

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ**

**FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA**



**ABSORCIÓN ACTIVA DE VIBRACIONES APLICADA A UNA VIGA EN  
VOLADIZO PARA UN RANGO DEFINIDO DE FRECUENCIAS DE EXCITACIÓN**

**Tesis para obtener el título profesional de Ingeniero Mecánico**

**AUTOR:**

Carlos Gianpaul Rincón Ruiz

**ASESOR:**

Dr. Ing. Jorge Hernán Alencastre Miranda

Lima, junio de 2025

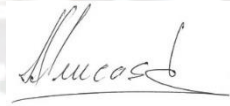
# Informe de Similitud

Yo, Jorge Alencastre Miranda, docente de la Facultad de Ciencias e Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor(a) de la tesis/el trabajo de investigación titulado:

**“ABSORCIÓN ACTIVA DE VIBRACIONES APLICADA A UNA VIGA EN VOLADIZO PARA UN RANGO DEFINIDO DE FRECUENCIAS DE EXCITACIÓN”** del Señor Carlo Rincón, deo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 16.0%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 27/06/2025.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.


Lugar y fecha: Lima 28 de junio 2025

Apellidos y nombres del asesor:  <u>Alencastre Miranda, Jorge Hernán</u>	
DNI: 10588073	Firma 
ORCID: 0000-0001-8442-8255	

## Resumen

Extendiendo la teoría existente acerca de los absorbentes activos de vibración, se abordó el estudio de un absorbente de vibraciones controlado por un electroimán implementado en una viga en voladizo. El absorbente dinámico de vibraciones o TMD convencional es un sistema secundario mecánico acoplado a un sistema primario entendido como una máquina o estructura en el que se deseen mitigar vibraciones no deseadas. Consta de una masa y rigidez diseñadas para que el sistema en conjunto provea una fuerza inercial de sentido contrario a la fuerza de excitación a la que está sometido el sistema primario y así reducir la amplitud de vibración. El TMD posee una desventaja clara y es que sólo reduce la amplitud de vibración en una frecuencia de excitación determinada y deja de ser efectivo cuando el sistema primario es sometido a otras. La implementación del electroimán a este sistema secundario permite gobernar en tiempo real la magnitud y frecuencia de una fuerza activa a fin de reconfigurar el sistema según sea la frecuencia de excitación, razón por la cual pasa a ser un absorbente activo de vibraciones.

En este estudio, un modelo continuo de un sistema viga en voladizo-que representa el modelamiento más real que puede existir- fue propuesto para la implementación de un absorbente activo a fin de evaluar su comportamiento dinámico y efectividad en la reducción de amplitudes de vibraciones no deseadas. Asimismo, se discutieron los parámetros de diseño en el modelo del absorbente desarrollado en términos de su masa y rigidez y cómo estos influyeron en la reducción de vibraciones y el comportamiento dinámico de un sistema. Se diseñaron los parámetros que debe tener el controlador a fin de que el electroimán provea la magnitud de corriente necesaria en el tiempo para que el absorbente activo sea sintonizado a una frecuencia de excitación de operación cercana a la primera o segunda frecuencia de resonancia. El modelo completo de la viga en voladizo implementado con el absorbente activo de vibraciones se simuló mediante Matlab Simulink siendo excitado en su primera y segunda frecuencia de resonancia, los resultados indicaron que el absorbente activo es capaz de sintonizarse a cualquier frecuencia de excitación, especialmente las de resonancia logrando atenuar la amplitud de vibración hasta su 5% del caso original sin absorbente. El análisis establecido para la evaluación de un absorbente activo de vibraciones puede ser extrapolado a sistemas de mayor complejidad mediante modelos analíticos del sistema en cuestión o FEM cuyas características dinámicas pueden ser calibradas mediante métodos experimentales como OMA y EMA.



A mi amada madre, cuya infinita resiliencia y fortaleza me continúan inspirando día a día,

Con mucho amor te dedico este trabajo y todo lo que logre en mi vida,

Siempre te voy a estar en deuda.



A mi padre, quien me enseñó que no existen límites para el esfuerzo.

Sin todo lo que has sacrificado, no habría podido iniciar este camino.



A mi hermana, quien, aunque ella lo dude, motivaba  
la reflexión de este trabajo con sus preguntas.  
Que sepas que todo es posible para ti

## Contenido

Resumen .....	i
Introducción .....	1
Objetivos generales .....	2
Objetivos específicos.....	2
Alcance.....	2
Estructura del estudio .....	3
Capítulo 1 Estado del Arte.....	5
1.1. Vibraciones mecánicas en el campo de la Ingeniería y su relación con las cargas dinámicas.....	5
1.2. Modelamiento de sistemas dinámicos.....	7
1.3. Absorber pasivo de vibraciones.....	11
1.4. Control activo de vibraciones.....	16
1.4.1. Introducción .....	16
1.4.2. Absorber dinámico activo de vibraciones .....	18
Capítulo 2 Sistema viga implementado con un absorber pasivo de vibraciones .....	21
2.1. Descripción del sistema de estudio .....	22
2.2. Modelo continuo del sistema viga.....	22
2.2.1. Vibración libre del modelo continuo.....	24
2.2.2. Vibración forzada del modelo continuo .....	28
2.2.3. Simulación numérica.....	30
2.3. Sistema viga implementado con un absorber pasivo.....	33
2.3.1. Descripción del modelo.....	33
2.3.2. Vibración forzada.....	35
2.3.3. Simulación numérica y discusión de los resultados .....	38
Capítulo 3 Modelamiento de un absorber activo de vibraciones .....	46
3.1. Absorber activo de vibraciones .....	47
3.2. Estrategia de control.....	51
3.3. Sintonización del absorber activo.....	54

Capítulo 4 Sistema viga implementado con un absorsor activo de vibraciones .....	57
1.1. Dinámica del sistema viga en voladizo .....	58
4.2. Dinámica total del sistema implementado con el absorsor electromagnético.....	62
4.3. Simulación del modelo y discusión de resultados.....	64
4.3.1. Respuesta del absorsor activo de vibraciones desacoplado .....	67
4.3.2. Respuesta del sistema viga en voladizo excitado en su primera frecuencia de resonancia.....	69
4.3.3. Respuesta del sistema viga en voladizo excitado en su segunda frecuencia de resonancia.....	71
4.3.4. Influencia de la posición del absorsor en el nivel de atenuación .....	76
Conclusiones .....	78
Bibliografía .....	80
Anexo 1 Funciones para calcular los parámetros modales del sistema viga en voladizo.....	82
Anexo 2 Algoritmo para la simulación del sistema viga implementado con un absorsor pasivo .....	83
Anexo 3 Algoritmo para la simulación del sistema viga implementado con un absorsor activo .....	85
Anexo 4 Algoritmo para la simulación del comportamiento dinámico de un absorsor activo desacoplado.....	87

## Índice de Figuras

Figura 1-0 Etapas de estudio de la tesis .....	4
Figura 1-1 Fractura por fatiga de un cigüeñal (Sofronas, 2012).....	6
Figura 1-2 Sistema viga en voladizo representado por diferentes modelos(a) Modelo continuo; (b) Modelo de 1GDL; (c) Modelo de múltiples grados de libertad .....	9
Figura 1-3 Proceso de validación de un modelo mediante la experimentación (Rodríguez, 2017) .....	10
Figura 1-4 Modelamiento del contacto entre dos partículas para el análisis del comportamiento dinámico de un molino de bolas. Fuente (Yoshida et al., 2019) .....	10
Figura 1-5 Absorsor pasivo de vibraciones (Rao, 1952) .....	11
Figura 1-6: Amplitud de la masa $m_1$ en función de la frecuencia de excitación con y sin absorsor de vibraciones, Fuente (Rao, 1952).....	13
Figura 1-7 Tuned mass damper for Chiba-Port Tower (Connor & Laflamme, 2014).....	14
Figura 1-8 Tuned mass damper—Huis Ten Bosch Tower, Nagasaki (Connor & Laflamme, 2014) .....	14
Figura 1-9: Modelo discretizado de la viga en voladizo de n-DOF, Fuente (Rincón, 2020)...	14
Figura 1-10 Amplitudes vibración del extremo de una viga en voladizo para diferentes masas del absorsor sintonizado a la primera frecuencia natural , Fuente (Rincón, 2020).....	15
Figura 1-11 Esquema de un control activo (Soong, 1988) .....	18
Figura 1-12: (a) Absorsor pasivo (b) Absorsor activo (Elmali et al., 2000).....	19
Figura 2-1. Sistema viga en voladizo.....	22
Figura 2-2: Amplitud de cada coordenada generalizada del sistema sin absorsor en función de la frecuencia de excitación.....	31
Figura 2-3: Contribución de cada coordenada generalizada a la magnitud de la amplitud de vibración del extremo libre de la viga en voladizo sin absorsor.....	31
Figura 2-4: Amplitud de vibración del extremo libre de la viga en voladizo según la frecuencia de excitación.....	32
Figura 2-5: Amplitud de vibración de cada punto a lo largo de la viga excitada en cercanía de la primera frecuencia natural .....	32
Figura 2-6. Sistema viga implementado con el absorsor pasivo.....	34

Figura 2-7. Diagrama de cuerpo libre del sistema viga y el absorber pasivo .....	35
Figura 2-8: Amplitud de cada coordenada generalizada del sistema con absorber sintonizado a la 1ra frecuencia natural según la frecuencia de excitación.....	41
Figura 2-9: Contribución de cada coordenada generalizada a la magnitud de la amplitud de vibración del extremo libre de la viga en voladizo con absorber sintonizado a la primera frecuencia natural.....	42
Figura 2-10: Amplitud del extremo libre de la viga en voladizo y del absorber sintonizado a la primera frecuencia natural según la frecuencia de excitación .....	43
Figura 2-11: Amplitud de cada punto a lo largo de la viga excitada en cercanía de la primera frecuencia natural cuando es implementada con el absorber pasivo sintonizado a la primera frecuencia natural.....	44
Figura 2-12: Amplitudes de cada punto a lo largo de la viga excitada en cercanía de la primera frecuencia natural con absorber y sin absorber.....	45
Figura 3-1 Modelo conceptual del absorber activo de vibraciones.....	48
Figura 3-2 (a) Esquema de un actuador electromagnético (Palomera-Arias, 2005); (b) Circuito eléctrico equivalente del actuador electromagnético .....	49
Figura 3-3 Diagrama de bloques del absorber activo desacoplado.....	51
Figura 3-4 Diagrama de bloques del absorber activo desacoplado.....	55
Figura 4-1: Sistema viga en voladizo implementado con el absorber electromagnético .....	58
Figura 4-2. Esquema de control del sistema viga en voladizo implementado con el absorber activo de vibraciones.....	64
Figura 4-3 Modelo del sistema viga en voladizo implementado con el absorber electromagnético en Matlab Simulink .....	66
Figura 4-4. Ganancias del control PD.....	68
Figura 4-5. Respuesta en frecuencia del absorber activo sintonizado a la primera frecuencia de resonancia de la viga .....	69
Figura 4-6. Respuesta en frecuencia del absorber activo sintonizado a la segunda frecuencia de resonancia de la viga .....	69
Figura 4-7. Comparación de la respuesta del sistema viga en voladizo implementado con un absorber activo de vibraciones y uno pasivo sintonizados a la primera frecuencia natural del sistema original .....	70
Figura 4-8. Señal de voltaje que controla el actuador electromagnético en el tiempo .....	71
Figura 4-9. Potencia del actuador electromagnético en el tiempo .....	71

Figura 4-10. Comparación de la respuesta del sistema viga en voladizo implementado con un absorber activo de vibraciones y uno pasivo sintonizados a la segunda frecuencia natural del sistema original .....	72
Figura 4-11. Desplazamiento del extremo de la viga y del absorber activo en el tiempo cuando es sintonizado a la segunda frecuencia de resonancia .....	73
Figura 4-12. Fuerza activa provista por el actuador electromagnético y el desplazamiento relativo del absorber activo en el tiempo .....	74
Figura 4-13. Señal de voltaje que controla el actuador electromagnético en el tiempo .....	75
Figura 4-14. Potencia del actuador electromagnético en el tiempo .....	75



## Índice de Tablas

Tabla 2-1 Parámetros de la viga en voladizo para la simulación en vibración forzada.....	30
Tabla 2-2 Frecuencias naturales del sistema viga en voladizo .....	33
Tabla 2-3. Parámetros de la viga y absorber pasivo utilizados en la simulación.....	39
Tabla 2-4 Frecuencias naturales del sistema viga en voladizo implementado con absorber pasivo .....	45
Tabla 4-1 Frecuencias naturales del sistema viga en voladizo implementado con absorber pasivo .....	64
Tabla 4-2 Parámetros del absorber activo de vibraciones.....	65
Tabla 4-3. Parámetros del controlado PD para una excitación en su primer o segundo modo de vibración.....	68



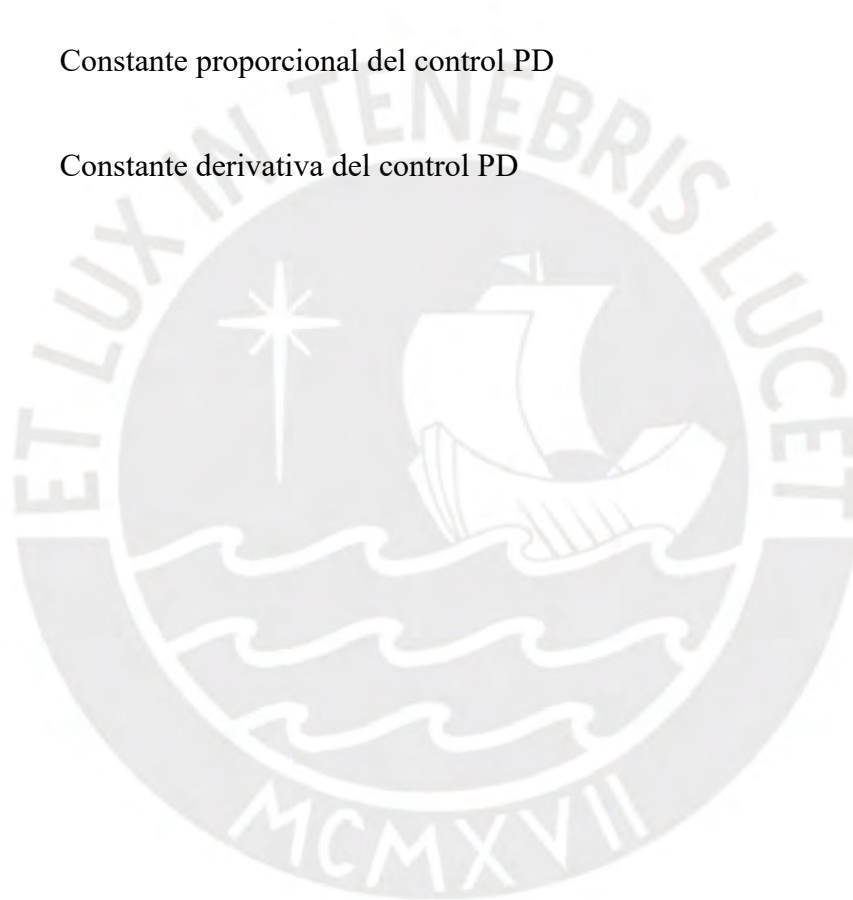
## Lista de Símbolos

$x$	Posición a lo largo de la viga	$[m]$
$w(x, t)$	Deflexión de la viga en función de la posición y el tiempo	$[m]$
$l$	Longitud total de la viga	$[m]$
$b$	Ancho de la sección transversal de la viga en voladizo	$[m]$
$e$	Espesor de la viga	$[m]$
$f(t)$	Fuerza de excitación en el extremo de la viga	$[N]$
$T$	Energía cinética de la viga	$[J]$
$V$	Energía potencial de la viga	$[J]$
$A(x)$	Área de la sección transversal según la posición a lo largo de la viga	$[m^2]$
$\rho(x)$	Densidad según la posición a lo largo de la viga	$[\frac{kg}{m^3}]$
$q_i(t)$	Coordenada generalizada de la viga relacionada al modo de vibración $i$	$[m]$
$\varphi_i(x)$	Función de forma relacionado al modo $i$	$[-]$
$m_i$	Masa generalizada relacionada al modo de vibración $i$	$[kg]$
$k_i$	Rigidez generalizada relacionada al modo de vibración $i$	$[\frac{N}{m}]$

$E(x)$	Módulo de elasticidad según la posición a lo largo de la viga	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$
$I(x)$	Momento de inercia de la sección según la posición a lo largo de la viga	$[m^4]$
$Q_i(s)$	Coordenada generalizada relacionada al modo de vibración $i$ en el dominio de Laplace	$[m]$
$H_j$	Fuerza generalizada correspondiente a una fuerza puntual a una posición determinada sobre la viga	$[kg]$
$P(t)$	Fuerza de perturbación en el tiempo	$[N]$
$x_p$	Posición sobre la viga correspondiente a la fuerza de perturbación	$[m]$
$\ddot{q}_i(t)$	Aceleración en coordenadas generalizadas correspondiente al modo de vibración $i$	$[m]$
$x_a(t)$	Posición absoluta del absorber de vibraciones en el tiempo	$[m]$
$k_a$	Rigidez del absorber pasivo de vibraciones sin sintonizado a la primera frecuencia natural de la viga	$\left[\frac{N}{m}\right]$
$X_a(s)$	Posición absoluta del absorber de vibraciones en el dominio de Laplace	$[m]$
$e_c(t)$	Voltaje en el tiempo del actuador electromagnético	$[V]$

$R$	Resistencia sobre el circuito equivalente del actuador electromagnético	$\left[\frac{V}{A}\right]$
$L$	Inductancia	$[H]$
$K_b$	Constante de fuerza del actuador electromagnético	$\left[\frac{N \cdot s}{m}\right]$
$x_r(t)$	Posición relativa del absorber de vibraciones respecto del extremo de la viga	$[m]$
$\dot{x}_r(t)$	Velocidad relativa del absorber de vibraciones respecto del extremo de la viga	$\left[\frac{m}{s}\right]$
$i(t)$	Corriente en el circuito electromagnético en el tiempo	$[A]$
$K_c$	Constante de proporción entre la fuerza electromagnética y la magnitud de corriente	$\left[\frac{N}{A}\right]$
$I(s)$	Corriente en el circuito del actuador electromagnético en el dominio de Laplace	$[A]$
$X_r(s)$	Posición relativa del absorber de vibraciones respecto del extremo de la viga en el dominio de Laplace	$[m]$
$u(t)$	Fuerza electromagnética del actuador en el tiempo	$[N]$
$U(s)$	Fuerza electromagnética del actuador en el dominio de Laplace	
$P(s)$	Fuerza de perturbación en el tiempo en el dominio de Laplace	$[N]$

$G_i$	Matriz de funciones de transferencia de la fuerza del actuador según las coordenadas generalizadas modales	$[-]$
$G_p^i$	Función de transferencia del desplazamiento según la perturbación en el dominio de Laplace	$[-]$
$G_u^i$	Función de transferencia del desplazamiento según la fuerza en el actuador en el dominio de Laplace	$[-]$
$K_p$	Constante proporcional del control PD	$[-]$
$K_d$	Constante derivativa del control PD	$\left[\frac{N}{m}\right]$



# Introducción

La búsqueda del desarrollo integral nos incita con cada vez más fuerza a la búsqueda de alternativas más sofisticadas que no sólo cumplan en materia de funcionalidad, sino también en la relación que mantiene su operación con el medio en que se encuentran y mucho más importante, con las personas involucradas en su operación siempre con la mira dirigida a mejorar la calidad de vida y resolver problemas a nivel tanto de personas como de sociedad e industria.

Uno de los campos científicos que es materia de continua investigación y está presente en casi cualquier actividad humana son las vibraciones mecánicas. Entendidas como un movimiento oscilatorio, las vibraciones en maquinaria, estructuras o cualquier sistema se manifiestan como una consecuencia de las cargas dinámicas de una fuente de excitación que puede ser el mismo sistema en sí, por la naturaleza dinámica de su operación, o de una fuente externa aledaña a él. Las fuentes externas pueden ser otras máquinas en operación, que excitan a una frecuencia determinada, o provenientes de la naturaleza dinámica del ambiente en el que opera, como la producida por fluidos en movimiento, cuya frecuencia de excitación es variable e impredecible sin mediciones.

El monitoreo continuo de vibraciones en puntos estratégicos de maquinaria, estructuras o cualquier sistema en operación proporciona información sumamente útil de su estado para elaborar el diagnóstico y correcciones respectivas, procedimiento que es utilizado dentro del mantenimiento predictivo a fin de prevenir fallas catastróficas (Orhan et al., 2006). En este sentido, los altos niveles de vibración son comúnmente una señal de un comportamiento dinámico indeseado en el sistema de análisis y deben ser eliminados o, en su defecto, atenuados.

Evaluar las características dinámicas se convierte entonces en una necesidad de cada proyecto para disminuir las amplitudes de vibraciones no deseadas de manera que la operación de un sistema no dañe sus componentes asegurando su vida plena y más importante, asegurando la seguridad y salud de quienes los operan. Cada cambio en la operación de un determinado componente repercute en otros con los que guarda relación, además de influir en el performance para bien o para mal. La determinación de hacia dónde requiere de un exhaustivo análisis tan complejo como las circunstancias lo ameriten. Es en este contexto, en el que los modelos permiten evaluar distintas condiciones sin el riesgo de causar daños y asegurar que en la implementación se obtenga el comportamiento óptimo

Entre las diferentes alternativas propuestas y desarrolladas a lo largo de la historia para la atenuación de las vibraciones, destaca el absorber de vibraciones inventado por Frahm en 1909 como un sistema mecánico secundario que, acoplado al primario, vibra de tal manera que ejerce una fuerza de excitación de misma magnitud y en sentido contrario que la externa logrando eliminar la vibración en el sistema primario (Den Hartog, 1956). Los parámetros del absorber se diseñan para una determinada frecuencia de excitación y sólo atenúan la amplitud de vibración efectivamente en un rango pequeño de frecuencias alrededor de esta; fuera de este rango puede llegar hasta ser perjudicial si la frecuencia de excitación corresponde a una de las nuevas naturales del sistema, producido por el cambio a las características dinámicas que resultan de añadir el absorber.

En orden de eliminar esta desventaja, la adición de un componente activo capaz de reconfigurar las características dinámicas del absorber a fin de sintonizarlo para diferentes frecuencias de

excitación ha sido materia de investigación en el sentido de proveer una rigidez “dinámica”. Sin embargo, su implementación en estructuras aún no forma parte del contexto peruano ni se tiene bases sentadas siendo nuestro país altamente sísmico.

Kwak, Yang, & Shin (2015) abordó el estudio teórico y experimental de un absorber semiactivo para una estructura representada por un modelo discreto de 2GDL con un solenoide como componente activo cuya fuerza ejercida es controlada por la magnitud de corriente a través de él, Yu, Thenozhi, & Li (2014) propuso también un modelo discreto de una estructura mediante un actuador lineal utilizando un controlador tipo PD/PID para controlar la magnitud de la fuerza ejercida en el tiempo con la posición como feedback; Yang, Shin, Lee, Kim, & Kwak (2017) utilizó, en cambio, la aceleración como feedback pues puede ser medida directamente por los acelerómetros actuales.

Los modelos en los que se implementaron los absorbentes activos para su análisis y comparación con ensayos experimentales fueron discretos. Si bien los modelos discretos son una manera simplificada de abordar el análisis de un sistema real y determinar una aproximación de su comportamiento dinámico, no hay un modelo más fiel al real que uno continuo. En este sentido, la presente investigación aborda el análisis de la implementación de un absorber activo de vibraciones en un modelo continuo de una viga en voladizo a fin de cuantificar la influencia de sus parámetros, el grado de atenuación de la amplitud de vibraciones alcanzable y los requerimientos de operación, en este caso específico de una viga en voladizo elegido por su similitud a sistemas reales y factibilidad del estudio. El modelo es evaluado mediante simulación en MATLAB. El procedimiento establecido puede ser seguido en sistemas de mayor complejidad cuyas características dinámicas, necesarias para el análisis, pueden ser obtenidas de ensayos experimentales que calibren un modelo FEM.

### **Objetivos generales**

- Analizar el comportamiento dinámico del sistema viga en voladizo implementado con un absorber activo de vibraciones excitado en cualquier frecuencia desde su primera hasta su segunda frecuencia natural

### **Objetivos específicos**

- Desarrollar un modelo continuo del sistema viga en voladizo implementado con un absorber activo que represente su dinámica
- Determinar los parámetros del absorber activo que lo sintonizan a cualquier frecuencia de excitación
- Cuantificar la reducción de amplitud de vibración utilizando un absorber activo sintonizado mediante un actuador electromagnético
- Evaluar la influencia de los parámetros del absorber activo en la respuesta dinámica del sistema viga en voladizo

### **Alcance**

La principal contribución de esta investigación es un procedimiento para la determinación de los parámetros de un absorber activo de vibraciones implementado en un sistema real – en este caso aplicado una viga en voladizo- y la influencia de esos parámetros en la reducción de la amplitud de vibración. Además, el procedimiento descrito permite evaluar la factibilidad de su implementación en términos de reducción de la amplitud de vibración, consumo de corriente y comportamiento del actuador, la influencia de los parámetros del absorber activo en el comportamiento dinámico del sistema en el que se atenúan las vibraciones y el absorber.

Se aborda el modelamiento continuo de un sistema real como la viga en voladizo, el modelo de un actuador electromagnético y la estructura de la estrategia de control que en conjunto permiten simular el comportamiento de todo el sistema utilizando el software MATLAB.

Si bien el sistema utilizado corresponde al de una viga en voladizo, el procedimiento descrito puede extenderse a cualquier otro modelo de un sistema real obtenido mediante modelos discretos o elementos finitos y validando sus características dinámicas utilizando técnicas experimentales como *Experimental Modal Analysis* (EMA) u *Operational Modal Analysis* (OMA).

### **Estructura del estudio**

Para un mejor entendimiento del desarrollo de los capítulos, se brinda un panorama de todo el estudio seguido, en la Figura 1, para lograr los objetivos propuestos.

En primera instancia, se estudia el sistema de la viga en voladizo y los sistemas que esta puede representar, su conceptualización y los modelos ya existentes usados hasta el presente. Con el objeto a analizar ya esclarecido, se plantea el modelo físico-matemático que lo representará en el análisis a lo largo de este trabajo; los parámetros del modelo como el tipo de modelo, los grados de libertad, características dinámicas son evaluados en la aprobación del modelo hasta obtener el modelo final.

Más tarde, se implementa el absorber de vibraciones al modelo del sistema viga-obtenido anteriormente- con el fin de determinar los parámetros que debe tener el absorber tales como masa, rigidez, amortiguamiento, etc. para atenuar las vibraciones del sistema real.

Se evalúa la estrategia de control a utilizar para controlar la fuerza variable en el tiempo que permitirá reconfigurar en tiempo real el sistema conformado por la viga y el absorber de vibraciones.

Finalmente, se simula el modelo viga-absorber activo de vibraciones con datos reales y se grafican las variables como la amplitud de vibración con y sin absorber activo de vibraciones para cuantificar que tan poderoso resulta el método propuesto.

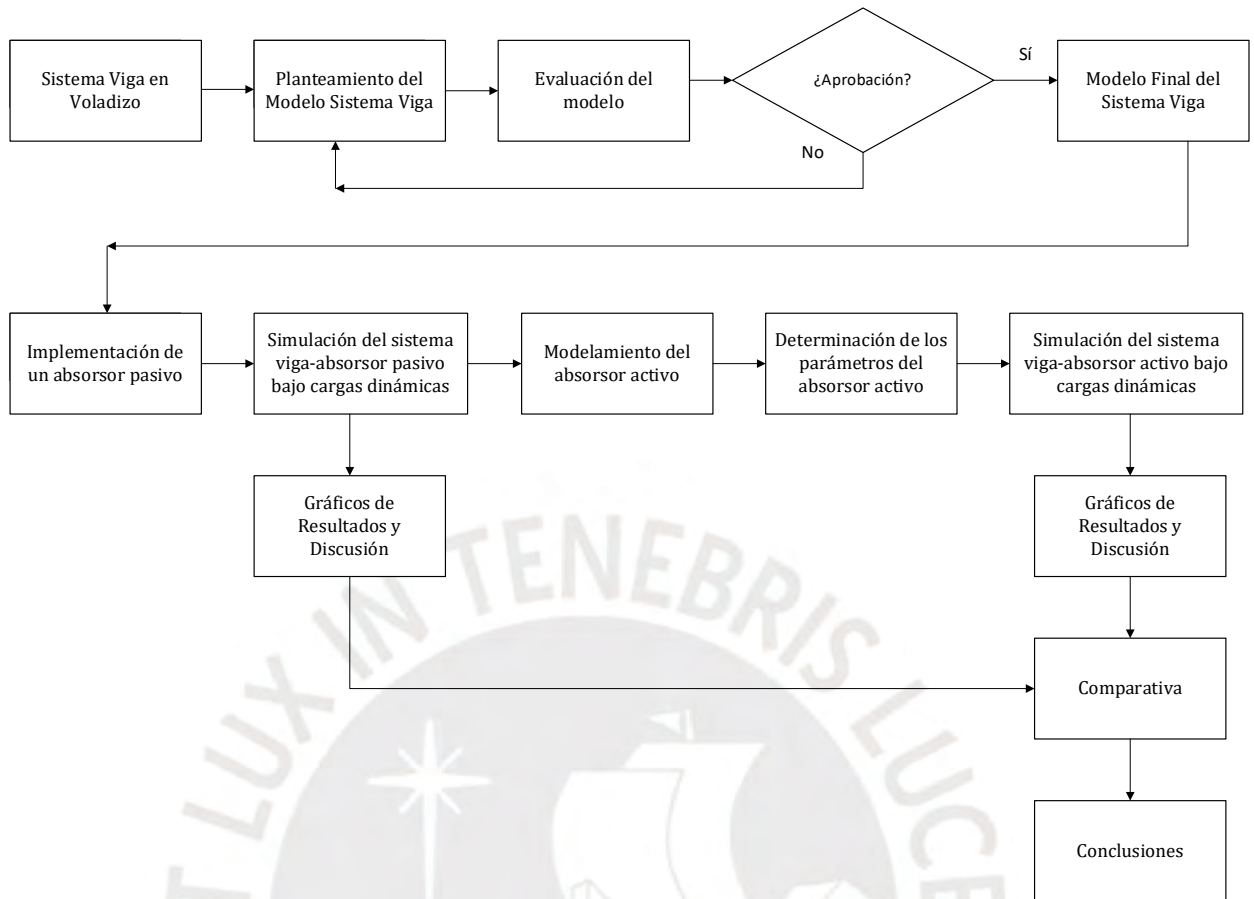


Figura 1-0 Etapas de estudio de la tesis

# Capítulo 1

## Estado del Arte

Este capítulo tiene la finalidad de instruir al lector en los conceptos y términos necesarios para su entendimiento desde el planteamiento de la problemática a solucionar, la conceptualización del sistema a estudiar - y su modelamiento- hasta la implementación del absorber activo de vibraciones y la discusión de los resultados.

### 1.1. Vibraciones mecánicas en el campo de la Ingeniería y su relación con las cargas dinámicas

El término vibración se refiere a un movimiento oscilante de algún cuerpo en cuestión, requiere de una fuerza de naturaleza dinámica en el tiempo -conocida como fuerza de excitación- que la produzca; es decir, son una manifestación de las cargas dinámicas sobre el cuerpo. La forma, frecuencia y magnitud con que el cuerpo vibra es la respuesta de sus características dinámicas a la fuerza de excitación. Estas características dinámicas dependen de la geometría del cuerpo, su material y las restricciones al movimiento que pueda tener; dentro de las características dinámicas, destaca una variable en particular denominada frecuencia natural. Cualquier cuerpo real posee infinitas frecuencias naturales, frecuencias que deben evitar excitarse mediante fuentes externas a fin de no obtener altos niveles de vibración como consecuencia del fenómeno de resonancia que puedan terminar provocando la falla de algún componente.

Las cargas dinámicas tanto cíclicas como de impacto como fuentes de excitación transfieren una cantidad de energía al sistema almacenada compuesto por las variables de deformación y esfuerzo. Es aquí en el que el término rigidez entendido como la relación entre estos dos últimos dirige cómo crecen estas variables, si aumentan los esfuerzos internos o si se expresan como deformación en el sistema. Tratándose de cargas dinámicas, la deformación de los cuerpos está

ligada a la amplitud de vibración y su aumento conllevaría al aumento de los esfuerzos dinámicos dentro del sistema lo que podría producir una falla por fatiga del material. Sofronas (2012) discutió diferentes casos de fracturas mecánicas relacionadas con las vibraciones mecánicas excesivas concluyendo en fallas por fatiga al tratarse de cargas cíclicas. Barros et al. (2020) abordó el estudio dinámico de una aeronave en la que producto de su operación presentaba cargas alternantes a lo largo de su estructura, desarrolló un procedimiento teórico y experimental para la predicción de vida restante a la fatiga de las zonas críticas en el que una mayor magnitud del esfuerzo alternante corresponde a un tiempo de vida a la fatiga menor del componente.

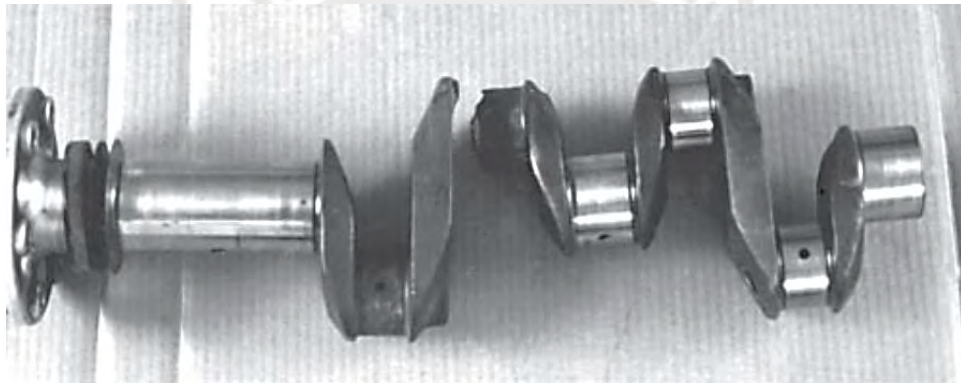


Figura 1-1 Fractura por fatiga de un cigüeñal (Sofronas, 2012)

Industrialmente es siempre de interés el aumento de carga en la producción que se convierte en necesidad si la demanda así lo determina. Este aumento de carga produce un aumento de las cargas estáticas y dinámicas en los componentes de la planta en cuestión, por lo que requiere una evaluación de factibilidad, en la que se debe realizar un análisis dinámico exhaustivo de las máquinas y estructuras presentes.

En este sentido, reducir los niveles de vibración no deseados que se presentan cuando los sistemas se encuentran en operación se convierte en materia de investigación dentro de Ingeniería. Es natural en la industria que las máquinas y otros sistemas con los interactúan

vibren, es un hecho que no puede evitarse, pero sí reducirse de manera que no interfieren en su desempeño propio o el de los sistemas vecinos.

El monitoreo de las vibraciones presentes en puntos estratégicos son un muy buen indicador del estado de una máquina o si las condiciones de operación son las adecuadas. Por ejemplo, en el análisis de vibraciones de un molino de bolas, las magnitudes de aceleración y frecuencia sirven para determinar si el rango de operación es el adecuado a fin de asegurar que el tamaño de la partícula de la molienda sea el requerido en el proceso (Mohanty et al., 2015). Wójcicki, Grosel, Sawicki, Majcher, & Pakos (2015) presentó el análisis vibraciones de molinos de bolas dentro de un recinto a fin de determinar que ninguna de las maquinas sea una fuente de excitación cercana a alguna frecuencia natural dentro del recinto que pueda desestabilizar la estructura o componentes mecánicos como también, evaluar la baja transmisibilidad de las cimentaciones diseñadas. En el ámbito estructural, (Chan et al., 2001) presentó un análisis dinámico del puente Tsing Ma, que es excitado por el paso de los vehículos a lo largo de su longitud causando esfuerzos dinámicos sobre su estructura en el tiempo, los cuales fueron utilizados para el cálculo del tiempo de vida a la fatiga. Disminuir las amplitudes de los esfuerzos alternantes requiere absorber la energía transferida por las cargas dinámicas en lugar de que las absorba el sistema principal y produzca deformación en esta. En este sentido, la implementación de un absorber de vibraciones permite disminuir la amplitud de vibración y con ello, disminuir la magnitud de los esfuerzos dinámicos para obtener un mayor tiempo de servicio.

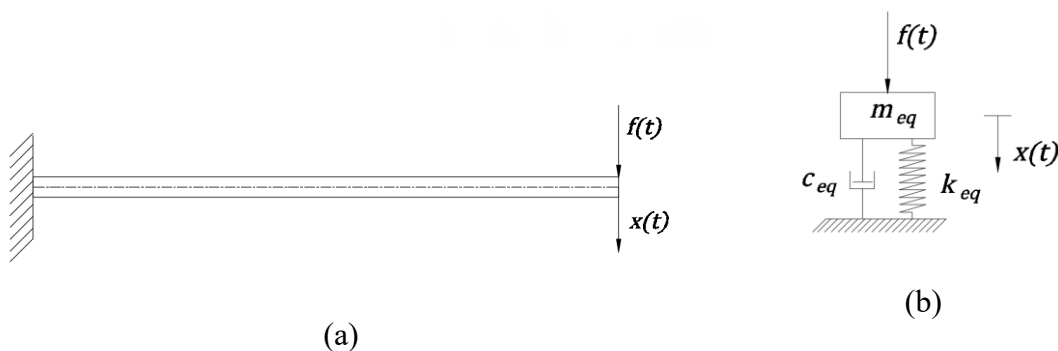
## **1.2. Modelamiento de sistemas dinámicos**

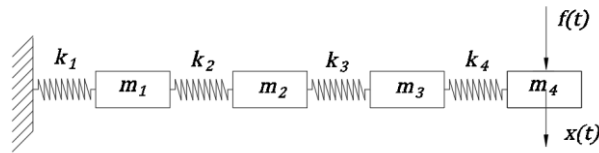
Los modelos matemáticos sirven como representación de sistemas reales a fin de evaluar su comportamiento con distintos parámetros, condiciones de operación, obtener información de alguna variable desconocida, pero sin que se requiera implementarlo físicamente (Rodríguez,

2017). Es una etapa dentro de la Ingeniería que permite acercarse a un diseño final sin la necesidad de construirlo a fin de ser evaluado, lo que representa una ventaja económica indudable.

Las maquinas, estructuras, componentes denominados como **sistemas reales** requieren un análisis dinámico antes de ser puestos en marcha, a fin de asegurar que las amplitudes de vibración estén en un rango adecuado que no interfiera en el desempeño de sistemas aledaños o el propio. Más aun, asegurar que no exista una frecuencia de excitación en la cercanía de alguna de las frecuencias naturales del sistema propio o sistemas aledaños.

En este sentido, un buen modelo permite este análisis dinámico para estimar las características dinámicas del sistema que son valores cuantificables mediante la masa, rigidez y amortiguación dentro de una ecuación de movimiento que relacione estos parámetros. En su forma más simple, los sistemas suelen representarse como sistemas de un grado de libertad conformado por la masa, rigidez y amortiguación equivalentes a un sistema real de estudio, Figura 1-2 (b). Entre más complejo sea el sistema, según se requiera, el sistema puede ser representado mediante más grados de libertad, masas, rigideces, dando el paso a sistemas de múltiples grados de libertad, Figura 1-2 (c). Este paso es necesario en la conceptualización de sistemas reales, pues permiten obtener un acercamiento del movimiento y magnitud de las frecuencias naturales que tiene el sistema.





(c)

Figura 1-2 Sistema viga en voladizo representado por diferentes modelos (a) Modelo continuo; (b) Modelo de 1GDL; (c) Modelo de múltiples grados de libertad

Si aún se requiere una mejor aproximación al comportamiento real, puede utilizarse software de modelado para un análisis de elementos finitos mientras que la mejor aproximación al comportamiento de un sistema real puede realizarse mediante un modelo continuo, Figura 1-2 (a), que ha sido estudiado en cuerpos como vigas, placas en amplia literatura como en Rao (1952). Sin embargo, los modelos continuos representan una gran complejidad en su formulación especialmente para sistemas en la industria que no suelen estar conformados por sólo los cuerpos mencionados que tienen una geometría y condiciones de borde relativamente fáciles de analizar.

Todo modelo requiere de una validación experimental si es que se planea implementarlo. Las características dinámicas estimadas teóricamente requieren ser corregidas o se requiere de valores experimentales para ser encontradas e implementadas a la ecuación de movimiento que represente la dinámica del sistema. Técnicas experimentales como *Experimental Modal Analysis* (EMA) u *Operational Modal Analysis* (OMA) permiten encontrar las reales frecuencias naturales de los sistemas, la magnitud de las amplitudes de vibración bajo una fuerza de excitación conocida y utilizar esta información para corregir el modelo propuesto o utilizarlo para proponer empíricamente un modelo. Este procedimiento sigue el diagrama de flujo presentado por Rodríguez (2017) en la Figura 1-3.

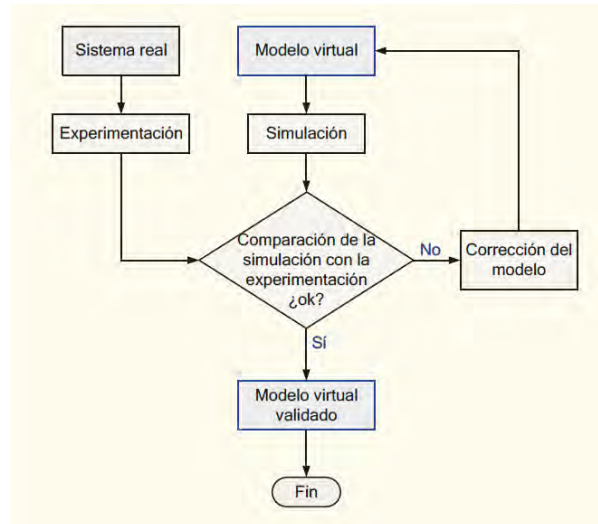


Figura 1-3 Proceso de validación de un modelo mediante la experimentación (Rodríguez, 2017)

Numerosos ejemplos se encuentran en la literatura del modelamiento de sistemas mecánicos como Yoshida, Kuratani, Ito, & Taniguchi (2019) quien propuso un modelo que permite estimar con buena aproximación la dinámica de las partículas dentro de un molino de bolas, Figura 1-4. Así estimó la fuerza de colisión entre ellas que utilizó como fuerza de contacto para un análisis de vibraciones al cilindro del molino de bolas mediante elementos finitos. Experimentalmente encontró sus resultados tenían la misma tendencia en las amplitudes de vibración de la superficie que los calculados teóricamente utilizando la simulación.

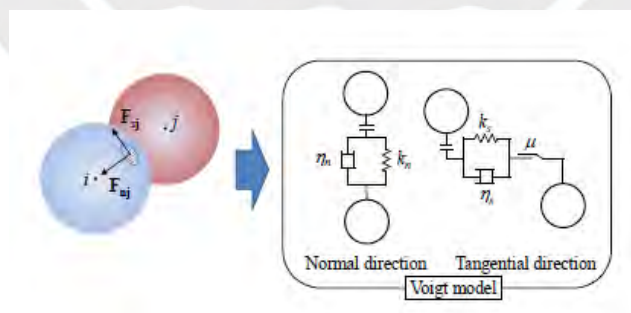


Figura 1-4 Modelamiento del contacto entre dos partículas para el análisis del comportamiento dinámico de un molino de bolas. Fuente (Yoshida et al., 2019)

### 1.3. Absorsor pasivo de vibraciones

El absorsor de vibraciones o *tuned mass damper* es un sistema mecánico ampliamente estudiado y utilizado para atenuar las amplitudes de vibraciones no deseadas de un sistema real cuando no es posible mitigar las fuerzas de excitación provenientes de máquinas u otras formas (Rao, 1952). Fue inventado por Frahm (Frahm, 1911), consiste en una masa y rigidez acopladas a un sistema real, también llamado primario, representados en su modelo más simple de 2 grados de libertad en la Figura 1-5.

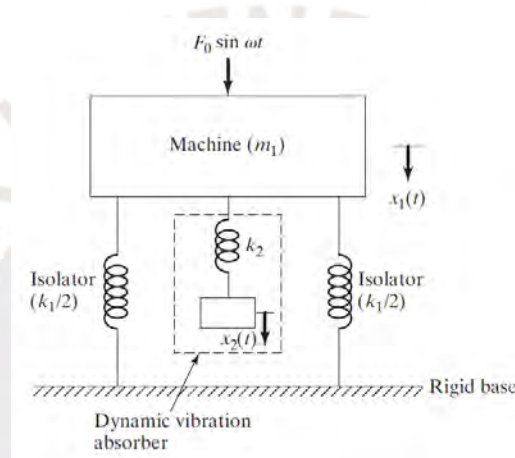


Figura 1-5 Absorsor pasivo de vibraciones (Rao, 1952)

Los sistemas llamados primarios pueden representar de una estructura trabajando con fuerzas de excitación provenientes de una máquina que soporta o un sistema de tuberías el cual transporta un fluido con determinado caudal, por ejemplo.

El absorsor de vibraciones es entonces un sistema secundario que siendo acoplado al sistema primario, absorbe las vibraciones provocadas por **una fuerza de excitación de una determinada frecuencia**, siendo la masa del absorsor la que vibra mientras que el sistema primario permanece quieto o en su defecto, disminuye considerablemente su amplitud. Su funcionamiento consiste en vibrar a una fase opuesta del sistema primario, disminuyendo así la amplitud a la que el sistema primario vibración.

Al resolver sistema de dos grados de libertad de la Figura 1-5 y graficar los resultados en el función de la frecuencia de excitación, se obtiene la Figura 1-6. En ella, se muestra que existe una determinada frecuencia para la cual la **amplitud de la masa primaria es nula**. **La filosofía del absorber se basa en establecer sus magnitudes de masa y rigidez a fin de lograr que esa nula amplitud suceda en la frecuencia de excitación a la que está sometido el sistema primario.**

En este sentido, los valores que tomen la masa y rigidez del absorber dependen en esencia de la frecuencia de excitación y la relación que existe entre estas tres variables es tal que la frecuencia natural propia del TMD desacoplado debe ser igual a la de excitación. Este comportamiento es lo que produce que el TMD provea la misma fuerza que actúa sobre el sistema primario, pero en contra fase eliminando teóricamente la vibración del sistema primario. Otra forma de interpretar este comportamiento es que el TMD provee de una “fuerza inercial” al sistema primario siempre en contra fase de la fuerza que excita al sistema.

Con esta premisa, la frecuencia de excitación es una variable importante que depende de las condiciones reales en que se encuentre el sistema; por tanto, tienen que ser medidos o estimados utilizando métodos analíticos.

Además el absorber, al ser diseñado para atenuar las vibraciones en una determinada frecuencia de excitación, solo es apto en un rango limitado de frecuencias. Esto es debido a que al añadir una masa y rigidez se cambia el sistema primario introduciendo dos nuevas frecuencias naturales en las cuales suceden los nuevos picos de amplitud mostrados en la Figura 1-6. Estos picos conforman los límites abiertos del rango de frecuencias de excitación en la que el absorber funciona y están en función de la masa y rigidez del absorber. En caso de que el sistema primario implementado con el absorber sea excitado a otra frecuencia –que no es con la que se diseñó- cercana a uno de las nuevas frecuencias naturales, el sistema entraría en resonancia y

la amplitud crecería en el tiempo por lo que el absorber, en lugar de atenuar las vibraciones, provocaría que estas incrementen en el sistema primario. En la Figura 1-6, se muestra este comportamiento al excitar al sistema a alrededor de  $0.9\omega$ .

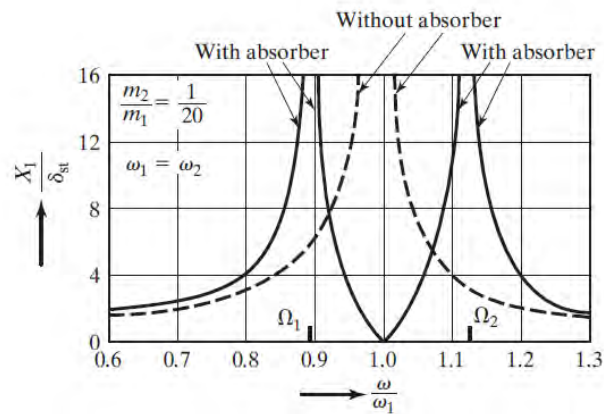


Figura 1-6: Amplitud de la masa  $m_1$  en función de la frecuencia de excitación con y sin absorber de vibraciones, Fuente (Rao, 1952)

Diversos aspectos constructivos han sido propuestos para implementar el TMD en sistemas reales, pero su concepto es el mismo y puede seguir representándose con el mismo modelo mostrado en la Figura 1-5. En la Figura 1-7, se muestra el primer TMD equipado en Japón en el Chiba Port Tower 1986. Este fue diseñado para absorber la vibración de las primeras frecuencias naturales que corresponden a los periodos 2.24 y 2.72s en los ejes x y eje y; el desplazamiento relativo del amortiguador respecto de la torre fue de  $\pm 1\text{m}$  en cada dirección (Connor & Laflamme, 2014). Esto se denomina como carrera y debe ser cuantificado en el diseño. En la Figura 1-8, se muestra otro TMD más actual instalado en Huis Ten Bosch Tower, Nagasaki.



Figura 1-7 Tuned mass damper for Chiba-Port Tower (Connor & Laflamme, 2014)



Figura 1-8 Tuned mass damper—Huis Ten Bosch Tower, Nagasaki (Connor & Laflamme, 2014)

En Rincón (2020), se presentó un modelo discreto de la viga en voladizo de 4 DOF implementado con el absorber de vibraciones, Figura 1-9. El uso de 4DOF fue concluido luego de analizar distintos modelos y números de grados de libertad con la premisa de que las frecuencias naturales del modelo se aproximen en lo mayor posible a las naturales calculadas por el modelo continuo.

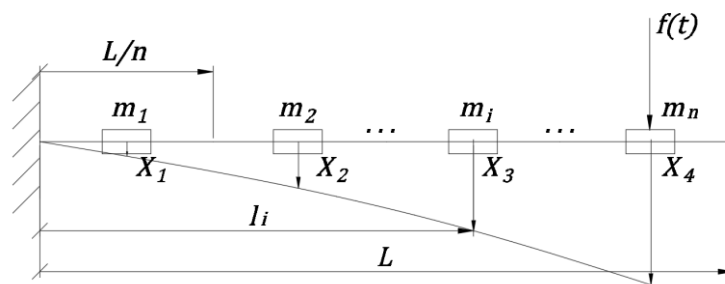


Figura 1-9: Modelo discretizado de la viga en voladizo de n-DOF, Fuente (Rincón, 2020)

Como resultado de su análisis dinámico del sistema de 5 DOF, se cuantificaron las amplitudes de vibración para diferentes magnitudes de masa del absorber obteniéndose la Figura 1-10. Con

ella, concluye que una mayor masa del absorber incrementa el rango de trabajo del absorber pasivo. Además disminuye la amplitud de la vibración del absorber (carrera) que es un parámetro limitado por el espacio físico que tiene el absorber para poder desplazarse. Sin embargo, a medida que el absorber tiene mayor masa, se requiere de una mayor rigidez para ser sintonizado a la misma frecuencia que uno de menor masa (Rincón, 2020).

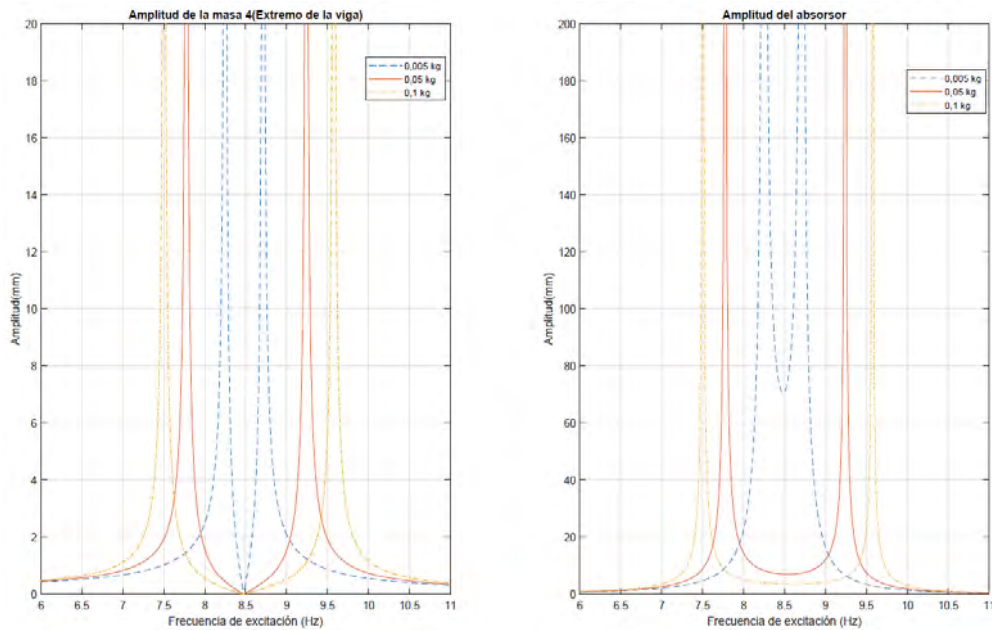


Figura 1-10 Amplitudes vibración del extremo de una viga en voladizo para diferentes masas del absorber sintonizado a la primera frecuencia natural , Fuente (Rincón, 2020)

En Asachi & Ovidiu Toma Gheorghe Asachi (2014) también se discute y cuantifica la efectividad del TMD, los parámetros que debe tener el absorber en orden de obtener una respuesta del sistema deseada como la reducción de la amplitud de vibración. Asimismo, se establecen lineamientos de la relación que debe tener el absorber y la masa modal del sistema primario para cierto modo de vibración, comúnmente entre 1:100 y 1:10 para no afectar las características estáticas y dinámicas del sistema primario en gran medida. Estos lineamientos han sido muy estudiados y representados por relaciones entre las variables mediante gráficos en (Connor & Laflamme, 2014).

Su caso de estudio es presentado como una estructura de 3 grados de libertad, sus masas modales son las correspondientes a los 3 primeros modos de vibración. Esto debido a que son los necesarios para representar la dinámica total del sistema; al ser un edificio de gran masa, las primeras frecuencias naturales son las que determinan el movimiento total del sistema (las dominantes), pues las cargas externas a las que están sometidas rara vez serán de una alta frecuencia que requiera el uso de modos de mayor frecuencia natural. Sus resultados muestran que el absorber es efectivo no solo bajo cargas de naturaleza armónica, también lo es bajo cargas más complejas como las sísmicas. **Esto demuestra que la teoría conocida del absorber de vibraciones, aunque se basa en un sistema de dos grados de libertad bajo una fuerza de naturaleza armónica, también es efectivo bajo cargas de otras naturalezas, lo que da pie a analizar el absorber para sistemas con cargas externas más complejas.**

#### **1.4. Control activo de vibraciones**

##### **1.4.1. Introducción**

Se ha dejado intuir hasta el momento que el estudio de vibraciones no es ajeno a ningún campo de trabajo, pues debe garantizarse un buen comportamiento de su sistema no sólo estático, sino dinámico bajo fuentes externas como lo son las cargas provenientes de la naturaleza: sísmicas, de viento y demás de dinámica similar. Algunos comportamientos específicos de estas cargas se tienen bien estudiadas y hasta cuantificadas en expresiones que pueden utilizarse en la etapa de diseño; sin embargo, no es posible prever exactamente la forma de onda que tiene la fuente externa, sino pueden ser de cualquier frecuencia variable en el tiempo. Es aquí cuando los medios convencionales para atenuar vibraciones, por ejemplo, en estructuras existentes como los amortiguadores visco elásticos, absorberes de masa sintonizada resultan insuficientes; considerando que este último no es capaz de cambiar las características dinámicas del sistema en tiempo real, sólo es efectivo en un rango muy pequeño alrededor de una frecuencia de

excitación (Soong, 1988). A fin de vencer estas adversidades, el control activo es propuesto como una alternativa desde hace ya varias décadas, pero que aún no forma parte del contexto peruano ni se tiene bases sentadas siendo un país altamente sísmico.

El control activo tiene el objetivo de cambiar las características dinámicas del sistema de manera que su frecuencia natural se aleje de la de excitación que existe en campo ya sea proveniente de la naturaleza o de alguna máquina con la que tenga conexión. En este sentido, diversos mecanismos que involucren cambios en las características dinámicas del sistema en tiempo real han sido propuestos y estudiados basándose la mayoría en proveer una fuerza inercial en contra fase de la carga externa.

Concerniente a su implementación, el control activo requiere de la adición de un actuador y su control al sistema en el que se requiere atenuar la amplitud de vibración con el objetivo de cambiar sus parámetros dinámicos y obtener una respuesta deseada en su movimiento, especialmente cuando se tienen frecuencias de excitación cercanas a una de las naturales. Asimismo, requiere de una fuente de energía externa, sensores para la retroalimentación en tiempo real y una fuerza de control provista por el actuador que está gobernado por la estrategia de control elegida. En la Figura 1-11, se muestra el esquema del control activo aplicado a una estructura.

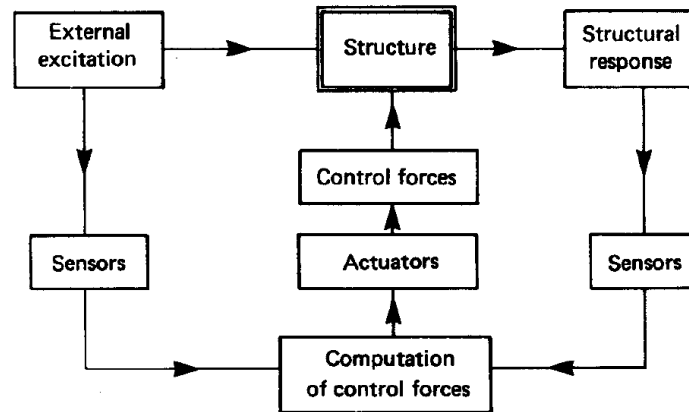


Figura 1-11 Esquema de un control activo (Soong, 1988)

### 1.4.2. Absorber dinámico activo de vibraciones

En 1.3, se discutió en que consiste un absorber pasivo de vibraciones estableciendo que este es diseñado para absorber las vibraciones de un sistema provocadas por una fuerza variable en el tiempo de una determinada frecuencia de excitación. El TMD solo es válido en un rango pequeño de frecuencias de excitación, pues la masa y rigidez del absorber no pueden modificarse al ser magnitudes físicas establecidas en el diseño y ya instaladas en el sistema primario.

En este estudio, se aborda el absorber activo de vibraciones que puede ser descrito conceptualmente como un sistema secundario provisto de masa, rigidez y una fuerza llamada activa que pretende cambiar la rigidez obteniendo una frecuencia natural del absorber sintonizable a cualquier frecuencia de excitación. La idea de seguir este comportamiento de rigidez variable proviene del concepto de las masas sintonizadas TMD que tienen una frecuencia de diseño de igual magnitud que la de excitación para que provean una fuerza de igual magnitud que la de excitación, pero en contra fase. En la Figura 1-12, (a) muestra el absorber pasivo y (b) el absorber activo que adicional a la masa y rigidez, consiste también en una fuerza de control que es la encargada de cambiar las características dinámicas del sistema.

Su magnitud en el tiempo estará controlada por un actuador, a su vez controlado mediante una estrategia en orden de obtener la mayor atenuación de la amplitud de vibración posible.

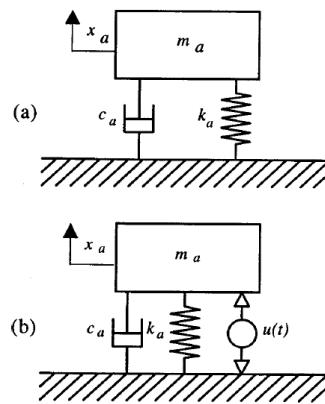


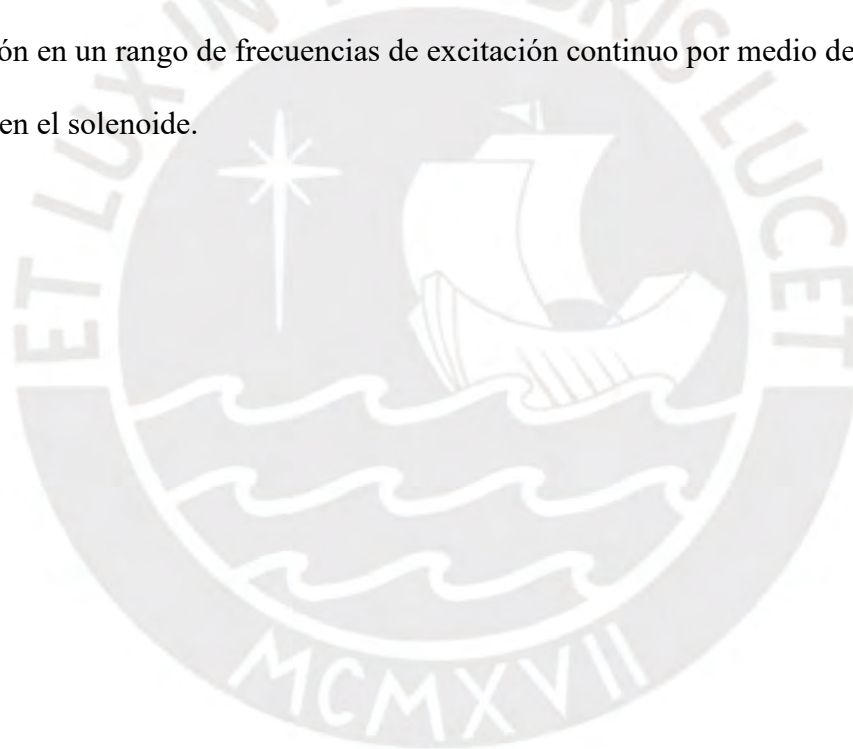
Figura 1-12: (a) Absorber pasivo (b) Absorber activo (Elmali et al., 2000)

Diversas investigaciones han abordado el t3pico de estrategias de control, tipo de feedback y sistema de estudio en el absorber activo de vibraciones. En Yu, Thenozhi, & Li (2014) se estudi3 el caso de un control activo de vibraciones en una estructura representado por un modelo de 2 grados de libertad. En su trabajo, propuso un controlador del tipo PD y PID cuyas ganancias fueron determinadas con condiciones suficientes que garanticen la estabilidad, pero no fueron las 3ptimas, pues resulta dif3cil sintonizar las ganancias que garanticen un buen comportamiento. Adem3s, determin3 de manera experimental que los resultados de un control PID presentaban un mejor comportamiento en la atenuaci3n de las amplitudes.

Por otro lado, Yang, Shin, Lee, Kim, & Kwak (2017) proponen utilizar la aceleraci3n de la estructura como retroalimentaci3n debido a su facilidad de medici3n y asign3ndole un ganancia para controlar la posici3n relativa de la masa del AMD respecto de la estructura primaria. Se intent3 utilizar un algoritmo que compute la posici3n deseada del absorber para cada instante en base al modelo te3rico y el feedback de aceleraci3n; sin embargo, en la implementaci3n no se logr3 seguir esta referencia. Por tanto se implement3 otro

algoritmo PID para seguir una velocidad previamente determinada que disminuye el error entre la posición deseada del absorber y la medida a lo largo del tiempo. Esta velocidad ingresa al algoritmo PID que tiene el servomotor obteniéndose un buen comportamiento.

Asimismo, en Kwak, Yang, & Shin (2015) , se propone el uso de un absorber semi-activo en el que se controla la magnitud de rigidez del absorber por medio de la relación entre la fuerza electromagnética generada por la corriente inducida en un solenoide y el desplazamiento de la masa del absorber. Se encuentra de manera experimental que el modelo matemático proporciona resultados fieles al comportamiento real, logrando atenuar la vibración en un rango de frecuencias de excitación continuo por medio del control de la corriente en el solenoide.



## Capítulo 2

# Sistema viga implementado con un absorber pasivo de vibraciones

El desarrollo de una teoría requiere de un caso de estudio en el que puedan cuantificarse las variables de interés y determinar su factibilidad. En este sentido, el modelo del caso puede ser tan complejo como se requiera. En este trabajo, el interés radica en analizar de manera cualitativa y cuantitativa las variables del absorber de vibraciones y evaluar su performance en distintas condiciones de operación. El modelo elegido para la implementación del absorber corresponde a un sistema viga en voladizo, por el hecho de que este sirve como representación de sistemas reales en condiciones y convenientemente son bien comportadas para enfocar el análisis en el performance del absorber. Además, el análisis propuesto puede extenderse con facilidad a otros sistemas de mayor complejidad mediante modelos analíticos como el presente trabajo o modelos desarrollados por *FEM (Finite Element Method)*.

## 2.1. Descripción del sistema de estudio

El sistema estudiado consta de una viga en voladizo en la que se aplica una fuerza puntual en el extremo libre de naturaleza armónica cuya frecuencia de excitación está en un rango desde la primera frecuencia natural del sistema hasta la segunda, Figura 2-1.

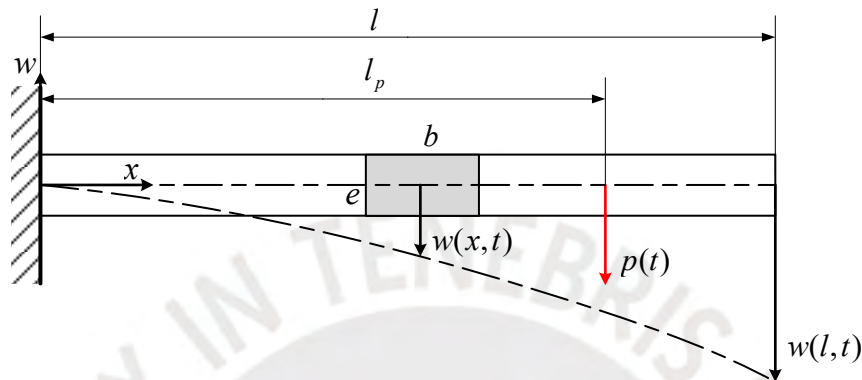


Figura 2-1. Sistema viga en voladizo

Siendo

$x$	Posición a lo largo de la viga [m]
$w(x, t)$	Desplazamiento vertical en función de la posición y el tiempo [m]
$l$	Longitud total de la viga [m]
$b$	Ancho de la viga [m]
$e$	Espesor de la viga [m]
$p(t)$	Fuerza armónica puntual en el extremo libre de la viga [N]

## 2.2. Modelo continuo del sistema viga

Los modelos discretos de sistemas reales en los que se ha implementado un absorber de vibraciones tanto pasivos como activos ya han sido objetos de estudio en la bibliografía aquí

utilizada. Por tanto, el presente estudio busca un mejor acercamiento a la respuesta real que tendría un sistema real en el que es instalado un TMD para cuantificar sus resultados mediante la simulación de un modelo físico-matemático a obtener. En este sentido, se aborda el estudio utilizando un **modelo continuo** de la viga de la Figura 2-1.

Existen dos teorías muy conocidas que modelan la viga: la propuesta por Euler-Bernoulli y la de Timoshenko. Este último, considera un efecto más que es la inercia rotacional y la deformación de corte lo que supone una mejor aproximación al comportamiento real de la viga. Si las dimensiones de la sección no son pequeñas comparadas con su longitud de la viga, es necesario utilizar el modelo propuesto por Timoshenko para considerar el efecto mencionado (Rao, 1952). Por el contrario, las dimensiones establecidas de la viga a estudiar no representan este caso, por lo que se utiliza el modelo continuo propuesto por Euler-Bernoulli, también conocido como “Thin Beam Theory”.

En estudios más detallados sobre este sistema, diversos autores proponen considerar el empotramiento como un momento cuya magnitud depende del ángulo entre la horizontal y la línea tangente a la curva de la viga multiplicado por una rigidez torsional; sin embargo, esto escapa del objetivo propuesto, por lo que se considera un empotramiento rígido como una de las condiciones de borde.

En resumen, las consideraciones utilizadas en la formulación del modelo son las siguientes:

- Se utiliza el modelo de viga propuesto por Euler-Bernoulli
- El material es homogéneo, entonces la densidad lineal permanece constante
- No existe cambios en la sección transversal a lo largo del eje de la viga.
- No existe desplazamiento axial a lo largo de la viga
- No existe ningún tipo de amortiguamiento en la dinámica del sistema

### 2.2.1. Vibración libre del modelo continuo

En el análisis presentado, se utiliza la teoría de superposición modal puesto que es una poderosa técnica que no solo permite hallar la respuesta del sistema bajo la aplicación de una carga, en este caso la fuerza puntual; sino, permite determinar la contribución de cada modo de vibración a la dinámica total del sistema.

La ecuación diferencial de una viga con distintas condiciones de borde que gobierna su dinámica ya ha sido ampliamente estudiada y la función que representa la deflexión de la viga en cada punto a lo largo de ella en el tiempo puede representarse como una superposición del efecto de cada modo de vibración, (E. 2-1) (Rao, 1952).

Además, la contribución de un modo correspondiente a la dinámica total del sistema incrementa según qué tan cerca esté la magnitud de la frecuencia de excitación a la frecuencia natural del modo correspondiente. Este comportamiento se evidencia en 2.2.2, en la simulación numérica del modelo durante la vibración forzada.

La anterior premisa da pie al siguiente análisis: basta con considerar el efecto de un número finito de modos de vibración en lugar de todos para en análisis dinámico del sistema. Como el rango de trabajo de esta tesis es el rango de las dos primeras frecuencias naturales, sería suficiente, entonces, superponer el efecto de los dos primeros modos, como se mostrará más adelante.

Incluir el efecto de la amortiguación produce, como es de esperarse, que la amplitud de la vibración disminuya. Con el fin de lograr el escenario más seguro en el diseño, se considera que no hay amortiguación, entonces la amplitud en frecuencias cercanas a una de las naturales será máxima.

En Łatas (2016), se presenta un primer análisis de un modelo continuo de una viga en la que se implementa un conjunto de absorbentes dinámicos pasivos de manera continua a fin de encontrar los parámetros óptimos. Estas mismas ecuaciones, que tienen su fundamento en métodos de energía muy bien estudiados en Rao (1952), se utilizan a continuación para obtener el modelo continuo de la viga adaptado a nuestros requerimientos. No se ha considerado ningún tipo de amortiguación; por tanto, no se requiere una ecuación que describa la energía disipada.

Las siguientes ecuaciones describen la energía cinética y potencial del sistema viga:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho(x)A(x) \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l E(x)I(x) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

El desplazamiento transversal de cada punto a lo largo del eje de la viga puede representarse mediante la sumatoria de sus coordenadas generalizadas multiplicadas por la función de forma, (E. 2-1).

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \varphi_i(x) \quad (E. 2-1)$$

La función  $\varphi_i(x)$  de la (E. 2-2) representa la función de forma de la viga para cada modo de vibración. Análogamente al caso de sistemas de múltiples grados de libertad,  $\varphi_i(x)$  representaría la matriz de forma de las coordenadas modales, pero al ser un sistema continuo, es una función en este caso. La función  $q_i(t)$  representa la coordenada generalizada del modo respectivo, que es la variable a determinar. La constante  $C_i$  para el caso de vibración libre se determina con las condiciones iniciales del sistema en el caso de vibración libre.

$$\varphi_i(x) = C_i[\text{sen}\beta_i x - \text{senh}\beta_i x - \alpha_i(\text{cos}\beta_i x - \text{cosh}\beta_i x)], i = 1, 2, 3 \dots \quad (\text{E. 2-2})$$

$$\alpha_i = \frac{\text{sen}\beta_i l - \text{senh}\beta_i l}{\text{cos}\beta_i l - \text{cosh}\beta_i l}$$

Resultaría imposible trabajar con los infinitos modos de vibración que tiene la viga en voladizo; por este motivo, se escoge un número de modos conveniente para su análisis buscando el equilibrio entre carga computacional y aproximación al resultado. Luego de simular el modelo, se encontró que es suficiente trabajar con dos modos de vibración, debido a que el rango de la frecuencia de excitación se encuentra dentro de sus dos frecuencias naturales correspondientes; sin embargo, se trabajará con 3 modos en este análisis para mostrar la contribución de cada uno, (E. 2-3).

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{n=3} q_i(t) \varphi_i(x) \quad (\text{E. 2-3})$$

Reemplazando en la expresión de energía cinética y potencial se obtiene

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n=3} \sum_{i=1}^{n=3} m_{ij} \dot{q}_i(t) \dot{q}_j(t) \quad (\text{E. 2-4})$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n=3} \sum_{i=1}^{n=3} k_{ij} q_i(t) q_j(t) \quad (\text{E. 2-5})$$

Siendo

$$m_{ij} = \int_0^l \rho(x)A(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x) dx \quad (E. 2-6)$$

$$k_{ij} = \int_0^l E(x)I(x) \frac{d^2\varphi_i}{dx^2} \frac{d^2\varphi_j}{dx^2} dx \quad (E. 2-7)$$

La condición de ortogonalidad establece que la integral del producto de las funciones de forma en las integrales de (E. 2-6) y (E. 2-7) es cero cuando  $i \neq j$ ; por consiguiente, se obtiene que  $m_{ij}$  y  $k_{ij}$  son cero cuando  $i \neq j$ .

$$\begin{cases} m_{ij} = \int_0^l \rho(x)A(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x) dx = 0 \\ k_{ij} = \int_0^l E(x)I(x) \frac{d^2\varphi_i}{dx^2} \frac{d^2\varphi_j}{dx^2} dx = 0 \end{cases} \quad \text{Si } i \neq j$$

Utilizando las ecuaciones de Lagrange con las expresiones de energía cinética y potencial de (E. 2-4) y (E. 2-5) respectivamente, se obtiene el siguiente sistema lineal de coordenadas generalizadas para el caso de vibración libre:

$$\sum_{i=1}^{n=3} m_{ij}\ddot{q}_i(t) + \sum_{i=1}^{n=3} k_{ij}q_i(t) = 0, j = 1, 2, 3 \quad (E. 2-8)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (E. 2-8) se obtiene la (E. 2-9), en la cual,  $s$  representaría las frecuencias naturales del sistema viga. Al expandir esta expresión se obtiene un sistema de ecuaciones lineales.

$$\sum_{j=1}^{n=3} m_{ij}s^2Q_j(s) + \sum_{j=1}^{n=3} k_{ij}Q_j(s) = 0, i = 1, 2, 3 \quad (E. 2-9)$$

$$(m_{11}s^2 + k_{11})Q_1 + (m_{21}s^2 + k_{21})Q_2 + (m_{31}s^2 + k_{31})Q_3 = 0$$

$$(m_{21}s^2 + k_{21})Q_1 + (m_{22}s^2 + k_{22})Q_2 + (m_{32}s^2 + k_{32})Q_3 = 0$$

$$(m_{31}s^2 + k_{31})Q_1 + (m_{32}s^2 + k_{32})Q_2 + (m_{33}s^2 + k_{33})Q_3 = 0$$

Ordenando en forma matricial y utilizando la condición de ortogonalidad descrita anteriormente, se tienen 3 ecuaciones independientes que juntas representan la dinámica total del sistema, análogo al caso de sistemas de múltiples grados de libertad.

$$\begin{bmatrix} m_{11}s^2 + k_{21} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22}s^2 + k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33}s^2 + k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1(s) \\ Q_2(s) \\ Q_3(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E. 2-10})$$

La única forma de obtener una solución no trivial es que el determinante de la matriz de coeficientes sea cero:

$$\det \begin{bmatrix} m_{11}s^2 + k_{21} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22}s^2 + k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33}s^2 + k_{33} \end{bmatrix} = 0$$

De esta forma se tienen los ya conocidos valores de frecuencias naturales del sistema. Si bien se hallaron los valores de frecuencia naturales que ya eran conocidos, la fuerza de este método radica en que puede usarse para el caso de vibración forzada a continuación. La fuerza aplicada a la viga es una función sinusoidal respecto del tiempo. Se aproximará la solución utilizando el análisis modal en el modelo continuo de modo que se hallará la contribución de cada modo a la dinámica total del sistema.

### 2.2.2. Vibración forzada del modelo continuo

En este punto ya se conoce que la dinámica total del sistema puede representarse como la superposición de las coordenadas generalizadas multiplicadas por la función de forma de cada modo de vibración que compone la viga. En otras palabras, cada modo contribuye al movimiento total del sistema y el grado de contribución depende de la función de forma de cada modo. Con el objetivo de cuantificar esta premisa, se utiliza la superposición modal para

hallar la respuesta de la viga excitada por una fuerza armónica de frecuencia de excitación comprendida entre la primera y segunda frecuencia natural del sistema.

El procedimiento es el mismo que en el caso de vibración libre, pero en este caso sí existe una fuerza de excitación en los sistemas independientes de un grado de libertad. Para obtener el sistema de (E. 2-8), se utilizaron las ecuaciones de Lagrange en las expresiones (E. 2-4) y (E. 2-5). Del mismo modo, se debe obtener cada fuerza generalizada  $H_j$  correspondientes a  $P$  con la expresión (E. 2-11).

$$H_j = P\varphi_j(x_p) \quad (E. 2-11)$$

Utilizando nuevamente las ecuaciones de Lagrange, se obtiene, para el caso de vibración forzada, el siguiente sistema:

$$\sum_{i=1}^{n=3} m_{ij}\ddot{q}_i(t) + \sum_{i=1}^{n=3} k_{ij}q_i(t) = P\varphi_j(x_p), j = 1, 2, 3 \quad (E. 2-12)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la expresión (E. 2-12) y utilizando la condición de ortogonalidad, se obtiene el siguiente sistema lineal (E. 2-12), en el cual cada ecuación puede ser resuelta independientemente. Estas ecuaciones son conocidas como los sistemas modales de un grado de libertad que juntos representan el movimiento total del sistema viga en respuesta de la fuerza armónica aplicada.

$$\begin{bmatrix} m_{11}s^2 + k_{21} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22}s^2 + k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33}s^2 + k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1(s) \\ Q_2(s) \\ Q_3(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P(s)\varphi_1(x_p) \\ P(s)\varphi_2(x_p) \\ P(s)\varphi_3(x_p) \end{Bmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene la magnitud de cada coordenada generalizada, (E. 2-13).

$$Q_i(s) = P(s) \frac{\varphi_i(x_p)}{m_i s^2 + k_i} \quad (\text{E. 2-13})$$

Siendo

$$m_i = \rho A \int_0^l \varphi_i(x)^2 dx$$

$$k_i = EI \int_0^l \frac{d^2 \varphi_i}{dx^2} dx$$

### 2.2.3. Simulación numérica

Los parámetros de la viga en voladizo considerados para el cálculo son los mostrados en la Tabla 2-1. Se implementa un algoritmo en MATLAB con el cálculo de las ecuaciones y se grafican las amplitudes de cada coordenada generalizada correspondiente a cada modo, obteniéndose las figuras siguientes.

Tabla 2-1 Parámetros de la viga en voladizo para la simulación en vibración forzada

Parámetro	Símbolo	Valor
Ancho	$b$	50 mm
Espeor	$e$	5 mm
Densidad	$\rho$	7850 kg/m <sup>3</sup>
Area	$A$	600 mm <sup>2</sup>
Módulo de Elasticidad	$E$	210 GPa
Inercia de la Sección	$I$	5000 mm <sup>4</sup>
Longitud	$l$	1 m
Fuerza de Excitación	$P$	1 N

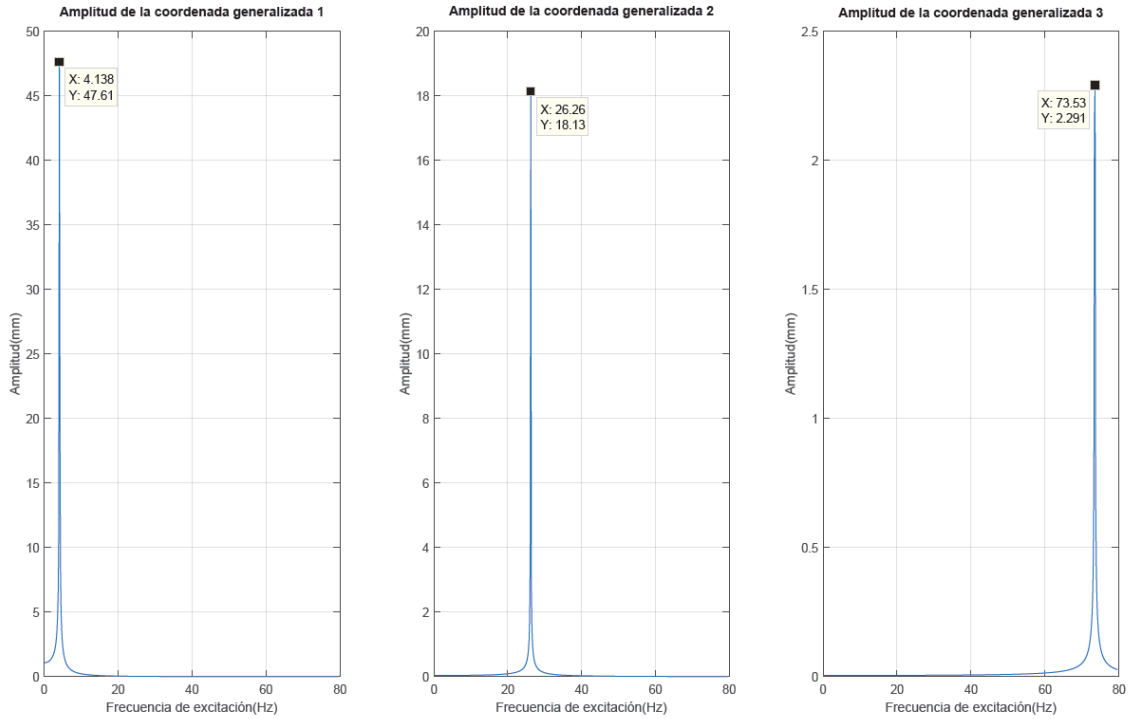


Figura 2-2: Amplitud de cada coordenada generalizada del sistema sin absorber en función de la frecuencia de excitación

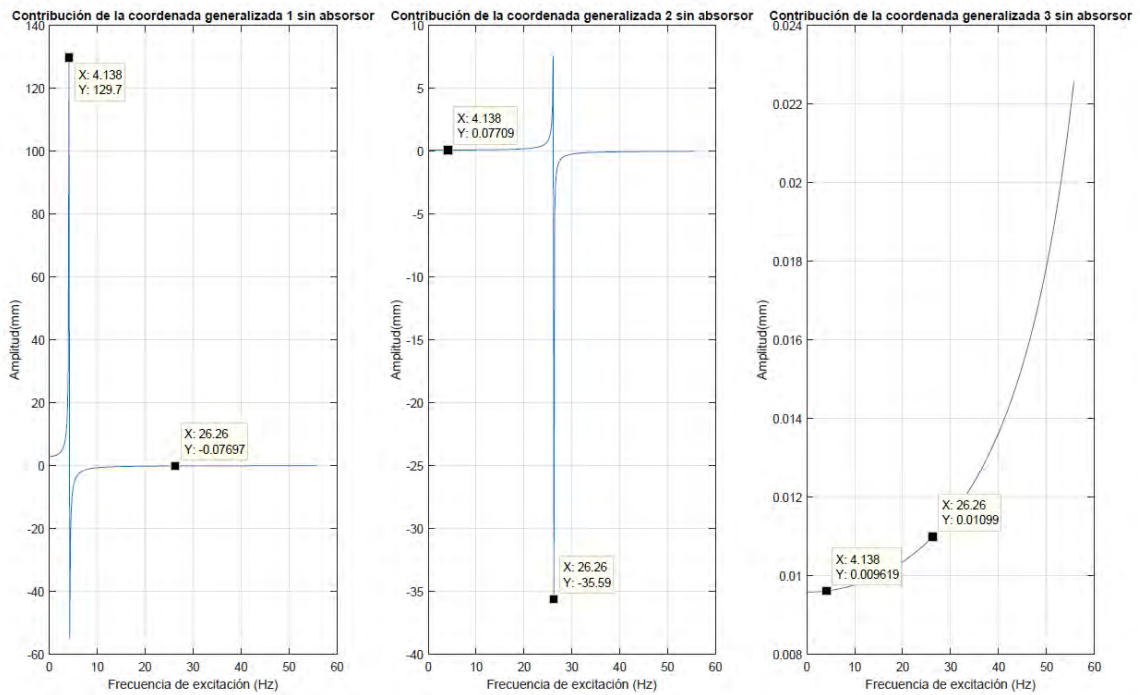


Figura 2-3: Contribución de cada coordenada generalizada a la magnitud de la amplitud de vibración del extremo libre de la viga en voladizo sin absorber

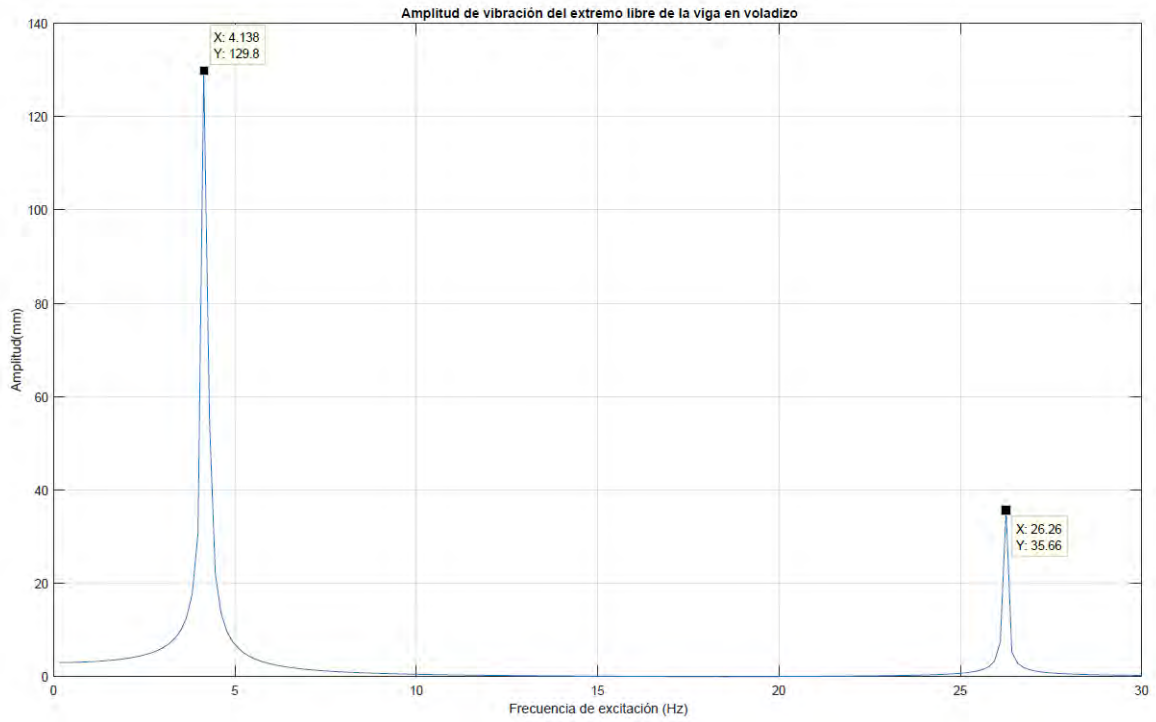


Figura 2-4: Amplitud de vibración del extremo libre de la viga en voladizo según la frecuencia de excitación

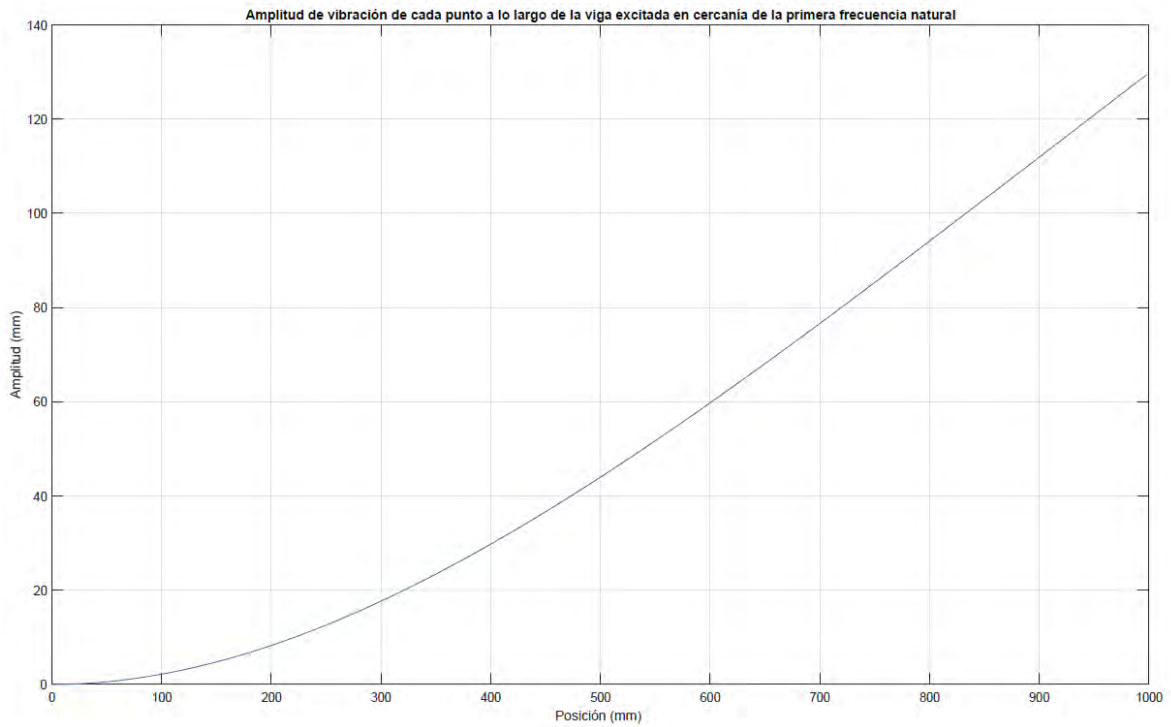


Figura 2-5: Amplitud de vibración de cada punto a lo largo de la viga excitada en cercanía de la primera frecuencia natural

Tabla 2-2 Frecuencias naturales del sistema viga en voladizo

Frecuencia Natural	Valor
Primera frecuencia natural	4.138 Hz
Segunda frecuencia natural	26.26 Hz
Tercera frecuencia natural	73.53 Hz

## 2.3. Sistema viga implementado con un absorber pasivo

### 2.3.1. Descripción del modelo

Como un primer acercamiento al modelo final propuesto, se estudia el sistema viga en voladizo implementado con un absorber pasivo.

De acuerdo a lo presentado en el Capítulo 1, la absorción de vibraciones comprende un sistema primario excitado por una carga a determinada frecuencia al que se desea atenuar sus amplitudes de vibración y un sistema secundario que es el que vibrará en lugar del primario. En este sentido, el sistema primario está conformado por la viga en voladizo y el secundario por el absorber de vibraciones, Figura 2-6.

A diferencia de los sistemas anteriormente presentados, en el que el modelo del absorber es uno discreto implementado a un sistema también discreto; **en este estudio, se extiende la teoría al implementarlo a un sistema continuo** con el objetivo de lograr una mejor aproximación en sus parámetros de diseño para implementarlos en sistemas reales.

Las magnitudes de masa y rigidez dependen en esencia de la frecuencia de excitación en la que se desea que el absorber atenúe las vibraciones. Variables como la carrera de la masa y la posición en la que debe colocarse el absorber son de suma importancia en el diseño, por lo que son estudiados en este apartado. De nuevo, se aborda el análisis dinámico considerando que ni el sistema primario ni el secundario poseen algún tipo de amortiguación, esto para maximizar las amplitudes de vibración y asegurar que el absorber sea efectivo en su diseño, pues de ser

capaz de atenuar sin amortiguamiento, atenuará incluso más con el efecto de amortiguación que está presente en todos los sistemas.

Por tanto, en el análisis presentado se siguen las siguientes consideraciones:

- Se utiliza el modelo de viga propuesto por Euler-Bernoulli
- El material es homogéneo, entonces la densidad lineal permanece constante
- No existe cambios en la sección transversal a lo largo del eje de la viga.
- No existe desplazamiento axial a lo largo de la viga
- No existe ningún tipo de amortiguamiento en el sistema primario: viga en voladizo
- No existe ningún tipo de amortiguamiento en el sistema secundario: absorber pasivo

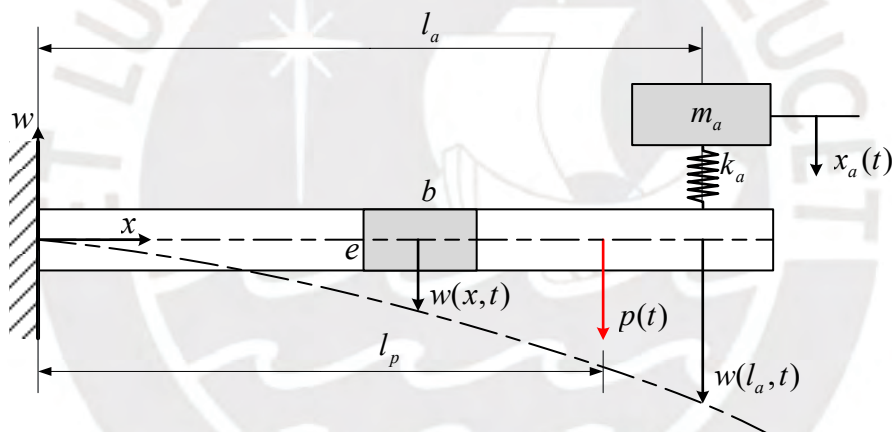


Figura 2-6. Sistema viga implementado con el absorber pasivo

### 2.3.2. Vibración forzada

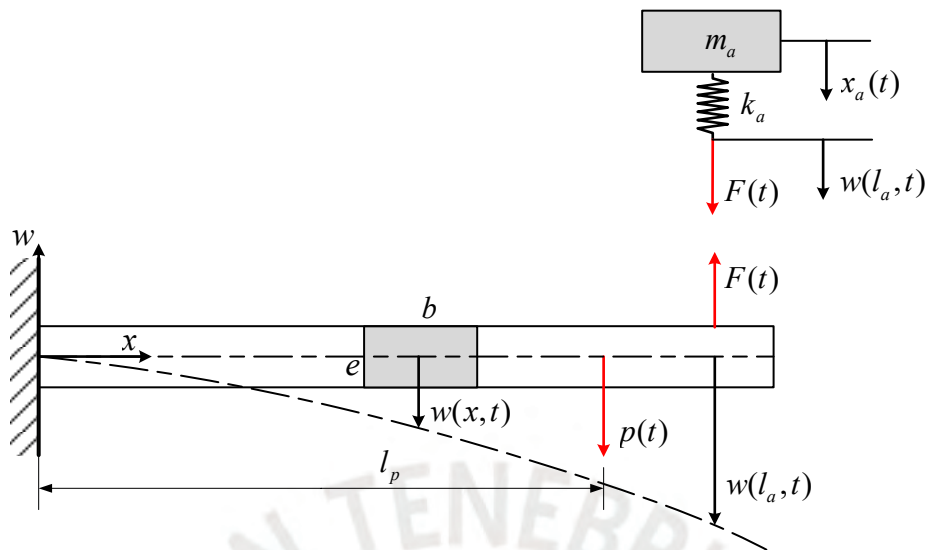


Figura 2-7. Diagrama de cuerpo libre del sistema viga y el absorber pasivo

En este desarrollo se considerará que el absorber y la fuerza de excitación externa están situados en el extremo libre de la viga. Del diagrama de cuerpo libre del absorber en la Figura 2-7, utilizando la 2da Ley de Newton y considerando que el resorte se encuentra en su zona lineal, se obtiene la (E. 2-14).

$$m_a \ddot{x}_a + k_a (x_a - w(l, t)) = 0$$

$$m_a \ddot{x}_a + k_a x_a = w(l, t) \quad (\text{E. 2-14})$$

Al igual que en el anterior análisis sin implementar el absorber al sistema, el desplazamiento transversal de la viga en función de la posición está dada por la (E. 2-1), reemplazando en (E. 2-14), se obtiene la (E. 2-15).

$$m_a \ddot{x}_a + k_a x_a = \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i(x) \quad (\text{E. 2-15})$$

La fuerza aplicada a la viga por el absorber sería

$$P = k_a(x_a - w(l))$$

Reemplazando la (E. 2-1) en la anterior expresión y aplicando la transformada de Laplace a la expresión resultante y a (E. 2-15) se obtienen (E. 2-16) y (E. 2-17)

$$P(s) = k_a \left[ X_a(s) - \sum_{i=1}^n Q_i(s) \varphi_i(l) \right] \quad (\text{E. 2-16})$$

$$m_a s^2 X_a(s) + k_a X_a(s) = k_a \sum_{i=1}^n Q_i(s) \varphi_i(l) \quad (\text{E. 2-17})$$

Ordenando convenientemente la expresión (E. 2-17) se tiene la coordenada  $X_a$  en dominio de Laplace en función de las coordenadas generalizadas  $Q_i$  a utilizar, (E. 2-18).

$$X_a(s) = \frac{k_a}{m_a s^2 + k_a} \sum_{i=1}^n Q_i(s) \varphi_i(l) \quad (\text{E. 2-18})$$

Reemplazando (E. 2-18) en (E. 2-16):

$$P(s) = k_a \left[ \frac{k_a}{m_a s^2 + k_a} \sum_{i=1}^n Q_i(s) \varphi_i(l) - \sum_{i=1}^n Q_i(s) \varphi_i(l) \right]$$

Ordenando convenientemente se obtiene a la expresión (E. 2-19)

$$P(s) = -\frac{m_a s^2 k_a}{m_a s^2 + k_a} \sum_{i=1}^n Q_i(s) \varphi_i(l) \quad (\text{E. 2-19})$$

De la misma manera que en el caso de vibración forzada, la fuerza  $P(s)$  puede ser considerada como una “fuerza de excitación” adicional a la ya existente  $F(s)$ . Por tanto, se hallan las fuerzas generalizadas correspondientes a cada una de ellas obteniendo la siguiente expresión:

$$\sum_{i=1}^n (m_{ij} s^2 + k_{ij}) Q_i(s) = P(s) \varphi_j(l) + F(s) \varphi_j(l) \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Reemplazando (E. 2-19) en la anterior expresión:

$$\sum_{i=1}^n \left( m_{ij} s^2 + k_{ij} + \frac{m_a s^2 k_a}{m_a s^2 + k_a} \varphi_i(l) \varphi_j(l) \right) Q_i(s) = F(s) \varphi_j(l) \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (\text{E. 2-20})$$

La condición de ortogonalidad establecía que  $m_{ij}$  y  $k_{ij}$  eran cero cuando  $i \neq j$  debido a que la integral del producto de las funciones de forma contenidas en ambos resultaba cero. En el análisis, se partió de que el movimiento en cada punto a lo largo de la viga podía obtenerse como una superposición de la contribución de cada masa modal expresada matemáticamente por (E. 2-14). En **2.2.2. Vibración forzada del modelo continuo** se había mostrado, en la simulación de la respuesta, que es suficiente con utilizar los modos de vibración cuyas frecuencias naturales sean cercanas a la frecuencia de excitación, debido a que las demás no contribuían al movimiento del sistema. Esta es la razón por la que nuevamente bastará con utilizar los 3 primeros modos de vibración para el análisis y no se utilizará una suma al infinito en la expresión (E. 2-20).

Por otro lado, como no se utiliza una sumatoria al infinito de todos los modos de vibración, el producto de las funciones de forma del segundo término  $\varphi_i(l) \varphi_j(l)$  no son cero cuando

deberían serlo. Por tanto, se considerarán como cero debido a que, de ser rigurosos en la matemática, se tendría una matriz diagonal que es lo que en esencia sucede. Además, se encontró, en la simulación numérica, que mantenerlos no influye en la magnitud de cada coordenada generalizada en función de la frecuencia de excitación, pero si presentarían picos en frecuencias que no corresponden a la natural asociada a la coordenada generalizada producto de no realizar la suma al infinito.

Desarrollando el sistema de ecuaciones en (E. 2-20) y ordenando convenientemente, se obtiene cada coordenada generalizada en función de la fuerza de la fuerza armónica aplicada; en otras palabras, la respuesta del sistema para cualquier fuerza aplicada, en el dominio de Laplace, (E. 2-21).

$$Q_i(s) = F(s) \frac{\varphi_i(l)}{m_i s^2 + k_i + \frac{m_a s^2 k_a}{m_a s^2 + k_a} \varphi_i(l)^2} \quad (E. 2-21)$$

### 2.3.3. Simulación numérica y discusión de los resultados

Se ha propuesto anteriormente un modelo continuo del sistema viga implementado con un absorber pasivo a fin de hallar sus amplitudes de vibración y, de esta manera, cuantificar qué tanto atenúa el absorber de vibraciones las amplitudes de vibración del sistema primario. El procedimiento anteriormente explicado se implementa en un algoritmo en Matlab® y se simula con los parámetros de la Tabla 2-3. Se halla la respuesta del sistema a una fuerza de excitación P según la frecuencia de excitación. Se sabe que en frecuencias de excitación cercanas a las naturales, la magnitud de la fuerza deja de tener tanta importancia y es la frecuencia la que determina el comportamiento del sistema debido a que en el fenómeno de resonancia, la fuerza aplicada crece en el tiempo; por tal motivo, basta con simular el sistema con una fuerza de magnitud de 1 N.

Los parámetros del absorbente de vibraciones son escogidos en función de la frecuencia en la que se desea absorber las vibraciones según lo explicado 1.4.2, allí se habló de un caso menos complejo que era el sistema discreto de 2 grados de libertad. Se vuelve a utilizar el mismo principio de que la frecuencia natural del sistema secundario por sí mismo debe ser la misma que la frecuencia natural del sistema primario a fin de que el secundario-el absorbente de vibraciones- vibre en contra fase cuando la viga en voladizo es excitada a esa frecuencia.

Tabla 2-3. Parámetros de la viga y absorbente pasivo utilizados en la simulación

Parámetro	Símbolo	Valor
Ancho	$b$	50 mm
Espesor	$e$	5 mm
Densidad	$\rho$	7850 kg/m <sup>3</sup>
Área	$A$	600 mm <sup>2</sup>
Módulo de Elasticidad	$E$	210 GPa
Inercia de la Sección	$I$	5000 mm <sup>4</sup>
Longitud	$l$	1 m
Fuerza de Excitación	$P$	1 N
Masa del absorbente	$m_a$	0.05 kg
Rigidez del absorbente	$k_a$	141.8 N/m

En la Figura 2-8, se muestra la amplitud de cada coordenada generalizada en función de la frecuencia de excitación cuando el sistema es excitado por una fuerza armónica  $P$ . El objetivo principal de esta figura es determinar la contribución de cada modo a la dinámica total del sistema en función de frecuencia de excitación.

Lo primero a discutir es que la amplitud de cada coordenada generalizada en la frecuencia de excitación 4,138 Hz- que es cercana a la primera frecuencia natural del sistema viga en voladizo- disminuye considerablemente en comparación al caso de vibración forzada sin absorbente de la Figura 2-2. Como el movimiento real en cada punto de la viga resulta de la

superposición de los efectos de las coordenadas generalizadas multiplicados por su función de forma correspondiente a la posición de la viga en la que se esté analizando y éstas han disminuido por efecto del absorber pasivo de vibraciones, la amplitud real de los puntos a lo largo de la viga presentados en las Figura 2-10 y la Figura 2-11 también disminuyen considerablemente. Por lo tanto, el absorber se encuentra sintonizado.

Asimismo, en la Figura 2-8, al hallar la amplitud de cada coordenada generalizada, se encuentra que presenta **dos frecuencias de excitación** en las cuales la amplitud crece en gran medida en la coordenada generalizada 1; a diferencia del caso de vibración forzada sin absorber, en el cual, las amplitudes de cada coordenada generalizada mantienen solo un pico que representa su frecuencia natural asociada, Figura 2-2. El hecho de acoplar un sistema secundario al primario, añade una frecuencia natural al sistema viga en voladizo-absorber pasivo y altera las existentes en medida de la frecuencia natural que tiene el sistema secundario desacoplado. Esto se evidencia en la coordenada generalizada 1 de la Figura 2-8; al añadir un absorber cuya frecuencia natural del sistema desacoplado es de 4,186 Hz, se crean dos picos: uno de ellos a una menor frecuencia que la del sistema desacoplado y otro mayor a ella.

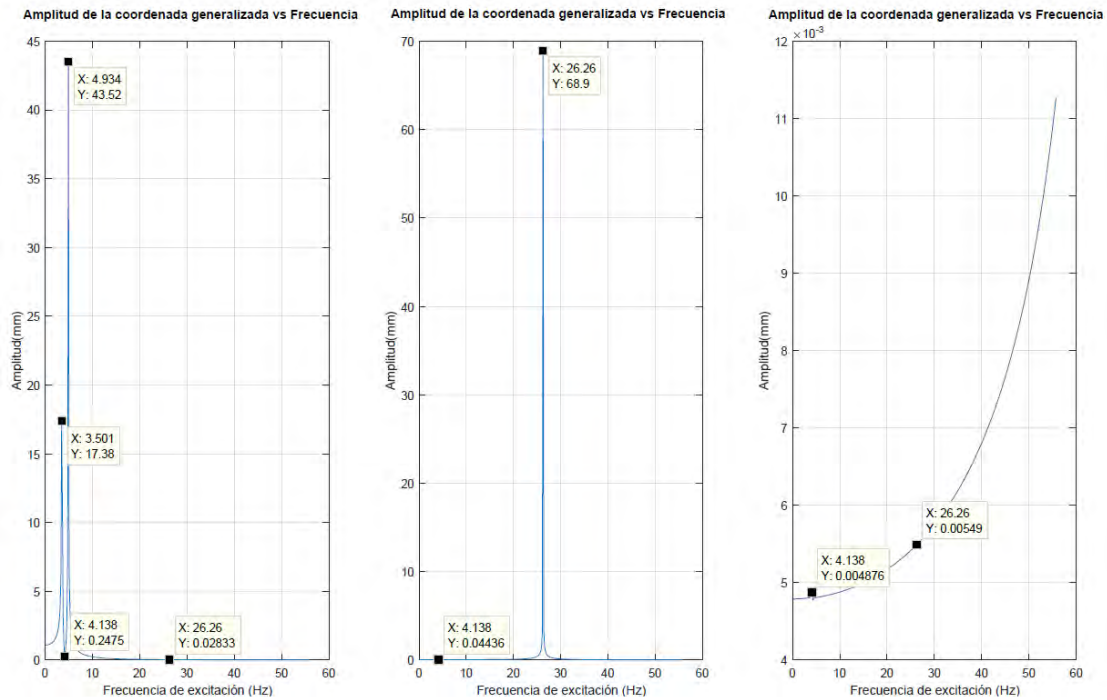


Figura 2-8: Amplitud de cada coordenada generalizada del sistema con absorber sintonizado a la 1ra frecuencia natural según la frecuencia de excitación

Uno de los objetivos propuestos era cuantificar la contribución de cada modo de vibración al movimiento total del sistema para este caso implementado con el absorber pasivo. Por ello, la Figura 2-9, muestra la contribución de cada coordenada generalizada a la magnitud de la amplitud de vibración del extremo libre de la viga en voladizo.

**Se observa que cuando la frecuencia de excitación es cercana a la frecuencia en la que se sintonizó el absorber 4,186 Hz, la mayor contribución pertenece a la coordenada generalizada 1** pues la frecuencia de excitación es muy cercana a la primera frecuencia natural del sistema viga en voladizo que está asociada a la coordenada generalizada 1. Por otro lado, la contribución de las coordenadas generalizadas 2 y 3 resultan muy pequeñas en comparación a la 1, por lo que pueden despreciarse y no afectará en mayor medida a la representación de la dinámica del sistema real.

En el punto 2.2.2, se había hablado de que la contribución de cada modo de vibración a la dinámica total del sistema dependía de qué tan cercana se encuentre la frecuencia de excitación

a una de las naturales del sistema. Esto se evidencia con los resultados obtenidos en la Figura 2-9. La contribución de la coordenada generalizada 1 fue por mucho mayor a la de las coordenadas generalizadas 2 y 3, por lo que de haber trabajado solo con la primera coordenada generalizada con la premisa de que la frecuencia de excitación era cercana a la primera frecuencia natural, habría resultado suficiente.

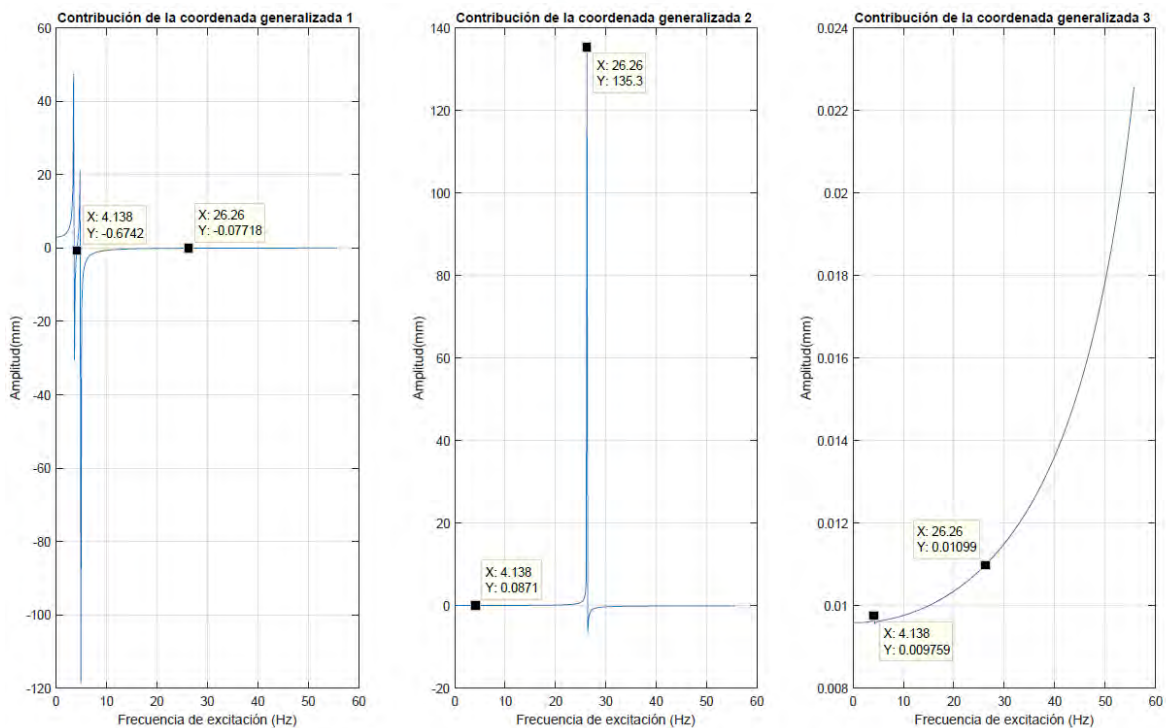


Figura 2-9: Contribución de cada coordenada generalizada a la magnitud de la amplitud de vibración del extremo libre de la viga en voladizo con absorber sintonizado a la primera frecuencia natural

En la Figura 2-10, se muestran la amplitud del extremo de la viga en voladizo y la amplitud del absorber de vibraciones en función de la frecuencia a la que es excitado el sistema. Es pertinente aclarar, que esta gráfica es el resultado de superponer los efectos de cada coordenada generalizada; es decir, la suma aritmética de cada contribución mostrada en la Figura 2-9. Habiéndose hallado cada coordenada generalizada, la amplitud del absorber pasivo se calcula con la expresión (E. 2-18), esta magnitud de suma importancia al dimensionar el espacio que deberá tener el absorber para su carrera.

La amplitud de vibración del extremo libre de la viga implementado con el absorber de vibraciones disminuye al 0,45% de su valor inicial cuando es excitado en su primera frecuencia natural; en su lugar, es la amplitud de vibración del absorber la que incrementa. Asimismo, se muestran los nuevos picos de amplitud correspondientes a las nuevas frecuencias naturales alrededor de la frecuencia de sintonización. Los nuevos picos representan el rango en el que el absorber pasivo es efectivo, pues de cambiar la frecuencia de excitación a la de uno de estos picos, las amplitudes tanto del sistema primario como del absorber aumentarían en grandes proporciones por el fenómeno de resonancia y la implementación del absorber resultaría en un daño para el sistema en lugar de atenuar las vibraciones del sistema primario.

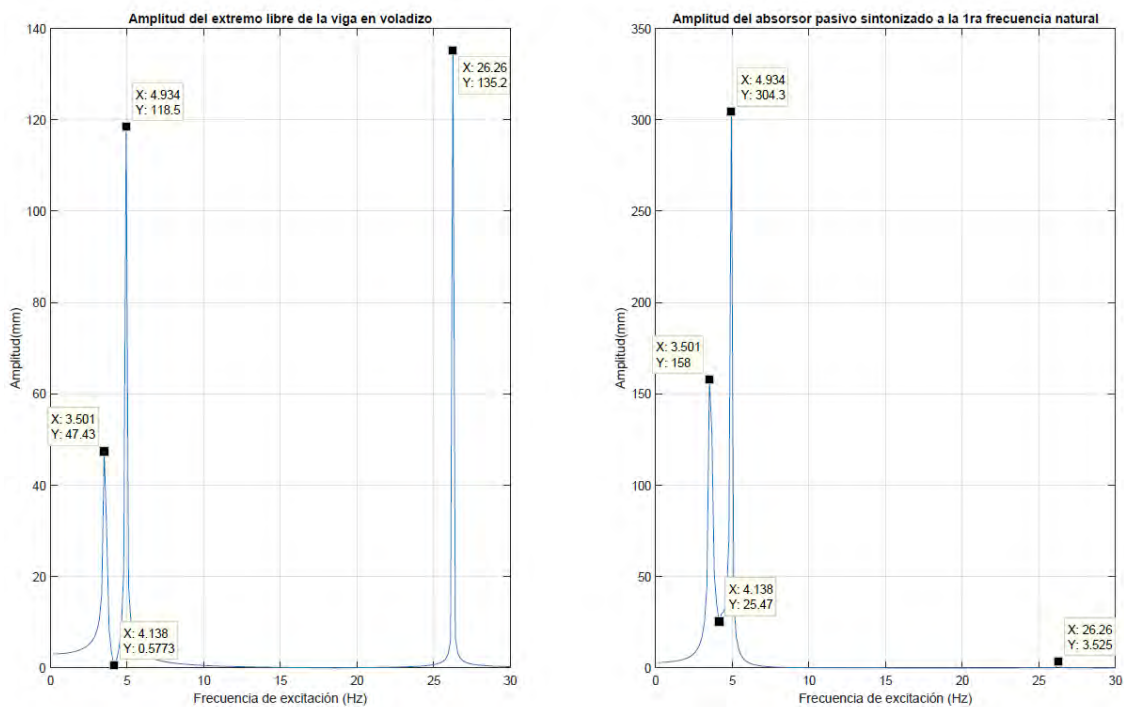


Figura 2-10: Amplitud del extremo libre de la viga en voladizo y del absorber sintonizada a la primera frecuencia natural según la frecuencia de excitación

En la Figura 2-11, se muestra la amplitud de vibración-máximo valor de desplazamiento transversal- de cada punto a lo largo de la viga. Es conocida la forma de vibración y amplitudes de la viga en voladizo cuando es excitada en una de sus frecuencias naturales, en este caso

específico, la primera. Sin embargo, se desea conocer la amplitud de vibración que tendrían al implementarse el absorber de vibraciones sintonizado a la primera frecuencia natural y excitada en cercanía de la primera frecuencia natural 4,186 Hz. Esta gráfica también representa la forma de vibración que tendrá el sistema viga en voladizo-absorber pasivo al ser excitado a esa frecuencia. La magnitud de la amplitud de vibración se extiende desde 0 mm en el empotramiento hasta 0.6mm, lo que representa que la absorción de vibraciones es efectiva en todo el largo de la viga, no solo en el extremo en el que se acopla.

En la Figura 2-12, se muestran las amplitudes de vibración de los dos casos: sin absorber y con absorber. La amplitud de vibración de cada punto de la viga para el caso con absorber tiende a mantenerse constante por su mínima variación y amplitud de vibración en comparación al caso sin absorber en el que el sistema entra en resonancia. La medida de absorción de vibración aumenta mientras más cerca se esté al extremo libre de la viga en la cual se reduce hasta el 0,45% de su valor sin absorber.

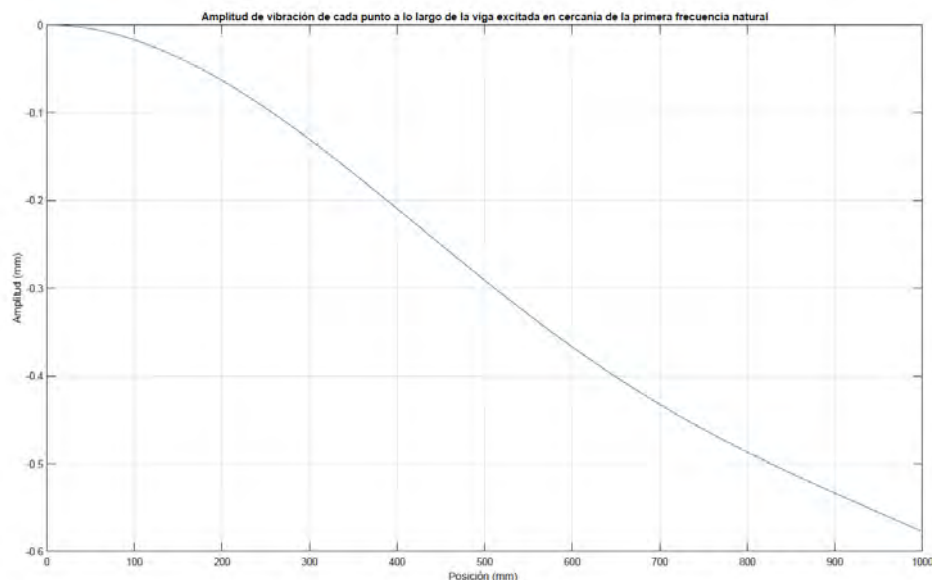


Figura 2-11: Amplitud de cada punto a lo largo de la viga excitada en cercanía de la primera frecuencia natural cuando es implementada con el absorber pasivo sintonizado a la primera frecuencia natural

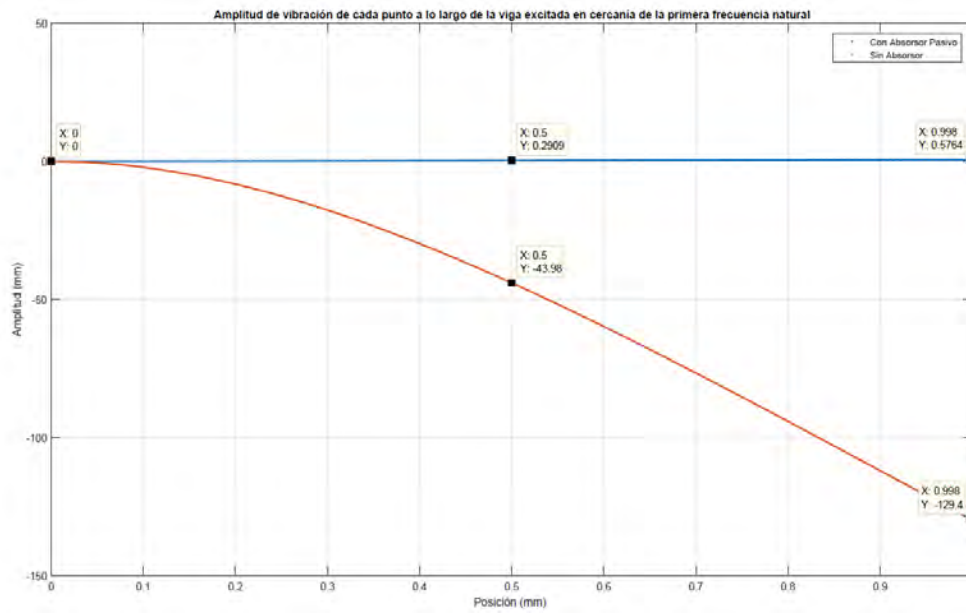


Figura 2-12: Amplitudes de cada punto a lo largo de la viga excitada en cercanía de la primera frecuencia natural con absorbor y sin absorbor

Tabla 2-4 Frecuencias naturales del sistema viga en voladizo implementado con absorbor pasivo

Frecuencia Natural	Valor
Primera frecuencia natural	3.50 Hz
Segunda frecuencia natural	4.93 Hz
Tercera frecuencia natural	26.26 Hz

## Capítulo 3

### Modelamiento de un absorber activo de vibraciones

En resumen, de la problemática planteada, las frecuencias de excitación provenientes de la naturaleza son de naturaleza variable en el tiempo y el alcance del absorber dinámico de vibraciones pasivo termina en este punto, pues se diseña para una determinada frecuencia de excitación en la que el sistema primario es sometido y es incapaz de trabajar en alguna otra frecuencia de excitación. Su incapacidad se debe a que los parámetros del absorber no pueden ser cambiados fácilmente luego de haber sido implementados al sistema, pues la masa y rigidez son parámetros físicos; estos requieren una modificación del diseño lo que hace al absorber incapaz de adaptarse en tiempo real a los cambios de la frecuencia de excitación a la que está sometido el sistema primario.

La sintonización a la primera frecuencia se obtiene de los parámetros con que se diseñan al absorber, pero para sintonizar a la segunda frecuencia con la misma masa, se requiere un mayor valor de rigidez. En este sentido, se requiere una forma en la que se pueda incrementar el valor de la rigidez hasta la que se requiere para sintonizarlo a la segunda frecuencia natural del sistema primario; por lo que se propone la alternativa de utilizar el electromagnetismo con el fin de lograr la fuerza activa que pueda adaptarse según sea la frecuencia de excitación del sistema primario.

En esta sección, se determinará el modelo que represente el absorber activo de vibraciones y su comportamiento dinámico de manera desacoplada, dentro del cual se tiene la máquina eléctrica lineal y la expresión que gobierne la magnitud y frecuencia de la fuerza activa en función de una variable a controlar que comúnmente es el voltaje de alimentación del circuito.

Más tarde la expresión mencionada es utilizada en el Capítulo 4 en el que se obtiene el requerimiento del valor de la fuerza activa según sea la frecuencia de excitación. Cerrando así el análisis de los dos campos que gobiernan este sistema electromecánico: el electromagnetismo gobernado por las ecuaciones de Maxwell y la dinámica gobernada por las Leyes de Newton (Palomera-Arias, 2005).

### **3.1. Absorsor activo de vibraciones**

Se había presentado ya que el absorsor activo de vibraciones consiste en un absorsor pasivo más un componente encargado de cambiar las características dinámicas de su sistema; es decir, una masa y un resorte que determina la rigidez de su sistema desacoplado y un actuador gobernado eléctricamente para proveer una fuerza que finalmente es análogo a cambiar la rigidez del sistema, Figura 3-1.

El uso de los actuadores en un sistema cambia la dinámica de este, en el sentido de que añade nuevas ecuaciones diferenciales para representar su comportamiento. Estas requieren un estudio a fin de determinar cuáles son los parámetros físicos necesarios que debe tener el actuador electromagnético o poder evaluar el comportamiento de actuadores en la aplicación determinada antes de su implementación, este es el caso del absorsor electromagnético de vibraciones. Dado el comportamiento que tiene el absorsor, la fuerza activa debe responder a un desplazamiento relativo de la masa del absorsor respecto del extremo de la viga, una relación que es lineal y a lo que llamaremos rigidez artificial por su analogía a la fuerza del resorte que produce proporcional a su deformación.

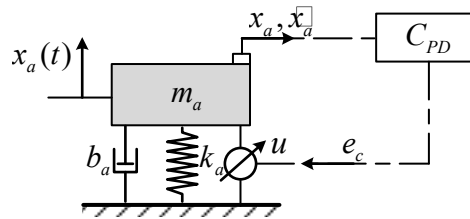


Figura 3-1 Modelo conceptual del absorber activo de vibraciones

Utilizando la segunda ley de Newton, la dinámica del absorber activo estaría representada en todo instante por la (E. 3-1).

$$m_a \ddot{x}_a + b_a \dot{x}_a + k_a x_a = u \quad (\text{E. 3-1})$$

Utilizando la transformada de Laplace se obtiene

$$m_a s^2 X_a(s) + b_a s X_a(s) + k_a X_a(s) = U(s) \quad (\text{E. 3-2})$$

Ahora bien, se requiere un componente activo capaz de proveer un tiempo de reacción suficientemente pequeño para sintonizarse a la frecuencia de excitación en la que se esté trabajando; en este caso, entre las dos primeras frecuencias naturales del sistema viga en voladizo. Esta variable es muy importante para definir el nivel de tecnología a utilizar en los componentes eléctricos. Nuevamente, los modelos analíticos resultan claves en este aspecto a fin de determinar las características que se requieren para lograr un buen comportamiento del absorber activo en el tiempo; es decir, asegurar un buen control.

Los actuadores electromagnéticos, aunque se rigen bajo los mismos conceptos teóricos y ecuaciones dados por el electromagnetismo, pueden tener estructuras y tipos de movimiento diferentes como se estudió en (Palomera-Arias, 2005). Para este caso, el actuador tiene un movimiento lineal por la naturaleza del funcionamiento de un absorber que se desplaza linealmente de manera oscilatoria. Si bien también se podría utilizar una máquina rotativa y transformar el movimiento a lineal, añadir mayores componentes aumenta la inercia del

sistema; por consiguiente, aumenta el tiempo de respuesta a la sintonización que debe lograrse a lo largo del tiempo.

En la Figura 3-2(a), se muestra la estructura de un actuador electromagnético lineal en que la intervienen tanto parámetros físicos como propiedades eléctricas y magnéticas del componente elegido. Estas en conjunto definen las características que tendrá el actuador en su operación, lo que puede simplificarse a un circuito eléctrico equivalente, Figura 3-2(b), que represente el comportamiento de las variables eléctricas dentro del actuador para luego acoplarlas a las ecuaciones de la dinámica del absorber activo desarrolladas previamente.

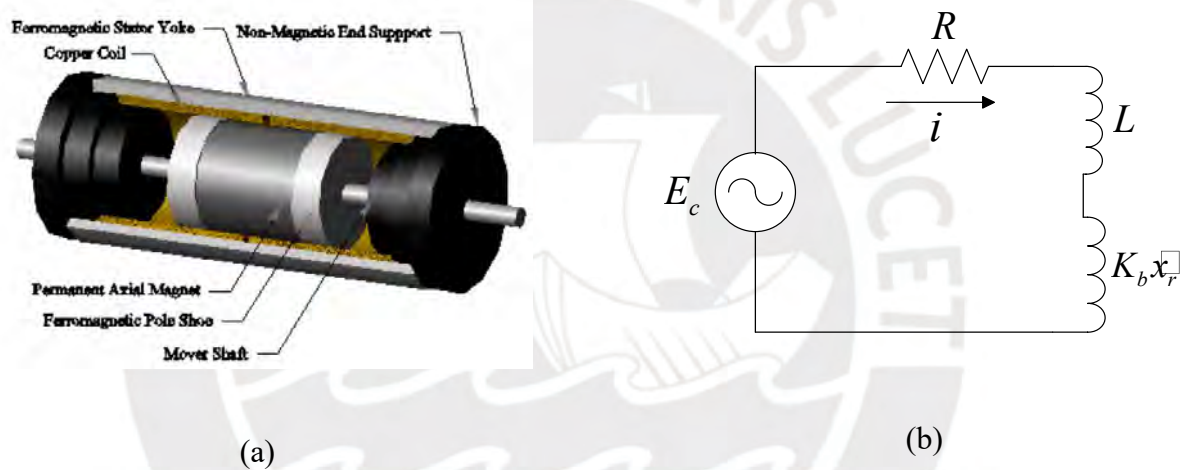


Figura 3-2 (a) Esquema de un actuador electromagnético (Palomera-Arias, 2005); (b) Circuito eléctrico equivalente del actuador electromagnético

La teoría del electromagnetismo proporciona la siguiente ecuación diferencial que relaciona la corriente que circula a través de un circuito cerrado en presencia de una fuerza electromagnética inducida, (E. 3-3). El tercer término  $K_b \dot{x}_r$  se refiere al voltaje inducido en el circuito producto de la interacción entre un campo magnético variable en el tiempo, pues existe movimiento relativo dentro del actuador respecto del solenoide que le imprime el campo.

$$Li + Ri + K_b \dot{x}_a = e_c \quad (\text{E. 3-3})$$

La Ley de Lorentz establece que existe una fuerza producto de la interacción entre el campo magnético y la corriente. En este sentido, si el campo magnético permanece constante, se obtiene una expresión simplificada usada en los modelos de motores electromagnéticos, (E. 3-4).

$$u = K_c i \quad (\text{E. 3-4})$$

Utilizando la transformada de Laplace en las (E. 3-3) y (E. 3-4) para determinar la relación entre la señal de corriente en función de la de voltaje y posición relativa del absorber, se obtienen las ecuaciones (E. 3-5) y (E. 3-6).

$$I(s) = \frac{1}{sL + R} E_c(s) - \frac{sK_b}{sL + R} X_a(s) \quad (\text{E. 3-5})$$

$$U(s) = K_c I(s) \quad (\text{E. 3-6})$$

Reemplazando (E. 3-6) en (E. 3-5), se obtiene la función de transferencia que determina la fuerza del actuador en función del voltaje con que se le alimenta y la posición relativa del absorber

$$U(s) = \frac{K_c}{sL + R} E_c(s) - \frac{sK_b K_c}{sL + R} X_a(s) \quad (\text{E. 3-7})$$

Para el análisis, las expresiones desarrolladas en el dominio de Laplace del modelo del absorber activo de vibraciones pueden representarse en un diagrama de bloques, Figura 3-3.

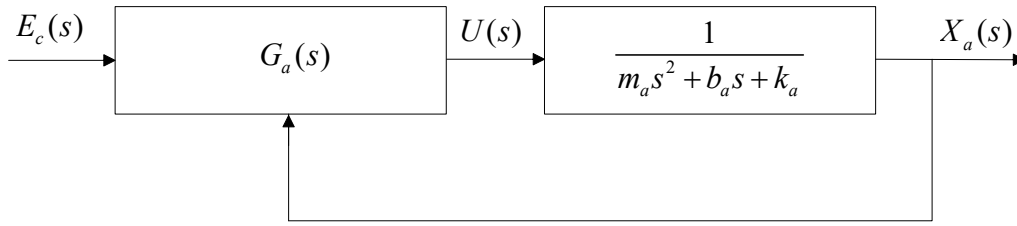


Figura 3-3 Diagrama de bloques del absorber activo desacoplado

A fin de encontrar una expresión que directamente determine la posición del absorber en función del voltaje del actuador electromagnético, se reemplaza la (E. 3-7) en (E. 3-2)

$$X_a(s) = \frac{1}{m_a s^2 + b_a s + k_a} \left( \frac{K_c}{sL + R} E_c(s) - \frac{sK_b K_c}{sL + R} X_a(s) \right)$$

Resolviendo se obtiene

$$X_a(s) = \frac{K_c}{(m_a s^2 + b_a s + k_a)(sL + R) + K_b K_c s} E(s) \quad (\text{E. 3-8})$$

### 3.2. Estrategia de control

En 1.4.2, se presentó los principios de un absorber de vibraciones activo y casos en los que ha sido objeto de investigación. De acuerdo a ello, de manera general, el absorber activo consta de lo mismo que un absorber pasivo-en esencia- y adicionalmente una fuerza activa en función a un feedback del sistema analizado. Asimismo, se presentó las estrategias de control utilizadas en cada caso que también influyen en la respuesta del sistema para los modelos discretos realizados por tales autores. Para un mismo comportamiento, la fuerza activa puede resultar menor como concluye (Chang & Yang, 1995) al encontrar que usando un feedback completo- posición, velocidad y aceleración- logra una fuerza de control menor que utilizando solo un feedback de velocidad. Sin embargo, resultó difícil medir directamente variables como la posición y velocidad de un sistema vibratorio pues la tecnología ampliamente disponible es la de un acelerómetro (Yang et al., 2017).

Por tanto, el trabajo en este apartado radica principalmente en hallar la fuerza activa en función del feedback de aceleración de la masa del absorber y el extremo libre de la viga en voladizo que permita atenuar las vibraciones en el rango de las dos primeras frecuencias naturales del sistema viga en voladizo.

Existe otra estrategia de control utilizada tanto en (Elmali et al., 2000) como en (Kwak et al., 2015) basada, en esencia, en determinar los parámetros que requiere el absorber desacoplado para que la frecuencia de excitación del sistema sea igual a su frecuencia natural. Esto se logra mediante el conocimiento de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el sistema desacoplado conformado por la dinámica del actuador y la masa del absorber. Ambos procedimientos requieren el conocimiento de la frecuencia de excitación a la que está sometido el sistema. Si bien el objetivo es, en esencia, el mismo, la forma en que establecen la estrategia de control es distinta. (Elmali et al., 2000) utiliza la frecuencia de excitación como parámetro de entrada para determinar las ganancias que debe tener el controlador de tal manera que el sistema absorber electromagnético posea una frecuencia natural de la misma magnitud que la frecuencia de excitación a fin de seguir el principio de funcionamiento de los absorbentes dinámicos de vibración discutido en el Capítulo 1. Luego utiliza las ganancias calculadas para un control tipo PD que determina el voltaje provisto al actuador en función de la señal medida de posición y velocidad del absorber. Por otro lado, En Kwak et al. (2015) analiza el sistema absorber electromagnético en orden de determinar la rigidez artificial del sistema en función de la corriente que circula por el solenoide y así proveer al absorber una corriente tal que su frecuencia natural desacoplado sea la de excitación.

## **Controlador PID**

Es el controlador por defecto con mayor uso en sistemas industriales debido a su facilidad de implementación y sintonización intuitiva por medio de parámetros llamados ganancias que representan de manera cualitativa la influencia de cada parte del control. Está conformado por un controlador proporcional, integral y derivativo siendo cada ecuación una representación cualitativa del control que establecen. El controlador proporcional envía una acción proporcional a la diferencia de la referencia con la señal medida, lo que proporciona un acercamiento rápido a la referencia si es que la ganancia correspondiente es alta. El controlador integral brinda una acción correctiva proporcional al error acumulado en el tiempo; es decir, a medida que el error incrementa, la acción que proporciona incrementa en magnitud, si el error disminuye en el tiempo hasta ser nulo, la acción integral mantiene su magnitud pues el área bajo la curva del error se mantiene. Esto permite reducir el error en estado estacionario. Solamente la acción proporcional brindaría la misma acción si el error se mantiene no logrando ningún cambio; por otro lado, la acción integral seguiría enviando una acción correctiva pues el error se sigue acumulando.

La acción derivativa permite obtener una respuesta del controlador más rápida prediciendo la tasa de cambio que tiene la señal de error utilizada. Si la tasa de cambio del error es alta, entonces la acción derivativa también es alta, de tal manera que la señal de control logra responder rápidamente a los cambios en la dinámica del sistema.

Es necesario hallar un equilibrio entre el comportamiento deseado y las acciones que se implementen por el controlador asegurando que el buen comportamiento se mantenga a pesar de perturbaciones u otras fuentes de excitación. El análisis de estos controladores comienza desde su forma más simple la de un controlador proporcional a una variable del sistema, de manera que se añaden las componentes derivativas e integrativas según el análisis lo requiera.

### 3.3. Sintonización del absorber activo

Como se discutió en el Capítulo 2 y 3, la operación de un absorber de vibraciones es efectiva siempre y cuando su frecuencia natural **cuando es desacoplado** corresponde a la frecuencia de excitación del sistema primario que en este caso es la viga en voladizo continua. La frecuencia natural del sistema depende sólo de su masa y rigidez; como estas son variables físicas que no pueden alterarse, se busca que la fuerza activa de la ecuación (E. 4-18) tenga una magnitud, dirección y sentido en el tiempo que simule el mismo comportamiento que una rigidez de magnitud distinta. De esta manera, la frecuencia natural del absorber desacoplado puede variarse y sintonizarse a la de excitación.

El controlador debe ser tal que produzca que la frecuencia natural del absorber desacoplado corresponda a la de excitación para mantener el principio de trabajo de la teoría de absorbentes desarrollada. En este sentido, se requiere que la dinámica de todo el sistema en conjunto, visto desde el punto de vista del control, posea sus polos en el eje imaginario a una frecuencia que corresponda a la de excitación, procedimiento que fue utilizado en (Elmali et al., 2000).

La naturaleza de las ecuaciones del circuito eléctrico, amortiguamiento del absorber, produce desfases en la dinámica del sistema lo que influye en la magnitud de los polos, por lo que se requiere de un controlador capaz de cambiar el comportamiento tanto en la parte imaginaria o real de los polos. Bajo esta premisa, el controlador a utilizar es de tipo PD y se plantea utilizar la posición tanto del absorber como de la viga en el tiempo como feedback. La (E. 3-9) proporciona el control tipo PD del voltaje inducido en el circuito eléctrico en función de la posición relativa del absorber.

$$e_c = K_p x_a + K_d \dot{x}_a \quad (\text{E. 3-9})$$

Utilizando la transformada de Laplace, se obtiene la ecuación (E. 3-10)

$$E_c(s) = K_p X_a(s) + sK_d X_a(s) \quad (\text{E. 3-10})$$

Reemplazando (E. 3-10) en (E. 3-7), se obtiene la dinámica del absorber activo en lazo cerrado que puede ser representado en el diagrama de bloques de la Figura 3-4.

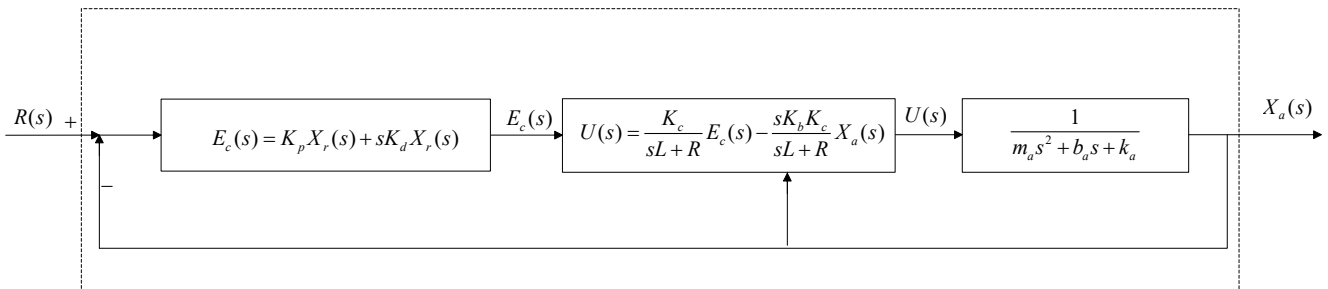


Figura 3-4 Diagrama de bloques del absorber activo desacoplado

Se determina la función de transferencia de la posición del absorber en función del voltaje

$G_{X/E}$  a partir de (E. 3-11)

$$G_{X/E}(s) = \frac{X_a(s)}{E(s)} = \frac{K_c}{(m_a s^2 + b_a s + k_a)(sL + R) + K_b K_c s} \quad (\text{E. 3-11})$$

Asimismo, la función de transferencia del controlador se determina a partir de la ecuación (E. 3-10)

$$C_{PD}(s) = \frac{E_c(s)}{D(s)} = K_p + sK_d \quad (\text{E. 3-12})$$

La función de transferencia del absorber activo en lazo cerrado se determina mediante la expresión

$$LC(s) = \frac{C_{PD} G_{X/E}}{1 + C_{PD} G_{X/E}} \quad (\text{E. 3-13})$$

De acuerdo con el procedimiento de Elmalí et al.(2000), las ganancias del controlador PD se calculan de tal manera que la ecuación característica del absorber activo posea sus raíces en el eje imaginario cuya frecuencia natural corresponda a la frecuencia de excitación a fin de lograr

la sintonización que es la esencia de la teoría de la absorción de vibraciones pasivos discutidos en el Capítulo 1. De esta manera, se obtienen las expresiones (E. 3-14) y (E. 3-15) que representan las ganancias para cualquier frecuencia de excitación  $\omega_c$ .

$$K_p = Re \left( \frac{-(Ls + R)(m_a s^2 + c_a s + k_a) - K_b K_c s}{K_c} \right)_{s=\omega_c i} \quad (\text{E. 3-14})$$

$$K_d = \frac{1}{\omega_c} Im \left( \frac{-(Ls + R)(m_a s^2 + c_a s + k_a) - K_b K_c s}{K_c} \right)_{s=\omega_c i} \quad (\text{E. 3-15})$$



## Capítulo 4

# Sistema viga implementado con un absorber activo de vibraciones

Hasta este capítulo, se ha formulado el modelo continuo de la viga en voladizo con la que se trabajará y realizado un primer acercamiento a la absorción de vibraciones habiendo hallado los parámetros necesarios para atenuarlas cuando es sometida una excitación en la primera frecuencia natural del sistema viga en voladizo. Sin embargo, el absorber implementado fue uno pasivo, diseñado para absorber sólo a una frecuencia de excitación determinada y capaz de funcionar sólo en un rango pequeño de frecuencias limitado por las nuevas frecuencias naturales introducidas alrededor de la de diseño, Figura 2-10. De acercarse la frecuencia de excitación, a los límites de ese rango, se produciría el fenómeno de resonancia y el absorber pasivo en lugar de atenuar, incrementaría la amplitud de la vibración no deseada.

En este sentido, se propone un modelo implementado con un absorber activo, el cual es capaz de reconfigurar el sistema en tiempo real y adaptarse en función de la frecuencia de excitación a la que está sometido el sistema primario, permitiéndolo trabajar en todo el rango de frecuencias de excitación desde su primera hasta su segunda frecuencia natural.

## 1.1. Dinámica del sistema viga en voladizo

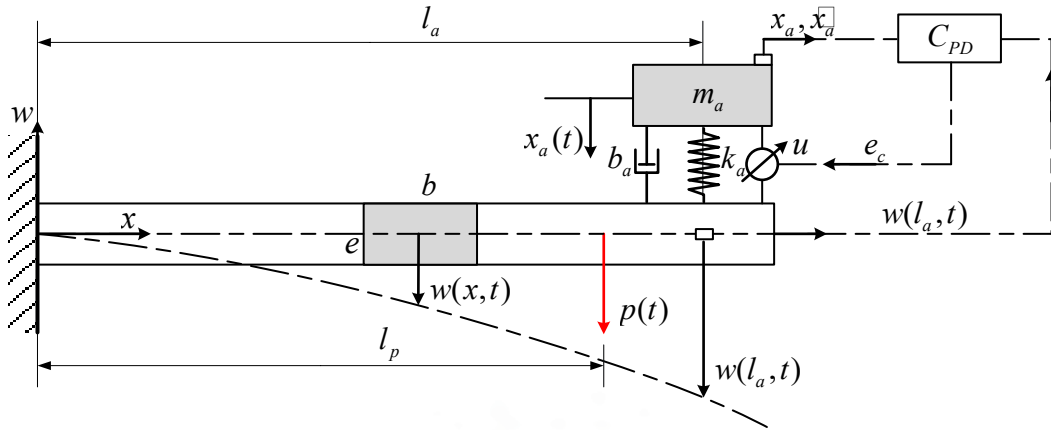


Figura 4-1: Sistema viga en voladizo implementado con el absorber electromagnético

En esencia, se sigue el mismo procedimiento que en el caso del absorber pasivo, solo que se añadirá el efecto de la fuerza activa en la ecuación. Utilizando la 2da Ley de Newton y considerando que el resorte se encuentra en su zona lineal se obtiene la ecuación diferencial que gobierna la dinámica del absorber, (E. 4-1).

En el control activo, la fuerza  $u$  estará gobernada por el controlador en base a la estrategia que se utilice y que se discutirá en el siguiente apartado. La ecuación diferencial del absorber se determina desde el punto de equilibrio del sistema de manera que el peso no interviene pues en condiciones estáticas el peso se equilibra con la fuerza producida producto de la deformación del resorte del absorber y de la viga en sí.

$$m_a \ddot{x}_a + b_a (\dot{x}_a - \dot{w}(l, t)) + k_a (x_a - w(l, t)) - u = 0$$

$$m_a \ddot{x}_a + b_a \dot{x}_a + k_a x_a - u = k_a w(l, t) + b_a \dot{w}(l, t) \quad (\text{E. 4-1})$$

Al igual que en el anterior análisis sin implementar el absorber al sistema, el desplazamiento transversal de la viga en función de la posición está dada por la (E. 2-1), reemplazando (E. 2-1) y (E. 2-3) en (E. 4-1), se obtiene la (E. 4-2).

$$m_a \ddot{x}_a + b_a \dot{x}_a + k_a x_a - u = k_a \sum_{i=1}^n q_i(t) \varphi_i(l) + b_a \sum_{i=1}^n \dot{q}_i(t) \varphi_i(l) \quad (\text{E. 4-2})$$

Utilizando la transformada de Laplace en (E. 4-2) a fin de establecer la relación entre la posición del absorber y la fuerza activa

$$m_a s^2 X_a(s) + b_a s X_a(s) + k_a X_a(s) - U(s) = (k_a + b_a s) \sum_{i=1}^n Q_i(s) \varphi_i(l) \quad (\text{E. 4-3})$$

$$X_a(s) = \frac{(k_a + b_a s)}{m_a s^2 + b_a s + k_a} \sum_{i=1}^n Q_i(s) \varphi_i(l) + \frac{1}{m_a s^2 + b_a s + k_a} U(s) \quad (\text{E. 4-4})$$

Además, la fuerza aplicada a la viga en su extremo a causa del absorber activo sería

$$f = -m_a \ddot{x}_a(t) \quad (\text{E. 4-5})$$

Utilizando la transformada de Laplace en (E. 4-5), se obtiene la (E. 4-6). En este sentido, la fuerza del absorber hacia la viga puede entenderse como una fuerza inercial con sentido opuesto a la aceleración del absorber. Esto sigue la premisa de que un absorber sintonizado provee una fuerza de misma dirección y magnitud que la de excitación, pero en sentido contrario.

$$F = -m_a s^2 X_a(s) \quad (\text{E. 4-6})$$

Reemplazando (E. 4-4) en (E. 4-6), se obtiene la fuerza producida por el absorber electromagnético a la viga:

$$F(s) = - \left( \frac{m_a s^2 (k_a + b_a s)}{m_a s^2 + b_a s + k_a} \right) \sum_{i=1}^n Q_i(s) \varphi_i(l) - \left( \frac{m_a s^2}{m_a s^2 + b_a s + k_a} \right) U(s) \quad (\text{E. 4-7})$$

Nuevamente se utiliza el método de superposición modal para hallar la respuesta, (E. 4-8). En este caso específico, se utilizarán 2 modos de vibración, suficientes según lo determinado en

apartado 2.3.3. Además, se requieren las fuerzas puntuales que actúan sobre la viga en coordenadas modales.

$$\sum_{i=1}^2 m_{ij} \ddot{q}_i(t) + \sum_{i=1}^2 k_{ij} q_i(t) = H^1_j + H^2_j, j = 1, 2 \quad (\text{E. 4-8})$$

En (E. 4-8), cada fuerza puntual en coordenadas modales  $H^i_j$  se calcula mediante la expresión

(E. 4-9) para cada coordenada modal que se utilice como la multiplicación de la función de forma  $\varphi$  evaluada en el punto de aplicación de la fuerza puntual. En este sentido, todas las fuerzas puntuales se suponen aplicadas en el extremo de la viga.

$$\begin{cases} H^1_j = P(s)\varphi(l)_j \\ H^2_j = F(s)\varphi(l)_j \end{cases} j = 1, 2 \quad (\text{E. 4-9})$$

Reemplazando (E. 4-7) y (E. 4-9) en (E. 4-8), se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \left( m_{ij}s^2 + k_{ij} + \frac{m_a s^2 (k_a + b_a s)}{m_a s^2 + b_a s + k_a} \varphi_i(l)\varphi_j(l) \right) Q_i(s) \\ = P(s)\varphi_j(l) - \left( \frac{m_a s^2}{m_a s^2 + b_a s + k_a} \right) U(s)\varphi_j(l) \end{aligned} \quad (\text{E. 4-10})$$

Debido al principio de ortogonalidad, nuevamente se obtiene una matriz diagonal para la expresión (E. 4-10), desarrollándola y ordenando en forma matricial, se obtiene (E. 4-11)

$$\begin{bmatrix} m_{11}s^2 + k_{11} + \frac{m_a s^2 (k_a + b_a s)}{m_a s^2 + b_a s + k_a} \varphi_1(l)^2 & 0 \\ 0 & m_{22}s^2 + k_{22} + \frac{m_a s^2 (k_a + b_a s)}{m_a s^2 + b_a s + k_a} \varphi_2(l)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1(s) \\ Q_2(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P(s)\varphi_1(l) \\ P(s)\varphi_2(l) \end{Bmatrix} - \left( \frac{m_a s^2}{m_a s^2 + b_a s + k_a} \right) \begin{Bmatrix} U(s)\varphi_1(l) \\ U(s)\varphi_2(l) \end{Bmatrix} \quad (\text{E. 4-11})$$

Resolviendo la expresión (E. 4-11), se obtiene cada coordenada modal en función de la perturbación y fuerza activa producida por el absorber electromagnético

$$Q_i(s) = G_i^{-1} \varphi_j(l) P(s) - G_i^{-1} \left( \frac{m_a s^2}{m_a s^2 + b_a s + k_a} \right) \varphi_i(l) U(s) \quad i = 1, 2 \quad (\text{E. 4-12})$$

$$G_i = m_{ii} s^2 + k_{ii} + \frac{m_a s^2 (k_a + b_a s)}{m_a s^2 + b_a s + k_a} \varphi_i(l)^2 \quad (\text{E. 4-13})$$

Se sabe que el desplazamiento a lo largo de cada punto de la viga resulta de la superposición de sus coordenadas generalizadas multiplicadas por la función de forma evaluada en el punto de interés.

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^2 q_i(t) \varphi_i(x)$$

$$W(l, s) = \sum_{i=1}^2 Q_i(s) \varphi_i(x) \quad (\text{E. 4-14})$$

Reemplazando (E. 4-12) en (E. 4-13), se obtiene la deflexión en el extremo  $l$  que está en función, como era de esperarse, de las dos variables de entrada: fuerza de excitación  $P(s)$  y fuerza que provee el actuador  $U(s)$ . En este sentido, la dinámica del sistema queda completamente conocida para cualquiera que sea la fuerza de excitación (perturbación) y fuerza activa del absorber.

$$W(l, s) = \sum_{i=1}^2 G_p^i P(s) + \sum_{i=1}^2 G_u^i U(s) \quad (\text{E. 4-15})$$

Siendo las funciones de transferencia

$$\begin{cases} G_p^i(s) = G_i^{-1} \varphi_i^2(l) \\ G_u^i(s) = G_i^{-1} \left( -\frac{m_a s^2}{m_a s^2 + b_a s + k_a} \right) \varphi_i^2(l) \end{cases}$$

#### 4.2. Dinámica total del sistema implementado con el absorber electromagnético

En este punto, se ha abordado el análisis de todo el comportamiento dinámico tanto del sistema primario que es la viga en voladizo como el absorber activo de vibraciones. Las ecuaciones diferenciales que gobiernan cada comportamiento son en resumen las siguientes:

Las ecuaciones (E. 4-16) y (E. 4-17) representan la dinámica del sistema viga en voladizo excitada bajo fuerzas puntuales en cualquier posición en su longitud

$$\sum_{i=1}^2 m_{ij} \ddot{q}_i(t) + \sum_{i=1}^2 k_{ij} q_i(t) = H^1_j + H^2_j, j = 1, 2 \quad (\text{E. 4-16})$$

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^2 q_i(t) \varphi_i(x) \quad (\text{E. 4-17})$$

La ecuación (E. 4-18) representa la dinámica del absorber electromagnético montado sobre la viga en voladizo, además de estar excitado por la fuerza activa  $u$

$$m_a \ddot{x}_a + b_a \dot{x}_a + k_a x_a - u = k_a w(l, t) + b_a \dot{w}(l, t) \quad (\text{E. 4-18})$$

La ecuación (E. 3-3) representa la dinámica del circuito electromagnético equivalente de un actuador lineal cuyos parámetros son determinados en función a las variables físicas del actuador

$$Li + Ri + K_b \dot{x}_r = e_c \quad (\text{E. 4-19})$$

La fuerza electromagnética inducida por el circuito hacia el absorber y viga en voladizo es proporcional a la magnitud de corriente que circula a través del circuito, (E. 3-4).

$$u = K_c i \quad (E. 4-20)$$

La ecuación (E. 4-21), representa el controlador tipo PD seleccionado que permite sintonizar el absorber activo a cualquier frecuencia de excitación de acuerdo a lo desarrollado en el Capítulo 3, en el que se establecen las expresiones (E. 4-22) y (E. 4-23) para calcular estas ganancias.

$$e_c = K_p x_a + K_d \dot{x}_a \quad (E. 4-21)$$

$$K_p = Re \left( \frac{-(Ls + R)(m_a s^2 + c_a s + k_a) - K_b K_c s}{K_c} \right)_{s=\omega_c i} \quad (E. 4-22)$$

$$K_d = \frac{1}{\omega_c} Im \left( \frac{-(Ls + R)(m_a s^2 + c_a s + k_a) - K_b K_c s}{K_c} \right)_{s=\omega_c i} \quad (E. 4-23)$$

Estas ecuaciones ya han sido trabajadas y desglosadas anteriormente en el dominio de Laplace a fin de resolver el sistema y representar el comportamiento dinámico mediante funciones de transferencia que luego pueden ser utilizadas en Matlab Simulink.

$$W(l, s) = \sum_{i=1}^2 G_p^i P(s) + \sum_{i=1}^2 G_u^i U(s) \quad (E. 4-24)$$

$$U(s) = K_c I(s) \quad (E. 4-25)$$

$$I(s) = \frac{1}{sL + R} (E_c(s) - sK_b X_r(s)) \quad (E. 4-26)$$

$$E_c(s) = K_p X_r(s) + sK_d X_r(s) \quad (E. 4-27)$$

Finalmente, el control del sistema viga en voladizo implementado con el absorber activo de vibraciones es representado en el esquema de la Figura 4-2.

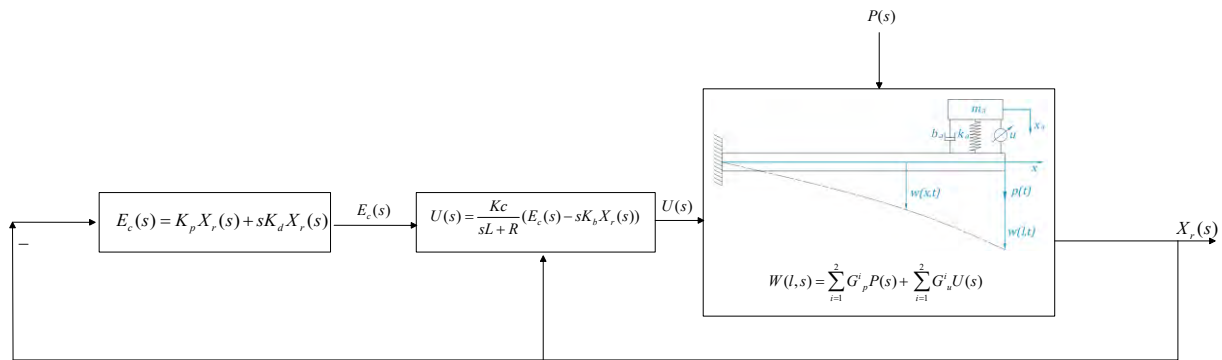


Figura 4-2. Esquema de control del sistema viga en voladizo implementado con el absorber activo de vibraciones

### 4.3. Simulación del modelo y discusión de resultados

En la Tabla 4-1, se muestra el resumen de las frecuencias naturales del sistema viga en voladizo sólo y cuando es implementado un absorber pasivo que ha sido sintonizado a la primera frecuencia natural. Se discutió en el Capítulo 4, que el acoplar el absorber al sistema cambia la frecuencia natural a la que se sintonizó por dos frecuencias alrededor de esta que es denominada la frecuencia de absorción. En este sentido la primera y segunda frecuencia natural son distintas y entre ellas se encuentra la frecuencia de absorción; por otro lado, la frecuencia natural 26.26 Hz se mantiene pues las características dinámicas del absorber desacoplado tienen un orden de magnitud muy lejano a las del segundo modo de vibración original de la viga en voladizo.

Tabla 4-1 Frecuencias naturales del sistema viga en voladizo implementado con absorber pasivo

Frecuencia Natural	Sin absorber	Con absorber pasivo
Primera frecuencia natural	4.138 Hz	3.50 Hz
Segunda frecuencia natural	26.26 Hz	4.93 Hz
Tercera frecuencia natural	73.53 Hz	26.26 Hz

El modelo completo del sistema viga en voladizo implementado con el absorber activo ha sido desarrollado en el dominio de Laplace y las expresiones que representan su comportamiento

dinámico corresponden desde (E. 4-16) hasta (E. 3-15), siendo resumida en la Figura 4-2 su representación en un diagrama de bloques. En la simulación, los parámetros físicos de la viga en voladizo, mostrados en la Tabla 2-1, se mantienen. Los del absorber activo se muestran en la Tabla 4-2, siendo los del actuador electromagnético, los reales utilizados en un ensayo experimental acerca del control de vibraciones en Elmali et al.(2000). El modelo se implementa en MATLAB Simulink, Figura 4-3, obteniéndose los resultados siguientes.

Tabla 4-2 Parámetros del absorber activo de vibraciones

Parámetro	Símbolo	Valor
Masa del absorber	$m_a$	0.05 kg
Rigidez del absorber	$k_a$	141.8 N/m
Coefficiente de amortiguación	$b_a$	0.01 N.s/m
Resistencia	$R$	1.6 Ohm
Inductancia	$L$	0.75 mH
Constante del actuador	$K_c$	3.5 N/A
Constante del voltaje inducido	$K_b$	3.5 V.s/m



#### **4.3.1. Respuesta del absorber activo de vibraciones desacoplado**

Se analizan las características dinámicas sólo del absorber activo de vibraciones, por lo que es desacoplado del sistema primario viga en voladizo. En la Figura 4-4, se muestran las ganancias del controlador PD que permiten cambiar las características dinámicas del sistema absorber activo a fin de que su frecuencia natural sea igual a cualquier frecuencia de excitación. La razón de que se busque sintonizar la frecuencia natural con la de excitación se debe a la teoría clásica de los absorbentes dinámicos de vibración, 1.4.2. Ambas ganancias dependen también de los parámetros del actuador electromagnético utilizado en el absorber activo, pero independientemente de estos, se mantiene un crecimiento cuadrático para ambas ganancias.

En la Tabla 4-3, se muestran las ganancias proporcional y derivativa que requiere el absorber activo para ser sintonizado a las frecuencias de resonancia originales del sistema viga en voladizo. En el caso de la primera frecuencia de resonancia, el absorber ya tiene sus parámetros sintonizados pasivamente, por lo que la ganancia proporcional corresponde a un valor muy cercano a cero, que prácticamente corresponde a los decimales que no se alcanzan al establecer los valores de masa y rigidez. Asimismo, la ganancia derivativa corresponde en esencia a la compensación del desfase del actuador electromagnético a fin de evitar que este desfase cambie la frecuencia del sistema. En el caso de la segunda frecuencia de resonancia, la ganancia proporcional es mucho más grande mientras que la derivativa incrementa ligeramente.

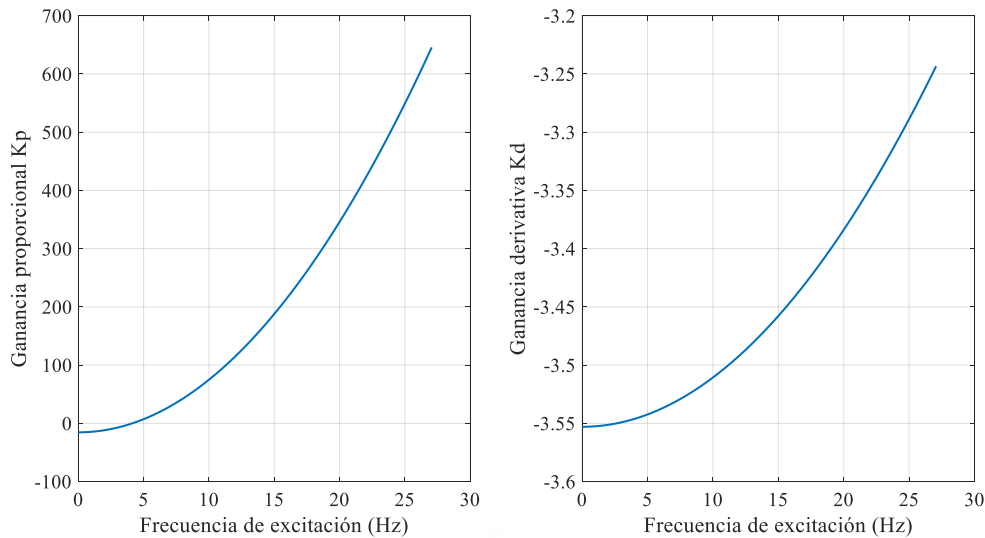


Figura 4-4. Ganancias del control PD

Tabla 4-3. Parámetros del controlado PD para una excitación en su primer o segundo modo de vibración

Frecuencia Natural	Sistema Viga Sin absorsor	Ganancia Proporcional Kp	Ganancia Derivativa Kd
Primera	4.138 Hz	0.0014 V/m	-3.505 Vs/m
Segunda	26.26 Hz	608.866 V/m	-3.22 Vs/m

A fin de evaluar las características dinámicas del absorsor activo sintonizado a la primera y segunda frecuencia de resonancia, se grafican los diagramas de bode de la función de transferencia del absorsor activo. En la Figura 4-5, se muestra la respuesta en frecuencia del absorsor activo sintonizado a la primera frecuencia de resonancia de la viga. La máxima amplitud corresponde a la primera frecuencia natural de 4.138Hz, como también un cambio de fase en esta frecuencia. En la Figura 4-6, se muestra la respuesta en frecuencia del absorsor activo sintonizado en la segunda frecuencia de resonancia de la viga. La máxima amplitud ahora corresponde a 26.26Hz, lo que evidencia que las características dinámicas han cambiado y el absorsor está sintonizado a esta frecuencia.

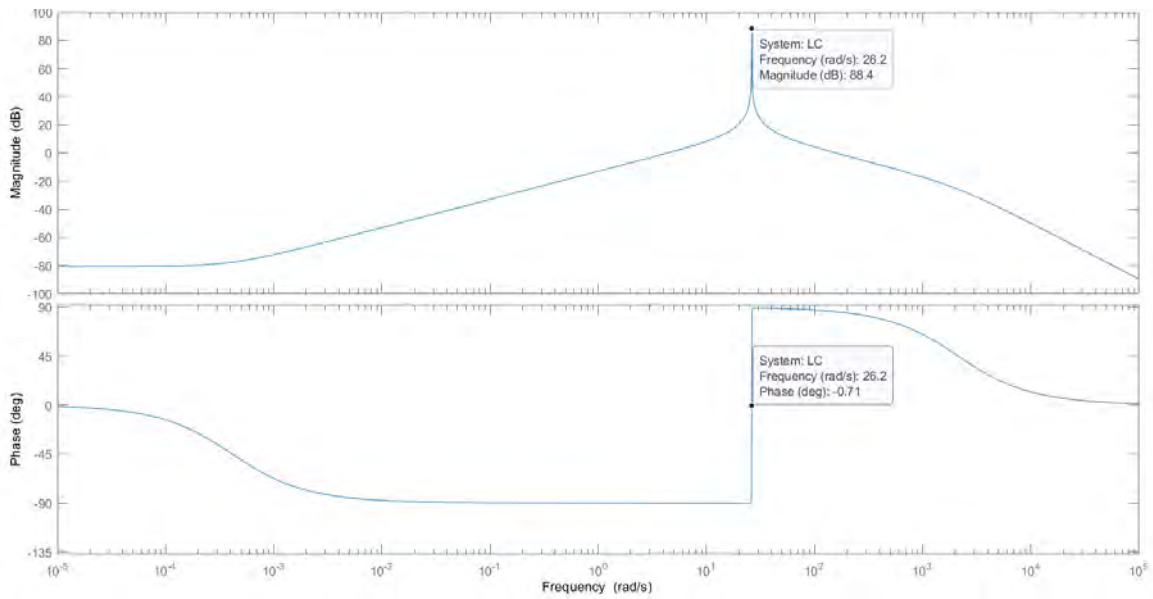


Figura 4-5. Respuesta en frecuencia del absorber activo sintonizado a la primera frecuencia de resonancia de la viga

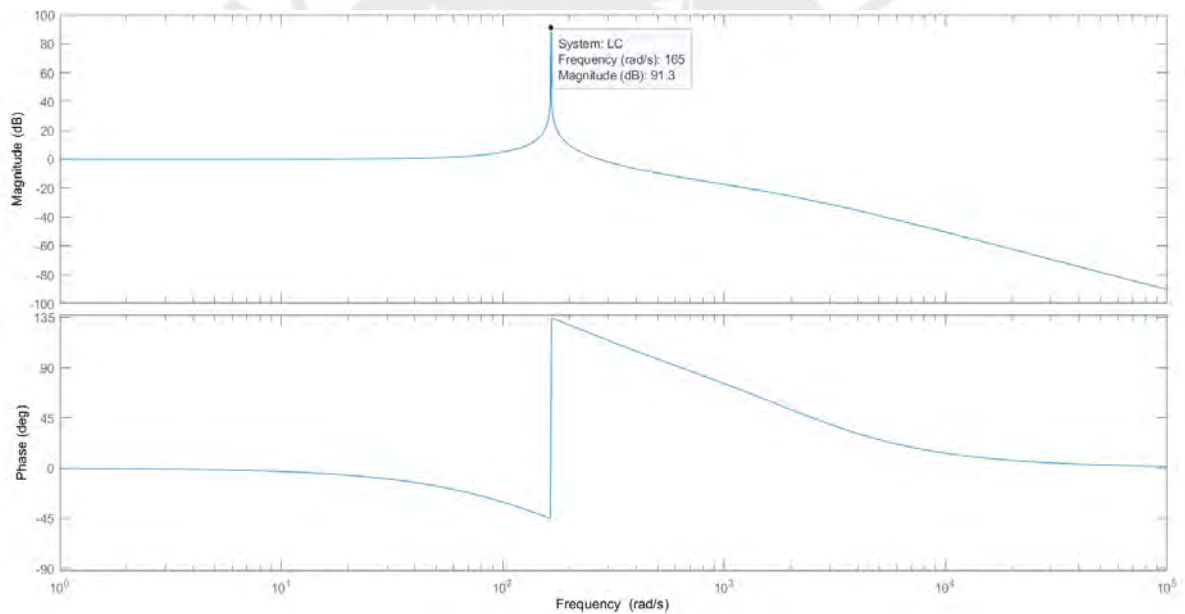


Figura 4-6. Respuesta en frecuencia del absorber activo sintonizado a la segunda frecuencia de resonancia de la viga

#### 4.3.2. Respuesta del sistema viga en voladizo excitado en su primera frecuencia de resonancia

En la Figura 4-7, se muestra la respuesta del sistema viga en voladizo a una frecuencia de excitación que corresponde a su primera frecuencia natural para el caso sin absorber, con

absorber pasivo y con absorber activo. Para el caso sin absorber, se manifiesta el estado de resonancia pues la amplitud de vibración crece en el tiempo al ser excitado en la primera frecuencia natural. Para el caso con absorber pasivo, este es efectivo y reduce en gran medida la amplitud de vibración y se mantiene oscilando dentro de 5mm de amplitud. Para el caso con absorber activo, no se muestra mayor diferencia respecto del pasivo pues las características dinámicas del absorber ya corresponden a la sintonización en su primera frecuencia de resonancia, por lo que el actuador no requiere cambiarlas.

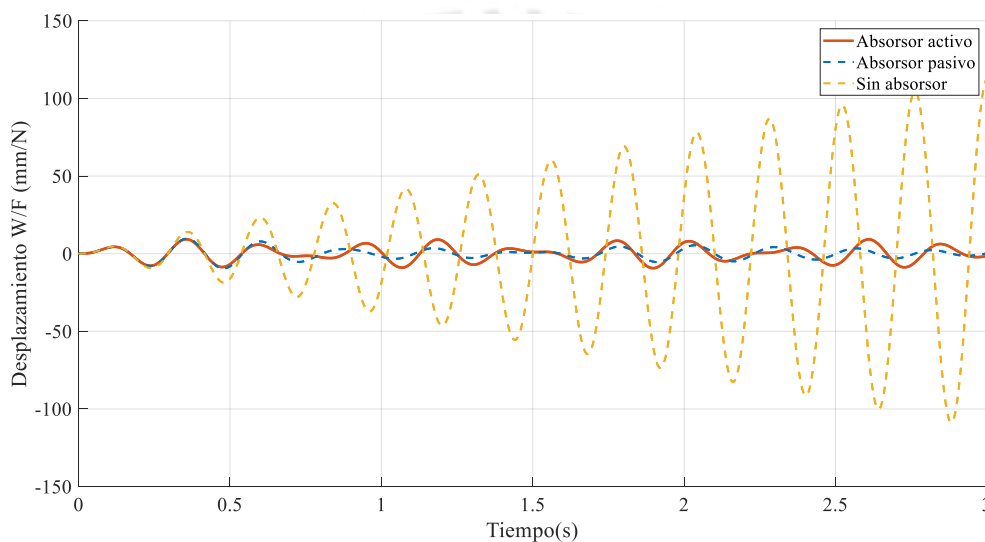


Figura 4-7. Comparación de la respuesta del sistema viga en voladizo implementado con un absorber activo de vibraciones y uno pasivo sintonizados a la primera frecuencia natural del sistema original

En la Figura 4-8, se muestra el voltaje que requiere el actuador electromagnético en el tiempo. En este caso, debido a que el absorber ya tiene los parámetros pasivos sintonizados a la primera frecuencia natural, el voltaje provisto permite compensar la dinámica del actuador electromagnético como también aproximarse aún más la frecuencia natural del absorber activo desacoplado a la frecuencia de excitación.

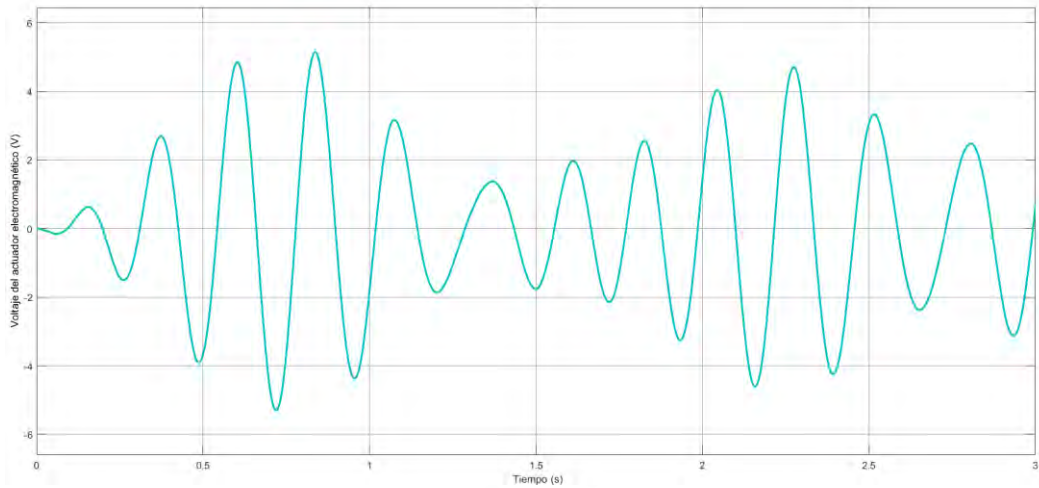


Figura 4-8. Señal de voltaje que controla el actuador electromagnético en el tiempo

En la Figura 4-9, se muestra la potencia que absorbe el actuador electromagnético para mantener sintonizado el absorber activo cuando es excitado en la primera frecuencia de resonancia. Los picos de potencia eléctrica suceden a medida que el actuador requiere proveer una mayor magnitud de fuerza electromagnética.

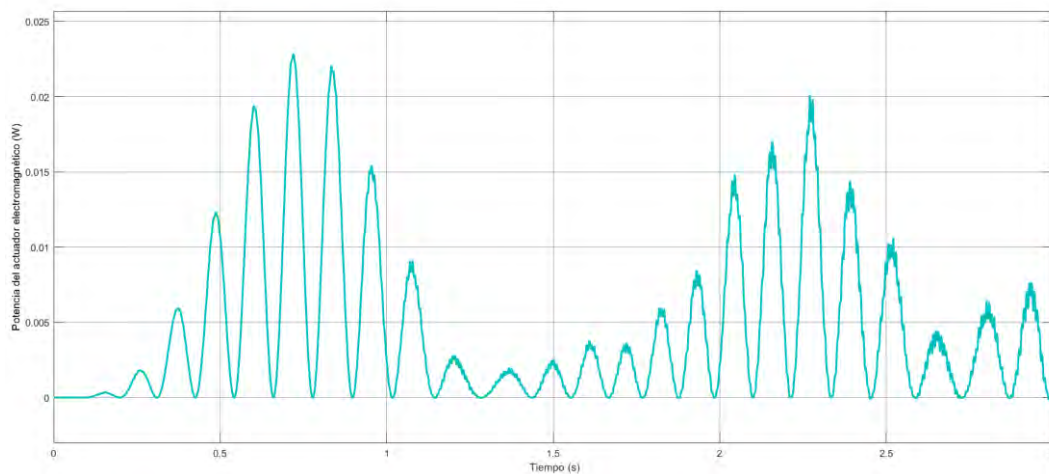


Figura 4-9. Potencia del actuador electromagnético en el tiempo

### 4.3.3. Respuesta del sistema viga en voladizo excitado en su segunda frecuencia de resonancia

En la Figura 4-10, se muestra la respuesta del sistema viga en voladizo excitado en su segunda frecuencia de resonancia para el caso sin absorber, con absorber pasivo y con absorber activo.

Para el caso sin absorber, se vuelve a manifestar el estado de resonancia y esta vez la amplitud de vibración crece aún más rápido por la mayor frecuencia de excitación. Para el caso con absorber pasivo, este deja de ser efectivo y es incapaz de absorber la vibración, por lo que entra en resonancia como si no hubiese sido implementado. Por otro lado, para el caso con absorber activo, la absorción de vibraciones es efectiva y el extremo de la viga oscila entre 1mm de amplitud de vibración.

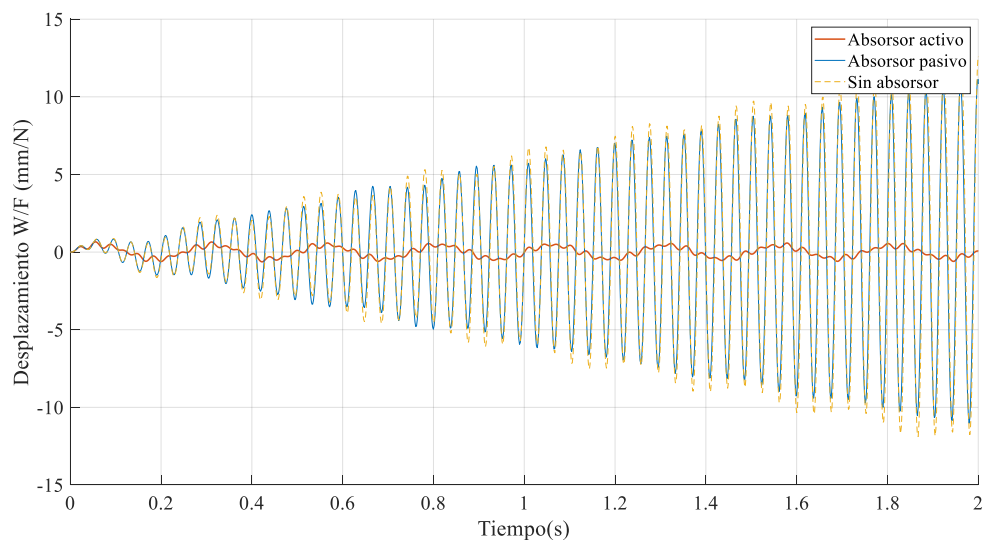


Figura 4-10. Comparación de la respuesta del sistema viga en voladizo implementado con un absorber activo de vibraciones y uno pasivo sintonizados a la segunda frecuencia natural del sistema original

La absorción de vibraciones funciona de tal manera en que el absorber vibra en contra fase al punto en la estructura primaria en el que esté acoplado, en este caso el extremo de la viga en voladizo, a fin de que la fuerza inercial esté en sentido contrario a la de excitación con la misma amplitud y pueda atenuar la amplitud de vibración. Este comportamiento también le corresponde al absorber activo que sigue el mismo principio. En Figura 4-11, se muestra el desplazamiento absoluto tanto del extremo de la viga como el absorber activo sintonizado a la segunda frecuencia de resonancia, cuando el sistema es excitado en esta. Se manifiesta que el absorber activo busca estar en fase contraria en las carreras de avance y retorno respecto del extremo de la viga en voladizo a fin de ejercer una fuerza inercial que “frene” el desplazamiento del extremo a lo largo del tiempo. Asimismo, la amplitud del absorber alcanza mayores valores

que la del extremo de la viga, lo que garantiza que está siendo efectivo, pues tiene que absorber la mayor parte de la energía suministrada por la fuerza de excitación al sistema. Esta amplitud también tiene influencia de la masa del absorber, tiende a disminuir cuando la masa es mayor, ya que requeriría mayor energía suministrada para mantener su energía cinética como se observa en los resultados en Rincón (2020).

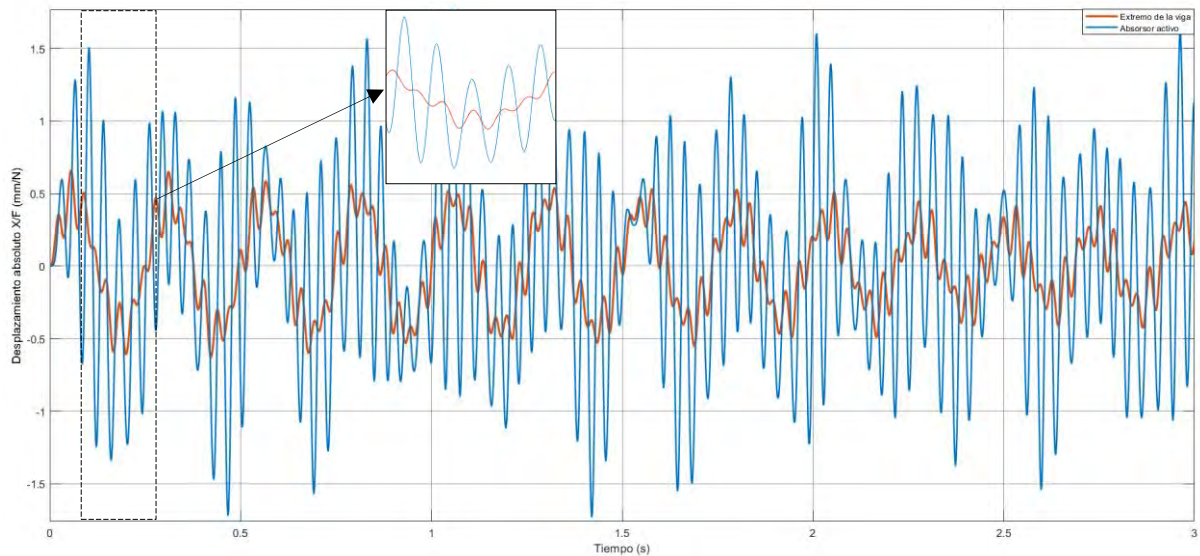


Figura 4-11. Desplazamiento del extremo de la viga y del absorber activo en el tiempo cuando es sintonizado a la segunda frecuencia de resonancia

A fin de lograr la sintonización a cualquier frecuencia de excitación, el actuador electromagnético debe ser capaz de proveer una fuerza en el tiempo proporcional al desplazamiento relativo, lo que se ha presentado como una “rigidez artificial” cuyo valor depende la frecuencia a la que se desea sintonizar. En la Figura 4-12, se muestra la fuerza activa que provee el actuador y el desplazamiento relativo del absorber activo en el tiempo. En todo instante, la fuerza activa está en una fase contraria al desplazamiento relativo además de mantener una proporción entre sus magnitudes a lo largo del tiempo, por lo que se manifiesta la rigidez artificial sintonizada la segunda frecuencia de resonancia. En este sentido, el absorber activo mantiene el mismo principio de funcionamiento de los absorberes pasivos.

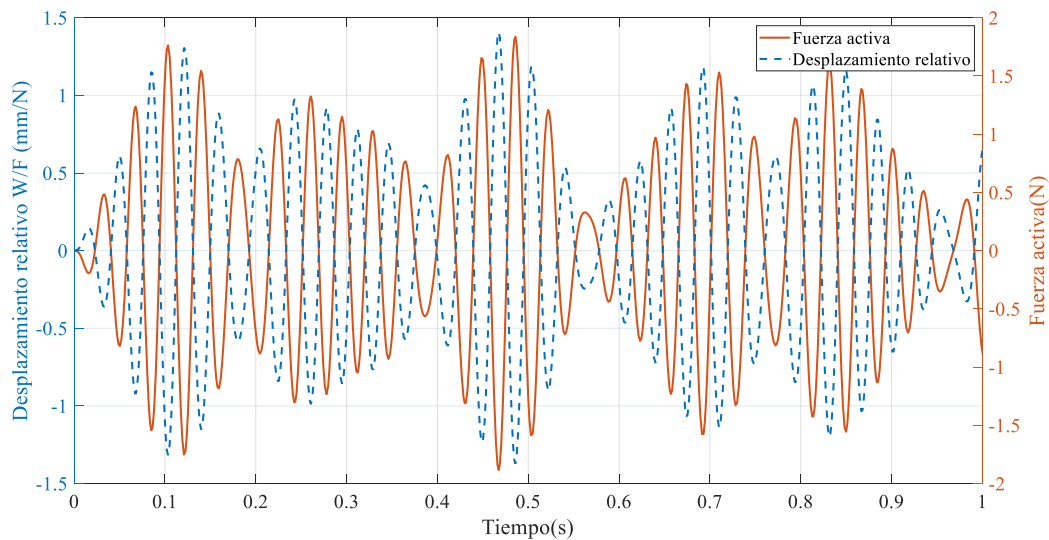


Figura 4-12. Fuerza activa provista por el actuador electromagnético y el desplazamiento relativo del absorber activo en el tiempo

En la Figura 4-13, se muestra el voltaje requerido por el actuador electromagnético en el tiempo para sintonizar el absorber de vibraciones a la segunda frecuencia de resonancia. Se manifiestan picos en la amplitud del voltaje que producen una fuerza electromagnética de mayor magnitud, lo cual es necesario en la carrera de la masa del absorber activo a fin de simular el comportamiento de una rigidez artificial. Como se sabe, la rigidez del absorber pasivo provee una fuerza de restitución contraria y proporcional a su desplazamiento relativo; en este sentido, el actuador electromagnético, al sintonizar el absorber activo a la segunda frecuencia de resonancia, el actuador debe ser capaz de aumentar la fuerza de restitución conforme aumenta el desplazamiento del absorber a fin de mantener una rigidez artificial que sintoniza el absorber a la segunda frecuencia de resonancia del sistema primario viga en voladizo.

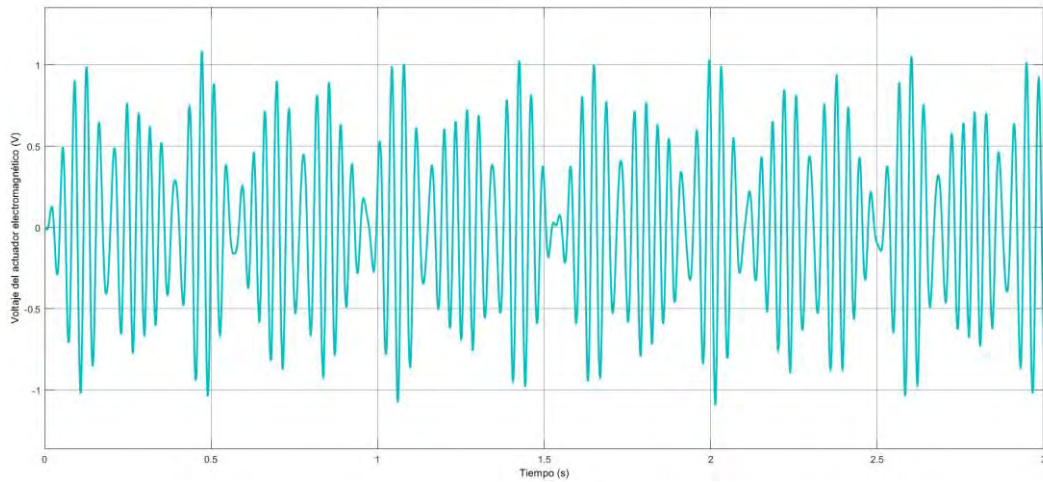


Figura 4-13. Señal de voltaje que controla el actuador electromagnético en el tiempo

En la Figura 4-14, se muestra la potencia consumida por el actuador electromagnético en el tiempo cuando es sintonizado a la segunda frecuencia de excitación. Se manifiestan picos de valor en los mismos instantes que los picos de voltaje que corresponden a los puntos en los que el actuador debe proveer más fuerza electromagnética a fin de mantener la rigidez artificial. Asimismo, se manifiestan puntos negativos de potencia eléctrica en los que el actuador teóricamente estaría produciéndola en lugar de consumirla.

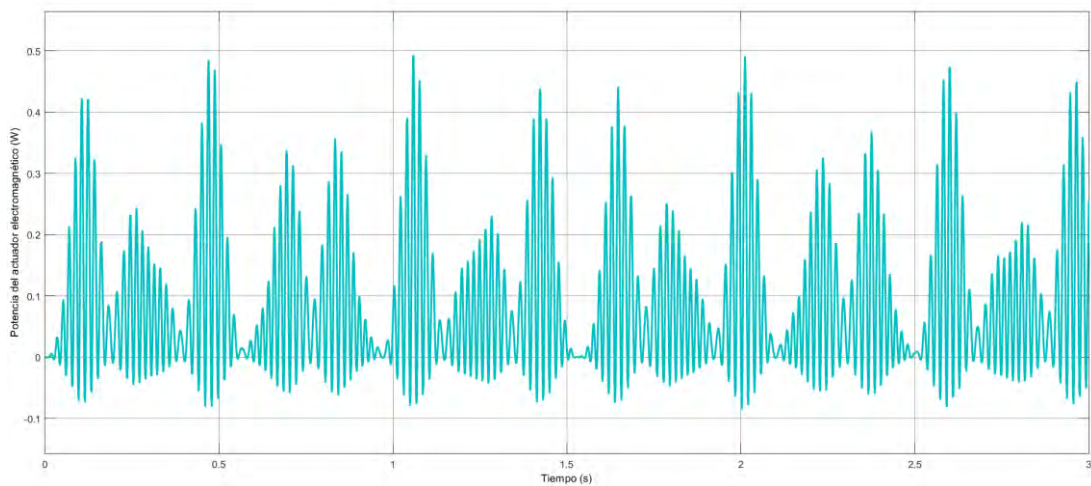


Figura 4-14. Potencia del actuador electromagnético en el tiempo

#### 4.3.4. Influencia de la posición del absorber en el nivel de atenuación

A diferencia de los modelos discretos desarrollados en la literatura, en las estructuras reales se requiere evaluar una posición óptima para instalar el absorber activo a fin de garantizar que el nivel de atenuación se mantiene en el rango de frecuencias de excitación que actúan durante el servicio.

En la Figura 4-15, se muestra la amplitud de vibración en el tiempo sólo del extremo libre cuando el absorber se posiciona a  $1/3$ ,  $2/3$  y en el extremo de la longitud de la viga en voladizo; además, la frecuencia de excitación corresponde a la segunda frecuencia de resonancia. Se manifiesta que en todos los casos, el absorber es efectivo logrando disminuir la amplitud de vibración hasta el  $1.2 \text{ mm/N}$  mientras que el caso sin absorber crece en el tiempo pues el estado es de resonancia como se muestra en la Figura 4-10. No obstante, el mayor nivel de atenuación se logra cuando el absorber está ubicado en el extremo de la viga en voladizo, que representa el punto de mayor amplitud de los tres casos en la forma del segundo modo de vibración. Por otro lado, en la Figura 4-16, se muestra el desplazamiento también del extremo en voladizo pero cuando el absorber está situado en un nodo de vibración de la viga en voladizo original que corresponde al segundo modo de vibración. En este caso, el absorber ya no es efectivo y la respuesta en el tiempo es prácticamente la misma que el caso sin absorber como se superponen en la figura.

En ese sentido, la influencia de la posición es significativa en la respuesta del sistema, por lo que deben ser tomados en cuenta distintos factores que intervienen en la respuesta dinámica de la estructura original. La forma de vibración que tiene todo el sistema cuando es excitado y su rango de frecuencias de excitación que actuarán sobre el sistema deben ser evaluados para elegir la posición óptima del absorber activo y, de mucha mayor importancia, evitar elegir algún nodo de vibración que suceda en ese rango.

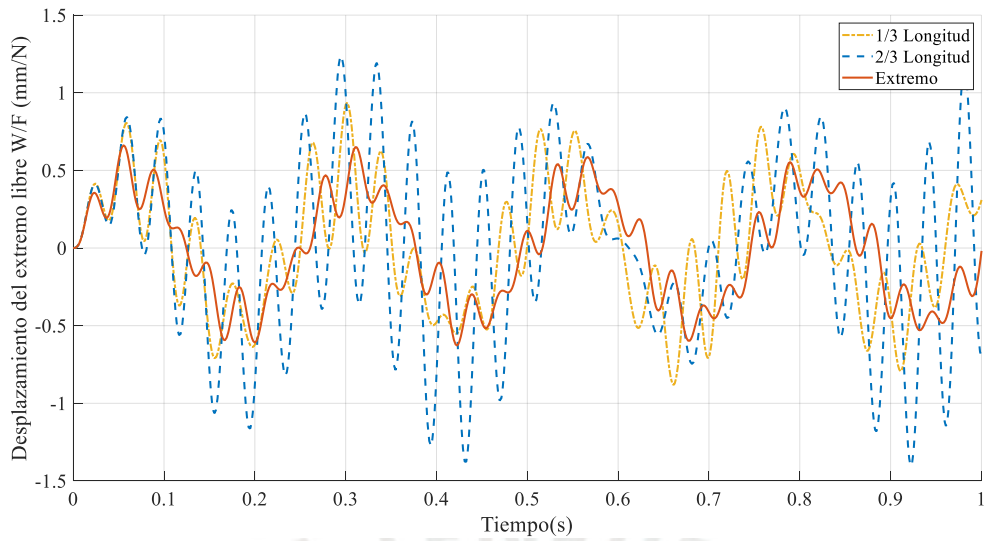


Figura 4-15. Desplazamiento del extremo libre cuando es excitado en la segunda frecuencia de resonancia para diferentes posiciones del absorbente activo a lo largo de la viga

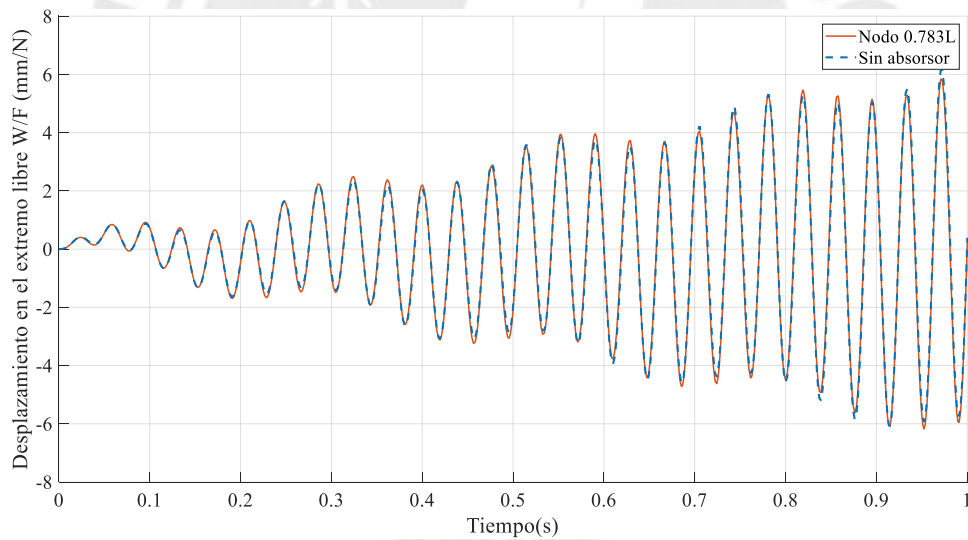


Figura 4-16. Desplazamiento del extremo libre cuando es excitado en la segunda frecuencia de resonancia para un absorbente posicionado en un nodo original de vibración y sin absorbente

## Conclusiones

Se ha desarrollado un modelo continuo del sistema viga en voladizo implementado con un absorber activo de vibraciones a fin de su respuesta dinámica cuando es excitado por una fuerza de naturaleza armónica en cualquier frecuencia de excitación, especialmente sus dos primeras frecuencias naturales que representan la operación más crítica de cualquier estructura. El modelo completo ha sido simulado con parámetros reales de sus componentes mediante el software Matlab Simulink. Los resultados prueban que el absorber activo es efectivo para reducir la amplitud de vibración hasta el 5.56% de su amplitud original excitado en su segunda frecuencia de resonancia, que ha sido evaluado sin absorber con un factor de amortiguación convencional del 1%.

Respecto de la analogía con los absorbentes pasivos, el absorber activo mantiene la filosofía del comportamiento de los pasivos en el sentido de que el actuador electromagnético cambia las características dinámicas del absorber a fin de que su frecuencia natural desacoplado corresponda a la frecuencia de excitación del sistema primario. Esta es la razón por la que el absorber activo no presenta mayor ventaja respecto del pasivo cuando la viga es excitada en su primera frecuencia de resonancia, pues ya corresponde sintonización del absorber pasivo.

Asimismo, el absorber activo es capaz de sintonizarse a cualquier frecuencia de excitación, lo que se comprueba al excitar el sistema primario en su segunda frecuencia de resonancia cuando sus parámetros físicos como la masa y rigidez correspondían a la primera frecuencia de resonancia. Como resultado, el absorber pasivo deja de ser efectivo cuando el sistema primario fue excitado en una frecuencia de resonancia distinta de la de sintonización, mientras que el activo mantiene la reducción de la amplitud de vibración en el tiempo.

A fin de mantener la sintonización de la frecuencia natural del absorber activo en el tiempo, el controlador desarrollado permite que el actuador electromagnético pueda proveer siempre una fuerza en contra fase proporcional al desplazamiento relativo del absorber activo respecto del extremo de la viga en voladizo. Este comportamiento puede representar a una “rigidez artificial” que logra el actuador para cambiar las características dinámicas.

El modelo continuo, que representa lo más fiel a la realidad, garantiza que el procedimiento desarrollado sea factible para extenderse al diseño de absorbentes activos implementados en estructuras de mayor complejidad.

La posición del absorber activo influye significativamente en el nivel de atenuación de la amplitud de vibración, por lo que debe instalarse en una posición óptima que corresponde al punto de mayor amplitud de vibración en la frecuencia a la que esté excitado y, de encontrarse en la cercanía a una frecuencia de resonancia, el punto de mayor amplitud del modo de vibración que corresponda. Asimismo, debe evitarse instalar el absorber en un nodo de vibración original de la estructural pues en esta posición no es efectivo y la respuesta es la misma que el caso sin absorber.

# Bibliografía

- Asachi, G., & Ovidiu Toma Gheorghe Asachi, I. (2014). *DESIGN CRITERIA OF TUNED MASS DAMPER SYSTEMS TO CONTROL VIBRATIONS OF BUILDING STRUCTURES* Luca Septimiu Fideliu Paulet-Crainiceanu. April 2015. <https://www.researchgate.net/publication/275325148>
- Barros, T., Serrano, B., Infante, V., Franco, V., & Antunes, P. (2020). Prediction of the fatigue lifetime of the Portuguese Air Force Epsilon TB-30 aircraft. *Engineering Failure Analysis*, 116, 104764. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2020.104764>
- Chan, T. H. T., Li, Z. X., & Ko, J. M. (2001). Fatigue analysis and life prediction of bridges with structural health monitoring data - Part II: Application. *International Journal of Fatigue*, 23(1), 55–64. [https://doi.org/10.1016/S0142-1123\(00\)00069-4](https://doi.org/10.1016/S0142-1123(00)00069-4)
- Chang, C. ., & Yang, H. T. Y. (1995). *Control of Buildings Using Active Tuned Mass Dampers*. 121(3), 355–366.
- Connor, J., & Laflamme, S. (2014). Structural motion engineering. In *Structural Motion Engineering* (Vol. 9783319062). <https://doi.org/10.1007/978-3-319-06281-5>
- Den Hartog, J. P. (1956). *Mechanical Vibrations* (McGraw-Hill (ed.); 4th ed.). <https://doi.org/10.1038/169641b0>
- Elmali, H., Renzulli, M., & Olgac, N. (2000). Experimental comparison of delayed resonator and PD controlled vibration absorbers using electromagnetic actuators. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME*, 122(3), 514–520. <https://doi.org/10.1115/1.1286820>
- Frahm, H. (1911). *A Device for Damping Vibrations of Bodies* (Patent No. U.S. Patent 989958).
- Kwak, M. K., Yang, D. H., & Shin, J. H. (2015). Active vibration control of structures using a semi-active dynamic absorber. *Noise Control Engineering Journal*, 63(3), 287–299. <https://doi.org/10.3397/1/376326>
- Łatas, W. (2016). Application of the continuous dynamic absorbers in local and global vibration reduction problems in beams. *Vibrations in Physical Systems*, 27(May 2016), 245–254.
- Mohanty, S., Gupta, K. K., & Raju, K. S. (2015). Vibration Feature Extraction and Analysis of Industrial Ball Mill Using MEMS Accelerometer Sensor and Synchronized Data Analysis Technique. *Procedia Computer Science*, 58, 217–224. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2015.08.058>
- Orhan, S., Aktürk, N., & Çelik, V. (2006). Vibration monitoring for defect diagnosis of rolling element bearings as a predictive maintenance tool: Comprehensive case studies. *NDT and E International*, 39(4), 293–298. <https://doi.org/10.1016/j.ndteint.2005.08.008>
- Palomera-Arias, R. (2005). Passive Electromagnetic Damping Device for Motion Control of Building Structures. *Technology*.

- Rao, S. S. (1952). *Mechanical Vibrations* (5th ed., Vol. 169, Issue 4303). Pearson.  
<https://doi.org/10.1038/169641b0>
- Rincón, C. (2020). *Análisis de un Absorber de Vibraciones Mediante un Modelo Discreto Aplicado a una Viga en Voladizo*.
- Sofronas, A. (2012). *Case Histories in Vibration Analysis and Metal Fatigue for the Practicing Engineer* (pp. 245–268). Wiley.
- Soong, T. T. (1988). Active structural control in civil engineering. *Engineering Structures*, 10(2), 74–84. [https://doi.org/10.1016/0141-0296\(88\)90033-8](https://doi.org/10.1016/0141-0296(88)90033-8)
- Wójcicki, Z., Grosel, J., Sawicki, W., Majcher, K., & Pakos, W. (2015). Experimental (OMA) and numerical (FEM) modal analysis of ball mill foundations. *Procedia Engineering*, 111(TFoCE), 858–863. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.07.159>
- Yang, D. H., Shin, J. H., Lee, H. W., Kim, S. K., & Kwak, M. K. (2017). Active vibration control of structure by Active Mass Damper and Multi-Modal Negative Acceleration Feedback control algorithm. *Journal of Sound and Vibration*, 392, 18–30.  
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2016.12.036>
- Yoshida, T., Kuratani, F., Ito, T., & Taniguchi, K. (2019). Vibration characteristics of an operating ball mill. *Journal of Physics: Conference Series*, 1264(1).  
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1264/1/012016>
- Yu, W., Thenozhi, S., & Li, X. (2014). Stable active vibration control system for building structures using PD/PID control. In *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)* (Vol. 19, Issue 3). IFAC. <https://doi.org/10.3182/20140824-6-za-1003.00148>

# Anexo 1

## Funciones para calcular los parámetros modales del sistema viga en voladizo

```
function [m] = masa_modal(x,phi,A,rho)
%Masa modal
%Esta función halla la matriz de masa modal de una viga utilizando los
%parámetros y la función de forma que corresponde a cada modo previamente
%hallada

%Se integra numericamente para hallar la masa modal
sum=0
for ii=1:3

for i=1:1000;
%Se acumula la suma de cada diferencial para obtener la integral con el
%phi correspondiente a cada modo
sum=(rho*A.*phi(ii,i)^2).*(x(i+1)-x(i))+sum;
end
masa(ii,1)=sum %La suma de todos los diferenciales es
la integral que corresponde a la masa ij %Se elimina el valor de la anterior
sum=0
sumatoria para comenzar de nuevo el ciclo
end

m=masa
end

function [k] = rigidez_modal(x,E,I,phi_2)
%Rigidez modal
%Se utiliza el mismo procedimiento que en la masa modal, pero con
%diferentes parametros y la segunda derivada de la función modal respecto
%de x
sum=0
for ii=1:3

for i=1:1000;

sum=(E*I.*phi_2(ii,i)^2).*(x(i+1)-x(i))+sum;

end
rigidez(ii,1)=sum
sum=0
end
sum=0

k=rigidez
end

function [phi,phi2] = funcion_forma(x,beta,l)
%Valores de la función de forma en función de x discretizado
for i=1:3
alfa=(sin(beta(i)*1)+sinh(beta(i)*1))./(cos(beta(i)*1)+cosh(beta(i)*1))
%Constante alfa de la función de forma de la viga en voladizo

fforma(i,:)=(sin(beta(i).*x)-sinh(beta(i).*x)-alfa.*(cos(beta(i).*x)-cosh(beta(i).*x)));
%Función de forma de la viga
fforma2(i,:)=alfa.*(beta(i)^2.*cos(beta(i).*x) + beta(i)^2.*cosh(beta(i).*x) - beta(i)^2.*sin(beta(i).*x) - beta(i)^2.*sinh(beta(i).*x)
%Segunda derivada de la función de forma de la viga respecto de la posición
end
phi=fforma;
phi2=fforma2;
end
```

## Anexo 2

# Algoritmo para la simulación del sistema viga implementado con un absorber pasivo

```
%% Acerca de
%%Fecha 29-11-20, Rev5, 1-4
%%Procedimiento de cálculo de frecuencias naturales y modos de vibración
%%de una viga en voladizo implementada con un absorber pasivo

clear
close all

set(0, 'DefaultAxesFontName', 'Times'); %Tipo de letra y tamaño para gráficos
set(0, 'DefaultAxesFontSize', 20);

%% Dimensiones de la viga
b = 0.05 %Ancho de la viga
e = 0.005 %Espesor de la viga
A = b*e %Area
E = 2.1*10^11 %Módulo elástico del acero
I = b*e^3/12 %Momento de inercia de la viga respecto de su centro de masa
rho = 7850 %Densidad de la viga
l = 1 %longitud de la viga

%% Datos del absorber
%%Datos del absorber
wc = [3.501 4.138 4.934 26.26]*2*pi %Frecuencias de sintonización
ma = 0.05 %Masa del absorber
ka = wc(2)^2*ma %Rigidez del absorber

%% Parámetros de la viga en coordenadas modales
%%Discretizar la longitud de la viga
x = 0:0.001:1; %Particiones de la viga

%%beta para 3 modos
beta = [1.875104/1 4.694091/1 7.854757/1] %Constante beta dentro del cálculo de la función de
forma
[phi, phi_2] = funcion_forma(x,beta,l) %Función que calcula la función de forma
[m] = masa_modal(x,phi,A,rho) %Función que calcula la masa modal de la ecuación
diferencial en coordenadas modales
[k] = rigidez_modal(x,E,I,phi_2) %Función que calcula la rigidez modal de la ecuación
diferencial en coordenadas modales

%% Amplitud de vibración con absorber

n_modos = 3 %Número de modos de vibración a utilizar
syms s ga
%Suma de coeficientes de cada coordenada modal
for i=1:n_modos
Z(i,1) = m(i,1)*(s^2) + k(i,1) + ((ma*(s^2))*ka/(ma*s^2+ka))*phi(i,1001)^2
end

s_valores=1:1:350; %Discretizar la frecuencia de
excitación

%Fuerza de excitacion en coordenadas modales
for j=1:n_modos;
F = phi(j,1001) %Fuerza de excitación en coordenadas
modales
for i=1:350;
q(j,i) = F / Z(j,1); %Cada coordenada generalizada
q_valores(j,i) = double(subs(q(j,i),[s],[s_valores(i)*(-1)^(1/2)])); %Valores de cada coordenada
generalizada en función de la frecuencia de excitación
end
end

%% Graficos
```

```

% Amplitudes de las coordenadas generalizadas según la frecuencia de excitación
for i=1:2
    figure(1)
        subplot(1,2,i)
            plot(s_valores(1,:)/(2*pi),abs(q_valores(i,:))*1000)
            grid on
            xlabel('Frecuencia de excitación (Hz)');
            ylabel('Amplitud(mm)');
            title('Amplitud de la coordenada generalizada vs Frecuencia(Hz)')
end

%Magnitud de la contribución de cada coordenada generalizada a la magnitud
%de la amplitud de vibración en el extremo de la viga en voladizo
for j=1:n_modos;
for i=1:350;
    qphi(j,i)=q_valores(j,i)*phi(j,1001);
end
end

%Magnitud de contribución de cada coordenada generalizada vs
%la frecuencia de excitación
for j=1:n_modos

    figure(2)
        subplot(1,3,j)
            plot(s_valores(1,:)/(2*pi),qphi(j,:)*1000)
            grid on
            xlabel('Frecuencia de excitación (Hz)');
            ylabel('Amplitud(mm)');
            title('Contribución de cada coordenada modal a la dinámica total del sistema(mm)')
end

%Amplitud real del absorSOR y del extremo libre de la viga en voladizo
for i=1:350;
    w_extremo(1,i)=q_valores(1,i)*phi(1,1001)+q_valores(2,i)*phi(2,1001)+q_valores(3,i)*phi(3,1001); %Amplitud de
vibración del extremo de la viga
    xa(1,i)=((ka)/((ma*(s_valores(1,i)*(-1)^(1/2))^2+ka))*w_extremo(1,i); %Amplitud de vibración del absorSOR
end

%Grafico de Amplitud del extremo libre de la viga en voladizo en función de
%la frecuencia de excitación
figure(3)
    subplot(1,2,1)
        plot(s_valores(1,:)/(2*pi),abs(w_extremo(1,:))*1000)
        grid on
        xlabel('Frecuencia(Hz)');
        ylabel('Amplitud(mm)');
        title('Amplitud del extremo libre de la viga en voladizo')
        xlim([0 30])

%Grafico de Amplitud del absorSOR pasivo sintonizado a la 1ra frecuencia natural en función de la frecuencia de
excitación

    subplot(1,2,2)
        plot(s_valores(1,:)/(2*pi),abs(xa(1,:))*1000)
        grid on
        xlabel('Frecuencia de excitación (Hz)');
        ylabel('Amplitud(mm)');
        title('Amplitud del absorSOR pasivo sintonizado a la 1ra frecuencia natural')
        xlim([0 30])

%Amplitud de distintos puntos a lo largo de la viga en función de la frecuencia de excitación

Delta=1000/1000;
n=1
for i=1:1000;

    w_puntos(1,i)=q_valores(1,53)*phi(1,n)+q_valores(2,53)*phi(2,n)+q_valores(3,53)*phi(3,n);
    x_puntos(1,i)=x(1,n);
    n=Delta*i;
end

figure(4)
plot(x_puntos(1,:)*1000,w_puntos(1,:)*1000)
grid on
xlabel('Posición (mm) ');
ylabel('Amplitud (mm)');

```

## Anexo 3

# Algoritmo para la simulación del sistema viga implementado con un absorber activo

```
%% Acerca de
%%Fecha 29-11-20, Rev5, 2-4
%%Procedimiento de cálculo de funciones de transferencia del sistema MISO
%%de una viga en voladizo implementada con un absorber activo

clear
close all

%% Dimensiones de la viga
b = 0.05 %Ancho de la viga
e = 0.005 %Espesor de la viga
A = b*e %Area
E = 2.1*10^11 %Módulo elástico del acero
I = b*e^3/12 %Momento de inercia de la viga respecto de su centro de masa
rho = 7850 %Densidad de la viga
l = 1 %longitud de la viga

%% Datos del absorber
%%Datos del absorber
wc = [3.501 4.138 4.934 26.26]*2*pi %Frecuencias de sintonización
ma = 0.05 %Masa del absorber
ka = wc(2)^2*ma %Rigidez del absorber

%% Actuador electromagnético
Kb = 3.5 %Vs/m
Kc = 3.5 %N/A
L = 0.00075 %H
R = 1.6 %Ohms
ba = 0.1 %Factor de amortiguamiento
pos = round((1001/l)*[1/3,2/3,0.783,1]) %Posiciones del absorber
npos = 4 %Posición del absorber
posF = round((1001/l)*[1/3,2/3,1]) %Posiciones de la fuerza
nposF = 3 %Posición de la fuerza
w_pos = 1 %Posición de evaluación en m
w_p = round((1001/l)*w_pos) %Posición de evaluación en coordenada de la matriz

%% Parámetros de la viga en coordenadas modales
%%Discretizar la longitud de la viga
x= 0:0.001:1; %Particiones de la viga

%%beta para 3 modos
beta= [1.875104/l 4.694091/l 7.854757/l] %Constante beta dentro del cálculo de la función de forma
[phi, phi_2]= funcion_forma(x,beta,l) %Función que calcula la función de forma
[m]= masa_modal(x,phi,A,rho) %Función que calcula la masa modal de la ecuación
diferencial en coordenadas modales
[k]= rigidez_modal(x,E,I,phi_2) %Función que calcula la rigidez modal de la ecuación
diferencial en coordenadas modales

%% Función de transferencia de la planta implementado con el absorber electromagnético
for i=1:2
G(i,i)=tf([m(i) 0 k(i)],[1]) + tf([ma*ba*phi(i,pos(npos))^2 ma*ka*phi(i,pos(npos))^2 0 0],[ma ba ka])
%Funcion de transferencia que multiplica a la matriz de coordenadas generalizadas Q
G_SA(i,i)=tf([m(i) 0 k(i)],[1]);
%Funcion de transferencia sin absorber
end

G_inv = G^(-1)
%Inversa de la función de transferencia para hallar la coordenada modal
G_inv_SA = G_SA^(-1)
%Inversa de la función de transferencia para hallar la coordenada modal en el caso sin absorber

%% Función de transferencia de la respuesta según la perturbación y la fuerza del actuador
```

```

%Funciones de transferencia para la deflexión en la posición del absorbtor
G_p=G_inv(1,1) * phi(1,posF(nposF)) * phi(1,pos(npos)) + G_inv(2,2) * phi(2,posF(nposF)) *
phi(2,pos(npos)) %Función de transferencia correspondiente a la deflexión en
función de la perturbación
G_u=(G_inv(1,1) * phi(1,pos(npos)) * phi(1,pos(npos)) + G_inv(2,2) * phi(2,pos(npos)) *
phi(2,pos(npos))) * tf([-ma 0 0],[ma ba ka]) %Función de transferencia correspondiente a deflexión en
función de la fuerza activa

%Funciones de transferencia para el extremo
G_p_W=G_inv(1,1) * phi(1,posF(nposF)) * phi(1,w_p) + G_inv(2,2) * phi(2,posF(nposF)) *
phi(2,w_p) %Función de transferencia correspondiente a la perturbación
G_u_W=(G_inv(1,1) * phi(1,pos(npos)) * phi(1,w_p) + G_inv(2,2) * phi(2,pos(npos)) *
phi(2,w_p)) * tf([-ma 0 0],[ma ba ka]) %Función de transferencia correspondiente a la fuerza
activa
G_pSA=G_inv_SA(1,1) * phi(1,posF(nposF)) * phi(1,w_p) + G_inv_SA(2,2) * phi(2,posF(nposF)) *
phi(2,w_p) %Función de transferencia correspondiente a la perturbación
sin absorbtor

G_ie=tf([1],[L R]) %Funcion de transferencia de la
corriente respecto del Voltaje
G_ix=tf([-Kb 0],[L R]) %Función de transferencia de la
corriente respecto de la posición relativa
G_xw=tf([ba ka],[ma ba ka]) %Función de transferencia de la
posición del absorbtor respecto de la posición final de la viga
G_xu=tf([1],[ma ba ka])

```



## Anexo 4

# Algoritmo para la simulación del comportamiento dinámico de un absorber activo desacoplado

```
%% Acerca de
%Fecha 29-11-20, Rev5, 3-4
%%Análisis de un absorber

%Fecha 19-02-21, Rev6, 3-4
%Correcciones minimas y estéticas

%% Datos del absorber
set(0, 'DefaultAxesFontName', 'Times'); %Tipo de letra y tamaño para gráficos
set(0, 'DefaultAxesFontSize', 20);

wc = [4.14, 26.26]*2*pi %Frecuencias de excitación
kk = 2 %Numero de frecuencia elegida 1 o 2 que significan
4.138 o 26.26

%% Absorber sintonizado a la primera y segunda frecuencia de resonancia original de la viga
for j=1:2

Kp(j)=( L * ba * ( wc(j)^2 )) / Kc + (R/Kc) * (ma * (wc(j)^2) - ka)
%Ganancia proporcional
Kd(j)=( L * ma * ( wc(j)^3 ) - R * ba * wc(j) - Kb * Kc * wc(j) - L * ka * wc(j) ) / (Kc * wc(j))
%Ganancia derivativa

C1(j) = tf([ma ba ka],[0 1])
%Funcion de transferencia para el calculo de la función de transferencia del desplazamiento del absorber según el
voltaje de entrada
C2(j) = tf([L R],[0 1])
%Funcion de transferencia para el calculo de la función de transferencia del desplazamiento del absorber según el
voltaje de entrada

G_xec(j) = Kc / (C1(j)*C2(j) + tf([Kb*Kc 0],[ 0 1]))
%Funcion de transferencia del desplazamiento del absorber según el voltaje de entrada

C(j) = tf([Kd(j) Kp(j)],[0 1])
%Controlador PD en función del desplazamiento relativo

LA(j) = C(j) * G_xec(j)
%Lazo abierto del sistema
LC(j) = C(j) * G_xec(j)/(1+C(j)*G_xec(j))
%Lazo cerrado del sistema

G_Uxr(j) = tf([-Kc * (Kd(j)+Kb) - Kc*Kp(j)],[L R])
%Fuerza del actuador según el desplazamiento relativo

end

G_Uxr2=G_Uxr(kk)
%Función de transferencia de la fuerza del actuador según la posición relativa sintonizado a la 2da para Simulink

%% Gráficos

%Diagrama de bode del lazo cerrado
figure (1)
hold on
bode(LC(1))
bode(LC(2))

wc_valores=0:0.1:170
%Valores de frecuencia de excitación
kp_valores=( L*ba.*(wc_valores.^2) ) ./ Kc + (R/Kc) .* (ma.*(wc_valores.^2) - ka)
%Valores de la ganancia proporcional
kd_valores=( L*ma.*(wc_valores.^3) - R*ba.*wc_valores - Kb*Kc.*wc_valores - L*ka.*wc_valores) ./
(Kc.*wc_valores) %Valores de la ganancia derivativa

%Ganancias del controlador según la frecuencia de excitación
figure (2)
```

```

subplot(1,2,1)
plot(wc_valores/(2*pi),kp_valores,'Linewidth',2)
xlabel('Frecuencia de excitación (Hz)');
ylabel('Ganancia proporcional Kp');
grid on

subplot(1,2,2)
plot(wc_valores/(2*pi),kd_valores,'Linewidth',2)
xlabel('Frecuencia de excitación (Hz)');
ylabel('Ganancia derivativa Kd');
grid on

%% Respuesta del absorsor

%Respuesta del absorsor desacoplado a una entrada escalon de voltaje
[displacement_ec_step,tec1]=step(G_xec(kk),1.5) %Desplazamiento en el tiempo con
una entrada de paso voltaje unitario del absorsor activo %Escalon de voltaje unitario
[ec_step,tec2]=step(tf([0 1],[0 1]))

%Respuesta del absorsor desacoplado a una entrada impulso de voltaje
[displacement_ec_impulse,timpulse2]=impulse(G_xec(kk),1.5) %Desplazamiento en el tiempo con
una entrada de impulso unitario de voltaje %Impulso unitario de voltaje
[ec_impulse,timpulse2]=impulse(tf([0 1],[0 1]))

%Graficos

figure (3)
subplot(1,2,1)
plot(tec1,displacement_ec_step,'-', 'color',[0 0.4470 0.7410], 'Linewidth',2)
% title('Step Response Xa(s)/Ec(s)')
% xlabel('Time(s)');
% ylabel('Displacement(m)');

title('Respuesta al escalón Xa(s)/Ec(s)')
xlabel('Tiempo(s)');
ylabel('Desplazamiento(m)');

figure (3)
subplot(1,2,2)
plot(timpulse2,displacement_ec_impulse,'-', 'color',[0 0.4470 0.7410], 'Linewidth',2)
% title('Impulse Response Xa(s)/Ec(s)')
% xlabel('Time(s)');
% ylabel('Displacement(m)');

title('Respuesta al impulso Xa(s)/Ec(s)')
xlabel('Tiempo(s)');
ylabel('Desplazamiento(m)');

%% Respuesta del absorsor desacoplado implementado con el controlador

%Respuesta del absorsor implementado con el controlador a una entrada de error
[displacement_error_step,terror_ec1]=step(LA(kk),1.5) %Desplazamiento en el tiempo
con un entrada de paso error unitario del absorsor activo %Escalon de error unitario
[error_step,terror_ec2]=step(tf([0 1],[0 1]))

[displacement_error_impulse,terror_impulse1]=impulse(LA(kk),1.5) %Desplazamiento en el tiempo
con un entrada de impulso de error unitario del absorsor activo %Impulso unitario de error
[error_impulse,terror_impulse2]=impulse(tf([0 1],[0 1]))

%Graficas
figure (4)
subplot(1,2,1)
plot(terror_ec1,displacement_error_step,'-', 'color',[0 0.4470 0.7410], 'Linewidth',2)
% title('Step Response Xa(s)/Err(s)')
% xlabel('Time(s)');
% ylabel('Displacement(m)');

title('Respuesta al escalón Xa(s)/Err(s)')
xlabel('Tiempo(s)');
ylabel('Desplazamiento(m)');

figure (4)
subplot(1,2,2)
plot(terror_impulse1,displacement_error_impulse,'-', 'color',[0 0.4470 0.7410], 'Linewidth',2)
% title('Impulse Response Xa(s)/Err(s)')
% xlabel('Time(s)');
% ylabel('Displacement(m)');

title('Respuesta al impulso Xa(s)/Err(s)')
xlabel('Tiempo(s)');
ylabel('Desplazamiento(m)');

```