

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ



ESCUELA DE POSGRADO

**LA REPRESENTACIÓN DEL CUBO Y EL CABRI 3D: UN
ESTUDIO CON ALUMNOS DEL PRIMER GRADO DE
EDUCACIÓN SECUNDARIA**

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE
MAGISTER EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Presentada por: Magna Selestina Fernández Contreras

Asesora de tesis: Dra. Jesús Victoria Flores Salazar

Jurado: Dra. María José Ferreira da Silva

Dr. Francisco Ugarte Guerra

LIMA – PERÚ

2013



*A Lusgardo, quien con una humilde
sonrisa, supo motivar mis logros
y a Ernesto, por su valioso apoyo
incondicional.*

Agradecimientos

A los profesores de la Escuela de Post grado de la especialidad de Enseñanza de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica del Perú; cuyas valiosas enseñanzas y asesorías, condujeron a lograr nuestro propósito.

A mi asesora, Dra. Jesús Flores Salazar que, con sus certeras sugerencias y críticas y por otro lado su gran paciencia y sus cálidas palabras de ánimo, contribuyeron a obtener esta preciada investigación.

A los miembros del jurado Dra. Maria José Ferreira da Silva y Dr. Francisco Ugarte Guerra por sus sugerencias y observaciones pertinentes las cuales me ayudaron a concluir el presente trabajo.

A mis estimados amigos y colegas: Candy Ordoñez M. y Roger Díaz V. por el apoyo desde el inicio de este trabajo, incansable dedicación, sugerencias y por la disposición en registrar las observaciones de los encuentros.

A todos aquellos, que directa e indirectamente, contribuyeron para la realización de esta investigación.

RESUMEN

Esta investigación se desarrolla en el contexto de la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Espacial en la Educación Básica Regular peruana; específicamente trata de la enseñanza de las perspectivas para alumnos de primer año de educación secundaria. Optamos por utilizar el ambiente de la geometría dinámica CABRI 3D, considerando las limitaciones en el ambiente convencional de lápiz y papel. Nos trazamos por objetivo analizar el uso de las perspectivas y el CABRI 3D en la disminución del conflicto de lo visto y lo sabido de la representación del cubo. Pretendemos responder a las siguientes preguntas: ¿La enseñanza de las perspectivas y el uso del CABRI 3D puede ayudar al estudiante a articular diferentes puntos de vista sobre la representación del cubo?, ¿El uso de las perspectivas y el CABRI 3D disminuyen el conflicto de lo visto y lo sabido de la representación del cubo? Tomamos como marco teórico, las investigaciones de Parzysz (1988; 1991; 2001). Utilizamos como metodología, aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue et al. (1995).

Resaltamos que, la utilización del material concreto, el uso del software CABRI 3D y el estudio de las perspectivas Caballera, Cónica e isométrica; contribuyeron con el logro de nuestro propósito. Los resultados mostraron que, en determinadas situaciones, las pérdidas de información con CABRI 3D son menores que en el ambiente de lápiz y papel. Existen también evidencias de que en el aspecto dinámico las posibilidades de cambiar el punto de vista en el CABRI 3D ayudan en la interpretación de la representación del cubo.

Palabras clave: Cubo; Perspectiva; CABRI 3D, material concreto

Lista de figuras

Figura 1.	Representaciones planas de cubos en vista ortogonal y oblicua.....	17
Figura 2.	Representación del cubo en perspectiva.....	18
Figura 3.	El cubo en perspectiva paralela.....	18
Figura 4.	Trama de puntos que forma triángulos equiláteros.....	19
Figura 5.	El cubo en representación Isométrica.....	19
Figura 6.	Cuadrado y pirámide cuadrangular.....	25
Figura 7.	Plano P y puntos A, B, C.....	26
Figura 8.	Cubo construido en varitas.....	30
Figura 9.	Ilustración de un cubo.....	30
Figura 10.	Menú 1 del CABRI 3D.....	33
Figura 11.	Pantalla de ayuda del menú 1.....	33
Figura 12.	Herramientas del CABRI 3D.....	34
Figura 13.	Pantalla inicial del CABRI 3D.....	34
Figura 14.	Poliedro.....	44
Figura 15.	El cubo.....	45
Figura 16.	Una forma de desarrollo de la superficie del cubo ABCD-EFGH.....	46
Figura 17.	Proyección de un punto.....	48
Figura 18.	Proyección Cónica.....	48
Figura 19.	Representación del cubo con un punto de fuga.....	49
Figura 20.	Representación del cubo con dos puntos de fuga.....	49
Figura 21.	Pasos 1 y 2 de un cubo en perspectiva Cónica.....	50
Figura 22.	Pasos 3 y 4 de un cubo en perspectiva Cónica.....	50
Figura 23.	Pasos 5 y 6 de un cubo en perspectiva Cónica.....	51
Figura 24.	Perspectivas paralelas oblicuas y ortogonales.....	51

Figura 25. Proyección paralela del punto (A) y de la curva (<i>l</i>).....	52
Figura 26. Plano tridimensional X, Y, Z; coeficiente de variación eje Y.....	53
Figura 27. Representación de cubos en perspectiva Caballera y ángulos que determinan el coeficiente de reducción	53
Figura 28. Cubo A'B'C'D'E'F'G'H' en perspectiva Caballera.....	54
Figura 29. Representación del cubo en perspectiva Isométrica.....	54
Figura 30. Representación del cubo en perspectiva Isométrica.....	55
Figura 31. Diferentes perspectivas del cubo.....	55
Figura 32. Saberes previos. Texto de consulta–Editorial Bruño.....	56
Figura 33. Definición de poliedro. Texto de consulta– Editorial Bruño	57
Figura 34. Definición de prisma. Texto de consulta–Editorial Bruño	58
Figura 35. Desarrollo de la superficie del cubo. Texto de consulta–Editorial Bruño	59
Figura 36. Respuesta de Darlene con representación.....	63
Figura 37. Respuesta de Judith con representación	63
Figura 38. Desarrollos de un poliedro.....	64
Figura 39. Respuesta de Gabriel-desarrollo de la superficie de un poliedro	64
Figura 40. Representación de poliedro.....	64
Figura 41. Respuesta de Masel.....	65
Figura 42. Estructuras de poliedros.....	66
Figura 43. Parte A actividad 1 dupla D_1	73
Figura 44. Parte A actividad 1 dupla D_5	73
Figura 45. Parte B actividad 1 dupla D_1	76
Figura 46. Dibujo del cubo, dupla D_1	78
Figura 47. Dibujo del cubo, dupla D_5	78
Figura 48. Herramientas del CABRI 3D.....	80
Figura 49. Plano base del CABRI 3D.....	80

Figura 50. Representación de puntos en el plano.....	81
Figura 51. Representación de puntos en el plano horizontal en una vista frontal....	81
Figura 52. Representación de un punto en el espacio	82
Figura 53. Rectas secantes y rectas paralelas.....	84
Figura 54. Construcción de rectas dupla D_5	85
Figura 55. Planos secantes y planos paralelos	87
Figura 56. Parte B actividad 2 dupla D_1	87
Figura 57. Planos perpendiculares	88
Figura 58. Parte C actividad 2 dupla D_5	89
Figura 59. Desarrollo de la superficie de un cubo. Software CABRI 3D.....	92
Figura 60. Parte A actividad 3, dupla D_1	93
Figura 61. Cubo con dos caras paralelas y aristas pintadas	94
Figura 62. Parte B actividad 3, dupla D_1	95
Figura 63. Parte B actividad 3, dupla D_5	95
Figura 64. Pregunta1 parte A, actividad 4 dupla D_1	98
Figura 65. Pregunta 1 parte A, actividad 4 dupla D_5	98
Figura 66. Pregunta 1 parte B, actividad 4 dupla D_1	99
Figura 67. Pregunta 1 parte B, actividad 4 dupla D_5	99
Figura 68. Pregunta 2 parte A, actividad 4 dupla D_1	101
Figura 69. Pregunta 2 parte A, actividad 4 dupla D_5	101
Figura 70. Pregunta 2 parte B, actividad 4 dupla D_1	102
Figura 71. Pregunta 3 parte A, actividad 4 dupla D_1	104
Figura 72. Pregunta 3 parte A, actividad 4 dupla D_5	104
Figura 73. Pregunta 3 parte B, actividad 4 dupla D_1	104
Figura 74. Pregunta 3 parte B, actividad 4 dupla D_5	105
Figura 75. Pregunta 4 parte A, actividad 4 dupla D_1	107

Figura 76. Pregunta 4 parte A, actividad 4 dupla D_5	107
Figura 77. Pregunta 4 parte B, actividad 4 dupla D_1	108
Figura 78. Pregunta 4 parte B, actividad 4 dupla D_5	108
Figura 79. Pregunta 5 parte A, actividad 4 dupla D_1	110
Figura 80. Pregunta 5 parte A, actividad 4 dupla D_5	111
Figura 81. Pregunta 5 parte B, actividad 4 dupla D_1	111
Figura 82. Pregunta 6 parte A, actividad 4 dupla D_1	113
Figura 83. Pregunta 6 parte A, actividad 4 dupla D_5	113
Figura 84. Pregunta 6 parte B, actividad 4 dupla D_5	114
Figura 85. Las diapositivas de presentación de la perspectiva Caballera	118
Figura 86. Cubo en perspectiva Caballera en el plano Q.....	121
Figura 87. Cubo en perspectiva Caballera	121
Figura 88. Representación en el plano Q, dupla D_1	122
Figura 89. Representación en el plano Q, dupla D_5	123
Figura 90. Representación de cubo en perspectiva Caballera y características, dupla D_1	123
Figura 91. Representación de cubo en perspectiva Caballera y características, dupla D_5	124
Figura 92. Representación de cubo en perspectiva caballera uniendo vértices dupla D_1	
Figura 93. Representaciones de paisajes en perspectiva cónica	126
Figura 94. Las diapositivas de presentación de la perspectiva Cónica	127
Figura 95. Foto de modelo de cubo con punto de fuga.....	129
Figura 96. Cubo en perspectiva Cónica	130
Figura 97. Determinación del punto de fuga (PF) y línea horizonte (LH), dupla D_1	131

Figura 98. Determinación del punto de fuga (PF) y línea horizonte (LH), dupla D_5	131
Figura 99. Perspectiva Cónica del cubo con líneas proyectantes, dupla D_1	132
Figura 100. Perspectiva Cónica del cubo con líneas proyectantes, dupla D_5	132
Figura 101. Cubo en perspectiva Cónica y sus características, Dupla D_1	133
Figura 102. Cubo en perspectiva Cónica y sus características, Dupla D_5	134
Figura 103. Diapositivas de presentación de la perspectiva Isométrica.....	135
Figura 104. Cubos en perspectiva Isométrica vistas A y B	138
Figura 105. Cubo en perspectiva Isométrica.....	138
Figura 106. Cubo en perspectiva Isométrica usando papel isométrico, dupla D_1 y dupla D_5 respectivamente	139
Figura 107. Cubo de Necker a base de papel isométrico, dupla D_1 y dupla D_5 respectivamente	139
Figura 108. Cubo en perspectiva Isométrica dupla D_1 y dupla D_5 respectivamente	140
Figura 109. Perspectiva Caballera del cubo BCGF-ADHE	144
Figura 110. Cubo en perspectiva Caballera en el CABRI 3D, dupla D_1	145
Figura 111. Cubo en perspectiva Caballera en el CABRI 3D, dupla D_5	146
Figura 112. Representación del cubo desde un punto vista de la arista frontal superior	150
Figura 113. Representaciones del cubo desde diferentes vistas, dupla D_1	151
Figura 114. Representaciones del cubo desde diferentes vistas, dupla D_5	152
Figura 115. Representaciones del cubo en el CABRI 3D	153

Lista de cuadros

Cuadro 1.	Relaciones entre figuras y sus representaciones	24
Cuadro 2.	Nombre de los estudiantes	61
Cuadro 3.	Respuesta a la cuarta pregunta de la parte II.....	65
Cuadro 4.	Elección de representaciones de poliedros.....	66
Cuadro 5.	Actividades del experimento.....	68
Cuadro 6.	Actividad 1 Parte A.....	72
Cuadro 7.	Actividad 1 Parte B.....	74
Cuadro 8.	Actividad 1 Parte C.....	77
Cuadro 9.	Parte A tarea 1.....	83
Cuadro 10.	Parte B tarea 1.....	86
Cuadro 11.	Parte C tarea 1.....	88
Cuadro 12.	Tarea 1 Actividad 3.....	91
Cuadro 13.	Tarea 2 actividad 3.....	93
Cuadro 14.	Puntos en el plano, actividad 4.....	97
Cuadro 15.	Rectas en el espacio, actividad 4.....	100
Cuadro 16.	Poliedro y rectas, actividad 4.....	103
Cuadro 17.	Cubo y dos puntos, actividad 4.....	106
Cuadro 18.	Poliedro Necker, actividad 4.....	109
Cuadro 19.	Poliedro-patrón, actividad 4.....	112
Cuadro 20.	Tarea de la parte A actividad 5.....	118
Cuadro 21.	Tarea de la parte B actividad 5.....	127
Cuadro 22.	Tarea de la parte C actividad 5.....	135
Cuadro 23.	Tarea actividad 6.....	142
Cuadro 24.	Tarea actividad 7.....	149

ÍNDICE

CONSIDERACIONES INICIALES.....	13
CAPÍTULO 1 – LA PROBLEMÁTICA	15
1.1 EL PROBLEMA DE LA REPRESENTACIÓN PLANA DEL CUBO.....	15
1.2 ASPECTOS TEÓRICOS.....	23
1.3 LA GEOMETRÍA DINÁMICA Y EL SOFTWARE CABRI 3D.....	32
1.4 DELIMITACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA	36
CAPÍTULO 2 – ASPECTOS DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA Y PROCEDIMIENTOS.....	39
2.1 FASES DE LA INGENIERIA DIDÁCTICA.....	39
2.2 INSTRUMENTOS DE COLECTA DE DATOS	42
CAPÍTULO 3 - EL CUBO.....	44
3.1 ALGUNOS CONCEPTOS BÁSICOS	44
3.2 LOS SISTEMAS DE REPRESENTACION DEL CUBO	46
3.3. LAS REPRESENTACIONES DEL CUBO EN EL LIBRO DE PRIMER GRADO DE EDUCACION BASICA REGULAR	55
CAPÍTULO 4 - EXPERIMENTO Y ANÁLISIS.....	61
4.1 CARACTERIZACIÓN DE LA ELECCIÓN DE LOS SUJETOS	61
4.2 ESTUDIO DIAGNÓSTICO	62
4.3 DESCRIPCIÓN DEL EXPERIMENTO	68

4.4	ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES	70
4.4.1	PRIMER ENCUENTRO	71
	OBJETIVO, DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD, ANÁLISIS A PRIORI, ANÁLISIS A POSTERIORI	
4.4.2	SEGUNDO ENCUENTRO	90
	OBJETIVO, DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD, ANÁLISIS A PRIORI, ANÁLISIS A POSTERIORI	
4.4.3	TERCER ENCUENTRO	116
	OBJETIVO, DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD, ANÁLISIS A PRIORI, ANÁLISIS A POSTERIORI	
4.4.4	CUARTO ENCUENTRO	142
	OBJETIVO, DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD, ANÁLISIS A PRIORI, ANÁLISIS A POSTERIORI	
	CONSIDERACIONES FINALES	154
	REFERENCIAS	157
	APÉNDICES	159
	APÉNDICE A – CUESTIONARIO DIAGNOSTICO.....	159
	APÉNDICE B – FICHAS DE ACTIVIDADES	162
	APÉNDICE C – FICHAS DE OBSERVACIÓN.....	190

Consideraciones Iniciales

La elección de este tema de investigación se basa en la observación de la dificultad que muestran nuestros estudiantes de primer año de secundaria (entre 11 y trece años) de Educación Básica Regular, al representar e interpretar un objeto tridimensional en el plano, en particular en el caso del cubo. Pensamos que en nuestro trabajo, la manipulación de objetos en material concreto, el uso de lápiz y papel, la exploración de la perspectiva y el uso del CABRI 3D ayudarán para que el estudiante visualice, represente e interprete objetos tridimensionales, específicamente el cubo.

Para ello tomamos los aportes de Parzysz (1991) que afirma que las maquetas tridimensionales favorecen la formación de imágenes mentales del objeto y contribuyen a mejorar el nivel de visualización y los cambios de puntos de vista que son indispensables para la resolución de problemas. Retomando sus alcances es que elegimos trabajar con algunos modelos de cubo en material concreto.

Además de eso, Salazar (2009), Cozzolino (2008) y Rosalves (2006) afirman que los ambientes computacionales pueden servir de apoyo en la enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos, en la medida en que posibilitan trabajar de manera interactiva, visual y dinámica. Mencionan también, que la geometría dinámica CABRI 3D; facilita la construcción de objetos tridimensionales y contribuye a explorar diferentes puntos de vista de sus representaciones, mediante su recurso de manipulación directa y el uso de cambio de vista; y además posibilita al estudiante la observación de propiedades y el uso de medidas, animaciones y simulaciones visuales.

Es así que la investigación busca responder a las siguientes preguntas: ¿La enseñanza de las perspectivas y el uso del CABRI 3D pueden ayudar al estudiante a articular diferentes puntos de vista sobre la representación del cubo? ¿El uso del CABRI 3D y las perspectivas disminuyen el conflicto de lo visto y lo sabido de la representación del cubo? Para eso, elaboramos actividades introductorias al CABRI 3D y otras de construcción, para observar la interacción con el CABRI 3D y conjeturar los diferentes puntos de vista de la representación del cubo.

Para responder a las preguntas propuestas, nos basaremos en las etapas de Desarrollo del Pensamiento Geométrico de Parzysz (2001), porque pensamos que esta teoría permite analizar las acciones y las nociones matemáticas, de acuerdo a la naturaleza de materiales a utilizar. Nos basamos también en las investigaciones de lo visto y lo sabido

de Parzysz (1988); ya que lo visto y lo sabido son dos principios adecuados para interpretar las representaciones geométricas; y añadimos el uso del CABRI 3D y de las perspectivas, pues consideramos que disminuyen el conflicto de lo visto y lo sabido de la representación del cubo.

Escogemos como metodología de investigación, aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue et al. (1995) porque esta metodología permite validar o no nuestros supuestos a partir de la confrontación entre los análisis *a priori* y *a posteriori*. En la parte experimental, trabajamos con alumnos de primer grado de Educación Secundaria de una Institución Educativa Estatal de la ciudad de Lima y para la recolección de datos utilizamos además de las actividades, cuestionarios, fichas de observación y grabación de archivos en CABRI 3D.

A continuación, presentamos la estructura del trabajo.

En el primer capítulo presentamos la problemática de la investigación, esto es, estudiamos algunas investigaciones relacionadas a la enseñanza y aprendizaje de la Geometría Espacial, introducimos el cuadro teórico, también presentamos el CABRI 3D y la delimitación de la problemática.

En el segundo capítulo presentamos algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica y los instrumentos de recolección de los datos usados en la investigación.

En el tercer capítulo estudiamos conceptos básicos relacionados con el cubo, los sistemas de representación del cubo y la presentación y representación del cubo en los libros de Educación Básica Regular.

En el último capítulo, describimos el experimento, caracterizamos la elección de los sujetos de estudio, hacemos un estudio diagnóstico, presentamos la secuencia de actividades, como también los análisis *a priori* y *a posteriori* de las mismas. Finalmente presentamos las consideraciones finales del estudio.

CAPÍTULO 1 – LA PROBLEMÁTICA

En este capítulo contextualizamos nuestro tema de investigación argumentando la motivación que nos condujo a su estudio; justificamos las razones que nos condujeron a su estudio, recurriendo luego al fundamento científico, a través de la revisión de artículos e investigaciones para levantar algunos supuestos, la pregunta de investigación y los objetivos de la investigación.

1.1 El problema de la representación plana del cubo

En nuestros años de labor docente en el nivel secundario, hemos constatado las dificultades que tienen los estudiantes de primer grado, al ingresar al tema de poliedro. En el caso del cubo por ejemplo es típico que el alumno hable de los lados de un cubo en vez de mencionar caras o aristas. Además, de observar la indecisión que muestran los estudiantes al realizar representaciones de un objeto tridimensional, siendo un ejemplo común que el estudiante dude al representar un cubo o representar siempre como los prototipos que comúnmente aparecen en los textos de consulta.

A partir de un estudio exploratorio observamos que los estudiantes afirman que: el cubo tiene lados cuadrados, el cubo tiene ángulos rectos, el cubo tiene seis lados iguales; el cubo está formado por cuadrados y por paralelogramos. Además no pueden asociar un cubo con el desarrollo de su superficie correspondiente, dibujar un cubo sin su profundidad (sin líneas punteadas en las aristas posteriores) o mostrar dificultad de dibujarlo cuando lo observan desde ángulos diferentes. Esta situación nos llevó a pensar que la representación plana del cubo podría ser la causa de esta dificultad. Es así, que empezamos a interesarnos por el estudio del cubo y su representación. De aquí que interesados en este tema, buscamos investigaciones que den apoyo científico a nuestro trabajo. Entre los trabajos encontrados tenemos la investigación de; Carvalho et al. (1998 citado por Rosalves, 2006) quien hace mención acerca de la dificultad que afrontan los estudiantes al pasar de la geometría plana a la geometría del espacio;

En general, las relaciones entre las figuras geométricas fundamentales en la geometría espacial son más complejas que las de la geometría plana. El estudio del paralelismo, por ejemplo, que en la geometría plana es reducido al paralelismo entre rectas; en el espacio se complica por el hecho de existir, rectas que no son ni paralelas ni concurrentes y por las relaciones de paralelismo involucrando planos. (Carvalho, et al., 1998, p.161)

De igual modo, Gutiérrez (1998), comenta sobre la importancia que tiene en la geometría, el hecho de incidir en el desarrollo de destrezas y habilidades de los estudiantes al construir poliedros a partir de sus representaciones planas y de realizar e interpretar dichas representaciones; según lo cual afirma que:

Para la enseñanza de la geometría, la habilidad de estudiantes y profesores para producir representaciones planas adecuadas y para interpretarlas es un elemento básico necesario para lograr el éxito en el aprendizaje. Por lo tanto es importante prestar atención al desarrollo de las destrezas de realización e interpretación de representaciones planas de los estudiantes y potenciarlas desde los primeros cursos de primaria, sin olvidar ninguna de las dos direcciones de paso entre el plano y el espacio: dibujo de representaciones planas de sólidos y construcción de sólidos a partir de sus representaciones planas. (Gutiérrez 1998, p. 197).

Nuestra problemática se centra en las dificultades de los estudiantes de primer año de Educación Secundaria, en relación al estudio del cubo y su representación plana.

A continuación, señalamos algunas otras investigaciones en Didáctica de la Matemática que muestran la existencia de las dificultades relacionadas al cubo y su representación, entre estas presentamos las de Parzysz (1988, 1991), Gutiérrez (2006), Blanco (2009), Guillén et al. (1992) y Rosalves (2006).

Parzysz (1988), al realizar estudios con estudiantes de sexto grado (entre 11 y 12 años) afirma que existe la necesidad de establecer reglas explícitas para las representaciones planas de las figuras geométricas del espacio; basándose en los siguientes supuestos:

- Existe una dialéctica entre la adquisición del conocimiento de la geometría espacial y el dominio de sus representaciones gráficas.
- Es obligatorio pasar a través de una fase de uso de modelos. Indica que los estudiantes podrían realizar las representaciones de figuras tridimensionales si tuvieran claramente establecida la imagen mental de dicha figura.

Este estudio se fundamenta en la decodificación (interpretación) y a la codificación (representación) de representaciones planas de figuras tridimensionales.

El investigador concluye que existe la necesidad de hacer las reglas claras y explícitas para las representaciones de las figuras tridimensionales, así como también manejar y dominar conscientemente estas y no ser esclavos de estereotipadas representaciones, impidiendo que su conocimiento progrese.

También, Parzysz (1991) realizó una investigación con estudiantes de Secundaria de 11 a 15 años, con el propósito de averiguar cuál sería una “buena” representación del cubo, proponiéndoles un grupo de representaciones, entre ellas representaciones planas de cubos en perspectiva paralela y central, además de un paralelepípedo en perspectiva paralela; también les pedía justificar sus respuestas. El investigador indica que los estudiantes no reconocen como buenas representaciones a cubos que estaban en perspectiva central ya que argumentan que no los consideran bien dibujados porque: las aristas no tienen la misma longitud, sus aristas no son paralelas, el cubo parece retorcido, etc. Estos resultados lleva al investigador a la conclusión de que en una representación, la preservación del conocimiento relativo al objeto representado es un elemento importante en la manera como los estudiantes se refieren a los sólidos geométricos y sus representaciones.

Además el investigador resalta la necesidad de trabajar con la perspectiva paralela, ya que preserva el paralelismo, la medida, la relación de longitudes en una dirección dada y el tamaño real en cualquier plano paralelo al plano de proyección. Además, menciona que por su gran versatilidad, la dirección de la proyección puede ser ortogonal (vistas), u oblicua (por ejemplo la perspectiva Caballera) como mostramos en la figura 1.

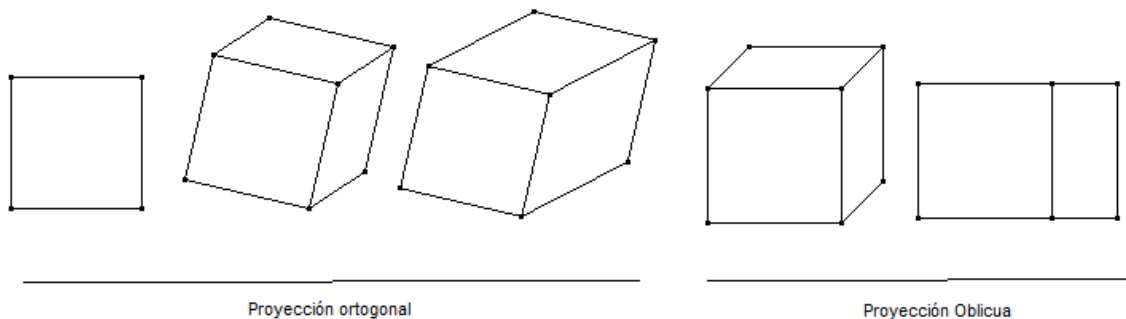


Figura 1. Representaciones planas de cubos en vista ortogonal y oblicua

Fuente: Parzysz (1991, p 590)

Es así que el investigador concluye que la elección hecha por un estudiante de una “buena” proyección, de acuerdo a las restricciones impuestas y a la clase (nivel) de problema a resolver, puede así ser un elemento importante en su solución y debería ser tomada en consideración.

En la presente investigación tomamos los aportes de Parzysz (1988, 1991) ya que concordamos con el investigador en que debemos tener presente que una representación debe preservar las propiedades del objeto a representar; en este sentido encontramos de suma importancia el uso de la perspectiva paralela y específicamente la perspectiva

Caballera para la realización de nuestras actividades en la representación plana del cubo.

De otra parte, tenemos los aportes de Gutiérrez (2006), que muestra en su estudio las diferentes formas de representación plana de figuras tridimensionales usados en los textos de consulta entre ellos el investigador señala: proyección en perspectiva, paralela e isométrica.

La representación en perspectiva corresponde a lo que vemos cuando miramos al objeto o cuando lo fotografiamos. Los objetos se representan más pequeños cuando están más lejos del observador y las líneas paralelas que se alejan se dibujan convergentes.

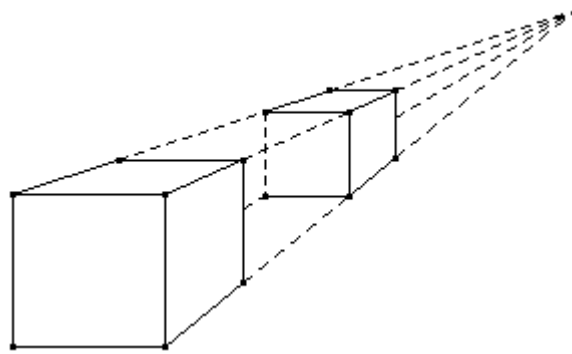


Figura 2. Representación del cubo en perspectiva

Fuente: Adaptado de Gutiérrez (2006, p. 32)

La representación en paralela: Se mantiene el paralelismo en cualquier dirección y los objetos se ven con el mismo tal como son a cualquier distancia. Esta forma de representación es la más habitual cuando se trabaja en geometría espacial en los textos de Primaria y de Secundaria.

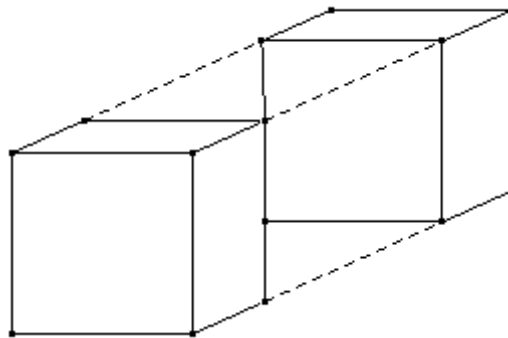


Figura 3. El cubo en representación paralela

Fuente: Adaptado de Gutiérrez (2006, p. 32)

La representación Isométrica, de acuerdo con Gutiérrez (2006) se basa en una trama de puntos que forma triángulos equiláteros y los vértices de los poliedros deben coincidir con los puntos de la trama.

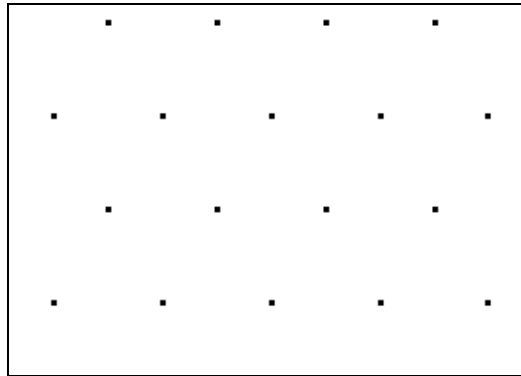


Figura 4. Trama de puntos que forma triángulos equiláteros

Fuente: Gutiérrez (2006, p. 33)

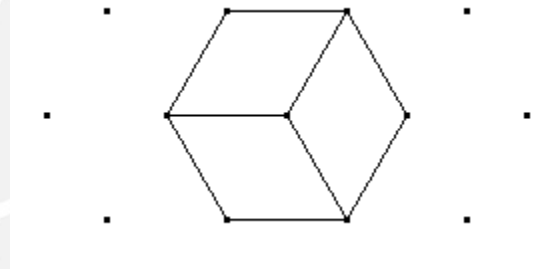


Figura 5. El cubo en representación Isométrica

Fuente: Gutiérrez (2006, p. 33)

El autor además menciona, que cuando un individuo ve una representación plana y la interpreta, para decidir qué cuerpo está representado, se hace imprescindible que los observadores estén de acuerdo en usar las mismas reglas de codificación (representación) y decodificación (interpretación), pues en caso contrario, la reconstrucción del poliedro puede ser errónea. Además, el investigador afirma que, siempre que se hace una representación plana de un cuerpo tridimensional, parte de la información sobre este cuerpo pasa de estar explícita a estar implícita en la representación, o en muchos casos a perderse del todo. Finalmente concluye, que por estudios realizados con alumnos entre 12 y 13 años, la representación en paralela aparece como la más adecuada para estudiantes de educación Secundaria, porque éstos consideran más importante la conservación en las representaciones planas de

propiedades geométricas (paralelismo, igualdad de longitudes, etc.) que el realismo de la representación.

En nuestra investigación tomamos en cuenta los aportes de Gutiérrez (2006) en cuanto a las diversas formas de representación, centrándonos en los tres tipos de representación que menciona.

Siguiendo esa misma línea de pensamiento Blanco (2009), menciona:

En las clases de geometría, tratando de mejorar la comprensión de los conceptos enseñados, se dan ejemplos modelizadores de esos conceptos (figuras tipo o prototipos), que si bien son necesarios, tienen sus ventajas y desventajas. Esos ejemplos presentados de manera recurrente se han incorporado en los estudiantes y muchas veces se transforman en obstáculos para construir apropiadamente el concepto. (p. 87).

La afirmación de la investigadora podría ser una explicación de una de las dificultades encontrada en nuestros alumnos, por la cual siempre tienden a representar el cubo como lo presentan los textos de consulta.

La autora, realiza su investigación con estudiantes de Educación Superior, explora la influencia de perspectiva (Caballera, con puntos de fuga e isométrica) en relación a la visualización de figuras tridimensionales y concluye que para lograr el concepto de cubicidad, es necesario conocer y ser capaz de imaginar y visualizar (en sus dos interpretaciones: como proceso mental y como competencia para construir conocimiento) el cubo en cualquier posición, pudiendo así conocer todas sus propiedades. La investigadora recomienda buscar estrategias para crear en los estudiantes la necesidad de utilizar la perspectiva en sus trabajos; ayudándose con material concreto o con la utilización de recursos tecnológicos. Estas recomendaciones son las que tomamos en nuestra investigación; es decir que el estudiante note que el cubo no solo puede ser representado como lo presentan figuras prototípicas; sino que puede ser representado en otras formas y otras vistas; utilizando recursos tecnológicos, específicamente el CABRI 3D al identificar sus características y propiedades.

Por su parte, Guillén et al. (1992) indican que uno de los problemas que aparecen cuando se estudia poliedros reside en el hecho de que estos son objetos tridimensionales y se tiene que comprender su representación y su descripción; dado que cualquier representación bidimensional de un objeto tridimensional implica la distorsión de algunas de las propiedades del objeto; También afirma que la comprensión de las

representaciones requiere visión espacial y el conocimiento de convenciones que se utilizan, en el paso de la representación al modelo y viceversa.

Guillén et al.(1992) investigan las representaciones planas de objetos tridimensionales (diferentes clases de poliedros) usando material concreto, fotos y el uso de software. Desarrollan su estudio con estudiantes de 6 ° grado de Educación General Básica en Valencia (entre 10 y 11 años de edad); llegando a la conclusión que existen representaciones que a los estudiantes les resultan más difíciles que otras y que la facilidad del manejo de los poliedros está en relación inversa a la calidad de las destrezas de visualización requeridas para resolver correctamente y de manera eficaz los problemas.

El trabajo de estos investigadores nos ayudará en nuestra tesis en cuanto a la variedad de actividades de comparación, movimiento, representación y construcción de sólidos y al uso de material concreto (cubos de varillas), uso de software (en nuestro caso el CABRI 3D) y el uso de material impreso (fotos) con respecto a la representación plana del cubo.

Por otra parte, Rosalves (2006) realiza una investigación acerca de las relaciones entre los polos de lo visto y lo sabido de las figuras tridimensionales y sus representaciones planas. La investigación se realizó con estudiantes de 3° serie de Enseñanza Media (entre 15 a 16 años) utilizó el software CABRI 3D. En este trabajo la autora analiza los polos de lo visto y lo sabido, tomando como referencia las investigaciones de Parzysz(1988; 1991) en las interacciones de los estudiantes con las herramientas y representaciones de objetos tridimensionales del CABRI 3D y con el uso de lápiz y papel; parte del supuesto que la interacción con el CABRI 3D podría acrecentar elementos perceptivos pertinentes a una situación (permitiendo ver mejor), lo que resultaría en una mejor codificación y decodificación de objetos espaciales por parte de los estudiantes. Concluye que tanto con lápiz y papel como utilizando el CABRI 3D, los estudiantes privilegiaron el polo de lo visto; siendo ese “visto” no el mismo en los dos ambientes. Es así que la autora afirma que las actividades realizadas con CABRI 3D posibilitan a los estudiantes un contacto con ciertas propiedades geométricas, con la formulación de conjeturas por medio de verificación experimental y empírica y con la movilización de elementos perceptivos importantes en el análisis de una situación tridimensional, muchas veces ocultos en el ambiente de lápiz y papel.

Los alcances de esta investigación son de nuestro interés, ya que una de las dificultades que la hacen emprender su estudio (dificultades al pasar de la geometría plana a la geometría espacial, al igual que relaciones entre los objetos geométricos y sus representaciones planas); es común a las que presentan nuestros estudiantes. De esta investigación reformularemos algunas de las actividades elaboradas, adaptándolas a nuestra realidad e intereses de investigación, además de utilizar el mismo marco teórico y el uso del CABRI 3D; ya que consideramos contribuirán a direccionar nuestra investigación.

En esta misma dirección de pensamiento encontramos los aportes de Cozzolino (2008) quien desarrolló su investigación con alumnos de segundo y tercer grado de enseñanza media (13 y 14 años) en cuanto a la enseñanza de la perspectiva usando material concreto (fotografías y láminas) y el software CABRI 3D. En su investigación la autora concluyó que los estudiantes articularon diferentes puntos de vista, tanto en el ambiente de lápiz y papel y en el ambiente de geometría dinámica CABRI 3D.

La investigación de Cozzolino nos guiará el desarrollo de nuestro trabajo, tanto en el uso del referencial teórico, en el uso de la perspectiva en la representación del cubo y en cuanto a los recursos que proporciona el software CABRI 3D. Además reformularemos algunas de sus actividades que consideramos pertinentes para nuestro trabajo.

En cuanto a la utilización del CABRI 3D, contamos además con la investigación de Salazar (2009) realizada con estudiantes del nivel secundario (15-16 años) en el que concluye que el CABRI 3D puede contribuir como un recurso didáctico en la enseñanza de geometría espacial; ya que permite visualizar, manipular, conjeturar y representar objetos espaciales.

Tomamos los aportes de la autora, en lo referente al uso del CABRI 3D, y las opciones de manipulación directa (arrastre) y los diferentes puntos de vista que el software posee, los cuales ayudará a ver los diferentes puntos de vista de la representación del cubo.

Es así que a seguir se hace necesario presentar los aspectos teóricos en los que nos basaremos para este estudio.

1.2 Aspectos teóricos

El fundamento teórico de la tesis son los estudios de lo visto y lo sabido y las Etapas de Desarrollo del Pensamiento Geométrico de Parzysz (1988; 2001).

Los polos de lo visto y de lo sabido

Parzysz (1988) utiliza el término *figura* para referirse a los objetos geométricos con la descripción de sus propiedades y llama *ilustración o diseño* a la representación plana o representación gráfica en el plano bidimensional de la figura. El investigador realiza trabajos experimentales con alumnos entre 11 y 12 años y afirma que existe una pérdida de información cuando pasamos un objeto tridimensional a su representación plana. Similarmente, cuando interpretamos la representación plana de un objeto tridimensional se tiende a considerar propiedades de la representación plana como propiedades del objeto en sí mismo.

El autor sostiene que dicha situación lleva a un conflicto que llama: conflicto de “lo sabido” y “lo visto”; relacionándolo con la codificación y la decodificación, que explicaremos más adelante. Además, distingue dos niveles de representaciones: próximas y distantes.

- **Nivel 01** (Representaciones próximas): son las representaciones de los objetos en su forma concreta. Por ejemplo, la representación de un cubo hecho en madera, representación de un cubo hecho con varitas, etc. En general las representaciones próximas de las figuras pueden ser:
 - Bidimensionales o 2D (diseños o dibujos) en el caso que la figura pertenezca al campo de la geometría plana. Por ejemplo el dibujo de un cuadrado.
 - Tridimensionales o 3D (maquetas) si ellas pertenecen al campo de la geometría espacial. Por ejemplo un cubo construido en material transparente.
- **Nivel 02** (Representaciones distantes): La dimensión de la representación es inferior a la dimensión propia de la figura. Por ejemplo la representación de un cubo de varitas, en una hoja de papel es de dimensión dos.

Observación: El representa el nivel 0 (como figuras para todos los objetos geométricos, sea en el plano y en el espacio) como una referencia, centrándose en los niveles uno y dos.

Parzysz (1988) afirma que hay necesariamente una pérdida de información cuando se pasa del nivel 01 al nivel 02.

En el siguiente cuadro, ilustra esta afirmación:

Cuadro 1. Relaciones entre figuras y sus representaciones

		GEOMETRIA	
		2D(Plana)	3D(Espacio)
Nivel 0		Figuras	
Representaciones próximas	Nivel 1	Dibujos	Maquetas
Representaciones distantes	Nivel 2	-----	Dibujos

Fuente: Parzysz (1988, p.80)

Explica que todo no puede ser mostrado sobre una representación; apareciendo algunas propiedades de la representación, gracias a un buen entendedor que complementa el significado (al cual llama restitución del significado). Así la restitución de significado no podría suceder sin una conveniencia entre el que transmite la información y el que la recibe, siendo esto posible de haber una cultura geométrica común.

Por ejemplo, Parzysz afirma que, del nivel 0 al nivel 1 algunas figuras no son representables porque ellas son ilimitadas (línea recta, plano) es así que son reemplazadas por partes limitadas convencionalmente.

Del nivel 0 al nivel 2 trata sobre los dibujos representativos de figuras tridimensionales. La relación entre un objeto y su representación es aún más compleja que en el caso de la geometría plana y frecuentemente resulta más difícil deducir las propiedades de objeto tridimensional a partir de su representación. Por ejemplo al mirar el diseño de un cuadrado y sus diagonales, se puede deducir que se cortan perpendicularmente; pero si al mirar el diseño de una pirámide cuadrangular recta, queremos deducir que su altura es perpendicular a la base donde se cortan las diagonales, difícilmente lo podemos conjeturar a no ser que se traiga a la mente una representación cercana del modelo o, de otro lado, ya nos sea familiar las propiedades de los objetos tridimensionales. En conclusión, el diseño no puede sustituir a la figura en sí misma, es decir que existe una

pérdida de información. La figura 6 muestra las ilustraciones con las que el autor deduce su afirmación.

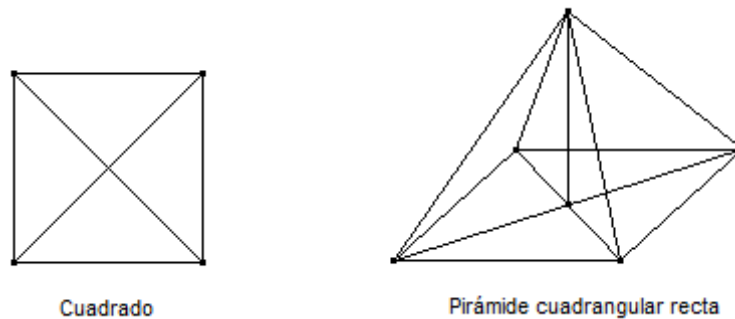


Figura 06. Cuadrado y pirámide cuadrangular

Fuente: Parzysz 1988 p. 82

Parzysz (1988) afirma que en las representaciones de los objetos tridimensionales (distantes) surgen dos problemas que están siempre presentes cuando una comunicación gráfica está en juego: codificar y decodificar los objetos geométricos. Esos problemas tienen como origen las siguientes razones:

- No contar con una representación próxima;
- La consecuente pérdida de informaciones adicionales del objeto geométrico.

En la *decodificación* (interpretación de una representación gráfica de un objeto tridimensional) el sujeto puede confundir el diseño de una figura de 3D como de 2D con una misma representación; es decir es una identificación inconsciente tendiendo a considerar a la ilustración como una representación próxima del objeto. Parzysz experimentó dicho problema pidiendo a sus estudiantes de 12 y 13 años que interpreten si tres puntos pertenecen a un plano P, en el experimento dos puntos estaban ubicados fuera de la representación convencional de un paralelogramo. Parzysz (1988) afirma que teóricamente (teniendo en cuenta la definición de plano), es imposible afirmar si un determinado punto pertenece al plano P o no. En este caso, si la representación del punto es interior (exterior) a la representación del plano, el punto es visto como perteneciente (fuera) al plano. Los resultados de la actividad muestran que los estudiantes tienen esa interpretación: la ilustración como una representación próxima del objeto. La figura 7 muestra el plano P y los puntos A, B, y C con los que el investigador realiza su experimento.

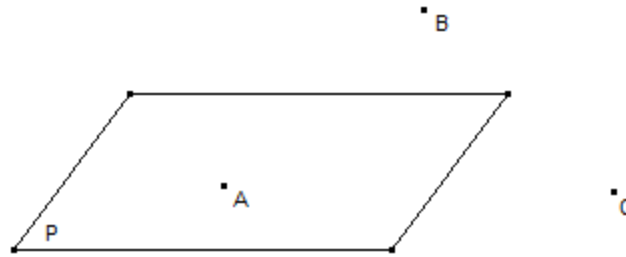


Figura 07. Plano P y puntos A, B y C

Fuente: Parzysz (1988) p. 83

En cuanto a la decodificación de los objetos geométricos el autor destaca tres etapas fundamentales y sucesivas:

- 1^a) Saber que se trata ciertamente de un objeto geométrico
- 2^a) Saber cuál es la codificación
- 3^a) Saber utilizar la decodificación correspondiente

En la *codificación* (elaboración de una representación gráfica), Parzysz (1988) lleva en cuenta las siguientes consideraciones:

- 1^a) El tipo de representación que estará en evidencia (perspectiva paralela, perspectiva central, geometría descriptiva).
- 2^a) La elección de los elementos de proyecciones (por ejemplo la elección de una perspectiva Caballera o Isométrica en la perspectiva paralela).
- 3^a) Los parámetros de esas representaciones (por ejemplo el punto de fuga en la perspectiva central, o el coeficiente de reducción en la perspectiva isométrica).
- 4^a) Las pérdidas de informaciones al pasar a dos dimensiones por medio de las proyecciones.

El que transmite la información esta confrontado por un insoluble dilema, debido al hecho de que lo que sabe entra en conflicto con lo que se ve. Parzysz (1988) experimentó dicho problema pidiendo a sus estudiantes entre 12 y 13 años que dibujaran una pirámide regular de base cuadrada de la cual mostró y describió sus características; de un total de 88 estudiantes participantes, sólo 2 estudiantes tuvieron una precisa representación (como altura coincidiendo con la intersección de las diagonales de la base) entre los 18 que lograron acercarse e ir por un buen camino. Esto

muestra que las propiedades de la pirámide de base cuadrada no son del todo evidentes para los estudiantes y el dibujo no puede por sí solo sustituir al objeto. Entre sus conclusiones, el autor menciona que los estudiantes no hacen elecciones consientes y deliberadas de una perspectiva; es así que afirma que los resultados muestran que:

- Existe una lógica entre la adquisición de conocimientos en geometría espacial y el dominio de representaciones tridimensionales.
- Es necesario abandonar una parte de las propiedades geométricas, en la representación gráfica de objetos espaciales.
- Una representación tridimensional es como un modelo de un objeto y el estudiante debe tener ese hábito de lectura.
- Es necesario dar un estatus claro, consistente y explícito a las ilustraciones de geometría espacial.

Para otra parte, para Parzysz (1988) lo “visto” y lo “sabido” son dos principios adecuados para interpretar los diseños geométricos. Es así que el autor explica que el **polo de lo visto**, consiste en representar un objeto tal cual se presenta ante los ojos del sujeto, basado en su observación e imagen visual y el **polo de lo sabido**, consiste en representar las propiedades y las relaciones del objeto que el sujeto juzga importantes.

La representación de una ilustración por cualquier medio (codificación) implica la necesidad de escoger propiedades que se desea ver representadas, o sea colocándose antes del lado del “saber” que del lado de “ver”.

Con relación a la interpretación de una ilustración identificada como un objeto tridimensional (decodificación), el autor comprobó con sus estudiantes al interpretar la pertenencia de tres puntos en el plano, que los dos polos son difícilmente dissociables, como consecuencia de una influencia recíproca de los aspectos perceptivos y cognitivos (lo que sabe del objeto tridimensional entra en conflicto con la ilustración que ve de ese objeto).

De otra parte, según Parzysz (1991) al igual que en sus demás investigaciones, tiene por objetivo, puntualizar e investigar algunos medios para dotar a los estudiantes de la enseñanza media de una mayor eficacia en la resolución de problemas de la Geometría Espacial. Según este autor, en la enseñanza de la geometría espacial, en escuelas francesas, son utilizadas referencias gráficas de objetos que tienen como única función ilustrar. Estos diseños son en general estereotipados y no poseen (o no adquieren), estatus matemático (se ilustra pero no se explica las razones por la cual se toma así)

ellos contienen convenciones implícitas. Según el autor, esas convenciones pueden beneficiar la revelación de concepciones erróneas; en el caso que ellas no sean dominadas por los estudiantes. Parzysz propone que al menos en un primer momento la utilización sistemática con un material concreto tridimensional y en otro momento un aprendizaje explícito de un sistema de representación plana del espacio.

La Perspectiva Paralela fue elegida, por Parzysz (1991), entre los principales sistemas existentes, no por estar de acuerdo con la tradición y con la práctica; sino como consecuencia de resultados de investigaciones anteriores Parzysz (1991). Este trabajo promovió efectos que demostraron una correcta aplicación de los conocimientos relativos a los objetos geométricos, como aquellos referentes al sistema de representación gráfica.

Como su objeto de estudio y problemática, Parzysz (1991) toma: el dominio de las realizaciones materiales, dominio de las figuras geométricas como modelización del espacio físico y el dominio de las representaciones gráficas. Indica además tres objetos concernientes al aprendizaje: el desarrollo de habilidades espaciales, la elaboración de un sistema de reglas geométricas que permitan trabajar sobre un modelo y por fin codificar y decodificar las construcciones.

Su investigación apunta:

- Un conflicto entre lo visto y lo sabido: lo que el autor llama *hábitos perceptivos* son referencias implícitas o puntos de vista habituales.
- El principio de la transferencia de propiedades, reconocer las propiedades geométricas en la representación de un objeto tridimensional.

Como hipótesis fundamentales, Parzysz (1991) indica:

- Un aprendizaje explícito de un sistema de representación gráfica de los objetos de la geometría del espacio

Como existen varios sistemas de representación gráfica del espacio, como la geometría descriptiva, la perspectiva Cónica, la lineal entre otras, el autor tiene su preocupación con los peligros de una utilización, de no controlar la transferencia de propiedades lo que puede llevar a incoherencias en la representación y para eso es necesario un sistema que sea coherente y explícito. El autor afirma que, entre varios sistemas, el que resulta de un mayor nivel de preservación de la construcción, es la enseñanza de la perspectiva

paralela, ya que ofrece ventajas por conservar más propiedades que las otras perspectivas.

- La utilización de maquetas tridimensionales.

No solamente las representaciones gráficas; sino también las maquetas tridimensionales favorecen la formación de imágenes mentales del objeto, contribuyen a mejorar el nivel de visualización y los cambios de puntos de vista que son indispensables para la resolución de problemas espaciales.

Como conclusión, Parzysz (1991) indica que, la construcción en perspectiva paralela (específicamente la Caballera) está bien adaptada al aprendizaje de la geometría del espacio en la educación secundaria y también en la resolución de problemas. Y según él, es importante valorar estos aspectos y no como frecuentemente se suele utilizar, como una simple ilustración sin sentido para el estudiante. El buen uso de esta herramienta necesita un aprendizaje específico (control de la transferencia de propiedades) de otra manera pierde una gran parte de su eficiencia (cayendo en incoherencias). Además, puntualiza que el uso de las maquetas tienen una relevancia positiva en la formación de imágenes mentales del objeto.

En nuestro trabajo, tomamos como base los aspectos explicados anteriormente para analizar las actividades planteadas a los estudiantes, por ejemplo, situaciones en las que intervengan: representación de cubos en material concreto y representaciones planas de cubos.

A continuación presentamos las etapas del desarrollo del pensamiento geométrico según Parzysz (2001).

Etapas del desarrollo del pensamiento geométrico

El investigador propone un modelo teórico para la enseñanza de la geometría con cuatro etapas de desarrollo del pensamiento geométrico.

Los elementos sobre los que se basa este modelo son, en primer lugar, la naturaleza de los objetos en juego (físicos versus teóricos), y por otra parte los modos de validación (perceptual versus hipotético-deductivo). Así,

Geometría concreta (G_0): Se parte de la realidad, de lo concreto y los objetos son materiales. Por ejemplo: observar las características de la representación de un cubo

construido en varitas (asumiendo que tiene caras transparentes), como mostramos en la figura 8.



Figura 8. Cubo construido en varitas

Geometría espacio-gráfica (G_1): Es la geometría de representaciones figurales y gráficas; en este nivel los objetos son bidimensionales, como por ejemplo, dibujos del cubo hechos en papel. La justificación de las propiedades del cubo podría ser hecha por lo que se “ve”

Por ejemplo cuando en una actividad (ver figura 9) se pide deducir si las rectas r y s que se encuentran en las aristas del cubo se intersectan.

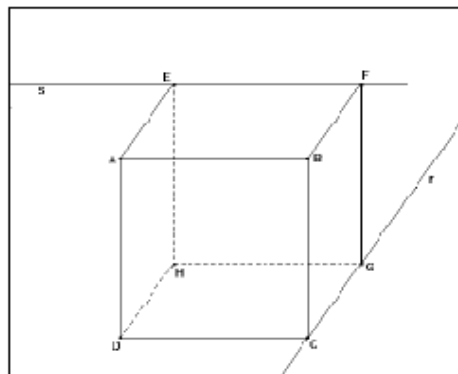


Figura 9. Ilustración de un cubo.

Fuente: Rosalves (2006, p. 29)

Geometría pro-axiomática (G_2): los conceptos son objetos teóricos y las demostraciones de los teoremas son hechas a partir de premisas aceptadas por los estudiantes de manera intuitiva. Por ejemplo, que el estudiante entienda que el cubo tiene diagonales cuya longitud depende de su arista.

Geometría axiomática (G_3): Llamada etapa axiomática. Los axiomas son explicados completamente.

Por ejemplo, demostrar la diagonal del cubo en función de sus aristas y justificar uno a uno sus pasos.

En nuestra investigación, elaboraremos actividades que nos permitan deducir por lo menos las dos primeras etapas, pues tenemos el objetivo de trabajar con materiales concretos y con el CABRI 3D.



1.3. La geometría dinámica y el software CABRI 3D

Según Santos (2006) y Salazar (2009) la geometría dinámica despierta en los estudiantes, los aspectos exploratorios y estratégicos a lo largo de sus construcciones geométricas, ayuda a que ellos analicen las propiedades geométricas. Además de promover cambios en el aprendizaje de la geometría, ya que abre la posibilidad para que los estudiantes construyan y exploren figuras y establezcan relaciones entre ellas.

Optamos por la elección del software CABRI 3D entre otros (Geogebra 5.0 beta, Poly Pro, Wiris) porque atiende a nuestras expectativas, ya que buscamos favorecer la exploración de cambios de puntos de vista de objetos tridimensionales construidos por los estudiantes. Además porque este software permite construir, visualizar y manipular todo tipo de objetos tridimensionales; además de tener un cuadro de posibilidades de cambio en el tipo de perspectiva, posibilita el cambio de textura de las caras de los sólidos, planos, rectas, entre otras facilidades. También, el CABRI 3D favorece la exploración de figuras construidas basadas en varios puntos de vista del observador.

Por otra parte, consideramos importante mencionar los aportes de Mithalal (2010) quien señala que usando ambientes informáticos en la geometría 3D, los estudiantes podrían conseguir más información visual. Menciona además que un estudio experimental realizado con alumnos (entre 15 y 16 años) le permite afirmar que el poder de manipulación del CABRI 3D, ayuda a cambiar el punto de vista de las representaciones, tomándolas como modelos, contribuyendo así para que el estudiante, lea informaciones más fácilmente; lo cual no es posible hacerlo suficientemente si dichas representaciones permanecen estáticas. En este sentido, podríamos mencionar que la capacidad de manipulación de construcciones del CABRI 3D agrega informaciones que la representación estática no da. A seguir explicamos algunas características del CABRI 3D.

Al abrir el CABRI 3D, encontramos el plano base, dentro o fuera de él, se pueden crear puntos, rectas, planos y demás objetos. El software trae herramientas que permiten construir otros objetos; ocultar y mostrar objetos previamente construidos; revisar todos los pasos de construcción de una figura; modificar el aspecto de los objetos como colores y espesura, entre otras.

De las herramientas que hacen parte de este software CABRI 3D, mostramos a seguir, un resumen de barra de herramientas específicamente las herramientas que usarán nuestros estudiantes en la investigación.



Figura 10. Menú 1 del CABRI 3D

Cada menú del CABRI 3D posee una pantalla de ayuda que puede aparecer recurriendo a la tecla F1. Para esta primera opción del menú, la pantalla de ayuda es:

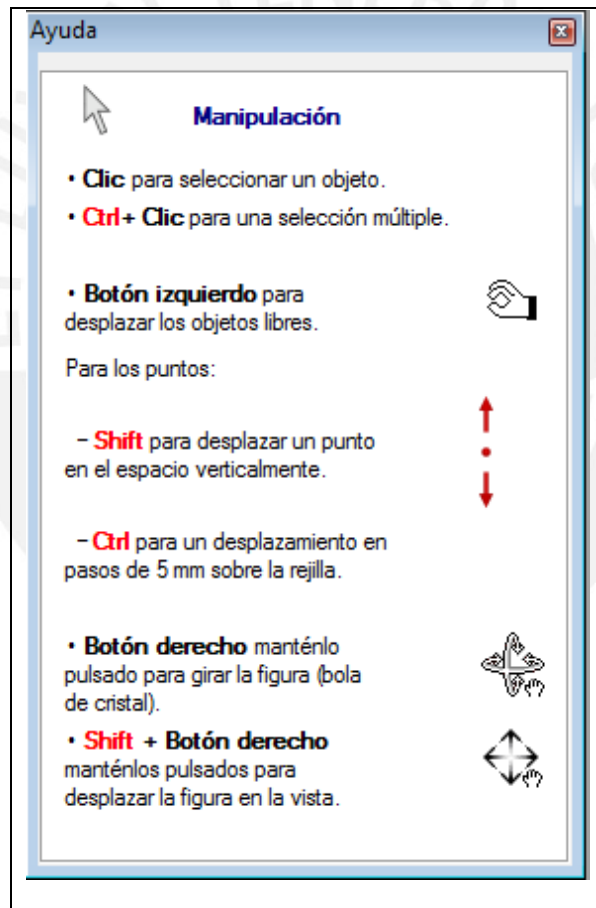


Figura 11. Pantalla de ayuda del menú 1

A continuación la figura 12 resume la barras de herramientas del CABRI 3D a utilizar por nuestros estudiantes.

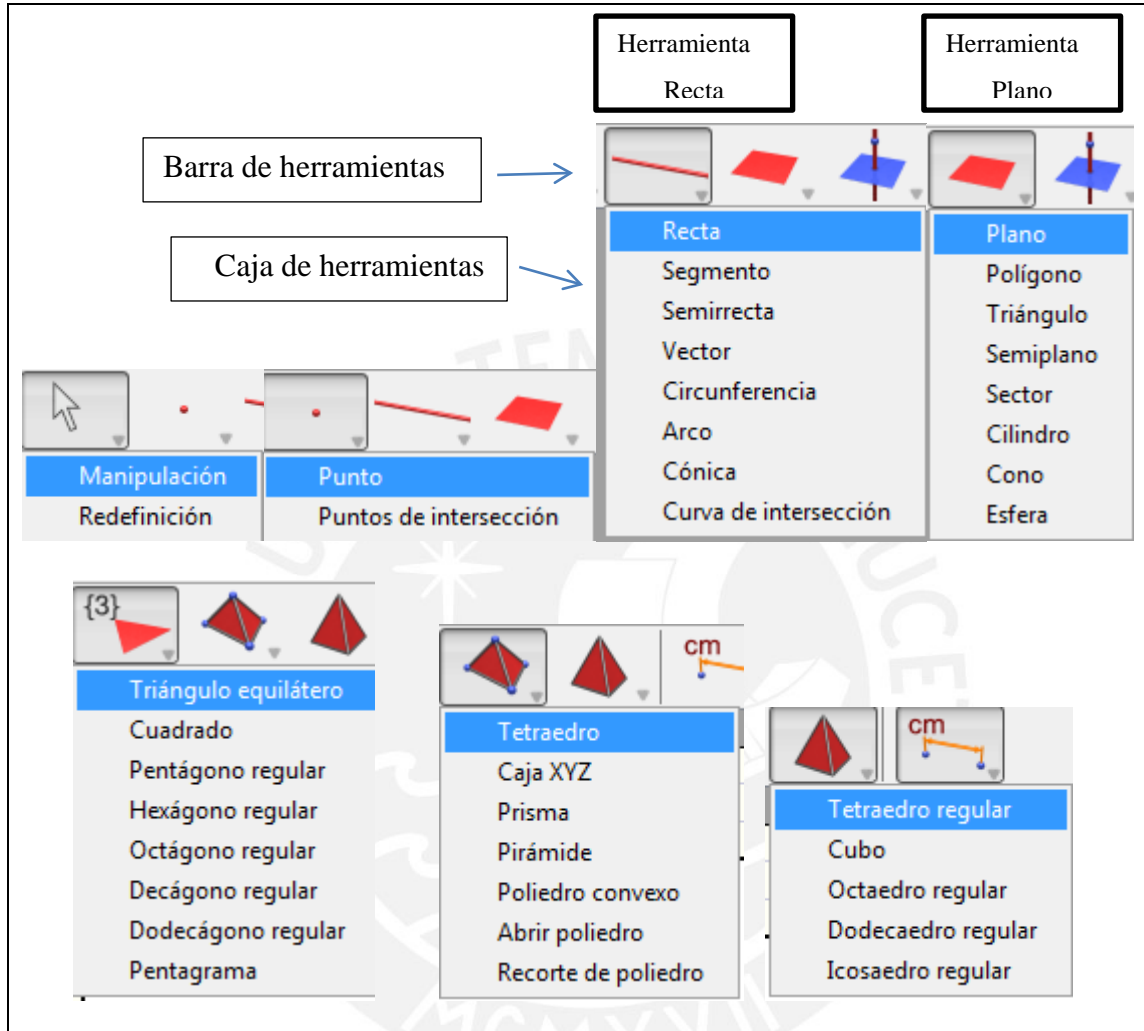


Figura 12. Herramientas del CABRI 3D

La pantalla inicial del CABRI 3D trae un plano base y tres vectores concurrentes en el plano de base.

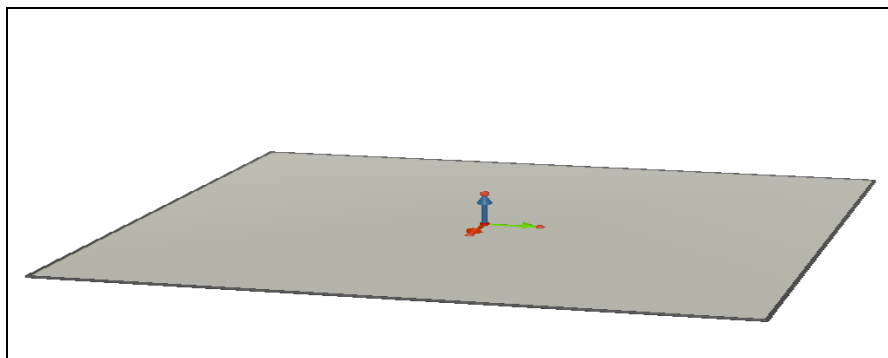


Figura 13. Pantalla inicial del CABRI 3D

Para nuestro trabajo, elaboramos dos tipos de actividades: de familiarización y construcción/exploración con el CABRI 3D. Debemos mencionar también, que a pesar que el Software se presenta en perspectiva; buscaremos que el estudiante diferencie entre el objeto cubo (ubicado en el plano base) y su representación (proyección en un plano perpendicular al plano base). Los cambios de puntos de vista serán explorados manualmente con el botón derecho del mouse.



1.4 Delimitación de la problemática

Nuestro problema de investigación que se centra en la dificultad que tienen nuestros estudiantes para identificar las características del cubo y sus diferentes representaciones. También planteamos la pregunta de investigación y los objetivos de investigación.

Frente a dificultades de los estudiantes de primer grado de Educación Secundaria (11 a 13 años), detectadas en nuestra labor docente a lo largo de años, como son: la identificación de las características del cubo (mencionar por ejemplo que el cubo tiene lados cuadrados, el cubo tiene seis lados iguales, el cubo está formado por cuadrados y paralelogramos), dificultad al asociar el cubo con el desarrollo de su superficie y mostrar dudas al realizar su representación plana (no identificar los puntos de vista desde la cual ven su representación, representarlo como comúnmente lo presentan los libros de consulta); nos interesamos por revisar investigaciones en Didáctica de la Matemática como las de Gutiérrez (1998; 2006), Parzysz (1988; 1991), Blanco (2009), Cozzolino (2008) y Rosalves (2006); encontrando que destacan dificultades comunes a las nuestras que sintetizamos a continuación:

- Dificultad en comprender las relaciones entre las figuras geométricas fundamentales en la geometría espacial, como planos secantes, rectas alabeadas entre otras.
- Los estudiantes tienen dificultades con la representación de objetos espaciales en el plano, como por ejemplo con respecto a los poliedros, en lo que se refiere a su representación y a su interpretación.
- La necesidad de trabajar en el primer año de Educación Secundaria, los principios de la representación plana de figuras espaciales.
- La representación no siempre es utilizada y sirve apenas como mera ilustración.

Por ello pensamos que es necesario y relevante el estudio del cubo y su representación, en el primer año de Educación Secundaria.

En nuestro trabajo tomamos los aportes de Parzysz (1988, 1991 y 2001) en cuanto a la influencia de “lo visto” y “lo sabido” y las representaciones planas de objetos tridimensionales y la perspectiva Caballera; que consideramos nos ayudarán a intentar disminuir la dificultad de la representación del cubo.

La pertinencia de este trabajo se fundamenta en el Diseño Curricular básico DCN (2008) que en cuanto a la componente de Geometría y medición, señala;

[...] Se relaciona con el análisis de las propiedades, los atributos y las relaciones entre objetos de dos y tres dimensiones. Se trata de visualizar objetos tridimensionales desde diferentes perspectivas y analizar sus secciones transversales. (DCN, p.318).

Sin embargo, las dificultades que presentan los estudiantes, al hablar de lados en un cubo y no poder representar un cubo en el plano bidimensional, son evidencia que no se consigue alcanzar esta capacidad.

Además, encontramos que en el documento de Orientaciones para el Trabajo Pedagógico OTP (2007) menciona:

La visualización espacial, esto es, construir y manipular mentalmente representaciones de objetos de dos y tres dimensiones y percibir un objeto desde perspectivas diferentes, es un aspecto importante del pensamiento geométrico (OTP, p. 30).

Dicha afirmación muestra lo importante que es que el estudiante manipule la representación de un objeto geométrico desde diferentes vistas.

El mismo documento OTP también afirma:

[...]La tecnología desempeña también un papel importante en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Herramientas como un programa informático de “Geometría dinámica”, capacitan para modelizar una gran variedad de figuras de dos dimensiones y para tener una experiencia interactiva con ellas. La visualización y el razonamiento espacial se enriquecen mediante la interacción con animaciones de ordenador y en otros contextos tecnológicos (p. 30).

Esta afirmación abre el camino para relacionar la representación de objetos tridimensionales con la utilización de software de geometría dinámica; buscando que nuestros estudiantes desarrollen su razonamiento espacial y sean capaces de generar ejemplos como un medio de establecer y explorar conjeturas.

De otro lado, abordamos como marco referencial, las etapas de desarrollo del pensamiento geométrico de Parzysz (2001); ya que dichas etapas contribuirán en el análisis del cubo y su representación, por la variedad de material que utilizaremos como material concreto (maquetas), lápiz y papel y el software CABRI 3D.

Pensamos que el uso de un ambiente diferente al del lápiz y papel, como el CABRI 3D, permitirá al profesor observar de qué manera los estudiantes identifican las características del cubo y explora su representación.

Por lo expuesto anteriormente, nos planteamos las siguientes preguntas de investigación

Pregunta de investigación

- ¿La enseñanza de las perspectivas y el uso del CABRI 3D pueden ayudar al estudiante a articular diferentes puntos de vista sobre la representación del cubo?
- ¿El uso de las perspectivas y del CABRI 3D disminuyen el conflicto de lo visto y lo sabido de la representación del cubo?

De la formulación anterior, se desprende el siguiente objetivo de la investigación:

Objetivo general

Analizar el uso de las perspectivas y el CABRI 3D en la disminución del conflicto de lo visto y lo sabido de la representación del cubo.

Para alcanzar el objetivo general pretendemos lograr los siguientes objetivos específicos:

Objetivos específicos

- Evaluar el desarrollo de las etapas del pensamiento geométrico de los estudiantes al representar el cubo.
- Explorar la construcción de las perspectivas Caballera, Cónica e Isométrica en la representación del cubo, usando material concreto y el software CABRI 3D.
- Analizar la relación de lo visto y lo sabido al usar las perspectivas y el CABRI 3D en la representación del cubo.

En el siguiente capítulo abordaremos acerca de nuestra metodología de investigación; además mencionaremos los procedimientos a seguir en este trabajo.

CAPÍTULO 2 – ASPECTOS DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA E INSTRUMENTOS DE COLECTA DE DATOS

Para orientar nuestro estudio y buscar responder a nuestra pregunta de investigación, utilizamos los aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue et al. (1995), también presentamos los instrumentos que contribuirán con observador durante el recojo de los datos de la parte experimental.

2.1 Aspectos de la Ingeniería Didáctica

Artigue et al. (1995) menciona que la Ingeniería Didáctica se caracteriza por un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase; es decir sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. La ingeniería didáctica se ubica en el registro de los estudios de caso y su validación es en esencia interna, y está basada en la confrontación entre lo que se planificó y lo que realmente sucedió en clase.

La investigadora señala que en la Ingeniería Didáctica se distinguen las siguientes fases:

FASE 1: Los análisis preliminares

Según Artigue et al. (1995), en los análisis preliminares se debe tener presente:

- *El análisis epistemológico* de los contenidos contemplados en la enseñanza
- *El análisis didáctico*, referente a la enseñanza tradicional y sus efectos
- *El análisis cognitivo*, referente a de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución
- *El análisis del campo de restricciones*, donde se va a situar la realización didáctica efectiva

Todo lo anterior se realiza teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación

En relación a nuestra investigación; en cuanto a la *dimensión epistemológica*; hacemos el estudio del cubo, para así dar una mirada del saber en la geometría tridimensional. De otro lado, realizamos un estudio de los sistemas de representación plana.

En la *dimensión didáctica*; analizamos el estudio del cubo y su representación plana en los textos de consulta; también analizamos el logro de la competencia según el DCN. Además tomamos los aportes de Gutiérrez (1998, 2006), Guillén (1992) en cuanto a factores que interfieren en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la representación del cubo.

En la *dimensión cognitiva*; hacemos una revisión de los saberes previos que necesita el estudiante dominar para en entendimiento del estudio del cubo y su representación plana.

En nuestro trabajo pensamos que la dificultad que presentan los estudiantes en cuanto al estudio del cubo y su representación plana, será disminuida utilizando acciones que contribuyan con la capacidad de manipulación y dinamismo, en la cual ayudarán los aportes de Parzysz y el uso del recurso tecnológico: software dinámico CABRI 3D.

En cuanto *al análisis del campo de restricciones*; esta investigación se realizará con doce estudiantes de una Institución Educativa Mixta “Telésforo Catacora” UGEL 06-Lima. Dicha Institución cuenta con una sala de innovación con computadoras suficientes para los estudiantes; existiendo algunas limitaciones en cuanto al recurso de la geometría dinámica que se piensa utilizar.

FASE 2: La concepción y el análisis a priori

Según Artigue et al. (1995), es la fase en la cual el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables llamadas variables de comando (micro y macro didácticas).

En la presente investigación utilizamos la variable *micro-didáctica*, ya que está asociada a la organización local de la ingeniería o sea a la organización de una secuencia del contenido en que se enfoca la enseñanza, sobre las cuales se puede actuar, con base en los resultados obtenidos en la primera fase.

La autora afirma que, uno de los puntos esenciales de la concepción reside en el análisis preliminar detallado de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y de los errores más frecuentes.

El análisis *a priori* se basa en un conjunto de hipótesis sobre lo que harán los estudiantes.

Este análisis *a priori* se debe concebir como un análisis de control de significado. En este análisis se prevén los campos de comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, en particular, que los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultados de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje.

En nuestra investigación; se hacemos el análisis *a priori* de cada parte de las actividades propuestas, en las cuales se argumentamos lo que esperamos que el estudiante conteste en relación al estudio del cubo y su representación; además relacionamos con nuestro marco teórico de las etapas del desarrollo del pensamiento geométrico (Parzysz 2001) y lo visto y lo sabido (Parzysz 1991).

FASE 3: La experimentación

Esta fase se caracteriza por el desarrollo de la investigación donde se aplican la secuencia de actividades.

En esta tercera fase; en nuestra investigación, aplicamos un cuestionario diagnóstico, a fin de explorar qué sabe el estudiante sobre el estudio de cubo y su representación y además averiguamos si tiene conocimiento del software dinámico CABRI 3D. Además realizamos el recojo y registro de la información respecto al desempeño de los estudiantes en cada una de las actividades propuestas; para ello contamos con dos observadores.

FASE 4: Análisis a posteriori y validación

Artigue et al. (1995), señala que esta fase se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación: observaciones realizadas en las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella, utilización de metodologías externas como cuestionarios y entrevistas.

La validación se fundamenta en la confrontación de los dos análisis, el *a priori* y *a posteriori*.

En esta fase; en el trabajo analizamos los datos colectados a lo largo de los cuatro encuentros y validamos nuestros supuestos confrontando el análisis *a priori* y al *a posteriori*.

2.2 Instrumentos de colecta de datos

En esta parte explicamos cómo desarrollaremos nuestro estudio y los instrumentos que usaremos.

Para recolectar los datos de nuestra investigación utilizaremos: Fichas de trabajo, cuestionarios, observaciones y grabaciones. A continuación explicamos cada uno de las formas de la recolección de datos.

Según Toro (2010) la guía es un texto en el que se presenta un conjunto de preguntas o temas a tratar, acciones a tomar y actividades a realizar, según se requiera al aplicar la técnica de investigación.

En nuestro trabajo usaremos las fichas de actividades para el desarrollo de las siete actividades de la parte experimental.

De otro lado, para el mismo autor; un cuestionario consiste de un conjunto de preguntas específicas con respecto a una o más variable definidas en un estudio. Afirma también, que es un instrumento necesario para una encuesta, para los grupos de discusión, para la entrevista. En nuestra investigación utilizamos un cuestionario diagnóstico al inicio del primer encuentro. En este sentido, en el cuestionario diagnóstico averiguamos si los estudiantes han usado el software dinámico CABRI 3D y exploramos qué saben los estudiantes acerca del cubo y su representación plana.

En cuanto a las observaciones; de acuerdo con el mismo autor, observar con un sentido de indagación rigurosa, implica centrar la atención de manera intencional sobre algunos segmentos de la realidad que se estudia, tratando de captar sus elementos constitutivos y la manera cómo interactúan entre sí, con el fin de reconstruir inductivamente la dinámica de una situación.

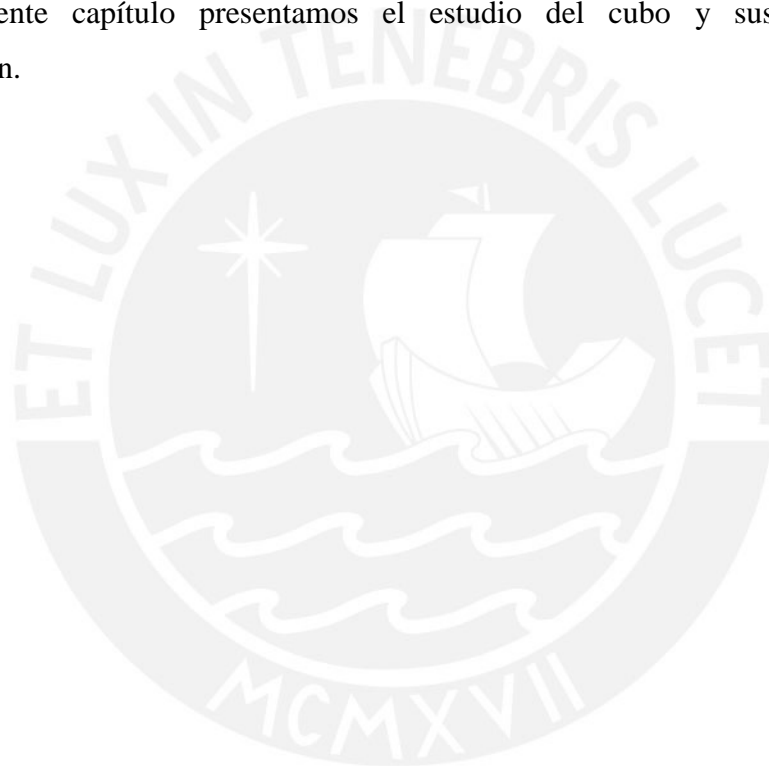
En nuestro estudio, contamos con la presencia de dos profesores observadores y la docente—investigador quién desarrolla las actividades. Cada observador registra las

acciones de una dupla de estudiantes en una ficha de observación durante todo el experimento.

En nuestra investigación la observación es semi—estructurada con el objetivo de acercarnos a la realidad de la situación buscando que el estudiante entre en un ambiente de familiaridad y confianza.

De otro lado; los estudiantes, tendrán que grabar sus actividades en una carpeta específica durante todos los encuentros, con el propósito de guardar un registro de éstas y poder hacer el análisis respectivo.

En el siguiente capítulo presentamos el estudio del cubo y sus sistemas de representación.



CAPÍTULO 3 - EL CUBO

En este capítulo presentamos algunos conceptos básicos de geometría espacial relacionados con los poliedros, específicamente del cubo. Además, tratamos acerca de los diferentes sistemas de representación del cubo; finalmente, hacemos un breve análisis de la representación del cubo en el libro de matemática para primer grado de secundaria de la Editorial Bruño utilizado en el colegio en donde se desarrolla la presente investigación.

3.1 Algunos conceptos básicos:

Antes de tratar sobre las representaciones del cubo mencionaremos algunos conceptos básicos de la geometría espacial referente a los poliedros.

Poliedros

Según Lages et al. (2000); un *Poliedro* es una reunión de un número finito de polígonos planos (parte del plano limitada por la reunión de segmentos) llamados *caras* donde:

- Cada lado de uno de esos polígonos es también lado de, un y solo un, otro polígono.
- La intersección de dos caras cualesquiera o es un lado común, o un vértice o un conjunto vacío.

Cada lado de un polígono común a exactamente dos caras, es llamado una *arista* del poliedro y cada vértice de una cara es un *vértice* del poliedro.

Al segmento que tiene por extremos dos vértices que no pertenecen a una misma cara se denomina diagonal del poliedro (figura 14)

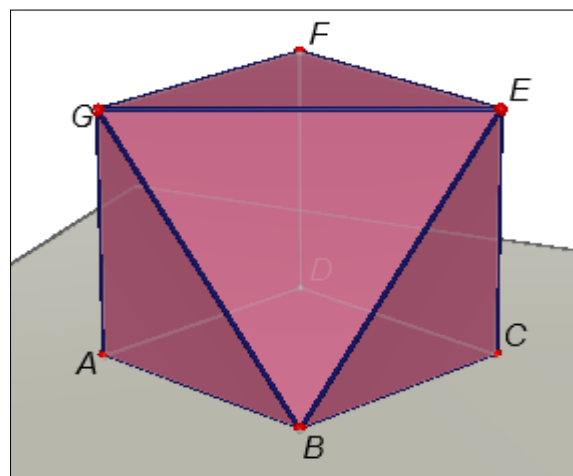


Figura 14. Poliedro

En el poliedro de la figura anterior se tiene;

Vértices: A, B, C, D, E, F, G

Aristas: \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{AD} , \overline{CE} , \overline{BE} , \overline{BG} , \overline{AG} , \overline{DF} , \overline{EF} , \overline{FG} , \overline{EG}

Caras: ABCD, ADFG, CDEF, ABG, BEG, BCE, EFG

En cuanto a los poliedros regulares, Gonzales y Sánchez (2007), afirman que, un poliedro es *regular* cuando sus caras son polígonos regulares congruentes y sus ángulos poliedros tienen el mismo número de caras.

Teniendo en cuenta la definición de poliedro dada anteriormente; diríamos que un poliedro es *regular* cuando sus caras son polígonos planos regulares congruentes y sus ángulos poliedros tienen el mismo número de caras.

Además, el *hexaedro regular o cubo* es aquel poliedro regular formado por seis caras cuadradas (polígonos planos cuadrados) que concurren tres en cada vértice. Tiene ocho vértices y doce aristas (ver figura 15).

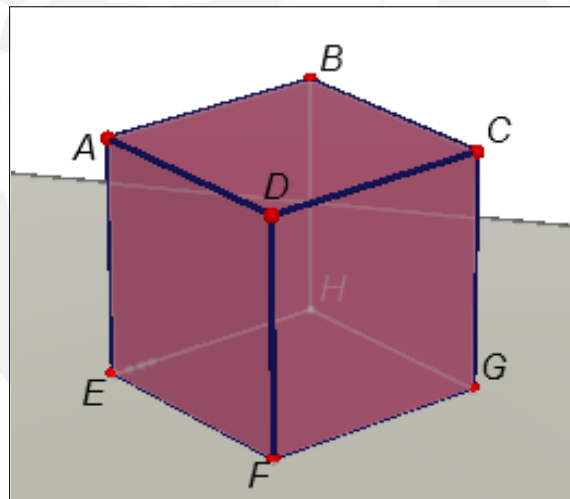


Figura 15. El cubo

El hexaedro regular ABCD-EFGH, tiene los siguientes elementos:

Vértices: A, B, C, D, E, F, G, H

Aristas: \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{AD} , \overline{EF} , \overline{FG} , \overline{GH} , \overline{EH} , \overline{AE} , \overline{DF} , \overline{CG} , \overline{BH}

Caras: ABCD, EFGH, AEDF, DCGF, BCGH, ABHE

Presenta elementos asociados como:

Diagonal de la cara ADFE: \overline{ED} , \overline{AF}

Diagonales del cubo: \overline{CE} , \overline{AG} , \overline{DH} , \overline{BF}

De otra parte, según el Instituto de Ciencias y Humanidades (2010), *el desarrollo de la superficie de un poliedro*, de modo que permita que la superficie se ubique en algún plano, se obtiene mediante una cantidad de “cortes” necesarios y suficientes a través de sus aristas.

La figura 16 representa una forma de desarrollo de la superficie del cubo de la figura 15.

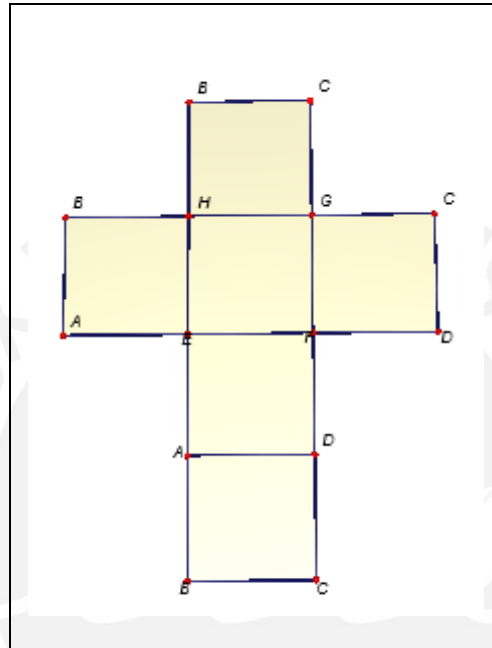


Figura 16. Una forma de desarrollo de la superficie del cubo ABCD-EFGH

A continuación, mencionamos algunas perspectivas relacionadas con la representación del cubo.

3.2 Los sistemas de representación del cubo

Para la enseñanza de la geometría espacial, utilizamos diferentes representaciones de objetos tridimensionales en el plano y en estas representaciones podemos notar diversas informaciones y propiedades sobre su modelo tridimensional; sin embargo, según muestran las investigaciones como las de Gutiérrez (2006), Cozzolino (2008), Rosalves (2006) y Santos (2006), realizar y entender dichas representaciones no resulta una tarea sencilla para los estudiantes.

Un cubo puede asumir diferentes representaciones en el plano, y en éstas puede almacenar diversas informaciones y propiedades (sobre su modelo tridimensional); dependiendo de su sistema de representación.

Según Agotegaray (2009) los sistemas de representación son los medios que sirven para expresar gráficamente las ideas. Menciona además que la Geometría descriptiva es la parte de la matemática que se encarga de pasar de un sistema tridimensional (objetos del espacio) a un sistema bidimensional (representación de los objetos en el plano)

Cada una de las representaciones está ligada a una determinada situación. En este trabajo buscamos destacar algunos tipos de representaciones típicas del estudio de geometría espacial que consideramos serán más adecuadas para la representación específicamente del cubo; buscando que los estudiantes reconozcan en cada una de ellas sus características y propiedades.

Investigadores como Cozzolino (2008) y Santos (2006) refieren a los sistemas de representación como perspectivas e investigadores como Nakamura (1971) y Deskrép (2006) llaman a los sistemas de representación como proyecciones; nosotros llamaremos a los diferentes sistemas de representación como perspectivas; ya que nos parece un lenguaje más simple para nuestros estudiantes.

A continuación presentamos cada una de las perspectivas.

La Perspectiva Cónica

Según Cozzolino (2008), esta representación permite una idea de profundidad por el uso de la línea del horizonte y de los puntos de fuga (elementos de la perspectiva Cónica), pero no favorece al análisis de las relaciones de congruencias, paralelismo y perpendicularidad del objeto y su representación.

Según Deskrép (2006), en la perspectiva cónica las rectas visuales parten de un punto (foco de proyección que se supone cerca al objeto) formando un haz divergente y denso de rayos visuales.

Pinhero (1972 citado en Santos, 2006) toma como factores clave de esta perspectiva a:

El sistema cónico de proyección: Es definido por un plano (π) y un punto O que no pertenece a (π), en que (π) y O son fijos en el espacio; siendo A_i un punto cualquiera del espacio y distinto de O, como se muestra en la figura 17, que sigue, entonces la recta

OA_i puede interceptar al plano π o es paralela. Suponiendo que OA_i intercepte a π en A_i ; colocándose el punto A_i con el objetivo de describir una línea (l), esto es ocupando sucesivas posiciones e infinitamente próximas (A_1), (A_2), (A_3), ..., la proyección A_i del punto ocupará posiciones A_1, A_2, A_3, \dots que, a su vez, son sucesivas e infinitamente próximas, describiendo en el plano (π) la línea l , que es la proyección cónica de (l) en el plano (π), conforme a la ilustración de la figura 18.

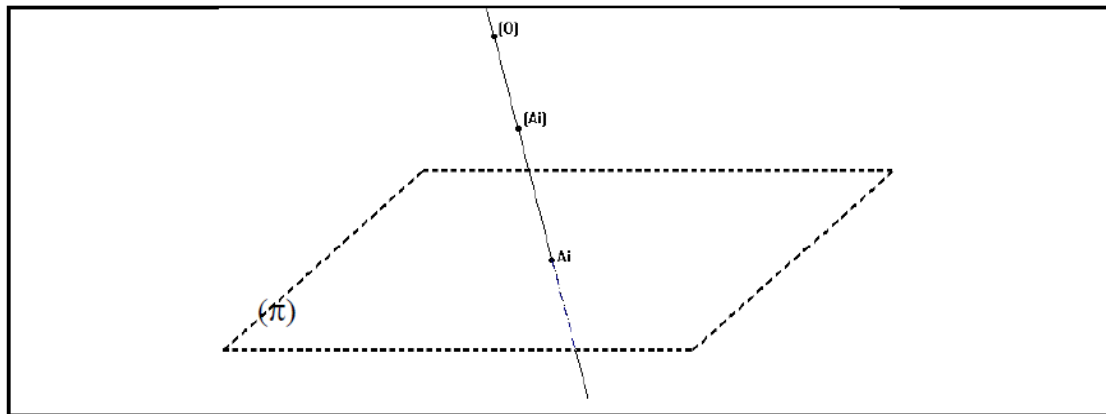


Figura17. Proyección de un punto

Fuente: Santos (2006) p. 26

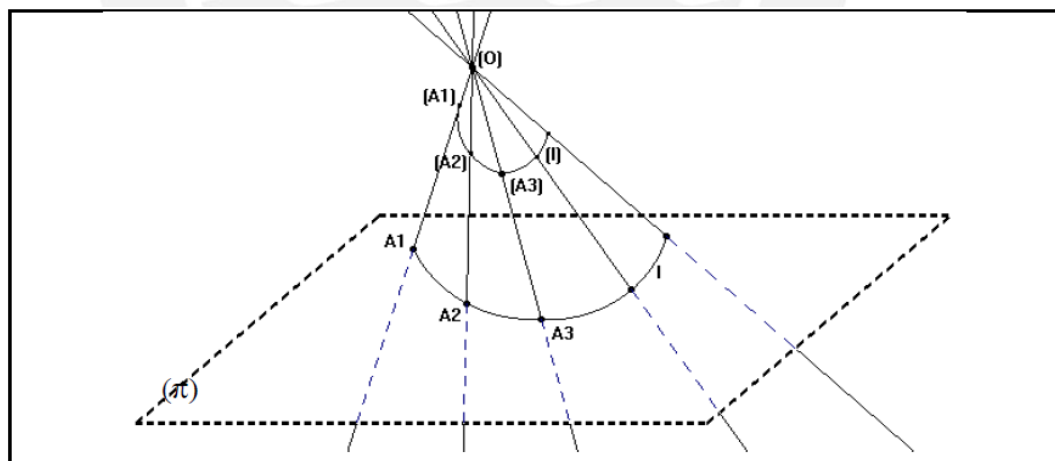


Figura 18. Proyección Cónica

Fuente: Santos (2006) p. 26

La línea del horizonte (LH): Es la línea para la cual convergen las otras líneas y donde se establece el punto de vista. En la figura 18 la línea LH pasa por el punto O y es paralela al plano π .

El punto de fuga (PF): Es el punto que está en la línea del horizonte, para la cual convergen las aristas, y pueden proporcionar tres tipos de perspectivas que dependen del punto de vista del observador. En este punto se encuentra el ojo del observador. Las ilustraciones a seguir muestran las deformaciones del cubo con uno y dos puntos de fuga. En la figura 19 se presenta la representación del cubo en perspectiva sobre un plano de proyección y la figura 20 presenta la representación en perspectiva del cubo con dos puntos de fuga:

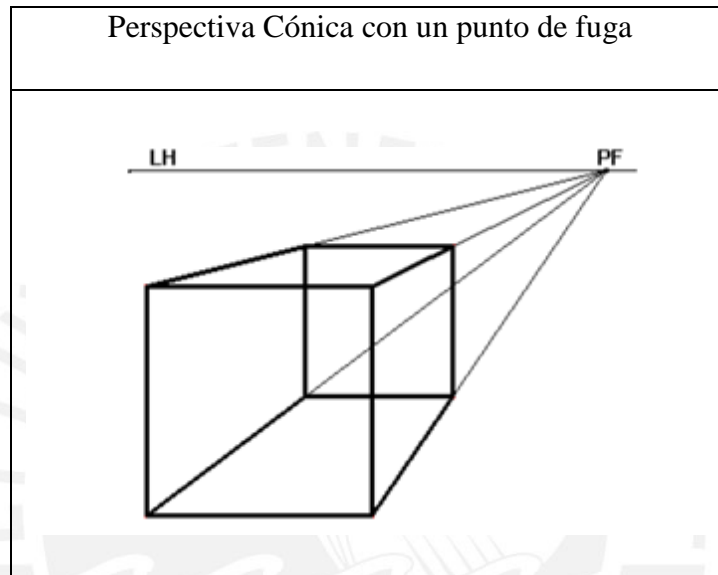


Figura 19. Representación del cubo con un punto de fuga

Fuente: Santos (2006) p. 26

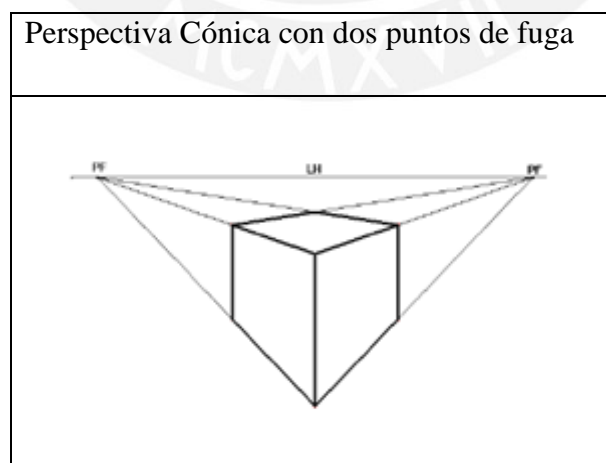


Figura 20. Representación del cubo con dos puntos de fuga

Fuente: Santos (2006) p. 27

Pasos para construir la representación plana el cubo en perspectiva Cónica con un punto de fuga:

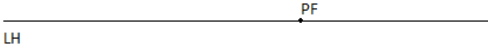
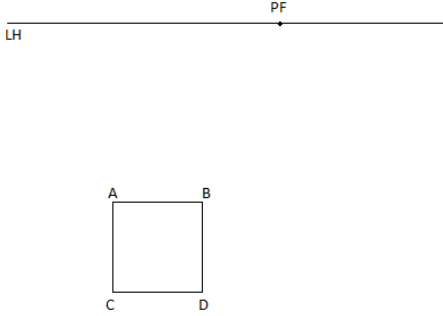
<p>Paso 1</p> 	<p>Paso 2</p> 
<p>Se traza una recta horizontal (LH) y se elige un punto llamado punto de fuga (PF)</p>	<p>Se representa una cara del cubo.</p>

Figura 21. Pasos 1 y 2 de la representación de un cubo en perspectiva Cónica

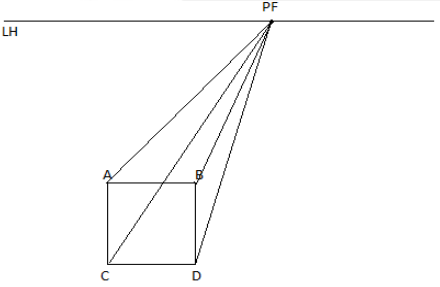
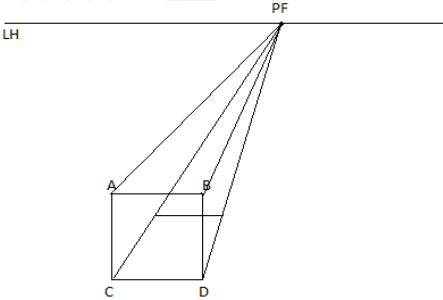
<p>Paso 3</p> 	<p>Paso 4</p> 
<p>A partir de los vértices de la cara del cubo se trazan líneas rectas que intersecten en el punto de fuga.</p>	<p>Se traza un segmento paralelo al lado CD, simulando dejar caer hacia atrás al cuadrado ABCD</p>

Figura 22. Pasos 3 y 4 de la representación de un cubo en perspectiva Cónica

<p>Paso 5</p>	<p>Paso 6</p>
----------------------	----------------------

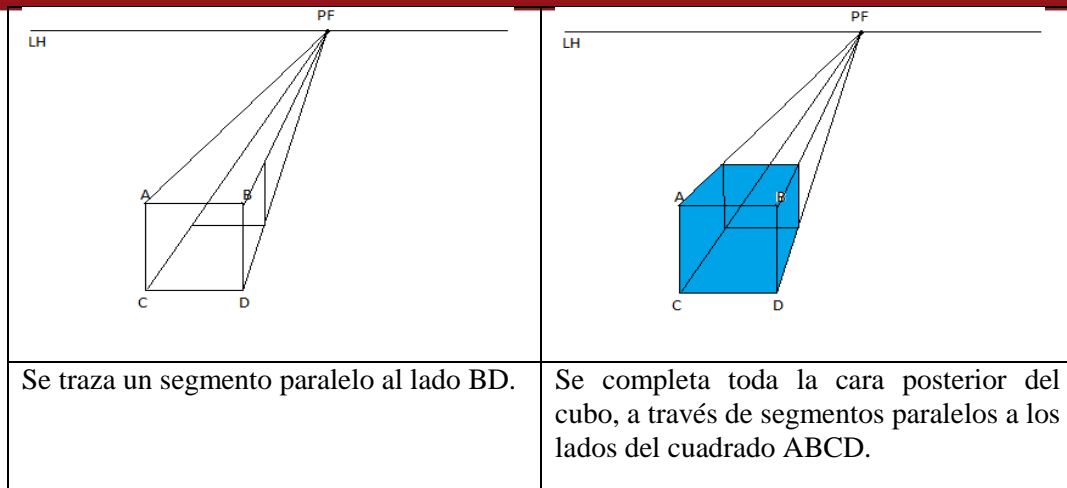


Figura 23. Pasos 5 y 6 de la representación de un cubo en perspectiva Cónica

La perspectiva paralela

Según Deskrép (2006), en esta perspectiva el foco de proyección a diferencia de la perspectiva Cónica se supone en el infinito, de modo que el haz de rayos proyectantes son paralelos cuando llega a proyectar la imagen el objeto en el plano de proyección. Este tipo de perspectiva se divide en oblicuas (cuando las rectas visuales paralelas inciden formando un ángulo diferente de 90° sobre el plano de proyección) y ortogonales (Cuando las rectas visuales inciden perpendicularmente en el plano de proyección), como lo muestra la figura 24.

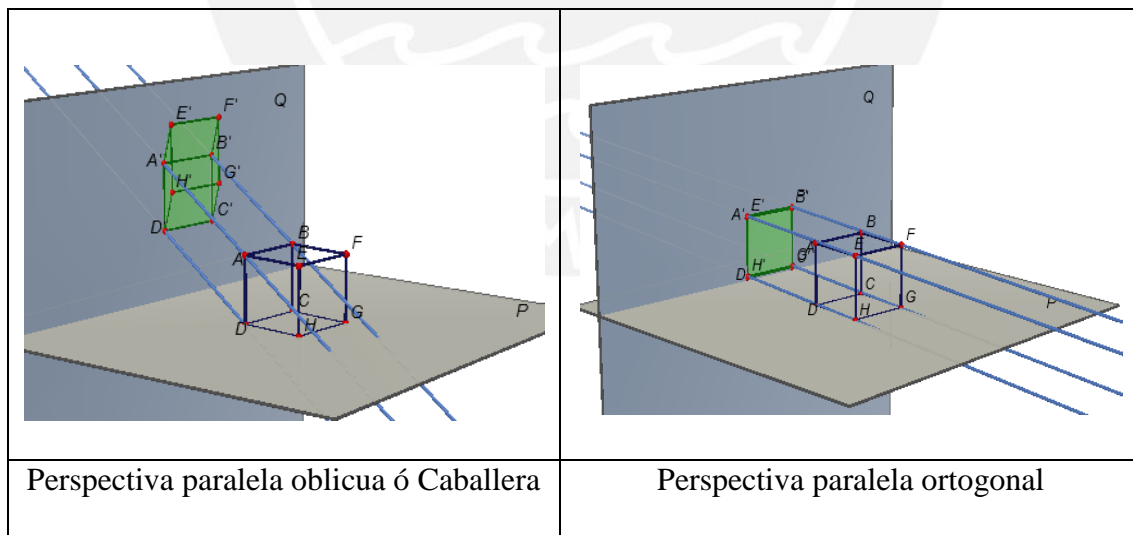


Figura 24. Perspectivas paralelas oblicuas y ortogonales

Al igual que en la perspectiva Cónica; Pinhero (1972 citado en Santos, 2006), considera que el factor clave para la perspectiva paralela es *el sistema de proyección paralela* constituido por un plano (π) y un centro impropio, que denota como (O^∞) definido por la dirección de las proyectantes (d). Ver la figura 25, en esta figura la proyección

paralela A (punto del plano (π)) del punto (A) (punto cualquiera del espacio) en el plano (π) , es un trazo producido en este plano por rectas paralelas a la dirección (d) , a partir de (A) . La proyección paralela de (l) en el plano (π) será el lugar l de las proyecciones paralelas en (π) , de todos los puntos de (l) .

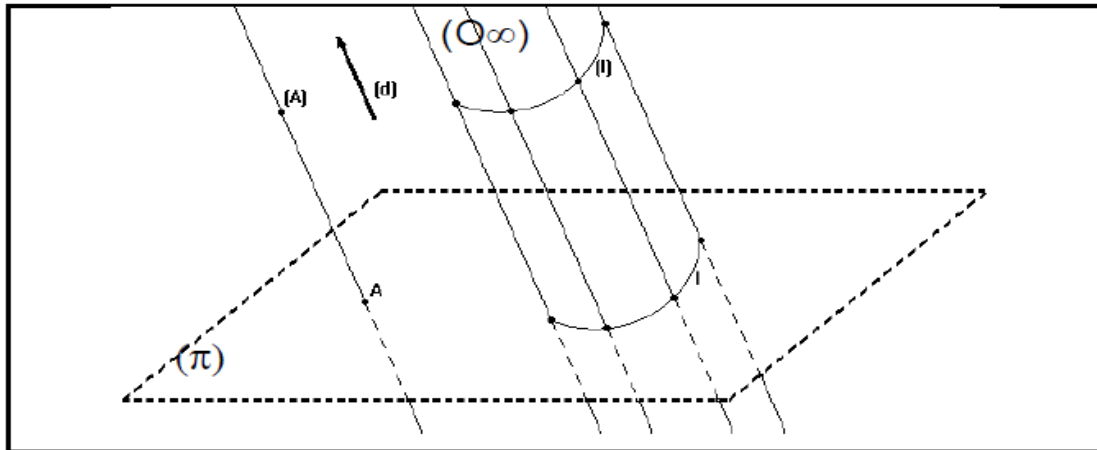


Figura 25. Proyección paralela del punto (A) y de la curva (l)

Fuente: Santos (2006) p.28

Mostramos dos tipos de perspectivas paralelas: Caballera e Isométrica.

La *perspectiva Caballera* es una proyección oblicua sobre un plano paralelo a una de las caras principales del objeto. Si consideramos un cubo apoyado en un plano horizontal, una de sus caras será conservada en iguales dimensiones; es decir la medida de la arista de esta cara corresponderá a la medida de la arista del propio cubo.

Agotegaray (2009), señala que en la perspectiva caballera una de las caras del triedro es paralela o coincidente con el plano principal. Los elementos del espacio contenidos o paralelos a dicha cara se proyectan en verdadera magnitud. Las rectas paralelas al otro eje, se proyectan con un coeficiente de reducción que depende del ángulo que forma la dirección de proyección con el plano principal. La figura 26 muestra el plano tridimensional con ejes X, Y, Z , en el cual el coeficiente de reducción depende del eje Y .

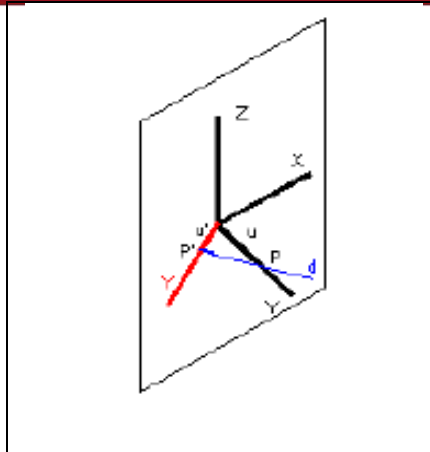


Figura 26. Plano tridimensional X, Y, Z; coeficiente de variación dependiente de Y

Fuente: Agotegaray (2009) p. 5

La misma autora afirma que, a efectos prácticos un sistema de perspectiva Caballera se define por la proyección de los ejes coordenados y el valor del coeficiente de reducción para el eje Y, que normalmente será de $1/2$ ó $2/3$. La dirección de proyección puede dar como resultado cualquier ángulo del eje Y respecto al eje X. La figura 27 muestra algunas representaciones de cubo en perspectiva Caballera y sus ángulos que determinan el coeficiente de reducción.

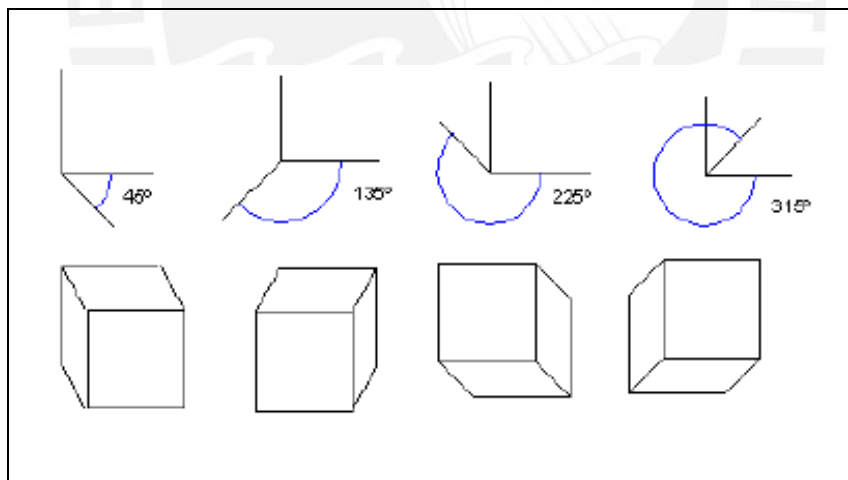


Figura 27. Representación de cubos en perspectiva Caballera y sus ángulos que determinan el coeficiente de reducción.

Fuente: Agotegaray (2009) p. 6

En la figura 28, mostramos la representación del cubo $A'B'C'D'-E'F'G'H'$ en perspectiva Caballera en el plano Q de la representación del cubo $ABCD-EFGH$ en el plano P; tomando este último como un objeto tridimensional; para lo cual se cuenta con los planos P y Q ubicados perpendicularmente y la cara $ABCD$ de la representación del cubo $ABCD-EFGH$ paralela al

plano Q ; estableciéndose una proyección oblicua de la representación del cubo ubicado en el plano P al plano Q.

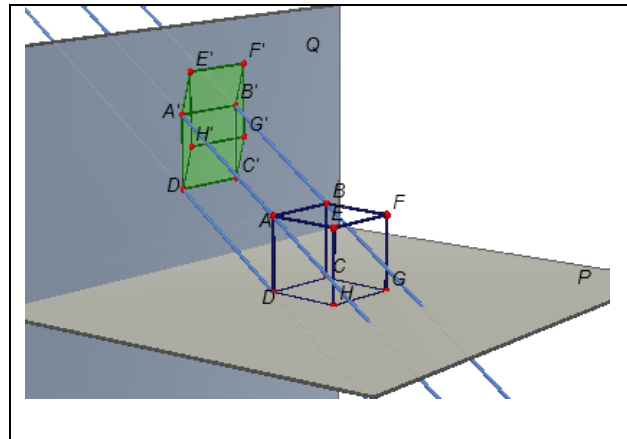


Figura 28. Representación del cubo A'B'C'D' - E'F'G'H' en perspectiva Caballera

La perspectiva Isométrica

Esta perspectiva es el resultado de proyecciones ortogonales sobre un plano que tiene como referencia un sistema de tres ejes de coordenadas perpendiculares entre sí, los cuales forman ángulos congruentes. Las tres aristas frontales se llaman ejes isométricos; los ángulos entre las proyecciones de estos ejes son de 120° y las longitudes proyectadas de las aristas de un objeto, a lo largo y paralelas a estos ejes son más o menos de longitud real. Se observa que los ángulos de 90° aparecen como de 120° en la proyección isométrica, como lo muestra la figura 29.

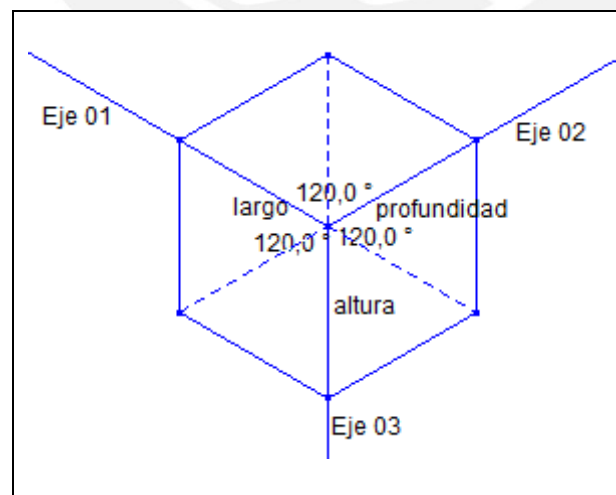


Figura 29. Representación del cubo en perspectiva Isométrica
Fuente: Santos (2006) p. 30

Como la perspectiva isométrica no da la verdadera magnitud del objeto, se utiliza un método convencional, en el que se toman las longitudes verdaderas a lo largo de los ejes

isométricos y líneas isométricas, se recomienda usar el papel isométrico (trama de puntos que forma triángulos equiláteros) en el cual los vértices de los poliedros deben coincidir con puntos de la trama, como lo muestra la figura a continuación.

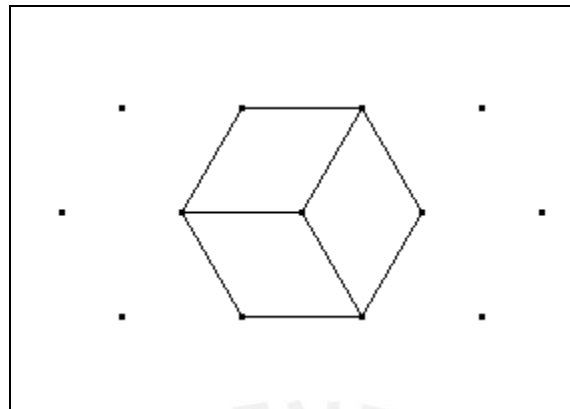


Figura 30. Representación de un cubo en perspectiva isométrica

Fuente: Gutiérrez (2006) p. 33

La siguiente figura, presenta las representaciones de un cubo en las perspectivas anteriormente descritas.

PERSPECTIVAS		
CÓNICA	PARALELAS	
	CABALLERA	ISOMÉTRICA

Figura 31. Diferentes perspectivas del cubo

Fuente: Adaptado de Santos (2006) p.26

3.3 Representaciones del cubo en el libro de primer grado de Educación Básica Regular

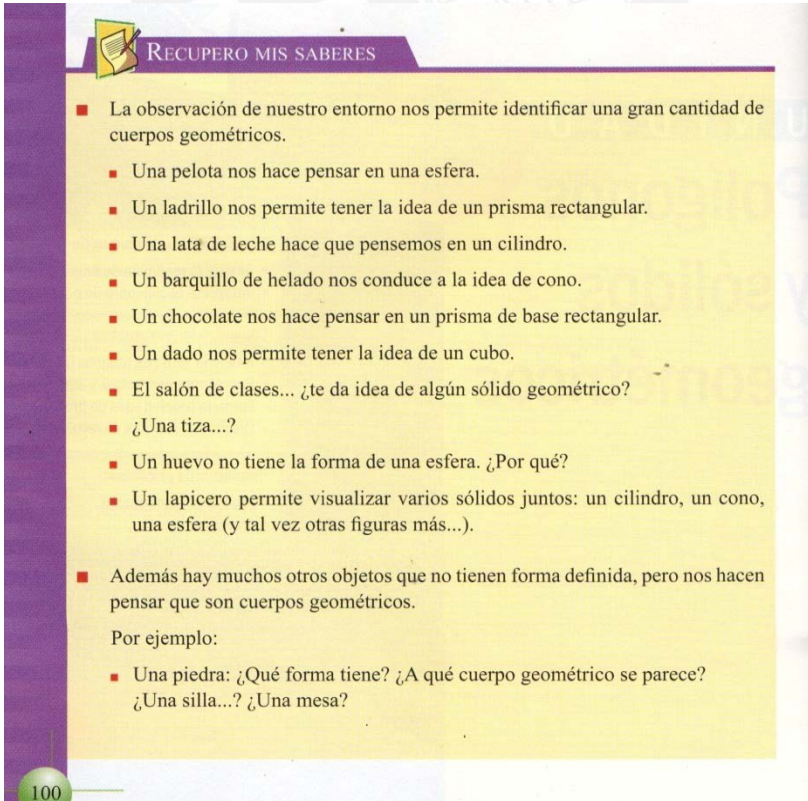
En esta parte del trabajo nos proponemos analizar el tratamiento que recibe la representación del cubo, en los textos de consulta a los que acceden los estudiantes.

Una visión que comúnmente se tiene de los libros de consulta es que ellos son una guía para las explicaciones de clase y presenta una lista de ejercicios que los estudiantes puedan resolver. Incluso posee autoevaluaciones que constituyen una guía para que el profesor arme sus propias evaluaciones.

En esta parte presentamos información relativa a la enseñanza de la representación del cubo, eligiendo para ello el texto utilizado tanto por el profesor como por el estudiante.

El libro que se analiza es Matemática de primer grado de Educación Secundaria-Editorial Bruño. El uso de este texto lo recomienda y distribuye el Ministerio de Educación.

En primer lugar a manera de saberes previos, el libro propone identificar cuerpos geométricos mediante la observación de su entorno, lo cual nos parece muy interesante, ya que el estudiante debe asociar su aprendizaje con el contexto que le rodea; sin embargo si tenemos en cuenta el contexto matemático, podemos darnos cuenta que el texto comete ligerezas al asociar un dado con un cubo; ya que en dado se hace notorio los vértices; al igual que cuando asocia un barquillo de helado con un cono, estaríamos pensando que el cono es un cuerpo geométrico sin base. La figura 29 presenta ejemplos de situaciones propuestas al estudiante.



RECUPERO MIS SABERES

- La observación de nuestro entorno nos permite identificar una gran cantidad de cuerpos geométricos.
 - Una pelota nos hace pensar en una esfera.
 - Un ladrillo nos permite tener la idea de un prisma rectangular.
 - Una lata de leche hace que pensemos en un cilindro.
 - Un barquillo de helado nos conduce a la idea de cono.
 - Un chocolate nos hace pensar en un prisma de base rectangular.
 - Un dado nos permite tener la idea de un cubo.
 - El salón de clases... ¿te da idea de algún sólido geométrico?
 - ¿Una tiza...?
 - Un huevo no tiene la forma de una esfera. ¿Por qué?
 - Un lapicero permite visualizar varios sólidos juntos: un cilindro, un cono, una esfera (y tal vez otras figuras más...).
- Además hay muchos otros objetos que no tienen forma definida, pero nos hacen pensar que son cuerpos geométricos.
Por ejemplo:
 - Una piedra: ¿Qué forma tiene? ¿A qué cuerpo geométrico se parece?
 - ¿Una silla...? ¿Una mesa?

100

Figura 32. Ejemplos de saberes previos de cuerpos geométricos.

Texto de consulta – Editorial Bruño

Por otra parte, el texto en mención, define un poliedro como una parte del espacio limitado por un número finito, mayor que tres, de polígonos que tienen un lado común dos a dos; lo cual no nos parece una definición coherente, dado que estaría considerando un poliedro formado solo por aristas; ya que un polígono también lo define como una figura geométrica cerrada formada por segmentos consecutivos. La figura 30 muestra la definición de poliedro y sus elementos.

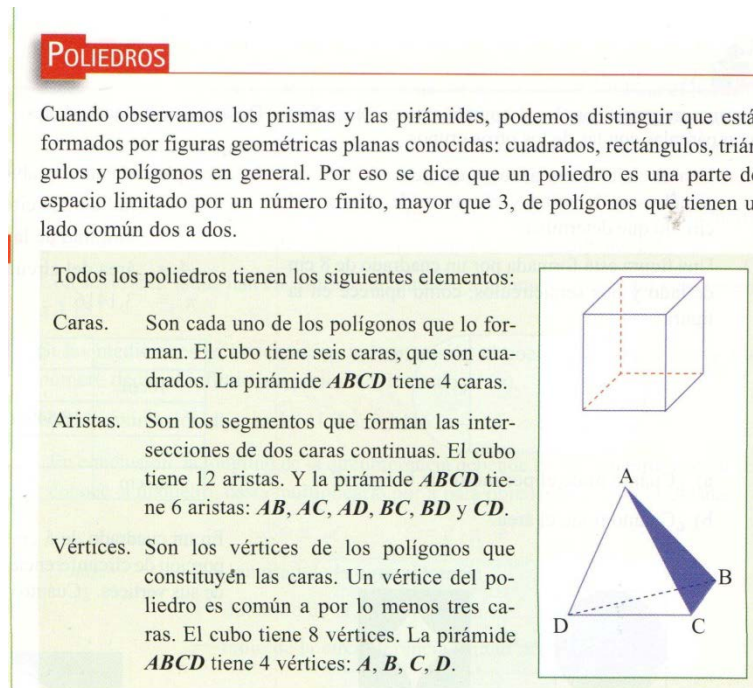


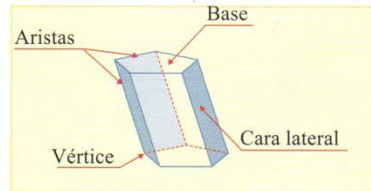
Figura 33. Definición de poliedro. Texto de consulta – Editorial Bruño

En cuanto al cubo el texto lo presenta como un alcance no prioritario sino adicional del prisma; solo describiéndolo muy superficialmente y ni siquiera definiéndolo a base de este poliedro, tal como lo muestra la figura 34.

PRISMAS Y PIRÁMIDES

Los prismas son poliedros que tienen dos caras paralelas e iguales, llamadas bases, y cuyas aristas, que no pertenecen a las bases, son todas paralelas, haciendo que las caras laterales sean cuadriláteros de lados paralelos.

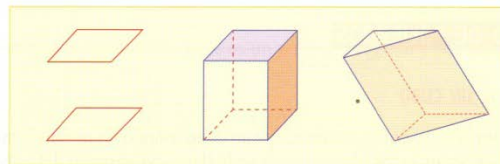
ELEMENTOS DE UN PRISMA



Todo prisma tiene:

- Dos bases.
- Tantas caras laterales como lados tiene su base.
- El número de vértices es el doble que el número de lados de su base.

Para representar gráficamente un prisma, primero dibuja las bases que deben ser dos polígonos iguales paralelos; luego traza las aristas laterales, es decir, los segmentos que unen los vértices correspondientes.



RECUERDA

Los prismas pueden ser rectos u oblicuos.

recto oblicuo

RECUERDA

En un cubo:

- Las aristas laterales son siempre paralelas.
- Las 6 caras son cuadrados iguales.

Figura 34. Definición de Prisma. Texto de consulta–Editorial Bruño

Es así que para el texto de consulta, el cubo estaría definido a base solo de sus aristas, no encerrando capacidad, ni volumen.

De otro lado, en cuanto a las representaciones de las figuras, generalmente se presentan con base en el plano horizontal y vista generalmente estereotipadas (representaciones empleadas con mucha frecuencia en los textos de consulta); las cuales poseen características visuales relacionadas con la posición, carentes de importancia para el concepto, pero que influyen en la apreciación de los estudiantes. Para acortar esta dificultad debería mostrarse en diferentes puntos de vista; de esta forma el estudiante adquiere destreza y habilidad para representarlas e interpretarlas.

De otra parte también se presenta el desarrollo de la superficie de un cubo (ver figura 35); sugiriendo al estudiante encuentre las demás formas de desarrollo, lo cual me parece un aporte muy importante porque ayuda al estudiante a desarrollar su creatividad e interés por la investigación; sin embargo, olvida que según sus alcances, el cubo es un poliedro solo en base a sus aristas y muestra el desarrollo del cubo a base de caras como regiones poligonales.

De igual manera el texto sugiere un grupo de ejercicios (ver figura 35) que relaciona al cubo con otros poliedros; pero las preguntas están orientadas a hacer pensar al estudiante sobre poliedros tomados como sólidos geométricos; sin embargo no lo definió así. Por ejemplo en el ítem 1 actividad 10, si el cubo fuera un sólido geométrico al cortar un vértice seguiría siendo sólido; sin embargo no sucedería lo mismo si se tratará de un poliedro cubo definido por superficie, para este caso dejaría de ser poliedro. La figura siguiente, presenta la actividad y el alcance relacionado al desarrollo del cubo en el plano que propone el texto.

ACTIVIDAD 10

Profundiza tu aprendizaje mediante el desarrollo de estas actividades. Puedes pedir ayuda a tu profesor o profesora.

1. Un cubo es un prisma. Si le cortamos un vértice, ¿seguirá siendo un prisma?, ¿por qué?
2. ¿Se podrá cortar un cubo de manera que siga siendo un prisma?
3. A partir de un cubo se quiere obtener una pirámide. ¿Qué cortes habrá que hacerle a dicho cubo?

DESARROLLO DE POLIEDROS

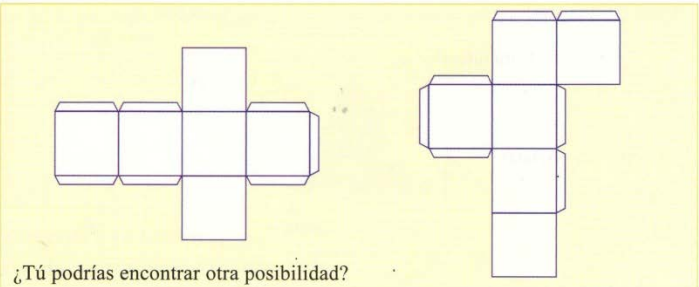
DESARROLLO DE UN CUBO

Muchas veces habrás visto cómo se construye un cubo usando un molde formado por cuadrados unidos por sus lados. A ese molde se le llama “desarrollo del cubo”.

Entonces, desarrollar un poliedro significa encontrar su “molde” formado por polígonos unidos por sus lados.

El desarrollo de un cubo tiene varias posibilidades.

Por ejemplo:



¿Tú podrías encontrar otra posibilidad?

Hay once “molde” para formar un cubo. ¡Encuétralos!

126

Figura 35. Desarrollo de la superficie del cubo y actividad.

Texto de consulta–Editorial Bruño

La presencia de prototipos se pone de manifiesto en la aparición de ciertas representaciones características de los textos de consulta, como las posiciones de los cubos y pirámides con una base apoyada en el plano horizontal.

Vemos que estos prototipos cubos y prismas presentan la dificultad de ser considerados como únicos ejemplo válidos del cuerpo a representar, impidiendo detectar cubos y prismas en otras posiciones.

Sería conveniente que los estudiantes conozcan bien la definición del poliedro cubo y apliquen sus conocimientos conceptuales en la importancia de sus representaciones; ayudándoles a ver estas desde diferentes puntos de vista, lo cual contribuiría a la mejor caracterización de las propiedades de los objetos, permitiendo disminuir el conflicto de lo visto y lo sabido.

En el siguiente capítulo, presentamos la elección de los sujetos de la investigación, estudio diagnóstico, las actividades a aplicar en la investigación y su respectivo análisis.



CAPÍTULO 4 – EXPERIMENTO Y ANÁLISIS

En el presente capítulo, caracterizamos la elección de los sujetos de la investigación, analizamos el cuestionario diagnóstico; luego explicamos el desarrollo del experimento y el análisis *a priori* y *a posteriori* de la secuencia de actividades.

4.1 Caracterización de la elección de los sujetos

El colegio elegido para nuestra investigación tiene por nombre “Telésforo Catacora”; es una Institución Educativa estatal situada en la comunidad de Santa Clara, distrito de Vitarte, departamento de Lima. Es una Institución de Educación Secundaria que funciona en dos turnos: Turno mañana y turno tarde, con dictado de siete horas pedagógicas diarias, siendo cada hora de 45 minutos. Esta Institución cuenta con aulas con capacidad de 40 estudiantes; además cuenta con un aula de Innovación con 18 computadoras.

Desarrollamos la investigación en esta institución ya que tenemos acceso a ella por ser nuestro centro de trabajo.

Elegimos del primer grado de Educación Secundaria turno mañana, doce estudiantes (entre 11 y 13 años) al azar del mencionado colegio (ver cuadro 2) organizados en seis duplas. Sustituimos sus nombres por seudónimos protegiendo, de esa manera, su identidad.

Cuadro 2. Nombre de los estudiantes

Nombres	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6
de los	Gabriel	Masel	Pedro	Judith	Lisbeth	María
estudiantes	Teresa	Susana	Alice	Angélica	Daniela	Darlene

Cabe resaltar que los estudiantes elegidos para nuestra investigación tienen conocimientos básicos de geometría, es decir conocen lo que es: punto, segmento, recta, semirrecta, plano, planos paralelos, planos perpendiculares y poliedro; tomados como conocimientos necesarios para interactuar con el Software CABRI 3D.

Además de los estudiantes, participarán en la parte experimental, la docente–investigador; y dos profesores observadores. Cada profesor observador se encargará

especialmente de una dupla, desde el inicio al término de la aplicación de la secuencia de actividades.

Para el análisis a *posteriori*, durante los cuatro encuentros, las duplas formadas por Gabriel y Teresa (D_1) y Lisbeth y Daniela (D_5) serán analizadas. Estas duplas fueron elegidas por mostrar más interés y responsabilidad por nuestro trabajo.

Para la elaboración de la secuencia de actividades, se realizó un estudio diagnóstico que presentamos a seguir.

4.2 Estudio diagnóstico

El cuestionario diagnóstico (ver el apéndice A) tiene el propósito de averiguar acerca de los conocimientos de los estudiantes en geometría dinámica y de la representación del cubo; dicho cuestionario fue estructurado en dos partes.

En la **parte I**, deseamos saber si los estudiantes conocían el Software CABRI 3D.

En la **parte II**, las preguntas tienen por objetivo averiguar acerca de conocimientos que los estudiantes tienen sobre el cubo y sus diferentes representaciones; antes de la aplicación de la secuencia de actividades

A continuación, presentamos de manera más detallada cada parte del cuestionario, así como también las consideraciones que hacemos de cada parte de dicho cuestionario.

Parte I

En esta parte fue formulada la siguiente pregunta: ¿Conoce o ha utilizado alguna vez el software CABRI 3D? Los doce participantes contestaron que no; lo cual nos indica que es necesario desarrollar una actividad en la que se explique algunos recursos y funciones del software.

Parte II

En esta parte, deseamos averiguar los conocimientos de los estudiantes sobre conceptos básicos de geometría espacial, como el concepto de poliedros específicamente del cubo; también deseamos saber qué tipo de representación y descripciones usan los estudiantes para representar al cubo; y si reconocen distintas representaciones del cubo.

En la pregunta 2. ¿Qué entiende por poliedro? ¿Es el cubo un poliedro? Represente gráficamente un cubo. Solo cinco de los doce estudiantes, respondieron que el poliedro

es un cuerpo limitado por polígonos. Además, todos respondieron que el cubo si es un poliedro.

En sus respuestas, los estudiantes prefieren describir al cubo por sus caras y no precisan una definición de poliedro; lo cual nos parece sumamente necesario tomarlo en cuenta para aclarar definiciones al inicio de la aplicación de nuestras actividades. En cuanto a la representación del cubo, a pesar que afirman que está limitado por cuadrados en sus dibujos no reflejan lo que afirman. Por ejemplo, Darlene (figura 36) describe un poliedro, un cubo y representa un cubo.

2. ¿Qué entiendes por poliedro?
 ¿Es el cubo un poliedro?. Justifica
 Es poliedro... es una figura...
 que está limitado por polígonos.
 El cubo si es un poliedro...
 por que está limitado por cuadrados

Representa gráficamente un cubo

Figura 36. Respuesta de Darlene con representación

Por su parte, Judith (Figura 37) menciona la definición de poliedro y describe al cubo; en su representación del cubo dibuja un solo cuadrado y no toma en cuenta la igualdad de las demás dimensiones.

2. ¿Qué entiendes por poliedro?
 ¿Es el cubo un poliedro?. Justifica
 Un poliedro es un cuerpo... que está...
 formado por un polígono... en sierra...
 un vacío...
 Un cubo si es un poliedro por que... está...
 formado por cuadrados y en sierra un vacío

Representa gráficamente un cubo

Figura 37. Respuesta de Judith con representación

Observamos que en la representación del cubo que hacen las estudiantes inciden en la representación en perspectiva Caballera. Pensamos que esto ocurre porque generalmente los textos de consulta muestran este tipo de representación.

En la pregunta 3 del cuestionario, averiguamos si reconocen el desarrollo de un cubo (figura 38); siete estudiantes de los doce eligieron el desarrollo correcto; mientras que cinco eligieron el inadecuado.

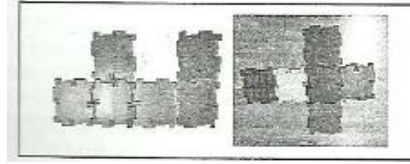


Figura 38. Desarrollos de un poliedro

Es el caso de Gabriel (figura 39) quien escogió la representación de la izquierda afirmando que es el primer paso para hacer un cubo.

3. Evalúa cuál de los siguientes desarrollos es la de un cubo
(Izquierda o derecha)

Comenta: *La izquierda por que es el primer paso para ser un cubo.*

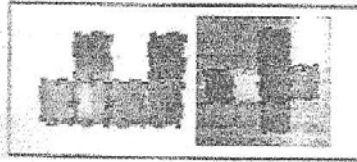


Figura 1. Desarrollos de poliedro

Figura 39. Respuesta de Gabriel

Resaltamos que siete de los estudiantes perciben que al doblar la figura mostrada (representación de la superficie de un cubo en papel) se forma el cubo; pero cinco de ellos aún no tienen esa capacidad. Pensamos que esta dificultad aún persiste porque el alumno tiene dificultad para identificar objetos de la geometría espacial.

A continuación, en la pregunta 4. Averiguamos si reconocen la figura presentada como la representación de un cubo.

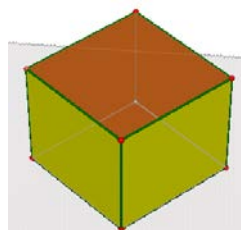


Figura 40. Representación de poliedro

Fuente: Adaptación de Blanco (2009) p. 88. Cubo de Necker

El cuadro 3, muestra las respuestas de los alumnos en las cuales nueve de los doce contestan que no es un cubo, porque sus caras no se ven con iguales dimensiones y tiene una cara que es un rombo.

Cuadro 3. Respuesta a la cuarta pregunta de la parte II

Estudiantes	¿Consideras que el poliedro de la figura es un cubo?
Gabriel	No lo es, porque sus caras no son cuadradas.
Teresa	Sí, porque tiene aristas iguales.
Masel	No es, porque tiene una cara que es un rombo y sus caras del cubo son cuadradas.
Susana	No es, porque las caras del cubo son cuadrados y sus caras de esta figura son paralelogramos.
Pedro	Si porque parece un cubo.
Alice	No, porque sus caras no son iguales
Yuli	No, porque el cubo tiene caras iguales y son cuadrados y no rectángulos
Angélica	No, porque el cubo tiene la misma longitud de la cara.
Lisbeth	Si es, porque está visto desde arriba.
Daniela	No, porque no está a su medida ni se igualan sus caras como en otros cubos.
María	No es un cubo porque no tiene 6 caras, 8 vértices y 12 aristas.
Darlene	No es un cubo porque esta imagen no se parece a un cubo con caras iguales.

Mostramos en la figura 41 la respuesta de Masel.

4. ¿Consideras que el siguiente poliedro es un cubo?
Argumenta tu respuesta

..No es un cubo porque sus caras
..no son cuadradas. e. Esta figura
..tiene una cara de rombo y las demas
son rectangulos»

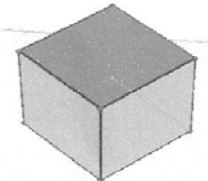


Figura 2. Representación gráfica de poliedro
Fuente: Adaptación de Blanco (2009). p. 88

Figura 41. Respuesta de Masel

Notamos que nueve de los doce estudiantes no reconocen en la representación la de un cubo; ya que ellos quieren ver que las caras deben ser cuadradas, y como menciona Parzysz (1988) los estudiantes entran en un conflicto; ya que lo que ven no coincide con lo que saben.

En la pregunta 5 (ver figura 42), se les propone encerrar en un círculo, las representaciones que consideren son cubos. Además, se les pide justifiquen su respuesta.

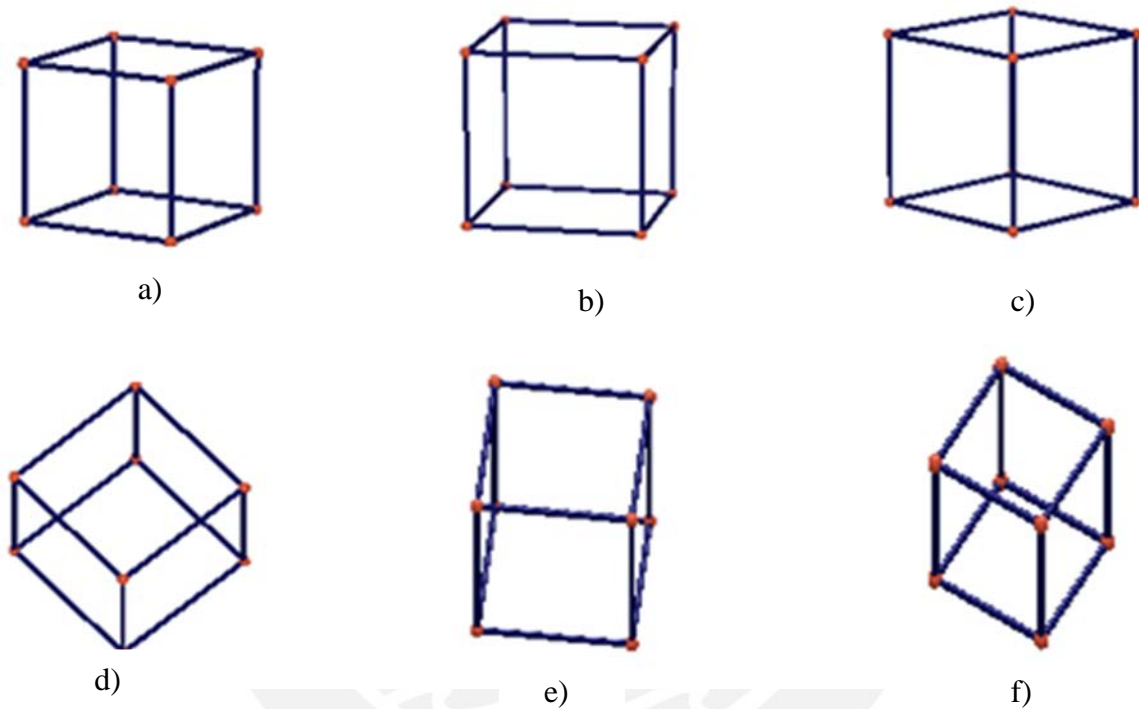


Figura 42. Estructuras de poliedros

Fuente: Adaptado de Parzysz (1991) p. 580

El cuadro 4, muestra las representaciones elegidas y los comentarios de los estudiantes.

Cuadro 4. Elección de representaciones de poliedros

Estudiantes	¿Consideras que el poliedro de la figura es un cubo?
Gabriel	Eligió a), f); los demás no son cubos porque sus caras tienen variadas dimensiones.
Teresa	Eligió a), b), e); los demás no son cubos porque tienen sus caras angostas.
Masel	Eligió a), e), f); los demás no son cubos porque sus caras ni sus lados son

	iguales.
Susana	Eligió a), d); los demás no son cubos porque sus caras son muy delgadas.
Pedro	Eligió a), c), d), f); los demás no son cubos porque están chuecos y mal posesionados
Alice	Eligió a), c), f); los demás no son cubos ya que tiene caras que son paralelogramos.
Yuli	Eligió a), e), f); los demás no son cubos porque sus caras son rectangulares.
Angélica	Eligió a), f); los demás no son cubos porque no tienen lados iguales.
Lisbeth	Eligió c), e), f); los demás no son cubos porque sus caras no son cuadradas ni siquiera iguales.
Daniela	Eligió a), e); los demás no son cubos ya que tienen caras más delgaditas que los demás.
María	Eligió a), b), f) los demás no son cubos por la forma en que se ven.
Darlene	Eligió a), c), f); los demás no son cubos porque sus caras son muy diferentes

En este caso, según la elección de los estudiantes, es importante señalar que todos ellos se guían por la forma cuadrada de la cara del cubo; de otra manera no lo consideran como la representación del cubo; entrando en un conflicto entre lo que ven y lo que saben.

Observamos, que los estudiantes muestran imprecisiones en las aristas y tienden a dibujarlo como se presenta generalmente en los textos de consulta, razón por la cual consideramos necesario que conozcan otras representaciones del cubo en otras perspectivas.

El análisis del cuestionario diagnóstico permitió tener una idea de los conocimientos que tienen los estudiantes relativos al cubo y su representación; de igual manera tener referencia de que los estudiantes no han trabajado con el software CABRI 3D; aspectos que consideramos nos ayudarán en la elaboración de la secuencia de actividades.

4.3 Descripción del experimento

Se programaron cuatro encuentros cuyas actividades (ver apéndice B) pueden ser vistas en el cuadro:

Cuadro 5. Actividades del experimento

Encuentros	Fecha y Duración	Actividades propuestas	
1°	16/11/12 2,30 h	Actividad 1 (Uso de material concreto)	<p><i>Reconociendo las características del cubo en representaciones de material concreto</i></p> <p>Parte A. Observación de modelos de cubos en: Varitas, en madera y material transparente.</p> <p>Parte B. Exploración de las representaciones de los cubos anteriores; en láminas u fotografías</p> <p>Parte C. Representación en papel de los cubos de la parte A desde dos puntos de vista diferentes</p>
		Actividad 2 (Presentación y exploración del software)	<p><i>Conociendo el software CABRI 3D y explorando sus recursos, funciones y herramientas</i></p> <p>Presentación del software.</p> <p>Realización de tareas:</p> <p>Parte A. Crea rectas, rectas paralelas y rectas secantes.</p> <p>Parte B. Crea planos secantes.</p> <p>Parte C. Crea planos perpendiculares.</p>
2°	21/11/12	Actividad 3 (Actividades de	<p><i>Familiarización con la herramienta cubo del software CABRI 3D</i></p>

	2,20 h	Familiarización del software)	<p>Realización de tareas:</p> <p>Parte A. Reconoce el desarrollo de la superficie del cubo.</p> <p>Parte B. Reconoce diferentes elementos del cubo.</p>
		<p>Actividad 4 (Uso de material concreto y construcciones en el software</p>	<p><i>Lo que ve y lo que sabe de las representaciones</i></p> <p>Parte A. Describe lo que ve y lo que sabe de las representaciones en forma estática.</p> <p>Parte B. Describe lo que ve y lo que sabe de las representaciones en forma dinámica (uso del CABRI 3D).</p>
3°	23/11/12 2,20 h	Un estudio de las representaciones del cubo	<p>Presentación en Power Point de los sistemas de representación del cubo: Perspectiva Caballera, perspectiva Cónica y perspectiva Isométrica.</p>
		<p>Actividad 5 (Uso de material concreto, lápiz y papel)</p>	<p><i>Explorando y conociendo las diferentes formas de representar un cubo</i></p> <p>Parte A. Exploración de la perspectiva Caballera en esquemas, usando lápiz y papel.</p> <p>Parte B. Exploración de la perspectiva Cónica a partir de la representación del cubo de la parte A, usando lápiz y papel.</p> <p>Parte C. Exploración de la perspectiva Isométrica, usando lápiz</p>

			y papel isométrico.
4°	28/11/12 2, 20 h	Actividad 6 (Uso del software CABRI 3D)	<i>Representando un cubo en perspectiva Caballera utilizando el CABRI 3D</i> Utilización del software el CABRI 3D, completando algunas construcciones y reconocen características y puntos de vista en perspectiva Caballera.
		Actividad 7 (Uso del software CABRI 3D y material concreto)	<i>Relacionando los diferentes puntos de vista del cubo en el software CABRI 3D con las vistas de la representación del cubo en material concreto</i> Exploración de los diferentes puntos de vista de la perspectiva Caballera del cubo, usando el software y material concreto. Relacionan algunas representaciones en el software con la perspectiva Cónica y la perspectiva Isométrica.

En lo que sigue, presentamos las actividades con sus análisis *a priori* y *a posteriori*.

4.4 Análisis de las actividades

En cada actividad, presentaremos los análisis *a priori* y *a posteriori*.

Consideramos conveniente centrarnos en el análisis *a posteriori* sólo de las actividades más relevantes según nuestro objetivo a conseguir; es así que en la actividad 2 propuesta como presentación y familiarización del software, solo reportaremos una apreciación general del trabajo de los estudiantes.

Al término de cada actividad realizaremos un cierre de la sesión incidiendo en la formalización de saberes trabajados en dicha actividad. Esta intervención lo haremos

de manera oral (usando en algunos casos papelotes con ilustraciones o cuadros de doble entrada) interactuando con los estudiantes; buscando saber que les pareció la actividad y tomando como referencia las dudas que ellos mostraron durante el proceso de aplicación de la actividad; buscando que el estudiante supere conceptos que no le quedaron claros.

4.4.1 Primer encuentro

En este encuentro se trabajaron las actividades uno, realizada con material concreto y dos desarrollada utilizando el software CABRI 3D.

Actividad 1. *Reconociendo las características del cubo en representaciones de material concreto*

La actividad consta de tres partes:

Parte A. Observación de modelos de cubos en: Varitas, en madera y material transparente.

Parte B. Exploración de las representaciones de los cubos anteriores; en láminas u fotografías.

Parte C. Representación en papel de los cubos de la parte A, desde dos puntos de vista diferentes.

En la **parte A**, se presenta modelos de cubos contruidos en diferentes materiales: cubo en varitas (solo la estructura del cubo), cubo en madera (sólido en su parte interior) y cubo en material transparente (hueco en su parte interior); y se les pide a los estudiantes observar y mencionar características. Se aprovecha el momento para pedirles que definan poliedro, poliedro regular, cubo y que mencionen sus elementos; aclarándoles que *el cubo* es un poliedro regular que tiene como caras polígonos planos cuadrados. De otra parte, a partir de los modelos, se les menciona que, podemos verlos de diferentes ángulos, los cuales serán llamados *punto de vista del cubo* (por ejemplo punto de vista frontal). A continuación, se designa un cubo de material diferente a cada dupla.

Objetivo: Pretendemos que los estudiantes observen, manipulen y describan elementos de los cubos a partir de los modelos hechos en material concreto.

El enunciado de la actividad 1 parte A, se encuentra a continuación en el cuadro 6:

Cuadro 6. Actividad 1 Parte A

Parte A

Observe, manipule y describa los elementos de los modelos de cubos presentados en material concreto (Cubo en varitas de paliglobo, cubo en madera, cubo en material transparente):

☞Cubo en.....

.....

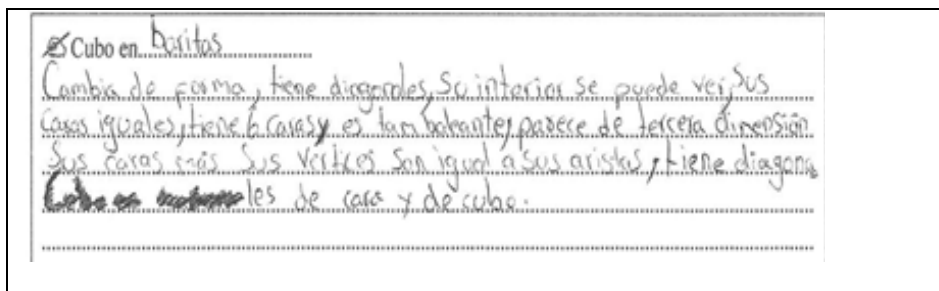
.....

Análisis a priori

En esta **parte A**, esperamos que las duplas mencionen las características del cubo y distingan sus elementos como: aristas, vértices, caras de los cubos, dejándose influenciar por la naturaleza del material concreto y mencionen que tiene alguna interferencia al distinguir sus elementos; ya que según Parzysz (1988) los estudiantes se dejan llevar por lo que ven. Por ejemplo que digan que el cubo en varita no tiene caras.

Análisis a posteriori

De acuerdo a lo que suponíamos la dupla D_1 consiguió reconocer las aristas, los vértices y las caras del cubo (a pesar que no tiene caras), influenciando en esta parte el polo de lo sabido y también menciona que su interior se puede ver; pudiendo distinguir sus diagonales, verificando así lo que menciona Parzysz (1988) que los estudiantes se dejan llevar por lo que ven. En conclusión, según la respuesta de la dupla se evidencia la influencia de los dos polos, de lo visto y lo sabido. La afirmación “parece de tercera dimensión” nos da pie a pensar que ellos lo verifican. La figura 43, muestra la respuesta de la dupla D_1 .



Transcripción: Cubo en Varitas

Cambia de forma, tiene diagonales, su interior se puede ver, sus caras iguales, tiene seis caras y es tambaleante, parece de tercera dimensión, sus caras más sus vértices son igual a sus aristas; tiene diagonales de cara y de cubo.

Figura 43. Parte A actividad 1 dupla D_1

De otra parte la dupla D_5 quien manipuló el cubo transparente, menciona que puede distinguir sus aristas, vértices y caras y también la diagonal de la cara y la diagonal del cubo; dando la idea que puede distinguir a través del material; razón que nos ayuda a confirmar lo que afirma Parzysz (1988) que los estudiantes se dejan llevar por lo que ven. Cuando mencionan que ven la diagonal del cubo pensamos que están siendo influenciados por el polo de lo sabido. Cuando afirman que “el cubo encierra un espacio” nos da pie a pensar que así lo verifican. Debemos agregar también que la dupla que manipuló el modelo de madera afirma que en el cubo no distingue sus diagonales. La figura 44 muestra la respuesta de la dupla D_5 .

<p>El Cubo en...transparentes..*</p> <p>El cubo es transparente; se puede ver sus aristas, vértices y caras y también la diagonal de la cara y diagonal del cubo; en el cubo encierra un espacio.</p>
<p>Transcripción: Cubo en transparente</p> <p>El cubo es transparente, se puede ver sus aristas, vértices y caras y también la diagonal de la cara y diagonal del cubo; en el cubo encierra un espacio.</p>

Figura 44. Parte A actividad 1 dupla D_5

Debemos indicar además, que en esta parte A, las duplas manipularon material concreto, encontrándose así según Parzysz (2001) en la etapa concreta G_0 y deducen características por lo que ven. Además, cabe indicar, como menciona Parzysz (1991) el uso de material concreto aún en esta etapa es muy importante ya que ayuda a las duplas a mejorar el nivel de visualización y a formar la imagen mental del objeto.

En la **parte B**, se les muestra fotos de los cubos manipulados en la parte A (no se les dice, ellos lo deducen como tal). Se pide que observen y describan las respectivas características de la foto. A cada dupla se les entrega la lámina de la foto del modelo que manipuló en la parte A.


Objetivo: Pretendemos que a partir de la comparación de los elementos de la representación en foto con los del modelo del cubo deduzcan y se den cuenta cómo cambian algunas características del modelo (plano tridimensional) cuando es representado en un papel (plano bidimensional).

El enunciado de la Actividad 1 parte B, se encuentra en el cuadro 7:


Cuadro 7. Actividad 1 Parte B

Parte B


Observe detenidamente las representaciones en las láminas:



a)



b)



c)

Figura 1. Representaciones de cubo

Conteste a las siguientes preguntas:

1. ¿En que se relacionan con los presentados en la parte A?
.....
2. ¿Qué elementos del cubo observas en estas representaciones?
.....
3. ¿Compara las longitudes de las aristas? ¿Coinciden?
.....
4. ¿Compara las caras? ¿Son cuadradas? Escribe a continuación tus alcances:
.....

Análisis a Priori

Esperamos que las duplas noten que en las representaciones del cubo en papel existe una cara del cubo que se ve más grande que su cara opuesta; característica que se espera que asocien después con la representación del cubo en perspectiva Cónica. Además, esperamos que las duplas indiquen que las representaciones en papel son

ilustraciones de los cubos vistos en los modelos de material concreto y es posible que indiquen también que algunas propiedades del cubo no coinciden con las que se notaba en los modelos de material concreto, como por ejemplo forma de las caras, como también longitud de las aristas. En cuanto a esta situación, encontramos explicación en Parzysz (1988) que afirma que existen dos niveles de representación: Las representaciones próximas (nivel 1) y las representaciones distantes (nivel 2). Es así que nos indica que cuando pasamos del nivel 1 al nivel 2 existe una pérdida de información. Es decir, al ver la representación del cubo en papel podemos observar que las propiedades que se saben de este no coinciden; creándose así un conflicto entre lo visto y lo sabido.

Análisis a posteriori

De acuerdo a lo que habíamos previsto, la dupla D_1 , consiguió identificar la representación como la foto del cubo anterior. Esta dupla manipuló el modelo representado en la foto a. Menciona que las aristas no coinciden; además, señala que algunas caras del cubo en la lámina son cuadradas y otras son rombos; esto nos lleva a verificar lo que señala Parzysz (1988) ya que en esta fase la dupla D_1 se encuentran en el nivel distante (nivel 2) dado que manipula representaciones en papel; y en este sentido Parzysz afirma que existe una pérdida de información, en el cual el estudiante se deja llevar por lo que ve y no por lo que sabe o conoce de las características del cubo.

La figura 45 muestra las respuestas de la dupla D_1 .

Conteste las siguientes preguntas:

- ¿En que se relacionan con los presentados en la parte A?
 Son hechos de varitas de colores y en la foto se ven desde otro ángulo
- ¿Qué elementos del cubo observas en estas representaciones?
 Los elementos que observa son: Aristas, caras y vértices
- ¿Compara las longitudes de las aristas? ¿Coinciden?
 Sí porque de un cubo sus cuadrados y lados son iguales pero en la imagen parecen que son algunas caras son más pequeñas o desiguales.
- ¿Compara las caras? ¿Son cuadradas? Escribe a continuación tus alcances:
 Si la cara superior se parece que es un cuadrado pero la de los lados parece que es un rectángulo.

 Figura 45. Parte B actividad 1 dupla D_1

Con respecto a la dupla D_5 , menciona que la lámina b es la foto del cubo anterior; además nota diferencia entre la longitud de las aristas; de otro lado reconoce que las caras de la representación son algunas cuadradas y otras rectangulares. De igual manera que en la dupla anterior, verificamos que ellos notan que las características no son las mismas en la representación del cubo en papel (diferencia en la longitud de las aristas, algunas caras cuadradas y otras rectangulares); verificando también que la dupla deduce propiedades de lo que ve, predominando así lo visto sobre lo sabido.

De lo analizado podemos afirmar que los estudiantes; en esta parte B se encuentra en la etapa G_1 (espacio-gráfica) donde la justificación de las propiedades es hecha por lo que se ve.

En la **parte C**, se les pide a los estudiantes que representen algunos de los modelos de cubo de material concreto y además que indiquen el punto de vista de la representación; dado que en la parte A se les explicó acerca del punto de vista de un modelo en material concreto.

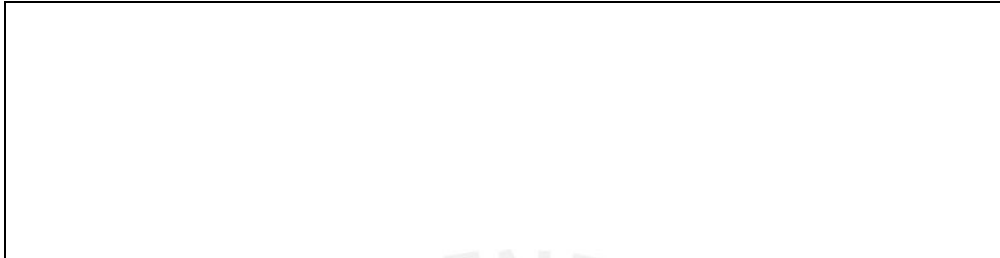
Objetivo. Nos proponemos observar y describir las representaciones del cubo y verificar su relación con el punto de vista de donde se le representa.

El cuadro 8 muestra la indicación dada a las duplas.

Cuadro 8. Actividad 1 Parte C

Parte C

Represente cualquiera de los modelos de cubos de material concreto desde dos ángulos o vistas diferentes. Indique la vista

**Análisis a priori**

Esperamos que las duplas se encuentren frente a dificultades como por ejemplo mantener dimensiones de las aristas y muestren algunas imprecisiones al representar el cubo, como por ejemplo, que dibujen como caras polígonos irregulares; verificándose la afirmación de diferentes investigadores como: Parzysz (1988), Gutiérrez (1998, 2006), Blanco (2009); quienes afirman que para los estudiantes no resulta fácil representar un objeto tridimensional en el plano. En cuanto al punto de vista desde donde ven su representación, se espera que mencionen que lo hacen de algún ángulo (por ejemplo parte frontal, desde la arista derecha).

Análisis a posteriori

De acuerdo a lo que suponíamos, la dupla D_1 , presentó dificultades en su representación del cubo; posiblemente dibujó el cubo desde algún punto de vista, pero no indica la vista; de lo cual pensamos que no fue suficiente la explicación que se le dio brevemente en la parte A.; verificándose parcialmente lo que afirmamos en nuestro análisis *a priori*. La figura 46, muestra la representación de la dupla D_1 .

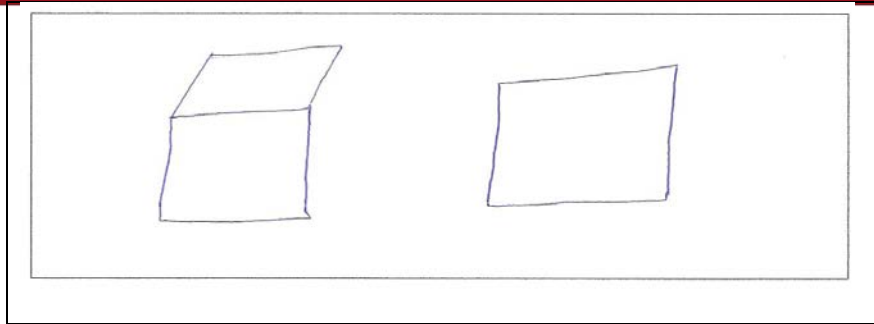


Figura 46. Dibujo del cubo, dupla D_1

Con respecto a la dupla D_5 , a diferencia de la dupla anterior realizó dibujos más precisos, notándose dificultades que la longitud de las aristas y en la forma de las caras del cubo; pero el problema aparece de igual modo que en la otra dupla no escribe la vista desde la cual presenta la representación; de lo cual pensamos que no se orienta en referencia al punto de vista del cubo. En la figura 47, mostramos la representación de la dupla D_5 .

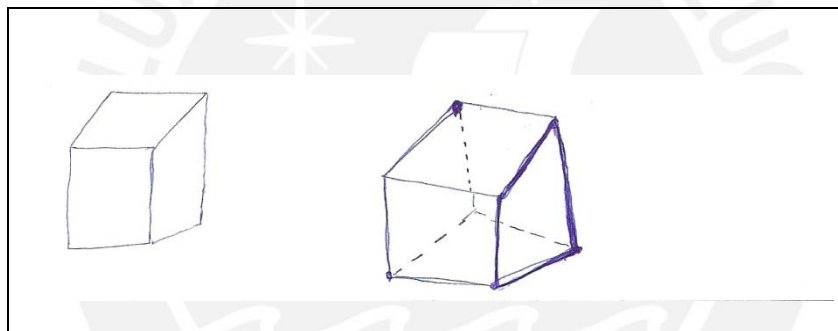


Figura 47. Dibujo del cubo, dupla D_5

Cabe indicar; que según coinciden las dos duplas al no presentar los puntos de vista desde donde ven y representan el cubo, que no tienen claro sobre los puntos de vista de la representación del cubo.

Debemos resaltar además, que en esta parte de la actividad las duplas se encuentran en la etapa G_1 y tienden realizar sus diseños en perspectiva Caballera; posiblemente influenciadas por lo que ven en el texto de matemática; según llama Parzysz (1991) referencias implícitas o puntos de vista habituales.

De otro lado; debemos indicar que al término de la actividad 1; la docente—investigador formalizó los contenidos trabajados en el encuentro como:

- 1) Poliedro es la reunión de un número finito de polígonos planos (parte del plano limitado por un polígono) llamados caras; donde cada lado de uno de esos polígonos,

- es también lado de un y solo un, otro polígono; además la intersección de dos caras cualquiera, o es un lado común, o un vértice o un conjunto vacío.
- 2) Un cubo es un poliedro regular que tiene caras que polígonos planos cuadrados. Por ejemplo en el modelo del cubo en varitas se está tomando solo la estructura de las aristas; en el modelo de cubo de madera se está tomando la superficie y su interior formándose así la representación de un cubo como sólido y en el modelo del cubo en material transparente se tiene un cubo a base de la superficie de sus caras y la parte interior vacía. Nosotros entenderemos el cubo como en este último caso mencionado. Se tomará la estructura del cubo en base a sus aristas solo para efectos de poder ver todas sus aristas.
 - 3) El cubo tiene elementos básicos: caras, vértices y aristas; además tiene elementos asociados como son: diagonal de una cara (que une vértice opuestos de una misma cara) y diagonal del cubo (que une vértices opuestos de diferentes caras).
 - 4) El cubo puede ser representado en el plano mediante una ilustración (dibujo).
 - 5) Al representar un cubo podemos asumir puntos de vista; al igual que muestra la foto del cubo; por ejemplo, punto de vista desde la cara frontal (cara del cubo frente al observador, el cual resultaría un cuadrado), punto de vista desde la cara lateral derecha (cara lateral derecha del cubo frente al observador), vista desde el vértice superior derecho (vértice superior derecho de la cara frontal del cubo frente al observador).
 - 6) Al confrontar las características de la representación de la foto del cubo con las del modelo de material concreto, se distinguen diferencia en la longitud de sus aristas, diferencia en las formas de las caras , las aristas que unen la cara frontal del cubo y su cara opuesta no son paralelas.

A continuación presentamos la Actividad referente a la presentación y familiarización del software CABRI 3D, abordada en el primer encuentro.

Actividad 2. *Conociendo el Software CABRI 3D y explorando sus recursos, funciones y herramientas.*

Pretendemos mostrar al estudiante los recursos y algunas características del software, introduciendo herramientas esenciales para el desenvolvimiento de las actividades.

Antes de proponer las tareas, presentamos el CABRI 3D (ver figura 48), indicando que permite crear, construir, ver y manipular objetos geométricos en tres dimensiones que tiene como característica principal el arrastre. Además explicamos algunas herramientas, recursos y funciones que este software posee.

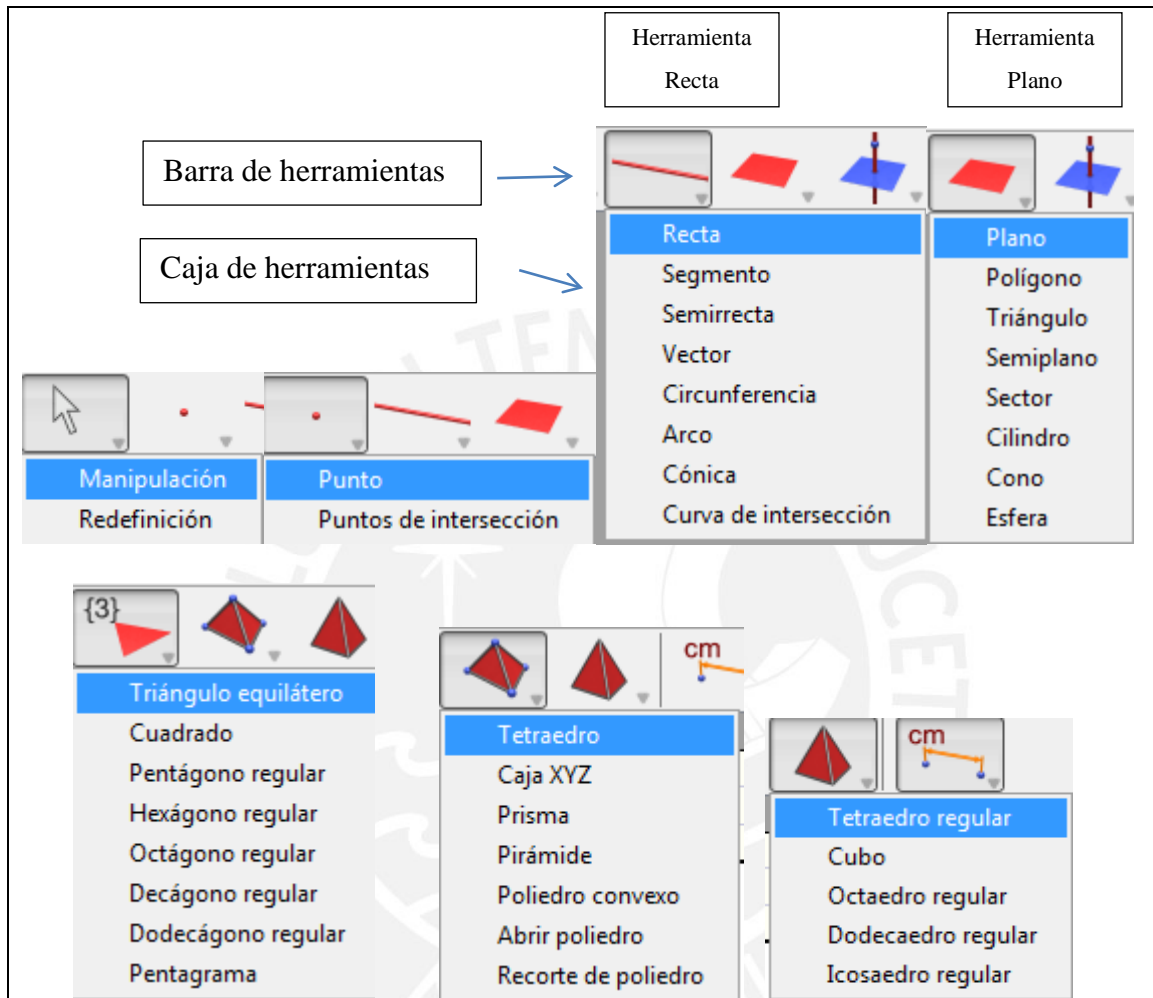


Figura 48. Herramientas del CABRI 3D

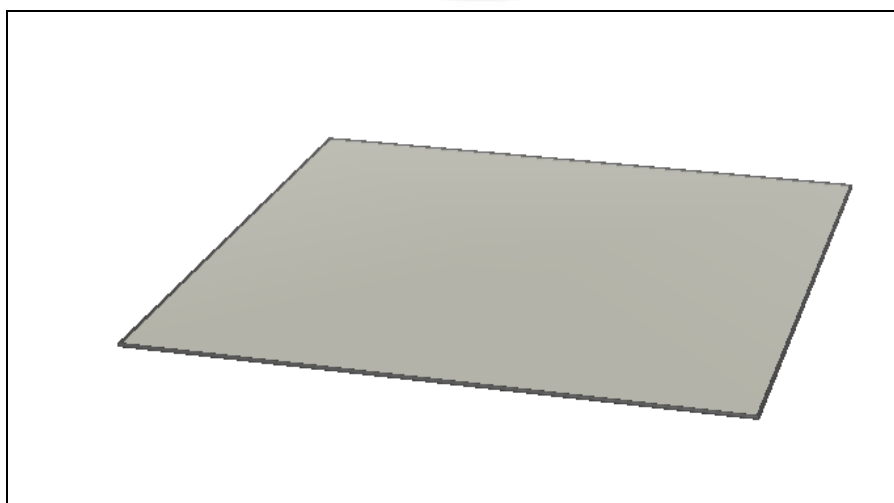


Figura 49. Plano base del CABRI 3D

Interactuando con el software, la docente—investigador hace comentarios a los estudiantes sobre el cuadrilátero representado llamado plano de referencia (Figura 49), enfatizando que el plano se extiende de ese cuadrilátero; siendo este una forma convencional de representar al plano.

Usamos la herramienta “**Punto**” para crear varios puntos fuera y dentro del plano de base como muestra la figura 50.

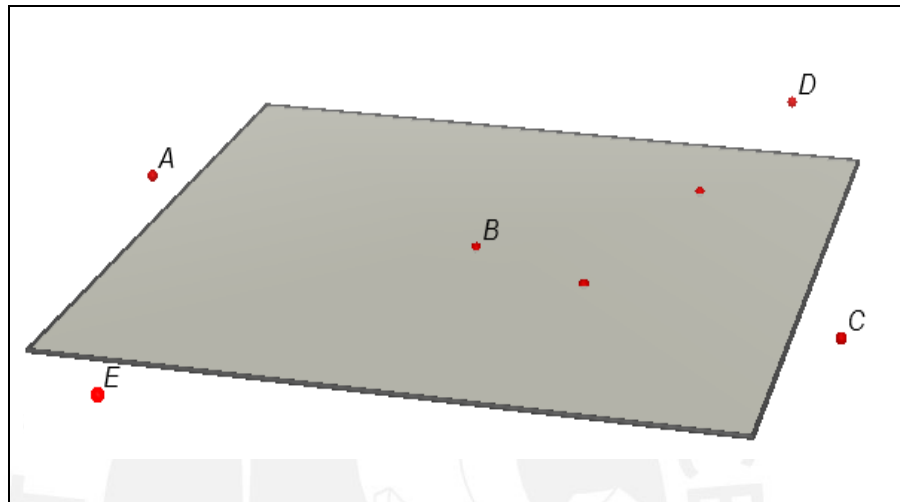


Figura 50. Representación de puntos en el plano

E indicamos que existe una manera para verificar si todos los puntos están en el mismo plano, ya que visualmente no es posible. Para ello recurrimos a la manipulación directa (con el botón derecho del mouse), que permite cambiar el punto de vista de la representación, como lo indica la figura 51.

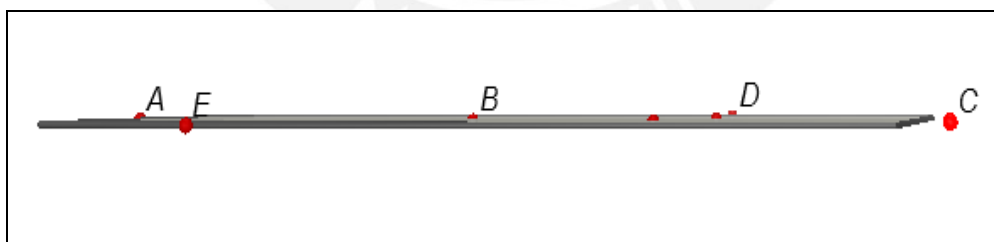


Figura 51. Representación de puntos en el plano horizontal en una vista frontal

También mostramos como crear un punto en el espacio, con el uso de la tecla *Shift* en el momento de la creación y moviendo el punto verticalmente, conforme la figura 52

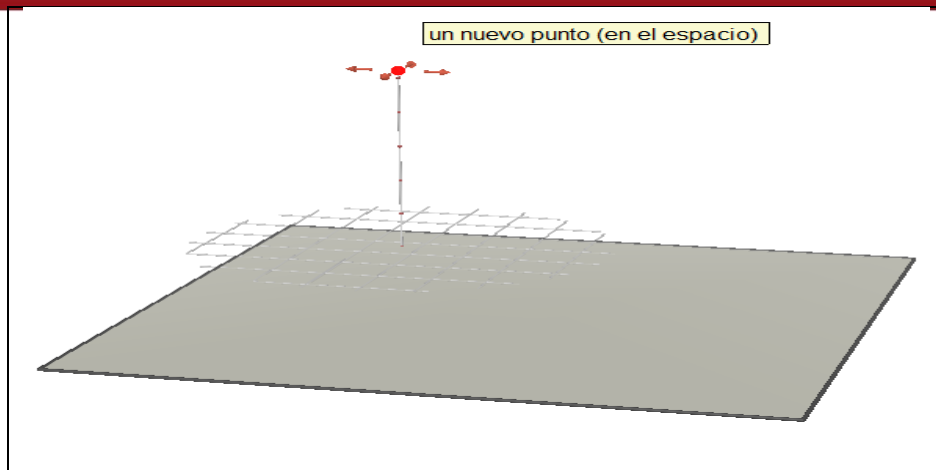


Figura 52. Representación de un punto en el espacio

Otra característica importante del CABRI 3D es la posibilidad de utilizarse diferentes tipos de perspectiva. Así con la opción “Nueva vista” se puede cambiar la perspectiva que por defecto tiene el CABRI 3D. Los cambios de puntos de vista son explorados manualmente con el botón derecho del mouse.

Con los alcances presentados, esperamos que en la siguiente parte correspondiente a actividades de familiarización, los estudiantes sean más independientes en cuanto a su interacción con algunas herramientas, funciones y recursos del software.

A continuación, proponemos una tarea, que consta de tres partes (A, B, C); indicando para cada caso grabar sus construcciones y además escribir en una caja de texto sus respuestas.

Esta tarea puede ser vista como una construcción guiada y propone la utilización de las siguientes herramientas básicas del CABRI 3D: punto, recta y plano.

Parte A. Crean rectas, rectas paralelas, rectas secantes y rectas alabeadas.

Parte B. Crea planos secantes y planos paralelos

Parte C. Crea planos perpendiculares

En la **parte A** proponemos al estudiante que haciendo uso del CABRI 3D cree rectas, rectas paralelas y rectas alabeadas.

Objetivo: Pretendemos que el estudiante se familiarice con los objetos de la geometría espacial, como rectas, rectas paralelas, rectas secantes y rectas alabeadas.

La ficha del estudiante parte A de esta tarea está reproducida en el cuadro 9.

Cuadro 9. tarea Parte A

Tarea *Creando rectas y planos***Parte A**

- La herramienta “**Recta**” crea rectas a partir de dos puntos distintos.
- Nombre el plano base como P y cree los puntos A y B en este plano P; además cree el punto C (utilizando la tecla *Shift*) fuera del plano P. Ahora cree la recta r que pase por los puntos A y B; además cree la recta s que pase por los puntos A y C.

Cree el punto D en el plano P, distintos de los puntos A y B y trace una recta v paralela a la recta r que pase por el punto D

A continuación, utilice la herramienta “**Paralela**” cree una recta paralela a la recta r que pase por el punto C y nómbrala como t.
- Utilice la manipulación directa (botón derecho del mouse) y cambie el punto de vista.
- Describa con sus palabras la posición de la recta r y la recta s en relación al plano P. Además conteste:
 - 1) ¿Cómo son las posiciones entre dichas rectas r y s?
 - 2) ¿Cómo son las posiciones de las rectas r y t?
 - 3) ¿Cómo es la posición de la recta t con respecto al plano P?
 - 4) ¿Cómo son las rectas s y v?
 Anote sus respuestas en la caja de texto (use “**Documento**” y “**Agregar zona de texto**”).
- Salve su figura y nombre el archivo de la siguiente forma: *{Iniciales de la dupla}_tarea_A* y guárdelo en la carpeta: Actividad 2

En la parte A de la tarea, *a priori*, esperamos que el estudiante cree dos puntos en el plano horizontal de referencia y un punto en el espacio (no pertenecientes a ese plano). Conforme a lo descrito, los puntos directamente son localizados en el plano horizontal, tanto si fueran creados en la parte visible o en la parte no visible de ese plano. Esperamos que los estudiantes muestren una representación similar a la figura 53 y sus respuestas sean similares a las que allí se indican.

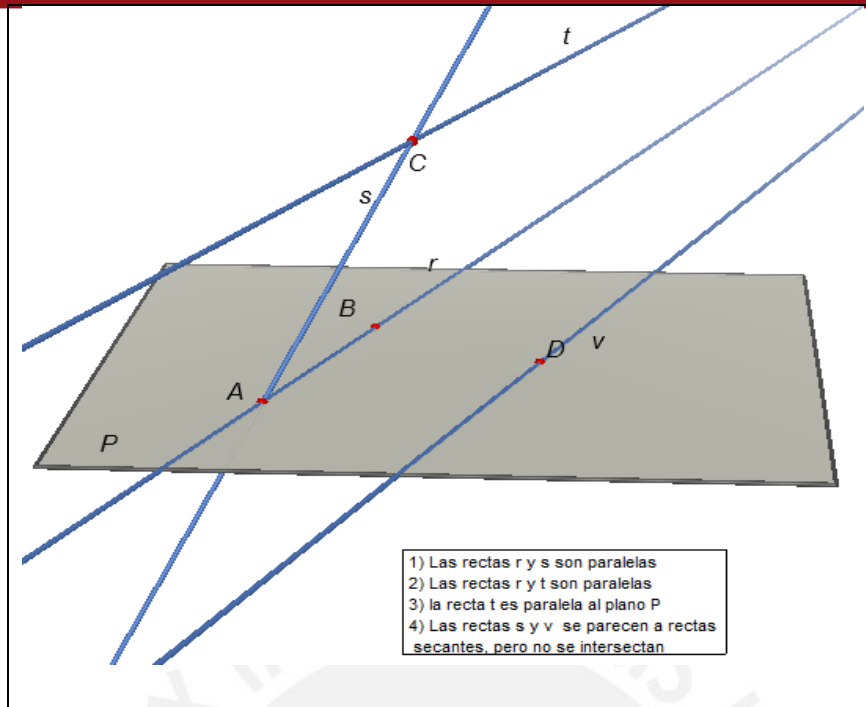
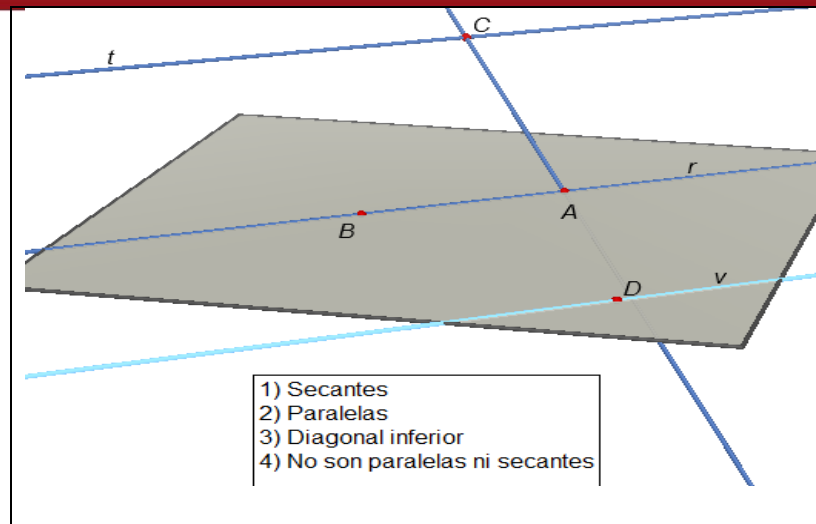


Figura 53. Rectas secantes y rectas paralelas

Además, esperamos *a priori* que los estudiantes reconozcan y describan la posición de las rectas en el espacio ayudándose del recurso de manipulación directa y cambio de vista, ya que le permite validar sus construcciones.

De acuerdo a lo observado al desarrollar la parte A de la tarea pensamos que los estudiantes se encuentran en la etapa espacio-gráfica (G_1) porque sus justificaciones son hechas por lo que ven después de hacer las construcciones con CABRI 3D. Tal es así, que para la Dupla D_5 al momento de trazar la recta s menciona que tiene que pasar por el punto A y por el punto que está en el “aire”; es decir, no pasan la recta exactamente tocando el punto C sino buscado al tanteo pasar la recta por el punto C ; luego cuando verifican, mediante la manipulación directa se dan cuenta que la recta s no pasa exactamente por C , por lo que volvieron a construirla. La figura 54 presenta la construcción realizada por la Dupla D_5 .


 Figura 54. Construcción de rectas, dupla D_5

En cuanto a las preguntas, las respuestas de la dupla fueron las que esperábamos *a priori*, ya que por la ventaja que ofrece el recurso de manipulación directa del software, pensamos que pudieron identificar las posiciones relativas de las rectas, tomando aquí prioridad el polo de lo visto; aunque para poder reconocer el comportamiento gráfico también influyó el polo de lo sabido. En la pregunta 3) pensamos que la razón del error se debe a que se priorizó el polo de lo visto y no tuvieron en cuenta el polo de lo sabido.

O quizá a través del software no pudieron ver bien el comportamiento de los dos objetos; ya que cuando se manipula el plano y se relaciona con la recta t , el plano se vuelve una recta desde un punto de vista frontal.

En la respuesta 4) la respuesta es correcta; aprovecharemos esta respuesta en el momento de la formalización y mencionaremos como rectas albeadas.

En cuanto a las demás duplas no tuvieron dificultades ni en sus construcciones ni en sus respuestas; verificándose así lo que preveíamos *a priori*.

En la **Parte B** proponemos al estudiante construir planos secantes y planos paralelos.

Objetivo: Buscamos que reconozca y diferencie planos secantes y planos paralelos.

Presentamos, la **parte B** de la tarea, en el cuadro 10.

Tarea *Creando rectas y planos***Parte B**

La herramienta “**Plano**” determina un plano.

 Cree los puntos A y B en el plano base P y el punto D fuera de este.

Cree el plano Q que pase por los puntos A, B y D.

La herramienta “**Paralela**” permite crear rectas paralelas o planos paralelos.


Cree el plano R paralelo al plano P


Conteste a las siguientes preguntas:

1) ¿Qué posiciones tienen los planos P y Q? ¿El punto D está en el plano Q?

2) ¿Qué posiciones tienen los planos Q y R?

Conteste su respuesta en una caja de texto (use “**Documento**” y “**Agregar zona de texto**”).

 Para observar el plano creado, modifique el punto de vista (botón derecho del mouse).

 Salve su figura, nombrando el archivo de la siguiente forma: *<Iniciales de la dupla>*_tarea_B y guarde en la carpeta: Actividad 2

En esta **Parte B**, *a priori*, esperamos que los estudiantes creen el plano Q con la herramienta “**Plano**” que permite crear un plano a partir de tres puntos no colineales; como la indicación dada. Una de las dificultades podría ser que si el estudiante crea un plano por una recta y un punto contenidos en el plano de base (sin utilizar la tecla *Shift*), el software creará un plano coincidente con este y puede ser que no perciba que este plano fue creado.

Otra dificultad que puede aparecer, sería cuando el estudiante cree un plano por tres puntos no colineales (A, B, D) y éste podría no contener a los tres puntos simultáneamente; es decir, uno de los puntos podría no ser representado en el interior del cuadrilátero que representa ese plano; dándole así la impresión (perceptivamente) que el punto no pertenece a ese plano. En esta situación estaría evidenciando la influencia de lo visto sobre lo sabido. La figura 55 muestra una de las posibles construcciones que podrían hacer las duplas y sus respectivas respuestas que podría dar.

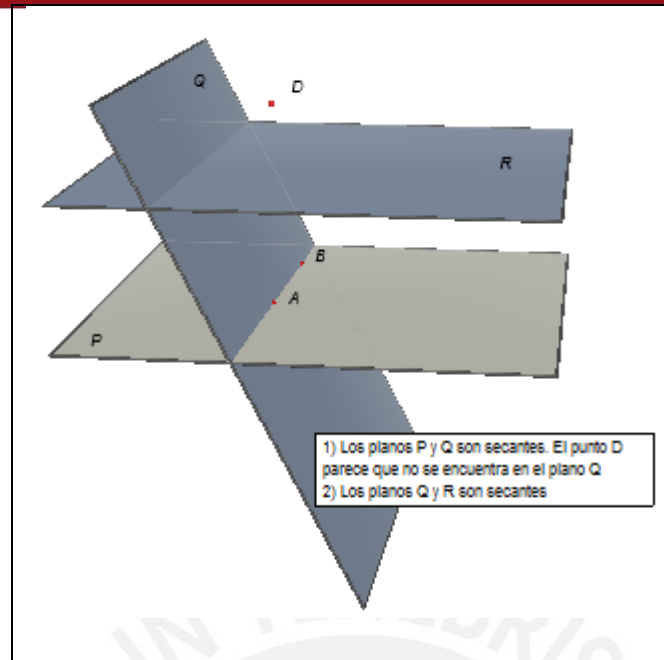


Figura 55. Planos secantes y planos paralelos

En cuanto al análisis *a posteriori* de esta **parte B** tenemos que la dupla D_1 (ver figura 56) como podemos observar realizó su construcción como pensamos *a priori*; pero al contestar la pregunta 1) propuesta en la actividad afirmó que los planos son perpendiculares, priorizando el polo de lo visto y posiblemente sin utilizar el recurso de manipulación directa y cambio de vista del CABRI 3D. Con respecto a la pregunta 2) la dupla responde que se cortan, mas no menciona que son planos secantes, de lo cual pensamos que no tiene claro lo que son estos planos. Debemos indicar que la dupla D_1 se encuentra en la etapa G_1 , ya que hace sus justificaciones por lo que ve.

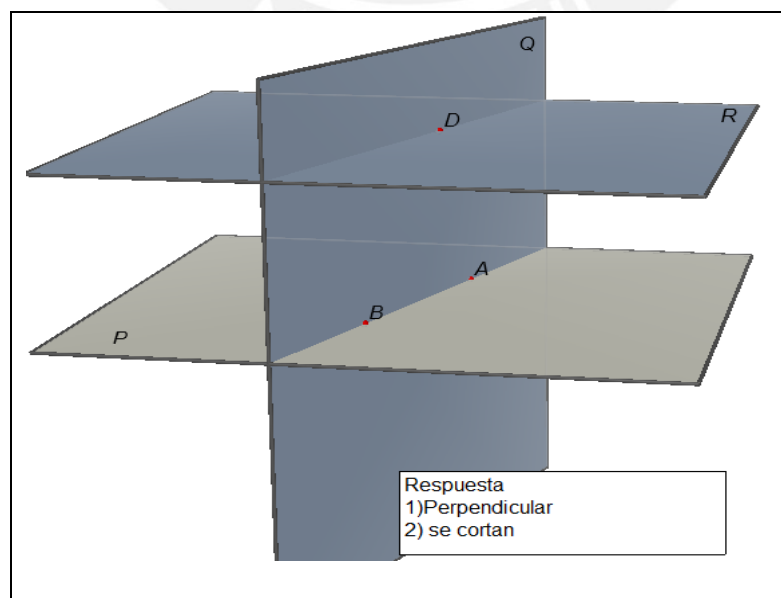


Figura 56. Parte B actividad 2 Dupla D_1

En la **parte C** proponemos al estudiante crear planos perpendiculares y además que redacte la secuencia que le sirvió para construirlo.

Objetivo: Pretendemos que el estudiante identifique, reconozca y construya planos perpendiculares.

Cuadro 11. Tarea Parte C

Parte C	
<input checked="" type="checkbox"/>	La herramienta “Perpendicular” crea una recta perpendicular con respecto a un plano.
<input type="checkbox"/>	<p> Cree los puntos A y B en el plano base P.</p> <p> Utilizando la herramienta “Perpendicular” cree la recta perpendicular al plano P que pase por el punto A, a seguir nómbrela como r.</p> <p> A continuación, utilice la herramienta “Plano” y cree un plano que pase por la recta r y el punto B y nómbrelo como plano T. ¿El plano P y el plano T serán perpendiculares? Anote los pasos para crear un plano perpendicular, en una caja de texto (use “Documento” y “Agregar zona de texto”).</p>
<input type="checkbox"/>	Salve su figura, nombrando el archivo de la siguiente forma: <i><Iniciales de la dupla></i> _tarea_C y guarde en la carpeta: Actividad 2

En esta **Parte C**, *a priori*, pensamos que los estudiantes tendrán dificultades al crear la recta perpendicular y al describir los pasos de creación de un plano perpendicular; ya que deben anotar la secuencia de construcción. Esperamos que los estudiantes construyan el plano y contesten la secuencia de pasos para crear planos perpendiculares, como muestra la figura 57.

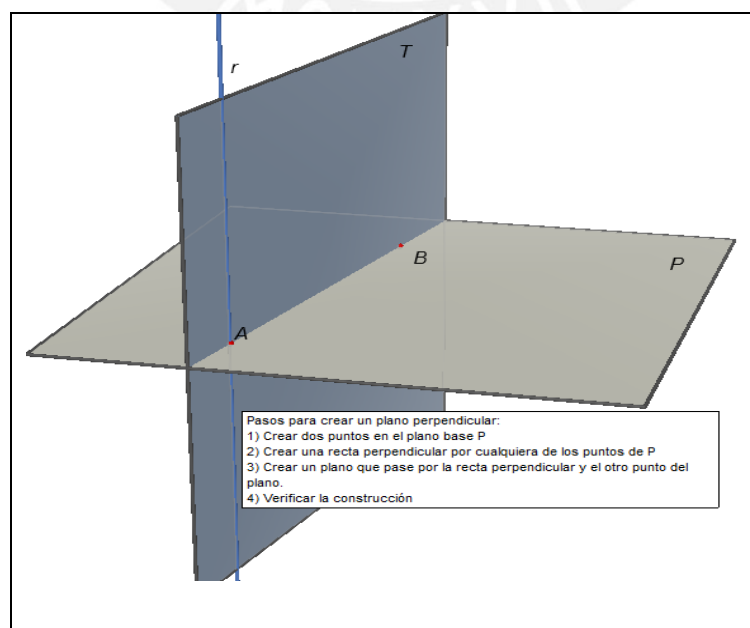


Figura 57. Planos perpendiculares

Presentamos a continuación, en la figura 58, la construcción y la secuencia de pasos para construir planos perpendiculares por la dupla D_5

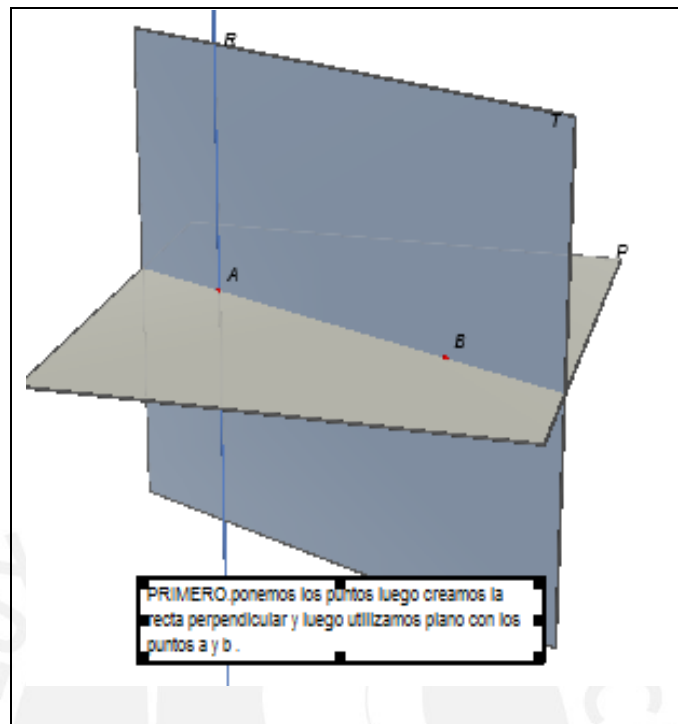


Figura 58. Parte C actividad 2 dupla D_5

En el análisis *a posteriori* como observamos la dupla D_5 coincide con parte de lo que preveíamos *a priori*, realizó bien su construcción; y describió los pasos que siguió para construir el plano perpendicular; sin embargo, esta dupla confunde la denotación de puntos y rectas. También podemos decir además que priorizó el polo de lo visto; ya que no verificó su construcción. Posiblemente la dupla no entendió cuando le preguntamos ¿Cómo son los planos P y T? para dar una respuesta tenía que manipular y verificar.

En cuanto a las demás duplas, coinciden en similares dificultades a la dupla D_5 ; de aquí que podemos afirmar que lo que suponíamos *a priori* se verificó. Debemos indicar también que el estudiante se encuentra en la etapa espacio-gráfica (G_1) ya que hace justificaciones por lo que ve y por lo que construye.

De otro lado; debemos mencionar que al término de la actividad 2; la docente—investigador realizó la formalización de las nociones trabajadas en el encuentro:

- 1) El CABRI 3D es un software de geometría dinámica, sirve para realizar construcciones de la geometría espacial y sus recursos de manipulación directa y cambio de punto de vista nos ayudan a visualizar y verificar dichas construcciones.

- 2) Rectas paralelas son aquellas que no tienen un punto en común y tienen la misma dirección.
- 3) Rectas secantes son aquellas que se intersectan en un punto.
- 4) Rectas alabeadas son aquellas que no se intersectan y no están contenidas en un mismo plano
- 5) Un plano es una superficie plana que se extiende ilimitadamente y que tiene como propiedad que contiene exactamente a toda recta que pase por dos puntos de dicha superficie.
- 6) Planos secantes son aquellos que se intersectan en una recta.
- 7) Planos paralelos son aquellos que no se intersectan, es decir no tienen rectas en común.
- 8) Se puede crear un plano por tres puntos no colineales, o teniendo una recta y un punto fuera de ella.
- 9) Creamos planos perpendiculares en el CABRI 3D teniendo en cuenta los siguientes pasos:
 - a) Crear dos puntos en el plano base P
 - b) Crear una recta perpendicular por cualquiera de los puntos anteriores
 - c) Crear el plano formado por la recta perpendicular y el otro punto que no se tomó para crear la recta perpendicular.
- 10) Dos planos son perpendiculares si uno de ellos contiene una recta perpendicular al otro.

A continuación, presentamos el segundo encuentro en el que trabajamos con el software y con lápiz y papel.

4.4.2 Segundo encuentro

En este encuentro trabajamos las actividades tres y cuatro.

En la actividad tres; los estudiantes manipulan la herramienta “**Cubo**” del software CABRI 3D, exploran el desarrollo de su superficie y reconocen sus elementos.

La actividad cuatro buscamos contrastar “lo visto” y “lo sabido” en referencia a representaciones estáticas (dadas en papel) y representaciones dinámicas (vistas a través del CABRI 3D).

Actividad 3. *Familiarización con la herramienta “Cubo” del software CABRI 3D*

Esta actividad consta de dos tareas:

Parte A. Reconoce el desarrollo de la superficie del cubo

Parte B. Reconoce diferentes elementos del cubo





En la **parte A** proponemos al estudiante crear un cubo utilizando el software y a partir de ello conseguir el desarrollo de su superficie; a través de las herramientas “**Cubo**” y “**Abrir poliedro**”.

Objetivo. Pretendemos que el estudiante reconozca y verifique que el cubo (de la forma definida anteriormente) tiene desarrollo de su superficie en el plano.

El cuadro 12 muestra la tarea de la parte A propuesta al estudiante.

Cuadro 12. Parte A, Actividad 3

Parte A. Reconociendo el desarrollo de la superficie o patrón de un cubo

- La herramienta “**Cubo**” crea la representación del poliedro cubo.
-  Utilice la herramienta “**Cubo**” y cree la representación de un cubo con una cara en el plano base.
- La herramienta “**Abrir poliedro**” abre el poliedro, mostrando las caras que componen al poliedro.
-  Use la herramienta “**Abrir poliedro**” y abra el cubo señalando este con el puntero; y a continuación use la herramienta “**Nueva página patrón**” (botón derecho del mouse) el cual mostrará en otra hoja el desarrollo del cubo.
-  Manipule la representación del cubo abierto de cualquiera de sus vértices y modifique el punto de vista.
¿Logra obtener la página patrón o desarrollo del cubo?
-  Salve su figura, para ello nombre el archivo de la siguiente forma:
*<Iniciales de la dupla>*_tarea1 y guárdelo en la carpeta: Actividad 3

Análisis a priori

En esta tarea esperamos que las duplas, al utilizar la herramienta “**Abrir poliedro**” y manipular la representación del cubo de uno de sus vértices consigan el desarrollo de la superficie del cubo y luego verifiquen lo encontrado a través de la herramienta “**Nueva página patrón**”; así como lo presenta la figura 59.

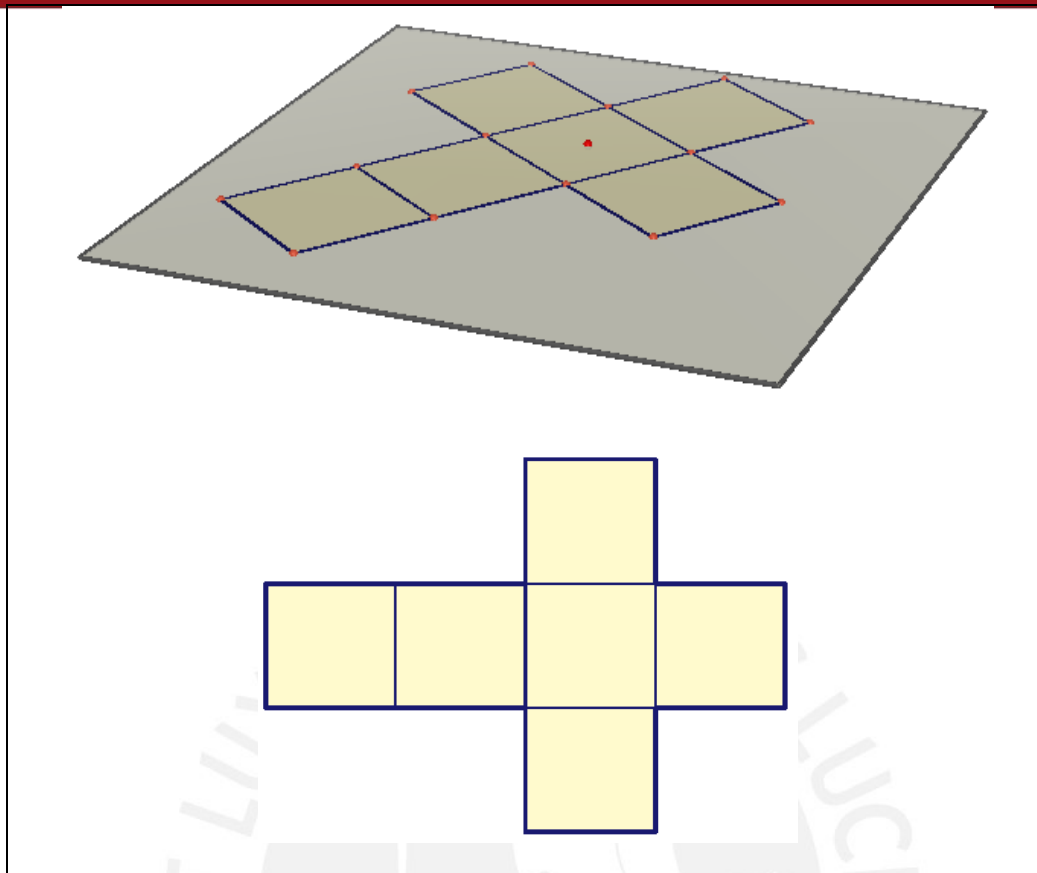
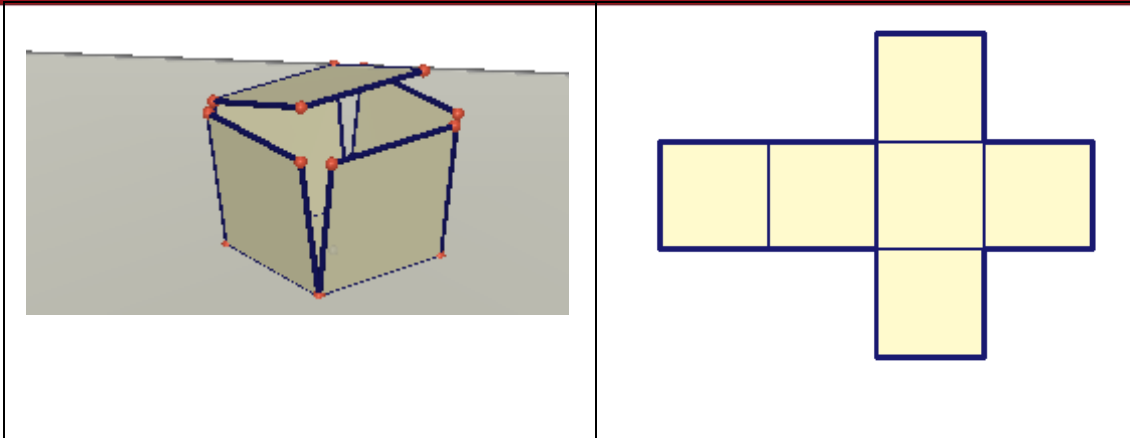


Figura 59. Desarrollo de la superficie del Cubo. Software CABRI 3D

En esta tarea, pensamos que las duplas tendrán dificultad al encontrar el desarrollo de la superficie del cubo o la página patrón del cubo (como lo llama el software) a través de la manipulación de uno de sus vértices; ya que cada vez que interactúan con herramientas nuevas no tan fácilmente se adaptan a su uso.

Análisis a posteriori

De acuerdo a lo que suponíamos en nuestro análisis *a priori*, la dupla D_1 construyó el cubo con facilidad; encontrando dificultad al usar la herramienta “Abrir poliedro” y encontrar el desarrollo de la superficie del cubo en el plano, mediante arrastre del software. La figura 60, muestra la representación construida por la dupla D_1 .


 Figura 60. Parte A actividad 3 dupla D_1

Con respecto a la dupla D_5 , su construcción fue similar a la dupla D_1 , mostrando dificultad al momento de conseguir el desarrollo de la superficie del cubo en el plano; ayudándose luego de la herramienta “**Nueva página patrón**” para representarlo.

Debemos indicar que en esta tarea, la dupla se encuentra en la etapa G_1 según señala Parzysz (2001) y además se encuentra en el nivel 2; es decir, el nivel de las representaciones distantes; ya que se encuentra interactuando con las herramientas del software.

En la **parte B** proponemos al estudiante crear la representación de un cubo en el software y reconocer sus elementos y las relaciones entre estos.

Objetivo: Pretendemos que el estudiante reconozca los elementos del cubo y encuentre la relación entre ellos.

La **parte B** de la actividad 3 está transcrita en el cuadro 13.

Cuadro 13. Parte B actividad 3

Parte B. *Reconociendo los diferentes elementos del cubo*

🖱 Utilice la herramienta “**Cubo**” y cree la representación de un cubo tocando doblemente el plano base al hacerlo tan grande como se quiera; y presente este en estilo de superficie vacío (puntero sobre el cubo, herramienta “**Estilo de superficie**”, botón derecho del mouse).

- Pinte de verde dos de sus caras paralelas (coloque el puntero en la parte a pintar y presione el botón derecho del mouse).
- Pinte de azul dos caras secantes.
- Pinte de rosado dos aristas perpendiculares
- Pinte de morado dos aristas paralelas
- Pinte de rojo dos aristas alabeadas (aristas perpendiculares de caras opuestas del

cubo)

f) Pinte de amarillo dos vértices opuestos de caras diferentes

- ☑ *Observación:* Para pintar una cara del cubo, es necesario crear el polígono correspondiente a la cara, use la herramienta “**polígono**” y una los vértices que forman el cuadrado. Para pintar la arista de un cubo, es necesario crear el segmento correspondiente a esta arista, utilice la herramienta “**Segmento**” y una los vértices de la arista del cubo; además para pintar un vértice es necesario crear el punto correspondiente.

🖱 Manipule el cubo creado y modifique el punto de vista.

- 💾 Salve la figura y nombre el archivo de la siguiente forma:
*<Iniciales de la dupla>*_tarea2 y guárdelo en la carpeta: Actividad 3

Análisis a priori

En esta tarea, esperamos que las duplas elijan la correcta ubicación de los elementos del cubo y además antes de colorearlos creen el punto, segmento o cara a través de las herramientas “**Punto**”, “**Segmento**” y “**Polígono**” respectivamente. De otro lado, consideramos que al estudiante no le será tarea fácil identificar aristas alabeadas del cubo para lo cual debe detenerse analizar y entender lo indicado en la secuencia de la actividad o de otra forma recordar rectas alabeadas.

A continuación, la figura 61, muestra una posible construcción que se espera realice el estudiante.

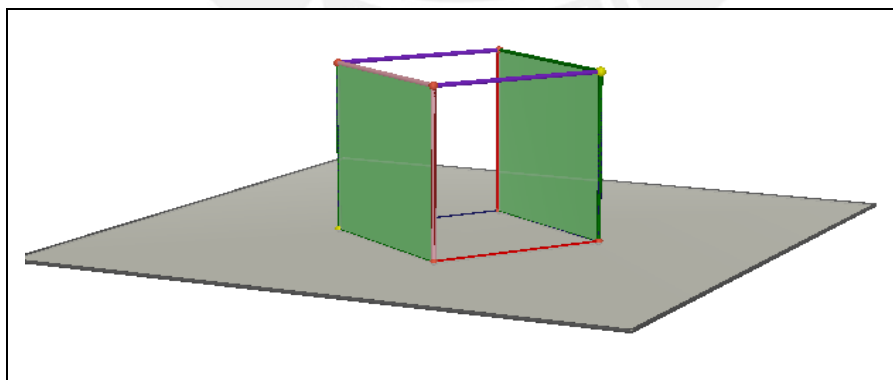


Figura 61. Cubo con dos caras paralelas y aristas pintadas

Análisis a posteriori

De acuerdo a lo previsto en nuestro análisis a priori, la dupla D_1 , tuvo dificultad al identificar las posiciones referentes no solo a las aristas (aristas secantes, paralelas), sino también respecto a las caras del cubo (caras secantes); ya que necesitó asesoría; la

dupla mostró muchas dudas (por ejemplo identificar aristas alabeadas) de lo cual pensamos que no tiene claro algunos conceptos básicos entre ellas rectas secantes y rectas perpendiculares y rectas alabeadas en el espacio. La figura 62 presenta la construcción de esta dupla.

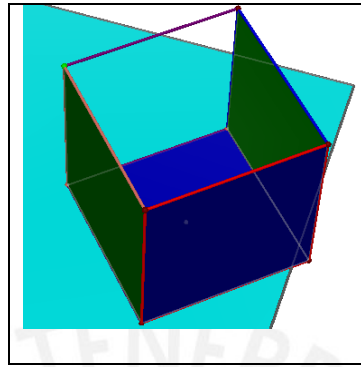


Figura 62. Parte B actividad 3 dupla D_1

Con respecto a la dupla D_5 , tal o igual que en la dupla D_1 , no pudo identificar con facilidad las posiciones de las aristas y también las de las caras; además no pudo pintar los elementos en mención; ya que no creó el punto, el segmento o el polígono de la cara; pidió, al igual que la dupla D_1 asesoría para sus construcciones. Debemos resaltar, que los estudiantes en general no están acostumbrados a leer e interpretar; esperan que la docente—investigador les explique para luego proceder, actitud que se desea modificar en este trabajo. La figura 63 muestra la construcción de la dupla D_5 .

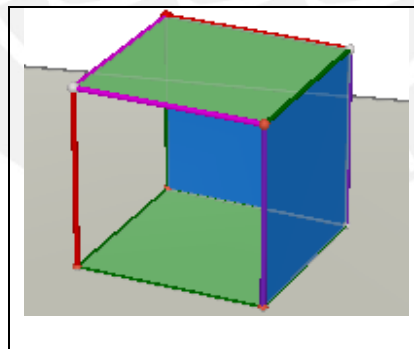


Figura 63. Parte B actividad 3 dupla D_5

Debemos indicar, que tanto en la parte A, como en la parte B de la actividad 3, las duplas D_1 y D_5 se encuentran en la etapa (G_1), al igual que se encuentra interactuando con representaciones distantes en el nivel 2; es así que deduce propiedades de lo que ve; mostrando dificultades al reconocer objetos de la geometría espacial.

Al culminar esta actividad, la docente—investigador realizó la formalización de los conceptos trabajados en la actividad, reforzando temas como:

- 1) El poliedro cubo (definido como en 3.1) tiene desarrollo de su superficie en el plano, el cual es llamado en el software como página patrón.
- 2) Los elementos del cubo guardan una ubicación con respecto al plano y al espacio.
- 3) Las aristas paralelas del cubo no se intersectan.
- 4) Las aristas secantes están ubicadas en caras perpendiculares del cubo
- 5) Las caras del cubo se encuentran en diferentes planos.
- 6) Las aristas alabeadas son aquellas que son perpendiculares y se encuentran en caras opuestas del cubo. También podemos afirmar que son aquellas que están contenidas en rectas alabeadas.

Actividad 4. *Lo que se ve y lo que se sabe de las representaciones*

Para el desarrollo de esta actividad adaptamos algunas representaciones creadas por Cozzolino (2008), Rosalves (2006) y Blanco (2009).

Esta actividad tiene dos partes:

Parte A. El estudiante describe lo que ve y lo que sabe de las representaciones en forma estática

Parte B. El estudiante describe lo que ve y lo que sabe de las representaciones en forma estática

En la **parte A** presentamos a los estudiantes diferentes representaciones, las cuales las observará como representaciones estáticas y tratará de contestar lo que ve y lo que sabe de ellas.

En la **Parte B** presentamos a los estudiantes las mismas representaciones de la parte A ingresará a un archivo del software donde se encuentra la representación y procederá a observarla y manipularla a través de los recursos del CABRI 3D y contestar así lo que ve y lo que sabe.

Objetivo de la actividad:

En esta actividad pretendemos que los estudiantes, diferencien entre una visión estrictamente perceptiva (Parte A) y una visión dinámica (Parte B, mediada por manipulación, movimiento de los objetos y el cambio de punto de vista de la figura). Además que, reconozca que el software CABRI 3D mediante sus recursos: manipulación, movimiento de los objetos y cambio de punto de vista; contribuye a observar con mayor detalle las representaciones.

El enunciado de la actividad 4 representación 1, se encuentra en el cuadro 14.

Cuadro 14. Puntos en el plano, actividad 4

Actividad 4. *Lo que se ve y lo que se sabe*

En esta actividad se le propone una serie de representaciones, las cuales debe observar atentamente y escribir sus alcances en la tabla correspondiente.

1) En la siguiente representación tienes el plano P y los puntos A, B y C.

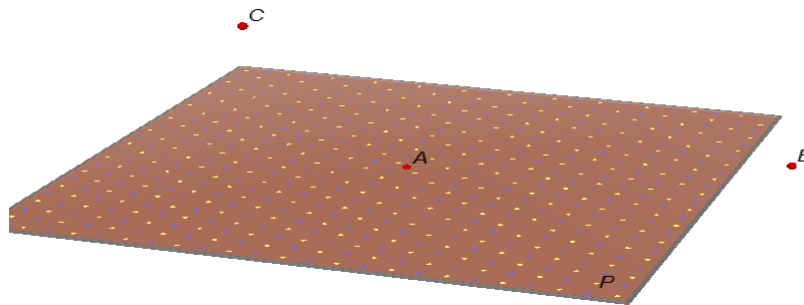


Figura 1. El plano y tres punto

Escriba a continuación, lo que observa y lo que puede afirmar por sus conocimientos de geometría; sobre la posición de los puntos A, B, C respecto al plano P.

<p>👁 Lo que observa en la figura</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>📖 Lo que sabe</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
--	--

Luego, en la carpeta: Representaciones1, abra el archivo Plano y tres puntos.

Explore la representación hecha en CABRI 3D, utilice el cambio de punto de vista de la figura (botón derecho del mouse).

A continuación anote y Justifique lo que ve y lo que sabe, cuando manipula la figura del CABRI 3D;

<p>👁 Lo que observa al manipular la figura.</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>📖 Lo que sabe</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
---	--

Análisis a priori

En esta representación, en cuanto a la **parte A** se espera que las duplas argumenten que ven un plano P con el punto A dentro de él y los otros dos puntos fuera o quizás también mencionen que el punto B pertenece al plano P; o también pueden decir que no pueden afirmar si los puntos B y C pertenecen al plano.

Para la **parte B**, cuando observan la figura creada con CABRI 3D y la mueven (botón derecho del mouse), pueden responder que los puntos A y B pertenecen al plano P; si tiene la noción de horizontalidad (el plano no termina en la representación) del plano. También podrían contestar que el punto C se encuentra fuera del plano P. De otra parte

podrían afirmar que el plano es una superficie plana ilimitada en dos dimensiones y que el punto C está en el espacio o pertenece a otro plano.

De otra parte, debemos indicar que en ambos casos las duplas se encuentran en la etapa (G_1) en la cual la justificación de las propiedades podría ser hecha por lo que se ve. Además, *a priori* esperamos que el uso del CABRI 3D, ayude a ver la ubicación de los puntos en el plano y el estudiante se ayude de lo sabido para determinarlos.

Análisis a posteriori

En cuanto a la **parte A** y con respecto a la dupla D_1 , afirman tal como habíamos previsto *a priori*; que ven un plano P y un punto A dentro del plano P y un punto B fuera del plano P y además un punto C arriba del plano P; a pesar que afirma que sabe que los puntos A y B están dentro del plano P (pero no argumenta las razones). La figura 64 muestra su respuesta.

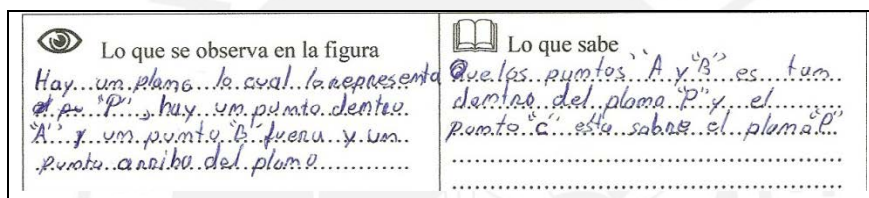


Figura 64. Preguntal parte A, actividad 4 dupla D_1

Con respecto a la dupla D_5 , de igual manera que la dupla D_1 , la dupla contesta que observa un punto A dentro del plano y los puntos B y C fuera del plano; además afirma que el plano es una superficie ilimitada en todas sus dimensiones. La figura 65 muestra la respuesta de esta dupla.

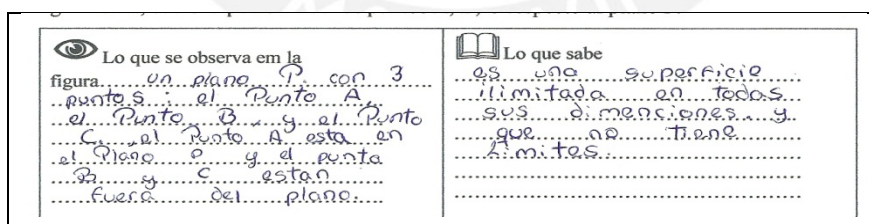


Figura 65. Pregunta 1 parte A, actividad 4 dupla D_5

Con respecto a lo que contestan ambas duplas, en esta **parte A**, concluimos que priorizan el polo de lo visto; a pesar que afirman que saben que el plano es una superficie ilimitada en todas sus dimensiones, no pueden deducir o distinguir lo que sucede con los puntos B y C.

En cuanto a la **parte B**, cuando usan la manipulación directa en la representación hecha en el CABRI 3D; así como habíamos previsto; la dupla D_1 contesta que observa que los puntos A y B están dentro del plano P aunque B no está dentro del plano P, pero se le

incluye; en cambio para el punto C sigue afirmando que observa que está sobre el plano P. En cuanto a lo que sabe, la dupla afirma con mayor precisión el por qué se le debe incluir al punto B dentro del plano P, al igual que el punto C el por qué debe ser incluido en otro plano. La figura 66 presenta la respuesta de esta dupla.

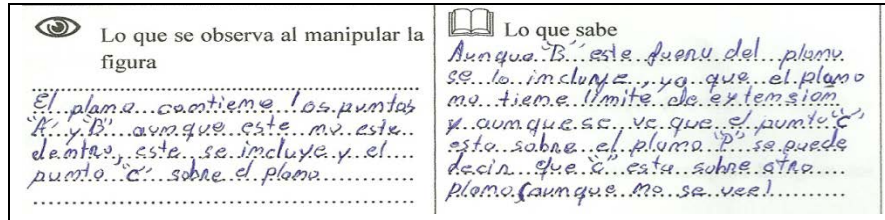


Figura 66. Pregunta 1 parte B, actividad 4 dupla D_1

En la **parte B**, en lo que respecta a la dupla D_5 responde que observa que los puntos B y C están en el aire y que el punto A está en el plano. Además esta dupla contesta que, sabe que el plano es una superficie ilimitada y los puntos B y C están flotando y A se mantiene en el plano; resultando ser una respuesta que dentro de nuestro análisis *a priori* no habíamos previsto. Con respecto a lo que afirma esta dupla D_5 ; pensamos que presenta una fuerte influencia de lo visto; y a pesar de que da la definición certera de plano, no deduce en cuanto a pertenencia de los puntos B y C. La figura 67 a continuación muestra la respuesta de la dupla D_5 .

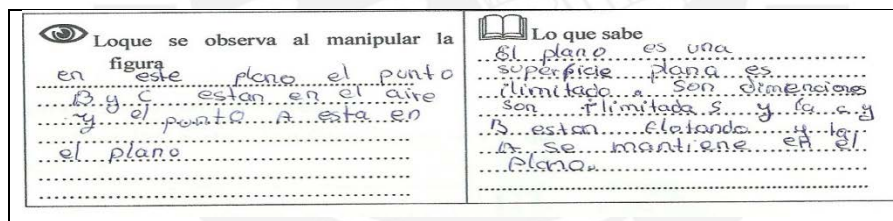


Figura 67. Pregunta 1 parte B, actividad 4 dupla D_5

Finalmente; contrastando **la parte A** (representación estática) y **la parte B** (representación dinámica) de esta pregunta uno; consideramos que logramos lo que preveíamos en nuestro análisis *a priori*, ya que pudimos comprobar que el CABRI 3D ayudó a las duplas a observar mejor el comportamiento de los puntos: A, B y C con respecto al plano P.

Con respecto a los polos de lo visto y lo sabido; observamos que los estudiantes priorizan el polo de lo visto, verificándose así que las duplas están en la etapa (G_1) de desarrollo del pensamiento geométrico de Parzys; en la cual las justificaciones son hechas por lo que se ve. Además pensamos que, las duplas se encuentran en el nivel de las representaciones distantes, según Parzys (1988); ya que decodifican haciendo una identificación inconsciente, tendiendo a considerar el dibujo como una representación

próxima del objeto. De otro lado, pareciera que existe un confusión entre lo que ven y lo que afirman las duplas; pero encontramos una explicación en Parzysz (1991) que afirma que este problema resulta cuando los estudiantes interpretan diseños que contienen convenciones implícitas (convencionalmente se toma el plano como un cuadrilátero).

En la pregunta 2, el enunciado se escribe a continuación en el cuadro 15.

Cuadro 15. Rectas en el espacio, actividad 4

Actividad 4. *Lo que se ve y lo que se sabe*

2) Observe la ubicación de la recta representada en el plano P.

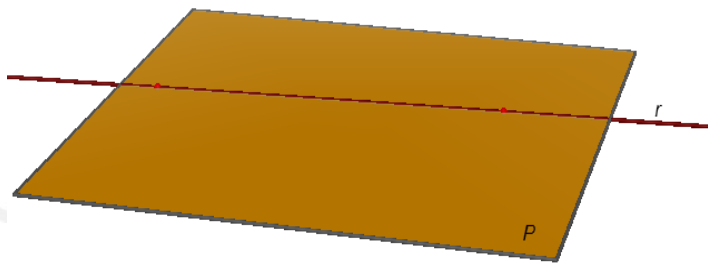


Figura 2. Plano y recta

Escriba a continuación, lo que observa y lo que puede afirmar por sus conocimientos de geometría; sobre la ubicación de la recta r con respecto al plano P. ¿Está la recta r contenida en el plano P?

<p>👁️ Lo que observa en la figura</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>📖 Lo que sabe</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
---	--

Luego, en la carpeta: Representaciones1, abra el archivo Plano y recta. Explore la representación hecha en CABRI 3D, utilice el cambio de punto de vista de la figura (botón derecho del mouse). A continuación anote y Justifique lo que ve y lo que sabe, cuando manipula la figura del CABRI 3D;

<p>👁️ Lo que observa al manipular la figura.</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>📖 Lo que sabe</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
--	--

Análisis a priori

Con respecto a **parte A** de esta pregunta, es posible que las duplas contesten que observan una recta r sobre un plano P; además que hay parte de la recta fuera del plano P. También pueden afirmar que saben que el plano es una superficie plana ilimitada en dos dimensiones y que la recta de igual manera es ilimitada en ambos sentidos.

Esperamos también que movilicen el polo de lo sabido y afirmen que la recta está contenida en el plano.

Su respuesta para la **parte B**, será similar a la de la primera parte a no ser que deduzcan teniendo presente la definición de plano y recta y que argumenten que la recta r está contenida en el plano P ; además pensamos que afirmarán que saben que el plano es una superficie plana ilimitada en dos dimensiones y que la recta de igual manera es ilimitada en ambos sentidos.

Debemos indicar que las duplas se encuentran en la etapa (G_1) en la cual la justificación es hecha por lo que se ve. Además esperamos que el uso del CABRI 3D ayude a las duplas a observar con mayor detalle la representación.

Análisis a posteriori

Con respecto a la **parte A** de esta pregunta, la dupla D_1 afirma que, observa que hay una recta sobre el plano P y hay una pequeña porción fuera y además, que sabe que el plano no tiene límites y que la recta está dentro del plano P ; con lo cual se verifica nuestro análisis a priori. La figura 68 muestra la respuesta de esta dupla.

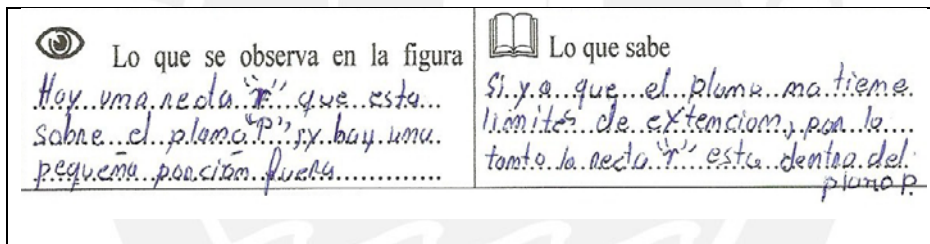


Figura 68. Pregunta 2 parte A, actividad 4 dupla D_1

Por su parte la dupla D_5 , afirma que observa que la recta esta parte dentro y parte fuera del plano P y que sabe que el plano y la recta no tienen límites; respuestas que confirman lo previsto en nuestro análisis a priori. La figura 69 presenta la respuesta dada por la dupla D_5 .

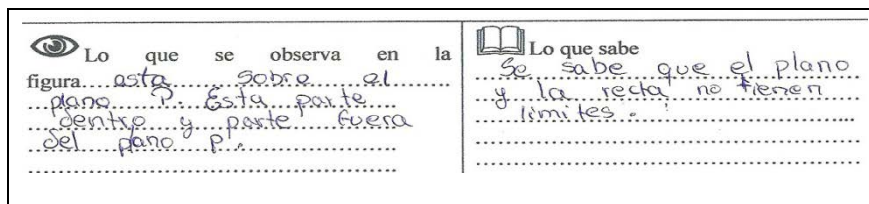


Figura 69. Pregunta 2 parte A, actividad 4 dupla D_5

Como podemos ver; ambas duplas priorizan lo visto; a pesar que afirman que saben el plano y la recta no tienen límites; sin embargo afirman que hay parte de la recta fuera del plano.

Con respecto a la **parte B** de la pregunta dos, la dupla D_1 afirma similar a la **parte A**.

La respuesta de la dupla D_1 se presenta en la siguiente figura.



 <p>Lo que se observa al manipular la figura</p> <p>que la recta "r" está..... sobre el plano "P", pero también..... hay partes que se salen.....</p>	 <p>Lo que sabe</p> <p>como se a dicho el plano..... me tiene límites de extensión..... por más que la recta "r" se..... halla salido del plano sigue en..... en este.....</p>
--	---

Figura 70. Pregunta 2 parte B, actividad 4 dupla D_1

En lo que concierne a la dupla D_5 , en esta **parte B** de la pregunta dos, afirma de manera similar a lo que mencionó en la primera parte de esta pregunta.

Es así que concluimos que para esta parte de la pregunta dos, ambas duplas coincidieron con lo previsto de nuestro análisis a priori.

Finalmente; contrastando la **parte A** y la **parte B** de esta pregunta dos; consideramos que logramos lo que preveíamos en nuestro análisis a priori, consideramos que la contribución de la manipulación directa del CABRI 3D no fue notoria en ambas duplas, ya que en ambas partes de la pregunta contestaron lo mismo; aparte que notamos que las duplas priorizan lo visto, a pesar que mencionan que saben la recta y el plano son ilimitados; confirmando así lo que Parzysz (1991) afirma que las convenciones implícitas pueden revelar concepciones erróneas, en el caso que ellas no sean dominadas por los estudiantes. De aquí, que podemos comprobar que la duplas se encuentran en la etapa (G_1) del desarrollo del pensamiento geométrico de Parzysz. Pensamos además, que las duplas no muestran un hábito de lectura de representaciones de objetos tridimensionales; ya que no pueden deducir en ésta, propiedades que reconocen de un objeto tridimensional, tal como lo afirma Parzysz (1988).

A continuación, presentamos el enunciado de la pregunta 3.

Cuadro 16. Poliedro y recta, actividad 4

Actividad 4. *Lo que se ve y lo que se sabe*

3) En la representación;

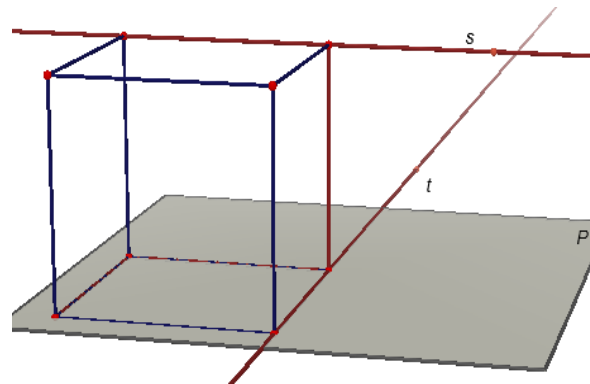


Figura 3. Poliedro y rectas
Fuente: Rosalves (2006) p.28

Escriba a continuación, lo que observa y lo que puede afirmar por sus conocimientos de geometría; respecto a las rectas t y s ¿El poliedro representa un cubo?

<p>👁 Lo que observa en la figura</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>📖 Lo que sabe</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
--	--

Luego, en la carpeta: Representaciones1, abra el archivo Poliedro y rectas.

Explore la representación hecha en CABRI 3D, utilice el cambio de punto de vista de la figura (botón derecho del mouse).

A continuación anote y Justifique lo que ve y lo que sabe, cuando manipula la figura del CABRI 3D;

<p>👁 Lo que observa al manipular la figura.</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>📖 Lo que sabe</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
---	--

Análisis a priori

Con respecto a la **parte A** de esta pregunta, en esta representación pensamos que las duplas pueden responder que las rectas t y s se cortan en un punto; además que el poliedro no es un cubo por la apariencia que guardan las caras. Además pueden afirmar que sabe que un cubo es un poliedro que tiene caras cuadradas y tiene doce aristas. Una respuesta aceptable podría ser que contesten que las rectas no se cortan; ya que están y en planos paralelos.

En la **parte B**, podrían verificar que se trata de un cubo y que las rectas están posicionadas en aristas reversas y no se pueden intersectar; además que sabe que el cubo

es un poliedro que tiene sus caras cuadradas y también tiene aristas paralelas, aristas perpendiculares y también aristas reversas (referencia actividad 3, parte B).

Debemos mencionar también que las duplas se encuentran en la etapa (G_1) en la cual la justificación es hecha por lo que se ve. Además *a priori* esperamos que el uso de la manipulación directa del CABRI 3D, ayude a las duplas a observar con mayor detalle las representaciones.

Análisis a posteriori

Con respecto a la primera parte de esta pregunta, la dupla D_1 confirmó nuestro análisis a priori. La respuesta de la dupla en mención, se presenta a continuación.

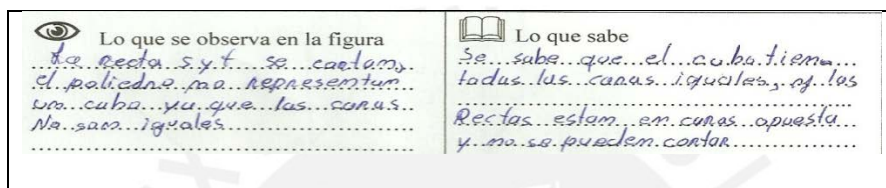


Figura 71. Pregunta 3 parte A, actividad 4 dupla D_1

De otro lado, la dupla D_5 en esta **parte A** de la pregunta tres afirma que la figura representa un cubo; además confirma nuestro supuesto; en cuanto afirma que observa que las rectas s y t se intersectan, además que sabe que las rectas están sobre las aristas del cubo. La respuesta de la dupla D_5 se presenta en la figura 72.

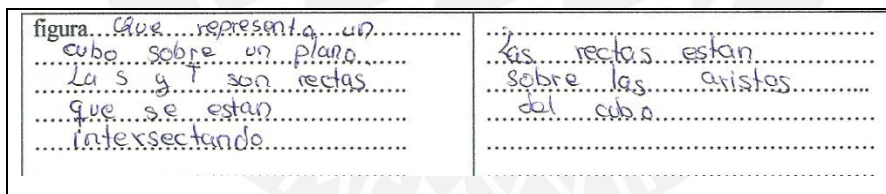


Figura 72. Pregunta 3 parte A, actividad 4 dupla D_5

Con respecto a esta **parte A** podemos resaltar que ambas duplas coinciden en afirmar que las rectas s y t se intersectan, priorizando así el polo de lo visto.

En cuanto a la **parte B** de esta pregunta, la dupla D_1 verifica lo que preveíamos *a priori*. La respuesta esta dupla es dada en la figura 73.

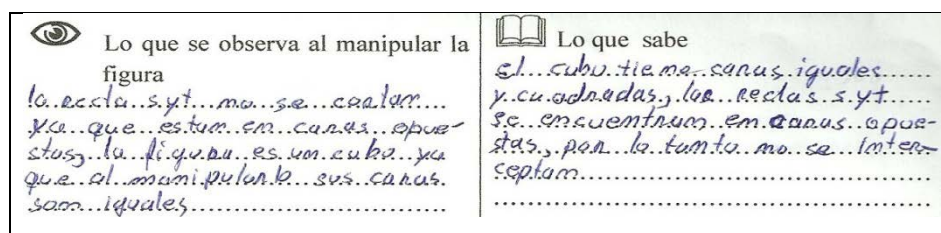


Figura 73. Pregunta 3 parte B, actividad 4 dupla D_1

Con respecto a esta **parte B** de la pregunta tres, la dupla D_5 confirma parcialmente nuestro análisis *a priori*; es decir afirma que ve que las rectas no se intersectan, pero no confirma que el poliedro es un cubo; además menciona que sabe que la *s* y la *t* (omitiendo rectas) no se cortan porque están en caras opuestas; agrega también que la *s* y la *t* más bien son paralelas; detalle que no habíamos previsto *a priori*. La respuesta de esta dupla se presenta en la figura 74.



 Lo que se observa al manipular la figura Las rectas <i>s</i> y <i>t</i> no se intersectan y están contenidas en aristas de caras opuestas.	 Lo que sabe Lo que es que la <i>s</i> y la <i>t</i> no se cortan porque están en caras opuestas y más bien son paralelas.
--	--

Figura 74. Pregunta 3 parte B, actividad 4 dupla D_5

Aprovechamos lo que afirma esta dupla D_5 , para comentar que generalmente las duplas son susceptibles en caer en un lenguaje informal; omitiendo como es el caso la palabra recta y solo mencionan las letras que las nombran; de otro lado debemos resaltar lo que la dupla afirma saber que las rectas más bien son paralelas; ya que esta característica nos lleva a concluir que la dupla ha sido capaz de realizar una buena deducción; ubicándose así camino a la etapa (G_2) del desarrollo del pensamiento geométrico de Parzysz, ya que es capaz de hacer una afirmación a partir de una premisa aceptada de manera intuitiva.

Finalmente; contrastando la **parte A** y la **parte B** de esta pregunta tres; consideramos que logramos lo que preveíamos en nuestro análisis *a priori*; consideramos que la contribución de la manipulación directa del CABRI 3D, fue notoria y eficiente para ambas duplas, ya que en segunda parte de la pregunta les ayudó a verificar que las rectas *s* y *t* no se intersectan; además a verificar que se trata de un cubo. Podemos además afirmar que las duplas se encuentran en la etapa (G_1) del desarrollo del pensamiento geométrico de Parzysz.

De otra parte, las duplas muestran una gran influencia del polo de lo visto para sus interpretaciones; además se encuentran en el nivel de las representaciones distantes y en consecuencia tienen dificultades al deducir propiedades a partir de la representación de un objeto tridimensional.

En la pregunta 4, el enunciado se escribe en el cuadro 17.

Cuadro 17. Cubo y dos puntos, actividad 4

Actividad 4. *Lo que se ve y lo que se sabe*

4) La siguiente representación es la de un cubo ABCDEFGH.

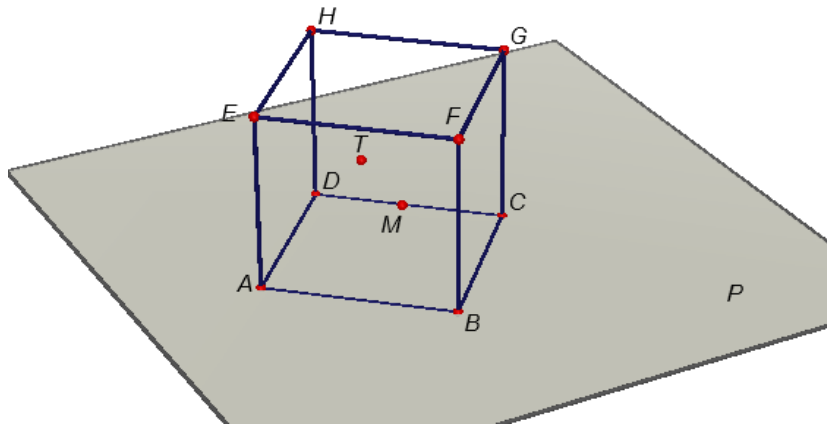


Figura 4. Cubo y dos puntos
Fuente: Cozzolino (2008) p.90

Si los puntos D, T y G están alineados y de igual manera los puntos H, M y B también se encuentran alineados; entonces escriba a continuación, lo que observa y lo que puede afirmar por sus conocimientos de geometría; sobre la ubicación de los puntos T y M

<p>👁 Lo que observa en la figura</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>📖 Lo que sabe</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
--	--

Luego, en la carpeta: Representaciones I, abra el archivo Cubo y dos puntos.

Explore la representación hecha en CABRI 3D, utilice el cambio de punto de vista de la figura (botón derecho del mouse).

A continuación anote y Justifique lo que ve y lo que sabe, cuando manipula la figura del CABRI 3D;

<p>👁 Lo que observa al manipular la figura.</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>📖 Lo que sabe</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
---	--

Análisis a priori

Con respecto a la **parte A** en esta representación, pensamos que las duplas podrían afirmar que ven que el punto T es un punto cualquiera del plano y que el punto M es el punto medio de la arista DC; además que saben que en un plano existen muchos puntos entre los cuales estaría en punto T. Con respecto al punto M, pensamos que pueden mencionar que saben que en una arista hay muchos puntos y que el punto M es uno de ellos.

En la **parte B**, las duplas podrían responder que el punto T pertenece a la cara CDFG y que el punto M se encuentra dentro del cubo o si tienen referencia sobre la diagonal de la cara y diagonal del cubo afirmen que el punto T está en la diagonal de una cara y que

el punto M está en la diagonal del cubo. Además que saben que el cubo tiene elementos asociados que son la diagonal de cara y diagonal del cubo.

De igual manera que en las preguntas anteriores las duplas se encuentran en la etapa (G_1) en la cual la justificación es hecha por lo que ve. Además esperamos, que el uso de la manipulación directa de la representación en el CABRI 3D, ayude a las duplas a agregar informaciones y entonces el polo de lo sabido permita usar lo que saben.

Análisis a posteriori

Con respecto a la **parte A** de esta pregunta, la dupla D_1 respondió tal como habíamos previsto en nuestro análisis *a priori*. La respuesta de la dupla aparece en la figura 75.

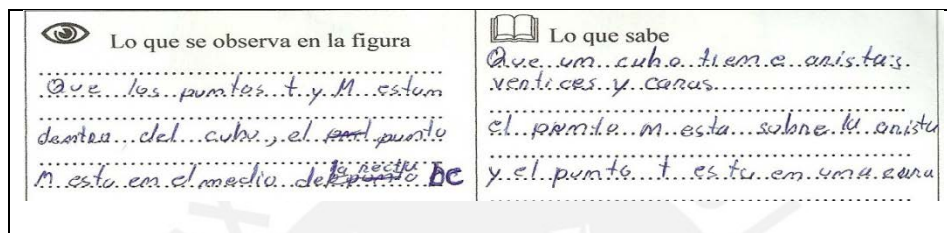


Figura 75. Pregunta 4 parte A, actividad 4 dupla D_1

En cuanto a la **parte A** en la pregunta cuatro, la dupla D_5 afirma que observa que el punto M está en una arista y que el punto T está en el medio del cubo; además menciona que sabe que los puntos representan a los vértices del cubo y que los puntos forman segmentos llamados aristas; notándose un vacío; ya que no afirma lo que sabe con respecto a los puntos M y T; lo cual verifica parcialmente lo previsto en nuestro análisis *a priori*. La respuesta de la dupla D_5 se encuentra en la figura 76.

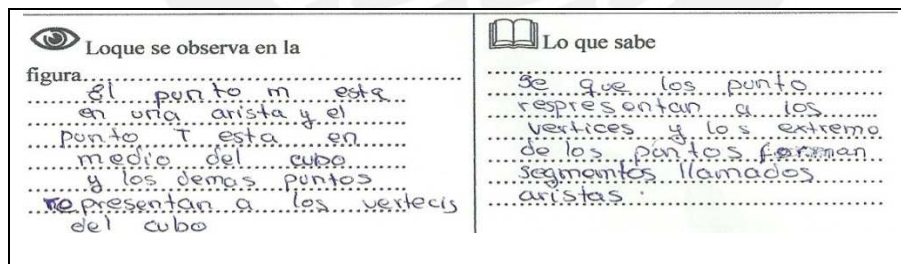


Figura 76. Pregunta 4 parte A, actividad 4 dupla D_5

En esta **parte A** en la pregunta cuatro, podemos afirmar que ambas duplas muestran una fuerte influencia del polo de lo visto; deduciendo la ubicación de los puntos gracias a lo que observa en la representación.

En la **parte B** en la pregunta 4, la dupla D_1 afirma que el punto T es parte de la diagonal de un cubo y que el punto M está en el centro del cubo y además la dupla menciona que sabe que el cubo tiene vértices, aristas y caras; además que el punto M está en el centro del cubo y que t está en la diagonal; lo que confirmaría que lo previsto en nuestro

análisis *a priori* fue logrado parcialmente. La figura 77 muestra la respuesta de la dupla D_1 .



 Lo que se observa al manipular la figura El punto t es parte de las diagonales de un cubo y el punto M está en el centro del cubo.	 Lo que sabe Que el cubo tiene vértices, aristas y caras. El punto M está en el centro del cubo y t está en la diagonal.
---	--

Figura 77. Pregunta 4 parte B, actividad 4 dupla D_1

Debemos indicar, que la dupla al manipular la representación del cubo intenta relacionar los puntos H , M y D ; al igual que busca relacionar los puntos G , T y D ; pero no lo logra.

En cuanto a la **parte B** en esta pregunta, la dupla D_5 afirma que, observa que los puntos H , M y B forman la diagonal del cubo y los puntos G , T y D forman la diagonal de una cara; además menciona que sabe que el cubo tiene diagonal de cara y diagonal principal; verificándose lo previsto en nuestro análisis *a priori*. La respuesta de la dupla D_5 se encuentra en la figura 78.



 Lo que se observa al manipular la figura Es que los puntos H y M y B forman diagonal del cubo y G , T y D forman diagonal de cara.	 Lo que sabe Lo que se sabe que las diagonales se trazan de vértices opuestos y el cubo tiene diagonal de cara y diagonal principal.
---	--

Figura 78. Pregunta 4 parte B, actividad 4 dupla D_5

Cabe indicar que, cuando la dupla D_5 manipuló la representación, llegó a crear el segmento correspondiente entre los puntos H , M y B y además el segmento que relacionan los puntos G , T y D ; comprobando así la existencia de las diagonales del cubo. De aquí que pensamos que fue conseguido gracias al dominio de los contenidos por parte de la dupla.

Finalmente; contrastando la **parte A** y la **parte B** de esta pregunta cuatro; consideramos que logramos lo que preveíamos en nuestro análisis *a priori*; consideramos que la contribución de la manipulación directa del CABRI 3D, fue más eficiente específicamente para la segunda dupla, ya que en segunda parte de la pregunta, les ayudó a trazar los segmentos; con la finalidad de verificar la existencia de la diagonal

de cara y diagonal principal del cubo. Podemos además afirmar que la duplas se encuentran en el nivel de las representaciones distantes y en la etapa (G_1) del desarrollo del pensamiento geométrico de Parzysz; ya que hacen justificaciones por lo que ven; además podríamos afirmar que en el caso de la dupla D_5 tiende a pasar a la etapa (G_2), ya que deduce de manera intuitiva que, los puntos están en las diagonales del cubo y lo verifica a través del segmento que une dichos puntos.

En la pregunta 5, el enunciado se escribe en el cuadro 18.

Cuadro 18. Poliedro Necker, actividad 4

Actividad 4. *Lo que se ve y lo que se sabe*

5) La siguiente representación corresponde a un poliedro con base EFGH en el plano P.

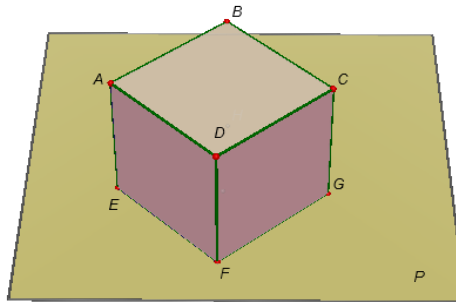


Figura 5. Poliedro Necker

Fuente: Blanco (2009) p.27

Escriba a continuación, lo que observa y lo que puede afirmar por sus conocimientos de geometría; sobre las caras ABCD, DCGF, ADFE del poliedro. ¿Este poliedro podría ser un cubo? Justifique.

<p>👁 Lo que observa en la figura</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>📖 Lo que sabe</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
--	--

Luego, en la carpeta: Representaciones1, abra el archivo Poliedro Necker.

Explore la representación hecha en CABRI 3D, utilice el cambio de punto de vista de la figura (botón derecho del mouse).

A continuación anote y Justifique lo que ve y lo que sabe, cuando manipula la figura del CABRI 3D;

<p>👁 Lo que observa al manipular la figura.</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>📖 Lo que sabe</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
---	--

Análisis a priori

Esperamos que las duplas puedan afirmar, en la **parte A** que las caras en mención no son iguales por su comportamiento figural; de ser así entonces deducirán que no es un cubo. Además podrían mencionar que saben que un cubo es un poliedro que tiene sus caras que son cuadrados. No hay informaciones suficientes para que movilicen saberes previos

En la **parte B**, pensamos que puedan afirmar que las caras si son todas iguales y por lo tanto se trataría de la representación de un cubo; además pueden argumentar que saben que un cubo es un poliedro que tiene sus caras que son cuadrados, pues la manipulación del CABRI 3D agrega informaciones.

De otra parte, como las duplas se encuentran en la etapa (G_1) en la cual las justificaciones son hechas por lo que se ve. Además pensamos que el uso de la manipulación directa del CABRI 3D puede ayudar a las duplas a observar con mayor detalle la representación.

Análisis a posteriori

En la **parte A** en esta pregunta cinco la dupla D_1 contesta que, observa que la representación no corresponde a un cubo, porque le faltan algunas caras, vértices y aristas y también las caras no son iguales; además menciona que sabe que el cubo tiene caras iguales y aunque no se vea las otras caras puede imaginarlas y luego ver que son iguales. La respuesta de la dupla D_1 se encuentra en la figura 79.

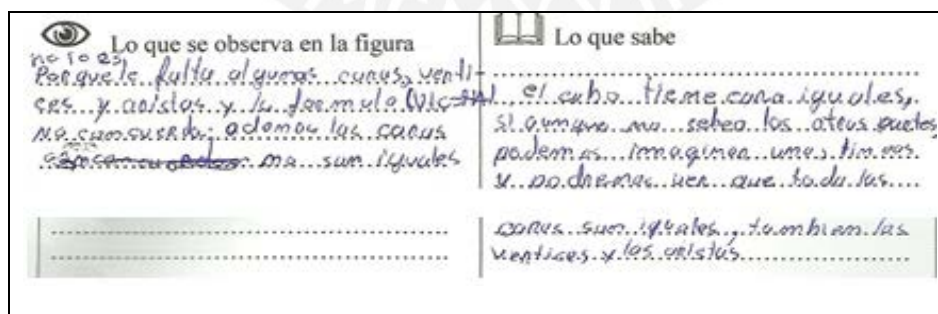


Figura 79. Pregunta 5 parte A, actividad 4 dupla D_1

Debemos indicar que con la respuesta de esta dupla, verificamos parcialmente lo previsto a priori. Podemos notar la dupla muestra fuerte influencia del polo de lo visto en cuanto a lo que observa; mostrando también en cuanto a lo que sabe una buena capacidad de deducción.

De otra parte, con respecto a la **parte A** en esta pregunta la dupla D_5 coincide con lo previsto en nuestro análisis *a priori*. La respuesta de esta dupla se presenta en la figura 80.



 <p>Lo que se observa en la figura... No es un cubo porque la cara A, B, C, D es un rombo, además solo se ven 3 caras y el cubo tienen 6 caras.</p>	 <p>Lo que sabe El cubo tiene 6 caras cuadradas.</p>
--	---

Figura 80. Pregunta 5 parte A, actividad 4 dupla D_5

De otro lado, en cuanto a la segunda parte de esta pregunta cinco, la dupla D_1 confirma lo previsto en nuestro análisis *a priori*. La respuesta de esta dupla, se presenta en la figura 81.



 <p>Lo que se observa al manipular la figura Se ve que los caras son cuadradas y entre ellas es un cubo.</p>	 <p>Lo que sabe que todo cubo tiene caras iguales, aristas, diagonales y verticales etc.</p>
---	---

Figura 81. Pregunta 5 parte B, actividad 4 dupla D_1

Con respecto a la **parte B** de la pregunta cinco, la dupla D_5 también contesta de manera similar a la dupla anterior; coincidiendo así con lo que preveíamos.

Finalmente, contrastando la **parte A** y la **parte B** de esta pregunta, podemos afirmar que la manipulación directa del CABRI 3D ayudó para que las duplas puedan identificar que la representación corresponde a la de un cubo. De otra parte, se puede verificar en las duplas la fuerte influencia del polo de lo visto en la interpretación de la representación, deduciendo así características por lo que ven; confirmando así además que se encuentran en la etapa (G_1).

En la pregunta 6, el enunciado se escribe a continuación como sigue:

Cuadro 19. Poliedro-patrón, actividad 4

Actividad 4. *Lo que se ve y lo que se sabe*

6) En la figura 6 de; izquierda a derecha

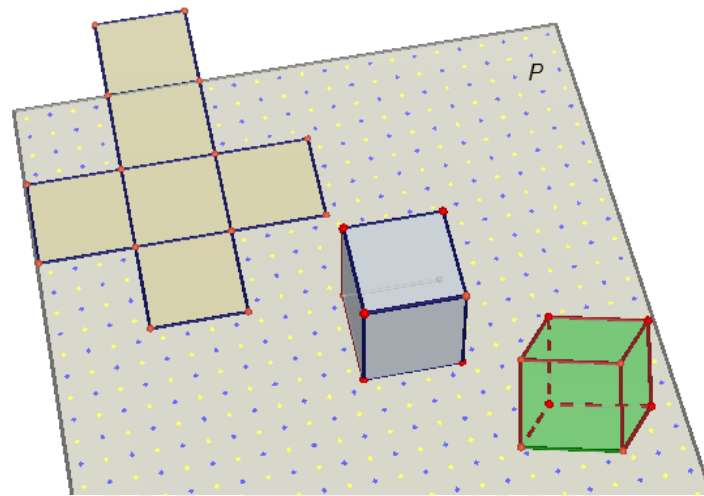


Figura 6. Poliedro-patrón

Escriba a continuación, lo que observa y lo que puede afirmar por sus conocimientos de geometría; ¿A qué figuras corresponden? ¿Encuentras alguna relación entre ellas?

<p>👁️ Lo que observa en la figura</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>📖 Lo que sabe</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
---	--

Luego, en la carpeta: Representaciones I, abra el archivo Poliedro-patrón.

Explore la representación hecha en CABRI 3D, utilice el cambio de punto de vista de la figura (botón derecho del mouse).

A continuación anote y Justifique lo que ve y lo que sabe, cuando manipula la figura del CABRI 3D;

<p>👁️ Lo que observa al manipular la figura.</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>📖 Lo que sabe</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
--	--

Análisis a priori

En relación a esta pregunta, en la **parte A**, esperamos que las duplas respondan que ven dos representaciones de cubo o dos poliedros y el desarrollo de su superficie; además que saben que todo poliedro tiene un desarrollo de su superficie en el plano y puede mostrarse en modelo o en ilustración.

En la **parte B**, esperamos que mencionen que ven un desarrollo de la superficie del cubo y dos representaciones de cubos de los cuales uno de ellos es un modelo de cubo como si fuera de material concreto y el otro es su dibujo; además que saben que todo cubo tiene su desarrollo y que se puede dibujar sobre un plano. Al igual que en las

anteriores representaciones, las duplas se encuentran en la etapa (G_1) en la cual las justificaciones son hechas por lo que se ve. Además esperamos que el uso de la manipulación directa del CABRI 3D, contribuya que las duplas observen con mayor detalle la representación.

Análisis a posteriori

En cuanto a la **parte A** de esta pregunta, la dupla D_1 afirma que observa que hay una figura que está abierta conformada de seis cuadrados, también afirma que ve una figura que parece un cubo y otra que parece un poliedro; además menciona que sabe que, si doblamos el patrón se forma un cubo y que el cubo así sea de cualquier material siempre será un cubo; confirmando así parcialmente lo que habíamos previsto. La respuesta de la dupla, se presenta en la figura 82.

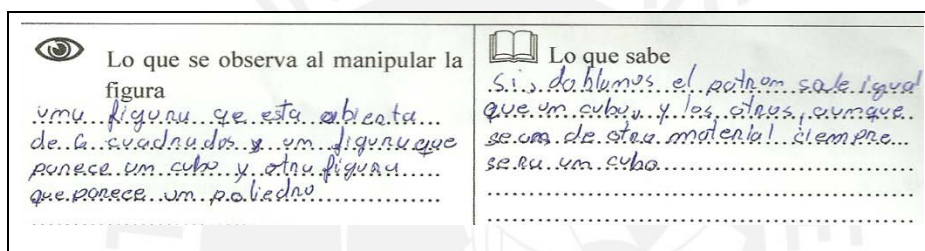


Figura 82. Pregunta 6 parte A, actividad 4 dupla D_1

En cuanto a la **parte A** en la pregunta seis, la dupla D_5 confirma parcialmente lo que habíamos previsto en nuestro análisis a priori; sin embargo no menciona desarrollo de la superficie del cubo; afirma que los dos poliedros son cubos y no los diferencia. La respuesta de la dupla se muestra a continuación.

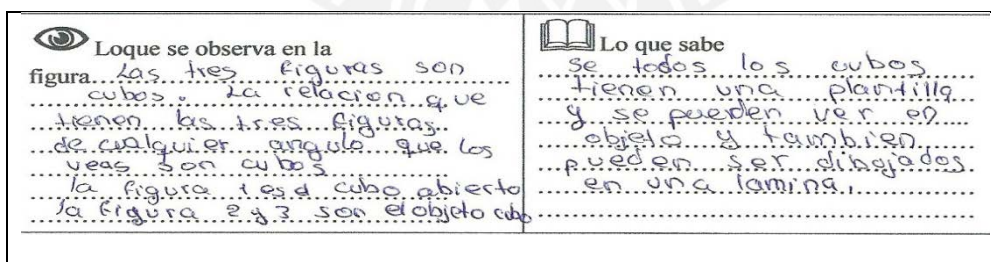


Figura 83. Pregunta 6 parte A, actividad 4 dupla D_5

En cuanto a la **parte A** de la pregunta seis, ambas duplas afirman en común que ven dos cubos, notando que no diferencian que uno podría ser modelo y el otro ilustración; además mencionan en común que saben que el cubo tiene una plantilla o un patrón y la dupla D_5 es más precisa en afirmar que sabe que el cubo puede representarse en modelo como también dibujado en una lámina.

En lo que respecta a la **parte B** de esta pregunta seis, ambas duplas afirman lo previsto en nuestro análisis a priori; sin embargo en cuanto al desarrollo de la superficie del cubo le llaman plantilla, a pesar que en una sesión anterior se aclaró como se le debe llamar correctamente. En la figura 84 presentamos la respuesta de la dupla D_5 .



 <p>Lo que se observa al manipular la figura</p> <p>La primera es la plantilla del cubo la figura que está en plomo es el cubo en concreto la otra figura es un dibujo porque está pegada al plano</p>	 <p>Lo que sabe</p> <p>Es que con la plantilla se ase el cubo, que el cubo plomo es un objeto y el otro cubo es plomo</p>
---	--

Figura 84. Pregunta 6 parte B, actividad 4 dupla D_5

Cabe resaltar que en esta **parte B** ambas duplas se ayudan de la manipulación directa del CABRI 3D y logran observar con más detalle las representaciones, asociando el cubo de color plomo, como si fuera un cubo en modelo al poder ver sus tres dimensiones y al cubo de color verde como un dibujo en papel verde, ya que siempre lo ven pegado en el plano o tal vez porque lo observan con aristas punteadas. Además, mencionan que saben que con la plantilla (refiriéndose al desarrollo de la superficie del cubo en el plano) se hace el cubo y diferencian entre el cubo de color plomo, como un modelo y el cubo de color verde como, su ilustración.

Finalmente, al contrastar las respuestas de la **parte A** y las de la **parte B** de esta pregunta seis, podemos mencionar que lo previsto en cuanto a la contribución del CABRI 3D fue logrado. De igual manera, verificamos que las duplas se encuentran en la etapa (G_1) del desarrollo del pensamiento geométrico de Parzysz.). De otra parte, las duplas se encontraron en el nivel de las representaciones distantes; en la cual aún se justifica por lo que se ve; sin embargo el CABRI 3D ayudó a las duplas a observar con mayor detalle la representación, movilizándolo de lo sabido.

Análisis a priori de la actividad 4

En conclusión en esta actividad, en la **parte A**, esperamos que las duplas escriban sus respuestas deduciendo prioritariamente por la percepción; siendo influenciadas por el polo de lo visto, según Parzysz (1988).

En la **parte B**, las duplas deben de notar que al manipular los objetos, verifican en algunos casos que lo que afirmaron en la primera parte no coincide con lo que afirman al manipular las representaciones en el CABRI 3D; es decir que hay posibilidad que

reconozcan que en algunas de sus afirmaciones de la primera parte estuvieron erradas; constituyéndose el CABRI 3D en un recurso muy importante y complementario para el aprendizaje.

Análisis a posteriori de la actividad 4

A través de los análisis de las interpretaciones de las representaciones de la actividad 4 pudimos verificar lo previsto en nuestro análisis *a priori* de la actividad.

En lo referente a la **parte A** de todas las representaciones; los estudiantes mostraron una influencia del polo de lo visto sobre el polo de lo sabido (como lo previsto); ya que dedujeron sus interpretaciones prioritariamente por la percepción; no encontrando muchos argumentos, ya que al parecer las representaciones por sí solas no lo proporcionan. Según Parzysz (1988) el estudiante cree ver propiedades en la representación tal como si estuviera frente a la representación próxima del objeto tridimensional. De otro lado, los estudiantes confunden lo que ven con lo que saben, cuando interpretan ilustraciones que contienen convenciones implícitas (como es el caso de las representaciones de la pregunta uno y dos); confirmando lo que afirma Parzysz (1991), que las convenciones pueden beneficiar la revelación de concepciones erróneas, en el caso que los estudiantes no dominen dichos conceptos.

De otro lado comprobamos que los estudiantes se encuentran en la etapa (G_1) del desarrollo del pensamiento geométrico de Parzysz (2001) y además verificamos que los estudiantes se encuentran en el nivel de las representaciones distantes.

Con respecto a la interpretación de la **parte B** de la actividad en referencia a las mismas representaciones de la parte A; verificamos lo previsto en nuestro análisis *a priori*; pudimos comprobar que el CABRI 3D y su recurso de manipulación directa contribuyeron para que el estudiante mejore la percepción de las representaciones, agregando más informaciones; comprobando así lo que afirma Mithalal (2010); resultando ser muy eficiente si el estudiante muestra a la vez un dominio de los contenidos que involucra a dicha representación. De otro lado podemos mencionar que comprobamos que los polos de lo visto y lo sabido son difícilmente dissociables como consecuencia de una influencia recíproca de los aspectos perceptivos y cognitivos (informaciones en representación estática por informaciones en representación dinámica) como lo afirma Parzysz (1988)

Al finalizar la actividad 4, la docente—investigador realizó la formalización de los conceptos utilizados en la actividad, como:

- 1) El plano es una superficie plana ilimitada en dos dimensiones.
- 2) Toda recta está contenida en un plano.
- 3) En el cubo podemos encontrar rectas alabeadas que contienen a sus aristas.
- 4) El cubo tiene elementos asociados: diagonales de cara y diagonales principales.
- 5) El cubo de Necker es aquel que puede representarse con caras romboides.
- 6) El cubo tiene desarrollo de su superficie en el plano. Además el cubo se puede representar en el plano.

4.4.3 Tercer encuentro

En este encuentro trabajamos solo la actividad cinco usando lápiz y papel.

Utilizamos los recursos del Power Point para realizar una presentación con diapositivas (adaptada de Cozzolino 2008) a través de las cuales la docente—investigador explica sobre cada perspectiva y luego los estudiantes proceden a desarrollar la actividad correspondiente.

Actividad 5. *Explorando y conociendo las diferentes formas de representar un cubo.*

Esta actividad pretende que el estudiante explore y reconozca las diferentes formas de representar un cubo; en perspectiva Caballera, Cónica e isométrica.

Esta actividad consta de tres partes:

Parte A. Exploración de la perspectiva Caballera en esquemas, usando lápiz y papel.

Parte B. Exploración de la perspectiva Cónica a partir de la representación del cubo de la parte A, usando lápiz y papel.

Parte C. Exploración de la perspectiva Isométrica usando lápiz y papel isométrico.

Parte A <i>El cubo en Perspectiva Caballera</i>
--

Objetivo. Pretendemos que el estudiante conozca la perspectiva Caballera para luego utilizarla como uno de los sistemas de representación del cubo.

La docente—investigador presenta la perspectiva Caballera a través de las siguientes diapositivas:

¿Cómo dibujar un cubo?

La docente—investigador comenta sobre la importancia de la perspectiva en la representación de objetos de la Geometría Espacial.

Conceptos básicos:

Una perspectiva es un sistema de representación, que tiene por objetivo representar sobre una superficie bidimensional, los objetos que son tridimensionales. Se basa en la proyección de los objetos sobre un plano.

Plano de proyección: Superficie sin espesor, ilimitado y bidimensional donde se fija o proyecta la imagen de un objeto.

Con esta diapositiva, la docente—investigador presenta los elementos necesarios a tener presente cuando representamos objetos de la Geometría Espacial.

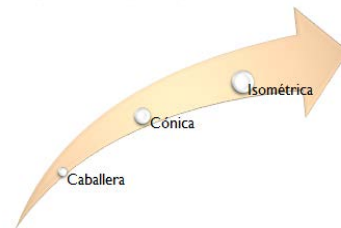
Conceptos básicos:

Recta visual: Es la recta por donde transita la mirada del observador.

Recta Eje: Es la recta que nos orienta en cuanto a la dirección de la mirada que sigue el observador.

Proyección: Figura que resulta de proyectar los puntos que se observa del objeto en la dirección del plano de proyección.

Tres tipos de perspectiva



En esta diapositiva se explica, que la recta eje al seguir la mirada del observador se relaciona con la vista que este sigue. Además se le hace ver al estudiante, que una perspectiva es una forma de representar; mientras que la vista del observador es la dirección que este sigue en su mirada.

En esta diapositiva, se presenta al estudiante las diversas perspectivas o sistemas de representar un cubo.

La perspectiva Caballera

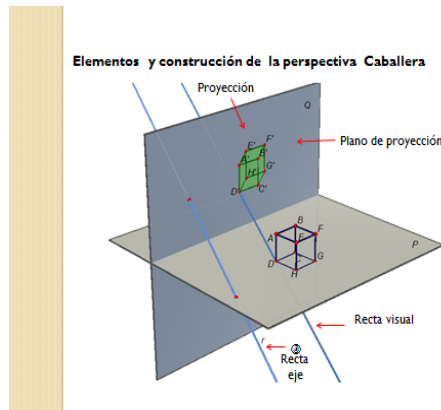
En una perspectiva paralela en la cual el foco de proyección se supone en el infinito, de modo que el haz de rayos proyectantes son paralelos cuando llega a proyectar la imagen del objeto en el plano de proyección.

La perspectiva Caballera

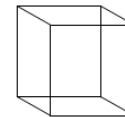
La perspectiva caballera es una proyección oblicua sobre un plano paralelo a una de las caras principales del objeto. Si consideramos un cubo apoyado en un plano horizontal, una de sus caras será conservada en iguales dimensiones. Además la representación conserva propiedades importantes para el análisis de las relaciones de congruencia, tales como paralelismo.

El objetivo de la diapositiva era hacer ver a los estudiantes que en la perspectiva Caballera los rayos proyectantes se trazan desde el infinito y caen paralelamente sobre la proyección.

Nuestro objetivo es mencionarles a los estudiantes algunas características (propiedades) de la perspectiva Caballera necesarias para sus exploraciones futuras.



Representación del cubo en perspectiva Caballera



El objetivo esta diapositiva es identificar los elementos para conseguir la representación del cubo en perspectiva Caballera; indicándoles que en esta representación la longitud de las aristas que une la cara frontal con su cara posterior depende del ángulo de variación de la recta eje con respecto al plano Q (llamado coeficiente de reducción).

Esta diapositiva muestra una representación de cubo en perspectiva Caballera.

Figura 85. Las diapositivas de presentación de la perspectiva Caballera

Luego, los estudiantes, haciendo uso de lápiz y papel buscarán construir la representación en perspectiva Caballera del cubo (tomando la representación del cubo del CABRI 3D como un modelo) para lo cual a cada dupla se les proporciona la representación en una hoja de papel. Luego se les pide realizar la representación; sin depender de la estructura. Finalmente se les propone completar representaciones similares a las que obtuvo, buscando que se familiaricen con este tipo de perspectiva. La tarea de la parte A, que debe realizar está transcrita en el cuadro 20.

Cuadro 20. Tarea de la parte A actividad 5

Tarea de la parte A

Observe la siguiente representación:

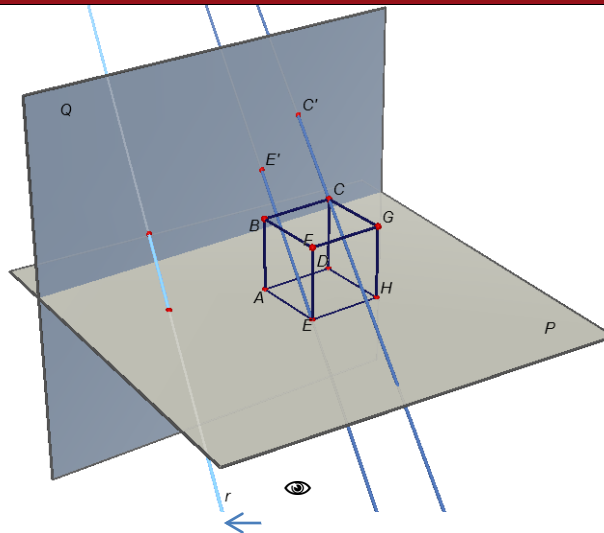
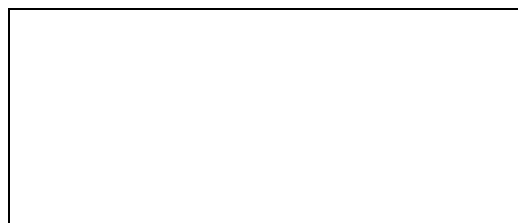


Figura 1. Cubo y plano de proyección

Utilice lápiz y regla para encontrar la representación del cubo en el plano Q; para ello tome en cuenta los siguientes pasos:

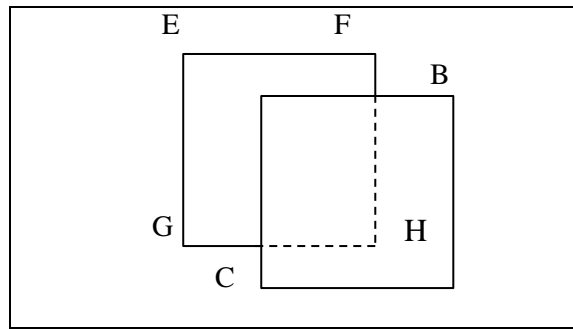
1. Trace rectas paralelas a la recta r que pasen por los vértices del cubo: A, B, C, D conservando la misma distancia que hay de C a C' y ubique los puntos en el plano Q , haciendo corresponder A con A' , B con B' , D con D' .
2. Forme el polígono que determina los puntos: A', B', C', D' en el plano Q .
3. De igual manera, trace rectas paralelas a la recta r que pasen por los vértices del cubo: E, F, G, H conservando la misma distancia que hay de E a E' y ubique los puntos en el plano Q , haciendo corresponder F con F' , G y G' , H y H' .
4. Forme el polígono que determina los puntos: E', F', G', H' en el plano Q .
5. Finalmente una los puntos $A'E', B'F', C'G'$ y $D'H'$ y habrá conseguido así la representación en perspectiva Caballera del cubo $ABCDEF GH$.

A continuación, construya la representación que obtuvo;



Se caracteriza por:.....

Luego, una las letras: A y E, B y F, C y G, D y H



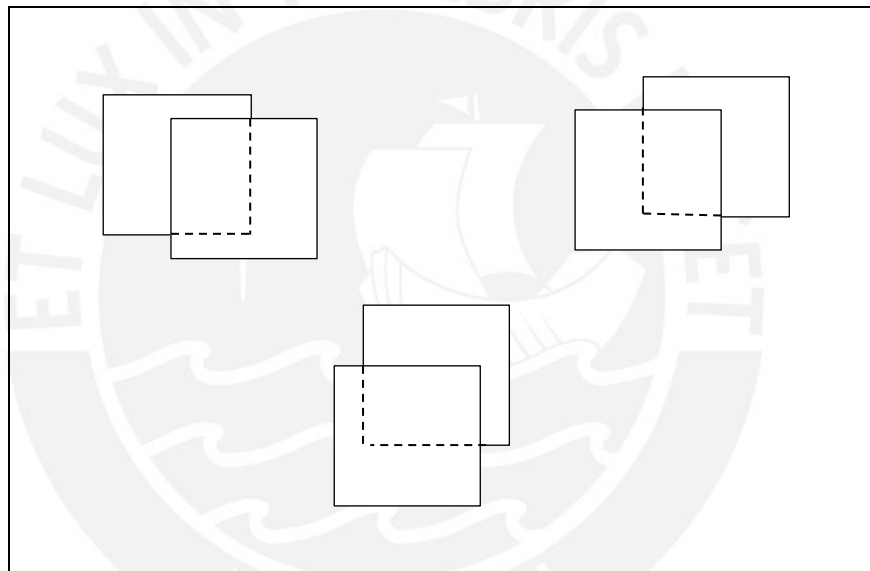
¿La representación que obtiene está en perspectiva caballera? Justifique

.....

.....

.....

Construyendo más representaciones del cubo en Perspectiva Caballera;



Análisis a priori

En esta parte de la actividad, esperamos que las duplas, haciendo uso de lápiz y papel y considerando rectas paralelas que conserven distancias, obtengan la representación del cubo en el plano Q; lo cual pensamos no les será tan sencillo; ya que están manipulando representaciones distantes y según afirma Parzysz (1988) resulta difícil deducir propiedades de una representación. Esperamos que las duplas obtengan la representación en el plano Q, según lo presenta la figura 86.

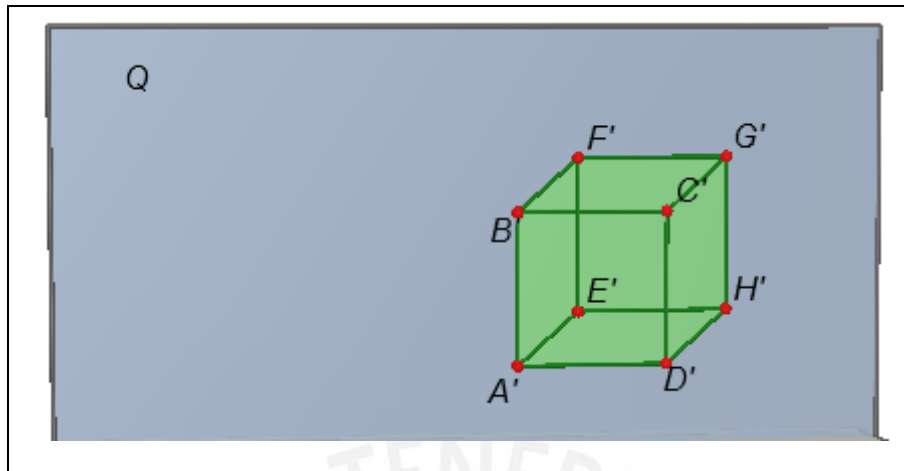


Figura 86. Cubo en perspectiva Caballera en el plano Q

En la otra parte de la actividad, en la cual se le pide que represente el dibujo que consiguió en el plano Q, pensamos que las duplas trazarán la representación con imprecisiones y además cuando describan las características de la representación, esperamos que asocien a las mencionadas en las diapositivas con respecto a la perspectiva Caballera y así se ayuden en sus deducciones; ya que pensamos que también tendrán dificultad por encontrarse en la etapa (G_1) y deducen propiedades de lo que ven. De otra parte, cuando se le pide trazar segmentos para construir cubos, pretendemos que las duplas se familiaricen con este sistema de representación y así consigan dibujar en esta perspectiva (el uso de las líneas punteadas es para mostrar la representación en el cual muestre una idea de profundidad); así como lo presenta la figura 87 a continuación.

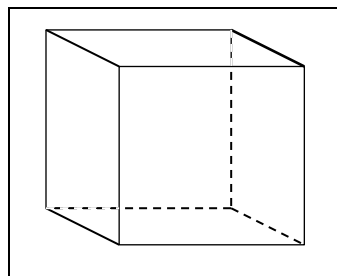


Figura 87. Cubo en perspectiva Caballera

Análisis a posteriori

En esta parte de la actividad, la dupla D_1 encontró muchas dificultades; ya que no le resultó fácil mantener simultáneamente rectas paralelas y a la vez conservar las mismas distancias; lo cual habíamos previsto a *priori*. A pesar de estos inconvenientes, la representación que obtuvo la dupla se presenta en la figura 88.

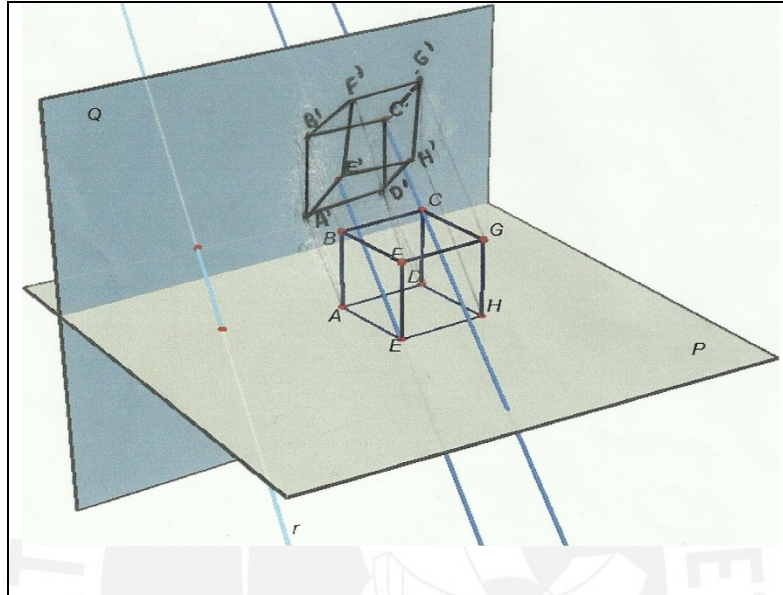


Figura 88. Representación en el plano Q dupla D_1

Con respecto a la dupla D_5 , de igual manera encontramos que se pusieron en muchos apuros y mostraron dificultad al trazar la representación en el plano Q; no lograban mantener el paralelismo de las rectas y a la vez las mismas distancias; ya que de esta característica dependía la representación en el plano Q; verificando así lo previsto a *priori*. De otro lado, esta dupla no podía asociar cada letra del vértice del cubo del plano P, con su letra prima en el plano Q. El resultado obtenido en esta dupla D_5 se muestra en la figura 89.

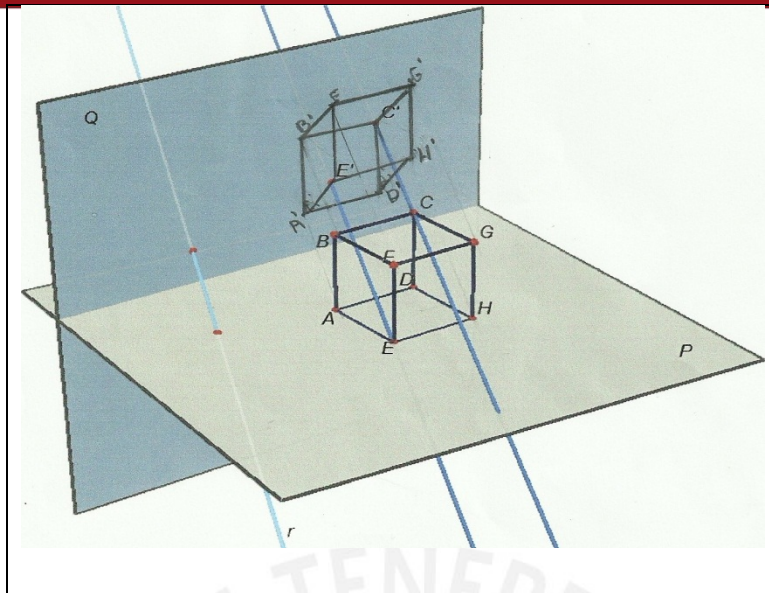


Figura 89. Representación en el plano Q dupla D_5

Como podemos observar ambas duplas; superaron muchos inconvenientes; los cuales habíamos previsto *a priori* y lograron al fin obtener la representación $A'B'C'D'E'F'G'H'$ en el plano Q, del cubo ABCDEFGH del plano P. Es así que verificamos que a las duplas no les fue fácil deducir propiedades en la representación.

De otra parte, en cuanto a la indicación de obtener el dibujo representado en el plano Q y a la vez las características que presenta dicha perspectiva. Debemos indicar que para la dupla D_1 no le fue fácil deducir las características de la perspectiva; de aquí que pensamos a igual que en la parte anterior; la razón puede ser porque está interactuando con representaciones distantes o posiblemente las diapositivas que se proyectó sobre la perspectiva no fueron suficientes para que ellos aprendieran. A continuación; presentamos en la figura 90, la representación de la dupla D_1 .

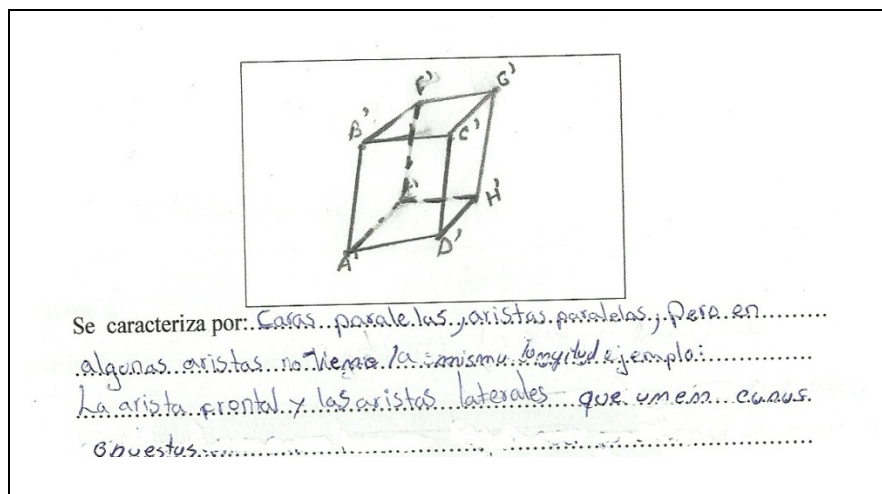


Figura 90. Representación de cubo en perspectiva Caballera y características, dupla D_1

Con respecto a la dupla D_5 , presentamos en la figura 91, su representación en cuanto a la indicación de obtener su dibujo obtenido en el plano Q y además las características de la perspectiva.

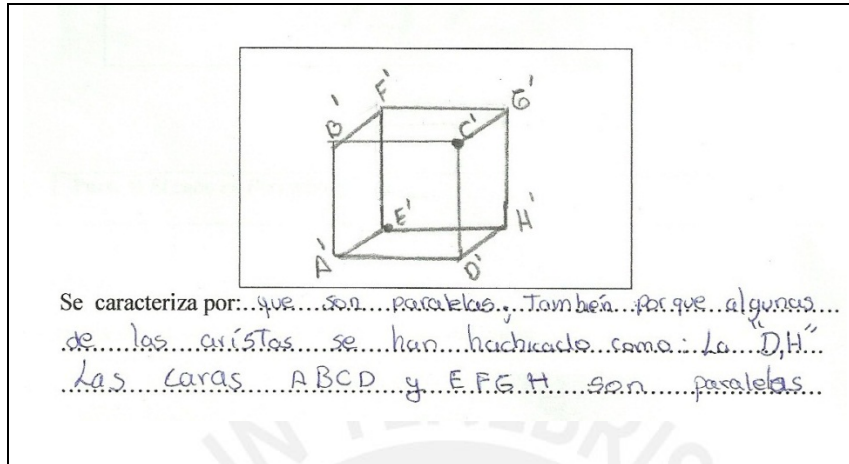


Figura 91. Representación de cubo en perspectiva Caballera y características, dupla D_5

De otro lado en la parte que se les pide a las duplas que unan los vértices (buscando que se familiarice con esta perspectiva) completando la representación del cubo en perspectiva Caballera; ambas duplas lo realizan sin dificultad; sin embargo solo reconocen algunas características de esta perspectiva. La figura 92 presenta la representación y la respuesta que presenta la dupla D_1 .

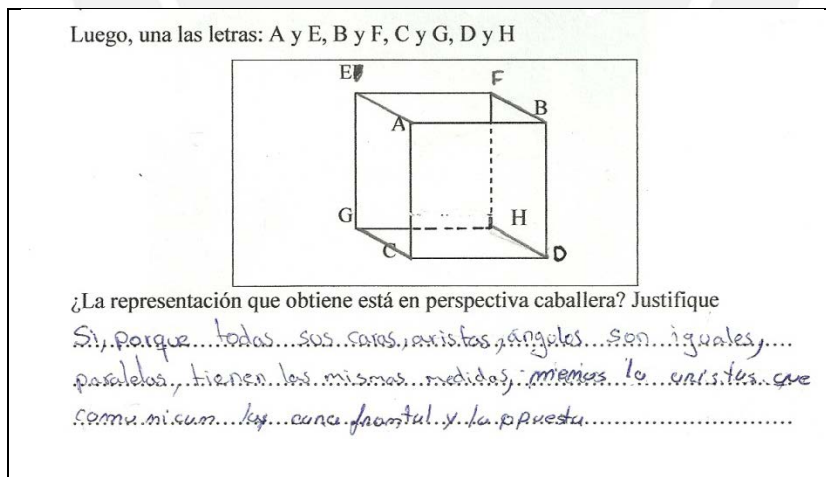


Figura 92. Representación de cubo en perspectiva Caballera uniendo vértices, dupla D_1

Como podemos observar, ambas duplas presentan sus representaciones con sus respectivas características; logrando así lo que habíamos previsto a priori. Además debemos indicar que las imprecisiones que presentan las duplas; tanto en sus diseños, como cuanto a sus deducciones de características de la perspectiva, se deben a que está

manipulando representaciones distantes y se encuentran en la etapa (G_1) en la que deducen propiedades según lo que ven.

De otro lado, creemos necesario hacer notar, las informalizaciones que cometen las duplas, al abusar del lenguaje matemático, como es el caso de la dupla D_5 que escribe la arista D, H o también omite las apóstrofes de las letras ABCD y EFGH; actitud que pensamos superar en este trabajo. Es por ello que, consideramos muy importante nuestro trabajo de reforzamiento al final de cada actividad; ya que a través de este, hacemos las correcciones del caso; y además realizamos las formalizaciones correspondientes.

A continuación, presentamos la parte B de la actividad 5, referente a la perspectiva Cónica.

Parte B *El cubo en perspectiva Cónica*

Objetivo. Pretendemos que el estudiante conozca la perspectiva Cónica para luego utilizarla como uno de los sistemas de representación del cubo.

Antes de proyectar las diapositivas referente a la perspectiva Cónica, la docente—investigador presentó a los estudiantes unas fotos de paisajes (Figura 93), con el propósito que los estudiantes pudieran distinguir que estas representaciones presentan una dirección, un foco principal y punto de fuga (con preguntas como: ¿Qué dirección siguen los paisajes?, ¿Cuál es el foco de atención en cada paisaje?, ¿Desde dónde mira la persona que toma la foto?).



Lámina a)



Lámina b)



Lámina c)



Lámina d)

Figura 93. Representaciones de paisajes en perspectiva cónica

Luego, la docente–investigador realizó la explicación acerca de la perspectiva Cónica a través de las diapositivas según presenta la figura 94.

La perspectiva cónica

La perspectiva cónica es la proyección de un objeto sobre el plano a partir de una fuente colocada a una distancia finita del objeto. La representación permite la idea de profundidad por el uso de la línea del horizonte (LH) y el punto de fuga (PF) más no favorece al análisis de la relaciones de congruencia, paralelismo y perpendicularidad del objeto y su representación.

En esta diapositiva, se explica acerca de la definición de la perspectiva Cónica y sus elementos.

La perspectiva cónica

Ejemplo: La representación de la fotografía de un cubo; se encuentra en perspectiva cónica.

Se muestra la foto de un cubo en perspectiva Cónica; la cual servirá para explorar una tarea a realizar.

Secuencia para construir la representación de un cubo en perspectiva cónica:

Paso 1: Establishing the horizon line (LH).

Paso 2: Establishing the vanishing point (PF) and the base of the cube (A, B, C, D).

Paso 3: Drawing the vertical lines of the cube.

Paso 4: Completing the cube's outline by connecting the top corners.

Paso 5: Drawing the lines from the top corners to the vanishing point (PF).

Paso 6: Finalizing the perspective drawing of the cube.

Representación de un cubo en perspectiva Cónica

A través de esta diapositiva, la docente—investigador explica los pasos a seguir para el dibujo del cubo en perspectiva Cónica; tarea que luego los estudiantes tendrán que realizar.

Paso 1. Se dibuja una recta horizontal (LH) y se elige un punto de fuga (PF).

Paso 2. Se dibuja la cara frontal del cubo, buscando que las aristas horizontales sean paralelas a la línea horizonte.

Paso 3. Se trazan rectas de todos los vértices del cuadrado hacia el PF.

Paso 4. Se traza la arista paralela al lado CD, tomando una distancia como si se dejara caer el cuadrado ABCD hacia atrás.

En esta diapositiva, se presenta los pasos 5 y 6 para terminar de construir el cubo en perspectiva Cónica:

Paso 5. Se dibuja un segmento paralelo al lado BD.

Paso 6. Se termina de trazar todas las aristas de la cara posterior del cubo.

De otra parte en esta diapositiva, se presenta otro cubo en perspectiva cónica sin líneas proyectantes y se le pide a los estudiantes que reconozcan sus características.

Figura 94. Las diapositivas de presentación de la perspectiva Cónica

Luego, los estudiantes haciendo uso de lápiz y papel buscarán construir la representación Cónica del cubo. La tarea de la parte B que debe realizar está transcrita en el cuadro 21.

Cuadro 21. Tarea de la parte B actividad 5

Tarea de la parte B

Observe la siguiente representación de la foto del cubo;

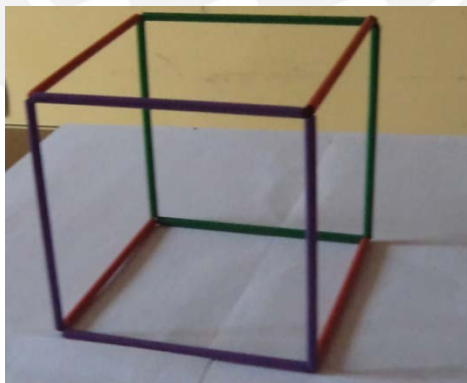


Figura 2. Foto del modelo de cubo en varitas

Como podrá notar en la lámina; dicha representación encierra un punto de fuga (PF); para conseguir dicho punto de fuga, tome en cuenta los siguientes pasos:

1. Trace rectas conteniendo a las aristas que relacionan la cara frontal y su cara opuesta, a partir de cada vértice frontal del cubo; hasta encontrar el punto donde se intersectan.

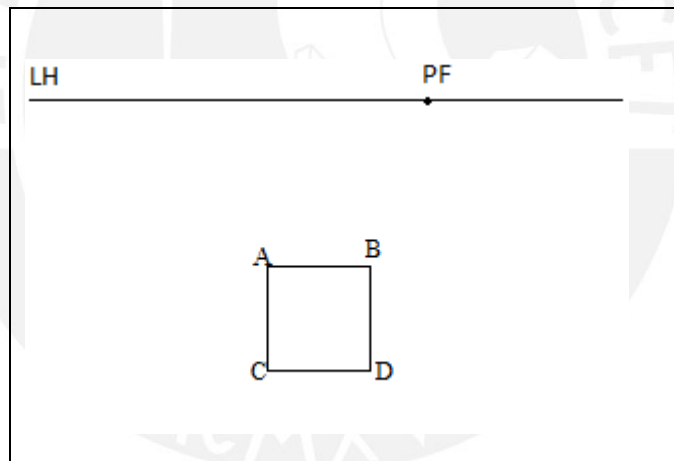
2. Marque el punto de intersección de estas rectas (PF).
3. Trace la línea horizonte (LH) que intersecte al punto de fuga y sea paralela a la arista frontal superior.

A continuación, en el recuadro ilustre esta representación con las rectas proyectantes y el punto de fuga.

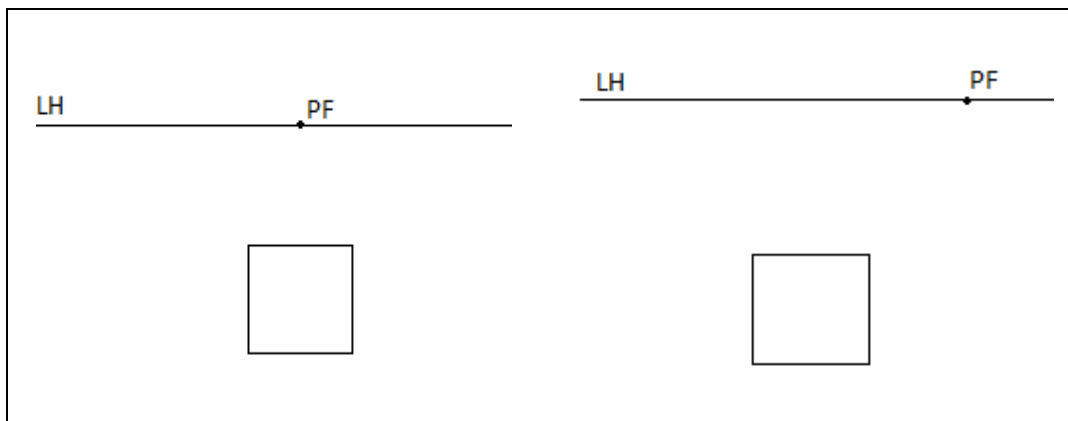


Luego, construya el cubo que tenga al cuadrado ABCD Como cara frontal y dichas caras opuestas confluyan en el punto de fuga (PF).

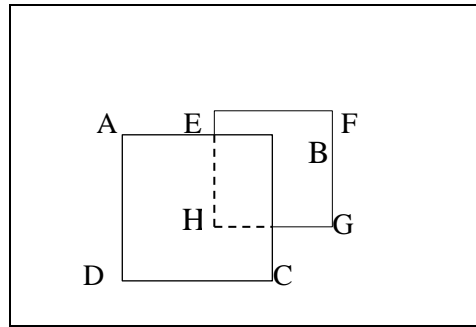
Sugerencia: Siga los pasos que se hizo referencia en la diapositiva.



Construyendo más representaciones del cubo en Perspectiva Cónica;



A continuación, una los vértices: A con E, B con F, D con H y C y G



¿El cubo formado estará en perspectiva Cónica? Justifique

.....

.....

.....

Análisis a priori

Esperamos que, las duplas verifiquen que la foto del cubo, que manipularon en modelo de cubo en varitas, se encuentra en perspectiva Cónica; encontrando así su punto de fuga (PF) y trazando su línea horizonte (LH). Esperamos que las duplas no tengan dificultad; ya que solo se trata de trazar rectas que contengan a las aristas que relacionan la cara frontal y su cara opuesta como lo muestra la figura 95.

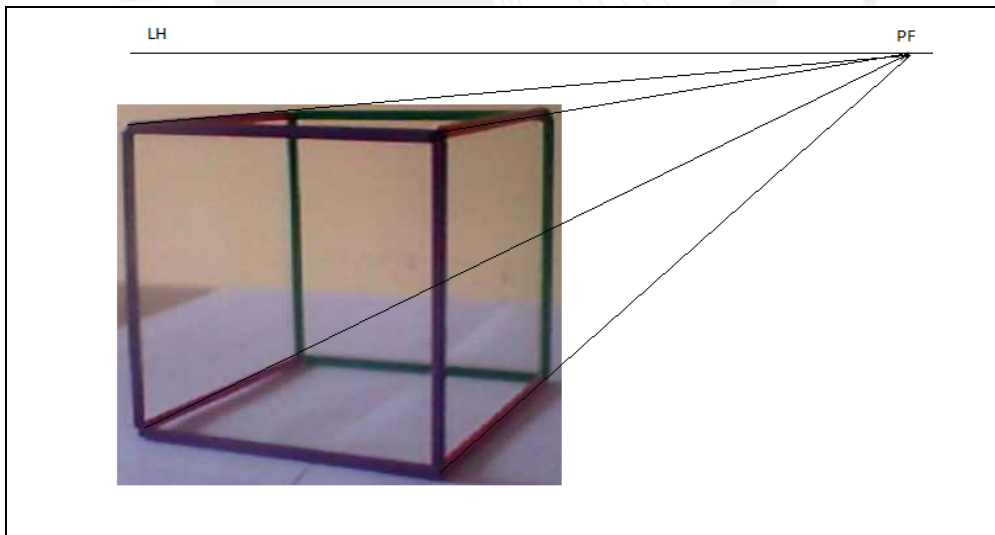


Figura 95. Foto del modelo de cubo en varitas con punto de Fuga

A continuación, esperamos que las duplas construyan toda la representación obtenida (la foto del cubo, sus rectas proyectantes, su punto de fuga y la línea horizontal); para lo cual deberán de elegir un punto de partida para su construcción y lo más probable es que elijan el esquema de cubo, ya que a través de este empezó toda la construcción. En esta parte, pensamos que las duplas encontrarán dificultad; ya que no cuentan con el diseño del cubo como base y prácticamente construirán una representación distante.

Finalmente, esperamos que las duplas realicen una construcción en perspectiva Cónica y describan sus características, es decir esperamos que lo asocien a las presentadas en las diapositivas. A pesar de ello; consideramos que en esta parte las duplas encuentren dificultad, ya que se trata de construir una representación de un objeto tridimensional de tal manera que si dibujan una representación del cubo en perspectiva Cónica sea similar a la que presenta la figura 96.

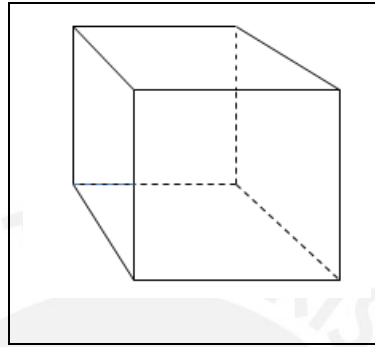


Figura 96. Cubo en perspectiva Cónica

De otra parte, en la misma actividad, proponemos a las duplas hacer diversas representaciones del cubo en perspectiva Cónica variando la ubicación del punto de fuga con la finalidad que estas se familiaricen con esta perspectiva Cónica.

Análisis a posteriori

En cuanto a la dupla D_1 , en tanto empezó a manipular la lámina de la foto del cubo, realizó la tarea, sin dificultad; verificándose así nuestro supuesto a *priori*. La siguiente figura, presenta su deducción en la lámina, en cuanto al punto de fuga y de la línea horizonte.

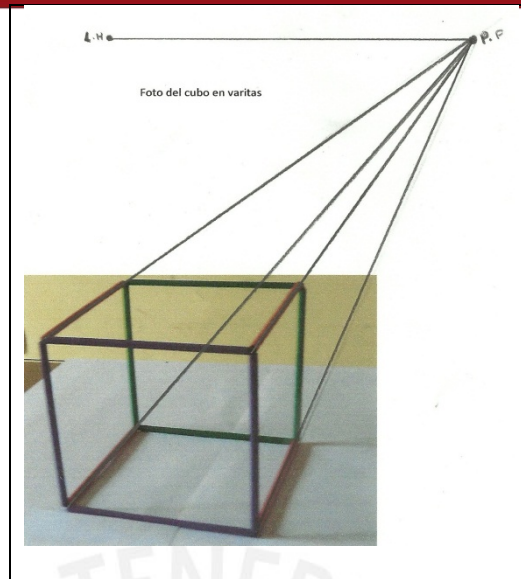


Figura 97. Determinación del punto de fuga (PF) y línea horizonte (LH), dupla D_1

Por otra parte en la dupla D_5 , encontramos imprecisiones tanto al encontrar el punto de fuga, como al trazar la línea horizonte; ya que no tuvo en cuenta que, esta debe ser paralela a la arista horizontal de la cara frontal del cubo (expuesta en la diapositiva). Comprobamos así que para esta dupla no le fue fácil realizar la tarea indicada; lo cual no fue previsto *a priori*. La figura 98, muestra el trazado que realizó esta dupla.

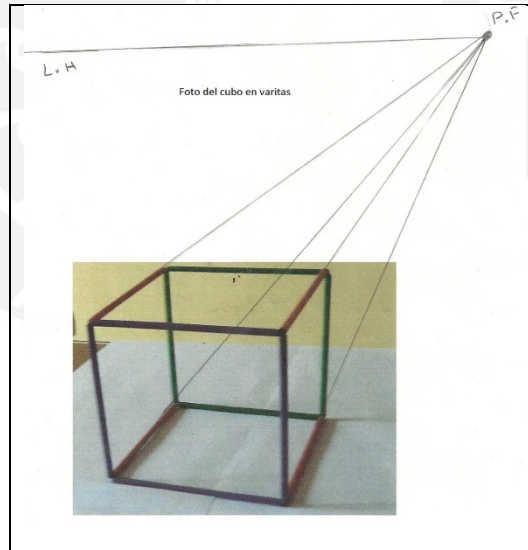


Figura 98. Determinación del punto de fuga (PF) y línea horizonte (LH), dupla D_5

En cuanto a la tarea sobre la representación del cubo y además sus rectas proyectantes, encontramos que la dupla D_1 tuvo dificultad; tal es así, que en su representación encontramos imprecisiones como, falta de paralelismo de la arista superior de la cara frontal y la de su cara opuesta; verificándose así lo que preveíamos *a priori*. La figura 99 muestra la representación de esta dupla.

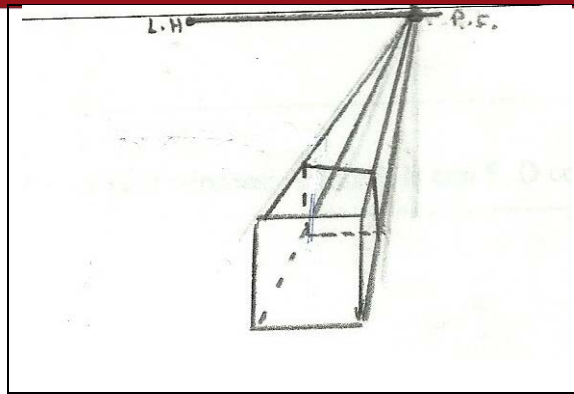


Figura 99. Perspectiva Cónica del cubo con líneas proyectantes, dupla D_1

Debemos indicar que, esta dupla D_1 al construir su representación no sabía de donde iniciarla; siendo informados luego por el docente observador, que no leían las indicaciones; aspecto que pensamos se suma a la dificultad de su tarea; siendo necesaria la participación de la docente-investigador que intervenía pidiéndoles leer los pasos que se indica en la diapositiva y aclarando dudas.

En cuanto a la dupla D_5 , en lo que refiere a su representación del cubo en perspectiva Cónica con líneas proyectantes; sabemos por informe de la docente observadora que, primero dibuja un cuadrado, luego elige un punto de fuga y traza rectas a partir de los cuatro vértices del cuadrado hacia el punto de fuga y finalmente completa la cara opuesta a la cara frontal; es decir asoció su procedimiento a la secuencia de la perspectiva Cónica dada en la diapositiva; lo cual no fue previsto *a priori*; sin embargo le resultó de gran ayuda. Es así que consideramos necesario felicitar la iniciativa de esta dupla por saber explotar los alcances y hacer seguimiento de nuestro trabajo. La representación de la dupla se encuentra en la figura 100.

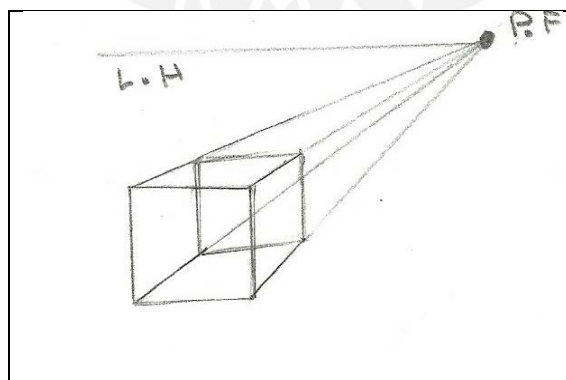


Figura 100. Perspectiva Cónica del cubo con líneas proyectantes, dupla D_5

Como podemos ver, a pesar que esta dupla D_5 realizó una tarea más eficiente; sin embargo podemos observar aún algunas imprecisiones en su representación como es la conservación del paralelismo de la arista inferior de la cara frontal con la arista inferior

de la cara opuesta de la representación del cubo; lo cual pensamos que se debe porque realiza la representación de un objeto tridimensional, de lo cual concordamos con Parzysz (1988), cuando afirma que para el estudiante no es fácil representar un objeto tridimensional; es decir se hace necesario escoger las propiedades que queremos ver representadas. De otra parte pensamos que tal vez la presentación hecha en las diapositivas no fue suficiente para que los estudiantes comprendieran acerca de la perspectiva.

A continuación, las duplas se familiarizan con la construcción de esta perspectiva a través de varias representaciones en las cuales variamos el lugar del punto de fuga.

Finalmente, en esta parte B, se les pide a las duplas completar parte de una representación e indicar si está en perspectiva Cónica. La respuesta que muestra la dupla D_1 se presenta a continuación.

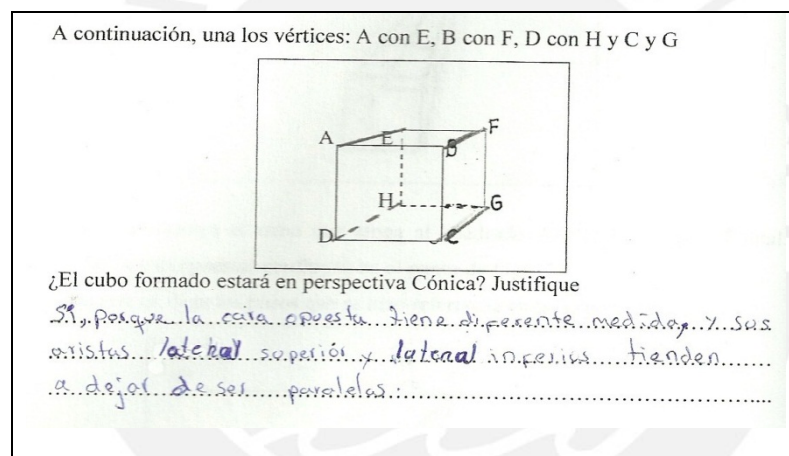
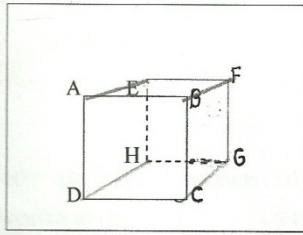


Figura 101. Cubo en perspectiva Cónica y sus características, Dupla D_1

Como podemos observar, en las características que escribe la dupla D_1 son aceptables, cuando menciona que si está en perspectiva Cónica, porque la cara opuesta tiene diferente medida; comprobando así, que establecer las características de la representación les es más fácil que construirla lo cual no fue previsto en nuestro análisis *a priori*. De así como verificamos lo que afirma Parzysz (1988) que el estudiante deduce propiedades de lo que ve. Esta afirmación también podemos observar en la dupla D_5 , según se muestra a continuación.

A continuación, una los vértices: A con E, B con F, D con H y C y G



¿El cubo formado estará en perspectiva Cónica? Justifique

El cubo si estará en perspectiva cónica porque la cara frontal y opuesta y la de atrás no tienen las mismas dimensiones y las aristas laterales que van para el fondo no son paralelas

Figura 102. Cubo en perspectiva Cónica y sus características, Dupla D_5

Debemos de indicar que en esta parte B, las duplas se encuentran en la etapa (G_1) del desarrollo del pensamiento geométrico de Parzysz. De otro lado, pensamos que cuando interpretan las representaciones las duplas pueden confundir entre lo que saben y lo que ven; encontrando una explicación en la característica que presenta esta perspectiva Cónica y en lo que afirma Parzysz (1991) que las convenciones implícitas pueden revelar concepciones erróneas en el caso de que estos no sean dominados por los estudiantes.

A continuación, presentamos la parte C de la actividad 5, referente a la perspectiva Isométrica.

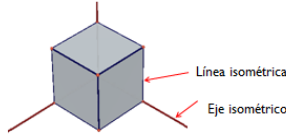
Parte C *El cubo en perspectiva Isométrica*

Objetivo. Pretendemos que el estudiante conozca la perspectiva Isométrica para luego utilizarla como uno de los sistemas de representación del cubo.

La docente—investigador explicó la perspectiva Isométrica a través de las siguientes diapositivas.

La perspectiva isométrica

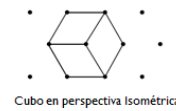
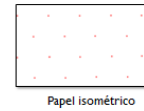
Es una forma de perspectiva paralela en la cual se realiza un plano de proyección para mostrar las tres caras de un cubo. Las tres aristas frontales se llaman líneas isométricas.



En esta diapositiva, se explica al estudiante la perspectiva Isométrica y sus elementos.

Método de la perspectiva isométrica

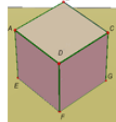
La perspectiva isométrica, utiliza un método Convencional, en el que se toman las longitudes verdaderas a lo largo de los ejes isométricos y líneas isométricas (largo, ancho y profundidad son congruentes entre sí); en el cual se recomienda usar el papel isométrico (trama de puntos en forma de triángulos equiláteros).



Mediante esta diapositiva, la docente—investigador explica al estudiante acerca de las características de esta perspectiva y el método convencional empleado por esta (uso del papel isométrico)

El cubo de Necker

Es una ilusión óptica publicada por primera vez en 1832 por el Suizo Louis Albert Necker. Se trata de un cubo obtenido mediante proyección ortogonal, esto es, que las aristas paralelas del cubo están dibujadas como líneas paralelas en la representación gráfica. La representación inicial fue en realidad un romboide. La siguiente figura representa el cubo de Necker.



En esta diapositiva, se explica al estudiante acerca del cubo de Necker; siendo un ejemplo de cubo similar a la perspectiva isométrica.

Referencias:

- Gutiérrez, A. (1998). La investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.
- Santos, Samuel. (2006). *El papel de la geometría descriptiva en los problemas de geometría espacial: Un estudio de las secciones de un cubo.* (Tesis de maestría, Universidad de Sao Paulo)
- Cozzolino, Adriana. (2008). *La enseñanza de la perspectiva usando el Cabri 3D: Una experiencia con alumnos de enseñanza media.* (Tesis de maestría, Universidad de Sao Paulo)
- Deskrép, C. (2005). Geometría Descriptiva. Ediciones Biblioteca Universitaria. Lima
- Meavilla, V. (2006, Noviembre). Cubos para ilusionar. *Sigma* (29)

Figura 103. Diapositivas de presentación de la perspectiva Isométrica

A continuación, se le propone al estudiante realizar la tarea 3, que se transcribe en el cuadro 22.

Cuadro 22. Tarea de la parte C actividad 5

Tarea de la parte C

Observe la siguiente representación:

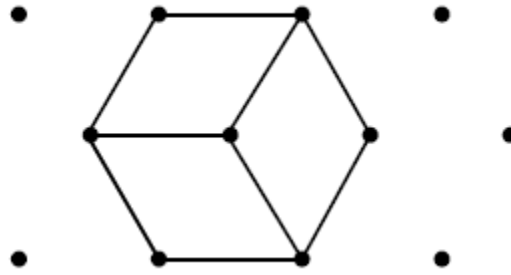
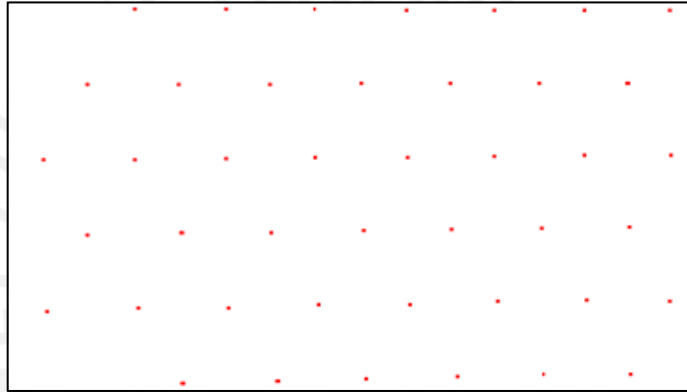


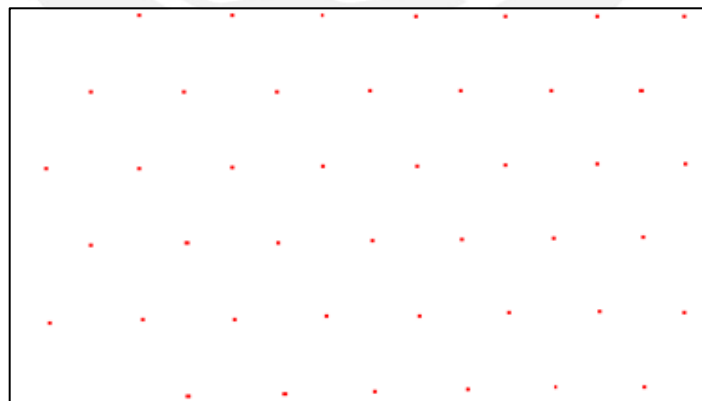
Figura 3. Cubo en Perspectiva Isométrica

- a) Utilice el papel isométrico y construya, dos puntos de vista de cubos diferentes a la de la representación anterior, que se encuentren en Perspectiva isométrica

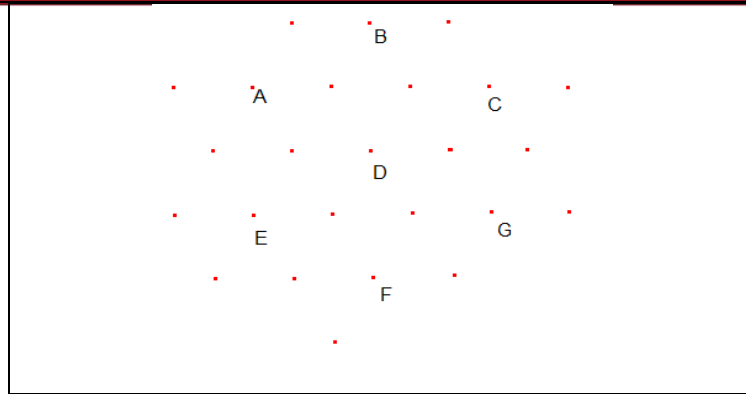
Vista A



Vista B



- b) A continuación, en el papel isométrico que se muestra una los puntos y forme los segmentos: \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{AD} , \overline{DC} , \overline{AE} , \overline{DF} , \overline{CG} , \overline{EF} y \overline{FG}

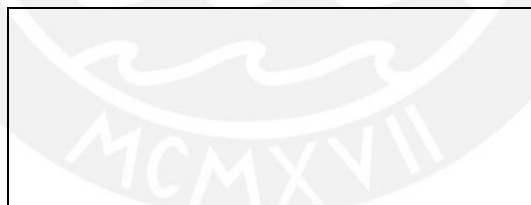


La representación que ha construido corresponde a un poliedro muy importante llamado: **Cubo de Necker**; como observa es una representación similar a la perspectiva Isométrica.

Cree un cubo de Necker;



Construya en cubo en perspectiva Isométrica; y describa sus características;



.....

.....

.....

Análisis a priori

En la primera parte de la parte C de la actividad 5, proponemos a las duplas que usando el papel isométrico construyan dos vistas diferentes de una representación Isométrica que se le muestra; para lo cual esperamos tengan dificultad al encontrar las vistas; ya

que se trata de la representación de un objeto tridimensional, donde además debe de mostrarse tres caras congruentes; sin embargo la docente-investigador atenderá a mayor detalle las dudas que presenten los alumnos.

Esperamos que muestren como posibles representaciones a las que se presentan en la figura 104.

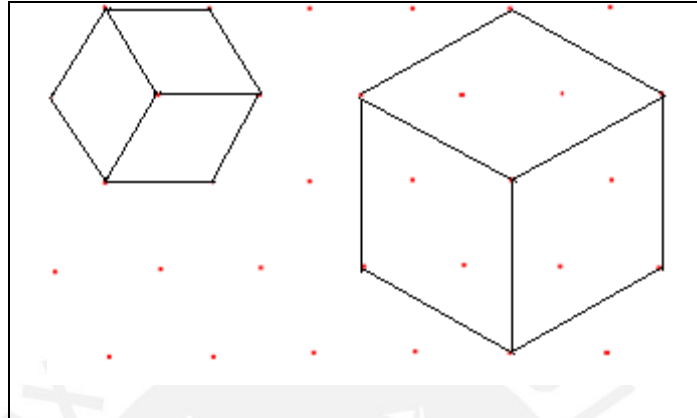


Figura 104. Cubos en perspectiva Isométrica vistas A y B

A continuación, proponemos a las duplas, unir puntos y construir el cubo de Necker, para lo cual pensamos no tendrá dificultades, ya que es un cubo construido similar a la perspectiva isométrica.

Finalmente, en esta parte C pedimos construir y describir un cubo en perspectiva isométrica; para lo cual ya no se le muestra la trama de puntos. Pensamos que para su construcción las duplas tendrán ciertas dificultades a no ser que creen su propia trama de puntos y luego lo dibujen; resultando la construcción similar a la figura 105.

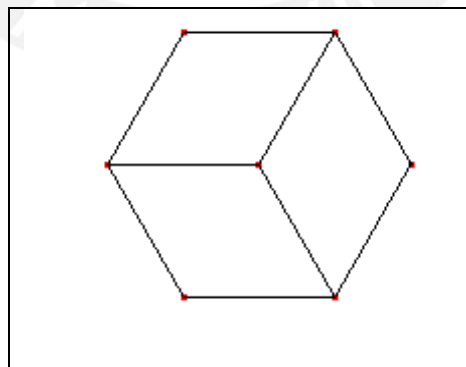


Figura 105. Cubo en perspectiva Isométrica

Análisis a posteriori

En cuanto a la primera indicación de la parte C, ninguna de las duplas consiguió presentar dos vistas diferentes a la mostrada; en consecuencia logramos parcialmente lo

previsto a *priori*. Encontramos que las duplas muestran dificultad al representar un objeto y mucho más si tiene que variar el punto de vista de dicha representación; lo cual habíamos previsto a *priori*. Se presenta en la figura 106, el punto de vista representada por la dupla D_1 (parte izquierda) y la vista obtenida por la dupla D_5 (parte derecha).

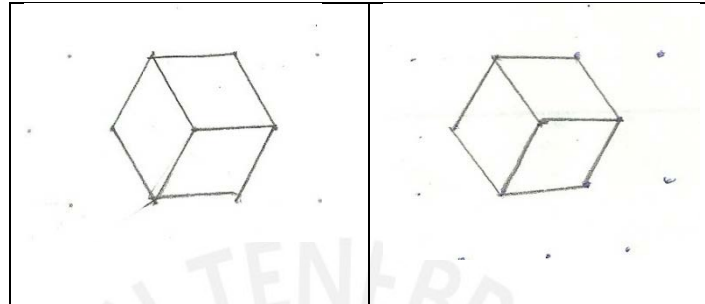


Figura 106. Cubo en perspectiva Isométrica usando papel isométrico, dupla D_1 y dupla D_5 respectivamente

Como podemos notar, a pesar de existir puntos que deben de unir; sin embargo hay imprecisiones al trazar los segmentos para unir dichos puntos.

De otro lado, cuando se le pide construir el cubo de Necker; a pesar de existir los puntos de la trama y haber ensayado una construcción anterior, les cuesta conseguir la representación y mostrar precisión; logrando así parcialmente lo previsto a *priori*. La figura 107 muestra la representación de la dupla D_1 (lado izquierdo) y la representación de la dupla D_5 (lado derecho).

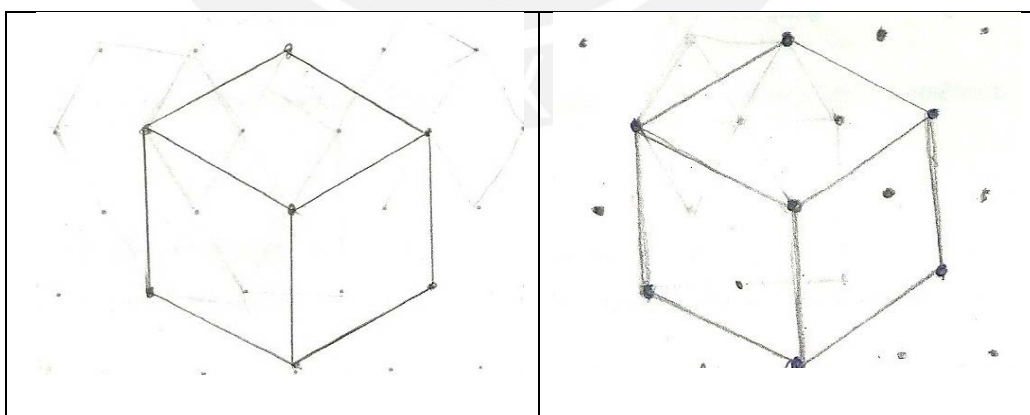


Figura 107. Cubo de Necker a base de papel isométrico, dupla D_1 y dupla D_5 respectivamente

Finalmente en esta parte C, cuando pedimos a las duplas que representen un cubo en perspectiva Isométrica; sin darles la trama de puntos, las duplas encontraron esta tarea sumamente difícil; viéndose en la necesidad de crear su propia trama de puntos para así poder realizar la representación; lo cual confirma lo previsto a *priori*. De otro lado,

frente a la dificultad encontrada en nuestros estudiantes, pensamos que tal vez la información presentada en las diapositivas no fueron suficientes para que ellos aprendieran sobre la perspectiva; es así que la docente-investigador tendrá presente al momento de la formalización de los saberes para absorber las dudas de los estudiantes. La figura a continuación, muestra la representación de la dupla D_1 (lado izquierdo) y la representación de la dupla D_5 (lado derecho).

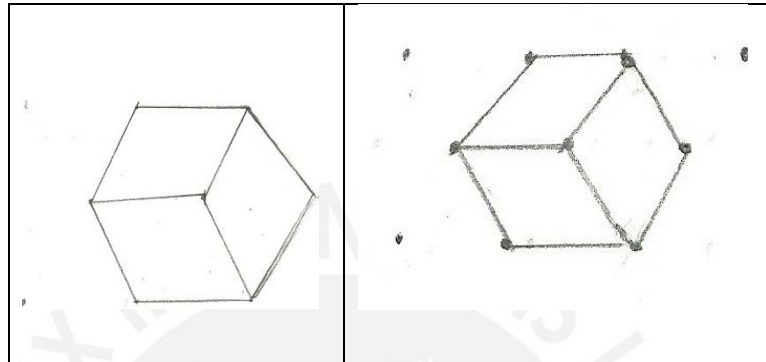


Figura 108. Cubo en perspectiva Isométrica dupla D_1 y dupla D_5 respectivamente

Debemos indicar que para construir esta representación las duplas se vieron en la necesidad de crear la trama de puntos del papel isométrico; para lo cual era necesario también saber las características de un triángulo equilátero; sin embargo, según nuestros docentes observadores, la dupla D_5 si hizo una trama de vértices de triángulos equiláteros y además se aseguraba primero de formar un rombo y luego completaba las otras dos caras; mientras que a la dupla D_1 no le interesó conservar la longitud; de lo cual pensamos que es por desconocimiento o porque no leía la secuencia de la ficha de tareas.

Es así; que tanto en esta parte C como en las partes anteriores de esta actividad, las duplas se encuentran en la etapa (G_1) del desarrollo del pensamiento geométrico de Parzysz; también interactúan con representaciones distantes y además codifican y decodifican diferentes representaciones del cubo; lo cual no les resultó tarea fácil (tal vez porque lo que se explicó en las diapositivas no fue suficiente para que el estudiante comprendiera acerca de la perspectiva y siendo así, no tenía conocimientos previos que movilizar) confirmando lo que afirma Parzysz (1991), que el estudiante debe de dominar habilidades espaciales, también dominar la elaboración de un sistema de reglas geométricas que permitan trabajar sobre un modelo y por fin codificar y decodificar las construcciones.

Al concluir la actividad 5, la docente—investigador, a manera de hacer un resumen de las perspectivas, pidió a los estudiantes que eligieran y dieran las características de las diferentes representaciones (Cubo en las tres perspectivas) de estas, dibujadas en un papelote. Debemos de indicar que al ser preguntados los estudiantes, con cual perspectiva les gustó más trabajar; ellos eligieron la perspectiva Caballera, argumentando como razones: que conserva más las características del cubo; que no tienen que estar pensando en un punto de fuga, que no tienen que estar viendo encontrar tres caras congruentes; además creemos necesario también mencionar que al momento de abordar esta perspectiva encontramos menores dificultades en el trabajo las duplas, que con las otras dos perspectivas.

Finalmente, la docente—investigador realizó la formalización de las diferentes perspectivas y se reforzaron conceptos como:

- 1) Una perspectiva es un sistema de representación de un objeto tridimensional en el plano.
- 2) Un punto de vista del cubo está relacionada con la mirada que sigue el observador. Por ejemplo: punto de vista desde la cara frontal.
- 3) Las perspectivas: Caballera, Cónica e Isométrica, son algunas formas de representar el cubo en el plano.
- 4) La perspectiva Caballera del cubo, es una proyección oblicua sobre un plano paralelo a una de las caras principales del cubo. La longitud de las aristas que relacionan la cara frontal del cubo con la cara posterior, depende del ángulo desde el cual mira el observador (llamado coeficiente de reducción).
- 5) La perspectiva Caballera del cubo presenta las siguientes características: la cara frontal y la cara posterior del cubo, mantienen las mismas dimensiones; se conserva el paralelismo de sus aristas; la longitud de las aristas que relacionan la cara frontal del cubo con la cara posterior, depende del ángulo desde el cual mira el observador.
- 6) La perspectiva Cónica del cubo, es la proyección del cubo sobre el plano a partir de una fuente colocada a una distancia finita del cubo (punto de fuga).
- 7) La perspectiva Cónica presenta las siguientes características: la cara frontal y la cara posterior del cubo, difieren en dimensiones (ya que confluyen a un punto de fuga); las aristas de la cara frontal y la cara posterior del cubo mantienen el paralelismo. Las aristas que unen la cara frontal con la cara posterior del cubo no se muestran paralelas.

- 8) La perspectiva isométrica del cubo, es determinada por una proyección ortogonal y muestra las tres caras del cubo congruentes entre sí (largo, ancho y profundidad tienen la misma longitud).
- 9) La perspectiva Isométrica presenta las siguientes características: presenta tres caras del cubo congruentes; se puede trazar en papel isométrico.
- 10) El cubo de Necker es un ejemplo similar al de la perspectiva isométrica. Una de las formas de representación es con las caras siendo romboides.

4.4.4 Cuarto encuentro

En este encuentro se trabajaron las actividades seis y siete.

En la actividad seis; al estudiante se le propone construir y describir la representación Caballera del cubo utilizando el CABRI 3D.

La actividad siete tiene por objetivo que los estudiantes exploren diferentes puntos de vista de la perspectiva Caballera del cubo utilizando el CABRI 3D e identifiquen dichos puntos de vista en el modelo del cubo de material concreto.

Actividad 6. *Representando el cubo en Perspectiva Caballera usando el software CABRI 3D*

En esta actividad se propone al estudiante representar un cubo en perspectiva Caballera completando una construcción hecha en CABRI 3D y luego que los estudiantes describan sus propiedades. Debemos indicar que los estudiantes ya realizaron parte de esta misma tarea; pero con lápiz y papel.


Objetivo. Pretendemos que el estudiante represente un cubo en perspectiva Caballera y reconozca sus propiedades haciendo uso del CABRI 3D.

La tarea propuesta es transcrita en el cuadro 23.

Cuadro 23. Tarea actividad 6

Tarea

Para esta tarea debe ingresar al archivo: Representación del cubo 1 de la carpeta Actividad 6 y su reto es completar y llegar a formar la representación del cubo en Perspectiva paralela, pero utilizando el software CABRI 3D (Recuerde que esta representación, ya lo manipuló con lápiz y papel). Para ello, tome en cuenta los siguientes pasos:

 Cree rectas paralelas a la recta eje r , que pase por los vértices: A, B y D que intersecte al

plano Q.

- La herramienta “**Punto de intersección**” marca el punto de intersección de la recta trazada y el plano.
- Con la herramienta “**Punto de intersección**” encuentre los puntos de intersección en el plano Q y nombre con A' el punto de la recta que contiene al punto A, B' el punto de la recta que contiene a B, y así sucesivamente para C', D'. Oculte las rectas que le sirvieron para obtener los puntos en el plano Q.
- La herramienta “**Polígono**” crea un polígono cualquiera a partir de puntos en el plano.
- Cree el polígono que pase por los puntos A', B', C', y D'.
 Repita el proceso anterior, para crear los puntos: E', F', G' y H' y el polígono E'F'G'H' en el plano Q.
 A continuación construya las demás caras de la representación del cubo, trazando los polígonos correspondientes a los vértices.
- La herramienta “**Longitud**” le ayuda a encontrar la longitud de un segmento en centímetros.
- Utilizando la herramienta longitud y tocando con el cursor la arista, verifique la longitud de las aristas del cubo con respecto a las aristas de su representación.
- Manipule su construcción moviendo la recta eje r. Agregue una zona de texto (use “**Documento**” y “**Agregar zona de texto**”) y conteste a las siguientes preguntas:
 1. ¿Coincide su construcción con la que obtuvo utilizando lápiz y papel?
 2. ¿Qué sucede cuando la recta eje r lo mueve horizontalmente o verticalmente del punto de intersección al plano Q?
 3. ¿En qué momento el cubo proyección, se reduce a un cuadrado?
 4. En la representación del cubo ¿Todas las aristas se mantienen de la misma longitud?
 5. Explica las razones para afirmar que la representación del cubo está en perspectiva Caballera.
- Salve su figura, nombrando el archivo de la siguiente forma:
(Iniciales de la dupla)_tarea1 y guarde en la carpeta Actividad 6.

Análisis a priori

Pretendemos que las duplas logren completar la construcción del cubo en perspectiva Caballera del cubo, tal como lo muestra la figura 109. Consideramos que, las duplas encontrarán dificultad al crear polígonos para todas las caras de la representación del

cubo y solo tracen aristas que unan los vértices, como en la construcción de lápiz y papel.

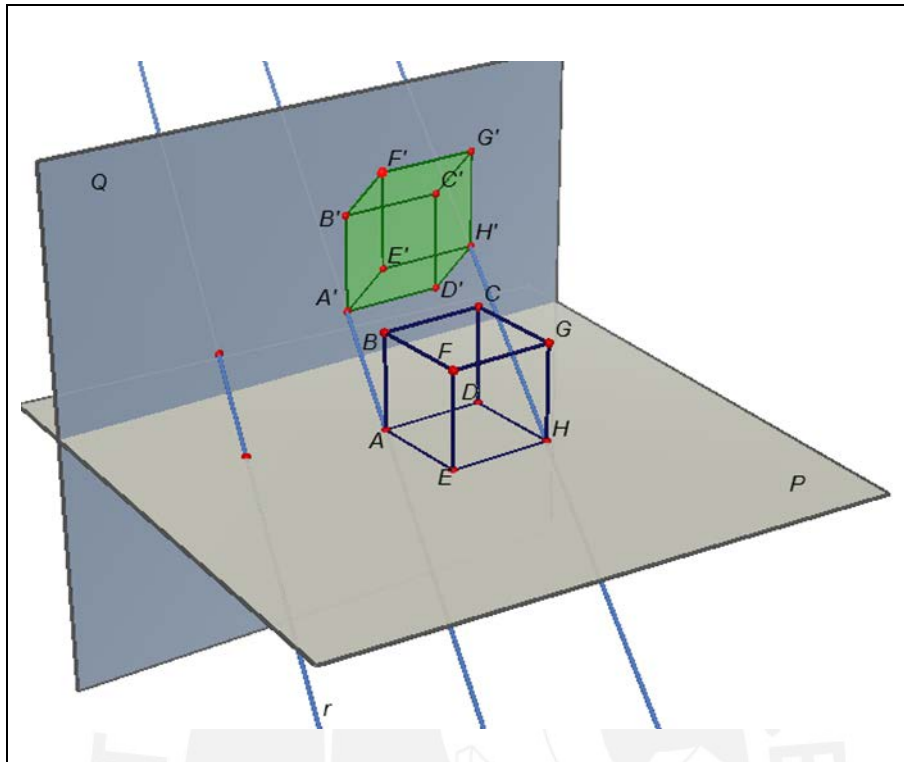


Figura 109. Perspectiva Caballera del Cubo BCGF-ADHE

De otro lado, pensamos que el trazado de las rectas paralelas puede crear interferencia a las duplas, en el momento de nombrar la letra correspondiente a cada letra del vértice del cubo del plano P en el plano Q; y de crear los polígonos para cada cara de la representación del cubo; para lo cual según las indicaciones, se les sugiere que la creación del polígono debe terminar en el punto en el que empezó y al terminar de crear este, oculten las rectas que le sirvieron para limitar las caras de la representación.

De otro lado, esperamos que las duplas utilicen la herramienta “**Longitud**” para verificar la preservación de medidas de la cara del cubo paralela al plano Q y además verificar que la arista que une la cara frontal y su cara opuesta sufre variaciones en su longitud, al mover verticalmente y horizontalmente la recta eje del punto que intersecta al plano Q.

Por otro lado, consideramos que las duplas, encontrarán que el trabajo realizado en el CABRI 3D es más fácil, más eficiente y más preciso; que el que realizaron con lápiz y papel; constituyendo este en una herramienta más eficaz para obtener la perspectiva Caballera del cubo. Debemos indicar también que, las duplas se encuentran interactuando con representaciones distantes; sin embargo, creemos que el CABRI 3D

les ayudará en sus deducciones. Por otra parte, cabe mencionar que las duplas se encuentran en la etapa (G_1) del desarrollo del pensamiento geométrico de Parzys (2001), en el cual esperamos que el CABRI 3D le ayude a verificar más detalles de su representación, teniendo en cuenta la afirmación de Mithalal (2010) que este ambiente de geometría dinámica ofrece más informaciones.

Análisis a posteriori

Consideramos que logramos lo previsto a priori; ya que las duplas lograron obtener en el plano Q, la perspectiva Caballera del cubo ubicado en el plano P, superando algunas dificultades como: creación del polígono para formar la cara del cubo representación, buscar que la recta paralela a la recta r pase exactamente por los vértices del cubo del plano P. La figura 110 presenta la representación de la dupla D_1 agregado a una zona de texto, donde contesta algunas preguntas en relación a la representación construida.

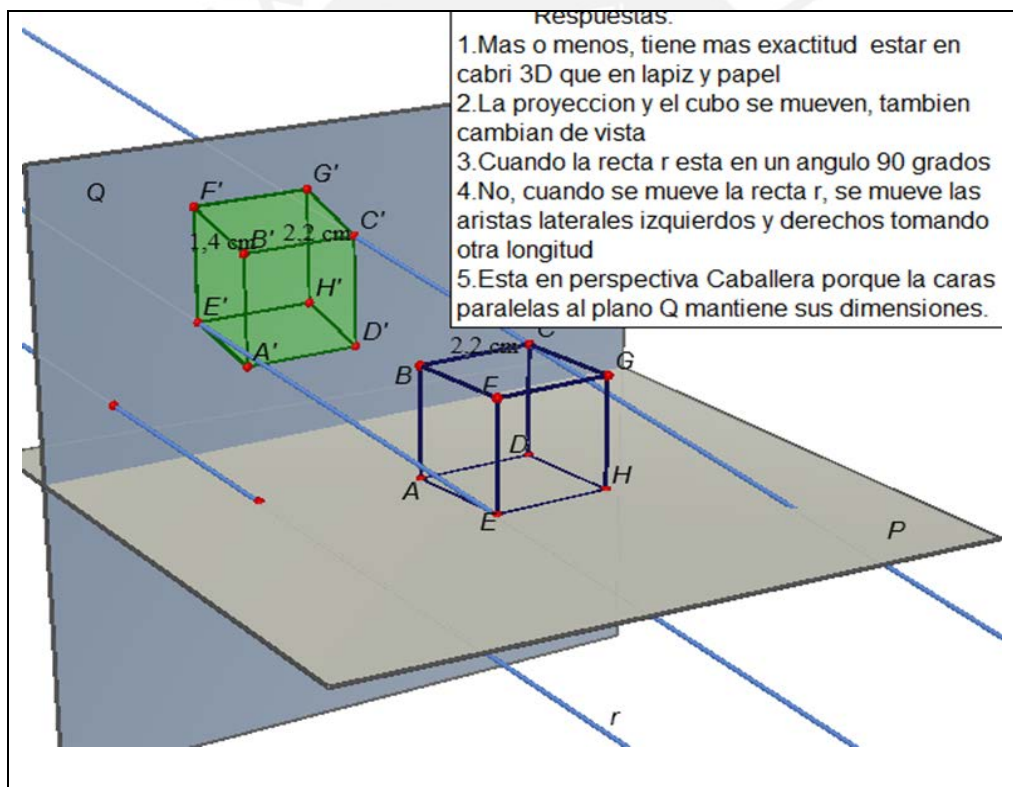


Figura 110. Cubo en perspectiva Caballera en el CABRI 3D, dupla D_1

Como podemos observar, esta dupla D_1 , consiguió obtener la representación. Además; con respecto a las preguntas propuestas en la actividad, se tiene que: En la primera pregunta, verifica que en el CABRI 3D la representación es más precisa, ya que pueden verificar la longitud de las aristas. En la segunda pregunta, su respuesta es imprecisa, ya que lo que se puede mover y cambiar de punto de vista es la proyección del cubo o su

representación; lo importante de su respuesta de esta dupla es que, se da cuenta que la representación cambia de punto de vista. En cuanto a la tercera pregunta, contesta en grados y este recurso del CABRI 3D, no había sido tomado en cuenta; sin embargo por informe del profesor observador esta dupla se caracterizó por ser muy activa y rápidamente terminaba su tarea (pero poco leía indicaciones); es así que el profesor observador le sugiere (una vez formado el cuadrado) que tome en cuenta el ángulo que forma la recta paralela a la recta eje r , coincidiendo con la arista del cubo en el plano P ; de aquí es donde encuentra el ángulo de 90 grados (entre la recta y el plano Q). En cuanto a la pregunta cuatro, reconoce que no todas las aristas guardan la misma longitud y lo especifica; apoyada en la herramienta “**Longitud**”. Finalmente, en la pregunta cinco, su respuesta es aceptable ya que reconoce al menos una de las características.

De otro lado, la figura a continuación presenta la representación y sus respectivas respuestas de la dupla D_5 .

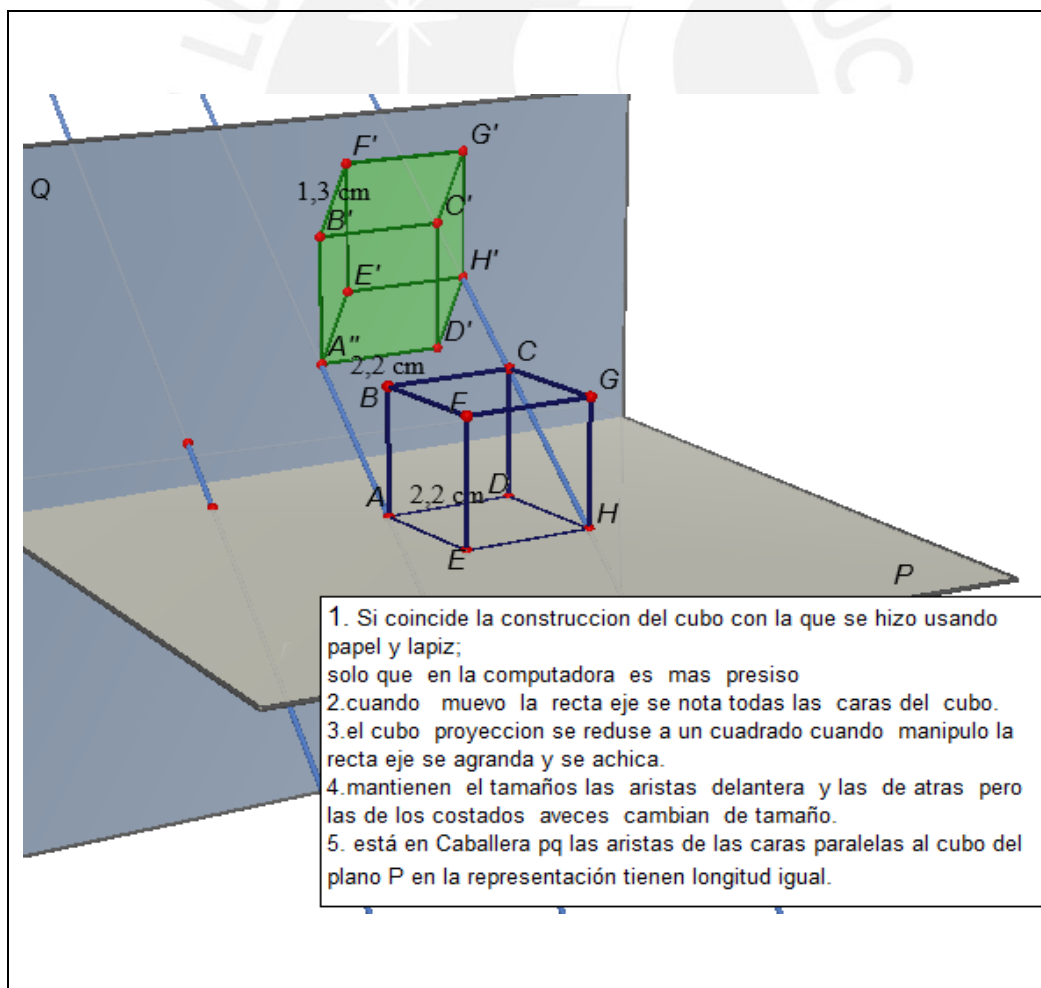


Figura 111. Cubo en perspectiva Caballera en el CABRI 3D, dupla D_5

Como podemos ver, esta dupla D_5 , logró obtener la perspectiva Caballera en el plano Q; además con respecto a las preguntas que propusimos en la actividad se tiene que: En la primera pregunta afirma que la representación del CABRI 3D es más precisa que la construida en lápiz y papel. En la segunda pregunta contesta que se notan todas las caras del cubo; sin embargo esta respuesta es aceptable; en su respuesta entendemos que notan todas las caras, porque cambia de puntos de vista. En la pregunta tres, la dupla escribe que ve un cuadrado, cuando manipula la recta eje y este a su vez se agranda y se achica; sin embargo esperábamos que describa el momento en que resulta la representación un cuadrado; sin embargo en lo que contesta está dando a notar que mueve la recta r y trata de buscar un cuadrado en el plano Q. En la pregunta cuatro, encontramos su respuesta más precisa; sin embargo debería referirse como aristas de la cara frontal y aristas laterales de la representación del cubo). Finalmente, la respuesta cinco de esta dupla es a través de una característica muy importante de la perspectiva; sin embargo también debería agregar la relación con respecto a las aristas laterales de la representación.

Debemos mencionar que en las respuestas de ambas duplas encontramos informalidad en sus respuestas; sin embargo reportan respuestas verdaderas con sus propias palabras. Tendremos presente estas imprecisiones al momento de la formalización de los conceptos empleados en esta actividad.

En conclusión, podemos ver en esta actividad; que a pesar que las duplas interactúan con representaciones distantes; el CABRI 3D es una herramienta de gran apoyo y sus recursos de manipulación directa y cambio de punto de vista, contribuyen para que las duplas, obtengan la perspectiva Caballera del cubo e interpreten sus características. Además; cabe mencionar que frente a lo que observan y verifican las duplas de la representación del cubo, confundan lo que ven y lo que saben; por ello pensamos que es necesario explicarles que lo que acontece es resultado del procedimiento de la perspectiva Caballera; siendo así importante, como afirma Parzysz (1988), dar un estatus claro, consistente y explícito a los diseños de geometría espacial.

Al finalizar la actividad seis, la docente—investigador formalizó conceptos como:

- 1) La perspectiva Caballera del cubo, es una proyección oblicua sobre un plano paralelo a una de las caras principales del cubo.

- 2) Para representar la perspectiva Caballera del cubo debemos contar con dos planos P y Q perpendiculares; donde el plano Q es el de proyección.
- 3) La perspectiva Caballera se construye a través del trazado de rectas paralelas a una recta eje r; que hagan corresponder los vértices del cubo del plano P con los de su representación en el plano Q.
- 4) Para crear las caras del cubo en el plano Q se debe de crear el polígono correspondiente a cada cara.
- 5) Para comparar características del cubo en el plano P y las de su representación en el plano Q, recurrimos a la herramienta “**Longitud**”.
- 6) La perspectiva Caballera del cubo se caracteriza por: mantener las mismas dimensiones de la cara frontal y su cara posterior; conservar el paralelismo de sus aristas.
- 7) Al mover la recta eje r, obtenemos diferentes puntos de vista de la perspectiva Caballera del cubo. En las diferentes vistas se observa que la longitud de las aristas que relacionan la cara frontal del cubo con la cara posterior varía; lo cual depende del ángulo desde el cual mira el observador (llamado coeficiente de reducción).

A continuación presentamos la actividad siete; la cual se centrará en explorar las vistas del cubo.

Actividad 7. *Relacionando los diferentes puntos de vista del cubo en el software CABRI 3D y los puntos de vista de la representación del cubo en material concreto*

En la actividad proponemos al estudiante conseguir distintos puntos de vista del cubo utilizando el software CABRI 3D, manipulando el cubo en estilo de superficie vacío. A continuación debe de relacionar la estructura de dicho punto de vista con la que se mira el cubo en material concreto; deduciendo así la ubicación y la mirada que sigue el observador.

Objetivo. Pretendemos que el estudiante explore las diferentes vistas del cubo usando el software CABRI 3D y los relacione a los diferentes puntos de vista que observa en el modelo del cubo en material concreto.

La indicación de esta tarea propuesta al estudiante queda transcrita en el cuadro 24.

Cuadro 24. Tarea actividad 7

Tarea Buscando encontrar los puntos de vista del cubo que corresponde a la representación.

Observe la siguiente figura:

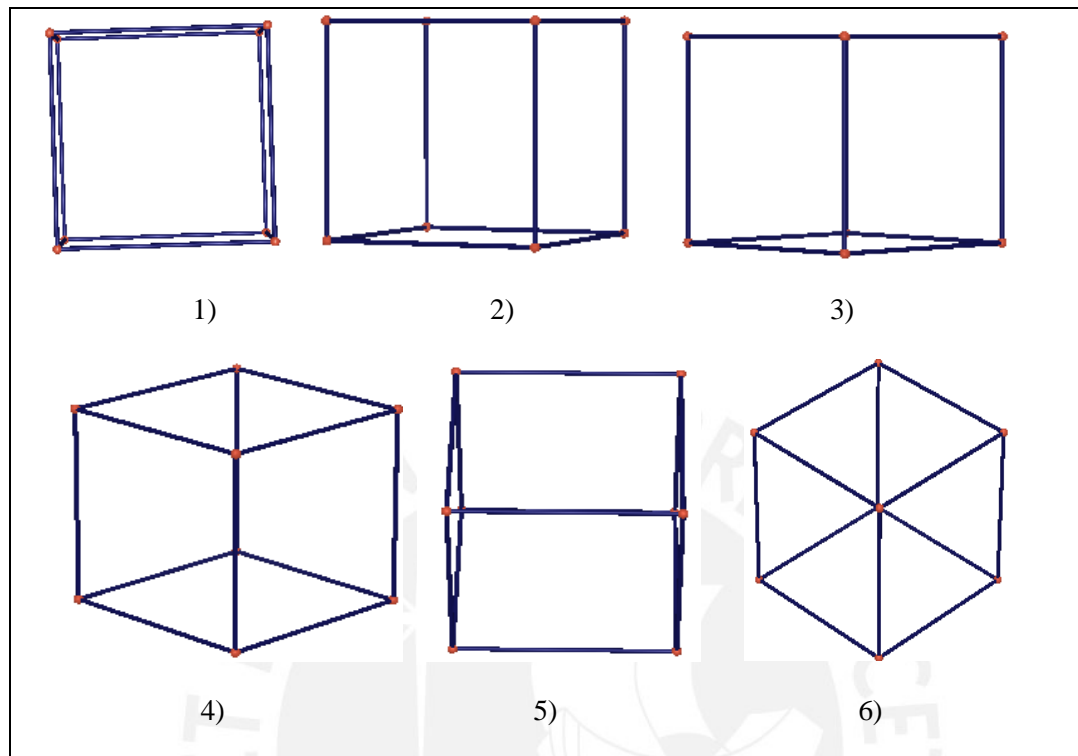


Figura 1. Adaptado de Parzys (1991) p. 580

En esta tarea se le propone encontrar las representaciones mostradas e identificar la vista desde la cual se mira al cubo. Para ello realice los siguientes pasos;

1. Cree un cubo y muestre en estilo de superficie vacío con la herramienta “**Estilo de superficie**” botón derecho del mouse y oculte el punto del centro de la base del cubo.
2. Con la manipulación directa (botón derecho del mouse) busque las diferentes representaciones que se presenta en la figura 1.
3. Salve cuatro representaciones (tres que coincidan con las anteriores y otra puede ser de una nueva vista); nombre el archivo *(Iniciales de la dupla)_Número de la representación_Vista* y guarde en la carpeta Actividad 7; por ejemplo: D4_1_Cara frontal.

Análisis a priori

En esta actividad esperamos que las duplas manipulen el cubo en estilo de superficie vacío y encuentren las diferentes representaciones que proponemos y deduzcan el punto de vista desde el que se ve la representación del cubo; así como lo presenta la figura 112.

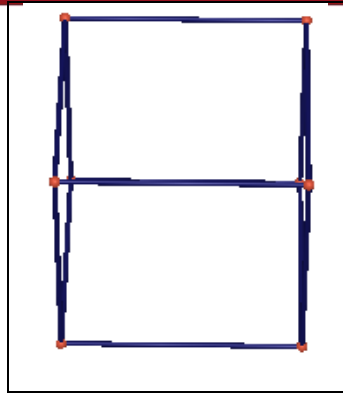


Figura 112. Representación del cubo desde un punto de vista de la arista frontal superior

Esperamos que en la representación 1) mencionen que se ve desde un punto de vista frontal; en la representación 2) que se ve desde la cara frontal y la cara lateral derecha; en la 3) desde la arista frontal derecha hacia la arista posterior izquierda; en la 4) desde la cara superior y la arista frontal derecha hacia la cara inferior y arista posterior izquierda y en la 6) desde el vértice superior derecho de la cara frontal hacia el vértice inferior izquierdo de su cara posterior

De otro lado, pensamos que las duplas encontrarán dificultad al identificar el punto de vista desde donde se mira la representación del cubo y se ayuden con el modelo de cubo de material concreto. Dada la dificultad de la tarea, la docente-investigador hará seguimiento de la actividad para pedir que relacionen su representación en el software con el modelo de cubo de material concreto.

En esta actividad las duplas se encuentran interactuando con representaciones distantes (en el CABRI 3D); pero además tendrán que recurrir a las representaciones próximas (modelo de cubo en material concreto) y relacionar así los puntos de vista del cubo; buscando favorecer la formación de la imagen mental del objeto y contribuir a mejorar el nivel de visualización, como lo afirma Parzysz (1991).

Análisis a posteriori

Las duplas lograron encontrar las representaciones del cubo en el CABRI 3D; pero mostraron dificultad al identificar el punto de vista desde donde se le mira, tal como habíamos previsto a priori. En la figura 113 mostramos las representaciones encontradas por la dupla D_1 y sus respectivas vistas.

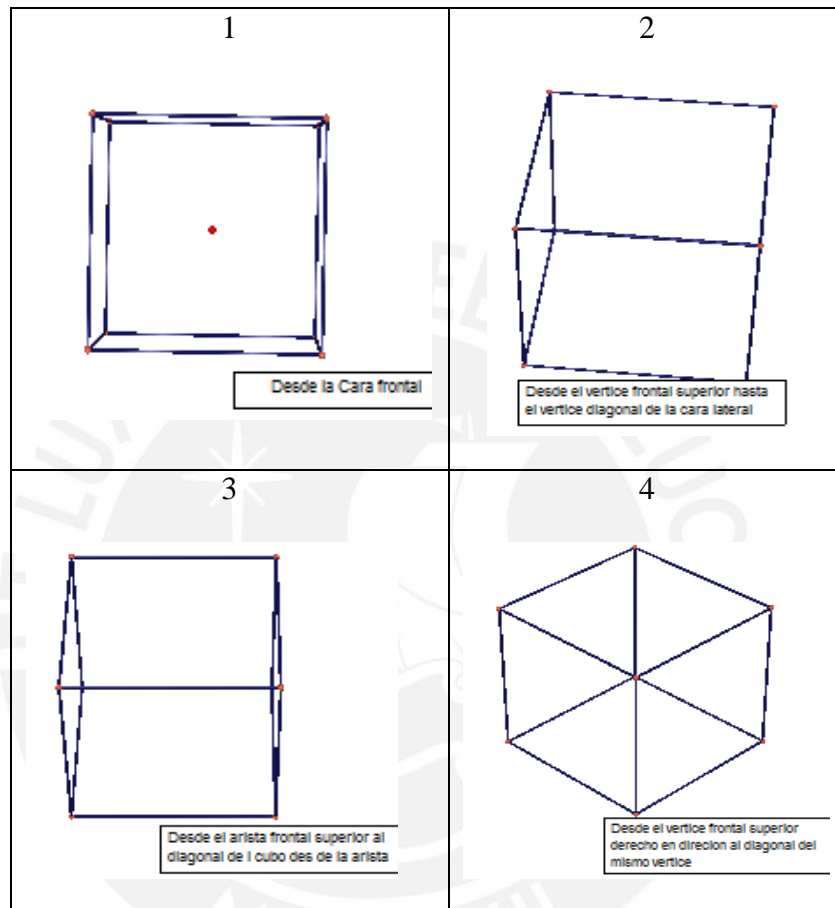


Figura 113. Representaciones del cubo desde diferentes vistas, dupla D_1

Como podemos observar, esta dupla muestra imprecisiones al nombrar los puntos de vista desde donde se mira el cubo, como es el caso de la representación dos, debería ser “desde el vértice frontal superior derecho hacia el vértice opuesto de la cara lateral derecha”; en la representación tres, debería ser “desde la arista frontal superior hacia la arista inferior de su cara posterior” y en la representación cuatro debería ser “desde el vértice superior derecho de la cara frontal hacia el vértice inferior izquierdo de su cara posterior”; sin embargo la mayoría de sus repuestas no están mal; sino que faltan precisar.

A continuación, en la figura 114 se muestra las representaciones sus respectivas vistas, encontradas por la dupla D_5 .

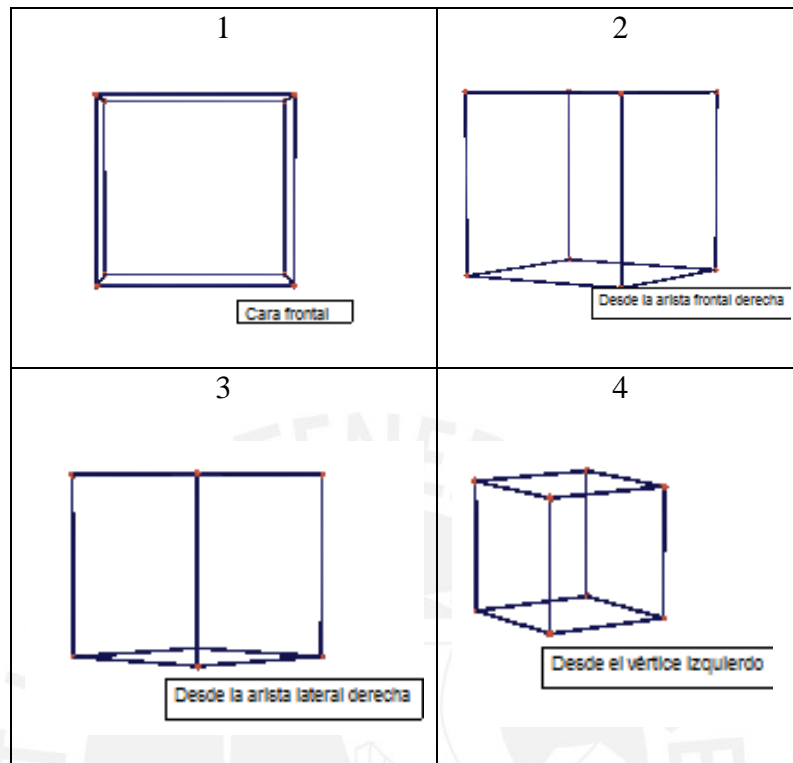


Figura 114. Representaciones del cubo desde diferentes vistas, dupla D_5

Como podemos notar, la dupla D_5 al igual que la dupla D_1 tuvo dificultad al identificar el punto de vista desde donde se le mira al cubo, como es el caso de la representación dos, debería ser “desde la cara lateral derecha”; en la representación tres, debería ser “desde la arista derecha de la cara frontal hacia la arista izquierda de su cara posterior” y en la representación cuatro, debería ser “desde el vértice superior izquierdo”; sin embargo la mayoría de sus respuestas no están mal, sino que faltan precisar. Estas dudas trataremos de retomarlas en el momento de la formalización de los saberes que intervinieron en la actividad.

Debemos indicar, a través de los alcances de los docentes observadores que, a las duplas le costó mucho trabajo encontrar un punto de vista diferente a las dadas y de la misma manera no podían identificar el punto de vista desde donde se mira el cubo; de lo cual pensamos que por una parte se debe a la interpretación que realiza de una representación distante, ya que según Parzysz (1988) al estudiante le resulta difícil deducir propiedades de la representación de un objeto tridimensional, o de otra parte pueda ser que no tenga claro la idea de punto de vista desde la que se mira el cubo. Es por ello que, consideramos conveniente que las duplas manipulen en esta actividad también el

modelo del cubo en material concreto, ya que según Parzysz (1991) contribuye para que el estudiante mejore el nivel de visualización. De otro lado, es necesario notar que en esta actividad las duplas al manipular el CABRI 3D se encuentran en la etapa (G_1) del desarrollo del pensamiento geométrico; donde aún deducen por lo que ven y lo que se pretende al utilizar el cubo en material concreto es ayudarlo a deducir la vista desde donde se mira la representación.

Debemos mencionar además; que al término de esta actividad utilizamos el software para ayudar al estudiante, a asociar representaciones de las diferentes perspectivas (dejando claro que el software muestra sus construcciones en perspectiva paralela), tal como lo muestra la figura 115.

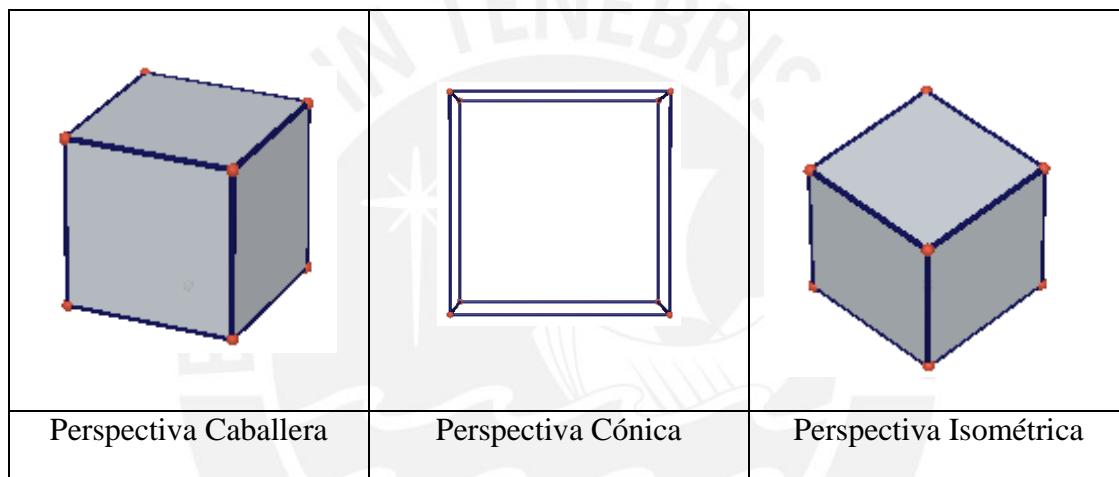


Figura 115. Representaciones del cubo en el CABRI 3D

Al finalizar la actividad 7, la docente—investigador formalizó conceptos como:

- 1) La diferencia entre Perspectiva y punto de vista de un cubo.

La perspectiva es un sistema de representación; mientras que el punto de vista lo determina la mirada que obtiene del cubo el observador. Por ejemplo: Cubo en perspectiva Caballera y punto de vista desde la arista lateral derecha de la cara frontal, que coincide con la arista lateral izquierda de la cara posterior del cubo.

- 2) El software CABRI 3D presenta la representación del cubo en perspectiva Caballera y al obtener las diferentes vistas lo hacemos desde esta perspectiva.
- 3) Para las perspectivas Cónica e isométrica del Cubo en el CABRI 3D; buscamos ver la similitud en cada representación.

Consideraciones Finales

Este trabajo de investigación analizó el uso de las perspectivas y el CABRI 3D en busca de disminuir el conflicto de lo visto y lo sabido de la representación del cubo en estudiantes del primer año de Educación Secundaria (entre 11 y 13 años) del sistema educativo peruano.

Consideramos que el referencial teórico de Parzysz (1988; 1991; 2001), fue pertinente para nuestro estudio, porque nos ayudó a analizar la interacción de los estudiantes por medio de modelos concretos y garantizar que diferencie las características del objeto real con respecto al representado en los libros. Debemos indicar, que la investigación se centró en actividades que permitieron observar y analizar las dos primeras etapas del desarrollo del pensamiento geométrico (G_0) y (G_1); aunque en la actividad cuatro, las respuestas de los alumnos evidenciaron que se encontraban en transición a la etapa (G_2).

Optamos por utilizar el ambiente de geometría dinámica CABRI 3D, para analizar como las representaciones en ese ambiente son construidas e interpretadas por los estudiantes y de qué manera éstas favorecen la visualización y posibilitan la interpretación de propiedades geométricas de la representación del cubo.

También, la metodología escogida (Ingeniería Didáctica), favoreció la organización de la tesis y los estudios preliminares de esta metodología ayudaron a orientar la investigación en cuanto a la elaboración de las actividades; en prever las posibles acciones de los estudiantes y analizar sus respuestas por medio del análisis a priori y a posteriori.

Consideramos que la pregunta *¿La enseñanza de las perspectivas y el uso del CABRI 3D pueden ayudar al estudiante a articular diferentes punto de vista sobre la representación del cubo?* Fue respondida porque los estudiantes lograron realizar las representaciones del cubo en diferentes perspectivas; sin embargo mostraron algunas imprecisiones tanto en la representación como en el reconocimiento de las características de las perspectivas cónica e Isométrica. Pensamos que esto sucedió porque los estudiantes interactúan con representaciones distantes o porque la presentación que hicimos (diapositivas) no fue suficiente para que comprendieran estos tipos de perspectiva; sin embargo tratamos de que los estudiantes superen las dificultades al momento de la formalización de cada actividad propuesta.

Debemos mencionar además; que el uso del CABRI 3D ayudó al estudiante a diferenciar características entre el modelo y su representación; especialmente cuando trabajamos la perspectiva Caballera. La manipulación directa, que este ambiente de geometría dinámica tiene, ayudó a que los estudiantes puedan observar la representación del cubo desde diferentes puntos de vista. En esta parte debemos destacar también que con el uso de material concreto (modelo) y del software logramos que los estudiantes relacionen los diferentes puntos de vista del cubo.

En cuanto a la segunda pregunta de investigación: *¿El uso de las perspectivas y el uso del CABRI 3D disminuyen el conflicto de lo visto y lo sabido de la representación del cubo?* Consideramos también que la respondimos satisfactoriamente; porque por ejemplo, en la primera actividad conseguimos que los estudiantes interactúen con el modelo de cubo y luego con la representación de éste modelo en lápiz y papel, es decir, buscamos que relacionen la geometría espacial con la geometría en el plano. Además en la actividad cinco logramos que perciban que las características que presenta la representación del cubo obedecen a un sistema de representación determinado llamado perspectiva Cónica; por ello encontramos necesario explicarles, que lo que sucede es el resultado del procedimiento de la perspectiva. Asimismo, logramos verificar que el uso del software favoreció el polo de lo visto y lo sabido, ya que facilitó que los estudiantes construyan e interpreten la representación del cubo; particularmente en la perspectiva Caballera.

También debemos mencionar que verificamos en la actividad cuatro que haciendo uso del CABRI 3D los estudiantes mejoraron su percepción de las representaciones; permitiéndoles usar lo que saben.

Finalmente, consideramos importante mencionar que logramos que los estudiantes comprendan que el poliedro cubo tiene desarrollo de su superficie en el plano y que puede ser representado mediante diferentes perspectivas y diferentes puntos de vista.

Esperamos que la presente investigación pueda incentivar otras investigaciones que busquen abordar la representación de objetos tridimensionales y al igual que nosotros escogimos al cubo, por ser el primer poliedro que generalmente se estudia en la geometría del espacio, puedan optar por el estudio de cualquier otro poliedro.

De otro parte, pensamos que en futuras investigaciones podríamos profundizar y centrarnos en el estudio de la perspectiva Caballera, porque quedan otros aspectos por investigar, como por ejemplo, el coeficiente de reducción que en nuestro trabajo no

abordamos al detalle pensando que los estudiantes no lograrían entender; sin embargo pudieron notar mediante la manipulación del software, que está en relación con el ángulo que forma la recta proyectante con el plano donde se hace la representación.



REFERENCIAS

- Agotegaray, S. (2009). *Sistemas de representación*. Editorial de la Universidad Tecnológica Nacional. Madrid. Recuperado de http://www.edutecne.utn.edu.ar/sistemasrepresentacion/SISTEMAS_de_REPRESENTACION.pdf
- Artigue, M., Douady, R. & Moreno, L. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Bogotá. Grupo Editorial Iberoamérica
- Blanco, H. (2009). *Representaciones gráficas de cuerpos geométricos: Un análisis de los cuerpos a través de sus representaciones* (Tesis para obtener el grado de maestra en ciencias en matemática Educativa). Instituto Politécnico Nacional. México.
- Bruño (2008). *Matemática de primer grado de educación secundaria. Educación básica Regular*. Asociación Editorial Bruño. Lima - Perú
- Cozzolino, A. (2008). *La enseñanza de la perspectiva usando CABRI 3D: Una experiencia con alumnos de ensino medio* (Tesis para optar el grado maestría profesional en Educación Matemática). Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo
- Deskrép, C. (2005). *Geometría Descriptiva*. Ediciones Biblioteca universitaria. Lima.
- Guillén, G., Gutiérrez, A., Jaime, A. & Cáceres M. (1992). *La enseñanza de la geometría de los sólidos en la E.G.B.* Valencia
- González, M. & Sánchez, R. (2007). *Construcciones geométricas en tres dimensiones empleando CABRI 3D*. II Coloquio Internacional sobre la Enseñanza de las matemáticas.
- Gutiérrez, A. (1998). *Las representaciones gráficas de cuerpos tridimensionales en la enseñanza de la geometría espacial*. Revista *EMA*, 3(3), 193-220
- Gutiérrez, A. (2006). *La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría*. Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Valencia.
- Instituto de Ciencias y Humanidades (2010). *Geometría una visión de la estereometría*. Lumbrreras Editores. Lima – Perú

Lages, E., Pinto P., Wagner, E. & Morgado, A. (2000). *A Matemática do Ensino Médio*. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro.

Nakamura, J. (1971). *Geometría descriptiva*. Ediciones Biblioteca Universitaria. Lima

Ministerio de Educación (2008). Diseño Curricular Nacional (DCN). Lima-Perú

Ministerio de Educación (2007). Orientaciones para el trabajo Pedagógico (OTP). Lima-Perú

Mithalal, J. (2010). 3D geometry and learning of mathematical reasoning. Laboratoire d'Informatique de Grenoble (LIG). Université Joseph Fourier, Grenoble, Francia. 796-805

Parsysz, B. (1988). "Knowing vs seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 79-82.

Parzysz, B. (1991). Representation of Space and Students' Conceptions at High School Level, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 575- 593.

Parzysz, B. (1991). Espace, Géométrie et dessin. Une ingénierie didactique pour l'apprentissage, l'enseignement et utilisation de la perspective parallèle au Lycée. *Reserches em didactique des mathématiques*, 11(23), Grenoble pp. 211-240.

Parzysz, B. (2001). Articulation entre perception et deduction dans une demarche géométrique em PE1. Extrait du colloque de la COPIRELEM – Tours

Rosalves, M. (2006). *Relacoes entre os pólos do visto e do sabido no CABRI 3D: Uma experiencia com alunos do ensino medio*. (Tesis para obtener maestrado en Educación Matemática). Sao Paulo

Salazar, J (2009). *Genese Instrumental na interacción con CABRÍ 3D: Un estudio de Transformaciones Geométricas nolespaco*. (Tesis para optar el título de Doctorado en Educación Matemática).Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo

Santos de Miranda, S. (2006). *El papel de la geometría descriptiva en los problemas de geometría espacial: Un estudio de las secciones de un cubo*. (Tesis de maestría, Universidad de Sao Paulo)

APÉNDICES

APÉNDICE A

Cuestionario Diagnóstico

INVESTIGACIÓN: Lo visto y lo sabido en la representación del cubo, un estudio con alumnos de Primer grado de Secundaria, usando CABRI 3D

PROFESORA: Magna Fernández Contreras

ASESORA: Dra. Jesús Victoria Flores Salazar

Estimados participantes,

El siguiente cuestionario diagnóstico tiene como propósito averiguar información concerniente a conocimientos de Geometría y de Geometría Dinámica. Los datos colectados a través de este instrumento serán utilizados únicamente para fines de la investigación.

Agradecemos su colaboración.

Parte I. Lea detenidamente cada pregunta y responde:

1. ¿Conoce o has utilizado alguna vez el Software CABRI?

Si ()

No ()

Si su respuesta es sí, describa brevemente que herramientas ha utilizado:

.....

.....

.....

2. ¿Conoce o has utilizado alguna vez el Software CABRI 3D?

Si ()

No ()

Si su respuesta es sí, describa brevemente que herramientas ha utilizado:

.....

.....

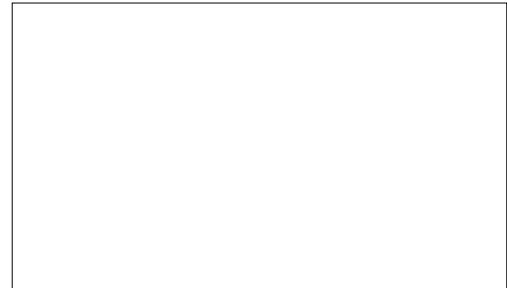
.....

Parte II. Lea y desarrolla cada una de las siguientes preguntas:

Representa gráficamente:

1. ¿Qué entiende por plano?

.....
.....
.....
.....
.....



2. ¿Qué entiende por poliedro?

¿Es el cubo un poliedro? Justifique

Representa gráficamente un cubo

.....
.....
.....
.....



3. Evalúe cuál de los siguientes desarrollos es el de un cubo (Izquierda o derecha)

Comenta:.....
.....
.....
.....

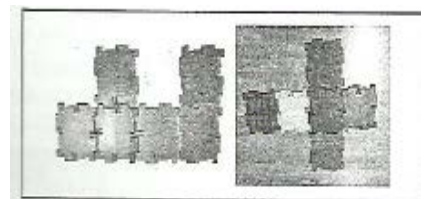


Figura 1. Desarrollos de poliedro

4. ¿Considera que el siguiente poliedro es un cubo?

Argumente su respuesta

.....

.....

.....

.....

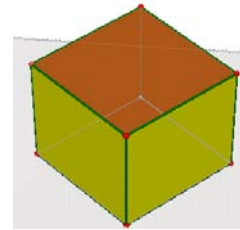
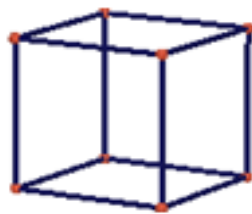


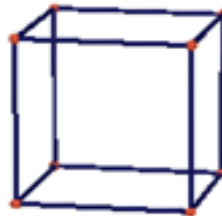
Figura 2. Representación gráfica de sólido

Fuente: Adaptado de Blanco (2009). p. 88

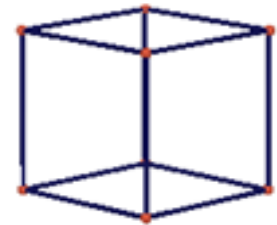
5. Encierre en un círculo, las representaciones que considere que son cubos:



a)



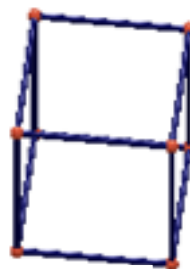
b)



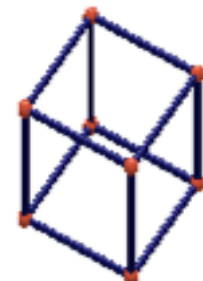
c)



d)



e)



f)

Figura 3. Representaciones de poliedros

Fuente: Adaptado de Parzysz (1991) p. 580

Escoja una de las representaciones que no circuló y argumente porque considera que no es un cubo:

.....

.....

.....

.....

APENDICE B

Actividad 1. *Reconociendo las características del cubo en representaciones de material de material concreto*

Parte A

Observe, manipule y describa los elementos de los modelos de cubos presentados en material concreto (Cubo en varitas de paliglobo, cubo en madera, cubo en material transparente):

✍ Cubo en.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Parte B

Observe detenidamente las representaciones en las láminas:



a)



b)



c)

Figura 1. Representaciones de cubo

Conteste a las siguientes preguntas:

1. ¿En que se relacionan con los presentados en la parte A?

.....

.....

2. ¿Qué elementos del cubo observas en estas representaciones?

.....
.....

3. ¿Compara las longitudes de las aristas? ¿Coinciden?

.....
.....
.....

4. ¿Compara las caras? ¿Son cuadradas? Escribe a continuación tus alcances:

.....
.....
.....

Parte C

Represente cualquiera de los cubos de material concreto desde dos ángulos o vistas diferentes. Indique la vista.






Actividad 2. *Conociendo el Software CABRI 3D y explorando sus recursos y herramientas.*

En esta actividad obtendrá información del software de geometría dinámica CABRI 3D; conocerá e interactuará con sus recursos y herramientas.



Lea detenidamente la siguiente hoja de información y sigue la secuencia e indicaciones, según explique la docente:

Deberá tener en cuenta que las viñetas, indican;

- Información acerca de los conceptos
-  Manipulación, exploración del software
-  Construcciones
-  Grabar o salvar reportes y/o construcciones

¿Qué es el software CABRI 3D?

Es un software de geometría dinámica que te permite crear, construir, ver y manipular representaciones de objetos geométricos en tres dimensiones (rectas, planos, conos, esferas, poliedros regulares y otro más), utilizando propiedades geométricas.

-  Abra el ícono CABRI 3D que se encuentra en la pantalla del computador y descubra simultáneamente a la explicación de la docente, los recursos y herramientas del software.
- En la parte superior encuentra ventanas como: archivo, edición, despliegue, documento, ventana y ayuda.
-  Acerque el puntero del mouse en cada una de estas ventanas para informarse sobre sus características.
- En la siguiente fila encuentra la barra de herramientas con sus respectivas cajas de herramientas. Se presentan en la figura 1, algunas herramientas del CABRI 3D.

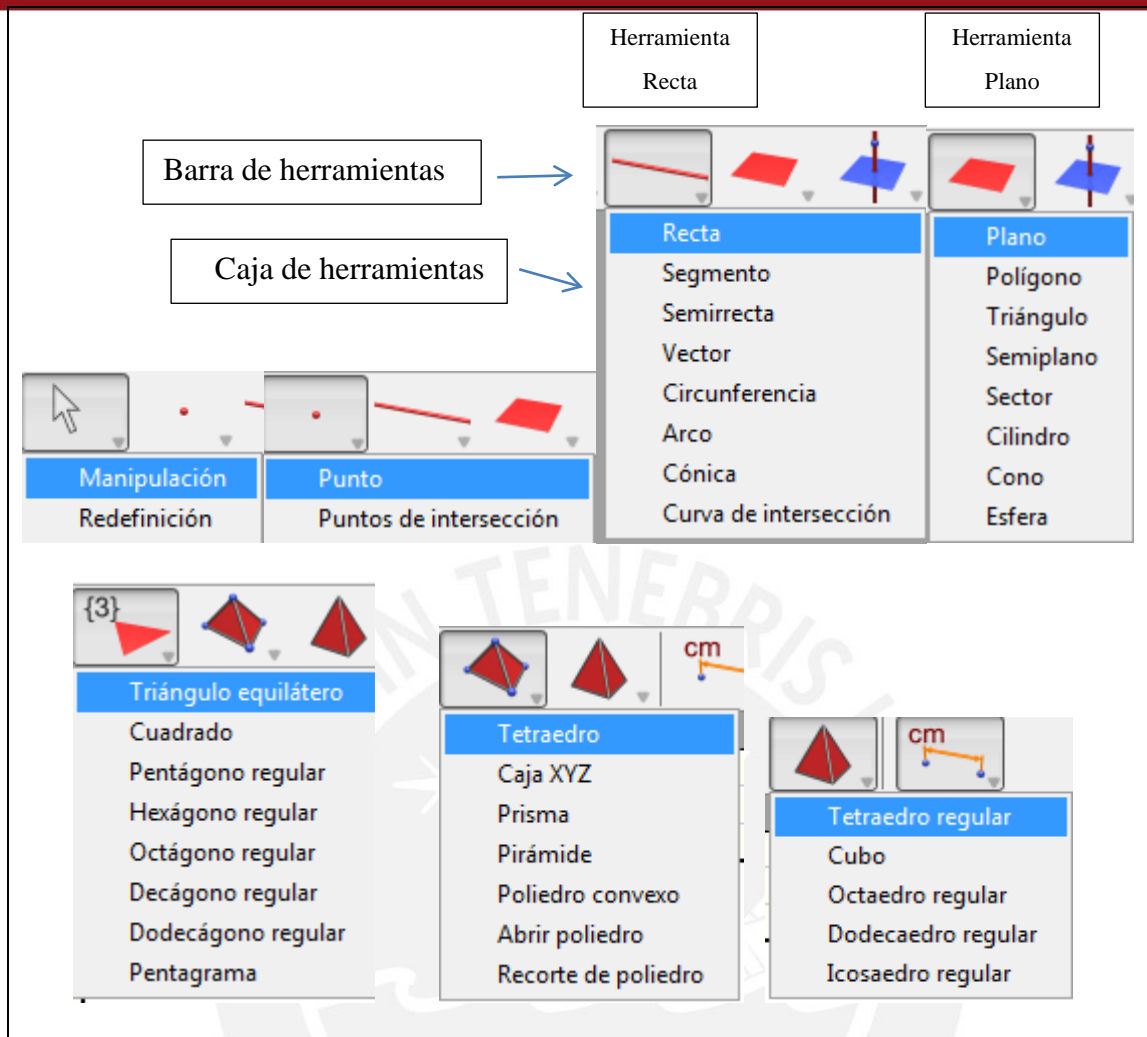


Figura 1. Herramientas del CABRI 3D

- ☞ Explore con el puntero del mouse las diferentes cajas de herramientas.
- ☑ El CABRI 3D también le presenta un cuadrilátero de color gris (figura 2), llamado plano base, en el cual podrá realizar construcciones.

Los vectores que se encuentran en el centro son llamados vectores direccionales. Para las tareas, no será necesario mostrar estos vectores, es así que cuando inicie cualquier construcción puede borrarlos u ocultarlos; para ello seleccione el vector con el botón izquierdo del mouse y luego use la tecla suprimir.

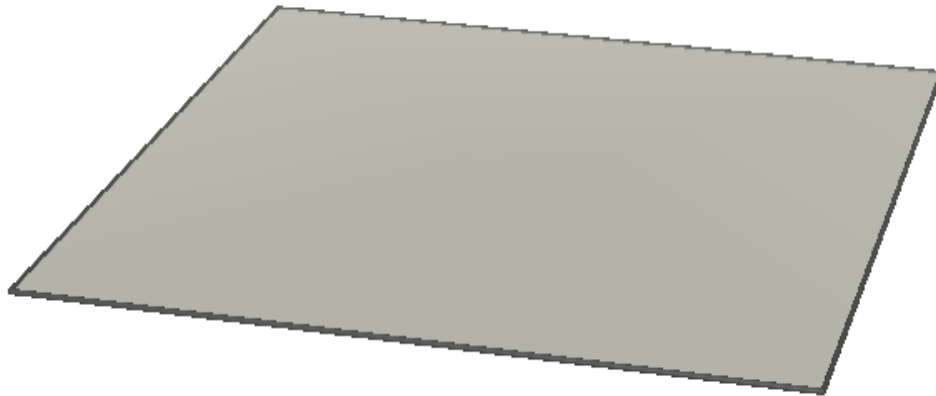



Figura 2. Plano base del CABRI 3D

-  Utilice la herramienta “**Punto**” y cree varios puntos tanto en la parte visible del plano, como fuera de él; para nombrarlos señale el punto con el cursor y escriba al luego la letra mayúscula que desee, tal como observa en la figura 3:

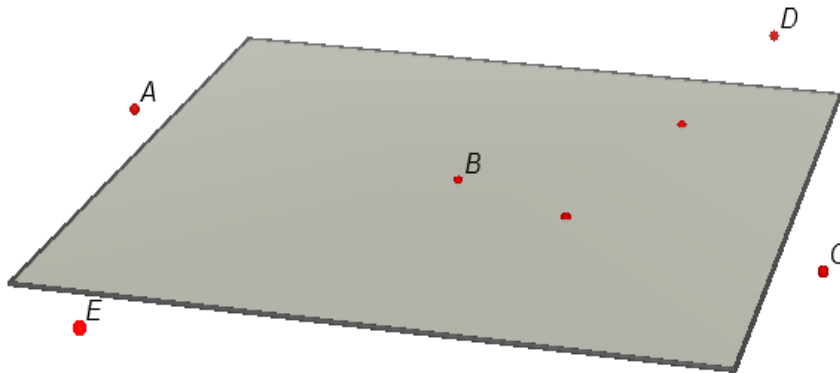



Figura 3. Puntos

-  Verifique que todos los puntos estén en el plano (figura 4). Esto se percibe visualmente, solamente después del uso de la manipulación directa (con el botón derecho del mouse), que permite cambiar el punto de vista de la representación en la pantalla del computador.

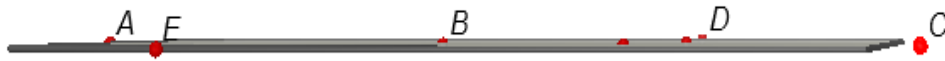



Figura 4. Puntos en el plano horizontal en una vista frontal

-  Cree un punto en el espacio; para ello debe usar a la herramienta “**Punto**” y simultáneamente a la tecla *shift* mueva el punto verticalmente. El resultado se observa en la figura 5.

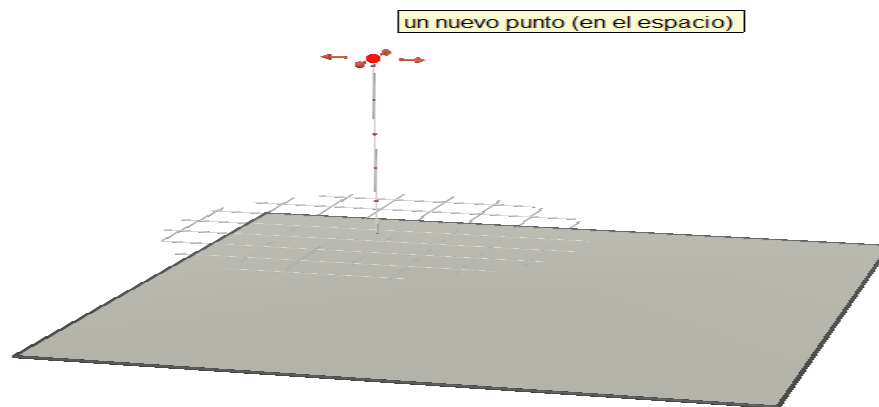



Figura 5. Punto en el espacio

A continuación se le propone realizar la siguiente tarea;


Tarea *Creando rectas y planos*


Parte A

- La herramienta “**Recta**” crea rectas a partir de dos puntos distintos.
-  Nombre el plano base como P y cree los puntos A y B en este plano P; además cree el punto C (utilizando la tecla *Shift*) fuera del plano P. Ahora cree la recta r que pase por los puntos A y B; además cree la recta s que pase por los puntos A y C.

A continuación, utilice la herramienta “**Paralela**” cree una recta paralela a la recta r que pase por el punto C y nómbrala como t.


Cree el punto D en el plano P, distinto de los puntos A y B y trace una recta v paralela a la recta r que pase por el punto D

 Utilice la manipulación directa (botón derecho del mouse) y cambie el punto de vista.

 Describa con sus palabras la posición de la recta r y la recta s en relación al plano P. Además conteste:

- 1) ¿Cómo son las posiciones entre dichas rectas r y s ?
- 2) ¿Cómo son las posiciones de las rectas r y t ?
- 3) ¿Cómo es la posición de la recta t con respecto al plano P?
- 4) ¿Cómo son las rectas v y s ?

Anote sus respuestas en la caja de texto (use “Documento” y “Agregar zona de texto”).

 Salve su figura y nombre el archivo de la siguiente forma: *{Iniciales de la dupla}_tarea_A* y guárdelo en la carpeta: Actividad 2

Parte B

La herramienta “Plano” determina un plano.

Cree los puntos A y B en el plano base P y el punto D fuera de este.

Cree el plano Q que pase por los puntos A, B y D.

La herramienta “Paralela” permite crear rectas paralelas o planos paralelos.


Cree el plano R paralelo al plano P

Conteste a las siguientes preguntas:

- 1) ¿Qué posiciones tienen los planos P y Q? ¿El punto D está en el plano Q?
- 2) ¿Qué posiciones tienen los planos Q y R?

Conteste su respuesta en una caja de texto (use “Documento” y “Agregar zona de texto”).

Para observar el plano creado, modifique el punto de vista (botón derecho del mouse).

 Salve su figura, nombrando el archivo de la siguiente forma: *{Iniciales de la dupla}_tarea_B* y guarde en la carpeta: Actividad 2

Parte C

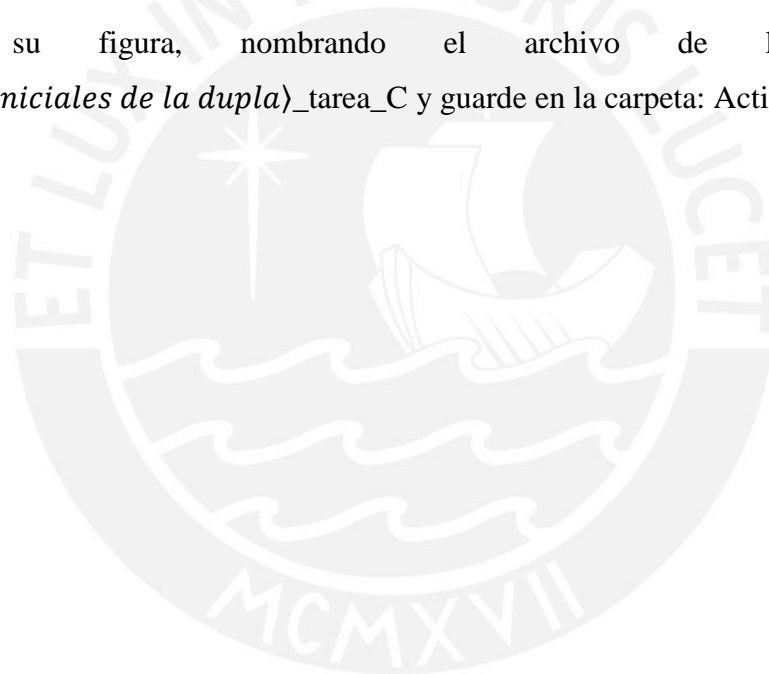
- La herramienta **“Perpendicular”** crea una recta perpendicular con respecto a un plano.

 Cree los puntos A y B en el plano base P.

Utilizando la herramienta **“Perpendicular”** cree la recta perpendicular al plano P que pase por el punto A, a seguir nómbrela como r.

A continuación, utilice la herramienta **“Plano”** y cree un plano que pase por la recta r y el punto B y nómbrelo como plano T. ¿El plano P y el plano T serán perpendiculares? Anote los pasos para crear un plano perpendicular, en una caja de texto (use **“Documento”** y **“Agregar zona de texto”**).





- Salve su figura, nombrando el archivo de la siguiente forma: *{Iniciales de la dupla}_tarea_C* y guarde en la carpeta: Actividad 2




Actividad 3. Familiarización con la herramienta “Cubo” del software CABRI 3D

En esta actividad se le propone dos tareas que deberás desarrollarlos haciendo uso del software CABRI 3D.

Parte A. Reconociendo el desarrollo de la superficie o patrón de un cubo

- La herramienta “**Cubo**” crea la representación del poliedro cubo.
 -  Utilice la herramienta “**Cubo**” y cree un cubo con una cara en el plano base.
 - La herramienta “**Abrir poliedro**” abre el poliedro, mostrando las caras que compone al poliedro.
 -  Use la herramienta “**Abrir poliedro**” y abra el cubo señalando este con el puntero; y a continuación use la herramienta “**Nueva página patrón**” (botón derecho del mouse) el cual mostrará en otra hoja el desarrollo del cubo.
 -  Manipule la representación de cubo abierto de cualquiera de sus vértices y modifique el punto de vista.
- ¿Logra obtener la página patrón o desarrollo del cubo?
-  Salve su figura, para ello nombre el archivo de la siguiente forma: *(Iniciales de la dupla)_tarea1* y guárdelo en la carpeta: Actividad 3

Parte B. Reconociendo los diferentes elementos del cubo en el CABRI 3D

-  Utilice la herramienta “**Cubo**” y cree la representación de un cubo tocando doblemente el plano base al hacerlo tan grande como se quiera; y presente este en estilo de superficie vacío (puntero sobre el cubo, herramienta “**Estilo de superficie**”, botón derecho del mouse).
 - a) Pinte de verde dos de sus caras paralelas (coloque el puntero en la parte a pintar y presione el botón derecho del mouse).
 - b) Pinte de azul dos caras secantes.
 - c) Pinte de rosado dos aristas perpendiculares
 - d) Pinte de morado dos aristas paralelas
 - e) Pinte de rojo dos aristas alabeadas (aristas perpendiculares de caras opuestas del cubo)
 - f) Pinte de amarillo dos vértices opuestos de caras diferentes

- ☑ *Observación:* Para pintar una cara del cubo, es necesario crear el polígono correspondiente a la cara, use la herramienta “**polígono**” y una los vértices que forman el cuadrado. Para pintar la arista de un cubo, es necesario crear el segmento correspondiente a esta arista, utilice la herramienta “**Segmento**” y una los vértices de la arista del cubo; además para pintar un vértice es necesario crear el punto correspondiente.
- 🖱 Manipule el cubo creado y modifique el punto de vista.
- 💾 Salve la figura y nombre el archivo de la siguiente forma:
(*Iniciales de la dupla*)_tarea2 y guárdelo en la carpeta: Actividad 3



Actividad 4. *Lo que se ve y lo que se sabe de las representaciones*

En esta actividad se le propone una serie de representaciones, las cuales debe observar atentamente y escribir sus alcances en la tabla correspondiente.

1) En la siguiente representación tienes el plano P y los puntos A, B y C.

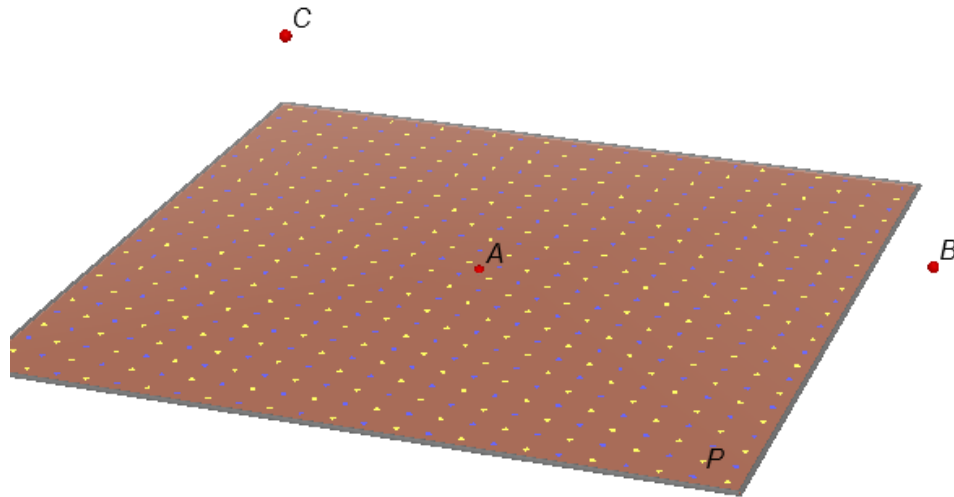




Figura 1. El plano y tres puntos



Escriba a continuación, lo que observa y lo que puede afirmar por sus conocimientos de geometría; sobre la posición de los puntos A, B, C respecto al plano P.

 Lo que se observa en la figura	 Lo que sabe
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Luego, en la carpeta: Representaciones1, abra el archivo Plano y tres puntos.

Explore la representación hecha en CABRI 3D, utilice el cambio de punto de vista de la figura (botón derecho del mouse).

A continuación anote y Justifique lo que ve y lo que sabe, cuando manipula la figura del CABRI 3D;

 Lo que se observa al manipular la figura	 Lo que sabe
---	--

2) Observe la ubicación de la recta representada en el plano P.

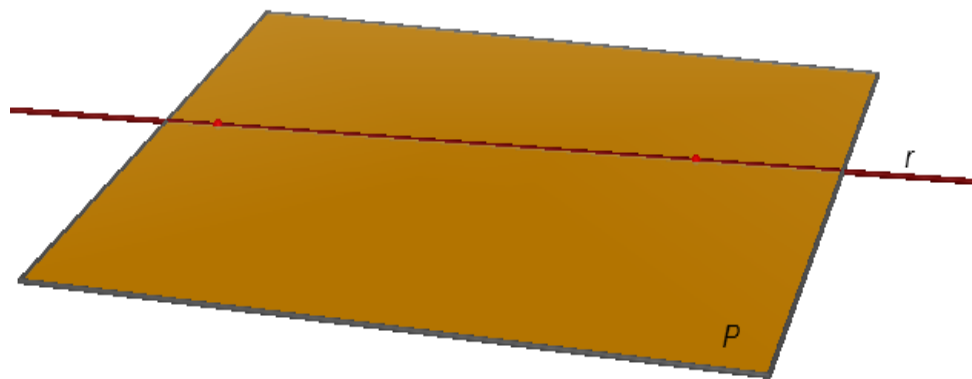




Figura 2. Plano y recta



Escriba a continuación, lo que observa y lo que puede afirmar por sus conocimientos de geometría; sobre la ubicación de la recta r con respecto al plano P . ¿Está la recta r contenida en el plano P ?

 Lo que se observa en la figura	 Lo que sabe
---	--

Luego en la carpeta: Representaciones 1 abra el archivo Plano y recta.

Explore la representación hecha en CABRI 3D, por medio del cambio de punto de vista de la figura (botón derecho del mouse).

A continuación, anote y Justifique lo que ve y lo que sabe, cuando manipula la figura del CABRI 3D;

 <p>Lo que se observa al manipular la figura</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	 <p>Lo que sabe</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
---	--

3) En la representación;

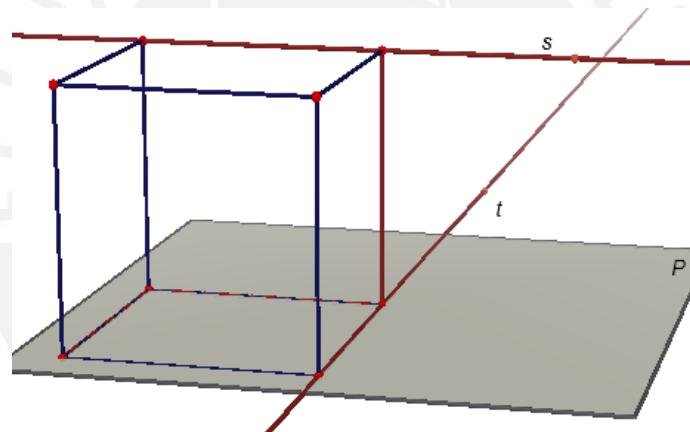




Figura 3. Poliedro y rectas
Fuente: Rosalves (2006) p. 28



Escriba a continuación, lo que observa y lo que puede afirmar por sus conocimientos de geometría; respecto a las rectas t y s ¿El poliedro representa un cubo?

 <p>Lo que se observa en la figura</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	 <p>Lo que sabe</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
---	--

Luego en la carpeta: Representaciones 1, abra el archivo Poliedro y rectas.

Explore la representación hecha en CABRI 3D, por medio del cambio de punto de vista de la figura (botón derecho del mouse).

A continuación, anote y Justifique lo que ve y lo que sabe, cuando manipula la figura del CABRI 3D;

 Lo que se observa al manipular la figura	 Lo que sabe
--	---

4) La siguiente representación es la de un cubo ABCDEFGH.

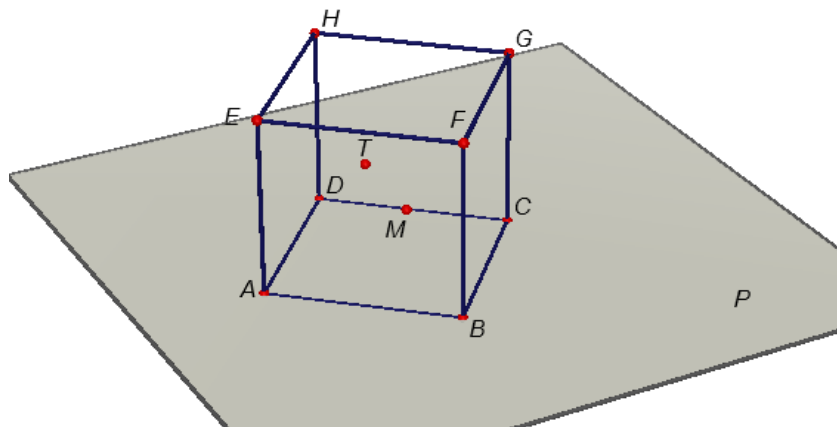




Figura 4. Cubo y dos puntos
 Fuente: Cozzolino (2008) p. 90



Si los puntos D, T y G están alineados y de igual manera los puntos H, M y B también se encuentran alineados; entonces escriba a continuación, lo que observa y lo que puede afirmar por sus conocimientos de geometría; sobre la ubicación de los puntos T y M,

 Lo que se observa en la figura	 Lo que sabe
--	---

Luego en la carpeta: Representaciones 1, abra el archivo Cubo y dos puntos.

Explore la representación hecha en CABRI 3D, por medio del cambio de punto de vista de la figura (botón derecho del mouse).

A continuación, anote y Justifique lo que ve y lo que sabe, cuando manipula la figura del CABRI 3D;

 <p>Lo que se observa al manipular la figura</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	 <p>Lo que sabe</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
---	--

- 5) La siguiente representación corresponde a un poliedro con base EFGH en el plano P.

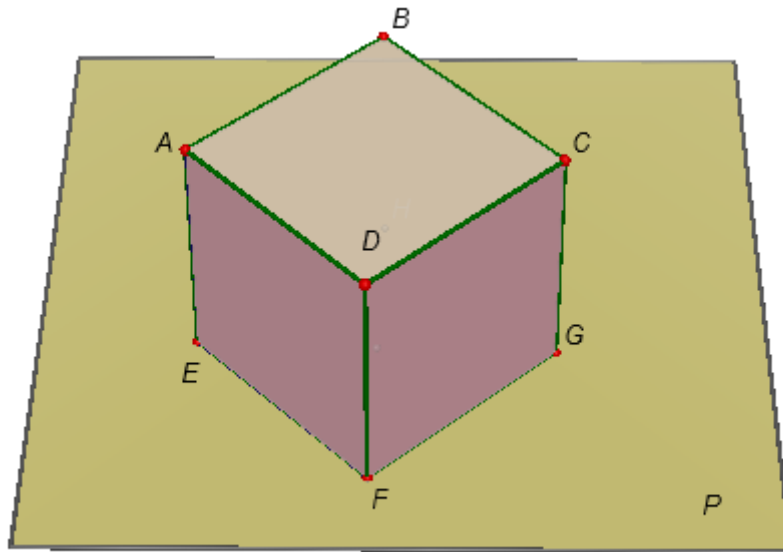




Figura 5. Poliedro Necker

Fuente. Blanco (2009) p. 27



Escriba a continuación, lo que observa y lo que puede afirmar por sus conocimientos de geometría; sobre la caras ABCD, DCGF, ADFE del poliedro. ¿Este poliedro podría ser un cubo? Justifique.

 <p>Lo que se observa en la figura</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	 <p>Lo que sabe</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
--	---

Luego en la carpeta: Representaciones 1, abra el archivo Poliedro Necker.

Explore la representación hecha en CABRI 3D, por medio del cambio de punto de vista de la figura (botón derecho del mouse).

A continuación, anote y Justifique lo que ve y lo que sabe, cuando manipula la figura del CABRI 3D;

 <p>Lo que se observa al manipular la figura</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	 <p>Lo que sabe</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
--	---

6) En la figura 6 de; izquierda a derecha

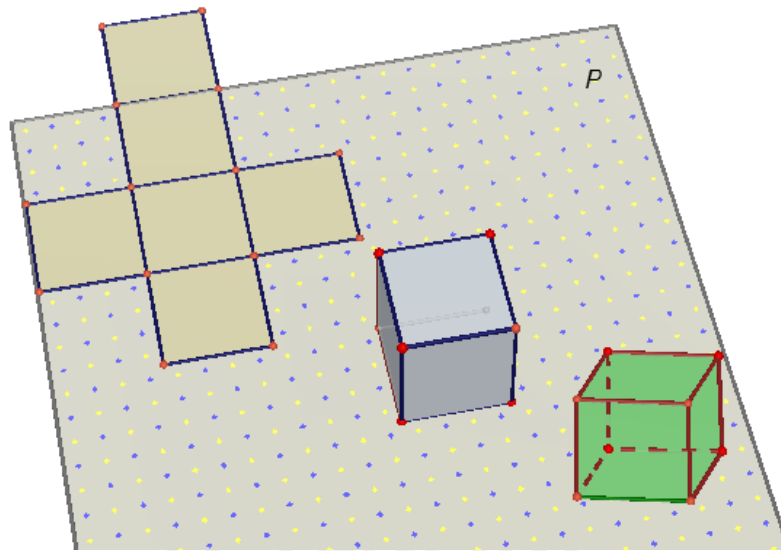






Figura 6. Poliedro-patrón

Escriba a continuación, lo que observa y lo que puede afirmar por sus conocimientos de geometría; ¿A qué figuras corresponden? ¿Encuentras alguna relación entre ellas?

 <p>Lo que se observa en la figura</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	 <p>Lo que sabe</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
---	---

Luego en la carpeta: Representaciones 1, abra el archivo Poliedro-patrón Explore la representación hecha en CABRI 3D, por medio del cambio de punto de vista de la figura (botón derecho del mouse).

A continuación, anote y Justifique lo que ve y lo que sabe, cuando manipula la figura del CABRI 3D;

 <p>Lo que se observa al manipular la figura</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	 <p>Lo que sabe</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
--	---

Actividad 5. Explorando y conociendo las diferentes formas de representar un cubo.

En esta actividad conoceremos las diferentes formas de representar un cubo.

Parte A *El cubo en Perspectiva Caballera*

Tarea de la parte A

Observe la siguiente representación:

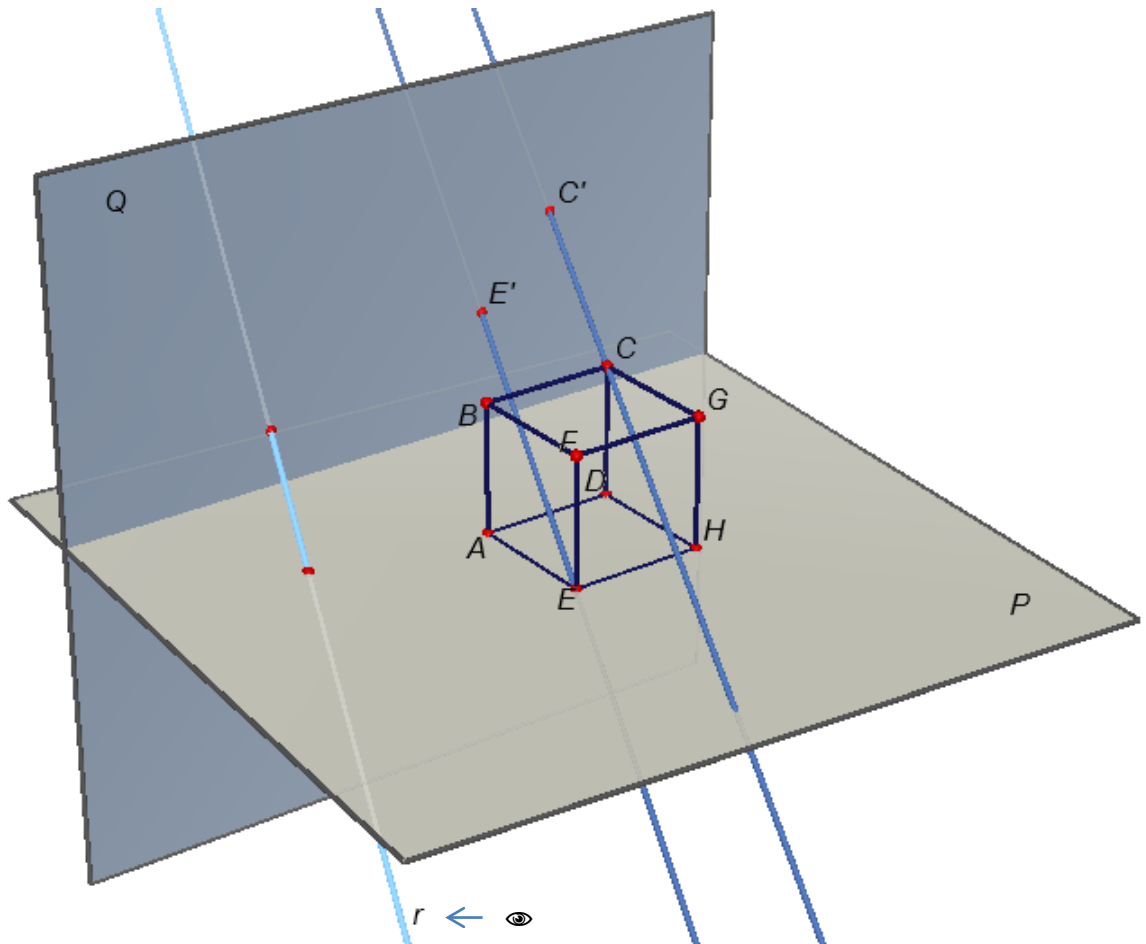


Figura 1. Cubo y plano de proyección

Utilice lápiz y regla para encontrar la representación del cubo en el plano Q; para ello tome en cuenta los siguientes pasos:

1. Trace rectas paralelas a la recta r que pasen por los vértices del cubo: A, B, C, D conservando la misma distancia que hay de C a C' y ubique los puntos en el plano Q, haciendo corresponder A con A' , B con B' , D con D' .
2. Forme el polígono que determina los puntos: A' , B' , C' , D' en el plano Q.

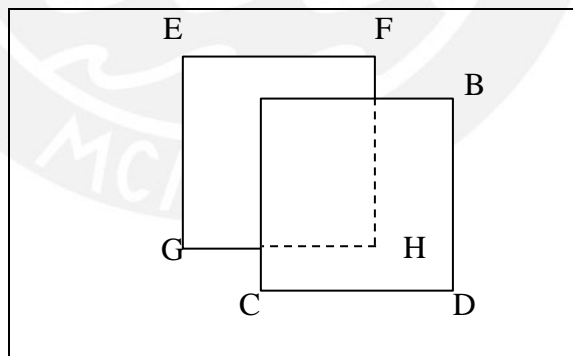
3. De igual manera, trace rectas paralelas a la recta r que pasen por los vértices del cubo: E, F, G, H conservando la misma distancia que hay de E a E' y ubique los puntos en el plano Q, haciendo corresponder F con F', G y G', H y H'.
4. Forme el polígono que determina los puntos: E', F', G', H' en el plano Q.
5. Finalmente una los puntos A'E', B'F', C'G' y D'H' y habrá conseguido así la representación en perspectiva Caballera del cubo ABCDEFGH.

A continuación, construya la representación que obtuvo;



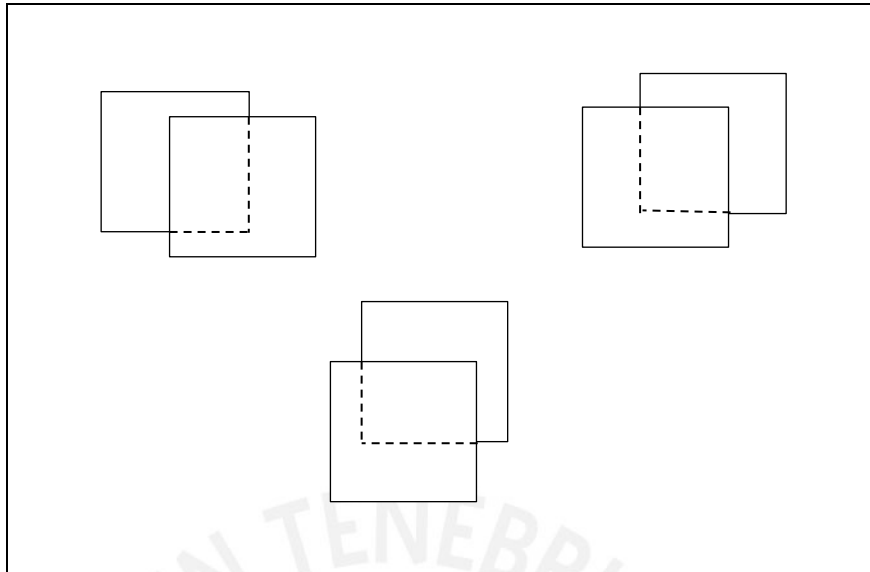
Se caracteriza por:.....

Luego, una las letras: A y E, B y F, C y G, D y H



¿La representación que obtiene está en perspectiva caballera? Justifique

Construyendo más representaciones del cubo en Perspectiva Caballera;



Parte B *El cubo en Perspectiva cónica*

Tarea de la parte B

Observe la siguiente representación de la foto del cubo;

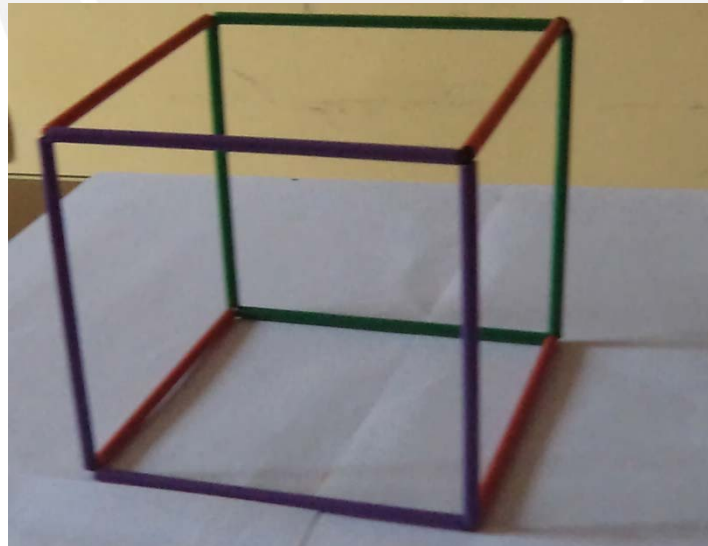


Figura 2. Foto del modelo de cubo en varitas

Como podrá notar en la lámina; dicha representación encierra un punto de fuga (PF); para conseguir dicho punto de fuga, tome en cuenta los siguientes pasos:

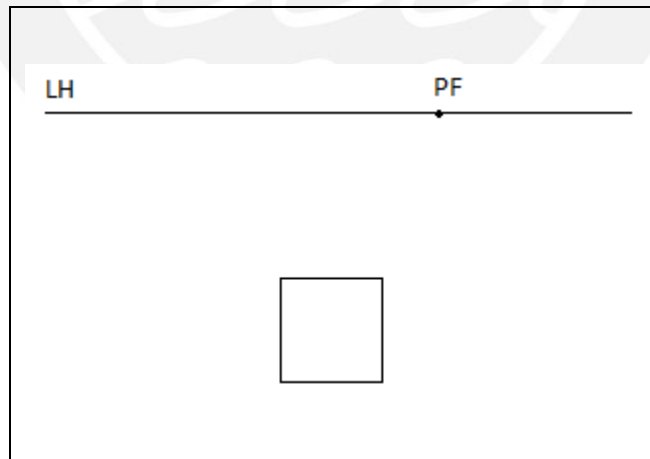
1. Trace rectas conteniendo a las aristas que relacionan la cara frontal y su cara opuesta, a partir de cada vértice frontal del cubo; hasta encontrar el punto donde se intersectan.
2. Marque el punto de intersección de estas rectas (PF).
3. Trace la línea horizonte (LH) que intersecte al punto de fuga y sea paralela a la arista frontal superior.

A continuación, en el recuadro ilustre esta representación con las rectas proyectantes y el punto de fuga.

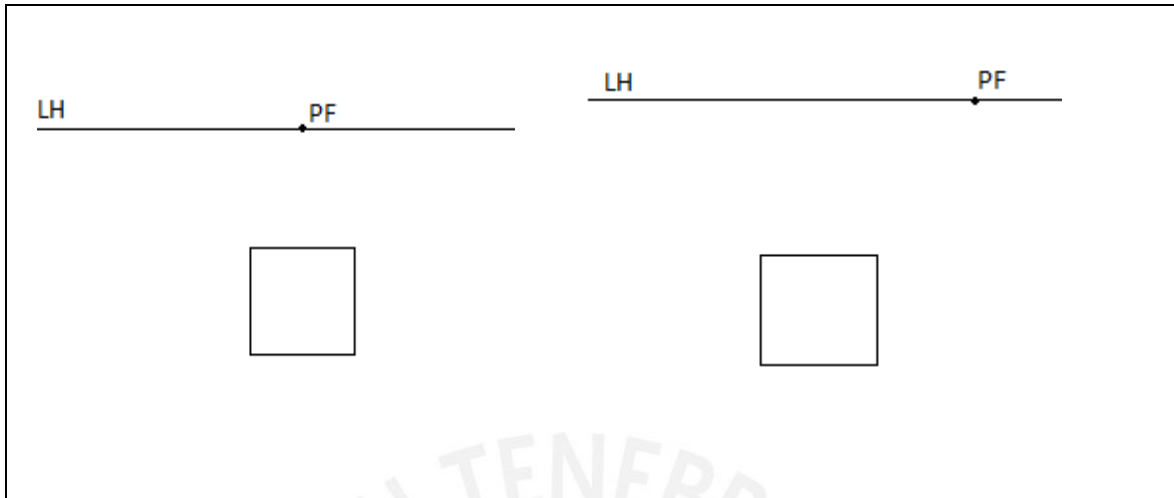


Luego, construya el cubo que tenga al cuadrado ABCD Como cara frontal y dichas caras opuestas confluyan en el punto de fuga (PF).

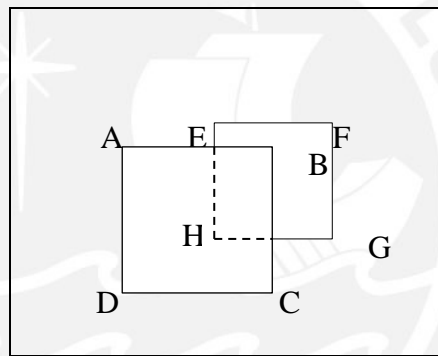
Sugerencia: Siga los pasos que se hizo referencia en la diapositiva.



Construyendo más representaciones del cubo en Perspectiva Cónica;



A continuación, una los vértices: A con E, B con F, D con H y C y G



¿El cubo formado estará en perspectiva Cónica? Justifique

.....

.....

.....

Parte C *El cubo en Perspectiva Isométrica*

Tarea de la parte C

Observe la siguiente representación:

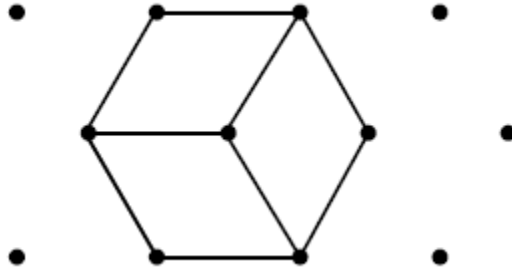
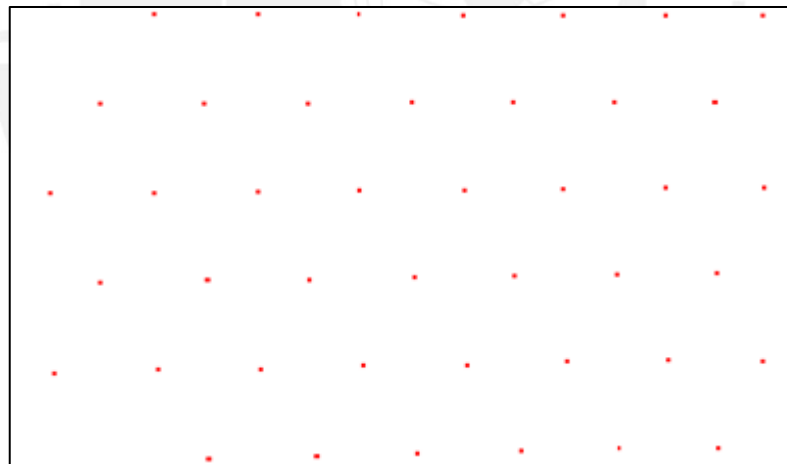


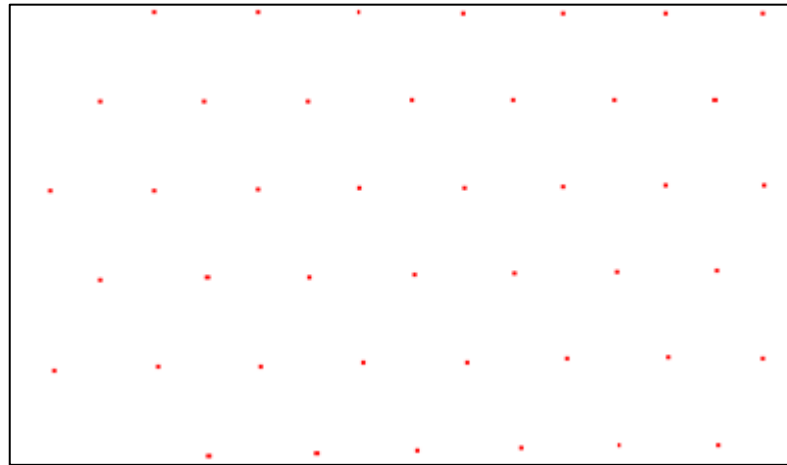
Figura 3. Cubo en Perspectiva Isométrica

- a) Utilice el papel isométrico y construya, dos vistas de cubos diferentes a la de la representación anterior, que se encuentren en Perspectiva isométrica

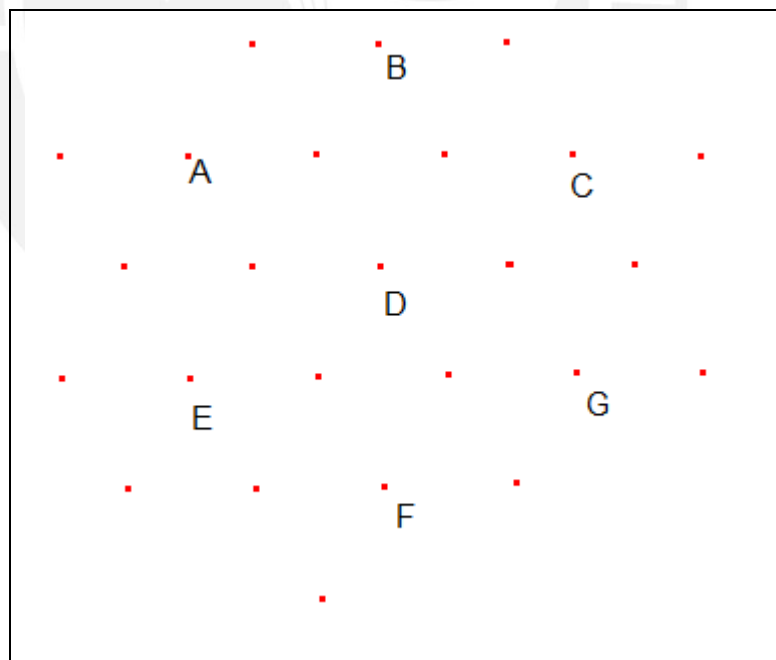
Vista A



Vista B

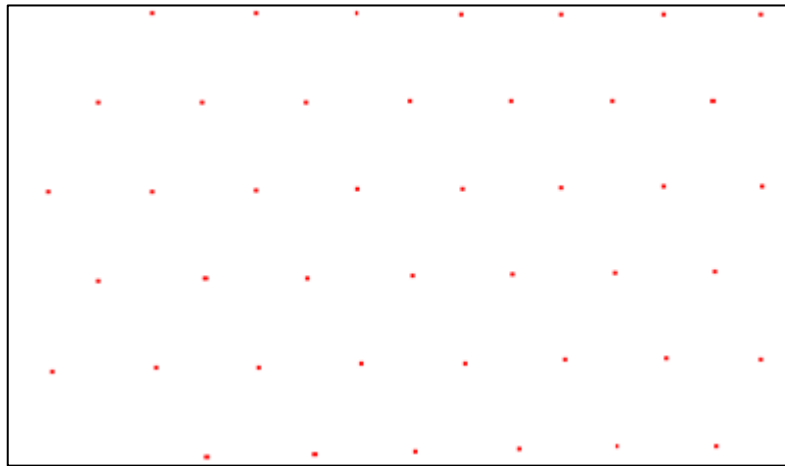


- b) A continuación, en el papel isométrico que se muestra una los puntos y forme los segmentos: \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{AD} , \overline{DC} , \overline{AE} , \overline{DF} , \overline{CG} , \overline{EF} y \overline{FG}



La representación que ha construido corresponde a un poliedro muy importante llamado: **Cubo de Necker**; como observa es una representación en perspectiva Isométrica.

Cree un cubo de Necker;



c) Construya en cubo en perspectiva Isométrica; y describa sus características



.....

.....

.....




Actividad 6. *Representando el cubo en Perspectiva Caballera usando el software CABRI 3D*




En esta actividad aprenderá a representar la proyección de un cubo en perspectiva Caballera y reconocerás sus propiedades.

Recuerde que la perspectiva Caballera es una proyección oblicua sobre un plano paralelo a una de las caras principales del objeto.

Tarea

Para esta tarea debe ingresar al archivo: Representación del cubo 1 de la carpeta Actividad 6 y su reto es completar y llegar a formar la representación del cubo en Perspectiva paralela, pero utilizando el software CABRI 3D (Recuerde que esta representación, ya lo manipuló con lápiz y papel). Para ello, tome en cuenta los siguientes pasos:

-  Cree rectas paralelas a la recta eje r , que pase por los vértices: A, B y D que interseque al plano Q.
- La herramienta “**Punto de intersección**” marca el punto de intersección de la recta trazada y el plano.
-  Con la herramienta “**Punto de intersección**” encuentre los puntos de intersección en el plano Q y nombre con A' el punto de la recta que contiene al punto A, B' el punto de la recta que contiene a B, y así sucesivamente para C' , D' . Oculte las rectas que le sirvieron para obtener los puntos en el plano Q.
- La herramienta “**Polígono**” crea un polígono cualquiera a partir de puntos en el plano.
-  Cree el polígono que pase por los puntos A' , B' , C' , y D' .
Repita el proceso anterior, para crear los puntos: E' , F' , G' y H' y el polígono $E'F'G'H'$ en el plano Q.
A continuación construya las demás caras de la representación del cubo, trazando los polígonos correspondientes a los vértices.
- La herramienta “**Longitud**” le ayuda a encontrar la longitud de un segmento en centímetros.

-  Utilizando la herramienta longitud y tocando con el cursor la arista, verifique la longitud de las aristas del cubo con respecto a las aristas de su representación.
-  Manipule su construcción moviendo la recta eje r . Agregue una zona de texto (use “Documento” y “Agregar zona de texto”) y conteste a las siguientes preguntas:
1. ¿Coincide su construcción con la que obtuvo utilizando lápiz y papel?
 2. ¿Qué sucede cuando la recta eje r lo mueve horizontalmente o verticalmente del punto de intersección al plano Q ?
 3. ¿En qué momento el cubo proyección, se reduce a un cuadrado?
 4. En la representación del cubo ¿Todas las aristas se mantienen de la misma longitud?
 5. Explica las razones para afirmar que la representación del cubo está en perspectiva Caballera.
-  Salve su figura, nombrando el archivo de la siguiente forma: *(Iniciales de la dupla)*_tarea1 y guarde en la carpeta Actividad 6.

Actividad 7. *Relacionando los diferentes puntos de vista del cubo del software CABRI 3D y los puntos de vista de la representación cubo en material concreto*

Tarea *Buscando encontrar la vista del cubo que corresponde a la representación.*

Observe la siguiente figura:

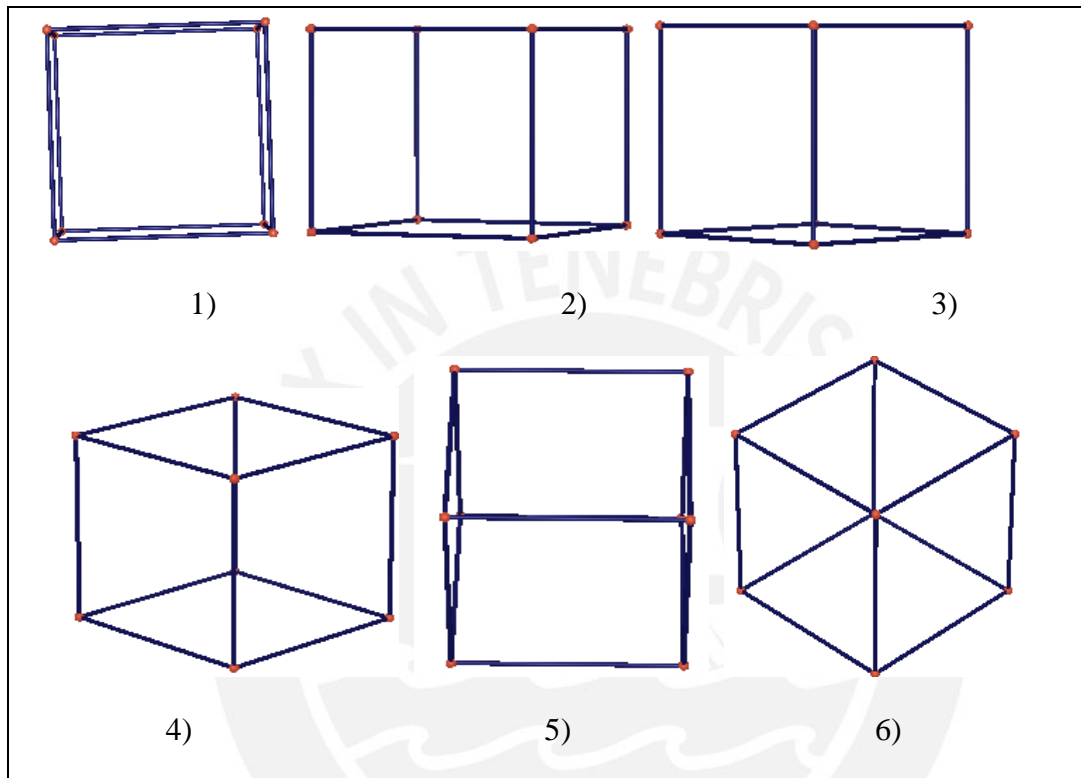





Figura 1. Representaciones de Poliedros

Fuente. Adaptado de Parzysz (1991) p. 580

En esta tarea se le propone encontrar las representaciones mostradas e identificar la vista desde la cual se mira al cubo. Para ello realice los siguientes pasos;

-  Cree un cubo y muestre en estilo de superficie vacío con la herramienta “**Estilo de superficie**” botón derecho del mouse y oculte el punto del centro de la base del cubo.
-  Con la manipulación directa (botón derecho del mouse) busque las diferentes representaciones que se presenta en la figura 1.
-  Salve cuatro representaciones (tres que coincidan con las anteriores y otra puede ser de una nueva vista); nombre el archivo *<Iniciales de la dupla>_Número de la representación_Vista* y guarde en la carpeta Actividad 7; por ejemplo: D4_1_Cara frontal.

APENDICE C

Ficha de Observación 1

Fecha:.....

Nombre del observador (a):.....

Nombre de los alumnos de la dupla observada:.....

.....

Encuentro 1

Actividad observada: n° 1

- Describa detalladamente las acciones de los alumnos (as) de manera secuencial durante el desenvolvimiento de cada actividad.
- Centrarse especialmente en las acciones en las que el alumno interviene y reporta las características y elementos de los cubos hechos en material concreto (Parte A).
- A continuación detenerse especialmente en las acciones en las que el alumno (a) interviene caracterizando y mencionando sus elementos a las representaciones en láminas (Parte B).
- Finalmente, detenerse en las acciones que sigue al realizar las representaciones del cubo (Parte C).



Ficha de Observación 4

Fecha:.....

Nombre del observador (a):.....

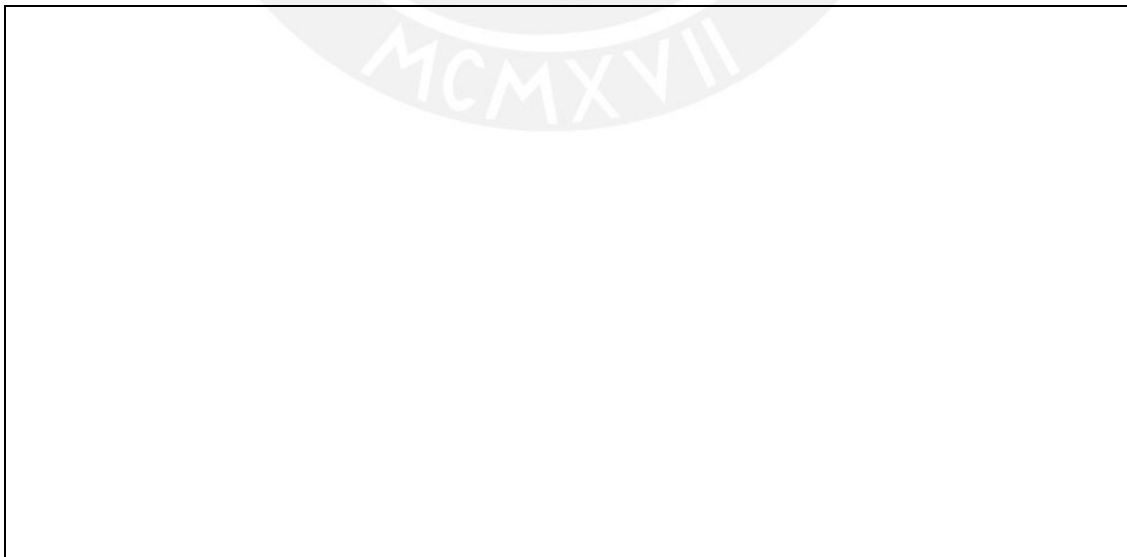
Nombre de los alumnos (as) de la dupla observada:.....

.....

Encuentro 2

Actividad observada: n° 4

- Describa detalladamente las acciones de los alumnos (as) de manera secuencial durante el desenvolvimiento de cada actividad.
- Centrarse especialmente en las acciones en las que los alumnos (as) observan y rellenan en la ficha de trabajo en base a las preguntas acerca de las representaciones (en papel) desde los puntos de vista de lo que ve y lo que sabe. **Verifique que llenen las fichas con lapicero y no manipulen la computadora.**
- A continuación detenerse especialmente en las acciones en las que los alumnos (as) manipulan las representaciones anteriores; utilizando las construcciones del software CABRI 3D, de las cuales deduce y rellena la ficha de trabajo en base a las preguntas desde los puntos de vista de lo que ve y lo que sabe. **Verifique que llenen las fichas y no modifiquen o borren la parte en la que escribió solo con el uso de las representaciones en papel.**



Ficha de Observación 5

Fecha:.....

Nombre del observador(a):.....

Nombre de los alumnos de la dupla observada:.....

.....

Actividad observada: n° 5

- Describa detalladamente las acciones de los alumnos de manera secuencial durante el desenvolvimiento de cada actividad.
- Centrarse especialmente en las acciones en las que el alumno construye la representación del cubo, usando lápiz y papel; además verificar que hagan las construcciones que se le pide en la actividad (Parte A).
- A continuación detenerse especialmente en las acciones en las que el alumno determina el punto de fuga en la foto del cubo; además verificar que hagan las demás construcciones que se le pide (Parte B).
- Finalmente, verificar que realicen las representaciones del cubo en perspectiva Isométrica (Parte C).

