

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD  
CATÓLICA DEL PERÚ**

**Escuela de Posgrado**



**Estudio de la robustez de la fase geométrica asociada a la  
evolución de un cúbit usando la computadora cuántica de  
IBM**

Tesis para obtener el grado académico de Maestro en Física que  
presenta:

***Wilber André Obregón Hilario***

Asesor:

***Omar Hernán Ortiz Cabello***

Lima, 2026


## Informe de Similitud

Yo, Omar Hernán Ortiz Cabello, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor de la tesis titulada “Estudio de la robustez de la fase geométrica asociada a la evolución de un cúbit usando la computadora cuántica de IBM”, de el autor Wilber André Obregón Hilario, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 6%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 20 de febrero de 2026.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de investigación, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha:

Lima, 20 de febrero de 2026.

Apellidos y nombres del asesor / de la asesora: <u>Ortiz Cabello, Omar Ortiz</u>	
DNI: 44093562	Firma 
ORCID: 0000-0002-2583-4330	

## Agradecimientos

A Dios, por la bendición de tener a mi familia: a mi madre, quien me enseñó el valor de la resiliencia; a mi padre, que me apoyó desde el inicio de mis estudios universitarios; y a mi hermano, quien estuvo siempre a mi lado.

A mi esposa, Zoe, por su amor y apoyo incondicional durante todo este proceso.

Mi especial reconocimiento a mi asesor, el Dr. Omar Ortiz, por su guía constante, su paciencia y sus valiosas enseñanzas a lo largo del desarrollo de esta tesis. Su orientación fue fundamental para la culminación de este trabajo.

Extiendo también mi gratitud al Dr. Eduardo Massoni y al Dr. Francisco De Zela, por sus valiosos comentarios, sus enseñanzas y el enriquecedor intercambio académico que fortaleció esta investigación.

Finalmente, a Mariano Uria, por su orientación y apoyo constante durante esta etapa; a Diego Larios, por el trabajo compartido y el compañerismo en el laboratorio; y a Ibet Machuca, Fernando Mujica y Braulio Osorio, por su disposición y por contribuir a un ambiente académico de apoyo mutuo y crecimiento.

## Resumen

Durante la evolución de un cúbit, su estado cuántico puede adquirir una fase total (Pancharatnam), compuesta por una contribución dinámica y una contribución geométrica. La contribución geométrica a la fase total es determinada únicamente por la trayectoria seguida en el espacio de parámetros. Debido a esta dependencia geométrica, dichas fases han sido propuestas como un recurso potencialmente robusto frente a ciertos tipos de ruido y errores de control en sistemas cuánticos.

En esta tesis se estudia la robustez de las fases de Pancharatnam y geométrica asociadas a la evolución de un cúbit, considerando trayectorias ruidosas sobre la esfera de Bloch. Para ello, se emplean circuitos cuánticos análogos a arreglos interferométricos utilizados para la medición de estas fases en cúbits de polarización. Se muestra la implementación de estos circuitos cuánticos, ejecutados en las computadoras cuánticas y simuladores de IBM, es decir, utilizando cúbits superconductores.

Se analiza la influencia del ruido en dos escenarios: (i) promediando sobre un conjunto de trayectorias ruidosas y (ii) considerando una única trayectoria ruidosa. En el primer caso, los resultados muestran escenarios en los que la fase de Pancharatnam presenta una mayor robustez que la fase geométrica. En el segundo caso, las simulaciones revelan que la sensibilidad de las fases depende de la trayectoria elegida y de su parametrización, observándose que la robustez de los parámetros medidos está correlacionada con la derivada de la fase respecto al parámetro que controla la evolución.

Estos resultados sugieren que la robustez observada de las fases en la metodología empleada no es general, sino que depende tanto de la trayectoria como de su parametrización, siendo la estabilidad de cada fase una propiedad relacionada a la forma en que se implementa la evolución del cúbit.

# Índice general

<b>1. Motivación</b>	<b>1</b>
<b>2. Introducción</b>	<b>4</b>
2.1. El cúbit	4
2.1.1. Representación geométrica de un cúbit	5
2.1.2. Transformaciones $SU(2)$ sobre un cúbit	6
2.1.3. Representación de dos cúbits	8
2.1.4. Mediciones proyectivas	9
2.1.5. Tomografía de 1 cúbit	10
2.2. La computadora cuántica de IBM	11
2.2.1. Funcionamiento básico	11
2.2.2. Implementación de compuertas cuánticas en cúbits superconductores	13
2.2.3. Ejecución de un circuito cuántico	16
2.2.4. Tomografía de un cúbit en la computadora cuántica	17
2.3. Fase de Pancharatnam	19
2.3.1. Interferómetro de Mach-Zhender	19
2.4. Fase geométrica	20
<b>3. Estudio de la fase geométrica por métodos interferométricos</b>	<b>23</b>
3.1. Codificación de un cúbit en polarización y camino	23
3.2. Interferómetro para medir la fase de Pancharatnam	24
3.2.1. Descripción de los dispositivos ópticos	24
3.2.2. Diagrama simplificado del arreglo interferométrico	26
3.3. Interferómetro para medir fases geométricas	29

3.3.1.	Descripción de los elementos ópticos del experimento.....	30
3.3.2.	Diagrama simplificado del arreglo interferométrico.....	31
<b>4.</b>	<b>Estudio de la fase geométrica usando la computadora cuántica de IBM</b>	<b>34</b>
4.1.	Medición de la fase de Pancharatnam .....	34
4.2.	Medición de la fase geométrica.....	37
4.2.1.	Medición de la fase de Pancharatnam con $U(s, \vartheta)$ .....	40
4.2.2.	Medición de la fase geométrica con $U(s, \vartheta)$ .....	41
<b>5.</b>	<b>Influencia del ruido sobre las fases fundamentales usando la computadora cuántica de IBM</b>	<b>42</b>
5.1.	Influencia promedio del ruido sobre la fase de Pancharatnam .....	42
5.2.	Influencia promedio del ruido sobre la fase Geométrica.....	45
5.2.1.	Trayectorias sobre la esfera de Bloch .....	45
5.2.2.	Trayectorias ruidosas de un cubit sobre la esfera de Bloch.....	46
5.2.3.	Resultados experimentales para la fase geométrica .....	50
5.2.4.	Resultados experimentales para la fase de Pancharatnam.....	51
5.3.	Influencia del ruido sobre la fase geométrica.....	52
5.3.1.	Trayectoria ruidosa de un cubit sobre la esfera de Bloch .....	52
5.3.2.	Resultados de la simulación para la fase geométrica.....	54
5.3.3.	Resultados de la simulación para la fase de Pancharatnam.....	55
5.3.4.	Análisis de sensibilidad .....	56
<b>6.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>58</b>
<b>7.</b>	<b>Bibliografía</b>	<b>60</b>

# Motivación

En las últimas décadas, las fases geométricas han adquirido un papel central en el estudio de sistemas cuánticos, tanto desde un punto de vista conceptual como aplicado, incluyendo su relevancia en la computación cuántica topológica (Nayak et al., 2008; Aghaee et al., 2023). El desarrollo del concepto de fase geométrica se remonta a los trabajos pioneros de Pancharatnam sobre interferencia óptica (Pancharatnam, 1956) y el estudio realizado por Berry para evoluciones adiabáticas cíclicas (Berry, 1984), los cuales revelaron que un sistema cuántico puede adquirir una fase adicional que depende exclusivamente de la geometría del camino recorrido por su estado en el espacio de parámetros.

La fase geométrica ha sido medida en una amplia variedad de sistemas físicos, incluyendo óptica clásica (Tomita y Chiao, 1986; Loredó, 2011; Bhandari y Samuel, 1988), óptica cuántica (Machuca, 2025; Sjöqvist et al., 2000; Carollo y Pachos, 2003), sistemas de RMN (Suter et al., 1988; Jones et al., 2000), neutrones (Rauch y Werner, 2000), iones atrapados (Leibfried et al., 2003) y cúbits superconductores (Leek et al., 2007; Abdumalikov et al., 2013). Históricamente, Pancharatnam introdujo una noción de fase total asociada a secuencias discretas de estados en el contexto de la polarización de la luz. En el caso particular de una secuencia de proyecciones, la contribución dinámica se anula, de modo que la fase total coincide con una fase de carácter geométrico. Posteriormente, Berry identificó una fase geométrica en evoluciones cíclicas y adiabáticas, donde su aparición no era inicialmente esperada. Trabajos posteriores mostraron que la fase geométrica no requiere que la evolución sea cíclica o adiabática, y que la fase geométrica constituye, en general, una contribución de la fase total asociada a la trayectoria del estado en el espacio de parámetros (Shapere y Wilczek, 1989). Más adelante, se demostró que bajo ciertas condiciones estas fases pueden presentar propiedades de robustez frente a clases específicas de ruido y errores de control, lo que motivó la propuesta de esquemas de computación cuántica holonómica, en los cuales las operaciones dependen únicamente de la geometría de la

---

evolución (Sjöqvist et al., 2012; Y.-C. Zhou et al., 2025).

En años recientes, la computación cuántica se ha consolidado como una de las áreas más activas de la ciencia y la tecnología contemporáneas. Los qubits, permiten manipular superposiciones coherentes de dos estados, habilitando esquemas de procesamiento que no tienen análogo clásico (Nielsen y Chuang, 2010). Sin embargo, los dispositivos cuánticos actuales operan en el régimen *Noisy Intermediate-Scale Quantum* (NISQ), caracterizado por la presencia inevitable de ruido, errores de compuerta y decoherencia, los cuales limitan severamente la fidelidad de las operaciones cuánticas (Lau et al., 2022). Este escenario ha motivado un intenso esfuerzo por identificar estrategias que mitiguen el impacto del ruido y permitan aprovechar de manera eficiente los recursos cuánticos disponibles.

En este contexto, el estudio de la robustez de las fases geométricas adquiere una relevancia particular, ya que ofrece una alternativa para diseñar procesos cuánticos con mayor tolerancia a errores. Existen diversos trabajos que han analizado la robustez de las fases geométricas frente a errores de control y decoherencia (Solinas et al., 2003; Zhu y Zanardi, 2005; Carollo y Pachos, 2003; De Chiara y Palma, 2003; Lombardo y Villar, 2010). Motivado por estos desarrollos, este trabajo tiene como objetivo investigar la robustez de las fases de Pancharatnam y geométrica mediante la implementación de circuitos cuánticos análogos a interferómetros (Loredo, 2011), empleando los dispositivos cuánticos de IBM (IBM Quantum, 2025). Este enfoque permite reproducir resultados experimentales previamente reportados y, al mismo tiempo, introducir de manera controlada variaciones paramétricas para estudiar sistemáticamente la influencia del ruido sobre la fase de Pancharatnam y la fase geométrica, comparando su estabilidad.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera:

En el Capítulo 2 se presentan los fundamentos teóricos y experimentales necesarios para el desarrollo de la tesis. En primer lugar, se introducen los conceptos básicos del qubit, su representación geométrica en la esfera de Bloch y las transformaciones unitarias asociadas al grupo  $SU(2)$ . Asimismo, se discuten la descripción de sistemas de dos qubits, las mediciones proyectivas y el método de tomografía cuántica de un qubit. Posteriormente, se describe el funcionamiento básico de la computadora cuántica de IBM, las compuertas cuánticas de uno y dos qubits, la ejecución de circuitos cuánticos y el proceso de la tomografía en un circuito cuántico.

---

co. Finalmente, se introducen los conceptos de fase de Pancharatnam y fase geométrica, junto con su formulación interferométrica, estableciendo el marco teórico que sustenta los capítulos posteriores.

El Capítulo 3 está dedicado al estudio de la fase geométrica mediante métodos interferométricos ópticos. En este capítulo se presenta la codificación de un cúbit en los grados de libertad de polarización y camino, así como el diseño de un interferómetro tipo Mach–Zehnder para la medición de la fase de Pancharatnam. Se describen detalladamente los dispositivos ópticos empleados y los diagramas simplificados de los arreglos experimentales. Posteriormente, se presenta el interferómetro usado para medir fases geométricas, junto con el análisis de los elementos ópticos involucrados y su implementación experimental.

En el Capítulo 4 se mide la fase de Pancharatnam y la fase geométrica utilizando los dispositivos cuánticos provistos por IBM. En primer lugar, se presenta el protocolo para la medición de la fase de Pancharatnam mediante un circuito cuántico. Luego, se aborda la medición de la fase de Pancharatnam y geométrica usando la parametrización  $(\vartheta)$  y un segundo circuito cuántico propuesto. Este capítulo establece un paralelismo entre los esquemas interferométricos ópticos y su implementación equivalente en circuitos cuánticos.

El Capítulo 5 se centra en el estudio de la influencia del ruido sobre la fase de Pancharatnam y la fase geométrica usando la computadora cuántica de IBM.

# Introducción

## 2.1. El cúbit

El procesamiento de la información es un campo de gran relevancia en las tecnologías de la información y las comunicaciones. Durante la última década, se ha observado un notable avance en el diseño y construcción de una tecnología disruptiva: la computadora cuántica (Sanders, 2025; Madsen et al., 2022). En un contexto donde la velocidad y la eficiencia son fundamentales, la computación cuántica surge como una alternativa prometedora, capaz de procesar datos a escalas y velocidades que la informática clásica no puede igualar.

El funcionamiento de una computadora cuántica se basa en la manipulación de cúbits (la unidad básica de información cuántica) y se rige por los principios de la mecánica cuántica. Estos principios permiten impulsar avances significativos en áreas como la optimización (L. Zhou et al., 2020), la ciberseguridad (Rodríguez et al., 2025) y las finanzas (Bova et al., 2021). A diferencia del bit clásico, que solo puede encontrarse en los estados 0 o 1, el cúbit puede estar en una superposición de ambos estados. El vector de estado asociado a un cúbit suele ser representado usando la notación de Dirac:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad (2.1)$$

donde  $a$  y  $b$  son números complejos, y cuya magnitud al cuadrado representa la probabilidad de obtener el resultado 0 o 1 al medir el cúbit. La posibilidad de tratar a los cúbits como objetos matemáticos permite construir una teoría general de la computación cuántica, independiente de la plataforma. Entre las plataformas desarrolladas para esta tecnología se encuentran los circuitos superconductores (Wu et al., 2021), los fotones (Madsen et al., 2022; Zhong et al., 2020) y los iones atrapados (Bruzewicz et al., 2019).

### 2.1.1. Representación geométrica de un cúbit

El estado  $|\psi\rangle$  descrito en la ecuación (2.1) puede expresarse mediante la siguiente parametrización:

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\vartheta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\vartheta}{2} e^{i\varphi} |1\rangle \quad (2.2)$$

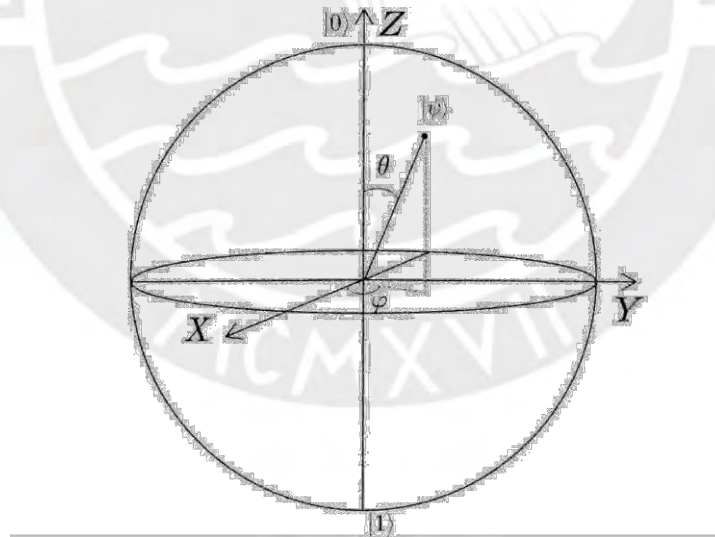
donde  $\vartheta$  y  $\varphi$  son números reales que representan los ángulos polar y azimutal, respectivamente (figura 1.1). Cada estado  $|\psi\rangle$  tiene asociado un vector  $r^-$ , denominado vector de Bloch. Este vector es calculado mediante los valores esperados de las matrices de Pauli  $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ :

$$r^- = (\langle\sigma_x\rangle, \langle\sigma_y\rangle, \langle\sigma_z\rangle) \quad (2.3)$$

con lo cual el vector de Bloch para la parametrización de la ecuación (2.2) es

$$r^- = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta) \quad (2.4)$$

En el caso de estado puros,  $|r^-| = 1$ , el estado se representa sobre la superficie de la esfera de Bloch.



**Figura 2.1:** Esfera de Bloch.

Una descripción mas general del estado de un cúbit, se obtiene mediante la matriz densidad.

Para el caso de estados puros

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (2.5)$$

y para estados mixtos

$$\rho = \sum_k \rho_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|, \quad \sum_k \rho_k = 1 \quad (2.6)$$

donde cada  $|\psi_k\rangle$  representa un estado puro y  $\rho_k$  representa la probabilidad de que el sistema se encuentre en dicho estado. Para cualquier estado de un cúbit, su matriz densidad puede escribirse como

$$\rho = \frac{1}{2}(I + r^- \cdot \bar{\sigma}) \quad (2.7)$$

donde  $\bar{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  y  $|r^-|$  determina si el estado es puro  $|r^-| = 1$  o mixto  $|r^-| < 1$ .

### 2.1.2. Transformaciones SU(2) sobre un cúbit

En computación cuántica es fundamental la manipulación de cúbits; es decir, debemos tener la capacidad de transformar un estado  $|0\rangle$  en uno de tipo superpuesto, como en la ecuación (1.2). Esto puede lograrse mediante transformaciones del estado  $|\psi\rangle$ , lo cual corresponde a rotaciones del vector de Bloch. Consideremos la siguiente transformación  $U_{\hat{n}}(\alpha) \in SU(2)$ :

$$U_{\hat{n}}(\alpha) = e^{i\frac{\alpha}{2}(\hat{n} \cdot \bar{\sigma})} \quad (2.8)$$

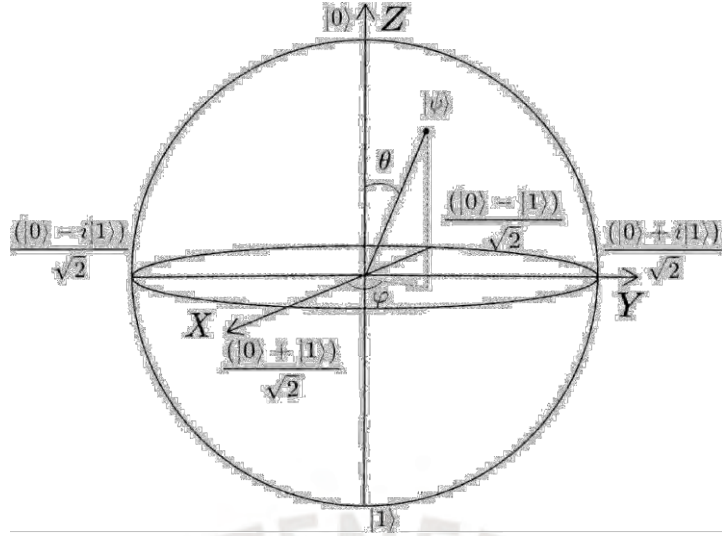
donde  $\hat{n}$  es un vector en  $\mathbb{R}^3$ , dado por  $\hat{n} = (\sin \vartheta_n \cos \varphi_n, \sin \vartheta_n \sin \varphi_n, \cos \vartheta_n)$ , y donde  $\vartheta_n$  y  $\varphi_n$  son los ángulos azimutal y polar en la esfera de Bloch. Además,  $\bar{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  corresponde a las matrices de Pauli, y  $\alpha$  es el ángulo de giro alrededor del vector  $\hat{n}$ .

Para ciertos valores de  $\hat{n}$  en la transformación  $U_{\hat{n}}(\alpha)$ , es posible obtener las transformaciones de rotación  $R_x$ ,  $R_y$  y  $R_z$ , las cuales generan rotaciones en la esfera de Bloch alrededor de los ejes X, Y y Z, respectivamente (Nielsen y Chuang, 2010):

$$R_x(\alpha) \equiv e^{-i\frac{\alpha}{2}\sigma_x} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & -i \sin \frac{\alpha}{2} \\ -i \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$R_y(\alpha) \equiv e^{-i\frac{\alpha}{2}\sigma_y} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & -\sin \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$R_z(\alpha) \equiv e^{-i\frac{\alpha}{2}\sigma_z} = \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\alpha}{2}} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$



**Figura 2.2:** Esfera de Bloch. Principales estados sobre el ecuador.

En la esfera de Bloch, los polos representan los estados base  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  mientras que los puntos del ecuador corresponden a superposiciones de la forma  $\frac{\cos \frac{\vartheta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\vartheta}{2} |1\rangle}{\sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\vartheta}{2} + \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}}}$  (figura 1.2).

A partir de las rotaciones de las ecuaciones (2.9-2.11), es posible obtener la transformación de rotación al rededor de cualquier eje sobre la esfera de Bloch  $U_{\hat{n}}(\alpha)$  (Nielsen y Chuang, 2010):

$$U_{\hat{n}}(\alpha) = R_z(\varphi_n)R_y(\vartheta_n)R_z(\alpha)R_y(-\vartheta_n)R_z(-\varphi_n) \quad (2.12)$$

No obstante, podemos usar dos parametrizaciones para descomponer cualquier transformación  $U \in SU(2)$  en función de los ángulos de Euler, tales como la ZYZ

$$U = R_z(\alpha_1)R_y(\alpha_2)R_z(\alpha_3) \quad (2.13)$$

o la YZY

$$U = R_y(\beta_1)R_z(\beta_2)R_y(\beta_3) \quad (2.14)$$

donde los parámetros  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) corresponden a los ángulos de giro. Dado el estado  $\rho$  de la ecuación (2.3), caracterizado por su vector de Bloch  $r^-$ , y una transformación unitaria  $U \in SU(2)$ , se obtiene un nuevo estado  $\rho'$  mediante la transformación unitaria

$$\rho \rightarrow \rho' = U\rho U^\dagger \quad (2.15)$$

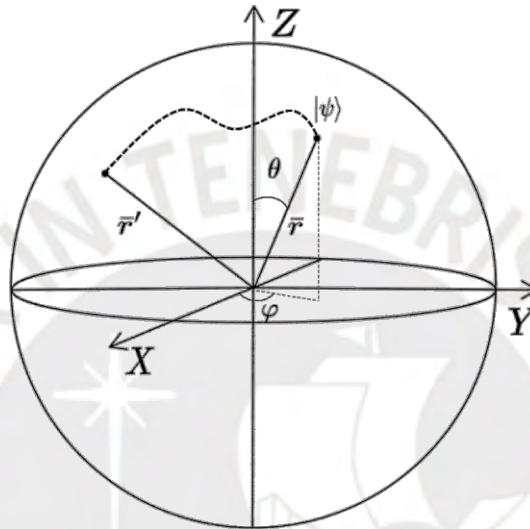
El estado transformado puede escribirse como

$$\rho' = \frac{1}{2}(I + r'^- \bar{\sigma}^-), \quad (2.16)$$

donde  $r^- = \text{Tr}(\rho' \bar{\sigma})$  es el vector de Bloch asociado al estado final después de aplicar la transformación  $U$ . Si consideramos la ecuación (2.12), los vectores  $r^-$  y  $r'^-$  se pueden relacionar mediante

$$r'^- = R r^- \quad (2.17)$$

donde  $R$  es una matriz del grupo  $SO(3)$ . Es decir, la transformación  $U \in SU(2)$  genera una rotación del vector de Bloch  $r^- \rightarrow r'^-$ , tal como se muestra en la figura 1.3.



**Figura 2.3:** Esfera de Bloch. Rotación del vector de Bloch.

### 2.1.3. Representación de dos cúbits

Si ahora tenemos dos cúbits, debemos considerar cuatro posibles resultados: 00, 01, 10 y 11. Es decir, el sistema de dos cúbits posee cuatro estados posibles en la base computacional:  $|00\rangle$ ,  $|01\rangle$ ,  $|10\rangle$  y  $|11\rangle$ . Además, el sistema puede encontrarse en una superposición de estos estados, dada por:

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle \quad (2.18)$$

Donde los  $\alpha_{ij}$  son números complejos, y su módulo cuadrado representa la probabilidad de medir el estado  $|ij\rangle$ . La representación geométrica de dos cúbits no es tan sencilla como en el caso de un solo cúbit; sin embargo, es posible realizar una parametrización para un estado general de dos cúbits Wharton, 2016, similar a la de la ecuación (1.2).

## 2.1.4. Mediciones proyectivas

Para realizar mediciones sobre un estado arbitrario, se introduce un conjunto de operadores de medición  $\pi_m$ , conocidos como proyectores, definidos como  $\pi_m = |m\rangle\langle m|$ , donde  $m$  etiqueta el posible resultado de la medición. Si  $|\psi\rangle$  denota el estado del sistema inmediatamente antes de la medición, la probabilidad de obtener el resultado  $m$  está dada por (Kasirajan, 2021):

$$p_m = \langle \psi | \pi_m | \psi \rangle \quad (2.19)$$

y el estado luego de la medición es:

$$|\psi'\rangle = \frac{\pi_m |\psi\rangle}{\sqrt{p_m}} \quad (2.20)$$

Si consideramos los operadores de medición en la base computacional de un cubit,  $\pi_0 = |0\rangle\langle 0|$ ,  $\pi_1 = |1\rangle\langle 1|$  y la ecuación (1.1), las probabilidades de medir 0 o 1 son:

$$p_0 = \langle \psi | \pi_0 | \psi \rangle = |a|^2 \quad (2.21)$$

$$p_1 = \langle \psi | \pi_1 | \psi \rangle = |b|^2 \quad (2.22)$$

Para el caso de un sistema de dos cúbits, se puede definir un conjunto de operadores de medición  $\pi_{ij}$  asociados a la base computacional, dados por  $\pi_{00} = |00\rangle\langle 00|$ ,  $\pi_{10} = |10\rangle\langle 10|$ ,  $\pi_{01} = |01\rangle\langle 01|$  y  $\pi_{11} = |11\rangle\langle 11|$ . Si se desea medir únicamente el primer cúbit en el estado  $|0\rangle$ , independientemente del estado del segundo cúbit, se deben considerar los proyectores asociados a los resultados  $|00\rangle$  y  $|01\rangle$ . En este caso, el operador de medición efectivo se define como (Kasirajan, 2021):

$$\pi_0^{(0)} = \pi_{00} + \pi_{01} = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| \quad (2.23)$$

$$\pi_0^{(0)} = |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1| \quad (2.24)$$

$$\pi_0^{(0)} = |0\rangle\langle 0| \otimes 1 \quad (2.25)$$

para medir el primer cubit en el estado  $|1\rangle$

$$\pi_1^{(0)} = \pi_{10} + \pi_{11} = |10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11| \quad (2.26)$$

$$\pi_1^{(0)} = |1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1| \quad (2.27)$$

$$\pi_1^{(0)} = |1\rangle\langle 1| \otimes 1 \quad (2.28)$$

Donde el super índice  $k$  del proyector  $\pi_i^{(k)}$  representa el cubit sobre el cual se va a medir, siendo la numeración del primer cubit como 0 y del segundo cubit como 1. Los últimos resultados nos indican que si queremos medir la probabilidad del primer cubit cuando se encuentra en el estado  $|0\rangle$  es igual a la suma de las probabilidades de medir  $|00\rangle$  y  $|01\rangle$

$$p_0^{(0)} = p_{00} + p_{01}. \quad (2.29)$$

De manera similar para el caso de medir el primer cubit cuando se encuentra en el estado  $|1\rangle$

$$p_1^{(0)} = p_{10} + p_{11}. \quad (2.30)$$

### 2.1.5. Tomografía de 1 cubit

La tomografía de un cubit corresponde a la medición del vector de Bloch. Cada componente del vector de Bloch  $r_i$  (ecuación 2.4) corresponde al resultado de un par específico de mediciones proyectivas (Altepeter et al., 2005):

$$r_1 = \langle \psi | \sigma_x | \psi \rangle = \langle \psi | (\pi_1 - \pi_1^\perp) | \psi \rangle \quad (2.31)$$

$$r_2 = \langle \psi | \sigma_y | \psi \rangle = \langle \psi | (\pi_2 - \pi_2^\perp) | \psi \rangle \quad (2.32)$$

$$r_3 = \langle \psi | \sigma_z | \psi \rangle = \langle \psi | (\pi_3 - \pi_3^\perp) | \psi \rangle \quad (2.33)$$

Donde  $\pi_i$  son los proyectores formados por la base  $\{|\phi_i\rangle\}$  y los  $\pi_i^\perp$  formados por la base ortogonal a la anterior, de modo que:

$$|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

$$|\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ +i \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

$$|\phi_3\rangle = |0\rangle \quad (2.36)$$

En el contexto de los fotones, el vector  $r$  corresponde al llamado vector de Stokes, compuesto por los parámetros de Stokes  $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3)$ , y la base en la cual se los calcula es

$$|D\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.37)$$

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ +i \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

$$|H\rangle = |0\rangle \quad (2.39)$$

---

donde  $|H\rangle$  es la polarización horizontal,  $|D\rangle$  es la polarización diagonal y  $|R\rangle$  es la polarización circular.

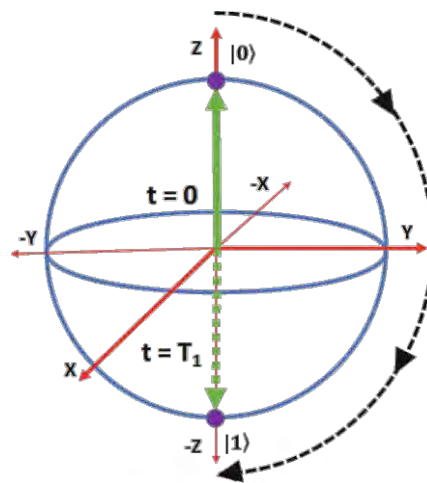
## 2.2. La computadora cuántica de IBM

### 2.2.1. Funcionamiento básico

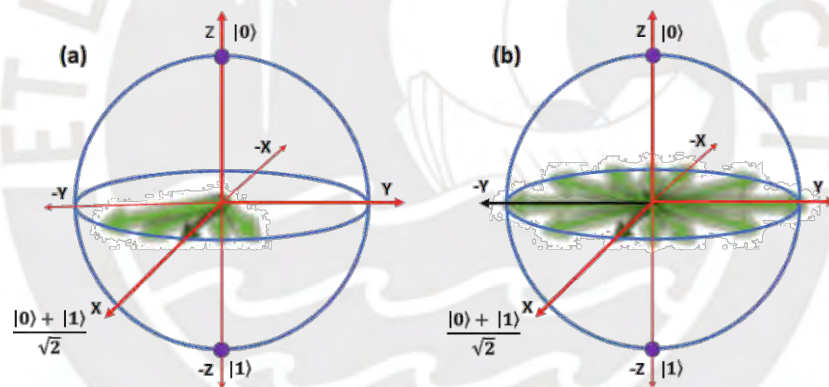
Los procesadores cuánticos de IBM se basan en cubits superconductores. Estos cubits se originan en circuitos eléctricos contruidos con materiales superconductores como aluminio o niobio, depositados sobre sustratos de silicio o zafiro mediante técnicas de microfabricación y litografía (Manenti y Motta, 2023). Cada cubit se basa en una unión Josephson, un delgado aislante que separa dos superconductores, permitiendo que los pares de Cooper tunelen y generen niveles energéticos discretos que representan los estados  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ . Estos circuitos superconductores requieren temperaturas ultrabajas (10–20 mK) alcanzadas con refrigeradores de dilución (Stancil y Byrd, 2022), para mantener la superconductividad, mitigar la decoherencia causada por excitación térmica y preservar la coherencia de los estados cuánticos. La manipulación y lectura de los cúbits se realiza mediante pulsos de microondas enviados a resonadores superconductores acoplados, permitiendo rotaciones controladas y la detección de los estados (Bardin et al., 2021; Naeij, 2025).

No obstante, uno de los principales desafíos en el desarrollo de computadoras cuánticas es la decoherencia, un fenómeno mediante el cual los cúbits pierden su estado cuántico debido a interacciones con el entorno. Esta pérdida de coherencia limita el tiempo durante el cual un cubit puede mantener información cuántica útil. Para caracterizar este comportamiento se emplean dos métricas fundamentales:  $T_1$  (tiempo de relajación) y  $T_2$  (tiempo de decoherencia).

El tiempo  $T_1$  corresponde al tiempo que tarda un cubit en decaer desde su estado excitado hasta su estado base (figura 2.4). Por su parte, el tiempo  $T_2$  (figura 2.5) cuantifica cuánto tiempo puede mantenerse la superposición de estados antes de perderse debido a perturbaciones externas (Kasirajan, 2021). Ambos tiempos constituyen indicadores clave de la calidad y estabilidad de un cubit y, en los procesadores cuánticos actuales de IBM como Eagle, Heron y Nighthawk, suelen encontrarse en la escala de los microsegundos (IBM Quantum, 2025).



**Figura 2.4:** Caracterización del tiempo de relajación. El cubit se prepara en el estado  $|0\rangle$ , se le aplica una transformación  $X$  y se espera un tiempo para medir la probabilidad de que el estado se encuentre en  $|1\rangle$ , se realiza un ajuste exponencial y se obtiene el tiempo  $T_1$  de este ajuste.



**Figura 2.5:** Tiempo de decoherencia  $T_2$ . (a) El cubit se encuentra en un estado superpuesto (flecha verde) y comienza a perder coherencia. (b) El cubit ha perdido toda coherencia, es decir en promedio el vector de Bloch (flecha verde) no tiene una dirección definida. El tiempo que le toma al cubit en perder toda coherencia es llamado tiempo de decoherencia  $T_2$ .

IBM dispone de una plataforma en la nube llamada IBM Quantum, la cual permite que cualquier persona con acceso a internet pueda interactuar de forma remota con una computadora cuántica. Esta interacción se realiza mediante un entorno de codificación denominado Qiskit (Aleksandrowicz et al., 2019), un kit de desarrollo de software basado en Python que, además, puede integrarse con Jupyter Notebooks.

Todas estas características hacen que los procesadores cuánticos constituyan una alternativa versátil en comparación con un laboratorio experimental tradicional.

### 2.2.2. Implementación de compuertas cuánticas en cúbits superconductores

La manipulación de cúbits es esencial para el funcionamiento de los algoritmos cuánticos. Esta manipulación se realiza mediante el uso de compuertas cuánticas, las cuales modifican el estado de los cúbits. Los sistemas cuánticos de IBM incorporan compuertas cuánticas básicas que actúan sobre uno o dos cúbits. En particular, el backend utilizado en este trabajo cuenta con las compuertas de un cúbit: *ID* (compuerta identidad), *RZ* (compuerta de rotación), *X* y *SX*, las cuales están asociadas a las transformaciones:

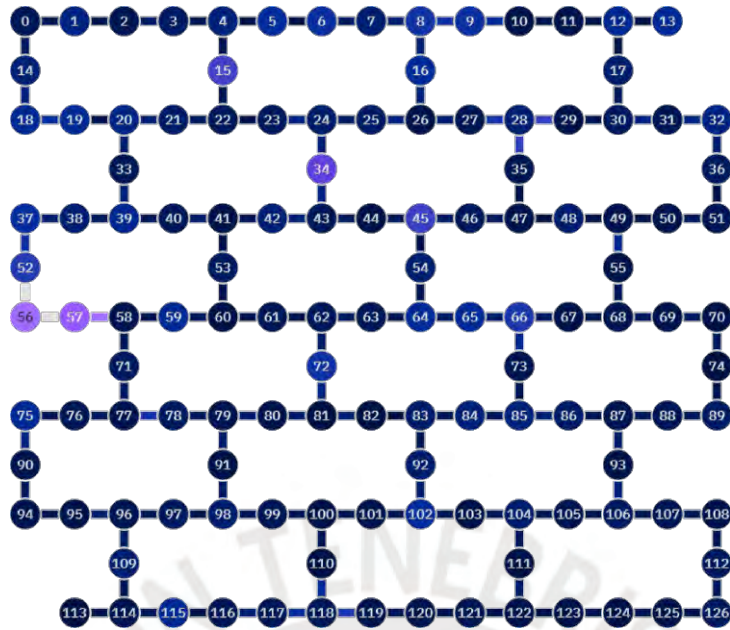
$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

$$SX = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Además, posee la compuerta *ECR*, la cual actúa sobre 2 cúbits:

$$ECR = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

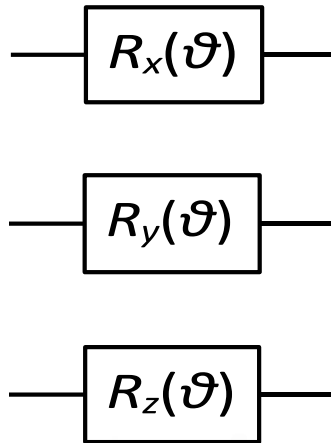
Con estas compuertas básicas, los sistemas cuánticos de IBM pueden adaptar (transpilar) cualquier circuito cuántico que diseñemos. Sin embargo, si empleamos compuertas cuánticas distintas de las mencionadas, o utilizamos compuertas que involucren 2 cúbits que no estén conectados físicamente (figura 2.6), entonces el transpilador de IBM implementará una secuencia de compuertas cuánticas básicas para reescribir el circuito deseado. Este proceso, no obstante, incrementa el tiempo de ejecución del circuito y reduce la fidelidad del estado cuántico debido a la decoherencia.



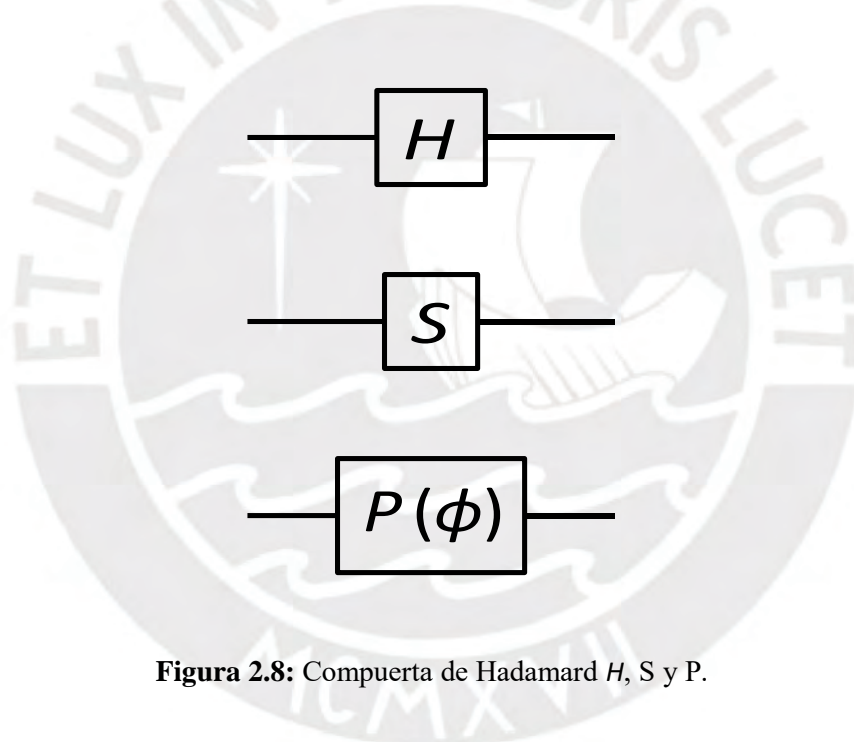
**Figura 2.6:** Mapa de conectividad de los cúbits del backend `ibm_sherbrooke`. Cada nodo representa un cúbit físico y cada enlace indica la posibilidad de implementar una compuerta de dos cúbits entre pares específicos, de acuerdo con la conectividad del dispositivo. La escala de color representa métricas experimentales de error obtenidas durante la calibración del hardware, donde las tonalidades violetas indican mayores tasas de error, mientras que las tonalidades azules corresponden a un menor error y, por tanto, a una mayor fidelidad. (AbuGhanem, 2025).

En un algoritmo cuántico podemos emplear diversas compuertas cuánticas, las cuales operan de manera análoga a las compuertas lógicas de las computadoras clásicas, pero con la capacidad de manipular estados cuánticos. Las transformaciones de rotación de las ecuaciones (2.9-2.11) tienen su correspondiente representación como compuertas cuánticas, tal como se muestra en la figura 2.7.

Con el objetivo de evidenciar cómo compuertas estándar pueden implementarse a partir de rotaciones elementales y factores de fase, se presentan a continuación algunos ejemplos de descomposición de compuertas. En particular, al considerar el producto de dos rotaciones acompañado de un factor de fase global, de la forma  $-i R_x(\pi)R_y(\pi/2)$ , se obtiene una transformación equivalente a la compuerta Hadamard  $H$ , la cual genera los estados de superposición  $\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$  y  $\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$  a partir de los estados  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ , respectivamente. De manera análoga, la transformación  $e^{i\phi/2}R_z(\phi)$  es equivalente a la compuerta de fase  $P(\phi)$ , mientras que la combinación  $e^{i\pi/4}R_z(\pi/2)$  reproduce la acción de la compuerta  $S$ .



**Figura 2.7:** Compuertas cuánticas  $R_x(\vartheta)$ ,  $R_y(\vartheta)$  y  $R_z(\vartheta)$ , representando rotaciones alrededor de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  del espacio de Bloch.



**Figura 2.8:** Compuerta de Hadamard  $H$ ,  $S$  y  $P$ .

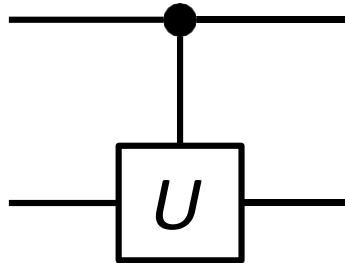
Ahora podemos estudiar las compuertas que involucran dos cúbits, entre las cuales destacan las compuertas controladas, ya que incorporan un cúbit de control. En este tipo de compuertas, una transformación  $U$  se aplica sobre el segundo cúbit únicamente cuando el cúbit de control se encuentra en el estado  $|1\rangle$ . La transformación se describe como:

$$U_{ctrl} = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes U \quad (2.43)$$

Donde la transformación  $U$  puede ser una transformación arbitraria del tipo  $SU(2)$ . La figura

---

2.9 muestra la compuerta control- $U$  aplicada sobre el segundo cubit, siendo el primer cubit el de control.



**Figura 2.9:** Compuerta controlada  $U$ , donde el qubit de control (en el primer registro) controla la aplicación de la compuerta  $U$  sobre el qubit objetivo (en el segundo registro).

### 2.2.3. Ejecución de un circuito cuántico

IBM ofrece acceso a sus backends, los cuales pueden ser simuladores o computadoras cuánticas reales; sin embargo, los usuarios gratuitos disponen solo de 10 minutos de acceso. En este trabajo se ha utilizado el backend `ibm_sherbrooke`, una computadora cuántica de 127 cúbits superconductores basada en el procesador Eagle r3, con tiempos promedio  $T_1$  y  $T_2$  de  $275.67\mu\text{s}$  y  $190.58\mu\text{s}$ , respectivamente (AbuGhanem, 2025).

La estadística de los resultados obtenidos en una computadora cuántica depende del número de shots, los cuales representan la cantidad de veces que un circuito es ejecutado. Es decir, la precisión de las distribuciones de probabilidad resultantes depende directamente del número de shots. Cada ejecución de un circuito con una cantidad fija de shots constituye un experimento. El número máximo de experimentos que pueden enviarse simultáneamente a la computadora cuántica es 100. Por lo tanto, existe una limitación en los recursos disponibles, y es necesario optimizar la cantidad de shots requerida para cada experimento, dado que un mayor número de shots implica un mayor tiempo de cómputo.

Para determinar la cantidad adecuada de shots, podemos realizar la siguiente estimación: Sea  $\gamma$  el resultado de cada medición en la base computacional, el cual sigue una distribución de tipo Bernoulli (KET.G, 2021). La probabilidad de medir  $|1\rangle$  es  $p$ , y  $1 - p$  es la probabilidad de medir  $|0\rangle$ . El valor esperado de  $\gamma$  es  $p$  y su desviación estándar es  $\sqrt{p(1 - p)}$ . Si se consi-

dera un gran número de mediciones —es decir, shots— la desviación estándar de la media es  $\sqrt{p(1-p)/n}$ . Además, la media de las mediciones sigue una distribución normal con media  $p$  y desviación estándar  $\sqrt{p(1-p)/n}$ . Podemos entonces establecer el siguiente intervalo de confianza para la media de  $\gamma$  a un nivel de confianza  $c$

$$\left[ \hat{u} - z_{\frac{1-c}{2}} \frac{\sqrt{p(1-p)}}{n}, \hat{u} + z_{\frac{1-c}{2}} \frac{\sqrt{p(1-p)}}{n} \right] \quad (2.44)$$

donde  $\hat{u}$  representa un estimador para la media de  $\gamma$ ,  $z_{\frac{1-c}{2}}$  es el nivel crítico de confianza  $c$  para una distribución normal con media 0 y desviación estándar de 1. El error en la media de  $\gamma$  se puede aproximar a:

$$\epsilon \approx z_{\frac{1-c}{2}} \frac{\sqrt{p(1-p)}}{n} \quad (2.45)$$

De la última ecuación podemos determinar el número de shots en función del error de la media y dar un valor máximo para la desviación estándar con  $p = \frac{1}{2}$ .

$$n \approx \left( \frac{z_{\frac{1-c}{2}}}{2\epsilon} \right)^2 \quad (2.46)$$

Para un nivel de confianza del 95 %, el valor crítico es  $z_{0,025} = 1,96$ , con un error  $\epsilon$  entre 2 % - 3 % podemos estimar un número de shots  $n = 2000$ .

#### 2.2.4. Tomografía de un cúbit en la computadora cuántica

Si tenemos el estado de un cúbit descrito por la ecuación (1.2), al cual se le aplica una serie de compuertas cuánticas representadas por las transformaciones  $U_i$ , tal que  $U = U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 \cdot \dots$ , el estado final será  $|\Psi\rangle = U|\psi\rangle$ . Si deseamos reconstruir la matriz densidad de este estado final, debemos calcular el vector de Bloch (ecuación 1.25). Para ello, primero recordemos que al medir la salida de un circuito cuántico se obtiene lo siguiente:

$$p_i = \langle \Psi | i \rangle \langle i | \Psi \rangle \quad (2.47)$$

Siendo  $i = 0, 1$ .

Si ahora queremos contruir los proyectores de las ecuaciones (1.27-1.29), debemos aplicar una transformación a los proyectores de la siguiente forma:

$$\langle \Psi | T \cdot |i\rangle \langle i| \cdot T^\dagger | \Psi \rangle \quad (2.48)$$

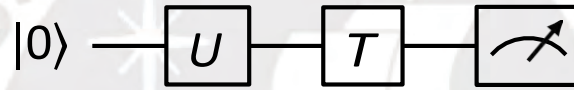
Notar que si  $T = 1$  recuperamos la ecuación (1.45), con los cuál obtenemos  $p_0, p_1$  y el parámetro  $r_3 = p_0 - p_1$ . Si ahora  $T = H, T = S^\dagger \cdot H$  obtenemos los parámetros  $r_1$  y  $r_2$ , respectivamente. De manera que los parámetros de  $r$  en función de las compuertas cuánticas serian:

$$r_1 = \langle \Psi | H \cdot |0\rangle\langle 0| \cdot H | \Psi \rangle - \langle \Psi | H \cdot |1\rangle\langle 1| \cdot H | \Psi \rangle \quad (2.49)$$

$$r_2 = \langle \Psi | S^\dagger \cdot H \cdot |0\rangle\langle 0| \cdot H \cdot S \cdot | \Psi \rangle - \langle \Psi | S^\dagger \cdot H \cdot |1\rangle\langle 1| \cdot H \cdot S \cdot | \Psi \rangle \quad (2.50)$$

$$r_3 = \langle \Psi | 0\rangle\langle 0 | \Psi \rangle - \langle \Psi | 1\rangle\langle 1 | \Psi \rangle \quad (2.51)$$

Por lo tanto, podemos implementar la tomografía de un estado arbitrario  $|\Psi\rangle$  mediante el circuito cuántico de la figura 1.10, donde se muestra la compuerta  $T$ , la cual genera los proyectores mencionados anteriormente. La compuerta  $T$  representa distintas compuertas cuánticas según los parámetros  $r$  que se necesiten calcular (tabla 1.1).



**Figura 2.10:** Circuito cuántico para realizar la tomografía de un estado.

Compuerta T	Valor esperado
	$\langle \sigma_x \rangle$
	$\langle \sigma_y \rangle$
	$\langle \sigma_z \rangle$

**Tabla 2.1:** Compuerta G necesaria para indicar la polarización inicial que tendrá el cúbit.

Además, con ayuda de la tomografía podemos estimar el error asociado a los parámetros angulares de las compuertas cuánticas luego de ejecutar un experimento en la computadora cuántica. En particular podemos estimar el error de la compuerta de fase  $P(\phi)$ . Si aplicamos la compuerta a un estado superpuesto  $\frac{|0\rangle + e^{i\phi}|1\rangle}{\sqrt{2}}$ , obtenemos:

$$\frac{|0\rangle + e^{i\phi}|1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.52)$$

Ahora podemos calcular los valores de esperados de Pauli

$$\langle \sigma_x \rangle = \cos \phi \quad (2.53)$$

$$\langle \sigma_y \rangle = \sin \phi \quad (2.54)$$

Donde podemos denotar como  $u = \langle \sigma_x \rangle$  y  $v = \langle \sigma_y \rangle$ , de tal manera que podemos calcular  $\phi$  como:

$$\phi = \arctan \frac{v}{u} \quad (2.55)$$

Estimamos el error de  $\phi$  a partir de considerar los errores asociados a los parámetros  $u$  y  $v$  luego de la ejecución de un experimento en la computadora cuántica y considerando una propagación de errores:

$$\sigma_\phi = \frac{\sqrt{v^2 \sigma_u + u^2 \sigma_v}}{u^2 + v^2} \quad (2.56)$$

Donde  $\sigma_u$  y  $\sigma_v$  corresponden a los errores de los valores esperados del  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ , respectivamente.

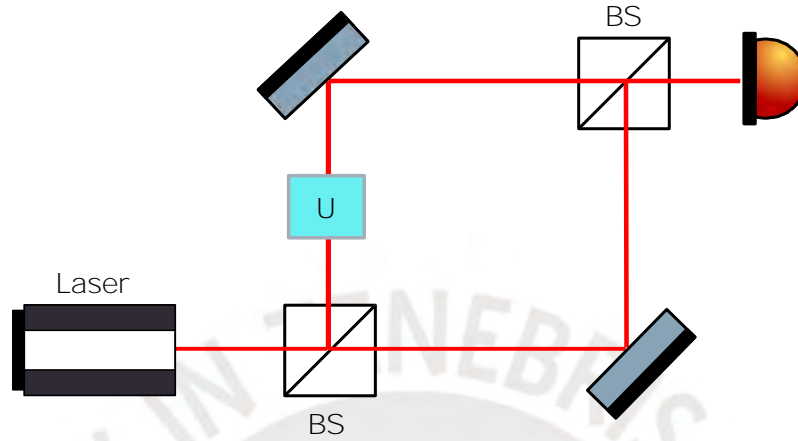
## 2.3. Fase de Pancharatnam

La fase de Pancharatnam fue introducida originalmente por S. Pancharatnam en el contexto de la óptica clásica de la polarización (Pancharatnam, 1956). En su formulación, Pancharatnam definió una fase relativa entre estados de polarización no ortogonales, asociada a la condición de interferencia constructiva entre ellos. Si bien esta fase corresponde a la fase total adquirida en el proceso, su análisis contiene una componente de carácter geométrico que se manifiesta en ciertos experimentos de polarización y que será examinada en detalle en la siguiente sección.

### 2.3.1. Interferómetro de Mach-Zhender

Si consideramos dos estados no ortogonales  $|i\rangle$  y  $|f\rangle$  tal que  $|f\rangle = U|i\rangle$ , donde  $U$  es una transformación arbitraria. La fase de Pancharatnam relativa es  $\Phi_P = \arg(\langle i|f\rangle)$ . Basados en el trabajo de Pancharatnam es posible hacer un estudio interferométrico para observar esta fase al considerar los estados no ortogonales mencionados  $|i\rangle$  y  $|f\rangle$ . Para esto, consideremos el interferómetro Mach-Zhender, donde un estado  $|i\rangle$  se divide en dos caminos debido a un divisor

de haz (BS). En uno de los brazos se añade una transformación  $U$  que actúa sobre el estado  $|i\rangle$ , se regula el desfase entre ambos los caminos ópticos de ambos brazos  $\phi$  y se recombina los haces en un segundo divisor de haz (BS).



**Figura 2.11:** Interferómetro de Mach Zehnder. Se muestra un laser, el cual es dividido por un Beam splitter (BS) en 2 partes, para luego ser recombinados en otro Beam splitter (BS).

La intensidad a la salida del interferómetro es:

$$I = |e^{i\phi}|i\rangle + |f\rangle|^2 = 2 + 2|\langle i|f\rangle| \cos(\phi - \arg(\langle i|f\rangle)) \quad (2.57)$$

Este resultado muestra que el máximo de interferencia ocurre cuando:

$$\Phi_P = \phi = \arg(\langle i|f\rangle) \quad (2.58)$$

Es decir, la fase de Pancharatnam se manifiesta como un corrimiento en el interferograma.

## 2.4. Fase geométrica

En 1984 Berry (Berry, 1984), mostró que un sistema cuántico sometido a una evolución cíclica adiabática adquiere una fase dinámica (asociada a la energía del sistema y el tiempo de evolución) y una fase adicional que depende de la trayectoria seguida en el espacio de parámetros. Mas adelante, el concepto fue generalizado para evoluciones no adiabáticas y no necesariamente cíclicas (Samuel y Bhandari, 1988). Esta fase depende exclusivamente de la geometría de la trayectoria que recorre el estado en el espacio de parámetros, lo que dio lugar a la denominación de fase geométrica. Por lo tanto, según Berry, la fase total o de Pancharatnam se puede

descomponer en una fase dinámica y una fase geométrica:

$$\phi_P = \phi_g + \phi_{din} \quad (2.59)$$

A continuación mostraremos como surge esta fase geométrica. Consideremos el experimento de Pancharatnam, donde un haz de luz pasa por  $N$  polarizadores, donde cada polarizador actúa como  $|\psi_k\rangle\langle\psi_k|$  con  $k = 1, 2, 3, \dots, N$ . Si el estado inicial es  $|\psi_0\rangle$ , el estado final resulta:

$$|\psi_f\rangle = |\psi_N\rangle\langle\psi_N|\psi_{N-1}\rangle\dots\langle\psi_2|\psi_1\rangle\langle\psi_1|\psi_0\rangle \quad (2.60)$$

La fase relativa entre  $|\psi_0\rangle$  y  $|\psi_f\rangle$  es:

$$\Phi = \arg\langle\psi_0|\psi_f\rangle = \arg\langle\psi_0|\psi_N\rangle\langle\psi_N|\psi_{N-1}\rangle\dots\langle\psi_2|\psi_1\rangle\langle\psi_1|\psi_0\rangle \quad (2.61)$$

El argumento de la ecuación 2.58 corresponde a una invariante de Bargmann (Bargmann, 1964), es decir no cambia bajo transformaciones de fase global  $e^{i\alpha}$ . Además, esa ecuación puede ser escrita como

$$\Phi = \arg \langle\psi_0|\psi_N\rangle \prod_{k=0}^{N-1} \langle\psi_{k+1}|\psi_k\rangle \quad (2.62)$$

donde la ecuación anterior puede ser reescrita

$$\Phi = \arg\langle\psi_0|\psi_N\rangle - \sum_{k=0}^{N-1} \arg\langle\psi_k|\psi_{k+1}\rangle \quad (2.63)$$

El primer termino de la ecuación 2.60 muestra la fase total y el segundo termino corresponde a la fase dinámica. De modo que, si consideramos la ecuación 2.56, la ecuación 2.60 es

$$\Phi = \arg\langle\psi_0|\psi_N\rangle - \sum_{k=0}^{N-1} \arg\langle\psi_k|\psi_{k+1}\rangle = \Phi_P - \Phi_{din} = \Phi_g \quad (2.64)$$

Por lo tanto, esta fase se denomina fase geométrica, ya que, como se mencionó anteriormente, es invariante bajo transformaciones de fase globales y depende únicamente de la trayectoria descrita en el espacio proyectivo de estados. Posteriormente, Mukunda y Simon (Mukunda y Simon, 1993) desarrollaron un enfoque cinemático, el cual permite definir la fase geométrica en evoluciones generales, sin conocimiento del Hamiltoniano.

Si consideramos los estados  $|\psi(s)\rangle \in H$ ,  $s \in [s_1, s_2]$ . Dado los estados inicial  $|i\rangle$  y final  $|f\rangle$  de una curva  $C_0$ :  $|\psi(s_1)\rangle$  y  $|\psi(s_2)\rangle$ , respectivamente. La fase de Pancharatnam entre dichos estados es:

$$\Phi_P = \arg\langle\psi(s_1)|\psi(s_2)\rangle \quad (2.65)$$

Y la fase geométrica adquirida por el estado es:

$$\Phi_g = \arg\langle\psi(s_1)|\psi(s_2)\rangle - \text{Im} \int_{s_1}^{s_2} \langle\psi(s_1)|\dot{\psi}(s_2)\rangle \quad (2.66)$$

$$\Phi_g = \Phi_P - \Phi_{dyn} \quad (2.67)$$

Donde la ecuación 2.63 es invariante bajo transformaciones  $U(1)$  (llamado gauge)

$$|\psi(s)\rangle \rightarrow |\psi'(s)\rangle = e^{i\alpha(s)}|\psi(s)\rangle \quad (2.68)$$

Si usamos  $|\psi'(s)\rangle$  en la ecuación 2.63 la curva  $C_0$  se transforma en otra curva  $C'_0$  y además:

$$\Phi'_g = \arg\langle\psi'(s_1)|\psi'(s_2)\rangle - \text{Im} \int_{s_1}^{s_2} \langle\psi'(s_1)|\dot{\psi}'(s_2)\rangle \quad (2.69)$$

$$\Phi'_g = \arg\langle\psi(s_1)|\psi(s_2)\rangle + (\alpha(s_1) - \alpha(s_2)) - \text{Im} \int_{s_1}^{s_2} \langle\psi(s_1)|\dot{\psi}(s_2)\rangle - (\alpha(s_1) - \alpha(s_2)) \quad (2.70)$$

$$\Phi'_g = \Phi_P - \Phi_{din} \quad (2.71)$$

por lo tanto:

$$\Phi'_g = \Phi_g \quad (2.72)$$

Este resultado, nos permite elegir el gauge adecuado para poder anular la fase dinámica  $\Phi_{dyn}$ , esto es cuando  $\alpha(s)$  cumple la condición:

$$\text{Im}\langle\psi(s_1)|\dot{\psi}(s_2)\rangle + \dot{\alpha}(s) = 0 \quad (2.73)$$

Considerando el gauge que cumpla la condición anterior, se demuestra que:

$$\Phi_g = \Phi_P \quad (2.74)$$

Es decir, es posible medir esta fase geométrica con un método interferométrico similar a como se mide la fase de Pancharatnam.

# Estudio de la fase geométrica por métodos interferométricos

En este capítulo se estudia la medición de fases geométricas en sistemas ópticos mediante arreglos interferométricos. En particular, se analizan esquemas basados en el interferómetro de Mach–Zehnder, los cuales permiten acceder a fases relativas asociadas a la evolución de estados de polarización. Estos arreglos constituyen la base experimental para la medición de la fase de Pancharatnam y de la fase geométrica, y sirven como punto de partida para la implementación de esquemas análogos mediante circuitos cuánticos.

## 3.1. Codificación de un cúbit en polarización y camino

Un haz de luz posee distintos grados de libertad que pueden ser utilizados para codificar información, entre los cuales destacan el camino (asociado a las trayectorias espaciales que sigue la luz dentro de un sistema óptico) y la polarización (relacionada con la orientación del campo eléctrico). Cada uno de estos grados de libertad puede emplearse para codificar un cúbit. En particular, se consideran los estados ortogonales  $\{|x\rangle, |y\rangle\}$  para el camino y  $\{|h\rangle, |v\rangle\}$  para la polarización. De este modo, el sistema completo se describe como un sistema de dos cúbits, cuyo estado total puede representarse en el espacio producto de ambos grados de libertad mediante el formalismo de Dirac:

$$|\psi\rangle = \alpha_1|xh\rangle + \alpha_2|xv\rangle + \alpha_3|yh\rangle + \alpha_4|yv\rangle \quad (3.1)$$

donde los coeficientes  $\alpha_i \in \mathbb{C}$ . La ecuación (3.1) describe el estado más general del sistema, asociado a los grados de libertad de camino y polarización de un haz láser. En lo que sigue, se analizará la acción de distintos elementos ópticos sobre estas bases, con el objetivo de describir la evolución del estado a lo largo de los arreglos interferométricos considerados en este trabajo.

## 3.2. Interferómetro para medir la fase de Pancharatnam

En la literatura se ha reportado la medición de la fase de Pancharatnam mediante interferómetros del tipo Mach–Zehnder (Loredo et al., 2009), como el mostrado en la figura 3.1. En este arreglo experimental se emplea un láser He–Ne cuya luz, tras atravesar un polarizador y un expansor de haz, se divide en dos haces que posteriormente son preparados con polarizaciones ortogonales: uno con polarización horizontal y el otro con polarización vertical.

Ambos haces ingresan a un interferómetro Mach–Zehnder. En una de las ramas del interferómetro se colocan tres placas retardadoras (Q: placa de cuarto de onda, H: placa de media onda), dispuestas de tal manera que permiten implementar una transformación arbitraria del grupo  $SU(2)$  sobre el estado de polarización. Como consecuencia de esta transformación, el haz polarizado horizontalmente adquiere una fase de Pancharatnam  $\Phi_P = \delta$ , mientras que el haz con polarización vertical adquiere una fase opuesta  $\Phi_P = -\delta$ , de modo que la fase relativa entre ambos haces es  $2\delta$ . Finalmente, este desfase relativo se determina a partir del interferograma registrado por una cámara CCD.

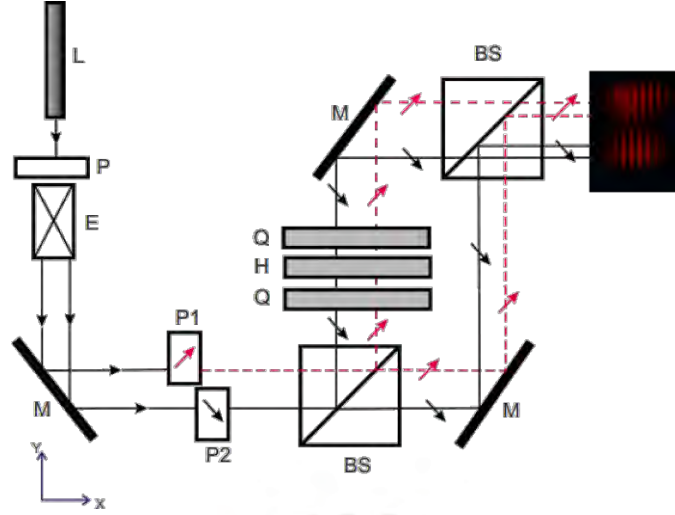
### 3.2.1. Descripción de los dispositivos ópticos

En la figura 3.1 se muestran todos los elementos ópticos empleados en el experimento. Los elementos que actúan sobre el espacio de camino son el divisor de haz (beam splitter, BS) y los espejos (M), a los cuales se les asocian las siguientes transformaciones:

$$BS = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Las placas  $Q$  y  $H$  corresponden a placas retardadoras de cuarto de onda y de media onda, respectivamente. Estos elementos actúan sobre el espacio de polarización, modificando el estado de polarización del haz láser. La secuencia de placas retardadoras mostrada en la figura 3.1 permite implementar cualquier transformación perteneciente al grupo  $SU(2)$  sobre el estado de polarización.



**Figura 3.1:** Arreglo interferométrico usado para determinar la fase de Pancharatnam, desarrollado por Loredó et al. (Loredó et al., 2009), se muestra el haz que proviene de un láser He-Ne (L) pasa por un polarizador (P) y un expansor de haz (E), se obtiene dos haces, uno de ellos pasa por un polarizador (P1) y el otro por un segundo polarizador (P2), orientado ortogonalmente respecto del primero. Los dos haces ingresan a un interferómetro del tipo Mach-Zehnder (BS: beam splitter, M: espejo), en la rama de la izquierda se ubica tres placas retardadoras (Q: placa de cuarto de onda, H: placa de media onda), de modo que se realiza cualquier transformación SU(2) deseada. Esta transformación añade una fase de Pancharatnam  $\Phi_p = \delta$  al haz con polarización horizontal y una fase opuesta  $\Phi_p = -\delta$  al haz con polarización vertical, de modo que la fase relativa es igual a  $2\delta$ . Por último se puede medir este desfase relacionado a  $\delta$  con una cámara CCD.

En particular, la parametrización empleada en el experimento corresponde a la denominada descomposición  $YZY$ , dada por

$$U(\xi, \eta, \zeta) = \exp -i\frac{\xi}{2}\hat{\sigma}_y \exp i\frac{\eta}{2}\hat{\sigma}_z \exp -i\frac{\zeta}{2}\hat{\sigma}_y \quad (3.4)$$

A partir de esta parametrización y utilizando ángulos de Euler (Englert et al., 2001), es posible expresar los ángulos de orientación de las placas retardadoras como

$$U(\xi, \eta, \zeta) = Q \frac{-3\pi + 2\xi}{4} H \frac{\xi - \eta - \zeta - \pi}{4} Q \frac{\pi - 2\zeta}{4} \quad (3.5)$$

Alternativamente, puede emplearse otra parametrización, definida en la esfera de Bloch, conocida como descomposición  $ZYZ$ :

$$U(\beta, \gamma, \delta) = \exp i\left(\frac{\delta + \gamma}{2}\right)\hat{\sigma}_z \exp(-i\beta\hat{\sigma}_y) \exp i\left(\frac{\delta - \gamma}{2}\right)\hat{\sigma}_z \quad (3.6)$$

la cual admite la representación matricial

$$U(\beta, \gamma, \delta) = \begin{pmatrix} e^{i\delta} \cos \beta & -e^{i\gamma} \sin \beta \\ e^{-i\gamma} \sin \beta & e^{-i\delta} \cos \beta \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Esta parametrización permite identificar de manera directa la fase de Pancharatnam  $\delta$ . En efecto, si se considera un estado inicial  $|i\rangle$ , el estado final viene dado por  $|f\rangle = U(\beta, \gamma, \delta)|i\rangle$ , y la fase de Pancharatnam se obtiene a partir de la fase relativa

$$\Phi_P = \arg\langle i|f\rangle \quad (3.8)$$

$$\Phi_P = \arg(e^{i\delta} \cos \beta) \quad (3.9)$$

$$\Phi_P = \delta + \arg(\cos \beta) \quad (3.10)$$

Por lo tanto, para valores de  $\beta$  tales que  $\cos \beta > 0$ , la fase de Pancharatnam coincide con el parámetro  $\delta$  (módulo  $\pi$ ). En consecuencia, en dicho trabajo se midió experimentalmente la fase de Pancharatnam  $\delta$ .

Esta descripción experimental para medir la fase de Pancharatnam resulta relevante en el contexto de esta tesis, ya que permite establecer una correspondencia directa entre la descripción interferométrica del sistema óptico y su implementación análoga en términos de compuertas cuánticas sobre un cúbit.

Cada uno de los elementos del montaje experimental descrito anteriormente puede asociarse a una compuerta cuántica. En particular, el divisor de haz (*BS*) es equivalente a la compuerta de Hadamard *H*. La secuencia de placas retardadoras *QHQ* implementa una rotación general en el espacio de polarización y puede descomponerse en una sucesión de compuertas de rotación  $R_z(-\delta - \gamma)$ ,  $R_y(2\beta)$  y  $R_z(-\delta + \gamma)$ , donde el parámetro  $\delta$  corresponde a la fase de Pancharatnam. Finalmente, el elemento *M* es equivalente a una compuerta de fase  $P(\phi)$ .

### 3.2.2. Diagrama simplificado del arreglo interferométrico

La figura 2.11 muestra un diagrama simplificado del arreglo interferométrico empleado para la medición de la fase de Pancharatnam (figura 3.1). A continuación, se describe la evolución del estado inicial a lo largo del interferómetro, considerando explícitamente los grados de libertad de polarización y de camino. Asimismo, se emplean las transformaciones asociadas a compuertas cuánticas, las cuales son análogas a las transformaciones ópticas implementadas en el experimento descrito previamente.

Denotaremos por  $|\psi_i\rangle$  el estado del sistema en cada etapa de la evolución. El estado inicial se considera con polarización horizontal y propagándose en la dirección *x*:

$$|\psi_1\rangle = |xh\rangle \quad (3.11)$$

Tras el primer divisor de haz (BS), el estado se transforma en

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|xh\rangle + |yh\rangle). \quad (3.12)$$

En la rama  $y$  del interferómetro actúan la transformación  $U$  sobre la polarización y el elemento de fase  $M$ , dando lugar al estado

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |xh\rangle + \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}} e^{i\delta} \cos(\beta) |yh\rangle + e^{-i\nu} \sin(\beta) |yv\rangle. \quad (3.13)$$

Luego, tras el segundo divisor de haz, el estado resulta

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{2} (|x\rangle + |y\rangle) |h\rangle + \frac{e^{i\phi}}{2} (|x\rangle - |y\rangle) e^{i\delta} \cos(\beta) |h\rangle + e^{-i\nu} \sin(\beta) |v\rangle. \quad (3.14)$$

Expandiendo la expresión anterior, se obtiene

$$|\psi_4\rangle = \frac{1 + e^{i(\delta+\phi)} \cos(\beta)}{2} |xh\rangle + \frac{1 - e^{i(\delta+\phi)} \cos(\beta)}{2} |yh\rangle + \frac{e^{i\phi} e^{-i\nu} \sin(\beta)}{2} |xv\rangle - \frac{e^{i\phi} e^{-i\nu} \sin(\beta)}{2} |yv\rangle. \quad (3.15)$$

La ecuación (3.15) describe el estado final del sistema, correspondiente a la salida del interferómetro. A partir de este estado, se calculan las probabilidades asociadas a detectar el cúbit en el camino  $x$  con polarización horizontal y vertical, respectivamente:

$$P_{x,h} = \langle \psi_4 | \pi_x \otimes \pi_h | \psi_4 \rangle = \frac{1}{4} [1 + \cos^2 \beta + \cos \beta \cos(\phi + \delta)], \quad (3.16)$$

$$P_{x,v} = \langle \psi_4 | \pi_x \otimes \pi_v | \psi_4 \rangle = \frac{\sin^2 \beta}{4}. \quad (3.17)$$

Utilizando la medición proyectiva definida en la ecuación (2.25),

$$\pi_x = \pi_x \otimes \pi_h + \pi_x \otimes \pi_v, \quad (3.18)$$

la probabilidad total de detección en el camino  $x$  viene dada por

$$P_x = P_{x,h} + P_{x,v} = \frac{1}{2} [1 + \cos \beta \cos(\phi + \delta)]. \quad (3.19)$$

En el experimento mostrado en la figura 3.1, la fase de Pancharatnam se determina a partir de la comparación de dos patrones de interferencia obtenidos para diferentes estados iniciales de

polarización. De manera análoga a lo discutido anteriormente, se realizan los cálculos para un estado inicial con polarización vertical y se evalúa la probabilidad  $P_x$  para esta nueva condición inicial:

$$P_x = \frac{1}{2} [1 + \cos \theta \cos(\phi - \delta)]. \quad (3.20)$$

De este modo, para un estado inicial con polarización horizontal se obtiene

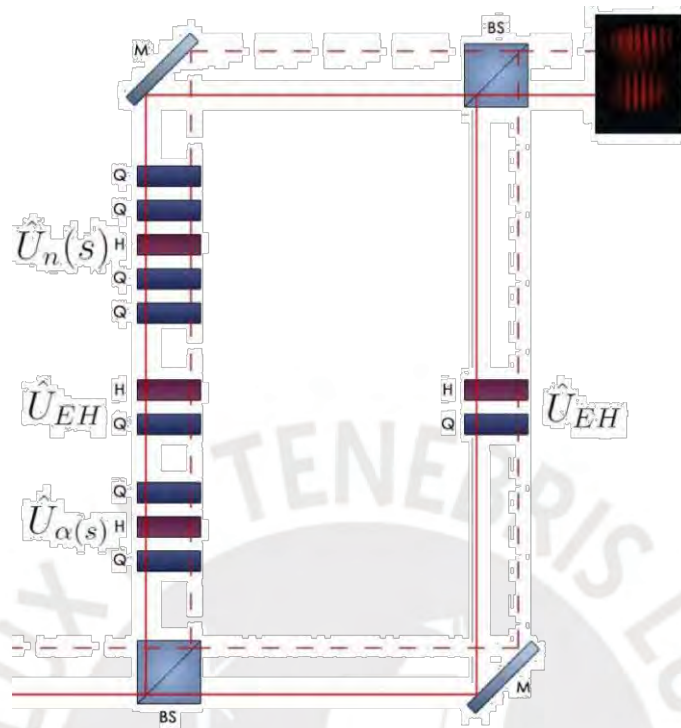
$$P_x^h = \frac{1}{2} [1 + \cos \theta \cos(\phi + \delta)], \quad (3.21)$$

mientras que para un estado inicial con polarización vertical resulta

$$P_x^v = \frac{1}{2} [1 + \cos \theta \cos(\phi - \delta)]. \quad (3.22)$$

Aquí, el superíndice  $j$  en  $P_x^j$  indica el estado inicial de polarización del láser, con  $j = h$  para polarización horizontal y  $j = v$  para polarización vertical. Las ecuaciones (3.21) y (3.22) muestran que la fase relativa entre ambos patrones de interferencia es  $2\delta$ , es decir, el doble de la fase de Pancharatnam.

### 3.3. Interferómetro para medir fases geométricas



**Figura 3.2:** Interferómetro desarrollado por Loredo et al. (Loredo, 2011) para medir la fase geométrica en cúbits de polarización. Se muestra un haz que proviene de un láser He-Ne, este haz pasa por un expansor, se obtiene 2 haces que ingresan al interferómetro Mach-Zehnder, un haz con polarización horizontal (línea continua) y el otro haz con polarización vertical (línea discontinua). En la rama izquierda se ubica tres placas retardadoras (QH), de modo que pueden generar la transformación  $U_{\alpha}(s)$ , luego se añade 2 placas (QH) para generar la transformación  $U_{EH}$  el cual produce un estado polarizado superpuesto y por último se añade 5 placas retardadoras (QQHQ) para generar la transformación  $U_n(s)$ . En la rama derecha solo se añade 2 placas (QH) para generar el mismo estado superpuesto que en la rama izquierda. Estas transformaciones introducen la fase geométrica a los haces que ingresaron al interferómetro,  $-\Phi_g$  y  $\Phi_g$  a cada haz con polarización horizontal y vertical, respectivamente. Por último se puede medir este desfase relativo con una cámara CCD.

La figura 3.2 muestra el interferómetro desarrollado por Loredo et al. (Loredo, 2011) para la medición de fases geométricas adquiridas por un cúbit de polarización. En este esquema, la fase geométrica se induce mediante la transformación  $U_{\hat{n}}(s)$ , mientras que la transformación  $U_{EH}$  se emplea para preparar el estado inicial. Por su parte, la elección del gauge se implementa a través de la transformación  $U_{\alpha}(s)$ .

La transformación  $U_{\hat{n}}(s)$  es análoga a la definida en la ecuación (2.9) y describe una rotación alrededor del eje  $\hat{n}$  en la esfera de Bloch:

$$U_{\hat{n}}(s) = e^{-i\frac{s}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n}(\vartheta_n, \phi_n)} \quad (3.23)$$

donde  $\hat{n} = (\sin \vartheta_n \cos \phi_n, \sin \vartheta_n \sin \phi_n, \cos \vartheta_n)$ , y  $\vartheta_n$  y  $\phi_n$  corresponden a los ángulos polar y azimutal en la esfera de Poincaré. La transformación  $U_{EH}$  prepara al cúbit de polarización en un estado elíptico

$$|\psi_0\rangle = U_{EH} |H\rangle, \quad (3.24)$$

donde  $|H\rangle$  representa el estado de polarización horizontal.

El gauge aplicado durante la evolución se define como

$$\alpha(s) = \frac{s}{2} \langle \psi_0 | \vec{\sigma} \cdot \hat{n} | \psi_0 \rangle. \quad (3.25)$$

Con esta elección del gauge, la contribución dinámica a la fase se anula, de modo que la fase geométrica coincide con la fase de Pancharatnam, tal como se discutió en la Sección 2.4:

$$\Phi_g = \Phi_P = \arg\langle \psi(s_1) | \psi(s_2) \rangle, \quad (3.26)$$

$$\Phi_g = \arg\langle \psi_0 | e^{i\alpha(s)} U_{\hat{n}}(s) | \psi_0 \rangle, \quad (3.27)$$

$$\Phi_g = \frac{s}{2} \langle \psi_0 | \vec{\sigma} \cdot \hat{n} | \psi_0 \rangle + \arg\langle \psi_0 | U_{\hat{n}}(s) | \psi_0 \rangle. \quad (3.28)$$

### 3.3.1. Descripción de los elementos ópticos del experimento

De manera análoga al experimento de medición de la fase de Pancharatnam, el divisor de haz ( $BS$ ) y los espejos ( $M$ ) actúan sobre el espacio de camino. Por su parte, las transformaciones  $U_{\hat{n}}(s)$  y  $U_{EH}$  operan sobre el espacio de polarización del cúbit. La transformación  $U_{\alpha}(s)$ , la cual denominaremos gauge, introduce una fase relativa entre las trayectorias del interferómetro, la cual puede representarse como una transformación en la base de camino.

En este trabajo se considera un caso particular de la transformación  $U_{\hat{n}}(s)$ , correspondiente a un eje de rotación  $\hat{n} = (0, 0, 1)$ , para el cual se obtiene

$$U_{\hat{n}}(s) = U_{z'}(s) = e^{-i\frac{s}{2}\hat{\sigma}_z}. \quad (3.29)$$

La transformación  $U_{EH}$  prepara al cúbit de polarización en un estado elíptico, lo cual puede expresarse mediante la rotación

$$U_{EH} = e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{\sigma}_y}. \quad (3.30)$$

Por lo tanto, a cada elemento óptico del interferómetro puede asociarse una transformación unitaria. En particular, las transformaciones consideradas en este trabajo para  $U_{\alpha(s)}$ ,  $U_{EH}$  y  $U_z(s)$  son

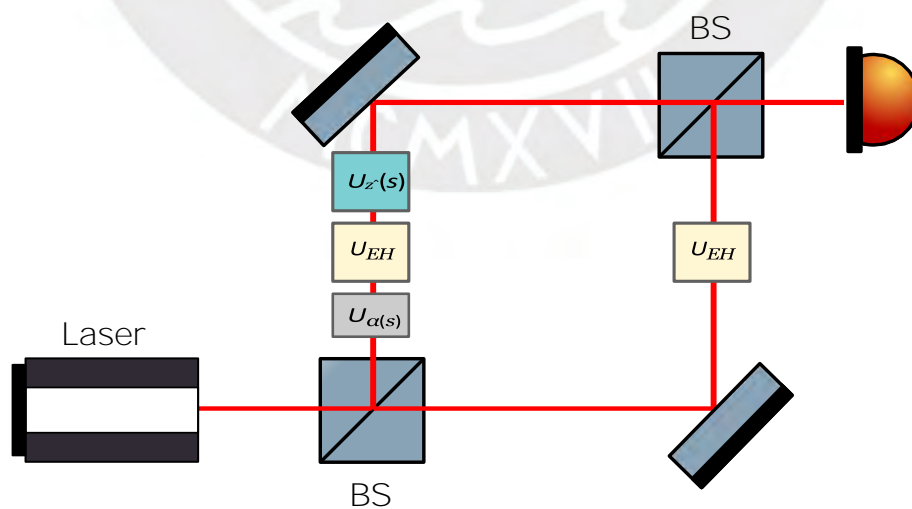
$$U_{\alpha(s)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha(s)} \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

$$U_{EH} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\vartheta}{2} & -\sin \frac{\vartheta}{2} \\ \sin \frac{\vartheta}{2} & \cos \frac{\vartheta}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

$$U_z(s) = \begin{bmatrix} e^{-i\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{s}{2}} \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

Cada uno de estas transformaciones puede interpretarse como una compuerta cuántica. En particular,  $U_{\alpha(s)}$  corresponde a una compuerta de fase  $P(\alpha(s))$ . La transformación  $U_z(s)$  es equivalente a una compuerta de rotación  $R_z(s)$ , mientras que  $U_{EH}$  corresponde a una compuerta de rotación  $R_y(\vartheta)$ .

### 3.3.2. Diagrama simplificado del arreglo interferométrico



**Figura 3.3:** Arreglo interferométrico simplificado, se muestran las transformaciones  $U(s)$ ,  $R$  y  $\alpha$  asociados a  $U_n(s)$ ,  $U_{EH}$  y  $U_{\alpha(s)}$ , respectivamente.

En la figura 3.3 se muestra el esquema simplificado del interferómetro utilizado para medir fases geométricas en cúbits de polarización. Es posible estudiar la evolución del estado del haz en cada etapa del interferómetro. Consideramos como estado inicial

$$|\psi_1\rangle = |xh\rangle. \quad (3.34)$$

Tras el primer divisor de haz (*BS*) se obtiene

$$|\psi_2\rangle = \frac{|xh\rangle + |yh\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (3.35)$$

La aplicación del gauge introduce una fase relativa entre los caminos:

$$|\psi_3\rangle = \frac{|xh\rangle + e^{i\alpha(s)}|yh\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (3.36)$$

Las transformaciones  $U_{EH}$  y  $U_z(s)$  actúan sobre la base de polarización, dando lugar al estado

$$|\psi_4\rangle = \cos \frac{\vartheta}{2} \frac{|xh\rangle}{\sqrt{2}} + \sin \frac{\vartheta}{2} \frac{|xv\rangle}{\sqrt{2}} + \cos \frac{\vartheta}{2} \frac{e^{i(\alpha(s)-\frac{s}{2})}|yh\rangle}{\sqrt{2}} + \sin \frac{\vartheta}{2} \frac{e^{i(\alpha(s)+\frac{s}{2})}|yv\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (3.37)$$

Luego, el espejo introduce una fase adicional  $\phi$ :

$$|\psi_5\rangle = \cos \frac{\vartheta}{2} \frac{|xh\rangle}{\sqrt{2}} + \sin \frac{\vartheta}{2} \frac{|xv\rangle}{\sqrt{2}} + \cos \frac{\vartheta}{2} \frac{e^{i(\phi+\alpha(s)-\frac{s}{2})}|yh\rangle}{\sqrt{2}} + \sin \frac{\vartheta}{2} \frac{e^{i(\phi+\alpha(s)+\frac{s}{2})}|yv\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (3.38)$$

Finalmente, tras el segundo divisor de haz (*BS*), el estado a la salida del interferómetro es

$$|\psi_6\rangle = \cos \frac{\vartheta}{2} \frac{1 + e^{i(\phi+\alpha(s)-\frac{s}{2})}}{2} |xh\rangle + \cos \frac{\vartheta}{2} \frac{1 - e^{i(\phi+\alpha(s)-\frac{s}{2})}}{2} |yh\rangle + \sin \frac{\vartheta}{2} \frac{1 + e^{i(\phi+\alpha(s)+\frac{s}{2})}}{2} |xv\rangle + \sin \frac{\vartheta}{2} \frac{1 - e^{i(\phi+\alpha(s)+\frac{s}{2})}}{2} |yv\rangle. \quad (3.39)$$

Este estado corresponde al estado final del interferómetro. Las probabilidades de detección en  $x$  con polarización horizontal y vertical son

$$P_{x,h} = \langle \psi_6 | \pi_x \otimes \pi_h | \psi_6 \rangle = \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \frac{1 + \cos(\phi + \alpha(s) - \frac{s}{2})}{2}, \quad (3.40)$$

$$P_{x,v} = \langle \psi_6 | \pi_x \otimes \pi_v | \psi_6 \rangle = \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \frac{1 + \cos(\phi + \alpha(s) + \frac{s}{2})}{2}. \quad (3.41)$$

Usando la medición proyectiva

$$\pi_x = \pi_x \otimes \pi_h + \pi_x \otimes \pi_v, \quad (3.42)$$

la probabilidad total en  $x$  es

$$P_x = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \frac{s}{2} \cos(\phi + \alpha(s)) + \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{s}{2} \sin(\phi + \alpha(s)) \right]. \quad (3.43)$$

Reordenando la expresión, se obtiene

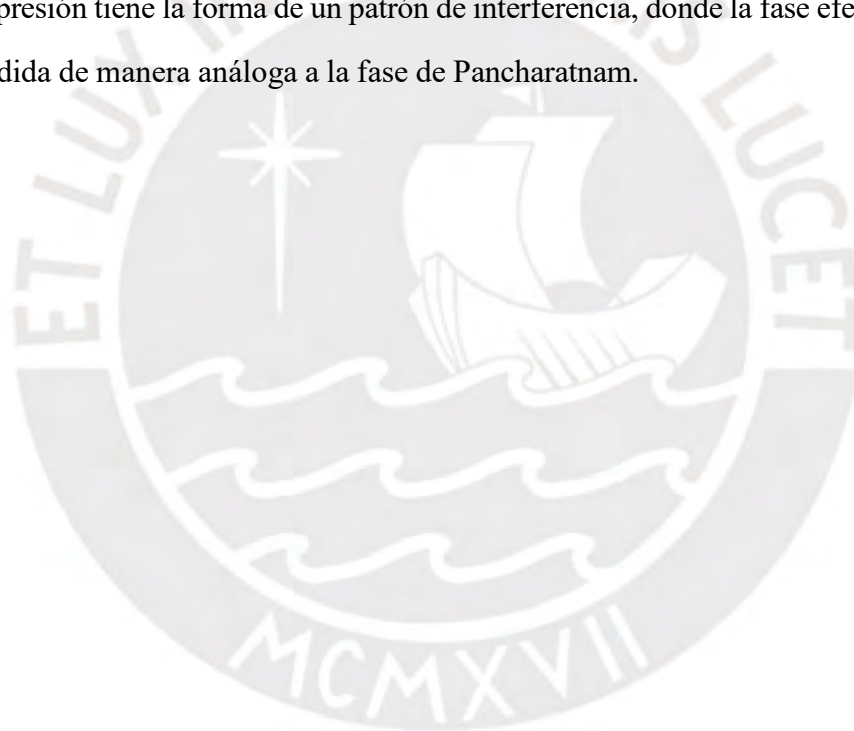
$$P_x = \frac{1}{2} [1 + A \cos(\phi + \alpha(s) - \gamma)], \quad (3.44)$$

donde

$$A = \cos^2 \frac{s}{2} + \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \sin^2 \frac{s}{2}, \quad (3.45)$$

$$\gamma = \arctan \frac{\cos \frac{\vartheta}{2} \tan \frac{s}{2}}{\cos \frac{s}{2}}. \quad (3.46)$$

Esta expresión tiene la forma de un patrón de interferencia, donde la fase efectiva  $\alpha(s) - \gamma$  puede ser medida de manera análoga a la fase de Pancharatnam.

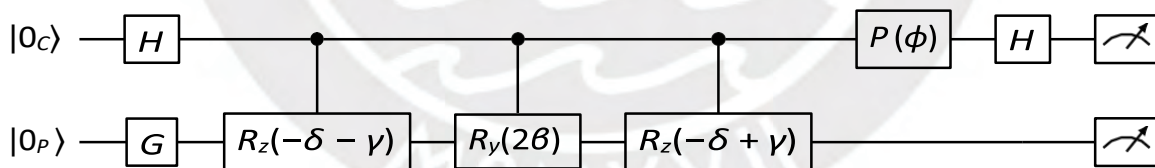


# Estudio de la fase geométrica usando la computadora cuántica de IBM

En este capítulo se diseñan e implementan circuitos cuánticos que son análogos a los interferómetros utilizados para medir la fase de Pancharatnam y fases geométricas. En la Sección 4.1 se describe la metodología empleada para la medición de fases, tomando como caso particular la fase de Pancharatnam. Posteriormente, en la Sección 4.2, se aplica esta misma metodología para la medición de la fase geométrica.

## 4.1. Medición de la fase de Pancharatnam

A partir del análisis de las transformaciones asociadas a los elementos ópticos del interferómetro utilizado para medir la fase de Pancharatnam, es posible diseñar un circuito cuántico análogo. Como primera propuesta, se presenta un circuito cuántico (figura 4.1) que emplea la parametrización ZY Z descrita en el capítulo anterior.





**Figura 4.1:** Circuito cuántico análogo al arreglo interferométrico usado para medir la fase de Pancharatnam en cúbits de polarización.

El diseño del circuito cuántico (figura 4.1) se desarrolla en varias etapas. En primer lugar, se determina el número de cúbits a utilizar; en este caso se emplean dos: uno asociado a la base de camino, inicialmente en el estado  $|0_C\rangle$ , y otro asociado a la base de polarización, inicialmente en el estado  $|0_P\rangle$ . A continuación, se prepara la polarización inicial mediante la compuerta  $G$ , de acuerdo con la Tabla 4.1.

Posteriormente, siguiendo el orden de acción de los elementos ópticos del arreglo experimental (figura 3.3), se incorporan las compuertas cuánticas equivalentes. La compuerta de Hadamard se aplica al cúbit de camino, replicando la función del primer divisor de haz. Seguidamente, se emplean las compuertas controladas  $R_z$  y  $R_y$ , correspondientes a la secuencia  $QHQ$  del interferómetro, que actúa únicamente sobre una de las ramas.

Finalmente, se añade la compuerta de fase  $P(\phi)$ , que introduce un desfase en el cúbit de camino equivalente a la diferencia de camino óptico del experimento, y se aplica una segunda compuerta de Hadamard al cúbit de camino, replicando la acción del segundo divisor de haz.

Compuerta G	Polarización
	Horizontal
	Vertical

**Tabla 4.1:** Compuerta G necesaria para indicar la polarización inicial que tendrá el cúbit.

Se desarrolló un código en Qiskit en el cual se varía el parámetro  $\phi$  y se mide cada cúbit a la salida del circuito cuántico, obteniéndose así una secuencia de probabilidades  $p_{00}, p_{10}, p_{01}, p_{11}$  para cada valor de  $\phi$ . Según las ecuaciones (3.16–3.19), el patrón de interferencia para una polarización inicial horizontal está dado por:

$$P_h(\phi) = p_{00} + p_{01} \quad (4.1)$$

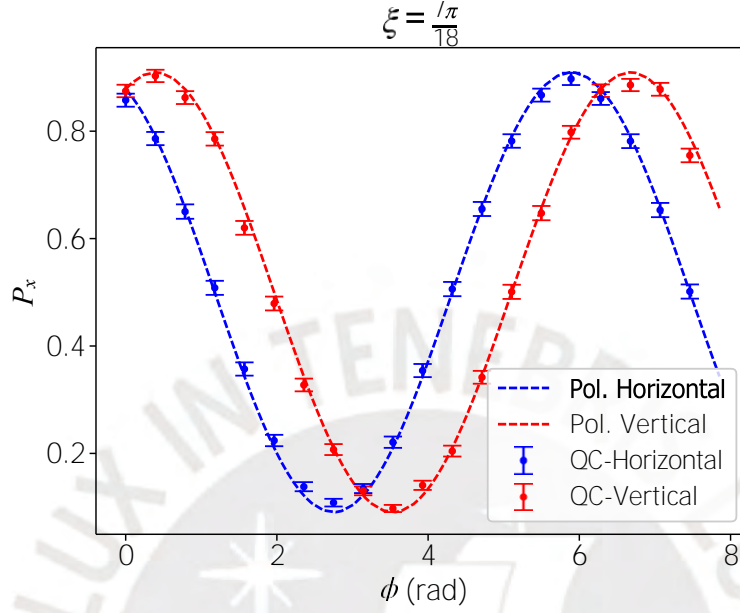
De manera análoga, el patrón de interferencia para polarización inicial vertical se obtiene como  $P_v(\phi)$ . Los algoritmos se ejecutaron para cada polarización inicial fijando  $\xi = \frac{7\pi}{18}$  y  $\delta = \frac{13\pi}{18}$ , considerando 20 experimentos y 2000 shots por cada punto experimental. Los resultados (puntos rojos y azules) se muestran en la figura 4.2 y coinciden con lo esperado teóricamente; el desfase entre ambos interferogramas es de  $2\delta$ .

A continuación, se realiza un ajuste de los patrones  $P_h$  y  $P_v$  de la forma:

$$P = A + B \cos(\phi + C) \quad (4.2)$$

donde  $C$  corresponde a la fase de Pancharatnam  $\delta$ . Finalmente, la fase de Pancharatnam se obtiene a partir de la diferencia de fases de cada ajuste. Cabe destacar que, con el fin de repro-

ducir la metodología empleada en el trabajo experimental (Loredo et al., 2009), se utilizó este procedimiento; sin embargo, es posible determinar la fase de Pancharatnam utilizando un solo interferograma, que será el método aplicado en los resultados posteriores.



**Figura 4.2:** Resultados experimentales. Se observan los patrones de interferencia para la polarización inicial horizontal y vertical. La curva teórica (línea discontinua) y los resultados experimentales (puntos).

Además, se realizó una estimación del error asociado a cada resultado experimental. El error principal proviene de la distribución binomial que sigue cada medida en la computadora cuántica, cuya desviación estándar para el  $i$ -ésimo resultado se expresa como:

$$\sigma_{\text{shots},i} = \frac{\sqrt{p_i(1-p_i)}}{n} \quad (4.3)$$

donde  $n$  es el número de shots y  $p_i$  representa la probabilidad obtenida en la  $i$ -ésima medición del circuito cuántico para un determinado resultado ( $p_{00}, p_{01}, p_{10}$  o  $p_{11}$ ).

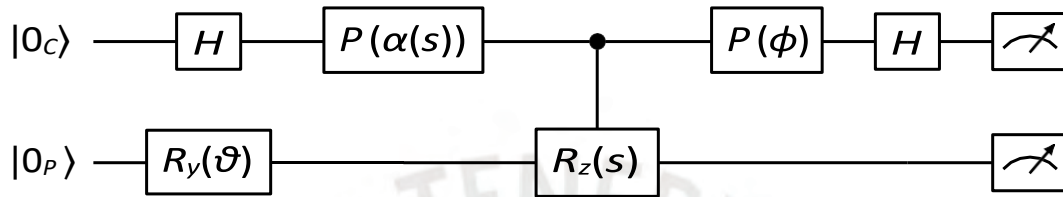
Adicionalmente, se deben considerar los errores introducidos por las compuertas cuánticas. En este trabajo se emplearon las compuertas  $R_z$  y  $R_y$ , cuyos errores pueden estimarse de acuerdo con la ecuación (2.56). Finalmente, el error total asociado a cada medición se calcula como una suma en cuadratura de las contribuciones anteriores:

$$\sigma_{P_x} = \sqrt{\sum_{\delta} \left( \frac{\partial P_x}{\partial \delta} \right)^2 \sigma_{\delta}^2 + \sum_{\beta} \left( \frac{\partial P_x}{\partial \beta} \right)^2 \sigma_{\beta}^2 + \sum_{\gamma} \left( \frac{\partial P_x}{\partial \gamma} \right)^2 \sigma_{\gamma}^2 + \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \frac{p_i(1-p_i)}{n}} \quad (4.4)$$

donde  $N$  corresponde al número de experimentos y  $P_x$  representa el resultado teórico según las ecuaciones (3.21) y (3.22).

## 4.2. Medición de la fase geométrica

A partir del análisis de las transformaciones asociadas a los elementos del interferómetro empleado para la medición de fases geométricas, es posible diseñar un circuito cuántico equivalente. La figura 4.3 muestra el circuito propuesto para la determinación de fases geométricas, considerando el caso particular  $U_{\hat{n}} = U_{\hat{z}}$ .



**Figura 4.3:** Circuito cuántico equivalente al arreglo interferométrico para medir fases geométricas.

De manera similar al circuito propuesto para la medición de la fase de Pancharatnam, se describen a continuación las distintas etapas del circuito cuántico. En primer lugar, se establece el número de cúbits a utilizar; en este caso se emplean dos cúbits: uno asociado a la base de camino, inicialmente en el estado  $|0_C\rangle$ , y otro asociado a la base de polarización, inicialmente en el estado  $|0_P\rangle$ .

Siguiendo el orden de acción de los elementos ópticos del arreglo experimental, se incorporan las compuertas cuánticas equivalentes a cada uno de dichos elementos. Primero, se aplica una compuerta de Hadamard al cúbit de camino, de manera equivalente a la acción del primer divisor de haz. A continuación, se prepara el estado en una polarización elíptica, es decir, en una combinación lineal de la base de polarización, mediante la aplicación de la compuerta  $R_y(\vartheta)$  sobre el cúbit de polarización.

Posteriormente, se introduce la compuerta de fase  $P(\alpha(s))$  sobre el cúbit de camino, la cual representa la elección de gauge destinada a anular la fase dinámica. Luego, se aplica la compuerta  $R_z(s)$ , correspondiente a un caso particular de la transformación  $U_{\hat{n}}(s)$  cuando  $\hat{n} = \hat{z}$ . Cabe destacar que esta es una compuerta controlada, ya que dicha transformación actúa únicamente sobre uno de los brazos del interferómetro (figura 3.2).

Finalmente, se añade una compuerta de fase  $P(\phi)$  y una segunda compuerta de Hadamard sobre el cúbit de camino, lo cual es equivalente al segundo divisor de haz del experimento.

Como se mencionó anteriormente, es necesario elegir un gauge adecuado  $\alpha(s)$  para anular la fase dinámica; en este caso, el gauge calculado a partir de la ecuación (3.25) está dado por:

$$\alpha(s) = \frac{s}{2} \cos \vartheta \quad (4.5)$$

De manera análoga al procedimiento descrito en la sección anterior, se desarrolló un código en Qiskit en el cual se varía el parámetro  $\phi$ , manteniendo fijos los valores de  $s$  y  $\vartheta$ . A partir de la medición de la salida del circuito cuántico, se obtiene un interferograma para cada par de valores  $(\vartheta, s)$ .

El error asociado a cada resultado experimental del interferograma puede estimarse considerando, por un lado, el error derivado de la distribución binomial que siguen los resultados de la computadora cuántica y, por otro, los errores introducidos por las compuertas de rotación  $R_y$  y  $R_z$ :

$$\sigma_{P_x} = \sqrt{\frac{\partial P_x}{\partial s}^2 \sigma_s^2 + \frac{\partial P_x}{\partial \vartheta}^2 \sigma_\vartheta^2 + \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \frac{p_i(1-p_i)}{n}} \quad (4.6)$$

donde  $n$  representa el número de shots,  $N$  corresponde al número de experimentos,  $P_x$  es el resultado teórico de las ecuaciones (3.43)-(3.46) y  $p_i$  representa la probabilidad obtenida en la  $i$ -ésima medición del circuito cuántico para un determinado resultado ( $p_{00}, p_{01}, p_{10}$  o  $p_{11}$ ).

Por último, se realiza un ajuste no lineal a cada interferograma según la ecuación (4.2), con lo cual se obtiene el valor de la fase geométrica. El error de la fase  $\Phi$  se estima como una suma en cuadratura con el error de  $\phi$ :

$$\sigma_\Phi = \sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_\phi^2} \quad (4.7)$$

Para fines de comparación, podemos calcular la curva teórica de la fase geométrica a partir de la ecuación (3.28):

$$\Phi_g = \frac{s}{2} \langle \psi_0 | \vec{\sigma} \cdot \vec{n} | \psi_0 \rangle + \arg \langle \psi_0 | U_n(s) | \psi_0 \rangle \quad (4.8)$$

$$\Phi_g(s, \vartheta) = \frac{s}{2} \cos \vartheta - \arctan \left( \tan \frac{s}{2} \cos \vartheta \right) \quad (4.9)$$

Para el caso en que no se aplica el gauge, se puede obtener la fase de Pancharatnam para la evolución  $U(s, \vartheta)$ :

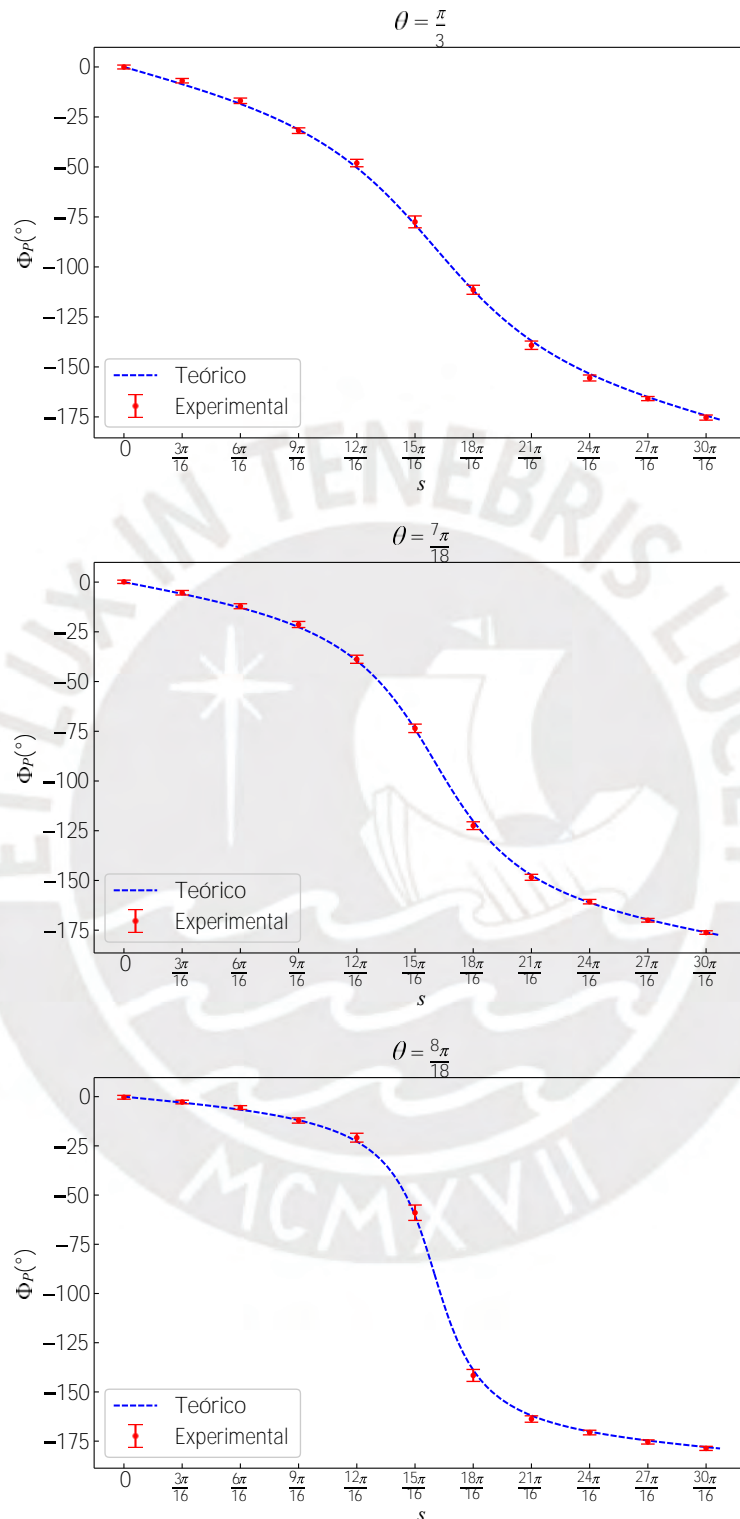
$$\Phi_P(s, \vartheta) = -\arctan \left( \tan \frac{s}{2} \cos \vartheta \right) \quad (4.10)$$

---

A continuación, en las figuras 4.4 y 4.5 se muestran los resultados experimentales de la medición de la fase de Pancharatnam y de la fase geométrica para  $U(s, \vartheta)$ , considerando 20 experimentos y 2000 shots por cada resultado.

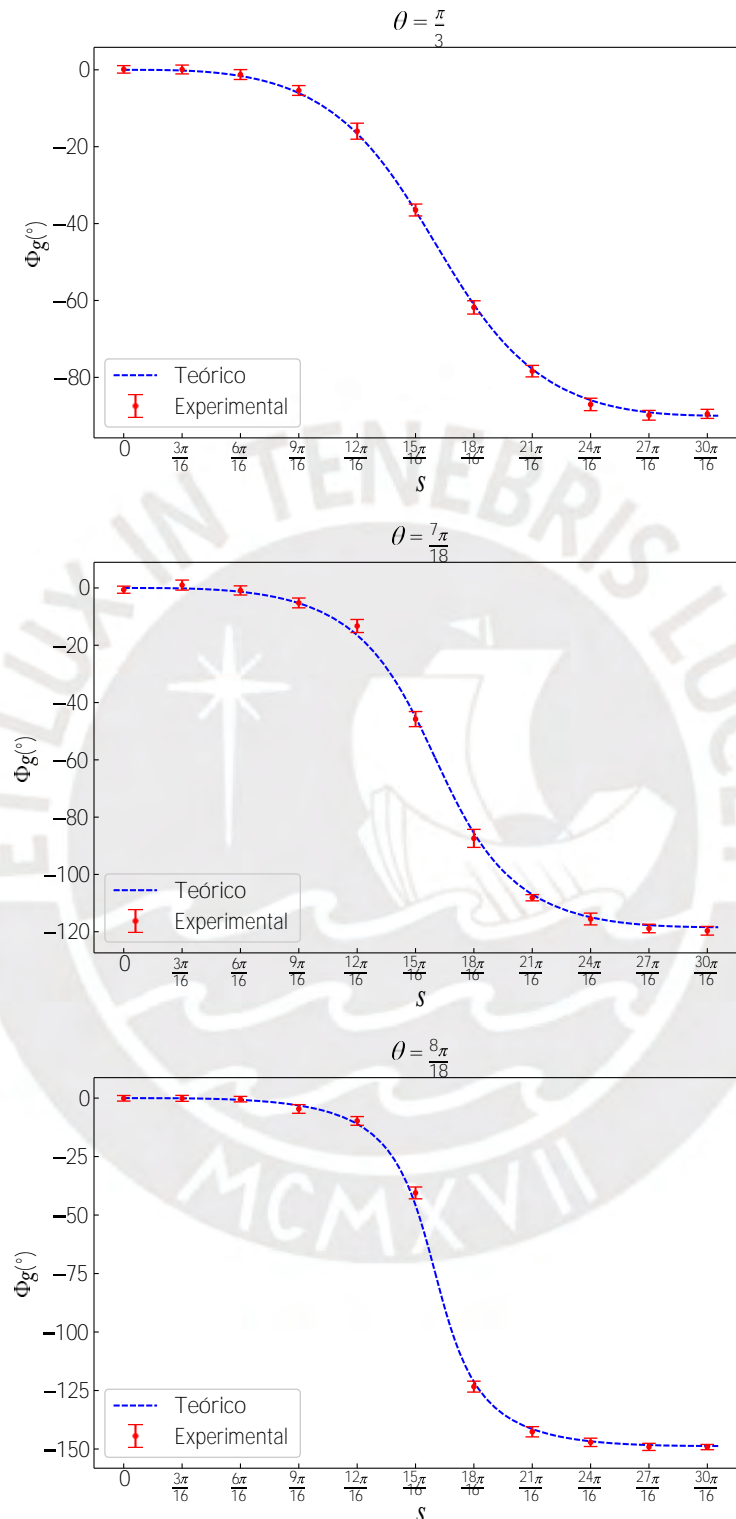


### 4.2.1. Medición de la fase de Pancharatnam con $U(s, \vartheta)$



**Figura 4.4:** Resultado experimentales para la fase de Pancharatnam adquirida por un cúbit, medidos en grados sexagesimales. Se muestran los resultados de la computadora cuántica (puntos rojos) y para comparación la curva teórica (línea discontinua azul).

#### 4.2.2. Medición de la fase geométrica con $U(s, \vartheta)$



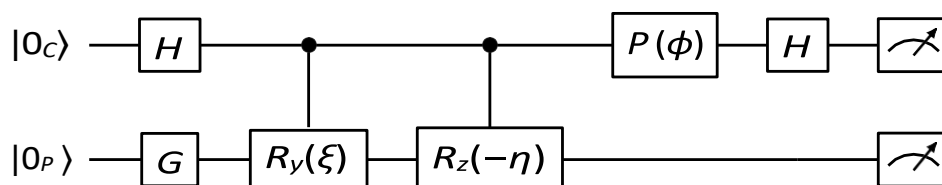
**Figura 4.5:** Resultado experimentales para la fase geométrica adquirida por un cúbit, medidos en grados sexagesimales. Se muestran los resultados experimentales de la computadora cuántica (puntos rojos) y para comparación la curva teórica (línea discontinua azul).

# Influencia del ruido sobre las fases fundamentales usando la computadora cuántica de IBM

En este capítulo estudiaremos cómo un entorno ruidoso afecta a las fases geométricas. Para ello, introduciremos perturbaciones en los parámetros angulares de las transformaciones utilizadas para generar tanto la fase de Pancharatnam como la fase geométrica, previamente analizadas en el capítulo anterior. Además, consideraremos dos casos relevantes: en el primero, evaluaremos la robustez promedio de estas fases, es decir, el comportamiento obtenido al promediar un conjunto de trayectorias afectadas por ruido; en el segundo, analizaremos la robustez de las fases considerando una única trayectoria ruidosa.

## 5.1. Influencia promedio del ruido sobre la fase de Pancharatnam

Primero consideremos la transformación  $U(\xi, \eta, \zeta)$  con parametrización  $YZY$  vista en el capítulo anterior y comparemosla con la parametrización  $ZYZ$ , es decir  $U(\beta, \delta, \gamma)$ , las cuales son equivalentes si  $\delta = \frac{\eta}{2}$ ,  $\beta = \frac{\xi}{2}$  y  $\gamma = -\frac{\eta}{2}$  con  $\zeta = 0$ . Podemos usar la primera parametrización para diseñar un nuevo circuito cuántico que use menos compuertas y que calcula la fase de Pancharatnam (figura 5.1).



**Figura 5.1:** Circuito cuántico para medir la fase de Pancharatnam, considerando la parametrización  $YZY$ .

Además, podemos analizar como influye un entorno ruidoso sobre la fase de Pancharatnam,

cuando usamos la transformación  $U(\xi, \eta, \zeta)$ , vista anteriormente. Para esto, podemos considerar que el ruido genera una perturbación en los parámetros angulares  $\xi$  y  $\eta$  de la forma:

$$U(\xi, \eta) \rightarrow U(\xi + r\delta_\xi, \eta + t\delta_\eta) \quad (5.1)$$

Donde  $r$  y  $t$  son parámetros aleatorios entre  $-1$  y  $1$  con distribución uniforme,  $\delta_\xi$  y  $\delta_\eta$  son los errores introducidos de  $\xi$  y  $\eta$  respectivamente. Si consideramos que este error introducido es un múltiplo de  $0,1$  rad:

$$\delta_\xi = \delta_\eta = 0,1m \quad (5.2)$$

Donde  $m$  puede tomar valores enteros. Estas perturbaciones introducidas pueden añadirse a los errores experimentales estimados para las compuertas de rotación usadas en el circuito cuántico ( $R_y(\xi) : \sigma_\xi, R_z(\eta) : \sigma_\eta$ ):

$$\sigma_\xi^{tot} = \sigma_\xi + \sqrt{\frac{1}{3}}\delta_\xi \quad (5.3)$$

$$\sigma_\eta^{tot} = \sigma_\eta + \sqrt{\frac{1}{3}}\delta_\eta \quad (5.4)$$

Donde el término  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  es un factor de conversión para las distribuciones uniformes de las variables  $\xi$  y  $\eta$ . Así es posible definir un error total  $\sigma^{tot}$  para cada parámetro angular y obtener el error asociado a cada resultado que conforma un interferograma:

$$\sigma_{P_x} = \sqrt{\frac{\partial P_x}{\partial \xi}^2 (\sigma_\xi^{tot})^2 + \frac{\partial P_x}{\partial \eta}^2 (\sigma_\eta^{tot})^2 + \frac{1}{N^2} \sum_i^N \frac{p_i(1-p_i)}{n}} \quad (5.5)$$

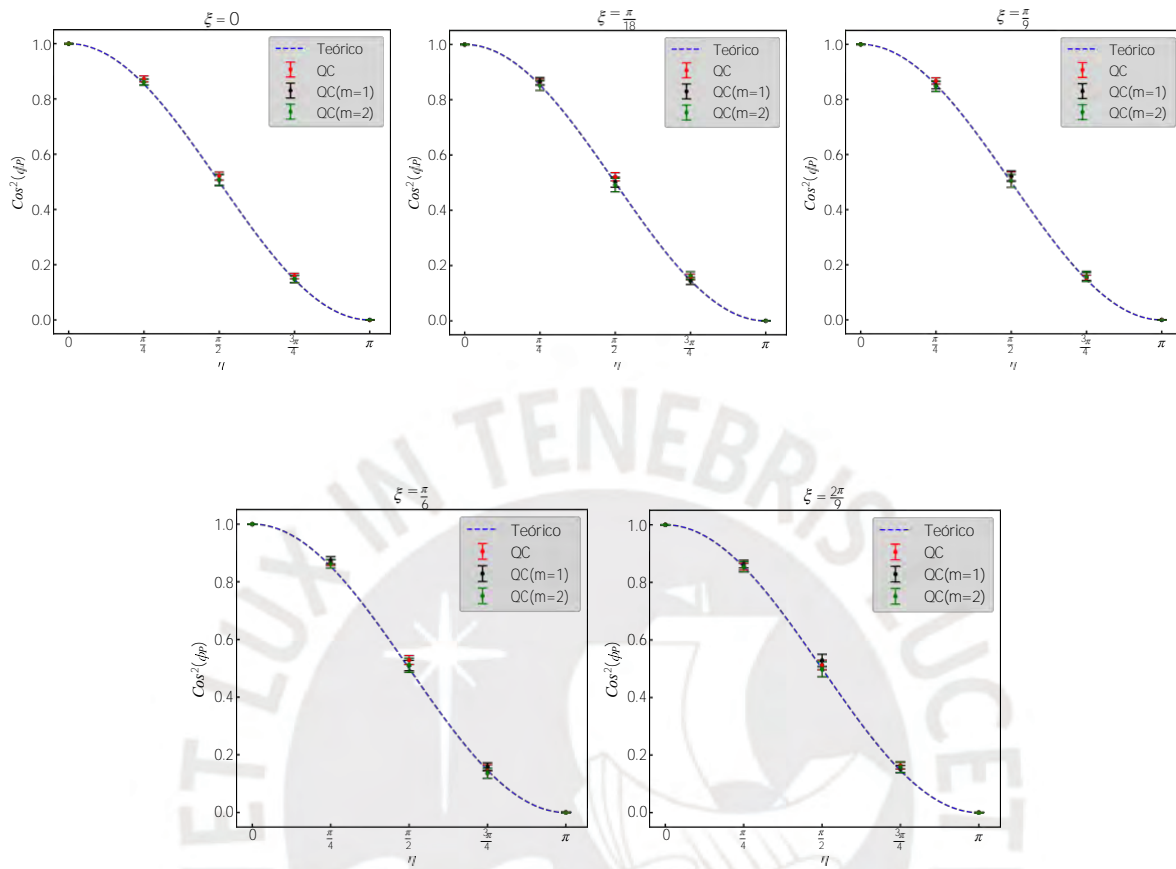
Donde  $P_x$  corresponde al resultado teórico del interferómetro usando la transformación  $U(\xi, \eta, \zeta)$ . De manera similar al capítulo anterior, ejecutamos un algoritmo donde cada par  $\xi$  y  $\eta$  es perturbado según la ecuación (5.1), obtenemos un conjunto de interferogramas, realizamos un ajuste no lineal a cada uno y obtenemos la fase promedio  $\Phi_P$  con sus respectivos errores:

$$\sigma_{\Phi_P} = \sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_\phi^2} \quad (5.6)$$

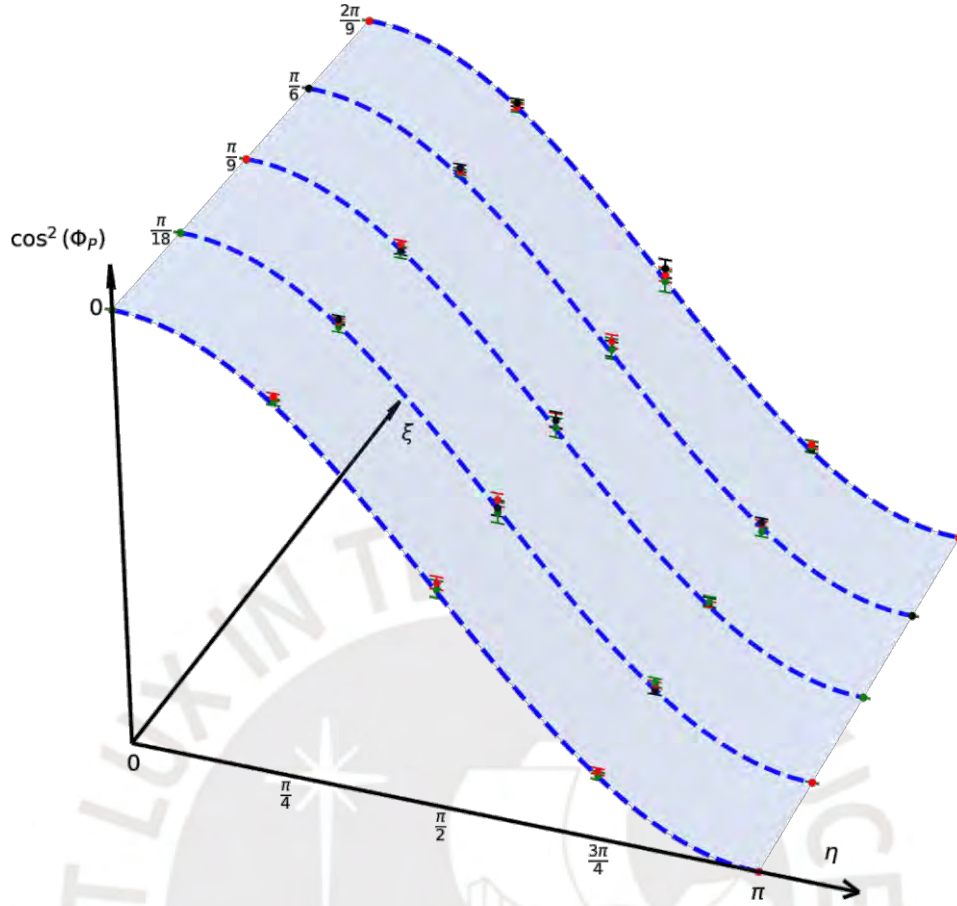
Donde  $\sigma_C$  es el error del parámetro  $C$  del ajuste no lineal y  $\sigma_\phi$  es el error estimado de la compuerta de fase  $P(\phi)$ .

La figura 5.2 muestra los resultados experimentales del  $\cos^2(\Phi_P)$  con las respectivas barras de error, donde se ha considerado 20 experimentos con 2000 shots. Los puntos rojos representan los resultados sin ruido inducido (resultados que replican los medidos en (Loredo et

al., 2009)), los puntos negros y verdes los resultados con ruido inducido. Para comparación se muestra la curva teórica con línea azul discontinua.



**Figura 5.2:** Resultados experimentales de la fase de Pancharatnam, con  $\zeta$  fijado en cero y variando los parámetros  $\xi$  y  $\eta$ . Se presentan las curvas correspondientes a cada valor de  $\xi$ , donde cada punto representa el valor de  $\text{cos}^2 \Phi_p$ . Se muestran tres conjuntos de datos: sin ruido inducido (puntos rojos) y con ruido inducido,  $m = 1$  (puntos negros) y  $m = 2$  (puntos verdes)



**Figura 5.3:** Resultados experimentales para la fase de Pancharatnam. Se observa la superficie formada por  $\cos^2(\Phi_P)$  donde varían  $\xi$  y  $\eta$  con  $\zeta$  fijado a cero.

## 5.2. Influencia promedio del ruido sobre la fase Geométrica

En esta sección analizaremos cómo un entorno ruidoso afecta las trayectorias de un cúbit sobre la esfera de Bloch. Presentaremos primero una descripción teórica de estas trayectorias cuando el cúbit evoluciona bajo la transformación  $U(s, \vartheta)$ , y posteriormente mostraremos los resultados experimentales obtenidos mediante la computadora cuántica.

### 5.2.1. Trayectorias sobre la esfera de Bloch

Para obtener la trayectoria de un cúbit sobre la esfera de Bloch cuando evoluciona bajo la transformación  $U_{\hat{n}}(s)$  (considerando  $U_{\hat{n}}(s) = U_z(s)$ ), se realiza la tomografía del estado evolucionado  $|\Psi\rangle$ , tal que  $|\Psi\rangle = R_z(s)R_y(\vartheta)|0\rangle$ , esto es, determinar el vector de Bloch  $r^- = (r_1, r_2, r_3)$  de  $|\Psi\rangle$ . Usamos las ecuaciones de la sección 2.2:

$$r_1 = \langle \Psi | H | 0 \rangle \langle 0 | H | \Psi \rangle - \langle \Psi | H | 1 \rangle \langle 1 | H | \Psi \rangle \quad (5.7)$$

$$r_1 = \frac{e^{i\frac{s}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} + e^{-i\frac{s}{2}} \sin \frac{\vartheta}{2}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{e^{-i\frac{s}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} + e^{i\frac{s}{2}} \sin \frac{\vartheta}{2}}{2} - \frac{e^{i\frac{s}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} - ie^{-i\frac{s}{2}} \sin \frac{\vartheta}{2}}{2} \cdot \frac{e^{-i\frac{s}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} + ie^{i\frac{s}{2}} \sin \frac{\vartheta}{2}}{2} \quad (5.8)$$

$$r_1 = \sin(\vartheta) \cos(s) \quad (5.9)$$

$$r_2 = \langle \Psi | SH | 0 \rangle \langle 0 | HS^\dagger | \Psi \rangle - \langle \Psi | SH | 1 \rangle \langle 1 | HS^\dagger | \Psi \rangle \quad (5.10)$$

$$r_2 = \frac{e^{-i\frac{s}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} - ie^{i\frac{s}{2}} \sin \frac{\vartheta}{2}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{e^{i\frac{s}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} + ie^{-i\frac{s}{2}} \sin \frac{\vartheta}{2}}{2} - \frac{e^{i\frac{s}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} - ie^{-i\frac{s}{2}} \sin \frac{\vartheta}{2}}{2} \cdot \frac{e^{-i\frac{s}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} + ie^{i\frac{s}{2}} \sin \frac{\vartheta}{2}}{2} \quad (5.11)$$

$$r_2 = \sin(\vartheta) \sin(s) \quad (5.12)$$

$$r_3 = \langle \Psi | 0 \rangle \langle 0 | \Psi \rangle - \langle \Psi | 1 \rangle \langle 1 | \Psi \rangle \quad (5.13)$$

$$r_3 = \cos^2 \frac{\vartheta}{2} - \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \quad (5.14)$$

$$r_3 = \cos(\vartheta) \quad (5.15)$$

Por lo tanto el vector de Bloch es  $r^-(s, \vartheta) = (\sin(\vartheta) \cos(s), \sin(\vartheta) \sin(s), \cos(\vartheta))$ .

### 5.2.2. Trayectorias ruidosas de un cubit sobre la esfera de Bloch

Si ahora el estado evoluciona en un entorno ruidoso, la trayectoria mostrará un comportamiento errático. Esta trayectoria perturbada se puede obtener si consideramos una variación aleatoria en los parámetros  $s$  y  $\vartheta$  de la transformación  $U(s, \vartheta)$ :

$$U(s, \vartheta) \rightarrow U(s + r\delta_s, \vartheta + t\delta_\vartheta) \quad (5.16)$$

Donde  $r$  y  $t$  representan números aleatorios entre  $-1$  y  $1$  con distribución uniforme,  $\delta_s$  y  $\delta_\vartheta$  corresponden a los errores de  $s$  y  $\vartheta$  introducidas para inducir el ruido. Es decir, el vector de Bloch será perturbado de tal manera que:

$$r^-(s, \vartheta) \rightarrow r^-(s + r\delta_s, \vartheta + t\delta_\vartheta) \quad (5.17)$$

Similar a la sección 5.1, el error total debido a las compuertas de rotación ( $R_y : \sigma_\vartheta, R_z : \sigma_s$ ) y el error inducido, será:

$$\sigma_s^{tot} = \sigma_s + \sqrt{\frac{1}{3}}\delta_s \quad (5.18)$$

$$\sigma_\vartheta^{tot} = \sigma_\vartheta + \sqrt{\frac{1}{3}}\delta_\vartheta \quad (5.19)$$

Con esto es posible determinar el error asociado a las componentes del vector de Bloch:

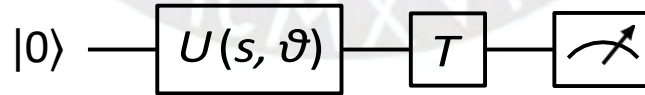
$$\sigma_{r_1} = \sqrt{\frac{\partial r_1}{\partial s}^2 (\sigma_s^{tot})^2 + \frac{\partial r_1}{\partial \vartheta}^2 (\sigma_\vartheta^{tot})^2 + \frac{1}{N^2} \sum_i^N \sigma_{shots,i}^2} \quad (5.20)$$

$$\sigma_{r_2} = \sqrt{\frac{\partial r_2}{\partial s}^2 (\sigma_s^{tot})^2 + \frac{\partial r_2}{\partial \vartheta}^2 (\sigma_\vartheta^{tot})^2 + \frac{1}{N^2} \sum_i^N \sigma_{shots,i}^2} \quad (5.21)$$

$$\sigma_{r_3} = \sqrt{\frac{\partial r_3}{\partial s}^2 (\sigma_s^{tot})^2 + \frac{\partial r_3}{\partial \vartheta}^2 (\sigma_\vartheta^{tot})^2 + \frac{1}{N^2} \sum_i^N \sigma_{shots,i}^2} \quad (5.22)$$

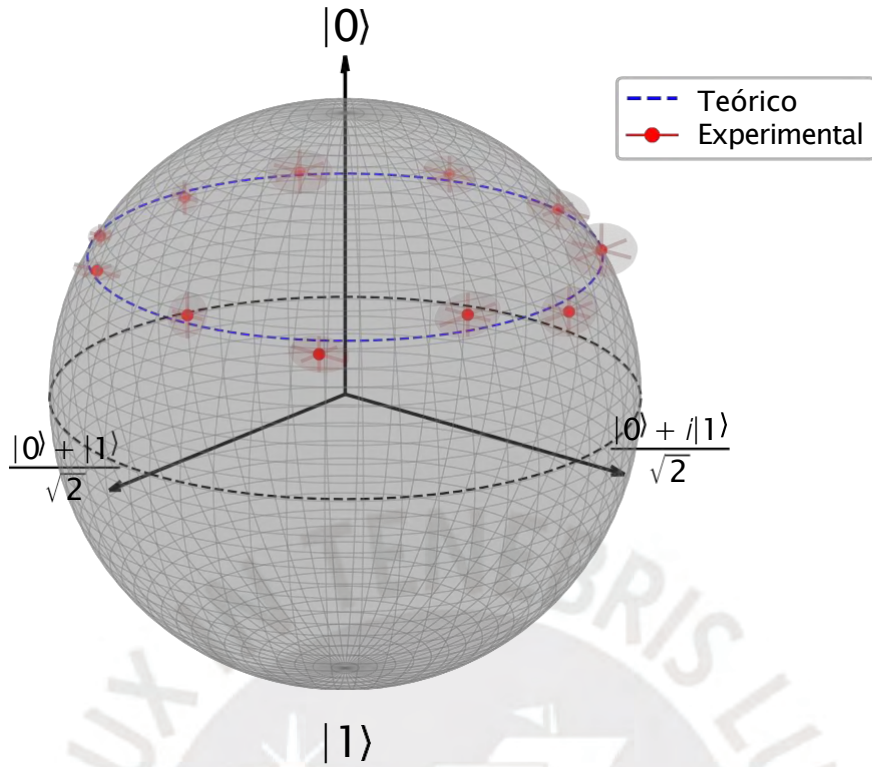
De la ecuación 5.16, podemos concluir que el cubit describirá trayectorias perturbadas sobre la esfera de Bloch, lo cual representa la influencia del ruido en la evolución, asimismo este ruido afectará a la fase de Pancharatnam y geométrica.

A continuación, estudiaremos la fase de Pancharatnam y geométrica cuando aplicamos un ruido aleatorio con 2 métodos: Primero vamos a promediar el resultado de la fase geométrica y Pancharatnam para diferentes trayectorias perturbadas y por ultimo estudiaremos la influencia del ruido en estas fases considerando una sola trayectoria ruidosa. Con el primer método, cada



**Figura 5.4:** Circuito cuántico para realizar la tomografía del cubit evolucionado por  $U(s, \vartheta)$ .

par  $(\delta_s, \delta_\vartheta)$  es ejecutado ( $n=2000$  shots,  $N=5$  experimentos) en el circuito cuántico de la figura 5.4, donde la evolución se genera con la transformación  $U(s, \vartheta)$ . La compuerta  $T$  corresponde a la tomografía (Tabla 2.1) del estado luego de la transformación  $U(s, \vartheta)$ . El resultado de este circuito cuántico es un conjunto de valores esperados de Pauli:  $\langle \sigma_x \rangle$ ,  $\langle \sigma_y \rangle$  y  $\langle \sigma_z \rangle$  que corresponden a cada par  $(s, \vartheta)$ , por ultimo se promedia cada conjunto de resultados correspondiente a cada



**Figura 5.5:** Trayectoria promedio con ruido. Se muestra la trayectoria promedio obtenida experimentalmente (puntos rojos) de un cubit y para comparación se muestra la trayectoria teórica sin ruido (color azul).

par. Es decir, obtenemos la trayectoria perturbada promedio descrita por el cubit. La figura 5.5 muestra la trayectoria promedio con ruido (puntos rojos) con sus respectivas barras de error en los 3 ejes y para comparación la curva teórica (línea discontinua azul).

Además, usamos estos mismos pares  $(\delta_s, \delta_\vartheta)$  y el circuito cuántico de la figura 4.3 para estudiar la influencia promedio del ruido sobre la fase geométrica y de Pancharatnam. Las figuras 5.6-5.7 muestran los resultados con ruido inducido (puntos negros), los resultados vistos en las figuras 4.4-4.5 (puntos rojos) y para comparación la curva teórica (línea discontinua azul). Donde se ha considerado la siguiente propagación de errores para cada resultado que conforman los interferogramas:

$$\sigma_{P_x} = \sqrt{\left( \frac{\partial P_x}{\partial s} \right)^2 (\sigma_s^{tot})^2 + \left( \frac{\partial P_x}{\partial \vartheta} \right)^2 (\sigma_\vartheta^{tot})^2 + \frac{1}{N^2} \sum_i^N \sigma_{shots,i}^2} \quad (5.23)$$

donde  $N$  corresponde al número de experimentos y  $P_x$  corresponde al resultado teórico de las ecuaciones (3.43)-(3.46). Por último, el error estimado para cada fase luego del ajuste no lineal

---

es

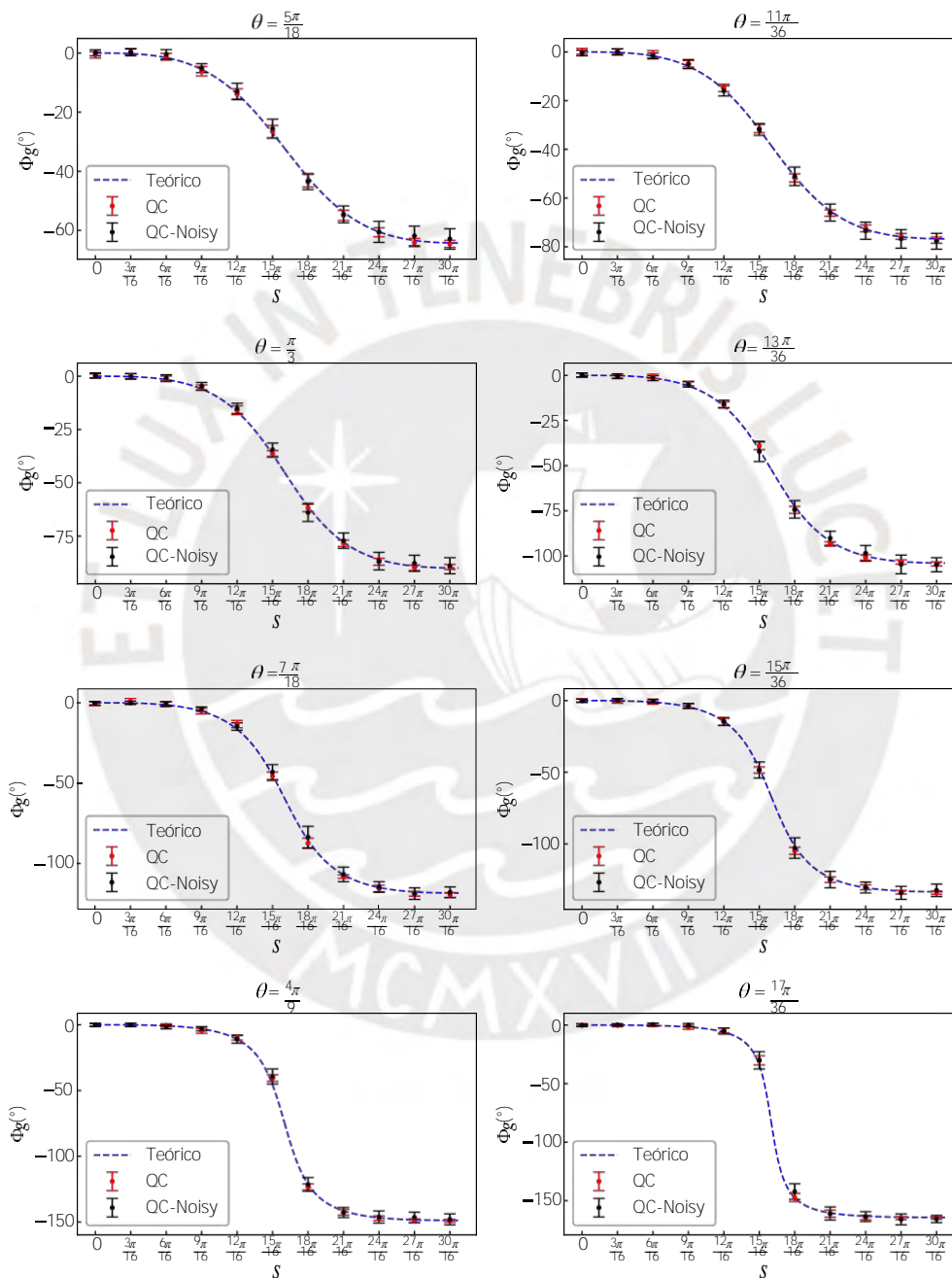
$$\sigma_{\Phi} = \frac{q}{\sigma_C^2 + \sigma_{\phi}^2} \quad (5.24)$$

Donde  $\sigma_C$  es el error del parámetro  $C$  del ajuste no lineal y  $\sigma_{\phi}$  es el error estimado de la compuerta de fase  $P(\phi)$ .



### 5.2.3. Resultados experimentales para la fase geométrica

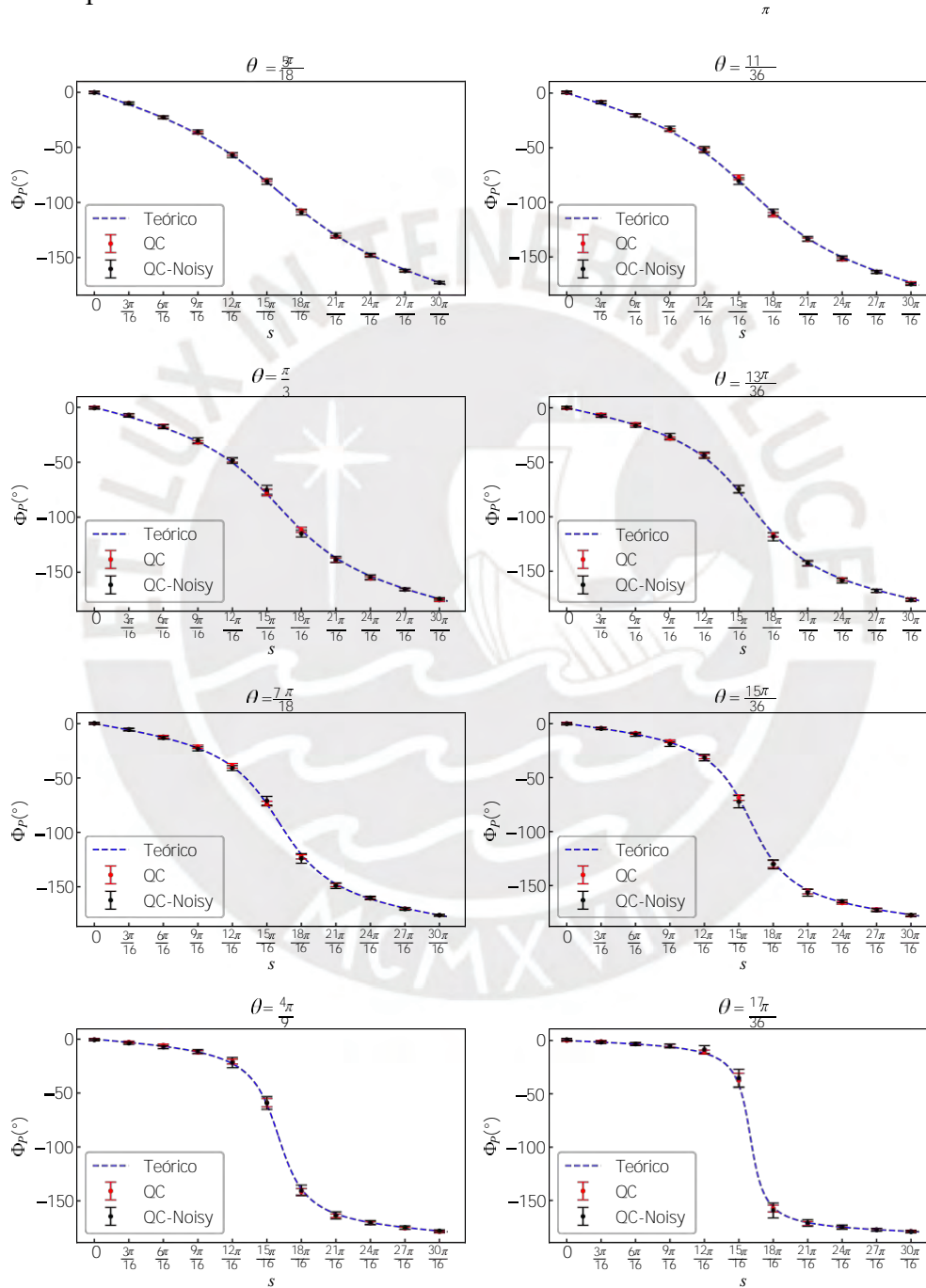
La figura 5.6 muestra los resultados experimentales de la fase geométrica en función del parámetro  $s$ . Se observa que la influencia promedio del ruido no perturba de manera significativa a la fase geométrica. Se utiliza la notación QC: Quantum Computer.



**Figura 5.6:** Influencia promedio sobre la fase geométrica. Se muestra la fase geométrica con ruido inducido (puntos negros), la fase geométrica sin ruido inducido (puntos rojos) y para comparación se muestra la trayectoria teórica sin ruido (color azul).

## 5.2.4. Resultados experimentales para la fase de Pancharatnam

La figura 5.7 muestra los resultados experimentales de la fase de Pancharatnam en función del parámetro  $s$ , donde se utilizó la transformación  $U(s, \vartheta)$ . Se observa que la influencia promedio del ruido no perturba de manera significativa esta fase. Se utiliza la notación QC: Quantum Computer.



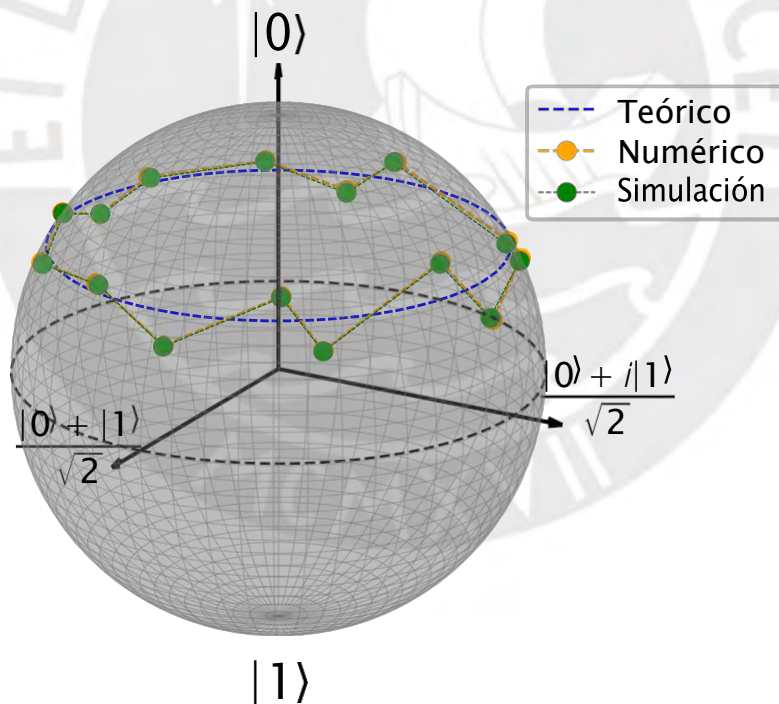
**Figura 5.7:** Influencia promedio sobre la fase de Pancharatnam. Se muestra la fase geométrica con ruido inducido (puntos negros), la fase geométrica sin ruido inducido (puntos rojos) y para comparación se muestra la trayectoria teórica sin ruido (color azul).

### 5.3. Influencia del ruido sobre la fase geométrica

Ahora estudiaremos la influencia del ruido sobre las fases de Pancharatnam y geométrica considerando únicamente una trayectoria ruidosa. Para este análisis utilizaremos el simulador de Qiskit, el cual ejecutará los circuitos cuánticos en un backend con características de decoherencia similares a las de un dispositivo real. Aplicaremos esta metodología debido al tiempo limitado disponible para el uso de la computadora cuántica de IBM.

#### 5.3.1. Trayectoria ruidosa de un cubit sobre la esfera de Bloch

La figura 5.8 muestra el resultado de perturbar la trayectoria de un cubit cuando evoluciona con la transformación  $U(s, \vartheta)$ , fijando  $\vartheta = \frac{\pi}{3}$  y variando  $s$ . Los resultados de la simulación se representan con puntos verdes, junto con el resultado numérico (puntos amarillos) obtenido a partir de las ecuaciones (5.7)–(5.15).

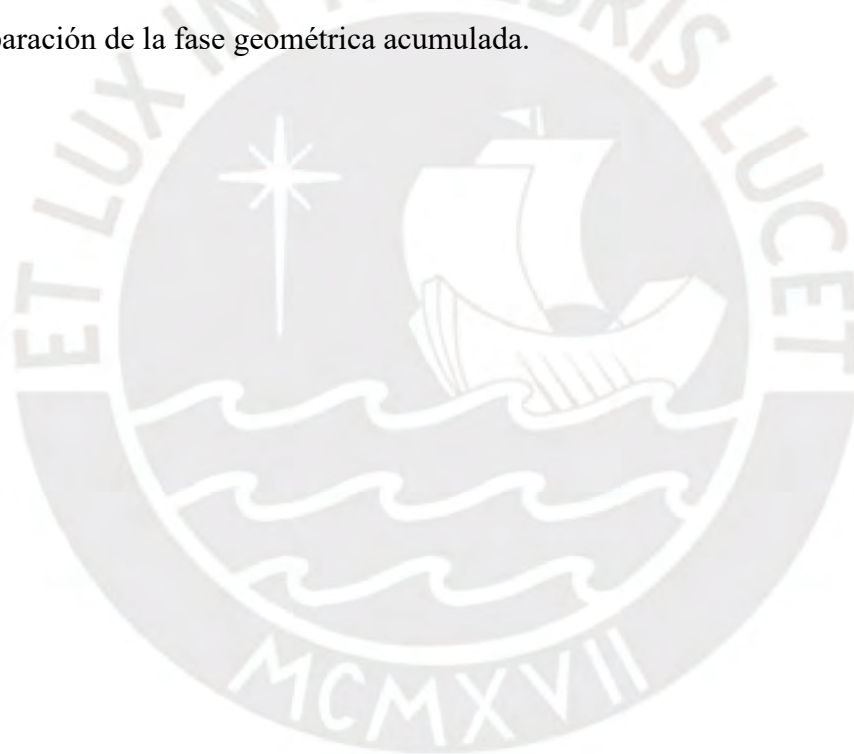


**Figura 5.8:** Trayectorias ruidosas sobre la esfera de Bloch. Se muestra la trayectoria obtenida numéricamente (puntos amarillos) de un cubit, la trayectoria obtenida de la simulación (puntos rojos) de un cubit y para comparación se muestra la trayectoria teórica sin ruido (color azul).

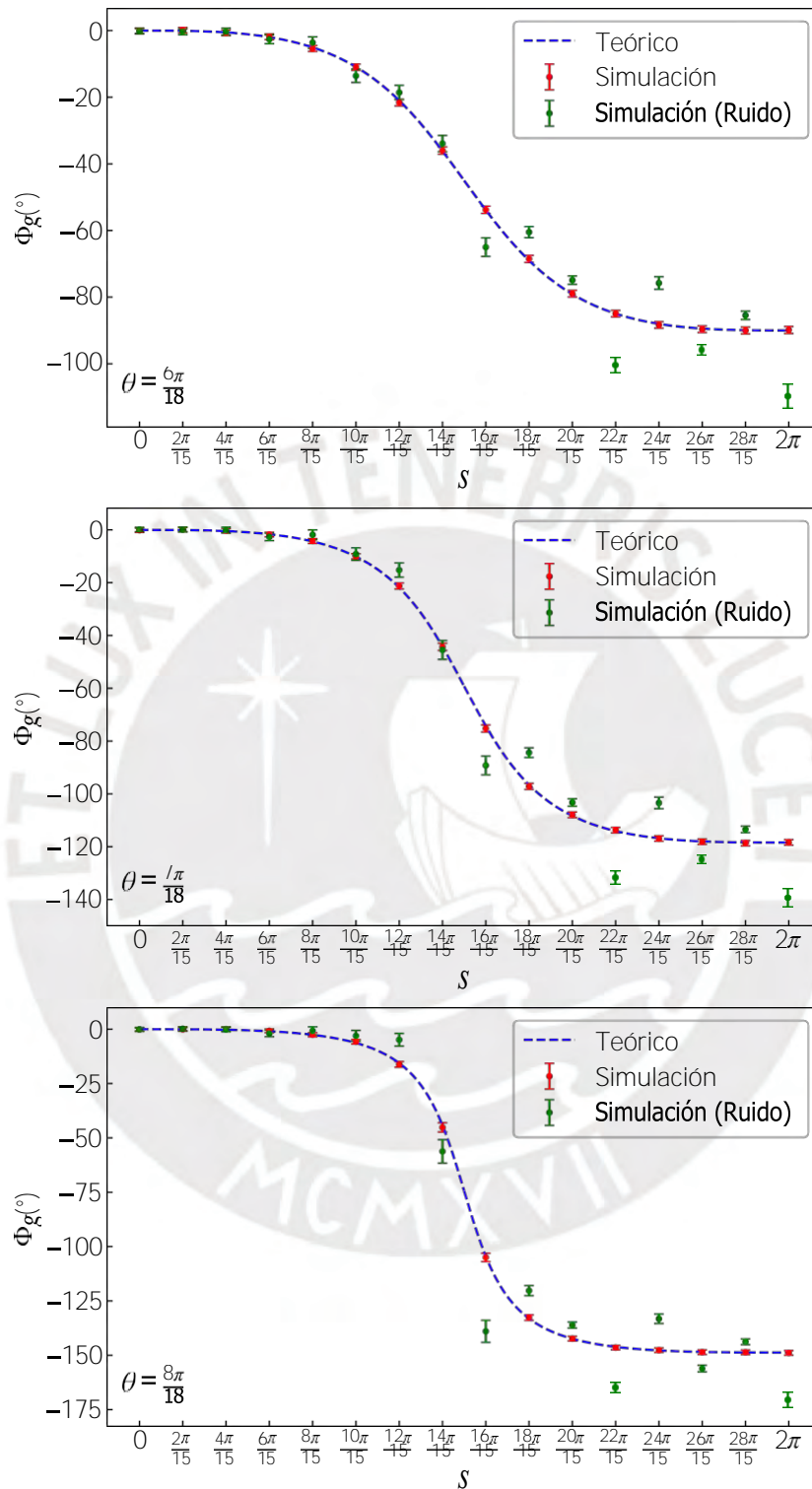
---

A continuación, empleamos los valores de  $\delta_s$  y  $\delta_\theta$  utilizados en la figura 5.8 para analizar la influencia del ruido en las fases de Pancharatnam y geométrica. Para ello, ejecutamos el circuito cuántico de la figura 4.3 y seguimos el mismo procedimiento descrito en la sección 5.2, considerando una única trayectoria.

Las figuras 5.9 y 5.10 muestran los resultados de la simulación para la fase de Pancharatnam y geométrica, sin ruido inducido (puntos rojos) y con ruido inducido (puntos verdes). Observamos que la fase de Pancharatnam presenta menor resiliencia al ruido inducido cuando  $s$  toma valores cercanos a  $\pi$  y mayor resiliencia cuando esta proximo a 0 y  $2\pi$ . Para la fase geométrica, se observa una menor resiliencia cuando  $s$  va aumentado y una mayor resiliencia cuando  $s$  toma valores pequeños. Además, se puede observar que la fase de Pancharatnam acumulada no varía, a comparación de la fase geométrica acumulada.

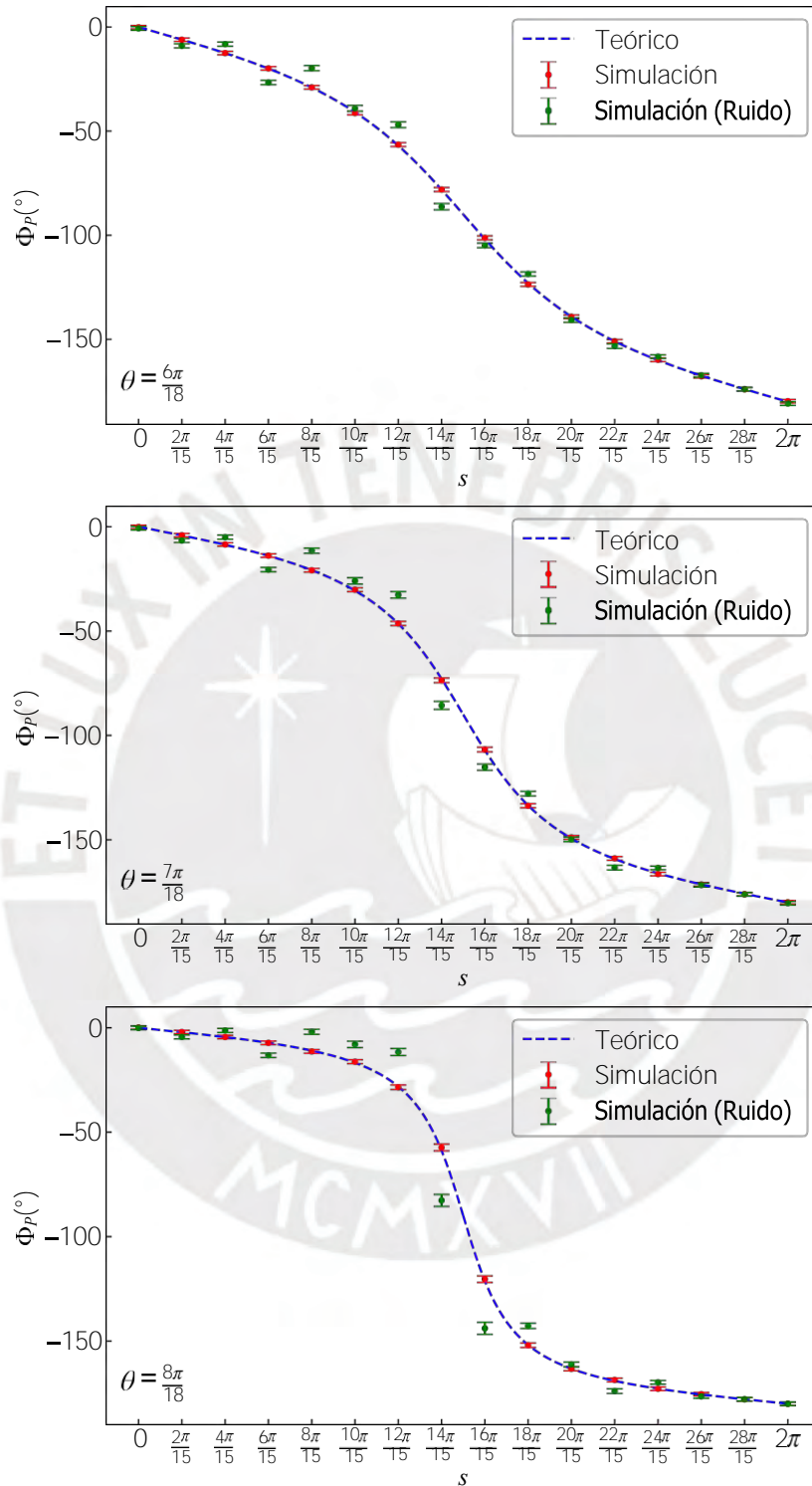


### 5.3.2. Resultados de la simulación para la fase geométrica



**Figura 5.9:** Medición de la fase geométrica para  $U(s, \vartheta)$ . Se muestra el resultado de la simulación sin ruido inducido (puntos rojos), con ruido inducido (puntos negros) y para comparación la curva teórica (líneas azules discontinuas).

### 5.3.3. Resultados de la simulación para la fase de Pancharatnam



**Figura 5.10:** Medición de la fase de Pancharatnam para  $U(s, \theta)$ . Se muestra el resultado de la simulación sin ruido inducido (puntos rojos), con ruido inducido (puntos negros) y para comparación la curva teórica (líneas azules discontinuas).

### 5.3.4. Análisis de sensibilidad

Las fases adquiridas con la transformación  $U(s, \vartheta)$  dependen de los parámetros  $s$  y  $\vartheta$ . Por tanto, pueden escribirse como una función diferenciable de dos variables,

$$\Phi = \Phi(s, \vartheta). \quad (5.25)$$

Si aplicamos una perturbación a los parámetros

$$s \rightarrow s + \delta s, \quad \vartheta \rightarrow \vartheta + \delta \vartheta,$$

donde  $\delta s$  y  $\delta \vartheta$  son las perturbaciones, la función  $\Phi(s, \vartheta)$  puede expandir en serie de Taylor hasta primer orden:

$$\Phi(s + \delta s, \vartheta + \delta \vartheta) \simeq \Phi(s, \vartheta) + \frac{\partial \Phi}{\partial s} \delta s + \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \delta \vartheta. \quad (5.26)$$

De aquí se obtiene la variación de la fase:

$$\delta \Phi \simeq \frac{\partial \Phi}{\partial s} \delta s + \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \delta \vartheta. \quad (5.27)$$

Esta relación muestra que, en el régimen lineal, la variación de la fase es una combinación lineal de las perturbaciones en  $s$  y  $\vartheta$ , ponderadas por las derivadas parciales.

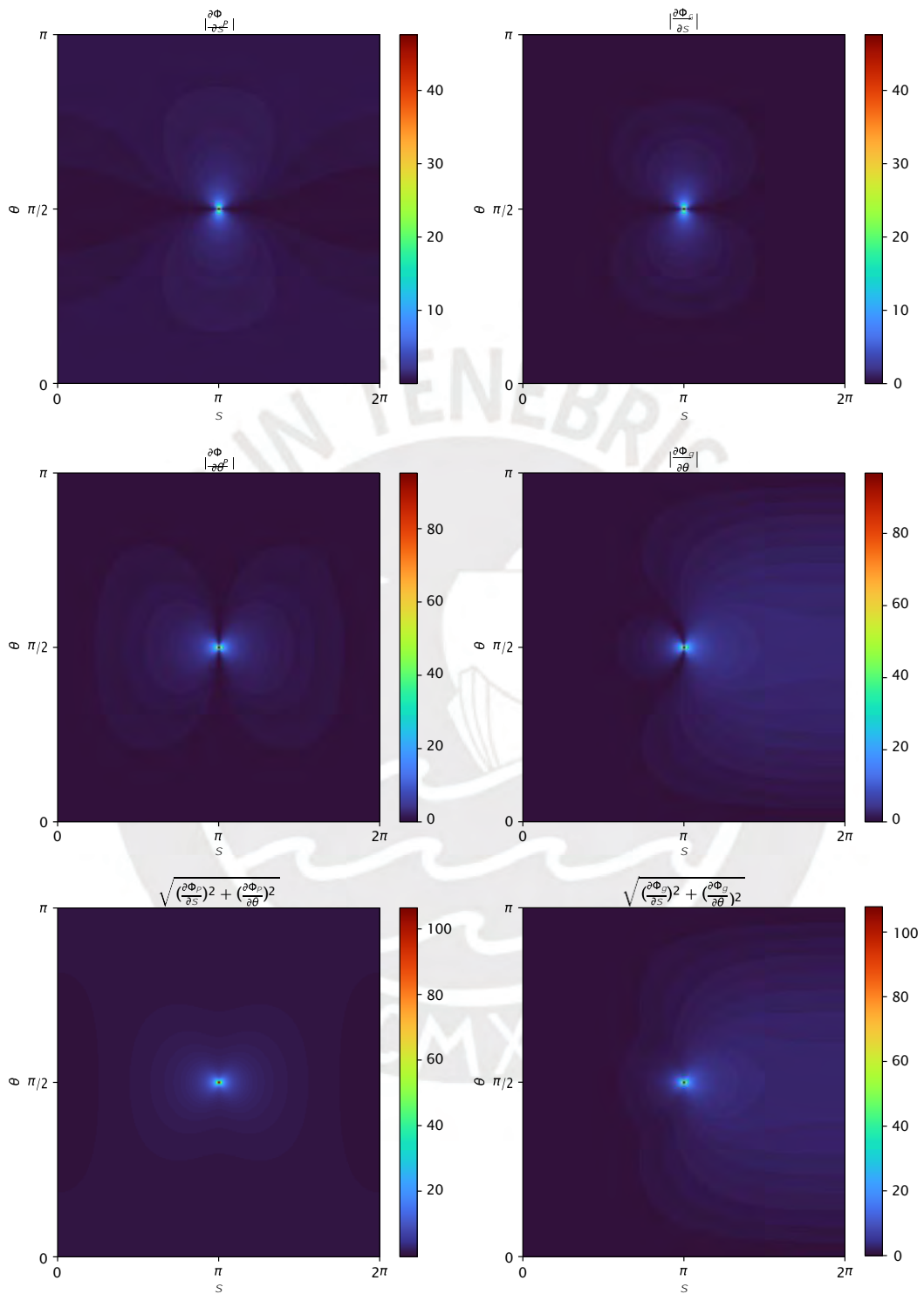
Si los errores son independientes, la ecuación anterior se reduce a

$$\sigma_{\Phi} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right)^2 \sigma_s^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}\right)^2 \sigma_{\vartheta}^2} \quad (5.28)$$

De este modo, las derivadas parciales cuantifican la sensibilidad local de la fase a pequeñas perturbaciones en cada parámetro. Para estudiar de manera global el comportamiento de la fase frente a fluctuaciones arbitrarias en el espacio  $(s, \vartheta)$ , es útil definir la sensibilidad total como:

$$R(s, \vartheta) = \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}\right)^2}. \quad (5.29)$$

El valor  $R(s, \vartheta)$  representa la magnitud del cambio de la fase por unidad de perturbación en los parámetros, constituyendo una medida directa de la robustez local frente al ruido. Regiones con valores pequeños de  $R(s, \vartheta)$  indican que la fase es resistente a variaciones paramétricas, mientras que valores grandes señalan zonas de alta sensibilidad, donde incluso pequeños errores en los parámetros pueden generar cambios significativos en la fase observada. La Figura 5.11 ilustra las regiones en las que la fase de Pancharatnam y la fase geométrica son más o menos sensibles a variaciones en los parámetros  $s$  y  $\vartheta$ .



**Figura 5.11:** Mapa de calor para observar la sensibilidad de la fase de Pancharatnam y geométrica adquirida por un cubit cuando evoluciona con la transformación  $U(s, \vartheta)$ .

# Conclusiones

En esta tesis se estudió la medición de la fase de Pancharatnam y de la fase geométrica en sistemas de un cúbit, tanto desde un punto de vista teórico como experimental, mediante la implementación de circuitos cuánticos en dispositivos cuánticos de IBM. Asimismo, se estudió la influencia del ruido sobre estas fases.

Uno de los resultados centrales de este trabajo es que los arreglos interferométricos propuestos originalmente para medir las fases de Pancharatnam y geométrica pueden ser reproducidos de manera consistente mediante circuitos cuánticos. En particular, se demostró que los circuitos diseñados son equivalentes a los interferómetros utilizados por Loredó et al., permitiendo medir tanto la fase de Pancharatnam como la fase geométrica. Los resultados experimentales obtenidos reproducen las predicciones teóricas, validando la implementación propuesta.

Un segundo resultado relevante es el estudio de la influencia del ruido sobre estas fases. Al considerar un conjunto de trayectorias ruidosas sobre la esfera de Bloch, se observó que, en promedio, tanto la fase de Pancharatnam como la fase geométrica presentan una notable robustez frente a perturbaciones en los parámetros de la evolución. Este comportamiento sugiere que el promedio sobre realizaciones ruidosas atenúa los efectos del ruido, haciendo que ambas fases permanezcan prácticamente inalteradas. Este resultado es particularmente significativo en el contexto de dispositivos cuánticos actuales, donde el ruido y la decoherencia son inevitables.

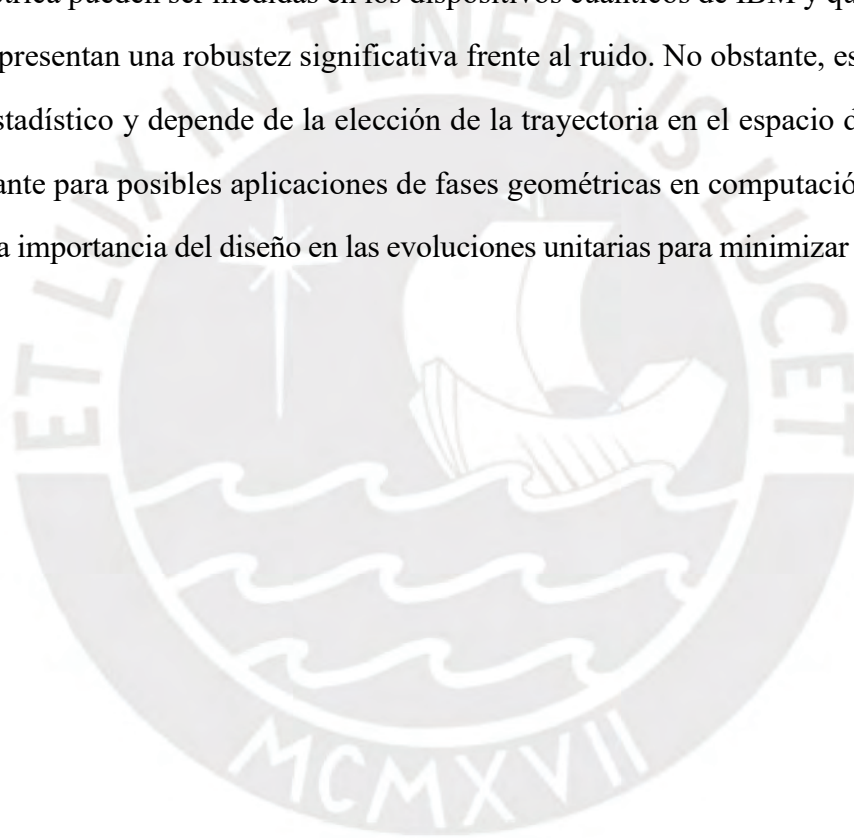
Sin embargo, al analizar la evolución de una única trayectoria ruidosa sobre la esfera de Bloch, se observó que dicha robustez no es absoluta. En este caso, tanto la fase de Pancharatnam como la fase geométrica muestran regiones de alta sensibilidad a pequeñas variaciones en los parámetros de la evolución. En particular, la fase de Pancharatnam resulta más sensible al ruido en regiones cercanas a  $s \approx \pi$ , mientras que la fase geométrica presenta mayor sensibilidad cuando  $s \rightarrow 2\pi$ . Este resultado nos sugiere que tal comportamiento está directamente relacionado con la parametrización de la evolución y no con una propiedad intrínseca de las fases en

---

sí mismas.

El análisis teórico de la sensibilidad, cuantificado mediante la función de sensibilidad  $R(s, \vartheta)$ , permitió comprender y respaldar los resultados experimentales. Se mostró que las regiones de mayor sensibilidad coinciden con aquellas donde las derivadas parciales de las fases respecto a los parámetros de la evolución son máximas. En este sentido, la aparente robustez de las fases geométricas no es universal, sino que depende críticamente de la trayectoria seguida por el estado cuántico.

En conclusión, los resultados de esta tesis indican que tanto la fase de Pancharatnam como la fase geométrica pueden ser medidas en los dispositivos cuánticos de IBM y que, bajo ciertas condiciones, presentan una robustez significativa frente al ruido. No obstante, esta robustez es de carácter estadístico y depende de la elección de la trayectoria en el espacio de parámetros. Esto es relevante para posibles aplicaciones de fases geométricas en computación cuántica, ya que muestra la importancia del diseño en las evoluciones unitarias para minimizar la sensibilidad al ruido.



# Bibliografía

- Nayak, Chetan et al. (2008). “Non-Abelian anyons and topological quantum computation”. En: *Reviews of Modern Physics* 80, págs. 1083-1159. DOI: 10.1103/RevModPhys.80.1083.
- Aghaee, Morteza et al. (2023). “InAs-Al hybrid devices passing the topological gap protocol”. En: *Physical Review B* 107.24, pág. 245423. DOI: 10.1103/PhysRevB.107.245423.
- Pancharatnam, S. (1956). “Generalized theory of interference and its applications”. En: *Proceedings of the Indian Academy of Sciences - Section A* 44.5, págs. 247-262. DOI: 10.1007/BF03046050.
- Berry, M. V. (1984). “Quantal phase factors accompanying adiabatic changes”. En: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A* 392, págs. 45-57.
- Tomita, A. y R. Y. Chiao (1986). “Observation of Berry’s topological phase by use of an optical fiber”. En: *Physical Review Letters* 57.8, págs. 937-940. DOI: 10.1103/PhysRevLett.57.937.
- Loredo, J. (2011). “Geometric phase in photonics”. En: *Master’s thesis, Pontificia Universidad Católica del Perú* Lima, Perú.
- Bhandari, R. y J. Samuel (1988). “Observation of topological phase by use of a laser interferometer”. En: *Physical Review Letters* 60, págs. 1211-1213. DOI: 10.1103/PhysRevLett.60.1211.
- Machuca, I. (2025). “Mediciones interferométricas de la fase geométrica de fotones individuales”. Tesis de licenciatura; interferometric measurement of geometric phases with single photons. Tesis de maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú. URL: <http://hdl.handle.net/20.500.12404/31682>.
- Sjöqvist, E. et al. (2000). “Geometric phases for mixed states in interferometry”. En: *Physical Review Letters* 85, págs. 2845-2849. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.2845.
- Carollo, A. y J. K. Pachos (2003). “Geometric phase in open systems”. En: *Physical Review Letters* 90, pág. 160402. DOI: 10.1103/PhysRevLett.90.160402.
- Suter, Dieter, K. T. Mueller y A. Pines (1988). “A geometric phase in the evolution of coupled spin systems”. En: *Physical Review Letters* 60, págs. 1218-1220. DOI: 10.1103/PhysRevLett.60.1218.
- Jones, J. A. et al. (2000). “Geometric quantum computation using nuclear magnetic resonance”. En: *Nature* 403.6772, págs. 869-871.
- Rauch, Helmut y Samuel A. Werner (2000). “Geometric phase in neutron interferometry”. En: *Neutron Interferometry*.
- Leibfried, D. et al. (2003). “Experimental demonstration of a robust, high-fidelity geometric two ion-qubit phase gate”. En: *Nature* 422, págs. 412-415. DOI: 10.1038/nature01492.
- Leek, P. J. et al. (2007). “Observation of Berry’s phase in a solid-state qubit”. En: *Science* 318.5858, págs. 1889-1892.
- Abdumalikov, A. et al. (2013). “Experimental realization of non-Abelian non-adiabatic geometric gates”. En: *Nature* 496.7446, págs. 482-485.
- Shapere, A. y F. Wilczek, eds. (1989). *Geometric Phases in Physics*. Singapore: World Scientific.
- Sjöqvist, E. et al. (2012). “Non-adiabatic holonomic quantum computation”. En: *New Journal of Physics* 14.10, pág. 103035. DOI: 10.1088/1367-2630/14/10/103035. URL: <https://doi.org/10.1088/1367-2630/14/10/103035>.
- Zhou, Yu-Chen et al. (2025). “High-fidelity geometric quantum gates exceeding 99.9 % in germanium quantum dots”. En: *Nature Communications* 16, pág. 7953. DOI: 10.1038/s41467-025-63241-4.
- Nielsen, Michael A. e Isaac L. Chuang (2010). *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press.
- Lau, Jonathan Wei Zhong et al. (2022). “NISQ computing: where are we and where do we go?” En: *AAPPS Bulletin* 32.1, pág. 27. DOI: 10.1007/s43673-022-00058-z.
- Solinas, P. et al. (2003). “Robustness of non-Abelian geometric quantum gates against stochastic noise”. En: *Physical Review A* 67.6, pág. 062315.
- Zhu, Shiliang y Paolo Zanardi (2005). “Geometric Quantum Gates that are Robust Against Stochastic Control Errors”. En: *Physical Review A* 72, pág. 020301. DOI: 10.1103/PhysRevA.72.020301.
- De Chiara, G. y G. M. Palma (2003). “Berry Phase for a Spin-1/2 Particle in a Classical Fluctuating Field”. En: *Physical Review Letters* 91, pág. 090404. DOI: 10.1103/PhysRevLett.91.090404.
- Lombardo, F. C. y P. I. Villar (2010). “Decoherence effects on geometric phase”. En: *Physical Review A* 81, pág. 022115. DOI: 10.1103/PhysRevA.81.022115.
- IBM Quantum (2025). *Quantum Computing Systems and Simulators*. URL: <https://www.ibm.com/quantum> (visitado 09-01-2026).
- Sanders, Barry C. (2025). “Superconducting quantum computing beyond 100 qubits”. En: *Physics* 18, pág. 45. DOI: 10.1103/Physics.18.45. URL: <https://physics.aps.org/articles/v18/45>.

- Madsen, L. et al. (2022). "Quantum computational advantage with a programmable photonic processor". En: *Nature* 606.7912, págs. 75-81. DOI: 10.1038/s41586-022-04725-x. URL: <https://www.nature.com/articles/s41586-022-04725-x>.
- Zhou, L. et al. (2020). "Quantum Approximate Optimization Algorithm: Performance, Mechanism, and Implementation on Near-Term Devices". En: *Physical Review X* 10.2, pág. 021067. DOI: 10.1103/PhysRevX.10.021067. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevX.10.021067>.
- Rodriguez, Juan, Anna Smith y Ming Lee (2025). "Quantum computing and cybersecurity: a rigorous systematic review of emerging threats, post-quantum solutions, and research directions (2019–2024)". En: *Discover Applied Sciences* 7, pág. 1083. DOI: 10.1007/s42452-025-07322-5. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s42452-025-07322-5>.
- Bova, F, A Goldfarb y G Melko (2021). "Commercial applications of quantum computing". En: *EPJ Quantum Technology* 8.1. DOI: 10.1140/epjqt/s40507-021-00091-1.
- Wu, Y. et al. (2021). "Strong Quantum Computational Advantage Using a Superconducting Quantum Processor". En: *Physical Review Letters* 127.18. DOI: 10.1103/physrevlett.127.180501.
- Zhong, H. et al. (2020). "Quantum computational advantage using photons". En: *Science* 370.6523, págs. 1460-1463. DOI: 10.1126/science.abe8770.
- Bruzewicz, C. et al. (2019). "Trapped-ion quantum computing: Progress and challenges". En: *Applied Physics Reviews* 6.2. DOI: 10.1063/1.5088164.
- Wharton, K. (2016). "Natural Parameterization of Two-Qubit States". En: *arXiv.org*. DOI: <https://arxiv.org/abs/1601.04067v1>.
- Kasirajan, V. (2021). "Foundations of Quantum Mechanics. In: Fundamentals of Quantum Computing". En: *Springer*, págs. 3-34. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-63689-0\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-63689-0_1).
- Altepeter, J., E. Jeffrey y P. Kwiat (2005). "Photonic state tomography". En: *Advances in atomic, molecular, and optical physics* 52, págs. 105-159. DOI: [https://doi.org/10.1016/s1049-250x\(05\)52003-2](https://doi.org/10.1016/s1049-250x(05)52003-2).
- Manenti, R. y M. Motta (2023). "Superconducting Qubits". En: *Quantum Information Science*. Oxford University Press. DOI: 10.1093/oso/9780198787488.003.0014. URL: <https://doi.org/10.1093/oso/9780198787488.003.0014>.
- Stancil, D. y G. Byrd (2022). *Principles of Superconducting Quantum Computers*. Hoboken, NJ: Wiley. ISBN: 9781119750727.
- Bardin, J., D. Slichter y David J. Reilly (2021). "Microwaves in Quantum Computing". En: *IEEE Journal on Microwaves*. URL: [https://tsapps.nist.gov/publication/get\\_pdf.cfm?pub\\_id=931145](https://tsapps.nist.gov/publication/get_pdf.cfm?pub_id=931145).
- Naeij, H. (2025). "Open quantum system approaches to superconducting qubits". En: *Quantum Information Processing* 24, pág. 220. DOI: 10.1007/s11228-025-04838-y. URL: <https://doi.org/10.1007/s11228-025-04838-y>.
- Aleksandrowicz, G. et al. (2019). "Qiskit: An open-source framework for quantum computing". En: DOI: <https://zenodo.org/record/2562111.2019>.
- AbuGhanem, M. (2025). "IBM quantum computers: evolution, performance, and future directions". En: *Journal of Supercomputing* 81, pág. 687. DOI: 10.1007/s11227-025-07047-7. URL: <https://doi.org/10.1007/s11227-025-07047-7>.
- KET.G (2021). "¿Cuántos shots debo utilizar?" En: DOI: <https://www.youtube.com/watch?v=00fMTHhQD7o>.
- Samuel, J. y R. Bhandari (1988). "General Setting for Berry's Phase". En: *Physical Review Letters* 60, págs. 2339-2342.
- Bargmann, Valentine (1964). "Note on Wigner's Theorem on Symmetry Operations". En: *Journal of Mathematical Physics* 5.7, págs. 862-868. DOI: 10.1063/1.1704186.
- Mukunda, N. y R. Simon (1993). "Quantum kinematic approach to the geometric phase. I. General formalism". En: *Annals of Physics* 228.2, págs. 205-268.
- Loredo, J. et al. (2009). "Measurement of Pancharatnam's phase by robust interferometric and polarimetric methods". En: *Physical Review A* 80.1. DOI: <https://doi.org/10.1103/physreva.80.012113>.
- Englert, B., C. Kurtsiefer y Harald Weinfurter (2001). "Title not specified". En: *Physical Review A* 63, pág. 032303. DOI: 10.1103/PhysRevA.63.032303.