TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

ANÁLISIS Y PROPUESTA EN TORNO A LAS JUSTIFICACIONES EN LA ENSEÑANZA DE LA DIVISIBILIDAD EN EL PRIMER GRADO DE SECUNDARIA

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

PRESENTADA POR:

ESTELA VALLEJO VARGAS

ASESOR DE TESIS:

DR. ULDARICO MALASPINA JURADO

MIEMBROS DEL JURADO:

MG. EMILIO GONZAGA RAMÍREZ

MG. CECILIA GAITA IPARRAGUIRRE

Lima - Perú

2012

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

AGRADECIMIENTOS

A mi estimado asesor, el Dr. Uldarico Malaspina, por su constante orientación y motivación, sin los cuales este y otros proyectos no se hubieran hecho realidad. Gracias por su tiempo, dedicación y confianza en los trabajos emprendidos. No cabe duda que sin sus observaciones y sugerencias este trabajo sería, como su expresión favorita dice, “una desgracia”.

A Marcia, Renato, Rodrigo, Sebastián y Alexander, cuya participación en este trabajo ha sido de vital importancia. Gracias por el tiempo que les obsequiaron a las matemáticas, por sus contribuciones, por todas las anécdotas compartidas en cada una de nuestras sesiones. Gracias a ustedes he podido entender un poco más las bellas matemáticas y a descubrir que siempre hay cosas nuevas por aprender y descubrir.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

A Rudy Rosas, por su apoyo incondicional en cada uno de los proyectos emprendidos. Por ser el ejemplo de trabajo y perfeccionismo que me acompaña a todos lados. Por sus consejos, enseñanzas, y su valioso tiempo. Porque el sentimiento que guardamos por las matemáticas nos une de manera especial. Gracias por tu paciencia, comprensión, y por estar a mi lado en los momentos más difíciles e importantes.

A mi adorada madre, Judy Vargas, por entregar su vida entera por mí y mis hermanos. Por todo su sacrificio puesto en la búsqueda de una mejor formación para cada uno de nosotros. Gracias por enseñarme que todo lo que uno se gana en esta vida es a base de esfuerzo y perseverancia. Gracias por ser el modelo que me da la fuerza para seguir adelante cada día. Eres la persona más valiosa en mi vida y a la que dedico y dedicaré cada uno de mis logros. Te amo.

A la vocación que Dios me ha regalado, porque gracias a ella he descubierto que amo apasionadamente las matemáticas: enseñarlas y aprenderlas.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

RESUMEN

Se presenta un estudio sobre las justificaciones y procesos afines como el planteamiento de conjeturas, la construcción de contraejemplos, la generalización, etc. en: a) el Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular (EBR) de Perú; b) algunos de los textos más difundidos para el primer grado de secundaria de la EBR en Perú; c) las justificaciones dadas por estudiantes a enunciados que han sido diseñados en forma de sesiones de clase por el investigador. Se examina la relevancia que se le da a las justificaciones, particularmente en el tema de divisibilidad. Como consecuencia, se presentan algunas reflexiones y sugerencias.

Palabras clave: *Demostración, justificación, divisibilidad, currículo.*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

INTRODUCCIÓN

If problem solving is the "heart of mathematics," then proof is its soul.

Alan H. Schoenfeld

Actualmente, aún es muy común observar en las clases de matemática – del nivel escolar – un estilo de enseñanza y aprendizaje tradicional: los estudiantes atienden las lecciones que sus profesores imparten de forma pasiva sin terminar de comprender cuál es la importancia de todo ello, acostumbrándose a repetir muchas veces "recetas" predeterminadas con la finalidad de resolver ejercicios o problemas, permaneciendo otras veces con dudas o errores de concepto que (por vergüenza, temor o costumbre) no se atreven a consultar a sus profesores. Los alumnos se acostumbran a ver las matemáticas como un conjunto de fórmulas o procedimientos que ellos deben aprender de "memoria", perdiéndose para ellos el verdadero valor de las matemáticas. Quizá no nos habíamos dado cuenta que todo lo anteriormente mencionado, más allá de motivar a nuestros estudiantes a aprender y a hacer matemáticas, lo que se está finalmente consiguiendo es frustrarlos y hacer que ellos pierdan de vista el auténtico significado de esta ciencia.

Nuestra propuesta y motivación va justamente dirigida a romper con esta forma rutinaria de presentar las matemáticas e invitarlos a incluir las justificaciones en sus clases como una parte determinante en su enseñanza. ¿Y por qué las justificaciones? Pues, desde nuestra propia experiencia, podemos decir que la inclusión de las justificaciones en las clases de matemática trae consigo innumerables resultados positivos. Entre ellos podemos mencionar una alta participación en clase, un efecto "refuerzo" para los temas tratados, conexiones con conocimientos anteriores, una reducida dependencia del profesor para la aclaración

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

de sus dudas, planteamiento de conjeturas, una mejora progresiva en sus comunicaciones verbales y escritas manifestada a través de sus argumentos, seguridad en sus respuestas y así en sus conocimientos matemáticos.

En National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers (2010), se pone de manifiesto que, es a través de las justificaciones que podemos medir el nivel de comprensión matemática alcanzado por nuestros estudiantes, teniendo en cuenta para ello la madurez matemática de los mismos. El que nuestros alumnos puedan comprender por qué cierta proposición matemática es cierta, comunicar sus argumentos o de dónde proviene una propiedad o fórmula serán indicadores del nivel de entendimiento logrado por ellos.

> One hallmark of mathematical understanding is the ability to justify, in a way appropriate to the student's mathematical maturity, *why* a particular mathematical statement is true or where a mathematical rule comes from. (p. 4)

A esto se suma el valor de la demostración matemática en el aula señalado por Recio (2002), quien en su artículo de investigación nos dice:

> La utilidad formativa de la demostración matemática aparece como parte de una utilidad más general, la cual es aprender a razonar en matemática. A razonar de forma operativa, para resolver problemas, y para justificar el cumplimiento generalizado de las proposiciones matemáticas que usan en dichos procesos de resolución de problemas, lo que ayuda a los estudiantes a construir un edificio matemático inteligente, lógico y no solo funcional. (p. 38)

La tendencia curricular actual en muchos países, como Estados Unidos y Australia, reflejan el énfasis que están poniendo en desarrollar en sus estudiantes la habilidad de justificar sus propios razonamientos a través de sus propuestas. Esto se pone de manifiesto por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) en Estados Unidos de América, así como el Australian Education Council en Australia que, como se manifiesta en Chick, McCrae y Vincent (2005), afirman que "Mathematical discoveries, conjectures, generalizations, counter-examples, refutations and proofs are all part of what it means to do mathematics". Asimismo se

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

establece que las matemáticas escolares deberían mostrar la naturaleza intuitiva y creativa de hacer matemáticas. Incluso en los Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática elaborados por el NCTM se plantea la formación de estudiantes que sean capaces de justificar sus procedimientos y razonamientos desde los primeros grados de educación escolar (inicial y los primeros grados de educación primaria, en nuestro caso). Esto ha sido así traducido en Recio (2002):

> Durante estos años, el razonamiento matemático debe incluir todo tipo de pensamiento informal, conjeturas y validaciones que ayuden a los niños a darse cuenta de que las matemáticas tienen sentido…
>
> Debe intentarse que los niños justifiquen sus soluciones, sus procesos de pensamiento y sus conjeturas, y que además lo hagan de diversas formas. Los modelos manipulativos y otros modelos físicos les ayudan a relacionar los procedimientos y algoritmos con los hechos conceptuales que los apoyan y proporcionan objetos concretos a los que hacer referencia a la hora de explicar y justificar sus ideas… (p. 36)

Todo lo anteriormente señalado nos hace reflexionar respecto a la relevancia que se le está dando a las justificaciones, argumentaciones y demostraciones en el planteamiento de propuestas que busquen la formación de estudiantes reflexivos, críticos y racionales.

Es con este objetivo que decidimos desarrollar el presente trabajo de tesis: plantear algunas formas concretas que puedan ser usadas directamente por los docentes de matemática para incluir justificaciones en las clases de matemática, particularmente para el tema divisibilidad.

En el capítulo 2, presentamos los parámetros conceptuales que regirán el desarrollo de la presente investigación.

En el capítulo 3, mostramos los resultados del análisis de la inclusión de las justificaciones en el Diseño Curricular de la Educación Básica Regular en Perú, así como en cuatro de los libros de texto más difundidos en nuestro país.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

En el capítulo 4, hacemos un estudio de las reacciones de estudiantes de primer grado de secundaria ante situaciones problemáticas relacionadas con la divisibilidad y poniendo énfasis en las justificaciones.

En el capítulo 5, presentamos la propuesta para la inclusión de las justificaciones en la enseñanza de la Divisibilidad para el primer grado de secundaria, objetivo general de este trabajo de investigación.

En el capítulo 6, presentamos las conclusiones obtenidas respecto a los objetivos planteados en el Capítulo 1. Además, algunas sugerencias para una próxima investigación relacionada con el tema central de esta investigación que son las justificaciones.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Índice

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Capítulo 5

Capítulo 6

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Capítulo 1

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Relevancia del problema de investigación

Creemos que es necesario enseñar a nuestros estudiantes a que se cuestionen la veracidad de los resultados presentados en sus clases, que exijan argumentos y que sean también capaces de justificar cada una de sus afirmaciones. Necesitamos dejar de formar alumnos que acepten siempre de forma pasiva los contenidos que se les provee en clase. Requerimos con urgencia la formación de alumnos críticos, reflexivos y racionales. Creemos que una forma de alcanzar estas metas es con una formación en matemática rica en justificaciones y demostraciones, entiendo esta última como el mayor nivel de justificaciones que puede ser alcanzado.

La demostración es la razón de ser de la matemática. La demostración ayuda a desarrollar el pensamiento lógico matemático, lo que contribuye a que el alumno piense en forma sistemática.

Entre los investigadores internacionales que tratan las justificaciones y temas afines, tenemos por ejemplo a Recio (2002), quien estudia el aspecto epistemológico y didáctico de la demostración matemática y, además, marca una diferencia entre la demostración desde la perspectiva de la institución matemática y desde la perspectiva de la institución educativa. Esta última interpretación rescata como aspectos relevantes a la intuición, la validación empírico-inductiva, la formulación de conjeturas, los ejemplos y contraejemplos, etc.; aspectos de suma importancia para la creación y el

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

descubrimiento (particularmente importantes en Matemática); Harel y Sowder (1998) con sus esquemas personales de demostración, que a su vez fueron empleados por Ibañes (2001) para el análisis de textos desarrollado en su tesis de doctorado y el cual tomaremos como referencia para nuestro propio análisis. Además, Ibañes y Ortega (1997) proponen una clasificación de las técnicas de demostración en Matemática en el nivel de educación secundaria que permite etiquetar las demostraciones de acuerdo al tipo, al modo, los métodos y los estilos. Esta clasificación complementará nuestro análisis de textos.

Investigaciones como las mencionadas muestran que las demostraciones, justificaciones en general, y temas afines tienen una gran relevancia para la comunidad de Educadores Matemáticos y en la comunidad Matemática.

Entonces, no podemos evitar formular la siguiente pregunta: ¿cómo son tratadas las justificaciones matemáticas en el sistema educativo peruano?

Desde la propia experiencia de la investigadora como profesora de Matemática, para el nivel en que se centra la presente investigación, podemos decir que la inclusión de las justificaciones en las clases de matemática trae consigo innumerables resultados positivos en los estudiantes. Entre ellos podemos mencionar una alta participación en clase, un efecto "refuerzo" para los temas tratados, conexiones con saberes anteriores, una reducida dependencia del profesor para la aclaración de sus dudas, una mejoría progresiva en sus comunicaciones verbales y escritas manifestada a través de sus argumentos, seguridad en sus respuestas y así en sus conocimientos y por tanto en su persona, construcción de conocimiento a ser validado a través del planteamiento de sus conjeturas, etc.

Nos vemos entonces en la necesidad de plantear una propuesta de enseñanza que incluya a las justificaciones en nuestras clases de matemática.

Hasta el momento, no hemos encontrado investigaciones en el Perú que traten el tema de justificaciones en el contexto de las demostraciones matemáticas. En este sentido, la presente investigación puede traer muchos beneficios en

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

cuanto a la enseñanza y aprendizaje de la Matemática a nivel escolar en nuestro país.

Por esta razón, y por la relevancia ya evidenciada del tema, nos proponemos investigar sobre el tratamiento de las justificaciones en el primer grado de secundaria y, más específicamente, en el tema divisibilidad, debido a que éste propicia la creación de problemas y preguntas adecuadas para justificar, conjeturar y dar contraejemplos.

1.2. Objetivos de la investigación

Nos planteamos los siguientes objetivos de investigación:

1.2.1 <u>Objetivo general</u>

Plantear una propuesta para la inclusión de las justificaciones en la enseñanza de la divisibilidad en la Educación Básica Regular.

1.2.2 <u>Objetivos específicos</u>

- Analizar cómo se consideran las justificaciones en el Diseño Curricular Nacional (DCN) de Educación Básica Regular (EBR) en Perú.
- Analizar la inclusión de las justificaciones, al tratar el tema de divisibilidad, en algunos de los libros de texto más difundidos en la enseñanza de las matemáticas en Perú.
- Examinar las reacciones de estudiantes de primer grado de secundaria ante un conjunto de situaciones problemáticas relacionadas con la divisibilidad, en las que se ponga énfasis en las justificaciones.

1.3. Metodología

La metodología que emplearemos en el presente trabajo es la Investigación-Acción. Ésta es un proceso activo y es básicamente una estrategia para el desarrollo de profesores e investigadores de modo que ellos puedan utilizar

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

sus investigaciones para perfeccionar su enseñanza y, en consecuencia, el aprendizaje de los estudiantes (Tripp, 2005).

Segal (2009, p. 21-26) presenta tres modelos que guardan la esencia de esta metodología y sostiene que cualquiera de ellos puede usarse en una investigación acción. Nosotros usaremos el siguiente:

- Identificar el problema: encontrar la idea general o inicial.
- Evaluar el problema: observar, analizar, investigar.
- Hacer una recomendación: preparar un plan.
- Ensayar la recomendación: tomar el primer paso de acción, probarla.
- Reflexionar sobre la práctica: evaluar la práctica recomendada o el paso de acción.
- Reevaluar si es necesario: modificar el plan, tomar un segundo paso de acción si se necesita, es decir otra iteración.

Determinaremos cuál es el tratamiento que se le da a las justificaciones en Perú, a través del análisis del tratamiento de las justificaciones en el DCN y en los libros de texto más difundidos, para el nivel y el tema que son centro de nuestra investigación.

Realizaremos entrevistas personales a estudiantes del nivel indicado con la finalidad de determinar cuáles son las experiencias que ellos tienen con las justificaciones matemáticas a lo largo de su formación.

Diseñaremos sesiones de clase que nos permitirá definir la propuesta que es objetivo final de este trabajo.

Para la fase de ensayo contaremos con estudiantes del primer grado de secundaria de un colegio privado. Esta fase experimental será grabada, para un mejor acceso a los detalles y su posterior análisis (fase de reflexión).

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

El presente capítulo contiene los parámetros conceptuales que regirán el desarrollo de la presente investigación.

2.1 Fases previas a la demostración matemática

Existen actualmente diferentes autores y propuestas curriculares que sostienen que la demostración debe constituir un punto central en la educación matemática (Harel & Sowder, 1998; Blanton, Knuth & Stylianou, 2011; NCTM 1989, 2000) y que debe iniciarse desde el nivel escolar. Más aún, se sugiere involucrar a los estudiantes con los procedimientos previos a la demostración matemática como parte del desarrollo natural para llegar a ella.

Algunos diseños o reformas curriculares que incluyen de forma explícita estas propuestas son, por ejemplo, Los Principios y Estándares para la Matemática Escolar, The Principles and Standards for School Mathematics, en the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), que sugieren un avance progresivo de habilidades con el propósito de llegar del pensamiento o razonamiento “informal” al razonamiento deductivo formal. Esto lo reflejan a través de los ciclos que forman parte de los niveles en los cuales se divide la educación en Estados Unidos y que hemos recopilado de Recio (2002).

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Para el ciclo P – 4:

“Durante estos años, el razonamiento matemático debe incluir todo tipo de pensamiento informal, conjeturas y validaciones que ayuden a los niños a darse cuenta de que las matemáticas tienen sentido…

Debe intentarse que los niños justifiquen sus soluciones, sus procesos de pensamiento y sus conjeturas, y que además lo hagan de diversas formas. Los modelos manipulativos y otros modelos físicos les ayudan a relacionar los procedimientos y algoritmos con los hechos conceptuales que los apoyan y proporcionan objetos concretos a los que hacer referencia a la hora de explicar y justificar sus ideas…”

Para el ciclo 5 – 8:

“[M]ientras la mayor parte de los estudiantes de quinto grado continúan ejerciendo un pensamiento concreto que depende de un contexto físico o específico para poder percibir regularidades y relaciones, muchos alumnos de octavo grado son ya capaces de razonamiento más formal y de abstracción. No obstante, incluso los estudiantes más avanzados de los niveles 5-8 pueden hacer uso de materiales concretos para apoyar su razonamiento…”

Y también:

“En los niveles 5-8, los estudiantes habrán experimentado el razonamiento inductivo y la evaluación y construcción de argumentos deductivos sencillos en diversos contextos de resolución de problemas.”

Para el ciclo 9 – 12:

“En los niveles 9-12, a medida que los contenidos van siendo más profundos y complejos, debe mantenerse este énfasis en la interacción que se da entre la formulación de hipótesis y el razonamiento inductivo, y en la importancia de la verificación deductiva…”

También, la propuesta del Diseño Curricular Base elaborado por el Ministerio de Educación y Ciencia de España (MEC, 1989), que considera el razonamiento deductivo como el resultado de un proceso que se inicia con las formas empírico-inductivas de razonamiento, ofreciendo consideraciones como las siguientes (Recio, 2002):

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

> “Los tanteos previos, los ejemplos y contraejemplos, la solución de un caso particular, la posibilidad de modificar las condiciones iniciales y ver qué sucede, etc., son las auténticas pistas para elaborar proposiciones y teorías. Esta fase intuitiva es la que convence íntimamente al matemático de que el proceso de construcción del conocimiento matemático va por buen camino. La deducción formal suele aparecer casi siempre en una fase posterior. Esta constatación se opone frontalmente a la tendencia, fácilmente observable en algunas propuestas curriculares, a relegar los procedimientos intuitivos a un segundo plano, tendencia que priva a los alumnos del más poderoso instrumento de exploración y construcción del conocimiento matemático.”

Asimismo, en Chick, H., McCrae, B. & Vincent, J. (2005) encontramos un extracto de las consideraciones hechas por el Consejo de Educación Australiano (Australian Education Council), en 1991, acerca de lo que significa hacer matemática y cómo la intuición y creatividad forman parte natural de este proceso.

> “[T]he systematic and formal way in which mathematics is often presented conveys an image of mathematics which is at odds with the way it actually develops. Mathematical discoveries, conjectures, generalizations, counter-examples, refutations and proofs are all part of what it means to do mathematics. School mathematics should show the intuitive and creative nature of the process, and also the false starts and blind alleys, the erroneous conceptions and errors of reasoning which tend to be a part of mathematics.”

Lo anteriormente expuesto nos da pautas claras de que el desarrollo del razonamiento demostrativo es un proceso gradual y progresivo, con el claro propósito de que este llegue a darse de forma natural en el estudiante. Se nos sugiere sutilmente la enseñanza de la demostración a través de los procesos previos a ella. Estos procesos o fases previas, entre otras cosas, son las que desarrollaremos a continuación, para ver cómo es que intervienen directamente en la enseñanza aprendizaje de la demostración matemática.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Entre estas consideramos: la identificación de patrones, el razonamiento plausible y la formulación de conjeturas, y el razonamiento empírico-inductivo.

2.1.1 Identificación de patrones

En el capítulo 14 de Blanton, et al. (2011, p. 239) se define un patrón como *“a general mathematical relation that fits a given set of data”*. Los autores diferencian entre dos tipos de patrones teniendo en cuenta la forma en cómo estos se determinan – *definite and plausible patterns*. Respecto al primero de ellos – *definite patterns* – nos dicen que, *“it is possible mathematically for a solver (given the information in a task) to provide conclusive evidence for the selection of a specific pattern”*; entretanto, respecto al segundo de ellos – *plausible patterns* – nos dicen que,

> “it is not possible mathematically for a solver (given the information in a task) to provide conclusive evidence for the selection of a specific pattern over other patterns that also fit the data (e.g. one might select the pattern that he/ she considers to be the simplest pattern that fits the given set of data).”

Y muestran un ejemplo esclarecedor de estos conceptos, del cual podemos concluir que los patrones plausibles (plausible patterns) no pueden ser determinados de forma única, mientras que los patrones definidos (definite patterns) sí.

Pero, ¿dónde radica exactamente la importancia de los patrones en la enseñanza aprendizaje de la demostración matemática?
Debemos saber que el razonamiento demostrativo no es inmediato y que, como hemos visto a través de los párrafos precedentes, éste se desarrolla por etapas o fases. Una de ellas es justamente la identificación de patrones.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Stylianides y Silver (en Blanton, et al., 2011, p. 238), citan textualmente a Schoenfeld, el cual analiza conjuntamente con sus estudiantes un problema sobre polinomios, mostrándonos a través de esta experiencia no solo la relevancia de los patrones en la formulación de conjeturas, sino también el proceso demostrativo en su totalidad.

> Observe that the *proof*, like a classical mathematical argument, is quite terse and presents the results of a thought process. But where did the inspiration for the *proof* come from? If you go back over the way that the argument evolved, you'll see two major breakthroughs.
>
> The first had to do with understanding the problem, with getting a feel for it. The problem statement, in its full generality, offered little in the way of assistance. What we did was to *examine special cases* in order to *look for a pattern.* More specifically, our first attempt at special cases (…) didn't provide much insight. We had to get even more specific, as follows: look at a series of straightforward examples that are easy to calculate, in order to see if some sort of *patterns* emerges. With luck, you might be able to *generalize the patterns*. In this case, we were looking for roots of polynomials, so we chose easily factorable ones. Obviously, different circumstances will lead to different choices. But the strategy allowed us to *make a conjecture.*
>
> The second breakthrough came after we *made the conjecture*. Although we had some idea of *why it ought to be true,* the *argument* looked messy, and we stopped to reconsider for a while. What we did at that point was important, and is often overlooked: we went back to the conditions of the problem, explored them, and looked for tangible connections between them and the results we wanted. Questions like "what does it mean for r to be a root of P(x)?," "what does the reciprocal of r look like?," and "what does it mean for (1/r) to be a root of Q(x)?" may seem almost trivial in isolation, but they focused our attention on the very things that gave us a solution [the proof].

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Schoenfeld (en Blanton, et al., 2011, p. xiv) nos sugiere que así como los matemáticos, no debemos confiar en que los patrones se cumplirán por siempre (es decir, para todos los casos). Schoenfeld muestra algunos ejemplos en los que cierto patrón aunque parece cumplirse para todo el conjunto de casos en cuestión X, este se cumple para muchos de los casos en X, pero no para todos los casos en X. En este sentido, Schoenfeld considera que los patrones aunque puede que resulten cumplirse para todos los casos, también existe la otra posibilidad, que resulten siendo engañosos y nos conduzcan a conjeturas no completamente ciertas. En sus palabras*, “[a] million, a billion, a trillion positive examples aren´t enough. Something is only true for sure when you can prove it’s true”.*

Con esto, Schoenfeld refleja precisamente la necesidad del estudio de las demostraciones matemáticas, el cual presentamos en la sección 2.2.

2.1.2 Razonamiento plausible y formulación de conjeturas

Como una continuación del proceso demostrativo, consideramos el razonamiento plausible, que en pocas palabras, debe ser entendido como aquel razonamiento que nos permite generar conjeturas.

> Polyá studied intuitive reasoning in mathematics, considering it to be the reasoning we use to formulate our mathematical conjectures and calling it *plausible reasoning*. (Godino & Recio, 2001a)

Por otra parte, consideramos que una conjetura es una afirmación cuya verdad puede estar originada en un convencimiento intuitivo del que la formula; sin embargo su verdad o falsedad tiene que ser demostrada.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

> A conjecture is an observation made by a person who has doubts about its truth. A person's observation ceases to be a conjecture and becomes a fact in her or his view once the person becomes certain of its truth. (Harel & Sowder, 1998)

Autores como Garuti, Boero y Lemut (Godino & Recio, 2001a) afirman que existe una secuencia cognitiva entre la producción de conjeturas y la construcción de demostraciones; por lo tanto, los argumentos matemáticos informales podrían constituir los niveles previos a la demostración matemática.

2.1.3 Razonamiento empírico-inductivo

Dentro de estos argumentos matemáticos "informales" tenemos a aquellos que son originados por el razonamiento empírico-inductivo y los cuales nos permiten verificar el valor de verdad de una proposición a través de la confrontación con nueva evidencia empírica, esto es, a través del uso de nuevos ejemplos particulares. Al respecto, Stylianides y Silver (en Blanton, et. al., 2011):

> Earlier stages involve what Pólya […] calls "mathematics in the making" and frequently consist of the identification and arrangement of significant facts into meaningful *patterns*; the use of the patterns to formulate *conjectures* and the testing of these conjectures against new empirical evidence; and the effort to understand and provide *arguments* about why things work the way they do. (p. 237-238)

2.2 Lo que queremos decir por justificación y demostración matemática

Entonces, ¿qué es una demostración matemática?, ¿qué es una justificación matemática?, ¿es una demostración lo mismo que una justificación matemática?, ¿qué relación guardan?, ¿son importantes las dos?, ¿por qué

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

decidimos considerar a las justificaciones matemáticas como protagonistas de esta investigación y no a las demostraciones?

Estas interrogantes, entre otras, fueron las primeras que tuvimos que abordar al iniciar esta investigación. Aclarar estos conceptos no resultó ser una tarea sencilla, y esto se debió fundamentalmente a que existen diferentes acepciones de la demostración matemática, que preservan o no el aspecto formal de la misma dependiendo del nivel educacional con el que se esté tratando. Adicionalmente, es casi imposible encontrar referencias en las que se desarrolle el tema de la justificación matemática como un tema protagónico. A cambio, en gran parte de los textos en los que sí se hace referencia a este término no se explicita cuáles son las consideraciones conceptuales de éste. A pesar de todo esto, en muchos de los artículos y textos en general revisados, nos hemos topado con la idea del desarrollo de habilidades previas a la demostración, expresada por algunos autores como aprendizaje de la demostración por etapas o fases, tal como lo hemos visto en las secciones anteriores. Basados en esta idea es que decidimos considerar una conceptualización propia de lo que significará una justificación matemática para este trabajo de investigación. Esto lo presentaremos en la sección 2.2.3, después de presentar algunas consideraciones conceptuales de algunos reconocidos investigadores, que consideramos relevantes para esta pesquisa.

2.2.1 Demostración matemática

En cuanto a la demostración matemática, una de las acepciones existentes es aquella dada por Harel & Sowder (1998), quienes definen el proceso demostrativo teniendo como base el concepto primitivo observación:

> "[B]y 'proving' we mean the process employed by an individual to remove or create doubts about the truth of an observation". (p. 241)

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Asimismo, un concepto de suma importancia para los autores de este artículo es la noción de Esquema de demostración (“*Proof Schemes*”), la cual ha sido empleada por diferentes autores en sus propios análisis y estudios (Godino & Recio, 2001a, 2001b; Blanton, et al., 2011; Ibañes, 2001; Bieda, 2008). Los autores aclaran en qué consiste un esquema de demostración:

> “A person’s proof scheme consists of what constitutes ascertaining and persuading for that person”. (p. 244)

Los autores presentan además un estudio detallado de la clasificación de estos esquemas de demostración, el cual ha sido presentado como resultado de la puesta en acción de procesos demostrativos llevada a cabo con estudiantes de nivel universitario. Así, los autores dividen los esquemas de prueba en 3 categorías: esquemas de prueba de convicción externa, esquemas de prueba empíricos y esquemas de prueba analíticos. Cada uno de los cuales se dividen en sub-categorías para precisar mejor el nivel cognitivo o la habilidad intelectual alcanzada por el estudiante en su desarrollo matemático. Aunque no presentamos el desarrollo de estas categorías, creemos que vale la pena incluirlas, con el fin de difundir su existencia y como una referencia que puede ser usada en futuras investigaciones que se realicen sobre las demostraciones matemáticas. En nuestro caso particular, no las hemos empleado en nuestra investigación, por no ser completamente compatibles con las justificaciones dadas por los estudiantes de nivel escolar que son foco de nuestra investigación. Pensamos que esto se debe básicamente a los diferentes contextos educacionales en los que se han realizado ambas investigaciones.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Otra de las acepciones mencionadas (Godino & Recio, 2001a) toma en consideración los significados institucionales y personales de la demostración matemática. En cuanto a los primeros, se realiza un estudio sobre los diferentes contextos institucionales que influyen en su concepción: la vida diaria, las ciencias empíricas, la matemática profesional, la lógica y los fundamentos de la matemática, y se define lo que viene a constituir una demostración dentro de cada uno de estos contextos. Entretanto, los significados personales de la demostración matemática se configuran en esquemas: esquema de argumentación explicativa (AEX), esquema empírico-inductivo (AEI), esquema deductivo informal (PDI) y esquema deductivo formal (DDF). Los autores además precisan que entre los significados institucionales y personales de la demostración existe una relación directa, tal y como lo manifiestan en el siguiente párrafo:

> This relationship can be considered as a two-way influence: i) personal schemes can be influenced by the meaning of proof in the institutions, of which the students are members; ii) additionally, the institutional meanings of mathematical proof emerge from the personal schemes prevailing in these institutions.

Respecto a los esquemas de demostración, los autores aclaran que:

a) <u>Los esquemas de argumentación explicativa</u> son meras confirmaciones de la proposición a ser demostrada, para lo cual se usan ejemplos particulares como argumentaciones explicativas. En estos procesos el sujeto explica, por medio de ejemplos específicos, el significado de la proposición a ser demostrada. Sin embargo, ni existe una verdadera intención de validar la proposición, ni una intención de afirmar la validez de la proposición para todos los casos posibles. Estos esquemas de demostración presentan únicamente una intención explicativa.

   Los autores consideran que estos esquemas podrían corresponder a argumentaciones intuitivas elementales.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

b) Los esquemas empírico-inductivos son basados en la verificación de proposiciones a ser demostradas usando ejemplos particulares, sin la intención de justificar la validez general de la proposición y usando procedimientos empírico-inductivos.

   Los autores consideran que estos esquemas pueden ser relacionados al significado de la demostración matemática en los ámbitos científicos.

c) Los esquemas deductivos informales desarrollan enfoques lógico informales basados en el uso de analogías, herramientas gráficas, etc.

   Los autores consideran que estos esquemas podrían ser relacionados a formas de demostración matemática no muy elaboradas que son usadas con frecuencia por profesores de matemática en el salón de clase; estas son argumentaciones con un fuerte componente intuitivo, incluyendo la visualización (por ejemplo, demostraciones en cálculo diferencial basadas en representaciones gráficas de funciones).

d) Los esquemas deductivos formales son formas elementales de demostraciones deductivas. Este carácter elemental se impone por la simplicidad de los problemas planteados. Sin embargo, las respuestas siguen un enfoque formal, más de acuerdo con las reglas de transformación de un lenguaje simbólico y algebraico, en los que operan los términos matemáticos, que con el significado específico de estos términos.

   Los autores consideran que estos esquemas podrían ser relacionados a las formas habituales que los matemáticos y los profesores de matemática emplean para demostrar de una manera más rigurosa, usando algún tipo de formalismo. (Traducción propia)

En cuanto a la demostración matemática no hay mucho que decir siempre que nos restrinjamos al campo de la matemática como ciencia. Desde esta posición (de la comunidad matemática), la demostración es vista desde una perspectiva estrictamente formal. Bourbaki (en Ibañes, 2002), la define como:

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

"una sucesión de deducciones lógicas rigurosas desde alguna proposición ya aceptada hasta la que se pretende probar".

O equivalentemente, Knowless (en Recio, 2002), la define como:

"(…) una secuencia de proposiciones, cada una de las cuales es o bien un axioma, o bien una proposición que ha sido derivada de los axiomas iniciales por las reglas de inferencia de la teoría."

En cuanto al carácter formal de la demostración, artículos de investigación, como el de Recio (2002), proponen una revisión y flexibilización del mismo, tanto desde la perspectiva de la institución educativa, como de la institución matemática. Esta propuesta está orientada a la inclusión de la demostración en la institución educativa. No obstante, nosotros pensamos que una "flexibilización" de este aspecto de la demostración, vista desde la institución matemática, significaría quitarle el rigor que la demostración requiere; y así, la esencia de ésta. Por tanto, nuestra propuesta va dirigida a que de ninguna manera se le reste el rigor propio de la *demostración matemática*, sino más bien se considere a ésta como el nivel más alto de justificación que se puede alcanzar.

2.2.2 Niveles de producción de demostración matemática

Bieda, Choppin y Knuth presentan (en Blanton, et al., 2011, p. 154-155) la siguiente clasificación de la demostración matemática según sus niveles de producción.

Nivel 0

Los estudiantes en este nivel parecen no ser conscientes de la necesidad de proporcionar una justificación *matemática* para demostrar la verdad de una proposición o afirmación. Por ejemplo, un estudiante

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

podría aceptar una proposición como verdadera porque un profesor, un papá o mamá, o un texto "dice" que es verdadera; en este caso, la justificación no es matemática. En otros casos, un estudiante podría simplemente establecer que una proposición es verdadera sin referencia alguna del por qué es así (por ejemplo, "la suma de dos números pares es par porque así es como es," "sí, los números serán iguales porque siempre serán iguales").

Nivel 1

Los estudiantes en este nivel parecen ser conscientes de la necesidad de proporcionar una justificación matemática, pero sus justificaciones no son generales; en la mayoría de los casos, las justificaciones de los estudiantes están basadas empíricamente. Entre las justificaciones basadas empíricamente, reconocemos distinciones (en subniveles) entre estudiantes que consideran comprobar unos pocos casos, estudiantes que consideran comprobar sistemáticamente unos pocos casos (por ejemplo, números pares e impares), estudiantes que consideran comprobar casos extremos o casos "aleatorios", y estudiantes que consideran el uso de un ejemplo genérico (demostración por una clase de objetos).

Nivel 2

Los estudiantes en este nivel parecen ser conscientes de la necesidad de un argumento general, e intentan producir tales argumentos por ellos mismos; los argumentos, sin embargo, no llegan a ser demostraciones aceptables. Esto puede suceder en una de dos maneras: (1) Los estudiantes expresan el reconocimiento de la necesidad de proporcionar un argumento general e intentan producir tal argumento, sin embargo, el argumento proporcionado no es un argumento viable (es decir, el argumento es o bien incorrecto matemáticamente o bien no nos conduciría a una demostración aceptable). (2) Los estudiantes

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

expresan el reconocimiento de la necesidad de proporcionar un argumento general e intentan producir tal argumento, sin embargo, el argumento está incompleto (si se completara, el argumento sería una demostración aceptable). En ambas situaciones, el punto es que los estudiantes intentan tratar con el caso general. Además, el Nivel 2 de justificaciones incluye respuestas de aquellos estudiantes que demuestran una consciencia de que la evidencia empírica no es suficiente como demostración – o bien al expresar reconocimiento de la necesidad de tratar con todos los casos o bien al expresar reconocimiento de la limitación de la presentación de ejemplos como demostración – pero no han logrado producir un argumento general.

Nivel 3

Los estudiantes en este nivel parecen ser conscientes de la necesidad de un argumento general, y son capaces de producir exitosamente tales argumentos por ellos mismos. Consideramos que los argumentos que los estudiantes producen en este nivel son demostraciones aceptables; esto es, sus argumentos demuestran que una proposición o afirmación es verdadera en todos los casos. Los argumentos categorizados en este nivel usualmente hacen referencia a suposiciones o hechos, una cadena de deducciones usada para construir el argumento, y finalmente una afirmación concluyente explícita. Aunque los argumentos producidos por los estudiantes podrían carecer del rigor o formalidad típicamente asociada a la demostración, sus argumentos, sin embargo, demuestran el caso general. (Traducción propia)

Notamos que se puede establecer una relación entre los niveles de producción de demostración matemática y los esquemas de demostración de Godino & Recio (2001a). Estos últimos los emplearemos para el análisis del tratamiento de las justificaciones en los libros de texto, efectuado en el capítulo 3.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

2.2.3 Justificación matemática

Así llegamos a la noción de justificación matemática que regirá el presente trabajo:

Desde nuestra perspectiva, un estudiante presenta una ***justificación matemática*** si sus argumentos clasifican en alguno de los niveles 1, 2 ó 3 de la demostración matemática presentados en la sección previa.

Esta concepción nos servirá de referencia para el análisis de las justificaciones dadas por estudiantes de primer grado de secundaria a cuestiones relacionadas con el tema divisibilidad. Este análisis lo hacemos en el capítulo 4.

Así, desde nuestra posición, una justificación matemática no es precisamente lo mismo que una demostración matemática. Desde nuestra perspectiva, una justificación matemática presenta un sentido mucho más amplio que la demostración puesto que esta incluye aquellos primeros argumentos que son proporcionados por estudiantes que son nuevos en los procesos demostrativos. De aquí que la relación existente entre ellas (entre la demostración y la justificación) es que toda demostración es una justificación matemática, aunque no toda justificación sea una demostración.

También podemos decir que bajo nuestro enfoque, ambos procesos validativos representan aspectos de suma relevancia en el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante. Una demostración matemática nos puede indicar que el estudiante ha culminado satisfactoriamente el proceso demostrativo; mientras que una justificación matemática nos puede indicar el nivel alcanzado por el estudiante, sus dificultades, sus errores, sus conflictos, sus concepciones, etc. Estas pueden ser señales importantes para la tarea docente de orientación, estímulo y refuerzo.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

2.3 La construcción de contraejemplos como una forma de justificación

Se denomina *contraejemplo* a un ejemplo que prueba la existencia de objetos que no verifican una propiedad (Ibañes y Ortega, 1997).

> Los contraejemplos juegan un papel importante en la creación matemática, importancia que resaltan especialmente los filósofos que están en la órbita del falsacionismo, como Lakatos, quien escribe lo siguiente al respecto: *"La refutación nos hace aprender; la corroboración nos hace olvidar"*. Y de ello da una preciosa muestra en "Pruebas y refutaciones". (p. 77)

Los ejemplos y/o contraejemplos se encuentran dentro de la clasificación según el Método: en el método constructivo, que se presenta en Ibañes & Ortega (1997).

En conclusión, desde la perspectiva aquí presentada, la enseñanza de las matemáticas involucrando justificaciones promueve el desarrollo del pensamiento

- *creativo*, gracias a la identificación de patrones y así a la formulación de conjeturas;
- *reflexivo*, pues los estudiantes se vuelven cada vez más conscientes de la necesidad de pensar detenidamente los procedimientos llevados a cabo;
- *crítico*, pues los estudiantes son cada vez más capaces de refutar las justificaciones dadas por sus compañeros y defender sus argumentos debido al grado de convicción alcanzado; y
- *lógico*, pues cada una de sus justificaciones deben ser coherentes con el conocimiento matemático con el que se cuenta.

Así, la matemática es vista también como un proceso que no ha sido terminado y que más bien debe irse construyendo por nuestros estudiantes.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

2.4 Las justificaciones en las tareas

En Souza (2007) se presenta una clasificación de las actividades destinadas a alumnos.

- tarea tradicional;
- tareas de iniciación a la demostración;
- tareas para dar sentido a una frase;
- tareas relativas a los enunciados de teoremas;
- tareas para dar sentido a la demostración;
- tareas sobre la utilización de las palabras de conexión;
- tareas para encontrar un encadenamiento deductivo;
- tareas para el aprendizaje de la escritura;
- tareas para intentar descubrir la estructura de textos de demostración;
- y tareas para vencer ciertos obstáculos.

Se presenta el desarrollo de una selección de estas categorías que Barbosa usó en el análisis de sus actividades. Estas son:

1) **Tareas de iniciación a la demostración (TIP)**. Las actividades llevan a "encontrar argumentos de varias naturalezas a favor o en contra de una conjetura". Esas actividades exigen producción de textos que son divididas en dos categorías:
   a. Enunciar o validar una conjetura: para que se tenga producción de pruebas próximas a la demostración, la actividad debe exigir la producción de un texto;
   b. Tareas de construcción en que es preciso deducir para ejecutar: El alumno debe trabajar en la construcción para que ocurra una reflexión.
2) **Tareas para dar sentido a una frase (TSF).** Las actividades son destinadas a llevar la comprensión del sentido de una frase, como por ejemplo:
   a. Preguntas con respuestas del tipo: verdadero y falso.
   b. Dos frases para decidir si quieren decir la misma cosa.
   c. Completar frases con palabras como "el, la, un, una, ciertos, algunos, ningún, todos, a veces, siempre, jamás".
3) **Tareas sobre la utilización de las palabras de conexión (TPC).** Según el texto, "La estructura del texto de demostración es caracterizada por el uso de palabras y

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

expresiones específicas". Para el dominio de esas palabras son sugeridas actividades como:

a. Emplear frases conteniendo "si…entonces…" en las actividades propuestas para verificar su veracidad.
b. Entre las varias frases escritas con las palabras "porque", "como", "cuando" descubrir aquellas que son equivalentes.
c. Completar en los espacios en blanco con expresiones adecuadas en un texto de demostración.

4) **Tareas para encontrar un encadenamiento deductivo (TED).** Se trata de "actividades que pretenden organizar propiedades en un encadenamiento deductivo". Ejemplos:

a. Reconstruir una demostración "puzzle".
b. Comparar cuadros del tipo "yo sé que", "conforme a la propiedad", "concluyo diciendo que", colocándolos en un encadenamiento lógico.
c. Construir planos de resolución de problemas.

5) **Tareas para aprendizaje de escritura (TAE).** En este caso, el objetivo es favorecer la escritura de verdaderos textos de escritura matemática. Ejemplos:

a. Pedir al alumno que escriba una secuencia de acciones que realizó durante la resolución de un problema de matemática.
b. Tareas que se convierten en un dominio de enunciado; por ejemplo: colocar las letras en una figura a partir de un enunciado.
c. Escribir un programa de construcción de una figura para un tercero, que debe rehacerla a partir del texto. (Souza, p. 33-36) (Traducción propia)

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Capítulo 3

ANÁLISIS DEL TRATAMIENTO DE LAS JUSTIFICACIONES EN LA EDUCACIÓN BÁSICA REGULAR EN PERÚ

Este capítulo contiene el análisis de la inclusión de las justificaciones en el Diseño Curricular de la Educación Básica Regular en Perú, así como en cuatro de los libros de texto cuyo uso es muy difundido en nuestro país.

3.1 Análisis del Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular en Perú

Consideramos que el análisis del Diseño Curricular Nacional (DCN) de la Educación Básica Regular (EBR) en Perú resulta de suma importancia debido a que es justamente éste el documento que sirve de referencia básica para la elaboración de las diferentes propuestas curriculares a nivel nacional. Las variaciones del mismo se dan principalmente en el ámbito local o regional, tal y como se establece en el siguiente párrafo tomado del DCN (2009, p. 16):

> El Ministerio de Educación es responsable de diseñar los currículos básicos nacionales. En la instancia regional y local se diversifican con el fin de responder a las características de los estudiantes y del entorno; en ese marco, cada Institución Educativa construye su propuesta curricular, que tiene valor oficial”.
>
> Ley General de Educación Artículo 33º
> Currículo de la Educación Básica

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Según el DCN, la EBR ha sido organizada en tres niveles: Inicial, Primaria y Secundaria. Estos niveles se organizan en ciclos, los que a su vez se organizan en grados, como se muestra en la siguiente figura.

EDUCACIÓN BÁSICA REGULAR

NIVELES	Inicial		Primaria						Secundaria				
CICLOS	I	II	III		IV		V		VI		VII		
GRADOS	años 0 - 2	años 3 - 5	1°	2°	3°	4°	5°	6°	1°	2°	3°	4°	5°

Figura tomada del DCN (2009, p. 11)

Con el propósito de estudiar el tratamiento de las justificaciones en el DCN de la EBR, nos hemos detenido no solo a analizar la inclusión del término justificación, sino también la inclusión de términos que guardan estrecha relación con este proceso clave. Entre estos tenemos: demostración, argumentación, verificación, reflexión, planteamiento de conjeturas, pensamiento crítico, razonamiento deductivo, construcción de contraejemplos, etc.

Aunque en el presente trabajo pretendemos enfocarnos en el primer grado del nivel secundario (incluido en el VI ciclo de la organización de la EBR), el análisis del DCN se hará de forma más general con el fin de mostrar las diferencias para cada nivel educacional, entre las consideraciones que se hacen respecto a las justificaciones.

Este análisis se divide entonces en las siguientes secciones:

(3.1.1) Las características del estudiante;

(3.1.2) El área Matemática, que se divide a su vez en el análisis puntual de:

(3.1.2.1) La fundamentación del área;

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

(3.1.2.2) Los procesos transversales involucrados en las capacidades; (3.1.2.3) La organización del área;
(3.1.2.4) Las competencias por ciclo;
(3.1.2.5) Los conocimientos;
(3.1.2.6) Las capacidades;
(3.1.2.7) Las actitudes.

Aunque hemos considerado realizar un análisis del tratamiento que se le da a las justificaciones en el DCN teniendo en cuenta los puntos anteriores, la consideración de procesos relacionados directa o indirectamente con las justificaciones ya empiezan a ponerse de manifiesto a través de los enfoques que rigen el DCN: enfoque cognitivo y social. Como muestra de esto, recogemos algunas de las características que reflejan, desde nuestro punto de vista, estas consideraciones. Así, tenemos como parte de los principios psicopedagógicos del DCN: la promoción de la reflexión en los estudiantes; la elaboración de sus propias conclusiones; la adquisición de nuevo conocimiento a partir del uso de estructuras lógicas dependientes de variables como aprendizajes adquiridos anteriormente; el desarrollo del pensamiento crítico y la creatividad; la participación activa, el humor y el disfrute; la exclusión de una enseñanza memorística o vertical en la que el estudiante se dedique solamente a copiar o memorizar la información proporcionada por el profesor. Los siguientes párrafos contienen los puntos anteriores:

> Por ello, se han de propiciar interacciones ricas, motivadoras y saludables en las aulas; así como situaciones de aprendizaje adecuadas para facilitar la construcción de los saberes, proponer actividades variadas y graduadas, orientar y conducir las prácticas, promover la reflexión y ayudar a que los estudiantes elaboren sus propias conclusiones, de modo que sean capaces de aprender a aprender y aprender a vivir juntos. (p. 18)

> El aprendizaje es un proceso de construcción: interno, activo, individual e interactivo con el medio social y natural. Los estudiantes, para aprender,

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

utilizan estructuras lógicas que dependen de variables como los aprendizajes adquiridos anteriormente y el contexto socio cultural, geográfico, lingüístico y económico - productivo. (p. 18)

(…) como docentes, debemos reconocer los cambios y retos del mundo contemporáneo en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Hay que darle un nuevo sentido a la enseñanza para promover el pensamiento crítico, la creatividad y la libertad; la participación activa, el humor y el disfrute; y el desarrollo de una actitud proactiva y emprendedora; evitando así el simple copiado o la instrucción memorizada. (p. 31)

Asimismo, se precisan algunas de las características que se espera que muestren los estudiantes al finalizar la EBR (DCN, p. 33-34); las que consideramos relevantes en relación con las justificaciones son:

- CRÍTICO Y REFLEXIVO. Hace uso permanente del pensamiento divergente; entendido como la capacidad de discrepar, cuestionar, emitir juicios críticos, afirmar y argumentar sus opiniones y analizar reflexivamente situaciones distintas.
- COMUNICATIVO. Expresa con libertad y en diferentes lenguajes y contextos lo que piensa y siente, comprende mensajes e ideas diversas, es dialogante y capaz de escuchar a otros. Interpreta diversos lenguajes simbólicos.
- RESOLUTIVO. Se asegura de entender los problemas, hace preguntas y se repregunta para resolverlos. Controla y ajusta constantemente lo que está haciendo. Aplica y adapta diversas estrategias y evalúa sus progresos para ver si van por buen camino. Si no progresa, se detiene para buscar y considerar otras alternativas.
- INVESTIGADOR E INFORMADO. Busca y maneja información actualizada, significativa y diversa de manera organizada; siendo capaz de analizarla, compararla y de construir nuevos conocimientos a partir de ella. Hace conjeturas y se interesa por resolver diversos problemas de la vida diaria y de la ciencia, haciendo uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Sin que perdamos de vista que para este análisis nos limitamos a las consideraciones hechas para las justificaciones en cada uno de los puntos previamente expuestos, pasamos a desarrollar el mismo.

3.1.1 Las características del estudiante

Recogemos las características que guardan relación con los procesos vinculados a la justificación. Aunque basándonos en el análisis del DCN no podamos determinar de forma exacta o aproximada cuál es la edad o el grado a partir del cual se sugiere que el estudiante puede estar "listo" para entender y hacer justificaciones, la caracterización de los estudiantes (por niveles) en el DCN incluye algunas pautas de los cambios cognitivos que los alumnos experimentan de un nivel a otro. Con la intención de mostrar estos cambios presentamos un cuadro que contiene fragmentos tomados del documento objeto de análisis que hemos subrayado para indicar el reconocimiento de aquellos procesos que guardan relación directa o indirecta con el proceso de justificación.

Caracterización del niño del nivel de Educación Primaria	**Caracterización del púber y adolescente del nivel de Educación Secundaria**
▪ A nivel cognitivo, aún no aparece la abstracción. El pensamiento del niño pasa del pensamiento intuitivo al pensamiento concreto. (p. 162) ▪ Los estudiantes se hacen más realistas y autocríticos al evaluar si sus argumentos intelectuales son fuertes o débiles. Esto puede dar como resultado diferencias en el nivel de confianza en sí mismo y de motivación académica. (p. 163) ▪ Conforme crecen son más analíticos y lógicos en su forma de procesar el vocabulario. El niño puede deducir los significados de palabras nuevas que tienen el mismo radical o raíz. (p. 164)	▪ Dominio del lenguaje que permite al estudiante desarrollar su capacidad argumentativa. (p. 313) ▪ El estudiante se refiere a los objetos o fenómenos sin necesidad de observarlos directamente o estar cerca de ellos, pues su nivel de pensamiento le permite darse cuenta que puede representar el mundo mediante las palabras o la escritura, apoyado en su imaginación y su capacidad para deducir y hacer hipótesis. (p. 313)

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

▪ El desarrollo del pensamiento lógico se manifiesta tanto a nivel intelectual como afectivo. (p. 164)	

CUADRO 3.1

Características de los estudiantes por niveles

Se hace referencia a los términos: abstracción, pensamiento intuitivo, pensamiento concreto, pensamiento operatorio, pensamiento lógico, los que aparecen como parte de un proceso gradual por el que atraviesan los estudiantes en el nivel primaria.

También, en la sección denominada: "Caracterización de los ciclos de la EBR" se considera para el VI Ciclo (que incluye el primer grado de secundaria) lo siguiente:

> (…) En esta etapa el adolescente va construyendo progresivamente un pensamiento abstracto; es decir, sus preocupaciones desde el punto de vista cognitivo, están relacionadas con interrogantes que requieren explicaciones racionales de los hechos, fenómenos y procesos de la realidad. Producto de este tipo de pensamiento, es capaz de intuir, adivinar o deducir situaciones a partir de la observación. (p. 17)

Aquí, aunque no hay referencias explícitas a las demostraciones, se hace referencia al pensamiento abstracto, intuición, deducción y observación, las cuales deben ser características mostradas por los estudiantes del VI ciclo de la EBR, en general, y las cuales están inmersas en nuestras consideraciones de justificación. Esto nos hace pensar que en el DCN se considera que los estudiantes del VI ciclo de la EBR podrían estar intelectualmente preparados para involucrarse en un aprendizaje de las matemáticas que incluya la comprensión y la elaboración de justificaciones.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

3.1.2 El área Matemática

A continuación nos limitamos a analizar el tratamiento de las justificaciones para el área Matemática. Para esto dividimos nuestro estudio en diferentes secciones.

3.1.2.1 La fundamentación del área

Presentamos el siguiente cuadro que contiene algunos fragmentos extraídos de la Fundamentación del área Matemática del DCN. De ellos hemos subrayado algunas líneas que desde nuestra percepción son indicios claros del tratamiento que el DCN le da a las justificaciones o los procesos vinculados a ellas.

Nivel Primaria	Nivel Secundaria
▪ Los niños observan y exploran su entorno inmediato y los objetos que lo configuran, <u>estableciendo relaciones</u> entre ellos cuando realizan actividades concretas de diferentes maneras. (p. 186) ▪ Estas interacciones le permiten <u>plantear hipótesis</u>, <u>encontrar regularidades</u>, <u>hacer transferencias</u>, <u>establecer generalizaciones</u>, representar y evocar aspectos diferentes de la realidad vivida, <u>interiorizarlas en operaciones mentales y manifestarlas utilizando símbolos</u>. De este modo el estudiante va <u>desarrollando su pensamiento matemático y razonamiento lógico, pasando progresivamente de las operaciones concretas a mayores niveles de abstracción</u>. (p. 186) ▪ Desde su enfoque cognitivo, la matemática le permite al estudiante <u>construir un razonamiento ordenado y sistemático</u>. (p. 186) ▪ Desde su enfoque social y cultural, le	▪ <u>Los conocimientos matemáticos se van construyendo en cada nivel educativo y son necesarios para continuar desarrollando ideas matemáticas</u>, (…). En este sentido, <u>adquieren relevancia las nociones de</u> función, equivalencia, proporcionalidad, variación, estimación, representación, ecuaciones e inecuaciones, <u>argumentación</u>, comunicación, <u>búsqueda de patrones y conexiones</u>. (p. 316) ▪ Para desarrollar el pensamiento matemático resulta relevante el <u>análisis de procesos de casos particulares, búsqueda de diversos métodos de solución, formulación de conjeturas, presentación de argumentos para sustentar las relaciones, extensión y generalización de resultados, y la comunicación con lenguaje matemático</u>. (p. 316)

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

dota de capacidades y recursos para abordar problemas, explicar los procesos seguidos y comunicar los resultados obtenidos. (p. 186)	

CUADRO 3.2

La Fundamentación del área Matemática por niveles

Observemos que en los fundamentos del área Matemática del DCN se consideran relevantes para el desarrollo del pensamiento matemático y razonamiento lógico los procesos considerados en nuestro marco teórico como etapas previas a la demostración matemática. En este sentido, y aunque no sea mencionado de forma explícita en el documento objeto de estudio, consideramos que el DCN de la EBR en Perú promueve el aprendizaje de las matemáticas a través de procesos vinculados directamente a la justificación.

3.1.2.2 Los procesos transversales involucrados en las capacidades

Presentamos el siguiente cuadro que contiene algunos fragmentos tomados del DCN, específicamente de los aspectos referidos a los procesos transversales involucrados en el desarrollo de las capacidades matemáticas que a través del DCN se promueven. De estos fragmentos hemos subrayado algunas líneas que desde nuestra percepción tratarían con las justificaciones o los procesos vinculados a ellas.

Nivel Primaria	Nivel Secundaria
Las capacidades involucran tres procesos transversales: - Razonamiento y demostración (RD), - Comunicación matemática (CM) y - Resolución de problemas (RP).	Las capacidades explicitadas para cada grado involucran tres procesos transversales: - Razonamiento y demostración (RD), - Comunicación matemática (CM) y - Resolución de problemas (RP).

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

El proceso RD implica desarrollar ideas, explorar fenómenos, **justificar resultados**, formular y analizar conjeturas matemáticas, expresar conclusiones e interrelaciones entre variables de los componentes del área y en diferentes contextos. (p. 186)	**El proceso RD** para formular e investigar conjeturas matemáticas, desarrollar y evaluar argumentos y comprobar **demostraciones matemáticas**, elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y métodos de demostración para que el estudiante pueda reconocer estos procesos como aspectos fundamentales de las matemáticas. (p. 317)
El proceso CM implica organizar y consolidar el pensamiento matemático para interpretar, representar (diagramas, gráficas y expresiones simbólicas) y expresar con coherencia y claridad las relaciones entre conceptos y variables matemáticas; comunicar argumentos y conocimientos adquiridos; reconocer conexiones entre conceptos matemáticos y aplicar la matemática a situaciones problemáticas reales. (p. 187)	**El proceso CM** para organizar y comunicar su pensamiento matemático con coherencia y claridad; para expresar ideas matemáticas con precisión; para reconocer conexiones entre conceptos matemáticos y la realidad, y aplicarlos a situaciones problemáticas reales. (p. 317)
El desarrollo de estos procesos exige que los docentes planteen situaciones que desafíen a cada estudiante, impulsándolos a observar, organizar datos, analizar, formular hipótesis, reflexionar, experimentar empleando diversos procedimientos, verificar y explicar las estrategias utilizadas al resolver un problema; es decir, valorar tanto los procesos matemáticos como los resultados obtenidos. (p. 187)	**Desarrollar estos procesos implica que los docentes propongan** situaciones que permitan a cada estudiante valorar tanto los procesos matemáticos como los resultados obtenidos, poniendo en juego sus capacidades para observar, organizar datos, analizar, formular hipótesis, reflexionar, experimentar empleando diversos procedimientos, verificar y explicar las estrategias utilizadas al resolver un problema. (p. 317)

CUADRO 3.3

Procesos transversales del área Matemática por niveles

La consideración del proceso Razonamiento y Demostración nos permite ver claramente el tratamiento de suma relevancia que se le da a

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

las justificaciones matemáticas. La descripción de este proceso, así como la del proceso Comunicación Matemática, no hace sino reforzar la idea que tenemos ahora de la importancia que se le da a las justificaciones en el DCN.

Podemos observar también la inclusión de algunas sugerencias generales que se hace a los profesores con el propósito de que los estudiantes desarrollen las habilidades matemáticas generales mencionadas, y las particulares que aún están por ser señaladas.

3.1.2.3 La organización del área

Presentamos el siguiente cuadro que contiene algunos fragmentos de la organización del área Matemática del DCN. De estos fragmentos hemos subrayado algunas líneas que desde nuestra percepción tratarían con las justificaciones o los procesos vinculados a ellas.

Nivel Primaria	**Nivel Secundaria**
El área de Matemática se organiza en función de: ▪ Números, relaciones y operaciones (NRO), ▪ Geometría y medición (GM), y ▪ Estadística (ES).	El área de Matemática en este nivel se organiza en función de: ▪ Números, relaciones y funciones (NRF), ▪ Geometría y medición (GM), y ▪ Estadística y Probabilidad (EP).
NRO está referido al conocimiento de los números, el sistema de numeración y el sentido numérico, lo que implica la habilidad para descomponer números naturales, utilizar ciertas formas de representación y comprender los significados de las operaciones, algoritmos y estimaciones. También implica establecer relaciones entre los números y las operaciones para resolver problemas, identificar y encontrar regularidades. La comprensión de las propiedades fundamentales de los sistemas numéricos y	**NRF** se refiere al conocimiento de los Números, relaciones y funciones y a las propiedades de las operaciones y conjuntos. Es necesario que los estudiantes internalicen, comprendan y utilicen varias formas de representar patrones, relaciones y funciones, de manera real. Asimismo, deben desarrollar habilidades para usar modelos matemáticos para comprender y representar relaciones cuantitativas. **GM** se relaciona con (…). Se trata de

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

la vinculación entre éstos y las situaciones de la vida real, facilita la descripción e interpretación de información cuantitativa estructurada, su simbolización y elaboración de inferencias para llegar a conclusiones. (p. 188)	establecer la validez de conjeturas geométricas por medio de la deducción y la demostración de teoremas y criticar los argumentos de los otros.

CUADRO 3.4
Organización del área Matemática por niveles

Aunque el tema matemático central en nuestros análisis (Divisibilidad) es uno de los conocimientos a ser desarrollados en NRF del área Matemática, como se puede observar en el Cuadro 3.6, la descripción que el DCN hace sobre esta "sección" (NRF) no nos da señales claras de que se proponga un trabajo que involucre a las justificaciones o los procesos relacionados a ellas. La única referencia a ser destacada es la que aparece subrayada en el Cuadro 3.4, aunque no queda claro si hace referencia a la identificación de patrones, según las consideraciones hechas en nuestro marco teórico (Capítulo 2).

Por otra parte, notamos que en GM (para el nivel secundaria) se establece claramente una propuesta según la cual los estudiantes deben involucrarse en procesos de alto nivel (según las consideraciones hechas en el Capítulo 2) al pretender que éstos demuestren teoremas geométricos.

3.1.2.4 Las competencias por ciclo

Presentamos el siguiente cuadro donde señalamos solamente aquellas competencias que consideramos relevantes en relación con el tratamiento de las justificaciones en el DCN.

Nivel Primaria	Nivel Secundaria
Competencias por ciclo: a partir del ciclo V (5to y 6to grado de nivel primaria)	**Competencias por ciclo:** en los dos ciclos (ciclo VI y ciclo VII) se busca como

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

empieza a emplearse el término "argumentar" tanto en NRO, como en GM y ES. Es común que lo empleen de la siguiente manera: *"(…) argumentando los procesos empleados en su solución."* (p. 189)	competencia a ser desarrollada por los estudiantes de nivel secundaria que argumenten. Específicamente se establece como competencia: *"Argumenta y comunica los procesos de solución y resultados utilizando lenguaje matemático".* (p. 318)

CUADRO 3.5

Competencias del área Matemática por ciclos

3.1.2.5 Los conocimientos

Seleccionamos aquellos conocimientos específicos (por nivel y grado) considerados en el DCN que guardan relación con la comprensión de tareas, como las incluidas en algunas de nuestras actividades (ver, por ejemplo, los Anexos A3 y A6 y, en general, la propuesta presentada en el capítulo 5 del presente trabajo). Asimismo, observamos que es a partir del tercer grado de primaria que se recomienda el estudio del significado de división exacta, concepto a partir del cual hemos definido divisibilidad de números naturales (ver Anexo S2), foco de nuestra investigación. Además es el primer grado de secundaria el grado en el que se sugiere tratar explícitamente este contenido. Veamos el siguiente cuadro que resume lo que acabamos de señalar.

Nivel Primaria	Nivel Secundaria
Sobre los conocimientos: ▪ <u>En el Primer grado</u> CUANTIFICADORES: todos, algunos, ninguno (en NRO). (p. 190) ▪ <u>En el Segundo grado</u> OCURRENCIA DE SUCESOS: siempre, nunca, a veces (en ES). (p. 194) ▪ <u>En el Tercer grado</u> SIGNIFICADO DE LA DIVISIÓN EXACTA: RESTA SUCESIVA Y REPARTO (en NRO). (p. 195)	**Sobre los conocimientos:** ▪ Los conocimientos han sido divididos de forma explícita para: ▪ NRF en: Sistemas numéricos, Álgebra, Funciones y Relaciones lógicas y conjuntos. ▪ GM en: Geometría plana, Medida, Transformaciones y Geometría del espacio. En el Tercer grado de secundaria en lugar de Transformaciones se tiene

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

▪ En el Cuarto grado DIVISIÓN (exacta e inexacta) DE NÚMEROS NATURALES DE HASTA TRES CIFRAS (en NRO). (p. 197) ▪ En el Sexto grado MÚLTIPLOS Y DIVISORES de un número (en NRO). (p. 203)	Trigonometría. En el Cuarto grado se tiene adicionalmente a Geometría Analítica. En el Quinto grado se tiene solamente Geometría plana, Geometría del espacio, Geometría analítica y Trigonometría. ▪ EP en: Estadística, Azar y Combinatoria. ▪ En el Primer grado DIVISIBILIDAD (en NRF). (p. 319) ▪ En el Cuarto grado CUANTIFICADORES: EXISTENCIAL Y UNIVERSAL (en NRF) (p. 334); DEDUCCIÓN DE FÓRMULAS RECURSIVAS (en EP) (p. 336) ▪ En el Quinto grado ven LOS ARGUMENTOS Y SU ESTRUCTURA, así como ARGUMENTOS DEDUCTIVOS E INDUCTIVOS (en NRF) (p. 337)

CUADRO 3.6

Conocimientos para el área Matemática por niveles y grados

Destacamos la importancia de la inclusión de los cuantificadores, tanto en primaria como en secundaria, así como la ocurrencia de sucesos en la primaria, por su uso en la comprensión de los enunciados de muchas proposiciones matemáticas, en la elaboración de justificaciones y para el trabajo de algunas de las tareas de justificación planteadas en la propuesta presentada en el Capítulo 5.

3.1.2.6 Las capacidades

Determinamos a partir de qué grado (y nivel) se sugiere el desarrollo de capacidades tales como la de justificar y/o capacidades afines a ella. El siguiente cuadro contiene estos hallazgos.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

Nivel Primaria	Nivel Secundaria
▪ A diferencia de la Educación Secundaria, las capacidades en la Educación Primaria no han sido separadas de forma explícita por los tres procesos transversales ya mencionados en la sección 3.1.2.2. ▪ En el Cuarto grado empiezan a exigir como una de las capacidades (2 en total) a ser desarrolladas la capacidad de **“argumentar”**. 1) *“Interpreta y argumenta la relación entre el área y el perímetro de un polígono: cuadrado, rectángulo, triángulo y figuras compuestas.”* (En GM) (p. 198) 2) *“Formula y argumenta la posibilidad de ocurrencia de sucesos numéricos y no numéricos: seguros, probables e improbables.”* (En ES) (p. 199) ▪ En el Quinto grado, se presentan (3) capacidades que involucran a las argumentaciones: 1) *“Representa y argumenta las variaciones de los perímetros y áreas al variar la medida de los lados de un cuadrado y un rectángulo.”* (En GM) (p. 201) 2) *“Representa, simboliza y argumenta los patrones generados al variar los lados del cuadrado y del rectángulo.”* (En GM) (p. 201) 3) *“Interpreta y argumenta información que relaciona variables presentadas en gráficos de barras, poligonales y circulares.”* (En ES) (p. 202) ▪ En el Sexto grado, se presenta solo una: 1) *“Interpreta y establece relaciones causales que argumenta a partir de información presentada en tablas y*	▪ Las capacidades han sido divididas de forma explícita en los tres procesos transversales: RD, CM y RP. ▪ En el Primer grado, lo más cercano que se tiene a las justificaciones son las siguientes capacidades (2): 1) *“Realiza y verifica operaciones utilizando la calculadora, para reflexionar sobre conceptos y para descubrir propiedades.” (En RD de NRF) (p. 319)* 2) *“Identifica patrones numéricos, los generaliza y simboliza.” (En CM de NRF) (p. 319)* ▪ En el Segundo grado, lo más cercano que se tiene a las justificaciones es justamente la capacidad que también aparece en el grado anterior (1): 1) *“Realiza y verifica operaciones utilizando la calculadora, para reflexionar sobre conceptos y para descubrir propiedades.” (En RD de NRF) (p. 324)* ▪ En el Tercer grado, se presenta por primera vez (2) capacidades que hacen referencia explícita a los términos **justificación** y **demostración**. Estas capacidades son: 1) *“Justifica mediante diversas demostraciones que el sistema de los números racionales y reales es denso.” (En RD de NRF) (p. 329)* 2) *“Demuestra identidades trigonométricas elementales” (En RD de GM) (p. 331)* ▪ En el Cuarto grado, se presentan (3) capacidades que involucran a las demostraciones: 1) *“Demuestra propiedades de los números reales utilizando los axiomas correspondientes.” (En*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

gráficos estadísticos." (En ES) (p. 204)	*RD de NRF) (p. 334)* *2) "Demuestra el teorema de Pitágoras." (En RD de GM) (p. 335)* *3) "Demuestra identidades trigonométricas." (En RD de GM) (p. 335)* ▪ En el Quinto grado, se presentan (3) capacidades que involucran a las justificaciones: *1) "Establece la validez o veracidad de argumentos." (En RD de NRF) (p. 337)* *2) "Deduce fórmulas trigonométricas (razones trigonométricas de suma de ángulos, diferencia de ángulos, ángulo doble, ángulo mitad, etc.) para transformar expresiones trigonométricas." (En RD de GM) (p. 338)* *3) "Demuestra identidades trigonométricas." (En RD de GM) (p. 338)*

CUADRO 3.7
Capacidades para el área Matemática por niveles y grados

Observamos que en el DCN se sugiere el desarrollo de capacidades argumentativas a partir del nivel primario y que solo se empieza a sugerir el desarrollo de capacidades demostrativas - el más alto nivel del proceso justificativo según nuestro marco teórico - a partir del tercer grado de secundaria. Y aunque es a partir de este último grado que el DCN sugiere el desarrollo de capacidades de justificación y demostración, no podemos estar seguros de que éstas guarden relación directa con las consideraciones conceptuales aquí tomadas en cuenta (ver Capítulo 2) ya que en el DCN no se incluye el significado referencial de estos términos.

De esta recopilación, observamos también que son solo seis las capacidades demostrativas que el DCN sugiere que todo estudiante debe desarrollar al finalizar la EBR, y que éstas solamente se proponen

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

para el nivel secundario, a partir del tercer grado. Asimismo, cuatro de estas capacidades están referidas a Identidades Trigonométricas, lo que nos hace pensar que éste constituye un tema relevante para el DCN de la EBR en Perú.

Por otro lado, en lo referido a la teoría de números, notamos que en el DCN se rescata el desarrollo de capacidades sobre todo de reflexión y descubrimiento de propiedades para lo que se sugiere el uso de calculadoras. Asimismo observamos que para el primer grado de secundaria se plantea el desarrollo de capacidades de identificación de patrones, de generalización y de simbolización aunque en grados posteriores no se vuelva a plantear el desarrollo de éstas. Cabe mencionar que estas propuestas en teoría de números las hacen de manera general, sin llegar a niveles concretos como en la geometría y la trigonometría. También, se percibe una falta de rigor matemático en algunos enunciados. (Ej: "Justifica mediante diversas demostraciones que el sistema de los números racionales y reales es denso." (En RD de NRF) (p. 329))

3.1.2.7 Las actitudes

Nivel Primaria	**Nivel Secundaria**
Dentro de las actitudes que se esperan desarrollar en los estudiantes de nivel primaria, hemos podido rescatar las siguientes como aquellas que guardan relación con las justificaciones: En el Quinto grado: *"Es seguro y perseverante en sus argumentaciones"*. (En NRO) (p. 200) *"Muestra seguridad en la argumentación de los procesos de solución de problemas."* (En GM) (p. 201) *"Es preciso en sus argumentaciones."* (En ES) (p. 202)	Vale la pena mencionar que para todos los grados se tiene, dentro de las actitudes (en NRF, GM y EP) que se esperan desarrollar en los estudiantes de nivel secundaria, lo siguiente: *"Muestra rigurosidad para representar relaciones, plantear argumentos y comunicar resultados"*, así como: *"Toma la iniciativa para formular preguntas, buscar conjeturas y plantear problemas".*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

En el Sexto grado: *“Muestra seguridad en la argumentación de los procesos de solución de problemas.”* (En GM) (p. 204) *“Es preciso en sus argumentaciones.”* (En ES) (p. 204)	

CUADRO 3.8

Actitudes para el área Matemática por niveles y grados

Es importante estimular en los alumnos el desarrollo de actitudes como las que se consideran en el DCN, pues no solo favorecen la comprensión o elaboración de una justificación o demostración específica, sino para otras justificaciones y demostraciones y conforman un apoyo esencial para un estudio y aprendizaje reflexivo y comprensivo de la matemática.

Concluyendo:

Podemos resumir lo anteriormente expuesto sobre el tratamiento dado a las justificaciones matemáticas en el Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular de Perú en los siguientes puntos:

- Hay muy pocas referencias explícitas a las demostraciones matemáticas, aunque sí hay más alusiones a las argumentaciones. No nos queda claro si la concepción de las mismas guarda la relación directa con la concepción que nosotros tenemos de las justificaciones, puesto que no explicitan en qué consiste para el DCN este término. En algunos casos pensamos que usan este término para denotar cosas distintas; es decir, en algunos casos pensamos que tiene el significado de justificación, mientras que en otros el significado de explicación. Esto, en principio, para nosotros son dos procesos diferentes.
- Se recalca en muchas partes del documento, la importancia que tiene el desarrollo del pensamiento matemático, y además se incluyen algunas “sugerencias” para los profesores (ver CUADRO 3.3) en la consecución de este propósito, entre las cuales se destacan procesos que guardan relación

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

directa con el proceso de justificación; sin embargo, nuevamente, los incluyen de forma muy general.

- Se considera que el logro del desarrollo del pensamiento matemático y la adquisición de conocimientos matemáticos son procesos a los cuales se llega de forma gradual, pero no se clarifica cómo debe hacerse el escalonamiento.
- No se hacen comentarios sobre las distintas técnicas de demostración que podrían utilizarse.
- Se considera una caracterización del estudiante de la Educación Básica Regular sin hacer un análisis riguroso de los cambios – a nivel cognitivo – experimentados por los adolescentes para cada edad. Esto mismo para la caracterización del niño del nivel primaria.
- Respecto a las capacidades, es recién en el tercer grado de secundaria a partir del cual se manifiesta de forma explícita el desarrollo de la capacidad demostrar. En total son solo seis las capacidades que se centran en el proceso de demostración a lo largo de la Educación Básica Regular en Perú.
- Consideramos relevantes las actitudes mencionadas, porque contribuyen a fortalecer una dinámica de planteamiento de conjeturas, elaboración de justificaciones y obtención de conclusiones que forman parte esencial de la formación de estudiantes con espíritu crítico y visión científica.
- Asimismo, en cuanto a los conocimientos, notamos que ninguno de ellos hace referencia explícita al estudio de las demostraciones, tipos, métodos, estilos, etc.
- Si no nos centramos únicamente en el tratamiento de las demostraciones para este análisis, podemos pensar en las justificaciones y las fases previas a la demostración matemática. De ser este el caso, tenemos que las argumentaciones se encuentran presentes en el DCN desde el cuarto grado de primaria, y a lo largo de toda la secundaria. No obstante, no se plantean propuestas claras y concretas de cómo un profesor de matemática puede ser capaz de trabajar o incluir demostraciones, y en general las justificaciones matemáticas, en un salón de clase de forma exitosa.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

3.2 Análisis de los libros de texto

Analizamos el tema divisibilidad en cuatro de los libros de texto más difundidos en Perú, que llamaremos A, B, C y D, donde A: Coveñas (2010) Editorial Bruño, B: Rojas (2008) Editorial San Marcos, C: Tasaico (2008) Editorial Proyecto Ingenio, D: Aburto (2008) Editorial Norma.

En este estudio hemos observado los siguientes aspectos, que son algunos de los aspectos considerados en la tesis doctoral de Ibañes (2001):

a) Algunas consideraciones globales:

a.1) la organización de los temas

(Preguntas orientadoras (P.O.): ¿existe alguna estructura predeterminada para la organización de los temas?, ¿es adecuada la forma como han sido distribuidos los contenidos?);

a.2) la forma de introducir los temas

(P.O.: ¿se plantea empezar los temas a través de alguna lectura, algún juego, algún problema contextualizado, alguna información sobre la historia de las matemáticas, alguna lista de preguntas con la finalidad de determinar la idea intuitiva que tiene el alumno sobre el tema a ser tratado?);

a.3) los ejercicios resueltos y propuestos

(P.O.: ¿se plantea una adecuada cantidad de ejercicios propuestos y resueltos?, ¿se presentan ejercicios resueltos que sirvan de modelo para los ejercicios propuestos?, ¿Los problemas resueltos inducen a la búsqueda de justificaciones?);

a.4) la notación matemática

(P.O.: ¿es ésta de fácil comprensión?, ¿puede crear ambigüedades?, ¿tiene errores?);

a.5) algunas observaciones adicionales en el texto.

(P.O.: ¿se detecta algún error adicional?)

a.6) la validación de los resultados expuestos

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

(P.O.: ¿qué tipo de justificación es el más usado en el texto?, ¿se demuestran los resultados presentados?);

b) Orientaciones generales sobre las demostraciones

(P.O.: ¿se establece de antemano el tratamiento de justificaciones en el texto?, ¿en qué parte del libro?)

c) Presencia de justificaciones

(P.O.: ¿las justificaciones presentadas pueden ser clasificadas como alguno de los esquemas de demostración de Godino & Recio (2001a) presentados en el capítulo 2?, ¿a cuál de los cuatro tipos de esquemas de demostración pertenece dicha justificación?)

d) Expresiones lógicas que utiliza

(P.O.: ¿se incluyen expresiones relacionadas con las demostraciones o justificaciones?, ¿se habla de hipótesis y tesis o conclusión, si emplea las expresiones si… entonces, una condición necesaria, etc.?, ¿se explica o no la terminología empleada?).

e) Análisis de tareas

(P.O.: ¿Los ejercicios propuestos pertenecen a alguna de las categorías de tareas, en el contexto de las demostraciones, presentados en Souza (2007)?)

A continuación presentamos el análisis detallado de estos textos, según el orden establecido.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Editorial Bruño

(A)

a) Algunas consideraciones globales del texto
a.1) Organización de los temas El libro presenta 17 capítulos, de los cuales el capítulo 4 (Divisibilidad) es el capítulo en el cual se centra el presente análisis. Este capítulo, además, consta de seis "secciones", de las cuales incidiremos en las tres primeras secciones de este capítulo: sección 4.1 (Múltiplo), sección 4.2 (Divisor) y sección 4.3 (Divisibilidad). Entonces se empieza el tema de Divisibilidad con el tratamiento de los conceptos múltiplo, divisor, divisibilidad, en ese orden. **a.2) Forma de introducir los temas** Introducen cada capítulo presentando un problema desarrollado que guarda relación con los temas que serán tratados. En el caso particular del capítulo 4 (p. 151), en el desarrollo del correspondiente problema introductorio ("Cuestión de ruedas"), se usan conocimientos que aún no se han definido o trabajado previamente en el libro. Pensamos que, en el mejor de los casos, esto se hizo con la finalidad de motivar el aprendizaje de este tema pues como se muestra en el desarrollo del problema, éste es útil para la solución de situaciones en contextos reales. **a.3) Ejercicios resueltos y propuestos** El libro presenta una amplia variedad de ejercicios (tanto de los propuestos como de los resueltos) que han sido agrupados dándoles diferentes nombres. Por ejemplo: los "talleres" (8 para el capítulo 4: Divisibilidad); las listas de "Ejercicios resueltos" (2 para el capítulo 4); las listas de "problemas resueltos" (1 para el capítulo 4); las listas de "Ejercicios de reforzamiento" (5 para el capítulo 4), donde se clasifican los ejercicios por "niveles" (nivel I y nivel II, donde el nivel II es un nivel superior en dificultad al nivel I); los "Ejercicios tomados en los concursos de matemática" (1 para el capítulo 4); una actividad llamada "Crucimática"; y los apartados llamados "Razonamiento y Demostración" y "Comunicación Matemática" (2 para el capítulo 4), en donde "Razonamiento y Demostración" puede incluir algunas proposiciones que se espera el alumno demuestre. Sin embargo, en algunos de los casos, como sucede en el segundo apartado (p. 201), consideramos que la "ayuda" que se le da al alumno para realizar la demostración es excesiva. El alumno podría dedicarse simplemente a seguir paso a paso las indicaciones dadas y no buscar, por sí mismo, un camino a la demostración. El caso opuesto son las proposiciones (3, 4 y 5) planteadas en el primer apartado (p. 175), en donde pensamos que las "ayudas" presentadas a manera de "sugerencias" no son suficientes para llegar a las demostraciones solicitadas en el texto. Sobre todo si tenemos en cuenta que no hay ejercicios resueltos que sirvan de modelo a demostraciones asignadas en esta sección.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

a.4) Notación matemática

Para las secciones del texto en las que se centra este análisis, la notación es confusa (ambigua) en muchos casos. Por ejemplo, inicialmente emplean la notación $\overset{o}{n}$ para denotar un conjunto: el conjunto de los múltiplos de n; sin embargo, después usan esta misma notación ($\overset{o}{n}$) para representar un número que es múltiplo de n. De igual manera, cuando enuncian las “operaciones entre múltiplos” (p. 156, 157), por ejemplo la segunda operación: $\overset{o}{n} - \overset{o}{n} = \overset{o}{n}$

Esto puede resultar muy confuso para los estudiantes: primero, porque inicialmente se denotó a $\overset{o}{n}$ como un conjunto, con lo cual la expresión anterior no sería cierta; segundo, porque un alumno podría pensar que $\overset{o}{n}$ representa siempre un mismo número, razón por la cual para ese estudiante la expresión anterior sería siempre igual a cero.

a.5) Algunas observaciones adicionales

Desde que se comienza a tratar el tema Divisibilidad se emplea la idea de “división exacta”. Por ejemplo: “Si un número es múltiplo de otro, la división es exacta” (p. 153). Sin embargo, cuando hacemos una búsqueda de la definición de División exacta en el texto (p. 69) nos damos con la sorpresa que aunque dicha sección se titula “División de números naturales”, no se especifica en qué conjunto debe estar el cociente. La definición que se da es:

Dividir un número natural llamado **dividendo (D)** por otro llamado **divisor (d)** es encontrar un número llamado **cociente (q)**, tal que, multiplicado por el divisor nos dé el dividendo.

Si $D : d = q$, entonces $D = d \cdot q$

Esto deja la opción de que se pueda pensar que la división $1 \div 2 = 1/2$ es una división exacta, porque según la definición dada, pude encontrar un número ½ tal que multiplicado por 2 nos da 1.

También, en la página 156, en el apartado “Forma general de los múltiplos”, no se especifica a qué conjuntos deben pertenecer los números representados por las letras "A", "B" y "k". Además, aunque desde el inicio del capítulo 4 se trabajaron con múltiplos no negativos de un número natural, en los ejemplos 1 y 2 de este mismo apartado se muestran los múltiplos negativos de 2 y de 3 respectivamente. Véase a continuación cómo se presenta este apartado.

Forma general de los múltiplos

Dados los números A y B, tales que: $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & K \end{array}$

Por propiedad en la división: $A = B \cdot K + 0$ ➡ $\boxed{A = B \cdot K}$ o $\boxed{A = B \cdot K = \overset{o}{B}}$

Ejemplo 1 $\begin{array}{c|c} A & 2 \\ \hline 0 & K \end{array}$ ➡ $\boxed{A = \underbrace{2K = \overset{o}{2}}}$

Representan los números múltiplos de 2

$A = \overset{o}{2} = \boxed{2K}$ { $+2$; $+4$; $+6$; $+8$; $+10$;.... / 0 / -2; -4; -6; -8; -10; ....

Ejemplo 2 $\begin{array}{c|c} A & 3 \\ \hline 0 & K \end{array}$ ➡ $\boxed{A = \underbrace{3K = \overset{o}{3}}}$

Representan los números múltiplos de 3

$A = \overset{o}{3} = \boxed{3K}$ { $+3$; $+6$; $+9$; $+ 12$; .... / 0 / -3; $- 6$; -9 ; -12;.........................

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

a.6) Validación de los resultados expuestos
La mayoría de los resultados en la sección Divisibilidad, en particular, han sido justificados empleando el esquema “más básico” de demostración: el esquema de argumentación explicativa. Es decir, no se tiene la intención de validar los resultados, sino tan solo explicarlos. Además, no se demuestra ninguno de los Criterios de Divisibilidad presentados en las páginas 160, 161, 162 y 164 del libro. Los únicos ejercicios en los que se pide “demostrar” una proposición son aquellos de la sección llamada “Razonamiento y Demostración”. En ninguno de los otros ejercicios propuestos piden justificar o demostrar algún resultado. Piden, por ejemplo, indicar si cierta proposición es Verdadera o Falsa, mas no piden la justificación para la respuesta dada por el estudiante. Para más detalle, se presenta posteriormente un cuadro en el cual clasificamos las justificaciones presentadas en el libro, así como ejemplificaciones para las mismas.

b) Orientaciones generales sobre las demostraciones
No presenta. Sin embargo, cada capítulo termina con un apartado llamado: “Razonamiento y Demostración”. De este apartado, para el capítulo “Divisibilidad”, hemos hecho algunos comentarios en el cuadro anterior (“Ejercicios resueltos y propuestos”).

c) Presencia de justificaciones	
Tipo	**Ejemplo (s)**
Esquemas de argumentación explicativa	Sí. • En la página 153 del texto, cuando enuncian la proposición: “La suma de dos múltiplos de un número es múltiplo de ese número” y a continuación consideran el ejemplo: 12 es múltiplo de 3, 15 es múltiplo de 3, entonces 12+15=27 es múltiplo de 3. La finalidad de presentar este ejemplo después de enunciar la proposición anterior es básicamente explicar la misma mediante un ejemplo. No se pretende validar dicha proposición. • En la misma página, el ejemplo del apartado (v). • En las páginas 156, 157, los ejemplos de las “operaciones entre múltiplos”. • En las páginas 160, 161, 162, 163 y 164, los ejemplos de los “Criterios o reglas de divisibilidad”.
Esquemas empírico-	Sí. • En la página 154, al afirmar que “el conjunto de divisores de un

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

inductivos	número distinto de cero es finito", después de haber presentado 3 ejemplos en los cuales se muestra este "patrón".
Esquemas deductivos formales	No.
Esquemas deductivos formales	Sí. • En la página 153 justifican por qué cada número es múltiplo de sí mismo; por qué el cero es múltiplo de todos los números; por qué los múltiplos de un número son infinitos. Esto, en forma general. • En la página 156, aunque no se dice de forma explícita, justifican por qué un múltiplo de B tiene la forma general B.k, habiendo dado previamente una definición de MÚLTIPLO y DIVISOR, así como habiendo establecido la correlación entre estos términos. Una deficiencia es que no se especifica desde un inicio a qué conjunto pertenece k. • En la página 157, se tiene la intención de demostrar el siguiente enunciado: "La división de dos números que son múltiplos de N no necesariamente es otro múltiplo de N". Específicamente se presentan dos "ejemplos" en los cuales no se cumple que "si dividimos dos números que son múltiplos de N entonces el cociente es otro múltiplo de N" y, a través de los cuales se espera que el alumno entienda que la primera proposición es cierta. **Comentario:** No obstante, esto puede resultar confuso para el alumno que encuentra casos en los cuales sí se cumple que el cociente de dos números que son múltiplos de N es un múltiplo de N. Esta confusión se originaría además por no haber explicado antes el significado de la expresión "no necesariamente". Pensamos que la mejor forma de haber demostrado el enunciado inicial es presentando, por ejemplo, los siguientes casos: " $\frac{12}{3} = 4$, vemos que 12 es un múltiplo de 3, y 3 es también un múltiplo de 3; sin embargo, el cociente (4) no es un múltiplo de 3. Por otro lado, en la división $\frac{36}{6} = 6$, se tiene que 36 es múltiplo de 3 y el divisor 6 es también un múltiplo de 3, así como el cociente (6) también lo es."

d) Expresiones lógicas que utiliza	
Expresiones	**¿Explica su significado?**
<u>**Implicación**</u> ***… entonces*** (p.152, 153, etc.)	No. Entre paréntesis indicamos las páginas en las

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Si…, … *(*p. 153, etc.) ***Si…, entonces…*** (p. 157, 158, 163, etc.) ***… luego…*** (p. 152, 162, etc.) ***Para… es suficiente…*** (p. 154, etc.) ***…no necesariamente…*** (p. 157) $\Longrightarrow$ (p. 156, 157, 158, etc.) ***Por lo tanto…*** (p. 161) $\therefore$ (p. 163, 164, 165, etc.)	que se encuentran las expresiones lógicas destacadas en negrita, aunque, como ya hemos adelantado, no se explican sus significados.
Cuantificador universal ***Cada…*** (p. 153, etc.) ***Cualquier…*** (p. 153, 156, 157, etc.) ***Dados…*** (p. 156, etc.) ***Para todo…*** (p. 156, etc.) $\forall$ (p. 156, 158, etc.) **Cuantificador existencial** **…es el único…** (p. 156)	No. Entre paréntesis indicamos las páginas en las que se encuentran las expresiones lógicas destacadas en negrita, aunque, como ya hemos adelantado, no se explican sus significados.

e) Análisis de tareas	
Tipo	**Ejemplos**
Tareas de iniciación a la demostración	No.
Tareas para dar sentido a una frase	Sí. • En la página 155, el ejercicio 5 del Taller 17. • En la página 164, el ejercicio 3 y 4 del Taller 19.
Tareas sobre la utilización de las palabras de conexión	Sí. • En la página 201, los ejercicios 2 y 3.
Tareas para encontrar un encadenamiento deductivo	No.
Tareas para el aprendizaje de escritura	No.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Editorial San Marcos

(B)

a) Algunas consideraciones globales del texto

a.1) Organización de los temas

El texto se divide en 10 unidades, de las cuales la unidad 4 (“Teoría de números”) es aquella que incluye el tema Divisibilidad como la primera de sus cuatro secciones. Este tema es tratado según la siguiente distribución de contenidos:

- la definición y el Principio de Divisibilidad,
- la definición de múltiplo,
- la definición de divisor,
- la notación de los múltiplos,
- los criterios de divisibilidad, y finalmente
- las propiedades básicas de la divisibilidad, en ese orden.

a.2) Forma de introducir los temas

Cada unidad del libro empieza con un problema que (pensamos) se plantea con el propósito de mostrar la necesidad de tratar un determinado tema.

Además, cada unidad es iniciada con una lectura sobre biografías de personajes que contribuyeron con el desarrollo de la matemática, sobre descubrimientos científicos, etc.

a.3) Ejercicios resueltos y propuestos

Presenta una amplia variedad de ejercicios, algunos resueltos y otros propuestos. Entre estos últimos, se tienen:

- Las prácticas básicas (4 para la sección Divisibilidad),
- Las prácticas dirigidas (1 para la sección Divisibilidad),
- Los problemas propuestos, los cuales se dividen por niveles – desde el nivel I al nivel VI de acuerdo a la dificultad (a mayor nivel, mayor dificultad). Debemos decir que los problemas propuestos se encuentran al final de cada unidad, y por tanto incluyen ejercicios (y problemas) relacionados con todos los temas desarrollados a lo largo de cada unidad. Es decir, para el caso particular de la unidad 4, en los problemas propuestos encontraremos ejercicios y problemas relacionados con el tema Divisibilidad, pero también con los temas Números primos y compuestos, Máximo Común Divisor, Mínimo Común Múltiplo, estos últimos no son parte del presente análisis. Esto mismo sucede con los problemas resueltos (“Revisamos Estrategias”) que vienen justo antes de los problemas resueltos.

a.4) Notación matemática

Así como en el caso del análisis (para la editorial) anterior, en este texto, específicamente en el apartado I.7 de las Propiedades básicas de la divisibilidad (p. 128), se emplea la notación $\overset{o}{n}$ denotando a los múltiplos de n, lo cual como habíamos manifestado puede

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

crear confusión en los alumnos en el caso de que el profesor no recalque que dicha notación hace referencia a cualquier múltiplo de n y por tanto $\overset{o}{n} - \overset{o}{n}$ no tiene por qué ser siempre igual a cero. Por ejemplo ver el cuadro llamado "ATENCIÓN" de la página 123.

a.5) Algunas observaciones adicionales

Cuando se presenta el principio de divisibilidad, que establece que: *"Un número A es divisible por otro número B cuando A contiene a B exactamente un número entero de veces"* (p. 123), no se especifica a qué conjunto (s) deberían pertenecer A o B, o si B puede ser igual a cero. Asimismo, los ejemplos que le siguen a este enunciado, no guardan relación con este enunciado.

a.6) Validación de los resultados expuestos

Así como en el caso del texto de Bruño, para el texto de la editorial San Marcos, la mayoría de los resultados en la sección Divisibilidad han sido justificados empleando el esquema "más básico" de demostración: el esquema de argumentación explicativa.

No demuestran o justifican las observaciones 1, 2, 4 y 5 de la página 123; no se demuestra ninguno de los criterios de divisibilidad (p. 124 – 127); no se justifica que "Si un número termina en CERO, es divisible por 10", o que "Si un número termina en dos CEROS, es divisible por 100", etc. (p. 126).

De todos los resultados presentados para este tema, ninguno presenta su respectiva demostración. Además, en ninguno de los ejercicios propuestos piden justificar o demostrar algún resultado o proposición.

b) Orientaciones generales sobre las demostraciones

Sí presenta. En la Presentación del texto (primeros párrafos) se dice textualmente:

"La sociedad actual hace manifiesta la exigencia – cada vez en mayor medida – del desarrollo del pensamiento matemático que se traduce en el manejo de procesos cognitivos como razonar, <u>demostrar, argumentar</u>, interpretar, relacionar, identificar, calcular, inferir, graficar, efectuar algoritmos y modelizar, que como cualquier otra forma de pensamiento es posible aprender.

Estos **procesos cognitivos** pueden ser de mayor o menos complejidad, siendo el empleo de material didáctico adecuado uno de los factores que impulsan el desarrollo de estas **capacidades**.

La serie de AUDACES de **SKANNERS soluciones didácticas**, que publica EDITORIAL SAN MARCOS, presenta al magisterio nacional una propuesta pedagógica cognitiva en el área de matemática de educación secundaria, que permite el **desarrollo de capacidades** por medio del aprendizaje de contenidos orientados a la formación de estudiantes que pongan luego en acción el pensamiento crítico, analítico, estratégico y creativo, que los impulse a desenvolverse con éxito en la **vida cotidiana** de la cual es parte la **vida universitaria**."

Es decir, hace referencia a la ***demostración*** *y* ***argumentación***, entre otros, como procesos

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

cognitivos que deben ser manejados para así reflejar el desarrollo del pensamiento matemático que constituye una exigencia de la sociedad actual. Sin embargo, no se especifica cuál o cuáles de las capacidades mencionadas inicialmente son las que la propuesta presentada por esta editorial desarrolla.

c) Presencia de justificaciones	
Tipo	**Ejemplo (s)**
Esquemas de argumentación explicativa	Sí. • En la página 123: "¿91 es divisible por 13? Sí, porque al dividir 91:13, el cociente resulta ser 7 que es un número entero y su residuo es cero". "¿48 es divisible por 7? No, porque si bien es cierto al dividir 48:7, el cociente resulta 6 que es un número entero, el residuo no es cero". Etc. • En las páginas 125, 126, 127 (Criterios de Divisibilidad), se presentan varias justificaciones de este tipo. Estas justificaciones han sido llamadas ejemplos en el libro. Con la finalidad de mostrar algunas muestras, presentamos los siguientes ejemplos del libro: "52; 254; 7846; 12348, etc. son números divisibles por 2 porque su última cifra es divisible por 2". "598 no es divisible por 3 porque se cumple que: $5+9+8=22 \neq \overset{o}{3}$ " "198 es divisible por 9 porque se cumple que $1+9+8=18=\overset{o}{9}$ ". Etc. • En la página 128, los ejemplos de las Propiedades básicas de la divisibilidad.
Esquemas empírico-inductivos	Sí. • En la página 126: "Si un número es divisible por 6, lo es también por cada uno de sus factores o divisores. En general: Si un número A es divisible por otro número B, entonces A también es divisible por cada uno de los factores o divisores de B".
Esquemas deductivos informales	No.
Esquemas deductivos formales	No.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

d) Expresiones lógicas que utiliza	
Expresiones	**¿Explica su significado?**
Implicación ***Si…, entonces…*** (p. 123, 126, etc.) $\Longrightarrow$ (p. 123, 124, etc.) **…, entonces…** (p. 123, etc.) **Luego,…** (p. 124, 127, etc.)	No. Entre paréntesis indicamos las páginas en las que se encuentran las expresiones lógicas destacadas en negrita, aunque, como ya hemos adelantado, no se explican sus significados.

e) Análisis de tareas	
Tipo	**Ejemplos**
Tareas de iniciación a la demostración	No.
Tareas para dar sentido a una frase	No.
Tareas sobre la utilización de las palabras de conexión	No.
Tareas para encontrar un encadenamiento deductivo	No.
Tareas para el aprendizaje de escritura	No.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Editorial Proyecto Ingenio
(C)

a) Algunas consideraciones globales del texto

a.1) Organización de los temas

Este libro ha sido dividido en 30 capítulos. Los capítulos asignados al tema Divisibilidad son dos: el capítulo 9 (Divisibilidad I: principios) y el capítulo 10 (Divisibilidad II: Criterios).

Cada capítulo se subdivide en: Parte teórica, problemas resueltos, práctica dirigida y tarea.

a.2) Forma de introducir los temas

A diferencia de los otros libros analizados, la propuesta de esta editorial es ir directamente al desarrollo del tema; es decir, sin presentar lecturas introductorias, problemas "motivadores", etc.

a.3) Ejercicios resueltos y propuestos

A continuación de la parte teórica, se presentan los "Problemas resueltos", (10 para el capítulo 9). Posteriormente se presenta la "Práctica dirigida" (que contiene 20 ejercicios para el capítulo 9) y finalmente la "Tarea" (que contiene 15 ejercicios en total para este mismo capítulo lo cuales los agrupa por niveles: Nivel I, II y III respectivamente de acuerdo al nivel de dificultad de los ejercicios. A mayor nivel, mayor dificultad).

De forma análoga, el capítulo 10 (Criterios de Divisibilidad) presenta el mismo número de ejercicios planteados y resueltos respectivamente.

a.4) Notación matemática

Emplean mucha notación simbólica, sin explicarla en muchos de los casos. Por ejemplo, en el capítulo 9, cuando dan la definición de Divisibilidad dicen:

> "Un número A es divisible entre B, si la división de A entre B es exacta. De B se dice que es divisor de A." (p. 68)

Y en ningún lado se especifica a qué conjunto o conjuntos pertenecen A, B y k (este último denotando el cociente de A entre B). Ni siquiera en el capítulo de "Cuatro operaciones", donde se "define" la División exacta, se especifica a qué conjunto pertenecen los elementos de la división. A cambio, solo escriben:

> "División exacta (Residuo = 0)" (p. 51),

plantean un ejemplo y luego dan la forma general de una división exacta, todavía sin especificar a qué conjunto deberían pertenecer el dividendo, divisor y cociente de la división para que, en efecto, se trate de una división exacta.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Volviendo a la página 68, se presenta un cuadro llamado “Observaciones”, como se muestra a continuación:

Observaciones:

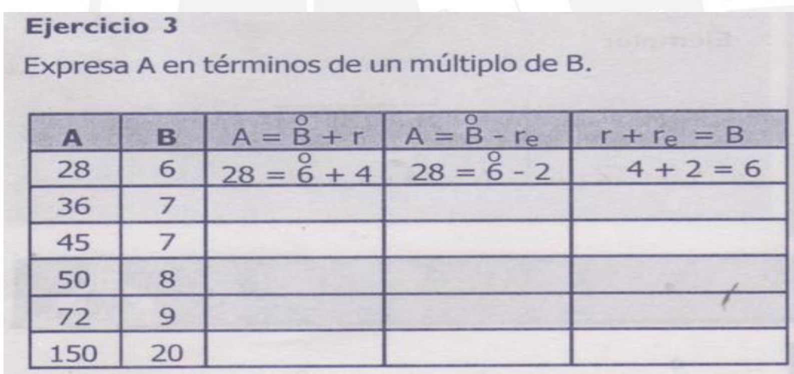
1º $\frac{N}{N} = 1 \Rightarrow$

2º $\frac{N}{1} = N \Rightarrow$

3º $\frac{0}{N} = 0 \Rightarrow$

En el cual no se especifica qué representa N, tampoco se explica qué significa la notación $\frac{N}{N}, \frac{N}{1}, \frac{0}{N}$ y no se explicita lo que el estudiante debe hacer (escribir, completar).

En la siguiente página (p. 69), se presenta la siguiente tabla:



Ejercicio 3

Expresa A en términos de un múltiplo de B.

A	B	$A = \overset{o}{B} + r$	$A = \overset{o}{B} - r_e$	$r + r_e = B$
28	6	$28 = \overset{o}{6} + 4$	$28 = \overset{o}{6} - 2$	$4 + 2 = 6$
36	7			
45	7			
50	8			
72	9			
150	20			

En donde no se dice qué es r ni r_e , y menos cómo deben ser (números enteros, valores máximos o mínimos, números negativos o no negativos, etc.). Solo plantean el ejemplo que se aprecia en la tabla anterior y, se espera que el alumno complete las líneas en blanco de dicha tabla (aunque no se diga de forma explícita en la instrucción dada). Entonces, un alumno puede pensar que, para la tercera fila de la tabla puede completar como sigue:

$$“36 = \overset{o}{7} + 22 \ \ y \ \ 36 = \overset{o}{7} - 20”$$

Pero luego se encontraría con “problemas” al completar la última columna de la tabla y ver que no le resulta lo que se “espera” que el alumno obtenga, pues como sabemos $22 + 20 = 42 \neq 7$.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Y para colmo, se escribe una nota al pie de la tabla que dice: “No olvidar: Suma de residuos = Divisor $\Longrightarrow r + r_e = B$”.
Tener presente que ni siquiera se especificó cómo es r en el capítulo donde definen la operación División (p. 51). Solamente se dice “residuo≠0”, con lo cual sería válido que 20 entre 3 es 2 con residuo 14. (Lo cual, evidentemente, es incorrecto ya que la condición que no se toma en cuenta en este libro es que el residuo debe ser menor que el divisor).

Por otro lado, así como en el caso de las dos editoriales anteriormente analizadas, esta editorial usa de forma excesiva la notación $\overset{o}{n}$ cuando presentan los “Principios de la divisibilidad” (p. 69) sin explicitar aunque sea una vez que $\overset{o}{n}$ no siempre denota un mismo número.

Por otra parte, la notación empleada en “Observaciones”, presentada en la página 73, podría crear confusión y hacer pensar al alumno que los puntos suspensivos que ahí figuran significan o hacen referencia a una cantidad infinita de números. Sobre todo, teniendo en cuenta que algunos estudiantes piensan que los puntos suspensivos se usan así para denotar un sinnúmero de informaciones.

a.5) Algunas observaciones adicionales
La “Parte teórica” del capítulo 9, desde nuestro punto de vista, es deficiente.

a.6) Validación de los resultados expuestos
En general, no demuestran ninguna de las proposiciones consideradas en los dos capítulos (9 y 10). En contraste, emplea el esquema “más básico” de demostración: el esquema de argumentación explicativa, para justificar algunos resultados.

b) Orientaciones generales sobre las demostraciones

Sí presenta. En la presentación del texto, específicamente en lo concerniente a la estructura del texto: “Parte teórica”, se hace referencia explícita a las demostraciones. Se dice textualmente lo que sigue:

> “En esta parte se hace una concisa exposición teórico-práctico del tema, con ejemplos ilustrativos, algunos ejercicios, aclaraciones, **demostraciones** y observaciones, (…)”

Sin embargo, para el caso particular de la Parte teórica de los capítulos 9 y 10, capítulos en los cuales se trabaja el tema Divisibilidad, no hemos encontrado demostración alguna a los tantos resultados que se presentan en el libro a manera de “fórmulas” poco significativas,

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

desde nuestra perspectiva.

c) Presencia de justificaciones	
Tipo	**Ejemplo (s)**
Esquemas de argumentación explicativa	Sí. • En la página 69 y 70, los ejemplos de los seis "Principios de Divisibilidad" dados en el libro. Inclusive el ejemplo de la "Nota" presentada en un recuadro al lado derecho del último principio de divisibilidad presentado en este libro. • En la página 73, por ejemplo: "$456 = \overset{o}{2}$" ; "$\overline{abc4} = \overset{o}{2}$" ; "$4728 = \overset{o}{4}$" ; "$325 = \overset{o}{5}$" ; los tres ejemplos del criterio de divisibilidad por 25; el primer ejemplo del criterio de divisibilidad por 3 y 9; los ejemplos de los criterios de divisibilidad por 11 y por 7.
Esquemas empírico-inductivos	No.
Esquemas deductivos informales	No.
Esquemas deductivos formales	No.

d) Expresiones lógicas que utiliza	
Expresiones	**¿Explica su significado?**
<u>Implicación</u> ***Si… entonces*** (p. 70, 73, 74, etc.) ***Para…. es suficiente…*** (p. 69, etc.) $\Rightarrow$ (p. 68, 69, 71, 74, etc.)	No, en ninguno de los dos capítulos en los que se trata el tema Divisibilidad. Sin embargo, se trata de manera muy superficial en el primer capítulo denominado "Lógica Proposicional". Entre paréntesis indicamos las páginas en las que se encuentran las expresiones lógicas destacadas en negrita, aunque, como ya hemos adelantado, no se explican sus significados.
<u>Condición necesaria y suficiente</u>	No en los dos capítulos en los que se trata el tema

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

⇔ (p. 73, 74, etc.) ∴ (p. 70, 74, 75, etc.)	Divisibilidad. Sin embargo, se trata de manera muy superficial en el primer capítulo denominado “Lógica Proposicional”. Entre paréntesis indicamos las páginas en las que se encuentran las expresiones lógicas destacadas en negrita, aunque, como ya hemos adelantado, no se explican sus significados.

e) Análisis de tareas	
Tipo	**Ejemplos**
Tareas de iniciación a la demostración	No.
Tareas para dar sentido a una frase	Sí. • Los primeros dos ejemplos propuestos de la página 68. • El ejercicio 7 de la página 72. • El ejercicio 11 de la página 72.
Tareas sobre la utilización de las palabras de conexión	No.
Tareas para encontrar un encadenamiento deductivo	No.
Tareas para el aprendizaje de escritura	No.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Editorial Norma
(D)

a) Algunas consideraciones globales del texto

a.1) Organización de los temas

El texto se organiza en 9 unidades. Divisibilidad pertenece a la Unidad 3: “Los números naturales y teoría de números”. El tema Divisibilidad es el tercer tema de dicha unidad. Aunque se anuncie de forma explícita, en la página 2 del libro, que

> “El orden y la precisión son características que encontrarás plasmadas en estas páginas. Los títulos, subtítulos y ejemplos orientadores te permitirán ubicarte con facilidad en esta sección”,

esto último como parte de la descripción de las “Presentaciones de los temas a desarrollar”, consideramos que en particular el tema 3 (Divisibilidad) de la Unidad 3 no ha sido organizado de manera óptima. Es complicado entender cómo se estructura cada tema ya que las secciones del tema no han sido enumeradas u ordenadas bajo algún criterio de tal manera que se pueda observar un orden, y así sea más fácil su comprensión.

El tema Divisibilidad se “organiza” en las siguientes “secciones” (el nombre de secciones es dado por nosotros para tratar de entender la organización de este tema. Estas “secciones” = subtítulos escritos en color rojo):

- Factores, divisores y múltiplos de un número,
- Conjuntos de múltiplos y de divisores,
- Criterios de divisibilidad,
- Números primos y compuestos,
- Método para averiguar si un número es primo absoluto,
- Descomposición prima de un número y sus aplicaciones, en ese orden.

De las cuales nos concentraremos en las 3 primeras para este análisis.

a.2) Forma de introducir los temas

Cada unidad se apertura con un juego, y cada tema con una situación problemática relacionada con el tema que se pretende el alumno solucione. Y se cierra cada unidad con situaciones problemáticas reales que el alumno debe solucionar, con preguntas de pruebas internacionales tipo PISA, con algunos datos de la Historia de la Matemática y una Evaluación.

a.3) Ejercicios resueltos y propuestos

En cuanto a los ejercicios propuestos y resueltos:

- A diferencia de los otros tres libros analizados, este libro presenta un escaso número de ejercicios y problemas para cada tema.
- El número de ejercicios resueltos (4 para esta unidad, p. 132) es menor aún que el

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

número de los ejercicios propuestos y se presentan recién al final de cada unidad. Esto no permite que el estudiante tenga un modelo de ejercicios que le podría ayudar a resolver sus dudas por sí mismo.

- El nivel de los ejemplos desarrollados en el tema que está siendo analizado no parece ser suficiente para algunos ejercicios planteados al estudiante. Por ejemplo: los ejercicios 6 y 7 de la Práctica - Nivel I (p. 118), los ejercicios 4, 8, 11, etc.
- En el ejercicio 6 de la página 118 se pide JUSTIFICAR al alumno su respuesta.
- En el ejercicio 11 de la página 120 piden: “Subraya las afirmaciones falsas. Muestra CONTRAEJEMPLOS.” Sin embargo, ni se ha dicho qué es un contraejemplo, ni se ha dado una muestra de lo que se pretende haga el alumno a través de un ejemplo “modelo”.
- Se plantean ejercicios del tipo: “Determina el valor de verdad de las proposiciones”, “Escribe SIEMPRE, A VECES o NUNCA para que la expresión sea correcta”, “Analiza y escribe al lado de cada afirmación S (siempre), A (a veces) o N (nunca), según corresponda”. No obstante, ninguno de ellos pide justificación alguna para las respuestas dadas.

a.4) Notación matemática

Ninguna.

a.5) Algunas observaciones adicionales

Notamos que al lado derecho del contenido de la primera “sección”, escriben en un pequeño recuadro: “Anota”, donde se da la definición de Divisibilidad (“cuándo un número es divisible por otro número”). Pensamos que la forma como ha sido presentada esta primera parte, parte determinante, para entender la idea de Divisibilidad no es la mejor. Creemos esto ya que como se dice en el libro:

> “La idea de factor y múltiplo está asociada a una multiplicación. Los factores de un número son cada uno de los números que se multiplican para obtener dicho número. Un número, que es múltiplo de cada uno de sus factores.”

A este nivel, el estudiante que no ha leído lo que se dice de Divisibilidad en el recuadro pequeño porque podría no haberle dado la debida importancia, se puede preguntar o puede incluso afirmar lo siguiente:

“$\frac{1}{2} \times 2 = 1$. Entonces ¿ $\frac{1}{2}$ y 2 son factores de 1? ¿1 es múltiplo de $\frac{1}{2}$ y 2?”

Lo que reflejaría una deficiente elección de los contenidos importantes y su respectiva organización en el libro, por parte del autor y/o editores.

Se detectan los siguientes errores:

- La “Propiedad adicional” de la página 113.
- La respuesta del ejercicio 10 – j de la página 120 del “Manual del Docente”, que no es sino el libro de los estudiantes con las respuestas a los ejercicios propuestos a

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

los estudiantes. **a.6) Validación de los resultados expuestos** No se demuestra ninguno de los Criterios de divisibilidad de la página 114 del libro.

b) Orientaciones generales sobre las demostraciones
No presenta.

c) Presencia de justificaciones	
Tipo	**Ejemplo (s)**
Esquemas de argumentación explicativa	Sí. • En la página 112, los ejemplos 1 (a, b, c y d) y 2 (a, b y c). • En la página 113, los ejemplos de la tabla “Propiedad del múltiplo o divisor”; el ejemplo 3 y el ejemplo 4. • Los ejemplos de la tabla de Criterios de divisibilidad.
Esquemas empírico-inductivos	No.
Esquemas deductivos informales	No.
Esquemas deductivos formales	No.

d) Expresiones lógicas que utiliza	
Expresiones	**¿Explica su significado?**
<u>Implicación</u> ***Si…, entonces…*** (p. 113, 120, etc.) ***Se deduce que…*** (p. 112) ***Luego…*** (p. 112, 132, etc.)	No. Entre paréntesis indicamos las páginas en las que se encuentran las expresiones lógicas destacadas en negrita, aunque, como ya hemos adelantado, no se explican sus significados.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Cuantificador universal ***Todo…*** (p. 113, 120, etc.) ***Cada…*** (p. 112, 113, etc.) ***Ningún…*** (p. 120) **Cuantificador existencial** ***Existen…*** (p. 120)	No. Entre paréntesis indicamos las páginas en las que se encuentran las expresiones lógicas destacadas en negrita, aunque, como ya hemos adelantado, no se explican sus significados.

e) Análisis de tareas	
Tipo	**Ejemplos**
Tareas de iniciación a la demostración	Sí. • El ejercicio 6 de la página 118. • El ejercicio 11 de la página 120.
Tareas para dar sentido a una frase	Sí. • El ejercicio 1, 2 y 3 de la página 117. • El ejercicio 9 de la página 118. • Los ejercicios 1, 2, 10 de la página 120.
Tareas sobre la utilización de las palabras de conexión	No.
Tareas para encontrar un encadenamiento deductivo	No.
Tareas para el aprendizaje de escritura	Sí. • El ejercicio 13 de la página 121.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

A continuación presentamos un cuadro que resume estos análisis.

Texto	A	B	C	D
Consideraciones globales (a)	(a.1) Buena organización. El tema que fue analizado se encuentra en el capítulo 4. (a.2) Problemas contextualizados. (a.3) Los únicos (y pocos, por cierto) ejercicios para demostrar están en la sección llamada “Razonamiento y demostración”. (a.4) Presenta ambigüedades. Puede resultar confusa. (a.5) Se usan notaciones que no han sido definidas previamente.	(a.1) Buena organización. El tema que fue analizado se encuentra en la unidad 4. (a.2) Problemas contextualizados y lecturas. (a.3) No plantean ejercicios para demostrar. (a.4) Puede resultar confusa. (a.5) Presenta una definición de divisibilidad que luego no usa. Los ejemplos que se presentan a continuación de dicha definición	(a.1) Bien organizado. El tema que fue analizado se encuentra en los capítulos 9 y 10. (a.2) Ninguna. (a.3) No plantean ejercicios para demostrar. (a.4) Puede resultar confusa. (a.5) Se usan símbolos o notaciones que no han sido definidas previamente. Tiene errores. Tiene problemas	(a.1) Regular organización. El tema que fue analizado se encuentra en la unidad 3. (a.2) Juegos y problemas contextualizados (a.3) No plantea ejercicios para demostrar. (a.4) Puede resultar confusa. (a.5) Algunos errores. La propuesta que presentan para darle más énfasis a ciertos comentarios, no es la mejor.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

	(a.6) Se emplea solo la argumentación explicativa. Se demuestran algunos pocos resultados.	no guardan relación con la definición. (a.6) Se emplea solo la argumentación explicativa. No se demuestran ningún resultado.	serios con la notación. (a.6) Se emplea solo la argumentación explicativa. No se demuestran ningún resultado.	(a.6) Se emplea solo la argumentación explicativa. No se demuestra ningún resultado presentado.
Orientaciones generales sobre las demostraciones (b)	No se dan. Sin embargo, cada capítulo presenta por lo menos una sección llamada “Razonamiento y demostración”.	Sí se dan, en la presentación del libro.	Sí se dan, en la presentación del libro.	No se dan.
Presencia de justificaciones (c)	-AEX -AEI -DDF	-AEX -AEI	-AEX	-AEX
Expresiones lógicas que utiliza (d)	-Implicación -Cuantificador universal -Cuantificador existencial	-Implicación	-Implicación	-Implicación -Cuantificador universal -Cuantificador existencial
Análisis de tareas (ejercicios propuestos) (e)	De un total de 88 ejercicios, 3 ejercicios son TSF, 2 son TPC y 1 es una TAE.	De un total de 112 ejercicios, ninguno se encuentra en alguna de las categorías presentadas.	De un total de 73 ejercicios propuestos, solo 2 ejercicios son TSF.	De un total de 32 ejercicios, 5 son TIP y 7 son TSF.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Comentarios:

- De los cuatro libros de texto analizados, solo uno de ellos (A) contiene algunas pocas demostraciones. Los cuatro libros emplean, en general, el esquema personal más básico de demostración matemática, que es la AEX, para validar los diferentes resultados presentados en el texto.
- Dos de los libros analizados (B y C) manifiestan su intención de incluir demostraciones a lo largo del desarrollo del libro; sin embargo, estos textos no contienen ninguna demostración, por lo menos no para el tema Divisibilidad.
- Ninguno de los libros hace las demostraciones para resultados importantes, como son los criterios de Divisibilidad.
- En el análisis de las tareas o de los ejercicios propuestos hemos encontrado que casi todos los ejercicios vienen a ser una repetición de los ejercicios resueltos o de los ejemplos desarrollados en cada sección. Y, teniendo en cuenta la clasificación de las tareas en el contexto de las demostraciones presentada en el Capítulo 2, solo algunos pocos ejercicios se encuentran en alguna de estas categorías. Ninguna editorial presenta dentro de sus ejercicios propuestos alguna tarea en la categoría tarea para encontrar un encadenamiento deductivo (TED).
- Los cuatro textos presentan por lo menos una complicación en la notación matemática que usan para el tema indicado; por ejemplo, en A (p.153), inicialmente emplean la notación $\dot{n}$ para denotar el conjunto de los múltiplos de n; sin embargo, después usan esta misma notación ($\overset{o}{n}$) para representar un número que es múltiplo de n y hacen operaciones como $\overset{o}{n} + \overset{o}{n} = \overset{o}{n}$.
- Se encuentra una significativa falta de rigor en los fundamentos teóricos de cada texto. Esto lo podemos ver reflejado en las imprecisiones de las definiciones dadas en cada uno de los cuatro textos analizados, así como en los conflictos con el uso de las notaciones matemáticas (ver las secciones a.4 y a.5 para el análisis de cada texto).
- Los cuatro libros emplean una gran diversidad de expresiones lógicas; sin embargo, no explican su significado.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Capítulo 4

JUSTIFICACIONES DE ALUMNOS DE PRIMER GRADO DE SECUNDARIA

En el presente capítulo hacemos un estudio de las reacciones de estudiantes de primer grado de secundaria ante situaciones problemáticas relacionadas con la divisibilidad y poniendo énfasis en las justificaciones.

4.1 La muestra

Estudiantes participantes: número y nivel

Los estudiantes que participaron en el presente estudio fueron cinco: Marcia, Renato, Sebastián, Alexander y Rodrigo; todos ellos empezando el primer grado de secundaria en un colegio privado de Lima.

Datos de relevancia

Un dato importante es que cuando empezamos las experimentaciones, los estudiantes aún no habían desarrollado el tema Divisibilidad en la asignatura de matemática que ellos cursaban. Según manifestaron, el año anterior habían llevado este tema, por lo cual ya tenían nociones básicas y conocían algunos resultados dados para este contenido matemático. Sin embargo, también cabe mencionar que conforme ellos mismos lo declararon, no habían trabajado nunca antes justificaciones, y tampoco qué era una justificación o demostración matemática hasta ese momento.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

A pesar de que el tema Divisibilidad no está planteado sino a partir del primer grado de secundaria en el DCN, los estudiantes manifestaron haberlo desarrollado desde el quinto grado de primaria e incluso esto se reflejaba en el conocimiento que ellos tenían de los criterios de Divisibilidad durante las sesiones que tuvimos.

Otro dato relevante es el rendimiento académico de los estudiantes respecto al año anterior. Antes de iniciar las sesiones, les preguntamos a los estudiantes, como un antecedente para nuestra investigación, acerca de sus promedios en el sexto grado de primaria. De esta indagación tenemos que el promedio de las notas finales de los cinco estudiantes fue 18, siendo Alexander y Renato quienes tuvieron notas finales inferiores a este promedio. Es importante mencionar esto pues Renato fue uno de los estudiantes que tuvo mejor desempeño en las sesiones realizadas.

4.2 Las sesiones

Número de sesiones

Diseñamos nueve sesiones para el tema Divisibilidad que incluyen justificaciones para estudiantes del primer grado de nivel secundario.

Tiempo de duración

Cada sesión tenía una duración aproximada de 90 minutos.

Lo que incluyen

Algunas de estas sesiones incluyen definiciones relacionadas a este tema – principalmente las primeras sesiones – las cuales representamos mediante el uso de equivalencias. Algunas de estas sesiones contienen ejemplos no desarrollados (de justificaciones), los cuales tienen el propósito de ser trabajados en clase con la asesoría del profesor, y “Actividades” que contienen las ***justificaciones individuales***, que son aquellas justificaciones que se diseñaron para ser trabajadas de forma escrita y personal por cada estudiante.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Los objetivos de la propuesta inicial

Los objetivos que nos propusimos al implementar la propuesta inicial por sesiones fueron: (1) Inducir la comprensión del concepto de divisibilidad y motivar a hacer justificaciones, a partir de la presentación de una equivalencia generada del algoritmo de la división; (2) Reconocer los conocimientos previos de los estudiantes; (3) Dar a entender las ideas básicas de justificación matemática, contraejemplo y conjetura, durante el desarrollo de las ***justificaciones grupales*** (que comprenden el desarrollo de justificaciones propuestas como *ejemplos* o el desarrollo de algunas de las justificaciones contenidas en algunas de las *Actividades* propuestas y que fueron trabajadas de forma participativa por los estudiantes y guiadas por el profesor); (4) Promover la precisión al formular conjeturas; y (5) Refinar la propuesta inicial para así presentar al final de este trabajo una propuesta mejorada.

4.3 Recolección de información

La información que recopilamos se obtuvo a través de: (1) grabaciones (en video) de cada una de las nueve sesiones en las cuales se realizan las *justificaciones grupales*, las cuales han sido transcritas para un mejor análisis; (2) anotaciones hechas por el profesor-investigador durante las sesiones, lo que permite recoger inquietudes y observaciones hechas por los estudiantes en la búsqueda de una nueva propuesta (una propuesta “mejorada”) para el trabajo del tema de Divisibilidad incluyendo a las justificaciones matemáticas; y (3) Actividades que contienen las *justificaciones individuales*.

4.4 Análisis de las justificaciones individuales y grupales

Analizamos las justificaciones individuales y grupales de los estudiantes por sesiones y de dos maneras diferentes: En la primera, analizamos las *justificaciones grupales* de manera cualitativa. De la amplia gama de respuestas obtenidas, incluimos aquellas que consideramos relevantes porque reflejan

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

claramente el proceso de producción de demostración matemática; otras en las que se plantean preguntas y observaciones interesantes por parte de los estudiantes, que contribuyen a la reformulación de nuestra propuesta y elaboración de una propuesta “mejorada”; o algunas otras en las que se señala algún hecho destacable. Hemos considerado de suma importancia, además, incluir la transcripción completa de una de las sesiones (sesión 6) ya que ésta es una sesión rica en generación de conjeturas por parte de los estudiantes. Con el propósito de ejemplificar de forma concreta los niveles de producción de demostración matemática presentados en el marco teórico (ver Capítulo 2), se señala el nivel de algunas de las justificaciones dadas por los estudiantes según esta clasificación. En la segunda, analizamos las *justificaciones individuales* de manera cuantitativa presentando cuadros resumen de los análisis de las justificaciones presentadas por los estudiantes para lo cual tomamos como referencia los niveles de producción de demostración matemática presentados. La categoría *no codificable* comprende aquellas respuestas que reflejan una equivocada interpretación del problema. Por ejemplo, los estudiantes proporcionan justificaciones a un problema distinto al que fue enunciado. No olvidemos que aunque el nivel 0 no constituye para nosotros una justificación matemática, este sigue siendo parte de nuestro análisis ya que en nuestros análisis hemos podido clasificar algunas de las respuestas de los estudiantes en este nivel. Los números dentro del cuadro indican el número de respuestas ubicadas en cada una de las categorías de análisis consideradas (no codificable, nivel 0, nivel 1, nivel 2 y nivel 3), para cada alumno.

4.4.1 Análisis de las justificaciones en la Sesión 1

La sesión 1 (ver Anexo S1) incluye algunas de las definiciones básicas de Divisibilidad de números naturales, ejemplos resueltos de división de números naturales, así como ejemplos propuestos cuyas justificaciones son, como ya habíamos dicho previamente, las *justificaciones grupales* de esta sesión.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Análisis de las justificaciones grupales

A continuación mostramos algunas de las primeras *justificaciones grupales* hechas en esta sesión.

Ejemplo 2:

¿17 entre 5 es una división exacta? ¿Por qué?

Alexander: *No. Ningún número multiplicado por 5 me va a dar 17*.

Profesor: *¿Está bien la justificación de Alexander?*

Alexander: *Porque 5, si le multiplico… porque 5 por 3 da 15 y 5 por 4 daría 20 y no, no…*

En este primer caso, Alexander parece reconocer la no existencia de un número NATURAL que multiplicado con 5 pueda dar 17. Sin embargo, el argumento del estudiante es incompleto. Esto nos llevaría a ubicar esta justificación en el nivel 2 de los niveles de producción de demostración matemática.

Profesor: *¿Alguien puede justificar de otra forma que 17 entre 5 no es división exacta? Lo que ha dicho Alexander está bien, no es una división exacta. Pero, ¿por qué? ¿Alguien puede precisar un poco más?*

Sebastián: *porque si multiplico me va a salir residuo.*

Profesor: *querrás decir, porque si divido.*

Notemos que es importante corregir los errores de expresión presentados en las justificaciones verbales desde un inicio. Esto, como veremos después, contribuye a la mejora de la presentación de sus justificaciones tanto verbales como escritas, así como a la precisión en la formulación de sus conjeturas.

Sebastián: *ah sí, porque si divido.*

Profesor: *porque si divido 17 entre 5 me va a quedar un residuo, en este caso el residuo es 2; es decir, me va a quedar un residuo que no es 0. Esta es otra*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

forma de justificar que esta división no es exacta… Luego, cuando Alexander me dijo 17 entre 5 no va a ser exacta porque no hay ningún número que multiplicado con 5 me de 17. ¿Eso es verdad?

Esta última observación hecha a la justificación de Alexander busca que los estudiantes aprendan a precisar mejor sus respuestas, y así, como en este caso, llegar a dar un argumento general completo – una demostración matemática.

Sebastián, Rodrigo, Renato y Alexander: *sí.*

Marcia: *no… porque puede haber un decimal que sí dé.*

Profesor: *Exacto. Yo solamente hice la aclaración porque Alexander dijo que no hay ningún número. La verdad es que no hay ningún número NATURAL; pero como dice Marcia, si yo le pongo acá el decimal 3,4, entonces 5 multiplicado por 3,4 es 17. Pero ojo, la división exacta trata con números naturales, y esto (3,4) no es un número natural. Entonces lo que te faltó decir Alexander era que no hay ningún número NATURAL que multiplicado con 5 me de 17. Nada más.*

La estrategia adoptada de resolver inicialmente los ejemplos conjuntamente con los estudiantes es con la idea de que ellos mejoren progresivamente sus justificaciones, a través de la constante corrección de la forma cómo precisan las mismas y la guía del profesor en la elección de sus argumentos.

Ejemplo 6:

Si $\overline{abc}\,\underline{|\;4\quad}$ ***(donde*** $\overline{abc}$ ***representa un número natural de 3 cifras), hallar*** $\overline{abc}$***.***

$\vdots \quad 161$

(0)

Profesor: *Primero, ¿qué quiere decir* $\overline{abc}$*? [El profesor señala esta expresión en la pizarra]*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Renato: *Un número junto.*

Profesor: *¿Cómo que un número junto? ¿Qué quiere decir un número junto?*

Renato: *es un solo número.*

Marcia: *un número de tres cifras.*

Todos: *ah…*

[El profesor explica un poco más la notación empleada en el problema]

Precisamos un poco más la notación empleada con el propósito de que las notaciones empleadas sean claras y no interfieran con el objetivo primigenio de cada problema que es obtener una solución justificada.

Rodrigo: *es 644*

Profesor: *la respuesta de Rodrigo es 644. ¿Alguien tiene una respuesta diferente?*

Todos: *no.*

Profesor: *muy bien, entonces todos seguramente pueden explicar por qué esa es la respuesta. A ver… Alexander, ¿por qué sale 644?*

Alexander: *porque 644 es divisible entre 4. Porque 644 entre 4 sale 161.*

Profesor: *pero, ¿cómo sacaste ese número (644)?*

Alexander: *es que a 644 lo divides entre 4…*

Profesor: *sí, pero yo no creo que Rodrigo se haya puesto a "tantear" hasta obtener ese número (644), ¿o sí Rodrigo?*

Rodrigo: *no.*

Profesor: *entonces, ¿cuál sería la justificación?*

Sebastián: *es que 161 por 4 es 644.*

Profesor: *y ¿por qué has hecho eso?*

Sebastián: *porque cociente por divisor es igual a dividendo.*

Profesor: *¿es verdad lo que dice Sebastián?*

Todos: *Sí.*

Profesor: *pero, ¿y dónde está el residuo?*

Todos: *es que es cero.*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Profesor: *entonces cociente por divisor, más el residuo que es cero, es el dividendo. O sea que usaron su segunda equivalencia para hallar el valor del número de tres cifras* $\overline{abc}$*. Muy bien.*

<u>Análisis de las justificaciones individuales</u>

No presentamos ningún análisis de *justificaciones individuales* en esta sesión pues las Actividades presentadas en la misma – "Residuo vs. Divisor" (ver Anexo A1) y "División con cero" (ver Anexo A2) – sirvieron al profesor-investigador solamente como una referencia para tener una idea de los conocimientos previos manejados por los estudiantes. De la aplicación de estas dos actividades pudimos concluir que los estudiantes ya habían trabajado las nociones matemáticas involucradas implícitas en dichas actividades; sin embargo la forma en que estas fueron vistas fue muy superficial, memorística y mecánica, ya que muchas veces los estudiantes trataron de adivinar cuál era la "respuesta correcta".

4.4.2 <u>Análisis de las justificaciones en la Sesión 2</u>

La sesión 2 (ver Anexo S2) incluye definiciones adicionales de la divisibilidad de números naturales y algunos ejemplos propuestos.

<u>Análisis de las justificaciones grupales</u>

Ejemplo 1:

El diseño de este ejemplo tiene el propósito de reforzar los conceptos vistos la sesión anterior. Presentamos el enunciado del ejemplo 1 y a continuación las justificaciones hechas para el mismo.

En lo siguiente:

$$\begin{array}{r|l} 49 & 8 \\ \cline{2-2} (9) & 5 \end{array}$$

¿Es esta una división correcta?, ¿por qué?

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Todos: *No.*

Profesor: *¿por qué no? A ver… Alexander, ¿por qué no?*

Alexander: *porque debe decir entre 9, porque debe dividir entre 9. En vez de 8, debe ir 9.*

[Alexander intenta modificar las condiciones del ejemplo propuesto]

Profesor: *¿por qué?*

Alexander: *porque así saldría 45, cociente 5 y residuo 4.*

Profesor: *¿qué piensas Marcia?*

Marcia: *de que la división anterior (49 entre 8) con residuo 9 es incorrecta porque el residuo no puede ser mayor que el divisor.*

Profesor: *muy bien, ese es el argumento correcto. Pero el otro ejemplo, el que Alexander propuso también es una división correcta porque el residuo que obtuvo es menor que su divisor. Entonces yo me puedo dar cuenta de que una división está bien o mal hecha revisando la relación que guarda el residuo con el divisor. Esto, porque como ya sabemos el residuo no puede ser mayor o igual que el divisor. Ahora, la pregunta que les planteo es: ¿Por qué no? ¿Por qué el residuo no puede ser mayor o igual que el divisor?*

Rodrigo: *porque estaría mal.*

Profesor: *Porque estaría mal… y ¿por qué estaría mal? O, ¿qué pasaría cuando el residuo es mayor o igual que el divisor?*

Rodrigo: *porque se puede dividir.*

Profesor: *¡exacto! Si el residuo es mayor o igual que el divisor yo podría pensar que aún puedo seguir dividiendo. Entonces, ¿cómo podría ser este el residuo si yo puedo seguir dividiendo? Entonces yo me doy cuenta ahí que debe haber algún error (…)*

Lo interesante de la respuesta de Rodrigo es que justifica claramente por qué es que se tiene esa relación residuo-divisor en una división de números naturales, lo que a su vez ayuda a reforzar aún más la primera equivalencia presentada en la sesión 1.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Ejemplo 2:

Este ejemplo nos ayuda a determinar los posibles valores del residuo en una división de números naturales, teniendo como único dato el valor del divisor. Presentamos el enunciado del ejemplo 2 y a continuación las justificaciones hechas para el mismo.

> ***En la siguiente expresión:***
>
> $$\begin{array}{c|c} D & 8 \\ \hline (R) & C \end{array}$$
>
> ***Sin importar cuánto valgan C y D, ¿qué valores podría tomar el residuo R para que esta expresión represente una división correcta? Justifica tu respuesta.***

Todos: *1, 2, 3,…*

[El profesor empieza a copiar los números en la pizarra, copiando la secuencia dada por los alumnos e incluso pasándose a 7, 8, 9,… con la finalidad de que los estudiantes puedan corregirlo]

Marcia: *el 8 y el 9 no. Sino el 0.*

Profesor: *qué, y ¿el 8 no?*

Rodrigo: *sí.*

Profesor: *¿sí?*

Renato: *no, porque el residuo no puede ser igual que el divisor.*

Profesor: *a ver Rodrigo, tú que nos dijiste que sí podía ser. ¿Qué dices ahora?*

Rodrigo: *no, no. Me equivoqué.*

Profesor: *y ¿por qué el residuo no puede ser 8? ¿Qué pasa?*

Rodrigo: *es que el residuo no puede ser igual que el divisor.*

Renato: *no puede ser mayor ni igual.*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

De esta observación hecha por Renato al comentario de Rodrigo, nos damos cuenta de que los estudiantes ya empiezan a hacer precisiones sobre las justificaciones de sus otros compañeros.

Profesor: *entonces el residuo a lo más puede ser…*

Todos: *7.*

Profesor: *desde 0 hasta 7. Ya, y si ahora yo cambio las condiciones de la división presentada y coloco como nuevo divisor a 5. ¿Qué pasaría? ¿Cuáles son las posibilidades para los valores de mi residuo?*

Inmediatamente cambiamos las condiciones del problema para que los estudiantes demuestren haber entendido la idea de residuo máximo.

Todos: *0, 1, 2, 3, 4.*

Profesor: *¿nada más?*

Todos: *no*

Profesor: *eso quiere decir que a lo mucho el residuo puede ser 4 por la misma condición que estábamos diciendo que el residuo debe ser menor que el divisor.*

Ejemplo 3:

Este ejemplo tiene el propósito de introducir la noción de contraejemplo, el cual el profesor explica en términos simples para que todos los estudiantes logren captar la idea básica de lo que es un contraejemplo. Presentamos el enunciado del ejemplo 3 y a continuación las justificaciones hechas para el mismo.

Todo número impar entre 3 es una división exacta. ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.

Profesor: *ojo que cuando yo digo todo número impar me refiero a cualquier número impar. A ver… ¿cuáles son los números impares?*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Hacemos esta pregunta con el propósito de determinar si los estudiantes tienen dudas respecto a lo que es un número impar, para que así esto no interfiera con la justificación que se espera presenten.

Todos: *1, 3, 5, 7, 9, 11, 13,…*

Renato: *9 no es.*

Profesor: *¿9 no es impar?*

Marcia: *¡Sí es impar!*

Renato: *impar es… 3 por 3 es 9…*

Marcia: *pero no…*

Renato: *ah no, ¡estoy pensando en número primo!*

[Risas]

Rodrigo: *miss ahí están que dicen, todos los números impares se pueden dividir entre 7.*

Profesor: *¿entre qué?*

Rodrigo: *no, entre 3.*

Profesor: *no, lo que dice acá es: todo número impar entre 3, ¿es una división exacta? Es diferente a que yo diga todo número impar se puede dividir por 3, porque yo puedo dividir cualquier número entre 3, y el resultado me puede salir un…*

Sebastián: *puede salir un decimal.*

Profesor: *así es, puede salir un decimal. En cambio aquí te dicen: ¿es una división exacta? Piensen que estamos trabajando en el conjunto de los números naturales. A ver, ¿qué dicen al respecto? ¿Cuál es su respuesta? ¿Verdadero o falso?*

Todos: falso.

Profesor: *y ¿por qué es falso?*

Renato: *porque no todos los números son divisibles por 3.*

Profesor: *a ver, entonces, [el profesor copia empieza a copiar en la pizarra lo que sigue] es falso porque no todos los números impares son…*

Todos: *divisibles entre 3.*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Profesor: pero todavía no hemos usado ese término. Entonces,… porque no todos los números impares entre 3…

Sebastián: *va a salir exacto.*

Profesor: *muy bien, entonces es falso porque no todos los números impares entre 3 me va a salir una división exacta, como dice Sebastián. Ya está, entonces, ¿cómo pueden justificar cuando se dan cuenta de que esto no es verdad? Ustedes dicen, voy a averiguar si hay algún número impar que no cumple con esto (con que al dividirlo entre 3 obtenga una división exacta). Denme algún ejemplito a ver.*

Sebastián: *7*

Profesor: *7 es impar, pero 7 entre 3… ¿qué cosa?*

Sebastián: *no es una división exacta.*

Es este el momento justo en que procedemos a explicar la noción de *contraejemplo*.

Profesor: *muy bien. Entonces, cuando ustedes me puedan dar un elemento de aquí (del conjunto de los números impares) que no cumpla con esto (es decir, que al dividirlo entre 3 no me dé una división exacta), este vendría a ser un CONTRAEJEMPLO para esta afirmación (Todo número impar entre 3 es una división exacta). Así se le llama porque es un ejemplo que no cumple con lo que me están diciendo. Es como si por ejemplo yo les dijese: "Todas las personas que estamos en este salón tenemos 12 años". ¿Es verdad eso?*

Todos: *no.*

Profesor: *¿Quién sería un contraejemplo?... Yo sería un contraejemplo, ¿no es así? Esto porque yo tengo 28 años.*

Todos: *sí*

Sebastián: *yo también porque tengo 11 años.*

Profesor: *muy bien. Mi teoría era que todos los que estamos en este salón tenemos 12 años, un contraejemplo suficiente era que digan: eso es falso*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

porque usted no tiene 12 años, usted tiene 28 años. La pregunta es, ¿es necesario que den otro contraejemplo para derribar mi teoría?

Todos: *no.*

Profesor: *suficiente con que presenten un solo caso para derribar mi teoría. Suficiente con un caso para decir es mentira lo que usted está diciendo y así, derribar mi teoría, ¿no es cierto?*

Todos: *sí.*

Hemos considerado relevante incluir esta noción de contraejemplo dada a los alumnos debido a que resultó ser una manera eficiente de hacer entender a los estudiantes lo que este término significa y sepan que pueden usar contraejemplos cuando se quiere demostrar que una afirmación dada no es cierta. Esta fue una forma eficiente ya que lo hemos visto reflejado en forma explícita en algunas de las *justificaciones grupales* de sesiones posteriores.

Ejemplo 2:

Este ejemplo tiene el propósito de determinar si los estudiantes están teniendo en cuenta que no es lo mismo decir que A es divisible por B y que B es divisible por A. Presentamos el enunciado del ejemplo 1 y a continuación las justificaciones hechas para el mismo.

¿8 es divisible por 16? ¿Por qué?

Renato: *sí, porque…*

Profesor: *mira el orden eh… A es divisible por B si es que A entre B es una división exacta. A entre B. Entonces, ¿8 es divisible por 16? ¿Sí o no?*

Marcia: *porque ningún número natural… uhm… dividido por 16 te va a dar 8.*

Profesor: *A ver pensemos en su definición…*

Renato: *… si divides 8 entre 16…*

Profesor: *ya, si divido 8 entre 16…*

Renato: *… me va a salir una división inexacta.*

Sebastián: *no me va a salir un número natural.*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

***Marcia:** el cociente no va a poder ser un natural.*

***Profesor:** ¿cuánto sería el cociente y el residuo? Piensen que estamos trabajando con números naturales.*

[Todos parecen finalmente admitir que el cociente sería cero y el residuo sería 8]

***Profesor:** y eso nos da una división inexacta, lo que nos lleva a decir que 8 no es divisible por 16. Pero entonces, ¿cuál sería la afirmación correcta?*

***Todos:** 16 es divisible por 8.*

***Profesor:** eso sí es verdad. En cambio lo que me habían dado era falsote. Debería ser 16 es divisible por 8, ¿por qué? porque la división de 16 entre 8 sí es una división exacta que me da el cociente natural 2, con residuo 0…*

Ejemplo 9:

Este ejemplo tiene el propósito de seguir familiarizando a los estudiantes con la división con cero. Presentamos el enunciado del ejemplo 9 y a continuación las justificaciones hechas para el mismo.

¿0 es divisible por 6?

***Renato, Alexander y Rodrigo:** ¡no!*

***Profesor:** piensen antes de responder…*

***Marcia:** ah, sí, sí…*

***Profesor:** … y no olviden que deben pensar también en su justificación.*

***Renato, Rodrigo y Marcia:** … sí, sí es.*

***Profesor:** no olviden que cada uno debe tener su respuesta y su justificación. Por ejemplo, Sebastián, ¿qué haría para saber si 0 es divisible por 6?*

***Sebastián:** pongo 0 entre 6.*

***Profesor:** ya está. ¿Y cuánto me da eso como cociente Alexander?*

***Alexander:** 0*

***Profesor:** ¿y residuo?*

***Alexander:** 0*

***Profesor:** entonces ¿0 es divisible por 6?*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Alexander: *sí, porque… el residuo es menor que el divisor.*

Renato: *porque es una división exacta.*

Profesor: *porque es una división exacta. Porque 0 entre 6 es una división exacta.*

Ejemplo 10:

Este ejemplo tiene el propósito de que los estudiantes aprendan a hallar los divisores de un número sin que se haya definido aún este término. Presentamos el enunciado del ejemplo 1 y a continuación las justificaciones hechas para el mismo.

34 es divisible por ________________

Renato: *¡8!*

Marcia: *¡8!*

Profesor: *¿¿qué??*

Sebastián: *no, por 2, por 2.*

Rodrigo: *por 17 también, y por 34. Por 1, 2, 17 y 34.*

Profesor: *¿es divisible por 1? ¿Está bien lo que dice Rodrigo?*

Todos: *sí.*

Profesor: *es divisible por 2?*

Todos: *sí.*

Profesor: *y también es divisible por 17 y por 34.*

Renato: *¿y el cero?*

Profesor: *a ver. Muy bien, buena pregunta: ¿34 es divisible por 0? [El profesor copia esta pregunta en la pizarra]. Esta pregunta la hizo Renato. A ver, ¿la respuesta será Verdadero o Falso?*

La pregunta de Renato no hace más que reflejar sus dudas respecto al caso de la división con cero. Por esta razón nos tomamos el tiempo debido para responder a estas interrogantes.

Sebastián: *¡Falsote!*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Profesor: *¿por qué Sebastián?*

Renato: *¿y si lo ponemos al revés?*

Cabe mencionar que las intervenciones espontáneas de los alumnos permiten tratar otros temas importantes relacionados con lo que se está tratando; por ejemplo, a partir de la pregunta de Renato, se puede tratar la no conmutatividad de la división de números naturales. Ciertamente, como profesores debemos aprender a percibir cuándo, cómo y con qué herramientas intervenir con el fin de aclarar las dudas que nuestros estudiantes mantienen a lo largo de su formación matemática.

Profesor: *ya, pero tú me has preguntado en este orden. A ver, entonces preguntamos ¿por qué?*

Sebastián: *porque ningún número multiplicado por 0 me va a dar 34.*

Profesor: *¡perfecto! Ya habíamos visto que esa división no se va a poder realizar, ¿cierto?*

Renato: *y en el caso del 6, ¿por qué ahí sí se pudo? [Refiriéndose al ejemplo anterior]*

Profesor: *¿cómo fue la pregunta con 6?*

Renato: *ah, ¡al revés!*

[Risas]

Profesor: *la pregunta fue, ¿0 es divisible por 6? Así sí es, ¿cierto?*

Todos: *sí.*

Profesor: *pero si a mí me hubiesen preguntado al revés: ¿6 es divisible por 0? ¿Qué hubiese respondido?*

Todos: *no. Falso.*

Profesor: *falso, Falsote, false,… ¿no es así? Muy bien...*

<u>Análisis de las justificaciones individuales</u>

No hay justificaciones individuales que analizar en esta sesión.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

4.4.3 Análisis de las justificaciones en la Sesión 3

La sesión 3 (ver Anexo S3) incluye ejemplos y la Actividad "Tú decides" (ver Anexo A3).

Análisis de las justificaciones grupales

Ejemplo 1:

El diseño de este ejemplo tuvo el propósito inicial de que los estudiantes se den cuenta de que sin que sea necesario multiplicar los factores de M, se puede determinar si M es o no es divisible por 3. Presentamos el enunciado del ejemplo 1 y a continuación las justificaciones hechas para el mismo.

Si M = 458 x 3, ¿M es divisible por 3? ¿Por qué?

Profesor: *¿M es divisible por 3?*

Rodrigo: *no*

Marcia: *sí.*

Profesor: *¿sí? ¿No? ¿Qué dicen los demás?*

Alexander: *sí, sí es divisible.*

Profesor: *¿seguros que sí?*

Todos: *sí.*

Profesor: *a ver Sebastián, ¿por qué sí?*

Sebastián: *porque si multiplico va a salir 1374.*

Profesor: *o sea, ¿M es 1374? ¿Y…?*

Sebastián: *y entre 3 sería 458*

Profesor: *a ver [copiando en la pizarra], entonces si yo divido este número (1374) entre 3,…*

Sebastián: *sería 458*

Profesor: *¿residuo?*

Sebastián: *cero.*

Profesor: *entonces, M es divisible por 3…*

Sebastián: *sí.*

[El profesor explica la idea completa de la justificación dada por Sebastián]

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Profesor: *¿Alguien lo hizo de forma diferente?*

Marcia: *yo.*

Profesor: *¿cómo hiciste Marcia?*

Marcia: *M es el dividendo, y el dividendo es igual al divisor por el cociente o el cociente por divisor.*

Profesor: *entonces, ¿qué más puedes decir para que la explicación sea más clara y completa?*

Marcia: *de que, uhm…*

Profesor: *a ver, lo que dice Marcia es [y escribe en la pizarra] M, que es el dividendo,…*

Marcia: *viene a ser igual a 458, que vendría a ser el cociente, por 3, que es el divisor. Entonces sí es divisible porque es como si a eso yo le sumara cero.*

Profesor: *ah ya, su compañera le ha buscado la forma de la equivalencia que dimos. Y tiene la forma, ¿cierto? O sea que su compañera sin que haga la división se dio cuenta que M sí era divisible por 3, pues así como está escrita esta igualdad puede verse como la equivalencia dada de divisiones exactas. Es decir, [y sigue escribiendo] M entre 3, da como cociente 458 y como residuo cero. Esto es equivalente a decir que M es igual a 3 por 458 más el residuo que es cero, que es lo mismo a su vez a M es igual a 3 por 458. Y no tuvo la necesidad de multiplicar nada su compañera. Muy bien Marcia. ¿Se entendió entonces?*

Todos: *sí.*

Profesor: *su compañera usó la equivalencia de la división exacta que habíamos dado.*

Observamos que aunque ambas justificaciones parecen ser diferentes debido básicamente a los argumentos presentados, o parecen ser una menos compleja que la otra, las dos califican como una demostración matemática según los niveles de producción de demostración matemática presentados en el marco teórico.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Ejemplo 2:

A diferencia del ejemplo 1 (ejemplo inmediato anterior), en este ejemplo se pide explícitamente que NO se efectúe la multiplicación de los factores de F (o M en el caso del ejemplo 1) para determinar si el número F es o no es divisible por 3.

Presentamos el enunciado del ejemplo 2 y a continuación las justificaciones hechas para el mismo.

Si F = 21 x 7 x 19, sin multiplicar los tres números, responde: ***¿F es divisible por 3? ¿Por qué?***

Profesor: *si quiero ver si F es divisible por 3, entonces se debería ver si la división de F entre 3 me da como cociente un número natural y como residuo 0. Entonces, si se puede hallar un cociente natural y residuo 0 para F entre 3, entonces tendría una división exacta y de aquí que pueda concluir que F es divisible por 3. La pregunta es: ¿podré encontrar ese número natural?... ¿Ideas?*

Renato: *sale 3 mil…*

Profesor: *pero estás multiplicando, y una condición fue que no deben multiplicar. Porque si multiplican entonces todos pueden darme una respuesta rápida, ¿no es así? Ahora estamos poniendo las cosas un poquito más difíciles para así pensar nuestra respuesta un poquito más… Entonces, para ver si F es divisible por 3, tendría que [y copia en la pizarra] dividir F, que es igual a 21 x 7 x 19, entre 3, y ver si esa división es una división exacta. Pero 21 x 7 x 19 entre 3, ¿a cuánto va a ser igual?...*

[Silencio]

Profesor: *sin que multipliquen se puede hallar. Es como si yo les dijera así: [y copia en la pizarra nuevamente] 2 por 3, entre 2…*

[El profesor intentará dar algunos ejemplos que esconden un patrón el cual debe ser identificado por los estudiantes y así esto pueda ayudarles a justificar el ejemplo 2]

Alexander: *3*

Profesor: *¿con residuo?*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Renato: *0*

Profesor: *Ahora, otro ejemplo, si yo les digo 3 por 5, entre 5…*

Renato: *5*

Profesor: *¿5?*

Todos: *no, es 3.*

Profesor: *¿residuo?*

Todos: *0.*

Marcia: *ah ya, miss…*

[Marcia interrumpe, parece haber identificado el patrón. Sin embargo nosotros insistimos con otro nuevo ejemplo para verificar si el patrón ha sido realmente identificado]

Profesor: *si yo les digo 4 por 3, entre 2…*

Renato: *a ver, a ver, 4 por 3 es 12, entre 2, es ¡6!*

[Renato insiste con la multiplicación de los factores conformantes del número dado]

Rodrigo: *6!*

Profesor: *o sea que es 2 por 3, ¿con residuo?*

Todos: *cero.*

Profesor: *porque este 4 por 3 yo lo puedo escribir como 2 por 2 por 3, ¿cierto? Ahora, si yo coloco, 7 por 12, entre 3... Entonces, yo visualizo a 12 como 3 por 4. Entonces tendría: 7 por 3 por 4, entre 3. ¿Cuánto sería?*

Rodrigo: *28*

[Rodrigo da señales de haber identificado el patrón.. Aún así el profesor sigue]

Profesor: *claro, porque sería 7 por 4, que es 28. Con residuo cero… Ya, ahora aquí, retrocedemos al ejercicio que habíamos propuesto [refiriéndose a ¿F = 21 x 7 x 19 es divisible por 3?]*

A ver, F vale 21 por 7 por 19. Ahora, el 21 yo lo puedo escribir como…

Rodrigo: *3 por 7.*

Profesor: *entonces escribo, F es igual a 3 por 7, por 7 por 19. Ahora, si yo escribo esta cantidad: 3 por 7, por 7, por 19, entre 3. ¿Cuánto me va a dar?*

Renato: *3*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Profesor: *pero 3 por 3 es 9 [refiriéndose al 3, cociente, y al 3, divisor]*

Renato: *ah.*

Rodrigo: *sacamos el 3 que está ahí [señalando el 3 de: 3 por 7, por 7, por 19, de la pizarra].*

Profesor: *¿el 3 que está ahí?*

Renato: *no, multiplicamos 3 por 49 por 19.*

Profesor: *pero estarías multiplicando y hemos dicho que no está permitido multiplicar. Si ustedes multiplican, yo sé que todos me podrán dar una respuesta a este ejemplo. Pero aquí hemos colocado una condición que es SIN MULTIPLICAR.*

Rodrigo: *sáquelo al 3.*

Profesor: *entonces ¿quién sería el cociente?*

Rodrigo y Marcia: *7 por 7 por 19.*

Profesor: *¿y el residuo?*

Rodrigo: *cero.*

Profesor: *así es. Es lo mismo a que yo escriba: F = 3 x 7 x 7 x 19, y luego asocie, ya que la multiplicación de números naturales es asociativa, F = 3 x (7 x 7 x 19). Y esto a su vez es igual a F = 3 x (7 x 7 x 19) + 0, no es así?*

Todos: *sí.*

Profesor: *entonces, el dividendo sería F, el divisor sería 3, el cociente (7 x 7 x 19) y el residuo sería cero. Entonces, concluiríamos diciendo que sí, F es divisible por 3 porque F entre 3 es una división exacta. ¡Y sin multiplicar!*

Ejemplo 3:

El diseño de este ejemplo tiene el propósito de que los estudiantes presenten una justificación a un ejemplo más general, el cual abarca un número infinito de casos. Presentamos el enunciado del ejemplo 3 y a continuación las justificaciones hechas para el mismo.

Si N es divisible por 7, entonces ¿N = 7 x m, para algún número natural m?

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Profesor: *en este problema, ¿con qué información cuento? ¿Cuáles son mis "datos"?*

Marcia: *que N es divisible por 7.*

Profesor: *muy bien.*

Rodrigo: *¿ahí dice que N es igual a 7 por un número natural?*

Profesor: *Sí, por algún número natural.*

Sebastián: *sí*

Profesor: *¿por qué Sebastián?*

Sebastián: *porque si N sería 14…*

Profesor: *a ver, estás dando un ejemplito, ¿no?*

Sebastián: *sí.*

Profesor: *Sebastián dice [y el profesor empieza a copiar en la pizarra] si N es 14… y tiene que se cumple el dato, porque 14 es divisible por 7,…*

Sebastián: *y 14 es igual a 7 por 2.*

Profesor: *Sebastián se dio cuenta que ese algún natural en este caso es 2. Está muy bien. Sebastián se dio cuenta a través de un ejemplito. Sin embargo, aquí me están dando una afirmación general. ¿No?*

Marcia: *N es el divisor, entonces sería…*

Profesor: *¿N es el divisor?*

Marcia: *no, el dividendo.*

Profesor: *ya, N es el dividendo. ¿Qué más?*

Marcia: *entonces sería igual a 7, que es su cociente,…*

Profesor: *¿su cociente?*

Marcia: *por, por,… no, es el divisor, por el cociente que sería cualquier número natural… no, algún número natural, no todos, y más cero porque no afectaría.*

Profesor: *bien, la justificación que ha dado Marcia es la justificación general. Ustedes pueden haber dado diferentes ejemplitos, como empezó haciendo Sebastián con N igual a 14, otro alumno me puede haber dicho que esto se cumple para N igual a 21, porque 21 es divisible por 7, y además yo sé que existe el número natural 3 tal que 21 es igual a 7 por 3. Y puedo seguir*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

hallando ejemplitos para este caso. Pero ahora ya viene la justificación general porque a mí me están diciendo trabaja con N divisible por 7, en general. Su compañera lo que dice es, si N es divisible por 7, como consecuencia… ¿qué tengo? ¿Qué es lo que sé si este número es divisible por 7?
[Murmullos]

Profesor: *que N entre 7, ¿qué tipo de división es?*

Todos: *exacta.*

Profesor: *¡exacta! Entonces yo puedo escribir así, N entre 7 va a ser una división exacta, es decir que podré encontrar un número natural que será mi cociente, por ejemplo m, y que el residuo será igual a…*

Todos: *cero.*

Profesor: *así es. Y luego, por la equivalencia de la división yo puedo escribir [el profesor escribe en la pizarra] que, el dividendo (N) es igual a divisor (7) por cociente (m), más el residuo (0), para el m que habíamos encontrado que es natural. Entonces N es igual a 7 por m, más cero, que es igual a 7 por m. O sea que sí va a haber ese número natural, que en este caso yo le coloqué m, pero como ya sabemos el cociente en una división puede ser solo un número. Por ejemplo, para el caso N igual a 14, pudimos encontrar el natural 2; para el caso 21, pudimos encontrar el número natural 3; es decir, para cada caso podré encontrar solamente un número natural que cumpla con lo que me dan en el problema. O ¿ustedes han visto una división en la que tengan dos cocientes?*

Renato: *no,… ¿existen?*

Profesor: *¿hay división de dos números que tenga más de un cociente?*

Todos: *uhm…*

Profesor: *la respuesta es un NO rotundo.*

Observemos que la justificación dada por Sebastián estaría categorizada, según los niveles de producción de demostración matemática (ver Capítulo 2), en el nivel 1 por basarse en el cumplimiento de la afirmación para un ejemplo. Por otro lado,

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

la justificación dada por Marcia estaría categorizada en el nivel 3, como una demostración matemática, puesto que es una justificación general completa al incluir todos los valores de N.

Ejemplo 4:

El diseño de este ejemplo tiene el propósito de que, a partir de los ejemplos previos, se pueda generalizar la forma de un número divisible por A (A número natural diferente de cero). Presentamos el enunciado del ejemplo 4 y a continuación las justificaciones hechas para el mismo.

¿Cuál es la forma general de un número par?

Profesor: *¿recuerdan qué es un número par?*

Marcia: *¿un número que se pueda dividir entre 2?*

Profesor: *¿o en otras palabras?*

Marcia: *que es divisible por 2.*

Profesor: *entonces, la pregunta ahora es, ¿cuál es la forma general de un número par o divisible por 2? … Por ejemplo, esta es la forma general [el profesor señala en la pizarra: N = 7 x m, para algún natural m] de un número que es divisible por 7. Ahora, ¿cuál es la forma general de un número par sabiendo que un número par es un número divisible por 2?*

Marcia: *N es igual a 2 por m,…*

Profesor: *muy bien, para algún número natural m. Yo digo, como N es par, es divisible por 2, y si N es divisible por 2, entonces N entre 2 es una división exacta. Divido N entre 2, obtengo un cociente natural m, y residuo 0. De aquí, por la equivalencia que hemos visto, entonces N (dividendo) = 2 (divisor) x m (cociente) + 0 (residuo), y esto es lo mismo que N = 2 x m… ¿bien? Pregunta: cuál es la forma general de un número divisible por 3?*

Marcia: *N igual a 3 por m…*

Profesor: *ya está.*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

A diferencia de ejemplos anteriores, las justificaciones para estos dos últimos ejemplos no parecen ser evidentes para los estudiantes. Especulamos que se debe básicamente al grado de generalidad en ellos.

<u>Análisis de las justificaciones individuales</u>

Presentamos una información cuantitativa que refleja el análisis de las justificaciones individuales dadas por los estudiantes a la Actividad “Tú decides” (ver Anexo A3), considerando las respuestas que dieron a cada una de las 10 preguntas planteadas.

A continuación mostramos el cuadro que muestra los resultados de este análisis.

Cuadro resumen – Sesión 3 – Actividad “Tú decides”						
Nombre	**No codificable**	**Nivel 0**	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**Nivel 3**	**Total**
Marcia	0	2	0	3	5	**10**
Renato	1	2	0	2	5	**10**
Sebastián	1	3	0	4	2	**10**
Alexander	3	0	4	2	1	**10**
Rodrigo	0	0	3	2	5	**10**
Total	**5**	**7**	**7**	**13**	**18**	**50**

CUADRO A3

Análisis de las justificaciones individuales a la Actividad “Tú decides”

Teniendo en cuenta la definición de justificación y demostración matemática presentadas en el Marco Teórico, observamos que:

El 76% del número total de respuestas analizadas para esta actividad califican como justificaciones (38 respuestas categorizadas en los niveles 1, 2 y 3, de un total de 50); y un poco más del 47% de éstas (18 de 38) califican como demostraciones matemáticas (las del nivel 3) según nuestro marco teórico (el 36% del total: 18 de 50). Esto es un indicio de que los alumnos pueden responder apropiadamente a problemas en los que se les pide

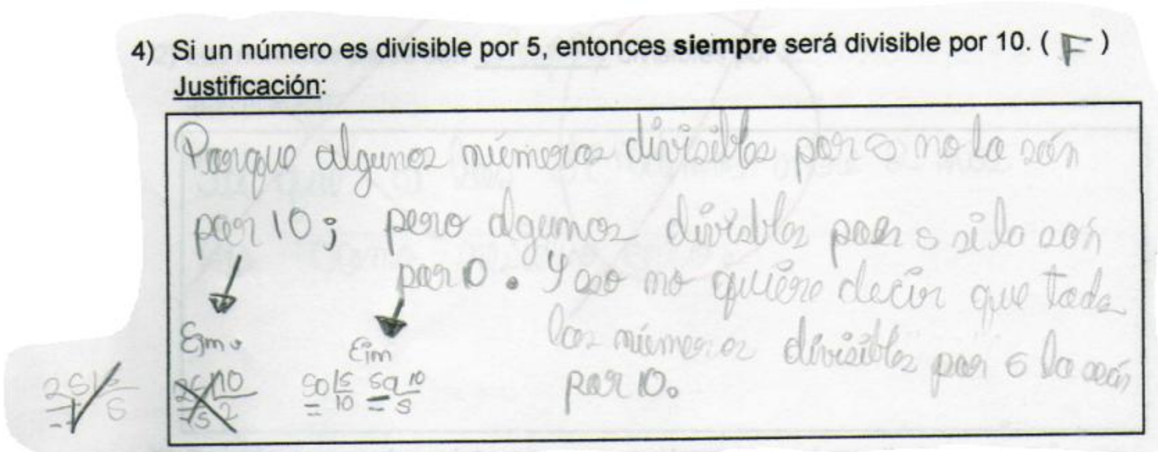
Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

justificaciones y demostraciones. Queda la tarea pendiente de experimentar problemas similares en una muestra más amplia.

A continuación presentamos algunas de las justificaciones individuales dadas a algunas de las cuestiones presentadas en esta actividad.

Marcia:



4) Si un número es divisible por 5, entonces **siempre** será divisible por 10. (F)

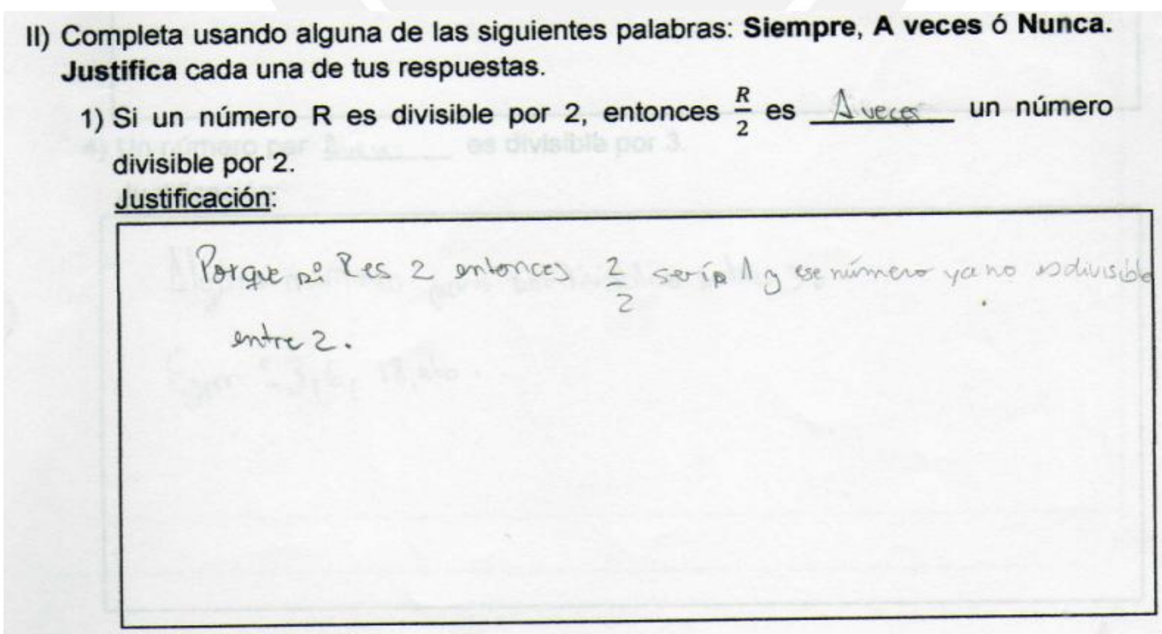
Justificación:

Porque algunos números divisibles por 5 no lo son por 10; pero algunos divisibles por 5 si lo son por 10. Eso no quiere decir que todos los números divisibles por 5 lo son por 10.

Ejm: Ejm

Sesión 3 – Pregunta I.4 (Nivel 3)

Renato:



II) Completa usando alguna de las siguientes palabras: **Siempre**, **A veces** ó **Nunca**. **Justifica** cada una de tus respuestas.

1) Si un número R es divisible por 2, entonces $\frac{R}{2}$ es A veces un número divisible por 2.

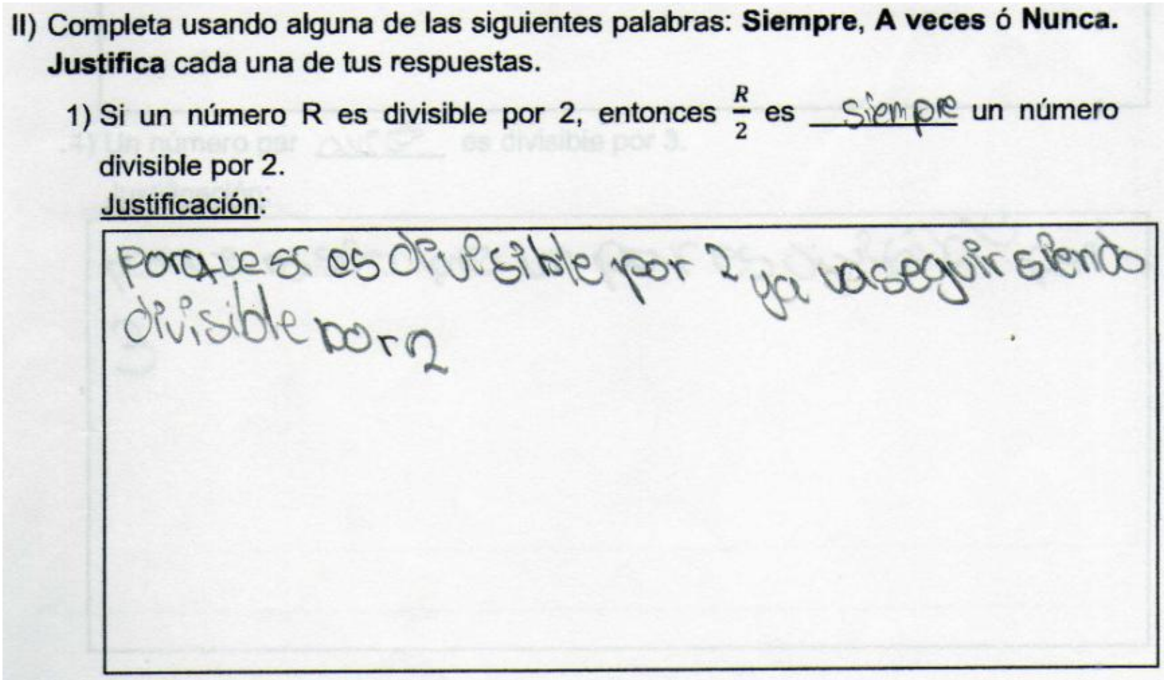
Justificación:

Porque si R es 2 entonces $\frac{2}{2}$ sería 1 y ese número ya no es divisible entre 2.

Sesión 3 – Pregunta II.1 (Nivel 2)

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Sebastián:



II) Completa usando alguna de las siguientes palabras: **Siempre**, **A veces** ó **Nunca**. **Justifica** cada una de tus respuestas.

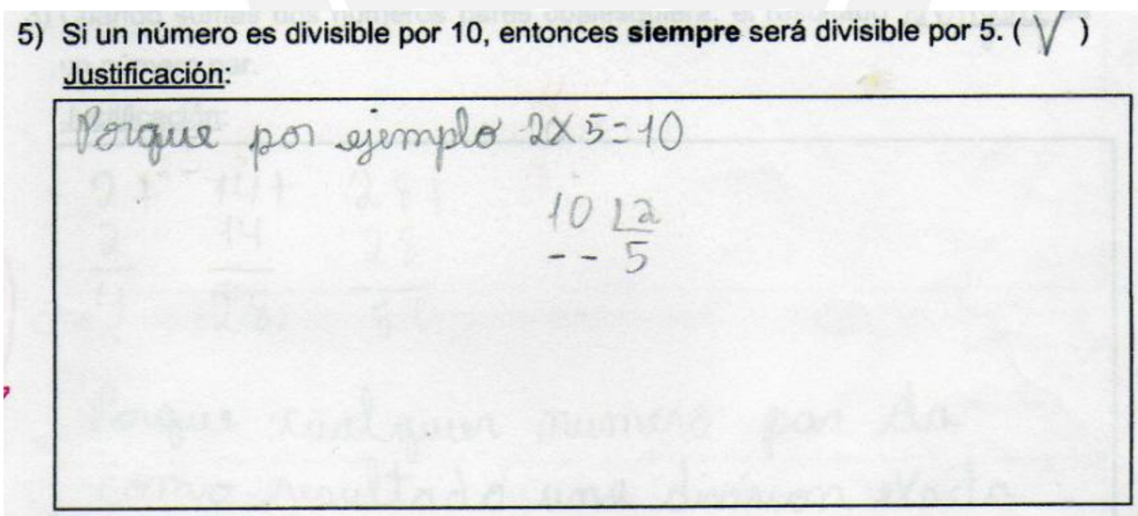
1) Si un número R es divisible por 2, entonces $\frac{R}{2}$ es siempre un número divisible por 2.

Justificación:

Porque si es divisible por 2 ya va seguir siendo divisible por 2

Sesión 3 – Pregunta II.1 (Nivel 0)

Alexander:



5) Si un número es divisible por 10, entonces **siempre** será divisible por 5. (V)

Justificación:

Porque por ejemplo 2x5=10

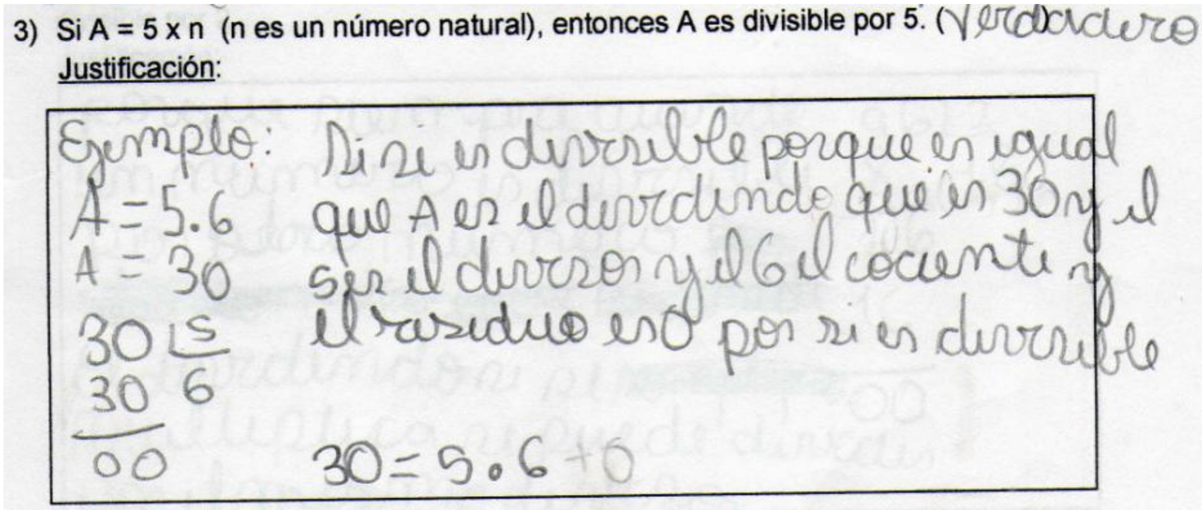
10 |2
-- 5

Sesión 3 – Pregunta I.5 (No codificable)

Tener en cuenta que al no ser ésta una justificación correcta, está clasificada como no codificable.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Rodrigo:



3) Si A = 5 x n (n es un número natural), entonces A es divisible por 5. (Verdadero

Justificación:

Ejemplo:
A = 5.6
A = 30
30 |5
30 6
00

Si si es divisible porque es igual que A es el dividendo que es 30 y el 5 es el divisor y el 6 el cociente y el residuo es 0 por si es divisible

30 = 5.6 + 0

Sesión 3 – Pregunta I.3 (Nivel 1)

4.4.4 Análisis de las justificaciones en la Sesión 4

La sesión 4 (ver Anexo S4) incluye las últimas definiciones que hemos tenido a bien considerar para el desarrollo del tema divisibilidad de números naturales, así también ejemplos resueltos y propuestos.

Análisis de las justificaciones grupales

Ejemplo 6:

El propósito de presentar este ejemplo es que los estudiantes, gracias a la equivalencia presentada en esta sesión (ver Anexo S4) puedan ser capaces de encontrar un procedimiento para determinar los múltiplos de cualquier número natural. Presentamos el enunciado del ejemplo 6 y a continuación las justificaciones hechas para el mismo.

¿Cómo puedo hallar los múltiplos de 3?

Rodrigo: *sumando 3 más 3, más 3…*

Pensamos que la inmediata respuesta de Rodrigo refleja el procedimiento que este aprendió previamente en el colegio. Como nuestra intención es lograr que los estudiantes, por sí mismos, y con la ayuda de las equivalencias dadas, den un

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

procedimiento para hallar los múltiplos de un número natural planteamos la siguiente pregunta.

Profesor: *pero, ¿y si pensamos en las equivalencias que hemos dado? ¿Cómo puedo hallar los múltiplos de 3?*

Marcia: *los múltiplos de 3… uhm… viendo qué números son divisibles por 3.*

Profesor: *¡ya está! Por ejemplo…*

Marcia: *21, 21 es divisible por 3…*

Profesor: *entonces 21 es un múltiplo de 3… pero, ¿cómo hallo todos los múltiplos de 3?*

Rodrigo: *sumando 3 más 3 más 3…*

[Rodrigo insiste en su "método", así que le hacemos algunas preguntas al respecto]

Profesor: *¿A quién?*

Rodrigo: *a cero… de ahí da 3, y de ahí se le suma 3, da 6,…*

Renato: *¿sacando el mínimo común divisor a 3?*

Profesor: *¿máximo común divisor?*

Renato: *mínimo común divisor*

Profesor: *¿mínimo común divisor de 3? Eso no existe. Hay mínimo común múltiplo y máximo común divisor.*

Renato: *ah, entonces mínimo común múltiplo*

Profesor: *¿de quién?*

Renato: *de 3*

Profesor: *¿con quién?... el mínimo común múltiplo se halla para dos o más cantidades, porque es el menor múltiplo que se tiene en común… igual te estás yendo un poco lejos, primero entendamos qué son y cómo se hallan los múltiplos de un número, para luego hablar del mínimo común múltiplo, ¿sí?*

Rodrigo: *miss, ¡¡sumando 3 más 3, más 3…!!*

Profesor: *ya, tú dijiste que eso le sumaba a… [El profesor empieza a copiar en la pizarra]*

Rodrigo: *cero…*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Profesor: *ya, le sumo 3, y ¿luego? ¿Quiénes serían los múltiplos de 3?*

Rodrigo: *múltiplo… por ejemplo, a cero le sumo 3, obtengo 3 y 3 es un múltiplo de 3, de ahí 3 más 3 da 6, y 6 es un múltiplo de 3…*

Sebastián: *miss, Alexander tiene una opinión.*

Profesor: *ya, a ver, la idea de Rodrigo es ir sumando 3, desde 0 y así va obteniendo los múltiplos de 3. También está bien. A ver Alexander…*

Formulación y refutación de una conjetura (*1)

(*1) Alexander: *que los divisores de 3, también son los múltiplos de 3.*

Profesor: *a ver…*

Rodrigo: *¡no!*

[El profesor copia en la pizarra lo que Alexander acaba de decir]

Profesor: *¿esto es verdad? Alexander acaba de plantear su conjetura. Veamos si es verdadera o si no lo es. Pueden usar sus equivalencias para determinar si es verdadero o falso.*

A partir de esto aprovechamos en explicar lo que significa una conjetura en términos simples, sin dejar de aclarar que toda conjetura debe ir acompañada por su demostración para que sea validada o rechazada. Entonces aprovechamos en explicar, una vez más, lo que significa una demostración matemática.

Marcia: *sí miss, sí es…uhm… ¡no!*

Rodrigo: *¡no miss!*

Marcia: *yo digo que es falso.*

Profesor: *¿por qué?*

Marcia: *porque… uhm… según la equivalencia… uhm… los divisores de 3, no serían los múltiplos de 3.*

Profesor: *¿cómo sería entonces?*

Marcia: *sería que ese número, por ejemplo N.*

Profesor: *ya, N a ver [y empieza a copiar en la pizarra]*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Marcia: *por ejemplo es divisor de 3.*

[El profesor sigue copiando en la pizarra].

Marcia: *entonces según la equivalencia, 3 sería múltiplo de 3*

Profesor: *entonces, según la equivalencia…*

Marcia: *según la equivalencia 3 sería múltiplo de…*

Rodrigo: *de N*

Marcia: *3 sería múltiplo de N*

Profesor: *claro, esto sale de la equivalencia que habíamos visto hace poco. Decir que A es divisor de B es lo mismo a que B es múltiplo de A... ¿entonces?*

Marcia: *eso es falso [refiriéndose a la afirmación hecha por Alexander].*

Sebastián: *es Falsote.*

Rodrigo intenta formular una nueva conjetura (*2) *que, como ahora reconocemos, fue un error no dejar que Rodrigo termine de plantearla, refinarla, y justificarla, puesto que es una conjetura que esperábamos todos generen a partir de la Actividad "Finito o infinito" (ver Anexo A4) presentada en la siguiente sesión (sesión 5, ver Anexo S5).*

(*2) Rodrigo: *no miss, y también que los divisores de un número tiene que ser menor que el número.*

Profesor: *esa es otra conjetura que vas a plantear a partir de la siguiente actividad que vamos a presentar…*

Renato: *¿qué dijiste Rodrigo?*

[Risas]

Profesor: *entonces, cuidado aquí. ¿Los divisores de 3 son también los múltiplos de 3? ¡Es falso! A ver, denme un contraejemplo.*

Rodrigo: *84*

Profesor: *84, ¿qué pasa con 84?*

Rodrigo: *sus divisores son 1, 2, 3, 4,…*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Profesor: *no, no,… es que estamos hablando de esta afirmación [el profesor señala: Los divisores de 3, son también los múltiplos de 3]. Lo que estoy pidiendo es un contraejemplo para esta afirmación.*

Sebastián: *de que 84 es divisor de 3*

Profesor: *¿84 es divisor de 3?*

Sebastián y Marcia: *sí, sí es.*

Profesor: *usen la equivalencia con divisibilidad que hemos visto…*

Sebastián: *ya… está bien…*

Marcia: *está bien,…*

Rodrigo: *¡¡¡no!!!... 3 es div…*

Marcia: *84 entre 3 te da 28*

Rodrigo: *¡¡¡no!!!… 3 es div…*

Marcia: *porque mira 3 por 28 te da 84*

Rodrigo: *¡3 es divisor de 84!*

Sebastián: *sí pues…*

Profesor: *3 es divisor de 84… 3 es divisor de 84, no al revés…*

Sebastián y Marcia: *ah ya…*

Rodrigo: *es que ustedes [refiriéndose a Marcia y Sebastián] dijeron que 84 es divisor de 3.*

Profesor: *por eso no estoy copiando (en la pizarra),… porque aquí (en la afirmación) me están diciendo: los divisores de 3. ¿Quiénes son los divisores de 3?*

Rodrigo: *1 y 3*

Profesor: *entonces un contraejemplo sería 1, 1 es divisor de 3, pero ¿también es múltiplo de 3?*

Renato: *no, los múltiplos de 3 van de 3 para arriba…*

Profesor: *los múltiplos de 3 son los números que son divisibles por 3… pues por la equivalencia, si N es divisible por 3, entonces N es múltiplo de 3. ¿Sí?*

Rodrigo: *sí*

Profesor: *y 3 vendría a ser divisor de N [el profesor empieza a escribir esto que acaba de decir]. N es divisible por 3, quiere decir que N es múltiplo de 3 y*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

que 3 es divisor de N. Entonces, regresando al caso de 1. 1 es divisor de 3, pero ¿1 es múltiplo de 3? O lo que es lo mismo, ¿1 es divisible por 3?

Rodrigo: *no, no es.*

Profesor: *por eso es que 1 sería un contraejemplo a esa afirmación… Entonces, regresemos a la pregunta inicial: ¿Cómo hallo los múltiplos de 3? ¿Qué es lo mismo a decir múltiplo de 3?... los números que son…*

Marcia: *el que multiplicado por otro número te va a salir un múltiplo*

Rodrigo: *que 3 multiplicado…*

Marcia: *que 3 multiplicado por un número…*

Rodrigo: *Natural*

Marcia: *te va a salir un múltiplo de 3*

Profesor: *ok. Pero eso salió de la equivalencia, ¿no es así? De la equivalencia, porque si un número es múltiplo de 3, entonces ese número es divisible por 3, y los números que son divisibles por 3 son aquellos que si yo los divido entre 3 me va a dar un natural, con residuo cero. Entonces, son aquellos números que son 3 por N, y N es un número natural. Justo lo que me estabas diciendo, 3 por un natural. Esto quiere decir que la forma en que se pueden hallar los múltiplos de 3 es multiplicando a 3 por cada uno de los números naturales. Es la misma idea que la de Rodrigo porque recuerda que la suma de sumandos iguales es equivalente a una multiplicación. Entonces, ¿cuáles son los múltiplos de 3 entonces si ya sabemos hallar estos múltiplos?*

Rodrigo: *cero,…*

Profesor: *el 3 lo voy a multiplicar por…*

Sebastián: *cero...*

Profesor: *aquí voy a escribir la lista de los múltiplos de 3…*

Otra vez, **Rodrigo intenta formular una conjetura (*3)**.

(*3) Rodrigo: *pero son infinitos…*

Profesor: *espera un poco (Rodrigo)… por 0, me va a dar 0; por 1, me va a dar 3; por 2, dará 6; por 3, me da 9; etc. etc. etc. Entonces voy a ir multiplicando a*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

3 por todos los números naturales. ¿No? Voy a ir multiplicando por todos los naturales.

Ejemplo 7:

El propósito de presentar este ejemplo es que los estudiantes, gracias a la equivalencia presentada en esta sesión (ver Anexo S4) puedan ser capaces de encontrar por sí mismos un procedimiento para determinar los divisores de cualquier número natural.

¿Cómo puedo hallar los divisores de 3?

Profesor: *vamos a partir de algo. Yo voy a decir lo siguiente: A es divisor de 3 y voy a averiguar qué valores de A van a cumplir con esto. ¿Sí?*

Rodrigo: *sí.*

Profesor: *como todavía no sabemos cómo hallar los divisores, vamos a usar lo que sí sabemos. Voy a usar por ejemplo, mis conceptos de múltiplo o divisibilidad. ¿Qué podríamos decir entonces usando los términos que ya conozco mejor?... Usen sus equivalencias.*

Marcia: *que 3 es múltiplo de A.*

Profesor: *¿está bien lo que dice Marcia?*

Rodrigo: *sí.*

Profesor: *ok. Entonces decir que A es divisor de 3, es equivalente a decir que 3 es múltiplo de A o que 3 es…*

Alexander: *divisible por A*

Profesor: *divisible por A, muy bien. Y esto (que 3 sea divisible por A) tiene que ayudarme. ¿Para qué valores de A, 3 es divisible por ese número? Entonces me pregunto: 3 es divisible por A, ¿para qué valores de A?*

Marcia: *¿para 1 y 3?*

Profesor: *a ver, ¿será cierto eso? ¿3 es divisible por 1?*

Todos: *sí.*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Profesor: *ya está. Eso quiere decir que hemos encontrado un valor de A que cumple que 3 es divisible por A y por la equivalencia, este valor (A = 1) será divisor de 3. Ya está. Ahora, ¿3 es divisible por quién más?*

Marcia: *3 es divisible por 3*

Profesor: *¿3 es divisible por 3?*

Rodrigo y Sebastián: *sí.*

Profesor: *como esta es una equivalencia (A es divisor de 3, es equivalente a, 3 es múltiplo de A, lo que es equivalente a, 3 es divisible por A), entonces esto me lleva otra vez allá porque esto (3 es divisible por 3) es verdad. Por lo tanto, otro divisor de 3 es 3. ¿Hay otro divisor? ¿3 es divisible por algún otro número?*

Todos: *no.*

Profesor: *no. Entonces esto quiere decir que los únicos divisores de 3 son 1 y 3.*

Ejemplo 8:

Si C = 5 x m, donde m es cualquier número natural, entonces ¿C es un divisor de 5?

Alexander: *C es múltiplo de 5, porque 5 multiplicado por un natural me va a dar un resultado… una…*

Profesor: *puedes mirar tu equivalencia si eso te puede ayudar…*

Marcia: *miss, yo sé, yo sé… miss, si Alexander falla, ¿yo lo puedo hacer?*

Rodrigo: *no pues miss, yo hace rato estoy levantando la mano.*

Profesor: *esperemos… un momentito…*

Alexander: *me va a dar un número que es divisible entre 5…*

Profesor: *quién es divisible por 5?*

Alexander: *5 por un número…*

Profesor: *que es…*

Alexander: *¿m?... no, ¿C?*

Profesor: *¿m? ó ¿C?*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Alexander: *C…*

Profesor: *a ver, entonces lo que dices es que C es divisible por 5?*

Alexander: *5 es divisible por C…*

Profesor: *¿por qué?*

Alexander: *porque 5 por un número natural, da como resultado… ay, ya me enredé…*

Marcia: *yo miss…*

Profesor: *A ver, vamos a hacer que alguno de tus compañeros te ayuden… vamos a darle la oportunidad a Renato.*

Renato: *¡es verdadero! Porque C entre 5 da como cociente m y como residuo 0.*

Profesor: *¿Es verdad lo que dice Renato?*

Todos: *sí.*

Renato: *entonces C entre 5 sí es una división exacta*

Profesor: *perfecto, ¿entonces?*

Renato: *C es divisor de 5 porque sale una división exacta…*

Profesor: *C entre 5 es una división exacta. Hasta ahorita ibas bien ah…*

Marcia y Rodrigo: *yo sé, miss, yo sé…*

Profesor: *a ver, Marcia…*

Marcia: *C es divisible por 5, entonces C sería divisor de 5 y 5 sería múltiplo de C…*

Profesor: *no…. A ver, Rodrigo…*

Rodrigo: *¡es falso!*

Profesor: *a ver, déjame corregir entonces la respuesta…*

Sebastián: *¡Falsote!*

Profesor: *a ver, entonces seguimos… porque hasta aquí estaba bien lo que tus compañeros han dicho, ¿cierto?*

Rodrigo: *ya, pero yo quiero dar mi opinión.*

Profesor: *¿borro todo?*

Rodrigo: *no, por si acaso… pero igual yo quiero dar mi opinión.*

Profesor: *a ver Rodrigo.*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

*Rodrigo: es falso porque un divisor tiene que ser menor y ahí se multiplica… [Observe aquí que Rodrigo retoma la conjetura (*2) que había planteado anteriormente]*

***Profesor:** ya, pero que un divisor tenga que ser menor es una **CONJETURA** tuya que tendrías que demostrarla… esto es algo que Rodrigo está afirmando, por lo tanto sería su conjetura.*

***Rodrigo:** sí.*

***Profesor:** demuéstralo y luego retomamos lo que nos estabas diciendo. A ver, ¿quién puede seguir la justificación que estaba dando Renato?*

***Marcia:** yo, yo…*

***Profesor:** a ver Marcia*

***Marcia:** C es divisor de 5…*

***Profesor:** entonces, ¿borro lo que habíamos puesto (que C es divisible por 5)?*

***Marcia:** no, ese déjelo.*

Después de algunos errores, Sebastián llega a la respuesta correcta: que 5 es divisor de C porque al ser C divisible por 5, entonces C es múltiplo de 5, y por la equivalencia 5 es divisor de C.

Formulación y demostración de una conjetura (*4)

Como resultado de esta sesión además tenemos el planteamiento y demostración de una *conjetura*. Se muestra a continuación los detalles.

***(*¨4) Sebastián:** Si multiplico un número con 5, entonces el resultado terminará en 5 ó en 0.*

Le pedimos a Sebastián que justifique este resultado; sin embargo, como lo imaginamos, el alumno había planteado esta conjetura basándose en el criterio de divisibilidad por 5 ya conocido por todos los estudiantes.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

A partir de algunas exploraciones, Rodrigo va refinando los razonamientos que lo llevan finalmente a la demostración de la afirmación de Sebastián.

> **Rodrigo:** *Si multiplico un número impar con 5, el número terminará en 5 y si multiplico un número par con 5, el número terminará en 0.*

Rodrigo hace esta afirmación basándose inicialmente en algunos ejemplos numéricos (algunos casos particulares) tal y como lo pudimos verificar en la hojita donde estaba haciendo sus cálculos. Notemos que a partir de esta afirmación, Rodrigo ya había podido darse cuenta en qué casos al multiplicar un número natural por 5 el producto terminaría en 5, así como los casos en los que el producto terminaría en 0. Sin embargo, esta afirmación la había hecho basándose en algunos pocos ejemplos de números naturales. Así que posteriormente le pedimos a Rodrigo que presente una justificación más general, que abarque por un lado a todos los números impares, y por otro lado, a todos los números pares, respectivamente.
El alumno siguió trabajando desde su lugar hasta que llegó a la siguiente demostración.

> **Rodrigo:** *los números impares o terminan en 1, o terminan en 3, en 5, en 7 o en 9. Solo en esos números. Y si yo multiplico a estos números por 5, el resultado terminará en 5.*

El estudiante da una justificación similar para el caso de los números pares:

> **Rodrigo:** *y los pares terminan en 0, o en 2, o en 4, o en 6, o en 8. Y multiplicando por 5, el resultado terminará en 0.*

Esto es una muestra de que estimulando y guiando adecuadamente el proceso de demostración de nuestros estudiantes, podemos conducirlos a realizar finalmente justificaciones generales y completas (demostraciones matemáticas).

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Análisis de las justificaciones individuales

No hay *justificaciones individuales* que analizar.

4.4.5 Análisis de las justificaciones en la Sesión 5

La sesión 5 (ver Anexo S5) incluye el análisis y reconsideración de una definición presentada la sesión anterior. Asimismo presenta la Actividad "Finito o infinito" (ver Anexo A4).

Recordamos y analizamos la definición de múltiplo y divisor presentada la sesión anterior. Para esto, planteamos las siguientes preguntas:

¿Será que esta definición se puede precisar un poco más?

¿Habrá problemas con algún caso?

Estas desencadenan la justificación grupal que presentamos a continuación.

Análisis de la justificación grupal

Renato: *cero*

Profesor: *ya, pero ¿cuándo habrán problemas exactamente? ¿Cuando A es cero, o cuando B es cero?*

Renato: *B es cero*

Profesor: *¿por qué?*

Renato: *porque si dividimos algún número entre 0 no se va a poder.*

Profesor: *¡perfecto! Entonces, cuando yo di la definición, yo en realidad debí precisar que esa equivalencia se cumplía, para A y B número naturales, con B diferente de cero. Todo esto, porque como habíamos visto, no hay número que sea divisible por cero.*

Renato se da cuenta del caso que habíamos dejado libre al no colocar la restricción B diferente de cero y justifica adecuadamente su respuesta.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Análisis de las justificaciones individuales

Presentamos una información cuantitativa que refleja el análisis de las justificaciones individuales dadas por los estudiantes a la Actividad “Finito o Infinito” (ver Anexo A4). La diferencia en el número total de justificaciones dadas por cada alumno varía debido a que esta actividad requiere que cada estudiante formule sus propias conjeturas, de acuerdo a los patrones que hayan podido identificar en las situaciones planteadas. Marcia presenta 0 justificaciones individuales porque no pudo asistir a la sesión 5.

A continuación mostramos el cuadro que muestra los resultados de este análisis.

Cuadro resumen – Sesión 5 – Actividad “Finito o Infinito”						
Nombre	**No codificable**	**Nivel 0**	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**Nivel 3**	**Total**
Marcia	0	0	0	0	0	**0**
Renato	0	0	2	2	2	**6**
Sebastián	0	1	2	3	0	**6**
Alexander	1	0	3	2	1	**7**
Rodrigo	1	0	1	1	2	**5**
Total	**2**	**1**	**8**	**8**	**5**	**24**

CUADRO A4

Análisis de las justificaciones individuales a la Actividad “Finito o infinito”

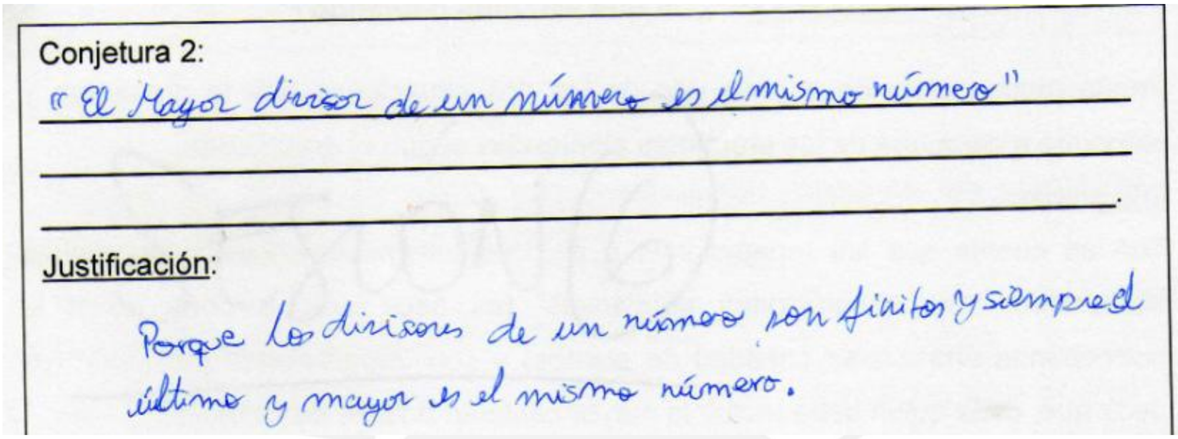
Teniendo en cuenta la definición de justificación y demostración matemática presentadas en el Marco Teórico, observamos que:

El 87,5% del número total de respuestas analizadas para esta actividad califican como justificaciones (21 respuestas categorizadas en los niveles 1, 2 y 3, de un total de 24); y casi el 24% de éstas (5 de 21) califican como demostraciones matemáticas (las del nivel 3) según nuestro marco teórico (casi el 21% del total: 5 de 24).

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

A continuación presentamos algunas de las justificaciones presentadas en esta actividad.

Renato:

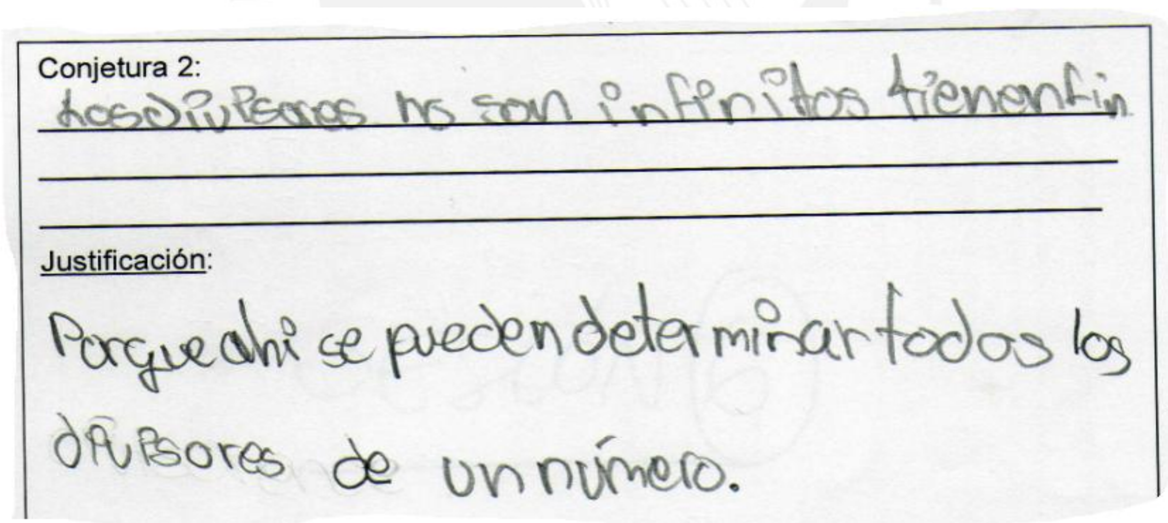


Conjetura 2:
"El Mayor divisor de un número es el mismo número"

Justificación:
Porque los divisores de un número son finitos y siempre el último y mayor es el mismo número.

Sesión 5 – Tabla 2 (Nivel 2)

Sebastián:



Conjetura 2:
Los divisores no son infinitos tienen fin

Justificación:
Porque ahí se pueden determinar todos los divisores de un número.

Sesión 5 – Tabla 2 (Nivel 1)

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

4.4.6 Análisis de las justificaciones en la Sesión 6:

La sesión 6 (ver Anexo S6) incluye la Actividad "Múltiplos y divisores" (ver Anexo A5) y ejemplos propuestos que incluyen patrones (tácitos y sutiles) que los estudiantes tienen que identificar para, así, generar sus propias conjeturas. Vale la pena mencionar que esta sesión fue muy importante para este análisis, pues fue esta la sesión en la que más conjeturas se formularon y justificaron grupalmente.

Análisis de las justificaciones grupales

Empezamos hallando los múltiplos de algunos números naturales, como se muestra en el contenido de esta sesión (ver Anexo S6) y cuando por fin llegamos a la pregunta:

¿Cuál es el mayor múltiplo de 7?

Se desencadena el siguiente debate.

Renato: *es infinito*

Rodrigo: *indefinido*

Formulación, precisión y justificación de una conjetura (*5)

Veamos cómo se empieza a generar desde aquí una conjetura.

Renato: *los múltiplos son infinitos.*

Marcia: *infinito miss.*

Profesor: *¿el infinito es un número?*

Rodrigo: *no está definido porque los números son infinitos.*

Profesor: *¿los números? ¿De qué números estamos hablando?*

Rodrigo: *los naturales.*

Sebastián: *Los múltiplos de 7 son infinitos.*

Profesor: *ya, los múltiplos de 7 son infinitos, pero a mí me preguntan cuál es el mayor múltiplo de 7, ¿puedo saber?*

Marcia: *no está definido porque los números son infinitos.*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

> **Profesor:** *¿qué números? Estamos hablando de los múltiplos de 7. Los múltiplos de 7… ¿Cuántos múltiplos tiene 7?*
>
> **Rodrigo:** *ya ya ya, porque los números son infinitos y…*
>
> **Profesor:** *de nuevo, ¿a qué números te refieres?*
>
> **Rodrigo:** *naturales… y los múltiplos se hallan multiplicando cualquier natural por 7.*
>
> **Profesor:** *ya está. Entonces esto quiere decir que los múltiplos de 7 son infinitos. Y de aquí que no pueda determinar cuál de todos ellos es el mayor, que no se pueda definir como decían.*
>
> *Entonces, de lo que hemos dicho, los múltiplos [y empieza a copiar]… y esto ya es una conjetura, ¿no?... "Los múltiplos de un número… de un número natural… no se olviden que deben precisar bien sus conjeturas… son infinitos". [Quedando lo siguiente en la pizarra:* ***(*5) "Los múltiplos de un número natural son infinitos"****] ¿Cómo justificarían esto? Por ahí ya han dado varias ideas. Pasemos a limpio esas ideas entonces…*

Al darnos cuenta de que faltaban aún unas precisiones en esta conjetura, les planteamos una pregunta a los estudiantes con la finalidad de que ellos mismos sean capaces de identificar las imperfecciones en esta conjetura inicial.

> **Profesor:** *Pero… a ver… antes de que pasemos a la justificación, pensemos en esta conjetura y si esta es siempre cierta. ¿Está bien esta conjetura?*
>
> **Rodrigo:** *no*
>
> **Profesor:** *¿está bien esta conjetura o la podemos "mejorar"? A ver: "Los múltiplos de TODO [el profesor pone énfasis en esta palabra] número natural son infinitos."*
>
> **Marcia:** *no, no miss, está mal, porque del cero no es infinito.*

Observamos que Marcia logra dar un contraejemplo para la conjetura inicial, lo cual más allá de refutar la conjetura anterior nos hace pensar en reescribirla adecuadamente con la finalidad de que el contraejemplo proporcionado por Marcia

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

no vaya en contra de una nueva conjetura. A esto nos referíamos cuando decíamos “mejorar” la conjetura anterior.

> ***Profesor:*** *¡ajá!*
>
> ***Rodrigo:*** *el cero solo tiene uno.*
>
> ***Profesor:*** *ajá, entonces, ¿cómo reescribimos nuestra conjetura?*
>
> ***Renato:*** *a excepción del cero.*
>
> ***Profesor:*** *entonces escribimos la nueva conjetura:* ***(*5’) “Los múltiplos de todo número natural son infinitos, excepto el cero que tiene un único múltiplo”****… ya, y ¿cómo justifico esta conjetura? Recuerden que toda conjetura para que deje de ser tal debe ser justificada, que tienen que dar su demostración para que se convierta en una “verdad” matemática. Y ojo que cuando ustedes han dicho todo número (excepto el cero), o sea que tienen que hacer la justificación para todos esos números. Esa es la demostración, para todos los números, con excepción del cero, porque eso hemos escrito como parte de la conjetura.*

Los estudiantes intentan llegar a la demostración de la nueva conjetura.

> ***Rodrigo:*** *porque los múltiplos están… ya por ejemplo del número 3, están hechos por los números naturales que son infinitos, porque los múltiplos de 3 se hallan multiplicando a 3 por cada número natural, y son infinitos.*

Rodrigo presenta una justificación que, según los niveles de producción de demostración matemática, estaría clasificada en el nivel 1, ya que se limita a trabajar con el caso particular del número natural 3.

> ***Profesor:*** *ya, tú acabas de justificar la conjetura para un solo caso, el caso del número 3, pero esa no es la demostración aún. ¿Cómo sería entonces la demostración, es decir la justificación para todos los naturales que no sean cero? A ver, yo empiezo diciendo, [y el profesor empieza a copiar en la*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

pizarra] si N es un número natural, pero N diferente de cero hemos dicho porque esa es la excepción, entonces ¿cómo hallo los múltiplos de N?

Sebastián: *multiplicando por todos los números naturales*

Profesor: *Así es, entonces empiezo multiplicando por cero primero, luego por 1, luego por 2, etc., etc.…entonces aquí estoy multiplicando a N ¿por cuántos números?*

Sebastián: *por infinitos*

Profesor: *entonces N, que es diferente de cero, se multiplica por infinitos números…*

Sebastián: *y ¡van a salir infinitas respuestas!*

Profesor: *muy bien. Y van a salir infinitas respuestas porque son números diferentes de cero… muy bien. O sea que, ¿cuántos múltiplos de N van a salir?*

Todos: *infinitos*

Profesor: *muy bien.*

Posteriormente procedemos a hallar los divisores de algunos números naturales empezando desde cero. Esto, nuevamente con la idea de que los estudiantes formulen sus propias conjeturas.

Profesor: *ahora vamos a ver qué pasa con los divisores. Habíamos visto que los divisores de cero son…*

Sebastián: *todos los números… naturales… menos cero*

Profesor: *o sea, el número 1, 2, 3, 4, etc. ¿Y por qué habíamos dicho que estos números son los divisores de 0?*

Renato: *porque si 0 dividido entre todos esos números me va a dar una división exacta.*

Profesor: *muy bien. Porque 0 dividido por cada uno de esos números me va a dar como residuo cero… Ahora, los divisores de 1. ¿Quiénes son los divisores de 1?*

Rodrigo: *1*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Renato: *Es 0 y 1*

Marcia, Rodrigo, Sebastián y Alexander: *cero no…*

Profesor: *¿por qué cero no?*

Alexander: *porque si divides 1 entre 0 no te va a salir una división exacta, no se puede.*

Profesor: *muy bien. ¿Y por qué 2 no es divisor de 1?*

Renato: *No, porque es una división inexacta.*

Profesor: *entonces ¿quiénes son los divisores de 1?*

Marcia: *todos los números naturales menores que 1 a excepción de cero.*

Profesor: *¿Qué números naturales son menores que 1 y con excepción del cero? ¿Hay alguno?*

Marcia: *no, no, solo el 1.*

Profesor: *¿1 es divisor de 1?*

Todos: *sí.*

Profesor: *¿por qué?*

Sebastián: *porque la división es exacta.*

Profesor: *bien, ¿habrá algún otro divisor de 1? ¿Se nos estará escapando algún divisor?*

Todos: *no*

Profesor: *Entonces, ahora los divisores de 2 son…*

Marcia: *2 y 1*

Profesor: *¿es correcto lo que dice su compañera?*

Renato: *no, no, solo es 2.*

Rodrigo: *¡¡no!! Es 1 y 2.*

Renato: *a ver, dividamos 2 entre 1.*

Profesor: *[el profesor empieza a copiar la división que le pide Renato] 2 entre 1… pero, ¿qué vas a verificar con esta división? ¿Qué quieres probar con esta división?*

Renato: *Quiero ver si 1 es divisor de 2.*

Profesor: *¿cuánto te da el cociente?*

Renato: *a ver, 2 por 1,… es 2*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Profesor: *¿y residuo?*

Renato: *cero*

Profesor: *¿entonces?*

Renato: *sí es*

Profesor: *¿1 es divisor de 2?*

Renato: *sí*

Formulación y refutación de una conjetura (*6)

Se genera y rechaza una nueva conjetura.

(*6) Rodrigo: *¡ah miss! Todos los números impares, sus divisores son solo la unidad y ese número, excepto el 1.*

Profesor: *a ver, vamos a escribirlo en la pizarra como "la conjetura de Rodrigo" [el profesor escribe en la pizarra: Rodrigo says:* ***"Todos los números impares tienen como divisores solo a la unidad y al mismo número, excepto el 1"****.]*

Renato: *¡Mentira! ¡Falsote!*

Renato se da cuenta de que la conjetura de Rodrigo es falsa. A continuación presenta un contraejemplo.

Profesor: *a ver, un ratito. Ahora Renato nos dirá por qué dice que la conjetura de Rodrigo es falsa [y el profesor copia en la pizarra: Renato says: ¡¡¡NO!!!]… Ahora te pregunto, ¿por qué?*

Renato: *porque… pongamos un ejemplo…*

Profesor: *querrás decir un contraejemplo, porque con eso derribarás la conjetura de Rodrigo. Con este contraejemplo le estarás diciendo a Rodrigo, tu conjetura es falsa, ¿por qué? Porque este caso hace falsa tu conjetura. A ver…*

Renato: *ya… el número impar 9, tiene como divisores a 1, 3 y el mismo número, 9. [mientras tanto el profesor copia este contraejemplo en la pizarra]*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Rodrigo: *ah no, no, miss.*

Profesor: *¡¡¡ajá!!!*

[Risas]

Rodrigo: *no, no miss… tenía que ser todos los números primos…*

Todos: *ah…*

Sebastián: *esa es otra cosa pues…*

Rodrigo: *es que me confundí con…*

Profesor: *bueno, ahí cambian las cosas, pero la conjetura inicial que habías dado (Rodrigo) había sido traída abajo con el contraejemplo de Renato, ¿cierto?*

Rodrigo: *es que yo pensaba que…*

Sebastián: *ah, primo sí pues.*

Profesor: *claro, pero porque esa es justamente la definición de número primo, ¿cierto?*

Sebastián: *claro pues…*

Profesor: *la definición de un número primo es aquel número que es solo divisible por dos números, por 1 y por sí mismo. Pero esa es la definición. No puede ser una conjetura porque es como si estuvieses diciendo que vas a descubrir una definición. Una definición está así dada.*

Formulación y precisión de una conjetura (*7)

Marcia: *miss, ¿no hay una regla que para que un número sea divisor de otro debe ser menor o igual que ese número?*

Profesor: *ya, eso es lo que la vez pasada Rodrigo estaba diciendo. A ver, vamos a escribir ahora lo que dice Marcia. Marcia dice ahora [y a continuación escribe en la pizarra la conjetura de Marcia]…*

Debemos hacer notar que el copiar las conjeturas, justificaciones, y en general, opiniones de los estudiantes en la pizarra, es un acto que muestra a los estudiantes que el profesor sí le da importancia a lo que ellos tienen por decir. Y

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

por tanto, esto anima aun más a los estudiantes a seguir participando de forma activa y libre para dar sus puntos de vista.

> ***(*7) Marcia: debe ser una regla para que un número sea divisor de otro, debe ser menor o igual que ese número.***
> **Profesor:** *¿están de acuerdo con esto? Miren bien, porque quizás para algún número natural no se cumple esto.*

Se hace una observación que ayudará a precisar un poco más la conjetura de Marcia.

> **Marcia:** *a excepción de cero…*
> **Profesor:** *claro, miren sino quiénes son los divisores de cero [señalando los divisores de cero que se hallaron minutos atrás].*
> **Todos:** *ah…*

Después de reescribir la conjetura de Marcia, precisando el caso cero, la conjetura queda así en la pizarra:

(*7') "Debe ser una regla que para que un número sea divisor de otro, debe ser menor o igual que ese número, a excepción de cero."

> **Profesor:** ¿existirá algún caso adicional al caso cero que puede ser considerado como una excepción a la conjetura de Marcia?
> **Renato:** *el -1… ah ya, debe especificar en general a todos los números naturales*
> **Marcia:** *positivos*
> **Profesor:** *ah ya, es verdad…*

La observación hecha por Renato ayuda a precisar un poco más la conjetura de Marcia. La conjetura queda luego así en la pizarra.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

(*7'') "Debe ser una regla que para que un número natural sea divisor de otro, debe ser menor o igual que el segundo natural, a excepción de cero."

Profesor: *entonces, ¿todos están de acuerdo con que la conjetura de Marcia es verdadera?*

Todos: *sí.*

Profesor: *entonces, esto quiere decir que tenemos que hacer la demostración. Es decir, la justificación para todos los números naturales, a excepción de cero, para ver si cumplen con esto [y señala la conjetura]. Para ver si cumplen que los divisores de un número no pueden ser mayores que el número. Con algunos ejemplitos nos hemos ido dando cuenta de esto. Miremos acá… [El profesor señala la pizarra y procede a hallar los divisores de algunos otros números naturales].*

Formulación y precisión de una nueva conjetura (*8)

Antes de realizar la justificación de esta última conjetura, Renato parece haber identificado otro patrón a partir de los divisores hallados en la pizarra.

Renato: *¡Tengo otra conjetura!*

Profesor: *a ver…*

Renato: *Los divisores de un número… a ver, cómo lo explico…*

Profesor: *a ver, mientras Renato terminar de arreglar su conjetura ustedes vayan diciéndome quiénes son los divisores de 12.*

Marcia, Sebastián y Rodrigo: *1, 2, 3, 4, 6 y 12.*

(*8) Renato: *ah, ya,…* ***Los divisores de un número solo pueden llegar a ser la mitad de ese número****.*

Rodrigo y Sebastián: *¿Qué?...*

Profesor: *¿Los divisores de 12 pueden llegar a lo más a 6 dices tú (Renato)?*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Rodrigo muestra su disconformidad con la primera formulación de la conjetura de Renato dando un contraejemplo. Notemos que Rodrigo emplea el término “contraejemplo”.

> ***Rodrigo:*** *no, yo tengo un contraejemplo, un divisor de 12 es 12 y es mayor que la mitad de 12, que es 6.*
> ***Renato:*** *uhm, sí,… está bien…*
> ***Rodrigo:*** *ah, no, pero la puede arreglar (la conjetura)…*

Rodrigo sugiere precisar en lugar de descartar totalmente la conjetura de Renato.

> ***Profesor:*** *¿Cómo la puede arreglar?*
> ***Rodrigo:*** *los divisores de un número pueden ser menor… uhm… los divisores de un número y menor y… uhm y ese número…*
> ***(*8') Renato:*** *ah ya sé,…* ***Los divisores de un número no pueden pasarse de la mitad de ese número, a excepción del mismo número****.*
> ***Profesor:*** *what????*
> *[Risas]*
> ***Profesor:*** *ya, sí entendí… a ver… [Y copia esta conjetura en la pizarra]*
> ***Marcia y Sebastián:*** *no (a Renato).*
> ***Profesor:*** *a ver, vamos a intentar encontrar un contraejemplo a esta conjetura... ¿han entendido o no?*
> ***Sebastián:*** *ya miss, yo voy a buscar un contraejemplo.*
> ***Profesor:*** *recuerden que su compañero dijo que los divisores de un número no pueden pasarse de la mitad de ese número, a excepción del mismo número.*
> ***Rodrigo:*** *ah ya, entonces está bien.*
> ***Profesor:*** *¿será que hay algún contraejemplo para la conjetura de Renato?*
> ***Rodrigo:*** *el cero…*
> ***Marcia y Sebastián:*** *sí, el cero.*
> ***Sebastián:*** *a excepción de cero.*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Profesor: *ya…*

Renato: *ya, la vamos mejorando.*

La nueva conjetura va quedando así en la pizarra ahora:

(*8’’) “Los divisores de un número, a excepción del cero, no pueden pasarse de la mitad de ese número, a excepción del mismo número.”

Y a continuación, Sebastián hace una nueva precisión a la conjetura.

Profesor: *de nuevo, ¿será que podremos encontrar algún contraejemplo?*

Sebastián: *miss, pero los impares no tienen mitad.*

Profesor: *muy bien, entonces hay que arreglar la conjetura un poco más. ¿Cómo arreglamos esta parte entonces? Los divisores de un número….*

Sebastián: *pares*

La conjetura que tenemos hasta ese momento en la pizarra es ahora:

(*8’’’) “Los divisores de un número par, a excepción de cero, no pueden pasarse de la mitad de ese número, a excepción del mismo número.”

Profesor: *ya, parece que tu conjetura está bien, mi cabeza está buscando contraejemplos y hasta ahora no he podido encontrar alguno…*

Rodrigo: *es que no hay.*

Profesor: *muy bien, entonces, esto quiere decir que podremos encontrar una demostración para esta conjetura también. Ya tenemos hasta el momento dos conjeturas que todavía no hemos demostrado.*

Renato: *si damos para 12.*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Renato sugiere hacer la justificación para el caso del número par 12, sugiriendo así una justificación, que según los niveles de producción de la demostración matemática sería categorizada en el nivel 1.

> ***Profesor:*** *pero ese sería solo un caso, tu conjetura debe ser demostrada para toditos los números pares, a excepción de cero.*

Rodrigo y Renato ya más conscientes de la generalidad del enunciado de la conjetura, proponen dos ideas interesantes para la justificación; sin embargo, no llegan a completar su justificación.

> ***Rodrigo:*** *entonces con 2, 4, 6 y 8.*
> ***Renato:*** *entonces solo con 2, porque 2 es la base de todos los pares.*
> ***Marcia:*** *no, miss, Rodrigo tiene razón. Con los números 2, 4, 6 y 8 porque en eso terminan los números pares. Pero también los que terminan en 0.*
> ***Profesor:*** *claro, algunos pares también terminan en cero. Por ejemplo 10.*
> ***Rodrigo:*** *no, pero el 0 no puede ser porque ahí dice a excepción de cero.*
> ***Profesor:*** *no, pero Marcia se refiere a los números que terminan en cero, que también son pares, por ejemplo el 10.*

Formulación de dos nuevas conjeturas (*9 y *10)

> ***(*9) Renato:*** *miss, otra conjetura también puede ser que* ***todos los números pares tienen como divisor a 2, a excepción de 2… y el cero.***
> ***(*10) Marcia:*** *miss, otra conjetura puede ser que* ***todos los números tienen como divisor al 1****.*
> ***Profesor:*** *a ver, vamos a anotar las dos nuevas conjeturas que acaban de dar sus compañeros. Pero no olviden que estamos dejando pendiente las demostraciones a las dos conjeturas anteriores, porque se me pueden ocurrir un montón de cosas, y si no hago la demostración, no puedo garantizar que sean verdad. ¿Ok?... Ahora, ¿qué habías dicho Marcia?*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Marcia: *que* ***1 es divisor de todos los números*** *[el profesor copia esto en la pizarra].*

Profesor: *y también, ¿qué habías dicho Renato?*

Renato: *que* ***todos los números pares tienen a 2 como divisor****… [El profesor copia también esto en la pizarra]*

Profesor: *vayan viendo si la conjetura de Marcia está bien eh…*

Rodrigo: *ya miss,… en el de Marcia hay un <u>contraejemplo</u>.*

Renato: *…* ***a excepción de 0 y 2*** *[Renato sigue dictando al profesor su conjetura].*

Con lo siguiente buscamos "mejorar" la conjetura de Renato.

Profesor: *¿qué quieres decir con "a excepción de 0 y 2"?*

Renato: *es que cero es par.*

Profesor: *ya, y ¿2 no es divisor de 0?*

Sebastián: *sí, sí es.*

Rodrigo: *sí es.*

Renato: *a excepción del mismo 2 entonces.*

Sebastián: *no, es entre dos, sí está bien, no hay excepciones.*

Marcia: *no hay excepciones.*

Profesor: *te pregunto (a Renato), ¿2 es divisor de 2?*

Renato: *sí.*

Profesor: *entonces aquí no hay excepciones [y borra de la pizarra: "a excepción de 0 y 2" de esta conjetura]*

La conjetura de Renato queda como sigue en la pizarra:

(*9') "Todos los números pares tienen a 2 como divisor"

Marcia: *miss, ¿es verdad que en los divisores de un número hay siempre una mitad y los números se multiplican y me da el mismo número?*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Profesor: *esa es una observación que podemos revisarla después de que acabemos con estas 4 conjeturas… ¿La conjetura de Marcia está bien?*

Sebastián: *hay que agregar de todos los números naturales.*

(*10') Profesor: *ya [y agrega esto en la conjetura de Marcia:* **"1 es divisor de todos los números naturales"***]. Si tienen algo más que agregar, pueden decirlo, ¿ok? ¿Está bien lo que dice aquí ahora?*

Todos: *sí.*

Justificación de la conjetura (*10'):

"1 es divisor de todos los números naturales"

Profesor: *a ver… esta última conjetura de Marcia parece que está más fácil de demostrar. ¿Cómo la demostraríamos?*

Rodrigo: *porque los múltiplos de 1 son todos los naturales.*

Marcia: *[Marcia dice simultáneamente] poniendo por ejemplo a los 10 primeros números: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Porque todos los números terminan en esos números.*

Profesor: *no sé, me parece que eso no es suficiente. Eso fue lo que usó tu compañero (Rodrigo) la vez pasada para demostrar que un número multiplicado por 5 termina en 0 ó en 5. Si no, analiza un poco más y convéncenos de que si uso solo esas cifras entonces podemos demostrar tu conjetura en forma general. Mientras tanto, el resto vaya pensando cómo demostramos la conjetura de Marcia.*

Marcia: *si multiplicamos a 1 por un número…*

Rodrigo: *no miss, primero hay que escribir la equivalencia.*

Profesor: *a ver,… ¿Qué equivalencia?*

Rodrigo: *la equivalencia que dice A es divisible por B*

Profesor: *y esto es equivalente a…*

Sebastián: *A es múltiplo de B*

Profesor: *… pero no se olviden que esto se cumple para B diferente de cero.*

Rodrigo: *y B…*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

__Sebastián:__ B es divisor de A.

__Profesor:__ muy bien. Ya está.

__Sebastián:__ ah, es porque todos los números son divisibles por 1.

__Profesor:__ muy bien, miren que estamos en el caso B igual a 1.

__Rodrigo:__ ah, porque todos los múltiplos de 1 son todos los naturales y los múltiplos son divisibles por 1.

Los estudiantes logran exponer la demostración (justificación en el nivel 3 de los niveles de producción de demostración matemática) de esta conjetura. Luego hacemos un resumen de las ideas proporcionadas por los estudiantes.

__Profesor:__ muy bien, Rodrigo usa esta equivalencia para demostrar que 1 es divisor de todos los números naturales. Lo que dice es, para que 1 sea divisor de todo número natural, entonces todo número natural debe ser divisible por 1, o que (por la equivalencia) todo número natural es múltiplo de 1. Y ¿quiénes son los múltiplos de 1?

__Marcia y Renato:__ todos los números naturales.

__Profesor:__ ya está. Entonces ya se puede concluir que 1 sí es divisor de todo número natural. Con esto entonces ya hemos demostrado la conjetura de Marcia. Ahora, ¿qué conjetura demostramos? ¿Les parece la conjetura de Renato, que 2 es divisor de todos los números pares?

Justificación de la conjetura (*9'):

“*2 es divisor de todos los números pares*”

__Marcia:__ sí, porque todos los números pares tienen mitad.

__Renato:__ lo que había dicho era que todo número par tiene mitad.

__Profesor:__ eso está bien, pero a ver, recordemos cuál es la definición de número par.

__Renato:__ cuando es divisible por 2.

__Profesor:__ muy bien, esa es la definición. ¿Qué podemos usar ahora?

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

Rodrigo: *la equivalencia.*

Profesor: *muy bien. Para eso se han dado las equivalencias, para que me ayuden a entender mejor las cosas relacionadas con divisibilidad y obviamente para las justificaciones. Deben usar sus equivalencias. Entonces, si todo número par es divisible por 2…*

Sebastián: *ah ya, entonces 2 es divisor de cualquier…*

Rodrigo: *déjenme hablar…*

[Risas]

Profesor: *ok, si todo número par es divisible por 2, entonces por la equivalencia se tiene que 2 es divisor de todo número par.*

Rodrigo: *Y también que todo número par es múltiplo de 2.*

Profesor: *eso sale también de la equivalencia, muy bien.*

Justificación de la conjetura (*7’’):

“Debe ser una regla que para que un número natural sea divisor de otro, debe ser menor o igual que el segundo natural, a excepción de cero”

Profesor: *si yo digo N…*

Marcia: *miss, pero ponga que N no puede ser cero*

Profesor: *ya, está bien, sea N un número natural diferente de cero… entonces, lo que dice Marcia en su conjetura es que los divisores de N son menores o iguales a este número natural N, ¿no? Que no pueden sobrepasar a ese número natural N. Eso es lo que me está diciendo. Ahora, ¿cómo lo voy a demostrar?*

Sebastián: *con ejemplitos.*

Sebastián sugiere que nos quedemos en una justificación basada en ejemplos, es decir en el nivel 1 de los niveles de producción de la demostración matemática. Aún así, se presentan nuevas ideas que ayudan a considerar el aspecto general de esta conjetura.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Profesor: *Puedes justificar con ejemplitos, pero si justifico con ejemplitos puedo correr el riesgo de que se me esté escapando un ejemplito que no cumpla con la conjetura (un contraejemplo).*

Renato: *¿con la equivalencia?*

Profesor: *a ver, ¿cómo sería con la equivalencia?*

Renato: *uhm…*

Profesor: *porque la conjetura también sería sinónimo a decir que los divisores de N no pueden ser mayores que el mismo número N. La pregunta es, ¿cómo justifico eso?*

[Silencio]

Profesor: *¿con diferentes ejemplitos sí o no que sí se puede visualizar esta conjetura?*

Rodrigo: *sí, pero…*

Sebastián: *la cosa es que no pueden ser mayores porque... este… si son mayores no se va a poder multiplicar…*

Marcia: *miss, miss,…*

Rodrigo: *no se va a poder dividir…*

Profesor: *¿por qué?*

Rodrigo: *por, por porque…*

Marcia: *no saldría una división exacta*

Rodrigo: *porque no saldría un número natural.*

Sebastián: *porque no saldría un número natural, sí.*

Rodrigo: *no pueden ser mayores porque la división saldría… el cociente no saldría un número natural, saldría una… un número decimal.*

Profesor: *ya, entonces tendría los divisores de N, ¿qué pondría como división? N entre… aquí se supone que va a ir un divisor de N,… pero si yo digo que va a ser un número mayor… por ejemplo pongo M y digo que M es mayor que N. ¿Puedo hacer esta división?*

Rodrigo: *Sí, pero no te va a salir un natural, te va a salir un número decimal.*

Alexander: *una división inexacta.*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Profesor: *me va a salir una división inexacta, muy bien. Porque si yo quiero seguir dividiendo, me va a salir un decimal, pero no se olviden que no estamos trabajando con decimales… entonces, ¿qué me saldría acá? [Señalando el cociente]… no se olviden que M es mayor que N…*

Rodrigo: *ah ya, el cociente sería cero*

Profesor: *y el residuo sería…*

Alexander: *N*

Rodrigo, Sebastián y Marcia: *N*

Profesor: *verificamos diciendo 0 por M sería 0, más N, todo sería N, y además N (el residuo) es menor que M (el divisor).*

Sebastián: *y sería una división inexacta.*

Profesor: *muy bien, y ya estaría demostrada la conjetura de Marcia.*

Justificación de la conjetura (*8’’’):

“Los divisores de un número par, a excepción de cero, no pueden pasarse de la mitad de ese número, a excepción del mismo número.”

Sugerimos presentar algunos ejemplos en la pizarra con el propósito de generar ideas que contribuyan a la justificación de esta conjetura. Después de presentar algunos pocos ejemplos, Sebastián propone una idea general aunque no completa para nuestra justificación.

Sebastián: *miss, porque los números pares tienen mitad y, y,… ningún número sumado por sí mismo pasado de la mitad me va a dar…*

Rodrigo: *¡está bien!*

Profesor: *a ver, quiero entenderte mejor…*

Sebastián: *o sea, los números… los números pares, uhm, todos tienen mitad y ningún número sumado por sí mismo o multiplicado por un número pasado de la mitad te va a dar el número.*

Rodrigo: *ah verdad pues.*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Profesor: *por ejemplo quién a ver, dame un ejemplito para entenderte mejor…*

Sebastián: *la mitad de 16 es 8 y no va a haber otro número que multiplicado por algún número o sumado por sí mismo mayor que 8 va a ser 16.*

Profesor: *no va a ver un número mayor que 8 dices…*

Sebastián: *ajá, o sea que mayor que la mitad que, que… se pueda multiplicar para que de 16.*

Profesor: *ya, muy bien, tu idea es buena, pero…*

Marcia: *ah miss, porque esas divisiones son como multiplicaciones que van de adentro hacia afuera…*

Profesor: *a ver, explícame con estos casos [y señala los casos de números pares que aparecen en la pizarra, de los cuales se hallaron los divisores].*

Marcia: *por ejemplo 12, si los partimos por la mitad, me va a dar 3 por 4 me da 12, 2 por 6 me da 12, 1 por 12 me da 12.*

Profesor: *muy bien. ¿Se habían dado cuenta de eso también ustedes?*

Rodrigo: *sí. Así nos enseñaron el año pasado. Poníamos el 1 y luego con quien salía el número…*

Profesor: *por ejemplo 16, los divisores de 16 son…*

Todos: *1, 2, 4, 8 y 16.*

Profesor: *y ahí se forman las parejas de divisores, ¿no? 1 por 16 da 16, 2 por 8, la pareja de 4 es 4, pero no lo escribimos dos veces nada más… [El profesor muestra a continuación la misma idea con el número 20]… La pregunta es ¿cómo tiene que ver esto con la conjetura? ¿Me ayudará para la demostración que debo dar?*

Al no encontrar respuesta, consultamos a los estudiantes si prefieren que les expliquemos nosotros la demostración completa. Los estudiantes inconformes asienten, pero al mismo tiempo expresan en voz alta: *“era para hacerlo nosotros”*. Lo que nos sugiere que ellos desean encontrar por sí mismos la demostración a esta conjetura, así que decidimos darles solamente una “pista”.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Profesor: *todo número par, ¿qué forma tiene? Por ejemplo, sea A un número par diferente de cero porque esa es la condición que hemos dado también. La definición de un número par…*

Marcia: *que A es divisible por 2*

Profesor: *si A es divisible por 2, ¿qué se va a cumplir?*

Sebastián: *A es múltiplo de 2 y 2 es divisor de A.*

Profesor: *ya, eso es cierto por la equivalencia, pero ¿eso me ayudará a saber qué forma tiene A?*

Sebastián: *A entre 2 es un número natural.*

Profesor: *A entre 2 es una división…*

Marcia y Sebastián: *¡exacta!*

Profesor: *ya, entonces si divido A entre 2 me va a dar un número…*

Sebastián y Renato: *natural…*

Profesor: *es un número N natural por ejemplo, y residuo…*

Todos: *cero*

Profesor: *porque tú bien habías dicho (Sebastián) que es una división exacta… entonces, ¿A es igual a qué entonces?*

Sebastián: *2… a 2 por N, más cero.*

Profesor: *¿eso es equivalente a qué cosa?*

Sebastián: *a 2 por N*

Profesor: *entonces si yo les digo… si estamos trabajando con este número par, los divisores de A son… ya había dicho Marcia una conjetura… ¿Quién aparecerá siempre como divisor de A?*

Rodrigo y Sebastián: *el 1*

Profesor: *porque el 1 es divisor de todo número natural como habíamos visto. ¿Quién más va a estar aquí?... O mejor así… ¿quién es la pareja de 1?*

Sebastián: *A*

Profesor: *claro, para que 1 por A me dé A…. ya, luego, otro divisor de A será…*

Sebastián: *2*

Marcia: *y la pareja de 2 va a ser la mitad de A.*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Profesor: *ya, ¿y quién es la mitad de A?*

Marcia: *¿A entre 2?*

Profesor: *y ¿quién es A entre 2?*

Marcia: *A entre 2 es N.*

Profesor: *claro, es la división que acabamos de hacer. Entonces, la pareja de 2 es N, porque como habíamos encontrado: A es igual a 2 por N… y lo interesante es que la mitad de A es…*

Todos: *N*

Profesor: *esta es la mitad [señalando en la pizarra N]… entonces los divisores de A, dice que no pueden pasarse de la mitad… N es la mitad de A… no pueden pasarse de la mitad a excepción del mismo A. Porque vienen así en ese orden, 1, 2… y el 1 su pareja es A, y la pareja del 2 es N.*

Análisis de las justificaciones individuales

Presentamos una información cuantitativa que refleja el análisis de las justificaciones individuales dadas por los estudiantes a la Actividad “Múltiplos y divisores” (ver Anexo A5), considerando las respuestas que dieron a cada una de las 7 preguntas planteadas.

A continuación mostramos el cuadro que muestra los resultados de este análisis.

Cuadro resumen – Sesión 6 – Actividad “Múltiplos y divisores”						
Nombre	**No codificable**	**Nivel 0**	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**Nivel 3**	**Total**
Marcia	1	0	6	0	0	**7**
Renato	1	0	0	1	5	**7**
Sebastián	1	0	0	5	1	**7**
Alexander	4	0	0	2	1	**7**
Rodrigo	0	0	0	1	6	**7**
Total	**7**	**0**	**6**	**9**	**13**	**35**

CUADRO A5

Análisis de las justificaciones individuales a la Actividad “Múltiplos y divisores”

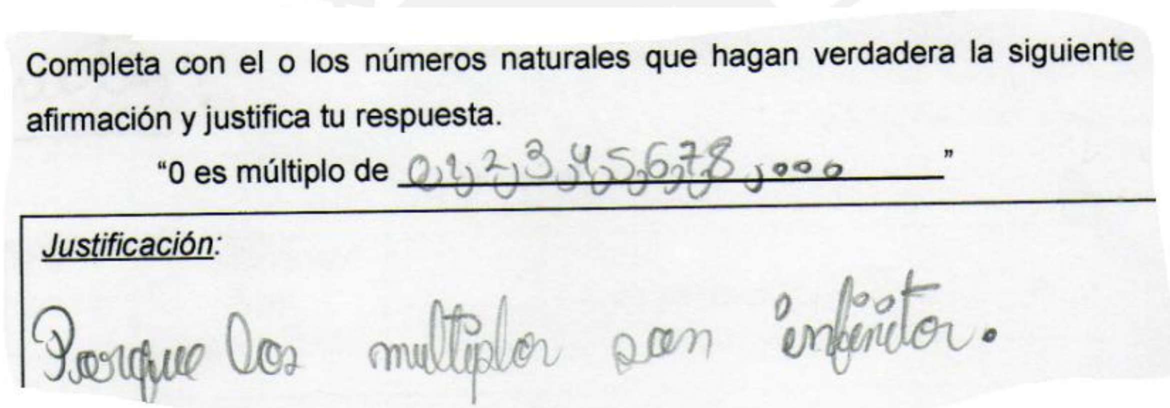
Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Teniendo en cuenta la definición de justificación y demostración matemática presentadas en el Marco Teórico, observamos que:

El 80% del número total de respuestas analizadas para esta actividad califican como justificaciones (28 respuestas categorizadas en los niveles 1, 2 y 3, de un total de 35); y un poco más del 46% de éstas (13 de 28) califican como demostraciones matemáticas (las del nivel 3) según nuestro marco teórico (un poco más del 37% del total: 13 de 35).

A continuación presentamos algunas de las justificaciones individuales dadas a algunas de las cuestiones presentadas en esta actividad.

Marcia:


Completa con el o los números naturales que hagan verdadera la siguiente afirmación y justifica tu respuesta.

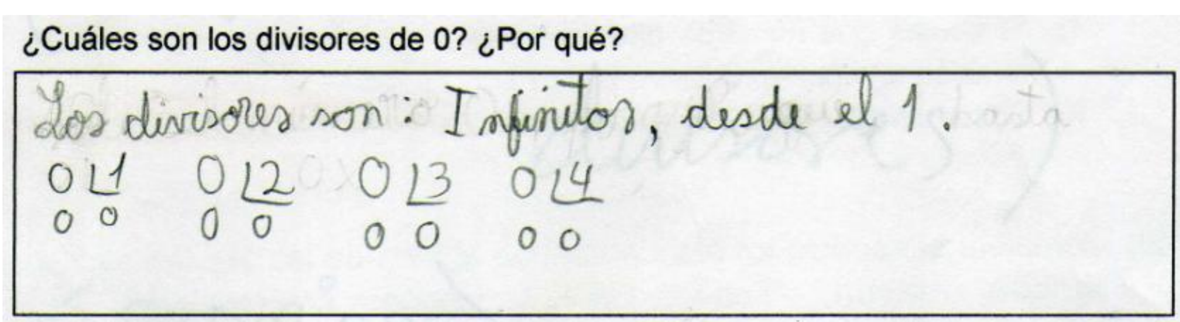
"0 es múltiplo de 0,1,2,3,4,5,6,7,8,...000"

Justificación:

Porque los multiplos son infinitos.

Sesión 6 – Pregunta 7 (No codificable)

Alexander:


¿Cuáles son los divisores de 0? ¿Por qué?

Los divisores son: Infinitos, desde el 1.

0 |1 0 0 | 0 |2 0 0 | 0 |3 0 0 | 0 |4 0 0

Sesión 6 – Pregunta 6 (Nivel 2)

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

4.4.7 Análisis de las justificaciones en la Sesión 7

La sesión 7 (ver Anexo S7) incluye algunos ejemplos propuestos y la Actividad "Remix de justificaciones" (ver Anexo A6). Decidimos realizar las justificaciones de los problemas incluidos en esta actividad de la siguiente manera: alternamos el tipo de respuestas a estas preguntas, siendo algunas de ellas presentadas de forma escrita, lo que es parte de nuestro análisis de *justificaciones individuales*, mientras que las restantes son trabajadas como los ejemplos en las *justificaciones grupales* anteriores.

Análisis de las justificaciones grupales

Problema 2 b):

¿El número N = 21 x 33 es divisible por 7?

Sebastián: *sí porque si los multiplico me va a dar 693 y si lo divido entre 7 sale 99, y es una división exacta.*

Profesor: *claro, y si es una división exacta yo puedo decir que N, que es igual a 693, es divisible por 7.*

Rodrigo: *miss, pero más fácil es que como 21 es múltiplo de 7 y cuando luego se multiplique por 33 ahí va a ser divisible por 7.*

Profesor: *ya, y ¿cómo verificarías que sí, en efecto, es una división exacta?*

Rodrigo: *ya, porque es como si tuviese 7 por 3 por 33, y entre 7, me da 99 (3 por 33).*

Profesor: *con residuo 0. Muy bien, la justificación de Rodrigo es correcta también. Incluso él no necesitó multiplicar.*

Problema 2 c):

¿El número 123 es múltiplo de 7?

Profesor: *piensen siempre primero en qué cosa es lo que tendría que demostrar.*

Renato: *no*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Rodrigo: *no*

Alexander: *no*

Profesor: *¿por qué Alexander?*

Alexander: *porque si divido 123 entre 7 me da una división inexacta.*

Profesor: *¿cuánto sale el cociente?*

Alexander: *17 y residuo 4.*

Profesor: *muy bien. ¿Qué es lo que estás probando tú acá? [Señalando la división exacta de la pizarra]*

Alexander: *que 123 no es divisible por 7*

Profesor: *¿y eso cómo se relaciona con la pregunta?*

Alexander: *es que si no es divisible, entonces no es múltiplo.*

Profesor: *muy bien.*

Problema 3 b):

"___________ número natural es divisible por cero."

Profesor: *¿con qué palabra vamos a completar este espacio en blanco?*

Todos: *ningún*

Profesor: *¿por qué?*

Alexander: *no se puede dividir entre cero.*

Problema 3 c):

"Cero es divisible por _________número natural."

Profesor: *¿con qué palabra completamos aquí? A ver… Renato.*

Renato: *por… entonces sería 0 entre ese número…*

Alexander: *todo, todo.*

Renato: *no, no, no miss, es algún.*

Rodrigo: *todo excepto el cero.*

Renato: *ajá. O sea eso es algún.*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

__Profesor:__ claro, porque si dices todo, serían todos los naturales incluyendo el cero. Y ya sabemos que eso no es cierto. Pero si hubiesen escrito TODO, y al final hubiesen agregado, EXCEPTO EL CERO, entonces también estaría bien. ¿Y por qué cero es divisible por algún número natural?

__Alexander:__ porque va a dar una división exacta.

Problema 3 h):

"Cero es múltiplo de _______ número natural."

__Profesor:__ ¿con qué debo completar esta afirmación?

__Todos:__ con todo

__Profesor:__ ¿por qué?

__Renato:__ porque para hallar los múltiplos de un número se comienza por el cero.

__Sebastián:__ se tiene que multiplicar por cero

__Profesor:__ claro. Y esa es la justificación entonces. Como para hallar los múltiplos de un número empiezo multiplicando por cero, entonces todos los números tendrán a cero como múltiplo. Esto porque todo número multiplicado por cero es cero. Ya está.

Problema 3 i):

"________ múltiplo de 5 es también múltiplo de 4."

__Profesor:__ ¿con qué completaremos este espacio en blanco: algún, ningún o todo?

__Todos:__ algún

__Profesor:__ ¿por qué?

__Renato:__ porque 5 por 4 es 20, 20 es múltiplo de 5 y de 4

__Profesor:__ ya, entonces ese es el caso que sí se cumple, pero falta que nos des el caso que no cumple.

__Alexander:__ miss, también 5, es múltiplo de 5 pero no es múltiplo de 4.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Profesor: *muy bien. En ese caso tienen que poner…*

Rodrigo: *miss, cualquier número natural por 5 me va a dar un múltiplo de 4…*

Profesor: *no, piensa en 10.*

Rodrigo: *ah…*

Profesor: *bien, entonces ahí tienen que colocar un caso en el que sí se cumpla, y otro caso en el que no.*

Ejemplo 1:

Si sumas un múltiplo de 2 con otro múltiplo de 2, el resultado siempre será:

a)	**Un múltiplo de 2**
b)	**Un múltiplo de 4**
c)	**Un múltiplo de 8**

Rodrigo: *¿se pueden marcar dos?*

Profesor: *si tienes bien clara tu justificación, sí.*

[Alexander levanta la mano]

Alexander: *por ejemplo la a) y la b)*

[Rodrigo niega esto con la cabeza]

Profesor: *tú dices la a) y la b) [el profesor marca estas alternativas en la pizarra], ¿por qué?*

Alexander: *porque si sumas 2… no, los múltiplos de 2 son, a ver… 0, 2, 4, 6, 8, 10,…*

Profesor: *y pueden seguir, ¿no? De forma indefinida. Ya hemos dicho que los múltiplos de un número diferente de cero son infinitos… ya, ¿y luego? ¿Por qué dices que pueden ser cualquiera de esas dos respuestas?*

Alexander: *porque 2 más 2 es 4, y 4 es un múltiplo de 4 y de 2.*

Profesor: *sí, pero aquí te dicen SIEMPRE ah. Siempre que sumes un múltiplo de 2 con otro múltiplo de 2… este (señala el ejemplo que Alexander acaba de dar) es un caso particular en el que sí se cumplen ambas cosas…*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

pero, aquí te dicen siempre, para todos… es decir, que si tú tomas un múltiplo de 2 cualquiera con otro múltiplo de 2 cualquiera y los sumas, ¿el resultado siempre va a ser un múltiplo de 2 y también de 4?

Alexander: *también de 8*

Profesor: *¿qué dice el resto?*

Rodrigo y Renato: *no, solo de 2*

Rodrigo: *porque 2 más 4 es 6, y 6 es solo múltiplo de 2*

Renato: *también 2 más 2 es 4, y no es múltiplo de 8*

Profesor: *claro. Yo puedo considerar el ejemplo 0 más 2, ambos números son múltiplos de 2; sin embargo, si los sumo me da 2, y 2 es múltiplo de 2, pero lo es ni de 4 ni de 8… pero, ¿no se me estará escapando algún caso por ahí? …*

Renato: *ah, cero más cero.*

Profesor: *0 más 0 me da cero y cero es múltiplo de…*

Renato: *2*

Alexander: *pero o es también múltiplo de 4 y de 8.*

Profesor: *sí, pero ese es un caso, habrán algunos casos en que sí saldrán múltiplos de 4 y de 8 al mismo tiempo. Pero son solo algunos casos. Lo que sí se cumple siempre es que en TODOS los casos, esas sumas son múltiplos* de 2.

El profesor, antes de que los estudiantes presenten la justificación a esta afirmación, presenta el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2:

Si sumas un múltiplo de 3 con otro múltiplo de 3, el resultado siempre será:

a) Un múltiplo de 6
b) Un múltiplo de 3
c) Un múltiplo de 9

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Profesor: *¿qué harían primero? En el caso anterior, muy bien, Alexander dijo voy a hallar primero quiénes son los múltiplos de 2…*

Renato: *yo tengo números para derribar al 6 y al 9. 0 más 3 me da 3, que no es múltiplo ni de 6 ni de 9.*

Profesor: *ya está. ¿Entonces cuál creen que va a ser la respuesta?*

Todos: *de 3.*

Profesor: *ya, pero qué les garantiza que cada vez que sumen cualquier pareja de múltiplos de 3, el resultado va a ser un múltiplo de 3? Hasta ahorita estamos viendo ejemplitos. Pero, ¿cómo sabemos si otros ejemplitos que no hemos analizado cumplen también? Piensen en eso… A ver, si ahora coloco aquí múltiplos de 4?*

Renato: *¡lo* mismo! … o más 4…

Ejemplo 3:

Si sumas un múltiplo de 4 con otro múltiplo de 4, el resultado siempre será:

a) Un múltiplo de 16
b) Un múltiplo de 8
c) Un múltiplo de 4

Sebastián: *sí, está bien.*

Rodrigo: *se va a cumplir lo mismo.*

Profesor: *y si ahora considero 5? (los múltiplos de 5)*

Rodrigo: *también, porque si sumo un múltiplo de 5 con otro múltiplo de 5 me va a* dar un múltiplo de 5.

Se espera inicialmente que los estudiantes planteen la propiedad general a través de estos ejemplos.

Renato: *Si sumas un múltiplo de A con otro múltiplo de A, el resultado SIEMPRE será un múltiplo de A*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

El profesor ayuda a los alumnos para hacer la demostración de esta conjetura. Sin embargo, a los chicos les cuesta entenderla. Esta dificultad se debe básicamente a que los estudiantes aún no han tenido experiencias con manejos simbólicos de representaciones generales; por ejemplo, la representación general de un número natural (A), posteriormente la representación general de un múltiplo de este mismo número natural A (nA, donde n denota un número natural). Luego, representar de forma general otro múltiplo de A (mA, donde m denota un número natural, sabiendo que en principio m no tiene por qué ser igual que n), y finalmente realizar operaciones con estas representaciones generales.

Análisis de las justificaciones individuales

Presentamos una información cuantitativa que refleja el análisis de las justificaciones individuales dadas por los estudiantes a la Actividad “Remix de justificaciones” (ver Anexo A6), considerando las respuestas que dieron a cada una de las 7 preguntas planteadas. El total 0 de las justificaciones individuales de Marcia es porque ella no pudo estar presente en la sesión 7.

A continuación mostramos el cuadro que muestra los resultados de este análisis.

Cuadro resumen – Sesión 7 – Actividad “Remix de justificaciones”						
Nombre	**No codificable**	**Nivel 0**	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**Nivel 3**	**Total**
Marcia	0	0	0	0	0	**0**
Renato	1	0	2	1	3	**7**
Sebastián	2	0	2	1	2	**7**
Alexander	0	0	2	4	1	**7**
Rodrigo	1	0	0	2	4	**7**
Total	**4**	**0**	**6**	**8**	**10**	**28**

CUADRO A6

Análisis de las justificaciones individuales a la Actividad “Remix de justificaciones”

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Teniendo en cuenta la definición de justificación y demostración matemática presentadas en el Marco Teórico, observamos que:

> Casi el 86% del número total de respuestas analizadas para esta actividad califican como justificaciones (24 respuestas categorizadas en los niveles 1, 2 y 3, de un total de 28); y casi el 42% de éstas (10 de 24) califican como demostraciones matemáticas (las del nivel 3) según nuestro marco teórico (casi el 36% del total: 10 de 28).

A continuación presentamos algunas de las justificaciones individuales dadas a algunas de las cuestiones presentadas en esta actividad.

Alexander:

1) Miguel plantea la siguiente conjetura:

"Todo número natural tiene un número finito de divisores."

Se te pide lo siguiente:

a) Responde: ¿Es verdadera esta conjetura o puedes mejorarla?

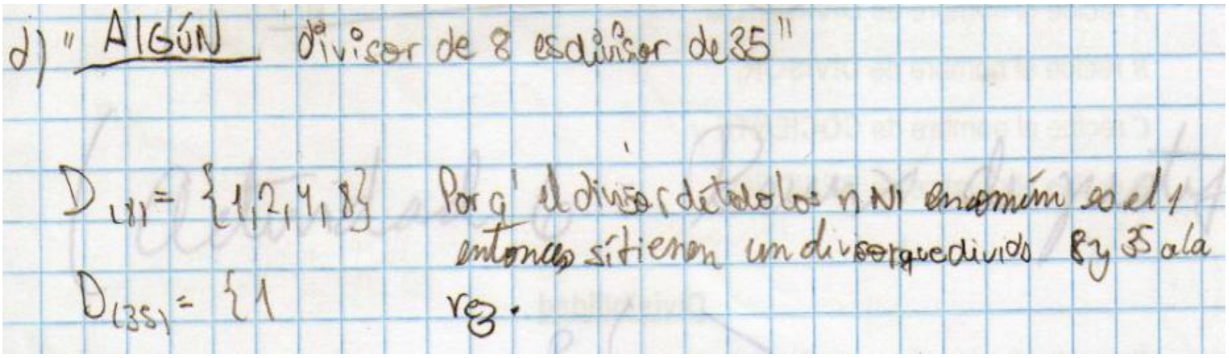
b) Justifica la conjetura dada por Miguel en el caso de que esta sea verdadera, o la conjetura mejorada.

Verdadero, porque por ejemplo:
divisores de 2 = 1, 2
Los divisores de un núme siempre terminaran en ese mismo número

Sesión 7 – Pregunta 1 (Nivel 2)

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Renato:



d) "ALGÚN divisor de 8 es divisor de 35"

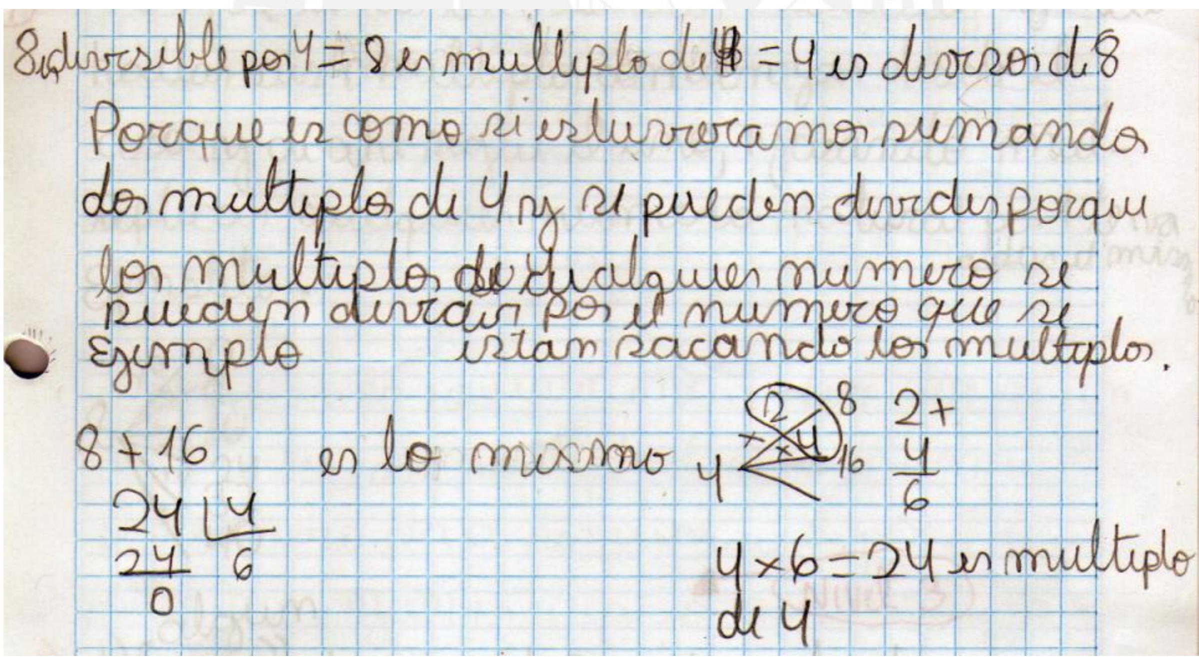
$D_{(8)} = \{1,2,4,8\}$ Porq' el divisor de todos los n N común es el 1 entonces sí tienen un divisor que divide 8 y 35 a la vez.

$D_{(35)} = \{1$

Sesión 7 – Pregunta 3.d (Nivel 3)

Rodrigo:

Si sumas dos números divisibles por 4 cualesquiera, ¿el resultado será SIEMPRE un número divisible por 4? (__________________)



8 es divisible por 4 = 8 es multiplo de 4 = 4 es divisor de 8

Porque es como si estuvieramos sumando dos multiplo de 4 y se pueden dividir porque los multiplos de cualquier numero se pueden dividir por el numero que se estan sacando los multiplos.

Ejemplo

8 + 16 es lo mismo

24 | 4
24   6
0

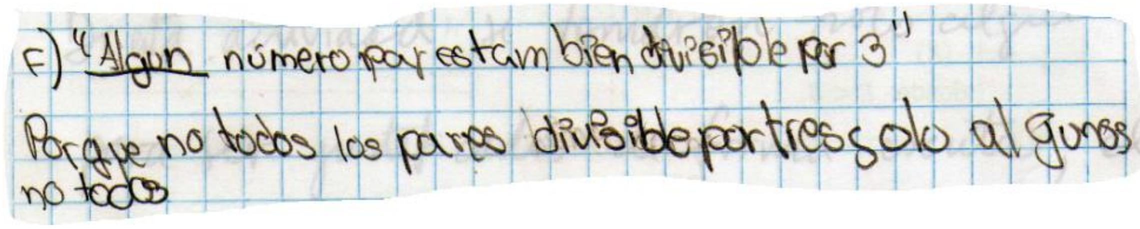
2 + 4 = 6

4 × 6 = 24 es multiplo de 4

Sesión 7 – Pregunta 2.d. (Nivel 2)

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Sebastián:



Sesión 7 – Pregunta 3.f (Nivel 2)

4.4.8 Análisis de las justificaciones en la Sesión 8

La sesión 8 (ver Anexo S8) incluye la Actividad “Un poco más de divisibilidad” (ver Anexo A7).

Análisis de las justificaciones grupales

No hay justificaciones grupales que analizar. Solo se trabajaron justificaciones individuales.

Análisis de las justificaciones individuales

Presentamos una información cuantitativa que refleja el análisis de las justificaciones individuales dadas por los estudiantes a la Actividad “Un poco más de divisibilidad” (ver Anexo A7), considerando las respuestas que dieron a cada una de las 6 preguntas planteadas. El total 0 de las justificaciones individuales de Marcia es porque ella no pudo estar presente en la sesión 8.

A continuación mostramos el cuadro que muestra los resultados de este análisis.

Cuadro resumen – Sesión 8 – Actividad “Un poco más de divisibilidad”						
Nombre	**No codificable**	**Nivel 0**	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**Nivel 3**	**Total**
Marcia	0	0	0	0	0	**0**
Renato	0	0	0	5	1	**6**
Sebastián	0	0	0	4	2	**6**
Alexander	3	1	0	1	1	**6**
Rodrigo	0	0	0	0	6	**6**
Total	**3**	**1**	**0**	**10**	**10**	**24**

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

CUADRO A7

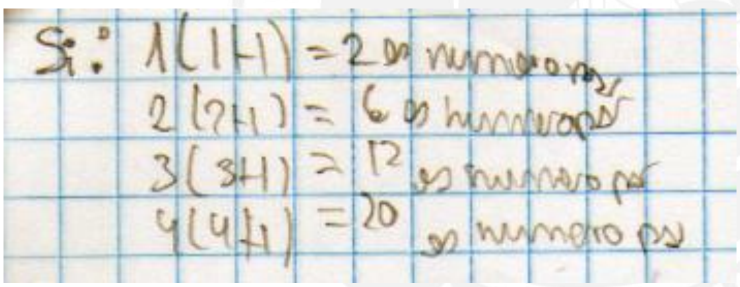
Análisis de las justificaciones individuales a la Actividad "Un poco más de divisibilidad"

Teniendo en cuenta la definición de justificación y demostración matemática presentadas en el Marco Teórico, observamos que:

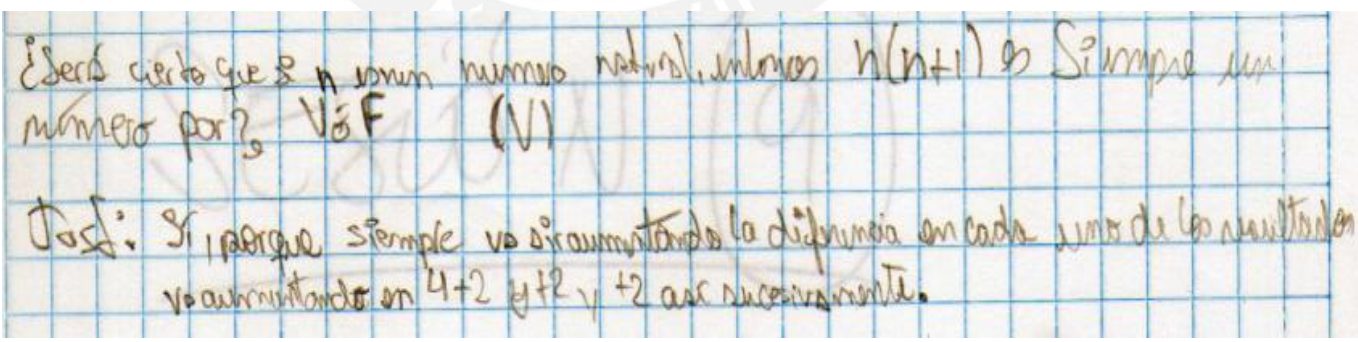
Un poco más del 83% del número total de respuestas analizadas para esta actividad califican como justificaciones (20 respuestas categorizadas en los niveles 1, 2 y 3, de un total de 24); y un poco más del 50% de éstas (10 de 20) califican como demostraciones matemáticas (las del nivel 3) según nuestro marco teórico (casi el 42% del total: 10 de 24).

A continuación presentamos algunas de las justificaciones individuales dadas a algunas de las cuestiones presentadas en esta actividad.

Renato:



Si: 1(1+1) = 2 es numero par
2(2+1) = 6 es numero par
3(3+1) = 12 es numero par
4(4+1) = 20 es numero par



¿Será cierto que si n es un numero natural, entonces n(n+1) es siempre un número par? V ó F (V)

Just: Si, porque siempre va aumentando la diferencia en cada uno de los resultados va aumentando en 4+2 y +2 y +2 así sucesivamente.

Sesión 8 – Pregunta 2 (Nivel 2)

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Sebastián:

f) Pedro calculó 23!, sin efectuar operaciones determina la ultima cifra del resultado encontrado por pedro

23! $23! = 23 \times 22 \times 21 \times 20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 . 15 . 14 . 13 . 12 . 11 . 10 . 9 . 8 . 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1$

20 . 12 . 2

La ultima cifra es 0 porque he multiplicado las ultimas 30 . 24 ~~...~~ cifras y sale 720 y voy a multiplicar por 0 y va a salir ultima cifra 0

6 . 720

Sesión 8 – Pregunta 1.f (Nivel 3)

Rodrigo:

e) ¿62! es un multiplo de 37? V o F

Justificacion

Si va a ser un multiplo de 37 porque podemos hallarlo multiplicando todos los numeros ~~...~~ excepto el 37. Cuando multipliquemos todos esos numeros excepto el 37 va a salir un numero natural y ese numero natural lo multiplicamos

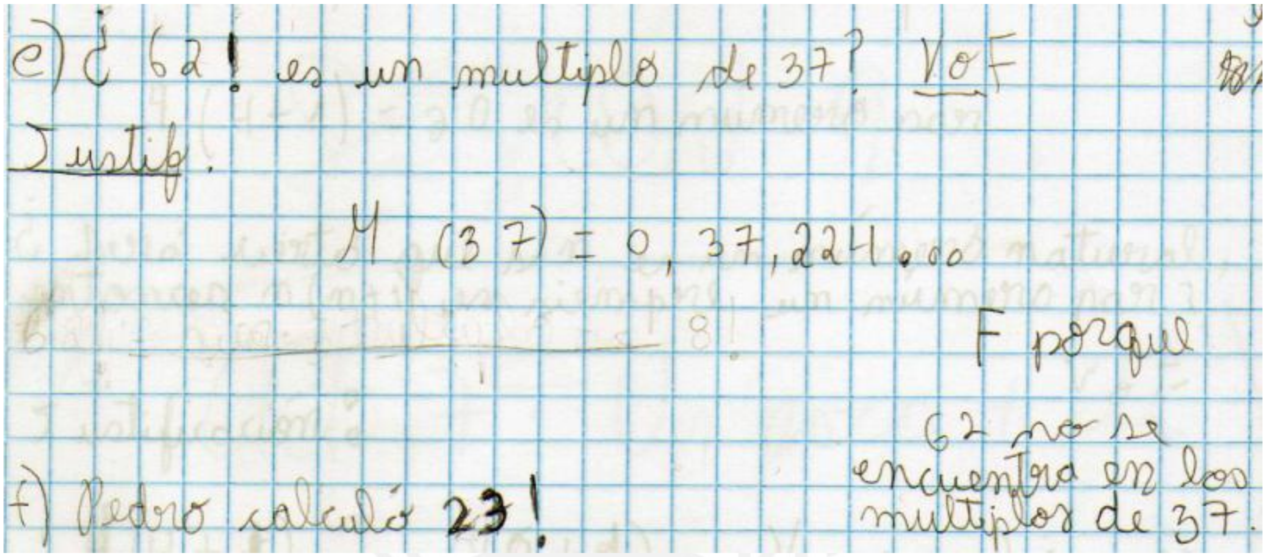
$62! = 62 \times 61 \times 60 \times 59 \times 58 \times 57 \times 56 \times 55 \times 54 \times 53 \times 52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44 \times 43 \times 42 \times 41 \times 40 \times 39 \times 38 \times 37 \ldots \times 1$

por 37. Y como sabemos un multiplo de un numero (37) si lo multiplicamos por cualquier numero natural va a salir un multiplo del numero al que lo estamos multiplicando (37)

Sesión 8 – Pregunta 1.e (Nivel 3)

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Alexander:


e) ¿ 62! es un multiplo de 37? V o F
Justif.
M (37) = 0, 37, 224...
F porque
62 no se
encuentra en los
multiplos de 37.
f) Pedro calculó 23!

Sesión 8 – Pregunta 1.e (No codificable)

4.4.9 Análisis de las justificaciones en la Sesión 9

La sesión 9 (ver Anexo S9) incluye la Actividad “Último cuestionario” (ver Anexo A8).

Análisis de las justificaciones grupales

No hay justificaciones grupales que analizar. Solo se trabajaron justificaciones individuales.

Análisis de las justificaciones individuales

Presentamos una información cuantitativa que refleja el análisis de las justificaciones individuales dadas por los estudiantes a la Actividad “Último cuestionario” (ver Anexo A8), considerando las respuestas que dieron a cada una de las 8 preguntas planteadas. El total 0 de las justificaciones individuales de Renato y Alexander, respectivamente, es porque ellos no pudieron estar presentes en la sesión 7.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

A continuación mostramos el cuadro que muestra los resultados de este análisis.

Cuadro resumen – Sesión 9 – Actividad "Último cuestionario"						
Nombre	**No codificable**	**Nivel 0**	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**Nivel 3**	**Total**
Marcia	0	1	0	3	4	**8**
Renato	0	0	0	0	0	**0**
Sebastián	3	1	0	2	2	**8**
Alexander	0	0	0	0	0	**0**
Rodrigo	0	0	0	1	7	**8**
Total	**3**	**2**	**0**	**6**	**13**	**24**

CUADRO A8

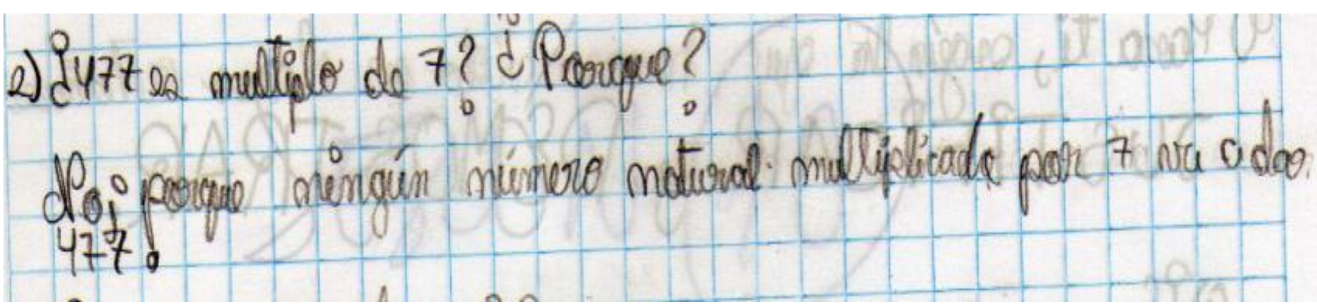
Análisis de las justificaciones individuales a la Actividad "Último cuestionario"

Teniendo en cuenta la definición de justificación y demostración matemática presentadas en el Marco Teórico, observamos que:

Un poco más del 79% del número total de respuestas analizadas para esta actividad califican como justificaciones (19 respuestas categorizadas en los niveles 1, 2 y 3, de un total de 24); y un poco más del 68% de éstas (13 de 19) califican como demostraciones matemáticas (las del nivel 3) según nuestro marco teórico (un poco más del 54% del total: 13 de 24).

A continuación presentamos algunas de las justificaciones individuales dadas a algunas de las cuestiones presentadas en esta actividad.

Marcia:

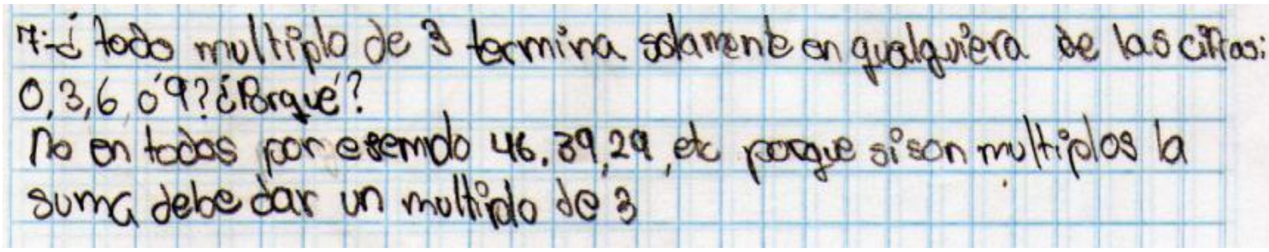


Sesión 9 – Pregunta 2 (Nivel 3)

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

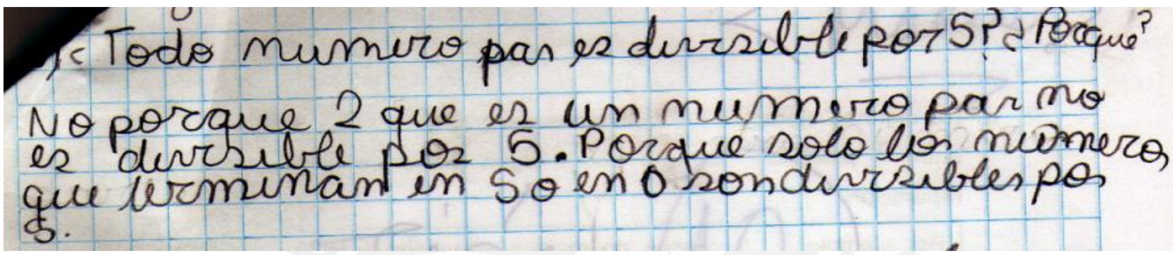
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Sebastián:


7:-¿ todo multiplo de 3 termina solamente en qualquiera de las cifras: 0,3,6 ó 9? ¿Porqué?
No en todos por ejemplo 46.39,29, etc porque si son multiplos la suma debe dar un multiplo de 3

Sesión 9 – Pregunta 7 (No codificable)

Rodrigo:


¿Todo numero par es divisible por 5? ¿Porqué?
No porque 2 que es un numero par no es divisible por 5. Porque solo los numero que terminan en 5 o en 0 son divisibles por 5.

Sesión 9 – Pregunta 6 (Nivel 3)

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

Capítulo 5

PROPUESTA PARA LA INCLUSIÓN DE JUSTIFICACIONES EN LA ENSEÑANZA DE LA DIVISIBILIDAD EN LA EDUCACIÓN BÁSICA REGULAR

Este capítulo presenta la propuesta para la inclusión de las justificaciones en la enseñanza de la Divisibilidad en la Educación Básica Regular, objetivo general de este trabajo de investigación.

El diseño de nuestra propuesta es resultado de la serie de análisis realizados en los capítulos precedentes. En concreto, del análisis del Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular en Perú (ver Capítulo 3) hemos tomado en cuenta las consideraciones presentadas relativas al progreso en el desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos de ambos niveles educacionales; del análisis de los libros de texto (ver Capítulo 3) hemos tenido presente la serie de deficiencias en conceptos y notaciones presentes en los textos y la casi nula presencia de problemas que inviten al estudiante a justificar y que contribuyan a que el profesor cuente con material suficiente para trabajar las justificaciones en sus clases de Matemática, en particular el tema divisibilidad de números naturales; de las respuestas dadas por los estudiantes (ver Capítulo 4) a cuestiones incluidas en las nueve sesiones diseñadas en nuestra primera propuesta, consideramos las que nos permitieron redefinir la perspectiva que teníamos inicialmente sobre cómo

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

incluir las justificaciones para el tema divisibilidad en nuestras clases de matemática.

Todas las observaciones y reflexiones hechas a partir de estas consideraciones permitieron formular la siguiente propuesta, que aspira a desarrollar el razonamiento plausible y la intuición en la generación de ideas matemáticas, la formulación de conjeturas que deben ser oportunamente precisadas y justificadas, y en consecuencia la construcción de conocimiento matemático significativo y coherente en manos de nuestros propios alumnos. Es fundamental que todo lo que se propone sea desarrollado en permanente interacción con los estudiantes y que sea retomado cada vez que se considere necesario al realizar actividades como las expuestas en los anexos.

NOTA IMPORTANTE:

Con el propósito de orientar mejor al profesor en la enseñanza del tema divisibilidad de números naturales empleando justificaciones, incluimos mensajes, en color azul, que permitirán guiarlo mejor con información relevante de acuerdo a cada situación, sugerencias y las respuestas a la mayoría de los problemas propuestos.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Propuesta para la inclusión de justificaciones en la enseñanza de la Divisibilidad de Números Naturales para el primer grado de secundaria

Con el propósito de construir la idea intuitiva de División Exacta, División Inexacta, Residuo máximo, Múltiplos y divisores de un número natural, etc., presentamos la siguiente actividad que además pretende lograr este fin de forma gradual.
Observemos que no se pretende poner de inmediato nombres a los objetos matemáticos en cuestión, sino que se busca que el alumno llegue a determinar las características que permitan conceptualizar los objetos matemáticos involucrados en la Divisibilidad de números naturales.

ACTIVIDAD: "¿De qué estamos hablando?"

Presta mucha atención a cada una de las dos situaciones que te presentan y responde a cada una de las preguntas planteadas según el orden dado.
Importante:
Ten en cuenta que las reparticiones a las que hacemos referencia de ahora en adelante son "*reparticiones equitativas*" (es decir que, a cada quien le corresponde una misma cantidad de objetos) y son "*reparticiones máximas*" (es decir que, cada quien debe recibir la mayor cantidad posible de objetos).

¡¡ Manos a la obra !!

Observe que lo importante de poner énfasis en los tipos de reparticiones (equitativa y máxima) es que no se presenten ambigüedades en los estudiantes. Para señalar algunas de ellas, tenemos por ejemplo: si pensamos en una simple repartición de 17 manzanas entre 3 amigos, un alumno podría pensar que al primer amigo le podría corresponder 8 manzanas, al segundo amigo 5 manzanas, mientras que al tercer amigo 4 manzanas. Si le agregamos la condición de que ésta sea una repartición equitativa, entonces un alumno podría pensar en el caso de una repartición equitativa en la que a cada amigo le correspondan 4 manzanas, sobrando así 5 manzanas. O también que a cada amigo le correspondan 2 manzanas, sobrando 11 manzanas después de la repartición. Por otro lado, si exigimos que la repartición sea equitativa y máxima, la respuesta será única. En

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

una repartición equitativa y máxima de 17 manzanas entre 3 amigos, a cada amigo le corresponderán 5 manzanas, sobrando 2 manzanas después de la repartición.

De ser necesario dé ejemplos de reparticiones equitativas y máximas para que esta idea quede clara desde el inicio.

Situación 1: "En el parque"

Imagina que camino a tu casa, después del colegio, pasas por un parque y que ahí encuentras 4 palomitas. Justamente recuerdas que en tu mochila tienes aún algunos granos de maíz que no usaste en tu clase de Ciencias.

Observe que esta situación mantiene fijo el número de sujetos a quienes se les hace la repartición, mientras que en las preguntas planteadas a continuación varía el número de objetos a ser repartidos.

a) Si resulta que tienes 12 granos de maíz en tu mochila y piensas hacer una repartición equitativa y máxima de estos granos entre las 4 palomitas, ¿cuántos granos de maíz le correspondería a cada palomita y cuántos granos sobrarían después de la repartición?

   Rpta.- A cada palomita le corresponderían 3 granos de maíz, y no sobraría grano alguno después de la repartición.

   Note que este ejemplo de repartición equitativa y máxima trabaja la noción de División exacta.

b) Si hubieses tenido 13 granos de maíz en tu mochila, ¿cuántos granos de maíz le correspondería a cada una de las 4 palomitas y cuántos granos sobrarían después de la repartición?

   Rpta.- A cada palomita le corresponderían 3 granos de maíz, y sobrarían 1 grano de maíz después de la repartición.

   Note que este ejemplo de repartición equitativa y máxima trabaja la noción de División inexacta.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

c) Si hubieses tenido 14 granos de maíz en tu mochila, ¿cuántos granos de maíz le correspondería a cada una de las 4 palomitas y cuántos granos sobrarían después de la repartición?

Rpta.- A cada palomita le corresponderían 3 granos de maíz, y sobrarían 2 granos de maíz después de la repartición.

d) Si hubieses tenido 15 granos de maíz en tu mochila, ¿cuántos granos de maíz le correspondería a cada una de las 4 palomitas y cuántos granos sobrarían después de la repartición?

Rpta.- a cada palomita le corresponderían 3 granos de maíz, y sobrarán 3 granos de maíz después de la repartición.

e) Si hubieses tenido 16 granos de maíz en tu mochila, ¿cuántos granos de maíz le correspondería a cada una de las 4 palomitas y cuántos granos sobrarían después de la repartición?

Rpta.- A cada palomita le corresponderían 4 granos de maíz, y sobrarían cero granos después de la repartición.

f) Si hubieses tenido 17 granos de maíz en tu mochila, ¿cuántos granos de maíz le correspondería a cada una de las 4 palomitas y cuántos granos sobrarían después de la repartición?

Rpta.- A cada palomita le corresponderían 4 granos de maíz, y sobrarían 1 grano de maíz después de la repartición.

Observe que con las preguntas anteriores no solo se trabajan las nociones de división exacta y división inexacta, sino también la idea de los posibles valores del residuo o resto en una división cuyo divisor (4) es fijo. Con la idea de repartición equitativa y máxima se pretende que el estudiante llegue a darse cuenta que el residuo no puede ser igual o sobrepasar el valor del divisor.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

g) Da algunos ejemplos de cantidades de granos de maíz que puedes repartir entre 4 palomitas sin que sobre algún grano de maíz después de la repartición.

Por ejemplo: ____ granos de maíz pueden ser repartidos equitativamente entre 4 palomitas sin que sobre grano alguno. Es decir que ____ es una cantidad de granos de maíz que puede ser repartida de forma EXACTA entre 4 palomitas. O también que _____ es un número divisible por _____. *Otros ejemplos*:

Rpta.- Note que esta pregunta no tiene una única respuesta, sino puede admitir diferentes respuestas, como por ejemplo: 4, 8, 12, 32, 84, etc. e incluso el número 0.

Observe que esta pregunta ayuda a introducir la de idea de números divisibles por 4, o también los múltiplos de 4.

Observe además que poco a poco vamos introduciendo algunos términos que posteriormente serán definidos en los aspectos teóricos a ser dados por el profesor, que no es otra cosa sino darle nombres a los objetos con los que los estudiantes ya han venido trabajando.

h) Da algunos ejemplos de cantidades de granos de maíz que puedes repartir en forma equitativa y máxima entre 4 palomitas para que solo sobre 1 grano de maíz después de la repartición.

Rpta.- 13, 5, 9, 17, 21, 1, etc.

i) Da algunos ejemplos de cantidades de granos de maíz que puedes dividir en forma equitativa entre 4 palomitas para que solo sobren 2 granos de maíz después de la repartición.

Rpta.- 2, 6, 10, 14, 18, etc.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

j) Da algunos ejemplos de cantidades de granos de maíz que puedes dividir en forma equitativa entre 4 palomitas para que solo sobren 3 granos de maíz después de la repartición.

Rpta.- 3, 7, 11, 15, 19, etc.

k) ¿Existirá algún caso de número de granos de maíz en el que te puedan quedar 4 granos de maíz después de hacer una repartición equitativa y máxima entre 4 palomitas? ¿Por qué?

Rpta.- No, porque esos 4 granos de maíz "sobrantes" podré redistribuirlos entre las 4 palomitas, ya que de lo contrario no se trataría de una repartición máxima.

Observe que el propósito de esta pregunta es que el estudiante se dé cuenta que en una división con divisor fijo (divisor = 4 en este caso), el residuo no puede ser igual al divisor (en este caso a 4). Asimismo, creemos que esta pregunta puede ayudar a refinar la idea intuitiva de residuo máximo.

l) Explora con diferentes ejemplos de cantidades de granos de maíz y escribe como una "Conclusión" cuáles son las posibles cantidades de granos de maíz que te pueden quedar (o sobrar) después de hacer reparticiones equitativas y máximas entre 4 palomitas.

Exploraciones: *Conclusión:*

Observe que esta pregunta permite al estudiante determinar los valores posibles del residuo cuando el divisor es igual a 4.

m) ¿Cuántos granos de maíz le darías a cada una de las 4 palomitas si te das cuenta que en tu mochila no hay grano alguno de maíz?

Rpta.- Le daría cero granos de maíz a cada palomita.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Observe que con esta pregunta se trabaja el caso especial de división: 0 entre 4.

n) Si al día siguiente, pasas nuevamente por ese mismo parque y esta vez encuentras 7 palomitas, ¿cuántos granos de maíz pueden sobrar después de hacer reparticiones equitativas y máximas entre dichas palomitas?

Rpta.- Pueden sobrar 0, 1, 2, 3, 4, 5 ó 6 granos de maíz.

Observe que en esta pregunta se empieza a variar el valor del divisor (que indicaría para nosotros el número de sujetos a los que se le hace la repartición) para analizar los posibles valores del residuo cuando se tiene un divisor fijo (7 en este nuevo caso). Se espera que el profesor deje que los estudiantes exploren por sí mismos con ejemplos concretos con el propósito de que ellos mismos den sus propias conclusiones y respectivas justificaciones.

Situación 2: "En clase de Mate"

Imagina que tu profesora de Matemática ha llevado una bolsa de 30 chocolates M&M a tu salón con el propósito de repartirlos en forma equitativa y máxima como recompensa entre los alumnos que participen en su clase.
Un dato importante es que tu salón tiene una capacidad máxima de 30 alumnos.
Observe que esta situación mantiene fijo el número de objetos a ser repartidos (dividendo fijo = 30), mientras que en las preguntas planteadas a continuación varía el número de sujetos a los que se les hace la repartición (el divisor). Esto con el propósito de trabajar la búsqueda de los divisores del número 30.

a) Si suponemos que fueron 4 los alumnos que participaron en la clase:

a.1) ¿Cuántos chocolates le corresponde a cada alumno?

Rpta.- 7 chocolates.

a.2) ¿Sobrará algún chocolate después de la repartición? ¿Cuántos?

Rpta.- Sí, sobrarán 2 chocolates.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

b) Si suponemos ahora que no fueron 4, sino 3 los alumnos que participaron en la clase:

b.1) ¿Cuántos chocolates le corresponde a cada alumno?

Rpta.- 10 chocolates.

b.2) ¿Sobrará algún chocolate después de la repartición? ¿Cuántos?

Rpta.- No.

Observe que de estos dos primeros ejemplos un estudiante debe tener presente que 30 chocolates no pueden ser repartidos (de forma equitativa y máxima) entre 4 alumnos sin que sobre chocolate alguno, mientras que sí pueden ser repartidos entre 3 alumnos sin que sobre chocolate alguno.

c) Si el único alumno que participó en la clase solo fue Pedrito, y la profesora debe mantener su promesa de repartir los 30 chocolates solamente entre los alumnos que participen en su clase, ¿cuántos chocolates le corresponderán a Pedrito?

Rpta.- 30 chocolates.

Observe que con esta pregunta estamos haciendo referencia al caso especial de división exacta (cuando el divisor es igual a 1): 30 entre 1.

d) Para el mismo número total de chocolates (30 chocolates), ¿en qué casos (de números de alumnos) la repartición hubiese permitido que no sobre chocolate alguno? Escribe todos los casos posibles.

Respuesta:____

Esto quiere decir que 30 chocolates pueden ser divididos de forma exacta entre ______ alumnos, o también

entre ______ alumnos, o también

entre ______ alumnos, o también

entre ______ alumnos, o también

entre ______ alumnos, o también

entre ______ alumnos, o también

entre ______ alumnos, o también

entre ______ alumno.

O lo que es equivalente a decir que:

“el número 30 es divisible entre: _________________________________”

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Rpta.- 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 y 30.

Observe que esta pregunta involucra determinar los divisores del número 30.

e) ¿Qué pasaría si el número de alumnos que participó en clase de Mate fuese diferente a los del caso anterior (d)?

Ten en cuenta que el número máximo de alumnos en tu aula es 30.

Rpta.- Sobrarían chocolates después de la repartición.

Observe que implícitamente se hace mención a los no divisores de 30.

Una vez desarrollada la actividad anterior pretendemos introducir los términos empleados en el tema divisibilidad. La idea es ponerle nombres a los conceptos vistos de forma intuitiva a través de los planteamientos anteriores.

Pretendemos que la presentación de las definiciones en forma de equivalencias logre una comprensión del significado de definición en los estudiantes.

Sugerimos que los "ejemplos" aquí presentados sean trabajados básicamente por el profesor, con la ayuda de los estudiantes. Esto es, el profesor puede hacer preguntas de cómo abordar cada uno de los problemas e ir sugiriendo ideas para despertar en los estudiantes el uso de las definiciones dadas, por ejemplo, en sus justificaciones. Por otro lado, es importante que los problemas sean básicamente desarrollados por los estudiantes, con la guía del profesor.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

DIVISIBILIDAD DE NÚMEROS NATURALES

Sea $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; ...\}$ el conjunto de los números naturales.

1) DIVISIÓN EXACTA

Sean A y B números naturales con $B \neq 0$.

Definición:

Diremos que A objetos pueden ser repartidos de forma exacta entre B sujetos si después de la repartición equitativa y máxima no sobra objeto alguno.

O dicho de otra manera, A entre B es una ***División Exacta*** siempre y cuando se pueda encontrar un número natural C, tal que:

$$\begin{array}{l|l} A & B \\ \cline{2-2} \vdots & C \\ (0) & \end{array}$$

Nota: el número 0 entre paréntesis denota el resto o residuo de la división.

Donde C denotaría el número de objetos que le correspondería a cada sujeto.

Equivalencia:

Para resumir:

(1)		(2)
A entre B es una DIVISIÓN EXACTA	$\Longleftrightarrow$	Para algún número natural C $\begin{array}{l\|l} A & B \\ \cline{2-2} \vdots & C \\ (0) & \end{array}$ $\longleftarrow$ Residuo = 0

Y se lee (1) es equivalente a (es lo mismo que, o es sinónimo a) (2). O también que, si tenemos (1) entonces se cumple (2). Y viceversa, si se cumple (2) entonces tenemos (1).

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

O sea:

Decir que A entre B es una división exacta <u>es lo mismo</u> a decir que para algún número natural C, al efectuar la división de A entre B se obtiene C y el residuo cero; es decir:

$$\begin{array}{c|l} A & B \\ \cline{2-2} \vdots & C \\ (0) & \end{array} \longleftarrow \text{Residuo} = 0$$

<u>Ejemplos resueltos</u>:

a) ¿24 entre 4 es una división exacta?

Veamos si se cumple (2) para $A = 24$ y $B = 4$. Es decir, veamos si existe un número natural tal que 24 entre 4 nos dé ese número natural con residuo o resto igual a cero.

$$\begin{array}{c|l} 24 & 4 \\ \cline{2-2} 24 & 6 \in \mathbb{N} \\ \cline{1-1} (0) & \end{array}$$

Luego, como se cumple (2) y (2) es lo mismo que (1), entonces se cumpliría (1). De aquí que 24 entre 4 es una división exacta.

b) ¿91 entre 7 es una división exacta?

Veamos si se cumple (2) para $A = 91$ y $B = 7$. Es decir, veamos si existe un número natural tal que 91 entre 7 nos dé ese número natural con residuo o resto igual a cero.

$$\begin{array}{r|l} 91 & 7 \\ \cline{2-2} 7 & 13 \in \mathbb{N} \\ \cline{1-1} 21 & \\ 21 & \\ \cline{1-1} (0) & \end{array}$$

Luego, como se cumple (2) y, (2) es lo mismo que (1), entonces se cumpliría (1). De aquí que 91 entre 7 es una división exacta.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

c) ¿114 entre 8 es una división exacta?

Veamos si se cumple (2); es decir, veamos si existe un número natural tal que 114 entre 8 nos dé ese número natural con residuo igual a cero.

$$\begin{array}{r|l} 114 & \underline{\ \ 8\ \ } \\ \underline{8\ \ } & 14 \in \mathbb{N} \\ 34 & \\ \underline{32} & \\ (2) & \longleftarrow \text{Residuo} \neq 0 \end{array}$$

Como NO se cumple (2), ya que la división de 114 entre 8 tiene residuo diferente de cero, entonces tampoco se cumpliría (1). De aquí que 114 entre 8 NO es una división exacta.

En ese caso diremos que 114 entre 8 es una <u>división inexacta</u>.

2) <u>DIVISIÓN INEXACTA</u>

Sean A y B números naturales con $B \neq 0$.

<u>Definición</u>:

A entre B será una ***División Inexacta*** siempre y cuando A entre B ***no*** sea una división exacta.

<u>Ejercicio</u>:

Escribe tus propios ejemplos de divisiones exactas e inexactas.

3) <u>TÉRMINOS DE UNA DIVISIÓN</u>

Sean A y B números naturales con $B \neq 0$.

<u>Definición</u>:

En una división de la forma:

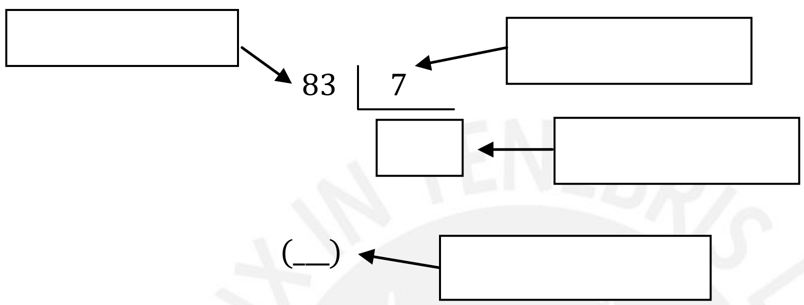
$$\begin{array}{c|l} A & \underline{\ \ B\ \ } \\ \vdots & \ \ C \\ (R) & \end{array}$$, para algún número natural C

A recibe el nombre de ***Dividendo***, B recibe el nombre de ***Divisor***, C recibe el nombre de ***Cociente*** y R recibe el nombre de ***Residuo***.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

<u>Ejercicio</u>:

En la siguiente división, completa los espacios en blanco usando los números naturales adecuados así como los siguientes términos: *dividendo, divisor, cociente, residuo.*



4) <u>DIVISIBILIDAD</u>

Sean A y B números naturales con $B \neq 0$.

<u>Definición</u>:

Cuando tengamos que A objetos pueden ser repartidos de forma equitativa y máxima entre B sujetos sin que sobre objeto alguno después de la repartición, diremos que la cantidad ***A* es divisible por *B***.

Esto es lo mismo a decir que cuando A entre B sea una división exacta, entonces diremos que ***A* es divisible por *B***.

Y viceversa:

Si A es divisible por B, entonces A entre B es una división exacta.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

Equivalencia:

Así se origina la siguiente equivalencia:

(3)

A es DIVISIBLE por B

$\Longleftrightarrow$

(1)

A entre B
es una DIVISIÓN EXACTA

$\Updownarrow$

(2)

Para algún número natural C

$$\begin{array}{l|l} A & B \\ \cline{2-2} \vdots & C \\ (0) & \end{array}$$

Y se lee (3) es lo mismo que (1) y (1) es lo mismo que (2), entonces también (3) es lo mismo que (2).

Ejercicios:

1) ¿15 es divisible por 6? ¿Por qué?

   Rpta.- No, porque para que 15 sea divisible por 6, 15 entre 6 debería ser una división exacta y no lo es pues el cociente (2) aunque es un número natural, el residuo (3) no es igual a cero.

2) ¿46 es divisible por 23? ¿Por qué?

   Rpta.- Sí, porque 46 entre 23 es una división exacta (con cociente un número natural, 2, y residuo igual a cero), entonces por la equivalencia anterior 46 es divisible por 23.

3) ¿168 es divisible por 4? ¿Por qué?
4) ¿357 es divisible por 5? ¿Por qué?
5) ¿Por qué números es divisible 18?

   Rpta.- Esto es lo mismo que decir: 18 es divisible por ______. Por la equivalencia anterior, esto sería equivalente a determinar los valores de B

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

para los cuales A entre B es una división exacta, con $A = 18$. No es difícil verificar que los valores de B que cumplen con esto son 1, 2, 3, 6, 9 y 18. Por lo tanto, 18 es divisible por 1, 2, 3, 6, 9 y 18.

6) ¿8 es divisible por 16? ¿Por qué?

   Rpta.- No, porque si divido 8 entre 16 obtengo una división inexacta (cociente: 0; residuo: 8).

7) Completa con algunos ejemplos:

   g.1) _________________ es divisible por 4.

   Rpta.- Note aquí que, según la última equivalencia dada, lo que se pide es dar algunos valores de A tales que A entre $B\ (= 4)$ sea una división exacta. Por tanto, algunos ejemplos pueden ser: 4, 16, 32, 40, etc.

   Observe que los valores de A que satisfacen esta condición en realidad son infinitos.

   Se sugiere al profesor no hacer notar este último punto a menos que alguno de los estudiantes lo haga explícito. Lo que se pretende es que los estudiantes sean los que enuncien estas afirmaciones y las justifiquen adecuadamente.

   g.2) _________________ es divisible por 2.

   g.3) _________________ es divisible por 6.

   g.4) 34 es divisible por ________________

   Rpta.- Note aquí que, según la última equivalencia dada, lo que se pide es dar algunos valores de B tales que $A\ (= 34)$ entre B sea una división exacta. Por tanto, los únicos ejemplos que pueden ser considerados son: 1, 2, 17 y 34, ya que 34 no puede ser dividido por ningún otro número natural de forma exacta.

   g.5) 56 es divisible por ________________

8) ¿0 es divisible por 6? ¿Por qué?

   Rpta.- Sí, porque 0 entre 6 es una división exacta (Cociente: 0, un número natural; residuo: 0).

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

4.1) ALGUNOS CASOS ESPECIALES DE DIVISIÓN

<u>1° Caso</u>: "Repartición equitativa y máxima de 0 objetos entre B sujetos"

Es decir:

$$\begin{array}{r|l} 0 & B \\ \cline{2-2} \vdots & 0 \\ (0\ ) & \end{array}$$

Dejar que los alumnos exploren o se den cuenta de esta respuesta. Si es posible que den diferentes valores a B.

<u>2° Caso</u>: "Repartición equitativa y máxima de A objetos entre 1 solo sujeto"

Es decir:

$$\begin{array}{r|l} A & 1 \\ \cline{2-2} \vdots & A \\ (0\ ) & \end{array}$$

Dejar que los alumnos exploren o se den cuenta de esta respuesta. Si es posible que den diferentes valores a A.

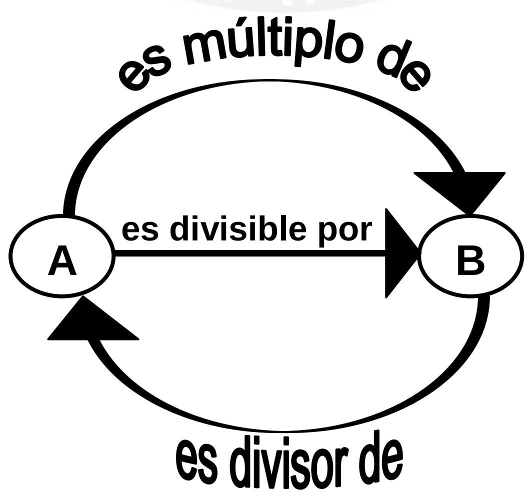
4.2) MÚLTIPLO Y DIVISOR

Sean A y B números naturales con $B \neq 0$.

<u>Definición</u>:

Si A es divisible por B, entonces diremos que A es ***múltiplo*** de B y que B es ***divisor*** de A.

Es decir:



Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Ejercicios:

1) Usa los números ***28*** *o* ***4***, las palabras ***sí****,* ***no****,* ***exacta*** *o* ***inexacta*** en los siguientes espacios en blanco, según correspondan y creas necesario, para hacer que las afirmaciones resultantes sean ciertas:

   a) _____ _____ es divisible por ______ *Rpta.- 28 sí es divisible por 4*

   b) _____ _____ es múltiplo de ______ *Rpta.- 28 sí es múltiplo de 4*

   c) _____ _____ es divisor de _______ *Rpta.- 4 sí es divisor de 4*

   d) La división de 28 entre 4 es _____________ *Rpta.- Exacta*

2) Usa los números ***17*** *o* ***5***, las palabras ***sí****,* ***no****,* ***exacta*** *o* ***inexacta*** en los siguientes espacios en blanco, según correspondan y creas necesario, para hacer que las afirmaciones resultantes sean ciertas:

   a) _____ _____ es divisible por ______ *Rpta.- 17 no es divisible por 5*

   b) _____ _____ es múltiplo de ______ *Rpta.- 17 no es múltiplo de 5*

   c) _____ _____ es divisor de _______ *Rpta.- 5 no es divisor de 17*

   d) La división de 17 entre 5 es ____________ *Rpta.- Inexacta*

3) ¿Cómo puedo hallar los múltiplos de 12? ¿Cuáles son los múltiplos de 12?

   Rpta.- Observe el ejemplo 6 de las justificaciones grupales de la sesión 4, Capítulo 4.

4) ¿Cómo puedo hallar los divisores de 12? ¿Cuáles son los divisores de 12?

   Rpta.- Observe el ejemplo 7 de las justificaciones grupales de la sesión 4, Capítulo 4.

5) Completa usando los números naturales adecuados:

   a) _____________________ es múltiplo de 4.

      Rpta.- Algunos ejemplos pueden ser: 8, 12, 48, 100, 0, etc.

   b) 28 es múltiplo de ________________________.

      Rpta.- Observe que en este problema lo que se pide en realidad, según la equivalencia presentada, son los divisores de 28, que son: 1, 2, 4, 7, 14, 28.

   c) _____________________ es divisor de 14.

      Rpta.- 1, 2, 7, 14.

   d) 6 es divisor de ______________________

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Rpta.- Algunos ejemplos pueden ser: 0, 6, 12, 18, 24, 600, 120, etc. Note que en este problema lo que se pide en realidad son los múltiplos de 6, según la equivalencia dada.

6) A continuación **CORRIGE** las afirmaciones incorrectas escribiendo la afirmación correcta en la columna llamada "Incorrecto. Debió ser", o haciendo un "check", en la segunda columna, en el caso de que ésta sea correcta. **JUSTIFICA** en cada caso tu respuesta.

¿Correcto o Incorrecto?	Correcto	Incorrecto. Debió ser:	Justificación
18 es un divisor de 9		*9 es divisor de 18*	*Ya que 18 es divisible por 9*
8 es divisible por 8	√		*Pues la división de 8 entre 8 es exacta*
4 es un múltiplo de 24		*24 es múltiplo de 4 o 4 es divisor de 24*	*Pues 24 es divisible por 4*
111 entre 3 es una división inexacta		*111 entre 3 es una división exacta*	*Pues me da como cociente un número natural (37), y como residuo 0.*
3 es divisor de 111	√		*Pues 111 es divisible por 3, al ser 111 entre 3 una división exacta.*
0 es un múltiplo de 5	√		*Pues 0 es divisible por 5.*
7 es divisor de 0	√		*Pues 0 es divisible por 7.*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

5) RESIDUO MÁXIMO EN UNA DIVISIÓN DE NÚMEROS NATURALES

Sean A y B números naturales con $B \neq 0$.

Ya que estamos viendo la división de A entre B como una repartición equitativa y máxima de A objetos entre B sujetos, entonces:

- ¿qué posibles valores puede tener el resto o residuo de dividir N entre 1?

  (Se deja que los alumnos exploren)

  Rpta.- 0

- ¿qué posibles valores puede tener el resto o residuo de dividir A entre *2*?

  (Se deja que los alumnos exploren)

  Rpta.- 0 o 1

- ¿qué posibles valores puede tener el resto o residuo de dividir M entre *3*?

  (Se deja que los alumnos exploren)

  Rpta.- 0, 1 o 2

- ¿qué posibles valores puede tener el resto o residuo de dividir X entre 4?

  (Se deja que los alumnos exploren)

  Rpta.- 0, 1, 2 o 3

Se esperaría que los alumnos se den cuenta de que el residuo puede tomar valores de a lo más una unidad menos que el divisor. Entonces los valores del residuo pueden ser desde 0 hasta (divisor - 1).

Para este fin se sugiere que los profesores den todos los ejemplos que sean necesarios.

Luego, escribir la conclusión dada por los estudiantes aclarando que el residuo NO puede ser igual o mayor que el divisor pues, de lo contrario, se podría seguir haciendo la repartición y por tanto no estaríamos tratando con una repartición máxima.

Conclusión:

$$\begin{array}{l|l} A & \quad B \\ \cline{2-2} \vdots & \quad C \\ (R) & \end{array} \quad , \quad \text{para algún } C \in \mathbb{N}$$

siempre y cuando se cumpla que: $R < B$.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Recuerda que R representa el Residuo y B representa el Divisor de dicha división. De aquí que se debe cumplir que el residuo sea siempre menor que el divisor. Además, el valor del residuo máximo de A entre B es:

$$\boxed{R_{máx} = B - 1}$$

La siguiente actividad tiene el propósito de reforzar el concepto de residuo máximo visto previamente.

<u>ACTIVIDAD</u>: "Residuo vs. Divisor"

Un profesor encontró entre los cálculos de sus alumnos estas tres divisiones.
En caso de presentarse algún error coloca una (X) y explica cuál o cuáles son estos errores y después corrígelos. En el caso de que no se presenten errores coloca un (√).
<u>Nota</u>: el número entre paréntesis ( ) representa el residuo de la división.

1) $\begin{array}{r|l} 37 & 5 \\ \cline{2-2} \underline{30} & 6 \\ (7) & \end{array}$

(X) ya que el residuo (7) es mayor que el divisor (5).

2) $\begin{array}{r|l} 43 & 5 \\ \cline{2-2} \underline{40} & 8 \\ (3) & \end{array}$

√

3) $\begin{array}{r|l} 100 & 7 \\ \cline{2-2} \underline{7} & 13 \\ 30 & \\ \underline{21} & \\ (9) & \end{array}$

(X) ya que el residuo (9) es mayor que el divisor (7).

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

EQUIVALENCIAS DE UNA DIVISIÓN (REPARTICIÓN EQUITATIVA Y MÁXIMA)

De las reparticiones equitativas y máximas realizadas en la Situación 1 (“En el parque”), en (a) nos hemos dado cuenta de que si tuviésemos 12 granos de maíz, podríamos haber repartido estos de forma exacta entre 4 palomitas que se encuentran en el parque. Además, cada paloma recibiría 3 granos de maíz.

Paloma 1 Paloma 2 Paloma 3 Paloma 4

$$\text{12 granos de maíz} = \underbrace{\text{3 granos de maíz} + \text{3 granos de maíz} + \text{3 granos de maíz} + \text{3 granos de maíz}}_{\text{4 veces 3}}$$

Lo que es equivalente a escribir: $12 = 4 \times 3$

Por otro lado, en (b) nos hemos dado cuenta de que:

Paloma 1 Paloma 2 Paloma 3 Paloma 4

$$\text{13 granos de maíz} = \underbrace{\text{3 granos de maíz} + \text{3 granos de maíz} + \text{3 granos de maíz} + \text{3 granos de maíz}}_{\text{4 veces 3}} + \underset{\text{SOBRA}}{\boxed{\text{1 grano de maíz}}}$$

Lo que es equivalente a escribir: $13 = 4 \times 3 + 1$

Análogamente tendríamos que, en (c): $14 = 4 \times 3 + 2$

En (d): $15 = 4 \times 3 + 3$

En (e): $16 = 4 \times 4$

En (f): $17 = 4 \times 4 + 1$

Las expresiones anteriores representan reparticiones equitativas y máximas de 12, 13, 14, 15, 16 y 17 objetos entre 4 sujetos, respectivamente.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

La siguiente actividad tiene el objetivo de que los estudiantes lleguen a construir la equivalencia básica de la división de números naturales.

<u>ACTIVIDAD</u>: "Equivalencia básica"

1) Si te presentan los dos siguientes casos de repartición, escribe la igualdad que se origina en cada caso.

<u>Primer caso</u>:

Una repartición (equitativa y máxima) de 21 granos de maíz entre 3 palomitas, correspondiéndole a cada palomita un total de ____ granos y sobrando ____ grano(s) de maíz después de la repartición.

$$\boxed{\square = \square \times \square + \square = \square \times \square}$$

Rpta.- (…) a cada palomita un total de 7 granos y sobrando 0 granos de maíz después de la repartición. Y se forma la igualdad siguiente:

$$21 = 7 \times 3 + 0 = 7 \times 3$$

<u>Segundo caso</u>:

Una repartición (equitativa y máxima) de 21 granos de maíz entre 7 palomitas, correspondiéndole a cada palomita un total de ____ granos y sobrando ____ grano(s) de maíz después de la repartición.

$$\boxed{\square = \square \times \square + \square = \square \times \square}$$

Rpta.- (…) a cada palomita un total de 3 granos y sobrando 0 granos de maíz después de la repartición. Y se forma la igualdad siguiente:

$$21 = 3 \times 7 + 0 = 3 \times 7$$

Note que en ambos casos se formó la misma igualdad ya que la multiplicación de números naturales es conmutativa. En este sentido debería recalcar a los estudiantes que una misma igualdad puede representar dos tipos diferentes de reparticiones equitativas y máximas.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

2) Si te presentan los dos siguientes casos de repartición, escribe la igualdad que se origina en cada caso.

Primer caso:

Una repartición (equitativa y máxima) de 22 granos de maíz entre 3 palomitas, correspondiéndole a cada palomita un total de ___ granos y sobrando ____ grano(s) de maíz después de la repartición.

$$\square = \square \times \square + \square$$

Rpta.- (…) a cada palomita un total de 7 granos y sobrando 1 grano de maíz después de la repartición. Y se forma la igualdad siguiente:

22 = 7 x 3 + 1

Segundo caso:

Una repartición (equitativa y máxima) de 22 granos de maíz entre 7 palomitas, correspondiéndole a cada palomita un total de ____ granos y sobrando ____ grano(s) de maíz después de la repartición.

$$\square = \square \times \square + \square$$

Rpta.- (…) a cada palomita un total de 3 granos y sobrando 1 grano de maíz después de la repartición. Y se forma la igualdad siguiente:

21 = 3 x 7 + 1

Note que en ambos casos se formó la misma igualdad ya que la multiplicación de números naturales es conmutativa. En este sentido debería recalcar a los estudiantes que una misma igualdad puede representar dos tipos diferentes de reparticiones equitativas y máximas.

3) Si te presentan la siguiente igualdad:

$$29 = 3 \times 9 + 2$$

¿A qué ejemplo(s) de reparticiones **equitativas y máximas** puede hacer referencia esta igualdad? Escribe todos los casos posibles de repartición

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

especificando en cada caso cuántos granos de maíz se repartieron, entre cuántas palomitas, cuántos granos le corresponde a cada palomita y cuántos granos sobraron después de la repartición.

Rpta.- la igualdad dada podría representar dos tipos diferentes de reparticiones equitativas y máximas:

(1) la repartición equitativa y máxima de 29 granos de maíz entre 3 palomitas, correspondiéndole 9 granos de maíz a cada una y sobrando 2 granos de maíz después de la repartición; o

(2) la repartición equitativa y máxima de 29 granos de maíz entre 9 palomitas, correspondiéndole 3 granos de maíz a cada una y sobrando 2 granos de maíz después de la repartición.

Note que en ambos casos no hay conflictos entre el número de palomitas a las que se les hace la repartición y el número de granos de maíz sobrante, ya que este último es menor que el número de palomitas, lo que indica que la repartición ha finalizado.

4) Observa la siguiente igualdad:

$$\boxed{24 = 3 \times 7 + 3}$$

Note que la igualdad dada podría representar solo un tipo de repartición equitativa y máxima: la repartición equitativa y máxima de 24 granos de maíz entre 7 palomitas, correspondiéndole 3 granos de maíz a cada una y sobrando 3 granos de maíz después de la repartición.

Observe que esta igualdad no podría representar el tipo de repartición de 24 granos de maíz entre 3 palomitas, ya que según la igualdad a cada palomita le correspondería 7 granos de maíz y sobrarían 3 granos de maíz; lo que, como sabemos, no puede ser ya que 3 granos de maíz "sobrantes" pueden aún ser repartidos entre 3 palomitas. Esto responde a las siguientes preguntas.

a) - Según esta igualdad, al repartir 24 granos de maíz, ¿cuántos granos de maíz le correspondería a cada una de 3 palomitas?, y ¿cuántos granos sobrarían?

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

- ¿Puede esta igualdad representar una repartición **equitativa y máxima** de 24 granos de maíz entre 3 palomitas? ¿Por qué?

b) - Según esta igualdad, al repartir 24 granos de maíz, ¿cuántos granos de maíz le correspondería a cada una de 7 palomitas?, y ¿cuántos granos sobrarían?

- ¿Podrá representar esta igualdad una repartición **equitativa y máxima** de 24 granos de maíz entre 7 palomitas? ¿Por qué?

5) Observa la siguiente igualdad:

$$\boxed{33 = 4 \times 7 + 5}$$

a) - Según esta igualdad, al repartir 33 granos de maíz, ¿cuántos granos de maíz le correspondería a cada una de 4 palomitas?, y ¿cuántos granos sobrarían?

Rpta.- Le corresponderían 7 granos de maíz a cada una y sobrarían 5 granos de maíz.

- ¿Puede esta igualdad representar una repartición **equitativa y máxima** de 33 granos de maíz entre 4 palomitas? ¿Por qué?

Rpta.- No, porque según la igualdad estarían sobrando 5 granos de maíz, que como sabemos pueden ser repartidos aún entre 4 palomitas.

b) - Según esta igualdad, al repartir 33 granos de maíz, ¿cuántos granos de maíz le correspondería a cada una de 7 palomitas?, y ¿cuántos granos sobrarían?

Rpta.- Le corresponderían 4 granos de maíz a cada una y sobrarían 5 granos de maíz.

- ¿Podrá representar esta igualdad una repartición **equitativa y máxima** de 33 granos de maíz entre 7 palomitas? ¿Por qué?

Rpta.- Sí, porque según la igualdad estarían sobrando 5 granos de maíz, que como sabemos ya no podrían ser repartidos de forma equitativa y máxima entre 7 palomitas.

6) Si te presentan la siguiente igualdad:

$$\boxed{36 = 4 \times 7 + 8}$$

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

a) - Según esta igualdad, al repartir 36 granos de maíz, ¿cuántos granos de maíz le correspondería a cada una de 4 palomitas?, y ¿cuántos granos sobrarían?

Rpta.- Le corresponderían 7 granos de maíz a cada una y sobrarían 8 granos de maíz.

- ¿Podrá representar esta igualdad una repartición **equitativa y máxima** de 36 granos de maíz entre 4 palomitas? ¿Por qué?

Rpta.- No, porque 8 granos de maíz "sobrantes" aún podrían ser repartidos entre 4 palomitas, correspondiéndole en realidad a cada palomita 9 granos de maíz (2 más de los 7 considerados inicialmente a cada palomita) y sobrando 0 granos de maíz después de la repartición.

b) Según esta igualdad, al repartir 36 granos de maíz, ¿cuántos granos de maíz le correspondería a cada una de 7 palomitas?, y ¿cuántos granos sobrarían?

Rpta.- Le corresponderían 4 granos de maíz a cada una y sobrarían 8 granos de maíz.

¿Podrá representar esta igualdad una repartición **equitativa y máxima** de 36 granos de maíz entre 7 palomitas? ¿Por qué?

Rpta.- No, porque 8 granos de maíz sobrantes aún podrían ser repartidos entre 7 palomitas, asignándosele un grano de maíz adicional a cada palomita (correspondiéndole entonces 5 granos de maíz a cada una) y sobrando 1 grano de maíz después de la repartición.

7) Si te presentan la siguiente igualdad:

$$\boxed{34 = 3 \times 8 + 10}$$

Análogo al problema anterior.

a) - Según esta igualdad, al repartir 34 granos de maíz, ¿cuántos granos de maíz le correspondería a cada una de 3 palomitas?, y ¿cuántos granos sobrarían?

- ¿Podrá representar esta igualdad una repartición **equitativa y máxima** de 34 granos de maíz entre 3 palomitas? ¿Por qué?

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

b) - Según esta igualdad, al repartir 34 granos de maíz, ¿cuántos granos de maíz le correspondería a cada una de 8 palomitas?, y ¿cuántos granos sobrarían?

- ¿Podrá representar esta igualdad una repartición **equitativa y máxima** de 34 granos de maíz entre 8 palomitas? ¿Por qué?

---

6) LA EQUIVALENCIA BÁSICA DE LA DIVISIÓN DE NÚMEROS NATURALES

A continuación veremos algunos ejemplos que nos llevarán a determinar la equivalencia básica de la división.

Ejercicios:

Se espera que los ejercicios aquí planteados sean trabajados en clase por el profesor con la continua ayuda de los estudiantes. Se espera que estos ejercicios conduzcan a la conclusión final de este apartado que es llegar a la equivalencia básica de la división de números naturales.

a) Observa la siguiente igualdad:

$$37 = 8 \times 4 + 5$$

¿Esta igualdad puede representar una repartición **equitativa y máxima** de 37 chocolates entre 4 personas? ¿Por qué?

Rpta.- No, porque en una repartición equitativa y máxima no deberían sobrar 5 chocolates después de la repartición (de 37 chocolates) entre 4 personas, ya que esos 5 chocolates podrían volver a ser repartidos.

b) Dada la siguiente igualdad:

$$A = 5 \times B + 3 \ , \qquad \text{con } A \text{ y } B \text{ números naturales.}$$

¿Puede esta igualdad representar una repartición **equitativa y máxima** de A chocolates entre 5 personas?, ¿por qué?, ¿cuántos chocolates le correspondería a cada persona? y ¿cuántos chocolates sobrarían después de la repartición?

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Rpta.- Sí, porque en una repartición equitativa y máxima sí podrían sobrar 3 chocolates al repartir A chocolates (sin importar cuánto valga A) entre 5 personas, ya que esos 3 chocolates no podrían volver a ser repartidos de forma equitativa y máxima entre estas 5 personas. Entonces, a cada persona le corresponderían B chocolates y sobrarían 3 chocolates después de la repartición.

c) Dada la siguiente igualdad:

$M = P \times 4 + 6$, con M y P números naturales.

Según esta igualdad, en una repartición de M chocolates entre 4 personas, ¿cuántos chocolates le correspondería a cada persona? y ¿cuántos chocolates sobrarían después de la repartición?

Rpta.- Le correspondería P chocolates y sobrarían 6 chocolates.

¿Puede esta igualdad representar una repartición **equitativa y máxima** de M chocolates entre 4 personas? ¿Por qué?

Rpta.- No, porque en una repartición equitativa y máxima no deberían sobrar 6 chocolates después de una repartición entre 4 personas, ya que esos 6 chocolates podrían volver a ser repartidos entre estas personas (correspondiéndole adicionalmente 1 chocolate a cada una, obteniendo así cada persona P+1 chocolates, y sobrando 2 chocolates).

d) Dada la siguiente igualdad:

$A = 5 \times B + C$, con A, B y C números naturales.

¿Cuál sería la condición que impondrías para que esta igualdad pueda representar una repartición **equitativa y máxima** de A chocolates entre 5 personas?

Rpta.- Que C, el número de chocolates sobrantes, sea menor que 5, para que así no exista la posibilidad de que estos (C) chocolates puedan volver a ser repartidos entre estas 5 personas.

e) Dada la siguiente igualdad:

$M = N \times 7 + R$, con M, N y R números naturales.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

¿Cuál sería la condición que impondrías para que esta igualdad pueda representar una repartición **equitativa y máxima** de M chocolates entre 7 personas?

Rpta.- Que R, el número de chocolates sobrantes, sea menor que 7, para que así no exista la posibilidad de que estos (R) chocolates puedan volver a ser repartidos entre estas 7 personas.

⋮

Ahora, si te presentan la siguiente igualdad:

$A = B \times C + R$, con A, B, C y R números naturales, $B \neq 0$

¿Cuál sería la condición que impondrías para que esta igualdad pueda representar una repartición **equitativa y máxima** de A objetos entre B sujetos?

Rpta.- Que R, el número de objetos sobrantes, sea menor que el número de sujetos a quienes se hace la repartición (B), para que así no exista la posibilidad de que estos (R) objetos puedan volver a ser repartidos entre estos B sujetos.

⋮

Entonces, si pensamos en una repartición **equitativa y máxima** de A objetos entre B $(B \neq 0)$ sujetos, puedo representar esta repartición de dos formas:

$$\begin{array}{l|l} A & \underline{\quad B \quad} \\ \vdots & \quad C \\ (R) & \end{array}$$, para algún $C \in \mathbb{N}$

donde: $R < B$.

o

$A = B \times C + R$, para algún $C \in \mathbb{N}$,

donde: $R < B$

Diremos entonces que estas dos representaciones son equivalentes; es decir, representan lo mismo: *"La repartición de A objetos entre B sujetos en la que a cada sujeto le corresponde C objetos y en la que al final de la repartición sobran R objetos, siendo R < B."*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Equivalencia:

Y la notación que usaremos es la siguiente:

$$\begin{array}{l|l} A & B \\ \cline{2-2} \vdots & C, \text{ para algún } C \in \mathbb{N} \\ (R) & \end{array}$$
donde $R < B$

$\Longleftrightarrow$

$A = B \times C + R$, para algún $C \in \mathbb{N}$,
donde: $R < B$

A esta equivalencia llamaremos ***"La equivalencia básica de la división de números naturales"***.

6.1) LA EQUIVALENCIA PARA EL CASO PARTICULAR DE UNA DIVISIÓN EXACTA DE NÚMEROS NATURALES

En particular, para el caso de una división exacta se tiene que, si A entre B es una división exacta (es decir A es divisible por B) entonces el residuo de dicha división será igual a cero y de aquí que la equivalencia anterior quedaría así:

$$\begin{array}{l|l} A & B \\ \cline{2-2} \vdots & C, \text{ para algún } C \in \mathbb{N} \\ (0) & \end{array}$$
donde $0 < B$

$\Longleftrightarrow$

$A = B \times C + 0$, para algún $C \in \mathbb{N}$,
donde: $0 < B$

$\Updownarrow$

$A = B \times C$, para algún $C \in \mathbb{N}$

Y como $0 < B$ es cierto para todo natural diferente de cero, ya no es necesario considerar esa condición.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Esta equivalencia quedaría así:

$$\begin{array}{l|l} A & B \\ \cline{2-2} \vdots & C, \text{ para algún } C \in \mathbb{N} \\ (0) & \end{array}$$ es lo mismo que $A = B \times C$, para algún $C \in \mathbb{N}$

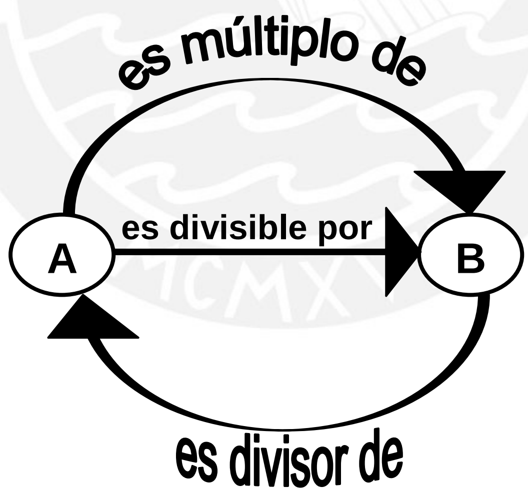
Pero:

$$\begin{array}{l|l} A & B \\ \cline{2-2} \vdots & C, \text{ para algún } C \in \mathbb{N} \\ (0) & \end{array}$$ es lo mismo que A es divisible por B

Entonces:

A es divisible por B es lo mismo que $A = B \times C$, para algún $C \in \mathbb{N}$

Y como ya sabemos:



Entonces:

A es múltiplo de B es lo mismo que $A = B \times C$, para algún $C \in \mathbb{N}$

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Esto quiere decir que:

Para cada valor natural de C, si multiplico a éste por B obtendré (A) un múltiplo de B.

Por ejemplo, si nos pidiesen hallar los múltiplos de 8, por lo anterior, lo que haría es multiplicar a 8 por cada número natural.

Así:

		Múltiplos de 8:	
8	8×0	0	0 es múltiplo de 8
	8×1	8	8 es múltiplo de 8
	8×2	16	16 es múltiplo de 8
	8×3	24	24 es múltiplo de 8
	8×4	32	32 es múltiplo de 8
	$\vdots$	$\vdots$	
	Etc.	Etc.	

De aquí que este procedimiento, encontrado a partir de la equivalencia básica de la división para el caso particular de la división exacta de números naturales, nos permite hallar los múltiplos de cualquier número natural diferente de cero.

6.2) PROCEDIMIENTO PARA HALLAR LOS MÚLTIPLOS DE UN NÚMERO NATURAL $\boldsymbol{N}$ $(\boldsymbol{N \neq 0})$

Múltiplos de N: $N \times 0;\ N \times 1;\ N \times 2;\ N \times 3;\ N \times 4;$ ...

Ejercicios:

a) Hallar los múltiplos de 6

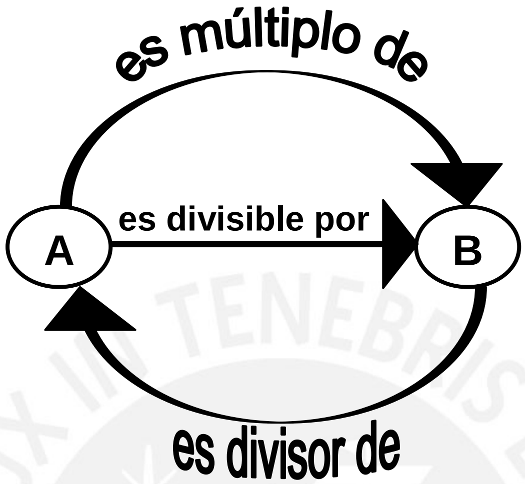
b) Hallar los múltiplos de 4

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

6.3) EL CASO N CERO: LOS MÚLTIPLOS DE CERO

¿Qué sucede con el caso del número natural N = 0?

Hemos presentado la equivalencia:



para A y B números naturales, con B $\neq$ 0, pues si nos ponemos en el caso en que B = 0 tendríamos que:

A es divisible por 0,

lo cual no es válido para ningún valor natural de A, ya que ningún número natural es divisible por 0.

Ya vimos entonces que la equivalencia la hemos establecido para B diferente de cero; sin embargo, veamos lo que sucedería si aplicamos ésta para el caso B igual a 0.

0 $\times$ m (para m natural)	**Múltiplos de 0:**
0×0	0
0×1	0
0×2	0
0×3	0
0×4	0
$\vdots$	$\vdots$

Aquí vemos que el único múltiplo de 0 sería 0.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Esto nos lleva a adoptar, por convención, que 0 es el único múltiplo de cero. Observemos que la equivalencia no se aplica en este caso, así que no será correcto decir que cero divide a cero.

Ejercicios:

Tenga presente que el fin de estos ejercicios es que los estudiantes formulen conjeturas tal y como se hizo en las justificaciones grupales de la sesión 6 del Capítulo 4.

Halla los múltiplos de algunos números naturales:

- Múltiplos de 0:___________________________________
- Múltiplos de 1: __________________________________
- Múltiplos de 2:___________________________________
- Múltiplos de 3: __________________________________
- Múltiplos de 4:___________________________________

(…)

Pregunta: ¿Puedes decir cuál es el mayor múltiplo de 7?

Halla los divisores de algunos números naturales

- Divisores de 0:___________________________________
- Divisores de 1: __________________________________
- Divisores de 2:___________________________________
- Divisores de 3: __________________________________
- Divisores de 4:___________________________________

(…)

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Observaciones:

1) Notemos que los aspectos teóricos presentados en la nueva propuesta han sufrido algunas variantes respecto a los incluidos en los anexos (ver Anexos S1 - S5) y que fueron trabajados con estudiantes. Esto se debe principalmente a que la nueva propuesta considera todos los aspectos mencionados en la parte introductoria de este capítulo en la búsqueda de que los estudiantes que comprendan lo que están estudiando, y que no solo se limiten a repetir fórmulas y/o recetas muchas veces dadas por el profesor, o así presentadas en algunos libros de texto.
2) De las experiencias didácticas realizadas y de las reflexiones consideradas, pensamos que los criterios de repartición equitativa y máxima son fundamentales para la divisibilidad y deben ser dados desde la presentación de la división de números naturales; esto es, según la propuesta del DCN, desde el tercer grado de primaria.
3) Asimismo, podemos observar que muchos de los ejercicios que se incluyen en las diferentes sesiones, así como en las actividades (anexos del tipo S y A, respectivamente), no se han vuelto a incluir en esta nueva propuesta. La razón del por qué se ha decidido no incluirlos formalmente, es que queda aún por investigar el nivel educativo en el que se aplicaría cada uno de los planteamientos ahí formulados. Tal investigación permitirá poder asignarlos, con mayor precisión, como ejercicios para estudiantes de acuerdo a la edad o nivel educativo ya que pensamos que el tema divisibilidad no debe verse solamente una vez durante la educación básica regular, sino verse progresivamente, de acuerdo al nivel de desarrollo cognitivo del estudiante.
4) Si el profesor decide emplear algunos de los problemas incluidos en algunos de los anexos, le sugerimos la aplicación de los mismos en una fase posterior al planteamiento “teórico” de la nueva propuesta, ya que, de lo contrario, podrían interferir con el proceso creativo, intuitivo y de reflexión de nuestros estudiantes.
5) Recomendamos no emplear la actividad “División con cero” (ver Anexo A2) puesto que dentro de nuestras consideraciones teóricas, hemos obviado los

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

casos de división con cero ya que desde el punto de vista de la división de números naturales, como reparticiones equitativas y máximas, este caso no guarda un significado relevante

6) Sugerimos recurrir al Capítulo 4 (específicamente a las justificaciones grupales transcritas en este capítulo) cada vez que se requiera de algunas pautas sobre cómo trabajar las justificaciones incluidas en la nueva propuesta, o en los problemas que se decida tomar de las actividades presentadas en los anexos. Recomendamos que se tome en cuenta las preguntas que se les formula a los estudiantes, las respuestas a sus inquietudes, las sugerencias que se les da, la corrección de las imprecisiones, las ideas clave que conducen a las demostraciones de los problemas planteados, etc.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Capítulo 6

CONSIDERACIONES FINALES

En este capítulo presentamos las conclusiones obtenidas respecto a los objetivos planteados en el Capítulo 1. Además, algunas sugerencias para una próxima investigación relacionada con el tema central de esta investigación que son las justificaciones.

6.1 Conclusiones

En cuanto al objetivo general de esta tesis:

"Plantear una propuesta para la inclusión de las justificaciones en la enseñanza de la divisibilidad en la Educación Básica Regular."

La propuesta hecha en el capítulo 5 nos permite afirmar que se ha cumplido este objetivo, como una consecuencia del cumplimiento de los objetivos específicos, según detallamos a continuación.

6.1.1 Respecto al primer objetivo específico:

"Analizar cómo se consideran las justificaciones en el Diseño Curricular Nacional (DCN) de Educación Básica Regular (EBR) en Perú."

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Identificar el tratamiento que se le da a las justificaciones en el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular en Perú nos llevó a realizar un estudio detallado del documento que sirve como referencia básica para la elaboración de propuestas curriculares a nivel local, así como para la elaboración de los libros de texto en todo el país. Como resultado de este estudio llegamos a las siguientes conclusiones:

1. Existen indicios claros para pensar que el DCN propone una enseñanza de las matemáticas que aunque no gire alrededor de las justificaciones, emplee éstas como herramientas para la adquisición y construcción de conocimiento matemático. Entre uno de estos indicios tenemos la consideración de uno de los procesos transversales (Razonamiento y demostración), que forma parte de las capacidades a ser desarrolladas por todo estudiante al finalizar la EBR. Sin embargo, el DCN no presenta muestras concretas de cómo lograr estos objetivos. Solo se señalan algunas pautas generales (ver CUADRO 3.3) que los profesores deben tomar como referencia para desarrollar los procesos vinculados a las capacidades que se espera demuestren los estudiantes al finalizar cada grado, y en general la educación básica regular.
2. El DCN plantea de forma explícita el desarrollo de la capacidad “demuestra” recién a partir del tercer grado de secundaria, y aunque las capacidades relacionadas con la demostración matemática son pocas (6 en total), éstas se centran en su mayoría en el tema de Identidades trigonométricas, lo que nos hace pensar en la relevancia sesgada que el DCN le da a la justificación de los resultados vinculados a este tema.
3. La propuesta del DCN tiene buenos elementos a ser destacados, sin embargo consideramos que éstos se presentan en forma muy general, lo cual no permite plantearse metas

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

concretas, en el caso de los autores de textos escolares o de los mismos profesores que tienen como guía este documento oficial.

4. El DCN no presta la atención debida al desarrollo de capacidades demostrativas para la teoría de números, y en particular para la teoría de divisibilidad. Posterga el desarrollo de habilidades demostrativas para los tres últimos grados de la Educación Básica Regular en los cuales se centran en mayor medida en las identidades trigonométricas.

6.1.2 Respecto al segundo objetivo específico:

"Analizar la inclusión de las justificaciones, al tratar el tema de divisibilidad, en algunos de los libros de texto más difundidos en la enseñanza de las matemáticas en Perú."

Identificar el tratamiento que se le da a las justificaciones en los libros de texto nos llevó a realizar un estudio detallado de cuatro de los textos más difundidos en la enseñanza de las matemáticas en nuestro país. Como resultado de este estudio llegamos a las siguientes conclusiones:

5. En ninguno de los cuatro textos analizados se recoge la propuesta planteada en el DCN, que - aunque en términos muy generales - destaca la importancia que debe tener en la Educación Básica Regular el fomento de la argumentación, el planteamiento de conjeturas, la búsqueda de diversos métodos de solución, etc. en la formación de todo estudiante, con el propósito esencial de desarrollar su pensamiento matemático.
6. El tratamiento de las justificaciones en los libros de textos es casi nulo. Solo uno de los libros analizados presenta algunas pocas demostraciones.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

7. Percibimos deficiencias en el uso de notaciones así como en el rigor de las definiciones presentadas.
8. Las tareas propuestas son en muchos casos repeticiones de los ejemplos o ejercicios resueltos. Aunque algunas de las tareas propuestas pueden propiciar la generación de justificaciones, en los enunciados de las mismas no se exige justificación alguna.
9. Los cuatro libros de texto analizados contienen expresiones lógicas que no explican.

6.1.3 Respecto al tercer objetivo específico:

"Examinar las reacciones de estudiantes de primer grado de secundaria ante un conjunto de situaciones problemáticas relacionadas con la divisibilidad, en las que se ponga énfasis en las justificaciones."

Identificar estas reacciones nos condujo a plantear una propuesta inicial que contenía aspectos teóricos, así como situaciones problemáticas sobre la divisibilidad de números naturales que involucraban justificaciones. Esta propuesta fue puesta en práctica con la colaboración de cinco estudiantes de primer grado de secundaria, y a partir de esta aplicación es que generamos una nueva propuesta (ver Capítulo 5) teniendo como base las observaciones y reflexiones hechas a partir de la puesta en acción de la primera propuesta, así como el análisis de las justificaciones proporcionadas por estos estudiantes.

Como resultado de este estudio llegamos a las siguientes conclusiones:

10. Aunque inicialmente los estudiantes no tenían experiencia alguna con situaciones problemáticas involucrando justificaciones en sus clases de matemática, al finalizar las

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

sesiones contenidas en nuestra propuesta inicial hemos podido identificar claramente el proceso demostrativo en su plenitud. Más aún, las justificaciones grupales de la sesión 6 (ver Capítulo 4) son una clara muestra de esta afirmación. Esta sesión refleja notoriamente la manifestación de las fases previas a la demostración (detalladas en el Capítulo 2), y la culminación del proceso demostrativo con las demostraciones matemáticas ahí expuestas. Además, en este proceso se observó como un acontecimiento repetitivo la crítica constante a las conjeturas planteadas entre compañeros, lo que facilitaba la precisión en la formulación de cada conjetura dada por los estudiantes.

11. Los conocimientos previos de los estudiantes sobre divisibilidad resultaron ser más de una vez obstáculos para el desarrollo de las sesiones, puesto que estos dificultaron la construcción de conocimiento matemático justificado por parte de los estudiantes como inicialmente habíamos esperado. A cambio, los estudiantes usaban directamente los resultados que ya conocían “de memoria” sin interesarse por entender el por qué de dichas verdades matemáticas. Por ejemplo tenemos el caso de las respuestas de los estudiantes a una de las justificaciones individuales que debían presentar para justificar que la suma de dos números pares es siempre un número par. La mayoría de los estudiantes respondió diciendo que sí era cierto porque “par + par = par”, lo que como sabemos no justifica el valor de verdad de la afirmación presentada, aunque el resultado sea ampliamente conocido. Estas observaciones las tenemos en cuenta en la reformulación de la propuesta, así como en las sugerencias dadas en la siguiente sección.
12. Los estudiantes encontraron difícil trabajar con generalizaciones. Esto lo pudimos ver reflejado en las sesiones en las que buscábamos que ellos mismos deduzcan la forma general de un

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

múltiplo de (o número divisible por) N, usando representaciones simbólicas. Pensamos que esto se debió principalmente a que el curso “Algebra” recién figura en el segundo grado de secundaria según el currículo de su colegio y por lo tanto no tienen esa familiaridad de trabajo con variables.

13. Los estudiantes se mostraron altamente participativos. Más aún, en muchas de las sesiones los estudiantes gritaban simultáneamente sus respuestas, lo que nos sugería el deseo de que sus ideas sean escuchadas justo en el momento que éstas llegaban a ellos.
14. Es importante brindar tiempo suficiente para que los estudiantes reflexionen sobre cada una de sus respuestas y brindarles la oportunidad de expresar sus justificaciones de manera verbal, que también es una manera válida de justificación, antes de pasar a una formalización simbólica.
15. Una nota por debajo del promedio en la enseñanza tradicional no significa el fracaso de un estudiante en una enseñanza de las matemáticas donde se incluyen las justificaciones. Este es el caso de Renato, uno de los alumnos que formó parte de la puesta en acción de la propuesta inicial, que tuvo uno de los mejores desempeños.
16. Los estudiantes respondieron de forma positiva a los constantes cuestionamientos del profesor-investigador, lo que además de guiar el proceso justificativo, contribuyó a que los estudiantes se familiaricen con una enseñanza de las matemáticas reflexivas y bien construidas al requerir que cada uno de sus procedimientos sean debidamente justificados. En este sentido, el papel que juega el profesor en una enseñanza de las matemáticas que incluye a las justificaciones es de vital importancia, ya que es la persona que dirige el proceso justificativo mediante constantes cuestionamientos, correcciones de las imprecisiones, la creación

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

de problemas que ayuden a que el proceso demostrativo se dé de forma más fluida, la habilidad de discernir si una justificación es o no es correcta, la orientación en la búsqueda de los argumentos adecuados, etc.

6.2 Sugerencias y comentarios adicionales

Aunque los resultados obtenidos a partir de la primera propuesta nos proporcionan resultados positivos en cuanto al objetivo general, consideramos que la formulación de la nueva propuesta presentada en el Capítulo 5 de este trabajo nos da pautas importantes para incluir las justificaciones en la enseñanza de la divisibilidad de números naturales; permitirá que los estudiantes entiendan la idea intuitiva de la divisibilidad de números naturales desde la perspectiva de la división de números naturales como una repartición equitativa y máxima. Sugerimos para una próxima investigación que se aplique esta nueva propuesta con un nuevo grupo de estudiantes. Preferentemente se sugiere que esta nueva puesta en acción sea llevada a cabo con estudiantes de nivel primario que no cuenten con conocimientos previos de divisibilidad de números naturales, con el propósito que se pueda reflejar en ellos la construcción natural, significativa y coherente del tema en cuestión que es lo que esta nueva propuesta plantea. Más específicamente, se sugiere la enseñanza de la división de números naturales, desde la perspectiva de las reparticiones equitativas y máximas – como ya hemos manifestado en la observación 2 del capítulo 5 – y avanzar gradualmente hacia la enseñanza de la divisibilidad de números naturales, teniendo en cuenta que la propuesta (los aspectos teóricos), tal y como se encuentra planteada en la nueva propuesta (ver Capítulo 5), se sugiere que sea así vista en una etapa posterior debido al uso constante de variables, para definir en forma abstracta los objetos matemáticos involucrados y realizar justificaciones más complejas.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Como parte de nuestras investigaciones futuras, queda pendiente también determinar a partir de qué nivel educativo, y más específicamente el grado, en el que se podría enseñar las justificaciones de los criterios de divisibilidad a estudiantes de nivel escolar. Así como la construcción de ítems que vayan midiendo el progreso de las justificaciones de los estudiantes (ver observación 3, Capítulo 5).

Observemos que las consideraciones hechas de los conceptos de justificación y de demostración matemática han sido así dadas porque creemos que las justificaciones, en el sentido más amplio, guardan más relación con el desarrollo progresivo del razonamiento matemático de los estudiantes desde un nivel escolar, que es el nivel desde el cual se propone la inclusión de las justificaciones en la enseñanza de las matemáticas, y en particular en la enseñanza de la divisibilidad de números naturales.

Es importante destacar que los resultados encontrados nos hacen reafirmar la necesidad de una sólida formación matemática de los futuros educadores y autores de textos de matemática, para el nivel escolar en particular, en nuestro país y en el mundo. Una buena formación que permita a los profesores ser capaces de plantear propuestas concretas en la búsqueda de la inclusión de justificaciones en la enseñanza de las matemáticas; en el manejo de los libros de texto, para la detección de deficiencias como la falta de rigor o la presencia de errores; de estar lo suficientemente preparados para poder responder responsablemente a las dudas espontáneas manifestadas por nuestros estudiantes en clase; de llegar a tener la habilidad de detectar los errores más comunes en una clase y buscar corregirlos en interacción con los alumnos; y fundamentalmente, de ser estimuladores en el desarrollo del pensamiento matemático de nuestros niños, contribuyendo a que busquen justificaciones, hagan conjeturas, propongan contraejemplos y busquen generalizaciones.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Referencias:

Bieda, K. (2008). *The pedagogy of proving in middle school mathematics.* Tesis doctoral, University of Wisconsin-Madison, Estados Unidos.

Blanton, M., Knuth, E. & Stylianou, D. (2011). *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective*. New York, NY: Routledge

Chick, H., McCrae, B. & Vincent, J. (2005). Argumentation profile charts as tools for analyzing students' argumentations. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 4, pp. 281-288. Melbourne: PME.

Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular del Perú (2009). 2da Edición. Recuperado el 3 de mayo de 2011 de: http://www.minedu.gob.pe/

Diseño Curricular Base elaborado por el Ministerio de Educación y Ciencia de España (MEC, 1989).

Godino, J. & Recio, A. (2001a). Significados institucionales de la demostración matemática. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 19 (3): 405-414.

Godino, J. & Recio, A. (2001b). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 48.* 83-89.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En: Dubinski, E.; Schoenfeld, A. y Kaput, J. (Eds), *Research on Collegiate Mathematics Education*, vol. III, 234-283. American Mathematical Society, Providence, USA.

Ibañes, M. & Ortega, T. (1997). La demostración en Matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la Educación Secundaria. *Educación Matemática*, 9, 2, 65-104.

Ibañes, M. (2002). Analizadores específicos para la demostración matemática. Aplicación a los textos en el tema de Trigonometría en Bachillerato. (Texto de la ponencia presentada en la reunión del Grupo durante el 6º Simposio de la SEIEM).

Ibañes, M. (2001). *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato*. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid. Valladolid, España.

National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers (2010). Common Core State Standards for Mathematics. Washington D.C. United States of America.

National Council of teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

Recio, A. (2002). La demostración en Matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y J. D. Godino

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

(Eds.), *Actas del V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 27 – 43. Universidad de Almería.

Segal, S. (2009). *Action research in Mathematics Education: a study of a master's program for teachers.* Tesis doctoral, Montana State Universty, Bozeman, Montana, Estados Unidos.

Souza, E. (2007). *Argumentação e prova no ensino medio: Análise de uma coleção didática de matemática*. Tesis de Maestría. Pontificia Universidad Católica de São Paulo. Brasil.

Tripp (2005). Pesquisa-ação: uma introdução metodológica*. Educação e Pesquisa*, São Paulo, 31, 3, 443-466.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

ANEXOS

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

ANEXO S1

Contenido de la Sesión 1

División de números naturales

Acordemos considerar el conjunto de los números naturales como aquel formado por los elementos 0, 1, 2, 3, 4,…, etc.

Ejemplos resueltos:

1) 15 | 5
(0) 3

Esto es equivalente a:

$$15 = (5 \times 3) + 0$$

O lo que es lo mismo:

$$15 = 5 \times 3$$

Dividendo = 15
Divisor = 5
Cociente = 3
Residuo o resto = 0

2) 17 | 5
(2) 3

Esto es equivalente a:

$$17 = (5 \times 3) + 2$$

Dividendo = 17
Divisor = 5
Cociente = 3
Residuo o resto = 2

3) 163 | 6
43 27
(1)

Esto es equivalente a:

$$163 = (6 \times 27) + 1$$

Dividendo = 163
Divisor = 6
Cociente = 27
Residuo o resto = 1

4) 3572 | 2
15 1786
17
12

Dividendo = 3572
Divisor = 2
Cociente = 1786
Residuo o resto = 0

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

(0)

Esto es equivalente a:

$$3572 = (1786 \times 2) + 0$$

O lo que es lo mismo:

$$3572 = (1786 \times 2)$$

Actividad: “Residuo vs. Divisor”

En general, para Dividendo, Divisor (diferente de cero), Cociente, y Residuo, todos estos, números naturales, tenemos que:

$$\begin{array}{l|l} \text{Dividendo} & \underline{\text{Divisor}} \\ \vdots & \text{Cociente} \\ \text{(Residuo)} & \end{array} \quad \text{, donde Residuo < Divisor}$$

Esto es lo mismo a escribir:

$$\boxed{Dividendo \ = (Divisor \ \times \ Cociente) + \ Residuo} \quad ,$$

donde: Residuo < Divisor

Primera equivalencia:

$\begin{array}{l\|l} \text{Dividendo} & \underline{\text{Divisor}} \\ \vdots & \text{Cociente} \\ \text{(Residuo)} & \end{array}$ donde Residuo < Divisor	⟺ Dividendo = (Divisor x Cociente) + Residuo, donde Residuo < Divisor

¿Qué sucede en el caso que DIVISOR = 0?

La siguiente actividad está orientada a comprender mejor este importante “detalle” de la división de números naturales.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Actividad: "División con cero"

División Exacta

Es aquella división cuyo residuo o resto es igual a cero. De otra manera (en el caso que el residuo sea diferente de cero), estamos hablando de una División Inexacta.

Segunda equivalencia:

División exacta $\Leftrightarrow$ $\begin{array}{r|l} \text{Dividendo} & \text{Divisor} \\ \cline{2-2} \vdots & \text{Cociente} \\ (0) & \end{array}$

$\Updownarrow$

Dividendo = (Divisor x Cociente)

Ejemplos:

1) ¿15 entre 5 es una división exacta? ¿Por qué?
2) ¿17 entre 5 es una división exacta? ¿Por qué?
3) ¿163 entre 6 es una división exacta? ¿Por qué?
4) ¿3572 entre 2 es una división exacta? ¿Por qué?
5) Dar ejemplos de divisiones exactas e inexactas.

6) Si $\begin{array}{r|l} \overline{abc} & 4 \\ \cline{2-2} \vdots & 161 \\ (0) & \end{array}$ (donde $\overline{abc}$ representa un número natural de 3 cifras), hallar $\overline{abc}$.

7) Si $\begin{array}{r|l} \overline{8m6} & 2 \\ \cline{2-2} \vdots & \overline{a3b} \\ (x) & \end{array}$ es una división exacta. Hallar $a+b+m+x$.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

ANEXO S2

Contenido de la Sesión 2

Ejemplos:

1) En lo siguiente:

$$\begin{array}{l|l} 49 & 8 \\ \cline{2-2} (9) & 5 \end{array}$$

¿Es esta una división correcta?, ¿por qué?

2) En la siguiente expresión:

$$\begin{array}{l|l} D & 8 \\ \cline{2-2} (R) & C \end{array}$$

Sin importar cuánto valgan C y D, ¿qué valores podría tomar el residuo R para que esta expresión represente una división correcta? Justifica tu respuesta.

3) Todo número impar entre 3 es una división exacta. ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.

4) ¿Algún número par entre 5 es una división exacta? Justifica tu respuesta.

Divisibilidad

Decir que la división de dos números naturales A y B (A entre B, con B diferente de cero) es una división exacta es lo mismo a decir que **el número A es divisible por el número B.**

Entonces, decir que A es divisible por B es equivalente a:

$$\begin{array}{l|l} A & B \\ \cline{2-2} \vdots & n \\ (0) & \end{array}$$

, donde n (el cociente) es un número natural

Lo cual equivale, según lo que hemos visto, a escribir:

A = (B x n) + 0

Es decir: A = B x n

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

De aquí que, decir que A es divisible por B significa que siempre podremos encontrar un número natural “n” tal que: A = B x n.

Lo anterior puede ser resumido mediante la siguiente representación.

Tercera equivalencia:

A es divisible por B $\Longleftrightarrow$ A entre B es una división exacta. $\Longleftrightarrow$ A = B x n, para algún número natural n.

<u>Ejemplos</u>:

9) Dar ejemplos de divisibilidad.

10) ¿8 es divisible por 16? ¿Por qué?

11) ¿15 es divisible por 5? ¿Por qué?

12) ¿17 es divisible por 5? ¿Por qué?

13) ¿163 es divisible por 6? ¿Por qué?

14) ¿3572 es divisible por 2? ¿Por qué?

15) ¿Por qué números es divisible 18?

16) Completa con algunos ejemplos:

   a) _________________ es divisible por 4.
   b) _________________ es divisible por 2.
   c) _________________ es divisible por 6.

17) ¿0 es divisible por 6? ¿Por qué?

18) Completa con algunos ejemplos:

   a) 34 es divisible por ________________
   b) 56 es divisible por ________________

19) ¿6 es divisible por 0? ¿Por qué?

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

ANEXO S3

Contenido de la Sesión 3

Ejemplos:

1) Si M = 458 x 3, ¿M es divisible por 3? ¿Por qué?
2) Si F = 21 x 7 x 19, sin multiplicar responde: ¿F es divisible por 3? ¿Por qué?
3) Si N es divisible por 7, entonces ¿N = 7 x m, para algún número natural m?
4) ¿Cuál es la forma general de un número par?

Actividad: "Tú decides"

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ANEXO S4

Contenido de la Sesión 4

<u>Divisor / múltiplo</u>

Cuando A sea divisible por B también diremos, equivalentemente, que:

A es un **<u>múltiplo</u>** de B,

B es un **<u>divisor</u>** de A,

Todas estas frases deben entenderse como sinónimos de la frase:

"A es divisible por B".

Así,

es múltiplo de

A es divisible por B

es divisor de

<u>Ejemplos resueltos</u>:

1) En el caso de 15 y 5, sabemos que 15 es divisible por 5, pues la división de 15 entre 5 es exacta.

Esto, entonces, sería equivalente a decir que 15 es múltiplo de 5, así como 5 es divisor de 15.

Si queremos usar todo lo visto previamente, diremos que:

15 es <u>divisible</u> por 5

La división de 15 entre 5 es exacta

Existe el número natural 3 tal que 15 = 3 x 5

15 es un <u>múltiplo</u> de 5

5 es un <u>divisor</u> de 15

Estas son seis formas diferentes de decir lo mismo:
"15 es divisible por 5".

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

2) Por otro lado, sabemos también que 15 no es divisible por 4 porque la división de 15 entre 4 es inexacta. Entonces, tendríamos que 15 no es múltiplo de 4, o que 4 no es divisor de 15.

La tercera equivalencia de divisibilidad quedaría así:

“La gran equivalencia de divisibilidad”

A es un múltiplo de B

$\Updownarrow$

A es divisible por B $\Leftrightarrow$ A entre B es una división exacta $\Leftrightarrow$ A = B x n, para algún número natural n.

$\Updownarrow$

B es un divisor de A

$\Updownarrow$

B es un factor de A

<u>Ejemplos</u>:

1) Usa los números *3572* y *2*, para completar:
   - 1.a) ________ es divisible por ________
   - 1.b) ________ es múltiplo de ________
   - 1.c) ________ es divisor de _________
   - 1.d) La división de 3572 entre 2 es __________
2) Usa los números *17 y 5*, para completar:
   - 2.a) ________ es divisible por ________
   - 2.b) ________ es múltiplo de ________

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

2.c) ________ es divisor de _________

2.d) La división de 17 entre 5 es __________

3) Si N es divisible por 7, ¿será cierto que N es múltiplo de 7? ¿Por qué?
4) Si M = 458 x 3, entonces ¿M es múltiplo de 3? ¿Por qué?
5) Si M es múltiplo de 3, entonces ¿M = 3 x 458?
6) ¿Cómo puedo hallar los múltiplos de 3? ¿Cuáles son los múltiplos de 3?
7) ¿Cómo puedo hallar los divisores de 3? ¿Cuáles son los divisores de 3?
8) Si C = 5 x m, donde m es un número natural, entonces ¿C es un divisor de 5?
9) ¿Cuáles son los múltiplos de 5?
10) ¿Cuáles son los divisores de 5?
11) ¿Cuáles son los divisores de 28?
12) ¿Cuáles son los múltiplos de 28?

A continuación, CORRIGE las siguientes afirmaciones en el caso de que estén erradas y JUSTIFICA en cada caso.

¿Incorrecto?	Correcto	pues:
18 es un divisor de 9		
8 es divisible por 8		
4 es un múltiplo de 24		
111 entre 3 es una división inexacta		
3 es divisor de 111		

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ANEXO S5

Contenido de la Sesión 5

Recordemos la definición dada la clase pasada:

es múltiplo de

$\boxed{\text{A es divisible por B}}$

es divisor de

Preguntas:

¿Será que esta definición se puede precisar un poco más?

¿Habrá problemas con algún caso?

¿QUÉ SUCEDE CON EL CASO B = 0?

Entonces, se cumple la equivalencia:

es múltiplo de

$\boxed{\text{A es divisible por B}}$

es divisor de

para A y B números naturales, con B $\neq$ 0, pues si nos ponemos en el caso en que B = 0 tendríamos que:

A es divisible por 0,

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

lo cual no es válido para ningún valor natural de A, ya que como hemos visto ningún número natural es divisible por 0.

De la equivalencia anterior diríamos entonces que ningún número natural es múltiplo de 0.

SIN EMBARGO, si tenemos en cuenta el procedimiento que nace de la equivalencia dada, tendríamos que los múltiplos de 0 son:

$0 \times$ m (para m natural)	Múltiplos de 0:
0×0	0
0×1	0
0×2	0
0×3	0
0×4	0
$\vdots$	$\vdots$

De esto, el único múltiplo de 0, vendría a ser 0.

De aquí que por un lado tendríamos que ningún número natural es divisible por 0, y por otro lado que 0 es múltiplo de 0. Lo cual vendría a ser una contradicción para nuestra equivalencia.

Pero haremos una ÚNICA EXCEPCIÓN para la equivalencia presentada, para el caso B = 0:

Diremos que AUNQUE 0 no es divisible por 0, 0 es múltiplo de 0.

Actividad: “Finito ó infinito”

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ANEXO S6

Contenido de la Sesión 6

Actividad: "Múltiplos y divisores"

<u>Ejemplos</u>:

Hallemos los múltiplos de algunos números naturales:

- Múltiplos de 0:____
- Múltiplos de 1: _______________________________________
- Múltiplos de 2:____
- Múltiplos de 3: _______________________________________
- Múltiplos de 4:____

(…)

Pregunta: ¿Cuál es el mayor múltiplo de 7?

Hallemos los divisores de algunos números naturales

- Divisores de 0:____
- Divisores de 1: _______________________________________
- Divisores de 2:____
- Divisores de 3: _______________________________________
- Divisores de 4:____

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ANEXO S7

Contenido de la Sesión 7

Actividad: "Remix de justificaciones"

De esta actividad se desarrollan las siguientes justificaciones grupalmente:

2) Escribe dentro de los paréntesis **VERDADERO** ó **FALSO** según corresponda y **JUSTIFICA** cada una de tus respuestas.
   a) ¿El número 385 es múltiplo de 11? (__________________)
   b) ¿El número N = 21 x 33 es divisible por 7? (____________________)
   c) ¿El número 123 es múltiplo de 7? (______________________)
3) Completa los espacios en blanco usando alguna de las siguientes palabras: **NINGÚN**, **ALGÚN**, **TODO**, según corresponda. **JUSTIFICA** cada una de tus respuestas.
   b) "____________ número natural es divisible por cero."
   c) "Cero es divisible por __________número natural."
   h) "Cero es múltiplo de _______ número natural."
   i) "________ múltiplo de 5 es también múltiplo de 4."

<u>Ejemplos</u>:

1) Si sumas un múltiplo de 2 con otro múltiplo de 2, el resultado siempre será:

a) Un múltiplo de 2
b) Un múltiplo de 4
c) Un múltiplo de 8

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

2) Si sumas un múltiplo de 3 con otro múltiplo de 3, el resultado siempre será:

a) Un múltiplo de 6
b) Un múltiplo de 3
c) Un múltiplo de 9

3) Si sumas un múltiplo de 4 con otro múltiplo de 4, el resultado siempre será:

a) Un múltiplo de 16
b) Un múltiplo de 8
c) Un múltiplo de 4

4) Si sumas un múltiplo de 5 con otro múltiplo de 5, el resultado siempre será:

a) Un múltiplo de 25
b) Un múltiplo de 10
c) Un múltiplo de 5

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

ANEXO S8

Contenido de la Sesión 8

Actividad: "Un poco más de divisibilidad"

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

ANEXO S9

Contenido de la Sesión 9

Actividad: “Último cuestionario”

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

ANEXO A1

Actividad “Residuo vs. Divisor”

<u>Actividad</u>: “Residuo vs. Divisor”

Un profesor encontró entre los cálculos de sus alumnos estas tres divisiones.
En caso de presentarse algún error coloca una (X) y explica cuál o cuáles son estos errores y después corrígelos. En el caso de que no se presenten errores coloca un ($\surd$).
<u>Nota</u>: el número entre paréntesis ( ) representa el residuo de la división.

1) $\begin{array}{r|l} 37 & 5 \\ \cline{2-2} (7) & 6 \end{array}$

2) $\begin{array}{r|l} 43 & 5 \\ \cline{2-2} (3) & 8 \end{array}$

3) $\begin{array}{r|l} 100 & 7 \\ \cline{2-2} 30 & 13 \\ (9) & \end{array}$

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

ANEXO A2

Actividad “División con cero”

Actividad: “División con cero”

Completa las siguientes tablas y responde las preguntas que se presentan a continuación:

Tabla 1

$\frac{a}{b}$ (que significa “a entre b”)	es igual a:	, pues:
$\frac{0}{4}$		
$\frac{0}{8}$		
$\frac{0}{19}$		
$\frac{0}{1}$		

1) ¿Qué ocurre, en general, si en una división el dividendo es igual a cero y el divisor es (en general) cualquier número diferente de cero?
Justifica tu respuesta.
Es decir, si $m \neq 0$, ¿a qué es igual $\frac{0}{m}$?

$$\frac{0}{m} = \boxed{}$$

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Tabla 2

$\frac{a}{b}$ (que significa "a entre b")	es igual a:	, pues:
$\frac{5}{0}$		
$\frac{13}{0}$		
$\frac{7}{0}$		
$\frac{1}{0}$		

2) ¿Qué ocurre en el caso que el dividendo es (en general) cualquier número diferente de cero y el divisor es igual a cero? Justifica tu respuesta.

3) Por otro lado, ¿qué ocurre en una división, donde el dividendo y el divisor (ambos) son iguales a cero? Justifica tu respuesta.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ANEXO A3

Actividad "Tú decides"

Actividad: "Tú decides"

I) Escribe **Verdadero** ó **Falso** entre los paréntesis según corresponda y **justifica** cada una de tus respuestas.

1) El número 65428 es divisible por 7. ( )
2) El número 62381 es divisible por 11 ( )
3) Si A = 5 x n (n es un número natural), entonces A es divisible por 5. ( )
4) Si un número es divisible por 5, entonces **siempre** será divisible por 10. ( )
5) Si un número es divisible por 10, entonces **siempre** será divisible por 5. ( )

II) Completa usando alguna de las siguientes palabras: **Siempre**, **A veces** ó **Nunca. Justifica** cada una de tus respuestas.

1) Si un número R es divisible por 2, entonces $\frac{R}{2}$ (R entre 2) es _________ un número divisible por 2.
2) Cuando sumas dos números pares cualesquiera, el resultado _________ es un número par.
3) Un número par ________ es divisible por 3.
4) Teniendo en cuenta que un número impar es aquel que NO es par y si B = 5 x p (donde p es un número impar), entonces B ________ es divisible por 2.
5) La suma de dos números impares cualesquiera ________ es un número impar.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

ANEXO A4

Actividad "Finito o infinito"

Actividad: "Finito ó infinito"

1) Completa la siguiente tabla y a continuación responde las preguntas dadas según el orden que se te presentan.

Tabla 1

A	Algunos múltiplos de A	Número de múltiplos de A	Menor múltiplo de A
2			
3			
5			
9			
16			

a) Pepito se da cuenta de que el número de múltiplos en todos los casos, presentados en la Tabla 1, es infinito. Luego, Pepito afirma lo siguiente:

"Yo creo entonces que todos los números tienen infinitos múltiplos."

¿Estás de acuerdo con la conjetura de Pepito? ¿Cómo la justificarías?

b) ¿La conjetura dada por Pepito es válida si A = 0?

Si no, ¿cómo cambiarías esta conjetura? Justifica.

c) ¿Podrás plantear alguna(s) otra(s) conjeturas (así como hizo Pepito) a partir de lo obtenido en la tabla anterior? ¿Cuál(es)? y **¿Cómo la(s) justificarías?**

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Conjetura 1:

____

____

Justificación:

Conjetura 2:

____

____

Justificación:

Conjetura 3:

____

____

Justificación:

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

2) Completa la siguiente tabla y a continuación responde las preguntas dadas según el orden que se te presentan.

Tabla 2

A	Divisores de A	Menor divisor de A	Mayor divisor de A
5			
8			
16			
36			
74			

a) ¿Podrás plantear alguna(s) conjetura(s) de lo obtenido en la tabla anterior (Tabla 2)? ¿Cuál(es)? y **¿Cómo la(s) justificarías?**

Conjetura 1:

____

____

Justificación:

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Conjetura 2: ____ ____ <u>Justificación</u>:

b) ¿Qué ocurre en el caso de que A = 0? ¿Cambiarías tu(s) conjetura(s)? Justifica.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ANEXO A5

Actividad "Múltiplos y divisores"

<u>Actividad</u>: "Múltiplos y divisores"

¿Recuerdas la equivalencia de divisibilidad?

Completa los espacios en blanco usando A o B según corresponda.

Para B≠0,

___ es divisor de ___ ⟺ A es divisible por B ⟺ ___ es múltiplo de ___

Escribe un ejemplo:

1. ¿0 es divisible por 0? ¿Por qué?
2. ¿0 es divisible por 1? ¿Por qué?
3. ¿0 es divisible por 2? ¿Por qué?
4. ¿0 es divisible por 3? ¿Por qué?
5. ¿0 es divisible por 4? ¿Por qué?
6. ¿Cuáles son los divisores de 0? ¿Por qué?
7. Completa con el o los números naturales que hagan verdadera la siguiente afirmación y justifica tu respuesta.

"0 es múltiplo de ________________________________"

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

ANEXO A6

Actividad “Remix de justificaciones”

Actividad: “Remix de justificaciones”

1) Miguel plantea la siguiente conjetura:

   “Todo número natural tiene un número finito de divisores.”

   Se te pide lo siguiente:

   a) Responde: ¿Es verdadera esta conjetura o puedes mejorarla?

   b) Justifica la conjetura dada por Miguel en el caso de que esta sea verdadera, o la conjetura mejorada.

2) Escribe dentro de los paréntesis **VERDADERO** ó **FALSO** según corresponda y **JUSTIFICA** cada una de tus respuestas.

   a) ¿El número 385 es múltiplo de 11? (________________)

   b) ¿El número N = 21 x 33 es divisible por 7? (__________________)

   c) ¿El número 123 es múltiplo de 7? (____________________)

   d) ¿El número 385 es múltiplo de 11? (________________)

   e) ¿El número N = 21 x 33 es divisible por 7? (__________________)

   f) ¿El número 123 es múltiplo de 7? (____________________)

   g) Si sumas dos números divisibles por 4 cualesquiera, ¿el resultado será SIEMPRE un número divisible por 4? (_______________)

d) Completa los espacios en blanco usando alguna de las siguientes palabras: **NINGÚN**, **ALGÚN**, **TODO**, según corresponda. **JUSTIFICA** cada una de tus respuestas.

   a) “___________ número natural es múltiplo de sí mismo.”

   b) “___________ número natural es divisible por cero.”

   c) “Cero es divisible por _________número natural.”

   d) “________ divisor de 8 es divisor de 35.”

   e) “El número 1 es divisible por _________ número natural.”

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

f) "_______ número par es también divisible por 3."

g) "El número uno es divisor de ____________ número natural."

h) "Cero es múltiplo de _______ número natural."

i) "________ múltiplo de 5 es también múltiplo de 4."

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

ANEXO A7

Actividad “Un poco más de divisibilidad”

Actividad: “Un poco más de divisibilidad”

1) Sabiendo que: $4!$ significa $4 \times 3 \times 2 \times 1$ $5!$ significa $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ Responde **justificando** adecuadamente cada una de tus respuestas.	
a) ¿Qué significa $8!$?	
b) ¿ $\mathbf{5}!$ es un número par? Justificación:	V ó F
c) ¿ $8!$ es múltiplo de 7? Justificación:	V ó F
d) ¿ $8!$ es múltiplo de 21? Justificación:	V ó F

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

e) ¿ $62!$ es un múltiplo de 37? Justificación:	V ó F
f) Pedro calculó $23!$ Sin efectuar operaciones, determina la última cifra del resultado encontrado por Pedro.	

2) Si: $1(1+1)=2$ es un número par $2(2+1)=6$ es un número par $3(3+1)=12$ es un número par $4(4+1)=20$ es un número par ¿Será cierto que si n es un número natural, entonces $n(n+1)$ es **siempre** un número par? *Observa que $n(n+1)$ representa el producto de dos números naturales consecutivos*	Sí ó No
Justificación:	

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ANEXO A8

Actividad "Último cuestionario"

Actividad: "Último cuestionario"

1) ¿34 es divisible por 8? ¿Por qué?
2) ¿477 es múltiplo de 8? ¿Por qué?
3) ¿4 es divisor de 0? ¿Por qué?
4) ¿2 es múltiplo de 0? ¿Por qué?
5) ¿0 es divisor de 15? ¿Por qué?
6) ¿Todo número par es divisible por 5? ¿Por qué?
7) ¿Todo múltiplo de 3 termina solamente en cualquiera de las cifras: 0, 3, 6 ó 9? ¿Por qué?
8) ¿Todo múltiplo de 5 termina solamente en cualquiera de las cifras: 0 ó 5? ¿Por qué?

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis