PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Escuela de Posgrado

Familias Normales y Grupos Discontinuos

Tesis para optar el grado de Magíster en Matemáticas

Autor: Jimmy Rainer Tamara Albino

Asesor: Dr. Rudy Rosas Bazán

Miembros del jurado: Dr. Percy Fernández Sanchez

Dr. Roland Rabanal Montoya

LIMA – PERÚ

2013

A mi madre, Leonarda Albino,
por su infinito amor y gran amistad.
A mi padre, Silverio Tamara,
por todo su apoyo incondicional,
por verme alcanzar mis metas.

A mis hermanos, René y Jhon,
por sus enseñanzas y consejos.
A mi hermana, Diana,
por su cariño y alegría.

Agradecimientos

Agradezco a Dios, por siempre tenerme presente en todos sus planes y por permitirme alcanzar mis metas.

A mi papá, Silverio Tamara y mi mamá, Leonarda Albino, por el apoyo que siempre me han brindado en cada aventura que emprendo en mi vida y por el incansable esfuerzo que hacen día a día para darme una vida satisfactoria. Son tantas cosas que tendría que agradecerles, por ello solo puedo decirles, gracias papi y gracias mami. Los quiero de forma infinita.

A mis hermanos, Rene, Jhon y Diana, por ese apoyo incondicional de hermanos con el que puedo contar siempre y por ser pacientes y comprensibles por las cosas que hago o dejo de hacer.

Al Dr. Rudy Rosas Bazán, no solo por su paciencia y tiempo que me dedico para preparar mejor este trabajo si no también por su amistad, confianza, exigencia y motivación en esta hermosa carrera, la cual disfruto.

AL Dr. Percy Fernández Sanchez y al Dr. Roland Rabanal Montoya, por sus observaciones para esta versión final de la tesis. Como también por todas sus enseñanzas y consejos, las cuales me han sido de mucha ayuda.

Al Dr. Johel Beltrán, por su amistad y por todos sus apoyos y consejos.

Al Profesor, Alex Molina, no solo por enseñarme a disfrutarlo lo hermoso de las matemáticas si no también por ser un gran amigo.

Al Profesor, Rubén Bustillos, por su gran amistad y por ayudarme a realizar mis primeras clases como profesor.

A mis amigos, Henry, Josué, Miguel, Mike, Moisés, Daniel, Juan Carlos, Jonathan, Garry, Marco, Wilson, Merwil, Danny, Alfredo, Palomino, Joel, Caldas, Jaime, Isaac y Marchan, con quienes compartí gratos momentos. Que Dios los bendiga a todos.

Resumen

El objetivo principal de la presente tesis es presentar la teoría de las familias normales y mostrar su importancia en la teoría de grupos discontinuos y discretos. Primero haremos un estudio de las propiedades de las transformaciones de Moebius y luego su clasificación por conjugación. Para así introducirnos en la teoría de familias normales para funciones holomorfas y meromorfas. A partir de ello probaremos algunos resultados de normalidad para transformaciones de Moebius en especial el teorema fundamental de normalidad para transformaciones de Moebius. Finalmente veremos que un grupo Γ de transformaciones de Moebius es discontinuo en un punto α si y solo si Γ es discreto y forma una familia normal en α.

Introducción

El científico no estudia la naturaleza porque sea útil; la estudia porque lo disfruta, y lo disfruta porque es bella. Si la naturaleza no fuera bella, no tendría interés en entenderla y si la naturaleza no fuera entendible, no tendría interés por vivir la vida.

HENRI POINCARÉ

La noción de familia normal fue introducida en 1907 por Paul Montel. Durante la primera mitad del siglo XIX, Montel desarrolló lo que hoy se conoce como la teoría de familias normales, un instrumento de suma importancia en el estudio de varios aspectos de la teoría de funciones de una variable compleja. Ésta teoría estudia aspectos de compacidad para familia de funciones holomorfas y se inspira en un hecho fundamental en el análisis en el siglo XIX conocido como la propiedad de Bolzano - Weierstrass, que nos dice que toda sucesión acotada posee una subsucesión convergente.

De esta manera, encontrar subsucesiones convergentes era muy popular en ese entonces, por ello Riemann quiso extender esta propiedad de gran utilidad al conjunto E de funciones continuas definidas en un conjunto compacto de $\mathbb{R}$, pero pronto se vio que la acotación de E no era suficiente. Alrededor de 1880 Ascoli introdujo el requisito adicional de equicontinuidad en E, lo que finalmente garantiza que E tenga la propiedad de Bolzano - Weierstrass. Sin embargo no había muchas aplicaciones y es allí donde Montel introduce la noción de familia normal:

Una familia $\mathcal{F}$ de funciones holomorfas definidas en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ es llamada normal en Ω si toda sucesión de funciones $(f_n) \subset \mathcal{F}$ contiene o bien una subsucesión la cual converge a una función limite $f \not\equiv \infty$ uniformemente en cualquier subconjunto compacto de Ω o bien una subsucesión la cual converge uniformemente a ∞ en cualquier subconjunto compacto.

Es así que la teoría de familias normales, tiene su origen en el teorema de Ascoli[1883] y Arzela [1889, 1895, 1899]. Si (f_n) es equicontinua y localmente limitada, entonces (f_n) posee una subsucesión que converge uniformemente en los compactos del dominio. El hecho fundamental que Montel observa es que para funciones holomorfas, **localmente limitada** implica **equicontinua** y es así que nace el famoso teorema de Montel:

Si $\mathcal{F}$ es una familia localmente limitada de funciones holomorfas en un dominio Ω, entonces $\mathcal{F}$ es una familia normal en Ω.

Entre las aplicaciones de la teoría de Montel podemos mencionar algunos resultados clásicos de la teoría de funciones tales como el teorema de la aplicación de Riemann, el pequeño teorema de Picard, el gran teorema de Picard, el teorema de Landau, el teorema Schottky, así como también muchas aplicaciones al estudio del conjunto de Fatou y de Julia en la dinámica compleja en una variable compleja.

Otra aplicación de las familias normales es el estudio de grupos discontinuos y grupos discretos, lo cual será tratado especialmente en la presente tesis.

Sea Γ un grupo de transformaciones de Moebius. Una relación inmediata es que todo grupo discontinuo Γ es discreto sin embargo la parte recíproca no se cumple necesariamente ya que el grupo Picard $\mathbb{P}$ es discreto y no discontinuo. Es así que podemos preguntarnos ¿ Qué condición se requiere para que todo grupo discreto Γ sea discontinuo ?, es allí donde interviene la teoría de las familias normales. Para ello demostraremos el siguiente teorema llamado teorema fundamental de normalidad para transformaciones de Moebius.

Sea $\widehat{\mathcal{L}}$ una familia de transformaciones de Moebius definidas en un dominio $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ tal que $T(z) \neq w_1$, $T(z) \neq w_2$, para todo $z \in \Omega$, $T \in \widehat{\mathcal{L}}$, donde w_1 y w_2 son números complejos fijos distintos. Entonces $\widehat{\mathcal{L}}$ es normal en Ω.

Por último a partir de este resultado, probaremos lo siguiente:

Un grupo Γ de transformaciones de Moebius es discontinuo en un punto α si y solo si Γ es discreto y forma una familia normal en α.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En éste primer capítulo presentaremos algunos resultados y definiciones, entre estos podemos citar: convergencia uniforme, fórmula integral de Cauchy, funciones sobre la esfera de Riemann y la proyección estereográfica. Para este capítulo tomaremos de referencia los siguientes libros: Lins Neto, A. [11], Lima, E. [5] y Schiff, J.L. [8].

1.1. Topología de $\mathbb{C}$

El plano complejo $\mathbb{C}$ hereda naturalmente todas las propiedades métricas y topológicas de las del plano $\mathbb{R}^2$. Vamos admitir que se conoce algunos resultados topológicos de los espacios euclidianos tales como conjunto abierto, cerrado, compacto, conexo, etc. Ahora estableceremos algunas notaciones que utilizaremos a lo largo de este trabajo. Definamos:
Un ***disco*** de centro z_0 y radio $r > 0$ como el conjunto

$$D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} :\mid z - z_0 \mid< r\},$$

un ***disco cerrado*** de centro z_0 y radio $r \geq 0$ al conjunto

$$\overline{D_r}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} :\mid z - z_0 \mid\leq r\},$$

un ***disco perforado*** de centro $a \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$, al conjunto

$$D^*(a, r) = \{z : 0 <\mid z - a \mid< r\},$$

un ***círculo*** de centro z_0 y radio $r > 0$, esta dado por

$$\partial D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} :\mid z - z_0 \mid= r\}.$$

Dado un subconjunto $A \subset \mathbb{C}$. Definamos el ***interior*** de A:

$$int\,(A) = \{z \in \mathbb{C} : \text{existe } r > 0 \text{ tal que } D_r\,(z) \subset A\},$$

la ***cerradura*** o ***adherencia*** de A, se define por:

$$\overline{A} = \{z \in \mathbb{C} : \text{para todo } r > 0 \text{ se tiene } D_r\,(z) \cap A \neq \varnothing\}.$$

Diremos que Ω es un ***dominio*** en $\mathbb{C}$ si es abierto y conexo.

Decimos que un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es un ***punto de acumulación*** de un conjunto $A \subset \mathbb{C}$, si para todo $r > 0$ se cumple $(D_r\,(z_0) \setminus \{z_0\}) \cap A \neq \varnothing$. Un punto $z_0 \in A$, que no es punto de acumulación de A es llamado ***punto aislado*** de A.

Un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ es llamado ***discreto*** cuando todos sus puntos son aislados.

1.2. Convergencia uniforme

Las definiciones y resultados para ésta sección, se tomará como referencia [11].

1.2.1. Convergencia uniforme en compactos

En análisis es común considerar funciones que son definidas por medio de límites. Por ejemplo cuando definimos la exponencial como la serie

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!},$$

estamos implícitamente diciendo que $e^x = \lim\limits_{n \to \infty} f_n\,(x)$, donde

$$f_n\,(x) = 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + ... + \tfrac{x^n}{n!}.$$

Definición 1.1. *Sea $(g_n)_{n \geq 0}$, una sucesión de funciones complejas, es decir, $g_n : U \longrightarrow \mathbb{C}, n \geq 0$. Diremos que la sucesión* ***converge puntualmente*** *en $X \subset U$, si para todo $z \in X$ existe el límite $\lim\limits_{n \to \infty} g_n\,(z)$. La función $g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $g\,(z) = \lim\limits_{n \to \infty} g_n\,(z)$, es llamada límite puntual de la sucesión.*

Ejemplo 1.2. *Consideremos la sucesión* $(g_n(z) = z^n)_{n\geq 1}$. *No es difícil probar que,* $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0$, *si* $\mid z \mid < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = \infty$, *si* $\mid z \mid > 1$ *y el límite no existe, si* $\mid z \mid = 1$ *y* $z \neq 1$. *Definamos* $X = \{1\} \cup D_1(0)$, *podemos decir que* $(g_n)_{n\geq 1}$, *converge puntualmente para* $g : X \longrightarrow \mathbb{C}$, *donde* $g(z) = 0$ *si* $z \neq 1$ *y* $g(1) = 1$. *Observe que* g *no es continua aunque* g_n *sea continua para todo* $n \geq 1$.

Para garantizar que el límite de una sucesión de funciones continuas sea una función continua, es necesario fortalecer la condición de convergencia.

Definición 1.3. *Diremos que una sucesión* $(f_n)_{n\geq 0}$ *de funciones con valores complejos, definidos en un conjunto* X, ***converge uniformemente*** *a una función* $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, *si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $n_0 \geq 0$ *tal que si* $n \geq n_0$, *entonces* $\mid f_n(z) - f(z) \mid < \epsilon$, *para todo* $z \in X$. *Diremos entonces que la sucesión converge uniformemente y usaremos la notación* $f_n \overset{unif}{\longrightarrow} f$.

Observemos que una sucesión que converge uniformemente también converge puntualmente.

Teorema 1.4. *Una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente, converge a una función continua.*

La demostración puede ser encontrada en [5].

Ejemplo 1.5. *La sucesión* $g_n(z) = z^n$ *del ejemplo anterior converge puntualmente en el disco* $D_1(0)$ *a una función idénticamente nula* $g\mid_{D_1(0)} = f \equiv 0$, *mas no converge uniformemente. En efecto. Sabemos que* $\mid g_n(z) - 0 \mid = \mid z^n \mid$, *luego para todo* $n \geq 1$, *existe* $z_n = \sqrt[n]{\frac{2}{3}} \in D_1(0)$, *tal que* $\mid g_n(z_n) - 0 \mid = \frac{2}{3}$. *Por lo tanto* $(g_n)_{n\geq 1}$ *no puede converger uniformemente.*

Por otro lado si restringimos las funciones g_n *a un disco* $\overline{D}_r(0)$, $0 < r < 1$, *colocando* $f_n = g_n\mid_{\overline{D}_r(0)}$, *entonces la sucesión* $(f_n)_{n\geq 1}$, *converge uniformemente. En efecto. Si* $z \in \overline{D}_r(0)$, *entonces* $\mid z^n \mid = \mid z \mid^n \leq r^n$. *Como* $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$, *dado* $\epsilon > 0$, *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq n_0$, *entonces* $\mid z^n - 0 \mid \leq r^n < \epsilon$, *para todo* $z \in \overline{D}_r(0)$. *Por lo tanto* $f_n \overset{unif}{\longrightarrow} 0$.

Esto motivó la siguiente definición:

Definición 1.6. *Sea* $U \subset \mathbb{C}$ *un abierto. Se dice que una sucesión* $(f_n)_{n\geq 0}$ *de funciones en* U ***converge uniformemente en la partes compactas*** *de* U, *si para todo compacto* $K \subset U$, *existe* $n_0 \geq 0$ *tal que si* $n \geq n_0$, *se cumple que la sucesión* $(f_n\mid_K)_{n\geq n_0}$ *converge uniformemente. Denotaremos por* $f_n \overset{u.p.c}{\longrightarrow} f$ *cuando* f_n *converge uniformemente a* f *en las partes compactas.*

Teorema 1.7. *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto. Si $(f_n)_{n\geq 0}$ es una sucesión de funciones que converge uniformemente en las partes compactas de U. Entonces existe una única función $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que para todo compacto $K \subset U$, se tiene que $f_n \mid_K \stackrel{unif}{\longrightarrow} f \mid_K$. En particular si f_n es continua para todo $n \geq 0$, entonces f es continua.*

La prueba es inmediata a partir del teorema 1.4.

Ejemplo 1.8. *Consideremos la sucesión $f_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, n \geq 1$, definida por $f_n(z) = 1 + z + ... + z^n$. Para $z \neq 1$ tenemos $f_n(z) = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$. Sabemos que el límite $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f_n(z)$ existe si y solamente si $\mid z \mid < 1$, en este caso $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f_n(z) = \frac{1}{1-z}$. Afirmamos que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en las partes compactas de $D_1(0)$ para $\frac{1}{1-z}$. En efecto. Sea $K \subset D_1(0)$, un compacto. Sea $\delta = d(K, \partial D_1(0)) > 0$. Es claro que si $r = 1 - \delta$, entonces $\overline{D}_r(0) \supset K$. Por lo tanto, para todo $z \in K$, tenemos:*

$$\mid f_n(z) - \frac{1}{1-z} \mid = \frac{\mid z \mid^{n+1}}{\mid 1 - z \mid} \leq \frac{r^{n+1}}{\delta}.$$

Sea $\epsilon > 0$. Como $r < 1$, existe n_0 tal que si $n \geq n_0$, entonces $r^{n+1} < \epsilon\delta$. Por lo tanto, si $z \in K$ y $n \geq n_0$, tenemos $\mid f_n(z) - \frac{1}{1-z} \mid < \epsilon$, es decir $f_n \mid_{D_1(0)} \stackrel{u.p.c}{\longrightarrow} \frac{1}{1-z}$ en $D_1(0)$.

1.2.2. Convergencia y norma

En esta sección consideraremos al conjunto $C(K)$, cuyos elementos son todas las funciones continuas, con valores complejos, definidas en un subconjunto K de $\mathbb{C}$. Es conveniente introducir la siguiente notación:

$$\| f \|_K = \sup\{\mid f(z) \mid : z \in K\}.$$

Cuando $f : K \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua y K es compacto, se cumple que $0 \leq \| f \|_K < +\infty$ y además, $\|\|_K$ es una norma en $C(K)$, es decir, se cumplen las siguiente propiedades:

1. $\| f \|_K \geq 0$ y $\| f \|_K = 0$ si y solo si $f \equiv 0$.
2. $\| \lambda f \|_K = \mid \lambda \mid \| f \|_K$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.
3. $\| f + g \|_K \leq \| f \|_K + \| g \|_K$.

La norma $\|\|_K$ es llamada norma de la convergencia uniforme en K.

Observación 1.9. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $f_n \overset{unif}{\longrightarrow} f$, en este caso $f \in C\left(K\right)$.

(ii) Para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \geq 0$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $\parallel f_n - f \parallel_K < \epsilon$.

(iii) $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \parallel f_n - f \parallel_K = 0$.

Definición 1.10. *Diremos que una sucesión* $(f_n)_{n \geq 0}$ *en* $C(K)$ *es de Cauchy, si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $n_0 \geq 1$*, tal que si* $m, n \geq n_0$*, entonces* $\parallel f_m - f_n \parallel_K < \epsilon$.

Teorema 1.11. *Una condición necesaria y suficiente para que una sucesión en* $C\left(K\right)$ *sea convergente es que ella sea de cauchy.*

La demostración puede ser encontrada en [6].

Teorema 1.12. *Sean* $(f_n)_{n \geq 0}$ *y* $(g_n)_{n \geq 0}$ *sucesiones en* $C\left(A\right)$*, donde* $A \subset \mathbb{C}$*. Supongamos que* $f_n \overset{unif}{\longrightarrow} f$ *y* $g_n \overset{unif}{\longrightarrow} g$*. Entonces*

(a) $f_n + g_n \overset{unif}{\longrightarrow} f + g$.

(b) $f_n . g_n \overset{unif}{\longrightarrow} f.g$.

(c) *Si* A *es compacto y* $g\left(z\right) \neq 0$ *para todo* $z \in A$*, entonces existe* $n_0 \geq 0$ *tal que si* $n \geq n_0$*, entonces* $g_n\left(z\right) \neq 0$ *para todo* $z \in A$ *y además* $f_n / g_n \overset{unif}{\longrightarrow} f/g$.

La demostración puede ser encontrada en [11].

Observación 1.13. *Sean* $U \subset \mathbb{C}$ *un abierto y* $(f_n)_{n \geq 0}$,$(g_n)_{n \geq 0}$ *sucesiones en* $C\left(U\right)$ *tales que* $f_n \overset{u.p.c}{\longrightarrow} f$ *y* $g_n \overset{u.p.c}{\longrightarrow} g$*. Entonces*

(a) $f_n + g_n \overset{u.p.c}{\longrightarrow} f + g$.

(b) $f_n \cdot g_n \overset{u.p.c}{\longrightarrow} f \cdot g$.

(c) *Supongamos que* $g \not\equiv 0$*. Sea* $V = \{z \in U : g(z) \neq 0\}$*. Entonces* (f_n/g_n) *converge uniformemente en las partes compactas de* V *a* f/g.

Veamos como la convergencia uniforme se comporta en relación a la composición de funciones.

Teorema 1.14. *Sean $K, U \subset \mathbb{C}$, K compacto y U abierto. Sean $(f_n)_{n\geq 0}$ y $(g_n)_{n\geq 0}$ sucesiones en $C(K)$ y $C(U)$ respectivamente, tales que $f_n \overset{unif}{\longrightarrow} f$, $g_n \overset{u.p.c}{\longrightarrow} g$ y $f(K) \subset U$. Entonces existe $n_0 \geq 0$ tales que para todo $n \geq n_0$ se cumple que $f_n(K) \subset U$ y además la sucesión $(g_n \circ f_n)_{n\geq n_0}$ converge uniformemente a $g \circ f$ en K.*

La demostración puede ser encontrada en [11].

Las siguientes proposiciones nos mostraran la convergencia en las partes compactas, cuando la sucesión es compuesta por la izquierda o por la derecha.

Proposición 1.15. *Dados $U, V \subset \mathbb{C}$ abiertos. Sean las aplicaciones $f_n : V \longrightarrow \mathbb{C}$ y $h : U \longrightarrow V$ continuas. Si f_n converge uniformemente a f en compactos de V, entonces $f_n \circ h$ converge uniformemente a $f \circ h$ en compactos de U.*

Demostración. Sea $K \subset U$ compacto. Entonces $h(K) \subset V$ es compacto. Por hipótesis f_n converge uniformemente el partes compactas de V. Por lo tanto $f_n \circ h$ converge uniformemente en las partes compactas de U. ∎

Teorema 1.16. *Sea $g_n : V \longrightarrow \mathbb{C}$ continua. La sucesión (g_n) converge uniformemente en compactos de V si y solo si la sucesión (g_n) es uniformemente de cauchy en compactos de V.*

La prueba es inmediata a partir de la observación 1.9.

1.3. Funciones holomorfas

Lo que distingue $\mathbb{C}$ de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ es el hecho que $\mathbb{C}$ es un cuerpo. Entonces podemos definir el concepto de derivada análoga a la de las funciones reales. Los siguientes resultados y definiciones, tomaremos como referencia [11].

Definición 1.17. *Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua en el abierto U de $\mathbb{C}$. Decimos que f es* ***holomorfa*** *en $z_0 \in U$, si existe el límite*

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

El número complejo $f'(z_0)$ es llamado derivada de f en z_0. Si para todo $z_0 \in U$ existe $f'(z_0)$, diremos que f es holomorfa en U. La clase de todas las funciones holomorfas en U sera denotado por:

$$\mathcal{O}(U) = \{f : f \;\; es \;\; holomorfa \;\; en \;\; U\}.$$

Ejemplo 1.18. *Veamos algunas funciones holomorfas:*

La traslación:

$$T(z) = z + b\ ,\ b \in \mathbb{C}.$$

La rotación:

$$T(z) = az\ ,\ a = e^{i\theta}, \theta \neq 0.$$

La homotecia:

$$T(z) = kz\ ,\ k > 0.$$

La composición de la homotecia seguida de la rotación resulta la siguiente aplicación:

$$T(z) = az, \mid a \mid \neq 1, 0\ ,\ a \notin \mathbb{R}^{+}.$$

Teorema 1.19. *Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua, donde $U \subset \mathbb{C}$ es un abierto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *f es holomorfas en $z_0 \in U$.*

(2) *f es diferenciable en $z_0 \in U$ desde el punto de vista real* [1] *y si $f(z) = u(z) + iv(z)$, se tiene que*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)$$

a estas ecuaciones llamaremos ecuaciones de Cauchy-Riemann.

La demostración puede ser encontrada en [11].

A partir de las ecuaciones de *Cauchy-Riemann* se obtiene lo siguiente:

Observación 1.20. *Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa, donde $U \subset \mathbb{C}$ es un abierto conexo y $f(U) \subset \mathbb{R}$. Entonces f es constante.*

La siguiente proposición muestra las propiedades aritméticas de las funciones holomorfas.

Proposición 1.21. *Si f y g son funciones continuas en el abierto $U \subset \mathbb{C}$ y holomorfas en $z_0 \in U$, entonces*

[1] f es diferenciable en z_0 desde el punto de vista real, recomendamos [11].

(1) $(f \pm g)$ *es holomorfa en* $z_0 \in U$ *y además*

$$(f \pm g)^{'}(z_0) = f^{'}(z_0) \pm g^{'}(z_0).$$

(2) $f \cdot g$ *es holomorfa en* $z_0 \in U$ *y además*

$$(f \cdot g)^{'}(z_0) = f^{'}(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g^{'}(z_0).$$

(3) *Si* $g(z_0) \neq 0$, *entonces* f/g *es holomorfa en* $z_0 \in U$ *y además*

$$(f/g)^{'}(z_0) = \frac{f^{'}(z_0) \cdot g(z_0) - g^{'}(z_0) \cdot f(z_0)}{(g(z_0))^2}.$$

La demostración puede ser encontrada en [11].

Ahora veamos la regla de la cadena en el caso holomorfo.

Proposición 1.22. *Sea* $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ *y* $g : V \longrightarrow \mathbb{C}$ *funciones continuas, donde* U *y* V *son abiertos de* $\mathbb{C}$. *Supongamos que* $f(U) \subset V$, f *es holomorfa en* $z_0 \in U$ *y* g *es holomorfa en* $w_0 = f(z_0)$. *Entonces* $g \circ f$ *es holomorfa en* z_0 *y además*

$$(g \circ f)^{'}(z_0) = g^{'}(w_0) \cdot f^{'}(z_0).$$

La demostración puede ser encontrada en [11].

Definición 1.23. *Sea* $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ *una función holomorfa, donde* $U \subset \mathbb{C}$ *es abierto. Diremos que* f *es un* $biholomorfismo$ *sobre* $f(U)$ *si* $f(U)$ *es abierto y si* $f : U \longrightarrow f(U)$ *es un homeomorfismo cuya inversa* $f^{-1} : f(U) \longrightarrow U$ *es holomorfa.*

Teorema 1.24 (Teorema de la función inversa)**.** *Sea* $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ *holomorfa, donde* $U \subset \mathbb{C}$ *es un abierto. Supongamos que* $z_0 \in U$ *es tal que* $f^{'}(z_0) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *es invertible. Entonces existe una vecindad abierta* V *de* z_0 *tal que* $g = f|_V$ *es un biholomorfismo y*

$$\left(g^{-1}\right)^{'}(w) = \frac{1}{f^{'}(g^{-1}(w))}$$

para todo $w \in f(V)$.

La demostración puede ser encontrada en [11].

Ejemplo 1.25. *Las traslaciones, rotaciones y homotecias, poseen inversa holomorfa, por lo tanto son biholomorfas.*

1.3.1. Serie de potencias

Una serie de potencias alrededor de $z = 0 \in \mathbb{C}$ es una expresión del tipo:

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n \ , \ a \in \mathbb{C}.$$

Dada la serie $S = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$. Defina

$$\rho(S) = \rho = \sup\{r \geq 0 : \sum \mid a_n \mid r^n < +\infty\}.$$

El número ρ es llamado ***radio de convergencia*** de la serie. Tres casos pueden ocurrir:

(1) $\rho = 0$. En este caso diremos que la serie es ***divergente***.[2]

(2) $0 < \rho < +\infty$. En este caso la serie numérica $\sum a_n z^n$ ***converge absolutamente***[3] para todo $z \in D_\rho(0)$. El disco $D_\rho(0)$ es llamado disco de convergencia de la serie.

(3) $\rho = +\infty$. Decimos en este caso que la serie es ***entera***. La definición de ρ implica que $\sum a_n z^n$ converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$.

En los casos (2) y (3) diremos que la serie es ***convergente***. En cualquiera de los dos casos el conjunto $\{z : \mid z \mid < \rho\}$ sera llamado disco de convergencia de la serie.

Ejemplo 1.26. *Si $z \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$, la serie*

$$z + (2!)\, z^2 + \ldots + (n!)\, z^n + \ldots \quad \textit{es divergente.}$$

Ejemplo 1.27. *Si $S = 1 + z + z^2 + z^3 + ldots + z^n + \ldots$, entonces $\rho(S) = 1$.*
Si $\mid z \mid < 1$, entonces

$$S = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots = \frac{1}{1-z}.$$

Si $z = 1$, la serie es divergente.

Teorema 1.28. *Dada una serie de potencias $S = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$, su radio de convergencia es*

$$\rho(S) = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\mid a_n \mid}}.$$

[2]La serie es divergente cuando la sucesión de sumas parciales no converge, recomendamos [11].

[3]La serie $\sum a_n z^n$ converge absolutamente cuando la serie $\sum \mid a_n z^n \mid$ converge en $\mathbb{R}$.

La demostración puede ser encontrada en [11].

Corolario 1.29 (Criterio de la razón)**.** *Consideremos una serie* $S = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *tal que* $a_n \neq 0$ *para todo* $n \geq 0$*. Sean* $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ *y* $\beta = \lim_{n\to\infty} \inf \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$*. Entonces*

$$\frac{1}{\alpha} \leq \rho(S) \leq \frac{1}{\beta}.$$

En particular si $\alpha = \beta$*, entonces*

$$\frac{1}{\rho(S)} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\, a_{n+1} \,|}{|\, a_n \,|}.$$

La demostración puede ser encontrada en [11].

1.3.2. Funciones analíticas

Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto. Decimos que una función $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ es ***analítica***, si para todo $z_0 \in U$, existe una serie de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n(z_0)(z-z_0)^n$, con radio de convergencia $\rho > 0$ tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0)(z-z_0)^n \tag{1.1}$$

para todo $z \in U$ tal que $|\, z - z_0 \,| < \rho$. Una serie de potencias como en la ecuación (1.1), sera llamada serie de potencias que representa f en z_0.

1.3.3. La función exponencial y el logaritmo complejo

Una exponencial es una función compleja definida por la serie entera

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \ldots,$$

utilizando el criterio de la razón se observa que el radio de convergencia de la serie de arriba es ∞, por lo tanto el disco de convergencia es todo $\mathbb{C}$ y es así que $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa en $\mathbb{C}$. Además su derivada puede ser calculada derivando la serie término a término

$$\frac{d}{dz} \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \exp(z).$$

Denotemos $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$. Sea $U \subset \mathbb{C}^*$ un abierto. Diremos que una función continua $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es una **rama de argumento** en U, si para todo $z \in U$ se tiene que

$$\frac{z}{\mid z \mid} = e^{if(z)}.$$

Observe que si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es una rama de argumento y $k \in \mathbb{Z}$, entonces $f + 2k\pi$ es también una rama de argumento en U.

Diremos que una función continua $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ es una **rama de logaritmo** en U, si para todo $z \in U$ se tiene

$$e^{g(z)} = z.$$

Observe que si g es una rama de logaritmo y $k \in \mathbb{Z}$, entonces $g + 2k\pi i$ es también una rama de logaritmo. Por esta razón no podemos esperar que $g(\exp(w)) = w$, siempre que $\exp(w) \in U$.

Teorema 1.30. *Sea $U \subset \mathbb{C}^*$ un abierto. Entonces*

(a) *Existe una rama de logaritmo en U si y solamente si existe una rama de argumento definido en U.*

(b) *Si $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ es una rama de logaritmo, entonces g es holomorfo y además $g'(z) = \dfrac{1}{z}$ para todo $z \in U$.*

Teorema 1.31. *Toda función analítica es holomorfa en todo su dominio.*

La demostración puede ser encontrada en [15].

Ejemplo 1.32. *La función exponencial y rama principal de logaritmo* [4] *son funciones analíticas.*

1.4. Fórmula integral de Cauchy y aplicaciones

Teorema 1.33 (Fórmula integral de Cauchy)**.** *Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa, donde $U \subset \mathbb{C}$ es un abierto. Sea $\overline{D}$ un disco cerrado tal que $\overline{D} \subset U$. Para todo z en el interior de $\overline{D}$ se cumple*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{D}} \frac{f(w)\, dw}{w - z}.$$

[4] $\log(z) = \ln \| z \| + i\theta$ donde $\theta = \arg(z)$ es la rama principal del logaritmo de z

Consideraremos $\partial\overline{D}$ como una parametrización $\Upsilon(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, donde z_0 es el centro de $\overline{D}$ y r es su radio.

Teorema 1.34. *Toda función holomorfa es analítica en todo su dominio.*

La demostración puede ser encontrada en [11]. A partir de dicho resultado podemos decir, hablar de funciones analíticas es hablar de funciones holomorfas y de la misma manera hablar de funciones holomorfas es hablar de funciones analíticas. Este resultado da un gran avance para futuros teoremas y en adelante cuando nos refiramos de funciones holomorfas también estaremos hablando de funciones analíticas.

El hecho de que toda función holomorfa es localmente la suma de una serie de potencias convergentes tiene una gran cantidad de consecuencias interesantes. Veamos algunas de ellas, antes recordemos que un conjunto es llamado dominio cuando el conjunto abierto y conexo.

Teorema 1.35. *Sea Ω un dominio, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y*

$$Z(f) = \{a \in \Omega : f(a) = 0\}.$$

Entonces o bien $Z(f) = \Omega$ o $Z(f)$ no tiene puntos de acumulación en Ω. En el último caso a cada $a \in Z(f)$ le corresponde un único entero positivo $m = m(a)$ tal que

$$f(z) = (z-a)^m g(z)\ ,\ z \in \Omega$$

donde $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ y $g(a) \neq 0$; además, $Z(f)$ es a lo sumo numerable.

El entero m se le llama orden del 0 que f tiene en el punto a. Claramente $Z(f) = \Omega$ si y solo si f es idénticamente 0 en Ω. $Z(f)$ se llama conjunto de ceros de f. La demostración puede ser encontrada en [15].

Corolario 1.36. *Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa, donde U es abierto y conexo. Si $f^{-1}(0) = \{z \in U : f(z) = 0\}$ posee algún punto de acumulación en U. Entonces $f \equiv 0$.*

Corolario 1.37. *Si f y g son funciones holomorfas en un dominio Ω y si $f(z) = g(z)$ para todo los z de algún conjunto que tiene un punto de acumulación Ω, entonces $f(z) = g(z)$, para todo $z \in \Omega$.*

Teorema 1.38 (Principio de la extensión analítica). *Sean $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ funciones holomorfas, donde Ω es un dominio. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *$f \equiv g$ en Ω.*

(b) *Existe una vecindad no vacía* $V \subset \Omega$ *tal que* $f\mid_V = g\mid_V$.

Teorema 1.39 (Teorema de Liouville)**.** *Una función entera*[5] *limitada es constante.*

La demostración puede ser encontrada en [15].

Corolario 1.40 (Teorema de la aplicación de abierta)**.** *Sea* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *una función holomorfa no constante, donde* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *es un dominio. Entonces* f *es abierta, esto es, para todo abierto* $W \subset \Omega$, $f(W)$ *es abierto.*

La demostración puede ser encontrada en [11].

Teorema 1.41 (Teorema del modulo máximo)**.** *Sea* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *una función holomorfa, donde* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *es un dominio. Supongamos que existe* $z_0 \in \Omega$ *tal que* $\mid f(z) \mid \leq \mid f(z_0) \mid$, *para todo* z *en una vecindad de* z_0. *Entonces* f *es constante en* Ω.

La demostración puede ser encontrada en [11].

Teorema 1.42 (Teorema de Weierstrass)**.** *Sea* (f_n) *una sucesión de de funciones holomorfas en un dominio* Ω *el cual converge uniformemente en subconjuntos compacto de* Ω *a una función* f. *Entonces* f *es holomorfa en* Ω, *y la sucesión de derivadas* $(f_n^{(k)})$ *converge uniformemente en subconjuntos compactos a* $f^{(k)}$, $k = 1, 2, 3 \ldots$

Demostración. Para cualquier $z_0 \in \Omega$, escojamos $D(z_0, r) \subseteq \Omega$, y escribamos $C_r = \{z : \mid z - z_0 \mid = r\}$. Para cualquier $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$,

$$\mid f_n(\zeta) - f(\zeta) \mid < \epsilon$$

para todo $\zeta \in C_r$. Definamos

$$F_k(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} \ , \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

para $z \in D(z_0, \frac{r}{2})$. Entonces para $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \mid F_k(z) - f_n^{(k)}(z) \mid &\leq \frac{k!}{2\pi} \int \frac{\mid f(\zeta) - f_n(\zeta) \mid}{\mid \zeta - z \mid} \mid d\zeta \mid \\ &< \frac{k! \epsilon 2\pi i}{r^k}, \end{aligned}$$

[5] Diremos que f es una función entera cuando es holomorfa en todo $\mathbb{C}$.

esto es $f_n^{(k)}(z) \longrightarrow F_k(z)$ uniformemente en $D(z_0, \frac{r}{2})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Para $k = 0$, $f_n(z) \longrightarrow f(z)$ y $f_n(z) \longrightarrow F_0(z)$ por lo tanto $f(z) = F_0(z)$, el cual es una función holomorfa en $D(z_0, \frac{r}{2})$. Como z_0 era arbitrario, $f(z)$ es holomorfa en Ω. Entonces $f_n^{(k)} \longrightarrow f^{(k)}$ uniformemente en $D(z_0, \frac{r}{2})$, por lo tanto en subconjuntos compactas de Ω.

∎

Teorema 1.43. *Si (f_n) es una sucesión de funciones holomorfas inyectivas en un dominio Ω, el cual converge uniformemente en los compactos de Ω a una función holomorfa f. Entonces f es una función constante o inyectiva.*

La demostración puede ser encontrada en [8].

1.5. Funciones meromorfas: Singularidades aisladas

Definición 1.44. *Si $a \in \Omega$ y $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{a\})$, se dice que f tiene una **singularidad aislada** en el punto a. Si f se puede definir en a y la función extendida es holomorfa en Ω, se dice que a es una **singularidad evitable**.*

Ejemplo 1.45. *La función $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ presenta una singularidad evitable en $z = 0$ que se elimina definiendo $f(0) = 1$.*

Teorema 1.46 (Teorema de extensión de Riemann). *Supongamos que $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{a\})$, y que f es acotada en $D^*(a, r)$, para algún $r > 0$. Entonces f tiene una singularidad evitable en a.*

Teorema 1.47. *Si $a \in \Omega$ y $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{a\})$, entonces debe darse una de las tres siguientes situaciones:*

(1) *f tiene una singularidad evitable en a.*

(2) *Existen números complejos $c_1, c_2, \ldots, c_m$, donde m es un entero positivo y $c_m \neq 0$, tales que*

$$f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$$

tiene una singularidad evitable en a.

(3) *Si $r > 0$ y $D(a, r) \subset \Omega$, entonces $f(D^*(a, r))$ es denso en el plano complejo.*

En la situación (2) se dice que f tiene un **polo de orden** m **de** a. La función

$$\sum_{k=1}^{m} c_k (z-a)^{-k},$$

que es un polinomio en $(z-a)^{-1}$, se llama la **parte principal de** f **en** a. Es claro, en este caso, que $|\, f(z)\,| \longrightarrow \infty$ cuando $z \longrightarrow a$.

En la situación (3) de sice que f tiene una **singularidad esencial en** a.

De los resultado anteriores podemos deducir la siguiente clasificación de singularidades aisladas, en cuanto al comportamiento de la función en una vecindad perforada:

- z_0 es una singularidad evitable de $f \Leftrightarrow f$ es limitada en una vecindad perforada de $z_0 \Leftrightarrow$ existe y es finito el limite $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.
- z_0 es un polo de $f \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$.
- z_0 es una singularidad esencial de $f \Leftrightarrow$ para toda vecindad perforada V de z_0, $f(V)$ es denso en $\mathbb{C} \Leftrightarrow$ el limite $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ no existe.

Ejemplo 1.48. *La aplicación*

$$T(z) = \frac{1}{z},$$

tiene un polo en $z = 0$.

Ejemplo 1.49. *La función* $f(z) = \frac{\sin(z)}{z^3}$ *tiene en* $z = 0$ *un polo de orden* 2 *con parte principal* $\frac{1}{z^2}$ *pues*

$$\frac{\sin(z)}{z^3} = \frac{z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \cdots}{z^3} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}z^2 - \cdots .$$

Ejemplo 1.50. 0 *es una singularidad esencial de* $e^{1/z}$.

Definición 1.51. *Se dice que una función* f *es* ***meromorfa en un abierto*** $\Omega \subset \mathbb{C}$ *si existe un conjunto* $\Sigma \subset \Omega$ *tal que*

(a) Σ *no tiene puntos de acumulación en* Ω.

(b) $f \in \mathcal{O}(\Omega - \Sigma)$ *donde* $\Omega - \Sigma$ *es abierto.*

(c) f *tiene un polo en cada punto de* Σ.

Observe que no se excluye la posibilidad de que $\Sigma = \emptyset$. Así pues, toda $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ es meromorfa en Ω.

Notemos también que (a) implica que ningún subconjunto compacto de Ω contiene infinitos puntos de Σ, y que por lo tanto, Σ es a lo sumo numerable. La clase de todas las funciones meromorfas en Ω sera denotado por $M(\Omega)$.

Ejemplo 1.52. *La aplicación*

$$T(z) = \frac{1}{z}$$

es meromorfa en $\mathbb{C}$ *ya que* $\Sigma = \{0\}$.

Ejemplo 1.53. *La función*

$$\frac{e^z}{(z-1)(z-2)}$$

es meromorfa en $\mathbb{C}$ *pues* $\Sigma = \{1, 2\}$.

Ejemplo 1.54. *Toda función racional* [6] *es meromorfa en* $\mathbb{C}$.

1.6. La esfera de Riemann

1.6.1. Construcción de la esfera de Riemann

Para esta sección tomaremos como referencia [11]. Existen varios problemas de la teoría de variable compleja donde es conveniente tratar al *"infinito"* como un punto ordinario. Consideraremos un elemento $\infty \notin \mathbb{C}$ (por ejemplo podríamos considerar $\infty = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$) y especificaremos cuales son sus vecindades. Procedamos a construir la esfera de Riemann.

Consideremos un elemento $\infty \notin \mathbb{C}$. El conjunto $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sera llamado **esfera de Riemann**. Los puntos de $\mathbb{C} \subset \overline{\mathbb{C}}$ serán llamados puntos finitos. Diremos que V es una vecindad de ∞, si $\infty \in V$ y existe $r > 0$ tal que $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,r)} \subset V$. Las siguientes propiedades pueden ser verificadas:

(a) La unión arbitraria de vecindades de ∞ es una vecindad de ∞.

(b) La intersección finita de vecindades de ∞ es una vecindad de ∞.

[6] Una función racional es el cociente de dos polinomios.

(c) Para todo $z_0 \in \mathbb{C}$ y todo $r \geq 0$, $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D(z_0, r)}$ es una vecindad de ∞.

Observe que,

$$\bigcap_{r \geq 0} (\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D_r(z_0)}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D_n(z_0)}) = \{\infty\}.$$

Diremos que un subconjunto $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ es un abierto de $\overline{\mathbb{C}}$, si A es vecindad de todos sus puntos. Es conveniente aclarar que en el caso de los puntos de $A \cap \mathbb{C}$, la palabra vecindad es usada en el sentido usual. Diremos que un subconjunto $F \subset \overline{\mathbb{C}}$ es cerrado si $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ es abierto.

Con estas definiciones podemos unificar las nociones de límite usual y límite infinito de sucesiones de funciones de la siguiente manera: sea una sucesión $(z_n) \subset \overline{\mathbb{C}}$. Decimos que $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = a \in \overline{\mathbb{C}}$, si para toda vecindad V de a existe $n_0 \geq 1$(que depende V) tal que si $n \geq n_0$, entonces $z_n \in V$ para todo $n \geq n_0$. Análogamente, si $f : A \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ es una función, donde $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ y z_0 es un punto de acumulación de A (esto es, toda vecindad de z_0 contiene puntos en A distintos de z_0), diremos que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, si para toda vecindad V de w_0 existe una vecindad U de z_0 tal que $f(U \cap A - \{z_0\}) \subset V$. Un ejemplo ilustrativo es probar que si $z_0 = \infty$, el concepto es equivalente a la noción usual de $\lim\limits_{z \to \infty} f(z)$, por lo tanto si $w_0 = \infty$, la definición es equivalente a la de $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Diremos que una función $f : U \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ es continua en un punto $z_0 \in U$, si z_0 es un punto aislado de U, o si z_0 es punto de acumulación de U y $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Diremos que f es continua en U si ella es continua en todos los puntos de U.

Ejemplo 1.55. *Sean $P(z)$ y $Q(z)$ dos polinomios de una variable compleja, sin raíces comunes (esto es, $P(z) = 0 \Rightarrow Q(z) \neq 0$ y $Q(z) = 0 \Rightarrow P(z) \neq 0$). Definamos*

$$f(z) = \begin{cases} \frac{P(z)}{Q(z)}, & \text{si } z \in \mathbb{C} \text{ y } Q(z) \neq 0, \\ \infty, & \text{si } z \in \mathbb{C} \text{ y } Q(z) = 0, \\ \lim\limits_{w \to \infty} \frac{P(w)}{Q(w)}, & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

f es continua en $\overline{\mathbb{C}}$.

1.6.2. Funciones sobre la esfera de Riemann

Un problema natural es el siguiente: ¿Como definir función holomorfa, cuando el dominio o contradominio de la misma es un abierto de la esfera

S^2? la dificultad esta en el hecho de que S^2 no posee estructura de espacio vectorial y es así que no podemos restar vectores de manera natural. Debemos recordar que en la definición de la derivada fue necesario considerar el cociente de dos diferencias, lo que no es posible en S^2. Sin embargo esta dificultad puede superarse observándose que para todo $p \in S^2$, $S^2 - \{p\}$ puede ser identificado en $\mathbb{C}$ por medio de una carta local.[7]

Sea $f : U \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ una función continua, donde $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ es abierto. Diremos que f es ***holomorfa en*** $z_0 \in U$ si una de las cuatro condiciones de abajo son verificadas:

(a) $z_0 \neq \infty$, $f(z_0) \neq \infty$ y f es holomorfa en z_0 en el sentido usual.

(b) $z_0 \neq \infty$, $f(z_0) = \infty$ y $\frac{1}{f(z)}$ es holomorfa en z_0.

(c) $z_0 = \infty$, $f(z_0) \neq \infty$ y $f\left(\frac{1}{z}\right)$ es holomorfa en 0.

(d) $z_0 = \infty$, $f(z_0) = \infty$ y $\frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)}$ es holomorfa en 0.

En los casos (b) y (d) convendremos que $\frac{1}{f(w)} = 0$ si $f(w) = \infty$. Diremos que f es holomorfa en U si f es holomorfa en todos los puntos de U.

Observemos que esta definición de función holomorfa abarca como casos particulares las definiciones de función holomorfa en el sentido usual y de función meromorfa. Por otro lado una función meromorfa en $U \subset \mathbb{C}$, puede ser considerada como una función holomorfa $f : U \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$.

Definición 1.56. *A continuación definiremos singularidades aisladas en el punto ∞:*

(1) *Decimos que f tiene **singularidad evitable en** ∞ si f esta definida sobre alguna vecindad de ∞ y*

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = c \in \mathbb{C}.$$

(2) *Decimos que f tiene **polo en** ∞ si f esta definida sobre alguna vecindad de ∞ y*

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty.$$

[7]Recomendamos el libro : Geometría diferencial de curvas y superficies, M. do Carmo, IMPA.1995.

(3) *Decimos que f tiene* ***singularidad esencial en*** ∞ *si f esta definida sobre alguna vecindad de ∞ y*

$$\nexists \lim_{z\to\infty} f(z).$$

Proposición 1.57. *Una función entera $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ que tenga en ∞ un polo, es un polinomio.*

Demostración. Supongamos que ∞ sea un polo de orden $k \geq 1$. Luego por el desarrollo de la serie de Laurent de f en el ∞ es:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{k} a_{-n} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}\ ,\ a_{-k} \neq 0. \tag{1.2}$$

Consideremos la función auxiliar

$$g(z) = f(z) - \sum_{n=1}^{k} a_{-n} z^n \ \ \textit{donde}\ \ a_{-k} \neq 0, \tag{1.3}$$

observemos que g es una función entera, por que es diferencia de f, menos un polinomio de grado k en z. Además por (1.2), la función

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n},$$

luego,

$$\lim_{z\to\infty} g(z) = \lim_{z\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} = \lim_{w\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n = a_0, \tag{1.4}$$

hemos llamado $w = \dfrac{1}{z}$. El último límite en (1.4) es a_0 por que la serie de potencias de w define una función holomorfa que es continua. Entonces su límite cuando $w \to 0$ es el valor de la suma de serie de potencias en $w = 0$.

De la igualdad (1.4) deducimos que g es una función entera que tiene en ∞ una singularidad evitable. Por el teorema 1.39, g es constante. Luego es igual al limite a_0. Tenemos $g(z) = a_0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Sustituyendo en (1.3) se deduce:

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{k} a_{-n} z^n\ ,\ \textit{donde}\ \ a_{-k} \neq 0.$$

Por lo tanto f es un polinomio de grado k.

∎

Veamos la siguiente extensión de funciones meromorfas:

Definición 1.58. *Sea $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ un abierto. Diremos que f* ***es meromorfa en*** *Ω si satisface las siguientes condiciones:*

(a) *f es meromorfa en $\Omega \setminus \{\infty\}$.*

(b) *f tiene singularidad evitable o polo en ∞.*

El siguiente teorema de funciones meromorfas es muy similar a los corolarios 1.36 y 1.40.

Teorema 1.59. *Sea $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ un conjunto abierto y conexo.*

(1) *Si $f \in M(\Omega)$ y $f^{-1}(0) \cap \Omega \neq \varnothing$, entonces $f \equiv 0$.*

(2) *Si $f \in M(\Omega)$ no es constante, entonces f es abierta.*

1.7. Proyección estereográfica

El plano complejo se puede pensar como la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$ sin el polo norte $N = (0,0,1)$. Por lo tanto podemos pensar que el polo norte corresponde a un punto ideal que representa al infinito.

Para asociar cada punto del plano complejo con uno en

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4}\},$$

usamos la siguiente idea geométrica: se toma el plano $x_3 = 0$ como el plano complejo $\mathbb{C}$, y la linea que proyecta el polo norte $N = (0,0,1)$ de la esfera a cualquier otro punto $x = (x_1, x_2, x_3)$ en dicha esfera. Esta recta cruza el plano complejo en un único punto. Procedamos a encontrar dicho punto. Sea la recta $L = \{N + t(x - N) : t \in \mathbb{R}\} = \{(tx_1, tx_2, 1 + t(x_3 - 1)) : t \in \mathbb{R}\}$. Para hallar el punto interceptamos L con $\mathbb{C}$. Entonces $1 + t(x_3 - 1) = 0$. Así $t = \frac{1}{1-x_3}$. Por lo tanto $L \cap \mathbb{C} = \left\{\left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}, 0\right)\right\}$.

Con esta idea definamos la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & S^2 - \{N\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & \dfrac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}. \end{array}$$

Afirmación 1. *φ es biyectiva.*

Para ello construiremos la inversa de φ. Sea $z = \varphi(x_1, x_2, x_3)$. Como $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$, se tiene que

$$\mid z \mid^2 = \mid \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \mid^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{\frac{1}{4} - \left(x_3 - \frac{1}{2}\right)^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{x_3}{1 - x_3}.$$

Despejando el punto x_3, tenemos

$$x_3 = \frac{\mid z \mid^2}{1 + \mid z \mid^2}. \tag{1.5}$$

Claramente, sabemos que

$$z + \overline{z} = \frac{2x_1}{1 - x_3},$$

despejando el punto x_1

$$x_1 = \frac{(z + \overline{z})(1 - x_3)}{2} = \frac{z + \overline{z}}{2}\left(1 - \frac{\mid z \mid^2}{1 + \mid z \mid^2}\right) = \frac{z + \overline{z}}{2}\left(\frac{1}{1 + \mid z \mid^2}\right)$$

luego,

$$x_1 = \frac{z + \overline{z}}{2(1 + \mid z \mid^2)}. \tag{1.6}$$

Se sabe que

$$z - \overline{z} = \frac{2ix_2}{1 - x_3},$$

entonces

$$x_2 = \frac{z - \overline{z}}{2i(1 + \mid z \mid)^2}. \tag{1.7}$$

Ahora definamos la siguiente aplicación π de $\mathbb{C}$ en $S^2 \setminus \{N\}$:

$$\pi(z) = \left(\frac{z + \overline{z}}{2(1 + \mid z \mid^2)}, \frac{z - \overline{z}}{2i(1 + \mid z \mid^2)}, \frac{\mid z \mid^2}{1 + \mid z \mid^2}\right)$$

tal que $\varphi \circ \pi = \pi \circ \varphi = Id$. φ es biyectiva.

Definamos $\overline{\varphi} : S^2 \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ tal que $\overline{\varphi}(N) = \infty$ y $\overline{\varphi}(z) = \varphi(z)$ para todo $z \in S^2 \setminus \{N\}$. A $\overline{\varphi}$ se le llama ***proyección estereográfica***.

Afirmación 2. *$\overline{\varphi}$ es un biholomorfismo.*

De la misma definición se tiene que $\overline{\varphi}$ es biyectiva, luego por el teorema 1.24 $\overline{\varphi}$ es un biholomorfismo.

Definición 1.60. *Los puntos del plano complejo junto con ∞ forman el **plano complejo extendido**, denotado por $\overline{\mathbb{C}}$.*

Definición 1.61. *Diremos que C es un **círculo de** $\overline{\mathbb{C}}$, si C es un círculo en $\mathbb{C}$ o si C es la unión de una recta en $\mathbb{C}$ con $\{\infty\}$. Un círculo en $\overline{\mathbb{C}}$ será denotado por $\overline{\mathbb{C}} -$ círculo.*

Definición 1.62. *Sea S^2 la esfera unitaria de $\mathbb{R}^3$. Llamaremos **círculo de** S^2 a todo conjunto no vacío que se obtenga como la intersección de S^2 con algún plano $P\subset \mathbb{R}^3$ no tangente a S^2. Un círculo de S^2 será denotado por $S^2 -$ circulo.*

Una propiedad fundamental de la proyección estereográfica la exhibe el siguiente resultado:

Proposición 1.63. *Los $S^2 -$ circulos son exactamente los $\overline{\mathbb{C}} -$ círculos.*

Demostración. Si el círculo $C \subset S^2$, $N = (0, 0, 1) \in C$, entonces

$$C \setminus \{N\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 : ax_1 + bx_2 + cx_3 = d\},$$

luego bajo la proyección estereográfica obtenemos:

$$\pi^{-1}(C \setminus \{N\}) = \left\{z \in \mathbb{C} : a\left(\tfrac{z+\overline{z}}{2(1+|z|^2)}\right) + b\left(\tfrac{z-\overline{z}}{2i(1+|z|^2)}\right) + c\left(\tfrac{|z|^2}{1+|z|^2}\right) = d\right\}.$$

Escribiendo $z = x + iy$, se obtiene:

$$\pi^{-1}(C \setminus \{N\}) = \{(x, y) \in \mathbb{C} : ax + by + c(x^2 + y^2) = d(x^2 + y^2 + 1)\}.$$

Si $c = d$, se cumple que $\pi^{-1}(C \setminus \{N\})$ es una recta. Si $c \neq d$, se tiene que $\pi^{-1}(C \setminus \{N\})$ es un círculo en $\mathbb{C}$. Por lo tanto

$$C = (C \setminus \{N\}) \cup \{N\} = \pi^{-1}(C \setminus \{N\}) \cup \{\infty\} = \textit{Círculo} \cup \textit{recta} \cup \{\infty\}.$$

Recíprocamente, una recta en el plano esta definida por la ecuación

$$ax + by = c.$$

Estos puntos bajo la proyección estereográfica son llevados al conjunto de puntos en la esfera, definidas por la ecuación

$$a\left(\frac{x_1}{1 - x_3}\right) + b\left(\frac{x_2}{1 - x_3}\right) = c$$

$$ax_1 + bx_2 = c\,(1 - x_3)$$

los cuales están contenidos en la intersección de un plano y la esfera, es decir, se trata de un $S^2 - \mathit{circulo}$. Como $\pi(\infty) = N$ satisface dicha ecuación, este círculo pasa por el polo norte.

Por último un círculo en el plano esta definido por las siguientes ecuaciones:

$$\mid z - a \mid^2 = r^2,$$

$$(z - a)(\overline{z} - \overline{a}) = r^2,$$

$$\mid z \mid^2 - a\overline{z} - \overline{a}z + \mid a \mid^2 = r^2, \tag{1.8}$$

por la proyección estereográfica $\mid z \mid^2 = \frac{x_3}{1-x_3}$, reemplazando en la ecuación (1.8) obtenemos:

$$\frac{x_3}{1-x_3} - 2\Re e\,(a\overline{z}) = r^2 - \mid a \mid^2 .$$

Si $a = a_1 + ia_2$, $z = x + iy$, entonces $\Re e\,(a\overline{z}) = a_1x + a_2y$ y la imagen del círculo en la esfera esta definida por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{x_3}{1-x_3} - 2\,(a_1x + a_2y) = r^2 - \mid a \mid^2,$$

$$\frac{x_3}{1-x_3} - 2\left(a_1\left(\frac{x_1}{1-x_3}\right) + a_2\left(\frac{x_2}{1-x_3}\right)\right) = r^2 - \mid a \mid^2,$$

$$x_3 - 2a_1x_1 - 2a_2x_2 = \left(r^2 - \mid a \mid^2\right)(1 - x_3)\,,$$

se sigue entonces que estos puntos están contenidos en un plano y por lo tanto constituyen un círculo en la esfera. De esta forma los $S^2 - \mathit{circulos}$ son exactamente los $\overline{\mathbb{C}} - \mathit{círculos}$.

■

Capítulo 2

Transformaciones de Moebius complejas

Para este capítulo tomaremos de referencia [8] y [14]. Estudiaremos a las transformaciones de Moebius y algunas de sus propiedades geométricas elementales. Demostraremos que los automorfismos sobre la esfera de Riemann son las transformaciones de Moebius complejas. Luego desarrollaremos la clasificación por conjugación de las transformaciones de Moebius y por ultimo el teorema de clasificación para las transformaciones de Moebius, que será de mucha utilidad para el resultado principal de este trabajo.

2.1. Transformaciones de Moebius

Una **transformación de Moebius o homografía** es una aplicación de la forma

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$. Esta función define naturalmente una aplicación de $\overline{\mathbb{C}}$ en $\overline{\mathbb{C}}$ de la manera siguiente: si $c \neq 0$, defina $T(\infty) = \frac{a}{c}$ y $T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$. Si $c = 0$, defina $T(\infty) = \infty$. Es fácil probar que T, extendida de esta manera, es una biyección de $\overline{\mathbb{C}}$ en $\overline{\mathbb{C}}$. Denotaremos con $\mathcal{L}$ al conjunto de las transformaciones de Moebius, es decir:

$$\mathcal{L} = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} : ad - bc \neq 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}.$$

Observación 2.1. *Sea* $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{\frac{a}{k}z + \frac{b}{k}}{\frac{c}{k}z + \frac{d}{k}}$ *con* $k \neq 0$. *Llamemos* k *al* *número* $\sqrt{ad-bc}$. *Multiplicando los coeficientes de los extremos de la fracción* $T(z) = \dfrac{\frac{a}{k}z + \frac{b}{k}}{\frac{c}{k}z + \frac{d}{k}}$, *obtenemos:*

$$\frac{a}{k}\cdot\frac{d}{k} - \frac{b}{k}\cdot\frac{c}{k} = 1,$$

es decir, cualquier $T \in \mathcal{L}$ *se puede expresar de esta forma* $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ *con* $ad-bc=1$. *Por lo tanto*

$$\mathcal{L} = \left\{\frac{az+b}{cz+d} : ad-bc=1,\;\; a,b,c,d \in \mathbb{C}\right\}.$$

Ejemplo 2.2. *Veamos algunas transformaciones de Moebius:*

(a) Las traslaciones

$$T(z) = z+b,\; b \in \mathbb{C}.$$

(b) Las rotaciones

$$T(z) = az, \;\; a = e^{i\theta}, \;\; \theta \neq 2k\pi i.$$

(c) Las homotecias

$$T(z) = kz, \;\; k > 0.$$

(d) La inversión

$$Inv(z) = \frac{1}{z}.$$

Proposición 2.3. *Cualquier transformación de Moebius se puede expresar como la composición de traslaciones, rotaciones, homotecias y la transformación* $z \mapsto \dfrac{1}{z}$.

Demostración. Una transformación de Moebius que fija ∞ es de la forma

$$z \longmapsto \frac{a}{d}z + \frac{b}{d},$$

es decir, es una composición de homotecias, rotaciones y traslaciones. Si la transformación de Moebius no fija ∞, entonces podemos expresar la transformación de la siguiente forma

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}(cz+d) + b - \frac{ad}{c}}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz+d}$$

y es por lo tanto composición de algunas de las transformaciones descritas. ■

Por la proposición 1.63 es natural pensar el siguiente enunciado:

Proposición 2.4. *Las transformaciones de Moebius transforman $\overline{\mathbb{C}}-$círculos en $\overline{\mathbb{C}}-$ círculos.*

Demostración. Basta probar que la transformación $z \xrightarrow{Inv} \frac{1}{z}$ tiene la propiedad mencionada, ya que evidentemente las traslaciones, las rotaciones y las homotecias transforman $\overline{\mathbb{C}}-$ *círculo* en $\overline{\mathbb{C}}-$ *círculo*. Para estas últimas funciones, la prueba es inmediata, por ejemplo, si $k \in \mathbb{C}$, la función $z \longmapsto kz$ transforma la recta

$$z = a + bt \ \ con; \ a, b \in \mathbb{C} \ \ y \ \ t \in \mathbb{R},$$

en la recta

$$w = kz = ka + kbt \ \ con \ \ t \in \mathbb{R}$$

y el círculo

$$\mid z - a \mid = r,$$

en el círculo

$$\mid kz - ka \mid = kr.$$

El caso de la traslación no es difícil de probar. Para demostrar que la transformación $z \xrightarrow{Inv} \frac{1}{z}$ tiene dicha propiedad, usaremos o bien la ecuación general del círculo en $\mathbb{C}(A \neq 0)$ o bien la ecuación de la recta en $\mathbb{C}(A = 0)$, esto es:

$$A\left(x^2 + y^2\right) + Bx + Dy = E.$$

Escribiendo $z = x + iy$ y $\frac{1}{z} = u + iv$, donde

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$v = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

y

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

De la ecuación general $A(x^2 + y^2) + Bx + Dy = E$, se obtiene lo siguiente:

$$A\left(\frac{1}{u^2 + v^2}\right) + B\left(\frac{u}{u^2 + v^2}\right) + D\left(\frac{-v}{u^2 + v^2}\right) = E,$$

$$-E\left(u^2 + v^2\right) + Bu - Dv = -A,$$

esta última ecuación resulta o bien la ecuación del círculo en $\mathbb{C}$ o bien la ecuación recta en $\mathbb{C}$ donde 0 e ∞ no son aplicables. Este argumento algebraico no se aplica en 0 y en ∞. Sin embargo, probar el resultado para estos puntos no es muy difícil, por ejemplo: si el círculo $C \subset \mathbb{C}$ y $0 \in C$, entonces $C - \{0\} = \{(x, y) : A(x^2 + y^2) + Bx + Dy = 0\}$. Luego

$$Inv(C - \{0\}) = \{(u, v) : Bu - Dv = -A\}$$

es una recta. Por lo tanto

$$Inv\,(C) = Inv\,(C - \{0\}) \cup Inv\,(0) = recta \cup \{\infty\}$$

es un círculo. Para los siguientes casos: (1) $C \subset \overline{\mathbb{C}}$ y $\infty \in C$. (2) $C \subset \overline{\mathbb{C}}$ y $\{0, \infty\} \subset C$, se resuelve de forma análoga. Por lo tanto toda transformación de Moebius transforma $\overline{\mathbb{C}} - círculos$ en $\overline{\mathbb{C}} - círculos$.

■

Proposición 2.5. *Las transformaciones de Moebius transforman $S^2-círculos$ en $S^2 - círculos$.*

Demostración. De la proposición 2.4 tenemos que todas las transformaciones de Moebius transforman $\overline{\mathbb{C}}-círculos$ en $\overline{\mathbb{C}}-círculos$. Luego por la proposición 1.63, tenemos que las transformaciones de Moebius transforman $S^2-círculos$ en $S^2 - círculos$.

■

Definición 2.6. *Llamaremos **disco de** S^2 a cualquiera de las dos regiones abiertas limitadas por un círculo de S^2.*

Proposición 2.7. *Las transformaciones de Moebius transforman discos de S^2 en discos de S^2.*

Demostración. De la proposición 2.5 tenemos que las transformaciones de Moebius transforman $S^2-círculos$ en $S^2-círculos$. Por lo tanto transforman discos de S^2 en discos de S^2.

■

Definamos en $\overline{\mathbb{C}}$ el disco abierto de centro $a \in \overline{\mathbb{C}}$ y radio $r > 0$, en la siguiente forma: si $a \neq \infty$ el disco abierto de centro a y radio $r > 0$ es el que ya se ha definido en $\mathbb{C}$

$$D(a, r) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} :\mid z - a \mid< r\} = \{z \in \mathbb{C} :\mid z - a \mid< r\}.$$

Cuando $a = \infty$ el disco abierto de centro ∞ y radio $r > 0$ es

$$D(\infty, r) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} :\mid z \mid> r\} = \{z \in \mathbb{C} :\mid z \mid> r\} \cup \{\infty\}.$$

Proposición 2.8. *Las transformaciones de Moebius transforman discos de $\overline{\mathbb{C}}$ en discos de $\overline{\mathbb{C}}$.*

Demostración. Cualquier transformación de Moebius se puede expresar mediante la composición de traslaciones, rotaciones, homotecias e inversión. Por lo tanto bastara probar para dichas transformaciones. Se prueba fácilmente que las traslaciones, rotaciones y homotecias satisfacen lo pedido. Por ello bastara solo probar para el caso de la inversión. Consideremos el siguiente disco:

$$D(\infty, r) = \{z \in \mathbb{C} :\mid z \mid> r\} \cup \{\infty\},$$

se verifica que $\frac{1}{|z|} < \frac{1}{r}$ y $\frac{1}{\infty} = 0$. Por lo tanto la imagen del disco por medio de la inversion es

$$D(0, \tfrac{1}{r}) = \{w \in \mathbb{C} :\mid w \mid< \tfrac{1}{r}\} \cup \{0\},$$

esto prueba lo pedido.

■

2.2. Automorfismos sobre la esfera de Riemann

Lema 2.9. *Dos polinomios $az+b$ y $cz+d$ son relativamente primos sobre $\mathbb{C}[z]$ y el máximo de sus grados vale 1 si y solo si $ad-bc\neq 0$.*

Demostración. Antes de la prueba veamos el siguiente análisis: si ambos polinomios son constantes, entonces $a=c=0$ y enseguida se cumple que $ad-bc=0$. Por otro lado, cuando $ad-bc\neq 0$, alguno entre a y c no ha de anularse. Así, al menos uno de los polinomios es lineal e intercambiando de ser necesario los papeles de $az+b$ y $cz+d$, imponemos $a\neq 0$. Ahora empezaremos con la prueba.

Supongamos que $ad-bc=0$ con $a\neq 0$, entonces $a(cz+d)=c(az+b)$ y así un polinomio es múltiplo de otro.

Recíprocamente, supongamos que $az+b$ y $cz+d$ no son relativamente primos, entonces poseen una raíz en común. Como $a\neq 0$, la única solución es $z_0=-\frac{b}{a}$ y reemplazando en el segundo polinomio obtenemos $-\frac{bc}{a}+d=0$, i.e, $ad-bc=0$. ■

Diremos que f es un **automorfismo de $\overline{\mathbb{C}}$** si $f:\overline{\mathbb{C}}\longrightarrow\overline{\mathbb{C}}$ es holomorfa y también f^{-1}.

Teorema 2.10. *Toda transformación de Moebius es un automorfismo de $\overline{\mathbb{C}}$.*

Demostración. Sea $T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ con $ad-bc\neq 0$. Por el lema 2.9 esta T no es constante, como tampoco lo es

$$\varphi(w)=\frac{dw-b}{-cw+a}.$$

Supongamos $c\neq 0$. Mostraremos si $z\neq\infty,\dfrac{a}{c},-\dfrac{d}{c}$, se cumple que

$$T\circ\varphi(z)=\varphi\circ T(z)=z.$$

En efecto.

$$T\circ\varphi(z)=T\left(\frac{dz-b}{-cz+a}\right)=\frac{a\left(\frac{dz-b}{-cz+a}\right)+b}{-c\left(\frac{dz-b}{-cz+a}\right)+d}=z,$$

$$\varphi\circ T(z)=\varphi\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=\frac{d\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)-b}{-c\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)+a}=z.$$

Si $z=\infty$, se cumple que $T(\varphi(\infty))=T\left(\frac{d}{-c}\right)=\infty$ y $\varphi\circ T(\infty)=\infty$.
Si $z=\frac{a}{c}$, se cumple que $T\left(\varphi\left(\frac{a}{c}\right)\right)=T(\infty)=\frac{a}{c}$ y $\varphi\circ T\left(\frac{a}{c}\right)=\frac{a}{c}$.
Si $z=-\frac{d}{c}$, se cumple que $T\left(\varphi\left(-\frac{d}{c}\right)\right)=-\frac{d}{c}$ y $\varphi\circ T\left(-\frac{d}{c}\right)=-\frac{d}{c}$.

Por lo anterior $T\circ\varphi=\varphi\circ T=Id$ para todo $z\in\overline{\mathbb{C}}$. Cuando $c=0$, se resuelve de manera similar. Por lo tanto $T\circ\varphi=\varphi\circ T=Id$ para todo $z\in\overline{\mathbb{C}}$.

Afirmación 3. *T es holomorfo en $\overline{\mathbb{C}}$.*

Sea $T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$. Supongamos $c\neq 0$. Es inmediato ver que T es holomorfa en $\mathbb{C}-\{-\frac{d}{c}\}$. Por ello solo falta probar que T es holomorfa en ∞ y en $-\frac{d}{c}$. T es holomorfa en ∞. En efecto.

$$\varphi_1(w)=Inv\circ T\circ Inv(w)=\frac{1}{T\left(\frac{1}{w}\right)}=\frac{1}{\frac{a\left(\frac{1}{w}\right)+b}{c\left(\frac{1}{w}\right)+d}}=\frac{c+wd}{a+wb}.$$

Luego φ_1 es holomorfa en $w=0$. Por lo tanto T es holomorfa en ∞. Veamos ahora que T es holomorfa en $-\frac{d}{c}$. Sea

$$\varphi_2(w)=Inv\circ T(w)=\frac{1}{T(w)}=\frac{cw+d}{aw+b}.$$

Luego φ_2 es holomorfa en $w=-\frac{d}{c}$. Por lo tanto T es holomorfa en $-\frac{d}{c}$. Si $c=0$ tenemos que $T(z)=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}$ es holomorfa en $\mathbb{C}$. Probemos que T es holomorfa en $z=\infty$. Sea

$$\varphi(z)=Inv\circ T\circ Inv(w)=\frac{1}{T\left(\frac{1}{w}\right)}=\frac{dw}{a+bw}.$$

Observemos que φ es holomorfa en $w=0$ y con ello T es holomorfa en ∞. Por lo tanto T es holomorfa en $\overline{\mathbb{C}}$ y así T es un automorfismo.

■

Teorema 2.11. *f es un automorfismo de $\overline{\mathbb{C}}$ si y solo si f es una transformación de Moebius, es decir, $Aut(\overline{\mathbb{C}})$[1] $=\mathcal{L}$.*

Demostración. Sea f un automorfismo de $\overline{\mathbb{C}}$. Veamos que ocurre cuando $f(\infty)=\infty$. En este caso por la inyectividad de f tenemos que su única preimagen es ∞. Luego por la proposición 1.57 f es un polinomio. Demostremos la siguiente afirmación.

[1] $Aut(\overline{\mathbb{C}})$ es el conjunto de automorfismos de $\overline{\mathbb{C}}$ en $\overline{\mathbb{C}}$.

Afirmación 4. *grado* $(f) = 1$.

Como f es un automorfismo entonces f tendrá al menos grado 1. Si el *grado* $(f) > 1$, entonces f tendría mas de una raíz, esto implica que existiría varias preimágenes de 0, lo cual no puede ser, pues f es biyectiva. Por lo tanto $f(z) = k(z-\alpha)^n$ donde $k \neq 0$ y $n \geq 1$. Sin embargo, si $n > 1$, entonces $f'(\alpha) = 0$ y f no es localmente inyectiva cerca de $z = \alpha$. Por lo tanto *grado* $(f) = 1$.

Luego $f(z) = az+b$, con $a \neq 0$ y así f es una transformación de Moebius. Adaptemos el problema original al rigor anterior mediante la composición de f con una transformación de Moebius que traslade $f(\infty)$ hacia ∞. Para ser exactos, una vez sabido $a = f(\infty)$, definamos

$$\varphi(z) = z \quad \textit{cuando} \quad a = \infty,$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{z-a} \quad \textit{cuando} \quad a \neq \infty.$$

De la definición tenemos que $\varphi(f(\infty)) = \infty$. Por la composición de automorfismos se tiene que $\varphi \circ f$ es un automorfismo de $\overline{\mathbb{C}}$, luego la función $\varphi \circ f$ resulta ser un polinomio de grado 1. Factorizando $f = \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ f)$ resulta la composición de dos transformaciones de Moebius.

■

2.2.1. Automorfismos y matrices

Frecuentemente se identifica $Aut(\overline{\mathbb{C}})$ con el cociente de cierto grupo de matrices. Veamos como se realiza dicho cociente. Sean los conjuntos

$$GL(2,\mathbb{C}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{C}, det\,(M) = ad - bc \neq 0 \right\}$$

y

$$SL(2,\mathbb{C}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{C}, det\,(M) = ad - bc = 1 \right\}.$$

Es fácil ver que $GL(2,\mathbb{C})$ y $SL(2,\mathbb{C})$ son grupos con la operación usual de matrices. Además $SL(2,\mathbb{C})$ es un subgrupo de $GL(2,\mathbb{C})$.

Teorema 2.12. *La aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & SL\,(2,\mathbb{C}) & \longrightarrow & Aut(\overline{\mathbb{C}}) \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

satisface lo siguiente:

(1) *φ es un homomorfismo sobreyectivo.*

(2) *El núcleo de φ es $\{I,-I\}$, donde $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

(3) *El grupo cociente $\frac{SL(2,\mathbb{C})}{\{I,-I\}}$ es isomorfo a $Aut(\overline{\mathbb{C}})$.*

Demostración. (1) Si $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ y $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ pertenecen a $SL\,(2,\mathbb{C})$, entonces el producto de matrices $A_1 \cdot A_2 \in SL\,(2,\mathbb{C})$. Sea

$$\begin{aligned} \varphi\,(A_1 \cdot A_2)\,(z) &= \varphi \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix} (z) \\ &= \frac{a_1\,(a_2z + b_2) + b_1\,(c_2z + d_2)}{c_1\,(a_2z + b_2) + d_1\,(c_2z + d_2)}. \end{aligned}$$

Si $c_2z + d_2 \neq 0$, entonces

$$\varphi\,(A_1 \cdot A_2)\,(z) = \frac{a_1\left(\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}\right) + b_1}{c_1\left(\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}\right) + d_1} = \varphi_{A_1}\left(\varphi_{A_2}\,(z)\right).$$

Si $c_2z + d_2 = 0$, se tiene que $z = -\frac{d_2}{c_2}$. Para $c_2 = 0$ se cumple que $\varphi\,(A_1 \cdot A_2) = \varphi_{A_1} \circ \varphi_{A_2}$ siendo $c_1 = 0$ o $c_1 \neq 0$. Lo mismo ocurre para $c_2 \neq 0$.

Por lo tanto $\varphi\,(A_1 \cdot A_2) = \varphi_{A_1} \circ \varphi_{A_2}$. La sobreyectividad se deduce de la definición de φ.

(2) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL\,(2,\mathbb{C})$. Si $\varphi\,(A) = Id$, entonces al fijar ∞ tenemos que $\varphi\,(A)$ es un polinomio. Luego, $c = 0$ y $ad = 1$. Evaluando $\varphi\,(A)$ en $z = 0$ obtenemos que $\frac{b}{d} = 0$ y por ello $b = 0$. Por lo tanto $\varphi\,(A)\,(z) = \frac{a}{d}z$ y $\frac{a}{d} = 1$. Es decir $a = d = \pm 1$. Por lo tanto $\ker\,(\varphi) = \{I,-I\}$.

(3) Por el primer teorema de isomorfismo de grupos

$$\frac{SL\,(2,\mathbb{C})}{\{I,-I\}} \simeq Aut(\overline{\mathbb{C}}).$$

■

2.3. Clasificación de las transformaciones de Moebius

Clasificaremos las transformaciones de Moebius según su clase de conjugación. Recordemos que el conjunto de las transformaciones de Moebius es

$$\mathcal{L} = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} : ad - bc \neq 0, \quad a,b,c,d \in \mathbb{C} \right\}.$$

Definición 2.13. *Diremos que* ***las transformaciones de Moebius*** T ***y*** $\widetilde{T}$ ***son conjugadas*** *si existe* $S \in \mathcal{L}$ *tal que* $\widetilde{T} = S \circ T \circ S^{-1}$.

$$\begin{array}{ccccc} & & T & & \\ & \overline{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{C}} & \\ S^{-1} & \uparrow & & \downarrow & S \\ & \overline{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{C}} & \\ & & STS^{-1} & & \end{array}$$

Definición 2.14. *Dado un* $T \in \mathcal{L}$, ***un punto fijo de*** T *es un punto de* $x \in \overline{\mathbb{C}}$ *tal que* $T(x) = x$.

Observación 2.15. x *es un punto fijo de* T *si y solo si* $S(x)$ *es punto fijo de* STS^{-1}. *Es decir tanto* T *y* STS^{-1} *tienen el mismo número de puntos fijos.*

Para $z_0 \in \mathbb{C}$, definamos $T^0 = Id, T^n = T \circ T \circ \ldots \circ T$ $(n - veces)$ y $T^{-n} = T^{-1} \circ T^{-1} \circ \ldots \circ T^{-1}$ $(n - veces)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Con esta definición podemos definir la órbita de z_0, es decir,

$$Or\,(z_0) = \{T^n\,(z_0) : \text{n} \in \mathbb{Z}\}.$$

Clasificación de las transformaciones de Moebius por medio de sus puntos fijos

Proposición 2.16. *Si* $T \neq Id$ *es una transformación de Moebius, entonces* T *posee uno o dos puntos fijos.*

Demostración. Si $T \neq Id$, entonces los puntos fijos de T se hallan resolviendo la ecuación $T(z) = z$. Si $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, entonces $\dfrac{az+b}{cz+d} = z$, resolviendo se obtiene

$$cz^2 + (d-a)\,z + b = 0 \tag{2.1}$$

veamos los siguientes casos:

Caso 1. *Sea* $c \neq 0$. *De la ecuación (2.1) se tiene dos raíces* $z_1, z_2 = \frac{a-d\pm\sqrt{D}}{2c}$, *donde* $D = (d-a)^2 + 4bc = (a+d)^2 - 4$. *Notemos que* $T(\infty) = \frac{a}{c} \neq \infty$. *Si* $D \neq 0$, *entonces existen dos puntos fijos* z_1,z_2 *para* T. *Si* $D = 0$, *entonces* $a + d \neq \pm 2$ *y solo existe un punto fijo* $z = \frac{a-d}{2c}$ *para* T.

Caso 2. *Supongamos* $c = 0$. *Como* $ad - bc$ *=1 entonces* $ad = 1$ *y así* $a \neq 0$, $d \neq 0$. *Luego* $T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ *es una traslación, por ello* ∞ *es punto fijo. Además si* $a \neq d$, *obtenemos* $\frac{b}{d-a}$ *como segundo punto fijo de* T, *el cual es finito. Si* $a = d$, *entonces* $a = d = \pm 1$ *y así* $T(z) = z \pm b$ *con* $b \neq 0$, *el cual solo tiene como punto fijo al* ∞.

Por lo tanto todo $T \in \mathcal{L}$ $(T \neq Id)$ tiene a lo más dos puntos fijos.

■

Definición 2.17. *Una transformación de Moebius* T *es llamada* ***parabólica*** *si su conjugada es del tipo* $\widetilde{T}(z) = z + \lambda$ *donde* $\lambda \neq 0$. *Cuando la conjugada de* T *es del tipo* $\widetilde{T}(z) = kz$ *donde* $k = \rho.e^{i\theta}, 0 \leq \theta < 2\pi$, *se divide en tres grupos:*

(i) *Si* $\rho = 1, k = e^{i\theta}, \theta \neq 0$, *entonces* T *es* ***elíptica***.

(ii) *Si* $\rho \neq 1, \theta = 0$, *entonces* T *es* ***hiperbólico***.

(iii) *Si* $\rho \neq 1$, $\theta \neq 0$, *entonces* T *es* ***loxodrómico***.

Proposición 2.18. *Si* $T \in \mathcal{L}$ *posee un único punto fijo, entonces* T *es parabólica.*

Demostración. Sea $T \in \mathcal{L}\,(T \neq Id)$ y ξ su punto fijo, es decir, $T(\xi) = \xi$. Luego, es fácil verificar que existe $S \in \mathcal{L}$ tal que $S(\xi) = \infty$. Denotemos por $\widetilde{T}$ a STS^{-1}.

$$\begin{array}{ccccc} & & T & & \\ & \overline{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{C}} & \\ S^{-1} & \uparrow & & \downarrow & S \\ & \overline{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{C}} & \\ & & \widetilde{T} & & \end{array}$$

Entonces $\widetilde{T}(\infty) = STS^{-1}(\infty) = ST(\xi) = S(\xi) = \infty$. Luego, ∞ es punto fijo de $\widetilde{T}$ por la observación 2.15. Sea $\widetilde{T}(z) = \frac{\widetilde{a}z+\widetilde{b}}{\widetilde{c}z+\widetilde{d}}$, con $\widetilde{T}(\infty) = \infty$. Entonces $\widetilde{c} = 0$ y así $\widetilde{T}(z) = \frac{\widetilde{a}}{\widetilde{d}}z + \frac{\widetilde{b}}{\widetilde{d}}$, con $\widetilde{d} \neq 0$ pues $\widetilde{a}\widetilde{d} - \widetilde{b}\widetilde{c} = 1$. Llamemos $\alpha = \frac{\widetilde{a}}{\widetilde{d}}$ y $\lambda = \frac{\widetilde{b}}{\widetilde{d}}$. Como ∞ es punto fijo de $\widetilde{T}$, tenemos por el caso 2 que $\alpha = 1$. Por lo tanto $\widetilde{T}(z) = z + \lambda$, $\lambda \neq 0$. Llamaremos a $\widetilde{T}$ ***forma normal de*** T.

■

Proposición 2.19. *Si $T \in \mathcal{L}$ posee dos puntos fijos, entonces o bien T es elíptico o hiperbólico o loxodrómico.*

Demostración. Sea $T \in \mathcal{L}\,(T \neq Id)$ y sean ξ_0, ξ_∞ sus puntos fijos. Demostremos que existe $S \in \mathcal{L}$ tal que $S\,(\xi_0) = 0$ y $S\,(\xi_\infty) = \infty$. En efecto, supongamos que ξ_0, ξ_∞ están en $\mathbb{C}$ entonces bastara definir $S\,(z) = \frac{z-\xi_0}{z-\xi_\infty}$. Si $\xi_\infty = \infty, S\,(z) = z - \xi_0$. Si $\xi_0 = \infty, S\,(z) = \frac{1}{z-\xi_\infty}$. Definamos $\widetilde{T} = STS^{-1}$ $(\widetilde{T} \neq Id)$.

$$\begin{array}{ccccc} & & T & & \\ & \overline{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{C}} & \\ S^{-1} & \uparrow & & \downarrow & S \\ & \overline{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{C}} & \\ & & \widetilde{T} & & \end{array}$$

Entonces $\widetilde{T}\,(\infty) = STS^{-1}\,(\infty) = \infty$ y $\widetilde{T}\,(0) = STS^{-1}\,(0) = 0$. Por lo tanto $\widetilde{T}$ tiene como puntos fijos a 0 e ∞. Sea $\widetilde{T}\,(z) = \frac{\widetilde{a}z+\widetilde{b}}{\widetilde{c}z+\widetilde{d}}$, y sean 0 e ∞ sus puntos fijos. Entonces $\widetilde{b} = 0$ y $\widetilde{c} = 0$ y así $\widetilde{a}, \widetilde{d} \neq 0$ pues $\widetilde{a}\widetilde{d} - \widetilde{b}\widetilde{c} = 1$. Por lo tanto $\widetilde{T}\,(z) = \frac{\widetilde{a}}{\widetilde{d}}z$. Llamemos $k = \frac{\widetilde{a}}{\widetilde{d}}$. Entonces $\widetilde{T}\,(z) = kz, k \neq 0, 1$. Llamaremos a $\widetilde{T}$ ***forma normal de*** T. Ahora clasificaremos a las transformaciones de Moebius. Sea $k = \rho.e^{i\theta}, 0 \leq \theta < 2\pi$.

(i) Si $\rho = 1, k = e^{i\theta}, \theta \neq 0$, entonces T es **elíptica**.

(ii) Si $\rho \neq 1, \theta = 0$, entonces T es **hiperbólico**.

(iii) Si $\rho \neq 1,\ \theta \neq 0$, entonces T es **loxodrómico**.

∎

Observación 2.20. *Es fácil verificar que para cualquier $T, S \in \mathcal{L}$, se cumple que T y su conjugada STS^{-1} son del mismo tipo (elíptica, parabólica, loxodrómica e hiperbólica).*

Ejemplo 2.21. *Algunos subgrupos de $\mathcal{L}$:*

(a) Grupo Periódico Simple:

$$\{\ T \in \mathcal{L} : T\,(z) = z + nw\ ,\ n \in \mathbb{Z}\}, \text{ donde } w \neq 0.$$

(b) Grupo Periódico Doble:

$$\{\ T \in \mathcal{L} : T\,(z) = z + nw + mw',\ \ n, m \in \mathbb{Z}\},$$
$$\text{donde } w, w' \neq 0,\ Im\left(\frac{w'}{w}\right) > 0.$$

(c) Grupo Modular:

$$M = \left\{ T \in \mathcal{L} : T\left(z\right) = \frac{az+b}{cz+d},\ ad - bc = 1,\ a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(d) Grupo Picard:

$$\mathbb{P} = \left\{ T \in \mathcal{L} : T\left(z\right) = \frac{az+b}{cz+d},\ \ ad - bc = 1\ ,\ a,b,c,d \in \mathbb{Z}\left[i\right] \right\}.$$

El siguiente teorema será de mucha utilidad para el resultado principal.

Teorema 2.22. *Sea D un disco abierto en $\overline{\mathbb{C}}$ y T una transformación de Moebius tal que $T\left(\overline{D}\right) \subset D$. Entonces T es hiperbólico o loxodrómico y $T\left(\overline{D}\right)$ contiene un punto fijo de T.*

Demostración. Sea $\widetilde{T} = STS^{-1}$ la forma normal de T, donde S es una transformación de Moebius. Entonces $\widetilde{T}\left(z\right) = z + \lambda, \lambda \neq 0$ o $\widetilde{T}\left(z\right) = kz,\ k \neq 0, 1$. Luego por la hipótesis se cumple que $\widetilde{T}\left(\overline{D}_1\right) \subset D_1$, donde $D_1 = S\left(D\right)$. Por la proposición 2.8 D_1 es un disco abierto en $\overline{\mathbb{C}}$.

Afirmación 5. *$\widetilde{T}$ no es parabólica.*

Caso 3. *Sea $\infty \notin D_1$. Entonces $D_1 \subset \mathbb{C}$ y así $\widetilde{T}$ no es parabólica, debido a que $\infty \notin D_1$.*

Caso 4. *Supongamos que $\infty \in D_1$. Si suponemos que $\widetilde{T}$ es Parabólico, entonces $\widetilde{T}(\infty) = \infty$. Sea $D_1 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}_0$, donde $\overline{D}_0$ disco cerrado en $\mathbb{C}$. Por lo tanto $D_1 \setminus \{\infty\} = \mathbb{C} \setminus \overline{D}_0$ y de allí $\overline{D}_1 \setminus \{\infty\} = \mathbb{C} \setminus D_0$. Como $\widetilde{T}\left(\overline{D}_1\right) \subset D_1$ se tiene que $\widetilde{T}\left(\overline{D}_1 \setminus \{\infty\}\right) \subset D_1$ por lo tanto:*

$$\widetilde{T}\left(\mathbb{C} \setminus D_0\right) \subset D_1, \tag{2.2}$$

como $\infty \notin \mathbb{C} \setminus D_0$ se tiene que $\widetilde{T}\left(\infty\right) \notin \widetilde{T}\left(\mathbb{C} \setminus D_0\right)$ esto es por la inyectividad de $\widetilde{T}$. Como $\infty \notin \widetilde{T}\left(\mathbb{C} \setminus D_0\right)$ y por la ecuación (2.2) tenemos que $\widetilde{T}\left(\mathbb{C} \setminus D_0\right) \subset D_1 \setminus \{\infty\} = \mathbb{C} \setminus \overline{D}_0$. Entonces $\widetilde{T}\left(\mathbb{C}\right) \setminus \widetilde{T}\left(D_0\right) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{D}_0$ y así $\mathbb{C} \setminus \widetilde{T}\left(D_0\right) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{D}_0$, por lo tanto $\widetilde{T}^{-1}\left(\overline{D}_0\right) \subset D_0$, es decir, volvemos al caso 3 ya que $\infty \notin D_0$. $\widetilde{T}$ no es Parabólica.

Afirmación 6. *$\widetilde{T}$ no es elíptica.*

Analizaremos varios casos. (1) $\infty \notin D_1$ y $0 \in D_1$. Como $\widetilde{T}\left(\overline{D}_1\right) \subset D_1$ entonces $\widetilde{T}$ no es elíptica pues ∞ no es punto fijo de $\widetilde{T}$. (2) $\infty \in D_1$ y $0 \notin D_1$. Como $\widetilde{T}\left(\overline{D}_1\right) \subset D_1$ entonces $\widetilde{T}$ no es elíptica pues 0 no es punto fijo de $\widetilde{T}$. (3) $\infty \in D_1$ y $0 \in D_1$. Sabemos que existe $\varphi \in \mathcal{L}$ tal que $0 \in \varphi(D_1)$ y $\infty \notin \varphi(D_1)$. Llamemos $\varphi(D_1) = D_2$. Entonces $\infty \notin D_2$ y $0 \in D_2$, por lo tanto $\varphi\widetilde{T}\varphi^{-1}$ no es elíptica, es decir $\widetilde{T}$ no el elíptica. Por lo tanto $\widetilde{T}$ es hiperbólico o loxodrómico.

De las afirmaciones anteriores T es hiperbólico o loxodrómico.

Afirmación 7. *$\widetilde{T}\left(\overline{D_1}\right)$ contiene un punto fijo de $\widetilde{T}$.*

De lo anterior $\widetilde{T}$ tiene dos puntos fijos. Denotemos a p como uno de sus puntos fijos. Si z es cualquier valor no fijo de $\widetilde{T}$, entonces $\widetilde{T}^n(z)$ converge a uno de los puntos fijos de $\widetilde{T}$. Así para $z \in D_1$, $\widetilde{T}^n(z)$ converge a un punto fijo de $\widetilde{T}$. Llamemos $\widetilde{T}^n(z) = z_n$. Como $z_n \in D_1$ entonces $p \in \overline{D}_1$ y $\widetilde{T}(p) = p$.

Por lo tanto $T(\overline{D})$ contiene un punto fijo de T.

■

Capítulo 3

Familias normales

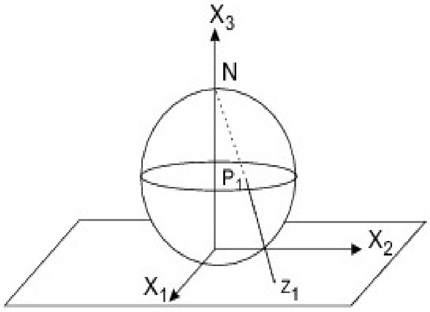
En este capítulo presentaremos a la teoría de las familias normales para funciones holomorfas y meromorfas. Demostraremos el teorema de Montel para funciones holomorfas y meromorfas, el cual nos será de mucha utilidad para algunos resultados de normalidad. Por último veremos que a partir de una familia normal, es posible encontrar otra familia normal. Para este capítulo tomaremos de referencia [8] y asumiremos que Ω es un dominio en $\mathbb{C}$, caso contrario diremos que $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$.

3.1. Algunos preliminares

3.1.1. Métrica esférica

Deseamos definir una métrica en $\overline{\mathbb{C}}$ a partir de los puntos del plano complejo, para ello recurriremos a la proyección estereográfica.

Sean z_1 y z_2 puntos en $\overline{\mathbb{C}}$, como vimos en la sección 1.7 estos puntos se corresponden con puntos $\pi(z_1)$ y $\pi(z_2)$ en S^2. Como $\pi(z_1) = P_1$ y $\pi(z_2)$



son puntos de $\mathbb{R}^3$ entonces podemos considerar la distancia euclidiana entre dichos puntos, que por definición sera llamada ***distancia cordal*** entre z_1 y z_2, y sera denotada por $\varkappa(z_1, z_2)$. El término ***cordal*** se usa por que $\varkappa(z_1, z_2)$ es la longitud de la cuerda de la esfera determinada por $\pi(z_1)$ y $\pi(z_2)$. Esta distancia define la llamada ***métrica esférica***. Calculemos explícitamente $\varkappa(z_1, z_2)$.

Caso 5. *Sean z_1, z_2 en $\mathbb{C}$. Denotemos $\pi(z_1) = (x_1, x_2, x_3)$ y $\pi(z_2) = (y_1, y_2, y_3)$. Aplicando la distancia euclidiana entre $\pi(z_1)$ y $\pi(z_2)$ tenemos*

$$|\pi(z_1) - \pi(z_2)|^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2,$$

resolviendo obtenemos:

$$|\pi(z_1) - \pi(z_2)|^2 = x_3 + y_3 - 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \tag{3.1}$$

de la proyección estereográfica se tiene que:

$$x_1 = \frac{z_1 + \overline{z_1}}{2(1 + |z_1|^2)},$$

$$x_2 = \frac{z_1 - \overline{z_1}}{2i(1 + |z_1|^2)},$$

$$x_3 = \frac{|z_1|^2}{|z_1|^2 + 1},$$

y de forma similar obtenemos para y_1, y_2, y_3 en función de z_2. Reemplazando los valores $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ en la ecuación (3.1) se obtiene

$$|\pi(z_1) - \pi(z_2)|^2 = \frac{|z_1 - z_2|^2}{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)}.$$

Así

$$|\pi(z_1) - \pi(z_2)| = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + |z_2|^2}}.$$

Caso 6. $z_2 = \infty, z_1 \in \mathbb{C}$. *Sea*

$$|\pi(z_1) - \pi(z_2)| = \frac{1}{\sqrt{1 + |z_1|^2}}.$$

Por lo tanto estos cálculos nos llevan a la métrica buscada en $\overline{\mathbb{C}}$. Esta nueva fórmula de distancia en $\overline{\mathbb{C}}$ nos sera de mucha utilidad por incluir al punto infinito.

Definición 3.1. *Se define la* ***métrica cordal*** *en el plano complejo extendido de la siguiente manera:*

$$\varkappa\left(z_1, z_2\right) = \begin{cases} \dfrac{\mid z_1 - z_2 \mid}{\sqrt{1+\mid z_1 \mid^2}\sqrt{1+\mid z_2 \mid^2}}, & si \quad z_1, z_2 \neq \infty, \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+\mid z_1 \mid^2}}, & si \quad z_2 = \infty. \end{cases}$$

Definición 3.2. *Diremos que una sucesión* (f_n) *de funciones converge* ***$\varkappa$-uniformemente a*** f *en un conjunto* $E \subset \mathbb{C}$ *si, para cualquier* $\epsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que para* $n \geq n_0$ *se tiene que* $\varkappa\left(f\left(z\right), f_n\left(z\right)\right) < \epsilon$*,* $\forall z \in E$*.*

Proposición 3.3. *Si la sucesión* (f_n) *converge uniformemente a* f *en* E*, entonces también converge* $\varkappa - uniformemente$ *a* f *en* E*.*

Demostración. La prueba es inmediata, debido a que

$$\varkappa(f(z), f_n(z)) \leq\mid f(z) - f_n(z) \mid .$$

■

La recíproca se obtiene si la función límite es acotada en E, veamos:

Teorema 3.4. *Si la sucesión* (f_n) *converge* $\varkappa - uniformemente$ *a una función acotada* f *en* E*, entonces* (f_n) *converge uniformemente a* f *en* E*.*

Demostración. Supongamos $\mid f(z) \mid\leq M$ en E, para algún $M > 0$. Entonces

$$\varkappa\left(0, f\left(z\right)\right) \leq \varkappa\left(0, M\right) = \frac{M}{\sqrt{1+M^2}} < 1.$$

Escojamos $\epsilon < 1 - \frac{M}{\sqrt{1+M^2}}$. Entonces existe un entero positivo n_0 tal que $n \geq n_0$ implica

$$\varkappa\left(f\left(z\right), f_n\left(z\right)\right) < \epsilon,$$

así que

$$\frac{\mid f_n\left(z\right) \mid}{\sqrt{1+\mid f_n\left(z\right) \mid^2}} = \varkappa\left(0, f_n\left(z\right)\right) \leq \varkappa\left(0, f\left(z\right)\right) + \varkappa\left(f\left(z\right), f_n\left(z\right)\right)$$

$$< \frac{M}{\sqrt{1+M^2}} + \epsilon = m < 1.$$

Deducimos que

$$\mid f_n\left(z\right) \mid< \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} = M_1,$$

para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\mid f(z) - f_n(z) \mid &= \sqrt{1 + \mid f(z) \mid^2}\sqrt{1 + \mid f_n(z) \mid^2}.\varkappa(f(z), f_n(z)) \\
&< \sqrt{1 + M^2}\sqrt{1 + M_1^2}.\varkappa(f(z), f_n(z)),
\end{aligned}
$$

para $n \geq n_0$. Esto prueba la convergencia uniforme.

■

En cuanto a la noción de continuidad con respecto a la métrica cordal, tenemos

Definición 3.5. *Una función f es **$\varkappa$-continua** en un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ si, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\varkappa(f(z), f(z_0)) < \epsilon,$$

siempre que $\mid z - z_0 \mid < \delta$.

Proposición 3.6. *Si $f(z)$ es meromorfa en un dominio Ω, entonces f es $\varkappa -$ continua en Ω.*

Demostración. Si $f(z)$ es holomorfa en $z_0 \in \Omega$, entonces es $\varkappa - continua$, ya que f es continua y además

$$\varkappa(f(z), f(z_0)) < \mid f(z) - f(z_0) \mid .$$

Si z_0 es un polo, entonces $\dfrac{1}{f(z)}$ es continua en z_0 y además

$$\varkappa(f(z), f(z_0)) = \varkappa\left(\frac{1}{f(z)}, \frac{1}{f(z_0)}\right).$$

Por lo tanto f es $\varkappa - continua$.

■

Los siguientes teoremas se desprende de un curso de análisis, ver [5] y [6].

Teorema 3.7. *La imagen $f(K)$ de un compacto $K \subset \overline{\mathbb{C}}$ por una función $\varkappa -$ continua $f : K \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ es un conjunto compacto.*

Demostración. Tenemos que probar que toda sucesión de puntos $y_n \in f(K)$ posee una subsucesión que converge algún punto $b \in f(K)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos $y_n = f(x_n)$, con $x_n \in K$. Como K es compacto, la sucesión (x_n)

posee una subsucesión (x_{n_k}) que converge a un punto $a \in K$. Como f es $\varkappa - continua$ en el punto a de $\varkappa(x_{n_k}, a) \longrightarrow 0$, concluimos que

$$\varkappa(y_{n_k}, b) = \varkappa(f(x_{n_k}), b) \longrightarrow 0$$

$$\varkappa(f(x_{n_k}), f(a)) \longrightarrow 0$$

y así $b = f(a)$ y $b \in f(K)$.

■

Teorema 3.8. *Sea $X \subset \overline{\mathbb{C}}$ un conjunto arbitrario. Si $C \subset \overline{\mathbb{C}}$ es un conjunto conexo tal que $C \cap X \neq \varnothing$ y $C \cap (\overline{\mathbb{C}} \setminus X) \neq \emptyset$, entonces $C \cap \partial X \neq \varnothing$.*

Demostración. La prueba es muy similar al teorema de la aduana, ver [6], pag.99, ya que X, C son subconjuntos de un espacio métrico $\overline{\mathbb{C}}$.

■

Definición 3.9. *Una función f es **uniformemente $\varkappa$-continua** en el conjunto $E \subset \mathbb{C}$ cuando, para todo $\epsilon > 0$, se puede obtener $\delta > 0$ tal que*

$$\varkappa\left(f\left(z\right), f(z')\right) < \epsilon$$

siempre que $z, z' \in E$, $\mid z - z' \mid < \delta$.

Proposición 3.10. *Sea $K \subset \overline{\mathbb{C}}$ compacto. Toda función $\varkappa - continua$ $f : K \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ es uniformemente $\varkappa - continua$.*

Demostración. La demostración es similar, como el caso de las funciones reales.

■

3.1.2. Convergencia normal

El principal modo de convergencia en la teoría de familias normales es dado por:

Definición 3.11. *Diremos que una sucesión (f_n) de funciones converge **$\varkappa$-uniformemente en los compactos de** Ω a una función f si para cualquier compacto $K \subset \Omega$ y $\epsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(K, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ se tiene que $\varkappa\left(f\left(z\right), f_n\left(z\right)\right) < \epsilon$, $\forall z \in K$. En este caso se dice también que (f_n) converge normalmente a f o que (f_n) es normalmente convergente.*

Cuando la sucesión converge uniformemente o $\varkappa - uniformemente$ en subconjuntos compactos del dominio Ω, diremos que la sucesión converge *normalmente* en Ω.

Teorema 3.12. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto. Si (f_n) es una sucesión de funciones que converge $\varkappa - uniformemente$ en los compactos de Ω, entonces existe una única función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que para todo compacto $K \subset \Omega$, tenemos que $\varkappa(f_n \mid_K, f \mid_K) \longrightarrow 0$ uniformemente. En particular si f_n es $\varkappa-$continua para todo $n \geq 0$, entonces f es $\varkappa -$ continua.*

La demostración es inmediata a partir del teorema 1.7.

3.1.3. Localmente limitada

Existe una generalización del concepto de acotación de una sola función a la de familia de funciones, que desempeña un papel importante en nuestro desarrollo.

Una familia $\mathcal{F}$ de funciones en Ω, es **uniformemente limitada** en Ω si existe $M > 0$ tal que $\mid f(z) \mid \leq M$ para todo $z \in \Omega$ y todo todo $f \in \mathcal{F}$.

Definición 3.13. *Una familia $\mathcal{F}$ de funciones en Ω, es* ***uniformemente limitada en los compactos de*** *Ω si para todo compacto $K \subset \Omega$, la restricción de $\mathcal{F}$ en K es uniformemente limitada.*

Definición 3.14. *Una familia de funciones $\mathcal{F}$ es localmente limitada en un dominio Ω si para cualquier $z_0 \in \Omega$, existe un número positivo $M = M(z_0)$ y una vecindad $D(z_0, r) \subset \Omega$ tal que $\mid f(z) \mid \leq M$ para todo $z \in D(z_0, r)$ y todo $f \in \mathcal{F}$.*

Por la definición 3.14, $\mathcal{F}$ es uniformemente limitada en una vecindad de cualquier punto de Ω. Dado cualquier subconjunto compacto $K \subset \Omega$ puede ser cubierto por un número finito de tales vecindades, resulta que una familia localmente limitada $\mathcal{F}$ es uniformemente limitada en subconjuntos compactos de Ω. Sin embargo, la familia

$$\mathcal{F} = \left\{ f_\alpha(z) = \frac{1}{z - e^{i\alpha}} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

es localmente limitada en $\mathbb{D}$, pero no uniformemente limitada en $\mathbb{D}$. En efecto. Supongamos que $\mathcal{F}$ es uniformemente limitada en $\mathbb{D}$, i.e, existe $M > 0$ tal que $\mid f_\alpha(z) \mid \leq M$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y todo $z \in \mathbb{D}$. Escojamos $z_n = \rho_n e^{i\alpha} \in \mathbb{D}$ tal que $\rho_n \longrightarrow 1$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{z_n - e^{i\alpha}} = \infty$, esto contradice lo supuesto. Por lo tanto $\mathcal{F}$ es uniformemente limitada. Por último no es difícil probar que $\mathcal{F}$ es localmente limitada en $\mathbb{D}$.

Teorema 3.15. *Si $\mathcal{F}$ es familia de funciones holomorfas localmente limitadas en un domino Ω, entonces la familia de derivadas $\mathcal{F}' = \left\{ f' : f \in \mathcal{F} \right\}$ forma una familia localmente limitada en Ω.*

Demostración. Para cualquier $z_0 \in \Omega$, existe una vecindad cerrada $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$ y una constante $M = M(z_0)$ tal que $\mid f(z) \mid \leq M$, $z \in \overline{D}(z_0, r)$. Entonces para $z \in D(z_0, \frac{r}{2})$, y $\zeta \in C_r = \{z : \mid z - z_0 \mid = r\}$, por la formula de Cauchy

$$\mid f^{'}(z) \mid \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C_r} \frac{\mid f(\zeta) \mid \mid d\zeta \mid}{\mid \zeta - z \mid^2} < \frac{4M}{r}$$

para todo $f^{'} \in \mathcal{F}^{'}$, de modo que $\mathcal{F}^{'}$ es localmente limitada.

■

3.1.4. Equicontinuidad

Otra idea principal del desarrollo de las familias normales y en relación con la de acotación local, es:

Definición 3.16. *Una familia de funciones $\mathcal{F}$ definidas en un dominio Ω es* ***$\varkappa$-equicontinua*** *en un punto a si para cualquier $\epsilon > 0$, se puede obtener $\delta = \delta(\epsilon, a) > 0$ tal que*

$$\varkappa(f(z), f(a)) < \epsilon, \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

siempre que $\mid z - a \mid < \delta$, para cualquier $f \in \mathcal{F}$. Además, $\mathcal{F}$ es $\varkappa-$equicontinua en un subconjunto $E \subset \Omega$ si es $\varkappa -$ equicontinua en cualquier punto de E.

Sabemos que

$$\varkappa(f(z), f(a)) < \mid f(z) - f(a) \mid,$$

por lo tanto equicontinua implica $\varkappa -$ *equicontinua*.

Teorema 3.17. *Si (f_n) es una sucesión de funciones $\varkappa -$ continuas el cual converge $\varkappa - uniformemente$ a una función f en un subconjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$, entonces f es uniformemente $\varkappa -$ continua en K y las funciones (f_n) son $\varkappa -$ equicontinuas en K.*

Demostración. Dado $\epsilon > 0$

$$\varkappa(f_n(z), f(z)) < \frac{\epsilon}{3}, \quad z \in K,$$

para $n \geq n_0$, para algún $n_0 \in \mathbb{N}$. Por la proposición 3.10 f_n es uniformemente $\varkappa -$ *continua* en K, en particular f_{n_0}, existe $\delta = \delta(\epsilon, K) > 0$ tal que

$$\varkappa(f_{n_0}(z), f_{n_0}(z')) < \frac{\epsilon}{3},$$

siempre que $z, z' \in K$, $| z - z' | < \delta$. Entonces

$$\varkappa(f(z), f(z')) \leq \varkappa(f(z), f_{n_0}(z)) + \varkappa(f_{n_0}(z), f_{n_0}(z')) + \varkappa(f_{n_0}(z'), f(z'))$$
$$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

para $| z - z' | < \delta$. Por lo tanto f es uniformemente $\varkappa - continua$ en K. Por ultimo la sucesión (f_n) es $\varkappa - equicontinua$ a partir de la desigualdad triangular $\varkappa(f_n(z), f_n(z'))$, para $n \geq n_0$, $| z - z' | < \delta$ y de la hipótesis que f es $\varkappa - equicontinua$.

■

Teorema 3.18. *Una familia localmente limitada $\mathcal{F}$ de funciones holomorfas en un dominio Ω es equicontinua en subconjuntos compactos de Ω.*

Demostración. Por el teorema 3.15, $\mathcal{F}$ localmente limitada, implica que $\mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ es uniformemente limitada en subconjuntos compactos de Ω. Para cualquier disco cerrado $\overline{D} \subset \Omega$ tenemos $| f'(z) | \leq M$ para todo $z \in \overline{D}, f' \in \mathcal{F}'$, y alguna constante M. Entonces para cualquier par de puntos $z, z' \in \overline{D}$, integraremos sobre un camino de linea recta a partir de z a z' dados

$$| f(z) - f(z') | \leq \int_z^{z'} | f'(\zeta) || d\zeta | \leq M | z - z' | .$$

Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$ y eligiendo $0 < \delta = \delta(\epsilon, K) < \frac{\epsilon}{M}$,

$$| f(z) - f(z') | < \epsilon$$

siempre que $z, z' \in \overline{D}$, $| z - z' | < \delta$. Por lo tanto $\mathcal{F}$ es equicontinua en $\overline{D}$, y como consecuencia $\mathcal{F}$ es equicontinua en compactos de Ω. ■

Teorema 3.19. *Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas en Ω. Supongamos que $\mathcal{F}$ es uniformemente limitada en los compactos de Ω. Entonces $\mathcal{F}$ es equicontinua.*

Demostración. Sea $p \in \Omega$. Escojamos $\delta > 0$ tal que $D = D_{2\delta}(p) \subset U$. Sea z tal que $| z - p | < \delta$, $f \in \mathcal{F}$. Por el teorema 1.33

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{D}} \frac{f(w)}{w - z} dw,$$

reemplazando $z = p$ en f obtenemos

$$f(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{D}} \frac{f(w)}{w - p} dw,$$

$$| f(z) - f(p) | = \frac{1}{2\pi i} \left| \int_{\partial \overline{D}} \frac{f(w)(z-p)}{(w-z)(w-p)} \right|.$$

Por hipótesis tenemos que existe $M > 0$ tal que $| f(z) | \leq M$, para todo $w \in \partial \overline{D}$ y todo $f \in \mathcal{F}$. Entonces

$$| f(z) - f(p) | \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 4\pi\delta \cdot \frac{M \mid z-p \mid}{\delta \cdot 2\delta} = \frac{M}{\delta} \mid z-p \mid,$$

$$| f(z) - f(p) | \leq \frac{M}{\delta} \mid z-p \mid,$$

para todo $z \in D_\delta(p)$ y todo $f \in \mathcal{F}$. Luego, dado $\epsilon > 0$, tomemos

$$\tilde{\delta} = \text{mín}\left\{ \frac{\delta}{M}\epsilon, \delta \right\}$$

así, si $| z - p | < \tilde{\delta}$, entonces $z \in D_\delta(p)$ y

$$| f(z) - f(p) | \leq \frac{M}{\delta} \mid z-p \mid < \frac{M}{\delta} \cdot \frac{\delta}{M} \cdot \epsilon = \epsilon,$$

por lo tanto $| f(z) - f(p) | < \epsilon$ para todo $f \in \mathcal{F}$. Dado que $p \in \Omega$ se escogió arbitrariamente, concluimos que $\mathcal{F}$ es equicontinua.

■

Teorema 3.20. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión equicontinua y uniformemente limitada en los compactos de Ω, entonces existe una subsucesión de (f_n) que converge uniformemente en los compactos de Ω.*

Demostración. Sea $\{z_n\}$ un subconjunto denso numerable de Ω. Como $(f_n(z_1))$ es limitada. Entonces por la propiedad de $Bolzano-Weierstras$, existe una subsucesión $(f^{(1)}_{n_k}(z_1)) \subseteq (f_n(z_1))$ tal que $(f^{(1)}_{n_k})$ es convergente en z_1. En el punto z_2 como la sucesión $(f^{(1)}_{n_k}(z_2))$ es limitada, obtenemos una subsucesión $(f^{(2)}_{n_k}(z_2)) \subseteq (f^{(1)}_{n_k}(z_2))$ tal que $(f^{(2)}_{n_k})$ es convergente en z_2. Es así que $(f^{(2)}_{n_k})$ converge en z_1 y z_2. Continuando con este proceso, existe una subsucesión $(f^{(p)}_{n_k})$ el cual converge en $z_1, z_2, ..., z_p$ para todo $p \in \mathbb{N}$. Tomando la sucesión diagonal $(f^{(k)}_{n_k})$ encontramos que esta sucesión converge a todo z_n. El resto de la prueba es una copia del teorema 3.25.

■

Corolario 3.21. *Si (f_n) es una sucesión de funciones holomorfas en Ω, uniformemente limitada en los compactos de Ω. Entonces (f_n) admite una subsucesión que converge uniformemente en los compactos de Ω.*

Demostración. Por el teorema 3.19, (f_n) es equicontinua y por el teorema 3.20, (f_n) admite una subsucesión que converge uniformemente en los compactos.

■

3.2. Familias normales de funciones holomorfas

Definición 3.22. *Una familia $\mathcal{F}$ de funciones holomorfas definidas en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ es llamada **normal** en Ω si para cualquier sucesión $(f_n) \subset \mathcal{F}$ contiene o bien una subsucesión la cual converge a una función limite $f \not\equiv \infty$ uniformemente en cualquier subconjunto compacto de Ω, o bien una subsucesión la cual converge a ∞ en cualquier subconjunto compacto.*

*Dado un abierto $U \subset \Omega$, decimos que $\mathcal{F}$ es **normal en** U si la restricción de $\mathcal{F}$ en U es una familia normal. Diremos que la familia $\mathcal{F}$ es **normal en un punto** $z_0 \in \Omega$ si es normal en alguna vecindad de z_0.*

El siguiente lema nos permitirá probar el teorema 3.24:

Lema 3.23. *Sea $g_k : U \longrightarrow \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$ donde $U \subset \mathbb{C}$. Supongamos $U = U_1 \cup U_2, \ldots, U_N$ donde $U_i \subset \mathbb{C}$ para $i = 1, 2, \ldots, N$. Si se cumple que existe $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $g_k \mid_{U_i} \stackrel{unif}{\longrightarrow} f \mid_{U_i}$, entonces $g_k \stackrel{unif}{\longrightarrow} f$.*

Demostración. Por hipótesis, para todo $\epsilon > 0$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_i$, entonces $\mid g_k \mid_{U_i} (z) - f \mid_{U_i} (z) \mid < \epsilon$, donde $i = 1, 2, ..., N$. Para demostrar que $g_k \stackrel{unif}{\longrightarrow} f$, basta considerar $k = \max\{k_1, k_2, ..., k_N\}$.

■

Teorema 3.24. *Una familia $\mathcal{F}$ de funciones holomorfas es normal en un dominio Ω si y solo si $\mathcal{F}$ es normal en cualquier punto de Ω.*

Demostración. Debido a que $\mathcal{F}$ es normal en Ω, podemos decir que $\mathcal{F}$ es normal en cualquier punto de Ω. Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{F}$ es normal en cualquier $z \in \Omega$. Dado que $\Omega \neq \emptyset$, existe un subconjunto denso numerable $\{z_n\}$ de Ω donde $z_n = x_n + iy_n$ con x_n e $y_n \in \mathbb{Q}$. Ahora fijemos cualquier $z_n \in \Omega$ y definamos al conjunto

$$G = \{r > 0 : \mathcal{F} \mid_{D(z_n,r)} es \ \ normal\}$$

el cual es no vació por hipótesis. Sea

$$R_n = \sup G.$$

Si $R_n = \infty$, se cumple que $\Omega = \mathbb{C}$ y $\bigcup\limits_{r \in G} D(z_n, r) = \Omega$. De esta manera tenemos que $\mathcal{F}$ es normal en Ω. En el caso que $R_n < \infty$, definamos

$$D(z_n, r_n) = D\left(z_n, \tfrac{R_n}{2}\right).$$

Afirmación 8. $\Omega = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} D(z_n, r_n)$.

Supongamos que existe $\zeta \in \Omega$ tal que $\zeta \notin \bigcup D(z_n, r_n)$. Luego, $\zeta \notin D(z_n, r_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego por densidad existe $z_{n_k} \longrightarrow \zeta$. Note que $\inf r_{n_k} > 0$ por que si fuera igual a cero $\zeta \in \partial\Omega$. Luego para algún k suficientemente grande se cumple que $\zeta \in D(z_{n_k}, r_{n_k})$ esto contradice lo supuesto.

Para cualquier sucesión $(f_n) \subset \mathcal{F}$ existe una subsucesión $(f_{n_k}^{(1)})$ que converge uniformemente en $D(z_1, \frac{r_1}{2})$ a una función holomorfa o a ∞. A la sucesión $(f_{n_k}^{(1)})$ se le puede extraer una subsucesión $(f_{n_k}^{(2)})$ que converge uniformemente en $D(z_2, \frac{r_2}{2}) \bigcup D(z_1, \frac{r_1}{2})$ a una función holomorfa o a ∞. Continuando con este proceso, concluimos que la sucesión diagonal $(f_{n_k}^{(k)})$ converge uniformemente en $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} D\left(z_n, \frac{r_n}{2}\right)$ a una función holomorfa o a ∞. Esta dicotomía divide los puntos de $z \in \Omega$ en dos clases:

$$\Omega_0 = \{z \in \Omega : f(z) \neq \infty\}$$
$$\Omega_\infty = \{z \in \Omega : f(z) = \infty\}$$

donde $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ es el punto límite de $(f_{n_k}^{(k)})$ en $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} D(z_n, \frac{r_n}{2})$. Sea f de la siguiente forma. Dado $w \in \Omega$, existe $D\left(z_{n_0}, \frac{r_{n_0}}{2}\right) \ni w$ y una función h tal que $f(z) = h(z)$ para todo $z \in D\left(z_{n_0}, \frac{r_{n_0}}{2}\right)$ donde h es el punto limite de $\left(f_{n_k}^{(k)}\right)$ en $D\left(z_{n_0}, \frac{r_{n_0}}{2}\right)$. Probemos que Ω_0 es abierto. En efecto. Si $x \in \Omega_0$, entonces existe $D\left(z_{n_1}, \frac{r_{n_1}}{2}\right) \ni x$ tal que $f(z) = h_1(z)$ para todo $z \in D\left(z_{n_1}, \frac{r_{n_1}}{2}\right)$ donde h_1 es el punto limite de $\left(f_{n_k}^{(k)}\right)$ en $D\left(z_{n_1}, \frac{r_{n_1}}{2}\right)$. Como $f(x) \neq \infty$ entonces h_1 es holomorfa en $D\left(z_{n_1}, \frac{r_{n_1}}{2}\right)$. En particular h_1 es holomorfa en un disco D_x de centro x tal que $D_x \subset D\left(z_{n_1}, \frac{r_{n_1}}{2}\right)$. Por lo tanto $D_x \subset \Omega_0$. De forma similar se prueba que Ω_∞ es abierto. Es evidente que $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_\infty$ y $\Omega_0 \cap \Omega_\infty = \emptyset$. Por la conexidad de Ω tenemos que $\Omega = \Omega_0$ o $\Omega = \Omega_\infty$. Sea $K \subset \Omega$ un compacto de Ω. Luego por la compacidad existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K = \bigcup\limits_{n=1}^{n_0} D\left(z_n, \frac{r_n}{2}\right)$.

Si $\Omega = \Omega_0$, tenemos por el lema 3.23 que $\left(f_{n_k}^{(k)}\right)$ converge uniformemente a $f\mid_K$ en K. Si $\Omega = \Omega_\infty$ se tiene que dado $M > 0$ existe $n^* \in \mathbb{N}$ tal que $\mid f_{n_k}^{(k)}(z) \mid > M$ para todo $z \in K$ y todo $n^* \geq k$. Esto prueba el teorema.

■

Diremos que la familia de funciones holomorfas $\mathcal{F}$ es **normal en** ∞ si la familia correspondiente $G = \{g : g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)\}$ es normal en $z = 0$. Por lo tanto $\mathcal{F}$ normal en ∞ significa que es normal en alguna vecindad de ∞, $D(\infty, R) = \{z :\mid z \mid > R\} \cup \{\infty\}, R > 0$. Diremos que $\mathcal{F}$ es normal en un dominio Ω que se encuentra en $\overline{\mathbb{C}}$ y contiene al punto infinito, si $\mathcal{F}$ es normal en $\Omega - \{\infty\}$ en el sentido usual así como normal en ∞ en el sentido anterior.

Teorema 3.25 (Teorema de Montel)**.** *Si $\mathcal{F}$ es una familia de funciones holomorfas localmente limitada en un dominio Ω, entonces $\mathcal{F}$ es una familia normal en Ω.*

Demostración. Como en el teorema anterior existe un subconjunto denso numerable $\{z_n\}$ en Ω. Escojamos cualquier sucesión $(f_n) \subset \mathcal{F}$. Por hipótesis $\mid f_n(z_1) \mid \leq M$ para alguna constante $M > 0$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Esta sucesión acotada de números complejos posee una subsucesión convergente por la propiedad de *Bolzano-Weierstrass*, i.e, existe una subsucesión $(f_{n_k}^{(1)}(z_1)) \subseteq (f_n(z_1))$ tal que $(f_{n_k}^{(1)})$ es convergente z_1. En el punto z_2 como la sucesión $(f_{n_k}^{(1)}(z_2))$ es limitada, podemos extraer una subsucesión $(f_{n_k}^{(2)}(z_2)) \subseteq (f_{n_k}^{(1)}(z_2))$ tal que $(f_{n_k}^{(2)})$ es convergente en z_2. Es así que $(f_{n_k}^{(2)})$ converge en z_1 y z_2. Continuando con este proceso, existe una subsucesión $(f_{n_k}^{(p)})$ el cual converge en $z_1, z_2, \ldots, z_p$ para todo $p \in \mathbb{N}$. Tomando la sucesión diagonal $(f_{n_k}^{(k)})$ encontramos que esta sucesión converge a todo z_n. Denotaremos $(f_{n_k}^{(k)})$ por (g_k). Ahora procederemos a mostrar que la sucesión diagonal converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω. Sea $K \subset \Omega$ un compacto y $\epsilon > 0$. Por el teorema 3.18 $\mathcal{F}$ es equicontinua en K, lo cual implica que existe $\delta = \delta(\epsilon, K) > 0$ tal que $\mid g_n(z) - g_n(z') \mid < \frac{\epsilon}{3}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ siempre que $z, z' \in K$, $\mid z - z' \mid < \delta$. Probemos que $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D(z_k, \delta)$. En efecto. Supongamos que existe $\zeta \in K$ tal que $\zeta \notin \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D(z_k, \delta)$, es decir, $\zeta \notin D(z_k, \delta)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego por la densidad en Ω existe $z_{n_k} \longrightarrow \zeta$, i.e, para algún k suficientemente grande se cumple que $\zeta \in D(z_{n_k}, \delta)$ y esto contradice lo supuesto. Luego por la compacidad de K existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{k_0} D(z_k, \delta)$ donde posiblemente cambie los nombres de $z_1, z_2, ..., z_{k_0}$. Como la sucesión $(g_k(z_i))$

es convergente para $i = 1, 2, .., k_0$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq n_0$ implica que

$$| g_n(z_k) - g_m(z_k) | < \frac{\epsilon}{3}$$

para $k = 1, 2, ..., k_0$. Finalmente para cualquier $z \in K$, $z \in D(z_i, \delta)$ para algún $1 \leq i \leq k_0$ y

$$| g_n(z) - g_m(z) | \leq | g_n(z) - g_n(z_i) | + | g_n(z_i) - g_m(z_i) | + | g_m(z_i) - g_m(z) |$$

$$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

es decir $g_n |_K$ es uniformemente de cauchy y así (g_n) converge uniformemente en K a una función holomorfa(Por el teorema 1.42). ■

Teorema 3.26. *Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas en un dominio Ω tal que para cualquier sucesión de funciones en $\mathcal{F}$ existe una subsucesión que converge uniformemente en subconjuntos compactos a una función holomorfa. Entonces $\mathcal{F}$ es localmente limitada y por lo tanto equicontinua en subconjuntos compactos de Ω.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ no es localmente limitada. Entonces existe algún disco cerrado $\overline{D} \subset \Omega$ tal que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ existe $f_n \in \mathcal{F}$ y un punto $z_n \in \overline{D}$ tal que

$$| f_n(z_n) | > n.$$

Por hipótesis existe una subsucesión $(f_{n_k}) \subset (f_n)$ que converge uniformemente en $\overline{D}$ a una función holomorfa f, es decir para algún $k_0 \in \mathbb{N}$ y $k \geq k_0$

$$| f_{n_k}(z) - f(z) | < 1 \ \ donde \ \ z \in \overline{D}.$$

Así, si $M = \max\limits_{z \in \overline{D}} | f(z) | < \infty$ y $z \in \overline{D}$

$$| f_{n_k}(z) | < 1 + M,$$

esto contradice el hecho que $| f_{n_k}(z_{n_k}) | \longrightarrow \infty$ cuando $k \longrightarrow \infty$. Luego por el teorema 3.18 $\mathcal{F}$ es equicontinua en los subconjuntos compactos de Ω. ■

Corolario 3.27. *Sea $\mathcal{F}$ una familia normal de funciones holomorfas en un dominio Ω. Si para algún punto $z_0 \in \Omega$, $| f(z_0) | \leq M$, para algún $M < \infty$ y para todo $f \in \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F}$ es localmente limitada.*

Demostración. Por la normalidad de $\mathcal{F}$ se tiene que para cualquier sucesión $(f_n) \subset \mathcal{F}$ existe una subsucesión $(f_{n_k}) \subset (f_n)$ que converge uniformemente en los compactos de Ω a una función holomorfa f o a ∞. Dado $z_0 \in \Omega$ y

$\overline{D} = \overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$. Si suponemos que $f_{n_k} \mid_{\overline{D}} \longrightarrow \infty$ uniformemente, entonces $\mid f_{n_k}(z_0) \mid > M$ para algún k suficientemente grande, esto contradice la hipótesis. Por lo tanto la sucesión (f_n) converge uniformemente en los compactos de Ω a una función holomorfa. Luego por el teorema 3.26 obtenemos que $\mathcal{F}$ es localmente limitada. ■

Ejemplo 3.28.

$$\mathcal{F} = \{f_n(z) = z^n : n \in \mathbb{N}\}$$

es normal en $\mathbb{D}$.

Demostración. Por una simple inspección $\mathcal{F}$ es uniformemente limitada en los compactos de $\mathbb{D}$. Por el corolario 3.21, $\mathcal{F}$ es normal en $\mathbb{D}$. ■

Ejemplo 3.29.

$$\mathcal{F} = \left\{ f_n(z) = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

es normal en $\mathbb{D}$.

Demostración. La prueba es inmediata a partir del ejemplo 1.8. ■

Ejemplo 3.30.

$$\mathcal{F} = \{f : f \ \ holomorfa \ \ en \ \ \Omega \ \ y \ \ \mid f \mid \leq M\}$$

es normal Ω.

Demostración. Por el corolario 3.21, $\mathcal{F}$ es normal en Ω. ■

3.3. Familias normales de funciones meromorfas

Definición 3.31. *Una familia $\mathcal{F}$ de funciones meromorfas en un dominio Ω es* ***normal*** *en $\Omega \subset \mathbb{C}$ si para cualquier sucesión $(f_n) \subset \mathcal{F}$, se puede obtener una subsucesión que converge $\varkappa - uniformemente$ en subconjuntos compactos de Ω.*

Diremos que la familia de funciones meromorfas $\mathcal{F}$ es normal en un punto de z, si $\mathcal{F}$ es normal en alguna vecindad de z. La familia de funciones meromorfas $\mathcal{F}$ es normal en ∞ si la familia correspondiente $G = \{g : g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)\}$ es normal en $z = 0$.

Teorema 3.32. *Sea (f_n) una sucesión de funciones meromorfas en un dominio Ω. Entonces (f_n) converge $\varkappa-uniformemente$ en subconjuntos compactos de Ω a f si y solo si sobre cualquier $z_0 \in \Omega$ existe un disco cerrado $\overline{D}(z_0, r)$ en el cual*

$$| f_n - f | \longrightarrow 0$$

o

$$| \frac{1}{f_n} - \frac{1}{f} | \longrightarrow 0,$$

uniformemente cuando $n \longrightarrow \infty$.

Demostración. Recordemos que

$$\varkappa(w_1, w_2) \leq | w_1 - w_2 |$$

y

$$\varkappa(w_1, w_2) = \varkappa\left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}\right) \leq | \frac{1}{w_1} - \frac{1}{w_2} |.$$

Si $| f_n - f | \longrightarrow 0$ uniformemente en $\overline{D}(z_0, r)$ cuando $n \longrightarrow \infty$, se cumple que $\varkappa(f_n, f) \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, ya que $\varkappa(f_n, f) \leq | f_n - f |$. Si $| \frac{1}{f_n} - \frac{1}{f} | \longrightarrow 0$ uniformemente en $\overline{D}(z_0, r)$ cuando $n \longrightarrow \infty$, se cumple que $\varkappa(f_n, f) \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$. De los casos anteriores tenemos que $\varkappa(f_n, f) \longrightarrow 0$ uniformemente en $\overline{D}(z_0, r)$ y por lo tanto en subconjuntos compactos de Ω.

Por otra parte, supongamos que $\varkappa(f_n, f) \longrightarrow 0$ uniformemente en subconjuntos compactos de Ω. Existen 2 casos:

Caso 7. $f(z_0) \neq \infty$. *Por el teorema 3.12, $f(z)$ es $\varkappa-continua$ en Ω. Por lo tanto existe alguna vecindad cerrada $\overline{D}(z_0, r)$ en el cual f es acotada. Por el teorema 3.4 (f_n) converge uniformemente a f en $\overline{D}(z_0, r)$. Note que f es holomorfa en el interior de $\overline{D}(z_0, r)$.*

Caso 8. $f(z_0) = \infty$. *Si z_0 es un polo de f, entonces $\frac{1}{f(z)}$ es acotada en algún disco cerrado $\overline{D}(z_0, r)$. Por hipótesis y propiedad de métrica tenemos que $\varkappa\left(\frac{1}{f_n}, \frac{1}{f}\right) \longrightarrow 0$ uniformemente en $\overline{D}(z_0, r)$. Por el teorema 3.4 $\frac{1}{f_n} \longrightarrow \frac{1}{f}$ uniformemente en $\overline{D}(z_0, r)$.*

■

Corolario 3.33. *Sea (f_n) una sucesión de funciones meromorfas en un dominio Ω la cual converge $\varkappa-uniformemente$ en subconjuntos compactos a f. Entonces f es una función meromorfa en Ω o idénticamente igual a ∞.*

Demostración. Supongamos que $f \not\equiv \infty$. Entonces para algún $z \in \Omega$, $f(z) \neq \infty$, y por el caso 7, f es holomorfa en una vecindad de cualquier punto donde este finito. Otro caso, si $f(z_0) = \infty$ ($f \not\equiv \infty$), ahora probaremos que z_0 es una singularidad aislada. En efecto. Supongamos que z_0 no es una singularidad aislada, i.e, existe $(z_n) \subset \Omega$ tal que $z_n \longrightarrow z_0$, $f(z_n) = \infty$. Por el caso 8, $\frac{1}{f}$ es holomorfa en $D(z_0, r)$. Entonces $\frac{1}{f(z_n)} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego por el corolario 1.36 $\frac{1}{f} \equiv 0$ en $D(z_0, r)$, i.e, $f \equiv \infty$ en $D(z_0, r)$. Sea

$$S = \{z \in \Omega : f(z) = \infty\} = f^{-1}(\infty).$$

Entonces $S \neq \varnothing$ y además S es abierto y cerrado. Luego la conexidad de Ω implica que $S = \Omega$, i.e, $f \equiv \infty$ lo cual es una contradicción, es así que z_0 es una singularidad aislada y f es meromorfa en Ω. ■

El siguiente teorema es muy similar al teorema 3.25(Teorema de Montel).

Teorema 3.34. *Una familia $\mathcal{F}$ de funciones meromorfas es normal en un dominio Ω si y solo si $\mathcal{F}$ es $\varkappa - equicontinua$ en Ω.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ no es $\varkappa - equicontinua$ en Ω, i.e, existe $z_0 \in \Omega$ tal que $\mathcal{F}$ no es $\varkappa - equicontinua$ en z_0. Entonces existe $\epsilon > 0$ y una sucesión $(z_n) \subset \Omega$ tal que $z_n \longrightarrow z_0$ y una sucesión $(f_n) \subset \mathcal{F}$ tal que

$$\varkappa(f_n(z_n), f_n(z_0)) > \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La normalidad de $\mathcal{F}$ prueba que existe una subsucesión $(f_{n_k}) \subset (f_n)$ que converge $\varkappa - uniformemente$ en subconjuntos compactos, en particular en un subconjunto compacto que contiene a (z_n). Luego por el teorema 3.17 (f_{n_k}) $\varkappa - equicontinua$ en z_0. Por lo tanto $\mathcal{F}$ es $\varkappa - equicontinua$.

La parte recíproca es similar al teorema 3.25. Existe un subconjunto denso numerable $\{z_n\}$ en Ω. Escojamos cualquier sucesión $(f_n) \subset \mathcal{F}$ y considere $(f_n(z_1)) \subset \overline{\mathbb{C}}$. Por compacidad de $\overline{\mathbb{C}}$ existe una subsucesión $(f_{n_k}^{(1)}(z_1)) \subset (f_n(z_1))$ convergente esféricamente, i.e, $(f_{n_k}^{(1)})$ converge esféricamente en z_1. En el punto z_2 la sucesión $(f_{n_k}^{(1)}(z_2))$, posee una subsucesión $(f_{n_k}^{(2)}(z_2))$ convergente esféricamente, i.e, $(f_{n_k}^{(2)})$ converge esféricamente en z_2 y z_1. Continuando con este proceso, existe una subsucesión $(f_{n_k}^{(p)})$ el cual converge esféricamente en $z_1, z_2, \ldots, z_p$ $\forall p \in \mathbb{N}$. Con ello concluimos que la sucesión diagonal $(f_{n_k}^{(k)})$ converge esféricamente para todo los z_n. La parte restante de la prueba es similar al teorema 3.25, con ello concluimos la prueba. ■

Supongamos para el resto de esta sección que $\mathcal{F}$ es una familia de funciones meromorfas.

Proposición 3.35. *Sea $\mathcal{F}$ una familia normal en $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ y sea $T : U \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ meromorfa tal que $\overline{\bigcup_{f\in\mathcal{F}} f(\Omega)} \subset U$ donde $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ es abierto. Entonces $\mathcal{F}^* = \{T \circ f : f \in \mathcal{F}\}$ es normal en Ω.*

Demostración. Tomemos cualquier sucesión $(T \circ f_n) \subset \mathcal{F}^*$ donde $f_n \in \mathcal{F}$. Por la normalidad de $\mathcal{F}$, se tiene que (f_n) posee una subsucesión (f_{n_k}) tal que $f_{n_k} \longrightarrow f$ normalmente. Si $a \in \Omega$ y $f(a) = \lim f_{n_k}(a)$, entonces $f(a) \in \overline{\bigcup_{f\in\mathcal{F}} f(\Omega)}$ y así $T \circ f$ esta bien definida. Denotemos por X a $\overline{\bigcup_{f\in\mathcal{F}} f(\Omega)}$.

Tenemos que $T|_X$ es uniformemente $\varkappa -$ *continua*, es decir:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } x, y \in X,\ \varkappa(x, y) < \delta \rightarrow \varkappa(T|_X(x), T|_X(y)) < \varepsilon.$$

Sea cualquier compacto $K \subset \Omega\,(fijo)$. Por hipótesis $f_{n_k}|_K \longrightarrow f|_K\ \varkappa - uniformemente$, es decir existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varkappa(f_{n_k}(z), f(z)) < \delta$ para todo $k \geq k_0$, $z \in K$. Por lo anterior tenemos que $\varkappa(T \circ f_{n_k}(z), T \circ f(z)) < \varepsilon$ para todo $k \geq k_0$, $z \in K$. Entonces $T \circ f_{n_k}|_K \longrightarrow T \circ f|_K\ \varkappa - uniformemente$. Por lo tanto $\mathcal{F}^*$ es normal en Ω.

■

Corolario 3.36. *Sea $\mathcal{F}$ una familia normal en $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ y sea $T : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ meromorfa. Entonces $\mathcal{F}^* = \{T \circ f : f \in \mathcal{F}\}$ es normal en Ω.*

Demostración. La prueba es inmediata a partir de la proposición 3.35. ■

Proposición 3.37. *Sea $\mathcal{F}$ una familia normal en $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ y sea $T : \Omega \subset \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ meromorfa. Entonces $\widetilde{\mathcal{F}} = \{f \circ T : f \in \mathcal{F}\}$ es normal en Ω.*

Demostración. Escojamos cualquier sucesión $(f_n \circ T) \subset \widetilde{\mathcal{F}}$ donde $f_n \in \mathcal{F}$. Por la normalidad de $\mathcal{F}$ tenemos que (f_n) posee una subsucesión (f_{n_k}) tal que $f_{n_k} \longrightarrow f$ normalmente. Sea $K \subset \Omega$ compacto. Como $T(K)$ es compacto se tiene que $f_{n_k}|_{T(K)} \longrightarrow f|_{T(K)}\ \varkappa - uniformemente$, i.e, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varkappa(f_{n_k}(w), f(w)) < \varepsilon\ \forall w \in T(K)$ y $k \geq k_0$. Por lo tanto $\varkappa(f_{n_k} \circ T(z), f \circ T(z)) < \varepsilon$ para todo $k \geq k_0$, $z \in K$. Por lo tanto $\widetilde{\mathcal{F}}$ es normal en Ω. ■

Capítulo 4

Familias normales de transformaciones de Moebius

En el presente capítulo demostraremos el teorema fundamental de normalidad para transformaciones de Moebius, el cual se ha dividido en la proposición 4.11 y 4.12 para una mejor comprensión. Luego veremos la extensión del teorema fundamental para transformaciones de Moebius. Para estas pruebas ver [5].

4.1. Converge esféricamente uniformemente en $Aut(\overline{\mathbb{C}})$

Asumiremos en esta sección que todo dominio Ω se encuentra en la esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$ excepto se diga lo contrario.

Lema 4.1. *Si $\widehat{\mathcal{L}} \subset \mathcal{L}$ es una familia normal en Ω, entonces la familia conjugada $\mathcal{F} = \{STS^{-1} \colon T \in \widehat{\mathcal{L}}\}$ es normal en $S(\Omega)$, para cualquier $S \in \mathcal{L}$.*

Demostración. Sea $(F_n) \subset \mathcal{F}$, donde $F_n = ST_nS^{-1}$ y $T_n \in \widehat{\mathcal{L}}$. Por la normalidad de $\widehat{\mathcal{L}}$, existe una subsucesión $(T_{n_k}) \subset (T_n)$ tal que $T_{n_k} \longrightarrow T$ normalmente. Luego por el corolario 3.36 $ST_{n_k} \longrightarrow ST$ normalmente. Debido a que S^{-1} existe y es meromorfa, concluimos que $ST_{n_k}S^{-1} \longrightarrow STS^{-1}$ normalmente por la proposición 3.37. Por lo tanto $\mathcal{F}$ es normal en $S(\Omega)$. ■

Lema 4.2. *Sea $T \in \mathcal{L}$ tal que $T(0) = 0$, $T(\infty) = \infty$ y $T(1) = 1$. Entonces $T(z) = z \quad \forall z \in \overline{\mathbb{C}}$.*

Demostración. Sea $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Como $T(\infty) = \infty$, entonces $c = 0$ y por lo tanto podemos escribir $T(z) = \alpha z + \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Como $T(0) = 0$, entonces $\beta = 0$ y $T(z) = \alpha z$. Como $T(1) = 1$, se tiene que $\alpha = 1$ y así $T(z) = z$. ■

Lema 4.3. *Para cualquier terna $a, b, c \in \overline{\mathbb{C}}$ de puntos diferentes dos a dos, existe un único $\varphi \in \mathcal{L}$ tal que $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 1$ y $\varphi(c) = \infty$.*

Demostración. Existencia. Supongamos primero que $a, b, c \in \mathbb{C}$. Definamos $\varphi(z) = \frac{z-a}{z-c} \cdot \frac{b-c}{b-a}$. Es fácil verificar que $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 1$, $\varphi(c) = \infty$. Si por ejemplo $a = \infty$, definamos $\varphi(z) = \frac{b-c}{z-c}$. Si $b = \infty$, definamos $\varphi(z) = \frac{z-a}{z-c}$. Finalmente si $c = \infty$, definamos $\varphi(z) = \frac{z-a}{b-a}$. Unicidad. Supongamos que existe φ y ψ pertenecientes a $\mathcal{L}$ tales que $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 1, \varphi(c) = \infty, \psi(a) = 0, \psi(b) = 1$ y $\psi(c) = \infty$ con dichas evaluaciones obtenemos que $\psi^{-1} \circ \varphi$ aplica 0 en 0, 1 en 1 y ∞ en ∞. Entonces por el lema 4.2 $\psi^{-1} \circ \varphi = Id$ y así $\varphi = \psi$. ■

Lema 4.4. *Para cualquier terna $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ de puntos diferentes dos a dos y para otra cualquier terna $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ de puntos diferentes dos a dos existe un único $\varphi \in \mathcal{L}$ tal que $\varphi(z_1) = w_1, \varphi(z_2) = w_2$ y $\varphi(z_3) = w_3$.*

Demostración. Existencia. Por el lema 4.3 existen únicas transformaciones de Moebius φ_1 y φ_2 tales que $\varphi_1(z_1) = 0, \varphi_1(z_2) = 1, \varphi_1(z_3) = \infty$ y $\varphi_2(w_1) = 0, \varphi_2(w_2) = 1, \varphi_2(w_3) = \infty$. Ahora consideremos la composición $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$, la cual aplica z_1 en w_1, z_2 en w_2 y z_3 en w_3 es decir $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(z_k) = w_k$, $k = 1, 2, 3$. Unicidad. Supongamos que existen φ y ψ pertenecientes a $\mathcal{L}$ tales que $\varphi(z_1) = w_1, \varphi(z_2) = w_2, \varphi(z_3) = w_3, \psi(z_1) = w_1, \psi(z_2) = w_2$ y $\psi(z_3) = w_3$ luego $\varphi_1^{-1} \circ \varphi \circ \psi^{-1} \circ \varphi_1$ aplica 0 en 0, 1 en 1 y ∞ en ∞. Por lo tanto por el lema 4.2, $\varphi_1^{-1} \circ \varphi \circ \psi^{-1} \circ \varphi_1 = Id$ y así $\varphi = \psi$. ■

Teorema 4.5. *Sea $(R_n) \subset \mathcal{L}$. Si $R_n(z) = \dfrac{z + b_n}{c_n z + 1}$, donde $\lim b_n = 0$ y $\lim c_n = 0$, entonces $R_n \longrightarrow Id$ $\varkappa - uniformemente$ en $\overline{\mathbb{C}}$.*

Demostración. Supongamos que R_n no converge $\varkappa - uniformemente$ a Id. Esto es, existen $\epsilon > 0$ y una sucesión $n_1 < n_2 < n_3 <, \ldots,$ de números naturales y una sucesión $(z_k) \subset \overline{\mathbb{C}}$ tales que $\varkappa(R_{n_k}(z_k), z_k) \geq \epsilon$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Pasando a una subsucesión si es necesario podemos suponer que $z_k \longrightarrow \alpha$ donde $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$, ya que $\overline{\mathbb{C}}$ es compacto.

Caso 9. $\alpha \in \mathbb{C}$. *Defina $b_{n_k} = b_k$, $c_{n_k} = c_k$, $R_{n_k} = R_k$. Entonces*

$$\epsilon \leq \varkappa(R_k(z_k), z_k) = \frac{\mid \frac{z_k + b_k}{c_k z_k + 1} - z_k \mid}{\sqrt{1 + \mid z_k \mid^2} \sqrt{1 + \mid R_k(z_k) \mid^2}},$$

$$= \frac{\mid \frac{b_k - c_k z_k^2}{c_k z_k + 1} \mid}{\sqrt{1+ \mid z_k \mid^2} \sqrt{1+ \mid \frac{z_k + b_k}{c_k z_k + 1} \mid^2}} \leq \mid \frac{b_k - c_k z_k^2}{c_k z_k + 1} \mid \longrightarrow 0,$$

puesto que $(\mid z_k \mid)$ *es una sucesión acotada. Por lo tanto* $R_n \longrightarrow Id$ $\varkappa - uniformemente$ *en* $\overline{\mathbb{C}}$.

Caso 10. $\alpha = \infty$. *Defina* $b_{n_k} = b_k$, $c_{n_k} = c_k$, $R_{n_k} = R_k$. *Entonces*

$$\epsilon \leq \varkappa \left(R_k \left(z_k\right), z_k\right) = \frac{\mid \frac{z_k + b_k}{c_k z_k + 1} - z_k \mid}{\sqrt{1+ \mid z_k \mid^2} \sqrt{1+ \mid R_k \left(z_k\right) \mid^2}},$$

$$= \frac{\mid b_k - c_k z_k^2 \mid}{\sqrt{1+ \mid z_k \mid^2} \sqrt{\mid c_k z_k + 1 \mid^2 + \mid z_k + b_k \mid^2}},$$

$$= \frac{\frac{|b_k - c_k z_k^2|}{|z_k|^2}}{\frac{\sqrt{1+|z_k|^2}}{|z_k|} \frac{\sqrt{|c_k z_k + 1|^2 + |z_k + b_k|^2}}{|z_k|}},$$

$$= \frac{\mid \frac{b_k}{z_k^2} - c_k \mid}{\sqrt{\frac{1}{|z_k|^2} + 1} \sqrt{\mid c_k + \frac{1}{z_k} \mid^2 + \mid 1 + \frac{b_k}{z_k} \mid^2}} \longrightarrow 0,$$

puesto que $\mid z_k \mid \longrightarrow +\infty$. Por lo tanto $R_n \longrightarrow Id\ \varkappa - uniformemente$ en $\overline{\mathbb{C}}$. ■

Teorema 4.6. *Sea* $(T_n) \subset \mathcal{L}$. *Si* $\lim T_n(0) = 0$, $\lim T_n(1) = 1$ *y* $\lim T_n(\infty) = \infty$, *entonces* $T_n \longrightarrow Id\ \varkappa - uniformemente$ *en* $\overline{\mathbb{C}}$.

Demostración. Denotemos por $T_n(0) = 0_n$, $T_n(1) = 1_n$, $T_n(\infty) = \infty_n$. Defina $S_n(z) = \frac{z - 0_n}{z - \infty_n} \frac{1_n - \infty_n}{1_n - 0_n}$, es fácil verificar que $S_n(0_n) = 0$, $S_n(1_n) = 1$, $S_n(\infty_n) = \infty$. Por lo tanto $S_n \circ T_n(0) = 0$, $S_n \circ T_n(1) = 1$, $S_n \circ T_n(\infty) = \infty$. Luego por el lema 4.2 $S_n \circ T_n = Id$. Para demostrar que $T_n \longrightarrow Id\ \varkappa - uniformemente$, bastara demostrar que $S_n \longrightarrow Id\ \varkappa - uniformemente$. Hagamos $\infty_n = \frac{1}{\delta_n}$, donde $\delta_n \to 0$. Entonces $S_n(z) = \frac{z - 0_n}{\delta_n z - 1} \cdot \frac{\delta_n 1_n - 1}{1_n - 0_n}$. Sea $R_n(z) = \frac{-(1_n - 0_n)}{\delta_n 1_n - 1} \cdot S_n(z) = \frac{z - 0_n}{1 - \delta_n z}$. Por el teorema 4.5 $R_n \longrightarrow Id\ \varkappa - uniformemente$. Por lo tanto $S_n \longrightarrow Id\ \varkappa - uniformemente$. ■

Teorema 4.7. *Sea* $(T_n) \subset \mathcal{L}$. *Para cualesquiera terna* $\{a_1, a_2, a_3\}$ *y* $\{b_1, b_2, b_3\}$ *distintas dos a dos en* $\overline{\mathbb{C}}$ *tal que* $\lim T_n(a_i) = b_i$, *donde i=1,2,3. Entonces* $T_n \longrightarrow G\ \varkappa - uniformemente$ *en todo* $\overline{\mathbb{C}}$, *donde* $G \in \mathcal{L}$ *es la única transformación Moebius tal que* $G(a_i) = b_i$, *donde i=1,2,3.*

Demostración. Por el lema 4.4, se tiene que existen únicas transformaciones de Moebius φ_1 y φ_2 tal que $\varphi_1(0) = a_1$, $\varphi_1(1) = a_2$, $\varphi_1(\infty) = a_3$, $\varphi_2(b_1) = 0$, $\varphi_2(b_2) = 1$, $\varphi_2(b_3) = \infty$. Por hipótesis tenemos que $T_n(a_1) \longrightarrow b_1$, reemplazando a_1 tenemos $T_n(\varphi_1(0)) \longrightarrow b_1$. Por continuidad de φ_2 tenemos $\varphi_2 \circ T_n \circ \varphi_1(0) \longrightarrow 0$. Procediendo de manera similar para $i = 2{,}3$, $\lim T_n(a_i) = b_i$ se obtiene que $\varphi_2 \circ T_n \circ \varphi_1(1) \longrightarrow 1$, $\varphi_2 \circ T_n \circ \varphi_1(\infty) \longrightarrow \infty$. Por el teorema 4.6 $\varphi_2 \circ T_n \circ \varphi_1 \longrightarrow Id\ \varkappa - uniformemente$. Así $T_n \longrightarrow \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1^{-1}$ $\varkappa - uniformemente$. Consideremos $G = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1^{-1}$.

∎

Teorema 4.8. *Sea* $(T_n) \subset \mathcal{L}$. *Defina* $C = \left\{z \in \overline{\mathbb{C}} : \exists \lim T_n(z)\right\}$ *y* $V : C \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ *tal que* $V(z) = \lim T_n(z)$.

(1) *Si la imagen de* V *contiene tres puntos distintos, entonces* $V \in \mathcal{L}$ *y* $T_n \longrightarrow V\ \varkappa - uniformemente$ *en todo* $\overline{\mathbb{C}}$.

(2) *Si* $T_n \longrightarrow V\ \varkappa - uniformemente$ *en una región compacta* K, *Entonces* $V \in \mathcal{L}$ *o* V *es una constante.*

Demostración. (1) Si b_1, b_2, b_3 son puntos distintos de la imagen de V, entonces existen $a_1, a_2, a_3 \in C$ tales que $V(a_i) = b_i$ donde $i = 1, 2, 3$. Como $\lim T_n(a_i) = b_i$, entonces por el teorema 4.7 existe un único $G \in \mathcal{L}$ tal que $T_n \longrightarrow G\ \varkappa - uniformemente$ en todo $\overline{\mathbb{C}}$ tal que $G(a_i) = b_i$ donde $i = 1, 2, 3$. Por lo tanto $C = \overline{\mathbb{C}}$ y $V = G$. Así $V \in \mathcal{L}$. (2) Como $T_n \longrightarrow V$ $\varkappa - uniformemente$ en una región compacta $K \subset C(int(K) \neq \emptyset)$ entonces V es constante o inyectiva en K. Si V es inyectiva podemos decir que la imagen de V tiene infinitos valores, ya que el $int(K) \subset C$ es no vacío. Entonces por la parte (1) tenemos que $V \in \mathcal{L}$. ∎

Proposición 4.9. *Sea* $S(z) = kz$, $k \neq 0, 1$. *Entonces* $\mathcal{F} = \{S^n : n \in \mathbb{Z}\}$ *no es normal en* ∞ *y* 0.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ es normal en 0. Entonces existe $D \ni 0$ tal que $\mathcal{F} \mid_D$ es normal. Luego por el corolario 3.27 $\mathcal{F} \mid_D$ es localmente limitada ya que $\mid g(0) \mid = 0$ para todo $g \in \mathcal{F} \mid_D$. Si $\mid k \mid > 1$, tenemos que $\mathcal{F} \mid_D$ no es localmente limitada para $n \geq 0$. Si $\mid k \mid < 1$, tenemos que $\mathcal{F} \mid_D$ no es localmente limitada para $n < 0$. Por lo tanto $\mathcal{F}$ no es normal en 0. Ahora supongamos que $\mathcal{F}$ es normal en ∞. Sea $M'(z) = \frac{1}{z}$ y $\mathcal{F}' = \{M'SM'^{-1} : S \in \mathcal{F}\}$. Por el lema 4.1 $\mathcal{F}'$ es normal en 0, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{F}$ no es normal en ∞. ∎

Lema 4.10. *Sea* $S \in \mathcal{L}$ *hiperbólico o loxodrómico. Entonces* $\mathcal{F} = \{S^n : n \in \mathbb{Z}\}$ *no es normal en los puntos fijos de* S.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ es normal en los puntos fijos de S. Sea β y λ puntos fijos de S. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, defina

$$M(z) = \frac{z-\beta}{z-\lambda}.$$

Si $\lambda = \infty$, defina $M(z) = z - \beta$. Sea $\widetilde{S} = MSM^{-1}$ y $\widetilde{\mathcal{F}} = \left\{\widetilde{S}^n : n \in \mathbb{Z}\right\}$. Como $\widetilde{S}(z) = kz$, $k \neq 0, 1$ entonces por la proposición 4.9 $\widetilde{\mathcal{F}}$ no es normal en ∞ y 0. Por lo tanto que $\mathcal{F}$ no es normal en los puntos fijos de S. ■

4.2. Teorema fundamental de normalidad para transformaciones de Moebius

Proposición 4.11. *Sea $\widehat{\mathcal{L}}$ una familia de transformaciones de Moebius definidas en $\mathbb{D}$ tal que $T(z) \neq 0, \infty$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y todo $T \in \widehat{\mathcal{L}}$. Entonces $\widehat{\mathcal{L}}$ es normal en $\mathbb{D}$.*

Demostración. Sea una sucesión $(T_n) \subset \widehat{\mathcal{L}}$, donde $T_n(z) = \dfrac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n}$. Consideremos 2 casos.

Caso 11. *Supongamos $a_n = 0$ finitas veces y $c_n = 0$ finitas veces. Entonces existen $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \neq 0$ $\forall n \geq n_0$ y $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $c_n \neq 0$ $\forall n \geq n_1$ respectivamente. Llamemos $k = \max\{n_0, n_1\}$ y así $a_n \neq 0$ y $c_n \neq 0$ $\forall n \geq k$. Entonces pasando a una subsucesión si es necesario, podemos asumir que $a_n \neq 0$ y $c_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Al verificar que $T_n\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) = 0$ y $T_n\left(\frac{-d_n}{c_n}\right) = \infty$ se tiene que $\mid \frac{-b_n}{a_n} \mid \geq 1$ y $\mid \frac{-d_n}{c_n} \mid \geq 1$ respectivamente ya que $T_n(z) \neq 0, \infty$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Sea*

$$T_n(z) = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n} = \frac{b_n}{d_n} \cdot V_n(z),$$

donde

$$V_n(z) = \frac{\frac{a_n z + b_n}{a_n}}{\frac{b_n}{a_n}} \cdot \frac{\frac{d_n}{c_n}}{\frac{c_n z + d_n}{c_n}}.$$

Fijemos cualquier compacto $K \subseteq \mathbb{D}$. Escojamos un disco $D(0, r)$ para cierto $0 < r < 1$ tal que $K \subseteq D(0, r)$. Sea $\overline{D}(0, r) = \{z : \mid z \mid \leq r\}$.

Afirmación 9. $\dfrac{1-r}{1+r} \leq \mid V_n(z) \mid \leq \dfrac{1+r}{1-r}$ *para todo $\overline{D}(0, r)$.*

Sea

$$V_n(z) = f_n(z) \cdot g_n(z)$$

donde

$$f_n(z) = \frac{\frac{a_n z + b_n}{a_n}}{\frac{b_n}{a_n}}$$

y

$$g_n(z) = \frac{\frac{d_n}{c_n}}{\frac{c_n z + d_n}{c_n}}.$$

Para poder acotar $V_n(z)$ bastara acotar $f_n(z)$ y $g_n(z)$ con $\overline{D}(0, r)$.

$$\mid f_n(z) \mid = \frac{\mid z + \frac{b_n}{a_n} \mid}{\mid \frac{b_n}{a_n} \mid} \leq \frac{\mid z \mid}{\mid \frac{b_n}{a_n} \mid} + 1 \leq r + 1.$$

Ahora procedamos acotar $g_n(z)$. Sabemos que $\mid \frac{d_n}{c_n} \mid - \mid z \mid \leq \mid z + \frac{d_n}{c_n} \mid$. Entonces

$$1 - \frac{\mid z \mid}{\mid \frac{d_n}{c_n} \mid} \leq \frac{\mid z + \frac{d_n}{c_n} \mid}{\mid \frac{d_n}{c_n} \mid},$$

por dato tenemos que $\mid z \mid \leq r$, $\mid \frac{d_n}{c_n} \mid \geq 1$. Entonces

$$1 - r \leq \frac{\mid z + \frac{d_n}{c_n} \mid}{\mid \frac{d_n}{c_n} \mid}$$

y

$$\mid g_n(z) \mid \leq \frac{1}{1 - r}$$

por lo tanto

$$\mid V_n(z) \mid \leq \frac{1 + r}{1 - r}$$

Luego la cota inferior de $V_n(z)$ se resuelve de manera similar. Es así que para $z \in \overline{D}(0, r)$ se tiene lo siguiente:

$$\frac{1 - r}{1 + r} \leq \mid V_n(z) \mid \leq \frac{1 + r}{1 - r}.$$

De la afirmación tenemos que V_n es uniformemente limitada sobre $\overline{D}(0, r)$. Existen 2 casos a considerar. Primero Supongamos que $\left(\frac{b_n}{d_n}\right)$ es acotada. Entonces existe $M > 0$ tal que $\mid \frac{b_n}{d_n} \mid \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto

$$\mid T_n(z) \mid = \mid \frac{b_n}{d_n} . V_n(z) \mid \leq M . \left(\frac{1 + r}{1 - r}\right),$$

es decir la sucesión (T_n) es uniformemente limitada en $\overline{D}(0,r)$. En particular (T_n) es uniformemente limitada en $K \subseteq \mathbb{D}$. Por lo tanto (T_n) es uniformemente limitada en los compactos de $\mathbb{D}$. Luego por el corolario 3.21 (T_n) admita una subsucesión que converge uniformemente en los compactos de $\mathbb{D}$. Por lo tanto $\widehat{\mathcal{L}}$ es normal en $\mathbb{D}$. Supongamos ahora que $\left(\frac{b_n}{d_n}\right)$ no es acotada. Entonces pasando a una subsucesión si es necesaria, podemos asumir que $\mid \frac{b_n}{d_n} \mid \longrightarrow \infty$ y así $\mid \frac{d_n}{b_n} \mid \longrightarrow 0$. Se prueba que $\frac{1}{T_n} \longrightarrow 0$ uniformemente sobre $\overline{D}(0,r)$, caso contrario existirían $\epsilon > 0$, $n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_k < \dots$, donde $n_i \in \mathbb{N}$, y una sucesión $(z_k) \subset \overline{D}(0,r)$ tal que $\mid \frac{1}{T_{n_k}(z_k)} \mid \geq \epsilon$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Luego,

$$\epsilon \leq \mid \frac{1}{T_{n_k}(z_k)} \mid = \mid \frac{d_{n_k}}{b_{n_k}} \cdot \frac{1}{V_{n_k}(z_k)} \mid \longrightarrow 0$$

ya que $\mid \frac{d_n}{b_n} \mid \longrightarrow 0$. Por lo tanto $\frac{1}{T_n} \longrightarrow 0$ uniformemente sobre $\overline{D}(0,r)$. En particular $\frac{1}{T_n} \longrightarrow 0$ uniformemente sobre $K \subseteq \mathbb{D}$. Por lo tanto la sucesión $\left(\frac{1}{T_n}\right)$ converge normalmente a 0 y por el corolario 3.36 (T_n) converge normalmente a ∞. Así $\widehat{\mathcal{L}}$ es normal en $\mathbb{D}$.

Caso 12. *$a_n = 0$ infinitas veces o $c_n = 0$ infinitas veces. Para cada $k \in \mathbb{N}$. Si $a_k = 0$, entonces $c_k \neq 0$ ya que $a_k d_k - b_k c_k \neq 0$. Entonces pasando a una subsucesión si es necesario, podemos asumir que $a_n = 0$ y $c_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Así*

$$T_n(z) = \frac{b_n}{c_n z + d_n} = \frac{b_n}{d_n} \cdot V_n(z)$$

donde

$$V_n(z) = \frac{\frac{d_n}{c_n}}{z + \frac{d_n}{c_n}},$$

de forma similar que el caso 11 obtenemos que $\widehat{\mathcal{L}}$ es normal en $\mathbb{D}$.

Si $c_k = 0$, entonces $a_k \neq 0$ ya que $a_k d_k - b_k c_k \neq 0$. Entonces pasando a una subsucesión si es necesario, podemos asumir que $c_n = 0$ y $a_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Así

$$T_n(z) = \frac{a_n z + b_n}{d_n} = \frac{b_n}{d_n} \cdot V_n(z)$$

donde

$$V_n(z) = \frac{z + \frac{b_n}{a_n}}{\frac{b_n}{a_n}},$$

de forma similar que el caso 11 obtenemos que $\widehat{\mathcal{L}}$ es normal en $\mathbb{D}$.

■

Proposición 4.12. *Sea $\widehat{\mathcal{L}}$ una familia de transformaciones de Moebius definidas en Ω tal que $T(z) \neq 0$, $T(z) \neq \infty$ para todo $z \in \Omega$ y todo $T \in \widehat{\mathcal{L}}$. Entonces $\widehat{\mathcal{L}}$ es normal en Ω.*

Demostración. Si $\infty \notin \Omega$. Sea $D(a,r) \subset \Omega$ un disco arbitrario. Definamos la siguiente aplicación φ: $D(a,r) \longrightarrow \mathbb{D}$ tal que $\varphi(z) = \frac{z-a}{r}$. Con la aplicación φ podemos definir la siguiente familia $\mathcal{F} = \{\Phi = T \circ \varphi^{-1} : T \in \widehat{\mathcal{L}}\}$. Es fácil verificar que $\Phi(z) \neq 0, \infty$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y todo $\Phi \in \mathcal{F}$. Por la proposición 4.11 $\mathcal{F}$ es normal en $\mathbb{D}$. Se observa que la familia $\widehat{\mathcal{L}}$ es igual a $\{\Phi \circ \varphi : \Phi \in \mathcal{F}\}$. Aplicando la proposición 3.37 se obtiene que $\widehat{\mathcal{L}}$ es normal en $D(a,r) \subset \Omega$. Así $\widehat{\mathcal{L}}$ es normal en Ω. Si $\infty \in \Omega$, entonces existe $r > 0$ tal que $D(\infty, r) = \{z :\mid z \mid > r\} \subset \Omega$. La prueba es muy similar a lo que se hizo al inicio. Definamos $\varphi = Inv : D(\infty, r) \longrightarrow D\left(0, \frac{1}{r}\right)$ donde $\varphi(z) = Inv(z) = \frac{1}{z}$ y

$$\mathcal{F} = \{\Phi = T \circ Inv^{-1} : T \in \widehat{\mathcal{L}}\}.$$

Por la proposición 4.11 $\mathcal{F}$ es normal en $D(0, \frac{1}{r})$. Por lo tanto por la proposición 3.37, $\widehat{\mathcal{L}} = \{\Phi \circ \varphi : \Phi \in \mathcal{F}\}$ es normal en $D(\infty, r)$. ■

Teorema 4.13 (Teorema fundamental de normalidad)**.** *Sea $\widehat{\mathcal{L}}$ una familia de transformaciones de Moebius definidas en Ω tal que $T(z) \neq w_1$, $T(z) \neq w_2$ para todo $z \in \Omega$ y todo $T \in \widehat{\mathcal{L}}$ donde w_1 y w_2 son números complejos fijos distintos. Entonces $\widehat{\mathcal{L}}$ es normal en Ω.*

Demostración. Definamos la siguiente familia

$$\mathcal{F} = \{S(z) = \tfrac{T(z)-w_1}{T(z)-w_2} : T \in \widehat{\mathcal{L}}\}.$$

Es fácil ver que $S(z) \neq 0, \infty$ para todo $z \in \Omega$ y todo $S \in \mathcal{F}$. Entonces por el teorema 4.12 $\mathcal{F}$ es normal en Ω. Note que $\widehat{\mathcal{L}}$ es igual $\{g \circ S : S \in \mathcal{F}\}$ donde $g(x) = \frac{xw_2 - w_1}{x-1}$. Por el corolario 3.36, tenemos que $\widehat{\mathcal{L}}$ es normal en Ω. ■

Definición 4.14. *Diremos que una familia $\mathcal{F}$ de funciones en un dominio Ω omite un punto si existe $a \in \overline{\mathbb{C}}$ tal que $f(z) \neq a$ para todo $z \in \Omega$ y todo $f \in \mathcal{F}$.*

Corolario 4.15. *Sea $\{T\}$ una familia de transformaciones de Moebius. Si $\{T\}$ no es una familia normal en el punto α, entonces existe $w_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ tal que para cualquier $w \neq w_0$ existe una sucesión de elementos distintos T_n y una sucesión de elementos z_n tal que $z_n \longrightarrow \alpha$ y $T_n(z_n) = w$.*

Demostración. Sea (D_i) una sucesión decreciente de discos tal que $\bigcap D_i = \{\alpha\}$.

Afirmación 10. *$\bigcup T(D_1)$ omite a lo más un punto.*
Supongamos que $\bigcup T(D_1)$ omite al menos dos puntos. Entonces por el teorema 4.13 $\{T\}$ es normal en D_1 y así $\{T\}$ es normal en α, esto contradice la hipótesis.

Como $\bigcup T(D_1)$ omite a lo más un punto entonces existe $w_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ tal que $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{w_0\} \subset \bigcup T(D_1)$. Si fijamos cualquier $w \neq w_0$ entonces existen $T_1 \in \{T\}$ y $z_1 \in D_1$ tal que $T_1(z_1) = w \neq w_0$. Es fácil ver que $\{T\} \setminus \{T_1\}$ no es normal α. De manera similar que la afirmación anterior $\bigcup\limits_{T \neq T_1} T(D_2)$ omite a lo más un punto, es decir existen $T_2 \in \{T\} \setminus \{T_1\}$ y $z_2 \in D_2$ tal que $T_2(z_2) = w \neq w_0$. Continuando con este proceso obtenemos que existe $w_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ tal que para cualquier $w \neq w_0$ existe una sucesión de elementos distintos T_n y una sucesión $(z_n) \subset \overline{\mathbb{C}}$ tal que $z_n \longrightarrow \alpha$ y $T_n(z_n) = w \neq w_0$. ∎

4.3. Familias normales y métrica esférica

Definición 4.16. *Sean z_1, z_2, z_3, z_4 cuatro puntos distintos de $\mathbb{C}$. Llamaremos* ***razón cruzada*** *de z_1, z_2, z_3, z_4 a la imagen de z_1, por medio de la única transformación de Moebius φ que lleva z_2 en 1, z_3 en ∞, z_4 en 0. Se expresara*

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) := \varphi(z_1) = \frac{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_4)(z_1 - z_3)}.$$

Extenderemos esta definición en el caso que algunos de los $z_i = \infty$. Si $z_1 = \infty$, defina $(\infty, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$. Si $z_2 = \infty$, defina $(z_1, \infty, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_4}{z_1 - z_3}$. Si $z_3 = \infty$, defina $(z_1, z_2, \infty, z_4) = \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$. Si $z_4 = \infty$, defina $(z_1, z_2, z_3, \infty) = \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}$.

Observación 4.17. *Claramente se verifica que $\varphi(z) = (z, z_2, z_3, z_4) \forall z \in \overline{\mathbb{C}}$.*

Proposición 4.18. *Demostremos que*

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4))$$

para todo $T \in \mathcal{L}$ y todo $z_i \in \overline{\mathbb{C}}$ donde $i = 1, 2, 3, 4$.

Demostración. Sea $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \overline{\mathbb{C}}$ y $T \in \mathcal{L}$. Sean las razones cruzadas siguientes:

$$\psi_1 \in \mathcal{L} : \psi_1 (z) = (z, z_2, z_3, z_4) \ \forall z \in \overline{\mathbb{C}},$$

$$\psi_2 \in \mathcal{L} : \psi_2 (w) = (w, T(z_2), T(z_3), T(z_4)) \ \forall w \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Por definición

$$\psi_1 (z) = \frac{z - z_4}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4},$$

$$\psi_2 (w) = \frac{w - T(z_4)}{w - T(z_3)} \cdot \frac{T(z_2) - T(z_3)}{T(z_2) - T(z_4)},$$

es fácil verificar que $\psi_2 \circ T \circ \psi_1^{-1}$ aplica 0 en 0, 1 en 1 y ∞ en ∞. Entonces por el lema 4.2 $\psi_2 \circ T \circ \psi_1^{-1} = Id$. Como $\psi_2 \circ T = \psi_1$ entonces $(z_1, z_2, z_3, z_4) = \psi_1 (z_1) = \psi_2 \circ T (z_1) = (T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4))$. ■

Observación 4.19. Es fácil verificar que

$$\frac{\varkappa (z_1, z_4) \varkappa (z_2, z_3)}{\varkappa (z_2, z_4) \varkappa (z_1, z_3)} = \frac{| z_1 - z_4 || z_2 - z_3 |}{| z_2 - z_4 || z_1 - z_3 |} = | (z_1, z_2, z_3, z_4) |$$

y

$$\frac{\varkappa (T(z_1), T(z_4)) \varkappa (T(z_2), T(z_3))}{\varkappa (T(z_2), T(z_4)) \varkappa (T(z_1), T(z_3))} = \frac{| T(z_1) - T(z_4) || T(z_2) - T(z_3) |}{| T(z_2) - T(z_4) || T(z_1) - T(z_4) |}$$

$$\frac{\varkappa (T(z_1), T(z_4)) \varkappa (T(z_2), T(z_3))}{\varkappa (T(z_2), T(z_4)) \varkappa (T(z_1), T(z_3))} = | (T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) |,$$

por la proposición 4.18 se concluye lo siguiente:

$$\frac{\varkappa (z_1, z_4) \varkappa (z_2, z_3)}{\varkappa (z_2, z_4) \varkappa (z_1, z_3)} = \frac{\varkappa (T(z_1), T(z_4)) \varkappa (T(z_2), T(z_3))}{\varkappa (T(z_2), T(z_4)) \varkappa (T(z_1), T(z_3))}.$$

Teorema 4.20. *Sea $\widehat{\mathcal{L}}$ una familia de transformaciones de Moebius en un dominio Ω. Supongamos que existe $\epsilon > 0$ tal que para cualquier $T \in \widehat{\mathcal{L}}$ existen dos puntos a_T y b_T omitidos por T tales que $\varkappa (a_T, b_T) > \epsilon$. Entonces $\widehat{\mathcal{L}}$ es normal en Ω.*

Demostración. Fijemos cualquier $T \in \widehat{\mathcal{L}}$. Sea z, w puntos distintos en Ω y α, β puntos distintos en el complemento de Ω. Por la observación 4.19, la siguiente expresión:

$$\frac{\varkappa (z, \beta) \varkappa (\alpha, w)}{\varkappa (\alpha, \beta) \varkappa (z, w)} \cdot \frac{\varkappa (z, \alpha) \varkappa (\beta, w)}{\varkappa (\beta, \alpha) \varkappa (z, w)}$$

es igual a

$$\frac{\varkappa\left(T\left(z\right),T\left(\beta\right)\right)\varkappa\left(T\left(\alpha\right),T\left(w\right)\right)}{\varkappa\left(T\left(\alpha\right),T\left(\beta\right)\right)\varkappa\left(T\left(z\right),T\left(w\right)\right)}\cdot\frac{\varkappa\left(T\left(z\right),T\left(\alpha\right)\right)\varkappa\left(T\left(\beta\right),T\left(w\right)\right)}{\varkappa\left(T\left(\beta\right),T\left(\alpha\right)\right)\varkappa\left(T\left(z\right),T\left(w\right)\right)},$$

resolviendo la igualdad anterior, tenemos:

$$\frac{\varkappa\left(z,\beta\right)\varkappa\left(\alpha,w\right)\varkappa\left(z,\alpha\right)\varkappa\left(\beta,\alpha\right)}{\left[\varkappa\left(\alpha,\beta\right)\right]^{2}\left[\varkappa\left(z,w\right)\right]^{2}}$$

$$=\frac{\varkappa\left(T\left(z\right),T\left(\beta\right)\right)\varkappa\left(T\left(\alpha\right),T\left(w\right)\right)\varkappa\left(T\left(z\right),T\left(\alpha\right)\right)\varkappa\left(T\left(\beta\right),T\left(\alpha\right)\right)}{\left[\varkappa\left(T\left(\alpha\right),T\left(\beta\right)\right)\right]^{2}\left[\varkappa\left(T\left(z\right),T\left(w\right)\right)\right]^{2}}.$$

Como $\varkappa\left(T\left(z\right),T\left(\beta\right)\right),\varkappa\left(T\left(\alpha\right),T\left(w\right)\right),\varkappa\left(T\left(z\right),T\left(\alpha\right)\right),\varkappa\left(T\left(\beta\right),T\left(\alpha\right)\right)$ son menores iguales a 1. Entonces

$$\left[\frac{\varkappa\left(T\left(z\right),T\left(w\right)\right)}{\varkappa\left(z,w\right)}\right]^{2}\leq\left[\frac{\varkappa\left(\alpha,\beta\right)}{\varkappa\left(T\left(\alpha\right),T\left(\beta\right)\right)}\right]^{2}\cdot\left[\frac{1}{\varkappa\left(z,\beta\right)\varkappa\left(\alpha,w\right)\varkappa\left(z,\alpha\right)\varkappa\left(\beta,\alpha\right)}\right].$$

Afirmación 11. $\left[\varkappa\left(\alpha,\beta\right)\right]^{2}\leq\left[\varkappa\left(z,\alpha\right)+\varkappa\left(z,\beta\right)\right]\left[\varkappa\left(w,\alpha\right)+\varkappa\left(w,\beta\right)\right].$

Aplicando la desigualdad triangular obtenemos que $\varkappa\left(\alpha,\beta\right)\leq\varkappa\left(z,\alpha\right)+\varkappa\left(z,\beta\right)$ *y* $\varkappa\left(\alpha,\beta\right)\leq\varkappa\left(w,\alpha\right)+\varkappa\left(w,\beta\right)$. *Por lo tanto*

$$\left[\varkappa\left(\alpha,\beta\right)\right]^{2}\leq\left[\varkappa\left(z,\alpha\right)+\varkappa\left(z,\beta\right)\right]\left[\varkappa\left(w,\alpha\right)+\varkappa\left(w,\beta\right)\right].$$

Continuando con la demostración. De la afirmación 11 se tiene que

$$\left[\frac{\varkappa\left(T\left(z\right),T\left(w\right)\right)}{\varkappa\left(z,w\right)}\right]^{2}$$

$$\leq\left[\frac{1}{\varkappa\left(T\left(\alpha\right),T\left(\beta\right)\right)}\right]^{2}\cdot\left[\frac{\left(\varkappa\left(z,\alpha\right)+\varkappa\left(z,\beta\right)\right)\left(\varkappa\left(w,\alpha\right)+\varkappa\left(w,\beta\right)\right)}{\varkappa\left(z,\alpha\right)\varkappa\left(z,\beta\right)\varkappa\left(w,\alpha\right)\varkappa\left(w,\beta\right)}\right],$$

$$\leq\left[\frac{1}{\varkappa\left(T\left(\alpha\right),T\left(\beta\right)\right)}\right]^{2}\cdot\left[\frac{1}{\varkappa\left(z,\alpha\right)}+\frac{1}{\varkappa\left(z,\beta\right)}\right]\left[\frac{1}{\varkappa\left(w,\alpha\right)}+\frac{1}{\varkappa\left(w,\beta\right)}\right].$$

Definamos

$$\varkappa\left(z,\partial\Omega\right)=\text{ínf}\left\{\varkappa\left(z,x\right):x\in\partial\Omega\right\}.$$

Afirmación 12. $\varkappa(z,\partial\Omega) \leq \varkappa(z,p)\ \forall p \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega.$

Supongamos que $\varkappa(z,\partial\Omega) > \varkappa(z,p_0)$ *para algún* $p_0 \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$. *Escojamos* $R > 0$ *tal que* $\varkappa(z,\partial\Omega) > R > \varkappa(z,p_0)$. *Luego* $\varkappa(z,\zeta) > R$ *para todo* $\zeta \in \partial\Omega$. *Considere* $D_R(z) = \left\{x \in \overline{\mathbb{C}} : \varkappa(z,x) < R\right\}$. *Es fácil ver que* $z \in D_R(z) \cap \Omega$, $p_0 \in D_R(z) \cap (\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$ *y además* $D_R(z)$ *es conexo. Entonces por el teorema 3.8* $D_R(z) \cap \partial\Omega \neq \varnothing$ *es decir existe* $w_0 \in D_R(z) \cap \partial\Omega$. *De lo anterior* $\varkappa(z,w_0) < R$, *esto contradice lo expuesto anteriormente.*

Luego,

$$\left[\frac{\varkappa(T(z),T(w))}{\varkappa(z,w)}\right]^2$$

$$\leq \left[\frac{1}{\varkappa(T(\alpha),T(\beta))}\right]^2 \left[\frac{1}{\varkappa(z,\partial\Omega)} + \frac{1}{\varkappa(z,\partial\Omega)}\right]\left[\frac{1}{\varkappa(w,\partial\Omega)} + \frac{1}{\varkappa(w,\partial\Omega)}\right]$$

$$\leq \left[\frac{1}{\varkappa(T(\alpha),T(\beta))}\right]^2 \left[\frac{2}{\varkappa(z,\partial\Omega)}\right]\left[\frac{2}{\varkappa(w,\partial\Omega)}\right],$$

aplicando la raíz cuadrada obtenemos:

$$\frac{\varkappa(T(z),T(w))}{\varkappa(z,w)} \leq \frac{2}{\varkappa(T(\alpha),T(\beta))\left[\varkappa(z,\partial\Omega)\right]^{\frac{1}{2}}\left[\varkappa(w,\partial\Omega)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

$$\varkappa(T(z),T(w)) \leq \frac{2\varkappa(z,w)}{\varkappa(T(\alpha),T(\beta))\left[\varkappa(z,\partial\Omega)\right]^{\frac{1}{2}}\left[\varkappa(w,\partial\Omega)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Por hipótesis tenemos que existen dos puntos a_T y b_T omitidos por T tales que $\varkappa(a_T,b_T) > \epsilon$. Escribiendo $\alpha = T^{-1}(a_T)$, $\beta = T^{-1}(b_T)$. Luego,

$$\varkappa(T(z),T(w)) \leq \frac{2\varkappa(z,w)}{\varkappa(a_T,b_T)\left[\varkappa(z,\partial\Omega)\right]^{\frac{1}{2}}\left[\varkappa(w,\partial\Omega)\right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$\varkappa(T(z),T(w)) \leq \frac{2\varkappa(z,w)}{\epsilon\left[\varkappa(z,\partial\Omega)\right]^{\frac{1}{2}}\left[\varkappa(w,\partial\Omega)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Afirmación 13. $\widehat{\mathcal{L}}$ *es* $\varkappa -$ *equicontinua en* Ω.

Fijemos cualquier $z_0 \in \Omega$. Dado $\epsilon' > 0$. Definamos

$$\delta_1 = \text{mín}\left\{\frac{\varkappa(z_0,\partial\Omega)}{2}, \frac{\epsilon'\epsilon\varkappa(z_0,\partial\Omega)}{2\sqrt{2}}\right\}.$$

Por la desigualdad anterior, se tiene que

$$\varkappa\left(T\left(w\right),T\left(z_0\right)\right)\leq\frac{2\varkappa\left(w,z_0\right)}{\epsilon\left[\varkappa\left(z_0,\partial\Omega\right)\right]^{\frac{1}{2}}\left[\varkappa\left(w,\partial\Omega\right)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Si $\varkappa\left(w,z_0\right)<\delta_1$, entonces $\varkappa\left(w,z_0\right)<\delta_1\leq\frac{\varkappa(z_0,\partial\Omega)}{2}$. Por la desigualdad triangular tenemos que $\varkappa\left(z_0,\partial\Omega\right)\leq\varkappa\left(w,\partial\Omega\right)+\varkappa\left(z_0,w\right)$ y así $\varkappa\left(z_0,\partial\Omega\right)-\varkappa\left(z_0,w\right)\leq\varkappa\left(w,\partial\Omega\right)$. Por lo tanto

$$\varkappa\left(z_0,\partial\Omega\right)-\frac{\varkappa\left(z_0,\partial\Omega\right)}{2}<\varkappa\left(z_0,\partial\Omega\right)-\varkappa\left(z_0,w\right)\leq\varkappa\left(w,\partial\Omega\right),$$

de estas desigualdades, se obtiene

$$\frac{\varkappa\left(z_0,\partial\Omega\right)}{2}<\varkappa\left(w,\partial\Omega\right).$$

Luego, para cualquier $T\in\widehat{\mathcal{L}}$ se cumple

$$\varkappa\left(T\left(w\right),T\left(z_0\right)\right)\leq\frac{\epsilon^{'}.\epsilon.\varkappa\left(z_0,\partial\Omega\right)}{\epsilon\left[\varkappa\left(z_0,\partial\Omega\right)\right]^{\frac{1}{2}}\left[\varkappa\left(w,\partial\Omega\right)\right]^{\frac{1}{2}}2\sqrt{2}},$$

$$\varkappa\left(T\left(w\right),T\left(z_0\right)\right)\leq\frac{\epsilon^{'}.\left[\varkappa\left(z_0,\partial\Omega\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\varkappa\left(w,\partial\Omega\right)\right]^{\frac{1}{2}}2\sqrt{2}},$$

$$\varkappa\left(T\left(w\right),T\left(z_0\right)\right)\leq\frac{\epsilon^{'}.\left[2\varkappa\left(w,\partial\Omega\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\varkappa\left(w,\partial\Omega\right)\right]^{\frac{1}{2}}2\sqrt{2}}=\frac{\epsilon^{'}}{2}<\epsilon^{'}.$$

Por lo tanto $\widehat{\mathcal{L}}$ es $\varkappa-$ *equicontinua.*

Luego por el teorema 3.34 $\widehat{\mathcal{L}}$ es normal en Ω. ■

Capítulo 5

Grupos discontinuos y grupos discretos

En este capítulo denotaremos por Γ a un grupo de transformaciones de Moebius. Comenzaremos con dar la definición de grupos discontinuos y grupos discretos. Luego veremos que todo grupo discontinuo Γ es discreto. Sin embargo la parte recíproca no necesariamente se cumple, pues el grupo Picard $\mathbb{P}$ es discreto y no discontinuo. Por último probaremos el resultado principal de la presente tesis.

5.1. Grupos discontinuos

La siguiente definición es central para nuestro estudio.

Definición 5.1. *Un grupo Γ de transformaciones de Moebius es* ***discontinuo en un punto*** α *cuando no existe $z \in \overline{\mathbb{C}}$ ni ninguna sucesión de elementos distintos $T_n \in \Gamma$ tal que $T_n(z) \longrightarrow \alpha$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Llamaremos a α* ***punto ordinario de*** Γ*. Diremos que Γ es discontinuo en el conjunto S cuando es discontinuo en cualquier punto de S. Decimos que Γ es un grupo discontinuo cuando es discontinuo en algún conjunto no vació.*

Por otro lado si existe $z \in \overline{\mathbb{C}}$ y una sucesión infinita de transformaciones de Moebius distintas $T_n \in \Gamma$ tal que $T_n(z) \longrightarrow \alpha$, entonces α ***es punto límite de*** Γ. Dado $\Gamma \subset \mathcal{L}$ un grupo discontinuo, sea $L(\Gamma)$ el conjunto de puntos límites de Γ y $O(\Gamma)$ el conjunto de puntos ordinarios de Γ. Denotemos por L a $L(\Gamma)$ y por O a $O(\Gamma)$.

Teorema 5.2. *Si Γ es grupo discontinuo, valen los siguientes resultados:*

(1) $T(L) = L$ *y* $T(O) = O$ *para todo* $T \in \Gamma$.

(2) *Si* $\triangle$ *es subgrupo de* Γ*, entonces* $O(\Gamma) \subset O(\triangle)$.

(3) *Para cualquier* $A \in \mathcal{L}$*, tenemos que* $O(A\Gamma A^{-1}) = A(O(\Gamma))$, $L(A\Gamma A^{-1}) = A(L(\Gamma))$.

Demostración.

(1) Primero probaremos $T(L) = L$. Sea $w \in T(L)$. Entonces existe $\alpha \in L$ tal que $T(\alpha) = w$. Como $\alpha \in L$, existe $z \in \overline{\mathbb{C}}$ y una sucesión $(T_n) \subset \Gamma$ tal que $T_n(z)$ converge a α. Luego $T \circ T_n(z)$ converge a $T(\alpha)$, entonces podemos decir que existe $z \in \overline{\mathbb{C}}$ y una sucesión $(T \circ T_n) \subset \Gamma$ tal que $\lim T \circ T_n(z) = w$. Así $w \in L$. Sea $\alpha \in L$. Entonces existe $z \in \overline{\mathbb{C}}$ y una sucesión $(T_n) \subset \Gamma$ tal que $\lim T_n(z) = \alpha$. Por lo tanto $\lim T^{-1} \circ T_n(z) = T^{-1}(\alpha)$. Denotemos $\beta = T^{-1}(\alpha)$. Entonces existe $z \in \overline{\mathbb{C}}$ y una sucesión $(T^{-1} \circ T_n) \subset \Gamma$ tal que $\lim T^{-1} \circ T_n(z) = \beta$. Entonces $\beta \in L$ y $\alpha \in T(L)$. Así $T(L) = L$. Probemos que $T(O) = O$. Sea $\beta \in T(O)$. Entonces existe $\alpha \in O$ tal que $T(\alpha) = \beta$. Como $\alpha \in O$, entonces no existe $z \in \overline{\mathbb{C}}$ ni ninguna sucesión $(T_n) \subset \Gamma$ tal que $\lim T_n(z) = \alpha$. Luego $\lim T \circ T_n(z) = T(\alpha)$. Por lo tanto no existe $z \in \overline{\mathbb{C}}$ ni ninguna sucesión $(T \circ T_n) \subset \Gamma$ tal que $\lim T \circ T_n(z) = \beta$. Así $\beta \in O$. Sea $\alpha \in O$. Entonces no existe $z \in \overline{\mathbb{C}}$ ni ninguna sucesión $(T_n) \subset \Gamma$ tal que $\lim T_n(z) = \alpha$. Luego $T^{-1} \circ T_n(z)$ converge a $T^{-1}(\alpha)$. Denotemos $T^{-1}(\alpha) = \beta$. Entonces podemos decir que no existe $z \in \overline{\mathbb{C}}$ ni ninguna sucesión $(T^{-1} \circ T_n) \subset \Gamma$ tal que $\lim T^{-1} \circ T_n(z) = \beta$. Así $\beta \in O$ y $\alpha \in T(O)$.

(2) Sea $\alpha \in O(\Gamma)$. Entonces no existe $z \in \overline{\mathbb{C}}$ ni ninguna sucesión $(T_n) \subset \Gamma$ tal que $\lim T_n(z) = \alpha$. De manera particular tenemos que no existe $z \in \overline{\mathbb{C}}$ ni ninguna sucesión $(T_n) \subset \triangle$ tal que $\lim T_n(z) = \alpha$. Entonces $\alpha \in O(\triangle)$.

(3) Es fácil probar que $A\Gamma A^{-1} = \{ATA^{-1} /\ T \in \Gamma\}$ es un grupo. Sea $\alpha \in O(A\Gamma A^{-1})$. Entonces no existe $z \in \overline{\mathbb{C}}$ ni ninguna sucesión $(AT_nA^{-1}) \subset A\Gamma A^{-1}$ tal que $\lim AT_nA^{-1}(z) = \alpha$. Así $\lim T_nA^{-1}(z) = A(\alpha)$. Denotemos $A^{-1}(\alpha) = \beta$. Observe que existe un único $w \in \overline{\mathbb{C}}$ tal que $A^{-1}(z) = w$. Entonces podemos decir que no existe $w \in \overline{\mathbb{C}}$ ni ninguna sucesión $(T_n) \subset \Gamma$ tal que $\lim T_n(w) = \beta$. Entonces $\alpha \in A(O(\Gamma))$. Sea $\beta \in A(O(\Gamma))$. Entonces existe $\alpha \in O(\Gamma)$ tal que $A(\alpha) = \beta$. Como $\alpha \in O(\Gamma)$ se tiene que no existe $z \in \overline{\mathbb{C}}$ ni ninguna sucesión $(T_n) \subset \Gamma$ tal que $\lim T_n(z) = \alpha$. Observe que existe un único $x \in \overline{\mathbb{C}}$ tal que $z = A^{-1}(x)$ y así $\lim T_nA^{-1}(x) = \alpha$. Por lo tanto $\lim AT_nA^{-1}(x) = A(\alpha)$. Entonces podemos decir que no existe $x \in \overline{\mathbb{C}}$ ni ninguna sucesión $(AT_nA^{-1}) \subset A\Gamma A^{-1}$ tal que $\lim AT_nA^{-1}(x) = \beta$. Así $\beta \in O(A\Gamma A^{-1})$, con ello concluimos que $O(A\Gamma A^{-1}) = A(O(\Gamma))$. Sea $\alpha \in L(A\Gamma A^{-1})$. Entonces existe $z \in \overline{\mathbb{C}}$ ni una sucesión $(AT_nA^{-1}) \subset A\Gamma A^{-1}$ tal que $\lim AT_nA^{-1}(z) = \alpha$. Luego $\lim T_nA^{-1}(z) = A^{-1}(\alpha)$. Observe que existe un único $x \in \overline{\mathbb{C}}$ tal que $A^{-1}(z) = x$. Denotemos $A^{-1}(\alpha) = \beta$. Con ello existe $x \in \overline{\mathbb{C}}$ y una sucesión $(T_n) \subset \Gamma$ tal que $\lim T_n(x) = \beta$. Entonces

$\alpha \in A(L(\Gamma))$. Sea $\beta \in A(L(\Gamma))$. Entonces existe $\alpha \in L(\Gamma)$ tal que $A(\alpha) = \beta$. Como $\alpha \in L(\Gamma)$, existe $z \in \overline{\mathbb{C}}$ y una sucesión $(T_n) \subset \Gamma$ tal que $\lim T_n(z) = \alpha$. Observemos que existe un único $x \in \overline{\mathbb{C}}$ tal que $z = A^{-1}(x)$. Con ello $\lim T_n A^{-1}(x) = \alpha$ y así $\lim AT_n A^{-1}(x) = \beta$. Por lo tanto existe $x \in \overline{\mathbb{C}}$ y una sucesión $(AT_nA^{-1}) \subset A\Gamma A^{-1}$ tal que $\lim AT_nA^{-1}(x) = \beta$. Así $\beta \in L(A\Gamma A^{-1})$ y por lo tanto $L(A\Gamma A^{-1}) = A(L(\Gamma))$. ■

5.2. Grupos discretos

Definición 5.3. *Diremos que $X \subset SL(2,\mathbb{C})$ es **simétrico** si $X = -X$.*

Sea Γ un grupo de transformaciones de Moebius. Definamos

$$\widetilde{\Gamma} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C}) : T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, T \in \Gamma \right\}.$$

Se observa que $\widetilde{\Gamma}$ es simétrico, ya que $\dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{(-a)z + (-b)}{(-c)z + (-d)}$.

Observación 5.4. *Cuando nos refiramos a Γ como grupo de matrices estaremos hablando del grupo $\widetilde{\Gamma}$. Sin embargo, si esto no lleva a confusión, denotaremos a $\widetilde{\Gamma}$ también por Γ.*

Ahora daremos una definición para nuestro grupo $\widetilde{\Gamma}$.

Definición 5.5. *Diremos que $\widetilde{\Gamma} \subset SL(2,\mathbb{C})$ es **discreto** cuando no existe una sucesión de elementos distintos $A_n \in \widetilde{\Gamma}$ tal que $A_n \longrightarrow A$ donde $A \in SL(2,\mathbb{C})$.*

Observación 5.6. *Para la convergencia de $A_n \longrightarrow A$ interpretaremos a $SL(2,\mathbb{C})$ como subconjunto de $\mathbb{C}^4$. Luego $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ si y solo si $\mid A_n - A \mid = \{\mid a_n - a \mid^2 + \mid b_n - b \mid^2 + \mid c_n - c \mid^2 + \mid d_n - d \mid^2\}^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$ o equivalentemente $a_n \longrightarrow a$, $b_n \longrightarrow b$, $c_n \longrightarrow c$, $d_n \longrightarrow d$.*

Definición 5.7. *Diremos que Γ es **discreto** si y solo si $\widetilde{\Gamma}$ es **discreto**.*

Proposición 5.8. *$\widetilde{\Gamma}$ es discreto si y solo si la matriz identidad es un elemento aislado de $\widetilde{\Gamma}$.*

Demostración. Supongamos que la matriz identidad $I \in \widetilde{\Gamma}$ no es aislada. Entonces existe una sucesión $(A_n) \subset \widetilde{\Gamma} \setminus \{I\}$ de elementos distintos tal que $A_n \longrightarrow I$. Por lo tanto $\widetilde{\Gamma}$ no es discreto.

Recíprocamente, supongamos que $\widetilde{\Gamma}$ no es discreto. Entonces existe una sucesión $(A_n) \subset \widetilde{\Gamma}$ de elementos distintos tal que $A_n \longrightarrow A \in SL(2,\mathbb{C})$. Si $B_n = A_n^{-1} \cdot A_{n+1}$, entonces $B_n \longrightarrow I$.

Afirmación 14. *$\{B_n\}$ no es finito.*

Supongamos que $\{B_n\}$ es finito. Sea $\{B_n\} = \{M_1, M_2, M_3, \ldots, M_k\}$ para $k \geq 1$. Como $B_n \longrightarrow I$, entonces $I = M_i$ para algún $i = 1, 2, \ldots k$. Luego, para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ se tiene que $B_{n_0} = A_{n_0}^{-1} \cdot A_{n_0+1} = M_i = I$. Luego, $A_{n_0} = A_{n_0+1}$, lo cual es una contradicción. Así $\{B_n\}$ no es finito.

Continuando con la demostración. Pasando a una subsucesión si fuera necesario, tendríamos que existe una sucesión $(B_n) \subset \widetilde{\Gamma} \setminus \{I\}$ de elemento distintos tal que $B_n \longrightarrow I$. Entonces I no es aislado en $\widetilde{\Gamma}$. ■

Proposición 5.9. *$\widetilde{\Gamma}$ es discreto si y solo si el cardinal de*

$$\Gamma_k = \left\{ A \in \widetilde{\Gamma} :\mid A \mid \leq k \right\}$$

es finito para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Supongamos que $\widetilde{\Gamma}$ no es discreto. Entonces existe una sucesión $(A_n) \subset \widetilde{\Gamma}$ tal que $A_n \longrightarrow A$. Por continuidad de la norma tenemos que $\mid A_n \mid \longrightarrow \mid A \mid$. Pasando a una subsucesión si fuera necesario, tendríamos que la sucesión $(\mid A_n \mid)$ es acotada, i.e, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mid A_n \mid \leq k$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces $\{A_n\} \subset \Gamma_k$, lo cual es una contradicción pues $\{A_n\}$ es infinito.

Recíprocamente, supongamos que para algún $k \in \mathbb{N}$ tenemos que Γ_k es infinita. Entonces existe una sucesión $(A_n) \subset \Gamma_k$ tal que los A_n son distintos. Como $(\mid A_n \mid)$ es acotada, existe una subsucesión convergente. Esto contradice que $\widetilde{\Gamma}$ sea discreto. ■

Observación 5.10. Se cumple que la siguiente aplicación

$$\psi : \widetilde{\Gamma} \longrightarrow \Gamma$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

es sobreyectiva.

Teorema 5.11. *Todo grupo discreto Γ es numerable.*

Demostración. Sea $A \in \widetilde{\Gamma}$. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mid A \mid \leq k$. Por lo tanto $A \in \Gamma_k$. Así $\widetilde{\Gamma} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$. Por otro lado como $\widetilde{\Gamma}$ es discreto tendremos por la proposición 5.9 que Γ_n es finito $\forall n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\widetilde{\Gamma} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ es numerable. Luego por la observación 5.10 Γ es numerable ya que ψ es sobreyectivo. ■

Proposición 5.12. *$\widetilde{\Gamma}$ es discreto si y solo si $B\widetilde{\Gamma}B^{-1}$es discreto para todo $B \in SL(2,\mathbb{C})$.*

Demostración. Supongamos que $B\widetilde{\Gamma}B^{-1}$ no es discreto. Entonces existe una sucesión $(BA_nB^{-1}) \subset B\widetilde{\Gamma}B^{-1}$ tal que $BA_nB^{-1} \longrightarrow A$. Por lo tanto existe una sucesión $(A_n) \subset \widetilde{\Gamma}$ tal que $A_n \longrightarrow B^{-1}AB$. Esto contradice de que $\widetilde{\Gamma}$ sea discreto.
La parte recíproca es de forma similar. ■

Teorema 5.13. *Todo grupo discontinuo es discreto.*

Demostración. Supongamos que Γ no es discreto. Entonces existe una sucesión $(A_n) \subset \widetilde{\Gamma}$ tal que $A_n \longrightarrow I$. Escojamos cualquier $z \in \mathbb{C}$. Sea

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \text{ y } T_n(z) = \frac{a_nz + b_n}{c_nz + d_n}.$$

Entonces $c_nz + d_n \longrightarrow 1$ cuando $n \longrightarrow \infty$, ya que $a_n \longrightarrow 1$, $b_n \longrightarrow 0$, $c_n \longrightarrow 0$, $d_n \longrightarrow 1$. Entonces $c_nz+d_n \neq 0$ para n suficientemente grande. Como la sucesión (T_n) contiene infinitos elementos, pasando a una subsucesión si fuera necesario tendríamos que existe una sucesión de elementos distintos $T_n \in \Gamma$. Así $T_n(z) = \frac{a_nz+b_n}{c_nz+d_n} \longrightarrow z$. Entonces z es punto límite de Γ, el cual contradice la discontinuidad. Si $z = \infty$, se cumple que $T_n(\infty) = \frac{b_n}{d_n}$ y pasando a una subsucesión si fuera necesario tendríamos que existe una sucesión de elementos distintos $T_n \in \Gamma$ tal que $T_n(\infty) \longrightarrow 0$. Por lo tanto Γ es discreto. ■

Corolario 5.14. *Para cualquier $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$. Si Γ es discontinuo en α, entonces Γ es discreto.*

La parte recíproca de este teorema será establecida mas adelante. De los teoremas anteriores deducimos que todo grupo discontinuo es numerable.

Ejemplo 5.15. *El grupo $SL(2,\mathbb{Z}[i])$ es discreto.*

Lema 5.16. *El grupo Picard*

$$\mathbb{P} = \left\{ z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d} : ad - bc = 1 \text{ con } a,b,c,d \in \mathbb{Z}[i] \right\}$$

es discreto y no discontinuo.

Demostración. $\mathbb{P}$ es discreto, ya que al tener entradas enteras las matrices no pueden acumularse. $\mathbb{P}$ es no discontinuo. En efecto. Por cuestiones algebraicas dado $z \in \mathbb{C}$, existe una sucesión de enteros gaussianos relativamente primos α_n y γ_n tal que $\frac{\alpha_n}{\gamma_n} \longrightarrow z$. Por lo anterior tenemos que existen enteros gaussianos β_n y δ_n tales que $\alpha_n\delta_n - \beta_n\gamma_n = 1$. Note que las transformaciones

$$T_n(z) = \frac{\alpha_n z + \beta_n}{\gamma_n z + \delta_n}$$

son todas distintas $T_n(\infty) = \frac{\alpha_n}{\gamma_n} \longrightarrow z$, se tiene que z es punto límite. También la traslación $z \xrightarrow{\overline{T}} z+1$ pertenece a $\mathbb{P}$ y $\overline{T}^n(1) \longrightarrow \infty$ cuando $n \longrightarrow \infty$, por lo que se tiene que ∞ es también punto límite, i.e, el grupo Picard $\mathbb{P}$ es no discontinuo en cualquier $z \in \overline{\mathbb{C}}$.

■

Proposición 5.17. *Si Γ es un grupo discreto de transformaciones lineales y $\{T_n\} \subseteq \Gamma$ es una sucesión de elementos distintos tal que $T_n \longrightarrow \phi$ uniformemente en una region compacta, entonces ϕ es una constante.*

Demostración. La prueba es una consecuencia directa del teorema 4.8. ■

5.3. Resultado principal

Teorema 5.18. *Un grupo Γ de transformaciones de Moebius es discontinuo en el punto α si y solo si Γ es discreto y normal en α.*

Demostración. Si Γ es finito, entonces Γ es discreto y normal en α. Si Γ es infinito y discontinuo en α, entonces por el corolario 5.14 Γ es discreto. Supongamos que $\Gamma = \{T_v\}$ no es normal en α entonces por el corolario 4.15 existe un $w_0 \in \mathbb{C}$ tal que para todo $w \neq w_0$ existe una sucesión de elementos distintos T_n y una sucesión (z_n) tal que $z_n \longrightarrow \alpha$ y $T_n(z_n) = w$. Entonces $T_n^{-1}(w) \longrightarrow \alpha$ y con ello Γ es no discontinuo en α.

Recíprocamente, supongamos que Γ es no discontinuo en α. Por el lema 4.1 podemos suponer que α es finito. Entonces existe z_0 y una sucesión de elementos distintos $T_v \in \Gamma$ tal que $T_v(z_0) \longrightarrow \alpha$. Sea $D = D(\alpha, r)$ un disco de radio $0 < r < \frac{1}{2}$ en el cual Γ es normal y escojamos $T_N \in \Gamma$ tal que $T_N(z_0) = z_1 \in D$. Defina

$$S_v = T_v \circ T_N^{-1},$$

luego $S_v(z_1) = T_v \circ T_N^{-1}(z_1) = T_v(z_0) \longrightarrow \alpha$. Como $(S_v) \subseteq \Gamma$ entonces es normal en D. Por lo tanto existe una subsucesión $(S_u) \subseteq (S_v)$ que converge uniformemente en el disco cerrado $\overline{D_1} = \overline{D_1(\alpha, r_1)} \subseteq D$ de radio $r_1 < r$ tal que $z_1 \in \overline{D_1}$. Luego por la proposición 5.17 (S_u) converge a una constante, la cual en este caso es α. Dado $0 < \epsilon < r_1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $S_u\left(\overline{D_1}\right) \subseteq$

$D(\alpha, \epsilon)$ para todo $u \geq n_0$. En particular para $u = u_0 \geq n_0$ se tiene que $S_{u_0}\left(\overline{D_1}\right) \subseteq D(\alpha, \epsilon)$. De lo anterior $S_{u_0}\left(\overline{D_1}\right)$ es subconjunto propio de D_1. Entonces Por el teorema 2.22 S_{u_0} es hiperbólico o loxodrómico y $S_{u_0}\left(\overline{D_1}\right)$ contiene un punto fijo β de S_{u_0}. Luego por el lema 4.10 $\left\{S_{u_0}^n\right\}$ no es normal en los puntos fijos de S_{u_0}. Observemos que si $\beta \in S_{u_0}\left(\overline{D_1}\right) \subseteq D$ entonces Γ no es normal en D. Por lo tanto Γ es discontinuo en α. ■

Referencias Bibliográficas

[1] Ahlfors, L. – *Complex Analysis*, 3ª ed.McGraw-hill Book, New york, 1978.

[2] Camacho, C. – *Tópicos de Análisis en una Variable Compleja.* IMCA-1997.

[3] Chaim, S.H. – *Introdução as funções de uma variável complexa.* 3ª ed. IME. USP.1971.

[4] Conway, B.J. – *Functions of One Complex Variable.* 2ªed. Springer-Verlag. 1978.

[5] Lima, E. – *Curso de Analise* Vol.2, Projeto Euclides vol. 13, IMPA, Rio de Janeiro. 1981.

[6] Lima, E. – *Espaços Métricos* - Edição número 2, Projeto Euclides 2, IMPA, Rio de Janeiro.1983.

[7] Fernández, P. – *Una variable compleja.* PUCP-2008.

[8] Schiff, J.L. – *Normal Families.* Springer-Verlag. 1993.

[9] Larcher, H. – *A necessary and sufficient condition for a discrete group of linear fractional transformations to be discontinuous*, Duke Math.J 30(1963), 433-436. [206].

[10] Lehner, J. – *Discontinuous Groups and Automorphic Functions, Math. Surveys*, No. VIII, Amer.Math.Soc., Providence RI, 1964. Reprinted with corrections 1982. [194].

[11] Lins Neto, A. – *Funções de uma Variável Complexa.* Rio de Janeiro: Euclides - IMPA, 1993.

[12] Montel, P. – *Lecons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications.* Paris: Gauthier-Villars. 1927.

[13] Montel, P. – *Le role des familles normales*, L'Enseignement Math.33 (1934) ,5-21. [84,125].

[14] Pourier, A. – *Aspectos geométricos del análisis complejo*. PUCP-2005.

[15] Rudin, W. – *Real and complex analysis*. McGraw-Hill, 2005.

[16] Sad, P. – *Introdução à Dinâmica das Funções Racionais na Esfera de Riemann*. 14o Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, Poços de Caldas, 1983.

[17] Lang, S. – *Complex Analysis*. Addison-Wesley Publishing Company. 1977.