turistas tiene cada tipo de vehículo, si los vehículos tipo B tienen 5 asientos menos que los del tipo A?

- Los alumnos indicaron que les pareció el problema más sencillo de resolver, no había muchos datos para relacionar y por esa razón el enunciado era comprensible y algo familiar.

Sobre los problemas 5, 6 y 7:

5. Para dirigirse a un aeropuerto, un grupo de 90 turistas puede emplear vehículos con capacidades para 6 u 8 personas. Si la diferencia entre el número de vehículos de 8 y 6 asientos es 1. ¿Cuántos vehículos de cada tipo necesitan si no deben quedar asientos vacíos?

6. Una empresa de turismo dispone de 6 vehículos con capacidad para 4 personas y otros con capacidad para 10 personas. Debe trasladar un grupo de pasajeros, para ello usa todos los vehículos para 4 personas. Sabiendo que no quedan asientos vacíos. ¿Cuántos vehículos para 10 personas se necesitan, si el número total de pasajeros es el séxtuplo del número de vehículos con capacidad para 10 personas, aumentado en 64?

7. En una agencia de turismo se han vendido 20 paquetes turísticos a dos precios distintos: los de "Lima Tours" a S/. 80 y los de "Lima Around Tours" a S/. 120, con las que ha obtenido un ingreso de S/. 1920. ¿Cuántos paquetes turísticos se han vendido de cada precio?

- En el problema 6, varios grupos discutían sobre a quién debían representar con una letra. Luego, en la misma pregunta dudaban en representar el total de asientos como: 24 + 10x.
- En algunos grupos al plantear ecuaciones cuestionaban sus respuestas cuando la solución obtenida era una fracción, se preguntaban ¿No debía ser un número entero?
- Un grupo preguntó que si la respuesta necesariamente se obtenía con el planteamiento de ecuaciones.

- Un grupo, en referencia al problema 5 indicó "si la diferencia entre el número de vehículos de 8 y 6 asientos es 1", ¿La diferencia no es 2?
- Las situaciones fueron desafiantes para la mayoría de estudiantes, aún para los que habitualmente mostraban poco interés en el curso.

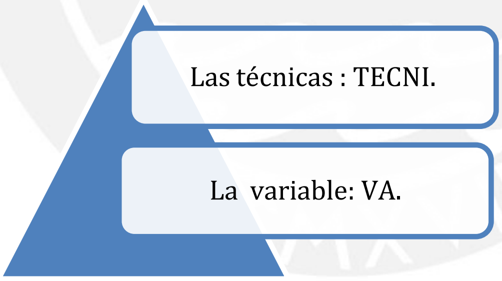
6.4. Análisis de los resultados teniendo en cuenta las categorías.

Presentaremos el análisis cualitativo de las respuestas a cada problema, según las categorías de análisis previamente definidas.

Problema 1:

Una empresa de turismo dispone de dos tipos de vehículos: 4 vehículos tipo A con capacidad para 6 personas y 10 vehículos tipo B. Para trasladar un grupo de turistas, usó todos los vehículos tipo A y todos los del tipo B. Si no quedaron asientos vacíos en ninguno de los vehículos. ¿Es posible saber cuántos asientos para turistas tienen los vehículos tipo B, si se transportaron 144 turistas en total? Muestre sus cálculos y explique su respuesta.

Las categorías de análisis consideradas para este problema son:



Sobre las técnicas:

- La solución aritmética fue la más aplicada, 46 estudiantes recurrieron a ella mientras que sólo 21 lo hicieron algebraicamente. Esto evidencia que los estudiantes desarrollaron la capacidad de comprensión de situaciones aritméticas.

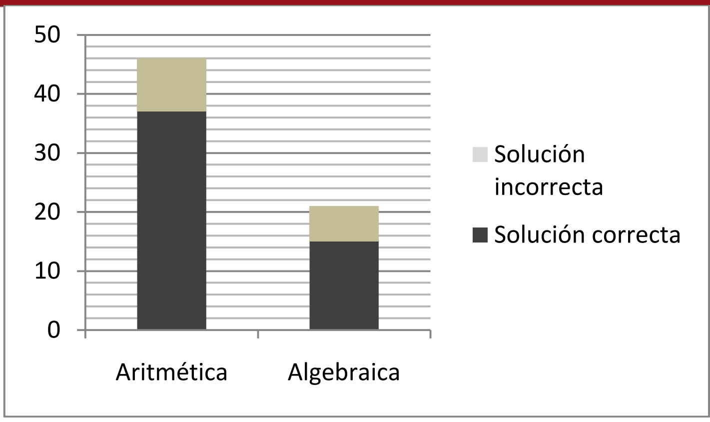
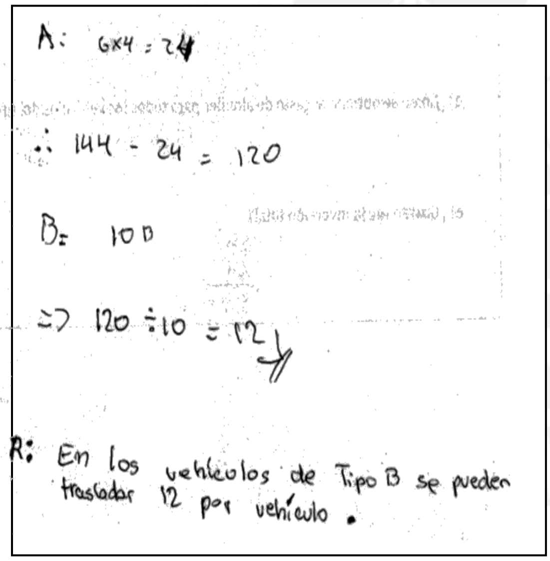


Figura 29: Respuesta de los estudiantes a la pregunta 1.

- El procedimiento aritmético seguido por la mayoría, incluía la aplicación de las operaciones de multiplicación, sustracción y división entre los datos del problema.

  A continuación se muestra lo presentado por dos estudiantes:



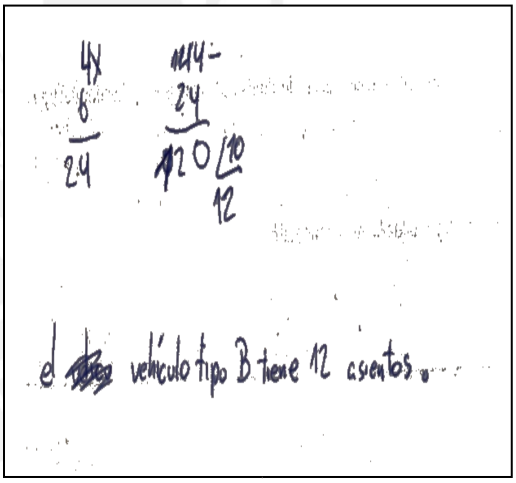


Figura 30. Solución aritmética de un alumno

Figura 31: Solución aritmética presentada por un alumno

- De los 21 alumnos que intentaron soluciones algebraicas, 18 plantearon correctamente una ecuación.
- Tres estudiantes combinaron métodos aritméticos y algebraicos. Plantearon ecuaciones que correspondían a los datos dados; sin embargo el camino que siguieron es el de manipulación de datos numéricos. En la figura 32 se deducen aritméticamente algunos datos y luego se plantea la ecuación 10b – 24= 144, en cambio en la figura 30 se plantea 4A + 10 B =

144, y luego se resuelve aritméticamente por diferencias y cociente lo pedido.

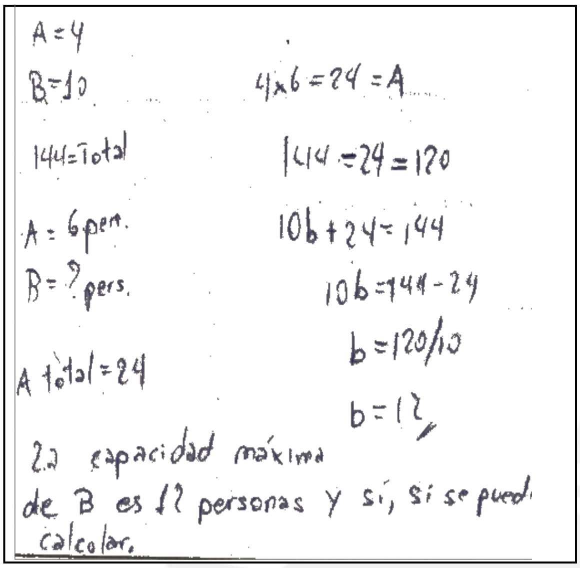


Figura 32: Solución de un estudiante.

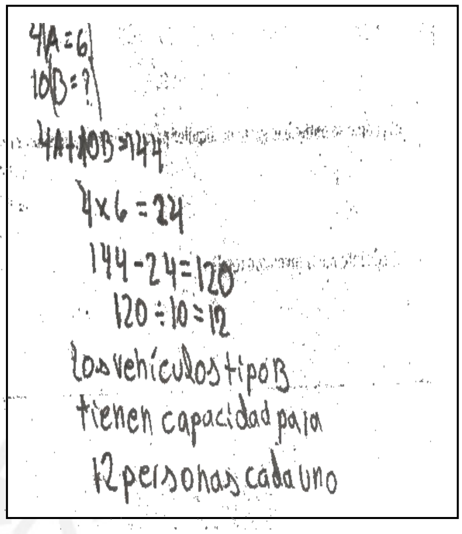


Figura 33: Solución de un estudiante.

- A su vez de los 18 alumnos que plantearon correctamente una ecuación sólo 15 lo resolvieron correctamente, habiendo 3 estudiantes que incurrieron en error, siendo 2 de ellos errores al copiar los números y un estudiante que operó incorrectamente al resolver una sustracción.

  Las siguientes soluciones del problema realizada por dos estudiantes muestran algunos errores:

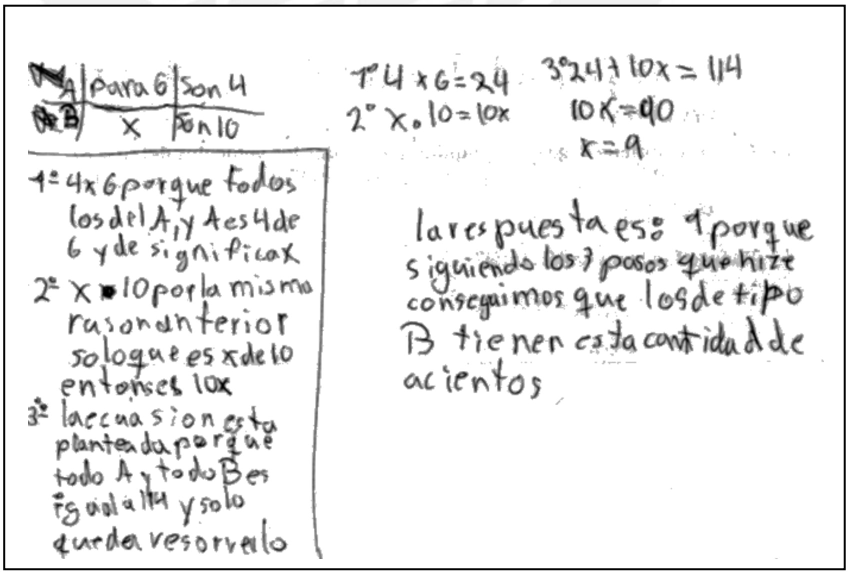
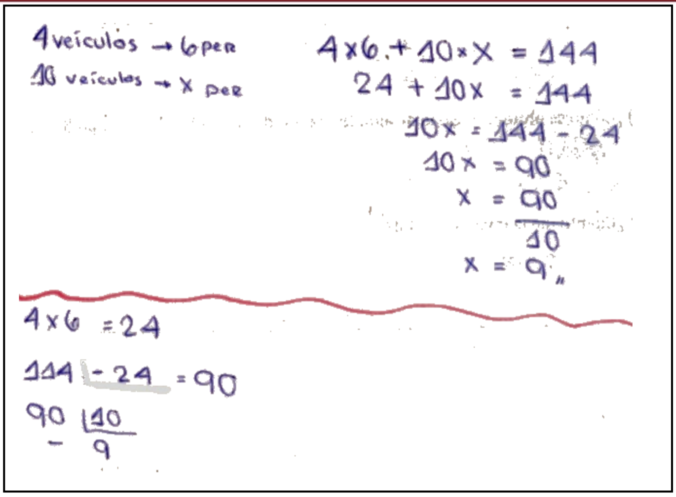


Figura 34: Solución errada de un estudiante debido a que copió mal uno de los datos.



un

Figura 35: Solución errada de un estudiante debido a una sustracción mal efectuada.

- De los 46 alumnos que presentaron soluciones aritméticas, 37 estudiantes llegaron al resultado correcto, los errores frecuentes fueron de cálculo aritmético o de interpretación de la información.

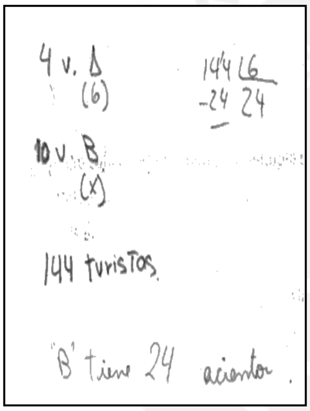


Figura 36: Solución errada de un estudiante debido a una incorrecta interpretación

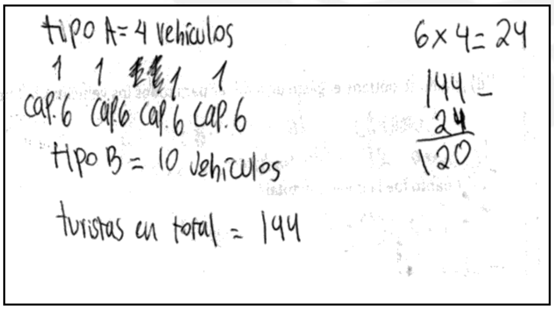


Figura 37: Solución incompleta desarrollada por un estudiante.

Sobre el uso de la variable:

- Al plantear ecuaciones usaron la variable como incógnita, es decir, para representar un objeto matemático desconocido que se manipula como si fuera conocido. De los 21 alumnos que intentaron soluciones algebraicas, 18 plantearon correctamente una ecuación.

Problema 2:

Una empresa de turismo dispone de dos tipos de vehículos, el alquiler del tipo A cuesta S/.80 y el alquiler del tipo B cuesta S/. 120. Si la diferencia del número de vehículos tipo A con el número de vehículos tipo B es 4.

a) ¿Cómo representas la cantidad de vehículos de cada tipo?

b) Completa los datos que faltan en la siguiente tabla.

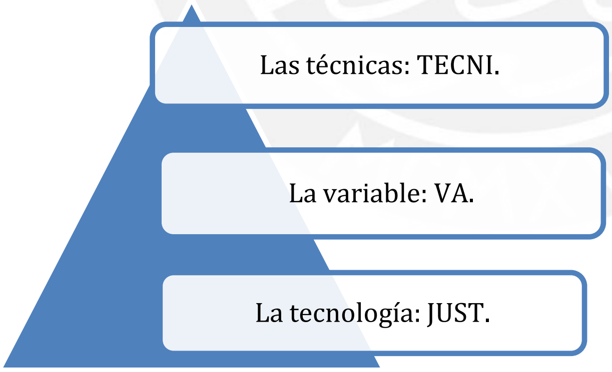
Tipo de vehículo	Costo unitario	Cantidad	Gasto total
Tipo A	80		
Tipo B	120		

c) ¿Cómo se obtiene el gasto de alquiler para todos los vehículos del tipo A?

d) ¿Cómo se obtiene el gasto de alquiler para todos los vehículos del tipo B?

e) ¿Cuánto fue la inversión total?

Las categorías de análisis para este problema son:



Sobre las técnicas:

- Del total de estudiantes, 16 alumnos usaron un valor numérico específico para representar la cantidad de vehículos de cada tipo. Esto al parecer se debió a que en la última pregunta los alumnos asumieron que la respuesta debía ser un valor específico y al no tenerlo respetando las condiciones dadas, buscaron desde como respuesta valores numéricos particulares.

Esto evidencia que los estudiantes no están acostumbrados a las expresiones algebraicas como soluciones a problemas. A continuación mostramos una solución que hace referencia a ese procedimiento.

a) ¿Cómo representas la cantidad de vehículos de cada tipo?

A = S/. 80　　A = x+4
B = S/. 120　　B = x　= 2x+4 = 2x = -4 = x = +2
B = 2 vehículos　y A = 6 vehículos.

b) Completa los datos que faltan en la siguiente tabla.

Tipo de vehículo	Costo unitario	Cantidad	Gasto total
Tipo A	80	6 vehículos	480 soles
Tipo B	120	2 vehículos	240 soles

c) ¿Cómo se obtiene el gasto de alquiler para todos los vehículos del tipo A?

Se obtiene al multiplicar S/. 80 con 6 vehículos y saldría como resultado 480 soles como gasto total.

d) ¿Cómo se obtiene el gasto de alquiler para todos los vehículos del tipo B?

Se obtiene al multiplicar S/. 120 (costo unitario) con la cantidad (2) y sale el gasto total (S/. 240 soles)

e) ¿Cuánto fue la inversión total?

La inversión total de los dos tipos de vehículo fue 720 nuevos soles.

Figura 38: Alumno que asignó un valor específico a la cantidad de vehículos.

- Fueron 37 estudiantes los que asociaron la condición algebraica y la representaron correctamente, la mayoría de ellos lo presentaron como :

  Cantidad de vehículos tipo A = x

  Cantidad de vehículos tipo B = x +4.

  Otro grupo uso dos variables indicando: x-y = 4.

  En la siguiente figura se muestra un planteamiento:

a) ¿Cómo representas la cantidad de vehículos de cada tipo?

A = 80　x+4　A = X+4
B = 120　X　B = X

b) Completa los datos que faltan en la siguiente tabla.

Tipo de vehículo	Costo unitario	Cantidad	Gasto total
Tipo A	80	x + 4	80(x+4)
Tipo B	120	x	120(x)

c) ¿Cómo se obtiene el gasto de alquiler para todos los vehículos del tipo A?

80 (x+4)
80x + 320

d) ¿Cómo se obtiene el gasto de alquiler para todos los vehículos del tipo B?

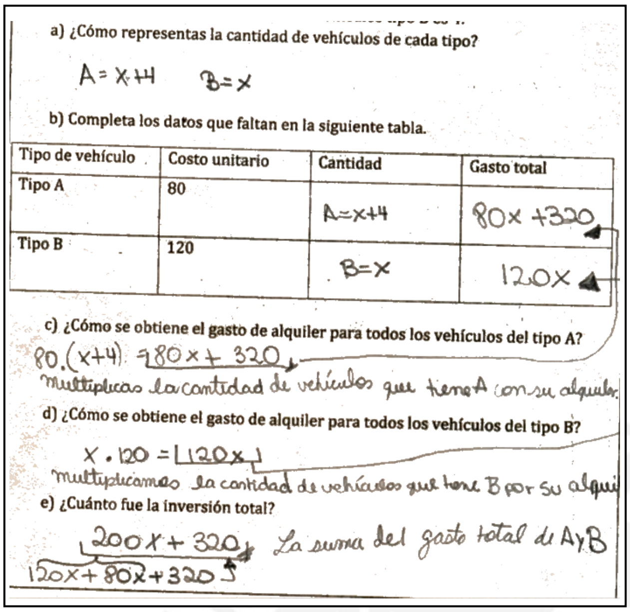
120 (x)
120 x

e) ¿Cuánto fue la inversión total?

80x + 320 + 120x
200x + 320

Figura 39: Solución presentada por un estudiante, donde se explicita algebraicamente cómo se obtienen los gastos de alquiler.

- Del total de estudiantes sólo 5 consiguieron completar correctamente toda la pregunta incluyendo la realización de la operación indicada en el ítem e.



a) ¿Cómo representas la cantidad de vehículos de cada tipo?

A= x+4   B= x

b) Completa los datos que faltan en la siguiente tabla.

Tipo de vehículo	Costo unitario	Cantidad	Gasto total
Tipo A	80	A=x+4	80x +320
Tipo B	120	B=x	120x

c) ¿Cómo se obtiene el gasto de alquiler para todos los vehículos del tipo A?

80.(x+4) = 80x + 320

Multiplicas la cantidad de vehículos que tiene A con su alquiler

d) ¿Cómo se obtiene el gasto de alquiler para todos los vehículos del tipo B?

x • 120 = 120x

multiplicamos la cantidad de vehículos que tiene B por su alqui

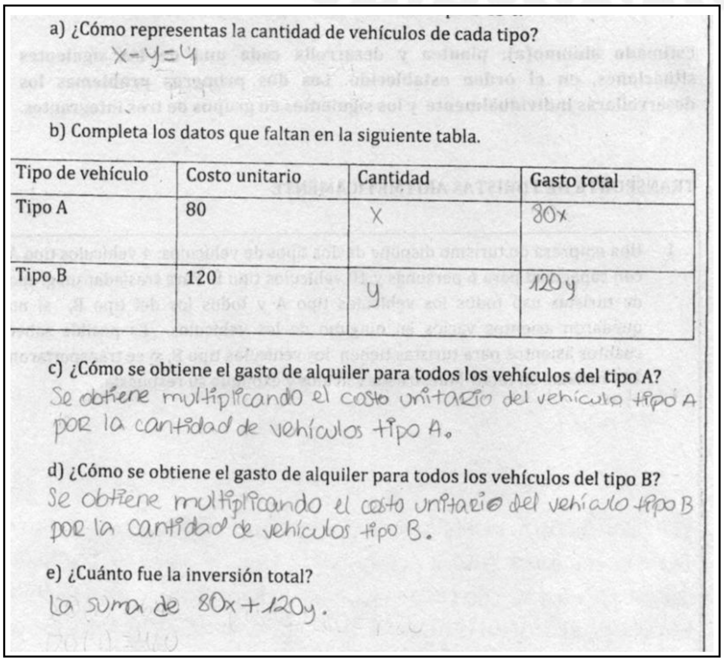
e) ¿Cuánto fue la inversión total?

200x + 320 La suma del gasto total de A y B

120x + 80x + 320

Figura 40: Solución presentada por un estudiante.

- Hubo un grupo de estudiantes que o bien procedieron equivocadamente considerando el dato inicial de diferencia entre el número de vehículos de cada tipo, pero para valores particulares, o bien dejaron en blanco la pregunta.
- Otros estudiantes incurrieron en error al plantear una solución que no hace referencia a la condición algebraica, como asignar sólo A= x , B= y ; o al plantear un resultado numérico este no considera la condición de diferencia entre el número de vehículos.



a) ¿Cómo representas la cantidad de vehículos de cada tipo?

x-y=4

b) Completa los datos que faltan en la siguiente tabla.

Tipo de vehículo	Costo unitario	Cantidad	Gasto total
Tipo A	80	x	80x
Tipo B	120	y	120y

c) ¿Cómo se obtiene el gasto de alquiler para todos los vehículos del tipo A?

Se obtiene multiplicando el costo unitario del vehículo tipo A por la cantidad de vehículos tipo A.

d) ¿Cómo se obtiene el gasto de alquiler para todos los vehículos del tipo B?

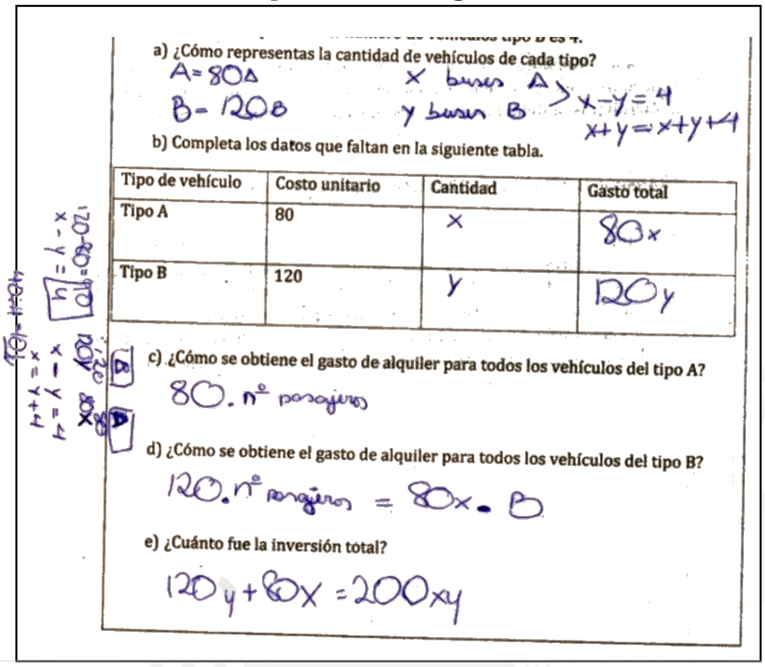
Se obtiene multiplicando el costo unitario del vehículo tipo B por la cantidad de vehículos tipo B.

e) ¿Cuánto fue la inversión total?

La suma de 80x+120y.

Figura 41: Solución presentada por un estudiante que asignó más variables de las necesarias.

- Sobre el último ítem del problema 2, 38 estudiantes no hicieron referencia a la inversión total, algunos estudiantes indicaron valores numéricos erróneos que ni siquiera se ajustaban a la condición de diferencia inicial entre el número de vehículos de cada tipo y otros cometieron algunos errores en las operaciones algebraicas como en la reducción de términos.



a) ¿Cómo representas la cantidad de vehículos de cada tipo?

A = 80A x buses A

B - 120B y buses B

x − y = 4

x + y = x + y + 4

b) Completa los datos que faltan en la siguiente tabla.

Tipo de vehículo	Costo unitario	Cantidad	Gasto total
Tipo A	80	x	80x
Tipo B	120	y	120y

c) ¿Cómo se obtiene el gasto de alquiler para todos los vehículos del tipo A?

80. n° pasajeros

d) ¿Cómo se obtiene el gasto de alquiler para todos los vehículos del tipo B?

120. n° pasajeros = 80x. B

e) ¿Cuánto fue la inversión total?

120y + 80x = 200xy

Figura 42: Solución mostrada por un estudiante, donde usa dos variables, y se equivoca en la reducción de términos.

Sobre las variables:

- De los 37 estudiantes que identificaron las variables, 34 lograron representar correctamente la cantidad de vehículos para los dos tipos. El uso de la variable fue como incógnita para representar cantidades desconocidas.
- Emplearon variables para representar la cantidad de vehículos del tipo A, según la condición algebraica, además sólo 27 estudiantes consiguen representar el gasto total para los vehículos tipo A.
- Asociado a lo anterior usaron variables para representar la cantidad de vehículos del tipo B, aunque, sólo 25 estudiantes consiguen representar el gasto total para los vehículos tipo B.

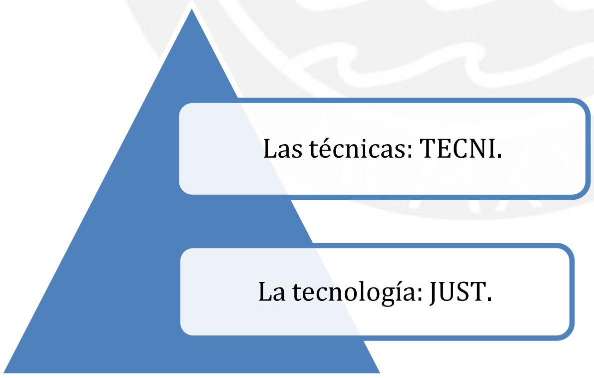
Sobre la tecnología:

- Sobre la explicitación de cómo obtienen el gasto de alquiler para todos los vehículos tipo A y tipo B, 21 estudiantes indicaron el procedimiento seguido en cada caso. Caber señalar que aunque algunos estudiantes no completaron el cuadro, si redactaron sus respuestas a las preguntas c y d, detallando verbalmente cómo se obtenían los gastos de alquiler para cada tipo de vehículo.

Problema 3:

Realice la siguiente secuencia de operaciones: • Escriba un número. • Súmele el número que le sigue. • Sume 9 al resultado anterior. • Divida entre 2. • Reste el número inicial. ¿Qué resultado obtienen? Realiza la secuencia anterior para otro número inicial. ¿Qué resultado obtienen? ¿Cómo explican este resultado?

Las categorías de análisis para este problema son:



Sobre las técnicas:

- Sobre la realización de la secuencia de operaciones para dos números diferentes, los estudiantes no tuvieron dificultad y el total de los grupos llegó a resolverlo correctamente. La mayoría trabajó con números naturales, además, 5 de los 22 grupos probaron la secuencia de operaciones para números enteros. Un grupo intentó también trabajar con números racionales, al mismo tiempo, se cuestionaron sobre ¿cuál es el número que sigue?, al considerar que no podían precisar el número que sigue optaron por verificar con números enteros.

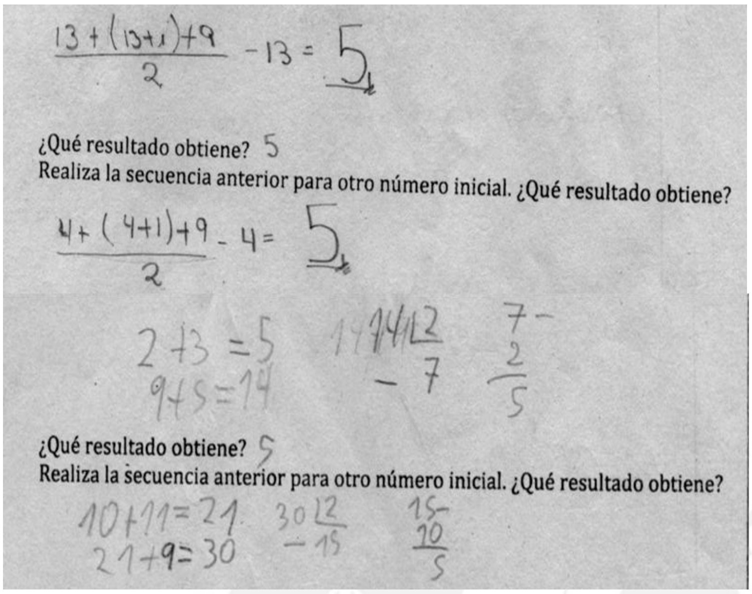
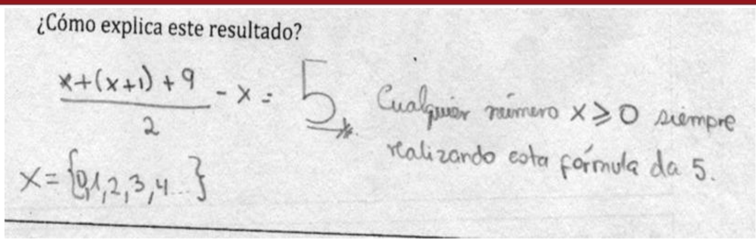


Figura 43: Solución mostrada por dos grupos de estudiantes.

- En el caso de este problema sólo un grupo cometió un error en una de las secuencias de instrucciones a operar, la mayoría realizó las operaciones aritméticas correctamente, lo que nos lleva a inferir que los grupos aprendieron los algoritmos para las operaciones señaladas en el campo de los números enteros.

Sobre la tecnología:

- La justificación de la pregunta ¿cómo explican este resultado? significó dificultad para la mayoría de los grupos, pues sólo el 22, 7% de los grupos consiguieron redactar algún tipo de explicación o justificación. Las respuestas fueron mayormente de tipo algebraico, mostrando la secuencia de operaciones para un valor inicial x y considerando que al final siempre quedaba el número cinco Un grupo además señaló que si al final se resta el número inicial sea cual sea éste siempre queda 5.
- La dificultad radicaba en que no entendían la pregunta no entendían lo pedido, dudaban si lo que se quería era que redactaran una respuesta o expresaran ésta de manera simbólica. Mostramos algunas respuestas a esta pregunta:



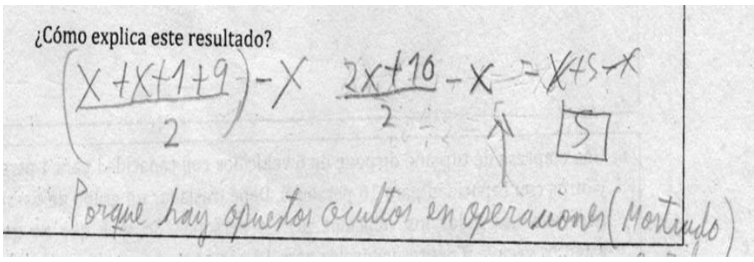
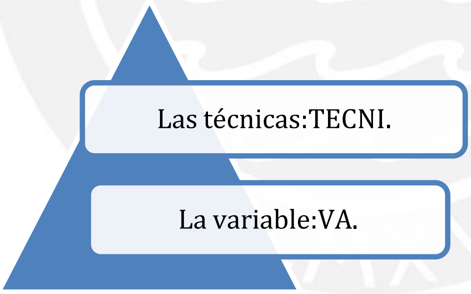


Figura 44: Solución mostrada por dos grupos de estudiantes.

Problema 4:

Una empresa de turismo dispone de dos tipos de vehículos: tipo A y tipo B. Para trasladar 80 turistas usa 4 vehículos tipo A y 6 vehículos tipo B. Sabiendo que no quedan asientos vacíos, ¿cuántos asientos para turistas tiene cada tipo de vehículo, si los vehículos tipo B tienen 5 asientos menos que los del tipo A?

Las categorías de análisis para este problema son:



Sobre las técnicas:

- Con las variables definidas, 19 grupos plantearon ecuaciones resolviéndolas de manera correcta en todos los casos. Sin embargo, sólo 16 de ellos dan algún tipo de interpretación de lo hallado en el contexto del problema. Aquí algunos ejemplos:

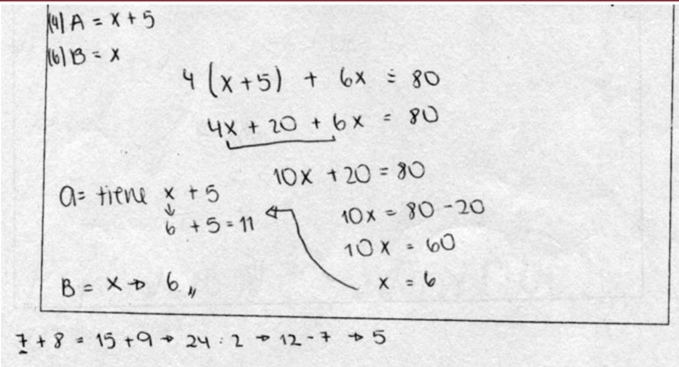


Figura 45: Solución mostrada por un grupo de estudiantes

- Hubieron 2 grupos que no obstante haber definido correctamente el número de asientos de cada tipo, no plantearon ninguna relación entre los datos, es decir, no plantearon una ecuación. De los alumnos que sí plantearon una ecuación, todos lo resolvieron correctamente.
- La mayor parte de los estudiantes resolvieron la situación propuesta planteando el siguiente proceso: señalaron el número de asientos de cada tipo usando variables, plantearon, resolvieron e interpretaron la solución de la ecuación.
- Varios grupos mostraron la comprobación de sus resultados, aquí presentamos algunos ejemplos:

  De la ecuación: $4x + 6(x-5) = 80$

  $$4x + 6x - 30 = 80$$

  $$10x = 110 \rightarrow \quad x = 11$$

  A continuación un grupo muestra: $4(11) + 6(11-5) = 44 + 66 - 30 = 80$

  $66 - 30 = 36$. Luego $36:6 = 6$

  Otro grupo presenta: $11(4) = 44$ $\quad 6(6) = 36$ siendo el total $44 + 36 = 80$

Sobre la variable:

- La mayoría de los grupos identificaron correctamente la relación de los datos con su representación, a través de una variable, que en este caso se usó como incógnita.

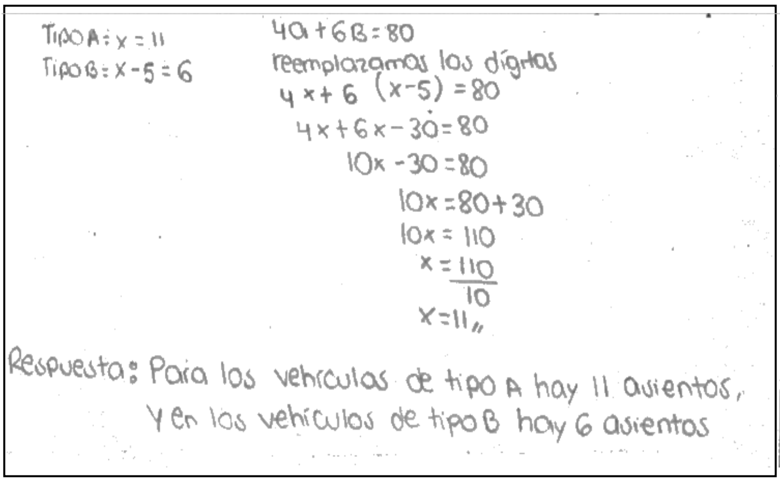
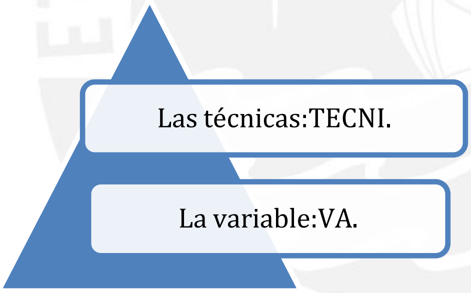


Figura 46: Solución mostrada por un grupo de estudiantes.

Problema 5:

Para dirigirse a un aeropuerto, un grupo de 90 turistas puede emplear vehículos con capacidades para 6 u 8 personas. Si la diferencia entre el número de vehículos de 8 y 6 asientos es 1, ¿cuántos vehículos de cada tipo necesitan si no deben quedar asientos vacíos?

Las categorías de análisis para este problema son:



Sobre las técnicas:

- Sólo 9 grupos asociaron los datos al planteamiento de una ecuación para resolver lo pedido.

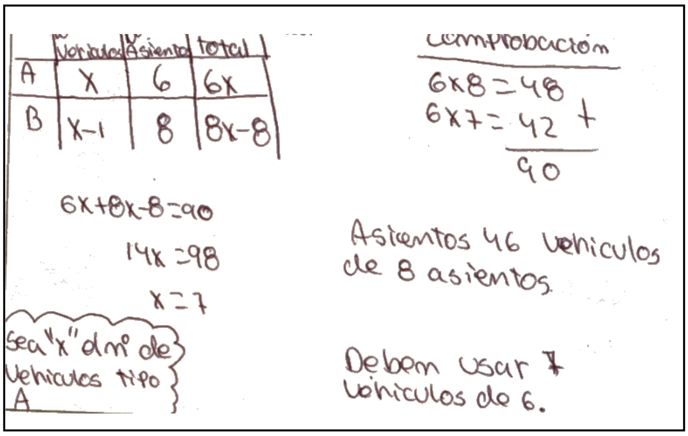


Figura 47: Solución correcta mostrada por un grupo de estudiantes.

- Los grupos abordaron el problema considerando el siguiente procedimiento: señalaron el número de vehículos de cada tipo, plantearon, resolvieron e interpretaron la solución de la ecuación. Cabe mencionar que 5 grupos resolvieron exitosamente esta situación. A continuación una solución que no especifica explícitamente que representa cada variable presentada:

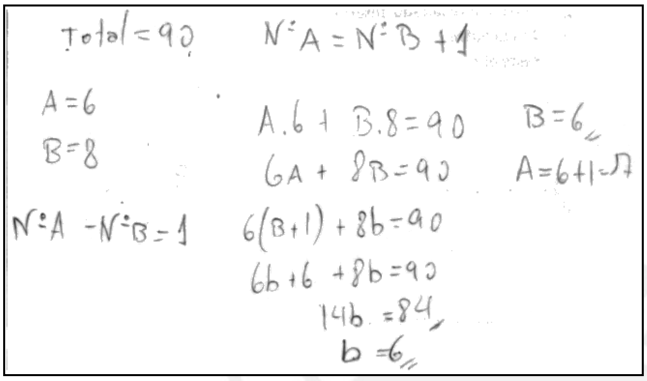


Figura 48: Solución mostrada por un grupo de estudiantes.

- Algunos grupos recurrieron también a planteamientos algebraicos y soluciones aritméticas, emplearon para ello la idea de múltiplo, eligiendo la pareja de números que consideraban una relación de diferencia dada como condición.

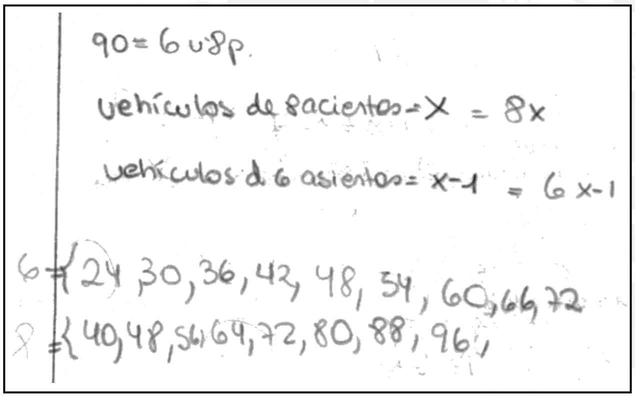


Figura 49: Solución mostrada por un grupo de estudiantes.

- Otros grupos plantearon y resolvieron el problema sólo en un contexto aritmético con la misma idea de múltiplo anteriormente señalada.

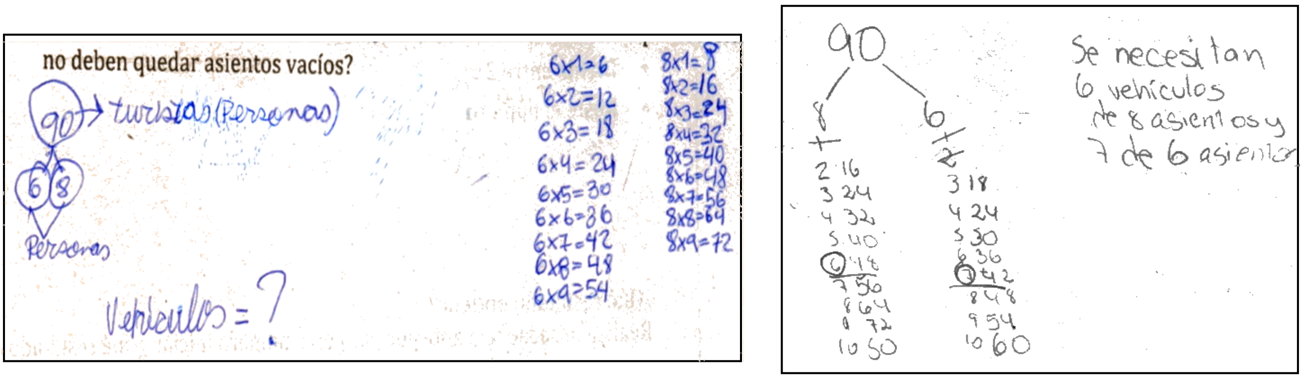


Figura 50: Solución aritmética mostrada por dos grupos de estudiantes.

- Del total de grupos, 16 no resolvieron el problema; siendo sólo 6 grupos los que llegaron a la respuesta correcta. Esto puede deberse a que algunos grupos plantearon la siguiente relación entre variables:

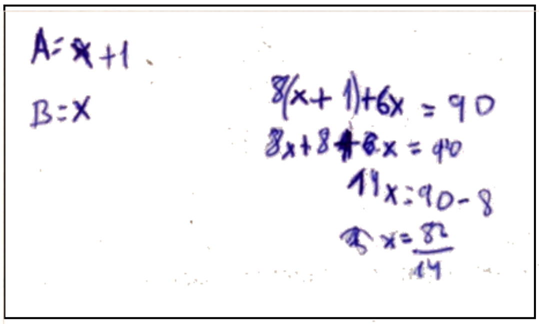


Figura 51: Solución mostrada por un grupo de estudiantes.

- Hubieron 2 grupos que tuvieron errores en el planteamiento de la ecuación, como el mostrado a continuación:

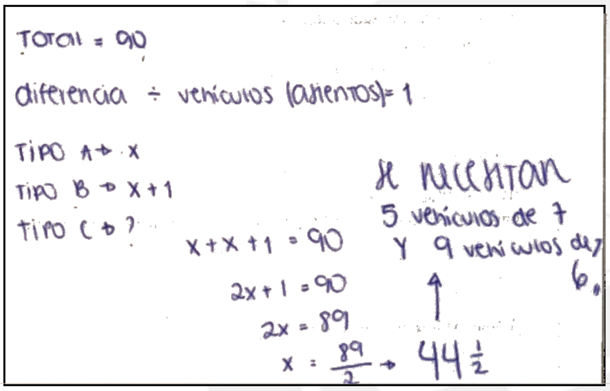


Figura 52: Planteamiento erróneo mostrado por un grupo de estudiantes.

- También se presentaron soluciones que surgieron por operar sobre los datos pero sin un sentido lógico aparente.

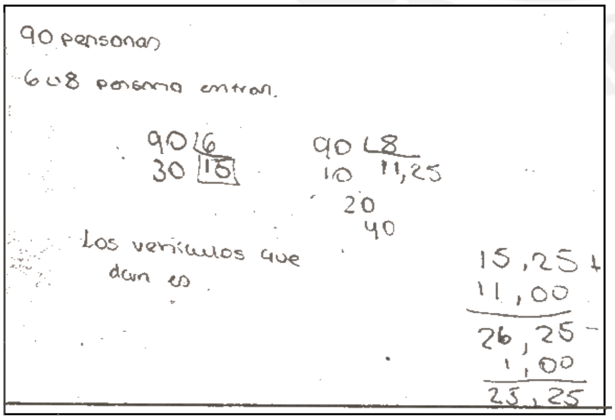


Figura 53: Solución mostrada por un grupo de estudiantes,

Sobre las variables:

- Los estudiantes plantean diversas posibilidades de relación entre las variables, algunos grupos plantean inicialmente dos variables y luego expresan una de ellas en función de la otra.

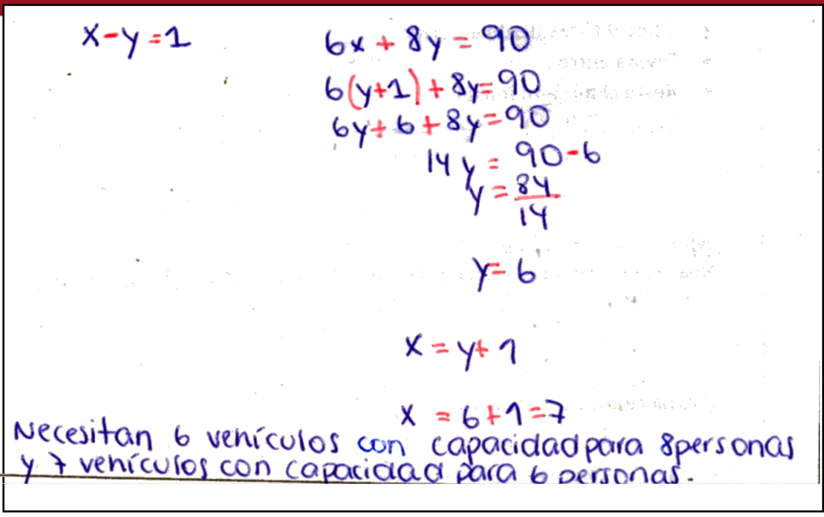
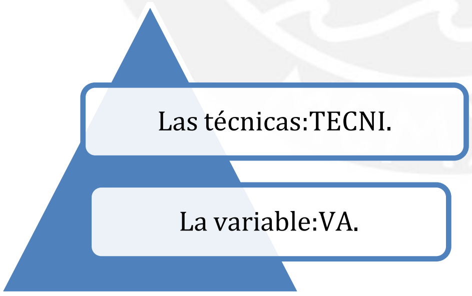

$$x - y = 1$$
$$6x + 8y = 90$$
$$6(y+1) + 8y = 90$$
$$6y + 6 + 8y = 90$$
$$14y = 90 - 6$$
$$y = \frac{84}{14}$$
$$y = 6$$
$$x = y + 1$$
$$x = 6 + 1 = 7$$
Necesitan 6 vehículos con capacidad para 8 personas y 7 vehículos con capacidad para 6 personas.

Figura 54: Solución mostrada por un grupo de estudiantes, donde inicialmente plantean dos variables.

Problema 6:

Una empresa de turismo dispone de 6 vehículos con capacidad para 4 personas y otros con capacidad para 10 personas. Debe trasladar un grupo de pasajeros, para ello usa todos los vehículos para 4 personas. Se sabe que no quedan asientos vacíos. ¿Cuántos vehículos para 10 personas se necesitan, si el número total de pasajeros es el séxtuplo del número de vehículos con capacidad para 10 personas, aumentado en 64?

Las categorías de análisis para esta problema son:



Sobre las técnicas:

- El procedimiento seguido para dar respuesta a lo planteado fue indicar el número de asientos totales en cada tipo de vehículo, plantear y resolver una ecuación, finalmente interpretar la solución en el contexto del problema. Debemos acotar que sólo 4 grupos lo hicieron correctamente, a continuación una solución que describe este proceso.

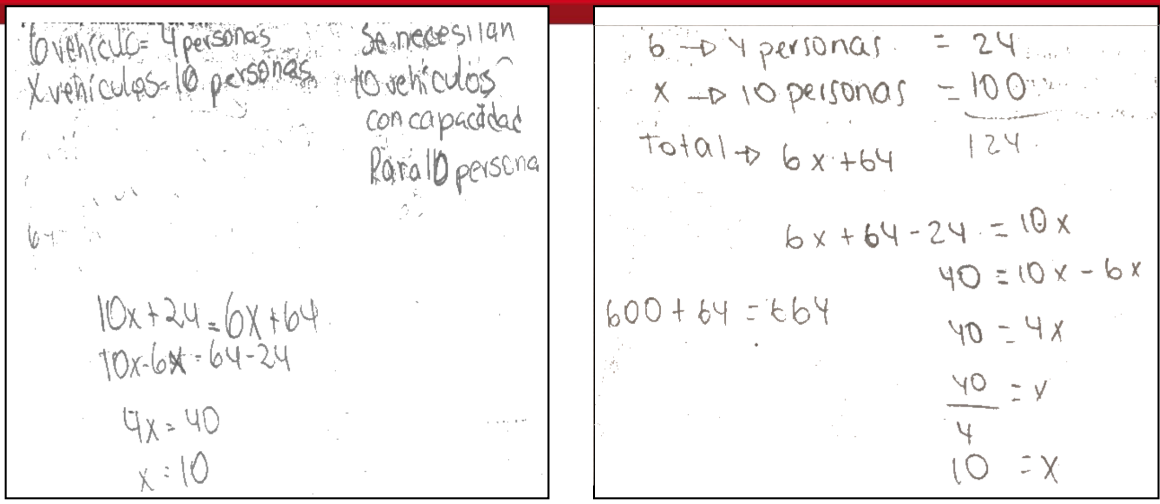


Figura 55: Solución mostrada por dos grupos de estudiantes.

- Algunos grupos procedieron sin plantear ninguna ecuación, su solución revela el uso de otros símbolos (?)para representar la incógnita y el tanteo sobre la base de las condiciones dadas.

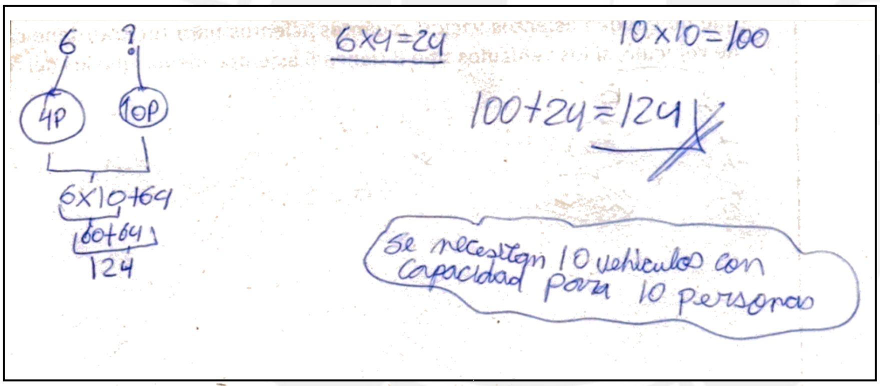


Figura 56: Solución mostrada por un grupo de estudiantes.

- Sobre el planteamiento de la ecuación a partir de la relación entre las variables, 12 grupos intentaron un planteamiento. Sin embargo, sólo 6 de estos lo resolvieron correctamente. A continuación mostramos un procedimiento erróneo:

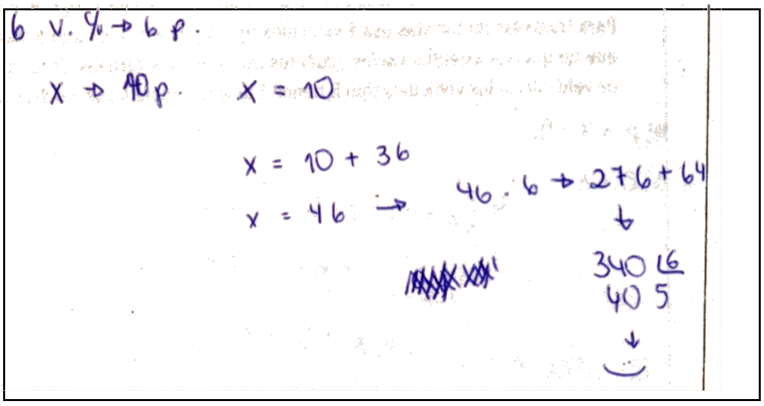


Figura 57: Solución errónea mostrada por un grupo de estudiantes.

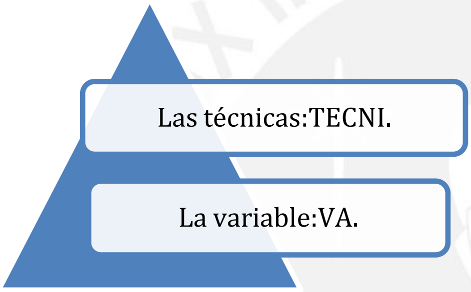
Sobre las variables:

- Los alumnos distinguieron que en este caso la variable era el número de vehículos, parece que los niveles de reconocimiento del mismo son bastante claros. Sin embargo, al tener que plantear la ecuación varios estudiantes tuvieron dificultades.

Problema 7

En una agencia de turismo se han vendido 20 paquetes turísticos a dos precios distintos: los de "Lima Tours" a S/. 80 y los de "Lima Around Tours" a S/. 120, con las que ha obtenido un ingreso de S/. 1920. ¿Cuántos paquetes turísticos se han vendido de cada precio?

Las categorías de análisis para este problema son:



Sobre las técnicas:

- Hubieron 4 grupos que abordaron el problema, aritméticamente usando la idea de múltiplos y las relaciones entre los datos.

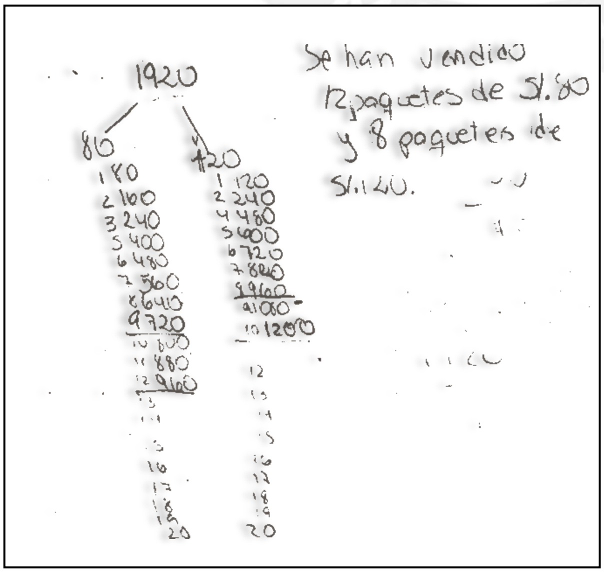


Figura 58: Solución aritmética, usando múltiplos. Presentada por un grupo de estudiantes.

- El procedimiento que siguió la mayoría fue indicar el número de paquetes turísticos según los precios, plantear, resolver e interpretar la ecuación.

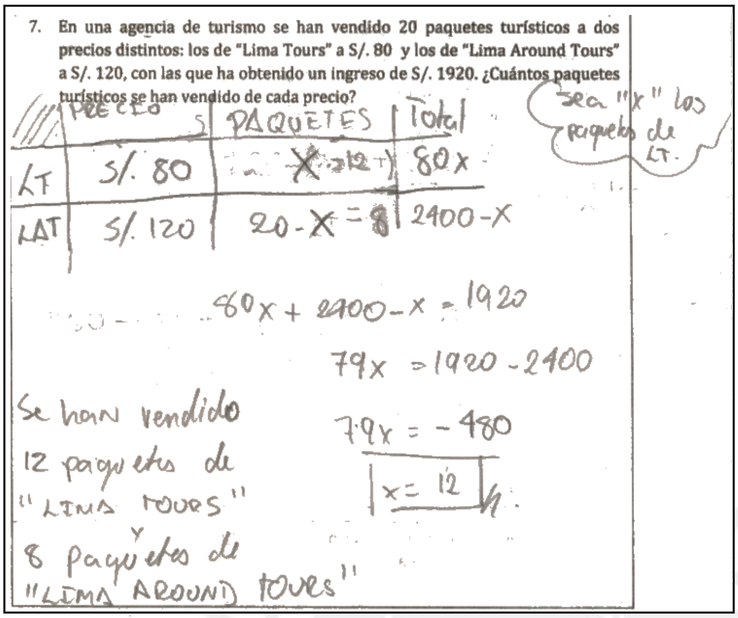


Figura 59: Solución algebraica mostrada por un grupo de estudiantes.

- De los 12 estudiantes que plantearon una ecuación, 9 la resolvieron correctamente; mostrando dominio de las técnicas para realizar el cálculo ecuacional.

Sobre las variables:

- Los alumnos que intentaron responder a la pregunta algebraicamente, identificaron el número de paquetes turísticos para cada uno de los dos tipos planteados, usando variables y relacionando datos.

6.5. Contraste entre las respuestas esperadas y los resultados observados en la propuesta de organización didáctica.

Existió correspondencia entre las respuestas esperadas y los resultados observados. Consideramos que esto se debió principalmente a que la descripción de las respuestas esperadas se basó en tres fuentes relevantes:

- Los textos empleados por los estudiantes.
- Las concepciones de los maestros sobre el álgebra.
- El programa curricular.

Todo lo anterior permitió "predecir" cuáles serían los procedimientos privilegiados por los estudiantes en la solución de los diversos tipos de problemas.

Además, el análisis de estos elementos nos ayudó a identificar cuál era la ecología de las tareas y de las técnicas, es decir, ayudó a identificar las condiciones y las barreras que permiten su producción y su uso en las instituciones escolares.

En relación a la organización matemática objeto de estudio: Álgebra.

- Los alumnos tuvieron algunas dificultades asociadas a la representación de la relación entre las variables. También hubo dificultad en algunos grupos para identificar las variables de determinados tipos de problemas. Esto está asociado al reconocimiento de que las organizaciones matemáticas a nivel escolar son puntuales; es decir, están generadas por un único tipo de tareas resueltas a través de técnicas específicas. Esto genera que no se identifiquen relaciones entre las técnicas y que no se extrapolen a situaciones más generales.
- Se evidenció que los estudiantes están acostumbrados a que las respuestas de los problemas sean sólo valores numéricos particulares, dudando de la veracidad de sus respuestas cuando éstas son expresadas como relaciones algebraicas. Ante esta situación, los estudiantes optaron por asignar valores numéricos específicos considerando las condiciones dadas.

  Creemos que esto se debe a que en el aula no se prioriza el problematizar situaciones formulando las respuestas como relaciones entre variables; sino que, en la mayoría de los casos la respuesta es única y está representada por un número o conjunto de números, poniéndose en evidencia un predominio del pensamiento numérico frente al variacional.

En relación a las técnicas o modos de hacer:

- Un procedimiento no considerado en el análisis previo fue el uso del tanteo como técnica para dar solución a algunas actividades; en algunos casos, justificaban como válido su procedimiento verificando la respuesta; es decir, resolvían los problemas probando valores y verificando que se cumpla en la situación planteada. Esto evidenció que el uso del pensamiento numérico y la búsqueda de soluciones en los naturales son ideas fuertemente arraigadas en los estudiantes.

- En la práctica no se cuestionan las posibilidades de varias respuestas o el verificar la unicidad de las respuestas halladas. Consideramos que esta aceptación de la unicidad de las soluciones es una noción paramatemática.* En este caso nuevamente observamos vínculos entre la práctica observada (significados implementados), las actividades y las técnicas propuestas en los libros de texto (significado pretendido).
- El planteo adecuado de representaciones ecuacionales, cuando se daban varias relaciones es una dificultad. Estas diferencias en relación al análisis preliminar se podrían explicar en la extensa prioridad que se dan a las actividades algorítmicas como único foco de interés, en desmedro de la interpretación y análisis de las soluciones. Además que difícilmente se familiariza al estudiante con actividades que enfaticen las técnicas como fin en sí mismas

En relación a la elección de los problemas:

- El hecho de que se haya podido resolver alguna actividad sin el uso de técnicas algebraicas, hace notar que no obligaba al estudiante a recurrir al conocimiento algebraico que era el objeto de estudio. Así por ejemplo, para la solución del problema (tipo de problema 2), utilizaron conceptos aritméticos sobre múltiplos y divisores, mostrando además su capacidad de transferencia de técnicas aprendidas a contextos diferentes a los inicialmente propuestos. Esta situación nos lleva a cuestionar uno de los tipos de problemas planteados, pues estos debían resolverse exclusivamente a través de técnicas algebraicas.

*Noción paramatemática: Noción que se utilizan conscientemente como instrumento para describir otros objetos matemáticos, pero no se les considera objeto de estudio en sí mismos.

En relación a los tipos de problemas:

- Los estudiantes notaron la relación en el enunciado de los diferentes tipos de problemas; esto lo hicieron evidente al preguntar si podían usar el dato de un problema previo para dar solución a otro.

  Ante esto, consideramos que quizá debió trabajarse más en que los alumnos se den cuenta de los cambios y las diferencias entre los tipos de problemas. Podríamos también mencionar que hubo dificultades en la lectura comprensiva, pues a pesar de que los problemas tenían elementos comunes las variables y datos eran diferentes en cada actividad.
- Se hizo evidente la dificultad de los estudiantes al dar solución a la actividad 1 del tipo de problema 2. Este problema estaba asociado a la representación algebraica de soluciones. Debemos señalar que esta situación no se consideró como respuesta esperada en el análisis previo.

En relación a lo colaborativo:

- Una idea no prevista generada del diálogo entre pares fue que planteaban supuestos sobre los conjuntos numéricos en los que se enmarcó un tipo de problema, e identificaron diferencias en el rol del signo igual según el contexto de aplicación. Cabe resaltar que, a pesar de tener dificultades en la justificación de sus respuestas y, especialmente, en la forma de comunicar éstas, los estudiantes sí mostraron tener capacidad analítica para conjeturar en torno a las situaciones planteadas. Creemos que esto responde a varios factores, entre los cuáles mencionaremos las ventajas del trabajo colaborativo y de diálogo que permite que los estudiantes transfieran su capacidad cuestionadora al contexto de la clase de matemática. Por todo lo anterior, consideramos que el trabajo colaborativo permite dar mayor énfasis a la argumentación de ideas matemáticas.

  Debemos mencionar que sobre esto no se ha dicho nada antes, pues es una observación posterior a la puesta en escena de la propuesta de organización didáctica.

CAPÍTULO 7. Reflexiones y conclusiones.

7.1. Reflexiones de la práctica realizada.

Las actividades realizadas fueron positivas ya que, desde la posición del estudiante brindaron la oportunidad de experimentar la satisfacción de resolver un problema concreto, o de descubrir algún conocimiento matemático, o de conjeturar por sí mismos procedimientos para dar solución a los diferentes tipos de problemas. El trabajo colaborativo facilitó el intercambio de ideas y de opiniones, puesto que la comunicación con otros propició la comprobación conjunta de conjeturas y el acercamiento paulatino a soluciones cada vez más precisas.

Desde el punto de vista del investigador también se puede decir que las actividades propuestas fueron relevantes; ya que, permitieron identificar las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes cuando deben argumentar. Una de las principales observaciones, es que en el aula tradicionalmente no se proponen actividades que refuercen el desarrollo de la capacidad de argumentación. Creemos que esta ausencia corresponde a cómo se considera la justificación dentro del conjunto de actividades de clase. Para explicar esto, tomamos las ideas de Chevallard (1997) y su propuesta en torno al funcionamiento didáctico de los saberes, por lo que consideramos que la noción de justificación es una noción paramatemática. Esto quiere decir que la justificación es utilizada conscientemente como instrumento para describir otros objetos, pero no se considera como objeto de estudio en sí mismo; y por lo tanto, no es objeto de evaluación directa. Justamente su consideración como noción paramatemática explicaría la dificultad de los estudiantes por justificar los resultados que obtienen. Esto genera de manera natural dificultades en la comunicación y justificación de las ideas matemáticas

Por otro lado, luego del análisis efectuado a los textos empleados y al DCN, y de la entrevista estructurada efectuada a algunos profesores, se vio reforzada la afirmación de que los docentes priorizan las actividades y tareas que favorecen los procesos de simbolización y las aplicaciones para resolver organizaciones matemáticas puntuales, en lugar de buscar algo más de complejidad entre sus componentes a través de organizaciones matemáticas locales o regionales. Esto confirma el carácter aislado de las técnicas y el dominio de algoritmos como un fin en sí mismas.

En relación a los problemas, a sus semejanzas y diferencias, debió trabajarse más en que los alumnos se den cuenta de los cambios presentes en cada uno de los tipos de problemas.

Por otro lado, en esta misma línea consideramos que el problema 5, resuelto con uso de la noción de múltiplo; se debería modificar de modo que requiera la utilización exclusiva de técnicas algebraicas, ya que éstas son nuestro objeto de estudio. Si la situación planteada se puede resolver con nociones aritméticas, entonces se refuerza la idea de que el álgebra escolar es una generalización de la aritmética; por ello, considerando que esto no puede quedar así planteamos la reformulación del problema 5.

Haciendo la revisión en la redacción de los problemas consideramos pertinente reformular el problema 1 (TP2), con el fin de hacerlo más comprensible.

Se presento:

> Una empresa de turismo dispone de dos tipos de vehículos: 4 vehículos tipo A con capacidad para 6 personas y 10 vehículos tipo B. Para trasladar un grupo de turistas, usó todos los de tipo A y todos los del tipo B. Si no quedaron asientos vacíos en ninguno de los vehículos, ¿Es posible saber cuántos asientos para turistas tienen los vehículos tipo B, si se transportaron 144 turistas en total? Muestre sus cálculos y explique su respuesta.

Proponemos la siguiente reformulación:

> Una empresa de turismo dispone de dos tipos de vehículos: 4 vehículos tipo A con capacidad para 6 personas y 10 vehículos tipo B. Para trasladar un grupo de turistas, usó todos los de tipo A y todos los del tipo B. Si se transportaron 144 turistas en total y en ninguno de los dos vehículos quedaron asientos vacíos, ¿cuántos asientos para turistas tienen los vehículos tipo B. Muestre sus cálculos y explique su respuesta.

Para las interpretaciones de las letras y, en general, de las *expresiones algebraicas*, el estudiante trae como sistema de referencia el aritmético y desde este contextualiza el uso de la letra como una generalización del número; es decir, las técnicas algebraicas usadas por los estudiantes y la habilidad para asignarle significado al álgebra escolar son influenciadas por la experiencia previa que el estudiante ha tenido con el manejo de expresiones numéricas en la escuela. Esto se ve reforzado por el trabajo del profesor y las tareas planteadas en los textos revisados. Sin embargo, consideramos que esta visión es insuficiente, puesto que el álgebra, además de corresponder a un hacer explícito aquello que aparece implícito en la aritmética, es decir, su estructura, tiene que ver con la formalización de procedimientos en los que es necesaria su explicitación y justificación.

Considerando lo obtenido y lo previsto, nuestra propuesta plantea la posibilidad de ir generando nuevas técnicas con cada vez mayor grado de complejidad de sus componentes a través de cinco tipos de problemas. Esto iría de la mano con el planteamiento de cambios en relación a la organización de los textos y a la visión que los profesores tienen del álgebra y de su enseñanza.

Desde el punto de vista de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra proponemos:

- Los contenidos matemáticos que deben aparecer son el planteamiento y resolución de ecuaciones, pero con la finalidad de resolver situaciones específicas que se van haciendo más complejas, y sobre las cuáles se plantean modelos aplicables a otros contextos. Consideramos que esto se debe programar al menos una vez al bimestre.
- Enfatizar la idea de que en el estudio del álgebra lo principal es que reconozcan y usen las relaciones que se plantean, las cuáles van más allá de la búsqueda de soluciones aritméticas. Esto se puede trabajar proponiendo a los estudiantes que construyan o creen situaciones sobre la base de modelos previamente formulados.
- Explicitar los distintos usos de las letras que, en general, constituyen la manifestación simbólica de las variables, éstas deben ser reconocidas por los estudiantes para "dotar de significado" el trabajo algebraico. En general, estas diferencias no son tematizadas en el aula de clase por

parte del profesor, debido a que asume esto como un hecho irrelevante, o no hace conciencia de dicha diferenciación.

7.2. Conclusiones.

Del tratamiento del álgebra en la escuela:

1. La actividad matemática desarrollada en el primer año de secundaria no corresponde a un proceso de algebrización, además la modelización está prácticamente ausente en el proceso de estudio del álgebra.
2. Tomando como referente la noción de praxeología matemática y didáctica Chevallard (1999), dentro del marco teórico de la TAD, afirmamos que en la educación secundaria del Perú, se estudian organizaciones o praxeologías matemáticas puntuales y rígidas, centradas en el bloque práctico- técnico, es decir, que en la mayoría de los casos sólo conducen a la aplicación de algoritmos algebraicos, ignorando su procedencia y las interrelaciones que tienen con otras situaciones. Tales cuestiones obstaculizan el desarrollo del álgebra como herramienta de modelización y el logro de adecuados niveles de algebrización a nivel escolar.
3. El álgebra es una herramienta de mucha utilidad, debido a su poder de modelización. Sin embargo, en nuestro contexto de estudio a nivel escolar no se llega a comprender y aprovechar las ventajas de su utilización. De lo observado, se concluye que las tareas o problemas que tradicionalmente se plantean en aula tienen un carácter fuertemente aislado y no refuerzan la importancia de la justificación de los procedimientos empleados. Nuestro sistema refuerza la idea de que los modelos planteados para un problema, son específicos para ese problema; no se plantea la generalidad de los mismos, o su aplicación a otro tipo de problemas.
4. Desde la perspectiva didáctica, se puede tener alguna de las siguientes concepciones sobre el trabajo del álgebra:

Una concepción algorítmica. Se presenta a partir de ejemplos, como una colección de algoritmos básicos. Lo asociamos a la concepción de disciplina estructuradora del pensamiento (objeto de estudio). Es la concepción que se ha podido identificar posee nuestro país a nivel escolar.

Una concepción procesualmente problemática. Se presenta el álgebra como herramienta para abordar problemas o temas en otras áreas del conocimiento. Esta segunda concepción es la que propone la TAD.

Una concepción formal. Se presenta el álgebra a través de definiciones y reglas haciendo ejemplos específicos de ella. Se considera el álgebra como una estructura con operaciones y relaciones propias que la caracterizan. Esta concepción quizás sea válida para otro nivel educativo.

5. En lo que respecta a las relaciones institucionales, los resultados obtenidos del análisis de los programas curriculares y los textos seleccionados, sugieren que en el Perú la enseñanza del álgebra no se destaca como un dominio propio de conocimiento matemático. Según el DCN, en nuestro país la enseñanza de los contenidos de álgebra se incluye en el ámbito de los números, relaciones y funciones, con el fin de internalizar, comprender y utilizar varias formas de representar patrones, relaciones y funciones. Sin embargo, según lo revisado en los textos, la prioridad está en lo algorítmico donde es evidente la falta de justificaciones para la aplicación de ciertas técnicas, además, de la presencia de algunos vacios conceptuales que se convierten en restricciones para el aprendizaje comprensivo en un contexto de complejidad creciente.
6. De la revisión de los textos, consideramos que estos no aporta elementos que favorezcan la caracterización de praxeologías; es decir, no aclaran las diferencias entre los subtipos de tareas, así como los límites o potencialidades de las técnicas desarrolladas.
7. Según el DCN, en el primer año de secundaria el estudio del álgebra escolar prioriza el simbolismo algebraico, la manipulación de reglas aritméticas con números y letras llegando hasta la resolución y planteo

de ecuaciones. Las organizaciones matemáticas son puntuales; es decir, se construyen en forma aislada, sin establecer relaciones en cuanto a las formas de proceder en cada caso, ni justificaciones a los procedimientos empleados. Esta situación es básicamente la que se reproducirá en el aula, por lo que consideramos se necesita establecer un proceso progresivo de algebrización de organizaciones matemáticas escolares.

8. Las restricciones y condiciones de origen didáctico identificadas se presentan debido a la necesidad de evaluar el conocimiento matemático de los estudiantes en un tiempo determinado. Esto genera la sectorización de contenidos, sin vinculación entre sí en donde la algoritmización tiene el papel fundamental. Lo que trae como consecuencia la pérdida del sentido y vinculación de la actividad matemática; reduciéndose su estudio a la aplicación de reglas o fórmulas sin ningún sentido. Por otro lado, se asume que el conocimiento enseñado debería aparecer como definitivo e incuestionable. Esto contradice a la idea de que las contradicciones o limitaciones de una determinada organización matemática generen nuevos conocimientos como parte de un proceso de reestructuración de las organizaciones objeto de estudio.
9. Las restricciones y condiciones de origen matemático identificadas a nivel de disciplina provienen de la necesidad de adecuar las actividades escolares a saber objeto de enseñanza.

Del análisis epistemológico:

10. El desarrollo histórico del conocimiento algebraico revela la actividad y el pensamiento matemático en estado de evolución. De nuestra descripción concluimos que, el desarrollo de algoritmos para resolver problemas particulares fue el hecho que abrió caminos hacia la construcción de significado y hacia la generalidad. Asimismo, en el contexto de la búsqueda de soluciones de ecuaciones se evidencian los

nexos entre el álgebra y la geometría. Este mismo enfoque es el que proponen las investigaciones de la TAD.

11. Observamos que desde la llamada matemática sabia se consideran los polinomios como una estructura con propiedades y relaciones especiales. Por otro lado, a nivel escolar no se expone un tratamiento riguroso al tema de polinomios; afirmamos esto porque los temas se presentan por separado en forma aislada, sin que formen parte de una estructura (anillo de polinomios); esto evidencia los procesos transpositivos y de adaptación para su estudio a nivel escolar. En vista de ello, consideramos que debiera buscarse un punto intermedio, a fin de evitar generar conflictos en estudios posteriores a otro nivel. Frente a esto la TAD tampoco propone un tratamiento riguroso y estructural de los contenidos algebraicos, sino más bien plantea introducir el álgebra como un instrumento de modelización de situaciones planteadas en tipos de problemas.
12. Dentro del estudio de las estructuras algebraicas consideramos al anillo de polinomios, y especialmente a la factorización de polinomios como el tema central que permite obtener las raíces de una ecuación. Quizás esto de pie para pensar en el futuro que la presentación de tareas asociadas a la búsqueda de raíces pueda ser el foco de atención cuando se trabaje la noción de polinomio en la escuela.
13. Nuestra revisión histórica, pretende dar cuenta de las circunstancias que propiciaron la construcción del conocimiento matemático. Esta revisión nos permite afirmar que el álgebra fue usada inicialmente como un instrumento para resolver problemas, esta consideración es la que pretendemos reafirmar al mostrar el álgebra como un instrumento para modelizar y resolver problemas. A su vez la revisión histórica nos provee de elementos para comprender las dificultades de nuestros estudiantes al enfrentar el estudio del álgebra y de elementos para el rediseño del discurso matemático escolar.

    Por ello, es importante que los profesores interpreten que la evolución experimentada por la matemática a lo largo de los siglos está asociada a la misma evolución que va experimentando el espíritu humano, de allí la necesidad de su estudio.

De la propuesta de organización didáctica:

14. Teniendo en cuenta los elementos de las praxeologías que plantea la TAD consideramos que, los tipos de tareas propuestas en el aula se deben encaminar hacia situaciones de complejidad creciente, que permitan apreciar las interrelaciones entre las tareas y que hagan evidente las técnicas y tecnologías necesarias para resolver cada situación.
15. En la modelización de los problemas planteados, se debe primero distinguir lo que es propio de cada problema, y lo que es común a todos ellos; para luego verbalizar y escribir en forma simbólica las relaciones cuantitativas que se presentan.
16. Algunos problemas se deben cambiar, debido a que no cumplieron los objetivos previamente planteados, es decir, admitir sólo soluciones algebraicas.
17. Sobre las técnicas empleadas, se evidenció en algunos casos falta de dominio en la manipulación algebraica, en la utilización de propiedades aritméticas y algebraicas, asociadas al contexto de interpretación de los enunciados propuestos. Creemos que estos errores evidencian principalmente la falta de conocimiento de los elementos tecnológicos que explican y validan las técnicas.

Referencias

Alurralde , F. &. Ibarra, L. (2009). *El uso de las letras en álgebra: Análisis de una evaluación de estudiantes del primer año de ingeniería.* Recuperado el 6 de junio de 2010, de: http://www.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol.../pro_Alurralde_tra.pdf

Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares.* Tesis doctoral. Zaragoza: Universidad de Zaragoza.

Bolea, P.; Bosch, M. & Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad. *En Recherches en Didactique des Mathématiques* 21(3), 247-304.

Bosch, M. & Gascón, J. (2006). *Twenty-Five Years of theDidactic Transposition*. Recuperado el 5 de febrero de 2011, de: http://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/files/Publications/ICMI_bulletin/58.pdf

Bosch, M.; Espinoza, L. & Gascón, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudio. Análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *En Recherches en Didactique des Mathématiques 23 (1),* 79 -135.

Bosh, M.; Portabella, M.; Gascón, J. & Bolea, P. (1998). *El proceso de algebrización de las matemáticas escolares*, Jornadas SIIDM BAEZA 98, Universidad de Jaen, Baeza. Recuperado el 8 de junio de 2010, de: http:// www.ugr.es/~jgodino/siidm/.../ponencia8.htm

Boyer, C. (1996). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

Chevallard, Y. (1999). *El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 19 (2), 221-266. Recuperado el 5 de abril de 2011, de: www.cienciamia.com.mx/.../El_analisis_de_las_practicas_docentes_en_la_...

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Editorial Aique.

Chevallard, Y.; Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona: ICE-Horsori.

Chevallard,Y. (1989). *Le passage de l'arithmetique a l'algebrique dans l'enseignement des mathematiques au college*. Deuxieme partie. Petit X, 19.

Cockcroft, W. (1985). *Las matemáticas sí cuentan: Informe Cockcroft*. Recuperado el 18 de enero de 2011, de: http://divulgamat2.ehu.es/index2.php?option=com_content&do_pdf=1&id=9228.

Danisova, E. (2007). Política para la publicación de libros de texto en la República de Eslovaquia. *Seminario Internacional de textos escolares ministerio de educación.* Recuperado el 15 de febrero de 2011, de: http://portal.textosescolares.cl/website/index5.php?id_contenido=413&id_seccion=29

Ferreyra, N.; Rechimont, E.; Parodi, C. & Castro, N. (2010). De la aritmética al álgebra: Una experiencia de trabajo con estudiantes universitarios. *Revista electrónica Unión, 21, .59-67*. Recuperado el 27 de noviembre de 2010, de: http://www.fisem.org/web/union/revistas/21/Union_021_009.pdf

García, F. (2007). *El álgebra como instrumento de modelización y articulación del estudio de las relaciones funcionales en la educación secundaria*. XI Simposio de la SEIEM. La Laguna: [s. e.]

Gascón, J. (1994). El papel de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. *En Educación Matemática*, *6*(3), 37-51.

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *En Recherches en didactique des mathematiques, 13(3),* 295-332.

Godino, J.; Bencomo, D., Font, V. & Wilhemi, M. (2006). Análisis y Valoración de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Estudio de las Matemáticas. *En Paradigma*, XXVII (2), 221-252.

Godino, J. & Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros.* Proyecto Edumat- Maestros. Recuperado el 12 de setiembre de 2010, de: http//www.wenpersonal.net/vfont/ralgebraico.pdf

Herstein, I. (1988). *Álgebra abstracta*. México: Grupo editorial iberoamericana.

Lages, E. (1998). *Mi profesor de Matemática y otras historias,* Lima: IMCA Instituto de Matemática y Ciencias Afines.

Lang, S. (2005). *Álgebra. Graduate Text in Mathematics*. SanFranciso: Editorial Board.

Ministerio de Educación del Perú. (2009). *Diseño Curricular Nacional para Educación Secundaria*. Recuperado el 5 de junio de 2010, de: http://destp.minedu.gob.pe/secundaria/nwdes/discurna1.htm

Olfos , R .(2002). *Iniciación al algebra, entre la básica y la media. Análisis en el aula desde la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)*. Recuperado el 5 de junio de 2010, de: http://cimm.ucr.ac.cr/.../Algebra%20Teaching/.../Olfos%20Ayarza,%20R.

%20Iniciacion%20al%20algebra

Parra, V.; Otera, M. & Elichiribehety, I. (2006). Organizaciones Matemáticas que se estudian en la Universidad en torno a la noción de Función: un estudio de caso. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, 1(2). Recuperado el 15 de junio de 2010, de: http://www.exa.unicen.edu.ar/reiec/es/anio1num2

Perry, P. (1999). Aspectos claves en el algebra escolar, ¿sabe qué responderían sus estudiantes? *Revista EMA. 4(3).* Recuperado el 20 de febrero de 2011, de: http: //www.ued.uniandes.edu.co/ued/servidor/ued/.../RD1.html

Puig, L. (2003). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa[versión oral], conferencia en el *Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* Granada: Universidad de Granada.

Rodríguez, G.; Gil, J. & García, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga: Ediciones ALJIBE.

Ruíz, N.; Bosh, M. & Gascón, J. (2010). *La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria. [s.l.]:[s. e.]*

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra: orígenes y perspectivas*, Buenos Aires: Libros del Zoral.

Ursini, S. & Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *En Educación matemática. 3(18)*, 5-38. Recuperado el 6 de junio de 2010, de http://www.santillana.com.mx/educacionmatematica/es/es.htm

Anexos

ANEXO 1

ENTREVISTA ESTRUCTURADA PARA PROFESORES EN EJERCICIO SOBRE SU PRÁCTICA PEDAGÓGICA

Objetivos: Analizar el tratamiento introductorio del álgebra a nivel escolar.

I. DATOS GENERALES

1. **Nombre:………………………………………………………………………………………………………**
2. **Institución(es) en la que labora:……………………………………………………………………..**
3. **Curso que imparte actualmente:……………………………………………………………………..**
   ……..
4. **Grado en el que enseña:…………………………………………………………………………………..**

II. PREGUNTAS

¿En cuántas ocasiones ha enseñado álgebra en secundaria? ¿En qué años?
……..
……..
……..

¿Cuánto tiempo, en horas de clase, suele dedicarle a la enseñanza del álgebra?
……..

Según su experiencia este tema se aborda ¿solo en un grado?, ¿en varios?, ¿en cuáles?
……..
……..
……..

¿Considera necesaria la introducción del álgebra en la secundaria? ¿Por qué?
……..
……..
……..
……..
……..

¿Cómo suele enseñar el tema de álgebra? ¿Cómo empieza la primera clase de este tema?
……..
……..
……..
……..
……..
……..

¿Cuáles son los problemas que se suelen plantear en el estudio del álgebra?

……
……
……
……
……

Luego de haber impartido las clases respectivas, ¿sus estudiantes evidencian haber aprendido álgebra?

……
……
……
……

¿Cuáles son los temas algebraicos donde demuestran mayor logro de aprendizajes?

……
……
……
……
……

¿Está de acuerdo con la forma como el álgebra se presenta en los textos escolares? ¿Por qué?

……
……
……
……
……

¿Considera necesario hacer cambios en la introducción del álgebra?

Si ( )   No ( )

De ser afirmativa su respuesta, ¿qué cambios propondría para el estudio introductorio del álgebra en el primer año de secundaria?

……
……
……
……
……

ANEXO 2.

Estimado alumno(a): plantea y desarrolla cada una de las siguientes situaciones, en el orden establecido. Los dos primeros problemas los desarrollarás individualmente y los siguientes en grupos de tres integrantes.

1. Una empresa de turismo dispone de dos tipos de vehículos: 4 vehículos tipo A con capacidad para 6 personas y 10 vehículos tipo B. Para trasladar un grupo de turistas, usó todos los vehículos tipo A y todos los del tipo B. Si no quedaron asientos vacíos en ninguno de los vehículos. ¿Es posible saber cuántos asientos para turistas tienen los vehículos tipo B, si se transportaron 144 turistas en total? Muestre sus cálculos y explique su respuesta.

2. Una empresa de turismo dispone de dos tipos de vehículos, el alquiler del tipo A cuesta S/.80 y el alquiler del tipo B cuesta S/. 120. Si la diferencia del número de vehículos tipo A con el número de vehículos tipo B es 4.
   a) ¿Cómo representas la cantidad de vehículos de cada tipo?

   b) Completa los datos que faltan en la siguiente tabla.

Tipo de vehículo	Costo unitario	Cantidad	Gasto total
Tipo A	80		
Tipo B	120		

   c) ¿Cómo se obtiene el gasto de alquiler para todos los vehículos del tipo A?

   d) ¿Cómo se obtiene el gasto de alquiler para todos los vehículos del tipo B?

   e) ¿Cuánto fue la inversión total?

3. Realice la siguiente secuencia de operaciones:
   - Escriba un número.
   - Súmele el número que le sigue.
   - Sume 9 al resultado anterior.
   - Divida entre 2.
   - Reste el número inicial.

¿Qué resultado obtiene?
Realiza la secuencia anterior para otro número inicial. ¿Qué resultado obtiene?

¿Cómo explica este resultado?

4. Una empresa de turismo dispone de dos tipos de vehículos: tipo A y tipo B. Para trasladar 80 turistas usa 4 vehículos tipo A y 6 vehículos tipo B. Sabiendo que no quedan asientos vacíos, ¿cuántos asientos para turistas tiene cada tipo de vehículo, si los vehículos tipo B tienen 5 asientos menos que los del tipo A?

5. Para dirigirse a un aeropuerto, un grupo de 90 turistas puede emplear vehículos con capacidades para 6 u 8 personas. Si la diferencia entre el número de vehículos de 8 y 6 asientos es 1, ¿cuántos vehículos de cada tipo necesitan si no deben quedar asientos vacíos?

6. Una empresa de turismo dispone de 6 vehículos con capacidad para 4 personas y otros con capacidad para 10 personas. Debe trasladar un grupo de pasajeros, para ello usa todos los vehículos para 4 personas. Se sabe que no quedan asientos vacíos. ¿Cuántos vehículos para 10 personas se necesitan, si el número total de pasajeros es el séxtuplo del número de vehículos con capacidad para 10 personas, aumentado en 64?

7. En una agencia de turismo se han vendido 20 paquetes turísticos a dos precios distintos: los de “Lima Tours” a S/. 80 y los de “Lima Around Tours” a S/. 120, con las que ha obtenido un ingreso de S/. 1920. ¿Cuántos paquetes turísticos se han vendido de cada precio?