PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Escuela de Posgrado

CREACIÓN DE PROBLEMAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL EN ESTUDIANTES DE PRIMER GRADO DE SECUNDARIA

Tesis para obtener el grado académico de Maestro en Enseñanza de las Matemáticas

que presenta:

Amador Augusto Paredes Chavez

Asesora:

Mag. Augusta Rosa María Osorio Gonzales

Lima, 2025

Informe de Similitud

Yo, Augusta Osorio Gonzales, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesora de la tesis titulada Creación de problemas para la enseñanza de las medidas de tendencia central en estudiantes de primer grado de secundaria, del autor Amador Augusto Paredes Chavez, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de .9..%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software Turnitin el 27/06/2025 .
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha:

San Miguel, 2 de julio de 2025

Apellidos y nombres de la asesora: Osorio Gonzales, Augusta Rosa Maria	
DNI: 07203334	Firma:
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0012-7920	

Resumen

La creación de problemas que realiza un profesor de matemáticas del nivel secundario se sustenta en el enfoque Centrado en la Resolución de Problemas que promueve el Ministerio de Educación del Perú. A su vez, la importancia de las medidas de tendencia central se fundamenta en que se encuentran presentes en desempeños de los cinco grados del nivel secundario. El objetivo central de la presente investigación es: Identificar las posibles mejoras que podría incluir un profesor en su proceso de creación de problemas acerca de medidas de tendencia central para estudiantes de primer grado de secundaria. Para el logro de este objetivo, se parte de los criterios que el profesor considera al elaborar sus problemas; seguidamente se identifican los criterios requeridos por un profesor para el nivel de logro 2 de la competencia "Propuesta de tareas" del modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) basado en el Enfoque Ontosemiótico (EOS), con la finalidad de ver con claridad qué necesita el profesor para lograr este nivel y avanzar seguidamente en el logro del nivel 3. La metodología es cualitativa y la estrategia empleada es estudio de caso. El resultado del análisis permite observar que el profesor cumple con varios criterios del nivel 2 de la competencia "Propuesta de tareas". Dentro de las mejoras a implementar, el profesor podría considerar la posibilidad de incluir en su proceso creativo diversas respuestas plausibles y errores intencionales para que sean corregidos por sus estudiantes.

Palabras clave: Reflexión docente, Creación de problemas, Tareas, Medidas de tendencia central.

Abstract

The creation of problems carried out by a secondary-level mathematics teacher is based on the Problem-Solving Focused approach promoted by the Ministry of Education of Peru. In turn, the importance of the central tendency measures is based on the fact that they are present in the performances of the five grades of the secondary level. The central objective of the present research is: To identify possible improvements that a teacher could include in his process of creating problems about measures of central tendency for first grade high school students. To achieve this objective, we start from the criteria that the teacher considers when creating his problems; then we identify the criteria required by a teacher for achievement level 2 of the "Problem posing" competence of the Didactic-Mathematical Knowledge and Competences (DMKC) model based on the Ontosemiotic Approach (OSA), in order to clearly identify what teacher need to achieve this level and then move on to achieving level 3. The methodology is qualitative, and the strategy used is a case study. The result of the analysis shows that the teacher meets several criteria of level 2 of the "Problem posing" competence. Among the improvements to be implemented, the teacher could consider the possibility of including in his creative process various plausible responses and intentional errors to be corrected by his students.

Keywords: Teacher reflection, Problem creation, Tasks, Measures of central tendency.

Este trabajo está dedicado a mi esposa
Bertha y a mis
hijos Samuel y Wendy
por ser ellos el impulso para seguir superándome.

Agradecimientos

Un agradecimiento especial a mi asesora, Mag. Augusta Rosa María Osorio Gonzales por sus valiosas sugerencias, paciencia y apoyo durante todo el desarrollo de este trabajo de investigación.

Asimismo, expreso mi gratitud a mis jurados, el Dr. Luis Roberto Pino-Fan, por su acertada dirección en la elaboración de esta tesis para que se ejecute por la senda más pertinente, y a la Mag. Carolina Rita Reaño Paredes por sus apropiadas recomendaciones en momentos clave de este proceso.

Por su dedicación y exigencia, agradezco las enseñanzas y orientaciones de mis profesores, Mag. Teódulo Verástegui, Mag. Víctor Agapito, Dr. Uldarico Malaspina, Dr. Roberto Velásquez, Dr. Alejandro Ortiz, Dra. Loretta Gasco y Dra. Cecilia Gaita en los cursos que llevé con ellos (1998-2000) en la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú en una etapa importante de mi vida.

Por último, no puedo dejar de agradecer a Dios porque él es el que da la vida y la fuerza para que metas desafiantes se puedan lograr.

Índice

Lista de tablas

Lista de figuras

Introducción

Es importante que el profesor de matemáticas sea competente en la propuesta de las tareas que presenta a sus estudiantes durante las sesiones de clases (Chico et al., 2023), ya que su propósito radica en desarrollar el pensamiento matemático de sus estudiantes para que resuelvan problemas.

La creación de problemas es una meta profesional para el profesor de matemáticas porque, según Malaspina (2017), el profesor conoce las características de sus estudiantes y el contexto de las aulas a su cargo. En tal sentido, el objetivo de este estudio consiste en identificar las mejoras que un profesor de matemáticas podría considerar para optimizar su proceso de creación de problemas sobre medidas de tendencia central dirigidos a estudiantes de primer grado de secundaria. Para el logro de este objetivo es necesario conocer, por un lado, los criterios que el profesor emplea en su proceso creativo y, por otra parte, los criterios que considera la competencia "Propuesta de tareas" del modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor o modelo CCDM basado en el Enfoque Ontosemiótico (EOS), con la finalidad de establecer diferencias entre los criterios de ambas partes y finalmente puntualizar las mejoras a realizar.

En este trabajo se realizará un análisis cualitativo sobre el cumplimiento, por este profesor de matemáticas, de los criterios correspondientes al nivel de logro 2 de la competencia "Propuesta de tareas". A partir de esto, se consigue identificar las mejoras que tendría que realizar en su proceso creativo. Debe entenderse que la propuesta de tareas o de problemas está referida tanto a problemas que han sido creados por el profesor como a problemas que selecciona de los ya existentes.

Existen precedentes sobre resultados de pruebas a docentes. En Pino-Fan et al. (2020) se detalla que, mediante la aplicación de un cuestionario a 11 profesores de enseñanza media, se pudo determinar que estos docentes eligen los problemas para sus sesiones de tres maneras diferentes: creando sus propios problemas, adaptando problemas creados y seleccionando problemas creados. Por otra parte, en Malaspina (2017) se menciona un taller para profesores de secundaria en el que, distribuidos en 8 parejas, estos docentes debían crear dos problemas para estudiantes de secundaria, de manera que el primero sería creado a partir de una situación motivadora propuesta y el segundo podían elegir crearlo para que ayude a entender mejor el primero o para elevar su demanda cognitiva. Se observó que la mayoría de los profesores prefirió crear un problema más retador.

Un problema de matemáticas presenta cuatro elementos básicos: Información, requerimiento, contexto y entorno matemático (Malaspina, 2017). En la creación de un problema, la información, el contexto y el requerimiento deben articularse en un determinado entorno matemático, labor que demanda un profundo conocimiento del tema que aborda el problema (Carrillo et al., 2021). Adicionalmente, se subraya un aspecto primordial: el problema creado debe necesariamente ser resoluble.

En esta investigación, la creación de problemas es sobre un objeto estadístico, por lo que debe resaltarse la trascendencia de la estadística en nuestros días. Por ejemplo, en educación, los profesores requieren de esta ciencia cuando evalúan las competencias de sus estudiantes; a su vez, en economía, se le utiliza en el análisis de diversos aspectos como la inflación; también es empleada en medicina, cuando se interpretan los resultados de las pruebas médicas; por otra parte, es fundamental en sociología, para la elaboración de encuestas y la consiguiente obtención de nueva información; asimismo, es relevante en la industria farmacéutica, para la elaboración de nuevos fármacos (Kelmansky, 2009). La estadística se aplica además en la administración, comunicación, agricultura, física, ciencias políticas, psicología, ingeniería y en otras disciplinas (Posada, 2016).

El capítulo I detalla la problemática de este estudio, señalando inicialmente los antecedentes y su justificación, para ubicar luego la competencia “Propuesta de tareas” en el modelo CCDM y posteriormente presentar la pregunta de investigación, los objetivos y la metodología a seguir.

El capítulo II presenta al objeto estadístico: las medidas de tendencia central.

El capítulo III incluye la reflexión del profesor sobre la creación de problemas acerca de medidas de tendencia central y el análisis realizado a esta reflexión.

Por último, se presentan las conclusiones de este trabajo, las referencias y, en los anexos, problemas adicionales elaborados por el profesor sobre el objeto estadístico.

Lo particular de este estudio radica en el hecho de que el profesor del caso es también el investigador, pero también en que los antecedentes los leyó en un momento avanzado de la investigación y no al inicio, ya que previamente debía reflexionar acerca de su proceso de creación de problemas sin ayuda de documentos de consulta y seguidamente tenía que conocer el marco teórico a emplear en el análisis de dicha reflexión.

Capítulo I: La problemática

En este primer capítulo se exponen los antecedentes de la presente investigación que le darán el sustento científico, así como su justificación; luego se presenta el marco teórico y, finalmente, se muestran la pregunta de investigación, los objetivos y el diseño metodológico.

1.1 Antecedentes

Se han tomado en cuenta algunas investigaciones realizadas sobre la creación de problemas de matemáticas que son importantes para el propósito que se desea alcanzar en este trabajo. Estas investigaciones previas o antecedentes considerados aparecen organizados en cuatro rubros: la creación de problemas, los criterios para crear problemas, la creación de problemas como competencia y la reflexión del profesor. Seguidamente se les refiere.

1.1.1 La creación de problemas

Las investigaciones sobre la creación de problemas han ido en aumento durante los últimos 20 años; en esta parte se muestran ideas relevantes referidas a esta cuestión que han sido presentadas en algunos de estos estudios.

En Malaspina (2017) tenemos un primer antecedente a mencionar sobre la creación de problemas.

Este autor parte del hecho de que el enunciado de un problema de matemáticas debe presentar cuatro elementos básicos: información (datos numéricos o relaciones que el problema proporciona), requerimiento (lo que el problema solicita realizar), contexto (intramatemático si el problema está referido únicamente a situaciones matemáticas o extramatemático si el problema se enmarca en situaciones reales) y entorno matemático (marco matemático que incluye las nociones empleadas en la solución del problema, por ejemplo: funciones cuadráticas, ecuaciones diferenciales, álgebra lineal, estadística descriptiva, etc.).

Seguidamente, se menciona en Malaspina (2017) que crear un problema es un proceso por el que se obtiene un problema que antes no existía. Este proceso, según el autor, puede darse de dos maneras: por variación de un problema existente o por elaboración. Se crea un problema por variación, modificando uno o más de los cuatro elementos del enunciado de un problema existente; de otro lado, se crea un problema por elaboración, construyendo un problema nuevo.

Además, en Malaspina (2017) se subraya la importancia de la interacción entre la creación y la resolución de problemas de matemáticas, tanto para el avance de las matemáticas como para el avance de la didáctica de las matemáticas.

En Martín (2022), tenemos un segundo antecedente a referir sobre la creación de problemas. El autor considera necesario presentar en su investigación algunas definiciones realizadas durante los últimos 50 años acerca de lo que es un problema de matemáticas; una de estas definiciones señala que un problema es una tarea en la que hay que lidiar con preguntas que no son de fácil respuesta.

Un siguiente aspecto tratado en Martín (2022) consiste en lograr una comprensión sobre el significado de formular problemas. Para el autor, formular problemas de matemáticas es crear problemas nuevos o reformular problemas existentes; además, menciona que la formulación de un problema puede darse antes, durante o después de solucionar un problema.

Según Martín (2022), los problemas de matemáticas son formulados inicialmente por los matemáticos, mientras que en entornos educativos los problemas son formulados por profesores de matemáticas, por estudiantes de educación en la especialidad de matemáticas y por los estudiantes.

Se resaltan del primer antecedente tanto los elementos de un problema de matemáticas como las formas en las que puede llevarse a cabo la creación de un problema de matemáticas, ya que estos dos puntos volverán a ser mencionados más adelante. El segundo antecedente presenta un planteamiento similar al primero con respecto a la creación de problemas, pero, por otra parte, se subraya el hecho de que los problemas son creados por los profesores de matemáticas.

1.1.2 Los criterios para crear problemas

Interesa ahora considerar la forma en la que los profesores eligen los problemas para sus sesiones al momento de realizar la planificación.

En Pino-Fan et al. (2020) encontramos un antecedente a mencionar sobre los criterios que emplean los profesores para escoger los problemas que presentarán a sus estudiantes en las sesiones de aprendizaje. Los autores, a través de un trabajo experimental, pudieron determinar los criterios que utilizan 11 profesores de enseñanza media con experiencia mínima de 3 años en el aula, todos ellos estudiantes del Magíster y del Doctorado en Educación Matemática de la Universidad de Los Lagos, para diseñar sus tareas según la procedencia de los problemas que van a utilizar en sus sesiones. La muestra era no probabilística, ya que se trataba de profesores voluntarios. A todos los profesores de la muestra se les aplicó un cuestionario; luego se escogió a siete de ellos para una entrevista, partiendo del hecho de que tres crean problemas por variación, otros tres crean problemas por elaboración y uno selecciona problemas de diversas fuentes. Los resultados de esta investigación pueden observarse en la Tabla 1.

Tabla 1

Criterios utilizados por los profesores para elegir problemas para sus clases

Planteamiento de problemas		Selección de problemas
Por elaboración (creación)	**Por variación (adaptación)**	**Ya creados en otras fuentes (repetición)**
- Atractivo del problema. - Contexto de los estudiantes. - Que promuevan el razonamiento matemático. - Que posean una estructura de matematización (diversas estrategias, representaciones, etc.).	- Atractivo del problema. - Contexto de los estudiantes. - Que promueva el razonamiento matemático. - Los contenidos que aborda. - Distintos niveles de complejidad.	- Contexto de los estudiantes. - Aplicabilidad.

Nota. Tomado de Pino-Fan et al., (2020), p. 130.

En particular, nos interesa la información mostrada en la primera columna de la Tabla 1. Se puede observar que, en el proceso de elaborar los problemas para sus sesiones de aprendizaje, cuatro fueron los criterios considerados por los profesores que ejecutan esta labor.

Sobre el primer criterio empleado por los profesores al crear problemas, se refiere en Pino-Fan et al. (2020) que el problema debe ser atractivo para el estudiante, es decir, debe generar sentido y utilidad de las matemáticas que se están empleando al resolverlo.

Estos autores mencionan el contexto de los estudiantes como segundo criterio considerado por los profesores que elaboran problemas; además, señalan que tanto las situaciones matemáticas como las situaciones reales de los estudiantes son importantes para estos profesores en los problemas que crean.

Acerca del tercer criterio indicado en Pino-Fan et al. (2020), refieren los profesores entrevistados que los problemas que crean deben promover el razonamiento matemático; es decir, deben ser adecuados y coherentes con la demanda cognitiva requerida por parte del estudiante.

Que el problema creado posea una estructura de matematización, señalan Pino-Fan et al. (2020) como cuarto y último criterio empleado por los profesores que elaboran problemas, y precisan que el problema debe ser apropiado y coherente con el proceso de solución que se espera que desarrollen los estudiantes. El problema debe posibilitar el uso de diversas estrategias y representaciones al resolverlo.

Se puede concluir de lo anterior que, utilizando el primero de los cuatro criterios mencionados por los profesores, que crean problemas, toman en cuenta el aspecto emocional de los estudiantes; consideran sus intereses. Haciendo uso del segundo criterio, contemplan el entorno del estudiante. Empleando el tercer criterio, impulsan al estudiante a vincular conceptos matemáticos en la búsqueda de la solución del problema. Por último, usando el cuarto criterio, tienen en cuenta el hecho de que el problema pueda traducirse al lenguaje matemático. Con posterioridad, se verá hasta qué punto estos criterios son empleados por un profesor que será estudiado.

1.1.3 La creación de problemas como competencia

La presente investigación está centrada en la creación de problemas por un profesor de matemáticas, por lo que se hace necesario considerar esta actividad dentro de las competencias del profesor de matemáticas, debido a que más adelante se hará un análisis acerca de en qué medida este profesor ha llegado a desarrollar la competencia “Propuesta de tareas” incluida en el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor o modelo CCDM; a continuación, se presentan dos antecedentes sobre la creación de problemas como una competencia de los profesores de matemáticas.

Carrillo et al. (2021) es el primero de los antecedentes que se ha tomado en cuenta sobre este aspecto.

Para estos autores, la formulación de problemas escolares es una competencia profesional de los profesores de matemáticas que tiene como propósito la proposición de problemas a sus estudiantes. Además, señalan que las competencias profesionales son capacidades para adquirir conocimientos y habilidades innatas o adquiridas para solucionar problemas en un sentido amplio, pero también voluntad y capacidad para emplear en forma óptima las soluciones encontradas en situaciones cambiantes. Para los autores, la competencia profesional en formulación de problemas escolares pormenoriza la habilidad del profesor de matemáticas para diseñar o escoger los problemas que presentará en sus sesiones de aprendizaje; además, mencionan tres competencias ligadas a ella: creación de problemas, transformación y/o adaptación de problemas y selección de problemas.

La primera de estas tres competencias demanda un mayor grado de creatividad y dificultad que las otras dos, ya que, considerando los cuatro elementos básicos que presenta un problema, al generar un problema deben unirse de manera razonable el contexto con el entorno matemático que se desea abordar; luego se ha de enlazar la información que el problema va a proporcionar y, finalmente, se habrá de construir como requerimiento una pregunta o petición que pueda ser contestada o tratada a partir de los tres elementos anteriores (Carrillo et al., 2021).

En la segunda de estas competencias, el profesor cambia uno o más de los elementos esenciales de un problema existente, manteniendo inalterables a los otros (Carrillo et al., 2021).

En la tercera competencia, el profesor elige problemas existentes que se encuentran en diversas fuentes (Carrillo et al., 2021).

Chico et al. (2023) es el segundo antecedente considerado sobre la creación de problemas como competencia de los profesores de matemáticas.

Según estos autores, durante las últimas décadas se viene considerando que mediante la formulación de problemas se construye conocimiento matemático. Además, señalan que el docente ha de ser eficiente formulando problemas de matemáticas porque es el encargado de diseñar esta clase de tareas a sus estudiantes. Asimismo, mencionan que para que el profesor logre formular problemas matemáticos es necesario que tenga habilidades y recursos cognitivos.

Los autores precisan también que la formulación de problemas obedece a una meta final que el profesor persigue con estos problemas, a la cual denominan intención didáctica. Puntualizan que el profesor que formula problemas lo hace según una indicación denominada consigna; por ejemplo, promover la comprensión de los contenidos matemáticos es una consigna y evaluar la comprensión es una intención didáctica.

En los dos antecedentes presentados en esta parte se resalta la idea de que la formulación de problemas es una competencia de los profesores de matemáticas; adicionalmente, se subraya del primer antecedente la idea de que la creación de problemas es una labor compleja.

1.1.4 La reflexión del profesor

El último antecedente a considerar está referido a la reflexión del docente en cuanto al proceso de creación de problemas.

Godino et al. (2018) subrayan la importancia de que el profesor de matemáticas reflexione profesionalmente acerca de su práctica docente; es más, consideran esta reflexión como una competencia fundamental para su crecimiento profesional y el logro de una enseñanza de calidad.

Según Godino et al. (2018), la reflexión le permitirá al profesor identificar las causas que limitan los procesos de estudio para seguidamente tomar decisiones.

Para Godino et al. (2018), en su reflexión, el profesor ha de realizar tres actividades: describir, explicar y valorar su práctica docente.

En el marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS) se ha desarrollado el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) del profesor, en el cual se incluye la competencia de análisis de la idoneidad didáctica, la misma que puede entenderse como la competencia para la reflexión global sobre la práctica de enseñanza y aprendizaje, su evaluación y optimización gradual (Godino et al., 2018).

Este antecedente resalta la necesidad de que el profesor esté analizando permanentemente todo lo que se relaciona con su práctica docente. La importancia de la reflexión para la presente investigación radica en que se inicia y finaliza con una reflexión, ya que al principio un profesor de matemáticas reflexiona sobre cómo ha creado problemas acerca de medidas de tendencia central para estudiantes de primer grado de secundaria y en la parte final ha de reflexionar sobre cómo va a mejorar esta labor.

1.2 Justificación

La elección del tema de investigación se fundamenta, por una parte, en la importancia que tiene la creación de problemas de matemáticas por el profesor de secundaria.

Una de las características del enfoque Centrado en la Resolución de Problemas, subrayada por el Ministerio de Educación del Perú (Minedu, 2016b), en el Programa Curricular de Educación Secundaria, es precisamente la creación de problemas de matemáticas realizada por el profesor.

Por otro lado, Malaspina (2017) señala que la trascendencia de la creación de problemas ha sido mencionada por hombres de ciencia e investigadores en los campos de las matemáticas y la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Además, para el autor, la creación de problemas es un aspecto primordial del quehacer de los docentes porque ellos conocen las características de sus estudiantes, el contexto del aula y, adicionalmente, porque es un desafío profesional.

En el mismo sentido, refiere Silver (1994) que el planteamiento de problemas de matemáticas se ha valorado por años como un rasgo de la creatividad o del talento extraordinario. Según el autor, actividades de planteamiento de problemas matemáticos han sido incluidas en exámenes que buscan reconocer a personas creativas. Actualmente se considera necesario que los profesores de matemáticas desarrollen la competencia de creación de problemas.

En la misma línea, Crespo (2003) resalta la importancia de las tareas o problemas que los docentes plantean en sus aulas de clases, ya que mediante estos problemas dan o no la posibilidad a sus estudiantes para que logren un aprendizaje significativo de las matemáticas.

A su vez, para Carrillo et al. (2021), la creación de problemas de matemáticas por los profesores es una destreza que promueve el aprendizaje de docentes y estudiantes. Señalan estos autores que, mediante la formulación de problemas escolares, el docente tiene un rol protagónico al dirigir y moldear el tema de matemática a desarrollar en el salón de clases, dejando en segundo plano las obras elaboradas por otras personas. Luego es relevante la creación de problemas por el profesor para un grupo específico de estudiantes que conoce.

En un tiempo breve, el docente de matemáticas llega a conocer a sus estudiantes y el contexto en el que labora; considerando estos y otros aspectos más, el profesor, dentro de su labor profesional, diseña los problemas que se van a trabajar durante la sesión.

Por otra parte, es necesario mencionar ahora la importancia de nuestro objeto estadístico: las medidas de tendencia central.

Son importantes las medidas de tendencia central para los estudiantes del nivel secundario, ya que este objeto estadístico está presente en los desempeños de los cinco grados de secundaria de la competencia "Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre" (Minedu, 2016b).

Según Minedu (2016a), la representación de datos estadísticos haciendo uso de las medidas de tendencia central es una capacidad que los estudiantes de secundaria deben desarrollar.

Asimismo, en Minedu (2016b) se menciona que los estudiantes de primer grado de secundaria deben expresar el comportamiento de los datos por medio de este objeto estadístico, del cual han de explicar además su comprensión para datos sin agrupar usando representaciones y lenguaje matemático e incluso interpretar textos, tablas y gráficos que lo incluyan. Igualmente, han de encontrar la mediana y la moda de datos de variable discreta.

La Tabla 2 subraya las medidas de tendencia central en los desempeños de la competencia "Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre" de primer grado de secundaria.

Tabla 2

Desempeños de primer grado de secundaria sobre medidas de tendencia central

Número	Descripción
1	"… expresa el comportamiento de los datos de la población a través de… medidas de tendencia central".
2	"Expresa con diversas representaciones y lenguaje matemático su comprensión sobre la media, la mediana y la moda para datos no agrupados, según el contexto de la población en estudio…".
3	"Lee tablas y gráficos de barras o circulares, así como diversos textos que contengan valores de medida de tendencia central… para comparar e interpretar la información que contienen. A partir de ello, produce nueva información".
4	"Selecciona y emplea procedimientos para determinar la mediana y la moda de datos discretos… Revisa sus procedimientos y resultados".

Nota. Adaptado de Minedu, 2016b, p. 172-173.

En la Tabla 2 puede observarse que cuatro desempeños están referidos a las medidas de tendencia central. En primer grado de secundaria, la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” presenta siete desempeños (Minedu, 2016b).

El Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI, 2001) señala que nuestro objeto estadístico nos proporciona medidas representativas del total de datos y nos muestra el centro de la distribución. También menciona que estas son medidas numéricas que sintetizan los datos y, en consecuencia, indicadores que hacen factible examinar el nivel de los resultados y su universalización por medio de las pruebas de hipótesis y los intervalos de confianza. Además, puntualiza que no es posible realizar procesos de inferencia sin las medidas de tendencia central.

Por su parte, Excel Para Todos (2024) señala que en el desarrollo del análisis estadístico se requiere tener una visión general de un grupo de datos que las medidas de tendencia central proporcionan, antes de hacer un análisis de mayor rigor cuando se busca elegir los métodos más pertinentes para cada situación.

Para la Universidad Internacional de La Rioja (UNIR, 2024), nuestro objeto estadístico sobre todo resume la información, le da confiabilidad y es esencial en el análisis estadístico y en la toma de decisiones. Además, agrega que las medidas de tendencia central permiten examinar el desempeño de una variable en diferentes momentos y confrontar los resultados con otros grupos de datos. Adicionalmente, precisa que la media aritmética permite hallar medidas de dispersión, las mismas que le dan mayor credibilidad a nuestro objeto estadístico.

Más aún, para UNIR (2024), la utilidad de este objeto estadístico se da también en situaciones de la vida real, ya que, por ejemplo, las instituciones de enseñanza necesitan encontrar el promedio de las calificaciones de sus estudiantes en cada área de estudios. Además, menciona que, entre las remuneraciones de sus empleados, las empresas requieren determinar la remuneración máxima de la primera mitad de ellos luego de haberlas ordenado en forma creciente. También señala que en las tiendas se precisa saber cuál es el producto que más se está vendiendo por día.

Dentro de nuestro objeto estadístico, la media aritmética o promedio es un parámetro representativo de un conjunto de datos cuantitativos, ya que en su cálculo intervienen todos ellos. La mediana es un parámetro fundamental porque divide en dos partes iguales al total de datos cuantitativos o cualitativos ordinales, luego que estos han sido ordenados. La moda es otro parámetro importante de nuestro objeto de estudio, usado tanto para variables cuantitativas como cualitativas; nos indica cuál es el valor de la variable o la modalidad que presenta mayor frecuencia.

Por último, se debe mencionar la importancia de la reflexión en la práctica docente.

Godino et al. (2018) señalan que una de las tres dimensiones del modelo CCDM es la dimensión meta didáctico-matemática, la cual está orientada a los conocimientos que los profesores de matemáticas deben poseer para organizar e interpretar en forma crítica la reflexión acerca de su práctica docente y entonces evaluar su práctica o la de sus pares.

Todo lo señalado anteriormente permite ver la relevancia del presente trabajo de investigación. Seguidamente, se ubica la competencia “Propuesta de tareas” en el marco del modelo CCDM y luego se presentan los niveles y criterios de esta competencia.

1.3 El marco teórico

Es necesario empezar esta parte haciendo una breve referencia al Enfoque Ontosemiótico (EOS), debido a que el marco teórico que requerimos está basado en este enfoque. Luego se presentará el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor o modelo CCDM para finalmente ubicar en este modelo y detallar la competencia que constituye el marco teórico de la presente investigación.

1.3.1 El Enfoque Ontosemiótico (EOS)

En Godino (2009) se señala que el EOS es un marco teórico para la Didáctica de las Matemáticas; a su vez, en Godino et al. (2017) se menciona que, además, el EOS pretende incorporar un extenso conjunto de conocimientos teóricos empleados en la indagación en Educación Matemática. Asimismo, estos autores subrayan que la finalidad del EOS reside en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Para Godino et al. (2017), los conocimientos didáctico-matemáticos que se ponen en juego durante el proceso de enseñanza-aprendizaje son analizados por cinco herramientas teóricas de análisis propuestas por el EOS:

1. Sistema de prácticas. Se centra en los aspectos relacionados con la resolución de problemas.
2. Configuración de objetos y procesos matemáticos, emergentes e intervinientes en las prácticas matemáticas. Alude al reconocimiento de objetos y procesos involucrados en las prácticas matemáticas.
3. Configuración didáctica. Tiene que ver con los roles de docentes y estudiantes. Es el instrumento fundamental al llevar a cabo el análisis de la instrucción matemática.
4. La dimensión normativa. Está relacionada con las reglas intervinientes en el desarrollo del estudio matemático.
5. La noción de idoneidad didáctica. Referida a la optimización gradual del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

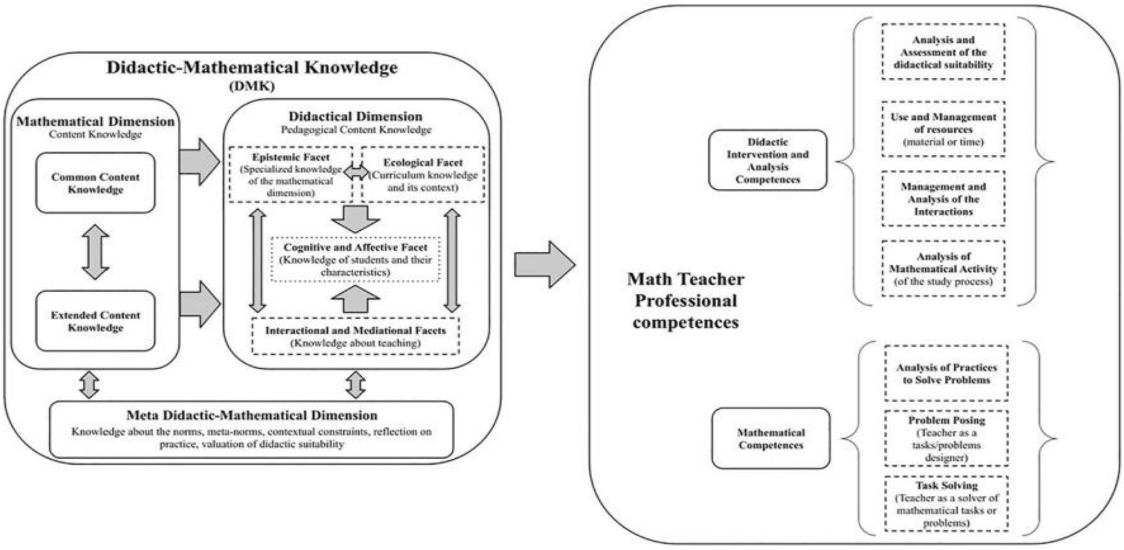
1.3.2 El modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM)

El modelo CCDM basado en el EOS considera tanto los conocimientos requeridos por el profesor de matemáticas como las competencias que debe desarrollar (Godino, 2017).

Observar la Figura 1.

Figura 1

Conocimientos y competencias del profesor de matemáticas



Nota. Tomado de Pino-Fan et al., 2022, p. 1413.

En la Figura 1 se observa el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM), el cual es generado por el modelo de Conocimientos Didáctico-Matemáticos (CDM) que aparece en el lado izquierdo con la denominación de Didactic-Mathematical Knowledge (DMK) y por las competencias profesionales del profesor de matemáticas (Math Teacher Professional Competences) que figuran en el lado derecho. La gestación de este modelo es el resultado de años de investigación. A continuación, se explica la Figura 1, centrando el interés en la competencia “Propuesta de tareas” (Problem Posing).

1.3.2.1 El modelo de Conocimientos Didáctico-Matemáticos (CDM)

En Godino (2009) se propone un sistema de categorías relacionadas con las herramientas de análisis del EOS denominado conocimientos didáctico-matemáticos o modelo de Conocimientos Didáctico-Matemáticos (CDM) del profesor, que tiene como finalidad analizar los conocimientos del profesor de matemáticas.

El conocimiento didáctico-matemático es el requerido por un profesor de matemáticas para su desempeño profesional (Pino-Fan et al., 2022).

En el modelo CDM, el sistema formado por las herramientas teóricas del EOS proporciona un sistema de categorías y subcategorías de conocimientos de las que el profesor debe tener nociones y luego entendimiento con la finalidad de que las aplique apropiadamente y reflexione acerca de su eficacia (Pino-Fan y Godino, 2015).

Dimensiones del modelo CDM

Pino-Fan et al. (2022) mencionan que, según el modelo CDM, el conocimiento didáctico-matemático presenta tres dimensiones básicas: matemática (Mathematical Dimension), referida a la matemática que se enseña en las instituciones educativas enlazada a conocimientos previos y posteriores; didáctica (Didactical Dimension), concerniente al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; y meta didáctico-matemática (Meta Didactic-Mathematical Dimension), requerida por los profesores para evaluar su práctica docente.

1. **Dimensión matemática**

   En la dimensión matemática del modelo CDM se tienen dos subcategorías: la primera de ellas es el conocimiento común del contenido (Common Content Knowledge), que es el conocimiento compartido por el profesor y los estudiantes considerado como suficiente para resolver los problemas o tareas propuestas en el currículo de matemáticas de un nivel educativo determinado sobre un objeto matemático. La segunda subcategoría viene a ser el conocimiento ampliado del contenido (Extended Content Knowledge), que es el que debe tener el profesor sobre nociones matemáticas posteriores al objeto matemático en estudio consideradas en el currículo del mismo nivel educativo o en un nivel superior (Pino-Fan y Godino, 2015).

2. **Dimensión didáctica**

   La dimensión didáctica del modelo CDM comprende conocimientos del profesor distribuidos en seis subcategorías o facetas: epistémica (Epistemic Facet), conocimientos sobre el perfil para la enseñanza de las matemáticas; cognitiva (Cognitive Facet), conocimientos sobre planificación e implementación adecuada de la sesión de aprendizaje; afectiva (Affective Facet), conocimientos sobre comprensión y trato de los estados de ánimo de los estudiantes; interaccional (Interactional Facet), conocimientos sobre construcción de relaciones que apoyen el aprendizaje; mediacional (Mediational Facet), conocimientos sobre uso de materiales y recursos tecnológicos, y ecológica (Ecological Facet), conocimientos sobre el currículo y el contexto educativo (Pino-Fan y Godino, 2015).

3. **Dimensión meta didáctico-matemática**

   La dimensión meta didáctico-matemática del modelo CDM ha sido tratada en las secciones 1.1.4 y 1.2 de este trabajo.

1.3.2.2 Competencias profesionales del profesor de matemáticas

Se presenta seguidamente la noción de competencia en el ámbito del modelo CDM.

Según Pino-Fan et al. (2022), competencia es acción competente, es decir, conjunto de conocimientos y habilidades que favorecen el desempeño eficiente en entornos profesionales habituales.

En Pino-Fan et al. (2022), se refiere que el modelo CCDM sugiere dos conjuntos de competencias para la labor profesional del docente de matemáticas: las competencias de análisis e intervención didáctica (Didactic Intervention and Analysis Competences) y las competencias matemáticas (Mathematical Competences).

1. **Competencias de análisis e intervención didáctica**

   Uno de los propósitos del modelo CDM consistía en vincular los conocimientos didáctico-matemáticos con la noción de competencia (Godino et al., 2018).

   En Godino et al. (2017), se enlazan los conocimientos didáctico-matemáticos del profesor con las competencias de análisis e intervención didáctica para dar origen al modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor o modelo CCDM.

   Pino-Fan et al. (2022) establecen cuatro competencias de análisis e intervención didáctica:

   - "Análisis y evaluación de la idoneidad didáctica" (Analysis and Assessment of the Didactical Suitability).
   - "Uso y gestión de recursos" (Use and Management of Resources).
   - "Gestión y análisis de las interacciones" (Management and Analysis of the Interactions).
   - "Análisis de la actividad matemática" (Analysis of Mathematical Activity).

2. **Competencias matemáticas**

   En Pino-Fan et al. (2022) se proponen tres competencias matemáticas:

   - "Análisis de prácticas para resolver problemas" (Analysis of Practices to Solve Problems).
   - "Propuesta de tareas" (Problem Posing).
   - "Resolución de tareas" (Task Solving).

   En esta investigación nos interesa en forma particular la competencia "Propuesta de tareas"; seguidamente se presentan sus niveles de logro.

1.3.3 Niveles de logro de la competencia "Propuesta de tareas"

Para Pino-Fan et al. (2022), esta competencia presenta cuatro niveles de logro con sus correspondientes criterios, como puede observarse en la Tabla 3.

Tabla 3

Niveles de logro de la competencia "Propuesta de tareas"

Nivel	Criterios
0	El docente reproduce tanto el enunciado de las tareas como sus soluciones, y hace uso de Internet, libros de texto o programas de la asignatura del grado en el que imparte clases. Esto último lo hace para establecer las tareas matemáticas que se propondrán en el proceso de estudio.
1	El docente propone tareas adecuadas al nivel educativo que imparte. Para ello, considera características relacionadas con el currículo (procedimientos, argumentos o justificaciones, representaciones) y los conocimientos previos de los estudiantes y rediseña las tareas del objeto matemático, pero no prevé conceptos erróneos, errores, dificultades o diferentes posibilidades de respuesta. Se trata principalmente de adaptaciones de tareas tomadas de otras fuentes con respecto a las tareas propuestas.
2	El docente propone tareas correspondientes al nivel educativo, considerando aspectos relacionados con el currículo (procedimientos, argumentos o justificaciones, representaciones) y los conocimientos previos del estudiante. Además, considera diversas respuestas plausibles, conceptos erróneos, conflictos o errores en torno a la práctica matemática para su propuesta y los contextos más adecuados según las características, intereses y necesidades de los estudiantes. Las tareas pueden ser adaptaciones o modificaciones de tareas tomadas de otras fuentes o de su propio diseño. El docente no considera que diferentes tipos de situaciones de tareas puedan requerir diferentes significados sobre la noción en estudio.
3	Además, el docente considera nuevas tareas asociadas al tema matemático y propone retos para los estudiantes. Las tareas vinculan el objeto matemático estudiado con otros objetos matemáticos (en el grado escolar, grados anteriores o posteriores). Los significados de las nociones matemáticas que propone estudiar amplían su visión de tipos de situaciones/problemas en términos de los contextos en los que tales nociones pueden ser utilizadas (se consideran las nociones intra y extramatemáticas de las nociones en estudio). En este nivel, el docente anticipa los conflictos o errores de los estudiantes y, en ocasiones, los induce a crear oportunidades de aprendizaje.

Nota. Tomado de Pino-Fan et al., 2022, p. 1416.

A continuación, se hará una breve explicación de los niveles de logro de la competencia “Propuesta de tareas” según los criterios observados en la Tabla 3. Si se desea una enseñanza de excelencia, la preparación de las tareas es un aspecto esencial (Pino-Fan et al., 2022).

1.3.3.1 Nivel 0

El docente reproduce tanto el enunciado de las tareas como sus soluciones.

Un profesor en este nivel únicamente copia los problemas y sus soluciones que encuentra en alguna fuente, como las mencionadas para el nivel 0 en la Tabla 3. No realiza modificación alguna de la tarea ni de su solución. Tampoco considera algún elemento adicional, como, por ejemplo, los conocimientos previos de sus estudiantes o aspectos relacionados con el currículo. En otras palabras, no realiza ningún tipo de análisis de las tareas que va a presentar.
Un profesor de este nivel no está desarrollando la competencia “Propuesta de tareas”; se encuentra en una etapa inicial en la que no es conveniente que permanezca. Esto es posible si cumple con los criterios para el diseño de tareas que se detallan a partir del nivel siguiente.

1.3.3.2 Nivel 1

El docente propone tareas adecuadas al nivel educativo que imparte.

Es fundamental que un profesor elija esmeradamente los problemas que va a emplear en su sesión de aprendizaje porque están dirigidos a un grado específico de estudios. El cumplimiento de este criterio demanda tener en cuenta tres condiciones básicas.

1. **Considera características relacionadas con el currículo (procedimientos, argumentos o justificaciones, representaciones).**

   Al elegir los problemas que presentará en sus sesiones, el profesor contempla procedimientos, argumentos o justificaciones, así como representaciones del Currículo Nacional de la Educación Básica o del Programa Curricular de Educación Secundaria. Se debe mencionar que algunos desempeños de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” de primer grado de secundaria de este último documento mencionan estos términos.

2. **Considera los conocimientos previos de los estudiantes.**

   Al escoger los problemas que mostrará en su sesión, es fundamental que un profesor tenga información de los conocimientos con que cuentan sus estudiantes. El instrumento usado en las instituciones educativas para que pueda saber acerca de los conocimientos que tienen sus estudiantes en las cuatro competencias del área de Matemática al inicio del año escolar es la evaluación diagnóstica. Esta prueba se aplica en el transcurso de las dos primeras semanas de clases. Además, al inicio de cada sesión, se hace el recojo de los saberes previos mediante preguntas o problemas propuestos.

3. **Rediseña las tareas del objeto matemático.**

   Un profesor de este nivel sobre todo modifica los problemas que selecciona de diversas fuentes con la finalidad de adaptarlos a un grupo específico de estudiantes con los que trabaja. Si se considera el planteamiento desarrollado en Carrillo et al. (2021), estaría desarrollando la competencia transformación y/o adaptación de problemas; si, en cambio, se toma en cuenta el planteamiento de Malaspina (2017), estaría creando problemas por variación.

Un profesor del nivel 1 está empezando a desarrollar la competencia “Propuesta de tareas” porque analiza los problemas que son más convenientes para sus estudiantes, haciendo uso, por una parte, del currículo al diseñar las tareas que presenta en sus sesiones, efectuando un análisis reflexivo de los desempeños requeridos durante este proceso. Por otra parte, toma en cuenta los conocimientos previos, siendo fundamental, por lo tanto, que cada año aplique la evaluación diagnóstica y luego sistematice los resultados obtenidos para que le sean de utilidad en la construcción de las tareas y de esta manera evite presentar en las sesiones problemas de un nivel de dificultad poco adecuado. Finalmente, adapta en forma pertinente problemas existentes, lo cual implica una labor de análisis de dichos problemas para luego transformarlos según lo que desea lograr con ellos.

1.3.3.3 Nivel 2

1) **El docente propone tareas correspondientes al nivel educativo.**

   El cumplimiento de este criterio requiere guardar cuatro condiciones elementales.

1. **Considera aspectos relacionados con el currículo (procedimientos, argumentos o justificaciones, representaciones).**

   En la planificación de sus sesiones, un profesor ha de tener presente el documento marco de la política educativa de la educación básica en el Perú y el documento específico para el nivel secundario.

2. **Considera los conocimientos previos del estudiante.**

   Para el diseño de las tareas, un profesor efectúa el recojo de saberes previos de sus estudiantes al comienzo del período lectivo y al inicio de cada sesión de aprendizaje.

3. **Tiene en cuenta diversas respuestas posibles, conceptos erróneos, conflictos o errores en torno a la práctica matemática para su propuesta.**

   Pino-Fan et al. (2013) señalan que una solución plausible es una posible solución de un problema; también se le denomina solución esperada. Frecuentemente, un problema puede resolverse de varias maneras; cuando esto sucede, se dice que presenta varias soluciones plausibles o esperadas.
   Un profesor considera diversas respuestas plausibles en un problema que propone cuando sus estudiantes pueden resolverlo de diferentes maneras en forma correcta. Es de esperar que, al escoger los problemas que va a presentar en su sesión, el profesor tome en cuenta la creatividad de sus estudiantes al resolver un problema.
   En cuanto a conceptos erróneos, se subraya el hecho de que los presenta el estudiante que no ha logrado un aprendizaje pertinente de los conceptos explicados durante el desarrollo de las sesiones. Por esta razón, es probable que no logre la respuesta correcta de un problema planteado o la logre de manera incorrecta debido a que no ha conseguido comprender adecuadamente los conceptos necesarios para resolverlo.
   Un profesor considera conceptos erróneos cuando, luego de haber buscado en fuentes confiables las definiciones de los conceptos que va a abordar, las expone empleando un lenguaje sencillo pero preciso. Es de esperar que el profesor logre que sus estudiantes entiendan en forma adecuada los conceptos que presenta durante las sesiones, incidiendo en su correcto

significado en sesiones posteriores y que además corrija los conceptos erróneos de sesiones anteriores cuando los perciba.

Acerca de conflictos, se hace hincapié en que el reconocimiento por parte del estudiante en forma explícita de los objetos y procesos matemáticos implicados en un problema le permite solucionarlo y prever conflictos de aprendizaje, logrando avanzar de esta manera en la construcción de su conocimiento (Godino et al., 2017).

Un profesor tiene en cuenta conflictos cuando elige problemas debidamente construidos, problemas que presentan los cuatro elementos básicos y que son resolubles. Se espera que, en el diseño de las tareas, el profesor revise minuciosamente tanto la estructura como el lenguaje de los problemas que va a presentar en sus sesiones para que sean de comprensión de la totalidad de sus estudiantes.

Sobre errores, Godino et al. (2017) mencionan que al resolver un problema hay una serie de objetos matemáticos intervinientes que hacen posible la realización de una práctica matemática. Además, señalan estos autores que, como parte de su desempeño profesional, un profesor debe reconocer los objetos matemáticos y procesos que intervienen en las prácticas matemáticas. Adicionalmente, los mismos autores enfatizan que el profesor debe identificar los diferentes significados institucionales y personales de los objetos matemáticos. Por todo lo señalado, el profesor puede proponer problemas que presentan errores con la finalidad de que sus estudiantes identifiquen estos errores y los corrijan.

Un profesor tiene en cuenta errores en los problemas que propone cuando conoce los dos tipos de significados de los objetos matemáticos. Es de esperar que el profesor logre un amplio bagaje de estos significados, revisando las fuentes y anotando los significados que sus estudiantes mencionen durante la resolución de los problemas y que entonces les proponga problemas que contengan errores.

4. **Contempla los contextos más adecuados según las características, intereses y necesidades de los estudiantes.**

Un profesor conoce a sus estudiantes; de ahí que en el diseño de las tareas ha de tener en cuenta sus características (edad, sexo, residencia, institución educativa de procedencia, habilidades académicas, etc.), intereses (deportes, música, ciencia, etc.) y necesidades (resolución de problemas de matemáticas) para determinar los contextos que presentarán los problemas que escoja para sus sesiones.

Un profesor considera escenarios apropiados en los problemas que emplea en sus sesiones cuando se conjugan estos tres aspectos. Es de esperar que el profesor procure una diversidad de escenarios que amplíen el marco de situaciones conocidas por los estudiantes.

2) **Las tareas pueden ser adaptaciones o modificaciones de tareas tomadas de otras fuentes o de su propio diseño.**

De acuerdo con este criterio, para sus sesiones un profesor adapta o modifica problemas que selecciona de diversas fuentes (libros de texto, Internet, etc.), aunque podría también crearlos.

Un profesor adapta o modifica problemas cuando, según lo mencionado en Carrillo et al. (2021), cambia uno o más de los cuatro elementos de un problema existente, señalados en Malaspina (2017), pero mantiene inalterables a los otros. De otro lado, un profesor crea problemas cuando construye problemas nuevos, siendo esta labor de mayor complejidad al formular problemas (Carrillo et al., 2021). Es de esperar que tanto la adaptación o modificación como la creación de los problemas sea realizada en forma rigurosa por el profesor.

1.3.3.4 Nivel 3

Adicionalmente al logro del nivel 2, para alcanzar el nivel 3 se requiere el desarrollo de los criterios que a continuación se describen brevemente.

1) **El docente considera nuevas tareas asociadas al tema matemático.**

Este criterio pide proponer problemas sobre objetos matemáticos que guarden relación con el objeto matemático que se está estudiando; por ejemplo, los cuartiles y los deciles tienen relación con el estudio de la mediana.

2) **El docente propone retos a los estudiantes.**

Cuando los estudiantes han sido ejercitados con una diversidad de tareas que no son complicadas de resolver, se hace necesario proponerles algunos problemas de un mayor nivel de dificultad.

3) **Las tareas vinculan el objeto matemático estudiado con otros objetos matemáticos.**

Este criterio demanda que en los problemas planteados el objeto matemático en estudio esté vinculado con otros objetos matemáticos; por ejemplo, la media aritmética podría vincularse con las tablas de frecuencia, la mediana y la desviación estándar, que respectivamente son objetos matemáticos de grados anteriores, actual y posteriores.

4) **El docente considera los contextos intra y extramatemáticos de las nociones en estudio.**

En los problemas planteados se presentan situaciones matemáticas y situaciones reales. Un ejemplo de lo primero puede ser encontrar el valor de x en la fórmula de la media aritmética dados los demás valores y un ejemplo de lo segundo sería hallar el promedio de las edades de cuatro personas.

5) **El docente anticipa los conflictos o errores de los estudiantes.**

En la propuesta de tareas, los objetos matemáticos deben estar estructurados con la finalidad de disminuir la posibilidad de conflictos de aprendizaje; a la vez, el docente considera errores frecuentes de los estudiantes al resolver problemas sobre el objeto matemático a tratar.

6) **En ocasiones el docente induce a los estudiantes a crear oportunidades de aprendizaje.**

Algunos problemas planteados podrían presentar requerimientos encaminados a ampliar la perspectiva con respecto a los objetos matemáticos en estudio.

1.4 Pregunta y objetivos de investigación

Para la realización del presente trabajo se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuáles son las mejoras que podría incluir un profesor en su proceso de creación de problemas acerca de medidas de tendencia central para estudiantes de primer grado de secundaria?

Para dar respuesta a esta pregunta se debe trabajar con la mira de alcanzar el siguiente objetivo general:

- Identificar las posibles mejoras que podría incluir un profesor en su proceso de creación de problemas acerca de medidas de tendencia central para estudiantes de primer grado de secundaria.

Con la finalidad de lograr el objetivo general, se plantean los siguientes objetivos específicos:

- Establecer los criterios considerados por un profesor en la creación de problemas para la enseñanza de las medidas de tendencia central, dirigidos a estudiantes de primer grado de secundaria.
- Identificar los criterios considerados por el modelo CCDM para la competencia “Propuesta de tareas”.
- Identificar las diferencias entre los criterios empleados por un profesor en la creación de problemas para la enseñanza de medidas de tendencia central y los criterios esperados según el modelo CCDM en un planteamiento de tareas para el nivel 2 con la finalidad de mejorar su proceso creativo.

Seguidamente, se presenta el diseño metodológico de la investigación.

1.4.1 Diseño metodológico

La presente investigación se desarrollará con una metodología cualitativa; en ella se empleará la estrategia de estudios de caso.

Según Muñiz (2005), los estudios de caso se distinguen por tratar de forma exhaustiva una unidad; en la investigación cualitativa, los estudios de caso son idiográficos porque detallan de manera minuciosa un suceso sin la finalidad de hacer generalizaciones.

En este trabajo, la unidad es un profesor de secundaria, y el caso está conformado por el proceso desarrollado por este profesor durante la creación de problemas acerca de medidas de tendencia central para los estudiantes de primer grado de secundaria a los que enseña.

El profesor con el que se trabajará se formó como docente de secundaria en la especialidad de Matemática y Física en la Facultad de Educación de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, titulándose en 1993. Posteriormente, estudió la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, egresando el año 2000. Tiempo después, en 2019, logró el Título de Segunda Especialidad Profesional en Gestión Escolar con Liderazgo Pedagógico en la Universidad San Ignacio de Loyola.

Adicionalmente, el docente que se estudiará tiene más de 26 años de nombrado en el Estado, habiéndose desempeñado como profesor de matemáticas en una institución educativa durante más de 19 de estos años y como subdirector en otras tres instituciones educativas los siete años restantes. Las etapas por las que ha atravesado durante su experiencia profesional han sido las siguientes:

En sus primeros 15 años de labor se desempeñó como profesor de aula, trabajando con estudiantes del segundo al quinto grado de secundaria.

Seguidamente, estuvo como subdirector durante seis años en dos instituciones educativas, realizando labores administrativas durante los dos primeros años y labores pedagógicas durante los cuatro años siguientes.

Posteriormente, regresó a su institución educativa de origen y se desempeñó como profesor de aula durante cuatro años, trabajando con estudiantes de primer grado de secundaria. En simultáneo, realizó también funciones de coordinador pedagógico durante los tres últimos de estos años.

Luego estuvo como subdirector durante un año en una institución educativa en la que no había laborado antes.

Finalmente, el profesor ha regresado por segunda vez a su institución educativa de origen y se viene desempeñando como profesor de aula de estudiantes de primer grado de secundaria una vez más.

El paradigma de esta investigación lo constituyen los criterios del nivel 2 de la competencia “Propuesta de tareas” del modelo CCDM; a su vez, el enfoque es de tipo fenomenológico en el que se analiza la competencia de un profesor elaborando problemas sobre medidas de tendencia central para estudiantes de primer grado de secundaria.

La finalidad del presente trabajo se podrá alcanzar mediante el cumplimiento de los objetivos trazados.

Para lograr el primer objetivo específico:

Establecer los criterios considerados por un profesor en la creación de problemas para la enseñanza de las medidas de tendencia central, dirigidos a estudiantes de primer grado de secundaria.

Los pasos a seguir en la investigación son:

1. Enunciar las motivaciones del profesor para la creación de problemas.
   En esta parte se debe propiciar que el profesor, mediante un proceso de reflexión profunda, precise cuáles son los aspectos que le han servido de impulso para empezar a crear problemas sobre medidas de tendencia central para los estudiantes de primer grado de secundaria.
2. Mencionar el procedimiento empleado en la construcción de un problema acerca de medidas de tendencia central.

En esta segunda parte, en primer lugar, se debe propiciar que el profesor, luego de haber reflexionado, detalle su proceso creativo a partir del tema y de los objetivos fijados que debe conseguir con el problema que va a elaborar.

En segundo lugar, se propicia la creación por parte del profesor de los diferentes tipos de problemas que va a presentar a sus estudiantes: por una parte, problemas que servirán de ejemplos en la sesión de clase y, por otra parte, problemas que serán empleados para ejercitar a los estudiantes.

3. Elaborar una escala de dificultad para determinar el orden en el que los problemas serán presentados.

   En esta parte, se propicia que el profesor diseñe una escala de cinco niveles en orden creciente de dificultad, en cuyas descripciones se señalen con precisión las características que debe presentar cada problema elaborado para ser ubicado en uno de los niveles y que luego el profesor clasifique los problemas que ha creado.
4. Seleccionar problemas de diferente nivel de dificultad para indicar en ellos la solución ideal y las soluciones esperadas.

   Después de que el profesor ha clasificado los problemas que ha creado de acuerdo a su nivel de dificultad, se propiciará que escoja un problema de cada uno de los niveles, tanto de media aritmética como de mediana y moda, para que realice en ellos la solución ideal y las soluciones esperadas.
5. Construir una tabla en la que se detallan los criterios empleados en la creación de problemas con su respectiva justificación.

   En esta última etapa de la reflexión, se propicia que el profesor diseñe una tabla de dos columnas en la que en la primera de ellas señale los criterios que ha considerado en su proceso de creación de problemas y en la segunda justifique cada criterio que ha mencionado en la columna anterior.

Para lograr el segundo objetivo específico:

Identificar los criterios considerados por el modelo CCDM para la competencia “Propuesta de tareas”.

Los pasos a seguir son:

1. Leer la bibliografía disponible acerca de los criterios de los niveles de la competencia “Propuesta de tareas” en el modelo CCDM.

   En esta parte, el investigador realiza una revisión minuciosa del material bibliográfico pertinente hasta que logra identificar cuáles son los criterios señalados para cada uno de los niveles de la competencia indicada del modelo CCDM.
2. Sintetizar las ideas principales sobre los criterios de los niveles de la competencia “Propuesta de tareas” en el modelo CCDM.

Una vez que el investigador identifica los criterios de cada uno de los niveles de la competencia “Propuesta de tareas” del modelo CCDM, realiza una breve explicación de los criterios que corresponden a los niveles 0, 1, 2 y 3 sobre los aspectos esenciales que menciona este modelo acerca de cada uno de ellos.

Para lograr el tercer objetivo específico:

Identificar las diferencias entre los criterios empleados por un profesor en la creación de problemas para la enseñanza de medidas de tendencia central y los criterios esperados según el modelo CCDM en un planteamiento de tareas para el nivel 2 con la finalidad de mejorar su proceso creativo.

Los pasos a seguir son:

1. Identificar en la reflexión del profesor analizado si ha considerado los criterios del nivel 2 de la competencia “Propuesta de tareas” y comparar los criterios que utiliza con los requeridos por el modelo CCDM para este nivel.
2. Establecer las diferencias entre los criterios empleados por el profesor y los requeridos por el modelo CCDM para el nivel 2 de la competencia “Propuesta de tareas”.

   En esta parte el investigador resalta los criterios del nivel 2 que no está considerando el profesor; asimismo, subraya alguna particularidad empleada por este docente.
3. De las diferencias establecidas, el investigador hará un análisis detallado.

   En esta sección, el investigador animará al profesor a examinar los criterios del modelo CCDM para el nivel 2 de la competencia “Propuesta de tareas” que no está considerando en su reflexión para que proceda luego a interiorizarlos y analizar cómo aplicarlos en su proceso creativo.
4. El investigador recogerá algunas de las mejoras que realizará el profesor en su proceso de creación de problemas para ejemplificar la mejora de un proceso de reflexión.

Capítulo II: Las medidas de tendencia central

En esta parte se presentan los aspectos conceptuales que fundamentan la presente investigación por parte de nuestro objeto estadístico.

2.1 Medidas de tendencia central

Para Gálvez et al. (2022), las medidas de tendencia central son valores que reemplazan a la muestra en estudio, siendo su finalidad ubicar el centro de un conjunto de datos; además, menciona a la media aritmética y a la mediana entre las de mayor relevancia.

Gálvez et al. (2022) indican que la moda de una variable cuantitativa es una medida de tendencia central únicamente en distribuciones simétricas unimodales. Para Posada (2016), una distribución de datos es unimodal cuando presenta una sola moda. Según Triola (2009), la distribución de datos de una variable cuantitativa es simétrica cuando la media aritmética, la mediana y la moda presentan el mismo valor.

Teniendo en cuenta la observación anterior, las medidas de tendencia central consideradas en este trabajo son la media aritmética, la mediana y la moda.

2.1.1 Media aritmética

Triola (2009) define a la media aritmética de un conjunto de datos como la suma de los valores de todos los datos dividida entre el número de datos. Gálvez et al. (2022) subrayan que la media aritmética es una medida de fácil obtención. En Córdova (2003), a la media aritmética también se le da el nombre de media. Triola (2009) menciona que a la media aritmética frecuentemente se le denomina promedio.

Triola (2009) señala que cuando se trabaja con los datos de una muestra, la media aritmética se simboliza por $\bar{x}$.

Para hallar la media aritmética de una muestra o media aritmética muestral, Córdova (2003) considera el siguiente conjunto de n datos cuantitativos:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$$

Luego, en Córdova (2003) se expresa la media aritmética muestral de la siguiente manera:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

En esta expresión:

$\bar{x}$ = Media aritmética muestral.

$\sum_{i=1}^{n} x_i$ = Suma de todos los valores de los datos de la muestra.

n = Cantidad total de datos que tiene la muestra.

Posada (2016) indica que esta fórmula debe ser empleada cuando los datos no están agrupados en intervalos.

Triola (2009) refiere que cuando se trabaja con todos los datos de una población, la media aritmética se simboliza por μ.

Para encontrar la media aritmética de una población o media aritmética poblacional, Córdova (2003) considera el siguiente conjunto finito de N datos cuantitativos:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_N$$

Seguidamente, en Córdova (2003) se expresa la media aritmética poblacional de la siguiente manera:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

En esta expresión:

μ = Media aritmética poblacional.

$\sum_{i=1}^{N} x_i$ = Suma de todos los valores de los datos de la población.

N = Cantidad total de datos que presenta la población.

Esta fórmula también debe ser utilizada cuando los datos no están agrupados en intervalos.

En cada problema, luego de obtener el valor de la media aritmética, se tomará como base la interpretación presentada en Gálvez et al. (2022), que emplea la palabra “promedio”.

Observar los siguientes problemas:

1) Se estudia la cantidad promedio de personas que un transportista trasladó el mes anterior. En los últimos 10 días de este mes, las cantidades fueron las siguientes:

18	20	25	14	18	20	18	16	16	17

Hallar la media aritmética del número de personas que este transportista trasladó durante estos últimos 10 días.

El problema refiere una muestra de 10 datos; luego, haciendo uso de la fórmula de la media aritmética muestral, tenemos lo siguiente:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = \frac{182}{10} = 18{,}2$$

La interpretación del resultado obtenido es la siguiente:

Durante los últimos 10 días del mes anterior, este transportista trasladó en promedio a 18,2 personas.

2) Si durante el mes anterior, el transportista del problema anterior trasladó las siguientes cantidades de personas:

16	12	21	15	15	22	13	30	22	22
19	20	23	16	16	21	19	15	18	18

18 20 25 14 18 20 18 16 16 17

Hallar la media aritmética del número de personas que este transportista trasladó durante este mes.

El problema señala una población de treinta datos; luego, haciendo uso de la fórmula de la media aritmética poblacional, tenemos lo siguiente:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{30} = \frac{555}{30} = 18{,}5$$

Interpretación: Durante el mes anterior, este transportista trasladó en promedio a 18,5 personas.

Según Posada (2016), la media aritmética es la medida de tendencia central más empleada y la más representativa al momento de realizar el análisis de los datos.

Gálvez et al. (2022) resaltan que en el cálculo de la media aritmética intervienen todos los datos de la muestra o población.

Sin embargo, Triola (2009) menciona que la media aritmética tiene la desventaja de ser afectada por cualquier modificación de los valores de los datos, aunque esta sea mínima. En particular, Córdova (2003) agrega que la media aritmética es direccionada hacia los datos que presentan valores extremos. A estos valores extremos, Gálvez et al. (2022) les dan el nombre de valores atípicos.

Observar el siguiente problema:

1) Cuatro amigos reunidos en una casa mencionan la cantidad de veces que han estado fuera del Perú. Dijeron lo siguiente:

   9 10 11 12

   ¿Cuál es la media aritmética de las veces que estas personas han estado fuera del país?

   Para responder a esta pregunta se realiza el siguiente cálculo:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i}{4} = \frac{42}{4} = 10{,}5$$

   Por lo tanto, estas cuatro personas han estado fuera del país un promedio de 10,5 veces.

   A continuación, es necesario analizar la media aritmética cuando se modifica el valor de alguno de los datos.

   En primer lugar, si el valor del segundo dato se modifica por 9, entonces al realizar el cálculo que corresponde, se tiene lo siguiente:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i}{4} = \frac{41}{4} = 10{,}25$$

   Por lo tanto, la media aritmética también se ha modificado. Si ahora el valor del primer dato se reemplaza por 0, se obtiene lo siguiente:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i}{4} = \frac{33}{4} = 8{,}25$$

Se observa que la media aritmética ha sido direccionada hacia el dato que tiene el valor 0. Asimismo, si el cuarto dato se reemplaza por 30, se tiene lo siguiente:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i}{4} = \frac{60}{4} = 15$$

Se aprecia que la media aritmética ha sido direccionada hacia el dato que tiene el valor 30.

Gálvez et al. (2022) señalan que la media aritmética no necesariamente va a presentar el valor de uno de los datos. Además, Gálvez et al. (2022) mencionan que un conjunto de datos con valores enteros puede tener una media aritmética con valor fraccionario. Esto último sucede porque la media aritmética es, por definición, una fracción. Su numerador es un número real y su denominador es un natural mayor que 1. Tomando en cuenta la explicación presentada en Gálvez et al. (2022), al analizar el resultado $\bar{x}=$10,5 del problema anterior, se concluye que una persona no puede haber estado fuera del país 10,5 veces; por esta misma razón tampoco tendría sentido afirmar que los valores de todos los datos son reemplazados por este valor. En estos casos procede el redondeo. No obstante, Gálvez et al. (2022) resaltan la finalidad de la media aritmética como representante de un conjunto de datos.

Es necesario señalar ahora que cuando se requiere hallar la media aritmética, los datos pueden presentarse no solamente sin agrupar; en ocasiones los datos pueden aparecer organizados en una tabla de frecuencia absoluta.

Para este caso, Córdova (2003) considera el siguiente conjunto de n datos que presentan m valores diferentes:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_m$$

Siendo sus respectivas frecuencias absolutas:

$$f_1, f_2, f_3, f_4, \dots, f_m$$

Entonces, Córdova (2003) señala que el valor de la media aritmética se obtiene empleando la siguiente fórmula:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i f_i}{n}$$

Considerar el siguiente problema:

1) Observar la Tabla 4.

Tabla 4

Cantidad de veces en un mes que un grupo de niños salió de paseo

Cantidad de paseos	f_i	$x_i f_i$
0	12	0
1	8	8
2	5	10
3	2	6
4	3	12
	n = 30	36

Nota. Elaboración propia.

Hallar la media aritmética del conjunto de datos de la Tabla 4.

Haciendo uso de la fórmula correspondiente, se tiene lo siguiente:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i f_i}{30} = \frac{0 \times 12 + 1 \times 8 + 2 \times 5 + 3 \times 2 + 4 \times 3}{30} = \frac{0 + 8 + 10 + 6 + 12}{30} = \frac{36}{30}$$
$$= 1{,}2$$

Es necesario interpretar este resultado.

Interpretación: En un mes este grupo de niños salió de paseo un promedio de 1,2 veces.

Cuando se tienen conjuntos de datos de los que se conocen sus correspondientes medias aritméticas y sus números de datos, se puede encontrar la media aritmética del total de datos asociando las medias aritméticas de estos conjuntos y sus números de datos con los valores de los datos y las frecuencias absolutas, respectivamente, de la fórmula anterior.

En este caso, Córdova (2003) señala que para un total de n datos que presentan m medias aritméticas diferentes:

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \dots, \bar{x}_m$$

Siendo sus números de datos respectivamente:

$$n_1, n_2, n_3, n_4, \dots, n_m$$

La media aritmética del total de datos, según Córdova (2003), se halla utilizando la siguiente fórmula:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i n_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i}$$

Observar el siguiente problema:

1) El día de hoy, cuatro estudiantes de una institución educativa resolvieron un promedio de 5 problemas de matemáticas. A su vez, también hoy dos estudiantes de otra institución educativa resolvieron en promedio 8 problemas de matemáticas.

Hallar el promedio de problemas de matemáticas que resolvieron los seis estudiantes el día de hoy.
Observar la Tabla 5.

Tabla 5

Promedio de problemas resueltos por estudiantes de dos colegios

$\bar{x}_i$	n_i	$\bar{x}_i n_i$
5	4	20
8	2	16
	n = 6	36

Nota. Elaboración propia.

Puede observarse la semejanza que existe entre la Tabla 5 y la Tabla 4.
Haciendo uso de la fórmula anterior, se tiene:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{2} \bar{x}_i n_i}{\sum_{i=1}^{2} n_i} = \frac{5 \times 4 + 8 \times 2}{4 + 2} = \frac{20 + 16}{6} = \frac{36}{6} = 6$$

Interpretación: El día de hoy, los niños de las dos instituciones educativas resolvieron un promedio de 6 problemas de matemáticas.

Gálvez et al. (2022) mencionan otras propiedades de la media aritmética como las siguientes:

1. Cuando se suma o resta una misma cantidad a todos los datos de un conjunto de datos, entonces su media aritmética también queda sumada o restada por esa misma cantidad.
2. Cuando se multiplica cada dato de un conjunto de datos por una misma cantidad, entonces su media aritmética también queda multiplicada por esa misma cantidad.

2.1.2 Mediana

Señala Córdova (2003) que es posible hallar la mediana en datos que presentan escala ordinal, es decir, en datos en los que se puede establecer un orden creciente o decreciente; esto es en datos cuantitativos y cualitativos ordinales.

Para Posada (2016), la mediana es la medida de tendencia central que se ubica en el centro de un conjunto de datos luego de haberlos ordenado en forma creciente. Por esta razón, en Córdova (2003) se menciona que a la derecha y a la izquierda de la mediana se tendrá la misma cantidad de datos. Según Triola (2009), los datos pueden ordenarse de manera creciente o decreciente. En la presente investigación se empleará el orden creciente; además, la mediana se simbolizará por M_e.

De lo señalado anteriormente, se podría considerar el siguiente conjunto de n datos ordenados en forma creciente:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$$

En el proceso de ubicar a la mediana y conocer su valor, puede suceder que el número de datos sea impar o par. Analizando cada caso, se observa lo siguiente:

1. El número de datos es impar.

   Exceptuando el conjunto de datos que presenta un solo dato, la ubicación de la mediana es la siguiente:

   $$x_1, \dots, M_e, \dots, x_n$$

   Se comprueba que cuando el número de datos es impar, la mediana siempre es uno de los datos del conjunto de datos; por lo tanto, $M_e = x_P$, donde P es la posición de la mediana.

   $$x_1, \dots, x_P, \dots, x_n$$

   Según Posada (2016), en este caso la posición de la mediana está determinada por la expresión:

   $$P = \frac{n+1}{2}$$

   Conociendo la posición de la mediana, se puede saber el valor que la mediana tiene.

   Observar los problemas siguientes:

   1) En una institución educativa hay siete aulas de primer grado de secundaria. La cantidad de estudiantes en estas aulas es:

      31 33 30 35 30 32 31

      Encontrar la mediana del número de estudiantes por aula que hay en esta institución educativa.

      Para hallar la mediana de datos cuantitativos, se ordena el conjunto de datos en forma creciente de la siguiente manera:

      30 30 31 31 32 33 35

      Los datos son siete; como el número de datos n es impar, la posición de la mediana se obtiene mediante la expresión siguiente:

      $$P = \frac{7+1}{2} = 4$$

      Luego, la mediana se ubica en la posición 4 del conjunto de datos ordenados en forma creciente. Como esa posición le corresponde a uno de los 31, entonces $x_P = x_4 = 31$. Es decir, la mediana es 31 (M_e = 31).

      El resultado anterior se puede interpretar de la siguiente manera:

El 50 % de las aulas de esta institución educativa tiene 31 estudiantes o menos, mientras que el otro 50 % tiene 31 estudiantes o más.

2) Durante la realización de los Juegos Olímpicos, un país obtuvo medallas de oro (O), plata (P) y bronce (B) de la siguiente manera:

O B B P P B B O B P O B P

Hallar la mediana de las medallas conseguidas por este país.

Al igual que en datos cuantitativos, para hallar la mediana de datos cualitativos ordinales, se ordena la distribución de datos en forma creciente de la siguiente manera:

B B B B B B P P P P O O O

Se tienen 13 datos, es decir, el número n de datos es impar. Se obtiene la posición de la mediana mediante la expresión siguiente:

$$P = \frac{13 + 1}{2} = 7$$

Entonces, la mediana se ubica en la posición 7. Esa posición le corresponde a una de las medallas de plata; entonces $x_P = x_7 =$ P. Es decir, la mediana es una medalla de plata (M_e = P).

Interpretación: El 50 % de las medallas conseguidas por este país son de plata o menos, mientras que el otro 50 % son de plata o más.

2. El número de datos es par.

La ubicación de la mediana es la siguiente:

$$x_1, \dots , M_e, \dots , x_n$$

Se comprueba que cuando el número de datos es par, la mediana no es ninguno de los datos del conjunto de datos.

Cuando se presenta este caso, Posada (2016) señala que la mediana se encuentra ubicada entre los datos que ocupan las posiciones:

$$\frac{n}{2} \ y \ \frac{n+2}{2}$$

Simbolizando respectivamente con r y s a estas posiciones, se tiene:

$$r = \frac{n}{2} \ y \ s = \frac{n+2}{2}$$

Ubicando a los datos x_r y x_s en el conjunto de datos ordenados, se tiene lo siguiente:

$$x_1, \dots , x_r, x_s, \dots , x_n$$

Lo anterior se puede emplear tanto en datos cuantitativos como en datos cualitativos ordinales.

Finalmente, para Posada (2016), el valor de la mediana queda determinado por la semisuma de los datos x_r y x_s de la siguiente manera:

$$M_e = \frac{x_r + x_s}{2}$$

Sin embargo, Córdova (2003) indica que en datos cualitativos ordinales no se pueden realizar operaciones aritméticas. Luego, en este caso no se puede calcular esta semisuma y no es posible saber quién es la mediana, aunque al conocer su ubicación es factible su interpretación.

Considerar los problemas siguientes:

1) Observar la Tabla 6:

Tabla 6

Calificación de la atención brindada en una tienda de electrodomésticos

Atención recibida	f_i
Excelente	8
Muy buena	4
Buena	3
Regular	1
Deficiente	4
	n = 20

Nota. Elaboración propia.

Hallar la mediana de la distribución de datos de la Tabla 6.

El orden creciente en la tabla se observa de abajo hacia arriba; luego, al presentar un número par de datos, se encuentran las posiciones de los datos entre los que se ubica la mediana, teniéndose lo siguiente:

$$r = \frac{20}{2} = 10 \;\; y \;\; s = \frac{20+2}{2} = 11$$

Y entonces la mediana se encuentra entre los datos que ocupan las posiciones 10 y 11, o sea entre los datos x_{10} y x_{11}, es decir, entre:

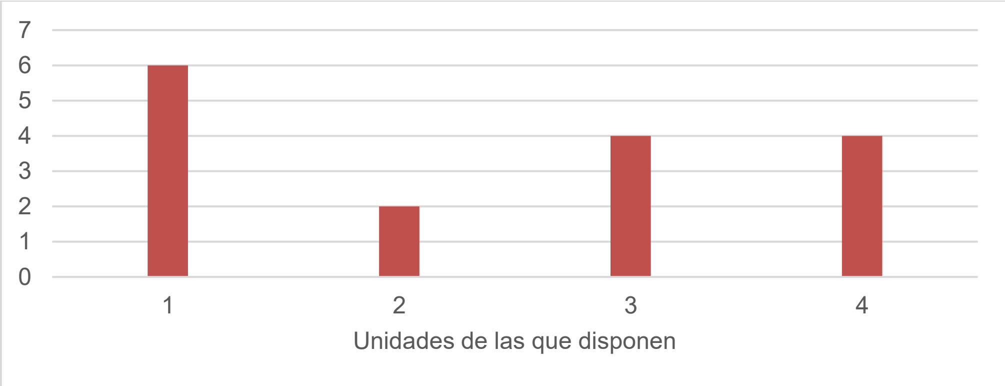
$x_{10} =$ Muy buena y $x_{11} =$ Muy buena

Interpretación: El 50 % de las personas considera que la atención recibida en la tienda de electrodomésticos es muy buena o menos que esto, mientras que el otro 50 % dice que es de muy buena a más.

2) Observar la Figura 2:

Figura 2

Cantidad de laptops que tienen los profesores de una institución educativa



Nota. Elaboración propia.

Hallar la mediana de los datos representados en la Figura 2.

En la Figura 2 se observa que son 16 los profesores de esa institución educativa, es decir, se trata de un número par de datos. Al estar ordenados los datos en forma creciente, se encuentran las posiciones de los datos entre los que se ubica la mediana:

$$r = \frac{16}{2} = 8 \;\; y \;\; s = \frac{16+2}{2} = 9$$

Luego, la mediana se ubica entre los datos que se encuentran en las posiciones 8 y 9, o sea, entre los datos x_8 y x_9, es decir, entre:

$$x_8 = 2 \; y \; x_9 = 3$$

Al tenerse una variable cuantitativa, se encuentra la semisuma de estos datos:

$$M_e = \frac{2+3}{2} = 2{,}5$$

Finalmente, se interpreta el resultado.

Interpretación: El 50 % de los profesores de esta institución educativa tiene 2,5 laptops o menos, mientras que el otro 50 % tiene 2,5 laptops o más.

Seguidamente, se consideran las siguientes propiedades de la mediana:

1. Al encontrar la mediana de un conjunto de datos, no intervienen todos los datos (Gálvez et al., 2022).
2. La mediana es independiente del valor de los datos, únicamente guarda dependencia con la cantidad de ellos (Córdova, 2003).
3. La mediana es la medida de tendencia central que tiene mayor representatividad cuando en el conjunto de datos hay valores extremos (Posada, 2016). Su uso es recomendable en distribuciones asimétricas (Gálvez et al., 2022).

2.1.3 Moda

Refieren Gálvez et al. (2022) que la moda de un conjunto de datos es el dato que presenta mayor frecuencia. A su vez, Córdova (2003) menciona que la moda de una distribución de datos es el dato que tiene la mayor cantidad de repeticiones. Saavedra (2021) señala que pueden presentarse dos datos con la mayor frecuencia, es decir, dos modas; en este caso, la distribución de datos es bimodal. Además, Saavedra (2021) indica que la distribución de datos con más de dos datos con la mayor frecuencia, es decir, con más de dos modas, es multimodal. Saavedra (2021) considera que la distribución de datos en la que todos los datos presentan la misma frecuencia es multimodal; sin embargo, Córdova (2003) señala que en este caso también puede considerarse que la moda no existe. En la presente investigación se tomará en cuenta esto último. Si la distribución de datos no presenta moda, es amodal (Posada, 2016).

Según Saavedra (2021), es posible hallar la moda en datos cuantitativos y cualitativos. Triola (2009) detalla que la moda es la única de las tres medidas de tendencia central consideradas en la presente investigación que puede hallarse en datos que presentan escala nominal, esto es, en datos cualitativos nominales.

En este trabajo, la moda será simbolizada por M_o.

Para encontrar la moda en datos cuantitativos no agrupados en intervalos y en datos cualitativos ordinales, Saavedra (2021) sugiere ordenar los datos del problema en forma creciente. Luego, este autor indica que hay que contabilizar las veces que aparece cada dato. Seguidamente, menciona el autor que se debe reconocer el dato que presenta la mayor frecuencia. Una vez que se ha identificado la moda, debe realizarse su interpretación. Se tomará como base la interpretación presentada en Gálvez et al. (2022), que hace uso de las palabras "más frecuente" o "más frecuentes".

Para hallar la moda en datos cualitativos nominales, Saavedra (2021) señala que se debe identificar el dato o los datos con la mayor cantidad de repeticiones y luego hacer la interpretación.

Observar los problemas siguientes:

1) Los pesos en kilogramos de 10 estudiantes del primer grado de secundaria de una institución educativa son los siguientes:

   48 50 75 48 52 48 52 48 36 48

   Hallar la moda de este conjunto de datos.

   Ordenando los datos de la siguiente manera:

   36 48 48 48 48 48 50 52 52 75

   Contabilizando las veces que aparece cada dato:

   El dato 36 kg se presenta una vez.

   El dato 48 kg aparece cinco veces.

El dato 50 kg figura una vez.

El dato 52 kg se encuentra dos veces.

El dato 75 kg se observa una vez.

Se observa que 48 kg es el peso que aparece la mayor cantidad de veces, es decir, 48 kg es el dato que tiene la mayor frecuencia. Por lo tanto, M_o = 48 kg. Esta distribución de datos es unimodal porque presenta una moda.

Observar los valores distantes como 36 kg y 75 kg en la distribución de datos de este problema.

El resultado que acabamos de obtener se puede interpretar de la siguiente manera:

El peso más frecuente de los 10 estudiantes del primer grado de secundaria de aquella institución educativa es de 48 kg.

Puede observarse que la moda es de sencilla interpretación.

2) Los calificativos de un estudiante de primer grado de secundaria en las 10 áreas de aprendizaje al finalizar el año escolar 2023 fueron los siguientes:

A AD B B AD B AD A AD B

Encontrar la moda de este conjunto de datos.

Ordenando los datos del problema del menor al mayor calificativo, se tiene:

B B B B A A AD AD AD AD

Puede observarse que los calificativos B y AD tienen la mayor frecuencia, es decir, M_o = B y AD. Esta distribución de datos es bimodal porque presenta dos modas.

Interpretación: Los calificativos más frecuentes del estudiante de primer grado de secundaria en las 10 áreas de aprendizaje al finalizar el año escolar 2023 fueron B y AD.

3) Examinar la Tabla 7 siguiente:

Tabla 7

Color preferido para un grupo de niños de una institución educativa

Color	f_i
Rojo	5
Amarillo	3
Azul	5
Verde	5
	n = 18

Nota. Elaboración propia.

Hallar la moda del conjunto de datos de la Tabla 7.

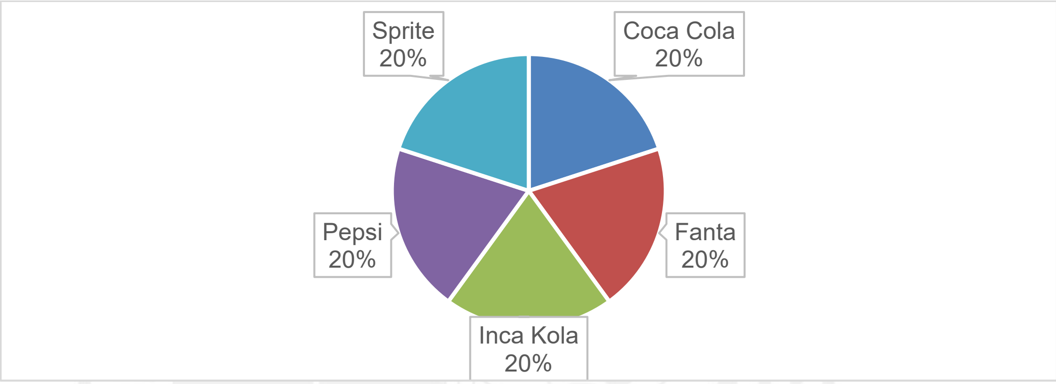
Se verifica en este problema que los colores rojo, azul y verde presentan la mayor frecuencia, es decir, M_o = rojo, azul y verde. Esta distribución de datos es multimodal porque presenta más de dos modas.

Interpretación: Los colores preferidos más frecuentes para el grupo de niños son el rojo, el azul y el verde.

4) Analizar la Figura 3 siguiente:

Figura 3

Gaseosa preferida por 25 consumidores



Nota. Elaboración propia.

¿Existe la moda en los datos representados en la Figura 3?

Puede observarse que todas las gaseosas indicadas por los consumidores presentan la misma frecuencia; en consecuencia, la moda no existe. Esta distribución de datos es amodal porque no presenta moda.

Triola (2009) refiere que la moda no es muy empleada en datos numéricos; más aún, Córdova (2003) precisa que la moda es la medida de tendencia central de menor importancia a causa de su imprecisión.

Del método empleado por Saavedra (2021) para hallar la moda en datos cualitativos y cuantitativos no agrupados en intervalos, se deduce que solo es necesaria la observación; no se requiere de la realización de operaciones matemáticas.

Saavedra (2021) menciona las siguientes propiedades de la moda:

1. La moda en datos no agrupados en intervalos es siempre uno de los datos de la muestra.
2. En la obtención de la moda no interviene el conjunto de datos y esto es ya una desventaja cuando se le usa como medida de tendencia central.
3. La moda de un conjunto de datos cuantitativos no es afectada por valores distantes.

Capítulo III: Reflexión de un profesor y análisis de su reflexión

En este capítulo se presenta la reflexión que un profesor lleva a cabo con respecto a la creación de problemas sobre medidas de tendencia central dirigidos a estudiantes de primer grado de secundaria que ejecuta. Luego se efectúa el análisis de esta reflexión, empleando los criterios del nivel 2 de la competencia “Propuesta de tareas” (Problem Posing) del modelo CCDM.

3.1 Reflexión del profesor

3.1.1 Descripción de la unidad en estudio

Sus estudios primarios los realizó en una época en la que en el Perú había una dictadura militar que se encontraba implementando una reforma educativa en el país. Hizo uso del libro “Amigo” como texto de lectura en su colegio cuando en 1974 cursaba el primer grado de primaria. En el año 1978, cuando estaba estudiando el sexto grado de primaria, se dio una huelga magisterial que trajo como consecuencia que sus padres lo trasladen a otro colegio que no se había sumado a la paralización de actividades. En esta nueva institución educativa, el docente de aula empleaba el castigo físico con sus educandos cuando estos no resolvían en forma correcta los problemas de matemáticas que les proponía. Durante sus estudios secundarios, utilizó los textos de Máximo de la Cruz Solórzano y Rubén Romero Méndez en los cursos de matemáticas. Se encontraba en el octavo grado de estudios cuando en el año 1980 finalizó la dictadura militar. Hasta 1983, año en el que culmina su secundaria, era frecuente el castigo físico por parte de los auxiliares de educación.

Cuando tenía 15 años de edad, empezó a dictar clases particulares de matemáticas a niños y adolescentes de los niveles primario y secundario. Dos años después ingresó a la Facultad de Educación de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, específicamente a la Escuela Académico Profesional de Educación. Al finalizar el segundo semestre académico, tomó la decisión de seguir la especialidad de Matemática y Física.

Durante sus estudios de pregrado y algún tiempo después, trabajó como docente en el Centro Educativo de Gestión No Estatal (CEGNE) Brasil de Jesús María y en el Colegio Particular Nuestra Señora del Carmen de San Miguel. Es en estas instituciones educativas en las que empieza a elaborar problemas inicialmente acerca de cálculo aritmético, ya que había observado que sus estudiantes eran más receptivos en las sesiones cuando les creaba problemas que cuando les proponía los que presentaban los textos de matemáticas. A los 24 años de edad, se tituló.

Tres años después de haberse titulado, trabajó durante un año en el Colegio Militar Leoncio Prado (CMLP), siendo esta la primera vez que laboraba en una institución educativa estatal. En esta emblemática institución, continuó creando problemas, en aquel entonces acerca de operaciones con polinomios y productos notables, debido a que había notado que los problemas propuestos en el texto de matemáticas de sus estudiantes no presentaban un orden creciente de dificultad.

Dos años después, con la finalidad de acrecentar su formación profesional, inició sus estudios de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, programa de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). Los estudios totalizaban 58 créditos y estaban orientados a complementar y profundizar la formación matemática del docente de esta especialidad por medio de los cursos de Álgebra 1 y 2, Álgebra Lineal, Geometría 1 y 2, Análisis 1 y 2, Probabilidades y Estadística Inferencial, Organización y Métodos de la Educación Matemática, Recursos y Medios Modernos en Educación Matemática, Historia de la Matemática, Tópicos de Matemática y Seminario de Tesis.

El mismo año que inició sus estudios de maestría, logró su nombramiento como docente de matemáticas en la Institución Educativa 5049 Emma Dettmann de Gutiérrez del Callao mediante un concurso a nivel nacional. En esta institución educativa, durante varios años, elaboró problemas acerca de diversos temas de matemáticas del nivel secundario, porque había observado dificultades en la comprensión del lenguaje empleado en el libro de texto.

Al año siguiente de su egreso de la Escuela de Posgrado de la PUCP, trabajó durante ocho años en el Centro Educativo Privado (CEP) Concordia Universal de La Perla en el Callao como docente de matemáticas. En esta institución educativa, siguió creando problemas de matemáticas para el nivel secundario, incluso para los grados superiores del nivel primario, ya que tuvo la misma dificultad que en el CMLP; una vez más, los problemas que traían los libros de texto no presentaban un orden creciente de dificultad.

Cuatro años después de haberse alejado de esta institución educativa privada, empezó a desempeñarse como subdirector de instituciones educativas públicas. Durante el ejercicio del cargo directivo, logró el Título de Segunda Especialidad Profesional en Gestión Escolar con Liderazgo Pedagógico en la Universidad San Ignacio de Loyola.

Mayormente, su trabajo ha sido desarrollado con estudiantes de secundaria. En el CEGNE Brasil, dictó clases de matemáticas desde el tercer grado de primaria hasta el primer grado de secundaria. En el Colegio Particular Nuestra Señora del Carmen, trabajó con estudiantes de primero a quinto grado de secundaria. En el CMLP, dictó clases de matemáticas a tercer grado de secundaria. En la I. E. 5049 Emma Dettmann de Gutiérrez trabajó con los cinco grados del nivel secundario. Finalmente, en el CEP Concordia Universal, dictó clases de matemáticas desde el quinto grado de primaria hasta el quinto grado de secundaria.

3.1.2 Motivaciones para crear problemas sobre medidas de tendencia central

Para empezar a crear problemas destinados a estudiantes de primer grado de secundaria acerca de medidas de tendencia central, cinco fueron los aspectos que impulsaron el inicio de su proceso creativo:

1. El aprendizaje de los estudiantes. Es la principal motivación. Facilitar el aprendizaje de las medidas de tendencia central, intentando despertar el interés y no el rechazo por este objeto estadístico.
2. El lenguaje empleado en los textos escolares. El lenguaje que los textos utilizan hace uso de palabras poco conocidas por la mayoría de sus estudiantes de primer grado de secundaria. Observar la Figura 4:

Figura 4

Texto escolar del Ministerio de Educación del Perú

Nota. Tomado de Minedu, 2023, portada.

Específicamente, referido a la Figura 4, en Minedu (2023) aparecen los términos diseñamos, estrategia, representativa, etario, planteados, marketing, reflexiono, criterios, heurísticas, retroalimentación, autónoma, conjetura y otros más. En cambio, durante las sesiones, en su labor de facilitador del aprendizaje, el docente hace uso de otras palabras o frases que considera de mejor comprensión para sus discentes. Por ejemplo, emplea la palabra “hacemos”, en vez del término “diseñamos”. Además, usa la frase “formas o maneras de resolver un problema” en lugar del término “heurística”. Por otra parte, utiliza la frase “volver a empezar” en vez de la palabra “retroalimentación”. De manera general, ha observado en su experiencia docente que el vocabulario de una buena parte de los estudiantes de primer grado de secundaria no es muy amplio, debido posiblemente a que no tienen el hábito de la lectura. Es importante mencionar también que las frecuentes interacciones que tiene con sus estudiantes traen consigo que estos últimos se acostumbren a las palabras que emplea, por lo que los problemas que elabore para que ellos resuelvan van a presentar un lenguaje con el que ya están familiarizados.

3. El nivel de exigencia de los problemas presentados en los textos escolares. Observar la Figura 5:

Figura 5

Problema propuesto en un texto escolar del Ministerio de Educación del Perú

Escogemos a la delegación de deportistas para una competencia

La entrenadora de natación debe seleccionar a sus dos mejores deportistas, quienes representarán a la institución educativa en los Juegos Deportivos Escolares Nacionales 2024, categoría A. Con ese fin, ella registra el tiempo que realiza cada una de las cuatro deportistas que tiene a su cargo en seis pruebas de 50 metros libres.

Luego de analizar los resultados de cada nadadora, la entrenadora ha elegido a Gabriela como la mejor deportista.

a. ¿En qué resultados se basó la entrenadora para tomar esta decisión? Explica.

b. ¿Qué medida de tendencia central la ayudaría a elegir a la segunda mejor deportista?, ¿por qué?

Nota. Tomado de Minedu, 2023, p. 43.

Referido a la Figura 5, en Minedu (2023) podemos observar que, desde un problema inicial acerca de nuestro objeto estadístico, a los estudiantes de primer grado de secundaria se les pide encontrar la media aritmética, la mediana y la moda de varios conjuntos de datos para comparar sus resultados y, luego de hacer un análisis, determinar el conjunto de datos menos disperso o más pertinente. Además, los promedios que deben hallar presentan cifras decimales. Adicionalmente, se les pregunta por la medida de tendencia central más representativa.

En contraste, para las sesiones de aprendizaje se requiere de problemas ordenados de un menor a un mayor nivel de dificultad que generalmente no se observa en las series de problemas que aparecen en los textos escolares.

En un primer nivel, el problema debe ser bastante elemental y parecido al ejemplo desarrollado durante la sesión. Luego, en los siguientes niveles de dificultad, las diferencias con este primer problema deben ser cada vez mayores.

Por ejemplo, los problemas siguientes de elaboración propia van en un orden creciente de dificultad:

1) Las edades de cinco personas son 27, 29, 30, 35 y 39 años. Encuentra e interpreta la media aritmética de estas edades.

   Solución: Sumamos las cantidades dadas y luego se divide la suma por el total de estas cantidades, es decir, por cinco.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = \frac{1}{5}(27 + 29 + 30 + 35 + 39) = \frac{160}{5} = 32.$$

   Interpretación: El promedio de las edades es de 32 años.

2) Una persona ganó el lunes S/ 100, el martes S/ 180 y el miércoles S/ 170. Halla e interpreta la $\bar{x}$ del dinero que ganó en estos 3 días.

   Solución: Solo se ha introducido el símbolo de la media que debe ser identificado; por lo demás, la solución es semejante a la del problema anterior.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i}{3} = \frac{1}{3}(100 + 180 + 170) = \frac{450}{3} = 150.$$

   Interpretación: El promedio de sus ganancias fue de S/ 150.

3) El promedio de las estaturas de cinco personas es 170 cm. Si las alturas de cuatro de ellas son 166 cm, 175 cm, 171 cm y 170 cm, ¿cuál es la estatura de la otra persona? Explica tu respuesta.

   Solución: Ya se tiene el promedio y las estaturas de cuatro de las cinco personas, por lo que, haciendo el reemplazo de estos valores en la fórmula de la media aritmética, se tiene lo siguiente:

$$170 = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = \frac{1}{5}(166 + 175 + 171 + 170 + x_5)$$

   Resolviendo la ecuación, se obtiene la estatura requerida.

$$850 = 166 + 175 + 171 + 170 + x_5$$
$$850 = 682 + x_5$$
$$850 - 682 = x_5$$
$$168 = x_5$$
$$x_5 = 168$$

   Respuesta: La estatura de la otra persona es 168 cm.

4. La participación de los estudiantes. Puede ser solo una percepción, pero los

estudiantes parecen más participativos frente a problemas creados por el propio docente que ante problemas extraídos de los textos escolares. Ha observado que responden a las preguntas que les hace durante la presentación y resolución de los problemas. Además, ellos también realizan preguntas. Más aún, ha notado que no son pocos los que lo llaman durante la sesión para que vea los procedimientos que han desarrollado en la resolución de los problemas. Considera que tal vez se vinculan mejor con los problemas que crea, porque los del texto resultan ser muy complicados para ellos.

5. El desarrollo profesional del profesor. Elaborando problemas acerca de las medidas de tendencia central, puede considerarlas desde varias perspectivas y de esta manera conseguir un mayor dominio de este objeto estadístico.

3.1.3 Procedimiento empleado al crear problemas

Saber las motivaciones para la creación de problemas nos lleva a otro aspecto importante: los pasos del proceso creativo.

En primer lugar, se tiene en cuenta el tema que se va a desarrollar: las medidas de tendencia central. A partir del tema, se fija uno o más objetivos que se deben alcanzar con el problema que se va a crear. Luego, se piensa en una situación real que sea de interés para los estudiantes, es decir, se reflexiona en un contexto cercano a ellos, por ejemplo: las edades de las personas, las estaturas de los futbolistas, el número de mascotas por individuo, los niveles de estudio de un instituto de inglés, la cantidad de hijos de los padres de familia de su institución educativa, etc. Sobre la base de estas situaciones, la inventiva tiene su punto de partida. A continuación, se realiza una simulación de los datos y se formula uno o más requerimientos; estos últimos son presentados en forma de petición o pregunta. Finalmente, se resuelve el problema con la finalidad de verificar que la elaboración sea correcta.

Es oportuno señalar que el proceso creativo se desarrolla sin basarse en los problemas que se encuentran en los textos de matemáticas.

Se piensa y seguidamente se escribe el problema que se desea lograr. Es fundamental la adecuada redacción, ya que el problema tiene que ser de clara comprensión; no debe presentar ambigüedad.

Se elaboran problemas con el propósito de que los estudiantes se motiven por el tema que se está desarrollando; durante la sesión, el nivel de exigencia va progresivamente en aumento.

Los estudiantes de primer grado de secundaria tienen conocimientos previos acerca de las medidas de tendencia central desde la primaria; su aprendizaje es fundamental para los grados superiores de la secundaria, la educación superior y el ámbito laboral, por lo que es necesario que hagan uso de las definiciones de media aritmética, mediana y moda en situaciones reales y, sobre todo, deben resolver problemas acerca de este objeto estadístico sin ayuda de la tecnología, ya que en nuestro medio las evaluaciones que se les toman a los estudiantes de secundaria se realizan sin aparatos electrónicos.

3.1.4 Problemas creados para ser usados como ejemplos

Como parte de su proceso creativo, se han elaborado tres problemas acerca de medidas de tendencia central para estudiantes de primer grado de secundaria: uno acerca de media aritmética, otro acerca de mediana y un tercero acerca de moda, que serán empleados como ejemplos en la sesión de aprendizaje sobre este tema. Durante el desarrollo de la clase, se explicará en primer término el concepto de media aritmética y luego se presentará el problema que se ha creado acerca de este objeto estadístico. Seguidamente, de la misma manera, se procede con la mediana y la moda.

Es de esperar que los enunciados de estos tres problemas sean comprendidos por los estudiantes. Se presenta luego su proceso de solución, en el que se emplea la definición de la medida de tendencia central que corresponde y luego se interpreta el resultado.

1) La directora de la Institución Educativa 5049 Emma Dettmann de Gutiérrez averiguó el número de hijos que tienen 20 de sus padres de familia, obteniendo los siguientes datos:

3	4	5	2	2	4	3	3	3	2
1	3	3	2	3	4	4	2	3	4

Encuentra e interpreta la media aritmética del número de hijos que tienen estos padres de familia.

Objetivo 1: Resolver el problema haciendo uso de la definición de media aritmética para datos no agrupados en intervalos.

Objetivo 2: Interpretar el resultado obtenido.

Solución: Sumando los datos y dividiendo la suma por el total de ellos, tenemos:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i}{20} = \frac{1}{20}(3+4+5+2+2+4+3+3+3+2+1+3+3+2+3+4$$
$$+4+2+3+4) = \frac{60}{20} = 3.$$

Luego la media aritmética es 3 ($\bar{x} = 3$).

Interpretación: Los 20 padres de familia de esta institución educativa tienen un promedio de 3 hijos.

2) El primer día de la semana, un reciclador encontró 19 botellas de plástico de 1, 2 y 3 litros (L) en el siguiente orden:

3	3	1	3	2	2	3	1	1	3	3
1	1	1	3	3	3	3	1			

Encuentra e interpreta la mediana de las capacidades de estas botellas.

Objetivo 1: Resolver el problema empleando la definición de mediana para datos no agrupados en intervalos.

Objetivo 2: Interpretar el resultado obtenido.

Solución: Ordenando los datos del menor al mayor tenemos:

1	1	1	1	1	1	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º	13º	14º	15º	16º	17º	18º	19º

Tratándose de un número impar de datos, se puede decir que la mediana se encuentra ubicada en la 10ª posición; luego la mediana es 3 ($M_e = 3$).

Interpretación: La mitad de las capacidades de estas botellas es como máximo 3 litros, mientras que la capacidad de la otra mitad de las botellas es como mínimo 3 litros.

3) Se les preguntó a 22 niños acerca de su color primario favorito: rojo, azul o amarillo. Ellos respondieron de la siguiente manera:

azul	rojo	rojo	azul	amarillo	amarillo	rojo	rojo
azul	rojo	rojo	azul	amarillo	amarillo	rojo	rojo
azul	rojo	rojo	azul	amarillo	amarillo		

Encuentra e interpreta la moda del color primario favorito de estos niños.

Objetivo 1: Resolver el problema relacionando las definiciones de moda y frecuencia absoluta.

Objetivo 2: Interpretar el resultado obtenido.

Solución: Organizamos los datos y observamos las frecuencias absolutas de las modalidades de la variable en la Tabla 8 siguiente:

Tabla 8

Color primario favorito de un grupo de niños

Color favorito	f_i
Rojo	10
Azul	6
Amarillo	6
	n = 22

Nota. Elaboración propia.

Se observa en la Tabla 8 que el color rojo es el dato que más se repite. En consecuencia, la moda es el color rojo ($M_o = rojo$).

Interpretación: La mayor parte de los niños consultados prefiere el color rojo.

3.1.5 Nivel de dificultad de los problemas creados

Después de la presentación de los problemas que fueron seleccionados como ejemplos, se muestran los que han sido creados para que sean resueltos por los estudiantes; estos últimos han sido clasificados de acuerdo a una escala de dificultad diseñada luego de su creación. La escala de dificultad va progresivamente desde una mayor hasta una menor semejanza con respecto a los ejemplos desarrollados, con la finalidad de que el estudiante realice esfuerzos cada vez mayores al resolverlos. Esta escala la podemos ver a continuación en la Tabla 9.

Tabla 9

Escala de dificultad de los problemas creados

Nivel	Descripción
1	La situación real, los datos y el requerimiento del problema se presentan en el mismo orden y de la misma manera que en el problema que fue presentado como ejemplo.
2	El problema de este nivel difiere del anterior únicamente en que introduce una expresión simbólica en el requerimiento.
3	El problema presenta la situación real y los datos organizados en una tabla de frecuencia absoluta. El requerimiento es presentado de manera parecida a la del problema presentado como ejemplo.
4	El problema presenta la situación real y los datos representados en gráficos estadísticos de barras o de sectores. El requerimiento es expresado mediante una pregunta.
5	El problema requiere encontrar uno de los datos a partir de los otros datos y de la medida de tendencia central que refiere el problema.

Nota. Elaboración propia.

De acuerdo con la Tabla 9, son cinco los niveles de dificultad considerados con sus correspondientes descripciones. Si volvemos a los problemas creados para que sean resueltos por los estudiantes, se tienen en cuenta enseguida dos tipos de soluciones interrelacionadas: la solución correcta y las posibles soluciones incorrectas que podrían presentar los estudiantes luego de resolver estos problemas. A continuación, se hacen precisiones en cuanto a este punto.

3.1.6 Solución ideal y soluciones esperadas

La solución ideal del problema es la que se considera correcta de acuerdo al grado de conocimiento que tiene el docente del tema que se está desarrollando, es decir, la que el estudiante debería lograr luego de haber resuelto el problema. Por otra parte, se denominan soluciones esperadas a las soluciones incorrectas que se estima van a presentar los estudiantes tras resolver el problema; estas están relacionadas con el grado poco pertinente de comprensión que tienen acerca del tema en estudio.

3.1.7 Problemas creados para ser resueltos por los estudiantes

Seguidamente, se presentan en orden creciente de dificultad los problemas que han sido creados para que sean resueltos por los estudiantes. Se trata de cinco problemas de cada medida de tendencia central considerada en la presente investigación: media, mediana y moda, que han sido clasificados en un determinado nivel de dificultad según las descripciones de la Tabla 9. Debido a que sería muy reiterativo hacerlo en todos los casos, solamente en los problemas acerca de media aritmética se realiza una breve explicación del nivel en el que el problema fue ubicado.

Adicionalmente, en cada uno de los problemas se presentan la solución ideal y las soluciones esperadas.

3.1.7.1 Media aritmética

1) Las edades de los jugadores titulares de un equipo de fútbol de una zona minera del Perú son las siguientes:

   30 32 34 31 32 28 28 30 22 34 29

   Encuentra e interpreta la media aritmética de estas edades. (Nivel 1).

   En este primer problema, la situación, los datos y el requerimiento son presentados de forma semejante a la del problema que fue empleado como ejemplo; por esta razón, el problema es ubicado en el nivel 1.

   Solución ideal. Los estudiantes aplican la definición de media aritmética para datos no agrupados en intervalos y obtienen el resultado correcto.

   $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{11} x_i}{11} = \frac{1}{11}(30+32+34+31+32+28+28+30+22+34+29) = \frac{330}{11} = 30.$$

   Interpretan luego este resultado de la siguiente manera: Los jugadores titulares de este equipo de fútbol tienen un promedio de 30 años de edad.

   Soluciones esperadas. Algunos estudiantes obtienen un valor diferente de 330 en el numerador. Un número reducido obtiene el resultado $\bar{x} = 30$, pero no responden cuando se les pide la interpretación del mismo.

2) Las temperaturas mínimas en grados Celsius (ºC) de los primeros 20 días del mes de abril de 2024 en una ciudad fueron las siguientes:

22	21	22	20	22	21	22	22	21	22
20	20	20	20	18	18	18	17	17	17

Halla e interpreta la $\bar{x}$ de las temperaturas mínimas registradas en esta ciudad. (Nivel 2).

En este problema hay una pequeña diferencia con el anterior. Se puede ver que en el requerimiento se ha introducido la expresión simbólica: $\bar{x}$; por esta razón, el problema es ubicado en el nivel 2.

Solución ideal. Los estudiantes logran el resultado correcto: $\bar{x} = 20$ y lo interpretan de la siguiente manera: La temperatura mínima de los 20 primeros días del mes de abril de 2024 en esta ciudad fue, en promedio, de 20 ºC.

Solución esperada. Algunos estudiantes obtienen el resultado correcto y, como interpretación, señalan que 20 ºC es la temperatura mínima que más se ha presentado durante esos días.

3) Observar la Tabla 10 siguiente:

Tabla 10

Capacidad de pasajeros de los aviones de una aerolínea

Cantidad de pasajeros	f_i
120	13
160	5
300	2
	n = 20

Nota. Elaboración propia.

Halla e interpreta, de acuerdo con la Tabla 10, el promedio de pasajeros que esta aerolínea puede transportar cuando todos sus aviones realizan un vuelo. (Nivel 3).

Este problema presenta los datos organizados en una tabla con frecuencia absoluta, lo cual lo diferencia más del problema que fue utilizado como ejemplo. Por esta razón, el problema es ubicado en el nivel 3. Aquí los estudiantes tienen la posibilidad de conocer la media aritmética ponderada.

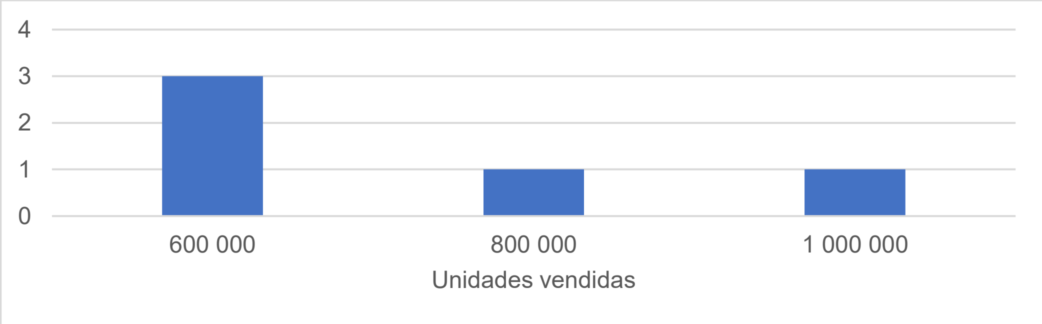
Solución ideal. Los estudiantes logran el resultado correcto: $\bar{x} = 148$ y lo interpretan de la siguiente forma: La capacidad de los aviones de esta aerolínea es en promedio de 148 pasajeros.

Solución esperada. Los estudiantes tienen dificultades para entender la tabla y no escriben nada en sus cuadernos, por lo que necesitan del acompañamiento del docente.

4) Observar la Figura 6:

Figura 6

Cantidad de productos con mayores ventas en una empresa en el año 2023



Nota. Elaboración propia.

¿Cuál es la media aritmética de los productos más vendidos por esta empresa durante el año 2023 según la Figura 6? Interpreta tu resultado. (Nivel 4).

En este problema, las diferencias con el ejemplo presentado durante la primera parte de la sesión son mayores. Los datos están organizados y representados en un gráfico estadístico de barras verticales. Aquí, en primer lugar, el estudiante tendrá que comprender la información que este gráfico presenta. Por esta razón, el problema es ubicado en el nivel 4.

Solución ideal. Los estudiantes logran la respuesta correcta: $\bar{x} = 720\,000$ y la interpretan así: Las unidades vendidas de los productos con mayores ventas de esta empresa durante el año 2023 fueron en promedio de 720 000.

Solución esperada. Los estudiantes tienen dificultades para obtener el resultado correcto, ya que no logran comprender el gráfico estadístico.

5) El promedio de hijos de los tres últimos expresidentes del Perú es 2. Si dos de ellos tienen 1 y 2 hijos, ¿cuántos hijos tiene el otro expresidente? Explica tu respuesta. (Nivel 5).

En el nivel más alto se presenta un problema completamente diferente al que fue presentado como ejemplo. En este problema se proporciona el valor de la media aritmética y de los datos, excepto el de uno de ellos, el cual se pide encontrar.

Solución ideal. Los estudiantes logran la respuesta correcta: x = 3 y la justifican así: El otro expresidente tiene 3 hijos debido a que:

$$2 = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i}{3} = \frac{1}{3}(1 + 2 + x_3)$$
$$6 = 1 + 2 + x_3$$
$$6 = 3 + x_3$$
$$6 - 3 = x_3$$
$$3 = x_3$$
$$x_3 = 3$$

Solución esperada. Los estudiantes no escriben nada en sus cuadernos, ya que tienen dificultades para entender este problema, por lo que necesitan del acompañamiento del profesor.

3.1.7.2 Mediana

1) Las estaturas en centímetros (cm) de los 15 trabajadores de una empresa son las siguientes:

178	170	165	170	155	166	170	180	158
170	174	160	172	174	170			

Encuentra e interpreta la mediana de estas estaturas. (Nivel 1).

Solución ideal. Los estudiantes ordenan los datos en forma ascendente de la siguiente manera:

155	158	160	165	166	170	170	170	170	170	172	174	174	178	180
1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º	13º	14º	15º

Tratándose de un número impar de datos, ubican el dato que ocupa la posición central y luego mencionan que este dato se encuentra en la octava posición; por lo tanto, la mediana es 170 ($M_e = 170$). Su interpretación es la siguiente: La mitad de los trabajadores tiene una estatura máxima de 170 cm, mientras que la otra mitad de los trabajadores tiene una estatura mínima de 170 cm.

Solución esperada. Los estudiantes logran la respuesta correcta: $M_e = 170$, pero no responden cuando se les pide la interpretación de su resultado.

2) Se les preguntó a 18 estudiantes del Instituto Cultural Peruano Norteamericano (ICPNA) acerca del nivel de inglés en el que se encuentran: básico, intermedio o avanzado. Sus respuestas fueron las siguientes:

básico	básico	básico	intermedio	intermedio	avanzado
básico	básico	básico	intermedio	intermedio	avanzado
básico	básico	básico	intermedio	intermedio	avanzado

Halla e interpreta la M_e del nivel de inglés en el que se encuentran estos estudiantes. (Nivel 2).

Solución ideal. Los estudiantes observan que están ante una variable cualitativa ordinal y ordenan los datos en forma ascendente. Tratándose de un número par de datos, descubren que los datos centrales ocupan las posiciones novena y 10ª que corresponden a los niveles básico e intermedio. Pero se dan cuenta de que no se pueden promediar dos datos cualitativos; por lo tanto, señalan que en este problema no es posible saber quién es la mediana; sin embargo, pueden realizar su interpretación expresándola de la siguiente manera: La mitad de los estudiantes se encuentra como máximo en el nivel básico, mientras que la otra mitad de los estudiantes se encuentra como mínimo en el nivel intermedio.
Soluciones esperadas. Algunos estudiantes mencionan que no se pueden ordenar los datos de este problema. Otros que logran ordenar los datos no avanzan más al tener ante ellos dos datos centrales cualitativos. Los estudiantes que observan la imposibilidad de obtener la mediana en este problema señalan que no es posible su interpretación.

3) Observar la Tabla 11:

Tabla 11

Índice de inasistencias del personal de una empresa en mayo de 2024

Cantidad de inasistencias	f_i
1	3
2	4
3	1
	n = 8

Nota. Elaboración propia.

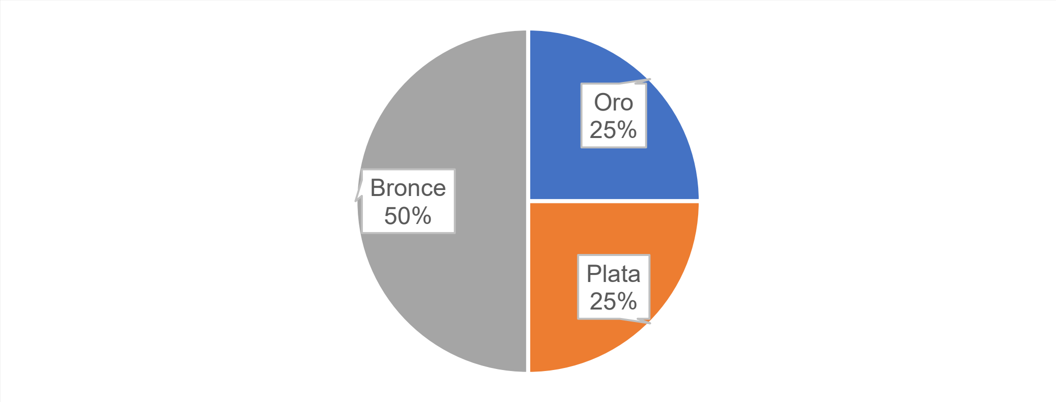
Encuentra e interpreta la mediana de la cantidad de inasistencias de los trabajadores de esta empresa durante el mes de abril de 2024, según la Tabla 11. (Nivel 3).
Solución ideal. Los estudiantes ubican la cuarta y la quinta posición de los datos de la tabla y mencionan que en ambos casos el valor de estos datos es 2. Luego, logran el resultado correcto efectuando $M_e = \frac{2+2}{2} = 2$ y lo interpretan de la siguiente manera: La mitad de la cantidad de inasistencias de los trabajadores de esta empresa que no asistieron a laborar durante el mes de abril de 2024 fue como máximo de 2 días, mientras que la otra mitad de la cantidad de inasistencias de estos trabajadores fue como mínimo de 2 días.

Solución esperada. Los estudiantes tienen dificultades para entender la tabla debido a que confunden los valores de la variable con sus frecuencias.

4) Observar la Figura 7:

Figura 7

Tipos de medallas conseguidas por Juan en las Olimpiadas Escolares 2023



Nota. Elaboración propia.

¿Cuál es la mediana de los tipos de medallas ganadas por Juan de acuerdo a la Figura 7? Interpreta tu respuesta. (Nivel 4).

Solución ideal. Los estudiantes identifican la variable. Mencionan que se trata de una variable cualitativa ordinal con una cantidad par de datos y, por lo tanto, no es posible saber quién es la mediana; sin embargo, luego de ordenar en forma ascendente los datos, la ubican entre una medalla de bronce y una de plata e interpretan así: La mitad de las medallas ganadas por Juan son como máximo de bronce, mientras que la otra mitad son como mínimo de plata.

Solución esperada. Los estudiantes no consiguen comprender el gráfico y no escriben nada en sus cuadernos.

5) La mediana del número de bicicletas que tienen tres amigos es 1. Si uno de ellos tiene 4 bicicletas y todos son propietarios de al menos una, ¿cuántas bicicletas tienen los otros dos amigos? Explica tu respuesta. (Nivel 5).

Solución ideal. Los estudiantes responden que los otros dos amigos tienen 1 bicicleta cada uno porque si 4 es la cantidad mayor, simbolizando con x y M_e a la primera y a la segunda cantidad, se tiene en orden ascendente:

$$x, M_e, 4.$$

Seguidamente, observan que $M_e = 1$ y, por lo tanto, escriben así:

$$x, 1, 4.$$

Luego, como los tres amigos tienen al menos una bicicleta, concluyen que x = 1.

Solución esperada. Algunos estudiantes mencionan que 4 es la cantidad mayor, pero no logran avanzar más.

3.1.7.3 Moda

1) El grupo sanguíneo de 20 personas es el siguiente:

O	O	A	O	O	B	O	A	A	O
A	O	A	O	O	A	B	A	O	AB

Encuentra e interpreta la moda de los grupos sanguíneos de estas personas. (Nivel 1).

Solución ideal. Los estudiantes organizan los datos y observan las frecuencias absolutas de las modalidades de la variable en la Tabla 12 siguiente:

Tabla 12

Grupo sanguíneo de 20 personas

Grupo sanguíneo	f_i
A	7
B	2
AB	1
O	10
	n = 20

Nota. Elaboración propia.

Luego, responden que para los datos de la Tabla 12, la $M_o = O$ y realizan la siguiente interpretación: La mayor parte de las personas tiene grupo sanguíneo O.

Solución esperada. Los estudiantes mencionan la respuesta correcta, pero al interpretarla expresan: La mayoría de las personas tiene grupo sanguíneo O.

2) Se les preguntó a seis padres de familia por el número de hijos que tienen y ellos respondieron de la siguiente manera:

2	3	2	1	3	1

Halla e interpreta la M_o del número de hijos de estos padres de familia. (Nivel 2).

Solución ideal. Los estudiantes responden que la moda no existe debido a que todos los datos se repiten la misma cantidad de veces.

Solución esperada. Los estudiantes señalan que están ante una distribución de datos multimodal, dado que hay tres modas: 1, 2 y 3, puesto que todos los datos se repiten la misma cantidad de veces.

3) Observar la Tabla 13:

Tabla 13

Estado civil de los profesores de una institución educativa

Estado civil	f_i
Soltero	13
Casado	5
Viudo	1
Divorciado	1
	n = 20

Nota. Elaboración propia.

Halla e interpreta la moda de los datos presentados en la Tabla 13. (Nivel 3).

Solución ideal. Los estudiantes mencionan que la modalidad soltero es la moda, ya que tiene la mayor frecuencia e interpretan así: La mayor parte de los profesores de esa institución educativa son solteros.

Solución esperada. Los estudiantes indican la respuesta correcta, pero no encuentran palabras para interpretarla.

4) Observa la Figura 8:

Figura 8

Índice de libros más vendidos en un país en el primer trimestre del año 2024

Nota. Elaboración propia.

¿Cuál es la moda de los datos representados en la Figura 8? Interpreta tu respuesta. (Nivel 4).

Solución ideal. Los estudiantes observan que $M_o = 200\,000$ e interpretan su respuesta de la siguiente manera: La mayor parte de los libros más vendidos en ese país durante el primer trimestre del año 2024 han vendido 200 000 unidades.

Solución esperada. Los estudiantes señalan la respuesta correcta, pero les es complicado realizar la interpretación.

5) María ganó S/ 1000 en el mes de enero y S/ 2000 en febrero. Si la moda de sus ingresos durante el primer trimestre del año fue S/ 1000, ¿cuánto ganó María en el mes de marzo? ¿Por qué? (Nivel 5).

   Solución ideal. Los estudiantes responden que María ganó S/ 1000 en el mes de marzo, ya que, si la moda es S/ 1000, necesariamente sus ganancias de los meses de enero, febrero y marzo han sido respectivamente:

   S/ 1000, S/ 2000 y S/ 1000.

   Soluciones esperadas. Un estudiante menciona la respuesta correcta, pero no logra explicar cómo la obtuvo. Varios estudiantes mencionan otras cantidades igualmente sin pormenorizar.

En la parte final de esta reflexión se podrán visualizar los criterios considerados en la creación de los problemas que aparecen en el presente trabajo y su respectiva justificación.

3.1.8 Criterios considerados en el proceso creativo

En la Tabla 14 pueden observarse en su lado izquierdo los criterios que han sido tomados en cuenta para elaborar problemas acerca de medidas de tendencia central dirigidos a estudiantes de primer grado de secundaria, mientras que en su lado derecho se presenta la fundamentación de cada uno de estos criterios.

Tabla 14

Criterios contemplados al crear problemas

¿Qué considera el docente?	Justificación
1. El uso matemáticamente correcto de los desempeños del Programa Curricular de Educación Secundaria.	El Programa Curricular de Educación Secundaria es el documento oficial del Ministerio de Educación del Perú, el punto de partida del proceso creativo. En Minedu (2016b), los dos desempeños seleccionados de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” del área de Matemática de primer grado de secundaria dicen textualmente: “Expresa con diversas

¿Qué considera el docente?	Justificación
	representaciones y lenguaje matemático su comprensión sobre la media, la mediana y la moda para datos no agrupados…" (p. 172) y "Lee tablas y gráficos de barras o circulares, así como diversos textos que contengan valores de medida de tendencia central…" (p. 172).
¿Qué considera el docente?	**Justificación**
2. Los resultados de la evaluación diagnóstica.	Es necesario tener información sobre los conocimientos previos con que cuentan los estudiantes. En la competencia "Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre" en lo referido a medidas de tendencia central, se observó que la gran mayoría de los estudiantes de primer grado de secundaria resolvieron correctamente problemas acerca del objeto estadístico moda. Sin embargo, no sucedió lo mismo con los problemas que requieren la interpretación de tablas de frecuencia y gráficos estadísticos de barras.
3. Las características de la institución educativa.	Es importante precisar el contexto. La Institución Educativa 5049 Emma Dettmann de Gutiérrez está ubicada en el distrito del Callao. Su modalidad es Educación Básica Regular (EBR). Cuenta con los niveles primario y secundario. En secundaria, dispone de 16 aulas, tres de las cuales corresponden al primer grado de este nivel. Asimismo, se encuentra ubicada en una zona urbana céntrica entre las avenidas Faucett y Colonial, en la que la gran mayoría de las personas residentes mayores de edad tienen cierto grado de preparación; además, se tiene en cuenta que la secundaria se imparte bajo el modelo de servicio educativo Jornada Escolar Completa (JEC), en el que al área de Matemática se le han asignado seis horas semanales de clases, lo que permite un mayor tiempo para que los estudiantes resuelvan problemas acerca del tema que se está desarrollando.
4. Las características de los estudiantes.	Los problemas están dirigidos a un grupo específico de personas: estudiantes de primer grado de secundaria que tienen entre 12 y 13 años de edad; un tercio de ellos son

	egresados del nivel primario de la misma institución educativa; la mayoría vive cerca de ella; el 50 % tiene conocimientos básicos de matemáticas. La casi totalidad asiste con regularidad a clases; expresan sus puntos de vista; preguntan cuando no entienden algo; son agradecidos.
¿Qué considera el docente?	**Justificación**
5. Situaciones reales de interés de los estudiantes.	Es fundamental la motivación. Existen situaciones reales que son de interés para la mayoría de los estudiantes; son importantes para ellos. El fútbol es una de esas situaciones, ya que varios son seguidores de algún equipo de fútbol nacional o de otro país; además, practican con frecuencia el fulbito. Las ventas también son relevantes para ellos, por cuanto realizan pequeños emprendimientos que podrían desarrollar más adelante. Otras situaciones significativas les son el clima y sus estaturas. En la creación de los problemas se han considerado estas y otras circunstancias que les podrían resultar atractivas.
6. Proporcionar información.	Es básico aumentar el bagaje de conocimientos de los estudiantes sobre cultura general. En los problemas que se ha elaborado, en algunos se presenta información diversa considerada importante para ellos. Por ejemplo, los colores primarios, la capacidad de pasajeros de los aviones de una aerolínea, la cantidad de hijos de los últimos expresidentes del Perú, los niveles de aprendizaje del idioma inglés en un instituto, los tipos de grupos sanguíneos de las personas, el estado civil en el Perú, etc.
7. El uso de un lenguaje sencillo.	Los problemas deben ser entendidos por todos los estudiantes. En su elaboración no se ha hecho uso de un lenguaje especial empleado por grupos determinados de personas; se ha utilizado el lenguaje común en forma clara y precisa, sin ambigüedad. Por ejemplo, en los problemas que fueron creados para ser resueltos por los estudiantes se usaron expresiones como: “Las edades de

	los jugadores titulares de un equipo de fútbol”, “Cantidad de productos con mayores ventas” o “Tipos de medallas conseguidas por Juan en las Olimpiadas Escolares 2023”.
¿Qué considera el docente?	**Justificación**
8. Una escala de dificultad.	Es indispensable la gradación adecuada de los problemas creados. Con la finalidad de clasificarlos, se ha diseñado luego de su creación una escala con cinco niveles que van en un orden creciente de dificultad. En el primer nivel, el problema es muy semejante al que fue presentado como ejemplo; en el segundo nivel, el problema introduce un símbolo en el requerimiento; en el tercer y cuarto nivel se presentan una tabla de frecuencia y un gráfico estadístico, respectivamente. En el quinto nivel se pide encontrar uno de los datos a partir de los otros y de la medida de tendencia central referida en el problema. En todos los niveles, se debe explicar con lenguaje preciso los resultados obtenidos luego de resolver los problemas.

Nota. Elaboración propia.

Ocho son los criterios empleados en la creación de problemas acerca de medidas de tendencia central dirigidos a estudiantes de primer grado de secundaria, como puede observarse en la Tabla 14. A continuación se comparan estos criterios con los requeridos en el nivel 2 de la competencia “Propuesta de tareas” del modelo CCDM.

3.2 Análisis de la reflexión del profesor

Se ejecutará el análisis de lo descrito en la reflexión de un profesor de matemáticas del nivel secundario que se autodenomina “creador de problemas”, y que, luego de haber cavilado profundamente, detalló en la sección 3.1.8 los criterios que empleó para crear problemas sobre medidas de tendencia central dirigidos a estudiantes de primer grado de secundaria con la finalidad de presentárselos en la sesión sobre este objeto estadístico.

El análisis se realizará considerando los criterios del nivel 2 que se observan en la Tabla 3 y la explicación presentada en la sección 1.3.3.3 acerca de ellos.

En un inicio, se debe analizar si el profesor propone tareas correspondientes al nivel educativo, para lo cual es necesario verificar si toma en cuenta las cuatro condiciones requeridas que han sido detalladas en la sección 1.3.3.3 para este criterio. Seguidamente, se hace la comprobación.

En primer lugar, sobre la consideración de características relacionadas con el currículo (procedimientos, argumentos o justificaciones, representaciones), se señala en la reflexión que se han tomado en cuenta dos de los desempeños de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” del primer grado del Programa Curricular de Educación Secundaria. Para saber si se ha hecho uso de estos desempeños, se observan el enunciado y la solución de cada problema creado.

El primero de los desempeños mencionados: “Expresa con diversas representaciones y lenguaje matemático su comprensión sobre la media, la mediana y la moda para datos no agrupados…“ (Minedu, 2016b, p. 172) demanda que los estudiantes hagan uso de diversas representaciones, como, por ejemplo, las tablas de frecuencias y los gráficos estadísticos, y que además empleen el lenguaje matemático o simbólico para expresar su comprensión sobre la media aritmética, la mediana y la moda para datos no agrupados.

En la reflexión, se observa, en los problemas creados, que los estudiantes deben hacer uso de las definiciones de las medidas de tendencia central para poder cumplir con los requerimientos que estos problemas demandan, por lo que deben haber logrado comprender los conceptos de media aritmética, mediana y moda.

En los problemas ubicados en las secciones 3.1.2, 3.1.4 y 3.1.7, se observan mayormente en los requerimientos las frases “encuentra e interpreta”, “halla e interpreta” o “¿cuál es…? Interpreta”, de lo que se puede deducir que el requerimiento de estos problemas está orientado al cálculo de la media, mediana o moda y a la explicación del valor obtenido. Luego estos problemas cumplen con una parte del desempeño; la que solicita expresar con lenguaje matemático la comprensión de estas tres medidas de tendencia central. Sin embargo, los problemas no consideran lo referido a las diversas representaciones al no ser mencionadas de manera explícita en el requerimiento de estos problemas. Por ejemplo, el problema 1 de la sección 3.1.7.1 no cuenta con la solicitud de la representación; en este caso, el requerimiento pudo haber sido el siguiente: Realiza un gráfico de barras verticales y ubica en él la media aritmética e interprétala. Al resolver este problema, el estudiante elaborará el gráfico solicitado y luego podrá hacer una estimación del valor aproximado de la media aritmética que comprobará haciendo uso de la definición para obtener el valor exacto e interpretarlo. Asimismo, el problema 2 de la sección 3.1.7.3 tampoco cuenta con la solicitud de una representación; para este caso, el requerimiento pudo presentarse de la siguiente manera: Organiza en una tabla de frecuencias absolutas los datos e indica en ella la moda e interprétala. En la resolución de este problema, los estudiantes elaboran la tabla pedida y luego, observando las frecuencias absolutas, podrán ver con claridad el valor de la o las modas o, por el contrario, su inexistencia. De existir la moda, el estudiante hará la interpretación.

En cuanto al segundo desempeño: “Lee tablas y gráficos de barras o circulares, así como diversos textos que contengan valores de medida de tendencia central…” (Minedu, 2016b, p. 172) se puede observar en la reflexión, mediante los problemas 1, 2 y 5 de las secciones 3.1.7.1, 3.1.7.2 y 3.1.7.3, que en ellos se propone a los estudiantes una diversidad de textos sobre medidas de tendencia central que incluyen datos para determinar el valor de la media aritmética, mediana o moda. Por otra parte, en los problemas 3 y 4, también de las secciones 3.1.7.1, 3.1.7.2 y 3.1.7.3, se aprecian tablas y gráficos de barras o circulares que contienen datos para obtener el valor de la medida de tendencia central solicitada. Por lo tanto, los problemas creados ponen énfasis en el hecho de que los estudiantes se familiaricen con la lectura de tablas, gráficos y diversos textos acerca de nuestro objeto estadístico.

A partir de los desempeños analizados, se podría concluir que la intención didáctica ha sido evaluar la comprensión de los estudiantes.

En la Tabla 2 figuran los desempeños de primer grado de secundaria sobre medidas de tendencia central. Habiendo analizado dos de ellos, se analizarán los dos que no son mencionados en el criterio 1 de la Tabla 14 sobre criterios contemplados al crear problemas, poniendo énfasis en que el uso de los cuatro desempeños es fundamental para comprobar que se ha tomado en cuenta la primera condición.

Dice uno de estos otros dos desempeños: “… expresa el comportamiento de los datos de la población a través de… medidas de tendencia central” (Minedu, 2016b, p. 172). En cuanto a este desempeño, se advierte en cada problema creado que el requerimiento demanda de los estudiantes la interpretación o explicación de los resultados obtenidos luego de haberlos resuelto. Por ejemplo, en los problemas 1, 2, 3 y 4 de las secciones 3.1.7.1, 3.1.7.2 y 3.1.7.3, se observa en el requerimiento el término “interpreta”, mientras que en el problema 5 de las secciones 3.1.7.1 y 3.1.7.2 se puede apreciar la palabra “explica” y a su vez en el problema 5 de la sección 3.1.7.3 figura la pregunta “¿por qué?”.

Por su parte, el otro desempeño dice: “Selecciona y emplea procedimientos para determinar la mediana y la moda de datos discretos… Revisa sus procedimientos y resultados” (Minedu, 2016b, p. 173). Con relación a este desempeño, se observa en los problemas 3, 4 y 5 de la sección 3.1.7.2 y en los problemas 2 y 4 de la sección 3.1.7.3 que el requerimiento está orientado a que los estudiantes encuentren la mediana y la moda de datos discretos. Sin embargo, considerando la importancia de que los estudiantes desarrollen procesos de reflexión en la construcción de sus aprendizajes, puede observarse en estos problemas que no se hace hincapié en que los estudiantes revisen los procedimientos desarrollados y los resultados obtenidos. Una de las características del enfoque Centrado en la Resolución de Problemas mencionada en Minedu (2016b) se relaciona con el desarrollo del aprendizaje autónomo de los estudiantes cuando reflexionan con respecto a sus aciertos, errores, avances y dificultades que se dieron mientras resolvían los problemas propuestos. Por ejemplo, el requerimiento del problema 3 de la sección 3.1.7.2 pudo ser presentado de la siguiente manera: Encuentra e interpreta la mediana de la cantidad de inasistencias de los trabajadores de esta empresa durante el mes de abril de 2024, según la Tabla 11. Revisa tu procedimiento y resultado.

En segundo lugar, sobre la consideración de los conocimientos previos del estudiante, el criterio 2 de la Tabla 14 señala que en la creación de problemas acerca de medidas de tendencia central se tomaron en cuenta los resultados de la evaluación diagnóstica aplicada a los estudiantes de primer grado de secundaria y que esta prueba incluía a la moda, las tablas de frecuencia y los gráficos estadísticos de barras, objetos estadísticos incluidos en los desempeños de la competencia "Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre" de sexto grado de primaria. En cuanto a esto, debe mencionarse que los problemas que aparecen en la sección 3.1.7.3 son sobre moda para variables cualitativas y cuantitativas. Por otra parte, el problema 3 de las secciones 3.1.7.1, 3.1.7.2 y 3.1.7.3 presenta tablas de frecuencia y el problema 4 de estas mismas secciones incluye gráficos estadísticos, lo que permite afirmar que se ha considerado el hecho de que los estudiantes cuentan ya con algunos conocimientos previos acerca de las medidas de tendencia central y otros objetos estadísticos presentes en una cantidad significativa de los problemas creados.

En tercer lugar, sobre la consideración de diversas respuestas plausibles, conceptos erróneos, conflictos y errores en torno a la práctica matemática para su propuesta, seguidamente se analiza cada aspecto.

En cuanto a soluciones plausibles, en las secciones 3.1.7.1, 3.1.7.2 y 3.1.7.3 de la reflexión se presenta brevemente, en los problemas creados, una o más soluciones denominadas de manera no adecuada soluciones esperadas, las que, según la sección 3.1.6, son soluciones incorrectas de los problemas a los que están referidas; por lo tanto, no son soluciones plausibles de dichos problemas.

Con relación a conceptos erróneos, al analizar, entre otras, las soluciones esperadas de los problemas 2 y 3 de la sección 3.1.7.2 y la del problema 1 de la sección 3.1.7.3, se observa que hay un inicio en la consideración de este aspecto.

Referente a conflictos, en los problemas ubicados en las secciones 3.1.7.1, 3.1.7.2 y 3.1.7.3, se verifica la presencia de los cuatro elementos básicos de un problema, el uso de las definiciones de los objetos estadísticos en lo que se denominó solución ideal y que son resolubles. Por ejemplo, en el problema 1 de la sección 3.1.7.1, se observa la presencia de los cuatro elementos básicos de un problema, ya que las edades 30, 32, 34…, 29 son la información proporcionada; además, "encuentra e interpreta la media aritmética de estas edades" es el requerimiento solicitado; asimismo, "los jugadores titulares de un equipo de fútbol de una zona minera del Perú” es una situación real o contexto extramatemático; y, por último, la estadística descriptiva viene a ser el entorno o marco matemático en el que se resuelve el problema. Por otra parte, la definición a usarse es: $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \,/\, n$. A su vez, en el problema 5 de la sección 3.1.7.3 también se observa la presencia de los cuatro elementos básicos de un problema, ya que las ganancias de S/ 1000 y S/ 2000 y la moda de S/ 1000 son la información proporcionada; de la misma manera, “¿cuánto ganó María en el mes de marzo?” “¿Por qué?” es el requerimiento solicitado; igualmente, “los ingresos de María durante el primer trimestre del año” es una situación real o contexto extramatemático y, finalmente, la estadística descriptiva es el entorno matemático en el que se resuelve el problema. Por otro lado, la definición a emplearse es la de moda para datos no agrupados en intervalos.

Se debe agregar que el criterio 7 de la Tabla 14 refiere al uso de un lenguaje sencillo, es decir, de un lenguaje que sea de fácil entendimiento por los estudiantes. Es probable que el uso de un lenguaje sencillo contribuya con la identificación de los objetos matemáticos. En los problemas incluidos en las secciones 3.1.7.1, 3.1.7.2 y 3.1.7.3, en general no se observa el uso de un lenguaje especial. Por ejemplo, en el enunciado del problema 1 de la sección 3.1.7.1: Las edades de los jugadores titulares de un equipo de fútbol de una zona minera del Perú son las siguientes: 30…, 29. Encuentra e interpreta la media aritmética de estas edades; no se observan palabras de un lenguaje especial. Tampoco se observan palabras de un lenguaje especial en el enunciado del problema 5 de la sección 3.1.7.3: María ganó en enero S/ 1000 y en febrero ganó S/ 2000. Si la moda de sus ingresos durante el primer trimestre del año fue S/ 1000, ¿cuánto ganó María en el mes de marzo? ¿Por qué? Lo mismo se puede decir del enunciado del problema 5 de la sección 3.1.7.2: La mediana del número de bicicletas que tienen tres amigos es 1. Si uno de ellos tiene 4 bicicletas y todos son propietarios de al menos una, ¿cuántas bicicletas tienen los otros dos? Explica tu respuesta. Por lo tanto, en los problemas creados se observa un lenguaje sencillo para reducir la posibilidad de que se presenten conflictos de aprendizaje.

Respecto a errores, al revisar las secciones 3.1.7.1, 3.1.7.2 y 3.1.7.3, se observa en los problemas creados que no se han considerado errores intencionales.

En cuarto lugar, sobre la consideración de los contextos más adecuados según las características, intereses y necesidades de los estudiantes, enseguida se analiza cada aspecto.

Acerca de las características de los estudiantes, en el criterio 4 de la Tabla 14 se mencionan algunas de ellas, de las que se va a subrayar la edad. Para comprobar que los problemas creados son pertinentes para estudiantes de 12 a 13 años de edad, se analiza el contexto extramatemático de cada uno de ellos. Luego del análisis, se concluye que el problema 3 de la sección 3.1.7.1, el problema 2 de la sección 3.1.7.2 y el problema 1 de la sección 3.1.7.3 no son adecuados para todos los estudiantes de estas edades por referir situaciones reales desconocidas por la mayoría de ellos. En el primero de estos problemas se alude a la capacidad de pasajeros de los aviones de una aerolínea, situación poco familiar para estudiantes de 12 a 13 años de edad de una institución educativa pública, debido quizás al nivel socioeconómico al que pertenecen gran parte de estos estudiantes. En el segundo problema se mencionan los niveles de estudio de inglés, situación igualmente algo lejana para los estudiantes, posiblemente también a causa del factor socioeconómico. Por último, en el tercer problema se habla de grupos sanguíneos, situación que es poco habitual para estudiantes que en su mayoría desconocen su grupo sanguíneo. La idoneidad de los problemas incluidos en la reflexión se puede observar en la Tabla 15.

Tabla 15

Pertinencia de los problemas creados

Contexto extramatemático adecuado	Contexto extramatemático no adecuado
18 (85,7 %)	3 (14,3 %)

Nota. Elaboración propia.

En la Tabla 15 se puede advertir que un 86 % de los problemas creados son apropiados para estudiantes de primer grado de secundaria.

En lo que concierne a los intereses de los estudiantes, se debe señalar que el criterio 5 de la Tabla 14 está relacionado con ellos. Los problemas 1, 2 y 4 de la sección 3.1.7.1 presentan contextos extramatemáticos de interés de un sector importante de estudiantes: el fútbol, la temperatura ambiental y las ventas, respectivamente. Sobre estos contextos se detalla que los estudiantes de primer grado de secundaria tienen equipos de fulbito masculino y femenino; en las mañanas frecuentemente expresan si sienten calor o frío y, además, realizan proyectos de emprendimiento.

En relación con las necesidades de los estudiantes, los criterios 3, 6 y 8 de la Tabla 14 se vinculan con ellas. El problema 5 de las secciones 3.1.7.1, 3.1.7.2 y 3.1.7.3 presenta un requerimiento retador para estudiantes de primer grado de secundaria; estos son: “¿Cuántos hijos tiene el otro expresidente?”, “¿Cuántas bicicletas tienen los otros dos?” y “¿Cuánto ganó María en el mes de marzo?”, respectivamente. En cada caso, el estudiante debe encontrar uno de los datos a partir de los otros y del valor de la media, mediana o moda.

Después de haber analizado las cuatro condiciones, se puede afirmar que el profesor ha desarrollado en forma moderada la propuesta de tareas correspondientes al nivel educativo que imparte.

Finalmente, con respecto a que las tareas pueden ser adaptaciones o modificaciones de tareas tomadas de otras fuentes o de su propio diseño, se afirma que el profesor creó los problemas incluidos en este trabajo de investigación.

Seguidamente se hace un análisis también del objeto estadístico abordado en este trabajo.

En los problemas de las secciones 3.1.7.1, 3.1.7.2 y 3.1.7.3 se observa que las medidas de tendencia central han sido consideradas en forma básica para la aplicación directa de las definiciones de media, mediana y moda en variables cualitativas y cuantitativas según corresponda, vinculadas con otros objetos estadísticos como las tablas de frecuencia y los gráficos de barras o de sectores. La información que permite encontrar el valor de la medida de tendencia central es presentada mediante lenguaje común o a través de diversas representaciones y el requerimiento es solicitado por medio de lenguaje común o simbólico. En los problemas creados no se enfatiza el contexto intramatemático.

Es oportuno en este momento señalar el objetivo de las medidas de tendencia central. La finalidad de este objeto estadístico se orienta a situaciones reales con datos reales. En Saavedra (2021) se subraya el hecho de que el propósito de las medidas de tendencia central radica en describir el centro de una muestra. A su vez, una muestra es un conjunto en el que sus elementos han sido tomados de una situación real, como, por ejemplo, los docentes de una facultad de una universidad privada, las calificaciones en el área de Matemática de los estudiantes de primer grado de secundaria de una institución educativa pública, etc. (Posada, 2016). Sobre esto se resalta el hecho de que los datos no son simulados. Adicionalmente, se debe mencionar que uno de los desempeños de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” de primer grado de secundaria dice textualmente: “Recopila datos de variables cualitativas o cuantitativas discretas mediante encuestas…” (Minedu, 2016b, p. 172) y que el criterio “Atractivo del problema” de la Tabla 1 refiere la utilidad de las matemáticas empleadas al resolver un problema (Pino-Fan et al., 2020).

De lo señalado en el párrafo anterior se puede concluir que se debió considerar la utilidad de las medidas de tendencia central en situaciones extraídas del mundo real, haciendo uso de instrumentos de recolección de datos como punto de partida del proceso de creación de problemas sobre este objeto estadístico.

Finalmente, se analizará la escala de dificultad mencionada en el criterio 8 de la Tabla 14 y que se observa en la Tabla 9, comprobando su uso en los problemas creados.

Es conveniente que el problema del nivel 1 sea semejante al problema presentado como ejemplo durante la sesión, porque se desea que el estudiante tenga una motivación inicial que lo impulse a resolver problemas. Se verifica en la reflexión que el problema 1 de la sección 3.1.7.1 es semejante al ejemplo 1 de la sección 3.1.4, ya que cumple con el criterio del nivel 1 de la Tabla 9. Asimismo, el problema 1 de la sección 3.1.7.2 es parecido al ejemplo

2 de la sección 3.1.4 y, de igual manera, el problema 1 de la sección 3.1.7.3 es similar al ejemplo 3 de la sección 3.1.4.

Según la Tabla 9, el problema del nivel 2 presenta una expresión simbólica en el requerimiento que no se observa en el problema del nivel 1. Esta es una diferencia leve, pero apropiada si se tiene en cuenta que se trata de un primer aumento en el nivel de dificultad, siendo fundamental que el estudiante reconozca los símbolos de nuestro objeto estadístico para que pueda resolver el problema del nivel 2. Se constata que los problemas 2 de las secciones 3.1.7.1, 3.1.7.2 y 3.1.7.3 presentan una expresión simbólica en el requerimiento, a diferencia de los problemas 1 de estas mismas secciones, respectivamente.

La presencia de una tabla de frecuencia absoluta en el problema del nivel 3 trae consigo que la diferencia con los problemas de los niveles 1 y 2 sea mayor y, por consiguiente, la dificultad para resolver los problemas del nivel 3 también es mayor, puesto que la lectura de datos organizados en una tabla de frecuencia absoluta es un prerrequisito que el estudiante debe cumplir para que pueda resolver el problema del nivel 3. Este nivel es pertinente debido a que la tabla de frecuencias es un tema de enseñanza previo a la presentación de las medidas de tendencia central. Se verifica que los problemas 3 de las secciones 3.1.7.1, 3.1.7.2 y 3.1.7.3 presentan la situación real y los datos organizados en una tabla de frecuencia absoluta y el requerimiento similar al de los ejemplos 1, 2 y 3, respectivamente.

Queda claro que la lectura de datos representados en gráficos estadísticos de barras o de sectores es un prerrequisito para resolver los problemas del nivel 4 y también que esto requiere de un esfuerzo mayor que la lectura de datos organizados en tablas de frecuencias. Se constata que los problemas 4 de las secciones 3.1.7.1, 3.1.7.2 y 3.1.7.3 presentan la situación real y los datos representados por medio de gráficos estadísticos de barras o de sectores y que el requerimiento es presentado mediante una pregunta.

Por último, el criterio que identifica al problema del nivel 5 radica en que el requerimiento no pide ya el valor de una de las medidas de tendencia central como en los niveles anteriores, sino más bien el valor de uno de los datos y, más aún, que el estudiante justifique su respuesta. Se verifica que los problemas 5 de las secciones 3.1.7.1, 3.1.7.2 y 3.1.7.3 cumplen con el criterio presentado en la Tabla 9 para el nivel 5. También se puede afirmar que los problemas del nivel 5 son de mayor dificultad que los problemas del nivel 4.

Conclusiones

Luego de haberse efectuado el análisis de la sección 3.1 sobre lo concerniente a los criterios utilizados por un profesor de matemáticas del nivel secundario para la propuesta de tareas o problemas sobre medidas de tendencia central dirigidos a estudiantes de primer grado de secundaria, se señalan las conclusiones de acuerdo a los objetivos trazados.

En cuanto al primer objetivo específico. Establecer los criterios considerados por un profesor en la creación de problemas para la enseñanza de las medidas de tendencia central, dirigidos a estudiantes de primer grado de secundaria.

Se concluye lo siguiente:

1. Son ocho los criterios considerados en la creación de los problemas, los mismos que fueron dados a conocer y de los que se hizo una concisa explicación en la Tabla 14.
2. En los problemas creados, la información proporcionada es una simulación de datos y el contexto es extramatemático.
3. Los problemas han sido creados para dos momentos: durante y después de la explicación del objeto estadístico, para que sirvan como ejemplos en el primer momento y para que sean resueltos por los estudiantes en el segundo.
4. Luego de su creación, los problemas son clasificados según sus características en uno de los cinco niveles de dificultad de la escala que aparece en la Tabla 9.
5. En los problemas creados, el objeto estadístico es vinculado con otros objetos estadísticos como las tablas de frecuencia y los gráficos de barras o de sectores. Sin embargo, es abordado de manera elemental.

En cuanto al segundo objetivo específico. Identificar los criterios considerados por el modelo CCDM para la competencia “Propuesta de tareas”.

Es importante mencionar que durante el desarrollo del proceso de reflexión los criterios de la competencia “Propuesta de tareas” del modelo CCDM eran desconocidos por la unidad en estudio. Después de finalizado este proceso, fueron ubicados en el documento Pino-Fan et al. (2022). Luego de lecturas sucesivas, se sintetizaron las ideas principales de estos criterios, en algunos casos buscando información que permitiera clarificarlos.

Sobre este objetivo se concluye lo siguiente:

1. Se consiguió identificar los criterios por niveles de la competencia “Propuesta de tareas” del modelo CCDM, los cuales generaron un impacto motivador por dos razones: la primera de ellas porque se estaba frente a información actual y la segunda porque se les podría usar a posteriori en el análisis de la reflexión.

2. Se hizo una descripción de los criterios de los niveles 0, 1, 2 y 3 de la competencia "Propuesta de tareas" del modelo CCDM como parte del marco teórico de esta investigación.

En cuanto al tercer objetivo específico. Identificar las diferencias entre los criterios empleados por un profesor en la creación de problemas para la enseñanza de medidas de tendencia central y los criterios esperados según el modelo CCDM en un planteamiento de tareas para el nivel 2 con la finalidad de mejorar su proceso creativo.

Para identificar estas diferencias se comparó todo lo señalado en la sección 3.1, no solo lo indicado en la Tabla 14, con las descripciones de los criterios del nivel 2 de la competencia "Propuesta de tareas" del modelo CCDM que se encuentran en la sección 1.3.3.3.

Se concluye lo siguiente:

1. Con relación al criterio sobre la consideración de características relacionadas con el currículo (procedimientos, argumentos o justificaciones, representaciones) se observa en la reflexión que son empleados los cuatro desempeños del Programa Curricular de Educación Secundaria referidos a las medidas de tendencia central que figuran en la Tabla 2; dos de estos desempeños fueron señalados en el criterio 1 de la Tabla 14, no detallándose la manera en la que fueron empleados, pero verificándose el uso parcial de uno de ellos y cabal del otro. Del primero se requiere solicitar las diversas representaciones en la comprensión del objeto estadístico. De los otros dos desempeños no mencionados en el criterio 1 de la Tabla 14, se verificó también el uso cabal de uno de ellos y parcial del otro. De este último se demanda pedir a los estudiantes que revisen sus procedimientos y resultados. Se debe poner de relieve que es fundamental la identificación de lo que se está utilizando.
2. Se consideran los conocimientos previos del estudiante.
3. No se observa en la reflexión la consideración de diversas respuestas plausibles.
4. Se consideran de manera incipiente los conceptos erróneos.
5. Problemas debidamente construidos que son resolubles, el uso de definiciones precisas y de un lenguaje sencillo son considerados para reducir la posibilidad de conflictos de aprendizaje.
6. No se han considerado errores intencionales.
7. Se consideran los contextos más adecuados según las características, intereses y necesidades de los estudiantes.
8. Se observa un avance no desestimable en la propuesta de tareas correspondientes al nivel educativo impartido.

9. En el nivel 2 de la competencia "Propuesta de tareas" del modelo CCDM, el profesor analizado presenta un desarrollo aceptable.
10. La unidad en estudio hace uso de una escala de dificultad.

En cuanto al objetivo general. Identificar las posibles mejoras que podría incluir un profesor en su proceso de creación de problemas acerca de medidas de tendencia central para estudiantes de primer grado de secundaria.

El profesor podría tomar en cuenta las siguientes mejoras:

1. Con respecto al criterio acerca de la consideración de características relacionadas con el currículo (procedimientos, argumentos o justificaciones, representaciones), un posible requerimiento para hacer uso cabal del desempeño que solicita representaciones podría ser: Realiza un gráfico de barras verticales y ubica en él la media aritmética e interprétala. A su vez, un requerimiento sugerido para el uso cabal del desempeño que pide la revisión del procedimiento y el resultado puede ser: Encuentra e interpreta la mediana… Revisa tu procedimiento y resultado.
2. Acerca de los conocimientos previos del estudiante, se recomienda diseñar y aplicar una evaluación diagnóstica específica sobre la competencia "Resuelve problemas de gestión de datos" con la finalidad de determinar en forma detallada con qué conocimientos cuentan los estudiantes.
3. Sobre diversas respuestas plausibles se propone considerar, de existir la posibilidad, tres formas diferentes de resolver cada problema que se va a presentar a los estudiantes.
4. En cuanto a conceptos erróneos, se sugiere tener en cuenta en los problemas creados algunas distorsiones de los conceptos de media, mediana y moda. Por ejemplo, no es posible encontrar la mediana en datos cualitativos o la media aritmética es la medida de tendencia central más representativa en un conjunto de datos con valores extremos.
5. Se recomienda que uno de los problemas propuestos presente errores intencionalmente con la finalidad de que los estudiantes los corrijan. Por ejemplo: Si el promedio de las edades de tres personas es 10 años y las tres edades son diferentes y a la vez múltiplos de 5 mayores de cero, ¿son estas edades 5, 11 y 16 años? ¿Por qué?
6. En relación a las características de los estudiantes, además de la edad, se propone considerar el sexo para tener una perspectiva más amplia en la creación de problemas, valorando los intereses de niños y niñas, debido a que estos no siempre son los mismos. Por ejemplo: En una fiesta de cumpleaños, María, Sofía, Valeria y Paula bailaron 13, 9, 11 y 15 veces, respectivamente. ¿Cuál es la

mediana de la cantidad de veces que bailaron estas niñas? Este problema está dirigido principalmente a las niñas. Un segundo ejemplo similar al anterior es el siguiente: Thiago, Bruno, Matías, Lucas y Pablo poseen 8, 12, 20, 12 y 8 videojuegos, respectivamente. ¿Cuál es la moda de la cantidad de videojuegos con que cuentan estos niños? Este problema está orientado mayormente a los niños.

7. Por la naturaleza del objeto estadístico, se sugiere que los problemas creados no presenten exclusivamente simulaciones de datos, sino también datos obtenidos de situaciones reales mediante la aplicación de instrumentos apropiados.
8. En la creación de los problemas, además de los desempeños, se recomienda el uso de las capacidades que permiten el desarrollo de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre”.

En cuanto a la pregunta de investigación, mediante el presente trabajo ha sido posible determinar las mejoras que un profesor tendría que efectuar en su proceso de creación de problemas para lograr en forma total el nivel 2 de la competencia “Propuesta de tareas” del modelo CCDM y seguidamente avanzar en el logro del nivel 3. En consecuencia, se ha logrado ejemplificar la mejora de un proceso de reflexión.

El profesor analizado menciona haber experimentado una situación inédita a través de un proceso reflexivo que lo retrotrajo hasta su niñez, de la que relata el contexto en el que realizó sus estudios primarios y secundarios para seguidamente hacer referencia a su formación académica y profesional y a su experiencia laboral, subrayando sus inicios creando problemas de matemáticas. Le pareció significativo sintetizar las motivaciones que lo impulsaron a crear problemas sobre medidas de tendencia central para estudiantes de primer grado de secundaria, así como describir el procedimiento que emplea en esta labor. Pero manifiesta que la creación de los problemas fue el aspecto que más le entusiasmó. Considera útil haber diseñado una escala de dificultad y redactar la solución ideal y las soluciones esperadas de los problemas; no obstante, estima que lo más relevante de su proceso reflexivo ha sido la construcción de la Tabla 14, en la que da a conocer los criterios que ha tomado en cuenta en su proceso creativo.

El investigador, a su vez, menciona haber tenido también una experiencia particular en la realización de este trabajo que se inicia cuando define la línea y el tema de investigación, los mismos que quedan reflejados en el título del presente trabajo. Señala haber efectuado una laboriosa búsqueda en Internet para justificar la relevancia de su trabajo. Le resultó interesante la elaboración de la pregunta y los objetivos de la investigación. Refiere asimismo lo motivador que fueron la estructuración del diseño metodológico y el desarrollo del objeto estadístico. Sin embargo, considera que el aspecto fundamental de su trabajo radica en el descubrimiento e interpretación de los criterios por niveles de logro de la competencia "Propuesta de tareas" del modelo CCDM basado en el Enfoque Ontosemiótico (EOS). Le pareció singular la búsqueda y selección de los antecedentes en un momento avanzado de la investigación, después de haberse llevado a cabo otras etapas que fueron realizadas en el siguiente orden: la justificación, la pregunta y objetivos de la investigación, el diseño metodológico, la reflexión, el objeto estadístico y el marco teórico, ya que era necesario que la reflexión se realizara sin información adicional que pudiera influir en su desarrollo y porque, además, era fundamental que se conociera el marco teórico sobre el que se iba a efectuar el análisis de dicha reflexión. Adicionalmente, le pareció novedosa la realización de un análisis de investigación y la obtención de conclusiones debido a que a lo largo de su formación académica y profesional no había desarrollado un trabajo de investigación de este tipo, ya que el grado académico de bachiller lo obtuvo de forma automática, el título profesional lo consiguió mediante la realización de una clase modelo y el título de segunda especialidad profesional lo logró mediante la elaboración de un plan de acción.

A partir de este trabajo, las nuevas líneas de investigación podrían orientarse en las siguientes direcciones:

1. La resolución de tareas ejecutada por parte de los profesores sobre un objeto matemático determinado.
2. El análisis realizado por los profesores de las prácticas matemáticas de los estudiantes al resolver problemas.

Referencias Bibliográficas

Carrillo, J., Montes, M. y Conteras, L. (2021). La competencia profesional en formulación de problemas escolares. *Ideas para la Educación Matemática,* 163-182.

Chico, J., Martín-Díaz, J., Montes, M., y Badillo, E. (2023). ¿Qué intenciones didácticas muestran los futuros maestros cuando transforman problemas? *Investigación en Educación Matemática XXVI,* 203-210. https://seiem.es/docs/actas/26/Comunicaciones/203.pdf

Córdova, M. (2003). *Estadística Descriptiva e Inferencial Aplicaciones.* Distribuidora, Imprenta, Editorial, Librería MOSHERA S.R.L. https://librosparaestudiantesuniversitarios.blogspot.com/2015/09/estadistica-descriptiva-e-inferencial.html

Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics,* (52), 243-270. https://www.researchgate.net/publication/225999376_Learning_to_pose_mathematical_problems_Exploring_changes_in_preservices_teachers'_practices

Excel Para Todos. (2024). *Medidas de tendencia central.* https://excelparatodos.com/medidas-de-tendencia-central/

Gálvez, L., Lau, C., Chirinos, D., Dávila, V., Menacho, I. y Flores, F. (2022). *Medidas de Tendencia Central.* Fepol Fondo Editorial. https://editorialfondo.com/index.php/ProfessionalsOnLine/catalog/view/9/12/39

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* (20), 13-31. https://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino%20Union_020%202009.pdf

Godino, J., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113. https://www.scielo.br/j/bolema/a/jQy8nXFVBd9wPYY5R38JFYw/?format=pdf

Godino, J., Giacomone, B., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* (13), 63-83. https://aiem.es/article/view/3929/4369

Instituto Nacional de Estadística e Informática. (2001). *Guía para la evaluación de indicadores sociales de las encuestas de hogares.* https://www.inei.gob.pe/media/MenuRecursivo/publicaciones_digitales/Est/Lib0507/Libro.pdf

Kelmansky, D. (2009). *Estadística para todos. Estrategias de pensamiento y herramientas para la solución de problemas.* Colección: Las ciencias naturales y la matemática.

https://infolibros.org/pdfview/estadistica-para-todos-diana-m-kelmansky-223/

Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú. https://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/malaspina.pdf

Martín, J. (2022). *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas en contextos de formulación de* problemas [Tesis de Doctorado, Universidad de Huelva]. https://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/handle/10272/21453/Conocimiento_especializado_profesor_matemáticas.pdf?sequence=2

Ministerio de Educación del Perú. (2016a). *Currículo Nacional de la Educación Básica* (Aprobado por Resolución Ministerial Nº 281-2016-MINEDU). https://www.gob.pe/institucion/minedu/normas-legales/169249-281-2016-minedu

Ministerio de Educación del Perú. (2016b). *Programa Curricular de Educación Secundaria* (Aprobado por Resolución Ministerial Nº 649-2016-MINEDU-Parte 4). https://www.gob.pe/institucion/minedu/normas-legales/169574-649-2016-minedu-parte-4

Ministerio de Educación del Perú. (2023). *Fichas de Matemática 1. Secundaria.* https://repositorio.minedu.gob.pe/handle/20.500.12799/10092

Muñiz, M. (2005) Estudios de caso en la investigación cualitativa. Facultad de Psicología, División de Estudios de Posgrado. Universidad Autónoma de Nuevo-León. https://www.psico.edu.uy/sites/default/files/cursos/1_estudios-de-caso-en-la-investigacion-cualitativa.pdf

Pino-Fan, L., Báez-Huaiquián, D., Molina-Cabero, J. y Hernández-Arredondo, E. (2020). Criterios utilizados por profesores de matemáticas para el planteamiento de problemas en el aula. *Uniciencia, 34*(2), 114-136. https://www.scielo.sa.cr/pdf/uniciencia/v34n2/2215-3470-uniciencia-34-02-114.pdf

Pino-Fan, L., Castro, W. y Font, V. (2022). A macro tool to characterize and develop key competencies for the mathematics teacher's practice. *International Journal of Science and Mathematics Education,* (21), 1407-1432. https://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/36812/1/CastroWalter_2023_MacroToolCompetence.pdf

Pino-Fan, L. y Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma, XXXVI*(1), 87-109. https://ve.scielo.org/pdf/pdg/v36n1/art07.pdf

Pino-Fan, L., Godino, J. y Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (primera parte). *Revemat, 08*(2), 1-49. https://www.ugr.es/~jgodino/eos/LPino_%20REVEMAT_2013-1.pdf

Posada, G. (2016). *Elementos Básicos de Estadística Descriptiva Para el Análisis de Datos.* Fondo Editorial Luis Amigó. https://www.funlam.edu.co/uploads/fondoeditorial/120_Ebook-elementos_basicos.pdf

Saavedra, E. (2021). Acerca de la moda. *Revista de Educación Matemática, 36*(1), 75-90. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8832979

Silver, E. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics,14*(1),19-28. https://www.researchgate.net/publication/284047623_On_mathematical_problem_posing

Triola, M. (2009). *Estadística.* Pearson Educación. https://www.uv.mx/rmipe/files/2015/09/Estadistica.pdf

Universidad Internacional de La Rioja. (2024). *¿Qué son las medidas de tendencia central y para qué sirven?* https://colombia.unir.net/actualidad-unir/medidas-tendencia-central/

Anexos

Anexo 1. Otros problemas elaborados por el profesor en estudio acerca de la media aritmética

1. Se les pregunta a 10 personas por el número de integrantes de sus familias. Estas personas respondieron de la siguiente manera:

   5 5 6 5 4 2 4 3 6 4

   Encuentra e interpreta la media aritmética de la cantidad de integrantes que tienen estas familias. (Nivel 1).
2. Los pesos en kilogramos (kg) de 20 estudiantes de un aula de clases del primer grado de secundaria son los siguientes:

   50 52 56 44 50 50 51 48 50 52

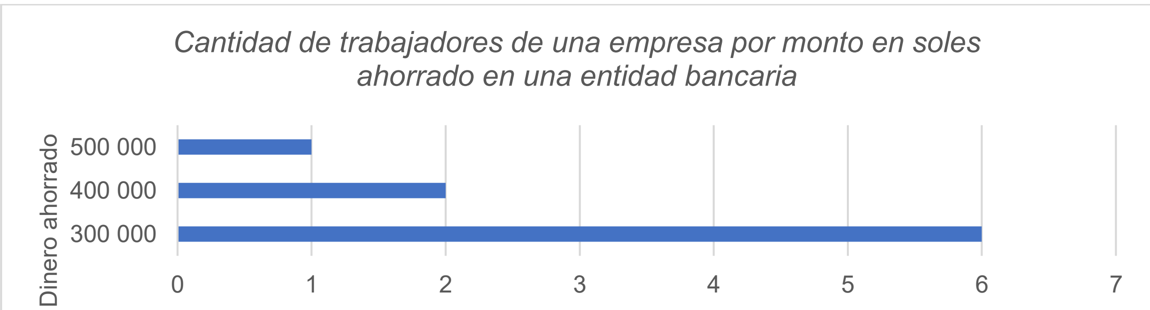
   48 48 50 50 48 52 48 50 54 64

   Halla e interpreta la $\bar{x}$ de estos pesos. (Nivel 2).
3. Observa la tabla siguiente acerca de la cantidad de estudiantes por aula que hay en un colegio de secundaria:

Número de estudiantes por aula	f_i
30	8
32	6
34	2
	n = 16

Nota. Elaboración propia.

   Halla e interpreta el promedio de estudiantes por aula que hay en este colegio. (Nivel 3).
4. Observa el gráfico siguiente:



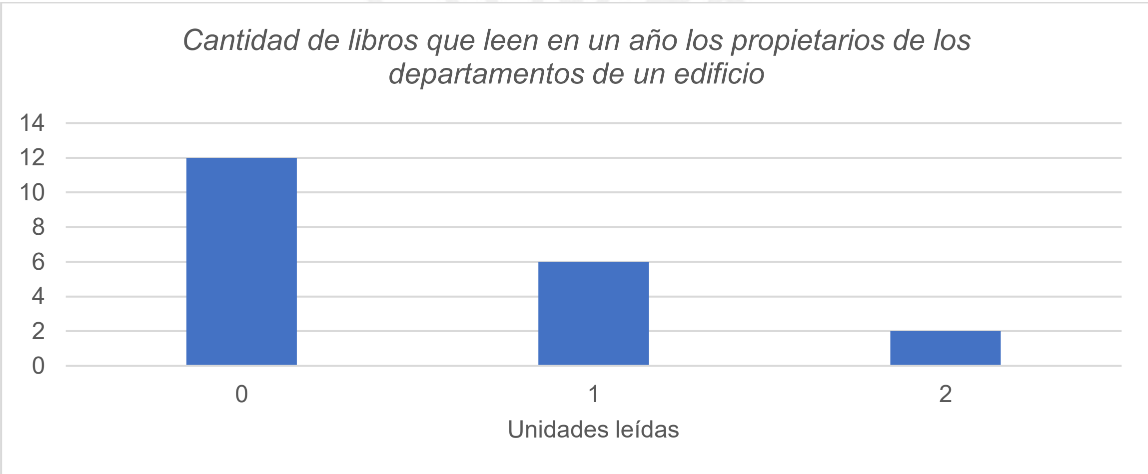
Nota. Elaboración propia.

¿Cuál es la media aritmética de los ahorros de los trabajadores de esta empresa? Interpreta tu resultado. (Nivel 4).

5. El promedio de las cuatro selecciones de fútbol que más campeonatos mundiales han ganado es 4. Si tres de estas selecciones han ganado 5, 4 y 3 títulos mundiales, ¿cuántos títulos mundiales ganó la otra selección? Justifica tu resultado. (Nivel 5).

Anexo 2. Otros problemas elaborados por el profesor en estudio acerca de la mediana

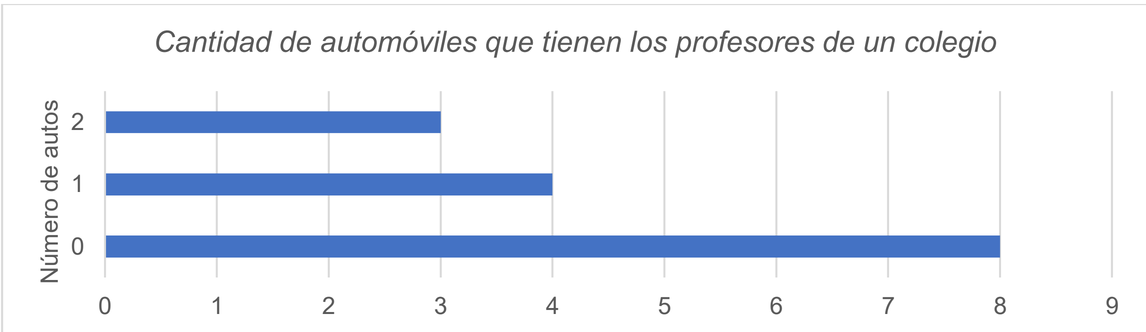
1. Durante los últimos 10 partidos, un equipo de fútbol anotó la siguiente cantidad de goles:
   1 3 0 1 2 0 0 4 1 1
   Halla e interpreta la M_e de la cantidad de goles anotados por partido por este equipo. (Nivel 2).
2. Los calificativos de un estudiante de secundaria en 11 competencias durante el primer bimestre fueron los siguientes:
   B A C AD B B C B C AD B
   Halla e interpreta la M_e de estos calificativos. (Nivel 2).
3. Observa el gráfico siguiente:



Nota. Elaboración propia.

¿Cuál es la mediana del número de libros leídos en un año por estas personas? Interpreta tu resultado. (Nivel 4).

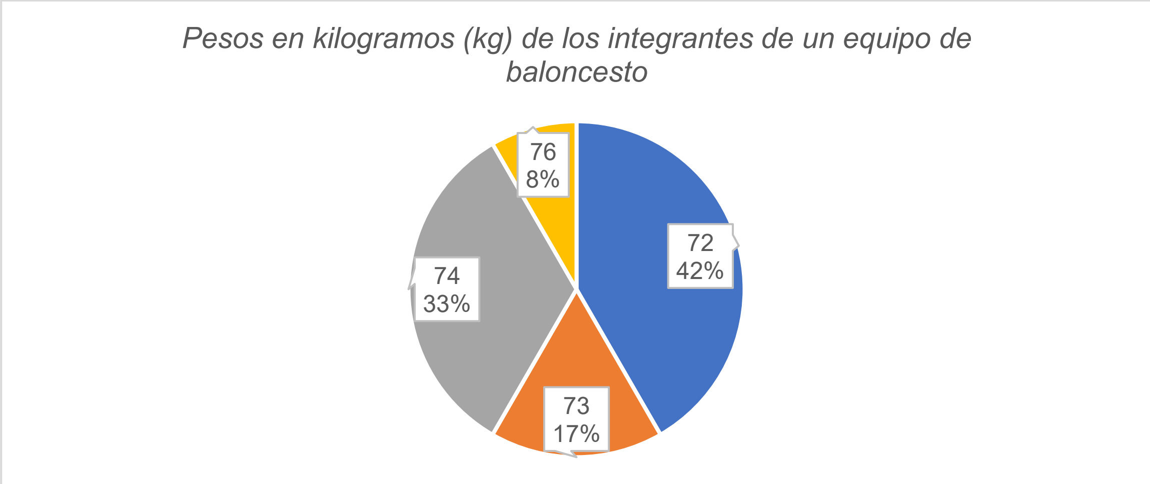
4. Observa el gráfico siguiente:



Nota. Elaboración propia.

¿Cuál es la mediana de la cantidad de autos que poseen los profesores de este colegio? Interpreta tu resultado. (Nivel 4).

5. Observa el gráfico siguiente:



Nota. Elaboración propia.

¿Cuál es la mediana de los pesos de estos basquetbolistas? Interpreta tu respuesta. (Nivel 4).

Anexo 3. Otros problemas elaborados por el profesor en estudio acerca de la moda

1. En una reunión de jóvenes, 20 de ellos mencionan el número de veces que han viajado fuera del país, obteniéndose el siguiente conjunto de datos:

0	1	1	2	0	1	0	1	1	0
2	1	3	0	0	0	2	4	3	1

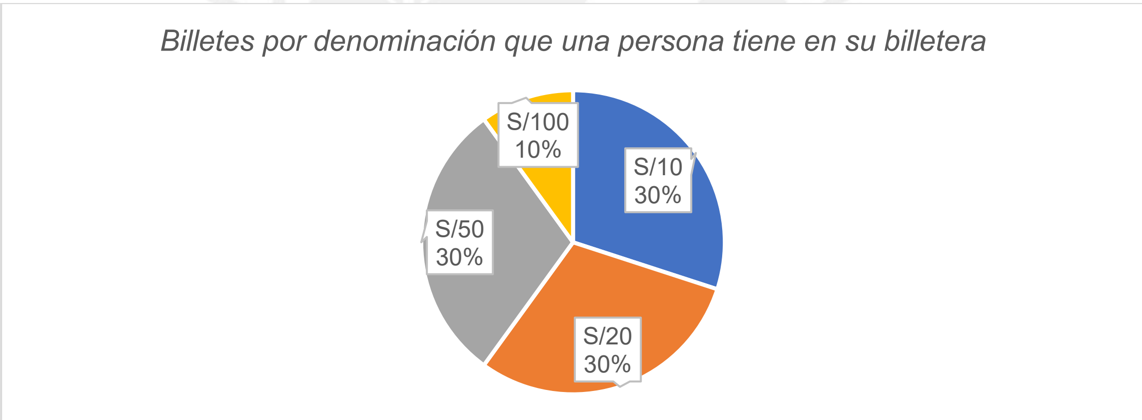
   Encuentra e interpreta la moda de la cantidad de viajes al extranjero que estos jóvenes han realizado. (Nivel 1).

2. Un estudiante de un instituto de inglés ha finalizado el nivel básico de estudios, habiendo obtenido los siguientes calificativos:

97	97	97	100	94	97
91	94	94	97	100	91

   Halla e interpreta la M_o de estos calificativos. (Nivel 2).

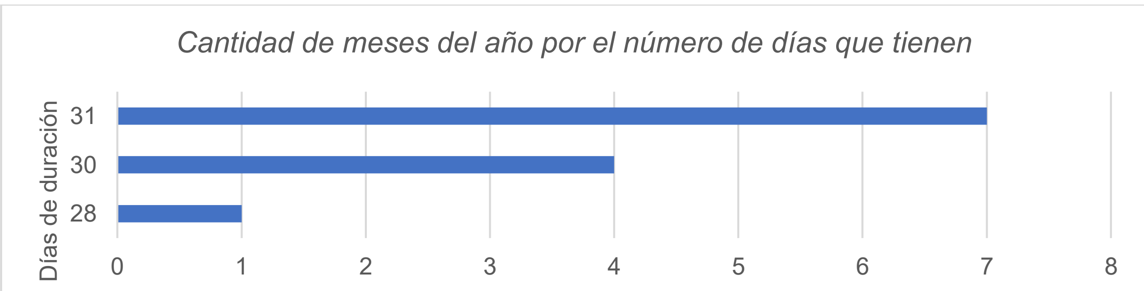
3. Observa el gráfico siguiente:



Nota. Elaboración propia.

¿Existe la moda de estos billetes? Explica tu respuesta. (Nivel 4).

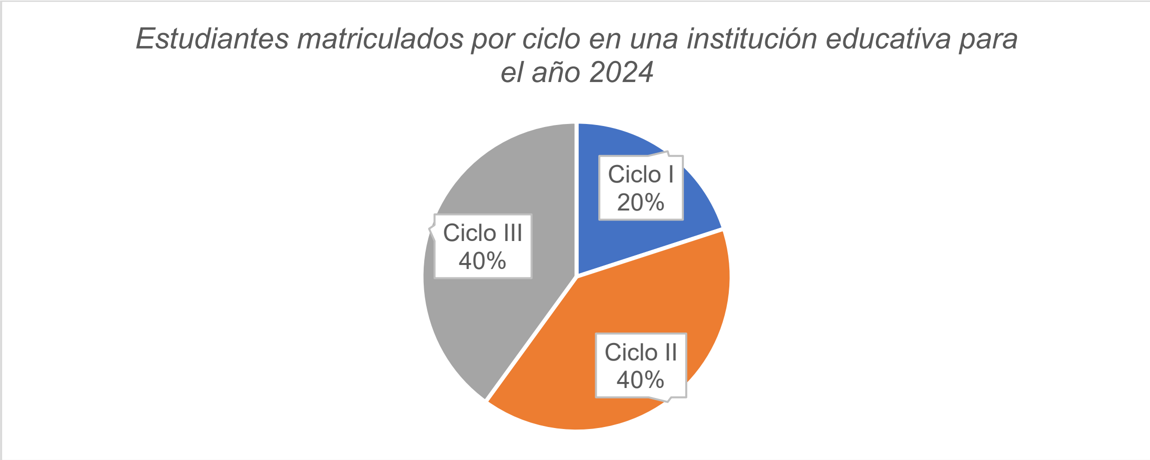
4. Observa el gráfico siguiente:



Nota. Elaboración propia.

¿Cuál es la moda de la duración de los meses del año? Interpreta tu respuesta. (Nivel 4).

5. Observa el gráfico siguiente:



Nota. Elaboración propia.

¿Cuál es la moda de los ciclos en los que se han matriculado los estudiantes de esta institución educativa? Justifica tu respuesta. (Nivel 4).