PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES COMO INSTRUMENTO DE MODELIZACIÓN EN LA SECUNDARIA

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas que presenta

CAMPOS MOTTA MAGALY ETHEL

Dirigida por

GAITA IPARRAGUIRRE ROSA CECILIA

San Miguel, 2017

DEDICATORIA

A DIOS, por acompañarme siempre en todos los momentos de mi vida, por guiarme e iluminar mi camino para que pueda así alcanzar este ansiado objetivo.

A mis amados padres Santos Alejo y Perpetua por ser mi ejemplo de vida, por haberme inculcado las ganas de salir siempre adelante. Todo esto es para ustedes y por ustedes. Los amo demasiado.

A mi amado esposo Elvis Bustamante por su apoyo y amor incondicional.

AGRADECIMIENTO

De manera muy especial, para mi estimada profesora y asesora, la DRA. CECILIA GAITA, por guiarme y apoyarme de manera permanente e incondicional en la elaboración de esta tesis; y sobre todo por su enorme paciencia en los momentos difíciles. Muchas gracias de todo corazón por haberme acompañado en esta experiencia, y por haberme animado en más de una ocasión para que así este objetivo pueda llegar a concretarse.

A los profesores Francisco Ugarte y Cintya Gonzales por dedicar parte de su valioso tiempo para llevar a cabo la revisión, compartir sus experiencias en el campo de la investigación y otorgarme sugerencias las cuales las valoro mucho, ya que esto contribuye a la mejora continua de la presente tesis.

A mi estimada profesora, la Dra. Jesús Flores, quien de una u otra forma siempre me alentó a seguir adelante. Gracias por sus enseñanzas, por sus sabios consejos, orientaciones, y por su apoyo incondicional durante esta bonita etapa de mi vida. Muchas gracias porque siempre sus palabras me transmitieron confianza y me dieron la fuerza necesaria para seguir esforzándome.

Asimismo, un agradecimiento a mi familia, a mis hermanos Marco Antonio y Ana Cecilia; a mis sobrinitos Harumi, Cecilia y Miguel porque a pesar de su corta edad han podido entender mi ausencia en más de una ocasión.

A la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por contar en su plana con docentes de gran nivel, a quienes agradezco de manera significativa por contribuir en mi formación, tanto personal como profesional. Gracias queridos maestros !!!

A todas las personas que de una u otra forma me alentaron a seguir adelante, y me motivaron para que este sueño se haga realidad. Un agradecimiento especial a mi amigo Hernán Cupi ya que gracias a él incursioné en esta bonita aventura en esta prestigiosa casa de estudios. Gracias Niquito.

RESUMEN

En el campo de investigación de la didáctica de las matemáticas, se sabe que los procesos de transposición didáctica juegan un rol importante al momento de elaborar un modelo epistemológico de referencia; ya que de esta manera se tiene se puede tener una visión panorámica de los distintos modelos establecidos en una determinada institución.

Es en este contexto, que nuestro trabajo de investigación propone un modelo epistemológico de referencia de los sistemas de ecuaciones lineales para que estos actúen como instrumento de modelización algebraica en la educación secundaria de nuestro país, teniendo en cuenta el modelo epistemológico de referencia adoptado en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) respecto al álgebra como instrumento de modelización.

Palabras clave: Transposición didáctica, modelo epistemológico de referencia, modelización algebraica, sistemas de ecuaciones lineales.

ABSTRACT

In the field of research of didactics of mathematics, it is known that didactic transposition processes play an important role when elaborating a reference epistemological model, since this way you can have a panoramic view of the different models established in a particular institution.

In this context, is that our research work proposes an epistemological reference model of linear equation systems to act as an instrument of algebraic modeling in secondary education in our country, taking into account the epistemological model of reference adopted in the anthropological theory of the didactic (TAD) with respect to algebra as a modeling tool.

Key words: Didactic transposition, epistemological reference model, algebraic modeling, systems of linear equations.

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Niveles de Codeterminación. 20

Figura 2. Esquema de las Tres Dimensiones Fundamentales en un Problema Didáctico. 25

Figura 3. Esquema de las Modelizaciones. 28

Figura 4. Etapas en el Proceso de Transposición Didáctica. 35

Figura 5. Forma de Organización de Datos según los chinos 40

Figura 6. Método conocido como Flor de Thymaridas. 41

Figura 7. Ejemplo de una tarea en el ámbito aritmético. 45

Figura 8. Ejercicio en el ámbito de la Geometría. 45

Figura 9. Ejercicio en el ámbito de la Aritmética. 46

Figura 10. Clasificación de los Sistemas de acuerdo a su representación geométrica (rectas). 47

Figura 11. Ejercicio en el ámbito aritmético. 48

Figura 12. Ejercicio empleando un sistema 3x3. 48

Figura 13. Ejercicio usando determinantes. 48

Figura 14. Estrategia para resolver Sistemas 3x3, usando determinantes. 49

Figura 15. Nociones de matrices. 49

Figura 16. Sistemas de Ecuaciones Lineales en la EBR. 50

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN 8

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA..10

1.1 Antecedentes 10

1.2 Justificación..14

1.3 Pregunta de investigación...16

1.4 Objetivos de la investigación 16

CAPÍTULO II: ELEMENTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS CONSIDERADOS EN LA INVESTIGACIÓN...17

2.1 Nociones Generales de la Teoría Antropológica de lo Didáctico 17

2.2 Postura de la Teoría Antropológica de lo Didáctico respecto al álgebra..............................20

2.3 Modelo Epistemológico de Referencia 27

2.4 Caracterización de las Modelizaciones Algebraicas 28

2.5 Indicadores del Grado de Algebrización...29

2.6 Método de Investigación 31

CAPÍTULO III: LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.......................................35

3.1 Evolución del Saber Sabio de los Sistemas de Ecuaciones Lineales 35

3.2 Características de los sistemas de ecuaciones lineales como saber enseñado 44

CAPÍTULO IV: PROPUESTA DE UN MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERENCIA DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES..51

4.1 Propuesta de los Sistemas de Ecuaciones Lineales como instrumento de modelización.......51

4.2 Rasgos Característicos de la Modelización algebraica propuesta a través de los Sistemas de Ecuaciones Lineales...69

4.3 Ejemplos de tipos de tareas en diferentes ámbitos de la matemática 73

CAPÍTULO V: CONSIDERACIONES FINALES Y RECOMENDACIONES PARA FUTURAS INVESTIGACIONES 87

Referencias..90

INTRODUCCIÓN

Nuestro interés por revisar los textos oficiales de matemática del VI y VII ciclo, los cuales comprenden los grados de 1ro, 2do y 3ro, 4to y 5to de secundaria respectivamente, de la educación básica regular del Perú, surgió a raíz de observar que a pesar de que los sistemas de ecuaciones lineales van más allá de un simple tema tratado en un determinado contexto de la matemática, estos son trabajados de manera aislada y sin ningún tipo de conexión entre los distintos contextos de la matemática, a lo largo del nivel secundario.

El presente trabajo utiliza algunos elementos teóricos y metodológicos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), los mismos que serán necesarios para poder revisar la forma en que se introduce el objeto matemático asociado a los sistemas de ecuaciones lineales en la educación secundaria de nuestro país.

Es precisamente en este contexto, que pensamos que los aspectos teóricos y metodológicos de la didáctica de la matemática nos brindarán las herramientas que serán necesarias para llevar a cabo el desarrollo de nuestro trabajo de investigación. Para ello, hemos revisado brevemente los textos que se usan durante el nivel secundario de nuestro país, y así poder ver la manera en que se encuentran relacionadas y/o conectadas las tareas presentes; ya que son un referente importante en el análisis praxeológico de nuestra organización matemática.

Es así, que la presente tesis tiene como objetivo construir un modelo epistemológico de referencia para que los sistemas de ecuaciones lineales cumplan el rol de instrumento de modelización en la educación secundaria peruana, así como verificar si dicho modelo satisface los rasgos que caracterizan a una modelización algebraica; todo ello, bajo ciertos aspectos y elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Para ello, vamos a estructurar la presente tesis en cinco capítulos de la siguiente manera.

En el primer capítulo se plantea la problemática de nuestro trabajo de investigación, considerando una revisión de los antecedentes que son relevantes para nuestra investigación. Asimismo, hemos considerado diferentes investigaciones que giran en torno a la naturaleza del álgebra, la transposición didáctica, los modelos epistemológicos de referencia y los procesos de algebrización. Además de ello, presentamos la justificación de nuestro trabajo de investigación, así como los objetivos que se espera poder alcanzar al finalizar la presente investigación.

El segundo capítulo trata acerca del marco teórico, en el cual consideramos ciertos elementos teóricos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) en el sentido de Chevallard, así como los aspectos metodológicos considerados en nuestra investigación. Dentro de los elementos teóricos consideramos algunas nociones generales de la TAD, la postura de la TAD respecto al álgebra, el modelo epistemológico de referencia, las características de las modelizaciones algebraicas y los indicadores del grado de algebrización.

En el tercer capítulo, se hace un breve recorrido acerca de los cambios que han sufrido los sistemas de ecuaciones lineales a lo largo de la historia, ya que en el ámbito de la TAD esto es relevante para poder tener en cuenta cómo la transposición didáctica en torno a nuestro objeto matemático de estudio ha repercutido en el tratamiento de los diferentes problemas a lo largo de los siglos. Además de ello, se presentan las características de los sistemas de ecuaciones lineales en la secundaria peruana, para lo cual se hace un análisis, de manera no tan profunda, de los libros de texto oficiales del nivel secundario de nuestro país.

En el cuarto capítulo hacemos explícito la propuesta de un modelo epistemológico de referencia de los sistemas de ecuaciones lineales para que estos actúen como instrumento de modelización en la educación secundaria de nuestro país, el cual es validado teniendo en cuenta los rasgos propios de una modelización algebraica en el sentido de Bolea.

En el quinto capítulo se establecen algunas consideraciones finales, así como algunas recomendaciones para futuras investigaciones; todas ellas inmersas en el ámbito de la didáctica de la matemática, que giran en torno a los sistemas de ecuaciones lineales en la educación básica regular del Perú.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

Nuestro trabajo pretende proponer un modelo epistemológico de referencia de los sistemas de ecuaciones lineales en el nivel secundario de nuestro país; teniendo en cuenta las investigaciones desarrolladas en otros contextos y una breve revisión de la evolución o desarrollo de los sistemas de ecuaciones lineales a través de la historia. Además, haremos una revisión superficial de los textos del nivel secundario para poder tomar diferentes tipos de tareas en las diversas áreas de la matemática de la educación secundaria de nuestro país, ya que nuestro propósito es proponer, establecer o sugerir un modelo epistemológico de referencia que sea coherente con lo que se hace en la educación secundaria de nuestro país.

Dicho esto, es preciso mencionar que no sólo necesitamos estudiar los sistemas de ecuaciones lineales etiquetados con este título, sino que además de ello, debemos estudiar diversos temas del nivel secundario de nuestro país que necesiten el uso de los sistemas de ecuaciones lineales. De esta manera, pretendemos que la propuesta del modelo epistemológico de referencia en que se encuentra presente la organización matemática asociada a los sistemas de ecuaciones lineales esté articulada y complejizada en términos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Es decir, que la organización matemática (OM) en mención sea cada vez más amplia en términos de complejidad creciente, tal y como lo manifiesta Sierra (2006), pues toda praxeología debe surgir como una ampliación de otra praxeología anterior según lo señala García (2005).

En este capítulo, indicaremos los antecedentes y los argumentos que son necesarios para poder justificar la realización del presente trabajo de investigación, así como el problema de investigación en términos de una pregunta, la cual será desarrollada de acuerdo a nuestros objetivos.

1.1 Antecedentes

En el ámbito de la didáctica de la matemática, los procesos de enseñanza y de aprendizaje del álgebra en distintos niveles educativos han sido motivo de numerosas investigaciones, siendo una de las principales interrogantes, determinar la naturaleza del álgebra.

Al respecto, Chevallard (1994) manifiesta que el álgebra era vista como todo lo que no era geometría. Posteriormente, esta idea fue cambiando y, desde el punto de vista del saber sabio, esta era entendida como todo lo que gira en torno a la teoría de ecuaciones.

Por otro lado, Gascón (1994) admite la presencia de un modelo que reconoce el álgebra escolar por medio de un simbolismo algebraico, el mismo que amplía y generaliza el lenguaje aritmético. Dicho autor pone en evidencia la existencia de un modelo implícito dominante del álgebra en la institución escolar, en el sentido de que la actividad matemática que se lleva a cabo en esta institución es el resultado de prolongar y generalizar las prácticas aritméticas junto a la oposición de la actividad algebraica frente a la actividad aritmética.

Asimismo, dicho modelo reconocido por Gascón es dado a través de una modelización matemática, la cual está compuesta de tres etapas, tal y como lo señala Chevallard (1989), quien afirma:

> Nous n'introduirons d'abord qu'un schéma simplifIé, qui suppose essentiellement deux registres d'entités : un système, mathématique ou non mathématique, et un modèle (mathématique) de ce système25. Le processus de modélisation comporte, schématiquement, trois étapes.
> 1. On définit le système que l'on entend étudier, en précisant les «aspects» pertinents par rapport à l'étude que l'on veut faire de ce système, soit l'ensemble des variables par lesquelles on le découpe dans le domaine de réalité où il nous apparaît. Nous désignerons ces variables par les lettres x, y, z, a, b, c, etc., nous réservant de revenir sur la question -majeure -que soulève cet usage un peu plus loin.
> 2. On construit alors le modèle à proprement parler en établissant un certain nombre de relations, IR, IR', IR ", etc., entre les variables prises en compte dans la première étape, le modèle du système à étudier étant l'ensemble de ces relations.
> 3. On «travaille» le modèle ainsi obtenu, dans le but de produire des connaissances relatives au système étudié, connaissances qui prennent la forme de nouvelles relations entre les variables du système.
>
> L'étape 3 est toujours une phase proprement mathématique, tandis que les étapes antérieures sont du ressort du domaine de réalité dont est censé relever le système -les mathématiques s'il s'agit d'un objet mathématique, etc. (Chevallard, 1989, p. 53).

Es decir, el autor presenta un esquema el cual consta básicamente de un sistema matemático o no matemático, y un modelo (matemático) de este sistema. Dicho proceso de modelización se compone de tres etapas: En primer lugar, se define el sistema que se pretende estudiar, especificando los aspectos relevantes para su estudio, haciendo explícitas las variables que intervienen. Luego, se establecen las posibles relaciones entre las variables que se han considerado en la primera etapa, siendo todas estas relaciones el modelo del sistema a estudiar. Finalmente, el modelo obtenido es trabajado para producir conocimiento sobre el sistema estudiado, el cual viene dado a través de nuevas relaciones que pudieran existir entre las variables del sistema.

Asimismo, la tercera etapa es considerada como una fase puramente matemática, mientras que las otras etapas son el dominio de la realidad de donde se supone que se debe de tomar el sistema. Por ejemplo, las matemáticas, si se trata de un objeto matemático, etc.

Por otro lado, surgen diversos trabajos de investigación acerca de la naturaleza del álgebra y de su concepción en el sistema educativo. En el trabajo de Bolea (2002), se hace un exhaustivo análisis acerca de cómo se concibe el álgebra en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Asimismo, define una serie de indicadores, que permitirán reconocer si el modelo del álgebra considerado en la ESO responde al de una aritmética generalizada. Además, la autora considera el álgebra como instrumento de modelización algebraica. Dicho todo esto, cabe resaltar que la investigadora considera dos modelos de la interpretación del álgebra.

Es precisamente en este contexto, que investigadores de la TAD conciben el álgebra elemental como un instrumento de la actividad matemática tal y como lo señalan Bolea, Bosch y Gascón (2001) quienes lo consideran como el nuevo modelo del álgebra elemental.

Además, Bolea et al. (2001), en el sentido de Chevallard, señalan que el objetivo principal del álgebra elemental como instrumento, es la modelización algebraica, a través del análisis y la interpretación del proceso de algebrización de las matemáticas escolares, dejando así de lado la visión clásica del álgebra como una aritmética generalizada.

Siguiendo la misma línea, los autores afirman que, para realizar dicho proceso, basta tomar en cuenta un sistema que puede ser intra-matemático o extra matemático, el cual será asociado a una organización matemática. Luego, se lleva a cabo la modelización algebraica obteniéndose como resultado una organización matemática algebrizada. Esta última es entendida no sólo como una nueva praxeología más amplia y completa, sino como un nuevo modelo matemático de esta, según lo señala Bolea (2002).

Además, Gascón (2011) manifiesta que para poder saber cómo se concibe el álgebra elemental, se tiene que considerar las nociones o ideas que se encuentran disponibles en la cultura escolar, las cuales en la gran mayoría de los casos son importadas de los documentos curriculares. Por tal motivo, serán tanto los libros de texto como el currículo nacional de nuestro país, una fuente importante para poder mirar los tipos de problemas presentes en la educación secundaria de nuestro país, los cuales serán tomados para la propuesta de un modelo epistemológico de referencia.

Asimismo, los trabajos de Bolea (2002) y Gascón (2011) son importantes para la elaboración de nuestra investigación, ya que ponen en evidencia la existencia de un modelo dominante a través de la elaboración de un modelo epistemológico respecto al álgebra, llevando a cabo un análisis de la concepción del álgebra escolar en el sistema escolar español. Por otro lado, es preciso señalar que los autores siguieron los pasos de Chevallard (1994) quien realizó un análisis en el sistema educativo francés.

Por otro lado, Ruiz Munzón, Bosch y Gascón (2011) manifiestan que una de las consecuencias de considerar el álgebra elemental como aritmética generalizada es precisamente, la ausencia del álgebra como instrumento de modelización en las matemáticas que se estudian en la enseñanza secundaria.

En el ámbito de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), se ha mostrado las conexiones de este fenómeno con la incompletitud de las organizaciones matemáticas que se estudian en secundaria y con el fenómeno de la desarticulación de la matemática escolar. Por este motivo, surge la necesidad de un nuevo modelo del álgebra elemental que permita reinterpretar algunos fenómenos didácticos relativos a la enseñanza del álgebra elemental, tal y como lo señalan Gascón (1994) y Bolea (2002).

Además, en el ámbito de la TAD es fundamental tener en cuenta que la transposición didáctica, entendida como el conjunto de los mecanismos mediante los cuales es engendrado el saber enseñado, tal y como lo señala Chevallard (1994), no actúa sobre objetos aislados, sino más bien sobre las organizaciones matemáticas algebrizadas.

Al respecto, Bosch y Gascón (2004) señalan que lo que importa son los problemas fecundos que están llamados a reproducirse y desarrollarse para formar tipos de problemas cada vez más amplios y complejos dentro de la conceptualización que propone la TAD. Asimismo, la transposición didáctica tampoco actúa sobre organizaciones matemáticas puntuales, sino sobre organizaciones matemáticas locales e incluso regionales que evolucionan siguiendo un proceso de reorganización e integración creciente a través de un proceso de algebrización, como lo señalan Bolea et al. (2001).

Siguiendo la misma idea, Sierra (2006) manifiesta que el resultado de un proceso de algebrización es un modelo epistemológico de referencia (MER), cuya estructura es construida en términos de la TAD, como una red de praxeologías matemáticas cada vez más amplias y completas, capaz de articular la introducción del álgebra elemental en la educación escolar. Asimismo, Ruiz Munzón (2010) retoma la idea de Sierra y concuerda con esta forma de interpretación del MER, sólo que dicha investigadora lo hace con miras a una modelización funcional.

No obstante, el MER debe ser considerado como sistema de referencia provisional y por lo tanto susceptible de ser modificado o revisado constantemente, tal y como lo manifiesta Gascón (2011).

Es en este contexto en que se centra nuestro trabajo de investigación, en el que se plantea como objetivo hacer una propuesta de un modelo epistemológico de referencia teniendo como base el trabajo de Bolea (2002), adaptado a los sistemas de ecuaciones lineales en el contexto de la Educación Básica Regular peruana.

1.2 Justificación

Chevallard, Bosch y Gascón (1997) manifiestan que con el nacimiento del programa epistemológico surge una serie de cuestiones de naturaleza teórica, entre ellas aflora el interés de cuestionar diversos temas, relativos por ejemplo a la necesidad de objetar la transparencia del conocimiento matemático e integrar nociones matemáticas como objetos de estudio. Este tipo de cuestionamientos conlleva a la necesidad de querer ampliar el sistema inicial por medio de modelizaciones progresivas, a través de las etapas del proceso de algebrización, según lo manifiesta García (2005).

Por otro lado, cabe señalar que nuestro trabajo de investigación se sitúa dentro de la dimensión epistemológica de una de las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico, según lo manifiesta Gascón (2011). Con respecto a la dimensión epistemológica, el autor señala que, si la investigación se encuentra en esta dimensión, entonces se tiene que dar prioridad a la manera de hacer explícita las componentes de los bloques de praxis y logos de la organización matemática, como se muestra en la siguiente cita:

> Cuando la dimensión epistemológica se pone en primer plano, como se muestra en los enfoques que se sitúan en el Programa Epistemológico de Investigación en Didáctica de las Matemática, entonces se hace un esfuerzo por explicitar el MER- sea con este nombre o con otro- y aparecen cuestiones relativas a la forma de describir e interpretar los conocimientos matemáticos. (Gascón, 2011, p. 210)

Es en este contexto, que diversos investigadores dentro del ámbito de la TAD, coinciden al manifestar que la construcción o elaboración de un modelo epistemológico de referencia es importante, debido a que gracias a él podemos analizar cómo un objeto matemático es entendido en una institución o también para poder compararlo con otros modelos como por ejemplo lo que hicieron Bolea (2002), García (2005) y Ruiz Munzón (2010) en sus respectivos trabajos de tesis doctorales. Todo esto con la intención de poder identificar el modelo epistemológico dominante en una institución escolar, lo cual nos va permitir poder describir y explicar de manera coherente la práctica docente del profesor de matemática, según lo señalan los investigadores.

Además, es preciso señalar que debemos considerar las restricciones y condiciones que se imponen sobre dichas organizaciones matemáticas; las cuales vienen dadas a través de los niveles de codeterminación propuestos por Chevallard (2001). Si bien es cierto que nuestro trabajo no va considerar todos los niveles de codeterminación propuesto por Chevallard a un nivel profundo, es preciso señalar que es necesario tomar en cuenta algunos de estos niveles de codeterminación para poder justificar que nuestro trabajo de investigación va restringirse a la disciplina de la matemática de las distintas áreas en las cuales se generan los diferentes tipos de problemas que necesitan emplear los sistemas de ecuaciones lineales, todo esto dentro del nivel secundario.

Además, es pertinente hacer un estudio del grado de algebrización de una organización matemática (OM), dentro del ámbito de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), según lo sugiere Bolea (2002). Esto resulta fundamental para poder reconocer cuán algebrizadas se encuentran las organizaciones matemáticas para luego, progresivamente, ir algebrizándolas, dejando así de lado la visión clásica de aritmética generalizada y empezar a considerar el álgebra como instrumento de modelización.

Por otra parte, los libros de texto juegan un rol importante ya que constituyen uno de los principales pilares sobre los cuales se sostiene la acción del docente de matemática en cualquier nivel educativo, ya que con frecuencia estos pasan a ser el principal referente del saber científico, tanto para los profesores como para los mismos estudiantes, tal y como lo señala Vivas (2010). Es por este motivo, que las investigaciones relacionadas a los libros de textos dentro del ámbito de la TAD, en donde el análisis de la actividad escolar matemática es el foco de investigación, se han convertido en un método eficaz para el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje, tal y como lo señala el investigador.

De manera similar, Ortiz de Haro (1999) señala que los libros de texto son considerados como un segundo nivel de transposición didáctica, después del primer nivel de transposición didáctica, el cual está constituido por los currículos y programas oficiales.

Por lo dicho anteriormente, podemos indicar la trascendencia e importancia que tiene la presencia de los libros de texto en el sistema educativo, ya que a través de ellos se transpone el saber sabio de los objetos matemáticos en relación al saber enseñado. Es decir, en el ámbito de la TAD, es preciso señalar que, para poder estudiar un determinado objeto matemático nos podemos basar en la revisión de los libros de texto.

Es así que como ya lo indicamos, en nuestro trabajo de investigación haremos una revisión no tan profunda de los textos del nivel secundario, para poder así identificar los tipos de tareas dentro de las diferentes áreas de la matemática. De esta manera, vamos a procurar garantizar o asegurar que nuestra propuesta sea coherente con los tipos de problemas que efectivamente son tratados a lo largo del nivel secundario de nuestra educación peruana.

El siguiente aspecto trata acerca de la importancia de los sistemas de ecuaciones lineales como objeto de estudio. En principio debemos manifestar, que de acuerdo al Currículo Nacional de la Educación Básica Regular del Perú (Ministerio de Educación del Perú, 2015), el estudio de los sistemas de ecuaciones ocupa un lugar significativo dentro del nivel secundario de nuestro país, ya que éste tema es tratado durante varios años de la educación secundaria. Con todo esto, pretendemos reconocer la necesidad e importancia de estudiar los sistemas de ecuaciones a lo largo de la etapa escolar, lo que es evidenciado en los textos oficiales de nuestro sistema educativo.

Por lo anterior, se puede afirmar que este es un tema relevante en el desarrollo de los contenidos específicos de las ciencias. En base a ello, tiene sentido hacer nuestro estudio en torno al objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales, pues hay muchas investigaciones en la educación matemática que avalan la importancia de su estudio desde los diferentes enfoques tanto del nivel secundario como del nivel universitario, según lo manifiesta Arenas (2013). Asimismo, es preciso resaltar la importancia de las ecuaciones y de los sistemas de ecuaciones lineales, ya que éstos se encuentran presentes en el desarrollo del álgebra y fueron a lo largo de la historia el núcleo firme del álgebra según lo manifiesta Chevallard (1994).

1.3 Pregunta de investigación

De acuerdo con lo ya expuesto, nos formulamos la siguiente pregunta de investigación:
¿Qué características debería tener un modelo epistemológico de referencia para que los sistemas de ecuaciones lineales actúen como un instrumento de modelización en la educación secundaria?

1.4 Objetivos de la investigación

Objetivo general

De la formulación anterior, se desprende el siguiente objetivo general de la investigación:

Construir un modelo epistemológico de referencia para que los sistemas de ecuaciones lineales cumplan el rol de instrumento de modelización en la educación secundaria y verificar si satisface los rasgos característicos en el sentido de Bolea.

Objetivos específicos

Para alcanzar el objetivo general pretendemos lograr los siguientes objetivos específicos:

- Proponer un modelo epistemológico de referencia para el caso particular de los sistemas de ecuaciones lineales, teniendo en cuenta el modelo epistemológico de referencia adoptado en la TAD respecto al álgebra como instrumento de modelización, en el sentido de Bolea.

- Analizar si el modelo epistemológico propuesto cumple los rasgos de algebrización que debe tener una OM para ser considerada una OM algebrizada.

CAPÍTULO II: ELEMENTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS CONSIDERADOS EN LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo daremos a conocer los principales elementos teóricos que se van a seguir durante el desarrollo del marco teórico, así como la metodología y el correspondiente método de investigación que se llevará a cabo a lo largo del desarrollo del presente trabajo.

2.1 Nociones Generales de la Teoría Antropológica de lo Didáctico

En este apartado presentaremos algunas reflexiones teóricas correspondientes al marco teórico que se va seguir a lo largo del presente trabajo de investigación, las cuales están relacionadas a la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), propuesta por Chevallard. Asimismo, cabe indicar que nuestro trabajo de investigación se va enmarcar dentro de la TAD, puesto que esta teoría es la que nos brindará herramientas de análisis necesarias para profundizar en la transposición didáctica que sufre una organización matemática en los procesos de algebrización en los textos oficiales a lo largo de la etapa escolar peruana. Dicho esto, describiremos a continuación y de forma general algunos elementos teóricos de la TAD que nos servirán de insumos para desarrollar el presente trabajo.

Teoría de Transposición Didáctica

Chevallard (1994) afirma que el proceso de transposición didáctica es entendido como el conjunto de los mecanismos, mediante los cuales es concebido el saber enseñado.

Por otro lado, Bolea (2002) señala que se descubrió que muchos de los fenómenos relativos a la enseñanza de las matemáticas sólo pueden ser abordados científicamente si se tiene en cuenta los fenómenos de transposición didáctica; es decir, los fenómenos que regulan las transformaciones que sufre el saber matemático producido en la institución “saber sabio”, para convertirlo en saber matemático “apto para ser enseñado”. Es en este contexto, que surge el enfoque antropológico en didáctica de las matemáticas, el cual se encarga de integrar la matemática escolar en la problemática, mucho más amplia, de las actividades matemáticas institucionales, que pasa a constituir el nuevo y más extenso objeto primario de la investigación didáctica, según lo señala Gascón (1998).

Teoría Antropológica de lo Didáctico

La TAD nace con las primeras formulaciones de la Teoría de la Transposición Didáctica propuesta por Chevallard (1985), e incluso puede ser considerada como una evolución o desarrollo de la Teoría de las Situaciones Didácticas propuesta por Brousseau (1997) con la cual comparte sus principios esenciales; según lo señalan Bosch, García, Gascón y Ruiz Munzón (2006).

En esta misma línea, Ricaldi (2011) resalta que la TAD fue uno de los primeros enfoques que se preocupó por considerar como objeto de estudio e investigación, no sólo a las actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula, sino todo el proceso que va desde la creación y el uso o empleo del saber matemático hasta el momento en que dicho objeto matemático se incorpora dentro de la institución como saber enseñado.

Es decir, en la TAD podemos afirmar que el objeto de la didáctica de la matemática no sólo es el estudio de procesos cognitivos de los estudiantes en relación al aprendizaje de un determinado concepto, ni sólo se trata de estudiar o analizar la problemática que gira en torno a los procesos de enseñanza por parte del docente con respecto a un determinado concepto matemático; se refiere más bien a considerar como eje central el análisis de la actividad matemática en la que se encuentran inmersos los estudiantes cuando trabajan en torno a un conocimiento matemático específico que ya han construido o que se encuentra en proceso de construcción.

Así, este trabajo de investigación considerará como marco teórico a la TAD, que considera a la actividad matemática como otra actividad humana, tal como lo manifiesta Chevallard (1999). En esa misma línea, la TAD privilegia la dimensión institucional del conocimiento matemático, ya que se considera que las praxeologías no dependen, en un primer momento, de las personas de manera individual, sino más bien de las instituciones tal y como lo señala Ricaldi (2011). Es decir, la autora manifiesta que la institución desde este enfoque es considerada como un medio social en el cual viven distintas praxeologías.

Organizaciones Matemáticas (OM)

La noción de praxeología u organización matemática, según Chevallard (1999), está compuesta por dos bloques inseparables. El bloque práctico – técnico (T/τ) o ***"praxis"***, el cual está formado por tareas y técnicas. Además, el bloque tecnológico - teórico (θ/Θ) o ***"logos"***, el cual es el discurso razonado que justifica y explica la práctica.

Asimismo, Chevallard (1999) indica que el bloque práctico – técnico, está constituido por el primer elemento que es la tarea *t*, y el tipo de tareas, T, donde una tarea es expresada a través de un verbo que indica una acción en relación a un objeto particular, mientras que un tipo de tareas es la acción que relaciona a un diverso tipo de objetos.

Otro elemento que constituye el bloque práctico – técnico es la técnica (τ), que determina una manera de hacer. Entonces una praxeología relativa al tipo de tareas T contiene una técnica τ relativa a T. Además, Chevallard (1999) señala que el alcance de una técnica está en relación a la insuficiencia de resolver un determinado tipo de tareas, el cual en muchas ocasiones tiende a evolucionar o desarrollar.

Por otro lado, Chevallard (1999) señala que el bloque tecnológico – teórico está constituido por dos elementos; el primero de ellos es la tecnología (θ), que se refiere al discurso racional que se encuentra relacionado a la técnica. Uno de los primeros objetivos de la tecnología es el de justificar la técnica que permite realizar un determinado tipo de tareas T; mientras que otro de los objetivos es de explicar adecuadamente para poder así aclarar el uso de la técnica. Además de ello, el segundo elemento del bloque tecnológico – teórico es la teoría (Θ), el cual se encarga de justificar la tecnología, del mismo modo que la tecnología explica o justifica la técnica.

Además, respecto a la complejidad de una organización matemática, Chevallard (1999) considera cuatro niveles a los que denomina de la siguiente manera:

- Praxeología puntual: Es la praxeología constituida alrededor de un único tipo de tareas considerado como *generador*, la cual está representada por $[T/\tau\,;\,\theta/\Theta]$.
- Praxeología local: Es la praxeología que resulta de la integración de diversas praxeologías puntuales, la cual está caracterizada por una tecnología, que sirve para justificar y explicar las técnicas de todas las praxeologías puntuales que la integran.
- Praxeología regional: Es la praxeología que se obtiene a través de la integración de diversas praxeologías locales, todas ellas alrededor de una teoría matemática común.
- Praxeología global: Es la praxeología que surge como consecuencia de integrar varias praxeologías regionales en una determinada institución a partir de la agrupación de diferentes teorías.

<u>NIVELES DE CODETERMINACIÓN DIDÁCTICA</u>

En el ámbito de la TAD es necesario seguir ciertos recorridos, los cuales inician en la sociedad, continúan por la institución, luego por cierta área la misma que se encuentra inmersa en una disciplina en donde se estudia la manera de organizar los contenidos matemáticos sobre cierta cuestión matemática en un determinado sector dentro del área, y por cierto tema del sector, tal y como lo señalan Ruiz Munzón, Bosch y Gascón (2015). Este camino en el sentido de la TAD es conocido como codeterminación didáctica y se esquematiza tal y como se muestra en la Figura 1, dada a continuación:

Sociedad → Escuela → Pedagogía → Disciplina → Área → Sector → Tema → Cuestión

Figura 1. Niveles de Codeterminación.

Fuente: Adaptado de Ruiz Munzón, Bosch y Gascón (2015, p.118)

Asimismo, es pertinente mencionar que este proceso es relativo no solo al contenido matemático, sino además al periodo histórico y a la institución en la que nos fijemos. Además, estas condiciones que se obtienen en los diferentes niveles hacen posible el desarrollo y las acciones que giran en torno al conocimiento, según lo señalan Ruiz Munzón et al. (2015) en la siguiente cita: “Las condiciones que se imponen en los distintos niveles de codeterminación didáctica, a la vez que hacen posible el desarrollo de determinadas actividades, también restringen el universo de acciones posibles” (p. 119).

Por otro lado, según Navarro (2007) las mismas praxeologías no son útiles en todas las instituciones; por lo que en muchas ocasiones se requiere de un proceso de adaptación de una a otra institución; este fenómeno se conoce como como transposición didáctica.

De otro lado, la TAD considera el fenómeno de la monumentalización de las organizaciones matemáticas, que se refiere al hecho que la enseñanza de la matemática se caracteriza por considerar que hay obras matemáticas que deben ser visitadas por los alumnos y por lo tanto se enseñan una matemáticas acabadas. Desde esta postura, no se permite a los estudiantes participar de la construcción de las matemáticas involucradas, son meros observadores.

Al respecto, Gascón (2003) señala que esto se ejemplifica con la postura que se puede identificar en diversos currículos según la cual consideran, en forma implícita, que más allá de las praxeologías propuestas por los libros de textos y las reformas educativas, todo es transparente.

2.2 Postura de la Teoría Antropológica de lo Didáctico respecto al álgebra

Según la TAD, el álgebra cumple un papel fundamental dentro de las matemáticas escolares. Ello explica por qué no la abordan como un tema sino que la conciben como una herramienta a la que denominan modelización algebraica. Con esa expresión se refieren al proceso de reconstrucción y articulación de praxeologías de complejidad creciente, la cual tiene su origen en el cuestionamiento de las razones de ser de las organizaciones matemáticas que se desea reconstruir y articular, según lo señala García (2005). Además de ello, el investigador manifiesta que bajo esta perspectiva, la modelización permite describir, generalizar y justificar los procesos de resolución de problemas.

En ese mismo sentido, Bolea (2002) indica que la modelización algebraica permite unificar las técnicas y los diferentes tipos de problemas que inicialmente se encuentran desconectados, lo que conlleva a una ampliación progresiva del sistema inicial.

Siguiendo la misma línea, Bolea (2002) señala que la modelización matemática y en particular la modelización algebraica se desarrolla en cuatro estadios, los cuales son explicados de manera sucinta a continuación:

- Problemática inicial, la cual está constituida por la situación problemática sujeta a ser analizada, así como las diferentes cuestiones o preguntas generales que surgen de manera natural del sistema y que en un principio no tienen respuesta.
- Construcción del modelo, lo cual consiste en identificar y designar las variables que son pertinentes al sistema, así como el hecho de establecer las relaciones que pudiesen existir entre ellas.
- Trabajo del modelo, entendido como la manipulación para poder obtener un modelo final, así como la interpretación del trabajo y los resultados obtenidos en el sistema modelizado.
- Enunciar problemas nuevos, lo cual se trata de producir problemas cuya formulación no hubiese sido posible sin que se disponga del modelo algebraico del sistema.

Desde el ámbito de la TAD, el álgebra es considerada como un instrumento de modelización de una organización matemática inicial, la misma que actúa como el sistema inicial y que a través de un proceso de modelización se construye un nuevo modelo; lo cual permitirá describir y analizar organizaciones matemáticas o praxeologías. Es preciso señalar, que en el presente trabajo vamos a interpretar de esta manera el álgebra escolar; es decir, lo vamos a entender como una herramienta o instrumento de modelización de una determinada OM inicial y que a través de un proceso de modelización vamos a poder construir una nueva OM, para que finalmente podamos llevar a cabo nuestro análisis.

Por otro lado, cabe señalar algunos resultados relevantes de la TAD que están en relación al álgebra:

- Bolea (2002) manifiesta "que no disponemos de un criterio de demarcación que permita trazar una frontera precisa y nítida entre una organización matemática ***algebrizada*** y una organización ***pre algebraica***" (p. 84). Asimismo, la autora postula que la algebrización está en relación al grado y además manifiesta que este proceso es caracterizado a través de la noción de ***modelización***.

En este sentido, se dice "que ***una organización matemática está algebrizada*** en la medida en que pueda ser considerada como un ***modelo algebraico*** de otra organización matemática que juega el papel de ***sistema a modelizar"*** (Bolea, 2002, p. 84).

- Las modelizaciones algebraicas se distinguen de otros tipos de modelizaciones matemáticas, a las cuales podemos llamar "pre algebraicas", gracias a tres rasgos característicos fuertemente relacionados entre sí, tal y como lo señalan Bosch, Portabella, Gascón y Bolea (1998) en la siguiente cita:

> **1.** Las modelizaciones algebraicas modelizan explícitamente las técnicas matemáticas que forman parte del sistema inicial y que juega el papel de sistema a modelizar. Una vez modelizadas algebraicamente, las técnicas pueden ser manipuladas como nuevos objetos matemáticos, lo que posibilita el rápido desarrollo de las mismas.
>
> **2.** La tematización de las técnicas, que en las obras pre algebraicas permanecen como objetos paramatemáticos (herramientas transparentes útiles para actuar, pero que no se consideran como objetos matemáticos que deban estudiarse por sí mismos) permite plantear cuestiones relativas a la justificación, alcance e interpretación de las mismas.
>
> **3.** Las modelizaciones algebraicas modelizan íntegramente todas las componentes de la obra matemática que hace el papel de sistema, en lugar de limitarse a modelizar aisladamente algunos de dichos componentes. (Bosch, Portabella, Gascón y Bolea, 1998, p.7)

- Con respecto a la modelización matemática, la TAD postula "Un aspecto esencial de la actividad matemática consiste en construir un modelo […] Gran parte de la actividad matemática puede identificarse, por lo tanto, con una actividad de modelización matemática" (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 51). Esto hace referencia a la importancia de la modelización matemática en la actividad matemática en la construcción de nuevos modelos.
- Desde el ámbito de la TAD, los problemas importantes son los que pueden generar praxeologías cada vez más complejas.

  En conclusión, para la TAD los procesos de modelización son descritos como procesos de reconstrucción y articulación de praxeologías de complejidad creciente, para lo cual es necesario plantear situaciones problemas como punto de partida que requieren respuestas según lo señala Barquero (2009).

Por otro lado, Bolea (2002) establece una serie de características que van a servir de guía para poder afirmar que un objeto matemático es considerado como un instrumento de modelización algebraica. Estas características, según señala la autora, giran en torno a cuatro aspectos o ámbitos esenciales, los mismos que van a caracterizar el modelo alternativo en relación al modelo que predomina en la institución escolar. La autora señala que dichos aspectos son los siguientes:

- La construcción o emergencia del álgebra escolar, esto es, sus razones de ser.
- Los conocimientos previos en los que la construcción del álgebra escolar se basa.
- Los elementos más relevantes de las actividades que se encuentran asociadas al álgebra escolar.
- Las dificultades que más destacan al momento de llevar a cabo las actividades algebraicas.

Es preciso mencionar que cada uno de estos aspectos contempla una serie de indicadores, lo cual nos va permitir caracterizar nuestro MER asociado a los sistemas de ecuaciones lineales en la educación secundaria de nuestro país. La autora utiliza la abreviatura **MA**, para referirse a las características de estos cuatro aspectos que denomina instrumento algebraico o ***instrumento de modelización algebraica***. La investigadora considera los siguientes indicadores en los cuales se apoyó para llevar a cabo tal caracterización. Estos indicadores han sido estructurados de la siguiente manera, tal y como lo manifiesta Bolea (2002) en la siguiente cita:

a) La construcción o emergencia del álgebra escolar, esto es, sus razones de ser.

MA1: El álgebra escolar es un instrumento para resolver problemas de sistemas conocidos matemáticos o extra matemáticos: aritméticos, geométricos, físicos, comerciales, de la vida cotidiana, etc.

MA2: El proceso de modelización algebraica es una herramienta potente para describir, generalizar y justificar procedimientos y propiedades de los sistemas estudiados (papel tecnológico del álgebra).

MA3: El instrumento algebraico permite plantear y resolver problemas de diferentes ámbitos matemáticos (aritméticos, geométricos, combinatorios, comerciales, etc.) que son muy difíciles de plantear y resolver sin álgebra.

MA4: El álgebra escolar permite unificar tipos de problemas que aparecen aislados en cada bloque temático de la organización matemática escolar, e incluso entre diferentes bloques.

b) Los conocimientos previos en los que se basa la construcción del álgebra escolar.

MA5: Algunas de las mejores situaciones para introducir el *álgebra escolar* son los "problemas inversos", esto es, problemas en los que se invierten los datos e incógnitas y que, por ello, no pueden resolverse mediante técnicas directas aritméticas o geométricas. Un conocimiento previo importante es, por lo tanto, el dominio de estas técnicas directas.

MA6: Dado que el álgebra escolar surge inicialmente como herramienta de modelización de sistemas matemáticos o extra matemáticos, es necesario conocer mínimamente el sistema que se quiere modelizar y, en particular, las limitaciones del trabajo dentro de este sistema. (Bolea,2002, p.89).

c) Los elementos más significativos de las actividades asociadas al álgebra escolar.

MA8: Una primera etapa importante del trabajo algebraico y también una de las más difíciles radica en la construcción de modelos de sistemas extra o intramatemáticos.

MA9: Los modelos algebraicos (ecuaciones y fórmulas) se construyen generalmente expresando de dos maneras diferentes una misma cantidad de magnitud del sistema estudiado.

MA10: La potencia del instrumento algebraico se basa en su capacidad para no diferenciar los datos conocidos de las incógnitas (juego entre parámetros y variables).

MA12: Una fase importante del trabajo algebraico es la manipulación del modelo en sentido estricto (ecuación o fórmula) y su posterior interpretación y justificación en términos del sistema estudiado.

MA13: La última fase del trabajo de modelización consiste en la formulación de nuevos problemas acerca del sistema estudiado, problemas que no se podían plantear antes de la construcción del modelo.

d) Las dificultades más destacadas en la realización de las actividades algebraicas.

MA14: Una de las principales dificultades del *álgebra escolar* está ligada a la ausencia institucional de cuestionamientos tecnológicos (necesidad de justificación, de definición, etc.) en la matemática de la enseñanza obligatoria. (Bolea,2002, p.90).

Si bien es cierto, que estos indicadores caracterizan el modelo resultante obtenido luego de un proceso de modelización, según lo manifiesta Bolea (2002); los vamos a considerar ya que sería un recurso importante para poder caracterizar lo que más adelante denominaremos como Modelo Epistemológico de Referencia de los sistemas de ecuaciones lineales.

Las Tres Dimensiones del Problema Didáctico de la Modelización Matemática

Barquero, Bosch y Gascón (2013) señalan que todo problema de investigación en Didáctica de las Matemáticas tiene tres características fundamentales, a las que se denominan las tres dimensiones de un problema didáctico. Estas tres dimensiones son: la dimensión epistemológica, la dimensión económica institucional y la dimensión ecológica.

Además, los autores coinciden con Gascón (2011) al utilizar el siguiente esquema mostrado en la Figura 2, para representar dichas dimensiones.

$$\left\{\left[\left(P_0 \oplus P_1\right) \subset P_2\right] \subset P_3\right\} \subset P_\delta$$

P_0 : Problema docente
P_1 : Dimensión epistemológica
P_2 : Dimensión económica
P_3 : Dimensión ecológica
P_δ : Problema didáctico

Figura 2. Esquema de las Tres Dimensiones Fundamentales en un Problema Didáctico.

Fuente: Adaptado de Gascón (2011, p. 205)

Barquero et al. (2013) manifiestan que P_0 juega un rol especial debido a que constituye una formulación inicial, ya que constituye una forma precientífica de ciertos tipos de problemas didácticos. A esta formulación inicial la cual es provisional en cierto sentido, Gascón (1999) le denomina problema docente.

Además, Barquero et al. (2013) manifiestan que el símbolo $\subset$ no debe ser interpretado como una inclusión en el sentido estricto. Los autores señalan además que una formulación completa de P_{i+1} requiere de cierta formulación previa de P_i aunque esta no sea dada de manera explícita. Los investigadores indican que con respecto a P_δ, pueden llamarlo simplemente problema didáctico, el mismo que puede ser considerado como una formulación, la cual no va a poder ser completamente explícita, que contiene a las tres dimensiones fundamentales del problema, a las relaciones que pudieran existir entre ellas y ciertas interrogantes que surgen y son catalogadas como cuestiones nuevas.

Barquero et al. (2013) señalan que en las primeras etapas de la evolución de la didáctica de las matemáticas, a pesar de que P_0 es "visible", no constituye una dimensión que necesariamente se encuentre presente en todos los problemas didácticos, ya que P_0 como expresión de un problema didáctico es incompleta; por lo cual surge la necesidad de agregarle, al menos, la dimensión epistemológica P_1. A esto lo simbolizamos con $\oplus$, para que así y de esta manera pueda empezar a ser considerado como un problema didáctico.

Asimismo, Barquero et al. (2013) mencionan que, en el caso del problema didáctico de la modelización matemática, el esquema mostrado en la Figura 2, va tomar otra forma, el mismo que se va ir clarificando a medida que se precisen algunas de las cuestiones que forman parte de cada una de sus tres dimensiones epistemológicas.

Por otro lado, Barquero et al. (2013) señalan que para formular los problemas docentes se debe tener en cuenta las nociones que se encuentran disponibles en la cultura escolar, los mismos que son importados por lo general de los documentos curriculares. Asimismo, los investigadores señalan que estos problemas docentes se formulan por lo general, sin cuestionar ni las nociones que se tengan de manera general ni las ideas que predominan en la institución escolar, y simplemente se asume. Además, para el caso particular de la modelización matemática, los investigadores manifiestan que el problema docente P_0 puede enunciarse inicialmente como se muestra a continuación:

Q_{00} : ¿Qué tendría que enseñar y cómo tendría que enseñarles a mis alumnos con respecto a la modelización matemática?

Q_{01} : Luego de impartir los contenidos matemáticos elementales, ¿cómo debería conseguir que las matemáticas sean enseñadas como una herramienta de modelización, considerando que la enseñanza se organice siguiendo no solamente los contenidos matemáticos de manera lógica y/o secuencial, sino que esto pueda ser organizado en base a los problemas que se deben resolver?

Asimismo, Barquero et al. (2013) señalan que a fin de transformar P_0 en un problema de investigación didáctica bajo la perspectiva de la TAD, es necesario que se cuestione la manera de interpretar la modelización matemática, aunque esto sea de manera más o menos implícita; esto es, el modelo epistemológico de la modelización matemática dominante no sólo en las instituciones escolares sino también en la noósfera, todo ello en términos de Chevallard.

En resumen, los autores señalan explícitamente que la dimensión epistemológica es una dimensión nuclear, ya que se encarga de condicionar fuertemente a las dimensiones restantes de todo problema didáctico dentro del campo de las investigaciones en didáctica de las matemáticas. Asimismo, cuando un trabajo de investigación se centra en esta dimensión, según lo manifiestan los investigadores, es necesario hacer explícito el MER, ya sea con este nombre o con cualquier otro. En esta dimensión epistemológica es donde aparecen una serie de cuestiones relacionadas a la manera de describir e interpretar los conocimientos matemáticos que están en juego.

Dicho todo esto, es preciso señalar que nuestra investigación se enfocará en la dimensión epistemológica, en la cual vamos hacer explícito un MER, a través de una propuesta mediante un proceso de modelización.

DIMENSIÓN ECOLÓGICA

Con respecto a esta dimensión, Almouloud (2015) manifiesta que el análisis ecológico de un objeto de conocimiento se organiza en torno a dos conceptos: **hábitat** que significa el lugar donde vive el objeto y el entorno conceptual de dicho objeto de conocimiento, y el **nicho** que se refiere a la función del objeto en el sistema de objetos con los que interactúa.

Asimismo, el autor señala que al momento de hacer un análisis ecológico, lo que se pretende es dar respuesta a diversos cuestionamientos o interrogantes, como por ejemplo: ¿el objeto matemático en cuestión forma parte de las recomendaciones curriculares para la educación básica?, ¿se encuentra presente en los textos didácticos?, ¿cómo es presentado y con qué finalidad?, ¿este objeto del saber es trabajado efectivamente en la escuela?. Si es así, ¿en qué condiciones?. Si no es así, ¿cuáles son los motivos para que sean dejados de lado?

El investigador señala que las respuestas a estas cuestiones son las que identifican la razón de ser del objeto matemático sujeto a ser estudiado en la institución escolar. Siguiendo la misma idea, es preciso mencionar que uno de los criterios que Bolea (2002) considera para poder identificar el álgebra como instrumento de modelización algebraica es identificar la razón de ser del objeto matemático en estudio, para lo cual se basa en los rasgos característicos propios de una modelización algebraica.

2.3 Modelo Epistemológico de Referencia

En el ámbito de la TAD, se denomina Modelo Epistemológico de Referencia (MER) a la manera de organizar el saber matemático desde un punto de vista externo a la institución escolar del objeto que se pretende analizar, y que el didacta debe construir como parte de su investigación según lo señala García (2005) en la siguiente cita:

> Este punto de vista externo a las instituciones escolares objeto de análisis, que el didacta debe de construir como parte de su investigación, es el que denominamos modelo epistemológico de referencia (MER), entendido como modelo teórico básico para el investigador a la hora de analizar la transición y evolución de los saberes entre diferentes instituciones. (p. 300)

Es precisamente en este contexto, que la TAD postula la necesidad de construir un MER del conocimiento matemático, el cual es provisional, está abierto y es por ende sujeto a posibles modificaciones, tal y como lo manifiesta García (2005). Asimismo, el investigador indica que el “MER será imprescindible para estudiar el ***saber matemático*** antes de que se transforme para ser enseñado (*transposición didáctica)”* (García, 2005, p. 56).

2.4 Caracterización de las Modelizaciones Algebraicas

Bolea (2002) señala que no se dispone de un criterio que permita trazar una frontera precisa y nítida entre una organización matemática algebrizada y una organización matemática pre algebraica (en el sentido de que todavía no ha sido algebrizada). Debido a ello, la autora ha dado las siguientes definiciones de manera provisional:

> **Definición 1:** Diremos que una organización matemática está algebrizada en la medida en que pueda ser considerada como un modelo algebraico de otra organización matemática que juega entonces el papel de sistema a modelizar. (Bolea, 2002, p. 83).

Asimismo, la investigadora señala que en la actividad matemática habitual siempre se trata de estudiar un sistema, el cual puede ser intra matemático o extra matemático. Además, la investigadora describe tal actividad matemática como una actividad de modelización en el sentido de Chevallard (1989), y mediante la definición 1, se restringe el dominio de las modelizaciones algebraicas al de los sistemas intra matemáticos, esto es, a sistemas que ya pueden ser considerados como organizaciones matemáticas (con tipos de problemas, técnicas, tecnología y teoría), que de una manera no siempre explícita, son el resultado de una modelización matemática previa. Esto es, tal y como se muestra en la Figura 3, dada a continuación:

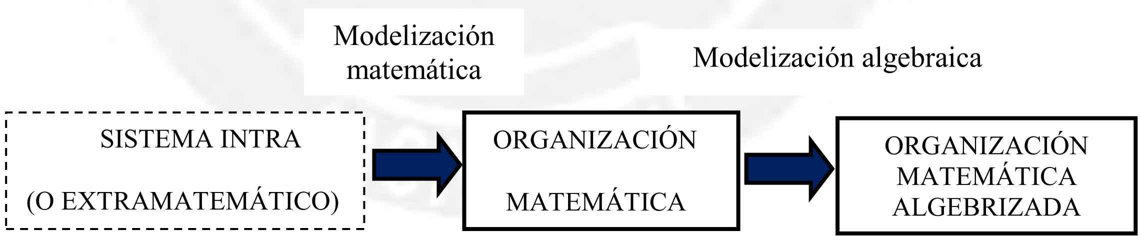


Figura 3. Esquema de las Modelizaciones.

Además de esto, Bolea (2002) pone en evidencia que con esto lo que está haciendo es trasladar el problema inicial de caracterizar las organizaciones matemáticas más o menos algebrizadas, al problema que se encarga de caracterizar las modelizaciones algebraicas de algunas organizaciones matemáticas, razón por la cual proporciona una segunda definición:

> **Definición 2:** Diremos que una modelización matemática es una modelización algebraica si modeliza íntegramente todos los componentes del sistema y, en particular, si modeliza materialmente las técnicas matemáticas de dicha organización. (Bolea, 2002, p. 84).

Asimismo, Bolea (2002) manifiesta que a partir de esta definición es que se desprenden los dos rasgos que caracterizan a las modelizaciones algebraicas, las cuales son:

Primer Rasgo Característico de una Modelización Algebraica

> modelizan explícita y materialmente las técnicas matemáticas que forman parte de la organización matemática que juega el papel de sistema a modelizar. Esta condición comporta que, una vez modelizadas algebraicamente, las técnicas pueden ser manipuladas como nuevos objetos matemáticos, lo que posibilita y hasta provoca el rápido desarrollo de las mismas. (Bolea, 2002, p. 85).

Segundo Rasgo Característico de una Modelización Algebraica

> modelizan íntegramente todos los componentes de la organización matemática que hace el papel de sistema, en lugar de limitarse a modelizar aisladamente algunos de dichos componentes. Veremos que esta modelización global permite, en muchos casos, considerar que el modelo algebraico, como nueva organización matemática, constituye una extensión de la organización sistema inicial. (Bolea, 2002, p. 85).

Estos dos rasgos los utilizaremos en nuestro trabajo de investigación para indicar que la modelización matemática que vamos a realizar para la elaboración del MER es una modelización algebraica, con lo cual concluiremos que el MER que vamos a proponer es una organización matemática algebrizada.

2.5 Indicadores del Grado de Algebrización

Bolea (2002) también manifiesta que una vez que se han descrito los rasgos característicos propios de una modelización algebraica, se está en condiciones de poder hacer explícito algunos indicadores del grado de algebrización de la organización matemática que ha resultado al aplicar dicha modelización, los cuales son dados de una manera progresiva. A continuación, la autora describe dicha graduación de la siguiente manera:

Primer Grado de Algebrización: Manipulación de la estructura global de los problemas

> Una organización matemática nace siempre como respuesta a cuestiones que dan lugar, progresivamente, a diferentes tipos de problemas. Un primer indicador del grado de algebrización de una organización está relacionado con la posibilidad de tomar en cuenta, describir y hasta manipular la estructura global de estos problemas. Esto significa que cuanto más algebrizada está una organización matemática más clara es la tendencia a tratar con tipos generales de problemas, en lugar de tratar únicamente con problemas aislados. (Bolea, 2002, p. 86).

Con respecto a este indicador, la autora manifiesta que para poder manipular la estructura global de los distintos tipos de problemas, es preciso que los parámetros sean considerados como si fuesen desconocidos, y las incógnitas como si fueran conocidas. Todo esto debe ser tomado en cuenta para facilitar su manipulación de una manera global e integral.

Segundo Grado de Algebrización: Tematización de las técnicas y nueva problemática al nivel tecnológico

> Un segundo indicador del grado de algebrización de una organización matemática viene dado por la posibilidad de plantear y estudiar problemas relacionados con la descripción, la interpretación, la justificación, la producción y el alcance (o dominio de validez) de las técnicas que la integran. En particular, una organización matemática algebrizada debe permitir describir los tipos de problemas resolubles con determinadas técnicas, estudiar en qué condiciones un determinado tipo de problemas tendrá o no tendrá solución, en qué casos la solución será única, etc. (Bolea, 2002, p.86).

La investigadora señala que, por medio de este indicador, la organización matemática algebrizada debe permitir caracterizar la estructura de las soluciones. Esto significa que mientras más algebrizada se encuentre la OM, será más fácil plantear las condiciones para la existencia de las soluciones y no simplemente poder hallarlas.

Tercer Grado de Algebrización: Unificación y reducción de los tipos de problemas, técnicas y tecnologías. Reducción de los elementos ostensivos

> El tercer indicador del grado de algebrización de una organización matemática viene dado por la mayor o menor unificación de los diferentes tipos de problemas que forman parte de la organización, así como por la mayor o menor integración de las técnicas correspondientes y de los elementos tecnológicos asociados. (Bolea, 2002, p.87).

Asimismo, Bolea (2002) manifiesta que para que este indicador sea considerado relevante, es imprescindible que la organización matemática sujeta a ser evaluada sea lo suficientemente rica, en el sentido que se encuentre conformada por un número suficiente de tipos de problemas y de técnicas que se encuentran diferenciados desde el inicio. Es preciso mencionar que en el ámbito de la TAD, la autora señala que este indicador no podría aplicarse a las organizaciones matemáticas puntuales, sino más bien que debe de tratarse mínimamente de organizaciones matemáticas locales, las cuales surgen como resultado de integrar un conjunto de tareas y técnicas que comparten una tecnología en común, en el sentido de Chevallard.

Cuarto Grado de Algebrización: Emergencia de tipos de problemas independientes del sistema modelizado

> El cuarto y último indicador del grado de algebrización de una organización matemática viene dado por la posibilidad de generar nuevos tipos de problemas cada vez más alejados del contexto del sistema cuyo modelo es la organización que estamos analizando. Cuanto más algebrizada está una organización matemática, más posibilidades tiene de independizarse del sistema que modeliza. (Bolea, 2002, p.88).

2.6 Método de Investigación

Para la elaboración de nuestro trabajo, cabe señalar que nos situaremos dentro del paradigma cualitativo de investigación, el cual es considerado como el camino que se sigue para poder alcanzar los objetivos propuestos, según lo indica Martínez (2006).

Además, Taylor y Bogdan (1994) manifiestan que la investigación cualitativa es aquella que que se encarga de producir datos descriptivos por medio de las palabras de las personas, ya sea de manera hablada o escrita. En este sentido, los autores señalan ciertas características, algunas de ellas son:

- Es ***inductiva***, ya que los investigadores cualitativos son quienes se encargan de desarrollar tanto los conceptos como las comprensiones, partiendo de los datos. Cabe señalar que estos datos no son recogidos con el objetivo de evaluar los modelos, hipótesis o las teorías preconcebidas que se tengan. Es decir, en los estudios cualitativos los investigadores siguen un diseño de investigación el cual se caracteriza por ser flexible y además, inician sus estudios con interrogantes formuladas vagamente, en relación a nuestro trabajo serían los problemas docentes. En este sentido, nuestra investigación se podría decir que es inductiva, pues responderá a preguntas como: ¿Cuáles son los tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías que presenta nuestra unidad de análisis?, donde la unidad de análisis en nuestro trabajo serían las praxeologías asociadas a los sistemas de ecuaciones lineales en la educación secundaria del Perú, ya que Hernández, Fernández y Baptista (2010) consideran que la unidad de análisis es sobre qué o sobre quiénes se van a recolectar los datos.

- Tiene una perspectiva ***holística***, pues los investigadores cualitativos consideran a las personas, los escenarios o los grupos como un todo y no como una suma integrada de todos estos componentes; es decir, la investigación cualitativa es además la que se encarga de estudiar a las personas tanto en el contexto de su pasado como de las situaciones en las que se encuentran. Es así que podemos decir que nuestro trabajo tiene una perspectiva holística, pues consideramos aspectos epistemológicos de los sistemas de ecuaciones lineales, además de cómo es que se encuentran actualmente en la educación secundaria a través del estudio de los libros de textos oficiales y del diseño curricular de nuestro país.

Desde el paradigma cualitativo, se considera esencial la manera de percibir la realidad tal y como otros la perciben, pues los investigadores cualitativos suelen identificarse con las personas que deben analizar para poder entender cómo es que ven las cosas. Al respecto, podemos decir que, en nuestra investigación al momento de describir por ejemplo las técnicas, nos ubicamos tanto en la posición del alumno como en la posición del docente. Esto es, al momento de identificar los procedimientos que emplearían para poder resolver los diferentes tipos de tareas que se encuentran planteados en el libro de texto nos situamos en la posición del estudiante, y al momento de proponer qué seleccionarían para abordar una tarea, cuando esta no se explicita en el texto, nos ubicamos en la posición del docente.

Siguiendo la misma línea, Hernández et al. (2010) consideran otros criterios de caracterización del paradigma cualitativo, los cuales son:

- El enfoque cualitativo se basa en métodos de recolección de los datos no estandarizados. Bajo esta perspectiva, los autores manifiestan que como no se lleva a cabo una medición numérica, el análisis no es estadístico. Asimismo, recolectar los datos según los investigadores es recoger las opiniones y puntos de vista de los participantes.
- Además, el proceso de indagación cualitativo es flexible y transita entre los eventos y su interpretación entre las respuestas y el desarrollo de la teoría, según lo señalan los investigadores. Asimismo, su propósito consiste en reconstruir la realidad tal y como la observan los participantes de un sistema social previamente definido. A menudo se le denomina holístico, ya que se considera el todo sin que este sea reducido al estudio de sus componentes o elementos que lo integran.
- Los estudios cualitativos no pretenden generalizar los resultados a poblaciones más amplias.

Además, los autores señalan que las investigaciones cualitativas se basan más en un proceso inductivo; es decir, van de casos puntuales o particulares hacia casos cada vez más generales. En este sentido, nuestra investigación es cualitativa ya que una parte importante es revisar, aunque sea de manera no tan profunda, diversos textos escolares del nivel secundario de nuestro país, para poder así instaurar una organización matemática en términos de la TAD. Finalmente, no se pretende que los resultados obtenidos sean generalizados a otras investigaciones, pero sí que sea efectivamente un aporte a las mismas.

Ahora, dado que se considerará los documentos curriculares, por ejemplo, los libros de texto oficiales como unidad de análisis, se empleará la TAD como método para el análisis de la actividad matemática relacionada a los sistemas de ecuaciones lineales presentes en los documentos curriculares.

Asimismo, se trata del estudio de un todo integrado en referencia al análisis de la presencia de los sistemas de ecuaciones lineales, en todo el nivel secundario a través de textos de diversos ciclos de la secundaria peruana.

Por otro lado, Almouloud (2015) considera que el análisis de los libros de texto sigue siendo la entrada principal para el cuestionamiento ecológico o antropológico. Los datos pueden complementarse con otros documentos y programas, revistas, material educativo. etc. En estos documentos, el investigador realiza una selección de libros y adopta un método basado en las preguntas que plantea.

El autor, además presenta los elementos que especifican las características del libro de texto, el contexto de su producción y la caracterización de la relación institucional. Se añade a estos elementos uno muy importante para el análisis de los materiales de enseñanza. Se trata de la validación, en el sentido de Chevallard (1999), de las tareas, técnicas y tecnologías que intervienen en las organizaciones matemáticas y didácticas propuestas por los autores de dichos materiales.

Con respecto a los procedimientos metodológicos, es preciso señalar que estos son entendidos como el conjunto de pasos que se deben seguir a lo largo del desarrollo de una investigación. La TAD como método, es quien nos indicará los pasos a seguir en cada tipo de análisis.

Nuestro primer paso es hacer un análisis de las transformaciones que modifican un saber desde su origen hasta la forma en la que llega a la escuela; en donde debe ser estudiado, tal y como se realizó en la investigación de Ruiz Munzón (2010).

Una vez que verificamos esto, nuestro siguiente paso será ver el grado de algebrización de nuestra organización matemática, para poder ver así que tan algebrizada se encuentra nuestra organización matemática.

Es así que en el capítulo 3, el trabajo de investigación se ubicará dentro de la dimensión epistemológica, establecido por Gascón (2011), ya que como nuestro interés es proponer un modelo epistemológico de referencia asociado a los sistemas de ecuaciones lineales, es recomendable hacer un estudio epistemológico rápido de dicho objeto matemático, para poder revisar brevemente los problemas que motivaron a lo largo de la historia la emergencia y supervivencia de dicho objeto matemático.

CAPÍTULO III: LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

En este capítulo nuestro interés radica en mostrar que, para poder explicar muchos de los cambios observados tenemos que buscar las causas en los efectos provocados por las restricciones transpositivas. Al respecto, Barquero, Bosch y Gascón (2013) señalan que dichas restricciones son aquellas que aparecen cuando las matemáticas son manipuladas y transformadas para poder ser enseñadas bajo un conjunto dado de condiciones institucionales como lo resume la Figura 4, dada a continuación:

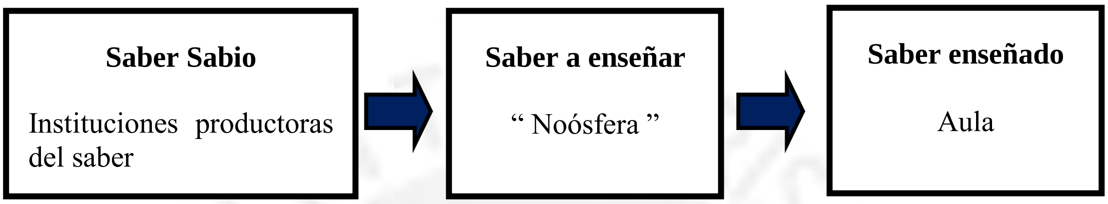


Figura 4. Etapas en el Proceso de Transposición Didáctica.

Fuente: Adaptado de Barquero, Bosch y Gascón (2013, p. 16)

3.1 Evolución del Saber Sabio de los Sistemas de Ecuaciones Lineales

En esta sección vamos a dar un recorrido breve acerca de los cambios que han sufrido los sistemas de ecuaciones lineales a lo largo de la historia, ya que en el ámbito de la TAD para poder reconocer las restricciones de ese saber sabio es indispensable hacer dicho recorrido. Es decir, empezaremos describiendo brevemente los cambios por los que han pasado los "sistemas de ecuaciones lineales".

Asimismo, cabe resaltar que como hoy identificamos a los sistemas de ecuaciones lineales no era como se hacía siglos atrás. Desde la notación, el tipo de problemas, así como los procedimientos empleados y sus justificaciones. Es preciso mencionar que todos estos aspectos han ido cambiando según las necesidades e intereses propios de cada época o civilización. Es por este motivo, que lo que pretendemos hacer en esta sección es mostrar un breve recorrido para poner en evidencia todos estos aspectos y los cambios o transformaciones que han atravesado a lo largo de la historia.

Coulange (2000) manifiesta que mucho antes de que el álgebra se constituya como un dominio autónomo de la matemática sabia, las ecuaciones no eran verdaderos objetos de estudio, puesto que no había técnicas para la resolución de problemas aritméticos, ya que su interés era resolver problemas relacionados a la vida cotidiana o a cuestiones geométricas.

Es así que la primera etapa, la cual comprende el periodo de 1700 a.C. a 1700 d.C., se caracterizó principalmente por la creación progresiva de símbolos y por la resolución de ecuaciones, según lo señalan Zamar, Macoritto, Serrano y Amaduro (2011).

Además, los autores señalan que los egipcios debido a sus necesidades de reparto de víveres, salarial o de tierras tuvieron que ser capaces de resolver distintos problemas, los cuales podrían ser reescritos en nuestros días como ecuaciones de primer grado o incluso como sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Asimismo, los investigadores manifiestan que los egipcios nos dejaron en sus papiros (sobre todo en el de Rhind -1650 a.C.- y el de Moscú -1850 a.C.-) una infinidad de problemas matemáticos resueltos, dentro de los cuales la mayoría son de tipo aritmético y están relacionados a las situaciones concretas de la vida diaria; sin embargo, los autores encontraron ciertos problemas que pueden ser clasificados como algebraicos ya que no son referidos a ningún objeto específico. En este tipo de problemas, aunque sea retóricamente, los egipcios conseguían una solución realizando una serie de operaciones con los datos de forma similar a como hoy en día resolvemos tales ecuaciones.

Por otro lado, Zamar et al. (2011) señalan que las ecuaciones que más usaban los egipcios, en notación actual se escribirían de la siguiente manera:

$$x + ax = b$$
$$x + ax + bx = c$$

donde a, b y c eran números conocidos y “x” la incógnita a la cual los egipcios llamaban *aha o montón*.

Asimismo, los investigadores señalan que una ecuación lineal que aparece en el papiro de Rhind viene dado por medio del siguiente problema:

“Un montón y un séptimo del mismo es igual a 24”.

Al respecto, podemos concluir que en notación moderna, la ecuación sería: $x + \frac{1}{7}x = 24$.

Además, Zamar et al. (2011) manifiestan que los egipcios encontraban la solución de dichas ecuaciones por medio de un método que hoy conocemos con el nombre de “método de la falsa posición” o “regula falsi”. Este método según lo manifiestan los autores, consiste en asignar un valor concreto a la incógnita, luego se prueba con él am momento de reemplazar su valor y si se verifica la igualdad ya tenemos la solución de dicha ecuación; caso contrario, mediante una serie de cálculos obtendremos la solución exacta. Para poder entender la forma de resolver, los autores dan la siguiente explicación:

Supongamos que la solución fuese 7, al reemplazar dicho valor en la incógnita x, obtendríamos: $7+\frac{1}{7}(7)=8$, y como la solución que se busca es 24, esto es, 8.3, la solución finalmente vendría dada por $21=3.7$, pues $3.7+\frac{1}{7}(3.7)=24$.

Al respecto, Zamar et al. (2011) señalan que por lo general, para poder obtener la solución correcta los cálculos no eran tan simples como en este caso y más bien incluía diversas operaciones con fracciones unitarias (fracciones cuyo numerador era la unidad). Dicho método era dominado a la perfección por los egipcios, según lo señalan los investigadores. Además, mencionan que en algunas ocasiones los egipcios recurrían al simbolismo para poder representar las operaciones elementales de suma y resta; empleando un dibujo de un par de piernas andando en dirección de la escritura o invertidas, respectivamente.

Luego, Zamar et al. (2011) manifiestan que los matemáticos no siempre pudieron contar con el lenguaje algebraico que hoy conocemos, y que hasta aproximadamente el año 1600, los problemas se planteaban y resolvían en forma retórica, es decir, empleando muchas palabras y pocos símbolos. Alrededor de aquella fecha se comenzó a nombrar la incógnita, que hasta ese entonces había sido "la cosa", con una letra. Sin embargo, es preciso señalar que la evolución fue lenta. En aquel entonces si, por ejemplo, la incógnita era A,

A^2 se decía A quadratus

A^3 era A cucús y así,

A^7 resultaba A quadratus , quadratus , cubus;

De igual forma, los autores manifiestan que en este periodo no existía el signo $=$. Por tal motivo, para denotar la igualdad se escribía aequalis. Además de ello, para multiplicar dos factores se usaba la palabra in.

Es en este contexto, que se desprende de manera natural notar que tanto el planteamiento como la resolución de los problemas se tornaban cada vez más difíciles, ya que el lenguaje era muy extenso. En relación a esta idea, los investigadores señalan que el proceso de adoptar una escritura algebraica como la que actualmente conocemos no fue sencillo ni mucho menos se dio de un día a otro, sino que fue más bien un proceso bastante largo que se debió a varios matemáticos.

Por otro lado, Zamar et al. (2011) manifiestan que los sistemas de ecuaciones lineales fueron ya resueltos por los babilonios, quienes denominaban a las incógnitas de diversas maneras y empleaban una serie de palabras como ***longitud, anchura, área, o volumen***, sin que tuvieran relación con problemas de medida.

Por otro lado, Zamar et al. (2011) señalan que Rey Pastor (1985) ofrece en una de sus notas complementarias de su libro titulado Historia de la Matemática, una sección dedicada exclusivamente a los babilonios. Además, para que podamos tener idea de cómo los babilonios resolvían situaciones que requerían de los sistemas de ecuaciones lineales, los investigadores muestran el siguiente problema:

"Se conoce la extensión total (1800) de un campo compuesto por dos parcelas, en cada una de las cuales el rendimiento del grano por unidad de área está afectado por coeficientes diferentes $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{2}$. Se desea saber la extensión de cada parcela conociendo la diferencia (500) del producido de la cosecha".

En notación actual, el problema requiere tanto la formulación como la resolución del sistema de ecuaciones dado a continuación:

$$\begin{cases} x + y = 1800 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 500 \end{cases}$$

cuya solución es $x = 1200$ y $y = 600$.

La manera como los babilonios resolvían estos problemas era a través de una falsa posición, de manera similar a como lo hacían en su momento los egipcios; sólo que ahora se tienen dos ecuaciones y además dos variables, lo cual hace evidente un avance a lo largo de la historia.

- Se inicia asumiendo que cada una de las parcelas es igual a 900 (la mitad de 1800).
- Considerando lo que previamente se ha supuesto, se encuentra la diferencia de lo producido, que para este caso es 150, así

$$\frac{2}{3}(900) - \frac{1}{2}(900) = 600 - 450 = 150 \neq 500$$

- Para corregir el error de 350, pues $500 - 150 = 350$, los babilonios reconocen que el error de $\frac{7}{6}$ de un valor que se desconoce y que al ser sumado y restado al dato errado del inicio, dará las medidas buscadas. De otra forma, se trata de encontrar el valor de a:

$\frac{2}{3}(x+a) - \frac{1}{2}(y-a) = 500$ que puede ser expresado como

$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y + \frac{7}{6}a = 500$, luego

$\frac{7}{6}a = 500 - \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y\right)$ partiendo de la suposición inicial $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 150$

$$\frac{7}{6}a = 500 - 150$$

Finalmente $a = 300$.

Los babilonios de la época omitían todo esto pensando que se debe dividir los 350 por $\frac{7}{6}$ y para ello, se preguntan por cuánto se debe multiplicar $\frac{7}{6}$ para obtener 350 y así es como encontraban la respuesta de 300.

- Por último, suma y resta 300 a los 900 de la suposición inicial:

$$x = 900 + 300 = 1200$$
$$y = 900 - 300 = 600.$$

Zamar et al. (2011) muestran otro ejemplo, el cual ha sido tomado de una tablilla babilónica para plantear la resolución de un sistema de ecuaciones en los siguientes términos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\text{ anchura} + \text{longitud} &= 7 \text{ manos} \\ \text{longitud} + \text{anchura} &= 10 \text{ manos} \end{aligned}$$

Asimismo, Zamar et al. (2011) señalan que, para poder resolver sistemas de este tipo, lo que hacen es asignarle el valor 5 a una mano, y a partir de ello observaban que la solución podría ser: anchura = 20 y longitud = 30. Para poder verificar, los autores señalan que los babilonios empleaban un método parecido al que hoy en día conocemos como el método de eliminación. En nuestra notación, sería:

$$\begin{cases} y + 4x = 28 \\ y + x = 10 \end{cases}$$

Restando la segunda de la primera, se obtiene $3x = 18$, es decir $x = 6$ y $y = 4$.

Siguiendo la misma idea, los investigadores manifiestan que los chinos siguieron la tradición de los babilonios y nos dejaron los primeros métodos del pensamiento lineal, ya que fueron los primeros en intentar modelar los diversos problemas con sistemas de ecuaciones lineales. Asimismo, los autores señalan que sin lugar a dudas, la contribución algebraica más importante fue, el perfeccionamiento que obtuvieron en la regla de resolución de los sistemas de ecuaciones lineales. Además, alrededor del año 1300 a.C. más o menos, se estableció un método general para resolver todos los sistemas de ecuaciones al que denominan la regla “fangcheng” que es, en esencia, lo que hoy conocemos como el método de Gauss.

Asimismo, los autores indican que el libro El arte matemático, de autor chino desconocido (siglo III a.C.) influenció considerablemente sobre los libros matemáticos chinos posteriores. Dicha obra incluye 246 problemas sobre agrimensura, agricultura, impuestos, cálculo y resolución de ecuaciones; donde en mucho de los casos la resolución conduce a lo que hoy conocemos como sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y que aparecen siempre con coeficiente 1, utilizando números positivos y negativos. Los investigadores afirman que en estos problemas se pueden encontrar un esbozo del método de las matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Uno de estos problemas equivale a resolver un sistema de tres ecuaciones lineales por medio de dicho método matricial.

Siguiendo la misma idea, Guerra (2012) señala que en la sección VII del Arte Matemático aparece el siguiente problema: "Hay tres clases de granos; tres gavillas de primera clase, dos de la segunda clase y una de la tercera hacen 39 medidas; dos de la primera, tres de la segunda y una de la tercera hacen 34 medidas; y una de la primera, dos de segunda y tres de la tercera hacen 26 medidas. ¿Cuántas medidas de granos están contenidas en una gavilla de cada clase?"

El autor manifiesta que los chinos se valían de cuadrados para organizar la información y finalmente solucionar el problema, tal y como se muestra en la Figura 5 dada a continuación:

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Figura 5. Forma de Organización de Datos según los chinos

Fuente: Adaptado de Guerra (2012, p. 7)

Guerra (2012) indica que la primera fila de números se refería a los coeficientes de la variable x, la segunda a los coeficientes de la variable y, la tercera fila a los de z y en la última fila se ubicaban las constantes.

Hoy por hoy, se plantearía un sistema de ecuaciones para encontrar su solución:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Además, Zamar, Macoritto, Serrano y Amaduro (2011) manifiestan que dentro de esta fase se encuentra un álgebra desarrollada por los griegos (300 a.C.), a la que llamaron álgebra geométrica, la cual se caracterizó debido a sus ricos métodos geométricos para la resolución de ecuaciones algebraicas. Es más o menos en esta época que Thymaridas encontró una fórmula para resolver un determinado sistema de n ecuaciones con n incógnitas. Este método se conoce como “la Flor de Thymaridas”. Usando la notación actual, se obtendría un sistema de ecuaciones, tal y como se muestra en la Figura 6 dada a continuación:

$$\begin{cases} x + x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} = s \\ \quad x + x_1 = k_1 \\ \quad x + x_2 = k_2 \\ \quad x + x_3 = k_3 \\ \quad\quad \vdots \\ \quad x + x_{n-1} = k_{n-1} \end{cases}$$

Figura 6. Método conocido como Flor de Thymaridas.

Fuente: Adaptado de Guerra (2012, p. 8)

Es así que de esta manera y de la Figura 6, tenemos que $x = \frac{(k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_{n-1})}{n-2}$.

Asimismo, cabe mencionar que Diofanto resolvía también problemas en los que aparecían sistemas de ecuaciones, a pesar de que sólo disponía de un símbolo que representaba la cantidad desconocida, al cual llamaba aritmo. Una de las grandes habilidades que poseía Diofanto era reducir ecuaciones de diversos tipos a formas conocidas o que pudiera manejar, generalmente lineales.

Por ejemplo, Guerra (2012) manifiesta que en el libro IV de la Aritmética, el cual era titulado “De cuadrados y cubos”, se planteó el problema, el cual fue titulado de la siguiente manera: Descomponer un número dado en dos cubos cuya suma de raíces sea dada:

> Si el número es 370 y la suma de las raíces 10, supongamos que la raíz del primer cubo es 1 aritmo y 5 unidades, o sea: la mitad de la suma de las raíces. Por tanto, la raíz del otro cubo será 5 unidades menos 1 aritmo; luego la suma de los cubos valdrá 30 cuadrados de aritmo más 250 unidades que igualaremos a las 370 unidades del número dado, de donde se deduce que 1 aritmo tiene 2 unidades; la raíz del primer cubo tendrá entonces 7 y la del segundo 3, y por consiguiente, los cubos serán 343 y 27. (Guerra, 2012, p. 10)

El autor señala que haciendo uso de la notación actual, Diofanto resolvía el sistema de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 370 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

Inicialmente, el investigador manifiesta que Diofanto partía de un valor para x y para y, de la siguiente manera:

$$x = a + 5, \quad y = 5 - a$$

Donde a representa el aritmo.

Luego, se reemplazan las expresiones dadas en la primera ecuación del sistema, de donde se obtiene:

$$(a+5)^3 + (5-a)^3 = 370 \quad \Rightarrow \quad 30a^2 + 250 = 370$$

Luego, el autor indica que al hacer $a = 2$, Diofanto obtenía que $x = 7$ y $y = 3$.

Al respecto, es preciso señalar que el investigador menciona que Diofanto sólo aceptaba las soluciones positivas, pues lo que buscaba era resolver problemas y no ecuaciones. En este sentido, podemos notar que Diofanto utilizó ya un álgebra sincopada, ya que usó algunas abreviaciones para poder denotar a las incógnitas, aunque los cálculos eran descritos en lenguaje natural. Por otro lado, el investigador señala que una de las dificultades que podemos encontrar en la resolución de ecuaciones por Diofanto es que no se cuenta con un método general y para cada problema utiliza muchas veces métodos que son excesivamente ingeniosos. En este sentido, el investigador señala que hay más de 50 tipos diferentes de problemas, pero no se hace ningún intento por clasificarlos.

Además, Guerra (2012) manifiesta que los sistemas de ecuaciones aparecen también en los documentos indios. No obstante, no llegan a obtener métodos generales de resolución, sino que resuelven tipos especiales de ecuaciones.

Es así que siglos más tarde, los métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales tomaron otra forma que permitirían el avance hacia una nueva rama de las matemáticas: *el álgebra lineal*, según lo señala el autor. Asimismo, el investigador precisa que la introducción de la notación simbólica asociada a Viéte (1540-1603) marca el inicio de una nueva etapa en la cual Descartes (1596-1650) contribuye de forma importante.

Por otro lado, el autor menciona que el siglo XVIII es la época en donde se inicia de manera incipiente el estudio de esta nueva rama de las matemáticas, tomando en consideración algunas ideas de Euler y de Cramer, entre otros. Es así que se va creando una teoría de sistemas de ecuaciones lineales, tratándose el caso de n ecuaciones con m incógnitas, el estudio de los determinantes y el rango de un sistema. Todo lo cual lleva a una estructuración de los temas y de los conceptos del Álgebra Lineal.

En este momento, según lo señala el investigador, el álgebra se convierte en la ciencia de los cálculos simbólicos y de las ecuaciones. Posteriormente, Euler (1707-1783) la define como la teoría de los "cálculos con cantidades de distintas clases" (cálculos con números racionales enteros, fracciones ordinarias, raíces cuadradas y cúbicas, progresiones y todo tipo de ecuaciones). Para llegar al actual proceso de resolución de la ecuación $ax + b = c$ han pasado más de 3000 años.

Asimismo, Guerra (2012) menciona que una manera moderna de estudiar los sistemas de ecuaciones lineales se debe en cierta forma a Leibniz, quien en el año 1693 introdujo la noción de determinante para poder lograr su objetivo de resolver los sistemas de ecuaciones lineales, tratando de encontrar la notación más útil, aunque no fue el único que trabajó en este tema. Al respecto, el investigador manifiesta que casi al mismo tiempo el matemático japonés Seki Kowa, trabajaba en esta idea, el cual escribió métodos, que era una especie de guía que sirvió para resolver diversos problemas, en donde se ofrecen métodos para poder calcular los determinantes en distintas situaciones específicas o puntuales.

Sin embargo, el investigador señala que el matemático Cardano en 1545 en su obra Ars Magna, expuso una regla para resolver los sistemas de dos ecuaciones lineales a la cual llamó " regula de modo ", la misma que años más tarde se conocería como la regla de Cramer. Aunque Cardano no ofreció una definición formal de determinante, es preciso resaltar que fue quien vislumbró las primeras nociones de este importante concepto.

Asimismo, Guerra (2012) manifiesta que al igual que Maclaurin y bajo la misma dirección, Cramer también se dedicó a trabajar en la solución de sistemas de ecuaciones lineales, particularmente se dedicó a los sistemas con cinco ecuaciones y con cinco incógnitas. Al respecto, el autor señala que resulta extraño que este método rindiera honor a Cramer y no a Cardano que fue quien publicó su trabajo dos años antes que Cramer. En realidad, el investigador señala que esto probablemente se debió a que la notación de Cramer era superior a la notación que usó Cardano. Es así que esta parte de la historia de las matemáticas, se encarga de mostrarnos una vez más que en muchas ocasiones una buena y adecuada notación es una herramienta de gran importancia para que puedan desarrollarse y evolucionar las nociones, ideas o conceptos matemáticos.

Sin embargo, debemos considerar que el método tiene sus limitaciones. Por ejemplo, que no es eficiente para sistemas de ecuaciones lineales más grandes (mayores de 3 ecuaciones y 3 variables) pues su aplicación para la resolución del mismo resulta excesivamente costosa.

Por otro lado, es preciso señalar que el investigador enfatiza en el hecho de que si bien la idea de matriz precede a la determinante, cronológicamente el orden en el que aparecieron ambos conceptos fue el contrario. El término matriz fue creado por James Joseph Sylvester, tratando de dar a entender que era "la madre de los determinantes" pero es Cayley quien desarrolla la idea como una entidad diferente. Además, Cayley expresó que los determinantes lo llevaron al concepto de matriz y representó el sistema de ecuaciones $x' = ax + by;\ y' = cx + dy$ en un arreglo rectangular que contenía los coeficientes de las variables; así en 1850 se usó por primera vez la siguiente notación $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ para denotar las matrices, lo cual según el autor permitió indudablemente desarrollar el álgebra de matrices.

En un artículo publicado en 1855, Cayley afirma: "*no obtuve la noción de matriz a partir de los cuaterniones de Hamilton; fue directamente de la de determinante, o como una forma conveniente de expresar las ecuaciones:* $x' = ax + by$, $y' = cx + dy$".

Por otro lado, Guerra (2012) señala que los métodos iterativos se han usado para la solución de grandes sistemas de ecuaciones lineales asociados a matrices diagonalmente dominantes, ya sea por filas o por columnas. Es decir, una matriz es estrictamente dominante diagonalmente cuando los elementos de la diagonal principal son mayores en valor absoluto, que la suma de los valores absolutos de los demás elementos de la fila correspondiente. El autor señala que estos algoritmos privilegiados para ser usados por las computadoras. Los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel son ejemplos de tales métodos, llamado así debido a Carl Friedrich Gauss y Wilhelm Jordan. En 1846, Jacobi trabajó en matrices de rotación para encontrar mayor dominancia diagonal y de esta forma reducir el número de cálculos. Jacobi tuvo que resolver varios sistemas de ecuaciones lineales de orden 7 para su trabajo en el cálculo de autovalores.

Sin embargo, cabe resaltar que el método que resuelve cualquier sistema se basa específicamente en las operaciones que se hacen con las filas, no con los determinantes. Sin embargo, podríamos decir que el método de Cramer es más eficiente que la eliminación gaussiana para los sistemas de ecuaciones lineales de dos variables. Por otro lado, un sistema de ecuaciones se resuelve por el método de Gauss cuando se obtienen sus soluciones mediante la reducción del sistema dado a otro equivalente en el que cada ecuación tiene una incógnita menos que la anterior.

3.2 Características de los sistemas de ecuaciones lineales como saber enseñado

En la sección anterior hemos visto de manera sucinta cómo la evolución de la transposición didáctica en torno a los sistemas de ecuaciones lineales ha repercutido en el tratamiento de los diversos problemas vistos a lo largo de los siglos, en donde se muestra una vez más que uno de los criterios para que un saber perdure y evolucione es el que se presente con una notación adecuada.

Una rápida revisión de los libros de texto de la educación secundaria de nuestro país muestra que la introducción al tema de sistemas de ecuaciones lineales es a través de los sistemas 2x2; por ejemplo, en el libro de texto de nombre Matemática 2 secundaria este tema es abordado a través de una tarea propuesta en el ámbito aritmético. De esta manera, se introduce el tema planteando una situación cotidiana para fomentar el interés de los alumnos, a manera de motivación, como se muestra en la Figura 7 dada a continuación:

> En un almacén de ropa, el valor de una camisa es S/ 20, y el de un pantalón, S/ 45. Una persona compra determinada cantidad de estos productos y paga en total S/ 360.
>
> **a.** Escribamos una ecuación lineal que represente la situación.
>
> **b.** Determinemos las posibles soluciones de la ecuación anterior.

Figura 7. Ejemplo de una tarea en el ámbito aritmético.

Fuente: Perú b (2015, p. 77)

Luego, se pone de manifiesto y se detalla en forma explícita los saberes previos que son necesarios para abordar el tema de los sistemas de ecuaciones lineales relacionados a la geometría analítica.

A continuación, se establece a manera de definición, lo que formalmente va a entenderse como sistema de ecuaciones lineales en la institución escolar, tal y como se evidencia en la siguiente cita:

> Cuando en un problema intervienen dos ecuaciones lineales con las mismas dos incógnitas, nos referimos a un **sistema de ecuaciones lineales** 2x2. Este sistema tiene la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \qquad (Perú\ b,\ 2015,\ p.\ 77)$$

Además, en el ámbito de la geometría encontramos la presencia de los sistemas de ecuaciones lineales como se muestra en la Figura 8:

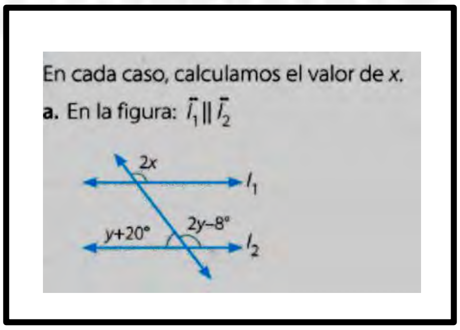


Figura 8. Ejercicio en el ámbito de la Geometría.

Fuente: Perú b (2015, p. 95)

En el texto de nombre Matemática 3, se continúa trabajando los sistemas de ecuaciones lineales 2×2, los mismos que son presentados a modo de motivación estableciendo un problema en el ámbito de la aritmética, de manera similar a como fueron trabajados en Matemática 2 secundaria. Esto lo podemos ver en la Figura 9 dada a continuación:

En las balanzas del margen, hay esferas de igual masa y cubos de igual masa. Escribe las dos ecuaciones que representan las balanzas en equilibrio y halla la masa de una esfera y la de un cubo.

- Sea x la masa de una esfera, e y, la masa de un cubo.

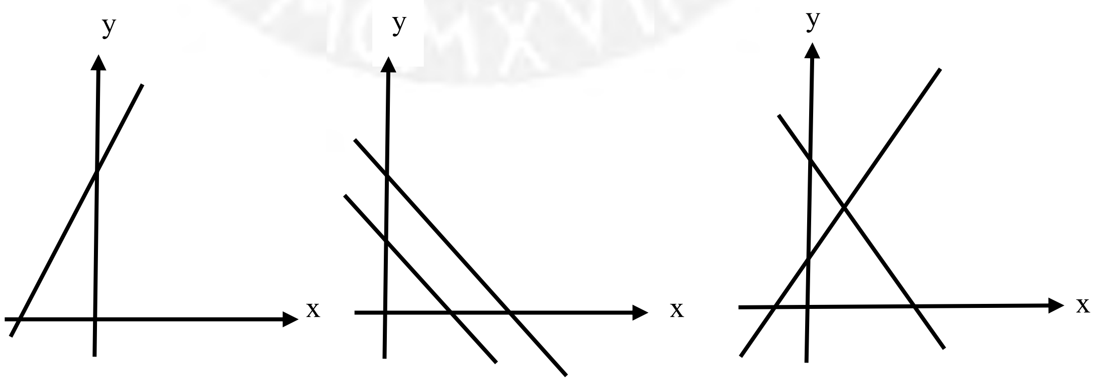
  En la primera balanza: $5x + 2y = 500$ ①

  En la segunda balanza: $2y = x + y + 40 \rightarrow y - x = 40$ ②

Figura 9. Ejercicio en el ámbito de la Aritmética.

Fuente: Perú c (2016, p. 69)

Por otro lado, podemos ver que se mantiene la interpretación de la solución en el ámbito de la geométrica analítica. Además, se presenta como técnica la tabulación, según la cual se dan valores a las incógnitas a partir de los datos que se extraen de la gráfica. Luego, las técnicas que se presentan son diversos métodos algebraicos, como son los métodos de reducción, sustitución e igualación. Además, se preocupan por reconocer los tipos de sistemas teniendo en cuenta su conjunto solución, los cuales se clasifican en: compatibles determinados, aquellos que tienen una única solución, compatibles indeterminados los que tienen infinitas soluciones y sistemas incompatibles los que no tienen solución, tal y como se muestra en la Figura 10, dada a continuación:



Infinitas Soluciones Compatibles Indeterminados	Ninguna Solución Incompatibles	Única Solución Compatibles Determinados

Figura 10. Clasificación de los Sistemas de acuerdo a su representación geométrica (rectas).
Fuente: Adaptado de Perú b (2015, p.78)

Siguiendo la
misma idea, podemos mencionar algunos ejemplos siguiendo esta interpretación, los mismos que pueden encontrarse en los dos textos de Matemática 2 secundaria y Matemática 3, como se muestra a continuación:

Problema: *Determinamos el conjunto solución del sistema*: $\begin{cases} x+y = 60 \\ y = 2x \end{cases}$.

Fuente: Libro de Texto Matemática 2 Secundaria (Perú, 2015b, p.78)

Problema: *Halla gráficamente el conjunto solución del sistema* $\begin{cases} 2x+y = 4 \\ x-y = 2 \end{cases}$.

Fuente: Libro de Texto Matemática 3 Secundaria (Perú, 2016c, p.69)

Además, se indica que para el primer ejemplo, la solución de este sistema es $x=20$ y $y=40$, por lo cual el sistema admite una solución única. Debido a la interpretación de una solución en la institución, se concluye que el sistema es determinado o compatible determinado (rectas concurrentes).

Siguiendo con la breve descripción, podemos mencionar que en los dos últimos textos oficiales: Matemática 4 y Matemática 5 de nuestra educación secundaria, podemos notar que además de reforzar las técnicas ya declaradas en años anteriores como: tabulación, método algebraico, método de reducción, sustitución e igualación; se le agregan las técnicas: método de Cramer y método de Gauss Jordan, en Matemática 4 y Matemática 5, respectivamente. Estas técnicas se incorporarán debido a la ampliación del tipo de tareas de los sistemas de ecuaciones lineales 2×2 a los sistemas de ecuaciones lineales 3×3 (tres variables o tres incógnitas); ya que en un primer momento solo se presentaban sistemas de ecuaciones lineales 2×2.

De manera similar a los textos anteriores la presentación de los sistemas de ecuaciones lineales es dado en el ámbito aritmético, tal y como se muestra en las Figuras 11 y 12, respectivamente, mostrados a continuación:

Jaime piensa construir una cisterna para agua de forma rectangular utilizando 32 m de pared. Si el largo de la cisterna debe medir el triple que su ancho, ¿cuáles serán las medidas del largo y ancho de la cisterna?

Figura 11. Ejercicio en el ámbito aritmético.

Fuente: Perú d (2016, p. 66)

Una empresa de eventos debe realizar un almuerzo que conste de entrada, segundo y postre. Para ello, dicha empresa decide contratar los servicios de tres proveedores, de quienes adquirirá lo que se indica en la tabla.

	Entrada	Segundo	Postre
Proveedor A	15	25	20
Proveedor B	25	20	20
Proveedor C	30	10	40

Si la empresa pagó S/ 840 al proveedor A, S/ 860 al proveedor B, y S/ 880 al proveedor C, ¿a qué precio compró cada plato?

Figura 12. Ejercicio empleando un sistema 3x3.

Fuente: Perú e (2016, p. 59)

Asimismo, en el texto de Matemática 4, se presenta la técnica del Método de Cramer, el cual introduce el nuevo objeto matemático: determinante. Para poder aplicar la técnica sugerida, hacen uso de este nuevo objeto matemático. Sin embargo, lo presentan solo para arreglos de la forma $2x2$; a pesar que la técnica tiene relevancia para sistemas de ecuaciones lineales 3x3. Esto puede ser evidenciado en la Figura 13 dada a continuación:

CÓMO HACER

Resuelve con determinantes el sistema formado por $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x + 4y = 2 \end{cases}$

Figura 13. Ejercicio usando determinantes.

Fuente: Perú d (2016, p. 74)

Además, se menciona de manera muy rápida y a manera de fórmula, la manera de determinar el valor numérico de las incógnitas de un sistema de ecuaciones lineales 3x3, como se muestra en la Figura 14:

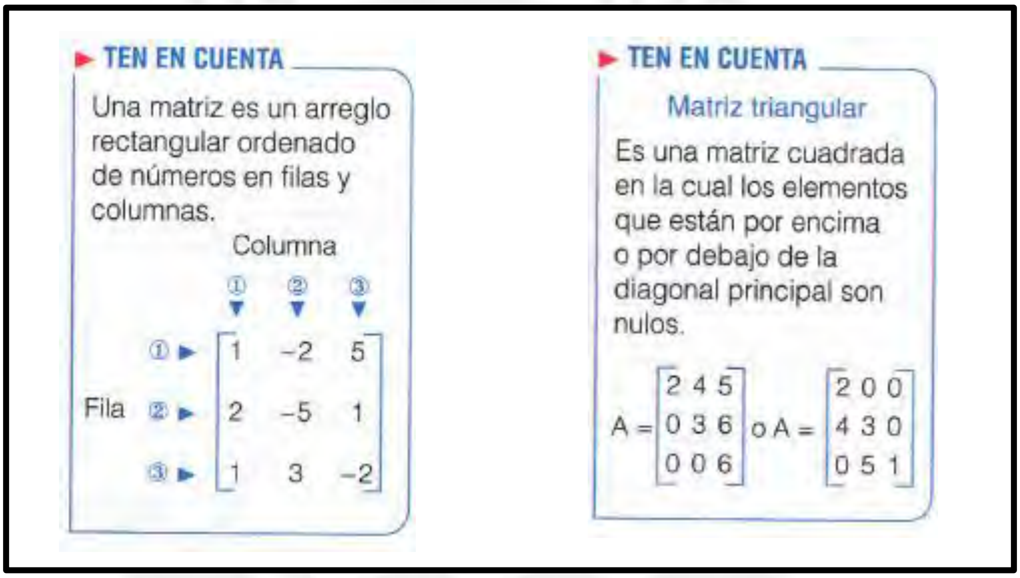
Tres determinantes llamados determinantes de las incógnitas, que se obtienen reemplazando la columna respectiva por las constantes del sistema, en ese mismo orden:

$$|M_x| = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad |M_y| = \begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad |M_z| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}$$

Figura 14. Estrategia para resolver Sistemas 3x3, usando determinantes.

Fuente: Perú d (2016, p. 75)

Por otro lado, en el texto de Matemática 5, se presenta la técnica del Método de Gauss-Jordan, el cual introduce el nuevo objeto matemático: Matriz, para poder así aplicar dicha técnica. Al respecto es preciso resaltar que realizan una pequeña introducción de la teoría de matrices, como se muestra en la Figura 15 dada a continuación:



$$\begin{array}{c|ccc} & ① & ② & ③ \\ \hline ① & 1 & -2 & 5 \\ ② & 2 & -5 & 1 \\ ③ & 1 & 3 & -2 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ o } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 15. Nociones de matrices.

Fuente: Perú e (2016, p. 62)

En resumen, los problemas que son mostrados en los textos del nivel secundario de nuestro país, son dados con la intención de definir formalmente y hacer uso de un sistema de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas a través de las distintas formas de resolución, es decir, las diferentes técnicas que se proponen a lo largo del nivel secundario en nuestro país.

Es precisamente en este contexto, que haciendo una breve revisión del Currículo Nacional (2016) estamos en condiciones de manifestar que los sistemas de ecuaciones lineales forman parte de las recomendaciones del plan de estudios para la educación básica regular, tal y como se muestra en la Figura 16 dada a continuación:

Descripción del nivel de la competencia esperado al final del ciclo VII

Resuelve problemas referidos a analizar cambios continuos o periódicos, o regularidades entre magnitudes, valores o expresiones, traduciéndolas a expresiones algebraicas que pueden contener la regla general de progresiones geométricas, sistema de ecuaciones lineales, ecuaciones y funciones cuadráticas y

Figura 16. Sistemas de Ecuaciones Lineales en la EBR.

Fuente: Currículo Nacional (2016, p. 204)

Asimismo, haciendo un análisis no tan profundo, podemos responder con certeza que los sistemas de ecuaciones lineales se encuentran presentes en los libros de texto de nuestra educación secundaria peruana, tal y como ha sido evidenciado por ejemplo en las Figuras 7, 8 y 9.

Por otro lado, es preciso señalar que de una u otra forma se hace evidente el interés de los docentes de darle realce a los sistemas de ecuaciones lineales en la secundaria peruana, ya que en esta última edición de textos oficiales de nuestro país (2016) se encuentran presentes de manera más continua, durante todo el nivel secundario, cosa que no sucedía en la colección anterior.

Sin embargo, a pesar de que hay un fuerte interés por los sistemas de ecuaciones lineales, ya que estos son efectivamente trabajados en la institución escolar a lo largo de la educación secundaria de nuestro país, es preciso mencionar que no es suficiente, ya que aparecen desarticuladas las técnicas o se presentan de manera aislada los ejercicios propuestos sin tener en cuenta la conexión con los ejercicios tratados en los años posteriores.

Es así que debido a esta necesidad surge el interés de establecer una propuesta que articule los diferentes problemas que se presentan a lo largo de la educación secundaria de nuestro país, con la intención de que los sistemas de ecuaciones lineales cumplan el rol de instrumento modelizador.

CAPÍTULO IV: PROPUESTA DE UN MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERENCIA DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

En el ámbito de la TAD, la construcción de un modelo epistemológico de referencia es importante, debido a que gracias a él podemos analizar cómo un objeto matemático es entendido en una institución o también para poder compararlo con otros modelos como por ejemplo lo que hicieron Bolea (2002), García (2005) y Ruiz Munzón (2010) en sus respectivos trabajos de tesis doctorales. Los autores elaboraron un MER con la intención de poder identificar el modelo epistemológico dominante en una institución escolar que les permitió describir y explicar la práctica docente del profesor de matemática. Por ejemplo, Bolea (2002) manifiesta que, para llevar a cabo dicho estudio, es necesario elaborar un modelo previo al modelo "sistema de ecuaciones" propio de la didáctica. Este modelo debe ser empleado como modelo epistemológico de referencia, el cual es entendido como lo manifiesta Sierra en su trabajo de tesis doctoral:

> El MER puede expresarse en forma de una sucesión de praxeologías que corresponden a la elaboración de *respuestas parciales* a una cuestión problemática inicial. Cada praxeología de la sucesión surge como ampliación o desarrollo de la praxeología anterior, ante las limitaciones de ésta para aportar respuestas a las cuestiones que se plantean. (Sierra, 2006, p. 47).

Teniendo en cuenta lo anterior, vamos a proponer un MER, a partir de un sistema inicial, el cual está constituido de la situación problemática; este sistema actuará como el sistema a modelizar, a través de la aparición de un problema nuevo del sistema inicial que no puede ser resuelto con la técnica del sistema inicial. Debido a ello, es preciso ampliar la praxeología inicial por medio del proceso de modelización a través de los sistemas de ecuaciones lineales.

4.1 Propuesta de los Sistemas de Ecuaciones Lineales como instrumento de modelización

Sistema Inicial: Organización Matemática S

Elegiremos como sistema inicial a la organización matemática S generada por los tipos de tareas cuyo planteamiento puede ser representado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} AX + Y + C = 0 \\ Y + F = 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} AX + Y + C = 0 \\ X + F = 0 \end{cases}$$

donde $A,\ C,\ F \in \mathbb{R}$ y son constantes conocidas, tal que $A \neq 0$.

Con respecto al sistema de partida, cabe resaltar que si $A = 0$ obtenemos:

$$\begin{cases} Y + C = 0 \\ Y + F = 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} Y + C = 0 \\ X + F = 0 \end{cases}$$

Entonces no existiría solución si $C \neq F$ en la primera forma escrita al lado izquierdo, y en la segunda forma, habría solución única.

Debido a ello, es que consideramos nuestro sistema inicial teniendo en cuenta que $A \neq 0$.

Técnica: La técnica de la OM inicial se basa en una cadena de operaciones aritméticas y en la sustitución.

Tecnología y Teoría: Con respecto al bloque tecnológico-teórico podemos ver que se reduce esencialmente al empleo de las magnitudes (longitud, ángulo plano, etc.), en el sentido que se pueden medir, de las operaciones y relaciones que existen entre ellas; así como las propiedades que existen en un determinado marco o contexto de la matemática, ya sea aritmético, algebraico, geométrico, trigonométrico, etc.

Esta OM puede considerarse como el sistema de inicio o de partida **S**.

Por ejemplo, en el ámbito de la ***geometría analítica***, se puede considerar el siguiente tipo de tareas:

T_1 : Dada la ecuación de la recta L y un punto $P \in L$. Si se conoce una de las coordenadas del punto P, determine el valor de la otra coordenada.

Además, la técnica toma los siguientes pasos en este ámbito:

Técnica:

Paso 1: Sustituir las coordenadas del punto P en la ecuación de la recta dada.

Paso 2: Despejar el valor de la otra coordenada a través de operaciones aritméticas.

Veamos un ejemplo del tipo de tareas T_1 para la aplicación de la técnica:

t_1 : **Sea la ecuación de la recta $L: y = -x - 2$. Si el punto $P(a,1) \in L$, determine el valor de a.**

<u>**Solución**</u> **:**

Paso 1: Como $P(a,1) \in L$ entonces el par ordenado satisface la ecuación de la recta, donde $x = a,\ y = 1.$

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Paso 2: De acuerdo a nuestro modelo, esto puede ser escrito de la siguiente manera:

Luego $\begin{cases} x+y+2=0 \\ y-1=0 \end{cases}$

De donde $\begin{cases} x+1+2=0 \\ y=1 \end{cases}$

Es decir $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$

Por lo tanto $a=-3$.

Otro ejemplo de tipo de tareas en el ámbito de las ***funciones lineales*** es:

T_2 : Determine la imagen de la función lineal afín si se conoce el valor de su pre imagen.

Técnica:

Paso 1: Sustituir el valor de la pre imagen en la forma general de la función lineal afín dada.

Paso 2: Despejar el valor de la imagen a través de operaciones aritméticas.

Un ejemplo de este tipo de tareas sería:

t_2 : **Sea la función lineal afín $f(x)=-x-2$. Determine el valor de la imagen si su pre imagen es 2.**

Solución :

Paso 1: Sabemos que la función lineal viene dada por $f(x)=-x-2$, donde $x=2$.

Es decir, en el ámbito de las funciones lineales esta regla de correspondencia se escribe de la siguiente manera $f(x)=-x-2$, con $x=2$.

De acuerdo a nuestro modelo, esto puede ser escrito de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x+y+2=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+2=0 \\ x-2=0 \end{cases}$$

Paso 2: $\begin{cases} 2+y+2=0 \\ x=2 \end{cases}$

De donde $\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$

Luego $f(2)=-4$. Es decir, el valor de la imagen es -4.

Observamos que esta OM no tiene la necesidad de usar la noción de sistema de ecuaciones lineales, pues la técnica de esta OM es a través de operaciones aritméticas y luego el empleo de la sustitución. Además, es preciso mencionar que estos tipos de tareas pueden ser vistos como un objeto el cual puede ser manipulado. Es decir, la técnica puede ser reducida al uso de la siguiente fórmula:

$$\boxed{X = \frac{F - C}{A} \quad , \quad Y = -F} \qquad (f1)$$

Por ejemplo, una tarea específica mostrada anteriormente, la cual se encuentra dentro del tipo de tareas en el ámbito de la geometría analítica, tiene la siguiente estructura:

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, si lo escribimos en términos de nuestro sistema inicial, tenemos:

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$$

Donde $A = 1, C = 2$ y $F = -1$.

Como nuestro objetivo para esta tarea específica es hallar el valor de la variable $"x"$, de acuerdo a nuestra fórmula tenemos que:

$$X = \frac{-1 - 2}{1} = -3 .$$

De igual manera, una de las tareas específicas que se ha mostrado dentro del ámbito de las funciones lineales tiene la siguiente forma:

$$\begin{cases} y = -x - 2 \\ x = 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Por lo tanto, si lo escribimos en términos de nuestro sistema inicial, tenemos:

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases}$$

Donde $A = 1, C = 2$ y $F = -2$.

Como nuestro objetivo para esta tarea específica es hallar el valor de la variable $"y"$, de acuerdo a nuestra fórmula se tiene que:

$$Y = 1(-2) - 2 = -4.$$

Primera Etapa: Organización Matemática S_1

Vemos que en la OM inicial existen problemas en donde la técnica fracasa, para lo cual se requiere ampliar la técnica. Por ejemplo, en el ámbito del álgebra tenemos el siguiente problema:

En el monomio $M(x,y) = x^{2a-b}y^{5a+2b}$**. Si** $G.A. = 30$ **y** $G.R.(x) = 6$ **, determine el valor de** $a+b$**.**

<u>Solución</u> :

Sea $M(x,y) = x^{2a-b}y^{5a+2b}$

Como $G.A. = 30$ **y** $G.R.(x) = 6$, se tiene que:

$$2a - b + 5a + 2b = 30 \text{ y } 2a - b = 6$$

Esto es $7a + b = 30$ y $b - 2a = -6$

Estas ecuaciones las podemos representar de la siguiente manera:

$$\begin{cases} 7a + b - 30 = 0 \\ b + (-2a + 6) = 0 \end{cases}$$

De aquí podemos observar que este sistema tiene la misma forma propuesta en la OM inicial S, entonces aplicamos la técnica anterior (es decir, aplicamos f1) y obtenemos:

$$a = \frac{36 - 2a}{7} \quad ; \quad b = 2a - 6$$

Observamos que no obtenemos una solución para el problema; es decir, la técnica fracasa. A pesar que el problema surge de la organización matemática S, no es posible darle una respuesta al problema dentro de la organización S, pues por ejemplo, en la segunda ecuación no podemos determinar el valor de "b" a través de operaciones aritméticas, como sí ocurría con los tipos de tareas que tenían la forma dada en nuestro sistema inicial S.

Como la técnica fracasa, entonces debemos ampliar la técnica de operaciones aritméticas a las operaciones de expresiones algebraicas, como también, la sustitución de una expresión a otra. Además, el bloque tecnológico está formado por las propiedades físicas que se puedan medir, es decir, las magnitudes (longitud, ángulo plano, etc.), y las propiedades de expresiones algebraicas (conmutatividad, asociatividad, adición, multiplicación, etc.) todo esto justificado dentro de la teoría de las ecuaciones.

Hemos hecho explícito los elementos de una OM que es la ampliación de S, a esta OM la denotaremos por S_1.

Por ejemplo, para este tipo de tareas dentro del ámbito del álgebra, la técnica tomaría los siguientes pasos:

Técnica:

Paso 1: Establecer los exponentes de la expresión algebraica en términos de variables, por ejemplo, $"x"$ e $"y"$.

Paso 2: Obtener la variable $"y"$ como una expresión algebraica en términos de $"x"$ en una de las ecuaciones.

Paso 3: Sustituir la expresión algebraica obtenida en la otra ecuación.

Paso 4: Colocar las restricciones que debe satisfacer el problema.

Un ejemplo de este tipo de tareas sería precisamente lo que motivó la ampliación de nuestro sistema inicial S

t_3 : **En el monomio** $M(x,y)=x^{2a-b}y^{5a+2b}$ **. Si** $G.A.=30$ **y** $G.R.(x)=6$ **, determine el valor de** $a+b$ **.**

<u>**Solución**</u> **:**

Sea $M(x,y)=x^{2a-b}y^{5a+2b}$

Como $G.A.=30$ **y** $G.R.(x)=6$, se tiene:

$2a-b+5a+2b=30$ y $2a-b=6$

Esto es $7a+b=30$ y $b-2a=-6$

Entonces obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 7a+b-30=0 \\ -2a+b+6=0 \end{cases}$$

Luego $\begin{cases} 7a+b-30=0 \\ b=2a-6 \end{cases}$

Luego $\begin{cases} 7a+2a-6-30=0 \\ b=2a-6 \end{cases}$

Entonces $\begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases}$

Por lo tanto $a + b = 6$.

Es decir, la organización matemática S_1 generada por los tipos de tareas cuyo planteamiento puede ser representado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} AX + BY + C = 0 \\ DX + Y + F = 0 \end{cases} \quad ; \quad A \neq B.D$$

donde $A,\ B,\ C,\ D,\ F\ \in$ ¡ y son constantes conocidas.

Técnica: Operaciones de expresiones algebraicas y sustitución de una expresión a otra.

Tecnología: Propiedades de las magnitudes (longitud, ángulo plano, etc.) y de las relaciones que existen entre ellas, teniendo presente las propiedades que existen en cada uno de los contextos de la matemática, así como las propiedades de expresiones algebraicas (conmutatividad, asociatividad, adición, multiplicación, etc.).

Teoría: Teoría de ecuaciones.

Asimismo, podemos señalar que estos tipos de tareas pueden ser vistos como un objeto, los cuales pueden ser manipulados.

Entonces, de la segunda ecuación tenemos que $Y = -F - DX$, la cual la vamos a sustituir en la primera ecuación. Así, obtenemos $AX - B(F + DX) + C = 0$

Como $A \neq B.D$, entonces $X = \dfrac{B.F - C}{A - B.D}$.

Debido a ello, podemos ver que la técnica para este sistema S_1 puede ser reducida a la siguiente fórmula:

$$\boxed{X = \frac{B.F - C}{A - B.D} \quad , \quad Y = -F - DX} \qquad (f2)$$

Aquí podemos ver que si $A = B.D$ no existe solución siempre que $C \neq B.F$; pero si $C = B.F$ entonces se reduce solamente a una ecuación de la forma $AX + BY + C = 0$ la cual nos va generar infinitas soluciones.

Por ejemplo, una tarea específica mostrada anteriormente, la cual se encuentra dentro del tipo de tareas en el ámbito del álgebra, tiene la siguiente estructura:

$$\begin{cases} 7a+b-30=0 \\ -2a+b+6=0 \end{cases}$$

Donde $A=7$, $B=1$, $C=-30$, $D=-2$ y $F=6$.

Aquí solo por cuestión de orden, vamos a suponer que la primera variable hace mención a la variable "x" en nuestro modelo; y por consiguiente la segunda variable hace mención a la variable "y" en nuestro modelo.

Como nuestro objetivo para esta tarea específica es hallar el valor de la variable "x", entonces aplicamos la técnica $f2$ y obtenemos:

$$X=\frac{(1).(6)-(-30)}{7-(1).(-2)}=\frac{36}{9}=4.$$

Segunda Etapa: Organización Matemática S_2

En nuestro afán de ampliar la organización matemática se ha considerado un caso más general que se ejemplifica con la siguiente tarea dentro del ámbito de la ***trigonometría***:

Si $(3x+2y)°$, $(2x+y+35)°$ **y** $(7x)°$ **son ángulos agudos tales que** $\text{sen}(3x+2y)°=\cos(2x+y+35)°$ **y** $\text{tg}(3x+2y)°\text{c}\,\text{tg}\,7x°=1$, **calcule el valor de** $\text{sen}(4x+y)°$.

Tenemos

$$\begin{cases} \text{sen}(3x+2y)° = \cos(2x+y+35)° \\ \text{tg}(3x+2y)°\ \text{ctg}\ 7x° = 1 \end{cases}$$

Como los ángulos son agudos, se tiene que

$$\begin{cases} (3x+2y)° + (2x+y+35)° = 90° \\ (3x+2y)° = 7x° \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{cases} 5x+3y-55=0 \\ -4x+2y=0 \end{cases}$$

Si aplicamos la técnica de S_1 (aplicamos f2)

$$X=\frac{3.0-(-55)}{5-(3).(-4)}=\frac{55}{17} \quad \Rightarrow \quad Y=-0-(-4)\left(\frac{55}{17}\right)=\frac{4.55}{17}$$

Pero si reemplazamos esta solución en el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 5\left(\dfrac{55}{17}\right) + 3\left(\dfrac{4.55}{17}\right) - 55 = 0 \\ -4\left(\dfrac{55}{17}\right) + 2\left(\dfrac{4.55}{17}\right) \neq 0 \end{cases}$$

Entonces la técnica fracasa por el motivo que en este problema se está considerando parámetros adicionales. Por lo tanto, consideraremos la organización matemática S_2 generado por los tipos de tareas cuyo planteamiento va ser representado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} AX + BY + C = 0 \\ DX + EY + F = 0 \end{cases} \quad ; \quad AE - BD \neq 0$$

donde $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F\ \in$ ¡ , las cuales son constantes conocidas.

Para esta OM consideraremos la siguiente técnica:

Como $AE - BD \neq 0$, entonces $B \neq 0 \vee E \neq 0$.

Si $B \neq 0$, entonces multiplicamos a la primera ecuación por $\dfrac{1}{B}$.

Si $E \neq 0$, entonces multiplicamos a la segunda ecuación por $\dfrac{1}{E}$.

Entonces en cualquiera de los dos casos mostrados anteriormente, podemos notar que resulta un planteamiento de un tipo de tareas de S_1, en las cuales podemos aplicar la técnica ya conocida dada en $f2$.

Técnica: Para materializar la nueva técnica, debemos utilizar ecuaciones equivalentes, en el último sistema y operaciones aritméticas, así, podemos escribirlo en términos de la organización matemática S_1 .

Tecnología: Con respecto a la tecnología podemos mencionar que nuestra técnica se justifica por medio de las relaciones y/o propiedades que existen en cada contexto de la matemática, así como las propiedades de expresiones algebraicas y las definiciones de las ecuaciones equivalentes.

Teoría: Todo esto nuevamente es respaldado por la teoría de las ecuaciones.

Luego, aplicando la nueva técnica tenemos

$$\begin{cases} 5x + 3y - 55 = 0 \\ -4x + 2y = 0 \end{cases} \quad \text{a} \quad \begin{cases} 5x + 3y - 55 = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases}$$

Donde $A=5$, $C=-55$, $D=-2$ y $F=0$.

Es así que, podemos notar que en el segundo sistema de ecuaciones, estamos en condiciones de aplicar la técnica $f2$ planteada anteriormente, obteniendo así:

$$X = \frac{0-(-55)}{5-(-6)} = 5 \quad \text{y} \quad Y=-0-(-2)(5)=10.$$

Entonces, podemos notar que un sistema con una estructura similar a la que se ha presentado en la tarea mostrada, puede ser reducida a un sistema cuyo planteamiento va poder ser escrito en términos de la organización matemática S_1.

Observamos que para resolver el problema estamos utilizando la noción de sistema de ecuaciones lineales.

Por otro lado, para llevarlo o expresarlo en términos del sistema S_1, lo que podemos hacer es multiplicar a la primera ecuación del sistema por E, mientras que de la segunda ecuación despejamos el término $"EY"$, obteniendo así:

$$\begin{cases} DX+EY+F=0 \\ \frac{A}{B}X+Y+\frac{C}{B}=0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} AX+BY+C=0 \\ \frac{D}{E}X+Y+\frac{F}{E}=0 \end{cases}$$

Luego aplicamos la fórmula $f2$, obteniendo así:

$$X=\frac{\frac{E.C}{B}-F}{D-\frac{E.A}{B}} \quad , \quad Y=-\frac{C}{B}-\frac{A}{B}X$$

o

$$X=\frac{\frac{B.F}{E}-C}{A-\frac{B.D}{E}} \quad , \quad Y=-\frac{F}{E}-\frac{D}{E}X$$

Entonces $$X=\frac{B.F-C.E}{A.E-B.D} \quad , \quad \begin{cases} Y=-\left(\frac{C+AX}{B}\right), \ B\neq 0 \\ Y=-\left(\frac{F+DX}{E}\right), \ E\neq 0 \end{cases}$$

Aquí nos detenemos un momento y pensamos en los distintos casos que pueden desprenderse al aplicar esta técnica:

Si $E = 0 \quad \Rightarrow \quad X = -\dfrac{F}{D}$

Es preciso resaltar, que se desprende que $D \neq 0$ pues tenemos que $AE - BD \neq 0$.

Si $E \neq 0 \quad \Rightarrow \quad X = \dfrac{BF - CE}{AE - BD} \quad , \quad Y = -\dfrac{F}{E} - \dfrac{D}{E}X$

Por otro lado, cabe señalar que si consideramos el caso en que $AE - BD = 0$, tendríamos:

Si $BF - EC = 0 \quad \Rightarrow$ el sistema S_2 tiene infinitas soluciones.

Si $BF - EC \neq 0 \quad \Rightarrow$ el sistema S_2 no admite solución.

Por otro lado, cabe mencionar que una característica que observamos es que la OM es un instrumento que permite plantear y resolver problemas de diferentes ámbitos matemáticos (aritméticos, geométricos, combinatorios, comerciales, etc.) que son muy difíciles de plantear y resolver sin la noción de sistema de ecuaciones lineales.

Tercera Etapa: Organización Matemática S_3

Presentaremos la siguiente tarea también en el ámbito de la trigonometría:

Sean los ángulos coterminales α y β tales que $\alpha + \beta = -120°$; donde α tiene sentido antihorario y es menor que una vuelta. Si α pertenece al segundo cuadrante, determine el valor de $tg\beta$.

Si aplicamos el modelo anterior, procederíamos de la siguiente forma:

Como α y β son ángulos coterminales, se tiene que $\alpha - \beta = 360°n \quad ; \quad n \in \mathbb{Z}$

Luego

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 360°n \quad / \quad n \in \mathbb{Z} \\ \alpha + \beta = -120° \end{cases}$$

Se observa que en nuestro sistema no es posible hallar los valores de las variables "α" o "β" empleando la técnica mostrada en la organización matemática S_2, debido a que en este nuevo problema está presente un término desconocido, es decir el sistema viene acompañado de un parámetro. Notar que la técnica propuesta anteriormente fracasa, por lo cual es necesario ampliar la OM.

Asimismo, denotaremos con S_3 a dicha OM ampliada la cual va ser generada por los tipos de tareas cuyo planteamiento será representado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} AX + BY + C = 0 \\ DX + EY + F = 0 \end{cases}$$

donde $A, B, D, E, F \in \mathbb{R}$, y son constantes conocidas, y C es el parámetro que toma valores en $\mathbb{R}$.

Técnica: La técnica que podemos emplear para la OM ampliada, S_3, se basa en la sustitución, las operaciones de expresiones algebraicas, el uso de las ecuaciones equivalentes y además encontrar un conjunto específico del cual se puede obtener los valores de los parámetros, o sea de los términos desconocidos. Observamos que no es suficiente con aplicar operaciones aritméticas, operaciones de expresiones algebraicas y considerar ecuaciones equivalentes, sino que ahora tenemos la necesidad de encontrar los valores que toma el término desconocido.

Tecnología: Con respecto a la tecnología podemos decir que el uso de esta técnica está respaldado por las ecuaciones equivalentes, y las operaciones en los números reales, ya que $\mathbb{R}$ es un cuerpo.

Teoría: También, con respecto a la justificación de nuestra tecnología vemos que se justifica gracias a la teoría de ecuaciones y a la teoría de cuerpos.

Un ejemplo de este tipo de tareas se encuentra en el ámbito de la trigonometría, y se presenta a continuación:

T_3: Dada una condición propia del ámbito de la trigonometría, como la de los ángulos coterminales, y conociendo una relación entre la medida de dos ángulos, determine alguna razón trigonométrica de uno de los ángulos dados.

La técnica en este ámbito toma los siguientes pasos:

Técnica:

Paso 1: Escribir la condición que satisfacen los ángulos dados, teniendo en cuenta que son coterminales.

Paso 2: Establecer el sistema de ecuaciones que se establece a partir de la información dada en el campo de la trigonometría y escribirla en términos del sistema S_2 establecido anteriormente.

Paso 3: Despejar una de las variables de una de las ecuaciones y sustituirla en la otra ecuación.

Paso 4: Resolver la ecuación anterior y obtener así el valor de la variable en función de nuestro término desconocido, para poder aplicar las restricciones propias del ámbito en que se trabaja.

Paso 5: Reemplazar el o los valores obtenidos en el sistema, logrando así el valor de las variables, para poder así determinar la razón trigonométrica del ángulo que nos piden.

Un ejemplo de este tipo de tareas sería el que motivó la ampliación de nuestro sistema S_2.

t_4 : **Sean los ángulos coterminales** α **y** β **tales que** $\alpha+\beta=-120°$ **; donde** α **tiene sentido antihorario y es menor que una vuelta. Si** α **pertenece al segundo cuadrante, determine el valor de** $tg\beta$.

Solución :

Paso 1: Como α y β son ángulos coterminales, se tiene que $\alpha-\beta=360°n \quad ; \quad n \in ¢$

Paso 2: Luego

$$\begin{cases} \alpha-\beta=360°n \\ \alpha+\beta=-120° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha-\beta-360n=0 \\ \alpha+\beta+120=0 \end{cases}$$

Paso 3: Sea

$$\begin{cases} \alpha-\beta-360n=0 \\ \beta=-120-\alpha \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{cases} \alpha-(-120-\alpha)-360n=0 \\ \beta=-120-\alpha \end{cases}$$

Paso 4: Luego

$$\alpha+120+\alpha=360n$$

$$2\alpha=360n-120$$

$$\alpha=180n-60$$

Como α tiene sentido antihorario y además pertenece al segundo cuadrante, se tiene que

$$90<180n-60<180$$

$$150<180n<240$$

$$5<6n<8$$

$$0.83<n<1.33$$

Y como $n \in ¢ \subset ¡$, tenemos que $n = 1$.

Paso 5: Luego

$\alpha = 180n - 60 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 120°$.

Además $\beta = -120 - \alpha \quad \Rightarrow \quad \beta = -240°$.

Por lo tanto, $tg\beta = tg(-240°) = -tg(180° + 60°) = -\sqrt{3}$.

Cuarta Etapa: Organización Matemática S_4

Siguiendo la misma idea de ir ampliando nuestra OM, ahora nos enfrentamos a la siguiente tarea, por ejemplo, en el ámbito de la aritmética:

Un agricultor ha separado 10 animales entre patos, conejos y cuyes para la venta del fin de semana, además el número de patas de estos animales es 36. Si se sabe que la venta total de los animales asciende a 365 soles, teniendo en cuenta que el precio del pato, del conejo y del cuy es 60 soles, 40 soles y 25 soles, respectivamente, determine el número de cada tipo de animales que el agricultor a separado para que sean vendidos.

Si se pretende aplicar el modelo anterior, procederíamos de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2x + 4y + 4z = 36 \\ 60x + 40y + 25z = 365 \end{cases}$$; x : número de patos, y : número de conejos, z : número de cuyes.

Aquí podemos ver que la técnica de nuestro sistema anterior fracasa debido a que ahora no sólo tenemos dos variables involucradas, sino tres variables. Así como nuestra OM está siendo ampliada debido a este tipo de tareas, es preciso ampliar nuestra técnica, con la intención de hacerla cada vez más eficaz.

Una posible ampliación de la organización matemática S_3 es dada a través del uso de la siguiente técnica:

Despejar una variable de las ecuaciones y luego reemplazarla en las dos ecuaciones restantes, para obtener así un sistema de ecuaciones similar a lo que se ha obtenido en S_3 . Si aplicamos esta técnica al sistema de ecuaciones como por ejemplo al del problema anterior, se puede decir que tendremos una organización S'_4 , la cual es evidentemente una OM ampliada generada por los tipos de tareas cuyo planteamiento va ser representado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} A_1 X + A_2 Y + A_3 Z + A_4 = 0 \\ B_1 X + B_2 Y + B_3 Z + B_4 = 0 \\ C_1 X + C_2 Y + C_3 Z + C_4 = 0 \end{cases}$$

donde $A_i, B_i, C_i \in$ ¡ ; $1 \leq i \leq 4$ son constantes conocidas.

Entonces, de la segunda ecuación tenemos que

$$B_2 Y = -B_1 X - B_3 Z - B_4$$

$$\Rightarrow \quad Y = -\frac{B_1}{B_2} X - \frac{B_3}{B_2} Z - \frac{B_4}{B_2}$$

Luego este valor lo vamos a sustituir en las dos ecuaciones restantes, obteniendo así un sistema de ecuaciones con dos variables. Es decir,

$$\begin{cases} A_1 X + A_2 \left(-\frac{B_1}{B_2} X - \frac{B_3}{B_2} Z - \frac{B_4}{B_2} \right) + A_3 Z + A_4 = 0 \\ C_1 X + C_2 \left(-\frac{B_1}{B_2} X - \frac{B_3}{B_2} Z - \frac{B_4}{B_2} \right) + C_3 Z + C_4 = 0 \\ Y = -\frac{B_1}{B_2} X - \frac{B_3}{B_2} Z - \frac{B_4}{B_2} \end{cases}$$

Luego, ordenando y agrupando adecuadamente los términos semejantes, se tiene:

$$\begin{cases} \left(A_1 - \frac{A_2 B_1}{B_2} \right) X + \left(A_3 - \frac{A_2 B_3}{B_2} \right) Z + \left(A_4 - \frac{A_2 B_4}{B_2} \right) = 0 \\ \left(C_1 - \frac{C_2 B_1}{B_2} \right) X + \left(C_3 - \frac{C_2 B_3}{B_2} \right) Z + \left(C_4 - \frac{C_2 B_4}{B_2} \right) = 0 \end{cases}$$

Dicho sistema, puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\begin{cases} AX + BZ + C = 0 \\ DX + EZ + F = 0 \end{cases}$$

donde

$$A = A_1 - \frac{A_2B_1}{B_2}, \qquad B = A_3 - \frac{A_2B_3}{B_2}, \qquad C = A_4 - \frac{A_2B_4}{B_2}, \qquad D = C_1 - \frac{C_2B_1}{B_2}$$

$$E = C_3 - \frac{C_2B_3}{B_2} \quad \text{y} \quad F = C_4 - \frac{C_2B_4}{B_2}$$

Es así que se puede apreciar que el sistema obtenido se ha reducido a un sistema de ecuaciones con dos variables. Debido a ello, podemos decir que con la técnica propuesta para los tipos de tareas que pueden ser abordados dentro del sistema S'_4, quedaría reducido simplemente al uso de la técnica ya mencionada en el sistema S_2, que luego de sustituir el valor de los parámetros en la fórmula obtenida en el sistema S_2, quedaría de la siguiente manera:

$$X = \frac{BF - CE}{AE - BD} = \frac{\left(A_3 - \frac{A_2B_3}{B_2}\right)\left(C_4 - \frac{C_2B_4}{B_2}\right) - \left(A_4 - \frac{A_2B_4}{B_2}\right)\left(C_3 - \frac{C_2B_3}{B_2}\right)}{\left(A_1 - \frac{A_2B_1}{B_2}\right)\left(C_3 - \frac{C_2B_3}{B_2}\right) - \left(A_3 - \frac{A_2B_3}{B_2}\right)\left(C_1 - \frac{C_2B_1}{B_2}\right)}$$

$$Z = -\frac{F}{E} - \frac{D}{E}X = -\left(\frac{C_4 - \frac{C_2B_4}{B_2}}{C_3 - \frac{C_2B_3}{B_2}}\right) - \left(\frac{C_1 - \frac{C_2B_1}{B_2}}{C_3 - \frac{C_2B_3}{B_2}}\right)X$$

$$Y = -\frac{B_1}{B_2}X - \frac{B_3}{B_2}Z - \frac{B_4}{B_2}$$

Como observamos la técnica anterior es muy costosa para resolver este tipo de problemas, y debido a ello deja de ser eficaz, por lo cual creemos conveniente considerar una organización matemática S_4 generada por los tipos de tareas cuyo planteamiento va ser representado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} A_1\,X + A_2\,Y + A_3\,Z + A_4 = 0 \\ B_1\,X + B_2\,Y + B_3\,Z + B_4 = 0 \\ C_1\,X + C_2\,Y + C_3\,Z + C_4 = 0 \end{cases}$$

donde $A_i,\ B_i,\ C_i \in$ ¡ $;\ 1 \le i \le 4$ son constantes conocidas.

Dichos tipos de tareas están asociados a la siguiente técnica, tecnología y teoría.

Técnica:

La técnica que vamos a considerar es el método de eliminación Gaussiana, el cual consiste en una serie de manipulaciones de operaciones que se realizan a una fila de un arreglo, con el objetivo de reducirlo a un sistema más sencillo.

Tecnología - Teoría:

La tecnología que nos ayuda a justificar es la de los sistemas de ecuaciones equivalentes y no simplemente la de las ecuaciones equivalentes, además, esta tecnología se justifica en la misma teoría de sistemas de ecuaciones lineales.

Retomando el problema que provocó la ampliación de nuestro sistema S_3, en el ámbito de la aritmética:

t_6 : **Un agricultor ha separado 10 animales entre patos, conejos y cuyes para la venta del fin de semana, además el número de patas de estos animales es 36. Si se sabe que la venta total de los animales asciende a 365 soles, teniendo en cuenta que el precio del pato, del conejo y del cuy es 60 soles, 40 soles y 25 soles, respectivamente, determine el número de cada tipo de animales que el agricultor a separado para que sean vendidos.**

Para ejemplificar esta nueva técnica a través de la Eliminación gaussiana, tenemos:

<u>**Solución**</u> :

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ 2x+4y+4z=36 \\ 60x+40y+25z=365 \end{cases}$$; x : número de patos, y : número de conejos, z : número de cuyes.

De acuerdo a nuestro modelo, esto puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ 2x+4y+4z=36 \\ 60x+40y+25z=365 \end{cases}$$

Luego

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 4 & 4 & 36 \\ 60 & 40 & 25 & 365 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 2 & 18 \\ 12 & 8 & 5 & 73 \end{array}\right]$$

Entonces

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -4 & -7 & -47 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & -15 \end{array}\right]$$

Entonces

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{array}\right]$$

Luego

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ y+\ z=8 \\ 3z=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+5=10 \\ y+\ 5=8 \\ z=5 \end{cases}$$

De donde

$$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=5 \end{cases}$$

Por lo tanto, el agricultor a separado 2 patos, 3 conejos y 5 cuyes para que sean vendidos el fin de semana.

Se observa que la técnica es una ampliación de S_2, pues en esta técnica de S_4 se utilizan sistemas de ecuaciones lineales equivalentes para reducirlos a un sistema más sencillo para poder aplicar la técnica propuesta dada en S_2 o seguir reduciéndolo hasta encontrar las soluciones del sistema propuesto.

Por otro lado, este proceso de ampliación sucesivas de OM termina en S_4, pues queremos dar una propuesta de una OM asociada a los sistemas de ecuaciones lineales en la educación secundaria del Perú, el cual culmina en sistemas de tres variables y 3 ecuaciones, según lo que se observa en los textos oficiales. Además, esta técnica sirve para resolver sistemas de orden nxm, es decir no tan solo sistemas cuadrados, con lo cual podemos dar realce a la técnica propuesta, ya que la eliminación gaussiana es una técnica potente.

4.2 Rasgos Característicos de la Modelización algebraica propuesta a través de los Sistemas de Ecuaciones Lineales

En esta sección nuestro interés será verificar si el MER de los sistemas de ecuaciones lineales propuesto en la sección anterior, cumple con los rasgos característicos propios de una modelización algebraica en el sentido de Bolea (2002).

Primer Rasgo Característico de una Modelización Algebraica:

El primer rasgo característico es

> modelizan explícita y materialmente las técnicas matemáticas que forman parte de la organización matemática que juega el papel de sistema a modelizar. Esta condición comporta que, una vez modelizadas algebraicamente, las técnicas pueden ser manipuladas como nuevos objetos matemáticos, lo que posibilita y hasta provoca el rápido desarrollo de las mismas. (Bolea, 2002, p. 85)

Con respecto a este primer rasgo característico, se tiene que la técnica de S_3 permite modelizar explícita y materialmente la técnica del sistema inicial S, en el sentido de que la técnica en S_3 resulta de la generalización de la técnica dada en el sistema inicial S ya que resuelve así los tipos de problemas que pueden ser catalogados a lo largo de los diferentes sistemas que hemos considerado en nuestra propuesta para poder ir del sistema inicial S y llegar al sistema S_3.

Asimismo, en el sistema S_3 una vez aplicada la técnica, como hemos llegado a establecer la siguiente fórmula, podemos manipularla como un objeto matemático independiente, lo cual nos facilitará el rápido desarrollo de las mismas.

$$X = \frac{BF - CE}{AE - BD} = \frac{\left(A_3 - \frac{A_2B_3}{B_2}\right)\left(C_4 - \frac{C_2B_4}{B_2}\right) - \left(A_4 - \frac{A_2B_4}{B_2}\right)\left(C_3 - \frac{C_2B_3}{B_2}\right)}{\left(A_1 - \frac{A_2B_1}{B_2}\right)\left(C_3 - \frac{C_2B_3}{B_2}\right) - \left(A_3 - \frac{A_2B_3}{B_2}\right)\left(C_1 - \frac{C_2B_1}{B_2}\right)}$$

$$Z = -\frac{F}{E} - \frac{D}{E}X = -\left(\frac{C_4 - \frac{C_2B_4}{B_2}}{C_3 - \frac{C_2B_3}{B_2}}\right) - \left(\frac{C_1 - \frac{C_2B_1}{B_2}}{C_3 - \frac{C_2B_3}{B_2}}\right)X$$

$$Y = -\frac{B_1}{B_2}X - \frac{B_3}{B_2}Z - \frac{B_4}{B_2}$$

Segundo Rasgo Característico de una Modelización Algebraica:

El segundo rasgo característico es

> modelizan íntegramente todos los componentes de la organización matemática que hace el papel de sistema, en lugar de limitarse a modelizar aisladamente algunos de dichos componentes. Veremos que esta modelización global permite, en muchos casos, considerar que el modelo algebraico, como nueva organización matemática, constituye una extensión de la organización sistema inicial. (Bolea, 2002, p. 85)

Con respecto al segundo rasgo característico, se tiene que efectivamente las organizaciones matemáticas que han sido algebrizadas a lo largo de los diferentes sistemas mostrados en nuestra propuesta, resultan de prolongar y extender la organización matemática inicial, ya que nuestro modelo se basa precisamente en ampliar los tipos de tareas al igual que las técnicas empleadas, como ya lo hemos mostrado en el primer rasgo característico, además de ampliar los elementos tecnológicos-teóricos.

Debido a que el MER de los sistemas de ecuaciones lineales que hemos propuesto satisfacen los dos rasgos característicos en el sentido de Bolea (2002), podemos concluir que es una organización matemática algebrizada.

Características del MER Propuesto como Instrumento de Modelización

En este apartado, queremos mencionar algunas de las características que hemos identificado en el MER propuesto, teniendo en cuenta las características propuestas por Bolea (2002). Estas son:

MA1: Como hemos podido ver, los sistemas de ecuaciones lineales es un instrumento para resolver problemas de sistemas conocidos matemáticos o extra matemáticos: aritméticos, geométricos, físicos, comerciales, de la vida cotidiana, etc.

MA3: El instrumento algebraico permite plantear y resolver problemas de diferentes ámbitos matemáticos (aritméticos, geométricos, combinatorios, comerciales, etc.) que son muy difíciles de plantear y resolver sin la noción de sistemas de ecuaciones lineales.

MA5: Algunas de las mejores situaciones para introducir los sistemas de ecuaciones lineales son los problemas en los cuales intervienen dos variables desconocidas o más y que, por ello, no pueden resolverse mediante técnicas directas aritméticas o geométricas.

MA6: Dado que los sistemas de ecuaciones lineales surgen inicialmente como herramienta de modelización de sistemas matemáticos o extra matemáticos, es necesario conocer mínimamente el sistema que se quiere modelizar y, en particular, las limitaciones del trabajo dentro de este sistema, que en este caso viene dado por las restricciones las cuales dependerán del ámbito en el que se trabaje.

<u>**Indicadores del Grado de Algebrización**</u>

Una vez que ya sabemos que la organización matemática propuesta para los sistemas de ecuaciones lineales es una OM algebrizada, el siguiente paso será "medir" qué tan algebrizada se encuentra esta. Para ello se considerarán los indicadores que propone Bolea (2002) para determinar el grado de algebrización de una organización matemática.

Primer Indicador del Grado de Algebrización: Manipulación de la estructura global de los problemas

Con respecto a este primer indicador, podemos señalar que nuestra organización matemática tiene la peculiaridad de tratar con problemas cada vez más generales ya que, por ejemplo, a medida que vamos ampliando la organización matemática, se llega a una etapa en la cual manipulamos las incógnitas, entendidas como objetos matemáticos desconocidos como si fuesen conocidas, y los parámetros entendidos de forma muy general como objetos matemáticos conocidos como si fuesen desconocidos.

Para aclarar lo que se pretende decir, mostramos en forma general el siguiente sistema:

$$\begin{cases} AX + BY + C = 0 \\ DX + EY + F = 0 \end{cases} \quad ; \quad AE - BD \neq 0$$

Si aplicamos la técnica mostrada en el sistema S_2, se tiene que:

$$\boxed{X = \frac{BF - CE}{AE - BD} \quad , \quad Y = -\frac{F}{E} - \frac{D}{E}X}$$

Es decir, los valores de las incógnitas quedan en función de los parámetros, que a pesar de que en forma general son objetos matemáticos conocidos, estos son vistos como si fuesen desconocidos cuando aparecen en la fórmula.

Segundo Indicador del Grado de Algebrización: Tematización de las técnicas y nueva problemática al nivel tecnológico

Con respecto a este segundo indicador, podemos señalar que en la primera etapa de la organización matemática propuesta se pueden identificar las restricciones para un determinado tipo de problemas o de tareas. En particular, los que pueden ser reducidas a la forma del sistema S_1 o, determinar cuando no tiene soluciones, o en qué casos la solución es única, etc.

Por ejemplo, en la Primera Etapa, se mostró el siguiente sistema

$$\begin{cases} AX + BY + C = 0 \\ DX + Y + F = 0 \end{cases} \quad ; \quad A \neq B.D$$

Y se hizo el siguiente análisis, para el estudio de la naturaleza de las soluciones. Por ejemplo, se mencionó que en estos sistemas se puede observar que si $A = B.D$ no existiría solución siempre que $C \neq F$; pero si $C = F$ entonces dicho sistema se reduciría solamente a una ecuación de la forma $AX + BY + C = 0$ la cual nos generaría infinitas soluciones. Y en caso de que $A \neq B.D$, el sistema tendría solución única.

Tercer Indicador del Grado de Algebrización: Unificación y reducción de los tipos de problemas, técnicas y tecnologías

En relación a este tercer indicador, podemos señalar que la organización matemática propuesta unifica diferentes tipos de problemas en los distintos ámbitos de la matemática. Por tal motivo, tenemos la certeza que nuestra organización matemática no es una organización matemática puntual. Sin embargo, restaría justificar que los diferentes tipos de tareas son justificados por la misma tecnología, para poder afirmar que nuestra organización matemática sea local. Al respecto, Bolea (2002) manifiesta que para que este indicador sea relevante, es necesario que la organización matemática evaluada sea suficientemente rica, esto es, que esté formada por un número suficiente de tipos de problemas.

Cuarto Indicador del Grado de Algebrización: Emergencia de tipos de problemas independientes del sistema modelizado

Con respecto a este cuarto indicador, es preciso mencionar que nuestra organización matemática se ha ido alejando cada vez más de nuestro sistema inicial S, ya que este fue de la forma

$$\begin{cases} AX + Y + C = 0 \\ Y + F = 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} AX + Y + C = 0 \\ X + F = 0 \end{cases}$$

donde $A,\ C,\ F \in \mathbb{R}$ y son constantes conocidas.

Y hemos culminamos con un sistema S_4 de la siguiente forma:

$$\begin{cases} A_1 X + A_2 Y + A_3 Z + A_4 = 0 \\ B_1 X + B_2 Y + B_3 Z + B_4 = 0 \\ C_1 X + C_2 Y + C_3 Z + C_4 = 0 \end{cases}$$

donde $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$, las cuales son constantes conocidas.

En esta última etapa podemos ver incluso la potencialidad de esta última técnica, ya que es válida no sólo para sistemas cuadrados, ni los que ya se han visto, sino para sistemas de ecuaciones lineales de la forma nxm, por lo cual podemos incluso atrevernos a decir que es suficiente con ampliar hasta esta etapa.

4.3 Ejemplos de tipos de tareas en diferentes ámbitos de la matemática

En esta sección, vamos a dar algunos ejemplos de los diferentes tipos de tareas en diversos ámbitos de la matemática, los cuales pueden ser ubicados dentro de alguna de las etapas mostradas en nuestro MER de los sistemas de ecuaciones lineales, ya que tienen la estructura de alguno de los sistemas que van desde S hasta S_4.

TIPOS DE TAREAS ASOCIADAS A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

Considerando a las rectas como objetos geométricos propiamente, un tipo de tarea específica puede ser

a) T_1: Dada la ecuación de la recta L y un punto $P \in L$. Si se conoce una de las coordenadas del punto P, determine el valor de la otra coordenada.

Esto lo podemos ejemplificar a través de la siguiente tarea:

Sea la ecuación de la recta $L: x+y+2=0$. Si el punto $P(a,1) \in L$, determine el valor de a.

Solución :

Paso 1: $\begin{cases} x+y+2=0 \\ y=1 \end{cases}$

Paso 2: $x+1+2=0 \quad \Rightarrow \quad x+3=0 \quad \Rightarrow \quad x=-3.$

Además, otro tipo de tarea puede ser

b) T_2: Dada la pendiente de la recta L y un punto $P \in L$. Si se conoce una de las coordenadas del punto $Q \in L$, determine el valor de la otra coordenada.

Esto lo podemos ejemplificar a través de la siguiente tarea:

Sea la recta L cuya pendiente es 2. Si los puntos $P(2,1) \in L$ y $Q(a,2) \in L$, determine el valor de a.

Solución :

Paso 1: $y=mx+b \quad \Rightarrow \quad y=2x+b \quad \Rightarrow \quad -2x+y-b=0.$

Paso 2: $\begin{cases} -2x+y-b=0 \\ x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Entonces $\quad -2x+y-b=0 \quad \Rightarrow \quad -2(2)+1-b=0 \quad \Rightarrow \quad b=-3$.

Paso 3: $\begin{cases} -2x+y+3=0 \\ x=a \\ y=2 \end{cases}$

Entonces $\quad -2x+y+3=0 \quad \Rightarrow \quad -2a+2+3=0 \quad \Rightarrow \quad -2a=-5 \quad \Rightarrow \quad a=\frac{5}{2}$.

Otro tipo de tarea podría incluso ser, las que mostramos a continuación:

c) T_3 : Dados dos puntos P y Q que pertenecen a la recta L, si se conoce una de las coordenadas del punto $R \in L$, determine el valor de la otra coordenada.

Esto lo podemos ejemplificar a través de la siguiente tarea:

Sea una recta L tal que los puntos $P(2,1) \in L$ y $Q(3,0) \in L$. Si el punto $R(a,2) \in L$, determine el valor de a.

Solución :

Paso 1: $\quad y=mx+b \quad \Rightarrow \quad mx-y+b=0$.

Paso 2: $\begin{cases} mx-y+b=0 \\ x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Entonces $\quad mx-y+b=0 \quad \Rightarrow \quad 2m-1+b=0$.

Paso 3: $\begin{cases} mx-y+b=0 \\ x=3 \\ y=0 \end{cases}$

Entonces $\quad mx-y+b=0 \quad \Rightarrow \quad 3m-0+b=0 \quad \Rightarrow \quad 3m+b=0$.

Paso 4: $\begin{cases} 2m-1+b=0 \\ 3m+b=0 \end{cases}$

Entonces $\quad b=1-2m \quad$ y $\quad b=-3m$

Luego $\quad 1-2m=-3m \quad \Rightarrow \quad m=-1$

Entonces $\quad b=3$

Paso 5: $\begin{cases} -x-y+3=0 \\ x=a \\ y=2 \end{cases}$

Entonces $-x-y+3=0 \Rightarrow -a-2+3=0 \Rightarrow -a=-1 \Rightarrow a=1.$

<u>TIPOS DE TAREAS ASOCIADAS A FUNCIONES LINEALES</u>

En el ámbito de las funciones lineales afines, podemos encontrar diferentes tipos de tareas, como por ejemplo las que vamos a dar a continuación:

a) T_1: Determinar la regla de correspondencia de la función lineal afín, si se conocen las imágenes de dos puntos pertenecientes al dominio de dicha función.

Esto lo podemos ejemplificar a través de la siguiente tarea:

Sea la función lineal afín $f(x)=ax+b$ tal que $f(2)=0$ y $f(1)=1$. Halle la regla de correspondencia de la función f.

<u>Solución</u> :

Paso 1: Sea $f(x)=ax+b$ la forma general de la función lineal afín.

Paso 2: Reemplazamos

$$\begin{cases} f(2)=0 \Rightarrow 2a+b=0 \\ f(1)=1 \Rightarrow a+b=1 \end{cases}$$

Paso 3: Sean

$$\begin{cases} b=-2a \\ b=1-a \end{cases}$$

Paso 4: $-2a=1-a \Rightarrow a=-1.$

Paso 5: $b=-2a \Rightarrow b=-2(-1)=2.$

Paso 6: $f(x)=-x+2$ es la regla de correspondencia de la función f.

Otro tipo de tarea, puede ser la que mostramos a continuación:

b) T_2: Dadas dos funciones lineales afines en su forma general, en la cual una de ellas depende de la otra, y si se conoce la imagen de uno de un punto, determine la regla de alguna de las funciones.

Esto lo podemos ejemplificar a través de la siguiente tarea:

Sean las funciones lineales afines f y g tales que $f(x)=3x+a$ y $g(x)=3x+b$. Si $f(x)=g(x)+3$ y $f(1)=-b$, determine la regla de correspondencia de la función f.

<u>**Solución**</u> :

Paso 1: Sean las funciones lineales afines dadas

$$\begin{cases} f(x)=3x+a \\ g(x)=3x+b \end{cases}$$

Paso 2: Sea

$$f(x)=g(x)+3 \quad \Rightarrow \quad 3x+a=3x+3+b$$
$$\Rightarrow \quad a=3+b$$

Paso 3: Luego

$$f(1)=-b \quad \Rightarrow \quad 3(1)+a=-b$$
$$\Rightarrow \quad 3+a=-b$$

Paso 4: Sea $a=-b-3$.

Paso 5: $\begin{cases} a=3+b \\ a=-3-b \end{cases} \Rightarrow 3+b=-3-b \Rightarrow 2b=-6 \Rightarrow b=-3$.

Paso 6: $3+a=-b \Rightarrow 3+a=-(-3) \Rightarrow a=0$.

Paso 7: $f(x)=3x$ es la regla de correspondencia de la función f.

Un tercer tipo de tareas, son los que mostramos a continuación:

c) T_3 : Elegir la mejor opción de pago para obtener un mayor sueldo durante un mes, basándonos en ciertas restricciones o condiciones relacionadas a la venta de un artículo.

Esto lo podemos ejemplificar a través de la siguiente tarea:

Una empresa dedicada a la venta de cierres por bolsas de 20 docenas cada una, requiere personal en el área de ventas, para lo cual publica un anuncio en el que incluyen las siguientes opciones de sueldo:

Opción A: Un sueldo fijo de S/. 2000 más 5% del monto total de venta de bolsas de cierres que realice durante un mes.

Opción B: Un sueldo fijo de $S/.1200$ más 10% del monto total de venta de bolsas de cierres que realice durante un mes.

Considerando que un trabajador puede vender al mes como máximo 40 000 soles, determine el monto total del mes que un trabajador tiene que vender para ganar lo mismo con ambas opciones de pago.

<u>Solución</u> :

Paso 1: Sean

Opción A: $y = 2000 + \frac{5}{100}x$ donde x : monto de ventas del mes.

Opción B: $y = 1200 + \frac{10}{100}x$ donde x : monto de ventas del mes.

Paso 2: Luego

$$\begin{cases} y = 2000 + 0.05x \\ y = 1200 + 0.1x \end{cases}$$

Paso 3: Luego

$$2000 + 0.05x = 1200 + 0.1x$$

$$800 = 0.05x$$

$$x = 16\ 000$$

Es decir, si el monto de ventas de un trabajador asciende a 16 000 soles durante el mes, el trabajador recibiría igual sueldo con cualquiera de las opciones de pago.

<u>TIPOS DE TAREAS ASOCIADAS AL CAMPO DE LA TRIGONOMETRÍA</u>

En el ámbito de la trigonometría, podemos mencionar algunos tipos de tareas como los que mostramos a continuación:

a) T_1 : Determinar alguna razón trigonométrica de los ángulos dados, si se conocen las medidas de dichos ángulos, los cuales verifican ciertas condiciones.

Esto lo podemos ejemplificar a través de la siguiente tarea:

Si $(3x+2y)°$, $(2x+y+35)°$ **y** $(7x)°$ **son ángulos agudos tales que** $\operatorname{sen}(3x+2y)° = \cos(2x+y+35)°$ **y** $\operatorname{tg}(3x+2y)° \operatorname{ctg} 7x° = 1$, **calcule el valor de** $\operatorname{sen}(4x+y)°$.

<u>Solución</u> :

Paso 1: Sean

$$\begin{cases} \text{sen}(3x+2y)^\circ = \cos(2x+y+35)^\circ \\ \text{tg}(3x+2y)^\circ\ \text{ctg}\ 7x^\circ = 1 \end{cases}$$

Paso 2: Como los ángulos son agudos, se tiene que

$$\begin{cases} (3x+2y)^\circ + (2x+y+35)^\circ = 90^\circ \\ (3x+2y)^\circ = 7x^\circ \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{cases} 5x + 3y = 55 \\ 2y = 4x \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{cases} 5x + 3y = 55 \\ y = 2x \end{cases}$$

Paso 3: Sea

$$\begin{cases} y = \dfrac{55-5x}{3} \\ y = 2x \end{cases}$$

Paso 4: Igualamos

$$\frac{55-5x}{3} = 2x \Rightarrow 55-5x = 6x \Rightarrow 11x = 55 \Rightarrow x = 5\,.$$

Paso 5: $y = 2x \Rightarrow y = 2(5) = 10\,.$

Paso 6: Por lo tanto $\text{sen}(4x+y)^\circ = \text{sen}\ (4\cdot 10+5)^\circ = \text{sen}\ 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Otro tipo de tareas son los que se muestran a continuación:

b) T_2 : Dada una condición propia del ámbito de la trigonometría y conociendo una relación entre la medida de dos ángulos, determine alguna razón trigonométrica de uno de los ángulos dados.

Esto lo podemos ejemplificar a través de la siguiente tarea:

Sean los ángulos coterminales α **y** β **tales que** $\alpha+\beta=-120°$ **; donde** α **tiene sentido antihorario y es menor que una vuelta. Si** α **pertenece al segundo cuadrante, determine el valor de** $\text{tg}\beta$.

<u>Solución</u> :

Paso 1: Como α y β son ángulos coterminales, se tiene que $\alpha-\beta=360°n$; $n\in ¢$

Paso 2: Luego

$$\begin{cases} \alpha-\beta=360°n \\ \alpha+\beta=-120° \end{cases}$$

Paso 3: Sea

$$2\alpha=360°n-120° \quad \Rightarrow \quad \alpha=180°n-60°$$

Como α pertenece al segundo cuadrante, tenemos que $n=1$

$$\alpha=180°(1)-60°=120°$$

Paso 4: Como

$$\alpha+\beta=-120° \quad \Rightarrow \quad 120°+\beta=-120° \quad \Rightarrow \quad \beta=-240°$$

Paso 5: Por lo tanto $\text{tg}\ \beta=\text{tg}(-240°)=\ -\text{tg}\ 240°=-\text{tg}(180°+60°)=-\sqrt{3}$.

Un tercer tipo de tareas, puede abarcar las tareas dadas a continuación:

c) T_3 : Determinar el valor de una expresión que depende de las razones trigonométricas de un ángulo, si se conocen las identidades pitagóricas.

Esto lo podemos ejemplificar a través de esta tarea

Un ángulo β **satisface la relación** $\csc\beta-2=\text{ctg}\beta$. **Determine el valor de** $\dfrac{\text{sen}^4\beta+\cos^4\beta}{\cos\beta-2\cos^3\beta\,\text{sen}^2\beta}$.

<u>Solución</u> :

Paso 1: Sea el ángulo β tal que $\csc\beta-2=\text{ctg}\beta \quad \Rightarrow \quad \csc\beta-\text{ctg}\beta=2$

Paso 2: Luego

$$\begin{cases} \csc\beta - \text{ctg}\beta = 2 \\ \csc\beta + \text{ctg}\beta = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Paso 3: Luego

$$2\csc\beta = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \csc\beta = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad \beta \in \text{IC} \vee \beta \in \text{IIC}$$

Paso 4: Entonces

$$\text{c tg}\beta = \frac{1}{2} - \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad \text{c tg}\beta = -\frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \beta \in \text{IIC} \vee \beta \in \text{IVC}$$

Luego $\beta \in \text{IIC}$

Paso 5: Finalmente

$$H = \frac{\text{sen}^4\beta + \cos^4\beta}{\cos\beta - 2\cos^3\beta\,\text{sen}^2\beta} = \frac{1 - 2\text{sen}^2\beta\cos^2\beta}{\cos\beta\left(1 - 2\text{sen}^2\beta\cos^2\beta\right)}$$

Luego $H = \dfrac{1}{\cos\beta} = \sec\beta = -\dfrac{5}{3}$.

TIPOS DE TAREAS ASOCIADAS AL CAMPO DE LA ARITMÉTICA

En el ámbito de la aritmética, podemos mencionar algunos tipos de tareas como los que mostramos a continuación:

a) T_1 : Dado un problema en el cual participan un número de elementos divididos en dos grupos cuyos valores unitarios son conocidos y además nos proporcionan el valor total, que es la resultante de sumar todos los valores unitarios.

Esto lo podemos ejemplificar a través de las siguientes tareas:

En una billetera hay 24 billetes que hacen un total de 560 soles. Si solamente hay billetes de 50 y 10 soles, ¿cuántas eran de cada clase?

Solución :

Paso 1: Sean

x : número de billetes de 50 soles

y : número de billetes de 10 soles

Paso 2: Sabemos

$$\begin{cases} x + y = 24 \\ 50x + 10y = 560 \end{cases}$$

Paso 3: Luego

$$\begin{cases} 50x + 50y = 1200 \\ 50x + 10y = 560 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 24 \\ 40y = 640 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 24 \\ y = 16 \end{cases}$$

Paso 4: Finalmente

$y = 16$

$x = 24 - 16 = 8$.

Es decir, hay 8 billetes de 50 soles y 16 billetes de 10 soles.

En una granja hay 21 animales, entre gallos y perros. Si el total de patas de esos animales es 54, calcule la diferencia entre el número de gallos y perros.

Solución :

Paso 1: Sean

x : número de gallos

y : número de perros

Paso 2: Sabemos

$$\begin{cases} x + y = 21 \\ 2x + 4y = 54 \end{cases}$$

Paso 3: Luego

$$\begin{cases} 2x + 2y = 42 \\ 2x + 4y = 54 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 21 \\ 2y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 21 \\ y = 6 \end{cases}$$

Paso 4: Finalmente

$y = 6$

$x = 21 - 6 = 15$.

Es decir, la diferencia entre el número de gallos y de perros es 9.

Otra tarea, viene dada de la siguiente manera:

t_1 : **En una reunión familiar hay 22 personas, entre hombres, mujeres y niños. El doble del número de mujeres más el triple del número de niños, es igual al doble del número de hombres. Si además se sabe que el número de hombres es el doble del número de mujeres, ¿cuántos hombres, mujeres y niños hay en dicha reunión?**

<u>Solución</u> :

Sea

$$\begin{cases} x + y + z = 22 \\ 2x + 3z = 2y \\ y = 2x \end{cases} \quad ; \quad x : \text{número de mujeres}, \quad y : \text{número de hombres}, \quad z : \text{número de niños.}$$

De acuerdo a nuestro modelo, esto puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x + y + z = 22 \\ 2x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + 0z = 0 \end{cases}$$

Luego

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 22 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 22 \\ 0 & -4 & 1 & -44 \\ 0 & -3 & -2 & -44 \end{array}\right]$$

Entonces

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 22 \\ 0 & -4 & 1 & -44 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 22 \\ 0 & 0 & -11 & -44 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

Luego

$$\begin{cases} x + y + z = 22 \\ 11z = 44 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$$

De donde

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 12 \\ z = 4 \end{cases}$$

Por lo tanto, en dicha reunión familiar hay 6 mujeres, 12 hombres y 4 niños.

Además, otro tipo de tareas dentro del campo de la aritmética vienen dado por:

b) T_2 : Dado un problema en el cual participan un número de elementos divididos en dos grupos cuyos valores unitarios son conocidos y además se conoce un dato que relaciona ambos grupos.

Esto lo podemos ejemplificar a través de la siguiente tarea:

En un salón de clase en donde el número de alumnas excede en 4 al número de alumnos, el peso promedio de cada alumno es de 75 Kg y de cada alumna 60 Kg. Si el peso de todos los alumnos es de 4020 Kg, ¿cuántos alumnos hay en la clase?

Solución :

Paso 1: Sean

x : número de alumnas

y : número de alumnos

Paso 2: Sabemos

$$\begin{cases} x = 4 + y \\ 60x + 75y = 4020 \end{cases}$$

Paso 3: Luego

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ 60x + 75y = 4020 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 60x - 60y = 240 \\ 60x + 75y = 4020 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ 135y = 3780 \end{cases} \Rightarrow \quad y = \frac{3780}{135} = 28$$

Paso 4: Finalmente

$$x = 4 + 28 = 32.$$

Es decir, en el salón de clase hay 32 alumnas y 28 alumnos.

TIPOS DE TAREAS ASOCIADAS AL CAMPO DEL ÁLGEBRA

En el ámbito del álgebra, podemos mencionar algunos tipos de tareas como los que mostramos a continuación:

a) T_1 : Dado un problema relacionado al grado absoluto y relativo de un monomio, determine el valor de las variables dadas.

Esto lo podemos ejemplificar a través de la siguiente tarea:

En el monomio $M(x,y) = x^{3(2a+3b)}y^{4(5a-2b)}$**. Si** $G.A. = 83$ **y** $G.R(y) = 20$**, determine el valor de** $a+b$**.**

Solución :

Paso 1: Sea $M(x,y) = x^{3(2a+3b)}y^{4(5a-2b)}$

Como $G.A. = 83$ y $G.R(y) = 20 \quad \Rightarrow \quad G.R(x) = 63$

Luego $2a + 3b = 21$

Paso 2: Luego

$$\begin{cases} 2a + 3b = 21 \\ 5a - 2b = 5 \end{cases}$$

Paso 3: Luego

$$\begin{cases} 2a + 3b = 21 \\ 5a - 2b = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 6b = 42 \\ 15a - 6b = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a + 3b = 21 \\ 19a = 57 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{57}{19} = 3$$

Paso 4: Finalmente, como

$$2a + 3b = 21 \quad \Rightarrow \quad 2(3) + 3b = 21 \quad \Rightarrow \quad 3b = 15 \quad \Rightarrow \quad b = 5.$$

Por lo tanto $a+b=3+5=8$.

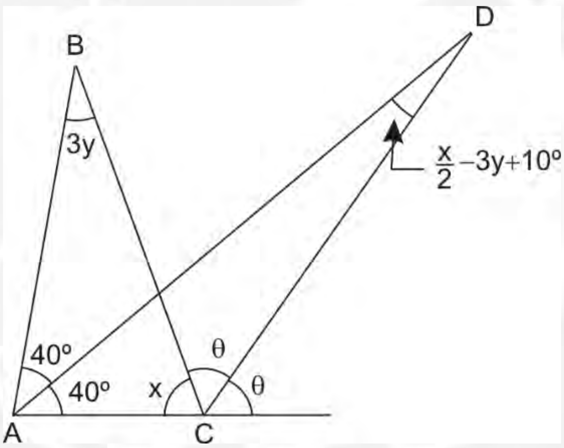
TIPOS DE TAREAS ASOCIADAS AL CAMPO DE LA GEOMETRÍA

En el ámbito de la geometría, podemos mencionar algunos tipos de tareas como los que mostramos a continuación:

T_1: Determinar el valor de uno de los ángulos, si se conoce la relación entre el ángulo formado por una bisectriz interior y una exterior.

Esto lo podemos ejemplificar a través de la siguiente tarea:

Con los datos de la figura adjunta, determina el valor del ángulo x.



Solución :

Aplicamos la propiedad en el $\triangle ABC$ **:**

$$\frac{3y}{2}=\frac{x}{2}-3y+10^\circ$$

$$\Rightarrow \quad 3y=x-6y+20^\circ$$

Luego $9y-x=20^\circ$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 9y-x=20^\circ \\ 3y+x=100^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 9y-x=20^\circ \\ 12y=120^\circ \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 9y-x=20^\circ \\ y=10^\circ \end{cases}$$

Como $9y - x = 20°$ $\Rightarrow$ $9(10°) - x = 20°$

$\therefore$ $x = 70°$.

CAPÍTULO V: CONSIDERACIONES FINALES Y RECOMENDACIONES PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

En este capítulo enunciaremos las conclusiones obtenidas con respecto a los objetivos planteados en nuestra investigación, así como sus implicaciones. Además de ello, señalaremos algunas recomendaciones las mismas que quedarán como problemas abiertos para futuras investigaciones relacionadas al objeto matemático que se está abordando en esta investigación:

Inicialmente nuestro interés surge de la problemática de identificar un modelo epistemológico de referencia de los sistemas de ecuaciones lineales, respaldado por diversas investigaciones llevadas a cabo en diversos contextos. Es por ello, que para afrontar esta situación, revisamos brevemente los textos del nivel secundario de nuestro país para poder así proponer un Modelo Epistemológico de Referencia que guarde relación con lo que se hace en la educación secundaria en nuestro país.

Es así que en la revisión de los antecedentes podemos ver que surge el interés de varios investigadores dentro del ámbito de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, los mismos que se preocupan de dar cuenta de un Modelo Epistemológico de Referencia en relación a la concepción del álgebra en distintos sistemas educativos como instrumento de modelización.

En ese sentido empleamos algunos aspectos teóricos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, para poder así obtener las siguientes conclusiones.

Consideraciones Finales

Para conseguir el primer objetivo específico

Proponer un modelo epistemológico de referencia para el caso particular de los sistemas de ecuaciones lineales, teniendo en cuenta el modelo epistemológico de referencia adoptado en la TAD respecto al álgebra como instrumento de modelización.

Para alcanzar este objetivo revisamos brevemente los libros de textos oficiales teniendo en cuenta de manera implícita el Currículo Nacional (2016) para poder así proponer un MER que guarde relación con lo que efectivamente se trabaja en nuestra secundaria peruana.

Además, podemos concluir que nuestro objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales es un instrumento de modelización, ya que ha funcionado como instrumento para modelizar los diferentes tipos de tareas en los diversos ámbitos de la matemática del nivel secundario, como lo hemos podido mostrar.

En este sentido, cabe mencionar que nuestro interés es modelizar los diferentes tipos de tareas que se encuentran relacionados a otros temas que nos generan sistemas de ecuaciones lineales y puedan ser reducidos a los diferentes sistemas que hemos considerado en nuestro MER, como por ejemplo dentro del ámbito de la geometría analítica, problemas relacionados a las funciones que nos obligan a usar finalmente los sistemas de ecuaciones lineales, etc.

Dicho esto, podemos finalmente concluir que los sistemas de ecuaciones lineales cumplen ese rol de instrumento modelizador.

En base a ello, podemos manifestar de manera explícita que hemos cumplido con nuestro primer objetivo específico propuesto.

Respecto al segundo objetivo específico

Analizar si el modelo epistemológico propuesto cumple los rasgos de algebrización que debe tener una OM para ser considerada una OM algebrizada.

a) Para alcanzar este objetivo se verificó que el objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales es una organización matemática, la cual es en particular una organización matemática algebrizada, puesto que satisface los dos rasgos característicos en el sentido de Bolea (2002), ya mencionados anteriormente. Además, con esta investigación podemos concluir que nuestra organización matemática tiene un alto grado de algebrización en el sentido de Bolea (2002).

   Es así que damos cuenta que el segundo objetivo específico ha sido logrado.

   Cuestiones para futuras investigaciones

   Las recomendaciones que vamos a dar deberían ser tomadas en cuenta, no sin antes reflexionar sobre la importancia de esta construcción. En el ámbito de la TAD, esta manera de construir toma sentido ya que sirve como un medio para poder aportar respuestas, a las diversas cuestiones problemáticas que surgen dentro de uno de los programas del campo de investigación de la didáctica de las matemáticas.

   En base al trabajo realizado y a las conclusiones que hemos llegado, formularemos las siguientes recomendaciones para futuras investigaciones, ya que consideramos que la presente investigación se complementará y enriquecerá con otros trabajos de investigación. A continuación, sugerimos algunas ideas:

   1. Continuar la presente investigación, haciendo uso del Modelo Epistemológico de Referencia de los sistemas de ecuaciones lineales propuesto, para llevar a cabo el análisis de los textos didácticos oficiales del nivel secundario de nuestro país, para poder así describir la situación en la que se encuentran los diferentes tipos de tareas que son abordados en la secundaria peruana, y de esta manera poder analizar el modelo epistemológico dominante en la institución.

2. Contrastar el modelo epistemológico de referencia plenamente identificado, con diferentes modelos epistemológicos; en particular, con el modelo epistemológico dominante en una determinada institución.

3. Ampliar este modelo epistemológico de referencia para poder ser aplicado al nivel superior, o en todo caso ser implementado en un taller para profesores.

REFERENCIAS

Almouloud, S. A. (2015). Teoria Antropológica do Didáctico: metodologia de análise de materiais didáticos. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática. UNIÓN*, *42*, pp. 09-34.

Arenas, B. (2013). *Las ecuaciones lineales, desde situaciones cotidianas* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2013). Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. *Revista de Educación Matemática de Sao Paulo*, *15*(1), pp. 1-28.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001). La Transposición Didáctica de Organizaciones Matemáticas en Proceso de Algebrización: El caso de la Proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *21*(3), 247-304.

Bolea, P. (2002). *El Proceso de Algebrización de Organizaciones Matemáticas Escolares*. Tesis Doctoral. Universidad de Zaragoza. España.

Bosch, M. y Gascón, J. (2004). La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos. Boletín del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Recuperado de

http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/welcome.htm

Bosch, M. y Gascón, J. (2007). La miseria del “generalismo pedagógico” ante el problema de la formación del profesorado. *Sociedad, Escuela y Matemática. Aportaciones de la teoría Antropológica de la Didáctica*, pp. 201-240. Servicio de publicaciones de la Universidad de Jaén.

Cobo Merino, B. y Batanero C. (2004). Significado de la media en los libros de texto secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, *22*(1), pp. 5-18.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmetique a l'algebre dans l'enseignement des mathematiques au college. Deuxieme partie, perspectives curriculares: la notion de modelisation. *Petit x*, 19, pp. 43-72.

Chevallard, Y. (1994). Enseignement de l'algebre et transposition didáctique. *IREM d' Aix – Marseille, 52* (2), pp. 175-234.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Universidad de Barcelona, Horsori, España.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, *19*(2), pp. 221-266.

Chevallard, Y. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente. Conferencia impartida en las XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Zaragoza, España. Recuperado de

http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/YC_2001-Osca.pdf

García, F. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* (Tesis doctoral). Universidad de Jaén, Andalucía, España.

Gascón, J. (1994). Un nouveau modele de l'algebre elementaire comme alternative à l' «arithmétique généralisée». *Petit x*, 37, 43-63.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *18*(52), pp. 7 - 33.

Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria: Desaparición escolar de la razón de ser de la Geometría. *Revista Suma*, *44*, pp. 25 - 34.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *14*(2), pp. 203-231.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal*, *25*, 99-123.

González, P. (2004). La Historia de la Matemática como recurso didáctico e instrumento de integración cultural de la Matemática. Recuperado de: http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/elementseuclides1.pdf

Guerra, A. (2012). *Propuesta para la Enseñanza de Sistemas de Ecuaciones Lineales*. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia.

Guzmán, N. (2013). *Una Propuesta para desarrollar pensamiento algebraico desde la básica primaria a través de la aritmética generalizada*. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). Metodología de la Investigación. Quinta edición. México: Interamericana Editores S.A. Recuperado de: https://www.academia.edu/6399195/Metodologia_de_la_investigacion_5ta_Edicion_Sampieri

Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa (síntesis conceptual). *Revista IIPSI, 9,* pp. 123-146.

Ministerio de Educación del Perú (2016). Currículo Nacional de Educación Básica Regular. Proceso de Articulación. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2016-2.pdf

Navarro, P.C. (2007). *Un Estudio sobre la Desarticulación entre la Semejanza y la Trigonometría en el Bachillerato.* Tesis de Maestría. Universidad de Sonora, México. Recuperado de http://tesis.uson.mx/digital/tesis/docs/21209/Capitulo1.pdf

Ortiz de Haro, J. (1999). *Significado de los conceptos probabilísticos elementales en los libros de texto de Bachillerato.* Tesis de maestría. Universidad de Granada, España.

Perú, Ministerio de Educación (2015a). *Matemática 1 Secundaria*. Lima: Norma.

Perú, Ministerio de Educación (2015b). *Matemática 2 Secundaria*. Lima: Norma.

Perú, Ministerio de Educación (2016c). *Matemática 3 Secundaria*. Lima: Santillana.

Perú, Ministerio de Educación (2016d). *Matemática 4 Secundaria*. Lima: Santillana.

Perú, Ministerio de Educación (2016e). *Matemática 5 Secundaria*. Lima: Santillana.

Ricaldi, M. (2011). *Análisis del tratamiento del álgebra en el primer año de secundaria: su correspondencia con los procesos de algebrización y modelización*. Tesis de Maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Ruiz Munzón, N. (2010). *La introducción elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Ruiz Munzón, N., Bosch, M. y Gascón J. (2011). Un modelo epistemológico de referencia del álgebra como instrumento de modelización. *III Congreso Internacional sobre la TAD*, *10*, pp. 743-765.

Ruiz Munzón, N., Bosch, M., y Gascón, J. (2015). El problema didáctico del algebra elemental: Un análisis macro-ecológico desde la teoría antropológica de lo didáctico. *REDIMAT*, *Vol 4*(2), 106-131.

Sierra, T. (2006). *Lo Matemático en el diseño y análisis de Organizaciones Didácticas. Los Sistemas de Numeración y la Medida de Magnitudes Continuas.* Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid. España.

Taylor, S. y Bogdan, R. (1994). *Introducción a los métodos cualitativos de la investigación.* España: Ediciones Paidos.

Torres, L. (2010). *Fenomenología Histórica del Concepto de Ecuación y Potencialidades de su uso en la Escuela.* Tesis de Maestría. Universidad del Valle. Colombia.

Vivas, D. (2010). *La función cuadrática. Un estudio a través de los libros de texto de los últimos 40 años en Argentina* (Tesis de maestría). Universidad de Concepción del Uruguay, Argentina.

Zamar, A., Macoritto, A., Serrano E. y Amaduro I. (2011). Curso de Articulación sobre Ecuaciones y Sistemas. Universidad Nacional de Salta, Argentina. Recuperado de

http://www.unsa.edu.ar/srmrf/web/_Visitante/articulacion/MePreparo2011/4_5_EcuacionesFu
nciones.pdf