PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Escuela de Posgrado

Existencia de Solución Global y Decaimiento de la Solución de un Sistema de la Jerarquía AKNS

Tesis para obtener el grado académico de Maestra en Matemáticas que presenta:

Flor de María Quisperima Huamán

Asesor:

Juan Ernesto Montealegre Scott

Lima, 2025

Informe de Similitud

Yo, JUAN MONTEALEGRE SCOTT, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor del trabajo de tesis titulado:

EXISTENCIA DE SOLUCIÓN GLOBAL Y DECAIMIENTO DE LA SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE LA JERARQUÍA AKNS

del autor F L O R D E M A R Í A Q U I S P E R I M A H U A M Á N

dejo constancia de lo siguiente:

El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 15%.
Las referencias individuales aluden a tesis asesoradas por mi persona, artículos basados en dichas tesis y artículos de mi autoría:

1. Cruz Yupanqui, Gladys (3% de similitud), tesis de maestría.
2. Vega Guadalupe, Segundo Teófilo (3% de similitud), tesis de maestría aludida dos veces.
3. Vigo Ingar, Katia (3% de similitud), tesis de maestría aludida dos veces.
4. Rueda Castillo, Dandy (1% de similitud), tesis de maestría.
5. Rocha Fernandez, Victor (1% de similitud), informe basado en su tesis de maestría presentado a la UNAC.
6. Loza Rojas, César (1% de similitud), artículo que presenta los capítulos 2 y 3 de su tesis de maestría presentado en la Revista de Matemáticas: Teoría y Aplicaciones.
7. XI Fast 2018 (1% de similitud), artículo presentado por Flor Quisperima y yo, basado en la tesis de maestría que estaba elaborando.
8. Mendoza Uribe Aldo (1% de similitud), artículo de investigación en el que se estudia un sistema de ecuaciones dispersivas -no relacionado con el desarrollado en la tesis revisada- por el método de regularización parabólica presentado en la revista de Pro Mathematica.

La mayor similitud de las tesis asesoradas por mi persona y la tesis evaluada, es en los preliminares, pues desarrollé cursos dirigidos a mis tesistas con materiales de mi autoría.
El artículo de Germana Preciado (1% de similitud) tampoco desarrolla un trabajo similar al de la tesis evaluada.
Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software Turnitin el 15/11/2025.
He revisado con detalle dicho reporte y en la tesis no se advierten indicios de plagio.

Apellidos y nombres del asesor: MONTEALEGRE SCOTT, JUAN	
DNI: 06443788	Firma
ORCID: 0000-0002-8652-1709	
LUGAR: SAN MIGUEL	
FECHA: 17-11-2025	

Existencia de solución Global y Decaimiento de la Solución de un Sistema de la Jerarquía AKNS

Flor de María Quisperima Huamán

Tesis presentada en la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú para obtener el grado académico de Maestra en Matemáticas.

Miembros del Jurado:

Dr.Ruben Angel Agapito Ruiz, PUCP
(Presidente del Jurado)

Dr. Juan Ernesto Montealegre Scott, PUCP
(Asesor)

Dr. Marcelo Velloso Flamarion Vasconcellos, PUCP
(Tercer Miembro)

Dedicado a mis hijos, Sofia y Leonardo

y a mi esposo Aurelio.

Agradecimientos

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento a mi asesor el Dr: Juan Montealegre Scott por su invaluable guía y apoyo durante todo el proceso de investigación. Su experiencia y conocimientos me han ayudado a desarrollar una comprensión de los temas abordados en este trabajo y a superar los desafíos que se presentaron durante el tiempo que estuve desarrollando mi tesis.

Quiero expresar támbien mi más sincero agradecimiento a mis jurados el Dr. Ruben Agapito y al Dr. Marcelo Velloso Flamarion, por el tiempo que han dedicado a la revisión de mi tesis y sus comentarios han sido un aporte invaluable para mejorar mi trabajo de tesis.

Agradezco profundamente a mi familia por su apoyo incondicional durante estos años de estudio. Su amor y comprensión me han dado la fuerza para seguir adelante y culminar mi tesis.

Resumen

En este trabajo estudiaremos el problema de valor inicial asociado al sistema de Ablowitz, Kaup, Newell y Segur (AKNS)

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x \left(uv^2\right) = 0, \quad x, t \in \mathbb{R} \\ \partial_t v + \partial_x^3 v + \partial_x \left(u^2 v\right) = 0 \\ u\left(x, 0\right) = \varphi\left(x\right), \\ v\left(x, 0\right) = \psi\left(x\right). \end{cases} \tag{1}$$

Nuestro objetivo es estudiar la buena formulación local, global y su comportamiento asintótico del problema (1)

Empezaremos demostrando que el problema (1) está bien formulado localmente, cuando los datos iniciales pertenecen a $H^s \times H^s$ con $s > \frac{3}{2}$, y que el tiempo de existencia de solución, no depende del orden s del espacio de Sobolev, para ello usaremos la teoría cuasi-lineal de Kato.

A continuación se adaptaron las ideas desarrolladas en Bisognin-Menzala para conseguir los estimados del conmutador, y obtener un “estimado a priori”, que junto con el “principio de extensión” nos permite para datos iniciales pequeños en $H^s \times H^s$ con $s \geq 2$, probar la existencia de una solución global y su comportamiento asintótico.

Finalmente, usando los estimados lineales (de tipo Kenig-Ponce-Vega) extendemos la solución local para datos iniciales en espacios $H^s \times H^s$ con $s \geq \frac{1}{4}$.

Palabras clave: sistema dispersivo no lineal; ecuación de Korteweg-de Vries modificada; buena formulación local; buena formulación global; decaimiento en el tiempo de las soluciones.

Abstract

In this work, we study the initial value problem associated with the Ablowitz, Kaup, Newell and Segur (AKNS) system

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x \left(uv^2\right) = 0, \quad x, t \in \mathbb{R} \\ \partial_t v + \partial_x^3 v + \partial_x \left(u^2 v\right) = 0 \\ u\left(x, 0\right) = \varphi\left(x\right), \\ v\left(x, 0\right) = \psi\left(x\right). \end{cases} \tag{1}$$

Our objective is to study the well-posedness local,and global and asymptotic behavior of

problem (1). We will begin by demonstrating that problem (1) is well-posed locally when the initial data belongs to $H^s \times H^s$ with $s > 3/2$, and that the existence time of the solution does not depend on the order s of the Sobolev space; for this, we will use Kato's quasi-linear theory.

The ideas developed in Bisognin-Menzala were then adapted to obtain the commutator estimates, and obtain an .ª priori estimate"which, together with the extension principle, allows us to prove the existence of a global solution and its asymptotic behavior in $H^s \times H^s$ for small initial data with $s \geq 2$.

Finally, using Kenig-Ponce-Vega type linear estimates, we extend the local solution to initial data in spaces $H^s \times H^s$ with $s > \frac{1}{4}$.

Keywords: nonlinear dispersive system; modified Korteweg-de Vries equation; local well-posedness; global well-posedness; decay in time of solutions.

Índice general

Introducción

En este trabajo se estudia el problema de valor inicial asociado al sistema

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x (uv^2) = 0, \\ \partial_t v + \partial_x^3 v + \partial_x (u^2 v) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ v(x,0) = \psi(x). \end{cases} \tag{1}$$

donde $u = u(x,t)$ y $v = v(x,t)$ son funciones reales y $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[$, además φ y ψ son funciones dadas. El sistema en (1) tiene la estructura de un par de ecuaciones de Korteweg-de Vries modificadas (mKdV) acopladas a través de los efectos no lineales, fue presentado por Ablowitz, Kaup, Newel y Segur [1, 2] como uno de los sistemas que pueden resolverse mediante el método de dispersión inversa para datos iniciales que decaen rápidamente en el infinito.

Los objetivos de este trabajo consisten en estudiar en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$, la buena formulación local, la buena formulación global y el comportamiento asintótico en el tiempo de la solución global del problema de valor inicial (1).

Se dice que el problema (1) está bien formulado localmente en estos espacios $H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ si genera un flujo local continuo, es decir, si se cumplen las condiciones de existencia, unicidad, persistencia y dependencia continua de los datos iniciales. El problema (1) está bien formulado globalmente si el flujo local se puede continuar indefinidamente en la variable temporal, definiendo así una solución de (1) válida para todo $t \geq 0$. Esta teoría es fundamental para el estudio analítico o numérico del sistema.

Dos artículos importantes para el logro de los objetivos de este trabajo son [6] y [7]. Bona-Ponce-Saut-Tom [7] analizaron el problema de valor inicial asociado al sistema

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + a_3 \partial_x^3 v + u\partial_x u + a_1 v \partial_x v + a_2 \partial_x (uv) = 0 \\ b_1 \partial_t v + b_2 a_3 \partial_x^3 u + \partial_x^3 v + b_2 a_2 u \partial_x u + v \partial_x v + b_2 a_1 \partial_x (uv) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Este sistema que tiene la estructura de dos ecuaciones de Korteweg-de Vries acopladas a través de los efectos dispersivos y los no lineales, fue derivado por Gear y Grimshaw [23] como un modelo que describe la fuerte interacción de ondas largas de gravedad interna que se propagan sobre capas vecinas en un fluido estratificado. También mostraron que las soluciones de (2) satisfacen las siguientes leyes de conservación

$$\Phi_1(u) = \int_{\mathbb{R}} u dx \qquad \Phi_2(v) = \int_{\mathbb{R}} v dx \qquad \Phi_3(u,v) = \int_{\mathbb{R}} \left(b_2 u^2 + b_1 v^2\right) dx$$

Bona, Ponce, Saut y Tom [7] usaron la teoría cuasi lineal Kato [34, 35] para demostrar la buena formulación local en $H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ para cualquier $s \geq 2$ y con la teoría desarrollada por Kenig, Ponce y Vega [37, 38, 39] consiguieron el resultado local en $H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$. Además derivaron la ley de conservación

$$\Phi_4(u,v) = \int_{\mathbb{R}} \left[b_2 \left(u_x^2 + 2a_3 u_x v_x - \frac{1}{3}u^3 - a_2 u^2 v - a_1 u v^2 \right) + v_x^2 - \frac{1}{3} v^3 \right] dx$$

y a continuación, usando las cantidades conservadas Φ_3 y Φ_4, obtuvieron un estimado *a priori* en el espacio $H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ que junto con los estimados de Kenig, Ponce y Vega les permitió extender la solución local a una global en $H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ con $s \geq 1$.

Por otro lado, Bisognin y Menzala [6] consideraron el sistema formado por dos ecuaciones de Korteweg-de Vries generalizadas, acopladas a través de los efectos dispersivos y no lineales

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + a_3 \partial_x^3 v + u^p \partial_x u + a_1 v^p \partial_x v + a_2 \partial_x (u^p v) = 0 \\ b_1 \partial_t v + b_2 a_3 \partial_x^3 u + \partial_x^3 v + b_2 a_2 u^p \partial_x u + v^p \partial_x v + b_2 a_1 \partial_x (u v^p) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

en donde $p \geq 1$ es un entero. Bisognin y Menzala estudiaron el comportamiento asintótico en el tiempo de las soluciones del sistema (3). Con ese fin derivaron un teorema de buena formulación local en $H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ con $s \geq 1$, siguiendo las ideas de [7]. Para extender la solución local mostraron un estimado *a priori* válido para $p \geq 2$, con el cual dedujeron la existencia de la solución global para valores de $p > 4$, y mediante el método de fase estacionaria obtuvieron el comportamiento asintótico en el tiempo de la solución global.

Con el proposito de presentar los resultados, hemos organizado el trabajo de la siguiente forma. En el primer capítulo proporcionamos definiciones y proposiciones necesarias en capítulos posteriores del trabajo, las demostraciones serán omitidas, sin embargo, indicaremos las referencias pertinentes.

En el segundo capítulo se demuestran la existencia local de soluciones, su unicidad y la dependencia continua de los datos iniciales del problema de valor inicial (1). Los principales resultados son los teoremas II.1 y II.2. El primero establece que el problema (1) está bien formulado localmente bajo el supuesto de que los datos iniciales $\varphi, \psi \in H^s(\mathbb{R})$ con $s > \frac{3}{2}$. El segundo teorema se refiere al tiempo de existencia T_s del teorema II.1, el cual puede ser elegido independientemente del orden del espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$. Para las demostraciones de ambos teoremas, se siguió las ideas de Kato [35] adaptadas para el problema (1).

En el tercer capítulo se demuestra la existencia de la solución global y su comportamiento asintótico, en el teorema III.2. La existencia de la solución global será consecuencia del *estimado a priori* para la solución del problema (1), probado en el teorema III.1, y del *principio de extensión* [27, pág 269]. Para obtener el estimado a priori, inicialmente se intentó deducirlo con el procedimiento de [35], sin embargo, esto no fue posible porque se necesitan "suficientes" cantidades conservadas de las que carece el sistema (1). Es por ello que seguimos las ideas desarrolladas en [6] para obtener los teoremas III.1 y III.2. El *estimado a priori* para la solución local del problema (1) garantiza que la norma de la solución local permanece acotada en un intervalo de tiempo finito, información que combinada con el principio de extensión prueba que para datos iniciales pequeños $\varphi, \psi \in H^s(\mathbb{R})$ con $s \geq 2$, el problema de valor inicial (1) tiene una única solución global. En el teorema III.2 también se estudió el comportamiento asintótico de la solución y se demostró que la solución decae con un orden de decaimiento de $\left(t^{-\frac{1}{3}}\right)$.

En el capítulo cuatro se demuestra el teorema IV.1, el cual representa un avance en la teoría local del problema (1) presentada en el teorema II.1 Como sabemos, la proposición I.24, $H^s(\mathbb{R})$ es un álgebra respecto a la multiplicación de funciones siempre que s sea mayor que $\frac{1}{2}$. La desigualdad (I.3) es fundamental para la prueba del teorema II.1, por ejemplo en las desigualdades (II.14) o (II.15). Por otro lado, la demostración del teorema IV.1, se obtendrá como una aplicación del Teorema de Contracción, para esto se requiere sustituir la desigualdad (I.3) por un estimado trilineal adecuado. Tal estimado se presentará en el teorema IV.6 y se probará usando los estimados lineales debidos a Kenig, Ponce y Vega [37, 38, 39, 40].

Finalmente expreso mi especial y profundo agradecimiento al Dr: Juan Montealegre

Scott por haber dedicado su valioso tiempo por su asesoramiento en el desarrollo de este trabajo.

Notaciones

Utilizaremos notación estándar.

- $L^p(\mathbb{R}^n)$ espacio de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ de orden p, $1 \leq p < \infty$.
- $\|u\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$ norma de u en $L^p(\Omega)$.
- $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ espacio de las funciones medibles esencialmente acotadas en $\mathbb{R}^n$.
- $\|\cdot\|_{L^\infty} = \text{ínf}\,\{C > 0 : |u(x)| \leq C, \ \ \text{casi en todo } \Omega\} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)|$ norma en $L^\infty(\mathbb{R})$.
- $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$ producto interno en $L^2(\mathbb{R})$.
- J^s potencial de Bessel de orden $-s$, $\widehat{J^s u}(\xi) = \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \widehat{u}(\xi)$.
- $D^s = (-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}$ potencial de Riesz de orden $-s$, $\widehat{D^s u}(\xi) = |\xi|^s \,\widehat{u}(\xi)$.
- $H_p^s(\mathbb{R}) = J^{-s}L^p(\mathbb{R})$ espacio de Sobolev de orden s basado en $L^p(\mathbb{R})$ y norma $\|\cdot\|_{H_p^s} = \|J^s\cdot\|_{L^P}$.
- $H^s(\mathbb{R}) = H_2^s(\mathbb{R})$ espacio de Hilbert de orden s con base en $L^2(\mathbb{R})$ y producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^s} = \langle J^s\cdot, J^s\cdot\rangle_{L^2}$.
- $\mathbb{X} = X \times X$ espacio de Banach producto cartesiano de X por X con norma $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}^2 = \|\cdot\|_X^2 + \|\cdot\|_X^2$, si X sea espacio de Banach, y producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{X}} = \langle\cdot,\cdot\rangle_X + \langle\cdot,\cdot\rangle_X$.
- $C([0,T] : X)$ espacio de funciones continuas de $[0,T]$ en X.
- $[A,B] = AB - BA$ conmutador de los operadores A y B.

- $L_x^p L_T^q = L^p\left(\mathbb{R} : L^q\left[0,T\right]\right) = \left\{u : \mathbb{R}\times[0,T] \to \mathbb{R} : \|u\|_{L_x^p L_T^q} < +\infty \text{ con } 1 \leq p,q < \infty\right\}$ donde $\|u\|_{L_L^p L_T^q} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^T |u(x,t)|^q dt\right)^{\frac{p}{q}} dx\right)^{\frac{1}{p}}$. Si $p = \infty$ o $q = \infty$ usaremos una notación similar, incluyendo la norma del supremo esencial.

- C es una constante cuyo valor puede cambiar de una linea a otra.

Observación. Cuando $n = 1$ escribiremos $C_0^k, C_1^k, S,\ L^p$ en vez de $C_0^k\left(\mathbb{R}\right), C_1^k\left(\mathbb{R}\right)$, $S\left(\mathbb{R}\right),\ L^p\left(\mathbb{R}\right)$.

Capítulo I

Preliminares

En este capítulo presentaremos la teoría necesaria para el desarrollo de capítulos posteriores de este trabajo. Las demostraciones de algunos teoremas y proposiciones serán omitidas, sin embargo, indicaremos donde encontrarlas. Las principales referencias son los libros de Arbogast-Bona [4], Cazenave-Haraux [15], Folland [20] y Linares-Ponce [43].

I.1. Espacios de Lebesgue L^p

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Si $1 \leq p \leq \infty$ y $u : \Omega \to \mathbb{C}$ es una función medible, definimos las normas

$$\|u\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p} & \text{si} \quad 1 \leq p < \infty \\ \\ \text{ínf} \{C \geq 0 : |u(x)| \leq C \text{ casi en todo } x \in \Omega\} & \text{si} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Definición I.1. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $1 \leq p \leq \infty$. Definimos*

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{C} : u \textit{ es medible y } \|u\|_{L^p} < \infty\}.$$

Proposición I.2 (Desigualdad de Hölder)**.** Sean $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^q(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces $uv \in L^1(\Omega)$ y

$$\|uv\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}$$

es decir

$$\int_\Omega |u(x) v(x)| \, dx \leq \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |v(x)|^q \, dx \right)^{1/q}.$$

En general, si $u \in L^p$ y $v \in L^q$, entonces $uv \in L^r$ siempre que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Además,

$$\|uv\|_{L^r} \leq \|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}.$$

Demostración. [20, Lema 6.2]. □

La condición $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, presente en la desigualdad de Hölder, aparece con frecuencia en la teoría de los espacios L^p. Si $1 \leq p \leq \infty$ es tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, q es llamado *exponente conjugado* de p.

Proposición I.3. $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, con la norma $\|\cdot\|_{L^p}$ es un espacio de Banach. Además, el espacio $C_0(\Omega)$ de las funciones continuas que se anulan en el infinito es denso en $L^p(\Omega)$ siempre que $1 \leq p < \infty$.

Demostración. [20, Teorema 6.6]. □

Para $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$ se define el *producto de convolución de u y v* por

$$u * v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)dy$$

Distintas condiciones se pueden imponer a las funciones u y v para definir su convolución, como las que son dadas a continuación.

Proposición I.4. Sean $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $v \in L^q(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p, q < \infty$ y $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0$. Entonces $u * v \in L^r(\mathbb{R}^n)$ y se cumple la *desigualdad de Young*

$$\|u * v\|_{L^r} \leq \|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}.$$

Demostración. [28, Teorema A.2]. □

El producto de convolución de funciones medibles, cuando esta definido, tiene las siguientes propiedades:

(1) $u * v = u * v$,

(2) $\lambda(u * v) = u * (\lambda v)$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

(3) $(u * v) * w = u * (v * w)$, y

(4) $u * (v + w) = (u * v) + (u * w)$.

Proposición I.5 (Riesz-Thorin)**.** Sean $p_0 \neq p_1$ y $q_0 \neq q_1$. Si $T : L^{p_0} \to L^{q_0}$ es un operador lineal acotado con norma M_0 y también $T : L^{p_1} \to L^{q_1}$ es un operador lineal acotado con norma M_1, entonces $T : L^{p_\theta} \to L^{q_\theta}$ es acotado con norma M_θ tal que

$$M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$$

con $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ y $\frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$ donde $0 \leq \theta \leq 1$.

Demostración. [43, Teorema 2.1]. □

I.2. Distribuciones temperadas

1. Espacio de Schwartz

Denotaremos por $\mathbb{N}^n$ el conjunto de n-uplas de enteros no negativos

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$$

es llamado un multi-índice. El orden del multi-índice α es

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n.$$

Para $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida sobre un conjunto abierto Ω, definimos

$$\partial^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} u(x)$$

y para $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Definición I.6. *El* espacio de Schwartz *es el conjunto de funciones complejas infinitamente diferenciables rápidamente decrecientes, es decir,*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{\alpha,\beta} < \infty, \text{ para todo } (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n \right\},$$

en donde, para $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$

$$\|u\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta u(x) \right|.$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con la métrica

$$d(u,v)=\sum_{|\alpha|,|\beta|}\frac{\|u-v\|_{\alpha,\beta}}{2^{|\alpha|+|\beta|}\left(1+\|u-v\|_{\alpha,\beta}\right)}$$

es un espacio métrico completo.

Son conocidas las relaciones

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\subsetneq\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\subsetneq L^p(\mathbb{R}^n)\quad \text{si } 1\leq p\leq\infty$$

Además,

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\ \text{ y } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\ \text{ son densos en } L^p(\mathbb{R}^n)\ \text{ si } 1\leq p<\infty$$

entonces, dada $u\in L^p(\mathbb{R}^n)$ existen una sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y una sucesión $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tales que

$$\lim_{k\to\infty}\|u_k-u\|_{L^p}=0\qquad \text{y}\qquad \lim_{k\to\infty}\|v_k-u\|_{L^p}=0.$$

Notemos que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ no son densos en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ pues en caso contrario toda función de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ sería continua desde que el limite uniforme de funciones continuas es una función continua.

2. Distribuciones Temperadas

El propósito de esta subsección es estudiar la clase de los funcionales lineales asociados con el espacio de Schwartz.

La topología en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es determinada por la siguiente definición de convergencia en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definición I.7. *La sucesión* $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *en* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ converge *a* $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *si*

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^n\times\mathbb{N}^n:\|u_k-u\|_{\alpha,\beta}\to 0 \text{ cuando } k\to\infty.$$

Con esta definición tenemos al conjunto de las distribuciones temperadas.

Definición I.8. *Una aplicación* $T:\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ *es una* distribución temperada *si*

1. T es lineal, y

2. T es continua: $u_k\to u$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\Rightarrow Tu_k\to Tu$ en $\mathbb{R}$.

Definición I.9. *El conjunto de las* distribuciones temperadas, *representado por* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, *es el dual topológico de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ para $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ escribiremos $\langle T, u\rangle$ o $\langle T, u\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$ en vez de $T(u)$.

Proposición I.10. Los elementos de $L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p < \infty$, son distribuciones temperadas.

La proposición implica que

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subsetneq L^p(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \text{si } 1 \leq p < \infty$$

La distribución δ de Dirac centrada en el punto $x \in \mathbb{R}^n$ definida por

$$\langle \delta_x, v\rangle = v(x), \ \ v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

es una distribución temperada que no es una función.

I.3. Transformada de Fourier

1. Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^n)$

Definición I.11. *Sea* $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(1) *La función* $\mathcal{F}u$ *definida por*

$$\mathcal{F}u(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle} u(x)\, dx, \ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

en donde $\langle x, \xi\rangle = \sum_{j=1}^n x_j\xi_j$, *es llamada* transformada de Fourier *de* u.

(2) *La función* $\mathcal{F}^{-1}u$ *dada por*

$$\mathcal{F}^{-1}u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle} u(\xi)\, d\xi, \ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

es llamada transformada inversa de Fourier *de* u.

Por ejemplo, si f es la función característica en el intervalo $[-1, 1]$, es claro que $f \in L^1(\mathbb{R})$ y

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-i\langle x,\xi\rangle} dx = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{e^{-i\xi} - e^{i\xi}}{2i\xi}\right),$$

entonces

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\hat{f}(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\xi}{\xi}, & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1, & \text{si } \xi = 0. \end{cases}$$

Notemos que $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$ y $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) \to 0$.

La siguiente proposición nos muestra que este comportamiento es cierto para cualquier $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Proposición I.12 (Teorema de Riemann-Lebesgue)**.** La aplicación

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C^0_\infty(\mathbb{R}^n)$$

es una transformación lineal acotada y

$$\|\mathcal{F}u\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-n/2}\|u\|_{L^1}.$$

Demostración. [43, Teorema 1.1]. □

Proposición I.13. Si $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\partial^\alpha u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\alpha \in \mathbb{N}^n$, entonces

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha u)(\xi) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}u(\xi).$$

Demostración. [43, Proposición 1.1]. □

En general,

$$\mathcal{F}[P(\partial)u](\xi) = P(i\xi)\mathcal{F}u(\xi),$$

donde P es un polinomio de n variables y $P(\partial)$ es el operador diferencial asociado al polinomio P.

2. Transformada de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y en $L^2(\mathbb{R}^n)$

Como el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$, una consecuencia inmediata de este hecho es que la definición de la transformada de Fourier, así como las propiedades establecidas en la subsección anterior también se cumplen en el espacio de Schwartz.

La relación entre la transformada de Fourier y el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ está descrita en el siguiente resultado.

Proposición I.14. La transformada de Fourier $\mathcal{F}$ es un isomorfismo de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo.

Demostración. [43, Teorema1.6]. □

Proposición I.15. Si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|\mathcal{F}u\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}.$$

Demostración. [43, Teorema 1.3]. □

Por lo tanto $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ es un operador lineal acotado, así tiene una (única) extensión lineal acotada

$$\widehat{\cdot} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n).$$

llamada la transformada de Fourier sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Proposición I.16. La transformada de Fourier sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$ es un operador lineal, isométrico y sobreyectivo.

Demostración. [43, Teorema 1.3]. □

En consecuencia, existe la transformada de Fourier inversa $\overset{\vee}{\cdot} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, si $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es una sucesión tal que

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_{L^2} = 0,$$

la *transformada de Fourier* de u en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y la *transformada de Fourier inversa* de u sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$ son calculadas respectivamente por

$$\widehat{u}(\xi) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}u_k(\xi) \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^n) \tag{I.1}$$

y

$$\check{u}(x) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}^{-1}u_k(\xi) \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^n). \tag{I.2}$$

(I.1) y (I.2) son independientes de la sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ elegida en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Entonces, si $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\widehat{u}(\xi) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{B(0,k)} e^{-i(x,\xi)} u(x)\, dx \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} u(x)\, dx$$

y

$$\check{u}(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{B(0,k)} e^{i(x,\xi)} u(x)\, dx \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} u(\xi)\, d\xi.$$

Para $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ su transformada de Fourier se define como sigue.

Definición I.17. *Si* $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$*, la transformada de Fourier* $\widehat{u}$ *y la transformada de Fourier inversa* $\check{u}$ *de* u *se definen por*

$$\langle \widehat{u}, v \rangle = \langle u, \widehat{v} \rangle \qquad y \qquad \langle \check{u}, v \rangle = \langle u, \check{v} \rangle$$

para $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Proposición I.18. Sean $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, de define

$$u * v(x) = u(v(x - \cdot))$$

Entonces $u * v \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y

$$\widehat{u * v} = \widehat{u}\widehat{v}$$

donde $\widehat{u}\widehat{v} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ es definido como $\widehat{u}\widehat{v}(\varphi) = \widehat{u}(\widehat{v}\varphi)$ para cualquier $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. [43, Proposición1.3]. $\square$

I.4. Espacios de Sobolev de tipo $L^2(\mathbb{R}^n)$

Para $s \in \mathbb{R}$, sea $J^s : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dado por

$$\widehat{J^s u}(\xi) = \left(1 + |\xi|^2\right)^{s/2} \widehat{u}(\xi)$$

para todo $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Llamamos a J^s el potencial de Bessel de orden s.

Definición I.19. *El espacio de Sobolev de orden* $s \in \mathbb{R}$ *de tipo* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *es el conjunto* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *definido por*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : J^s u \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\},$$

con la norma $\|\cdot\|_{H^s}$ *definida como*

$$\|u\|_{H^s} = \|J^s u\|_{L^2} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^2\right)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi\right)^{1/2}.$$

Además, $H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$.

Estos espacios son un caso particular de

$$H_p^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : J^s u \in L^p(\mathbb{R}^n)\},$$

$1 \leq p \leq \infty$ en donde

$$\|u\|_{H_p^s} = \|J^s u\|_{L^p}$$

Proposición I.20.

(1) Si $s_1 \leq s_2$ entonces $H^{s_2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s_1}(\mathbb{R}^n)$ continuamente y densamente. Además

$$\forall u \in H^{s_2}(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{H^{s_1}} \leq \|u\|_{H^{s_2}}.$$

(2) $H^s(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert separable con el producto interno definido para todo $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ por

$$\langle u, v\rangle_{H^s} = \langle J^s u, J^s v\rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^2\right)^s \widehat{u}(\xi)\,\overline{\widehat{v}(\xi)}\,d\xi.$$

Es decir, vía la transformada de Fourier

$$H^s(\mathbb{R}^n) = L^2\left(\mathbb{R}^n : \left(1 + |\xi|^2\right)^s d\xi\right).$$

(3) Para todo $s \in \mathbb{R}$ el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^s(\mathbb{R}^n)$.

(4) Si $r \leq s \leq t$ con $s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2$ y $\theta \in [0, 1]$, entonces

$$\|u\|_{H^s} \leq \|u\|_{H^{s_1}}^{1-\theta} \|u\|_{H^{s_2}}^{\theta}.$$

Demostración. [43, Proposición 3.1]. □

También tenemos el siguiente resultado.

Proposición I.21 (de convolución)**.** Si $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \geq 0$, entonces

$$\mathcal{F}(u * v)(\xi) = (2\pi)^{n/2} \mathcal{F}(u)(\xi)\,\mathcal{F}(v)(\xi), \ \ \xi \in \mathbb{R}^n$$

y

$$\mathcal{F}(uv)(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \mathcal{F}(u)(\xi) * \mathcal{F}(v)(\xi), \ \ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Proposición I.22 (de Inmersión de Sobolev)**.** Si $s > \frac{n}{2} + k$ entonces $H^s(\mathbb{R}^n)$ está contenido continuamente en el espacio $C^k_\infty(\mathbb{R}^n)$ de las funciones con k derivadas continuas que se anulan en el infinito, y

$$\|u\|_{C^k_\infty} \leq C_{(s)} \|u\|_{H^s}$$

en donde

$$\|u\|_{C^k_\infty} = \max_{0\leq|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty} .$$

Demostración. [43, Teorema 3.2]. □

En consecuencia, si $n = 1$ y $s > \frac{1}{2} + k$,

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C_{(s)} \|u\|_{H^s} , \quad \|\partial_x u\|_{L^\infty} \leq C_{(s)} \|u\|_{H^s} , \quad \left\|\partial_x^2 u\right\|_{L^\infty} \leq C_{(s)} \|u\|_{H^s} , \cdots \text{etc.}$$

Proposición I.23. Para cualquier $s \in \mathbb{R}$ y para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\partial^\alpha : H^s(\mathbb{R}^n) \to H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ es un operador acotado, y

$$\|\partial^\alpha u\|_{H^{s-|\alpha|}} \leq \|u\|_{H^s} .$$

Demostración. [43, Teorema 3.3]. □

De la desigualdad anterior es claro que

$$\|\partial^\alpha u\|_{H^s} \leq c \|u\|_{H^{s+|\alpha|}}$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ y para todo $s \in \mathbb{R}$.

La siguiente propiedad es esencial.

Proposición I.24. Si $s > \frac{n}{2}$ entonces $H^s(\mathbb{R}^n)$ es un álgebra respecto a la multiplicación funciones, es decir, $uv \in H^s(\mathbb{R}^n)$ siempre que $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$, y

$$\|uv\|_{H^s} \leq C_s \|u\|_{H^s} \|v\|_{H^s} . \tag{I.3}$$

Además, si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones débilmente convergentes a u y v en $H^s(\mathbb{R}^n)$, respectivamente, entonces $\underset{n\to\infty}{\text{w–lim}}\, u_n v_n = uv$.

Demostración. [43, Teorema 3.4]. □

Proposición I.25. Sean $1 < p_0,\, p_1 < \infty$, $s_0,\, s_1 \geq 0$ y $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Si $s = \theta s_0 + (1-\theta)\, s_1$ y $\dfrac{1}{p} = \dfrac{\theta}{p_0} + \dfrac{1-\theta}{p_1}$ donde $0 \leq \theta \leq 1$ entonces existe $C = C(s_0, s_1, \theta, p_0, p_1) > 0$ tal que

$$\|J^s \phi\|_{L^p} \leq C \|J^{s_0}\phi\|_{L^{p_0}}^{\theta} \|J^{s_1}\phi\|_{L^{p_1}}^{1-\theta}.$$

Además, si $\phi \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $s < \frac{3}{2}$ tenemos

$$\|\phi\|_{L^\infty} \leq \sqrt{2}\, \|\phi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\partial_x \phi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}.$$

Demostración. Véase [28, Lema 14]. □

Proposición I.26. Sean $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ reales, $s > 1 + \frac{n}{2}$ y $t \geq 1$. Entonces existe $C = C(s, t, n) > 0$ tal que

$$|\langle u, f\partial^\alpha u\rangle_{H^t}| \leq C \left[\|\bigtriangledown f\|_{H^{s-1}} \|u\|_{H^t}^2 + \|\bigtriangledown f\|_{H^{t-1}} \|u\|_{H^s} \|u\|_{H^t} \right]$$

donde $|\alpha| = 1$.

Demostración. [28, Teorema A.10]. □

Proposición I.27. Sea f una función real definida sobre $\mathbb{R}^n$, si $s > \frac{3}{2}$ entonces

$$\|[J^s : M_f]\, u\|_{L^2} \leq C \|\partial_x f\|_{H^{s-1}} \|u\|_{H^{s-1}}, \quad \text{si } s > \frac{n}{2} + 1, \tag{I.4}$$

donde M_f es el operador de multiplicación por f.

Demostración. Véase [36, Lema A.4]. □

Proposición I.28. Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $s > 0$ y $1 < p < \infty$ y, entonces

$$\|J^s(fg)\|_{L^p} \leq c \left(\|f\|_{L^{p_1}} \|J^s g\|_{L^{p_2}} + \|J^s f\|_{L^{p_3}} \|g\|_{L^{p_4}} \right)$$

y

$$\|[J^s : f]\, g\|_{L^p} \leq c \left(\|\partial f\|_{L^{p_1}} \left\|J^{s-1} g\right\|_{L^{p_2}} + \|J^s f\|_{L^{p_3}} \|g\|_{L^{p_4}} \right)$$

donde $p_2, p_3 \in]1, \infty[$ y $p_1,\, p_4$ son tales que $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} = \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p_3} + \dfrac{1}{p_4}$.

Demostración. Véase [28, Lemas A.11 y A.14]. □

Proposición I.29. Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $s > 1$ y $r > \frac{1}{2}$, entonces $c = c(s, r, n)$ tal que

$$\|[D^s, f]\, g\|_{L^2} \leq c \left(\|f\|_s \|g\|_r + \|f\|_{r+1} \|g\|_{s-1} \right).$$

Demostración. Véase [49, Lema 1.1]. $\square$

Proposición I.30 (Regla de Leibniz)**.** Sean $\alpha \in]0,1[$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,\alpha]$ con $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Sean $p, p_1, p_2, q, q_2 \in]1,\infty[$ y $q_1 \in]1,\infty]$ tales que

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}.$$

Entonces

$$\|D_x^\alpha (fg) - f D_x^\alpha g - g D_x^\alpha f\|_{L_x^p L_T^q} \leq C \|D_x^{\alpha_1} f\|_{L_x^{p_1} L_T^{q_1}} \|D_x^{\alpha_2} g\|_{L_x^{p_2} L_T^{q_2}} . \tag{I.5}$$

Demostración. [43, Lema 7.6]. $\square$

Proposición I.31 (Regla de la cadena)**.** Sea $\alpha \in]0,1[$ y $p, q, p_1, p_2, q_2 \in]1,\infty[$, $q_1 \in]1,\infty]$ tales que

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$$

Entonces

$$\|D^\alpha F(f)\|_{L_x^p L_T^q} \leq c \|F'(f)\|_{L_x^{p_1} L_T^{q_1}} \|D^\alpha f\|_{L_a^{p_2} L_T^{q_2}} . \tag{I.6}$$

Demostración. [43, Lema 7.7]. $\square$

Proposición I.32. Sea $f \in H^r(\mathbb{R}^n)$ para $r > \frac{n}{2} + 1$, entonces

$$\left\| J^{-s} \left[J^{s+t+1} : M_f \right] J^{-t} \right\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C \|\nabla f\|_{H^{r-1}} ,$$

donde $|s|, |t| \leq r - 1$ y M_f es el operador de multiplicación por f.

Demostración. Véase [35, Lema 2.6]. $\square$

Proposición I.33. Sean $s, t \in \mathbb{R}$ tales que $-s < t \leq s$. Si $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ y $g \in H^t(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$C \|f\|_{H^s} \|g\|_{H^t} \geq \begin{cases} \|fg\|_{H^t} & \text{si } s > \frac{n}{2} \\ \|fg\|_{H^{s+t-\frac{n}{2}}} & \text{si } s < \frac{n}{2} \end{cases} ,$$

donde C es una constante positiva que depende solamente s, t y n.

Demostración. [32, Lema A.1]. $\square$

I.5. Semigrupos de operadores fuertemente continuos

Definición I.34. *Un semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales acotados sobre un espacio de Banach X es una familia $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ tal que*

(i) $\forall t \geq 0 : U(t) \in \mathcal{L}(X)$,

(ii) $U(0) = I$, *el operador identidad sobre* X,

(iii) $\forall s, t \geq 0 : U(s+t) = U(s)\,U(t)$, *y*

(iv) *para cada* $x \in X$ *fijo,* $U(\cdot)\,x : [0, +\infty[\to X$ *es continua.*

Proposición I.35. Si $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo sobre X, existen $M \geq 1$ y $\omega \geq 0$ tales que

$$\forall t \geq 0 : \|U(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\omega t}.$$

Demostración. [47, Teorema 2.2]. □

Cuando $M = 1$ y $\omega = 0$ el semigrupo se denomina de contracciones.

Definición I.36. *El generador de un semigrupo $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ sobre X es la aplicación $A : \mathrm{Dom}(A) \subseteq X \to X$ definida por*

$$\mathrm{Dom}(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{U(t)\,x - x}{t} \ \textit{existe} \right\}$$

y

$$Ax = \partial_t^+ U(t)\,x\big|_{t=0}$$

Proposición I.37. Si A es el generador del semigrupo $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ sobre X, entonces para todo $x \in \mathrm{Dom}(A)$ tenemos que $U(t)\,x \in \mathrm{Dom}(A)$ para todo $t \geq 0$, y

$$\partial_t U(t)\,x = AU(t)\,x = U(t)\,Ax \ .$$

Demostración. [47, Teorema 2.4]. □

Proposición I.38. Sean X e Y dos espacios de Banach. Si $A : Y \subseteq X \to X$ es el generador del semigrupo $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ sobre X, entonces para todo $u_0 \in Y$ la función

$$u : [0, +\infty[\to Y,$$

definida por

$$u(t) = U(t)\, u_0,$$

es la única solución del problema de Cauchy lineal

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = Au(t), & t \geq 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Además,

$$u \in C([0, +\infty[\,, Y) \cap C^1([0, +\infty[\,, X).$$

Demostración. [15, Teorema 3.2.1]. □

Definición I.39. *Un operador $A : \mathrm{Dom}(A) \subseteq X \to X$ se denomina m-disipativo en el espacio de Banach X si*

(i) $\forall \lambda > 0, \forall u \in \mathrm{Dom}(A) : \|u - \lambda Au\|_X \geq \|u\|_X$, *y*

(ii) $\forall \lambda > 0, \forall x \in X, \exists u \in \mathrm{Dom}(A) : u - \lambda Au = x$.

Proposición I.40 (Caracterización en espacios de Hilbert)**.** $A : \mathrm{Dom}(A) \subseteq X \to X$ es m-disipativo en el espacio de Hilbert X si, y sólo si

(i) $\forall u \in \mathrm{Dom}(A) : \langle Au, u\rangle_X \leq 0$, y

(ii) $\exists \lambda_0 > 0, \forall x \in X, \exists u \in \mathrm{Dom}(A) : u - \lambda_0 Au = x$.

Demostración. [15, Proposición 2.2.6]. □

Proposición I.41 (Lumer-Phillips)**.** El operador $A : \mathrm{Dom}(A) \subseteq X \to X$ es generador de un semigrupo de contracciones sobre X si y sólo si A es m-disipativo y $\mathrm{Dom}(A)$ es denso en X.

Demostración. [15, Proposición 2.2.6]. □

Proposición I.42. Sean A el generador de un semigrupo fuertemente continuo de contracciones, B un operador disipativo A -acotado, es decir, $\mathrm{Dom}(B) \supset \mathrm{Dom}(A)$ y

$$\|Bx\| \leq \alpha \|Ax\| + \beta \|x\| \qquad \text{para } x \in \mathrm{Dom}(A) \tag{I.7}$$

donde $0 \leq \alpha < 1$ y $\beta \geq 0$. Entonces $A + B$ es el generador de un semigrupo fuertemente continuo de contracciones.

Demostración. [47, Corolario 3.3.3]. □

Grupos de Operadores Fuertemente Continuos

Definición I.43. *Un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios sobre un espacio de Banach X es una familia $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ tal que*

(1) $\forall t \in \mathbb{R} : U(t) \in \mathcal{L}(X)$,

(2) $U(0) = I$, *el operador identidad sobre X,*

(3) $\forall s, t \in \mathbb{R} : U(s+t) = U(s)U(t)$, *y*

(4) *para cada $x \in X$ fijo, $U(\cdot)x : \mathbb{R} \to X$ es continua.*

(5) $\forall x \in X, \forall t \in \mathbb{R} : \|U(t)x\|_X = \|x\|_X$.

Definición I.44. *El generador de un grupo de operadores unitarios $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ sobre X es la aplicación $A : \mathrm{Dom}(A) \subseteq X \to X$ definida por*

$$\mathrm{Dom}(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t\to 0} \frac{U(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

$$Ax = \partial_t U(t)x|_{t=0}$$

Proposición I.45. Si $A : \mathrm{Dom}(A) \subseteq X \to X$ es un operador $m-$disipativo y antisimétrico en el espacio de Hilbert X, entonces A es antiadjunto en X.

Proposición I.46. Sean X e Y espacios de Hilbert. Si $A : Y \subseteq X \to X$ es un operador m-disipativo y antiadjunto en X, entonces el semigrupo $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ generado por A se extiende a un grupo de operadores unitarios $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. Además, para todo $u_0 \in Y$ la función

$$u : \mathbb{R} \to Y$$

definida por

$$u(t) = U(t)\, u_0$$

es la única solución del PVI lineal

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = Au(t)\,, \quad t \in \mathbb{R} \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Además,

$$u \in C(\mathbb{R} : Y) \cap C^1(\mathbb{R} : X)\,.$$

Proposición I.47 (Teorema de Stone)**.** El operador A es el generador de un C_0 grupo de operadores unitarios sobre un espacio de Hilbert H si y solamente si iA es auto-adjunto.

Demostración. [43, Teorema 4.1]. □

I.6. Espacios de normas mixtas y propiedades

Sean $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Banach $L_x^p L_T^q$ de clases de equivalencia de funciones medibles $f : \mathbb{R} \times [-T, T] \to \mathbb{R}$ tales que $\|f\|_{L_x^p L_T^q} < \infty$, donde

$$\|f\|_{L_x^p L_T^q} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-T}^{T} |f(x,t)|^q \, dt \right)^{p/q} dx \right)^{1/p} \tag{I.8}$$

Cuando $p = \infty$ o $q = \infty$, usaremos las siguientes definiciones adaptadas de (I.8)

$$\|f\|_{L_x^p L_T^\infty} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\sup_{t \in [-T,T]} |f(x,t)| \right)^p dx \right)^{1/p} \tag{I.9}$$

y

$$\|f\|_{L_x^\infty L_T^q} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\int_{-T}^{T} |f(x,t)|^q \, dt \right)^{1/q}. \tag{I.10}$$

Si $T = t$, entonces (I.8) significa

$$\|f\|_{L_x^p L_t^q} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,t)|^q \, dt \right)^{p/q} dx \right)^{1/p}.$$

A continuación, unos resultados que serán utilizados en los capítulos siguientes.

Proposición I.48. Sean $f \in L_x^2 L_T^\infty$ y $g \in L_x^\infty L_T^2$, entonces $fg \in L_x^2 L_T^2$ y

$$\|fg\|_{L_x^2 L_T^2} \leq \|f\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|g\|_{L_x^\infty L_T^2} \tag{I.11}$$

$$\|fg\|_{L_x^2 L_T^2} \leq \|f\|_{L_x^{20/9} L_T^{10}} \|g\|_{L_x^{20} L_T^{5/2}} \tag{I.12}$$

$$\|fg\|_{L_x^2 L_T^\infty} \leq \|f\|_{L_x^4 L_T^\infty} \|g\|_{L_x^4 L_T^\infty} \tag{I.13}$$

$$\|fg\|_{L_x^{20/9} L_T^{10}} \leq \|f\|_{L_x^4 L_T^\infty} \|g\|_{L_x^5 L_T^{10}} \tag{I.14}$$

Demostración. Aplicando la definición de norma mixta se tiene

$$\begin{aligned}
\|fg\|^2_{L_x^2 L_T^2} &= \int_{\mathbb{R}} \int_{-T}^{T} |(fg)(x,t)|^2 \, dt \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{-T}^{T} |f(x,t)|^2 \, |g(x,t)|^2 \, dt \, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \sup_{t \in [-T,T]} |f(x,t)|^2 \int_{-T}^{T} |g(x,t)|^2 \, dt dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \sup_{t \in [-T,T]} |f(x,t)|^2 \, dx \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{-T}^{T} |g(x,t)|^2 \, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\sup_{t \in [-T,T]} |f(x,t)| \right)^2 dx \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{-T}^{T} g\,|(x,t)|^2 \, dt \\
&= \|f\|^2_{L_x^2 L_T^\infty} \|g\|^2_{L_x^\infty L_T^2}. \cdot
\end{aligned}$$

con lo que se prueba (I.11).

Ahora probaremos la segunda desigualdad (I.12).

$$\|fg\|^2_{L_x^2 L_T^2} = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-T}^{T} |f(x,t)|^2 \, |g(x,t)|^2 \, dt \right) dx$$

aplicando la desigualdad de Holder, se tiene

$$\begin{aligned}
\|fg\|^2_{L_x^2 L_T^2} &\leq \int_{\mathbb{R}} \left[\left(\int_{-T}^{T} |f(x,t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{-T}^{T} |g(x,t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \right] dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-T}^{T} |f(x,t)|^{20} \, dt \right)^{\frac{1}{9}} dx \right)^{\frac{9}{20}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-T}^{T} |g(x,t)|^{\frac{5}{2}} \, dt \right)^{8} dx \right)^{\frac{1}{20}} \\
&\leq \|f\|^2_{L_x^{9/20} L_T^{10}} \|g\|^2_{L_x^{20} L_T^{5/2}} \, .
\end{aligned}$$

Ahora probaremos la tercera desigualdad (I.13).

$$\begin{aligned}
\|fg\|^2_{L_x^2 L_T^\infty} &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\sup_{t \in [-T,T]} |f(x,t)| \, |g(x,t)| \right)^2 dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\sup_{t \in [-T,T]} |f(x,t)| \right)^2 . \left(\sup_{t \in [-T,T]} |g(x,t)| \right)^2 dx
\end{aligned}$$

entonces aplicando la desigualdad de Holder al segundo miembro se obtiene

$$
\begin{aligned}
\|fg\|^2_{L^2_xL^\infty_T} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}}\left(\sup_{t\in[-T,T]}|f(x,t)|\right)^4 dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\sup_{t\in[-T,T]}|g(x,t)|\right)^4 dx\right)^{1/2}\\
&\leq \|f\|^2_{L^4_xL^\infty_T}\|g\|^2_{L^4_xL^\infty_T}.
\end{aligned}
$$

Por ultimo demostramos la cuarta desigualdad (I.14).

$$
\begin{aligned}
\|fg\|_{L^{20/9}_xL^{10}_T} &= \left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-T}^{T}|f(x,t)|^{10}|g(x,t)|^{10}\,dt\right)^{\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{20}{9}\right)} dx\right)^{\frac{9}{20}}\\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-T}^{T}\left(\sup_{t\in[-T,T]}|f(x,t)|^{10}\right)|g(x,t)|^{10}\,dt\right)^{\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{20}{9}\right)} dx\right)^{\frac{9}{20}}\\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}}\left(\sup_{t\in[-T,T]}|f(x,t)|^{10}\cdot\int_{-T}^{T}|g(x,t)|^{10}\,dt\right)^{\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{20}{9}\right)} dx\right)^{\frac{9}{20}}\\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}}\left(\sup_{t\in[-T,T]}|f(x,t)|^{10}\,dt\right)^{\frac{2}{9}}\left(\int_{-T}^{T}|g(x,t)|^{10}\,dt\right)^{\frac{2}{9}} dx\right)^{\frac{9}{20}}
\end{aligned}
$$

entonces aplicando la desigualdad de Holder se tiene

$$
\begin{aligned}
\|fg\|_{L^{20/9}_xL^{10}_T} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}}\left(\sup_{t\in[-T,T]}|f(x,t)|\right)^{\frac{20}{9p}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-T}^{T}|g(x,t)|^{10}\,dt\right)^{\frac{2q}{9}}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}}\left(\sup_{t\in[-T,T]}|f(x,t)|\right)^{\frac{20}{9p}}\right)^{\frac{9}{20p}}\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-T}^{T}|g(x,t)|^{10}\,dt\right)^{\frac{2q}{9}}\right)^{\frac{9}{20q}}
\end{aligned}
$$

Entonces para $p = \frac{9}{5}$ y $q = \frac{9}{4}$ se obtiene

$$\|fg\|_{L^{20/9}_xL^{10}_T} \leq \|f\|_{L^4_xL^\infty_T}\|fg\|_{L^5_xL^{10}_T}$$ □

I.7. Otros resultados

Proposición I.49 (teorema de contracción). Sean (X,d) un espacio métrico completo y $F : X \to X$ una contracción, entonces F tiene solamente un punto fijo.

Demostración. [4, Teorema 8.8]. □

Proposición I.50. Sean $h \in L^1([a,b])$, $h \geq 0$ y $f, g \in C([a,b])$ tales que

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t h(\tau) f(\tau)\, d\tau, \quad a \leq t \leq b$$

entonces

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t h(\tau) \exp\left[\int_a^\tau h(s)\, ds\right] g(\tau)\, d\tau, \quad a \leq t \leq b$$

si $g(t) = C$ es constante se tiene en particular que

$$f(t) \leq C \exp\left[\int_a^t h(\tau)\, d\tau\right], \quad a \leq t \leq b$$

Demostración. [15, Lema 4.2.1].

Capítulo II

Teoría local

II.1. Resultados principales

En este capítulo iniciamos el estudio del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x \left(uv^2\right) = 0, \\ \partial_t v + \partial_x^3 v + \partial_x \left(u^2 v\right) = 0 \\ u\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right), \quad v\left(x,0\right) = \psi\left(x\right), \end{cases} \tag{II.1}$$

donde $u = u\left(x,t\right)$ y $v = v\left(x,t\right)$ son funciones reales, $\left(x,t\right) \in \mathbb{R}\times \left[0,+\infty\right[$ y φ, ψ son funciones conocidas. Formalmente, el problema (II.1) se puede escribir en la forma

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u}\left(t\right) + A_0 \vec{u}\left(t\right) + F\left(\vec{u}\left(t\right)\right) \partial_x \vec{u}\left(t\right) = \vec{0} \\ \vec{u}\left(0\right) = \vec{\phi}_0 \end{cases} \tag{II.1}$$

donde $\vec{u} = (u, v)$, $A_0 = \begin{pmatrix} \partial_x^3 & 0 \\ 0 & \partial_x^3 \end{pmatrix}$, $F\left(\vec{u}\right) = \begin{pmatrix} v^2 & 2uv \\ 2uv & u^2 \end{pmatrix}$ y $\vec{\phi}_0 = (\varphi, \psi)$.

El objetivo de este capítulo consiste en demostrar la buena formulación local del problema de valor inicial asociado al sistema (II.1) es decir la existencia local de soluciones, su unicidad y la dependencia continua de los datos iniciales del problema (II.1). EL teorema II.1 establece que el problema (II.1) está bien formulado localmente bajo el supuesto de que los datos inciales $\varphi, \psi \in H^s\left(\mathbb{R}\right) \times H^s\left(\mathbb{R}\right)$ con $s > \frac{3}{2}$. El segundo teorema II.2 se refiere al tiempo de existencia T_s del teorema II.1, el cual puede ser elegido independientemente del orden del espacio de Sobolev $H^s\left(\mathbb{R}\right)$.

Teorema II.1. *Si* $\vec{\phi}_0 = (\varphi, \psi) \in H^s \times H^s$*,* $s > 3/2$ *, existen* $T_s = T_s\left(\left\|\vec{\phi}_0\right\|_{H^s \times H^s}, s\right) > 0$ *y*

$$\vec{u} = (u, v) \in C\left([0, T_s] : H^s \times H^s\right) \cap C^1\left([0, T_s] : H^{s-3} \times H^{s-3}\right),$$

única solución real del problema de valor inicial (II.1). Además, $\vec{u}$ *depende continuamente de* $\vec{\phi}_0$ *en el sentido que la aplicación* $\vec{\phi} \mapsto \vec{u}$ *es continua de* $H^s \times H^s$ *en el espacio* $C\left([0, T_s] : H^s \times H^s\right) \cap C^1\left([0, T_s] : H^{s-3} \times H^{s-3}\right)$*.*

Entre las conclusiones del teorema II.1 se tiene que el tiempo T_s depende del orden del espacio de Sobolev H^s, lo cual no es una buena información si se va a probar la buena formulación global de (II.1). Sin embargo, el siguiente teorema mejora esta información.

Teorema II.2. *El tiempo de existencia de la solución* T_s *del teorema II.1 puede ser elegido independiente de* s*, en el siguiente sentido: si* $\vec{\phi}_0 \in H^r \times H^r$ *con* $r > s$*, entonces* $\vec{u} \in C\left(\mathbb{R}_0^+ : H^r \times H^r\right) \cap C^1\left(\mathbb{R}_0^+ : H^{r-3} \times H^{r-3}\right)$*.*

Para las demostraciones de los teoremas II.1 y II.2 se sigue las ideas del Teorema I del artículo de Kato [35], adaptadas al problema (II.1).

II.2. Demostración del teorema II.1

Definimos el operador A_0 por

$$\begin{cases} \operatorname{Dom}(A_0) = H^s \times H^s = \mathbb{H}^s, \ s \geq 0 \\ A_0 \vec{v} = \left(\partial_x^3 v_1, \partial_x^3 v_2\right) \ , \ \vec{v} = (v_1, v_2). \end{cases}$$

Proposición II.3. El operador $-A_0$ genera un grupo de operadores unitarios $\left\{\vec{U}(t)\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ sobre $\mathbb{H}^s$, $s \geq 0$, y

$$\vec{U}(t)\,\vec{v} = \left(U(t)\,v_1, U(t)\,v_2\right)$$

para todo $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{H}^s$ donde

$$\widehat{U(t)\,v}(\xi) = \widehat{e^{-t\partial_x^3} v}(\xi) = e^{i\xi^3 t}\widehat{v}(\xi).$$

Además, la función $\vec{U}(\cdot)\,\vec{\phi} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{H}^s$ es la única solución del problema lineal

$$\begin{cases} \partial_t \vec{v}(t) + A_0 \vec{v}(t) = \vec{0}, \quad x \in \mathbb{R}, \ t \geq 0 \\ \vec{v}(x, 0) = \vec{\phi}_0(x). \end{cases}$$

Demostración. La linealidad del operador $-A_0$ y la densidad de su dominio son inmediatas. Además, $-A_0$ es anti-adjunto. Del teorema de Stone, proposición I.47, sigue que A_0 es el generador de un grupo de operadores unitarios sobre $\mathbb{H}^s$. $\square$

La proposición anterior implica que el problema de valor inicial (II.1) se escribe en la forma matricial

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u}\,(t) + A_0 \vec{u}\,(t) + F\left(\vec{u}\,(t)\right) \partial_x \vec{u}\,(t) = \vec{0}, & t \geq 0 \\ \vec{u}\,(0) = \vec{\phi}_0 \end{cases} \tag{II.2}$$

donde $\vec{u} = (u, v)$,

$$F\left(\vec{u}\right) = \begin{pmatrix} v^2 & 2uv \\ 2uv & u^2 \end{pmatrix} \tag{II.3}$$

y $\vec{\phi}_0 = (\varphi, \psi)$ .Para aplicar la teoría de Kato hacemos el cambio de variable

$$\vec{u}\,(t) = \vec{U}\,(t)\, \vec{v}\,(t)\,. \tag{II.4}$$

De este modo, al sustituir (II.4) en el primer miembro de la ecuación (II.2) se tiene

$$\begin{aligned} &\partial_t \left(\vec{U}\,(t)\, \vec{v}\,(t)\right) + A_0 \vec{U}\,(t)\, \vec{v}\,(t) + F\left(\vec{U}\,(t)\, \vec{v}\,(t)\right) \partial_x \vec{U}\,(t)\, \vec{v}\,(t) \\ &\qquad = \vec{U}\,(t)\, \partial_t \vec{v}\,(t) - A_0 \vec{U}\,(t)\, \vec{v}\,(t) + A_0 \vec{U}\,(t)\, \vec{v}\,(t) + F\left(\vec{U}\,(t)\, \vec{v}\,(t)\right) \partial_x \vec{U}\,(t)\, \vec{v}\,(t) \\ &\qquad = \vec{U}\,(t) \left[\partial_t \vec{v}\,(t) + \vec{U}\,(-t)\, F\left(\vec{U}\,(t)\, \vec{v}\,(t)\right) \partial_x \vec{U}\,(t)\, \vec{v}\,(t)\right] \end{aligned}$$

Por lo tanto se obtiene la ecuación de evolución cuasi-lineal para la incógnita $\vec{v}$,

$$\begin{cases} \partial_t \vec{v}\,(t) + A\left(t, \vec{v}\,(t)\right) \vec{v}\,(t) = \vec{0} \\ \vec{v}\,(0) = \vec{\phi}_0, \end{cases} \tag{II.5}$$

donde

$$A\left(t, \vec{v}\,(t)\right) = \vec{U}\,(-t)\, F\left(\vec{U}\,(t)\, \vec{v}\,(t)\right) \partial_x \vec{U}\,(t)\,. \tag{II.6}$$

Acontinuación verificaremos las hipótesis del teorema A.2, para el problema II.1 en el espacio $H^s \times H^s$ con $s > \frac{3}{2}$.

Hipótesis (X)

Elegimos los espacios básicos

$$X = \mathbb{L}^2 \quad \text{y} \quad Y = \mathbb{H}^s \tag{II.7}$$

Sabemos que Y está contenida densamente y continuamente en X .

Sean $s > \frac{3}{2}$ un numero real fijo, definimos el operador $S: \mathbb{H}^s \to \mathbb{L}^2$ por

$$S\vec{u} = (J^s u_1, J^s u_2) \quad \text{para } \vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{H}^s. \tag{II.8}$$

Proposición II.4. $S \in \mathcal{L}(\mathbb{H}^s, \mathbb{L}^2)$ es un isomorfismo isométrico.

Demostración. Es obvio que S es un operador lineal y por la definición de norma $\mathbb{H}^s$

$$\begin{aligned} \|S\vec{u}\|_{\mathbb{L}^2}^2 &= \|J^s u_1\|_{L^2}^2 + \|J^s u_2\|_{L^2}^2 \\ &= \|u_1\|_{H^2}^2 + \|u_2\|_{H^2}^2 = \|\vec{u}\|_{\mathbb{H}^s}^2 \end{aligned}$$

Entonces $S: \mathbb{H}^s \to \mathbb{L}^2$ es un isomorfismo lineal isométrico, así existe $S^{-1}: Ran\,(S) \subset \mathbb{L}^2 \to \mathbb{H}^s$ operador inverso de S.

Adémas dado $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{L}^2$ si definimos $\vec{u} = S^{-1}\vec{v} = (J^{-s}v_1, J^{-s}v_2)$ tenemos

$$S\vec{u} = S\left(S^{-1}\vec{v}\right) = \vec{v}$$

y por la definición de norma $\mathbb{H}^s$

$$\begin{aligned} \|S\vec{u}\|_{\mathbb{H}^s}^2 &= \left\|S^{-1}\vec{v}\right\|_{\mathbb{H}^s}^2 = \left\|J^s\left(J^{-s}v_1\right)\right\|_{L^2}^2 + \left\|J^s\left(J^{-s}v_2\right)\right\|_{L^2}^2 \\ &= \|v_1\|_{L^2}^2 + \|v_2\|_{L^2}^2 = \|\vec{v}\|_{\mathbb{L}^2}^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\vec{u} \in \mathbb{H}^s$. En consecuencia, S es un operador lineal sobreyectivo. $\square$

Esto prueba la hipótesis (X).

Hipótesis (A.1)

Dado $\vec{\phi} \in \mathbb{H}^s$, sea $R > \left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^s}$ un numero real fijo y consideremos la bola

$$W = \{\vec{w} \in \mathbb{H}^s : \|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^s} < R\}.$$

La siguiente proposición es consecuencia del teorema de Perturbación de Generadores, proposición I.42

Proposición II.5. Para cada $\vec{w} \in W$ el operador $-A\,(t, \vec{w})$ es el generador de un semigrupo de tipo $(1, \omega)$ sobre $\mathbb{L}^2$ que satisface

$$\langle A\,(t, \vec{w})\,\vec{v}, \vec{v}\rangle_{\mathbb{L}^2} \geq -\omega\,\|\vec{v}\|_{\mathbb{L}^2}^2 \tag{II.9}$$

para todo $\omega \geq C_s R^2$, donde C_s es una constante que no depende de $\vec{w}$.

Demostración. Por lo tanto será suficiente probar (II.9).

En efecto, para todo $\vec{w} = (w_1, w_2) \in W$ y $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{H}^s$ tenemos

$$\begin{aligned}
\langle A(t,\vec{w})\,\vec{v},\vec{v}\rangle_{\mathbb{L}^2} &= \left\langle \vec{U}(-t)\,F\left(\vec{U}(t)\,\vec{w}\right)\partial_x\vec{U}(t)\,\vec{v},\vec{v}\right\rangle_{\mathbb{L}^2} \\
&= \left\langle F\left(\vec{U}(t)\,\vec{w}\right)\partial_x\vec{U}(t)\,\vec{v},\vec{U}(t)\,\vec{v}\right\rangle_{\mathbb{L}^2} \\
&= \langle F(\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2)\,\partial_x(\widetilde{v}_1,\widetilde{v}_2),(\widetilde{v}_1,\widetilde{v}_2)\rangle_{\mathbb{L}^2} \\
&= \left\langle \widetilde{w}_2^2\partial_x\widetilde{v}_1 + 2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\partial_x\widetilde{v}_2,\widetilde{v}_1\right\rangle_{L^2} + \left\langle 2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\partial_x\widetilde{v}_1 + \widetilde{w}_1^2\partial_x\widetilde{v}_2,\widetilde{v}_2\right\rangle_{L^2} \qquad \text{(II.10)}
\end{aligned}$$

donde

$$\vec{U}(t)\,\vec{w} = (U(t)\,w_1, U(t)\,w_2) = (\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2) \quad \text{y} \quad \vec{U}(t)\,\vec{v} = (U(t)\,v_1, U(t)\,v_2) = (\widetilde{v}_1,\widetilde{v}_2)\,. \qquad \text{(II.11)}$$

Vamos a estimar cada sumando de (II.10), por la definición del producto interno en L^2, integración por partes y la derivada de un producto, para el primer sumando de tenemos

$$\begin{aligned}
&\left\langle \widetilde{w}_2^2\partial_x\widetilde{v}_1 + 2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\partial_x\widetilde{v}_2,\widetilde{v}_1\right\rangle_{L^2} \\
&\quad = \frac{1}{2}\left\langle \widetilde{w}_2^2,\partial_x\widetilde{v}_1^2\right\rangle_{L^2} - \langle\partial_x(2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\widetilde{v}_1),\widetilde{v}_2\rangle_{L^2} \\
&\quad = -\frac{1}{2}\left\langle \partial_x\widetilde{w}_2^2,\widetilde{v}_1^2\right\rangle_{L^2} - \langle\widetilde{v}_1\partial_x 2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2,\widetilde{v}_2\rangle_{L^2} - \langle 2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\partial_x\widetilde{v}_1,\widetilde{v}_2\rangle_{L^2} \\
&\quad = -\left(\frac{1}{2}\left\langle \partial_x\widetilde{w}_2^2,\widetilde{v}_1^2\right\rangle_{L^2} + \langle\widetilde{v}_1\partial_x 2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2,\widetilde{v}_2\rangle_{L^2} + \langle 2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\partial_x\widetilde{v}_1,\widetilde{v}_2\rangle_{L^2}\right). \qquad \text{(II.12)}
\end{aligned}$$

Dado que $s > \frac{3}{2}$, por el lema de Sobolev, se tiene

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}\left\langle \partial_x\widetilde{w}_2^2,\widetilde{v}_1^2\right\rangle_{L^2} + \langle\widetilde{v}_1\partial_x 2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2,\widetilde{v}_2\rangle_{L^2} + \langle 2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\partial_x\widetilde{v}_1,\widetilde{v}_2\rangle_{L^2} \\
&\le \frac{1}{2}\left\|\partial_x\widetilde{w}_2^2\right\|_{L^\infty}\|\widetilde{v}_1\|_{L^2}^2 + \|\partial_x 2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\|_{L^\infty}|\langle\widetilde{v}_1,\widetilde{v}_2\rangle_{L^2}| \\
&\quad + \|2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\|_{L^\infty}|\langle\partial_x\widetilde{v}_1,\widetilde{v}_2\rangle_{L^2}| \\
&\le C_s\left\|\partial_x\widetilde{w}_2^2\right\|_{H^{s-1}}\|\widetilde{v}_1\|_{L^2}^2 + C_s\|\partial_x 2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\|_{H^{s-1}}\|\widetilde{v}_1\|_{L^2}\|\widetilde{v}_2\|_{L^2} \\
&\quad + \|2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\|_{H^s}\|\partial_x\widetilde{v}_1\|_{L^2}\|\widetilde{v}_2\|_{L^2} \\
&\le C_s\left(\left\|\widetilde{w}_2^2\right\|_{H^s} + \|2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\|_{H^s}\right)\left(\|v_1\|_{L^2}^2 + \|v_2\|_{L^2}^2\right) \\
&\quad + \|2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\|_{H^s}\left(\|v_1\|_{H^1}^2 + \|v_2\|_{L^2}^2\right),
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
E &\le C_s\left(\left\|\widetilde{w}_2^2\right\|_{H^s} + \|2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\|_{H^s}\right)\left(\|v_1\|_{H^1}^2 + \|v_2\|_{H^1}^2\right) \\
&\le C_s\left(\left\|\widetilde{w}_2^2\right\|_{H^s} + \|2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\|_{H^s}\right)\|\vec{v}\|_{\mathbb{H}^1}^2\,. \qquad \text{(II.13)}
\end{aligned}$$

Usando la proposición I.24, se tiene

$$\left\|\widetilde{w}_2^2\right\|_{H^s} = \|\widetilde{w}_2\|_{H^s}^2 \leq C_s R^2, \tag{II.14}$$

$$\|2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\|_{H^s} \leq 2\,\|\widetilde{w}_1\|_{H^s}\,\|\widetilde{w}_2\|_{H^s} \leq C_s R^2. \tag{II.15}$$

Entonces, usando (II.15) en (II.13), tenemos

$$E = \frac{1}{2}\left\langle \partial_x \widetilde{w}_2^2, \widetilde{v}_1^2 \right\rangle_{L^2} + \langle \widetilde{v}_1 \partial_x 2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2, \widetilde{v}_2\rangle_{L^2} + \langle 2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\partial_x\widetilde{v}_1, \widetilde{v}_2\rangle_{L^2} \leq C_s R^2\,\|\vec{v}\|_{\mathbb{H}^1}^2, \tag{II.16}$$

entonces (II.16) en (II.12) y la desigualdad $\|\vec{v}\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq \|\vec{v}\|_{\mathbb{H}^1}^2$, implican

$$\left\langle \widetilde{w}_2^2\partial_x\widetilde{v}_1 + 2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\partial_x\widetilde{v}_2, \widetilde{v}_1 \right\rangle_{L^2} \geq -C_s R^p\,\|\vec{v}\|_{\mathbb{L}^2}^2 \tag{II.17}$$

En forma similar, para el segundo sumando de (II.10) tenemos

$$\left\|\widetilde{w}_1^2\right\|_{H^s} \leq \|\widetilde{w}_1\|_{H^s}^2 \leq C_s R^2, \tag{II.18}$$

que implican

$$\left\langle 2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\partial_x\widetilde{v}_1 + \widetilde{w}_1^2\partial_x\widetilde{v}_2, \widetilde{v}_2 \right\rangle_{L^2} \geq -C_s R^2\,\|\vec{v}\|_{\mathbb{L}^2}^2. \tag{II.19}$$

Usando (II.17) y (II.19) en (II.10)

$$\langle A(t,\vec{w})\,\vec{v}, \vec{v}\rangle_{\mathbb{L}^2} \geq -2C_s R^2\,\|\vec{v}\|_{\mathbb{L}^2}^2 \geq -\omega\,\|\vec{v}\|_{\mathbb{L}^2}^2$$

donde $\omega \geq 2C_s R^2 = C_s R^2$, entonces

$$\langle -A(t,\vec{w})\,\vec{v} - \omega\vec{v}, \vec{v}\rangle_{\mathbb{L}^2} = -\langle A(t,\vec{w})\,\vec{v}, \vec{v}\rangle_{\mathbb{L}^2} - \omega\,\|\vec{v}\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq 0$$

Si probamos (II.9), se concluye que $-A(t,\vec{w}) - \omega I$ es disipativo siempre que $\omega \geq C_{s,}R^2$, además el operador ωI es el generador de un semigrupo de tipo $(1,\omega)$. En consecuncia, por el teorema de perturbación de generadores (proposición I.42) el operador $-A(t,\vec{w})$ es el generador de un semigrupo de tipo $(1,\omega)$. □

La proposición II.5 verifica la hipótesis (A.1).

Hipótesis (A.2)

Si $\vec{w} = (w_1, w_2) \in W$ y $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{H}^s$ definimos el operador lineal

$$B(t,\vec{w})\,\vec{v} = [S : A(t,\vec{w})]\,S^{-1}\vec{v} \tag{II.20}$$

pero,

$$
\begin{aligned}
\left[S:A\left(t,\vec{w}\right)\right]\vec{v} &= \vec{U}\left(-t\right)\left[S:F\left(\vec{U}\left(t\right)\vec{w}\right)\right]\partial_x\vec{U}\left(t\right)\vec{v}\\
&= \vec{U}\left(-t\right)\begin{pmatrix} \left[J^s:\widetilde{w}_2^2\right] & \left[J^s:2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\right]\\ \left[J^s:2\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2\right] & \left[J^s:\widetilde{w}_1^2\right]\end{pmatrix}\vec{U}\left(t\right)\partial_x\vec{v}
\end{aligned}
$$

implica que

$$
\begin{aligned}
B\left(t,\vec{w}\right)\vec{v} &= \vec{U}\left(-t\right)\begin{pmatrix} \left[J^s:\widetilde{w}_2^2\right] & \left[J^s:2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\right]\\ \left[J^s:2\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2\right] & \left[J^s:\widetilde{w}_1^2\right]\end{pmatrix}\vec{U}\left(t\right)S^{-1}\partial_x\vec{v}\\
&= \begin{pmatrix} \left[J^s:\widetilde{w}_2^2\right]J^{-s}\partial_x\widetilde{v}_1+\left[J^s:2\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2\right]J^{-s}\partial_x\widetilde{v}_2\\ \left[J^s:2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\right]J^{-s}\partial_x\widetilde{v}_1+\left[J^s:\widetilde{w}_1^2\right]J^{-s}\partial_x\widetilde{v}_2\end{pmatrix} \qquad \text{(II.21)}
\end{aligned}
$$

Proposición II.6. Para cada $\vec{w}\in W$ y $\vec{v}\in\mathbb{H}^s$ se cumple

$$SA\left(t,\vec{w}\right)S^{-1}=A\left(t,\vec{w}\right)+B\left(t,\vec{w}\right) \qquad \text{(II.22)}$$

y para algun $\lambda_B>0$ se cumple que

$$\left\|B\left(t,\vec{w}\right)\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{L}^2)}\leq C_sR^2=\lambda_B.$$

Demostración. Observese que II.20 implica II.22 la igualdad (II.21) implica

$$
\begin{aligned}
\left\|B\left(t,\vec{w}\right)\vec{v}\right\|_{\mathbb{L}^2} &\leq \left\|\left[J^s:\widetilde{w}_2^2\right]J^{-s}\partial_x\widetilde{v}_1\right\|_{L^2}+\left\|\left[J^s:2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\right]J^{-s}\partial_x\widetilde{v}_2\right\|_{L^2}\\
&\quad+\left\|\left[J^s:2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\right]J^{-s}\partial_x\widetilde{v}_1\right\|_{L^2}+\left\|\left[J^s:\widetilde{w}_1^2\right]J^{-s}\partial_x\widetilde{v}_2\right\|_{L^2}
\end{aligned}
$$

Usando el estimado del conmutador, proposición I.27, y propiedades de la norma en $\mathbb{H}^s$, tenemos

$$
\begin{aligned}
\left\|\left[J^s:\widetilde{w}_2^2\right]J^{-s}\partial_x\widetilde{v}_1\right\|_{L^2} &\leq C\left\|\partial_x\widetilde{w}_2^2\right\|_{H^{s-1}}\left\|\partial_xJ^{-s}\widetilde{v}_1\right\|_{H^{s-1}}\\
&\leq C\left\|\widetilde{w}_2^2\right\|_{H^s}\left\|J^{-s}\widetilde{v}_1\right\|_{H^s}\\
&\leq C\left\|\widetilde{w}_2^2\right\|_{H^s}\left\|v_1\right\|_{L^2},
\end{aligned}
$$

del mismo modo,

$$
\begin{aligned}
\left\|\left[J^s:2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\right]J^{-s}\partial_x\widetilde{v}_2\right\|_{L^2} &\leq C\left\|2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\right\|_{H^s}\left\|v_2\right\|_{L^2},\\
\left\|\left[J^s:2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\right]J^{-s}\partial_x\widetilde{v}_1\right\|_{L^2} &\leq C\left\|2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\right\|_{H^s}\left\|v_1\right\|_{L^2},\\
\left\|\left[J^s:\widetilde{w}_1^2\right]J^{-s}\partial_x\widetilde{v}_2\right\|_{L^2} &\leq C\left\|\widetilde{w}_1^2\right\|_{H^s}\left\|v_2\right\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, con los estimados (II.14), (II.15) y (II.18) obtenemos,

$$
\begin{aligned}
\|B(t,\vec{w})\,\vec{v}\|_{\mathbb{L}^2} &\leq C\left(\left\|\widetilde{w}_2^2\right\|_{H^s} + \|2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\|_{H^s}\right)\|v_1\|_{L^2} \\
&\quad + C\left(\|2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\|_{H^s} + \left\|\widetilde{w}_1^2\right\|_{H^s}\right)\|v_2\|_{L^2} \\
&\leq C_s R^2\,\|v_1\|_{L^2} + C_s R^2\,\|v_2\|_{L^2} \\
&\leq C_s R^2\,\|\vec{v}\|_{\mathbb{L}^2}\,.
\end{aligned}
$$

En consecuencia,

$$
\|B(t,\vec{w})\|_{\mathcal{L}(\mathbb{L}^2)} \leq C_s R^2 = \lambda_B. \qquad \square
$$

Esta proposición demuestra la primera parte de la hipótesis $(A.2)$. Probaremos ahora la segunda parte.

Proposición II.7. Existe $\mu_B > 0$ tal que para todo $t \in [0,T]$ se cumple

$$
\|B(t,\vec{w}_1) - B(t,\vec{w}_2)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{L}^2)} \leq \mu_B ||\vec{w}_1 - \vec{w}_2||_{\mathbb{H}^s}
$$

para cada $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$.

Demostración. Por II.20 y (II.21) y la identidad $[A : B - C] = [A : B] - [A : C]$ tene-mos

$$
B(t,\vec{w}_1)\,\vec{v} - B(t,\vec{w}_2)\,\vec{v} = \vec{U}(-t)\left[S : F\left(\vec{U}(t)\,\vec{w}_1\right) - F\left(\vec{U}(t)\,\vec{w}_2\right)\right]\partial_x\vec{U}(t)\,S^{-1}\vec{v}.
$$

Ahora, si $\vec{v} \in \operatorname{Dom}(B(t,\vec{w}))$ con $\vec{w}_1 = (w_1, z_1)$ y $\vec{w}_2 = (w_2, z_2)$, entonces por (I.4)

$$
\begin{aligned}
&\|B(t,\vec{w}_1)\,\vec{v} - B(t,\vec{w}_2)\,\vec{v}\|_{\mathbb{L}^2} \\
&\qquad = \left\|\left[S, F\left(\vec{U}(t)\,\vec{w}_1\right) - F\left(\vec{U}(t)\,\vec{w}_2\right)\right] S^{-1}\partial_x\vec{U}(t)\,\vec{v}\right\|_{\mathbb{L}^2} \\
&\qquad \leq \left\|\left[J^s : \widetilde{z}_1^2 - \widetilde{z}_2^2\right] J^{-s}\partial_x\widetilde{v}_1\right\|_{L^2} + \left\|\left[J^s : 2\widetilde{w}_1\widetilde{z}_1 - 2\widetilde{w}_2, \widetilde{z}_2\right] J^{-s}\partial_x\widetilde{v}_1\right\|_{L^2} \\
&\qquad\quad + \left\|\left[J^s : 2\widetilde{w}_1\widetilde{z}_1 - 2\widetilde{w}_2\widetilde{z}_2\right] J^{-s}\partial_x\widetilde{v}_2\right\|_{L^2} + \left\|\left[J^s : \widetilde{w}_1^2 - \widetilde{w}_2^2\right] J^{-s}\partial_x\widetilde{v}_2\right\|_{L^2} \\
&\qquad \leq C\left\|\widetilde{z}_1^2 - \widetilde{z}_2^2\right\|_{H^s}\|\widetilde{v}_1\|_{L^2} + C\,\|2\widetilde{w}_1\widetilde{z}_1 - 2\widetilde{w}_2\widetilde{z}_2\|_{H^s}\|\widetilde{v}_1\|_{L^2} \\
&\qquad\quad + C\,\|2\widetilde{w}_1\widetilde{z}_1 - 2\widetilde{w}_2\widetilde{z}_2\|_{H^s}\|\widetilde{v}_2\|_{L^2} + C\left\|\widetilde{w}_1^2 - \widetilde{w}_2^2\right\|_{H^s}\|\widetilde{v}_2\|_{L^2}
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\|B(t,\vec{w}_1)\,\vec{v} - B(t,\vec{w}_2)\,\vec{v}\|_{\mathbb{L}^2} &\leq C\left(\left\|\widetilde{z}_1^2 - \widetilde{z}_2^2\right\|_{H^s} + 2\,\|\widetilde{w}_1\widetilde{z}_1 - \widetilde{w}_2\widetilde{z}_2\|_{H^s}\right)\|\vec{v}\|_{\mathbb{L}^2} \\
&\quad + C\left(2\,\|\widetilde{w}_1\widetilde{z}_1 - \widetilde{w}_2\widetilde{z}_2\|_{H^s} + \left\|\widetilde{w}_1^2 - \widetilde{w}_2^2\right\|_{H^s}\right)\|\vec{v}\|_{\mathbb{L}^2}\,. \qquad \text{(II.23)}
\end{aligned}
$$

Estimando cada una de las normas en (II.23), teniendo en cuenta que todo elemento $\vec{w} \in W$ está acotado por el radio de la bola, es decir $\|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^s} < R$, obtenemos

$$\begin{aligned} \left\|\widetilde{z}_1^2 - \widetilde{z}_2^2\right\|_{H^s} &\leq \|\widetilde{z}_1 - \widetilde{z}_2\|_{H^s} \left(\|\widetilde{z}_1\|_{H^s} + \|\widetilde{z}_2\|_{H^s}\right) \\ &\leq \|z_1 - z_2\|_{H^s} \left(\|z_1\|_{H^s} + \|z_2\|_{H^s}\right) \\ &\leq 2R \|z_1 - z_2\|_{H^s} \leq 2R \|\vec{w}_1 - \vec{w}_2\|_{\mathbb{H}^s}, \end{aligned} \tag{II.24}$$

Similarmente tenemos

$$\left\|\widetilde{w}_1^2 - \widetilde{w}_2^2\right\|_{H^s} \leq 2R \|\vec{w}_1 - \vec{w}_2\|_{\mathbb{H}^s}. \tag{II.25}$$

También,

$$\begin{aligned} \|\widetilde{w}_1\widetilde{z}_1 - \widetilde{w}_2\widetilde{z}_2\|_{H^s} &\leq \|\widetilde{z}_1 - \widetilde{z}_2\|_{H^s} \|\widetilde{w}_1\|_{H^s} + \|\widetilde{w}_1 - \widetilde{w}_2\|_{H^s} \|\widetilde{z}_2\|_{H^s} \\ &\leq R \|\widetilde{z}_1 - \widetilde{z}_2\|_{H^s} + R \|\widetilde{w}_1 - \widetilde{w}_2\|_{H^s} \\ &\leq 2R \|\vec{w}_1 - \vec{w}_2\|_{\mathbb{H}^s}. \end{aligned} \tag{II.26}$$

Reemplazando (II.24), (II.25) y (II.26) en (II.23) obtenemos

$$\|(B(t, \vec{w}_1) - B(t, \vec{w}_2)) \vec{v}\|_{\mathbb{L}^2} \leq 12CR \|\vec{w}_1 - \vec{w}_2\|_{\mathbb{H}^s} \|\vec{v}\|_{\mathbb{L}^2}$$

que implica

$$\|B(t, \vec{w}_1) - B(t, \vec{w}_2)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{L}^2)} \leq 12C_sR \|\vec{w}_1 - \vec{w}_2\|_{\mathbb{H}^s} \leq \mu_B \|\vec{w}_1 - \vec{w}_2\|_{\mathbb{H}^s}$$

donde $\mu_B = 12C_sR$. □

Las proposiciones $II.6$ y $II.7$ demuestra la hipótesis (A.2).

Hipótesis (A.3)

Proposición II.8. Para todo $\vec{w} \in W$, $\mathbb{H}^s \subseteq \mathrm{Dom}(A(t, \vec{w}))$, $A(t, \vec{w})$ es un operador lineal de $\mathbb{H}^s$ en $\mathbb{L}^2$. Para cada $\vec{w} \in W, t \in [0, T]$ el operador $A(t, \vec{w})$ es fuertemene continua y existe $\mu_A > 0$ tal que

$$\|A(t, \vec{w}_1) - A(t, \vec{w}_2)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}^s, \mathbb{L}^2)} \leq \mu_A \|\vec{w}_1 - \vec{w}_2\|_{\mathbb{H}^s}$$

para cada $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$.

Demostración. Desde que $s > \frac{3}{2}$ es fácil ver que

$$\mathbb{H}^s \subseteq \operatorname{Dom}\left(A\left(t,\vec{w}\right)\right) = \left\{\vec{v} \in \mathbb{L}^2 : \vec{U}\left(-t\right) F\left(\vec{U}\left(t\right)\vec{w}\right) \partial_x \vec{U}\left(t\right)\vec{v} \in \mathbb{L}^2\right\}$$

para cada $\vec{w} \in W$. También, para $\vec{w} = (w_1, w_2) \in W$ y $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{H}^s$, tenemos

$$\begin{aligned}
\left\|A\left(t,\vec{w}\right)\vec{v}\right\|_{\mathbb{L}^2} &= \left\|\vec{U}\left(-t\right) F\left(\vec{U}\left(t\right)\vec{w}\right) \partial_x \vec{U}\left(t\right)\vec{v}\right\|_{\mathbb{L}^2} \\
&= \left\|F\left(\vec{U}\left(t\right)\vec{w}\right) \partial_x \vec{U}\left(t\right)\vec{v}\right\|_{\mathbb{L}^2} \\
&\leq \left\|\widetilde{w}_2^2 \partial_x \widetilde{v}_1\right\|_{L^2} + \left\|2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2 \partial_x \widetilde{v}_2\right\|_{L^2} + \left\|2\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2 \partial_x \widetilde{v}_1\right\|_{L^2} + \left\|\widetilde{w}_1^2 \partial_x \widetilde{v}_2\right\|_{L^2} \\
&\leq \left\|\widetilde{w}_2^2\right\|_{L^\infty} \left\|\partial_x \widetilde{v}_1\right\|_{L^2} + 2\left\|\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\right\|_{L^\infty} \left(\left\|\partial_x \widetilde{v}_1\right\|_{L^2} + \left\|\partial_x \widetilde{v}_2\right\|_{L^2}\right) \\
&\quad + \left\|\widetilde{w}_1^2\right\|_{L^\infty} \left\|\partial_x \widetilde{v}_2\right\|_{L^2} \\
&\leq \left\|\widetilde{w}_2^2\right\|_{H^s} \left\|v_1\right\|_{H^s} + 2\left\|\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\right\|_{H^s} \left(\left\|v_1\right\|_{H^s} + \left\|v_2\right\|_{H^s}\right) + \left\|\widetilde{w}_1^2\right\|_{H^s} \left\|v_2\right\|_{H^s} \\
&\leq C_s R^2 \left\|v_1\right\|_{H^s} + 2C_s R^2 \left(\left\|v_1\right\|_{H^s} + \left\|v_2\right\|_{H^s}\right) + C_s R^2 \left\|v_2\right\|_{H^s} \\
&\leq 3C_s R^2 \left(\left\|v_1\right\|_{H^s} + \left\|v_2\right\|_{H^s}\right)
\end{aligned}$$

entonces por (II.14), (II.15) y (II.18) obtenemos,

$$\left\|A\left(t,\vec{w}\right)\vec{v}\right\|_{\mathbb{L}^2} \leq 3C_s R^2 \left(\left\|v_1\right\|_{H^s} + \left\|v_2\right\|_{H^s}\right) \leq \lambda\left(R\right)\left\|\vec{v}\right\|_{\mathbb{H}^s}.$$

Luego

$$\sup_{\left\|\vec{v}\right\|_{\mathbb{H}^s}=1} \left\|A\left(t,\vec{w}\right)\vec{v}\right\|_{\mathbb{L}^2} \leq \sup_{\left\|\vec{v}\right\|_{\mathbb{H}^s}=1} \lambda\left(R\right)\left\|\vec{v}\right\|_{\mathbb{H}^s} \leq \lambda\left(R\right),$$

y por tanto $A\left(t,\vec{w}\right)$ es un operador lineal acotado de $\mathbb{H}^s$ en $\mathbb{L}^2$.

Además, si $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$ con $\vec{w}_1 = (w_1, z_1)$ y $\vec{w}_2 = (w_2, z_2)$, entonces para $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{H}^s$ de II.6 se tiene

$$\begin{aligned}
\left\|A\left(t,\vec{w}_1\right)\vec{v} - A\left(t,\vec{w}_2\right)\vec{v}\right\|_{\mathbb{L}^2} &= \left\|\left(F\left(\vec{U}\left(t\right)\vec{w}_1\right) - F\left(\vec{U}\left(t\right)\vec{w}_2\right)\right)\partial_x \vec{U}\left(t\right)\vec{v}\right\|_{\mathbb{L}^2} \\
&= \left\|\left(\widetilde{z}_1^2 - \widetilde{z}_2^2\right)\partial_x \widetilde{v}_1 + \left(2\widetilde{w}_1\widetilde{z}_1 - 2\widetilde{w}_2\widetilde{z}_2\right)\partial_x \widetilde{v}_2\right\|_{L^2} \\
&\quad + \left\|\left(2\widetilde{w}_1\widetilde{z}_1 - 2\widetilde{w}_2\widetilde{z}_2\right)\partial_x \widetilde{v}_1 + \left(\widetilde{w}_1^2 - \widetilde{w}_2^2\right)\partial_x \widetilde{v}_2\right\|_{L^2}
\end{aligned}$$

Procediendo como en las deducciones de (II.23), (II.24), (II.25) y (II.26), obtenemos

$$\begin{aligned}
\left\|A\left(t,\vec{w}_1\right)\vec{v} - A\left(t,\vec{w}_2\right)\vec{v}\right\|_{\mathbb{L}^2} &\leq \left\|\widetilde{z}_1^2 - \widetilde{z}_2^2\right\|_{H^{s-1}} \left\|\partial_x \widetilde{v}_1\right\|_{H^{s-1}} + 2\left\|\widetilde{w}_1\widetilde{z}_1 - \widetilde{w}_2\widetilde{z}_2\right\|_{H^{s-1}} \left\|\partial_x \widetilde{v}_2\right\|_{H^{s-1}} \\
&\quad + 2\left\|\widetilde{w}_1\widetilde{z}_1 - \widetilde{w}_2\widetilde{z}_2\right\|_{H^{s-1}} \left\|\partial_x \widetilde{v}_1\right\|_{H^{s-1}} \\
&\quad + \left\|\widetilde{w}_1^2 - \widetilde{w}_2^2\right\|_{H^{s-1}} \left\|\partial_x \widetilde{v}_2\right\|_{H^{s-1}} \\
&\leq 6C_s R\left\|\vec{w}_1 - \vec{w}_2\right\|_{\mathbb{H}^s} \left\|\widetilde{v}_1\right\|_{H^s} + 6R\left\|\vec{w}_1 - \vec{w}_2\right\|_{\mathbb{H}^s} \left\|\widetilde{v}_2\right\|_{H^s} \\
&\leq C_s R\left\|\vec{w}_1 - \vec{w}_2\right\|_{\mathbb{H}^s} \left\|\vec{v}\right\|_{\mathbb{H}^s}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|A(t,\vec{w}_1) - A(t,\vec{w}_2)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}^s,\mathbb{L}^2)} \leq \mu_A \|\vec{w}_1 - \vec{w}_2\|_{\mathbb{H}^s}$$

donde $\mu_A = C_s R$. □

La desigualdad conseguida anteriormente muestra que la aplicación $t \mapsto A(t,\vec{w})$ es fuertemente continua y por lo tanto la hipótesis (A.3) queda verificada.

Hipótesis (A.4)

Se satisface trivialmente desde que el centro de W es $\vec{0}$.

II.3. Demostración del teorema II.2

Sabemos que la transformación (II.4) transforma (II.1) en el problema de valor inicial cuasi-lineal

$$\begin{cases} \partial_t \vec{v}(t) + A(t,\vec{v}(t))\,\vec{v}(t) = \vec{0} \\ \vec{v}(0) = \vec{\phi}_0, \end{cases}$$

donde $F(\vec{u}(t))$ y $A(t,\vec{v}(t)) = \vec{U}(-t)\,F(\vec{u}(t))\,\partial_x \vec{U}(t)$ se han definido en (II.3) y (II.6) y, respectivamente.

Si

$$\vec{z}(t) = \partial_t \vec{v}(t) + \vec{U}(-t)\,F(\vec{u}(t))\,\partial_x \vec{u}(t)$$

entonces

$$\partial_x \vec{z}(t) = \partial_t \partial_x \vec{v}(t) + \vec{U}(-t)\,\partial_x F(\vec{u}(t))\,\partial_x \vec{u}(t) + \vec{U}(-t)\,F(\vec{u}(t))\,\partial_x^2 \vec{u}(t)$$

y

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \vec{z}(t) &= \partial_t \partial_x^2 \vec{v}(t) + \vec{U}(-t)\,\partial_x^2 F(\vec{u}(t))\,\partial_x \vec{u}(t) \\ &\quad + 2\vec{U}(-t)\,\partial_x F(\vec{u}(t))\,\partial_x^2 \vec{u}(t) + \vec{U}(-t)\,F(\vec{u}(t))\,\partial_x^3 \vec{u}(t). \end{aligned}$$

Usando (II.4) sustituimos $\vec{u}(t)$ por $\vec{U}(t)\,\vec{v}(t)$,

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \vec{z}(t) &= \partial_t \partial_x^2 \vec{v}(t) + \vec{U}(-t)\,\partial_x^2 F(\vec{u}(t))\,\partial_x \left(\vec{U}(t)\,\vec{v}(t)\right) \\ &\quad + 2\vec{U}(-t)\,\partial_x F(\vec{u}(t))\,\partial_x^2 \left(\vec{U}(t)\,\vec{v}(t)\right) + \vec{U}(-t)\,F(\vec{u}(t))\,\partial_x^3 \left(\vec{U}(t)\,\vec{v}(t)\right) \\ &= \partial_t \partial_x^2 \vec{v}(t) + \vec{U}(-t)\,\partial_x^2 F(\vec{u}(t))\,\vec{U}(t)\,\partial_x \vec{v}(t) + 2\vec{U}(-t)\,\partial_x F(\vec{u}(t))\,\vec{U}(t)\,\partial_x^2 \vec{v}(t) \\ &\quad + \vec{U}(-t)\,F(\vec{u}(t))\,\vec{U}(t)\,\partial_x^3 \vec{v}(t). \end{aligned}$$

Entonces, escribiendo $\vec{w}\,(t)=\partial_x^2\vec{v}\,(t)$ se tiene

$$\begin{aligned}\partial_x^2\vec{z}\,(t) &= \partial_t\vec{w}\,(t)+\vec{U}\,(-t)\,F\,(\vec{u}\,(t))\,\partial_x\vec{w}\,(t)+2\vec{U}\,(-t)\,\partial_xF\,(\vec{u}\,(t))\,\vec{U}\,(t)\,\vec{w}\,(t)\\ &\quad+\vec{U}\,(-t)\,\partial_x^2F\,(\vec{u}\,(t))\,\partial_x\vec{u}\,(t)\\ &= \partial_t\vec{w}\,(t)+A\,(t)\,\vec{w}\,(t)+B\,(t)\,\vec{w}\,(t)-\vec{G}\,(t)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}A\,(t)&=\vec{U}\,(-t)\,F\,(\vec{u}\,(t))\,\vec{U}\,(t)\,\partial_x,\\ B\,(t)&=2\vec{U}\,(-t)\,\partial_xF\,(\vec{u}\,(t))\,\vec{U}\,(t)\,,\\ G\,(t)&=-\vec{U}\,(-t)\,\partial_x^2F\,(\vec{u}\,(t))\,\partial_x\vec{u}\,(t)\,,\end{aligned}\tag{II.27}$$

Además,

$$F\,(\vec{u}\,(t))=F\left(\vec{U}\,(t)\,\vec{v}\,(t)\right)=F\,(U\,(t)\,v_1,U\,(t)\,v_2)=F\,(\widetilde{v}_1,\widetilde{v}_2)=\begin{pmatrix}\widetilde{v}_2^2 & 2\widetilde{v}_1\widetilde{v}_2\\ \widetilde{v}_1\widetilde{v}_2 & \widetilde{v}_1^2\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\partial_xF\,(\vec{u}\,(t)) &= \begin{pmatrix}2\widetilde{v}_2\partial_x\widetilde{v}_2 & 2\widetilde{v}_1\partial_x\widetilde{v}_2+2\widetilde{v}_2\partial_x\widetilde{v}_1\\ 2\widetilde{v}_1\partial_x\widetilde{v}_2+2\widetilde{v}_2\partial_x\widetilde{v}_1 & 2\widetilde{v}_1\partial_x\widetilde{v}_1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & 2\widetilde{v}_2\partial_x\widetilde{v}_1\\ 2\widetilde{v}_2\partial_x\widetilde{v}_1 & 2\widetilde{v}_1\partial_x\widetilde{v}_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\widetilde{v}_2\partial_x\widetilde{v}_2 & 2\widetilde{v}_1\partial_x\widetilde{v}_2\\ 2\widetilde{v}_1\partial_x\widetilde{v}_2 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & 2\widetilde{v}_2\\ 2\widetilde{v}_2 & 2\widetilde{v}_1\end{pmatrix}\partial_x\widetilde{v}_1+\begin{pmatrix}2\widetilde{v}_2 & 2\widetilde{v}_1\\ 2\widetilde{v}_1 & 0\end{pmatrix}\partial_x\widetilde{v}_2\\ &= D_1F\,(\vec{u})\,\partial_x\widetilde{v}_1+D_2F\,(\vec{u})\,\partial_x\widetilde{v}_2,\end{aligned}\tag{II.28}$$

y

$$
\begin{aligned}
\partial_x^2 F(\vec{u}(t)) &= \partial_x \left(D_1 F(\vec{u})\,\partial_x \widetilde{v}_1 + D_2 F(\vec{u})\,\partial_x \widetilde{v}_2\right) \\
&= \partial_x \left(D_1 F(\vec{u})\,\partial_x \widetilde{v}_1\right) + \partial_x \left(D_2 F(\vec{u})\,\partial_x \widetilde{v}_2\right) \\
&= \partial_x \left(D_1 F(\vec{u})\right) \partial_x \widetilde{v}_1 + D_1 F(\vec{u})\,\partial_x^2 \widetilde{v}_1 + \partial_x \left(D_2 F(\vec{u})\right) \partial_x \widetilde{v}_2 + D_2 F(\vec{u})\,\partial_x^2 \widetilde{v}_2 \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2\partial_x \widetilde{v}_2 \\ 2\partial_x \widetilde{v}_2 & 2\partial_x \widetilde{v}_1 \end{pmatrix} \partial_x \widetilde{v}_1 + D_1 F(\vec{u})\,\partial_x^2 \widetilde{v}_1 + \\
&\quad \begin{pmatrix} 2\partial_x \widetilde{v}_2 & 2\partial_x \widetilde{v}_1 \\ 2\partial_x \widetilde{v}_1 & 0 \end{pmatrix} \partial_x \widetilde{v}_2 + D_2 F(\vec{u})\,\partial_x^2 \widetilde{v}_2 \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} (\partial_x \widetilde{v}_1)^2 + 2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \partial_x \widetilde{v}_2 \partial_x \widetilde{v}_1 + D_1 F(\vec{u})\,\partial_x^2 \widetilde{v}_1 \\
&\quad + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\partial_x \widetilde{v}_2)^2 + D_2 F(\vec{u})\,\partial_x^2 \widetilde{v}_2 \\
&= D_{11} F(\vec{u})\,(\partial_x \widetilde{v}_1)^2 + 2 D_{12} F(\vec{u})\,\partial_x \widetilde{v}_1 \partial_x \widetilde{v}_2 + D_{22} F(\vec{u})\,(\partial_x \widetilde{v}_2)^2 \\
&\quad + D_1 F(\vec{u})\,\partial_x^2 \widetilde{v}_1 + D_2 F(\vec{u})\,\partial_x^2 \widetilde{v}_2. \qquad \text{(II.29)}
\end{aligned}
$$

Considerando que $\partial_x^2 \vec{z}(t) = \vec{0}$, obtenemos la ecuación semilineal

$$\partial_t \vec{w}(t) + A(t)\,\vec{w}(t) + B(t)\,\vec{w}(t) = \vec{G}(t). \qquad \text{(II.30)}$$

Nuestro objetivo ahora es resolver la ecuación semilineal (II.30) en espacios adecuados.

Proposición II.9. Sean $s > \frac{3}{2}$, $-s \leq h \leq s-2$, $|k| \leq s-1$, $k \geq h+1$ y $S : \mathbb{H}^k \to \mathbb{H}^h$ el isomorfismo isométrico definido por $S = \left(J^{k-h}, J^{k-h}\right)$. Entonces,

(1) El operador $-A(t)$ genera un semigrupo de tipo C_0 tal que

$$\left\| e^{-sA(t)} \right\|_{\mathcal{L}\left(\mathbb{H}^h\right)} \leq e^{\beta s}$$

para todo $s \in [0, +\infty[$.

(2) Existe $Q(\cdot)$ es fuertemente continua de $[0, T]$ a $\mathcal{L}\left(\mathbb{H}^h\right)$ tal que

$$S A(t)\, S^{-1} = A(t) + Q(t).$$

(3) $\mathbb{H}^k \subseteq \mathrm{Dom}(A(t))$ para $0 \leq t \leq T$ y $t \mapsto A(t)$ es fuertemente continua de $[0, T]$ a $\mathcal{L}\left(\mathbb{H}^k, \mathbb{H}^h\right)$.

Demostración.

(1) Por la definición de $A(t)$ en (II.27) e integración por partes se tiene

$$
\begin{aligned}
\langle A(t)\,\vec{w}(t)\,,\vec{w}(t)\rangle_{\mathbb{H}^h} &= \left\langle \partial_x \vec{U}(-t)\,F(\vec{u}(t))\,U(t)\,\vec{w}(t)\,,\vec{w}(t)\right\rangle_{\mathbb{H}^h}\\
&= -\,\langle F(u(t))\,U(t)\,\vec{w}(t)\,,\partial_x U(t)\,\vec{w}(t)\rangle_{\mathbb{H}^h}\\
&= -\left\langle u_2^2 U(t)\,w_1(t) + 2u_1u_2U(t)\,w_2(t)\,,\partial_x U(t)\,w_1(t)\right\rangle_{H^h}\\
&\quad -\left\langle 2u_1u_2U(t)\,w_1(t) + u_1^2U(t)\,w_2(t)\,,\partial_x U(t)\,w_2(t)\right\rangle_{H^h}\\
&= -\left(\left\langle u_2^2U(t)\,w_1(t)\,,\partial_x U(t)\,w_1(t)\right\rangle_{H^h} + \langle 2u_1u_2U(t)\,w_1(t)\,,\partial_x U(t)\,w_2(t)\rangle_{H^h}\right)\\
&\quad -\left(\langle 2u_1u_2U(t)\,w_2(t)\,,\partial_x U(t)\,w_1(t)\rangle_{H^h} + \left\langle u_1^2U(t)\,w_2(t)\,,\partial_x U(t)\,w_2(t)\right\rangle_{H^h}\right)
\end{aligned}
$$

Como $J^s(fg) = [J^s : f]\,g + fJ^s g$ tenemos

$$
\begin{aligned}
\langle A(t)\,\vec{w}(t)\,,\vec{w}(t)\rangle_{\mathbb{H}^h} \;=\;& -\left\langle u_2^2 J^h U(t)\,w_1(t)\,,J^h\partial_x U(t)\,w_1(t)\right\rangle_{L^2}\\
& -\left\langle 2u_1u_2J^hU(t)\,w_1(t)\,,J^h\partial_x U(t)\,w_2(t)\right\rangle_{L^2}\\
& -\left\langle \left[J^h : u_2^2\right] U(t)\,w_1(t)\,,\partial_x J^h U(t)\,w_1(t)\right\rangle_{L^2}\\
& -\left\langle \left[J^h : 2u_1u_2\right] U(t)\,w_1(t)\,,\partial_x J^h U(t)\,w_2(t)\right\rangle_{L^2}\\
& -\left\langle 2u_1u_2J^hU(t)\,w_2(t)\,,J^h\partial_x U(t)\,w_1(t)\right\rangle_{L^2}\\
& -\left\langle u_1^2 J^h U(t)\,w_2(t)\,,J^h\partial_x U(t)\,w_2(t)\right\rangle_{L^2}\\
& -\left\langle \left[J^h : 2u_1u_2\right] U(t)\,w_2(t)\,,\partial_x J^h U(t)\,w_1(t)\right\rangle_{L^2}.\\
& -\left\langle \left[J^h : u_1^2\right] U(t)\,w_2(t)\,,\partial_x J^h U(t)\,w_2(t)\right\rangle_{L^2}. \qquad \text{(II.31)}
\end{aligned}
$$

Si

$$
\begin{aligned}
I = &\left\langle u_2^2 J^h U(t)\,w_1(t)\,,J^h\partial_x U(t)\,w_1(t)\right\rangle_{L^2}\\
&\qquad + \left\langle u_1^2 J^h U(t)\,w_2(t)\,,J^h\partial_x U(t)\,w_2(t)\right\rangle_{L^2}
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
II = &\left\langle \partial_x\left[2u_1u_2\cdot J^hU(t)\,w_2(t)\right],J^hU(t)\,w_1(t)\right\rangle_{L^2}\\
&\qquad + \left\langle \partial_x\left[2u_1u_2\cdot J^hU(t)\,w_1(t)\right],J^hU(t)\,w_2(t)\right\rangle_{L^2},
\end{aligned}
$$

la identidad $\left\langle fJ^h g, \partial_x J^h g\right\rangle_{L^2} = -\frac{1}{2}\left\langle \partial_x f, \left(J^h g\right)^2\right\rangle_{L^2}$ y la desigualdad de Cauchy-Schwarz implican

$$\begin{aligned} 2I &\leq \left\langle \partial_x \left(u_2^2\right), \left(J^h U(t) w_1(t)\right)^2\right\rangle_{L^2} + \left\langle \partial_x \left(u_1^2\right), \left(J^h U(t) w_2(t)\right)^2\right\rangle_{L^2} \\ &\leq \left\|\partial_x \left(u_2^2\right)\right\|_{L^\infty} \left\|J^h U(t) w_1(t)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\partial_x \left(u_1^2\right)\right\|_{L^\infty} \left\|J^h U(t) w_2(t)\right\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} II &\leq \left\|\partial_x \left[2u_1 u_2 \cdot J^h U(t) w_2(t)\right]\right\|_{L^\infty} \left\|J^h U(t) w_1(t)\right\|_{L^2} \\ &\quad + \left\|\partial_x \left[2u_1 u_2 \cdot J^h U(t) w_1(t)\right]\right\|_{L^\infty} \left\|J^h U(t) w_2(t)\right\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Así, por el Lema de Sobolev resulta

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{1}{2}\left\|\partial_x \left(u_2^2\right)\right\|_{H^{s-1}} \left\|w_1(t)\right\|_{H^h}^2 + \frac{1}{2}\left\|\partial_x \left(u_1^2\right)\right\|_{H^{s-1}} \left\|w_2(t)\right\|_{H^h}^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\left\|u_2^2\right\|_{H^s} + \left\|u_1^2\right\|_{H^s}\right)\left(\left\|w_1(t)\right\|_{H^h}^2 + \left\|w_2(t)\right\|_{H^h}^2\right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} II &\leq \left\|\partial_x \left(2u_1 u_2 \cdot J^h U(t) w_2(t)\right)\right\|_{H^{s-1}} \left\|w_1(t)\right\|_{H^h} \\ &\quad + \left\|\partial_x \left(2u_1 u_2 \cdot J^h U(t) w_1(t)\right)\right\|_{H^{s-1}} \left\|w_2(t)\right\|_{H^h} \\ &\leq \left\|2u_1 u_2\right\|_{H^s} \left\|w_1(t)\right\|_{H^h} \left\|w_2(t)\right\|_{H^h} + \left\|2u_1 u_2\right\|_{H^s} \left\|w_1(t)\right\|_{H^h} \left\|w_2(t)\right\|_{H^h}. \\ &\leq 4\left\|u_1 u_2\right\|_{H^s}\left(\left\|w_1(t)\right\|_{H^h}^2 + \left\|w_2(t)\right\|_{H^h}^2\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$I + II \leq C\left(\left\|u_2^2\right\|_{H^s} + 2\left\|2u_1 u_2\right\|_{H^s} + \left\|u_1^2\right\|_{H^s}\right)\left\|\vec{w}(t)\right\|_{\mathbb{H}^h}^2. \tag{II.32}$$

Además, integración por partes y la identidad

$$\left[J^h : f\right] g = \left[J^{h+1} : f\right] g - \left[J^1 : f\right]\left(J^h g\right)$$

implican

$$\begin{aligned} &\left\langle \left[J^h : u_2^2\right] U(t) w_1(t), \partial_x J^h U(t) w_1(t)\right\rangle_{L^2} \\ &\quad = -\left\langle \partial_x \left[J^h : u_2^2\right] U(t) w_1(t), J^h U(t) w_1(t)\right\rangle_{L^2} \\ &\quad = -\left\langle \left[J^{h+1} : u_2^2\right] U(t) w_1(t) - \left[J^1 : u_2^2\right] J^h U(t) w_1(t), J^h U(t) w_1(t)\right\rangle_{L^2} \end{aligned}$$

Entonces, por la desigualdad triangular y la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle \left[J^h : u_2^2\right] U(t)\, w_1(t)\,, \partial_x J^h U(t)\, w_1(t)\right\rangle_{L^2}\right| \\
&\qquad \leq \left|\left\langle \left[J^{h+1} : u_2^2\right] U(t)\, w_1(t)\,, J^h U(t)\, w_1(t)\right\rangle_{L^2}\right| \\
&\qquad\quad + \left|\left\langle \left[J^{1} : u_2^2\right] J^h U(t)\, w_1(t)\,, J^h U(t)\, w_1(t)\right\rangle_{L^2}\right| \\
&\qquad \leq \left\| \left[J^{h+1} : u_2^2\right] U(t)\, w_1(t)\right\|_{L^2} \left\| J^h U(t)\, w_1(t)\right\|_{L^2} \\
&\qquad\quad + \left\| \left[J^{1} : u_2^2\right] J^h U(t)\, w_1(t)\right\|_{L^2} \left\| J^h U(t)\, w_1(t)\right\|_{L^2} \\
&\qquad \leq \left\| \left[J^{h+1} : u_2^2\right] U(t)\, w_1(t)\right\|_{L^2} \left\| w_1(t)\right\|_{H^h} \\
&\qquad\quad + \left\| \left[J^{1} : u_2^2\right] J^h U(t)\, w_1(t)\right\|_{L^2} \left\| w_1(t)\right\|_{H^h}.
\end{aligned}$$

Usando la proposición I.32 con $|h| \leq s-1$, tenemos

$$\begin{aligned}
&\left\| \left[J^{h+1} : u_2^2\right] U(t)\, w_1(t)\right\|_{L^2} \left\| w_1(t)\right\|_{H^h} \\
&\qquad = \left\| \left[J^{h+1} : u_2^2\right] J^{-h} J^h U(t)\, w_1(t)\right\|_{L^2} \left\| w_1(t)\right\|_{H^h} \\
&\qquad \leq \left\| \left[J^{h+1} : u_2^2\right] J^{-h}\right\|_{L^2} \left\| J^h U(t)\, w_1(t)\right\|_{L^2} \left\| w_1(t)\right\|_{H^h} \\
&\qquad \leq C \left\| \partial_x \left(u_2^2\right)\right\|_{H^{s-1}} \left\| w_1(t)\right\|_{H^h}^2
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
&\left\| \left[J^{1} : u_2^2\right] J^h U(t)\, w_1(t)\right\|_{L^2} \left\| w_1(t)\right\|_{H^h} \\
&\qquad \leq C \left\| \partial_x \left(u_2^2\right)\right\|_{H^{s-1}} \left\| J^h U(t)\, w_1(t)\right\|_{L^2} \left\| w_1(t)\right\|_{H^h} \\
&\qquad \leq C \left\| u_2^2\right\|_{H^s} \left\| w_1(t)\right\|_{H^h}^2.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle \left[J^h : u_2^2\right] U(t)\, w_1(t)\,, \partial_x J^h U(t)\, w_1(t)\right\rangle_{L^2}\right| &\leq C \left\| u_2^2\right\|_{H^s} \left\| w_1(t)\right\|_{H^h}^2 \\
&\leq C \left\| u_2^2\right\|_{H^s} \left\| \vec{w}(t)\right\|_{\mathbb{H}^h}^2. \qquad \text{(II.33)}
\end{aligned}$$

Del mismo modo

$$\left|\left\langle \left[J^h, 2u_1u_2\right] U(t)\, w_2(t)\,, \partial_x J^h U(t)\, w_1(t)\right\rangle_{L^2}\right| \leq C \left\| 2u_1u_2\right\|_{H^s} \left\| \vec{w}(t)\right\|_{\mathbb{H}^h}^2, \qquad \text{(II.34)}$$

$$\left|\left\langle \left[J^h, 2u_1u_2\right] U(t)\, w_1(t)\,, \partial_x J^h U(t)\, w_2(t)\right\rangle_{L^2}\right| \leq C \left\| 2u_1u_2\right\|_{H^s} \left\| \vec{w}(t)\right\|_{\mathbb{H}^h}^2 \qquad \text{(II.35)}$$

y

$$\left|\left\langle \left[J^h : u_1^2\right] U(t)\, w_2(t)\,, J^h \partial_x U(t)\, w_2(t)\right\rangle_{L^2}\right| \leq C \left\| u_1^2\right\|_{H^s} \left\| \vec{w}(t)\right\|_{\mathbb{H}^h}^2 \qquad \text{(II.36)}$$

Por lo tanto, de (II.31) y (II.32) a (II.36) sigue

$$\langle A(t)\vec{w}(t), \vec{w}(t)\rangle_{\mathbb{H}^h} \geq -C\left(2\left\|u_2^2\right\|_{H^s} + 3\left\|2u_1u_2\right\|_{H^s} + 2\left\|u_1^2\right\|_{H^s}\right)\left\|\vec{w}(t)\right\|_{\mathbb{H}^h}^2.$$

Como $2\|u_2^2\|_{H^s} + 3\|u_1u_2\|_{H^s} + 2\|u_1^2\|_{H^s} \leq 7\|\vec{u}\|_{\mathbb{H}^s}^2$ resulta que

$$\langle A(t)\vec{w}(t), \vec{w}(t)\rangle_{\mathbb{H}^h} \geq -C\|\vec{u}\|_{\mathbb{H}^s}^2\|\vec{w}(t)\|_{\mathbb{H}^h}^2$$

donde $C > 0$, $s \geq \frac{3}{2}$ y $|h| \leq s-1$.

(2) Debemos demostrar que

$$Q(t) = [S : A(t)]\, S^{-1}$$

es un operador acotado en $\mathcal{L}\left(\mathbb{H}^h\right)$. Pero,

$$\begin{aligned}
&[S : A(t)]\, S^{-1}\vec{w}(t)\\
&= \vec{U}(-t)\,\partial_x\left[S : F(\vec{u}(t))\, U(t)\right] S^{-1}\vec{w}(t)\\
&= \partial_x\left[S : F(\vec{u}(t))\right] S^{-1}\vec{U}(t)\,\vec{w}(t)\\
&= \begin{pmatrix} \partial_x\left[J^{k-h} : u_2^2\right] & \partial_x\left[J^{k-h} : 2u_1u_2\right] \\ \partial_x\left[J^{k-h} : 2u_1u_2\right] & \partial_x\left[J^{k-h} : u_1^2\right] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J^{h-k}U(t)\,w_1(t) \\ J^{h-k}U(t)\,w_2(t) \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \partial_x\left[J^{k-h} : u_2^2\right] J^{-k}J^hU(t)\,w_1(t) + \partial_x\left[J^{k-h} : 2u_1u_2\right] J^{-k}J^hU(t)\,w_2(t) \\ \partial_x\left[J^{k-h} : 2u_1u_2\right] J^{-k}J^hU(t)\,w_1(t) + \partial_x\left[J^{k-h} : u_1^2\right] J^{-k}J^hU(t)\,w_2(t) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\|Q(t)\vec{w}(t)\|_{\mathbb{H}^h} &= \left\|\partial_x\left[S : F(\vec{u}(t))\right] S^{-1}\vec{U}(t)\,\vec{w}(t)\right\|_{\mathbb{H}^h}\\
&\leq \left(\left\|J^{h+1}\left[J^{k-h} : u_2^2\right] J^{-k}J^hU(t)\,w_1(t)\right\|_{L^2}\right.\\
&\qquad\qquad \left. + \left\|J^{h+1}\left[J^{k-h} : 2u_1u_2\right] J^{-k}J^hU(t)\,w_2(t)\right\|_{L^2}\right)\\
&\quad + \left(\left\|J^{h+1}\left[J^{k-h} : 2u_1u_2\right] J^{-k}J^hU(t)\,w_1(t)\right\|_{L^2}\right.\\
&\qquad\qquad \left. + \left\|J^{h+1}\left[J^{k-h} : u_1^2\right] J^{-k}J^hU(t)\,w_2(t)\right\|_{L^2}\right).
\end{aligned}$$

La proposición I.32 con $s = h+1$, $t = k$ y $r = s$, implica

$$\begin{aligned}
\|Q(t)\vec{w}(t)\|_{\mathbb{H}^h} &\leq \left\|\partial_x\left(u_2^2\right)\right\|_{H^{s-1}}\left\|J^hU(t)\,w_1(t)\right\|_{L^2}\\
&\quad + \left\|\partial_xF(\vec{u})\right\|_{H^{s-1}}\left\|J^hU(t)\,w_2(t)\right\|_{L^2} + \left\|\partial_x(2u_1u_2)\right\|_{H^{s-1}}\left\|J^hU(t)\,w_1(t)\right\|_{L^2}\\
&\quad + \left\|\partial_x\left(u_1^2\right)\right\|_{H^{s-1}}\left\|J^hU(t)\,w_2(t)\right\|_{L^2}\\
&\leq 8C\|\vec{u}\|_{\mathbb{H}^s}^2\|\vec{w}(t)\|_{\mathbb{H}^h}
\end{aligned}$$

donde $|h+1|, |k| \leq s-1$.

(3) Sea $\vec{w} = (w_1, w_2)$ en $\mathbb{H}^k$, entonces

$$\begin{aligned}
\|A(t)\vec{w}\|_{\mathbb{H}^h} &= \|\partial_x (F(\vec{u}(t)) U(t)\vec{w})\|_{H^h} + \left\|\partial_x \vec{U}(-t) F(\vec{u}(t)) U(t)\vec{w}\right\|_{H^h} \\
&= \left\|\partial_x \left(u_2^2 U(t) w_1(t) + 2u_1u_2 U(t) w_2(t)\right)\right\|_{H^h} + \\
&\quad \left\|\partial_x \left(2u_1u_2) U(t) w_1(t) + u_1^2 U(t) w_2(t)\right)\right\|_{H^h} \\
&\leq \left(\left\|u_2^2 U(t) w_1(t)\right\|_{H^k} + \|2u_1u_2 U(t) w_2(t)\|_{H^k}\right) + \\
&\quad \left(\|2u_1u_2 U(t) w_1(t)\|_{H^k} + \left\|u_1^2 U(t) w_2(t)\right\|_{H^k}\right) \\
&\leq C\left(\left\|u_2^2\right\|_{H^s} \|U(t) w_1(t)\|_{H^k} + \|2u_1u_2\|_{H^s} \|U(t) w_2(t)\|_{H^k}\right) \\
&\quad +C\left(\|2u_1u_2\|_{H^s} \|U(t) w_1(t)\|_{H^k} + \left\|u_1^2\right\|_{H^s} \|U(t) w_2(t)\|_{H^k}\right)
\end{aligned}$$

donde usamos la proposición I.33. Por lo tanto,

$$\|A(t)\vec{w}\|_{\mathbb{H}^h} \leq C\left(\left\|u_2^2\right\|_{H^s} + 2\|2u_1u_2\| + \left\|u_1^2\right\|\right) \|\vec{w}(t)\|_{\mathbb{H}^k} \leq C\|\vec{u}(t)\|_{\mathbb{H}^s} \|\vec{w}(t)\|_{\mathbb{H}^k},$$

así $A(t) \in \mathcal{L}\left(\mathbb{H}^k, \mathbb{H}^h\right)$ para cada $t \in [0, T_s]$. De la misma forma se demuestra que

$$\|A(t)\vec{w} - A(t)\vec{z}\|_{\mathbb{H}^h} \leq C\|\vec{u}(t)\|_{\mathbb{H}^s} \|\vec{w}(t) - \vec{z}\|_{\mathbb{H}^k}. \qquad \square$$

Por lo tanto, según el teorema A.1, la familia $\{A(t)\}_{t\in[0,T_s]}$ tiene un único operador de evolución $\{U(t,t')\}_{(t,t')\in\Delta}$ asociado a los espacios $\mathbb{H}^h$ y $\mathbb{H}^k$ en si mismo, con $-s \leq r \leq s-1$.

Proposición II.10. Si $s > \frac{3}{2}$, $-s \leq h \leq s-2$, $|k| \leq s-1$ y $k \geq h+1$, entonces $B(t) \in \mathcal{L}\left(\mathbb{H}^h, \mathbb{H}^k\right)$ es un operador continuo en $t \in [0, T_s]$ y $G \in C\left([0, T_s] : \mathbb{H}^{s-1}\right)$.

Demostración. Mostraremos que $B(t) \in \mathcal{L}\left(\mathbb{H}^h, \mathbb{H}^k\right)$. Si $t \in [0, T_s]$ y $\vec{w} \in \mathbb{H}^h$, entonces por la definición de $B(t)$ en (II.27) y la desigualdad triangular

$$\begin{aligned}
\|B(t)\vec{w}\|_{\mathbb{H}^k} &= 2\left\|\vec{U}(-t)(\partial_x F(\vec{u}))\vec{U}(t)\vec{w}\right\|_{\mathbb{H}^k} = 2\left\|(\partial_x F(\vec{u}))\vec{U}(t)\vec{w}\right\|_{\mathbb{H}^k} \\
&= 2\left\|(D_1F(\vec{u})\partial_x u_1 + D_2F(\vec{u})\partial_x u_2)\vec{U}(t)\vec{w}\right\|_{\mathbb{H}^k} \\
&\leq 2\left\|(D_1F(\vec{u})\partial_x u_1)\vec{U}(t)\vec{w}\right\|_{\mathbb{H}^k} + 2\left\|(D_2F(\vec{u})\partial_x u_2)\vec{U}(t)\vec{w}\right\|_{\mathbb{H}^k}
\end{aligned} \tag{II.37}$$

donde las derivadas están definidas por

$$D_1F(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 2u_2 \\ 2u_2 & 2u_1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad D_2F(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 2u_2 & 2u_1 \\ 2u_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{II.38}$$

Estimando el primer sumando

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left(D_1F\left(\vec{u}\right)\partial_x u_1\right)\vec{U}\left(t\right)\vec{w}\right\|_{\mathbb{H}^k}\\
&\leq \left\|\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & 2u_2\\ 2u_2 & 2u_1\end{array}\right)\partial_x u_1\right)\vec{U}\left(t\right)\vec{w}\right\|_{\mathbb{H}^k}\\
&\leq 2\left\|u_2\partial_x u_1 U\left(t\right)w_2\right\|_{H^k}+2\left\|u_2\partial_x u_1 U\left(t\right)w_1\right\|_{H^k}+2\left\|2u_1\partial_x u_1 U\left(t\right)w_2\right\|_{H^k}\\
&\leq 2\left\|u_2\right\|_{H^{s-1}}\left\|\partial_x u_1\right\|_{H^{s-1}}\left\|w_2\right\|_{H^{s-1}}+2\left\|u_2\right\|_{H^{s-1}}\left\|\partial_x u_1\right\|_{H^{s-1}}\left\|w_1\right\|_{H^{s-1}}\\
&\quad+2\left\|u_1\right\|_{H^{s-1}}\left\|\partial_x u_1\right\|_{H^{s-1}}\left\|w_2\right\|_{H^{s-1}}\\
&\leq 2\left\|u_2\right\|_{H^s}\left\|u_1\right\|_{H^s}\left\|w_2\right\|_{H}+2\left\|u_2\right\|_{H^s}\left\|u_1\right\|_{H^s}\left\|w_1\right\|_{H^s}+2\left\|u_1\right\|_{H^s}^2\left\|w_2\right\|_{H^s}\\
&\leq 2\left\|u_2\right\|_{H^s}\left\|u_1\right\|_{H^s}\left(\left\|w_2\right\|_{H^s}+\left\|w_1\right\|_{H^s}\right)+2\left\|u_1\right\|_{H^s}^2\left\|w_2\right\|_{H^s}
\end{aligned}
\tag{II.39}
$$

y el segundo sumando

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left(D_2F\left(\vec{u}\right)\partial_x u_2\right)\vec{U}\left(t\right)\vec{w}\right\|_{\mathbb{H}^k}\\
&\leq \left\|\left(\left(\begin{array}{cc} 2u_2 & 2u_1\\ 2u_1 & 0\end{array}\right)\partial_x u_2\right)\vec{U}\left(t\right)\vec{w}\right\|_{\mathbb{H}^k}\\
&\leq 2\left\|u_2\partial_x u_2 U\left(t\right)w_1\right\|_{H^k}+2\left\|u_1\partial_x u_2 U\left(t\right)w_2\right\|_{H^k}+2\left\|u_1\partial_x u_2 U\left(t\right)w_1\right\|_{H^k}\\
&\leq 2\left\|u_2\right\|_{H^{s-1}}\left\|\partial_x u_2\right\|_{H^{s-1}}\left\|w_1\right\|_{H^{s-1}}+2\left\|u_1\right\|_{H^{s-1}}\left\|\partial_x u_2\right\|_{H^{s-1}}\left\|w_2\right\|_{H^{s-1}}\\
&\quad+2\left\|u_1\right\|_{H^{s-1}}\left\|\partial_x u_2\right\|_{H^{s-1}}\left\|w_1\right\|_{H^{s-1}}\\
&\leq 2\left\|u_2\right\|_{H^s}^2\left\|w_1\right\|_{H^s}+2\left\|u_1\right\|_{H^s}\left\|u_2\right\|_{H^s}\left(\left\|w_1\right\|_{H^s}+\left\|w_2\right\|_{H^s}\right)
\end{aligned}
\tag{II.40}
$$

Por lo tanto, de (II.37), (II.39) y (II.40) resulta

$$
\begin{aligned}
\left\|B\left(t\right)\vec{w}\right\|_{\mathbb{H}^k} &\leq 2\left\|\left(D_1F\left(\vec{u}\right)\partial_x u_1\right)\vec{U}\left(t\right)\vec{w}\right\|_{\mathbb{H}^k}+2\left\|\left(D_2F\left(\vec{u}\right)\partial_x u_2\right)\vec{U}\left(t\right)\vec{w}\right\|_{\mathbb{H}^k}\\
&\leq 4\left\|u_2\right\|_{H^s}\left\|u_1\right\|_{H^s}\left(\left\|w_2\right\|_{H^s}+\left\|w_1\right\|_{H^s}\right)+4\left\|u_1\right\|_{H^s}^2\left\|w_2\right\|_{H^s}\\
&\quad+4\left\|u_2\right\|_{H^s}^2\left\|w_1\right\|_{H^s}+4\left\|u_1\right\|_{H^s}\left\|u_2\right\|_{H^s}\left(\left\|w_1\right\|_{H^s}+\left\|w_2\right\|_{H^s}\right)\\
&\leq 12\left\|\vec{u}\right\|_{\mathbb{H}^s}^2\left\|\vec{w}\right\|_{\mathbb{H}^k}\\
&\leq C_s\left\|\vec{w}\right\|_{\mathbb{H}^k},
\end{aligned}
$$

donde $C_s=12\left\|\vec{u}\right\|_{\mathbb{H}^s}^2$, entonces $\operatorname{Ran}\left(B\left(t\right)\right)\subseteq\mathbb{H}^k$.

Además, si $\tau \in [0, T_s]$ como

$$\begin{aligned} B(t)\vec{w} - B(\tau)\vec{w} &= 2\vec{U}(-t)\,\partial_x F(\vec{u}(t))\,\vec{U}(t)\,\vec{w} - \vec{U}(-\tau)\,\partial_x F(\vec{u}(\tau))\,\vec{U}(\tau)\,\vec{w} \\ &= 2\vec{U}(-t)\left[\partial_x F(\vec{u}(t)) - \partial_x F(\vec{u}(\tau))\right]\vec{U}(t)\,\vec{w} \\ &\quad +\vec{U}(t-\tau)\Big[\vec{U}(\tau-2t)\,\partial_x F(\vec{u}(\tau))\,\vec{U}(t)\,\vec{w} \\ &\qquad\qquad - \vec{U}(-t)\,\partial_x F(\vec{u}(\tau))\,\vec{U}(\tau)\,\vec{w}\Big] \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} &\|B(t)\vec{w} - B(\tau)\vec{w}\|_{\mathbb{H}^k} \\ &\quad\leq 2\left\|\vec{U}(-t)\left[\partial_x F(\vec{u}(t)) - \partial_x F(\vec{u}(\tau))\right]\vec{U}(t)\,\vec{w}\right\|_{\mathbb{H}^k} \\ &\qquad + 2\left\|\vec{U}(t-\tau)\Big[\vec{U}(\tau-2t)\,\partial_x F(\vec{u}(\tau))\,\vec{U}(t)\,\vec{w} - \vec{U}(-t)\,\partial_x F(\vec{u}(\tau))\,\vec{U}(\tau)\,\vec{w}\Big]\right\|_{\mathbb{H}^k}. \end{aligned} \tag{II.41}$$

Estimando los sumandos, tenemos

$$\left\|\vec{U}(-t)\left[\partial_x F(\vec{u}(t)) - \partial_x F(\vec{u}(\tau))\right]\vec{U}(t)\,\vec{w}\right\|_{\mathbb{H}^k} \leq C_s\,\|\vec{u}(t) - \vec{u}(\tau)\|_{\mathbb{H}^s}\,\|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^k}$$

y

$$\left\|\vec{U}(t-\tau)\Big[\vec{U}(\tau-2t)\,\partial_x F(\vec{u}(\tau))\,\vec{U}(t)\,\vec{w} - \vec{U}(-t)\,\partial_x F(\vec{u}(\tau))\,\vec{U}(\tau)\,\vec{w}\Big]\right\|_{\mathbb{H}^k} \leq C_s e^{\omega|t-\tau|}\,\|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^k}$$

Por lo tanto, en (II.41) obtenemos

$$\|B(t)\vec{w} - B(\tau)\vec{w}\|_{\mathbb{H}^k} \leq C_s\left(\|\vec{u}(t) - \vec{u}(\tau)\|_{\mathbb{H}^s} + e^{\omega|t-\tau|}\right)\|\vec{w}\|_{\mathbb{H}^k},$$

de donde se concluye que $B(t) \in \mathcal{L}\left(\mathbb{H}^h, \mathbb{H}^k\right)$.

Demostremos que $G \in C\left([0, T_s] : \mathbb{H}^{s-1}\right)$. Dado $t \in [0, T_s]$ tenemos

$$\begin{aligned} \|G(t)\|_{\mathbb{H}^{s-1}} &= \left\|-\vec{U}(-t)\,\partial_x^2 F(\vec{u}(t))\,\partial_x \vec{u}(t)\right\|_{\mathbb{H}^{s-1}} \\ &= \left\|\partial_x^2 F(\vec{u}(t))\,\partial_x \vec{u}(t)\right\|_{\mathbb{H}^{s-1}} \end{aligned}$$

pues

$$\partial_x^2 F(\vec{u}(t))\,\partial_x \vec{u}(t) = \begin{pmatrix} \partial_x(4u_2)\,\partial_x u_1 \partial_x u_2 + (\partial_x 2u_1)(\partial_x u_2)^2 \\ (\partial_x 2u_2)(\partial_x u_1)^2 + \partial_x(4u_1)\,\partial_x u_1 \partial_x u_2 \end{pmatrix}$$

Luego, (II.38) implica

$$\begin{aligned}
\|G(t)\|_{\mathbb{H}^{s-1}} &\leq \|\partial_x(4u_2)\|_{H^{s-1}}\|u_1\|_{H^s}\|u_2\|_{H^s} + \|\partial_x 2u_1\|_{H^{s-1}}\|u_2\|_{H^s}^2 \\
&+ \|\partial_x 2u_2\|_{H^{s-1}}\|u_1\|_{H^s}^2 + \|\partial_x(4u_1)\|_{H^{s-1}}\|u_1\|_{H^s}\|u_2\|_{H^s} \\
&\leq \|4u_2\|_{H^s}\|u_1\|_{H^s}\|u_2\|_{H^s} + \|2u_1\|_{H^s}\|u_2\|_{H^s}^2 \\
&+ \|2u_2\|_{H^s}\|u_1\|_{H^s}^2 + \|4u_1\|_{H^s}\|u_1\|_{H^s}\|u_2\|_{H^s} \\
&\leq 4\|u_2\|_{H^s}^2\|u_1\|_{H^s} + 2\|u_1\|_{H^s}\|u_2\|_{H^s}^2 \\
&+ 2\|u_2\|_{H^s}\|u_1\|_{H^s}^2 + 4\|u_1\|_{H^s}^2\|u_2\|_{H^s} \\
&\leq 12\|\vec{u}\|_{\mathbb{H}^s}^2 .
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\operatorname{Ran}(G(t)) \subseteq \mathbb{H}^k$.

Además, si $\tau \in [0, T_s]$ se tiene

$$\begin{aligned}
\|G(t) - G(\tau)\|_{\mathbb{H}^{s-1}} &= \left\|\vec{U}(-t)\,\partial_x^2 F(\vec{u}(t))\,\partial_x\vec{u}(t) - \vec{U}(-\tau)\,\partial_x^2 F(\vec{u}(\tau))\,\partial_x\vec{u}(\tau)\right\|_{\mathbb{H}^{s-1}} \\
&\leq \left\|\vec{U}(-t)\left[\partial_x^2 F(\vec{u}(t)) - \partial_x^2 F(\vec{u}(\tau))\right]\partial_x\vec{u}(t)\right\|_{\mathbb{H}^{s-1}} \\
&+ \left\|\vec{U}(t-\tau)\left[\vec{U}(\tau-2t)\,\partial_x^2 F(\vec{u}(\tau))\,\partial_x\vec{u}(t) - \vec{U}(-t)\,\partial_x^2 F(\vec{u}(\tau))\,\partial_x\vec{u}(\tau)\right]\right\|_{\mathbb{H}^{s-1}} \\
&\leq \left\|\left[\partial_x^2 F(\vec{u}(t)) - \partial_x^2 F(\vec{u}(\tau))\right]\partial_x\vec{u}(t)\right\|_{\mathbb{H}^{s-1}} \\
&+ \left\|\vec{U}(\tau-2t)\,\partial_x^2 F(\vec{u}(\tau))\,\partial_x\vec{u}(t) - \vec{U}(-t)\,\partial_x^2 F(\vec{u}(\tau))\,\partial_x\vec{u}(\tau)\right\|_{\mathbb{H}^{s-1}} . \qquad \text{(II.42)}
\end{aligned}$$

Estimando el primer sumando de (II.42),

$$\begin{aligned}
&\left\|\left[\partial_x^2 F(\vec{u}(t)) - \partial_x^2 F(\vec{u}(\tau))\right]\partial_x\vec{u}(t)\right\|_{\mathbb{H}^{s-1}} \leq 2\left\|\partial_x\left[2u_2(t) - 2u_2(\tau)\right]\partial_x u_1\partial_x u_2\right\|_{H^{s-1}} \\
&+ \left\|\partial_x\left[2u_1(t) - 2u_1(\tau)\right](\partial_x u_2)^2\right\|_{H^{s-1}} + \left\|\partial_x\left[2u_2(t) - 2u_2(\tau)\right](\partial_x u_1)^2\right\|_{H^{s-1}} \\
&+ 2\left\|\partial_x\left[2u_1(t) - 2u_1(\tau)\right]\partial_x u_1\partial_x u_2\right\|_{H^{s-1}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left\|\left[\partial_x^2 F(\vec{u}(t)) - \partial_x^2 F(\vec{u}(\tau))\right]\partial_x\vec{u}(t)\right\|_{\mathbb{H}^{s-1}} \leq C\left(\|\vec{u}(t)\|_{\mathbb{H}^s}, \|\vec{u}(\tau)\|_{\mathbb{H}^s}\right)\|\vec{u}(t) - \vec{u}(\tau)\|_{\mathbb{H}^s} . \qquad \text{(II.43)}$$

Estimando el segundo sumando de (II.42) obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\left\|\vec{U}\left(t-\tau\right)\left[\vec{U}\left(\tau-2t\right)\partial_x^2 F\left(\vec{u}\left(\tau\right)\right)\partial_x\vec{u}\left(t\right)-\vec{U}\left(-t\right)\partial_x^2 F\left(\vec{u}\left(\tau\right)\right)\partial_x\vec{u}\left(\tau\right)\right]\right\|_{\mathbb{H}^k}\\
&\qquad\le e^{\omega|t-\tau|}\left\|\vec{U}\left(-2t\right)\left[\vec{U}\left(\tau\right)\partial_x^2 F\left(\vec{u}\left(\tau\right)\right)\partial_x\vec{u}\left(t\right)-\vec{U}\left(t\right)\partial_x^2 F\left(\vec{u}\left(\tau\right)\right)\partial_x\vec{u}\left(\tau\right)\right]\right\|_{\mathbb{H}^k}\\
&\qquad\le e^{\omega|t-\tau|}\left(\left\|\vec{U}\left(\tau\right)\partial_x^2 F\left(\vec{u}\left(\tau\right)\right)\partial_x\vec{u}\left(t\right)\right\|_{\mathbb{H}^k}+\left\|\vec{U}\left(t\right)\partial_x^2 F\left(\vec{u}\left(\tau\right)\right)\partial_x\vec{u}\left(\tau\right)\right\|\right)_{\mathbb{H}^k}\\
&\qquad\le e^{\omega|t-\tau|}\left(\left\|\partial_x^2 F\left(\vec{u}\left(\tau\right)\right)\partial_x\vec{u}\left(t\right)\right\|_{\mathbb{H}^k}+\left\|\partial_x^2 F\left(\vec{u}\left(\tau\right)\right)\partial_x\vec{u}\left(\tau\right)\right\|\right)_{\mathbb{H}^k}\\
&\qquad\le Ce^{\omega|t-\tau|}\left\|\vec{u}\right\|_{\mathbb{H}^k}. \qquad\qquad \text{(II.44)}
\end{aligned}
$$

Usando (II.43) y (II.44) en (II.42), resulta

$$
\left\|G\left(t\right)-G\left(\tau\right)\right\|_{\mathbb{H}^{s-1}}\le C\left(\left\|\vec{u}\left(t\right)\right\|_{\mathbb{H}^s},\left\|\vec{u}\left(\tau\right)\right\|_{\mathbb{H}^s}\right)\left\|\vec{u}\left(t\right)-\vec{u}\left(\tau\right)\right\|_{\mathbb{H}^s}+Ce^{\omega|t-\tau|}\left\|\vec{u}\right\|_{\mathbb{H}^k},
$$

lo que concluye la demostración de la proposición. □

Observamos que en las proposiciones II.9 y II.10 podemos considerar $X=\mathbb{H}^{s-3}$ y $Y=\mathbb{H}^{s-2}$, con $\{U\left(t,s\right)\}$ representando el operador de evolución asociado a X e Y, y verificar que cualquier solución $\vec{w}\left(t\right)$ de la ecuación lineal (II.30) también será solución de la ecuación integral

$$
\vec{w}\left(t\right)=U\left(t,0\right)\vec{w}\left(0\right)+\int_0^t U\left(t,\tau\right)\left[-B\left(\tau\right)\vec{w}\left(\tau\right)+G\left(\tau\right)\right]d\tau \qquad \text{(II.45)}
$$

en la clase $C\left(\left[0,T_s\right]:\mathbb{H}^{s-2}\right)$, con $\vec{w}\left(0\right)=\left(\partial_x^2\phi,\partial_x^2\psi\right)\in\mathbb{H}^{s'}$ y $s'>s$. En efecto,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}U\left(t,\tau\right)\vec{w}\left(\tau\right) &= U\left(t,\tau\right)A\left(\tau\right)\vec{w}\left(\tau\right)+U\left(t,\tau\right)\frac{d}{d\tau}\vec{w}\left(\tau\right)\\
&= U\left(t,\tau\right)\left[-B\left(\tau\right)\vec{w}\left(\tau\right)+G\left(\tau\right)\right]
\end{aligned}
$$

Integrando desde 0 hasta t obtenemos (II.45) . Por lo tanto, si aseguramos la unicidad para a ecuación integral (II.45), tendremos

$$
\vec{w}\left(t\right)=\vec{U}\left(t\right)\vec{w}\left(t\right)=\left(U\left(t\right)\partial_x^2 u_1,U\left(t\right)\partial_x^2 u_2\right)
$$

como la única solución de la ecuación integral en la clase $C\left(\left[0,T_s\right]:\mathbb{H}^{s'-2}\right)$.

La siguiente proposición, como $\vec{w}\left(0\right)=\left(\partial_x^2\phi,\partial_x^2\psi\right)$, asegura la existencia y unicidad de solución de la ecuación integral (II.45) en la clase $C\left(\left[0,T_s\right]:\mathbb{H}^{s'-2}\right)$, de forma que

$$
\vec{w}\left(t\right)=\left(U\left(t\right)\partial_x^2 u_1,U\left(t\right)\partial_x^2 u_2\right)\in C\left(\left[0,T_s\right]:\mathbb{H}^{s'-2}\right),
$$

es decir, $\vec{u}\in C\left(\left[0,T_s\right]:\mathbb{H}^{s'}\right)$ lo que completa la demostración del teorema II.2 .

Proposición II.11. Existe solamente una solución de la ecuación integral (II.45) en la clase $C([0,T_s]:Y)$ donde $U(t,\tau)$ es el operador de evolución asociado a los espacios X e Y definidos en la proposición II.9 con $\vec{w}(0) \in Y$.

Demostración. Consideremos la aplicación

$$\Phi : C([0,T_s]:Y) \longrightarrow C([0,T_s]:Y)$$

definida por

$$\Phi\vec{w}(t) = U(t,0)\,\vec{w}(0) + \int_0^t U(t,\tau)\left[-B(\tau)\,\vec{w}(\tau) + G(\tau)\right] d\tau \qquad \text{(II.46)}$$

donde en $C([0,T_s]:Y)$ definimos la métrica

$$d(\vec{w},\vec{z}) = \sup_{0\le t\le T_s} \|\vec{w}(t) - \vec{z}(t)\|_Y .$$

Por la proposición II.10 podemos afirmar que la aplicación Φ esta bien definida, pues $k \le s-1$. Además,

$$\begin{aligned}
\|\Phi\vec{w}(t) - \Phi\vec{z}(t)\|_Y &= \left\| \int_0^t U(t,\tau)\, B(\tau)\left[\vec{w}(\tau) - \vec{z}(\tau)\right] d\tau \right\|_Y \\
&\le \int_0^t e^{\omega|t-\tau|} \|B(\tau)\left[\vec{w}(\tau) - \vec{z}(\tau)\right]\|_Y\, d\tau \\
&\le C_s e^{\omega T_s} \int_0^t \|\vec{w}(\tau) - \vec{z}(\tau)\|_Y\, d\tau \\
&\le T_s C_s d(\vec{w},\vec{z}) . \qquad \text{(II.47)}
\end{aligned}$$

Luego Φ es continua y

$$d(\Phi\vec{w},\Phi\vec{z}) \le T_s C_s d(\vec{w},\vec{z}) . \qquad \text{(II.48)}$$

Usando (II.46) y (II.47) por inducción matemática fuerte se prueba que

$$d(\Phi^n\vec{w},\Phi^n\vec{z}) \le \frac{T^n C_s^n}{n!} d(\vec{w},\vec{z}) ,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\left\|\Phi^{n+1}\vec{w}(t) - \Phi^{n+1}\vec{z}(t)\right\|_Y &= \|\Phi^n(\Phi\vec{w}(t)) - \Phi^n(\Phi\vec{z}(t))\|_Y \\
&\le \frac{T^n C_s^n}{n!} d(\Phi\vec{w},\Phi\vec{z}) \\
&\le T C_s \frac{T^{n+1} C_s^{n+1}}{n!} d(\vec{w},\vec{z}) .
\end{aligned}$$

Entonces, si n_0 es suficientemente grande, $\dfrac{T^{n_0} C_s^{n_0}}{n_0!} < 1$, así la aplicación Φ^{n_0} será una contracción. Por lo tanto, el teorema de contracción I.49 implica que Φ tiene un único punto fijo $\vec{w} \in C\left([0, T_s] : Y\right)$ y

$$\vec{w}\,(t) = U\,(t, 0)\,\vec{w}\,(0) + \int_0^t U\,(t, \tau)\left[-B\,(\tau)\,\vec{w}\,(\tau) + G\,(\tau)\right] d\tau. \tag{II.49}$$

Puesto que $\vec{w}$ es continua, el segundo miembro de (II.49) es diferenciable. De esto, $\vec{w}$ es diferenciable y su derivada, obtenida de (II.49), satisface (II.30). Así, $\vec{w}$ es una solución del problema de valor inicial (II.30) . Puesto que toda solución de (II.30) también es una solución de (II.45), la solución de (II.30) es única. $\square$

Ahora, basta observar que si $s \leq s' \leq s + 1$ entonces podemos considerar $Y = \mathbb{H}^{s'-2}$ en la proposición II.11.

Capítulo III

Teoría global y comportamiento asintótico

III.1. Resultados principales

En este capítulo mostraremos que el problema de valor inicial para el sistema AKNS

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + v^2 \partial_x u + 2uv\partial_x v = 0 \\ \partial_t v + \partial_x^3 v + 2uv\partial_x u + u^2 \partial_x v = 0, \quad x, t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad v(x,0) = \psi(x), \end{cases} \tag{III.1}$$

es globalmente bien formulado en $H^s(\mathbb{R})$ si $s \geq 2$, y además estudiaremos el comportamiento asintótico de la solución del sistema en (III.1).

Como fue demostrado en el teorema II.1, el problema (III.1) es localmente bien formulado en $H^s(\mathbb{R})$ si $s > 3/2$, es decir, existe $T_s = T(\| \vec{\phi}_0 \|_{H^s \times H^s}, s) > 0$ y una única $\vec{u} \in C([0, T_s] : H^s \times H^s) \cap C^1([0, T_s] : H^{s-3} \times H^{s-3})$ solución real del problema (III.1) que depende continuamente de $\vec{\phi}_0$.

Teniendo en cuenta el teorema II.2, el resultado de existencia de solución global será consecuencia del "*principio de extensión*" [27, página 269] y del siguiente "*estimado a priori*" para la solución del problema (III.1).

Teorema III.1. *Sea $\vec{u} = (u, v)$ la solución local del sistema (III.1) con la condición inicial $\vec{\phi}_0 = (\phi, \psi) \in H^s \times H^s$ con $s > \frac{3}{2}$, obtenida del teorema II.1. Entonces para cualquier s*

con $s \geq 2$,

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\vec{u}\,(t)\|_{H^s\times H^s} \leq C \left\|\vec{\phi}_0\right\|_{H^s\times H^s} \exp\left(C\int_0^T \Psi\,(r)\,dr\right) \tag{III.2}$$

donde

$$\Psi\,(t) = \|v\|_{L^\infty}\|\partial_x v\|_{L^\infty} + \|\partial_x u\|_{L^\infty}\|v\|_{L^\infty} + \|u\|_{L^\infty}\|\partial_x v\|_{L^\infty} + \|u\|_{L^\infty}\|\partial_x u\|_{L^\infty}\,. \tag{III.3}$$

De esta forma, para datos pequeños tenemos el resultado principal del capítulo.

Teorema III.2. *Sea* $\vec{u} = (u, v)$ *la solución local del problema de valor inicial (III.1) y condición inicial* $\vec{\phi} = (\phi, \psi) \in \mathbb{H}^1_1 \cap \mathbb{H}^s$, $s \geq 2$, *obtenida del teorema II.1. Si existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^1_1} + \left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^s} < \delta \tag{III.4}$$

entonces el problema de valor inicial (III.1) tiene una solución global única

$$\vec{u} \in C\left([0,+\infty[\, : \mathbb{H}^s\right) \times C\left([0,+\infty[\, : \mathbb{H}^s\right)$$

satisfaciendo

$$\sup_{t\in[0,+\infty[} (1+t)^{1/3}\,\|\vec{u}\,(t)\|_{\mathbb{H}^1_\infty} < +\infty.$$

Para la demostración de los teoremas III.1 y III.2 adaptamos al problema (III.1) las ideas de los teoremas 2.4 y 3.2 de [6], respectivamente..

III.2. Demostración del teorema III.1

Probemos (III.2) usando los resultados sobre conmutadores de la proposición I.28. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\partial_t \|\vec{u}\,(t)\|^2_{H^s\times H^s} &= \tfrac{1}{2}\partial_t\left(\|u\,(t)\|^2_{H^s} + \|v\,(t)\|^2_{H^s}\right)\\
&= \langle u\,(t)\,, \partial_t u\,(t)\rangle_{H^s} + \langle v\,(t)\,, \partial_t v\,(t)\rangle_{H^s}\\
&= \langle J^s u\,(t)\,, J^s\partial_t u\,(t)\rangle_{L^2} + \langle J^s v\,(t)\,, J^s\partial_t v\,(t)\rangle_{L^2}\,.
\end{aligned} \tag{III.5}$$

Aplicando el operador J^s a las ecuaciones del sistema (III.1), tenemos

$$\partial_t J^s u + \partial_x^3 J^s u + J^s\left(v^2\partial_x u\right) + 2J^s\left(uv\partial_x v\right) = 0$$
$$\partial_t J^s v + \partial_x^3 J^s v + 2J^s\left(uv\partial_x u\right) + J^s\left(u^2\partial_x v\right) = 0.$$

Entonces, la identidad $J^s(fg) = [J^s : f]\, g + fJ^s g$ implica que

$$\partial_t J^s u + \partial_x^3 J^s u + [J^s : v^2]\, \partial_x u + v^2 \partial_x (J^s u) + 2\,[J^s : uv]\, \partial_x v + 2uv\partial_x (J^s v) = 0$$
$$\partial_t J^s v + \partial_x^3 J^s v + 2\,[J^s : uv]\, \partial_x u + 2uv\partial_x (J^s u) + [J^s : u^2]\, \partial_x v + u^2 \partial_x (J^s v) = 0$$

Así, para cada sumando de III.5 se tiene

$$\begin{aligned} \langle J^s u, J^s \partial_t u\rangle_{L^2} &= \langle J^s u, \partial_t J^s u\rangle_{L^2} \\ &= -\left\langle J^s u, \partial_x^3 J^s u\right\rangle_{L^2} - \left\langle J^s u, \left[J^s : v^2\right] \partial_x u\right\rangle_{L^2} - \left\langle J^s u, v^2 \partial_x (J^s u)\right\rangle_{L^2} \\ &\quad -2\,\langle J^s u, [J^s : uv]\, \partial_x v\rangle_{L^2} - 2\,\langle J^s u, uv\partial_x (J^s v)\rangle_{L^2} \end{aligned} \tag{III.6}$$

y de forma similar

$$\begin{aligned} \langle J^s u, J^s \partial_t u\rangle_{L^2} &= -\left\langle J^s v, \partial_x^3 J^s v\right\rangle_{L^2} - 2\,\langle J^s v, [J^s : uv]\, \partial_x u\rangle_{L^2} - 2\,\langle J^s v, uv\partial_x (J^s u)\rangle_{L^2} \\ &\quad - \left\langle J^s v, \left[J^s : u^2\right] \partial_x v\right\rangle_{L^2} - \left\langle J^s v, u^2 \partial_x (J^s v)\right\rangle_{L^2} \end{aligned} \tag{III.7}$$

Sustituyendo (III.6) y (III.7) en (III.5), teniendo en cuenta la propiedad de integración por partes

$$\left\langle J^s u, \partial_x^3 J^s u\right\rangle_{L^2} = 0 \qquad \text{y} \qquad \left\langle J^s v, \partial_x^3 J^s v\right\rangle_{L^2} = 0$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\partial_t \|\vec{u}(t)\|_{H^s\times H^s}^2 &= -\left\langle J^s u, \left[J^s : v^2\right] \partial_x u\right\rangle_{L^2} - \left\langle J^s u, v^2 \partial_x (J^s u)\right\rangle_{L^2} \\ &\quad -2\,\langle J^s u, [J^s : uv]\, \partial_x v\rangle_{L^2} - 2\,\langle J^s u, uv\partial_x (J^s v)\rangle_{L^2} \\ &\quad -2\,\langle J^s v, [J^s : uv]\, \partial_x u\rangle_{L^2} - 2\,\langle J^s v, uv\partial_x (J^s u)\rangle_{L^2} \\ &\quad - \left\langle J^s v, \left[J^s : u^2\right] \partial_x v\right\rangle_{L^2} - \left\langle J^s v, u^2 \partial_x (J^s v)\right\rangle_{L^2} \end{aligned} \tag{III.8}$$

Ahora estimemos cada uno de los términos del segundo miembro de (III.8). Para el primer sumando, usando la desigualdad de Hölder y la proposición I.28 se tiene

$$\begin{aligned} \left\langle J^s u, \left[J^s : v^2\right] \partial_x u\right\rangle_{L^2} &\leq \|J^s u\|_{L^2} \left\|\left[J^s : v^2\right] \partial_x u\right\|_{L^2} \\ &\leq C\,\|J^s u\|_{L^2} \left(\left\|\partial_x v^2\right\|_{L^\infty} \left\|J^{s-1}\partial_x u\right\|_{L^2} + \left\|J^s v^2\right\|_{L^2} \|\partial_x u\|_{L^\infty}\right) \\ &\leq C\,\|J^s u\|_{L^2} \left(2\,\|v\partial_x v\|_{L^\infty} \|J^s u\|_{L^2} + \left\|J^s v^2\right\|_{L^2} \|\partial_x u\|_{L^\infty}\right) \\ &\leq C\,\|v\|_{L^\infty} \|\partial_x v\|_{L^\infty} \|J^s u\|_{L^2}^2 + C\,\|J^s u\|_{L^2} \left\|J^s v^2\right\|_{L^2} \|\partial_x u\|_{L^\infty} \\ &\leq C\,\|v\|_{L^\infty} \|\partial_x v\|_{L^\infty} \|u\|_{H^s}^2 + C\,\|u\|_{H^s} \left\|J^s v^2\right\|_{L^\infty} \|\partial_x u\|_{L^\infty} \end{aligned}$$

Como la proposición I.28 implica que

$$\begin{aligned}\left\|J^s v^2\right\|_{L^2} &= \left\|J^s(vv)\right\|_{L^2} \le C\left(\|v\|_{L^\infty}\|J^s v\|_{L^2} + \|J^s v\|_{L^2}\|v\|_{L^\infty}\right) = C\|v\|_{L^\infty}\|J^s v\|_{L^2} \\ &= C\|v\|_{L^\infty}\|v\|_{H^s}\end{aligned}$$

Por lo tanto, para el primer sumando resulta

$$\left\langle J^s u, \left[J^s : v^2\right]\partial_x u\right\rangle_{L^2} \le C\|v\|_{L^\infty}\|\partial_x v\|_{L^\infty}\|u\|_{H^s}^2 + C\|v\|_{L^\infty}\|\partial_x u\|_{L^\infty}\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^s} \quad \text{(III.9)}$$

En forma similar, para el séptimo sumando de (III.8) se tiene

$$\left\langle J^s v, \left[J^s : u^2\right]\partial_x v\right\rangle_{L^2} \le C\|u\|_{L^\infty}\|\partial_x u\|_{L^\infty}\|v\|_{H^s}^2 + C\|u\|_{L^\infty}\|\partial_x v\|_{L^\infty}\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^s} \quad \text{(III.10)}$$

Ahora, usando la definición de $\langle ., . \rangle_{L^2}$,integración por partes y la desigualdad de Hölder para estimar el segundo sumando de (III.8) se tiene

$$\begin{aligned}\left\langle J^s u, v^2\partial_x(J^s u)\right\rangle_{L^2} &= \left\langle v^2, J^s u\partial_x(J^s u)\right\rangle_{L^2} = \frac{1}{2}\left\langle v^2, \partial_x(J^s u)^2\right\rangle_{L^2} = \left\langle v\partial_x v, (J^s u)^2\right\rangle_{L^2} \\ &\le C\|v\partial_x v\|_{L^\infty}\|J^s u\|_{L^2}^2 \le C\|v\|_{L^\infty}\|\partial_x v\|_{L^\infty}\|J^s u\|_{L^2}^2 \\ &\le C\|v\|_{L^\infty}\|\partial_x v\|_{L^\infty}\|u\|_{H^s}^2 . \qquad \text{(III.11)}\end{aligned}$$

En forma análoga, estimando el octavo sumando se obtiene

$$\left\langle J^s v, u^2\partial_x(J^s v)\right\rangle_{L^2} \le C\|u\|_{L^\infty}\|\partial_x u\|_{L^\infty}\|v\|_{H^s}^2 , \quad \text{(III.12)}$$

Con el mismo procedimiento empleado para obtener (III.9), en el tercer sumando de (III.8) se tiene

$$\begin{aligned}\langle J^s u, [J^s : uv]\,\partial_x v\rangle_{L^2} &\le \|J^s u\|_{L^2}\|[J^s : uv]\,\partial_x v\|_{L^2} \\ &\le C\|J^s u\|_{L^2}\left(\|\partial_x(uv)\|_{L^\infty}\left\|J^{s-1}\partial_x v\right\|_{L^2} + \|J^s(uv)\|_{L^2}\|\partial_x v\|_{L^\infty}\right) \\ &\le C\|u\|_{H^s}\left[\|\partial_x(uv)\|_{L^\infty}\|v\|_{H^s} + \|J^s(uv)\|_{L^2}\|\partial_x v\|_{L^\infty}\right]\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\|J^s(uv)\|_{L^2} &\le C\left(\|u\|_{L^\infty}\|J^s v\|_{L^2} + \|J^s u\|_{L^2}\|v\|_{L^\infty}\right) \\ &\le C\left(\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{H^s} + \|u\|_{H^s}\|v\|_{L^\infty}\right)\end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
\|\partial_x (uv)\|_{L^\infty} &\leq C \left(\|v\partial_x u\|_{L^\infty} + \|u\partial_x v\|_{L^\infty}\right) \\
&\leq C \left(\|v\|_{L^\infty} \|\partial_x u\|_{L^\infty} + \|u\|_{L^\infty} \|\partial_x v\|_{L^\infty}\right)
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\langle J^s u, [J^s : uv]\, \partial_x v\rangle_{L^2} &\leq C \|u\|_{H^s} [C \left(\|v\|_{L^\infty} \|\partial_x u\|_{L^\infty} + \|u\|_{L^\infty} \|\partial_x v\|_{L^\infty}\right) \|v\|_{H^s} \\
&\quad + C \left(\|u\|_{L^\infty} \|v\|_{H^s} + \|u\|_{H^s} \|v\|_{L^\infty}\right) \|\partial_x v\|_{L^\infty}] \\
&\leq C \|u\|_{H^s} [\|v\|_{L^\infty} \|\partial_x u\|_{L^\infty} \|v\|_{H^s} + \|u\|_{L^\infty} \|\partial_x v\|_{L^\infty} \|v\|_{H^s} \\
&\quad + \|u\|_{L^\infty} \|\partial_x v\|_{L^\infty} \|v\|_{H^s} + \|v\|_{L^\infty} \|\partial_x v\|_{L^\infty} \|u\|_{H^s}] \\
&\leq C \|u\|_{H^s} [\|\partial_x u\|_{L^\infty} \|v\|_{L^\infty} \|v\|_{H^s} + \|u\|_{L^\infty} \|\partial_x v\|_{L^\infty} \|v\|_{H^s} \\
&\quad + \|v\|_{L^\infty} \|\partial_x v\|_{L^\infty} \|u\|_{H^s}] \\
&= C \|v\|_{L^\infty} \|\partial_x u\|_{L^\infty} \|u\|_{H^s} \|v\|_{H^s} + C \|u\|_{L^\infty} \|\partial_x v\|_{L^\infty} \|u\|_{H^s} \|v\|_{H^s} \\
&\quad + C \|v\|_{L^\infty} \|\partial_x v\|_{L^\infty} \|u\|_{H^s}^2 \qquad \text{(III.13)}
\end{aligned}
$$

Del mismo modo, para el quinto sumando de (III.8) se obtiene

$$
\begin{aligned}
\langle J^s v, [J^s : vu]\, \partial_x u\rangle_{L^2} &\leq C \|u\|_{L^\infty} \|\partial_x v\|_{L^\infty} \|u\|_{H^s} \|v\|_{H^s} + C \|v\|_{L^\infty} \|\partial_x u\|_{L^\infty} \|u\|_{H^s} \|v\|_{H^s} \\
&\quad + C \|u\|_{L^\infty} \|\partial_x u\|_{L^\infty} \|v\|_{H^s}^2 \qquad \text{(III.14)}
\end{aligned}
$$

Además,

$$
\begin{aligned}
&\langle J^s u, uv\partial_x (J^s v)\rangle_{L^2} + \langle J^s v, uv\partial_x (J^s u)\rangle_{L^2} \\
&\qquad = \langle uv, J^s u\partial_x (J^s v)\rangle_{L^2} + \langle uv, J^s v\partial_x (J^s u)\rangle_{L^2} \\
&\qquad = \langle uv, J^s u\partial_x (J^s v) + J^s v\partial_x (J^s u)\rangle_{L^2} \\
&\qquad = \langle uv, \partial_x (J^s u J^s v)\rangle_{L^2} \\
&\qquad = \langle u\partial_x v, J^s u J^s v\rangle_{L^2} + \langle v\partial_x u, J^s u J^s v\rangle_{L^2} \\
&\qquad \leq C \|u\partial_x v\|_{L^\infty} \|J^s v\|_{L^2} \|J^s u\|_{L^2} + C \|v\partial_x u\|_{L^\infty} \|J^s v\|_{L^2} \|J^s u\|_{L^2} \\
&\qquad \leq C \left(\|u\|_{L^\infty} \|\partial_x v\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty} \|\partial_x u\|_{L^\infty}\right) \|u\|_{H^s} \|v\|_{H^s} \qquad \text{(III.15)}
\end{aligned}
$$

Usando en (III.8) los estimados obtenidos desde (III.9) hasta (III.15), se tiene

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\partial_t \|\vec{u}(t)\|^2_{H^s\times H^s} \leq\ & C\|v\|_{L^\infty}\|\partial_x v\|_{L^\infty}\|u\|^2_{H^s} + C\|v\|_{L^\infty}\|\partial_x u\|_{L^\infty}\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^s} \\
& + C\|v\|_{L^\infty}\|\partial_x v\|_{L^\infty}\|u\|^2_{H^s} + C\|v\|_{L^\infty}\|\partial_x u\|_{L^\infty}\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^s} \\
& + C\|u\|_{L^\infty}\|\partial_x v\|_{L^\infty}\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^s} + C\|v\|_{L^\infty}\|\partial_x v\|_{L^\infty}\|u\|^2_{H^s} \\
& + C\|u\|_{L^\infty}\|\partial_x v\|_{L^\infty}\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^s} + C\|v\|_{L^\infty}\|\partial_x u\|_{L^\infty}\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^s} \\
& + C\|u\|_{L^\infty}\|\partial_x u\|_{L^\infty}\|v\|^2_{H^s} + C\|u\|_{L^\infty}\|\partial_x u\|_{L^\infty}\|v\|^2_{H^s} \\
& + C\|u\|_{L^\infty}\|\partial_x v\|_{L^\infty}\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^s} + C\|u\|_{L^\infty}\|\partial_x u\|_{L^\infty}\|v\|^2_{H^s} \\
& + C\left(\|u\|_{L^\infty}\|\partial_x v\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty}\|\partial_x u\|_{L^\infty}\right)\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^s}
\end{aligned}
$$

Simplificando

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\partial_t \|\vec{u}(t)\|^2_{H^s\times H^s} \leq\ & C\|v\|_{L^\infty}\|\partial_x v\|_{L^\infty}\|u\|^2_{H^s} \\
& + C\left(\|u\|_{L^\infty}\|\partial_x v\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty}\|\partial_x u\|_{L^\infty}\right)\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^s} \\
& + C\|u\|_{L^\infty}\|\partial_x u\|_{L^\infty}\|v\|^2_{H^s}
\end{aligned}
$$

entonces

$$\partial_t \|\vec{u}(t)\|^2_{H^s\times H^s} \leq C\Psi(t)\|\vec{u}(t)\|^2_{H^s\times H^s} \tag{III.16}$$

donde

$$\Psi(t) = \|v\|_{L^\infty}\|\partial_x v\|_{L^\infty} + \|\partial_x u\|_{L^\infty}\|v\|_{L^\infty} + \|u\|_{L^\infty}\|\partial_x v\|_{L^\infty} + \|u\|_{L^\infty}\|\partial_x u\|_{L^\infty}$$

Finalmente, integrando a (III.16) desde cero hasta $t \leq T$

$$\int_0^t \partial_t \|\vec{u}(r)\|^2_{H^s\times H^s}\,dr \leq C\int_0^t \Psi(r)\|\vec{u}(r)\|^2_{H^s\times H^s}\,dr$$

se obtiene que

$$\|\vec{u}(t)\|^2_{\mathbb{H}^s} \leq \left\|\vec{\phi}\right\|^2_{\mathbb{H}^s} + C\int_0^t \Psi(r)\|\vec{u}(r)\|^2_{\mathbb{H}^s}\,dr \tag{III.17}$$

y aplicando la desigualdad de Gronwall en (III.17) se tiene que

$$\|\vec{u}(t)\|_{\mathbb{H}^s} \leq \left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^s} e^{C\int_0^t \Psi(r)dr}, \tag{III.18}$$

ahora tomamos el supremo en (III.18)

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\vec{u}(t)\|_{\mathbb{H}^s} \leq C\left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^s} e^{\int_0^t \Psi(r)dr}$$

con lo cual concluimos la prueba del teorema. □

III.3. Demostración del teorema III.2

En esta sección usaremos los resultados proporcionados en las secciones anteriores para estudiar la existencia global y el comportamiento asintótico de pequeñas soluciones del problema de valor inicial no lineal (III.1).

Proposición III.3. Sean $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y u la única solución del problema lineal

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \partial_x^3 u(x,t) = 0 \quad x,t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \tag{III.19}$$

entonces

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \leq Ct^{-1/3}\|\varphi\|_{L^1}. \tag{III.20}$$

Demostración. De la proposición II.3 implica que

$$\widehat{u}(\xi,t) = e^{it\xi^3}\widehat{\varphi}(\xi)$$

De la proposición I.18 se sigue que si u es solución del problema lineal entonces usando transformada de fourier tenemos

$$u(t) = \left(e^{it\xi^3}\widehat{\varphi}(\xi)\right)^\vee = \left(e^{it\xi^3}\right)^\vee * \varphi = S_t * \varphi \tag{III.21}$$

donde S_t es definido por la integral oscilatoria

$$S_t(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\left(x\xi + t\xi^3\right)} d\xi \tag{III.22}$$

Entonces por la desigualdad de Young (proposición I.4)

$$\|u(t)\|_{L^\infty} = \|S_t * \varphi\|_{L^\infty} \leq \|S_t\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{L^1} \tag{III.23}$$

Haciendo el cambio de variable $\xi = \frac{\theta}{\sqrt[3]{3t}}$ se tiene que

$$S_t(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{3t}}\int_{\mathbb{R}} e^{i\left(\frac{x\theta}{\sqrt[3]{3t}} + \frac{\theta^3}{3}\right)} d\theta = Ct^{-1/3}\int_{\mathbb{R}} e^{i\left(\frac{x}{\sqrt[3]{t}}\theta + \theta^3\right)} d\theta$$

Luego, la proposición B.4 con $\beta = 0$ implica

$$\|S_t\|_{L^\infty} \leq \left\| Ct^{-1/3}\int_{\mathbb{R}} e^{i\left(\frac{x}{\sqrt[3]{t}}\theta + \theta^3\right)} d\theta \right\|_{L^\infty} \leq C|t|^{-1/3}\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i\left(\frac{x}{\sqrt[3]{t}}\theta + \theta^3\right)} d\theta \right\|_{L^\infty} \leq C|t|^{-1/3} \tag{III.24}$$

lo que junto con (III.23) prueba la proposición. □

Ahora iniciamos la demostración del teorema III.2. Usando notaciones del capítulo anterior y con el mismo procedimiento similar, al utilizado para deducir (II.45), se prueba que la solución local $\vec{u}$ del problema de valor inicial (III.1), encontrada en el teorema II.1, es solución de la ecuación integral

$$\vec{u}(t) = \vec{U}(t)\,\vec{\phi} + \int_0^t \vec{U}(t-\tau)\,\vec{F}(\tau)\,d\tau \tag{III.25}$$

donde

$$\vec{F}(\tau) = \left(v^2\partial_x u + 2uv\partial_x v\ ,\ 2uv\partial_x u + u^2\partial_x v\right) = (f_1, f_2)\,. \tag{III.26}$$

De la proposición III.3 se deduce que

$$\left\|\vec{U}(t)\,\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{L}^\infty} \leq Ct^{-1/3}\left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{L}^1} \tag{III.27}$$

Como $\partial_x\vec{U}(t)\,\vec{\phi}$ es solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \partial_t\left(\partial_x\vec{u}(t)\right) + \partial_x^4\vec{u}(t) = 0, \\ \partial_x\vec{u}(0) = \partial_x\vec{\phi} \end{cases} \tag{III.28}$$

entonces por la proposición III.3 deducimos que

$$\left\|\partial_x\vec{U}(t)\,\vec{\phi}\right\|_{L^\infty} \leq Ct^{-1/3}\left\|\partial_x\vec{\phi}\right\|_{L^1} \tag{III.29}$$

Por la igualdad $\|u\|_{H^1_\infty} = \|u\|_{\mathbb{L}^\infty} + \|\partial_x u\|_{L^\infty}$, la definición de $\mathbb{H}^1_\infty = H^1_\infty \times H^1_\infty$, y de (III.27) y (III.29), se tiene

$$\begin{aligned} \left\|\vec{U}(t)\,\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^1_\infty} &= \left\|\vec{U}(t)\,\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{L}^\infty} + \left\|\partial_x\vec{U}(t)\,\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{L}^\infty} \\ &\leq Ct^{-1/3}\left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{L}^1} + Ct^{-1/3}\left\|\partial_x\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{L}^1} \\ &\leq Ct^{-1/3}\left(\left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{L}^1} + \left\|\partial_x\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{L}^1}\right) \\ &< C\delta t^{-1/3}. \end{aligned} \tag{III.30}$$

Por otro lado, (III.25), la proposición II.3 y la proposición III.3 implican

$$\begin{aligned} \left\|\int_0^t \vec{U}(t-\tau)\,\vec{F}(\tau)\,d\tau\right\|_{\mathbb{H}^1_\infty} &\leq \int_0^t \left\|\vec{U}(t-\tau)\,\vec{F}(\tau)\right\|_{\mathbb{H}^1_\infty} d\tau \\ &\leq \int_0^t \left\|\vec{U}(-1)\,\vec{U}(1+t-\tau)\,\vec{F}(\tau)\right\|_{\mathbb{H}^1_\infty} d\tau \\ &\leq \int_0^t \left\|\vec{U}(1+t-\tau)\,\vec{F}(\tau)\right\|_{\mathbb{H}^1_\infty} d\tau \\ &\leq C\int_0^t (1+t-\tau)^{-1/3}\left\|\vec{F}(\tau)\right\|_{\mathbb{H}^1_1} d\tau \end{aligned} \tag{III.31}$$

Ahora, estimamos la norma de $\left\|\vec{F}(\tau)\right\|$ en $\mathbb{H}_1^1$. La desigualdad triangular implica que

$$\|f_1(\tau)\|_{H_1^1} = \|Jf_1\|_{L^1} \leq \left\|J\left(v^2\partial_x u\right)\right\|_{L^1} + 2\|J(uv\partial_x v)\|_{L^1} = \|vJ(v\partial_x u)\|_{L^1} + 2\|uJ(v\partial_x v)\|_{L^1}$$

entonces, la desigualdad de Hölder implica

$$\begin{aligned}
\|f_1(\tau)\|_{H_1^1} &\leq \|v\|_{L^\infty}\|J(v\partial_x u)\|_{L^1} + 2\|u\|_{L^\infty}\|J(v\partial_x v)\|_{L^1} \\
&= \|v\|_{L^\infty}\|vJ(\partial_x u)\|_{L^1} + 2\|u\|_{L^\infty}\|vJ(\partial_x v)\|_{L^1} \\
&\leq \|v\|_{L^\infty}^2\|J(\partial_x u)\|_{L^1} + 2\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{L^\infty}\|J(\partial_x v)\|_{L^1} \\
&= \|v\|_{L^\infty}^2\|\partial_x u\|_{H^1} + 2\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{L^\infty}\|\partial_x v\|_{H^1} \\
&\leq C\left[\|v\|_{L^\infty}^2\|u\|_{H^2} + \left(\|u\|_{L^\infty}^2 + \|v\|_{L^\infty}^2\right)\|v\|_{H^2}\right] \\
&\leq C\left[\left(\|u\|_{L^\infty}^2 + \|v\|_{L^\infty}^2\right)\left(\|u\|_{H^2} + \|v\|_{H^2}\right)\right] \qquad \text{(III.32)}
\end{aligned}$$

De forma similar para f_2

$$\|f_2(\tau)\|_{H_1^1} \leq C\left[\left(\|u\|_{L^\infty}^2 + \|v\|_{L^\infty}^2\right)\left(\|u\|_{H^2} + \|v\|_{H^2}\right)\right] \qquad \text{(III.33)}$$

Entonces de (III.32) y (III.33) implican que

$$\begin{aligned}
\left\|\vec{F}(\tau)\right\|_{\mathbb{H}_1^1} &= \|f_1(\tau)\|_{H_1^1} + \|f_2(\tau)\|_{H_1^1} \\
&\leq C\left[\left(\|u\|_{L^\infty}^2 + \|v\|_{L^\infty}^2\right)\left(\|u\|_{H^2} + \|v\|_{H^2}\right)\right] \leq C\|\vec{u}\|_{\mathbb{L}^\infty}^2\|\vec{u}\|_{\mathbb{H}^2}. \qquad \text{(III.34)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de (III.30) , (III.31) y III.34 se obtiene

$$\|\vec{u}(t)\|_{\mathbb{H}_\infty^1} \leq C\delta t^{-1/3} + C\int_0^t (1+t-\tau)^{-1/3}\|\vec{u}\|_{\mathbb{L}^\infty}^2\|\vec{u}\|_{\mathbb{H}^2}\,d\tau. \qquad \text{(III.35)}$$

Sea $[0, T^*[$ el intervalo máximo de existencia de la solución $\vec{u}$ del problema (III.1). La desigualdad III.35 muestra que para cualquier $0 \leq t \leq T^*$ la solución $\vec{u} \in \mathbb{H}^s \cap \mathbb{H}_\infty^1$.

Acontinuación definimos la función $m(.)$ dada por

$$m(T) = \sup_{0\leq t\leq T}(1+t)^{1/3}\|\vec{u}(t)\|_{\mathbb{H}_\infty^1} \qquad \text{(III.36)}$$

Donde $0 \leq T \leq T^*$. De ello se deduce que m esta bien definida, es continua no negativa y no decreciente.

En el integrando (III.35), la definición $m(T)$,la desigualdad $\|\vec{u}\|_{\mathbb{L}^\infty} \leq \|\vec{u}\|_{\mathbb{H}^2}$ que se deduce de la proposición 1.22 y el teorema III.1 se tiene

$$\begin{aligned}
C\|\vec{u}\|_{\mathbb{L}^\infty}^2 \|\vec{u}\|_{\mathbb{H}^2} &\leq C\left(\|\vec{u}\|_{\mathbb{L}^\infty} + \|\partial_x \vec{u}\|_{\mathbb{L}^\infty}\right)\|\vec{u}\|_{\mathbb{H}^2}^2 \\
&\leq C(1+\tau)^{1/3}\|\vec{u}\|_{\mathbb{H}^1}(1+\tau)^{-1/3}\|\vec{u}\|_{\mathbb{H}^2}^2 \\
&\leq Cm(T)(1+\tau)^{-1/3}\|\vec{u}\|_{\mathbb{H}^2}^2 \\
&\leq Cm(T)(1+\tau)^{-1/3}\|\vec{\phi}_0\|_{\mathbb{H}^2}^2 \exp\left(C\int_0^T \Psi(r)\,dr\right) \\
&\leq C\delta^2 m(T)(1+\tau)^{-1/3}\exp\left(C\int_0^T \Psi(r)\,dr\right) \qquad \text{(III.37)}
\end{aligned}$$

Luego, reemplazando en (III.35)

$$\begin{aligned}
\|\vec{u}(t)\|_{\mathbb{H}^1_\infty} &\leq C\delta t^{-1/3} + C\delta^2\int_0^t (1+t-\tau)^{-1/3}(1+\tau)^{-1/3} m(T)\exp\left(C\int_0^T \Psi(r)\,dr\right)d\tau \\
&\leq C\delta t^{-1/3} + C\delta^2 m(T)\exp\left(C\int_0^T \Psi(r)\,dr\right)\int_0^t (1+t-\tau)^{-1/3}(1+\tau)^{-1/3}\,d\tau \\
&\qquad \text{(III.38)}
\end{aligned}$$

Luego la integral $I(t) = \int_0^t (1+t-\tau)^{-1/3}(1+\tau)^{-1/3}\,d\tau$, para $\tau \in [0,t] \to (1+t-\tau)^{-1/3} \leq 1$

$$\int_0^t (1+t-\tau)^{-1/3}(1+\tau)^{-1/3}\,d\tau \leq \int_0^t (1+\tau)^{-1/3}\,d\tau \leq \frac{3(1+T)}{2}(1+t)^{2/3} \leq C(1+t)^{-1/3}$$

Como consecuencia, por (III.38)

$$\begin{aligned}
\|\vec{u}\|_{\mathbb{H}^1_\infty} &\leq C\delta t^{-1/3} + C\delta^2 m(T)\exp\left(C\int_0^T \Psi(r)\,dr\right)C(1+t)^{-1/3}.(1+t)^{2/3} \\
&\leq C\delta t^{-1/3} + C\delta^2 m(T)\exp\left(C\int_0^T \|\vec{u}(t)\|_{\mathbb{H}^1_\infty}^2\,dr\right)C(1+t)^{-1/3} \\
&\leq C\delta t^{-1/3} + C\delta^2 m(T)\exp\left(C\int_0^T (1+r)^{2/3}\|\vec{u}(t)\|_{\mathbb{H}^1_\infty}^2(1+r)^{-2/3}\,dr\right)(1+t)^{-1/3} \\
&\leq C\delta t^{-1/3} + C\delta^2 m(T)\exp\left(Cm^2(T)\right)(1+t)^{-1/3}
\end{aligned}$$

Ahora multiplicando en ambos miembros por $(1+t)^{1/3}$

$$(1+t)^{1/3}\|\vec{u}\|_{\mathbb{H}^1_\infty} \leq C\delta t^{-1/3}(1+t)^{1/3} + C\delta^2 m(T)\exp\left(Cm^2(T)\right) \qquad \text{(III.39)}$$

Como la función $g(t) = t^{-1/3}(1+t)^{1/3}$ es decreciente para todo $t > 0$ y alcanza el maximo valor cuando t se aproxima a cero.

$$(1+t)^{1/3}\|\vec{u}\|_{\mathbb{H}^1_\infty} \leq C\delta + C\delta^2 m(T)\exp\left(cm^2(T)\right)$$

Tomemos el supremo a la desigualdad (III.38)

$$\sup_{0\leq t\leq T}(1+t)^{1/3}\|\vec{u}\|_{\mathbb{H}^1_\infty}\leq \sup_{0\leq T\leq T^*}\left\{C\delta+C\delta^2 m(T)\exp\left(cm^2(T)\right)\right\}$$

Luego se tiene

$$m(T)\leq \sup_{0\leq T\leq T^*}\left\{C\delta+C\delta^2 m(T)\exp\left(cm^2(T)\right)\right\}$$

entonces, deducimos que $m(T)$ es acotado para todo $0\leq T\leq T^*$.

Por lo tanto, mientras δ sea suficientemente pequeño, existe una constante K tal que $m(T)<K$ para todo $0\leq T<T^*$. Este estimado a priori combinado con el teorema III.1 muestra que la solución $\vec{u}$ existe globalmente y satisface el decaimiento deseado. □

Capítulo IV

Teoría local revisada

IV.1. Resultado principal

El principal objetivo de este capítulo consiste en mejorar el resultado de buena formulación local obtenido en el capítulo 2. Con mayor precisión se probará que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x \left(uv^2\right) = 0 \\ \partial_t v + \partial_x^3 v + \partial_x \left(u^2 v\right) = 0 \\ u\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right) \\ v\left(x,0\right) = \psi\left(x\right). \end{cases} \tag{IV.1}$$

está bien formulado localmente en $\mathbb{H}^s$ con $s \geq 1/4$.

Para motivar el resultado local que obtendremos en este capítulo, primero observamos que si $\vec{u} = (u,v)$ es solución del problema (IV.1), entonces, para $\lambda > 0$, también es solución

$$\left(u_\lambda\left(x,t\right), v_\lambda\left(x,t\right)\right) = \lambda\left(u_\lambda\left(\lambda x, \lambda^3 t\right), v_\lambda\left(\lambda x, \lambda^3 t\right)\right)$$

con datos

$$\left(u_\lambda\left(x,0\right), v_\lambda\left(x,0\right)\right) = \lambda\left(u_\lambda\left(\lambda x,0\right), v_\lambda\left(\lambda x,0\right)\right).$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \left\|\left(u_\lambda\left(\cdot,0\right), v_\lambda\left(\cdot,0\right)\right)\right\|_{\dot{\mathbb{H}}^s} &= \lambda^{s+\frac{1}{2}}\left\|D^s u\left(\cdot,0\right)\right\|_{L^2} + \lambda^{s+\frac{1}{2}}\left\|D^s v\left(\cdot,0\right)\right\|_{L^2} \\ &= \lambda^{s+\frac{1}{2}}\left\|\left(u\left(\cdot,0\right), v\left(\cdot,0\right)\right)\right\|_{\dot{\mathbb{H}}^s} \end{aligned}$$

Esto sugiere que el óptimo de s es $-\frac{1}{2}$, sin embargo, el mejor resultado de buena formulación local conocido para la ecuación de KdV modificada en espacios de Sobolev H^s es para $s \geq 1/4$.

En este capítulo probaremos el siguiente teorema.

Teorema IV.1. *Para cualquier $\vec{\phi} = (\varphi, \psi) \in H^s \times H^s$ con $s \geq 1/4$, existe $T = T(\|\vec{\phi}\|_{H^s}) > 0$, y una única solución $\vec{u} = (u, v)$ del problema de valor inicial (IV.1) tal que*

$$\vec{u} = (u, v) \in C\left([-T, T] : H^s \times H^s\right) \tag{IV.2}$$

$$\left\|D^{s-1/4}\partial_x u\right\|_{L_2^{20}L_T^{5/2}} < \infty \quad ; \quad \left\|D^{s-1/4}\partial_x v\right\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}} < \infty \tag{IV.3}$$

$$\|D_x^s u\|_{L_x^s L_T^{10}} < \infty \quad ; \quad \|D_x^s v\|_{L_x^5 L_T^{20}} < \infty \tag{IV.4}$$

$$\|u\|_{L_x^4 L_T^\infty} < \infty \quad ; \quad \|v\|_{L_x^4 L_T^\infty} < \infty \tag{IV.5}$$

$$\|D^s\partial_x u\|_{L_x^\infty L_T^2} < \infty \quad ; \quad \|D^s\partial_x v\|_{L_x^\infty L_T^2} < \infty \tag{IV.6}$$

Además, existe una vecindad $\mathcal{V}$ de $\vec{\phi}$ en $H^s \times H^s$ tal que la aplicación $\left(\bar{\varphi}, \bar{\psi}\right) \mapsto (\bar{u}, \bar{v})$ de $\mathcal{V}$ en la clase definida por (IV.2)-(IV.6) es suave.

Para la demostración del teorema (IV.1) se sigue las ideas del artículo [39] y del libro [43]. Así, utilizaremos los estimados lineales que obtendremos en la siguiente sección junto con un argumento de punto fijo que se aplicará en la tercera sección de la ecuación a la ecuación integral asociada con el problema (IV.1).

IV.2. Estimados lineales

El principal objetivo de esta sección consiste en demostrar que el problema que estamos estudiando está bien formulado localmente en $\mathbb{H}^s$ para $s \geq 1/4$. Para esto consideremos alguna propiedades del operador $\vec{U}\,(t)$ y sus estimados lineales.

Proposición IV.2. Sean u y v en H^s, entonces

$$\|U\,(t)\,u\|_{L^2} = \|u\|_{L^2} \tag{IV.7}$$

$$\partial_x U\,(t)\,u\,(x) = U\,(t)\,\partial_x u\,(x) \tag{IV.8}$$

$$D^\alpha U\,(t)\,u\,(x) = U\,(t)\,D^\alpha u\,(x) \tag{IV.9}$$

donde $\widehat{D^\alpha u}(\xi) = |\xi|^\alpha \widehat{u}(\xi)$,

$$\langle U(t)u, v\rangle_{L^2} = \langle u, U(t)v\rangle_{L^2} \tag{IV.10}$$

$$\langle D^\alpha U(t)u, v\rangle_{L^2} = \langle u, D^\alpha U(t)v\rangle_{L^2}. \tag{IV.11}$$

Demostración. Empezaremos la demostración de cada una de las propiedades. Para probar (IV.7), usando el teorema de Plancherel,

$$\|U(t)u\|_{L^2} = \left\|\widehat{U(t)u}\right\|_{L^2} = \left\|e^{i(\cdot)^3t}\widehat{u}\right\|_{L^2} = \|\widehat{u}\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}.$$

Para la demostración de (IV.8) tenemos

$$\partial_x\widehat{U(t)}u(\xi) = i\xi e^{i\xi^3t}\widehat{u}(\xi) = e^{i\xi^3t}(i\xi)\widehat{u}(\xi) = e^{i\xi^3t}\widehat{\partial_x u}(\xi) = U\widehat{(t)\partial_x}u(\xi).$$

Ahora demostraremos la propiedad (IV.9), para ello usaremos la propiedades de la transformada de Fourier

$$D^\alpha\widehat{U(t)}u(\xi) = |\xi|^\alpha e^{i\xi^3t}\widehat{u}(\xi) = U(t)|\xi|^\alpha\widehat{u}(\xi) = U\widehat{(t)D^\alpha}u(\xi).$$

Para demostrar (IV.10), por las propiedades del producto interno en L^2 y propiedades de la transformada de Fourier obtenemos

$$\langle U(t)u, v\rangle_{L^2} = \left\langle e^{i(\cdot)^3t}\widehat{u}(\xi), \widehat{v}(\xi)\right\rangle_{L^2} = \left\langle \widehat{u}(\xi), e^{i(\cdot)^3t}\widehat{v}(\xi)\right\rangle_{L^2} = \langle u, U(t)v\rangle_{L^2}.$$

Finalmente, para la demostración de la propiedad (IV.11), usando las propiedades del producto interno en L^2

$$\left\langle |\cdot|^\alpha e^{i(\cdot)^3t}\widehat{u}, \widehat{v}\right\rangle_{L^2} = \left\langle \widehat{u}, |\cdot|^\alpha e^{i(\cdot)^3t}\widehat{v}\right\rangle_{L^2}$$

entonces por el teorema de Plancherel,

$$\langle D^\alpha U(t)u, v\rangle_{L^2} = \left\langle \widehat{D^\alpha U(t)}u, \widehat{v}\right\rangle_{L^2} = \left\langle \widehat{u}, \widehat{D^\alpha U(t)}v\right\rangle_{L^2} = \langle u, D^\alpha U(t)v\rangle_{L^2}. \qquad \square$$

En esta sección empezaremos con un teorema muy útil para nuestro objetivo.

Teorema IV.3. *Si $u \in L^2$ entonces*

$$\|\partial_x U(t)u\|_{L_x^\infty L_t^2} \leq C\|u\|_{L_x^2} \tag{IV.12}$$

$$\|D_x^s\partial_x U(t)u\|_{L_x^\infty L_t^2} \leq C\|D_x^s u\|_{L_x^2}, \quad s \in \mathbb{R} \tag{IV.13}$$

Si $g \in L_x^1 L_t^2$, entonces para cualquier $T > 0$

$$\left\|\partial_x\int_0^t U(t-\tau)g(\cdot,\tau)\,d\tau\right\|_{L_t^\infty L_x^2} \leq C\|g\|_{L_x^1 L_t^2} \tag{IV.14}$$

Demostración. Por (IV.8) y propiedad de la transformada de Fourier

$$\widehat{\partial_x U(t)}\, u(\xi) = U(t)\, i\xi \widehat{u}(\xi)$$

entonces por definición de la transformada inversa de Fourier y el cambio de variable $\eta = \xi^3$ se obtiene

$$\partial_x U(t)\, u(x) = \tfrac{1}{3} \int_{\mathbb{R}} \eta^{-1/3} e^{i\left(\eta^{1/3} x + \eta t\right)} \widehat{u}\left(\eta^{1/3}\right) d\eta.$$

Usando el teorema de Plancherel en la variable t se tiene

$$\begin{aligned} \|\partial_x U(t)\, u\|_{L_t^2}^2 &= \tfrac{1}{9} \int_{\mathbb{R}} \left| e^{i\eta^{1/3} x} \eta^{-1/3} \widehat{u}\left(\eta^{1/3}\right)\right|^2 d\eta \leq C \int_{\mathbb{R}} \left|\eta^{-2/3}\right| \left|\widehat{u}\left(\eta^{1/3}\right)\right|^2 d\eta \\ &= C \int_{\mathbb{R}} \left|\xi^{-2}\right| \left|\widehat{u}(\xi)\right|^2 \xi^2 d\xi = C \|u\|_{L_x^2}^2 . \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|\partial_x U(t)\, u\|_{L_x^\infty L_t^2} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \|\partial_x U(t)\, u\|_{L_t^2} \leq C \sup_{x\in\mathbb{R}} \|u\|_{L_x^2} = C \|u\|_{L_x^2}$$

lo que prueba (IV.12).

Para probar la propiedad (IV.13) observamos que de (IV.8) y (IV.9) se tiene

$$D_x^s \partial_x U(t)\, u(x) = \partial_x U(t)\, D_x^s u(x)$$

entonces, usando las desigualdades anteriores concluimos

$$\|D_x^s \partial_x U(t)\, u\|_{L_x^\infty L_t^2} = \|\partial_x U(t)\, D_x^s u\|_{L_x^\infty L_t^2} \leq C \|D_x^s u\|_{L_x^2}$$

Para demostrar (IV.14) afirmamos que

$$\left\| \partial_x \int_{\mathbb{R}} U(-\tau)\, g(\cdot,\tau)\, d\tau \right\|_{L_x^2} \leq C \|g\|_{L_x^1 L_t^2} \tag{IV.15}$$

Luego por el teorema de dualidad tenemos

$$\left\| \partial_x \int_{\mathbb{R}} U(-\tau)\, g(\cdot,\tau)\, d\tau \right\|_{L_x^2} = \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}} \left(\partial_x \int_{\mathbb{R}} U(-\tau)\, g(x,\tau)\, d\tau \right) f(x)\, dx \right| : \|f\|_{L_x^2} = 1 \right\}.$$

Una integración por partes, la desigualdad de Cauchy Schwartz y la desigualdad (IV.12) implican que

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}}\left(\partial_x\int_{\mathbb{R}}U\left(-\tau\right)g\left(x,\tau\right)d\tau\right)f\left(x\right)dx\right| \\
&\qquad\qquad = \left|\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}g\left(x,\tau\right)\partial_xU\left(-\tau\right)f\left(x\right)d\tau\right)dx\right| \\
&\qquad\qquad \leq \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|g\left(x,\tau\right)\right|^2d\tau\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\partial_xU\left(-\tau\right)f\left(x\right)\right|^2d\tau\right)^{1/2}dx \\
&\qquad\qquad \leq \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\partial_xU\left(-\tau\right)f\left(x\right)\right|^2d\tau\right)^{1/2}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|g\left(x,\tau\right)\right|^2d\tau\right)^{1/2}dx \\
&\qquad\qquad \leq \left\|\partial_xU\left(-\tau\right)f\right\|_{L_x^\infty L_t^2}\left\|g\right\|_{L_x^1L_t^2} \\
&\qquad\qquad \leq c\left\|f\right\|_{L_t^2}\left\|g\right\|_{L_x^1L_t^2}
\end{aligned}
$$

de donde obtenemos la desigualdad (IV.15).

Ahora, repitiendo los argumentos anteriores y usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz, para $t\in[0,T]$ se tiene

$$
\begin{aligned}
\left\|\partial_x\int_0^tU\left(t-\tau\right)g\left(\cdot,\tau\right)d\tau\right\|_{L_x^\infty L_t^2} &= \left\|\partial_x\int_0^tU\left(t\right)U\left(-\tau\right)g\left(\cdot,\tau\right)d\tau\right\|_{L_x^\infty L_t^2} \\
&= \left\|\partial_xU\left(t\right)\int_0^tU\left(-\tau\right)g\left(\cdot,\tau\right)d\tau\right\|_{L_x^\infty L_t^2}
\end{aligned}
$$

pero (IV.12) y (IV.15) implican que

$$
\left\|\partial_xU\left(t\right)\int_0^tU\left(-\tau\right)g\left(\cdot,\tau\right)d\tau\right\|_{L_x^\infty L_t^2}\leq C\left\|\int_0^tU\left(-\tau\right)g\left(\cdot,\tau\right)d\tau\right\|_{L_x^2}\leq C\left\|g\right\|_{L_x^1L_t^2}. \quad \square
$$

Proposición IV.4. Si $u\in\dot{H}^{1/4}(\mathbb{R})$ entonces

$$
\left\|U\left(t\right)u\right\|_{L_x^4L_t^\infty}\leq C\left\|D^{1/4}u\right\|_{L_x^2} \tag{IV.16}
$$

Demostración. Si $D_x^{1/4}u=v$ entonces $u=D_x^{-1/4}v$. Por tanto, la desigualdad (IV.16) es equivalente a

$$
\left\|D_x^{-1/4}U\left(t\right)v\right\|_{L_x^4L_t^\infty}\leq C\left\|v\right\|_{L_x^2}. \tag{IV.17}
$$

Ahora demostraremos que (IV.17) es equivalente a

$$
\left\|\int_{\mathbb{R}}D_x^{-1/4}U\left(t\right)g\left(\cdot,t\right)dt\right\|_{L_x^2}\leq C\left\|g\right\|_{L_x^{4/3}L_t^1} \tag{IV.18}
$$

siempre que $g\in L_x^{4/3}L_t^1$. Para esto, por el teorema de dualidad se tiene

$$
\left\|\int_{\mathbb{R}}D_x^{-1/4}U\left(t\right)g\left(\cdot,t\right)dt\right\|_{L_x^2}=\sup\left\{\left|\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}D_x^{-1/4}U\left(t\right)g\left(x,t\right)v\left(x\right)dtdx\right|:\left\|v\right\|_{L_x^2}=1\right\}
$$

y las desigualdades (IV.12) y (IV.17) se obtiene

$$\begin{aligned}\left\|\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4} U(t)\, g(\cdot,t)\, dt\right\|_{L_x^2} &\leq \sup\left\{\|g\|_{L_x^{4/3}L_t^1} \left\|D_x^{-1/4} U(t)\, v\right\|_{L_x^4 L_t^\infty}\right\} \\ &\leq C\, \|g\|_{L_x^{4/3}L_t^1} \|v\|_{L_x^2} \\ &\leq C\, \|g\|_{L_x^{4/3}L_t^1}\end{aligned}$$

Por otro lado, usando los mismos argumentos, se obtiene las desigualdades

$$\begin{aligned}\left\|D_x^{-1/4} U(t)\, v(x)\right\|_{L_x^4 L_x^\infty} &= \sup\left\{\left|\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4} U(t)\, g(\cdot,t)\, v(x)\, dxdt\right| : \|g\|_{L_x^{4/3}L_t^1} = 1\right\} \\ &\leq \sup\left|\int_{\mathbb{R}} v(x) \int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4} U(t)\, g(\cdot,t)\, dtdx\right| \\ &\leq \sup\left\{\|v\|_{L^2} \left\|\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4} U(t)\, g(\cdot,t)\, dt\right\|\right\} \\ &\leq C\, \|v\|_{L^2} \|g\|_{L_x^{4/3}L_t^1} \\ &\leq C\, \|v\|_{L^2}\,.\end{aligned}$$

Queda por mostrar la desigualdad (IV.18). En efecto,

$$\begin{aligned}\left\|\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4} U(t)\, g(\cdot,t)\, dt\right\|_{L_x^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}}\left|\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4} U(t)\, g(x,t)\, dt\right|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4} U(t)\, g(x,t)\, dt\right)\overline{\left(\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4} U(\tau)\, g(x,\tau)\, d\tau\right)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4} U(t)\, g(x,t)\, dt\right)\left(\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4} U(-\tau)\, \overline{g}(x,\tau)\, d\tau\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g(x,t)\left(\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/2} U(t-\tau)\, \overline{g}(x,\tau)\, d\tau\right) dtdx \\ &\leq \|g\|_{L_x^{4/3}} \left\|\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/2} U(t-\tau)\, \overline{g}(\cdot,\tau)\, d\tau\right\|_{L_x^4 L_t^\infty}\end{aligned}$$

donde se usó la desigualdad de Hölder en el último paso. Así, basta comprobar que

$$\left\|\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/2} U(t-\tau)\, \overline{g}(\cdot,\tau)\, d\tau\right\|_{L_x^4 L_t^\infty} \leq C\, \|g\|_{L_x^{4/3}L_t^1}\,.$$

Para ello, se observa que

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/2} U(t-\tau)\, g(\cdot,\tau)\, d\tau\right| \\
&\qquad = \left|\int_{\mathbb{R}} \left(|\xi|^{-1/2} e^{i(t-\tau)\xi^3} \hat{g}(\xi,\tau)\right)^{\vee} d\tau\right| \\
&\qquad = \left|\int_{\mathbb{R}} \left(|\xi|^{-1/2} e^{i(t-\tau)\xi^3}\right)^{\vee} * g(\cdot,\tau)\, d\tau\right| \\
&\qquad = \left|\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{i\left(x\xi-(t-\tau)\xi^3\right)} \frac{d\xi}{|\xi|^{1/2}}\right) * g(\cdot,\tau)\, d\tau\right| \\
&\qquad \leq \int_{\mathbb{R}} \left|\left(\int_{\mathbb{R}} e^{i\left(x\xi-(t-\tau)\xi^3\right)} \frac{d\xi}{|\xi|^{1/2}}\right) * g(\cdot,\tau)\right| d\tau \\
&\qquad \leq \int_{\mathbb{R}} \left|\int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\left(x\xi-(t-\tau)\xi^3\right)}\right) \frac{d\xi}{|\xi|^{1/2}}\right| * |g(\cdot,\tau)|\, d\tau
\end{aligned} \tag{IV.19}
$$

Pero

$$
\forall x \in \mathbb{R} : \left|\int_{\mathbb{R}} e^{i\left(x\xi-t\xi^3\right)} \frac{d\xi}{|\xi|^{1/2}}\right| \leq \frac{C}{|x|^{1/2}},
$$

y el operador $\frac{C}{|x|^{1/2}} * (\cdot) : L_x^{4/3} \to L_x^4$ y

$$
\left\|\frac{C}{|x|^{1/2}} * \int_{\mathbb{R}} |g(\cdot,\tau)|\, d\tau\right\|_{L_x^4} \leq C \left\|\int_{\mathbb{R}} |g(\cdot,\tau)|\, d\tau\right\|_{L_x^{4/3}}
$$

como se prueba en [38].

Entonces, de (IV.19) se tiene

$$
\begin{aligned}
\left\|\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/2} U(t-\tau)\, g(\cdot,\tau)\, d\tau\right\|_{L_x^4} &= \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/2} U(t-\tau)\, g(x,\tau)\, d\tau\right|^4 dx\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{C}{|x|^{1/2}} * \int_{\mathbb{R}} |g(x,\tau)|\, d\tau\right|^4 dx\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\leq \left\|\frac{C}{|x|^{1/2}} * \int_{\mathbb{R}} |g(\cdot,\tau)|\, d\tau\right\|_{L_x^4} \\
&\leq C \left\|\int_{\mathbb{R}} |g(\cdot,\tau)|\, d\tau\right\|_{L_x^{4/3}}
\end{aligned}
$$

lo que demuestra (IV.16). □

Proposición IV.5. Si $u \in L^2$

$$
\|U(t)\, u\|_{L_x^5 L_t^{10}} \leq C \|u\|_{L_x^2} \tag{IV.20}
$$

y

$$\|D_x U(t) u\|_{L_x^{20} L_t^{5/2}} \leq C \left\| D_x^{1/4} u \right\|_{L_x^2} \tag{IV.21}$$

Demostración. Las demostraciones de estas desigualdades se puede ver en [40, Corolario 3.8 y Proposición 3,17]. □

Estimado trilineal

Para $\vec{w} = (u, v) \in C([-T, T] : \mathbb{H}^s)$ definimos

$$|||\vec{w}|||_T = \sum_{j=1}^{5} \|\vec{w}\|_{(j)}^T \tag{IV.22}$$

donde

$$\|\vec{w}\|_{(1)}^T = \|u\|_{L_T^\infty L_x^2} + \|v\|_{L_T^\infty L_x^2} \tag{IV.23}$$

$$\|\vec{w}\|_{(2)}^T = \|D^s \partial_x u\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|D^s \partial_x v\|_{L_x^\infty L_T^2} \tag{IV.24}$$

$$\|\vec{w}\|_{(3)}^T = \left\|D^{s-1/4} \partial_x u\right\|_{L_x^{20} L_T^{5/2}} + \left\|D^{s-1/4} \partial_x v\right\|_{L_x^{20} L_T^{5/2}} \tag{IV.25}$$

$$\|\vec{w}\|_{(4)}^T = \|D_x^s u\|_{L_x^5 L_T^{10}} + \|D_x^s v\|_{L_x^5 L_T^{10}} \tag{IV.26}$$

$$\|\vec{w}\|_{(5)}^T = \|u\|_{L_x^4 L_T^\infty} + \|v\|_{L_x^4 L_T^\infty}\,. \tag{IV.27}$$

Probemos el siguiente estimado trilineal.

Teorema IV.6.

$$\left\|D_x^{1/4} \partial_x \left(f g^2\right)\right\|_{L_x^2 L_T^2} < C\, |||(f, g)|||_T^3 \tag{IV.28}$$

Demostración. Como $\partial_x \left(f g^2\right) = g^2 \partial_x f + 2 f g \partial_x g$, aplicando la desigualdad triangular obtenemos

$$\left\|D_x^{1/4} \partial_x \left(f g^2\right)\right\|_{L_x^2 L_T^2} \leq C \left\|D_x^{1/4} \left(g^2 \partial_x f\right)\right\|_{L_x^2 L_T^2} + C \left\|D_x^{1/4} \left(f g \partial_x g\right)\right\|_{L_x^2 L_T^2} \tag{IV.29}$$

Para acotar el primer sumando del segundo miembro de (IV.29), usamos la regla de Leibniz con las funciones f y g sustituidas por g^2 y $\partial_x f$, respectivamente, $\alpha = \alpha_1 = \frac{1}{4}$, $\alpha_2 = 0$, $p = q = 2$, $p_2 = 20$ y $q_2 = \frac{5}{2}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
&\left\|D_x^{1/4} \left(g^2 \partial_x f\right)\right\|_{L_x^2 L_T^2} \\
&\quad \leq \left\|D_x^{1/4} \left(g^2 \partial_x f\right) - g^2 D_x^{1/4} \partial_x f - \partial_x f D_x^{1/4} g^2\right\|_{L_x^2 L_T^2} + \left\|g^2 D_x^{1/4} \partial_x f + \partial_x f D_x^{1/4} g^2\right\|_{L_x^2 L_T^2} \\
&\quad \leq \left\|D_x^{1/4} g^2\right\|_{L_x^{20/9} L_T^{10}} \|\partial_x f\|_{L_x^{20} L_T^{5/2}} + \left\|g^2 D_x^{1/4} \partial_x f\right\|_{L_x^2 L_T^2} + \left\|\partial_x f D_x^{1/4} g^2\right\|_{L_x^2 L_T^2}
\end{aligned} \tag{IV.30}$$

Por (I.11) y (I.13)

$$\left\|g^2 D_x^{1/4}\partial_x f\right\|_{L_x^2 L_T^2} \leq \left\|g^2\right\|_{L_x^2 L_T^\infty} \left\|D_x^{1/4}\partial_x f\right\|_{L_x^\infty L_T^2} \leq \|g\|_{L_x^4 L_T^\infty}^2 \left\|D_x^{1/4}\partial_x f\right\|_{L_x^\infty L_T^2}$$

y por (I.12)

$$\left\|\partial_x f D_x^{1/4} g^2\right\|_{L_x^2 L_T^2} \leq \|\partial_x f\|_{L_x^{20} L_T^{5/2}} \left\|D_x^{1/4} g^2\right\|_{L_x^{20/9} L_T^{10}}.$$

Entonces, de (IV.30)

$$\left\|D_x^{1/4}\left(g^2\partial_x f\right)\right\|_{L_x^2 L_T^2} \leq C\left\|D_x^{1/4} g^2\right\|_{L_x^{20/9} L_T^{10}} \|\partial_x f\|_{L_x^{20} L_T^{5/2}} + C\|g\|_{L_x^4 L_T^\infty}^2 \left\|D_x^{1/4}\partial_x f\right\|_{L_x^\infty L_T^2} \tag{IV.31}$$

Para acotar a $\left\|D_x^{1/4} g^2\right\|_{L_x^{20/9} L_T^{10}}$ usamos la regla de Leibniz con $\alpha = \alpha_2 = \frac{1}{4}$, $\alpha_1 = 0$, $p = \frac{20}{9}$, $q = 10$, $p_2 = 5$ y $q_2 = 10$. Así obtenemos

$$\begin{aligned} \left\|D_x^{1/4} g^2\right\|_{L_x^{20/9} L_T^{10}} &\leq C\|g\|_{L_x^4 L_T^\infty} \left\|D_x^{1/4} g\right\|_{L_L^5 L_T^{10}} + C\left\|g D_x^{1/4} g\right\|_{L_x^{20/9} L_T^{10}} \\ &\leq C\|g\|_{L_x^4 L_T^\infty} \left\|D_x^{1/4} g\right\|_{L_x^5 L_T^{10}} \end{aligned} \tag{IV.32}$$

donde se usó (I.14) para controlar a $\left\|g D_x^{1/4} g\right\|_{L_x^{20/9} L_T^{10}}$. Finalmente reemplazando (IV.32) en (IV.31) obtenemos

$$\left\|D_x^{1/4}\left(g^2\partial_x f\right)\right\|_{L_x^2 L_T^2} \leq C\|g\|_{L_x^4 L_T^\infty} \left\|D_x^{1/4} g\right\|_{L_x^5 L_T^{10}} \|\partial_x f\|_{L_x^{20} L_T^{5/2}} + \|g\|_{L_x^4 L_T^\infty}^2 \left\|D_x^{1/4}\partial_x f\right\|_{L_x^\infty L_T^2}$$

y por (IV.22) concluimos que

$$\left\|D_x^{1/4}\left(g^2\partial_x f\right)\right\|_{L_x^2 L_T^2} \leq C\,|||(f,g)|||_T^3. \tag{IV.33}$$

Para acotar el segundo sumando del segundo miembro de (IV.29), usando la regla de Leibniz con las funciones f y g sustituidas por fg y $\partial_x g$ respectivamente, $\alpha = \alpha_1 = \frac{1}{4}$, $\alpha_2 = 0$, $p = q = 2$, $p_2 = 20$ y $q_2 = \frac{5}{2}$, se obtiene

$$\begin{aligned} &\left\|D_x^{1/4}(fg\partial_x g)\right\|_{L_x^2 L_T^2} \\ &\qquad \leq \left\|D_x^{1/4}(fg)\right\|_{L_x^{20/9} L_T^{10}} \|\partial_x g\|_{L_x^{20} L_T^{5/2}} + \left\|fg D_x^{1/4}\partial_x g\right\|_{L_x^2 L_T^2} + \left\|\partial_x g D_x^{1/4}(fg)\right\|_{L_x^2 L_T^2} \end{aligned}$$

Por (I.11) y (I.13)

$$\left\|fg D_x^{1/4}\partial_x g\right\|_{L_x^2 L_T^2} \leq \|fg\|_{L_x^2 L_T^\infty} \left\|D_x^{1/4}\partial_x g\right\|_{L_x^\infty L_T^2} \leq \|f\|_{L_x^4 L_T^\infty} \|g\|_{L_x^4 L_T^\infty} \left\|D_x^{1/4}\partial_x g\right\|_{L_x^\infty L_T^2}$$

y por (I.12)

$$\left\|\partial_x g D_x^{1/4}(fg)\right\|_{L_x^2 L_T^2} \leq \|\partial_x g\|_{L_x^{20} L_T^{5/2}} \left\|D_x^{1/4}(fg)\right\|_{L_x^{20/9} L_T^{10}}$$

entonces

$$\begin{aligned}
&\left\|D_x^{1/4}\left(fg\partial_x g\right)\right\|_{L^2_xL^2_T} \\
&\qquad \leq C\left\|D_x^{1/4}\left(fg\right)\right\|_{L^{20/9}_xL^{10}_T}\left\|\partial_x g\right\|_{L^{20}_xL^{5/2}_T}+\left\|f\right\|_{L^4_xL^\infty_T}\left\|g\right\|_{L^4_xL^\infty_T}\left\|D_x^{1/4}\partial_x g\right\|_{L^\infty_xL^2_T}
\end{aligned} \tag{IV.34}$$

Para acotar el término $\left\|D_x^{1/4}\left(fg\right)\right\|_{L^{20/9}_xL^{10}_T}$ usamos la regla de Leibniz con $\alpha=\alpha_2=\frac{1}{4}$, $\alpha_1=0$, $p=\frac{20}{9}$, $q=10$, $p_1=4$, $q_1=\infty$, entonces

$$\left\|D_x^{1/4}\left(fg\right)\right\|_{L^{20/9}_xL^{10}_T}\leq\left\|f\right\|_{L^4_xL^\infty_T}\left\|D_x^{1/4}g\right\|_{L^5_xL^{10}_T}+\left\|gD_x^{1/4}f\right\|_{L^{20/9}_xL^{10}_T}+\left\|fD_x^{1/4}g\right\|_{L^{20/9}_xL^{10}_T}$$

y por (I.14) tenemos

$$\begin{aligned}
&\left\|D_x^{1/4}\left(fg\right)\right\|_{L^{20/9}_xL^{10}_T} \\
&\qquad\leq\left\|f\right\|_{L^4_xL^\infty_T}\left\|D_x^{1/4}g\right\|_{L^5_xL^{10}_T}+\left\|g\right\|_{L^4_xL^\infty_T}\left\|D_x^{1/4}f\right\|_{L^5_xL^{10}_T}+\left\|f\right\|_{L^4_xL^\infty_T}\left\|D_x^{1/4}g\right\|_{L^5_xL^{10}_T} \\
&\qquad\leq C\left\|f\right\|_{L^4_xL^\infty_T}\left\|D_x^{1/4}g\right\|_{L^5_xL^{10}_T}+C\left\|g\right\|_{L^4_xL^\infty_T}\left\|D_x^{1/4}f\right\|_{L^5_xL^{10}_T}
\end{aligned} \tag{IV.35}$$

Así, al reemplazar (IV.35) en (IV.34) obtenemos

$$\begin{aligned}
&\left\|D_x^{1/4}\left(fg\partial_x g\right)\right\|_{L^2_xL^2_T} \\
&\qquad\leq C\left\|f\right\|_{L^4_xL^\infty_T}\left\|D_x^{1/4}g\right\|_{L^5_2L^0_T}\left\|\partial_x g\right\|_{L^{20}_xL^{5/2}_T}+C\left\|g\right\|_{L^4_xL^\infty_T}\left\|D_x^{1/4}f\right\|_{L^5_xL^{10}_T}\left\|\partial_x g\right\|_{L^{20}_xL^{5/2}_T} \\
&\qquad\quad+\left\|f\right\|_{L^4_LL^\infty_T}\left\|g\right\|_{L^4_xL^\infty_T}\left\|D_x^{1/4}\partial_x g\right\|_{L^\infty_xL^2_T}
\end{aligned}$$

y de acuerdo con (IV.22) concluimos que

$$\left\|D_x^{1/4}\left(fg\partial_x g\right)\right\|_{L^2_xL^2_T}\leq C\left|\left|\left|(f,g)\right|\right|\right|^3_T. \tag{IV.36}$$

Por lo tanto, (IV.33) y (IV.36) en (IV.29) demuestra (IV.28). □

IV.3. Demostración del teorema IV.1

Definamos

$$Y_T=\left\{\vec{w}\in C\left([-T,T]:\mathbb{H}^s\right):\left|\left|\left|\vec{w}\right|\right|\right|_T<\infty\right\}$$

y

$$Y_T^a=\left\{\vec{w}\in Y_T:\left|\left|\left|\vec{w}\right|\right|\right|_T\leqslant a\right\}.$$

Probaremos que para valores apropiados de a y de T el operador

$$\Psi_{\vec{\phi}}(f,g)(t) = \vec{U}(t)\,\vec{\phi} - \int_0^t \vec{U}(t-\tau)\,\partial_x\left(fg^2, f^2g\right)d\tau \tag{IV.37}$$

define una contracción sobre Y_T^a. Haremos la demostración solamente para $s = 1/4$, porque las derivadas de orden superior aparecen linealmente en las normas (IV.23) al (IV.27).

Notemos que

$$\Psi_{\vec{\phi}}(f,g)(t) = \left(\Psi_1(f,g)(t), \Psi_2(f,g)(t)\right) \tag{IV.38}$$

donde

$$\Psi_1(f,g)(t) = U(t)\,\varphi - \int_0^t U(t-\tau)\,\partial_x\left(fg^2\right)d\tau \tag{IV.39}$$

y

$$\Psi_2(f,g)(t) = U(t)\,\psi - \int_0^t U(t-\tau)\,\partial_x\left(f^2g\right)d\tau. \tag{IV.40}$$

Por (IV.22) se tiene

$$\left|\left|\left|\Psi_{\vec{\phi}}(f,g)(t)\right|\right|\right|_T = |||\left(\Psi_1(f,g)(t), \Psi_2(f,g)(t)\right)|||_T = \sum_{j=1}^{5} \left\|\left(\Psi_1(f,g)(t), \Psi_2(f,g)(t)\right)\right\|_{(j)}^T \tag{IV.41}$$

Usando (IV.39) y las propiedades (IV.9) y (IV.7) del grupo $U(t)$, sigue que

$$\begin{aligned}
\left\|D_x^{1/4}\Psi_1(f,g)(t)\right\|_{L_x^2} &\leq \left\|D_x^{1/4}U(t)\,\varphi\right\|_{L_x^2} + \int_0^t \left\|D_x^{1/4}U(t-\tau)\partial_x\left(fg^2\right)\right\|_{L_x^2} d\tau \\
&\leq \left\|U(t)\,D_x^{1/4}\varphi\right\|_{L_x^2} + \int_0^t \left\|U(t-\tau)D_x^{1/4}\partial_x\left(fg^2\right)\right\|_{L_x^2} d\tau \\
&= \left\|D_x^{1/4}\varphi\right\|_{L_x^2} + \int_0^t \left\|D_x^{1/4}\partial_x\left(fg^2\right)\right\|_{L_x^2} d\tau \\
&\leq \|\varphi\|_{\dot{H}^{1/4}} + \left(\int_0^T dt\right)^{1/2} \left(\int_0^T \left\|D_x^{1/4}\partial_x\left(fg^2\right)\right\|_{L_x^2} d\tau\right)^{1/2} \\
&\leq C\,\|\varphi\|_{H^{1/4}} + CT^{1/2}\left\|D_x^{1/4}\partial_x\left(fg^2\right)\right\|_{L_x^2L_T^2}
\end{aligned}$$

pues

$$\left\|D_x^{1/4}\varphi\right\|_{L_x^2} = \|\varphi\|_{\dot{H}^{1/4}} \leq \|\varphi\|_{H^{1/4}}$$

Por (IV.28) en la proposición IV.6, resulta que

$$\left\|D_x^{1/4}\Psi_1(f,g)(t)\right\|_{L_x^2} \leq C\,\|\varphi\|_{H^{1/4}} + CT^{1/2}\,|||(f,g)|||_T^3$$

entonces, tomando el supremo en $[-T,T]$ resulta

$$\left\|D_x^{1/4}\Psi_1(f,g)(t)\right\|_{L_T^\infty L_x^2} = \sup_{t\in[-T,T]} \left\|D_x^{1/4}\Psi_1(f,g)(t)\right\|_{L_x^2} \leq C\,\|\varphi\|_{H^{1/4}} + CT^{1/2}\,|||(f,g)|||_T^3.$$

El mismo procedimiento, considerando (IV.40) implica que

$$\left\| D_x^{1/4} \Psi_2 (f,g)(t) \right\|_{L_T^\infty L_x^2} \leq C \|\psi\|_{H^{1/4}} + CT^{1/2} \||(f,g)\||_T^3 .$$

Por lo tanto, por (IV.23) se obtiene

$$\begin{aligned} \|(\Psi_1 (f,g)(t), \Psi_2 (f,g)(t))\|_{(1)}^T &= \left\| D_x^{1/4} \Psi_1 (f,g)(t) \right\|_{L_T^\infty L_x^2} + \left\| D_x^{1/4} \Psi_2 (f,g)(t) \right\|_{L_T^\infty L_x^2} \\ &\leq C \|\varphi\|_{H^{1/4}} + C \|\psi\|_{H^{1/4}} + CT^{1/2} \||(f,g)\||_T^3 \\ &\leq C \left\| \vec{\phi} \right\|_{\mathbb{H}^{1/4}} + CT^{1/2} \||(f,g)\||_T^3 . \qquad \text{(IV.42)} \end{aligned}$$

Asimismo, usando las propiedades del grupo y las desigualdades (IV.12)-(IV.14), (IV.16), (IV.20), (IV.21) y (IV.28) obtenemos

$$\begin{aligned} \left\| D_x^{1/4} \partial_x \Psi_1 (f,g)(t) \right\|_{L_x^\infty L_T^2} &= \left\| D_x^{1/4} \partial_x \left[U(t)\varphi - \int_0^t U(t-\tau) \partial_x \left(f g^2 \right) d\tau \right] \right\|_{\|_{L_{\frac{\infty}{2}} L_T^2}} \\ &= \left\| D_x^{1/4} \partial_x U(t) \left(\varphi - \int_0^t U(-\tau) \partial_x \left(f g^2 \right) d\tau \right) \right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\ &= \left\| \partial_x U(t) D_x^{1/4} \left(\varphi - \int_0^t U(-\tau) \partial_x \left(f g^2 \right) d\tau \right) \right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\ &\leq C \left\| D_x^{1/4} \left(\varphi - \int_0^t U(-\tau) \partial_x \left(f g^2 \right) d\tau \right) \right\|_{L_x^2} \\ &\leq C \|\varphi\|_{H^{1/4}} + CT^{1/2} \||(f,g)\||_T^3 \end{aligned}$$

y

$$\left\| D_x^{1/4} \partial_x \Psi_2 (f,g)(t) \right\|_{L_x^\infty L_T^2} \leq C \|\psi\|_{H^{1/4}} + CT^{1/2} \||(f,g)\||_T^3$$

Por lo tanto, por (IV.24) se obtiene

$$\begin{aligned} \|(\Psi_1 (f,g)(t), \Psi_2 (f,g)(t))\|_{(2)}^T &= \left\| D_x^{1/4} \partial_x \Psi_1 (f,g)(t) \right\|_{L_x^\infty L_T^2} + \left\| D_x^{1/4} \partial_x \Psi_2 (f,g)(t) \right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\ &\leq C \left\| \vec{\phi} \right\|_{\mathbb{H}^{1/4}} + CT^{1/2} \||(f,g)\||_T^3 . \qquad \text{(IV.43)} \end{aligned}$$

De igual manera

$$
\begin{aligned}
\left\|\partial_x \Psi_1 (f,g)(t)\right\|_{L^{20}_x L^{5/2}_T} &= \left\|\partial_x \left[U(t)\varphi - \int_0^t U(t-\tau)\,\partial_x\left(fg^2\right)d\tau\right]\right\|_{L^{20}_x L^{5/2}_T} \\
&= \left\|\partial_x \left[U(t)\left(\varphi - \int_0^t U(-\tau)\,\partial_x\left(fg^2\right)d\tau\right)\right]\right\|_{L^{20}_x L^{5/2}_T} \\
&= \left\|U(t)\left[\partial_x\left(\varphi - \int_0^t U(-\tau)\,\partial_x\left(fg^2\right)d\tau\right)\right]\right\|_{L^{20}_x L^{5/2}_T} \\
&= \left\|\partial_x\left(\varphi - \int_0^t U(-\tau)\,\partial_x\left(fg^2\right)d\tau\right)\right\|_{L^{20}_x L^{5/2}_T} \\
&\leq \left\|D_x^{1/4}\left(\varphi - \int_0^t U(-\tau)\partial_x f_1\left(\vec{u}_1(\tau)\right)d\tau\right)\right\|_{L^2_x} \\
&\leq C\left\|\varphi\right\|_{H^{1/4}} + CT^{1/2}\left|\left|\left|(f,g)\right|\right|\right|_T^3
\end{aligned}
$$

y

$$
\left\|\partial_x \Psi_2 (f,g)(t)\right\|_{L^{20}_x L^{5/2}_T} \leq C\left\|\varphi\right\|_{H^{1/4}} + CT^{1/2}\left|\left|\left|(f,g)\right|\right|\right|_T^3
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\left\|\left(\Psi_1(f,g)(t), \Psi_2(f,g)(t)\right)\right\|_{(3)}^T &= \left\|D_x^{1/4}\partial_x\Psi_1(f,g)(t)\right\|_{L^{20}_x L^{5/2}_T} + \left\|D_x^{1/4}\partial_x\Psi_2(f,g)(t)\right\|_{L^{20}_x L^{5/2}_T} \\
&\leq C\left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^{1/4}} + CT^{1/2}\left|\left|\left|(f,g)\right|\right|\right|_T^3 . \qquad \text{(IV.44)}
\end{aligned}
$$

De igual forma

$$
\begin{aligned}
\left\|\Psi_1(f,g)(t))\right\|_{L^4_x L^\infty_T} &= \left\|U(t)\varphi - \int_0^t U(t-\tau)\,\partial_x\left(fg^2\right)d\tau\right\|_{L^4_x L^\infty_T} \\
&= \left\|U(t)\left(\varphi - \int_0^t U(-\tau)\,\partial_x\left(fg^2\right)d\tau\right)\right\|_{L^4_x L^\infty_T} \\
&\leq C\left\|D_x^{1/4}\left(\varphi - \int_0^t U(-\tau)\,\partial_x\left(fg^2\right)d\tau\right)\right\|_{L^2_x} \\
&\leq C\left\|\varphi\right\|_{H^{1/4}} + CT^{1/2}\left|\left|\left|(f,g)\right|\right|\right|_T^3
\end{aligned}
$$

y

$$
\left\|\partial_x \Psi_2 (f,g)(t)\right\|_{L^4_x L^\infty_T} \leq C\left\|\varphi\right\|_{H^{1/4}} + CT^{1/2}\left|\left|\left|(f,g)\right|\right|\right|_T^3
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\left\|\left(\Psi_1(f,g)(t), \Psi_2(f,g)(t)\right)\right\|_{(4)}^T &= \left\|\Psi_1(f,g)(t))\right\|_{L^4_x L^\infty_T} + \left\|\partial_x\Psi_2(f,g)(t)\right\|_{L^4_x L^\infty_T} \\
&\leq C\left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^{1/4}} + CT^{1/2}\left|\left|\left|(f,g)\right|\right|\right|_T^3 . \qquad \text{(IV.45)}
\end{aligned}
$$

De igual modo

$$\begin{aligned}
\left\|D_x^{1/4}\Psi_1(f,g)(t)\right\|_{L_x^5L_T^{10}} &= \left\|D_x^{1/4}\left[U(t)\varphi-\int_0^t U(t-\tau)\partial_x\left(fg^2\right)d\tau\right]\right\|_{L_x^5L_T^{10}}\\
&= \left\|D_x^{1/4}\left[U(t)\left(\varphi-\int_0^t U(-\tau)\partial_x\left(fg^2\right)d\tau\right)\right]\right\|_{L_x^5L_T^{10}}\\
&= \left\|U(t)\left[D_x^{1/4}\left(\varphi-\int_0^t U(-\tau)\partial_x\left(fg^2\right)d\tau\right)\right]\right\|_{L_x^5L_T^{10}}\\
&\leq C\left\|D_x^{1/4}\left(\varphi-\int_0^t U(-\tau)\partial_x\left(fg^2\right)d\tau\right)\right\|_{L_x^2}\\
&\leq C\left\|\varphi\right\|_{H^{1/4}}+CT^{1/2}\left|\left|\left|(f,g)\right|\right|\right|_T^3
\end{aligned}$$

y

$$\left\|D_x^{1/4}\Psi_2(f,g)(t)\right\|_{L_x^5L_T^{10}}\leq C\left\|\varphi\right\|_{H^{1/4}}+CT^{1/2}\left|\left|\left|(f,g)\right|\right|\right|_T^3$$

entonces

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\Psi_1(f,g)(t),\Psi_2(f,g)(t)\right)\right\|_{(5)}^T &= \left\|\Psi_1(f,g)(t)\right)\|_{L_x^5L_T^{10}}+\left\|\partial_x\Psi_2(f,g)(t)\right\|_{L_x^5L_T^{10}}\\
&\leq C\left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^{1/4}}+CT^{1/2}\left|\left|\left|(f,g)\right|\right|\right|_T^3. \qquad \text{(IV.46)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, usando las desigualdades (IV.42), (IV.43), (IV.44), (IV.45) y (IV.46) en (IV.41) tenemos

$$\left|\left|\left|\Psi_{\vec{\phi}}(f,g)(t)\right|\right|\right|_T=\sum_{j=1}^{5}\left\|\left(\Psi_1(f,g)(t),\Psi_2(f,g)(t)\right)\right\|_{(j)}^T\leq C\left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^{1/4}}+CT^{1/2}\left|\left|\left|(f,g)\right|\right|\right|_T^3$$

Eligiendo $a=2C\left\|\vec{\phi}\right\|_{\mathbb{H}^{1/4}}$ y $T>0$ tal que

$$Ca^2T^{1/2}<\frac{1}{2}. \qquad \text{(IV.47)}$$

obtenemos que $\Psi:Y_T^a\to Y_T^a$.

Argumentos similares muestran que $\Psi:Y_T^a\to Y_T^a$ es una contracción. En efecto, si $\vec{u}=(f_1,g_1),\vec{v}=(f_2,g_2)\in Y_T^a$ entonces

$$\left|\left|\left|\Psi_{\vec{\phi}}(\vec{u})(t)-\Psi_{\vec{\phi}}(\vec{v})(t)\right|\right|\right|_T=\sum_{j=1}^{5}\left\|\left(\Psi_1(\vec{u}(t))-\Psi_1(\vec{v}(t)),\Psi_2(\vec{u}(t))-\Psi_2(\vec{v}(t))\right)\right\|_{(j)}^T \qquad \text{(IV.48)}$$

Del primer sumando se observa que

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(\Psi_1\left(\vec{u}\left(t\right)\right)-\Psi_1\left(\vec{v}\left(t\right)\right),\Psi_2\left(\vec{u}\left(t\right)\right)-\Psi_2\left(\vec{v}\left(t\right)\right)\right)\right\|_{(1)}^{T}\\
&\qquad\qquad=\left\|\Psi_1\left(\vec{u}\left(t\right)\right)-\Psi_1\left(\vec{v}\left(t\right)\right)\right\|_{L_T^\infty L_x^2}+\left\|\Psi_2\left(\vec{u}\left(t\right)\right)-\Psi_2\left(\vec{v}\left(t\right)\right)\right\|_{L_T^\infty L_x^2}
\end{aligned} \tag{IV.49}$$

Para el primer sumando de (IV.49) se tiene

$$\begin{aligned}
D_x^{1/4}\left(\Psi_1\left(\vec{u}\left(t\right)\right)-\Psi_1\left(\vec{v}\left(t\right)\right)\right) &= D_x^{1/4}\int_0^t U\left(t-\tau\right)\left[\partial_x\left(f_2g_2^2\right)-\partial_x\left(f_1g_1^2\right)\right]d\tau\\
&= U\left(t\right)D_x^{1/4}\int_0^t U\left(-\tau\right)\partial\left[\partial_x\left(f_2g_2^2\right)-\partial_x\left(f_1g_1^2\right)\right]d\tau\\
&\leq U\left(t\right)\int_0^t D_x^{1/4}U\left(-\tau\right)\left[\partial_x\left(f_2g_2^2\right)-\partial_x\left(f_1g_1^2\right)\right]d\tau.
\end{aligned}$$

Tomando la norma L^2 en x se obtiene

$$\begin{aligned}
\left\|D_x^{1/4}\left(\Psi_1\left(\vec{u}\left(t\right)\right)-\Psi_1\left(\vec{v}\left(t\right)\right)\right)\right\|_{L_x^2} &= \left\|U\left(t\right)\int_{-T}^{T} D_x^{1/4}U\left(-\tau\right)\left[\partial_x\left(f_2g_2^2\right)-\partial_x\left(f_1g_1^2\right)\right]d\tau\right\|_{L_x^2}\\
&\leq \int_{-T}^{T}\left\|D_x^{1/4}\left[\partial_x\left(f_2g_2^2\right)-\partial_x\left(f_1g_1^2\right)\right]\right\|_{L_x^2}d\tau
\end{aligned}$$

entonces, tomando el supremo sobre $t\in[-T,T]$,

$$\sup_{t\in[-T,T]}\left\|D_x^{1/4}\left(\Psi_1\left(\vec{u}\left(t\right)\right)-\Psi_1\left(\vec{v}\left(t\right)\right)\right)\right\|_{L_x^2}\leq\int_{-T}^{T}\left\|D_x^{1/4}\left[\partial_x\left(f_2g_2^2\right)-\partial_x\left(f_1g_1^2\right)\right]\right\|_{L_x^2}d\tau$$

Luego,

$$\left\|\Psi_1\left(\vec{u}\left(t\right)\right)-\Psi_1\left(\vec{v}\left(t\right)\right)\right\|_{L_T^\infty L_x^2}\leq\int_{-T}^{T}\left\|D_x^{1/4}\left[\partial_x\left(f_2g_2^2\right)-\partial_x\left(f_1g_1^2\right)\right]\right\|_{L_x^2}d\tau$$

Análogamente,

$$\left\|\Psi_2\left(\vec{u}\left(t\right)\right)-\Psi_2\left(\vec{v}\left(t\right)\right)\right\|_{L_T^\infty L_x^2}\leq\int_{-T}^{T}\left\|D_x^{1/4}\left[\partial_x\left(f_2g_2^2\right)-\partial_x\left(f_1g_1^2\right)\right]\right\|_{L_x^2}d\tau$$

Por lo tanto,

$$\left\|\left(\Psi_1\left(\vec{u}\left(t\right)\right)-\Psi_1\left(\vec{v}\left(t\right)\right),\Psi_2\left(\vec{u}\left(t\right)\right)-\Psi_2\left(\vec{v}\left(t\right)\right)\right)\right\|_{(1)}^{T}\leq C\int_{-T}^{T}\left\|D_x^{1/4}\left[\partial_x\left(f_2g_2^2\right)-\partial_x\left(f_1g_1^2\right)\right]\right\|_{L_x^2}d\tau$$

De la misma forma, para $j=2,...,5$

$$\left\|\left(\Psi_1\left(\vec{u}\left(t\right)\right)-\Psi_1\left(\vec{v}\left(t\right)\right),\Psi_2\left(\vec{u}\left(t\right)\right)-\Psi_2\left(\vec{v}\left(t\right)\right)\right)\right\|_{(j)}^{T}\leq C\int_{-T}^{T}\left\|D_x^{1/4}\left[\partial_x\left(f_2g_2^2\right)-\partial_x\left(f_1g_1^2\right)\right]\right\|_{L_x^2}d\tau$$

Entones, en (IV.48) resulta que

$$\begin{aligned}
\left|\left|\left|\Psi_{\vec{\phi}}(\vec{u})(t)-\Psi_{\vec{\phi}}(\vec{v})(t)\right|\right|\right|_T &\leq C\int_{-T}^{T}\left\|D_x^{1/4}\left[\partial_x\left(f_2g_2^2\right)-\partial_x\left(f_1g_1^2\right)\right]\right\|_{L_x^2}d\tau \\
&\leq C\left(\int_{-T}^{T}d\tau\right)^{1/2}\left(\int_{-T}^{T}\left\|D_x^{1/4}\left[\partial_x\left(f_2g_2^2\right)-\partial_x\left(f_1g_1^2\right)\right]\right\|_{L_x^2}d\tau\right)^{1/2} \\
&\leq CT^{1/2}\left\|D_x^{1/4}\left[\partial_x\left(f_2g_2^2\right)-\partial_x\left(f_1g_1^2\right)\right]\right\|_{L_x^2L_T^2} \\
&\leq CT^{1/2}\left(\left\|D_x^{1/4}\partial_x\left(f_2g_2^2\right)\right\|_{L_x^2L_T^2}+\left\|D_x^{1/4}\partial_x\left(f_1g_1^2\right)\right\|_{L_x^2L_T^2}\right) \\
&\leq CT^{1/2}\left(|||\vec{v}|||_T^3+|||\vec{u}|||_T^3\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left|\left|\left|\Psi_{\vec{\phi}}(\vec{u})(t)-\Psi_{\vec{\phi}}(\vec{v})(t)\right|\right|\right|_T \leq CT^{1/2}\left(|||\vec{u}|||_T^2+|||\vec{v}|||_T^2\right)|||\vec{u}-\vec{v}|||_T \leq 2CT^{1/2}a^2\,|||\vec{u}-\vec{v}|||_T$$

entonces la elección de a y T de (IV.47) implica que $\Psi_{\vec{\phi}}$ es una contracción. En consecuencia, tenemos que existe una única $\vec{u}\in Y_T^a$ con $\Psi_{\vec{\phi}}(\vec{u})=\vec{u}$, es decir,

$$\vec{u}(t)=\vec{U}(t)\,\vec{\phi}-\int_0^t\vec{U}(t-\tau)\,\partial_x\vec{u}(t)\,d\tau \tag{IV.50}$$

Utilizando argumentos similares a los anteriores también deducimos que para $T_1\in\,]0,T[$

$$\begin{aligned}
\left|\left|\left|\Psi_{\vec{\phi}}(\vec{u})(t)-\Psi_{\vec{\psi}}(\vec{v})(t)\right|\right|\right|_{T_1} &\leq C\left\|\vec{\phi}-\vec{\psi}\right\|_{\mathbb{H}^s}+CT^{1/2}\left(|||\vec{u}|||_{T_1}^2+|||\vec{v}|||_{T_1}^2\right)|||\vec{u}-\vec{v}|||_{T_1} \\
&\leq 2CT^{1/2}a^2\,|||\vec{u}-\vec{v}|||_T
\end{aligned}$$

Esto muestra que para $T_1\in\,]0,T[$ la aplicación $\vec{\psi}\mapsto\vec{\phi}$ sobre una vecindad $\mathcal{V}$ de $\vec{\psi}$ que depende de T_1 a $Y_{T_1}^a$ es Lipschitz.

A continuación extenderemos el resultado de unicidad en Y_T^a a la clase Y_T. Supongamos que $\vec{u}_1\in Y_{T_1}$ con $T_1\in\,]0,T]$ es otra solución del problema (4.1) con el mismo dato inicial. El argumento usado anteriormente muestra que para algún $T_{(1)}\in\,]0,T_1[$, $\Psi_{\vec{\phi}}$ es una contracción sobre $Y_{T_{(1)}}^a$. Ahora supongamos que $\vec{u}_2\in Y_{T_2}$ con $T_2\in\,]0,T]$ y $T_{(1)}<T_2$ es solución del problema (4.1) con el mismo dato inicial. De forma similar tenemos la unicidad en el espacio $Y_{T_{(2)}}^a$. Volviendo a aplicar este argumento un numero finito de veces, debido a la compacidad del intervalo $[0,T]$, el resultado se puede extender a todo el intervalo $[0,T]$. Por consiguiente tenemos la unicidad en Y_T.

Comentarios

1. La teoría local presentada en el teorema II.1 también se puede obtener mediante la técnica de regularización parabólica desarrollada por Iorio [25] para probar la existencia y la unicidad local, y la técnica desarrollada por Bona y Smith [8] para demostrar la dependencia continua de la solución respecto del dato inicial.

   El método de regularización parabólica consiste en considerar el problema de valor inicial regularizado

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x \left(uv^2\right) - \mu \partial_x^2 u = 0, \\ \partial_t v + \partial_x^3 v + \partial_x \left(u^2 v\right) - \mu \partial_x^2 v = 0 \\ u\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right), \\ v\left(x,0\right) = \psi\left(x\right). \end{cases} \tag{Co. 1}$$

   el cual se puede escribir

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u}\left(t\right) + A_\mu \vec{u}\left(t\right) + F\left(\vec{u}\left(t\right)\right) \partial_x \vec{u}\left(t\right) = \vec{0} \\ \vec{u}\left(0\right) = \vec{\phi}_0 \end{cases} \tag{Co. 2}$$

   donde $A_\mu \vec{u}\left(t\right) = A_0 \vec{u}\left(t\right) - \mu \partial_x^2 \vec{u}\left(t\right)$, $\mu \geq 0$, $\lim\limits_{\mu \to 0^+} A_\mu = A_0$, $F\left(\vec{u}\right) = \begin{pmatrix} v^2 & 2uv \\ 2uv & u^2 \end{pmatrix}$ y $\vec{\phi}_0 = \left(\varphi, \psi\right)$. Para el problema (Co. 1) con $\mu > 0$ se tiene los siguientes resultados, tomados de [45].

   Teorema. *Si* $\mu > 0$ *y* $\vec{\phi} \in H^s \times H^s$ *con* $s > \frac{3}{2}$, *entonces existen* $T = T(\|\vec{\phi}\|_{H^s \times H^s}, s) > 0$ *y una función*

$$\vec{u}_\mu \in C\left(\left[0,T\right] : H^s \times H^s\right) \cap C^1\left(\left[0,T\right] : H^{s-3} \times H^{s-3}\right)$$

única solución de la ecuación integral

$$\vec{u}_\mu(t) = \vec{W}_\mu(t)\,\vec{\phi} + \int_0^t \vec{W}_\mu(t-\tau)\,\partial_x F(\vec{u}_\mu(\tau))\,d\tau$$

donde $\left\{\vec{W}_\mu(t)\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ *es el grupo generado por el operador* $-A_\mu$*. Además,* $\vec{u}_\mu$ *es la única solución del problema regularizado* (*Co. 1*).

Observamos que el intervalo $[0,T]$ sobre el cual se definen todas las soluciones $\vec{u}_\mu$ es independiente de μ. Esto es esencial para la demostración del siguiente teorema.

Teorema. *Si* $\vec{\phi} \in H^s \times H^s$ *con* $s > \frac{3}{2}$*, entonces existen* $T = T(\|\vec{\phi}\|_{H^s\times H^s}, s) > 0$ *y una función*

$$\vec{u} \in C([0,T] : H^s \times H^s) \cap C^1\left([0,T] : H^{s-3} \times H^{s-3}\right)$$

tal que

$$\vec{u}(t) = \lim_{\mu\to 0^+} \vec{u}_\mu(t) \quad \text{en } H^s$$

es la única solución del problema de valor inicial (*Co. 2*).

2. El problema de valor inicial asociado con el sistema

$$\begin{cases} \partial_t u - iP_1(D)\,u - iP_2(D)\,v + f_1(u,v)\,\partial_x u + f_2(u,v)\,\partial_x v = 0 \\ \partial_t v - iP_3(D)\,u - iP_4(D)\,v + f_3(u,v)\,\partial_x u + f_4(u,v)\,\partial_x v = 0, \end{cases} \tag{Co. 3}$$

en donde u y v son funciones con valores reales en las variables $x \in \mathbb{R}$ y $t \geq 0$, $P_j(D)$ con $j = 1,2,3,4$ son operadores pseudo-diferenciales y para $k = 1,2,3,4$ las funciones reales f_k definidas sobre $\mathbb{R}^2$ son de clase C^∞, fue estudiado por Montenegro [44], usando la teoría cuasi-lineal de Kato demostró la buena formulación local de (Co. 3) cuando los datos iniciales pertenecen a $H^s(\mathbb{R})$ con $s > 3/2$. Después mostró que el sistema en (1) es un caso particular de (Co. 3) con una elección apropiada de los operadores P_j y las funciones f_k. Entonces, con los estimados lineales de Kenig, Ponce y Vega [37, 38, 39, 40] demostró que el problema de valor inicial asociado con (1) está bien formulado localmente en $H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ para todo $s \geq 1/4$. Además, observando que si el par (u,v) es solución del sistema (1), los funcionales

$$I_1(u,v) = \int_{\mathbb{R}} \left(u^2 + v^2\right) dx \qquad I_2(u,v) = \int_{\mathbb{R}} \left(u^2 + v^2 - u^2v^2\right) dx$$

son conservados en el tiempo y tomando como base a [7], obtuvo un estimado *a priori* para la norma en $H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ de la solución (u, v), con lo que podría demostrar que el problema (1) está bien formulado globalmente en $H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ para cualquier $s \geq 1$. Por lo tanto, existía una brecha en los índices de Sobolev entre los resultados de buena formulación local y global. En su tesis doctoral, Panthee [46] subsanó en cierta medida esta brecha al demostrar que (1) está bien formulado globalmente en $H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ para cualquier $s > 4/9$, para ello usó el método de alta-baja frecuencia, introducido por Bourgain [13] y modificado por Fonseca, Linares y Ponce [21, 22].

En este punto, es oportuno mencionar que Corcho y Panthee [19] han probado que para datos iniciales $(\phi, \psi) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ con $s > 1/4$, la única solución local del problema de (1) dada por el teorema IV.1 se extiende a cualquier intervalo de tiempo $[0, T]$. Este resultado mejora el de Panthee [46].

3. El problema de valor inicial (1) también se ha estudiado desde el punto de vista de la teoría abstracta de estabilidad de Grillakis, Shatah y Strauss desarrollada en [24]. Utilizando esta teoría, Montenegro [44] proporcionó la estabilidad orbital de las soluciones de onda solitaria para el problema (1). Posteriormente, Alarcon, Angulo y Montenegro [3] consideraron una clase general de sistemas dispersivos no lineales que contienen el problema (1) y demostraron la existencia, estabilidad orbital e inestabilidad no lineal de las soluciones de onda solitaria. Para obtener los resultados siguieron un método establecido por Bona, Souganidis y Strauss en [9] para analizar la inestabilidad de onda solitaria de las ecuaciones de tipo KdV.

4. Panthee [46] estudió el problema (2) en los espacios Bourgain $X_{s,b}$ introducidos en [11] y utilizando el estimado bilineal establecido por Kenig, Ponce y Vega [41], demostró la buena formulación local para datos iniciales cualesquiera en $H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ con $s > -3/4$. Dado que en los espacios de Sobolev de índice negativo, no existen leyes de conservación que permitan extender la solución local a una global, Panthee uso el denominado *método I* [13, 16] demostró que el problema (2) está globalmente bien formulado en $H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ para $s > -3/10$.

Apéndice A

Teorías de Kato para ecuaciones de evolución abstractas

Dado que usaremos las teorías de Kato para demostrar los teoremas II.1 y II.2, en esta sección presentamos un breve resumen de estas teorías en una forma apropiada para nuestros propósitos.

1. Teoría Lineal

La teoría lineal que a continuación presentamos es la establecida en [34] como una generalización de los teoremas de [32] y [33].

Sean X y Y espacios de Banach reflexivos con $Y \subseteq X$ de forma densa y continua, y sea $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ una familia de operadores tales que:

(H.1) El operador $-A(t)$ genera un semigrupo de tipo C_0 tal que

$$\left\| e^{-sA(t)} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\beta s}$$

para todo $s \in [0, +\infty[$.

(H.2) Existe un isomorfismo $S : Y \to X$ tal que

$$SA(t)\, S^{-1} = A(t) + B(t)\,,$$

donde $B(\cdot)$ es fuertemente continua de $[0,T]$ a $\mathcal{L}(X)$.

(H.3) $Y \subseteq \mathrm{Dom}\,(A(t))$ para $0 \leq t \leq T$ y $t \mapsto A(t)$ es fuertemente continua de $[0, T]$ a $\mathcal{L}(Y, X)$.

Teorema A.1. *Si las hipótesis* (H.1), (H.2) *y* (H.3) *se cumplen, existe una familia de operadores lineales* $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ *donde* $\Delta = \{(t,s) : 0 \leq s \leq t \leq T\}$ *tal que:*

(1) U *es fuertemente continuo de* $\Delta \to \mathcal{L}(X)$ *y* $\|U(t,s)\|_X \leq Me^{\beta(t-s)}$,

(2) $U(t,s)\,U(s,r) = U(t,r)$ *para* $(t,s), (s,r) \in \Delta$ *y* $U(s,s) = 1$,

(3) $U(t,s)\,Y \subset Y$ *y* U *es fuertemente continuo de* $\Delta \to \mathcal{L}(Y)$,

(4) $\dfrac{dU(t,s)\,y}{dt} = -A(t)\,U(t,s)\,y$, $y \in Y$, $(t,s) \in \Delta$, *y*

(5) $\dfrac{dU(t,s)\,y}{ds} = U(t,s)\,A(s)\,y$, $y \in Y$, $(t,s) \in \Delta$.

Demostración. [32, 33, 34, 47]. □

La familia de operadores $\{U(t,s)\}_{0\leq s\leq t\leq T}$ en el teorema anterior se denomina *familia de operadores de evolución* asociada a $A(t)$. Una consecuencia inmediata del teorema A.1 es que para $\phi \in Y$, $v(t) = U(t,s)\,\phi$ es solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt}(t) + A(t)\,v(t) = 0 \\ v(s) = \phi, \end{cases}$$

para $s \leq t \leq T$.

Además, si $f \in C([0,T] : X) \cap C^1([0,T] : Y)$, entonces

$$v(t) = U(t,0)\,\phi + \int_0^t U(t,s)\,f(s)\;ds,$$

si y sólo si $v \in C([0,T] : Y) \cap C^1(]0,T[: X)$ y

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt}(t) + A(t)\,v(t) = f(t, v(t)) \\ v(0) = \phi, \end{cases}$$

para $0 \leq t \leq T$.

2. Teoría Cuasi-Lineal

Consideremos la ecuación de evolución abstracta cuasi-lineal

$$\begin{cases} \partial_t u\left(t\right) + A\left(t, u\left(t\right)\right) u\left(t\right) = 0 \in X, \quad 0 \leq t \leq T \\ u\left(0\right) = \varphi \in Y \end{cases} \tag{A.1}$$

donde X y Y son un par de espacios de Banach. La teoría cuasi-lineal de Kato afirma la buena formulación local de (A.1) siempre que los espacios X e Y y el operador A satisfagan ciertas condiciones.

Para los espacios X e Y tenemos la siguiente hipótesis.

(X) Sean X e Y dos espacios de Banach reales y reflexivos tales que Y esta contenido en X continuamente y densamente. Además, hay un isomorfismo $S : Y \to X$ y la norma en Y es elegida tal que S se convierte en una isometría.

Para el operador $A\left(\cdot,\cdot\right)$ definido sobre $[0,T] \times W$, donde W es una bola abierta en Y, tenemos las siguientes hipótesis.

(A.1) Para cada $(t,w) \in [0,T] \times W$, el operador lineal $-A\left(t,w\right)$ es el generador de un semigrupo fuertemente continuo sobre X tal que

$$\left\|e^{-sA(t,w)}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\omega s}, \ \ s \geq 0, \tag{A.2}$$

donde ω es un número real.

(A.2) Para cada $(t,w) \in [0,T] \times W$ tenemos

$$SA\left(t,w\right)S^{-1} = A\left(t,w\right) + B\left(t,w\right), \tag{A.3}$$

donde

$$B\left(t,w\right) \in \mathcal{L}\left(X\right) \quad \text{ y } \quad \left\|B\left(t,w\right)\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \lambda_B \tag{A.4}$$

con $\lambda_B > 0$ una constante. Además, existe $\mu_B > 0$ tal que para cada $t \in [0,T]$ y $w_1, w_2 \in W$ se cumple que

$$\left\|B\left(t,w_1\right) - B\left(t,w_2\right)\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \mu_B \left\|w_1 - w_2\right\|_Y. \tag{A.5}$$

(A.3) Para cada $(t,w) \in [0,T] \times W$ tenemos $A\left(t,w\right) \in \mathcal{L}\left(Y,X\right)$, en el sentido que $Y \subseteq \operatorname{Dom}\left(A\left(t,w\right)\right)$ y $\left.A\left(t,w\right)\right|_Y \in \mathcal{L}\left(Y,X\right)$. Para cada $w \in W$, $t \in [0,T] \mapsto A\left(t,w\right)$ es fuertemente continua. Para cada $t \in [0,T]$, $w \in W \mapsto A(t,w)$ es Lipschitz-continua en el sentido que

$$\|A(t,w_1) - A(t,w_2)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \mu_A \|w_1 - w_2\|_X . \tag{A.6}$$

donde $w_1, w_2 \in W$ y $\mu_A > 0$ es una constante.

Tanto en (A.2) como en (A.3) , las constantes μ_A y μ_B solamente dependen del valor de $\max\{\|w_1\|_Y, \|w_2\|_Y\}$.

(A.4) Sea w_0 el centro de W, entonces para todo $(t,w) \in [0,T] \times W$ tenemos que $A(t,w)\, w_0 \in Y$ y

$$\|A(t,w)\, w_0\|_Y \leq \lambda_A, \;\; t \in [0,T] \text{ y } w \in W.$$

Ahora podemos establecer el teorema de buena formulación local de Kato.

Teorema A.2. *Bajo las hipótesis* (X), (A.1) $-$ (A.4)*, si* $\phi \in W$ *existen* $T_0 = T_0(\|\phi\|_Y) \in]0,T]$ *y*

$$v \in C([0,T_0] : Y) \cap C^1([0,T_0] : X)$$

única solución para (A.1). Además, existe un $T_1 \in]0,T_0]$ *tal que la aplicación dato solución*

$$\Phi : \phi \in Y \longmapsto v \in C([0,T_1] : Y) \cap C^1([0,T_1] : X)$$

es continua, más precisamente, si $\phi_n \in W$ *es una sucesión tal que* $\phi_n \xrightarrow{Y} \phi$ *y* $v_n \in C([0,T_1] : Y) \cap C^1([0,T_1] : X)$ *es la sucesión de soluciones del problema (A.1) con datos iniciales* ϕ_n*, vale que* $v_n(t) \to v(t)$ *en* $C([0,T_1] : Y) \cap C^1([0,T_1] : X)$*.*

Demostración. Véase[34, 35]. $\square$

Este teorema nos garantiza la buena formulación local.

Apéndice B

Integrales oscilatorias en una dimensión

En muchos problemas y aplicaciones surge la siguiente pregunta: ¿cuál es el comportamiento asintótico de $I(\lambda)$ cuando $\lambda \to \infty$ donde

$$I(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} f(x)\, dx \tag{B.1}$$

y ϕ es una función suave de valores reales, llamada *función de fase*, y f es una función suave de valores complejos?

Veremos que este comportamiento asintótico está determinado por los puntos $\overline{x}$ donde la derivada de ϕ se anula, es decir, $\phi'(\overline{x}) = 0$.

Proposición B.1. Sean $f \in C_0^\infty([a,b])$ y $\phi'(\overline{x}) \neq 0$ para cualquier $x \in [a,b]$. Entonces

$$I(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} f(x)\, dx = O\left(\lambda^{-k}\right), \tag{B.2}$$

cuando $\lambda \to +\infty$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}^+$.

Demostración. Fijado $k \in \mathbb{Z}^+$ y $\lambda > 0$, como ϕ' no se anula en $[a,b]$, el operador diferencial

$$\mathcal{L}(f) = \frac{d}{dx}\left(\frac{f}{\phi'}\right)$$

esta bien definido y

$$e^{i\lambda\phi(x)} = \frac{1}{i\lambda\phi'(x)} \frac{d}{dx}\left(e^{i\lambda\phi(x)}\right).$$

Usando la integración por partes se deduce que

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \frac{1}{i\lambda} e^{i\lambda\phi(x)} \frac{f(x)}{\phi'(x)}\bigg|_{x=a}^{x=b} - \frac{1}{i\lambda}\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{\phi'(x)}\right) dx \\ &= -\frac{1}{i\lambda}\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{\phi'(x)}\right) dx \\ &= -\frac{1}{i\lambda}\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} \mathcal{L}(f(x))\, dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes $k-1$ veces

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= -\frac{1}{(i\lambda)^2}\int_a^b \frac{d}{dx}\left(e^{i\lambda\phi(x)}\right) \frac{\mathcal{L}(f(x))}{\phi'(x)} dx = \left(-\frac{1}{i\lambda}\right)^2 \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} \mathcal{L}^2(f(x))\, dx \\ &= \left(-\frac{1}{i\lambda}\right)^k \int_a^b e^{i\lambda\phi} \mathcal{L}^k(f(x))\, dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto, dado que $\mathcal{L}^k(f) \in L^\infty(\mathbb{R})$ pues $f \in C_0^\infty([a,b])$, entonces

$$|I(\lambda)| = \left|\left(-\frac{1}{i\lambda}\right)^k \int_a^b e^{i\lambda\phi} \mathcal{L}^k(f(x))\, dx\right| \leq \frac{1}{\lambda^k}\int_a^b \left|\mathcal{L}^k(f(x))\right| dx = \frac{c}{\lambda^k}$$

y la proposición está probada. □

Si el soporte de la función f no está contenido en el intervalo $[a,b]$ ¿qué se puede decir de la integral oscilatoria $I(\lambda)$? En la siguiente proposición, se presenta una de las situaciones más simples, cuando $f \equiv 1$.

Proposición B.2. Sea $\phi \in C^\infty([a,b])$ tal que para todo $k \in \mathbb{Z}^+$ y para cualquier $x \in [a,b]$ se cumple que $\left|\phi^{(k)}(x)\right| \geq 1$, con $\phi'(x)$ monótona en el caso $k=1$. Entonces

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} dx\right| \leq c_k \lambda^{-\frac{1}{k}} \tag{B.3}$$

donde la constante c_k es independiente de a y b.

Demostración. Si $k=1$ fijamos $\lambda > 0$ y suponemos, sin pérdida de generalidad, ϕ' creciente y $\phi'(x) \geq 1$ para cualquier $x \in [a,b]$. Integrando por partes se tiene

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} dx\right| &= \left|\frac{1}{i\lambda}\int_a^b \frac{1}{\phi'(x)} \frac{d}{dx} e^{i\lambda\phi(x)} dx\right| \\ &= \left|\frac{1}{i\lambda\phi'(x)} e^{i\lambda\phi(x)}\bigg|_{x=a}^{x=b} + \frac{1}{i\lambda}\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\phi'(x)}\right) dx\right| \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\left|\frac{1}{\phi'(x)}\bigg|_{x=a}^{x=b}\right| + \frac{1}{\lambda}\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\phi'(x)}\right) dx\right| \end{aligned} \tag{B.4}$$

Como
$$\frac{1}{\lambda}\left|\frac{1}{\phi'(x)}\right|_{x=a}^{x=b}\right| = \frac{1}{\lambda}\left|\frac{1}{\phi'(b)}-\frac{1}{\phi'(a)}\right| \leq \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\phi'(b)}+\frac{1}{\phi'(a)}\right)$$
y la hipótesis de la monotonía sobre ϕ' garantiza que
$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\phi'(x)}\right)dx\right| &\leq \frac{1}{\lambda}\int_a^b\left|\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\phi'(x)}\right)\right|dx = -\frac{1}{\lambda}\int_a^b\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\phi'(x)}\right)dx \\ &= -\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\phi'(x)}\Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\phi'(a)}-\frac{1}{\phi'(b)}\right)\end{aligned}$$
Por lo tanto, de los estimados anteriores y (B.4),
$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}dx\right| \leq \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\phi'(b)}+\frac{1}{\phi'(a)}\right)+\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\phi'(a)}-\frac{1}{\phi'(b)}\right) = \frac{2}{\lambda\phi'(a)} \leq \frac{2}{\lambda}.$$
Esto la prueba el caso. $k=1$.

Para la prueba del caso $k \geq 2$ usaremos inducción sobre k. Suponiendo el resultado para k, lo demostraremos para $k+1$. Por hipótesis $\left|\phi^{(k+1)}(x)\right| \geq 1$. Sea $x_0 \in [a,b]$ tal que
$$\left|\phi^{(k)}(x_0)\right| = \min_{a\leq x\leq b}\left|\phi^{(k)}(x)\right|.$$
Si $\phi^{(k)}(x_0) = 0$, afuera del intervalo $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ se tiene que $\left|\phi^{(k)}(x)\right| \geq \delta$, con ϕ' monótona si $k=1$. Dividiendo el dominio de integración y utilizando la hipótesis obtenemos que
$$\left|\int_a^{x_0-\delta} e^{i\lambda\phi(x)}dx\right| + \left|\int_{x_0+\delta}^b e^{i\lambda\phi(x)}dx\right| \leq c_k(\lambda\delta)^{-\frac{1}{k}}$$
Un cálculo simple muestra que
$$\left|\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{i\lambda\phi(x)}dx\right| \leq 2\delta$$
De este modo
$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}dx\right| \leq c_k(\lambda\delta)^{-\frac{1}{k}} + 2\delta$$
Si $\phi^{(k)}(x_0) \neq 0$, entonces $x_0 = a$ o b y un argumento similar proporciona la misma cota. Finalmente, tomando $\delta = \lambda^{-1/(k+1)}$ completamos la prueba. □

Ahora es fácil establecer un resultado para funciones f más generales.

Corolario B.3 (van der Corput). *Si ϕ satisface las hipótesis de la proposición B.2 y f es derivable en $\mathbb{R}$, se tiene que*
$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}f(x)\,dx\right| \leq \frac{c_k}{\lambda^{\frac{1}{k}}}\left(\|f\|_{L^\infty}+\|f'\|_{L^1}\right), \quad \lambda > 0, \tag{B.5}$$
con c_k independiente de a y b.

Demostración. Se define

$$G(x)=\int_a^x e^{i\lambda\phi(y)}dy,$$

entonces $G'(x)=e^{i\lambda\phi(x)}$ y por (B.3) se tiene

$$|G(x)|\leq c_k\lambda^{-\frac{1}{k}},\quad x\in[a,b].$$

Usando integración por partes

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}f(x)\,dx\right|=\left|\int_a^b G'(x)\,f(x)\,dx\right|\leq\left|\ G(x)\,f(x)\ \Big|_{x=a}^{x=b}+\left|\int_a^b G(x)\,f\,'(x)\,dx\right|\right.$$

de donde

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}f(x)\,dx\right|\leq\frac{c_k}{\lambda^{\frac{1}{k}}}\left(\|f\|_{L^\infty}+\|f'\|_{L^1}\right).$$

□

A continuación estudiaremos una aplicación de estos resultados.

Proposición B.4. Sean $\beta\in[0,1/2]$ y

$$I_\beta(x)=\int_{\mathbb{R}}e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)}|\eta|^\beta\,d\eta$$

entonces $I_\beta\in L^\infty(\mathbb{R})$.

Demostración. Si consideramos una función $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$\varphi(\eta)=\begin{cases}1 & \text{si } |\eta|\geq 2\\ 0 & \text{si } |\eta|<1\end{cases}$$

entonces

$$\begin{aligned}I_\beta(x) &= \int_{\mathbb{R}}e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)}|\eta|^\beta\,d\eta\\ &= \int_{\mathbb{R}}e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)}|\eta|^\beta\left(1-\varphi(\eta)\right)d\eta+\int_{\mathbb{R}}e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)}|\eta|^\beta\,\varphi(\eta)\,d\eta\\ &= I_\beta^1(x)+I_\beta^2(x)\end{aligned}$$

Obsérvese que

$$\left|I_\beta^1(x)\right|=\left|\int_{\mathbb{R}}e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)}|\eta|^\beta\left(1-\varphi(\eta)\right)d\eta\right|\leq 2\int_{[0,1]}\eta^\beta d\eta=\frac{2}{\beta+1}$$

Por lo tanto, basta acotar

$$I_\beta^2(x)=\int_{\mathbb{R}}e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)}|\eta|^\beta\,\varphi(\eta)\,d\eta.$$

- **Caso 1**, para $x \geq -1$ se tiene

$$\begin{aligned} I_\beta^2(x) &= \int_{-\infty}^{-1} e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)} |\eta|^\beta \, d\eta + \int_1^{+\infty} e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)} |\eta|^\beta \, d\eta \\ &= (-1)^\beta \int_{-\infty}^{-1} e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)} \eta^\beta d\eta + \int_1^{+\infty} e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)} \eta^\beta d\eta \end{aligned}$$

Usando integración por partes se tiene

$$\begin{aligned} &\int_1^{+\infty} e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)} \eta^\beta d\eta \\ &\quad = \int_1^{+\infty} e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)} i\left(x+3\eta^2\right) \frac{\eta^\beta}{i\left(x+3\eta^2\right)} d\eta \\ &\quad = \left. \frac{e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)}\eta^\beta}{i\left(x+3\eta^2\right)} \right|_{\eta=1}^{\eta=+\infty} - \int_1^{+\infty} e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)} \frac{6\eta^{\beta+1} - i\beta\eta^{\beta-1}\left(x+3\eta^2\right)}{\left(x+3\eta^2\right)^2} d\eta \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} &\left| \int_1^{+\infty} e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)} \eta^\beta d\eta \right| \\ &\quad \leq \left| \left. \frac{e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)}\eta^\beta}{i\left(x+3\eta^2\right)} \right|_{\eta=1}^{\eta=+\infty} \right| + \left| \int_1^{+\infty} e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)} \frac{6\eta^{\beta+1} - i\beta\eta^{\beta-1}\left(x+3\eta^2\right)}{\left(x+3\eta^2\right)^2} d\eta \right| \\ &\quad \leq \left| \lim_{\eta\to+\infty} \frac{e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)}\eta^\beta}{i\left(x+3\eta^2\right)} - \frac{e^{i(x+1)}}{i\left(x+3\right)} \right| + \int_1^{+\infty} \frac{\left|6\eta^{\beta+1} - i\beta\eta^{\beta-1}\left(x+3\eta^2\right)\right|}{\left(x+3\eta^2\right)^2} d\eta \\ &\quad = \frac{1}{x+3} + \int_1^{+\infty} \frac{6\eta^{\beta+1} + \beta\eta^{\beta-1}\left(x+3\eta^2\right)}{\left(x+3\eta^2\right)^2} d\eta \\ &\quad = \frac{1}{x+3} + C_{x,\beta} \end{aligned}$$

ya que $x \geq -1$ y la integral impropia $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{6\eta^{\beta+1} + \beta\eta^{\beta-1}\left(x+3\eta^2\right)}{\left(x+3\eta^2\right)^2} d\eta$ es convergente.

Ahora acotaremos la primera integral. Integrando por partes se obtiene

$$\int_{-\infty}^{-1} e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)} \eta^\beta d\eta = \frac{e^{-i(x+1)}}{i\left(x+3\right)} - \int_{-\infty}^{-1} e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)} \frac{6\eta^{\beta+1} - i\beta\eta^{\beta-1}\left(x+3\eta^2\right)}{\left(x+3\eta^2\right)^2} d\eta$$

luego

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{-1} e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)} \eta^\beta d\eta \right| &\leq \frac{1}{x+3} + \int_{-\infty}^{-1} \frac{6\eta^{\beta+1}}{\left(x+3\eta^2\right)^2} d\eta + \int_{-\infty}^{-1} \frac{\beta\eta^{\beta-1}}{\left|x+3\eta^2\right|} d\eta \\ &\leq \frac{1}{x+3} + C_\beta(x) \end{aligned}$$

usando criterios de convergencia se demuestra que la integral impropia es convergente.

Por lo tanto,

$$\left|I_\beta^2(x)\right| \leq \frac{2}{x+3} + C_\beta(x), \quad \text{si } x \geq -1$$

- **Caso 2,** para $x < -1$, consideremos las funciones $\psi_1, \psi_2 \in C_0^\infty$ tales que

$$\psi_1(\eta) + \psi_2(\eta) = 1$$

con

$$\operatorname{sop} \psi_1 \subset A = \left\{\eta : \left|x + 3\eta^2\right| \leq \frac{|x|}{2}\right\}$$

y

$$\psi_2 = 0 \quad \text{en } B = \left\{\eta : \left|x + 3\eta^2\right| < \frac{|x|}{3}\right\},$$

entonces

$$\begin{aligned}
\left|I_\beta^2(x)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)} |\eta|^\beta \varphi(\eta)\, d\eta\right| \\
&\leq \left|\int_{\mathbb{R}} e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)} |\eta|^\beta \varphi(\eta)\, \psi_1(\eta)\, d\eta\right| + \left|\int_{\mathbb{R}} e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)} |\eta|^\beta \varphi(\eta)\, \psi_2(\eta)\, d\eta\right| \\
&= \left|I_\beta^{2,1}(x)\right| + \left|I_\beta^{2,2}(x)\right|
\end{aligned}$$

Cuando $\psi_2(\eta) = 0$ la desigualdad triangular muestra que

$$\left|x + 3\eta^2\right| \geq \frac{1}{6}\left(|x| + |\eta|^2\right)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
I_\beta^{2,2}(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)} |\eta|^\beta \varphi(\eta)\, \psi_2(\eta)\, d\eta \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{|\eta|^\beta \varphi(\eta)\, \psi_2(\eta)}{i\left(x+3\eta^2\right)} \frac{d}{d\eta} e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)} d\eta \\
&= \int_{|\eta|>2} \frac{|\eta|^\beta \psi_2(\eta)}{i\left(x+3\eta^2\right)} \frac{d}{d\eta} e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)} d\eta \\
&= \int_{-\infty}^{-2} \frac{|\eta|^\beta \psi_2(\eta)}{i\left(x+3\eta^2\right)} \frac{d}{d\eta} e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)} d\eta + \int_2^{+\infty} \frac{|\eta|^\beta \psi_2(\eta)}{i\left(x+3\eta^2\right)} \frac{d}{d\eta} e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)} d\eta \\
&= I_\beta^{2,2,1}(x) + I_\beta^{2,2,2}(x)
\end{aligned}$$

Solo acotaremos $I_{\beta}^{2,2,2}(x)$ ya que $I_{\beta}^{2,2,1}(x)$ se acota de manera similar. Así usando integración por partes

$$\begin{aligned}
I_{\beta}^{2,2,2}(x) &= \left.\frac{\eta^{\beta}\psi_2(\eta)\,e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)}}{i\left(x+3\eta^2\right)}\right|_{\eta=2}^{\eta=+\infty} \\
&\quad +i\int_2^{+\infty}\frac{\left(x+3\eta^2\right)\left[\beta\eta^{\beta-1}\psi_2(\eta)+\eta^{\beta}\psi_2'(\eta)\right]-6\eta^{\beta+1}\psi_2(\eta)}{\left(x+3\eta^2\right)^2}e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)}d\eta \\
&= -\frac{2^{\beta}\psi_2(2)e^{i(2x+8)}}{i\left(x+12\right)} \\
&\quad +i\int_2^{+\infty}\frac{\left(x+3\eta^2\right)\left[\beta\eta^{\beta-1}\psi_2(\eta)+\eta^{\beta}\psi_2'(\eta)\right]-6\eta^{\beta+1}\psi_2(\eta)}{\left(x+3\eta^2\right)^2}e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)}d\eta
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\left|I_{\beta}^{2,2,2}(x)\right| &\leq \frac{2^{\beta}\left|\psi_2(2)\right|}{\left|x+12\right|}+\int_2^{+\infty}\frac{\beta\eta^{\beta-1}\left|\psi_2(\eta)\right|}{\left|x+3\eta^2\right|}d\eta+\int_2^{+\infty}\frac{\eta^{\beta}\left|\psi_2'(\eta)\right|}{\left|x+3\eta^2\right|}d\eta \\
&\quad +\int_2^{+\infty}\frac{6\eta^{\beta+1}\left|\psi_2(\eta)\right|}{\left(x+3\eta^2\right)^2}d\eta \\
&\leq C_{\beta,x}+6\int_2^{+\infty}\frac{\beta\eta^{\beta-1}\left|\psi_2(\eta)\right|}{|x|+\eta^2}d\eta+6\int_2^{+\infty}\frac{\eta^{\beta}\left|\psi_2'(\eta)\right|}{|x|+\eta^2}d\eta \\
&\quad +216\int_2^{+\infty}\frac{\eta^{\beta+1}\left|\psi_2(\eta)\right|}{\left(|x|+\eta^2\right)^2}d\eta \\
&\leq C_{\beta}(x)+C\int_2^{+\infty}\frac{\eta^{\beta-1}}{|x|+\eta^2}d\eta+C\int_2^{+\infty}\frac{\eta^{\beta}}{|x|+\eta^2}d\eta \\
&\quad +C\int_2^{+\infty}\frac{\eta^{\beta+1}}{\left(|x|+\eta^2\right)^2}d\eta
\end{aligned}$$

lo que implica

$$\left|I_{\beta}^{2,2,2}(x)\right|\leq C_{\beta}(x).$$

entonces de una manera similar se acota $\left|I_{\beta}^{2,2,1}(x)\right|$y obtenemos

$$\left|I_{\beta}^{2,2}(x)\right|=\left|I_{\beta}^{2,2,1}(x)\right|+\left|I_{\beta}^{2,2,2}(x)\right|\leq C_{\beta}(x)$$

Ahora para $\eta\in A$ tenemos que $\eta:\left|x+3\eta^2\right|\leq\frac{|x|}{2}$

$$\left|I_{\beta}^{2,1}(x)\right|=\left|\int_{\mathbb{R}}e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)}|\eta|^{\beta}\varphi(\eta)\,\psi_1(\eta)\,d\eta\right|$$

usando el lema de Van Der Corput (con $\lambda=1$) y la forma de φ,ψ_1 garantizan que existe una constante "C" independiente de $x<-1$ tal que

$$\left|I_{\beta}^{2,1}(x)\right|=\left|\int_{\mathbb{R}}e^{i\left(x\eta+\eta^3\right)}|\eta|^{\beta}\varphi(\eta)\,\psi_1(\eta)\,d\eta\right|\leq c_k\left(\|f\|_{L^{\infty}}+\|f\,'\|_{L^1}\right)$$

la cual obtenemos $\left|I_{\beta}^{2}(x)\right| \leq \left|I_{\beta}^{2,1}(x)\right| + \left|I_{\beta}^{2,2}(x)\right| \leq K.$ $\square$

Entonces se tiene

$$|I_{\beta}(x)| = \left|I_{\beta}^{1}(x)\right| + \left|I_{\beta}^{2}(x)\right| \leq \frac{2}{\beta+1} + K$$

entonces $I_{\beta} \in L^{\infty}(\mathbb{R})$

Bibliografía

[1] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newel, H. Segur. *Nonlinear evolution equations of physical significance.* Phys. Rev. Lett., 31, (1973), 125-127.

[2] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newel, H. Segur. *The inverse scattering transform Fourier analysis for nonlinear problems.* Studies in Apll. Math., 53, (1974), 249-315.

[3] E. Alarcon, E., J. Angulo, F. Montenegro. *Stability and instability of solitary waves for a nonlinear dispersive system.* Nonlinear Anal. TMA. 36, (1999), 1015-1035.

[4] T. Arbogast, J. Bona. *Functional Analysis for the Applied Mathematics.* Chapman and Hall, New York (2025).

[5] T. B. Benjamin, J. L. Bona, J. J. Mahony. *Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems.* Philos. Trans. Royal Soc. London, series A, 272, (1972), 47–48.

[6] E. Bisognin, V. Bisognin, G.P. Menzala. *Asymptotic Behavior in Time of the Solutions of a Coupled System of KdV Equations.* Funkcialaj Ekvacioj, 40, (1997), 353-370.

[7] J. Bona, G. Ponce, J.C. Saut, M.M. Tom. *A model system for strong interaction between internal solitary waves.* Commun. Math. Phys., 142, (1992), 287-313.

[8] J. Bona, R. Smith. *The initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation.* Philosophical Transactions of the Royal Society of London A, 278, (1975), 555-604.

[9] J. Bona, P. Souganidis, W. Strauss. Stability and instability of solitary waves of Korteweg-de Vries type equation. Proc. Roy. Soc. London Ser A, 411, (1987), 395-412.

[10] J. L. Bona, N. Tzvetkov. *Sharp well-posedness results for the BBM equation.* Discrete and Continuous Dynamical Systems 23, 4 (2009), 1241-1252.

[11] J. Bourgain. *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations I (Schrödinger equation), II (KdV equation).* Geom. Funct. Anal., 3 (1993), 107-156, 209-262.

[12] J. Bourgain. *On the Cauchy problem for the Kadomtsev-Petviashvili equation.* Geom. Funct. Anal., 3 (1993), 315-341.

[13] J. Bourgain. *Refinements of Strichartz inequality and applications to 2D-NLS with critical nonlinearity.* Internat. Math. Res. Notices, 5 (1998) , 253-283.

[14] X. Carvajal, M. Panthee. *Sharp well-posedness for a coupled system of mKdV-type equations.* J. Evol. Equ. 19, (2019). 1167–1197.

[15] T. Cazenave, A. Haraux. *An introduction to semilinear evolution equations.* Oxford University Press, New York (1998).

[16] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, T. Tao. *Global well-posedness for KdV in Sobolev spaces of negative index.* Electron. J. Diff. Eqn. 26 (2001) 1-7.

[17] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, T. Tao. *Sharp global well-posedness for periodic and non-periodic KdV and mKdV on $\mathbb{R}$ and $\mathbb{T}$.* JAMS 16 (2003), 705-749.

[18] J. Colliander, C. Kenig, G. Staffilani. *On solutions for the Kadomtsev-Petviashvili I equation.* Mosc. Math. J. 1 (2001), 491-520.

[19] A.J. Corcho, M. Panthee. *Global well-posedness for a coupled modified KdV system.* Bull Braz Math Soc, New Series 43, (2012) , 27-57.

[20] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and their Applications.* 2nd Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York (1999).

[21] G. Fonseca, F. Linares, G. Ponce. *Global well-posedness for the modified Korteweg-de Vries equation.* Communications in PDE, 24 (1999) 683–705.

[22] G. Fonseca, F. Linares, G. Ponce. *Global existence of the critical generalized KdV equation.* Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003) 1847–1855.

[23] J.A. Gear, R. Grimshaw. *Weak and strong interactions between internal solitary waves*, Stud. Appl. Math., 70, (1984), 235-258.

[24] M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss. *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I.* J. Funct. Anal., 74 (1987), 160-197.

[25] R. J. Iorio Jr. *On the Cauchy problem for the Benjamin-Ono equation.* Comm. PDE, 11, (1986), 1031-1081.

[26] R. J. Iorio Jr. *KdV, BO, and friends in weighted Sobolev spaces*, Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1450 (1990), 105-121.

[27] R. J. Iorio Jr., V. Iorio. *Fourier analysis and partial differential equations.* Cambridge University Press, Inc. N.York (2001).

[28] R. J. Iorio Jr., W.V. Leite Nunes. *Introdução as equações de evolução não lineares.* 18° Coloquio Brasileiro de Matemáticas, IMPA, (1991).

[29] P. Isaza, J. Mejia. *Local and global Cauchy problems for the Kadomtsev-Petviashvili (KP-II) equation in Sobolev spaces of negative indicess.* Comm. PDE, 26, (2001), 1027-1054.

[30] P. Isaza, J. Mejia, V. Stallbohm. *Local solution for the Kadomtsev-Petviashvili equation in* $\mathbb{R}^2$. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 196, (1995) 566-587.

[31] T. Kato, H. Fujita. *On the non-stationary Navier-Stokes system.* Red. Sem. Mat. Uni. Padova, **32**, (1962), 243-260.

[32] T. Kato. *Linear evolution equations of "hyperbolic" type.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I, 17 (1970), 241-258.

[33] T. Kato. *Linear evolution equations of "hyperbolic" type II.* J. Math. Soc. Japan, 25 (1973), 648-666.

[34] T. Kato. *Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations.* Lecture and Notes in Mathematics, 448, (1975), 25-70

[35] T. Kato. *On the Korteweg-de Vries equation.* Manuscripta Math., **28**, 89-99, (1979).

[36] T. Kato. *On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation,* Adv. in Math. Suppl. Stud, in Appl. Math., 8, (1983), 93-128.

[37] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega. *On the (generalized) Korteweg-de Vries equation.* Duke Math. J., 59 (1989), 585-610.

[38] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega. *Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations.* Indiana Univ. Math. J., 40 (1991), 33-69.

[39] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega. *Well-posedness of the initial value problem for the Korteweg-de Vries equation.* J. Amer. Math. Soc., 4 (2), (1991), 323–347.

[40] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega. *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle.* Comm. Pure Appl. Math., 46 (1993), 527–620.

[41] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega. *A bilinear estimate with application to the KdV equation.* J. Amer. Math Soc., 9 (1996) 573–603.

[42] A. Kozakevicius, O. Vera. *On the unique continuation property for a nonlinear dispersive system.* Electron. J. Qual. Theory Differ. Equations, 14, (2005), 1-23.

[43] F. Linares, G. Ponce. *Introduction to nonlinear dispersive equations.* Springer, Universitex, N. York. (2009).

[44] J. F. Montenegro. *Sistemas de equaões de evolucão não lineares. Estudo local, global e estabilidade de ondas solitarias.* Ph. D. Thesis, IMPA, Rio de Janeiro (1995).

[45] J. Montealegre. *Problema de Cauchy para una ecuación de tipo KdV-Burgers.* XLIX Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana (2016) .

[46] M. Panthee. *Properties of solutions to some nonlinear dispersive models.* Ph. D. Thesis, IMPA, Rio de Janeiro (2004).

[47] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Apllied Mathematical Sciences, 44. Springer Verlag, New York (1983).

[48] G. Ponce. *On the global well-posedness of the Benjamin-Ono equation.* Diff. Integral Equations 4 (1991), 527-542.

[49] J.C. Saut, R. Teman. *Remarks on the Korteweg- de Vries equation.* Israel J. of Math., 24, 78-87, (1976).