

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD  
CATÓLICA DEL PERÚ**

**Escuela de Posgrado**



Idoneidad didáctica de un proceso de instrucción sobre  
optimización de funciones reales de dos variables para  
estudiantes de Economía

Tesis para obtener el grado académico de  
Maestro en Enseñanza de las Matemáticas  
que presenta:

*Clever Paul Flores Huanca*

Asesor:

*Nancy Edith Saravia Molina*

Lima, 2025


## Informe de similitud

Yo, *Nancy Edith Saravia Molina*, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesora de la tesis/el trabajo de investigación titulado *Idoneidad didáctica de un proceso de instrucción sobre optimización de funciones reales de dos variables para estudiantes de Economía*, del autor *Clever Paúl Flores Huanca*, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 12 %. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software Turnitin el 27/06/2025.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha:

San Miguel, 5 de julio del 2025.

Apellidos y nombres de la asesora: Saravia Molina, Nancy Edith	
DNI: 41783537	Firma: 
ORCID:0000-0002-2819-8835	

## Resumen

La optimización matemática es un tema del cálculo multivariable presente en diversos cursos, desde primeros ciclos, en carreras profesionales como la matemática, ingeniería o economía, debido a sus diversas aplicaciones para resolver o modelar contextos. De esta manera, el presente trabajo, empleando la noción de idoneidad didáctica del marco teórico Enfoque Ontosemiótico, tiene como objetivo principal valorar la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción sobre optimización de funciones reales de dos variables en alumnos de carrera de Economía. La investigación es de carácter cualitativa, puesto que pretender describir y analizar el proceso de instrucción implementado por un profesor. Para llevar a cabo esta investigación, se identifican los significados de referencia de las derivadas parciales que estén involucrados en problemas de optimización; se adaptan indicadores de idoneidad didáctica en las facetas epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica; y, posteriormente, se lleva a cabo la comparación y análisis de lo propuesto en los indicadores de idoneidad con lo implementado por el profesor durante su proceso de instrucción. Sobre la base de estos resultados, se concluye que el proceso de instrucción observado cumple en gran medida con los indicadores propuestos, particularmente en las facetas epistémicas y cognitivas, lo cual lo convierte en un proceso idóneo. Aun así, hay algunos aspectos por mejorar en cuanto a las demás facetas interaccional, mediacional, afectiva y ecológica según los indicadores propuestos.

*Palabras clave: Cálculo multivariable, Optimización, Economía, Enfoque ontosemiótico, Idoneidad didáctica*

## Abstract

Mathematical optimization is a topic in multivariable calculus that appears in various courses, starting the early semesters, in academic programs such as Mathematics, Engineering or Economics, due to its numerous applications in solving and modeling real-world solutions. In this way, based on the notion of didactic suitability from the theoretical framework of Ontosemiotic Approach, this study aims to assess the didactic suitability of an instructional process on the optimization of real-valued functions of two variables for students in Economics program. This study is described as qualitative research because it aims to describe and analyze an instructional process implemented by a university teacher. To carry out this research, the reference meanings of partial derivatives involved in optimization problems are identified in books and other researches; specific indicators of the epistemic, cognitive, interactional, mediational, affective, and ecological facets of didactic suitability are adapted; and, subsequently, a comparison and analysis is conducted between what is proposed in these indicators and what was implemented by the teacher during the instructional process. Based on these results, the observed instructional process satisfies a significant portion of the didactical suitability indicators proposed in this study, particularly in the epistemic and cognitive facets, making it a didactically suitable process. However, certain aspects still require improvement in the interactional, mediational, affective and ecological facets, according to the proposed indicators.

*Key words: Multivariable calculus, Optimization problems, Economics, Ontosemiotic approach, Didactic suitability*



*A mis padres, Cleber y Aurora,  
quienes confiaron en mí y me apoyaron  
a desarrollarme en lo académico y lo profesional.*

*A mi hermano, Axel,  
quien fue testigo del gran esfuerzo que di en estos dos años.*

*A mi tía, Nora, y mi primita, Gabriela,  
quienes me animaron estos dos años a seguir con gran esfuerzo.*

*A Kira,  
por su compañía incondicional  
y quien, con paciencia y elegancia,  
supervisó cada página de esta tesis  
y me vigiló para no rendirme en mis amanecidas.*

## Agradecimientos

A mi asesora, la Dra. Nancy Saravia, quien alguna vez fue mi profesora en pregrado y, más recientemente, en el posgrado, por su paciencia, sus conocimientos y la motivación constante que me permitieron alcanzar mis metas en esta nueva etapa, así como por transmitir su pasión por la enseñanza de las matemáticas.

A mis profesoras de la maestría, Dra. Cecilia Gaita y Dra. Jesús Flores, por sus grandes enseñanzas y orientaciones, que me ayudaron a abrir mi mente y pensar como un investigador, así como a reforzar mi vocación y amor por la enseñanza de las matemáticas.

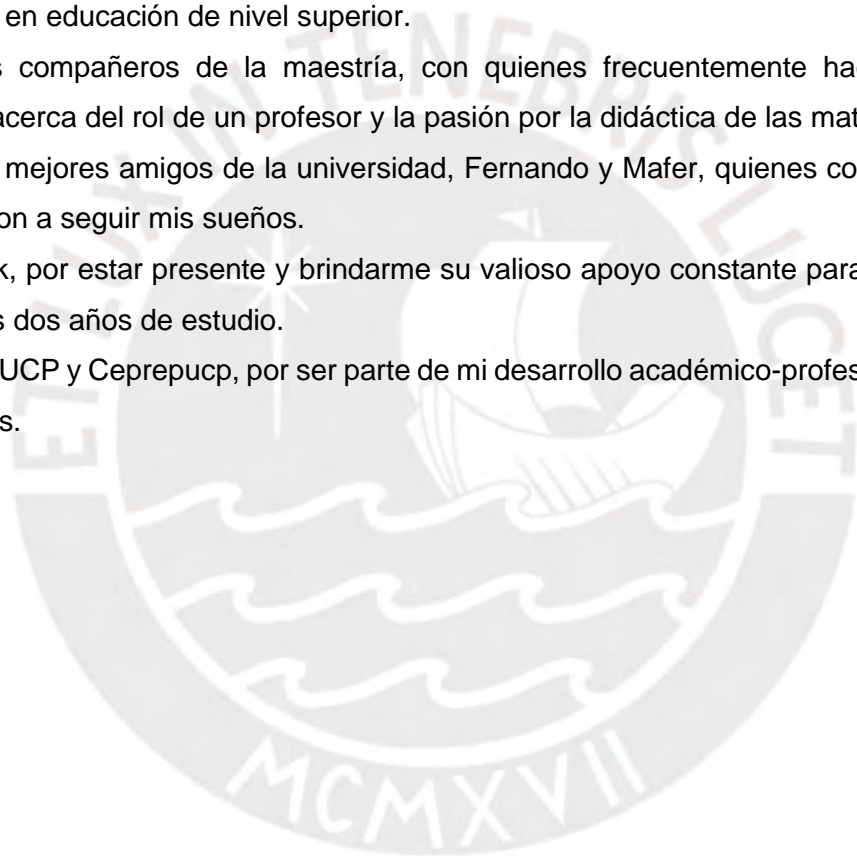
A mi colega, José Luis, por su apoyo, disposición y paciencia para llevar a cabo esta investigación en educación de nivel superior.

A mis compañeros de la maestría, con quienes frecuentemente hacía grupos y debatíamos acerca del rol de un profesor y la pasión por la didáctica de las matemáticas.

A mis mejores amigos de la universidad, Fernando y Mafer, quienes confiaron en mí y me motivaron a seguir mis sueños.

A Rick, por estar presente y brindarme su valioso apoyo constante para no rendirme durante estos dos años de estudio.

A la PUCP y Ceprepucp, por ser parte de mi desarrollo académico-profesional durante casi diez años.



# Índice

<b>Índice de figuras .....</b>	<b>x</b>
<b>Índice de tablas .....</b>	<b>xiii</b>
<b>Introducción .....</b>	<b>16</b>
<b>Capítulo I: Problema de investigación.....</b>	<b>18</b>
1.1. Antecedentes .....	18
1.1.1. Investigaciones acerca de la enseñanza-aprendizaje del cálculo multivariable en educación superior y la optimización de funciones multivariables.....	18
1.1.2. Investigaciones sobre dificultades encontradas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de temas del cálculo multivariable .....	19
1.1.3. Investigaciones sobre conocimientos necesarios que debe tener un profesor que enseña el tema de optimización de funciones .....	23
1.2. Justificación.....	24
1.3. Pregunta de investigación .....	27
1.4. Objetivos .....	27
<b>Capítulo II: Aspectos teóricos y metodológicos.....</b>	<b>28</b>
2.1. Aspectos del marco teórico .....	28
2.1.1. Sistemas de prácticas .....	28
2.1.2. Idoneidad didáctica.....	30
2.2. Aspectos metodológicos.....	37
<b>Capítulo III: Identificación de los significados de referencia de la derivada parcial involucrados en la optimización de funciones reales de dos variables .....</b>	<b>43</b>
3.1. Significados de referencia de las derivadas parciales .....	43
3.1.1. La derivada parcial como expresión algebraica .....	43
3.1.2. Las derivadas parciales para hallar ecuaciones de planos tangentes a la gráfica de una función de dos variables .....	49
3.1.3. La derivada parcial como tasa de variación.....	51
3.1.4. La derivada parcial para hallar valores máximos y mínimos de una función de dos variables .....	53
3.2. La aplicación de las derivadas parciales en la Economía .....	63
3.2.1. Las funciones marginales en la Economía.....	63
3.2.2. Problemas de optimización.....	65

**Capítulo IV: Indicadores de idoneidad didáctica de un proceso de instrucción idóneo de optimización de funciones de dos variables para estudiantes de economía..... 71**

4.1. Indicadores de idoneidad epistémica.....	71
4.2. Indicadores de idoneidad cognitiva.....	76
4.3. Indicadores de idoneidad interaccional.....	79
4.4. Indicadores de idoneidad mediacional.....	81
4.5. Indicadores de idoneidad afectiva .....	83
4.6. Indicadores de idoneidad ecológica.....	85

**Capítulo V: Recolección de datos del proceso de instrucción de optimización de funciones de dos variables con alumnos de Economía..... 88**

5.1. Datos generales del proceso de instrucción .....	88
5.2. Planificación de las sesiones del proceso de instrucción.....	90
5.3. Implementación y observación del proceso de instrucción .....	92
5.3.1. Primera sesión observada .....	92
5.3.2. Segunda sesión observada .....	93
5.3.3. Tercera sesión observada .....	101
5.3.4. Cuarta sesión observada.....	104
5.3.5. Quinta sesión observada.....	110
5.3.6. Sexta sesión observada .....	113
5.4. Evaluación del tema y resultados.....	116
5.5. Información complementaria al proceso de instrucción .....	121

**Capítulo VI: Análisis de datos..... 124**

6.1. Idoneidad epistémica .....	124
6.1.1. Situaciones-problema.....	124
6.1.2. Lenguaje .....	127
6.1.3. Reglas o elementos regulativos.....	128
6.1.4. Argumentos.....	129
6.1.5. Relaciones.....	130
6.1.6. Errores, ambigüedades y creencias.....	131
6.2. Idoneidad cognitiva .....	132
6.2.1. Conocimientos previos .....	132
6.2.2. Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales.....	133
6.2.3. Aprendizajes.....	133
6.2.4. Alta demanda cognitiva .....	134

6.3. Idoneidad interaccional.....	135
6.3.1. Interacción docente-estudiante.....	135
6.3.2. Interacciones entre estudiantes.....	136
6.3.3. Autonomía.....	137
6.3.4. Evaluación formativa.....	138
6.4. Idoneidad mediacional.....	139
6.4.1. Recursos materiales.....	139
6.4.2. Número de alumnos, horario y condiciones del aula.....	140
6.4.3. Tiempo.....	141
6.5. Idoneidad afectiva.....	142
6.5.1. Intereses y necesidades.....	142
6.5.2. Actitudes.....	143
6.5.3. Emociones.....	144
6.6. Idoneidad ecológica.....	145
6.6.1. Adaptación al currículo.....	145
6.6.2. Apertura hacia la innovación didáctica.....	146
6.6.3. Adaptación social, profesional y cultural.....	147
6.6.4. Conexiones intra e interdisciplinares.....	147
<b>Capítulo VI: Consideraciones finales.....</b>	<b>148</b>
<b>Referencias.....</b>	<b>153</b>
<b>Anexos.....</b>	<b>159</b>

## Índice de figuras

<b>Figura 1</b> <i>Proceso de investigación cualitativa</i> .....	37
<b>Figura 2</b> <i>Proceso de investigación cualitativa de la presente investigación</i> .....	38
<b>Figura 3</b> <i>Definición de una función de dos variables</i> .....	44
<b>Figura 4</b> <i>Ejemplo del cálculo de la primera derivada parcial de una función de dos variables</i> .....	45
<b>Figura 5</b> <i>Ejemplo del cálculo de las segundas derivadas parciales de una función de dos variables</i> .....	46
<b>Figura 6</b> <i>Gráficas de derivadas parciales de una función de dos variables</i> .....	46
<b>Figura 7</b> <i>Teorema de Clairaut para derivadas parciales combinadas de segundo orden</i> ....	47
<b>Figura 8</b> <i>Representación gráfica del plano tangente a un punto de una función de dos variables</i> .....	49
<b>Figura 9</b> <i>Ejemplo del cálculo del plano tangente a la superficie de una función de dos variables</i> .....	49
<b>Figura 10</b> <i>Ejemplo de aproximación del incremento de la variable z a partir de sus variables</i> .....	51
<b>Figura 11</b> <i>Definición de valores máximos y mínimos de funciones de dos variables</i> .....	53
<b>Figura 12</b> <i>Puntos de mayor o menor ordenada de una función real de variable real</i> .....	54
<b>Figura 13</b> <i>Identificación de máximos y mínimos en su representación gráfica</i> .....	54
<b>Figura 14</b> <i>Condición de las derivadas parciales de primer orden</i> .....	55
<b>Figura 15</b> <i>Condición de las derivadas parciales de primer orden</i> .....	55
<b>Figura 16</b> <i>Condición de las derivadas parciales de segundo orden</i> .....	56
<b>Figura 17</b> <i>Condición de las derivadas parciales de segundo orden</i> .....	57
<b>Figura 18</b> <i>Determinante D de la matriz Hessiana</i> .....	57
<b>Figura 19</b> <i>Ejemplo de cálculo de máximos y mínimos de una función de dos variables</i> ....	58
<b>Figura 20</b> <i>Método del multiplicador de Lagrange</i> .....	59
<b>Figura 21</b> <i>Ejemplos de cálculo de máximos de una función de dos variables sujeta a una restricción de igualdad</i> .....	60
<b>Figura 22</b> <i>Ejemplo del cálculo de productividad marginal de una función de dos variables</i> 64	
<b>Figura 23</b> <i>Ejemplo de interpretación de signos de la productividad marginal</i> .....	64
<b>Figura 24</b> <i>Ejemplo de aplicación de optimización de función de dos variables</i> .....	66
<b>Figura 25</b> <i>Ejemplo de interpretación económica del multiplicador de Lagrange</i> .....	67
<b>Figura 26</b> <i>Ejemplo de modelización y optimización de funciones reales de dos variables en un contexto económico</i> .....	68
<b>Figura 27</b> <i>Solución al ejemplo de modelación y optimización de funciones reales de dos variables en un contexto económico</i> .....	68

<b>Figura 28</b> Relaciones entre los significados de la derivada parcial en un problema de optimización.....	69
<b>Figura 29</b> Programación académica del curso de Matemática para Gestión y Economía 2	90
<b>Figura 30</b> Gráfica de una función real de varias variables para introducir el tema de máximos y mínimos .....	93
<b>Figura 31</b> Definición de máximos y mínimos globales utilizada en el proceso de instrucción .....	94
<b>Figura 32</b> Ejemplo utilizado como analogía entre la optimización de funciones reales de una variable y funciones reales de dos variables .....	95
<b>Figura 33</b> Definición de máximos y mínimos locales utilizada en el proceso de instrucción	95
<b>Figura 34</b> Teorema de la condición necesaria de primer orden utilizada en el proceso de instrucción.....	96
<b>Figura 35</b> Ejemplo de punto estacionario que no necesariamente cumple que sea máximo o mínimo.....	96
<b>Figura 36</b> Justificación del ejemplo del punto silla propuesto para la condición necesaria de primer orden .....	97
<b>Figura 37</b> Representación gráfica de un punto de silla .....	97
<b>Figura 38</b> Definición de la Matriz Hessiana para funciones de dos variables utilizada en el proceso de instrucción .....	98
<b>Figura 39</b> Teorema de la condición necesaria de segundo orden utilizado en el proceso de instrucción.....	98
<b>Figura 40</b> Ejemplo trabajado en pizarra para la resolución para hallar máximos y mínimos de funciones reales de dos variables sin restricciones trabajados en la sesión teórico-práctica .....	100
<b>Figura 41</b> Matriz Hessiana para funciones reales de tres variables reales según la segunda condición necesaria para hallar máximos y mínimos sin restricciones trabajados en la sesión teórico-práctica .....	100
<b>Figura 42</b> Ejemplo de resolución de un problema intramatemático para determinar puntos críticos .....	103
<b>Figura 43</b> Ejemplo de resolución de un problema extramatemático para minimizar y maximizar .....	103
<b>Figura 44</b> Ejemplo introductorio en pizarra para la resolución de máximos y mínimos de funciones reales de dos variables con restricciones trabajado en la sesión teórico-práctica .....	104
<b>Figura 45</b> Condición necesaria de primera orden del Teorema de Lagrange .....	104
<b>Figura 46</b> Sistema de ecuaciones obtenido al aplicar la condición necesaria de primer orden a la función lagrangiana.....	105

<b>Figura 47</b> Condiciones suficientes para extremos locales de funciones sujetas a restricciones de igualdad .....	105
<b>Figura 48</b> Resolución de un ejemplo de optimización con restricciones de igualdad .....	107
<b>Figura 49</b> Interpretación del multiplicador de Lagrange presentado en el proceso de instrucción.....	107
<b>Figura 50</b> Ejemplo de optimización con restricciones de igualdad para explicar la interpretación del multiplicador de Lagrange.....	108
<b>Figura 51</b> Resolución de un ejemplo de optimización con restricciones de igualdad para explicar la interpretación del multiplicador de Lagrange. ....	108
<b>Figura 52</b> Resolución de un ejemplo de optimización con restricciones de igualdad e interpretación del multiplicador de Lagrange.....	109
<b>Figura 53</b> Resolución de un ejemplo de optimización con restricciones de igualdad para una función con parámetro a.....	112
<b>Figura 54</b> Resolución de un ejemplo de optimización con restricciones de igualdad para determinar puntos críticos.....	115
<b>Figura 55</b> Resolución de un ejemplo de optimización con restricciones de igualdad aplicado a la economía .....	115
<b>Figura 56</b> Error más frecuente al resolver el sistema de ecuaciones en un problema intramatemático de máximos y mínimos de una función que no está sujeta a restricciones.....	118
<b>Figura 57</b> Error más frecuente al plantear la función lagrangiana en un problema intramatemático de máximos y mínimos de funciones de dos variables sujeta a restricción de igualdad .....	119
<b>Figura 58</b> Error más frecuente al plantear la función lagrangiana en un problema extramatemático de optimización de funciones de dos variables .....	119
<b>Figura 59</b> Resolución de un alumno de un problema extra-matemático de optimización de funciones de dos variables sujetas a una restricción de igualdad .....	120
<b>Figura 60</b> Disposición del salón de clases para el dictado de clases teórico-prácticas....	121
<b>Figura 61</b> Disposición del salón de clases para el dictado de clases prácticas.....	121

## Índice de tablas

<b>Tabla 1</b> Configuración de objetos primarios.....	29
<b>Tabla 2</b> Componentes e indicadores de la idoneidad epistémica.....	31
<b>Tabla 3</b> Componentes e indicadores de la idoneidad cognitiva.....	32
<b>Tabla 4</b> <i>Componentes e indicadores de la idoneidad interaccional.....</i>	33
<b>Tabla 5</b> <i>Componentes e indicadores de la idoneidad mediacional.....</i>	34
<b>Tabla 6</b> <i>Componentes e indicadores de la idoneidad afectiva .....</i>	35
<b>Tabla 7</b> <i>Componentes e indicadores de la idoneidad ecológica.....</i>	36
<b>Tabla 8</b> <i>Codificación de indicadores de idoneidad por componente y faceta .....</i>	40
<b>Tabla 9</b> <i>Lenguajes y procedimientos para determinar las primeras derivadas parciales de una función de dos variables .....</i>	44
<b>Tabla 10</b> <i>Lenguaje para expresar las segundas derivadas parciales de una función de dos variables .....</i>	45
<b>Tabla 11</b> <i>Objetos primarios asociados al significado algebraico de la derivada parcial.....</i>	47
<b>Tabla 12</b> <i>Objetos primarios asociados al significado plano tangente .....</i>	50
<b>Tabla 13</b> <i>Objetos primarios asociados al significado de tasa de variación .....</i>	52
<b>Tabla 14</b> <i>Objetos primarios asociados al significado del cálculo la derivada parcial para optimizar funciones .....</i>	61
<b>Tabla 15</b> <i>Funciones de una variable que modelan situaciones económicas y su análisis marginal.....</i>	63
<b>Tabla 16</b> <i>Codificación de indicadores de idoneidad por componente de la idoneidad epistémica.....</i>	71
<b>Tabla 17</b> <i>Componentes e indicadores para el análisis de la idoneidad epistémica .....</i>	72
<b>Tabla 18</b> <i>Codificación de indicadores de idoneidad por componente de la idoneidad cognitiva .....</i>	76
<b>Tabla 19</b> <i>Componentes e indicadores para el análisis de la idoneidad cognitiva .....</i>	77
<b>Tabla 20</b> <i>Codificación de indicadores de idoneidad por componente de la idoneidad interaccional.....</i>	79
<b>Tabla 21</b> <i>Componentes e indicadores para el análisis de la idoneidad interaccional .....</i>	80
<b>Tabla 22</b> <i>Codificación de indicadores de idoneidad por componente de la idoneidad mediacional.....</i>	81
<b>Tabla 23</b> <i>Componentes e indicadores para el análisis de la idoneidad mediacional .....</i>	82
<b>Tabla 24</b> <i>Codificación de indicadores de idoneidad por componente de la idoneidad afectiva .....</i>	83
<b>Tabla 25</b> <i>Componentes e indicadores para el análisis de la idoneidad afectiva.....</i>	84

<b>Tabla 26</b> <i>Codificación de indicadores de idoneidad por componente de la idoneidad ecológica</i>	85
<b>Tabla 27</b> <i>Componentes e indicadores para el análisis de la idoneidad ecológica</i>	86
<b>Tabla 28</b> <i>Cursos del área de matemática relacionados con “Matemática para Economía y Gestión 2”</i>	88
<b>Tabla 29</b> <i>Temas planificados por sesión observada</i>	91
<b>Tabla 30</b> <i>Problemas evaluados en el examen parcial</i>	92
<b>Tabla 31</b> <i>Problemas intramatemáticos de máximos y mínimos de funciones reales de dos variables sin restricciones trabajados en la sesión teórico-práctica</i>	99
<b>Tabla 32</b> <i>Problemas intramatemáticos y extramatemáticos de máximos y mínimos de funciones reales de dos variables sin restricciones trabajados en la sesión práctica</i>	101
<b>Tabla 33</b> <i>Problemas intra-matemáticos de máximos y mínimos de funciones reales de dos variables con restricciones trabajados en la sesión teórico-práctica</i>	110
<b>Tabla 34</b> <i>Problemas de máximos y mínimos de funciones reales de dos variables con o sin restricciones trabajados en la sesión práctica</i>	111
<b>Tabla 35</b> <i>Problemas intramatemáticos y extramatemáticos de máximos y mínimos de funciones reales de dos variables con restricciones trabajados en la sesión práctica</i>	113
<b>Tabla 36</b> <i>Problemas evaluados en Evaluación Continua 3</i>	116
<b>Tabla 37</b> <i>Análisis de cada indicador de la componente “situaciones-problema” de la idoneidad epistémica</i>	124
<b>Tabla 38</b> <i>Análisis de cada indicador de la componente “lenguaje” de la idoneidad epistémica</i>	127
<b>Tabla 39</b> <i>Análisis de cada indicador de la componente “reglas o elementos regulativos” de la idoneidad epistémica</i>	128
<b>Tabla 40</b> <i>Análisis de cada indicador de la componente “argumentos” de la idoneidad epistémica</i>	129
<b>Tabla 41</b> <i>Análisis de cada indicador de la componente “relaciones” de la idoneidad epistémica</i>	130
<b>Tabla 42</b> <i>Análisis de cada indicador de la componente “errores, ambigüedades y creencias” de la idoneidad epistémica</i>	131
<b>Tabla 43</b> <i>Análisis de cada indicador de la componente “conocimientos previos” de la idoneidad cognitiva</i>	132
<b>Tabla 44</b> <i>Análisis de cada indicador de la componente “adaptaciones curriculares a las diferencias individuales” de la idoneidad cognitiva</i>	133
<b>Tabla 45</b> <i>Análisis de cada indicador de la componente “aprendizajes” de la idoneidad cognitiva</i>	133

<b>Tabla 46</b> <i>Análisis de cada indicador de la componente “alta demanda cognitiva” de la idoneidad cognitiva</i> .....	134
<b>Tabla 47</b> <i>Análisis de cada indicador de la componente “interacción docente-estudiante” de la idoneidad interaccional</i> .....	135
<b>Tabla 48</b> <i>Análisis de cada indicador de la componente “interacciones entre estudiantes” de la idoneidad interaccional</i> .....	136
<b>Tabla 49</b> <i>Análisis de cada indicador de la componente “autonomía” de la idoneidad interaccional</i> .....	137
<b>Tabla 50</b> <i>Análisis de cada indicador de la componente “evaluación formativa” de la idoneidad interaccional</i> .....	138
<b>Tabla 51</b> <i>Análisis de cada indicador de la componente “recursos materiales” de la idoneidad mediacional</i> .....	139
<b>Tabla 52</b> <i>Análisis de cada indicador de la componente “números de alumnos, horario y condiciones del aula” de la idoneidad mediacional</i> .....	140
<b>Tabla 53</b> <i>Análisis de cada indicador de la componente “tiempo” de la idoneidad mediacional</i> .....	141
<b>Tabla 54</b> <i>Análisis de cada indicador de la componente “intereses y necesidades” de la idoneidad afectiva</i> .....	142
<b>Tabla 55</b> <i>Análisis de cada indicador de la componente “actitudes” de la idoneidad afectiva</i> .....	143
<b>Tabla 56</b> <i>Análisis de cada indicador de la componente “emociones” de la idoneidad afectiva</i> .....	144
<b>Tabla 57</b> <i>Análisis de cada indicador de la componente “intereses y necesidades” de la idoneidad ecológica</i> .....	145
<b>Tabla 58</b> <i>Análisis de cada indicador de la componente “apertura hacia la innovación didáctica” de la idoneidad ecológica</i> .....	146
<b>Tabla 59</b> <i>Análisis de cada indicador de la componente “adaptación social, profesional y cultural” de la idoneidad ecológica</i> .....	147
<b>Tabla 60</b> <i>Análisis de cada indicador de la componente “conexiones intra e interdisciplinares” de la idoneidad ecológica</i> .....	147

## Introducción

El estudio de la optimización matemática posee diversas aplicaciones tanto en el área matemática como en los campos profesionales como Ingeniería, Física, Estadística o Economía. Es por ello, que los temas relacionados con el cálculo de una variable y el cálculo de varias variables constituyen componentes fundamentales en la formación matemática de los estudiantes de estas carreras de educación superior. Sin embargo, el aprendizaje de este objeto matemático presenta diversas dificultades, algunas de las cuales tienen su origen en la asimilación de conceptos previos relacionados con el cálculo de una variable, la visualización de representaciones gráficas en dos o tres dimensiones, la interpretación gráfico-algebraica de la optimización de funciones de una o varias variables, y la resolución de problemas extramatemáticos aplicados al ámbito profesional.

La presente investigación tiene como objetivo general valorar, usando la noción de idoneidad didáctica, un proceso de instrucción de optimización de funciones reales de dos variables en alumnos de carrera de Economía. Este proceso de instrucción es implementado por un profesor de una universidad privada. El objeto matemático optimización de funciones reales de dos variables se encuentra como un tema desarrollado dentro del curso “Matemática para Gestión y Economía 2”, el cual se dicta en segundo ciclo par alumnos de Economía, según la malla curricular de la institución. Para la presente investigación, no se intervino en el diseño de las sesiones de clase, sino únicamente se observó cada una de las seis sesiones relacionadas con el tema de optimización de funciones de dos variables.

Para llevar a cabo la valoración, se toma como marco teórico de referencia el Enfoque Ontosemiótico (EOS). Por la naturaleza del estudio, la investigación es de carácter cualitativo, para lo cual se adaptan los procesos metodológicos propuestos por Hernández et al. (2014). A continuación, se presentan y describen los siete capítulos de esta investigación.

En el primer capítulo, se realiza una revisión de antecedentes relacionados con el avance y desarrollo de investigaciones en la enseñanza-aprendizaje del cálculo multivariable (CMV) para comprender el interés que se posee en esta área del cálculo. Asimismo, se presentan las dificultades que manifiestan los estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de diversos temas del CMV, y los conocimientos con que debería contar un profesor que dicte temas de diferenciabilidad y optimización. Además, como parte de la justificación, se hace una revisión de la relevancia de la optimización en el cálculo multivariable en la formación profesional de los estudiantes que cursan la carrera de Economía. Por último, se presentan la pregunta y los objetivos que guían el desarrollo de esta investigación.

En el segundo capítulo, se expone y presenta el marco teórico del EOS, así como los aspectos necesarios de algunas herramientas de análisis de este marco teórico, como los

sistemas de prácticas y la idoneidad didáctica, los cuales permiten llevar a cabo la valoración del proceso de instrucción de un profesor. Asimismo, se describe la metodología adoptada y los procedimientos a seguir para esta tesis.

En el tercer capítulo, se identifican los significados de referencia de la derivada parcial que están involucrados directamente en la optimización de funciones de dos variables para el proceso de instrucción de alumnos de la carrera de Economía. Para ello, se revisan textos académicos frecuentemente utilizados en cursos del cálculo multivariable o análisis matemático para economía. Asimismo, también se revisan algunas investigaciones que aborden el tema de optimización. Se plantea la conexión entre los significados de referencia de la derivada parcial y la optimización en la economía.

En el cuarto capítulo, se presenta una adaptación de los indicadores de idoneidad didáctica en las facetas epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica, sobre la base de investigaciones previas dentro del área del cálculo. Estos indicadores describen un proceso de instrucción idóneo. La valoración se realiza mediante el análisis en la comparación entre lo propuesto en el indicador de idoneidad didáctica y lo implementado por el profesor en clase.

En el quinto capítulo, se describe el proceso de instrucción implementado y toda la información recabada para ello: observaciones videograbadas de clases, presentaciones de clase, separatas de ejercicios, evaluaciones, respuestas de los alumnos y percepción del profesor, mediante una entrevista. Esta información recabada es descrita con la finalidad de contextualizar el proceso de instrucción observado.

En el sexto capítulo, se lleva a cabo el análisis de la información presentada en el quinto capítulo comparándola con los indicadores propuestos en el cuarto capítulo. Se muestran las similitudes y diferencias por cada componente de cada faceta de la idoneidad didáctica.

Finalmente, en el séptimo capítulo, se presentan las conclusiones del análisis realizado en los capítulos anteriores, así como los resultados generales del análisis de comparación realizado entre el proceso de instrucción implementado y el idóneo según los indicadores de idoneidad. Con ello, se evidencian los logros de los objetivos propuestos y se responde a la pregunta de investigación mostrando aspectos de mejora de cada una de las facetas analizadas. De esta manera, el presente trabajo es un gran aporte a la investigación en didáctica matemática porque contribuye al interés de investigar en el área del cálculo multivariable, propone indicadores de idoneidad didáctica e identifica significados de referencia de la derivada parcial involucrados en la optimización de funciones reales de dos variables para alumnos que estudian Economía. Asimismo, se dan recomendaciones finales que permiten extender o replicar esta investigación a futuras investigaciones relacionadas con la optimización de funciones de dos variables.

## Capítulo I: Problema de investigación

En este capítulo, se presentan los resultados de diversas investigaciones en el área de la enseñanza y aprendizaje del cálculo multivariable, o en varias variables. Estas investigaciones describen los antecedentes y la justificación del problema de investigación, el cual también se plantea posteriormente. Por último, sobre la base de esta formulación, se plantean los objetivos generales y específicos que guían el desarrollo de la presente investigación.

### 1.1. Antecedentes

En esta sección, se presentan tres aspectos relacionados con las investigaciones en el área del cálculo multivariable (CMV): el interés y la variedad de investigaciones en temas de CMV; las principales dificultades encontradas en el proceso de enseñanza-aprendizaje en los diversos temas del CMV; y los conocimientos necesarios sugeridos para abordar temas de CMV. Asimismo, estos tres aspectos son presentados de manera que se relacionen con la optimización en matemáticas.

Para llevar a cabo la selección de estas investigaciones, la búsqueda realizada considera diversos artículos, actas de congresos y tesis pasadas. La mayoría de estos artículos se encuentran en bases de datos de revistas indexadas como Scopus, Springer, Redalyc, Taylor & Francis Journals, entre otros. Asimismo, se utilizaron palabras clave como “cálculo multivariable”, “optimización”, “funciones varias variables”, “enseñanza”, “educación”, “didáctica”, entre otros, considerando sus variantes en español e inglés.

#### 1.1.1. Investigaciones acerca de la enseñanza-aprendizaje del cálculo multivariable en educación superior y la optimización de funciones multivariables

Existen diversos estudios acerca de la enseñanza-aprendizaje del cálculo en una variable en la educación superior como lo son referente a la derivada (Hitier y González-Martín, 2022), integrales (Rob y Steven, 2023) y sus aplicaciones como la razón de cambio del movimiento de una partícula respecto al tiempo, optimización, cálculo de áreas o volúmenes, entre otros (Fonseca y Alfaro, 2018; Castro et al., 2023). Sin embargo, la cantidad e interés en investigaciones en el área del cálculo multivariable es menor que las que se realizan en el cálculo de una variable según analizan y concluyen Brandes y Hardy (2018), Mkhathshwa (2019), Martínez-Planell y Trigueros (2021) y Bašić y Milin (2022). Estos autores realizan una revisión de artículos relacionados con temas del CMV, tales como conceptos básicos de funciones, límites, diferenciabilidad e integrales aplicados a funciones en dos o más variables.

Martínez-Planell y Trigueros (2021) revisan un total de 135 artículos, de los cuales seleccionaron y filtraron 51 para el análisis de sus características, marcos teóricos, metodologías, resultados y contribuciones en cuanto a la enseñanza y aprendizaje del CMV.

Para ello, usan diversos criterios al realizar esta búsqueda, entre los cuales valoran el aporte científico a la didáctica de las matemáticas considerando artículos publicados en las principales revistas indexadas en inglés, español, francés y portugués desde los años 1980 hasta el 2020. Asimismo, no consideran como referencias los congresos de matemáticas, experiencias de clase, uso de tecnologías y trabajos de tesis de PhD. De esta manera, los autores buscan hacer una recopilación donde se conozca acerca del aprendizaje de los alumnos en el área del cálculo multivariable y se brinden sugerencias para la enseñanza del cálculo multivariable.

Además, aparte de las investigaciones mencionadas anteriormente, se encuentran otras investigaciones acerca del CMV en los últimos cinco años como lo son Bašić y Milin (2022), Harel (2021), Mkhathshwa (2021), Muzangwa y Ogbonnaya (2022) y Ramírez (2021). Estas investigaciones abordan diversos temas del CMV como la comprensión de las funciones multivariadas desde diversas representaciones, diferenciabilidad de funciones multivariadas e integración de funciones multivariadas.

Las investigaciones mencionadas en este apartado desarrollan y analizan el proceso de enseñanza-aprendizaje desde múltiples perspectivas, donde la finalidad es comprender este proceso, sus dificultades, observaciones y proponer sugerencias al respecto. En cuanto a la optimización de funciones multivariadas en el área de investigaciones de educación matemática del CMV, la optimización de funciones multivariadas es uno de los temas y aplicaciones menos recurrentes (Martínez-Planell y Trigueros, 2021; Mkhathshwa, 2021). Ante esta situación, Mkhathshwa (2021) sugiere que una buena opción para investigar en optimización es tomar como referencia las investigaciones del cálculo de una variable a modo de comparación debido a la similitud entre los procedimientos de optimización de funciones de una variable y de varias variables.

A modo de resumen, al examinar las investigaciones en la enseñanza-aprendizaje del CMV, se observa que esta área requiere una mejor atención en el desarrollo de investigaciones, en particular, la optimización de funciones reales multivariadas, el cual es uno de los motivos de esta investigación. A continuación, a partir de las investigaciones mencionadas y otras investigaciones encontradas en la búsqueda de antecedentes descrita inicialmente, se presentan y describen algunas dificultades encontradas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de temas del CMV desde la perspectiva de la didáctica de las matemáticas.

### **1.1.2. Investigaciones sobre dificultades encontradas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de temas del cálculo multivariable**

La enseñanza del CMV aborda temas similares a los del cálculo de una variable (CUV) como lo son la comprensión de los conceptos básicos de las funciones, límites, diferenciabilidad e integración (Martínez-Planell y Trigueros, 2021). A continuación, se

presentan y describen algunas de las dificultades y limitaciones encontradas en el proceso enseñanza-aprendizaje en los resultados de diversas investigaciones. Para ello, se abordan dos aspectos: los conocimientos previos y necesarios para comprender el CMV, y los diversos temas propios del CMV.

- Conocimientos previos al Cálculo Multivariable

Por un lado, la comprensión de conceptos básicos de las funciones de varias variables está sujeta a diversas interpretaciones por parte de los alumnos, quienes las llegan a comprender a partir de generalizaciones elaboradas a partir de sus nociones del CUV (Dorko y Weber, 2014). Los investigadores Dorko y Weber analizan, por ejemplo, el caso de la determinación del dominio y rango en las funciones de dos variables. Cuando los alumnos trabajan funciones reales de una variable real, ellos relacionan directamente a  $x$  con dominio e  $y$  con rango; sin embargo, al trabajar con tres variables, los alumnos presentan la dificultad de continuar relacionando dominio y rango como un conjunto de valores para dos de las tres variables, ya sea  $x$ ,  $y$  o  $z$ , de manera que una de las tres variables quedaba sin comprenderse en su totalidad. Pese a ello, es útil recurrir a las nociones de entrada/salida e independencia/dependencia, utilizadas en el CUV, para explicar funciones de dos variables.

Harel (2021) realiza una revisión de algunos conceptos fundamentales que se requieren para entender los temas del CMV como lo son el producto cruz, la linealización, la diferenciabilidad, la regla de la cadena y derivada implícita encontrados en investigaciones pasadas, libros de texto y observaciones de clase. En algunos casos, no se observan relaciones concretas entre algunos de estos temas enseñados en cursos previos, como lo son el uso de vectores y matrices en el álgebra lineal, como requisito para entender temas del CMV.

Según Bašić y Milin (2022), uno de los pasos más importantes donde están las principales dificultades iniciales del CMV es encontrar una adecuada parametrización de superficies. Este procedimiento muestra que existen complicaciones por parte de los alumnos debido a que no resulta fácil imaginar las superficies y los resultados de sus intersecciones con otras superficies. Para ello, se analizan diversas tareas según el punto de vista del análisis de praxiologías donde se deben realizar parametrizaciones teniendo en cuenta los tipos de superficies e intersecciones generadas por la simetría y las coordenadas utilizadas. En una de las transcripciones de las entrevistas realizadas, los investigadores observan que algunos estudiantes no interpretan ni explican adecuadamente las intersecciones obtenidas con diferentes superficies como los son la esfera y un plano. Es necesario que el estudiante posea una buena imaginación de las gráficas de las funciones de dos o variables por parte de los alumnos, por lo que se sugiere guiarlo por medio del razonamiento geométrico (Bašić y Milin, 2022).

Muzangwa y Ogbonnaya (2022) encuentran otras dificultades relacionadas con la imaginación y visualización de las representaciones en tres dimensiones de las funciones en varias variables, bajo la perspectiva de la Teoría de Registros de Representación Semiótica. Estas dificultades se presentan en una actividad planteada por los investigadores donde se le pide al alumno explicar las diversas representaciones visuales de las gráficas con sus propias palabras, así como relacionarlas con sus ecuaciones o reglas de correspondencia y sus curvas de nivel. También notan que la mayoría de los alumnos no describen adecuadamente el objeto matemático tratado, sino con un lenguaje coloquial.

- Temas propiamente desarrollados en el Cálculo Multivariable

Por otro lado, en cuanto a los temas propios en el cálculo CMV, se presentan algunas dificultades relacionadas con el concepto del límite, la diferenciabilidad y la integración de funciones de varias variables.

En cuanto a las investigaciones de límites de funciones multivariables, Martínez-Planell y Trigueros (2021) afirman que el razonamiento mental y visual de los límites en el CMV es diferente al empleado en el CUV para cualquiera de las formas de ver el límite como las son el concepto " $\varepsilon - \delta$ ", la vecindad, las equivalencias condicionales y la aproximación lineal. Una de las principales dificultades encontradas sobre límites se da cuando los alumnos no se apoyan de una representación gráfica de las funciones para entender la idea del límite, aunque es una sugerencia recurrente para el apoyo en clases.

Según Harel (2021), la aproximación lineal o linealización es uno de los conceptos poco profundizados geoméricamente en las funciones multivariables debido a lo algebraico que podría resultar utilizar el concepto de  $\varepsilon - \delta$ , así como el uso de otros símbolos matemáticos y el planteo de sus inecuaciones y ecuaciones. De esta manera, este concepto puede entenderse mejor y superar esta dificultad al presentar los límites con una aproximación geométrica de límites y derivadas en comparación con la definición  $\varepsilon - \delta$  frecuentemente utilizada en el cálculo de una variable.

En cuanto a las investigaciones de diferenciabilidad en el cálculo en varias variables, Harel (2021) concluye que los aspectos básicos donde los alumnos presentan dificultades al aplicar derivadas son la regla de la cadena y la derivada implícita. Esto se debe a la presencia de errores algebraicos que pueden ocasionarse por confusiones en las simbologías utilizadas para expresar el diferencial. En algunas ocasiones, se incurre en el error de no enseñar u omitir a propósito las definiciones y demostraciones de estos conceptos de manera que se termina recurriendo a la expresión final de la derivación a través de reglas prácticas. Asimismo, los alumnos suelen estar expuestos a procedimientos repetitivos aplicados a problemas similares sin explicación alguna o demostración correspondiente como el caso de la derivación implícita (Harel, 2021). De esta forma, los alumnos confunden las operaciones

algebraicas y simplifican notaciones que son importantes al resolver o expresar derivadas de funciones de dos o más variables.

Geoméricamente, el concepto de plano tangente no es utilizado frecuentemente por algunos libros de cálculo a pesar de que se relaciona con el concepto de gradiente vector en su ecuación según indican Martínez-Planell y Trigueros (2021) y Trigueros et al. (2018). Este problema también se evidencia en los conceptos de derivadas direccionales y sus aplicaciones con los conceptos físicos como lo es en termodinámica u otros campos de la física. Borji et al. (2023) afirman que otra dificultad presentada para entender la diferenciabilidad de funciones de dos variables es la necesidad del alumno de recurrir a una interpretación geométrica utilizada en el cálculo de una variable. El concepto de pendiente de una recta tangente utilizado frecuentemente en el CUV no resulta útil para generalizarse en las funciones de dos variables debido a que la recta tangente en tres dimensiones puede ir en diferentes direcciones.

Mkhatshwa (2021) presenta los resultados de una investigación donde observó que los alumnos poseen dificultades al resolver problemas de optimización de funciones multivariantes. Si bien plantear funciones objetivo de dos o más variables como parte de un problema de optimización no es una dificultad para la mayoría de los alumnos del estudio, seguir correctamente el procedimiento de optimización mediante los criterios de primera, segunda derivada y la determinación de máximos y mínimos es una de las dificultades más importantes en este tema. Resolver problemas de optimización implica resolver variedad de ecuaciones y mantener un orden debido a la extensión de los procedimientos y operaciones que se realizan. Asimismo, el uso de las notaciones de derivadas y el cálculo de las derivadas parciales puede llevar al alumno a cometer errores (Mkhatshwa, 2019; 2021).

En cuanto a las investigaciones de integración de funciones de dos variables, algunas de las dificultades encontradas por Ramírez (2021) son aquellas relacionadas con el reconocimiento de gráficas en tres dimensiones para encontrar regiones e intersecciones de las funciones que se plantean en un problema de integración. Este tipo de problemas se puede afrontar mediante el uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra o Maple que permiten ayudar al alumno a identificar estas funciones en tres dimensiones (Ramírez, 2021; Bašić y Milin, 2022). Estas herramientas también ayudan a que el alumno pueda visualizar fácilmente una región o intersección de funciones para elegir sus límites y plantear la integral correctamente, así como permite que el alumno manipule las gráficas. Sin embargo, estos programas no resuelven en su totalidad el problema, pero sí son un medio para llegar a la respuesta.

En resumen, la revisión de las investigaciones presentadas en esta sección indica que el proceso de enseñanza-aprendizaje de funciones reales de varias variables presenta diferentes dificultades y limitaciones por la propia complejidad de las funciones y la cantidad

de variables utilizadas. Entre estas dificultades, se encuentran las limitaciones de imaginar las funciones en tres dimensiones; la falta de conexión hecha con temas de cursos previos como el álgebra lineal o los vectores; la generalización de los conceptos, propiedades, teoremas o interpretaciones del CUV hacia el CMV; la necesidad de una interpretación geométrica de los temas trabajados, el uso de diferentes notaciones en el CMV en comparación con el CUV, entre otros. Para la presente investigación, estas dificultades deberán ser consideradas en la construcción del proceso de instrucción idóneo que se propondrá en capítulos posteriores.

### **1.1.3. Investigaciones sobre conocimientos necesarios que debe tener un profesor que enseña el tema de optimización de funciones**

El tema principal de interés de este trabajo es la optimización de funciones de dos variables, el cual es una aplicación de la diferenciabilidad de funciones de dos variables según lo descrito en la sección anterior. Debido a la poca cantidad de investigaciones de la enseñanza o aprendizaje de optimización de funciones en varias variables, se toman como referencia la enseñanza-aprendizaje de temas relacionados con optimización, tales como la diferenciabilidad en varias variables y la optimización de funciones de una variable, de manera similar como Mkhathshwa (2021) realizó y sugirió investigaciones futuras. A continuación, se revisan algunas investigaciones donde se aborda y discuten los conocimientos que debe tener un profesor que enseña cálculo diferencial y la optimización de funciones de varias variables.

Según García et al. (2006), el profesor que enseña cálculo diferencial debe conocer la teoría, los recursos tecnológicos que se pueden usar como herramientas didácticas y la utilidad de los conceptos enseñados en el ámbito profesional del alumno. En esta investigación, se pregunta a diversos profesores del curso de cálculo diferencial de la carrera de ciencias económicas por las aplicaciones de la derivada en el ámbito profesional de los estudiantes que forman. Como parte de las respuestas, se concluye que la optimización es una de las aplicaciones de la derivada.

Yáñez (2016) concluye que el profesor que enseñe problemas de optimización de funciones debe tener la capacidad de comprender las diferentes formas de representar la solución del problema, así como tener una interpretación geométrica para apoyarse en recursos tecnológicos. En esta experiencia de clases llevada a cabo por la investigadora, se observa que el dominio de herramientas tecnológicas por parte del profesor resulta útil para el desarrollo de sus clases, puesto que los alumnos poseen una mejor comprensión del alumno en cuanto a optimización de funciones y lo que se busca en estos problemas.

El manejo de recursos tecnológicos permite también que los profesores muestren a los alumnos el comportamiento de las derivadas y los valores de las funciones que se optimizan (Morales et al., 2022; Rojas-Escribano et al., 2017). En estas investigaciones se

trabajan propuestas didácticas en diferentes momentos de clases como cuando se desarrollan problemas de optimización mediante el uso de herramientas como Excel o GeoGebra.

De esta manera, algunos de los conocimientos que un profesor debe poseer son los conceptos teóricos de la derivada en el CUV y CMV, el uso de herramientas didácticas para la comprensión de las funciones y las aplicaciones del tema en el campo profesional de las carreras que los alumnos estudien.

## **1.2. Justificación**

En esta sección, se desarrolla la justificación de la relevancia de esta investigación en optimización de funciones de dos variables considerando tres aspectos: curricular, profesional y científico desde la perspectiva de la didáctica de las matemáticas.

Por un lado, la optimización es un tema desarrollado transversalmente en los distintos cursos de carreras profesionales como Matemáticas, Estadística, Ingeniería o Economía. Es en estas carreras donde se comienza desarrollando el concepto de optimización a partir de una noción matemática para, posteriormente, aplicarla en diversos problemas durante la formación académica de los estudiantes, así como su desarrollo profesional.

Malaspina (2012) afirma que “la optimización está muy presente en la vida cotidiana, en la naturaleza, en la tecnología, en las ciencias naturales, en las ciencias sociales y obviamente en la matemática misma” (p. 166). De esta manera, la optimización en la vida cotidiana y en la naturaleza puede identificarse con la búsqueda de un camino más corto o escoger la mejor ubicación en determinado lugar, o también como parte de las acciones que se toman para mantener la selección natural según la teoría de Darwin. Sin embargo, en la ciencia, tecnología y matemáticas, la optimización se presenta en situaciones donde se busca la mejor opción o solución a cierto problema empleando diversos procedimientos. A modo de ejemplo, algunos avances en cuanto a la optimización y sus aplicaciones se da en la programación lineal, la teoría de control óptimo y la teoría de juegos.

En las carreras de Matemáticas, Estadística o Ingeniería, la optimización es enseñada por vez primera en cursos de Análisis Matemático, Cálculo Diferencial o Cálculo Multivariable según indican Gallego y Aldana (2013), Tenorio y Martín (2015), Rojas-Escribano et al. (2017) y López et al. (2023). En estas investigaciones, los autores analizan trabajos de optimización mediante problemas aplicativos de alumnos de diversas carreras en cursos donde se dicta la optimización de funciones de una variable de varias variables. Entre los principales resultados, se observan dificultades relacionadas con los conceptos de optimización tales como la determinación de un objetivo en el problema, como maximizar o minimizar cierta función objetivo; representar dicha función y aplicar correctamente el método de optimización. Debido a estas dificultades encontradas, los autores sugieren centrar las futuras investigaciones en el área de optimización de funciones dada la importancia de este objeto

matemático en la formación matemática de los alumnos de dichas especialidades. Asimismo, la base de este objeto matemático es útil para futuras aplicaciones como lo son, por ejemplo, la formulación de modelos matemáticos para optimización de costos (Campo et al., 2019) o diversos usos de la optimización en formación de ingenieros como el cálculo de alturas óptimas de recipientes bajo restricciones (Cordero et al., 2019).

En Economía, la optimización permite la “planificación futura de la gestión económica o empresarial o incluso como guía para la toma de decisiones de política económica” (Meneu, Pérez-Salamero y Ventura, 1999, p. 53). La optimización como objeto matemático es frecuentemente utilizado en la Econometría y campos relacionados a este donde se usan, a modo de ejemplo, métodos de programación lineal, programación no lineal, dualidad y análisis de sensibilidad, los cuales son diversas aplicaciones de la optimización. Asimismo, Requielme et al. (2021) indican que una de las principales aplicaciones económicas de la optimización se da en microeconomía, la cual es una rama de la economía que se encarga de analizar las acciones realizadas por agentes económicos que ejercen actividad económica en el mercado. De esta manera, la optimización resulta útil como una herramienta para facilitar la toma de decisiones de ciertos elementos económicos como los bienes o servicios, precios, cantidades de producción, entre otros.

De esta manera, se revisan los cursos dictados en la carrera de Economía, o equivalentes, en algunas universidades peruanas como la Universidad Continental (UC), Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM), Universidad Pacífico (UP), Universidad Ricardo Palma (URP), Universidad Ruiz de Montoya (UNARM) y Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). En esta revisión, se encuentra que la rama microeconomía, mencionada en el párrafo anterior, es dictada como curso “Microeconomía” (en algunos casos dividido en Microeconomía I y Microeconomía II) como parte de sus programas de formación, el cual es precedido por cursos de Matemática Económica. Como se mencionó en el párrafo anterior, la optimización es útil en la rama microeconómica, por lo que el aprendizaje de técnicas de optimización, entre ellas las de funciones reales, es necesario para abordar temas pertenecientes propiamente a esta rama.

Asimismo, en los programas de los cursos precedentes a Microeconomía como Matemática para Economía 2, o sus equivalentes como Economía Matemática 2, Matemática para Economía y Finanzas 2, y Matemática para Gestión y Economía 2, de la UNSM (2020), URP (2021), PUCP (2024) y UNARM (2024), se aborda el objeto matemático funciones reales en varias variables y sus aplicaciones, entre estas, la optimización de funciones reales en varias variables. Esto implica que, según lo encontrado en los párrafos anteriores acerca de las aplicaciones de la optimización en Economía, la optimización de funciones es un tema de enseñanza que un alumno de la especialidad de Economía debe comprender en su formación, tanto académica como profesional. A modo de ejemplo, entre los diversos tipos

de optimización desarrollados en estos cursos de matemática económica se encuentra la optimización de funciones reales de variable real y funciones reales de varias variables reales (dos o más variables), donde incluso se desarrollan métodos cuando las funciones están sujetas a restricciones de igualdad o desigualdad.

Por otro lado, es preciso destacar la práctica docente y lo que este debe tener en cuenta al planificar las clases con la finalidad de la mejora continua del proceso de instrucción. Si bien los libros académicos utilizados como referencia en los cursos de Matemática para Economistas poseen diversos enfoques, desde el desarrollo de problemas matemáticos hasta el desarrollo e interpretación de problemas aplicados a la economía, el profesor se encuentra en la obligación de decidir cómo abordar el concepto de la optimización aplicada a la economía realizando un balance adecuado entre ambos enfoques. Por ello, se destaca la importancia del uso de la herramienta idoneidad didáctica, sus aplicaciones y ventajas en la reflexión del profesor para decidir el enfoque a utilizar para desarrollar cierto tema en clases.

La idoneidad didáctica es una herramienta del Enfoque Ontosemiótico que permite ayudar al docente a planificar sus secuencias didácticas, la evaluación y replanificación de la competencia matemática de sus estudiantes (Breda et al., 2015). Según Gómez et al. (2016), “la interacción en el aula de clase se convierte en una pieza esencial para el trabajo al interior del aula, ya que le permite configurar de manera más práctica al estudiante lo aprendido, bien sea con ayuda de sus pares o bajo la asesoría del docente” (p. 100). De esta manera, Godino, et al. (2017), los profesores en formación deben considerar no solo los conocimientos matemáticos que poseen, sino también las competencias didácticas que implican los procesos de instrucción. Esto permitiría que la interacción del profesor en el aula sea más eficiente según el grupo de o características de alumnos que posea.

Gutiérrez (2019) afirma que es posible que los profesores que dicten cursos de matemática a nivel universitario no han sido formados como docentes, por lo que es importante reflexionar y analizar los conocimientos y su formación relativa a la instrucción de contenidos matemáticos. En la revisión de artículos acerca de los usos de idoneidad didáctica hecha por Malet et al. (2021), se concluye que la idoneidad didáctica es una herramienta útil para ayudar a los profesores a promover la reflexión en la mejoría de sus prácticas docentes sea cual sea su formación inicial, lo cual podría implicar el uso de material audiovisual-tecnológico, valoración de producciones de los alumnos u otras tareas.

En cuanto a la enseñanza de optimización de funciones de una variable, Báez et al. (2022) sugieren que los profesores, en sus prácticas docentes, deben considerar ejemplos no análogos, de demostración, problemas que impliquen cambios de registros, así como entrenar a los alumnos en el uso de herramientas tecnológicas. De esta manera, los profesores adaptan los enfoques presentados en los libros académicos para mejorar sus

competencias didácticas y planificar adecuadamente previendo las dificultades que podrían surgir durante el proceso de instrucción.

A modo de resumen, la optimización de funciones de una o varias variables es un tema dictado recurrentemente para estudiantes en diversas carreras como Matemáticas, Ingeniería y las Ciencias Sociales debido a sus diversas aplicaciones profesionales y, por lo tanto, es requisito de cursos posteriores en las mallas curriculares, como lo es el caso de Economía. Además, como en todo proceso de instrucción, según se indicó en la sección anterior, se presentan dificultades, por lo que es relevante la reflexión del docente acerca de su práctica. De esta manera, la idoneidad didáctica resulta una herramienta útil del Enfoque Ontosemiótico que permite al docente reflexionar al respecto y tomar en consideración la planificación de sus clases, mediante el balance entre aquellos aspectos teóricos y otros recursos didácticos que debe elegir y sus aplicaciones relacionadas con el desarrollo profesional de los estudiantes.

### **1.3. Pregunta de investigación**

Debido a lo revisado en las secciones anteriores, se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué aspectos se pueden mejorar de un proceso de instrucción sobre optimización de funciones de dos variables para estudiantes de Economía?

### **1.4. Objetivos**

Sobre la base de la revisión de antecedentes, la formulación de la pregunta de investigación y la justificación de la importancia de hacer esta investigación de las secciones anteriores, se plantean los siguientes objetivos:

#### Objetivo general

- Valorar la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción de optimización de funciones reales de dos variables implementado con alumnos de la carrera de Economía

#### Objetivos específicos

- Identificar los significados de referencia de la derivada parcial involucrados en problemas de optimización de funciones reales de dos variables en instituciones educativas que forman economistas
- Adaptar y construir indicadores de idoneidad didáctica para un proceso de instrucción idóneo de optimización de funciones reales de dos variables
- Comparar y analizar las semejanzas y diferencias entre el proceso de instrucción idóneo y el proceso de instrucción realizado por el profesor

## Capítulo II: Aspectos teóricos y metodológicos

En este segundo capítulo, se describirán algunos aspectos teóricos del Enfoque Ontosemiótico (EOS), principalmente, la herramienta de idoneidad didáctica, la cual será útil para el desarrollo de esta investigación, y aquellos otros conceptos que se encuentren relacionados con esta herramienta de análisis. Además, se describirá la metodología de tipo cualitativa que se utilizará para el desarrollo y valoración del proceso de instrucción de optimización de funciones reales de dos variables implementado con estudiantes de Economía.

### 2.1. Aspectos del marco teórico

La presente investigación se sitúa en el marco teórico del EOS, el cual fue desarrollado y ampliado en los últimos años principalmente por Godino et al. (2017). Dentro del EOS, hay dos herramientas que son relevantes para el desarrollo de esta investigación: los sistemas de prácticas y la idoneidad didáctica. Del sistema de prácticas, se aborda el concepto “significado”, el cual es útil para identificar aquellos significados de las derivadas parciales involucrados en problemas de optimización de funciones de dos variables; mientras que la idoneidad didáctica permite analizar el proceso de instrucción implementado por un profesor según criterios establecidos a partir de los significados.

#### 2.1.1. Sistemas de prácticas

De esta herramienta, se toman principalmente los conceptos de significados (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino et al., 2007; Ramírez et al., 2020). Los sistemas de prácticas en el EOS están compuestos por acciones o manifestaciones, verbales o no, realizadas por alguien con la intención de “resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino y Batanero, 1994, p. 334).

Los significados son concebidos como sistemas de prácticas tipo operativas o discursivas que se realizan por una entidad, institución o persona, y pueden ser del tipo institucionales o personales.

- Los significados institucionales corresponden a las prácticas compartidas por una institución y pueden ser del tipo implementado, evaluado, pretendido y referencial. Los significados institucionales implementado y evaluado se dan en la práctica del docente durante la enseñanza, mientras que el significado institucional pretendido se da en su planificación, tomando en cuenta, por ejemplo, el currículo o programación académica. Los significados institucionales de referencia son aquellos que se construyen a priori en el análisis o proceso de instrucción, tomando en cuenta el punto de vista histórico y epistemológico de la construcción

del significado del contenido matemático, los cuales se pueden encontrar en los textos académicos relacionados con el cálculo multivariable.

- Los significados personales corresponden a las prácticas realizadas por una persona en particular para resolver un problema matemático. En una clase, es el estudiante quien manifestará sus prácticas personales en el aprendizaje, ya sea durante su interacción con el profesor como al rendir evaluaciones según las pautas institucionales.

Para definir adecuadamente cada significado de referencia, es relevante mostrar los objetos o entidades primarias que intervienen en los sistemas de prácticas institucionales de referencia. Para llevar a cabo este análisis, en la tabla 1 se muestran las seis entidades primarias relacionadas al significado institucional de referencia de un objeto matemático, las cuales pueden intervenir o emerger durante el proceso de instrucción.

**Tabla 1**

*Configuración de objetos primarios*

<b>Objeto matemático primario</b>	<b>Descripción</b>
Lenguaje	Términos, expresiones, notaciones, gráficos en sus diversos registros
Situaciones-problemas	Intra-matemáticos o extra-matemáticos, ejercicios, u otros para dar introducción a la actividad matemática
Conceptos-definición	Introducidos por definición o descripción, dependen de los conocimientos previos de los estudiantes
Proposiciones	Enunciados sobre los conceptos, propiedades u otros atributos
Procedimientos	Algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, inducción, deducción, entre otros
Argumentos	Enunciados, justificaciones o demostraciones utilizados para validar o explicar proposiciones y procedimientos

Fuente: Tomado de Godino et al. (2007, p. 55)

De esta manera, los objetos primarios mostrados anteriormente se articulan entre sí y se organizan como una configuración epistémica global para describir y analizar los conocimientos matemáticos, en este caso, los significados institucionales de referencia (Godino et al., 2007).

### 2.1.2. Idoneidad didáctica

Esta herramienta se define como el grado o nivel en que cierto proceso de instrucción posee características que lo hacen óptimo o adecuado para lograr la adaptación entre significados personales aprendidos por los estudiantes y los significados institucionales deseados o implementados por el profesor (Godino et al., 2020). El análisis de la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se lleva a cabo mediante la valoración de cada una de las seis facetas que componen esta herramienta:

- La idoneidad epistémica permite valorar qué tan representativos son los significados institucionales que se pretenden implementar en una clase respecto de los significados de referencia del objeto matemático.
- La idoneidad cognitiva permite valorar el nivel como se relacionan e instruyen los significados pretendidos o implementados en los alumnos. Esto se da tanto, antes, durante y después del proceso mediante, por ejemplo, la toma de evaluaciones, adaptaciones de currículo y otras herramientas utilizadas en el aprendizaje.
- La idoneidad interaccional permite valorar el nivel como se resuelven y promueven las interacciones entre docentes y alumnos.
- La idoneidad mediacional permite valorar el grado de disponibilidad y uso de recursos, sean materiales o temporales, dentro del proceso de instrucción.
- La idoneidad afectiva permite valorar qué tan implicado se encuentra el estudiante durante el proceso de instrucción.
- La idoneidad ecológica permite valorar qué tanto se adecúa el proceso de instrucción al proyecto educativo institucional, considerando los currículos, el entorno social y profesional, entre otros.

Cada una de estas seis idoneidades que conforman la idoneidad general posee diversos componentes e indicadores que guían la valoración de cada faceta. En las siguientes tablas 2 a 7, se presenta una recolección y síntesis de las componentes e indicadores de cada idoneidad tomando y adaptando como referencia los propuestos y desarrollados en investigaciones pasadas por Godino et al. (2006), Godino (2011), Pino-Fan et al. (2021) y Verón et al. (2024).

La tabla 2 muestra las componentes de la idoneidad epistémica, las cuales se relacionan con los objetos primarios de los significados de referencia descritos en la sección anterior. Estas componentes propuestas principalmente en las investigaciones de Godino et al. (2006) y Godino (2011) son las situaciones-problemas, los lenguajes, las reglas o elementos regulativos, los argumentos, las relaciones y los errores. Para cada componente se muestra una síntesis y adaptaciones de los indicadores propuestos por Pino-Fan y Parra-Urrea (2021) y Verón et al. (2024) para procesos de instrucción de funciones y diferenciales.

**Tabla 2***Componentes e indicadores de la idoneidad epistémica*

<b>1 – IDONEIDAD EPISTÉMICA</b>	
<b>Componentes</b>	<b>Indicadores</b>
Situaciones- problemas	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se proponen problemas que refuercen los conocimientos previos al objeto matemático.</li> <li>• Se presenta una muestra representativa de problemas que ejemplifiquen todos los significados de referencia del objeto matemático.</li> <li>• Se proponen problemas intra-matemáticos que refuercen el tema.</li> <li>• Se proponen problemas contextualizados.</li> <li>• Se proponen espacios de generación de problemas.</li> </ul>
Lenguajes	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se usan diferentes representaciones del objeto matemático (visual, gráfico, simbólico, entre otros).</li> <li>• Se usan y promueven diferentes tratamientos y conversiones entre las distintas representaciones del objeto matemático.</li> <li>• Se usa un nivel adecuado de lenguaje para dirigirse hacia los estudiantes.</li> <li>• Se proponen problemas en los diferentes registros utilizados.</li> </ul>
Reglas o elementos regulativos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se presentan de una manera clara y correcta las definiciones.</li> <li>• Se presentan los enunciados y procedimientos necesarios para resolver los problemas.</li> </ul>
Argumentos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel superior.</li> <li>• Se proponen situaciones donde los estudiantes deban utilizar definiciones o procedimientos para justificar sus respuestas.</li> </ul>
Relaciones	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Los problemas, definiciones y procedimientos se relacionan y conectan entre sí.</li> <li>• Se identifican y articulan los diversos significados del objeto matemático.</li> </ul>
Errores, ambigüedades y creencias	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El trabajo con el objeto matemático no se limita al uso de una sola representación algebraica.</li> <li>• Se presentan problemas que no tengan solución.</li> <li>• Se presentan problemas que no son graficables.</li> </ul>

Fuente: Adaptado de Pino-Fan y Parra-Urrea (2021) y Verón et al. (2024).

La tabla 3 muestra las componentes de la idoneidad cognitiva, las cuales permiten describir y medir el significado cómo se perciben aquellos significados pretendidos una vez que se implementan en los alumnos. Estas componentes propuestas principalmente en las investigaciones de Godino et al. (2006) y Godino (2011) son los conocimientos previos, las adaptaciones curriculares a las diferencias individuales, los aprendizajes y la alta demanda cognitiva. Para cada componente se muestra una síntesis y adaptaciones de los indicadores propuestos por Pino-Fan y Parra-Urrea (2021) y Verón et al. (2024) para procesos de instrucción de funciones y diferenciales.

**Tabla 3**

*Componentes e indicadores de la idoneidad cognitiva*

<b>2 – IDONEIDAD COGNITIVA</b>	
<b>Componentes</b>	<b>Indicadores</b>
Conocimientos previos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se comprueba que los alumnos tienen los conocimientos previos y necesarios para introducir el tema (estudios previos o planificación del profesor).</li> <li>• Se vinculan los conocimientos previos con el tema.</li> <li>• Los significados pretendidos se pueden alcanzar.</li> </ul>
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se incluyen actividades de ampliación, refuerzo, contraejemplos y analogías.</li> </ul>
Aprendizajes	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se emplean diversos instrumentos de evaluación que muestren la apropiación de los significados pretendidos del profesor como personales de los alumnos.</li> </ul>
Alta demanda cognitiva	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se incluyen tareas matemáticas donde el estudiante deba identificar qué significado es más adecuado utilizar para resolver.</li> </ul>

Fuente: Adaptado de Pino-Fan y Parra-Urrea (2021) y Verón et al. (2024).

La tabla 4 muestra las componentes de la idoneidad interaccional, la cual permite analizar cómo se da la interacción entre el docente y los alumnos durante el proceso de instrucción. Estas componentes propuestas principalmente por Godino et al. (2006) y Godino (2011) son la interacción entre docente-estudiante, las interacciones entre estudiantes, autonomía y la evaluación formativa. Para cada componente se muestra una síntesis y adaptaciones de los indicadores propuestos por Pino-Fan y Parra-Urrea (2021) y Verón et al. (2024) para procesos de instrucción de funciones y diferenciales.

**Tabla 4**

*Componentes e indicadores de la idoneidad interaccional*

<b>3 – IDONEIDAD INTERACCIONAL</b>	
<b>Componentes</b>	<b>Indicadores</b>
Interacción docente-estudiante	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El profesor hace una presentación clara y organizada del tema.</li> <li>• Se identifican y resuelven conflictos de significado de los estudiantes (se interpreta correctamente el silencio, expresiones faciales, preguntas, respuestas, entre otros).</li> <li>• Se busca llegar a consensos sobre la base del mejor argumento.</li> <li>• Se usan diversos recursos retóricos para captar atención.</li> <li>• Se facilita la inclusión de alumnos en la clase.</li> </ul>
Interacciones entre estudiantes	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se promueve el diálogo entre estudiantes.</li> <li>• Se promueve la participación grupal y se evita la exclusión.</li> </ul>
Autonomía	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se contemplan momento donde los estudiantes se vuelven responsables del estudio (resuelven problemas por su cuenta, exploran nuevos ejemplos y contraejemplos, conectan temas y comunican).</li> </ul>
Evaluación formativa	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El docente observa sistemáticamente el progreso cognitivo de los estudiantes.</li> </ul>

Fuente: Adaptado de Pino-Fan y Parra-Urrea (2021) y Verón et al. (2024).

La tabla 5 muestra las componentes de la idoneidad mediacional, la cual permite medir qué tanto se aprovechan y disponen los recursos del aula o institución durante el proceso de instrucción. Estas componentes propuestas principalmente por Godino et al. (2006) y Godino (2011) son los recursos materiales, el número de alumnos, el horario de clases, las condiciones del aula y el tiempo disponible para el proceso de instrucción. Para cada componente se muestra una síntesis y adaptaciones de los indicadores propuestos por Pino-Fan y Parra-Urrea (2021) y Verón et al. (2024) para procesos de instrucción de funciones y diferenciales.

**Tabla 5**

*Componentes e indicadores de la idoneidad mediacional*

<b>4 – IDONEIDAD MEDIACIONAL</b>	
<b>Componentes</b>	<b>Indicadores</b>
Recursos materiales	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se utilizan diversos recursos manipulativos y tecnológicos que permitan introducir e interpretar los diferentes significados del objeto matemático.</li> <li>• Se emplean visualizaciones de los conceptos matemáticos.</li> <li>• Se realiza un uso controlado de metáforas u analogías.</li> </ul>
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El número y distribución de alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida por el profesor.</li> <li>• El horario es apropiado y se adecúa el proceso de instrucción según la hora (horas de dictado muy tempranas o tardía)</li> <li>• El espacio educativo es adecuado para el desarrollo de la clase.</li> </ul>
Tiempo	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Los significados pretendidos se impartieron adecuadamente en el tiempo disponible.</li> <li>• Se da más tiempo a los contenidos más relevantes del tema.</li> <li>• Se dispone de tiempo para asesorías o resolución de problemas.</li> </ul>

Fuente: Adaptado de Pino-Fan y Parra-Urrea (2021) y Verón et al. (2024).

La tabla 6 muestra las componentes de la idoneidad afectiva, la cual permite analizar el compromiso del estudiante durante todo el proceso de instrucción. Estas componentes propuestas principalmente por Godino et al. (2006) y Godino (2011) son los intereses y necesidades del alumno, sus actitudes y sus emociones. Para cada componente se muestra una síntesis y adaptaciones de los indicadores propuestos por Pino-Fan y Parra-Urrea (2021) y Verón et al. (2024) para procesos de instrucción de funciones y diferenciales.

**Tabla 6**

*Componentes e indicadores de la idoneidad afectiva*

<b>5 – IDONEIDAD AFECTIVA</b>	
<b>Componentes</b>	<b>Indicadores</b>
Intereses y necesidades	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se presenta el tema como una herramienta útil en la resolución de problemas matemáticos del área económica o vida cotidiana.</li> <li>• Se proponen problemas o tareas de interés para los estudiantes.</li> </ul>
Actitudes	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se promueve la participación en actividades, la perseverancia y responsabilidad.</li> <li>• Se promueve y favorece el razonamiento lógico, la argumentación, análisis y otras destrezas para resolver problemas.</li> </ul>
Emociones	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se promueve la autoestima, evitando el rechazo al estudio del tema.</li> <li>• Se resaltan las cualidades de precisión y rigurosidad del tema.</li> </ul>

Fuente: Adaptado de Pino-Fan y Parra-Urrea (2021) y Verón et al. (2024).

La tabla 7 muestra las componentes de la idoneidad ecológica, la cual permite analizar cómo se adecúa el proceso de instrucción al proyecto de carrera propuesta por la institución. Estas componentes propuestas principalmente por Godino et al. (2006) y Godino (2011) son la adaptación al currículo, la apertura hacia la innovación didáctica, la adaptación social-profesional-cultural y las conexiones intra e interdisciplinarias. Para cada componente se muestra una síntesis y adaptaciones de los indicadores propuestos por Pino-Fan y Parra-Urrea (2021) y Verón et al. (2024) para procesos de instrucción de funciones y diferenciales.

**Tabla 7**

*Componentes e indicadores de la idoneidad ecológica*

<b>6 – IDONEIDAD ECOLÓGICA</b>	
<b>Componentes</b>	<b>Indicadores</b>
Adaptación al currículo	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Los significados se implementan y evalúan según las directrices del sílabo.</li> </ul>
Apertura hacia la innovación didáctica	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se promueve el uso de tecnologías o nuevos softwares como apoyo para la comprensión del tema.</li> <li>• Se promueve la investigación o reflexión práctica del tema.</li> </ul>
Adaptación social, profesional y cultural	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Los significados contribuyen a la formación social, profesional y cultural de los estudiantes. Los significados pretendidos están orientados hacia un contexto económico.</li> </ul>
Conexiones intra e interdisciplinarias	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se vincula el objeto matemático con otros objetos que se dictaron antes o se dictarán posteriormente en el curso o cursos futuros.</li> </ul>

Fuente: Adaptado de Pino-Fan y Parra-Urrea (2021) y Verón et al. (2024).

Todas estas componentes e indicadores presentados en esta sección se adaptan en el capítulo 4 de acuerdo con los significados de referencia de la derivada parcial identificados en problemas de optimización de funciones de dos variables de un proceso de instrucción idóneo para estudiantes de Economía. Asimismo, el análisis de cada componente e indicador se realizar comparando estos indicadores con las observaciones de clase y otros datos recogidos para la investigación.

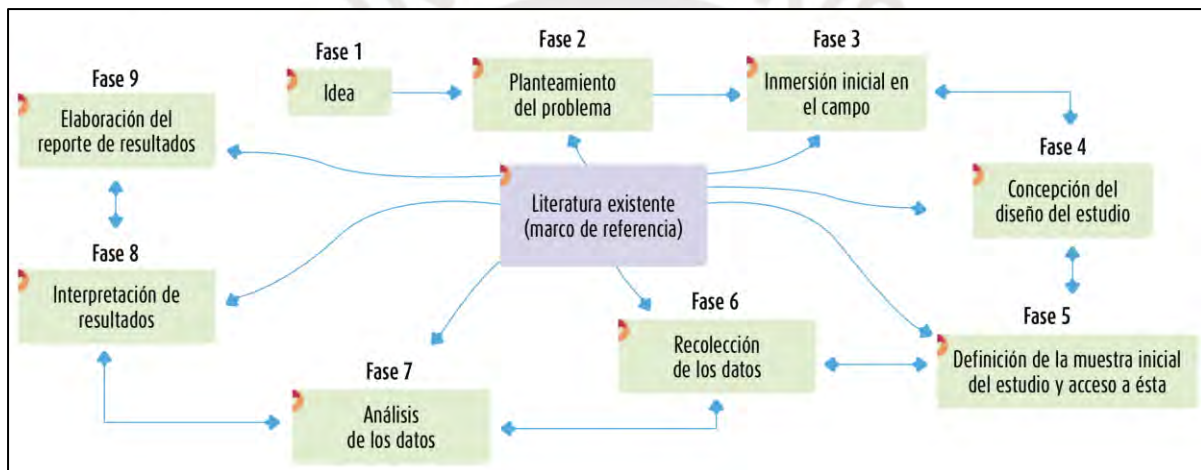
## 2.2. Aspectos metodológicos

La presente investigación es considerada de carácter cualitativo-descriptivo debido a que se pretende describir, comprender, analizar e interpretar el fenómeno, el cual es explorado desde la perspectiva y significado del investigador (Hernández et al., 2014). En esta investigación, el fenómeno de estudio es la valoración de un proceso de instrucción de optimización de funciones de dos variables para alumnos de Economía de primer año de universidad.

El método de investigación con que se desarrollará en este trabajo será adaptado a partir de los procedimientos metodológicos de una investigación cualitativa propuestos por Hernández et al. (2014). Estos procedimientos están comprendidos en nueve fases, las cuales se muestran en la figura 1.

**Figura 1**

*Proceso de investigación cualitativa*

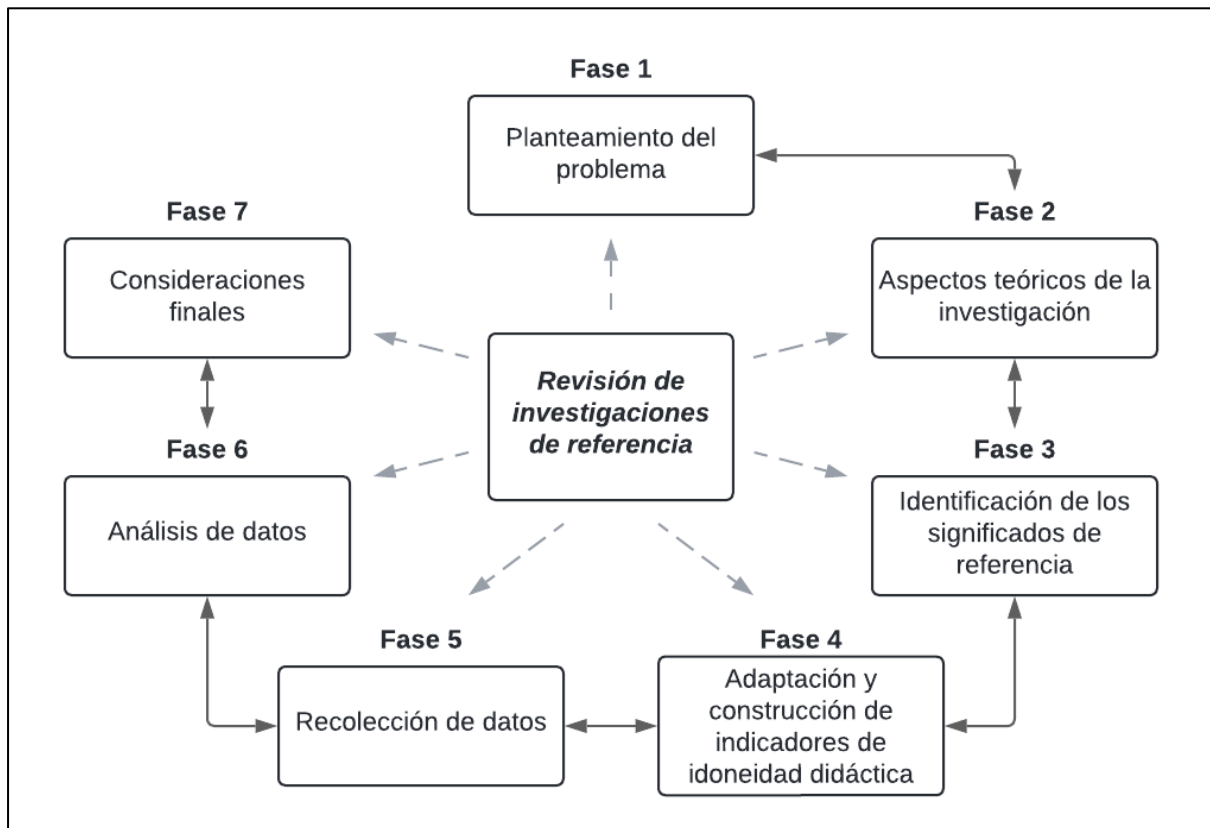


Fuente: Tomado de Hernández et al. (2014, p. 7).

Dada la naturaleza de la presente investigación, se determinan seis fases a partir de los procedimientos metodológicos anteriores, los cuales se describen en la siguiente figura 2. Estas fases se desarrollan en cada capítulo de esta investigación.

**Figura 2**

*Proceso de investigación cualitativa de la presente investigación*



Nota. Elaboración propia

### **Fase 1: Planteamiento del problema**

Para formular el problema de investigación, se realiza una revisión de investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de temas del cálculo multivariable, las cuales fueron organizadas en tres grupos: investigaciones encontradas acerca de la enseñanza-aprendizaje de temas del cálculo multivariable y, particularmente, la optimización de funciones de varias variables; dificultades encontradas en la enseñanza-aprendizaje en temas del cálculo multivariable; y conocimientos necesarios que debería tener un profesor que enseñe el tema de optimización de funciones. Adicionalmente, se realiza una búsqueda de información que justifique la importancia de esta investigación considerando la importancia que merece la enseñanza de la optimización en carreras universitarias como la Ingeniería, Matemática o Economía; las aplicaciones de la optimización en el ámbito profesional; y la relevancia de la herramienta “idoneidad didáctica” para el profesor de educación superior.

A partir de esta información, se pretende responder a la pregunta de investigación “¿Qué aspectos se pueden mejorar de un proceso de instrucción sobre optimización de funciones de dos variables para estudiantes de Economía?”. Para ello, se plantean los objetivos general y específicos que guían el desarrollo de esta investigación en los capítulos posteriores.

## **Fase 2: Aspectos teóricos de la investigación**

En esta fase, se seleccionan los aspectos teóricos necesarios para desarrollar la investigación. Se utilizan aspectos del marco teórico Enfoque Ontosemiótico, haciendo énfasis en los conceptos de significados de referencia y la idoneidad didáctica. Además, se presentan los indicadores de idoneidad presentes en trabajos relacionados con funciones y diferenciabilidad (Pino-Fan y Parra-Urrea, 2021; Verón et al., 2024), los cuales se considerarán para la construcción de los indicadores relacionados con el proceso de instrucción de la optimización de funciones de dos variables.

## **Fase 3: Identificación de los significados de referencia**

En primer lugar, se identifican los significados de referencia de la derivada parcial involucrados en la optimización de funciones de dos variables. Para ello, se realiza la revisión de textos, artículos, investigaciones, publicaciones matemáticas, sílabos y bibliografía empleados en este proceso de instrucción.

En segundo lugar, se muestra la conexión de los significados de referencia de la derivada parcial con la optimización y su aplicación a la Economía. Se presentan algunos ejemplos que evidencian dicha relación.

## **Fase 4: Adaptación y construcción de indicadores de idoneidad didáctica**

A partir de los indicadores de idoneidad didáctica propuestos en la fase 2 y los significados de referencia propuestos en la fase 3, se adaptan y construyen nuevos indicadores de idoneidad para cada una de las componentes de las seis diferentes facetas de idoneidad didáctica para un proceso de instrucción idóneo de optimización de funciones reales de dos variables en alumnos de Economía.

Debido a la extensión y gran cantidad de indicadores que se consideran, se codifica cada uno por faceta de idoneidad y componente bajo la siguiente estructura mostrada en la tabla 8.

**Tabla 8**

*Codificación de indicadores de idoneidad por componente y faceta*

Faceta de idoneidad y su codificación	Codificación de cada componente de la idoneidad	Codificación de indicadores
Idoneidad epistémica (IEP)	<p>IEP<sub>i</sub>, donde i el número de la componente</p> <p>IEP<sub>1</sub>: Situaciones problema</p> <p>IEP<sub>2</sub>: Lenguajes</p> <p>IEP<sub>3</sub>: Reglas o elementos regulativos</p> <p>IEP<sub>4</sub>: Argumentos</p> <p>IEP<sub>5</sub>: Relaciones</p> <p>IEP<sub>6</sub>: Errores, ambigüedades y creencias</p>	IEP <sub>i,j</sub> , donde j es el número de indicador propuesto para cada componente i.
Idoneidad cognitiva (ICO)	<p>ICO<sub>i</sub>, donde i el número de la componente</p> <p>ICO<sub>1</sub>: Conocimientos previos</p> <p>ICO<sub>2</sub>: Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales</p> <p>ICO<sub>3</sub>: Aprendizajes</p> <p>ICO<sub>4</sub>: Alta demanda cognitiva</p>	ICO <sub>i,j</sub> , donde j es el número de indicador propuesto para cada componente i.
Idoneidad interaccional (IIN)	<p>IIN<sub>i</sub>, donde i el número de la componente</p> <p>IIN<sub>1</sub>: Interacción docente-estudiante</p> <p>IIN<sub>2</sub>: Interacción entre estudiantes</p> <p>IIN<sub>3</sub>: Autonomía</p> <p>IIN<sub>4</sub>: Evaluación formativa</p>	IIN <sub>i,j</sub> , donde j es el número de indicador propuesto para cada componente i.
Idoneidad mediacional (IME)	<p>IME<sub>i</sub>, donde i el número de la componente</p> <p>IME<sub>1</sub>: Recursos materiales</p> <p>IME<sub>2</sub>: Número de alumnos, horario y condiciones del aula</p> <p>IME<sub>3</sub>: Tiempo</p>	IME <sub>i,j</sub> , donde j es el número de indicador propuesto para cada componente i.
Idoneidad afectiva (IAF)	<p>IAF<sub>i</sub>, donde i el número de la componente</p> <p>IAF<sub>1</sub>: Intereses y necesidades</p> <p>IAF<sub>2</sub>: Actitudes</p> <p>IAF<sub>3</sub>: Emociones</p>	IAF <sub>i,j</sub> , donde j es el número de indicador propuesto para cada componente i.
Idoneidad ecológica (IEC)	<p>IEC<sub>i</sub>, donde i el número de la componente</p> <p>IEC<sub>1</sub>: Adaptación al currículo</p> <p>IEC<sub>2</sub>: Apretura hacia la innovación didáctica</p> <p>IEC<sub>3</sub>: Adaptación social, profesional y cultural</p> <p>IEC<sub>4</sub>: Conexiones intra e interdisciplinarias</p>	IEC <sub>i,j</sub> , donde j es el número de indicador propuesto para cada componente i.

*Nota.* Elaboración propia

### **Fase 5: Recolección datos**

Inicialmente, se describe el contexto de la investigación, donde se detalla la información relevante a las clases observadas, el profesor seleccionado y los temas de interés que se enseñan en estas clases. El curso dictado por el profesor es “Matemáticas para Economía y Finanzas 1”, el cual es de carácter obligatorio en la formación de la carrera Economía según la universidad privada donde trabaja el profesor. El tema “Optimización de funciones de dos variables” se dicta como parte de la unidad de “Cálculo diferencial de funciones de varias variables” según el sílabo del curso. Además, este tema se dicta como aplicación de las derivadas parciales. La cantidad de clases observadas son seis, entre clases teóricas y prácticas durante dos semanas.

Luego, se lleva a cabo la recopilación de la información necesaria acerca del proceso de instrucción descrito anteriormente para el análisis de la idoneidad didáctica. Se recurre a la técnica “triangulación de datos”, la cual consiste en emplear diferentes fuentes y técnicas de recolección de información para enfocar la validez, amplitud y profundidad en la investigación (Jiménez, 2012; Hernández et al., 2014). Para ello, se utilizan las siguientes técnicas de recolección de datos:

- Observaciones de clases, las cuales se videograban desde un celular y una *tablet* que enfocó al salón de clases, al profesor y a la pizarra mientras el profesor desarrollaba el tema. Los indicadores de idoneidad didáctica sirven como guía de observación de clases, la cual se muestra en el anexo 1.
- Entrevista semiestructurada con el profesor, la cual se realiza para complementar lo recopilado en las videograbaciones, considerando la preparación de la clase, hasta su posterior evaluación durante las prácticas del curso. Para ello, se elabora un cuestionario con algunas preguntas y temas guía sobre la base de los indicadores de idoneidad didáctica construidos previamente. El formato de este cuestionario se muestra en el anexo 2.
- Materiales de clase didácticos, los cuales consisten en los materiales utilizados para la enseñanza de clases como las presentaciones de clase, las hojas de ejercicios y las evaluaciones tomadas a los alumnos. Esta información es organizada adecuadamente en matrices para su posterior análisis. La organización y documentación de esta información se encuentra en el anexo 3.

### **Fase 6: Análisis datos**

Sobre la base de la recolección de la información de la fase anterior y los indicadores de idoneidad adaptados en la fase 4, se realiza el análisis del proceso de instrucción por cada faceta de la idoneidad didáctica por medio de la comparación entre los indicadores idóneos planteados y lo recolectado en el proceso de instrucción del profesor. En esta comparación,

se describe aquello que no se evidencia en el proceso de instrucción y es potencial mejora para tener un proceso idóneo de instrucción del tema de optimización de funciones de dos variables.

### **Fase 7: Consideraciones finales**

En esta última fase, se presentan los resultados sintetizados a partir del análisis realizado en la fase anterior y se redactan las conclusiones de la investigación. Asimismo, se busca responder a la pregunta “¿Qué aspectos se pueden mejorar de un proceso de instrucción sobre optimización de funciones de dos variables para estudiantes de Economía?”. Por último, se plantean algunas recomendaciones para futuras investigaciones en el área del cálculo multivariable.



## **Capítulo III: Identificación de los significados de referencia de la derivada parcial involucrados en la optimización de funciones reales de dos variables**

En este capítulo, se tiene como finalidad identificar los significados de referencia de las derivadas parciales que están involucrados en la optimización de funciones reales de dos variables. Estos significados se encuentran presentes en investigaciones, sílabos y textos frecuentemente utilizados en cursos de matemáticas aplicadas a la economía en primeros ciclos de carrera. Además, se describe la relación que hay entre los significados de referencia de la derivada parcial con la optimización aplicada a la economía, lo cual permite plantear los indicadores de idoneidad didáctica en el siguiente capítulo.

### **3.1. Significados de referencia de las derivadas parciales**

Los significados de referencia son aquellas acciones u otras manifestaciones de tipo operativas o discursivas construidas antes de la implementación del proceso de instrucción. Estos se pueden encontrar en los textos académicos, los sílabos u otras investigaciones relacionadas con el área del objeto matemático que se pretende analizar (Godino et al., 2007). En esta sección, se busca identificar aquellos significados de referencia de las derivadas parciales que se encuentren involucrados en la resolución de problemas de optimización y su posterior aplicación a la economía. Para ello, se revisan textos académicos indicados en los sílabos de cursos relacionados con la matemática aplicada a la Economía y que trabajen la optimización de funciones en varias variables, así como investigaciones realizadas en el área.

Entre los libros frecuentemente utilizados según la revisión de sílabos de cursos de Matemáticas Aplicadas a la Economía, el cual es uno de los primeros cursos de las mallas curriculares descritas de varias universidades según lo descrito en el primer capítulo de esta investigación, figuran los siguientes textos:

- “Cálculo en varias variables. Trascendentes tempranas” (Stewart, 2012b)
- “Matemáticas para el análisis económico” (Sydsaeter et al., 2012)
- “Métodos Fundamentales de Economía Matemática” (Chiang y Wainwright, 2006)

Asimismo, se tomaron como referencia los trabajos de los significados de la derivada de funciones reales de variable real encontrados en las investigaciones de Pino-Fan et al. (2013) y Larios et al. (2021).

#### **3.1.1. La derivada parcial como expresión algebraica**

Al abordarse el estudio de funciones reales de varias variables y la optimización en Economía, uno de los primeros conceptos es la diferenciabilidad de funciones de varias variables, particularmente aquellas funciones de dos variables. Por ello, uno de los significados más recurrentes en los problemas de diferenciabilidad de funciones de varias

variables es el significado algebraico de la derivada parcial, es decir, considerar a la derivada para calcular nuevas expresiones algebraicas llamadas derivadas parciales.

Se interpretan las derivadas parciales como expresiones simbólico-algebraicas que se obtienen aplicando reglas algebraicas o procedimientos de derivación. En el caso de una función de dos variables  $f(x, y)$  se define como una regla que asigna pares  $(x, y)$  con valores reales  $z = f(x, y)$  según se muestra en la figura 3.

### Figura 3

*Definición de una función de dos variables*

**Definición** Una **función  $f$  de dos variables** es una regla que asigna a cada par ordenado de números reales  $(x, y)$  de un conjunto  $D$ , un único número real que se denota con  $f(x, y)$ . El conjunto  $D$  es el **dominio** de  $f$  y su **rango** es el conjunto de valores que toma  $f$ , es decir,  $\{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$ .

Fuente: Tomado de Stewart (2012b, p. 878)

Las derivadas parciales son aquellas que se obtienen derivando una función de dos variables respecto de una variable, pero manteniendo constante a la otra variable. Por ejemplo, la derivada parcial de la función  $f$  respecto de  $x$  se expresa como  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , para lo cual la variable  $y$  se mantiene constante.

Por ejemplo, sea  $f(x, y) = x^2 + y$ , entonces  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ . De la misma manera, la derivada parcial de  $f$  respecto de  $y$  se calcula como  $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ .

Para calcular las derivadas parciales, se toman como conocimientos previos las reglas de derivación del cálculo de una variable. La tabla 9 muestra los procedimientos y notaciones simbólicas utilizadas para calcular las derivadas parciales de funciones de dos variables de la forma  $z = f(x, y)$ .

### Tabla 9

*Lenguajes y procedimientos para determinar las primeras derivadas parciales de una función de dos variables*

Primera derivada parcial	Notaciones más utilizadas en los libros de texto	Procedimiento para determinar la derivada parcial de $f$
Primera derivada parcial de $f$ respecto de $x$	$f_x(x, y) = f_x = f_1$ $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}$	Conservar a $y$ constante y derivar $f(x, y)$ con respecto a $x$ .
Primera derivada parcial de $f$ respecto de $y$	$f_y(x, y) = f_y = f_2$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}$	Conservar a $x$ constante y derivar $f(x, y)$ con respecto a $y$ .

Fuente: Tomado de Stewart (2012b, p. 903)

Si las funciones obtenidas a partir de las derivadas parciales  $f_x$  o  $f_y$  se derivan una vez más, entonces se obtienen las segundas derivadas parciales, o de segundo orden. El procedimiento para derivar otra vez las funciones  $f_x$  o  $f_y$  es el mismo: mantener una variable constante. El lenguaje comúnmente utilizado en libros de texto se muestra en la tabla 10.

**Tabla 10**

*Lenguaje para expresar las segundas derivadas parciales de una función de dos variables*

Segunda derivada parcial	Notaciones más utilizadas en los textos
Segunda derivada parcial de $f_x$ respecto de $x$	$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
Segunda derivada parcial de $f_x$ respecto de $y$	$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$
Segunda derivada parcial de $f_y$ respecto de $x$	$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$
Segunda derivada parcial de $f_y$ respecto de $y$	$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

Fuente: Tomado de Stewart (2012b, p. 906)

Las funciones de dos variables y sus derivadas parciales se calculan a partir de la expresión dada por una función en su representación algebraica como se observa en la figura 4, donde se determinan las primeras derivadas parciales de cierta función, y en la figura 5, donde se determinan las segundas derivadas parciales de cierta función. Ambas figuras corresponden a ejemplos tomados del libro de Stewart (2012, p. 903 y p. 906).

**Figura 4**

*Ejemplo del cálculo de la primera derivada parcial de una función de dos variables*

**EJEMPLD 1** Si  $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$ , determine  $f_x(2, 1)$  y  $f_y(2, 1)$ .

**SOLUCIÓN** Al considerar como constante a  $y$  y derivar con respecto a  $x$  se obtiene

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$$

y entonces

$$f_x(2, 1) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 = 16$$

Si consideramos como constante a  $x$  y derivamos con respecto a  $y$  entonces

$$f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

$$f_y(2, 1) = 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 8$$

Fuente: Tomado de Stewart (2012b, p. 903)

Asimismo, en el siguiente ejemplo, se determinan las segundas derivadas parciales de la misma función en su representación algebraica.

**Figura 5**

Ejemplo del cálculo de las segundas derivadas parciales de una función de dos variables

**EJEMPLO 6** Determine las segundas derivadas parciales de

$$f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$$

**SOLUCIÓN** En el ejemplo 1 encontramos que

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3 \quad f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

Por lo tanto,

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2xy^3) = 6x + 2y^3 \quad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy^3) = 6xy^2$$

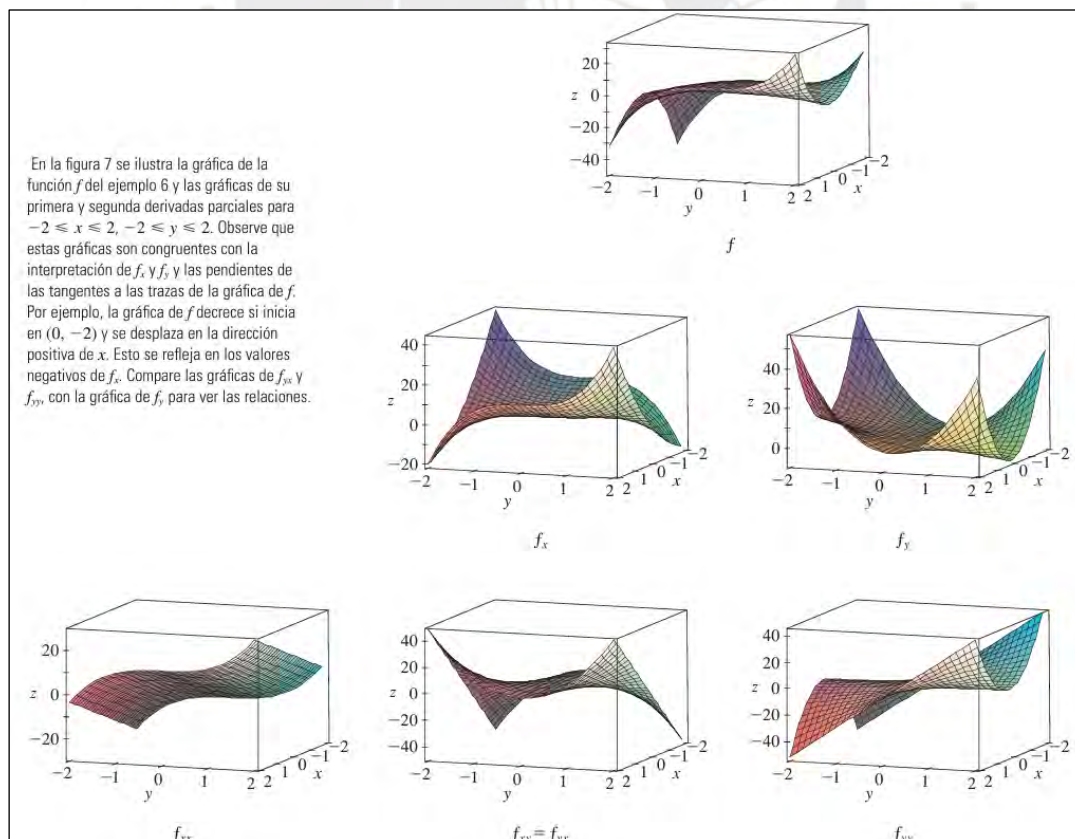
$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 4y) = 6xy^2 \quad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 - 4y) = 6x^2y - 4$$

Fuente: Tomado de Stewart (2012b, p. 906)

Debido a que las derivadas parciales de una función son también expresiones algebraicas, estas se pueden representar gráficamente en tres dimensiones y compararse respecto de las gráficas de su función original como se ven la figura 6 en un ejemplo del libro de Stewart (2012b).

**Figura 6**

Gráficas de derivadas parciales de una función de dos variables



Fuente: Tomado de Stewart (2012b, p. 907)

Como se indica en este ejemplo, se puede observar que las funciones obtenidas de las derivadas parciales de segundo orden  $f_{xy}$  y  $f_{yx}$  se representan con la misma gráfica. Esto se debe a que en ciertas funciones se cumple un teorema para las derivadas parciales combinadas  $f_{xy}$  y  $f_{yx}$ , el cual indica que ambas expresiones obtenidas son idénticas siempre y cuando sean continuas en su dominio. Este teorema es conocido como el Teorema de Clairaut, el cual se enuncia en la figura 7.

### Figura 7

*Teorema de Clairaut para derivadas parciales combinadas de segundo orden*

**Teorema de Clairaut** Suponga que  $f$  está definida sobre un disco  $D$  que contiene el punto  $(a, b)$ . Si tanto la función  $f_{xy}$  como  $f_{yx}$  son continuas sobre  $D$  entonces

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

Fuente: Tomado de Stewart (2012b, p. 907)

A partir del cálculo de las derivadas parciales como un significado algebraico, en la tabla 11, se muestran los objetos primarios que conforman la configuración epistémica de este significado. Además, se muestran los tipos de objetos primarios identificados en cada uno.

**Tabla 11**

*Objetos primarios asociados al significado algebraico de la derivada parcial*

Objeto matemático primario	Tipo de objeto identificado	Descripción
Lenguaje	Notación	Se usa alguna notación para diferenciar la derivada parcial de una función $f(x, y)$ respecto de alguna de sus variables. Por ejemplo: <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f_x</math> o <math>\frac{\partial f}{\partial x}</math> para expresar la derivada respecto de <math>x</math></li> <li>• <math>f_y</math> o <math>\frac{\partial f}{\partial y}</math> para expresar la derivada respecto de <math>y</math></li> </ul>
	Representación	Se puede representar la derivada parcial mediante una expresión que se obtiene al derivar una función de dos variables (representación algebraica) o con la gráfica de la función obtenida en la derivada parcial (representación gráfica en tres dimensiones).
Situaciones-problemas	Intra-matemáticos	Se emplean ejemplos o ejercicios de derivación intra-matemáticos para aplicar las reglas/procedimientos de derivación.

Objeto matemático primario	Tipo de objeto identificado	Descripción
Conceptos-definición	Función	Se utiliza el concepto de función de dos variables $f(x, y)$ como una función cuyo dominio es una región $D \subset \mathbb{R}^2$ , para lo cual la función es una regla donde se asigna por cada punto o par ordenado $(x, y) \in D$ un único número real como resultado en $f(x, y)$ .
	Dominio	Al trabajar con una función real de dos variables dependientes, se describe el conjunto dominio como $Dom(f) \subset \mathbb{R}^2$ , donde $Dom(f)$ es una región $D$ de pares ordenados $(x, y)$ .
	Rango	Es el conjunto de valores que se obtienen como respuesta en $f$ al evaluar cada par $(x, y)$ del dominio. De esta forma, $Ran(f) = \{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$ .
	Derivada parcial	Es aquella expresión que se obtiene al derivar una función respecto de una de sus variables
Proposiciones	Teorema de Clairaut	Las derivadas combinadas de segundo orden $f_{xy}$ y $f_{yx}$ son expresiones idénticas si son continuas en su dominio.
Procedimientos	Reglas de derivación	Para determinar las derivadas parciales respecto de una variable de $f(x, y)$ , se le aplican las reglas de derivación de funciones en una variable manteniendo constante a la otra variable.
Argumentos	Procedimientos	La derivada parcial es una expresión que se obtiene al derivar una función respecto de una de sus variables, manteniendo constante la otra. Para ello, se utilizan los procedimientos/reglas de derivación del cálculo de una variable. Por ejemplo, la derivación de operaciones de funciones y composición de funciones (regla de la cadena).

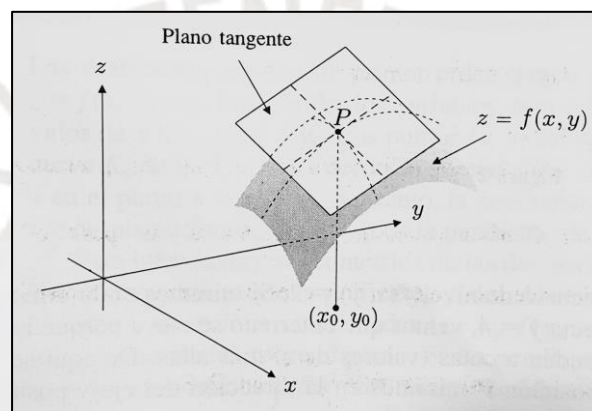
Nota. Elaboración propia

### 3.1.2. Las derivadas parciales para hallar ecuaciones de planos tangentes a la gráfica de una función de dos variables

De las funciones reales de variable real, se conoce que la derivada se puede interpretar para determinar la pendiente de la recta tangente para cualquier punto de la gráfica de una función real de variable real  $f(x)$ . De manera análoga, en el cálculo de varias variables, particularmente con dos variables, la derivada en cualquier punto de una función  $z = f(x, y)$  permite obtener gráficamente un plano tangente a cierto punto particular  $(x_0, y_0)$  de la función como se observa en la figura 8, así como también permite determinar la ecuación del plano tangente a dicho punto.

**Figura 8**

*Representación gráfica del plano tangente a un punto de una función de dos variables*



Fuente: Tomado de Sydsaeter (2012, p. 434)

Para calcular la ecuación del plano tangente en un punto de una función de dos variables, las derivadas parciales de la función  $z = f(x, y)$  deben ser continuas y la ecuación del plano tangente a la superficie  $z = f(x, y)$  en un punto dado  $(x_0, y_0, z_0)$  será la siguiente:

$$\mathcal{P}: z - z_0 = [f_x(x_0, y_0)](x - x_0) + [f_y(x_0, y_0)](y - y_0)$$

En la figura 9, se muestra un ejemplo tomado de Sydsaeter (2012) donde se calcula la ecuación del plano tangente a una función real de dos variables.

**Figura 9**

*Ejemplo del cálculo del plano tangente a la superficie de una función de dos variables*

**Ejemplo 2**  
Hallar el plano tangente a la superficie:  
$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2$$
  
en el punto  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 5)$ .  
**Solución:** Como  $f(1, 1) = 5$ , el punto dado está en la gráfica de  $f$ . Tenemos que:  
$$f'_1(x, y) = 2x + 2y, \quad f'_2(x, y) = 2x + 4y$$
  
luego  $f'_1(1, 1) = 4$  y  $f'_2(1, 1) = 6$ . Así (1) nos da:  
$$z - 5 = 4(x - 1) + 6(y - 1), \quad \text{o sea} \quad z = 4x + 6y - 5$$

Fuente: Tomado de Sydsaeter (2012, p. 435)

A partir del cálculo de las primeras derivadas parciales, se puede determinar la ecuación del plano tangente a cualquier punto de la función, por lo que gráficamente se puede dibujar dicho plano tangente como se mostró en el ejemplo anterior. En la tabla 12, se muestran los objetos primarios que conforman la configuración epistémica de este significado. Además, se muestran los tipos de objetos primarios identificados en cada uno.

**Tabla 12**

*Objetos primarios asociados al significado plano tangente*

<b>Objeto matemático primario</b>	<b>Tipo de objeto identificado</b>	<b>Descripción</b>
Lenguajes	Simbólico	Punto $(x_0, y_0, z_0)$ , ecuación de plano tangente
Situaciones-problemas	Intra-matemáticos	Se emplean ejemplos para calcular el plano tangente a un punto que pertenezca a la función de dos variables.
	Derivadas parciales de primer orden	Sea la función $f(x, y)$ se deben conocer $f_x$ y $f_y$ .
Conceptos-definición	Ecuación del plano tangente	Dada una función $z = f(x, y)$ y sus derivadas parciales $f_x$ y $f_y$ , la ecuación del plano tangente a un punto $(x_0, y_0, z_0)$ correspondiente a la función se determina: $\mathcal{P}: z - z_0 = [f_x(x_0, y_0)](x - x_0) + [f_y(x_0, y_0)](y - y_0)$
	Tangencia	Punto de tangencia entre el plano tangente y el punto que corresponda a la función
Procedimientos	Algebraicos	Se deben determinar las derivadas parciales $f_x$ y $f_y$ y punto de paso $(x_0, y_0, z_0)$ de la función $z = f(x, y)$ . Se reemplaza en la ecuación del plano tangente. $\mathcal{P}: z - z_0 = [f_x(x_0, y_0)](x - x_0) + [f_y(x_0, y_0)](y - y_0)$
		Usar la ecuación del plano tangente en un punto dado: $\mathcal{P}: z - z_0 = [f_x(x_0, y_0)](x - x_0) + [f_y(x_0, y_0)](y - y_0)$
Argumentos	Uso de una expresión	

*Nota.* Elaboración propia

### 3.1.3. La derivada parcial como tasa de variación

Con el concepto de diferencial de una función de dos variables  $f$  se puede determinar, de manera aproximada, el cambio del valor de  $z = f(x, y)$  a partir de los cambios o incrementos de los valores de sus variables  $x$  e  $y$ . De esta manera, se define el diferencial  $dz$  el cual se calcula aproximadamente como  $dz \approx [f_x(x, y)]dx + [f_y(x, y)]dy$ . Si estos cambios son pequeños, entonces el incremento en  $z$ , denotado por  $\Delta z$ , se puede aproximar como  $dz$ . De esta manera,  $\Delta z$  se puede interpretar como la tasa de variación según las variaciones de sus variables  $x$  e  $y$ . Esta estimación se puede observar en un ejemplo tomado del libro de Stewart (2012b) en la figura 10.

#### Figura 10

Ejemplo de aproximación del incremento de la variable  $z$  a partir de sus variables

**EJEMPLO 4**

a) Si  $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$ , determine la diferencial  $dz$ .

b) Si  $x$  cambia de 2 a 2.05 y  $y$  pasa de 3 a 2.96, compare los valores de  $\Delta z$  y  $dz$ .

**SOLUCIÓN**

a) La definición 10 da

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (2x + 3y) dx + (3x - 2y) dy$$

b) Si hacemos  $x = 2$ ,  $dx = \Delta x = 0.05$ ,  $y = 3$  y  $dy = \Delta y = -0.04$ , obtenemos

$$dz = [2(2) + 3(3)]0.05 + [3(2) - 2(3)](-0.04) = 0.65$$

El incremento de  $z$  es

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(2.05, 2.96) - f(2, 3) \\ &= [(2.05)^2 + 3(2.05)(2.96) - (2.96)^2] - [2^2 + 3(2)(3) - 3^2] \\ &= 0.6449\end{aligned}$$

Observemos que  $\Delta z \approx dz$  pero  $dz$  es más fácil de calcular.

Fuente: Tomado de Stewart (2012b, p.920-921)

A partir del cálculo de las derivadas parciales de primer orden, se puede estimar el cambio del valor de una función de dos variables a partir de los cambios de sus variables  $x, y$ . En la tabla 13, se muestran objetos primarios que conforman la configuración epistémica de este significado. Además, se muestran los tipos de objetos primeros identificados en cada uno.

**Tabla 13**

*Objetos primarios asociados al significado de tasa de variación*

<b>Objeto matemático primario</b>	<b>Indicador</b>	<b>Descripción</b>
Lenguaje	Notación	Se usa la notación $\Delta z$ como aproximación de $dz$ a partir de las derivadas parciales y los diferenciales $dx, dy$ .
Situaciones-problemas	Intra-matemáticos	Se emplean ejemplos o ejercicios de derivación para ejemplificar el incremento $\Delta z$ , en problemas donde $z = f(x, y)$ . Esta estimación se puede hacer en problemas de optimización con el valor $\lambda$ al variar el recurso $c$ .
Conceptos-definición	Derivadas parciales de primer orden	Sea la función $f(x, y)$ se deben conocer $f_x$ y $f_y$ .
	Incremento en $z$	Se calcula $\Delta z \approx dz \approx [f_x(x, y)]dx + [f_y(x, y)]dy$ .
Proposiciones	Aproximación	El incremento en $z$ se aproxima mediante el cálculo de $dz$ .
Procedimientos	Derivación parcial de primer orden	Se deben determinar las derivadas parciales $f_x$ y $f_y$ , así como los valores de variación $dz, dx, dy$ para hacer la aproximación $\Delta z$ .
Argumentos	Uso de una expresión	Usar la expresión que aproxima el cambio en $z$ a partir de los cambios en $x, y$ : $\Delta z \approx dz \approx [f_x(x, y)]dx + [f_y(x, y)]dy$

*Nota.* Elaboración propia

### 3.1.4. La derivada parcial para hallar valores máximos y mínimos de una función de dos variables

Así como en el cálculo de una variable se pueden determinar los valores máximos y mínimos de cierta función  $f(x)$  mediante ciertos procedimientos que implican el uso de las primeras y segundas derivadas de  $f$ , en el cálculo de varias variables, particularmente en dos variables, se pueden determinar los valores máximos y mínimos de cierta función  $f(x, y)$  mediante ciertos procedimientos que implican el uso de las derivadas parciales de primer y segundo orden.

En el libro “Cálculo en varias variables. Trascendentes tempranas” (Stewart, 2012b), se propone una definición simbólica para los valores máximos y mínimos de funciones de dos variables, la cual se muestra en la figura 11.

#### Figura 11

*Definición de valores máximos y mínimos de funciones de dos variables*

**1 Definición** Una función de dos variables tiene un **máximo local** en  $(a, b)$  si  $f(x, y) \leq f(a, b)$  cuando  $(x, y)$  está cerca de  $(a, b)$ . [Esto significa que  $f(x, y) \leq f(a, b)$  para todos los puntos  $(x, y)$  en algún disco con centro  $(a, b)$ .] El número  $f(a, b)$  recibe el nombre de **valor máximo local**. Si  $f(x, y) \geq f(a, b)$  cuando  $(x, y)$  está cerca de  $(a, b)$ , entonces  $f$  tiene un **mínimo local** en  $(a, b)$  y  $f(a, b)$  es un **valor mínimo local**.

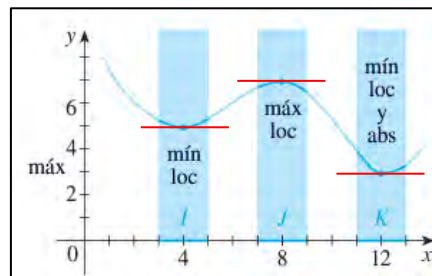
Fuente: Tomado de Stewart (2012b, p. 946)

Asimismo, esta definición es complementada posteriormente por el autor diferenciando los tipos de valores máximos y mínimos: locales o absolutos. De esta manera, se indica que, si estos valores  $(a, b)$  cumplen con que  $f(a, b) \geq f(x, y)$  o  $f(a, b) \leq f(x, y)$  para todo  $(x, y)$  del dominio de la función  $f$ , entonces los valores máximos y mínimos son absolutos. Gráficamente, estos valores máximos y mínimos  $f(a, b)$  representan puntos particulares  $(a, b, f(a, b))$  de la gráfica de la función  $f$ .

Para ello, se revisa la interpretación gráfica de los máximos y mínimo en funciones reales de variable real, los cuales representan gráficamente el punto más alto, o de mayor ordenada, o el punto más bajo, o de menor ordenada donde la recta tangente tiene pendiente igual a cero (Balcaza et al., 2017). En la figura 12, se muestra esta interpretación gráfica de los máximos y mínimos de cierta función  $f(x)$  en el plano cartesiano XY. Al trazar las rectas tangentes a dichos puntos, se nota que las rectas son horizontales, es decir, tienen una pendiente igual a cero.

## Figura 12

Puntos de mayor o menor ordenada de una función real de variable real

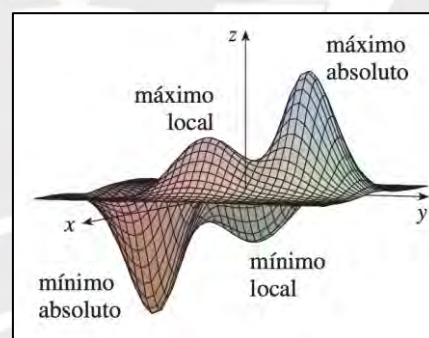


Fuente: Tomado de Stewart (2012a, p. 274)

De manera análoga, en el caso de funciones de dos variables como  $f(x,y)$ , este concepto es abordado por Stewart (2012b) como el punto de una colina o valle de la gráfica de una función real de dos variables reales, es decir, los puntos más altos o bajos según el eje z. Para ello, debería conocerse la gráfica de la función en tres dimensiones y, por simple observación, se ubican estos puntos como se muestran en la figura 13.

## Figura 13

Identificación de máximos y mínimos en su representación gráfica



Fuente: Tomado de Stewart (2012b, p. 946)

De esta manera, el cálculo de valores máximos o mínimos corresponde a la identificación de puntos de colina, más altos, y puntos de valle, más bajos, de la gráfica de una función  $f$  de dos variables graficada en tres dimensiones. Asimismo, por dichos puntos pasan planos tangentes que son paralelos al plano  $XY$ .

Como se indica en la primera sección de este trabajo de investigación, los procedimientos para determinar valores máximos y mínimos, utilizados en problemas de optimización, presentan cierta similitud tanto para funciones de una variable como para funciones de dos variables (Mkhatshwa, 2019; 2021).

Balcaza (2018) propone como procedimientos generales para hallar máximos y mínimos de funciones de una variable a las condiciones que deben cumplir la primera y segunda derivadas de la función. De esta manera, para optimizar cierta función  $f$  de una variable se debe realizar lo siguiente:

- 1) Determinar la primera derivada  $f'$  de la función  $f$

- 2) Resolver la condición de la primera derivada: se buscan los valores o puntos críticos tales que  $f'(c) = 0$ . Estos valores determinan el comportamiento de los signos que toma  $f'$  para los intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $f$ .
- 3) Determinar la segunda derivada  $f''$  de la función  $f$ .
- 4) Resolver la condición de la segunda derivada: se determina  $f''$  para evaluar el signo que toma  $f''$  en cada valor crítico  $x = c$  hallado en la condición de la primera derivada para determinar finalmente si  $x = c$  es un máximo o mínimo de  $f$ .

De manera similar como se buscan los máximos y mínimos en funciones de una variable, el procedimiento para hallar máximos y mínimos de funciones de dos variables también cuenta con dos condiciones, las cuales en algunos textos son llamadas como condiciones necesarias para hallar máximos y mínimos.

**Primera condición:** Debido a que existe un plano tangente en el punto donde se alcanza el valor máximo o mínimo de una función de dos variables, este plano tangente debe ser horizontal. Además, se enuncia que el vector gradiente en dicho punto da cero (Stewart, 2012b). El vector gradiente  $\nabla f(x, y)$  de una función de dos variables  $f$  está formado por un vector cuyas componentes son las derivadas parciales de  $f$ , las cuales se denotan como  $f_x$  y  $f_y$ .

Esta primera condición se resume como  $\nabla f(x, y) = (f_x, f_y) = (0, 0)$ . La figura 14 muestra esta condición, la cual se conoce como el criterio de las derivadas parciales de primer orden.

#### Figura 14

*Condición de las derivadas parciales de primer orden*

**2 Teorema** Si  $f$  tiene un máximo local o un mínimo local en  $(a, b)$  y las derivadas parciales de primer orden de  $f$  existen ahí, entonces  $f_x(a, b) = 0$  y  $f_y(a, b) = 0$ .

Fuente: Tomado de Stewart (2012b, p. 946)

Asimismo, esta condición de la primera derivada es abordada en diferentes textos como se puede notar en la figura 15.

#### Figura 15

*Condición de las derivadas parciales de primer orden*

##### THEOREM 17.1.1 (NECESSARY FIRST-ORDER CONDITIONS)

A differentiable function  $z = f(x, y)$  can have a maximum or minimum at an interior point  $(x_0, y_0)$  of its domain only if it is a *critical point* in the sense that the pair  $(x, y) = (x_0, y_0)$  satisfies the following two first-order conditions, or FOCS:

$$f'_1(x, y) = 0 \text{ and } f'_2(x, y) = 0$$

Fuente: Tomado de Sydsaeter et al. (2016, p. 690)

Tanto Stewart como Sydsæter abordan el concepto de punto crítico o estacionario como aquellos puntos que satisfacen la primera condición necesaria. De esta manera, el punto crítico o estacionario se define como aquel punto que se obtendrá a partir del cálculo y resolución de las ecuaciones de igualar cada derivada parcial  $f_x$  y  $f_y$  de la función con cero. Sin embargo, también se afirma que, en el cálculo de varias variables, el punto crítico no garantiza la existencia de valores máximos o mínimos, porque incluso puede no existir alguno de ellos. Para ello, es necesaria una condición adicional que complemente la primera condición.

**Segunda condición:** De manera similar a como se trabaja la condición de la segunda derivada en problemas donde se buscan valores máximos o mínimos de funciones de una variable, también se trabaja la condición de las derivadas parciales de segundo orden  $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$  para funciones de dos variables. En esta condición, se define que los puntos críticos  $(a, b)$  hallados de la primera condición deben ser evaluados en cierta expresión, cuyo resultado determinará si dicho punto crítico corresponde a un valor máximo o mínimo de la función. Las consideraciones de la segunda condición se detallan en la figura 16 a partir del cálculo de la expresión  $D(a, b)$ .

**Figura 16**

*Condición de las derivadas parciales de segundo orden*

**3 Prueba de la segunda derivada** Supongamos que las segundas derivadas parciales de  $f$  son continuas sobre un disco de centro  $(a, b)$ , y supongamos que  $f_x(a, b) = 0$  y  $f_y(a, b) = 0$ , es decir,  $(a, b)$  es un punto crítico de  $f$ . Sea

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

a) Si  $D > 0$  y  $f_{xx}(a, b) > 0$ , entonces  $f(a, b)$  es un mínimo local.  
b) Si  $D > 0$  y  $f_{xx}(a, b) < 0$ , entonces  $f(a, b)$  es un máximo local.  
c) Si  $D < 0$ , entonces  $f(a, b)$  no es un máximo local ni un mínimo local.

**NOTA 1** En caso de c) el punto  $(a, b)$  se llama **punto silla** de  $f$  y la gráfica de  $f$  cruza el plano tangente en  $(a, b)$ .  
**NOTA 2** Si  $D = 0$ , la prueba no proporciona información:  $f$  podría tener un máximo local o un mínimo local en  $(a, b)$ , o bien, en  $(a, b)$  podría haber un punto silla de  $f$ .

Fuente: Tomado de Stewart (2012b, p. 947)

Esta misma definición es abordada por Sydsaeter et al. (2008) bajo las mismas condiciones del valor  $D(x^*)$  para un punto crítico  $x^*$  como se observa en la figura 17.

## Figura 17

### Condición de las derivadas parciales de segundo orden

**THEOREM 3.2.1 (LOCAL SECOND-ORDER CONDITIONS)**

Suppose that  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$  is defined on a set  $S$  in  $\mathbb{R}^n$  and that  $\mathbf{x}^*$  is an interior stationary point. Assume also that  $f$  is  $C^2$  in an open ball around  $\mathbf{x}^*$ . Let  $D_k(\mathbf{x})$  be defined by (4). Then:

(a)  $D_k(\mathbf{x}^*) > 0, k = 1, \dots, n \implies \mathbf{x}^*$  is a local minimum point.

(b)  $(-1)^k D_k(\mathbf{x}^*) > 0, k = 1, \dots, n \implies \mathbf{x}^*$  is a local maximum point.

(c)  $D_n(\mathbf{x}^*) \neq 0$  and neither (a) nor (b) is satisfied  $\implies \mathbf{x}^*$  is a saddle point.

Fuente: Tomado de Sydsaeter et al. (2008, p. 111)

La expresión  $D$  es abordada por Sydsæter como la determinante la matriz Hessiana conformada por las derivadas parciales de segundo orden de la función. Además, el cálculo de la expresión  $D$  es análogo al determinante de la matriz Hessiana. El autor generaliza esta expresión para más de dos variables como se nota en la figura 18.

## Figura 18

### Determinante $D$ de la matriz Hessiana

In order to generalize these results to functions of  $n$  variables, we need to consider the  $n$  leading principal minors of the Hessian matrix  $\mathbf{f}''(\mathbf{x}) = (f''_{ij}(\mathbf{x}))_{n \times n}$ :

$$D_k(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} f''_{11}(\mathbf{x}) & f''_{12}(\mathbf{x}) & \dots & f''_{1k}(\mathbf{x}) \\ f''_{21}(\mathbf{x}) & f''_{22}(\mathbf{x}) & \dots & f''_{2k}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{k1}(\mathbf{x}) & f''_{k2}(\mathbf{x}) & \dots & f''_{kk}(\mathbf{x}) \end{vmatrix}, \quad k = 1, \dots, n \quad (4)$$

Fuente: Tomado de Sydsæter et al. (2008, p. 111)

De esta manera, el procedimiento para encontrar máximos y mínimos de cierta función real de dos variables reales es el siguiente:

- 1) Determinar las derivadas parciales de primer orden  $f_x$  y  $f_y$  de la función  $f(x, y)$
- 2) Resolver la primera condición necesaria de la primera derivada: se hallan los puntos críticos igualando el vector gradiente  $\nabla f(x, y) = (f_x, f_y)$  con cero. Los pares  $(x, y)$  hallados serán los puntos críticos o estacionarios de la función.
- 3) Determinar las derivadas parciales de segundo orden  $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$  de la función  $f(x, y)$ .
- 4) Construir la matriz Hessiana  $H(x, y)$  con las derivadas parciales de segundo orden y determinar la expresión determinante  $D(x, y) = |H(x, y)|$ .
- 5) Resolver la segunda condición necesaria de la segunda derivada: se evalúa cada punto crítico en la expresión determinante  $D(x, y)$  y, según las reglas de esta

condición, se determina si el punto crítico corresponde a un máximo, mínimo o punto silla.

Asimismo, en la figura 19, se muestra un ejemplo que ilustra el procedimiento anterior que se debe seguir para determinar los valores máximos o mínimos de una función de dos variables.

### Figura 19

*Ejemplo de cálculo de máximos y mínimos de una función de dos variables*

**V EJEMPLO 3** Determine los valores máximo y mínimo locales y los puntos silla de  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ .

**SOLUCIÓN** Primero localizamos los puntos críticos:

$$f_x = 4x^3 - 4y \quad f_y = 4y^3 - 4x$$

Al igualar a estas derivadas parciales con 0, se obtienen las ecuaciones

$$x^3 - y = 0 \quad y \quad y^3 - x = 0$$

Para resolver estas ecuaciones, sustituimos  $y = x^3$  de la primera ecuación en la segunda, y obtenemos

$$0 = x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$$

de modo que hay tres raíces reales:  $x = 0, 1, -1$ . Los tres puntos críticos son  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  y  $(-1, -1)$ .

Luego calculamos la segunda derivada parcial y  $D(x, y)$ :

$$f_{xx} = 12x^2 \quad f_{xy} = -4 \quad f_{yy} = 12y^2$$

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 144x^2y^2 - 16$$

Puesto que  $D(0, 0) = -16 < 0$ , se infiere del caso c) de la prueba de la segunda derivada que el origen es un punto silla; es decir,  $f$  no tiene máximo ni mínimo local en  $(0, 0)$ . Como  $D(1, 1) = 128 > 0$  y  $f_{xx}(1, 1) = 12 > 0$ , se ve que según el caso a) de la prueba que  $f(1, 1) = -1$  es un mínimo local. De igual manera,  $D(-1, -1) = 128 > 0$  y  $f_{xx}(-1, -1) = 12 > 0$ , de modo que  $f(-1, -1) = -1$  es también un mínimo local.

Fuente: Tomado de Stewart (2012b, p. 947 y 948)

El ejemplo anterior sigue el procedimiento del cálculo de máximos y mínimos de una función de dos variables que no está sujeta a restricciones. Un problema que indica únicamente hallar los valores máximos de una función de dos variables tiene la siguiente estructura:

$$\max f(x, y)$$

donde “max” hace referencia a maximizar, es decir, hallar valores máximos. Mientras que un problema que indica únicamente hallar los valores mínimos de una función de dos variables tiene la siguiente estructura.

$$\min f(x, y)$$

donde “min” hace referencia a minimizar, es decir, hallar valores mínimos.

Es común, en los textos de cálculo y análisis matemático para economía utilizados en primeros ciclos de las carreras, que se enseñe un procedimiento adicional cuando la función de dos variables está sujeta a una restricción de igualdad. Para ello, se definen las restricciones de igualdad para una función  $f$  de dos variables de la forma  $f(x, y)$ .

**Restricciones de igualdad:** Una restricción de igualdad es una expresión de dos variables  $g(x, y)$  cuyo valor está igualado a una constante  $c$ . De esta forma, la restricción de igualdad tiene la forma  $g(x, y) = c$ . Un problema funciones de dos variables sujeta a alguna restricción de igualdad tiene la siguiente estructura en el caso de hallar los valores máximos de la función, es decir, maximizar:

$$\max f(x, y) \quad \text{sujeta a} \quad g(x, y) = c$$

En el caso de tratarse de un problema de minimización, es decir, hallar los valores mínimos de la función sujeta a una restricción de igualdad, tiene la siguiente estructura:

$$\min f(x, y) \quad \text{sujeta a} \quad g(x, y) = c$$

En este tipo de problemas donde la función de dos variables está sujeta a una restricción de igualdad se utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange, el cual introduce nueva constante llamada multiplicador de Lagrange y denotada por  $\lambda$ . Este método, el cual se muestra en la figura 20, sigue el siguiente procedimiento.

### Figura 20

#### Método del multiplicador de Lagrange

**El método lagrangiano**

Para hallar las soluciones del problema:

$$\max (\min) f(x, y) \quad \text{sujeta a} \quad g(x, y) = c$$

se procede así:

- Se escribe la función lagrangiana:
 
$$\mathcal{L}(x, y) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)$$

donde  $\lambda$  es una constante.
- Se deriva  $\mathcal{L}$  con respecto a  $x$  e  $y$ , e igualar a 0 las parciales.
- Se escribe el sistema formado por las dos ecuaciones del paso anterior junto con la restricción:
 
$$\begin{aligned} f'_1(x, y) &= \lambda g'_1(x, y) \\ f'_2(x, y) &= \lambda g'_2(x, y) \\ g(x, y) &= c \end{aligned}$$
- Se resuelven, simultáneamente esas tres ecuaciones en las tres incógnitas  $x$ ,  $y$  y  $\lambda$ .

Este método nos va a dar en general unos pares de números  $(x, y)$  que puede que resuelvan el problema. Además obtenemos el valor del multiplicador de Lagrange  $\lambda$ .

Fuente: Tomado de Sydsaeter (2012, p. 555)

Este procedimiento se resume en los siguientes pasos:

- 1) Escribir la función Lagrangiana  $\mathcal{L}(x, y) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)$
- 2) Hallar las derivadas parciales de primer orden  $\mathcal{L}_x$  y  $\mathcal{L}_y$  de la función Lagrangiana

- 3) Resolver el sistema de ecuaciones igualando cada derivada parcial de  $\mathcal{L}$  con cero y considerando la restricción de igualdad como una ecuación adicional:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x, y) = 0 \\ \mathcal{L}_y(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

- 4) Se determinan los valores  $x, y, \lambda$  que solucionan el sistema de ecuaciones. Se evalúan los valores  $(x, y)$  en la función  $f$  y se determina cuáles de ellos maximizan o minimizan la función.

Se observa que el tercer paso es similar al propuesto por la “primera condición necesaria” del cálculo de máximos y mínimos sin restricciones. En la figura 21, se muestra un ejemplo del cálculo del máximo de una función de dos variables sujeta a una restricción de igualdad que sigue el procedimiento descrito.

### Figura 21

*Ejemplos de cálculo de máximos de una función de dos variables sujeta a una restricción de igualdad*

#### Ejemplo 1

Hallar la solución posible al problema de demanda óptima de un consumidor:

$$\max xy \quad \text{sujeta a} \quad 2x + y = m$$

**Solución:** La función lagrangiana es  $\mathcal{L}(x, y) = xy - \lambda(2x + y - m)$ , luego las condiciones de primer orden para solucionar el problema son:

$$\mathcal{L}'_1(x, y) = y - 2\lambda, \quad \mathcal{L}'_2(x, y) = x - \lambda, \quad 2x + y = m$$

Las dos primeras ecuaciones implican que  $y = 2\lambda$  y  $x = \lambda$ , luego  $y = 2x$ .

Llevando  $y = 2x$  a la restricción  $2x + y = m$  se obtiene  $2x + 2x = m$ . Por tanto,  $x = m/4$  y así  $y = m/2$ . (Se puede resolver el problema directamente; despejando  $y$  en la ecuación de la restricción se obtiene  $y = m - 2x$ , sustituyendo en la función tenemos que  $xy = x(m - 2x) = -2x^2 + mx$ , cuya gráfica es una parábola con un máximo en  $x = m/4$ . Así  $x = m/4$  e  $y = m/2$  resuelven el problema).

Fuente: Tomado de Sydsaeter (2012, p. 554)

A partir del cálculo de las derivadas parciales de primer y segundo orden, se pueden determinar los valores máximos o mínimos de una función de dos variables. En la tabla 14, se muestran objetos primarios que conforman la configuración epistémica de este significado. Además, se muestran los tipos de objetos primeros identificados en cada uno.

**Tabla 14**

*Objetos primarios asociados al significado del cálculo la derivada parcial para optimizar funciones*

<b>Objeto matemático primario</b>	<b>Tipo de objeto identificado</b>	<b>Descripción</b>
Lenguajes	Algebraico	Se determinan las derivadas parciales de primer y segundo orden de la función de dos variables
	Gráfico	Determinar el máximo o mínimo (local o global) implica calcular el punto más alto o bajo de la gráfica (colina o valle) de cierta función.
Situaciones-problemas	Intra-matemáticos	Se emplean ejemplos para determinar valores máximos o mínimos de cierta función de dos variables con o sin restricciones de igualdad.
Conceptos-definición	Máximo	Es el valor máximo que toma la función $z = f(x, y)$ en su dominio (global) o en cierta región $R$ (local).
	Mínimo	Es el valor mínimo que toma la función $z = f(x, y)$ en su dominio (global) o en cierta región $R$ (local).
	Punto silla	Es un punto que no maximiza ni minimiza la función en su dominio. Gráficamente es visto como “una silla” y se puede notar que existe parte de la gráfica por encima y por debajo de este punto.
	Matriz Hessiana	Es la matriz conformada por las derivadas parciales de segundo orden.
	Restricción de igualdad	Es aquella ecuación que contiene una expresión de dos variables $x, y$ igualada a una constante $c$ . Son de la forma $g(x, y) = c$
	Multiplicador de Lagrange	Es una constante ( $\lambda$ ) que se relaciona con la restricción de igualdad mediante la función lagrangiana: $\mathcal{L}(x, y) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)$

Objeto matemático primario	Tipo de objeto identificado	Descripción
Proposiciones	Condiciones necesarias para optimizar	<p>Para problemas donde la función no esté sujeta a restricciones, se sigue un procedimiento que enuncia dos condiciones necesarias para calcular máximos y mínimos de la función de dos variables:</p> <p><u>Condición 1:</u></p> <p>Se obtienen los puntos críticos <math>(a, b)</math> a partir de <math>f_x = 0</math> y <math>f_y = 0</math>.</p> <p><u>Condición 2:</u></p> <p>Se comprueba si el punto crítico hallado corresponde a un valor máximo o mínimo de la función si se cumple que el determinante <math>D</math> de la matriz Hessiana toma alguno de los siguientes valores:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Si <math>D &gt; 0 \wedge f_{xx}(a, b) &gt; 0</math>, entonces <math>f(a, b)</math> es un mínimo local.</li> <li>• Si <math>D &gt; 0 \wedge f_{xx}(a, b) &lt; 0</math>, entonces <math>f(a, b)</math> es un máximo local.</li> <li>• Si <math>D &lt; 0</math>, entonces <math>f(a, b)</math> es un máximo ni mínimo.</li> </ul> <p>En caso la función esté sujeta a restricciones de igualdad, se deben resolver las ecuaciones obtenidas a partir de la condición 1 aplicada a la función lagrangiana <math>\mathcal{L}(x, y)</math> y la ecuación de la restricción de igualdad de la forma <math>g(x, y) = c</math>.</p>
Procedimientos	Algebraicos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Si la función que se busca optimizar no está sujeta a restricciones, se utilizan las dos condiciones necesarias para encontrar sus valores óptimos a partir de sus derivadas parciales de primer y segundo orden.</li> <li>• Si la función que se busca optimizar está sujeta a alguna restricción de igualdad, se utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange.</li> </ul>
Argumentos	Condiciones	<p>Se emplean las condiciones suficientes para encontrar el máximo o mínimo de una función. O, en caso de tratarse del cálculo de máximos o mínimos con restricción de igualdad, se emplea el procedimiento de los multiplicadores de Lagrange.</p>

Nota. Elaboración propia

### 3.2. La aplicación de las derivadas parciales en la Economía

Los significados de referencia identificados en la sección anterior se adaptan a contextos económicos de diversas formas y contribuyen en la resolución de problemas de optimización de funciones de dos variables. En esta sección se describen aquellas conexiones que tienen las derivadas parciales con la Economía. De esta manera, es relevante considerar problemas extra-matemáticos que modelicen situaciones económicas para un proceso de instrucción que esté enfocado a estudiantes de la carrera Economía.

#### 3.2.1. Las funciones marginales en la Economía

En una situación extra-matemática de aplicación económica, el análisis marginal es un concepto relacionado con la tasa de variación de una función. Como se identificó en la sección anterior, la tasa de variación es uno de los significados de referencia de la derivada parcial, por lo que hablar de “marginalidad” es una aplicación de la derivada parcial. Es frecuente encontrar el concepto de la marginalidad de las funciones relacionado con la derivada de la función que modela una situación económica. En Sydsaeter (2012) se proponen algunos ejemplos de marginalidad de funciones de una variable que modelan situaciones económicas, los cuales se muestran en la tabla 15.

**Tabla 15**

*Funciones de una variable que modelan situaciones económicas y su análisis marginal*

Función	Situación económica modelada	Función marginal
$C(x)$ :	Costo de producción de $x$ unidades	$C'(x)$ : Costo marginal
$R(x)$ :	Ingreso por ventas $x$ unidades	$R'(x)$ : Ingreso marginal
$\pi(x)$ :	Beneficio de producción y venta de $x$ unidades	$\pi'(x)$ : beneficio marginal
$C = f(Y)$	Consumo por ingreso	$f'(Y)$ : Propensión marginal al consumo
$Y = f(T)$	Producción según trabajo	$f'(T)$ : Productividad marginal del trabajo

Fuente: Adaptado de Sydsaeter (2012, p. 96)

Por ejemplo, utilizando la definición de límites para calcular la derivada de la función costo de producción  $C(x)$ , se obtiene lo siguiente:

$$C'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(x+h) - C(x)}{h}$$

Dicho cálculo representa el costo marginal. Con ello, el análisis marginal del costo busca determinar el cambio en el costo al incrementar en un valor aleatorio de  $x$  (su variable). Generalmente, el incremento de la variable suele realizar para la unidad, es decir,  $h = 1$  y así obtener la siguiente aproximación:

$$C'(x) \approx C(x + 1) - C(x)$$

Su interpretación sería el “costo adicional de producir una unidad más de  $x$ ” (Sydsaeter, 2012, p. 96). El análisis marginal de esta función sería otra manera de medir la tasa de variación de una función real de una variable.

De manera similar, en el cálculo de varias variables, se pueden modelar las funciones indicadas en la tabla anterior con más variables y, asimismo, se pueden determinar las tasas marginales de la función respecto de alguna de sus variables. Por ejemplo, una función recurrentemente utilizada para modelar la producción según el capital ( $K$ ) y trabajo ( $L$ ) es la función Cobb-Douglas, la cual es una función de dos variables que tiene la forma  $F(x, y) = Ax^a y^b$  con  $A, a, b$  constantes reales y definida para  $x > 0$  e  $y > 0$ . En la figura 22, se muestra el uso de las derivadas parciales como parte del análisis marginal.

### Figura 22

*Ejemplo del cálculo de productividad marginal de una función de dos variables*

**Ejemplo 3**  
 En ciertos estudios económicos se usa la siguiente versión modificada de la función de Cobb-Douglas:  

$$F(K, L) = AK^a L^b e^{cK/L} \quad (A, a, b \text{ y } c \text{ son constantes positivas})$$
  
 Hallar las productividades marginales  $F'_K$  y  $F'_L$  y estudiar sus signos.

Fuente: Tomado de Sydsaeter (2012, p. 440)

En el ejemplo anterior, las derivadas parciales representan las productividades marginales de la función de productividad según las variables  $K$  y  $L$ . La solución del ejemplo se muestra en la figura 23.

### Figura 23

*Ejemplo de interpretación de signos de la productividad marginal*

**Solución:** Derivando con respecto a  $K$ , manteniendo  $L$  constante, también es constante  $AL^b$ , luego:

$$F'_K = AL^b \frac{\partial}{\partial K} (K^a e^{cK/L})$$

Ahora debemos usar la regla de derivación de un producto. Según la regla de la cadena, la derivada de  $e^{cK/L}$  con respecto a  $K$  es  $(c/L)e^{cK/L}$ , luego:

$$F'_K = AL^b [aK^{a-1} e^{cK/L} + K^a (c/L) e^{cK/L}] = \left( \frac{a}{K} + \frac{c}{L} \right) F(K, L)$$

De manera análoga:

$$F'_L = AK^a [bL^{b-1} e^{cK/L} + L^b (-cK/L^2) e^{cK/L}] = \left( \frac{b}{L} - \frac{cK}{L^2} \right) F(K, L)$$

Si  $K$  y  $L$  son positivas,  $F'_K$  es siempre positiva, pero  $F'_L$  es positiva solo si  $b > cK/L$ . (Si  $b < cK/L$ , entonces  $F'_L < 0$ , luego un aumento del trabajo conlleva una reducción de la producción. Por tanto, la función es más adecuada como función de producción en un dominio en el que  $b > cK/L$ ).

Fuente: Tomado de Sydsaeter (2012, p. 441)

En este ejemplo, los términos obtenidos en las derivadas parciales permitirán determinar el cambio del valor de la función  $F(K, L)$  al aumentar sus variables  $K, L$ . Ante un cambio arbitrario, no necesariamente pequeño, en la variable, la función derivada parcial obtenida resulta positiva o negativa por el análisis de los términos en  $F'_K, F'_L$ . Por ejemplo, si

se aumenta el trabajo  $L$ , la producción  $F(K, L)$  se reduce debido a que  $F_L$  resulta negativo, es decir, disminuiría.

### 3.2.2. Problemas de optimización

La optimización de funciones es un problema donde se modelizan situaciones reales según los factores o variables, donde se busca determinar el mayor o menor valor que una función alcanza. Entre los primeros problemas que suelen introducirse en la optimización, se encuentra la optimización sin restricciones y, posteriormente, se trabaja la optimización con restricciones (Tenorio y Martín, 2015). En problemas de optimización, se debe identificar adecuadamente lo siguiente:

- 1) La función objetivo  $f$ , la cual es aquella función cuyo valor se busca optimizar, es decir, maximizar o minimizar en caso no se indique. Para esta investigación, la función objetivo depende de dos variables y es de la forma  $f(x, y)$ .
- 2) Restricciones del problema en caso sea necesario. Es común que los primeros tipos de problemas sean con restricciones de igualdad, aunque posteriormente en cursos de matemática más avanzada se ven métodos cuando las restricciones son desigualdades. Para esta investigación, las restricciones se plantearán como expresiones de dos variables de la forma  $g(x, y)$  igualadas a un valor constante  $c$ .

Los casos más frecuentes de optimización de funciones objetivo son la maximización de beneficios, minimización de costes, así como optimización de otras funciones que dependan de capital, trabajo, producción, ingresos, costos, entre otros.

Para problemas donde se optimice sin restricciones, sean de maximización o minimización, tienen la siguiente estructura:

$$\text{opt } f(x, y)$$

Mientras que los problemas de optimización (maximizar o minimizar) de una función objetivo sujeta a restricciones de igualdad tiene la siguiente forma:

$$\text{opt } f(x, y) \quad \text{sujeto a } g(x, y) = c$$

Los procedimientos seguidos en cada caso son los indicados en la sección anterior para el significado de “la derivada parcial para hallar máximos y mínimos de una función de dos variables”. En resumen:

- Si el problema de optimización tiene una función objetivo que no está sujeta a restricciones, se resuelven las dos condiciones necesarias de las derivadas de primer y segundo orden.
- Si el problema de optimización tiene una función objetivo que está sujeta a restricciones de igualdad, se utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange planteando la función lagrangiana  $\mathcal{L}$  y hallando el multiplicador de Lagrange  $\lambda$  por medio de la primera condición necesaria de la derivada de primer orden.

Por un lado, a modo de ejemplo de optimización sin restricciones, en la figura 24, se muestra un ejemplo de minimización de la función objetivo “Costo”, el cual está modelado por variables que representan los números de unidades que producen las factorías de una empresa sujeta a la condición de que la suma de las tres cantidades de producción sea 2000 unidades. En este ejemplo, se optimiza sin plantear una restricción y planteando la función Costo como una función de dos variables.

#### Figura 24

##### Ejemplo de aplicación de optimización de función de dos variables

**Ejemplo 4**

Una empresa tiene tres factorías que producen el mismo artículo. Sean  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectivamente, los números de unidades que produce cada una de las tres factorías para cubrir un pedido total de 2.000 unidades. Así,  $x + y + z = 2.000$ . Las funciones de costes de las tres factorías son:

$$C_1(x) = 200 + \frac{1}{100}x^2, \quad C_2(y) = 200 + y + \frac{1}{300}y^3, \quad C_3(z) = 200 + 10z$$

El coste total de producir el pedido es:

$$C = C_1(x) + C_2(y) + C_3(z)$$

Hallar los valores de  $x$ ,  $y$  y  $z$  que minimizan  $C$ . (*Indicación:* Reducir el problema a uno en solo dos variables, despejando  $z$  de  $x + y + z = 2.000$ ).

**Solución:** Resolviendo la ecuación  $x + y + z = 2.000$  en  $z$  se obtiene  $z = 2.000 - x - y$ . Sustituyendo el valor de  $z$  dado por esta expresión en  $C$ , tenemos:

$$C = \frac{1}{100}x^2 - 10x + \frac{1}{300}y^3 - 9y + 20.600$$

Los puntos estacionarios de  $C$  deben verificar las ecuaciones:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{50}x - 10 = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{1}{100}y^2 - 9 = 0$$

La única solución es  $x = 500$  e  $y = 30$ , lo que implica que  $z = 1.470$ . El valor correspondiente de  $C$  es 17.920. En el Ejemplo 17.2.4 probaremos que es un mínimo.

Fuente: Tomado de Sydsaeter (2012, p. 508)

En este ejemplo, se observa que, al aplicar la primera condición de optimización se obtiene únicamente un punto estacionario o crítico, cuyo valor representado en la función de costo total da 17 920 unidades monetarias para 500, 30 y 1470 unidades de producción. Posteriormente, se comprueba que este único valor resulta un mínimo para la función de costo total tomando en cuenta la segunda condición necesaria de la optimización.

Por otro lado, en los problemas de optimización con restricciones de igualdad de la forma  $g(x, y) = c$ , la constante  $c$  de la restricción es interpretada como la cantidad de cierto recurso disponible, mientras que el multiplicador de Lagrange  $\lambda$  es interpretado como una forma para estimar la variación del valor óptimo de la función al variar el recurso  $c$  en la restricción. Esta interpretación de  $\lambda$  es conocida como el **precio sombra** del recurso. Además, esta estimación se relaciona con el significado de la derivada parcial como tasa de variación. Esta variación se restima con la siguiente fórmula:

$$f^*(c + dc) \approx f^*(c) + \lambda \cdot dc$$

donde  $f^*(c)$  representa el valor óptimo inicial de la función cuando hay  $c$  de recurso, mientras que  $f^*(c + dc)$  representa el nuevo valor óptimo estimado de la función cuando el recurso  $c$  aumenta cambia en  $dc$ .

Por ejemplo, en la figura 25, se muestra la modelación de la función objetivo a optimizar y la restricción a la cual está sujeta en sus variables capital ( $K$ ) y trabajo ( $L$ ). En este ejercicio, se utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange para encontrar el valor óptimo que minimiza la función.

### Figura 25

#### Ejemplo de interpretación económica del multiplicador de Lagrange

**Ejemplo 2**  
 Consideremos el problema de una empresa que quiere producir 30 unidades de un cierto producto al menor coste posible. Si la empresa utiliza  $K$  unidades de capital y  $L$  unidades de trabajo, su producción es  $\sqrt{K} + L$  unidades. Supongamos que los precios de cada unidad de capital y trabajo son, respectivamente, 1 y 20. En la forma habitual, el problema de optimización es:

$$\min K + 20L \quad \text{sujeta a} \quad \sqrt{K} + L = 30$$

Hallar los niveles óptimos de  $K$  y  $L$ .

**Solución:** La función lagrangiana es  $\mathcal{L}(K, L) = K + 20L - \lambda(\sqrt{K} + L - 30)$ , luego las condiciones de primer orden para solucionar el problema son:

$$\mathcal{L}'_1(K, L) = 1 - \frac{\lambda}{2\sqrt{K}} = 0, \quad \mathcal{L}'_2(K, L) = 20 - \lambda = 0, \quad \sqrt{K} + L = 30$$

La segunda ecuación nos dice que  $\lambda = 20$ , lo cual, si reemplazamos en la primera ecuación, nos da  $\frac{10}{\sqrt{K}} = 1$ , luego  $K = 100$ . Si ahora reemplazamos en la tercera ecuación, tenemos que  $\sqrt{100} + L = 30$ , luego  $L = 20$ . En palabras, la conclusión que hemos obtenido es que la firma debe utilizar 10 unidades de capital y 20 de trabajo, con lo cual produce la cantidad deseada de bien a un coste de  $K + 20L = 500$ . El Teorema (18.5.1) nos mostrará que, en efecto, esta solución es óptima, pues la función lagrangiana es cóncava en este problema.

Fuente: Tomado de Sydsaeter (2012, p.555)

Adicionalmente, se hace la prueba de aumentar el valor de la restricción en 1 unidad y se observa el valor óptimo de la función aumenta en 20, el cual coincide con el multiplicador ( $\lambda$ ) de Lagrange. Esto se puede verificar con la aproximación planteada anteriormente:

$$f^*(c + dc) \approx f^*(c) + \lambda \cdot dc$$

Para un cambio  $dc = 1$ , es decir, incrementar en 1 unidad el recurso:

$$f^*(30 + 1) \approx f^*(30) + (20)(1)$$

$$f^*(30 + 1) \approx 500 + 20$$

$$f^*(30 + 1) \approx 520$$

Anteriormente, el valor óptimo de la función  $F(K, L) = L + 20L$  era 500. Al incrementarse en 1 unidad la condición del recurso, es decir, de 30 unidades pasar a 31 unidades, entonces el nuevo valor óptimo de  $F(K, L)$  se estima como 520 unidades.

De esta manera, en Economía, el multiplicador de Lagrange es definido como la tasa de cambio del valor óptimo de la función que se optimiza cuando la condición de restricción cambia.

A modo de resumen, la figura 26 muestra un problema adaptado de un libro de texto, a partir del cual se mostrarán posteriormente las relaciones entre los diversos significados de referencia de las derivadas parciales aplicadas a la optimización.

### Figura 26

*Ejemplo de modelización y optimización de funciones reales de dos variables en un contexto económico*

**Ejemplo:**  
 Una empresa produce y vende dos bienes diferentes, y determinó que hay una relación entre las cantidades vendidas de cada bien y sus precios unitarios:

- Si se venden  $x$  unidades del primer bien, entonces el precio unitario sería  $p = 96 - 4x$  dólares.
- Si se venden  $y$  unidades del segundo bien, entonces el precio unitario sería  $q = 84 - 2y$  dólares.

Además, se sabe que el costo total de la empresa se puede modelar, en dólares, mediante la función  $C(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2$ , la cual depende de las cantidades  $x, y$  de los bienes producidos y vendidos. Se pide:

- a) Determine la función de beneficios  $\pi(x, y)$ .
- b) Optimice la función  $\pi(x, y)$ .
- c) Si la producción de los bienes  $x, y$  está restringida a 11 unidades en total por ambos bienes. Determine los nuevos valores  $x, y$  que optimizan la función  $\pi(x, y)$ .

Fuente: Adaptado de Sydsaeter (2012, p. 558).

Asimismo, la figura 27 muestra la resolución al problema propuesto donde se determina la función de beneficios  $\pi$  a partir de las variables  $x, y$ .

### Figura 27

*Solución al ejemplo de modelación y optimización de funciones reales de dos variables en un contexto económico*

**Inciso a)**  
 Para determinar la función de beneficios, se requiere determinar previamente la función ingreso  $I(x, y)$ .

$$I(x, y) = x(96 - 4x) + y(84 - 2y)$$

Luego, la función de beneficios  $\pi(x, y)$  será:

$$\pi(x, y) = I(x, y) - C(x, y)$$

$$\pi(x, y) = -6x^2 - 3y^2 - 2xy + 96x + 84y$$

**Inciso b) Optimización sin restricciones**  
 Para optimizar la función, será necesario desarrollar las dos condiciones necesarias y verificar:

Primera condición:  
 Hallar las derivadas parciales de primer orden

$$\pi_x = -12x - 2y + 96$$

$$\pi_y = -6y - 2x + 84$$

Se hallan los puntos críticos/estacionarios resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} -12x - 2y + 96 = 0 \\ -6y - 2x + 84 = 0 \end{cases}$$

Se obtiene al punto estacionario (6,12).

Segunda condición:  
 Se determinan las derivadas parciales de segundo orden y se expresa la matriz hessiana  $H(x, y)$ .

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} \pi_{xx} & \pi_{xy} \\ \pi_{yx} & \pi_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -2 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

Se calcula el determinante de la matriz hessiana evaluado en el punto (6,12).

$$|H(6,12)| = 68$$

Se concluye que, al obtener  $|H(6,12)| > 0$  y  $\pi_{xx}(6,12) < 0$ , entonces  $\pi(6,12) = 792$  es un máximo global.

Esto se interpreta que, al producir y vender 6 unidades del primer bien y 12 unidades del segundo bien, se obtendrá un beneficio máximo de 792 dólares.

**Inciso c) Optimización con restricciones**  
 Para optimizar la función, será necesario modelar la restricción  $g(x, y) = c$  de producción de ambos bienes:

$$x + y = 11$$

Se utiliza el método del multiplicador de Lagrange al existir una restricción de igualdad.

- Se determina la función lagrangiana:
 
$$\mathcal{L}(x, y) = \pi(x, y) - \lambda[g(x, y) - c]$$

$$\mathcal{L}(x, y) = -6x^2 - 3y^2 - 2xy + 96x + 84y - \lambda x - \lambda y - 11\lambda$$
- Se determinan las derivadas parciales de primer orden de  $\mathcal{L}(x, y)$ .
 
$$\mathcal{L}_x = -12x - 2y + 96 - \lambda$$

$$\mathcal{L}_y = -6y - 2x + 84 - \lambda$$
- Se resuelve el sistema conformado por  $\mathcal{L}_x = 0, \mathcal{L}_y = 0$  y  $g(x, y) = c$ .
 
$$\begin{cases} -12x - 2y + 96 - \lambda = 0 \\ -6y - 2x + 84 - \lambda = 0 \\ x + y = 11 \end{cases}$$

Se obtienen los valores  $x = 4, y = 7, \lambda = 34$ .

Evaluando (4,7) en la función  $\pi$ , se obtiene 673. Esto significa que para la producir un total de 11 unidades de ambos bienes (4 del primero y 7 del segundo), se obtiene un beneficio de 673 dólares.

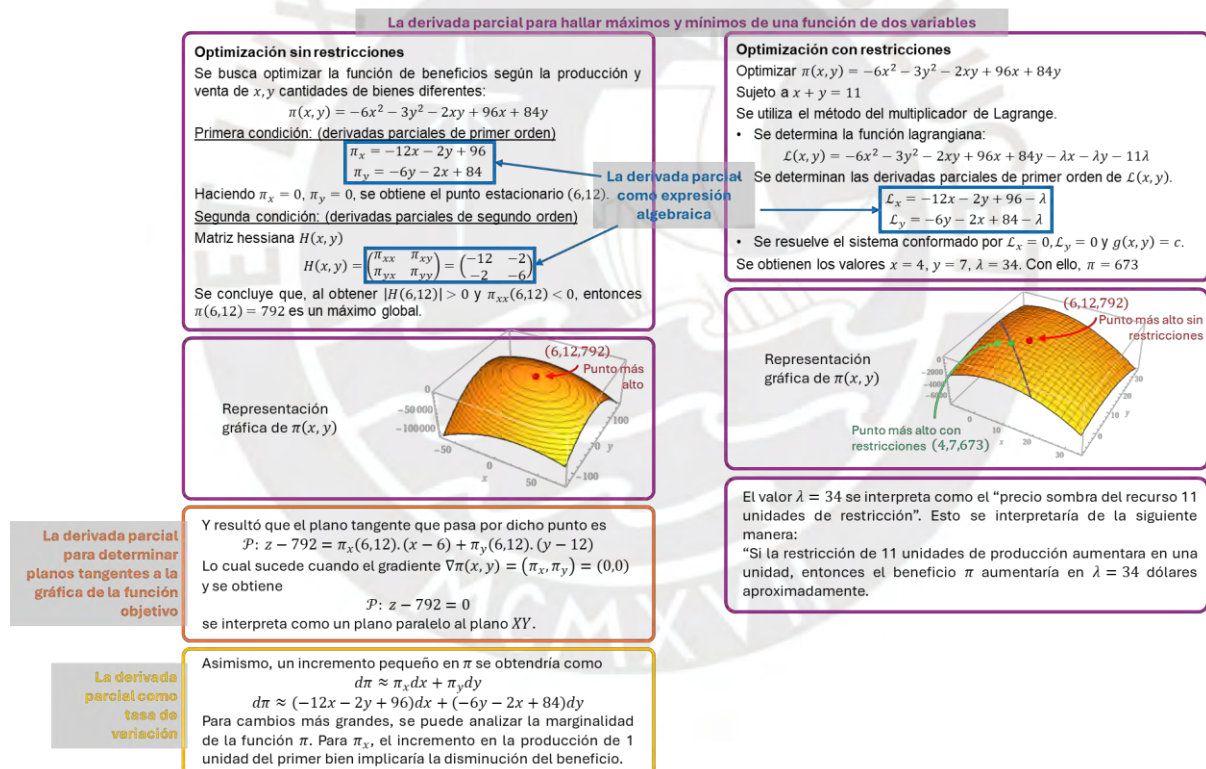
**Nota:** Elaboración propia

En el inciso b), se resuelve el problema sin restricción alguna, mientras que el inciso c) se resuelve el problema sujeto a la restricción  $x + y = 11$ . En ambos casos, se siguen los procedimientos propuestos para el significado de referencia de la derivada parcial para hallar máximos y mínimos de una función de dos variables.

La figura 28 muestra las relaciones entre los usos que se le da a la derivada parcial y su relación con la optimización de funciones reales de dos variables. Se observa que hay dos significados que están presentes en gran parte de sus resoluciones. Uno de ellos es el de la “derivada parcial para hallar máximos y mínimos de una función de dos variables”. Transversal a ambos problemas, también está presente el cálculo de “las derivadas parciales como expresiones algebraicas” a partir de una función de dos variables, puesto que cada procedimiento seguido en ambos casos de optimización requiere determinar las expresiones  $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ , según corresponda.

**Figura 28**

*Relaciones entre los significados de la derivada parcial en un problema de optimización*



**Nota.** Elaboración propia

Aunque no es común evidenciar los significados de “la derivada parcial para determinar planos tangentes” y “la derivada parcial como plano tangente” debido a que la finalidad de un problema de optimización es hallar un valor máximo o mínimo, ambos usos de la derivada parcial permiten un mayor análisis del problema a partir de la interpretación que le dé cada uno.

Por ejemplo, el significado de la “derivada parcial para determinar un plano tangente” permite reforzar o vincular el concepto de plano tangente como un caso particular en la optimización de funciones sin restricciones, es decir, cuando el plano tangente es paralelo al plano  $XY$  se podrá encontrar un punto que optimice la función. Mientras tanto, el significado de la “derivada parcial como tasa de variación” puede ser útil para realizar interpretaciones o análisis más profundos de los resultados del problema de optimización al estimar cómo serían los cambios en el valor de la función cuando los valores  $x, y$  cambien. Para ello, se analizan los signos de las funciones marginales  $f_x, f_y$  de la función objetivo  $f$ . Cabe resaltar que la interpretación del precio sombra del recurso ( $\lambda$ ) puede estar relacionado con el análisis marginal de la función según el valor de la restricción, es decir, al aumentar la condición de la restricción, se podría estimar el cambio en el valor óptimo de la función.

En síntesis, para un curso de matemáticas que forme parte del plan de la especialidad de economía donde se aborde el tema “optimización de funciones reales de dos variables”, no es suficiente resolver problemas intra-matemáticos, sino también aquellos problemas extra-matemáticos que requieran una modelización de funciones en contextos económicos. Además, es muy importante trabajar los significados de referencia de “la derivada parcial para hallar máximos y mínimos” y el significado de “la derivada parcial como expresión algebraica”, puesto que, como se puede observar en el ejemplo anterior, son principalmente utilizados en el procedimiento de optimización. Asimismo, los significados de “la derivada parcial para determinar planos tangentes” y “la derivada parcial como tasa de variación” son útiles para reforzar las interpretaciones de la optimización de funciones, así como para profundizar en el análisis de la variación del valor de una función a partir de la variación en valores pequeños o grandes de sus variables.

## **Capítulo IV: Indicadores de idoneidad didáctica de un proceso de instrucción idóneo de optimización de funciones de dos variables para estudiantes de economía**

En este capítulo, se adaptan y construyen los indicadores de idoneidad didáctica para un proceso de instrucción idóneo de la optimización de funciones de dos variables para estudiantes de economía. Para ello, se toman como referencia los trabajos de Pino-Fan y Parra-Urrea (2021) y Verón et al. (2024), los cuales proponen indicadores de idoneidad para procesos de instrucción de funciones reales de una variable y derivadas de funciones reales de una variable. Asimismo, se enfatiza el uso de los significados de referencia de “la derivada parcial como expresión algebraica” y “la derivada parcial para hallar máximos y mínimos” identificados en la sección anterior, mientras que se toman en cuenta los otros significados identificados para la derivada parcial para determinar planos tangentes y la derivada parcial como tasa de variación.

Se emplea la codificación de cada indicador según la componente de cada faceta de la idoneidad didáctica indicada en el segundo capítulo de esta investigación.

### **4.1. Indicadores de idoneidad epistémica**

Según lo descrito en el capítulo 2, la idoneidad epistémica permite valorar “qué tan representativos son los significados institucionales que se pretenden implementar en una clase respecto de los significados de referencia del objeto matemático”. La tabla 16 muestra la codificación de cada indicador de esta faceta de la idoneidad didáctica.

**Tabla 16**

*Codificación de indicadores de idoneidad por componente de la idoneidad epistémica*

<b>Faceta de idoneidad y su codificación</b>	<b>Codificación de cada componente de la idoneidad epistémica</b>	<b>Codificación de indicadores</b>
Idoneidad epistémica <b>(IEP)</b>	<p><b>IEP<sub>i</sub></b>, donde <i>i</i> el número de la componente</p> <p><b>IEP<sub>1</sub></b>: Situaciones problema</p> <p><b>IEP<sub>2</sub></b>: Lenguajes</p> <p><b>IEP<sub>3</sub></b>: Reglas o elementos regulativos</p> <p><b>IEP<sub>4</sub></b>: Argumentos</p> <p><b>IEP<sub>5</sub></b>: Relaciones</p> <p><b>IEP<sub>6</sub></b>: Errores, ambigüedades y creencias</p>	<b>IEP<sub>i,j</sub></b> , donde <i>j</i> es el número de indicador propuesto para cada componente <i>i</i> .

*Nota.* Elaboración propia

La tabla 17 muestra la adaptación de los indicadores por componentes de esta faceta, los cuales fueron tomados a partir de las investigaciones de referencia mencionadas y los significados de referencia propuestos en la sección anterior y su relación con la economía.

**Tabla 17**

*Componentes e indicadores para el análisis de la idoneidad epistémica*

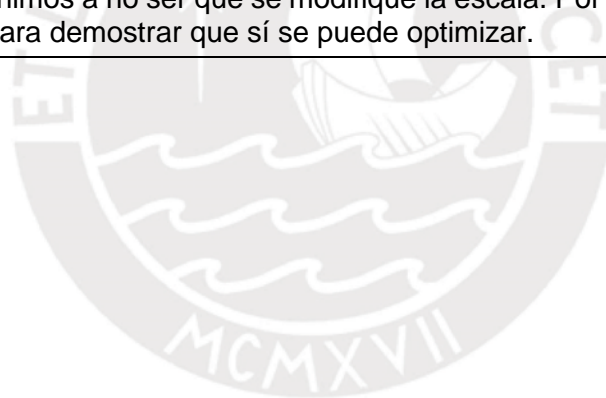
<b>1 – Indicadores de idoneidad epistémica (IEP)</b>	
<b>Componentes</b>	<b>Indicadores</b>
<p>Situaciones problema <b>(IEP<sub>1</sub>)</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>(IE<sub>1.1</sub>)</b> Se presentan problemas que refuerzan el uso de las derivadas parciales como expresiones algebraicas. Por ejemplo, determinar las derivadas parciales de primer y segundo orden para funciones de dos variables mediante el cálculo de expresiones de derivadas parciales <math>f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}</math>.</li> <li>• <b>(IEP<sub>1.2</sub>)</b> Se presentan problemas donde se use el significado de la derivada parcial como tasa de variación (la aproximación del incremento <math>\Delta z</math> de la función <math>f</math> según sus variables, precio sombra de la restricción o función marginal), así como el significado de la derivada parcial para determinar un plano tangente (ecuación del plano tangente <math>\mathcal{P}</math> en un punto <math>(x_0, y_0)</math>).</li> <li>• <b>(IEP<sub>1.3</sub>)</b> Se presentan problemas que ejemplifiquen y refuercen el manejo e interpretación de representaciones algebraicas y gráficas de funciones de dos variables, sus derivadas parciales y el plano tangente. Por ejemplo:             <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Se pide graficar la función <math>f(x, y) = x^2 + y^2</math>, determinar sus derivadas parciales de primer y segundo orden respecto de sus variables <math>x, y</math>. Se pide graficar o visualizar sus gráficas y el plano tangente en cierto punto.</li> </ul> </li> <li>• <b>(IEP<sub>1.4</sub>)</b> Se presentan <u>problemas intra-matemáticos</u> que aborden el significado de referencia de “la derivada parcial para para hallar máximos y mínimos” <u>sin restricciones</u> de la forma <math>\max f(x, y)</math> o <math>\min f(x, y)</math>. Por ejemplo:             <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Determine los valores máximos y mínimos de la función <math>f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1</math>.</li> </ul> </li> <li>• <b>(IEP<sub>1.5</sub>)</b> Se presentan <u>problemas intra-matemáticos</u> que aborden el significado de referencia de “la derivada parcial para hallar máximos y mínimos”, pero <u>que no tengan máximos ni mínimos</u>. Por ejemplo:             <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Se pide optimizar y determinar si la siguiente función tiene valores máximos o mínimos <math>f(x, y) = x^2 - y^2</math>. En este ejemplo, se obtiene que el punto <math>(0, 0)</math> es un punto silla.</li> </ul> </li> <li>• <b>(IEP<sub>1.6</sub>)</b> Se presentan <u>problemas intra-matemáticos</u> que aborden el significado de referencia de “la derivada parcial para hallar máximos y mínimos” <u>con restricciones de igualdad</u> mediante el método de los multiplicadores de Lagrange de algunas de las siguientes formas:             <div style="text-align: center; margin: 10px 0;"> <math display="block">\max f(x, y) \text{ sujeto a } g(x, y) = c</math> <math display="block">\min f(x, y) \text{ sujeto a } g(x, y) = c</math> </div> <p>Por ejemplo: Determine los valores máximos y mínimos de la función <math>f(x, y) = x^2 + 2y^2</math> sujeto a <math>x^2 + y^2 = 1</math>.</p> </li> </ul>

Componentes	Indicadores
Situaciones problema (IEP <sub>1</sub> )	<ul style="list-style-type: none"> <li>• (IEP<sub>1.7</sub>) Se presentan <u>problemas extra-matemáticos</u> que aborden el significado de referencia de “la derivada parcial para hallar máximos y mínimos” aplicados a contextos económicos donde se requiera optimizar funciones que modelen situaciones económicas de dos variables como ingreso, costo o producción, <u>sin restricciones de igualdad</u>. Por ejemplo: <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Minimice la función <math>C(x, y) = \frac{x^2}{100} - 10x + \frac{y^3}{300} - 9y + 300</math>, la cual modela el costo de producción de cierta empresa donde <math>x, y</math> corresponden a los números de unidades de producción de dos de sus sedes más importantes.</li> </ul> </li> <li>• (IEP<sub>1.8</sub>) Se presentan <u>problemas extra-matemáticos</u> que aborden el significado de referencia de “la derivada parcial para hallar máximos y mínimos” aplicados a contextos económicos donde se requiera optimizar funciones que modelen situaciones económicas de dos variables como ingreso, costo o producción, <u>sujetas a restricciones de igualdad</u>. Por ejemplo: <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Minimice la función <math>C(x, y) = \frac{x^2}{100} - 10x + \frac{y^3}{300} - 9y + 300</math>, la cual modela el costo de producción de cierta empresa donde <math>x, y</math> corresponden a los números de unidades de producción de dos de sus sedes más importantes si la producción total debe ser igual a 1000 unidades.</li> </ul> </li> <li>• (IEP<sub>1.9</sub>) Se proponen espacios para la generación de problemas tanto intra como extra-matemáticos de los significados de las derivadas parciales de funciones de dos variables y, particularmente, de problemas de optimización. Por ejemplo: <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Busque o modele un problema de optimización de una función cuyas variables se relacionen con conceptos económicos como el ingreso o el costo.</li> </ul> </li> </ul>
Lenguajes (IEP <sub>2</sub> )	<ul style="list-style-type: none"> <li>• (IEP<sub>2.1</sub>) Se utilizan diferentes representaciones para ejemplificar y explicar en qué consiste la optimización de funciones de dos variables: algebraica (expresión <math>f(x, y)</math>) y gráfica en tres dimensiones (encontrar el punto más alto o bajo de la gráfica).</li> <li>• (IEP<sub>2.2</sub>) Se utiliza un lenguaje apropiado para dirigirse a los significados de referencia de “derivada parcial para hallar máximos y mínimos” (uso adecuado de las notaciones de derivadas parciales, multiplicador de Lagrange y funciones especiales como la función lagrangiana).</li> <li>• (IEP<sub>2.3</sub>) Se utiliza un lenguaje apropiado para explicar y dirigirse a los términos económicos presentes en problemas que modelen situaciones económicas: ingreso, costo, capital, trabajo, beneficio, producción, marginalidad, precio sombra, optimización.</li> </ul>

Componentes	Indicadores
Reglas o elementos regulativos (Definiciones, proposiciones, procedimientos) (IEP <sub>3</sub> )	<ul style="list-style-type: none"> <li>• (IEP<sub>3.1</sub>) Se presentan las definiciones y propiedades del significado de “derivada parcial para hallar máximos y mínimos”. Entre sus definiciones, se presentan los conceptos de optimización, máximos, mínimos, punto silla, función objetivo, restricción de igualdad, multiplicador de Lagrange, condiciones necesarias de optimización, función lagrangiana, método del multiplicador de Lagrange para optimización.</li> <li>• (IEP<sub>3.2</sub>) Se presentan los procedimientos para optimizar funciones de dos variables sin y con restricciones. <ul style="list-style-type: none"> <li>○ En el caso de que no existan restricciones, se presenta el procedimiento: determinar los puntos críticos con las derivadas parciales de primer orden; luego, evaluar los valores máximos y mínimos a partir del determinante de la matriz Hessiana.</li> <li>○ En el caso de que existan restricciones, se presenta el método del multiplicador de Lagrange, donde se construye la función lagrangiana y se calculan las derivadas parciales de primer orden para, posteriormente evaluar los resultados en la función y resolver el problema.</li> </ul> </li> </ul>
Argumentos (IEP <sub>4</sub> )	<ul style="list-style-type: none"> <li>• (IEP<sub>4.1</sub>) Las explicaciones son adecuadas para el nivel académico superior de estudiantes de economía. Se mantiene una formalidad algebraica de las operaciones y expresiones utilizadas como fórmulas o métodos.</li> <li>• (IEP<sub>4.2</sub>) Se proponen situaciones donde el estudiante tiene que utilizar las definiciones y procedimientos de la optimización de funciones de dos variables para justificar sus respuestas.</li> </ul>
Relaciones (IEP <sub>5</sub> )	<ul style="list-style-type: none"> <li>• (IEP<sub>5.1</sub>) Las definiciones, procedimientos y problemas (intra o extra-matemáticos) se relacionan entre sí.</li> <li>• (IEP<sub>5.2</sub>) Se identifican y articulan el significado de la derivada parcial para hallar máximos y mínimos con el significado algebraico de la derivada parcial.</li> </ul>

Componentes	Indicadores
Errores, ambigüedades y creencias <b>(IEP<sub>6</sub>)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>(IEP<sub>6.1</sub>)</b> Se evita que el trabajo con la optimización de funciones reales de dos variables se limite únicamente al uso de procedimientos algebraicos al presentarse procedimientos de tipo algebraico, sino también se promueve la interpretación gráfica de la optimización.</li> <li>• <b>(IEP<sub>6.2</sub>)</b> El trabajo con la optimización de funciones de dos variables no se limita únicamente a un contexto intra-matemático, sino también extra-matemático relacionado con funciones que modelizan situaciones económicas.</li> <li>• <b>(IEP<sub>6.3</sub>)</b> Se presentan problemas cuyas funciones de dos variables pueden resultar ambiguas al parecer resultan complicadas de graficar a lápiz y papel o incluso no parecerían graficables mediante el uso de un software, por lo que se hace necesario utilizar los métodos algebraicos para su resolución. Por ejemplo:               <ul style="list-style-type: none"> <li>○ “Se pide graficar <math>f(x,y) = x^2 - y^3 - 2xy</math> y evaluar si posee máximos y mínimos. En caso no se pueda graficar, determinar algebraicamente si se puede optimizar la función”. En este ejemplo, la función no es fácil de dibujarla o puede resultar complicada mediante las trazas de XY, YZ o XZ y curvas de nivel. Aunque se recurra a programas tecnológicos para mostrar la gráfica, esta no sería útil para identificar sus valores máximos y mínimos a no ser que se modifique la escala. Por lo que los métodos algebraicos de optimización serían útiles para demostrar que sí se puede optimizar.</li> </ul> </li> </ul>

Nota. Elaboración propia



#### 4.2. Indicadores de idoneidad cognitiva

Según lo descrito en el capítulo 2, la idoneidad cognitiva permite valorar el nivel como se relacionan e instruyen los significados pretendidos o implementados en los alumnos. Esto se da tanto, antes, durante y después del proceso mediante, por ejemplo, la toma de evaluaciones, adaptaciones de currículo y otras herramientas utilizadas en el aprendizaje. La tabla 18 muestra la codificación de cada indicador de esta faceta de la idoneidad didáctica.

**Tabla 18**

*Codificación de indicadores de idoneidad por componente de la idoneidad cognitiva*

<b>Faceta de idoneidad y su codificación</b>	<b>Codificación de cada componente de la idoneidad cognitiva</b>	<b>Codificación de indicadores</b>
Idoneidad cognitiva <b>(ICO)</b>	<b>ICO<sub>i</sub></b> , donde i el número de la componente <b>ICO<sub>1</sub></b> : Conocimientos previos <b>ICO<sub>2</sub></b> : Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales <b>ICO<sub>3</sub></b> : Aprendizajes <b>ICO<sub>4</sub></b> : Alta demanda cognitiva	<b>ICO<sub>i,j</sub></b> , donde j es el número de indicador propuesto para cada componente i.

*Nota.* Elaboración propia

La tabla 19 muestra la adaptación de los indicadores por componentes de la idoneidad cognitiva, los cuales fueron tomados a partir de las investigaciones de referencia mencionadas y los significados de referencia propuestos en la sección anterior y su relación con la economía.

**Tabla 19***Componentes e indicadores para el análisis de la idoneidad cognitiva*

<b>2 – Indicadores de idoneidad cognitiva (ICO)</b>	
<b>Componentes</b>	<b>Indicadores</b>
Conocimientos previos <b>(ICO<sub>1</sub>)</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• <b>(ICO<sub>1.1</sub>)</b> Se comprueba que los alumnos tienen los conocimientos previos y necesarios para introducir el tema de optimización de funciones de dos variables: reglas de derivación en una variable, optimización de funciones reales de una variable, representación algebraica y gráfica de una función de dos variables, cálculo de derivadas parciales, funciones que modelan situaciones económicas (tales como ingreso, costo, beneficio, producción), tasa de cambio de una función de dos variables, marginalidad de funciones y plano tangente.</li><li>• <b>(ICO<sub>1.2</sub>)</b> Se vinculan los conocimientos previos (matrices, las reglas de derivación de funciones de una variable, el procedimiento para optimizar funciones de una variable, representaciones algebraico-gráficas de funciones reales de dos variables) con la optimización de funciones de dos variables.</li></ul>
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales <b>(ICO<sub>2</sub>)</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• <b>(ICO<sub>2.1</sub>)</b> Se incluyen actividades de ampliación y analogías. Por ejemplo, se presentan similitudes entre los procedimientos de optimización de funciones de una y dos variables.</li><li>• <b>(ICO<sub>2.2</sub>)</b> Se incluyen actividades de refuerzo para las clases teóricas donde se implique trabajar con el cálculo de derivadas parciales como ejemplos de optimización de funciones de dos variables.</li></ul>
Aprendizajes <b>(ICO<sub>3</sub>)</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• <b>(ICO<sub>3.1</sub>)</b> Se emplean instrumentos de evaluación que verifiquen la apropiación de los significados pretendidos por el profesor como parte de los significados personales de los estudiantes.</li></ul>

Componentes	Indicadores
Alta demanda cognitiva <b>(ICO<sub>4</sub>)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>(ICO<sub>4.1</sub>)</b> Se incluyen problemas matemáticos donde no se dé la función explícitamente y el alumno deba interpretar el enunciado y modelar una función de dos variables en determinada situación económica para, posteriormente, optimizarla. Por ejemplo: <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Se establecen reglas para determinar la función ingreso en diferentes sedes de una empresa. En una sede, el precio de <math>x</math> unidades es igual a <math>(2x - 1)</math> soles. En otra sede, el precio de <math>y</math> unidades es igual a <math>(1.5y + 2)</math> soles. Determine el ingreso total por ambas sedes.</li> </ul> </li> <li>• <b>(ICO<sub>4.2</sub>)</b> Se incluyen problemas matemáticos donde no se dé explícitamente la restricción de optimización y el alumno deba interpretar el enunciado y modelar la restricción de una función de dos variables en determinada situación económica para, posteriormente, optimizarla. Por ejemplo, <ul style="list-style-type: none"> <li>○ En una función de costos de producción que depende de las cantidades producidas <math>x_1, x_2</math> se indica que estas dos cantidades deben sumar entre sí 12 000 unidades de producción. (De esta forma, se modela la restricción <math>x_1 + x_2 = 12\ 000</math>.)</li> </ul> </li> <li>• <b>(ICO<sub>4.3</sub>)</b> Se incluyen problemas donde no se indique explícitamente el objetivo de maximizar o minimizar una función, por lo que el alumno se ve obligado a comprobar el tipo de problema de optimización (si se busca maximizar o minimizar una función de dos variables). Por ejemplo: <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Se pide optimizar la función <math>f(x, y) = x^4 + 3xy^2 + 2x^2y</math>. (En este caso, en el enunciado no se indica si se busca maximizar o minimizar, por lo que el estudiante deberá determinarlo mediante los procedimientos algebraicos con el resultado de los puntos críticos de la matriz hessiana.)</li> </ul> </li> </ul>

Nota. Elaboración propia

### 4.3. Indicadores de idoneidad interaccional

Según lo descrito en el capítulo 2, la idoneidad interaccional permite valorar el nivel como se resuelven y promueven las interacciones entre docentes y alumnos. La tabla 20 muestra la codificación de cada indicador de esta faceta de la idoneidad didáctica.

**Tabla 20**

*Codificación de indicadores de idoneidad por componente de la idoneidad interaccional*

<b>Faceta de idoneidad y su codificación</b>	<b>Codificación de cada componente de la idoneidad interaccional</b>	<b>Codificación de indicadores</b>
Idoneidad interaccional <b>(IIN)</b>	<b>IIN<sub>i</sub></b> , donde i el número de la componente <b>IIN<sub>1</sub></b> : Interacción docente-estudiante <b>IIN<sub>2</sub></b> : Interacción entre estudiantes <b>IIN<sub>3</sub></b> : Autonomía <b>IIN<sub>4</sub></b> : Evaluación formativa	<b>IIN<sub>i,j</sub></b> , donde j es el número de indicador propuesto para cada componente i.

*Nota.* Elaboración propia

La tabla 21 muestra la adaptación de los indicadores por componentes de la idoneidad interaccional, los cuales fueron tomados a partir de las investigaciones de referencia mencionadas y los significados de referencia propuestos en la sección anterior y su relación con la economía.

**Tabla 21***Componentes e indicadores para el análisis de la idoneidad interaccional*

<b>3 – Indicadores de idoneidad interaccional (IIN)</b>	
<b>Componentes</b>	<b>Indicadores</b>
Interacción docente-estudiante <b>(IIN<sub>1</sub>)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>(IIN<sub>1.1</sub>)</b> El profesor hace una presentación clara y organizada del tema: buena organización en la pizarra, y dicta con calma y lento.</li> <li>• <b>(IIN<sub>1.2</sub>)</b> El profesor enfatiza sobre los conceptos y aplicaciones de la optimización de funciones reales de dos variables en situaciones económicas.</li> <li>• <b>(IIN<sub>1.3</sub>)</b> El profesor anticipa conceptos erróneos, preguntas y respuestas de los alumnos que puedan surgir durante la explicación y predice cómo resolverlos. Para ello, propone ejemplos adicionales que permitan despejar las dudas.</li> <li>• <b>(IIN<sub>1.4</sub>)</b> El profesor comprende e interpreta la participación de los alumnos: silencio, expresiones faciales, preguntas, tomar notas de clase, distracciones u otros.</li> <li>• <b>(IIN<sub>1.5</sub>)</b> Se usan diversos recursos retóricos para captar atención. Por ejemplo, se usan analogías para explicar los conceptos de optimización, maximización, minimización y restricciones.</li> <li>• <b>(IIN<sub>1.6</sub>)</b> Se facilita la inclusión de los alumnos en la clase mediante la participación o incentivación al diálogo entre diversos alumnos.</li> </ul>
Interacciones entre estudiantes <b>(IIN<sub>2</sub>)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>(IIN<sub>2.1</sub>)</b> Se promueve el diálogo y comunicación entre estudiantes para las dinámicas de clase, como parte de la discusión de algún concepto o resolución de algún problema.</li> <li>• <b>(IIN<sub>2.2</sub>)</b> Se promueve la participación grupal y se evita la exclusión al dar algún espacio para resolver problemas.</li> </ul>
Autonomía <b>(IIN<sub>3</sub>)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>(IIN<sub>3.1</sub>)</b> Se observan momentos donde los estudiantes resuelven problemas por su cuenta, exploran/proponen nuevos ejemplos y contraejemplos, y conectan el concepto de optimización con los temas o cursos previos.</li> <li>• <b>(IIN<sub>3.2</sub>)</b> El profesor promueve el estudio y práctica de las separatas de ejercicios por cuenta propia del alumno fuera del horario de clases.</li> </ul>
Evaluación formativa <b>(IIN<sub>4</sub>)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>(IIN<sub>4.1</sub>)</b> El docente observa y supervisa sistemáticamente el progreso cognitivo de los estudiantes a través de las actividades de clase, tareas, atención de consultas y control de evaluaciones.</li> </ul>

*Nota.* Elaboración propia

#### 4.4. Indicadores de idoneidad mediacional

Según lo descrito en el capítulo 2, la idoneidad mediacional permite valorar el grado de disponibilidad y uso de recursos, sean materiales o temporales, dentro del proceso de instrucción. La tabla 22 muestra la codificación de cada indicador de esta faceta de la idoneidad didáctica.

**Tabla 22**

*Codificación de indicadores de idoneidad por componente de la idoneidad mediacional*

<b>Faceta de idoneidad y su codificación</b>	<b>Codificación de cada componente de la idoneidad mediacional</b>	<b>Codificación de indicadores</b>
Idoneidad mediacional <b>(IME)</b>	<b>IME<sub>i</sub></b> , donde i el número de la componente <b>IME<sub>1</sub></b> : Recursos materiales <b>IME<sub>2</sub></b> : Número de alumnos, horario y condiciones del aula <b>IME<sub>3</sub></b> : Tiempo	<b>IME<sub>i,j</sub></b> , donde j es el número de indicador propuesto para cada componente i.

*Nota.* Elaboración propia

La tabla 23 muestra la adaptación de los indicadores por componentes de la idoneidad mediacional, los cuales fueron tomados a partir de las investigaciones de referencia mencionadas y los significados de referencia propuestos en la sección anterior y su relación con la economía.

**Tabla 23**

*Componentes e indicadores para el análisis de la idoneidad mediacional*

<b>4 – Indicadores de idoneidad mediacional (IME)</b>	
<b>Componentes</b>	<b>Indicadores</b>
<p>Recursos materiales <b>(IME<sub>1</sub>)</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>(IME<sub>1,1</sub>)</b> Se utilizan diversos recursos manipulativos y tecnológicos que permitan introducir e interpretar el significado de “derivada parcial para hallar máximos y mínimos de funciones de dos variables” (entre ellas, sus definiciones, representaciones y sus procedimientos). Por ejemplo, se pueden utilizar representaciones gráficas de libros de texto (en una presentación de diapositivas) o graficadoras gratuitas en línea como GeoGebra y WolframAlpha.</li> <li>• <b>(IME<sub>1,2</sub>)</b> El profesor o estudiante emplean distintas visualizaciones de la optimización de funciones de dos variables. Por ejemplo, se utiliza un recurso en línea que permita graficar una función y, así, se logra observar que el valor que maximiza o minimiza la función corresponde al punto más alto o bajo de la gráfica de la función.</li> </ul>
<p>Número de alumnos, horario y condiciones del aula <b>(IME<sub>2</sub>)</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>(IME<sub>2,1</sub>)</b> El número y distribución de alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida por el profesor.</li> <li>• <b>(IME<sub>2,2</sub>)</b> El horario es apropiado y se adecúa el proceso de instrucción según la hora.</li> <li>• <b>(IME<sub>2,3</sub>)</b> El espacio educativo es adecuado para el desarrollo de la clase.</li> </ul>
<p>Tiempo <b>(IME<sub>3</sub>)</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>(IME<sub>3,1</sub>)</b> Los significados pretendidos de la derivada parcial y sus relaciones con la economía se desarrollaron adecuadamente durante el tiempo disponible de la clase.</li> <li>• <b>(IME<sub>3,2</sub>)</b> El tiempo empleado para las sesiones prácticas es el adecuado para reforzar los problemas de optimización de funciones de variables.</li> <li>• <b>(IME<sub>3,3</sub>)</b> Se dispone de tiempo para asesorías o resolución de problemas.</li> </ul>

*Nota.* Elaboración propia

#### 4.5. Indicadores de idoneidad afectiva

Según lo descrito en el capítulo 2, la idoneidad afectiva permite valorar qué tan implicado se encuentra el estudiante durante el proceso de instrucción. La tabla 24 muestra la codificación de cada indicador de esta faceta de la idoneidad didáctica.

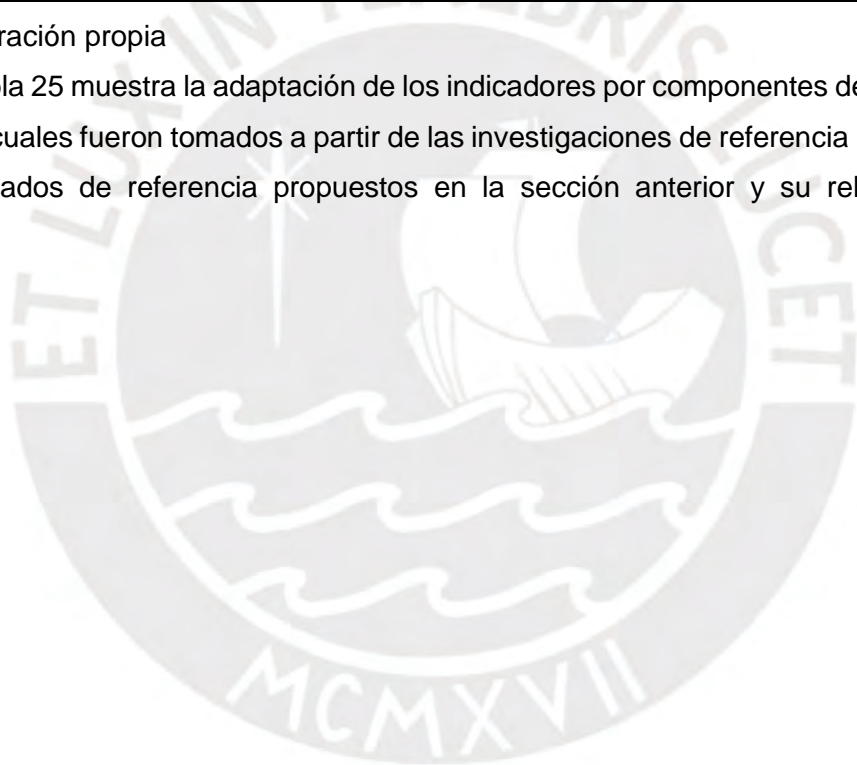
**Tabla 24**

*Codificación de indicadores de idoneidad por componente de la idoneidad afectiva*

<b>Faceta de idoneidad y su codificación</b>	<b>Codificación de cada componente de la idoneidad afectiva</b>	<b>Codificación de indicadores</b>
Idoneidad afectiva <b>(IAF)</b>	<b>IAF<sub>i</sub></b> , donde i el número de la componente <b>IAF<sub>1</sub></b> : Intereses y necesidades <b>IAF<sub>2</sub></b> : Actitudes <b>IAF<sub>3</sub></b> : Emociones	<b>IAF<sub>i,j</sub></b> , donde j es el número de indicador propuesto para cada componente i.

*Nota.* Elaboración propia

La tabla 25 muestra la adaptación de los indicadores por componentes de la idoneidad afectiva, los cuales fueron tomados a partir de las investigaciones de referencia mencionadas y los significados de referencia propuestos en la sección anterior y su relación con la economía.



**Tabla 25***Componentes e indicadores para el análisis de la idoneidad afectiva*

<b>5 – Indicadores de idoneidad afectiva (IAF)</b>	
<b>Componentes</b>	<b>Indicadores</b>
Intereses y necesidades <b>(IAF<sub>1</sub>)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>(IAF<sub>1.1</sub>)</b> Se presenta el tema de optimización de funciones de dos variables como una herramienta útil en la resolución de problemas matemáticos en el área económica para la toma de decisiones, relacionando los términos económicos vistos en clase (ingresos, costos, beneficios, producción, capital, trabajo, marginalidad, entre otros).</li> <li>• <b>(IAF<sub>1.2</sub>)</b> Se proponen problemas o tareas de modelización relacionados con los conceptos económicos vistos previamente para los estudiantes.</li> </ul>
Actitudes <b>(IAF<sub>2</sub>)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>(IAF<sub>2.1</sub>)</b> Se promueve la participación en actividades de clase (discusiones, trabajos académicos, asesorías, evaluaciones u otros), así como la perseverancia y responsabilidad.</li> <li>• <b>(IAF<sub>2.2</sub>)</b> Se promueve y favorece el razonamiento lógico, la argumentación, análisis y otras destrezas para resolver problemas, de manera que se evite que el alumno no se mecanice al resolver un problema de optimización sin analizar lo que resuelve.</li> </ul>
Emociones <b>(IAF<sub>3</sub>)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>(IAF<sub>3.1</sub>)</b> Se promueve y refuerza el compromiso del estudiante con el curso, evitando el rechazo al estudio del tema de optimización de funciones de dos variables.</li> </ul>

*Nota.* Elaboración propia

#### 4.6. Indicadores de idoneidad ecológica

Según lo descrito en el capítulo 2, la idoneidad ecológica permite valorar qué tanto se adecúa el proceso de instrucción al proyecto educativo institucional, considerando los currículos, el entorno social y profesional, entre otros. La tabla 26 muestra la codificación de cada indicador de esta faceta de la idoneidad didáctica.

**Tabla 26**

*Codificación de indicadores de idoneidad por componente de la idoneidad ecológica*

Faceta de idoneidad y su codificación	Codificación de cada componente de la idoneidad ecológica	Codificación de indicadores
Idoneidad ecológica (IEC)	<b>IEC<sub>i</sub></b> , donde i el número de la componente <b>IEC<sub>1</sub></b> : Adaptación al currículo <b>IEC<sub>2</sub></b> : Apertura hacia la innovación didáctica <b>IEC<sub>3</sub></b> : Adaptación social, profesional y cultural <b>IEC<sub>4</sub></b> : Conexiones intra e interdisciplinarias	<b>IEC<sub>i,j</sub></b> , donde j es el número de indicador propuesto para cada componente i.

*Nota.* Elaboración propia

La tabla 27 muestra la adaptación de los indicadores por componentes de la idoneidad ecológica, los cuales fueron tomados a partir de las investigaciones de referencia mencionadas y los significados de referencia propuestos en la sección anterior y su relación con la economía.

**Tabla 27***Componentes e indicadores para el análisis de la idoneidad ecológica*

<b>6 – Indicadores de idoneidad ecológica (IEC)</b>	
<b>Componentes</b>	<b>Indicadores</b>
Adaptación al currículo <b>(IEC<sub>1</sub>)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>(IEC<sub>1.1</sub>)</b> Los significados de las derivadas parciales y aquellos conceptos relacionados con la optimización se implementan y evalúan según las directrices de la institución. Por ejemplo, tomando como referencia el sílabo del curso “Matemática para Gestión y Economía” se verifica que se desarrollan los temas y aspectos propuestos de las derivadas parciales, así como su aplicación a la carrera Economía.</li> </ul>
Apertura hacia la innovación didáctica <b>(IEC<sub>2</sub>)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>(IEC<sub>2.1</sub>)</b> Se promueve el uso de tecnologías o nuevos softwares como apoyo para la comprensión de la optimización de funciones de dos variables.</li> <li>• <b>(IEC<sub>2.2</sub>)</b> Se promueve la investigación o reflexión práctica del tema en contexto matemático, económico u otras áreas.</li> </ul>
Adaptación social, profesional y cultural <b>(IEC<sub>3</sub>)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>(IEC<sub>3.1</sub>)</b> Los significados de las derivadas parciales y el concepto de optimización contribuyen a la formación profesional de los estudiantes. Los significados pretendidos están orientados hacia un contexto económico.</li> </ul>
Conexiones intra e interdisciplinarias <b>(IEC<sub>4</sub>)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>(IEC<sub>4.1</sub>)</b> Se vincula la optimización de funciones reales de dos variables con otros objetos que se dictaron antes o se dictarán posteriormente en el curso, así como en cursos futuros relacionados con la carrera Economía</li> </ul>

*Nota.* Elaboración propia

En el Anexo 1, se muestra la guía de observación de clase, la cual consiste en las tablas de los indicadores de idoneidad didáctica que se usaron para la observación y análisis del proceso de instrucción.

A modo de síntesis, los indicadores propuestos en las tablas anteriores para cada faceta de la idoneidad didáctica describen el proceso de instrucción idóneo según los significados de referencia identificados para la derivada parcial y su aplicación en la economía. Estos indicadores permiten hacer una comparación entre el proceso idóneo y lo observado en el proceso implementado por el profesor. Por medio de este análisis, se determina aquello que el profesor logra desarrollar y cumplir, así como aquello que se puede mejorar para futuras clases donde el tema se dicte a alumnos de la carrera de Economía.



## Capítulo V: Recolección de datos del proceso de instrucción de optimización de funciones de dos variables con alumnos de Economía

En este capítulo, se describe el proceso de instrucción considerando lo siguiente: datos generales relacionados con el aula de clases y el profesor; planificación de la clase; proceso de instrucción implementado; evaluación y resultados; e información complementaria al desarrollo de las sesiones. En cada caso, se indica la documentación recolectada, la cual se encuentra clasificada en el Anexo 3.

### 5.1. Datos generales del proceso de instrucción

El proceso de instrucción observado corresponde a una serie de sesiones teórico-prácticas del curso “Matemáticas para Economía y Gestión 2”, el cual se imparte de forma presencial en una universidad privada. Este curso se dicta en cinco horarios diferentes a cargo de diferentes profesores y está dirigido a estudiantes de las carreras de Administración, Gestión y Economía. Para la carrera de Economía, el curso “Matemáticas para Economía y Gestión 2” se ubica como requisito en el segundo semestre de estudios superiores. La tabla 28 muestra la relación que hay entre este curso y otros dentro de la malla curricular de Economía durante los dos primeros años.

**Tabla 28**

*Cursos del área de matemática relacionados con “Matemática para Economía y Gestión 2”*

Semestre	Curso del semestre	Curso requisito
1	Matemática para Economía y Gestión 1	-
2	Matemática para Economía y Gestión 2	Matemática para Economía y Gestión 1
3	Introducción a la Microeconomía	Matemática para Economía y Gestión 2
	Introducción a la Macroeconomía	Matemática para Economía y Gestión 2
	Matemáticas avanzadas para economistas	Matemática para Economía y Gestión 2
4	Optimización y métodos dinámicos	Matemáticas avanzadas para economistas
	Microeconomía 1	Introducción a la Microeconomía
	Macroeconomía 1	Introducción a la Macroeconomía
	Estadística para Gestión 1	Matemática para Economía y Gestión 2

*Nota.* Información revisada a partir del sílabo del curso y malla curricular de la carrera.

Como se observa en la anterior tabla, el curso de “Matemática para Economía y Gestión 2” está presente de manera directa durante los dos primeros años. Toma como conocimientos previos los temas revisados en “Matemática para Economía y Gestión 1”, así como es un requisito directo para cursos como “Introducción a la Microeconomía”, “Introducción a la Macroeconomía”, “Matemáticas avanzadas para economistas” y “Estadística para Gestión 1”. De manera indirecta, durante estos cuatro semestres, “Matemática para Economía y Gestión 2” es un curso requisito para “Optimización y métodos dinámicos”, en el cual se desarrollan temas y técnicas de optimización matemática aplicados a la economía para la toma de decisiones a cierto plazo en el futuro. En los semestres posteriores, el estudiante lleva cursos relacionados con su especialidad como Microeconomía, Macroeconomía, Econometría, entre otros, para los cuales los temas “Matemática para Economía y Gestión 2” son considerados como conocimientos previos.

Para llevar el curso “Matemática para Economía y Gestión 2”, el estudiante debe haber cursado y aprobado “Matemática para Economía y Gestión 1”, el cual es un curso del primer semestre de la carrera que aborda cuatro unidades:

- 1) Matrices y determinantes
- 2) Tópicos de matemática básica y plano cartesiano
- 3) Funciones reales de una variable
- 4) Límite de funciones y continuidad de funciones reales de una variable

Estos temas corresponden a los conocimientos previos que el estudiante debe tener para el curso “Matemática para Economía y Gestión 2”, el cual aborda tres unidades según el sílabo del curso:

- 1) Cálculo diferencial de funciones de una variable
- 2) Cálculo diferencial de funciones de varias variables
- 3) Integración de funciones reales de una variable

El curso “Matemática para Economía y Gestión 2” tiene como objetivo que el estudiante logre aplicar los temas abordados de las unidades anteriormente descritas a problemas matemáticos que modelen situaciones relacionadas con la administración y economía, según el sílabo del curso.

Para la presente investigación, los temas de derivadas parciales y su aplicación en la optimización se desarrollan en la segunda unidad del curso. La figura 29 muestra el contenido desarrollado para las semanas 9 y 10 en cuanto a la relación de las derivadas parciales para optimizar funciones reales de dos variables.

**Figura 29**

*Programación académica del curso de Matemática para Gestión y Economía 2*

Semana 9 03/06-08/06	Conos y funciones homogéneas. El teorema de Euler. Máximos y mínimos de FVV. Puntos críticos. Optimización sin restricciones: Matriz Hessiana y criterio de la segunda derivada. <b>Feriado: viernes 07 de junio</b>	Exposición Magistral	Clase práctica (tercera sesión de clases) Foro de discusión
Semana 10 10/06-15/06	Máximos y mínimos de funciones de varias variables: Problemas de aplicación. Optimización con restricciones. Método de los multiplicadores de Lagrange.	Exposición Magistral	Clase práctica (tercera sesión de clases) Foro de discusión

*Nota.* Esta figura fue tomada del sílabo del curso, el cual fue brindado por el profesor.

El docente del proceso de instrucción observado está a cargo de dos de los cinco horarios del curso, para lo cual únicamente se observa uno de sus horarios. El profesor es titulado y magíster en la carrera de Ingeniería Mecánica de la Pontificia Universidad Católica del Perú y cuenta con más de 10 años de experiencia en el apoyo educativo en el área de matemáticas y el dictado de cursos de educación superior, tanto de estudios generales como propiamente de carreras de ingeniería y economía. Para el presente trabajo de investigación, el docente aceptó de forma voluntaria que se realicen observaciones, grabaciones y recolección de materiales didácticos y evaluativos del curso de Matemática para Economía y Gestión 2 dictado presencialmente en el salón de clases.

El horario seleccionado del profesor participante cuenta con 36 alumnos matriculados de las carreras de Administración y Economía, y se dicta en tres sesiones semanales. Las dos primeras sesiones son teórico-prácticas y se dictan los lunes de 7:00 a 8:40 am y martes de 8:50 a 10:30 am. Mientras que la tercera sesión es completamente práctica y se dicta los jueves de 8:50 a 10:30 am.

## **5.2. Planificación de las sesiones del proceso de instrucción**

Las clases observadas se sitúan después de haberse tomado un examen parcial, según el cronograma, en el cual se evalúan temas de diferenciabilidad de funciones reales de varias variables (FVV) y optimización de funciones reales de una variable. Según la programación del curso, los temas de cálculo de máximos y mínimos y optimización se dictan durante cuatro clases teórico-prácticas y dos sesiones prácticas. Esto implica observar seis sesiones y recolectar datos acerca de estas sesiones. En el horario seleccionado, el profesor en cuestión se encarga tanto del dictado de las sesiones teórico-prácticas como de las sesiones prácticas. El profesor planifica los temas de cada sesión como se muestra en la tabla 29.

**Tabla 29***Temas planificados por sesión observada*

<b>Sesión observada</b>	<b>Contenido</b>	<b>Contenido desarrollado</b>
Sesión 1	Teórico-práctico	Resolución del examen parcial Funciones homogéneas
Sesión 2	Teórico-práctico	Máximos y mínimos de FVV (Primera y segunda condición necesaria) sin restricciones
Sesión 3	Práctico	Resolución de problemas con funciones homogéneas Resolución de problemas de cálculo de máximos y mínimos y aplicación de la optimización sin restricciones
Sesión 4	Teórico-práctico	Optimización de FVV con el método de los multiplicadores de Lagrange (con restricciones) Análisis del multiplicador de Lagrange
Sesión 5	Teórico-práctico	Resolución de problemas de optimización de FVV con restricciones
Sesión 6	Práctico	Resolución de problemas de optimización de FVV con o sin restricciones

*Nota.* Esta tabla muestra los temas planificados según la observación de clases.

Para la implementación de sus clases, el profesor planifica cada sesión elaborando una presentación de diapositivas por tema, para lo cual toma como referencia el libro “Matemáticas para el análisis económico” (Sydsæter et al., 2012). Asimismo, el profesor elabora separatas de ejercicios con anticipación como parte de la planificación de sus clases para resolverlas durante las sesiones prácticas.

Los temas considerados durante el desarrollo de estas seis sesiones se evalúan en la Evaluación Continua 3, el cual se toma durante la sesión práctica de la semana 11, posterior a las sesiones observadas. Además, el profesor elabora con anticipación el contenido de las evaluaciones como parte de la planificación del curso.

### 5.3. Implementación y observación del proceso de instrucción

Se describe cada una de las sesiones observadas tomando en cuenta lo observado en las grabaciones de clase y las anotaciones realizadas según lo esperado de cada indicador propuesto en el capítulo anterior.

#### 5.3.1. Primera sesión observada

Durante la primera sesión observada, el profesor resuelve el examen parcial que evaluó temas de diferenciabilidad y optimización de funciones reales de una variable, así como representaciones gráficas y diferenciabilidad de funciones de dos variables. Estos temas representan parte de los conocimientos previos que debe tener el estudiante para el tema de optimización de funciones de dos variables. El examen parcial consta de cinco problemas, los cuales se describen en la tabla 30.

**Tabla 30**

*Problemas evaluados en el examen parcial*

Problema del examen parcial	Problema
Problema 1	Grafique la función $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 8$ , analizando intervalos de crecimiento/decrecimiento, valores extremos, puntos de inflexión, intervalos de concavidad y convexidad.
Problema 2	Sea $C(q) = 380\,000 + 5q - 0.001q^2$ la función del costo y $p = 350 - 0.06q$ la función de demanda de una empresa monopolista, siendo $q$ el número de unidades producidas y vendidas de cierta mercancía. Determine el precio $p$ y la cantidad $q$ en los cuales se alcanza el beneficio máximo. <i>Nota:</i> Debe justificar por qué el máximo obtenido es global o relativo.
Problema 3	Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por $f(x; y) = 5x^3y^3 + 10y^2$ . a) Determine las derivadas parciales de $f$ . b) Determine de manera aproximada, usando diferenciales, el valor de $f(2.1; 1.2)$ . c) Suponga que $x = \sqrt{1+t}$ , $y = e^{t^2} + 1$ , usando la Regla de la Cadena, determine $\left. \frac{df}{dt} \right _{t=0}$ .
Problema 4	Para $z = \ln(x^4 - y^3)$ , donde $x = u^3 - 2v^2$ $\wedge$ $y = u^3 + 3v^4$ determine, usando la Regla de la Cadena, $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}$ .
Problema 5	Cuando se producen $q_A$ unidades del producto A y $q_B$ unidades del producto B, una empresa tiene una función de costo $C = C(q_A; q_B)$ , la cual está definida implícitamente por la ecuación: $C + \sqrt{C} = 20 + 10q_B\sqrt{48 + q_A^2}$ Determine, usando derivación implícita, $\frac{\partial C}{\partial q_B}$ cuando $q_A = 4$ y $q_B = 5$ .

*Nota.* Tomado de la resolución del examen parcial durante la clase.

En el contenido evaluado previo al tema de optimización de funciones reales de dos variables, se observa que parte de los conocimientos trabajados en clase corresponde al significado de la derivada parcial como expresión algebraica y la derivada parcial como tasa de variación, como se nota en el problema del examen parcial. El profesor recuerda a sus alumnos los procedimientos correspondientes para determinar una derivada parcial: “una variable se mantiene constante”. Además, el profesor el recuerda las reglas de derivación como es el caso de la regla de la cadena, el cual es utilizado en los cinco problemas del examen.

Asimismo, durante esta resolución, el profesor hace referencia a las funciones marginales en economía para resolver el problema 2 de optimización de funciones reales de una variable. Se mencionan ingreso, costo y beneficio marginales.

Posterior a la resolución del examen parcial, el profesor explica el tema “funciones homogéneas” donde hace uso de las derivadas parciales para determinar el grado de cierta función. Se menciona que este tipo de funciones cuentan con una gran aplicación económica siendo la función Cobb-Douglas la función homogénea que se relaciona con la producción.

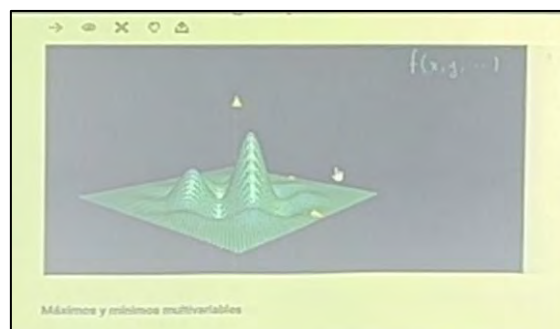
### 5.3.2. Segunda sesión observada

Al comenzar la segunda sesión, el profesor devuelve los exámenes parciales corregidos a cada estudiante. Se observa que el profesor conoce a todos los alumnos y no realiza algún comentario general para la devolución.

El tema que se desarrolla en esta sesión es “Máximos y Mínimos”. Se les recuerda a los alumnos el procedimiento del cálculo de máximos y mínimos de funciones de una variable donde se trabajan los criterios de la primera y segunda derivada. Para abordar este tema, el profesor muestra una imagen, la cual se observa en la figura 30 con la finalidad de evidenciar en la gráfica de la superficie la existencia de máximos y mínimos. Una vez mostrada esta imagen, les indica a los alumnos que recordarán el tema de “Matrices y determinantes” trabajado en el curso anterior.

#### Figura 30

*Gráfica de una función real de varias variables para introducir el tema de máximos y mínimos*



*Nota.* Tomado de la observación de clases

El profesor presenta el tema estructurado de la siguiente manera:

- Definición
- Teorema (condición necesaria de primer orden)
- Ejemplos
- Matriz Hessiana para funciones de dos variables
- Teorema (condición necesaria de segundo orden)
- Matriz Hessiana para funciones de tres variables

Al mencionar las condiciones necesarias de primer y segundo orden, el profesor comenta que esto se recuerda parecido al procedimiento de máximos y mínimos de funciones de una variable, así como también el recuerda el concepto de matriz. El profesor da a entender a los alumnos que no es complicado debido a que el procedimiento se parece a lo trabajado en funciones reales de una variable.

Posteriormente, se presenta la definición de máximos y mínimos globales para funciones reales de varias variables como se muestra en la figura 31, la cual coincide con la definición que está presente en el significado de “la derivada parcial para calcular máximos y mínimos de funciones de dos variables”.

### Figura 31

*Definición de máximos y mínimos globales utilizada en el proceso de instrucción*

**Máximos y mínimos**

Al igual que para funciones de una variable ahora nos interesa encontrar los máximos y mínimos de funciones de varias variables. Primero definamos algunos conceptos

**Definición (máximo y mínimo global)**

Si  $f(a;b) \leq f(x;y)$  para todo par  $(x;y)$  en el dominio de la función  $\Rightarrow (a;b)$  es un mínimo global

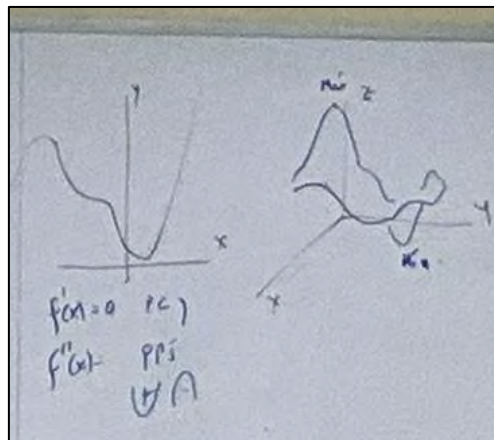
Si  $f(c;d) \geq f(x;y)$  para todo par  $(x;y)$  en el dominio de la función  $\Rightarrow (c;d)$  es un máximo global

*Nota.* Tomado de las diapositivas de clase.

El profesor realiza analogías con el tema de optimización de funciones reales de una variable, a lo cual los alumnos responden asintiendo como señal de comprensión y conformidad. Incluso se observa en la pizarra que el profesor ejemplifica los criterios de optimización de funciones reales de una variable según se muestra en la figura 32.

### Figura 32

Ejemplo utilizado como analogía entre la optimización de funciones reales de una variable y funciones reales de dos variables



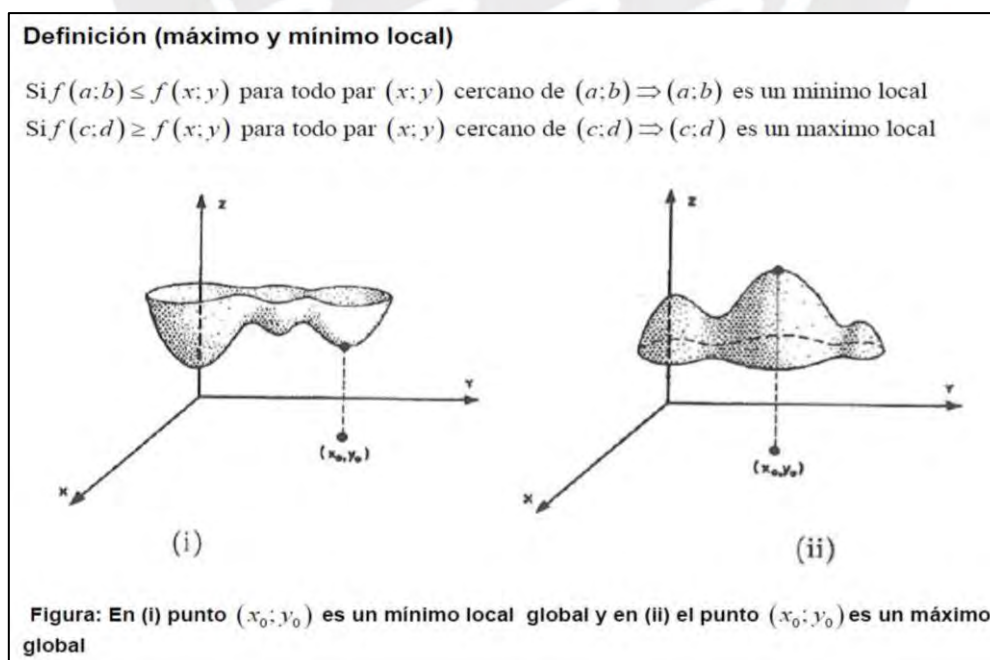
Nota. Tomado de las observaciones de clase.

Esta analogía permite que el profesor pueda proponer un procedimiento de resolución similar a las condiciones de primera y segunda derivada en funciones reales de una variable.

En la figura 33, el profesor explica los conceptos de máximos o mínimo locales, de manera que diferencia ambos tipos de (locales o globales) mediante el uso de las representaciones gráficas siendo “el máximo global un valor que está por encima de todos los puntos y el mínimo global un valor que está por debajo de los demás puntos”, mientras que “los locales son aquellos que está dados en una región cercana de puntos”.

### Figura 33

Definición de máximos y mínimos locales utilizada en el proceso de instrucción



Nota. Tomado de las diapositivas de clase

No se utiliza algún ejemplo adicional en estos casos de máximos y mínimos. Después de definir lo que son máximos y mínimos, el profesor continúa a explicar las condiciones necesarias, las cuales están relacionadas con las propiedades y procedimientos del significado de la derivada parcial para hallar máximos y mínimos.

En la figura 34, se muestra la condición necesaria de primer orden trabajada por el profesor. En esta parte, menciona que las derivadas parciales de primer orden  $f_x, f_y$  se igualan a cero para obtener los puntos estacionarios, haciendo referencia a los puntos críticos de máximos y mínimos de funciones reales de una variable. El profesor no menciona el concepto de gradiente  $\nabla f(x, y) = (f_x, f_y)$  igual a  $(0,0)$ .

### Figura 34

*Teorema de la condición necesaria de primer orden utilizada en el proceso de instrucción*

**Teorema (Condición necesaria de primer orden)**

Sea  $f(x, y)$  una función que tiene derivadas parciales en todos sus puntos. Entonces, si  $f(x, y)$  tiene un "extremo local" ( $\equiv$  máximo/mínimo local) en  $(a; b) \Rightarrow$  en  $(a; b)$  se cumple:

$$\begin{cases} \frac{\partial f(a; b)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(a; b)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Los puntos que satisfacen la condición (1) son llamados **puntos estacionarios**. La flecha en (1) no se deja, generalmente, invertir, es decir, los puntos estacionarios no son necesariamente extremos locales de la función.

*Nota.* Tomado de las diapositivas de clase

En este caso, diferencia el caso de optimización de funciones de una variable señalando que no necesariamente al resolver esta primera condición se obtiene de manera directa el máximo o mínimo. Para ello, menciona el concepto de punto de silla como se evidencia en la figura 35.

### Figura 35

*Ejemplo de punto estacionario que no necesariamente cumple que sea máximo o mínimo*

Lo que si es cierto es que todo par ordenado  $(a; b)$  que no satisfaga la condición (1) no puede ser extremo local.

Un punto estacionario que no sea máximo ni mínimo local se llama **punto de silla**

**Ejemplo (tomado del libro de texto)**  
Pruebe que  $(0;0)$  es un punto de silla de

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

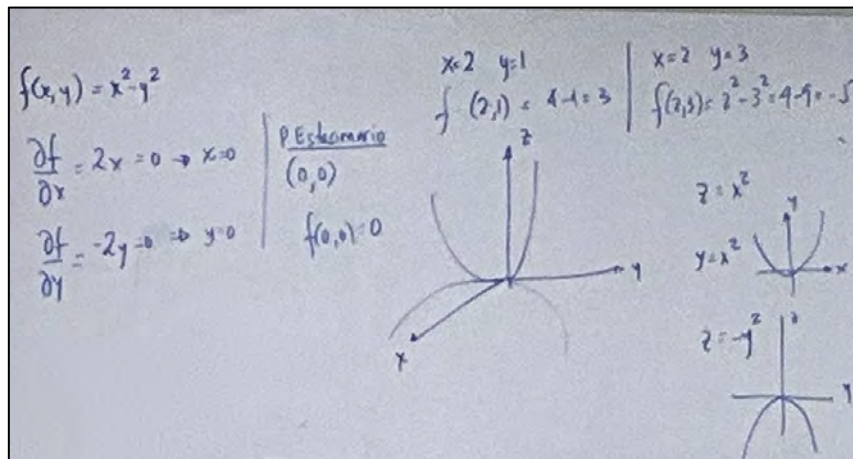
*Solución:* Es fácil ver que  $(0,0)$  es un punto estacionario en el cual  $f(0,0) = 0$ . Además,  $f(x, 0) = x^2$ , luego  $f(x, y)$  toma valores positivos en puntos arbitrariamente cercanos al origen. Como  $f(0, y) = -y^2$ , también  $f(x, y)$  toma valores negativos en puntos arbitrariamente cercanos al origen. Por tanto  $(0,0)$  es un punto de silla. La gráfica de la función es la de la Figura 17.9.

*Nota.* Tomado de las diapositivas de clase

El profesor justifica este caso comprobando que  $(0,0)$  cumple con la primera condición necesaria de máximos y mínimos. Posteriormente, evalúa otros dos puntos  $f(2,1) = 3$  y  $f(2,3) = -5$ , los cuales resultan valores mayores y menores a  $f(0,0) = 0$ , lo cual evidencia que a pesar de verificarse esta condición, no necesariamente será un máximo o mínimo. Posteriormente, recurre a la gráfica de trazas para tener una idea de cómo sería su gráfica y dar a entender el concepto de “punto silla” como se observa en la figura 36.

**Figura 36**

*Justificación del ejemplo del punto silla propuesto para la condición necesaria de primer orden*

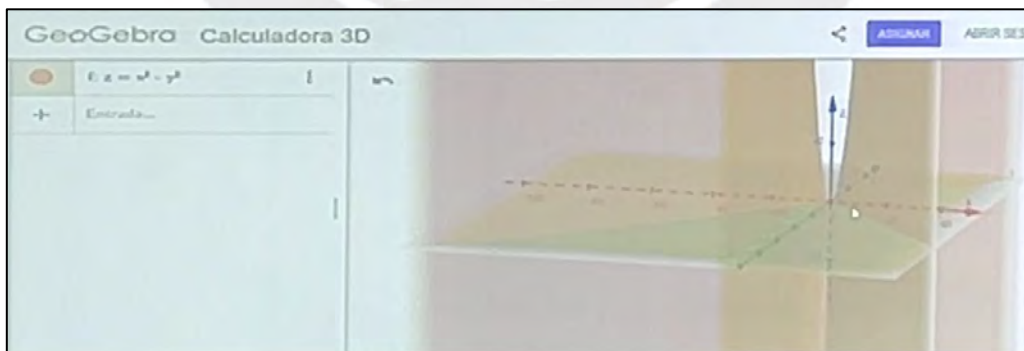


*Nota.* Tomado de la observación de clases

Asimismo, posteriormente, ejemplifica el caso mediante el uso del software GeoGebra lo que le permite manipular la representación gráfica en tres dimensiones y explicar la analogía con el “punto silla” como se ve en la figura 37.

**Figura 37**

*Representación gráfica de un punto de silla*



*Nota.* Tomado de la observación de clases

De esta manera, el profesor indica que, en tres dimensiones, al buscar máximos y mínimos según la primera condición necesaria, se podrían obtener puntos estacionarios que representen máximos, mínimos o puntos silla. Para ello, recurre al concepto de matriz

Hessiana y, así presentar la condición necesaria de segundo orden como se ve en las figuras 38 y 39.

### Figura 38

*Definición de la Matriz Hessiana para funciones de dos variables utilizada en el proceso de instrucción*

Antes de presentar la una condición que nos permita determinar cuando un punto estacionario es un extremo local, definido el concepto de matriz Hessiana

**Matriz Hessiana para funciones de dos variables**

Es la matriz definida por

$$H_f(x; y) = \nabla^2 f(x; y) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

**El Hessiano** es el determinante de esta matriz

$$|H_f(x; y)| = |\nabla^2 f(x; y)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

*Nota.* Tomado de las diapositivas de clase

En esta diapositiva, el profesor presenta la matriz Hessiana como aquella que está conformada por las derivadas parciales de segundo orden. Además, el profesor menciona el teorema de Clairout, el cual indica que las derivadas parciales cruzadas son idénticas si las derivadas de primer orden son continuas. A pesar de que se indica la notación de gradiente, el profesor no lo menciona.

### Figura 39

*Teorema de la condición necesaria de segundo orden utilizado en el proceso de instrucción*

La condición suficiente que permite averiguar la naturaleza de un punto estacionario es:

**Teorema (Condición suficiente de segundo orden)**

Sea  $(a, b)$  un punto estacionario (critico) de la función  $f$

a) Si  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a; b) > 0$  y  $|H_f(a; b)| > 0 \Rightarrow$  el punto estacionario  $(a; b)$  es un **mínimo local**

b) Si  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a; b) < 0$  y  $|H_f(a; b)| > 0 \Rightarrow$  el punto estacionario  $(a; b)$  es un **máximo local**

c) Si  $|H_f(a; b)| < 0 \Rightarrow$  el punto estacionario  $(a; b)$  es un **punto silla**

*Nota.* Tomado de las diapositivas de clase

Con este segundo teorema, el profesor indica que los puntos estacionarios se utilizan para evaluarlos en la determinante de la matriz Hessiana para, según las reglas de la figura 39, validar si el punto es mínimo, máximo o punto silla.

Luego de presentar las condiciones necesarias, el profesor procede a sintetizar el procedimiento del cálculo de máximos y mínimos de funciones de dos variables de la siguiente manera:

- 1) Se determinan las derivadas parciales de primer y segundo orden.
- 2) Se determinan los puntos estacionarios (Teorema de la primera condición necesaria) igualando las derivadas parciales de primer orden con cero.
- 3) Se construye la matriz Hessiana y se expresa el determinante con las derivadas parciales de segundo orden.
- 4) Se evalúa cada punto estacionario en la determinante de la matriz Hessiana
- 5) Se evalúa cada punto estacionario obtenido en la matriz Hessiana y se determina si es punto máximo, punto mínimos o punto silla de la función (Teorema de la segunda condición necesaria).

En las diapositivas de la clase teórico-práctica de “Máximos y mínimos sin restricciones”, el profesor propone dos problemas intramatemáticos para el cálculo de puntos máximos, mínimos y puntos silla, los cuales se describen en la tabla 31.

**Tabla 31**

*Problemas intramatemáticos de máximos y mínimos de funciones reales de dos variables sin restricciones trabajados en la sesión teórico-práctica*

Problema	Descripción
Determine los máximos y mínimos locales de la función $f$ definida por $f(x, y) = 2x^3 + 3y^2 - 4xy - 4$	En este problema se obtienen un punto silla para $(0,0)$ y un mínimo local para $(\frac{4}{9}, \frac{8}{27})$ .
Determine los extremos locales de la función $f$ $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2y + 1 - xy$	En este problema se obtienen un punto silla para $(0,0)$ .

*Nota.* Tomado de las observaciones y diapositivas de clase.

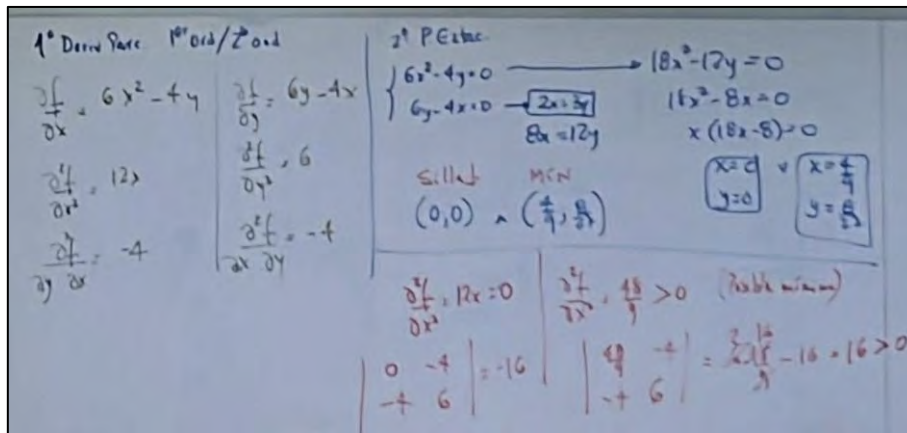
La figura 40 muestra el desarrollo del primer ejemplo de la tabla anterior. Primero, el profesor determina las derivadas parciales. Se observa que el profesor hace uso del lenguaje algebraico presente en la notación de las derivadas parciales de primer y segundo orden

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ . Segundo, el profesor resuelve el conjunto de ecuaciones  $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$ .

Tercera, una vez hallados los puntos críticos, el profesor construye la matriz Hessiana  $H_f$  para calcular su determinante con cada punto crítico hallado. Por último, evalúa el resultado de la determinante para concluir si es máximo, mínimo o silla. En este desarrollo no se observa ningún error de cálculo según los procedimientos propuestos anteriormente por el profesor.

**Figura 40**

Ejemplo trabajado en pizarra para la resolución para hallar máximos y mínimos de funciones reales de dos variables sin restricciones trabajados en la sesión teórico-práctica

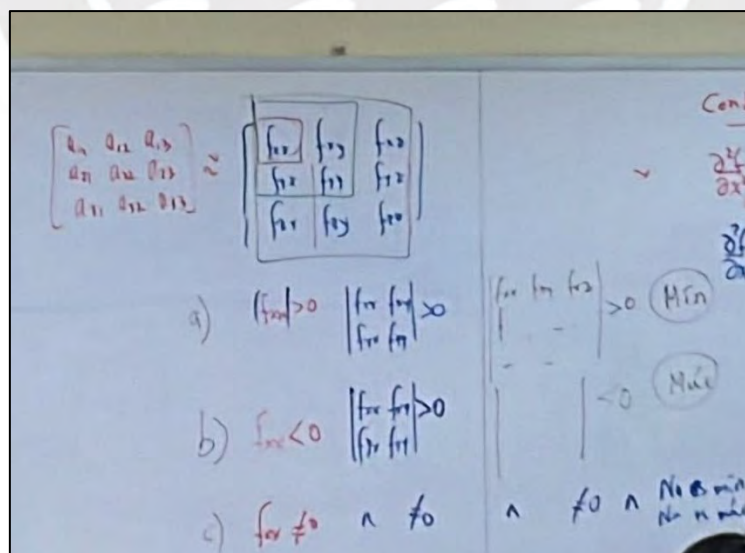


Nota. Tomado de las observaciones de clase

Posteriormente, el profesor generaliza el método para funciones reales de tres variables adaptando cada uno de los pasos descritos anteriormente. En la figura 41 se muestra cómo queda la matriz Hessiana para funciones reales de tres variables reales y cuáles serían los posibles resultados de su determinante según la segunda condición necesaria.

**Figura 41**

Matriz Hessiana para funciones reales de tres variables reales según la segunda condición necesaria para hallar máximos y mínimos sin restricciones trabajados en la sesión teórico-práctica



Nota. Tomado de las observaciones de clase

En esta otra resolución, el profesor usa otra notación de la derivada parcial:  $f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}$ .

### 5.3.3. Tercera sesión observada

La tercera sesión es práctica, para lo cual el profesor elabora una lista de ejercicios que desarrollará con los alumnos con la finalidad de repasar los temas de la semana. En esta sesión, el profesor resuelve problemas de funciones homogéneas, con la intención de practicar las derivadas parciales de primer orden, y problemas de máximos y mínimos de funciones reales de dos variables. Entre los problemas de máximos y mínimos, el profesor trabaja tanto problemas intramatemáticos como extramatemáticos, los cuales están relacionados a situaciones aplicadas a la economía. En la tabla 32 se muestran aquellos problemas propuestos en la separata de ejercicios de esta sesión.

**Tabla 32**

*Problemas intramatemáticos y extramatemáticos de máximos y mínimos de funciones reales de dos variables sin restricciones trabajados en la sesión práctica*

Tipo de problema	Problema
Intramatemático	<p>Determine los puntos críticos de las siguientes funciones y pruebe si son máximo o mínimo local:</p> <p>a) <math>f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x + 4y + 7</math></p> <p>b) <math>f(x, y) = 2x^2 + xy + 2y^2</math></p> <p>c) <math>f(x, y) = x^3 + y^3 - 12x - 3y</math></p> <p>d) <math>f(x, y) = xy - \frac{2}{x} - \frac{4}{y}</math></p> <p>e) <math>f(x, y) = (x - 2)(y - 2)(x + y - 3)</math></p> <p>f) <math>f(x, y) = xe^{-x} + ye^{-2y}</math></p>
Extramatemático	<p>Una empresa produce dos tipos de productos, A y B. El costo diario total (en dólares) de producir <math>x</math> unidades de A y <math>y</math> unidades de B está dado por</p> $C(x, y) = 250 - 4x - 7y + 0.2x^2 + 0.1y^2$ <p>a) Determine el número de unidades de A y B que la empresa debe producir al día con el propósito de minimizar el costo total.</p> <p>b) Si la empresa del ejercicio 23 anterior puede vender cada unidad de A a \$20 y cada unidad de B a \$16, encuentre los niveles de producción de A y B que maximizarían las utilidades de la empresa. ¿Cuál es la utilidad diaria máxima?</p>
Extramatemático	<p>Una empresa produce dos tipos diferentes de juguetes de plástico con un costo de \$10 y \$30 cada uno. Las demandas anuales <math>x_1</math> y <math>x_2</math> (en miles) están dadas por</p> $x_1 = 30 + 2p_2 - 5p_1 \quad \text{y} \quad x_2 = 100 + p_1 - 2p_2$ <p>con <math>p_1</math> y <math>p_2</math> los precios unitarios (en centavos) de los dos tipos de juguetes. Determine los precios <math>p_1</math> y <math>p_2</math> que la empresa debe fijar para maximizar sus utilidades.</p>
Extramatemático	<p>Usando <math>L</math> unidades de mano de obra y <math>K</math> unidades de capital, la producción semanal total de una empresa está dada por</p> $P(L, K) = 20K + 32L + 3LK - 2L^2 - 2.5K^2$ <p>Determine el número de unidades de mano de obra y de capital que la empresa debe utilizar para maximizar su producción.</p>

Tipo de problema	Problema
Extramatemático	<p>Una empresa utiliza dos tipos de materias primas, X y Y, en su producto. Usando <math>x</math> unidades de X e <math>y</math> unidades de Y, la empresa puede elaborar P unidades del producto, con:</p> $P = 0.52x + 0.48y - 0.12xy - 0.07x^2 - 0.06y^2$ <p>Si el costo de cada unidad de X es de \$5.10 y de \$1.80 por cada unidad utilizada de Y, y la empresa puede vender todas las unidades que produce a \$15 cada una. ¿Qué cantidades de X e Y debería utilizar la empresa con el propósito de maximizar sus utilidades?</p>
	<p>En el tratamiento de cierta enfermedad se usan simultáneamente dos medicamentos. La reacción R medida en unidades adecuadas para <math>x</math> unidades de la primera droga e <math>y</math> unidades de la segunda es:</p> $R = x^2y^2(a - 2x - y)$ <p>Encuentre los valores de <math>x</math> e <math>y</math> que hacen a R máxima.</p>

*Nota.* Tomado de las observaciones de clase y separata de ejercicios propuestos.

Entre los problemas de contexto económico (llamados optimización por el profesor), se observa que el profesor propone funciones que modelan utilidad (según cantidades, precios) y producción (capital y mano de obra). No profundiza en estos conceptos, pero asume que los alumnos los conocen. En algunos casos, la función objetivo que se busca optimizar no está explícitamente planteada como se puede observar en el segundo problema extramatemático de la tabla anterior. Además, la mayoría de estos problemas son del tipo maximización sin restricciones, pero no se encuentra variedad de problemas de minimización sin restricciones.

En esta sesión práctica, el profesor resuelve algunos problemas mediante el apoyo de una tableta gráfica y el uso del proyector. En las siguientes figuras, se muestran las resoluciones de algunos problemas tomados de los documentos "Anotaciones de clase".

La figura 42 muestra la resolución de un problema intramatemático donde se utilizan las dos condiciones necesarias para determinar máximos y mínimos, lo cual es coherente con el procedimiento propuesto por el profesor y con el significado de la derivada parcial para hallar máximos y mínimos. Para este ejercicio, se asume que el alumno conoce a la derivada parcial como expresión algebraica y las reglas de derivación para funciones de dos variables.

### Figura 42

Ejemplo de resolución de un problema intramatemático para determinar puntos críticos

**Problema 4**

Determine los puntos críticos de las siguientes funciones y pruebe si son máximo o mínimo local:

a)  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x + 4y + 7$

1º Derivadas

$f_x = 2x + 2$	$f_y = 2y + 4$	<u>2º P.E</u> $2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$ $2y + 4 = 0 \Rightarrow y = -2$ $(-1; -2)$	$ H  = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ $f_{xy} > 0$ $ H  > 0$ <u>MÍN EN <math>(-1, -2)</math></u>
$f_{xy} = 0$	$f_{yx} = 0$		
$f_{xx} = 2$	$f_{yy} = 2$		

Nota. Tomado de las anotaciones de clase del profesor.

La figura 43 muestra la resolución de un problema extramatemático donde se utilizan las dos condiciones necesarias para minimizar y maximiza. La función que modela el costo de producción será minimizada, mientras que la función que modela la utilidad será maximizada. El procedimiento utilizado es coherente con el propuesto del profesor.

### Figura 43

Ejemplo de resolución de un problema extramatemático para minimizar y maximizar

**Problema 5**

Una empresa produce dos tipos de productos, A y B. El costo diario total (en dólares) de producir  $x$  unidades de A y  $y$  unidades de B está dado por

$$C(x, y) = 250 - 4x - 7y + 0.2x^2 + 0.1y^2$$

a) Determine el número de unidades de A y B que la empresa debe producir al día con el propósito de minimizar el costo total.

b) Si la empresa del ejercicio anterior puede vender cada unidad de A a \$20 y cada unidad de B a \$16, encuentre los niveles de producción de A y B que maximizarían las utilidades de la empresa. ¿Cuál es la utilidad diaria máxima?

a) Deriv

$C_x = -4 + 0.4x$	<u>Costo</u> $x = 10$ $y = 35$ <u>Pt <math>(10; 35)</math></u>	<u>Hess</u> $\begin{vmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{vmatrix}$ $C_{xx} > 0$ $ H  > 0 \rightarrow$ <u>Mínimo en <math>(10; 35)</math></u>
$C_{xy} = 0$		
$C_{xx} = 0.4$		

b) Costo

$$U = 20x + 16y - C(x, y)$$

$U_x = 20 - (-4 + 0.4x) = 24 - 0.4x$	$U_y = 16 - (-7 + 0.2y)$ $U_y = 23 - 0.2y$ $y = 115$
$U_{xy} = 0$	
$U_{xx} = -0.4$	

$U_{yy} = -0.2$

$\begin{vmatrix} -0.4 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{vmatrix} \Rightarrow U_{xx} < 0$      $|H| = 0.08 > 0$   
U máx en  $(60; 115)$

Nota. Tomado de las anotaciones de clase del profesor.

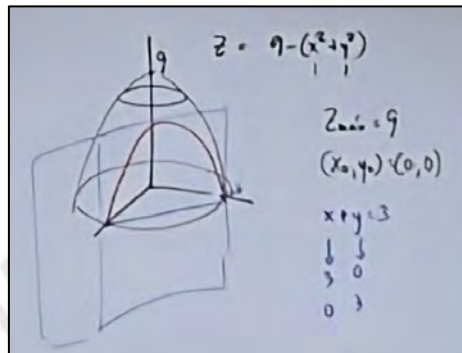
Durante la sesión práctica, de manera similar a las sesiones anteriores, el profesor da tiempo para que el estudiante intente resolver los problemas.

### 5.3.4. Cuarta sesión observada

El profesor trabaja el subtema de máximos y mínimos sujetos a restricciones de igualdad. Para ello, introduce el ejemplo de la gráfica de una función cortada por un plano, el cual representaría la restricción del problema como se observa en la figura 44.

**Figura 44**

*Ejemplo introductorio en pizarra para la resolución de máximos y mínimos de funciones reales de dos variables con restricciones trabajado en la sesión teórico-práctica*



*Nota.* Tomado de las observaciones de clase.

A continuación, el profesor presenta el procedimiento de optimización de funciones de dos variables sujetas a restricciones de igualdad como se observa en la figura 45 mediante el Teorema de Lagrange.

**Figura 45**

*Condición necesaria de primera orden del Teorema de Lagrange*

**Teorema de Lagrange (condiciones necesarias de primer orden)**

Consideremos el problema de optimización

$$\begin{cases} \text{maximizar / minimizar } f(x; y) \\ \text{sujeto a } g(x; y) = c \end{cases} \quad (\mathcal{P})$$

Si  $(x^*; y^*)$  es óptimo local de este problema y las derivadas parciales de  $g$  no se anulan simultáneamente en dicho punto, entonces existe un número real  $\lambda^*$  tal que  $(x^*; y^*; \lambda^*)$  es un punto crítico de la **función Lagrangeana**

$$\mathcal{L}(x; y; \lambda) := f(x; y) + \lambda(c - g(x; y))$$

*Nota.* Tomado de las diapositivas de clase.

En este modelo de optimización, el profesor trabaja la función lagrangiana como una función real de tres variables. Con esta nueva función, se vuelve a aplicar las condiciones presentadas en la optimización de funciones de dos variables sin restricciones. El profesor sintetiza que el método de Lagrange se resolverá convirtiendo una función de dos variables en una de tres variables donde la nueva variable es el multiplicador de Lagrange  $\lambda$ . En la figura 46 se muestra el sistema de ecuaciones que se obtendría al aplicar la condición

necesaria de primer orden. Asimismo, aplicando la condición de segundo orden, se obtiene la matriz Hessiana.

### Figura 46

Sistema de ecuaciones obtenido al aplicar la condición necesaria de primer orden a la función lagrangiana

El sistema (1) se expresa equivalentemente como:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(x; y; \lambda)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x; y; \lambda)}{\partial y} = 0 \\ g(x; y) = c \end{cases} \quad (2)$$

Aquí debemos volver a tener en cuenta que los puntos que satisfacen (1) o su equivalente (2) son solo candidatos a óptimos locales, es decir, no son necesariamente óptimos locales. ¿Cómo saber si un punto que satisface (1) es un máximo o mínimo local? Para esto se define la matriz Hessiana del Lagrangeano como:

Como establece el siguiente teorema la clasificación de los puntos críticos se basa en el signo del determinante de la matriz Hessiana

$$|H_{\mathcal{L}}| = |\nabla^2 \mathcal{L}| = \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{\lambda\lambda} & \mathcal{L}_{\lambda x} & \mathcal{L}_{\lambda y} \\ \mathcal{L}_{x\lambda} & \mathcal{L}_{xx} & \mathcal{L}_{xy} \\ \mathcal{L}_{y\lambda} & \mathcal{L}_{yx} & \mathcal{L}_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -g_x & -g_y \\ -g_x & \mathcal{L}_{xx} & \mathcal{L}_{xy} \\ -g_y & \mathcal{L}_{yx} & \mathcal{L}_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & \mathcal{L}_{xx} & \mathcal{L}_{xy} \\ g_y & \mathcal{L}_{yx} & \mathcal{L}_{yy} \end{vmatrix}$$

Nota. Tomado de las diapositivas de clase.

En la figura 47, el profesor presenta las condiciones suficientes para extremos local en los problemas de optimización con restricciones, las cuales determinarán los valores máximos y mínimos del problema.

### Figura 47

Condiciones suficientes para extremos locales de funciones sujetas a restricciones de igualdad

**Teorema (Condiciones suficientes para extremo local)**  
 Consideremos el problema de optimización  $(\mathcal{P})$  y sea  $(x^*; y^*; \lambda^*)$  un punto que satisface las condiciones (1), es decir, un punto crítico de la función Lagrangeana y sea

$$|H_{\mathcal{L}}(x^*; y^*; \lambda^*)| = |\nabla^2 \mathcal{L}(x^*; y^*; \lambda^*)| = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & \mathcal{L}_{xx} & \mathcal{L}_{xy} \\ g_y & \mathcal{L}_{yx} & \mathcal{L}_{yy} \end{vmatrix}$$

el determinante de la matriz Hessiana de  $\mathcal{L}$  en  $(x^*; y^*; \lambda^*)$ . Entonces:

- a)  $|H_{\mathcal{L}}(x^*; y^*; \lambda^*)| > 0 \Rightarrow (x^*; y^*)$  es un máximo local de  $f$
- b)  $|H_{\mathcal{L}}(x^*; y^*; \lambda^*)| < 0 \Rightarrow (x^*; y^*)$  es un mínimo local de  $f$

Nota. Tomado de las diapositivas de clase.

De esta manera, el procedimiento que utiliza el profesor para resolver problemas de máximos y mínimos con restricciones de igualdad se resume en los siguientes pasos:

- 1) Se construye la función Lagrangiana  $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)$ .
- 2) Se determinan las derivadas parciales de primer y segundo orden de la función lagrangiana  $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$  para cada una de sus tres variables.
- 3) Se determinan los puntos estacionarios (Teorema de la primera condición necesaria) igualando las derivadas parciales de primer orden con cero y se considera la restricción  $g(x, y) = c$  como una ecuación más para resolver y hallar los puntos estacionarios.
- 4) Se construye la matriz Hessiana y se expresa el determinante con las derivadas parciales de segundo orden.
- 5) Se evalúa cada punto estacionario en la determinante de la matriz Hessiana
- 6) Se evalúa cada punto estacionario obtenido en la matriz Hessiana y se determina si es punto máximo o punto mínimo de la función  $f$  (Teorema de la segunda condición necesaria).

En este procedimiento, comparado con el indicado en el significado de la derivada parcial para hallar máximos y mínimos para funciones de dos variables sujetas a restricciones de igualdad, se observa que el paso número 3 difiere con el propuesto en el capítulo anterior, pero da el mismo resultado. En el procedimiento propuesto por el profesor, se busca una función de tres variables  $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ , mientras que en el procedimiento propuesto por el significado de referencia, la función lagrangiana es de dos variables  $\mathcal{L}(x, y)$  donde  $\lambda$  es una constante. Asimismo, el profesor incluye el paso de la construcción de la matriz Hessiana del procedimiento de máximos y mínimos sin restricciones para la función lagrangiana de  $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ . De esta manera, el procedimiento planteado por el profesor es convertir un problema de máximos y mínimos de funciones de dos variables sujetas a restricción de igualdad en un problema de máximos y mínimo de funciones de tres variables sin restricciones.

En la figura 48, se muestra la resolución del profesor para el ejemplo optimización mostrado al inicio de la sesión: Optimizar  $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$  sujeto a  $x + y = 3$ .

**Figura 48**

*Resolución de un ejemplo de optimización con restricciones de igualdad*

$$f(x,y,\lambda) = 9 - (x^2 + y^2) - \lambda(x + y - 3)$$

$$\begin{cases} f_x = -2x - \lambda = 0 \\ f_y = -2y - \lambda = 0 \\ \lambda = (x + y - 3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} x + y = 3 \\ 2x = 3 \\ x = 3/2 = y \end{matrix} \rightarrow \lambda = 3$$

*Nota.* Tomado de las observaciones de clase

Se observa que la resolución es coherente con el procedimiento propuesto por el profesor. Se reconoce la restricción de igualdad  $x + y = 3$  y se plantea la función lagrangiana  $f(x, y, \lambda) = 9 - (x^2 + y^2) - \lambda(x + y - 3)$ . Posteriormente, se calculan las derivadas parciales

de primer y segundo orden para resolver el sistema de ecuaciones  $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$  y construir la

matriz Hessiana para evaluar. Se concluye que el ejemplo tiene un valor máximo en  $(\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$  con un valor  $\lambda = 3$ .

Posteriormente, el profesor presenta la interpretación del multiplicador de Lagrange cuando el valor de la restricción cambia. Esto se relacionaría con el concepto de precio sombra de la restricción, el cual a su vez está relacionado con el significado de la derivada parcial como tasa de variación. El profesor indica que el valor  $\lambda$  es una tasa de cambio instantáneo del valor óptimo de la función antes un pequeño cambio en el valor de la restricción  $c$ . Este cambio mostrado en la figura 49 es aproximado.

**Figura 49**

*Interpretación del multiplicador de Lagrange presentado en el proceso de instrucción*

Entonces,

$$\underbrace{f^*(c + \Delta c)}_{\text{nuevo valor óptimo}} \approx \underbrace{f^*(c)}_{\text{valor óptimo anterior}} + \lambda^* \Delta c \text{ cuando } \Delta c \approx 0$$

En particular, si un incremento unitario puede considerarse pequeño, entonces

$$\underbrace{f^*(c + 1)}_{\text{nuevo valor óptimo}} \approx \underbrace{f^*(c)}_{\text{valor óptimo anterior}} + \lambda^*$$

*Nota.* Tomado de las diapositivas de clase

Para ejemplificar esta situación, el profesor propone el siguiente caso, el cual se muestra en la figura 50.

**Figura 50**

*Ejemplo de optimización con restricciones de igualdad para explicar la interpretación del multiplicador de Lagrange.*

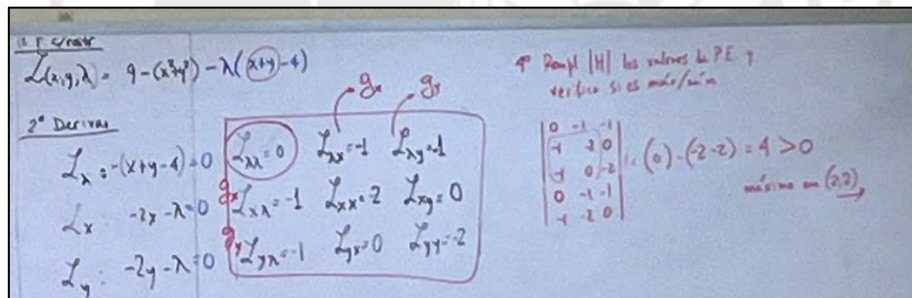
<b>Ejemplo</b>	
Resuelva el problema	
<b>maximizar</b>	$f(x; y) = 9 - x^2 - y^2$
<b>sujeto a</b>	$x + y = 4$
<b>solución</b>	

*Nota.* Tomado de las diapositivas de clase

Este ejemplo es resuelto en pizarra y se observa que el procedimiento utilizado es coherente con el propuesto por el profesor. El profesor pide resolver el problema, da un tiempo a los alumnos y pide determinar también el valor  $\lambda$ . En la figura 51 se muestra la resolución del problema en pizarra donde la solución de la optimización resulta un máximo para (2,2),  $f(2,2) = 1$  con un valor  $\lambda = -4$ . Para ello, el profesor comienza creando

**Figura 51**

*Resolución de un ejemplo de optimización con restricciones de igualdad para explicar la interpretación del multiplicador de Lagrange.*



*Nota.* Tomado de las observaciones de clase

En la figura 52, se muestra la resolución del problema tomando en cuenta el cambio del valor de la restricción en  $\Delta c = 0.01$ . Con ello, tomando en cuenta el valor óptimo de la función anterior, el nuevo valor óptimo resulta 0.96. Para resolver este problema, el profesor usa la expresión  $f^*(c + \Delta c) \approx f^*(c) + (\lambda)(\Delta c)$

## Figura 52

Resolución de un ejemplo de optimización con restricciones de igualdad e interpretación del multiplicador de Lagrange.

**Ejemplo (significado del multiplicador)**  
Aproxime el nuevo valor óptimo si el lado derecho de la restricción del problema anterior es 4,01

**Solución**  
Debido al incremento en el lado derecho el nuevo problema de optimización sería

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } f(x; y) = 9 - x^2 - y^2 \\ &\text{sujeto a } x + y = 4,01 \end{aligned}$$

Pero si solo queremos aproximar el nuevo valor óptimo debido al incremento de 0,01 en el lado derecho del problema original, podemos proceder, teniendo en cuenta que  $\lambda^* = -4$ , de la siguiente manera

$$\underbrace{f^*(4,01)}_{\text{nuevo valor óptimo}} \approx \underbrace{f^*(4)}_{\text{valor óptimo anterior}} + (-4)(0,01)$$

Pero  $f^*(4) = f(2;2) = 1$ . Entonces,

$$\underbrace{f^*(4,01)}_{\text{nuevo valor óptimo}} \approx \underbrace{f^*(4)}_{\text{valor óptimo anterior}} + (-4)(0,01) = 1 - 0,04 = 0,96$$

El nuevo valor óptimo será aproximadamente igual a 0,96

Nota. Tomado de las diapositivas de clase.

### 5.3.5. Quinta sesión observada

En las diapositivas de la parte teórica de la cuarta sesión, el profesor propone problemas intra-matemáticos para ejemplificar este método e interpretación del multiplicador de Lagrange, los cuales se muestran en la tabla 33. Sin embargo, debido al tiempo limitado de la cuarta sesión, estos problemas se trabajan en la quinta sesión.

**Tabla 33**

*Problemas intra-matemáticos de máximos y mínimos de funciones reales de dos variables con restricciones trabajados en la sesión teórico-práctica*

Problema	Descripción
Resuelva el problema: Maximizar $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ sujeto a $x + y = 4$	En este problema se obtiene un máximo para $(2, 2)$ .
Aproxime el nuevo valor óptimo si el lado derecho de la restricción del problema anterior es 4.01.	En este problema se aproxima el incremento de la función mediante la interpretación del multiplicador de Lagrange. Se obtiene valor óptimo igual a 0.96.
Resuelva el problema de minimización siguiente: $\min f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeta a $x + 2y = a$ ( $a$ es constante)	En este problema se obtiene un mínimo para $\left(\frac{a}{5}, \frac{2a}{5}\right)$ .

*Nota.* Tomado de las observaciones y diapositivas de clase.

A modo de ejemplo, la resolución del tercer ejemplo de la tabla anterior, el profesor sigue el procedimiento utilizado por el profesor para resolver cálculos de máximos y mínimos de funciones de dos variables sujetas a restricciones de igualdad. Con ello, se obtiene un mínimo para  $\left(\frac{a}{5}, \frac{2a}{5}\right)$ .

Adicionalmente a estos problemas, el profesor resuelve una lista adicional de ejercicios propuestos en otra diapositiva, cuyos problemas se muestran en la tabla 34. Hay problemas de optimización con o sin restricciones de igualdad con el método de multiplicadores de Lagrange, tanto intra como extramatemáticos, los cuales están relacionados a situaciones aplicadas a la economía. Estos problemas, mostrados en las diapositivas de clase no están resueltos, por lo que el profesor utilizó la tableta gráfica para resolverlos y proyectarlos.

**Tabla 34**

*Problemas de máximos y mínimos de funciones reales de dos variables con o sin restricciones trabajados en la sesión práctica*

Problema	Descripción
<p>Dado el problema de optimización:  <b>Maximizar</b> <math>f(x, y) = \ln(x + 1) + \ln(2y + 1)</math>  <b>sujeito a</b> <math>\frac{1}{2}x + y = c</math>                      Siendo <math>c &gt; 0</math> un parámetro positivo. Resuelva este problema empleando la técnica de los multiplicadores de Lagrange.</p>	<p>La solución de este problema es <math>(c, \frac{c}{2})</math>.</p>
<p>Dado el problema de optimización:  <b>Maximizar</b> <math>f(x, y) = xy</math>  <b>sujeito a</b> <math>2x^2 + y^2 = 4</math>                      Resuelva el problema aplicando la técnica de los multiplicadores de Lagrange.</p>	<p>En este problema se obtienen dos soluciones: <math>(1, \sqrt{2})</math> y <math>(-1, -\sqrt{2})</math>.</p>
<p>Supermercados Mikro vende arroz y lentejas, en bolsas de 1 kg. Cada bolsa de arroz le cuesta al supermercado 3 soles, mientras que cada bolsa de lentejas le cuesta 4 soles. La gerencia del supermercado estima que si vende la bolsa de arroz a <math>x</math> soles y la bolsa de lentejas a <math>y</math> soles, al día se venderán aproximadamente <math>7 - 5x + 4y</math> bolsas de arroz y <math>8 + 6x - 7y</math> bolsas de lentejas. Determine los precios (en soles) a los que Supermercados Mikro debe vender el arroz y las lentejas para maximizar su ganancia diaria.  <b>Observación:</b> suponga que supermercados Mikro vende todo lo que compra.</p>	<p>En este problema, la modelación de la función ganancia no está sujeta a una restricción de igualdad, por lo que corresponde a la optimización sin restricciones. Los resultados son <math>x = 5.4</math> soles, <math>y = 5.5</math> soles.</p>
<p>La función de utilidad del consumo de dos productos A y B está dada por <math>U(x, y) = x^2y</math> donde <math>x</math> e <math>y</math> son las cantidades de los productos A y B adquiridos. El precio de una unidad de A es S/ 2000 y el de una unidad de B es S/ 3000. Determine las cantidades de cada presupuesto que deberá adquirir el consumidor a fin de maximizar su utilidad si su presupuesto de compra es de S/ 30 000.</p>	<p>En este problema, la modelación de la función utilidad está sujeta a una restricción de igualdad (presupuesto), por lo que corresponde a la optimización con restricciones. Los resultados son <math>x = 10</math> soles, <math>y = \frac{10}{3}</math>.</p>
<p>Sea la función utilidad <math>U: V \rightarrow \mathbb{R}</math> donde <math>V = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}: x_1 &gt; 0, x_2 &gt; 0\}</math>  <math>U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b</math>, donde <math>0 &lt; a &lt; 1, 0 &lt; b &lt; 1</math>                      siendo <math>x_1</math> y <math>x_2</math> las cantidades consumidas de dos bienes cuyos precios son <math>p_1</math> y <math>p_2</math> respectivamente. Suponiendo que el consumidor dispone de una renta <math>M</math>, calcule las cantidades que se demandarán de cada bien en términos de renta <math>M</math> y precios con el objetivo de maximizar la utilidad.</p>	<p>En este problema, la modelación de la función utilidad está sujeta a una restricción de igualdad (renta <math>M</math>), por lo que corresponde a la optimización con restricciones. Los resultados son</p> $x_1 = \frac{Ma}{p_1(a + b)}, \quad y = \frac{Mb}{p_2(a + b)}$

**Problema**

**Descripción**

Una empresa de cómputo tiene un presupuesto mensual para publicidad de 60 000 dólares. Su departamento de marketing estima que, si se gastan  $x$  miles de dólares cada mes en publicidad en periódicos, e  $y$  miles de dólares cada mes en publicidad por televisión, entonces las ventas mensuales estarán dadas por

$$V(x, y) = 90x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}} \text{ (dólares)}$$

Además, la utilidad es el 10% de las ventas, menos el costo de la publicidad.

- a) Determine cómo se debe asignar el presupuesto publicitario con el objetivo de maximizar la utilidad mensual y cuánto sería tal utilidad máxima.
- b) Determine, aproximadamente, la utilidad máxima obtenida si el presupuesto publicitario es de 61 000 dólares.

En este problema, la modelación de la función utilidad está sujeta a una restricción de igualdad (presupuesto), por lo que corresponde a la optimización con restricciones.

- a) Los resultados son  $x = 15$ ,  $y = 45$ . La utilidad máxima es 216.17 mil dólares aprox.
- b) Se obtuvo  $\lambda = 3.59$ . Se aproxima la utilidad 219.76 mil dólares aprox.

*Nota.* Tomado de las observaciones de clase y diapositivas de clase.

En la figura 53, se muestra la resolución del primer ejemplo de esta tabla. Esta resolución es coherente con el procedimiento propuesto por el profesor: construir la función

lagrangiana  $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ , determinar los puntos estacionarios a partir del sistema 
$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = 0 \\ \mathcal{L}_y = 0 \\ \frac{1}{2}x + y = c \end{cases},$$

construir la matriz Hessiana de  $\mathcal{L}$  y hallar su determinante para encontrar el máximo o mínimo.

**Figura 53**

*Resolución de un ejemplo de optimización con restricciones de igualdad para una función con parámetro  $a$*

Handwritten notes showing the optimization process:

- FOC:  $\mathcal{L}_x = \frac{1}{x+1} - \frac{\lambda}{2} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{x+1}$
- FOC:  $\mathcal{L}_y = \frac{2}{2y+1} - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{2y+1}$
- Equating  $\lambda$ :  $\frac{2}{x+1} = \frac{2}{2y+1} \Rightarrow x+1 = 2y+1 \Rightarrow x = 2y$
- Constraint:  $\frac{1}{2}x + y = c \Rightarrow \frac{1}{2}(2y) + y = c \Rightarrow y = c$
- Result:  $(x, y) = (2c, c)$
- Hessian matrix: 
$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_{xx} & \mathcal{L}_{xy} & \mathcal{L}_{x\lambda} \\ \mathcal{L}_{yx} & \mathcal{L}_{yy} & \mathcal{L}_{y\lambda} \\ \mathcal{L}_{\lambda x} & \mathcal{L}_{\lambda y} & \mathcal{L}_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(x+1)^2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{(2y+1)^2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
- Determinant:  $\Delta = -\left(-\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{4}{(2y+1)^2}\right) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{4}{(2y+1)^2} > 0$  (máximo)
- Final result:  $(c; \frac{1}{2})$

*Nota.* Tomado de las anotaciones del profesor

### 5.3.6. Sexta sesión observada

En la separata adicional de ejercicios, los cuales se muestran en la tabla 35, que se resuelve en la sesión práctica, se observan problemas tanto intramatemáticos como extramatemáticos. En estos últimos, se observan problemas donde se pide plantear la función objetivo o las restricciones. Además, en este tipo de problemas, se observa también casos donde se pide minimizar o maximizar, sean utilidades o producciones.

**Tabla 35**

*Problemas intramatemáticos y extramatemáticos de máximos y mínimos de funciones reales de dos variables con restricciones trabajados en la sesión práctica*

Tipo de problema	Problema
Intramatemático	<p>Mediante el método de multiplicadores de Lagrange, determine los puntos críticos de las funciones sujetos a las restricciones dadas:</p> <p>a) <math>f(x, y) = x^2 + y^2</math> restricción: <math>2x + 3y = 7</math></p> <p>b) <math>f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy</math> restricción: <math>2x + 3y = 31</math></p> <p>c) <math>f(x, y) = 3x + 2y</math> restricción: <math>x^2 + y^2 = 13</math></p> <p>d) <math>f(x, y) = 2x^2 + 3y^2</math> restricción: <math>xy = \sqrt{6}</math></p>
	<p>Mediante el método de multiplicadores de Lagrange, determine los puntos críticos de las funciones sujetos a las restricciones dadas:</p> <p>a) <math>f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2</math> restricción: <math>2x + 3y + 4z = 29</math></p> <p>b) <math>f(x, y, z) = xyz</math> restricciones: <math>xy + yz + 2zx = 24</math> ; <math>xyz \neq 0</math></p>
Extramatemático	<p>Una empresa desea construir un tanque rectangular con capacidad de 1500 pies cúbicos de agua. La base y las paredes verticales deberán ser de concreto y la tapa de acero. Si el costo del acero es el doble por unidad de área que el del concreto, determine las dimensiones del tanque que minimizan el costo total de construcción.</p> <hr/> <p>Al emplear <math>L</math> unidades de mano de obra y <math>K</math> unidades de capital, una empresa puede elaborar <math>P</math> unidades de su producto, con:</p> $P(L, K) = 50L^{2/3}K^{1/3}$ <p>Se sabe que a la empresa le cuesta \$100 por cada unidad de mano de obra y \$300 por cada unidad de capital empleado. Además, la empresa dispone de una suma de \$45,000 para propósitos de producción.</p> <p>Determine las unidades de mano de obra y de capital que la empresa debería utilizar con el objetivo de maximizar su producción.</p>

Tipo de problema	Problema
	<p>Una compañía puede destinar su planta a la elaboración de dos tipos de productos: A y B. Obtiene una utilidad de \$4 por unidad de A y de \$6 por unidad de B. Los números de unidades de los dos tipos que puede producir mediante la planta están restringidos por la ecuación de transformación del producto, que es:</p> $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$ <p>con <math>x</math> e <math>y</math> los números de unidades (en miles) de A y B, respectivamente, producidas por semana. Determine las cantidades de cada tipo que deben producirse a fin de maximizar la utilidad.</p>
Extramatemático	<p>El costo de producir <math>x</math> modelos regulares e <math>y</math> modelos de lujo del producto de una empresa está dado por la función conjunta de costo:</p> $C(x, y) = x^2 + 1.5y^2 + 300$ <p>¿Cuántas unidades de cada tipo deben producirse para minimizar los costos totales, si la empresa decide producir un total de 200 unidades?</p>
	<p>La función de producción de una empresa es:</p> $P(L, K) = 72L + 30K + 5LK - 2L^2 - 3K^2$ <p>en donde <math>L</math> y <math>K</math> representan el número de unidades de mano de obra y de capital utilizadas, y <math>P</math> es el número de unidades elaboradas del producto. Cada unidad de mano de obra tiene un costo de \$80 y cada unidad de capital cuesta \$150, y la empresa dispone de \$5,640 destinados a producción.</p> <p>Determine las unidades de mano de obra y de capital que la empresa debería utilizar con el objetivo de maximizar su producción.</p>

*Nota.* Tomado de las observaciones de clase y separata de ejercicios propuestos

A continuación, se muestra el desarrollo trabajado por el profesor para dos tipos de problemas: intramatemático y extramatemático.

En la figura 54 se muestra la resolución de uno de los problemas intramatemáticos de esta separata de ejercicios, el cual únicamente consiste en determinar los puntos críticos de la función propuesta. Este ejercicio se da con la finalidad de que el alumno pueda practicar la resolución de sistemas de ecuaciones y el cálculo de las derivadas parciales de primer orden. Para el ejemplo 1d, se obtuvieron como puntos críticos a  $(\sqrt{3}, \sqrt{2})$  y  $(-\sqrt{3}, -\sqrt{2})$ .

**Figura 54**

Resolución de un ejemplo de optimización con restricciones de igualdad para determinar puntos críticos

$$1) d) \mathcal{L}(x,y,\lambda) = 2x^2 + 3y^2 - \lambda(xy - \sqrt{6})$$

$$\mathcal{L}'_x = -(xy - \sqrt{6}) = 0$$

$$\mathcal{L}'_x = 4x - \lambda y = 0 \rightarrow \frac{4x}{y} = \lambda$$

$$\mathcal{L}'_y = 6y - \lambda x = 0 \rightarrow \frac{6y}{x} = \lambda$$

$$\frac{4x}{y} = \frac{6y}{x} \rightarrow 4x^2 = 6y^2$$

$$2x = \sqrt{6}y$$

$$x \cdot y = \sqrt{6}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{2} \cdot y = \sqrt{6} \Rightarrow y^2 = 2$$

$$y = \sqrt{2} \rightarrow x = \sqrt{3}$$

$$y = -\sqrt{2} \rightarrow x = -\sqrt{3}$$

$$P_c (\sqrt{3}, \sqrt{2}) \text{ ó } (-\sqrt{3}, -\sqrt{2})$$

Nota. Tomado de las anotaciones del profesor.

La figura 55 muestra la resolución del problema 5 de esta separata de ejercicios, el cual es un problema en contexto extramatemático donde se pide determinar los valores que maximizan la utilidad. Explícitamente la función de utilidad no está dada en el problema, pero se dan los datos suficientes para plantearla. De esta manera, se obtienen los valores  $x = \frac{6}{\sqrt{13}} - 1, y = \frac{9}{\sqrt{13}} - 2$  que maximizan la función con un valor  $\lambda = \frac{\sqrt{13}}{3}$ . Con ello, se observa que el profesor resuelve el problema de manera coherente según el procedimiento propuesto en clase.

**Figura 55**

Resolución de un ejemplo de optimización con restricciones de igualdad aplicado a la economía

$$\text{Utilidad} = \text{Util}(A) + \text{Util}(B)$$

$$4x + 6y$$

$$U(x,y) = \underbrace{4x + 6y}_{\text{Maximizar}} - \lambda \underbrace{(x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4)}_{\text{Restricción}}$$

$$U_x = -(x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4) = 0$$

$$U_x = 4 - 2x\lambda - 2\lambda = 0 \rightarrow 4 = 2\lambda(x+1)$$

$$\frac{2}{\lambda} = x+1$$

$$\Rightarrow U_y = 6 - 2y\lambda - 4\lambda = 0$$

$$6 = 2\lambda(y+2)$$

$$\frac{3}{\lambda} = y+2$$

$$(x^2 + 2x+1) + (y^2 + 4y+4) - 4 = 4$$

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 4$$

$$\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{3}{\lambda}\right)^2 = 4$$

$$\frac{13}{\lambda^2} = 4 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{13}{4}$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{2}{\lambda} & -\frac{4}{\lambda} \\ -\frac{2}{\lambda} & 0 & -2 \\ -\frac{4}{\lambda} & -2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{104}{\lambda} \rightarrow \lambda > 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\rightarrow x = \frac{6}{\sqrt{13}} - 1 \wedge y = \frac{9}{\sqrt{13}} - 2$$

Nota. Tomado de las anotaciones del profesor.

#### 5.4. Evaluación del tema y resultados

Los temas relacionados con lo observados en las seis sesiones se evalúan en la Evaluación Continua 3. El profesor elabora dos versiones, A y B, las cuales se diferencian en una pregunta con el resto de las preguntas ordenadas de forma aleatoria. Ambas versiones evalúan el mismo tipo de problemas. Asimismo, el profesor elabora un solucionario que cuenta con criterios de evaluación de cada pregunta. En la tabla 36 se muestra el contenido evaluado por cada tipo de pregunta/tema de las dos versiones de la evaluación.

**Tabla 36**

*Problemas evaluados en Evaluación Continua 3*

Problema	Enunciado en ambas versiones	Versión
1	Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función homogénea de grado $\frac{1}{2}$ , tal que $f(3,6) = 6$ . Calcule: a) $f\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ b) $\frac{3}{2} \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{3}{2}; 3\right) + 3 \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{3}{2}; 3\right)$	A y B
2	Encuentre los extremos locales de la función $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x - 2y$	A y B
3	Optimizar $(x - 1)^2 + 2y^2$ sujeta a $2x + y = 20$ . Indique si se trata de máximo o mínimo.	A
	Optimizar $(x - 1)^2 + y^2$ sujeta a $x + y = 9$ . Indique si se trata de máximo o mínimo.	B
4	Usando $L$ unidades de mano de obra y $K$ unidades de capital, una empresa puede elaborar $P$ unidades de su producto, en donde: $P(K, L) = 60L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}}$	A y B
	Suponga que la empresa decide elaborar 2160 unidades de su producto y que los costos de mano de obra y de capital son de \$64 y \$108 por unidad, respectivamente. a) Por medio del método de multiplicadores de Lagrange halle el número de insumos de mano de obra y de capi tal que deben emplearse con el objetivo de minimizar el costo total. b) Demuestre que, en este nivel de producción, la razón de costos marginales de mano de obra y de capital es igual a la razón de sus costos unitarios.	
5	Una empresa puede elaborar su producto en dos de sus plantas. El costo de producir $x$ unidades en su primera planta y de producir $y$ unidades en la segunda planta está dado por la función conjunta de costo $C(x; y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ . Si la empresa tiene un orden de suministrar 500 unidades, ¿cuántas unidades de be producir en cada planta con el objetivo de minimizar el costo total?	A y B

*Nota.* Tomado de la evaluación implementada después de las clases.

Se observa que la pregunta 1 corresponde al tema de funciones homogéneas, el cual se desarrolló durante la primera sesión observada después del examen parcial. Este tema permite que el alumno practique y se familiarice con el lenguaje utilizado para el cálculo de derivadas parciales mediante la notación  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  de la derivada parcial de primer orden, el cual es útil para resolver problemas de optimización.

Las preguntas 2 y 3 corresponden a problemas intra-matemáticos donde la derivada se utiliza para calcular máximos y mínimos sin restricciones y con restricciones, respectivamente. En cada caso se sigue el procedimiento descrito y desarrollado por el profesor en la sección anterior: condiciones necesarias de primer y segundo orden, y el método del multiplicador de Lagrange. Cada paso del procedimiento de cada caso de máximos y mínimos es considerado en los criterios de calificación.

Las preguntas 4 y 5 corresponden a problemas de optimización extra-matemáticos que modelizan situaciones económicas de producción y costo total. En el problema 4, la función a optimizar no se encuentra planteada explícitamente en el enunciado, pero se da información para plantear el costo total  $C(L, K) = 64L + 108K$  sujeta a la restricción de producción  $60L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}} = 2160$ . En el problema 5, la función a optimizar está planteada explícitamente como costo total  $C(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ , pero la restricción a la cual está sujeta se debe plantear como  $x + y = 500$ . Ambos problemas corresponden a problemas de optimización con restricciones, para lo cual el estudiante debe utilizar el método de multiplicadores de Lagrange.

No se observa al menos un problema de optimización que modelice un contexto económico que no esté sujeto a restricciones. Además, no se observa que se evalúe la interpretación del multiplicador de Lagrange como precio sombra, es decir, donde la derivada parcial se interprete como tasa de variación. No se observan problemas de optimización con representación geométrica donde se use la interpretación del plano tangente en los valores máximos y mínimos.

En cuanto a los resultados de la evaluación, se describe un resumen de las resoluciones de cada uno de los 36 alumnos.

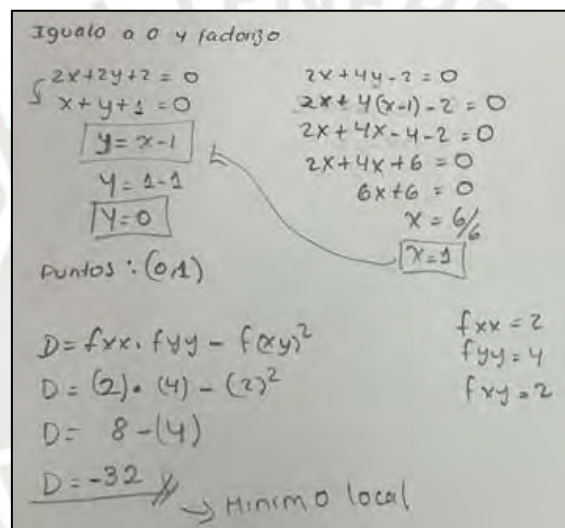
En la pregunta 1, si bien no guarda relación directa con el tema de optimización de funciones de dos variables, se observa que al menos 20 alumnos no responden esta pregunta. Esta pregunta permite que el alumno utilice y se familiarice con la notación de la derivada parcial, el cual es un lenguaje simbólico necesario para la derivada parcial para los problemas de optimización.

En la pregunta 2, al menos 15 alumnos respondieron correctamente. La gran mayoría de alumnos determinó correctamente las derivadas de primer y segundo orden, pero el error más frecuente se da al resolver el sistema de ecuaciones que se construye al igualar las

primeras derivadas parciales con cero  $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$ . Se observa que el procedimiento seguido por los estudiantes es el correcto según lo descrito en lo implementado por el profesor durante las clases, pero el error de cálculo frecuente hace que los alumnos arrastren errores hasta concluir respuestas incorrectas. Pese a ello, los alumnos demuestran conocer los procedimientos adecuados para hallar máximos y mínimos de funciones de dos variables sin restricciones. En la figura 56 se muestra un ejemplo del típico error donde los estudiantes tienen dificultades para resolver el sistema de ecuaciones indicado como errores de despeje, reemplazo u operaciones en las ecuaciones.

**Figura 56**

*Error más frecuente al resolver el sistema de ecuaciones en un problema intra-matemático de máximos y mínimos de una función que no está sujeta a restricciones*



*Nota.* Tomado de la recolección de respuestas de la evaluación continua 3.

En la pregunta 3, se observa que al menos 13 estudiantes respondieron correctamente el cálculo de máximos y mínimos sujeto a una restricción de igualdad. La mayoría de los estudiantes plantea adecuadamente la función lagrangiana, pero los errores más frecuentes

se encuentran en la resolución del sistema de ecuaciones  $\begin{cases} \mathcal{L}_x = 0 \\ \mathcal{L}_y = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ . Pese a ello, se

observa que los estudiantes comprenden el procedimiento el método de los multiplicadores de Lagrange, pero presentan errores de cálculo en las derivadas parciales y, por lo tanto, la resolución del sistema de ecuaciones, como se muestra en la figura 57.

### Figura 57

Error más frecuente al plantear la función lagrangiana en un problema intra-matemático de máximos y mínimos de funciones de dos variables sujeta a restricción de igualdad

$L_\lambda = -(x+y-4)$   
 $L_x = 2x - 2 - \lambda$   
 $L_y = 2y - \lambda$   
 $2x - 2 = \lambda$   
 $x - 1 = \lambda$   
 $x = \lambda + 1$   
 $2(\lambda + 1) - 2 - \lambda = 0$   
 $2\lambda + 2 - 2 - \lambda = 0$   
 $2\lambda - \lambda = 0$   
 $\lambda = 0$   
 $x = 1$   
 $2y - \lambda = 0$   
 $2y = \lambda$   
 $y = \frac{\lambda}{2}$   
 $y = \frac{0}{2}$   
 $y = 0$

Nota. Tomado de la recolección de respuestas de la evaluación continua 3.

En la pregunta 4, se observa que al menos 12 estudiantes respondieron correctamente el problema de optimización de la función  $C(L, K) = 64L + 108K$  sujeta a la restricción de producción  $60L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}} = 2160$ . Se observa un mayor intento para responder por el resto de los alumnos; sin embargo, entre los errores más frecuentes encontrados es el planteamiento de la función lagrangiana  $\mathcal{L}(L, K) = 64L + 108K - \lambda(60L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}} - 2160)$  donde se observa que algunos estudiantes confunden la función objetivo con la restricción como se muestra en la figura 58. Asimismo, se observa que hay errores en la determinación de las derivadas parciales  $\mathcal{L}_L$  y  $\mathcal{L}_K$  al aplicar las reglas de derivación adecuadas en el término  $60L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}}$ . Esto arrastra error en varios de los procedimientos observados para plantear y resolver el sistema

de ecuaciones  $\begin{cases} \mathcal{L}_L = 0 \\ \mathcal{L}_K = 0 \\ P(K, L) = 0 \end{cases}$ . Debido a que algunas expresiones de la derivada parcial están

mal calculadas, la matriz Hessiana, según el método implementado por el profesor, presenta errores en las derivadas de segundo orden.

### Figura 58

Error más frecuente al plantear la función lagrangiana en un problema extra-matemático de optimización de funciones de dos variables

$2160 = 64L + 108K$   
 $\mathcal{L}(L, K, \lambda) = 60L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}} + \lambda(2160 - 64L - 108K)$   
 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = \frac{40}{3}L^{-\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{3}} - 64\lambda = 0$   
 $= 40L^{-\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{3}} - 64\lambda = 0$   
 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = \frac{20}{3}L^{\frac{2}{3}}K^{-\frac{2}{3}} - 108\lambda = 0$   
 $= \frac{20L^{\frac{2}{3}}}{K^{\frac{2}{3}}} = 108\lambda$   
 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 2160 - 64L - 108K = 0$   
 $\frac{40}{3}L^{-\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{3}} = 64\lambda$   
 $\frac{5K^{\frac{1}{3}}}{L^{\frac{1}{3}}} = 8\lambda$   
 $\lambda = \frac{5 \cdot K^{\frac{1}{3}}}{8 \cdot L^{\frac{1}{3}}}$   
 $\frac{20L^{\frac{2}{3}}}{K^{\frac{2}{3}}} = 108 \cdot \frac{5 \cdot K^{\frac{1}{3}}}{8 \cdot L^{\frac{1}{3}}}$   
 $\frac{5 \cdot L^{\frac{2}{3}}}{24 \cdot K^{\frac{2}{3}}} = \lambda$   
 $\frac{5 \cdot K^{\frac{1}{3}}}{8 \cdot L^{\frac{1}{3}}} = \frac{5 \cdot L^{\frac{2}{3}}}{24 \cdot K^{\frac{2}{3}}}$   
 $24K = 8L$   
 $K = \frac{8L}{24}$   
 $K = \frac{8 \cdot 45}{24 \cdot 2}$   
 $K = \frac{20}{3}$

Nota. Tomado de la recolección de respuestas de la evaluación continua 3.

En la pregunta 5, se observa que la tasa de respuesta es mejor que la de la pregunta 4: al menos 22 estudiantes responden correctamente determinando los valores  $x = 125$  e  $y = 375$  que minimizan la función. Esto se puede dar debido a que la función lagrangiana que se debe plantear  $\mathcal{L}(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700 - \lambda(x + y - 500)$  tiene términos que conforman una expresión polinómica en comparación con la función lagrangiana del problema anterior. En cuanto al procedimiento empleado por la mayoría de los alumnos, se siguen correctamente los pasos implementados por el profesor en cuanto al método de los multiplicadores de Lagrange. En cuanto a los errores frecuentes, en menor cantidad que el problema anterior, se observa que algunos alumnos plantean incorrectamente la función lagrangiana y se determinan incorrectamente las expresiones de derivada parcial para determinar la matriz Hessiana. La figura 59 muestra la resolución de un alumno para un problema de optimización con restricciones aplicada a la economía, el cual está correctamente resuelto.

### Figura 59

Resolución de un alumno de un problema extra-matemático de optimización de funciones de dos variables sujetas a una restricción de igualdad

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700 - \lambda(x + y - 500)$$

$$-x\lambda - y\lambda + 500\lambda$$

$$\mathcal{L}_x = 2x + 5y - \lambda = 0$$

$$\mathcal{L}_y = 2y + 5x - \lambda = 0$$

$$\mathcal{L}_\lambda = -x - y + 500 = 0$$

$$2x + 5(500 - x) - \lambda = 0$$

$$2x + 2500 - 5x - \lambda = 0$$

$$-3x - \lambda = -2500$$

$$3x + \lambda = 2500$$

$$2y + 5(500 - y) + 3x = \lambda$$

$$2y + 2500 - 5y + 3x = \lambda$$

$$-3y + 3x = \lambda - 2500$$

$$-y + x = \frac{\lambda - 2500}{3}$$

$$x + y = 500$$

$$y = 500 - x$$

$$x = 500 - y$$

igualamos  $\lambda$

$$2x - 2500 - 5x = 2000 - 4x + 5x$$

$$2x - 5x + 4x - 5x = 2000 + 2500$$

$$-4x = 4500$$

$$x = 125$$

$$y = 500 - x$$

$$y = 500 - 125$$

$$y = 375$$

$$H = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 5 & 2 & 5 \\ -1 & 5 & 4 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 10 - 6 = 4 > 0$$

∴ los unidades que debe producir en cada planta es en la primera 125, y la segunda 375.

Nota. Tomado de la recolección de respuestas de la evaluación continua 3.

### 5.5. Información complementaria al proceso de instrucción

Por un lado, en cuanto al espacio físico del salón y los recursos físicos con que está equipado, la figura 60 muestra una fotografía del salón principal de clases donde se evidencia que el salón no es tan amplio. Se cuenta con un proyector y pizarra acrílica, pero el proyector no funciona bien debido a los colores de tonalidad amarilla proyectados. Además, la imagen proyectada se encuentra a un lado de la pizarra. Aun así, el profesor prefiere utilizar la tableta gráfica para dictar y proyectar sus resoluciones. Además, en la observación de clase, se escucha que el salón se encuentra muy próximo a la calle, por lo que a veces existen distracciones de los ruidos de autos pasando al lado.

**Figura 60**

*Disposición del salón de clases para el dictado de clases teórico-prácticas*

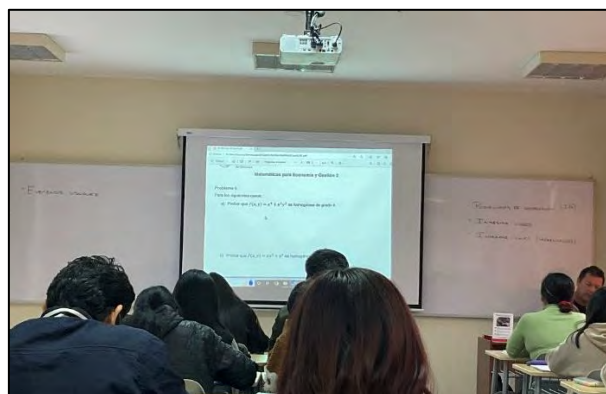


*Nota.* Tomado de las observaciones de clase.

En la figura 61 se muestra el salón de clases de las sesiones prácticas donde el proyector se encuentra centrado. De igual manera, el salón no es del todo amplio para la cantidad de alumnos matriculados (36). Además, el salón se encuentra ubicado a un lado de la calle, por lo que el ruido de los automóviles puede ser un obstáculo para el dictado de las clases, el cual también se escucha durante las grabaciones.

**Figura 61**

*Disposición del salón de clases para el dictado de clases prácticas*



*Nota.* Tomado de las observaciones de clase.

En cuanto al horario y los alumnos, el profesor cuenta con 36 alumnos matriculados de las carreras de Administración y Economía, y se dicta en tres sesiones semanales. Las dos primeras sesiones son teórico-prácticas y se dictan en los siguientes horarios:

- Los lunes de 7:00 a 8:40 am, el cual es un horario de dictado muy temprano para los alumnos. Previo a la grabación de la clase, se observa que no hubo gran cantidad de alumnos a las 7:00 am cuando el salón se abrió. El salón para esta sesión teórico-práctica es el C101.
- Los martes de 8:50 a 10:30 am, el cual es un horario de dictado adecuado para la asistencia en comparación con el lunes. Se observa que la gran mayoría de los alumnos se encontraba esperando mientras el profesor llegaba a clases. El salón para esta sesión teórico-práctica es el C101.
- La tercera sesión es completamente práctica y se dicta los jueves de 8:50 a 10:30 am. Este salón es el C102 y se ubica en un piso por encima del salón utilizado en las otras dos sesiones. De igual manera que en la segunda sesión, el horario es adecuado para la asistencia en comparación con el lunes, puesto que se observó que la gran mayoría de los alumnos se encontraba esperando fuera del salón mientras el profesor llegaba debido a que se estaba terminando otra clase previa a este horario.

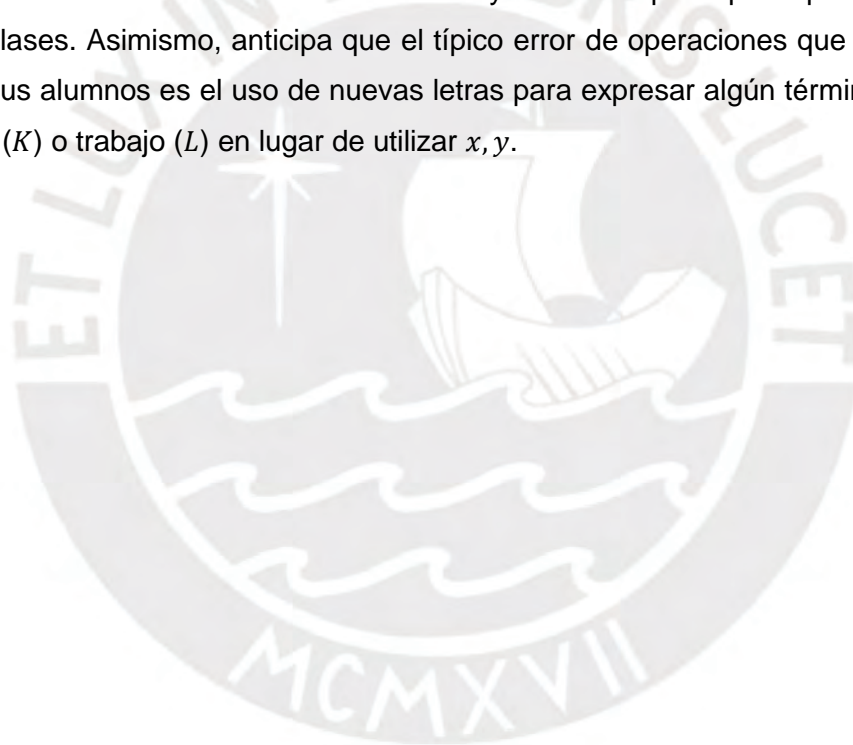
Por otro lado, para complementar lo descrito en este capítulo, se lleva a cabo una entrevista semiestructurada con el profesor, a dos semanas de haberse tomado la evaluación para recabar información necesaria acerca de su perspectiva y resultados obtenidos en el curso. En el anexo 2, se muestra la estructura y preguntas consideradas en esta entrevista como lo son la experiencia docente, planificación de clase, desarrollo de clase, evaluación del aprendizaje y reflexión acerca de la importancia del curso en la carrera de economía. En el anexo 3, se presenta la transcripción de la entrevista semiestructurada donde el profesor responder a estas preguntas.

En esta entrevista, al profesor se le pregunta por los conocimientos previos que debe tener un estudiante que cursa “Matemática para Gestión y Economía 2”. Ante ello, el profesor responde que no solo es necesario reforzar el cálculo de derivadas parciales y las representaciones gráficas de las funciones de dos variables, sino que también son relevantes la teoría de polinomios, técnicas de factorización y aplicación de propiedades de exponentes. Además, el profesor indica que las definiciones de los términos económicos (como ingreso, costo, beneficio, marginalidad, producción, entre otros) vistos en los problemas de aplicación son parte de los conocimientos previos del curso anterior “Matemática para Gestión y Economía 1”, así como funciones seno, coseno, tangente, exponencial, entre otras, las cuales son necesarias para que el alumno se acostumbre a este tipo de problemas de matemáticas avanzadas.

Asimismo, para las sesiones prácticas, el profesor indica que publica una separata adicional de ejercicios en la plataforma de clases para trabajar en el salón. Estos ejercicios que incluye en la separata los obtiene de diferentes fuentes como libros, publicaciones en internet haciendo adaptaciones según el nivel académico del grupo y el avance que realice en clase. Estas fuentes son utilizadas por el profesor para crear las evaluaciones del curso.

Como parte de la evaluación del tema “optimización de funciones de dos variables”, el cálculo de máximos y mínimos, sujetos o no a restricciones de igualdad, es anunciado por el profesor durante las clases para la Evaluación Continua 3, el cual es el único instrumento de medición del aprendizaje observado exclusivamente para este tema.

Según la observación de clases y la entrevista del profesor, trata de dar tiempo a los alumnos para resolver problemas por cuenta propia de cada uno para intentar los ejercicios propuestos de las diapositivas y las separatas de clase. Aun así, el profesor sostiene que es difícil determinar el interés del alumno con el tema y reconoce que la participación es escasa durante las clases. Asimismo, anticipa que el típico error de operaciones que le cuesta a la mayoría de sus alumnos es el uso de nuevas letras para expresar algún término económico como capital ( $K$ ) o trabajo ( $L$ ) en lugar de utilizar  $x, y$ .



## Capítulo VI: Análisis de datos

En este capítulo, se realiza el análisis de la información presentada en el capítulo anterior en cuanto a la observación del proceso de instrucción. Este análisis se realiza para cada una de las seis facetas de la idoneidad didáctica tomando en cuenta los indicadores propuestos en el capítulo IV. Asimismo, se tomará en cuenta la codificación propuesta para identificar cada indicador propuesto.

### 6.1. Idoneidad epistémica

La idoneidad epistémica (IEP) permite analizar qué tan representativos son los significados implementados por el profesor en una clase de optimización de funciones reales de dos variables respecto de los significados de referencia de la derivada parcial y su relación con la optimización en economía. Esa faceta consta de seis componentes, las se analizan a continuación.

#### 6.1.1. Situaciones-problema

La tabla 37 muestra el análisis por cada indicador de la componente codificada como IEP<sub>1</sub> (situaciones-problema) de la idoneidad epistémica según el código de cada indicador asignado en el capítulo 4.

**Tabla 37**

*Análisis de cada indicador de la componente “situaciones-problema” de la idoneidad epistémica*

Indicador	Comentario
IEP <sub>1.1</sub>	Se evidencia que el profesor refuerza el significado de las derivadas parciales como expresiones algebraicas al resolver el examen parcial previo al tema de optimización. En este reforzamiento se determinan las derivadas parciales de primer orden $f_x$ y $f_y$ . Asimismo, en la introducción del tema se evidencia el logro de este indicador al considerar problemas intra-matemáticos para hallar puntos críticos. No se observan problemas o ejemplos para hallar únicamente $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ .
IEP <sub>1.2</sub>	No se observa variedad de problemas donde se aproveche o evidencie el significado de la derivada parcial como tasa de variación, así como tampoco se evidencian ejemplos donde se pida la ecuación del plano tangente en un punto particular o su interpretación como plano tangente paralelo al plano XY en el caso de problemas de optimización. Pese a ello, se aborda directamente la interpretación del multiplicador de Lagrange como tasa de variación del valor óptimo de una función durante una clase teórica.

Indicador	Comentario
IEP <sub>1.3</sub>	No se evidencian suficientes problemas de representaciones gráficas de funciones de dos variables, así como las representaciones gráficas de sus derivadas de primer y segundo orden. La mayoría de los ejemplos se limita, en la clase teórica, a hallar derivadas parciales. En algún caso, el profesor muestra gráficamente cómo se ve un punto silla y ejemplifica un problema de construcción de la gráfica a partir de sus trazas a modo de repaso.
IEP <sub>1.4</sub>	Se evidencian problemas intra-matemáticos, tanto en las clases teóricas como en las prácticas donde se manifiesta el significado de la derivada parcial para hallar máximos y mínimos sin plantear restricciones en cualquiera de las siguientes formas: $\max f(x, y)$ o $\min f(x, y)$ .
IEP <sub>1.5</sub>	Se evidencia que el profesor presenta, tanto en clase como en sesiones prácticas, problemas donde no se obtengan máximos ni mínimos. Para el tema, se presentan problemas cuyos resultados resultan en puntos sillas.
IEP <sub>1.6</sub>	Se evidencian ejemplos intra-matemáticos sujetos a restricciones de igualdad usando el método de Lagrange. Esto se desarrolló durante la cuarta y quinta sesiones. Por ejemplo, en clase se trabajaron el siguiente par de problemas: <u>Maximización:</u> Maximizar $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ sujeto a $x + y = 4$ <u>Minimización:</u> $\min f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeta a $x + 2y = a$
IEP <sub>1.7</sub>	Se evidencian problemas extra-matemáticos de optimización sin restricciones de igualdad que modelicen situaciones económicas como costo total, beneficio y producción como funciones de dos variables.
IEP <sub>1.8</sub>	Se evidencia que en la clase práctica se resuelven problemas de optimización con restricciones de igualdad en contexto extra-matemático donde se modelicen funciones como el costo, la utilidad u otros. Se utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange. Asimismo, se evidencian problemas donde las restricciones no está planteadas explícitamente.
IEP <sub>1.9</sub>	No se observaron problemas ni momentos para que el alumno genere o cree un problema de modelación aplicada a la economía. La mayoría de los problemas plantean parte de las funciones o restricciones modeladas.

*Nota.* Elaboración propia

En resumen, según las situaciones-problema del proceso de instrucción, se observa que el profesor utiliza una gran variedad de problemas, entre intra o extra-matemáticos, para presentar la teoría y los métodos de resolución donde se evidencian los significados de la derivada parcial como expresión algebraica y la derivada parcial para hallar máximos y mínimo. Sin embargo, según el proceso idóneo descrito en los indicadores, es ideal que el profesor presente el uso de los significados de la derivada parcial para determinar un plano

tangente y la derivada parcial como tasa de cambio y su relación con los problemas de optimización. Asimismo, es importante, considerar ejercicios para que el estudiante refuerce el cálculo de derivadas parciales de primer y segundo orden, puesto que es uno de los errores más frecuentes encontrados en la evaluación. Por último, sería ideal que el estudiante tenga un espacio para crear problemas de modelización aplicada a la economía.



### 6.1.2. Lenguaje

La tabla 38 muestra el análisis por cada indicador de la componente codificada como IEP<sub>2</sub> (lenguaje) de la idoneidad epistémica según el código de cada indicador asignado en el capítulo 4.

**Tabla 38**

*Análisis de cada indicador de la componente “lenguaje” de la idoneidad epistémica*

Indicador	Comentario
IEP <sub>2.1</sub>	Se usan pocas representaciones gráficas para explicar el significado de la derivada parcial para hallar máximos y mínimos aplicados a la optimización. Se menciona la interpretación el punto más alto y el punto más bajo. El contenido se limita a representaciones algebraicas.
IEP <sub>2.2</sub>	Se evidencia que el profesor maneja adecuadamente las distintas notaciones de derivadas parciales (las más utilizadas por el profesor son $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ ), multiplicador de Lagrange $\lambda$ , notación de función lagrangiana, símbolo de aproximación y matrices.
IEP <sub>2.3</sub>	Se evidencia que el profesor utiliza y maneja adecuadamente los conceptos económicos como ingreso, costo, capital, trabajo, marginalidad, entre otros.

*Nota.* Elaboración propia

A modo de resumen, los distintos lenguajes (notaciones en su mayoría) empleados por el profesor son adecuados y repetitivamente utilizados por el profesor para resolver los problemas y presentar la teoría. Asimismo, en cuanto a conceptos propios de la economía, el profesor utiliza adecuadamente las palabras correctas para, por ejemplo, modelizar problemas que traten de costo, ingreso, beneficio, entre otros. Pese a ello, es importante que el profesor pueda utilizar distintas representaciones (no solo la algebraica, sino también la gráfica) en la resolución de los problemas para que el alumno conozca la interpretación adecuada de lo que implica optimizar.

### 6.1.3. Reglas o elementos regulativos

La tabla 39 muestra el análisis por cada indicador de la componente codificada como IEP<sub>3</sub> (reglas o elementos regulativos) de la idoneidad epistémica según el código de cada indicador asignado en el capítulo 4.

**Tabla 39**

*Análisis de cada indicador de la componente “reglas o elementos regulativos” de la idoneidad epistémica*

Indicador	Comentario
IEP <sub>3.1</sub>	El profesor presenta correctamente las definiciones, propiedades y teoremas previstos para el significado de la derivada parcial para hallar máximos y mínimos: ¿qué es optimizar, máximo y mínimo?, ¿cuál es la diferencia entre local o absoluto?, ¿qué es una restricción de igualdad, ¿qué es el multiplicador de Lagrange?, entre otras preguntas que responde correctamente ante clase.
IEP <sub>3.2</sub>	El profesor presenta adecuadamente los procedimientos de optimización sin restricciones y con restricciones. Además, sintetiza estos procedimientos durante la resolución de los ejemplos de las clases teóricas.

*Nota.* Elaboración propia

En síntesis, el profesor posee adecuados conocimientos acerca de las definiciones, proposiciones, procedimientos, teoremas y otras propiedades relacionadas con el tema de optimización, lo cual se evidenció en los extractos de las diapositivas brindadas por el profesor y en el testimonio de la observación de clases.

#### 6.1.4. Argumentos

La tabla 40 muestra el análisis por cada indicador de la componente codificada por IEP<sub>4</sub> (argumentos) de la idoneidad epistémica según el código de cada indicador asignado en el capítulo 4..

**Tabla 40**

*Análisis de cada indicador de la componente “argumentos” de la idoneidad epistémica*

<b>Indicador</b>	<b>Comentario</b>
<b>IEP<sub>4.1</sub></b>	Las explicaciones son adecuadas para el nivel educativo superior al cual pertenece el profesor. Se evidencia el uso de una formalidad algebraica para dirigirse hacia las derivadas parciales y los términos utilizados en los procedimientos de optimización (función objetivo, restricciones, maximizar, minimizar). Asimismo, el profesor usa adecuadamente los términos económicos empleados en los problemas como costo, beneficio, presupuesto, entre otros.
<b>IEP<sub>4.2</sub></b>	Los problemas propuestos por el profesor corresponden a situaciones donde el estudiante justifique sus cálculos mediante los procedimientos adecuados para optimizar (sin o con restricciones) funciones de dos variables y determinar su solución.

*Nota.* Elaboración propia

En resumen, las explicaciones y problemas propuestos por el profesor son adecuados para el nivel académico de alumnos de la carrera de economía que se encuentran en formación durante sus primeros ciclos. Asimismo, las situaciones propuestas en los ejercicios obligan a que el alumno utilice adecuadamente los procedimientos para llegar a la respuesta.

### 6.1.5. Relaciones

La tabla 41 muestra el análisis por cada indicador de la componente codificada como IEP<sub>5</sub> (relaciones) de la idoneidad epistémica según el código de cada indicador asignado en el capítulo 4.

**Tabla 41**

*Análisis de cada indicador de la componente “relaciones” de la idoneidad epistémica*

<b>Indicador</b>	<b>Comentario</b>
<b>IEP<sub>5.1</sub></b>	Los problemas propuestos evidencian que existe una relación directa con la teoría presentada en clase en cuanto a la aplicación de los significados de la derivada parcial como expresión algebraica y la derivada parcial para hallar máximos y mínimos. Asimismo, se presenta variedad de casos intra-matemáticos como extra-matemáticos, con o sin restricciones.
<b>IEP<sub>5.2</sub></b>	Se observa que en la resolución planteadas por el profesor, el significado de la derivada parcial como expresión algebraica está presente en cada paso del procedimiento de optimización.

*Nota.* Elaboración propia

En resumen, se relaciona adecuadamente los conceptos abordados en los significados de la derivada parcial como expresión algebraica y la derivada parcial para hallar máximos y mínimos para resolver diferentes tipos de problemas, ya sean intra o extra-matemáticos, así como problemas donde se apliquen diferentes procedimientos cuando aparece o no una restricción de igualdad.

### 6.1.6. Errores, ambigüedades y creencias

La tabla 42 muestra el análisis por cada indicador de la componente codificada por IEP<sub>6</sub> (errores, ambigüedades y creencias) de la idoneidad epistémica según el código de cada indicador asignado en el capítulo 4.

**Tabla 42**

*Análisis de cada indicador de la componente “errores, ambigüedades y creencias” de la idoneidad epistémica*

<b>Indicador</b>	<b>Comentario</b>
<b>IEP<sub>6.1</sub></b>	No se evidencian suficientes problemas que impliquen hallar máximos o mínimo, u optimizar, haciendo uso de representaciones gráficas. Gran parte de los problemas se limite únicamente al trabajo algebraico. Se usan pocos ejemplos para explicar la optimización de manera gráfica. No se promueve esta interpretación para los problemas
<b>IEP<sub>6.2</sub></b>	Se evidencia que el profesor resuelve y propone ejercicios no solo de tipo intra, sino también extra-matemáticos. Incluso, aquellos problemas donde se modelicen funciones bajo conceptos económicos.
<b>IEP<sub>6.3</sub></b>	No se presentan suficientes problemas donde el gráfico sea difícil de determinar de manera que se resuelva el problema por métodos algebraicos. Esto se da así porque no se promueve el uso de representaciones gráficas para pensar los problemas de esa representación. En algún caso, el profesor recurre a GeoGebra para ver un problema similar, pero posteriormente no vuelve a suceder.

*Nota.* Elaboración propia

A modo de resumen, se evidencia variedad de problemas, intra o extra-matemáticos, con o sin restricciones, entre otros, pero la gran mayoría de problemas propuestos y los revisado en clase se limitan únicamente a representaciones algebraicas. Asimismo, no se promueve comprender el problema desde un punto de vista gráfico.

## 6.2. Idoneidad cognitiva

La idoneidad cognitiva (ICO) permite analizar qué tanto se relacionan e instruyen los significados de referencia implementados por el profesor en los estudiantes. Esta faceta consta de cuatro componentes, las cuales se analizan a continuación.

### 6.2.1. Conocimientos previos

La tabla 43 muestra el análisis por cada indicador de la componente codificada como  $ICO_1$  (conocimientos previos) de la idoneidad cognitiva según el código de cada indicador asignado en el capítulo 4.

**Tabla 43**

*Análisis de cada indicador de la componente “conocimientos previos” de la idoneidad cognitiva*

Indicador	Comentario
$ICO_{1.1}$	Se evidencia que los alumnos tienen conocimientos previos a partir de haber rendido un examen parcial donde se evaluaron preguntas de derivadas parciales, el cual es un requisito para que se desarrollen procedimientos para hallar máximos y mínimos. Asimismo, en la entrevista, el profesor indicó que algunos de los términos económicos vistos en los problemas son enseñados en el curso previo
$ICO_{1.2}$	Se evidencia que el profesor vincula los conocimientos previos de reglas de derivación de funciones de una variable, la optimización de funciones de una variable y de derivadas parciales haciendo uso de esas notaciones durante su explicación y resolución de problemas.

*Nota.* Elaboración propia

En síntesis, se evidencia que los alumnos cuentan con conocimientos previos debido a los cursos pasados relacionados como requisito para los temas del curso “Matemática para Gestión y Economía 2”. Además, la toma del examen parcial permite reforzar los conocimientos relacionados con la derivada parcial como expresión algebraica y las reglas de derivación de funciones de una variable.

### 6.2.2. Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales

La tabla 44 muestra el análisis por cada indicador de la componente codificada por ICO<sub>2</sub> (adaptaciones curriculares a las diferencias individuales) de la idoneidad cognitiva según el código de cada indicador asignado capítulo 4.

**Tabla 44**

*Análisis de cada indicador de la componente “adaptaciones curriculares a las diferencias individuales” de la idoneidad cognitiva*

Indicador	Comentario
ICO <sub>2.1</sub>	Se evidencia que el profesor introduce el procedimiento de la derivada parcial hallar máximos y mínimos de funciones reales de dos variables haciendo la analogía con la optimización de funciones reales de una variable.
ICO <sub>2.2</sub>	Las clases teóricas son reforzadas con clases prácticas, las cuales se dieron durante las sesiones observadas 3 y 6.

*Nota.* Elaboración propia

En resumen, se evidencia que el profesor utiliza analogías para presentar similitudes entre procedimientos de optimización de funciones de una variable y funciones de dos variables. Asimismo, dentro de la programación, el profesor cuenta con sesiones prácticas y sube separatas de ejercicios a modo de reforzamiento.

### 6.2.3. Aprendizajes

La tabla 45 muestra el análisis por cada indicador de la componente codificada por ICO<sub>3</sub> (aprendizajes) de la idoneidad cognitiva según el código de cada indicador asignado en el capítulo 4.

**Tabla 45**

*Análisis de cada indicador de la componente “aprendizajes” de la idoneidad cognitiva*

Indicador	Comentario
ICO <sub>3.1</sub>	Se evidencia que hay un único instrumento de evaluación, el cual es la evaluación continua 3. Esta evaluación, en 4 de 5 problemas, considera en gran parte el significado de la derivada parcial para hallar máximos y mínimos, con o sin restricciones

*Nota.* Elaboración propia

A modo de resumen, el curso cuenta con varias evaluaciones que permitan verificar que el alumno se haya apropiado de los significados pretendidos del profesor. La evaluación continua 3 considera los temas de las dos semanas siguientes al parcial.

#### 6.2.4. Alta demanda cognitiva

La tabla 46 muestra el análisis por cada indicador de la componente codificada por ICO<sub>4</sub> (alta demanda cognitiva) de la idoneidad cognitiva según el código de cada indicador asignado en el capítulo 4.

**Tabla 46**

*Análisis de cada indicador de la componente “alta demanda cognitiva” de la idoneidad cognitiva*

<b>Indicador</b>	<b>Comentario</b>
<b>ICO<sub>4.1</sub></b>	Sí se observan problemas donde se requiera plantear expresiones (funciones objetivo) que modelicen situaciones económicas como la utilidad o el costo total, con la intención de optimizarla.
<b>ICO<sub>4.2</sub></b>	Sí se incluyen problemas donde la restricción no esté planteada explícitamente. Por ejemplo, en la evaluación continua aparece un problema donde se debe plantear la restricción para posteriormente plantear la función lagrangiana. Esto también se observa en varios problemas de las separatas de ejercicios.
<b>ICO<sub>4.3</sub></b>	En la evaluación continua 3, se evidenció un problema donde se le pedía al alumno “Indique si se trata de máximo o mínimo” para un problema de optimización con restricciones de igualdad. Asimismo, en la sección anterior, se describió que en las separatas de ejercicios propuestos se encontraron problemas de este tipo.

*Nota.* Elaboración propia

En resumen, se logra encontrar problemas donde se requiera de una alta demanda cognitiva para resolverlos. Por ejemplo, este tipo de problemas aparecen tanto en las separatas de ejercicios como en la evaluación y se caracterizan porque hay ciertas funciones o restricciones que explícitamente no están planteados, pero que el estudiante debe hacerlo. Asimismo, también se plantean expresiones donde no se indique si se busca maximizar o minimizar, para lo cual el estudiante debe recordar el procedimiento adecuado.

### 6.3. Idoneidad interaccional

La idoneidad interaccional (IIN) permite analizar qué tanto se resuelven y promueven las interacciones entre docentes y estudiantes en el proceso de instrucción. Esta faceta consta de cuatro componentes, las cuales se analizan en esta sección.

#### 6.3.1. Interacción docente-estudiante

La tabla 47 muestra el análisis por cada indicador de la componente codificada por IIN<sub>1</sub> (interacción docente-estudiante) de la idoneidad interaccional según el código de cada indicador asignado previamente.

**Tabla 47**

*Análisis de cada indicador de la componente “interacción docente-estudiante” de la idoneidad interaccional*

Indicador	Comentario
IIN <sub>1.1</sub>	Se observa que el profesor dicta con calma y lento según lo planificado para sus sesiones. Además, según lo descrito en el capítulo anterior, el profesor usa la pizarra y el proyector para mostrar sus diapositivas y escribir tanto con plumón como con ayuda de una tableta gráfica para mostrar la resolución de los problemas. Sin embargo, en varias ocasiones la organización del procedimiento no es clara, lo cual es importante para que el alumno pueda tomar notas adecuadamente en caso se desconcentre en parte de la explicación.
IIN <sub>1.2</sub>	No se observa frecuentemente que el profesor enfatice sobre los conceptos y aplicaciones de la optimización de funciones reales de dos variables en contexto económico, por lo que debería mencionarse la importancia de estos y no limitarse a la resolución de ejercicios.
IIN <sub>1.3</sub>	El profesor anticipa escenarios donde los alumnos puedan cometer errores y plantea ejemplos para despejar dudas al determinar derivadas parciales.
IIN <sub>1.4</sub>	No se evidencia, durante la observación de clases, que el profesor interprete el silencio u otras distracciones de los alumnos.
IIN <sub>1.5</sub>	Se evidencia el uso de analogías para presentar los procedimientos de optimización de funciones de dos variables, sin y con restricciones, comparándolos con lo realizado en optimización de funciones de una variable y la idea de “punto más alto o bajo” o “silla de montar” para explicar algunas formas e interpretaciones necesarias.
IIN <sub>1.6</sub>	No se evidencia frecuentemente la participación en clases. Los momentos donde el profesor fomenta la participación son para que entre los alumnos discutan los problemas que deja durante clase.

*Nota.* Elaboración propia

En resumen, la interacción entre el profesor y sus estudiantes durante las clases tiene varios aspectos por mejorar, los cuales implican la mejora de las resoluciones de los problemas, fomentar la participación, interpretación del silencio o inactividad de los alumnos y el énfasis por relacionar la aplicación de la optimización en la economía. Pese a ello, el

profesor utiliza recursos retóricos que mejoran la interpretación y comprensión del tema por parte de los alumnos.

### 6.3.2. Interacciones entre estudiantes

La tabla 48 muestra el análisis por cada indicador de la componente codificada por IIN<sub>2</sub> (interacciones entre estudiantes) de la idoneidad interaccional según el código de cada indicador asignado en el capítulo 4.

**Tabla 48**

*Análisis de cada indicador de la componente “interacciones entre estudiantes” de la idoneidad interaccional*

<b>Indicador</b>	<b>Comentario</b>
<b>IIN<sub>2.1</sub></b>	No es frecuente en las clases observadas que se promueva el diálogo y comunicación entre alumnos, debido a que no se presenta variedad de dinámicas como la discusión de algún concepto teórico, sino que se limita únicamente a comprobar resoluciones de algún problema.
<b>IIN<sub>2.2</sub></b>	No se observa participación grupal a pesar de que previamente el profesor indique que sí suele realizar dinámicas grupales para otros temas. Sería favorable para la experiencia y comprensión del tema por parte de los alumnos.

*Nota.* Elaboración propia

En resumen, hay aspectos por mejorar en cuanto a la interacción entre alumnos. Se promueve el diálogo en pocos escenarios que se limitan a comprobar o discutir la resolución de algún problema. Sin embargo, sería favorable para el alumno que esto se realizara para conceptos teóricos mediante algunas dinámicas grupales en clase.

### 6.3.3. Autonomía

La tabla 49 muestra el análisis por cada indicador de la componente codificada por IIN<sub>3</sub> (autonomía) de la idoneidad interaccional según el código de cada indicador asignado en el capítulo 4.

**Tabla 49**

*Análisis de cada indicador de la componente “autonomía” de la idoneidad interaccional*

<b>Indicador</b>	<b>Comentario</b>
IIN <sub>3.1</sub>	Durante las clases teórico-prácticas sí se evidencian momentos para que el alumno pueda resolver individualmente los problemas propuestos. Sin embargo, esto únicamente se limita a resolver lo propuesto, mas no a creación de nuevos ejemplos o proponer contraejemplos relacionados con el tema.
IIN <sub>3.2</sub>	Sí se evidencia que el docente promueve el estudio y práctica del curso mediante el recordatorio y publicación de las separatas de ejercicios para que los alumnos avancen los problemas y, así, se puedan revisar durante las sesiones prácticas.

*Nota.* Elaboración propia

En resumen, se evidencia que el profesor da espacios donde el alumno trabaja de manera autónoma y pone en práctica lo aprendido, tanto dentro del horario de clases como fuera de este. Sin embargo, estas situaciones podrían incluir propuestas o generación de ejemplos y contraejemplos que cuestionen la teoría u otros conceptos del tema por parte del alumno.

#### 6.3.4. Evaluación formativa

La tabla 50 muestra el análisis por cada indicador de la componente codificada por IIN<sub>4</sub> (evaluación formativa) de la idoneidad interaccional según el código de cada indicador asignado en el capítulo 4.

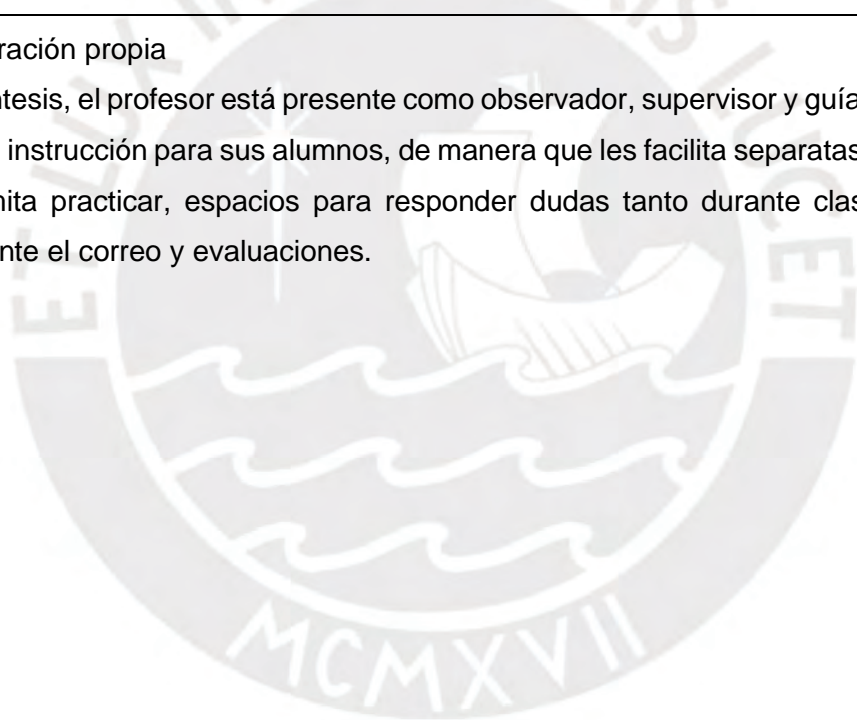
**Tabla 50**

*Análisis de cada indicador de la componente “evaluación formativa” de la idoneidad interaccional*

Indicador	Comentario
IIN <sub>4.1</sub>	El profesor sí está dispuesto a supervisar el desarrollo de clases, incluso cuando da aquellos breves momentos para que sus alumnos intenten la resolución de problemas. Además, facilita su correo a sus estudiantes para cualquier comunicación relacionada con las clases. El profesor es quien controla sus propias evaluaciones en el horario que él dicta, por lo que está presente para responder dudas durante las evaluaciones.

*Nota.* Elaboración propia

En síntesis, el profesor está presente como observador, supervisor y guía durante todo el proceso de instrucción para sus alumnos, de manera que les facilita separatas de ejercicios que les permita practicar, espacios para responder dudas tanto durante clases, fuera de clases mediante el correo y evaluaciones.



#### 6.4. Idoneidad mediacional

La idoneidad mediacional (IME) permite analizar qué tanta disponibilidad hay de recursos, materiales o temporales, y qué tanto es el uso y aprovechamiento de estos durante el proceso de instrucción. Esta faceta consta de tres componentes, las cuales se analizan a continuación.

##### 6.4.1. Recursos materiales

La tabla 51 muestra el análisis por cada indicador de la componente codificada por  $IME_1$  (recursos materiales) de la idoneidad mediacional según el código de cada indicador asignado en el capítulo 4.

**Tabla 51**

*Análisis de cada indicador de la componente “recursos materiales” de la idoneidad mediacional*

Indicador	Comentario
$IME_{1.1}$	A pesar de que se utiliza la proyección de la computadora, no se evidencia variedad de ocasiones cuando el profesor se apoye en representaciones gráficas de las funciones trabajadas donde manipule ello. Estos momentos se dan cuando el profesor presenta la idea de máximos y mínimos (punto más alto o bajo) y ejemplificar el punto silla, donde manipula y rota la imagen en GeoGebra para mostrar la idea de “silla de montar”. Posterior a estos dos casos, no se vuelve a evidenciar el uso de estos recursos para tal fin,
$IME_{1.2}$	Se evidencian pocos ejemplos donde se usen representaciones gráficas como parte del procedimiento de la optimización de funciones de dos variables. Esto se limita únicamente a la introducción del tema. Por parte del estudiante, tampoco se promueve el uso de estas visualizaciones.

*Nota.* Elaboración propia

En resumen, no se evidencia el uso de representaciones gráficas que puedan manipularse o comprobar los valores máximos o mínimos hallados, tanto para el profesor como para el alumno. Esto es una herramienta útil para ambos para explicar y comprender ciertos conceptos relacionados con la optimización como es el caso de máximos y mínimos.

#### 6.4.2. Número de alumnos, horario y condiciones del aula

La tabla 52 muestra el análisis por cada indicador de la componente codificada por IME<sub>2</sub> (números de alumnos, horario y condiciones del aula) de la idoneidad mediacional según el código de cada indicador asignado en el capítulo 4.

**Tabla 52**

*Análisis de cada indicador de la componente “números de alumnos, horario y condiciones del aula” de la idoneidad mediacional*

<b>Indicador</b>	<b>Comentario</b>
<b>IME<sub>2.1</sub></b>	En este horario hay 36 alumnos distribuidos en carpetas personales (durante las clases teóricas) y bipersonales (durante las sesiones prácticas), cuyas superficies no son amplias, por lo que esto influye en la toma de anotaciones. Esta distribución no es adecuada para las clases.
<b>IME<sub>2.2</sub></b>	Cada semana se dan tres sesiones de clase. La primera sesión comienza a las 7:00 am, para el cual se evidencia que no es un horario apropiado debido a la gran cantidad de ausentismo durante la primera hora. Las otras dos sesiones se dictan a partir de las 8:50 am, para lo cual se observa gran asistencia a clases, por lo que son apropiados.
<b>IME<sub>2.3</sub></b>	Las aulas tienen un aforo muy limitado para los 36 alumnos del horario. A pesar de estar equipadas con proyector, pizarra y computadora, no son espacios idóneos debido a lo pequeño que puede resultar el espacio y que en las sesiones teóricas el proyector no se encuentra centrado. Además, el espacio se ve interrumpido por el ruido exterior de la avenida.

*Nota.* Elaboración propia

En resumen, las condiciones del aula no son del todo adecuadas debido al espacio limitado de las carpetas y aforo para el número de alumnos del horario. Asimismo, uno de los días de dictado no cuenta con un horario adecuado para la asistencia del alumno debido a que comienza muy temprano en comparación con los otros dos días. Pese a tener salones equipados, el ruido del exterior y ciertas configuraciones del proyector pueden resultar incómodas o inadecuadas para el desarrollo de la clase.

### 6.4.3. Tiempo

La tabla 53 muestra el análisis por cada indicador de la componente codificada por  $IME_3$  (tiempo) de la idoneidad mediacional según el código de cada indicador asignado en el capítulo 4.

**Tabla 53**

*Análisis de cada indicador de la componente “tiempo” de la idoneidad mediacional*

<b>Indicador</b>	<b>Comentario</b>
<b>IME<sub>3.1</sub></b>	Sí se cumple con la programación de clases teóricas según el sílabo y lo planificado por el profesor. El tema de optimización con restricción se terminó en una sola sesión y pudo desarrollarse ejercicios adicionales durante las dos últimas sesiones observadas.
<b>IME<sub>3.2</sub></b>	El tiempo de las sesiones prácticas es adecuado para la resolución de algunos ejercicios propuestos por el profesor en sus separatas. Si bien no se llega a resolver todo, se resuelven problemas similares variados (intra o extra-matemáticos, con o sin restricciones, entre otros).
<b>IME<sub>3.3</sub></b>	Sí se dispone tiempo para asesorías durante las sesiones prácticas, para lo cual está programado, puesto que no es exclusivamente para la resolución de problemas, sino también para consultas.

*Nota.* Elaboración propia

En resumen, el tiempo asignado para las sesiones teóricas y prácticas es el adecuado para la enseñanza del tema de optimización de funciones de dos variables en contexto económico, particularmente, el significado de la derivada parcial para hallar máximos y mínimos. Asimismo, se dispone de un espacio de asesoría y consulta durante las sesiones prácticas.

## 6.5. Idoneidad afectiva

La idoneidad afectiva (IAF) permite analizar qué tan implicado o comprometido está el estudiante durante todo el proceso de instrucción. Esta faceta consta de tres componentes, las cuales se analizan en esta sección.

### 6.5.1. Intereses y necesidades

La tabla 54 muestra el análisis por cada indicador de la componente codificada por IAF<sub>1</sub> (intereses y necesidades) de la idoneidad afectiva según el código de cada indicador asignado en el capítulo 4.

**Tabla 54**

*Análisis de cada indicador de la componente “intereses y necesidades” de la idoneidad afectiva*

Indicador	Comentario
IAF <sub>1.1</sub>	Se introduce el tema de optimización en un contexto matemático; sin embargo, no se menciona su conexión con la economía durante las sesiones teóricas. En las sesiones prácticas se revisan problemas de aplicación donde el profesor asume que los alumnos conocen los términos económicos (ingreso, costo, beneficio, producción, capital, entre otros).
IAF <sub>1.2</sub>	Sí se proponen problemas o tareas de modelización relacionados con conceptos económicos. Esto se evidencia durante las sesiones prácticas y los problemas propuestos en las separatas de ejercicios donde se hace referencia a conceptos como beneficio, costo, capital, trabajo y producción. Asimismo, en estos problemas no solo se plantean funciones objetivo, sino también restricciones en contexto económico.

*Nota.* Elaboración propia

En resumen, se observa que tanto el tema como los problemas de optimización guardan relación con la economía al usarse términos como el beneficio, costo, capital, trabajo y producción, para los cuales los estudiantes están familiarizados debido a que guarda relación con curso anteriores. Un aspecto por mejorar se relaciona con la presentación de estos conceptos y su aplicación durante las sesiones prácticas haciendo una conexión entre el tema y su utilidad en la economía.

### 6.5.2. Actitudes

La tabla 55 muestra el análisis por cada indicador de la componente codificada por IAF<sub>2</sub> (actitudes) de la idoneidad afectiva según el código de cada indicador asignado en el capítulo 4.

**Tabla 55**

*Análisis de cada indicador de la componente “actitudes” de la idoneidad afectiva*

<b>Indicador</b>	<b>Comentario</b>
<b>IAF<sub>2.1</sub></b>	Sí se observa gran asistencia de los alumnos a las sesiones teóricas, prácticas y evaluaciones, los cuales son promovidos por el profesor para que los alumnos aprovechen esos momentos.
<b>IAF<sub>2.2</sub></b>	En gran parte de los problemas, el procedimiento seguido por el profesor es como una “receta” que implica que el alumno se mecanice para resolverlos lo cual favorece la comprensión y adaptación de los procedimientos. En pocos ejemplos sí se evidencia el análisis que se requiere para modelar funciones o restricciones de un problema de optimización. El análisis de problemas mediante el planteamiento de expresiones debe ser considerado como parte de un análisis más exigente aparte del procedimiento repetitivo que el estudiante espera de este tipo de problemas.

*Nota.* Elaboración propia

En resumen, sí se observa que el profesor promueve adecuadamente la asistencia a clases y evaluaciones. Sin embargo, falta considerar más la parte de análisis de problemas que de “mecanización” al resolver la optimización o al modelar funciones y restricciones según el enunciado.

### 6.5.3. Emociones

La tabla 56 muestra el análisis por cada indicador de la componente codificada por IAF<sub>3</sub> (emociones) de la idoneidad afectiva según el código de cada indicador asignado en el capítulo 4.

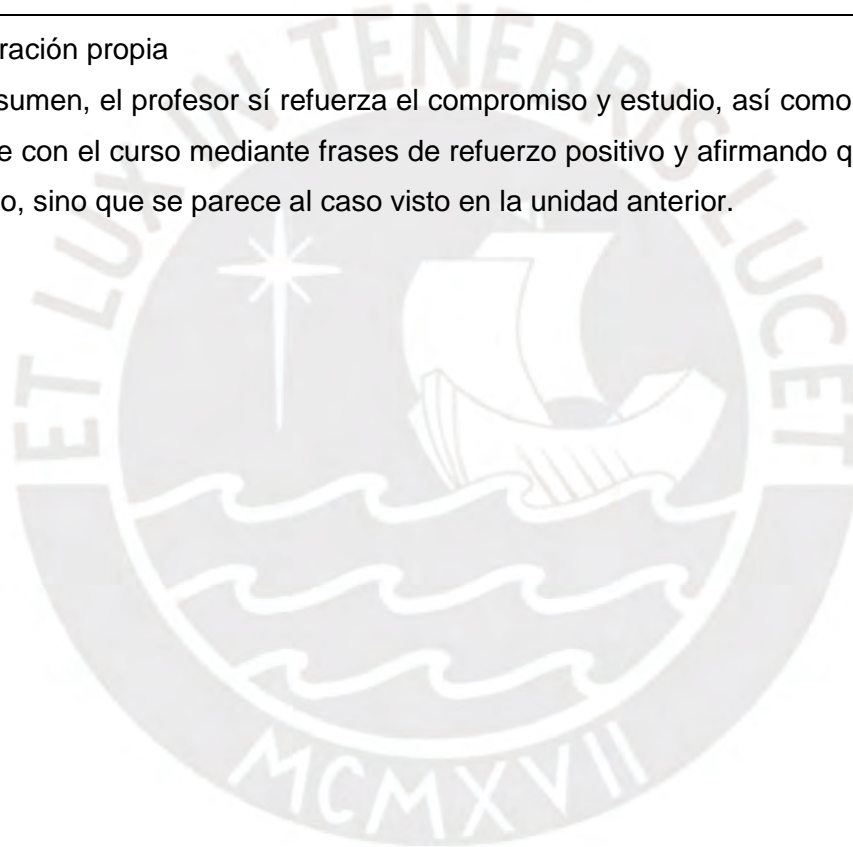
**Tabla 56**

*Análisis de cada indicador de la componente “emociones” de la idoneidad afectiva*

<b>Indicador</b>	<b>Comentario</b>
<b>IAF<sub>3.1</sub></b>	El profesor promueve el estudio del curso indicando que “no es difícil debido a que el procedimiento se asemeja al de optimización de funciones de una variable”. En algunos momentos, el profesor da comentarios de refuerzo positivo como “muy bien”, “excelente participación”, “es correcto”.

*Nota.* Elaboración propia

En resumen, el profesor sí refuerza el compromiso y estudio, así como la motivación del estudiante con el curso mediante frases de refuerzo positivo y afirmando que el tema no es complicado, sino que se parece al caso visto en la unidad anterior.



## 6.6. Idoneidad ecológica

La idoneidad afectiva (IEC) permite analizar qué tanto se adapta el proceso de instrucción al proyecto de la carrera de Economía propuesto por la institución. Esta faceta consta de cuatro componentes, las cuales se analizan en esta sección.

### 6.6.1. Adaptación al currículo

La tabla 57 muestra el análisis por cada indicador de la componente codificada por IEC<sub>1</sub> (adaptación al currículo) de la idoneidad ecológica según el código de cada indicador asignado en el capítulo 4.

#### Tabla 57

*Análisis de cada indicador de la componente “intereses y necesidades” de la idoneidad ecológica*

Indicador	Comentario
IEC <sub>1.1</sub>	Las presentaciones de clase, separatas de ejercicios y evaluaciones sí se relacionan con la optimización de funciones de dos variables y lo indicado según las directrices de la institución. Esto se verifica con el sílabo propuesto para el curso.

*Nota.* Elaboración propia

En resumen, se evidencia que el tema de optimización de funciones de dos variables se encuentra adaptado según la formación académica de la carrera de Economía mostrando ejemplos y aplicaciones en el contenido trabajado durante las clases, así como el contenido evaluado.

### 6.6.2. Apertura hacia la innovación didáctica

La tabla 58 muestra el análisis por cada indicador de la componente codificada por IEC<sub>2</sub> (apertura hacia la innovación didáctica) de la idoneidad ecológica según el código de cada indicador asignado en el capítulo 4.

**Tabla 58**

*Análisis de cada indicador de la componente “apertura hacia la innovación didáctica” de la idoneidad ecológica*

<b>Indicador</b>	<b>Comentario</b>
<b>IEC<sub>2.1</sub></b>	No se promueve el uso de tecnologías como softwares que solucionen o grafiquen los problemas para interpretar lo resuelto en la optimización de funciones de dos variables. Si bien el profesor lo usa en una ocasión, no se vuelve a utilizar, ni se da la sugerencia para que el alumno lo use.
<b>IEC<sub>2.2</sub></b>	No se evidencia que el profesor promueva la investigación o reflexión de los estudiantes acerca de la importancia de la optimización en el contexto económico

*Nota.* Elaboración propia

A modo de resumen, no se evidencia una apertura hacia la innovación didáctica tanto en la promoción del uso de herramientas tecnológicas que resuelva o grafiquen los problemas como la reflexión del tema y su aplicación en la economía. Esto último es importante según lo encontrado en las investigaciones del capítulo porque permite que el alumno relacione la carrera que estudia con aquello que ve en los cursos.

### 6.6.3. Adaptación social, profesional y cultural

La tabla 59 muestra el análisis por cada indicador de la componente codificada por IEC<sub>3</sub> (adaptación social, profesional y cultural) de la idoneidad ecológica según el código de cada indicador asignado en el capítulo 4.

**Tabla 59**

*Análisis de cada indicador de la componente “adaptación social, profesional y cultural” de la idoneidad ecológica*

Indicador	Comentario
IEC <sub>3.1</sub>	Sí se evidencia que las aplicaciones de los significados de la derivada parcial en la optimización están orientados a problemas en contexto económico donde se modelizan funciones objetivo y restricciones de tipo costo, beneficio y producción.

*Nota.* Elaboración propia

A modo de resumen, sí se evidencia una adaptación profesional del significado de la derivada parcial para hallar máximos y mínimos en la optimización bajo un contexto económico. De esta manera, el alumno se familiariza cada vez con los términos propios de su carrera.

### 6.6.4. Conexiones intra e interdisciplinarias

La tabla 60 muestra el análisis por cada indicador de la componente codificada por IEC<sub>4</sub> (conexiones intra e interdisciplinarias) de la idoneidad ecológica según el código de cada indicador asignado en el capítulo 4.

**Tabla 60**

*Análisis de cada indicador de la componente “conexiones intra e interdisciplinarias” de la idoneidad ecológica*

Indicador	Comentario
IEC <sub>4.1</sub>	Se hace referencia a cursos a temas previos donde se abordan temas de optimización de una variable y funciones en contexto económico. Sin embargo, no se evidencia el vínculo del tema de optimización con futuros cursos como los son la microeconomía, macroeconomía u optimización dinámica.

*Nota.* Elaboración propia

A modo de resumen, sí existe conexión del proceso de instrucción con temas o cursos previos, pero falta conectarlo con cursos posteriores para que el alumno tenga una idea de lo que estudia en su carrera y la importancia de la optimización en el ámbito económico.

## Capítulo VI: Consideraciones finales

En este capítulo, se presentan las conclusiones en cuanto al logro de los objetivos formulados en el trabajo de investigación y las conclusiones del análisis del proceso de instrucción descrito en el capítulo anterior. Además, se detallan algunas limitaciones y recomendaciones que deben tomarse en cuenta para futuras investigaciones relacionadas con la optimización de funciones de dos variables.

En este trabajo, se formula como pregunta de investigación lo siguiente: “¿Qué aspectos se pueden mejorar de un proceso de instrucción sobre optimización de funciones de dos variables para estudiantes de Economía?”. Para ello se propone como objetivo principal el de valorar la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción de optimización de funciones reales de dos variables con alumnos de la carrera de Economía. El logro de este objetivo depende de tres objetivos específicos relacionados con la idoneidad didáctica. Para ello, y sobre la base de lo presentado en los capítulos anteriores, se analiza en qué medida se logró cada uno de los objetivos propuestos, lo cual se detalla a continuación:

El primer objetivo específico propuesto es el “identificar los significados de referencia de la derivada parcial involucrados en problemas de optimización de funciones reales de dos variables en instituciones educativas que forman economistas”. Para el logro de este objetivo, se busca información en artículos de investigaciones relacionadas con la derivada parcial y su aplicación en la optimización, así como textos académicos utilizados frecuentemente utilizados en la enseñanza de este tema en los primeros ciclos de universidad. Con ello, se identificaron cuatro significados de la derivada parcial relacionados y utilizados en problemas de optimización de funciones de dos variables en Economía: “la derivada parcial como expresión algebraica”, “la derivada parcial para determinar planos tangentes a un punto”, “la derivada parcial como tasa de variación”, y “la derivada parcial para hallar máximos y mínimos de funciones de dos variables”. Posteriormente, se muestra la relación que hay entre estos significados y la optimización en economía. Se concluye que los significados de “la derivada parcial como expresión algebraica” y “la derivada parcial para hallar máximos y mínimos” están más presentes que los otros dos significados en problemas de optimización relacionados con la economía. Aun así, los significados de “la derivada parcial para determinar planos tangentes” y “la derivada parcial como tasa de variación” pueden usarse en problemas de optimización para profundizar la interpretación de algunos de sus conceptos como es el caso de las funciones marginales y la interpretación del multiplicador de Lagrange como precio sombra.

El segundo objetivo específico propuesto es el de “adaptar y construir indicadores de idoneidad didáctica para un proceso de instrucción idóneo de optimización de funciones reales de dos variables”. Para ello, se toma como referencia los trabajos de Pino-Fan y Parra-

Urrea (2021) y Verón et al. (2024), los cuales proponen indicadores de idoneidad didáctica para procesos de instrucción de funciones reales de una variable y derivadas de funciones reales de una variable, puesto que las funciones y las derivadas son conceptos utilizados en la optimización de funciones. Con ello, se proponen indicadores de idoneidad didáctica para cada uno de los componentes de las facetas epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica que conforman la idoneidad didáctica.

El tercer objetivo específico propuesto es el de “comparar y analizar las semejanzas y diferencias entre el proceso de instrucción idóneo y el proceso de instrucción realizado por el profesor”. Para ello se recopila, mediante la triangulación, diversas fuentes de información relacionadas con el proceso de instrucción: sílabo, presentaciones del profesor, anotaciones de clase, separatas de ejercicios, evaluaciones y respuestas de los alumnos. Para complementar la información, se videograban las sesiones necesarias relacionadas directamente con la optimización de funciones de dos variables y su aplicación con la economía, y se realiza una entrevista semiestructurada con el profesor. Tomando como base los indicadores de idoneidad didáctica que describen un proceso de instrucción idóneo, se comparan y analizan las semejanzas y diferencias cada indicador con la información recabada acerca del proceso de instrucción implementado por el profesor. El análisis y sus conclusiones se presentan a continuación.

Con relación a la idoneidad epistémica del proceso de instrucción, se observa que el profesor presenta situaciones-problema variados de la derivada parcial aplicada a la optimización en economía mediante la modelización de funciones, presenta adecuadamente las definiciones y procedimientos de optimización para optimización sin restricciones y optimización con restricciones. Sin embargo la gran mayoría de problemas se limitaban a un trabajo en representación algebraica de la optimización de funciones en comparación las representaciones gráficas de las funciones y su explicación de máximos, mínimos y restricciones. Las representaciones gráficas únicamente se utilizaron en la introducción de cada tipo de optimización y para ejemplificar el punto silla. Además, el significado de derivada parcial como tasa de cambio no se evidenció en los ejemplos con excepción de la interpretación del multiplicador de Lagrange en un par de problemas. Asimismo, tampoco se evidenció espacios para que el estudiante cree problemas de optimización o situaciones donde se pueda plantear el procedimiento de la optimización para consolidar la comprensión del tema. En general, se concluye que la idoneidad epistémica del proceso de instrucción muestra una buena representatividad entre los que el profesor implementó en sus clases comparado con lo que sería idóneo implementar debido a que varios de los indicadores se cumplen y son evidenciados según lo observado.

Con relación a la idoneidad cognitiva del proceso de instrucción, se observa que los estudiantes sí cuentan con los conocimientos previos para llevar el tema de optimización de

funciones de dos variables, debido a que previamente se evaluaron temas de reglas de derivación, optimización de funciones reales de una variable y el cálculo de derivadas parciales. Además, el profesor suele hacer analogías entre el procedimiento utilizado para optimizar funciones de una variable con el procedimiento propuesto para optimizar funciones de dos variables para que el estudiante pueda comprender que el tema tiene similitudes con un tema antes visto y que, por lo tanto, no es difícil, según afirma el profesor. Según la programación del curso y del profesor, se incluyen dos sesiones prácticas para revisar problemas relacionados con la optimización de funciones de dos variables. Asimismo, estos conocimientos son evaluados en la Evaluación Continua 3 para verificar la apropiación de los significados por parte de los alumnos, lo cual se evidencia en el análisis de las respuestas de los alumnos que lograron comprender, en su mayoría, el procedimiento de optimización con restricciones y optimización sin restricciones pese a los errores de cálculo relacionados con la resolución de sistemas de ecuaciones u otros. También se encontraron problemas que exigen alta demanda cognitiva donde el estudiante requiera plantear funciones y restricciones a partir de cierto contexto. En general, se concluye que la idoneidad cognitiva del proceso de instrucción muestra una buena relación e instrucción de los significados de la derivada parcial y su aplicación con la optimización en los estudiantes debido a que varios de estos indicados se cumplen y son evidenciados según lo observado.

Con relación a la idoneidad interaccional del proceso de instrucción, se observa que el profesor da espacios de autonomía a sus alumnos para resolver problemas en clase, así como da su disposición a supervisar el proceso formativo mediante las actividades de clase en las sesiones prácticas y las evaluaciones. Sin embargo, a pesar de que la presentación del tema es lento y calmado, pero la organización realizada por el profesor en pizarra puede dificultar la interacción con el alumno al hacer anotaciones. Además, no se evidencian espacios para actividades de interacción entre alumnos, como trabajos grupales u otras dinámicas, los cuales son aspectos para tomar en cuenta debido a que son relevantes para que la interacción sea idónea. En general, se concluye que la idoneidad interaccional del proceso de instrucción muestra que a pesar de que se fomenta la autonomía del estudiante y la presentación del tema es claro y calmado, es importante considerar la realización de interacciones grupales y mantener un orden al presentar resoluciones de problemas en pizarra debido para mantener una buena interacción en clase que asegure la comprensión del tema.

Con relación a la idoneidad mediacional del proceso de instrucción, se encuentra que, a pesar de contar con los recursos tecnológicos necesarios, no es frecuentemente utilizado para presentar representaciones gráficas de la optimización y que no se limiten únicamente a representaciones y cálculo algebraicos. Asimismo, las condiciones del aula no son propicias debido al espacio limitado de las carpetas y extensión del salón, el horario temprano de la

clase, así como factores externos como el ruido, puesto que estos factores pueden influir en la comprensión del estudiante e, incluso, en su ausentismo en clase. Pese a ello, el tiempo asignado y planificado para cada sesión fue óptimo para cubrir los temas y, así, revisar varios problemas de optimización. salvo para introducir el tema, explicar el concepto de punto silla y ejemplificar qué es optimizar con restricciones de igualdad. A pesar de ello, se concluye que la idoneidad mediacional evidencia aspectos positivos como el tiempo ideal para dictar el tema de optimización de funciones de dos variables en menos de 6 sesiones, pero también se evidencian otros aspectos de mejora como el horario, la disposición del espacio y el aprovechamiento de herramientas tecnológicas de manera más frecuente para la clase.

Con relación a la idoneidad afectiva del proceso de instrucción, se observa que los temas y la introducción al tema de optimización de funciones de dos variables es orientado más hacia al área matemática y sin enfatizar su relevancia en el área económica, sino hasta resolver problemas de aplicación trabajados en la sesión práctica, lo cual es un aspecto que debe considerarse para un proceso de instrucción de estudiantes que siguen la carrera de Economía. Además, Se encontró que el procedimiento propuesto por el profesor es repetitivo como un “receta”, lo cual es favorable para que el estudiante tenga más confianza en recordar el método, pero que los problemas no se limiten únicamente a aplicar “recetas”, sino también a considerar análisis como es el caso de problemas donde se requiera plantear expresiones que modelicen un contexto el cual no está explícito en el enunciado. Asimismo, el profesor se encuentra pendiente con que el estudiante se sienta cómodo y no rechace el tema. En general, se concluye la idoneidad afectiva del proceso de instrucción describe un buen compromiso por parte del estudiante durante todo el proceso de instrucción, pero aun así hay aspectos por mejorar como la necesidad de enfatizar la importancia de la optimización en la economía y la promoción del análisis de problemas donde se requiera plantear expresión que no estén explícitamente en el enunciado.

Con relación a la idoneidad ecológica del proceso de instrucción, se observa que los significados de las derivadas parciales propuestos en este trabajo se implementaron adecuadamente según el sílabo del curso y los problemas propuestos abarcan situaciones aplicadas a la economía donde se modelizan funciones como utilidad, ingreso, costo, producción, entre otros. Sin embargo, no se evidencian espacios hacia el uso de tecnologías que permitan que el estudiante comprenda la optimización desde otra perspectiva y manipule gráficas. Asimismo, no se evidencia que el profesor promueva la reflexión por la investigación del tema de optimización en la economía. Además, el profesor relaciona el tema de optimización de funciones de dos variables con temas y cursos previos, mas no con cursos posteriores como la “Microeconomía”, “Macroeconomía”, “Matemática avanzada para economistas” u “Optimización y métodos dinámicos”. En general, se concluye que la idoneidad ecológica del proceso de instrucción muestra una buena adaptación con lo

esperado por la institución en cuanto a la formación de economistas profesionales; sin embargo, hay aspectos por mejorar como la promoción de la reflexión del tema de optimización en la economía y la conexión del tema con cursos posteriores para evidenciar su importancia.

En resumen, se concluye que se alcanza el logro de cada uno de los objetivos específicos, los cuales permiten alcanzar el objetivo general mediante el análisis realizado. Asimismo, se logra responder a la pregunta de investigación de manera que, por cada faceta de la idoneidad didáctica, se encuentran aspectos por mejorar en futuros procesos de instrucción de la optimización de funciones de dos variables en estudiantes de Economía.

De esta manera, se concluye también que el marco teórico EOS utilizado y las nociones de sistemas de prácticas e idoneidad didáctica son herramientas teóricas útiles para el análisis de un proceso de instrucción mediante la comparación entre un proceso idóneo y un proceso implementado por medio de indicadores de idoneidad.

Algunos aspectos que limitaron este trabajo de investigación son el tiempo para coordinar las observaciones de clase y entrevista con el profesor debido a la programación de las seis sesiones observadas y los permisos requeridos para llevar a cabo la investigación. A pesar de que no se encontraron suficientes investigaciones de referencia que abordaran temas del cálculo multivariable haciendo uso de la idoneidad didáctica del EOS, el presente trabajo resulta un gran aporte a la investigación en didáctica de las matemáticas en el cálculo multivariable, particularmente, en la optimización de funciones de dos variables en estudiantes de Economía, puesto que propone indicadores de idoneidad didáctica, así como la identificación de significados de referencia de la derivada parcial involucrados en la optimización.

Se recomienda, para futuros análisis de procesos de instrucción de optimización de funciones de dos variables, adaptar los indicadores propuestos en este trabajo para el grupo objetivo de estudiantes que se pretenda analizar, sean alumnos de diferentes carreras o en instituciones educativas que usen otros libros de texto. Asimismo, se plantea ampliar esta investigación a procesos de instrucción donde se enseñe optimización de funciones de más de dos variables, así como optimización cuando las restricciones no son de igualdad, sino de desigualdad. Además, se sugiere investigar qué otras herramientas tecnológicas existen y se utilicen en procesos de instrucción donde se enseñe la optimización matemática aplicada a diferentes rubros profesionales como la ingeniería o la administración. Finalmente, se recomienda investigar qué otros métodos de optimización matemática, donde no se utilicen las derivadas parciales, existen y cuáles son sus aplicaciones en el ámbito profesional.

## Referencias

- Báez, N., Blanco, R. y Heredia, W. (2022). Los problemas de optimización en el cálculo diferencial de una variable. *Transformación*, 18(2), 317-335. <http://ref.scielo.org/2vybc4>
- Balcaza, T. (2018). *Investigación acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la optimización en Bachillerato desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico y de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica* [Tesis de doctorado, Universidad de Jaén]. RUJA: Repositorio Institucional de Producción Científica. <https://hdl.handle.net/10953/1065>
- Balcaza, T., Contreras, A. y Font, V. (2017). Análisis de libros de texto sobre la optimización en el bachillerato. *Bolema*, 31(59), 1061-1081. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a11>
- Bašić, M. y Milin, Ž. (2022). Geometrical Reasoning in the Teaching and Learning of Integrals of Multivariable Functions. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 8, 245-268. <https://doi.org/10.1007/s40753-022-00179-8>
- Borji, V., Martínez-Planell, R. y Trigueros M. (2023). University Students' Understanding of Directional Derivative: An APOS Analysis. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 11, 116-145. <https://doi.org/10.1007/s40753-023-00225-z>
- Brandes, H. y Hardy, N. (2018). From single to multi-variable Calculus: a transition?. *Second Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics 2018*, Kristiansand, Noruega. <https://hal.science/hal-01849952>
- Breda, A., Font, V. y Lima, V. (2015). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 8(2), 1-41. <http://hdl.handle.net/10923/8814>
- Campo, E., Cano, J. y Gómez-Montoya, R. (2019). Optimización de costos de producción agregada en empresas del sector textil. *Ingeniare. Revista chilena de ingeniería*, 28(3), 461-475. <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-33052020000300461>
- Castro, M., Sánchez, A. y Rosero, L. (2023). Cálculo visual de integrales utilizando recursos didácticos. *Dominio de las ciencias*, 9(4), 375-387. <https://doi.org/10.23857/dc.v9i4.3596>
- Chiang, A. y Wainwright, K. (2006). *Métodos fundamentales de economía matemática* (F. Sánchez y R. Arriola, Trad., 4ª ed.). McGrawHill.
- Cordero, F., Del Valle, T. y Morales, A. (2019). Usos de la optimización de ingenieros en formación: el rol de la ingeniería mecatrónica y de la obra de Lagrange. *Revista*

- Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 22(2), 185-212.  
<https://doi.org/10.12802/relime.19.2223>
- Dorko, A. y Weber, E. (2014). Generalising calculus ideas from two dimensions to three: how multivariable calculus students think about domain and range. *Research in Mathematics Education*, 16(3), 269-287.  
<https://doi.org/10.1080/14794802.2014.919873>
- Fonseca, J. y Alfaro, C. (2018). El cálculo diferencial e integral en una variable en la formación inicial de docentes de matemática en Costa Rica. *Revista Educación*, 42(2), 1-22.  
<https://doi.org/10.15517/revedu.v42i2.25844>
- Gallego, L. y Bermúdez, E. (2013). Análisis de la concepción de la actividad de optimizar, desde una ingeniería didáctica. *Revista científica*, 17(2), 216-219.  
<https://doi.org/10.14483/23448350.6486>
- García, L., Azcárate, C. y Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 85-116. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33590105>
- Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22(2), 237-284.  
[https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/04\\_enfoque\\_ontosemiotico.pdf](https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/04_enfoque_ontosemiotico.pdf)
- Godino, J. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII Conferencia Interamericana de Educação Matemática.*, Recife, Brasil.  
[https://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino\\_indicadores\\_idoneidad.pdf](https://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf)
- Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 14(3), 325-355.  
[https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03\\_SignificadosIP\\_RDM94.pdf](https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf)
- Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico y la instrucción matemática. 47-78.  
[https://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado\\_ud/publicaciones/parte\\_i\\_un\\_enfoque\\_ontosemiotico\\_del\\_conocimiento\\_y\\_instruccion\\_matematica.pdf](https://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/parte_i_un_enfoque_ontosemiotico_del_conocimiento_y_instruccion_matematica.pdf)
- Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2020). El enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 12(2), 47-59. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.25>
- Godino, J., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradígma*, 27(2), 221-252.  
[https://ve.scielo.org/scielo.php?pid=S1011-22512006000200011&script=sci\\_abstract](https://ve.scielo.org/scielo.php?pid=S1011-22512006000200011&script=sci_abstract)

- Godino, J., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 90-113. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05>
- Gómez, W., Tovar, S. y Ramírez, G. (2016). La teoría de la idoneidad didáctica: una posible herramienta para analizar prácticas pedagógicas en matemáticas. *Revista Boletín Redipe*, 5(10), 92-101. <https://revista.redipe.org/index.php/1/article/view/129>
- Gutiérrez, E. (2019). *Conocimientos especializados del profesor sobre los sistemas de ecuaciones lineales en un curso de álgebra lineal para estudiantes de ingeniería* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio PUCP. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/15247>
- Harel, G. (2021). The learning and teaching of multivariable calculus: a DNR perspective. *ZDM – Mathematics Education*, 53, 709-721. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01223-8>
- Hernández, R., Fernández P. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. (6ª ed.). McGraw Hill Education.
- Hitier, M. y González-Martín, A. (2022). Derivatives and the Study of Motion at the Intersection of Calculus and Mechanics: a Praxeological Analysis of Practices at the College Level. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 8, 293-317. <https://doi.org/10.1007/s40753-022-00182-z>
- Jiménez, V. (2012). El estudio de caso y su implementación en la investigación. *Revista Internacional de Investigación en Ciencias Sociales*, 8(1), 141-150. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3999526>
- Larios, V., Páez, R. y Moreno, H. (2021). Significados sobre la derivada evidenciados por alumnos de carreras de Ingeniería en una universidad mexicana. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 20, 105-124. <https://doi.org/10.35763/aiem20.4002>
- López, C., Chanca, E. y Esteban, E. (2023). Optimización de funciones con derivadas en aula invertida: estudio a través de múltiples estrategias didácticas. *Práxis Educativa*, 18, 1-17. <https://doi.org/10.5212/PraxEduc.v.18.21394.019>
- Malaspina, U. (2012). Resolución de problemas y estímulo del pensamiento optimizador en la educación básica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 7(10), 165-181. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/10567>
- Malet, O., Giacomone, B. y Repetto, A. (2021). La Idoneidad Didáctica como herramienta metodológica: desarrollo y contextos de uso. *Revemop*, 3, 1-23. <https://doi.org/10.33532/revemop.e202110>

- Martínez-Planell, R. y Trigueros M. (2021). Multivariable calculus results in different countries. *ZDM – Mathematics Education*, 53, 695-707. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01233-6>
- Meneu, R., Pérez-Salamero, J. y Ventura, M. (1999). *Fundamentos de Optimización Matemática en Economía*. <http://hdl.handle.net/10550/25951>
- Mkhatshwa, T. (2019). An exploratory study of calculus students' understanding of multivariable optimization problems. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Utrecht, Países Bajos. <https://hal.science/hal-02422660>
- Mkhatshwa, T. (2021). A study of calculus students' difficulties, approaches and ability to solve multivariable optimization problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(11), 2987–3014. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1927227>
- Morales, A., Damián, A., Locía E. y Jerónimo, M. (2022). Uso de GeoGebra para mejorar la comprensión de la resolución de problemas de optimización en el bachillerato. *Números*, 111, 71-89. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8516166>
- Muzangwa, J. y Ogonnaya, U. (2022). Undergraduate Mathematics Education Students' Visual Representations of Multivariable Functions. *Edumatica Jurnal Pendidikan Matematika*, 12(3), 212-221. <https://doi.org/10.22437/edumatica.v12i03.15712>
- Pino-Fan, L., Godino, P. y Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (segunda parte). *REVEMAT*, 8, 1-47.
- Pino-Fan, L. y Parra-Urrea, Y. (2021). Criterios para orientar el diseño y la reflexión de clases sobre funciones. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 91, 45-54.
- Pontificia Universidad Católica del Perú. (2024). *Programa Analítico Matemática para Economía y Finanzas 2* [Sílabo del curso]. Estudios Generales Letras.
- Ramírez, B. (2021). GeoGebra en 2D y 3D como recurso didáctico en un curso de integración múltiple: una experiencia de enseñanza-aprendizaje. *Matemática, Educación e Internet*, 21(1), 1-18. <https://doi.org/10.18845/rdmei.v21i1.5341>
- Ramírez, R., Ibarra, S. y Pino-Fan, L. (2020). Prácticas evaluativas y significados evaluados por profesores del bachillerato mexicano sobre la noción de ecuación lineal. *Educación Matemática*, 32(2), 69-98. <https://doi.org/10.24844/em3202.03>
- Requelme, R., Reyes, C. y Lozano, J. (2021). Optimización matemática para los agentes económicos. *Revista ciencia y tecnología*, 17(3), 81-89. <https://revistas.unitru.edu.pe/index.php/PGM/article/view/3836>

- Rob, E. y Steven, J. (2023). The Teaching and Learning of Definite Integrals: A Special Issue Guest Editorial. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 9(1), 1–7. <https://doi.org/10.1007/s40753-023-00214-2>
- Rojas-Escribano, L., Báez-Rojas, J. y Corona-Galindo, M. (2017). Propuesta didáctica para la enseñanza del tema de optimización, apoyado con Excel y Geogebra, para estudiantes de bachillerato. *El cálculo y su enseñanza*, 9(1), 52-63. <https://doi.org/10.61174/recacym.v9i1.18>
- Stewart, J. (2012a). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*. (M. Rodríguez, Trad., 7ª ed.). Cengage Learning.
- Stewart, J. (2012b). *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*. (M. Rodríguez, Trad., 7ª ed.). Cengage Learning.
- Sydsaeter, K., Hammond, P., y Carvajal, A. (2012). *Matemáticas para el análisis económico*. (2ª ed.). Pearson Education.
- Sydsaeter, K., Hammond, P., Seierstad, A. y Strøm, A. (2008). *Further Mathematics for Economic Analysis*. (2ª ed.). Pearson Education.
- Sydsaeter, K., Hammond, P., Strøm, A. y Carvajal, A. (2016). *Essential Mathematics for Economic Analysis*. (6ª ed.). Pearson Education.
- Tenorio, A. y Martín, A. (2015). Explicando la optimización de funciones con el uso de software de álgebra computacional y geometría dinámica. *XXIII Jornadas ASEPUMA – XI Encuentro Internacional*, Gijón, España. <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/6010318.pdf>
- Trigueros, M., Martínez-Planell, R. y McGee, D. (2018). Student understanding of the relation between tangent plane and the total differential of two-variable functions. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4, 181-197. <https://doi.org/10.1007/s40753-017-0062-5>
- Universidad Antonio Ruiz de Montoya. (2024). *Sílabo Matemática para Economía y Gestión 2* [Sílabo del curso]. Facultad de Ciencias Sociales.
- Universidad Nacional Mayor de San Marcos. (2020). *Sílabo Matemática para Economía 2* [Sílabo del curso]. Facultad de Ciencias Económicas y de la Gestión.
- Universidad Ricardo Palma. (2021). *Sílabo Economía Matemática 2* [Sílabo del curso]. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales.
- Verón, M., Giacomone, B. y Pino-Fan, L. (2024). Guía de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de la diferencial. *Uniciencia*, 38(1), 1-22. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.38-1.2>
- Yáñez, J. (2016). *El conocimiento especializado del profesor de matemática sobre la resolución de problemas de optimización de funciones aplicando el concepto de derivada: una investigación-acción*. [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica]



## Anexos

### Anexo 1 Guía de observación de clases

<b>1 – IDONEIDAD EPISTÉMICA (IE)</b>		
<b>Componente – Indicador</b>		<b>Comentarios</b>
Situaciones-problema <b>(IE1.1)</b>	Se presentan problemas que refuerzan el uso de las derivadas parciales como expresiones algebraicas. Por ejemplo, determinar las derivadas parciales de primer y segundo orden para funciones de dos variables mediante el cálculo de expresiones de derivadas parciales $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ .	
Situaciones-problema <b>(IE1.2)</b>	Se presentan problemas donde se use el significado de la derivada parcial como tasa de variación (la aproximación del incremento $\Delta z$ de la función $f$ según sus variables, precio sombra de la restricción o función marginal), así como el significado de la derivada parcial para determinar un plano tangente (ecuación del plano tangente $\mathcal{P}$ en un punto $(x_0, y_0)$ ).	
Situaciones-problema <b>(IE1.3)</b>	Se presentan problemas que ejemplifiquen y refuercen el manejo e interpretación de representaciones algebraicas y gráficas de funciones de dos variables, sus derivadas parciales y el plano tangente. Por ejemplo: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Se pide graficar la función <math>f(x, y) = x^2 + y^2</math>, determinar sus derivadas parciales de primer y segundo orden respecto de sus variables <math>x, y</math>. Se pide graficar o visualizar sus gráficas y el plano tangente en cierto punto.</li> </ul>	
Situaciones-problema <b>(IE1.4)</b>	Se presentan <u>problemas intra-matemáticos</u> que aborden el significado de referencia de “la derivada parcial para para hallar máximos y mínimos” <u>sin restricciones</u> de la forma $\max f(x, y)$ o $\min f(x, y)$ . Por ejemplo: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Determine los valores máximos y mínimos de la función <math>f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1</math>.</li> </ul>	

<p>Situaciones-problema (IE1.5)</p>	<p>Se presentan <u>problemas intra-matemáticos</u> que aborden el significado de referencia de “la derivada parcial para hallar máximos y mínimos”, pero <u>que no tengan máximos ni mínimos</u>. Por ejemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Se pide optimizar y determinar si la siguiente función tiene valores máximos o mínimos <math>f(x, y) = x^2 - y^2</math>. En este ejemplo, se obtiene que el punto (0, 0) es un punto silla.</li> </ul>	
<p>Situaciones-problema (IE1.6)</p>	<p>Se presentan <u>problemas intra-matemáticos</u> que aborden el significado de referencia de “la derivada parcial para hallar máximos y mínimos” <u>con restricciones de igualdad</u> mediante el método de los multiplicadores de Lagrange de algunas de las siguientes formas:</p> $\max f(x, y) \text{ sujeto a } g(x, y) = c$ $\min f(x, y) \text{ sujeto a } g(x, y) = c$ <p>Por ejemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Determine los valores máximos y mínimos de la función <math>f(x, y) = x^2 + 2y^2</math> sujeto a <math>x^2 + y^2 = 1</math>.</li> </ul>	
<p>Situaciones-problema (IE1.7)</p>	<p>Se presentan <u>problemas extra-matemáticos</u> que aborden el significado de referencia de “la derivada parcial para hallar máximos y mínimos” aplicados a contextos económicos donde se requiera optimizar funciones que modelen situaciones económicas de dos variables como ingreso, costo o producción, <u>sin restricciones de igualdad</u>. Por ejemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Minimice la función <math>C(x, y) = \frac{x^2}{100} - 10x + \frac{y^3}{300} - 9y + 300</math>, la cual modela el costo de producción de cierta empresa donde <math>x, y</math> corresponden a los números de unidades de producción de dos de sus sedes más importantes.</li> </ul>	
<p>Situaciones-problema (IE1.8)</p>	<p>Se presentan <u>problemas extra-matemáticos</u> que aborden el significado de referencia de “la derivada parcial para hallar máximos y mínimos” aplicados a contextos económicos donde se requiera optimizar funciones que modelen situaciones económicas de dos variables como ingreso, costo o producción, <u>sujetas a restricciones de igualdad</u>. Por ejemplo:</p>	

	<ul style="list-style-type: none"> <li>Minimice la función <math>C(x, y) = \frac{x^2}{100} - 10x + \frac{y^3}{300} - 9y + 300</math>, la cual modela el costo de producción de cierta empresa donde <math>x, y</math> corresponden a los números de unidades de producción de dos de sus sedes más importantes si la producción total debe ser igual a 1000 unidades.</li> </ul>	
<p>Situaciones-problema (IE1.9)</p>	<p>Se proponen espacios para la generación de problemas tanto intra como extra-matemáticos de los significados de las derivadas parciales de funciones de dos variables y, particularmente, de problemas de optimización. Por ejemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Busque o modele un problema de optimización de una función cuyas variables se relacionen con conceptos económicos como el ingreso o el costo.</li> </ul>	
<p>Lenguaje (IE2.1)</p>	<p>Se utilizan diferentes representaciones para ejemplificar y explicar en qué consiste la optimización de funciones de dos variables: algebraica (expresión <math>f(x, y)</math>) y gráfica en tres dimensiones (encontrar el punto más alto o bajo de la gráfica).</p>	
<p>Lenguaje (IE2.2)</p>	<p>Se utiliza un lenguaje apropiado para dirigirse a los significados de referencia de “derivada parcial para hallar máximos y mínimos” (uso adecuado de las notaciones de derivadas parciales, multiplicador de Lagrange y funciones especiales como la función lagrangiana).</p>	
<p>Lenguaje (IE2.3)</p>	<p>Se utiliza un lenguaje apropiado para explicar y dirigirse a los términos económicos presentes en problemas que modelen situaciones económicas: ingreso, costo, capital, trabajo, beneficio, producción, marginalidad, precio sombra, optimización.</p>	
<p>Reglas o elementos regulativos (Definiciones, proposiciones, procedimientos) (IE3.1)</p>	<p>Se presentan las definiciones y propiedades del significado de “derivada parcial para hallar máximos y mínimos”. Entre sus definiciones, se presentan los conceptos de optimización, máximos, mínimos, punto silla, función objetivo, restricción de igualdad, multiplicador de Lagrange, condiciones necesarias de optimización, función lagrangiana, método del multiplicador de Lagrange para optimización.</p>	

<p>Reglas o elementos regulativos (Definiciones, proposiciones, procedimientos) <b>(IE3.2)</b></p>	<p>Se presentan los procedimientos para optimizar funciones de dos variables sin y con restricciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• En el caso de que no existan restricciones, se presenta el procedimiento: determinar los puntos críticos con las derivadas parciales de primer orden; luego, evaluar los valores máximos y mínimos a partir del determinante de la matriz Hessiana.</li> <li>• En el caso de que existan restricciones, se presenta el método del multiplicador de Lagrange, donde se construye la función lagrangiana y se calculan las derivadas parciales de primer orden para, posteriormente evaluar los resultados en la función y resolver el problema.</li> </ul>	
<p>Argumentos <b>(IE4.1)</b></p>	<p>Las explicaciones son adecuadas para el nivel académico superior de estudiantes de economía. Se mantiene una formalidad algebraica de las operaciones y expresiones utilizadas como fórmulas o métodos.</p>	
<p>Argumentos <b>(IE4.2)</b></p>	<p>Se proponen situaciones donde el estudiante tiene que utilizar las definiciones y procedimientos de la optimización de funciones de dos variables para justificar sus respuestas.</p>	
<p>Relaciones <b>(IE5.1)</b></p>	<p>Las definiciones, procedimientos y problemas (intra o extra-matemáticos) se relacionan entre sí.</p>	
<p>Relaciones <b>(IE5.1)</b></p>	<p>Se identifican y articulan el significado de la derivada parcial para hallar máximos y mínimos con el significado de la derivada parcial como expresión algebraica.</p>	
<p>Errores, ambigüedades y creencias <b>(IE6.1)</b></p>	<p>Se evita que el trabajo con la optimización de funciones reales de dos variables se limite únicamente al uso de procedimientos algebraicos al presentarse procedimientos de tipo algebraico, sino también se promueve la interpretación gráfica de la optimización.</p>	
<p>Errores, ambigüedades y creencias <b>(IE6.2)</b></p>	<p>El trabajo con la optimización de funciones de dos variables no se limita únicamente a un contexto intra-matemático, sino también extra-matemático relacionado con funciones que modelizan situaciones económicas.</p>	

<p>Errores, ambigüedades y creencias (IE<sub>6.3</sub>)</p>	<p>Se presentan problemas cuyas funciones de dos variables pueden resultar ambiguas al parecer resultan complicadas de graficar a lápiz y papel o incluso no parecerían graficables mediante el uso de un software, por lo que se hace necesario utilizar los métodos algebraicos para su resolución. Por ejemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• “Se pide graficar <math>f(x, y) = x^2 - y^3 - 2xy</math> y evaluar si posee máximos y mínimos. En caso no se pueda graficar, determinar algebraicamente si se puede optimizar la función”. En este ejemplo, la función no es fácil de dibujarla o puede resultar complicada mediante las trazas de XY, YZ o XZ y curvas de nivel. Aunque se recurra a programas tecnológicos para mostrar la gráfica, esta no sería útil para identificar sus valores máximos y mínimos a no ser que se modifique la escala. Por lo que los métodos algebraicos de optimización serían útiles para demostrar que sí se puede optimizar.</li> </ul>	
---	--	--



<b>2 – IDONEIDAD COGNITIVA (IC)</b>		
<b>Componente – Indicador</b>		<b>Comentarios</b>
Conocimientos previos <b>(IC1.1)</b>	Se comprueba que los alumnos tienen los conocimientos previos y necesarios para introducir el tema de optimización de funciones de dos variables: reglas de derivación en una variable, optimización de funciones reales de una variable, representación algebraica y gráfica de una función de dos variables, cálculo de derivadas parciales, funciones que modelan situaciones económicas (tales como ingreso, costo, beneficio, producción), tasa de cambio de una función de dos variables, marginalidad de funciones y plano tangente.	
Conocimientos previos <b>(IC1.2)</b>	Se vinculan los conocimientos previos (matrices, las reglas de derivación de funciones de una variable, el procedimiento para optimizar funciones de una variable, representaciones algebraico-gráficas de funciones reales de dos variables) con la optimización de funciones de dos variables.	
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales <b>(IC2.1)</b>	Se incluyen actividades de ampliación y analogías. Por ejemplo, se presentan similitudes entre los procedimientos de optimización de funciones de una y dos variables.	
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales <b>(IC2.2)</b>	Se incluyen actividades de refuerzo para las clases teóricas donde se implique trabajar con el cálculo de derivadas parciales como ejemplos de optimización de funciones de dos variables.	
Aprendizajes <b>(IC3.1)</b>	Se emplean instrumentos de evaluación que verifiquen la apropiación de los significados pretendidos por el profesor como parte de los significados personales de los estudiantes.	

<p>Alta demanda cognitiva <b>(IC4.1)</b></p>	<p>Se incluyen problemas matemáticos donde no se dé la función explícitamente y el alumno deba interpretar el enunciado y modelar una función de dos variables en determinada situación económica para, posteriormente, optimizarla. Por ejemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Se establecen reglas para determinar la función ingreso en diferentes sedes de una empresa. En una sede, el precio de <math>x</math> unidades es igual a <math>(2x - 1)</math> soles. En otra sede, el precio de <math>y</math> unidades es igual a <math>(1.5y + 2)</math> soles. Determine el ingreso total por ambas sedes.</li> </ul>	
<p>Alta demanda cognitiva <b>(IC4.2)</b></p>	<p>Se incluyen problemas matemáticos donde no se dé explícitamente la restricción de optimización y el alumno deba interpretar el enunciado y modelar la restricción de una función de dos variables en determinada situación económica para, posteriormente, optimizarla. Por ejemplo,</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• En una función de costos de producción que depende de las cantidades producidas <math>x_1, x_2</math> se indica que estas dos cantidades deben sumar entre sí 12 000 unidades de producción. (De esta forma, se modela la restricción <math>x_1 + x_2 = 12\ 000</math>.)</li> </ul>	
<p>Alta demanda cognitiva <b>(IC4.3)</b></p>	<p>Se incluyen problemas donde no se indique explícitamente el objetivo de maximizar o minimizar una función, por lo que el alumno se ve obligado a comprobar el tipo de problema de optimización (si se busca maximizar o minimizar una función de dos variables). Por ejemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Se pide optimizar la función <math>f(x, y) = x^4 + 3xy^2 + 2x^2y</math>. (En este caso, en el enunciado no se indica si se busca maximizar o minimizar, por lo que el estudiante deberá determinarlo mediante los procedimientos algebraicos con el resultado de los puntos críticos de la matriz hessiana.)</li> </ul>	

### 3 – Indicadores de idoneidad interaccional (II)

<b>Componente – Indicador</b>		<b>Comentarios</b>
Interacción docente-estudiante <b>(II<sub>1.1</sub>)</b>	El profesor hace una presentación clara y organizada del tema: buena organización en la pizarra, y dicta con calma y lento.	
Interacción docente-estudiante <b>(II<sub>1.2</sub>)</b>	El profesor enfatiza sobre los conceptos y aplicaciones de la optimización de funciones reales de dos variables en situaciones económicas.	
Interacción docente-estudiante <b>(II<sub>1.3</sub>)</b>	El profesor anticipa conceptos erróneos, preguntas y respuestas de los alumnos que puedan surgir durante la explicación y predice cómo resolverlos. Para ello, propone ejemplos adicionales que permitan despejar las dudas.	
Interacción docente-estudiante <b>(II<sub>1.4</sub>)</b>	El profesor comprende e interpreta la participación de los alumnos: silencio, expresiones faciales, preguntas, tomar notas de clase, distracciones u otros.	
Interacción docente-estudiante <b>(II<sub>1.5</sub>)</b>	Se usan diversos recursos retóricos para captar atención. Por ejemplo, se usan analogías para explicar los conceptos de optimización, maximización, minimización y restricciones.	
Interacción docente-estudiante <b>(II<sub>1.6</sub>)</b>	Se facilita la inclusión de los alumnos en la clase mediante la participación o incentivación al diálogo entre diversos alumnos.	

Interacciones entre estudiantes <b>(II.2.1)</b>	Se promueve el diálogo y comunicación entre estudiantes para las dinámicas de clase, como parte de la discusión de algún concepto o resolución de algún problema.	
Interacciones entre estudiantes <b>(II.2.2)</b>	Se promueve la participación grupal y se evita la exclusión al dar algún espacio para resolver problemas.	
Autonomía <b>(II.3.1)</b>	Se observan momentos donde los estudiantes resuelven problemas por su cuenta, exploran/proponen nuevos ejemplos y contraejemplos, y conectan el concepto de optimización con los temas o cursos previos.	
Autonomía <b>(II.3.2)</b>	El profesor promueve el estudio y práctica de las separatas de ejercicios por cuenta propia del alumno fuera del horario de clases.	
Evaluación formativa <b>(II.4.1)</b>	El docente observa y supervisa sistemáticamente el progreso cognitivo de los estudiantes a través de las actividades de clase, tareas, atención de consultas y control de evaluaciones.	



#### 4 – Indicadores de idoneidad mediacional (IM)

Componente – Indicador		Comentarios
Recursos materiales <b>(IM<sub>1.1</sub>)</b>	Se utilizan diversos recursos manipulativos y tecnológicos que permitan introducir e interpretar el significado de “derivada parcial para hallar máximos y mínimos” de dos variables (entre ellas, sus definiciones, representaciones y sus procedimientos). Por ejemplo, se pueden utilizar representaciones gráficas de libros de texto (en una presentación de diapositivas) o graficadoras gratuitas en línea como GeoGebra y WolframAlpha.	
Recursos materiales <b>(IM<sub>1.2</sub>)</b>	El profesor o estudiante emplean distintas visualizaciones de la optimización de funciones de dos variables. Por ejemplo, se utiliza un recurso en línea que permita graficar una función y, así, se logra observar que el valor que maximiza o minimiza la función corresponde al punto más alto o bajo de la gráfica de la función.	
Número de alumnos, horario y condiciones del aula <b>(IM<sub>2.1</sub>)</b>	El número y distribución de alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida por el profesor.	
Número de alumnos, horario y condiciones del aula <b>(IM<sub>2.2</sub>)</b>	El horario es apropiado y se adecúa el proceso de instrucción según la hora.	
Número de alumnos, horario y condiciones del aula <b>(IM<sub>2.3</sub>)</b>	El espacio educativo es adecuado para el desarrollo de la clase.	

Tiempo <b>(IM<sub>3.1</sub>)</b>	Los significados pretendidos de la derivada parcial y sus relaciones con la economía se desarrollaron adecuadamente durante el tiempo disponible de la clase.	
Tiempo <b>(IM<sub>3.2</sub>)</b>	El tiempo empleado para las sesiones prácticas es el adecuado para reforzar los problemas de optimización de funciones de variables.	
Tiempo <b>(IM<sub>3.3</sub>)</b>	Se dispone de tiempo para asesorías o resolución de problemas.	



<b>5 – Indicadores de idoneidad afectiva (IA)</b>		
<b>Componente</b>	<b>Indicador</b>	<b>Comentarios</b>
Intereses y necesidades <b>(IA<sub>1.1</sub>)</b>	Se presenta el tema de optimización de funciones de dos variables como una herramienta útil en la resolución de problemas matemáticos en el área económica para la toma de decisiones, relacionando los términos económicos vistos en clase (ingresos, costos, beneficios, producción, capital, trabajo, marginalidad, entre otros).	
Intereses y necesidades <b>(IA<sub>1.2</sub>)</b>	Se proponen problemas o tareas de modelización relacionados con los conceptos económicos vistos previamente para los estudiantes.	
Actitudes <b>(IA<sub>2.1</sub>)</b>	Se promueve la participación en actividades de clase (discusiones, trabajos académicos, asesorías, evaluaciones u otros), así como la perseverancia y responsabilidad.	
Actitudes <b>(IA<sub>2.2</sub>)</b>	Se promueve y favorece el razonamiento lógico, la argumentación, análisis y otras destrezas para resolver problemas, de manera que se evite que el alumno no se mecanice al resolver un problema de optimización sin analizar lo que resuelve.	
Emociones <b>(IA<sub>3.1</sub>)</b>	Se promueve y refuerza el compromiso del estudiante con el curso, evitando el rechazo al estudio del tema de optimización de funciones de dos variables.	

<b>6 – Indicadores de idoneidad ecológica (IE)</b>		
<b>Componente – Indicador</b>		<b>Comentarios</b>
Adaptación al currículo <b>(IE1.1)</b>	Los significados de las derivadas parciales y aquellos conceptos relacionados con la optimización se implementan y evalúan según las directrices de la institución. Por ejemplo, tomando como referencia el sílabo del curso “Matemática para Gestión y Economía” se verifica que se desarrollan los temas y aspectos propuestos de las derivadas parciales, así como su aplicación a la carrera Economía.	
Apertura hacia la innovación didáctica <b>(IE2.1)</b>	Se promueve el uso de tecnologías o nuevos softwares como apoyo para la comprensión de la optimización de funciones de dos variables.	
Apertura hacia la innovación didáctica <b>(IE2.2)</b>	Se promueve la investigación o reflexión práctica del tema en contexto matemático, económico u otras áreas.	
Adaptación social, profesional y cultural <b>(IE3.1)</b>	Los significados de las derivadas parciales y el concepto de optimización contribuyen a la formación profesional de los estudiantes. Los significados pretendidos están orientados hacia un contexto económico.	
Conexiones intra e interdisciplinarias <b>(IE4.1)</b>	Se vincula la optimización de funciones reales de dos variables con otros objetos que se dictaron antes o se dictarán posteriormente en el curso, así como en cursos futuros relacionados con la carrera Economía	

**Anexo 2** Cuestionario de entrevista semiestructurada

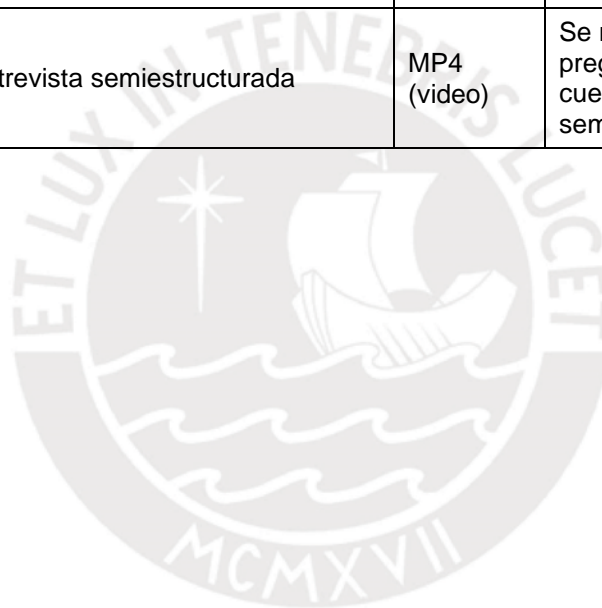
Información	Preguntas
Experiencia de docencia	¿Qué nivel de conocimientos matemáticos previos considera que debe tener un alumno que llevará el curso “Matemática para Gestión y Economía 2” y cuál es su perspectiva con este grupo?
	¿Qué aspectos de la matemática toma en cuenta para dictar a un grupo de alumno de economía en comparación con alumnos que llevan cursos similares en otras carreras, como ingeniería?
Planificación de la clase	¿Qué fuentes utilizó para preparar la teoría del tema?
	¿Qué aspectos considera necesarios que deben abordarse en la optimización de funciones reales de varias variables para este grupo de alumnos que cursan carreras de administración o economía?
	¿Qué fuentes utilizó para preparar los documentos de ejercicios adicionales para el tema?
Desarrollo de las clases	¿Qué preguntas, dudas, errores anticipa de los alumnos y cómo las resuelve?
	¿Cómo notó la participación e interés por el tema por parte de los alumnos?
Evaluación del aprendizaje	¿Qué tipo de preguntas selecciona para evaluar a los alumnos y de dónde obtiene dichas preguntas?
	¿Cómo considera el desempeño de sus estudiantes en este horario comparado con otros grupos, incluso en otros ciclos?
Reflexión del tema	¿Qué tan relevante considera este tema para un estudiante de la carrera de economía, tanto académica como profesionalmente?

### Anexo 3 Matriz de documentación

N°	Tipo de documento	Nombre del documento	Contenido	Formato	Relevancia para tesis	Fuente	Observaciones
1	Sílabo	Silabo-Mate-Econ-Gest-2	Datos generales, sumilla, objetivos del curso, contenidos temáticos, cronograma, metodología, sistema de evaluación, bibliografía	PDF	Contextualiza el tema en el curso, así como el diseño curricular del curso en el ciclo.	Docente	-
2	Diapositiva de clases	00 09.1 Clase 1-SEM9	Funciones homogéneas de dos variables (definición, teorema de Euler y aplicaciones económicas) Máximos y mínimos (definición de global y local, teorema de la condición necesaria de primer orden)	PDF	<u>Clase teórico-práctica</u> Introducción teórica, definición y teorema del tema	Docente	Incluye algunos ejemplos. El documento corresponde a diapositivas tomadas de un libro.
3	Diapositiva de clases	00 09.2 Clase 2-SEM9	Máximos y mínimos (matriz Hessiana, tema de la condición suficiente de segundo orden y resolución para más de dos variables)	PDF	<u>Clase teórico-práctica</u> Teoría del tema (procedimientos para optimizar sin restricciones)	Docente	Incluye algunos ejemplos. El documento corresponde a diapositivas tomadas de un libro.
4	Diapositiva de clases	00 10.1 Clase 1-SEM 10	Optimización con restricciones de igualdad (teorema de Lagrange, condiciones suficientes para extremo local, significado del multiplicador $\lambda$ y aplicaciones)	PDF	<u>Clase teórico-práctica</u> Teoría del tema (procedimientos para optimizar con restricciones de igualdad)	Docente	Incluye algunos ejemplos. El documento corresponde a diapositivas tomadas de un libro.
5	Diapositiva de clases	00 10.2 Clase 2-SEM10	Optimización (ejemplos)	PDF	<u>Clase teórico-práctica</u> Ejemplos adicionales de optimización	Docente	Incluye únicamente ejemplos tomados de un libro.

6	Separata de ejercicios	00 09.3 Sem 9 Clase 3	Problemas: - funciones homogéneas (3) - determinación de puntos críticos (1) - aplicaciones de la optimización sin restricciones (5)	PDF Word	<u>Clase práctica</u> Problemas	Docente	No se incluyen solución ni respuestas.
7	Separata de ejercicios	00 10.3 Sem 10 Clase 3	Problemas: - determinación de puntos críticos con el método de multiplicadores de Lagrange (2) - aplicaciones de la optimización con restricciones (5)	PDF Word	<u>Clase práctica</u> Problemas	Docente	No se incluyen solución ni respuestas.
8	Evaluación	Evaluación continua 3	Contiene 5 preguntas: 1. Problema con funciones homogéneas 2. Problema extramatemático de optimización con restricción 3. Problema intramatemático de optimización con restricción 4. Problema extramatemático de optimización con restricción 5. Problema intramatemático de optimización sin restricción	Imágenes (JPG)	Recurso evaluativo	Docente	Se tiene fotos de las respuestas de los alumnos.
9	Anotaciones del profesor	00 09.3 Sem 9 Clase 3 solucionario	Resolución de la separata de ejercicios 00 09.3 Sem 9 Clase 3: - funciones homogéneas (3) - determinación de puntos críticos (1) - aplicaciones de la optimización sin restricciones (5)	PDF	<u>Clase práctica</u> Problemas resueltos	Docente	Se resuelven solo algunos problemas de la separata de ejercicios.
10	Anotaciones del profesor	00 10.1 Sem 10 Clase 1 solucionario parte A	Resolución de los problemas finales de 00 10.1 Clase 1-SEM 10	PDF	<u>Clase teórico-práctica</u>	Docente	Se resuelven los problemas finales algunos problemas de

					Problemas finales de la diapositiva		la diapositiva de la clase anterior.
11	Anotaciones del profesor	00 10.3 Sem 10 Clase 3 - solucionario	Resolución de la separa de ejercicios 00 10.3 Sem 10 Clase 3: - determinación de puntos críticos con el método de multiplicadores de Lagrange (2) - aplicaciones de la optimización con restricciones (5)	PDF	<u>Clase práctica</u> Problemas resueltos	Docente	Se resuelven algunos problemas de la separata de ejercicios.
12	Entrevista con el profesor	Entrevista_profesor-investigador	Entrevista semiestructurada	MP4 (video)	Se responden preguntas de un cuestionario semiestructurado.	Investigador	Duración aproximada del video: 41 minutos.



**Anexo 4** *Transcripción de la entrevista semiestructurada entre investigador y profesor*

1	Investigador	Buenos días, José Luis ...
2	Profesor	¿Cómo estás?
3	Investigador	Por favor, que te presentes brevemente. Comentándonos un poco acerca de tu experiencia en el dictado de cursos similares a Matemática y Gestión, de Economía o en otras carreras o cursos de Matemáticas en este tipo de Cálculo.
4	Profesor	¿Está bien el enfoque de la cámara?
5	Investigador	Sí, está bien.
6	Profesor	<p>Está bien. Ya.. este... bueno. Yo soy José Luis Rojas. Yo soy ingeniero mecánico industrial, magíster en prevención de riesgos y, bueno ... Tengo experiencia en el campo docente desde que estaba en la universidad, séptimo ciclo.</p> <p>Yo ya era instructor asistente de docencia. Y, bueno he trabajado pues en matemática, física, dibujo que es la aplicación. Y después de acabar mi carrera, también este ... tenía la experiencia en la industria, pero también alternaba siempre con pre de la católica o la jefatura de prácticas, pues siempre he hecho la la alternancia. No ha sido continuo la labor académica pero por períodos sí.</p> <p>Y bueno este ... Ya estoy más abocado a la docencia desde 2015 porque trabajaba yo en petróleo y pozos en la selva pero la inversión y los precios del crudo bajaron y hasta el momento no se recuperan. Me dediqué a hacer una maestría y en paralelo entré, retorné a lo que era la pre retornar a lo que eran las jefaturas. Y ya después me incorporé a a trabajar en la Universidad Ruiz de Montoya, donde tenía conocidos de la Católica y me convocó. Trabajamos con un grupo de personas de ya de edad mediana, adultos, porque eran [ininteligible] técnicos que querían, pues tener una promoción en sus trabajos, y las conseguían a través de incrementar sus capacidades académicas, sus conocimientos. Querían optar por una carrera. En paralelo también seguí con jefaturas con la Católica y después ya me dice profesor de la Católica. Y en la Ruiz de Montoya, tuve la otra experiencia. Me invitaron para participar en lo que era el dictado en Economía y Gestión Ambiental. Así es, entonces ahí he empezado a dictar con Matemática 1, después con Matemática 2. He dictado también Estadísticas.</p> <p>Entonces he estado viendo un poco el perfil del estudiante, que era justo lo que en lo que estabas interesado. Poco que he trabajado con chicos de Beca 18 de Ruiz de Montoya, que es diferente a lo que es Católica. En Católica es un concurso donde discriminan. Digamos que tienes una gente media con base; en cambio aquí en la Ruiz de Montoya, no. Antes, se mantuvo una preparación preuniversitaria en la Ruiz, así hubieran sido aceptados se les hacía una nivelación extensa de varios meses, pero se recortó. Con los chicos que tuve, se notaba que le faltaba conocimientos</p>

		<p>básicos de secundaria como factorización, entre ellos, que es importantísimo en el área de Matemáticas que somos nosotros. Entonces, ya de ahí empieza por una cuestión de la voluntad de modular también la voluntad de evaluar al inicio porque tener que ser responsable de un grupo y después en medio ciclo darse cuenta de que fallaste pero también fallaron ellos, ¿no? No venían preparados. Entonces ... este ... ya desde ahí como que empieza pues la apreciación del grupo de trabajo serio porque después a mí me preocupaba “Oye tienes muchos desaprobados, ¿qué pasó?”. Y a veces es el material que tú tienes con el que vas a trabajar. Eso, por ejemplo, tengo siempre eso en consideración. Ya entonces eso es por ahí el inicio.</p>
7	Investigador	<p>Claro, claro. Entiendo. Por allí has mencionado un poquito acerca de los conocimientos matemáticos. Y en base a esta experiencia que tienes, ¿no?, que me has mencionado, ¿no?, que estabas trabajando en Matemática 1, en Matemática para Economía o Estadística, ¿no?. En estos cursos donde sí se ve un tema de cálculo. También por ahí mencionaste algunos conocimientos como factorización, ¿no?, que son temas básicos de Educación Básica Regular. Y no sé qué otros, desde tu perspectiva de toda esta experiencia, ¿qué otro tipo de conocimientos matemáticos debería, consideras que debería saber previamente un alumno para llevar puede temas [de este tipo de Matemáticas]?</p>
8	Profesor	<p>Por ejemplo, lo que son polinomios porque hay un momento en el que tú trabajas funciones y trabajas rápido (funciones también es otro conocimiento previo que deben de tener), y muchos alumnos no conocen absolutamente nada de funciones, de relaciones. Vienen de colegios que tienen, o de una realidad de baja economía pero si los colegios no acompañan con buen conocimiento necesariamente. O sea, el que uno le dé una beca a un muchacho, le estás ayudando muchísimo, pero no significa que haya desarrollado todas sus habilidades y competencias en el colegio. En el colegio pudo haber creado. Entonces me pasa eso yo siempre doy las advertencias. “Por favor, factorización, polinomios, teoría de exponentes ...”</p> <p>He tenido la experiencia de ver <math>\sqrt{x^2 + 2x + 5}</math>, ya. El exponente del término cuadrático se va con la raíz y sale toda la raíz. He visto eso. Imagínate. Es gente que no maneja teoría de exponentes. Y se nota en Mate 1 de economistas cuando tu vas a, digamos, a lo que es la parte de límites. Y tú dices: “¿cuánto es el límite?”, entendiendo pues que el valor del límite es el valor de la variable dependiente, ¿no?, cuando la independiente se acerca a otro valor. Y te quedas pues a veces impactado porque no pueden evaluar. Entonces ya habiendo visto varios ciclos eso. Este ... digamos que incido en algún momento en polinomios, en cómo se evalúa un polinomio ... Voy ... voy como que haciéndome el camino.</p>

		<p>Pero la realidad es que en ese entorno hay algunos chicos que no se preparan, piensan que es colegio, que le dan una leída no más al cuaderno lo van a hacer, ¿no? Siempre también se insiste en la preparación personal. Se le deja a veces este ... Yo les he dejado parte de libros, ¿no?, como ayuda, complemento porque ... no ... el estudiante no maneja bibliografía, no le gusta revisar libros [este] aparte, ¿no? Eso también hay.</p>
9	Investigador	<p>Bien y ¿estas observaciones que me haces [¿no?] los ha visto en todos los grupos de alumnos, particularmente en los grupos de alumnos que has tenido en Matemáticas para Gestión y Economía 2 en este año, no sé, has visto eso también o ha sido más notorio o ha habido más deficiencias de estos conocimientos que faltaban?</p>
10	Profesor	<p>Bueno, el hecho de pasar Matemática 1 ya filtra. Ya por lo menos te saben pues [este] la factorización. Pero veo que todavía tienen problemas en la parte operacional. Cuando expongo, están bien emocionales, les gusta mucho, pero no practican lo suficiente, ¿ok?</p> <p>Los que sí practican lo suficiente [este] lo veo pero contentos, como que me han entendido y como que siguieron y van para adelante y se siente pues [este] que han progresado. Los que veo más [este] quedaditos y todo porque ellos no ponen de sí tanto. Entonces se nota clarito, ¿no? No hay ese ese resultado que ellos deberían de obtener porque tengo chicos así [que]. Por ejemplo hay un chico que ha jalado el ciclo pasado. Bueno se ha jalado con 10; 9, así con las justas [pero se ve bien chicos]. Y este ciclo sí ... este ... se puso las pilas practicó: 18 de parcial, 17 de prácticas. O sea, está muy bien. O sea, un chico que tenga buenas capacidades atiende bien su clase y avanza ... que es el objetivo.</p> <p>También algo bien importante es que digamos me ha pasado con varios chicos que venían de otras universidades: de UPC [ininteligible], de otros sitios que han venido para acá. Creo que usando ya la beca de situaciones familiares ... este ... salían contentos. Me decían que estábamos bien, que estábamos, comparando con otra universidad, me decían que sí aprenden.</p> <p>Y también tengo una un libro guía con el que trabajamos. Bueno pero para alguien que sabe leer un libro, para alguien que sabe notación matemática, ¿no? Ya tienes experiencia. Entonces eso también se trabaja con los chicos, ¿no?, de resolver desde otra perspectiva, después ver lo que dice el libro, comparar, darse cuenta que alguna notación matemática es utilizada y, para resumir bastantes partes de la comunicación. Entonces ahí van enganchándose también varios, ¿no? Entonces como que “sí profe ya, ya, ya sé lee el libro de matemática y ya entiendo ya”. Eso también es otro aspecto. Por ahí va.</p>
11	Investigador	<p>Bien. Y en cuanto a este grupo alumnos, ¿no? Por ejemplo, en Matemática para Gestión y Economía 2, ¿no?, y la 1 también que va orientado hacia alumnos de Administración y Economía, ¿qué</p>

		aspectos de la Matemática consideras que se deberían, según esa experiencia, se deberían diferenciar entre alumnos que van a estas carreras y les quieren enseñar ese cálculo con alumnos que van por ejemplo a carreras de ingeniería y también ven el mismo tipo de cálculo, ¿no? [pero obviamente ...]
12	Profesor	<p>No, no ven lo mismo. No ven lo mismo. Aquí hay una cosa: los de Economía con los de Administración lleva el mismo curso, pero en los de administración los Cálculos aquí quedan. Debería haber una diferencia. Y para los de Economía debería ser hasta un poquito más ... este ... exigente. Nos dimos cuenta ya hace como dos, tres o cuatro años de que les enseñamos algo parecido a matemáticas. Por ejemplo, la parábola, la recta (sí), la circunferencia también, pero le poníamos tangentes a la circunferencia, un poquito exigentes, ¿no?, con ecuaciones simultáneas para ver, de repente, discriminante. Entonces eso, por ejemplo, lo sacamos. Eso vamos a preguntar a un industrial. Otra cosa que sacamos fue elipse e hipérbola. Más para industrial. Hipérbola no va a ver un administrador.</p> <p>Ahora estoy enseñando. Tengo la suerte de enseñar un curso de tercer ciclo para ingeniería industrial. El primer ciclo ellos llevan complementos de matemática donde se ven, por ejemplo, inecuaciones, inecuaciones polinómicas, lineales, valores absolutos, gráfica de funciones. En segundo ciclo ven ya sus derivadas y hasta un poco de integrales. En cambio, matemática para los de Gestión Ambiental y a los de Administración y Economía, lo que ven ellos: inician, por ejemplo, con matrices, como para entrar a cálculo, ¿no?, para operaciones básicas, reglas y todo. Después vamos avanzando hacia inecuaciones, a veces con valor absoluto, pero me tomo el trabajo de ponerle la las ecuaciones, las reglas para que ellos lo sigan [y] no se pierdan tanto, y así todo a veces pierdo alguno. Y también un poquito de ..., un poco de funciones, sobre todo lo que va a ser base para el Mateco 2.</p> <p>Bueno, y mira en Mateco 2 de Administración, ya arrancamos con, por ejemplo, con las derivadas con una variable y derivadas con varias variables, con dos variables generalmente, y optimización. Y después vienen con Lagrange, ¿no?</p> <p>Yo estoy viendo ahora en el tercer curso de industrial, el tercer ciclo. Ellos, les voy a enseñar ahora. Les estaba enseñando derivada, reglas de la cadena con funciones de 2 variables y hasta con 3. Y vamos a hacer máximos, ¿no? Imagínate una mezcla. Como que ese programa hay que modificar. El de los de Administración y Economía lo veo más coherente. Una vez que han terminado sus varias variables, entran a integrales y con una variable no más. No va más. Por partes, fracciones parciales, tratando de no usar unas funciones muy complicadas. Por ejemplo, ¿te acuerdas del criterio de convergencia para integrales?</p>

		<p>No se les toma eso, por ejemplo, tanto los de Mateco 2 [como] así a los de industrial. Sin embargo, he visto falencias ahí en sus cursos iniciales porque me fallan a veces en las integrales. Mejor están los Mateco 2, más formaditos. ¡Increíble!</p> <p>¿Qué les quitaría? Les quitaría, por ejemplo, Administración y Economía usan funciones de Cobb-Douglas, por ejemplo, esa sí conoces. <math>K</math> a la no sé cuánto, <math>L</math> a la no sé cuántos. Ya, a ver si es una función a escala o no se acabaría. Ahí se ve. Pero [con] eso se asusta mucho la Administración. Lo trato de de poner más sencillo diciendo que <math>K</math> y <math>L</math> son <math>x</math> e <math>y</math>, y vamos a trabajar una función de esa de ese tipo, ¿no? Entonces ya viendo, ya yendo a lo que conocen, ellos sí pisan tierra, pero eso le cuesta mucho cambiar. Los de Economía deberían de tener esa fortaleza. Por ahí eso de Cobb-Douglas.</p> <p>Después tal vez, integrales impropias le quitaría porque eso es lo que hacemos al último. Lo mantendría para Economía, pero se lo quitaría pues a Administración porque otra vez me pone límite y le haces artificio. Por ahí, después ... este ... algunas exigencias en problemas donde tengas que elaborar demasiado, pues los chicos [ininteligible], pero a veces piden que elaboren o que hagan un cambio de variable un poco difícil y les cuesta. Por ejemplo, <math>u</math> por <math>\tan x</math>, ¿no? Ese tipo de cosas no. Aunque tenemos problemas con arcotangente [ininteligible]. Se les enseña con logaritmos. Eso va enganchado al primer ciclo que tiene que enseñar función. Si tienen los chicos muy caídos, ahí donde funciones los resiente bastante. Pero sí, tal vez de repente tenemos que cortar un poco lo de matrices y determinantes existentes y darles un poquito más de tiempo para funciones también en en Mateco 1 tal vez. Sino que como que lo vemos como un salvavidos porque de allí sacan puntos.</p>
13	Investigador	Claro, claro. Entiendo entonces. Sí hay una diferencia entre el tipo de temas que se deberían seleccionar. Ahora mencionaste por ahí que había un libro que usabas. No sé. ¿Qué fuentes utilizar para preparar la teoría? Por ejemplo, en el tema particular de esta investigación que es el de optimización de funciones de varias variables, ¿no?, funciones reales de varias variables ...
14	Profesor	Usamos el Stewart, por ejemplo [ya ... este ...]. Como bibliografía ... este ... tenemos también ... [no] me acuerdo cómo se llama este libro. Permíteme ver mi campus virtual. El libro es este ...
15	Investigador	¿Sydsæter?
16	Profesor	Ah, el Sydsæter es. Ya está. Lo que yo, por ejemplo, tú estás entrando un poco más a Mateco 2, a veces le jalo para el libro que es el Mitacc, de cálculo 2 o del cálculo 3. Aunque tengo algunas críticas, algunas reservas de mi coordinador porque me dice que hay algunos ejercicios que son copia, que son una traducción de un libro brasilero que él ha visto, ¿no? Este ..., pero, bueno, para mí, me gusta, me soluciona, tanto para los cursos de Mateco 2 de

		<p>Administración como para los Ingeniería. O esa, está bien explicado y tiene ejercicios de menos a más. Entonces, apoyándome en los ejercicios de menos a más es de que lo tomo en consideración.</p> <p>Eh, justamente me has hecho acordar que en la san Marcos hay este tipo de inconvenientes también. No tienes, a veces la gente es bien bien este afinadita y me han pedido que colabore en la elaboración de un libro pues para matemáticas básicas. Te invito también si por ahí tienes tiempo para para ir entrando por ahí, ¿no? Puedo presentar por ahí algunas autoridades con las que vamos a trabajar eso. Y la idea es esa, ¿no? Fijarse cuáles son los puntos, eh ... digamos, un poquito más dificultosos para brindarles ejercicios, explicaciones ahí. Quería hacer eso también ahí en la en la Ruiz de Montoya, pero no hay un fondo pues. En la san Marcos, no sé si habrá un fondo, pero este como ahí me hacen también una evaluación por la publicación, entonces me conviene. El otro lado no es más que nada si hacemos un libro, tiene que ser de investigación, profundizar un tema, pero eso a los alumnos no les va a ayudar. A mí como desarrollo sí, pero en los alumnos no.</p>
17	Investigador	Claro, ¿no? [ininteligible]
18	Profesor	Por ahí, ahí que tú estudias de varios ciclos, ¿no?
19	Investigador	<p>Bien, y ahora siguiendo con este tema de optimización, ¿no? ¿Qué otros aspectos consideras para abordar los problemas de optimización que deberías enseñarle a los alumnos?</p> <p>Por ejemplo, hay problemas 100% matemáticos y hay otros problemas que están más contextualizados en un ambiente económico. Tomando como referencia ello, ¿qué aspectos consideras que debería saber el alumno para entender problemas de optimización?</p>
20	Profesor	<p>Mira, lo que justo yo he recibido observaciones de algunos alumnos es “profe, yo entiendo cuando está la fórmula, todo, porque es un camino seguro, pero cuando hay la aplicación a la economía, ahora industria, me pierdo porque no sé cómo interpretar bien cuál es la independiente, cuál es la dependiente. Cuando tengo Lagrange, también condicionado, no sé cuál es la función o me cuesta”. Esa es la observación.</p> <p>Entonces el primer camino para mí debe ser este manejar una optimización con variables independiente y dependiente, ¿no? por ahí, por ahí, va la cosa por una variable. Después vamos con dos variables. Bueno, este ... clarificar bien de qué se tratan o qué es un máximo, qué es un mínimo, qué es un absoluto, qué es un local, ¿no? Entonces, por ahí, en la medida que tengamos eso.</p> <p>Otro, una pequeña dificultad que tenemos es que a veces las fórmulas que utilizamos nos llevan a sistemas de variables. Y en el sistema de variables se pierden. A veces hay que ver los puntos de interés son combinaciones, entonces hay que escoger ejercicios</p>

		<p>adecuados para poder darle eso. Esa es la dificultad de buscar ejercicios adecuados que te permita, pues, tener paredes ordenados o pares sencillos que evaluar. Cuando evalúas si tienes un <math>1/4</math>; <math>1/3</math> o una raíz, o una mixta. Entonces [ininteligible] ahí se pierde la gente. Si los ejercicios son directos, sencillos, [entonces] entienden, te siguen. Y de ahí ya puedes pasar pues a la parte de la aplicación, ¿no? Y también a la parte de Lagrange. Tú tienes que también quitarles el miedo. El procedimiento es tal, voy a sacar una determinante y de aquí ... Tienes que tratar de simplificar el asunto. Si empiezas a hablar en términos matemáticos, ya lo perdiste. Primero simplifícale la vida y después, mira, el respaldo matemático es esto, ¿qué dice la matemática, ¿qué dice el libro?, ¿por qué? Sino estás hablando en chino. Sino le das un montón de expresiones que no se entienden en pruebas a resolver un ejercicio donde tiene que volver a repetir y poner las expresiones en sencillo y después tiene que, para hacer el cierre, tienes que volver a repetir para llevarlo a las expresiones matemáticas. Si alguien no tiene la paciencia, entonces acaba no más y de repente el alumno no sabe realmente [o] no cerró su experiencia, no tuvo la retroalimentación. Yo empiezo así. Ahora tengo que cambiar para que me entiendan un poco más. Empiezo con los ejercicios directos, aplicados. Empiezo a resolver y después lo llevo a la mate[mática]. Resumamos: hemos hecho esto, ya, vamos al librito, mira qué dice el librito. Da igual.</p>
21	Investigador	¿Estos ejercicios también los obtienes de de esos libros que me estabas [comentando]?
22	Profesor	El mismo ejercicio, pero lo hago directo, ordenadito, explicando cada paso, explicando las variantes que a veces en el libro no lo puedes encontrar. No, no te das cuenta, está ahí. A veces no te das cuenta.
23	Investigador	O a veces no es muy obvio y simplificado el procedimiento.
24	Profesor	También. Entonces ese es mi chambita ¿no? Ese es mi trabajo, es lo que yo trato de de llegar con los chicos y es lo que ellos aprecian. Al final es lo que ellos aprecian.
25	Investigador	Ahora cuando resuelves este tipo de problemas ...
26	Profesor	[ininteligible]
27	Investigador	Disculpa, disculpa. Cuando resuelves este tipo problemas, aplicados a la Economía, he visto que en las en las separatas de ejercicios hay problemas donde hablan de capital, de mano de obra, de trabajo, de beneficio, de costo. ¿Has notado alguna dificultad con que el alumno también interprete qué es eso, el problema? ¿O te han preguntado alguna vez qué es capital ...?
28	Profesor	No. Sí están orientados. Sí, sí manejan más o menos esos conceptos. Sí por ahí, pero lo que no entienden es por qué capital en $K$ , por qué mano de obra es $L$ y entonces yo les hago la traducción: $L$ de <i>labor</i> . A veces, ¿por qué beneficio de utilidad es $P$ ? <i>Profit</i> en inglés significa beneficio. Entonces, ah, por eso es, o

		sea por eso está usando esas esas letras. También ya los vas enganchando porque lo van a encontrar en otros libros.
29	Investigador	Claro [a veces] lo ven como $\pi$ el beneficio.
30	Profesor	Claro, como productividad, a veces beneficio como productividad. Le ponen $\pi$ y también a veces sí. Depende del ejercicios cómo los ponen. Se le va haciendo también ese enganche porque lo van a encontrar en los libros.
31	Investigador	¿Y estos términos económicos los ven en alguna parte de este curso o ya los ven en el curso previo?
32	Profesor	Mira, en Mateco 1, a veces les hacemos, les hacíamos problemas así de aplicación. Hemos restringido un poco porque el tema de funciones los confundía, ¿no? Porque con una función cuadrática tú puedes hacer la utilidad, el costo, el ingreso puedes juntar ahí. A veces les hacemos así. Poco tiempo, pero si lo hacemos. Usamos depreciación también, como una función lineal. Con esa lo modelamos. Este, pero creo que sí voy a proponer reducir un poco determinantes y todo, y darle un poco más de tiempo porque teníamos a veces ejemplos de aplicación y como que no le hemos metido tanta dedicación, entonces por ahí podría poner un poco. Pero pero sí les manejamos un poquito los términos. Sí, sí le ponemos, entonces ya de ahí van captando. Es importante, pues ese curso de Mateco 1. Ahí enseñamos, por ejemplo, una función exponencial, una función logarítmica, cómo se dibuja una función polinomial, una racional para que ya la trascendente seno, coseno. Ahí, ahí, por ejemplo, en Mateco 1, enseñamos seno, coseno, tangente, arcoseno, arcotangente también, rápidamente con el concepto de función inversa, rápidamente. No no para que se lo aprendan de memoria, sino para que tengan una noción, porque a veces te viene una arcotangente, arcoseno.
33	Investigador	Ok, ok.
34	Profesor	Pero que sí [por ahí] les vamos dando <i>inputs</i> . Pues ese es el objetivo de Mateco 1 ... darles ya las bases para el otro curso.
35	Investigador	Y respecto de este tema de optimización, tanto en los problemas intra o extra, donde hay matemática, donde hay aplicaciones ... ¿cómo has notado el interés en estos grupos? ¿Cómo que abandonan ...?
36	Profesor	Es un poco difícil de decirlo lo de interés, ¿no?, porque tendría que tomar una encuesta, un referente, pero digamos en lo que es las evaluaciones, se nota que tienen a veces dificultad [se les causa dificultad]. Cuando es un ejercicio $x, y$ es más directo. Como te decía la interpretación, eso es lo que les cuesta a algunos.
37	Investigador	¿La participación en clase?
38	Profesor	Es más, ...
39	Investigador	¿Por ejemplo?
40	Profesor	En clase no hay tanta duda. La cuestión es cuando van solos. Ahí está la cosa. Ahora, experiencia, el ciclo pasado teníamos los chicos que estaban mal y queríamos ayudarlos. Entonces, en la

		tercera y cuarta práctica que justo son esos temas, se metieron ejercicios, ¿no? Ya, de acá, de estos ejercicios va a venir uno. Uno parecido. En la otra, va a venir parecido. Entonces se ponen a estudiar y así, y todo, sí, sí rendían. Pero en los ejercicios aplicados era justo donde habían posibilidad de problemitas. Y la parte operacional también, la parte operacional que también tiene que ver. Les cuesta. El cambio de $x, y$ a $K, L$ es más fuerte. ¡Increíble!
41	Investigador	¿Y este tipo de observaciones que me estás haciendo también los anticipas cuando dictas una clase? No sé vas con una mentalidad de que puede ocurrir eso, ¿no?
42	Profesor	No de que van a ir mal, no, pero sí de que tiene que hacer la semejanza entre variables $x, y$ con $K, L$ en el que es lo mismo, pero con otra camiseta, con otro nombre, nada, pero es lo mismo. Entonces para que pierdan el miedo, sino también les da pánico y podría promover que abandonen, que nadie haga esa pregunta. Algunos seguramente sí les cueste y he visto. No lo hacen. Pero lo que digamos que son un poco más fuertecitos en matemática y en su preparación le daban para adelante. Sí, sí, siguiente.
43	Investigador	¿Y para esas prácticas que me estaba comentando, en las evaluaciones continuas 3 y 4 que son las que vienen después del parcial, qué tipo de preguntas seleccionan para evaluar a los alumnos o de dónde las obtienes o qué modificaciones les haces? Porque me comentaste por allí que ahora les daban un separata y les decías que de ahí viene uno. ¿Y las demás preguntas?
44	Profesor	Bueno, hay otros libros más que yo manejo. Que no digo que están en la bibliografía donde puedo tener una pregunta o una resolución. Veo que digamos sea manejable por el alumno. Le hago una variación. A veces corro unos valores para variar y presentar en otros turnos y que tengan por ahí la misma intensidad. Pero entonces sí, sí tengo por ahí otro banco de preguntas y hago algunas modificaciones. Pero tengo que obligarme a solucionarlo porque algunas veces me ha pasado que lo he puesto muy rápido y se volvió fea la pregunta, ¿no? De ahí he tenido, caballero, que hacer una curva, a hacer un punto de bonificación o dos puntos porque se me fue. Puede pasar. Puede pasar, pero generalmente si tomo una pregunta, la trabajo, modificó un poquito y hago su solución para confirmar que no hay inconveniente. Por ahí va.
45	Investigador	¿Recuerdas cuáles son esos otros tipos de libros que comentas?
46	Profesor	[Se ríe] A ver. Por ejemplo, ...
47	Investigador	Aparte del Stewart y Sydsæter ...
48	Profesor	Déjame un segundo. A ver, un segundito. ¿Te puedo compartir pantalla?
49	Investigador	A ver. Sí se puede.
50	Profesor	Por ejemplo, yo acá tengo Cálculo de Conamat que por ahí alguna vez lo vimos, ¿te acuerdas? De integrales, no me acuerdo cuál es este libro. Este es Marco Jara. Cálculo integral de Ecotec. Ya. Tengo

		<p>Mateco 1. El Lázaro, por ejemplo es bueno. Este es fuerte. Este libro es buenazo, tiene buenas cosas: hay cálculo, hay sistemas estándar. Tengo varios varios libros acá y yo voy viendo por tópicos. Mira, por ejemplo, ejercicios resueltos de optimización. Ahí está un Lagrange condicionado por ahí, ¿ves? Entonces se puede cambiar el contexto y todo eso. Pero bueno, no es uno, tengo un montón, porque, por ejemplo, también. tengo según el tema, ¿no? Tengo funciones homogéneas, integrales impropias. Tengo, aquí hay otra de la Universidad Pacífico. Este es el Ricardo Siu Koochoy. Este es de la Pacífico. Tengo algunos libritos que voy, voy mirando los capítulos según me parecen interesantes, aplicables los ejercicios. [ininteligible] Integrales de Espinoza Ramos. Quiero una integral sencilla, por partes, ¿no?. Así, para reglas de la cadena, para máximo y mínimos. Diversos libros que yo tengo. Tengo el Sydsæter. De la web también eventualmente. Mira, tengo hasta Devidovich. Tengo bastante por ahí. En calle Tomás. Acá está el cálculo de Mitacc, ¿no? Tengo tengo varios. Sí.</p>
51	Investigador	OK
52	Profesor	Entonces así es, o sea tengo que he estado mirando en la web y he estado bajando los libros y ahí voy escogiendo, y voy seleccionando los ejercicios que me parezcan apropiados en intensidad y en la carga académica que nos pueda transferir.
53	Investigador	Y en la práctica 3, porque según lo que veo en sílabo de la práctica 3 es la que ha estado evaluando tema de optimización [y] funciones homogéneas, ¿cómo has visto los resultados finales de la práctica en general? ¿Aprobados, desaprobados?
54	Profesor	<p>A ver, espérate un segundo, déjame ver un ratito. Quiero ver si ya subió las notas el ... justo la tuvimos en semana de APEC y ... y sino que ahora yo ya no estoy corrigiendo, lo están corrigiendo ni jefe de práctica</p> <p>Quiero ver, para Dios mío, está cortando la calle ... Un ratito, ¿ya? [ininteligible]</p>
55	Investigador	Ok. Retomamos
56	Profesor	Ya te imaginarás qué cosas están haciendo estos. A ver, a ver, a ver, a ver. Voy a compartir pantalla. Bueno. Ahí está. Una práctica que hacemos nosotros, es siempre en darles su nota acá a los alumnos. Evaluación 1, evaluación 2, evaluación parcial, evaluación 3, para que no diga que no le dimos las notas. Y por ejemplo, no fue un alumno, se abandonó, ahí está su nota publicada. Tendrá que recoger, pues, en secretaría con el profesor del curso. Vamos a ver las notas de uno de los salones ... 17 ... [el profesor da información de las notas mostrando información de nombres completos de los alumnos. Sus comentarios generales fueron que los alumnos han respondido bien].
57	Investigador	En general, ¿han aprobado más de la mitad?
58	Profesor	Sí. Que cuando a ti te ha tocado observar no viste así. Ahora están mucho mejor, pero acá hay bastante gente por segunda. Recuerda

		que el ciclo anterior tuvimos 5 salones. De los 5 salones aprobaron casi 3 salones y medio. Este ciclo hay bastantes repitentes y hay gente por primera que son pocos. O por primera serán, pues, cuántos. De los 2 salones, eran 15. Y esto es como mucho, 7 en cada salón. Estos son por segunda, por eso también. Ahora han sido la mayoría mis alumnos por ahí. Hay otros que no, pero unas alumnas muy buenas: 18 [de nota]
59	Investigador	Y en el ciclo anterior, ¿el rendimiento fue menor en esa práctica?
60	Profesor	Sí, lo que pasa es que algunos que sí les fue bien, le fue muy bien, así como a esto que están acá; pero otros no. Les costaba todavía, pero ahora sí lo veo que les han despegado. Ya me estoy asustando, me voy a quedar sin alumnos el próximo ciclo [Se ríe]. Es que en Mateco 1, ya tengo gente con Mateco 1 que está por trica y por cuarta. Hay uno que me ha pedido “profesor, una práctica para que le hagamos entre 3 y en mi casa”. No, pues. No es así. Ya, si quieres en clase, entre 3, pero tengo otra experiencia. Te cuento. Estábamos así en Mateco 1, me daban pena. Ya, bueno, vamos a hacer que la práctica la hagan “¿entre cuántos quieren?”. “Ya entre cuatro”. Y había, por ejemplo, chicos, no tanto, pero así un grupo de 6 que sacaba 17; 18; 16, el resto caía, muy relegados. Y los 17 y 18 se sacaron 13. Y los que tenía 04; 03, y sacaron 04; 03 de nuevo. Y seguían mal, pues ¿no? La siguiente práctica, la práctica cuatro, “¿cómo hacemos, grupos?”, “Sí, profe de 2”. Lo que sacaban 17; 18; 16 volvieron a sacarse esas notas. Lo que tenía en 04; 03, uno que otro se juntó con alguien y subió, pero o sea, no, no subieron. ¿Qué te dice? Que algunos no son dóciles, digamos, para entender y, al contrario, perjudica al grupo. No te deja que trabaje, sino te empiezan a preguntar “por qué”, “dime”, “explícame”. Empieza su desesperación porque no entienden. O sea, hay gente que no entiende, nada de nada. Y eso es lo que hace que baje el resto. Ya entonces eso entonces ya no, ya digamos no, no hago, no hago grupos. Muy difícil para mí es esto. Eso lo voy a ver en otro curso. Por ejemplo en seguridad cuando enseñaba en la San Marcos, “hagan grupo de 2, máximo 3”. ¿Por qué? Porque a veces tienes que analizar un problema y necesita más criterio. Por criterio. Con herramientas en web y todo puedes encontrar, pero necesitar criterio para enfocar el problema acá. Son pasos que tiene que seguir una metodología. Imagínate, entonces ya estos chicos, como que algunos han estado conmigo en Mateco 1 y en Mateco 2, no se habían dado cuenta bien de la metodología, ya han afinado su metodología de trabajo y así el problema no debe ser para mí el ponerte a veces en paz, que se te pase un ejercicio con mucha acción, mucha risa, sale horrible, ¿no? Ese no debe ser el problema. No, ya, pues yo o qué cosa te detiene para que tú tengas tu nota. ¿Es que no se entendió la metodología? Si sí lo has entendido, ya está tu nota, ya estás. Al otro lado, entonces ya te das cuenta que ya han entendido, ya está. También cuando acaba

		el curso salí contento porque ya, ya saben de qué se trata. Es una de mis metas. No es poner el ejercicio tan difícil. Tú puedes poner un ejercicio fácil si no hay que hacer, ahí está frito jalados. Por ahí estoy viendo un poco el asunto.
61	Investigador	Entiendo, entiendo y ya para cerrar un poco esta entrevista. En particular con ese tema optimización, ¿qué tan relevante lo consideras para un alumno que va particularmente a la carrera de economía tanto en el ámbito académico, o sea para futuros cursos, como en el ámbito profesional?
62	Profesor	Claro, es básico, pues es básico. Lo vas a usar siempre. Un alumno de Economía como un alumno de Ingeniería que lleva más cálculo, más derivadas con varias variables tiene que dominar este tema. Es un es un hito para para ellos. Además, esta metodología también recibe de molde de plantilla para otras que van a venir. Y en la que va a trabajar y aprendiendo una forma de desarrollo y las otras le van a parecer sencilla no aparecer este. Que es una forma de trabajo y va a seguir para adelante. Me parece que sí es recontra recontra útil importantísimo.
63	Investigador	¿Para cursos posteriores, por ejemplo, no sé si has escuchado de algún curso que lo requiera?
64	Profesor	No, sí, en los cursos de economía de mate avanzada lo requieren. Requieren derivación, integración y optimización. Sí se requiere.
65	Investigador	Ok.
66	Profesor	No los enseñe yo, sino, ya te diría exactamente qué tema, ¿no?, pero sí, sí.
67	Investigador	No, sí, por lo que he podido también revisar se requieren cursos también como microeconomía.
68	Profesor	En micro cruza, cruza también. Tienes razón cruza con micro. Me dicen algunos “profe, esto hemos visto en micro y mira, recién lo estamos viendo acá”. Este es un poquito desfase. Tienes razón.
69	Investigador	Ok, ok. Entonces, José Luis, muchas gracias por tu tiempo. Esto sería todo y queda para la investigación y lo agradezco bastante.
70	Profesor	Listo, cuídate. Un gusto.