

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO



**PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ**

**“DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN SISTEMA DE
CONTROL ÓPTIMO PREVIEW PARA LA POSICIÓN DE UNA
ESFERA SOBRE UN PLANO”**

Tesis para optar el grado de:

**MAGÍSTER EN INGENIERÍA DE CONTROL Y
AUTOMATIZACIÓN**

Autor:

Ing. SAMIR JOSUÉ HUAMANÍ GABRIEL

Asesor:

PhD. JUAN JAVIER SOTOMAYOR MORIANO

Jurados:

PhD. CARLOS GUSTAVO PÉREZ ZUÑIGA

Mg. FRANCISCO FABIAN CUELLAR CORDOVA

Lima – Perú

OCTUBRE 2019

RESUMEN

El control óptimo preview se define como un control predictivo desde el enfoque de control óptimo; esto quiere decir que su funcionamiento se basa en el conocimiento de los valores futuros de la referencia, de tal manera que usa estos valores en la formulación de la ley de control; por ende, tiene un desempeño superior al control proporcional integral derivativo (PID), y también superior que el control óptimo general.

En este trabajo se desarrolla un modelamiento matemático de una planta esfera sobre un plano utilizando como herramientas los análisis eléctricos, mecánico, físico, cinemático y dinámico, con el principal objetivo de conseguir una serie de ecuaciones analíticas de la planta y de esa manera poder comprender las principales variables que intervienen en dicho modelo.

A partir del modelo obtenido, se elabora un controlador avanzado óptimo preview de posición y trayectoria, para luego realizar un análisis comparativo entre dicho controlador avanzado variando el tiempo preview y otro controlador convencional proporcional integral derivativo para el control de posición de una esfera sobre un plano.

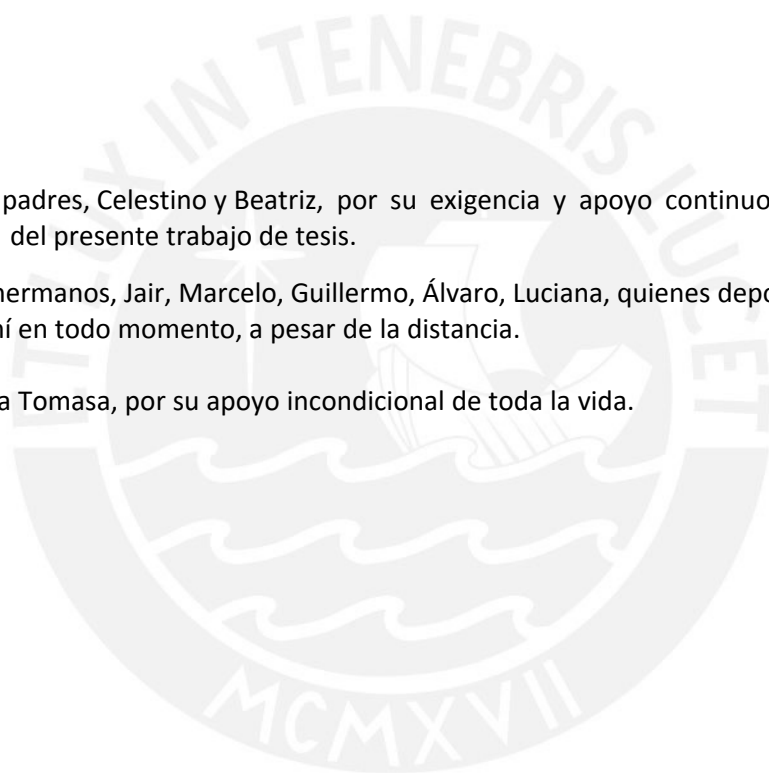
Se consiguió simular con éxito el control la posición, trayectoria definida y una trayectoria circular mediante el controlador avanzado diseñado, obteniendo resultados favorables a comparación con el controlador convencional proporcional integral derivativo.

DEDICATORIA

A mis padres, Celestino y Beatriz, por su exigencia y apoyo continuo para culminar la elaboración del presente trabajo de tesis.

A mis hermanos, Jair, Marcelo, Guillermo, Álvaro, Luciana, quienes depositaron su confianza en mí en todo momento, a pesar de la distancia.

A mi tía Tomasa, por su apoyo incondicional de toda la vida.



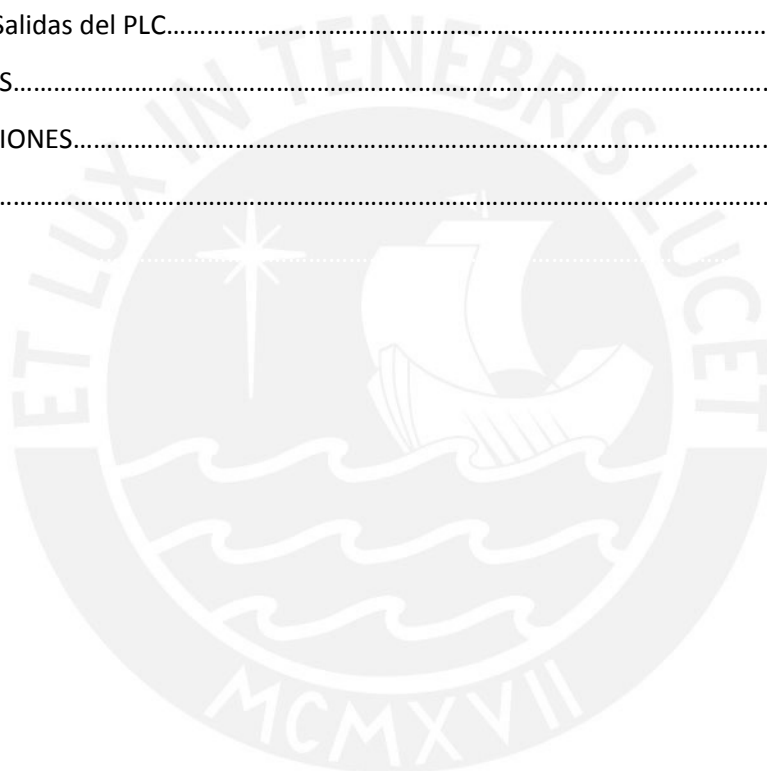
AGRADECIMIENTOS

El autor de este trabajo de tesis, Samir Josué Huamaní Gabriel, agradece el apoyo de los profesores del programa de la maestría de ingeniería de control y automatización de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por su accesibilidad a resolver toda consulta que surgió en el desarrollo de la presente tesis: “Diseño e implementación de un sistema de control óptimo preview para la posición de una esfera sobre un plano”.

CONTENIDO

| | |
|--|----|
| INTRODUCCIÓN..... | 1 |
| Generalidades..... | 1 |
| Hipótesis de la presente tesis..... | 1 |
| Objetivos de la presente tesis..... | 2 |
| Objetivos generales..... | 2 |
| Objetivos específicos..... | 2 |
| CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE DE SISTEMAS DE CONTROL DE POSICIÓN DE UNA ESFERA SOBRE UN PLANO..... | 3 |
| 1.1 Introducción..... | 3 |
| 1.2 Estado del arte de sistemas de control de posición de una esfera sobre un plano..... | 3 |
| 1.3 Descripción del problema..... | 5 |
| CAPÍTULO 2. MODELAMIENTO MATEMÁTICO DE LA PLANTA ESFERA – PLANO..... | 6 |
| 2.1 Introducción..... | 6 |
| 2.2 Consideraciones..... | 6 |
| 2.3 Modelo de un motor de corriente continua | 6 |
| 2.3.1 Análisis eléctrico del motor..... | 6 |
| 2.3.2 Análisis mecánico del motor..... | 7 |
| 2.4 Modelamiento matemático de la planta esfera – plano..... | 9 |
| 2.4.1 Análisis de la configuración física..... | 9 |
| 2.4.2 Análisis cinemático..... | 9 |
| 2.4.3 Análisis dinámico..... | 10 |
| 2.4.4 Modelo de la dinámica de la esfera y el plano..... | 12 |
| 2.4.5 Modelo espacio estado..... | 13 |
| 2.4.6 Linealización jacobiano alrededor de un punto de equilibrio..... | 14 |
| 2.5 Análisis de controlabilidad del modelo linealizado..... | 15 |
| 2.6 Análisis de observabilidad del modelo linealizado | 16 |
| CAPÍTULO 3. DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL ÓPTIMO PREVIEW EN PLANTA ESFERA – PLANO | 18 |
| 3.1 Introducción..... | 18 |
| 3.2 Problema general del control óptimo..... | 18 |
| 3.3 Ecuación de Riccati caso general..... | 20 |
| 3.4 Ecuación de Riccati caso particular..... | 21 |
| 3.5 Control óptimo preview..... | 23 |
| 3.5.1 Control en tiempo discreto..... | 27 |
| 3.6 Pruebas de simulación del controlador óptimo preview con el modelo de la planta esfera plano..... | 30 |
| 3.6.1 Control óptimo preview para la posición de una esfera sobre un plano..... | 30 |
| 3.6.2 Control óptimo preview para el seguimiento de trayectorias de una esfera sobre un plano..... | 37 |
| 3.6.3 Control óptimo preview para el seguimiento de trayectoria circular de una esfera sobre un plano..... | 46 |
| 3.7 Comparación con control convencional PID y cálculo de índices de error ISE – ISU..... | 55 |

| | |
|---|----|
| 3.7.1 Comparación del control óptimo preview vs control PID para la posición de una esfera sobre un plano y el cálculo de índices de desempeño ISE – ISU..... | 58 |
| 3.7.1.1 Análisis de resultados de los índices de desempeño ISE - ISU obtenidos de la comparación del control óptimo preview vs control PID para la posición de una esfera sobre un plano..... | 66 |
| CAPÍTULO 4. PROPUESTA DE IMPLEMENTACIÓN..... | 67 |
| 4.1 Introducción..... | 67 |
| 4.2 Conexión OPC..... | 67 |
| 4.3 Implementación en Studio5000..... | 71 |
| 4.3.1 Texto estructurado..... | 71 |
| 4.4 Interfaz de Supervisión con Factorytalk View..... | 75 |
| 4.5 Consideraciones para la implementación en PLC Control Logix..... | 77 |
| 4.5.1 Entradas al PLC..... | 77 |
| 4.5.2 Salidas del PLC..... | 79 |
| CONCLUSIONES..... | 83 |
| RECOMENDACIONES..... | 84 |
| BIBLIOGRAFÍA..... | 85 |



INTRODUCCIÓN

Generalidades

El control óptimo preview se define como un control predictivo desde el enfoque de control óptimo; esto quiere decir que su funcionamiento se basa en el conocimiento de los valores futuros de la referencia, de tal manera que usa estos valores en la formulación de la ley de control; cabe resaltar que se espera un desempeño superior al control proporcional integral derivativo (PID), y también superior que el control óptimo general.

El sistema de una esfera sobre un plano es muy utilizado para realizar pruebas y análisis de variables como el rendimiento y la efectividad de algoritmos de control, ya sean convencionales y no convencionales. Con éste sistema se puede hacer pruebas con perturbaciones en la esfera y también con cambios de parámetros al variar la masa de la esfera. Esto último quiere decir que para estos casos, la estabilización de la esfera en un punto y el de seguimiento de trayectoria, ambos con perturbaciones, se espera que el control óptimo preview resulte mejor que el control PID convencional.

Dicho sistema consiste en una esfera que puede desplazarse libremente sobre un plano, que puede ser una placa rígida, la cual será operada por dos servomotores, cuya función es variar la posición de dicha esfera.

Se puede usar otra técnica de control avanzado para el control de posición y trayectoria de una esfera sobre un plano, tal como el control óptimo preview, la cual tiene buenos resultados cuando se aplica a seguimiento de trayectorias, asimismo tiene la ventaja de conocer una trayectoria futura.

Se optará por diseñar una propuesta de implementación de un control óptimo preview para la estabilidad de una esfera en una posición deseada en un plano; también se analizarán las consecuencias y resultados que demanda usar este tipo de control en sistemas cuyas características de no linealidad e inestabilidad son propias de sí mismo, y externas, como la fricción del desplazamiento de la esfera, el retardo de medición y desconocimiento de ciertos parámetros. Los resultados anteriores serán de mucha utilidad en la comprensión y entendimiento del control óptimo preview.

Hipótesis de la presente tesis

El conocimiento profundo del modelo matemático de la planta esfera sobre un plano permite diseñar un sistema de control óptimo preview para la posición y seguimiento de trayectorias.

El desarrollo de un sistema de control óptimo preview tiene un mejor comportamiento y rendimiento a comparación de una técnica de control convencional, como el control proporcional integral derivativo (PID).

Objetivos de la presente tesis

Objetivo general:

Diseñar un sistema de control óptimo preview para la posición y trayectoria de una esfera sobre un plano.

Objetivos específicos:

- Obtener un modelo matemático que describa adecuadamente el comportamiento del presente sistema de esfera sobre un plano.
- Analizar la controlabilidad y observabilidad del modelo obtenido para el presente sistema.
- Diseñar el controlador óptimo preview para el control de posición de la esfera.
- Simular el sistema de control con el modelo matemático obtenido utilizando el software Simulink.
- Realizar el análisis y comparaciones entre el controlador óptimo preview obtenido con un controlador convencional (proporcional integral derivativo) en la planta esfera sobre un plano.
- Presentar una propuesta de implementación del sistema de control óptimo preview en la planta de la esfera sobre un plano.

CAPÍTULO 1: ESTADO DEL ARTE DE SISTEMAS DE CONTROL DE POSICIÓN DE UNA ESFERA SOBRE UN PLANO

1.1 Introducción

El sistema de bola y la placa fue primeramente establecido en el laboratorio de la Universidad de Rockwell Checoslovaquia a mediados de la década de 1990. Este sistema es una planta multivariable (MIMO), que es la extensión del sistema de balón y la viga. Tiene cuatro grados de libertad que consiste en una bola que puede rodar libremente sobre una placa rígida operados por servomotores, con el fin de controlar la posición de la bola [Bryson et al, 1975].

El sistema de bola y la placa se utiliza ampliamente como un banco de pruebas para verificar el rendimiento y la eficacia de nuevos algoritmos de control [Colmenares et al, 2012]. Sirve para demostrar visualmente y reforzar los principios subyacentes de la dinámica no lineal e teoría de control, debido a su no linealidad inherente, la inestabilidad y bajo accionamiento. El sistema es también influenciado por no linealidades como fricciones, efecto de reacción, tiempo de retardo de medición, parámetros de incertidumbre [Ho et al, 2013].

El control de estabilización consiste en mantener el balón en una posición deseada y seguir un camino geométrico (trayectoria de seguimiento) con la ley temporización asociada. Ambas tareas son difíciles problemas, especialmente cuando se desea una alta precisión de seguimiento. Dado que sólo un control de retroalimentación basado en modelos linealizados no sería adecuado para obtener una mayor velocidad de seguimiento, controlar el uso de diseño de un modelo no lineal y conseguir un mejor enfoque [Liu et al, 2010].

1.2 Estado del arte de sistemas de control de posición de una esfera sobre un plano

La mayor parte de los trabajos previos utilizan modelos simplificados del sistema, dejando de lado los términos de acoplamiento. Es común aplicar una **estructura en cascada** para el sistema controlado (Figura 1.1), ya que el balón y el sistema de placa están accionados con respecto a los ángulos de la placa y la posición del balón. Un bucle de control interior se utiliza para controlar los ángulos de la placa y aplicado comúnmente por un controlador PID.

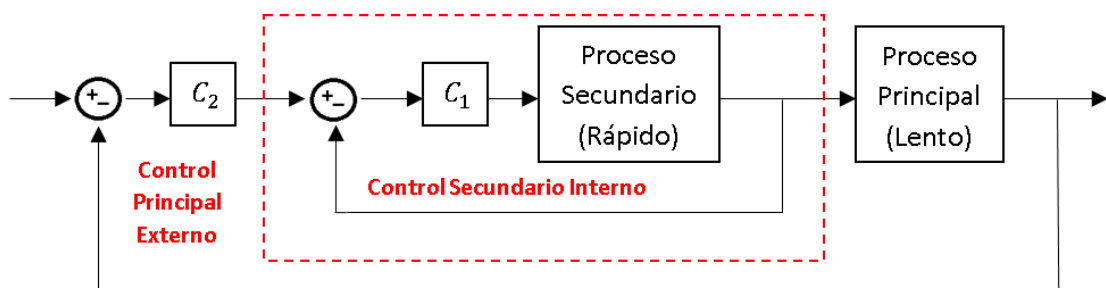


Figura 1.1. Diagrama de bloques general para el control en cascada

Con el fin de evitar el efecto de la dinámica interna, el bucle interno tiene que ser muy rápido en comparación con el bucle exterior. El bucle exterior se utiliza para controlar la posición

de la pelota. Muchos conceptos diferentes se implementan para el lazo de control externo y se pueden dividir en tres clases generales: lineales, no lineales y métodos basados en el conocimiento.

En el sistema de estudio, bola y placa, principalmente se utilizan dos tipos de sensores, los cuales son la pantalla táctil [[Kassem et al, 2015], [Contreras, 2017]] y la cámara superior [[Colmenares et al, 2012], [Ho et al, 2013], [Wettstein, 2013], [Debono et al 2015], [Cheng et al, 2016]], cada uno con ciertas deficiencias, como la pérdida de contacto entre la bola y la pantalla para el primer caso provocando discontinuidad en la medición, y la limitada frecuencia de muestreo de una cámara convencional provocando restricciones en tiempo real.

En el año 2010 se desarrolló un controlador en modo deslizante de seguimiento de trayectorias para el sistema de estudio, en donde se demostró que dicho algoritmo propuesto consiguió que la esfera siga con precisión la trayectoria de referencia. (Liu, 2010).

Colmenares et al, en 2012, desarrollaron un trabajo de modelamiento de la planta bola y plano utilizando una cámara con visión artificial como sensor del sistema; en éste artículo se realiza un control PD con compensación no lineal, garantizando estabilidad y buen rendimiento del sistema.

En el año 2013, se realizó el diseño de un controlador de seguimiento de trayectorias basado en la linealización de retroalimentación de entrada-salida aproximada para el sistema en estudio; considerando un sistema de visión artificial, el cual garantiza cierto nivel de rendimiento en tiempo real utilizando un sensor de imagen profesional con una velocidad de 150 cuadros por segundo; tanto la simulación como los resultados experimentales mostraron que dicho sistema diseñado tenía buen rendimiento. [Ho et al, 2013].

En otro artículo, Wettstein, concluye en su estudio que el controlador regulador lineal cuadrático es lo suficientemente robusto para estabilizar la esfera sobre un plano considerando ruido de medición en el sensor de visión artificial, sin embargo, cuando se agregó complejidad al sistema (más esferas), los resultados experimentales mostraron ciertos errores, siendo los más influyentes los efectos físicos sobre la esfera no modelados, calibraciones incorrectas de los parámetros de la cámara externa usada como sensor. [Wettstein, 2013]

En el año 2015, se realizó dos algoritmos de control para la planta en estudio, los cuales fueron primeramente un controlador de retroalimentación de estado lineal, seguido por un controlador en modo deslizante, concluyéndose que este último obtuvo una respuesta más precisa a velocidades mucho más altas. [Debono et al, 2015].

Kassem en 2015 presentó cuatro controles diseñados y evaluados en seguimiento estático y dinámico en el sistema bola y placa, pero montado en una plataforma Stewart con 6 DOF, dichos controladores fueron PID, LQR, modo deslizante y control fuzzy, donde se mostró la alta capacidad del control en modo deslizante para controlar el seguimiento de la esfera en sistemas con alta complejidad. [Kassem et al, 2015].

M. Ovavec y A. Jadlovska presentaron un algoritmo de control predictivo basado en modelo aplicado en el sistema esfera sobre un plano, donde las trayectorias circulares y cuadráticas fueron la referencia para las pruebas de laboratorio, los resultados de simulación obtuvieron la calidad requerida, es decir, control suave, sin oscilaciones fuertes, importante para la vida útil de los servomotores. [Ovavec et al, 2015]

C.-C. Cheng, C.-H. Tsai, en el año 2016 emplearon una cámara de video como sensor de visualización para desarrollar un algoritmo de control regulador cuadrático lineal, donde se

demostró rendimiento satisfactorio y prometedor para el control de posición y trayectoria circular de la esfera sobre el plano. [Cheng et al, 2016]

D. Contreras, en el año 2017, presentó el diseño de una serie de controladores aplicados al sistema bola y plano, obteniéndose como resultados: Un gran error para el algoritmo de control basado en realimentación; buen control para bajas frecuencias para el controlador basado en AFL; para el controlador de retroceso obtuvo menos error de seguimiento para frecuencias altas pero sus señales de control se elevaron (concluyéndose que si se incluye acción integral ofrecerá mejores resultados); y para su algoritmo de control en modo deslizante obtuvo un mayor error de seguimiento. [Contreras, 2017]

1.3 Descripción del problema

Actualmente, el control de seguimiento de trayectoria viene acaparando más terreno en el campo de la automatización, como por ejemplo en los casos de la estabilidad de objetos voladores y submarinos, cuyas plantas a controlar presentan las características de no linealidad, inestabilidad y retardo de medición. Para el presente caso se consideró el sistema de una esfera sobre un plano y el estudio de un adecuado control que maximice sus ventajas y minimice sus desventajas.

Dicho sistema consiste en una esfera que puede desplazarse libremente sobre un plano, que puede ser una placa rígida, la cual será operada por dos servomotores, cuya función será controlar la posición de dicha esfera.

Se han utilizado controladores convencionales para la planta en estudio, con los cuales se llega a controlar el sistema, sin embargo las desventajas se muestran en el tercer capítulo del presente documento, como por ejemplo sobreimpulso considerable en las señales de respuesta del sistema, un mayor tiempo en el control de posición, e incluso presentan oscilaciones en el control de seguimiento de trayectorias.

Las desventajas mencionadas tienen impacto negativo en la planta de estudio, siendo algunas de ellas, la disminución considerable del tiempo de vida de los actuadores, fallas de lectura que ocasionan un control deficiente. Para dichos casos se considera mejor utilizar una técnica de control avanzado que tenga la capacidad de compensar el ligero retardo que pueda existir entre la lectura de datos de los sensores y el accionar de los actuadores.

Es por ello que se optará por diseñar una propuesta de implementación de un control óptimo preview para controlar la estabilidad de una esfera en una posición deseada en un plano; también se analizarán las consecuencias y resultados que conlleva usar el tipo de control antes mencionado en sistemas con características de no linealidad e inestabilidad intrínsecas, y externas como la fricción del desplazamiento de la esfera, el retardo de medición y desconocimiento de ciertos parámetros de la planta. Los resultados serán de mucha utilidad en la comprensión y entendimiento del control basado en predicción de referencia o preview.

CAPÍTULO II: MODELAMIENTO MATEMÁTICO DE LA PLANTA ESFERA – PLANO

2.1 Introducción

El presente capítulo consta en los conceptos previos y pasos para la obtención del modelo matemático de la planta esfera – plano, los cuales fueron propuestos por D.Contreras, en el año 2017. Se hablará de la obtención del modelo de un motor de corriente continua (análisis eléctrico y mecánico) y la obtención del modelo matemático de la planta en estudio: esfera-plano (análisis físico, cinemático, dinámico y linealización).

2.2 Consideraciones

- La esfera nunca pierde contacto con el plano.
- No hay deslizamiento entre la esfera y el plano.
- La esfera no gira sobre su eje vertical.
- Se considera la dinámica de la esfera, pero no la dinámica del plano.

2.3 Modelo de un motor de corriente continua

Se tiene un motor de corriente continua. La entrada del sistema es el voltaje aplicado al motor V y la salida es la posición θ .



Figura 2.1. Motor de corriente continua

2.3.1 Análisis eléctrico del motor

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la parte eléctrica del motor, se tiene:

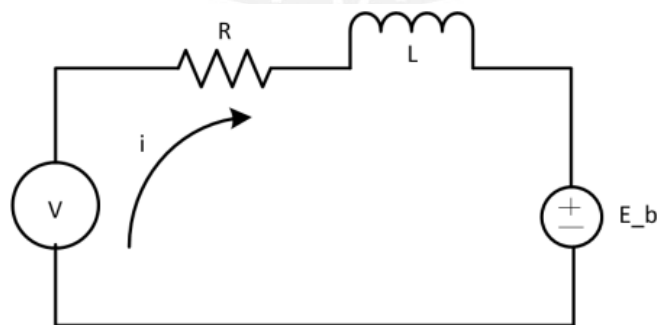


Figura 2.2. Diagrama eléctrico del motor de corriente continua

$$V = Ri + L \frac{di}{dt} + e_b \quad (2.1)$$

Donde:

V es el voltaje.

R es la resistencia.

L es la inductancia.

i es la corriente.

e_b Es la fuerza contra-electromotriz. La cual a su vez está definida por:

$$e_b = K_b \dot{\theta} \quad (2.2)$$

Donde:

K_b Es la constante de fuerza contra-electromotriz

$\dot{\theta}$ Es la aceleración angular

Al reemplazar se obtiene:

$$V = Ri + L \frac{di}{dt} + K_b \dot{\theta} \quad (2.3)$$

2.3.2 Análisis mecánico del motor

La sumatoria de torques en el eje roscado es la inercia por la aceleración angular

$$\sum T = I \ddot{\theta} \quad (2.4)$$

Efectuamos la sumatoria de torques que actúan en el eje del motor.

$$T_e - T_f = I \ddot{\theta} \quad (2.5)$$

Donde:

T_e Es el torque eléctrico del motor

T_f Es el torque debido a la fricción viscosa en el eje del motor

I Es la inercia del motor

$\ddot{\theta}$ Es la aceleración angular

El torque eléctrico T_e del motor, está relacionado con la corriente i , por el factor constante K_t .

$$T_e = K_t i \quad (2.6)$$

Donde:

K_t Es la constante de torque electromagnético.

El torque de fricción viscosa se relaciona con la velocidad angular mediante una constante C está definido por:

$$T_f = C\dot{\theta} \quad (2.7)$$

Donde:

C Es el coeficiente de fricción viscosa

Reemplazando valores correspondientes se tiene:

$$K_t i - C\dot{\theta} = I\ddot{\theta} \quad (2.8)$$

Eliminamos i de las ecuaciones. De la ecuación anterior despejamos i

$$K_t i = I\ddot{\theta} + C\dot{\theta} \quad (2.9)$$

$$i = \frac{I\ddot{\theta}}{K_t} + \frac{C\dot{\theta}}{K_t} \quad (2.10)$$

Hallamos su derivada:

$$\frac{di}{dt} = \frac{I\ddot{\theta}}{K_t} + \frac{C\dot{\theta}}{K_t} \quad (2.11)$$

Reemplazando en la ecuación

$$v = Ri + L \frac{di}{dt} + K_b \dot{\theta} \quad (2.12)$$

$$v = R \left(\frac{I\ddot{\theta}}{K_t} + \frac{C\dot{\theta}}{K_t} \right) + L \left(\frac{I\ddot{\theta}}{K_t} + \frac{C\dot{\theta}}{K_t} \right) + K_b \dot{\theta}$$

Desarrollando y agrupando términos:

$$v = \underbrace{\left(\frac{LI}{K_t} \right)}_{a_3} \ddot{\theta} + \underbrace{\left(\frac{RI}{K_t} + \frac{LC}{K_t} \right)}_{a_2} \dot{\theta} + \underbrace{\left(\frac{RC}{K_t} + K_b \right)}_{a_1} \theta \quad (2.13)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de 3er orden (Condiciones iniciales cero)

Para hallar K_t en vacío la corriente es cero $i = 0$

Por tanto

$$v = e_b$$

$$v = K_b \dot{\theta} \quad (2.14)$$

Entonces:

$$K_b \approx K_t \quad (2.15)$$

2.4 Modelamiento matemático de la planta esfera – plano

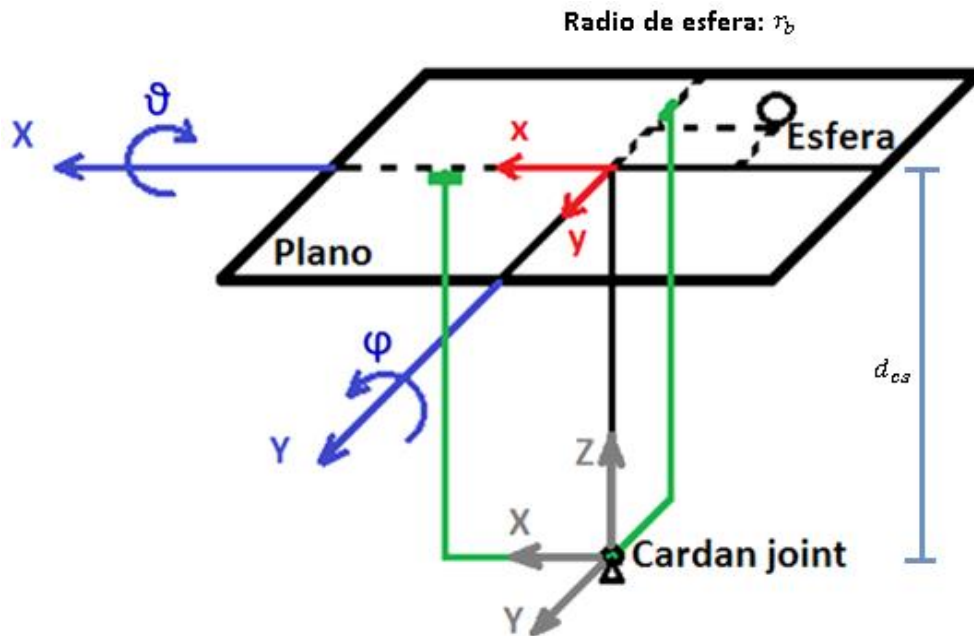


Figura 2.3. Diagrama de ejes rotacionales para planta esfera – plano

2.4.1 Análisis de la configuración física:

Sean las coordenadas fijas de la posición de la esfera:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Sean las coordenadas móviles de la posición de la esfera:

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

2.4.2 Análisis cinemático:

Según se detalla en [Arfken, 1985], la matriz de rotación sobre el eje X se define como:

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Sea la matriz de rotación sobre el eje Y:

$$R_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Entonces la matriz de transformación total se calcula con el producto de las dos matrices anteriores:

$$\begin{aligned} R_{xy}(\theta, \varphi) &= R_x(\theta) * R_y(\varphi) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \cos(\varphi) \\ -\cos(\theta) \sin(\varphi) & \sin(\theta) & \cos(\theta) \cos(\varphi) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.20)$$

La coordenada z de la esfera es constante y se calcula sumando d_{cs} (distancia entre el cardan joint y la superficie del plano) y r_b (el radio de la esfera):

$$\bar{d} = z = r_b + d_{cs} \quad (2.21)$$

Ahora las coordenadas fijas de la esfera en función de las coordenadas móviles serán:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R_{xy}(\theta, \varphi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ \bar{d} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Luego las coordenadas fijas de la posición de la esfera resultan:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) x + \sin(\varphi) \bar{d} \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) x + \cos(\theta) y - \sin(\theta) \cos(\varphi) \bar{d} \\ -\cos(\theta) \sin(\varphi) x + \sin(\theta) y + \cos(\theta) \cos(\varphi) \bar{d} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

2.4.3 Análisis dinámico:

Sea la velocidad angular del plano:

$$\vec{\omega}_p = \begin{pmatrix} \omega_{px} \\ \omega_{py} \\ \omega_{pz} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Para la obtención de la relación entre la matriz de rotación y la velocidad angular, es necesario realizar la siguiente multiplicación:

$$R_{xy}(\theta, \varphi) \dot{R}_{xy}^T(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{pz} & \omega_{py} \\ \omega_{pz} & 0 & -\omega_{px} \\ -\omega_{py} & \omega_{px} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Entonces se obtienen los valores de la velocidad angular del plano:

$$\vec{\omega}_p = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos(\varphi) \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Ahora la velocidad angular de la esfera respecto al plano sería:

$$\vec{\omega}_{b/p} = \begin{pmatrix} -\frac{\dot{y}}{r_b} \\ \dot{x} \\ \frac{\dot{x}}{r_b} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Por lo tanto, la velocidad angular absoluta de la esfera sería:

$$\vec{\omega}_b = \vec{\omega}_p + \vec{\omega}_{b/p} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos(\varphi) - \frac{\dot{y}}{r_b} \\ \dot{\varphi} + \frac{\dot{x}}{r_b} \\ \dot{\theta} \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

La energía cinética de la esfera se calcula usando las coordenadas absolutas de la posición de la esfera y la velocidad angular absoluta de la esfera:

$$T = \frac{1}{2} m_b \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{1}{2} J_b \vec{\omega}_b \cdot \vec{\omega}_b \quad (2.29)$$

$$T = \frac{1}{2} m_b (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{1}{2} J_b \left[\left(\dot{\theta} \cos(\varphi) - \frac{\dot{y}}{r_b} \right)^2 + \left(\dot{\varphi} + \frac{\dot{x}}{r_b} \right)^2 + (\dot{\theta} \sin(\varphi))^2 \right] \quad (2.30)$$

con J_b como el momento de inercia entre el eje X y el eje Y.

La energía potencial de la esfera se calcula de la siguiente forma:

$$V = m_b g Z = m_b g (-\cos(\theta) \sin(\varphi) x + \sin(\theta) y + \cos(\theta) \cos(\varphi) \bar{d}) \quad (2.31)$$

El lagrangiano se calcula así:

$$L = T - V \quad (2.32)$$

El vector de coordenadas generalizadas (representa los grados de libertad):

$$q = (x \quad y \quad \theta \quad \varphi)^T \quad (2.33)$$

Además, La ecuación de Lagrange es:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (2.34)$$

con Q_i como la fuerza generalizada.

Descuidando la amortiguación viscosa del sistema general sería conservador ($Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$). Por lo tanto sólo se consideran las ecuaciones resultantes en el eje X y el eje Y.

En el eje x sería:

$$\begin{aligned} \ddot{x} \left(m_b + \frac{J_b}{r_b^2} \right) + \ddot{\varphi} \left(m_b \bar{d} + \frac{J_b}{r_b} \right) - y \sin(\varphi) \ddot{\theta} m_b + \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \dot{\theta}^2 m_b \bar{d} \\ - x \sin^2(\varphi) \dot{\theta}^2 m_b - 2\dot{y}^2 \sin(\varphi) \dot{\theta} m_b - \dot{\varphi}^2 x m_b \\ - m_b g \cos(\theta) \sin(\varphi) = 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

En el eje Y sería:

$$\begin{aligned} \ddot{y} \left(m_b + \frac{J_b}{r_b^2} \right) + \ddot{\theta} \left(\sin(\varphi) x m_b - \cos(\varphi) \bar{d} m_b - \frac{J_b}{r_b} \cos(\varphi) \right) \\ + \frac{J_b}{r_b} \dot{\varphi} \sin(\varphi) \dot{\theta} + 2 \sin(\varphi) \dot{\theta} \dot{\varphi} \bar{d} m_b + 2 \dot{\varphi} x \cos(\varphi) \dot{\theta} m_b \\ + 2 \sin(\varphi) \dot{x} \dot{\theta} m_b - y \dot{\theta}^2 m_b + m_b g \sin(\theta) = 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

2.4.4 Modelo de la dinámica de la esfera y el plano:

Ahora se usarán cuatro nuevas constantes para reducir el tamaño de las ecuaciones halladas anteriormente:

$$\bar{c}_1 = \frac{mr^2}{mr^2 + J}, \bar{c}_2 = \frac{\bar{d}mr^2 + Jr}{mr^2 + J}, \bar{c}_3 = \frac{J + 2\bar{d}mr}{mr}, \bar{c}_4 = \frac{J + \bar{d}mr}{mr} \quad (2.37)$$

Reemplazando las nuevas constantes en las ecuaciones, quedarían de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \ddot{x} = \bar{c}_1 \left(-\frac{\bar{d}}{2} \sin(2\varphi) \dot{\theta}^2 + x \sin^2(\varphi) \dot{\theta}^2 + 2\dot{y} \sin(\varphi) \dot{\theta} + \dot{\varphi}^2 x \right. \\ \left. + g \cos(\theta) \sin(\varphi) - \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1} \ddot{\varphi} + y \sin(\varphi) \ddot{\theta} \right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} = \bar{c}_1 \left(-\bar{c}_3 \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin(\varphi) - 2\dot{\varphi} x \cos(\varphi) \dot{\theta} - 2 \sin(\varphi) \dot{x} \dot{\theta} + y \dot{\theta}^2 - g \sin(\theta) \right. \\ \left. + (-x \sin(\varphi) + \bar{c}_4 \cos(\varphi)) \ddot{\theta} \right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Entonces la salida medida del sistema con el hardware disponible sería:

$$h(x) = (x \quad \varphi \quad y \quad \theta)^T \quad (2.40)$$

2.4.5 Modelo espacio estado:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x, u) \\ y &= h(x)\end{aligned}\quad (2.41)$$

El vector de estado para este caso sería:

$$x = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8)^T = (x \ \dot{x} \ \varphi \ \dot{\varphi} \ y \ \dot{y} \ \theta \ \dot{\theta})^T \quad (2.42)$$

Entonces:

$$F(x, u) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \bar{c}_1 \left(-\frac{\bar{d}}{2} \sin(2x_3) x_8^2 + x_1 \sin^2(x_3) x_8^2 + 2x_6 \sin(x_3) x_8 + x_4^2 x_1 + g \cos(x_7) \sin(x_3) - \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1} u_1 + x_5 \sin(x_3) u_2 \right) \\ x_4 \\ u_1 \\ x_6 \\ \bar{c}_1 (-\bar{c}_3 x_4 x_8 \sin(x_3) - 2x_4 x_1 \cos(x_3) x_8 - 2 \sin(x_3) x_2 x_8 + x_5 x_8^2 - g \sin(x_7) + (-x_1 \sin(x_3) + \bar{c}_4 \cos(x_3)) u_2) \\ x_8 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Las salidas medidas del sistema son:

$$h(x) = (x_1 \ x_3 \ x_5 \ x_7)^T \quad (2.44)$$

Se usarán las entradas:

$$u = (u_1 \ u_2)^T = (\ddot{\varphi} \ \ddot{\theta})^T \quad (2.45)$$

Affine:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\quad (2.46)$$

Donde:

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \bar{c}_1 \left(-\frac{\bar{d}}{2} \sin(2x_3) x_8^2 + x_1 \sin^2(x_3) x_8^2 + 2x_6 \sin(x_3) x_8 + x_4^2 x_1 + g \cos(x_7) \sin(x_3) \right) \\ x_4 \\ 0 \\ x_6 \\ \bar{c}_1 (-\bar{c}_3 x_4 x_8 \sin(x_3) - 2x_4 x_1 \cos(x_3) x_8 - 2 \sin(x_3) x_2 x_8 + x_5 x_8^2 - g \sin(x_7)) \\ x_8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\bar{c}_2 & \bar{c}_1 x_5 \sin(x_3) \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\bar{c}_1 x_1 \sin(x_3) + \bar{c}_2 \cos(x_3) \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

2.4.6 Linealización jacobiano alrededor de un punto de equilibrio:

Calculando el punto de equilibrio x_e :

$$\dot{x} = 0 \rightarrow f(x_e) + g(x_e)u_e = 0 \quad (2.49)$$

El vector de estado y la entrada en el equilibrio serían:

$$x_e = (x_{1e} \ x_{2e} \ x_{3e} \ x_{4e} \ x_{5e} \ x_{6e} \ x_{7e} \ x_{8e})^T \quad (2.50)$$

$$u_e = (u_{1e} \ u_{2e})^T \quad (2.51)$$

Se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x_{2e} = 0 \\ \bar{c}_1 (g \cos(x_{7e}) \sin(x_{3e})) = 0 \\ x_{4e} = 0 \\ u_{1e} = 0 \\ x_{6e} = 0 \\ \bar{c}_1 (-g \sin(x_{7e})) = 0 \\ x_{8e} = 0 \\ u_{2e} = 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

Resulta:

$$\begin{cases} x_{3e} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x_{7e} = k\pi \end{cases} \quad (2.53)$$

Se considera $k = 0$ en el rango de operación; por lo tanto el punto de equilibrio resultante sería:

$$x_e = (x_{1e} \ 0 \ 0 \ 0 \ x_{5e} \ 0 \ 0 \ 0)^T \quad (2.54)$$

$$u_e = (0 \ 0)^T \quad (2.55)$$

Calculando las matrices lineales:

$$A = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_e} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{c}_1 g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{c}_1 g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

$$B = g(x_e) = \begin{pmatrix} 0 & -\bar{c}_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{c}_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

$$C = \frac{\partial h(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

El sistema linealizado quedaría de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \Delta \dot{x} = A \Delta x + B \Delta u \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.59)$$

Donde $\Delta x = x - x_e$, $\Delta u = u - u_e$

2.5 Análisis de controlabilidad del modelo linealizado

Sean los siguientes datos de la planta para la simulación:

```
m = 0.024;
rb = 0.02;
dcs = 0.122;
d = dcs+rb;
J = 6.4*exp(-6);
c1 = (m*rb^2) / (m*rb^2+J);
c2 = (d*m*rb^2+J*rb) / (m*rb^2+J);
g = 9.81;
```

```

A =
    0    1.0000    0    0    0    0    0    0
    0    0    0.0059    0    0    0    0    0
    0    0    0    1.0000    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    1.0000    0    0
    0    0    0    0    0    0    -0.0059    0
    0    0    0    0    0    0    0    1.0000
    0    0    0    0    0    0    0    0

>> B

B =
    0    0
 -0.0201    0
    0    0
  1.0000    0
    0    0
    0    -0.0201
    0    0
    0    1.0000

>> rank(ctrb(A,B))

ans =
    8

```

Dado que el rango hallado coincide con el número de estados del sistema, se concluye que dicho sistema es **controlable**.

2.6 Análisis de observabilidad del modelo linealizado

Sean los siguientes datos de la planta para la simulación:

```

m = 0.024;
rb = 0.02;
dcs = 0.122;
d = dcs+rb;
J = 6.4*exp(-6);
c1 = (m*rb^2) / (m*rb^2+J);
c2 = (d*m*rb^2+J*rb) / (m*rb^2+J);
g = 9.81;

```

```
>> A
```

```
A =
```

```
0 1.0000 0 0 0 0 0 0
0 0 0.0059 0 0 0 0 0
0 0 0 1.0000 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 1.0000 0 0
0 0 0 0 0 0 -0.0059 0
0 0 0 0 0 0 0 1.0000
0 0 0 0 0 0 0 0
```

```
>> C
```

```
C =
```

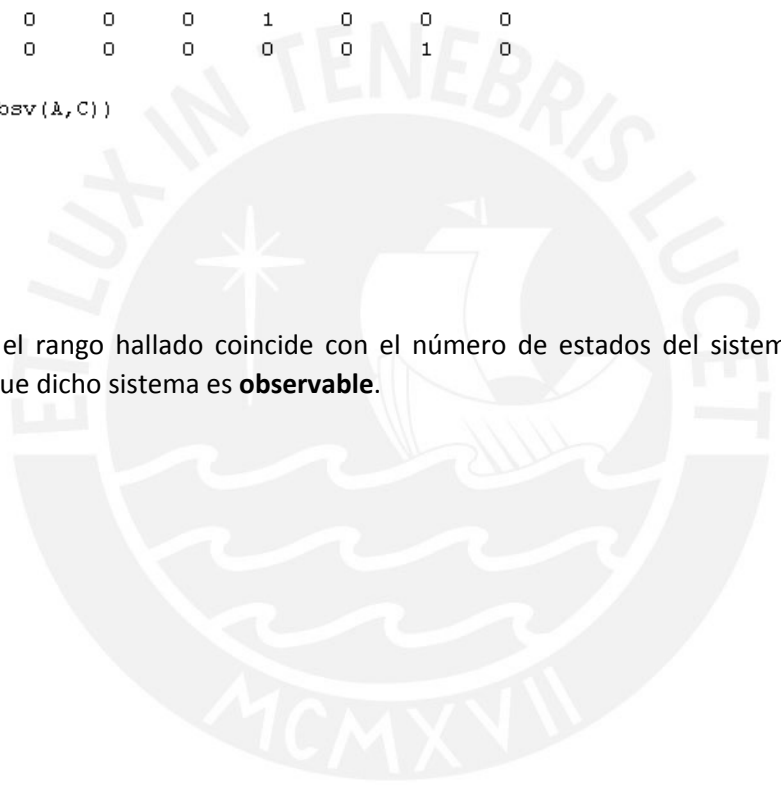
```
1 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0
0 0 0 0 1 0 0 0
0 0 0 0 0 0 1 0
```

```
>> rank(observ(A,C))
```

```
ans =
```

```
8
```

Dado que el rango hallado coincide con el número de estados del sistema, también se concluye que dicho sistema es **observable**.



CAPÍTULO III: DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL ÓPTIMO PREVIEW EN PLANTA ESFERA - PLANO

3.1 Introducción

El presente capítulo consta del diseño de la estrategia de control propuesta, iniciando con los conceptos previos para su análisis y entendimiento, siguiendo con las pruebas de simulación de dicho controlador aplicado a la planta esfera – plano, finalmente las comparaciones del controlador avanzado propuesto con un controlador convencional.

Se optó por elegir el controlador avanzado óptimo preview, dado que tiene buenos resultados cuando se aplica en seguimiento de trayectorias ya que se aprovecha su ventaja de anticipar y conocer los valores futuros de las variables de estado del sistema. (Fujisaki, 1997).

3.2 Problema general del control óptimo

Se tiene el sistema lineal o no lineal:

$$\dot{X} = f(X, u) \quad (3.1)$$

Donde el valor de los estados en un tiempo inicial es conocido

$$X(t_0) \rightarrow \text{Conocido}$$

Se tiene una función de costo de la forma: (Kirk, 2004)

$$J = \underbrace{\Phi(X_{t_f})}_{\text{Término en función de } x \text{ en el tiempo final}} + \int_0^{t_f} \underbrace{L(x, u)}_{\text{Función que se quiere minimizar}} dt \quad (3.2)$$

El problema consiste en hallar un $u(t)$ que minimiza J satisfaciendo la restricción:

$$f(X, u) - \dot{X} = 0 \quad (3.3)$$

La función de Lagrange está dada por: (Arora, 2012)

$$\mathbf{L} = \underbrace{\Phi(X_{t_f})}_{\text{Función de costo}} + \int_0^{t_f} L(x, u) dt + \int_0^{t_f} \underbrace{\lambda^T}_{\text{Multiplicador de Lagrange}} \underbrace{[f(X, u) - \dot{X}]}_{\text{Restricción}} dt \quad (3.4)$$

Agrupando las integrales se tiene:

$$\mathbf{L} = \Phi(X_{t_f}) + \int_0^{t_f} \left[\underbrace{L(x, u) + \lambda^T f(X, u)}_{\mathbf{H}} - \lambda^T \dot{X} \right] dt \quad (3.5)$$

Donde el Hamiltoniano se define por el término: (Arora, 2012)

$$H = \underbrace{L(x, u)}_{\text{función que se quiere minimizar}} + \underbrace{\lambda^T}_{\text{Multiplicador de Lagrange}} f(x, u) \quad (3.6)$$

Por tanto L se reduce a:

$$L = \Phi(X_{t_f}) + \int_0^{t_f} H dt - \int_0^{t_f} \lambda^T \dot{X} dt \quad (3.7)$$

Aplicando integración por partes a la segunda integral de (3.7), se tiene:

$$\int_0^{t_f} \lambda^T \dot{X} dt = \lambda^T X \Big|_0^{t_f} - \int_0^{t_f} \dot{\lambda}^T X dt = \lambda_{(t_f)}^T X_{(t_f)} - \lambda_0^T X_0 - \int_0^{t_f} \dot{\lambda}^T X dt \quad (3.8)$$

Reemplazando (3.8) en (3.7) la función de Lagrange resulta:

$$L = \Phi(X_{t_f}) + \int_0^{t_f} H dt - \left[\lambda_{(t_f)}^T X_{(t_f)} - \lambda_0^T X_0 - \int_0^{t_f} \dot{\lambda}^T X dt \right] \quad (3.9)$$

Agrupando términos en una sola integral y reordenando se tiene:

$$L = \Phi(X_{t_f}) - \lambda_{(t_f)}^T X_{(t_f)} + \int_0^{t_f} (H + \dot{\lambda}^T X) dt + \lambda_0^T X_0 \quad (3.10)$$

De la ecuación (3.10) se obtienen las condiciones de optimalidad, aplicando las derivadas parciales: (Naidu, 2003)

$$\frac{\partial L}{\partial X_{t_f}} = 0 \quad (3.11a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0 \quad (3.11b)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 0 \quad (3.11c)$$

La primera condición de optimalidad se obtiene resolviendo 3.11a

$$\frac{\partial L}{\partial X_{t_f}} = \frac{\partial \Phi(X_{t_f})}{\partial X_{t_f}} - \lambda_{(t_f)}^T = 0 \rightarrow \lambda_{(t_f)}^T = \frac{\partial \Phi(X_{t_f})}{\partial X_{t_f}} \quad (3.12)$$

La segunda condición de optimalidad se obtiene resolviendo 3.11b

$$\frac{\partial L}{\partial X} = \frac{\partial H}{\partial X} + \dot{\lambda} = 0 \rightarrow \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X} \quad (3.13)$$

La tercera condición de optimalidad se obtiene resolviendo 3.11c

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (3.14)$$

Estas son las condiciones necesarias de optimalidad, también conocidas como ecuaciones de Euler-Lagrange, para que sean condiciones suficientes se tiene que demostrar que el problema sea convexo. (Bryson, 1975)

3.3 Ecuación de Riccati caso general

Se tiene el sistema lineal representado en espacio de estados por:

$$\dot{X} = AX + Bu \quad (3.15)$$

Para el caso cuando $t_f \rightarrow \infty$, el término Φ de la ecuación (3.2) se simplifica y la función de costo a minimizar en forma cuadrática resulta:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (X^T Q X + u^T R u) dt \quad (3.16)$$

Donde Q es la matriz de pesos para los estados y R es el peso asignado a u .

De la ecuación (3.6) el Hamiltoniano para este caso estará dado por:

$$H = \frac{1}{2} X^T Q X + \frac{1}{2} u^T R u + \lambda^T (AX + Bu) \quad (3.17)$$

Y se emplearán 2 condiciones de optimalidad (3.13) y (3.14)

Primera condición, hallamos: $\dot{\lambda}$ (es un vector de la misma dimensión que X)

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X} = -QX - A^T \lambda \quad (3.18)$$

Segunda condición, hallamos: $\frac{\partial H}{\partial u}$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = Ru + B^T \lambda = 0 \quad (3.19)$$

Se realiza un adecuado cambio de variable para λ :

$$\lambda = PX \quad (3.20)$$

A partir de (3.20) hallamos otra expresión para $\dot{\lambda}$:

$$\dot{\lambda} = P\dot{X} \quad (3.21)$$

Reemplazando (3.15) en (3.21) se tiene:

$$\dot{\lambda} = P(AX + Bu) \quad (3.22)$$

Reemplazando (3.20) en (3.19) se tiene:

$$Ru + B^T PX = 0 \quad (3.23)$$

De (3.23) se obtiene la expresión para u :

$$u = -R^{-1}B^T PX \quad (3.24)$$

Igualando las expresiones (3.22) y (3.18)

$$PAX + PBu = -QX - A^T \lambda \quad (3.25)$$

Reemplazando la expresión de (3.20) y reordenando se tiene

$$PAX + PBu + QX + A^T PX = 0 \quad (3.26)$$

En la ecuación (3.26) reemplazamos la expresión de u de la ecuación (3.24)

$$PAX + PB(-R^{-1}B^T PX) + QX + A^T PX = 0 \quad (3.27)$$

De (3.27) se cancelan los términos X (la ecuación de Riccati no depende de variables) y resulta:

$$PA - PBR^{-1}B^T P + Q + A^T P = 0 \quad (3.28)$$

Finalmente reordenando se llega a la ecuación de Riccati en forma general: (Naidu, 2003)

$$A^T P + PA + PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (3.29)$$

En la ecuación (3.29) el único término que no se conoce es P . La ecuación de Riccati se resuelve usando el software Matlab con el comando "are" de la siguiente forma:

$$P = \text{are}(A, BR^{-1}B^T, Q) \quad (3.30)$$

Donde el P hallado será constante para $t_f \rightarrow \infty$. P es matriz simétrica y del mismo tamaño que A , para que el problema sea convexo y cumplir la condición suficiente de optimalidad, P debe ser positiva semidefinida. (Arora, 2012)

3.4 Ecuación de Riccati caso particular

Cuando en la ecuación de Riccati aparece un término intermedio que relaciona u con algún estado de X , por ejemplo sí se quiere incluir la minimización de la potencia eléctrica de un motor, se hacen algunas modificaciones para incluir este término:

Para el sistema (3.15) la función de costo a minimizar si se quiere incluir en término de potencia eléctrica sería: (Kirk, 2004)

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (X^T Q X + 2X^T N u + u^T R u) dt \quad (3.31)$$

Donde N es el peso que se le asigna al término de potencia.

Por ejemplo en espacio de 3 estados la función de costo a minimizar tendría la forma:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + 2(x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ n \end{pmatrix} u + u^T R u \quad (3.32)$$

Donde el término que representa corriente es x_3 , el voltaje está representado por u ; y el peso para la potencia eléctrica es n .

De la ecuación (3.6) el Hamiltoniano para este caso estará dado por:

$$H = \frac{1}{2} X^T Q X + X^T N u + \frac{1}{2} u^T R u + \lambda^T (A X + B u) \quad (3.33)$$

De la condición de optimalidad (3.13) hallamos $\dot{\lambda}$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X} = -Q X - N u - A^T \lambda \quad (3.34)$$

De la condición de optimalidad (3.14) hallamos $\frac{\partial H}{\partial u}$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = N^T X + R u + B^T \lambda = 0 \quad (3.35)$$

Reemplazando (3.20) en (3.34) se tiene:

$$N^T X + R u + B^T P X = 0 \quad (3.36)$$

De (3.35) se obtiene la expresión para u :

$$u = -R^{-1} B^T P X - R^{-1} N^T X = -R^{-1} (B^T P + N^T) X \quad (3.37)$$

Igualando las expresiones (3.22) y (3.33)

$$P(A X + B u) = -Q X - N u - A^T \lambda \quad (3.38)$$

Reemplazando la expresión de (3.20) y reordenando se tiene

$$P A X + P B u + Q X + N u + A^T P X = 0 \quad (3.39)$$

En la ecuación (3.38) reemplazamos la expresión de u de la ecuación (3.36)

$$PAX - PBR^{-1}(B^T P + N^T)X + QX - NR^{-1}(B^T P + N^T)X + A^T P X = 0 \quad (3.40)$$

De (3.39) se cancelan los términos X y resulta:

$$PA - PBR^{-1}(B^T P + N^T) + Q - NR^{-1}(B^T P + N^T) + A^T P = 0 \quad (3.41)$$

Desarrollando la expresión (3.40)

$$PA - PBR^{-1}B^T P - PBR^{-1}N^T + Q - NR^{-1}B^T P - NR^{-1}N^T + A^T P = 0 \quad (3.42)$$

Factorizando los términos que tienen P a la derecha, los términos que tienen P a la izquierda y separando el término que tiene P^2 para darle la forma general de Riccati, se tiene:

$$(A - BR^{-1}N^T)^T P + P(A - BR^{-1}N^T) - PBR^{-1}B^T P + (Q - NR^{-1}N^T) = 0 \quad (3.43)$$

La ecuación de Riccati se resuelve usando el software Matlab con el comando "are" de la forma:

$$P = are(A - BR^{-1}N^T, BR^{-1}B^T, Q - NR^{-1}N^T) \quad (3.44)$$

3.5 Control óptimo preview

Es un control predictivo desde el enfoque de control óptimo. Se conoce los valores futuros de la referencia de tal manera que se usa estos valores en la ley de control. Se espera que el desempeño del sistema sea mejor. (Takaba, 2003)

Se llega a un sistema de la siguiente forma: (Birla, 2013)

$$\dot{X} = AX + Bu + Wr \quad (3.45)$$

Con una ley de control de la forma:

$$u = -Kx - [K_{r1} \quad K_{r2} \quad K_{r3} \quad \dots] \begin{bmatrix} r_k \\ r_{k+1} \\ r_{k+2} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

posiciones futuras

El problema consiste en calcular los coeficientes K_{r1}, K_{r2}, K_{r3} , etc para que mejore la respuesta. Con esto la función de costo J va a tener un valor menor que con control óptimo general.

Se tiene el sistema en tiempo discreto:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Wr_k \quad (3.47)$$

Se tiene que ver la manera que aparezca r en la ley de control, por ejemplo para el motor con tornillo sinfín se usa acción integral.

Armamos una ecuación de estado para r

Definimos un Z_k en el que están agrupados todos los r conocidos (futuros)

$$Z_k = \begin{bmatrix} r_k \\ r_{k+1} \\ r_{k+2} \\ \vdots \\ r_{k+N-2} \\ r_{k+N-1} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Y un Z_{k+1} obtenido desplazando un instante de tiempo.

$$Z_{k+1} = \begin{bmatrix} r_{k+1} \\ r_{k+2} \\ r_{k+3} \\ \vdots \\ r_{k+N-1} \\ r_{k+N} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Se construye la ecuación de estado de la forma:

$$Z_{k+1} = EZ_k + Fr_{k+N}$$

$$r_k = GZ_k$$

$$\begin{bmatrix} r_{k+1} \\ r_{k+2} \\ r_{k+3} \\ \vdots \\ r_{k+N-1} \\ r_{k+N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_k \\ r_{k+1} \\ r_{k+2} \\ \vdots \\ r_{k+N-2} \\ r_{k+N-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_{k+N} \quad (3.50)$$

$$r_k = \underbrace{[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0]}_G Z_k \quad (3.51)$$

Juntamos ambas en una única ecuación de estado:

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_k &= \begin{bmatrix} x_k \\ z_k \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & WG \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ z_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} r_{k+N} \end{aligned} \quad (3.52)$$

De manera que:

$$\mathbb{X}_{k+1} = \mathbb{A}\mathbb{X}_k + \mathbb{B}u_k + \mathbb{W}r_{k+N} \quad (3.53)$$

Aquí aplicamos la ley de control óptimo demostrada antes:

$$\begin{aligned} u_k &= -\mathbb{K}\mathbb{X}_k \\ u_k &= -[K_x \quad K_r] \begin{bmatrix} x_k \\ z_k \end{bmatrix} \\ u_k &= \underbrace{-K_x x_k}_{\text{parte feedback}} - \underbrace{[K_{r1} \quad K_{r2} \quad K_{r3} \quad \dots]}_{K_r} \underbrace{\begin{bmatrix} r_k \\ r_{k+1} \\ r_{k+2} \\ \vdots \\ z_k \end{bmatrix}}_{\text{parte preview}} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Para calcular el u_k usamos el valor presente y futuro de r

Si consideramos acción integral, se tiene los estados:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Con las dimensiones

$$\widehat{X}_{k+1} = \widehat{A} \widehat{X}_k + \widehat{B} \widehat{u}_k + \widehat{W} \widehat{r}_k \quad (3.55)$$

Se tiene la función de costo

$$J = \sum (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k) \quad (3.56)$$

En la función de costo no tiene sentido incluir la posición futura r ya que no se puede minimizar (es algo externo). Lo que sí se desea minimizar es la integral del error.

Al incluir acción integral la función de costo tiene la forma:

$$q_1 x^2 + q_4 \left(\int (x - r) \right)^2 + ru^2 \quad (3.57)$$

No interesa minimizar Z por tanto se trabaja con un J de la siguiente forma:

$$J = \sum (\mathbb{X}^T \mathbb{Q} \mathbb{X} + u^T \mathbb{R} u) \quad (3.58)$$

Donde la matriz de pesos \mathbb{Q} tiene la siguiente forma:

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

La parte del Z_k no se considera, como no hay elementos que relacionen X y Z se coloca 0.

Por tanto el Q es el mismo para el caso que no hay control preview. La matriz \mathbb{R} es la misma que sin control preview R. (Identidad).

Ya que con u no se puede modificar z, el sistema es no controlable pero es estabilizable (Sí hay solución) pero hay que partir la ecuación de Riccati en 4 partes.

Dimensiones: Si N = 100 valores futuros de Z, se tiene una ventana de 100 valores en cada instante. Las dimensiones serían:

$$E_{100 \times 100}, F_{100 \times 1}, G_{1 \times 100}$$

El tamaño de la matriz \mathbb{A} es 104x104

$$\mathbb{X}_{k+1} = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ Z_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{4 \times 4} & W_{4 \times 1} G_{1 \times 100} \\ 0_{100 \times 4} & E_{100 \times 100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ Z_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{4 \times 1} \\ 0_{100 \times 1} \end{bmatrix} u_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{4 \times 1} \\ F_{100 \times 1} \end{bmatrix} r_{k+N}}_{\text{se desperdicia}} \quad (3.60)$$

$$\mathbb{Q}_{104 \times 104} = \begin{bmatrix} Q_{4 \times 4} & 0_{4 \times 100} \\ 0_{100 \times 4} & 0_{100 \times 100} \end{bmatrix} \quad \mathbb{R} = [R_{1 \times 1}] \quad (3.61)$$

La matriz G no la usamos, esa parte la desperdiciamos (ya lo que no conocemos lo desperdiciamos) solo conocemos hasta k+N-1, k+N no se conoce. El trabajo es encontrar K_x y K_z .

3.5.1 Control en tiempo discreto

$$X_{k+1} = AX_k + BU_k \quad (3.62)$$

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} X_k^T Q X_k + U_k^T R U_k \quad (3.63)$$

La solución es:

$$U_k = -KX_k \quad (3.64)$$

$$K = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A \quad (3.65)$$

Donde P es la solución de la ecuación de Riccati en tiempo discreto. P es del mismo tamaño que A .

$$P_{104 \times 104} = A^T P A - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A + Q \quad (3.66)$$

El P lo descomponemos de la siguiente manera: Una parte Riccati y una parte Lyapunov

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \underbrace{P_{11}}_{4 \times 4} & \underbrace{P_{12}}_{4 \times 100} \\ \underbrace{P_{12}^T}_{100 \times 4} & \underbrace{P_{22}}_{100 \times 100} \end{bmatrix}$$

Como P es matriz simétrica entonces:

$$P_{11}, P_{22} \text{ son simétricas}$$

Se verá que no se requiere hallar el P_{22} solo se requiere el P_{11} y el P_{12} (Es parecido a lo que se hizo en feedback con feedforward).

Desarrollando: Matriz simétrica

$$\mathbb{A}^T \mathbf{P} \mathbb{A} = \begin{bmatrix} A^T P_{11} A & A^T P_{11} W G + A^T P_{12} E \\ G^T W^T P_{11} A + E^T P_{12}^T A & * \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

$$\mathbb{B}^T \mathbf{P} \mathbb{A} = [B^T P_{11} A \quad B^T P_{11} W G + B^T P_{12} E] \quad (3.69)$$

$$A^T P B = \begin{bmatrix} A^T P_{11} B \\ G^T W^T P_{11} B + E^T P_{12}^T B \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

$$R + B^T P B = R + B^T P_{11} B \quad (3.71)$$

Y el Q

$$Q = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Parte superior izquierda

$$P_{11} = A^T P_{11} A - A^T P_{11} B (R + B^T P_{11} B)^{-1} B^T P_{11} A + Q \quad (3.72)$$

Riccati de tiempo discreto

Solo no se conoce P_{11}

$$P_{11} = \text{dare}(A, B, Q, R)$$

Parte superior derecha

$$P_{12} = A^T P_{11} W G + A^T P_{12} E - A^T P_{11} B (R + B^T P_{11} B)^{-1} (B^T P_{11} W G + B^T P_{12} E) \quad (3.73)$$

Lo único que no se conoce es P_{12} porque P_{11} ya se conoce. Esta vendría a ser la ecuación de Lyapunov en tiempo discreto. P_{12} es de 4x100. Matlab no resuelve estas matrices. Se tiene que ver la manera de resolver tomando en cuenta que son matrices especiales de 0 y 1.y se llega a una solución completa. Con un trabajo algebraico.

$$U_k = -K X_k$$

$$U_k = -[K_x \quad K_z] \begin{bmatrix} X_k \\ Z_k \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

$$K_x = (R + B^T P_{11} B)^{-1} B^T P_{11} A \quad (3.75)$$

$$K_z = (R + B^T P_{11} B)^{-1} (B^T P_{11} W G + B^T P_{12} E) \quad (3.76)$$

En la ecuación de Lyapunov para P_{12} : acomodamos:

$$P_{12} = A^T P_{11} W G + A^T P_{12} E - \underbrace{A^T P_{11} B (R + B^T P_{11} B)^{-1}}_{K_x^T} (B^T P_{11} W G + B^T P_{12} E) \quad (3.77)$$

Por tener elementos simétricos una parte de la ecuación de Lyapunov es K_x^T

De manera que agrupando y simplificando:

$$P_{12} = (A^T - K_x^T B^T)P_{11}WG + (A^T - K_x^T B^T)P_{12}E$$

$$P_{12} = (A - BK_x)^T P_{11}WG + (A - BK_x)^T P_{12}E$$

Donde se observa la matriz de lazo cerrado A_{cl} si solo hubiese realimentación (sin preview)

$$P_{12} = \underbrace{(A - BK_x)^T}_{A_{cl}} P_{11}WG + \underbrace{(A - BK_x)^T}_{A_{cl}} P_{12}E$$

$$P_{12} = A_{cl}^T P_{11}WG + A_{cl}^T P_{12}E \quad (3.78)$$

El P_{12} era de $(4 \times N)$. Son N columnas de 4×1 y se quiere encontrar cada una de ellas.

$$\underbrace{P_{12}}_{4 \times N} = \left[\underbrace{P_1}_{4 \times 1} \quad \underbrace{P_2}_{4 \times 1} \quad \underbrace{P_3}_{4 \times 1} \quad \cdots \quad \underbrace{P_N}_{4 \times 1} \right]$$

Teniendo en cuenta las forma de las matrices E y G con 0 y 1s. Se realiza la multiplicación:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_E \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_G$$

$$P_{12} = \left[\underbrace{A_{cl}^T P_{11} W}_{4 \times 1} \quad \underbrace{0}_{4 \times 1} \quad \underbrace{0}_{4 \times 1} \quad \cdots \quad \underbrace{0}_{4 \times 1} \right] + A_{cl}^T \left[\underbrace{0}_{4 \times 1} \quad \underbrace{P_1}_{4 \times 1} \quad \underbrace{P_2}_{4 \times 1} \quad \cdots \quad \underbrace{P_{99}}_{4 \times 1} \right] \quad (3.79)$$

Donde los elementos resultan al sumar;

$$P_1 = A_{cl}^T P_{11} W \quad (3.80)$$

$$P_2 = A_{cl}^T P_1 = (A_{cl}^T)^2 P_{11} W \quad (3.81)$$

$$P_3 = A_{cl}^T P_2 = (A_{cl}^T)^3 P_{11} W \quad (3.82)$$

$$P_N = (A_{cl}^T)^N P_{11} W \quad (3.83)$$

Debido a que la matriz A_{cl} es estable a mayor exponente se hace más pequeña. De manera que:

$$\underbrace{P_{12}}_{4 \times N} = \left[\underbrace{A_{cl}^T}_{4 \times 4} \quad \underbrace{(A_{cl}^T)^2}_{4 \times 4} \quad \underbrace{(A_{cl}^T)^3}_{4 \times 4} \quad \cdots \quad \underbrace{(A_{cl}^T)^N}_{4 \times 4} \right] P_{11} W \quad (3.84)$$

Hallamos el K_z

$$K_z = (R + B^T P_{11} B)^{-1} (B^T P_{11} W G + B^T P_{12} E)$$

Extraemos la parte constante:

$$K_z = \underbrace{(R + B^T P_{11} B)^{-1} B^T}_V (P_{11} W G + P_{12} E)$$

$$K_z = V(P_{11}WG + P_{12}E) \quad (3.85)$$

Reemplazando el P_{12} :

$$K_z = V \left(\left[\begin{array}{c|ccc} \frac{P_{11}W}{4x1} & \underbrace{0}_{4x1} & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] + \left[0 \quad A_{cl}^T P_{11}W \quad (A_{cl}^T)^2 P_{11}W \quad \cdots \quad (A_{cl}^T)^{N-1} P_{11}W \right] \right)$$

$$K_z = \underbrace{V}_{1x4} \left[\underbrace{I}_{4x4} \quad A_{cl}^T \quad (A_{cl}^T)^2 \quad \cdots \quad (A_{cl}^T)^{N-1} \right] \underbrace{P_{11}}_{4x4} \underbrace{W}_{4x1} \quad (3.86)$$

$$K_z = [* \quad * \quad * \quad \cdots \quad *]_{1xN}$$

Es la ventana que se va incrementando

$$k \rightarrow k + 99$$

$$k + 1 \rightarrow k + 100$$

$$k + 2 \rightarrow k + 101$$

De manera que:

$$U_k = -K_x X_k - \underbrace{K_z}_{1x100} \underbrace{\begin{bmatrix} Z_k \\ r_k \\ r_{k+1} \\ \vdots \\ r_{k+99} \end{bmatrix}}_{Z_k} \quad (3.87)$$

El diagrama de flujo de los programas desarrollados se encuentra en el capítulo 4 del presente documento.

3.6 Pruebas de simulación del controlador óptimo preview con el modelo de la planta esfera plano

3.6.1 Control óptimo preview para la posición de una esfera sobre un plano

Usando los datos iniciales:

Masa de la esfera = 0.024 Kg

Radio de la esfera = 0.02 m

Distancia del cardan joint al plano = 0.122 m

Momento de inercia entre el eje X y el eje Y = $6.4 * 10^{-6}$ Kg.m²

Gravedad = 9.81 m/s²

Matriz de pesos del controlador:

$$Q = \begin{bmatrix} 2 * 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 * 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 * 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 * 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 * 10^4 \end{bmatrix}$$

Para un tiempo preview de 0.1 s:

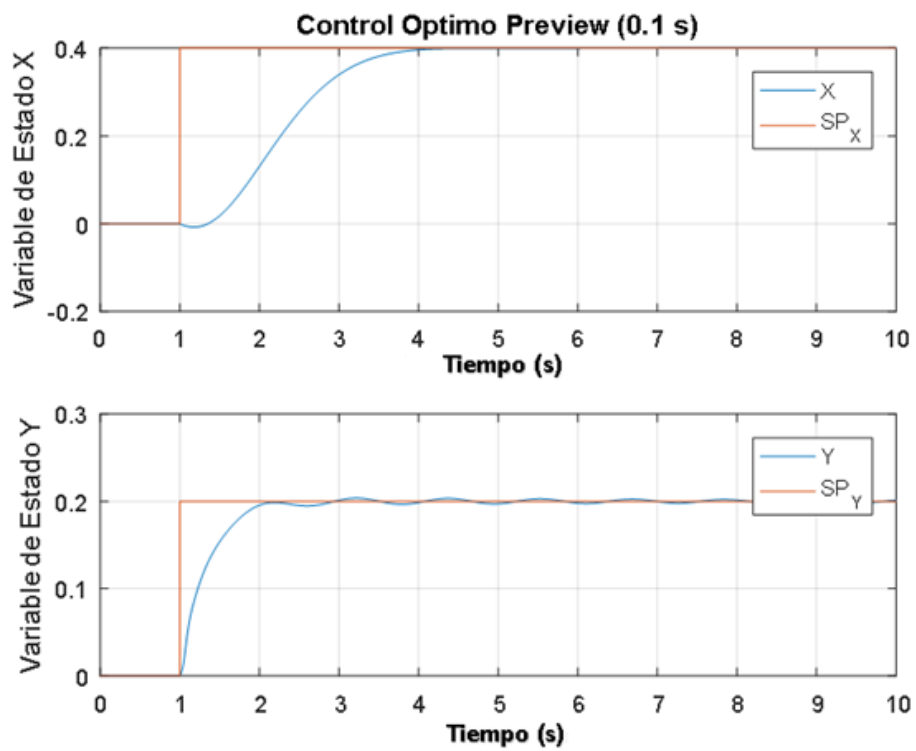


Figura 3.1. Variables de estado para control de posición con tiempo preview 0.1 seg.

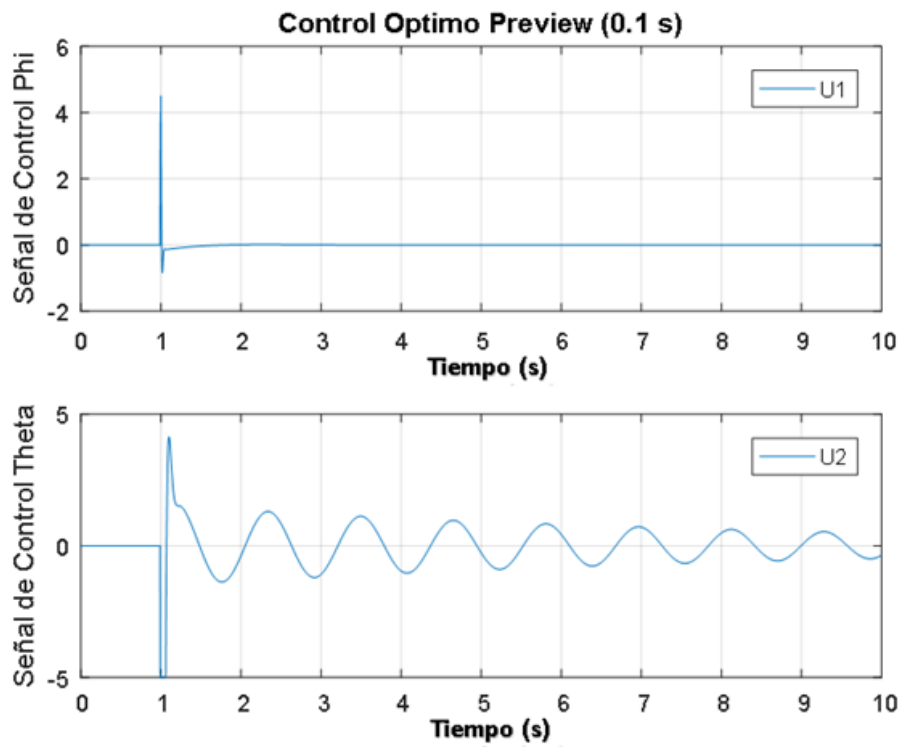


Figura 3.2. Señales de control para control de posición con tiempo preview 0.1 seg.

Para un tiempo preview de 0.2 s:

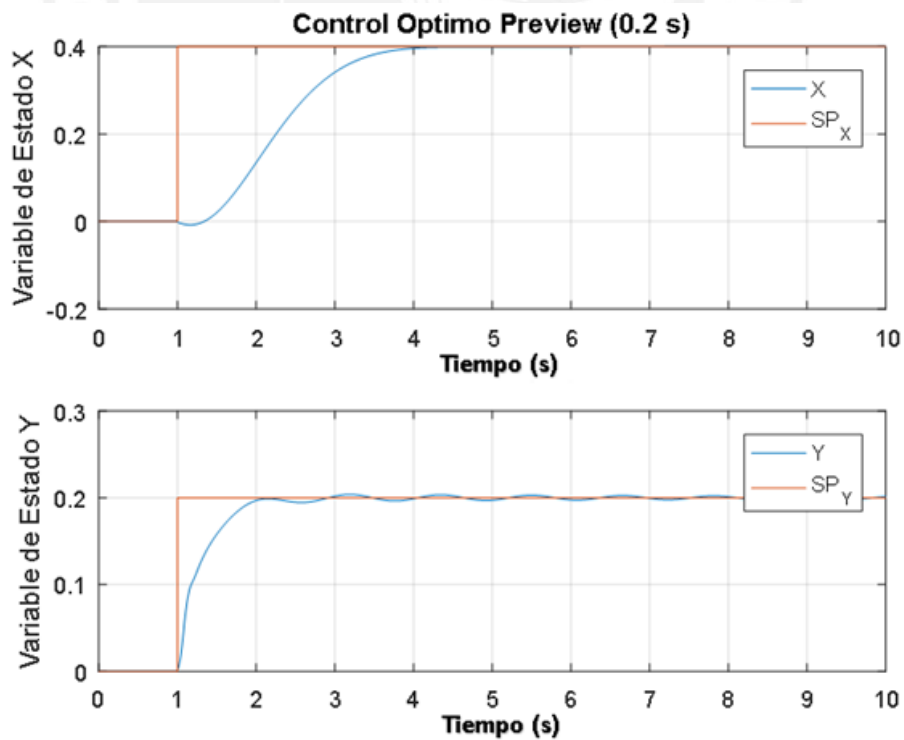


Figura 3.3. Variables de estado para control de posición con tiempo preview 0.2 seg.

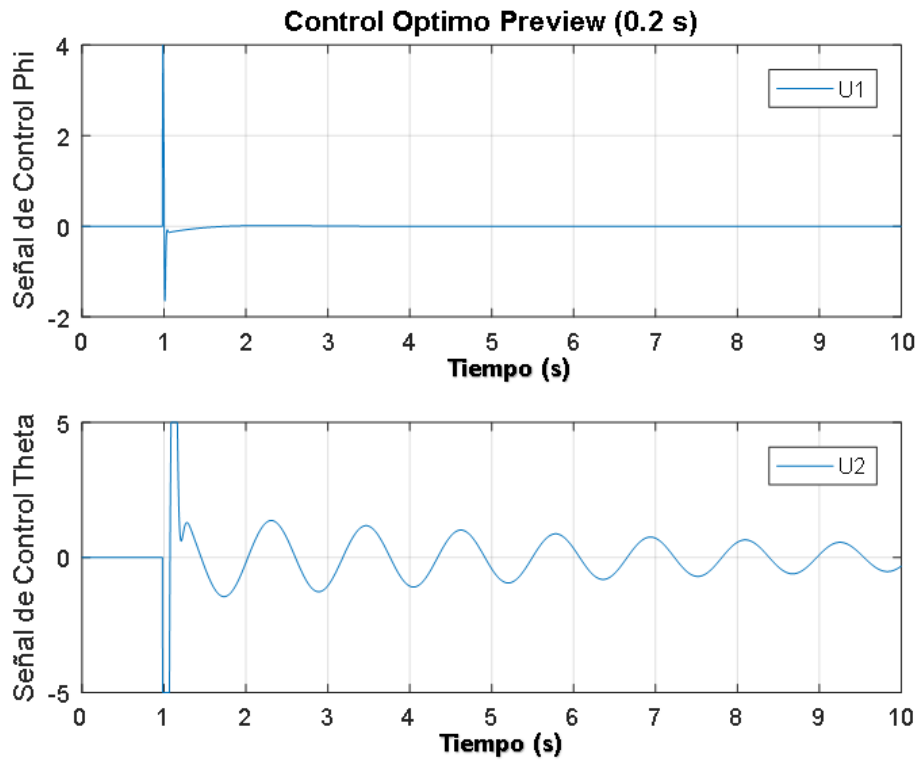


Figura 3.4. Señales de control para control de posición con tiempo preview 0.2 seg.

Para un tiempo preview de 0.3 s:

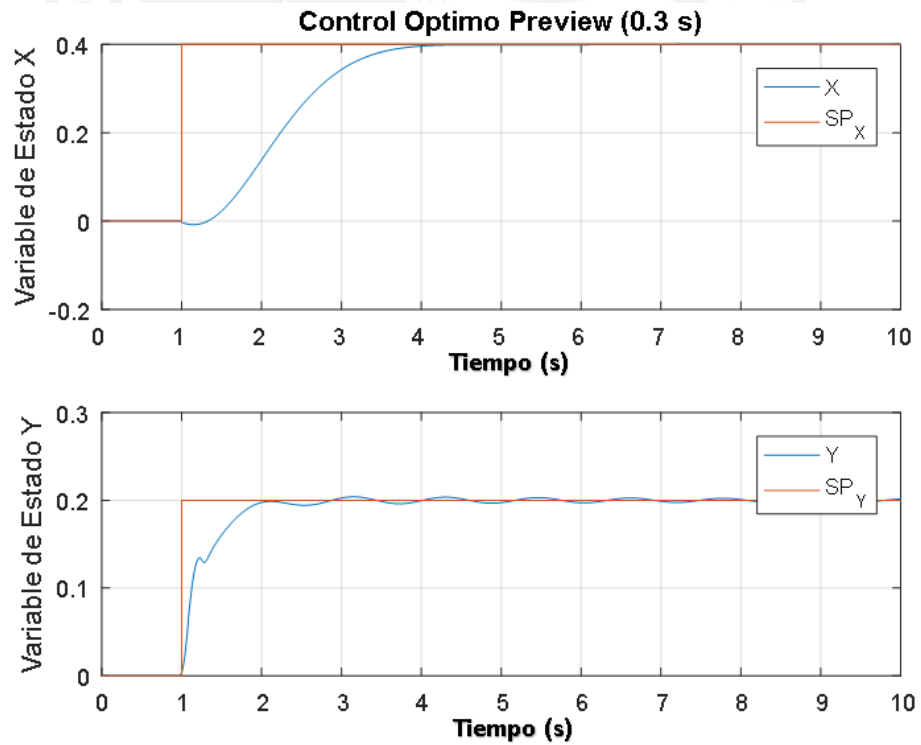


Figura 3.5. Variables de estado para control de posición con tiempo preview 0.3 seg.

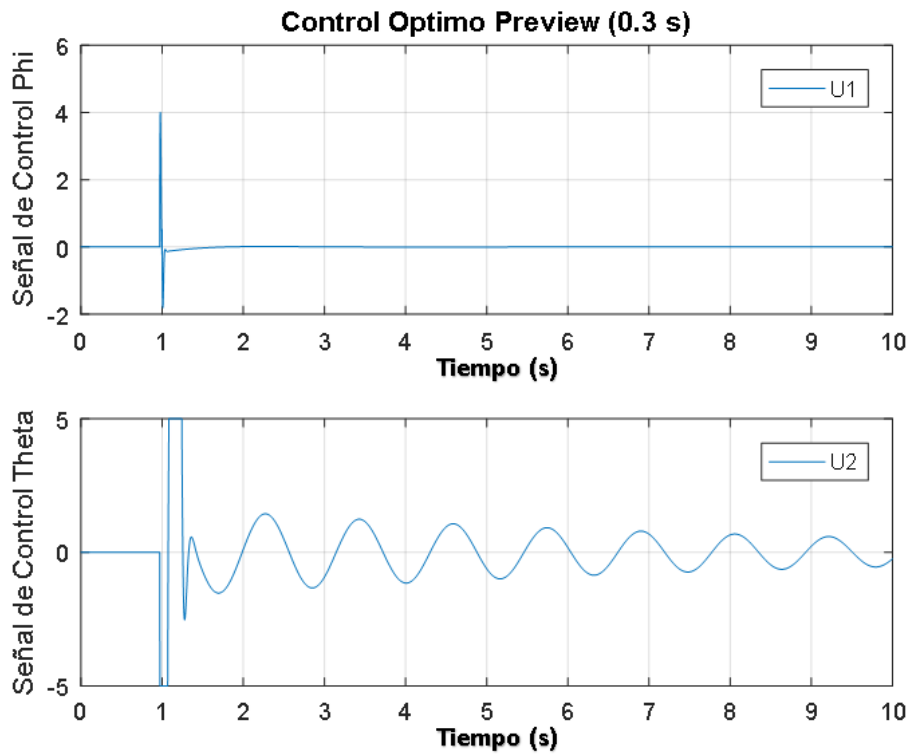


Figura 3.6. Señales de control para control de posición con tiempo preview 0.3 seg.

Para un tiempo preview de 0.4 s:

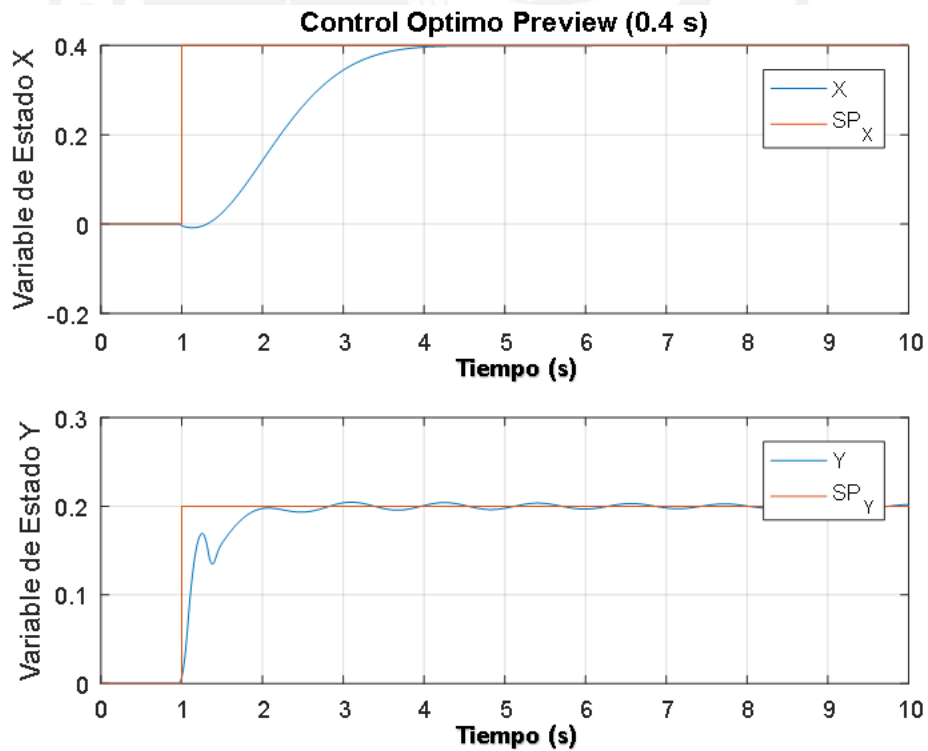


Figura 3.7. Variables de estado para control de posición con tiempo preview 0.4 seg.

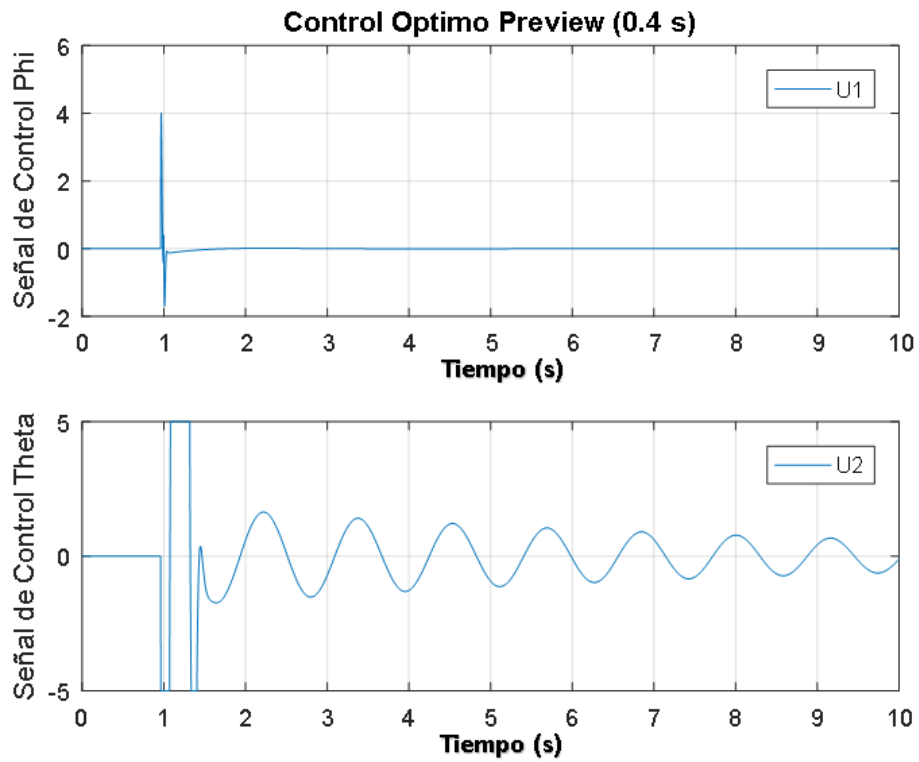


Figura 3.8. Señales de control para control de posición con tiempo preview 0.4 seg.

Para un tiempo preview de 0.5 s:

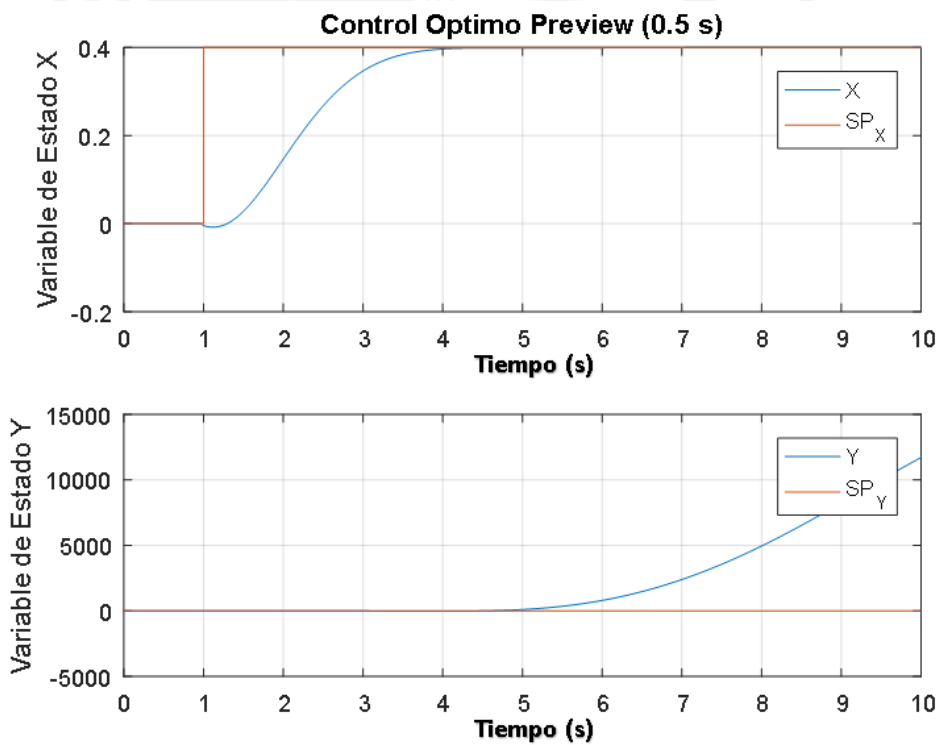


Figura 3.9. Variables de estado para control de posición con tiempo preview 0.5 seg.

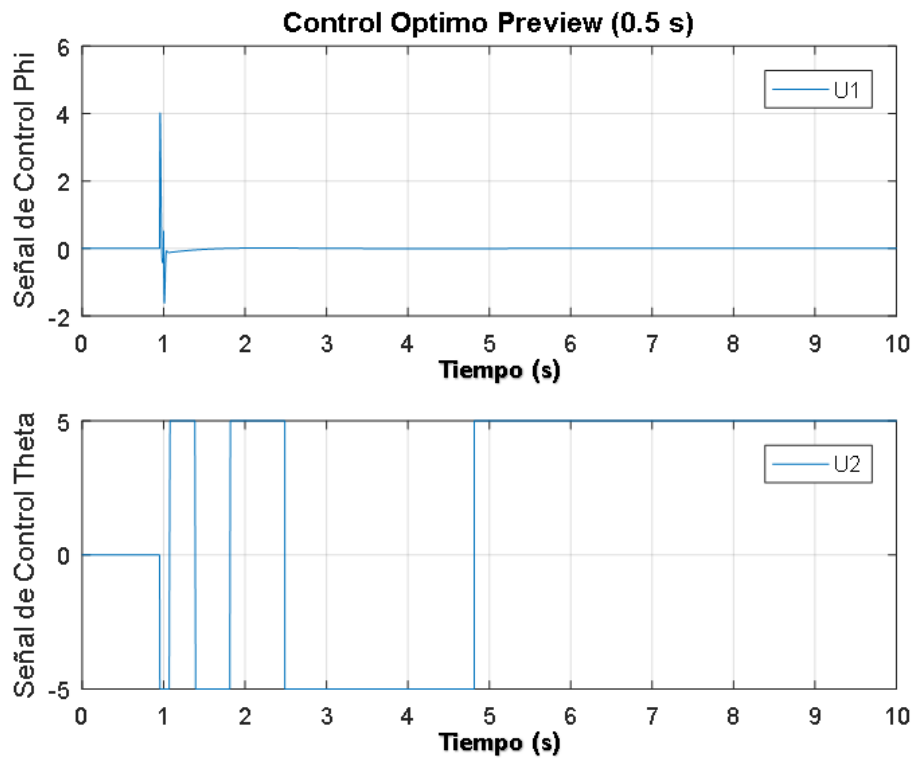


Figura 3.10. Señales de control para control de posición con tiempo preview 0.5 seg.

Conclusión:

Para los casos anteriormente presentados, las variables de estado llegan al valor deseado, sin presentar oscilaciones considerables, al igual que la señal de control Phi, sin embargo, la señal de control Theta si muestra una ligera oscilación que tiende a desaparecer luego de un tiempo considerable.

Conforme aumente el tiempo del preview, las variables de estado tienden a llegar al valor deseado ligeramente más rápido, sin embargo, cuando $t_p = 0.5s$ el control se vuelve inestable, concluyéndose que el tiempo preview no debe ser mayor o igual a 0.5 segundos para el control de posición en específico.

3.6.2 Control óptimo preview para el seguimiento de trayectorias de una esfera sobre un plano

Usando los datos iniciales:

Masa de la esfera = 0.024 Kg

Radio de la esfera = 0.02 m

Distancia del cardan joint al plano = 0.122 m

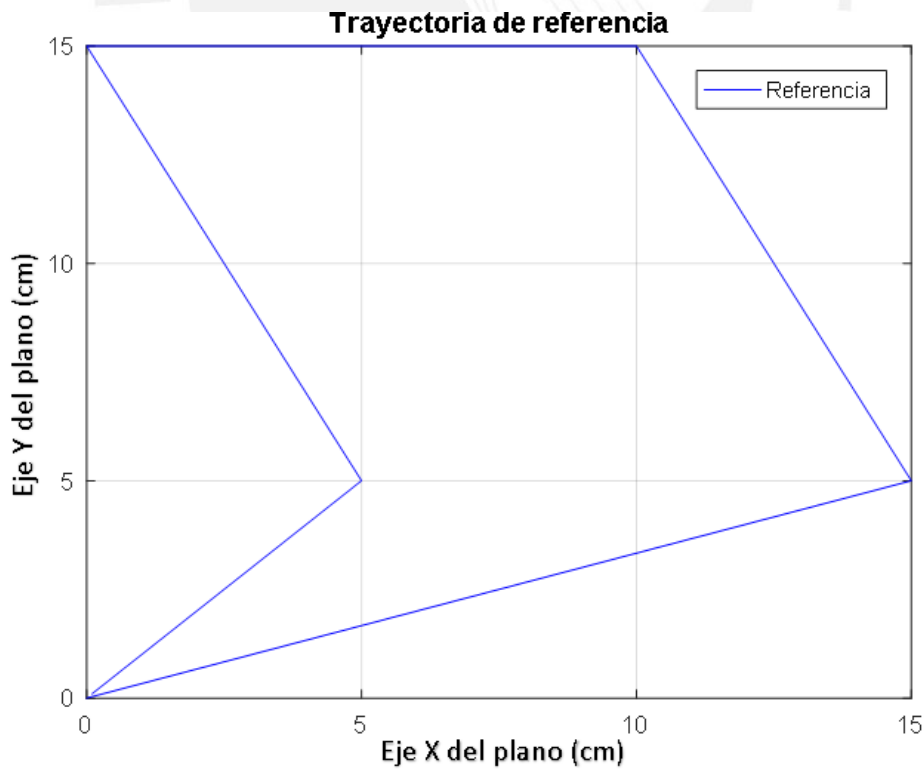
*Momento de inercia entre el eje X y el eje Y = $6.4 * 10^{-6} \text{ Kg.m}^2$*

Gravedad = 9.81 m/s^2

Matriz de pesos del controlador:

$$Q = \begin{bmatrix} 10^8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10^8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^8 \end{bmatrix}$$

Trayectoria a seguir:



Figura

3.11. Trayectoria de referencia para el control de seguimiento

Para un tiempo preview de 0.1 s:

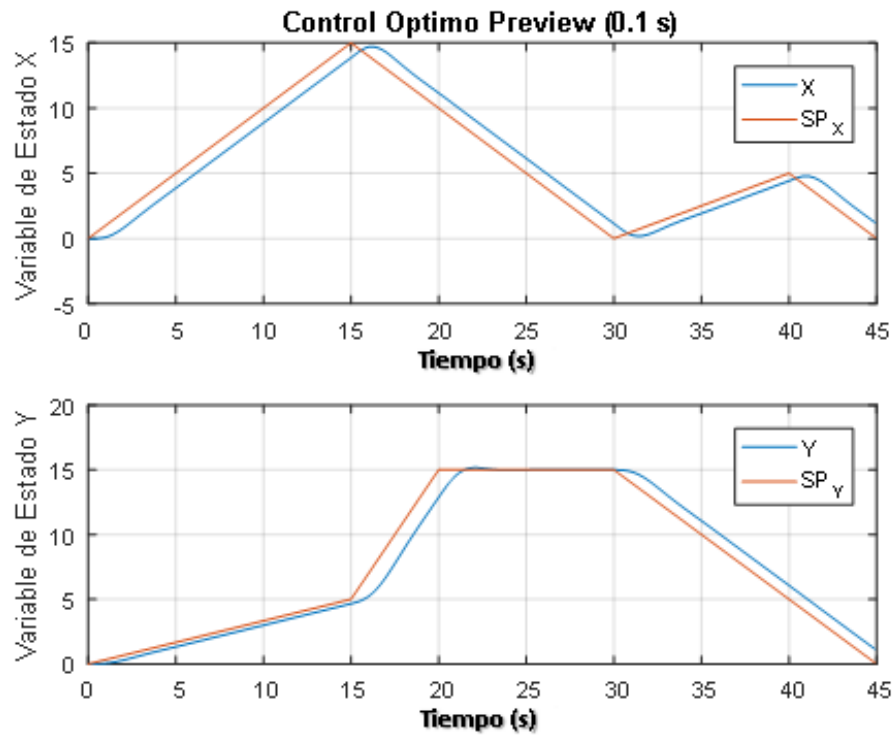


Figura 3.12. Variables de estado para control de trayectoria con tiempo preview 0.1 seg.

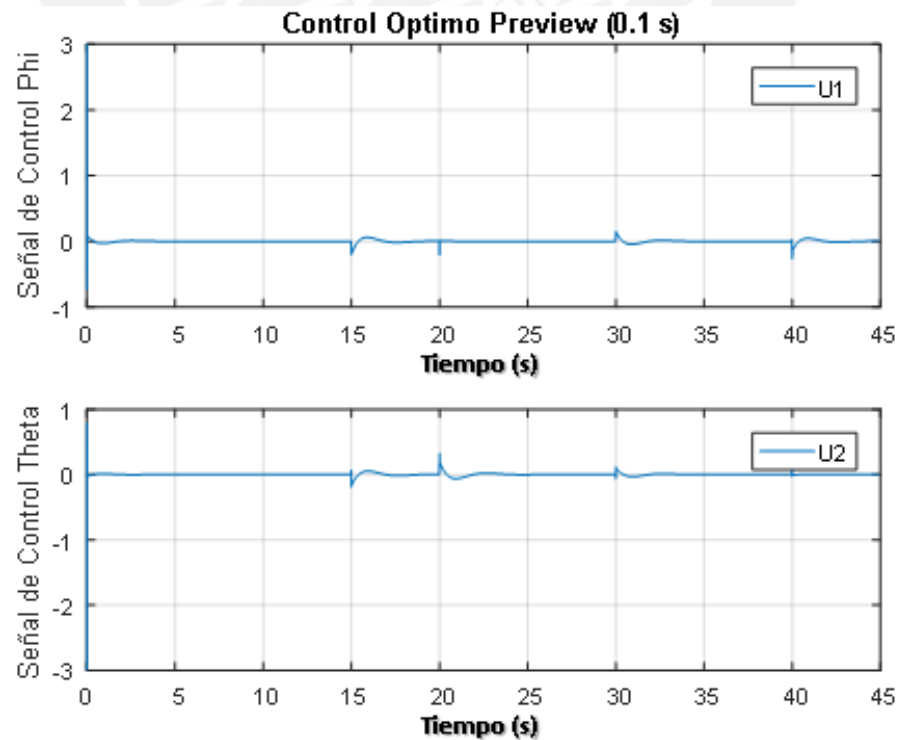


Figura 3.13. Señales de control para control de trayectoria con tiempo preview 0.1 seg.

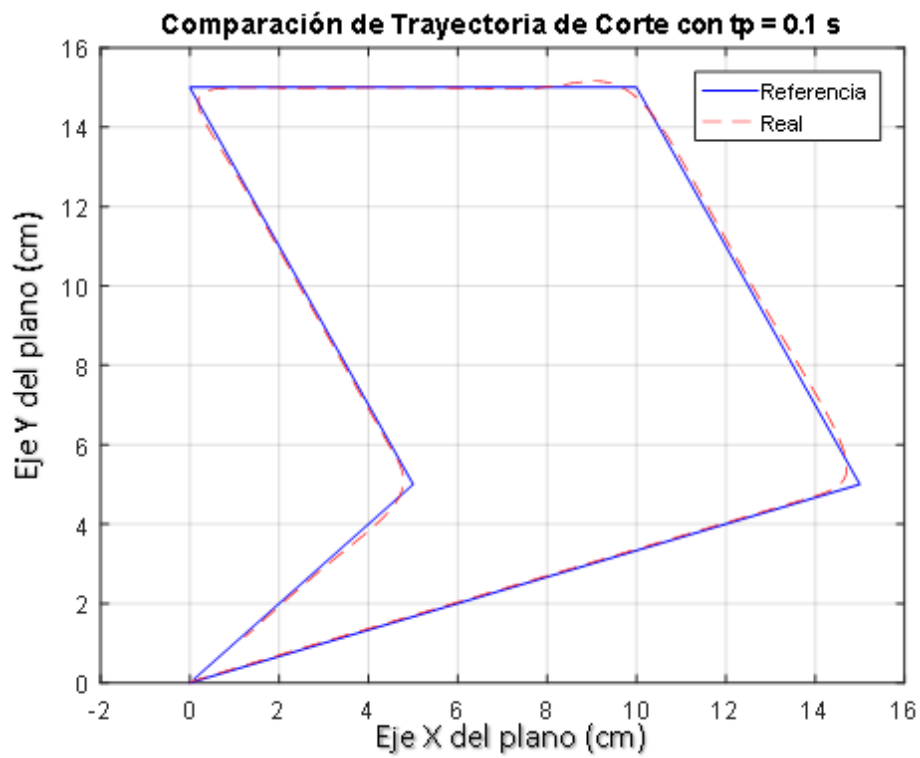


Figura 3.14. Trayectoria obtenida con tiempo preview 0.1 seg. vs trayectoria de referencia

Para un tiempo preview de 0.2 s:

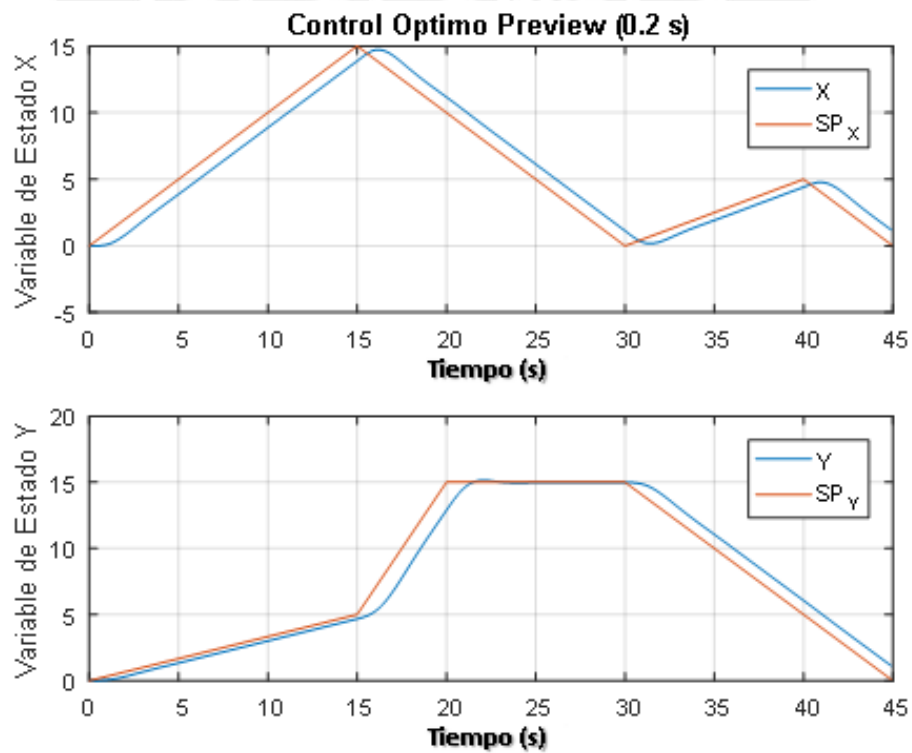


Figura 3.15. Variables de estado para control de trayectoria con tiempo preview 0.2 seg.

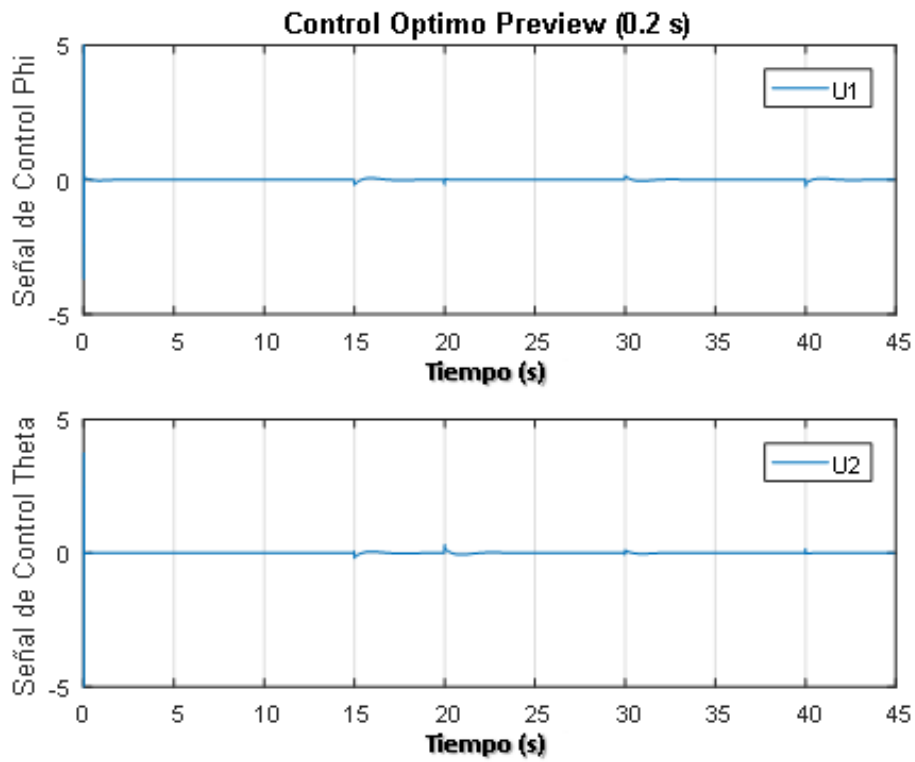


Figura 3.16. Señales de control para control de trayectoria con tiempo preview 0.2 seg.

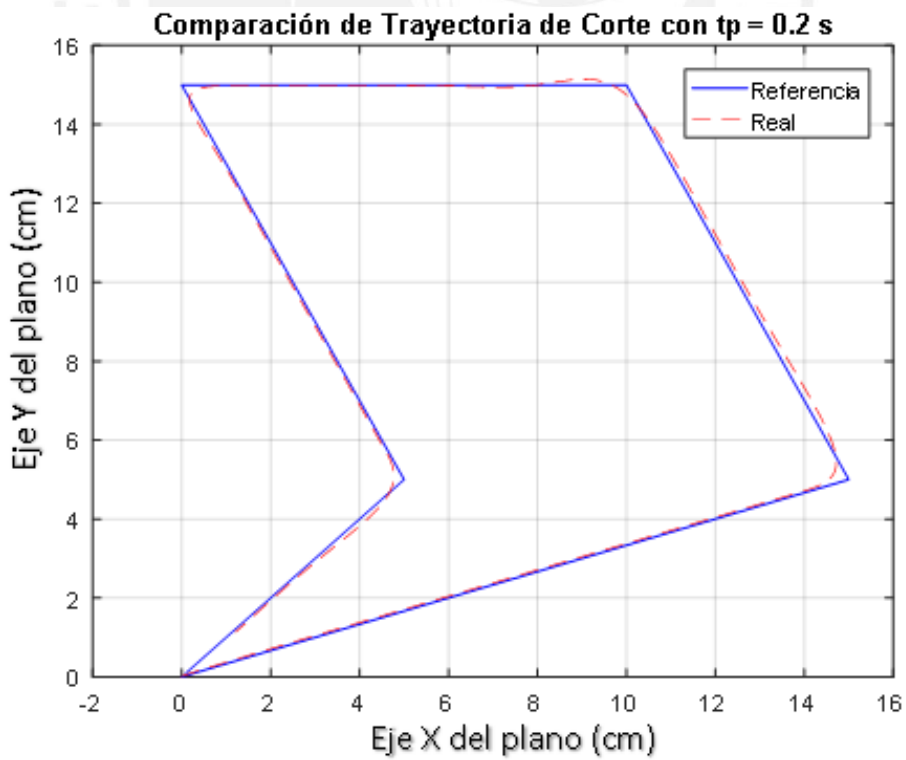


Figura 3.17. Trayectoria obtenida con tiempo preview 0.2 seg. vs trayectoria de referencia

Para un tiempo preview de 0.3 s:

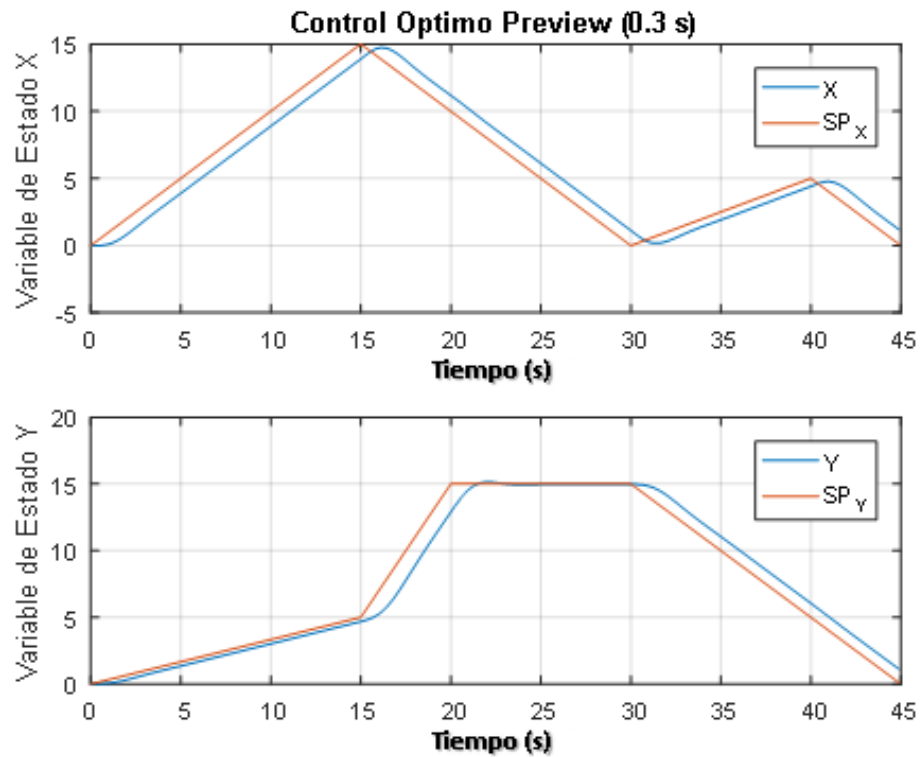


Figura 3.18. Variables de estado para control de trayectoria con tiempo preview 0.3 seg.

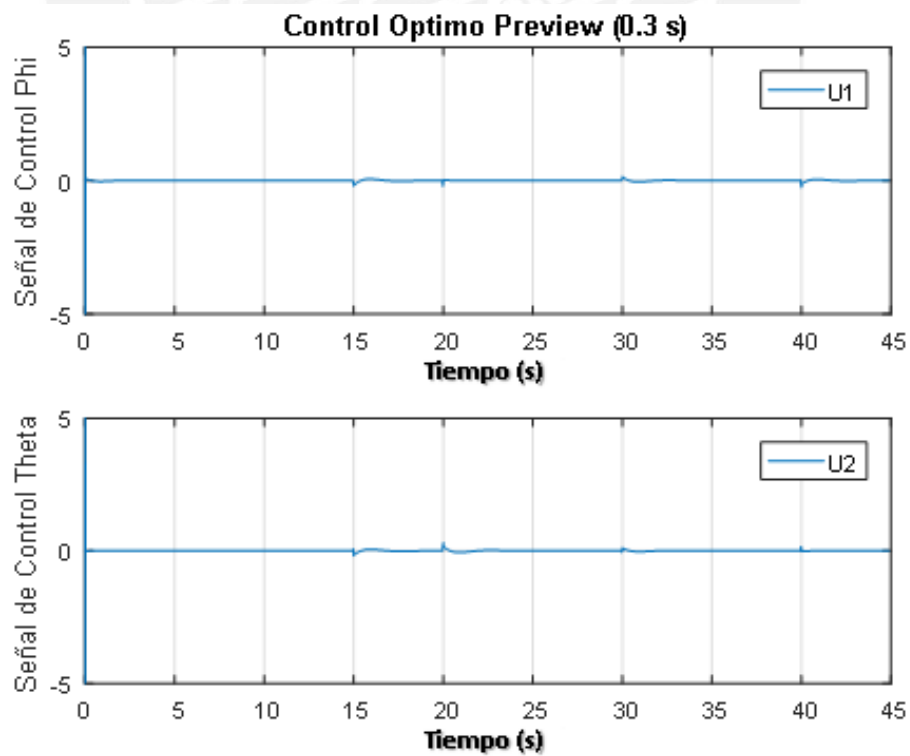


Figura 3.19. Señales de control para control de trayectoria con tiempo preview 0.3 seg.

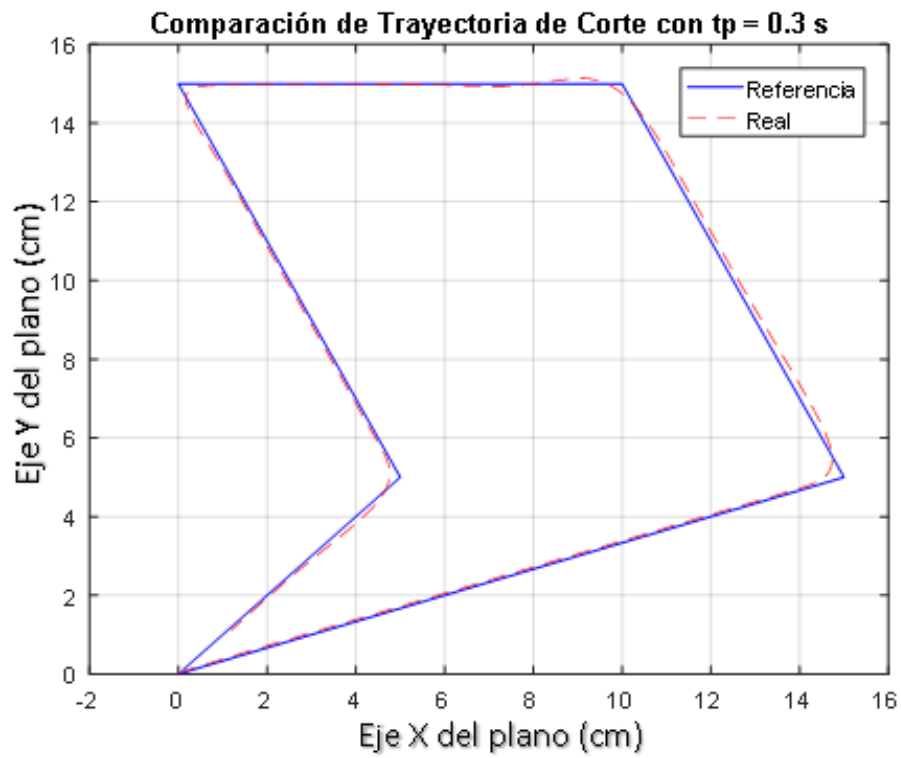


Figura 3.20. Trayectoria obtenida con tiempo preview 0.3 seg. vs trayectoria de referencia

Para un tiempo preview de 0.4 s:

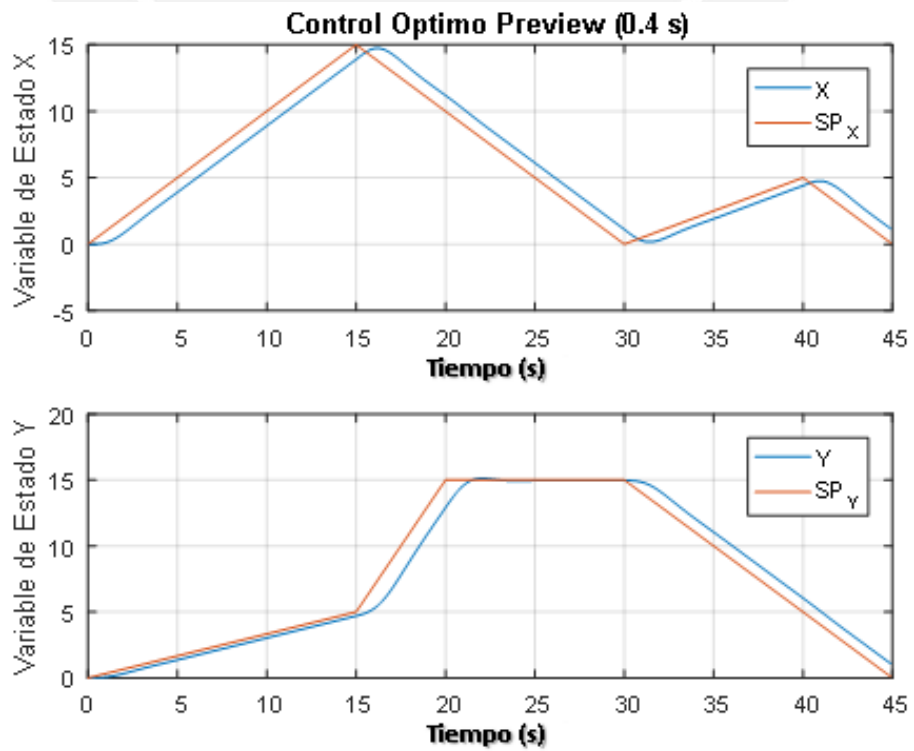


Figura 3.21. Variables de estado para control de trayectoria con tiempo preview 0.4 seg.

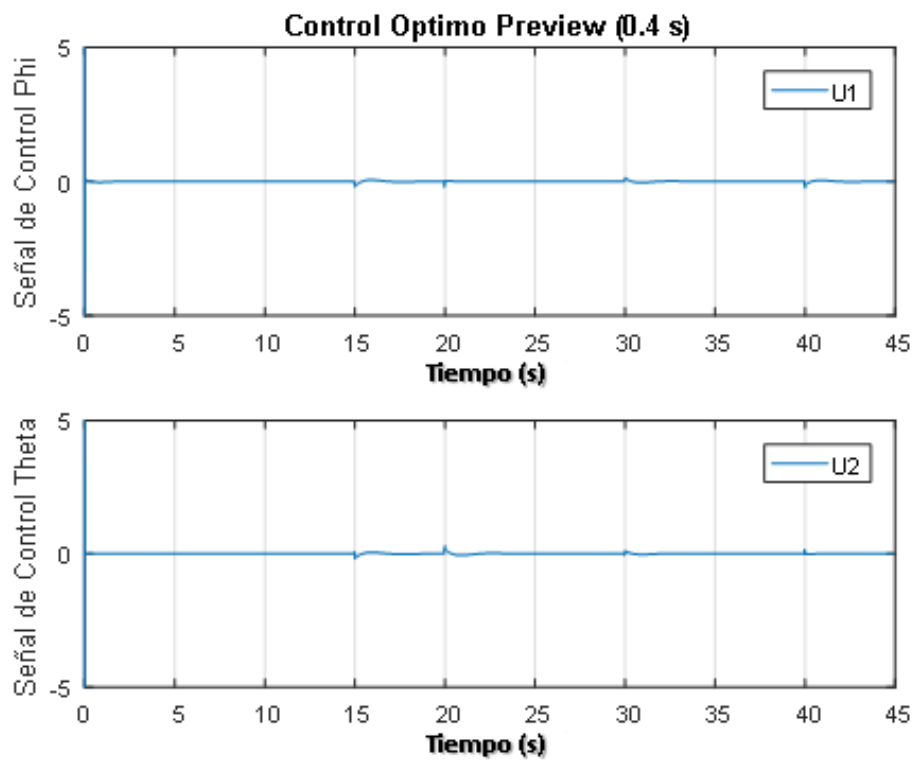


Figura 3.22. Señales de control para control de trayectoria con tiempo preview 0.4 seg.

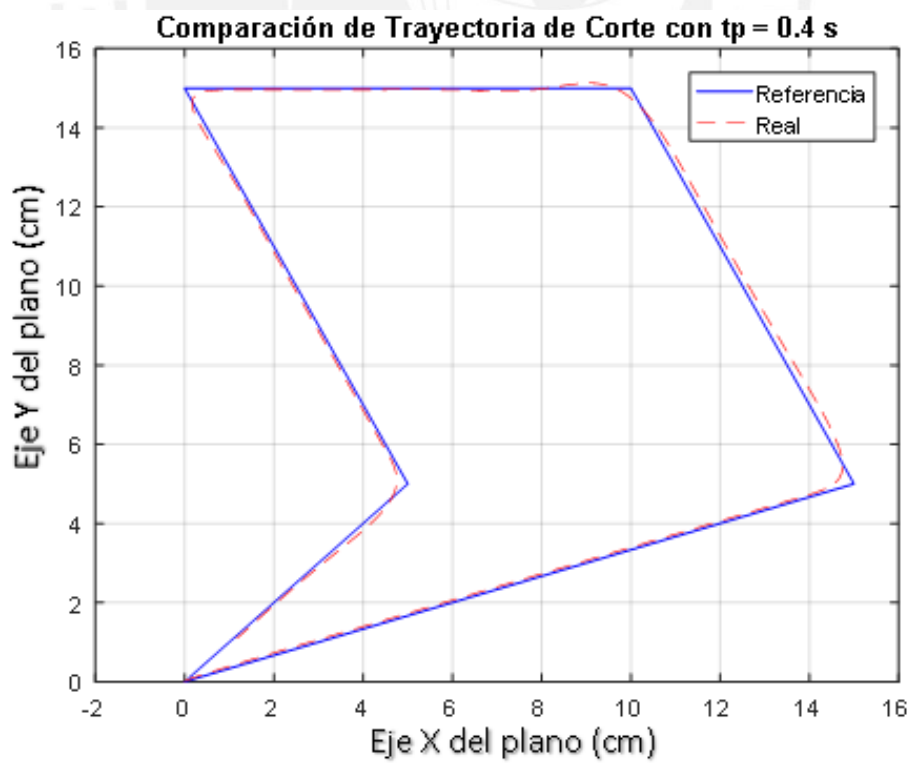


Figura 3.23. Trayectoria obtenida con tiempo preview 0.4 seg. vs trayectoria de referencia

Para un tiempo preview de 0.5 s:

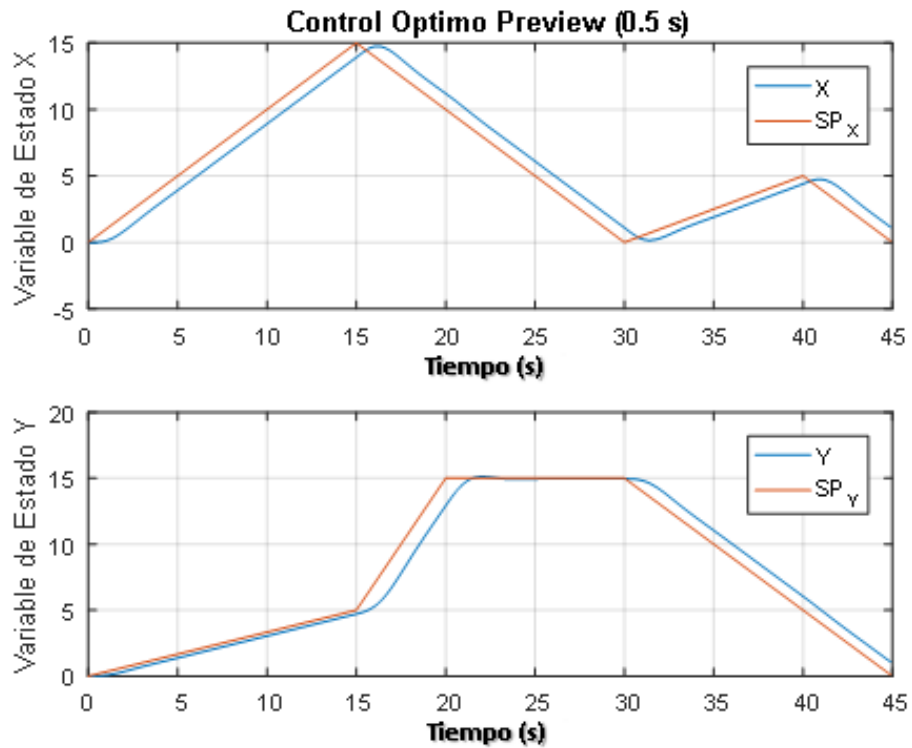


Figura 3.24. Variables de estado para control de trayectoria con tiempo preview 0.5 seg.

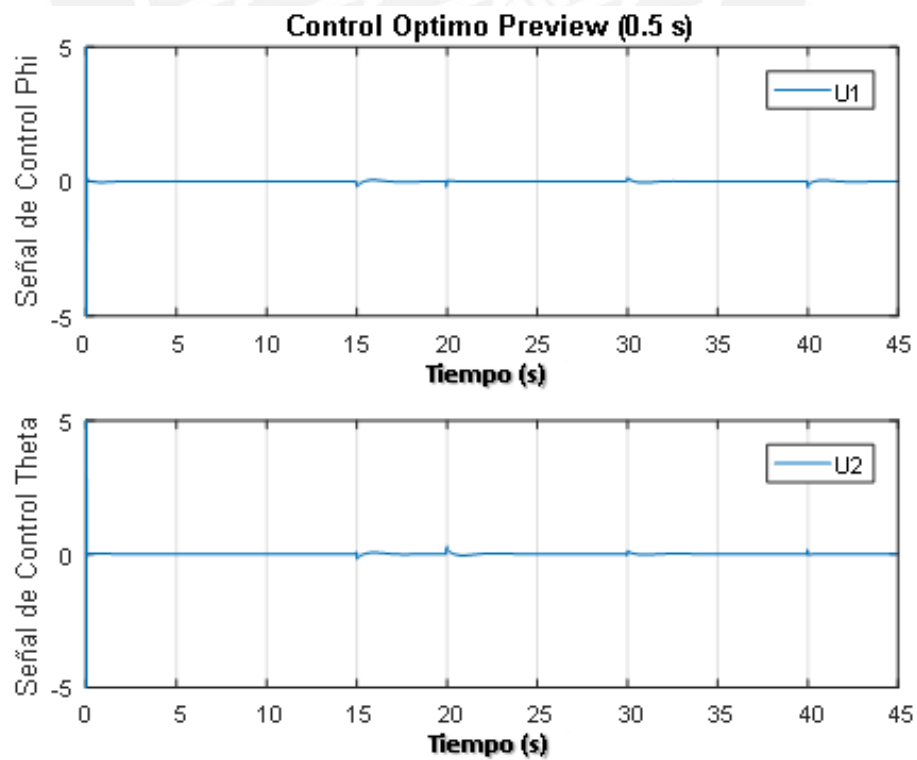


Figura 3.25. Señales de control para control de trayectoria con tiempo preview 0.5 seg.

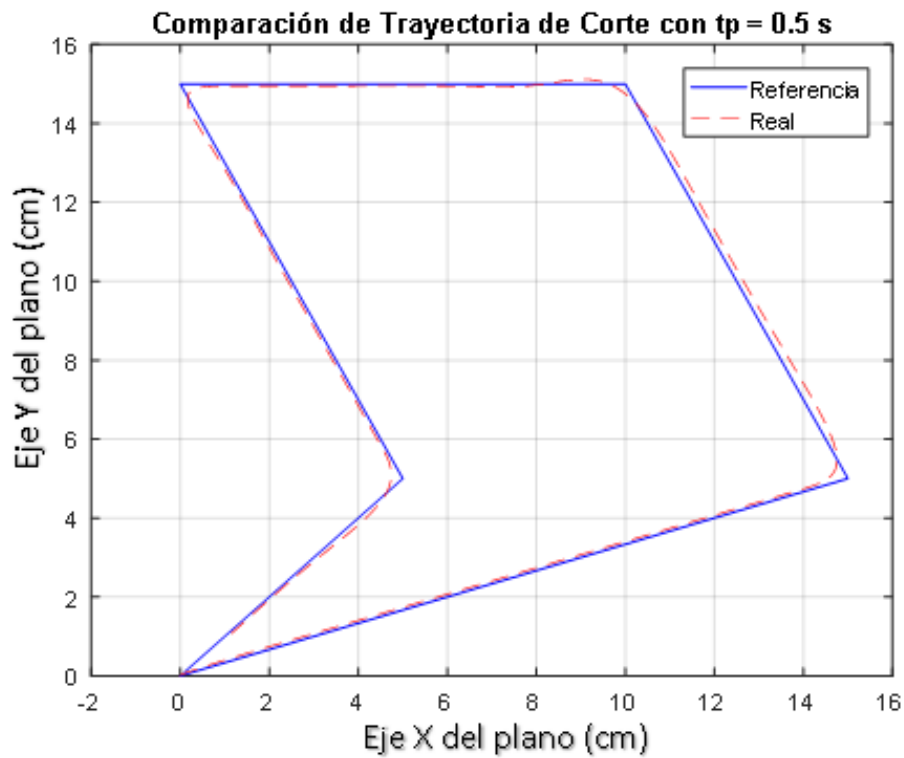


Figura 3.26. Trayectoria obtenida con tiempo preview 0.5 seg. vs trayectoria de referencia

Conclusión:

Para los casos anteriormente presentados, las variables de estado llegan al valor deseado, sin presentar oscilaciones considerables, al igual que la señal de control Phi y Theta.

Conforme aumente el tiempo del preview, las variables de estado tienden a llegar al valor deseado ligeramente más rápido, sin embargo, cuando $t_p > 0.5s$ el control se vuelve inestable, concluyéndose que el tiempo preview no debe exceder a 0.5 segundos para el control de seguimiento de trayectorias en específico.

3.6.3 Control óptimo preview para el seguimiento de trayectoria circular de una esfera sobre un plano

Usando los datos iniciales:

Masa de la esfera = 0.024 Kg

Radio de la esfera = 0.02 m

Distancia del cardan joint al plano = 0.122 m

*Momento de inercia entre el eje X y el eje Y = $6.4 * 10^{-6} \text{ Kg.m}^2$*

Gravedad = 9.81 m/s^2

Matriz de pesos del controlador:

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Trayectoria a seguir:

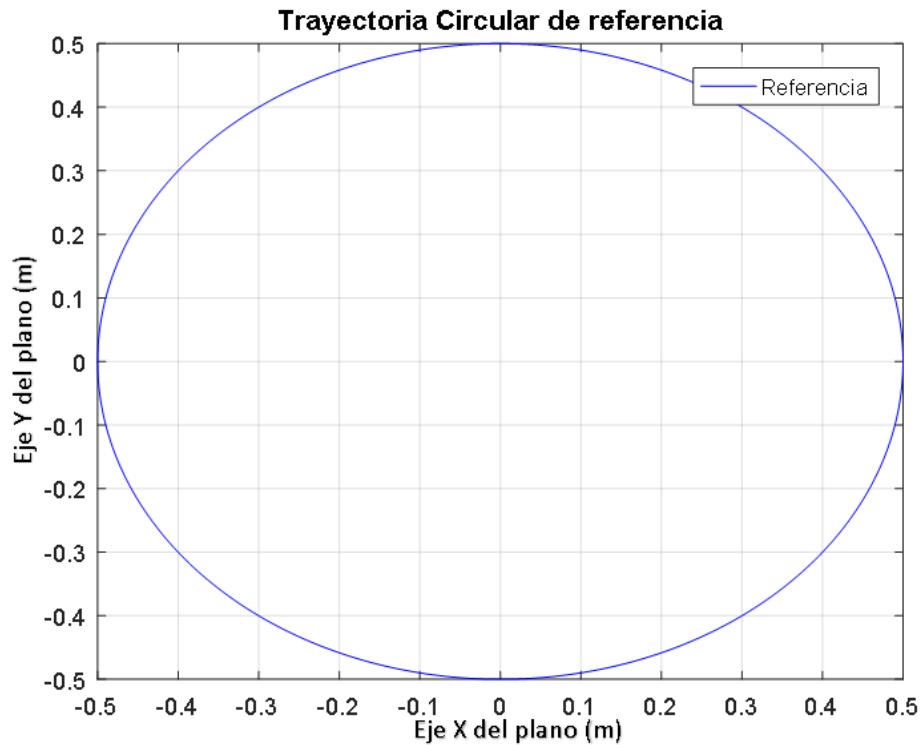


Figura 3.27. Trayectoria circular de referencia para el control de seguimiento

Para un tiempo preview de 0.1 s:

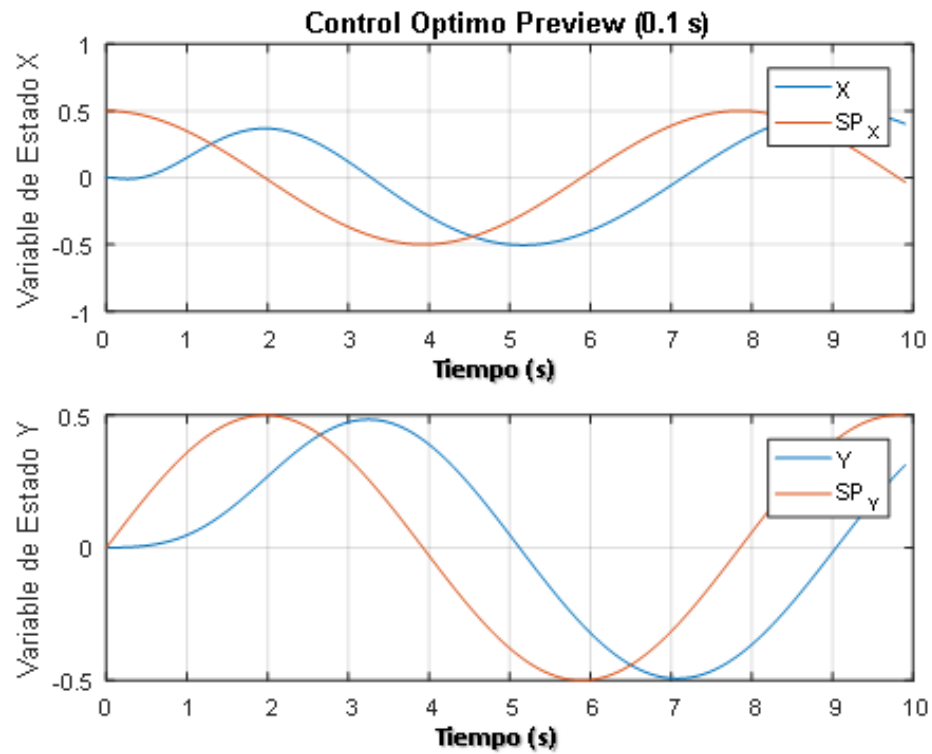


Figura 3.28. Variables de estado para control de trayectoria circular con tiempo preview 0.1 seg.

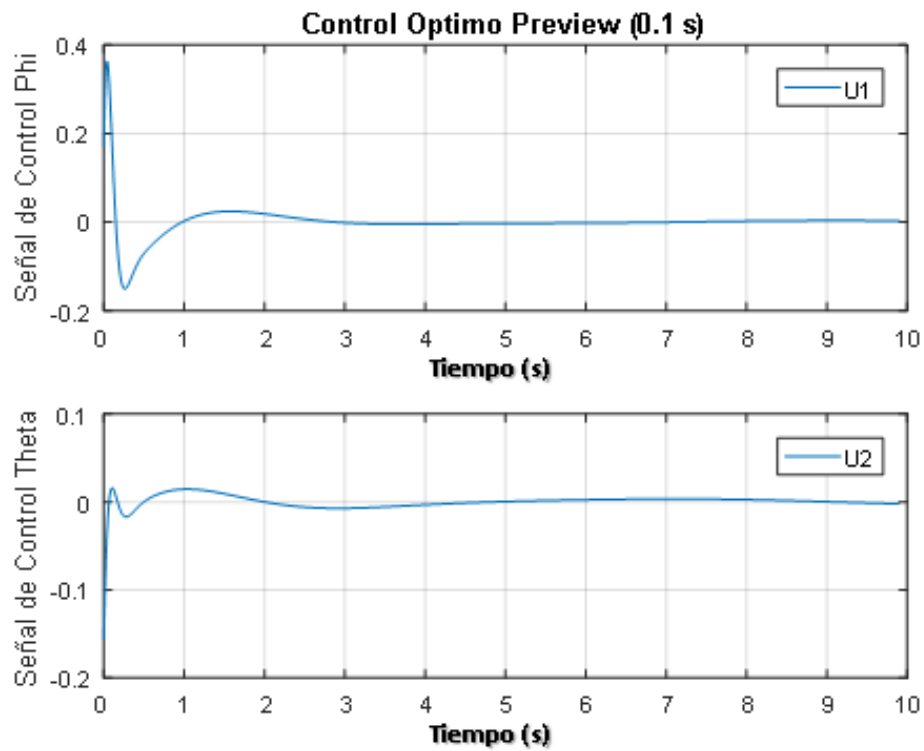


Figura 3.29. Señales de control para control de trayectoria circular con tiempo preview 0.1 seg.

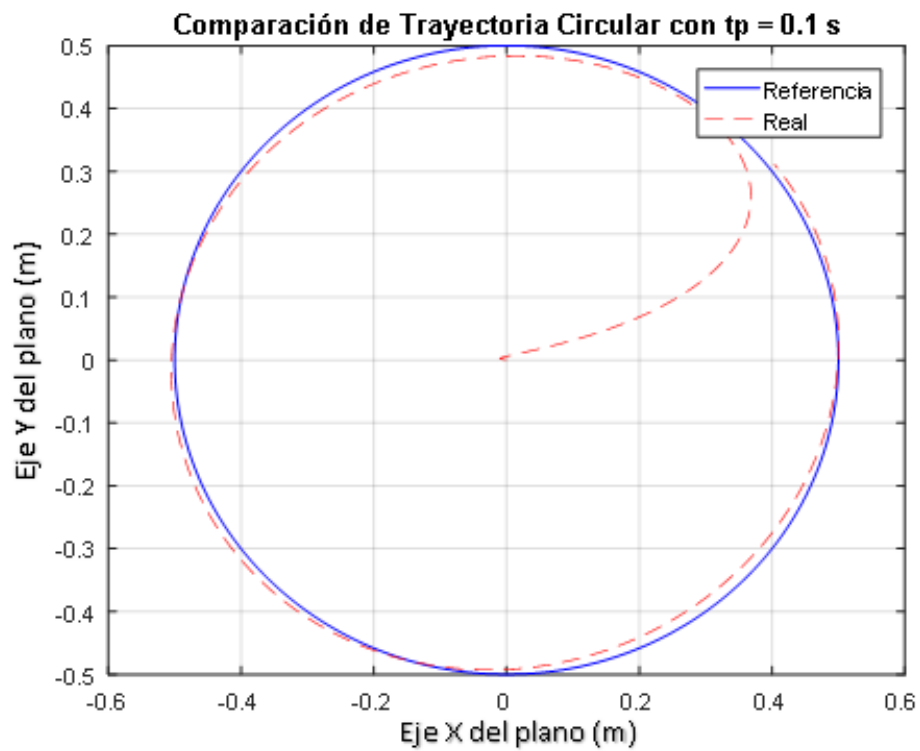


Figura 3.30. Trayectoria circular con tiempo preview 0.1 seg. vs trayectoria referencia

Para un tiempo preview de 0.2 s:

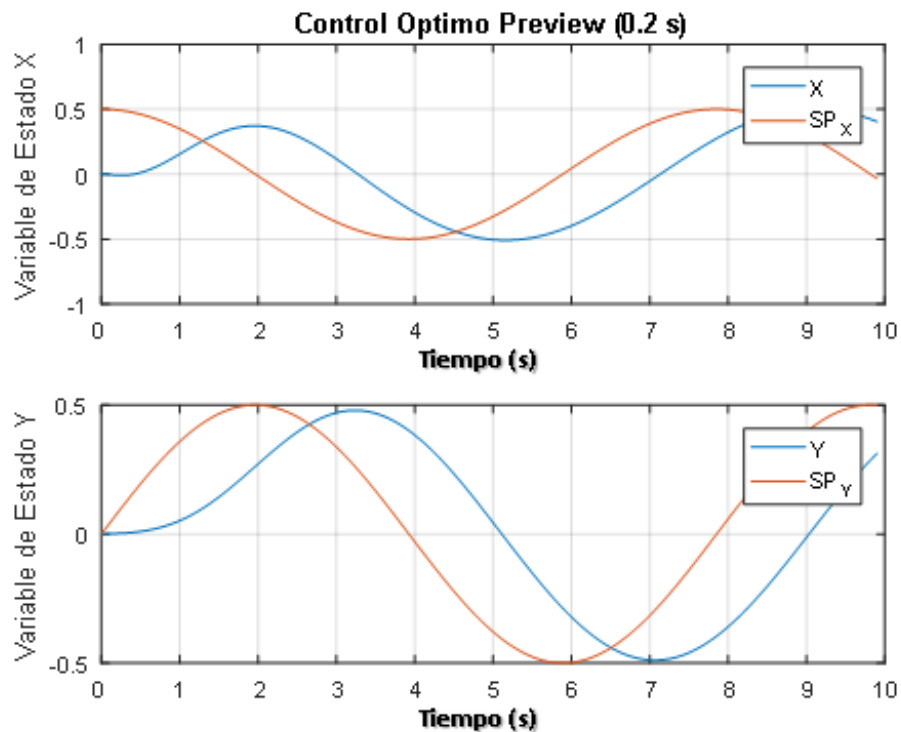


Figura 3.31. Variables de estado para control de trayectoria circular con tiempo preview 0.2 seg.

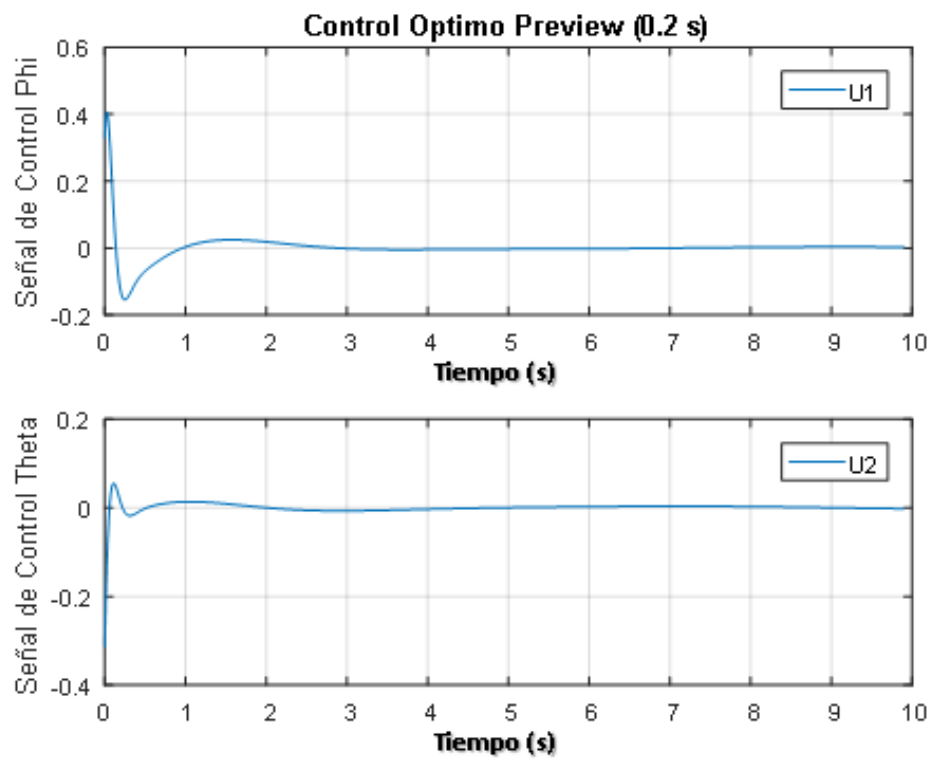


Figura 3.32. Señales de control para control de trayectoria circular con tiempo preview 0.2 seg.

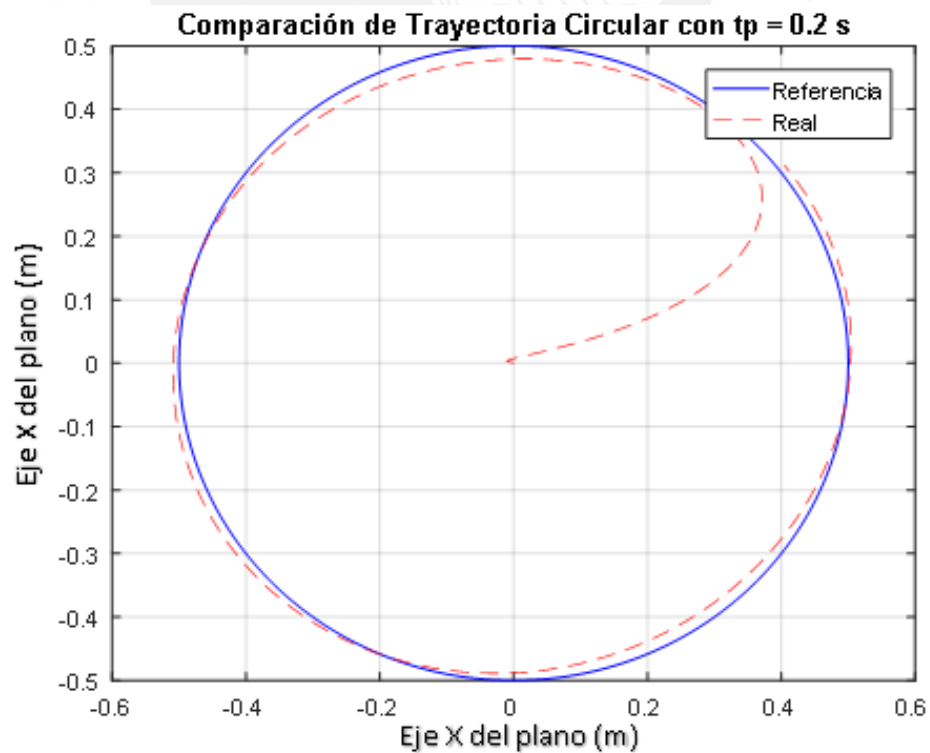


Figura 3.33. Trayectoria circular con tiempo preview 0.2 seg. vs trayectoria referencia

Para un tiempo preview de 0.3 s:

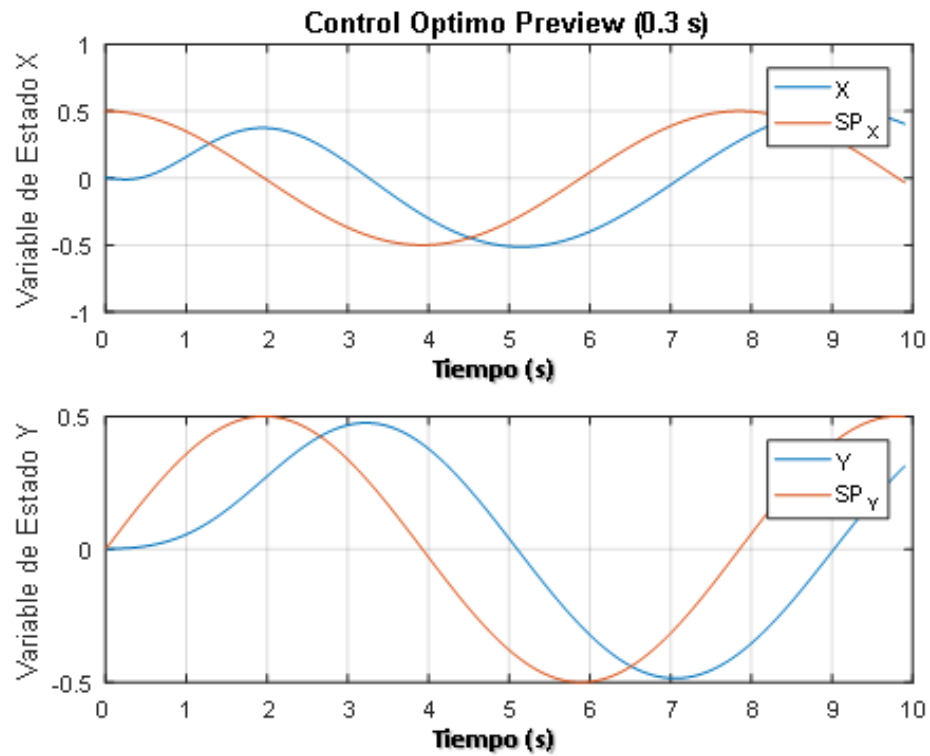


Figura 3.34. Variables de estado para control de trayectoria circular con tiempo preview 0.3 seg.

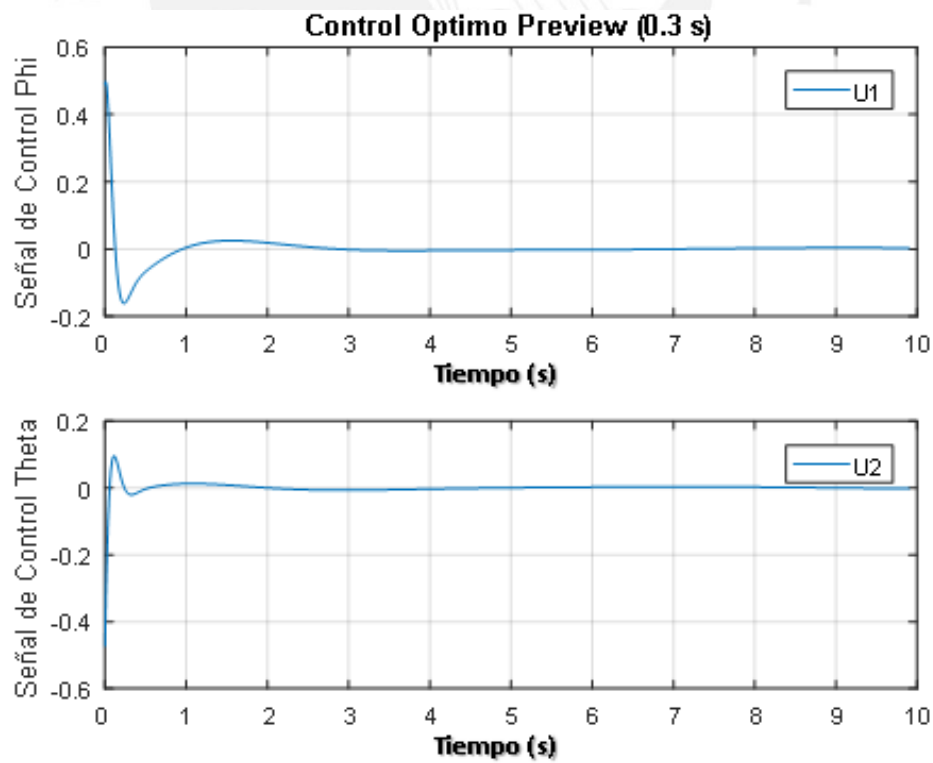


Figura 3.35. Señales de control para control de trayectoria circular con tiempo preview 0.3 seg.

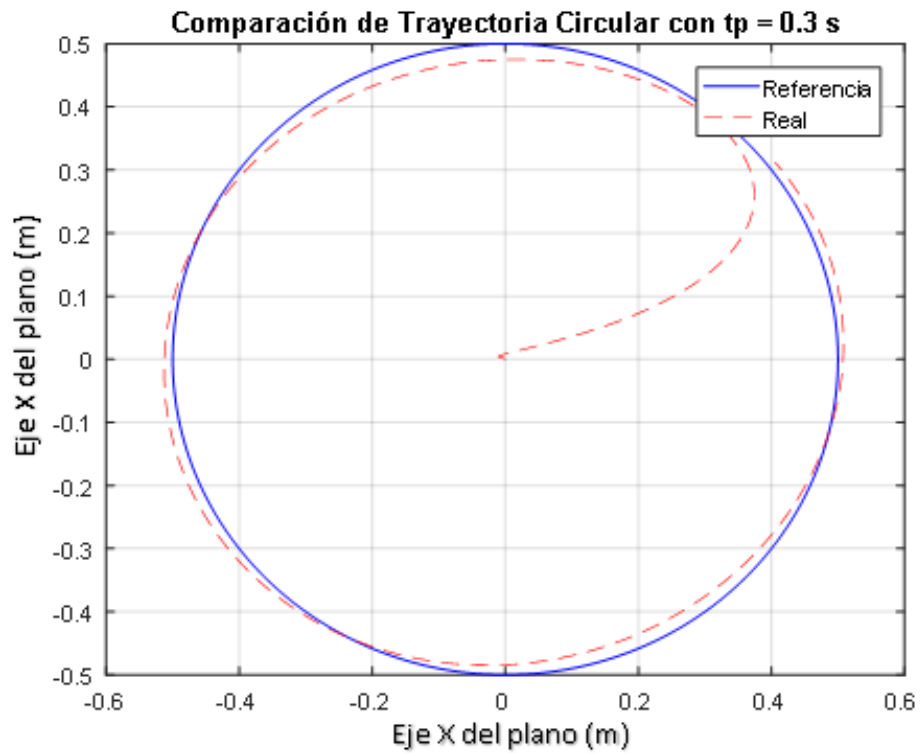


Figura 3.36. Trayectoria circular con tiempo preview 0.3 seg. vs trayectoria referencia

Para un tiempo preview de 0.4 s:

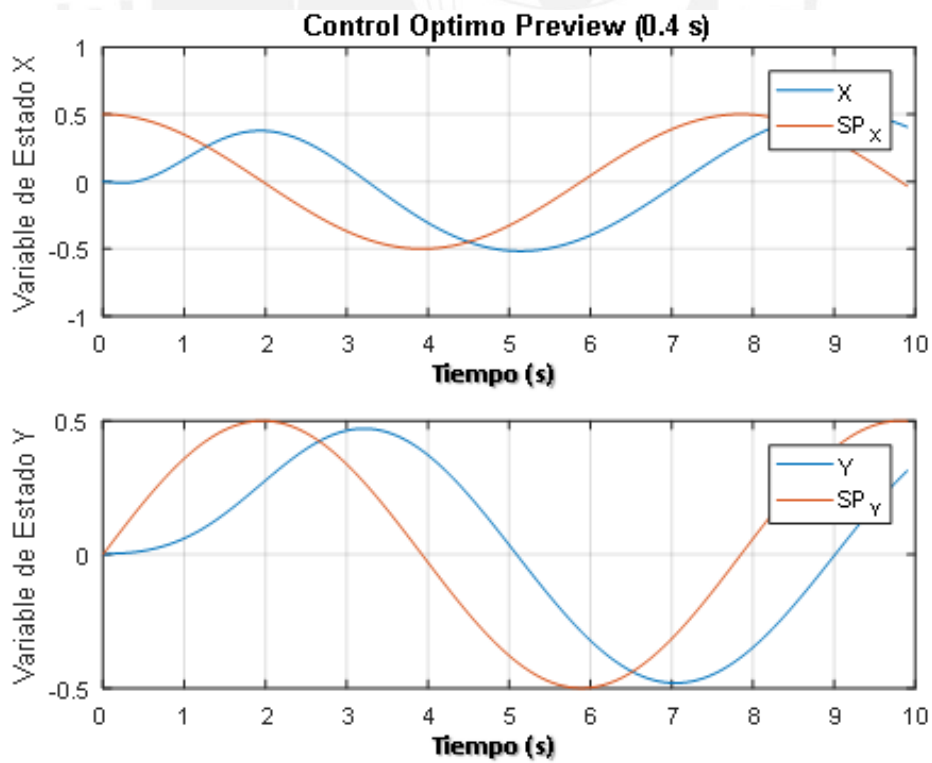


Figura 3.37. Variables de estado para control de trayectoria circular con tiempo preview 0.4 seg.

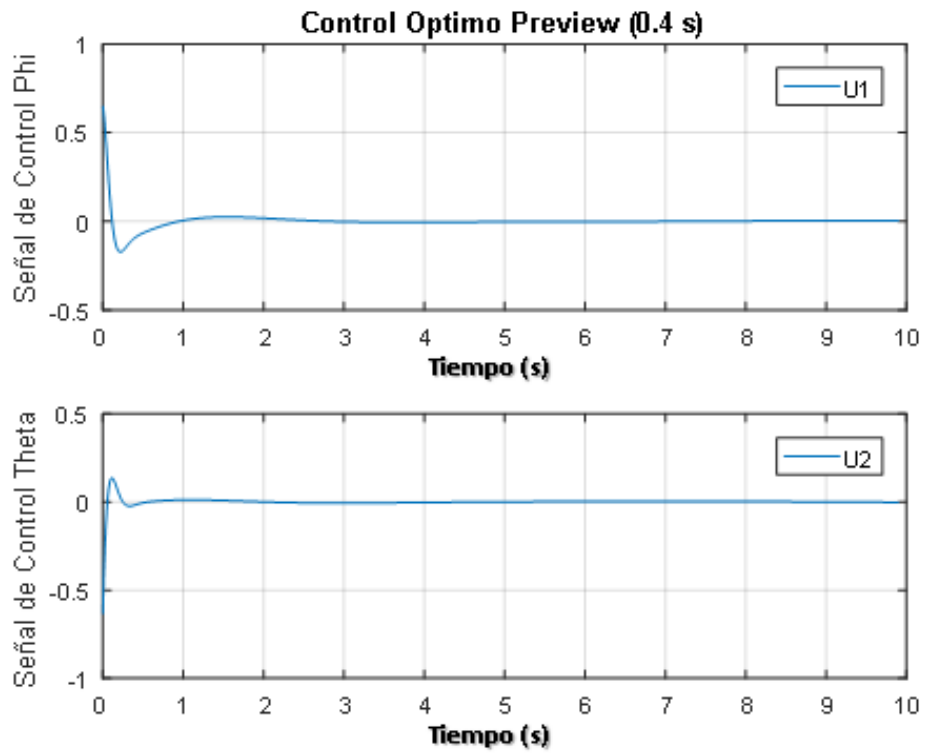


Figura 3.38. Señales de control para control de trayectoria circular con tiempo preview 0.4 seg.

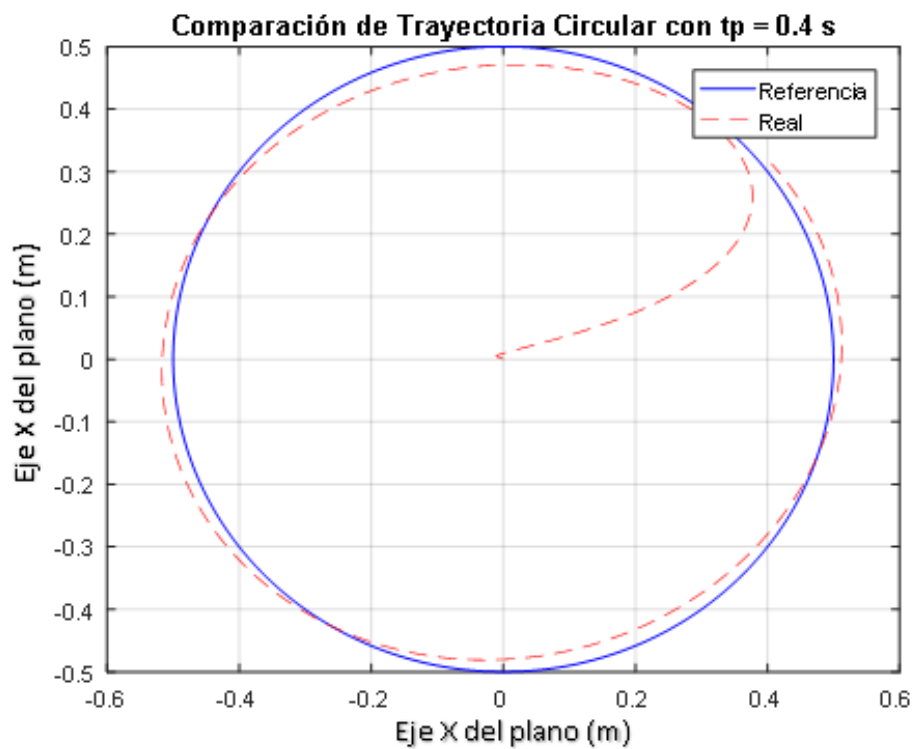


Figura 3.39. Trayectoria circular con tiempo preview 0.4 seg. vs trayectoria referencia

Para un tiempo preview de 0.5 s:

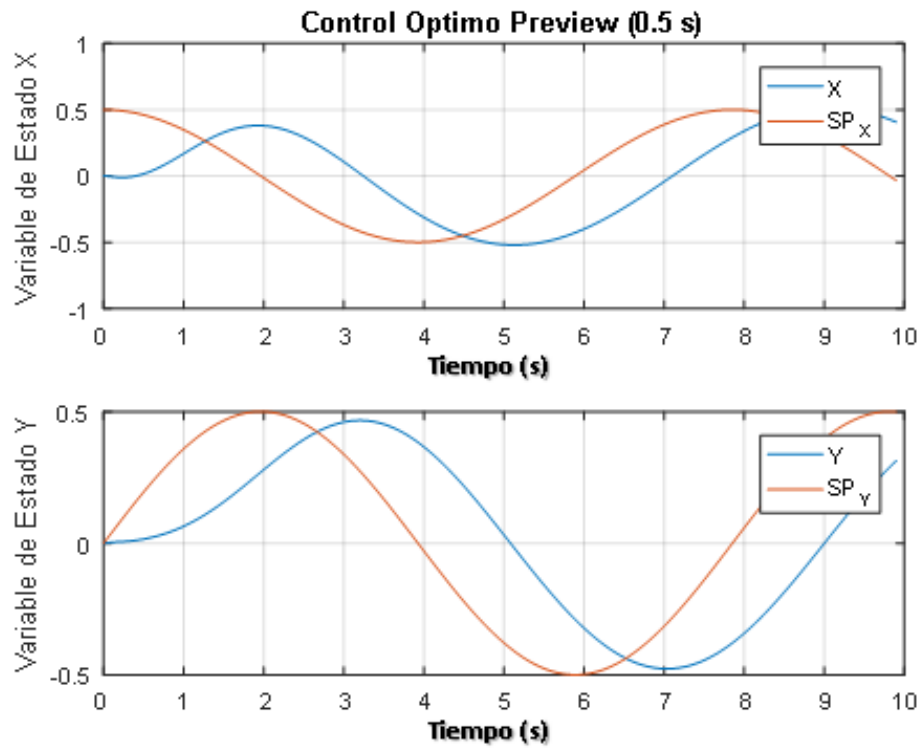


Figura 3.40. Variables de estado para control de trayectoria circular con tiempo preview 0.5 seg.

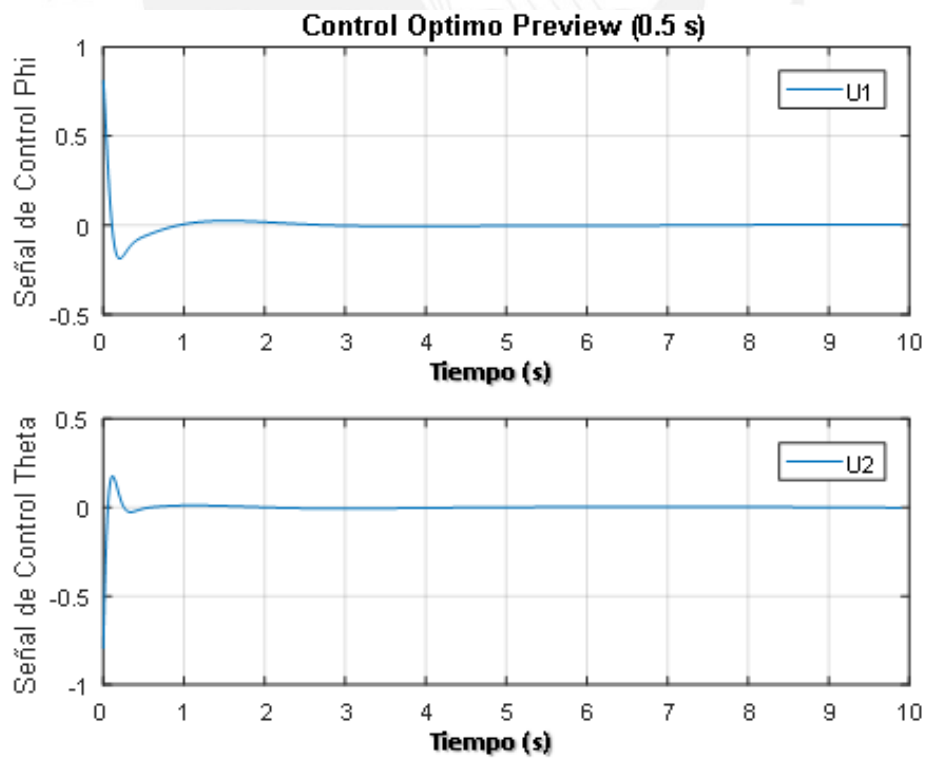


Figura 3.41. Señales de control para control de trayectoria circular con tiempo preview 0.5 seg.

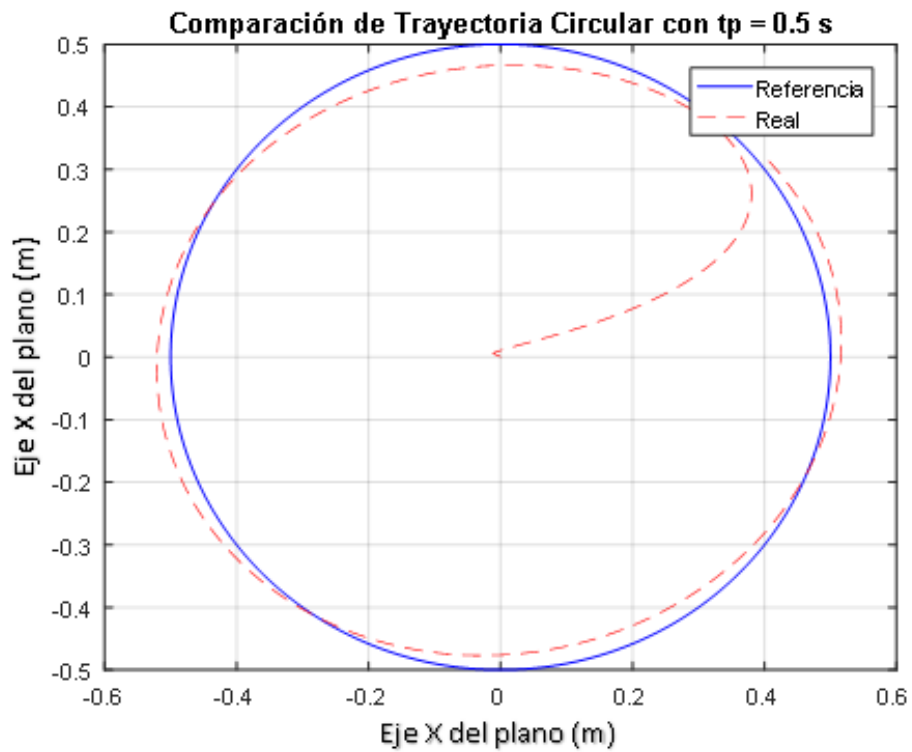


Figura 3.42. Trayectoria circular con tiempo preview 0.5 seg. vs trayectoria referencia

Conclusión:

Para los casos anteriormente presentados, las variables de estado llegan al valor deseado, sin presentar oscilaciones considerables, al igual que ambas señales de control Phi y Theta.

Conforme aumente el tiempo del preview, las variables de estado tienden a llegar al valor deseado ligeramente más rápido, sin embargo, cuando $t_p > 0.5s$ el control se vuelve inestable, concluyéndose que el tiempo preview no debe exceder a 0.5 segundos para el control de seguimiento de trayectorias circulares en específico.

3.7 Comparación con control convencional PID y cálculo de índices de error ISE - ISU

Primero se definirán los índices de desempeño para controladores:

Tabla 3.1. Indicadores de desempeño para controladores

| Indicador | Expresión | Característica |
|-----------|---|---|
| ISE | $J_{e1} = \sum_{k=0}^N e(k)^2$ | Integral del error cuadrático |
| ITSE | $J_{e2} = \sum_{k=0}^N k e(k)^2$ | Integral del tiempo por el error cuadrático |
| IAE | $J_{e3} = \sum_{k=1}^N r_k - y_k $ | Integral del valor absoluto del error |
| ISU | $J_{u1} = \sum_{k=0}^N (u(k) - u_{ss})^2$ | Integral de la salida de control cuadrática |
| TVU | $J_{u2} = \sum_{k=1}^N u_k - u_{k-1} $ | Integral de la variación total de control |
| T_s | $SSV = 2\%$ | Tiempo de asentamiento |

Para el presente caso se utilizarán los índices de integral de error cuadrático (ISE) y el índice de integral de la salida de control cuadrática (ISU).

A continuación se hallaran las funciones de transferencia del modelo obtenido para los ejes X, Y respectivamente, para este caso se usará el software Matlab, y se usarán las matrices A_i , B_i , C_i , D_i , (halladas en el segundo capítulo); posteriormente se hallará la matriz G (explicado en el segundo capítulo), y luego se utilizará el siguiente código:

$$G = C_i * (s * I - A_i)^{-1} * B_i + D_i$$

$$[num1 \ den1] = ss2tf(A_i, B_i, C_i, D_i, 1)$$

$$[num2 \ den2] = ss2tf(A_i, B_i, C_i, D_i, 2)$$

Se obtiene lo siguiente:

```
G =
From input 1 to output...
      -0.02007 s^4 + 8.094e-20 s^3 + 0.005933 s^2 - 1.395e-19 s - 1.906e-21
1:  -----
      s^6 - 2.704e-17 s^5 + 3.516e-19 s^4 + 1.491e-19 s^3 + 6.451e-21 s^2 - 1.931e-37 s - 1.932e-39

      1
2:  -----
      s^2 - 1.535e-16 s - 5.984e-19

3:  0

4:  0

From input 2 to output...
1:  0

2:  0

      -0.02007 s^4 - 3.147e-18 s^3 - 0.005933 s^2 - 5.954e-19 s + 2.425e-21
3:  -----
      s^6 + 2.606e-16 s^5 + 1.959e-17 s^4 - 1.018e-18 s^3 + 3.982e-21 s^2 + 8.43e-37 s - 1.681e-39

      1
4:  -----
      s^2 - 2.778e-16 s + 1.906e-32

Continuous-time transfer function.
```

De los cuales las funciones de transferencia que deberán usarse en el software Simulink serán las ecuaciones '1' y '3', de la primera y segunda entrada respectivamente.

Se tuvo que reducir los valores excesivamente menores de la función de transferencia para el eje X, ya que en las pruebas hechas en simulink dicho control tuvo comportamiento inestable. Las funciones de transferencia usadas son las que se muestran a continuación:

$$FT_X = \frac{-0.02007}{s^2}$$

$$FT_Y = \frac{-0.02007 * s^4 - 3.147 * 10^{-18} * s^3 - 0.005933 * s^2 - 5.954 * 10^{-19} * s + 2.425 * 10^{-21}}{s^6 + 2.606 * 10^{-16} * s^5 + 1.959 * 10^{-17} * s^4 - 1.018 * 10^{-18} * s^3 + 3.982 * 10^{-21} * s^2 + 8.43 * 10^{-37} * s - 1.681 * 10^{-39}}$$

Para el control proporcional integral derivativo (PID) se utilizó el software Simulink, así como se muestra a continuación:

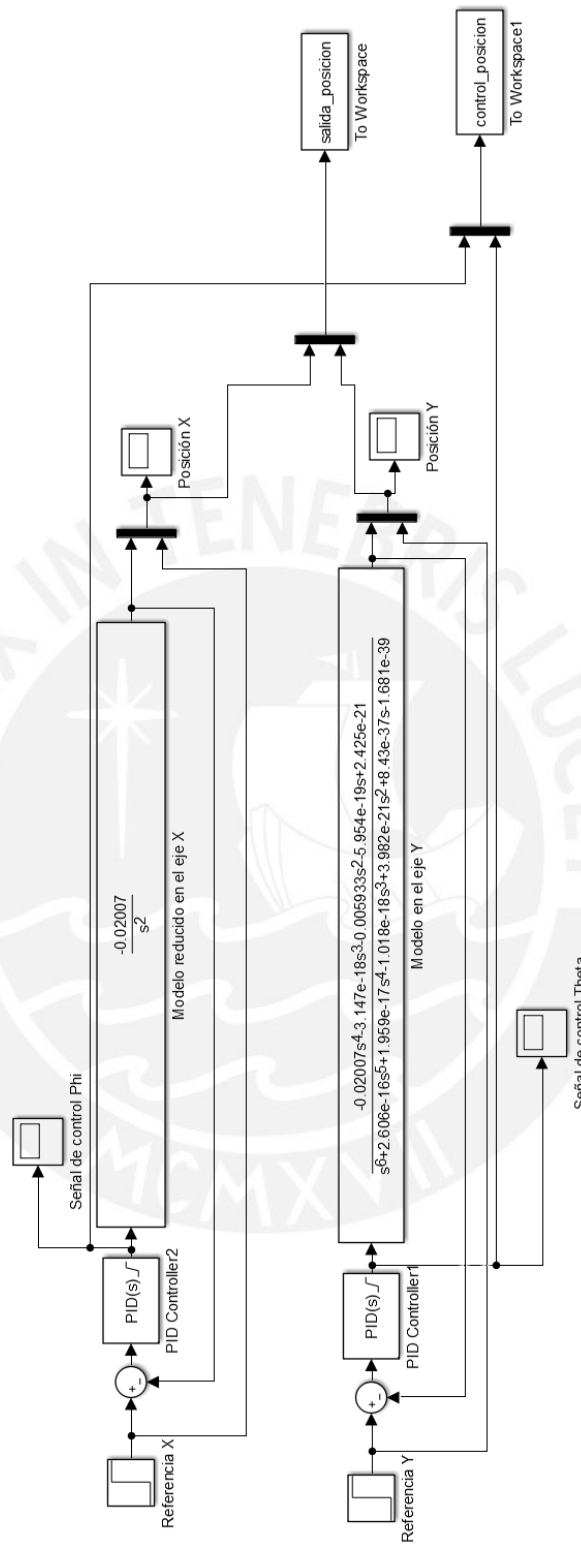


Figura 3.43. Diagrama de bloques del controlador proporcional integral derivativo para el control de posición.

Las señales 'salida_posición' y 'control_posición' se exportaron al software matlab para su posterior comparación con el control óptimo preview, y también para la obtención de los índices ISE, ISU.

3.7.1 Comparación del control óptimo preview vs control PID para la posición de una esfera sobre un plano y el cálculo de índices de desempeño ISE - ISU

Usando los datos iniciales:

Masa de la esfera = 0.024 Kg

Radio de la esfera = 0.02 m

Distancia del cardan joint al plano = 0.122 m

*Momento de inercia entre el eje X y el eje Y = $6.4 * 10^{-6} \text{ Kg.m}^2$*

Gravedad = 9.81 m/s^2

Matriz de pesos del controlador:

$$Q = \begin{bmatrix} 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 * 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 * 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 * 10^4 & 0 \end{bmatrix}$$

Para un tiempo preview de 0.1 s:

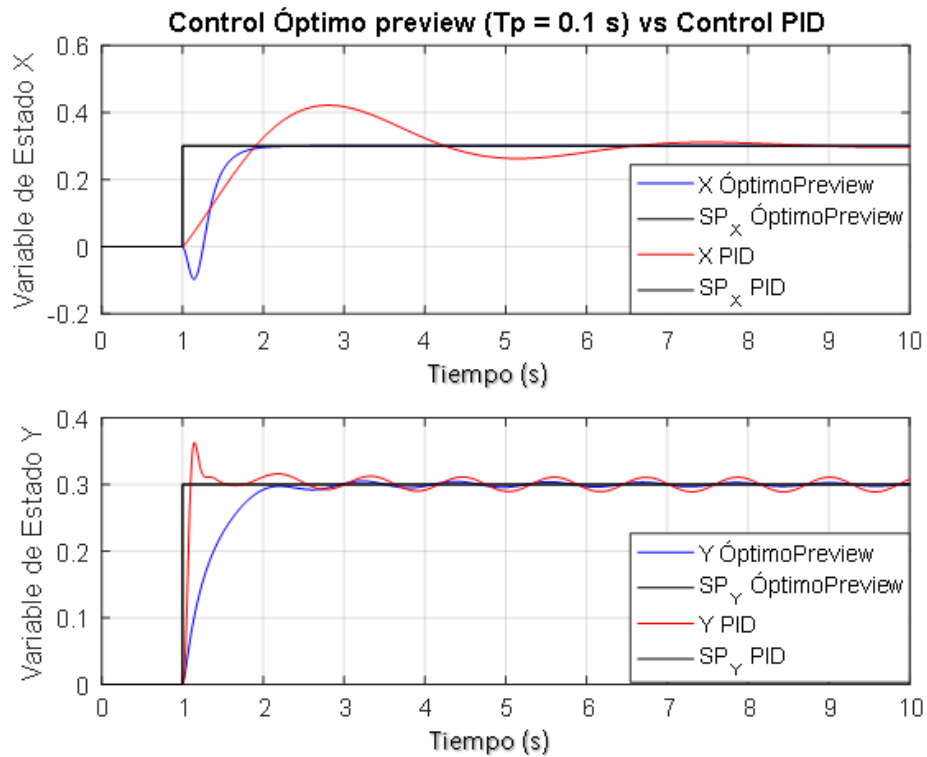


Figura 3.44. Variables de estado del control de posición con tiempo preview 0.1 seg. Vs variables de estado del control de posición pid

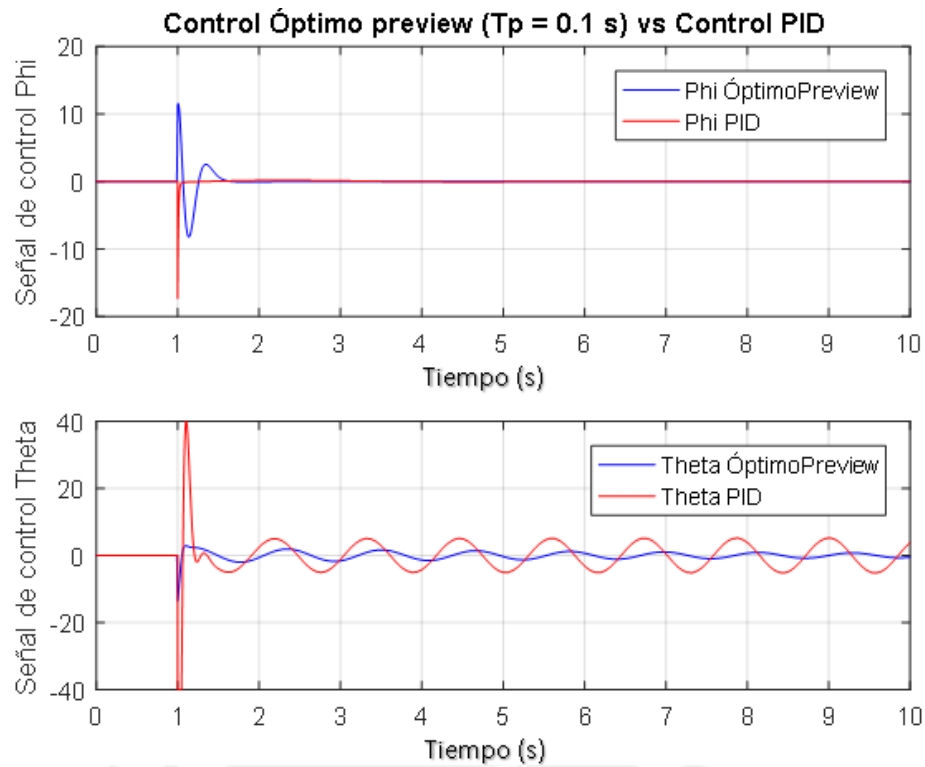


Figura 3.45. Señales de control del control de posición con tiempo preview 0.1 seg. Vs señales de control del controlador convencional de posición pid

Tabla 3.2. Índice de desempeño ISE de las variables de estado del controlador óptimo preview (tiempo preview 0.1 seg.) vs controlador convencional pid

| ÍNDICE DE DESEMPEÑO ISE | | |
|-------------------------------|------------|------------|
| | POSICIÓN X | POSICIÓN Y |
| CONTROL ÓPTIMO PREVIEW | 40.797 | 16.091 |
| CONTROL PID | 9.204 | 5.448 |

Tabla 3.3. Índice de desempeño ISU de las señales de control del controlador óptimo preview (tiempo preview 0.1 seg.) vs controlador convencional pid

| ÍNDICE DE DESEMPEÑO ISU | | |
|-------------------------------|----------------------|------------------------|
| | SEÑAL DE CONTROL PHI | SEÑAL DE CONTROL THETA |
| CONTROL ÓPTIMO PREVIEW | 4.477e+03 | 7.056e+03 |
| CONTROL PID | 17.612 | 1.616e+02 |

Para un tiempo preview de 0.2 s:

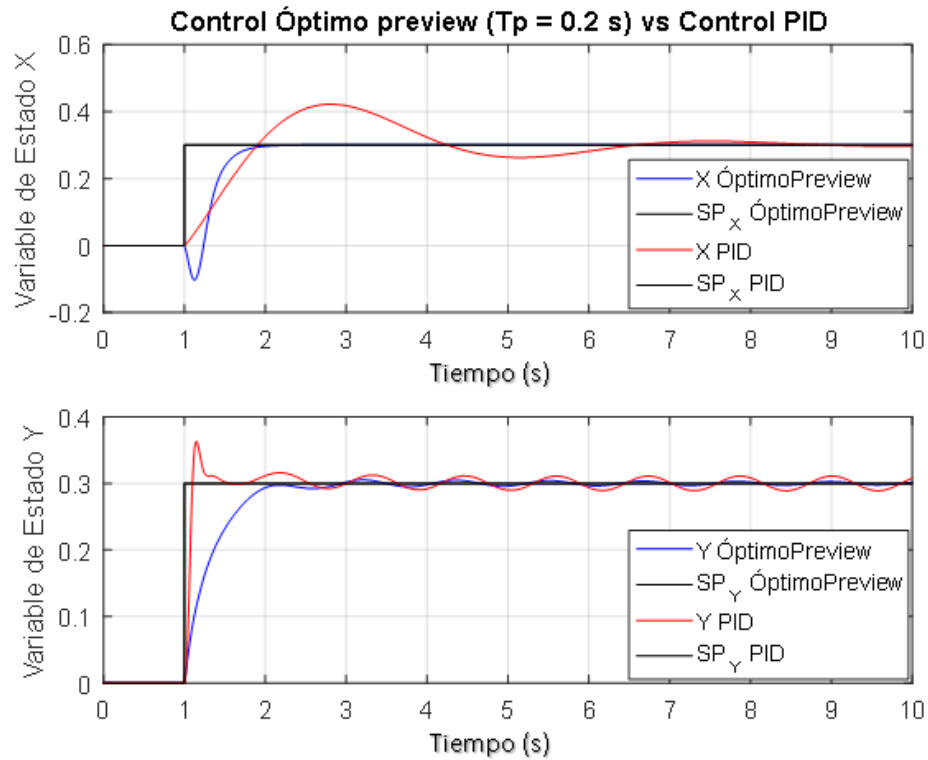


Figura 3.46. Variables de estado del control de posición con tiempo preview 0.2 seg. Vs variables de estado del control de posición pid

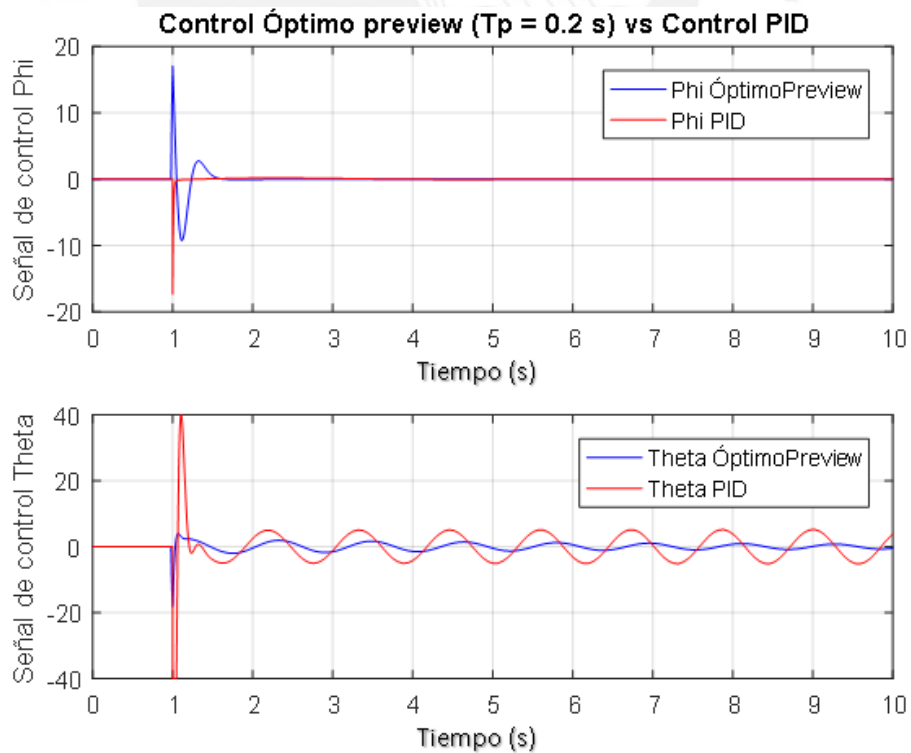


Figura 3.47. Señales de control del control de posición con tiempo preview 0.2 seg. Vs señales de control del controlador convencional de posición pid

Tabla 3.4. Índice de desempeño ISE de las variables de estado del controlador óptimo preview (tiempo preview 0.2 seg.) vs controlador convencional pid

| ÍNDICE DE DESEMPEÑO ISE | | |
|-------------------------|------------|------------|
| | POSICIÓN X | POSICIÓN Y |
| CONTROL ÓPTIMO PREVIEW | 39.255 | 14.388 |
| CONTROL PID | 9.204 | 5.448 |

Tabla 3.5. Índice de desempeño ISU de las señales de control del controlador óptimo preview (tiempo preview 0.2 seg.) vs controlador convencional pid

| ÍNDICE DE DESEMPEÑO ISU | | |
|-------------------------|----------------------|------------------------|
| | SEÑAL DE CONTROL PHI | SEÑAL DE CONTROL THETA |
| CONTROL ÓPTIMO PREVIEW | 5.825e+03 | 8.229e+03 |
| CONTROL PID | 17.612 | 1.616e+02 |

Para un tiempo preview de 0.3 s:

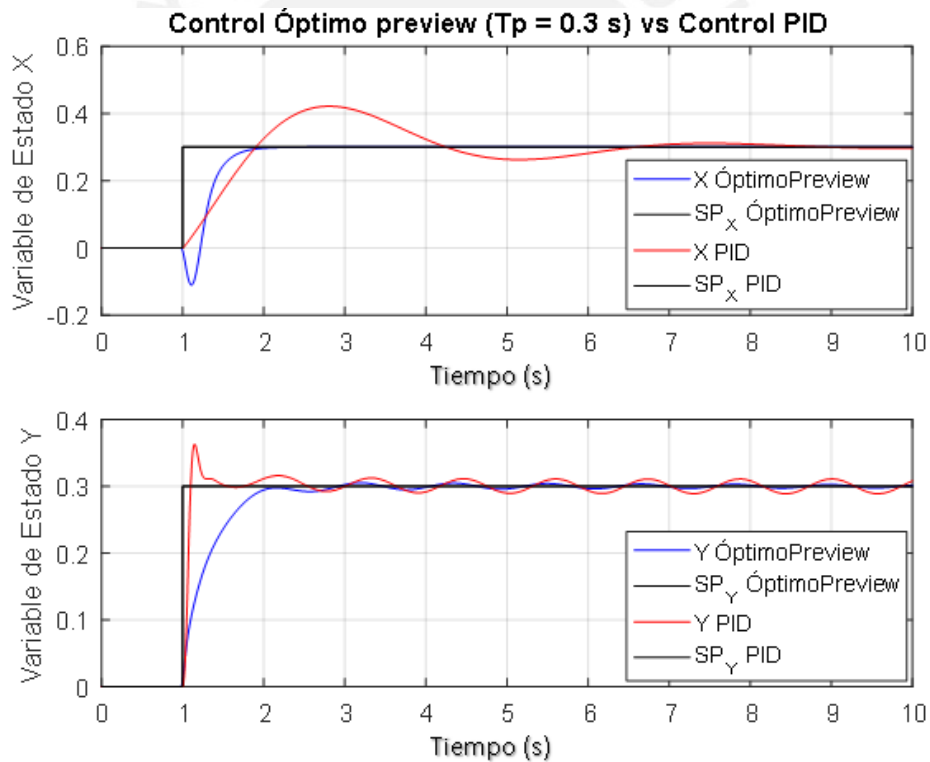


Figura 3.48. Variables de estado del control de posición con tiempo preview 0.3 seg. Vs variables de estado del control de posición pid

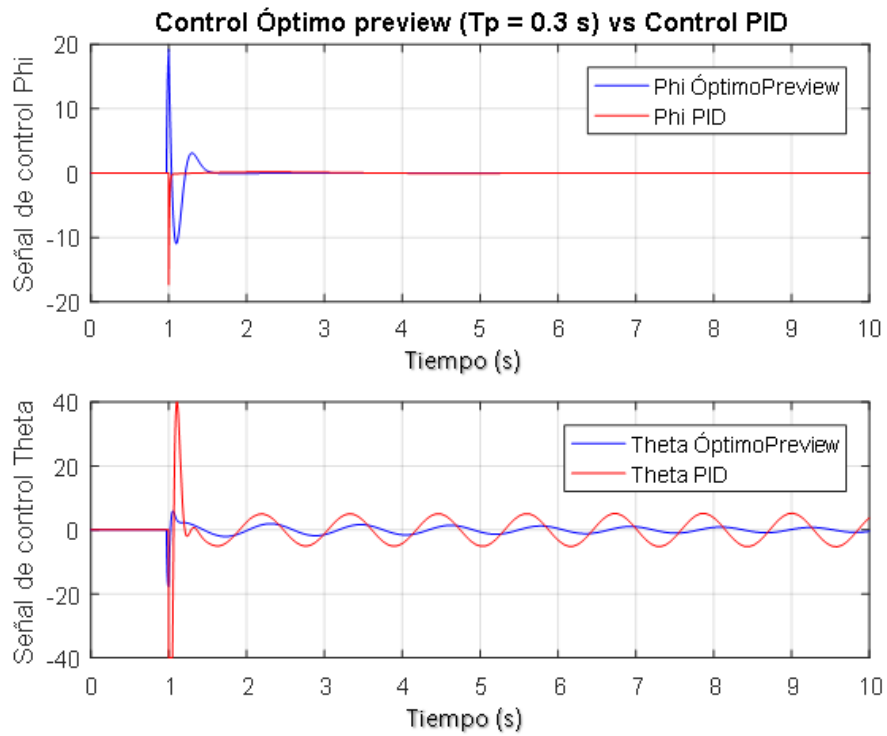


Figura 3.49. Señales de control del control de posición con tiempo preview 0.3 seg. Vs señales de control del controlador convencional de posición pid

Tabla 3.6. Índice de desempeño ISE de las variables de estado del controlador óptimo preview (tiempo preview 0.3 seg.) vs controlador convencional pid

| ÍNDICE DE DESEMPEÑO ISE | | |
|-------------------------------|------------|------------|
| | POSICIÓN X | POSICIÓN Y |
| CONTROL ÓPTIMO PREVIEW | 37.847 | 12.773 |
| CONTROL PID | 9.204 | 5.448 |

Tabla 3.7. Índice de desempeño ISU de las señales de control del controlador óptimo preview (tiempo preview 0.3 seg.) vs controlador convencional pid

| ÍNDICE DE DESEMPEÑO ISU | | |
|-------------------------------|----------------------|------------------------|
| | SEÑAL DE CONTROL PHI | SEÑAL DE CONTROL THETA |
| CONTROL ÓPTIMO PREVIEW | 6.668e+03 | 8.688e+03 |
| CONTROL PID | 17.612 | 1.616e+02 |

Para un tiempo preview de 0.4 s:

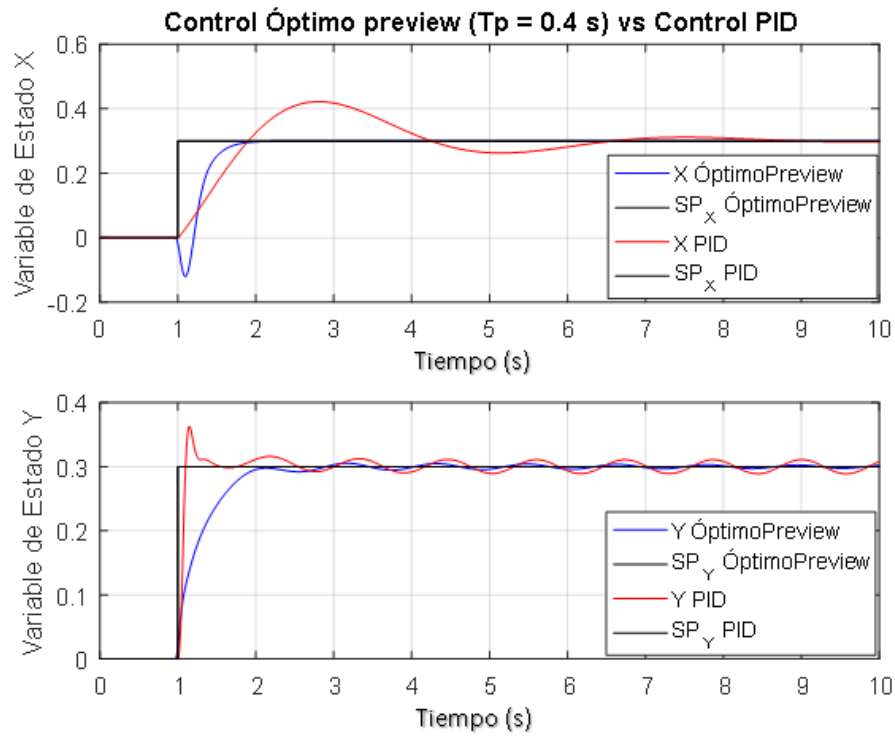


Figura 3.50. Variables de estado del control de posición con tiempo preview 0.4 seg. Vs variables de estado del control de posición pid

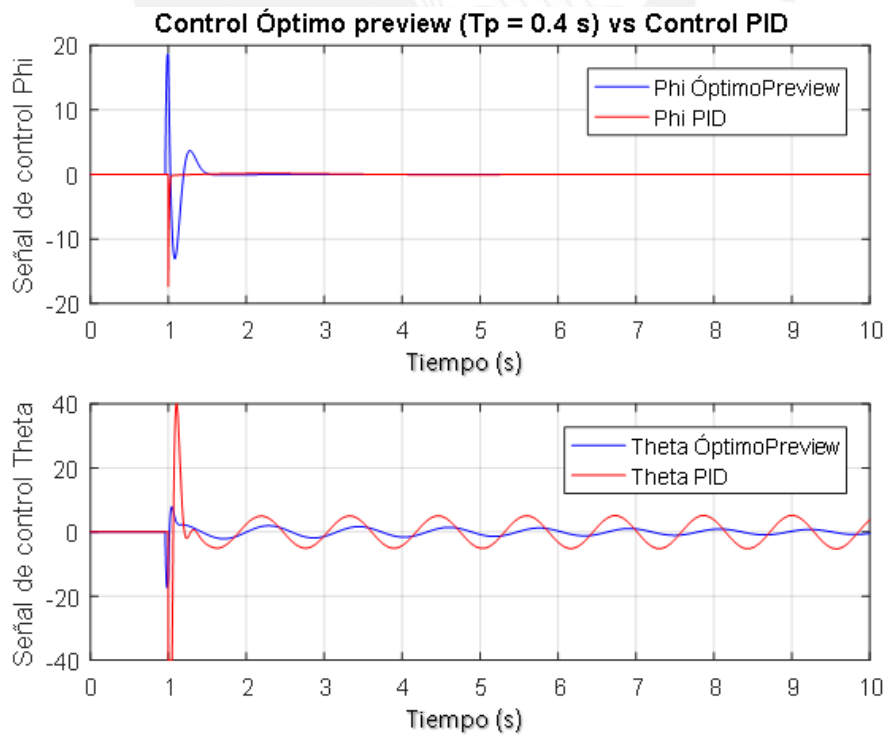


Figura 3.51. Señales de control del control de posición con tiempo preview 0.4 seg. Vs señales de control del controlador convencional de posición pid

Tabla 3.8. Índice de desempeño ISE de las variables de estado del controlador óptimo preview (tiempo preview 0.4 seg.) vs controlador convencional pid

| ÍNDICE DE DESEMPEÑO ISE | | |
|-------------------------------|------------|------------|
| | POSICIÓN X | POSICIÓN Y |
| CONTROL ÓPTIMO PREVIEW | 36.545 | 11.272 |
| CONTROL PID | 9.204 | 5.448 |

Tabla 3.10. Índice de desempeño ISU de las señales de control del controlador óptimo preview (tiempo preview 0.4 seg.) vs controlador convencional pid

| ÍNDICE DE DESEMPEÑO ISU | | |
|-------------------------------|----------------------|------------------------|
| | SEÑAL DE CONTROL PHI | SEÑAL DE CONTROL THETA |
| CONTROL ÓPTIMO PREVIEW | 7.203e+03 | 9.125e+03 |
| CONTROL PID | 17.612 | 1.616e+02 |

Para un tiempo preview de 0.5 s:

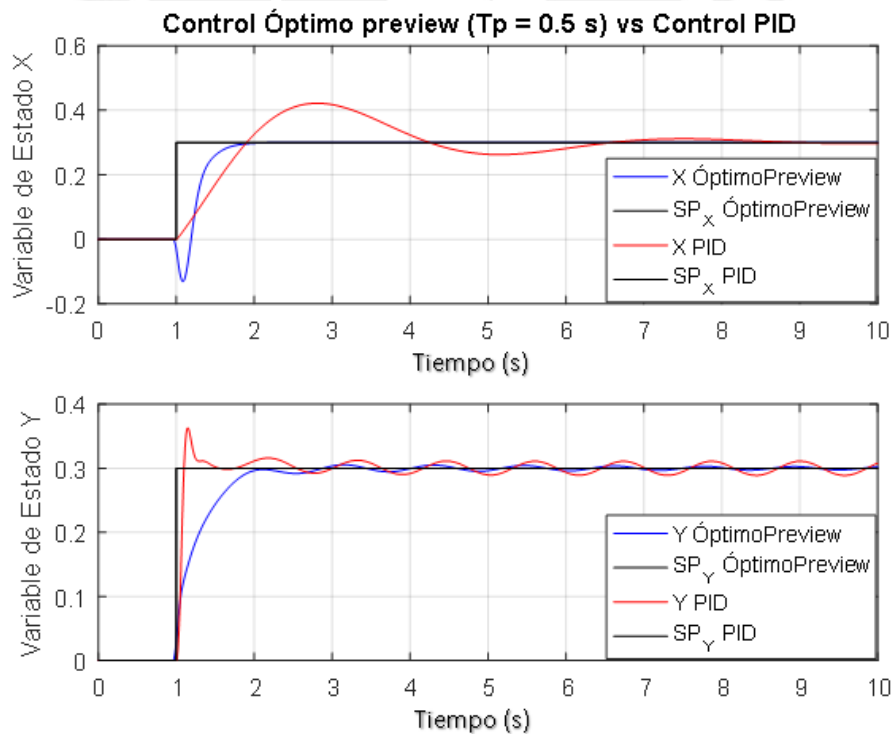


Figura 3.52. Variables de estado del control de posición con tiempo preview 0.5 seg. Vs variables de estado del control de posición pid

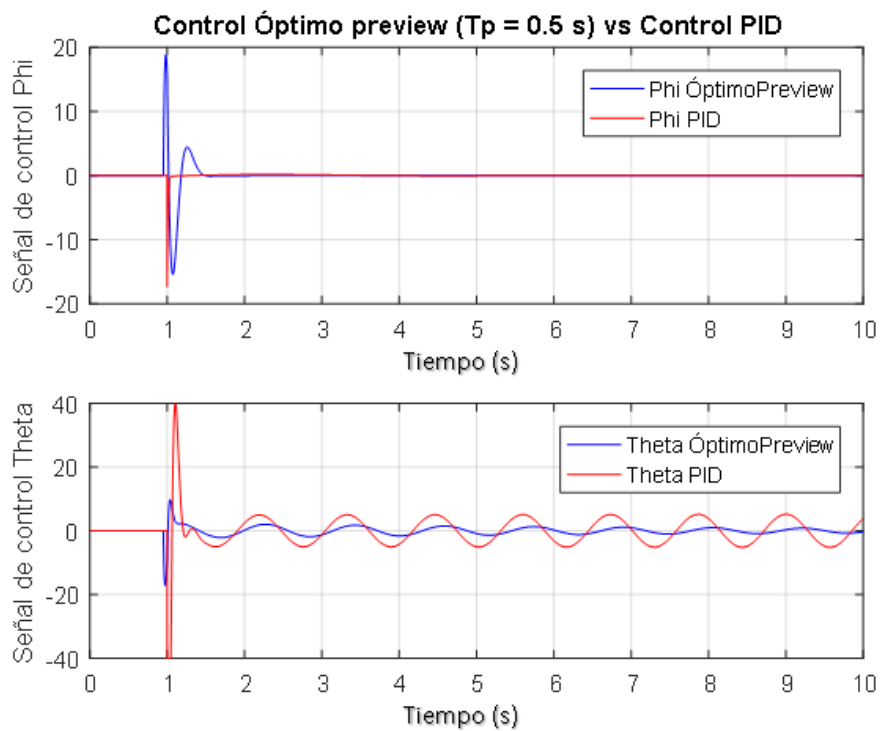


Figura 3.53. Señales de control del control de posición con tiempo preview 0.5 seg. Vs señales de control del controlador convencional de posición pid

Tabla 3.10. Índice de desempeño ISE de las variables de estado del controlador óptimo preview (tiempo preview 0.5 seg.) vs controlador convencional pid

| ÍNDICE DE DESEMPEÑO ISE | | |
|-------------------------------|------------|------------|
| | POSICIÓN X | POSICIÓN Y |
| CONTROL ÓPTIMO PREVIEW | 35.320 | 9.906 |
| CONTROL PID | 9.204 | 5.448 |

Tabla 3.11. Índice de desempeño ISU de las señales de control del controlador óptimo preview (tiempo preview 0.5 seg.) vs controlador convencional pid

| ÍNDICE DE DESEMPEÑO ISU | | |
|-------------------------------|----------------------|------------------------|
| | SEÑAL DE CONTROL PHI | SEÑAL DE CONTROL THETA |
| CONTROL ÓPTIMO PREVIEW | 7.818e+03 | 9.537e+03 |
| CONTROL PID | 17.612 | 1.616e+02 |

Conclusión:

De los resultados obtenidos en los casos anteriormente presentados, se concluye que para un tiempo preview de 0.1 segundos el control óptimo preview presenta un mejor índice de desempeño, tanto para las variables de estado, como para las señales de control.

A medida que el tiempo de preview aumente, el índice de desempeño para las variables de estado tiende a mejorar ligeramente, sin embargo, para el caso del índice de desempeño para las señales de control tiende a devaluarse ligeramente, cabe resaltar que, para todos los casos presentados, continúa teniendo un desempeño más óptimo comparado con el control convencional PID. Cabe mencionar que conforme se aumente el tiempo preview mayor a 0.5 segundos, el control tiende a volverse inestable.

3.7.1.1 Análisis de resultados de los índices de desempeño ISE - ISU obtenidos de la comparación del control óptimo preview vs control PID para la posición de una esfera sobre un plano

A continuación se presenta una tabla comparativa que muestra las principales diferencias de los controladores diseñados anteriormente, el controlador óptimo preview y el controlador PID respectivamente:

Tabla 3.12. Comparaciones entre controlador óptimo preview y el convencional pid

| | CONTROL ÓPTIMO PREVIEW | CONTROL CONVENCIONAL PID |
|---|---|-------------------------------------|
| Sobreimpulso en la señal de respuesta de la posición | 0–5 % | 10–15 % |
| Tiempo para que la señal de respuesta de la posición llegue al valor de referencia | 2.5 – 5 seg. | 2.5 – 10 seg. |
| Oscilaciones en la señal de respuesta de la posición | 0–1 % | 1–5 % |
| Índice de desempeño ISE para la señal de respuesta de la posición | Excelente | Relativamente bueno |
| Sobreimpulso en la señal de control | 0–5 % | 10–15 % |
| Tiempo para que la señal de control llegue a un valor estacionario | 1 – 5 seg. | 2.5 – 7.5 seg. |
| Oscilaciones en la señal de control | 0–1 % | 1–5 % |
| Índice de desempeño ISU para la señal de control | Excelente | Relativamente bueno |
| Costo computacional | Ligeramente mayor, sin embargo, con los equipos que fueron utilizados, como es el caso del PLC ControlLogix, el cual presenta alta capacidad de procesamiento, no se tuvo ningún inconveniente. | Menor, casi despreciable. |

Se aprecia que el control óptimo preview presenta un comportamiento mucho superior al control convencional PID, ya que es un controlador experto, a comparación de los controladores convencionales que existen en el mercado.

CAPÍTULO IV: PROPUESTA DE IMPLEMENTACIÓN

4.1 Introducción

En el presente capítulo se presenta la propuesta de implementación del controlador óptimo preview para el sistema de bola y plano desarrollado en el capítulo 3. Se describe así mismo el procedimiento para la implementación del algoritmo de control en el software Studio5000, la comunicación OPC con Matlab, así como la interfaz con el usuario en el Software de supervisión FactoryTalk View de Rockwell Automation.

4.2 Conexión OPC

Las conexiones OPC (OLE for Process Control) es un estándar de comunicación en control y supervisión de procesos industriales, que ofrece una interfaz común para comunicación que permite que softwares distintos interactúen y compartan datos. El significado de OLE es Object Linking and Embedding cuya traducción es incrustación y enlazado de objetos.

Dentro de los servidores OPC comúnmente usados están Kepserver, RSlinx, entre otros. En la Figura 4.1 se muestra el esquema de conexión OPC para la implementación del Sistema de control óptimo preview. El servidor OPC utilizado es el RSlinx por facilidad con su uso software de Rockwell.

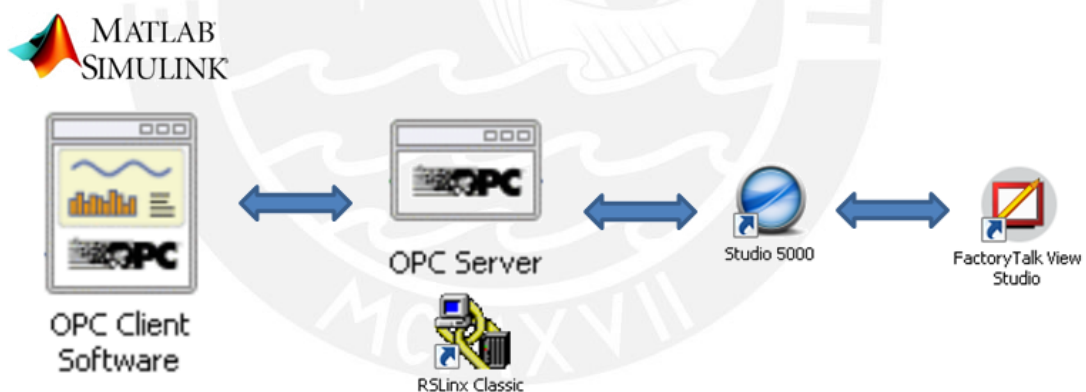


Figura 4.1. Diagrama de flujo de comunicaciones OPC

- Primero se debe definir una señal de referencia en Matlab, la cual será enviada al Workspace de Matlab
- Luego se lee la señal de referencia desde Simulink con un bloque From Workspace. Esta señal será enviada en tiempo real mediante una conexión OPC, para ello es necesario que se tenga instalado el Toolbox OPC en Matlab.
- El servidor OPC es en este caso RSlinx. La simulación del algoritmo de control se hace en un archivo ST en Studio5000, para ello se definen los parámetros de la planta hallados en Matlab.
- La conexión de Studio5000 con el sistema de supervisión FactoryTalk View también se hace mediante OPC.

El software de Rockwell cuenta con un emulador de PAC Allen Bradley llamado Studio5000 Logix Emulate, que se muestra en la Figura 4.2.

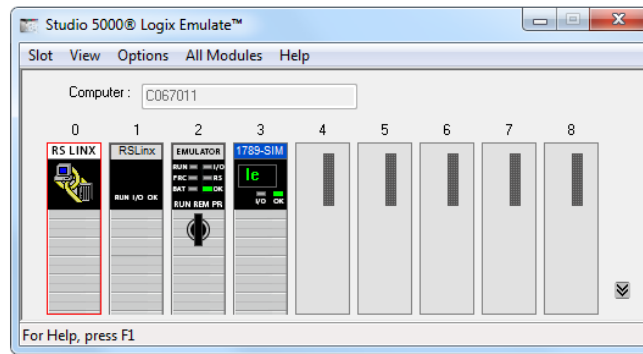


Figura 4.2. Studio5000 Logix Emulate

Este emulador se reconoce con el Software RSLinx como si se tratara de un PLC o PAC convencional. Una vez reconocidos todos sus módulos en RSLinx, se procede a crear una conexión OPC como se muestra en la figura 4.3

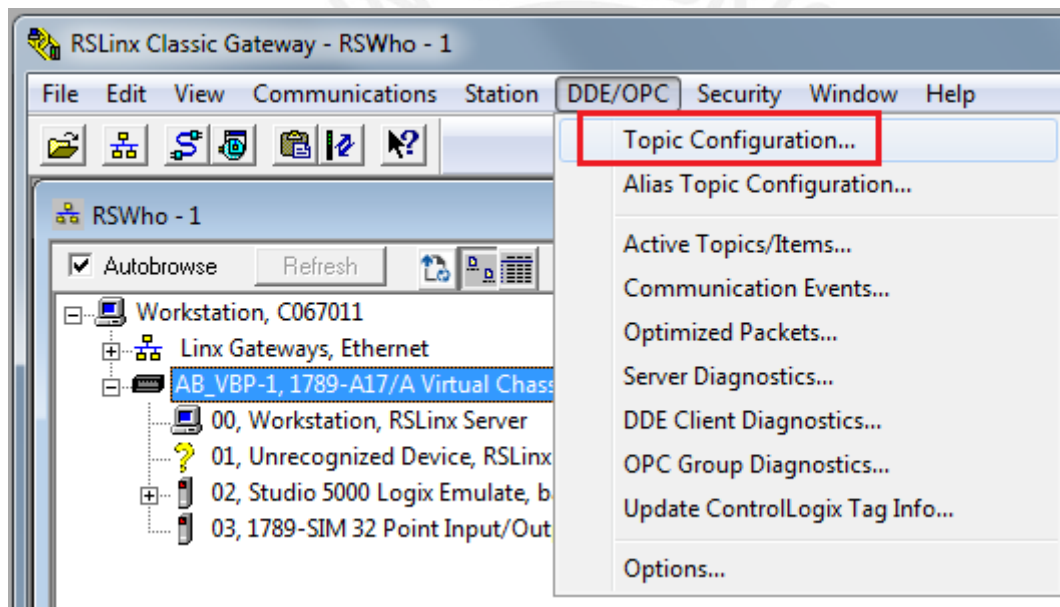


Figura 4.3. OPC en RSLinx

En la ventana que aparece se coloca un nombre para la conexión, en este caso se colocó el nombre "enlace", el cual se asoció al procesador del emulador (Módulo 2), tal como se muestra en la Figura 4.4

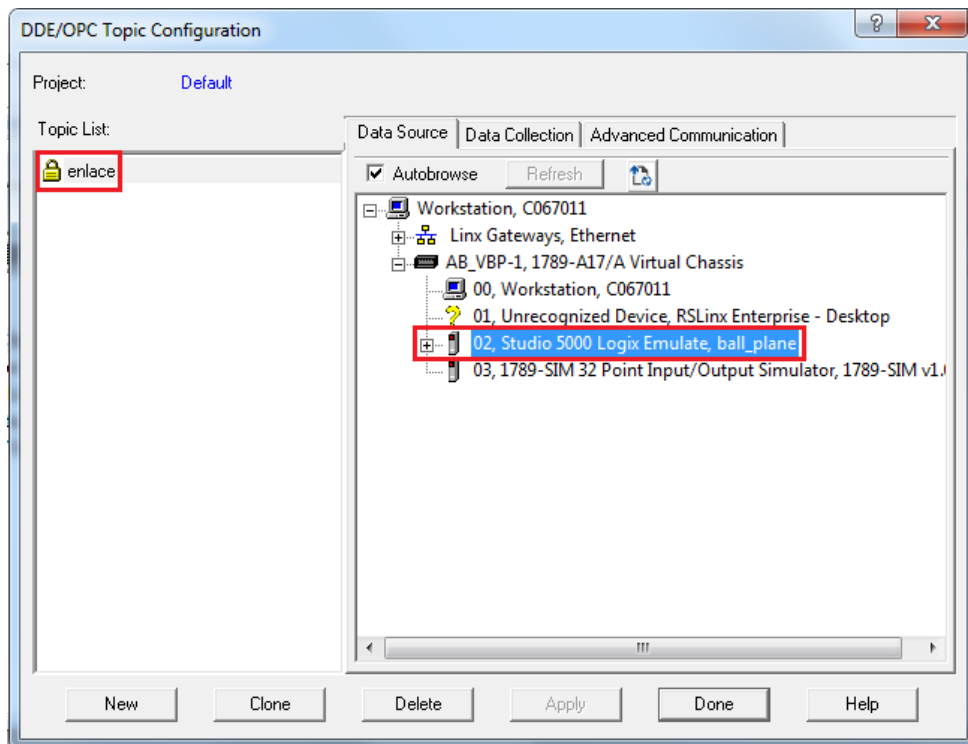


Figura 4.4. Creación de la conexión OPC en RSLinx

Por otro lado se crea la conexión OPC en Simulink de acuerdo al diagrama de bloques mostrado en la Figura 4.5

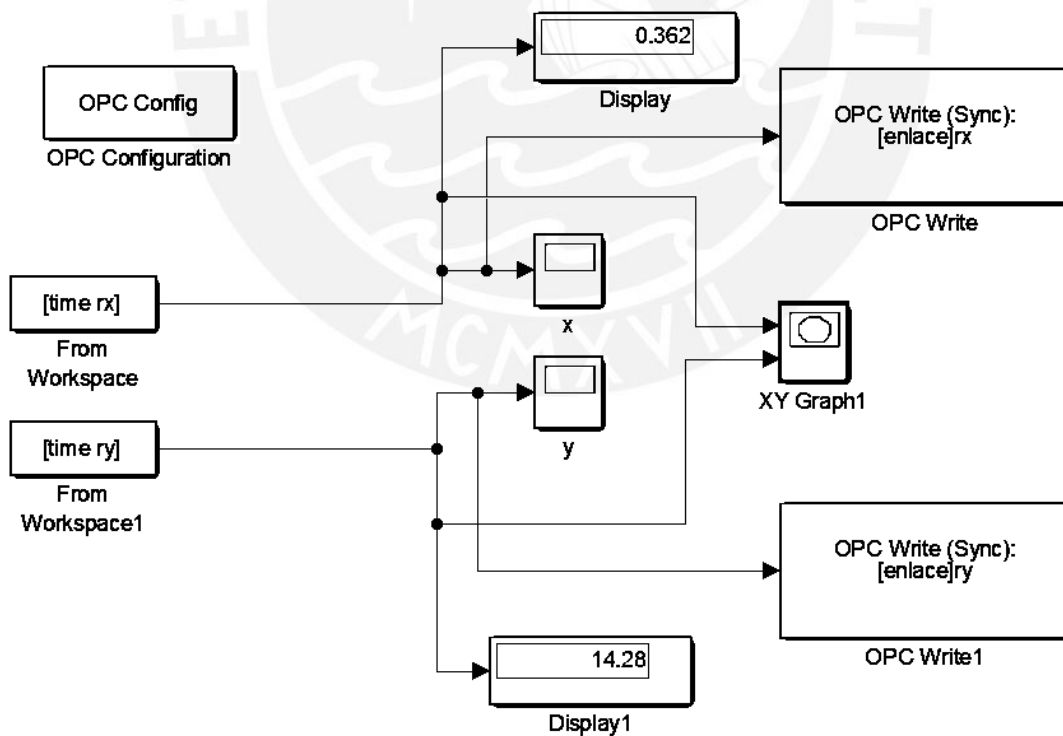


Figura 4.5. Creación de la comunicación OPC en Simulink

En la Figura 4.5 se muestran las señales de referencia para los ejes X e Y que vienen del Workspace, el bloque XY Graph muestra la trayectoria de la bola generada por las señales de referencia. Se muestra también 2 bloques principales para la comunicación OPC en Simulink: El OPC Configuration y el OPC Write. En OPC Configuration se selecciona la conexión OPC en RSLinx: localhost/RSLinx Remote OPC Server. (Figura 4.6)

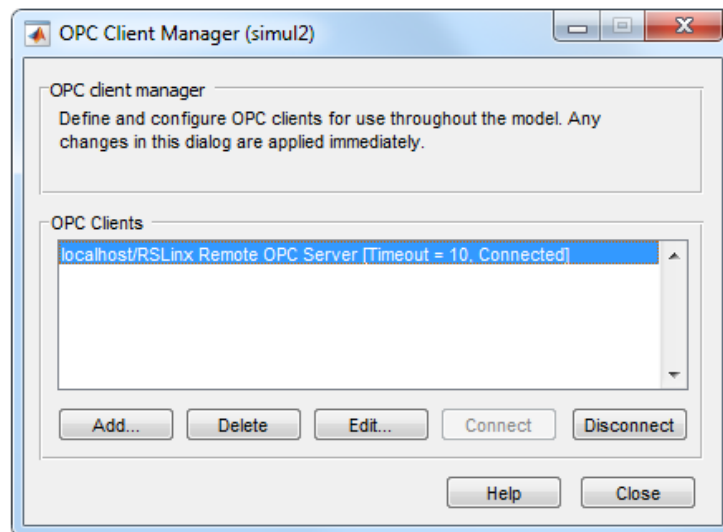


Figura 4.6. OPC Configuration

En OPC Write se selecciona se elige también localhost/RSLinx Remote OPC Server en Configure OPC Clients. Luego añadimos etiquetas presionando el botón Add Items como se muestra en la Figura 4.7.

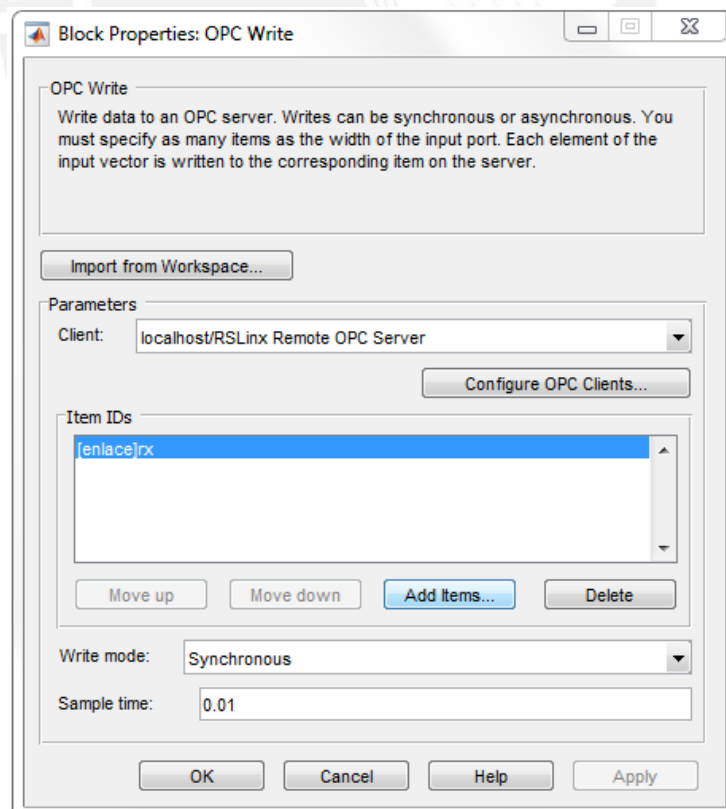


Figura 4.7. Configuración del OPC Write

Se selecciona el nombre de la conexión creada entre corchetes junto con el nombre de la etiqueta asociada. Por ejemplo [enlace]rx

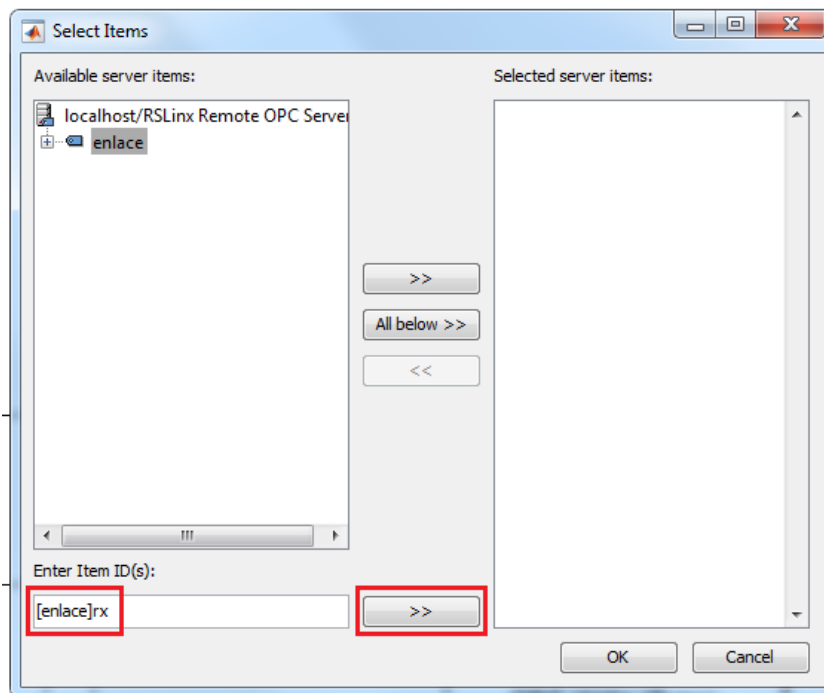


Figura 4.8. Selección de etiquetas.

4.3 Implementación en Studio5000

4.3.1 Texto estructurado

El estándar IEC 1131-3 define dos lenguajes gráficos (LD, FBD), dos textuales (IL, ST) y un método de organización del programa para procesamiento secuencial y paralelo (SFC). Con estos lenguajes es posible programar estructuras de control avanzadas. En este capítulo se explicará el uso del lenguaje ST (Texto Estructurado) el cual es un lenguaje de alto nivel similar a PASCAL, es muy flexible e intuitivo para el diseño de algoritmos de control. ST usa variables simbólicas, funciones y operadores lógicos, arrays, matrices y bucles. ST es apropiado para tareas que requieren un cómputo complejo, algoritmos o sistemas de toma de decisiones (IF clauses).

A diferencia de Matlab, en texto estructurado no es posible realizar operaciones entre matrices de forma directa. Es necesario crear subrutinas que realicen tareas como suma, producto, transpuesta, cambio de signo, igualación de matrices. Las siguientes subrutinas fueron necesarias: SUMA, PRODUCTO, SIGNO, IGUAL (Figura 4.9)

```

MainProgram - SUMA
SBR (AM, BM, fA, cA) ;
for i:=0 to fA-1 by 1 do
    for j:=0 to cA-1 by 1 do
        CM[i,j]:=AM[i,j]+BM[i,j];
    end_for;
end_for;
RET (CM) ;

```

```

MainProgram - PROD
// MA primera matriz de [m x n]
// MB segunda matriz de [n x p]
// MC matriz producto de [m x p]

SBR (MA, MB, m, n, p) ;
for i := 0 To m-1 by 1 Do
    for k := 0 To p-1 by 1 Do
        prod := 0;
        for j := 0 To n-1 by 1 Do
            prod := prod + MA[i,j]*MB[j,k];
        end_for;
        MC[i,k] := prod;
    end_for;
end_for;
RET (MC) ;

```

```

MainProgram - SIGNO
SBR (MS) ; // Ingresa MS
for i:=0 to 10-1 by 1 do
    for j:=0 to 10-1 by 1 do
        mMS[i,j]:=-MS[i,j];
    end_for;
end_for;
RET (mMS) ; // Sale -MS

```

```

MainProgram - IGUAL
SBR (x_n) ;
for i:=0 to 9 by 1 do
    for j:=0 to 9 by 1 do
        x_eq[i,j]:=x_n[i,j];
    end_for;
end_for;
RET (x_eq) ;

```

Figura 4.9. Subrutinas creadas

En la rutina principal se definen elemento a elemento los componentes de las matrices A y B que representan a la planta, como se muestra en la Figura 4.10

```

Ak [0, 0] :=1;
Ak [0, 1] :=0.01;
Ak [0, 2] :=0.000000296643223;
Ak [0, 3] :=0.000000000988811;
Ak [1, 1] :=1;
Ak [1, 2] :=0.000059328644637;
Ak [1, 3] :=0.000000296643223;
Ak [2, 2] :=1;
Ak [2, 3] :=0.01;
Ak [3, 3] :=1;
Ak [4, 4] :=1;
Ak [4, 5] :=0.01;
Ak [4, 6] :=-0.000000296643223;
Ak [4, 7] :=-0.000000000988811;
Ak [5, 5] :=1;
Ak [5, 6] :=-0.000059328644637;
Ak [5, 7] :=-0.000000296643223;
Ak [6, 6] :=1;
Ak [6, 7] :=0.01;
Ak [7, 7] :=1;

Bk [0, 0] :=-0.000001003686669;
Bk [1, 0] :=-0.000200736839390;
Bk [2, 0] :=0.00005;
Bk [3, 0] :=0.01;
Bk [4, 1] :=-0.000001003691613;
Bk [5, 1] :=-0.000200738817011;
Bk [6, 1] :=0.00005;
Bk [7, 1] :=0.01;

```

Figura 4.10. Subrutinas creadas

Se definen también las ganancias del controlador halladas en Matlab (Figura 4.11)

```

Kx [0, 0] :=1.0e+05*0.575881893547523;
Kx [0, 1] :=1.0e+05*3.297818322294891;
Kx [0, 2] :=1.0e+05*0.061844904577910;
Kx [0, 3] :=1.0e+05*0.067201761502787;
Kx [0, 4] :=1.0e+05*0.000001001111499;
Kx [0, 5] :=1.0e+05*0.000008136597635;
Kx [0, 6] :=1.0e+05*0.000000019358686;
Kx [0, 7] :=1.0e+05*0.000000163326973;
Kx [0, 8] :=1.0e+05*0.049904136841218;
Kx [0, 9] :=1.0e+05*0.000000046574113;
Kx [1, 0] :=1.0e+05*-0.000001385085415;
Kx [1, 1] :=1.0e+05*-0.000008677585710;
Kx [1, 2] :=1.0e+05*-0.000000028541740;
Kx [1, 3] :=1.0e+05*-0.000000174197293;
Kx [1, 4] :=1.0e+05*-0.534849197378548;
Kx [1, 5] :=1.0e+05*-2.840987733809561;
Kx [1, 6] :=1.0e+05*0.039537756111429;
Kx [1, 7] :=1.0e+05*-0.056027374220947;
Kx [1, 8] :=1.0e+05*-0.000000111069321;
Kx [1, 9] :=1.0e+05*-0.049907472305843;

```

Figura 4.11. Ganancias del controlador

En la rutina principal se colocan también las llamadas a subrutinas para las operaciones entre matrices que requiere el algoritmo de control. A diferencia del programa en Matlab, en texto estructurado, no fue necesario el cálculo de condiciones iniciales antes de la inicialización del bucle de la planta, las condiciones iniciales se introducen manualmente antes de correr el programa. (Figura 4.12)

```

JSR (IGUAL, 1, x_k1, XX);

x := XX[0,0];
//XX[1,0] := 0;
//XX[2,0] := 0;
//XX[3,0] := 0;
y := XX[4,0];
//XX[5,0] := 0;
//XX[6,0] := 0;
//XX[7,0] := 0;

dt:=0.01;
umax := 5;
umin := -5;

int_err_x := int_err_x + (x - rx)*dt;
int_err_y := int_err_y + (y - ry)*dt;

xi[0,0] := XX[0,0];
xi[1,0] := XX[1,0];
xi[2,0] := XX[2,0];
xi[3,0] := XX[3,0];
xi[4,0] := XX[4,0];
xi[5,0] := XX[5,0];
xi[6,0] := XX[6,0];
xi[7,0] := XX[7,0];
xi[8,0] := int_err_x;
xi[9,0] := int_err_y;

//xi = [ XX int_err_x int_err_y ]';
JSR (PROD, 5, Kx, xi, 10, 10, 10, Kx_xi);
JSR (SIGNO, 1, Kx_xi, mKx_xi);
JSR (IGUAL, 1, mKx_xi, ufb);
//ufb=-Kx*xi

// saturacion
if ufb[0,0]>umax then
ufb[0,0] := umax;
end_if;
if ufb[0,0]<umin then
ufb[0,0] := umin;
end_if;

if ufb[1,0]>umax then
ufb[1,0] := umax;
end_if;
if ufb[1,0]<umin then
ufb[1,0] := umin;
end_if;

//Planta
//x := Akx + Bku;
JSR (PROD, 5, Ak, XX, 10, 10, 10, Akx);
JSR (PROD, 5, Bk, ufb, 10, 10, 10, Bku);
JSR (SUMA, 4, Akx, Bku, 10, 10, x_k1);

```

Figura 4.12. Algoritmo de control en Texto Estructurado

Los resultados de simulación se muestran para un ejemplo de seguimiento de trayectorias. Se usó Trends de Studio5000 para mostrar las señales de Referencia en X e Y provenientes de Simulink mediante conexión OPC con las escalas adecuadas. Como se muestra en las Figuras 4.13 y 4.14

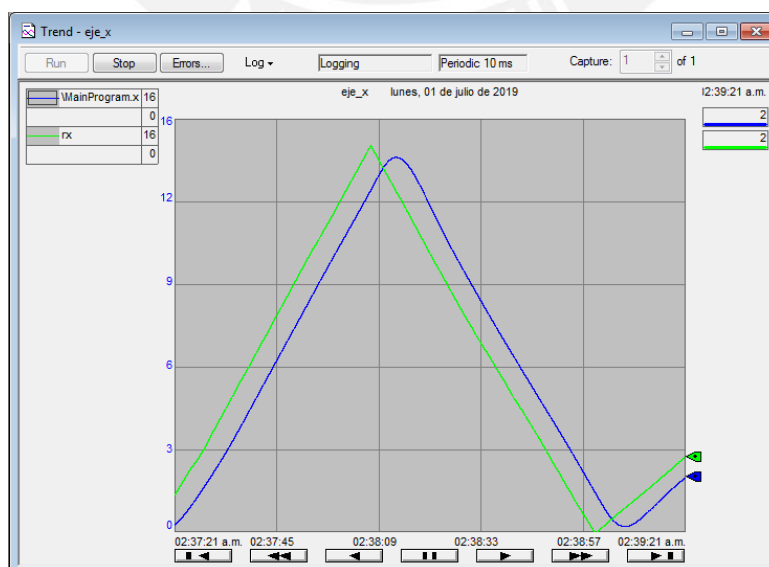


Figura 4.13. Seguimiento de trayectoria eje X

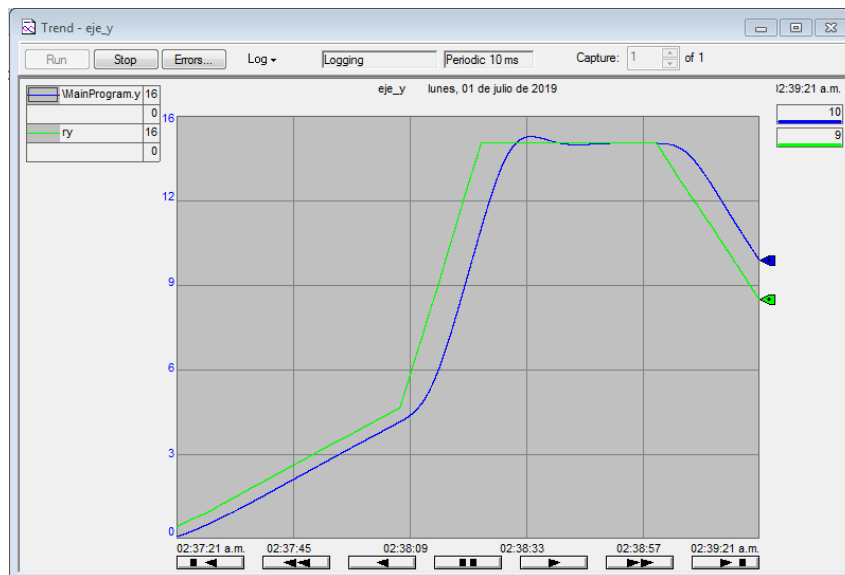


Figura 4.14. Seguimiento de trayectoria eje Y

Asimismo en la ventana Quick Watch del Studio5000 se puede elegir las variables de interés a mostrar (Figura 4.15)

| Name | Scope | Value | Force Mask | Description |
|------|-------------|-----------|------------|-------------|
| x | MainProgram | 2.2455695 | | |
| rx | Controller | 3.0478048 | | |
| y | MainProgram | 10.411222 | | |
| ry | Controller | 8.90439 | | |

Figura 4.15. Ventana Quick Watch

4.4 Interfaz de Supervisión con Factorytalk View

La comunicación de Studio5000 con FactoryTalk View se realizó también mediante comunicación OPC. Una vez creado un nuevo proyecto en FactoryTalk, se realiza la configuración OPC como se muestra en la Figura 4.16.

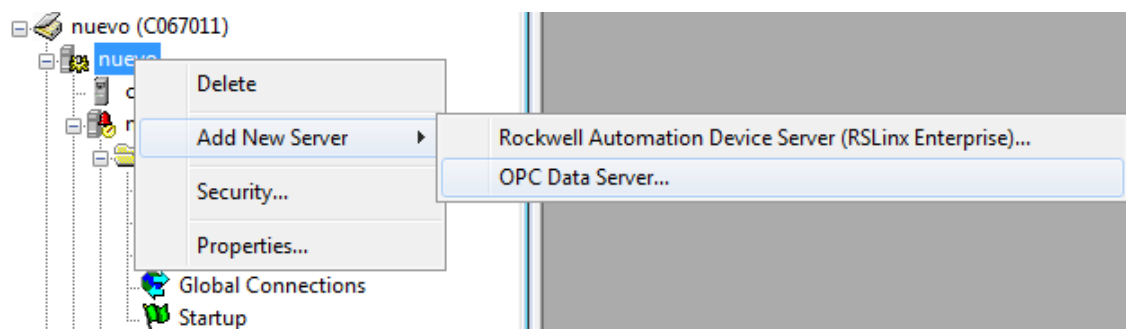


Figura 4.16. OPC Data Server en FactoryTalk

Se coloca algún nombre a la conexión y se elige RSLinx Remote OPC Server en OPC Server Name (Figura 4.17)

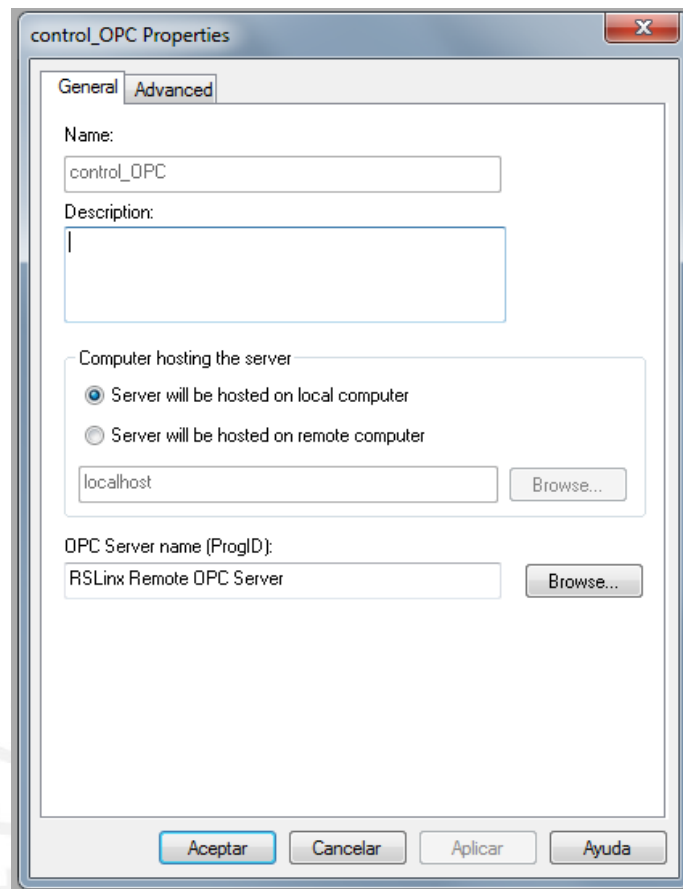


Figura 4.17. Configuración de OPC FactoryTalk

Una vez creada la conexión OPC se debe colocar un Trend Object en la ventana MAIN del FactoryTalk, el cual se configurará como gráfica XY, para esto en Chart Style se selecciona XY plot como se muestra en la figura 4.18

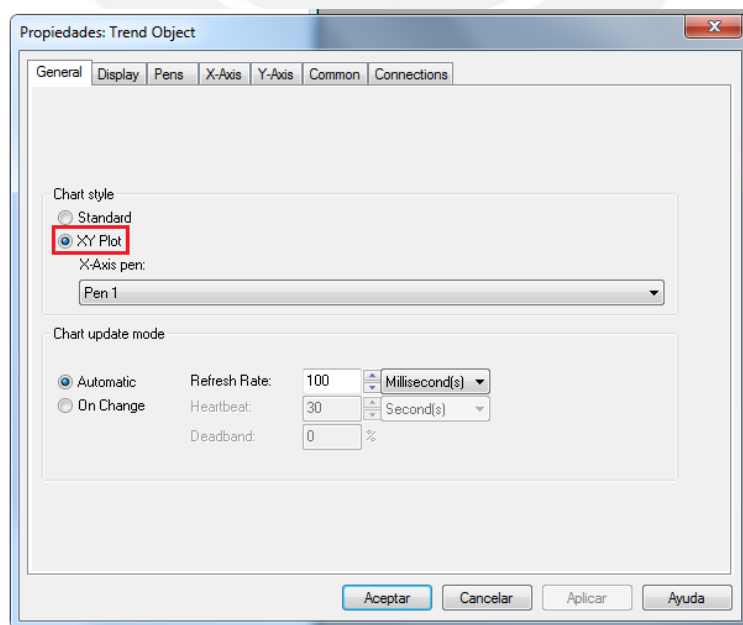


Figura 4.18. XY Plot en FactoryTalk View

La figura 4.19 muestra la interfaz en FactoryTalk View desarrollada, donde se realizó el enlace de las variables de interés obtenidas en el programa en Studio5000.

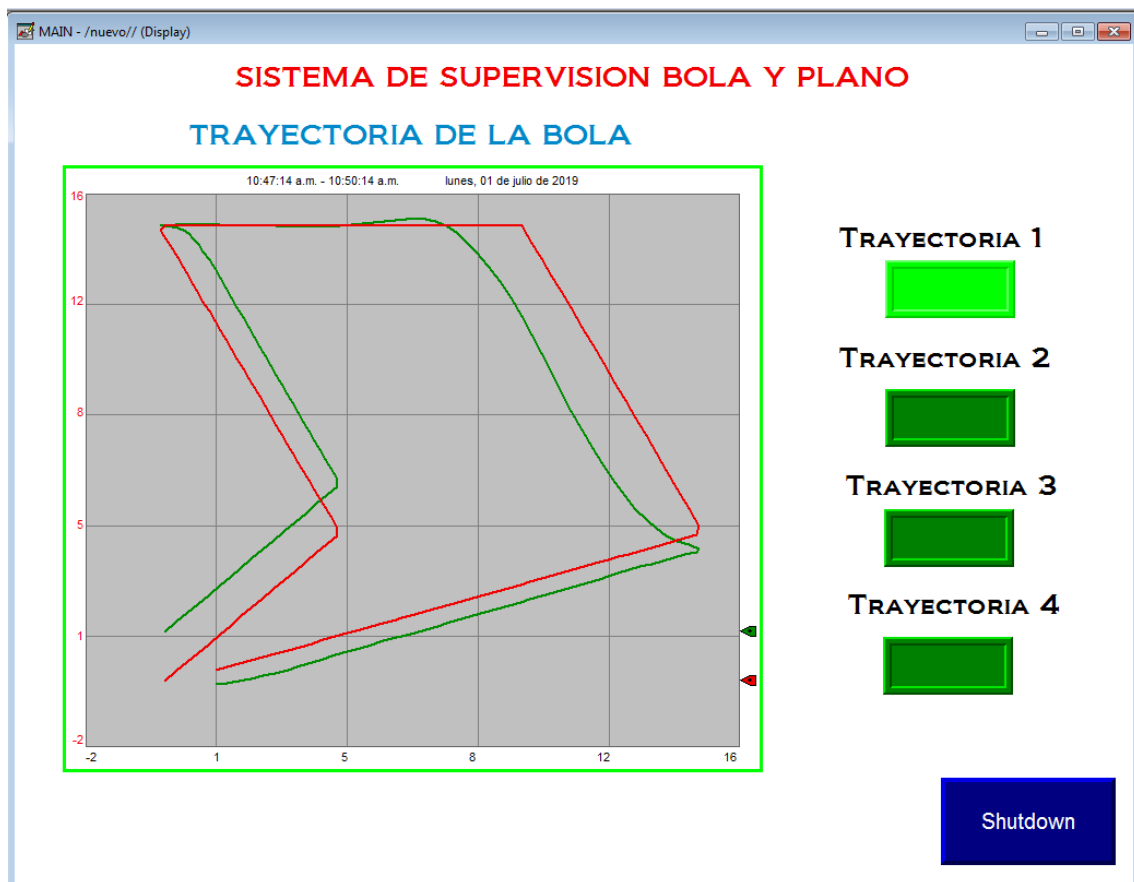


Figura 4.19. Interfaz de supervisión en FactoryTalk View

4.5 Consideraciones para la implementación en PLC Control Logix

4.5.1 Entradas al PLC

El módulo de entradas analógicas instalado en el rack del PLC es el 1756-IF16, el cual puede recibir señales en corriente o voltaje configurables por software. El rango de entradas analógicas es de 0 a 10V con 16 bits de resolución. Las señales eléctricas que entrega la pantalla táctil son del orden de los milivoltios y deben ser amplificadas antes de que puedan ser enviadas al módulo de entradas PLC ControlLogix.

Para esta tesis se propone el uso del amplificador de instrumentación INA126P por sus características de adquisición de señales con alta precisión y bajo ruido. En la siguiente figura se muestra un circuito aplicativo de este amplificador (Obtenido de su datasheet), donde se observa una aplicación con una configuración tipo puente de Wheatstone.

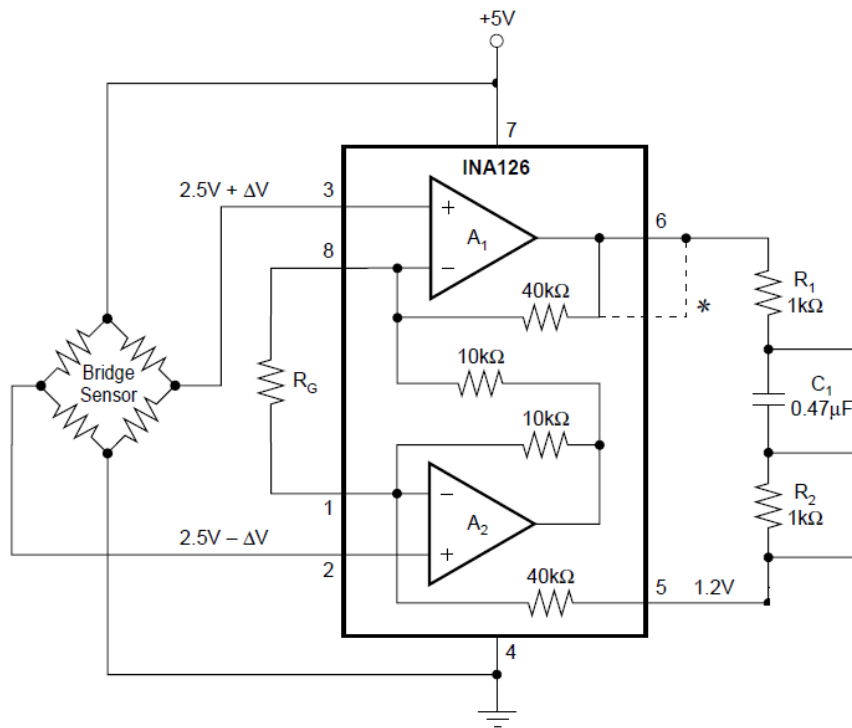


Figura 4.20. Aplicación del amplificador de instrumentación INA126P

Este amplificador puede ser alimentado de forma simétrica y no simétrica, en esta configuración se puede apreciar que está alimentado de forma no simétrica con 5V, pero según las especificaciones del datasheet para obtener mejores resultados, es decir una amplificación lineal en todo el rango de valores lo alimentamos de forma simétrica con $\pm 5V$. La ganancia del amplificador se calcula de la siguiente manera:

CÁLCULO DE LA GANANCIA:

$$G = 5 + \frac{80k\Omega}{R_G}$$

Donde la resistencia R_G puede ser elegida para obtener ganancias de acuerdo a la siguiente tabla que se muestra en su datasheet.

| DESIRED GAIN (V/V) | R_G (Ω) | NEAREST 1% R_G VALUE |
|-----------------------|-----------------------|---------------------------|
| 5 | NC | NC |
| 10 | 16k | 15.8k |
| 20 | 5333 | 5360 |
| 50 | 1779 | 1780 |
| 100 | 842 | 845 |
| 200 | 410 | 412 |
| 500 | 162 | 162 |
| 1000 | 80.4 | 80.6 |
| 2000 | 40.1 | 40.2 |
| 5000 | 16.0 | 15.8 |
| 10000 | 8.0 | 7.87 |

Se elige una ganancia cercana a 1000 para alcanzar el orden de los voltios a partir de los milivoltios, en este caso elegimos la resistencia de valor comercial 100Ω , por lo que se obtuvo la ganancia:

$$G = 5 + \frac{80000}{100} = 805$$

4.5.2 Salidas del PLC

Los actuadores usados en el sistema bola y plano son 2 servomotores. Los servomotores consisten en 3 partes: Un motor de corriente directa (parte eléctrica) cuyo eje se conecta a través de una caja de engranajes (parte mecánica) al eje principal del servomotor (palanca). Este motor también cuenta con un circuito de control (parte electrónica) que se encarga de definir la posición angular que debe tener el servomotor. En la Figura 4.21 se aprecian las partes de un servomotor.

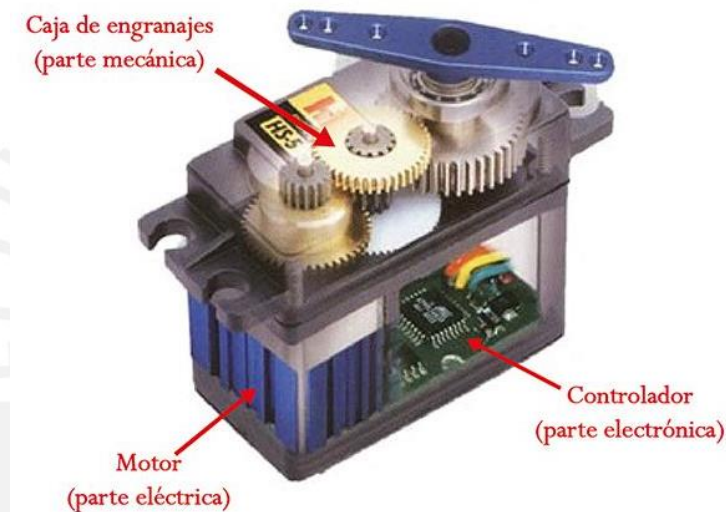


Figura 4.21. Partes de un servomotor.

Los servomotores típicamente trabajan en el rango de 0 a 180° y alimentan con 5V y su consumo de corriente puede ser variable y del orden de los amperios. En la Figura 4.22 se observan los 2 servomotores instalados en el módulo bola y plano, al circuito de control se conectan 3 cables: tierra (negro), voltaje (rojo) y señal (naranja). Los cables rojo y negro son la alimentación y el cable de señal se conecta a un pin digital.



Figura 4.22. Servomotores instalados en el módulo.

Los servomotores se controlan mediante pulsos, para su activación deben enviarse señales moduladas por ancho de pulso (PWM). Por ejemplo para colocar la posición de la palanca en 0° se debe enviar una señal periódica con estado lógico alto de 1 ms de duración y el estado lógico bajo debe ser de 19 ms.

Para colocar la posición de la palanca a un ángulo de 180° se debe enviar una señal periódica con estado lógico alto de 2 ms de duración y el estado lógico bajo debe ser de 18 ms, de manera que el ancho total del periodo siempre se mantenga en 20 ms.

Cualquier valor intermedio entre 1ms y 2ms hará que el motor gire entre 0 a 180° . En la Figura 4.23 se muestra las señales para el control del servomotor.

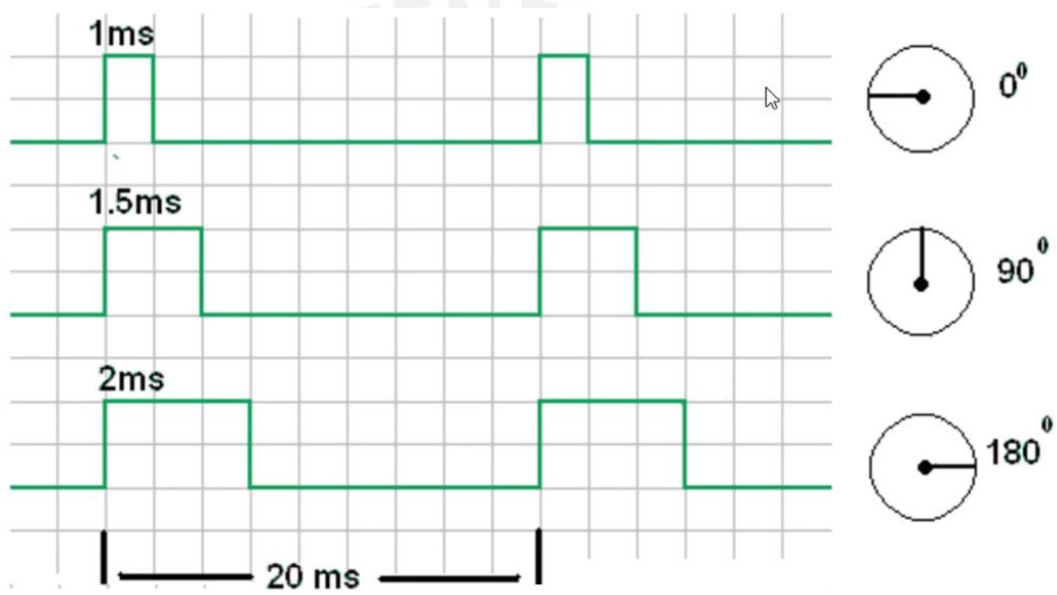


Figura 4.23. Señales para el control de servomotor.

El módulo de salidas digitales 1756-OW16I del Control Logix a 24V es de 150mA, para asegurar la activación del servomotor con la corriente requerida en el orden de los amperios, se plantea el uso de circuitos de potencia con los siguientes elementos:

- TRANSISTOR DE POTENCIA TIP31C
- DIODO 1N4004
- REGULADORES DE VOLTAJE LM7805
- RESISTENCIAS DE 100 OHM

Las salidas del PLC otorgan una salida digital de 0 y 24V por los pines OUT1 Y OUT2, este voltaje es regulado a 5V con el LM7805, esta señal pasará a través de la base del transistor de potencia TIP31C mediante una resistencia de 100Ω y permitirá su activación o

desactivación, el emisor de este transistor está conectado a tierra y su colector está conectado a un diodo 1N4004 el cual está conectado a una fuente de 5V con 3A para el garantizar la corriente necesaria para la activación de los servomotores. Cuando los transistores se activan, dejan pasar el voltaje desde la fuente de 5V hacia los actuadores a través del diodo.

En la Figura 4.24 se muestra la propuesta de implementación de la etapa de potencia para el manejo de los servomotores.

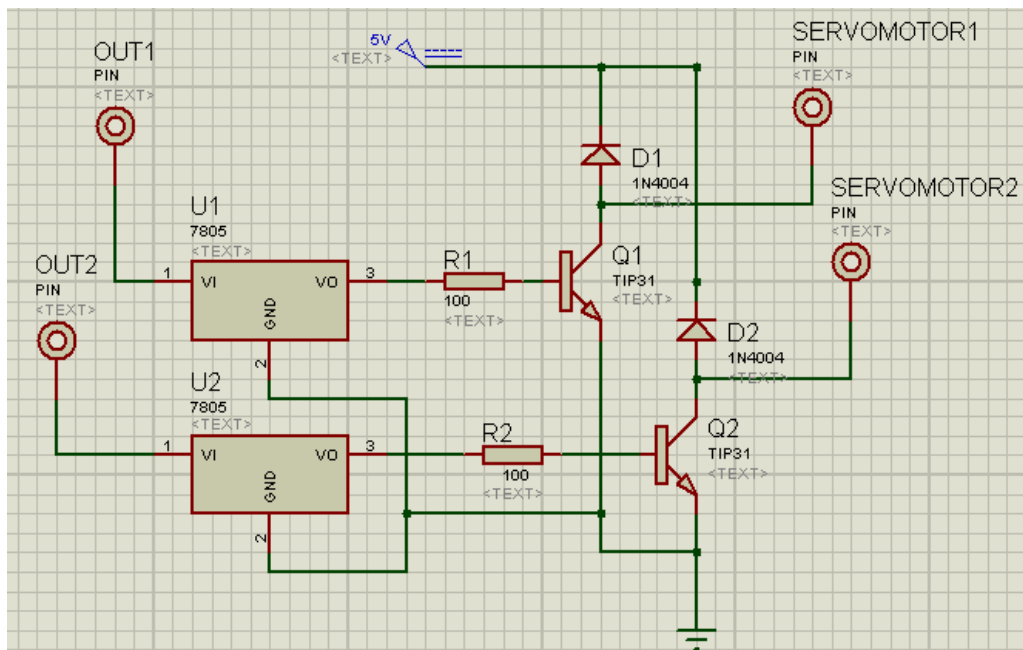
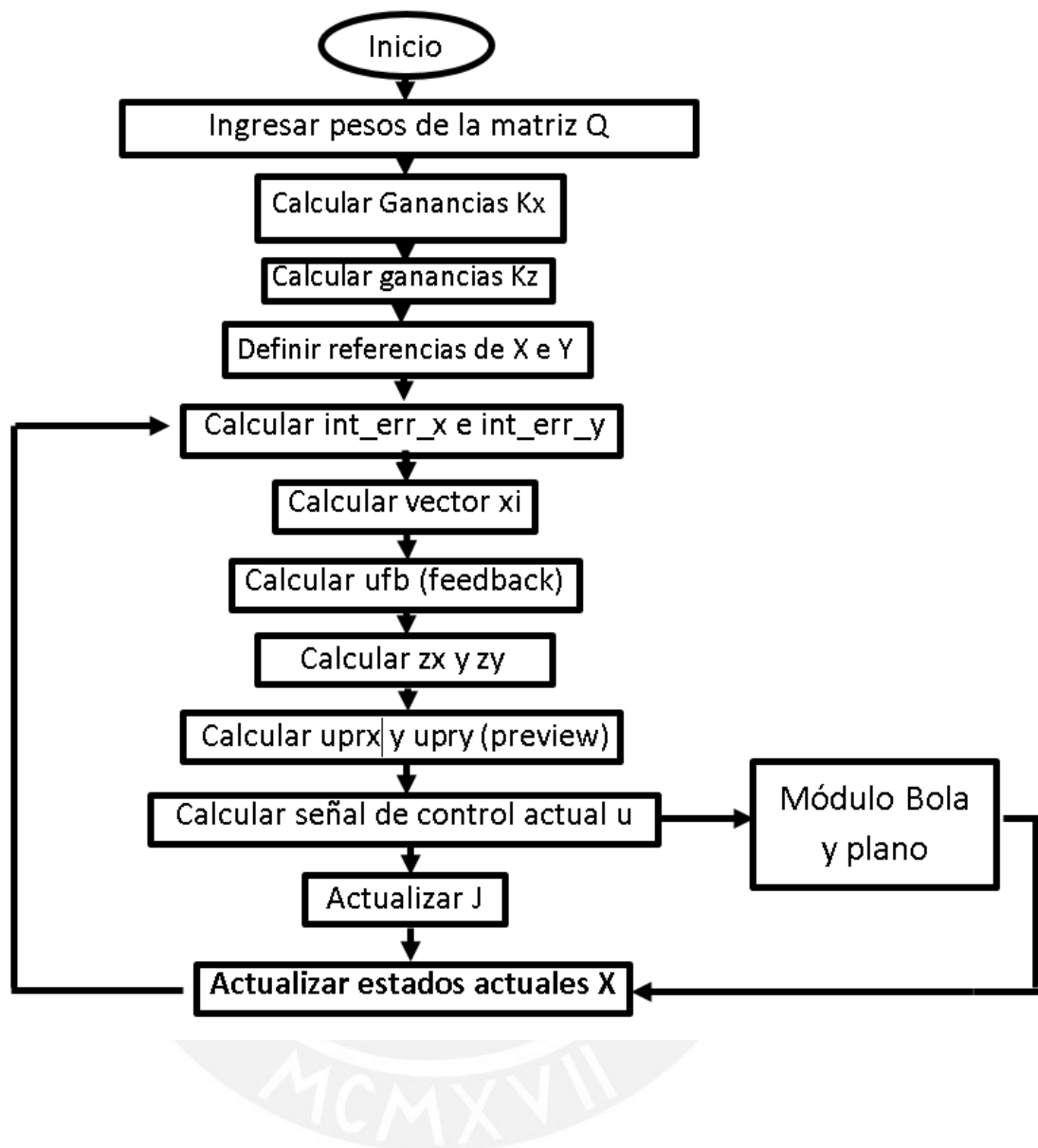


Figura 4.24. Etapa de potencia para activación de servomotores.

Diagrama de Flujo del proceso:



CONCLUSIONES

El estudio del estado del arte permitió conocer los principales trabajos en modelamiento y control de sistemas robóticos de bola y plano con 2 o más grados de libertad y conocer sus diferentes aplicaciones y usos.

El modelo matemático del sistema esfera sobre un plano describe las principales variables que intervienen en este sistema. Se obtuvo un modelo no lineal que puede aproximarse a un modelo lineal alrededor de un punto de operación.

El control óptimo preview diseñado mostró mejores resultados en performance del control de posición de bola sobre el plano comparado con un PID convencional, ya que el algoritmo del control contempla el conocimiento de trayectorias futuras de referencia y la minimización de los errores mediante una función de costo.

La propuesta de implementación del sistema de control óptimo preview en tiempo real con el software Studio5000 de Rockwell Automation dio resultados similares al modelo implementado en Simulink. Se verificó la utilidad de los servidores OPC para una comunicación sencilla de variables de interés desde el entorno Windows con software industrial. También se realizó satisfactoriamente la comunicación con FactoryTalk View y se pudo supervisar la trayectoria de la esfera.

RECOMENDACIONES

Considerar un control óptimo preview adaptativo a futuro, para que sea más robusto a perturbaciones externas, por ejemplo el cambio de la masa de la esfera, al igual que los cambios de otros parámetros de la misma planta.

Considerar un control no lineal con una identificación utilizando redes neuronales, de esta manera se puede trabajar en todo el rango no lineal de la planta en estudio, y así se evitaría la linealización de dicha planta.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Andinet N., DESIGN OF FUZZY SLIDING MODE CONTROLLER FOR THE BALL AND PLATE SYSTEM. PhD thesis, aau, 2011.
- [2] Arfken, G. "Mathematical Methods for Physicists, 3rd ed." Orlando, FL: Academic Press, 1985.
- [3] Arora J., Introduction to Optimum Design. University of Iowa. Elsevier, 2012.
- [4] Awtar S., C. Bernard, N. Boklund, A. Master, D. Ueda, and K. Craig, "Mechatronic design of a ball-on-plate balancing system", *Mechatronics*, vol. 12, no. 2, pp. 217–228, 2002.
- [5] Bemporad, A., "Model Predictive Control: Basic Concepts", *Controllo di Processo e dei Sistemi di Produzione - A.a. 2008/09*.
- [6] Birla N. and Swarup. A., *Optimal Preview Control: A review*. National Institute of Technology, Haryana, India, 2013.
- [7] Borrelli, F., Bemporad, A., Morari, M., "Predictive Control for linear and hybrid systems" ISBN-13: 978-1107652873, 2015.
- [8] Bryson Arthur E., JR; Yu-Chi Ho. *Applied Optimal Control. Optimization, Estimation and Control* Taylor & Francis Group New York, 1975.
- [9] Camacho, E.F., Bordons, C., "Model Predictive control", *Advanced Textbooks in Control and Signal Processing*, Springer, 2007.
- [10] Cheng C.-C. and C.-H. Tsai, "Visual servo control for balancing a ball-plate system", *International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research*, vol. 5, no. 1, p. 28, 2016.
- [11] Colmenares S. G., M. A. Moreno-Armendáriz, W. Yu, and F. O. Rodriguez, "Modeling and nonlinear pd regulation for ball and plate system", in *World Automation Congress (WAC)*, 2012, pp. 1–6, IEEE, 2012.
- [12] Debono D. and M. Bugeja, "Application of sliding mode control to the ball and plate problem", in *Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO)*, 2015 12th International Conference on, vol. 1, pp. 412–419, IEEE, 2015.
- [13] Fei Z., Q. Xiaolong, L. Xiaoli, and W. Shangjun, "Modeling and pid neural network research for the ball and plate system", in *Electronics, Communications and Control (ICECC)*, 2011 International Conference on, pp. 331–334, IEEE, 2011.
- [14] Fujisaki. Y and Narazaki T. *Optimal Preview Control Based on Quadratic Performance Index*. Proceedings of the 36th Conference on Decision & Control, San Diego, California USA, 1997.
- [15] Hagenmeyer V., S. Streif, and M. Zeitz, "Flatness-based feedforward and feedback linearisation of the ball & plate lab experiment", in *Proceedings of the 6th IFAC-Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS)*, 2004.
- [16] Ho M.-T., Y. Rizal, and L.-M. Chu, "Visual servoing tracking control of a ball and plate system: Design, implementation and experimental validation", *International Journal of Advanced Robotic Systems*, vol. 10, no. 7, p. 287, 2013.
- [17] Honc Daniel, Rahul Sharma K., Anuj Abraham, František Dušek, Natarajan Pappa, "Teaching and Practicing Model Predictive Control", *IFAC-PapersOnLine*, Volume 49, Issue 6, 2016, pp. 34-39.
- [18] Hongrui W., T. Yantao, F. Siyan, and S. Zhen, "Nonlinear control for output regulation of ball and plate system", in *Control Conference, 2008. CCC 2008. 27th Chinese*, pp. 382–387, IEEE, 2008.

- [19] KASSEM A., H. HADDAD, and C. ALBITAR, "Comparison between different methods of control of ball and plate system with 6dof stewart platform", IFAC-PapersOnLine, vol. 48, no. 11, pp. 47–52, 2015.
- [20] Ker C. C., C. E. Lin, and R. T. Wang, "Tracking and balance control of ball and plate system", Journal of the Chinese institute of engineers, vol. 30, no. 3, pp. 459–470, 2007.
- [21] Kirk E., Optimal Control Theory. An Introduction. San José State University, California, 2004.
- [22] Liu H. and Y. Liang, "Trajectory tracking sliding mode control of ball and plate system", in Informatics in Control, Automation and Robotics (CAR), 2010 2nd International Asia Conference on, vol. 3, pp. 142–145, IEEE, 2010.
- [23] Naidu D. Optimal Control Systems Idaho State University CRC Press, 2003.
- [24] Oravec M. and A. Jadlovska, "Model predictive control of a ball and plate laboratory model", in Applied Machine Intelligence and Informatics (SAMII), 2015 IEEE 13th International Symposium on, pp. 165–170, IEEE, 2015.
- [25] Roubal J., Havlena, V., "Range Control MPC Approach For TwoDimensional System", Proceedings of the 16th IFAC World Congress, Volume 16, part 1, 2005.
- [26] Takaba K. A, Tutorial on Preview Control Systems. Kyoto University, Japan, 2003.
- [27] Torres G., E. X. Martín, M. Velasco, P. Martí, and A. Camacho, "Internet-based control of a ball-and-plate system: A case study of modeling and automatic code generation for networked control systems", in Industrial Electronics Society, IECON 2014-40th Annual Conference of the IEEE, pp. 4762–4767, IEEE, 2014.
- [28] Wettstein N., Balancing a ball on a plate using stereo vision. PhD thesis, 2013.

