PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

UN ANÁLISIS DE LAS CONCEPCIONES ACERCA DE LAS DIFICULTADES, LOS OBSTÁCULOS Y LOS ERRORES RELATIVOS AL LÍMITE

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR: JUAN MANUEL MATTOS QUEVEDO

ASESOR: Dr. FRANCISCO JAVIER UGARTE GUERRA

Octubre, 2018

RESUMEN

Este trabajo se propone articular las concepciones acerca de dificultades, obstáculos y errores relativos al límite. Respecto a los obstáculos epistemológicos del límite, se tomará como referencia los trabajos de Sierpinska (1985) y Cornu (1981). También, se realizará una revisión crítica en torno a los errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas a partir del trabajo de Socas (1997) que será aplicado a la noción de obstáculo epistemológico relativo al límite. Este estudio nos proporcionará una visión más amplia acerca del origen de los errores en el aprendizaje del límite y la procedencia de los mismos con la finalidad de obtener una herramienta de análisis de las respuestas de los estudiantes. La herramienta será utilizada para analizar otras investigaciones que se enfoquen en el estudio de los errores y dificultades en el aprendizaje del límite. Se cree que la propuesta resultará interesante, tanto para la enseñanza y aprendizaje del tema de límites como para docentes y estudiantes en formación matemática.

Palabras clave: Obstáculos, errores, dificultades, límite

ABSTRACT

This work aims to articulate the conceptions about difficulties, obstacles and errors related to the limit. With respect to the epistemological obstacles of the limit, the works of Sierpinska (1985) and Cornu (1981) will be taken as reference. Also, there will be a critical review about the errors and difficulties in the learning of mathematics from the work of Socas (1997) that will be applied to the notion of epistemological obstacle relative to the limit. This study will provide us with a broader view about the origin of the errors in the learning of the limit and the origin of them in order to obtain a tool for analyzing student responses. The tool will be used to analyze other research that focuses on the study of errors and difficulties in learning the limit. It is believed that the proposal will be interesting, both for the teaching and learning of the topic of limits as for teachers and students in mathematical training.

Keywords: Obstacles, mistakes, difficulties, limit

DEDICATORIA

Quiero dedicar el presente trabajo de investigación a mi Madre,

quien, a lo largo de toda mi vida, ha apoyado

y motivado mi formación académica. Su tenacidad

y lucha interminable han sido un gran ejemplo a seguir por mí.

También, se lo dedico a toda mi familia.

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por acompañarme y haberme permitido llegar hasta este tan importante momento de mi formación profesional.

Al Dr. Francisco Ugarte Guerra, por su paciencia, sus valiosos consejos y sugerencias pertinentes a lo largo del proceso de la elaboración de esta tesis.

A toda mi familia, porque con sus oraciones, con sus consejos y sus palabras de aliento me ayudaron a terminar este trabajo de investigación.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

CONSIDERACIONES INICIALES/INTRODUCCIÓN

Un tema relevante dentro de educación matemática, en la actualidad, es estudiar y analizar los errores cometidos por los estudiantes durante el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Son muchos los investigadores que han mostrado interés y preocupación en identificar las causas de procedencia de los errores o tratar de explicarlos.

En la literatura, se encuentran referenciados múltiples trabajos vinculados con errores, dificultades y obstáculos relacionados con el límite. En lo que respecta a los errores, estos aparecen en forma recurrente en los estudiantes durante el proceso de aprendizaje. En cuanto a las dificultades en el aprendizaje del límite, que puede encontrar un estudiante, pueden estar relacionadas con los conflictos que están asociados con la comprensión del concepto del límite y a un inadecuado proceso de enseñanza.

Algunos investigadores, como Sierpinska (1985), Cornu (1981), Pereira (2009), La Plata (2014), entre otros, han estudiado los obstáculos epistemológicos del límite, los errores y dificultades de los estudiantes durante el aprendizaje del límite bajo distintos enfoques. El concepto del límite es considerado uno de los más difíciles dentro de los contenidos matemáticos debido a su alto grado de abstracción. Por ello, en general, los investigadores centran su atención en los aspectos cognitivos que están relacionados con la comprensión del concepto del límite.

La presente investigación tiene por objetivo proponer una lista unificada de los obstáculos epistemológicos relativos al límite, enmarcándola dentro del planteamiento sobre errores y dificultades con la finalidad de analizar las respuestas de los estudiantes. Se espera como resultado de este estudio que este nuevo enfoque de análisis permita a futuros investigadores realizar un análisis más amplio acerca de los errores cometidos por los estudiantes durante el aprendizaje del límite. Por otro lado, nos centramos en analizar las respuestas de los estudiantes durante el aprendizaje del concepto del límite. Asimismo, se considera que estos errores tendrán su origen en un obstáculo epistemológico y su procedencia en una dificultad que puede estar asociada con la complejidad del límite o con el proceso de pensamiento.

Nuestro trabajo se divide en cinco capítulos:

En el primer capítulo, se presentará de forma breve la descripción de la problemática que motiva nuestra pesquisa. Esta reflexión nos lleva a presentar las investigaciones anteriores y a justificar la pertinencia de nuestro trabajo, así como, también, la pregunta de investigación y los objetivos respectivos.

En el segundo capítulo, se describirá las herramientas teóricas y metodológicas que serán utilizadas en nuestro trabajo. De este modo, se explicarán las definiciones que usamos durante nuestra investigación, teniendo los diferentes puntos de vista de diversos autores. También, se presentará algunos elementos de la Teoría de Situaciones Didácticas. Finalmente, se desarrollará nuestro marco metodológico que involucra el meta-análisis.

En el tercer capítulo, se realizará una breve descripción del origen de los errores en el aprendizaje de las matemáticas. También, las conexiones existentes entre los errores, las dificultades y los obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas. Además, se describirá las similitudes, complementariedad y redundancia de los listados relacionados con los obstáculos epistemológicos del límite. Así mismo, se presentará la herramienta elaborada que permitirá analizar las respuestas de los estudiantes sobre el concepto del límite.

En el cuarto capítulo, se valida la herramienta propuesta. Para ello, se mostrará los resultados obtenidos en ciertas investigaciones acerca de ciertas respuestas dadas por algunos estudiantes. Además, se explicará el análisis de dichas respuestas por medio de nuestra herramienta.

Finalmente, en el quinto capítulo, se expondrá las conclusiones de nuestra investigación. Así mismo, se señalará algunas sugerencias y recomendaciones para futuras investigaciones.

CAPÍTULO I: PROBLEMATICA

En contextos académicos del área de matemáticas, se ha evidenciado que existe una desarticulación, en general, entre el cálculo del límite y el entendimiento de su significado, debido a su complejidad y abstracción. Asimismo, es preciso añadir que resolver correctamente problemas relacionados con el cálculo del límite de una función no garantiza el entendimiento del mismo. Se debe acotar que, en muchos casos, a los estudiantes se les enseña a resolver problemas relacionados con el cálculo de límites de una forma más o menos mecánica. Por esta razón, estos encuentran grandes dificultades para realizarlos y para alcanzar una comprensión satisfactoria del concepto.

De la revisión de múltiples investigaciones que abordan los errores que comenten los estudiantes en el aprendizaje del límite, las dificultades que presentan para comprender las concepciones relativas y los obstáculos epistemológicos del límite, se ha visto que hay una tendencia por parte de los investigadores en darle una mayor atención al análisis de las dificultades en la enseñanza y aprendizaje del límite. Esto no necesariamente es negativo, ya que se cree que será muy útil para poner en evidencia las razones por las cuales los estudiantes no logran comprender adecuadamente el concepto del límite. Sin embargo, existen formas de conocimiento más resistentes en los estudiantes que no necesariamente son dificultades, es decir, aparecen cuando un estudiante se encuentra frente a un tropiezo que detiene o frena la adquisición del concepto del límite.

Esto nos lleva a preguntarnos si es que habrá conexiones entre los errores, las dificultades y los obstáculos epistemológicos que presentan los estudiantes cuando aprenden el concepto del límite y la justificación de su origen.

A partir de esta inquietud, es necesario indagar si existen trabajos que establezcan vínculos entre los errores y las dificultades en el aprendizaje del límite con los obstáculos epistemológicos del límite. Sin embargo, no se han encontrado investigaciones que aborden esta problemática.

A continuación, se presentará los antecedentes de esta investigación, los cuales están relacionados con el análisis de los errores, dificultades y obstáculos asociados a la noción de límite de una función real de variable real. Además, se justificará la relevancia de esta investigación para la didáctica de las matemáticas. Finalmente, se planteará la pregunta de investigación y los objetivos, tanto generales como específicos.

1.1 Investigaciones de referencia

En este apartado, se pondrá énfasis, precisamente, a los resultados alcanzados en la revisión bibliográfica de investigaciones que analizan las dificultades y los errores en el aprendizaje del límite.

Es importante señalar la preocupación que manifiesta buena parte de los investigadores en didáctica de la matemática en entender las dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del límite. En la búsqueda de investigaciones que evidencien esta problemática, se destacó los trabajos realizados por Pereira (2009), Zuchi (2005), Hitt y Páez (2004), quienes analizan e interpretan las dificultades en el aprendizaje del límite que evidencian estudiantes de los primeros ciclos de carreras universitarias en Brasil y México. El primer investigador estudia las dificultades existentes en la enseñanza del cálculo. Lo hace desde una postura epistemológica, es decir, realiza un entrelazamiento entre los hechos históricos con los pedagógicos del concepto de límite. Utiliza, como referente teórico, el mapeo conceptual del cálculo desarrollado por Rezende (2003) y la teoría de las imágenes de concepto formulada por Tall y Vinner (1981). También, realiza una secuencia didáctica del concepto del límite y la divide en seis fichas a un grupo de 16 estudiantes. Basado en la ingeniería didáctica, concluye, en términos generales, que los estudiantes presentan poca habilidad en cuanto a procedimientos algebraicos, tales como completar cuadrados, productos notables, factorización, identidades trigonométricas, la noción de función y considera que el domino por parte de los estudiantes de estos procedimientos es imprescindible para el éxito de las fichas desarrolladas. Por ejemplo, uno de los objetivos de la propuesta es asociar la recta tangente con aproximaciones de las rectas secantes. En otras palabras, el autor evidencia que los estudiantes tienen dificultades en relacionar un punto cualquiera de coordenadas (", $) del plano cartesiano con el punto &", '(")(que representa dos valores vinculados por medio de la función '. Además, entiende que esta dificultad es de origen epistemológico. La segunda investigadora realiza un estudio sobre dificultades en la enseñanza y aprendizaje del límite. Del mismo modo que Pereira, toma una postura epistemológica. Zuchi considera que estas dificultades se encuentran a lo largo de la historia de las matemáticas e involucran procesos de conceptualización e instrumentación del límite. Trabaja con estudiantes universitarios de manera individual y grupal. Basó su investigación en la teoría de situaciones didácticas. En un primer momento, diseña una secuencia didáctica sin uso de tecnología. Posteriormente, desarrolla una segunda secuencia didáctica, en la que sí hace uso de herramientas tecnológicas, utilizando un sistema tutorial inteligente, que consiste en programas de computadoras con propósitos educativos. En ambas secuencias, la metodología de la investigación utilizada es la ingeniería didáctica. En el estudio, concluye que los estudiantes tienen problemas en interiorizar contenidos básicos como funciones e inecuaciones, y evidencia las dificultades que tienen los estudiantes al momento de trabajar con cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes. Por ejemplo, la autora propone determinar el concepto del límite en forma intuitiva, trabajando con cantidades infinitamente pequeñas. Considera que las dificultades que surgen en los estudiantes son debido a que no están acostumbrados a trabajar con dichas cantidades. Además, considera que una dificultad bastante acentuada en los estudiantes es la relación entre ε y δ. Finalmente, Hitt et al (2004), adoptan una postura cognitiva para estudiar la complejidad del límite. Consideran que lo complejo del concepto se evidencia, a lo largo de la historia de las matemáticas, debido a los problemas que tuvieron algunos matemáticos para entender y formalizar el concepto de límite, los mismos que aparecerán en el aula de clase. También, investigan algunos obstáculos didácticos relativos al concepto del límite que el profesor promueve a sus estudiantes. Entrevistan verbalmente a estudiantes y profesores universitarios, y concluyen que la mayoría de las dificultades están directamente relacionadas con la manera cómo se enseña el tema de límites. Por ejemplo, los investigadores identifican que tanto docentes como estudiantes tienen dificultades cuando se les solicita realizar alguna demostración relacionada con el límite. Esto es debido a que ambos están acostumbrados a desarrollar procesos algebraicos desvinculados de significados geométricos. Asimismo, proponen ciertas actividades que promueven la conversión entre las representaciones numérica, gráfica y algebraica durante la adquisición del concepto del límite por parte de los estudiantes.

Por otro lado, el estudio de los errores ha requerido especial atención por parte de algunos investigadores en educación matemática. Por ejemplo, Rico (1995) señala que reconocer los errores cometidos por los estudiantes durante la construcción del conocimiento puede contribuir en forma favorable al proceso de aprendizaje e identifica que dichos errores no aparecen por azar, sino que aparecen en forma continua, ya que se van a fundamentar en los conocimientos previos de los estudiantes.

En lo que respecta a investigaciones sobre errores asociados al límite, se destacan los trabajos de La Plata (2014), Blasquez, Gática y Ortega (2008), Vogado, Jucá y De Brito (2014), quienes realizan un análisis de los errores que cometen los estudiantes de educación superior a partir de situaciones diseñadas por los investigadores en torno al límite. La primera investigadora realiza un análisis de los errores en torno a la compresión de la definición de límite de una función de variable real. Tales errores fueron analizados empleando los criterios de comprensión de Sierpinska y teniendo en cuenta la configuración epistémica de las soluciones dadas por la investigadora y la cognitiva de las soluciones de los estudiantes desde el punto de vista del enfoque ontosemiótico. Se concluye de su investigación que los conceptos previos de función y número real explican la aparición de ciertos obstáculos epistemológicos de límites finitos para una función real de variable real. Blasquez et al. (2008) estudian la permanencia temporal de las conceptualizaciones del límite en la memoria de los estudiantes españoles. Basados en la teoría de representación semiótica, analizan los errores al escribir la definición del límite que comenten treinta y cinco estudiantes, los cuales habían aprobado el curso de Análisis Matemático I, donde se desarrolla el concepto de límite. En términos generales, concluyen que la definición rigurosa del límite es menos perdurable en la memoria de los estudiantes que la definición basada en el concepto de aproximación. Finalmente, Vogado et al. (2014) identifican errores relacionados con el aprendizaje del límite desde una postura epistemológica. En síntesis, los investigadores infieren que los errores de los estudiantes, en algunas situaciones, proceden de nociones previas adquiridas, que, de alguna forma, entorpecen en la adquisición del concepto del límite. Aplican una prueba diagnóstica con cinco preguntas a un grupo de estudiantes universitarios del segundo año, de la asignatura cálculo diferencial e integral, que siguen la carrera de Matemáticas. De dicha prueba, concluyen que los errores cometidos por un grupo de estudiantes están relacionados con la falta de comprensión de la idea de límite y la aplicación de procedimientos algebraicos incorrectos, como es el caso de factorizar, simplificación de fracciones algebraicas, división de polinomios, entre otros.

Tomando en cuenta las investigaciones descritas anteriormente, se puede observar que las dificultades presentadas por los matemáticos del pasado durante la evolución del concepto de límite son similares a las dificultades que presentan los estudiantes de hoy. Esto permite evidenciar en los estudiantes la presencia de obstáculos epistemológicos relativos al límite. Por ejemplo, en los trabajos de Sierpinska (1985) y Cornu (1981), se considera que prestarles la debida atención a los obstáculos epistemológicos del límite será fundamental para el estudio, análisis y explicación de los errores que cometen los estudiantes. Además, estos investigadores sostienen que se puede identificar errores intrínsecos en los estudiantes en el aprendizaje del límite. Al respecto, Vrancken, Gregorini, Engler, Muller y Hecklein (2006) manifiestan que las concepciones previas existentes en la mente de los estudiantes, cuando se enfrenta por primera vez al concepto de límite, interfieren en su comprensión. Por ejemplo, una dificultad descrita por los investigadores consiste en que los estudiantes no logran comprender que el límite es lo que ocurre cerca del punto y no en el punto. Ello, debido a que el concepto de límite parte del concepto de función y emplea los mismos sistemas de representación, coloquial, numérica, visual y algebraico. Asimismo, Costa do Nascimento (2003) analiza las dificultades asociadas a los diferentes tipos de obstáculos que se presentan en el aprendizaje del límite. Lo hace desde una postura epistemológica, mediante la teoría de campos conceptuales, luego prueba su hipótesis con un grupo de 10 estudiantes. En este estudio, se pone de manifiesto que los conceptos matemáticos previos que poseen los estudiantes, como es el caso de las fracciones, es un impedimento para la construcción del concepto del límite. Por ejemplo, el autor sostiene que un argumento que limita la percepción sobre el límite por parte de los estudiantes está asociado a la no existencia de una fracción con denominador cero.

Como se observa en los antecedentes, el estudio de la comprensión del concepto del límite, involucra las nociones de error (La Plata, Blasquez, Gatica, Ortega, Vogado, Jucá y De Brito), dificultad (Pereira, Zuchi, Hitt y Paez) y obstáculo (Cornú y Sierpinska). Por ende, para desarrollar esta investigación, va a ser necesario precisar cada una de estas nociones, las cuales se desarrollarán en el capítulo correspondiente al marco teórico.

1.2 Justificación

En este apartado, se describirá de forma separada las razones o los motivos por los cuales se realiza la investigación. Entre ellas se destacan las siguientes: la relevancia para la didáctica de la matemática, la matemática y destacar la importancia del concepto del límite en la formación matemática de los estudiantes.

En lo que respecta a la didáctica de las matemáticas, la enseñanza y aprendizaje del concepto del límite, como se ha visto en la sección anterior, es una fuente de investigación que no ha dejado de preocupar a los investigadores.

Algunas investigaciones recientes reportan dificultades en el aprendizaje del límite que tienen los estudiantes para comprender el concepto de límite, por ejemplo, Costa do Nascimento (2003), Pereira (2009), Zuchi (2005), Hitt et al. (2004), mientras que otros investigadores reportan los errores que cometen los estudiantes en el aprendizaje del límite, como, por ejemplo, La Plata (2014), Blasquez et al. (2008), Vogado et al. (2014). De esta manera, cuando se estudia el origen de los errores cometidos o se pretende identificar cuáles son las dificultades que tienen los estudiantes en el aprendizaje del límite, estas ideas se fundamentan en la noción de obstáculo epistemológico de Bachelard (1938) y adoptan la concepción de obstáculo epistemológico de Brousseau (1983).

Asimismo, algunos investigadores muestran su preocupación por hacer notar como los estudiantes olvidan la definición del límite con el paso del tiempo. Por ejemplo, Blázquez et al. (2008) señalan que después de aprobar las materias de cálculo los estudiantes tienen dificultades para recordar la definición del límite: "Como docentes nos preguntamos si vale la pena desarrollar un concepto que se olvida tan pronto o intentar dar otro enfoque menos formalista, que no se olvide con tanta facilidad” (2008, p.8).

Por otra parte, el límite es un concepto central en los cursos de cálculo. Al respecto, Spivak (1998) afirma lo siguiente: “entre todos los conceptos que se presentan en el cálculo infinitesimal, el del límite es, a no dudarlo, el más importante, y quizás también el más difícil” (1998, p.107), ya que el concepto es tedioso y complejo, difícil de aprender y difícil de enseñar. Así también, Lima (1997) realza la importancia del concepto de límite cuando afirma: “todos los conceptos importantes del análisis matemático, de una forma u otra, se reducirán a algún tipo de límite” (1997, p.26). Por ejemplo, la continuidad, la derivada, la integral y las series dependen del límite. A esto podemos añadir que en las mallas curriculares en carreras de ingeniería de universidades peruanas (Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, Pontificia Universidad Católica del Perú, Universidad Nacional de Ingeniería) hay un curso de cálculo diferencial donde se desarrolla el tema de límites.

Finalmente, a partir de nuestra experiencia profesional como docente en la enseñanza de límites con estudiantes de las carreras de ingeniería de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, se puede tener una visión integral no solo del concepto de límite, sino también, de los errores cometidos por los estudiantes en el aprendizaje del mismo, además, de las dificultades que encuentran los estudiantes en el aprendizaje del límite. Desde este panorama, se ha notado que uno de los objetos matemáticos que presenta una mayor dificultad para su comprensión y superación es el límite.

Cabe señalar que en las investigaciones presentadas se utilizan diferentes concepciones acerca de los errores y dificultades en el aprendizaje del límite, algunas toman como referencia los trabajos de Sierpinska (1985) y Cornu (1981), pero no se ha encontrado estudios que aborden el problema de articular los trabajos de Sierpinska y Cornu referidos a los obstáculos epistemológicos del límite en el contexto de las nociones de errores y dificultades que plantea Socas (1997). Una vez planteada la propuesta y a manera de ver su utilidad, nos proponemos utilizarla para analizar de manera reflexiva algunas de las investigaciones que se presentaron en la sección anterior.

En los trabajos analizados previamente, se detectan errores y dificultades que se producen durante el aprendizaje del límite por parte de los estudiantes. A partir de este análisis, se observa que, en muchos casos, estos errores y dificultades han sido identificados durante la evolución histórica del límite. Nuestra propuesta responde a la necesidad de propiciar un análisis más reflexivo acerca de las concepciones sobre los obstáculos epistemológicos, los errores y las dificultades relativos al límite.

1.3 Pregunta y objetivos de la investigación

Este trabajo de investigación propone elaborar e implementar una herramienta que permita articular la noción de obstáculo epistemológico con los errores y las dificultades relacionados con el estudio del límite, a partir de los trabajos realizados por Sierpinska (1985) y Cornu (1991), enmarcándolo dentro del planteamiento propuesto por Socas que permita realizar un análisis más reflexivo sobre el aprendizaje del límite.

Por lo expuesto anteriormente, se plantea la siguiente pregunta:

¿La elaboración de una herramienta que articule los obstáculos epistemológicos, con los errores y las dificultades relacionados con el estudio del límite, permitirá realizar un análisis más reflexivo sobre el aprendizaje de dicho objeto matemático?

Para poder responder la pregunta de investigación, se han planteado los siguientes objetivos:

Objetivo general

Proponer una lista unificada de los obstáculos epistemológicos relativos al límite, enmarcándola dentro del planteamiento sobre errores y dificultades con la finalidad de analizar las respuestas de los estudiantes

Objetivos específicos

- Proponer una lista de obstáculos epistemológicos relativos al concepto de límite que sintetice las propuestas de Sierpinska (1985) y Cornu (1991) enmarcándola dentro planteamiento sobre errores y dificultades de Socas

- Analizar las respuestas de los estudiantes en investigaciones ya realizadas para validar la herramienta construida

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En este capítulo, se presenta y describe los fundamentos teóricos utilizados en el desarrollo de esta investigación. Primero, con la intención de ofrecer una visión general acerca de la problemática que rodea el objeto de estudio, se realizará una revisión bibliográfica relacionada con los obstáculos epistemológicos. Posteriormente, se discutirán los conceptos de errores y dificultades en el aprendizaje tal y como son entendidos por algunos investigadores dentro del campo de la didáctica de la matemática, ejemplificando su uso para el concepto de límite. Luego, se expondrá el análisis de los trabajos de Cornu y Sierpinska sobre los obstáculos epistemológicos relativos al límite. A continuación, se presentará términos y definiciones de obstáculos epistemológicos desde la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), y, finalmente, se describe el meta-análisis como metodología de la investigación que nos permitirá analizar y comparar descriptivamente la diversidad de investigaciones referidas a los obstáculos epistemológicos del límite.

2.1 Fundamentos epistemológicos

Bachelard (1938) introduce, por primera vez, la noción de obstáculo y denomina obstáculo epistemológico a la aparición inevitable de errores en el campo de ciencia. Respecto al error, Bachelard afirma que no solo es el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre o del azar tal como lo proponen las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje, sino que también puede ser resultado de un conocimiento anterior que, frente a una situación diferente o nueva, se revela falso, insuficiente o contradictorio. Para Bachelard (1948), los obstáculos epistemológicos aparecen cuando nos enfrentamos a nuevas situaciones o fenómenos que no encajan en nuestras experiencias previas.

> […] No se trata de considerar los obstáculos externos, como complejidad o la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar a la debilidad de los sentidos o del espíritu humano: es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de

> retroceso, es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos. (p. 11)

Esta noción de obstáculo epistemológico es retomada por Gay Brousseau, quien la incorpora a la investigación en didáctica de la matemática en el marco de su teoría de las situaciones didácticas. En su estudio, Brousseau considera que los obstáculos son fruto de la interacción de los estudiantes con los problemas o contenidos matemáticos, donde los estudiantes comprometen conocimientos anteriores, sometiéndolos a revisión, modificándolos o rechazándolos para formar nuevas concepciones. Para este autor, un obstáculo es la consecuencia que va a producir un conocimiento anterior que, en su momento, fue útil, provechoso y próspero, pero se muestra de forma incorrecta para la obtención de un conocimiento nuevo. “El efecto de un conocimiento previo que fue interesante y exitoso, pero que ahora se revela como falso o simplemente no adaptado. Los errores de este tipo no son erráticos e inesperado, ellos constituyen obstáculos” (Brousseau, 2006, p. 82).

Bachelard sostiene que un obstáculo epistemológico puede ser estudiado o analizado desde dos perspectivas investigadoras: una que considera la evolución del pensamiento científico, donde el foco de atención es el pensamiento matemático, y una segunda perspectiva que considera la manera cómo aprenden los estudiantes. El estudio del desarrollo histórico del obstáculo epistemológico será realizado por los epistemólogos, quienes interpretan los hechos como ideas insertándolas en un sistema de pensamiento, por lo que una mala interpretación permitirá reconocer un obstáculo. Según la opinión de Bachelard (1948): “Un hecho mal interpretado por una época, sigue siendo un hecho para el historiador” (p. 20). Según el epistemólogo, es un obstáculo, un contrapensamiento.

Por otro lado, para Bachelard, un obstáculo, desde un punto de vista pedagógico, acontece en el aula de clase. Además, considera que los docentes piensan que la esencia de una clase empieza con una lección de manera rutinaria, individualista o de forma mecanizada. Pareciera, asimismo, que los docentes no reflexionan sobre el hecho de que los estudiantes llegan con conocimientos propios relacionados directamente con su quehacer cotidiano. Es, entonces, que resulta extremadamente difícil hacerle comprender un conocimiento nuevo a un estudiante. A partir de este análisis previo acerca de los errores iniciales, los docentes podrán liberar o eliminar los recuerdos que alteran el nuevo conocimiento.

> De ahí que toda cultura científica deba comenzar, como lo explicaremos ampliamente, por una catarsis intelectual y afectiva. Queda luego la tarea más difícil: poner la cultura científica en estado de movilización permanente, reemplazando el saber cerrado y estático por un conocimiento abierto y dinámico, dialectizar todas las variables experimentales, dar finalmente a la razón motivos para evolucionar. (Bachelard, 1948, p. 21)

A modo de ejemplo, un estudiante relaciona al límite con la frontera de algo por algo que tiene que respetar, es decir, el extremo donde se pueda llegar al final de una situación extrema. Para ello, no debemos olvidar que el estudiante llega con ideas propias asociadas a la palabra límite y las conecta con situaciones de su vida cotidiana. Por consiguiente, se necesitará desorganizar estas ideas que trae consigo el estudiante para que pueda ser capaz de reorganizarlas y comprender el concepto del límite.

> En cuanto al concepto de límite, se encuentra mucho antes de haber comenzado el estudio en el aula, los estudiantes ya tienen una idea, a partir de la vida cotidiana: la palabra "límite" utilizada habitualmente por franceses, tiene una serie de significados. […] estos significados son la mayor parte del tiempo diferente del significado matemático. (Cornu, 1981, p. 1)

De modo similar, Brousseau refiere que los procesos para la recolección de información por parte de los estudiantes pueden ser atribuidos tanto a la evolución histórica del objeto matemático como a la enseñanza y aprendizaje del mismo.

"El mecanismo de la adquisición de conocimiento tal como hemos descrito antes puede aplicarse tanto a la epistemología o a la historia de las ciencias, como al aprendizaje y a la enseñanza" (Brousseau, 1983, p. 5).

Esta concepción de obstáculo trata de determinar las causas que conducen a los errores en el aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo, si a un grupo de estudiantes se les formula la siguiente pregunta: ¿cuál es el número más cercano a 1?, algunos estudiantes responderán rápida e incorrectamente que el número más cercano es 0 o 2, ya que solo están considerando los números enteros. Este conocimiento funciona solamente cuando se estudian los números enteros. No obstante, esta noción se convierte en un obstáculo al introducir la noción de fracciones. Por ejemplo, González del Olmo (2015) realza la importancia que tienen los conocimientos previos cuando los estudiantes aprenden el tema de fracciones, debido a que, para lograr un aprendizaje efectivo, el nuevo conocimiento debe verse apoyado en los conocimientos anteriores que ha adquirido el estudiante sobre el tema. A partir de lo mencionado, se infiere la idea de que el conocimiento de los números enteros es un obstáculo para el aprendizaje de las fracciones.

En resumen, un obstáculo es un conocimiento adquirido que produce un efecto esperado y conveniente bajo ciertas condiciones, pero al modificarlo generará respuestas inadecuadas e incorrectas.

Asimismo, Brousseau (2006) clasifica los obstáculos de acuerdo a su origen: (a) de origen ontogenético, (b) de origen didáctico y (c) de origen epistemológico.

Para este autor, un obstáculo de origen ontogenético está relacionado con las dificultades que poseen los estudiantes para procesar información a partir de la percepción, además de limitaciones para adquirir nuevos conocimientos por parte de estudiantes con trastornos del sueño o con patologías que afectan el sistema nervioso. “Los obstáculos con un origen ontogenético son aquellos que surgen debido a las limitaciones de los estudiantes (neurofisiológicas entre otras) en un momento de su desarrollo” (Brousseau, 2006, p. 86).

Por ejemplo, un estudiante que esté en el último año de la primaria no podría aprender la definición formal del concepto de límite, pues en su complejidad del concepto contiene mucha información que se expresa en símbolos o en operaciones complejas que los estudiantes aún no son capaces de generar.

Por su parte, los obstáculos de origen didáctico serán aquellos que se adquieren en la institución educativa, debido al modo de enseñar o por la puesta en práctica del desarrollo del currículo. Este tipo de obstáculo está vinculado con el proceso de toma de decisiones por parte del docente en el instante en que realiza su clase con el propósito de llevar al estudiante a un conocimiento específico. “Los obstáculos de origen didáctico son los que parecen no depender más que de una lección o de un proyecto de sistema educativo” (Brousseau, 1983, p. 8).

Por ejemplo, en el nivel primario se introduce el capítulo referido a decimales exactos e inexactos a partir de la fracción irreducible y la descomposición del denominador, tal que, si solo se encuentran los factores 2 y 5, entonces la fracción es igual a un número decimal exacto, pero si en el denominador hay algún factor distinto de 2 o 5, la expresión decimal es periódica. En ese sentido, D'Amore (1993) reporta que algunos docentes conciben que la forma decimal periódica de un número racional se obtiene a través de la división entre los dos números y obtener siempre el mismo resto, dejando en el cociente la misma cifra. Este autor considera que este conocimiento que poseen los estudiantes está relacionado con la forma cómo se realiza el paso de los números enteros a los números decimales. Es decir, este conocimiento es un obstáculo didáctico en el momento que los estudiantes se enfrentan ante la igualdad $0.9 = 1$, debido, principalmente, a que los estudiantes razonan de forma inválida afirmando que es casi igual a 1. Esta respuesta es errónea, puesto que los estudiantes afirman que no es exactamente igual a 1, ya que para llegar a 1 siempre falta algo. "Aquí nace ciertamente la idea de acercarse siempre más al resultado sin alcanzarlo jamás descrito por muchos alumnos" (D'Amore, p.14).

Por otro lado, los obstáculos de origen epistemológico son aquellos conocimientos característicos del propio concepto matemático que se pueden reconocer en la historia y aparecen ligados con el proceso de construcción del concepto matemático. Por ejemplo, Glaesser (1981, citado en Cid, 2000) considera que, en la evolución histórica de la noción de número negativo, podemos verificar la presencia de este obstáculo. En ese sentido, manifiesta que la falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas será considerada un obstáculo epistemológico. Esto será observable, en la obra de Diofanto, al momento de multiplicar dos diferencias. Este hecho lleva a enunciar la regla de signos para la multiplicación sin aceptar la existencia de números negativos aislados.

No obstante, estos obstáculos se presentan en los estudiantes ante una situación o problema que requiere de ese conocimiento, los cuales están muy enraizados en la mente de los estudiantes. Este conocimiento, en algunas situaciones, ha sido satisfactorio para resolver ciertos problemas. Sin embargo, este mismo conocimiento puede ser inadecuado o incorrecto cuanto el estudiante se enfrente ante una nueva situación o problema. Para ello, Brousseau afirma lo siguiente: "A los que uno no puede, ni debe escapar del hecho mismo de su rol constitutivo en el conocimiento a que se apunta" (1983, p. 8).

Por ejemplo, D'Amore (2008) precisa que los estudiantes, para adquirir un conocimiento en referencia a los números racionales, les resulta imprescindible relacionar este conocimiento con el conocimiento de los números naturales, el cual ya posee. En ese sentido, afirma que la comprensión de los números naturales por parte de los estudiantes exige conocer a detalle los números naturales y sus operaciones. A modo de ejemplo, un número natural como 5 tiene un sucesivo, el investigador sostiene que algunos estudiantes afirman que 2.33 es el sucesivo de 2.32.

2.2 Errores en el aprendizaje de las matemáticas

Para Rico (1995), equivocarse forma parte del quehacer del ser humano, en particular del aprendizaje, y por ello, se debe considerar como parte del proceso de aprendizaje. Los errores son parte del conocimiento del estudiante, ya que poseen capacidad de raciocinio. La labor del docente no consiste en evitar el error ni en ignorarlo. Al contrario, el rol del docente radica en realizar un estudio, un diagnóstico, un tratamiento y la corrección de los errores cometidos por parte de los estudiantes al momento de desarrollar y realizar alguna tarea.

También, Rico refiere que el error en el aprendizaje de las matemáticas se origina cuando el estudiante proporciona una respuesta incorrecta a una tarea matemática que se le propone y, también, sostiene que los errores formarán parte del proceso de aprendizaje de las matemáticas.

Respecto a los errores en matemáticas, Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987) estudian aquellos errores cometidos por estudiantes de secundaria y los clasifican en 6 categorías. La clasificación incluye aquellos errores que se producen por la aplicación de un teorema o una regla sin que se verifiquen las condiciones necesarias. Por ejemplo, en el caso de los limites, algunos estudiantes consideran que el $\lim_{2\to 4}\frac{567\ 2}{2} = 1$. Como se observa, el error ocurre debido a que los estudiantes aplican sin éxito el teorema $\lim_{2\to 8}\frac{567\ 2}{2} = 1$ sin considerar la condición cuando *x* tiende a cero.

En un estudio muy parecido al de Rico, Socas (1997) señala que los errores van a tener distintos orígenes y los considera resultado de un esquema cognitivo inadecuado. En otras palabras, aparecen cuando los estudiantes intentan resolver un problema mediante sus conocimientos, pero lo realizan de forma inadecuada. Por ejemplo, este autor sostiene que los errores cometidos por los estudiantes van a tener su origen o bien en un obstáculo, o bien en una ausencia de sentido, o bien en actividades afectivas y emocionales, los cuales tendrán dos procedencias distintas, una primera, relacionada con las dificultades asociadas a la complejidad del objeto y a los procesos de pensamiento matemático, y una segunda, relacionada con las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas. Cada una de estas procedencias, los ejemplificaremos en la sección 2.3.

2.3.1 Errrores que tienen su origen en un obstáculo

Al respecto, Socas (1997) sostiene que el surgimiento de este tipo de error es debido a un conocimiento anterior, que fue válido y exitoso en un ámbito relacionado con matemática, pero que, ante un nuevo conocimiento, se revela de forma incorrecta. Así mismo, plantea que el estudio histórico acerca de los obstáculos propiciará en los docentes la búsqueda de respuestas eficaces sobre este tipo de error.

En ese sentido, Sackur-Grisvard y Leonard (1985) sostienen que, en algunos casos, el conocimiento previo es útil para aprender nuevos conceptos, pero que, en otros casos, este conocimiento puede impedir el aprendizaje del nuevo concepto, manifestándose por medio de este tipo de error. Estos autores realizan un análisis acerca de los errores más frecuentes y reproducidos por los estudiantes cuando comparan dos números decimales. De este modo, apuntan la idea equivocada que tienen los estudiantes cuando comparan los números decimales 12.4 y 12.17, de los cuales consideran que el número decimal 12.4 es menor que el número 12.17. Los investigadores concluyen que es probable que los estudiantes estén empleando conocimientos anteriores, específicamente, comparando los números enteros 4 y 17.

En cuanto al límite, Ely (2007) explora las concepciones previas que poseen los estudiantes y las conexiones que se dan entre estas concepciones cuando el estudiante se enfrenta a un nuevo conocimiento. Además, estudia cómo estas concepciones se relacionan con las concepciones históricas. Esta exploración revela que ha habido muchos estudiantes a quienes se les enseña límites utilizando un enfoque infinitesimal. Este enfoque establece que los infinitesimales son los números positivos más pequeños que cualquier número real, pero mayor que cero. Además, dos números pueden estar infinitamente cerca uno del otro. Para este autor, este conocimiento previo interfiere con la definición formal de límite.

2.3.2 Errores que tienen su origen por la ausencia de sentido

Como indica Socas (1997), este tipo de errores puede atribuirse a lo siguiente:

(a) Un objeto matemático y signos matemáticos nuevos que van a ser caracterizados por objetos y signos matemáticos antiguos. (estadio semiótico).

Por ejemplo, Ortega y Pecharromán (2014) sostienen que este estadio se alcanza a partir del conocimiento previo de los estudiantes. Para ejemplificar este estadio, los investigadores plantean un diseño de enseñanza de las propiedades de las funciones, manifestando que este se produce cuando los estudiantes realizan un reconocimiento gráfico del concepto de función y lo expresan de manera verbal permitiéndoles interpretar el concepto de la gráfica de una función.

Ahora bien, respecto al error que se comete en este estadio, los investigadores reportan que este tipo de error se produce durante el reconocimiento gráfico de los conceptos de extremos absolutos, monotonía y simetría. Por ejemplo, los estudiantes interpretan los extremos con puntos más altos o más bajos respecto al eje de las abscisas o, también, por su posición relativa respecto al eje ".

(b) Un objeto matemático y signos matemáticos nuevos que van a ser estructurados a partir de los objetos y signos matemáticos antiguos. (estadio estructural)

Por ejemplo, Ortega et al. (2014) señalan que este estadio se fundamenta en los conocimientos alcanzados en el estadio anterior. En el caso específico de las funciones, sostienen que los estudiantes alcanzarán el aprendizaje del concepto cuando realicen procedimientos gráficos como el de proyección y utilicen un lenguaje matemático simbólico y numérico para expresar el concepto de función. Por lo que se refiere al error que se comete en este estadio, estos investigadores sostienen que los errores propios de este campo se ponen de manifiesto cuanto los estudiantes realizan la transformación o proyección de la gráfica sobre los ejes de abscisas o el de ordenadas.

(c) Un objeto matemático y signos matemáticos nuevos que van a actuar con significados propios, independiente de los objetos y signos matemáticos antiguos (estadio autónomo).

Por ejemplo, los investigadores refieren que este estadio orienta el desarrollo del concepto como un objeto matemático abstracto, que estará limitado por el nivel educativo de los estudiantes. Para el caso de las funciones, los estudiantes lograrán alcanzar el aprendizaje del concepto cuando lo reconozcan en otras representaciones en las que adquiere significado por conversiones que se inician en la representación gráfica de una función. En cuanto a los errores que se cometen en este estadio, estos investigadores señalan que se evidencian cuando los estudiantes no dibujan correctamente la gráfica de una función caracterizada por una propiedad que está sujeta a ciertas restricciones.

Socas indica lo siguiente: “Los errores que tienen su origen en una ausencia de sentido se originan en los distintos estadios de desarrollo (semántico, estructural y autónomo) que se dan en los sistemas de representación” (1997, p. 5).

Además, manifiesta que este tipo de errores pueden ser diferenciados en tres etapas diferentes:

Errores del álgebra que tienen su origen en la Aritmética. Socas (1997) sostiene que este tipo de errores no son propios del álgebra, sino que se vinculan, principalmente, a alguna limitación que ha quedado sin corregirse en aritmética. Para este autor, este tipo de error es debido a que los estudiantes para aprender operaciones, teoremas, reglas o demostraciones propias en álgebra requieren asimilarlas dentro de un enfoque aritmética mucho antes. A continuación, se proporcionarán algunos ejemplos dados por Socas, donde se ilustra el tipo de error antes mencionado.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2+3} \qquad y \qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x+y}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{2+3} \qquad y \qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{x+y}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{2.3} \qquad y \qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{x.y}$$

En relación con el tema de interés de esta investigación, Vrancken, Gregorini, Engler, Muller y Hecklein (2006), en su estudio, evidencian que existen errores que se dan en el aprendizaje del cálculo de límites. Al respecto, los autores detectan que algunos estudiantes cometen errores cuando utilizan expresiones con radicales $\sqrt{\text{"}+1}-\sqrt{\text{"}}=\sqrt{\text{"}+1-\text{"}}$ al resolver $\lim\limits_{2\to<}\sqrt{\text{"}+1}-\sqrt{\text{"}}$, siendo este error fundamentalmente de tipo algebraico. Además, sostienen que este error, que muchas veces se da en el cálculo de límite, no es propio del álgebra, sino que ha sido dejado de corregir en la aritmética.

Errores de procedimientos. Socas (1997) sostiene que este tipo de error se da comúnmente en los estudiantes cuando hacen uso inadecuado de fórmulas o reglas, que pueden haber sido extraídas de algún formulario o libro de texto, y son usadas tal como es comprendida o interpretada en un nuevo contexto.

Para ejemplificar, se presentarán algunos ejemplos proporcionados por el mismo Socas (p.27).

(1) Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva:

(a) $=(>+?) = =.>+=.?$ se extiende a $=(>.?) = =.>.=.?$

(b) $(=.>)^4 = =^4.>^4$ se extiende a $(=+>)^4 = =^4+>^4$

(c) $\sqrt[A]{=>} = \sqrt[A]{=}\sqrt[A]{>}$ se extiende a $\sqrt[A]{=+>} = \sqrt[A]{=}+\sqrt[A]{>}$

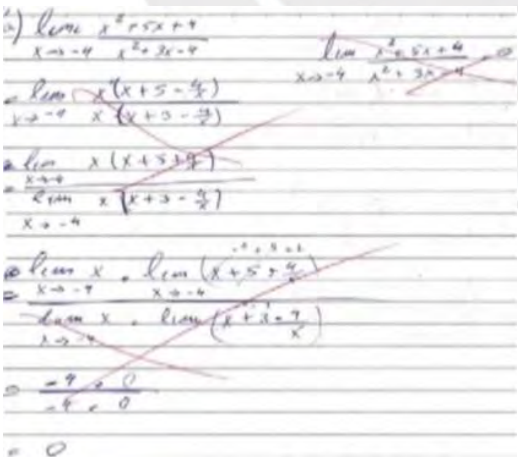
(2) Errores relativos al uso de recíprocos

$\frac{B}{2}+\frac{B}{C}=\frac{2DC}{2C}$ se extiende a $\frac{B}{2}+\frac{B}{C}=\frac{B}{2DC}$

(3) Errores de cancelación

$\frac{E.2DF.C}{2DC} = =+>$

Ahora, veamos un ejemplo proporcionado por Vogado, Juca y de Brito Mota (2014), de lo anteriormente mencionado, que implica al límite de una función. En la figura 1, los investigadores sostienen que el estudiante muestra una falta de comprensión de las operaciones con límites, aplicando la regla del producto de límites y procedimientos algebraicos incorrectos, como la factorización.



$$\lim_{2\to GH} \frac{"^4 + 5" + 4}{"^4 + 3" - 4}$$

$$\lim_{2\to GH} \frac{"L" + 5 + \frac{4}{"}M}{"L" + 3 - \frac{4}{"}M}$$

$$\frac{\lim_{2\to GH} "L" + 5 + \frac{4}{"}M}{\lim_{2\to GH} "L" + 3 - \frac{4}{"}M}$$

$$\frac{\lim_{2\to GH} ". \lim_{2\to GH} L" + 5 + \frac{4}{"}M}{\lim_{2\to GH} ". \lim_{2\to GH} L" + 3 - \frac{4}{"}M} = \frac{-4.0}{-4.0} = 0$$

Figura 1. Errores de procedimientos

Fuente: Vogado, Juca y de Brito Mota (2014, p. 68)

Errores del álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico

Socas (1997), señala que este tipo de errores son de origen puramente algebraico. Es decir, no tiene ninguna conexión con la aritmética. Se mencionará, a continuación, algunos ejemplos descritos por Socas.

Los estudiantes tienen una manera particular de interpretar tanto el signo “=” en su paso de la aritmética al álgebra, y la sustitución formal.

(a) Al trabajar con tautologías algebraicas el sentido del signo igual se conserva de modo similar en aritmética como en álgebra. No obstante, en expresiones como $4x-3=2x+7$ solo es verdadera cuando $x=5$.

(b) La sustitución formal es una herramienta importante del álgebra, debido a la gran cantidad de aplicaciones en diferentes procesos matemáticos (simplificación, eliminación, generalización).

De forma análoga, podemos relacionar este tipo de error con el límite. Esto puede apreciarse en la figura 2, donde se muestra la falta de comprensión del signo igual. Concretamente, el estudiante está considerando que las expresiones que se disponen a ambos lados del igual se refieren al mismo objeto matemático. Esta acepción se particulariza en que las expresiones que aparecen en ambos miembros tienen significados diferentes.

$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)} = x+4$ $= 4+4$ $= 8$	$\lim_{2\to H} \frac{''^4-16}{''-4} = \frac{(''-4)(''+4)}{(''-4)} = ''+4$ $=4+4$ $=8$

Figura 2. Errores del álgebra

Fuente: García y Navarro (2010, p. 112)

2.3.3 Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales

Socas (1997) manifiesta que este tipo de error tiene distinta índole. Posiblemente, eso sea atribuido a una baja capacidad de concentración o bloqueos debido a un exceso de confianza. En otras palabras, los olvidos son debido a descuidos y falta de atención a los detalles y bloqueos en el análisis de información. Así, en la búsqueda de investigaciones que evidencien este tipo de error, se encuentra que esta problemática había sido abordada en la investigación de Guerrero (2015), en la que analiza las respuestas dadas por un grupo de estudiantes e identifica este tipo de error. Tomaremos como ejemplo de dicho trabajo, el análisis a la respuesta dada por un grupo de estudiantes. En dicho análisis, se pone en evidencia que los estudiantes plantearon el costo de material y mano de obra, pero, finalmente, no lo suman o no determinan el costo total de los materiales. Por ello, considera que este error podría deberse a un descuido por parte de los estudiantes. Esto se puede apreciar en la figura 3.

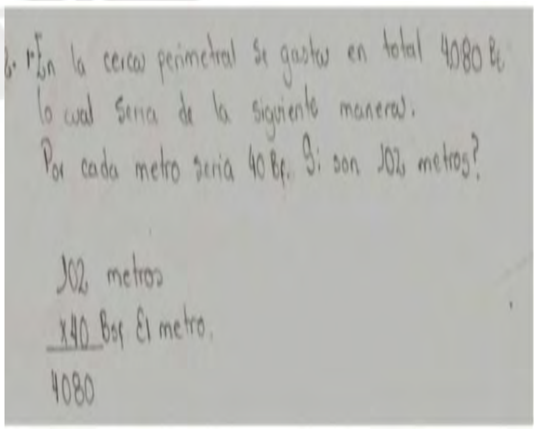
Enunciado del problema	Solución del grupo de estudiantes
Un segundo problema: El liceo Nacional el Molino necesita comenzar a construir la cerca perimetral para impedir que personas ajenas a la institución tengan acceso a ella. Si el perímetro del Liceo es de 102 metros y se necesita una cerca de por lo menos un metro de alto, ¿cuánto dinero cuesta la cerca? ¿Es posible reducir los gastos? Y si el liceo no cuenta con los recursos suficientes para costear la cerca, ¿cómo se puede financiar la cerca perimetral? Buscar el costo por metro cuadrado. Nota: Uno de los estudiantes era ayudante de albañilería y explicó a sus compañeros que construir una pared de un metro cuadrado tenía un valor de 40bs.	En la cerca perimetral, se gastó en total 4080, lo cual sería de la siguiente manera. Por cada metro sería 40bs. ¿Si son 102 m.? $102\ \text{QRSTUV} \times 40 > \text{V RX QRSTU} = 4080$  6. r) En la cerca perimetral se gasto en total 4080 Bs lo cual Seria de la siguiente manera. Por cada metro sería 40 Bs. Si son 102 metros? 102 metros x40 Bs. El metro. 4080

Figura 3. Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales

Fuente: Guerrero (2015, p. 104)

En cuanto al límite, Miranda (2000) centra su trabajo en el desarrollo de ideas que poseen un grupo de estudiantes, a través de los sistemas de representación. Por ejemplo, este autor reporta que 3 estudiantes de 67 encuestados elaboraron solamente una curva acercándose a 3 por la derecha, a pesar de que se les pide elaborar una gráfica de tal manera que los valores *x* se acerquen muchísimo a 3, tanto por la derecha como por la izquierda, y crezca sin fin. Consideramos que este tipo de error puede deberse a un despiste de los estudiantes o a un descuido en el trabajo y tendrá su origen en actitudes afectivas y emocionales hacia la matemática.

2.3 Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas

Uno de los conceptos que estimamos relevante destacar es el de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, pues los estudios realizados por Bachelard (1948) y Brousseau (1983) se refieren a este concepto sin mayor precisión. Por lo anterior, se considera pertinente establecer una postura acerca del concepto de dificultad en el aprendizaje de las matemáticas a partir de las nociones específicas de los siguientes conceptos: (a) dificultad, (b) dificultad en el aprendizaje y (c) dificultad en el aprendizaje de las matemáticas.

Con relación a la definición de la palabra dificultad, el Diccionario de la Real Academia Española (DRAE) nos propone como acepción en el contexto: “inconveniente, oposición o contrariedad que impide conseguir, ejecutar o entender algo bien y pronto.” Esta definición hace referencia a impedimentos o aprietos que aparecen cuando un individuo quiere obtener algo.

Desde la perspectiva de la educación matemática, el significado dificultad tiene distintas concepciones. Por ejemplo, el trabajo de Godino, Batanero y Font (2003) señala que el término dificultad está vinculado con el éxito por parte del estudiante al desarrollar una tarea o tema de estudio. Es decir, la dificultad se medirá a partir del porcentaje de respuesta incorrecta. Si el porcentaje de respuestas erróneas es alto, la dificultad de la tarea o tema de estudio es alto. En cambio, si el porcentaje de respuestas erróneas es bajo, entonces la dificultad es baja.

El término dificultad indica el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio. Si el porcentaje de respuestas incorrectas (índice

> de dificultad) es elevado se dice que la dificultad es alta, mientras que, si dicho porcentaje es bajo, la dificultad es baja. (Godino, Batanero y Font, 2003, p. 73)

Tanto en esta última investigación como en Moreno (2011) se identifican varios factores que originan dificultades en el aprendizaje de la matemática, de los cuales se puede indicar: (a) la referida con los contenidos matemáticos, (b) la formación didáctico-metodológica insuficiente de los docentes, (c) la que se origina por la organización del centro, (d) la relacionada con la motivación del alumnado, (e) la relacionada con el desarrollo psicológico de los alumnos y (f) la desarrollada con la falta de dominio de los contenidos previos al nuevo contenido.

Por otra parte, el autor considera que el término dificultad en el aprendizaje describe un conjunto de alteraciones de diversa índole, las que se pondrán de manifiesto en diversas actividades. Por ejemplo, esto se evidencia cuando el estudiante no logra la compresión y el empleo de la nomenclatura matemática, o cuando no logra codificar problemas con símbolos matemáticos. Además, estas alteraciones dependen de la naturaleza de cada estudiante debido a algún trastorno en su sistema nervioso central ocurrido durante su vida.

> Un término general que se refiere a un grupo heterogéneo de trastornos que se manifiestan por dificultades significativas en la adquisición y uso de la escucha, habla, escritura, razonamiento o habilidades en matemática, estos trastornos son intrínsecos al individuo, suponiéndose debidos a la disfunción del sistema nervioso central, y que pueden ocurrir a lo largo del ciclo vital. (National Joint Committee of Learning Disabilities, 1988, Citado por Moreno, 2011)

Otro estudio referente a las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas es el realizado por Socas (1997). En esta investigación, se pone de manifiesto que el aprendizaje de matemáticas genera muchas dificultades en los estudiantes, las cuales no necesariamente aparecen en los estudiantes con menos habilidades para las matemáticas o en estudiantes que no posean condiciones intelectuales para el cumplimiento de una tarea relacionada con matemáticas. Estas dificultades, en general, se pueden presentar en casi todos los estudiantes. Asimismo, las dificultades que se dan tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de las matemáticas, según Socas, son de distinta naturaleza y pueden ser clasificadas en cinco categorías: (a) objetos matemáticos, (b) procesos de pensamiento, (c) procesos de enseñanza, (d) procesos cognitivos y (e) falta de una actitud racional hacia las matemáticas. Cada una de estas categorías tiene sus propias especificaciones, las cuales desarrollaremos más adelante.

Por lo anterior, se entiende que en los datos apuntados anteriores parece existir a nuestro entender una coherencia con los resultados encontrados en las investigaciones centradas en las dificultades a diferencia de Godino, Batanero y Font (2003), quienes expresan que el término dificultad determina cuán exitosa es una tarea. En nuestro trabajo, las dificultades en al ámbito del aprendizaje de las matemáticas describen las limitaciones que adolecen los estudiantes además de las interferencias con sus habilidades para recepcionar, almacenar, procesar o producir información relacionada con las matemáticas, las cuales estarán presente en estudiantes que siguen un ritmo académico normal, es decir, no presentan retardo mental ni tampoco dificultad sensorial.

2.3.1 Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos

Socas (1979) considera que el hecho de comunicar de forma escrita los objetos matemáticos implica utilizar los signos matemáticos con ayuda del lenguaje usual. Las dificultades de este tipo se relacionan con los conflictos asociados a la compresión y comunicación de los objetos matemáticos.

El primer conflicto es el llamado de precisión. El autor atribuye que esta situación se presenta cuando se emplea el lenguaje habitual en la interpretación de los signos matemáticos. En ese sentido, el uso habitual del lenguaje común en la comunicación de los objetos matemáticos puede, en algunos casos, expresar su significado a pesar de que se cometan faltas de ortografía o roturas de las reglas gramaticales. Por ejemplo, la comprensión de los conceptos matemáticos implica tener el conocimiento matemático acerca de sus contenidos y la capacidad de redactar en forma aceptable. Díaz (2009) sostiene que los estudiantes no tienen un buen manejo en casos donde dos letras estén juntas. En este ejemplo, el investigador explica que cuando los estudiantes escriben "$ y '(") no tienen claro que el primero es una multiplicación y el segundo es la representación de una función. Este conflicto, tendrá su origen en el uso del lenguaje habitual en el contexto matemático, ya que se rompe una regla gramatical del concepto de función. En el caso del límite, Sierpinska (1985) señala que los estudiantes emplean un lenguaje natural y no simbólico dejando de lado el uso de cuantificadores para definir la noción del límite.

El segundo conflicto involucra el vocabulario común, porque muchas palabras tienen diferentes significados en la matemática y en el lenguaje usual, como raíz, matriz, primo. Ello es debido a que el significado de las palabras depende del contexto o de la situación en que se emplee, por ejemplo, como hemos dicho anteriormente, cuando nos referimos a la palabra límite, la cual es muy difundido en el lenguaje coloquial. Sin embargo, el lenguaje matemático usado en la definición propia del límite requiere del uso de signos y símbolos matemáticos. También, considera dentro de este conflicto a las palabras o conceptos propios del léxico matemático, por ejemplo, hipotenusa, valor absoluto, poliedro, debido a que suelen ser extrañas y mal entendidas por encontrarse únicamente dentro de matemáticas.

El último conflicto, que es fuente de confusión por parte de los estudiantes, está relacionado con el lenguaje de los signos matemáticos. Este conflicto, según Socas, opera en dos niveles: semántico y sintáctico. En el nivel semántico, establece que “los signos matemáticos se dan de forma clara y precisa”, mientras que, en el nivel sintáctico, “los signos matemáticos pueden ser operados mediante reglas sin referencia directa a ningún significado”. Por ejemplo, Gonzalez (2013) sostiene que las ideas confusas acerca del límite que poseen los estudiantes es consecuencia de la sintaxis propia del límite y sus reglas operacionales. Por ello, estos aspectos revelan la complejidad y la abstracción del concepto del límite.

2.3.2 Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático

Socas (1979) señala que este tipo de dificultad se pone de manifiesto en la naturaleza lógica de las matemáticas y en las rupturas que se dan en las formas de pensamiento. Es decir, los estudiantes, mediante operaciones cognitivas, organizan, rehacen y establecen datos que poseen para obtener conclusiones. Este enfoque permitirá a los estudiantes resolver tareas por medio de un pensamiento matemático, llamado por el autor del tipo inteligente, a través del cual podrán desarrollar ideas más amplias con la deducción formal.

Por ejemplo, Blázquez, Ortega, Gatica y Benegas (2006) consideran que los estudiantes comprenden mejor el concepto del límite basado en la aproximación óptima (véase la figura 4), ya que el razonamiento empleado es más sencillo por carecer de formalismo. Este formalismo impide a los estudiantes entender su significado y requiere gran capacidad de abstracción. Incluso, sostienen que para la compresión del límite basada en la aproximación óptima no es necesario que los estudiantes tengan destreza en el lenguaje matemático.

Asociación de las unidades significantes elementales	
Definición métrica	**Definición como aproximación óptima**
Para todo $\varepsilon > 0$	Para toda aproximación $K \neq L$,
Existe $\delta > 0$	Existe una aproximación $H \neq a$,
Los x tales que $0 < \| x - a \| < \delta$	Los x que mejoran la aproximación H de a.
$\|f(x) - l\| < \varepsilon$.	Las imágenes $f(x)$ mejoran la aproximación K de l.

Figura 4. Conceptualización de métrica y aproximación óptima

Fuente: Blázquez, Ortega, Gatica, y Benegas (2006, p. 196)

En este mismo trabajo, Socas considera viable que la lógica social dificulta el verdadero sentido de los objetos matemáticos. Para ilustrar este tipo de dificultad, consideraremos el ejemplo presentado por Socas, donde se afirma que, en muchos casos, los usos de los números decimales en la vida cotidiana se presentan como parejas de números enteros, por ejemplo, cuando decimos Víctor mide un metro ochenta y no se trata de 1,80m. El investigador considera que los estudiantes tienen arraigada la idea de asociar los números decimales como pareja de dos números enteros. En tal sentido, el autor admite que la lógica social justifica los errores cometidos por los estudiantes. Además, considera que esta concepción por parte de los estudiantes quedará arraigada en su mente y se manifiesta cuando se les pida comparar números decimales, como 1,3 y 1,28. Para este caso, se obtiene como respuesta que $1,\ 3\ <\ 1{,}28$, debido a que consideran que $3 < 28$.

Asimismo, Socas (1997) sostiene que los modos de pensamiento matemático provocan rupturas que se transforman en dificultades que aparecen en el proceso de construcción del conocimiento matemático. Por ejemplo, los saberes matemáticos previos producen modelos implícitos al momento de resolver tareas que, en muchos casos, son adecuados, pero, en otros, aparecen como dificultades para abordar el nuevo conocimiento. De esto último, podemos destacar el hecho que la construcción de un conocimiento matemático nuevo se da a partir de los saberes previos, en donde, por lo general, podemos encontrar tropiezos o dificultades que frenan o impiden este nuevo conocimiento. Sin embargo, no logrará ser un obstáculo. En ese sentido, estamos de acuerdo con Brousseau (1983) en que un obstáculo es una forma de conocimiento. Es decir, el obstáculo no es un tropiezo o una dificultad, sino que está en pensamiento matemático mismo, que en un momento fue exitoso, pero ante un conocimiento nuevo se revela de forma incorrecta.

2.3.3 Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático

Al respecto, Socas (1997) menciona que estas dificultades se relacionan: (a) con la institución escolar, (b) el currículo de matemáticas y (c) los métodos de enseñanza. En nuestra investigación, nos referimos a una institución universitaria, donde se enseña sobre el límite.

(a) Respecto a la institución escolar, el autor considera que esta debe ayudar a que sea posible la reducción de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas a partir de una buena elaboración de materiales didácticos, así como de recursos metodológicos y los estilos de enseñanza.

    Al situarnos dentro de nuestra institución educativa, se pudo observar que estaba normalizada. Esta práctica está vinculada con estrategias de enseñanza tradicional de los docentes, dado que se limita a enseñar contenidos matemáticos de manera formal y rigurosa, además, de enseñar algoritmos y procedimientos específicos del límite, ya que se presupone que, de esta forma, los estudiantes alcanzarán el aprendizaje.

(b) Respecto al currículo de las matemáticas, Socas manifiesta que esta organización curricular origina diferentes dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. A su vez, distingue cuatro dificultades relacionadas en el currículo de matemáticas: (a) las habilidades necesarias para desarrollar capacidades matemáticas que definen la competencia de un estudiante, (b) la necesidad de contenidos anteriores, (c) el nivel de abstracción requerido y (d) la naturaleza lógica de las matemáticas. Por ejemplo, según Rico (1997), la estructura de los documentos curriculares solo aporta lineamientos. Estos documentos no proporcionan información suficiente para emplear de manera efectiva los objetivos, contenidos, metodologías y evaluaciones. También, señala que existen deficiencias que no permiten realizar una buena planificación, porque provocan dificultades. Plantea que, hoy en día, no se dispone de instrumentos conceptuales adecuados y suficientemente desarrolladas para el uso del currículo.

(c) Respecto a los métodos de enseñanza, Socas indica que deben estar estrechamente relacionados con los elementos organizativos de la institución escolar y con la organización curricular. El autor considera que el lenguaje matemático se debe adaptar a las capacidades y comprensión de los estudiantes. Es decir, esto implica que el estudiante sea capaz de entender el uso adecuado de los símbolos matemáticos. Por ejemplo, Freudenthal (1991, citado en Carneiro-Abrahão, 2008) distingue que muchos docentes centran el desarrollo de sus clases en un libro didáctico para cumplir con los lineamientos del currículo. Sin embargo, este tipo de método de enseñanza no articula las prescripciones curriculares del área de matemáticas con la práctica didáctica-metodológica en el aula.

En nuestra investigación, esta dificultad no forma parte de nuestro interés, debido a que el núcleo principal de nuestra tesis es el análisis de los obstáculos epistemológicos. Este tipo de dificultad está vinculado con los obstáculos didácticos, ya que estos obstáculos se relacionan con la forma de enseñar.

2.3.4 Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos

Para Socas (1997), la posibilidad de acceder a tener información acerca del proceso de aprendizaje y del conocimiento de desarrollo intelectual de los estudiantes permitirá conocer el grado de dificultad de una pregunta o tarea específica, e identificar las actitudes a partir de las respuestas que los estudiantes dan ante un problema o actividad específica. Además, el autor afirma que, en el momento en que se diseña el material de enseñanza, se debe tener en cuenta los estadios generales de desarrollo intelectual. Estos estadios están representados por un modo característico de razonamiento y por problemas o tareas específicas que los estudiantes sean capaces de realizar. Por ejemplo, para el tipo de estudiante que cursa los primeros ciclos universitarios, se debe considerar que los estudiantes formulan hipótesis y pueden ponerlas a prueba para determinar la solución de un problema. Así mismo, se debe tener en cuenta que los estudiantes están aptos para entender conceptos muy abstractos.

Al igual que en la categoría anterior, no forma parte de nuestro interés, porque este tipo de dificultad está relacionado con los obstáculos ontogenéticos. Para Brousseau (1983), este tipo de obstáculo tiene su origen en el desarrollo cognitivo y reconoce que los conocimientos que desarrollan los estudiantes conllevan a limitaciones en el momento de su desarrollo.

2.3.5 Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas

Socas (1997) afirma que muchos estudiantes, incluyendo algunos de los más capacitados, no les gustan las matemáticas, debido a que muchos de estos estudiantes tienen sentimientos de aversión y miedo hacia estas. En ese sentido, el autor considera algunos aspectos que influyen en este desagrado:
(a) la naturaleza jerárquica del conocimiento matemático, (b) por la actitud de los profesores hacia sus estudiantes, (c) los estilos de enseñanza y (d) las creencias pre establecidas respecto de la matemática en sí.

Por otra parte, Socas sostiene que muchas de las actitudes negativas y emocionales hacia las matemáticas surgen por actitudes limitantes e inhibidoras. En otras palabras, se trata de prejuicios que hacen desarrollar ansiedad por terminar una determinada tarea, miedo al fracaso y temor a la equivocación, los cuales generan bloqueos de origen afectivo que influyen dentro del proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Esta categoría tampoco formará parte de nuestro interés, puesto que este tipo de dificultad está relacionado con los obstáculos ontogenéticos. Consideremos que este tipo obstáculo, como señala Brousseau, surgen, también, debido a limitaciones neurofisiológicas, entre otras. Por ejemplo, estas consisten en trastornos del sueño o patologías que afectan el sistema nervioso.

2.4 Obstáculos epistemológicos relativos a la noción de límite según Cornu (1991)

Cornu (1991) hace referencia de los obstáculos epistemológicos del límite desde una postura epistemológica, recurriendo a la noción Bachelariana de obstáculo epistemológico dada en 1948. Es decir, al realizar el estudio del desarrollo histórico del límite, se localizará las dificultades que surgieron en la construcción del mismo. Notamos que Cornu clasifica las dificultades del límite por su relación con tres contenidos matemáticos.

> En el caso de la historia del concepto de límite, vemos que esta noción se introdujo para resolver tres tipos principales de dificultad: (a) problemas geométricos (cálculos de área, consideración de la naturaleza de las longitudes geométricas, "agotamiento"), (b) el problema de la suma y el índice de convergencia de una serie, (c) los problemas de diferenciación (que provienen de la relación entre dos cantidades que tienden simultáneamente a cero). (Cornu, 1991, p.159)

A partir de la postura anterior adoptada por Socas, en el acápite anterior respecto a las dificultades, este autor sostiene que la ocurrencia de estas dificultades está en función de su naturaleza. En ese sentido, lo expuesto anteriormente, nos permite situar este grupo de dificultades acerca del límite dentro del grupo de dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático desarrollado por

Socas, debido a que estas dificultades se pondrán de manifiesto en la naturaleza lógica de las matemáticas y en las rupturas acerca de las formas de pensamiento.

Por otro lado, Cornu establece cuatro principales obstáculos epistemológicos, los cuales se exponen a continuación: (a) el hecho de vincular la geometría con los números, (b) la noción de lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño, (c) el aspecto metafísico de la noción del límite y (d) ¿si se alcanza el límite o no? A continuación, explicaremos cada uno de estos obstáculos epistemológicos planteados por Cornu.

2.4.1 El fracaso de enlazar la geometría con los números

Cornu identifica el interés de los griegos por las matemáticas entre los años 400 a.C. y 300 a.C. Sin embargo, considera que el concepto del límite no es aclarado durante esta época, pero se presentan situaciones que manifiestan la idea intuitiva del límite. Estas ideas están relacionadas con procesos geométricos que no enfrentan el problema del infinito y que surgen para determinar el área del círculo, tanto por parte de Hipócrates de Chios como de Eudoxo de Cnidos. En ambos casos, no existe una conexión entre las figuras geométricas y la parte numérica. En ese sentido, Cornu (1991) sostiene que la interpretación geométrica y el éxito en la resolución de algunos problemas será un obstáculo, debido a que impide la comprensión del proceso que antecede a la obtención del límite numérico. Por ejemplo, Urbaneja (2008) considera que los matemáticos griegos tuvieron dificultades para asignar a las figuras geométricas números que midieran sus áreas y volúmenes debido a las limitaciones que poseían acerca de los conceptos numéricos. No obstante, este autor sostiene que el logro de los resultados obtenidos por los matemáticos griegos se debió a que estos consideraron que las figuras curvilíneas, como los círculos o segmentos de parábola, tienen áreas que son del mismos tipo que las figuras poligonales.

En la misma investigación, se expresa que el método de exhaución inicialmente se presenta en un lenguaje verbal: “dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se quita una magnitud mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada” (Urbaneja, 2008, p.119). Luego, el texto es trabajado en forma visual, el cual permite interpretar las construcciones en un gráfico para finalmente razonar visualmente.

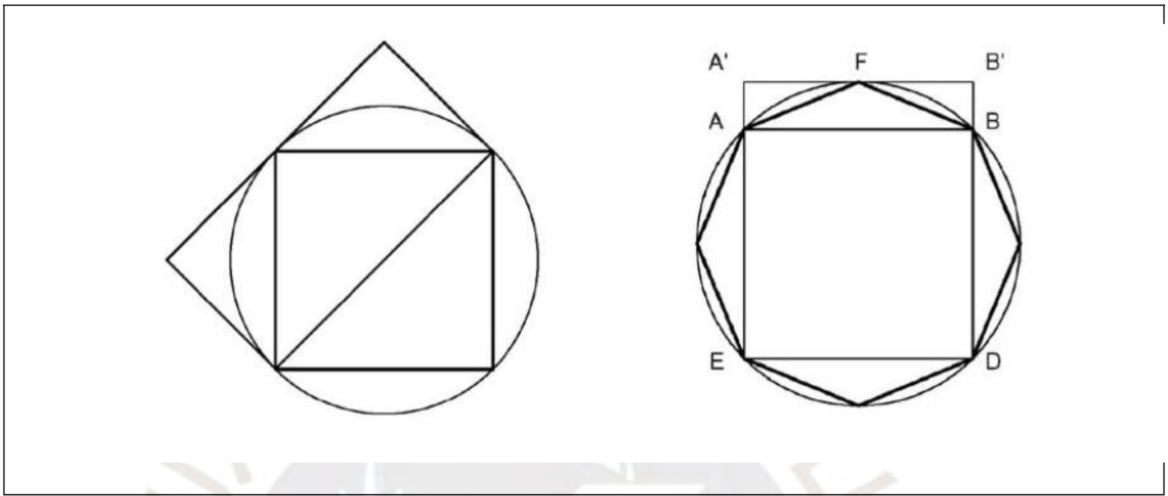


Figura 5. Método de exhaución

Fuente: Urbaneja (2008, p. 119)

Como conclusión de lo discutido, se pone énfasis en que el método de exhaución es de naturaleza geométrica. Además, permitirá tener resultados en forma intuitiva sin la necesidad de involucrar al infinito. Incluso, no se tendrá la necesidad de realizar una transferencia entre las representaciones geométricas a las representaciones puramente numéricas del límite. Esta limitación es considerada como un obstáculo para Cornu (1991). Por ejemplo, Andrade y Molina (2016) analizan, en general, las diferencias heurísticas que presenta un grupo de estudiantes al momento de desarrollar una secuencia didáctica. El estudio estaba dirigido a observar la veracidad de la enseñanza del concepto de área por medio del método de exhaución. Este estudio permite a los investigadores concluir que el uso de las figuras geométricas será relevante para que el estudiante sea capaz de establecer estrategias que le permitan identificar qué figura geométrica es más óptima al momento de recubrir una figura que no sea familiar para ellos.

2.4.2 La noción de lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño

Para este obstáculo epistemológico, el autor sostiene que, en la evolución de la noción del límite, han surgido diversas ideas que tratan de explicar la existencia de cantidades infinitamente pequeñas por parte de muchos matemáticos, como Newton, Euler, D'Alembert y Cauchy.

En la búsqueda de investigaciones que evidencien este obstáculo, encontramos, en primer lugar, el trabajo de Bombal (2010) quien refiere que los matemáticos del siglo XVII centran su atención en el estudio de las cantidades infinitamente pequeñas. Para este autor, el infinitésimo es un objeto matemático con el que se puede operar como si fuera un número, aunque no es cero, siendo menor en valor absoluto que cualquier cantidad positiva. En este mismo trabajo, se menciona que Newton habría elaborado un método muy particular para resolver problemas de tangentes y cuadraturas acoplado con el desarrollo de ciertos algoritmos válidos para el cálculo, los cuales se basan en magnitudes infinitesimales.

"[…] es un método muy general para la determinación de tangentes y cuadraturas, junto con el desarrollo de algoritmos formales para el cálculo con magnitudes infinitesimales" (Bombal, 2010, p.12).

Este tipo de cálculo presenta dificultades para la fundamentación rigurosa del cálculo con infinitésimos, del cual Newton distingue que lo que realmente interesa es la razón entre cantidades infinitesimales. En segundo lugar, la investigación de Duran (2009) manifiesta que Euler utilizaba de forma intuitiva cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes, e incluso que las cantidades infinitamente pequeñas pueden ser consideradas igual a cero. Esta información se encuentra en el libro *Introductio in analysin infinitorum* (1748). El autor considera que el libro carece de rigor matemático acerca de las cantidades infinitamente pequeñas y grandes, ya que no presenta ninguna definición acerca de estas cantidades. En tercer lugar, en el trabajo de Zuñiga y Campos (1997), se hace referencia a la oposición por parte D'Alembert de las cantidades infinitamente pequeñas y, además, el intento de eliminar dichas cantidades del cálculo diferencial.

“Una cantidad es algo o nada; si es algo, aún no se ha desvanecido; si no es nada, ya se ha desvanecido literalmente. La suposición de que hay un estado intermedio entre estos dos es una quimera” (D’Alembert, 1767, citado en Zuñiga y Campos, 1997).

Finalmente, Cauchy (1821), en su obra Cours d’anlyse de E’ cole Polytechnique, define en un lenguaje textual cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes. Para Cauchy, las cantidades variables infinitamente pequeñas serán aquellas que disminuyan su valor numérico de forma indefinida, cuyo límite es cero.

“Decimos que una cantidad variable se vuelve infinitamente pequeña cuando su valor numérico disminuye indefinidamente de tal manera que converge hacia el límite cero” (Cauchy, 1821, p. 21).

Mientras que las cantidades variables infinitamente grandes serán aquellas que aumenten su valor numérico de forma indefinida, cuyo límite es infinito.

“Decimos que una cantidad variable se vuelve infinitamente grande cuando su valor numérico aumenta indefinidamente de tal manera que converge hacia el límite ∞” (Cauchy, 1821, p. 22).

Además, considera la existencia de un estado intermedio entre lo que es nada y lo que no es. Por ejemplo, en el mismo trabajo, se menciona que los estudiantes modernos entienden por el símbolo [como un número que no es cero, pero que es más pequeño que cualquier número real positivo. De la misma manera, refiere que algunos matemáticos se planteaban la posibilidad de tener una cantidad infinitamente pequeña que sea igual a cero. Por ejemplo, se presenta el caso en que los estudiantes pueden creer que $1 - 0.999 \ldots$ es una cantidad infinitamente pequeña, pero no es cero.

2.4.3 El aspecto metafísico de la noción de límite

Según Cornu (1991), la noción del límite es difícil de introducir en las matemáticas, debido a que tiene que ver con la metafísica. La metafísica es una rama de la filosofía y proviene del latín meta que se puede traducir como “más allá” y physica que se podría traducir como “física”. La metafísica se ocupa del estudio “más allá de la física”. Para Aristóteles, este estudio puede ser abordado en torno a dos núcleos temáticos: el primer núcleo está relacionado con la noción de “lo que es” (noción de ente) a la que se le conoce como “ontología”. Se entiende por ente a todo lo que “es”. Por ejemplo, ente puede tratarse de una carpeta, una pizarra, un cuaderno, del $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty$, también, se puede considerar cosas totalmente absurdas como la pelota de tenis tiene forma de un cubo. Por otro lado, el segundo núcleo temático está relacionado al estudio de lo inmaterial e inmóvil, el cual se denomina “teología”.

Además, Aristóteles, ha definido la ontología como la ciencia del “ser en cuanto al ser y de sus propiedades esenciales”. Esto quiere decir que la ontología se encarga de realizar un estudio en cuanto al conocimiento del ente. Según esta definición, nuestro objeto matemático también tiene un ser el cual es ficticio o irreal. Por ello, consideramos que los matemáticos se valieron de la metafísica para probar alguna aplicación o concepto matemático entre los siglos XVII y XVIII.

De lo expuesto anteriormente, acerca del enfoque metafísico de las matemáticas se considera que fue necesario realizarlo para aclarar esta idea de obstáculo metafísico del límite propuesto por Cornu. Esta concepción sostiene que algunos matemáticos, como Leibniz, D’Alembert y Lagrange, se encontraron con profundas dificultades teóricas durante la evolución del concepto del límite. Asimismo, el autor considera que este aspecto metafísico es una de las principales dificultades para la comprensión del límite por parte de los estudiantes, a causa de que un límite no puede calcularse directamente empleando métodos propios del Álgebra y la Aritmética.

Por ejemplo, la noción de límite que se encuentra implícita en el algoritmo de cálculo, de lo que ahora llamamos derivada que desarrolló Leibniz, es del tipo geométrica debido a que trabaja problemas geométricos. En ese sentido, Luna (2016) señala que este algoritmo de Leibniz está descrito en su obra Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi gemus (1684) y fue usado para determinar la cuadratura de una curva y las tangentes en un punto cualquiera de una curva. Además, el autor afirma que este trabajo comprendía un nuevo análisis. Este análisis comprendía el uso de cantidades infinitesimales sin ofrecer definiciones, comentarios o al menos una introducción al tema. Para Luna, esto muestra el alto grado de abstracción que tenía Leibniz y es la fuente de este obstáculo, debido a las dificultades que tuvieron sus comtemporáneos para comprender este nuevo análisis. Por otro lado, Cornu (1991) refiere, acerca de los infinitesimales de Leibniz, que carecen de base metafísica y esto se debe a que van a tener acogida en el cálculo geométrico tan igual como las cantidades imaginarias que tuvieron acogida en el álgebra.

Por otro lado, para Leibniz (1704, citado en Burbage & Chouchan, 2013), "*los infinitos no son totalidades y los infinitos pequeños no son magnitudes*". Dentro del pensamiento metafísico llamado leibniciano, el infinito y los infinitesimales eran desterrados de la tierra. Por un lado, el infinito de Leibniz o también llamado la infinitud de los posibles (tan grande como sea) estaba asociado a la sabiduría de Dios, tomando en cuenta que Dios conoce todo lo posible, mientras que para los infinitos pequeños se daba una confusión entre lo real y lo imaginario, lo continuo y lo discontinuo no siendo esta una teoría rigurosa de la substancia (Leibniz postula que una substancia o monada al no tener partes tampoco tendrá extensión). Asimismo, Burbage y Chouchan (2013) consideran la posición tomada por D'Alembert muy valiosa, porque se critica a la metafísica leibciana resaltando tres puntos que se mencionarán a continuación:

- Se supera reglas en torno al juicio científico, además, de emplearse preguntas demasiado complicadas, por ejemplo, si el infinito está relacionado con Dios o si todo el conjunto de cosas que nos rodea es infinito.
- No se precisa, según D'Alembert, "una idea clara, simple y al abrigo de todo enredo del infinito". Durante esta época, no se tenía una idea clara del infinito, ya que esta noción se simplificaba en una idea abstracta e imprecisa de indefinido.
- No se concebía que las expresiones, en particular matemáticas, donde estuviese involucrado el infinito, no estaban relacionadas con ninguna cosa que sería infinita. Estas expresiones debían comprenderse como formas "abreviadas de expresarse que los matemáticos han inventado para

enunciar una verdad, cuyo desarrollo y enunciado exacto habrían requerido demasiadas palabras".

Resulta atrayente señalar que, en la colección de artículos de la *Encyclopédie, ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers (1751),* D'Alembert registra una diferencia muy precisa entre Newton y Leibniz. Por un lado, señala que Leibniz se había metido en un enredo con lo que podía ser refutado respecto a las cantidades infinitamente pequeñas. Por otro lado, para Newton, el cálculo diferencial nunca estuvo asociado a cantidades infinitamente pequeñas. Además, deja de lado el uso de símbolos algebraicos, porque todo se basaba en procedimientos geométricos. De este modo, para D'Alembert, el método desarrollado por Newton sería el fundamento del cálculo diferencial. Incluso, se podía "prescindir muy cómodamente de toda esa metafísica de las cantidades infinitamente pequeñas en el cálculo diferencial".

Finalmente, Cornu menciona que Lagrange (1736-1813) consideró, inicialmente, que podía hacer uso de las cantidades infinitamente pequeñas. Más tarde, buscando base en lo existente de lo existente durante la época, sostiene que las cantidades infinitamente pequeñas de Leibniz no tienen base metafísica satisfactoria. Este matemático, según Cornu, reestructura las nociones del cálculo utilizando series infinitas en términos netamente algebraicos. Esta propuesta de Lagrange buscaba evitar las dificultades metafísicas, basándose en los desarrollos de las series de Taylor de una función.

2.4.4 ¿El límite se alcanza o no?

Cornu (1991) considera que las orientaciones adoptadas por algunos matemáticos a lo largo de la historia del límite han sido un tema de debate que todavía permanece en nuestros estudiantes. Asimismo, en la investigación, se presentan algunas ideas que han generado controversia, como las de Robins, Jurin y D'Alembert. Con el fin de clarificar este obstáculo, se examinarán y explicarán estos enfoques. Al respecto, Robins (1697-1751) aseguraba que el límite no podía ser alcanzado. Para ello, argumenta que la longitud de una línea curva no puede ser igual a una línea recta, descrito en el método de exahución, utilizado por Arquímedes para determinar la longitud de una circunferencia.

> Para esto, vamos a, en primer lugar, definir una magnitud final que es el límite, a la que una magnitud variable puede aproximarse dentro de cualquier grado de cercanía que sea, aunque nunca se puede hacer absolutamente igual a él. (Robins y Wilson, 1761, p. 54)

Además, Robins empleaba esta idea de valor límite en el cálculo de fluxiones, la cual no era compartida con Jurin (1685-1750), discípulo de Newton, quien, en oposición a Robins, defendía la idea que los límites inalcanzables propuestos por Robins eran valores que en la naturaleza se podrían alcanzar en un tiempo finito.

Es pertinente recordar brevemente la paradoja de Aquiles y la tortuga, una de las más célebres paradojas de Zenón, de donde podemos considerar que el problema era irresoluble para los griegos, ya que la dificultad está relacionada con una suma de infinitas fracciones, la cual tiene un resultado finito.

> El corredor es el llamado Aquiles y consiste en lo siguiente: el corredor más lento no será nunca adelantado por el más rápido; pues es necesario que antes llegue el perseguidor de donde partió el perseguido, de modo que es preciso que el más lento vaya siempre algo adelante. (Aristóteles, citado en Kirk, Raven y Schofield, 1982, p. 82)

En esta misma línea, D'Alembert insistió en que el límite no se alcanza a partir de razonamientos basados en la intuición geométrica, desarrollados en las paradojas de Zenón. Del mismo modo, interpreta las razones primeras y últimas de Newton.

"Una cantidad es el límite de otra cantidad variable si la segunda puede aproximarse a la primera hasta diferir de ella en menos que cualquier cantidad dada (sin llegar nunca a coincidir con ella)" (Boyer 1999, citado por Blázquez, Ortega, Gatica y Benegas, 2006).

2.5 Obstáculos epistemológicos relativos a la noción de límite según Sierpinska (1985)

Sierpinska (1985) realiza un estudio epistemológico del concepto de límite siguiendo la línea de investigación de Brousseau. Esta línea de investigación propone descubrir los obstáculos epistemológicos vinculados a las matemáticas que se enseñan en la escuela y encontrar los medios didácticos para ayudar a los estudiantes a superarlos. Cabe señalar que la investigadora considera aspectos relevantes de la noción de obstáculo epistemológico, propuestos por Bachelard, entre los que se destaca que la aparición de obstáculos es inevitable. Asimismo, refiere que no tiene sentido tratar de evitarlos, sino que debemos detenernos en el obstáculo, tomar conciencia y luego cruzarlo para mejorar en el desarrollo de su conocimiento. Partiendo de estos principios, la autora plantea que, dentro del ámbito matemático, la concepción de obstáculo tiene dos aspectos: (a) son específicos de este concepto y propios de él y (b) son tales que su conocimiento es esencial para el desarrollo de este concepto. Por ello, la investigadora sostiene que si tenemos conocimiento de las condiciones históricas en las que un obstáculo ha sido reconocido y superado, nos ayudará a comprender las causas y la esencia del mismo obstáculo presente en los estudiantes de hoy.

En la investigación, se menciona que se desarrolla un estudio de casos como método de investigación aplicado a cuatro estudiantes divididos en dos grupos de dos. A través de este método, la investigadora pretende, entre los objetivos, que los estudiantes identifiquen la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto, como límite de la pendiente de las rectas secantes y que calculen la pendiente de la recta tangente a la curva $\$ = \mathrm{VR}]"$ en el punto $" = 0$. Así pues, basándose en el análisis de los casos, mencionados anteriormente, y el estudio de la evolución histórica del concepto de límite, la autora elabora una lista de cinco grupos de obstáculos epistemológicos relativos a nuestro objeto matemático: (a) horror al infinito, (b) obstáculos relacionados a la noción de función, (c) obstáculos geométricos, (d) obstáculos lógicos y (e) el obstáculo del símbolo.

2.5.1 Horror al infinito

El infinito como tanto otros conceptos matemáticos, ha sido un tema de reflexión dentro de la comunidad matemática, debido a múltiples significaciones, contradicciones y paradojas que se evidenciaron a través de múltiples estudios e investigaciones que aparecen en su desarrollo histórico. Sin embargo, estos problemas no han desaparecido en el tiempo, poniéndose de manifiesto en los estudiantes durante el proceso de aprendizaje del límite. Por ejemplo, Rodríguez (2010) sostiene que los estudiantes traen consigo ciertas ideas acerca del infinito previas al aprendizaje del límite, como el modelo de infinito como un proceso sin fin, parte-todo y acotado vs. no acotado. De esta idea, el autor infiere que esta noción de infinito, que poseen los estudiantes, evidencia la presencia de este tipo de obstáculo epistemológico. Para comprender esta situación, se explicará, a continuación, en qué consiste este obstáculo.

La expresión de horror al infinito está asociada a Cantor, debido a que, durante muchos siglos, los matemáticos solo aceptaban el infinito aristotélico, rechazando cualquier razonamiento del infinito como un concepto terminado. En ese sentido, Costa y Otto (2005) indican que ciertos matemáticos, como Cauchy y Gauss, negaron la existencia del infinito actual, mientras que Cantor fue el primero en considerar la existencia del infinito actual, noción que ya existia. Para este matemático, un conjunto es infinito cuando se puede establecer una correspondencia biunívoca entre él y una parte propia de él.

"El horror de lo infinito es una forma de miopía que nos impide ver el infinito actual, aunque, en su forma superior este infinito que hemos creado y seguimos, y en sus formas secundarias transformadas se manifiesta nuestro alrededor y va tan lejos como para habitar en nuestra mente." Cantor (1932, citado por Sierpinska, 1985)

Esta noción se contrapone con la concepción del infinito potencial. Esta visión del infinito, concebida por otros matemáticos hasta Cantor, consistía en un conjunto sin fin capaz de incrementar (o disminuir) en forma ilimitada haciéndose mayor (o menor) que cualquier magnitud preestablecida.

Los obstáculos de este tipo fueron agrupados por la investigadora en tres grupos:

Grupo I: Este primer grupo, consta de tres obstáculos. Los cuales están ligados con el rechazo de la operación matemática para dar paso al límite y son cuatro;

Grupo II: Este segundo grupo está relacionado con los obstáculos del tipo algebraico y son dos;

Grupo III: Este tercer grupo solo tiene un obstáculo, que está asociado con el paso al límite en un movimiento físico.

Es importante señalar que cuando la investigadora se refiere al "paso al límite" entendemos que es un proceso previo a la obtención de un número real. A continuación, se describirá el grupo de obstáculos ligados al rechazo de la operación matemática para dar paso al límite.

Grupo I

(a) El paso al límite es un método de demostración, de un tratamiento riguroso que elimina el problema del infinito

Para la autora, este obstáculo se manifiesta en el método de exhaución y considera que el método permite realizar demostraciones sin llegar a definir una nueva operación matemática. Luego, describe las características del método de exhaución: la primera característica refiere que el método elimina al infinito para sus demostraciones (ver p. 30) y la segunda característica consiste en aproximar una figura por medio de otras en la se pueda medir la respectiva magnitud de manera que se vaya acercando a la magnitud buscada, tal como se ejemplificará más abajo. A partir de este método, los griegos fueron capaces de determinar áreas de diferentes figuras, volúmenes de cuerpos, longitudes de curvas, rectas tangentes a curvas. Dicha aserción, fue recogida de hechos históricos y contrastada con las respuestas proporcionadas por los estudiantes luego de realizar la construcción de la recta tangente a partir de la posición de la recta secante. De este modo, la investigadora observa que los estudiantes al momento de emplear el método de exhaución realizan el paso al límite sin realizar ninguna pregunta relacionada con el infinito. Además, considera que esta forma de determinar la recta tangente a la curva en un punto supuso una dificultad con la aritmetización del concepto, puesto que los cuatro estudiantes realizan el paso al límite empleando solo medios geométricos sin ningún recurso analítico. “Se acerca, se acerca, se acerca y en última instancia será igual a uno” (Sierpinska, 1985, p. 42).

(b) Razonamiento basado en una inducción incompleta

La autora considera que este conocimiento deja de lado el rigor griego, refiriéndose a la manera lógica y clara de trabajar por parte de los griegos dentro del ámbito de las matemáticas. Bajo esta premisa, Sierpinska sitúa este tipo de obstáculo durante el siglo XVIII, debido a que muchos descubrimientos realizados, durante esta época, estuvieron directamente relacionados con el cálculo diferencial e integral. Estos descubrimientos no consideran el rigor griego para ser justificados mediante procedimientos experimentales que tenían plena validez para la época. También, añade que este tipo de razonamiento era del tipo inductivo, haciendo uso de la inducción incompleta, la recursividad y la interpolación. Por ejemplo, la concepción desarrollada en el método de los indivisibles de Cavalieri permite determinar áreas y volúmenes por medio de la intuición geométrica, caracterizándose por el libre uso del infinito y de extensos cálculos numéricos. Este método se basa en el supuesto que una línea está formada por un número infinito de puntos, una superficie está formada por un número infinito de líneas y un volumen está formado por un número infinito de superficies.

Teniendo en cuenta lo anterior, la investigadora compara el modo de razonamiento de los matemáticos del siglo XVIII con la manera cómo los estudiantes determinan $\lim_{2\to 8} \frac{\text{^-`2}}{2}$ . Según el reporte, los estudiantes desarrollan la actividad completando una tabla, recurriendo a la intuición, a la función $\text{▪}('') = \frac{\text{^-`2}}{2}$ y a la sucesión parcial de valores con uso de la calculadora. Esto conduce a que los estudiantes aprecien cómo se comporta la función cuando se evalúan ángulos muy cercanos a cero.

(c) El paso al límite es considerado como la búsqueda de lo que conocemos por aproximaciones

Este paso al límite es considerado, por la autora, como un proceso metonímico, ya que tanto algunos matemáticos como estudiantes entrevistados designan al límite con el nombre de cercano o aproximado (causa-efecto). Por ello, se puede interpretar el funcionamiento de este obstáculo desde un punto de vista lingüístico. Por parte del estudio epistemológico, Sierpinska rastrea este obstáculo en la historia de las matemáticas. En ese sentido, la investigadora identifica que este obstáculo fue puesto en evidencia por Johannes Kepler (1571-1630). Para este último, el paso al límite no es una operación, sino una técnica infinitesimal que se focaliza en la intuición geométrica, en el libre uso del infinito y en cálculos numéricos basados en aproximaciones. Frente a este estudio histórico, la autora verifica la presencia de este obstáculo en los estudiantes. Para ello, los estudiantes completaron una tabla, la cual proporciona suficientes valores para determinar $= = \frac{\wedge\_\grave{}2}{2}$ a partir de " y $\mathrm{VR}]$", manifestando que cuando " toma valores cercanos a 0, entonces $=$ toma valores muy cercanos a 1 o aproximadamente 1. A partir de ahí, los estudiantes conjeturan de que cuando " $= 0$, entonces $= = 1$. A diferencia del ítem anterior, en el cual los estudiantes utilizan un método heurístico, en el que se encuentra implícito el proceso del paso al límite para determinar resultados cuantitativos, aquí designan al límite con el nombre de aproximación.

(d) Para justificar el resultado obtenido no se necesita hacer demostraciones rigurosas

Esto implica que los estudiantes establecen sus propias conjeturas a partir de ciertos indicios o supuestos que les permite describir una situación específica, las cuales facilitan su validez tras el análisis e interpretación de los resultados mediante un razonamiento simple, informal y a la vez intuitivo que deriva en establecer conclusiones que son consideradas validas por los estudiantes, pero que ciertamente carecen de rigor. Teniendo en cuenta estos aspectos, la autora devela que este razonamiento empleado por los estudiantes también fue empleado por algunos matemáticos. Por su parte, Sierpinska identifica, en la historia de las matemáticas, que este obstáculo está asociado con el método de la omisión de ciertos términos de Fermat. Según Ferrante (2009), el método fue aplicado a parábolas e hipérbolas para determinar máximos y mínimos. Además, es importante señalar que en esta técnica aparece una idea muy intuitiva del proceso del paso al límite sin considerar las cantidades infinitamente pequeñas. La técnica consiste en confrontar el valor de la función ▪(") con el valor de ▪(" + a) cuando E es muy pequeño. En general, estos dos valores son distintos, pero en un punto más bajo o más alto de una curva sus diferencias casi no son notorias. Entonces, cuando ▪(") y ▪(" + a) están próximos, se pueden tomar ▪(") = ▪(" + a). Además, si se divide por a , se obtendría la expresión $\frac{\text{b(2Dc)Gb(2)}}{\text{c}}$ para luego, tomar a=0. Algo parecido ocurre con la experiencia desarrollada por los estudiantes al momento de determinar $=_{\text{d}} = \frac{\text{^\_\`2}}{2}$, puesto que los estudiantes construyen una tabla de valores para VR] "d y "d para ángulos muy cercanos a cero, por ejemplo, VR] 0.0698 ≈ 0.0698 considerando 4 cifras decimales. En este sentido, los estudiantes observan que las diferencias entre las aproximaciones de "d y de VR] "d son cada vez más pequeñas. A partir de ello, concluyen que cuando los valores de "d y el VR] "d son muy próximos, se puede tomar "d = VR] "d.

Grupo II

(a) Transferencia automática de los métodos propios del álgebra para manipular magnitudes finitas a magnitudes infinitas

Al respecto, Sierpinska sostiene que la transición de la concepción acerca de lo finito a la concepción acerca de lo infinito evidencia la presencia de este obstáculo, manifestándose en la mente al momento de discutir el infinito mediante el uso de propiedades que se da a lo finito y limitado. Asimismo, con el fin de aclarar lo expuesto anteriormente, desde un punto de vista epistemológico, la autora refiere que este obstáculo fue notado por Galileo a principios del siglo XVII cuando comparara la cantidad de puntos que tienen dos circunferencias concéntricas de distinto radio. Este hecho permite a Galileo establecer una biyección entre las dos circunferencias, contradiciendo el principio de Euclides acerca “*del todo es mayor que la parte*”. Como resultado, de este análisis, realiza algunas consideraciones: (a) no se pueden comparar entre sí magnitudes infinitas y (b) los atributos *“igual”, “mayor” y “menor”* no son aplicables al infinito, sino solo a cantidades finitas. Por otro lado, la investigadora sostiene que el uso incorrecto al momento de manipular el infinito también es síntoma de este obstáculo. Es decir, el infinito a veces es utilizado como si fuera un número, lo que se ve representado en la fórmula $\infty.\mathbf{f}.\mathbf{g}.\frac{\mathrm{B}}{4.<}=\frac{\mathrm{h}.\mathbf{i}}{4}$ que aparece por primera vez, en la obra de Wallis *Arithmetica infinitorum* (Boyer, 1960, citado por Sierpinska, 1985). Por lo que respecta a los estudiantes, Sierpinska afirma que este obstáculo podría aparecer en el momento que los estudiantes aplican métodos algebraicos para justificar sus resultados. Para precisar, la autora añade que este obstáculo no es muy explícito entre los estudiantes, sin embargo, ciertos hechos permiten a la autora distinguir la presencia de dicho obstáculo. Por ejemplo, cuando a los estudiantes se les pide determinar la ecuación de la recta tangente a la curva dándoles el punto común y al no poder determinar la ecuación de la recta por necesitar otro punto, los estudiantes plantean un sistema de ecuaciones considerando otro punto para determinar la pendiente de la recta tangente. Este hecho, para la autora, está vinculado con el método de Descartes para la obtención de ecuaciones de rectas tangentes sin recurrir al cálculo diferencial. El método consiste en determinar la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto de dicha curva, para lo cual se debe tomar un segundo punto variable sobre la curva, y determinar la ecuación de la circunferencia con centro en el eje de abscisas y que pase por los dos puntos. Asimismo, al igualar a cero el discriminante de la ecuación cuadrática que se genera de las intersecciones entre la circunferencia y la curva, se determina el centro de la circunferencia. Una vez conocido el centro de la circunferencia, se puede determinar rápidamente la ecuación de la recta tangente.

(b) La transferencia de las propiedades de los términos de una sucesión a su límite

Este obstáculo, como señala la autora, es, en esencia, propio del principio de continuidad de Leibniz. El principio trata de explicar el paso de las razones diferenciales finitas a las razones infinitesimales. Al respecto, Vargas (2009) señala que el principio se centra en proporcionar un fundamento para comprender los infinitesimales envueltos específicamente con el cálculo durante el siglo XVIII. Por otro lado, este principio permite justificar el paso al límite, el cual se puede observar a través de la manipulación de los cálculos obtenidos por Leibniz: "la diferencia no se asume cero hasta que el cálculo es purgado tanto como sea posible por omisiones legítimas, y reducido a razones de cantidades no evanescentes y finalmente llegamos al punto donde aplicamos nuestros resultados al último caso". (Boyer, 1959, Citado por Delgado, 2014)

Cabe mencionar que Sierpinska, no logra evidenciar la presencia de este obstáculo epistemológico en el trabajo didáctico con sus estudiantes, solo facilita el análisis histórico acerca de este obstáculo.

Grupo III

(a) Obstáculo físico

La autora sostiene que el hecho de saber si el límite se alcanza o no se alcanza es un indicio de este tipo de obstáculo. En ese sentido, Sierpinska consideraba que el proceso llamado dinámico del límite será una razón por la cual los estudiantes interpreten que el límite se alcance o no se alcance, debido a que los estudiantes determinan el paso al límite manipulando registros numéricos, utilizando para ello aproximaciones. En función de ello, la autora trae a colación que, precisamente, este aspecto dinámico del límite fue criticado por Weierstrass. Por ejemplo, podemos hacer referencia el trabajo de Fernández-Plaza (2010). En este trabajo, se señala que este matemático criticó la expresión "la variable se acerca a un límite", puesto que este razonamiento requiere de tiempo y movimiento. Desde esta perspectiva, formula una definición muy formalista, en la cual indica que todo límite se alcanza. Asimismo, Sierpinska expresa que le resulta curioso que este tipo de duda se haya generado después de Weierstrass, ya que, en investigaciones de principios del siglo XX, se plantea de forma explícita la idea que el límite no se alcance. Por otro lado, esta concepción es observada por la investigadora en los estudiantes al momento de determinar $=_{\mathrm{d}} = \frac{\hat{}\_\grave{}2}{2}$, como argumento en el desarrollo de la experiencia, se da el caso que uno de los estudiantes propone que $=_{\mathrm{d}}$ tiende a 1, pero no es igual a 1.

2.5.2 Obstáculos relacionados con el concepto de función

Por su parte, Sierpinska considera que el surgimiento de una formulación clara del concepto de límite está asociado a la aparición del concepto general de función. Este último concepto permite, durante el siglo XIX, liberar al concepto de límite de intuiciones geométricas y físicas. En esta etapa, se pone énfasis en darle rigor a la definición de límite. Para ilustrar esto último, la investigadora recurre a las definiciones planteadas por d’Alembert, Cauchy y Weierstrass.

Respecto a la primera definición, Blazquez, Ortega, Gatica y Benegas (2006) señalan que D’Alembert desarrolla un nuevo enfoque acerca de los límites modificando el método de las primeras y últimas razones de Newton. Se hará referencia a este enfoque líneas más abajo. Por otro lado, Sierpinska sostiene que esta concepción no fue apreciada durante esta etapa, debido a que, en primer lugar, esta teoría no está asociada a la noción de función. En segundo lugar, se trató la definición desde un enfoque numérico y no de magnitudes. Por último, se empleó muchas expresiones que no estaban definidas para la época como “aproximación”, “diferencia entre dos cantidades”, “inasignable”, etc.

> Se dice que una cantidad es límite de otra cantidad, cuando la segunda puede aproximarse a la primera más que cualquier cantidad dada por pequeña que se la pueda suponer, sin que, no obstante la cantidad que se aproxima pueda jamás sobrepasar a la cantidad a la que se aproxima; de manera que la diferencia entre una tal cantidad y su límite sea absolutamente inasignable. (D´Alembert y Diderot, 1755, p.542)

Con relación a la segunda definición, Blazquez y Ortega (2006) refieren que Cauchy retoma el concepto de límite dado por D’Alembert. Esta definición es de índole aritmético, es decir, más rigurosa que la anterior, pero aún imprecisa.

En ese sentido, Sierpinska asegura que el concepto de función se verá reflejado en la definición del límite, como una asignación de valor numérico, es decir, una variable es una cantidad a la que se le asigna valores diferentes. Asimismo, al igual que la definición anterior, se emplea expresiones no definitivas durante la época, como “se aproximan indefinidamente”

> **Cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás.** (Cauchy 1821, p. 6)

En cuanto a la última definición, Molfino y Buendía (2010) sostienen que Weierstrass introduce la representación simbólica del límite, tratando de evitar el uso de la expresión **“la variable se aproxima al límite”**. Bajo esta concepción, una variable será un símbolo que sirve para designar cualquier elemento del conjunto de valores que le puede atribuir.

“Si, dado cualquier número positivo ε, existe un n_8 tal que para $0 < n < n_8$, la diferencia $f(x_8 \pm n) - L$ es menor en valor absoluto que ε entonces L es el límite de $f(x)$ para $x = x_8$” (Sierpinska, 1985, p.5).

A continuación, se menciona algunos aspectos de este obstáculo:

(a) Obstáculo relacionado con la definición de Cauchy

Este obstáculo, como sostiene la autora, es, en esencia, propio de la definición de límite dada por Cauchy, que vimos anteriormente. Frente a este estudio histórico, la autora evidencia la presencia de este obstáculo en los estudiantes al momento que ellos determinan $=_{d} = \frac{\wedge\ \grave{}2}{2}$. Para ello, los estudiantes no realizan la división entre VR]"$_d$ y "$_d$, sino que van emitir su respuesta mediante la comparación entre los valores del VR]"$_d$ y de "$_d$. A partir de lo último, los estudiantes observan que las diferencias entre las aproximaciones de VR]"$_d$ y de "$_d$ son cada vez más pequeñas, concluyendo que $=_{d} = \frac{\wedge\ \grave{}2}{2} = 1$.

(b) La atención está dirigida exclusivamente en el lado relacional de la función

Para Sierpinska, este obstáculo se manifiesta cuando se busca determinar el límite de una función centrando la atención en la fórmula de la función, dejando de lado el conjunto de valores de x e y. Por su parte, el estudio histórico del límite permite a la autora situar este obstáculo durante la segunda mitad del siglo XVIII. Refiere que, durante esta época, los trabajos desarrollados por Euler y Lagrange acerca del cálculo diferencial e integral, estuvieron basados en el análisis de ciertas funciones que solo se podían emplear en un campo muy limitado. Por ejemplo, el trabajo desarrollado por Lagrange sobre funciones de series potencias se dio en un campo limitado, debido a que en estos trabajos se hizo creer que se podía evitar los límites sin darse cuenta de que la convergencia de las funciones en mención necesitaba del concepto de límite.

Por otro lado, respecto al estudio didáctico, la autora sostiene que previo al cálculo de un límite, se debe tener en cuenta si el valor de la función en ese punto existe o no existe, y además considerar tanto el dominio como el rango de la función, ya que los estudiantes centran su atención en $y = f(x)$ dejando de lado el análisis del comportamiento que puede presentar $y = f(x)$ en una vecindad de x_0.

(c) Reducción de funciones monótonas

Para la autora, la esencia de este obstáculo radica en la idea de considerar únicamente funciones monótonas para la formulación del concepto del límite. Aunque el trabajo de Sierpinska no hace referencia explícita de este tipo de obstáculo, se señala que este tema fue abordado por Aline Robert (1983). Robert considera que el hecho relevante que caracteriza esta concepción fue enunciado por Cauchy, en su libro Cours d'analyse (1823). Para esta autora, Cauchy sabía muy bien que las sucesiones convergentes no necesariamente son monótonas, debido al vocabulario empleado para expresar el teorema: “Cuando los **valores numéricos sucesivos de dicha variable disminuyen indefinidamente**, de tal manera que caen por debajo de cualquier número dado, esta variable se convierte en lo que llamamos infinitesimal, o una cantidad infinitamente pequeña. Una variable de este tipo tiene a cero como su límite” (Cauchy, 1823, p.7).

(d) La no distinción de la noción de límite y de la noción de reducción de funciones monótonas

Sierpinska (1985) afirma que la naturaleza de este obstáculo radica al momento de analizar funciones, en especial, cuando se habla respecto a sucesiones, ya que no se logra distinguir la función de todos sus valores. Esto sucede, por ejemplo, cuando se quiere determinar el límite de una sucesión, porque este va a depender del análisis de todos los valores de la sucesión. No obstante, la autora señala que podemos encontrar errores en el ámbito de la matemática, por ejemplo, cuando se consideró que el límite de la sucesión $=` = p^{\frac{B}{`}} \frac{\mathrm{Vq}\ 10\ ]\mathrm{U\ rqsqrR} =]}{1\ \ \mathrm{Vq}\ 10\ \mathrm{rqsqrR} =]}$ es igual 1. Por otro lado, la autora indica que este obstáculo ha surgido en la experiencia realizada con sus estudiantes, al momento de determinar el valor de $=_{d} = \frac{\hat{}\ `2_{t}}{2_{t}}$ considerando ciertos valores para $"_{d}$ en grados sexagesimales: 32, 16, 8, 4, 2, 1. A partir de ello, distingue que los estudiantes no consideran todos los términos que tiene la sucesión.

2.5.3 Concepción geométrica del concepto de límite

(a) Una idea geometrica de la diferencia entre un tamaño variable y un tamaño constante, el cuales su límite

Sierpinska (1985) sostiene que este obstáculo se revela en dos concepciones. La primera aparece al momento de determinar el área del círculo como el límite de polígonos inscritos y circunscritos, cuando se dice: “cuanto mayor es el número de lados del polígono, más se acerca la forma del polígono a la forma del círculo.” La segunda concepción, consiste en determinar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto, como la pendiente de la recta secante variable, cuando se dice: “la posición de la recta secante difiere tan poco como queramos de la posición de la recta tangente.” Para la autora, esta idea de diferencia con la que se está tratando el método de exhaución ha sido una de las razones por la que se ha tenido dificultades para convertir este método en un teorema, debido a que el término diferencia cambia de significado con el cambio de tamaño.

“El término diferencia cambia de significado con el cambio de tamaño en cuestión y esto puede ser una de las razones por las que hemos tenido tantos problemas para convertir este método en un teorema general” (Sierpinska, 1985, p.52).

Por otro lado, la reflexión epistemológica acerca de este obstáculo aborda el término diferencia que aparece en las diversas concepciones acerca de las definiciones del límite propuestos por D’Alembert, Cauchy y Weierstrass. Estas definiciones están basadas en la idea “topológica” de proximidad, entre los valores de la variable *x* con x_0 y los de la función *f* (*x*) con *L*. Por ejemplo, cuando decimos el valor absoluto de la diferencia aritmética entre la función y su límite se puede enunciar como |'(") − v| < [para cualquier [> 0. Asimismo, la autora afirma que, en la experiencia desarrollada por los estudiantes, este obstáculo se ha manifestado en el momento que determinan la pendiente de la recta tangente por medio de las pendientes de las rectas secantes, ya que los estudiantes presentan dificultades para interpretar los cambios de significado a partir de los cambios de tamaño entre las pendientes de las rectas involucradas. Esto se evidencia, en el hecho que uno de los estudiantes rechaza la expresión “aproximación” utilizado por otro de los estudiantes, dado que es considerado por el primer estudiante como un término ambiguo o no matemático. Al respecto, Sierpienska plantea que este rechazo se debería, probablemente a que el término aproximación no pertenece al lenguaje matemático usado en clase.

(b) Falta de un concepto bien formulado de número real

La autora señala que la concepción de límite influyó en la definición de número real. Esto fue posible, debido a que a la noción de número real se vuelve clara después de que se haya entendido la noción del límite. En ese sentido, este obstáculo surge de cuestiones que traten de especificar si las intuiciones reveladas al momento de realizar el paso al límite son geométricas o numéricas. A su vez, la autora sostiene que podemos hablar acerca de una intuición geométrica cuando la posición de la recta secante toca o pasa por uno de los puntos muy cercanos al punto de tangencia. Esta situación plantea la necesidad de los estudiantes por recurrir a las pendientes de las rectas secantes para determinar la pendiente de la recta tangente a la función VR]" en " = 0. En dicha experiencia, los estudiantes construyen una sucesión numérica de las pendientes rectas secantes $=_d = \frac{\hat{}\_\grave{}2_t}{2_t}$. A partir de los resultados obtenidos, concluyen que la sucesión $=_d = \frac{\hat{}\_\grave{}2_t}{2_t}$ es igual a 1 y que la recta será tangente a la función VR]" en " = 0 cuando la pendiente sea igual a 1.

2.5.4 Obstáculos lógicos

Este tipo de obstáculo está relacionado con el lado lógico de la definición del límite, es decir, que la definición del límite tiene una carácter formal, inequívoco, conciso y exacto, presentando una descripción formal por medio de símbolos como [, x y cuantificadores. De ahí, se puede encontrar los siguientes obstáculos: (a) supresión de los cuantificadores o su orden y (b) el obstáculo relativo al símbolo en la operación de paso al límite. A continuación, se describirá el primero de los obstáculos mencionados, porque el segundo se desarrollará en el subcapítulo 2.5.5.

(a) Supresión de cuantificadores o de su orden en la definición formal del límite

La autora señala que la supresión de los cuantificadores suele darse en el momento que se quiere definir el límite mediante el uso de un lenguaje natural y no simbólico. Para el caso, propio del límite, el lenguaje natural es el lenguaje que hablamos de manera ordinaria, donde no les prestamos mucha atención al orden de los signos matemáticos ni a las diferencias que puedan surgir por cambiar dicho orden. Otro aspecto de este obstáculo, relacionado también con el orden de los cuantificadores, es la dificultad de mirar el eje *x* en el eje y mientras se estudia el concepto de límite de funciones, debido a la idea previa de función, de llevar del eje *x* al eje *y*. Así, por ejemplo, se menciona que el límite de una función es *L* cuando *x* tiende a x_0. Por otro lado, desde un punto de vista histórico, Cauchy no distingue claramente la dependencia entre la vecindad de los valores donde se determina el límite con la vecindad de valores del límite.

> […], cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás. (Cauchy 1821, p.6)

Hay que mencionar, además, que los cuantificadores no han aparecido en ninguna parte de la experiencia. Sin embargo, Sierpinska manifiesta que la presencia de este obstáculo se ha dado en el momento en que los estudiantes refieren que cuando " toma valores cercanos a cero, entonces ^_` 2 / 2 está alrededor de 1. En otras palabras, se pudo haber dicho que los valores de la función ^_` 2 / 2 difieren tan poco como queramos de 1 para valores de " lo suficientemente cercanos a 0.

2.5.5 El símbolo

Para la autora, este obstáculo está vinculado fuertemente con la resistencia a introducir un símbolo en la operación del paso al límite. Teniendo en cuenta el análisis epistemológico, encontramos que el símbolo de "XqQ." aparece por primera vez en el libro Exposition elementaire des principes des calculs´ superieurs cuyo autor L'Huilier (L'Huilier, 1787, p. 31), donde se menciona que este símbolo se utilizará para abreviar la escritura y facilitar el cálculo, siendo estos dos argumentos los que dan inicio a la notación del límite. Más adelante, Cauchy en su obra Cours d'analyse (Cauchy, 1823, p. 12), indica que es posible hacer uso de un símbolo en la operación del paso al límite.

"… cuando una cantidad variable converge hacia un límite fijo, a menudo es útil indicar este límite con especial notación" (Cauchy, 1823, p. 12).

Previo a Cauchy no se hacia el uso de una notación especial para el límite. Es decir, el lenguaje empleado es puramente verbal "límite". Esto último lo podemos ver expresado en el trabajo de D’Alembert al momento de aclarar algunas proposiciones y propiedades relacionadas con el límite.

“[…] *el límite de* $\frac{\mathrm{EEGF}}{\mathrm{EGF}}$ es $\frac{\mathrm{EE}}{\mathrm{EGF}}$ ” (Ruch, 2017, p. 1).

En ese sentido, la autora afirma que la aparición tardía del símbolo se debió a que este no fue necesario, ya que la operación del paso al límite no fue considerada como una operación matemática aparte. Es decir, para muchos matemáticos como Fermat, Newton, Leibniz, la operación del paso al límite fue parte de otras operaciones como el cálculo de fluxiones, diferencial e integral, en estos casos, se empleaba el signo de igualdad. Por ejemplo, un hecho que se considera relevante, que caracteriza está concepción, fue enunciado por Newton en su libro Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (1687), el cual señalaba que este matemático no consideró necesario utilizar el símbolo del límite, sino solo fue necesario emplear el signo de igualdad.

> Cantidades y razón de cantidad, que en cualquier intervalo finito de tiempo convergen continuamente a la igualdad, y que antes del final de dicho tiempo se aproximan una a la otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finamente iguales. (Newton, 1687, p. 95)

Por parte de Cauchy, este matemático se vio en la necesidad de emplear un símbolo en la operación del paso al límite, debido a que admitió la noción de límite como una noción básica para otras operaciones como la continuidad, derivada e integral. Por parte de la experiencia, Sierpinska señala que ninguno de los estudiantes empleó el símbolo del límite, en la cual se refirió, además, que el obstáculo se manifestó en los estudiantes, al momento de determinar $=_{d} = \frac{\hat{}\,`2^{t}}{2_{t}}$, concluyendo que esta sucesión numérica es igual a 1 en lugar de $\lim_{2\to 8} =_{d}('') = 1$.

2.6 Teoría de Situaciones Didácticas

La Teoría de Situaciones Didácticas tiene su origen en Francia en el periodo 1970-1990. Esta teoría es atribuida a Guy Brousseau y fue desarrollada para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y se caracteriza por las interacciones que tienen los estudiantes por medio de problemas o tareas específicas, concebidas por el docente con el fin de motivar a los estudiantes para que construyan su propio conocimiento, a partir de las interacciones en las que se encuentran inmersos.

Asimismo, esta teoría considera que la problemática acerca de los obstáculos epistemológicos es esencial para el análisis y la construcción de situaciones didácticas. Frente a esta problemática, Perri-Glorian (1991, citado en Brousseau, 1997), sostiene que la noción de obstáculo surge como necesidad de la teoría de situaciones didácticas, debido al hecho, que los conocimientos propios de los estudiantes están enlazados a otros conocimientos de forma incierta e infundada.

> La noción de obstáculo aparece muy rápidamente como una necesidad de la teoría porque, como resultado del aprendizaje por adaptación, los conocimientos construidos por los estudiantes son muy a menudo locales y están vinculados a otros conocimientos de una manera "contingente e injustificada". (Perri-Glorian, 1991, citado en Brousseau, 1997).

Por ello, Broussaeau considera, que el estudio de los obstáculos intrínsecamente relacionados con el conocimiento permitirá elaborar situaciones didácticas para la superación de los mismos.

2.7.1 Importacia de la noción de obstáculos en la enseñanza por medio de problemas

(a) Interacciones

Para Brousseau, las interacciones son un conjunto de acciones reciprocas que asumen ciertas instituciones e individuos alrededor de tareas o situaciones problemas que hacen necesaria la creación, la transformación, el intercambio y la difusión de conocimientos matemáticos. Este proceso de producción del conocimiento matemático se puede llevar a cabo de dos maneras, a través de una interacción llamada constante, ya que se da entre el estudiante con situaciones problemáticas, o de una interacción llamada dialéctica que se da en el momento que el estudiante antepone y culmina sus acciones. Dicho de otro modo, en esta última interacción, el estudiante involucra conocimientos anteriores que van a estar sujetos a revisión, a modificación o a rechazo en la formación del nuevo conocimiento. Además, sostiene que el objetivo principal de la didáctica es estudiar las condiciones que componen y fundamentan las situaciones o los problemas propuestos a los estudiantes, las cuales permiten favorecer la adquisición, el funcionamiento y el rechazo de un nuevo conocimiento.

Además, sostiene que el objetivo principal de la didáctica es estudiar las condiciones que componen y fundamentan las situaciones o los problemas propuestos a los estudiantes, las cuales permiten favorecer la adquisición, el funcionamiento y el rechazo de un nuevo conocimiento.

(b) Condiciones

Según Brousseau, los estudiantes fijarán su interés en una situación o problema propuesto dependiendo directamente de lo que aquí quieran comprometer, meter a prueba o quieran invertir; así como también la importancia y consecuencias que va a tener para los estudiantes los rechazos por los que va a tener que pasar y, además, la frecuencia con la cual se cometen los errores.

2.7.2 La noción de obstáculo

(a) Obstáculo epistemológico

De acuerdo a Brousseau, el conocimiento se adquiere a través de un proceso que puede aplicarse tanto a la epistemología o la historia de las ciencias como al aprendizaje y a la enseñanza. En cualquiera de los dos casos, el conocimiento se plantea en términos de la noción de obstáculos.

(b) Manifestación de los obstáculos en didactica de las matemáticas

- **Errores**

Brousseau considera que un obstáculo se manifiesta por los errores cometidos por los estudiantes, los cuales no son fruto del azar. Los errores van a ser fugaces, erráticos, reproducibles y persistentes. Estos errores, en un mismo estudiante, están vinculados mediante una idea innata por una forma de conocer, por una idea razonable sin ser apropiada y que ha tenido éxito en determinadas situaciones. No van a ser necesariamente evidentes. Además, estos errores no desaparecen de forma inmediata y se resisten para luego reaparecer, manifestándose en los estudiantes tiempo después.

- **Franqueamiento**

  La idea fundamental consiste en elaborar un conjunto idóneo de situaciones nuevas no entendibles por el estudiante y que logren desestabilizar sus conocimientos de forma necesaria para permitir un replanteamiento o el rechazo. Además, Brousseau sostiene que el proceso de franqueamiento de un obstáculo tendrá la misma exigencia que el establecimiento de un conocimiento nuevo.

- **Características informacionales de un obstáculo**

  Un obstáculo va a ser el resultado de la interacción de un estudiante con una situación o problema propuesto que hace el conocimiento interesante. Este conocimiento, el cual Brousseau llama interesante, es un conocimiento que considera el óptimo dentro de un conjunto que poseen ciertas características numéricas informacionales.

  También, el autor sostiene que la interacción entre el conocimiento, el estudiante y el medio convergen en concepciones erróneas. Estas concepciones van a ser lideradas por las condiciones de interacción que van a ser modificables. Este hecho va a fundamentar el propósito de la didáctica.

  Desestabilizar un conocimiento en los estudiantes requiere invertir sus concepciones dentro de una gran cantidad de situaciones, las cuales serán del tipo informativas totalmente diferenciadas unas de otras.

2.7.3 Origen de los diversos obstáculos didacticos

- **Origen de un obstáculo**

  Brousseau va a considerar a los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico. Incriminar los sistemas de interacción, estudiante-situación y la interacción dialéctica van a ser efecto de la concepción de un conocimiento evocado anteriormente. Además, plantea el origen que pueden tener los obstáculos didácticos, ya sea origen ontogenético, de origen didáctico y de origen epistemológico.

- **Obstáculos de origen ontogenético**

  Los obstáculos de origen ontogenético están relacionados con las limitaciones del sujeto (en nuestro caso estudiantes) en alguna etapa de su desarrollo.

- **Obstáculos de origen didáctico**

  Los obstáculos de origen didáctico van a depender de una opción o de un proyecto de un sistema educativo.

- **Obstáculos didácticos de origen epistemológico**

  Los obstáculos de origen epistemológico son aquellos que son esenciales y van a estar relacionados con el mismo concepto, el cual puede encontrarse en la historia del propio concepto.

2.7 Metodología de la investigación

En este apartado, se describirá de forma resumida el método y el tipo de investigación que se seguirá, y, a su vez, argumentaremos su elección en el campo de la educación matemática. Luego, se explicará en detalle los procedimientos metodológicos seleccionados, enfatizando los aspectos relevantes que respaldan y sustentan nuestra investigación.

2.7.1 Metodología de la investigación y procedimientos metodológicos

La presente tesis es una investigación de tipo cualitativo de carácter explicativa, ya que se centra en explicar el origen y la procedencia de los errores que comenten los estudiantes durante el aprendizaje del límite. Además, se considera que, acorde a la particularidad de nuestra metodología de investigación, nuestro estudio es flexible, dado que haremos adaptaciones de las herramientas teóricas acerca de errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas propuesto por Socas (1997) a los listados aportados por Sierpinska (1985) y Cornu (1981) relativos a los obstáculos epistemológicos del límite. La elección de nuestro tema de investigación está basado en ciertos principios fundamentales sobre lo que entendemos por investigación cualitativa y el meta-análisis aplicados en la educación matemática, los cuales presentamos a continuación.

En nuestro trabajo, consideramos, en general, lo señalado por Martinez (2006) acerca de un estudio cualitativo. El investigador afirma que este tipo de investigación tiene como finalidad conseguir una descripción exacta del objeto de estudio y que tiene que estar adecuada con el origen de la realidad estudiada, de manera que los hechos guarden un vínculo y una organización bien entrelazada.

“[…] la investigación cualitativa trata de identificar la naturaleza profunda de las realidades, su estructura dinámica, aquella que da razón plena de su comportamiento y manifestaciones” (p. 128).

Asimismo, desde el punto de vista del autor, cualquier enfoque, ya sea cuantitativo o cualitativo, tiene dos centros básicos de actividad, los cuales consisten en lo siguiente:

1. Recoger toda la información pertinente y suficiente para alcanzar o cumplir ciertos objetivos que se hubiesen trazado o para dar solución al problema.
2. Organizar la información de acuerdo con el propósito de manera coherente y lógica, en otras palabras, se debe diseñar una estructura lógica, un modelo que permite integrar toda la información.

De este modo, en principio, esta investigación tendrá predominio de recolección de información contenida en investigaciones relacionadas con los errores, las dificultades y los obstáculos que presentan los estudiantes durante el proceso de aprendizaje del límite. No obstante, a medida que estemos cerca del final de la investigación, el balance cambiará hacia la categorización e interpretación de los errores cometidos por los estudiantes, de acuerdo con su origen y su procedencia.

Así mismo, una investigación bibliográfica se realiza preferentemente con documentación escrita. Además, este tipo de investigación, en particular, se realiza a partir del fichaje de lecturas, lo cual ayudará a organizar de manera sistemática los registros relacionados con la información. Este tipo de investigación también recibe el nombre de estudio documental, pues entre los documentos a analizar se disponen de libros, tesis académicas, revistas, periódicos, diarios personales y autobiografías. Entre los diferentes tipos de estudios bibliográficos, se destacan tres tipos: (a) del tipo meta-análisis, (b) del tipo estado del arte y (c) los estudios típicamente históricos. De lo anterior, se puede ubicar nuestra investigación dentro del primer tipo.

Diversos autores han propuesto definiciones con orientaciones similares acerca de lo que se entiende por meta-análisis, por ejemplo, Fiorentini y Lorenzato (2006) y Rodrigues (2002).

Por un lado, Fiorentini y Lorenzato apuntan refiriéndose al meta-análisis lo siguiente: “la revisión sistemática de otras investigaciones, buscando realizar una evaluación crítica de ellas y/o producir nuevos resultados o síntesis a partir de la confrontación de esos estudios, trascendiendo aquellos anteriormente obtenidos” (p. 103).

Por otro lado, Rodrigues (2002) refiere que un estudio del tipo meta-análisis cualitativo ofrece la posibilidad de realizar una revisión crítica de otros estudios contemplados en la misma área de investigación. La intención de este tipo de estudio es proporcionar una visión más amplia de una problemática previamente identificada y discutida.

"identificar, a través de determinadas categorías, semejanzas y controversias en una cantidad de estudios de la misma área de investigación. Se trata, en realidad, de un proceso de descripción interpretativa, orientado por determinadas categorías teóricas" (p. 3).

Nuestro trabajo cumple con los lineamientos de un meta-análisis. De acuerdo con Florentini y Lorenzato (2006) y Rodrigues (2002), estos son exploratorios (es una primera investigación en la que se incluye una amplia revisión de la literatura acerca de los obstáculos epistemológicos del límite), descriptivos (se describen investigaciones que utilizan la literatura en mención, de modo que permita validar una nueva herramienta que facilite el rastreo de los obstáculos epistemológepistemológicos relativos al límite, proponiendo una nueva herramienta de análisis dentro de la literatura ya existente).

Como se menciona anteriormente, respecto al meta-análisis, consideramos que nuestro trabajo es inicialmente descriptivo y luego analítico. Primero, se utiliza el método descriptivo, debido a que ofrecemos una revisión crítica acerca de los obstáculos epistemológicos del límite. Nuestra intención es proporcionar una lista unificada que sintetice los listados existentes acerca de los obstáculos epistemológicos. A medida que se avanza en la elaboración de la herramienta, consideramos que el trabajo va mejorando. Esto es por la interacción entre los datos recogidos y la teoría referida a los obstáculos epistemológicos relativos al límite que está en concordancia con el propósito de nuestra investigación. Segundo, el trabajo utiliza una metodología analítica, ya que validaremos la herramienta mediante el análisis de las respuestas de los estudiantes en investigaciones que involucren la literatura en mención.

A continuación, se explicará los pasos que se siguieron para la construcción de la herramienta:

En primer lugar, se realizó una evaluación de la heterogeneidad entre los listados referidos a los obstáculos epistemológicos del límite. Se trata de analizar hasta qué punto los trabajos de Sierpisnka (1985) y Cornu (1981) pueden combinarse en un único listado.

Luego, realizamos la síntesis de los resultados obtenidos de los dos trabajos antes mencionados, la cual es fundamentada en la teoría acerca de errores y dificultades en aprendizaje de las matemáticas propuesto por Socas (1997). Como ya adelantamos antes, los resultados obtenidos al combinarse los resultados de los estudios realizados por Sierpinska y Cornu, siendo enmarcados en el planteamiento de Socas, los organizamos en un cuadro al que hemos llamado herramienta que facilita el rastreo de los obstáculos epistemológicos del límite.

Finalmente, como en cualquier otra investigación, en un meta-análisis se debe valorar la herramienta. La valoración de la herramienta fue complementada con su validación. Es decir, analizamos las respuestas de los estudiantes en otras investigaciones que utilizan la literatura acerca de obstáculos epistemológicos relativo al límite, mostrando el vínculo existente entre los obstáculos epistemológicos, los errores y las dificultades relativos al límite.

CAPÍTULO III: UNIFICACIÓN DE CRÍTERIOS REFERIDOS A LOS OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS DEL LÍMITE

En este capítulo, se evidenciará la herramienta propuesta, la cual está basada en las conexiones existentes entre los obstáculos epistemológicos relativos al límite con los errores y las dificultades en el aprendizaje del mismo. Se inicia el capítulo presentando una breve descripción sobre el origen de los errores en el aprendizaje de las matemáticas, destacando las aportaciones de Brousseau y Socas. Posteriormente, se describirá las conexiones existentes entre los errores, las dificultades y los obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas desde el enfoque planteado por Socas (1997). Luego, se presentará similitudes, complemetariedad y redundancia entre los trabajos de Sierpinska (1985) y Cornu (1991), lo que nos permitirá realizar la articulación entre dichos trabajos, y, finalmente, se mostrará la herramienta elaborada y algunas sugerencias para su uso.

3.1 Origen de los errores

En el capítulo 2, se ha analizado con cierto detalle las causas y motivos posibles acerca de los errores, dificultades y obstáculos resistidos frecuentemente por los estudiantes cuando se enfrentan a nuevos conocimientos. Este hecho, que no es casual, es consecuencia de conocimientos y experiencias previas.

No obstante, en el ámbito de educación matemática, un error cometido por un estudiante es una respuesta incorrecta a una pregunta o tarea. En ese sentido, se ha observado que distintos autores, como Socas, se han referido a las causas de estos errores, producidos por los estudiantes durante el aprendizaje de las matemáticas, los cuales son considerados como indicadores de la presencia de una dificultad o un obstáculo.

Asimismo, el análisis de los errores cometidos por los estudiantes permite apreciar aquellos procesos y habilidades que realiza el estudiante al momento de interiorizar conceptos nuevos. Esta problemática ha permitido que algunos investigadores, destacando el trabajo también de Socas, expliquen las causas por las cuales los estudiantes presenten dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.

En este marco, los errores persistentes al realizar una tarea no son considerados como simples equivocaciones, ya que van a tener raíces más profundas. Estos errores, como señala Socas, están ligados con ciertas dificultades que se conectan en redes más complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos.

Nuestra investigación fija, de manera explícita, un punto de vista al momento de observar e interpretar investigaciones relacionadas con errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En la Teoría de Situaciones Didácticas, esta condición se concreta en la noción de obstáculo, debido a que un conocimiento anterior que tuvo validez en cierto contexto se revela en forma ineficaz fuera de este, y puede ser fuente de errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.

En general, los errores son elementos esenciales en investigaciones en didáctica de la matemática, los cuales son considerados como indicadores de la compresión de algún concepto por parte de los estudiantes. Por tal motivo, muchos investigadores como Socas ponen énfasis en que estos errores pueden provenir predominantemente de alguna dificultad que se pueden abordar desde diferentes perspectivas, tales como propias del objeto matemático, el desarrollo del proceso de pensamiento, los procesos de enseñanza, los procesos cognitivos y falta de una actitud racional hacia las matemáticas. Entonces, si el error es reiterativo y persistente en los estudiantes, se considera una manifestación de un conocimiento inadecuado que tendrá su origen en un obstáculo. Como se puede apreciar en la figura, se muestra las conexiones entre los obstáculos, los errores y las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Por ello, el sentido de las flechas en la figura 6 representa el origen que puede tener los errores que cometen los estudiantes durante el aprendizaje de las matemáticas. Por otro lado, como se puede observar en la figura 6, los obstáculos no tienen conexión con las dificultades. Esto último, como sostiene Brousseau (1983), se debe a que un obstáculo es un conocimiento que se revela como un error en el momento que los estudiantes están frente a un nuevo conocimiento. Cabe señalar que un obstáculo dentro del proceso de aprendizaje de las matemáticas es un concepto más complejo de comprender que las dificultades, puesto que las dificultades solo describen las limitaciones que presentan los estudiantes en el ámbito de las matemáticas.

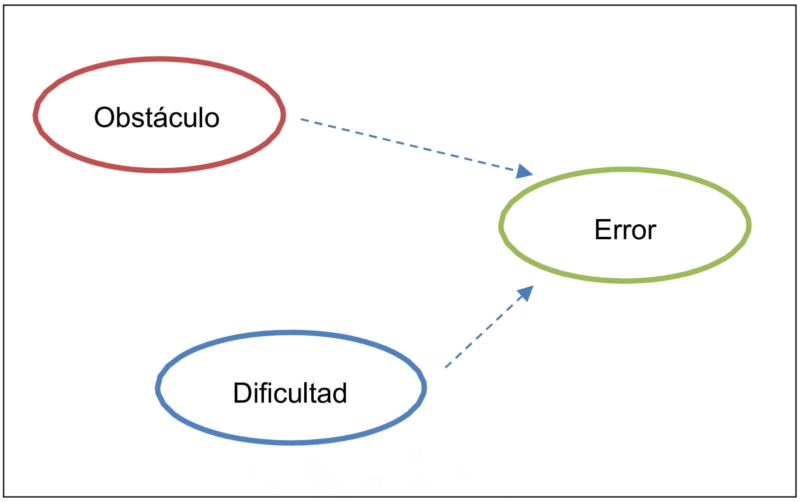


Figura 6. Origen del error

3.2 Articulación de los errores, dificultades y obstáculos en el aprendizaje de matemáticas desde el marco de Socas

La categorización de Socas, tanto de los errores como de las dificultades en los que incurren los estudiantes, nos hace posible centrar nuestra atención en aquellas conexiones que se generan con ciertos procedimientos, hechos o ideas relacionadas con matemática. En ese sentido, este autor describe, como vimos anteriormente, errores comunes cometidos por los estudiantes, los cuales son atribuidos, ya sea a un obstáculo o a la ausencia de sentido, o actividades afectivas y emocionales.

Uno de los principales errores que observamos tiene su origen directamente en un obstáculo. Al respecto, como señala Brousseau, el error de este tipo es efecto de un conocimiento anterior que fue válido para enfrentar determinadas tareas y que, debido a ese éxito previo, se resiste a ser modificado. Además, según este autor, los errores de este tipo presentan las siguientes características: (a) no son imprevisibles, debido a que van a ser causados por cambios conocidos o predecibles por el conocimiento del estudiante; (b) son reproducibles, porque estos errores van a tener cierta persistencia y no se deben a una distracción del estudiante. A su vez, para Socas, estos errores tendrán dos procedencias, una relacionada con las dificultades asociadas a la complejidad del objeto matemático y otra relacionada con los procesos de pensamiento.

En relación a las dificultades asociadas a la complejidad del objeto matemático, Socas indica que estas dificultades son del tipo operacional o conceptual, ya que, en matemática, se hace cambios convencionales en la notación de los objetos matemáticos. Por ejemplo, Valdivé y Escobar (2011) mencionan que los estudiantes no logran realizar un proceso de simbolización adecuado en álgebra, debido a un cambio de notación respecto al que usaban en aritmética.

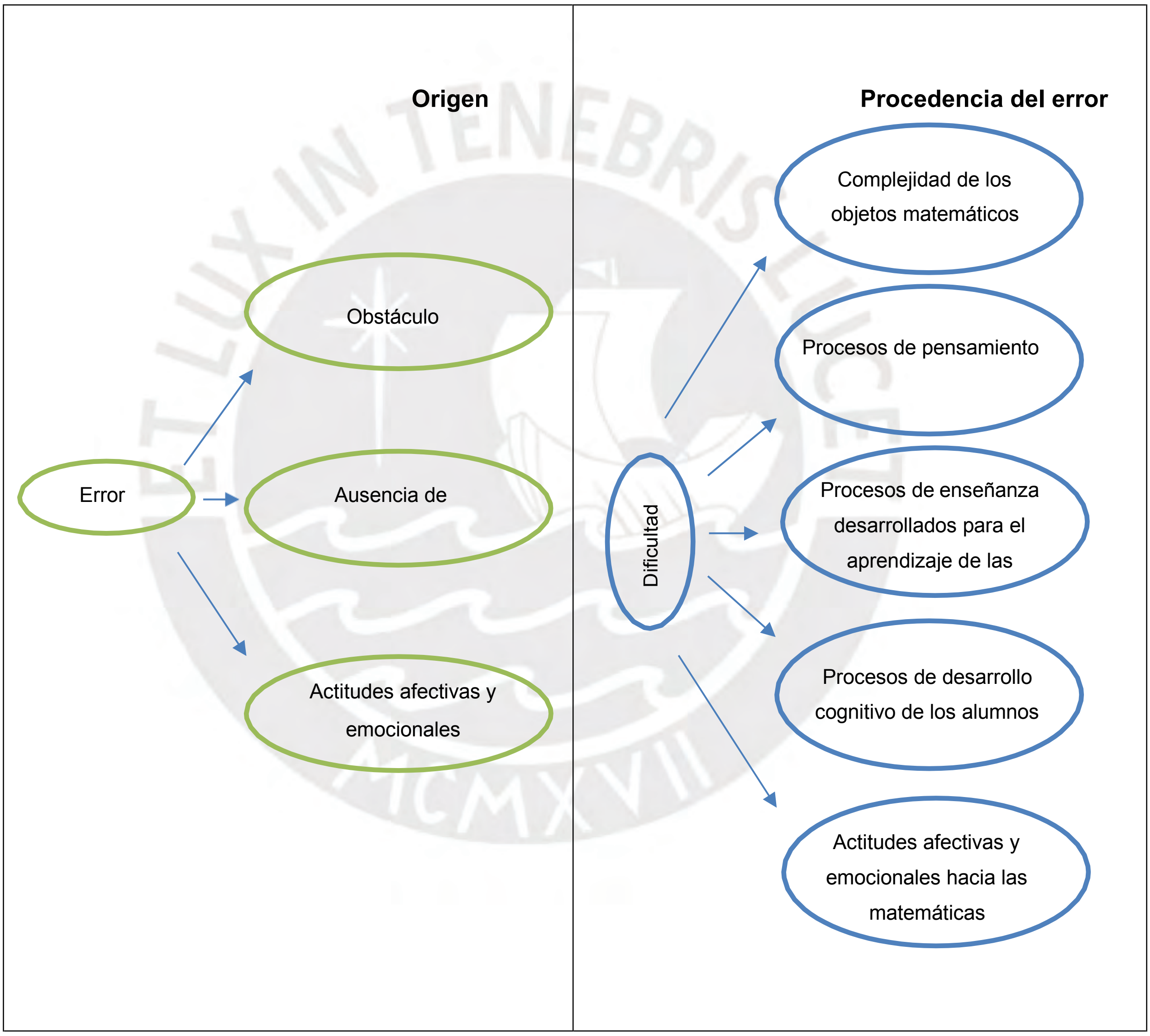


Figura 7. Categorización de Socas, tanto de errores como dificultades en el aprendizaje de las matemáticas

Ademas, Socas sostiene que esta dificultad que evidencian los estudiantes involucra los conflictos que estos tienen asociados a la comunicación y comprension de los objetos matemáticos. Esto se debe a que la comunicación de los objetos matemáticos se da en forma escrita, por medio de signos matemáticos con ayuda de un lenguaje habitual que favorece a la interpretación de los signos, particularmente, en la notación del límite se utiliza la abreviatura XqQ con una flecha debajo. El conflicto para este caso puntualmente, creemos que nace de la ayuda del lenguaje común al momento que se interpreta el signo de la flecha. Esto es debido a que en lugar de escribir “tiende a” o “se acerca a” se pone una flecha debajo de XqQ.

En cuanto a las dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático, Socas reconoce que estas dificultades derivan de la incapacidad por parte de los estudiantes para seguir un argumento lógico. Esta incapacidad se verá reflejada en el momento en que los estudiantes no logren obtener sus resultados, ya sea por medio de métodos intuitivos o por medio de métodos rigurosos. Por ejemplo, Paez (2005) analiza, en general, la construcción del concepto de límite. En el estudio, concluye que uno de los estudiantes no logra construir adecuadamente el concepto del límite a partir de métodos intuitivos o por la definición rigurosa del límite. Esto último, debido a que el estudiante estaba acostumbrado a aprenderse las definiciones de memoria y desarrollar algunos ejercicios rutinarios.

De este modo, partiendo de la idea particular de Bachelard acerca del obstáculo epistemológico, reformulada luego por Brousseau desde una perspectiva que apunta a entender esta concepción de obstáculo en el campo de la didáctica de la matemática, nos permite emitir los obstáculos con los errores y las dificultades en el aprendizaje desde el planteamiento dado por Socas. A nuestro juicio, la determinación del origen de los errores en el aprendizaje de las matemáticas atribuidos a un obstáculo está relacionada directamente con los obstáculos epistemológicos y didácticos, y a su vez, estos mismos errores van a tener su procedencia, en buena medida, de dificultades asociadas a la complejidad del objeto matemático y de dificultades asociadas con los procesos de pensamiento. A modo de ejemplo, en el siguiente cuadro, se articulan los errores, los obstáculos y las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas desde el marco de Socas.

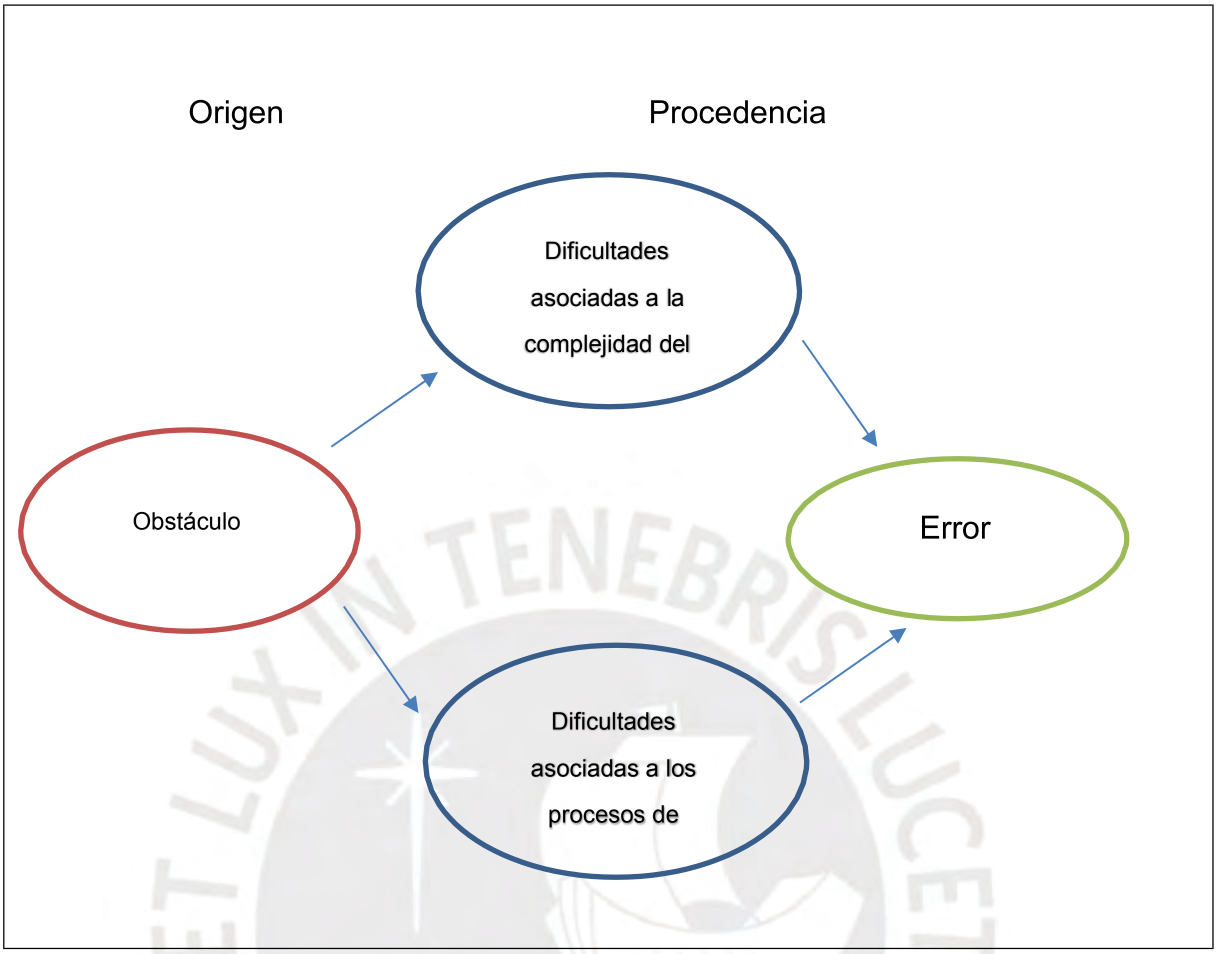


Figura 8. Articulación de los errores, dificultades y obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas desde el planteamiento de Socas.

El segundo tipo de error va a tener su origen en la ausencia de sentido. Al respecto, Socas aporta una tipificación del origen de este tipo de error dentro del lenguaje algebraico. El autor sostiene que estos errores van a tener diferentes orígenes y procedencias, debido a la presencia en los estudiantes de un esquema cognitivo inapropiado, el cual, no necesariamente, será como resultado de una falta de conocimiento o una distracción. Del análisis de estos errores comunes observados en muchos estudiantes, Socas considera que pueden ser atribuidos a los siguientes aspectos: (a) errores del algebra que tienen su origen en la aritmética, (b) errores de procedimientos, y (c) errores debido a las características propias del lenguaje algebraico.

(a) Errores del algebra que tienen su origen en la aritmética. Socas señala que este tipo de error no son propios del algebra, sino que son propios de un esquema previo inadecuado. Es decir, este tipo de error está vinculado con alguna limitación que no se ha corregido oportunamente en aritmética.

(b) Errores de procedimientos. Socas indica que este tipo de error se manifestará en los estudiantes cuando hagan uso inadecuado de una fórmula o regla de procedimiento.

(c) Errores debido a las características propias del lenguaje algebraico. Socas señala que estos errores son propios del algebra, debido a que no tienen ningún vínculo con la aritmética.

A su vez, para Socas, estos errores tendrán dos procedencias, una relacionada con las dificultades asociadas a la complejidad del objeto matemático y otra relacionada con los procesos de pensamiento.

En relación con las dificultades asociadas a la complejidad del objeto matemático, como se mencionó anteriormente, son del tipo operacional o conceptual, puesto que la comunicación de los objetos matemáticos, como sabemos, se da por medio de signos matemáticos. Socas considera que el uso y la comunicación de los signos matemáticos generan confusión en muchos estudiantes. En ese sentido, Rojano (1994) señala que los errores de sintaxis algebraica, como los de la generalización apresurada de reglas o propiedades, se explica por el uso del álgebra simbólica que es restringido en el aula de clase a diferencia del leguaje natural, por ejemplo, $(= + >)^{y} = =^{y} + >^{y}$.

En cuanto a las dificultades asociadas a los procesos de pensamiento, los cuales provocan rupturas y se convierten en dificultades dentro de la construcción del conocimiento, Socas refiere que el saber matemático previo sobre modelos tácitos dificulta al momento de resolver problemas o tareas específicas por parte de los estudiantes. Es decir, muchas veces, estos modelos operan como dificultades del saber matemático nuevo.

De este modo, partiendo de la concepción dada por Socas acerca de los errores y las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, nos permite, de cierta manera, articular el origen de los errores que tienen su origen por la ausencia de sentido con las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. A nuestro juicio, la determinación del origen de los errores en el aprendizaje de las matemáticas atribuidos a la ausencia de sentido está relacionada con los errores procedimentales y con los errores propios del lenguaje algebraico, y, a su vez, estos mismos errores van a tener su procedencia, en buena medida, de dificultades asociadas a la complejidad del objeto matemático. Por otro lado, el origen de los errores atribuido a la ausencia de sentido, pero relacionados con aquellos errores que tienen su origen en la aritmética, tienen su procedencia, en buena medida, en las dificultades asociadas con los procesos de pensamiento. A modo de ejemplo, en el siguiente cuadro, se articula los errores que tienen su origen en la ausencia de sentido con las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas desde el marco de Socas.

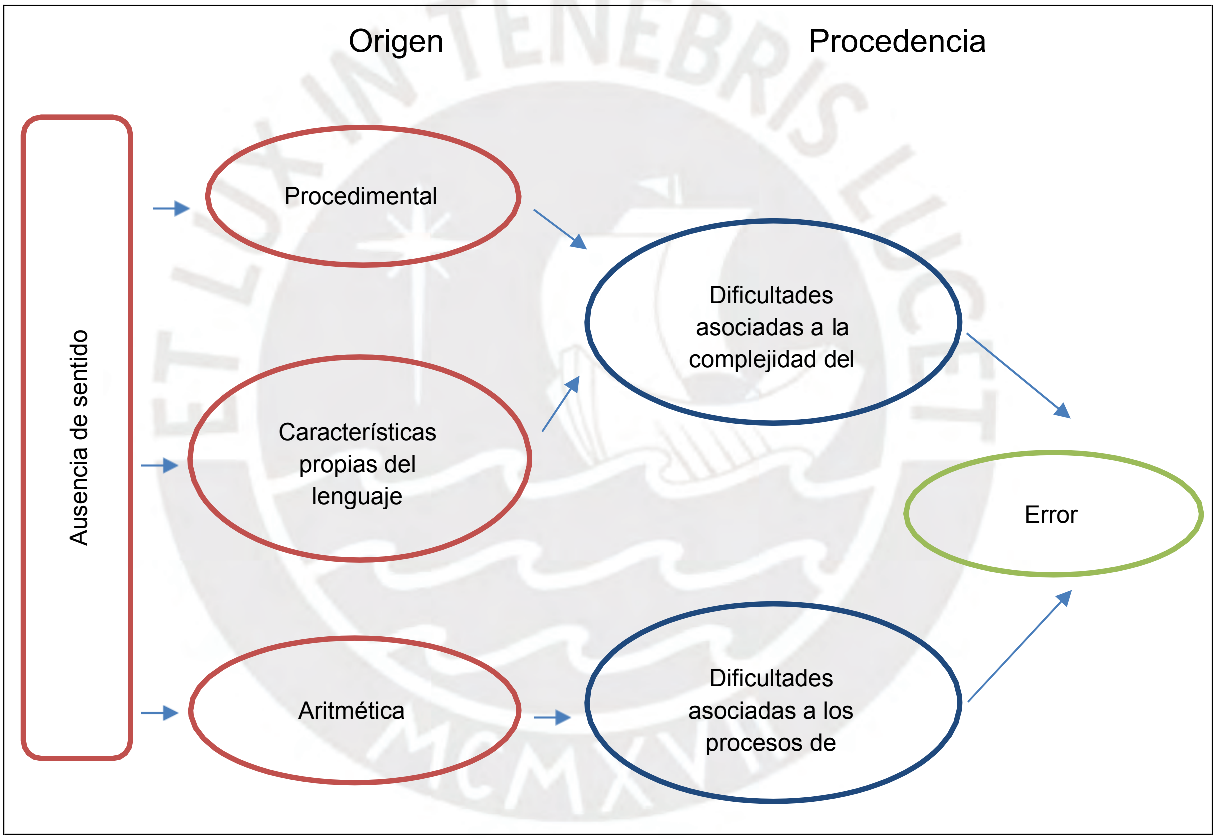


Figura 9. Articulación de los errores que tienen su origen por la ausencia de sentido con las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas desde el planteamiento de Socas

Finalmente, el último tipo de error tiene su origen en actitudes afectivas y emocionales. Al respecto, Socas sostiene que es posible que este tipo de error sea atribuido a una falta de concentración durante la clase, falta de atención a los detalles, bloqueos durante el análisis de información o un exceso de confianza.

En relación a las dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas, Socas afirma que, por lo general, a muchos estudiantes no les gusta las matemáticas. Esto último se debe a que estos estudiantes tienen sentimientos de aborrecimiento y miedo hacia estas.

En el siguiente cuadro, se presentan cómo se articula los errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales con las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas desde el planteamiento de Socas.

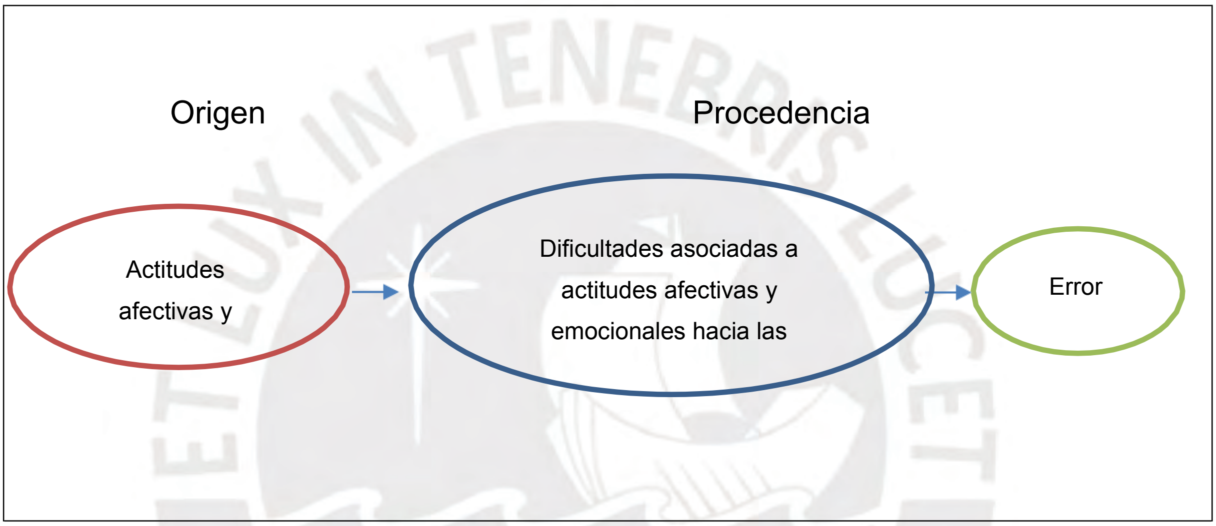


Figura 10. Articulación de los errores que tienen su origen por actitudes afectivas y emocionales con las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas desde el planteamiento de Socas

3.3Articulación de los trabajos de Sierpinska (1985) y Cornu (1991)

En cada uno de los trabajos realizados por Cornu y Sierpinska, se elaboró una lista de los obstáculos epistemológicos del límite presentes en los estudiantes de hoy en día. Estos estudios consideran el reconocimiento de las condiciones históricas en las que se da el obstáculo. De este modo, nos puede ayudar a comprender la aparición de obstáculos similares en nuestros estudiantes.

Uno de los principales problemas que abordamos fue la clarificación de las nociones teóricas que se utilizan dentro de la literatura, en particular, las nociones usadas acerca de error, dificultad, principalmente, la noción de obstáculo epistemológico. Notamos que no hay un consenso entre los diferentes enfoques relativos a los errores y a las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, solo es preciso observar la variedad de tipologías referidas a los errores en el aprendizaje de las matemáticas, así como los diferentes tipos de dificultades del mismo.

El estudio que argumentaremos en este acápite tiene como propósito realizar una organización de los dos trabajos referidos a los obstáculos epistemológicos del límite. En ciertos momentos, estos enfoques analizan los obstáculos a partir de las dificultades de los matemáticos del pasado, los cuales, en algunos casos, son contrastados con los errores y las dificultades de los estudiantes de hoy. Dichos enfoques son puestos de manifiesto en investigaciones relativas al límite que se vienen desarrollando en la actualidad.

Para justificar esta afirmación, pretendemos iniciar nuestra articulación después de haber realizado un análisis de los estudios realizados por Sierpinska y Cornu, tratando de identificar las similitudes, complementariedades y posibles redundancias. Luego, concebimos las nociones acerca de obstáculo-dificultad-error y obstáculo-dificultad desde el planteamiento de Socas que nos permitirán realizar conexiones coherentes entre estos dos enfoques.

Creemos que esta nueva lista no puede elaborarse por medio de elementos básicos de la didáctica de la matemática, sino que dependen de cuestiones más elaboradas. En ese sentido, nuestra herramienta pretende servir como punto de partida a nuevas investigaciones referidas a errores y dificultades en el aprendizaje del límite.

A continuación, mostramos las concordancias y redundancias entre los trabajos de Cornu y Sierpinska acerca de los obstáculos epistemológicos del límite.

El paso al límite por medios geométricos

Ambos autores (Cornu y Sierpinska) consideran que este obstáculo epistemológico del límite se manifiesta en el método de exhaución. Este método desarrollado por los griegos permite obtener soluciones exactas a problemas geométricos que implícitamente contienen procesos infinitos. A partir de este método, Cornu realiza un estudio epistemológico revelando las dificultades que tuvieron los griegos en la comprensión del proceso previo a la obtención del límite numérico (ver p. 42). De la misma forma, Sierpinska recoge estudios históricos relacionados con el método y los contrasta con las respuestas emitidas por los estudiantes en el momento que estos construyen la recta tangente (ver p. 52).

Noción de lo infinitamente pequeño

Tanto Cornu como Sierpinska sostienen que este obstáculo epistemológico del límite se manifiesta a través de un conocimiento que involucra a las cantidades infinitamente pequeñas. En ese sentido, Cornu sostiene que este obstáculo epistemológico se revela en las dificultades que tuvieron ciertos matemáticos como D’Alembert y Cauchy para explicar la existencia de las cantidades infinitamente pequeñas durante la formalización del concepto del límite (ver p. 44). Por su parte, Sierpinska precisa que la formulación del concepto del límite permite asociarlo al concepto de función por medio de la asignación de valores infinitamente pequeños, los cuales eran valores no definidos durante la época. Esta autora, además de fijar su análisis en la evolución histórica del concepto de limite, relaciona puntualmente la definición de límite dada por Cauchy con las respuestas emitidas por los estudiantes en el momento que determinan $=_{\mathrm{d}} = \frac{\hat{}\ \grave{}\,2}{2}$, evidenciando la presencia de dicho obstáculo epistemológico del límite (ver p. 59).

Aspecto metafísico de la noción del límite

Este obstáculo es estudiado solamente por ambos investigadores (Cornu y Sierpinska) desde el desarrollo histórico del límite. Por un lado, Cornu considera que la noción del límite es difícil de introducir en matemáticas, debido a que esta concepción tiene que ver con la metafísica. Este autor sostiene que el cálculo del límite se podrá realizar, en general, empleando métodos que van más allá del álgebra y la aritmética. Esta afirmación se basa en el análisis histórico, manifestado en las dificultades que tuvieron ciertos matemáticos para comprender el uso de cantidades infinitamente pequeñas introducido por Leibniz (ver p. 45). De igual forma, Sierpinska considera que la fuente de este obstáculo se centra en proporcionar un fundamento para comprender las cantidades infinitamente pequeñas, desde la concepción de Leibniz, envueltos en los problemas de cálculo (ver p. 57).

El límite se alcanza o no

Al respecto, ambos autores (Cornu y Sierpinska) coinciden que el solo hecho de saber si el límite se alcanza o no es un indicio de este obstáculo. En lo relativo a ello, Cornu considera que las orientaciones que tomaron algunos matemáticos a lo largo de la historia del límite persisten en nuestros estudiantes. Este autor no reporta en qué forma este obstáculo se manifiesta en los estudiantes. No obstante, se limita al estudio histórico del límite. El estudio muestra la controversia generada por algunos matemáticos en torno a saber si límite se alcanza o no (ver p.48). Análogamente, Sierpinska refiere que esta controversia se produce poco después que Weierstrass formalizara la definición del límite. Este modo de pensamiento es contrastado con las respuestas obtenidas por los estudiantes al momento de determinar $=_{d} = \frac{\hat{}\_\grave{}2}{2}$ por medio de aproximaciones. Esta concepción, reporta la autora, se manifiesta cuando los estudiantes afirman que $=_{d}$ tiende a 1, pero no es 1 (ver p. 57).

El estudio realizado por Cornu (1991) está basado en la noción numérica de Cauchy, ya que el punto de vista en que se ubica esta investigación son las dificultades que estuvieron relacionadas con la aritmetización del límite. Lo anterior se complementa con la propuesta de Sierpinska (1985), quien basa su estudio en la noción topológica del límite. Esta propuesta combina estudios epistemológicos con estudios didácticos que le permiten proponer otros obstáculos epistemológicos del límite que se mostrará a continuación. En algunos casos, los nombres de estos obstáculos epistemológicos los estamos cambiando, debido a que el nombre del obstáculo no hace buen uso de la evidencia del mismo.

El paso al límite por medio de una inducción incompleta

La autora sostiene que este obstáculo epistemológico se manifiesta cuando se realiza un razonamiento inductivo considerado insuficiente desde el punto de vista de la matemática. Para lo cual, Sierpinska se basa en un análisis histórico contrastado con un estudio didáctico (ver p. 53).

El paso al límite por medio de aproximaciones

La autora considera que este obstáculo epistemológico se revela en la intuición geométrica por medio de cálculos numéricos basados en aproximaciones. Este obstáculo es justificado a través de un análisis histórico y complementado con un estudio didáctico (ver p. 54).

El paso al límite evitando demostraciones rigurosas

Sierpinska señala que este obstáculo epistemológico se manifiesta en el momento que los estudiantes emiten sus propias conjeturas a partir de indicios o supuestos que carecen de rigor. La autora fundamenta este obstáculo afirmando que los razonamientos empleados por sus estudiantes son similares a los razonamientos empleados por algunos matemáticos (ver p. 54).

Uso de reglas propias del álgebra

Según Sierpinska, este obstáculo epistemológico se manifiesta en el momento que se manipula propiedades que se da en el álgebra al momento de discutir el infinito. Esta idea se justifica tanto por medios históricos como por medios didácticos (ver p. 55).

Lado relacional de la función

Sierpinska señala que este obstáculo epistemológico se manifiesta en el momento que los estudiantes emiten sus propias conjeturas a partir de indicios o supuestos que carecen de rigor. La autora fundamenta este obstáculo afirmando que los razonamientos empleados por sus estudiantes son similares a los razonamientos empleados por algunos matemáticos. Sin embargo, solo se limita al estudio histórico de este obstáculo epistemológico observado en el razonamiento desarrollado por Lagrange (ver p. 60)

Funciones monótonas

Para Sierpinska, la esencia de este obstáculo epistemológico radica en la idea de emplear solo funciones monótonas en el análisis de los límites. Cabe destacar que la autora no hace referencia explícita de este obstáculo y refiere que el tema fue abordado en toda su amplitud histórica por Aline Robert (1983) (p. 60).

No se considera todos los valores de la función

La autora afirma que la naturaleza de este obstáculo epistemológico radica en el momento de analizar las sucesiones, debido a que no se logra considerar todos los valores de la función dentro del análisis. Este obstáculo se encuentra fundamentado por medio de hechos históricos y validado con su estudio de caso desarrollado por sus estudiantes (ver p. 61).

Cambio de significado debido al cambio de tamaño

Sierpinska refiere que este obstáculo epistemológico se manifiesta al momento de interpretar la noción de diferencia tratada, tanto en el método de exhaución como al determinar la pendiente de la recta tangente por medio de las pendientes de las rectas secantes. Lo anterior es debido a que el significado cambia, de acuerdo, con el cambio de tamaño. Para Sierpinska, este obstáculo se justifica en las ideas formuladas por algunos matemáticos, como D'Alembert, Cauchy y Weierstrass, las cuales son confrontadas con las ideas de sus estudiantes (ver pág. 62).

Intuiciones reveladas al realizar el paso al límite

Según Sierpinska, este obstáculo epistemológico surge debido a razonamientos que tratan de especificar si las intuiciones reveladas, al momento de realizar el paso al límite, son geométricas o numéricas. La autora argumenta la existencia de este obstáculo basándose en hechos históricos del siglo XIX. Este estudio de sucesos del pasado le permite constatar la presencia de este obstáculo en su estudio de caso (ver p. 62).

Supresión o mal uso de los cuantificadores

Sierpinska señala que este obstáculo epistemológico se manifiesta cuando se suprime o se altera el orden de los cuantificadores propios de la definición del límite. La autora fundamenta este obstáculo en sucesos históricos que son corroborados en el estudio de caso desarrollado por los estudiantes (ver p. 63).

Símbolo

La autora considera que este obstáculo epistemológico radica, específicamente, en la resistencia frente a la introducción de un símbolo en la operación del paso al límite. Este obstáculo se ve reforzado por hechos históricos y complementado con el análisis didáctico al estudio de caso (ver p. 64).

3.4 Propuesta y sugerencias para el uso de la herramienta elaborada

Se presenta, a continuación, los resultados aportados sobre la articulación de los trabajos desarrollados por Sierpinska (1985) y Cornu (1991). En primer lugar, se realiza una breve justificación acerca de la pertinencia de la herramienta propuesta. Luego, se indica algunas sugerencias para el uso de la herramienta. Finalmente, se muestra la herramienta que permite vincular los estudios realizados acerca de los obstáculos epistemológicos del límite con la clasificación acerca de los errores y dificultades propuesto por Socas (1997).

Razones didácticas sobre la pertinencia de la herramienta

- Clarifica y explicita de manera más sistemática los listados propuestos por Sierpinska y Cornu, los cuales sirven de base para la comprensión de las concepciones que presentan los estudiantes durante la construcción del conocimiento acerca del límite. De manera particular, dicho planteamiento se verá apoyado con la tipología sobre errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas elaborado por Socas.

- Compara e integra los dos listados existentes sobre obstáculos epistemológicos del límite usados en educación matemática con el propósito de complementarlos. En particular, se espera que un análisis más detallado de los trabajos de Sierpinska (1985) y Cornu (1991) refinen las concepciones acerca de los obstáculos epistemológicos del límite. Así mismo, estas concepciones acerca de los obstáculos epistemológicos del límite y el enfoque acerca de los errores y dificultades en el aprendizaje de Socas podrán ser integrados de forma eficiente y consistente desde la perspectiva de la Teoría de Situaciones Didácticas.

- Esta herramienta está orientada a clarificar el origen y la procedencia de los errores en el aprendizaje del límite y facilitar la comprensión de los obstáculos epistemológicos del mismo. Esto supone considerar la importancia de los errores que comenten nuestros estudiantes cuando se enfrentan al concepto del límite. Aquellos errores que no sean fortuitos e imprevisibles tendrán su origen en un obstáculo, nuestro trabajo se centrará en los que sean del tipo epistemológico. A su vez, estos errores, en general, tendrán como procedencia dos tipos de dificultades: aquellas que están asociadas a la complejidad del objeto matemático y aquellas que están asociadas con los procesos de pensamiento.

Sugerencia para el uso de la herramienta

(1) Recolectar información basada en los errores que cometen los estudiantes en el aprendizaje del límite por medio de una secuencia didáctica o la revisión sistémica de otras investigaciones que aborden el aprendizaje del límite.

(2) Seleccionar aquellos errores que estén relacionados con la evolución histórica del concepto del límite de aquellos que estén relacionados con aquellos que tienen su origen por la ausencia de sentido o aquellos que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales, como se mencionó en forma detallada en el capítulo III.

(3) Llevar a cabo un primer análisis de estos errores para determinar su origen. Este estudio se puede desarrollar a través de la lista unificada descrita acerca de los obstáculos epistemológicos del límite, es decir, estos errores que cometen los estudiantes pueden estar relacionados con errores que se cometieron en el pasado durante la evolución histórica del concepto del límite.

(4) Llevar a cabo un segundo análisis de los mismos errores acerca de su procedencia. Este segundo análisis se desarrollará a través de la tipología propuesta por Socas sobre las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. La procedencia de los errores estará asociada a la complejidad del objeto matemático o con los procesos de pensamiento.

En resumen, la aplicación de la herramienta permitirá clarificar el origen y la procedencia de los errores relativos al límite, y facilitará la producción de nuevos enfoques y comprensiones de los obstáculos epistemológicos del límite. Se considera que la adaptación de la herramienta en el campo de la didáctica de la matemática será el punto de partida para el desarrollo de futuras investigaciones que involucren el análisis de los errores cometidos por los estudiantes durante el aprendizaje del límite.

Herramienta

En la figura 11, presentamos una síntesis de las relaciones entre las nociones de error, dificultad, desde el planteamiento de Socas y los obstáculos epistemológicos del límite.

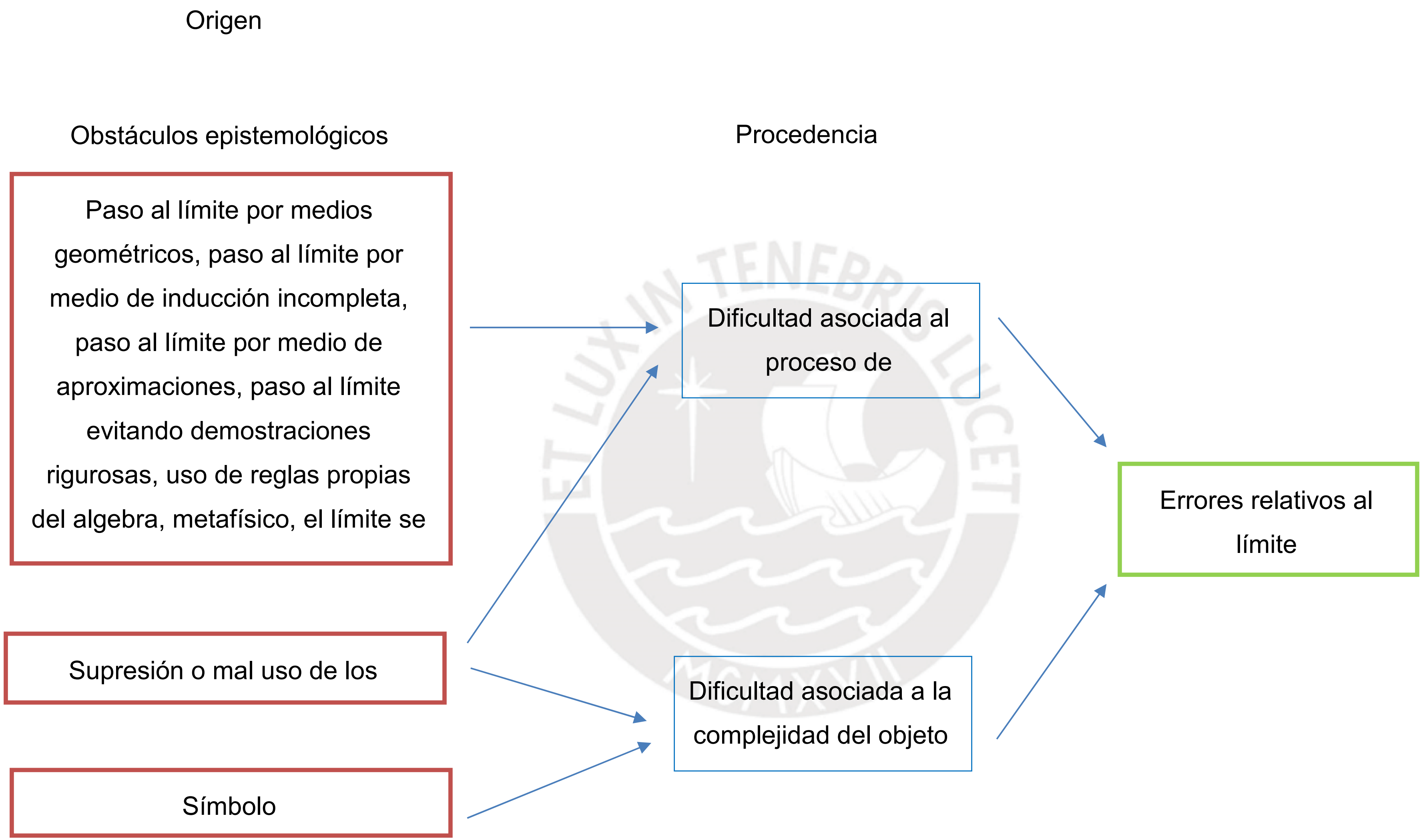


Figura 11: Relaciones entre los obstáculos epistemológicos del límite con las nociones de error, dificultad desde el planteamiento de Socas

CAPÍTULO IV: ANÁLISIS DE LAS CONCEPCIONES DE LOS OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS EN OTRAS INVESTIGACIONES

El objetivo de este capítulo se ha centrado en validar la herramienta propuesta en el contexto de la didáctica de la matemática. Para ello, partiremos analizando algunas actividades diseñadas, implementadas y analizadas que buscan justificar el origen de los errores referidos al límite. Este tipo de análisis será realizado por medio de la herramienta, específicamente a las siguientes investigaciones: Celestino (2008), La Plata (2014), Vogado, Juca y De Brito (2014), Blazquez, Ortega y Benegas (2006), Pereira (2009) y Zuchi (2005). Con este tipo de análisis, se busca encontrar el vínculo existente entre los obstáculos epistemológicos, los errores y las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.

4.1 Concepciones sobre límite: Conexiones entre los obstáculos manifestaciones por alumnos de la enseñanza superior, Celestino (2008)

Esta investigación proporciona un análisis acerca de las concepciones que tienen los estudiantes de educación superior del Brasil acerca del límite y las posibles conexiones entre los obstáculos epistemológicos relacionados con estas concepciones. Lo hace desde una postura epistemológica y cognitiva, es decir, realiza una evaluación a las concepciones de los estudiantes por medio de un análisis cualitativo, basados tanto en la revisión de la literatura como en un análisis estadístico de los datos con ayuda del software CHIC. Además, la investigación contiene siete cuestionarios desarrollados por estudiantes universitarios del quinto semestre de una universidad privada de Sao Paulo, los mismos que ya estudiaron el capítulo de límites de una función real de variable real.

A continuación, se describirá los resultados obtenidos por Celestino en el cuestionario 1 y, luego, se mostrará el análisis de los errores identificados por el autor en el cuestionario 1 a través de la herramienta propuesta.

Descripción de los resultados obtenidos por Celestino en el Cuestionario 1

Este primer cuestionario tiene por objetivo reconocer el tratamiento empleado por los estudiantes al momento de representar los 8 primeros términos de ciertas sucesiones, así como verificar si los estudiantes emplean otras formas distintas para representar los términos de la sucesión. Para ello, el autor considera cuatro sucesiones: $!_{"} = \frac{\$}{"}$, $\%_{"} = \frac{\$}{\&}$, $'_{"} = \begin{cases}) + 1, -.) \leq 3 \\ 4, -.) > 3 \end{cases}$ y $4_{"} = 2) - 1$ con el objetivo de identificar la concepción de los estudiantes sobre la convergencia de estas sucesiones y las propiedades asociadas a ella. (ver fig. 12)

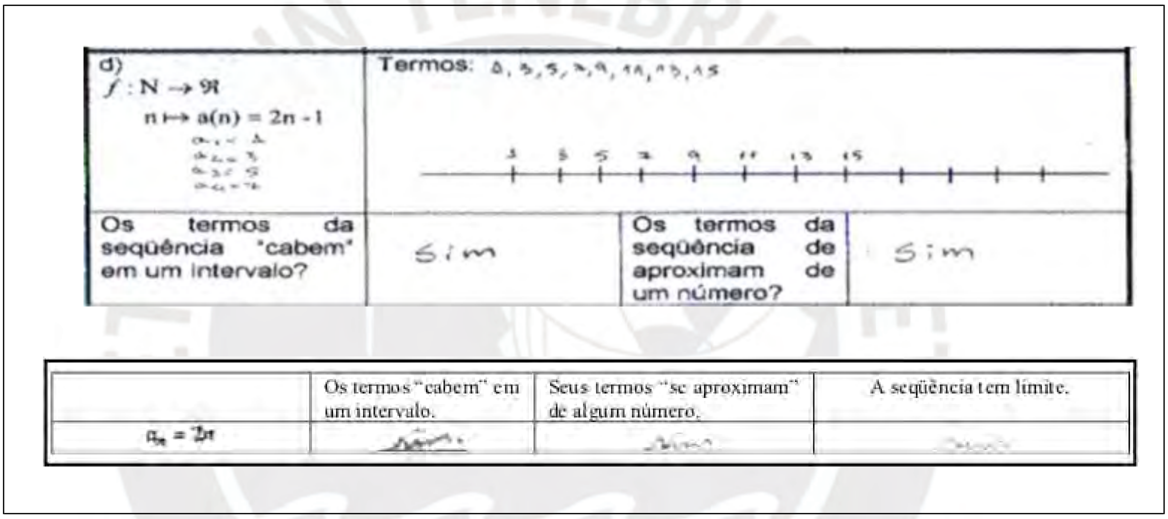


Figura 12. Respuesta 12

Fuente: Celestino (2008, p. 131)

Descripción de los resultados obtenidos por Celestino de la primera sucesión

Para la primera sucesión, Celestino refiere que el hecho de que los estudiantes consideren que los términos de la sucesión son cada vez más pequeños y cercanos a cero es un indicio del obstáculo llamado "el límite se alcanza o no". Esta concepción permite a los estudiantes realizar una manipulación de registros numéricos y, luego, será tomada como una condición para que una sucesión tenga límite (monótona y acotada), siendo estos aspectos considerados, también, por Sierpinska y Cornu. Destaca, además, el hecho de que el 100% de los estudiantes afirman que la sucesión $!_{"} = \frac{\$}{"}$, por ser decreciente y acotada, alcanza su límite.

Análisis del error por medio de la herramienta propuesta

Para esta sucesión, en particular, no se ha podido hacer uso de la herramienta, debido a que los estudiantes, como reporta el autor, no cometen ningún error en la manipulación de registros numéricos para la obtención del límite de la sucesión.

Descripción de los resultados obtenidos por Celestino de la segunda sucesión

Respecto a la segunda sucesión, Celestino señala que el 70% de los estudiantes afirma que la sucesión constante tiene términos que se aproximan a un número. Para este autor, esta concepción no es considerada un obstáculo, ya que la manipulación de datos numéricos no les permite a los estudiantes realizar algún tipo de aproximación.

Análisis del error por medio de la herramienta propuesta

Se está de acuerdo con el autor cuando explica las razones por las que este tipo de conocimiento no es considerado un obstáculo epistemológico. Por esta razón, analizar el origen de los errores por medio de la herramienta no es posible. Sin embargo, se puede identificar su procedencia. Consideramos que el 30% restante de los estudiantes muestra una dificultad, la cual está asociada al proceso de pensamiento matemático. Esta dificultad se pone de manifiesto en el momento que los estudiantes no pueden obtener conclusiones luego de manipular datos numéricos.

Descripción de los resultados obtenidos por Celestino de la tercera sucesión

Para la tercera sucesión, el autor refiere que ningún estudiante afirmó que los términos de la sucesión se aproximan a un número. Sin embargo, Celestino reporta que los estudiantes no perciben que el dominio de la sucesión es el conjunto de los números naturales, debido al uso de cantidades negativas. Para el autor, el origen de este error estaría en el obstáculo epistemológico llamado “el límite se alcanza o no”.

Análisis del error por medio de la herramienta propuesta

Se coincide con Celestino cuando manifiesta que este error tendrá su origen en el obstáculo epistemológico llamado “el límite se alcanza o no”. Lo anterior se debe a que los estudiantes evidencian la presencia de este obstáculo al momento de obtener límite de la sucesión por medio de la manipulación de registros numéricos. Asimismo, este error tendrá su procedencia en la dificultad asociada, la cual está relacionada al proceso de pensamiento. Esto último ocurre debido a que los conocimientos previos acerca de funciones están generando impedimentos ante el nuevo conocimiento.

Descripción de los resultados obtenidos por Celestino de la cuarta sucesión

Finalmente, para el caso de la sucesión $4'' = 2) - 1$, Celestino manifiesta que el 50% de los estudiantes afirman que la sucesión tiene límite, resultándole paradójico el hecho que el 20% afirme que la sucesión se aproxime a un número. En ese sentido, el autor distingue que los estudiantes están considerando solo 8 términos para determinar de una manera intuitiva el paso al límite.

Análisis del error por medio de la herramienta propuesta

Consideramos que los estudiantes concluyen de forma incorrecta, ya que consideran que los términos de la sucesión son cada vez más grandes hasta llegar a 15. Esta concepción es un indicio que muchos estudiantes consideran de forma equivocada que el límite se alcanza. Por ello, consideramos que este error tendría su origen en el obstáculo epistemológico llamado “el límite se alcanza o no”. Asimismo, este error procedería en una dificultad, la cual está asociada con el proceso de pensamiento, debido a que los estudiantes emiten conclusiones equivocadas por medio un razonamiento carente de argumentación.

4.2 Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad, Blázquez, Ortega, Gatica y Benegas (2006)

A continuación, se presenta la revisión al estudio realizado por Blázquez, Ortega, Gatica y Benegas (2006), donde se contrasta la conceptualización métrica, propuesta por Weierstrass, con la conceptualización del límite por medio de aproximaciones, con el fin de establecer cuál de las dos es más sencilla y apropiada para la enseñanza y aprendizaje del límite. La investigación es del tipo descriptiva, es decir, los investigadores recolectan datos por medio de entrevistas grupales en un ambiente de aprendizaje cooperativo y reflexivo, que contó con la participación de 6 estudiantes.

A continuación, se describirá los resultados obtenidos por los investigadores del primer análisis y, luego, se mostrará el análisis del error identificado por los autores del primer análisis por medio de la herramienta propuesta.

Descripción de los resultados obtenidos por Blázquez, Ortega, Gatica y Benegas del primer análisis

Este primer análisis tiene por objetivo averiguar hasta qué punto los estudiantes comprenden el concepto de límite, ya sea por medio de la definición o por medio de aproximaciones. Referente a la conceptualización del límite por medio de una aproximación, durante el desarrollo de la entrevista, los investigadores perciben que las dificultades para interpretar esta conceptualización son menores que las dificultades para interpretar la conceptualización de la métrica, entre las que destacan el formalismo de la escritura de la definición del límite, interpretación del simbolismo relacionado con el valor absoluto y a la confusión de los roles entre 7 y 8. Tal situación, para los autores, se manifiesta en la desigualdad $|\mathbf{:}(\mathbf{!}) - =| < 8$, debido a que los estudiantes consideran $8 - =$ y $8 + =$ en lugar de $= - 8$ y $= + 8$, y, además, consideran que estos estudiantes, no logran distinguir el intercambio entre $=$ y 8 dado que no captan el significado de la desigualdad con valor absoluto y su error persiste al momento de analizar la desigualdad $|! - 4| < 7$.

Análisis del error por medio de la herramienta propuesta

Consideramos que este error tiene su origen en el obstáculo epistemológico llamado “supresión o mal uso de los cuantificadores”, puesto que no se le presta atención al orden de los signos matemáticos dentro de la definición del límite. Incluso, este error tendrá su procedencia tanto en las dificultades asociadas a la complejidad del objeto matemático y a las dificultades asociadas a los procesos de pensamiento. El primer tipo de dificultad se debe a la confusión que genera el uso y la comunicación de los signos matemáticos. Para el segundo tipo de dificultad, los autores señalan que se presenta en el momento que se generan rupturas en los modos de pensamiento. Esto último se manifiesta cuando los estudiantes asocian el valor absoluto con las desigualdades implícitas en la definición del límite.

4.3 Cálculo en la escuela secundaria: una propuesta para el problema de la variabilidad, Pereira (2009)

Como ya se mencionó en el capítulo de antecedentes, Pereira aplica una secuencia didáctica a dieciséis estudiantes mediante seis fichas. Estas fichas permiten al autor observar el desempeño de los estudiantes de manera individual a partir de las respuestas dadas por ellos. Basado en la ingeniería didáctica, Pereira concluye que las dificultades encontradas en los estudiantes, en esencia las de naturaleza epistemológica, están relacionadas con los conocimientos previos. En términos generales, este autor considera que el dominio de los conocimientos previos no solo será necesario, sino que será imprescindible para el éxito en aprendizaje de temas del cálculo diferencial por parte de los estudiantes.

A continuación, se presentará el análisis respecto a la sexta ficha de la secuencia didáctica y los resultados obtenidos por el autor. Esto debido a que las 5 primeras fichas pretenden explorar los conocimientos previos sobre funciones, pendiente de una recta y recta tangente a una curva. Luego, se mostrará el análisis del error identificado por el autor en la sexta ficha por medio de la herramienta propuesta.

Descripción de los resultados obtenidos por Pereira de la sexta ficha

El objetivo de esta sexta ficha es que los estudiantes visualicen la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto a partir del problema de calcular la velocidad instantánea de un móvil como aproximaciones de sus velocidades medias. Para ello, los estudiantes realizan dos actividades de aprendizaje por medio de una pequeña aplicación computacional en lenguaje java, Mathlets. El autor refiere que el 72,72% de los estudiantes alcanzan los objetivos planteados en esta ficha. Además, añade que los estudiantes cometieron pocos errores durante el desarrollo de las actividades de aprendizaje. Para este autor, un error del tipo conceptual se produce cuando los estudiantes no visualizan el punto de tangencia como un punto de intersección entre la recta y la curva.

Análisis del error por medio de la herramienta propuesta

Al respecto, consideramos que este error tiene su procedencia en la dificultad asociada al proceso de pensamiento, debido a que este conocimiento previo frena el aprendizaje de los estudiantes al determinar correctamente el valor de la velocidad instantánea. Para lo cual, los estudiantes observan las velocidades medias en intervalos de tiempo cada vez menores y percibirán que la recta secante "se aproxima" de la recta tangente cuando $! + h$ tiende a $!$. Atendiendo al origen, este error se sitúa dentro de los obstáculos epistemológicos en el llamado "paso al límite por medios geométricos", ya que el análisis hecho por los estudiantes muestra que no pueden expresar el valor de la velocidad instantánea al emplear el método de exhaución.

4.4 Errores en torno a la comprensión de la definición de límite finito de una función real de variable real, La Plata (2014)

Por lo mencionado anteriormente, La Plata aplica un test del tipo exploratorio a un grupo de 64 estudiantes de un primer curso de cálculo. Estos estudiantes ya habían estudiado el concepto de límite finito de una función real de variable real previamente. A partir del cual, la autora analiza los errores que cometen los estudiantes en torno a la comprensión de la definición de límite finito de una función real de variable real basándose en el enfoque ontosemiótico. Además, este enfoque le permite a la investigadora tipificar los errores encontrados en el test exploratorio.

Por otro lado, se describirá los resultados obtenidos a una de las 14 respuestas de las preguntas seleccionadas en el test exploratorio, esto último, debido a que dicha respuesta es tipificada por la autora como una respuesta incompleta que, a su vez, resulta ser epistemológico. Después, se explicará el análisis del error identificado por la autora en la respuesta 12 por medio de la herramienta propuesta.

Descripción de los resultados obtenidos por La Plata en la respuesta 12

En la figura 13, se muestra la repuesta a la pregunta número 12 dada por un estudiante y se describe los resultados de dicha pregunta obtenidos por La Plata (2004).

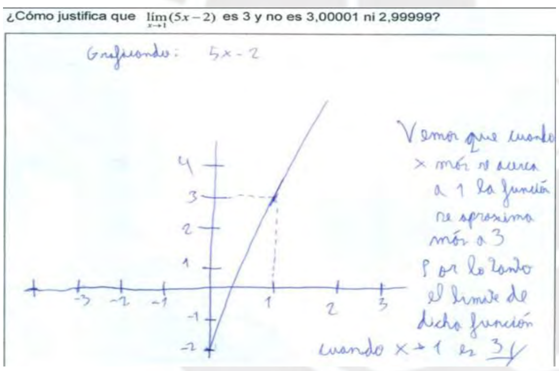
	¿Cómo justifica que $\lim_{C\to\$}(5! - 2)$ es 3 y no es 3,00001 ni 2,99999? Vemos que cuando ! más se acerca a la función se aproxima más a 3. Por lo tanto, el límite de dicha función cuando ! $\to 1$ es 3.

Figura 13. Respuesta 12

Fuente: La Plata (2004, p. 85)

La autora, basándose en la tipificación establecida en su investigación, sostiene que la respuesta dada por un estudiante, como se muestra en la figura 13, es incompleta. Esto último, debido a que los estudiantes obtienen el límite de forma intuitiva ya que no logran justificar su respuesta por medio de la definición.

Análisis del error por medio de la herramienta propuesta

El modelo utilizado tradicionalmente para la enseñanza del límite está basado en la realización de múltiples ejercicios para el aprendizaje de reglas operatorias con el símbolo del límite. En este sentido, reconocemos que los estudiantes, como se muestra en la figura 11, no consideran el uso necesario del símbolo del límite, siendo suficiente para ellos apreciar el gráfico de la función.

A nuestra opinión, la razón para que los estudiantes no justifiquen de forma adecuada, se debe a que no fijan su análisis en el entorno pequeño alrededor de 1. De esta forma, la función tomará en todos los puntos del entorno excepto en $! = 1$ valores tan cercanos como queramos a 3, el cual será el límite. Lo anterior tendrá su origen en el obstáculo epistemológico llamado "símbolo", ya que la presencia de este obstáculo está vinculado con la resistencia por parte de los estudiantes de emplear el símbolo del límite y, a su vez, procede de la dificultad asociada a la complejidad de los objetos matemáticos, debido a las ideas confusas acerca del límite que poseen los estudiantes en cuanto a la semántica propia del límite.

4.5 El enfoque del concepto del límite vía secuencia didáctica: del ambiente lápiz papel al ambiente computacional, Zuchi (2005)

Esta investigación, como se mencionó anteriormente, se enfoca en detectar las principales dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de límite. La propuesta busca conectar el concepto de límite desde la óptica de la aproximación y la cinemática, la cual será realizada por los estudiantes mediante lápiz y papel, y un sistema tutorial. La autora aplica su secuencia didáctica a estudiantes de la Universidad Estatal de Santa Catariana, la cual fue diseñada para ser desarrollada en 2 sesiones. En este estudio, Zuchi manifiesta que las dificultades observadas en los estudiantes son atribuidas a la comprensión de la relación entre 8 y 7, a la noción de infinito, a la abstracción, a los conceptos previos y la aplicación práctica del límite.

Asimismo, mientras que en el proceso de la primera sesión se muestra la importancia de los conceptos previos en la construcción de la relación entre el 8 y el 7 por medio de un problema contextualizado, en la segunda sesión, se puede encontrar errores, dificultades y obstáculos epistemológicos relacionados con el límite al momento de trabajar con el concepto de límite a partir de un ε fijo.

En seguida, se describirá los resultados obtenidos por Zuchi en la segunda actividad de la sesión 2. También, se mostrará el análisis del error identificado por la autora por medio de la herramienta propuesta.

Descripción de los resultados obtenidos por Zuchi en la segunda actividad

Zuchi considera que el proceso empleado por los docentes para introducir el concepto de límite y luego formalizarlo, usando aproximaciones, evidencia la aparición de un obstáculo. Al respecto, el autor afirma que este obstáculo ya ha sido observado en el contexto histórico. Además, manifiesta que los estudiantes presentan dificultades al momento de trabajar con cantidades infinitamente pequeñas y durante el proceso de aprendizaje del concepto del límite, debido a que no logran visualizar la relación entre 8 y 7. Incluso, no entienden el porqué de encontrar la relación entre 8 y 7.

Análisis del error por medio de la herramienta propuesta

De esta información recabada, se presenta el análisis de la secuencia usando nuestra herramienta con la finalidad de reconocer los obstáculos epistemológicos del límite, y enmarcarlos en el planteamiento de error y dificultad propuesto por Socas. Para esto último, se considera que el obstáculo epistemológico que describe el autor es el llamado **"supresión o mal uso de los cuantificadores"**, puesto que este obstáculo suele aparecer en el momento que se requiere definir el límite mediante el uso del lenguaje natural. Para ello, la autora evidencia la presencia de este obstáculo en el momento que los estudiantes responden la pregunta: ¿qué tan cerca de $!_F = 4$ debemos mantener $!$ para tener la certeza de que $' = 2! - 1$ quede a una distancia menor que $0{,}5$ unidades de $'_F = 7$? Ahora bien, Zuchi menciona que, en esta situación, los estudiantes presentan dificultades para construir el concepto del límite, reconociendo la importancia de la mediación de la profesora para poder enunciar dicho concepto. Por ello, se considera que este obstáculo tiene su origen en una dificultad asociada a la complejidad del objeto matemático, ya que Socas atribuye a que este tipo de dificultad se presenta cuando se emplea el lenguaje habitual en la interpretación de los signos matemáticos.

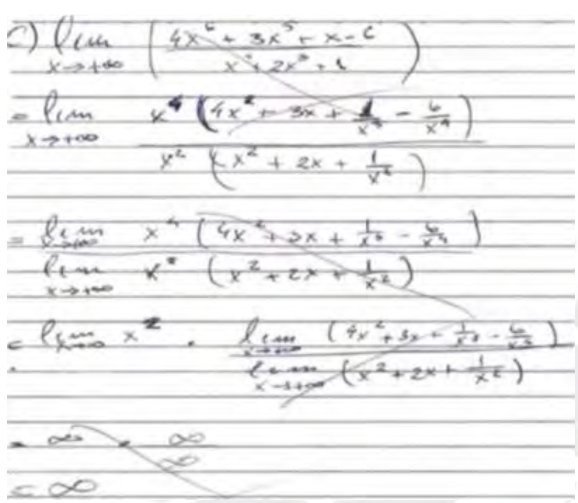
4.6 Límite y derivada: un análisis de la producción escrita de los alumnos, Vogado, Jucá y De Brito (2014)

Por lo mencionado anteriormente, estos investigadores se enfocan en identificar algunos errores relacionados con el límite y la derivada cometidos por estudiantes del segundo año de la carrera de matemática de la Universidad del Estado de Pará. Para alcanzar su objetivo, los investigadores elaboran un instrumento denominado prueba diagnóstica y analizan las respuestas dadas por los estudiantes. Dicha prueba contó con cinco preguntas y de estas se analizará la pregunta 2. Se debe señalar que esta investigación proporciona solo dos preguntas para realizar nuestro estudio. En ese sentido, se cree que los criterios planteados en nuestra herramienta pueden ser utilizados para analizar cualquiera de las preguntas en mención. Por otro lado, no se realizará el análisis de las preguntas 3,4 y 5, debido a que no es parte de esta investigación estudiar los errores relacionados con la continuidad y la derivada.

Asimismo, se describirá los resultados obtenidos por los investigadores respecto a la respuesta de la pregunta 2 de la prueba diagnóstica, mostrando las dificultades y los errores característicos en el cálculo del límite de una función que tiende al infinito. Al respecto, se puede subrayar que es posible que esto tenga un origen epistemológico. Luego, se muestra el análisis del error identificado por la autora en la respuesta de la pregunta 2 por medio de la herramienta propuesta.

Descripción de los resultados obtenidos por Vogado, Jucá y De Brito en la pregunta 2

En la figura 14, se presenta la solución de la pregunta 2 dada por un estudiante y se describe los resultados de dicha pregunta obtenidos por Vogado et al. (2014).



$$\lim_{C\to\mathbf{IJ}} \frac{4!^{K}+3!^{\&}+!-6}{!^{M}+2!^{N}+1}$$

$$\lim_{C\to\mathbf{IJ}} \frac{!^{M}04!^{P}+3!+\frac{1}{!^{N}}-\frac{6}{!^{M}}Q}{!^{P}0!^{P}+2!+\frac{1}{!^{P}}Q}$$

$$\frac{\lim_{C\to\mathbf{IJ}} !^{M}04!^{P}+3!+\frac{1}{!^{N}}-\frac{6}{!^{M}}Q}{\lim_{C\to\mathbf{IJ}} !^{P}0!^{P}+2!+\frac{1}{!^{P}}Q}$$

$$\lim_{C\to\mathbf{IJ}} !^{P}\frac{\mathrm{R.S}_{C\to\mathbf{IJ}}\; 04!^{P}+3!+\frac{1}{!^{N}}-\frac{6}{!^{M}}Q}{\lim_{C\mathbf{I}\to\mathbf{J}} 0!^{P}+2!+\frac{1}{!^{P}}Q}$$

$$=\infty.\frac{\infty}{\infty}=\infty$$

Figura 14. Pregunta 2

Fuente: Vogado, Jucá, De Brito (2014, p. 68)

Esta segunda pregunta tiene por objetivo determinar los errores que cometen los estudiantes en el cálculo del límite de una función que tiende al infinito. Así, estos autores afirman que los estudiantes llegan a la respuesta del problema 2 (ver fig. 14) de manera incorrecta, debido a que los alumnos conocen algoritmos del cálculo del límite de una división de polinomios tendiendo hacia el infinito. También, se menciona que el estudiante (ver fig. 14) presenta dificultades de comprensión. Esto último se observa cuando el estudiante inicia la resolución del problema colocando el $!$ con su determinada potencia con factor común tanto en el numerador como en el denominador.

Análisis del error por medio de la herramienta propuesta

A partir del análisis de nuestra herramienta, se puede reconocer algunos errores cometidos por el estudiante, por ejemplo, al momento de utilizar las propiedades del límite (ver la cuarta línea de la fig. 14) y en el momento que discute el infinito $\infty . \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{J}} = \infty$ (ver la última línea de la fig. 14). Esta discusión se realiza mediante el uso de propiedades que se da a lo finito, lo que evidencia la presencia del obstáculo epistemológico llamado “uso de reglas propias del álgebra”. A su vez, este error procede de la dificultad asociada con el proceso de pensamiento, porque los saberes matemáticos previos están produciendo un modelo implícito en el estudiante al momento de efectuar $\frac{\mathbf{J}}{\mathbf{J}} = 1$, lo cual es inadecuado, dado que el estudiante considera que este resultado es 1.

CAPÍTULO V : CONSIDERACIONES FINALES

En este apartado, se presentarán las conclusiones a las que hemos llegado y las cuestiones para futuras investigaciones que surgieron de la información obtenida al analizar las actividades ya diseñadas. En primer lugar, se plantearán las conclusiones a los objetivos específicos, luego, las conclusiones al objetivo general y, finalmente, se describirá las cuestiones para futuras investigaciones.

Conclusiones

Las conclusiones obtenidas de esta tesis, en relación con los objetivos específicos planteados al inicio de la investigación, son los siguientes:

5.1 En relación al primer objetivo específico

“Proponer una lista de obstáculos epistemológicos relativos al concepto de límite que sintetice las propuestas de Sierpinska (1985) y Cornu (1991), enmarcándola dentro del planteamiento sobre errores y dificultades de Socas”.

Para el logro de este objetivo, se realizó una revisión sistémica de la literatura en términos de la problemática desarrollado en el capítulo II. Esta revisión sirvió para tener una claridad teórica, ya que existen algunos “estados de cuestión” sobre dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, obstáculos epistemológicos y errores en el aprendizaje de las matemáticas que no quedan claros. Así mismo, al revisar investigaciones en este ámbito, se corroboró que no se establecen conexiones entre los obstáculos epistemológicos, las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas y los errores en el aprendizaje de las matemáticas.

El meta análisis realizado nos permitió identificar las dificultades en el aprendizaje del límite teniendo como base la definición de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas propuesto por Socas (1997), los obstáculos epistemológicos del límite cimentados en los trabajos de Cornu (1991) y Sierpinska (1985), además, de los errores en el aprendizaje del límite teniendo como base la clasificación de los errores en el aprendizaje de las matemáticas diseñado por Socas (1997). También, nos permitió reconocer las conexiones que existen entre dificultad, obstáculos epistemológicos y errores referidos al límite.

Un ejemplo concreto sobre ello es acerca de los errores en el aprendizaje de las matemáticas, ya sea por su naturaleza o por su posible origen. En ese sentido, Socas nos propone una tipología de errores de acuerdo con su origen y considera qué está en un obstáculo o en un procedimiento, o en una actitud afectiva emocional. Asimismo, los errores que tienen su origen en un obstáculo tendrán su procedencia en una dificultad en el aprendizaje de las matemáticas. De acuerdo con ello, se distinguen dos tipos de dificultades: aquellas dificultades que están asociadas a la complejidad del objeto matemático y aquellas dificultades asociadas a los procesos de pensamiento.

En este trabajo, hemos abordado algunos aspectos de los obstáculos epistemológicos del límite, en particular con los procesos que desarrollan los estudiantes al momento de interiorizar un nuevo conocimiento. Consideramos que es un aspecto trascendente, ya que dentro de la didáctica de la matemática no se puede evitar abordar el tema de los obstáculos epistemológicos, a pesar de su complejidad, y entrar en interacción con los errores y las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.

Un aspecto esencial que permite distinguir similitudes, complementariedad y redundancia entre los trabajos de Sierpinska y Cornu es lo relativo a la trialidad entre los errores, los obstáculos y las dificultades, desde enfoques epistemológicos y didácticos, los cuales a menudo presentan discordancias dando lugar a diferentes posturas. En algunos casos, se evidencia que un obstáculo se manifiesta en obstáculo-error y en otro obstáculo-dificultad, mientras que la relación obstáculo-dificultad-error nos ha ayudado a articular los trabajos de Sierpinska y Cornu.

La lista unificada de los obstáculos epistemológicos del límite esta descrita dentro del enfoque epistemológico y didáctico de Brousseau. Se trata de una unificación que será pertinente para determinar las posibles causas de estancamiento y hasta de retroceso que presentan los estudiantes cuando enfrentan el tema de límites de una función real de variable real. Asimismo, consideramos que la última formulación obstáculo-dificultad-error estaría en la posición central de nuestra lista unificada. Teniendo en cuenta los argumentos expuestos, es posible decir que la herramienta propuesta favorezca a la integración coherente de los obstáculos epistemológicos del límite, los errores y las dificultades del mismo.

5.2 En relación al segundo objetivo específico

"Analizar las respuestas de los estudiantes en investigaciones ya realizadas para validar la herramienta construida".

La validación de la herramienta se llevó a cabo a través de dos procedimientos. En primer lugar, se realizó el análisis sobre el origen de los errores relativos al límite en ciertas investigaciones ya realizadas por medio de la lista unificada que describe los obstáculos epistemológicos del límite. En segundo lugar, se procedió a analizar la procedencia de los mismos errores por medio de la tipología propuesta por Socas sobre las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. De esta manera, se verificó la validez de la herramienta.

En este trabajo, hemos realizado el análisis de los errores, las dificultades en el aprendizaje del límite y los obstáculos epistemológicos relativos al límite en investigaciones ya realizadas que introducen estas nociones teóricas. Estas investigaciones desarrollan análisis de dificultades y errores ligados con la enseñanza y aprendizaje del límite. En cierta manera, estos análisis adoptan una postura didáctica, dejando de lado la postura epistemológica y, en otros casos, adoptan una postura epistemológica y didáctica dejando de lado las conexiones entre estas nociones teóricas. En el capítulo IV, validamos la herramienta incorporando algunas nociones al momento de analizar las posibles causas de estancamiento y de rechazo cuando los estudiantes se enfrentan a un nuevo conocimiento en nuestro caso del límite.

Empezamos nuestra investigación estableciendo como objetivo similitudes y controversias, complementariedad y redundancias entre los trabajos de Sierpinska (1985) y Cornu (1991), referidas a los obstáculos epistemológicos del límite. Estas investigaciones realizadas se caracterizan por estudiar las limitaciones, impedimentos o dificultades que afectaron a los matemáticos en la construcción del conocimiento del límite desde un punto de vista histórico.

Un obstáculo epistemológico es un conocimiento válido en cierto ámbito e incorrecto en otro. En el caso de los obstáculos epistemológicos del límite, ha debido ser superado a lo largo de la historia de nuestro objeto matemático. Sin embargo, todavía permanecen imperantes durante los procesos de enseñanza del límite en los estudiantes. Este conocimiento se manifiesta en los estudiantes por medio de los errores.

Desde nuestro punto de vista, los errores y las dificultades en el aprendizaje del límite no se presentan de manera causal, fortuita, impensable o inesperada, aunque aparecen en forma regular en los estudiantes. En ese sentido, gran parte de las investigaciones ponen en evidencia las dificultades en el aprendizaje del límite, como así también en los errores en el aprendizaje del límite que tienen los estudiantes, además de citar los trabajos Sierpinska (1985) y Cornu (1991) relativos a los obstáculos epistemológicos del límite.

Sostenemos que las dificultades en el aprendizaje del límite, los obstáculos epistemológicos relativos al límite y los errores en el aprendizaje del límite se relacionan, pero, en muchas de las investigaciones analizadas, dicha relación no está descrita. En el capítulo IV, el cual se desarrolló, a partir de ciertas evidencias presentadas en algunas investigaciones relativas a la problemática, se muestra la conexión desarrollada en el capítulo III.

5.3 En relación al objetivo general

"Proponer una lista unificada de los obstáculos epistemológicos relativos al límite, enmarcándola dentro del planteamiento sobre errores y dificultades, con la finalidad de analizar las respuestas de los estudiantes."

La descripción realizada en el capítulo III permite afirmar que se ha cumplido con el objetivo planteado a pesar de la complejidad de la problemática abordada, y de la necesidad de profundizar en la clarificación de los listados acerca de los obstáculos epistemológicos de límite y el enmarcamiento con el planteamiento de Socas acerca de los errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.

En este trabajo, se ha abordado algunos errores recurrentes descritos en ciertas investigaciones, en particular, relacionadas con el concepto del límite. Se cree que este es un aspecto relevante en investigaciones en didáctica de la matemática, debido a que los errores son elementos esenciales en este tipo de investigaciones. Además, detectar cuáles son los errores comunes que cometen los estudiantes durante el aprendizaje del límite, permite identificar las concepciones inadecuadas que se han dado en la evolución histórica del concepto del límite, así como las dificultades en el aprendizaje del límite por parte de los estudiantes.

Un aspecto fundamental que permite distinguir la herramienta elaborada es el relativo a la trialidad entre los errores, las dificultades y los obstáculos, los cuales con frecuencia se presentan disjuntos en investigaciones en didáctica de la matemática. En unos casos, se pone atención en los errores que cometen los estudiantes durante el aprendizaje del concepto del límite. En otros casos, se hace énfasis en las dificultades que tienen los estudiantes para comprender el concepto del límite, mientras que en nuestra herramienta se postula una relación entre los errores, las dificultades y los obstáculos, por lo que se piensa que esta relación puede ayudar en la articulación entre los listados existentes relativos a los obstáculos epistemológicos del límite.

Los listados pertenecientes a Sierpinska (1985) y Cornu (1991) acerca de los obstáculos epistemológicos relativos al límite descrito en el capítulo II, no son completamente eficaces. Se trata de dos listados que son pertinentes en casos específicos, como ocurren con el listado de Sierpinska (los obstáculos epistemológicos vinculados a las matemáticas que se enseñan en la escuela) y el listado de Cornu (las dificultades que surgieron durante la construcción del límite). También, estos listados reúnen características centrales. En el caso de Sierpinska, está más próximo al enfoque de Brousseau y, en el caso de Cornu, al enfoque de Bachelard. Se considera que la noción de obstáculo estaría en una posición central, como ocurre en nuestra herramienta, siendo un aspecto clave para realizar una articulación coherente sobre dichos listados.

Este trabajo se ha basado en el análisis de los listados acerca de los obstáculos epistemológicos del límite y las nociones teóricas acerca de los errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas propuesto por Socas (1997). En cierto modo, nuestro análisis adopta una postura epistemológica y cognitiva, por lo que el estudio de obstáculos epistemológicos se puede reconocer en la evolución histórica del límite, los cuales aparecen ligados con la forma de pensar de los estudiantes durante la construcción del concepto del límite. De esta forma, nuestra herramienta permite ampliar el estudio acerca de la compresión de los obstáculos epistemológicos del límite, incorporando las nociones de error y dificultad planteado por Socas para el análisis de las respuestas de los estudiantes en investigaciones que involucren nuestro objeto de estudio.

Cuestiones para futuras investigaciones

A continuación, señalaremos algunas cuestiones que han quedado pendientes de analizar.

1. Diseñar secuencias didácticas, a partir del análisis de los errores realizado por la herramienta, que permita la superación de los obstáculos epistemológicos del límite

2. Aplicar el mismo análisis sobre los errores que cometen los estudiantes durante el aprendizaje del límite. A diferencia de nuestra investigación, los errores tendrán su origen en los obstáculos didácticos.

3. Una visión más amplia desde el punto de vista de la didáctica de la matemática nos puede diseñar situaciones que permitan identificar la presencia de los obstáculos epistemológicos relacionados con la transferencia de las propiedades de los términos de una sucesión a su límite y la reducción a funciones monótonas en los estudiantes. Esto último, debido a que en el trabajo de Sierpinska solo se brinda un estudio histórico de estos obstáculos.

4. Analizar las respuestas de los estudiantes ante las tareas propuestas en los libros de texto, en particular, en el capítulo de límites, para predecir las respuestas erróneas que algunos estudiantes puedan dar, y permita a los docentes reconocer y establecer estrategias en la superación de los obstáculos epistemológicos.

REFERENCIAS

Andrade, J., & Molina, N. (2016). Propuesta para La Enseñanza del Concepto de Área Haciendo Uso del Método De Exhaución.

Amorim, L. (2011). A (re) construção do conceito de límite do cálculo para a análise: um estudo com alunos do curso de licenciatura em matemática.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *1*(1), 40-55.

Bachelard, G. (2000). *La formación del espíritu científico*. Siglo XXI. Editores, Buenos Aires, 1948; p. 15-26.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S., & Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *9*(2), 189-209.

Blazquez, S., Gatica, N. & Ortega, T. (2008). Concepto de límite funciónal: aprendizaje y memoria. *Contextos educativos: Revista de educación*, (11), 7-22.

Bombal, F. (2010). Rigor y demostración en Matemáticas. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Física y Naturales (104), 1, 61-79.

Brousseau, G. (1983). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathématiques, 1970–1990*. Retrieved from http://ebookcentral.proquest.com

Burbage, N. & Chouchan, N. Leibniz et l'infini. Paris: PUF, 1993.

Cauchy, A. (1821). Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique: Ire partie. Analyse algébrique. Debure.

Carneiro-Abrahão, A. (2008). El papel de la interacción en el aprendizaje de las matemáticas: relatos de profesores. *Universitas Psychologica*, *7*(3), 711-723.

Celestino, M. (2008). *Concepções sobre límite: imbricações entre obstáculos manifestos por alunos do Ensino Superior* (Doctoral dissertation, Tese de Doutorado em Educação. PUC-SP. São Paulo).

Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. *XIV Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*.

Costa do Nascimento, J. (2003). Conceito de límite em cálculo: obstáculos e dificuldades de aprendizagem no contexto do ensino superior de matemática.

Costa, E., & Otto, B. (2005). Ideología y matemáticas: el infinito. *Acta de la XIII Jornada de ASEPUMA*, 1-9.

Cornu, B. (1981). Apprentissage de la notion de límite: modèles spontanés et modèles propres. In *Actes du Cinquième Colloque du Groupe Internationale PME* (pp. 322-326).

Cornu, B. (1991). Limits. In *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Springer Netherlands.

Delgado, C. (1998). *Estudio microgenético de esquemas conceptuales asociados a definiciones de límite y continuidad en universitarios de primer curso* (Doctoral dissertation, Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona).

Díaz, H. (2009). El lenguaje verbal como instrumento matemático. *Educación y Educadores*, *12*(3).

D´Alembert & Diderot (1755): Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciencies des arts et des métiers par une societé de gens de lettres. Tomo IX. París.

D’Amore, B. (1993) “Lo veo, pero no lo creo” Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual.

D'Amore, B. (2000). Escolarización del saber y de las relaciones: efectos sobre el aprendizaje de las matemáticas. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 3(3), 321-338.

D'Amore, B. (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza. Revista de la ASOVEMAT (*Asociación Venezolana de Educación Matemática*), 17(1), 87-106.

Dorf, R. C., & Svoboda, J. A. (2011). Circuitos eléctricos. *Introducción al análisis y diseño. Alfaomega, 8va. ed. México*.

Durán, A. J. (2009). Euler y los infinitos (grandes y pequeños).

Duroux, A. (1982). *La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure* (Doctoral dissertation, Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques).

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168.

Ely, R. E. (2007). *Student obstacles and historical obstacles to foundational concepts of calculus* (Doctoral dissertation, University of Wisconsin--Madison).

Fernández-Lázaro, Á. (2013). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas en ESO y Bachillerato. Análisis de un caso práctico.

Fernández-Plaza, J. (2010). Unidad didáctica: límite y continuidad de funciones.

Fiorentini, D., & Lorenzato, S. (2006). Investigação em educação matemática percursos teóricos e metodológicos. Autores Associados. (11), 100-104.

Ferrante, J. (2009). Una Introducción al Concepto de Límite (dos mil años en un renglón). Editorial de la U. T. N. Disponible en http://www.edutecne.utn.edu.ar

Flores, P. (1998). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Investigación durante las prácticas de enseñanza*. Mathema Colección. Granada: Editorial Comares.

Garcia, M., & Navarro, C. (2010). Una alternativa para trabajar con límites especiales. *Números. Revista de Didactica de las Matemáticas*, 75, 105-120.

Garnica, A. (2001). Pesquisa Qualitativa e Educação (Matemática): de regulações, regulamentos, tempos e depoimentos. Mimesis, Bauru, 22(1), 35-48.

Goizueta, M. (2015). Aspectos epistemológicos de la argumentación en el aula de matemáticas.

Gonzalez, I. (2013) Propuesta didáctica: La enseñanza del concepto de liímite en el grado undecimo, haciendo geogebra.

González del Olmo, D. (2015). Errores comunes en el aprendizaje de las fracciones: Un estudio con alumnos de 12-13 años en Cantabria.

Guerrero, F. (2015). Errores matemáticos en la resolución de problemas de modelizacion matemática. Caso: Estudiantes del primer año de educación media.

Hitt, F., & Páez, R. (2004). Dificultades de aprendizaje del concepto de límite y actividades de enseñanza.

Hitt, F. (2013) El infinito en matemáticas y el aprendizaje del cálculo: Infinito potencial versus infinito real.

Kirk, G., Raven, J., & Schofield, M. (1982). *Os filósofos pré-socráticos* (Vol. 19944). Fundação Calouste Gulbenkian.

Leal, F. (2016). La unidad de opuestos en Leibniz. *THÉMATA. Revista de Filosofía*, (53), 13-30.

Lima, E. (1997). *Análisis Real volumen 1*. Instituto de Matemática Ciencias Afines.

Messias, M., & Brandemberg, J. (2012). Um Estudo sobre as Imagens Conceituais de Universitários relativas ao Conceito de Límite de Função. *EM TEIA| Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, *3*(1).

Miranda, R. (2000). Desarrollo de una idea intuitiva del límite en estudiantes de secundaria. Departamento de matemática, Universidad Autónoma de Guerrero.

Molfino, V., & Buendía, G. (2010). El límite de funciones en la escuela: un análisis de su institucionalización. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, *5*(1), 27-41.

Moreno, L. (2011). Dificultades de Aprendizaje en Matemática. *CAIDDAM Panamá. Departamento de Matemática, Universidad de Panamá*.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for research in mathematics Education*, 3-14.

Newton, I. (1687), Philosophiae Naturalis Principia Mathematica.

Ortega, T., & Pecharromán, C. (2014). Errores en el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones.

Páez-Murillo, R. E. (2016). Construcción del concepto de límite: un estudio de caso. *Respuestas*, *10*(2), 42-50.

Pereira, V. (2009). Cálculo no ensino médio: uma proposta para o problema da variabilidade. *Universidade Federal do Rio de Janeiro-UFRJ, Rio de Janeiro-RJ*.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas.

Rivera, S. (2013). Epistemología sin sujeto cognoscente. superación, disolución o sujeción de la subjetividad en Popper, Wittgenstein y Foucault. Estudios de Epistemología X, 82.

Robins, B., & Wilson, J. (1761). *Mathematical tracts of the late Benjamin Robins..* (Vol. 1). J. Nourse.

Roca, A. (2002). Control de Procesos. *Alfaomega*.

Rodrigues, C. (2002). A Abordagem Processual nos Estudos da Tradução: uma meta-análise qualitativa. Cadernos de Tradução, 2(10), 23-57.

Rodríguez, E. (2010). Concepciones del concepto de infinito actual en estudiantes universitarios. *TED: Tecné, Episteme y Didaxis*, (27).

Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. *Enseñanza de las Ciencias*, *12*(1), 045-56.

Ruch, D. (2017). Investigations Into d'Alembert's Definition of Limit: A Student Project With Primary Sources.

Sellés, M. (2006). La paradoja de Galileo. *Asclepio*, *58*(1), 113-148.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de límite. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 6.1, pp.5-67.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. Educational Studies in Mathematics, Vol. 18, 371-397

Sackur-Grisvard, C., & Léonard, F. (1985). Intermediate Cognitive Organizations in the Process of Learning a Mathematical Concept: The Order of Positive Decimal Numbers. *Cognition and Instruction, 2*(2), 157-174. Recuperado de: http://www.jstor.org.ezproxybib.pucp.edu.pe:2048/stable/3233544

Sierpinska, A., & Lerman, S. (1996). Epistemologías de las matemáticas y de la educación matemática. *International Handbook of Mathematics Education*, 827-876.

Sierpinska, A. (1997), *La compréhension en mathématiques,* Bruxelles : De Boeck & Larcier s.a.

Spivak, M. (1996). *Cálculo infinitesimal*. Reverté.

Stewart, J. (2010). Cálculo de una variable: Conceptos y contextos. Cengage Learning.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, 125-154.

Tall, D. (1980). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes. In Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education (pp. 170-176).

Urbaneja, P. (2008). La solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables: la teoría de la proporción y el método de exhaución. *Sigma: revista de matemáticas= matematika aldizkaria*, (33), 101-129.

Valdivé, C., & Escobar, H. (2011). Estudio de los polinomios en contexto. *Paradígma*, *32*(2), 85-106.

Vargas, C. (2009). El papel del principio de continuidad de Leibniz en el desarrollo del cálculo infinitesimal. (Spanish). *Revista De Filosofia De La Universidad De Costa Rica*, *47*(120/121), 113-118.

Villarreal, M. E., & Argentina, C. (2003). La investigación en educación matemática. Boletín de la *SOAREM*, *16*.

Vogado, G. , Jucá, R., & de Brito Mota, T. (2014). Límite e derivada: Uma análise da produção escrita dos alunos. *Revista WEB-MAT*, *1*(1), 61-75.

Vrancken, S., Gregorini, M. , Engler, A., Muller, D., & Hecklein, M. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y aprendizaje del concepto de límite. *Revista PREMISA*, *8*(29), 9-19.

Zuchi, I. (2005). A abordagem do conceito de límite via sequência Didática: do ambiente lápis papel ao ambiente computacional.

Zúñiga, A., & Campos, H. (1997). *Elementos de cálculo diferencial: historia y ejercicios resueltos*. Editorial Universidad de Costa Rica.