

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSTGRADO



UN ESTUDIO DE LAS ORGANIZACIONES  
MATEMÁTICAS DEL OBJETO FUNCIÓN CUADRÁTICA  
EN LA ENSEÑANZA SUPERIOR

Tesis para optar el grado de  
Magíster en Enseñanza de las Matemáticas

Presentado por:

Flor Isabel Carrillo Lara

Asesora

Mg. Cecilia Gaita Iparraguirre

Miembros del jurado:

Mg. Miguel Gonzaga Ramirez

Dra. Jesús Flores Salazar

Mg. Cecilia Gaita Iparraguirre (Asesora)

Lima-2013





Al amor verdadero.

## *AGRADECIMIENTOS*

A Dios, por permitirme la vida y darme fortaleza para enfrentarla.

A mis padres por su apoyo incondicional.

A los profesores y amigos Moisés, Rosa y José.

De manera muy especial un agradecimiento a mi asesora,

Cecilia Gaita Iparraguirre por su dedicación y apoyo brindado en este trabajo.



# Resumen

Este trabajo tiene por objetivo describir y analizar las organizaciones matemáticas en torno a la función cuadrática en los libros de texto de enseñanza universitaria en la escuela de Economía de una universidad pública de Lima.

Para dicho trabajo tomamos en cuenta investigaciones relacionadas a la función cuadrática según las dificultades presentadas por los estudiantes y al tratamiento que se daba a la organización matemática del objeto en estudio. En base a la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard (1999) presentamos una organización matemática de referencia donde definimos los elementos de una praxeología: tareas, técnicas y tecnologías con respecto a nuestro objeto de estudio; apoyados en los criterios que hemos definido presentamos la descripción y análisis de los libros de texto seleccionados donde presentamos como los autores muestran las organizaciones matemáticas en torno a la función cuadrática y como estas organizaciones matemáticas contribuyen para enfrentar las dificultades que tienen los estudiantes en su aprendizaje de una función cuadrática, encontradas en los trabajos previos.

Finalmente, se evaluaron las praxeologías de la organización matemática y se hicieron sugerencias para la reorganización didáctica del tema función cuadrática en los libros de texto analizados, teniendo como base los resultados de la descripción y el análisis de dichas praxeologías.

# Abstract

This work aims to describe and analyze mathematical organizations around the quadratic function in university in the school of economics of a public university in Lima.

We consider research related to the quadratic function as the difficulties presented by the students and the treatment given to the organization of the object under study mathematics. Based on Anthropological Theory of Didactics we present a mathematical organization of reference where we define the elements of a praxeology: tasks, techniques and technologies with respect to our object of study, supported by the criteria we set when we describe and analyze of the selected textbooks. The authors show the mathematical organizations of the quadratic function and how these mathematical organizations help to address the difficulties faced by students in their learning of a quadratic function, found in previous work.

Finally, we assessed the praxeologies of the mathematics organization and made suggestions for reorganization then, based on the results of the description and analysis of these praxeologies.

# Índice general

Lista de figuras	IV
Lista de tablas	VII
Introducción	VIII
<b>1. El problema de investigación</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	2
1.2. Consideraciones sobre la función cuadrática desde la perspectiva cognitiva . . .	5
1.2.1. Dificultades de los alumnos en las tareas que requieren establecer conexiones entre representaciones gráficas y analíticas: Criterio 1 . . . . .	5
1.2.2. Dificultades de los alumnos en las tareas que requieren la identificación de la función cuadrática dado en lenguaje verbal: Criterio 2 . . . . .	7
1.3. Preguntas y objetivos de investigación . . . . .	9
1.4. Método y procedimientos a seguir en la investigación . . . . .	10
<b>2. Marco teórico: Un modelo epistemológico de referencia en torno a la función cuadrática</b>	<b>12</b>
2.1. Teoría Antropológica de lo Didáctico . . . . .	12
2.1.1. Algunos elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) . .	12
2.1.2. Modelización de la Actividad Matemática . . . . .	14
2.1.3. Tipos de praxeologías . . . . .	16
2.1.4. Categorías de Organizaciones Matemáticas. . . . .	18
2.1.5. Indicadores de las Organizaciones Matemáticas Locales (OML) . . . . .	18
2.2. La actividad algebraica como instrumento de modelización. . . . .	21
2.3. Presencia del contexto en los problemas . . . . .	23
2.4. La función cuadrática desde la perspectiva de la TAD. . . . .	24
2.4.1. Organizaciones matemáticas asociadas a la Función Cuadrática que se presentan en los trabajos de referencia . . . . .	26
2.4.2. Organizaciones matemáticas asociadas a la Función Cuadrática que se consideraron en la investigación. . . . .	30

<b>3. Criterios para el análisis de libros de texto</b>	<b>39</b>
3.1. Criterios para el análisis de los libros de texto determinados por las dificultades de los estudiantes . . . . .	39
3.2. Criterios para el análisis de los libros de texto determinados por la postura epistemológica adoptada . . . . .	43
<b>4. Análisis de los libros de texto</b>	<b>46</b>
4.1. Criterios adoptados para la selección de los libros de texto . . . . .	46
4.2. Sobre el libro de texto 1 . . . . .	47
4.2.1. Descripción del libro de texto 1 . . . . .	47
4.2.2. Análisis del libro de texto 1 . . . . .	55
4.3. Sobre el libro de texto 2 . . . . .	61
4.3.1. Descripción del libro de texto 2 . . . . .	61
4.3.2. Análisis del libro de texto 2 . . . . .	68
<b>5. Recomendaciones para reorganizar la organización didáctica en los libros de texto analizados</b>	<b>77</b>
5.1. Evaluación y sugerencias para el libro de texto 1 . . . . .	78
5.2. Evaluación y sugerencias para el libro de texto 2 . . . . .	81
<b>Referencias</b>	<b>85</b>
<b>A. Solución de tareas propuestas del libro de texto Chiang y Wainwright</b>	<b>88</b>
<b>B. Solución de tareas propuestas del libro de texto Sydsaeter, Hammond y Carbajal</b>	<b>104</b>

# Índice de figuras

1.1. Actividad 2. Tomado de Félix 2009, p.56-58 . . . . .	6
2.1. Etapas en el proceso de transposición didáctica. Tomado de Chevallard, 1985 . . . . .	13
2.2. García (2005), p. 257 . . . . .	24
2.3. García (2005), p. 259 . . . . .	25
2.4. García (2005), p. 260 . . . . .	25
2.5. García (2005), p. 260 . . . . .	25
2.6. Sánchez y Vera, 2002b , p.20. Tomado de García, 2005, p. 260 . . . . .	26
4.1. Chiang y Wainwright, 2006, ejemplo 3, p. 16 . . . . .	48
4.2. Chiang y Wainwright, 2006, ejemplo 4, p. 17 . . . . .	48
4.3. Chiang y Wainwright, 2006, p. 17 . . . . .	49
4.4. Chiang y Wainwright, 2006, p. 18 . . . . .	49
4.5. Chiang y Wainwright, 2006, p. 21 . . . . .	50
4.6. Chiang y Wainwright, 2006, p. 22 . . . . .	50
4.7. Chiang y Wainwright, 2006, p. 35 . . . . .	50
4.8. Chiang y Wainwright, 2006, p. 35 . . . . .	51
4.9. Chiang y Wainwright, 2006, p. 35 . . . . .	51
4.10. Chiang y Wainwright, 2006, p. 36-37 . . . . .	52
4.11. Chiang y Wainwright, 2006, p.221 . . . . .	53
4.12. Chiang y Wainwright, 2006, p.231 . . . . .	53
4.13. Chiang y Wainwright, 2006, p.230 . . . . .	54
4.14. Chiang y Wainwright, 2006, p.233 . . . . .	54
4.15. Chiang y Wainwright, 2006, p.233-234 . . . . .	54
4.16. Chiang y Wainwright, 2006, ejercicio 9.2-1, p.226 . . . . .	60
4.17. Chiang y Wainwright, 2006, ejercicio 9.3-2, p.233 . . . . .	60
4.18. Chiang y Wainwright, 2006, ejemplo 3.8, p.35 . . . . .	60
4.19. Chiang y Wainwright, 2006, ejemplo 3.8, p.36 . . . . .	60
4.20. Chiang y Wainwright, 2006, ejercicio 2.5-3, p.36 . . . . .	61
4.21. Chiang y Wainwright, 2006, ejercicio 9.4-2 , p.241 . . . . .	61
4.22. Sydsaeder et al, 2012, p.34 . . . . .	62

4.23. Sydsaeder et al, 2012, p.37 . . . . .	63
4.24. Sydsaeder et al, 2012, p.37 . . . . .	63
4.25. Sydsaeder et al, 2012, p.46 . . . . .	63
4.26. Sydsaeder et al, 2012, p.46 . . . . .	63
4.27. Sydsaeder et al, 2012, p.61 . . . . .	64
4.28. Sydsaeder et al, 2012, p.62 . . . . .	64
4.29. Sydsaeder et al, 2012, p.61 . . . . .	64
4.30. Sydsaeder et al, 2012, p.62 . . . . .	64
4.31. Sydsaeder et al, 2012, p.233 . . . . .	65
4.32. Sydsaeder et al, 2012, p.234 . . . . .	66
4.33. Sydsaeder et al, 2012, p.234 . . . . .	66
4.34. Sydsaeder et al, 2012, p.234 . . . . .	66
4.35. Sydsaeder et al, 2012, p.235 . . . . .	66
4.36. Sydsaeder et al, 2012, p.240 . . . . .	67
4.37. Sydsaeder et al, 2012, p.240 . . . . .	67
4.38. Sydsaeder et al, 2012, p.261 . . . . .	68
4.39. Sydsaeder et al, 2012, p.261 . . . . .	68
4.40. Sydsaeder et al, 2012, p.263 . . . . .	68
4.41. Sydsaeder et al, 2012, problema 1, p.264 . . . . .	74
4.42. Sydsaeder et al, 2012, problema 1, p.259 . . . . .	74
4.43. Sydsaeder et al, 2012, p.61 . . . . .	74
4.44. Sydsaeder et al, 2012, p.62 . . . . .	74
4.45. Sydsaeder et al, 2012, problema 1a, p.63 . . . . .	75
4.46. Sydsaeder et al, 2012, problema 9, p.64 . . . . .	75
4.47. Sydsaeder et al, 2012, problema 7, p.73 . . . . .	75
4.48. Sydsaeder et al, 2012, ejemplo 2, p.241 . . . . .	76
4.49. Sydsaeder et al, 2012, problema 5, p.64 . . . . .	76
A.1. Gráfica de $y = -x^2$ . . . . .	89
A.2. Gráfica de $y = -x^2 + 5x - 2$ . . . . .	90
A.3. Gráfica de $y = x^2 + 5x - 2$ . . . . .	91
A.4. Ceros de $f(x) = x^2 - 8x + 15$ . . . . .	92
A.5. Ceros de $f(x) = 2x^2 - 4x - 16$ . . . . .	92
B.1. Gráfica de $y = x^2$ . . . . .	106
B.2. Gráfica de $y = x^2 + 1$ . . . . .	106
B.3. Gráfica de $y = (x + 3)^2$ . . . . .	107
B.4. Gráfica de $y = 3 - (x + 1)^2$ . . . . .	108
B.5. Gráfica de $y = x^2 - 4x$ . . . . .	109
B.6. Gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$ . . . . .	111

B.7. Gráfica (a) . . . . . 121

B.8. Gráfica de  $y = 4x^2 - 40x + 80$ . . . . . 125



# Índice de tablas

1.1. Síntesis de las dificultades en los estudiantes encontradas en los trabajos previos	9
2.1. Niveles de complejidad de las tareas en nuestro estudio . . . . .	37
3.1. Criterios 1 y 2 según las dificultades de los estudiantes . . . . .	41
3.2. Análisis de los tipos de tareas de acuerdo a los criterios 1 y 2 . . . . .	42
3.3. Tipos de tareas, técnicas y tecnologías en nuestro estudio . . . . .	44
3.4. Criterios 3, 4 y 5 según la postura epistemológica adoptada . . . . .	45
4.1. Libros de texto seleccionados para el análisis . . . . .	47
4.2. Análisis del libro de texto 1 según el criterio 3 . . . . .	57
4.3. Análisis del libro de texto 1 según los criterios 4 y 5 . . . . .	58
4.4. Análisis del libro de texto 2 según el criterio 3 . . . . .	71
4.5. Análisis del libro de texto 2 según los criterios 4 y 5 . . . . .	72

# Introducción

En este trabajo mostraremos un estudio de las organizaciones matemáticas del objeto función cuadrática en la enseñanza superior, desde el enfoque epistemológico de la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

El estudio de la matemática presenta dificultades para los estudiantes de la secundaria como también para los de la universidad que estudian las diferentes carreras, sobre todo las relacionadas con la Matemática Aplicada. En ambos grupos se ha detectado altos niveles de fracaso y deserción de los estudiantes en los cursos de matemática, sobre todo en los primeros años de transito por la carrera universitaria. En este trabajo se consideró el área de la economía, donde se estudian diversos modelos que son interpretaciones económicas de sistemas propios de la Matemática.

El punto de partida de nuestra investigación se sitúa en las dificultades encontradas en la enseñanza de la función cuadrática en el curso de Matemática básica, en la Escuela de Economía de la Universidad Nacional del Callao. Se investigó sobre los trabajos previos que relacionaban los problemas cognitivos con nuestro objeto en estudio y luego se revisaron trabajos sobre el tratamiento de las Organizaciones Matemáticas desde un enfoque antropológico sobre la función y en particular sobre la función cuadrática. Es en este primer capítulo donde presentamos las preguntas y objetivos a realizar.

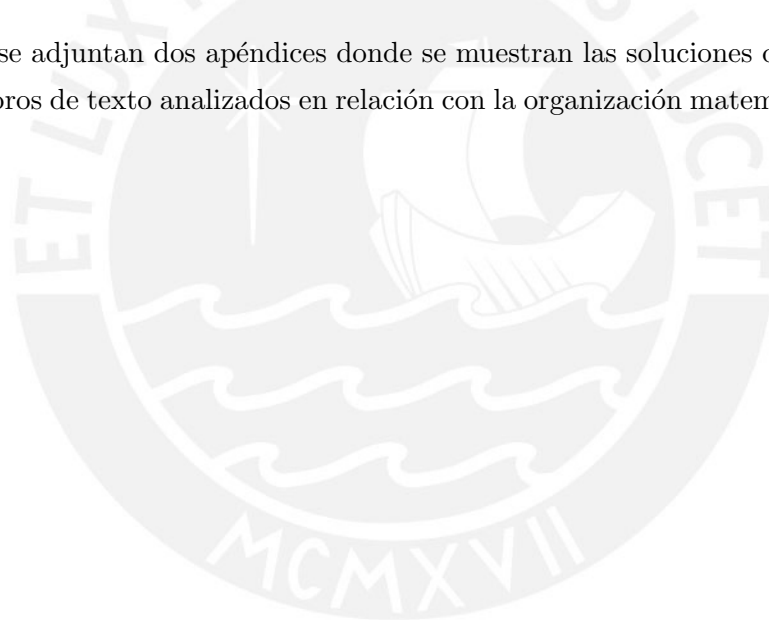
En el segundo capítulo presentamos algunos elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico que permitirán describir y analizar cuestiones complejas referidas al estudio de los objetos matemáticos. Esta teoría sitúa la actividad matemática en el conjunto de las actividades humanas e instituciones sociales. Se describen conceptos teóricos como modelización, paxeologías, categorías e indicadores de la organización matemática. También tomamos en cuenta otras secciones importantes para esta teoría como son: la actividad algebraica como instrumento de modelización, presencia del contexto en los problemas, la función cuadrática desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. En este capítulo identificamos las tareas y técnicas que se consideran en este estudio.

En el tercer capítulo se definen los criterios que se toman en cuenta en la descripción y análisis de los libros de texto seleccionados. En la definición de estos se buscará que los textos presenten actividades que permitan que los alumnos superen las dificultades detectadas en trabajos previos y que la organización matemática presentada sea rica de acuerdo a la variedad de tareas, presencia de técnicas y tecnologías.

Con los criterios definidos previamente, en el cuarto capítulo se procede a la descripción y análisis de los libros de texto seleccionados. Aquí identificamos explícitamente las praxeologías: tareas, técnicas y tecnologías de cada libro de texto asociada a la función cuadrática.

En el quinto capítulo la memoria presenta recomendaciones para reorganizar las organizaciones didácticas en los libros de texto analizados, dando algunas sugerencias con respecto: al desarrollo de la organización matemática, variedad de tareas, técnicas y tecnologías que presentan cada texto y la completitud de las organizaciones matemáticas locales analizadas.

Finalmente, se adjuntan dos apéndices donde se muestran las soluciones de las tareas propuestas en los libros de texto analizados en relación con la organización matemática en estudio.



## Capítulo 1

# El problema de investigación

En mi experiencia como docente del curso de Matemáticas Básicas dirigido a estudiantes de pregrado de la Escuela de Economía de la Universidad Nacional del Callao, pude percibir que ellos carecían de conocimientos básicos cuando resolvían problemas de aplicación relacionados con el objeto matemático función cuadrática. Esto se ponía de manifiesto al tratar de establecer diferencias entre una función lineal y una cuadrática, así como en las dificultades que presentaban cuando debían usar la expresión analítica de la función cuadrática y escribirlas en formas equivalentes para resolver determinados tipos de tareas. Los estudiantes no asociaban correctamente la expresión algebraica (forma abstracta) con la representación gráfica y también presentaban dificultades para traducir un problema de enunciado verbal al lenguaje algebraico.

Al hacer la revisión del sílabo del curso y contrastar la posición del contenido del tema en los libros que propone el sílabo, se pudo observar que el concepto de función cuadrática es relevante para que los estudiantes puedan comprender posteriores conceptos relacionados con diversos temas que iban a ser desarrollados a lo largo de la carrera, por ejemplo: i) en Series de Maclaurin y series de Taylor (Chiang, 2006); muestra que cualquier función continua y diferenciable alrededor de un punto se puede aproximar con un polinomio de grado “n” mediante la serie de Taylor; y cuando es alrededor del punto “0” se obtiene la serie de Maclaurin, ii) en Optimización con restricciones de igualdad (Chiang, 2006); iii) en Integración cuando se trabaja con áreas bajo curvas, debemos graficar una función cuadrática (Sydasaeter, 2012).

Con respecto al estudio de libros de texto, la investigación de Vivas (2010) analiza libros de texto teniendo como eje central el concepto de función cuadrática. Ésta es tomada por dos motivos: primero, porque es uno de los ejes conductores de la Matemática en el último ciclo de la secundaria y la importancia asignada al concepto se extiende incluso más allá de este nivel; y en segundo lugar, por la relevancia que tienen las funciones cuadráticas debido a la diversidad de fenómenos en diversas áreas.

El libro de texto constituye uno de los pilares básicos sobre los que se sustenta la acción docente en cualquier nivel educativo y muy a menudo se transforma en el referente exclusivo del saber científico, tanto para los profesores como para los alumnos según Vilella, 2001, citado en Vivas, 2010. Por esta razón, las investigaciones sobre libros de texto se han convertido en un método eficiente para el estudio de los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Además, el libro de texto ejerce diferentes roles: puede ser mirado como un objeto de estudio, como material de consulta, como registro de las actividades del alumno, como una recopilación de ejercicios y problemas por resolver, citado en Vilella (2001).

A su vez, en los trabajos de Chevallard y Joshua, 1982, citado en Vivas, 2010 los investigadores utilizan la noción de transposición didáctica que es relativa a las transformaciones entre el saber sabio y el saber enseñado y entre los que existe un escalón intermedio correspondiente al saber enseñar, que se refleja en el texto. Lo más próximo a este texto del saber o saber a enseñar, es el libro de texto cuyo contenido y estructura reflejan esas transformaciones del saber sabio.

Por su parte para Ortiz de Haro, 1999, citado en Vivas, 2010 describe que: “un libro de texto se considera como un segundo nivel de transposición didáctica” (el primer nivel estaría formado por los currículos y programas oficiales). Sostiene además que si en un libro de texto aparece un significado sesgado, éste puede llegar a transmitirse a los alumnos y por lo tanto el profesor debería mantener una permanente vigilancia epistemológica sobre el contenido de los libros de texto.

Todo lo anterior indica la gran relevancia que tiene la presencia de un libro de texto en el sistema educativo, transponiendo el saber sabio en relación con los objetos matemáticos al saber a enseñar o al saber enseñado. Siendo este libro de texto un instrumento de apoyo para el desarrollo de secuencias didácticas en el aula y fuera de ella considerados en nuestro trabajo.

## 1.1. Antecedentes

El presente trabajo de investigación trata sobre el estudio del objeto matemático “función cuadrática” en la carrera profesional de Economía de la Universidad Nacional del Callao. La finalidad del mismo es describir y analizar -de qué manera están organizados los conceptos y aplicaciones del objeto matemático función cuadrática- en los libros de textos de la enseñanza universitaria en la escuela de Economía. Para ello, previamente se describieron diferentes formas de concepción y aplicación de la función cuadrática asociada a diferentes praxeologías para abordar el objeto en cuestión.

El análisis de los textos se apoyó en resultados de trabajos realizados por diferentes inves-

tigadores. Estos fueron clasificados de acuerdo a los siguientes criterios: i) dificultades en el aprendizaje de los estudiantes según el objeto de estudio, y ii) el estudio de las organizaciones matemáticas desde el enfoque de la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

De acuerdo al primer tipo de investigaciones tenemos los siguientes reportes:

En México Cuesta (2007) menciona como referencia su trabajo del año 2005 donde realizó un estudio diagnóstico sobre las dificultades de los estudiantes de la especialidad de economía en el aprendizaje del concepto de extremo de una función en el nivel superior. Sus resultados demostraron que debían tener en cuenta otros aspectos como: las dificultades en el aprendizaje del concepto de extremo derivan del conocimiento que se tiene sobre el concepto de función; también pone de manifiesto otras dificultades vinculadas a la comprensión de estos conceptos, que muestran que en sus estudios previos a la universidad se ha trabajado poco o de manera no significativa; con lenguajes de tipo algebraico, gráfico y geométrico. El mismo autor en Cuesta (2007) presenta el proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función en estudiantes de Economía, relacionado con el análisis de una innovación didáctica. El investigador trata de los problemas relativos al proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas para los estudiantes de la Licenciatura en Economía de la Universidad Veracruzana, México. Uno de los aspectos vinculados al proceso de aprendizaje tiene que ver con la adquisición de conceptos de análisis que se relacionan de manera directa e influyen en la comprensión de la propia teoría económica. En esta relación entre la matemática y la ciencia económica, uno de los conceptos más importantes es el de función y extremo de una función; de su comprensión depende que los estudiantes adquieran competencias para plantear y resolver problemas de optimización en economía.

Del mismo modo Félix (2009) hizo un estudio con alumnos universitarios donde muestra los resultados del análisis de la capacidad de los alumnos de interpretación, simbolización y manipulación de los parámetros que aparecen en la transformación de funciones básicas (función cuadrática). La investigación consiste en la aplicación de una serie de prácticas a un grupo de estudiantes que inician la universidad, que incluyen distintas actividades diseñadas para poder detectar la forma en que los alumnos trabajan con parámetros, con el apoyo de un programa de graficación llamado Graphmatica como herramienta de visualización y aprendizaje. Se encuentra que a partir de una tabla de datos, los estudiantes no son capaces de distinguir si la relación es cuadrática y tampoco pueden simbolizarla. Algunos alumnos no logran distinguir: su vértice, ni las intersecciones con los ejes ni la relación entre las variables y el efecto que tiene la variación de una de ellas en la otra. Pocos son los alumnos que solo visualizando la gráfica de la parábola señalan el vértice, identifica la concavidad y las intersecciones con los ejes. No relacionan la representación gráfica con la analítica. El investigador observó que los alumnos buscan elementos a memorizar y trabajan en general usando algoritmos o fórmulas memorizadas.

En cuanto a los trabajos que abordan las distintas formas en las que se organiza la función cuadrática en las prácticas matemáticas, se tiene lo siguiente:

Lucas (2010) realizó un estudio de las Organizaciones Matemáticas Locales Relativamente Completas y se identificó la disparidad entre la preparación obtenida por la mayoría del alumnado en secundaria y la preparación esperada de esos alumnos por los profesores universitarios. El autor estudió el Problema de Investigación Docente en la Matemática Institucional que consiste en la desaparición de la razón de ser de los contenidos que constituyen el programa oficial de la enseñanza secundaria, la ausencia de conexión entre ellas, la falta de interdisciplinariedad, la inexistencia de momentos de cuestionamiento y justificación de técnicas utilizadas. Dado que este estudio se apoya en la Teoría Antropológica de lo Didáctico donde el objeto primario de investigación es el análisis de la actividad escolar matemática con sus relaciones humanas enmarcadas en ciertas instituciones sociales, también realizaron estudios exploratorios en los diseños curriculares y los libros de texto de Matemática. Con los datos aportados en este trabajo se tienen nuevas evidencias empíricas para sustentar la hipótesis de que las citadas características de las Organizaciones Matemáticas escolares lejos de ser únicamente un conjunto de hechos circunstanciales propios de una institución concreta en un período de tiempo determinado, constituyen un fenómeno didáctico-matemático.

En la misma dirección, en el trabajo de Parra, Otero y Elichiribehety (2006) reconstruye y describe una Organización matemática de referencia relativa a las nociones de límite y continuidad de funciones reales. Los autores describen el sentido matemático, social y cultural de esta organización matemática (OM) de referencia. Donde se detallan los componentes prácticos-técnicos y tecnológicos-teóricos de la OM; es decir, los tipos de tareas, las técnicas matemáticas, las tecnologías y teorías. Donde los investigadores analizaron la enseñanza de la matemática en el nivel universitario. También afirman que estudiar matemáticas genera dificultades en los estudiantes detectándose altos niveles de fracaso y deserción de los estudiantes. Por ello, los autores afirman que resulta de interés analizar las características que reviste el estudio de las matemáticas en esos primeros años.

La función cuadrática ha sido estudiada o investigada en relación a las dificultades de los estudiantes que presentan en los distintos tratamientos a realizar en las praxeologías de dicho objeto matemático; como es el caso de tener que modelar un problema que esté escrito en lenguaje verbal, traducir del lenguaje algebraico al simbólico, etc. También hemos encontrado otros trabajos donde se trata de averiguar otros aspectos de estas praxeologías.

En este trabajo deseamos analizar y reorganizar los tipos de tareas y técnicas de la función cuadrática, con la intención de tratar la incompletitud que encontraremos en los libros de texto tomados como muestra.

## 1.2. Consideraciones sobre la función cuadrática desde la perspectiva cognitiva

Según nuestros antecedentes encontramos diversas dificultades que presentan los estudiantes en el proceso enseñanza y de aprendizaje en relación al objeto función cuadrática. En base a estas dificultades podemos clasificarlas de acuerdo a dos características importantes que encontramos en los distintos tipos de tareas, debido a ello formamos dos grupos a los que denominamos criterio 1 y criterio 2. Con respecto al criterio 1 se consideró aquellas tareas que establecen conexión entre su representación gráfica y analítica; y en el criterio 2 se consideró aquellas tareas donde se requiere la identificación de la función cuadrática en un enunciado dado en lenguaje verbal usando términos de la especialidad. Dichos criterios son tomados en cuenta para la descripción y análisis de los libros de texto seleccionados.

Las dificultades de los estudiantes en relación a la función cuadrática encontradas en investigaciones previas se han organizado de la siguiente manera:

### 1.2.1. Dificultades de los alumnos en las tareas que requieren establecer conexiones entre representaciones gráficas y analíticas: Criterio 1

En relación al criterio 1 basado en los tipos de tareas que requieren establecer conexiones entre representaciones gráficas y analíticas, en las investigaciones previas se identificó las siguientes dificultades de los estudiantes:

Según el estudio de Cuesta (2007) los estudiantes muestran las siguientes dificultades:

- En los conceptos de dominio e imagen, la relación entre las variables de una función y las diferentes formas de representación de una función.
- Al abordar las representaciones algebraica y gráfica de una función como conceptos independientes. El estudiante asume por función sólo la expresión algebraica y en el que la tabla de valores constituye una herramienta para hacer de la función (la representación algebraica) una gráfica.
- Al asociar el máximo y mínimo con la idea de altura. El estudiante vincula la existencia del máximo de la función con el valor más alto y la del mínimo con el valor más bajo.

Según el estudio de Félix (2009) los estudiantes muestran las siguientes dificultades:

- En la práctica relacionada con la función cuadrática los estudiantes a partir de una tabla de datos no son capaces de distinguir si la relación es cuadrática o no y tampoco pueden simbolizarla. Algunos alumnos no logran distinguir: su vértice, ni las intersecciones con los ejes, la relación entre las variables y su variación conjunta. Pocos son los alumnos que responden solo visualizando la gráfica de la parábola: el valor de vértice, identificación de la concavidad y las intersecciones con los ejes. No relacionan la representación gráfica con lo analítico.

A continuación, mostramos una actividad en la que presenta los tipos de tareas que realizaron los alumnos y a partir de ellas se llegaron a las conclusiones dadas.

### Actividad #2

Si  $f(x)=x^2-9$ , completa la siguiente tabla y contesta las preguntas:

- ¿Para qué valor de  $x$  la  $y$  tiene el valor mínimo? Con qué fórmula lo encontrarías? ¿Cuál es el correspondiente valor de  $y$  para ese valor de  $x$ ?
- Escribe una fórmula para encontrar los valores de  $x$  para los cuales la gráfica de la función intercepta al eje  $X$ , y también para encontrar el valor de  $y$  para el cual la gráfica de la función intercepta al eje  $Y$ . ¿cuáles son esos valores?
- Grafica la función usando papel y lápiz
- Encuentra los valores de la variable independiente para los cuales la función crece y decrece.
- Encuentra los valores de  $x$  para los cuales la función es positiva y para los que la función es negativa.
- Encuentras algún o algunos valores de la variable independiente para los cuales la función  $f(x)$  tome el mismo valor? ¿Cuántos? En general, ¿para cuántos valores de  $x$  obtendrías el mismo valor de la función  $f(x)$ ? ¿Cómo explicas esto a partir de la gráfica de la función?
- Podrías encontrar un valor para  $f(x)$  al que le corresponda únicamente un valor de  $x$  ¿qué valor sería? Localízalo en la gráfica.

Figura 1.1: Actividad 2. Tomado de Félix 2009, p.56-58

- El conocimiento de los estudiantes del concepto de variable y de parámetro no es significativo. No logran distinguir las variables de los parámetros, ni interpretar para cada uno de ellos sus distintos usos (como incógnita, número general, variable relacionada). Los alumnos presentaron gran dificultad en la interpretación, la manipulación y la simbolización de parámetros en general. Menciona que para lograr que los estudiantes distingan a los parámetros de otras variables y les den significado es necesario que los alumnos conozcan el significado de la generalización de segundo orden, porque de lo contrario interpretan a los parámetros sólo como número general como arrojaron los resultados del análisis del cuestionario. También encontró que a pesar de que los alumnos utilizan procedimientos y técnicas para resolución de problemas, el aprendizaje es sólo memorizado y no se logra ningún tipo de comprensión del concepto de variable ni de parámetro. Los estudiantes resuelven problemas utilizando pasos en sus procedimientos que ejecutan de manera mecánica. Esta investigación cuestiona al igual que otras investigaciones la forma y los métodos de enseñanza.
- Al usar variables y parámetros y en algunos casos prevalecieron a pesar de la didáctica empleada. Se observó que algunos estudiantes no aplican las propiedades en expresiones

algebraicas de manera correcta; desarrollan según “sus reglas” demostrando que su manejo de la variable como número general no es sólido, muestran dificultades para pasar de un uso de la variable de forma flexible en un mismo problema.

- Cuando los alumnos manipulan la variable, se observa nuevamente diferencia entre aquellos alumnos que se beneficiaron del método y aquéllos que no lo hicieron cabalmente. Los resultados muestran claramente que tienen dificultades con la interpretación y simbolización de las variables, no usan la notación adecuada y confunden; por ejemplo, expresiones algebraicas en las que la variable es un número general con ecuaciones en las que la variable es una incógnita y las resuelven para encontrar valores específicos, cuando la variable o el parámetro pueden representar cualquier valor. También en ejercicios que requieren manipular, muestran todavía problemas para reconocer o usar las estructuras adecuadas; por ejemplo, muestran una tendencia a igualar a cero y a manipular la variable aunque no se trate de una ecuación, como ya se ha referido en múltiples estudios acerca del aprendizaje del álgebra. Estas dificultades están asociadas a una falta de sentido de estructura que se manifiesta al utilizar paréntesis o no tener cuidado con la precedencia de operaciones.
- En ejercicios hechos en clase y aplicados en exámenes donde el parámetro representaba a una incógnita, muchos alumnos no fueron capaces de interpretar el significado del parámetro. Estos alumnos pueden interpretar a las variables  $x$  o  $y$  como incógnitas cuyo valor desconocido intentan determinar, sin embargo, cuando una ecuación ya sea de primer o segundo grado incluye además un parámetro, los alumnos ya no son capaces de interpretarlo e incluso mencionan que no entienden qué es lo que se les pide. A diferencia de lo que se ha encontrado en otros estudios, en los que simplemente se especifica que los alumnos muestran una tendencia a ignorar el parámetro; lo que se observa en éste, es que la razón por la cual los estudiantes ignoran el parámetro es porque no le dan un significado específico.

### 1.2.2. Dificultades de los alumnos en las tareas que requieren la identificación de la función cuadrática dado en lenguaje verbal: Criterio 2

En relación al criterio 2 basado en los tipos de tareas que requieren la identificación de la función cuadrática dado en lenguaje verbal, en las investigaciones previas se identificó las siguientes dificultades de los estudiantes, según Cuesta (2007):

- En relación a la comprensión de plantear y resolver problemas de optimización, refiriéndose a la traducción del lenguaje verbal al lenguaje algebraico y muchas veces a partir de este no llegan a la solución deseada.
- Presenta las diferentes dificultades encontradas con respecto al concepto de función y concepto de extremo de una función.

Los extremos del análisis dan constancia sobre la existencia de dificultades en la comprensión del concepto de extremo de una función, causadas por tres factores:

- las experiencias previas del estudiante no necesariamente vinculadas con el contexto matemático,
- los conocimientos de aritmética, de geometría y de álgebra; y
- el conocimiento del propio concepto de función. Existe además, una idea intuitiva sobre máximo y mínimo de una función que relaciona éstos con la idea de altura.

En esta parte del trabajo se asume que el concepto de función era “conocido” por los estudiantes. Pero resulta que la propia expresión constituye una dificultad en el aprendizaje del concepto de extremo, por varias razones:

- El concepto de dominio de la función causa dificultad en la comprensión del concepto de función,
- Se pone demasiado énfasis en la expresión algebraica de la función y se olvida su propio significado.

En base a los resultados anteriores, se intenta profundizar en las dificultades en el marco de la relación que existe entre el concepto de extremo y el concepto de función. Los resultados del análisis de la existencia de dificultades relacionadas con los conceptos de función y extremo de una función se pueden resumir como siguen, según Cuesta 2005:

- Muchos de los argumentos se basan en una interpretación literal (lenguaje icónico) sin comprensión del significado de los conceptos y expresiones.

A manera de síntesis, describimos las siguientes dificultades de los estudiantes cuando resuelven las diferentes tareas con relación a la función cuadrática. Podemos ver que siete de ellas están relacionadas con el criterio 1 donde los estudiantes establecen conexiones entre representaciones gráficas y analíticas; y dos están relacionadas con el criterio 2 donde los estudiantes deben realizar la identificación de la función cuadrática dado en lenguaje verbal.

Tabla 1.1: Síntesis de las dificultades en los estudiantes encontradas en los trabajos previos

N°	DIFICULTADES SEGÚN EL CRITERIO 1
1	No relacionan la representación gráfica con la analítica.
2	A partir de una tabla de datos no son capaces de distinguir si la relación es cuadrática o no.
3	A partir de una gráfica de función cuadrática, no logran distinguir su vértice.
4	A partir de una gráfica de función cuadrática, no logran distinguir las intersecciones con los ejes.
5	A partir de una gráfica de función cuadrática, no logran distinguir la relación entre las variables y su variación conjunta.
6	A partir de una gráfica de función cuadrática, no logran la identificación de la concavidad.
7	En la manipulación de los parámetros que aparecen en la transformación de funciones cuadráticas.
.	DIFICULTADES SEGÚN EL CRITERIO 2
8	Al traducir del lenguaje natural al lenguaje algebraico problemas de optimización aplicados a la Economía.
9	Al resolver problemas de optimización en economía no llegan a la solución.

### 1.3. Preguntas y objetivos de investigación

Debido a las investigaciones previas se han identificado dificultades que presentan los alumnos en el aprendizaje de la “función cuadrática”, por tal motivo en esta investigación se consideró hacer un estudio a los libros de texto sobre este objeto en base a las siguientes preguntas

- ¿Cómo se presentan las organizaciones matemáticas en torno a la función cuadrática en los libros de texto empleados en la enseñanza universitaria en la escuela de Economía?.
- La forma en que es presentada esta organización didáctica, ¿contribuye para enfrentar las dificultades que tienen los estudiantes en su aprendizaje del objeto en estudio?

y se desprenden los siguientes objetivos:

- Objetivo General
  - Describir y analizar las organizaciones matemáticas en torno a la función cuadrática en los libros de texto de enseñanza universitaria en la escuela de Economía.

- Objetivos Específicos
  - Describir las organizaciones matemáticas desde la concepción epistemológica de la Teoría Antropológica de lo Didáctico.
  - Definir los criterios para el análisis de los libros de texto seleccionados, teniendo en cuenta las dificultades de los estudiantes al ejecutar las tareas y la postura epistemológica adoptada con respecto al objeto en estudio.
  - Describir y analizar las organizaciones matemáticas de la función cuadrática en los libros de texto seleccionados.
  - Identificar y organizar los tipos de tareas, técnicas y tecnologías relacionadas con la función cuadrática, en los libros de texto según la postura epistemológica adoptada.
  - Analizar si la forma en la que los libros de texto organizan el tema en estudio contribuye a superar las dificultades de los estudiantes detectados en trabajos previos.
  - Proponer modificaciones a las organizaciones didácticas en torno a la función cuadrática identificada en los libros de texto, tomando en cuenta los resultados de dicho análisis desde la postura adoptada.

#### 1.4. Método y procedimientos a seguir en la investigación

Este trabajo está dentro del enfoque cualitativo de tipo bibliográfico.

A continuación se describen los pasos a seguir para la realización de los objetivos planteados.

Primero se indagó sobre investigaciones relacionadas con la ecología del tema función cuadrática de acuerdo: i) a las dificultades presentadas por los estudiantes, las mismas que motivaron a seguir en la investigación y ii) al tratamiento que se daba a la organización matemática de la función cuadrática, según la teoría adoptada.

Luego se adoptó una postura respecto a la Organización Matemática de referencia, teniendo en cuenta los diversos trabajos relacionados con las Organizaciones Matemáticas asociadas a la función cuadrática; de acuerdo a García (2005), Parra, Otero y Elichiribehety (2006) e Ibarra et al. (2011). Se consideró el libro de texto Geometría Analítica de Lehmann (1980) que se caracteriza por un tratamiento formal para poder establecer las semejanzas o diferencias encontradas con este saber sabio en los libros de texto como material de estudio para los

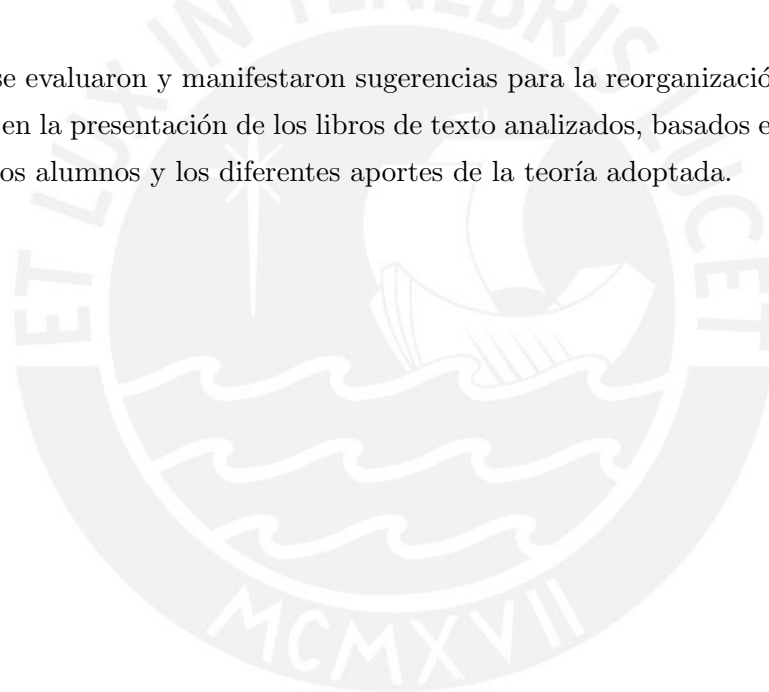
lectores.

Después se identificó las praxeologías en las organizaciones Matemáticas de Referencia, para luego definir las Organizaciones Matemáticas asociadas a la función cuadrática que se consideraron en esta investigación.

Seguidamente se definieron los criterios para realizar la descripción y análisis de las praxeologías del tema en estudio en los libros de texto, considerando las dificultades de los estudiantes y la postura epistemológica adoptada.

Posteriormente se realizó la descripción y análisis de las Organizaciones Matemáticas de la función cuadrática de los libros de texto, teniendo en cuenta los criterios definidos previamente. De acuerdo al análisis se describieron los alcances y limitaciones de la investigación

Por último, se evaluaron y manifestaron sugerencias para la reorganización de una organización didáctica en la presentación de los libros de texto analizados, basados en las dificultades encontradas en los alumnos y los diferentes aportes de la teoría adoptada.



## Capítulo 2

# Marco teórico: Un modelo epistemológico de referencia en torno a la función cuadrática

### 2.1. Teoría Antropológica de lo Didáctico

En este trabajo adoptaremos el principio que para responder a cualquier cuestión que surge en el sistema de enseñanza de las matemáticas se debe considerar inseparables las dimensiones “matemática” y “didáctica”, integrándolas en una única dimensión “didáctico matemática” que constituye el núcleo del objeto de estudio de la didáctica de la matemática. Este enfoque es la Teoría Antropológica de lo Didáctico, que permite la integración de estas dos dimensiones y nos proporciona los principales elementos del marco teórico utilizado (Sierra, 2006).

#### 2.1.1. Algunos elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) aparece con las primeras formulaciones de la Teoría de Transposición Didáctica de Chevallard (1985).

La TAD asume que el saber matemático se construye como respuesta a situaciones problemáticas y surge como el producto de un proceso de estudio. Propugna que la actividad matemática debe ser interpretada o mejor dicho modelizada como una actividad humana como las demás, en lugar de considerarla como un sistema de conceptos o como un proceso cognitivo, citado en Sierra (2006).

Esta teoría supone que toda actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo único, que se resume con la palabra praxeología. El término praxis hace referencia al “saber hacer”; es decir, los tipos de problemas o tareas que se estudian y las técnicas que se construyen para solucionarlos. El término logos, se identifica con el “saber” e incluye las descripciones y explicaciones que nos permiten entender las técnicas; esto es, el discurso

tecnológico y la teoría que da sentido a los problemas planteados. Tipos de tareas, técnica, tecnología y teoría son los elementos que componen una praxeología según Bosch, Espinosa y Gascón (2003).

Distingue así diferentes tipos de “saberes” o “régimenes epistemológicos” de las matemáticas según si se considera el saber matemático “original” o “sabio”, tal como lo producen los matemáticos y otros investigadores; el saber matemático “a enseñar” tal como se designa oficialmente en los programas y libros de texto o tratados por la enseñanza; el saber matemático “aprendido” en el sentido de “disponible” para los alumnos al final de los procesos de aprendizaje (ver Figura 2.1).



Figura 2.1: Etapas en el proceso de transposición didáctica. Tomado de Chevallard, 1985

En esta investigación nos situamos explícitamente en el programa epistemológico y dentro de este, en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Esto supone que consideraremos como objeto primario de investigación la actividad matemática desde una perspectiva epistemológica e institucional. Desde el programa epistemológico se postula que una posible vía de entrada a los fenómenos didácticos es a partir del cuestionamiento y modelización de su componente matemática y es esa vía la que queremos explorar.

En base a nuestra teoría tenemos la necesidad de incluir en la problemática didáctica un microanálisis, que englobe el carácter institucional tanto de las prácticas de enseñanza y aprendizaje que se desarrollan en el interior del sistema didáctico, como el de las mismas prácticas matemáticas que se tratan de enseñar, aprender y que no se circunscriben en el marco escolar, según Batanero (2009).

Según Bosch y Gascón 2006, citado en García, 2005 el proceso de transposición didáctica comienza lejos de la escuela, en la elección de los cuerpos de conocimiento que se desea transmitir una vez realizada la elección, se genera un tipo de trabajo claramente creativo que se puede describir como un proceso de desconstrucción y reconstrucción de los diferentes elementos de esos conocimientos, con el objeto de hacerlos “enseñables” preservando su potencia y funcionalidad.

El trabajo transpositivo lo lleva a cabo una pluralidad de agentes, la “noosfera”; incluyendo los responsables de diseñar e implementar los planes de estudio, los matemáticos o científicos

productores del conocimiento matemático, los miembros del sistema de enseñanza (profesores en particular) y todo esto bajo unas condiciones históricas e institucionales que no son siempre fáciles de discernir. También hacen mención a las restricciones transpositivas que afectan la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles educativos.

La limitación más fuerte ocurre cuando el proceso de transposición no es capaz de mantener o recrear una posible “razón de ser” de los conocimientos que la escuela se propone transmitir. ¿Por qué son importantes los triángulos? ¿Para qué sirven los límites de funciones? ¿Por qué necesitamos los polinomios? Una enseñanza que no toma en consideración estos interrogantes se convierte rápidamente en lo que Chevallard (2004) denomina una educación “monumentalista”, donde se invita a los estudiantes a contemplar unos instrumentos que la humanidad construyó con esfuerzo, que sirvieron para grandes propósitos y que hay que conocer y admirar aunque ya no se sepa cuál es su utilidad, según García (2005).

Cabe destacar que las tareas o tipos de tareas no son datos que nos proporciona la naturaleza, estos son “obras” que provienen de cierta construcción institucional y cuya reconstrucción en cierta institución es un objeto de estudio de la didáctica. Lo mismo puede decirse del resto de componentes de las praxeologías.

Las tareas problemáticas o cuestiones asociadas a una OM acaban cristalizando en uno o más tipos de problemas, generados por el desarrollo de la actividad matemática del estudio de las cuestiones iniciales. En general podemos decir que si un tipo de problemas es considerado en cierta institución es porque existe una técnica matemática que permite no solo resolver estos problemas, sino también en generar muchos más problemas del mismo tipo. En breve podemos decir que los componentes de una OM ponen de manifiesto que lejos de ser independientes, estos componentes están fuertemente relacionados entre sí. Con ello queremos decir que, por ejemplo el desarrollo de las técnicas genera nuevos tipos de problemas y provoca nuevas necesidades tecnológicas, o más en general, el bloque práctico-técnico no puede vivir aisladamente en una institución, requerirá la existencia del “discurso racional” que justifique la técnica y muestre su pertinencia para llevar a cabo el tipo de tareas. El sistema formado por estos dos bloques, o cuatro componentes, constituye una praxeología (organización) matemática que consideramos la unidad mínima en que puede ser descrita la actividad matemática, citado en García (2005).

### 2.1.2. Modelización de la Actividad Matemática

Con el objetivo de encontrar la modelización explícita y contrastable de la actividad matemática, considerada dentro del conjunto de actividades humanas que se llevan a cabo en las diferentes instituciones sociales, Chevallard (1996) introdujo a mediados de los años 90 la noción de praxeología u organización matemática (OM) que es una de las nociones clave de la TAD. Como uno de sus postulados básicos, esta teoría introduce la noción de praxeología negando la visión particularista del mundo social e incluyendo la actividad matemática dentro

de un modelo más amplio de actividad humana.

Según Chevallard (1999) la TAD asume que el saber matemático se construye como respuesta a situaciones problemáticas y surge como el producto de un proceso de estudio. Esta teoría supone que toda actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo único, que se resume con la palabra praxeología.

La noción de praxeología constituye así la herramienta fundamental para modelizar la actividad matemática como una actividad humana más, que se propone desde la TAD. Conciensamente en toda actividad humana es posible distinguir entre:

- a) El nivel de la praxis o del “saber hacer”, que engloba un cierto tipo de problemas y cuestiones que se estudian, así como las técnicas para resolverlos.
- b) El nivel del logos o del “saber”, en el que se sitúan los discursos que describen, explican y justifican las técnicas que se utiliza, y que recibe el nombre de tecnología. Dentro del “saber” se postula un segundo nivel de descripción-explicación-justificación (esto es, el nivel de la tecnología) que se denomina teoría.

De acuerdo a la TAD no pueden existir acciones humanas sin ser “explicadas”, hechas “inteligibles”, “justificadas” de alguna manera. La praxis, por tanto, implica el logos que, a su vez, implica volver a la praxis. En efecto, toda praxis requiere un apoyo en el logos, porque a la larga, ningún quehacer humano permanece sin cuestionar.

De manera simplificada, es posible afirmar que lo que se aprende y enseña en una institución escolar son praxeologías matemáticas o al menos, ciertos componentes de estas. Las praxeologías rara vez son personales, más bien son compartidas por grupos de seres humanos organizados en instituciones.

Según Chevallard (1999) la TAD distingue dos tipos de praxeologías u organizaciones: las Organizaciones Matemáticas (OM) y las Organizaciones Didácticas (OD). Las primeras se refieren a la realidad matemática que se pretende estudiar, es el resultado de la construcción y las segundas, a la forma en que eso ocurre, es el proceso de estudio y construcción. Se trata, en efecto, de dos aspectos inseparables porque no hay organizaciones matemáticas sin un proceso de estudio que las genere, pero tampoco hay un proceso de estudio sin organizaciones matemáticas en construcción. Ambas praxeologías matemáticas y didácticas, tienen como componentes: un bloque práctico-técnico (saber hacer) formado por tareas y técnicas; y un bloque tecnológico-teórico (saber), formado por tecnologías y teorías.

Las tareas problemáticas o cuestiones asociadas a una OM acaban cristalizando en uno o más tipo de problemas, generados por el desarrollo de la actividad matemática del estudio de las cuestiones iniciales. En general, podemos decir que si un tipo de problemas es considerado en cierta institución es porque existe una técnica matemática que permite no solo resolver estos problemas, sino también generar muchos más problemas del mismo tipo.

En una institución en relación a cierto tipo de tarea, suele existir en general una sola técnica (técnica canónica) o un pequeño número de técnicas institucionalmente reconocidas que puedan existir en otras instituciones. Esta exclusión tiene relación con la ilusión de “naturalidad” de las técnicas institucionales; ninguna técnica puede vivir con normalidad en una institución sino aparece como una manera de hacer o proceder correcta, comprensible y justificada. Por lo tanto, la existencia de una técnica supone que existe en su entorno un discurso interpretativo y justificativo de la técnica, que es lo que llamamos una tecnología que además de justificarla y hacerla inteligible, tiene la importante función de aportar elementos para modificar la técnica con la finalidad de ampliar su alcance para poder superar sus limitaciones y hacer posible la producción de nuevas técnicas. La tecnología asociada a una técnica es un discurso matemático que requiere una interpretación y justificación institucional.

Esta breve descripción de los componentes de una OM pone de manifiesto, que lejos de ser independientes estos componentes están fuertemente relacionados entre sí. Con ello queremos decir que, por ejemplo, el desarrollo de las técnicas genera nuevos tipos de problemas y provoca nuevas necesidades tecnológicas, o más en general, el bloque práctico-técnico no puede vivir aisladamente en una institución, requerirá de la existencia de “discurso nacional” que justifique la técnica y muestre su pertinencia para llevar a cabo el tipo de tareas.

Dentro de este modelo hacer matemáticas consiste en activar una organización matemática, es decir, resolver determinados tipos de problemas con determinados tipos de técnicas (el saber hacer), de manera inteligible, justificada y razonada (mediante el correspondiente saber). Este trabajo puede conducir a la construcción de nuevas organizaciones matemáticas o, simplemente, a la reproducción de organizaciones previamente construidas. Enseñar y aprender matemáticas corresponde a la actividad de reconstruir organizaciones matemáticas para poderlas utilizar en nuevas situaciones y bajo distintas condiciones según Bosch (2009).

Como en toda organización praxeológica, una OD se articula en tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías didácticas. La consideración de diversos procesos de estudio permite detectar varios aspectos o tipos de situaciones que necesariamente están presentes en todos ellos; es decir, dimensiones que estructuran cualquier proceso de elaboración matemática independientemente de las características culturales, sociales, individuales, etc. Dicha noción se utiliza no tanto en el sentido cronológico como en el sentido de dimensión de la actividad. Chevallard (1999) postula que el proceso de estudio se sitúa en un espacio determinado por seis momentos didácticos, sin presuponer una estructura lineal de los procesos de estudio (Barquero, 2009).

### 2.1.3. Tipos de praxeologías

Con el objetivo de tener herramientas más precisas para analizar los procesos didácticos institucionales, Chevallard (1999) introdujo los diferentes tipos de praxeología según el grado de complejidad de sus componentes: organizaciones puntuales, locales, regionales y globales.

- a) Las praxeologías puntuales: en este primer tipo de organización los tipos de problemas y las técnicas tienen un claro papel predominante, hasta el punto que la praxeología puntual queda caracterizada a partir de su bloque práctico-técnico. Son muy pocos los casos en que se encuentran las praxeologías puntuales ya que generalmente, una teoría responde a varias tecnologías, cada una de las cuales a su vez justifica y hace inteligible varias técnicas correspondientes a varios tipos de tareas.
- b) Las praxeologías locales: son el primer resultado de integración de diversas praxeologías puntuales. Cada praxeología local está caracterizada por una tecnología que sirve para justificar, explicar, relacionar entre sí y producir las técnicas de todas las praxeologías puntuales que se integran. En general, las praxeologías puntuales se integran en praxeologías locales para poder dar respuesta a cuestiones problemáticas que no podían ser resueltas con ninguna de las praxeologías puntuales de partida.
- c) Las praxeologías regionales: se obtienen mediante la coordinación, articulación y posterior integración en torno de una teoría matemática común de diversas praxeologías locales. Esta integración comporta que el discurso teórico tome el papel central. La reconstrucción institucional de una teoría matemática requiere elaborar un lenguaje común que permita describir, interpretar, relacionar y producir las diferentes tecnologías de las praxeologías locales que acaban constituyendo la praxeología regional.

En los diferentes trabajos efectuados en el marco de la TAD encontramos descripciones donde informan que las OM locales que aparecen en las instituciones escolares son incompletas.

Las estructuras de las OM locales relativamente completas deben cumplir con la condición de la integración de los tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías; y de las relaciones entre ellas. En todos los casos, el discurso tecnológico debe adquirir mayor funcionalidad, especialmente en la interpretación del funcionamiento de las técnicas y de su resultado.

Las praxeologías matemáticas no surgen de forma instantánea en las instituciones, ni aparecen acabadas de forma definitiva. Más bien, al contrario son el resultado de un trabajo complejo y continuado que se realiza durante largo tiempo, en cuya dinámica de funcionamiento existen ciertas relaciones invariables y que, por tanto, es posible modelizar. Aparecen aquí los dos aspectos inseparables del trabajo matemático: por un lado, el proceso de construcción matemática, esto es, el proceso de estudio y, por otro lado, el resultado mismo de esta construcción, es decir, la praxeología matemática. En efecto, no hay organización matemática sin un proceso de estudio que la engendre, pero tampoco hay proceso de estudio sin una organización matemática en construcción. Proceso y producto son dos caras de una misma moneda. Ante una tarea problemática, el matemático usa y construye matemáticas realizándolo todo a la vez (García, 2005).

Para este estudio en funciones cuadráticas se consideraron las organizaciones puntuales (OMP) como un único tipo de tarea y definida a partir del bloque práctico-técnico; las organizaciones locales (OML) que resultan de integrar diversas praxeologías puntuales y la organización regional donde tenemos la teoría de la función cuadrática.

#### 2.1.4. Categorías de Organizaciones Matemáticas.

Las organizaciones matemáticas las categorizaremos según Parra y Otero (2007) de la siguiente manera:

- a) Organización matemática de referencia, es donde vive el saber sabio. La construcción de esta OM dependerá no solo de las nociones matemáticas, sino también de las consideraciones personales del investigador y de las características propias de la institución en la que se desarrollan las OM, que serán utilizados para organizar los criterios de los libros de texto. Bosch et al. (2003) definen una OM de referencia, como un modelo de OM que permite analizar las reconstrucciones propuestas en los programas oficiales y en los libros de texto sobre ciertos temas de estudio, cuestiones o nociones.
- b) Organización matemática propuesta para enseñar, para la construcción de esta OM se analizan diversos libros de texto con referencia al objeto en estudio. Se distinguen dos tipos de OMPE, dependiendo del origen de los datos: i) Organización matemática propuesta para enseñar en los libros de texto, y ii) Organización matemática propuesta para enseñar en el material teórico práctico.
- c) Organización matemática efectivamente enseñada. Esta OM se construye considerando los registros de clase y las notas de campo.

Para el presente estudio nos centramos en las Organización matemática de referencia y Organización matemática propuesta para enseñar en los libros de texto.

En la organización matemática de referencia quedan definidos los tipos de tareas, las diferentes técnicas, la aparición de nuevas técnicas que generan nuevas tareas; con esto se amplía el marco teórico-tecnológico para justificar las técnicas a través de la teoría. Se tomaron en cuenta los trabajos de investigación de García (2005), Parra y Otero (2007) e Ibarra et al. (2011) para la construcción de nuestra organización matemática de referencia.

Organización matemática propuesta para enseñar en los libros de texto, para la construcción de esta OM se han analizado dos libros de texto referidos al Análisis matemático y sus aplicaciones en la Economía. La elección se debe a la referencia de la bibliografía del curso y a la recomendación de profesores.

#### 2.1.5. Indicadores de las Organizaciones Matemáticas Locales (OML)

Para el estudio de estas organizaciones matemáticas contamos con el trabajo de Lucas (2010) donde presenta Organizaciones Matemáticas Locales Relativamente Completas 1.

En la TAD toda actividad de estudio e investigación parte de una cuestión generatriz, formulada en una institución que permite hacer emerger un tipo de problemas y una técnica de resolución de dichos problemas, así como una tecnología apropiada para justificar y comprender mejor la actividad matemática que se ha llevado a cabo.

El trabajo de Fonseca (2004) pone de manifiesto una extraordinaria rigidez en la enseñanza secundaria de las matemáticas. El alumnado tiene problemas con la nomenclatura, maneja una sola técnica, no es capaz de distinguir entre tarea directa y tarea inversa, no interpreta las técnicas y, lo que es más importante tiene una extraordinaria dificultad para trabajar con tareas abiertas.

La respuesta a esta problemática fue la creación del trabajo de Fonseca (2004) de un nuevo dispositivo didáctico, situado dentro de la ingeniería didáctica: “Organizaciones Matemáticas Locales Relativamente Completas (OMLRC)”, que posibilita la conexión entre la Enseñanza Secundaria y la Enseñanza Universitaria niveles poco estudiados desde la investigación experimental.

El proceso de estudio de una OMLRC tiene dos partes diferenciadas, una relativa al proceso de construcción o reconstrucción de la propia OM determinada por los Momentos Didácticos y otra relativa al propio producto resultante, que viene determinado por unos indicadores. Es a partir de ambas facetas: proceso de construcción y producto como se determina el grado de completitud de la OML:

- a) El proceso de construcción de una OMLRC, es un proceso de Ingeniería Didáctica y viene caracterizado mediante determinadas propiedades y relaciones entre los Momentos Didácticos.
- b) El proceso de construcción de la OM es un producto de Ingeniería Matemática. Para medir el grado de completitud de una Organización Matemática Local utilizaremos los indicadores referidos por Fonseca, 2004, citado en Lucas, 2010 y un indicador más reciente al final:
  - OML1. Deben aparecer tipos de tareas asociados al “cuestionamiento tecnológico”; esto es, tareas que hagan referencia a la interpretación, la justificación, la fiabilidad, la economía y el alcance de las técnicas, así como a la comparación entre ellas. El grado de completitud dependerá del grado de integración de todos los tipos de tareas. Una OML será menos completa cuantos más tipos de tareas aisladas existan; esto es, tareas realizables mediante técnicas que no están relacionadas entre sí por ningún elemento tecnológico.
  - OML2. Existencia de diferentes técnicas para cada tipo de tareas y de criterios para elegir entre ellas. Una OML será más completa en la medida que, dado un tipo

concreto de tareas de OML, existan dos o más técnicas que permitan realizar algunas de las tareas concretas de ese tipo. Este indicador de la completitud comporta que en la OML existan, además, los elementos tecnológicos que permiten discernir para cada tarea concreta, cuál es la técnica más fiable y económica para llevar a cabo dicha tarea.

- OML3. Existencia de diferentes representaciones de la actividad matemática. La flexibilidad de las técnicas utilizadas debe permitir la utilización de diferentes representaciones, pero también deben existir criterios explícitos para elegir la representación más adecuada, dependiendo de la actividad matemática en la que estas técnicas se hayan inmersas.
- OML4. Existencia de tareas y de técnicas “inversas” . La flexibilidad de las técnicas debe también permitir trabajar tareas inversas como, por ejemplo, aquellas definidas intercambiando los datos y las incógnitas del problema o, a partir de la respuesta, analizar la situación de partida.
- OML5. Interpretación del funcionamiento y del resultado de la aplicación de las técnicas. Debe existir un tipo de tarea que permita al alumno interpretar el real funcionamiento de una técnica para, a posteriori, percibir su beneficio matemático o ventaja en relación con otras técnicas.
- OML6. Existencia de tareas matemáticas “abiertas” . En las tareas abiertas los datos se tratan como si fuesen desconocidos (parámetros) y las incógnitas no son valores concretos sino las relaciones que se establecen entre ellos. El estudiante ha de decidir, ante una situación matemática o extra matemática determinada, qué datos debe utilizar y cuáles son las incógnitas. En este nivel se incluyen las tareas de modelización matemática.
- OML7. Necesidad de construir técnicas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas. Simultáneamente, la tecnología y la teoría son los componentes para la construcción de técnicas nuevas, capaces de ampliar los tipos de problemas que se pueden abordar y en consecuencia, los tipos de tareas de una organización matemática local.
- OML8. La posibilidad de perturbar la situación inicial o modificar la hipótesis del sistema para estudiar casos diferentes permite ampliar y completar el proceso de estudio.

Hay que subrayar, que la noción de “completitud” es relativa. No tiene sentido hablar de OML “completas” ni de OML “incompletas”. Se trata, en todo caso, de una cuestión de grado: existen OML más o menos “completas” que otras en función del grado en que sus componentes cumplen las condiciones descritas por los indicadores de Fonseca. El estudio de las Organizaciones Matemáticas Locales Relativamente Completas posibilitan la conexión entre la Enseñanza de Secundaria y la Enseñanza Universitaria, niveles pocos estudiados desde la investigación experimental por Bosch, Fonseca y Gascón (2004).

## 2.2. La actividad algebraica como instrumento de modelización.

Como se ha mostrado el enfoque antropológico postula desde sus inicios que, la actividad de modelización matemática es el núcleo de la actividad matemática. Como afirma Bolea (2002) este postulado lleva a introducir en la descripción de la actividad (intra) matemática las nociones básicas de la modelización matemática. En particular se habla de la producción de conocimientos (matemáticos) relativos a un sistema (matemático), gracias a la utilización de un modelo matemático de dicho sistema. Se postula que toda actividad matemática puede ser interpretada como una actividad de modelización.

La relación de dependencia entre variables, el uso de las letras en sus diferentes formas, el uso de notaciones, algoritmos y herramientas algebraicas utilizadas para la resolución de problemas, entre otros, sitúan al álgebra como una materia de gran importancia que debería servir a la vez, para modelizar sistemas matemáticos y extra matemáticos.

Según Chevallard (1989, 1990) se interpreta la actividad algebraica esencialmente como un instrumento de modelización de sistemas matemáticos, designado como el proceso de algebrización de organizaciones matemáticas según Bolea, Bosch y Gascón (1998). Por lo tanto, el álgebra debiera incorporar tareas que tengan las características siguientes:

- El álgebra debería servir para modelizar sistemas matemáticos en particular, plantear y resolver problemas de distintos ámbitos, es decir aritméticos, geométricos, combinatorios, entre otros, que son difíciles de plantear y resolver sin el álgebra.
- La modelización algebraica debería dar respuesta a cuestiones sobre el alcance, la fiabilidad y la justificación de la actividad matemática que se realiza en el sistema inicial. En particular, el modo algebraico que se construye debería permitir describir, generalizar y justificar procesos de resolución de problemas, así como unificar técnicas y tipos de problemas que aparecen inicialmente desconectados.
- La modelización algebraica debería conducir a una ampliación y transformación progresiva del sistema inicial que se estudia, con la incorporación de nuevos tipos de problemas, nuevas técnicas de resoluciones, nuevas interpretaciones, nuevos vínculos con otros sistemas, etc.
- En el proceso de modelización algebraica, las expresiones deberían contener letras que designan cantidades de magnitud (no solo números) y la manipulación de estas expresiones no debería requerir una distinción previa entre datos conocidos e incógnitas. El proceso de modelización permite estudiar relaciones entre magnitudes de todo tipo (geométricas, físicas, comerciales, etc.) y evoluciona hacia la modelización funcional (Bolea et al. 1998).

El concepto de modelización según Parra, Otero y Fanaro (2009) ha sido concebido durante mucho tiempo como la aplicación de una noción matemática a ciertas situaciones “reales” o la interpretación de un sistema axiomático producido al encontrar un modelo del mismo, pero actualmente la modelización debería ser interpretada desde un punto de vista más funcional. Luego para esta investigación, adoptaremos la postura de la TAD según Chevallard, Bosch y Gascón (1997) que postulan que “gran parte de la actividad matemática puede identificarse con una actividad de modelización matemática”; esto es, la modelización no es sólo una dimensión de la actividad matemática sino que la actividad matemática es, en esencia, una actividad de modelización.

La afirmación anterior adquiere sentido si, en primer lugar, la modelización no queda limitada sólo a la “matematización” de situaciones extra-matemáticas, puesto que la modelización intra-matemática constituye un aspecto esencial e inseparable de la matemática y, en segundo lugar, cuando se dote de un significado preciso a la actividad de modelización dentro del modelo general de la actividad matemática propuesto por la TAD citado en Chevallard (1997) en la cual, se reformulan los procesos de modelización como procesos de reconstrucción y articulación de praxeologías de complejidad creciente que deben tener su origen en el cuestionamiento de las razones de ser de las organizaciones matemáticas que se desean reconstruir y articular para la comunidad en estudio.

Para presentar “La modelización en didáctica de las matemáticas” García (2005) describe algunos argumentos que forman parte de diferentes justificaciones de la presencia de la “modelización y de las aplicaciones” en los sistemas de enseñanza, con el fin de mostrar el carácter dominante de este punto de vista, argumentando que: la modelización implica una mejor formación matemática y una mejor formación profesional. Indicando que el trabajo con la modelización lleva implícita:

- La capacidad para resolver problemas reales con una actitud crítica.
- Una comprensión más amplia de la aplicabilidad de los conceptos.
- El desarrollo de la creatividad y el descubrimiento.
- La capacidad de integrar los conceptos.
- La capacidad para apreciar el poder de la matemática.

De manera similar Gómez y Fortuny, 2002, citado García, 2005 concluyen respecto al uso de la modelización matemática como técnica de innovación didáctica, que:

- Las aplicaciones y el modelaje constituyen una forma de motivación e ilusión de los alumnos y alumnas, al dotar de sentido los temas estudiados.

- El modelaje es un componente cultural, capaz de proporcionar conocimientos que usualmente no se encuentran en los currículos de matemáticas.
- El modelaje constituye una forma de aprendizaje significativo (construcción frente a memorización).
- El modelaje es una forma de reconocer estructuras (situaciones distantes en la vida real, pero con el mismo modelo matemático).
- El modelaje proporciona una visión diferente e integradora de las matemáticas, al englobar diferentes áreas de conocimiento, evitando que los temas se presenten de forma aislada.

La modelización matemática constituye un caso paradigmático de un objeto matemático que ha sido “importado” por la didáctica, desde la matemática “sabia”, para intentar abordar el problema de la Educación Matemática.

Paradójicamente la ausencia de la problematización del modelo epistemológico de las matemáticas impide el cuestionamiento del papel que los procesos de modelización desempeñan, o podrían desempeñar en la creación del conocimiento matemático, del que deberían poder deducirse los posibles papeles que desempeñaría como instrumento didáctico.

### 2.3. Presencia del contexto en los problemas

Según Font (2007) la importancia que tiene contextualizar el conocimiento matemático es hoy en día ampliamente asumida, ya que se considera que el contexto puede ser la clave para relacionar lo que los psicólogos han aprendido sobre el modo en que los humanos razonan, sienten, recuerdan, imaginan y deciden con lo que; por su parte, han aprendido los antropólogos sobre la manera en que el significado es construido, aprendido, activado y transformado.

Para las situaciones extra matemáticas que contextualizan un objeto matemático se han propuesto diferentes nombres y clasificaciones. Problemas contextualizados (el nombre que vamos a utilizar en este trabajo), problemas del mundo real, (problemas relacionados con el trabajo), problemas situados son sólo algunos de los diferentes nombres que se da a las tareas escolares que simulan situaciones del mundo real.

La investigación sobre los problemas contextualizados extra matemáticos se ha realizado atendiendo a diferentes objetivos y metodologías (conocimiento situado, etnomatemáticas, teoría de la actividad, etc). Por una parte, hay que destacar las investigaciones cuyo objetivo ha sido comprender mejor cómo las personas solucionan los problemas en su lugar de trabajo. Estas investigaciones de tipo socio-cultural, no se han preocupado directamente por comparar

la resolución de problemas en el lugar de trabajo con la resolución de problemas contextualizados en las instituciones escolares (Scribner, 1984 y 1986; Lave, 1988; Pozzi, Noss y Hoyles, 1998), citado en Font (2007). En cambio otras investigaciones se han interesado en comparar y contrastar el diferente uso que hacen las personas de las matemáticas en la escuela y en el trabajo (Reed y Lave, 1981; Nunes, Schliemann y Carraher, 1993; Jurdak y Shahin, 1999 y 2001; Jurdak, 2006, Díez 2004), citado en Font (2007).

En nuestra investigación estamos interesados en analizar y describir cómo las instituciones escolares universitarias, lo que se verá reflejado en particular en los libros textos, presentan dicho objeto para ser aprendido por los estudiantes en la institución escolar para luego ser utilizado en su desempeño profesional en la resolución de problemas relacionados con dicho contenido.

## 2.4. La función cuadrática desde la perspectiva de la TAD.

Tomando en cuenta los estudios de las organizaciones matemáticas de referencia realizados por García (2005), Parra et al. (2006) e Ibarra et al. (2011) con respecto a la función y función cuadrática, nos proponemos reformular la OM que se consideran en esta investigación.

García (2005) menciona la modelización de los sistemas lineales mediante funciones reales (tercer nivel de algebrización) la cual permite relativizar la “relación de proporcionalidad” e integrarla en una organización más amplia en la que tengan cabida diferentes tipos de variación, bajo un marco teórico lo suficientemente amplio, como es el de la teoría de las funciones reales; es decir, la integración de diferentes clases de sistemas en una organización matemática regional.

Nos presenta los sistemas con diferencias constantes de orden 2, aquellos en los que la relación entre sus expresiones puede ser caracterizada de la siguiente forma:

*Condición de diferencias constantes de orden 2:*

Para todo  $k \in M$ , existe un único  $k' \in M'$  tal que:

si  $\Delta a_i = a_{i+1} - a_i = k$  ( $\forall i$ ), entonces  $\Delta^2 a'_i = \Delta a'_{i+1} - \Delta a'_i = k'$  ( $\forall i$ )

Figura 2.2: García (2005), p. 257

Donde  $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_i, \dots\}$  es un conjunto de cantidades de la magnitud  $M$  y  $\{a'_0, a'_1, a'_2, \dots, a'_i, \dots\}$  son las cantidades correspondientes en  $M'$ . Puesto que la diferencia de orden 2 son constantes ( $k'$ ) por hipótesis, es posible, obtener nuevas expresiones del sistema, siempre que se dispongan de dos expresiones y el valor de la constante.

En esta primera caracterización, según García, (2005) cada expresión está construido a partir de los dos anteriores. Por lo que es posible continuar trabajando sobre ellos, para obtener una

nueva caracterización de cada expresión independiente de los anteriores. Para ello, se procede a presentar cada expresión en función de los anteriores, hasta llegar a los datos iniciales  $a'_0, a'_1, k'$ .

Lo que constituye una caracterización de tipo algebraico del conjunto de valores de la magnitud  $M'$  en función de los valores de la magnitud  $M$ , propone que puede ser escrita de forma más concisa teniendo en cuenta la expresión de la suma de una progresión aritmética de razón 1:

$$a'_n = \frac{(n-1)n}{2} k' + na'_1 - (n-1)a'_0$$

Figura 2.3: García (2005), p. 259

En particular si se considera que la variable  $n$  es continua, sustituyéndola por la letra  $x$ , y suponiendo que para cada valor de  $x$ , que determina una cantidad de magnitud  $M$ , existe una cantidad en la magnitud  $M'$ , cuya medida expresamos por  $f(x)$ , deducimos la expresión algebraica:

$$f(x) = \frac{(x-1)x}{2} k' + xa'_1 - (x-1)a'_0$$

Figura 2.4: García (2005), p. 260

Afirmando, que no es más que una expresión cuadrática del tipo  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , siendo:

- $a = \frac{k'}{2}$
- $b = a'_1 - a'_0 - \frac{k'}{2}$
- $c = a'_0$

Figura 2.5: García (2005), p. 260

Es importante tener en cuenta que para la construcción de esta caracterización de las expresiones, hemos hecho un cambio de variable en el conjunto de medidas de la magnitud  $M$  (de las cantidades  $a_i$  a  $i$ ) que llegado este momento, puede ser desecho, por lo que los coeficientes del polinomio de segundo grado pueden cambiar. Asimismo, puesto que la función cuadrática relaciona números que son medidas de cantidades de  $M$  y de  $M'$ , el valor de los parámetros  $a, b$  y  $c$  dependerá de las unidades elegidas en  $M$  y en  $M'$ .

Esta caracterización de las expresiones trivializa, en cierta forma, la tarea de calcular nuevas expresiones y que prácticamente eran la razón de ser las modelizaciones “proporcionales” y “ecuacionales”.

El estudio de los sistemas de variación se incluye explícitamente en el área de “Funciones y su representación gráfica”.

En el área de “Funciones y su representación gráfica” tras el primer ciclo dedicado a la “lectura e interpretación” de gráficas, durante el tercer y cuarto curso se avanza en la caracterización de dependencias entre dos variables y en su representación mediante ostensivos tabulares, gráficos (ejes cartesianos) y expresiones algebraicas. En el último curso los sistemas lineales y “lineales inversos” convivirán con sistemas caracterizados por otros tipos de variación, pero la actividad matemática propuesta dejará a un lado las razones y proporciones para centrarse en las representaciones gráficas y en las expresiones algebraicas (modelización funcional).

En la introducción de las “funciones cuadráticas”, sin embargo, la actividad matemática sufre un cambio brusco. Ahora al no tener el respaldo de la “proporcionalidad”, desaparece toda problemática ligada a los sistemas de variación. La razón de ser de estas nuevas funciones radica en el estudio de un nuevo tipo de “ecuación” (en la terminología usada por los autores) y de un nuevo tipo de representación gráfica. La actividad matemática se centra en la representación gráfica de las “parábolas”  $y = x^2$  e  $y = -x^2$ , a partir de las que se construye el resto, como transformaciones geométricas de estas dos:  $y = ax^2$  (“parábolas” más o menos “abiertas”),  $y = ax^2 + q$  (“parábolas” desplazadas verticalmente),  $y = a(x-p)^2$  (“parábolas” desplazadas horizontalmente),  $y = a(x-p)^2 + q$  (“parábolas” desplazadas en diagonal) hasta el caso general  $y = ax^2 + bx + c$ , que paradójicamente no tiene nada que ver con los anteriores.

## 2.1. Funciones cuadráticas elementales

Las funciones cuadráticas son las que se representan mediante una ecuación de segundo grado:  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ). Sus representaciones gráficas son un tipo de curvas llamadas parábolas.

Figura 2.6: Sánchez y Vera, 2002b, p.20. Tomado de García, 2005, p. 260

### 2.4.1. Organizaciones matemáticas asociadas a la Función Cuadrática que se presentan en los trabajos de referencia

Según García (2005) los tipos de problemas que se proponen son:

- Dada la expresión algebraica:
  - calcular el vértice,

- calcular los puntos de corte con los ejes,
  - representarla gráficamente,
  - modificar la expresión algebraica para que la parábola se desplace horizontal y/o verticalmente,
  - cuando uno o varios coeficientes vienen expresados como parámetros, determinarlos conociendo las coordenadas de uno o varios puntos de la parábola.
- Dada una representación gráfica de una parábola:
    - determinar su expresión algebraica,
    - asociarla con una expresión algebraica dada.
  - Dada una tabla de pares de números:
    - representarlos gráficamente y determinar la ecuación de la curva resultante.

García (2005) plantea las siguientes organizaciones matemáticas para su estudio:

- **Dada la expresión algebraica:**
  - $T_1$ : calcular el vértice.
  - $T_2$ : calcular los puntos con los ejes.
  - $T_3$ : modificar la expresión algebraica para que la parábola se desplace horizontal y /o verticalmente.
  - $T_4$ : cuando uno o varios coeficientes vienen expresados como parámetros, determinarlos conociendo las coordenadas de uno o varios puntos de la parábola.
- **Dada una representación gráfica de una parábola:**
  - $T_5$ : determinar su expresión algebraica.
  - $T_6$ : asociarla con una expresión algebraica dada.

Del trabajo de Parra et al. (2006) tenemos el estudio de la función en general.

En este trabajo plantea las siguientes Organizaciones matemáticas:

- La Organización Matemática de Referencia (OMR) en torno a la noción de Función:
  - La OMR gira en torno a los siguientes géneros de tareas:
    - $O_1$ : Analizar el dominio de funciones.
    - $O_2$ : Analizar qué expresiones resultan ser relación funcional.
    - $O_3$ : Representar gráficamente funciones de una y dos variables.

- $O_4$ : Analizar casos particulares de curvas de nivel.

Y a partir de esta forma de concebir las organizaciones matemáticas de referencia, se plantea lo siguiente:

- La Organización Matemática de Referencia (OMR) en relación a la función cuadrática, según Parra y et al.
  - La OMR gira en torno a los siguientes géneros de tareas:
    - $O_1$ : Analizar el dominio de funciones cuadráticas.
    - $O_2$ : Analizar qué expresiones resultan ser función cuadrática.
    - $O_3$ : Representar gráficamente funciones cuadráticas.

De la misma manera Ibarra et al. (2011) presenta la investigación sobre “Evaluación de la función cuadrática en diferentes contextos” basado en los Diseños curriculares en los primeros años de la Escuela Secundaria, que estudia el concepto de función y se complejiza, a través del estudio de: función cuadrática, cúbica, logarítmica, exponencial, trigonométricas, entre otras.

Observándose un desplazamiento en los temas ecuaciones y funciones cuadráticas. Tiene en cuenta el estudio de las funciones cuadráticas focalizándose en las OM locales expresadas como tareas. En relación con las prácticas áulicas y del análisis de los libros de texto, selecciona las siguientes tareas:

- Tareas propuestas en el trabajo de Ibarra et al. (2011):
  - T1: Descubrir la expresión analítica de la función cuadrática a partir de la gráfica.
  - T2: Graficar una función cuadrática a partir de la expresión  $f(x) = x^2$ .
  - T3: Hallar dominio e imagen dada la representación gráfica de la función cuadrática.
  - T4: Determinar el dominio e imagen de la función cuadrática definida por su expresión algebraica.
  - T5: Determinar a partir de la gráfica, las coordenadas del vértice de la curva que representa función cuadrática.
  - T6: A partir de la expresión analítica de la función cuadrática deducir las coordenadas del vértice de la curva.
  - T7: Encontrar los puntos de intersección de la función cuadrática con el eje  $X$ .
  - T8: Analizar la gráfica de la función cuadrática teniendo en cuenta los conceptos de los ceros de la función.
  - T9: Estudiar, a partir de la gráfica de la función cuadrática, el concepto de simetría respecto de un eje vertical.

- T10: Hallar el eje de simetría de la expresión algebraica de la función cuadrática.
  - T11: Analizar los máximos y mínimos de la gráfica de la función cuadrática.
  - T12: Estudiar los máximos y mínimos a partir de la expresión analítica de la función cuadrática.
  - T13: Comparar las variaciones de las curvas al variar el/los parámetro/s.
  - T14: Modelizar los fenómenos del mundo real utilizando funciones.
  - T15: Graficar una función cuadrática a partir de tablas presentadas con intervalos encajados.
- Técnicas emergentes de las tareas propuestas por Ibarra et al. (2011):  
A modo de ejemplo, desarrollaremos dos tareas y sus respectivas técnicas.

(a) La tarea T1: Descubrir la expresión analítica de la función cuadrática a partir de la gráfica.

-  $\tau_{11}$ : A partir de la gráfica, identificamos algunos de los puntos pertenecientes a la curva. Estos puntos se expresan como pares ordenados.

(b) La Tarea T5: Determinar a partir de la gráfica las coordenadas del vértice de la curva que representa función cuadrática.

Puede resolverse por diferentes procedimientos, es decir recurriendo a distintas técnicas.

Consideremos, por ejemplo:

-  $\tau_{51}$ : Hallamos las raíces  $x_1$  y  $x_2$  de la ecuación cuadrática asociada a la función  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Marcamos las raíces sobre el eje  $X$ . Como las raíces equidistan del eje de simetría, promediamos para obtener la abscisa del vértice  $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ; la ordenada del vértice será  $y_v = f(x_v)$ .

-  $\tau_{52}$ : Sabemos que el vértice de una parábola de ecuación  $f(x) = ax^2 + bx + c$  tiene abscisa  $x = \frac{-b}{a}$  luego la ordenada es  $y = f\left(\frac{-b}{a}\right)$ .

-  $\tau_{53}$ : Al expresar la  $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$ . En esta expresión  $f(x)$  es mínimo cuando  $x = \frac{-b}{2a}$  en cuyo caso  $y = \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$ . El vértice tiene coordenadas  $\left(\frac{-b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$ . Con esta técnica encontramos simultáneamente las dos coordenadas del vértice.

- $\tau_{54}$ : La ordenada  $y$  del vértice se obtiene a partir de la ecuación  $y = f(x) = ax^2 + bx + c$  de incógnita  $x$  con una única solución cuando  $y = 0$ . El problema se transforma en encontrar las raíces de la ecuación cuadrática  $ax^2 + bx + c - y = 0$ . La solución es única cuando el discriminante es igual a cero,  $\Delta = b^2 - 4a(c - y) = 0$  es decir  $y = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$ . La abscisa del vértice  $x = \frac{-b}{2a}$ .
- $\tau_{55}$ : Sea  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $f'(x) = 2ax + b$  y  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a}$ . La ordenada es  $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-b^2}{4a} + c$ .

Es posible identificar las cuatro primeras técnicas correspondientes a la T5 en las instituciones de “enseñanza secundaria” de nuestro país; la técnica  $\tau_{53}$  aparece en el estudio de los elementos básicos del cálculo diferencial, en el primer año del ciclo universitario.

#### 2.4.2. Organizaciones matemáticas asociadas a la Función Cuadrática que se consideraron en la investigación.

En base a los trabajos de referencia descritos anteriormente, en este apartado nos proponemos reformular el modelo epistemológico en torno a la función cuadrática para la formación de los estudiantes de la carrera de Economía.

Para nuestro estudio se tomarán en cuenta los siguientes tipos de tareas y técnicas por considerarlas fundamentales.

##### TIPOS DE TAREAS

Donde definimos:

$T_i$  : Tipos de tareas.

- $T_1$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, determinar el dominio e imagen.
- $T_2$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, hallar los ceros.
- $T_3$ : Dada la expresión algebraica  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ , calcular los puntos de intersección con los ejes coordenados.
- $T_4$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, identificar si la gráfica es cóncava o convexa.
- $T_5$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, hallar su gráfica.

- $T_6$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, cuando uno o varios coeficientes vienen expresados como parámetros, determinarlos conociendo las coordenadas de uno o varios puntos de la parábola.
- $T_7$ : Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática a partir de la gráfica.
- $T_8$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, hallar el valor máximo o mínimo que alcanza dicha función.
- $T_9$ : Dado un problema contextualizado donde se involucra una función cuadrática, interpretar modelos económicos con respecto a máximos y mínimos.
- $T_{10}$ : Modelizar los fenómenos del mundo real utilizando funciones cuadráticas cuando corresponda.

### TÉCNICAS ASOCIADAS A LOS TIPOS DE TAREAS

Donde definimos:

$Z_i$ : Casos particulares para los tipos de tareas.

$\tau_i$ : Posibles técnicas para la solución de tareas.

- **$T_1$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, determinar el dominio e imagen**
  - $Z_1$ : Dada la expresión algebraica  $f(x) = a(x - h)^2 + k$ ,  $a \neq 0$ . Denotamos  $f(x) = y$ , el vértice  $V(h, k)$ .
  - $\tau_0$ : Para hallar el vértice  $V(h, k)$  se hace  $h = -\frac{b}{2a}$  y  $k = c - \frac{b^2}{4a}$ , donde al resolver  $f(x)$  se tiene que  $a$  es el coeficiente de la variable cuadrática,  $b$  es el coeficiente de la variable lineal y  $c$  es el término independiente.
  - $\tau_1$ : El dominio es el recorrido de la variable  $x$ ; siendo este el dominio de  $f(x)$  que son todos los números reales.
  - $\tau_2$ : La imagen se obtiene del recorrido de la expresión analítica  $a(x - h)^2 + k$ , de donde se tienen dos casos: Si  $a > 0$ : tenemos  $y \geq k$  entonces la imagen de  $f$  es el intervalo  $[k, +\infty[$ , donde la parábola se abre hacia arriba.  
Si  $a < 0$ : tenemos  $y \leq k$  entonces la imagen de  $f$  es el intervalo  $] -\infty, k]$ , donde la parábola se abre hacia abajo.
  - $Z_2$ : Dada la expresión algebraica  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ .
  - $\tau_1$ : El dominio es el recorrido o valores de la variable  $x$ ; siendo este el dominio de  $f(x)$  que son todos los números reales.

-  $\tau_3$ : Completando cuadrados tenemos

$$f(x) = a \left[ x^2 + \frac{b}{a}x + \left( \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b}{2a} \right)^2 \right] + c, \quad a \neq 0$$

$$f(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

Luego aplicamos  $\tau_2$ , para hallar la imagen.

•  **$T_2$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, hallar los ceros**

o  $Z_1$ : De la forma  $f(x) = a(x - h)^2 + k$ ,  $a \neq 0$ , Obtenemos  $f(x) = ax^2 - 2ahx + ah^2 + k$ , donde  $b = -2ah$  y  $c = ah^2 + k$ .

-  $\tau_4$ : Factorizar  $f(x)$  y obtener las raíces  $x_1, x_2$  que son los ceros de la función, o

-  $\tau_5$ : Usamos la fórmula cuadrática

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Analizar el radical: i) Si  $b^2 - 4ac > 0$ , entonces las dos raíces son números reales, ii) Si  $b^2 - 4ac = 0$ , entonces las dos raíces reales son iguales, y iii) Si  $b^2 - 4ac < 0$ , entonces las dos raíces son números complejos conjugados.

Luego hallamos  $x_1, x_2$  según el análisis realizado.

•  **$T_3$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, calcular los puntos de intersección con los ejes coordenados**

o  $Z_1$ : De la forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ , calcular los puntos de intersección con los ejes.

- Intersección con el eje X, se obtiene cuando hacemos  $y = 0$ , para esto podemos aplicar la técnica  $\tau_4$  o  $\tau_5$ .

-  $\tau_6$ : Intersección con el eje Y, se obtiene cuando hacemos  $x = 0$  en la expresión algebraica dada, esto resulta  $y = c$

Luego  $\tau_6$ : analizamos y tenemos tres casos posibles:

. Si  $c > 0$ , el punto  $c$  se encuentra encima del eje X.

. Si  $c < 0$ , el punto  $c$  se encuentra debajo del eje X.

. Si  $c = 0$ , el punto  $c$  se encuentra sobre el eje X.

•  **$T_4$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, identificar si la gráfica es cóncava o convexa**

- $Z_1$ : Sea  $f(x) = a(x - h)^2 + k$ ,  $a \neq 0$ .
- $Z_2$ : Sea  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ .

Una posible técnica para  $Z_1$  y  $Z_2$ :

- $\tau_7$  : Analizar el coeficiente de la variable cuadrática, teniendo los siguientes casos:
  - . Si  $a > 0$  la función cuadrática es convexa; es decir, la parábola se abre hacia arriba.
  - . Si  $a < 0$  la función cuadrática es cóncava; es decir, la parábola se abre hacia abajo.

•  $T_5$ : **Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, hallar su gráfica**

- $Z_1$ : De la forma  $f(x) = a(x - h)^2 + k$ ,  $a \neq 0$ .
  - $\tau_8$ : Analizamos el coeficiente de la variable cuadrática mediante  $\tau_7$ , luego  $\tau_{8i}$ : resolver  $f(x)$  donde se obtiene  $f(x) = ax^2 - 2ahx + ah^2 + k$ , donde  $b = -2ah$  y  $c = ah^2 + k$ . Después aplicar  $\tau_4$  o  $\tau_5$  para hallar las intersecciones con el eje  $X$  y finalmente aplicar  $\tau_6$  para hallar las intersecciones con el eje  $Y$ .
- $Z_2$ : De la forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ 
  - $\tau_9$ : Aplicamos la técnica  $\tau_7$  para saber si la función es convexa o cóncava, luego la técnica  $\tau_0$  o  $\tau_3$  para identificar el vértice. Seguido hallamos las intersecciones con los ejes aplicando  $\tau_4$  o  $\tau_5$  y  $\tau_6$ . Luego  $\tau_{9i}$ : en el caso que las raíces sean no reales damos un valor adicional conveniente a  $f$  y así obtenemos dos puntos de paso de la parábola, finalmente ubicamos los puntos en el plano  $XY$ .
- $Z_3$  : De la forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ , con  $x \in [M, N]$  el dominio de la función.
  - $\tau_{10}$ : Aplicamos la técnica  $\tau_7$  para saber si la función es convexa o cóncava, luego la técnica  $\tau_0$  o  $\tau_3$  para identificar el vértice. Seguido hallamos las intersecciones con los ejes coordenados aplicando  $\tau_4$  o  $\tau_5$  y  $\tau_6$ .  
Si nos dan el dominio de la función aplicar  $\tau_{10i}$ : que consiste en evaluar  $f$  con los valores extremos del dominio dado para hallar los puntos que corresponden a la parábola.

•  $T_6$ : **Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, cuando uno o varios coeficientes vienen expresados como parámetros, determinarlos conociendo las coordenadas de uno o varios puntos de la parábola**

Presentamos cuatro casos particulares de la tarea:

- $Z_1$ : Si se conocen tres puntos de la gráfica de la parábola se tiene  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0 \dots (\alpha)$ ; donde los parámetros son  $a, b, c$ .
  - $\tau_{11}$ : Reemplazamos los tres puntos en  $(\alpha)$  y obtenemos tres ecuaciones con tres incógnitas. Resolvemos el sistema y hallamos los parámetros  $a, b, c$ .
- $Z_2$ : Si  $c = 0$  se tiene  $f(x) = ax^2 + bx$ ,  $a \neq 0 \dots (\beta)$  y se conocen dos puntos de la parábola.
  - $\tau_{12}$ : Reemplazamos los dos puntos en  $(\beta)$ , obteniendo dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolvemos el sistema y hallamos  $a, b$ .
- $Z_3$ : Si  $b = 0$  se tiene  $f(x) = ax^2 + c$ ,  $a \neq 0$ , y se conocen dos puntos de la parábola.
  - $\tau_{13}$ : Reemplazamos los dos puntos en  $f(x) = ax^2 + c$ ,  $a \neq 0$ , donde se obtiene dos ecuaciones con dos incógnitas. Luego resolvemos el sistema y hallamos  $a$  y  $c$ .
- $Z_4$ : Si  $b = 0$  y  $c = 0$  se tiene  $f(x) = ax^2$ ,  $a \neq 0$  y se conoce un punto de la parábola.
  - $\tau_{14}$ : Reemplazamos el punto conocido en  $f(x) = ax^2$  donde se obtiene una ecuación con una incógnita. Resolvemos la ecuación y hallamos  $a$ .
- **$T_7$ : Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática a partir de la gráfica**
  - $Z_1$ : Si en la gráfica identificamos tres puntos que pertenecen a la parábola.
    - $\tau_{15}$ : Debemos identificar que la expresión algebraica de la función cuadrática es  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$  y con parámetros  $a, b, c$ . Luego hallar los parámetros mediante la técnica  $\tau_{11}$ .
- **$T_8$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, hallar el valor máximo o mínimo que alcanza dicha función**
  - $Z_1$ : De la forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ 
    - Una posible técnica  $\tau_{17}$ :
      - $\tau_{17}$ : Usar la técnica  $\tau_3$  para completar cuadrados, luego identificamos el vértice, seguidamente  $\tau_7$  que consiste en analizar si la función cuadrática es cóncava o convexa, finalmente  $\tau_{16}$  donde identificamos el intervalo del recorrido de la función.

Una posible técnica  $\tau_{20}$ :

Hacemos

- $\tau_{18}$ : resolvemos la primera derivada de la función dada e igualamos a cero para hallar el punto donde la recta tangente al gráfico de  $f$  es paralela al eje  $X$ , luego aplicamos  $\tau_4$  y obtenemos los puntos estacionarios, seguido aplicamos
- $\tau_{19}$ : El test de la primera derivada para puntos óptimos locales  
Supongamos que  $c$  es un punto estacionario de  $y = f(x)$ .
  - a) Si  $f'(x) \geq 0$  en un intervalo  $(a, c)$  a la izquierda de  $c$  y  $f'(x) \leq 0$  en un intervalo  $(c, b)$  a la derecha de  $c$ , entonces en  $x = c$  se tiene un máximo local de  $f$ .
  - b) Si  $f'(x) \leq 0$  en un intervalo  $(a, c)$  a la izquierda de  $c$  y  $f'(x) \geq 0$  en un intervalo  $(c, b)$  a la derecha de  $c$ , entonces en  $x = c$  se tiene un mínimo local de  $f$ .
  - c) Si  $f'(x) > 0$  en un intervalo  $(a, c)$  a la izquierda de  $c$  y en un intervalo  $(c, b)$  a la derecha de  $c$ ,  $x = c$  no es un punto óptimo local de  $f$ . Lo mismo ocurre si  $f'(x) < 0$  a ambos lados de  $c$ .

Una posible técnica  $\tau_{24}$ :

- $\tau_{24}$ : Aplicamos  $\tau_{18}$ , luego aplicamos  $\tau_4$  obteniendo los puntos estacionarios; después aplicamos;  $\tau_{21}$  que consiste en resolver la segunda derivada, luego  $\tau_{22}$  que consiste en evaluar los puntos estacionarios en la expresión de la segunda derivada obtenida, después aplicamos
- $\tau_{23}$ : El test de la segunda derivada  
Sea  $f$  una función derivable dos veces en un intervalo  $I$ . Supongamos que  $c$  es un punto interior de  $I$ .
  - a) Si  $f'(c) = 0$  y  $f''(c) < 0$ , entonces en  $c$  se tiene un mínimo local estricto.
  - b) Si  $f'(c) = 0$  y  $f''(c) > 0$ , entonces en  $c$  se tiene un máximo local estricto.
  - c) Si  $f'(c) = 0$  y  $f''(c) = 0$ , no tenemos suficiente información.

- **$T_9$ : Dado un problema contextualizado donde se involucra una función cuadrática, interpretar modelos económicos con respecto a máximos y mínimos**

Donde reconocemos las siguientes notaciones

$P$ : precio.

$Q$ : número de unidades producidas y vendidas.

$CF$ : Costo fijo.

$CV$ : Costo variable.

$C$ : Función costo total.

$R$ : Función ingreso.

$\pi$ : Función beneficio o ganancia total.

Presentamos tres casos particulares de la tarea  $T_9$ .

- $Z_1$ : Hallar la función costo total
  - $\tau_{25}$ : Definimos la función costo total  $C = CF + CV$  y resolvemos la técnica  $\tau_{17}$  o  $\tau_{20}$  o  $\tau_{24}$ .
- $Z_2$ : Hallar la función ingreso
  - $\tau_{26}$ : Definimos la función ingreso  $R = P \cdot Q$  y resolvemos la técnica  $\tau_{17}$  o  $\tau_{20}$  o  $\tau_{24}$ .
- $Z_3$ : Hallar la función beneficio.
  - $\tau_{27}$ : Definimos la función beneficio  $\pi = R - C$  y resolvemos la técnica  $\tau_{17}$  o  $\tau_{20}$  o  $\tau_{24}$ .
- **$T_{10}$ : Modelizar los fenómenos del mundo real utilizando funciones cuadráticas cuando corresponda**
  - $\tau_{28}$ : Identificar el problema con el modelo matemático función cuadrática.
  - $\tau_{29}$ : Traducir los datos del problema dado en lenguaje natural al lenguaje matemático (descontextualizar), luego
  - $\tau_{30}$ : Aplicar el modelo a la solución del problema y utilizar las diferentes técnicas de solución de la función cuadrática.
  - $\tau_{31}$ : Interpretar los resultados en lenguaje natural (contextualizar) apropiadamente, según lo requerido.

Debemos tener en cuenta que ante de la variedad de tareas y técnicas presentadas, podemos necesitar más de una técnica para la solución de una tarea. Para lo cual definimos tres niveles de complejidad presentes en las tareas según la cantidad de técnicas a emplear para su solución.

Los niveles de complejidad son los siguientes:

Nivel bajo: cuando es necesario emplear una o dos técnicas distintas.

Nivel medio: cuando necesitamos tres técnicas distintas.

Nivel alto: cuando se necesita de cuatro a más técnicas distintas.

De acuerdo a los niveles de complejidad de las técnicas definidos para la solución de los distintos tipos de tareas presentamos la siguiente tabla.

Tabla 2.1: Niveles de complejidad de las tareas en nuestro estudio

Tareas	Técnicas a usar para su solución	N° de técnicas	Nivel de complejidad de las tareas
$T_1 - Z_1$	$\tau_0, \tau_1, \tau_2$	3	Nivel medio
$T_1 - Z_2$	$\tau_1, \tau_3, \tau_2$	3	Nivel medio
$T_2 - Z_1$	$\tau_4$ o $\tau_5$	2	Nivel bajo
$T_3 - Z_1$	$\tau_4$ o $\tau_5, \tau_6$	2	Nivel bajo
$T_4 - Z_1$	$\tau_7$	1	Nivel bajo
$T_4 - Z_2$	$\tau_7$	1	Nivel bajo
$T_5 - Z_1$	$\tau_8 = \tau_7, \tau_{8i}, \tau_4$ o $\tau_5, \tau_6$	4	Nivel alto
$T_5 - Z_2$	$\tau_9 = \tau_7, \tau_0$ o $\tau_3, \tau_4$ o $\tau_5, \tau_{6i} - \tau_{9i}$	4 o 5	Nivel alto
$T_5 - Z_3$	$\tau_{10} = \tau_7, \tau_0$ o $\tau_3, \tau_4$ o $\tau_5, \tau_6 - \tau_{10i}$	4 o 5	Nivel alto
$T_6 - Z_1$	$\tau_{11}$	1	Nivel bajo
$T_6 - Z_2$	$\tau_{12}$	1	Nivel bajo
$T_6 - Z_3$	$\tau_{13}$	1	Nivel bajo
$T_6 - Z_4$	$\tau_{14}$	1	Nivel bajo
$T_7 - Z_1$	$\tau_{15}, \tau_{11}$	2	Nivel bajo
$T_8 - Z_1$	$\tau_{17} = \tau_3, \tau_7, \tau_{16}$	3	Nivel medio
$T_8 - Z_1$	$\tau_{20} = \tau_{18}, \tau_4, \tau_{19}$	3	Nivel medio
$T_8 - Z_1$	$\tau_{24} = \tau_{18}, \tau_4, \tau_{21}, \tau_{22}, \tau_{23}$	5	Nivel alto
$T_9 - Z_1$	$\tau_{25}, \tau_{17}$ o $\tau_{20}$ o $\tau_{24}$	4-6	Nivel alto
$T_9 - Z_2$	$\tau_{26}, \tau_{17}$ o $\tau_{20}$ o $\tau_{24}$	4-6	Nivel alto
$T_9 - Z_3$	$\tau_{27}, \tau_{17}$ o $\tau_{20}$ o $\tau_{24}$	4-6	Nivel alto
$T_{10}$	$\tau_{28}, \tau_{29}, \tau_{30}, \tau_{31}$	4	Nivel alto

En la tabla 2.1 presentamos los distintos tipos de tareas en estudio de las cuales podemos decir que contamos con nueve tareas con un nivel bajo de complejidad, cinco de ellas presentan un nivel medio de complejidad y siete con un nivel alto de complejidad en relación al número de técnicas a usar para la solución de las tareas presentadas.

Para las tareas  $T_2, T_3, T_4, T_6$  y  $T_7$  contamos con el empleo de una o dos técnicas distintas (nivel bajo de complejidad) para su solución, debido a esto podemos decir que los alumnos podrían tener cierta dificultad en no distinguir las intersecciones con los ejes, no logran la identificación de la concavidad, no relacionan la representación gráfica con la analítica, en la manipulación de parámetros, etc. Con respecto al tipo de tareas que presentan tres técnicas distintas (nivel medio de complejidad) para su solución contamos con la presencia de la tarea  $T_1, T_8$  y  $T_9$  para este tipo de tarea se debe tener en cuenta que su solución será más elaborada

siendo este un indicio que los alumnos se encuentren con ciertas dificultades como que a partir de una tabla de datos no logran distinguir si es una relación cuadrática o no. Para la solución de tareas  $T_5$  y  $T_{10}$  son necesarias cuatro, cinco o más técnicas distintas para su solución, donde los alumnos podrían encontrarse con ciertas dificultades referidas en nuestros antecedentes por ejemplo para la traducción de un lenguaje a otro o la interpretación para la modelización de la función cuadrática de un enunciado en lenguaje verbal, etc.

Una vez definidas las tareas y técnicas correspondientes para cada tipo de tarea, en la que hemos descrito la característica del nivel de complejidad según el número de técnicas a emplear para la solución de cada una de ellas; vamos a tener en cuentas estas tareas para definir los criterios para la descripción y el análisis de los libros de texto seleccionados.



## Capítulo 3

# Criterios para el análisis de libros de texto

En este capítulo nos centramos en la selección y descripción de los criterios para el análisis de los libros de texto, siendo estos de gran importancia para esta investigación debido a que en base a ellos se hará la descripción y análisis de los textos seleccionados. Vamos a determinar dos secciones: en la primera presentamos la definición del criterio 1 que se basa en las dificultades de los alumnos al estudiar la función cuadrática y en la segunda sección definimos el criterio 2 basado en la postura epistemológica de la TAD.

En la primera sección vamos a definir dos criterios: presencia de tareas que requieran establecer conexiones entre representaciones gráficas y analíticas (criterio 1) y presencia de tareas que requieran la identificación de la función cuadrática en un enunciado dado en lenguaje verbal, con términos de la especialidad (criterio 2); y en la segunda sección vamos a definir tres criterios: variedad de tareas resueltas y propuestas en el libro de texto para abordar el tema de funciones cuadráticas (criterio 3), presencia de técnicas necesarias para la solución de las tareas propuestas (criterio 4) y presencia de tecnologías en las técnicas empleadas (criterio 5).

### 3.1. Criterios para el análisis de los libros de texto determinados por las dificultades de los estudiantes

Para el análisis de los libros de texto seleccionados tomamos en cuenta las dificultades de los estudiantes encontradas en los trabajos previos, que se muestran al enfrentarse a los distintos tipos de tareas asociadas con la función cuadrática, las cuales podemos organizarlas en dos grupos; estos han dado origen a los criterios 1 y 2, presentados luego en la tabla 3.1.

Para definir el criterio 1, se tomaron en cuenta las diversas dificultades relacionadas con la presencia de tareas que requieren establecer conexiones entre representaciones gráficas y analíticas, para la comprensión y solución de las tareas propuestas. Como ejemplo, podemos observar la actividad 2 tomada de Félix (2009) en la que se solicita determinar los: valores de

intersección de la gráfica con los ejes, graficar la función cuadrática a partir de su expresión algebraica, u otras tareas como encontrar un valor para  $f(x)$  al que le corresponda únicamente un valor de  $x$  y localizarlo en la gráfica. En esta actividad tenemos la presencia de tareas que requieren establecer conexiones entre representaciones gráficas y analíticas para su solución.

Otra de las dificultades identificadas para el criterio 1, fue el distinguir si una relación entre dos variables era cuadrática cuando se conocían algunos de sus valores y en algunos casos en los que si lo hacían, no podían encontrar la expresión algebraica correspondiente; es decir, no podían simbolizarla. Otro aspecto importante es que los alumnos presentaban gran dificultad en la manipulación y la simbolización de parámetros en general, en la cual estos aspectos determinan una variación tanto en su representación analítica y gráfica de una función cuadrática.

Debido a dichas dificultades manifestadas se consideró relevante que el libro de texto proponga tareas que requieran establecer conexiones entre representaciones gráficas y analíticas, siendo este definido como el criterio 1.

Con respecto a la creación del criterio 2, se tomaron en cuenta las diversas dificultades donde las tareas requieren identificar la función cuadrática en un enunciado dado en lenguaje verbal para su traducción en lenguaje algebraico donde se emplearon términos de la especialidad en Economía.

Una de las principales razones identificadas por los alumnos es que tienen problemas para plantear y resolver problemas de optimización, específicamente en la traducción de un lenguaje a otro, es la poca experiencia con la que cuentan los alumnos al tratar situaciones reales desde una perspectiva matemática (Félix, 2009).

Por ello se consideró relevante que el texto proponga tareas que requieran la identificación de la función cuadrática en un enunciado dado en lenguaje verbal y por esta razón se estableció como criterio 2.

Con respecto a la valoración positiva del libro de texto dependerá de que este incluya tareas para cuya solución los alumnos deben establecer relaciones entre la representación gráfica y algebraica. Del mismo modo, también se valorará positivamente si el libro de texto incluye tareas para cuya solución los alumnos deben identificar la función cuadrática a partir de una representación numérica (por tabla de valores), o en forma verbal donde el alumno no solo desarrollará un conocimiento básico sino que va a adquirir un conocimiento adicional de la función; en donde pasará de una representación a otra. Así mismo, se estará preparando para enfrentar tareas contextualizadas según la aplicación de su interés.

Hacemos mención que el criterio 1 está relacionado con las dificultades 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 y el criterio 2 está relacionado con las dificultades 8 y 9 definidas en la tabla 1.1 del capítulo 1 sección 1.2.

Tabla 3.1: Criterios 1 y 2 según las dificultades de los estudiantes

Criterios	Características de los tipos de tareas	Difucultades asociadas
1	Presencia de tareas que requieran establecer conexiones entre representaciones gráficas y analíticas.	1,2,3,4,5,6,7
2	Presencia de tareas que requieran la identificación de la función cuadrática en un enunciado dado en lenguaje verbal, con términos de la especialidad.	8,9

La tabla presentada muestra los criterios 1 y 2 donde sus características están asociadas a las diferentes dificultades que se encontraron en los trabajos previos, estos criterios serán utilizados en la descripción y análisis de los libros de texto seleccionados. Debido a que las tareas son parte de una praxeología y la variedad de los tipos de tareas nos indicará la completitud de una OML.

Con respecto a las dificultades asociadas tenemos que las siete primeras se relacionan con el criterio 1 debido a que los alumnos: no relacionan la representación gráfica con la analítica, no son capaces de distinguir si la relación es cuadrática o no, no logran distinguir las intersecciones con los ejes, no logran distinguir la relación entre las variables y su variación conjunta, no logran la identificación de la concavidad y muestran dificultad en la manipulación de los parámetros que aparecen en la transformación de funciones cuadráticas; podemos decir que todas estas dificultades se relacionan con su gráfica para que puedan identificar los elementos de la función cuadrática antes mencionados y así llevar a cabo su solución.

Y con respecto a las dos últimas dificultades asociadas podemos observar que se relacionan con el criterio 2 debido a que los alumnos: muestran dificultad al traducir del lenguaje natural al lenguaje algebraico problemas de optimización y al resolver problemas de optimización en Economía no llegan a la solución; por tal motivo, podemos decir que todas estas dificultades requieren identificación de la función cuadrática en un enunciado dado en lenguaje verbal para llevar a cabo su solución.

De acuerdo a los criterios 1 y 2 presentamos la tabla 3.2, donde podemos observar las características de los tipos de tareas respondiendo a las siguientes preguntas: ¿requiere establecer conexión entre representación gráfica y analítica? y ¿requiere identificar la función cuadrática en un enunciado verbal?

Tabla 3.2: Análisis de los tipos de tareas de acuerdo a los criterios 1 y 2

Tipos de tareas	¿Requiere establecer conexión entre representación gráfica y analítica?	¿Requiere identificar la función cuadrática en un enunciado verbal?
$T_1$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, determinar el dominio e imagen.	Sí	No
$T_2$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, hallar los ceros.	Sí	No
$T_3$ : Dada la expresión algebraica $f(x) = ax^2 + bx + c$ , $a \neq 0$ , calcular los puntos de intersección con los ejes coordenados.	Sí	No
$T_4$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, identificar si la gráfica es cóncava o convexa.	Sí	No
$T_5$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, hallar su gráfica.	Sí	No
$T_6$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, cuando uno o varios coeficientes vienen expresados como parámetros, determinarlos conociendo las coordenadas de uno o varios puntos de la parábola.	Sí	No
$T_7$ : Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática a partir de la gráfica.	Sí	No
$T_8$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, hallar el valor máximo o mínimo que alcanza dicha función.	Sí	No
$T_9$ : Dado un problema contextualizado donde se involucra la función cuadrática, interpretar modelos económicos con respecto a máximos y mínimos.	Sí	Sí
$T_{10}$ : Modelizar los fenómenos del mundo real utilizando funciones cuadráticas cuando corresponda.	Sí	Sí

De esta tabla podemos concluir que todos los tipos de tareas requieren establecer conexión entre la representación gráfica y analítica, debido a esto los alumnos relacionan las diferentes representaciones del objeto en estudio.

Solo las tareas  $T_9$  y  $T_{10}$  requieren identificar la función cuadrática en un enunciado verbal; es por eso, que debemos tener en cuenta a estos dos tipos de tareas ya que son necesarios para la interpretación y modelización en el proceso enseñanza-aprendizaje de los alumnos para el estudio de la función cuadrática.

Por tal motivo, valoramos positivamente que la organización matemática que debe tener un texto didáctico sobre la función cuadrática, de tal manera que cuente con la presencia de estos diez tipos de tareas, especialmente con las tareas  $T_9$  y  $T_{10}$  debido a que se enfrentará a tareas aplicadas en el mundo real.

### 3.2. Criterios para el análisis de los libros de texto determinados por la postura epistemológica adoptada

Teniendo en cuenta la postura epistemológica adoptada en este trabajo, sería interesante analizar qué tipo de praxeologías presentan los libros de texto seleccionados. Recordamos que la noción de praxeología o de organización matemática (OM) constituye una herramienta fundamental para modelizar la actividad matemática, y que una OM surge como respuesta a un conjunto de cuestiones en una institución, a las que se determinan tareas (Barquero, 2009).

Es importante resaltar que las tareas o tipos de tareas no son datos que nos proporciona la naturaleza, éstos son obras que provienen de cierta construcción institucional y cuya reconstrucción en cierta institución es un objeto de estudio de la didáctica. Lo mismo puede decirse del resto de componentes de las praxeologías.

En una institución, en relación a cierto tipo de tarea, suele existir en general una sola técnica o un pequeño número de técnicas. Ninguna técnica puede vivir con normalidad en una institución si no aparece como una manera de hacer o proceder correcta, comprensible y justificada. Por lo tanto, la existencia de una técnica supone que existe en su entorno un discurso interpretativo y justificativo de la técnica, que es lo que llamamos una tecnología que además de justificarla y hacerla inteligible, tiene la importante función de aportar elementos para modificar la técnica con la finalidad de ampliar su alcance para superar sus limitaciones y hacer posible la producción de nuevas técnicas. Convendría tomar como elementos de referencia de una praxeología a las tareas, técnicas y tecnologías definidas en el capítulo anterior para el análisis de libros de texto.

A continuación mostramos la tabla 3.3 donde describimos las técnicas y tecnologías a emplear. Asimismo, en cada tipo de tarea a describir solo emplearemos **dada una función cuadrática** en lugar de **dada la expresión algebraica de una función cuadrática**.

Tabla 3.3: Tipos de tareas, técnicas y tecnologías en nuestro estudio

Tipos de tareas	Técnicas	Tecnologías a emplear
$T_1$ : Dada una función cuadrática, determinar el dominio e imagen.	$Z_1$ : $\tau_0, \tau_1, \tau_2$ ; $Z_2$ : $\tau_1, \tau_3, \tau_2$	Propiedades de los números reales.
$T_2$ : Dada una función cuadrática, hallar los ceros.	$Z_1$ : $\tau_4$ o $\tau_5$	$\tau_4$ : Propiedades de los números reales. $\tau_5$ :completación de cuadrados.
$T_3$ : Dada la expresión algebraica $f(x) = ax^2 + bx + c$ , $a \neq 0$ , calcular los puntos de intersección.	$Z_1$ : $\tau_4$ o $\tau_5$ y $\tau_6$	Propiedades de los números reales.
$T_4$ : Dada una función cuadrática, identificar si es cóncava o convexa.	$Z_1, Z_2$ : $\tau_7$	Propiedades de los números reales.
$T_5$ : Dada una función cuadrática, hallar su gráfica.	$Z_1$ : $\tau_8, Z_2$ : $\tau_9, Z_3$ : $\tau_{10}$	$\tau_8, \tau_9, \tau_{10}$ : Propiedades de los números reales.
$T_6$ : Dada una función cuadrática, determinar los coeficientes cuando vienen expresados como parámetros.	$Z_1$ : $\tau_{11}, Z_2$ : $\tau_{12}, Z_3$ : $\tau_{13}, Z_4$ : $\tau_{14}$	Propiedades de los números reales para resolver sistemas de ecuaciones.
$T_7$ : Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática a partir de la gráfica.	$Z_1$ : $\tau_{15}$	$\tau_{15}$ : Propiedades de los números reales para resolver sistemas de ecuaciones.
$T_8$ : Dada una función cuadrática, hallar el valor máximo o mínimo que alcanza dicha función.	$Z_1$ : $\tau_{17}$ o $\tau_{20}$ o $\tau_{24}$	$\tau_{17}, \tau_{22}$ :Números reales. $\tau_{18}$ : Definición de la derivada. $\tau_{21}$ :Algoritmo de la derivada de una función potencia. $\tau_{19}, \tau_{23}$ :Criterio de la primera y segunda derivada.
$T_9$ : Dado un problema contextualizado donde se involucra una función cuadrática, interpretar modelos económicos con respecto a máximos y mínimos.	$Z_1$ : $\tau_{25}, Z_2$ : $\tau_{26}, Z_3$ : $\tau_{27}$	Para los casos particulares con nombre propio se justificaron con técnicas anteriores.
$T_{10}$ : Modelizar los fenómenos del mundo real utilizando funciones cuadráticas cuando corresponda.	$Z_1$ : $\tau_{32}$	Se emplearán las justificaciones según las técnicas a emplear.

Con respecto a la tabla 3.3 podemos ver que al tener distintas formas de presentar un tipo de tarea esto nos proporciona variedad de técnicas para sus soluciones, donde podemos observar que en nuestros tipos de tareas presentadas en esta investigación contamos con la presencia de los tres niveles de complejidad definidos anteriormente; por tal motivo, podemos decir que un libro de texto debe incluir en su presentación estos tipos de tareas las cuales propiciarán un desarrollo adecuado del objeto en estudio.

También hemos descrito las justificaciones matemáticas necesarias para la solución de cada técnica en los diferentes tipos de tareas, para así propiciar un mejor desarrollo y conocimiento de nuestro tema en estudio.

Teniendo en cuenta las OM que se presentan en los libros de texto seleccionados, se han considerado otros criterios de análisis que hacen referencia a la variedad de tareas, técnica y tecnologías que presentan los libros de texto, como podemos ver en la siguiente tabla:

Tabla 3.4: Criterios 3, 4 y 5 según la postura epistemológica adoptada

Criterio	Descripción de los criterios
3	Variedad de tareas resueltas y propuestas en el libro de texto para abordar el tema de funciones cuadráticas.
4	Presencia de técnicas necesarias para la solución de las tareas propuestas.
5	Presencia de tecnologías en las técnicas empleadas.

En la tabla 3.4 definimos el criterio 3 en base a la variedad de tareas resueltas y propuestas en el libro de texto para abordar el tema en estudio, este criterio aportará una valoración de los textos analizados; es aquí donde se llevará a cabo la contabilidad de los tipos de tareas respecto a su presentación donde los ejemplos se llamarán tareas resueltas y los problemas o ejercicios se llamarán tareas propuestas.

Para definir el criterio 4 tomamos en cuenta la presencia de técnicas necesarias para la solución de las tareas propuestas en los textos seleccionados, este criterio aportará una valoración positiva o no según como se desarrolle su organización didáctica.

Como último criterio definimos a la presencia de tecnologías en las técnicas empleadas en los textos al que denominamos criterio 5, y este permitirá una valoración en la descripción de su organización didáctica.

## Capítulo 4

# Análisis de los libros de texto

En este capítulo para el análisis de los libros de texto presentamos tres secciones donde describimos los criterios adoptados para la selección de los textos, la descripción y análisis de cada libro de texto seleccionado. Los libros de texto a analizar son: Métodos fundamentales de economía matemática de Alpha C. Chiang y Kevin Wainwright, cuarta edición del 2006, impreso en México al que nombramos "libro de texto 1"; y Matemáticas para el análisis económico de los autores Knut Sydsaeter, Peter Hammond, y Andrés Carbajal, segunda edición del 2012, impreso en España al que nombramos "libro de texto 2".

### 4.1. Criterios adoptados para la selección de los libros de texto

Para el análisis de una organización matemática relacionada con la función cuadrática, se consideraron dos libros de texto de matemática aplicados a la Economía. Uno de los libros de texto se eligió del sílabo del curso que se imparte en la instrucción escolar de referencia y para la elección del otro libro se consideró la opinión de expertos, estos serían profesores con experiencia en el dictado del curso de Matemáticas para Economistas, en una institución escolar diferente a la de referencia y con no menos de diez semestres académicos.

El libro de texto seleccionado por los expertos es Métodos fundamentales de economía matemática de Alpha C. Chiang y Kevin Wainwright, cuarta edición del 2006, impreso en México al que nombramos "libro de texto 1". El libro de texto elegido del sílabo es Matemáticas para el análisis económico de los autores Knut Sydsaeter, Peter Hammond, y Andrés Carbajal, segunda edición del 2012, impreso en España al que nombramos "libro de texto 2"; de los cuales presentamos una descripción y análisis en relación a nuestro objeto de estudio.

Para llevar a cabo el análisis de los libros de texto mencionados, se hizo una descripción del objeto en estudio, temas relacionados con dicho objeto y las tareas relacionadas con las tomadas en cuenta para este estudio; donde se tuvo en cuenta la organización matemática del libro de texto al desarrollar la función cuadrática y temas afines. En dicha descripción se tuvieron en cuenta la identificación de los criterios definidos en el capítulo anterior, en la que se tienen en cuenta la variedad de los tipos de tareas, presencia de técnicas y tecnologías

presentadas en los libros de texto seleccionados para el análisis.

Tabla 4.1: Libros de texto seleccionados para el análisis

Libro de texto	Título	Autores
1	Métodos fundamentales de economía matemática	Alpha C. Chiang y Kevin Wainwright
2	Matemáticas para el análisis económico	Knut Sydsaeter, Peter Hammond, y Andrés Carbajal

## 4.2. Sobre el libro de texto 1

### 4.2.1. Descripción del libro de texto 1

Chiang y Wainwright, 2006 en *Métodos fundamentales de economía matemática*, el libro de texto 1 indica que está dirigido a los estudiantes de economía que tienen la necesidad de aprender métodos matemáticos básicos indispensables para entender las publicaciones de economía actuales.

En su reflexión a la forma de presentar sus contenidos del libro de texto indica que un estilo demasiado formal carece de ilustraciones y demostraciones intuitivas pertinentes puede desmotivar a un estudiante y crearle la sensación de inadecuación intelectual. El punto de vista de los autores con relación al libro de texto es que es matemáticamente informal y más bien amigable al lector. Considera que generalmente prevé y contesta preguntas que se pueden dar en los lectores al estudiar los contenidos, además indica que presenta modelos económicos apropiados para motivar las necesidades analíticas de los economistas. También señala que hay un nivel gradual en el avance de los contenidos de lo más simple a lo complejo, y que las ilustraciones gráficas sirven para reforzar la comprensión de las expresiones algebraicas. Según los autores las tareas presentadas son medios para ayudar a la comprensión y reforzar la confianza de los estudiantes y evitar la frustración de los mismos.

Al relacionar la matemática con la economía como economía matemática, afirma que este es un método realizado para el análisis económico en el cual el economista utiliza símbolos matemáticos para enunciar los problemas y se basa en problemas matemáticos para auxiliarse en el razonamiento. Indica que el objetivo del libro de texto es introducir al lector en aspectos fundamentales de estos métodos matemáticos que se pueden encontrar a diario en las publicaciones actuales de economía.

Consideramos que es importante las observaciones que los autores tienen entre economía matemática y economía literaria, pues en ella deja entre ver la importancia de las expresiones matemáticas en relación al lenguaje verbal y específicamente las ecuaciones que reemplazan a los enunciados, estableciendo la equivalencia entre los símbolos y las palabras, enfatizando que los símbolos son más convenientes en el razonamiento deductivo y que contribuyen más en alcanzar la concisión y precisión del enunciado.

El libro de texto 1 motivo de análisis está conformado por cinco partes y dividido en veinte capítulos donde se tratan tipos principales de análisis económico: estática (análisis de equilibrio), estática comparativa, problemas de optimización (como un tipo especial de estática), dinámica y optimización dinámica.

El tratamiento de la función cuadrática se ubica en los siguientes apartados:

- Parte Uno - Capítulo 2: Modelos económicos. Sección 2.4 - Relaciones y Funciones (página 15) y Sección 2.5 - Tipos de funciones (página 20).
- Parte dos - Capítulo 3: Análisis del equilibrio en economía. Sección 3.3 Equilibrio parcial de mercado - Un modelo no lineal (página 35).
- Parte cuatro - Problemas de Optimización; Capítulo 9, Optimización: Una variedad especial de análisis de equilibrio (página 220). Sección 9.2 Máximo y mínimo relativo: criterio de la primera derivada. Sección 9.3 Derivada segunda y derivada de orden superior. Sección 9.4 Criterio de la segunda derivada.

A continuación se describen las praxeologías identificadas en este texto que la hemos nominado libro de texto 1.

El libro de texto 1 en la sección 2.4 presenta definiciones (teorías) previas como relación, ecuación, función y pares ordenados  $(x, y)$ . Una primera presentación de función la hace como pares ordenados, donde establecen una relación entre las componentes del mismo; seguida de dos tareas resueltas donde mediante una explicación verbal y gráfica, presenta su análisis para la diferencia entre dichos conceptos. Los ejemplos son presentados en lenguaje algebraico y los relaciona con su representación gráfica, en un modelo de función lineal de la siguiente manera

El conjunto  $\{(x, y) \mid y = 2x\}$  es un conjunto de pares ordenados que incluye, por ejemplo,  $(1, 2)$ ,  $(0, 0)$  y  $(-1, -2)$ . Esto constituye una relación, y su contraparte gráfica es el conjunto de puntos que yacen en la recta  $y = 2x$ , como se ve en la figura 2.5.

Figura 4.1: Chiang y Wainwright, 2006, ejemplo 3, p. 16

El conjunto  $\{(x, y) \mid y \leq x\}$ , que consiste en los pares ordenados tales como  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$  y  $(1, -4)$ , constituye otra relación. En la figura 2.5, este conjunto corresponde al conjunto de los puntos en el área sombreada que satisface la desigualdad  $y \leq x$ .

Figura 4.2: Chiang y Wainwright, 2006, ejemplo 4, p. 17

Los autores para establecer la definición de una función parte de un ejemplo de relación en la tarea (ejemplo) 4, luego utiliza la tarea (ejemplo) 3 para obtener una representación verbal y simbólica del concepto función. De esta manera los autores dicen:

*y es una función de  $x$ , y esto se denota mediante  $y = f(x)$ , que se lee “ $y$  es igual a  $f$  de  $x$ ”. [Nota:  $f(x)$  no significa  $f$  multiplicada por  $x$ .] Por lo tanto, una función es un conjunto de pares ordenados con la propiedad de que cualquier valor  $x$  determina un valor  $y$  única.<sup>2</sup> Debe resultar claro que una función debe ser una relación, pero es posible que una relación no sea una función.*

Figura 4.3: Chiang y Wainwright, 2006, p. 17

El libro de texto 1 presenta una definición de función donde estipula “una  $y$  única para cada  $x$ ”, no se requiere lo contrario. En otras palabras, se podría asociar a más de un valor  $x$  el mismo valor  $y$ . También describe que una función es también un mapeo o transformación; ambas palabras indican la acción de asociar una cosa con otra.

El texto concluye enfatizando el concepto de función, donde relata que la definición de función corresponde a lo que se podría llamar función de un solo valor en la terminología antigua. Lo que antes se llamaba función de varios valores ahora se conoce como relación o correspondencia.

Los autores presentan otras definiciones importantes de dominio e imagen, donde lo muestra en lenguaje natural de la siguiente manera:

*En la función  $y = f(x)$ ,  $x$  se denomina *argumento de la función* y la letra  $y$  se llama *valor de la función*. También se hará referencia a  $x$  como la *variable independiente* y a  $y$  como la *variable dependiente*. El conjunto de los valores permisibles que  $x$  puede tomar en un contexto dado se conoce como el *dominio* de la función, que puede ser un subconjunto del conjunto de los números reales. El valor  $y$  hacia el cual se envía un valor  $x$  se llama la *imagen* de ese valor  $x$ . El conjunto de las imágenes se llama *imagen* de la función (o *codominio*), que es el conjunto de los valores que puede tomar la variable  $y$ . Así, el *dominio* pertenece a la variable independiente  $x$ , y la *imagen* tiene que ver con la variable dependiente  $y$ .*

Figura 4.4: Chiang y Wainwright, 2006, p. 18

El texto considera a las funciones como modelos económicos relacionando las variables económicas con los números reales no negativos; situación que restringe los dominios de la función y que obliga a que las representaciones geométricas se tracen solo en el primer cuadrante. Muestra un único ejemplo aplicando los conceptos de dominio y rango de una función lineal aplicado a la economía.

Finalmente en esta sección el texto presenta una lista de ejercicios pertenecientes a la sección 2.4, siendo de nuestro interés el número 6.

El libro de texto 1 en la sección 2.5 Tipos de funciones, muestra a las funciones polinomiales en un caso particular la función cuadrática, reconociendo el grado del polinomio y sus coeficientes, dando la siguiente definición según Chiang y Wainwright (2006):

“Una función cuadrática, es un polinomio de segundo grado.”

“Por otro lado, una función cuadrática traza una parábola, en términos generales, una curva con una sola protuberancia o serpenteante” .

El texto describe la siguiente definición:

Caso de $n = 2$ :	$y = a_0 + a_1x + a_2x^2$	[función cuadrática]
-------------------	---------------------------	----------------------

Figura 4.5: Chiang y Wainwright, 2006, p. 21

En el texto se asocia a esta representación simbólica la siguiente representación gráfica:

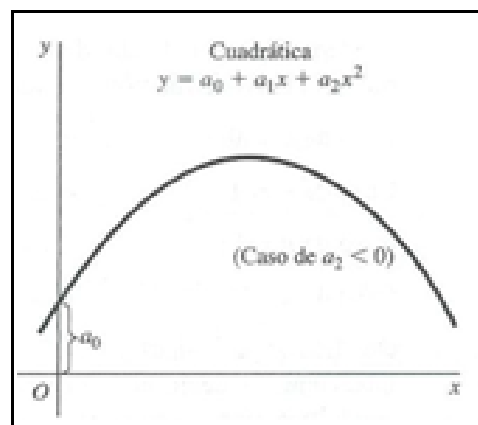


Figura 4.6: Chiang y Wainwright, 2006, p. 22

En el conjunto de tareas de la sección 2.5 solo el número 3 se puede relacionar con la función cuadrática.

En el tema equilibrio parcial de mercado, sección 3.3 los autores sustituyen la demanda lineal en el modelo de mercado aislado por una función de demanda cuadrática, mientras que la función de oferta permanece lineal usando coeficientes numéricos en vez de parámetros. Donde surge un modelo económico como el siguiente:

$\begin{aligned} Q_d &= Q_s \\ Q_d &= 4 - P^2 \\ Q_s &= 4P - 1 \end{aligned}$	(3.6)
---	-------

Figura 4.7: Chiang y Wainwright, 2006, p. 35

Al efectuar la igualdad resulta la ecuación cuadrática de la variable  $P$ .

$$P^2 + 4P - 5 = 0 \quad (3.7)$$

Figura 4.8: Chiang y Wainwright, 2006, p. 35

Luego los autores explican las diferencias de la ecuación cuadrática versus función cuadrática, dichas diferencias lo hace con un ejemplo, presentadas en el siguiente cuadro

Función cuadrática	Ecuación cuadrática
La expresión $P^2 + 4P - 5$ constituye una <i>función cuadrática</i> , por ejemplo $f(P)$ . Por lo tanto podemos escribir $f(P) = P^2 + 4P - 5$ , lo que hace es especificar una regla de asignación de $P$ a $f(P)$ , para cada valor de $P$ , hay un número infinito de soluciones.	Si a $f(P)$ se le asigna el valor cero, el resultado es una <i>ecuación cuadrática</i> con la única variable $P$ . Los valores solución $P$ se denominan comúnmente las raíces de la <i>ecuación cuadrática</i> $f(P) = 0$ , o bien, los ceros de la <i>función cuadrática</i> $f(P)$ .

Figura 4.9: Chiang y Wainwright, 2006, p. 35

Los autores describen que la distinción entre función cuadrática y ecuación cuadrática también se puede extender a casos distintos de los cuadráticos. Para resolver una ecuación cuadrática el texto después de dar una solución gráfica de un ejemplo, detalla la solución mediante el método Fórmula cuadrática como sigue:

**Fórmula cuadrática**

La ecuación (3.7) se ha resuelto en forma gráfica, pero también se puede resolver mediante un método algebraico. En general, dada una ecuación cuadrática de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \quad (3.9)$$

hay dos raíces que se pueden obtener de la *fórmula cuadrática*:

$$x_1^*, x_2^* = \frac{-b \pm (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a} \quad (3.10)$$

donde la parte + del signo  $\pm$  produce  $x_1^*$  y la parte - produce  $x_2^*$ .

Observe también que mientras que  $b^2 - 4ac > 0$ , diferirían los valores de  $x_1^*$  y  $x_2^*$ , de modo que se obtienen dos números reales distintos como raíces. Pero en el caso especial donde  $b^2 - 4ac = 0$ , se encontraría que  $x_1^* = x_2^* = -b/2a$ . En este caso, las dos raíces comparten el mismo valor; éstas se conocen como *raíces repetidas*. En el otro caso especial, donde  $b^2 - 4ac < 0$ , se tendría la tarea de sacar la raíz cuadrada de un número negativo, lo cual no es posible en el sistema de números reales. En este último caso, no existen raíces de valores reales. Este asunto se analiza después en la sección 16.1.

Esta fórmula utilizada ampliamente se deduce por medio de un proceso conocido como "completar el cuadrado". Primero, al dividir cada término de (3.9) entre  $a$  se obtiene la ecuación

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Al restar  $c/a$  y sumar  $b^2/4a^2$  a ambos lados de la ecuación, se obtiene

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

El lado izquierdo ahora es un "cuadrado perfecto" y, por lo tanto, la ecuación se puede expresar como

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

o bien, después de sacar la raíz cuadrada en ambos lados,

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{(b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a}$$

Por último, al restar  $b/2a$  de ambos lados, se obtiene el resultado en (3.10).

Figura 4.10: Chiang y Wainwright, 2006, p. 36-37

Luego presenta un ejemplo de aplicación de la fórmula cuadrática. Al final de la sección presenta la lista de ejercicio de la sección 3.3 (página 40), de la cual tomaremos para el análisis los ejercicios 1,2 y 6.

En el capítulo 9 Optimización: una variedad especial de análisis de equilibrio, los autores centran la atención en el estudio del equilibrio final, donde define "el estado de equilibrio" como la posición óptima para una determinada unidad económica, en la cual la mencionada unidad económica estará luchando de manera deliberada por conseguir ese equilibrio.

El libro de texto 1, menciona que la esencia del problema de optimización es "elegir" con base en un criterio, la mejor alternativa posible. Con respecto a ese criterio propio de la economía detalla lo siguiente:

En la sección 9.2 el texto describe el tema máximo y mínimo relativo: criterio de la primera derivada, donde se obtiene una función cuadrática como un caso particular de la función

El criterio de elección más común entre alternativas en economía es el objetivo de *maximizar* algo (por ejemplo, la ganancia de una empresa, la utilidad de un consumidor o la tasa de crecimiento de una empresa o de la economía de un país) o de *minimizar* algo (por ejemplo, el costo total de producción conocido). Económicamente, los problemas de maximización y minimización podríamos categorizarlos bajo el encabezado general de *optimización*, lo que significa “la búsqueda de lo mejor”. Desde un punto de vista matemático puro, los términos *máximo* y *mínimo* no conllevan ninguna connotación de optimización. Por lo tanto, el término colectivo para máximo y mínimo, como conceptos matemáticos, es la designación más directa *extremo*, que significa un valor extremo.

Figura 4.11: Chiang y Wainwright, 2006, p.221

derivada, la cual lo ilustra con un ejemplo. Las tareas propuestas relacionadas con el tema de estudio se presenta en el número 1 de los ejercicios de la sección 9.2.

Luego en la sección 9.3 los autores describen la derivada segunda y derivadas de orden superior, las cuales permitirán desarrollar criterios alternativos para localizar los extremos relativos de una función. En esta sección podemos apreciar una aplicación para determinar si la gráfica de una función cuadrática particular tendrá una gráfica estrictamente convexa o estrictamente cóncava.

**Una aplicación**

Las dos curvas de la figura 9.5 ejemplifican las gráficas de funciones cuadráticas, las cuales podemos expresar por lo común en la forma

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

Del análisis de la segunda derivada, podemos ahora obtener una forma conveniente de determinar si una función cuadrática particular tendrá una gráfica estrictamente convexa (en forma de U) o estrictamente cóncava (en forma de U invertida).

Puesto que la segunda derivada de la función cuadrática citada es  $d^2y/dx^2 = 2a$ , esta derivada tendrá siempre el mismo signo algebraico que el coeficiente  $a$ . Teniendo en cuenta que una segunda derivada positiva implica una función estrictamente convexa, se infiere que un coeficiente positivo  $a$  en la función cuadrática anterior da lugar a una gráfica en forma de U. Por el contrario, un coeficiente negativo  $a$  da lugar a una curva estrictamente cóncava, en forma de una U invertida.

Como sugerimos al final de la sección 9.2, el extremo relativo de esta función probará ser también su extremo absoluto, porque en una función cuadrática podemos encontrar sólo un valle o una cúspide, evidente en una U o U invertida, respectivamente.

Figura 4.12: Chiang y Wainwright, 2006, p.231

En esta figura el texto muestra la concavidad y convexidad de una función cuadrática.

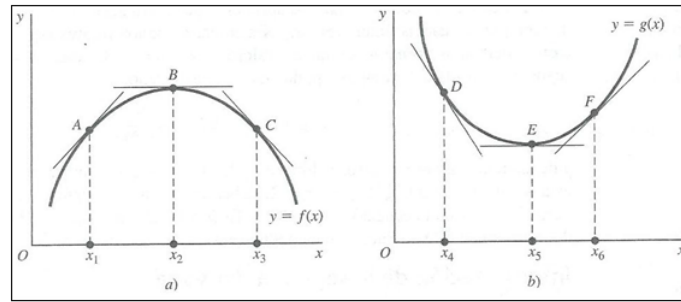


Figura 4.13: Chiang y Wainwright, 2006, p.230

Para el análisis tomamos en cuenta la tarea número 2 de los ejercicios de la sección 9.3.

El libro de texto 1 en la sección 9.4 describe el Criterio de la segunda derivada, de la siguiente manera:

**Criterio de la segunda derivada para el extremo relativo** Si el valor de la primera derivada de una función  $f$  en  $x = x_0$  es  $f'(x_0) = 0$ , entonces el valor de la función en  $x_0$ ,  $f(x_0)$ , será

- a) Un *máximo* relativo si el valor de la segunda derivada en  $x_0$  es  $f''(x_0) < 0$ .
- b) Un *mínimo* relativo si el valor de la segunda derivada en  $x_0$  es  $f''(x_0) > 0$ .

Figura 4.14: Chiang y Wainwright, 2006, p.233

Seguida de una observación con respecto al criterio de la primera y segunda derivada.

En general, es más conveniente usar esta prueba que el criterio de la primera derivada, porque no requiere comprobar el signo de la derivada a la izquierda y a la derecha de  $x_0$ ; sin embargo, tiene la desventaja de que no podemos sacar una conclusión inequívoca en el caso de que  $f''(x_0) = 0$ , porque el valor estacionario  $f(x_0)$  puede ser *ya sea* un máximo relativo, *o bien*, un mínimo relativo, *o* incluso un valor de inflexión.<sup>4</sup> Cuando encontremos la situación de  $f''(x_0) = 0$ , debemos volver al criterio de la primera derivada, o recurrir a otro criterio, que se desarrollará en la sección 9.6, la cual tiene que ver con la tercera derivada o incluso derivadas superiores. Sin embargo, para la mayor parte de los problemas de economía, la prueba de la segunda derivada por lo común es adecuada para determinar un máximo o mínimo relativo.

Figura 4.15: Chiang y Wainwright, 2006, p.233-234

Para explicar el criterio de la segunda derivada los autores muestran un ejemplo de la función cuadrática y función cúbica.

De la misma manera, el texto al presentar las condiciones para la maximización de la ganancia lo hace por medio del ejemplo 3, donde al derivar obtiene una función cuadrática y el tratamiento a una ecuación cuadrática buscando optimizar dicha ganancia. A su vez, muestra modelos de optimización para representar la función costo total cúbica y curva de ingreso marginal con pendiente ascendente; seguido de un ejemplo de la función ingreso promedio donde

al derivar obtiene una función cuadrática.

En el subtítulo Coeficientes de una función de costo total cúbica, explica el tratamiento de la función derivada para que el costo marginal sea positivo, indicando que esto se asegura solo si el mínimo absoluto del costo marginal resulta ser positivo, indicando que el coeficiente de la cantidad debe ser positivo; a la vez sugiere que para estos problemas de costo marginal se puede desarrollar mediante la completación de cuadrados”.

Finalmente, en los ejercicios de la sección 9.4 del texto tenemos las tareas propuestas relacionadas con nuestro tema, en la que identificamos los siguientes números 1, 2, 3, 5, y 7.

#### 4.2.2. Análisis del libro de texto 1

Para el análisis de las praxeologías: tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías de este texto, según nuestro marco teórico tomamos en cuenta los criterios 3, 4 y 5 descritos en el capítulo anterior.

En esta OM se aprecia la definición de función cuadrática en lenguaje algebraico, gráfico y natural; seguida de la fórmula cuadrática para resolver ecuaciones de segundo grado las cuales son abordadas mediante la técnica “fórmula cuadrática”, con presencia de la tecnología “completación de cuadrados” siguiendo las propiedades de los números reales; con el objetivo de hallar los ceros de dicha función.

Con respecto a la definición de dominio e imagen, los autores se preocupan en dar a conocer los diferentes nombres de las variables y de acuerdo a la relación que existe entre ellas, por ejemplo “ $x$ ” es la variable independiente que además se denomina argumento.

Podemos deducir que los autores definen a la función cuadrática como un polinomio de segundo grado así como relacionan su gráfica con la cónica parábola.

Para la tarea propuesta número 6 de la sección 2.4, el texto no muestra técnica alguna, solo presenta tareas resueltas para casos lineales; en el cual sugiere que el dominio e imagen son subconjuntos de los reales.

Con respecto a la descripción gráfica de una función cuadrática, en la sección 2.5 el texto da una explicación con términos no adecuados, comparando a la parábola con una curva serpenteante o de una sola protuberancia. Donde según el diccionario de la Real Academia Española la palabra serpenteante no está definida y la más próxima es serpentear que significa andar, moverse o extenderse, formando vueltas y tornos como la serpiente; y protuberancia significa prominencia más o menos redonda. Del mismo modo, cuando hace referencia a la posición de

abertura para función cuadrática usa términos poco adecuados como valle o colina. A su vez, los autores describen la representación gráfica de la función cuadrática indicando la convexidad o concavidad la cual va a depender del signo (positivo o negativo) del parámetro de la variable cuadrática, relacionándolo de manera informal con el contexto geográfico como es un valle y una colina. Considerando en forma confusa el término valle, situación que podría confundir al estudiante en relación a la representación gráfica. Este inconveniente puede ser generado por la traducción del libro de texto original escrito en inglés.

Para la tarea 3 de la sección 2.5, no muestra una tecnología solo una técnica donde dice que la gráfica de este polinomio es una parábola donde indica si el coeficiente de la variable cuadrática es mayor que cero su gráfica representa un valle, y si dicho coeficiente es menor que cero su gráfica representa una colina.

Debemos resaltar el énfasis de los autores en diferenciar una ecuación cuadrática de una función cuadrática, siendo esto de gran importancia debido a que muchas veces los estudiantes confunden ecuación con función.

Con respecto a la inclusión de la función demanda cuadrática por una lineal el texto no muestra tecnología alguna, resaltando que al igualar la función oferta lineal con la función demanda cuadrática resulta una ecuación cuadrática donde dicho tratamiento nos lleva a obtener el punto de equilibrio (una raíz de la ecuación cuadrática) para el modelo económico.

De las siete tareas presentadas en los ejercicios de la sección 3.3, en el número 1 presenta dos tareas donde solicita graficar, en el número 3 solicita la aplicación de la fórmula cuadrática y en el número 6 requiere aplicación de modelos de equilibrio. Para la tarea 1 de los ejercicios de la sección 3.3 muestra el ejemplo (3.8) con presencia de técnica y tecnología; para las tareas 2 y 6 también muestra las técnicas y tecnologías en el mismo ejemplo.

Los autores en el capítulo 7, ejercicios de la sección 7.2, número 2 relaciona el costo promedio con la función cuadrática por lo que esto le permite convertirlo en tareas de aplicación. De igual manera considera la función costo total e ingreso total como funciones cuadráticas.

Debemos hacer mención que en el capítulo 9, el libro de texto 1 presenta la función cuadrática en el tratamiento de diferentes aplicaciones para los modelos económicos, por ejemplo, para optimizar en una función cúbica se deriva obteniéndose como resultado la función cuadrática, tema de estudio. Otro caso es analizar la concavidad o convexidad de una función cuadrática mediante el signo de la segunda derivada.

Para el análisis de la variedad de tareas denominado criterio 3 en el libro de texto 1, presentamos la siguiente tabla:

Tabla 4.2: Análisis del libro de texto 1 según el criterio 3

Tipos de tareas	Tareas Resueltas	Tareas Propuestas
$T_1$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, determinar el dominio e imagen.	1	1
$T_2$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, hallar los ceros.	1	7
$T_3$ : Dada la expresión algebraica $f(x) = ax^2 + bx + c$ , $a \neq 0$ , calcular los puntos de intersección con los ejes coordenados.	1	0
$T_4$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, identificar si la gráfica es cóncava o convexa.	0	5
$T_5$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, hallar su gráfica.	1	4
$T_6$ : Dada la expresión algebraica, cuando uno o varios coeficientes vienen expresados como parámetros, determinarlos conociendo las coordenadas de uno o varios puntos de la parábola.	0	0
$T_7$ : Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática a partir de la gráfica.	0	0
$T_8$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, hallar el valor máximo o mínimo que alcanza dicha función.	4	9
$T_9$ : Dado un problema contextualizado donde se involucra la función cuadrática, interpretar modelos económicos con respecto a máximos y mínimos.	3	1
$T_{10}$ : Modelizar los fenómenos del mundo real utilizando funciones cuadráticas cuando corresponda.	0	1
TOTAL	10	28

De acuerdo a la tabla 4.1, podemos observar que el número de tipos de tareas propuestas (28) es mayor al número de las tareas resueltas (10). Donde identificamos la ausencia de las tareas  $T_3$ ,  $T_6$  y  $T_7$  y con respecto a las tareas  $T_4$  y  $T_{10}$  solo contamos con tareas propuestas. El número de actividades de la tarea  $T_8$  es mayor que las otras tareas, seguida de la tarea  $T_2$ .

A continuación presentamos una tabla donde describimos los criterios 4 y 5 identificados en esta OM.

Tabla 4.3: Análisis del libro de texto 1 según los criterios 4 y 5

Tipos de tareas	Criterio 3 Presencia de técnicas a emplear	Criterio 4 Presencia de tecno- logías a emplear
$T_1$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, determinar el dominio e imagen.	Sí	No
$T_2$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, hallar los ceros.	Sí	Sí
$T_3$ : Dada la expresión algebraica $f(x) = ax^2 + bx + c$ , $a \neq 0$ , calcular los puntos de intersección con los ejes coordenados.	Sí	No
$T_4$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, identificar si la gráfica es cóncava o convexa.	Sí	Sí
$T_5$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, hallar su gráfica.	Sí	No
$T_6$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, cuando uno o varios coeficientes vienen expresados como parámetros, determinarlos conociendo las coordenadas de uno o varios puntos de la parábola.	No	No
$T_7$ : Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática a partir de la gráfica.	No	No
$T_8$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, hallar el valor máximo o mínimo que alcanza dicha función.	Sí	Sí
$T_9$ : Dado un problema contextualizado donde se involucra la función cuadrática, interpretar modelos económicos con respecto a máximos y mínimos.	Sí	Sí
$T_{10}$ : Modelizar los fenómenos del mundo real utilizando funciones cuadráticas cuando corresponda.	No	No

De la tabla 4.2 podemos observar que el libro de texto 1 muestra:

- Para la solución de la tarea  $T_1$ , el texto presenta la técnica de dar valores a la variable independiente y luego reemplaza dichos valores en la función, para hallar la imagen. No muestra tecnología alguna.
- Para resolver  $T_2$  el libro de texto 1 presenta la técnica de igualar a cero la expresión algebraica dada, luego da la fórmula cuadrática para hallar la raíces de la ecuación cuadrática obtenida y a la vez presenta la justificación de dicha fórmula denominada “completación de cuadrados” .
- Con respecto a la tarea  $T_3$  el texto muestra una técnica en el ejemplo (3.8) donde se hallan las intersecciones con el eje horizontal. Sin presencia de justificación.
- Para  $T_4$ , explica: los casos del coeficiente de la variable cuadrática en la sección (3.3), una forma intuitiva en la sección (2.5) y en la sección (9.3) presenta una técnica mediante la interpretación de la segunda derivada mediante una aplicación. La justificación se muestra en forma explícita en esta última interpretación (técnica).
- En este libro de texto con respecto a la tarea  $T_5$  la técnica se da en el ejemplo (3.8), mediante el proceso de tabulación, sin justificación alguna.
- Con respecto a la tarea  $T_6$  el libro de texto 1 no muestra técnica ni tecnología.
- Para la tarea  $T_7$  el libro de texto 1 no muestra técnica ni tecnología.
- El libro de texto 1 describe el criterio de la primera derivada como técnica para la tarea  $T_8$ , con presencia de justificación dando a conocer que la función es continua y posee una derivada continua.
- Presenta el ejemplo 3 como técnica para la solución de tareas del tipo  $T_9$  donde se interpreta la función ganancia, también muestra una segunda técnica, al que denomina “método alternativo”. Las justificaciones se dan en la sección (9.4) donde presenta las “condiciones para la maximización de la ganancia”. Para el caso del modelo ingreso promedio el texto muestra una técnica en el ejemplo 4 de la misma sección; con sus justificaciones correspondientes.
- Para el tipo de tarea  $T_{10}$  el texto no muestra presencia de técnicas ni tecnologías.

Considerando los indicadores de Fonseca (2004) para este análisis, observamos que en el libro de texto 1 describe lo siguiente:

OML1. Presenta tareas que hace referencia a la interpretación y justificación del objeto en estudio, pero no se observa la comparación entre técnicas para la solución de una tarea. La mayoría de tareas que observamos en este texto se encuentran relacionadas haciendo que dependan una de otra con respecto a la técnica usada para su solución. A continuación mostramos un ejemplo

1. Halle los valores estacionarios de las siguientes funciones (compruebe si son máximos o mínimos relativos o puntos de inflexión), suponiendo que el dominio es el conjunto de los números reales:  
 (a)  $y = -2x^2 + 8x + 7$     (b)  $y = 5x^2 + x$     (c)  $y = 3x^2 + 3$     (d)  $y = 3x^2 - 6x + 2$

Figura 4.16: Chiang y Wainwright, 2006, ejercicio 9.2-1, p.226

OML2. En algunas tareas podemos notar la presencia de varias técnicas y criterios para su solución, como por ejemplo en las tareas  $T_4$  y  $T_9$  pero no todas presentan justificaciones. A continuación mostramos un ejemplo

2. ¿Cuál de las siguientes funciones cuadráticas es estrictamente convexa?  
 (a)  $y = 9x^2 - 4x + 8$     (c)  $u = 9 - 2x^2$   
 (b)  $w = -3x^2 + 39$     (d)  $v = 8 - 5x + x^2$

Figura 4.17: Chiang y Wainwright, 2006, ejercicio 9.3-2, p.233

OML3. Con respecto a nuestro objeto de estudio podemos reconocer cuatro formas distintas de representación: lenguaje natural, lenguaje algebraico, lenguaje gráfico y representación tabular. El texto no hace referencia a la representación del objeto matemático más adecuada según la técnica usada. A continuación mostramos un ejemplo

$$f(P) = P^2 + 4P - 5 \tag{3.8}$$

Lo que hace (3.8) es especificar una regla de asignación de  $P$  a  $f(P)$ , tal como

$P$	...	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	...
$f(P)$	...	7	0	-5	-8	-9	-8	-5	0	7	...

Figura 4.18: Chiang y Wainwright, 2006, ejemplo 3.8, p.35

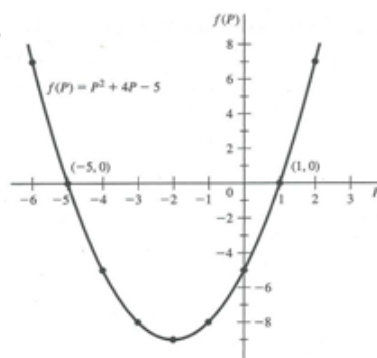


Figura 4.19: Chiang y Wainwright, 2006, ejemplo 3.8, p.36

OML4. Para el estudio de la función cuadrática tomamos en cuenta los tipos de tareas  $T_5$  y  $T_7$  donde observamos claramente la existencia de tareas “inversas”. Para la tarea  $T_5$  el libro

de texto 1 muestra cinco tareas y para la tarea  $T_7$  no presenta ninguna tarea. A continuación mostramos un ejemplo

### 3. Gráficas de funciones

$$(a) y = -x^2 + 5x - 2 \quad (b) y = x^2 + 5x - 2$$

con el conjunto de valores  $-5 \leq x \leq 5$  que constituye el dominio. Es bien sabido que el signo del coeficiente del término  $x^2$  determina si la gráfica de la función cuadrática tendrá una "colina" o un "valle". Con base en el presente problema, ¿qué signo se relaciona con la colina? Proporcione una explicación intuitiva para esto.

Figura 4.20: Chiang y Wainwright, 2006, ejercicio 2.5-3, p.36

OML5. El texto no presenta tareas con las descripciones de este indicador.

OML6. El libro de texto 1 presenta tareas abiertas en el tipo de tareas  $T_{10}$  donde los alumnos se encuentran ante datos que son valores desconocidos (parámetros) y las incógnitas no son valores concretos. Es aquí donde nos referimos a las tareas de modelización. El libro de texto 1 muestra una tarea propuesta para este tipo de tareas. A continuación mostramos un ejemplo

2. El señor Greenthumb desea cercar un campo de flores rectangular, usando una pared de su casa como un lado del rectángulo. Los otros tres lados se encerrarán con malla de alambre, de la cual tiene sólo 64 pies disponibles. ¿Cuáles son la longitud  $L$  y el ancho  $W$  del rectángulo con el cual obtendría el área de plantación más grande posible? ¿Cómo se asegura de que su respuesta sea el área más grande y no la más pequeña?

Figura 4.21: Chiang y Wainwright, 2006, ejercicio 9.4-2 , p.241

OML7. El texto no presenta tareas con las descripciones de este indicador.

OML8. El texto no presenta tareas con las descripciones de este indicador.

## 4.3. Sobre el libro de texto 2

### 4.3.1. Descripción del libro de texto 2

Sydsaeter, K., Hammond, P. y Carbajal A., 2012. Matemáticas para el análisis económico. España: Pearson Educación, S.A

Sydsaeter et al, 2012 describe que los estudiantes de Economía necesitan diversas herramientas matemáticas importantes. Entre otras, son necesarias el cálculo para funciones de una y varias variables, así como sus conocimientos básicos de los problemas de optimización en varias variables, con restricciones o sin ellas.

El propósito del libro de texto 2 es ayudar a los estudiantes a adquirir las habilidades matemáticas que necesitan para leer los artículos de economía menos técnicos, al menos, y así ser capaces de desempeñar una labor de economistas o de analistas financieros en el mundo

contemporáneo. Se trata de un libro de matemáticas, en el cual el material esta ordenado de tal manera que los conocimientos se van adquiriendo progresivamente.

Este libro de texto está conformado por veintiuno capítulos y cuatro anexos. En el cual ubicamos el tratamiento de la función cuadrática en los siguientes apartados

- Capítulo 1 Introducción. Sección 1.4 Variables, símbolos y ecuaciones (página 11), Ecuaciones Cuadráticas (página 14)
- En Capítulo 2 Funciones de una variable: Introducción. Sección 2.2 Funciones de una variable real (página 34). Sección 2.4 Gráficas de funciones (página 46).
- En Capítulo 3 Polinomios, potencias y exponenciales. Sección 3.1 Funciones cuadráticas (página 61). Sección 3.2 Ejemplos de problemas de optimización cuadrática (página 65). Sección 3.3 Polinomios. Sección 3.6 El concepto general de función.
- En Capítulo 9, Optimización en una variable. Sección 9.1 Definiciones básicas (página 233). Sección 9.2 El test de la derivada primera para los puntos óptimos (página 235). Sección 9.3 Maneras alternativas de hallar máximos y mínimos (página 239). Sección 9.4 Máximos y mínimos locales (página 244). Sección 9.5 Funciones convexas y cóncavas y puntos de inflexión (página 252). Sección 9.6 Más sobre funciones cóncavas y convexas (página 260).
- En el capítulo 10 Integración. Sección 10.1 Áreas bajo curvas (página 268). Sección 10.2 Integrales indefinidas (página 272).
- Anexo A. Tenemos A4 Factorizaciones (página 692), A6 Ecuaciones sencillas y cómo resolverlas (página 701).

A continuación se describen las definiciones y praxeologías identificadas en esta OM.

El texto en el capítulo 1 Variables, símbolos y ecuaciones presenta ejemplos cuadráticos en uno de ellos halla sus raíces y en otro modeliza una función cuadrática.

Los autores presentan un subtítulo en la misma sección “Ecuaciones cuadráticas” , donde señala que mediante el método de “completar los cuadrados” se obtiene la “Fórmula cuadrática” con la finalidad de hallar las raíces de dicha ecuación.

En la sección 2.2 los autores describen la definición de funciones de una variable real, de la siguiente manera:

**Una función de una variable real  $x$  con dominio  $D$  es una regla que asigna un único número real a cada número  $x$  en  $D$ .**

Figura 4.22: Sydsaeder et al, 2012, p.34

El libro de texto 2 en un siguiente subtítulo presenta la definición de dominio y rango de una función, de la siguiente manera:

*Si se define una función por medio de una fórmula algebraica, adoptamos el convenio de que el dominio consta de todos los valores de la variable independiente para los cuales la fórmula tiene sentido (a menos que se mencione explícitamente otro).*

Figura 4.23: Sydsaeder et al, 2012, p.37

Sea  $f$  una función con dominio  $D$ . El conjunto de todos los valores  $f(x)$  que toma la función se llama el rango de  $f$ . Usualmente se denota el dominio de  $f$  por  $D_f$  y el rango por  $R_f$ . Estos

Figura 4.24: Sydsaeder et al, 2012, p.37

El texto muestra ejemplos, relacionados con el tema. En las tareas propuestas en el problema 5 presenta una función cuadrática.

En la sección 2.4 el libro texto 2 presenta la definición de gráficas de funciones:

La gráfica de una función  $f$  es el conjunto de todos los puntos  $(x, f(x))$ , donde  $x$  pertenece al dominio de  $f$ . Ésta es simplemente la gráfica de la ecuación  $y = f(x)$ . Se pueden encontrar ejemplos típicos de gráficas de funciones en las Figuras 1 y 2. La Figura 1 contiene la gráfica de  $f(x) = x^2 - 3x$ , que se halla calculando puntos  $(x, f(x))$  y dibujando luego una curva lisa a través de esos puntos. La función cuya gráfica está contenida en la Figura 2 es de un tipo que se encuentra frecuentemente en economía. Está definida por fórmulas diferentes en intervalos diferentes.

Figura 4.25: Sydsaeder et al, 2012, p.46

Seguido de sus respectivas gráficas de los ejemplos dados.

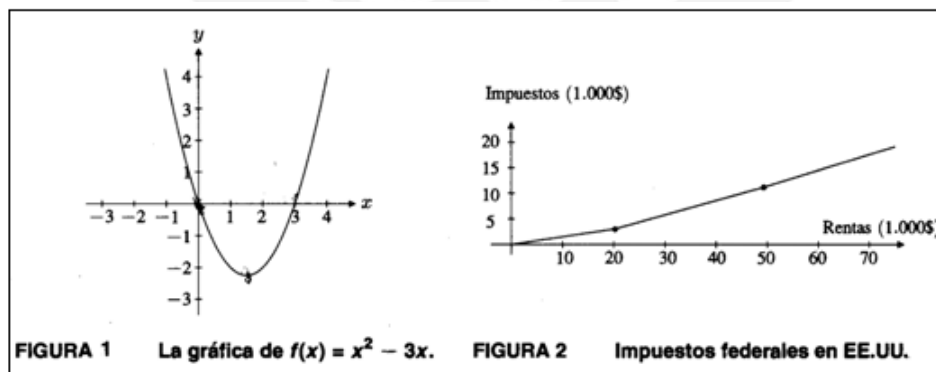


Figura 4.26: Sydsaeder et al, 2012, p.46

Mediante un ejemplo el texto describe como representar el desplazamiento de funciones. En el problema número 4 presenta tres tareas de nuestro interés para graficar funciones cuadráticas a partir de su expresión algebraica. Antes de llegar a nuestro tema de estudio este libro de texto describe modelos lineales, donde presenta una variedad de tareas para su aplicación.

En la sección 3.1 el texto presenta funciones cuadráticas, comentando que muchos modelos económicos requieren funciones que o bien decrecen hasta un valor mínimo para después crecer o bien crecen hasta un máximo para después decrecer , haciendo mención que las funciones más sencillas con esta propiedad son las funciones cuadráticas generales, presentada de la siguiente manera:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \text{ constantes, } a \neq 0)$$

Figura 4.27: Sydsaeder et al, 2012, p.61

Donde muestra que a la gráfica de esta función se llama parábola. A su vez, el texto presenta varias representaciones gráficas de dicha función.

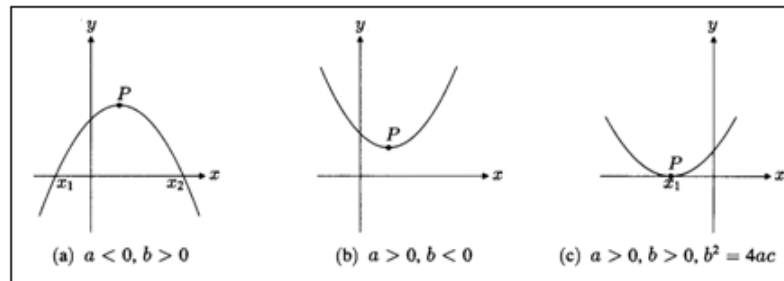


Figura 4.28: Sydsaeder et al, 2012, p.62

Los autores muestran la siguiente observación:

Para comprender más profundamente la función  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , nos interesa responder a las siguientes preguntas:

1. ¿Para qué valores de  $x$  (si los hay) es  $ax^2 + bx + c = 0$ ?
2. ¿Qué coordenadas tiene el máximo o mínimo  $P$ ?

Figura 4.29: Sydsaeder et al, 2012, p.61

El libro de texto 2 presenta las respuestas a estas preguntas donde muestra la “fórmula general” para hallar las raíces de la ecuación cuadrática y el método de “completar cuadrados”.

Sea  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Si  $a > 0$ , entonces  $f$  tiene su mínimo en el punto

$$\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

Si  $a < 0$ ,  $f$  tiene su máximo en ese punto

Figura 4.30: Sydsaeder et al, 2012, p.62

En esta sección 3.1 los problemas de nuestro interés para el análisis son 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9 y 11.

En la sección 3.2 los autores desarrollan ejemplos de optimización cuadrática, donde comentan que los problemas de optimización son la forma en que la elección se expresa matemáticamente. Mediante un ejemplo el texto ilustra el cálculo del máximo de las funciones cuadráticas, donde intervienen costes totales, ingreso total y beneficio para la función cuadrática. Las tareas propuestas tomadas en cuenta para nuestro análisis son los números 1 y 2.

Este libro de texto en los problemas de la sección 3.3 polinomios, podemos reconocer un ejercicio (tarea propuesta) 7.a sobre la función cuadrática, donde pide hallar la expresión algebraica dada la representación gráfica. Es en esta sección donde los autores presentan una definición general de función donde dicen: “Una función de A en B es una regla que asigna a cada elemento del conjunto A un elemento y solo uno del conjunto B”.

El libro de texto 2 menciona que para definir una función se requiere tres objetos específicos: un dominio A, un codominio B y una regla que asigne un único elemento de B a cada elemento de A.

En el capítulo 9 Optimización en una variable; los autores manifiestan que en general ningún método matemático es más importante en aplicaciones a la economía que los que se diseñan para resolver problemas de optimización. Aunque los problemas de optimización en economía requieren normalmente varias variables, los ejemplos de optimización cuadrática de la sección 3.2 indican que se pueden generar muchas intuiciones económicas a partir de optimización en una variable.

En la sección 9.1 el libro de texto 2 describe definiciones básicas como la de máximo y mínimo para una función  $f(x)$  de dominio  $D$

$c \in D \text{ es un máximo de } f \iff f(x) \leq f(c), \text{ para todo } x \in D$ $d \in D \text{ es un mínimo de } f \iff f(x) \geq f(d), \text{ para todo } x \in D$
---

Figura 4.31: Sydsaeder et al, 2012, p.233

Los autores detallan cual es el valor máximo y mínimo de  $f$ , también definen  $-f$  para luego convertir problemas de maximización en problemas de minimización y viceversa. Como se puede observar en la siguiente gráfica:

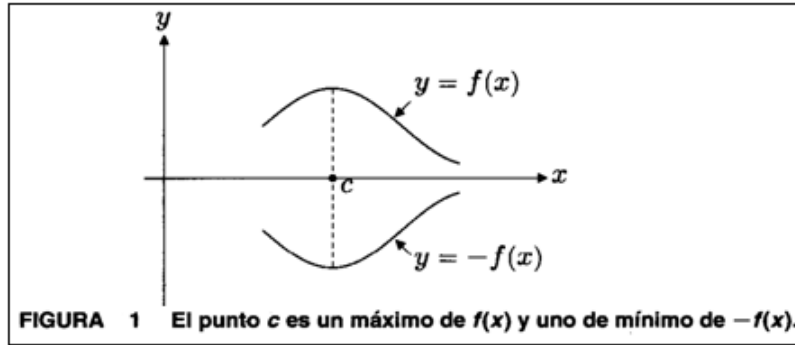


Figura 4.32: Sydsaeder et al, 2012, p.234

El texto determina los posibles máximos y mínimos de una función. Para lo cual presenta la siguiente definición crucial

$x_0$  es un punto estacionario de  $f$  si  $f'(x_0) = 0$

Figura 4.33: Sydsaeder et al, 2012, p.234

Los autores muestran tres ejemplos gráficos para determinar los puntos estacionarios, ya sea máximo o mínimo como podemos ver en la siguiente figura:

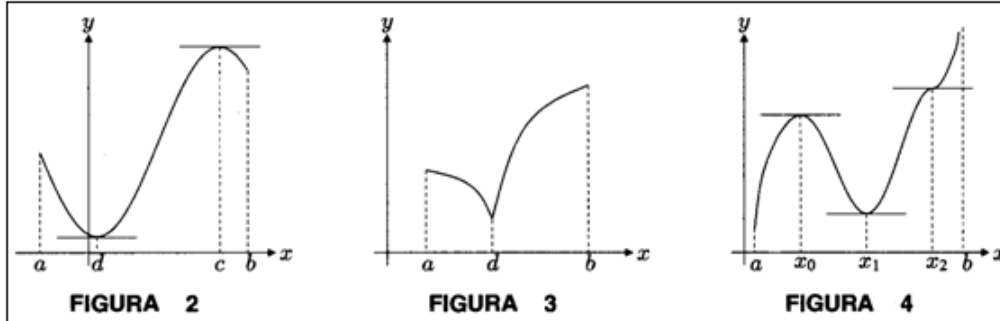


Figura 4.34: Sydsaeder et al, 2012, p.234

El libro de texto 2 en la sección 9.2 presenta el test de la derivada primera para los puntos óptimos. Donde los autores interpretan que en muchos casos podemos hallar los valores máximos o mínimos de una función estudiando los signos de su primera derivada.

**El test de la derivada primera para máximo o mínimo**  
 Si  $f'(x) \geq 0$  para  $x \leq c$  y  $f'(x) \leq 0$  para  $x \geq c$ , entonces  $x = c$  es un máximo de  $f$ .  
 Si  $f'(x) \leq 0$  para  $x \leq c$  y  $f'(x) \geq 0$  para  $x \geq c$ , entonces  $x = c$  es un mínimo de  $f$ .

Figura 4.35: Sydsaeder et al, 2012, p.235

El texto presenta diversos ejemplos para diferentes tipos de funciones. En los problemas propuestos donde tenemos la presencia de una situación para la función cuadrática con respecto a maximización son los números 1, 3 y 5.

En la sección 9.3 Maneras alternativas de hallar máximos y mínimos, el libro de texto 2 presenta otras formas de caracterizar los puntos óptimos, que muchas veces son más útiles comparados con la técnica de variación de signo de la primera derivada. Por tanto, según esta OM los máximos o mínimos pueden ser únicamente de los tres tipos siguientes:

1. puntos interiores de  $I$  en los que  $f'(x) = 0$
2. los dos extremos de  $I$
3. puntos de  $I$  en los que no exista  $f'$

Figura 4.36: Sydsaeder et al, 2012, p.240

Luego los autores presentan una regla que cubre la mayoría de los problemas aplicados en los modelos económicos.

**Problema:**  
Hallar los valores máximos y mínimos de una función derivable  $f$  definida en un intervalo  $[a, b]$  cerrado y acotado.

**Solución:**

- (a) Hallar todos los puntos estacionarios de  $f$  en  $(a, b)$
- (b) Evaluar  $f$  en los extremos  $a$  y  $b$  del intervalo y en todos los puntos estacionarios
- (c) El mayor valor de la función hallado en (b) es el valor máximo de  $f$  en  $[a, b]$ .
- (d) El menor valor de la función hallado en (b) es el valor mínimo de  $f$  en  $[a, b]$ .

Figura 4.37: Sydsaeder et al, 2012, p.240

En el ejemplo 2 el texto ilustra un modelo donde desea maximizar sus beneficios y minimizar los costes de una manera general. Luego presenta diversos problemas propuestos, siendo de nuestro interés los ejercicios 1, 2b, 2e y 3.

En la sección 9.4 los autores tratan de máximos y mínimos locales, para este tema nos centramos en los problemas propuestos donde vemos la presencia de nuestro objeto de estudio, donde identificamos los ejercicios 1, 2, 3b y 3f.

En la sección 9.5 el libro de texto 2 muestra la presencia de funciones cuadráticas al realizar el estudio de convexidad y concavidad de una función, la cual es abordada mediante el criterio de la segunda derivada. Para ello presenta algunos ejemplos resueltos y uno propuesto que será parte de nuestro análisis.

En la sección 9.6 el libro de texto 2 presenta el subtítulo: Más sobre funciones cóncavas y convexas donde describe las siguientes definiciones

La función  $f$  se llama **cóncava (convexa)** si el segmento que une dos puntos cualesquiera de la gráfica no está nunca por encima (debajo) de la gráfica.

Figura 4.38: Sydsaeder et al, 2012, p.261

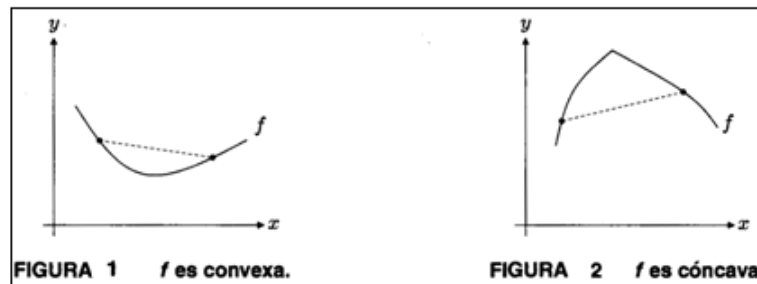


Figura 4.39: Sydsaeder et al, 2012, p.261

Luego el libro de texto presenta “Un test fácil de concavidad/convexidad” para identificar dichos conceptos donde los autores no describen la demostración.

$f''(x) < 0$  para todo  $x \in (a, b) \implies f(x)$  es estrictamente cóncava en  $(a, b)$   
 $f''(x) > 0$  para todo  $x \in (a, b) \implies f(x)$  es estrictamente convexa en  $(a, b)$

Figura 4.40: Sydsaeder et al, 2012, p.263

En esta sección el problema propuesto número 1 será parte de nuestro análisis, debido a que presenta tratamiento con respecto a una función cuadrática.

En el capítulo 10 de Integración en la sección 10.1 Áreas bajo curvas, el libro de texto 2 describe la función cuadrática en el ejemplo 1, en el cual se realiza una representación gráfica de dicha función. En los problemas propuestos vemos que el número 2a tomará parte de nuestro análisis. En la sección 10.2 ejemplo 4 tenemos la presencia de la función cuadrática en el cual describe un problema contextualizado donde interviene un modelo económico.

Finalmente, en el anexo A el texto presenta algunas secciones de nuestro interés para el estudio de nuestro objeto como factorizaciones en A4, ecuaciones sencillas en A6 y ecuaciones cuadráticas en A8; en el cual describe diversos ejemplos aplicativos y el caso general de completar cuadrados.

#### 4.3.2. Análisis del libro de texto 2

Para el análisis de las praxeologías: tareas, técnicas y tecnologías de este texto según nuestro marco teórico, tomamos en cuenta los criterios 3, 4 y 5 del capítulo anterior.

El libro de texto 2 presenta ecuaciones cuadráticas donde muestra la deducción de la Fórmula cuadrática mediante el método “completar cuadrados”. Los autores en una sección anterior

(Variables, símbolos y ecuaciones) describen un ejemplo de maximización de áreas donde se hace una introducción a los conceptos de función y ecuación cuadrática.

En la sección 2.2 el texto presenta la definición de función en lenguaje verbal, haciendo énfasis en la diferencia entre variable independiente y variable dependiente, también los describe en términos económicos como variable exógena y variable endógena.

El texto presenta la definición de dominio en lenguaje natural y lenguaje algebraico, luego describe un ejemplo para una función cúbica. Para los conceptos de dominio y rango el texto usa la idea de gráfica de una función. Los autores presentan una idea intuitiva de concebir una función comparándola con un motor que toma como entrada un número “ $x$ ” del dominio y resulta “ $f(x)$ ” como salida, luego muestra una representación gráfica haciendo la observación que si se introduce un número que no esté en el dominio, el motor no funciona y no hay salida.

El libro de texto 2 en la sección 2.4 describe gráficas de funciones como un conjunto de pares ordenados, presentando ejemplos y manifestando que su gráfica se halla calculando puntos y dibujando la curva; esto es, técnica mediante tablas.

Finalmente, la OM muestra la representación gráfica de las funciones mediante un ejemplo. Es resaltante la aclaración con respecto a que las gráficas de varias funciones pueden tener innumerables formas sin embargo, no todas las curvas del plano son gráficas de funciones, donde el texto manifiesta que tenemos una función cuando a cada punto “ $x$ ” del dominio le corresponde un solo valor de “ $y$ ”.

Para el desplazamiento de gráficas el texto presenta un ejemplo general con técnica para su solución donde presenta la gráfica de la función inicial y luego realiza su respectivo desplazamiento.

Los autores desarrollan de forma explícita la función cuadrática en la sección 3.2, donde su primera representación es en forma general algebraica, explicando detalles de su representación gráfica mediante un ejemplo. Los autores plantean dos preguntas con el fin de que los lectores comprendan profundamente la función cuadrática. Siendo estas relacionadas con los ceros y los puntos del máximos o mínimos de esta función, donde muestra una técnica de solución mediante la intersección con el eje  $X$ , luego presenta tres representaciones gráficas de parábolas en las que se analizan los coeficientes de la función; finalmente se hallan las raíces de la ecuación cuadrática mediante la fórmula cuadrática. Para responder a la segunda pregunta el autor hace uso de la técnica “completar el cuadrado”, seguido de un análisis al coeficiente de la variable cuadrática para poder determinar si la función presenta máximo o mínimo.

En la sección 3.2 el texto desarrolla ejemplos de optimización cuadrática, mediante ejemplos generales donde usa el lenguaje algebraico y presenta un estudio detallado de las variables a usar en los modelos correspondientes, teniendo en cuenta su representación gráfica. De esta manera, describe como enfrentar una tarea donde intervienen costes totales, ingreso total y

beneficio con presencia de la función cuadrática, donde el objetivo será minimizar costes y maximizar ingresos y beneficios.

El texto presenta la sección 9.1 con definiciones básicas en las que expresa definiciones estrictamente matemáticas para los conceptos de máximo y mínimo de una función; a su vez muestra las denotaciones correspondientes para el valor máximo y el valor mínimo. Los autores mencionan que la tarea principal de este capítulo es estudiar cómo se determinan los posibles máximos y mínimos de una función, presentándonos una definición en lenguaje algebraico. También presenta ejemplos de puntos estacionarios en forma gráfica para la visualización de los máximos y mínimos en el extremo de dicha función.

El test de la primera derivada en el libro de texto 2 se hace presente en la sección 9.2 de forma algebraica para poder interpretar los valores máximos y mínimos de una función. En la cual tenemos tres tareas propuestas para realizar el tratamiento de maximización para una función cuadrática.

En la sección 9.3 los autores presentan maneras alternativas para hallar máximos y mínimos, de manera general presenta una técnica para funciones que son derivables en todos sus puntos definidos en un intervalo cerrado y acotado, seguido de un ejemplo. Donde la técnica consiste en hallar la primera derivada a la función de tercer grado, es ahí donde tenemos una función cuadrática, luego se factoriza la expresión algebraica e igualar a cero, para obtener los valores extremos de la función en el intervalo dado; finalmente se evalúa en la función inicial e identificamos los valores mínimo o máximo.

En la sección 9.4 el texto describe sobre los máximos y mínimos locales, donde debemos resaltar que nuestro estudio se basa en la función cuadrática, que algunas veces se obtienen a partir de la derivada de una función cúbica. En el test de la segunda derivada también contamos con ejemplos relacionados a nuestro objeto de estudio al derivar una función cúbica debemos impartir tratamiento a una función cuadrática para hallar los puntos máximos y mínimos locales.

Para la representación gráfica de las funciones cuadráticas en la sección 9.5 el libro de texto 2 hace un estudio al sentido de la apertura de la parábola utilizando las definiciones de convexidad y concavidad, siendo esta una técnica para su solución. El libro de texto 2 muestra una definición formal y su respectiva representación gráfica para poder identificar la diferencia entre los conceptos dados.

En el capítulo 10 el texto describe la función cuadrática en su forma gráfica para desarrollar problemas de integración relacionadas con su área.

Para el análisis de la variedad de tareas denominado criterio 3 en el libro de texto 2, presentamos la siguiente tabla:

Tabla 4.4: Análisis del libro de texto 2 según el criterio 3

Tipos de tareas	Tareas Resueltas	Tareas Propuestas
$T_1$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, determinar el dominio e imagen.	0	3
$T_2$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, hallar los ceros.	1	2
$T_3$ : Dada la expresión algebraica $f(x) = ax^2 + bx + c$ , $a \neq 0$ , calcular los puntos de intersección con los ejes coordenados.	0	0
$T_4$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, identificar si la gráfica es cóncava o convexa.	2	2
$T_5$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, hallar su gráfica.	0	6
$T_6$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, cuando uno o varios coeficientes vienen expresados como parámetros, determinarlos conociendo las coordenadas de uno o varios puntos de la parábola.	0	1
$T_7$ : Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática a partir de la gráfica.	0	1
$T_8$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, hallar el valor máximo o mínimo que alcanza dicha función.	5	28
$T_9$ : Dado un problema contextualizado donde se involucra la función cuadrática, interpretar modelos económicos con respecto a máximos y mínimos.	5	11
$T_{10}$ : Modelizar los fenómenos del mundo real utilizando funciones cuadráticas cuando corresponda.	1	6
TOTAL	12	49

De acuerdo a la tabla 4.3 podemos observar que el número de tareas propuestas (49) es mayor al número de las tareas resueltas (12). Podemos identificar la ausencia de la tarea  $T_3$  y con respecto a las tareas  $T_1, T_5, T_6$  y  $T_7$  el texto presenta solo tareas propuestas. El número de actividades de la tarea  $T_8$  es mayor que las otras tareas, seguida de  $T_5$  y  $T_{10}$ .

A continuación mostramos una tabla donde describimos los criterios 4 y 5 identificados en el libro de texto 2.

Tabla 4.5: Análisis del libro de texto 2 según los criterios 4 y 5

Tipos de tareas	Criterio 3 Presencia de técnicas a emplear	Criterio 4 Presencia de tecno- logías a emplear
$T_1$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, determinar el dominio e imagen.	Sí	No
$T_2$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, hallar los ceros.	Sí	Sí
$T_3$ : Dada la expresión algebraica $f(x) = ax^2 + bx + c$ , $a \neq 0$ , calcular los puntos de intersección con los ejes coordenados.	Sí	No
$T_4$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, identificar si la gráfica es cóncava o convexa.	Sí	No
$T_5$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, hallar su gráfica.	Sí	No
$T_6$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, cuando uno o varios coeficientes vienen expresados como parámetros, determinarlos conociendo las coordenadas de uno o varios puntos de la parábola.	No	No
$T_7$ : Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática a partir de la gráfica.	No	No
$T_8$ : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, hallar el valor máximo o mínimo que alcanza dicha función.	Sí	Sí
$T_9$ : Dado un problema contextualizado donde se involucra la función cuadrática, interpretar modelos económicos con respecto a máximos y mínimos.	Sí	Sí
$T_{10}$ : Modelizar los fenómenos del mundo real utilizando funciones cuadráticas cuando corresponda.	Sí	No

De la tabla 4.4 podemos describir lo siguiente:

- Para la solución de la tarea  $T_1$ , presenta una técnica mediante un ejemplo de una función cúbica donde señala que el dominio de dicha función es el conjunto de los números reales, sin presencia de justificación alguna. En este texto no encontramos tareas resueltas para la función cuadrática. Para hallar el rango de una función el texto describe que observando la gráfica se obtendrá una técnica para la solución de dicha tarea, sin presencia de justificación.

- Para la tarea  $T_2$  el texto describe una técnica denominada fórmula cuadrática para hallar los ceros de la función en estudio, en la cual presenta justificación usando el método de completar los cuadrados. También muestra la técnica de factorización mediante un ejemplo para hallar las raíces en una ecuación cuadrática, presentando propiedades de los números reales para su justificación.

- Para la tarea  $T_3$  está conformada por tres partes debido a que se hallan tres intersecciones distintas, encontramos técnica para la intersección con el eje "X" que son las mismas técnicas empleadas para la solución de la tarea  $T_2$ , para las otras dos intersecciones no presenta técnica ni justificación alguna.

- Para la tarea  $T_4$  el texto presenta una técnica en forma de definición donde la concavidad y la convexidad dependen del valor del coeficiente de la variable cuadrática de la función, esta técnica no tiene justificación en el libro de texto analizado. Otra técnica para esta tarea es mediante el teorema de los "Máximos y mínimos de funciones cóncavas y convexas", sin presencia de justificación (tecnología).

- Para la tarea  $T_5$  el libro de texto 2 presenta un ejemplo mediante una expresión algebraica de una función cuadrática con su respectiva gráfica, pero sin presencia de técnica ni justificación. En otra sección presenta ejemplos donde relaciona la expresión algebraica con sus respectivas gráficas de funciones cuadráticas tomando en cuenta el análisis de sus parámetros, sin justificación alguna.

- Para  $T_6$  el texto no presenta técnica ni justificación.

- Para  $T_7$  el texto no presenta técnica ni justificación.

- Para la tarea  $T_8$  el texto presenta las siguientes técnicas: usa el método de "completar cuadrados" para hallar máximos y mínimos mediante ejemplos, el "test de la primera derivada" con presencia de justificación y el "test de la segunda derivada" con su respectiva justificación.

- Para la tarea  $T_9$  el texto muestra tareas resueltas en forma general justificando la naturaleza de sus parámetros.

- Para  $T_{10}$  el texto describe una técnica por medio de un ejemplo resuelto sin justificación alguna.

Considerando los indicadores de Fonseca (2004) para este análisis, observamos que en esta OM describe lo siguiente:

OML1. Presenta tareas que hace referencia a la interpretación y justificación del objeto en estudio, pero no se observa la comparación entre técnicas para la solución de una tarea.

La mayoría de tareas que observamos en el texto se encuentran relacionadas, haciendo que dependa una de otra con respecto a la técnica usada para su solución. No contamos con tareas aisladas. A continuación mostramos un ejemplo

1 Supongamos que  $f(x) = 1 - x^2$ .

(a) Probar que  $D = f((1 - \lambda)a + \lambda b) - (1 - \lambda)f(a) - \lambda f(b)$  se puede escribir en la forma

$$D = \lambda(1 - \lambda)(a^2 - 2ab + b^2) = \lambda(1 - \lambda)(a - b)^2$$

(b) Si  $\lambda \in (0, 1)$ , ¿qué signo tiene  $D$ ? ¿Es  $f$  cóncava, convexa, o ninguna de las dos?

(c) ¿Es  $f$  estrictamente cóncava/convexa?

(d) Comprobar el resultado de la parte (c) usando (9.17).

Figura 4.41: Sydsaeder et al, 2012, problema 1, p.264

OML2. En algunas tareas podemos notar la presencia de varias técnicas y criterios para su solución, por ejemplo en las tareas  $T_2$ ,  $T_4$  y  $T_8$  podemos apreciar más de una técnica para la solución de la tarea planteada. A continuación mostramos un ejemplo

1 Determinar la concavidad/convexidad de  $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 8x - 3$ .

Figura 4.42: Sydsaeder et al, 2012, problema 1, p.259

OML3. Con respecto a nuestro objeto de estudio podemos reconocer cuatro formas distintas de representación: lenguaje natural, lenguaje algebraico, lenguaje gráfico y representación tabular. El texto no hace referencia a la representación del objeto matemático más adecuada según la técnica usada. A continuación mostramos un ejemplo

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \text{ constantes, } a \neq 0)$$

Figura 4.43: Sydsaeder et al, 2012, p.61

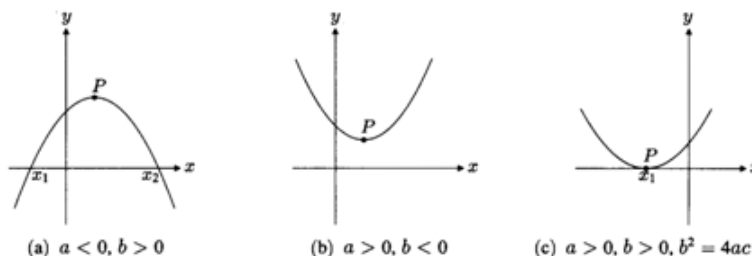


Figura 4.44: Sydsaeder et al, 2012, p.62

1 (a) Sea  $f(x) = x^2 - 4x$ . Rellenar la tabla siguiente:

$x$	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$							

- (b) Usando la tabla anterior, dibujar la gráfica de  $f$ .
- (c) Usando (3.3), determinar el mínimo.
- (d) Resolver la ecuación  $f(x) = 0$ .

Figura 4.45: Sydsaeder et al, 2012, problema 1a, p.63

OML4. Para el estudio de la función cuadrática tomamos en cuenta los tipos de tareas  $T_5$  y  $T_7$  donde observamos claramente la existencia de tareas y técnicas “inversas”. Para la tarea  $T_5$  el libro de texto 2 muestra seis tareas y para la tarea  $T_7$  presenta una tarea. A continuación mostramos un ejemplo

Hallar la ecuación de la parábola  $y = ax^2 + bx + c$  que pasa por los puntos  $(1, -3)$ ,  $(0, -6)$ ,  $(3, 15)$ .  
(Indicación: Calcular  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .)

Figura 4.46: Sydsaeder et al, 2012, problema 9, p.64

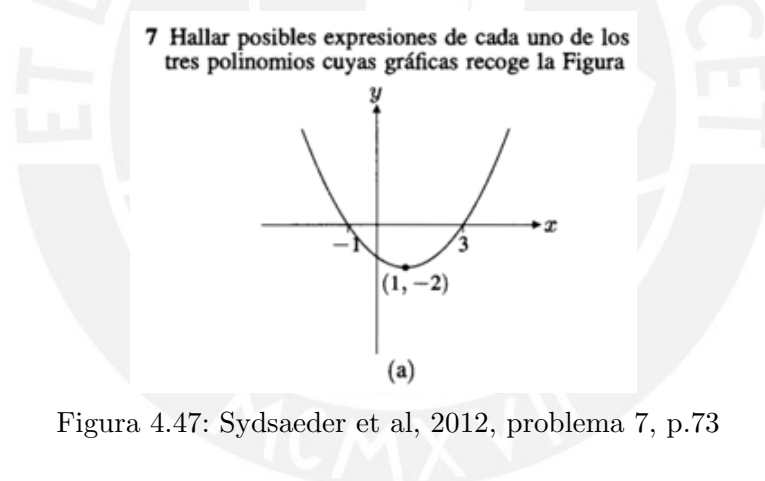


Figura 4.47: Sydsaeder et al, 2012, problema 7, p.73

OML5. El libro de texto 2 presenta tareas resueltas y propuestas con aplicaciones generales para luego ser usadas como técnica en una tarea dada. A continuación mostramos un ejemplo

Una empresa que produce un cierto bien quiere maximizar sus beneficios. Los ingresos totales generados en un cierto periodo por la producción y venta de  $Q$  unidades es  $R(Q)$  dólares, mientras que  $C(Q)$  designa el coste total en dólares del proceso. El beneficio obtenido como resultado de producir y vender  $Q$  unidades es, pues,

$$\pi(Q) = R(Q) - C(Q) \quad (1)$$

Supongamos que hay una cota máxima  $\bar{Q}$  de la producción en el periodo dado, por limitaciones técnicas. Supongamos que  $R$  y  $C$  son funciones derivables de  $Q$  en el intervalo  $[0, \bar{Q}]$ . La función de beneficios  $\pi$  es también derivable y, consiguientemente,  $\pi$  tiene un valor máximo. En ciertos casos, este máximo puede darse en  $Q = 0$  o en  $Q = \bar{Q}$ . Si no, el nivel máximo de producción  $Q^*$  verifica que  $\pi'(Q^*) = 0$  y así

$$R'(Q^*) = C'(Q^*) \quad (2)$$

Así se debe ajustar la producción en un punto en el que el ingreso marginal sea igual al coste marginal.

Supongamos que la empresa obtiene un precio fijo  $P$  por unidad vendida. Entonces  $R(Q) = PQ$  y (2) toma la forma

$$P = C'(Q^*) \quad (3)$$

Así, en el caso en que la empresa no controle el precio hay que ajustar la producción al nivel al cual el coste marginal es igual al precio unitario del artículo (suponiendo que  $\pi$  no tiene un máximo en  $0$  o  $\bar{Q}$ ).

Figura 4.48: Sydsaeder et al, 2012, ejemplo 2, p.241

OML6. El texto presenta tareas abiertas en el tipo de tareas  $T_{10}$  donde el alumno se encuentra ante datos que son valores desconocidos (parámetros) y las incógnitas no son valores concretos. El libro de texto 2 muestra una tarea resuelta y propone seis tareas donde el lector debe modelar la situación dada. A continuación mostramos un ejemplo

Se da una cuerda de longitud  $L$  a una persona para que delimite un área rectangular.

- Si uno de los lados es  $x$ , probar que el área delimita es  $A(x) = \frac{Lx}{2} - x^2$ , con  $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ . Hallar  $x$  para que el área sea máxima.
- ¿Delimitará una circunferencia de longitud  $L$  un área mayor que la que hemos hallado en (a)? (Se sabe que algunos agrimensores de la antigüedad redactaron contratos de venta de parcelas en los cuales sólo se especificaba el perímetro. El resultado fue que los lotes constaban de rectángulos muy alargados y estrechos).

Figura 4.49: Sydsaeder et al, 2012, problema 5, p.64

OML7. El texto no presenta tareas con las descripciones de este indicador.

OML8. El texto no presenta tareas con las descripciones de este indicador.

## Capítulo 5

# Recomendaciones para reorganizar la organización didáctica en los libros de texto analizados

En el capítulo anterior se trabajó la descripción y el análisis de los textos seleccionados en base a la teoría adoptada, con respecto a la descripción se ha señalado la forma en que cada texto presenta el desarrollo del objeto función cuadrática; a esto denominamos organización didáctica. Luego centramos el estudio en analizar los elementos de una praxeología que son las tareas, técnicas y tecnologías empleadas las cuales serán de apoyo para identificar la valoración del texto y la completitud de la organización matemática local con respecto a los indicadores de la TAD (Fonseca, 2004).

Se considera inseparable una OM de una OD, en la que una OM constituye una herramienta fundamental para modelizar tanto la actividad matemática como la actividad humana en general y una OD constituye procesos de estudio que permite detectar varios aspectos o tipos de situaciones que forman parte de un proceso matemático. Por tal motivo, tendremos en cuenta estos dos elementos en las recomendaciones de la reorganización didáctica de los libros de texto analizados.

En este capítulo presentaremos una valoración al libro de texto analizado según el desarrollo matemático y didáctico presentado para enfrentar las dificultades de los estudiantes encontrados en nuestros antecedentes.

Para dicha reorganización se tomaron en cuenta las diferentes praxeologías desarrolladas en los libros de texto seleccionados, como son los diferentes tipos de tareas, técnicas y tecnologías empleadas.

Finalmente, se buscó determinar la incompletitud de la organización matemática local mediante los indicadores propuestos por Fonseca en los diferentes tipos de tareas presentadas en los textos analizados.

## 5.1. Evaluación y sugerencias para el libro de texto 1

En el libro de texto 1 podemos observar que al definir conceptos matemáticos relacionados con el objeto de estudio prevalece el lenguaje algebraico seguido del lenguaje natural y por último utiliza las representaciones gráficas para ayudar a la comprensión de dichas definiciones. Por tal motivo, podemos decir que los autores se preocupan en presentar variedad al describir una definición matemática debido a que en algunos casos utiliza los tres lenguajes antes mencionados. Esto es favorable para la mejor comprensión del lector y un buen indicio para optar por la lectura de este tema en este texto; lo que ayudaría a superar la dificultad que consiste en que los alumnos no relacionan la representación gráfica con la analítica de una función cuadrática.

Cabe resaltar que algunas veces en la búsqueda de encontrar formas alternas distintas a la definición formal de un concepto matemático los autores del libro de texto 1 utilizan términos poco adecuados o confusos para su descripción, tales como curva serpenteante o de una sola protuberancia para hacer comparaciones con una parábola y cuando hace referencia a la posición de abertura de la función cuadrática usa términos como valle o colina. Aunque estos casos pudieron ser producto de una mala traducción, sugerimos usar términos específicamente matemáticos o usar un sinónimo apropiado para así evitar la confusión de los estudiantes.

A pesar de no encontrar en los antecedentes, como dificultad, la diferencia que se puede establecer entre función cuadrática y ecuación cuadrática, consideramos que la presentación que hacen los autores sobre estos dos objetos matemáticos ayuda a evitar alguna dificultad o confusión; debido a que el texto presenta mediante una tarea resuelta conceptos exactos sobre su regla de correspondencia para especificar una función cuadrática, los valores de una ecuación cuadrática o bien los ceros de una función cuadrática. Consideramos que este es un buen indicador didáctico.

En relación a la dificultad donde los alumnos a partir de una función cuadrática, no logran distinguir su vértice el libro de texto 1 no presenta tareas ni técnicas ni tecnologías. Situación que no ayuda a superar dicha dificultad.

En relación a la dificultad en la que los alumnos no logran distinguir las intersecciones con los ejes a partir de una gráfica de una función cuadrática el libro de texto 1 presenta una tarea resuelta y no presenta tareas propuestas. Describe una técnica sin presencia de tecnología.

Consideramos que por la falta de presencia de tareas, técnicas y tecnologías el libro de texto 1 no ayudaría a superar las dificultades de los alumnos donde necesitan relacionar las variables, su variación conjunta y manipulación de parámetros en una función cuadrática.

Si los estudiantes tienen dificultad para identificar la concavidad de la función cuadrática el libro de texto 1 ayudaría en alguna medida a superar esta dificultad debido a que el texto presenta técnicas y tecnologías para que los alumnos comprendan este concepto, sin embargo esta situación no garantiza que se logre superar la dificultad totalmente, ya que se pueden presentar dificultades en la interpretación de dicha técnica o tecnología.

En relación a la tarea donde el alumno debe modelizar los fenómenos del mundo real utilizando funciones cuadráticas que se relaciona con la dificultad donde los alumnos deben enfrentar tareas de traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico en problemas de optimización en economía; se presenta una tarea propuesta sin presencia de técnica ni tecnología, para seguir los procesos de modelización sugeridos en este caso por la teoría adoptada. En la tarea propuesta 2 de la sección 9.4 los autores solicitan la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico para la optimización de áreas donde requieren la verificación de su solución, donde esta justificación podrá hacerse efectiva si los alumnos consiguieron una modelización acertada. Por tal motivo, se sugiere presentar tareas resueltas y propuestas de este tipo de tarea para que los alumnos cuenten con mayor variedad de técnicas para su solución. Así, podemos valorar positivamente al texto ya que sería favorable para resolver tipos de tareas donde los alumnos se ven involucrados en la traducción de un problema del lenguaje natural al lenguaje algebraico, en el que este proceso no será necesario solo en problemas de optimización aplicados a la economía, sino también en problemas sobre optimizar áreas, volúmenes, etc.

Con relación a los diferentes conceptos que intervienen en los modelos económicos el libro de texto 1 presenta una definición en lenguaje natural para: equilibrio final, unidad económica, ganancia, utilidad marginal; en lenguaje algebraico los conceptos de: ganancia, costo marginal e ingreso marginal. Para los otros conceptos como: función oferta, función demanda, costo total, ingreso total, punto de equilibrio y tasa de cambio el texto no presenta definición alguna. Situación que no contribuiría a superar las dificultades relacionadas con la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico al traducir y resolver problemas de optimización en economía. Por tal motivo, se sugiere la descripción de estos conceptos que se toman en cuenta en este texto al menos en un lenguaje. Situación que nos permite sugerir que todos los conceptos deben estar definidos previamente en lenguaje natural, en lenguaje algebraico y presentar tareas donde se muestre el proceso de modelización.

En relación a la variedad de tareas podemos deducir que el texto presenta de treintainueve tareas solo cinco relacionadas con el proceso de contextualización y modelización. Por tal motivo, nos permite concluir que los autores presentan en mayor número las tareas dadas a partir de su expresión algebraica; es decir, tareas descontextualizadas, básicamente en contexto puramente matemático. Sugerimos presentar mayor cantidad del tipo de tareas donde los lectores puedan relacionar la matemática y sus aplicaciones en las diversas áreas utilizando funciones cuadráticas.

Con respecto a este texto encontramos ciertas deficiencias: la ausencia de tres tipos de tareas tomadas por la Organización matemática de referencia para esta investigación donde se solicita: calcular los puntos de intersección con los ejes coordenados, determinar los parámetros a partir de una expresión algebraica y a partir de una gráfica de función cuadrática determinar su expresión algebraica. Debemos resaltar que la presencia de estos tipos de tareas es importante para la integración de las técnicas en la solución de las tareas en conjunto. Ante la falta de las tareas mencionadas sugerimos que el texto debe tomar en cuenta dichas tareas antes

mencionadas.

Finalmente, podemos concluir que contamos con la presencia de técnicas para siete de diez tipos de tareas y cuatro de diez tipos de tareas muestran justificación. Siendo este un indicador de una Organización matemática local (OML) más o menos completa.

Si bien este primer texto presenta una organización didáctica de la función cuadrática en forma ordenada debido a que describe conceptos, elementos y aplicaciones en forma gradual de lo sencillo a lo complejo. Podemos decir, que este libro de texto es pobre y en algunos casos nula la presencia de tareas resueltas y propuestas. En el texto es nula la presencia de tareas resueltas donde los estudiantes deben: identificar si la gráfica es cóncava o convexa, determinar los parámetros, determinar la expresión algebraica de la función cuadrática a partir de la gráfica y modelizar los fenómenos del mundo real utilizando funciones cuadráticas; y es pobre en cuanto a la presencia de tareas donde deben: determinar el dominio e imagen, hallar los ceros, calcular los puntos de intersección con los ejes coordenados y hallar la gráfica dada la expresión algebraica de una función cuadrática. En cuanto a las tareas propuestas es nula el tipo de tarea donde los alumnos deben calcular los puntos de intersección con los ejes coordenados. Con respecto a esta misma organización en relación con la presencia de técnicas podemos valorar en forma positiva, debido a que solo tres tipos de tareas (determinar los parámetros, determinar la expresión algebraica de la función cuadrática a partir de la gráfica y modelizar los fenómenos del mundo real utilizando funciones cuadráticas) no describen técnica alguna y para los otros siete tipos de tareas contamos con una o más técnicas para su solución. Con respecto a la presencia de tecnologías podemos manifestar que es pobre en el aspecto que solo cuatro tareas (hallar los ceros, identificar si la gráfica es cóncava o convexa, hallar el máximo o el mínimo que alcanza una función e interpretar modelos económicos de una función cuadrática) de diez describen una justificación a la técnica empleada.

Para la reorganización de este libro de texto podemos sugerir el desarrollo de la función cuadrática en una sección que sea independiente, para así poder tener una mejor organización matemática en su presentación. Para la completitud de esta organización matemática se debe tener en cuenta tareas en que se identifiquen: la existencia de diferentes representaciones de la actividad matemática; esto es, la flexibilidad de las técnicas utilizadas debe permitir la utilización de diferentes representaciones, la necesidad de construir técnicas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas; y la posibilidad de perturbar la situación inicial o modificar la hipótesis del sistema para estudiar los casos diferentes que permite ampliar y completar el proceso de estudio; para una valoración positiva del libro de texto analizado. A su vez, este libro de texto debe contar con la presencia de los tipos de tareas donde solicitan: identificar si la gráfica es cóncava o convexa a partir de la expresión algebraica, determinar los coeficientes que vienen expresados como parámetros a partir de una expresión algebraica; y determinar la

expresión algebraica de una función cuadrática a partir de la gráfica; ya que en esta organización matemática no contamos con ninguna tarea; y debe presentar más de una tarea de los siguientes tipos de tareas donde solicitan: determinar el dominio e imagen a partir de una expresión algebraica, hallar los ceros de una función cuadrática y hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados, hallar su gráfica dada la expresión algebraica, interpretar modelos económicos y modelizar los fenómenos del mundo real utilizando funciones cuadráticas; para que de esta manera los alumnos puedan involucrarse con mayor diversidad de estos tipos de tareas.

## 5.2. Evaluación y sugerencias para el libro de texto 2

En el libro de texto 2 podemos identificar una variedad de representaciones para definiciones de conceptos matemáticos previos y para el objeto matemático en estudio, en el cual se pudo observar mayor presencia del lenguaje algebraico seguido del gráfico y una tercera representación en lenguaje natural. Siendo esto favorable para la interpretación de dichos conceptos permitiéndonos así una valoración positiva del texto; lo que ayuda a superar la dificultad donde los alumnos deben relacionar la representación gráfica con la analítica.

El texto presenta una idea intuitiva para describir la definición de función presentando un modelo mediante un lenguaje natural y apoyado en una representación gráfica, siendo este un buen indicador y modelo a seguir para otros conceptos.

El libro de texto 2 no presenta tareas ni técnicas ni tecnologías con respecto a que los alumnos no identifican el vértice a partir de la gráfica de una función cuadrática; situación que no ayudaría a superar la dificultad. Lo que podemos observar en este texto es que al presentar representaciones gráficas de la parábola denomina al vértice por una letra, pero sin ninguna explicación al respecto.

En relación a la dificultad donde los alumnos a partir de una gráfica de función cuadrática, no logran distinguir las intersecciones con los ejes, el libro de texto no presenta tareas. Describe una técnica sin presencia de tecnología. Por tal motivo, el texto no ayuda a superar dicha dificultad; podemos sugerir que esta tarea es necesaria para llevar a cabo la solución de tareas posteriores.

Contamos con la presencia de una tarea propuesta en relación a las dificultades que tienen que ver con la relación de sus variables, su variación conjunta y manipulación de parámetros, por lo que podemos inducir que el libro de texto 2 no ayudaría a superar dichas dificultades por falta de tareas, técnicas y tecnologías.

El libro de texto 2 ayudaría en alguna medida a superar la dificultad de los alumnos donde a partir de una gráfica de función cuadrática los alumnos no logran la identificación de la concavidad; debido a que describe dos técnicas para las tareas presentadas en relación a esta dificultad. El texto no presenta justificación alguna de las técnicas empleadas. Sin embargo esta situación no garantiza que se logre superar la dificultad totalmente, ya que se pueden presentar dificultades en la interpretación de dicha técnica.

El texto presenta una cantidad considerable de tareas para enfrentar la dificultad donde los alumnos deben traducir del lenguaje natural al lenguaje algebraico, debido que presenta dos tareas resueltas y diecisiete tareas propuestas con presencia de técnicas y algunas de las ellas con sus respectivas tecnologías. Sin embargo, podemos sugerir que una organización matemática debe presentar más de dos tareas resueltas para presentar la interpretación, modelización y traducción de un problema del lenguaje natural al lenguaje algebraico, debido a que los alumnos se enfrentaran a múltiples casos de la vida real.

Una parte importante en el estudio de las funciones cuadráticas son los problemas de optimización cuadrática, donde el texto describe conceptos económicos como: costes totales con una definición en lenguaje algebraico por medio de una función cuadrática, función de demanda inversa con una definición en lenguaje algebraico por medio de una función lineal, ingreso total con una definición en lenguaje algebraico por medio de una función cuadrática y beneficio con una definición en lenguaje algebraico y una representación gráfica por medio de una función cuadrática. También presenta otras definiciones como oferta, demanda, equilibrio, impuestos de producción en los cuales no describe ninguna definición; para esto se sugiere describir por lo menos la definición en lenguaje natural y lenguaje algebraico para cada concepto y así poder brindar una mejor comprensión de los conceptos básicos que serán empleados en los modelos presentados.

En relación a la variedad de tareas podemos deducir que el texto presenta de sesenta y uno tareas solo catorce relacionadas con el proceso de contextualización y modelización. Por tal motivo, nos permite concluir que el texto presenta en mayor número las tareas dadas a partir de su expresión algebraica; es decir, tareas descontextualizadas, básicamente en contexto puramente matemático.

Sugerimos presentar mayor cantidad de tareas donde presenten un enunciado contextualizado para interpretar modelos económicos con respecto optimización y donde se deba modelizar fenómenos del mundo real utilizando funciones cuadráticas; así los lectores puedan relacionar la matemática y sus aplicaciones en las diversas áreas.

En el libro de texto 2 se observó la ausencia del tipo de tarea donde se debe hallar los ceros de una función cuadrática a partir de una expresión algebraica; tomada por la organización matemática de referencia para esta investigación, siendo esto desfavorable para una valoración positiva del libro de texto 2 pues sería favorable que los estudiantes realizaran este tipo de tarea usando las diversas técnicas que el texto presenta.

Con respecto a la tarea donde se pide hallar los ceros de la función cuadrática podemos decir que se encuentra inmersa en la tarea donde se pide hallar la gráfica de una función cuadrática dada su expresión algebraica, se sugiere la presencia de dicha tarea en forma individual para luego relacionarla con las otras tareas y técnicas.

Con respecto a las tareas donde se plantea: determinar el dominio e imagen dada una expresión algebraica, hallar la gráfica de una función cuadrática dada la expresión algebraica,

determinar los parámetros a partir de una expresión algebraica y determinar la expresión algebraica de una función cuadrática a partir de la gráfica el texto solo presenta tareas propuestas y de estas las dos últimas señalan sus técnicas correspondientes para su solución. Para las tareas donde se plantea hallar los ceros de la función cuadrática a partir de la expresión algebraica, hallar el máximo o mínimo de una función cuadrática a partir de una expresión algebraica e interpretar modelos económicos con respecto a máximos y mínimos dado un problema contextualizado; el libro de texto 2 presenta justificaciones para su solución. Por tal motivo, se sugiere que en un texto se debe describir por lo menos una técnica para cada tipo de tarea y así ayudar en la comprensión del objeto en estudio.

Finalmente, podemos concluir que ocho de diez tipos de tareas muestran técnica alguna y tres de diez tipos de tareas muestran justificación. Siendo este un indicador que se tratan de una Organización matemática local (OML) más o menos completa.

Si bien este libro de texto 2 presenta una organización didáctica en una sección de forma independiente y ordenada debido a que describe conceptos, elementos y aplicaciones en forma gradual de lo sencillo a lo complejo. Podemos decir, que este texto es pobre y en algunos casos nula la presencia de tareas resueltas y propuestas. En el libro de texto 2 es nula la presencia de tareas resueltas donde los estudiantes deben: determinar el dominio e imagen, calcular los puntos de intersección con los ejes coordenados, hallar su gráfica, determinar los parámetros y determinar la expresión algebraica de la función cuadrática a partir de la gráfica; y es pobre en cuanto a la presencia donde deben: hallar los ceros y modelizar los fenómenos del mundo real utilizando funciones cuadráticas. Con respecto a esta misma organización en relación con la presencia de técnicas podemos valorar en forma positiva, debido a que solo dos tipos de tareas (determinar los parámetros y determinar la expresión algebraica de una función cuadrática a partir de la gráfica) no describen técnica alguna y para los otros ocho tipos de tareas contamos con una o más técnicas para su solución. Con respecto a la presencia de tecnologías podemos manifestar que es pobre debido a que solo tres tipos de tareas (hallar los ceros, hallar el máximo o el mínimo que alcanza una función e interpretar modelos económicos de una función cuadrática) de diez describen una justificación para la técnica empleada.

Para la reorganización de este libro de texto debemos tener en cuenta los indicadores para analizar la completitud de esta organización matemática, se debe considerar tareas en que se identifiquen la organización matemática local donde se manifiesta la necesidad de construir técnicas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas y la posibilidad de perturbar la situación inicial o modificar la hipótesis del sistema para estudiar los casos diferentes que permite ampliar y completar el proceso de estudio; siendo estas necesarias para una valoración positiva del texto. A su vez, este libro de texto 2 debe contar con la presencia de los tipos de tareas donde se pide determinar el dominio e imagen dada una expresión algebraica, hallar los ce-

ros de una función cuadrática a partir de una expresión algebraica y hallar la gráfica de una función cuadrática dada la expresión algebraica; ya que en esta organización matemática no contamos con ninguna de estas tareas. Del mismo modo, consideramos necesario que el texto debe presentar más de una tarea donde nos piden: hallar los ceros de la función cuadrática a partir de la expresión algebraica, determinar los parámetros a partir de una expresión algebraica, determinar la expresión algebraica de una función cuadrática a partir de la gráfica; con respecto a las tareas propuestas y del tipo de tarea donde se plantea modelizar los fenómenos del mundo real utilizando funciones cuadráticas; para que de esta manera los alumnos puedan involucrarse con mayor diversidad de estos tipos de tareas, siendo este un factor para su valoración positiva en la organización didáctica del texto analizado.

Después de haber evaluado las dificultades frente a los tipos de tareas, técnicas y tecnologías que encontramos en los libros de textos analizados, nos permitimos proponer que una organización didáctica debe considerar tareas del tipo que requieren establecer conexión entre representaciones gráficas y analíticas para ayudar a la comprensión de la definición e interpretación de conceptos matemáticos, desarrollando así la praxis de los lectores; luego debe presentar tareas del tipo que requieran la identificación de la función cuadrática de un enunciado en lenguaje verbal las cuales permiten: ver la relación del lenguaje natural con el lenguaje algebraico, ver la relación del modelo matemático y la solución de los problemas desarrollando así la construcción del logos de los conceptos por aprender.

# Referencias

- [1] Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas*. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.
- [2] Batanero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria*. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.
- [3] Bolea, P. (2002). *El proceso de Algebrización de organizaciones Matemáticas Escolares*. Tesis Doctoral. Universidad de Zaragoza.
- [4] Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (1998). *Restricciones al proceso de algebrización de la organización matemática escolar*. Seminario de Didáctica de la Matemática.
- [5] Bosch, M. (2009). *Un punto de vista antropológico: La evolución de los “Instrumentos de Representación” en la actividad matemática*. Universidad Ramon Llull. Recuperado el 08 de diciembre del 2012 de [www.doredin.mec.es/documentos/01120093000019.pdf](http://www.doredin.mec.es/documentos/01120093000019.pdf)
- [6] Bosch, M., Espinoza, L. y Gascón, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudio. Análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 23 (1), 79-135.
- [7] Bosch, M., C. Fonseca y Gascón, J. (2004). Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las Instituciones Escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 24, N° 2.3, 205-250. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.
- [8] Chevallard, Y. (1985). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires, Aique. (La traducción que se cita es de 1997).
- [9] Chevallard, Y. (1989). *Le passage de l'arithmétique a l'algebrique dans l'enseignement des mathématiques au collège (deuxième partie)*. *Perspectives curriculaires: la notion de modelisation, Petit x*, (19), 43-72. Recuperado el 15 Octubre de 2012 de <http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm>
- [10] Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique a l'algebrique dans l'enseignement des mathématiques au collège - Troisième partie. *Perspectives curriculaires : vois d'attaque et problèmes didactiques, Petit x*, (23), 5-38.

- [11] Chevallard, Y. (1996). La fonction professorale: esquisse d'un modèle didactique. En R. Noirfalise y M-J. Perrin-Glorian (coord.). *Actes de l'École d'Été de Didactique des Mathématiques* (Saint-Sauves d'Auvergne, 1995), 83-122.
- [12] Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 221-266.
- [13] Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. ICE/Horsori, Barcelona.
- [14] Chiang, A. y Wainwright, K. (2006). *Métodos fundamentales de economía matemática*. Interamericana Editores, S.A. de C.V.
- [15] Cuesta, A. (2007). *El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica*. Tesis Doctoral. Universidad autónoma de Barcelona, Ballaterra.
- [16] Diccionario de la Lengua Española - Vigésima segunda edición. Recuperado el 08 de diciembre de 2012 de <http://www.rae.es/rae.html>
- [17] Félix, L. (2009). *Análisis del parámetro como variable en la transformación de funciones: un estudio con alumnos universitarios*. Tesis de Maestría. Instituto Politécnico Nacional, México.
- [18] Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la secundaria y la universidad*. Tesis Doctoral. Universidad de Vigo, España.
- [19] Font, V. (2007). *Comprensión y contexto: una mirada desde la didáctica de las matemáticas*. *La Gaceta de la RSME*, Vol. 10.2, 427-442.
- [20] García, J. (2005). *La "Modelización Matemática" en Didáctica de la matemáticas. Formulación de un problema de investigación*. Tesis Doctoral. Universidad de Jaén.
- [21] Ibarra, Formeliano, Alurralde, Méndez, Velásques y Patagua, (2011). *Evaluación de la función cuadrática en diferentes contextos (CO)*. XIII CIAEM-LACME, Recife, Brasil 2011. Recuperado el 04 de Noviembre de 2012 de <http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/files/conferences/1/schedConfs/1/papers/2633/submission/review/2633-7204-1-RV.pdf>
- [22] Lehmann, Ch. (1980). *Geometría Analítica*. México, D.F.: Editorial Limusa.
- [23] Lucas, C. (2010). *Organizaciones Matemáticas Locales Relativamente Completas1*. Tesis Doctoral. Universidad de Vigo, España.

- [24] Parra, V. y Otero, M. (2007). Organizaciones Matemáticas en la Universidad en torno a las nociones de límite y continuidad de funciones: un estudio de caso. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*. Vol. 2, N° 2, 2007, 20-28. Recuperado el 05 de Noviembre de 2012 de <http://www.redalyc.org/redalyc/pdf/2733/273320487004.pdf>
- [25] Parra, V., Otero, M. y Elichiribehety (2006). Organizaciones Matemáticas que se estudian en la Universidad en torno a la noción de función: un estudio de caso. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*. Año 1, N° 2.
- [26] Parra, V., Otero, M. y Fanaro, M. (2009). Reconstrucción de una Organización Matemática de referencia para el estudio del límite y la continuidad de funciones en la Universidad. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*. 4 (2).
- [27] Sierra, T. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas: los sistemas de numeración y la medida de magnitudes*. Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid.
- [28] Sydasaeter, K., y Hammond, P. y A. Carvajal, (2012). *Matemáticas para el Análisis Económico*. Editora Fareso S.A.
- [29] Vivas, D. (2010). *La función cuadrática. Un estudio a través de los libros de texto de los últimos 40 años en Argentina*. Tesis de Maestría. Universidad de Concepción de Uruguay.

## Apéndice A

# Solución de tareas propuestas del libro de texto Chiang y Wainwright

1. Para la función  $y = -x^2$ , si el dominio es el conjunto de todos los números reales no negativos, ¿cuál es la imagen?

Problema 6, ejercicio 2.4-pág. 19.

### Solución (i):

Sea el dominio el conjunto de los números reales no negativos; esto es,  $x \in [0, +\infty[$ .

Luego la imagen de  $y$  es el conjunto de todos los valores de  $y(x)$ , conforme  $x$  varía en todo el dominio; es decir, todos los números de la forma  $-x^2$ .

Como  $-1 < 0$  tenemos  $y \leq 0$ , entonces la imagen de  $y$  es el intervalo  $] -\infty, 0]$ .

### Solución (ii):

Sea  $y = -x^2$ , donde  $x \in [0, +\infty[$

Luego a partir de la expresión algebraica identificamos el vértice  $V(0, 0)$  y el coeficiente de la variable cuadrática es -1; por lo tanto, la parábola se abre hacia abajo. De la gráfica, tenemos la imagen  $Im(y) = ] -\infty, 0]$ .

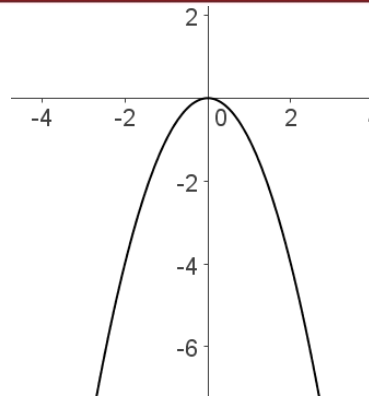


Figura A.1: Gráfica de  $y = -x^2$ .

## 2. Gráficas de funciones

a)  $y = -x^2 + 5x - 2$ .

b)  $y = x^2 + 5x - 2$ .

Con el conjunto de valores  $-5 \leq x \leq 5$  que constituye el dominio. Es bien sabido que el signo del coeficiente del término  $x^2$  determina si la gráfica de la función cuadrática tendrá una “colina” o un “valle”. Con base en el presente problema, ¿qué signo se relaciona con la colina? Proporcione una explicación intuitiva para esto.

Problema 3, ejercicio 2.5-pág. 25.

### Solución:

a) Identificamos los coeficientes  $a = -1, b = 5, c = -2$ . Como  $a < 0$ , la parábola se abre hacia abajo.

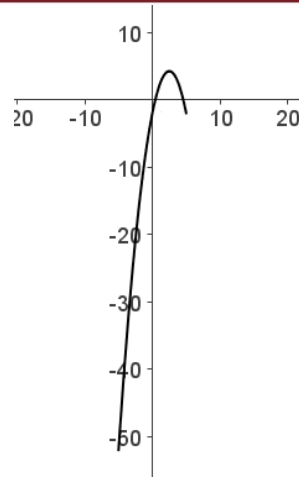
Para identificar el vértice, completamos cuadrados:

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 5x - 2 \\ y &= -\left[x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right] + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \\ y &= -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{17}{4} \end{aligned}$$

donde el vértice es  $V(h, k) = V\left(\frac{5}{2}, \frac{17}{4}\right)$ .

Evaluamos  $y$  en los valores extremos del dominio dado, para reconocer el recorrido de  $y(x)$ . Donde

$$\begin{aligned} y(-5) &= -52 \\ y(5) &= -2 \end{aligned}$$


 Figura A.2: Gráfica de  $y = -x^2 + 5x - 2$ .

- b) Identificamos los coeficientes  $a = 1, b = 5, c = -2$ . Como  $a > 0$ , la parábola se abre hacia arriba.

Para identificar el vértice, completamos cuadrados:

$$y = x^2 + 5x - 2$$

$$y = \left[ x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \right] - \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2$$

$$y = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{33}{4}$$

donde el vértice es  $V(h, k) = V\left(-\frac{5}{2}, -\frac{33}{4}\right)$ .

Evaluamos  $y$  en los valores extremos del dominio dado, para reconocer el recorrido de  $y(x)$ .

Donde

$$y(-5) = -2$$

$$y(5) = 48$$

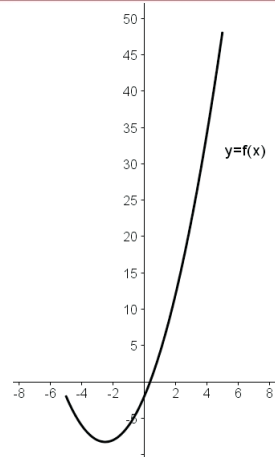


Figura A.3: Gráfica de  $y = x^2 + 5x - 2$ .

3. Determine en forma gráfica los ceros de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = x^2 - 8x + 15$ .

b)  $g(x) = 2x^2 - 4x - 16$ .

Problema 1, ejercicio 3.3-pág. 40.

**Solución:**

a) Identificamos los coeficientes  $a = 1, b = -8, c = 15$ . Como  $a > 0$ , la parábola se abre hacia arriba.

Hallamos el vértice  $V(h, k)$ ; donde  $h = -\frac{b}{2a}, k = c - \frac{b^2}{4a}$ . Luego  $h = -\frac{8}{2} = 4,$

$$k = 15 - \frac{64}{4} = -1$$

Entonces, el vértice  $V(h, k) = V(4, -1)$ .

Ahora calculamos los puntos de intersección de  $f(x)$  con el eje  $X$ ; donde la ordenada debe ser igual a cero; esto es

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

Factorizando tenemos:

$$(x - 5)(x - 3) = 0$$

$$\rightarrow x = 5 \text{ o } x = 3$$

Siendo estos los ceros de la función cuadrática. Los puntos de intersección de  $f(x)$  con el eje  $X$  son  $(5,0)$  y  $(3,0)$ .

Luego la intersección con el eje  $Y$  donde para  $x = 0$  obtenemos  $f(0) = 15$ , finalmente ubicamos el punto  $(0,15)$  en el plano  $XY$ .

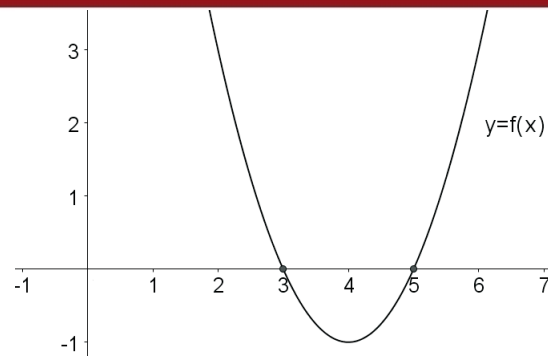


Figura A.4: Ceros de  $f(x) = x^2 - 8x + 15$ .

b) Identificamos los coeficientes  $a = 2, b = -4, c = -16$ . Como  $a > 0$ , la parábola se abre hacia arriba.

Hallamos el vértice  $V(h, k)$ ; donde  $h = -\frac{b}{2a}, k = c - \frac{b^2}{4a}$ . Luego  $h = -\frac{-4}{2(2)} = 1,$

$$k = -16 - \frac{(-4)^2}{4(2)} = -18$$

Entonces, el vértice  $V(h, k) = V(1, -18)$ .

Ahora calculamos los puntos de intersección de  $g(x)$  con el eje  $X$ ; donde la ordenada debe ser igual a cero; esto es

$$2x^2 - 4x - 16 = 0$$

Factorizando tenemos:

$$(2x + 4)(x - 4) = 0$$

$$\rightarrow x = -2 \text{ o } x = 4$$

Siendo estos los ceros de la función cuadrática. Los puntos de intersección de  $f(x)$  con el eje  $X$  son  $(-2,0)$  y  $(4,0)$ .

Luego la intersección con el eje  $Y$  donde para  $x = 0$  obtenemos  $f(0) = -16$ , finalmente ubicamos el punto  $(0,-16)$  en el plano  $XY$ .

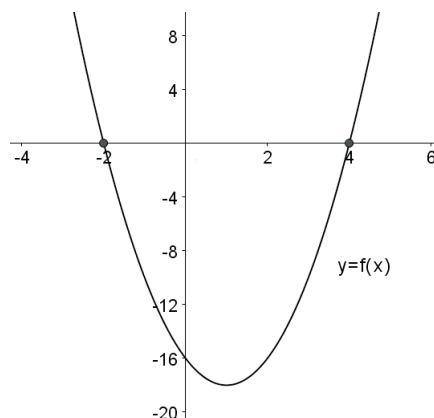


Figura A.5: Ceros de  $f(x) = 2x^2 - 4x - 16$ .

4. Resuelva el problema 1 mediante la fórmula cuadrática.

Problema 2, ejercicio 3.3-pág. 40.

**Solución:**

a) Sea  $f(x) = x^2 - 8x + 15$ , donde  $a = 1, b = -8, c = 15$

La fórmula cuadrática es

$$\begin{aligned}
 x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{(b)^2 - 4ac}}{2a} \\
 &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(15)}}{2(1)} \\
 &= \frac{8 \pm 2}{2} \\
 &\rightarrow x_1 = 5 \text{ y } x_2 = 3
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, 5 y 3 son los ceros de  $f(x)$ .

b) Sea  $g(x) = 2x^2 - 4x - 16$ , donde  $a = 2, b = -4, c = -16$

La fórmula cuadrática es

$$\begin{aligned}
 x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{(b)^2 - 4ac}}{2a} \\
 &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(-16)}}{2(2)} \\
 &= \frac{4 \pm 12}{4} \\
 &\rightarrow x_1 = 4 \text{ y } x_2 = -2
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, 4 y -2 son los ceros de  $g(x)$ .

5. Obtenga la solución de equilibrio para cada uno de los siguientes modelos:

a)

$$Q_d = Q_s$$

$$Q_d = 3 - p^2$$

$$Q_s = 6p - 4$$

b)

$$Q_d = Q_s$$

$$Q_d = 8 - p^2$$

$$Q_s = p^2 - 2$$

**Solución:**

a) Para hallar el equilibrio hacemos

$$Q_d = Q_s$$

$$3 - p^2 = 6p - 4$$

El modelo se reduce a

$$p^2 + 6p - 7 = 0$$

Luego factorizando tenemos

$$(p + 7)(p - 1) = 0$$

$$\rightarrow p_1 = -7 \text{ o } p_2 = 1$$

Donde solo la segunda raíz es aceptable,  $p^* = 1$ . Sustituyendo la raíz  $p = 1$  en la ecuación  $Q_d = 3 - p^2$ , tenemos

$$Q^* = 3 - (-1)^2 = 2$$

Entonces, el punto de equilibrio es

$$(P^*, Q^*) = (1, 2).$$

b) Para hallar el equilibrio hacemos

$$Q_d = Q_s$$

$$8 - p^2 = p^2 - 2$$

El modelo se reduce a

$$p^2 - 5 = 0$$

Luego factorizando tenemos:

$$(p - \sqrt{5})(p + \sqrt{5}) = 0$$

$$\rightarrow p_1 = \sqrt{5} \text{ o } p_2 = -\sqrt{5}$$

Donde solo la primera raíz es aceptable,  $p^* = \sqrt{5}$ . Sustituyendo la raíz  $p = \sqrt{5}$  en la ecuación  $Q_d = 8 - p^2$ , tenemos

$$Q^* = 8 - (\sqrt{5})^2 = 3$$

Entonces, el punto de equilibrio es

$$(P^*, Q^*) = (\sqrt{5}, 3).$$

6. Halle los valores estacionarios de las siguientes funciones (compruebe si son máximos o mínimos relativos o puntos de inflexión), suponiendo que el dominio es el conjunto de los números reales:

a)  $y = -2x^2 + 8x + 7$ .

b)  $y = 5x^2 + x$ .

c)  $y = 3x^2 + 3$ .

d)  $y = 3x^2 - 6x + 2$ .

Problema 1, ejercicio 9.2-pág. 226.

**Solución:**

a) Sea

$$y = -2x^2 + 8x + 7$$

Hallamos

$$y' = -4x + 8$$

hacemos

$$y' = 0$$

$$-4x + 8 = 0$$

$$x = 2$$

Identificamos -2 el coeficiente de  $x^2$ , entonces  $-2 < 0$ ; donde  $y$  es una función cóncava por lo tanto posee máximo en  $y(2) = 15$ .

b) Sea

$$y = 5x^2 + x$$

Hallamos

$$y' = 10x + 1$$

hacemos

$$y' = 0$$

$$10x + 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{10}$$

Identificamos 5 el coeficiente de  $x^2$ , entonces  $5 > 0$ ; donde  $y$  es una función convexa. Por lo tanto, posee mínimo en  $y\left(-\frac{1}{10}\right) = -\frac{1}{20}$ .

c) Sea

$$y = 3x^2 + 3$$

Hallamos

$$y' = 6x$$

hacemos

$$\begin{aligned} y' &= 0 \\ 6x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Identificamos 3 el coeficiente de  $x^2$ , entonces  $3 > 0$ ; donde  $y$  es una función convexa. Por lo tanto, posee mínimo en  $y(0) = 3$ .

d) Sea

$$y = 3x^2 - 6x + 2$$

Hallamos

$$y' = 6x - 6$$

hacemos

$$\begin{aligned} y' &= 0 \\ 6x + 6 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Identificamos 3 el coeficiente de  $x^2$ , entonces  $3 > 0$ ; donde  $y$  es una función convexa. Por lo tanto, posee mínimo en  $y(1) = 3$

7. ¿Cuál de las siguientes funciones cuadráticas es estrictamente convexa?

- a)  $y = 9x^2 - 4x + 9$ .
- b)  $w = -3x^2 + 39$ .
- c)  $u = 9 - 2x^2$ .
- d)  $v = 8 - 5x + x^2$ .

Problema 2, ejercicio 9.3-pág. 233.

a) **Solución (i):**

Sea

$$y = 9x^2 - 4x + 9$$

Identificamos el coeficiente de la variable cuadrática  $9 > 0$ . Por lo tanto,  $y$  es estrictamente convexa.

**Solución (ii):**

Hallar la segunda derivada de  $y$

$$\begin{aligned}y &= 9x^2 - 4x + 9 \\y' &= 18x - 4 \\y'' &= 18 > 0\end{aligned}$$

Por la aplicación de la segunda derivada, tenemos  $y'' > 0$ , esto implica que  $y$  es estrictamente convexa.

b) **Solución (i):**

Sea

$$w = -3x^2 + 39$$

Identificamos el coeficiente de la variable cuadrática  $-3 < 0$ . Por lo tanto,  $w$  es estrictamente cóncava.

**Solución (ii):**

Hallar la segunda derivada de  $w$

$$\begin{aligned}w &= -3x^2 + 39 \\w' &= -6x \\w'' &= -6 < 0\end{aligned}$$

Por la aplicación de la segunda derivada, tenemos  $w'' < 0$ , esto implica que  $w$  es estrictamente cóncava.

c) **Solución (i):**

Sea

$$u = 9 - 2x^2$$

Identificamos el coeficiente de la variable cuadrática  $-2 < 0$ . Por lo tanto,  $u$  es estrictamente cóncava.

**Solución (ii):**

Hallar la segunda derivada de  $u$

$$\begin{aligned}u &= 9 - 2x^2 \\u' &= -4x \\u'' &= -4 < 0\end{aligned}$$

Por la aplicación de la segunda derivada, tenemos  $u'' < 0$ , esto implica que  $u$  es estrictamente cóncava.

d) **Solución (i):**

Sea

$$v = 8 - 5x + x^2$$

Identificamos el coeficiente de la variable cuadrática  $1 > 0$ . Por lo tanto,  $v$  es estrictamente convexa.

**Solución (ii):**

Hallar la segunda derivada de  $v$

$$\begin{aligned} v &= 8 - 5x + x^2 \\ v' &= -5 + 2x \\ v'' &= 2 > 0 \end{aligned}$$

Por la aplicación de la segunda derivada, tenemos  $v'' > 0$ , esto implica que  $v$  es estrictamente convexa.

8. Halle los máximos y mínimos relativos de  $y$  mediante el criterio de la segunda derivada.

a)  $y = -2x^2 + 8x + 28$ .

Problema 1, ejercicio 9.4-pág. 241.

**Solución:**

a) La primera y segunda derivada son:

$$y' = -4x + 8 \quad y \quad y'' = -4$$

Al igualar a cero y resolver la ecuación restante, encontramos que el (único) valor crítico es  $x^* = 2$ , que produce el valor estacionario  $y(2) = 33$ . Debido a que la segunda derivada es negativo, el extremo se establece como un máximo. Además, puesto que la función dada se representa como una curva en  $\cap$ , el máximo relativo es también un máximo absoluto.

9. El Señor Greenthumb desea cercar un campo de flores rectangular, usando una pared de su casa como un lado del rectángulo. Los otros tres lados se encerrarán con malla de alambre, la cual tiene sólo 64 pies disponibles. ¿Cuáles son la longitud  $L$  y el ancho  $W$  del rectángulo con el cual obtendría el área de plantación más grande posible? ¿Cómo se asegura de que su respuesta sea el área más grande y no la más pequeña?

**Solución:**

Sea

$$\text{Perímetro: } P = L + 2W = 64$$

$$\text{Luego despejando } L, \text{ tenemos: } L = 64 - 2W$$

$$\text{Área: } A = L.W$$

Primero sustituir  $L$  en  $P$ :

$$A(W) = (64 - 2W)W$$

$$A(W) = 64W - 2W^2$$

Hallamos la primera derivada

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dW} &= 64 - 4W \\ &= 4(16 - W) \end{aligned}$$

Luego, hacemos

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dW} &= 0 \\ 4(16 - W) &= 0 \\ W &= 16 \end{aligned}$$

Ahora hallamos  $L$ :

$$L + 2W = 64$$

$$L + 2(16) = 64$$

$$L = 32$$

Hallamos  $A$

$$A = L.W$$

$$A = 32(16)$$

$$A = 512 \text{ pies}^2.$$

Entonces,  $W = 16$  pies y  $L = 32$  pies para obtener el área de plantación más grande.

Aseguro que mi respuesta  $A = 512 \text{ pies}^2$  es el área máxima, debido a que verifico la aplicación de la segunda derivada

$$\frac{d^2A}{dW^2} = -4 < 0$$

Esto implica que  $A = 512 \text{ pies}^2$  sea un máximo.

10. Una empresa tiene las siguientes funciones de costo total y demanda:

$$C = \frac{1}{3}Q^3 - 7Q^2 + 111Q + 50$$

$$Q = 100 - P$$

- ¿La función de costo total satisface las restricciones de coeficientes de (9.5)?
- Escriba la función ingreso total  $R$  en términos de  $Q$ .
- Formule la función de ganancia total  $\pi$  en términos de  $Q$ .
- Encuentre el nivel de producción  $Q^*$  de maximización de ganancia.
- ¿Cuál es la ganancia máxima?

Problema 3, ejercicio 9.4-pág. 241.

**Solución:**

- a) Las restricciones de coeficientes de 9.5 son

$$a, b, c > 0 \quad ; \quad b < 0 \quad ; \quad b^2 < 3ac$$

En el problema:  $a = \frac{1}{3}$ ,  $c = 111$ ,  $d = 50$  todos son positivos.

Luego  $b = -7 < 0$  y  $b^2 < 3ac \rightarrow 49 < 111$

Por lo tanto, la función costo total si satisface las restricciones de coeficientes de (9.5).

- b) A partir de la función demanda denotamos

$$P = 100 - Q$$

Luego identificamos la función ingreso total  $R$

$$R = P \cdot Q$$

$$R = (100 - Q)Q$$

$$R = 100Q - Q^2.$$

- c) Sea  $\pi(Q) = R(Q) - C(Q)$ , la función ganancia total es:

$$\pi(Q) = (100Q - Q^2) - \left(\frac{1}{3}Q^3 - 7Q^2 + 111Q + 50\right)$$

$$\pi(Q) = -\frac{1}{3}Q^3 + 6Q^2 - 11Q - 50$$

d) Sabemos que  $\pi(Q)$  es el ingreso total. Para hallar los valores extremos hacemos:

$$\frac{d\pi}{dQ} = -Q^2 + 12Q - 11$$

Luego

$$\begin{aligned}\frac{d\pi}{dQ} &= 0 \\ -Q^2 + 12Q - 11 &= 0 \\ (Q - 1)(Q - 11) &= 0 \\ \rightarrow Q_1 = 11 \text{ o } Q_2 = 1\end{aligned}$$

Debido a que se trata de una función cuadrática y puesto que el coeficiente de  $Q^2$  es negativo, debemos graficarla como una curva  $\cup$  invertida en función de  $Q$ .

Los valores hallados  $Q_1 = 11$  y  $Q_2 = 1$  son los ceros de la función. A su vez satisface la condición suficiente de segundo orden para maximización de la ganancia.

Tenemos

$$\begin{aligned}\pi(1) &= -55,33 \\ \pi(11) &= 111,34\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $Q^* = 11$  para obtener un beneficio máximo.

e) En (1), reemplazamos  $Q^* = 11$

$$\begin{aligned}\pi(Q^*) &= -\frac{1}{3}(11)^3 + 6(11)^2 - 11(11) - 50 \\ &= \frac{334}{3}\end{aligned}$$

Entonces, la ganancia máxima es  $\frac{334}{3}$ .

11. Para expresar las siguientes suposiciones usaremos una función de ganancia cuadrática

$$\pi(Q) = hQ^2 + jQ + k:$$

- Si la producción es nula, la ganancia será negativa (como resultado de los costos fijos).
- La función de producción es estrictamente cóncava.
- La ganancia máxima ocurre en un nivel de producción positivo  $Q^*$ . ¿Qué restricciones de parámetro se requieren?

Problema 5, ejercicio 9.4-pág. 241.

**Solución:**

a) Sean

$Q$ : cantidad de un bien que se produce

$h, j, k$ : parámetros (cuando estos parámetros se estiman mediante algunos estadísticos, se convierten en constantes).

Si  $Q = 0$ , es una producción nula.

En la función ganancia tenemos:

$$\pi(0) = h(0)^2 + j(0) + k$$

$$\pi(0) = k, \quad k : \text{costo fijo.}$$

Luego hacemos

$$\text{Ganancia} = \text{Ingreso} - \text{Costo fijo}$$

$$\pi(0) = 0 - k$$

$$\pi(0) = -k < 0$$

Por lo tanto, la ganancia será negativa.

b) Decimos que  $\pi(Q)$  es estrictamente cóncava, cuando

$$\pi''(Q) < 0$$

tenemos

$$\pi(Q) = h(Q)^2 + j(Q) + k$$

$$\pi'(Q) = 2hQ + j$$

$$\pi''(Q) = 2h$$

de donde debemos tener  $h < 0$  para que  $\pi(Q)$  sea estrictamente cóncava.

c) En  $\pi(Q) = h(Q)^2 + j(Q) + k$ , hallamos la primera derivada:

$$\pi'(Q) = 2hQ + j$$

Luego

$$2hQ + j = 0$$

Despejamos  $Q^* = -\frac{j}{2h}$ , de modo que si  $h < 0$ , la ganancia es máxima; debido a que la positividad de  $Q^*$  requiere que  $j > 0$ .

Por lo tanto, el  $Q^* = -\frac{j}{2h}$ , para un  $j > 0$  resulta la ganancia máxima.

12. Use el siguiente procedimiento para comprobar que la curva  $AR$  del ejemplo 4 tiene pendiente negativa:

- Denote la pendiente de  $AR$  mediante  $S$ . Escriba una expresión para  $S$ .
- Encuentre el valor máximo de  $S$ ,  $S_{max}$ , mediante el criterio de la segunda derivada.
- Deduzca del valor de  $S_{max}$  que la curva  $AR$  tiene pendiente negativa en todas partes.

Problema 7, ejercicio 9.4-pág. 241.

**Solución:**

- Sea  $AR = f(Q) = 8000 - 23Q + 1,1Q^2 - 0,018Q^3$  del ejemplo 4.

Hacemos

$$S = \frac{dAR}{dQ} = -23 + 2,2Q - 0,054Q^2$$

$$S = -23 + 2,2Q - 0,054Q^2$$

- Se tiene

$$\frac{dS}{dQ} = 2,2 - 0,108Q$$

$$\frac{dS}{dQ} = 0$$

$$2,2 - 0,108Q = 0$$

entonces  $Q^* = 20,37$ , el valor que maximiza a  $S$ .

A partir  $\frac{d^2S}{dQ^2} = -0,108 < 0$ ; decimos que la función  $S$  es cóncava. Por lo tanto, tiene máximo.

Luego

$$S_{max} = S/Q=Q^* = -23 + 2,2(20,37) - 0,054(20,37)^2 = -0,59$$

- A partir de  $S_{max}$  negativo, todo valor de  $S$  será negativo.

## Apéndice B

# Solución de tareas propuestas del libro de texto Sydsaeter, Hammond y Carbajal

1. Sea  $f(x) = x^2 + 1$

a) Calcular  $f(0)$ ,  $f(-1)$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  y  $f(\sqrt{2})$

Problema 1, sección 2.2-pág. 39.

**Solución:**

a) En  $f(x) = x^2 + 1$  hacemos  $x = 0$ ,  $x = -1$ ,  $x = \frac{1}{2}$  y  $x = \sqrt{2}$   
Entonces tenemos

$$f(0) = 1$$

$$f(-1) = 2$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$$

$$f(\sqrt{2}) = 3$$

Los valores 1, 2,  $\frac{5}{4}$  y 3 pertenecen al rango de  $f$ .

2. Usar las reglas obtenidas en el problema 3 para dibujar las gráficas de las siguientes funciones

a)  $y = x^2 + 1$

b)  $y = (x + 3)^2$

c)  $y = 3 - (x + 1)^2$

Problema 4, sección 2.4-pág. 49.

a) **Solución (i):**

Analizamos el coeficiente de la variable cuadrática donde tenemos  $1 > 0$  entonces la función es convexa; es decir, la parábola se abre hacia arriba.

Luego identificamos el vértice  $V(h, k)$  donde  $h = \frac{-b}{2a} = 0$  y  $k = c - \frac{b^2}{4a} = 1$  entonces  $V(h, k) = V(0, 1)$ .

Ahora hallamos las intersecciones con el eje  $X$  haciendo  $y = 0$ , para el cual usamos la fórmula cuadrática

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-0 \pm \sqrt{-4(1)(1)}}{2(1)} \end{aligned}$$

Como  $-4 < 0$  sus raíces son números complejos conjugados, entonces la parábola no corta al eje  $X$ .

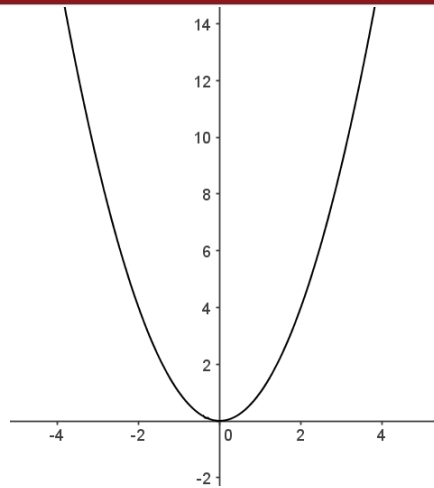
Luego damos un valor adicional conveniente  $y = 5$ , así obtenemos dos puntos de paso de la parábola

$$\begin{aligned} 5 &= x^2 + 1 \\ x^2 - 4 &= 0 \\ (x - 2)(x + 2) &= 0 \\ \Rightarrow x &= 2 \wedge x = -2 \end{aligned}$$

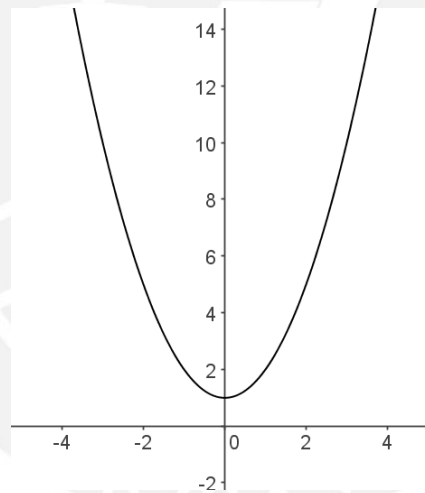
Ubicamos los puntos  $(2,5)$  y  $(-2,5)$  en el plano  $XY$  para obtener la gráfica.

**Solución (ii):**

Sea la función  $y = x^2$ , donde su vértice es  $V(h, k) = V(0, 0)$  y su gráfica es


 Figura B.1: Gráfica de  $y = x^2$ .

Para  $y = x^2 + 1$  donde las coordenadas del vértice son  $V(h, k) = V(0, 1)$ , luego a partir de la gráfica de la función  $y = x^2$ , se debe trasladar la ubicación de la coordenada  $k$  una unidad hacia arriba .


 Figura B.2: Gráfica de  $y = x^2 + 1$ .

b) **Solución (i):**

Analizamos el coeficiente de la variable cuadrática obteniendo  $-1 < 0$  entonces la función es cóncava; es decir, la parábola se abre hacia abajo.

Luego identificamos el vértice  $V(h, k) = V(-3, 0)$ .

Hallando la intersección con el eje  $Y$  tenemos  $y = 9$  para  $x = 0$ .

Ahora hallamos las intersecciones con el eje  $X$  haciendo  $y = 0$ , para el cual factorizamos.

$$0 = (x + 3)^2$$

$$0 = (x + 3)(x + 3)$$

Entonces las raíces son iguales  $x_1 = -3$  y  $x_2 = -3$  resulta el punto  $(-3,0)$  que coincide con el vértice.

**Solución (ii):**

Para  $y = (x + 3)^2$  donde las coordenadas del vértice son  $V(h, k) = V(-3, 0)$ , luego a partir de la gráfica de la función  $y = x^2$ , se debe trasladar la ubicación de la coordenada  $h$  tres unidades hacia la izquierda.

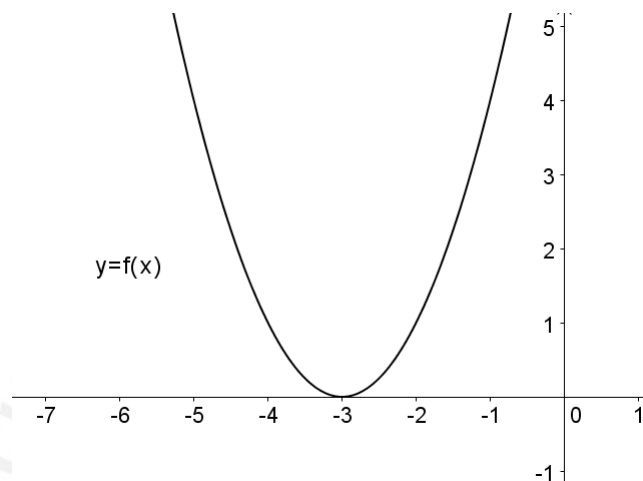


Figura B.3: Gráfica de  $y = (x + 3)^2$ .

**c) Solución (i):**

Analizamos el coeficiente de la variable cuadrática obteniendo  $-1 < 0$  entonces la función es cóncava; es decir, la parábola se abre hacia abajo.

Luego identificamos el vértice  $V(h, k) = V(-1, 3)$ .

Resolvemos  $y = 3 - (x + 1)^2$  obteniendo  $y = -x^2 - 2x + 2$ .

Para hallar la intersección con el eje Y hacemos  $x = 0$  y obtenemos  $y = 2$ .

Ahora hallamos las intersecciones con el eje X haciendo  $y = 0$ , para el cual usamos la fórmula cuadrática

$$\begin{aligned}
 x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-1)(2)}}{2(-1)} \\
 &= \frac{2 \pm \sqrt{12}}{-2}
 \end{aligned}$$

Luego tenemos las raíces  $x_1 = -\frac{2 + \sqrt{12}}{2}$  y  $x_2 = -\frac{2 - \sqrt{12}}{2}$

Ubicamos los puntos hallados en el plano XY para obtener la gráfica.

**Solución (ii):**

Para  $y = 3 - (x + 1)^2$  donde las coordenadas del vértice son  $V(h, k) = V(-1, 3)$ , luego a partir de la gráfica de la función  $y = x^2$ , se debe trasladar la ubicación de la coordenada  $h$  una unidad hacia la izquierda y la coordenada  $k$  tres unidades hacia arriba.

El signo negativo de la expresión cuadrática, significa que la gráfica de la función cuadrática será una curva que se abre hacia abajo (U invertida).

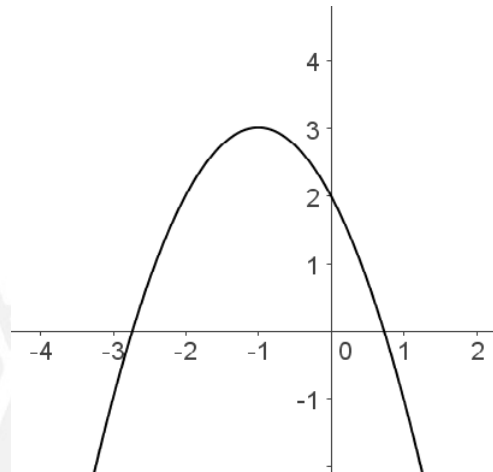


Figura B.4: Gráfica de  $y = 3 - (x + 1)^2$ .

3. a) Sea  $f(x) = x^2 - 4x$ . Completar la siguiente tabla

$x$	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$							

- b) Usando la tabla anterior, dibujar la gráfica de  $f$ .  
 c) Determinar el mínimo de  $f$ .  
 d) Resolver la ecuación  $f(x) = 0$ .

Problema 1, sección 3.1-pág. 63.

**Solución:**

- a) La tabla completa para  $f(x) = x^2 - 4x$  es

$x$	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	5	0	-3	-4	-3	0	5

- b) **Solución (i):**

Primero identificamos los coeficientes  $a = 1$ ,  $b = -4$  y  $c = 0$

Al analizar el coeficiente de la variable cuadrática tenemos que  $1 > 0$  entonces la función es convexa; es decir, la parábola se abre hacia arriba.

Luego identificamos el vértice  $V(h, k)$  donde  $h = \frac{-b}{2a} = 2$  y  $k = c - \frac{b^2}{4a} = -4$  de aquí  $V(h, k) = V(2, -4)$ .

Calculando las intersecciones con el eje  $X$  hacemos  $y = 0$  y factorizando tenemos

$$0 = x^2 - 4$$

$$0 = x(x - 4)$$

resulta que las raíces son  $x = 0$  y  $x = 4$  donde tenemos los puntos  $(0,0)$  y  $(4,0)$ .

Para hallar la intersección con el eje  $Y$  hacemos  $x = 0$  y obtenemos  $y = 0$ .

**Solución (ii):**

Para dibujar la gráfica de  $f$ , ubicamos los puntos de la tabla en el plano  $XY$ . Luego unimos los puntos hallados

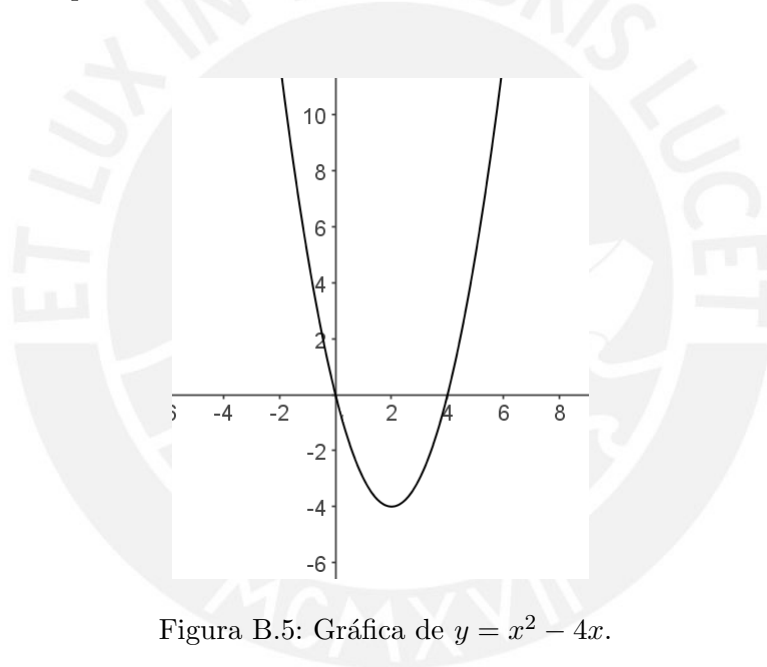


Figura B.5: Gráfica de  $y = x^2 - 4x$ .

- c) Para determinar el mínimo de  $f$  completamos cuadrados

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x \\ &= x^2 - 4x + 4 - 4 \\ &= (x - 2)^2 - 4 \end{aligned}$$

El mínimo valor lo obtenemos cuando

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 &= 0 \\ x - 2 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$f(2) = -4$ , es el mínimo de  $f$ .

d) Hallamos  $f(x) = 0$

Factorizando

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x - 4) = 0$$

$$x = 4 \quad \vee \quad x = 0$$

Luego el conjunto solución es  $C.S(x) = \{0, 4\}$ .

Al resolver esta ecuación hallamos los ceros de  $f$ , que son 0 y 4.

4. a) Sea  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$ . Rellenar la siguiente tabla

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$							

b) Usar la información de la parte (a) para dibujar la gráfica de  $f$ .

c) Determinar el máximo de  $f$ .

d) Resolver la ecuación  $f(x) = 0$  en  $x$ .

e) Probar que  $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)(x+3)$ , y usar esta igualdad para estudiar la variación de signo de  $f$  cuando  $x$  varía. Comparar el resultado con la gráfica.

Problema 2, sección 3.1-pág. 63.

**Solución:**

a) La tabla completa es

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-2.5	0	1.5	2	1.5	0	-2.5

b) **Solución (i):**

Primero identificamos los coeficientes  $a = -\frac{1}{2}$ ,  $b = -1$  y  $c = \frac{3}{2}$

Al analizar el coeficiente de la variable cuadrática tenemos que  $-\frac{1}{2} < 0$  entonces la función es cóncava; es decir, la parábola se abre hacia abajo.

Luego hallamos el vértice  $V(h, k)$  donde  $h = \frac{-b}{2a} = -1$  y  $k = c - \frac{b^2}{4a} = 2$  de aquí  $V(h, k) = V(-1, 2)$ .

Para hallar la intersección con el eje  $Y$  hacemos  $x = 0$  y obtenemos  $y = \frac{3}{2}$ .

Calculando las intersecciones con el eje  $X$  hacemos  $y = 0$  y factorizando tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} \\ 0 &= x^2 + 2x - 3 \\ 0 &= (x + 3)(x - 1) \end{aligned}$$

resulta que las raíces son  $x = -3$  y  $x = 1$  donde tenemos los puntos  $(-3,0)$  y  $(1,0)$ .

**Solución (ii):**

La gráfica de  $f$  la hallamos ubicando los puntos de la tabla de (a) en el plano  $XY$ , finalmente unimos los puntos obtenidos.

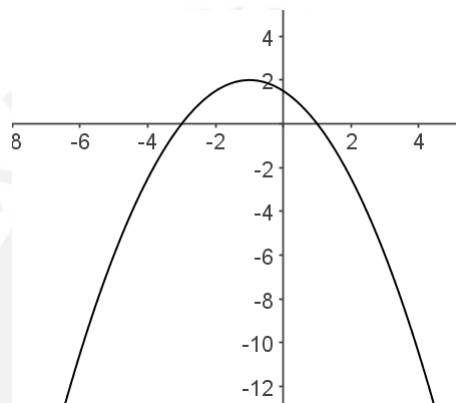


Figura B.6: Gráfica de  $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$ .

- c) Para determinar el máximo de  $f$  completamos cuadrados

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1 - 1) + \frac{3}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 2 \end{aligned}$$

A partir de esta expresión, hacemos

$$\begin{aligned} (x + 1)^2 &= 0 \\ x + 1 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Cuando  $x = -1$ , entonces  $f(x) = 2$  es el máximo valor de  $f$ .

- d) Hallamos  $f(x) = 0$  en  $x$ , factorizando

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} &= 0 \\ x^2 + 2x - 3 &= 0 \\ (x + 3)(x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$x = -3 \quad \vee \quad x = 1$$

Luego el conjunto solución es  $C.S(x) = \{-3, 1\}$ .

Al resolver esta ecuación hallamos los ceros de  $f$ , que son -3 y 1.

e) Sea

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 2 \\ &= -\frac{1}{2}[(x+1)^2 - 4] \\ &= -\frac{1}{2}(x-1)(x+3) \end{aligned}$$

Veamos la variación de signo para  $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)(x+3)$

Analicemos

Para  $x < -3$  tomamos  $x = -4$  donde  $f$  es negativo. Por lo tanto, la gráfica de  $f$  está debajo del eje  $X$ .

Para  $-3 < x < 1$  tomamos  $x = 0$  donde  $f$  es positivo. Por lo tanto, la gráfica de  $f$  está encima del eje  $X$ , desde  $x = -3$  hasta  $x = 1$ .

Para  $x > 1$  tomamos  $x = 3$  donde  $f$  es negativo. Por lo tanto, la gráfica de  $f$  está debajo del eje  $X$ .

5. Completar los cuadrados como en (3) en las siguientes funciones cuadráticas y determinar su máximo o mínimo:

- a)  $x^2 + 4x$
- b)  $x^2 + 6x + 18$
- c)  $-3x^2 + 30x - 30$
- d)  $9x^2 - 6x - 44$
- e)  $-x^2 - 200x + 30000$
- f)  $x^2 + 100x - 20000$

Problema 3, sección 3.1-pág. 63.

**Solución:**

a) Sea

$$\begin{aligned} x^2 + 4x &= x^2 + 4x + 4 - 4 \\ &= (x+2)^2 - 4 \end{aligned}$$

como

$$(x+2)^2 \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Luego sumar (-4):

$$\begin{aligned}(x+2)^2 - 4 &\geq -4 \\ y &\geq -4\end{aligned}$$

Entonces  $y \in [-4, +\infty[$ . Por lo tanto, el mínimo de  $y$  es -4.

b) Sea

$$\begin{aligned}x^2 + 6x + 18 &= x^2 + 6x + 9 - 9 + 18 \\ &= (x+3)^2 + 9\end{aligned}$$

como

$$(x+3)^2 \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Luego sumar (9):

$$\begin{aligned}(x+3)^2 + 9 &\geq 9 \\ y &\geq 9\end{aligned}$$

Entonces  $y \in [9, +\infty[$ . Por lo tanto, el mínimo de  $y$  es 9.

c) Sea

$$\begin{aligned}-3x^2 + 30x - 30 &= -3(x^2 + 10x) - 30 \\ &= -3(x+5)^2 + 45\end{aligned}$$

como

$$(x+5)^2 \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Luego por (-3) y sumar (45):

$$\begin{aligned}-3(x+5)^2 + 45 &\leq 45 \\ y &\leq 45\end{aligned}$$

Entonces  $y \in ]-\infty, 45]$ . Por lo tanto, el máximo de  $y$  es 45.

d) Sea

$$\begin{aligned}9x^2 - 6x - 44 &= 9\left(x^2 - \frac{6}{9}x\right) - 44 \\ &= 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - 45\end{aligned}$$

como

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Luego por (9) y sumar (-45):

$$\begin{aligned} 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - 45 &\geq -45 \\ y &\geq -45 \end{aligned}$$

Entonces  $y \in [-45, +\infty[$ . Por lo tanto, el mínimo de  $y$  es -45.

e) Sea

$$\begin{aligned} -x^2 - 200x + 30000 &= -(x^2 + 200x) + 30000 \\ &= -(x + 100)^2 + 40000 \end{aligned}$$

como

$$(x + 100)^2 \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Luego por (-1) y sumar (40000):

$$\begin{aligned} -(x + 100)^2 + 40000 &\leq 40000 \\ y &\leq 40000 \end{aligned}$$

Entonces  $y \in ]-\infty, 40000]$ . Por lo tanto, el máximo de  $y$  es 40000.

f) Sea

$$\begin{aligned} x^2 + 100x - 20000 &= x^2 + 100x - 2500 + 2500 - 20000 \\ &= (x - 50)^2 - 17500 \end{aligned}$$

como

$$(x - 50)^2 \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Luego sumar (-17500):

$$\begin{aligned} (x - 50)^2 - 17500 &\geq -17500 \\ y &\geq -17500 \end{aligned}$$

Entonces  $y \in [-17500, +\infty[$ . Por lo tanto, el mínimo de  $y$  es -17500.

6. Se da una cuerda de longitud  $L$  a una persona para que delimite un área rectangular.

- a) Si uno de los lados es  $x$ , probar que el área delimita es  $A(x) = \frac{Lx}{2} - x^2$ , con  $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ . Hallar  $x$  para que el área sea máxima.
- b) ¿Delimitará una circunferencia de longitud  $L$  un área mayor que la que hemos hallado en (a)? (Se sabe que algunos agrimensores de la antigüedad redactaron contratos de venta de parcelas en los cuales sólo se especificaba el perímetro. El resultado fue que los lotes constaban de rectángulos muy alargados y estrechos).

Problema 5, sección 3.1 -pág. 64.

**Solución:**

- a) Sea  $P = L$ , perímetro.

$$L = 2x + 2y \Rightarrow y = \frac{1}{2}(L - 2x)$$

Luego

$$\text{Área} = \text{base} \times \text{altura}$$

$$\begin{aligned} A(x) &= x \cdot y \\ &= x \cdot \frac{1}{2}(L - 2x) \\ &= \frac{Lx}{2} - x^2 \end{aligned}$$

Donde

$$\frac{1}{2}Lx - x^2 \geq 0$$

$$Lx - 2x^2 \geq 0$$

$$2x^2 - Lx \leq 0$$

$$x(2x - L) \leq 0$$

$$\Rightarrow x \in \left[0, \frac{L}{2}\right]$$

Al completar cuadrados en  $A(x)$  tenemos

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{L}{2}x - x^2 \\ &= -\left(x^2 - \frac{L}{2}x + \frac{L^2}{16} - \frac{L^2}{16}\right) \\ &= -\left(x - \frac{L}{4}\right)^2 + \frac{L^2}{16} \end{aligned}$$

Entonces, cuando  $x = \frac{L}{4}$  el área máxima del rectángulo es  $\frac{L^2}{16}$ .

- b) Datos  $L = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{L}{2\pi}$   
 Área del círculo AC:

$$\begin{aligned} AC &= \pi r^2 \\ &= \pi \left( \frac{L}{2\pi} \right)^2 \\ &= \frac{L^2}{4\pi} \end{aligned}$$

¿Es  $\frac{L^2}{4\pi} > \frac{L}{16}$ ?  
 Veamos

$$\begin{aligned} 16L^2 &> 4\pi L \\ 4L &> \pi \\ L &> \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

El área del círculo será mayor que el área del rectángulo debido a que  $L > \frac{\pi}{4}$  donde  $L$  es el perímetro.

7. Considérese la función dada por la fórmula  $A = 500x - x^2$ , como en el ejemplo 1.4.1  
 ¿Para qué valor de  $x$  se alcanza el mayor valor del área  $A$ ?

Problema 6, sección 3.1 -pág. 64.

**Solución:**

Completar cuadrados en  $A = 500x - x^2$

$$\begin{aligned} 500x - x^2 &= -(x^2 - 500x) \\ &= -(x - 250)^2 + 62500 \end{aligned}$$

Cuando  $x = 250$  alcanza el mayor valor de área de  $A$ .

8. En una teoría conocida como la de “mercados eficientes de crédito” suelen aparecer modelos dados por funciones del tipo:

$$U(x) = 72 - (4 + x)^2 - (4 - rx)^2$$

donde  $r$  es una constante. Calcular el valor de  $x$  para el cual  $U(x)$  alcanza un máximo.

Problema 8, Problema 3.1-pág. 64.

**Solución:**

Tenemos

$$\begin{aligned} U(x) &= 72 - (4+x)^2 - (4-rx)^2 \\ &= 72 - (16 + 8x + x^2) - (16 - 8rx - r^2x^2) \\ &= -(1+r^2)x^2 + (8r-8)x + 40 \\ &= -(r^2+1) \left[ x - \frac{4(r-1)}{r^2+1} \right]^2 + (r^2+1) \left[ \frac{4(r-1)}{r^2+1} \right]^2 + 40 \end{aligned}$$

cuando  $x = \frac{4(r-1)}{r^2+1}$ , la función  $U$  alcanza su valor máximo.

9. Hallar la ecuación de la parábola  $y = ax^2 + bx + c$  que pasa por los puntos  $(1,-3)$ ,  $(0,-6)$ ,  $(3,15)$ . (Indicación: Calcular  $a, b, c$ )

Problema 9, sección 3.1-pág.64.

**Solución:**

Dada la ecuación de la parábola  $P : y = ax^2 + bx + c$

Tenemos

$$(1, -3) \in P : -3 = a(1)^2 + b(1) + c$$

$$(0, -6) \in P : -6 = a(0)^2 + b(0) + c$$

$$(3, 15) \in P : 15 = a(3)^2 + b(3) + c$$

Ahora resolver el sistema

$$-3 = a + b + c \tag{B.1}$$

$$-6 = c \tag{B.2}$$

$$15 = 9a + 3b + c \tag{B.3}$$

Luego (B.2) en (B.1) y (B.3)

$$-3 = a + b - 6$$

$$15 = 9a + 3b - 6$$

De donde

$$a + b = 3$$

$$3a + b = 7$$

$$\Rightarrow a = 2 \text{ y } b = 1$$

Finalmente, la parábola es  $y = 2x^2 + x - 6$

10. Se dice que la gráfica de una función  $f$  es simétrica respecto de la recta  $x = p$  si:

$$f(p - t) = f(p + t) \quad (\text{para todo } t)$$

Probar que la parábola  $f(x) = ax^2 + bx + c$  es simétrica respecto de la recta  $x = \frac{-b}{2a}$ .  
(Indicación: usar (3)).

Problema 11, sección 3.1-pág. 64.

**Solución:**

En lugar de "p" elijo  $x = \frac{-b}{2a}$  en la definición  $f(p - t) = f(p + t)$  para todo  $t$ .

De  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ; tenemos

$$\begin{aligned} f(p - t) &= f(p + t), \text{ definición de simetría} \\ f\left(\frac{-b}{2a} - t\right) &= f\left(\frac{-b}{2a} + t\right) \\ a\left(\frac{-b}{2a} - t\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a} - t\right) + c &= a\left(\frac{-b}{2a} + t\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a} + t\right) + c \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la parábola  $f(x)$  es simétrica respecto a la recta  $x = \frac{-b}{2a}$ .

11. Una empresa fabrica un producto cuyo coste de fabricación es de 4 euros la unidad. Si lo vende a  $x$  euros la unidad, los clientes comprarán  $(60 \cdot x)$  unidades a la semana.
- Encontrar la expresión analítica de la función que nos determina el beneficio semanal.
  - Hallar el precio que maximiza el beneficio.

Problema 1, sección 3.2-pág. 67.

**Solución:**

- a) Sea

Beneficio semanal:  $B(x)$

Ingreso total:  $R(x)$

Costo total:  $C(x)$

$$B(x) = R(x) - C(x)$$

$$R(x) = (\text{cantidad demandada}) \cdot (\text{precio de cada unidad})$$

$$R(x) = (60 \cdot x)(4)$$

$$R(x) = 240x \text{ y}$$

$$C(x) = (60x)(x)$$

Luego

$$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 4(60x) - x(60x) \\ B(x) &= 240x - 60x^2 \end{aligned}$$

b) Completar cuadrados

$$\begin{aligned} B(x) &= -60(x^2 - 4x + 4 - 4) \\ &= -60(x - 2)^2 + 240 \end{aligned}$$

El precio que maximiza el beneficio es  $x = 2$  euros.

12. Una empresa importadora - exportadora de coco rallado vende  $Q$  toneladas en Inglaterra y recibe un precio dado por  $P_1 = \alpha_1 - \frac{1}{3}Q$ . Por otra parte, si compra  $Q$  toneladas de su único proveedor de Ghana, tiene que pagar un precio dado por  $P_G = \alpha_2 + \frac{1}{6}Q$ . Además, le cuesta  $\gamma$  el transporte por tonelada, desde el proveedor en Ghana hasta los clientes en Inglaterra (su único mercado). Los números  $\alpha_1, \alpha_2$  y  $\gamma$  positivos.

- Hallar el beneficio de la empresa en función de  $Q$ , número de toneladas vendidas.
- Suponiendo que  $\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma > 0$ , hallar la cantidad que hace máximo el beneficio. ¿Qué ocurre si  $\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma \leq 0$  ?
- Supongamos que el gobierno de Ghana impone un gravamen de  $t$  por tonelada a la exportación de coco. Hallar la nueva expresión de los beneficios de la empresa y la nueva cantidad exportada.
- Calcular los ingresos del gobierno por este impuesto en función de  $t$  y aconsejar cómo se puede obtener el máximo posible de ingresos por este concepto.

Problema 2, sección 3.2 - pág. 67.

**Solución:**

Datos

$Q$ : cantidad en toneladas de coco rallado.

$$P = \alpha_1 - \frac{1}{3}Q, \text{ (Función demanda)}$$

$$P_G = \alpha_2 + \frac{1}{6}Q, \text{ (Función oferta)}$$

a) Sea

$$\begin{aligned} \text{Beneficio} &= \text{Ingreso} - \text{Coste total} \\ \pi(Q) &= Q\left(\alpha_1 - \frac{1}{3}Q\right) - \left[\left(\alpha_2 + \frac{1}{6}Q\right)Q + \gamma Q\right] \\ \pi(Q) &= -\frac{1}{2}Q^2 + (\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma)Q, \quad Q \geq 0 \end{aligned}$$

como el coeficiente de  $Q^2$  es  $-\frac{1}{2}$ , se trata de una parábola que se abre hacia abajo.

b) Completar cuadrados, a partir de

$$\begin{aligned}\pi(Q) &= -\frac{1}{2}Q^2 + (\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma)Q \\ &= -\frac{1}{2}[Q^2 - 2(\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma)Q + (\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma)^2 - (\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma)^2] \\ &= -\frac{1}{2}[Q - (\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma)]^2 + \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma)^2\end{aligned}$$

Cuando  $(\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma) > 0$ , la cantidad que hace máximo el beneficio es  $\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma)^2$ .

Cuando  $(\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma) < 0$ , el beneficio sería negativo.

c) Antes del impuesto:

Precio de demanda:  $P_1 = \alpha_1 - \frac{1}{3}Q \leftrightarrow Q^d = 3\alpha_1 - 3P_1 \dots (*)$

Precio de oferta:  $P_G = \alpha_2 - \frac{1}{6}Q \leftrightarrow Q^S = 6P_G - 6\alpha_2$

Después del impuesto:

$$P_1 - P_G = t \leftrightarrow P_1 = t + P_G \dots (1)$$

$$Q^d = Q^S \leftrightarrow 3\alpha_1 - 3P_1 = 6P_G - 6\alpha_2 \dots (2)$$

(1) en (2):

$$3\alpha_1 - 3(t + P_G) = 6P_G - 6\alpha_2$$

$$6\alpha_2 + 3\alpha_1 - 3t = 9P_G$$

$$(2\alpha_2 + \alpha_1 - t) = 3P_G$$

$$P_G = \frac{1}{3}(2\alpha_2 + \alpha_1 - t)$$

Reemplazar en (1):

$$P_1 = t + \frac{1}{3}(2\alpha_2 + \alpha_1 - t)$$

$$P_1 = \frac{1}{3}(2\alpha_2 + \alpha_1 + 2t)$$

Luego sustituir  $P_1$  en (\*)

$$\begin{aligned}Q^d &= 3\alpha_1 - 3\left[\frac{1}{3}(2\alpha_2 + \alpha_1 + 2t)\right] \\ &= 2(\alpha_1 - \alpha_2 - t)\end{aligned}$$

Donde  $Q^d$  la nueva cantidad exportada. La nueva expresión de los beneficios de la empresa es:

$$\pi(Q^d) = -\frac{1}{2}\left[Q^d - (\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma)\right]^2 + \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma)^2$$

d) El ingreso máximo del gobierno (IG) en función de  $t$  es:

$$IG(t) = (Q^d)(t) = 2t(\alpha_1 - \alpha_2 - t)$$

13. Hallar posibles expresiones de cada uno de los tres polinomios cuyas gráficas recoge la figura 4.

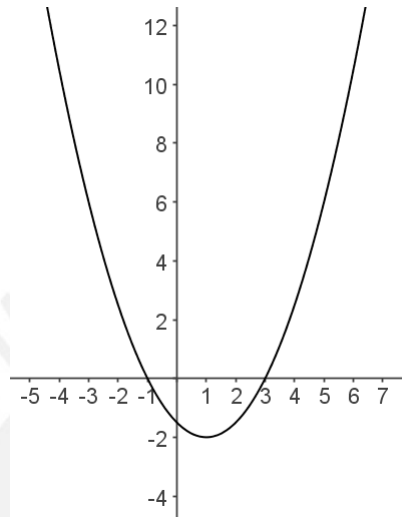


Figura B.7: Gráfica (a)

Problema 7, sección 3.3 - pág. 73.

**Solución:**

a) Sea

$$P(x) = A(x + 1)(x - 3)$$

Hallamos el valor de  $A$  con el punto  $(1, -2)$  en  $P(x)$

$$-2 = A(1 + 1)(1 - 3)$$

$$-2 = 2A(-2)$$

$$\frac{1}{2} = A$$

Entonces  $P(x) = \frac{1}{2}(x + 1)(x - 3)$  es la expresión de la gráfica (a).

14. Supongamos que  $y$  designa el total de carne procucida en Chicago durante 1948 (en millones de libras) y  $x$  el total del trabajo semanal (en miles de horas). Nichols calculó la relación

$$y = -2,05 + 1,06x - 0,04x^2$$

Determinar el valor de  $x$  que maximiza  $y$ , estudiando la variación del signo de  $y'$ .

Problema 1, sección 3.2-pág. 238.

**Solución:**

Completar cuadrados

$$\begin{aligned}
 y &= -0,04x^2 + 1,06x - 2,05 \\
 &= -0,04 \left[ x^2 - \frac{1,06}{0,04}x + \left( \frac{1,06}{0,08} \right)^2 - \left( \frac{1,06}{0,08} \right)^2 \right] \\
 &= -0,04(x - 13,25)^2 + 4,97
 \end{aligned}$$

Cuando  $x = 13,25$  maximiza  $y$ .Ahora hallemos el valor de  $x$  que maximiza  $y$  estudiando la variación del signo de  $y'$ .

Donde

 $y$ : total de carne producida. $x$ : total del trabajo semanal (en miles de horas)

De

$$y = -2,05 + 1,06x - 0,04x^2$$

Derivar

$$y' = 1,06 - 0,08x$$

La función  $y$  es creciente si

$$y' > 0$$

$$1,06 - 0,08x > 0$$

$$1,06 > 0,08x$$

$$x < 13,25$$

La función  $y$  es decreciente en  $x > 13,25$ . Por lo tanto, para  $x = 13,25$  maximiza  $y$ .

15. El coste de producción de  $x$  cientos de unidades diarias de cierto bien viene dado por:

$$C(x) = \frac{1}{3}x^2 + 35x + 100$$

Sabiendo que el precio de venta de cada unidad es de:  $p(x) = 83 - \frac{1}{2}x$ .

Calcular cuál es la producción diaria que hace que el beneficio sea máximo.

Problema 3, sección 9.2-pág. 238.

**Solución (i):** $B(x)$  : Beneficio

$R(x)$  : Ingreso

$C(x)$  : Coste de producción

$$B(x) = R(x) - C(x)$$

$$R(x) = (\text{cantidad demandada}) \cdot (\text{precio de cada unidad})$$

$$R(x) = x \left( 83 - \frac{1}{2}x \right)$$

$$R(x) = 83x - \frac{1}{2}x^2$$

Luego

$$\begin{aligned} B(x) &= 83x - \frac{1}{2}x^2 - \left( \frac{1}{3}x^2 + 35x + 100 \right) \\ &= -\frac{5}{6}x^2 + 48x - 100 \\ &= -\frac{5}{6} \left( x - \frac{144}{5} \right)^2 + \frac{2956}{5} \\ &= -\frac{5}{6} (x - 28,8)^2 + 591,2 \end{aligned}$$

Debido a que el beneficio es una función cuadrática que representa graficamente una parábola cóncava se obtiene el máximo absoluto cuando  $x = 28,8$  cientos de unidades.

**Solución (ii):**

$$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - C(x) \\ &= x \cdot P(x) - C(x) \\ &= x \left( 83 - \frac{1}{2}x \right) - \left( \frac{1}{3}x^2 + 35x + 100 \right) \\ &= -\frac{5}{6}x^2 + 48x - 100 \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} B'(x) &= -\frac{10}{6}x + 48 \\ B'(x) &= 0 \\ -\frac{10}{6}x + 48 &= 0 \\ x &= \frac{144}{5} \\ x &= 28,8 \end{aligned}$$

Debido a que el beneficio es una función cuadrática que representa graficamente una parábola cóncava se obtiene el máximo absoluto cuando  $x = 28,8$  cientos de unidades.

16. A veces se pueden hallar los máximos y mínimos de una función simplemente estudiando su expresión. Por ejemplo, consideremos  $f(x) = \sqrt{x-5} - 100$  definida para  $x \geq 5$ , como  $\sqrt{x-5}$  es  $\geq 0$  para todo  $x \geq 5$ , es  $f(x) \geq -100$  para todo  $x \geq 5$ . Como  $f(5) = -100$ , deducimos que  $x = 5$  es un mínimo. Usar razonamientos directos semejantes para hallar los máximos y mínimos de las siguientes funciones.

b)  $g(x) = 3 - (x - 2)^2$

Problema 5, sección 9.2-pág.238.

**Solución:**

b) Tenemos

$$\begin{aligned}(x-2)^2 &\geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ -(x-2)^2 &\leq 0 \\ 3 - (x-2)^2 &\leq 3 \\ g(x) &\leq 3\end{aligned}$$

Entonces, afirmamos que 3 es el máximo de  $g(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

17. Hallar el máximo y el mínimo de  $f(x) = 4x^2 - 40x + 80$ ,  $x \in [0, 8]$ . Dibujar la gráfica de  $f$  en  $[0, 8]$ .

Problema 1, sección 9.3-pág. 243.

**Solución (i):**

Identificamos los coeficientes  $a = 4$ ,  $b = -40$  y  $c = 80$ .

Al analizar el coeficiente de la variable cuadrática tenemos que  $4 > 0$ , entonces la función es convexa; es decir, la parábola se abre hacia arriba.

Luego hallamos el vértice  $V(h, k)$  donde  $h = \frac{-b}{2a} = 5$  y  $k = c - \frac{b^2}{4a} = -20$

Como tenemos el dominio de  $f$ , evaluamos en sus extremos y obtenemos:

$$f(0) = 80 \quad \text{y} \quad f(8) = 16$$

de aquí tenemos los puntos  $(0, 80)$  y  $(8, 16)$ .

**Solución (ii):**

Sea

$$f(x) = 4x^2 - 40x + 80$$

Completar cuadrados

$$\begin{aligned}f(x) &= 4(x^2 - 10x + 25 - 25) + 80 \\ &= 4(x - 5)^2 - 20\end{aligned}$$

Como el coeficiente de  $(x - 5)^2$  es 4 (positivo), se trata de una parábola que se abre hacia arriba. Entonces, el mínimo de  $f$  es -20 cuando  $x = 5$  y el máximo de  $f$  es 80 cuando  $x = 0$ .

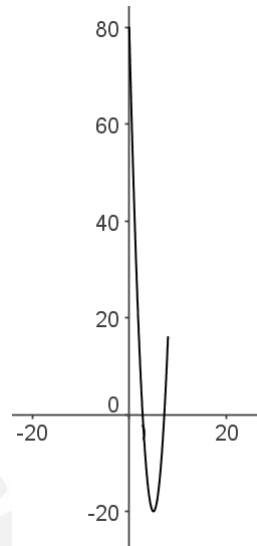


Figura B.8: Gráfica de  $y = 4x^2 - 40x + 80$ .

18. Hallar el máximo y el mínimo de cada función en el intervalo indicado:

b)  $f(x) = x^3 - 3x + 8$  en  $[-1, 2]$

e)  $f(x) = x^3 - 4500x^2 + 6,10^6x$  en  $[0, 3000]$

Problema 2, sección 9.3-pág. 243.

**Solución:**

b) Hallar la primera derivada de  $f(x)$  e igualar a cero

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 3 = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$3(x^2 - 1) = 0$$

$$3(x - 1)(x + 1) = 0$$

Los puntos estacionarios son:  $-1, 1, 2$

Luego evaluamos:

$$f(-1) = 10$$

$$f(1) = 6$$

$$f(2) = 10$$

Luego, podemos concluir que para  $x = 2$  y  $x = -1$  obtenemos el máximo absoluto de  $f$  que es 10 y para  $x = 1$  obtenemos el mínimo absoluto de  $f$  que es 6.

e) Hallar la primera derivada de  $f(x)$  e igualar a cero

$$f'(x) = 3x^2 - 9000x + 6,10^6$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 9000x + 6,10^6 = 0$$

$$3x^2 - 9000x + 6,10^6 = 0$$

$$3(x^2 - 3000x + 2,10^6) = 0$$

$$3(x - 2000)(x - 1000) = 0$$

Los puntos estacionarios son: 0, 1000, 2000, 3000

Luego evaluamos:

$$f(0) = 0$$

$$f(1000) = 25x10^8$$

$$f(2000) = 2x10^9$$

$$f(3000) = (3000)^2 - 4500(3000)^2 + 6x10^2(3000)$$

$$= 27x10^9 - 40,5x10^9 + 18x10^9$$

$$= 4,5x10^9$$

Podemos concluir que para  $f(3000) = 4,5x10^9$  se tiene un máximo absoluto y para  $f(0) = 0$  se tiene un mínimo absoluto.

19. Hallar el máximo y mínimo de las siguientes funciones en los intervalos indicados.

a)  $f(x) = x^2 + 2x + 1$  en  $[-2, 0]$

Problema 3, sección 9.3-pág. 243.

**Solución:**

a) Dada la expresión  $f(x) = x^2 + 2x + 1$ , completamos cuadrados y obtenemos

$$f(x) = (x + 1)^2$$

Luego identificamos el vértice usando la forma  $V(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a})$  a partir de la expresión dada o simplemente observando la forma obtenida al completar cuadrados, de donde resulta  $V = (-1, 0)$ .

A partir de la expresión dada, analizamos el coeficiente de la variable cuadrática

siendo (positivo). Por lo tanto, la función cuadrática es convexa; es decir, la parábola se abre hacia arriba obteniendo un mínimo.

Entonces al identificar el recorrido de la función hallamos el mínimo absoluto de  $f$  que es 0; esto es cuando  $x = -1$  y para  $x = -2$  y  $x = 0$  se obtiene el máximo absoluto de  $f$  que es 1.

20. Un fabricante desea diseñar una caja abierta cuadrada y una superficie total de  $300\text{cm}^2$  de cartón ¿Qué dimensiones tendrá la caja para que su volumen sea máximo?

Problema 6, sección 9.3-pág.243.

**Solución:**

Sea  $x$ : la longitud en cm de la base y  $z$ : la longitud en cm de la altura

La superficie total es  $300 = 4xz + x^2$ , entonces:

$$z = \frac{300 - x^2}{4x}$$

Luego tenemos que el volumen es  $V = x^2 \cdot z$

Ahora reemplazamos  $z$  en  $V$ :

$$\begin{aligned} V &= x^2 \left( \frac{300 - x^2}{4x} \right) \\ &= \frac{x}{4} (300 - x^2) \\ &= -\frac{x^3}{4} + \frac{300x}{4} \end{aligned}$$

Derivamos  $V$  y obtenemos:

$$V' = -\frac{3x^2}{4} + \frac{300}{4}$$

Hacemos  $V' = 0$  entonces

$$\begin{aligned} -3x^2 + 300 &= 0 \\ -3(x^2 - 100) &= 0 \\ x^2 &= 100 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Por el test de primera derivada para puntos óptimos locales, tenemos

$$\begin{aligned} f'(8) &= 27 > 0 \\ f'(11) &= -15,75 < 0 \end{aligned}$$

entonces  $x = 10$  es un máximo de  $f$ .

Finalmente, hallamos  $z$ :

$$z = \frac{300 - (10)^2}{4(10)} = 5$$

Las dimensiones para que el volumen de la caja sea máximo son  $x = 10$  y  $z = 5$ .

21. El coste del cerco de una ventana rectangular es de 40 por cada metro de altura y de 30 por cada metro de anchura. Si queremos que la ventana tenga una superficie de  $3 \text{ m}^2$ , ¿Cuáles son las dimensiones del marco más barato posible?

Problema 7, sección 9.3-pág.243.

**Solución:**

Sea

$x$ : el ancho del cerco de la ventana.

$y$ : la altura del cerco de la ventana.

$S$ : superficie

Donde

$$S = x \cdot y$$

$$3 = x \cdot y$$

$$y = \frac{3}{x}$$

Denotamos por  $f$  al cerco de la ventana

$$f = 2(x + y)$$

$$= 2x + 2 \frac{3}{x}$$

$$= 2x + \frac{6}{x}$$

Derivamos  $f$  y obtenemos:

$$f' = \frac{2x^2 - 6}{x^2}$$

Hacemos  $f' = 0$  entonces

$$2x^2 - 6 = 0$$

$$2(x^2 - 3) = 0$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \sqrt{3}$$

Por el test de primera derivada para puntos óptimos locales, tenemos

$$f'(1) = -4 < 0$$

$$f'(2) = 0,5 > 0$$

entonces  $x = \sqrt{3}$  es un mínimo de  $f$ .

Finalmente, hallamos  $y$ :

$$y = \frac{3}{x} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Las dimensiones del cerco más barato posible son  $x = \sqrt{3}$  y  $y = \sqrt{3}$ .

22. Hallar los puntos críticos de las funciones:

- a)  $f(x) = 2x^2 - 12x + 6$   
 b)  $f(x) = 9x - 3x^3$   
 c)  $f(x) = x^3 - 3x + 6$

Problema 1, sección 9.4-pág.250.

**Solución:**

- a) Dada la expresión, completamos cuadrados

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x^2 - 6x) + 6 \\ &= 2(x - 3)^2 - 12 \end{aligned}$$

Como el coeficiente de la variable cuadrática es 2, podemos decir que un punto crítico de esta función es su vértice  $V(3, -12)$ .

- b) De  $f(x) = 9x - 3x^3$

Aplicar la primera derivada e igualar a cero

$$f'(x) = 9 - 9x^2$$

Luego

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 9 - 9x^2 &= 0 \\ 9(1 - x^2) &= 0 \\ 1 - x^2 &= 0 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Los puntos críticos son  $-1, 1$

- c) De  $f(x) = x^3 - 3x + 6$  Aplicar la primera derivada e igualar a cero

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

Luego

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 - 3 &= 0 \\ 3(x^2 - 1) &= 0 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Los puntos críticos son  $-1, 1$

23. Consideremos la función  $f$  definida por  $f(x) = x^3 - 12x$  para todo  $x$ . Hallar los dos puntos estacionarios de  $f$  y clasificarlos usando los test de las derivadas primera y segunda.

Problema 2, sección 9.4-pág.250.

**Solución:**

Dado  $f(x) = x^3 - 12x$

Hallar la primera derivada e igualar a cero

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12 \\ 3x^2 - 12 &= 0 \\ 3(x^2 - 4) &= 0 \\ 3(x - 2)(x + 2) &= 0 \end{aligned}$$

Los puntos críticos son  $-2, 2$

Para el punto  $x = -2$

Aplicando el test de la primera derivada tenemos:

$$\begin{aligned} f'(-3) &= 15 > 0 \\ f'(-1) &= -9 < 0 \end{aligned}$$

entonces  $x = -2$  es un máximo local de  $f$  y  $f(-2) = 32$  en  $] -\infty, -2[$ .

Aplicando el test de la segunda derivada tenemos:

$$f''(x) = 6x$$

Luego

$$f''(-2) = 6(-2) < 0$$

Entonces existe máximo en  $x = -2$

Para el punto  $x = 2$

Aplicando el test de la primera derivada tenemos:

$$\begin{aligned} f'(1) &= -9 < 0 \\ f'(3) &= 15 > 0 \end{aligned}$$

entonces  $x = 2$  es un mínimo local de  $f$  y  $f(2) = -9$  en  $] -2, 2[$ .

Aplicando el test de la segunda derivada tenemos:

$$f''(x) = 6x$$

Luego

$$f''(2) = 6(2) > 0$$

Entonces existe mínimo en  $x = 2$ .

24. Hallar todos los puntos óptimos locales y los valores óptimos correspondientes, para las funciones dadas por las siguientes fórmulas:

b)  $f(x) = x^3 - 3x + 8$

f)  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$

Problema 3, sección 9.4-pág.250.

**Solución:**

b) Hallar la primera derivada de  $f(x)$  e igualar a cero

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 3 = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$3(x^2 - 1) = 0$$

$$3(x - 1)(x + 1) = 0$$

Los puntos estacionarios son:  $-1, 1$

Analicemos mediante el test de la primera derivada para puntos óptimos locales.

Para el punto  $x = -1$

$$f'(-2) = 9 > 0$$

$$f'(0) = -3 < 0$$

entonces  $x = -1$  es un máximo local de  $f$  y  $f(-1) = 10$  en  $[-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ .

Para el punto  $x = 1$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -2,25 < 0$$

$$f'(2) = 9 > 0$$

entonces  $x = 1$  es un mínimo local de  $f$  y  $f(1) = 6$  en  $[-1, 1]$ .

f) Hallar la primera derivada de  $f(x)$  e igualar a cero

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 6x = 0$$

$$3x^2 + 6x = 0$$

$$3x(x + 2) = 0$$

Los puntos estacionarios son:  $0, -2$ .

Analicemos mediante el test de la primera derivada para puntos óptimos locales.

Para el punto  $x = 0$

$$f'(-1) = -3 < 0$$

$$f'(1) = 9 > 0$$

entonces  $x = 1$  es un mínimo local de  $f$  y  $f(0) = -2$ .

Para el punto  $x = -2$

$$f'(-3) = 9 > 0$$

$$f'(-1) = -3 < 0$$

entonces  $x = -2$  es un máximo local de  $f$  y  $f(-2) = 2$ .

25. Determinar la concavidad / convexidad de  $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 8x - 3$

Problema 1, sección 9.5-pág.259.

**Solución:**

Como el coeficiente de la variable cuadrática es  $-\frac{1}{2}$ , podemos decir que la función es cóncava.

26. Supongamos que  $f(x) = 1 - x^2$

- a) Probar que  $D = f((1 - \lambda)a + \lambda b) - (1 - \lambda)f(a) - \lambda f(b)$  se puede escribir en la forma:

$$D = \lambda(1 - \lambda)(a^2 - 2ab + b^2) = \lambda(1 - \lambda)(a - b)^2$$

- b) Si  $\lambda \in (0, 1)$ , ¿qué signo tiene  $D$ ? ¿Es  $f$  cóncava, convexa, o ninguna de las dos?  
 c) ¿Es  $f$  estrictamente cóncava / convexa?  
 d) Comprobar el resultado de la parte (c) usando (4).

Problema 1, sección 9.6-pág.264.

**Solución:**

a) Sean

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)a + \lambda b) &= 1 - ((1-\lambda)a + \lambda b)^2 \\ &= 1 - (1-\lambda)^2 a^2 - 2\lambda(1-\lambda)ab + \lambda^2 b^2, \end{aligned}$$

$$f(a) = 1 - a^2 \quad \text{y} \quad f(b) = 1 - b^2$$

Entonces

$$\begin{aligned} D &= f((1-\lambda)a + \lambda b) - (1-\lambda)f(a) - \lambda f(b) \\ &= 1 - (1-\lambda)^2 a^2 - 2\lambda(1-\lambda)ab + \lambda^2 b^2 - (1-\lambda)(1-a^2) - \lambda(1-b^2) \\ &= \lambda(1-\lambda)(a-b)^2 \end{aligned}$$

b) Si  $0 < \lambda < 1 \Rightarrow 0 > -\lambda > -1$ , sumar (1):  $1 > 1 - \lambda > 0$

Luego  $D = \lambda(1-\lambda)(a-b)^2$ , por lo tanto  $D$  es positivo.

c) En  $f(x) = 1 - x^2$  el coeficiente de la variable cuadrática es -1 entonces  $f$  es cóncava.

d) La segunda derivada de  $f$  es -2 (negativa); por lo tanto  $f$  es cóncava.