

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA



**FORMULACIÓN LAGRANGIANA DE CAMPOS EN EL ÁLGEBRA
DEL ESPACIO FÍSICO: LEYES DE CONSERVACIÓN Y TEORÍA DE
DIRAC**

Tesis para obtener el título profesional de Licenciado en Física

AUTOR:

Sebastian Gustavo Salazar Lopez

ASESOR:

Hernan Alfredo Castillo Egoavil

Lima, Septiembre, 2025

Informe de Similitud

Yo, Hernan Castillo Egoávil,

docente de la Facultad de Ciencias e Ingeniería de la Pontificia

Universidad Católica del Perú, asesor(a) de la tesis/el trabajo de investigación titulado

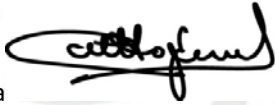
Formulación Lagrangiana de Campos en el Álgebra del Espacio Físico: Leyes de Conservación y Teoría de Dirac

Del autor Sebastián Salazar Salazar López

dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 8 %. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 01/09/2025.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha: PUCP-Campus San Miguel, 03 Septiembre 2025

Apellidos y nombres del asesor / de la asesora: <u>Castillo Egoávil, Hernán Alfredo</u>	
DNI:08668381	
ORCID: 0000-0003-1208-7353	
Firma	

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi asesor, el Dr. Hernán Castillo, por su apoyo constante y por ayudarme a reencontrar el entusiasmo por la física. A mis padres, por su apoyo incondicional a lo largo de toda mi carrera. A mi hermano, con quien he compartido mucho tiempo y momentos importantes. Y por último, a cada persona que fue parte de este camino.



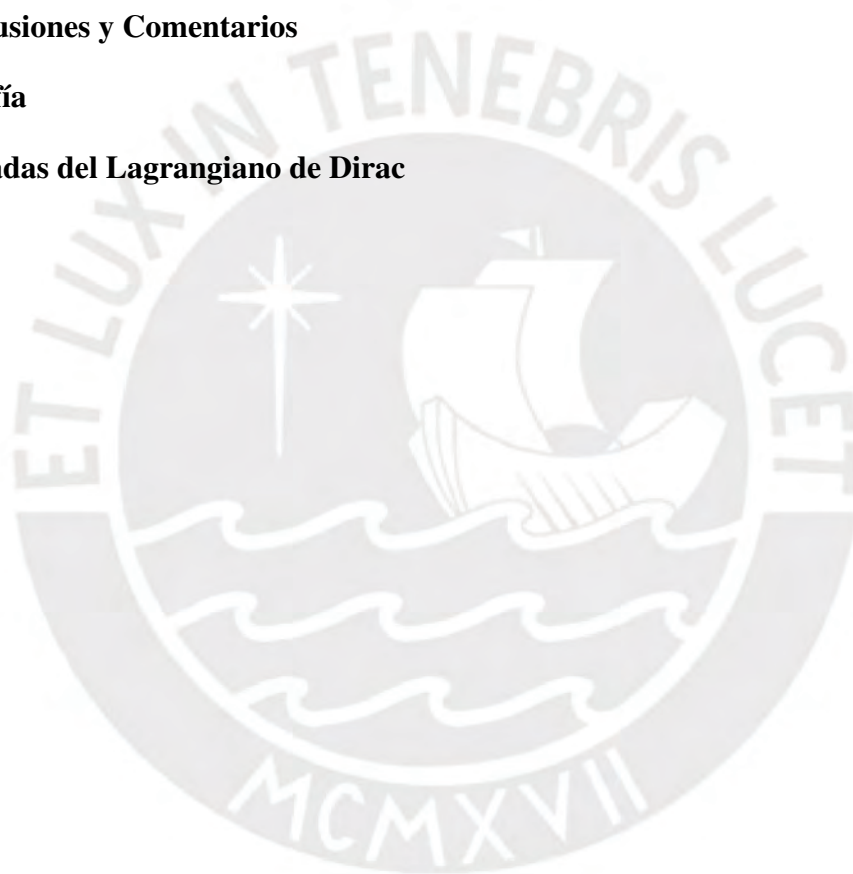
Resumen

La teoría de Dirac, tradicionalmente formulada dentro del marco de la Teoría Cuántica de Campos (QFT), no muestra directamente la estructura geométrica de los objetos matemáticos que emplea. Por otro lado, el enfoque basado en álgebras de Clifford facilita la descripción de los objetos físicos relevantes en un marco algebraico unificado que otorga mayor claridad conceptual. El objetivo principal de este trabajo es desarrollar una formulación lagrangiana para campos en el APS. La propuesta se justifica en la necesidad de establecer una formulación rigurosa de la teoría de Dirac en el APS, que permita derivar de manera sistemática las ecuaciones de movimiento y las leyes de conservación mediante el teorema de Noether. La metodología utilizada incluye la introducción de objetos algebraicos en el APS que modelan los elementos fundamentales de la formulación estándar, junto con la adaptación de técnicas empleadas en contextos no relativistas de la mecánica cuántica. El resultado es una formulación físicamente equivalente a la tradicional, pero que revela con mayor claridad la estructura geométrica de la teoría de Dirac. Este marco permite identificar de forma natural las simetrías del sistema y las cantidades conservadas asociadas. Además abre la posibilidad de extender el análisis a otros campos aún no explorados en el APS. La conclusión principal de este estudio es que el uso del APS proporciona una descripción más integral y geoméricamente fundamentada de la teoría de Dirac, así como de sus estructuras asociadas.

Índice general

Resumen	I
Índice general	II
Índice de cuadros	IV
I. Introducción	1
II. Preliminares Algebraicos	4
2.1. Álgebra del Espacio Físico (APS)	5
2.2. Relatividad Especial	8
2.2.1. Transformaciones de Lorentz	10
2.2.2. Estructura de $SL(2, \mathbb{C})$	13
2.3. Espinores en el APS	14
2.3.1. Observables	16
2.3.2. Descomposición Polar	17
2.3.3. Operadores	17
2.4. Derivada Multivectorial	19
III. Formulación Lagrangiana para campos en el APS	21
3.1. Simetrías	24
3.2. Invarianza Poincaré	26
3.2.1. Invarianza ante traslaciones espacio-temporales	27
3.2.2. Invarianza Lorentz	29
IV. Teoría de Dirac en el APS	34
4.1. Estructura y soluciones de la ecuación de Dirac en el APS	36
4.1.1. Invarianza Lorentz	36
4.1.2. Invarianza Gauge	37
4.1.3. Soluciones de Libres	38
4.1.4. Conjugaciones	42
4.1.5. Helicidad	43

4.2. Covariantes Bilineales	45
4.2.1. Escalar y pseudoescalar	46
4.2.2. Vector	46
4.2.3. Pseudovector	47
4.2.4. Bilineal tensorial	48
4.3. Leyes de Conservación	48
4.3.1. Conservación de energía y momento	48
4.3.2. Conservación del Momento Angular	50
4.3.3. Corriente de Dirac y Quiral	51
V. Conclusiones y Comentarios	54
Bibliografía	56
A. Derivadas del Lagrangiano de Dirac	59



Índice de cuadros

2.1.	Mapeo de operadores de Dirac al formalismo APS.	16
2.2.	Representación estándar de los operadores en la teoría de Dirac.	18
2.3.	Representación de los operadores en el APS.	18
3.1.	Forma explícita de $\delta_{\text{int}}\zeta_i$ para distintos campos.	30
3.2.	Forma explícita de $S^{\mu\nu}$ para distintos campos.	32
4.1.	Clasificación de las soluciones libres del espinor de Dirac en el APS según su tipo y fase β	42
4.2.	Helicidad para partículas y antipartículas.	45
4.3.	Covariantes bilineales en la teoría de Dirac y sus equivalentes en el APS.	46

Convenciones

En esta tesis utilizaremos las siguientes convenciones:

- Se adoptan unidades naturales: $c = \hbar = 1$.
- La unidad imaginaria $i' = \sqrt{-1}$.
- Se utilizan letras griegas (μ, ν, \dots) para índices espacio-temporales que van de 0 a 3.
- Se utilizan letras latinas (a, b, \dots) para índices espaciales que van de 1 a 3.
- $\hat{\gamma}^\mu$ denotará una matriz de Dirac en la formulación matricial, mientras que γ^μ representará un elemento del álgebra de Clifford.

Capítulo I

Introducción

Las álgebras de Clifford surgen como una generalización de los números complejos y los cuaterniones, juegan un papel central en la formulación geométrica de la física moderna. Gracias a su capacidad para representar de forma unificada rotaciones, reflexiones y productos escalares, constituyen una herramienta natural para describir tanto la estructura del espacio-tiempo como las operaciones físicas que ocurren en él.

El álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ ha sido aplicada de forma exitosa al estudio de la teoría de Dirac. Entre los trabajos más influyentes destacan los de Hestenes [1, 2], quien desarrolló una formulación geométrica de la teoría. Por su parte, Doran [3] introdujo un enfoque lagrangiano coherente con esta estructura. Una de las principales virtudes de este marco es que proporciona una interpretación geométrica clara de los objetos físicos y permite trabajar de forma independiente de cualquier representación matricial.

Se ha demostrado que no es estrictamente necesario recurrir a álgebras superiores para describir sistemas relativistas. Por ejemplo, Baylis, en [4], desarrolló la electrodinámica en $\mathcal{C}\ell_{3,0}$, introduciendo objetos como los paravectores, que representan naturalmente a los cuatrovectores. Esta álgebra, conocida como Álgebra del Espacio Físico (APS), ha sido utilizada también en trabajos como los de Jayme Vaz Jr. [5] y el propio Baylis [6, 7], donde también

se demuestra que es posible formular la dinámica de los espinores de Dirac dentro del APS, sin necesidad de acudir a $\mathcal{C}\ell_{1,3}$. En este enfoque, a cada espinor de Dirac $|\psi\rangle$ se le asocia un multivector $\Psi \in \mathcal{C}\ell_{3,0}$, el cual codifica toda su información física.

Una limitación común en estos trabajos es la ausencia de una formulación variacional: las ecuaciones de movimiento suelen obtenerse por analogía con la formulación matricial o mediante mapeos predefinidos, en lugar de derivarse a partir de un lagrangiano. En este contexto, Jayme Vaz Jr. en [5] estudia la posibilidad de derivar ecuaciones de continuidad directamente a partir de la ecuación de Dirac. Para ello, propone un *ansatz* para la corriente de la forma:

$$J = \Psi M \Psi^\dagger, \quad M \in \{1, e_3\}. \quad (1.1)$$

A partir de esta expresión, es posible derivar ecuaciones de continuidad tanto para la corriente de Dirac como para la corriente de espín. Pese a ello, esta formulación sigue siendo parcial, ya que no establece una conexión explícita entre las simetrías del sistema y las cantidades conservadas, como lo haría un tratamiento variacional completo.

Esta tesis propone desarrollar una formulación lagrangiana completa para campos en el APS, que permita establecer una base rigurosa para la teoría de Dirac. A través de esta formulación, se busca derivar las ecuaciones de movimiento mediante principios variacionales y obtener corrientes conservadas directamente a partir del teorema de Noether, estableciendo así una conexión explícita entre simetrías e invariantes. Una de las fortalezas de este enfoque es que puede extenderse a otros tipos de campos aún poco explorados dentro del APS.

El contenido de la tesis se organiza de la siguiente manera. En el capítulo 2 se presentan los preliminares algebraicos necesarios para el desarrollo del trabajo, incluyendo una introducción al Álgebra del Espacio Físico (APS) y la representación de los espinores de Dirac como multivectores en este marco. El capítulo 3 está dedicado a la construcción de una formulación lagrangiana para campos en el APS. Se derivan las ecuaciones de Euler-Lagrange y se analizan

las simetrías del sistema. En el capítulo 4 se aplica el marco desarrollado al estudio de la teoría de Dirac, con especial énfasis en las soluciones libres y en las leyes de conservación. Finalmente, el capítulo 5 presenta las conclusiones generales y posibles extensiones del trabajo.



Capítulo II

Preliminares Algebraicos

Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre \mathbb{R} , provisto de una forma bilineal simétrica $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ con signatura (p, q) . El álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ es el álgebra unitaria y asociativa generada por los elementos de V , sujeta a la relación [8]:

$$\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 2g(\gamma_i, \gamma_j), \quad (2.1)$$

donde $\{\gamma_i\}$ es una base ortonormal de V . Un elemento arbitrario de $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ se denomina **multivector**. Podemos construir una base canónica del álgebra formada por todos los productos ordenados de los vectores $\{\gamma_i\}$:

$$\{1, \gamma_i, \gamma_i \gamma_j, \gamma_i \gamma_j \gamma_k, \dots, \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n\}, \quad \text{con } i < j < k < \dots \quad (2.2)$$

Esta base tiene 2^n elementos. Cada uno de estos productos tiene un número definido de vectores γ_i involucrados. A este número se le llama **grado** del elemento. Por ejemplo, el escalar 1 tiene grado 0, los vectores γ_i tienen grado 1, los productos $\gamma_i \gamma_j$ (con $i < j$) tienen grado 2 y así sucesivamente. De este modo, $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ se puede descomponer como una suma directa de subespacios

según el grado:

$$\mathcal{C}l_{p,q} = \bigoplus_{r=0}^n \mathcal{C}l_{p,q}^{(r)}, \quad (2.3)$$

donde $\mathcal{C}l_{p,q}^{(r)}$ es el subespacio de todos los elementos de grado r . En particular, esta descomposición permite reagrupar los subespacios según la paridad del grado, dividiendo el álgebra en una parte par y una impar:

$$\mathcal{C}l_{p,q} = \mathcal{C}l_{p,q}^+ \oplus \mathcal{C}l_{p,q}^-, \quad (2.4)$$

donde $\mathcal{C}l_{p,q}^+ = \bigoplus_{r \text{ par}} \mathcal{C}l_{p,q}^{(r)}$ y $\mathcal{C}l_{p,q}^- = \bigoplus_{r \text{ impar}} \mathcal{C}l_{p,q}^{(r)}$.

2.1. Álgebra del Espacio Físico (APS)

En lo que sigue, nos centraremos exclusivamente en el álgebra $\mathcal{C}l_{3,0}$, conocida como el **Álgebra del Espacio Físico (APS)**. Esta corresponde a un espacio tridimensional con métrica euclidiana, provisto de una base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ que satisface:

$$e_i^2 = 1, \quad e_i e_j = -e_j e_i \quad \text{para } i \neq j. \quad (2.5)$$

El elemento $i = e_1 e_2 e_3$ recibe el nombre de **pseudoescalar**. Tiene la propiedad de que $i^2 = -1$ y que conmuta con todos los elementos de $\mathcal{C}l_{3,0}$. Así, la base canónica del APS se puede escribir como:

$$\{1, e_1, e_2, e_3, i e_1, i e_2, i e_3, i\}. \quad (2.6)$$

Denominaremos *escalar* a la unidad 1; *vectores* a los elementos e_j ; *bivectores* a los $i e_j$; y *trivector* o *pseudoescalar* al elemento i . De esta forma, cualquier elemento $M \in \mathcal{C}l_{3,0}$ puede escribirse como:

$$M = \underbrace{a^0}_{\text{escalar}} + \underbrace{a^j e_j}_{\text{vector}} + \underbrace{b^j i e_j}_{\text{bivector}} + \underbrace{w i}_{\text{pseudoescalar}}, \quad (2.7)$$

donde a^0, a^j, b^j y w son escalares. La estructura de $\mathcal{C}\ell_{3,0}$ permite definir transformaciones internas, invertibles y biunívocas entre multivectores [4]. Estas transformaciones, denominadas *involuciones*, permiten descomponer el APS en dos subespacios complementarios mediante proyecciones asociadas [9]. En este contexto, se identifican tres involuciones fundamentales, que describiremos a continuación.

■ **Conjugación daga o reversión M^\dagger :**

$$M^\dagger = a^0 + a^j e_j - b^j i e_j - w i, \quad (2.8)$$

la cual invierte el orden de los vectores en todos los productos. En particular, cambia el signo del trivector: $i \rightarrow -i$. Satisface la propiedad:

$$(PQ)^\dagger = Q^\dagger P^\dagger. \quad (2.9)$$

Definimos las proyecciones real $\langle \cdot \rangle_{\Re}$ e imaginaria $\langle \cdot \rangle_{\Im}$ de M como:

$$\begin{aligned} \langle M \rangle_{\Re} &= \frac{1}{2} (M + M^\dagger), \\ \langle M \rangle_{\Im} &= \frac{1}{2} (M - M^\dagger), \end{aligned} \quad (2.10)$$

de modo que $M = \langle M \rangle_{\Re} + \langle M \rangle_{\Im}$. La parte real está generada por $\text{span}\{1, e_j\}$. A todo multivector M que cumpla

$$M = \langle M \rangle_{\Re} = a^0 + a^j e_j, \quad (2.11)$$

lo denominamos **paravector**. Por su parte, la parte imaginaria corresponde al subespacio $\text{span}\{i e_j, i\}$.

■ **Inversión espacial o conjugación de Clifford \bar{M} :**

$$\bar{M} = a^0 - a^j e_j - b^j i e_j + w i, \quad (2.12)$$

invierte el signo de todos los vectores base: $e_j \rightarrow -e_j$, y cumple:

$$\overline{PQ} = \bar{Q}\bar{P}. \quad (2.13)$$

Definimos las proyecciones tipo *escalar* $\langle \cdot \rangle_S$ y tipo *vectorial* $\langle \cdot \rangle_V$ de M como:

$$\begin{aligned} \langle M \rangle_S &= \frac{1}{2} (M + \bar{M}), \\ \langle M \rangle_V &= \frac{1}{2} (M - \bar{M}), \end{aligned} \quad (2.14)$$

por lo tanto $M = \langle M \rangle_S + \langle M \rangle_V$. La proyección tipo *escalar* está formada por $\text{span}\{1, i\}$, cuyos elementos conmutan con todos los del álgebra. Por otro lado, la proyección tipo *vectorial* está generada por $\text{span}\{e_j, i e_j\}$. Denominamos **biparavector** a todo multivector M que satisfaga:

$$M = \langle M \rangle_V = a^j e_j + b^j i e_j. \quad (2.15)$$

■ **Conjugación de grado $\widehat{M} = (\bar{M})^\dagger$:**

$$\widehat{M} = a^0 - a^j e_j + b^j i e_j - w i, \quad (2.16)$$

invierte el signo de todos los términos de grado impar, y satisface:

$$\widehat{PQ} = \widehat{P}\widehat{Q}. \quad (2.17)$$

Definimos las proyecciones par $\langle \cdot \rangle_+$ e impar $\langle \cdot \rangle_-$ de M como:

$$\begin{aligned}\langle M \rangle_+ &= \frac{1}{2}(M + \widehat{M}) \in \mathcal{C}\ell_{3,0}^+, \\ \langle M \rangle_- &= \frac{1}{2}(M - \widehat{M}) \in \mathcal{C}\ell_{3,0}^-, \end{aligned} \quad (2.18)$$

con lo cual se tiene $M = \langle M \rangle_+ + \langle M \rangle_-$.

Estas proyecciones nos permiten expresar M de la siguiente forma:

$$M = \underbrace{\langle M \rangle_{\mathfrak{R}S}}_{\text{escalar}} + \underbrace{\langle M \rangle_{\mathfrak{R}V}}_{\text{vector}} + \underbrace{\langle M \rangle_{\mathfrak{I}V}}_{\text{bivector}} + \underbrace{\langle M \rangle_{\mathfrak{I}S}}_{\text{pseudoescalar}}. \quad (2.19)$$

Denotamos a la proyección $\langle \cdot \rangle$ como:

$$\langle M \rangle \equiv \langle M \rangle_{\mathfrak{R}S}, \quad (2.20)$$

que extrae la parte escalar real del multivector. Esta proyección es cíclica: $\langle PQ \rangle = \langle QP \rangle$ e invariante bajo involuciones:

$$\langle PQ \rangle = \langle P^\dagger Q^\dagger \rangle = \langle \bar{P} \bar{Q} \rangle = \langle \widehat{P} \widehat{Q} \rangle. \quad (2.21)$$

2.2. Relatividad Especial

A primera vista, podría parecer que la relatividad especial no es posible en el álgebra $\mathcal{C}\ell_{3,0}$, ya que aparentemente se pierde una componente vectorial temporal al trabajar con un espacio euclidiano tridimensional. Sin embargo, mediante el uso de los *paravectores* es posible codificar toda la información de un 4-vector dentro del APS [4, 10]. Para ello, identificamos que la base de los paravectores está dada por $\{1, e_1, e_2, e_3\}$. Por convención, escribimos el escalar unidad

como $e_0 = 1$, de modo que podemos denotar la base como $\{e_\mu\}$, con $\mu = 0, 1, 2, 3$. La base recíproca e^μ se define mediante la relación:

$$e^\mu \equiv \bar{e}_\mu. \quad (2.22)$$

Una propiedad fundamental de las bases $\{e_\mu\}$ y $\{e^\mu\}$ es que satisfacen:

$$\langle e_\mu \bar{e}_\nu \rangle = \eta_{\mu\nu}, \quad \langle e^\mu \bar{e}^\nu \rangle = \eta^{\mu\nu}, \quad (2.23)$$

donde $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ es la métrica de Minkowski. Con estas convenciones, un paravector arbitrario \mathcal{A} puede expresarse como:

$$\mathcal{A} = A^0 + \vec{A} = A^\mu e_\mu, \quad (2.24)$$

donde A^0 es la componente escalar y \vec{A} representa el vector espacial tridimensional. Alternativamente, en la base recíproca:

$$\mathcal{A} = A_\mu e^\mu, \quad A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu. \quad (2.25)$$

Definimos el producto interno entre dos paravectores \mathcal{A} y \mathcal{B} como:

$$\mathcal{A} \bullet \mathcal{B} \equiv \langle \mathcal{A} \bar{\mathcal{B}} \rangle = \langle \mathcal{B} \bar{\mathcal{A}} \rangle. \quad (2.26)$$

Al expresar este producto en componentes, se obtiene:

$$\mathcal{A} \bullet \mathcal{B} = A^\mu B^\nu \langle e_\mu \bar{e}_\nu \rangle = A^\mu B^\nu \eta_{\mu\nu}, \quad (2.27)$$

lo cual reproduce la forma tradicional del producto escalar relativista. A continuación, presentamos algunos ejemplos importantes de paravectores en el contexto físico.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{X} &= t + \vec{x} && \text{(vector posición)} \\
 \mathcal{P} &= E + \vec{p} && \text{(cuadrimomento)} \\
 \mathcal{A} &= \phi + \vec{A} && \text{(potencial electromagnético)} \\
 \mathcal{J} &= \rho + \vec{j} && \text{(corriente)}
 \end{aligned}
 \tag{2.28}$$

Finalmente, introducimos el operador gradiente paravectorial o operador de Dirac en el APS, definido como:

$$\mathcal{D} = e^\mu \partial_\mu = \partial_t - \vec{\nabla}, \tag{2.29}$$

junto con su conjugado espacial:

$$\bar{\mathcal{D}} = \bar{e}^\mu \partial_\mu = \partial_t + \vec{\nabla}, \tag{2.30}$$

donde $\vec{\nabla} = e_1 \partial_1 + e_2 \partial_2 + e_3 \partial_3$ es el operador gradiente espacial en $\mathcal{C}\ell_{3,0}$. Ambos operadores pueden actuar por la izquierda o la derecha sobre un multivector M . Por ejemplo, para $\bar{\mathcal{D}}$ se tiene:

$$\bar{\mathcal{D}}[M] = \bar{e}^\mu \partial_\mu M, \quad [M] \bar{\mathcal{D}} = \partial_\mu M \bar{e}^\mu. \tag{2.31}$$

Estas definiciones se extienden de forma análoga al operador \mathcal{D} .

2.2.1. Transformaciones de Lorentz

Las transformaciones de Lorentz permiten relacionar observaciones realizadas desde distintos marcos inerciales. En el formalismo APS, dichas transformaciones están generadas por biparavectores. Estos elementos modelan planos orientados en el espacio-tiempo [4]. En lo que

sigue, consideraremos transformaciones *activas*, en las cuales el estado del sistema se modifica mientras el observador permanece en el mismo marco de referencia. Así, un paravector \mathcal{A} se transformará bilateralmente mediante:

$$A \rightarrow \mathcal{A}' = \Lambda \mathcal{A} \Lambda^\dagger, \quad (2.32)$$

donde Λ es un biparavector unimodular [4]:

$$\Lambda \bar{\Lambda} = \bar{\Lambda} \Lambda = \Lambda^\dagger \hat{\Lambda} = \hat{\Lambda} \Lambda^\dagger = 1. \quad (2.33)$$

Esta condición garantiza que el producto interno definido en (2.26) permanezca invariante bajo cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}' \bullet \mathcal{B}' = \langle \Lambda \mathcal{A} \Lambda^\dagger \hat{\Lambda} \bar{\mathcal{B}} \bar{\Lambda} \rangle = \mathcal{A} \bullet \mathcal{B}. \quad (2.34)$$

Identificamos que los biparavectores están generados por $\text{span} \{ \langle e^\mu \bar{e}^\nu \rangle_V \}$. Esto permite expresar a Λ como la exponencial de los generadores $\langle e^\mu \bar{e}^\nu \rangle_V$:

$$\Lambda = \exp \left(-\frac{\alpha}{2} \langle e^\mu \bar{e}^\nu \rangle_V \right), \quad (2.35)$$

donde α es un escalar que parametriza la transformación. De esta manera, las transformaciones de Lorentz pueden clasificarse en:

- **Boosts:** Un boost B está generado por biparavectores *timelike* ($B = B^\dagger$):

$$B = \exp \left(\frac{\kappa}{2} \langle e^0 \bar{e}^j \rangle_V \right), \quad (2.36)$$

Lo que, usando $\langle e^0 \bar{e}^j \rangle_V = e_j$, se tiene:

$$B = \exp\left(\frac{\kappa}{2} e_j\right) = \cosh\left(\frac{\kappa}{2}\right) + e_j \sinh\left(\frac{\kappa}{2}\right), \quad (2.37)$$

donde e_j indica la dirección del boost. Por ejemplo, si aplicamos un boost en la dirección e_3 a las bases e_0 y e_3 , obtenemos:

$$\begin{aligned} e'_0 &= B e_0 B^\dagger = \cosh \kappa e_0 + \sinh \kappa e_3, \\ e'_3 &= B e_3 B^\dagger = \sinh \kappa e_0 + \cosh \kappa e_3. \end{aligned} \quad (2.38)$$

- **Rotaciones:** Una rotación R , está generada por biparavectores *spacelike* ($R = \widehat{R}$):

$$R = \exp\left(\frac{\theta}{2} \langle e^a \bar{e}^b \rangle_V\right). \quad (2.39)$$

Utilizando la relación $\langle e^a \bar{e}^b \rangle_V = -\epsilon^{abc} i e_c$, la rotación puede escribirse como:

$$R = \exp\left(-\frac{\theta}{2} \epsilon^{abc} i e_c\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \epsilon^{abc} i e_c \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (2.40)$$

donde e_c representa el eje de rotación. Aplicando una rotación en el eje e_3 a e_1 y e_2 , se transforman en:

$$\begin{aligned} e'_1 &= R e_1 R^\dagger = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2, \\ e'_2 &= R e_2 R^\dagger = -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2. \end{aligned} \quad (2.41)$$

De forma general, cualquier rotor de Lorentz puede factorizarse como la composición de un boost seguido de una rotación, es decir, $\Lambda = BR$. Un caso particularmente útil es el rotor

$$\Lambda_p = e^{-ie_3\phi/2} e^{-ie_2\theta/2} e^{e_3\kappa/2}, \quad (2.42)$$

el cual permite transformar la energía en reposo $E_0 = m$ al sistema de referencia de una partícula con momento arbitrario:

$$\mathcal{P} = E + \vec{p} = m \Lambda_p \Lambda_p^\dagger. \quad (2.43)$$

Aquí, la energía y el momento están dados por:

$$\begin{aligned} E &= m \cosh \kappa, \\ \vec{p} &= m \sinh \kappa (\sin \theta \cos \phi e_1 + \sin \theta \sin \phi e_2 + \cos \theta e_3), \end{aligned} \quad (2.44)$$

de donde se obtiene:

$$\cosh \kappa = \frac{E}{m}, \quad \sinh \kappa = \frac{|\vec{p}|}{m}. \quad (2.45)$$

2.2.2. Estructura de $SL(2, \mathbb{C})$

Las transformaciones de Lorentz introducidas en esta sección forman un grupo de Lie isomorfo a $SL(2, \mathbb{C})$. Esta estructura se manifiesta explícitamente a través de las propiedades algebraicas de los generadores $\langle e^\mu \bar{e}^\nu \rangle_V$, los cuales satisfacen las siguientes relaciones de conmutación [4]:

$$\frac{1}{2} \llbracket \langle e^\alpha \bar{e}^\beta \rangle_V, \langle e^\mu \bar{e}^\nu \rangle_V \rrbracket = \eta^{\beta\mu} \langle e^\alpha \bar{e}^\nu \rangle_V + \eta^{\alpha\nu} \langle e^\beta \bar{e}^\mu \rangle_V - \eta^{\alpha\mu} \langle e^\beta \bar{e}^\nu \rangle_V - \eta^{\beta\nu} \langle e^\alpha \bar{e}^\mu \rangle_V, \quad (2.46)$$

donde $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket$ denota el conmutador de multivectores, definido por:

$$\llbracket A, B \rrbracket := AB - BA \quad (2.47)$$

Si definimos ahora K^a y J^a como:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\langle e^0\bar{e}^a\rangle_V &= K^a, \\ \frac{1}{2}\langle e^a\bar{e}^b\rangle_V &= -i\epsilon^{ab}{}_c J^c,\end{aligned}\tag{2.48}$$

podemos reescribir el álgebra de conmutación de la forma:

$$\begin{aligned}[[K^a, K^b]] &= i\epsilon^{ab}{}_c J^c, \\ [[K^a, J^b]] &= i\epsilon^{ab}{}_c K^c, \\ [[J^a, J^b]] &= i\epsilon^{ab}{}_c J^c.\end{aligned}\tag{2.49}$$

Estas relaciones corresponden con las del álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ [11].

2.3. Espinores en el APS

El objetivo de este trabajo es describir los espinores de Dirac $|\psi\rangle$ y su dinámica dentro del APS. Para ello, tomamos como punto de partida el formalismo del *Spacetime Algebra* (STA) [12, 13] construido sobre $\mathcal{C}\ell_{1,3}$, donde los espinores de Dirac se representan por multivectores pertenecientes al subálgebra par:

$$|\psi\rangle \leftrightarrow \Psi_{1,3} \in \mathcal{C}\ell_{1,3}^+.\tag{2.50}$$

Además, se introducen las siguientes equivalencias para el adjunto de Dirac $\langle\bar{\psi}|$ y el adjunto hermítico $\langle\psi|$:

$$\begin{aligned}\langle\bar{\psi}| &\leftrightarrow \tilde{\Psi}_{1,3} \\ \langle\psi| &\leftrightarrow \Psi_{1,3}^\dagger = \gamma_0 \tilde{\Psi}_{1,3} \gamma_0\end{aligned}\tag{2.51}$$

Aquí, $\tilde{\Psi}$ denota la operación de reversión en $\mathcal{Cl}_{1,3}$. Con el fin de reformular estos objetos dentro del APS, aprovechamos el siguiente isomorfismo entre álgebras [8]:

$$\pi : \mathcal{Cl}_{1,3}^+ \simeq \mathcal{Cl}_{3,0}. \quad (2.52)$$

A través de este mapeo, el espinor $\Psi_{1,3}$ se asocia con un elemento Ψ en $\mathcal{Cl}_{3,0}$:

$$\Psi = \pi(\Psi_{1,3}) \in \mathcal{Cl}_{3,0}. \quad (2.53)$$

El multivector Ψ depende de ocho parámetros reales, lo que significa que se requieren todos los elementos base del álgebra para codificar completamente la información del estado cuántico. Además, todas las operaciones definidas sobre $\Psi_{1,3}$ en (2.51) se traducen a Ψ empleando las operaciones establecidas en el APS, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi} | &\leftrightarrow \bar{\Psi} = \pi(\tilde{\Psi}_{1,3}), \\ \langle \psi | &\leftrightarrow \Psi^\dagger = \pi(\Psi_{1,3}^\dagger). \end{aligned} \quad (2.54)$$

En adelante se utilizará el término *espinor* para referirse al multivector Ψ , aunque estrictamente hablando en $\mathcal{Cl}_{3,0}$ los espinores pertenecen únicamente al subálgebra par. La correspondencia explícita entre el espinor de Dirac $|\psi\rangle$ y el espinor Ψ es:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a^0 + i'a^3 \\ -a^2 + i'a^1 \\ -b^3 + i'b^0 \\ -b^1 - i'b^2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \Psi = a^0 + a^k i e_k + i(b^0 + b^k i e_k). \quad (2.55)$$

A su vez, la acción de los operadores matriciales $\hat{\gamma}^\mu$ y la unidad imaginaria i' se mapean a :

Forma Estándar	Equivalencia en APS
$\hat{\gamma}^\mu \psi\rangle$	$e^\mu \hat{\Psi}$
$\hat{\not{D}} \psi\rangle$	$\mathcal{D} \hat{\Psi}$
$\frac{1}{2} [\hat{\gamma}^\mu, \hat{\gamma}^\nu] \psi\rangle$	$\langle e^\mu \bar{e}^\nu \rangle_V \Psi$
$\hat{\gamma}^5 \psi\rangle$	Ψe_3
$i' \psi\rangle$	$\Psi i e_3$

Tabla 2.1: Mapeo de operadores de Dirac al formalismo APS.

El operador quiral está dado por $\hat{\gamma}^5 = i' \hat{\gamma}^0 \hat{\gamma}^1 \hat{\gamma}^2 \hat{\gamma}^3$. Las correspondencias mostradas en la tabla 2.1 son válidas tanto para superíndices, $\hat{\gamma}^\mu |\psi\rangle \leftrightarrow e^\mu \hat{\Psi}$, como para los subíndices, $\hat{\gamma}_\mu |\psi\rangle \leftrightarrow e_\mu \hat{\Psi}$. Es importante resaltar que estos mapeos son independientes de la representación matricial elegida para las matrices de Dirac [12].

2.3.1. Observables

Para analizar los observables físicos en la teoría de Dirac, comenzamos considerando el producto interno entre espinores de Dirac en el APS. A partir de las correspondencias ya establecidas en la ecuación (2.54) y siguiendo directamente de la definición en el formalismo del STA [12], los productos internos adquieren la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle &\leftrightarrow \langle \Psi_1^\dagger \Psi_2 \rangle - \langle \Psi_1^\dagger \Psi_2 i e_3 \rangle i e_3, \\
\langle \bar{\psi}_1 | \psi_2 \rangle &\leftrightarrow \langle \bar{\Psi}_1 \Psi_2 \rangle - \langle \bar{\Psi}_1 \Psi_2 i e_3 \rangle i e_3.
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Estas expresiones tienen una estructura similar a la de los números complejos, de la forma:

$$\vartheta = a + b i e_3, \quad \text{con } (i e_3)^2 = -1, \tag{2.57}$$

donde ie_3 cumple el rol de la unidad imaginaria. Sin embargo, al considerar valores esperados de operadores, únicamente contribuye la parte escalar de la expresión, por lo que los términos en la componente ie_3 resultan irrelevantes.

2.3.2. Descomposición Polar

Para entender mejor la estructura del espinor Ψ , resulta conveniente analizar la forma polar, conocida como *Lorentz-invariant decomposition*. Esta se basa en que el producto $\Psi\bar{\Psi}$ contiene únicamente términos escalares lo que nos permite escribir:

$$\Psi\bar{\Psi} = \rho e^{i\beta}, \quad (2.58)$$

donde ρ es la densidad propia y β el ángulo de Yvon–Takabayashi, el cual encapsula la información sobre la dinámica interna del espinor [14]. A partir de esta expresión, Ψ puede escribirse como:

$$\Psi = \sqrt{\rho} e^{i\beta/2} R, \quad R\bar{R} = \bar{R}R = 1, \quad (2.59)$$

donde $\sqrt{\rho}$ actúa como un factor de dilatación, $e^{i\beta/2}$ es una transformación de dualidad y R representa una transformación de Lorentz propia [15].

2.3.3. Operadores

Presentamos a continuación los principales operadores cuánticos y su equivalencia en el APS, obtenidos directamente a partir de los mapeos previamente introducidos. Estos operadores serán fundamentales en las secciones siguientes, donde se derivarán sus leyes de conservación asociadas.

Operador	Forma Estándar
Hamiltoniano $\hat{H} \psi\rangle$	$(-i'\hat{\gamma}^0\hat{\gamma}^k\partial_k + m\hat{\gamma}^0 + q\hat{\gamma}^0\mathcal{A}) \psi\rangle$
Momentum $\hat{p}^\mu \psi\rangle$	$i'\partial^\mu \psi\rangle$
Momento Angular $\hat{L}_c \psi\rangle$	$i'\epsilon_{abc}x^a\partial^b \psi\rangle$
Operador espín $\hat{\Sigma}^k \psi\rangle$	$\frac{1}{2}\hat{\gamma}^0\hat{\gamma}^k\hat{\gamma}^5 \psi\rangle$
Operador Helicidad $\hat{h} \psi\rangle$	$\frac{\hat{\Sigma}\cdot\vec{p}}{ \vec{p} } \psi\rangle$

Tabla 2.2: Representación estándar de los operadores en la teoría de Dirac.

Operador Multivectorial	Forma en el APS
Hamiltoniano $H[\Psi]$	$-\nabla\Psi ie_3 + m\hat{\Psi} + q\bar{\mathcal{A}}\Psi$
Momentum $\hat{p}^\mu [\Psi]$	$\partial^\mu\Psi ie_3$
Momento Angular $\hat{L}_c [\Psi]$	$\epsilon_{abc}x^a\hat{p}^b [\Psi]$
Operador espín $\hat{\Sigma}^k [\Psi]$	$\frac{1}{2}e_k\Psi e_3$
Operador Helicidad $\hat{h} [\Psi]$	$\frac{\vec{p}}{ \vec{p} }\Psi e_3$

Tabla 2.3: Representación de los operadores en el APS.

Cabe destacar que, en los casos del operador espín y del operador helicidad, sus representaciones en el APS adoptan una estructura análoga a la que se encuentra en el tratamiento de espinores no relativistas en sistemas de dos estados [16].

2.4. Derivada Multivectorial

En esta sección presentamos las definiciones y propiedades fundamentales de la derivada multivectorial, siguiendo a [17] y [18]. Esta herramienta resulta esencial para el formalismo variacional que se desarrollará en los capítulos siguientes. Para una función multivectorial $F = F(M)$, donde $M \in \mathcal{C}\ell_{3,0}$ y $F : \mathcal{C}\ell_{3,0} \rightarrow \mathcal{C}\ell_{3,0}$, la **diferencial multivectorial** o **A-derivada** se define como

$$A * \partial_M F(M) \equiv \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{F(M + \tau A) - F(M)}{\tau}, \quad (2.60)$$

donde $*$ denota el **producto escalar**, definido para multivectores A y B como

$$A * B \equiv \langle AB \rangle. \quad (2.61)$$

Este producto satisface las siguientes propiedades:

$$A * B = B * A, \quad (2.62)$$

$$A * B = A^\dagger * B^\dagger = \bar{A} * \bar{B} = \hat{A} * \hat{B}, \quad (2.63)$$

$$A * (\alpha B + \beta C) = \alpha(A * B) + \beta(A * C). \quad (2.64)$$

A partir de estas definiciones, los resultados más importantes que utilizaremos para la derivación multivectorial de funciones escalares son:

$$\partial_M \langle BM \rangle = B \quad (2.65)$$

$$\partial_M \langle B\bar{M} \rangle = \bar{B}, \quad (2.66)$$

$$\partial_M \langle M^2 \rangle = 2M, \quad (2.67)$$

$$\partial_M \langle M\bar{M} \rangle = 2\bar{M}, \quad (2.68)$$

donde se asume que B es un multivector que no depende de M . Por último, si $F = F(M(\alpha))$, donde α es un parámetro escalar, entonces la regla de la cadena para la derivación respecto de α está dada por:

$$\frac{dF}{d\alpha} = \frac{\partial M}{\partial \alpha} * \partial_M F(M(\alpha)). \quad (2.69)$$



Capítulo III

Formulación Lagrangiana para campos en el APS

Tras haber establecido en el capítulo anterior la representación de espinores de Dirac en el APS, pasamos ahora a analizar su dinámica dentro de este marco. Para ello, desarrollaremos un enfoque lagrangiano en el que dicha dinámica surgirá de manera natural a partir de principios variacionales. Exploraremos las leyes de conservación que se derivan del teorema de Noether, al identificar las simetrías del sistema.

Aunque en un contexto diferente, en [3] se propone una formulación lagrangiana para campos multivectoriales en $\mathcal{C}\ell_{1,3}$. En dicha formulación, el lagrangiano depende de los campos $\zeta_{1,3}$ y sus derivadas $\nabla_{1,3}\zeta_{1,3}$. En contraste, una formulación dentro del APS presentará una estructura comparable, aunque con diferencias fundamentales, dado que se cuenta con dos operadores diferenciales previamente definidos: \mathcal{D} y $\bar{\mathcal{D}}$. Tomando esto en consideración, como primer paso debemos analizar la dependencia de nuestro lagrangiano en el APS.

Para ello, examinamos los mapeos que conectan las expresiones en el APS con sus contra-

partes en el formalismo estándar. De la tabla 2.1, observamos la siguiente correspondencia:

$$\hat{\gamma}^\mu \partial_\mu |\psi\rangle \leftrightarrow \mathcal{D}\hat{\Psi}, \quad (3.1)$$

lo que indica que el operador \mathcal{D} actúa sobre $\hat{\Psi}$, y no directamente sobre Ψ . A primera vista, esto podría sugerir que $\hat{\Psi}$ debe ser tratada como un campo independiente. Sin embargo, esto no es necesario. De hecho, podemos utilizar la identidad:

$$\mathcal{D}\hat{\Psi} = \bar{\mathcal{D}}\Psi, \quad (3.2)$$

la cual muestra que la acción de \mathcal{D} sobre $\hat{\Psi}$ se traduce naturalmente en la acción de $\bar{\mathcal{D}}$ sobre Ψ . De este modo, se establece que el lagrangiano \mathcal{L} en el APS depende de los campos multivectoriales ζ_i así como de sus derivadas $\bar{\mathcal{D}}\zeta_i$.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\zeta_i, \bar{\mathcal{D}}\zeta_i). \quad (3.3)$$

Definimos el funcional de acción \mathcal{I} como la integral de \mathcal{L} sobre todo el espacio-tiempo:

$$\mathcal{I} = \int |d^4x| \mathcal{L}(\zeta_i, \bar{\mathcal{D}}\zeta_i). \quad (3.4)$$

Para extremar \mathcal{I} , consideramos pequeñas perturbaciones de los campos ζ_i alrededor de su configuración original. A primer orden, estas se expresan como:

$$\zeta'_i \simeq \zeta_i + \alpha \delta\zeta_i, \quad (3.5)$$

donde α es un parámetro infinitesimal, y $\delta\zeta_i$ representa las variaciones de los campos. Impone-mos la condición de frontera $\delta\zeta_i = 0$ en los bordes del espacio-tiempo. Al sustituir ζ'_i en \mathcal{I} , la

acción variada en función del parámetro α queda expresada como:

$$\mathcal{I}(\alpha) = \int |d^4x| \mathcal{L}(\zeta_i + \alpha\delta\zeta_i, \bar{\mathcal{D}}\zeta_i + \alpha\delta\bar{\mathcal{D}}\zeta_i). \quad (3.6)$$

Expandiendo $\mathcal{I}(\alpha)$ y conservando solo los términos hasta primer orden, la variación de la acción está dada por:

$$\delta\mathcal{I} = \left. \frac{d\mathcal{I}(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int |d^4x| \delta\mathcal{L}, \quad (3.7)$$

donde la variación del lagrangiano se define como:

$$\delta\mathcal{L} = \left. \frac{d\mathcal{L}}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}. \quad (3.8)$$

Para expandir $\delta\mathcal{L}$, aplicamos la regla de la cadena dada en (2.69), lo que nos permite escribir:

$$\delta\mathcal{L} = \left. \partial_\alpha \zeta'_i * \partial_{\zeta'_i} \mathcal{L} \right|_{\alpha=0} + \left. \partial_\alpha \bar{\mathcal{D}}\zeta'_i * \partial_{\bar{\mathcal{D}}\zeta'_i} \mathcal{L} \right|_{\alpha=0}. \quad (3.9)$$

Usando $\delta\zeta_i = \left. \partial_\alpha \zeta'_i \right|_{\alpha=0}$ y $\delta\bar{\mathcal{D}}\zeta_i = \left. \partial_\alpha \bar{\mathcal{D}}\zeta'_i \right|_{\alpha=0}$, obtenemos:

$$\delta\mathcal{L} = \delta\zeta_i * \partial_{\zeta_i} \mathcal{L} + \delta\bar{\mathcal{D}}\zeta_i * \partial_{\bar{\mathcal{D}}\zeta_i} \mathcal{L}. \quad (3.10)$$

El segundo término en (3.10) puede reescribirse como:

$$\delta\bar{\mathcal{D}}\zeta_i * \partial_{\bar{\mathcal{D}}\zeta_i} \mathcal{L} = \mathcal{D} \bullet \langle \delta\zeta_i \partial_{\mathcal{D}\zeta_i} \mathcal{L} \rangle_{\mathfrak{R}} - \delta\zeta_i * [\partial_{\bar{\mathcal{D}}\zeta_i} \mathcal{L}] \overleftarrow{\mathcal{D}}. \quad (3.11)$$

Sustituyendo (3.11) en (3.10), encontramos que $\delta\mathcal{L}$ se convierte en:

$$\delta\mathcal{L} = \delta\zeta_i * \left(\partial_{\zeta_i} \mathcal{L} - [\partial_{\bar{\mathcal{D}}\zeta_i} \mathcal{L}] \overleftarrow{\mathcal{D}} \right) + \mathcal{D} \bullet \langle \delta\zeta_i \partial_{\mathcal{D}\zeta_i} \mathcal{L} \rangle_{\mathfrak{R}}. \quad (3.12)$$

Así, la variación de la acción $\delta\mathcal{I}$ toma la siguiente forma:

$$\delta\mathcal{I} = \int |d^4x| \delta\zeta_i * \left(\partial_{\zeta_i} \mathcal{L} - [\partial_{\overline{\mathcal{D}}\zeta_i} \mathcal{L}] \overline{\mathcal{D}} \right) + \int |d^4x| \mathcal{D} \bullet \langle \delta\zeta_i \partial_{\mathcal{D}\zeta_i} \mathcal{L} \rangle_{\mathfrak{R}}. \quad (3.13)$$

El segundo término corresponde a una contribución de frontera que se anula. Para asegurar que la acción \mathcal{I} sea estacionaria, imponemos $\delta\mathcal{I} = 0$. Llegamos a:

$$0 = \int |d^4x| \delta\zeta_i * \left[\partial_{\zeta_i} \mathcal{L} - [\partial_{\overline{\mathcal{D}}\zeta_i} \mathcal{L}] \overline{\mathcal{D}} \right]. \quad (3.14)$$

Finalmente, dado que $\delta\zeta_i$ es un multivector arbitrario, obtenemos la ecuación de Euler-Lagrange para campos multivectoriales en el APS:

$$\partial_{\zeta_i} \mathcal{L} - [\partial_{\overline{\mathcal{D}}\zeta_i} \mathcal{L}] \overline{\mathcal{D}} = 0. \quad (3.15)$$

3.1. Simetrías

El teorema de Noether establece una conexión fundamental entre las transformaciones de simetría continuas y las leyes de conservación. Si la lagrangiana permanece invariante (o se transforma de una manera específica) bajo una de estas transformaciones, entonces existe una corriente conservada asociada. Tal como se derivó anteriormente en (3.12), la variación de la lagrangiana $\delta\mathcal{L}$ ante una variación arbitraria $\delta\zeta_i$, está dada por:

$$\delta\mathcal{L} = \delta\zeta_i * \left(\partial_{\zeta_i} \mathcal{L} - [\partial_{\overline{\mathcal{D}}\zeta_i} \mathcal{L}] \overline{\mathcal{D}} \right) + \mathcal{D} \bullet \langle \delta\zeta_i \partial_{\mathcal{D}\zeta_i} \mathcal{L} \rangle_{\mathfrak{R}} \quad (3.16)$$

Dado que requerimos que los campos multivectoriales ζ_i satisfagan sus respectivas ecuaciones de Euler-Lagrange (3.15), el primer término se anula y nos queda únicamente el término de

superficie:

$$\delta \mathcal{L}_{E-L} = \mathcal{D} \bullet \langle \delta \zeta_i \partial_{\mathcal{D}\zeta_i} \mathcal{L} \rangle_{\mathfrak{R}} \quad (3.17)$$

Examinemos ahora la variación de la lagrangiana bajo una transformación de simetría, la cual denotamos por $\delta_s \mathcal{L}$. En el caso más simple, es natural esperar que $\delta_s \mathcal{L} = 0$. Sin embargo, de manera más general, la lagrangiana puede transformarse como un término de divergencia [19].

Por lo tanto, escribimos:

$$\delta_s \mathcal{L} = \mathcal{D} \bullet \mathcal{K}, \quad (3.18)$$

donde \mathcal{K} es algún campo paravectorial. Ambas variaciones no son necesariamente iguales, pero coinciden cuando las variaciones de los campos $\delta \zeta_i$ en (3.17) son inducidas por la simetría, es decir, cuando $\delta \zeta_i \rightarrow \delta_s \zeta_i$. En ese caso, se tiene que $\delta \mathcal{L}_{E-L} = \delta_s \mathcal{L}$, lo cual conduce a:

$$\mathcal{D} \bullet \langle \delta \zeta_i \partial_{\mathcal{D}\zeta_i} \mathcal{L} \rangle_{\mathfrak{R}} = \mathcal{D} \bullet \mathcal{K}. \quad (3.19)$$

Reagrupando términos, obtenemos:

$$\mathcal{D} \bullet [\langle \delta_s \zeta_i \partial_{\mathcal{D}\zeta_i} \mathcal{L} \rangle_{\mathfrak{R}} - \mathcal{K}] = 0. \quad (3.20)$$

A partir de esta expresión, definimos la corriente conservada \mathcal{J} como:

$$\mathcal{J} = \langle \delta_s \zeta_i \partial_{\mathcal{D}\zeta_i} \mathcal{L} \rangle_{\mathfrak{R}} - \mathcal{K}. \quad (3.21)$$

De este modo, la ecuación (3.20) adopta la forma de una ecuación de continuidad para \mathcal{J} :

$$\mathcal{D} \bullet \mathcal{J} = 0. \quad (3.22)$$

Al descomponer \mathcal{J} en su parte escalar y vectorial, $\mathcal{J} = \langle \mathcal{J} \rangle + \langle \mathcal{J} \rangle_1$, la ecuación (3.22) se reescribe como:

$$\partial_t \langle \mathcal{J} \rangle + \vec{\nabla} \cdot \langle \mathcal{J} \rangle_1 = 0. \quad (3.23)$$

Integrando sobre un todo el espacio, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V |d^3x| \langle \mathcal{J} \rangle \right) = - \int_V |d^3x| \vec{\nabla} \cdot \langle \mathcal{J} \rangle_1. \quad (3.24)$$

Definimos la cantidad:

$$Q = \int_V |d^3x| \langle \mathcal{J} \rangle, \quad (3.25)$$

con lo cual se llega a:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = - \int_V |d^3x| \vec{\nabla} \cdot \langle \mathcal{J} \rangle_1. \quad (3.26)$$

Si se asume que $\langle \mathcal{J} \rangle_1$ decrece suficientemente rápido en el infinito, el término de superficie asociado se anula y, por tanto:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = 0, \quad (3.27)$$

lo que implica que Q es una carga conservada localmente.

3.2. Invarianza Poincaré

El grupo de Poincaré describe las simetrías del espacio-tiempo de Minkowski, que incluye traslaciones espacio-temporales y transformaciones de Lorentz. En esta sección, aplicaremos el formalismo desarrollado para analizar cómo estas simetrías se manifiestan en los campos multivectoriales, así como las corrientes conservadas que se derivan de ellas.

3.2.1. Invarianza ante traslaciones espacio-temporales

Consideremos una traslación infinitesimal espacio-temporal del paravector posición \mathcal{X} :

$$\mathcal{X}' = \mathcal{X} + \alpha e_\nu, \quad x'^\nu = x^\nu + \alpha. \quad (3.28)$$

Bajo esta transformación, la lagrangiana se transforma como $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(\mathcal{X}')$. A primer orden en α :

$$\mathcal{L}' \simeq \mathcal{L} + \alpha \partial_\nu \mathcal{L} \Rightarrow \delta_s \mathcal{L} = \partial_\nu \mathcal{L}. \quad (3.29)$$

$\delta_s \mathcal{L}$ puede reescribirse como una divergencia total:

$$\delta_s \mathcal{L} = \mathcal{D} \bullet (e_\nu \mathcal{L}). \quad (3.30)$$

Por tanto, el paravector \mathcal{K}_ν asociado a esta simetría toma la forma:

$$\mathcal{K}_\nu = e_\nu \mathcal{L}. \quad (3.31)$$

Asimismo, los campos se transforman como $\zeta'_i = \zeta_i(\mathcal{X}')$, por lo que la variación inducida a primer orden es:

$$\zeta'_i \simeq \zeta_i + \alpha \partial_\nu \zeta_i \Rightarrow \delta_s \zeta_i = \partial_\nu \zeta_i. \quad (3.32)$$

Sustituyendo (3.32) y (3.31) en la expresión general (3.21), se obtiene un conjunto de cuatro paravectores, que identificamos como las corrientes de energía-momento.

$$\mathcal{T}_\nu = \langle \partial_\nu \zeta_i \partial_{\bar{D}\zeta_i} \mathcal{L} \rangle_{\mathfrak{R}} - e_\nu \mathcal{L}. \quad (3.33)$$

Alternativamente, al elevar el índice se tiene:

$$\mathcal{T}^\nu = \langle \partial^\nu \zeta_i \partial_{\bar{\mathcal{D}}\zeta_i} \mathcal{L} \rangle_{\mathfrak{R}} - e^\nu \mathcal{L}. \quad (3.34)$$

Ambas expresiones satisfacen la ecuación de conservación:

$$\mathcal{D} \bullet \mathcal{T}^\nu = \mathcal{D} \bullet \mathcal{T}_\nu = 0. \quad (3.35)$$

Los componentes del tensor energía-momento estándar $T^{\mu\nu}$ se obtienen al proyectar \mathcal{T}^ν sobre la base e^μ :

$$T^{\mu\nu} = e^\mu \bullet \mathcal{T}^\nu \quad (3.36)$$

Al expresar el operador de Dirac como $\mathcal{D} = e^\mu \partial_\mu$, se recupera la forma estándar de la ley de conservación:

$$\mathcal{D} \bullet \mathcal{T}^\nu = \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (3.37)$$

Al igual que en las formulaciones estándar, es fundamental imponer la simetría de los componentes de las corrientes energía-momento bajo el intercambio de índices:

$$e^\mu \bullet \mathcal{T}^\nu = e^\nu \bullet \mathcal{T}^\mu. \quad (3.38)$$

Para garantizar esta simetría, introducimos un paravector adicional \mathcal{W}^ν , cuya divergencia es nula:

$$\mathcal{D} \bullet \mathcal{W}^\nu = 0. \quad (3.39)$$

Este término juega un papel crucial al eliminar las partes antisimétricas de \mathcal{T}^ν , asegurando que la expresión final sea simétrica y físicamente consistente. Redefinimos entonces las corrientes

energía-momento como:

$$\Theta^\nu = \mathcal{T}^\nu + \mathcal{W}^\nu, \quad (3.40)$$

las cuales siguen satisfaciendo una ecuación de continuidad:

$$\mathcal{D} \bullet \Theta^\nu = 0 \Rightarrow \partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0 \quad (3.41)$$

3.2.2. Invarianza Lorentz

Consideremos ahora una transformación de \mathcal{X} bajo el rotor $\Lambda = \exp\left(\frac{\alpha}{2}\langle e^\mu \bar{e}^\nu \rangle_V\right)$:

$$\mathcal{X}' = \Lambda \mathcal{X} \Lambda^\dagger = e^{\frac{\alpha}{2}\langle e^\mu \bar{e}^\nu \rangle_V} \mathcal{X} e^{\frac{\alpha}{2}\langle e^\mu \bar{e}^\nu \rangle_V^\dagger}. \quad (3.42)$$

A primer orden en α , la variación de \mathcal{X} resulta ser:

$$\delta \mathcal{X} = \langle \langle e^\mu \bar{e}^\nu \rangle_V \mathcal{X} \rangle_{\mathfrak{R}} = e^\mu x^\nu - e^\nu x^\mu. \quad (3.43)$$

Y en componentes se obtiene:

$$\delta x^\lambda = x^\nu \eta^{\lambda\mu} - x^\mu \eta^{\lambda\nu}. \quad (3.44)$$

En consecuencia, la lagrangiana varía como:

$$\mathcal{L}' \simeq \mathcal{L} + \alpha \delta x^\nu \partial_\nu \mathcal{L} \Rightarrow \delta_s \mathcal{L} = \delta x^\nu \partial_\nu \mathcal{L} \quad (3.45)$$

De manera análoga a la sección anterior, podemos reexpresar $\delta_s \mathcal{L}$ como:

$$\delta_s \mathcal{L} = \delta x^\nu (\mathcal{D} \bullet (e_\nu \mathcal{L})), \quad (3.46)$$

la cual, aplicando la regla del producto, se puede reescribir como:

$$\delta_s \mathcal{L} = \mathcal{D} \bullet (\delta \mathcal{X} \mathcal{L}) - (\mathcal{D} \bullet \delta \mathcal{X}) \mathcal{L}. \quad (3.47)$$

A partir de (3.43), se tiene que $\mathcal{D} \bullet \delta \mathcal{X} = 0$, por lo que la variación se reduce a una divergencia total:

$$\delta_s \mathcal{L} = \mathcal{D} \bullet (\delta \mathcal{X} \mathcal{L}). \quad (3.48)$$

Identificamos entonces el paravector \mathcal{K} correspondiente:

$$\mathcal{K} = \delta \mathcal{X} \mathcal{L}. \quad (3.49)$$

Respecto a la variación de los campos $\delta_s \zeta_i$, a diferencia de la sección anterior, ahora existirán dos contribuciones: una inducida por el cambio de coordenadas, $\delta x^\lambda \partial_\lambda$, y otra de carácter intrínseco, $\delta_{\text{int}} \zeta_i$, que surge de las propiedades de transformación del propio campo. Por lo tanto, podemos escribir la variación de $\delta_s \zeta_i$ como:

$$\delta_s \zeta_i = \delta x^\lambda \partial_\lambda \zeta_i + \delta_{\text{int}} \zeta_i. \quad (3.50)$$

Explícitamente, los resultados para $\delta_{\text{int}} \zeta_i$ se presentan en la tabla 3.2.2, donde al considerar transformaciones activas, los campos se transforman mediante el inverso del rotor Λ , es decir, $\bar{\Lambda}$.

Tipo de campo	Ley de transformación	$\delta_{\text{int}} \zeta_i$
Escalar	$\zeta_i(\mathcal{X}')$	0
Espinor	$\bar{\Lambda} \zeta_i(\mathcal{X}')$	$-\frac{1}{2} \langle e^\mu \bar{e}^\nu \rangle_V \zeta_i$
Paravector	$\bar{\Lambda} \zeta_i(\mathcal{X}') \hat{\Lambda}$	$e^\nu \zeta_i^\mu - e^\mu \zeta_i^\nu$

Tabla 3.1: Forma explícita de $\delta_{\text{int}} \zeta_i$ para distintos campos.

Sustituyendo las variaciones obtenidas en la ecuación (3.21), se genera un conjunto de 12 corrientes paravectoriales $\mathcal{J}^{\mu\nu}$, una para cada par (μ, ν) . Sin embargo, al comprobar que se cumple la antisimetría en los índices ($\mathcal{J}^{\mu\nu} = -\mathcal{J}^{\nu\mu}$), este conjunto se reduce a solo 6 corrientes independientes. Es importante destacar que, si bien la corriente $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ satisface la ecuación de conservación $\mathcal{D} \bullet \mathcal{J}^{\mu\nu} = 0$, también lo hace su opuesta, $-\mathcal{J}^{\mu\nu}$. Con el fin de evitar inconsistencias en aplicaciones posteriores, realizamos desde ahora un cambio de signo y trabajamos con la corriente $-\mathcal{J}^{\mu\nu}$. Así, obtenemos:

$$\mathcal{J}^{\mu\nu} = - \left\langle \left((x^\nu \eta^{\lambda\mu} - x^\mu \eta^{\lambda\nu}) \partial_\lambda \zeta_i + (\delta_{\text{int}} \zeta_i)^{\mu\nu} \right) \partial_{\bar{\mathcal{D}} \zeta_i} \mathcal{L} \right\rangle_{\mathfrak{R}} + (e^\mu x^\nu - e^\nu x^\mu) \mathcal{L}. \quad (3.51)$$

Al desarrollar $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ y reagrupar los términos, podemos expresarla de una más sugerente:

$$\mathcal{J}^{\mu\nu} = x^\mu \underbrace{\left(\left\langle \partial^\nu \zeta_i \partial_{\bar{\mathcal{D}} \zeta_i} \mathcal{L} \right\rangle_{\mathfrak{R}} - e^\nu \mathcal{L} \right)}_{\mathcal{T}^\nu} - x^\nu \underbrace{\left(\left\langle \partial^\mu \zeta_i \partial_{\bar{\mathcal{D}} \zeta_i} \mathcal{L} \right\rangle_{\mathfrak{R}} - e^\mu \mathcal{L} \right)}_{\mathcal{T}^\mu} - \left\langle (\delta_{\text{int}} \zeta_i)^{\mu\nu} \partial_{\bar{\mathcal{D}} \zeta_i} \mathcal{L} \right\rangle_{\mathfrak{R}} \quad (3.52)$$

En esta expresión se reconocen las corrientes de energía-momento, definidas en (3.34), lo cual permite reescribir $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ como:

$$\mathcal{J}^{\mu\nu} = x^\mu \mathcal{T}^\nu - x^\nu \mathcal{T}^\mu - \left\langle (\delta_{\text{int}} \zeta_i)^{\mu\nu} \partial_{\bar{\mathcal{D}} \zeta_i} \mathcal{L} \right\rangle_{\mathfrak{R}}. \quad (3.53)$$

En esta forma, $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ se expresa como la suma de dos corrientes:

$$\mathcal{J}^{\mu\nu} = \mathcal{M}^{\mu\nu} + \mathcal{S}^{\mu\nu}. \quad (3.54)$$

Donde:

$$\mathcal{M}^{\mu\nu} = x^\mu \mathcal{T}^\nu - x^\nu \mathcal{T}^\mu, \quad (3.55)$$

y

$$\mathcal{S}^{\mu\nu} = - \langle (\delta_{\text{int}} \zeta_i)^{\mu\nu} \partial_{\bar{\mathcal{D}}\zeta_i} \mathcal{L} \rangle_{\mathfrak{R}}. \quad (3.56)$$

Esta descomposición permite distinguir de forma estructurada entre la contribución orbital $\mathcal{M}^{\mu\nu}$, asociada a las transformaciones de coordenadas, y la contribución intrínseca $\mathcal{S}^{\mu\nu}$, asociada al espín del campo. Con base en las variaciones intrínsecas $\delta_{\text{int}} \zeta_i$ halladas, es posible calcular $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ para cada caso.

Tipo de campo	Corriente $\mathcal{S}^{\mu\nu}$
Escalar	0
Espinor	$\frac{1}{2} \langle \langle e^\mu \bar{e}^\nu \rangle_V \zeta_i \partial_{\bar{\mathcal{D}}\zeta_i} \mathcal{L} \rangle_{\mathfrak{R}}$
Paravector	$\langle (\zeta_i^\nu e^\mu - \zeta_i^\mu e^\nu) \partial_{\bar{\mathcal{D}}\zeta_i} \mathcal{L} \rangle_{\mathfrak{R}}$

Tabla 3.2: Forma explícita de $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ para distintos campos.

A partir de la conservación de $\mathcal{J}^{\mu\nu}$, se deduce que la divergencia de $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ satisface:

$$\mathcal{D} \bullet \mathcal{S}^{\mu\nu} = e^\nu \bullet \mathcal{T}^\mu - e^\mu \bullet \mathcal{T}^\nu. \quad (3.57)$$

Este resultado muestra que la existencia de la corriente $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ está directamente vinculada a la asimetría de los componentes de la corriente de energía-momento \mathcal{T}^μ . A partir de ello, podemos definir una corriente orbital simetrizada basada en las corrientes simétricas de energía-momento Θ^μ :

$$\mathcal{M}'^{\mu\nu} = x^\mu \Theta^\nu - x^\nu \Theta^\mu, \quad (3.58)$$

la cual también es conservada:

$$\mathcal{D} \bullet \mathcal{M}'^{\mu\nu} = 0. \quad (3.59)$$

Finalmente, existen 6 cargas conservadas independientes $\langle \mathcal{J}^{\mu\nu} \rangle$. En particular, $\langle \mathcal{J}^{0i} \rangle$ está relacionada con la generalización relativista del centro de masa, mientras que $\langle \mathcal{J}^{ij} \rangle$ está asociada al

momento angular total [20]. Estas últimas permiten definir el vector de momento angular total \vec{j} como:

$$\vec{j} = \int_V |d^3x| \frac{1}{2} \epsilon_{ij}^k \langle \mathcal{J}^{ij} \rangle e_k = \vec{\ell} + \vec{s}, \quad (3.60)$$

donde $\vec{\ell}$ es el vector de momento angular orbital:

$$\vec{\ell} = \int_V |d^3x| \frac{1}{2} \epsilon_{ij}^k \langle \mathcal{M}^{ij} \rangle e_k, \quad (3.61)$$

y \vec{s} es el vector de espín:

$$\vec{s} = \int_V |d^3x| \frac{1}{2} \epsilon_{ij}^k \langle \mathcal{S}^{ij} \rangle e_k. \quad (3.62)$$

De esta manera, observamos que la existencia de la corriente de espín \mathcal{S} emerge de forma natural a partir de la simetría bajo transformaciones de Lorentz, lo que permite definir un vector de espín de manera general dentro del formalismo APS.

Capítulo IV

Teoría de Dirac en el APS

En este capítulo aplicaremos el marco lagrangiano desarrollado en los capítulos anteriores al caso específico de la teoría de Dirac, explorando tanto sus soluciones libres como sus propiedades más relevantes. Asimismo, se estudiarán los covariantes bilineales, a partir de los cuales se definirán objetos clave que evidencian la interpretación geométrica del formalismo desarrollado. Finalmente, se derivarán las leyes de conservación correspondientes mediante el análisis de las simetrías del sistema.

A partir del lagrangiano de Dirac convencional [21], obtenemos su forma equivalente \mathcal{L}_{dirac} en el APS:

$$\mathcal{L}_{dirac} = \langle \mathcal{D}\hat{\Psi}ie_3\bar{\Psi} \rangle - \langle m\Psi\bar{\Psi} \rangle - \langle q\mathcal{A}\hat{\Psi}\bar{\Psi} \rangle, \quad (4.1)$$

donde \mathcal{A} representa el potencial electromagnético de fondo. Para derivar la ecuación de Dirac, notamos que $\bar{\Psi}$ no se trata como un campo independiente, por lo que las ecuaciones de Euler–Lagrange toman la forma:

$$\partial_{\Psi}\mathcal{L}_{dirac} - [\partial_{\bar{\mathcal{D}}\Psi}\mathcal{L}_{dirac}]\overleftarrow{\mathcal{D}} = 0. \quad (4.2)$$

Las derivadas requeridas se encuentran calculadas en el Apéndice (véanse las Ecs. (1.7) y (1.9)).

Al sustituir estos resultados en la ecuación (4.2), se obtiene:

$$-2m\bar{\Psi} - 2q\Psi^\dagger\bar{\mathcal{A}} + \overline{\mathcal{D}\hat{\Psi}ie_3} - [ie_3\Psi^\dagger]\overleftarrow{\mathcal{D}} = 0. \quad (4.3)$$

Al aplicar la operación daga \dagger y factorizando términos, llegamos a:

$$2\left(-m\bar{\Psi} - q\Psi^\dagger\bar{\mathcal{A}} - [ie_3\Psi^\dagger]\overleftarrow{\mathcal{D}}\right)^\dagger = 0 \quad (4.4)$$

Finalmente, recuperamos la ecuación de Dirac en el APS como se muestra en [6, 5, 9]:

$$\overleftarrow{\mathcal{D}}\Psi ie_3 = m\hat{\Psi} + q\bar{\mathcal{A}}\Psi, \quad (4.5)$$

lo que confirma la consistencia del formalismo lagrangiano desarrollado. Esta ecuación puede reescribirse en una forma análoga a la ecuación de Schrödinger:

$$\partial_t\Psi ie_3 = H[\Psi], \quad (4.6)$$

donde el operador Hamiltoniano $H[\Psi]$ ya ha sido introducido previamente y está dado por:

$$H[\Psi] = -\nabla\Psi ie_3 + m\hat{\Psi} + q\bar{\mathcal{A}}\Psi. \quad (4.7)$$

4.1. Estructura y soluciones de la ecuación de Dirac en el APS

4.1.1. Invarianza Lorentz

Consideremos una transformación de Lorentz Λ aplicada sobre $\bar{\mathcal{D}}$ y $\bar{\mathcal{A}}$ en (4.5), de modo que:

$$\bar{\mathcal{D}} = \hat{\Lambda} \bar{\mathcal{D}}' \bar{\Lambda}, \quad \bar{\mathcal{A}} = \hat{\Lambda} \bar{\mathcal{A}}' \bar{\Lambda}. \quad (4.8)$$

Con ello, la ecuación se reescribe como:

$$\hat{\Lambda} \bar{\mathcal{D}}' \bar{\Lambda} \Psi i e_3 = m \hat{\Psi} + q \hat{\Lambda} \bar{\mathcal{A}}' \bar{\Lambda} \Psi, \quad (4.9)$$

Usando que $\Lambda^\dagger \hat{\Lambda} = 1$, se obtiene:

$$\bar{\mathcal{D}}' \bar{\Lambda} \Psi i e_3 = m \Lambda^\dagger \hat{\Psi} + q \bar{\mathcal{A}}' \bar{\Lambda} \Psi, \quad (4.10)$$

Para que la ecuación preserve su invarianza, el espinor debe transformarse unilateralmente:

$$\Psi' = \bar{\Lambda} \Psi. \quad (4.11)$$

De este modo, la ecuación de Dirac en el APS resulta invariante Lorentz:

$$\bar{\mathcal{D}}' \Psi' i e_3 = m \hat{\Psi}' + q \bar{\mathcal{A}}' \Psi' \quad (4.12)$$

El vector unitario e_3 permanece invariante, ya que representa el eje de espín en el sistema de reposo de la partícula [6]. Hestenes en [22] aclara que e_3 no está intrínsecamente ligado a un sistema de referencia particular. Podemos inducir la rotación de e_3 si consideramos la siguiente

transformación del espinor Ψ por la derecha:

$$\Psi \rightarrow \Psi R \quad (4.13)$$

donde R es una rotación ($\widehat{R} = R$). Bajo esta transformación, la ecuación de Dirac toma la forma:

$$\bar{D}\Psi i R e_3 = m \widehat{\Psi} R + q \bar{A} \Psi R \quad (4.14)$$

Multiplicando por la derecha toda la ecuación por R^\dagger , se obtiene:

$$\bar{D}\Psi i R e_3 R^\dagger = m \widehat{\Psi} R R^\dagger + q \bar{A} \Psi R R^\dagger. \quad (4.15)$$

Como $R R^\dagger = 1$, definimos

$$e'_3 = R e_3 R^\dagger, \quad (4.16)$$

y recuperamos la ecuación original con el eje rotado:

$$\bar{D}\Psi i e'_3 = m \widehat{\Psi} + q \bar{A} \Psi. \quad (4.17)$$

4.1.2. Invarianza Gauge

La invarianza gauge es una simetría fundamental del electromagnetismo que deja invariantes las ecuaciones de Maxwell. En el APS, una transformación gauge se representa de la siguiente forma [4]:

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}' = \mathcal{A} + \mathcal{D}\xi(x^\mu), \quad (4.18)$$

donde $\xi(x^\mu)$ es un campo escalar real. Al aplicar la transformación gauge sobre el potencial en (4.5), se obtiene:

$$\bar{\mathcal{D}}\Psi ie_3 = m\hat{\Psi} + q(\bar{\mathcal{A}}' + \bar{\mathcal{D}}\xi)\Psi. \quad (4.19)$$

Reescribiendo el lado izquierdo de la ecuación y agrupando los términos:

$$[\bar{\mathcal{D}}\Psi + q(\bar{\mathcal{D}}\xi)\Psi ie_3] ie_3 = m\hat{\Psi} + q\bar{\mathcal{A}}'\Psi. \quad (4.20)$$

Para mantener la forma original de la ecuación de Dirac tras esta transformación, definimos un nuevo espinor transformado Ψ' , que adquiere una fase local:

$$\Psi' = \Psi e^{qie_3\xi}, \quad \hat{\Psi}' = \hat{\Psi} e^{qie_3\xi}. \quad (4.21)$$

Aplicando el operador $\bar{\mathcal{D}}$ sobre Ψ' , obtenemos:

$$\bar{\mathcal{D}}\Psi' = [\bar{\mathcal{D}}\Psi + q(\bar{\mathcal{D}}\xi)\Psi ie_3] e^{qie_3\xi}. \quad (4.22)$$

Multiplicando ambos lados por ie_3 , se recupera la ecuación de Dirac para el espinor transformado:

$$\bar{\mathcal{D}}\Psi' ie_3 = m\hat{\Psi}' + q\bar{\mathcal{A}}'\Psi'. \quad (4.23)$$

Por lo tanto, la ecuación de Dirac en APS es invariante bajo la transformación gauge local, siempre que el espinor sufra una transformación de fase.

4.1.3. Soluciones de Libres

Para analizar el comportamiento de las partículas descritas por la ecuación de Dirac en el APS, consideramos sus soluciones en ausencia de campos externos. Estas corresponden a esta-

dos con energía y momento bien definidos. Sin perder generalidad, nos situamos en el sistema de referencia del centro de masas (CM), donde el operador de Dirac se reduce a $\mathcal{D}_0 = \partial_\tau$, con τ el tiempo propio. La ecuación a resolver es entonces:

$$\partial_\tau \Psi_0 i e_3 = m \widehat{\Psi}_0. \quad (4.24)$$

La solución en un sistema de referencia arbitrario se obtiene mediante el rotor descrito en (2.42):

$$\Psi = \Lambda_p \Psi_0, \quad \text{con} \quad \Lambda_p = e^{-ie_3 \phi/2} e^{-ie_2 \theta/2} e^{e_3 \kappa/2}. \quad (4.25)$$

Para simplificar la resolución de la ecuación (4.24), descomponemos el espinor Ψ_0 en su parte par e impar. Sea Ψ_a y Ψ_b elementos pertenecientes al subálgebra par. Así, Ψ_0 puede escribirse como:

$$\Psi_0 = \underbrace{\Psi_a}_{par} + \underbrace{i\Psi_b}_{impar} \quad (4.26)$$

Al sustituir (4.26) en la ecuación (4.24), obtenemos:

$$\begin{aligned} \partial_\tau (\Psi_a + i\Psi_b) i e_3 &= m (\Psi_a - i\Psi_b), \\ \dot{\Psi}_a i e_3 - \dot{\Psi}_b e_3 &= m \Psi_a - im \Psi_b, \end{aligned} \quad (4.27)$$

lo que lleva naturalmente a una separación en dos partes desacopladas, correspondientes a los componentes pares e impares.

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_a i e_3 &= m \Psi_a, \\ -\dot{\Psi}_b e_3 &= -im \Psi_b. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Luego:

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_a &= -m \Psi_b i e_3, \\ \dot{\Psi}_b &= m \Psi_b i e_3. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Ambas ecuaciones se integran directamente, dando soluciones exponenciales de la forma:

$$\begin{aligned}\Psi_a &= A_1 e^{-ie_3 m \tau}, \\ \Psi_b &= A_2 e^{ie_3 m \tau},\end{aligned}\tag{4.30}$$

donde A_1 y A_2 son elementos constantes del subálgebra par. Para construir soluciones linealmente independientes, hacemos uso de lo desarrollado en sistemas cuánticos de dos niveles en $\mathcal{Cl}_{3,0}$ [16], donde los elementos 1 y $-ie_2$ corresponden a los estados base $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$, respectivamente:

$$|\uparrow\rangle \rightarrow 1, \quad |\downarrow\rangle \rightarrow -ie_2.\tag{4.31}$$

Con ello, llegamos a la forma final de Ψ_0 en el sistema de referencia del centro de masas:

$$\Psi_0 = c_1 e^{-ie_3 m \tau} + c_2 i e_2 e^{-ie_3 m \tau} + d_1 e_2 e^{ie_3 m \tau} + d_2 i e^{ie_3 m \tau}.\tag{4.32}$$

donde los coeficientes c_k y d_k son de la forma $a + b i e_3$. Para expresar estas soluciones en un sistema de referencia arbitrario, utilizamos (4.25) junto con la invarianza de Lorentz del producto interno:

$$m\tau = Et - \vec{p} \cdot \vec{x} = \mathcal{P} \bullet \mathcal{X}.\tag{4.33}$$

Definimos entonces:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \Lambda_p, & \mathbf{u}_2 &= -\Lambda_p i e_2, \\ \mathbf{v}_1 &= -\Lambda_p e_2, & \mathbf{v}_2 &= i \Lambda_p.\end{aligned}\tag{4.34}$$

De este modo, las soluciones se escriben como:

$$\begin{aligned}
 \Psi_1 &= \mathbf{u}_1 e^{-ie_3 \mathcal{P} \cdot \mathcal{X}}, \\
 \Psi_2 &= \mathbf{u}_2 e^{-ie_3 \mathcal{P} \cdot \mathcal{X}}, \\
 \Psi_3 &= \mathbf{v}_1 e^{ie_3 \mathcal{P} \cdot \mathcal{X}}, \\
 \Psi_4 &= \mathbf{v}_2 e^{ie_3 \mathcal{P} \cdot \mathcal{X}},
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Estos multivectores pueden clasificarse como partículas o antipartículas de acuerdo con su autovector de energía. Usando las identidades:

$$\begin{aligned}
 E\mathbf{u}_k &= \vec{p}\mathbf{u}_k + m\hat{\mathbf{u}}_k \\
 E\mathbf{v}_k &= \vec{p}\mathbf{v}_k - m\hat{\mathbf{v}}_k
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

se obtiene:

$$\begin{aligned}
 H[\Psi_{1,2}] &= +E\Psi_{1,2}, \\
 H[\Psi_{3,4}] &= -E\Psi_{3,4},
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

de modo que Ψ_1 y Ψ_2 describen partículas (energía positiva), mientras que Ψ_3 y Ψ_4 corresponden a antipartículas (energía negativa). Esta distinción también se refleja en la fase $e^{i\beta/2}$ que aparece en la descomposición polar de Ψ_k . En particular [23]:

- $\beta = 0$ ($e^{i\beta} = +1$) corresponde a partículas.
- $\beta = \pi$ ($e^{i\beta} = -1$) corresponde a antipartículas.

Con todo lo anterior, la solución general para la ecuación de Dirac libre en el APS se escribe como:

$$\Psi = \int \frac{|d^3p|}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{m}{E}} \sum_{k=1}^2 (\mathbf{u}_k c_k e^{-ie_3 \mathcal{P} \cdot \mathcal{X}} + \mathbf{v}_k d_k e^{ie_3 \mathcal{P} \cdot \mathcal{X}}). \tag{4.38}$$

Nótese que el factor de fase $e^{\pm ie_3 \mathcal{P} \cdot \mathcal{X}}$ representa una rotación alrededor del eje e_3 contenida en

el plano $x - y$ [1].

Solución	Tipo	β
Ψ_1	Partícula	0
Ψ_2		
Ψ_3	Antipartícula	π
Ψ_4		

Tabla 4.1: Clasificación de las soluciones libres del espinor de Dirac en el APS según su tipo y fase β .

4.1.4. Conjugaciones

Las simetrías discretas C , P y T toman formas particularmente simples en APS [5]. La conjugación de carga (C) está dada por:

$$C : \Psi \rightarrow \Psi e_2 e^{ie_3 \phi_c} \quad (4.39)$$

Esta transformación intercambia partículas y antipartículas. El factor de fase refleja tanto la libertad en la elección de la fase global de los espinores como la no unicidad del operador C . Para cualquier valor de ϕ_c , se cumple que $C^2[\Psi_k] = \Psi_k$. Por simplicidad, tomamos $\phi_c = \pi$, de modo que $C[\Psi] = -\Psi e_2$. Al aplicar C a las soluciones libres, se obtiene:

$$\begin{aligned} C[\Psi_1] &= \Psi_3, & C[\Psi_3] &= \Psi_1, \\ C[\Psi_2] &= \Psi_4, & C[\Psi_4] &= \Psi_2. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Para la conjugación de paridad (P) tenemos:

$$P : \Psi \rightarrow \widehat{\Psi} e^{ie_3 \phi_p} \quad (4.41)$$

En este caso, se cumple que $P^2[\Psi] = \Psi e^{2ie_3 \phi}$, por lo que solo añade una fase arbitraria. Por otro lado, La conjugación temporal (T) está dada por:

$$T : \Psi \rightarrow \widehat{\Psi} i e_2 e^{ie_3 \phi_t}. \quad (4.42)$$

Se cumple que $T^2[\Psi] = -\Psi$, lo cual es característico del comportamiento de espinores fermiónicos bajo inversión temporal. Esta propiedad se mantiene independientemente del valor de la fase ϕ_t . Finalmente, si tomamos $\phi_c = \phi_p = \phi_t = 0$, la combinación de las tres simetrías CPT actúa como:

$$CPT[\Psi] = i\Psi. \quad (4.43)$$

Esta acción se traduce en un cambio del ángulo de Yvon–Takabayashi, $\beta \rightarrow \beta + \pi$, en la descomposición polar de Ψ [6].

4.1.5. Helicidad

Las soluciones libres construidas anteriormente pueden caracterizarse no solo por su energía, sino también por su helicidad. Para ello, necesitamos expresar Λ_p en términos de los autoestados del operador de helicidad $\frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{p}|}$ de un sistema de dos niveles en la teoría estándar:

$$\frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{p}|} |\chi_{\pm}\rangle = \pm |\chi_{\pm}\rangle \quad (4.44)$$

Estos autoestados dependen de los ángulos (θ, ϕ) que definen la dirección del momento \vec{p} en coordenadas esféricas [24]. Su forma explícita en el APS es:

$$\begin{aligned}\chi_+ &= \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} + ie_1 \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} - ie_2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} - ie_3 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2}, \\ \chi_- &= -\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} + ie_1 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} - ie_2 \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} + ie_3 \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2}.\end{aligned}\quad (4.45)$$

Satisfacen además las siguientes propiedades útiles:

$$\chi_{\pm}^{\dagger} \chi_{\pm} = 1, \quad \chi_- = -i\chi_+ e_2. \quad (4.46)$$

Por lo tanto, Λ_p puede expresarse en términos de χ_+ y χ_- como:

$$\Lambda_p = \cosh \frac{\kappa}{2} \chi_+ - \sinh \frac{\kappa}{2} \chi_- e_1 \quad (4.47)$$

Con el objetivo de reescribir esta expresión únicamente en función de cantidades físicas como la energía y la masa, utilizamos que $\cosh \kappa = E/m$, lo que permite expresar los factores hiperbólicos como:

$$\cosh \left(\frac{\kappa}{2} \right) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}, \quad \sinh \left(\frac{\kappa}{2} \right) = \sqrt{\frac{E-m}{2m}}. \quad (4.48)$$

Así, obtenemos la forma final de Λ_p es:

$$\Lambda_p = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(\chi_+ - \frac{|\vec{p}|}{E+m} \chi_- e_1 \right) \quad (4.49)$$

A partir de la expresión anterior, escribimos las explícitamente las soluciones libres Ψ_k (4.35):

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(\chi_+ - \frac{|\vec{p}|}{E+m} \chi_{-e_1} \right) e^{-ie_3 \mathcal{P} \cdot \mathcal{X}}, \\
\Psi_2 &= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(\chi_- - \frac{|\vec{p}|}{E+m} \chi_{+e_1} \right) e^{-ie_3 \mathcal{P} \cdot \mathcal{X}}, \\
\Psi_3 &= i \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(\chi_- - \frac{|\vec{p}|}{E+m} \chi_{+e_1} \right) e^{ie_3 \mathcal{P} \cdot \mathcal{X}}, \\
\Psi_4 &= i \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(\chi_+ - \frac{|\vec{p}|}{E+m} \chi_{-e_1} \right) e^{ie_3 \mathcal{P} \cdot \mathcal{X}}.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Comprobamos que son multivectores propios del operador de helicidad $\hat{\Sigma}[\cdot]$ con valores propios dados por:

partículas	antipartículas
$\hat{\Sigma}[\Psi_1] = +\Psi_1$	$\hat{\Sigma}[\Psi_3] = -\Psi_3$
$\hat{\Sigma}[\Psi_2] = -\Psi_2$	$\hat{\Sigma}[\Psi_4] = +\Psi_4$

Tabla 4.2: Helicidad para partículas y antipartículas.

Notamos que los espinores conectados mediante C (4.40) presentan helicidades opuestas. Esto es consistente con el hecho de que la conjugación de carga intercambia partículas y antipartículas de helicidad contraria.

4.2. Covariantes Bilineales

En el APS, los covariantes bilineales adquieren una estructura que refleja de forma más directa su contenido geométrico y físico. A continuación, se presentan sus expresiones en la formulación estándar junto con sus representaciones dentro del álgebra, como punto de partida para el análisis de las estructuras que se derivan de ellos.

Covariante Bilineal	Forma Estándar	Equivalente en APS
Escalar σ	$\langle \bar{\psi} \psi \rangle$	$\langle \Psi \bar{\Psi} \rangle$
Pseudoescalar ω	$\langle \bar{\psi} i' \hat{\gamma}^5 \psi \rangle$	$\langle \Psi \bar{\Psi} i \rangle$
Vector J^μ	$\langle \bar{\psi} \hat{\gamma}^\mu \psi \rangle$	$\langle \bar{\Psi} e^\mu \hat{\Psi} \rangle$
Pseudovector j_5^μ	$\langle \bar{\psi} \hat{\gamma}^\mu \hat{\gamma}^5 \psi \rangle$	$-\langle \bar{\Psi} e_\mu \hat{\Psi} e_3 \rangle$
Tensor $\Xi^{\mu\nu}$	$\langle \bar{\psi} \frac{i'}{2} [\hat{\gamma}^\mu, \hat{\gamma}^\nu] \psi \rangle$	$\langle \bar{\Psi} \langle e^\mu \bar{e}^\nu \rangle_V \Psi i e_3 \rangle$

Tabla 4.3: Covariantes bilineales en la teoría de Dirac y sus equivalentes en el APS.

4.2.1. Escalar y pseudoescalar

A partir de la identidad $\Psi \bar{\Psi} = \rho e^{i\beta}$, los covariantes bilineales escalar σ y pseudoescalar ω están dados por:

$$\sigma = \rho \cos \beta, \quad \omega = -\rho \sin \beta. \quad (4.51)$$

Bajo conjugación de carga C , se cumple que $\Psi_c \bar{\Psi}_c = -\Psi \bar{\Psi}$, lo cual implica un cambio de signo tanto en σ como en ω . Esto muestra que la conjugación de carga invierte el signo de la densidad de partícula, es decir, $\rho \rightarrow -\rho$, lo que también puede interpretarse como un corrimiento de fase $\beta \rightarrow \beta + \pi$. Por otro lado, bajo P y T , se observa que $\beta \rightarrow -\beta$, lo cual provoca que únicamente el pseudoescalar ω cambie de signo, mientras que σ permanece invariante.

4.2.2. Vector

J^μ puede identificarse con la componente de un paravector:

$$J^\mu = \langle \bar{\Psi} e^\mu \hat{\Psi} \rangle = e^\mu \bullet \mathcal{J}_c, \quad (4.52)$$

donde

$$\mathcal{J}_c = \Psi \Psi^\dagger \quad (4.53)$$

es la corriente de Dirac o corriente de probabilidad. A partir de la descomposición polar de Ψ la corriente toma la forma:

$$\mathcal{J}_c = R\rho R^\dagger, \quad (4.54)$$

lo que resalta que \mathcal{J}_c es una transformación de Lorentz de la densidad propia ρ . Se observa que bajo C , la corriente \mathcal{J}_c permanece invariante. Sin embargo, bajo P y T , la corriente se transforma como $\mathcal{J}_c \rightarrow \bar{\mathcal{J}}_c$.

4.2.3. Pseudovector

De manera análoga, j_5^μ puede expresarse como:

$$j_5^\mu = -\langle \bar{\Psi} e^\mu \hat{\Psi} e_3 \rangle = e^\mu \bullet \mathcal{J}_5, \quad (4.55)$$

donde:

$$\mathcal{J}_5 = \Psi e_3 \Psi^\dagger, \quad (4.56)$$

representa la corriente quiral o de espín. Utilizando nuevamente la forma polar de Ψ , se obtiene que \mathcal{J}_5 la podemos expresar como:

$$\mathcal{J}_5 = \rho R e_3 R^\dagger, \quad (4.57)$$

lo que indica que \mathcal{J}_5 resulta de aplicar una transformación de Lorentz al vector e_3 , escalado por la densidad propia ρ . Esto implica que la rotación de la corriente de espín en un sistema de referencia arbitrario es inducida por el espinor Ψ asociado a la partícula [6]. Aunque \mathcal{J}_5 se transforma como un paravector bajo transformaciones de Lorentz, su comportamiento es distinto bajo P : $\mathcal{J}_5 \rightarrow -\bar{\mathcal{J}}_5$, lo que muestra que \mathcal{J}_5 es un *paravector axial*.

4.2.4. Bilineal tensorial

Finalmente, el bilineal tensorial $\Xi^{\mu\nu}$ puede expresarse como componentes de un biparavector:

$$\Xi^{\mu\nu} = \langle \bar{\Psi} \langle e^\mu \bar{e}^\nu \rangle_V \Psi i e_3 \rangle = \langle \langle e^\nu \bar{e}^\mu \rangle_V \mathcal{G} \rangle, \quad (4.58)$$

donde $\mathcal{G} = -\Psi i e_3 \bar{\Psi}$. El comportamiento de \mathcal{G} bajo las simetrías discretas es el siguiente:

$$\begin{aligned} C : \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G}, \\ P : \mathcal{G} &\rightarrow -\mathcal{G}^\dagger, \\ T : \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G}^\dagger. \end{aligned} \quad (4.59)$$

4.3. Leyes de Conservación

En esta sección nos enfocamos en establecer las leyes de conservación para la teoría de Dirac dentro del APS. Cabe destacar que estas leyes también pueden derivarse directamente a partir de la ecuación de Dirac sin necesidad de recurrir a un principio variacional [5]. El enfoque desarrollado en esta tesis complementa dicho resultado, al permitir establecer explícitamente su conexión con las simetrías subyacentes mediante el teorema de Noether.

4.3.1. Conservación de energía y momento

A partir de la ecuación (3.34), las corrientes de energía-momento están dada por:

$$\mathcal{T}_{dirac}^\nu = \langle \partial^\nu \Psi i e_3 \Psi^\dagger \rangle_{\mathfrak{R}} - e^\nu \mathcal{L}_{dirac}. \quad (4.60)$$

Para soluciones que satisfacen la ecuación de Dirac (4.5), el lagrangiano se anula $\mathcal{L}_{dirac} = 0$, por lo que la expresión anterior se simplifica a:

$$\mathcal{T}_{dirac}^\nu = \langle \partial^\nu \Psi i e_3 \Psi^\dagger \rangle_{\mathfrak{R}}. \quad (4.61)$$

Por lo tanto, las cantidades conservadas están dadas por:

$$p^\mu = \int_V |d^3x| \langle \mathcal{T}_{dirac}^\mu \rangle, \quad (4.62)$$

y el paravector de momento total toma la forma:

$$\mathcal{P} = E + \vec{p} = \int_V |dX| \dot{\mathcal{D}} \langle \dot{\Psi} i e_3 \Psi^\dagger \rangle. \quad (4.63)$$

Estas componentes pueden reinterpretarse como valores esperados de los operadores hamiltoniano y de momento lineal. En particular, usando que $\partial_t \Psi i e_3 = H[\Psi]$, la energía toma la forma:

$$E = \int_V |d^3x| \langle \Psi^\dagger H[\Psi] \rangle, \quad (4.64)$$

mientras que el momento lineal se escribe como:

$$p^k = \int_V |d^3x| \langle \Psi^\dagger \hat{p}^k[\Psi] \rangle. \quad (4.65)$$

De este modo, se establecen de manera explícita las leyes de conservación asociadas a dichos operadores. Finalmente, las componentes de \mathcal{T}_{dirac}^ν resultan en:

$$T^{\mu\nu} = \langle \bar{\Psi} e^\mu \partial^\nu \hat{\Psi} i e_3 \rangle, \quad (4.66)$$

Mediante el mapeo entre formulaciones:

$$e^\mu \partial^\nu \widehat{\Psi} i e_3 \leftrightarrow i' \hat{\gamma}^\mu \partial^\nu |\psi\rangle, \quad (4.67)$$

se recupera la expresión del tensor energía-momento [21]:

$$T^{\mu\nu} = \langle \bar{\psi} | i' \hat{\gamma}^\mu \partial^\nu | \psi \rangle. \quad (4.68)$$

Esto demuestra que el formalismo desarrollado reproduce de manera consistente los resultados de la teoría de Dirac convencional.

4.3.2. Conservación del Momento Angular

Siguiendo con las simetrías del sistema, analizamos ahora las expresiones relacionadas con el momento angular. La corriente orbital $\mathcal{M}^{\mu\nu}$ toma la forma:

$$\mathcal{M}^{\mu\nu} = x^\mu \langle \hat{p}^\nu [\Psi] \Psi^\dagger \rangle_{\mathfrak{R}} - x^\nu \langle \hat{p}^\mu [\Psi] \Psi^\dagger \rangle_{\mathfrak{R}}, \quad (4.69)$$

lo que permite obtener el vector de momento angular orbital a través de (3.61):

$$\vec{\ell} = - \int_V |d^3x| \vec{x} \times \dot{\nabla} \langle \dot{\Psi} i e_3 \Psi^\dagger \rangle. \quad (4.70)$$

Por otro lado, la corriente de espín $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ viene dada por:

$$\mathcal{S}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \langle \langle e^\mu \bar{e}^\nu \rangle_V \Psi i e_3 \Psi^\dagger \rangle_{\mathfrak{R}}. \quad (4.71)$$

Aplicando la identidad $\langle e^a \bar{e}^b \rangle_V = -\epsilon^{abc} i e_c$, se obtiene para los índices espaciales:

$$\mathcal{S}^{ab} = \epsilon^{abc} \frac{1}{2} \langle e_c \Psi e_3 \Psi^\dagger \rangle_{\mathfrak{R}}. \quad (4.72)$$

El vector de espín puede escribirse mediante (3.62) como:

$$\vec{s} = \frac{1}{2} \int_V |d^3x| \langle \Psi e_3 \Psi^\dagger \rangle_1 = \frac{1}{2} \int_V |d^3x| \langle \mathcal{J}_5 \rangle_1, \quad (4.73)$$

con lo cual se reconoce que es la parte vectorial de la corriente $\frac{1}{2} \mathcal{J}_5$. Además, sus componentes s^k corresponden al valor esperado del operador de espín $\hat{\Sigma}^k[\cdot]$:

$$s^k = \frac{1}{2} \int_V |d^3x| \langle \Psi^\dagger e_k \Psi e_3 \rangle = \int_V |d^3x| \langle \Psi^\dagger \hat{\Sigma}^k[\Psi] \rangle \quad (4.74)$$

En conjunto, el vector de momento angular total está dado por la suma de ambas contribuciones:

$$\vec{j} = - \int_V |d^3x| \vec{x} \times \dot{\nabla} \langle \dot{\Psi} i e_3 \Psi^\dagger \rangle + \frac{1}{2} \int_V |d^3x| \langle \Psi e_3 \Psi^\dagger \rangle_1 \quad (4.75)$$

Finalmente, cabe destacar que la parte escalar de las corrientes de espín $\langle \mathcal{S}^{\mu\nu} \rangle$ equivale al tensor de espín de Dirac en su formulación estándar [20].

$$\langle \mathcal{S}^{\mu\nu} \rangle = \frac{1}{2} \langle \Psi^\dagger \langle e^\mu \bar{e}^\nu \rangle_V \Psi i e_3 \rangle \leftrightarrow \langle \psi | \frac{i'}{4} [\hat{\gamma}^\mu, \hat{\gamma}^\nu] | \psi \rangle. \quad (4.76)$$

4.3.3. Corriente de Dirac y Quiral

A diferencia de las simetrías espacio-temporales discutidas anteriormente, ahora consideramos simetrías internas del lagrangiano de Dirac. En estos casos el paravector \mathcal{K} de (3.21) se anula. En primer lugar, \mathcal{L}_{dirac} es invariante bajo una transformación de fase global de Ψ , la cual

se expresa como:

$$\Psi' = \Psi e^{-ie_3\alpha} \Rightarrow \delta_s \Psi = -\Psi i e_3, \quad (4.77)$$

e insertando $\delta_s \Psi$ en (3.21), se obtiene que la corriente resultante coincide con la corriente de Dirac previamente definida en (4.53):

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_c &= -\langle \Psi i e_3 i e_3 \Psi^\dagger \rangle_{\mathfrak{R}} \\ &= \Psi \Psi^\dagger. \end{aligned} \quad (4.78)$$

De este modo, demostramos que:

$$\mathcal{D} \bullet \mathcal{J}_c = 0, \quad (4.79)$$

es una consecuencia directa de la simetría de fase global, tal como ocurre en la formulación estándar de la teoría de Dirac. Así, la carga conservada está dada por:

$$Q = \int_V |d^3x| \langle \Psi^\dagger \Psi \rangle. \quad (4.80)$$

lo que refleja la conservación de la norma del espinor. Por otro lado el lagrangiano libre de Dirac puede descomponerse en un término cinético y un término de masa:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Dirac-libre} &= \langle \mathcal{D} \widehat{\Psi} i e_3 \bar{\Psi} \rangle - \langle m \Psi \bar{\Psi} \rangle \\ &= \mathcal{L}_{cinético} + \mathcal{L}_{masa} \end{aligned} \quad (4.81)$$

Consideremos ahora la siguiente transformación quiral:

$$\Psi' = \Psi e^{-i\alpha} \rightarrow \delta_s \Psi = -i\Psi \quad (4.82)$$

El término cinético permanece invariante bajo esta transformación, mientras que el término de masa no. Por lo tanto, en ausencia de masa, esta simetría da lugar a una corriente conservada que coincide con la corriente quirral o de espín:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_5 &= -\langle i\Psi i e_3 \Psi^\dagger \rangle_{\mathfrak{R}} \\ &= \Psi e_3 \Psi^\dagger.\end{aligned}\tag{4.83}$$

Sin embargo, al incluir el término de masa, la simetría se rompe y la corriente \mathcal{J}_5 deja de ser conservada. En este caso, se cumple la siguiente relación:

$$\mathcal{D} \bullet \mathcal{J}_5 = \delta_s \mathcal{L}_{masa}\tag{4.84}$$

La variación del término de masa bajo una transformación quirral es:

$$\mathcal{L}'_{masa} = -e^{-2i\alpha} m \langle \Psi \bar{\Psi} \rangle\tag{4.85}$$

por lo que su $\delta_s \mathcal{L}_{masa}$ es:

$$\delta_s \mathcal{L}_{masa} = 2m \langle \Psi \bar{\Psi} i \rangle = -2m\rho \sin \beta\tag{4.86}$$

Finalmente se obtiene:

$$\mathcal{D} \bullet \mathcal{J}_5 = -2m\rho \sin \beta\tag{4.87}$$

Este resultado muestra que la conservación de \mathcal{J}_5 puede restaurarse en los casos en que $\beta = 0$ o $\beta = \pi$. Es interesante notar que estas condiciones son precisamente las que satisfacen las soluciones libres de la ecuación de Dirac 4.1.

Capítulo V

Conclusiones y Comentarios

Los principales resultados alcanzados en este trabajo son los siguientes:

- Demostramos que es posible construir un formalismo lagrangiano completo para campos en el Álgebra del Espacio Físico (APS), permitiendo describir la dinámica de los espinores de Dirac. A partir de este enfoque, se obtuvieron las ecuaciones dinámicas del campo de Dirac en el APS y se analizaron las simetrías subyacentes mediante el teorema de Noether.
- Obtuvimos nuevas estructuras geométricas, como la corriente de energía-momento \mathcal{T}^ν , que describe la distribución local de energía y de movimiento del campo. Además, se obtuvo de manera natural una corriente de espín asociada a la simetría bajo transformaciones de Lorentz. Esto permitió definir un vector de espín de forma general dentro del APS, revelando su origen en las propiedades intrínsecas de transformación de los campos.
- Mostramos que, mediante el análisis de las simetrías de la teoría de Dirac en el APS, es posible obtener corrientes conservadas directamente a partir del teorema de Noether. En particular, identificamos que la simetría de fase global da lugar a la corriente de Dirac \mathcal{J} , mientras que la simetría quiral se asocia a la corriente de espín \mathcal{J}_5 . Se evidenció

que ambas corrientes admiten una interpretación geométrica clara: \mathcal{J} corresponde a la rotación de la densidad propia ρ , mientras que \mathcal{J}_5 resulta de la rotación del vector e_3 , ambas inducidas por el espinor Ψ .

Comentarios

Este estudio complementa y amplía trabajos previos sobre la teoría de Dirac en el APS, proporcionando un sustento formal más sólido a varios de sus resultados. Además, permite abordar de manera sistemática otros campos relativistas, como el caso del electromagnetismo en el APS, permitiendo complementar y reforzar los enfoques existentes. Este marco permite explorar formulaciones aún no desarrolladas en el APS, como la teoría de Klein–Gordon y los espinores de Weyl. También posibilita su adaptación a espacios de menor dimensión, como el álgebra $\mathcal{Cl}_{2,0}$, lo que permitiría construir una teoría de Dirac efectiva para sistemas en $2 + 1$ dimensiones.

Bibliografía

- [1] D. Hestenes, “Real spinor fields,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 8, no. 4, pp. 798–808, 1967.
- [2] D. Hestenes, *Space-time algebra*. Springer, 2015.
- [3] A. Lasenby, C. Doran, and S. Gull, “A multivector derivative approach to lagrangian field theory,” *Foundations of Physics*, vol. 23, no. 10, pp. 1295–1327, 1993.
- [4] W. Baylis, *Electrodynamics: a modern geometric approach*, vol. 17. Springer Science & Business Media, 2004.
- [5] J. Vaz Jr, “The clifford algebra of physical space and dirac theory,” *European Journal of Physics*, vol. 37, no. 5, p. 055407, 2016.
- [6] W. Baylis and J. Keselica, “The complex algebra of physical space: a framework for relativity,” *Advances in Applied Clifford Algebras*, vol. 22, no. 3, pp. 537–561, 2012.
- [7] W. E. Baylis, “Quantum/classical interface: a geometric approach from the classical side,” in *Computational Noncommutative Algebra and Applications*, pp. 127–154, Springer, 2004.
- [8] J. Vaz Jr and R. da Rocha Jr, *An introduction to Clifford algebras and spinors*. Oxford University Press, 2016.

- [9] C.-A. McKenzie, *An Interpretation of Relativistic Spin Entanglement Using Geometric Algebra*. PhD thesis, University of Windsor (Canada), 2016.
- [10] W. E. Baylis and G. Sobczyk, “Relativity in clifford’s geometric algebras of space and spacetime,” *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 43, pp. 2061–2079, 2004.
- [11] S. Bařkal, Y. S. Kim, and M. E. Noz, *Physics of the Lorentz Group*. Morgan & Claypool Publishers, 2015.
- [12] C. Doran, A. Lasenby, and S. Gull, “States and operators in the spacetime algebra,” *Foundations of physics*, vol. 23, no. 9, pp. 1239–1264, 1993.
- [13] C. Doran, A. Lasenby, S. Gull, S. Somaroo, and A. Challinor, “Spacetime algebra and electron physics,” *Advances in imaging and electron physics*, vol. 95, pp. 271–386, 1996.
- [14] G. Salesi and E. Recami, “Hydrodynamical reformulation and quantum limit of the barut-zanghi theory,” in *Causality and Locality in Modern Physics* (G. Hunter, S. Jeffers, and J.-P. Vigiier, eds.), (Dordrecht), pp. 285–296, Springer Netherlands, 1998.
- [15] L. Fabbri and R. J. B. Rogerio, “Polar form of spinor fields from regular to singular: the flag-dipoles,” *The European Physical Journal C*, vol. 80, pp. 1–7, 2020.
- [16] C. Doran and A. Lasenby, *Geometric algebra for physicists*. Cambridge University Press, 2003.
- [17] D. Hestenes and G. Sobczyk, *Clifford algebra to geometric calculus : a unified language for mathematics and physics*. Dordrecht; Boston; Hingham, MA, U.S.A.: D. Reidel ; Distributed in the U.S.A. and Canada by Kluwer Academic Publishers, 1984.
- [18] E. M. Hitzer, “Multivector differential calculus,” *Advances in Applied Clifford Algebras*, vol. 12, pp. 135–182, 2002.

- [19] T. Lancaster and S. J. Blundell, *Quantum field theory for the gifted amateur*. OUP Oxford, 2014.
- [20] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field quantization*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [21] B. Bulbul, M. Sezer, and W. Greiner, “Relativistic quantum mechanics–wave equations,” 2000.
- [22] D. Hestenes, “Spacetime physics with geometric algebra,” *American Journal of Physics*, vol. 71, no. 7, pp. 691–714, 2003.
- [23] W. A. Rodrigues, J. Vaz, E. Recami, and G. Salesi, “About zitterbewegung and electron structure,” *Physics Letters B*, vol. 318, no. 4, pp. 623–628, 1993.
- [24] M. E. Peskin, *An Introduction to quantum field theory*. CRC press, 2018.

Apéndice A

Derivadas del Lagrangiano de Dirac

Recordemos que el lagrangiano de Dirac en el APS está dado por:

$$\mathcal{L}_{dirac} = \langle \mathcal{D}\hat{\Psi}ie_3\bar{\Psi} \rangle - \langle m\Psi\bar{\Psi} \rangle - \langle q\mathcal{A}\hat{\Psi}\bar{\Psi} \rangle. \quad (1.1)$$

Para calcular $\partial_{\Psi}\mathcal{L}_{dirac}$, evaluamos cada término del lagrangiano por separado:

- Para el primer término, usando (2.66), se obtiene:

$$\partial_{\Psi} \langle \mathcal{D}\hat{\Psi}ie_3\bar{\Psi} \rangle = \overline{\mathcal{D}\hat{\Psi}ie_3}. \quad (1.2)$$

- Para el segundo término, aplicando nuevamente (2.66), resulta:

$$\partial_{\Psi} \langle m\Psi\bar{\Psi} \rangle = 2m\bar{\Psi}. \quad (1.3)$$

- Para el tercer término, realizamos el cálculo a partir de la definición de la derivada multi-

vectorial (2.60):

$$B * \partial_{\Psi} \langle qA\widehat{\Psi}\bar{\Psi} \rangle = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\langle qA(\widehat{\Psi} + \tau\widehat{B})(\bar{\Psi} + \tau\bar{B}) - qA\widehat{\Psi}\bar{\Psi} \rangle}{\tau} \quad (1.4)$$

$$= \langle qA\widehat{\Psi}\bar{B} + qA\widehat{B}\bar{\Psi} \rangle = B * 2q\Psi^{\dagger}\bar{A}. \quad (1.5)$$

Como esta identidad es válida para todo B , se concluye que:

$$\partial_{\Psi} \langle qA\widehat{\Psi}\bar{\Psi} \rangle = 2q\Psi^{\dagger}\bar{A}. \quad (1.6)$$

Combinando estos resultados, la derivada de \mathcal{L}_{dirac} respecto de Ψ es:

$$\partial_{\Psi} \mathcal{L}_{dirac} = \overline{\mathcal{D}\widehat{\Psi}ie_3} - 2m\bar{\Psi} - 2q\Psi^{\dagger}\bar{A}. \quad (1.7)$$

Por otro lado, solo el primer término del lagrangiano depende explícitamente de $\bar{\mathcal{D}}\Psi$. Aplicando (2.68), obtenemos:

$$\partial_{\bar{\mathcal{D}}\Psi} \langle \mathcal{D}\widehat{\Psi}ie_3\bar{\Psi} \rangle = \partial_{\bar{\mathcal{D}}\Psi} \langle \bar{\mathcal{D}}\Psi ie_3\Psi^{\dagger} \rangle = ie_3\Psi^{\dagger}. \quad (1.8)$$

Por tanto, la derivada de \mathcal{L}_{dirac} respecto de $\bar{\mathcal{D}}\Psi$ es:

$$\partial_{\bar{\mathcal{D}}\Psi} \mathcal{L}_{dirac} = ie_3\Psi^{\dagger}. \quad (1.9)$$