

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE POSGRADO



**EL CUBO Y SUS ELEMENTOS: UNA SECUENCIA DIDÁCTICA BASADA EN
EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO EN ESTUDIANTES
DEL CUARTO GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA**

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas

que presenta

MARÍA TERESA, PORTUGAL AVALOS

Dirigido por

JESÚS VICTORIA, FLORES SALAZAR

San Miguel, 2015

A mi hijo Luis Adrián, por todo el tiempo que no le pude dedicar, al realizar esta investigación. A mi madre Brígida, por las grandes muestras de amor y dedicación. A la memoria de mi padre Roberto Portugal Neyra, por ser ejemplo de perseverancia y superación. A David Aguilar, quien me motivó a iniciar y concluir esta nueva etapa profesional de mi vida.

AGRADECIMIENTO

A Dios, por darme la fortaleza en cada paso que doy en la vida, y por poner en mi camino a las personas que tuvieron un rol importante para que hiciera realidad esta meta anhelada.

Al Ministerio de Educación del Perú, quien por medio del Programa Nacional de Becas y Crédito Educativo-PRONABEC, me permitió acceder a la Beca Presidente de la República denominada “Beca Docente de Posgrado para estudios de Maestría en Ciencias de la Educación en el Perú 2014”.

A la Maestría Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú por haber contribuido en mi formación académica y contar con un excelente equipo de profesores del más alto nivel.

A mi querida y estimada asesora, la Dra. Jesús Victoria Flores Salazar, por toda la dedicación que le ha brindado a esta investigación, por guiarme con disciplina y exigencia en este camino de la investigación Matemática y sobre todo por su valioso tiempo compartido conmigo, valoro cada minuto a su lado, es usted una excelente maestra.

A los miembros del jurado a la Mg. Carolina Reaño de la Pontificia Universidad Católica del Perú y al Dr. Fumikaso Saito de la pontificia Universidad Católica de Sao Paulo de Brasil, por sus pertinentes observaciones y sugerencias para mejorar la investigación.

A la Dra. Cecilia Gaita Iparraguirre, de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por sus sabias enseñanzas en los cursos que fue mi maestra.

Al Dr. Uldarico Malaspina Jurado, de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por enseñarnos a amar las Matemáticas y brindarnos siempre su valioso tiempo.

Al Dr. Héctor Velásquez, de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por su disposición y valiosísimo apoyo en esta investigación.

A la profesora Sonia Peña, de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por entregarse con tanta pasión en los cursos de inglés, es ud. una maestra admirable, de vocación, que siempre recordaré por confiar en nosotros, entendernos, y exigirnos con paciencia y disciplina, muchas gracias.

Al profesor Jorge Polar Jara director de la I.E. N° 1143 “Domingo Faustino Sarmiento”, por creer en mí al darme la oportunidad de iniciar esta nueva experiencia de la maestría, “Gracias por impulsar en sus maestros el desarrollo profesional”.

A mi madre Brígida, mis hermanos; Diana, Roberto, Giselle y Luis quienes me apoyaron en todo y me comprendieron en muchas ocasiones.

A David Aguilar, por motivarme a desarrollarme profesionalmente, por ser mi soporte y apoyo en los momentos más difíciles que me tocó vivir, por compartir conmigo que la mejor herencia que podemos dejar a nuestro hijo es una buena educación.

A Norma Espinoza Esteban, porque cada día vivido en la Universidad, me ha enseñado a valorar la vida y a las personas, de ti aprendí, que por más conocimiento que una persona tenga, no vale nada si no busca primero ser un buen ser humano.

A mis amigas y amigos compañeros de la maestría en Enseñanza de las Matemáticas primaria y secundaria, en especial a Beatriz Espinoza, Rubén Jara, Luis Maraví, Verónica Castillo, Ysabel Valentín, Edith Ochoa, y Alicia Becerra, por sus consejos y apoyo incondicional a lo largo de esta maestría.

RESUMEN

El presente trabajo de investigación tiene como objetivo analizar, basados en la teoría de Parzysz, el Desarrollo del Pensamiento Geométrico, específicamente el tránsito de las etapas G0 a G1 en estudiantes del cuarto grado de educación primaria (9 y 10 años de edad) cuando estudian la noción de cubo y sus elementos, por medio de una secuencia didáctica en la que se usa el material concreto y el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D, para lo cual planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Estudiantes del 4to grado de educación primaria desarrollan su Pensamiento Geométrico, en las etapas G0 y G1, cuando estudian la noción de cubo y sus elementos en una secuencia didáctica con material concreto y Cabri 3D?. Para este estudio tomamos como marco teórico el Desarrollo del Pensamiento Geométrico de Parzysz y como marco metodológico aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue. La secuencia didáctica de la parte experimental consta de dos actividades. La primera actividad tiene cuatro preguntas orientadas a identificar el desarrollo del pensamiento geométrico en las etapas G0 y G1 en estudiantes cuando estudian el cubo en material concreto. La segunda actividad consta también de cuatro preguntas orientadas a distinguir la etapas G0 y G1 del Desarrollo del Pensamiento Geométrico cuando estudian el cubo y sus elementos en las que se utiliza el Cabri 3D. Finalmente, consideramos que el desarrollo de las dos actividades permitió identificar y estudiar el tránsito de etapas G0 y G1 de los estudiantes al desarrollar la secuencia didáctica. Además, pensamos que el uso del Cabri 3D en la segunda actividad fue sustancial para el Desarrollo del Pensamiento Geométrico de los estudiantes ya que la manipulación directa y el arrastre que este ambiente de geometría dinámica posee facilitó dicho desarrollo.

Palabras claves: Geometría, Cubo, Material concreto, Cabri 3D.

ABSTRACT

This research aims to analyze, based on the theory of Parzysz, the development of geometrical thinking, specifically the transit from G0 to G1 stage in fourth graders (9 to 10 years old) when they study the notion of cube and its elements, through a didactical sequence in which the solid material and the environment of Cabri 3D dynamic geometry were used. Thus, the following research question was raised: Did fourth-grade students of primary education develop their geometrical thinking in the G0 and G1 stages while studying the concept of cube and its elements in a didactical sequence with the solid material and Cabri 3D?. For this study, we have considered the development of Parzysz's Geometrical Thinking as our theoretical framework, and some aspects of Artigue's Didactical Engineering as our methodological framework. The didactical sequence of the experimental part consisted of two activities. The first activity had four questions designed to identify the students' development of geometrical thinking in the G0 and G1 stages in which they studied the particular solid cube. The second activity had also four questions designed to distinguish the G0 and G1 geometrical thinking development stages in which they studied the cube and its elements by using Cabri 3D. Finally, we considered that the development of both activities allowed us to identify and study the transit of the students from G0 to G1 stages while developing the didactical sequence mentioned above. We also believed that the use of Cabri 3D in the second activity was substantial for the development of students' geometrical thinking due to the direct manipulation and drag that this dynamic geometrical environment possesses which has facilitated this development.

Keywords: Geometry, Cube, solid material, Cabri 3D.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Ventana de inicio del Cabri 3D versión 2.1	25
Figura 2. Barra de herramientas del Cabri 3D.....	25
Figura 3. Herramienta poliedros.....	25
Figura 4. Herramienta manipulación.....	26
Figura 5. Herramienta punto.....	27
Figura 6. Herramienta segmento	27
Figura 7. Herramienta polígono	27
Figura 8. Herramienta longitud	28
Figura 9. Función atributos para el color de curva.....	28
Figura 10. Función atributos para el color de la superficie	28
Figura 11. Adaptado de Maciel (2004, p.73).....	35
Figura 12. Estructura de Cubo construido en varitas.....	36
Figura 13. Caras del cubo construido en Cabri 3D.....	37
Figura 14. Diagonal del cubo construido en Cabri 3D.....	38
Figura 15. Diagonal del cubo construido en Cabri 3D.....	38
Figura 16. Demostración de las diagonales del cubo	39
Figura 17. Geometría no axiomática	40
Figura 18. Tetraedro	45
Figura 19. Clasificación de los poliedros	46
Figura 20. Cubo ABCD-EFGH	47
Figura 21. Reconocemos sólidos geométricos	49
Figura 22. Reconocemos sólidos geométricos	50
Figura 23. Conocemos los sólidos geométricos	50
Figura 24. Conocemos los sólidos geométricos	51
Figura 25. Reconocemos los sólidos geométricos.....	52

Figura 26. Reconocemos los sólidos geométricos.....	52
Figura 27. Identificamos sólidos geométricos.....	53
Figura 28. Manipulación del cubo y prisma.....	56
Figura 29. Respuesta de Daniel en la Actividad 1.....	57
Figura 30. Respuesta de Josué en la Actividad 1.....	58
Figura 31. Pregunta N° 2 de la Actividad 1 con material concreto.....	58
Figura 32. Respuesta de Daniel de la actividad 1 pregunta 2.....	60
Figura 33. Respuesta de Daniel de la pregunta 2.....	60
Figura 34. Respuesta de Josué completando la tabla de la pregunta 2.....	61
Figura 35. Respuesta de Josué de la pregunta 2.....	62
Figura 36. Pregunta 3 de la actividad 1.....	62
Figura 37. Respuesta de Daniel de la pregunta 3.....	63
Figura 38. Manipulación del material concreto prisma y cubo.....	64
Figura 39. Respuesta de Josué pregunta 3.....	64
Figura 40. Pregunta 4 de la actividad 1.....	64
Figura 41. Estructura del cubo en madera (30cm).....	66
Figura 42. Respuesta de Daniel de la pregunta 4.....	66
Figura 43. Respuesta de Josué de la pregunta 4.....	68
Figura 44. Pregunta 1 de la actividad 2.....	69
Figura 45. Uso de la función arrastre en el cubo.....	70
Figura 46. Uso de la función manipulación directa en el cubo.....	70
Figura 47. Arrastre de un vértice para aumentar la longitud de la arista.....	71
Figura 48. Arrastre de un vértice para disminuir la longitud de la arista.....	71
Figura 49. Respuesta de Daniel actividad 2.....	72
Figura 50. Respuesta de Daniel actividad 2.....	72
Figura 51. El cubo cuando aumenta la longitud de sus aristas.....	73

Figura 52. El cubo cuando la longitud de sus aristas disminuyen.....	73
Figura 53. Manipulación del cubo haciendo uso de la función manipulación directa	74
Figura 54. El cuadrado cuando se hace uso de la función manipulación directa	74
Figura 55. Josué resuelve la tabla de la actividad con Cabri 3D.....	75
Figura 56. Pregunta 2 de la actividad 2	75
Figura 57. Uso de la herramienta longitud para las aristas del cubo	76
Figura 58. Daniield ubicando el cursor en las aristas del cubo	77
Figura 59. Longitud de la arista del cubo por Daniield	77
Figura 60. Respuesta de Daniield de la actividad 2.....	78
Figura 61. Josué ubica el cursor en la arista del cubo	78
Figura 62. Medida de la arista por Josué.....	79
Figura 63. Uso de la función manipulación directa.....	79
Figura 64. Vista del cuadrado con el uso de la función manipulación directa	79
Figura 65. Respuesta de Josué en la pregunta 2	80
Figura 66. Pregunta 3 de la actividad 2	80
Figura 67. Color de la arista del cubo.....	81
Figura 68. Color de los vértices del cubo	81
Figura 69. Medida de longitud de las aristas del cubo	82
Figura 70. Uso de la herramienta color de curva.....	82
Figura 71. Vista del cubo con el uso de manipulación directa	83
Figura 72. Respuesta de Daniield	83
Figura 73. Respuesta de Daniield	83
Figura 74. Josué ubica el cursor en una arista	84
Figura 75. Color de curva de una de las aristas por Josué.....	84
Figura 76. Respuesta de Josué sobre el número de aristas del cubo	85
Figura 77. Respuesta de Josué sobre el número de vértices del cubo	85

Figura 78. Pregunta 4 de la actividad 4	85
Figura 79. Reconocimiento de una de las caras cuadradas del cubo	86
Figura 80. Coloreado de las caras del cubo con la función superficie del objeto	86
Figura 81. Coloreado de una de las caras del cubo por Daniel	87
Figura 82. El cuadrado al hacer uso de la función manipulación directa.....	87
Figura 83. Respuesta de Daniel reconociendo las caras del cubo	87
Figura 84. Cubo ABCD-EFGH construido por Daniel	88
Figura 85. Coloreado de las caras del cubo por Josué.....	88
Figura 86. Respuesta de Josué.....	89
Figura 87. Cubo ABCD-EFGH	89
Figura 88. Cubo ABCD-EFGH	90

LISTA DE CUADROS

Cuadro 1. Especificaciones de las herramientas del Cabri.....	26
Cuadro 2. Contenidos de geometría de 1° a 4to grado de primaria.....	31
Cuadro 3. Capacidades de geometría de 1° a 4to grado de primaria.....	31
Cuadro 4. Estándares Nacionales del Perú de Geometría por ciclos.....	32
Cuadro 5. Elementos del cubo.....	47
Cuadro 6. Textos analizados.....	48
Cuadro 7. Descripción de las actividades de la investigación.....	55
Cuadro 8. Los elementos del cubo	90

ÍNDICE

CONSIDERACIONES INICIALES	14
CAPITULO I: LA PROBLEMÁTICA.....	15
1.1. Antecedentes	15
1.2. Ambiente de geometría dinámica Cabri 3D	24
1.3. Justificación de la investigación	29
1.4. Pregunta y objetivos de la investigación.....	34
CAPITULO II: DESARROLLO DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO DE PARZYSZ Y APECTOS DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA.....	35
2.1. Desarrollo del Pensamiento Geométrico	35
2.2 Metodología de investigación: aspectos de la Ingeniería Didáctica	41
CAPÍTULO III: EL CUBO	44
3.1. Aspectos matemáticos.....	45
3.2. Aspectos didácticos del libro del 4to grado de primaria.....	48
CAPÍTULO IV: EXPERIMENTO Y ANÁLISIS.....	54
4.1. Desarrollo de la investigación.....	54
Resultados del experimento.....	91
Consideraciones finales	92
REFERENCIAS	95
ANEXOS	98

CONSIDERACIONES INICIALES

En nuestro medio, es frecuente que los temas de geometría queden relegados a los últimos meses del año escolar en la educación primaria. Esto ocurre por varios motivos, uno de los cuales puede ser el poco conocimiento de los profesores del nivel primario en temas de geometría plana que trabajarán con sus estudiantes en el año escolar debido a que en la formación inicial son pocos los cursos que se dedican a matemáticas.

A continuación, presentamos los cuatro capítulos en que se desarrolla nuestro trabajo.

En el primer capítulo, presentamos algunas investigaciones relacionadas con el objeto matemático cubo y el marco teórico en el que nos basamos en la tesis que es el Desarrollo del Pensamiento Geométrico. También se presentan los antecedentes que guardan relación con el objeto matemático en material concreto y los antecedentes vinculados con el uso del ambiente de geometría dinámica Cabri 3D. Adicionalmente, formulamos la pregunta de investigación y los objetivos de la investigación.

El segundo capítulo está compuesto por los aspectos teóricos y metodológicos de la investigación. En cuanto al marco teórico, tomamos aspectos del Desarrollo del Pensamiento Geométrico (DPG) de Parzysz (1988). Específicamente nos centramos en las etapas G0 y G1 de la geometría no axiomática que propone el investigador y en la adaptación que hemos realizado para efectos de nuestra investigación. Además, presentamos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue, que es la base metodológica que guía nuestra investigación.

En el tercer capítulo, presentamos el objeto matemático cubo y el análisis didáctico de los libros de texto del primer al cuarto grado de educación primaria del Ministerio de Educación del Perú (MINEDU), concretamente estudiamos las unidades donde se aborda el objeto matemático cubo.

En nuestro último capítulo, caracterizamos el escenario y a los sujetos de investigación. Además, presentamos las actividades propuestas en la investigación y sus respectivos análisis a priori y a posteriori.

Finalmente, presentamos los resultados y consideraciones finales de la investigación en el que señalamos también las futuras investigaciones que podemos realizar a partir de este estudio.

CAPITULO I: LA PROBLEMÁTICA

La investigación que presentamos se centra en el estudio del Desarrollo del Pensamiento Geométrico en estudiantes del 4to grado de educación primaria, con el objeto matemático cubo, para lo cual, organizamos este capítulo de la siguiente manera: antecedentes, el Cabri 3D, la justificación de la investigación y finalmente, en este capítulo presentamos la pregunta de investigación y sus respectivos objetivos.

1.1. Antecedentes

Los antecedentes están organizados de acuerdo a tres características, los antecedentes que tienen relación con el objeto matemático cubo, antecedentes relacionados al referencial teórico que es el Desarrollo del Pensamiento Geométrico y antecedentes relacionados a la metodología de la investigación que es la Ingeniería Didáctica de Artigue.

Antecedentes que guardan relación con el objeto matemático y el referencial teórico

En primer lugar, presentamos el trabajo de Fernández (2013), cuyo objetivo fue analizar el uso de perspectivas y Cabri 3D para reducir el conflicto entre lo visto y lo sabido de la representación del cubo. La investigadora utilizó como referencial teórico el estudio de Parzysz sobre el Desarrollo del Pensamiento Geométrico y sobre lo visto y lo sabido y como metodología aspectos de la Ingeniería Didáctica.

Cabe resaltar que el marco teórico que utilizó la investigadora será el que se empleará en este trabajo.

En la parte experimental de su investigación empleó material manipulativo y el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D, los sujetos de investigación fueron estudiantes entre 11 y 13 años de edad del 1er año de educación secundaria. La investigación tomó como referencial teórico las etapas G0, G1, G2 y G3 el Desarrollo del Pensamiento Geométrico pero se centró en analizar los resultados de las actividades que permitieron observar y analizar las dos primeras etapas del desarrollo del Pensamiento Geométrico G0 y G1; sin embargo, en la actividad cuatro las respuestas de los alumnos evidenciaron que se encontraban en transición a la etapa G2.

La investigadora concluye que el uso del Cabri 3D ayudó a los estudiantes a diferenciar características entre el modelo y su representación especialmente en cuanto al trabajo de la perspectiva caballera. Además, el ambiente de geometría dinámica ayudó a los estudiantes a observar la representación del cubo desde diferentes puntos de vista.

Asimismo, logró verificar que el uso del Cabri 3D permitió que los estudiantes construyeran e interpretaran la representación del cubo, particularmente en la perspectiva Caballera. Además, según Fernández (2013) los estudiantes lograron comprender que el cubo puede ser representado y observado mediante diferentes perspectivas y diferentes puntos de vista.

Esta investigación es importante para nuestro estudio, porque nos brinda aportes sobre el objeto matemático ya que la autora utilizó material concreto para la representación del cubo, asimismo la metodología empleada en la investigación será subsidio para la nuestra porque pensamos trabajar con la misma metodología, Ingeniería Didáctica y pensamos tomar como referente la secuencia de actividades propuestas las cuales adaptaremos para nuestra investigación ya que trabajaremos con estudiantes del nivel primario.

En segundo lugar, presentamos la investigación de Cozzolino (2008) cuyo objetivo fue explorar la perspectiva para ayudar al estudiante a ampliar la capacidad de visualización de objetos geométricos utilizando el Cabri 3D. La investigación se realizó con estudiantes entre los 13 y 14 años de edad en Brasil.

Dicha investigación se realizó en cuatro encuentros y seis actividades, en el primer encuentro la investigadora presenta a los estudiantes un poco de historia de las perspectivas (caballera y cónica) en diapositivas, asimismo, los estudiantes exploran el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D, en el segundo encuentro los estudiantes responden a cuestionarios sobre figuras geométricas tridimensionales, en el tercer encuentro se realiza un estudio de la perspectiva cónica en las representaciones de cubos y resuelven ejercicios, en el cuarto y último encuentro se realiza un estudio de la perspectiva caballera de objetos geométricos tridimensionales.

La autora toma, como referencial teórico el DPG y como metodología de investigación el Diseño Experimental y tiene como propósito lograr que los estudiantes a través del uso de la herramienta Cabri 3D, logren el desarrollo de la etapa G1, asimismo la investigadora señala que la enseñanza de las perspectivas y el uso del Cabri 3D facilitaron que los estudiantes representen con facilidad un objeto geométrico tridimensional como el cubo, en el plano bidimensional.

Finalmente, la investigadora concluyó en su investigación que los estudiantes articularon diferentes puntos de vista, tanto en el ambiente de lápiz y papel y en el ambiente de

geometría dinámica Cabri 3D, también que el uso de la perspectiva caballera es una herramienta adecuada para el aprendizaje de geometría espacial.

Las investigaciones presentadas anteriormente toman al cubo como objeto matemático y como marco teórico las etapas del Desarrollo del Pensamiento Geométrico de Parzysz (1988), así como el uso del Cabri 3D, el cual nosotros tomaremos como modelo las actividades propuestas con el uso del Cabri 3D y las adaptaremos para el nivel primario para nuestra investigación. Además tomaremos las actividades propuestas por Fernández (2013) especialmente actividades propuestas con el uso del material concreto para la parte experimental y de Cozzolino (2008) actividades propuestas con el Cabri 3D ya que la investigación nos muestra la importancia del uso de la geometría dinámica en el aprendizaje de este objeto matemático y la autora manifiesta que el uso de la tecnología ayudó a tener buenos resultados en el nivel secundario, lo cual nos incentiva a aplicarlo y adaptarlo en el nivel primario en el cual se desarrolla nuestra investigación.

Antecedentes que guardan relación con el objeto matemático

Guillén et al. (1992) investigan las representaciones planas de objetos tridimensionales (cubo, tetraedro, octaedro, prisma) usando material concreto, el uso del software, y materiales impresos. Su estudio tiene como objetivos: identificar las destrezas de visualización espacial de los estudiantes y de las lecturas y escritura de representaciones planas de cuerpos tridimensionales. Utilizan como marco referencial el Modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, ya que lo consideran como un excelente modelo de representación de los procesos de desarrollo del razonamiento de las matemáticas y utilizan como metodología el Método de Enseñanza Heurístico ya que lo consideran el más apropiado como complemento del modelo de Van Hiele.

Todas las actividades propuestas en la investigación han sido diseñadas y basadas en la manipulación de diferentes sólidos geométricos con material concreto como son: el cubo, tetraedro, octaedro, prisma. El experimento se llevó a cabo con estudiantes de 6to grado de E.G.B en Valencia España con estudiantes que tienen entre los 10 y 11 años de edad.

Se diseñaron 50 actividades desarrolladas en 23 sesiones de 50 minutos cada una y divididas en dos partes: actividades de “Posiciones” que se basó en la colocación de los sólidos o sus representaciones en posiciones específicas en el espacio y las segunda de “Representaciones” en la que los alumnos representan diferentes figuras planas en perspectiva; además desde el punto de vista de los contenidos las actividades se dividen

en 4 tipos: actividades de comparación de sólidos, actividades del movimiento de los sólidos, estos dos grupos pertenecen a las actividades de “Posiciones”; actividades de representaciones de sólidos; actividades de construcción de sólidos, estas dos actividades constituyen actividades de dibujo y construcción las cuales pertenecen al grupo de las actividades de “Representaciones”.

A continuación analizaremos una de las actividades de Guillén et al. (1992), específicamente la actividad 2.a.5 dado que estamos interesados en la representación del cubo y en esta actividad los estudiantes realizaron la manipulación real del sólido geométrico (cubo en varillas). El objetivo de esta actividad fue la observación minuciosa del poliedro analizando las relaciones entre un elemento del sólido y otro, los estudiantes debían manipular el cubo en varillas y colocarlo en la misma posición del cubo representado en la lámina, los estudiantes observaron que el cubo representado en la lámina estaba inclinado y al observar el cubo real en varillas fue que dedujeron que la posición del cubo estaba en perspectiva, fue entonces que por medio de la manipulación del cubo en varillas lograron colocarlo en la misma posición que el de la lámina.

Los autores concluyen en su estudio que existen representaciones que a los estudiantes les resultan más difíciles que otras y que se requiere destrezas de visualización para el manejo del tema de los poliedros para resolver de manera correcta y eficaz los problemas; como por ejemplo, las actividades de movimientos de sólidos reales como en la actividad analizada 2.a.5 fueron más fáciles que las actividades de movimientos en el ordenador (software), asimismo en la utilización de sólidos opacos y de varillas hubo una diferencia; los de varillas permitieron un análisis mayor en cuanto al reconocimiento de las propiedades y elementos de los sólidos (caras, aristas y vértices) eran visibles, por el contrario en los sólidos opacos no se visualizaban estas propiedades.

Esta investigación nos brinda aportes para nuestro estudio en el objeto matemático cubo, dado que los alumnos manipulan el material concreto en varillas y mencionan sus características, nosotros tomaremos esta actividad para desarrollar el nivel G0 del pensamiento geométrico.

Otra investigación es la de Abascal (2014) quien trabajó con estudiantes de 7 a 12 años de edad de Educación Primaria en Cantabria, tuvo como objetivo observar de qué forma se manifiestan las etapas y la representación plana de cuerpos tridimensionales al usar

cuatro sólidos geométricos y que destrezas presentan los estudiantes al dibujar en perspectiva con el fin de entender los procesos de visualización de los alumnos.

La investigadora utilizó la teoría del Modelo de Razonamiento de Van Hiele para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría y la teoría sobre la Formación de Conceptos Geométricos desarrollados por Vinner y Hershkowitz.

El estudio tuvo una muestra total de 73 niños entre los 7 y 12 años y se dividió en tres subgrupos por edades, el primer grupo de 23 niños de 7 a 8 años de edad del 2do grado, el segundo grupo de 26 niños de 9 y 10 años de edad del 4to grado y el último grupo de 24 niños de 11 y 12 años de edad que cursaban el 6to grado. El estudio consistió en realizar la representación plana de cuatro sólidos: el cubo, pirámide, cilindro y cono, estos sólidos se les presentaban a cada grupo de niños y debían representarlos tal como los veían y dibujar como creían ello que era el desarrollo de la figura.

El experimento se realizó a través de una prueba inspirada en Piaget e Inhelder, la prueba consistió en mostrar cuatro sólidos contruidos con cartulina, un cilindro, un cono, un cubo y una pirámide (tetraedro) de alturas 15, 18, 6 y 8 cm. respectivamente. La prueba tenía dos partes, en la primera los estudiantes debían dibujar el sólido en una hoja de papel tal como lo veían y en la segunda parte debían dibujar como ellos creían que era el desarrollo de ese poliedro. Para esto se colocaron los sólidos en una mesa delante de la pizarra y los alumnos podían acercarse a observar de cerca si lo necesitaban.

Las pruebas arrojaron que en el caso del cubo 19 niños entre 7 y 8 años, pertenecen a la etapa esquemática plana y los 4 niños restantes a la etapa esquemática espacial (Mitchelmore) en el caso de los niños entre 9 y 10 años con el mismo objeto matemático 6 niños en la etapa esquemática espacial mostrando un incremento de niños en la representación del objeto matemático con 10 niños en la etapa esquemática plana y 6 niños en la etapa esquemática espacial realista.

La investigadora concluye que la evolución de las etapas esquemática plana a la etapa esquemática realista se ve desarrollada en los dos grupos de edades entre los 7 y 8 años de edad evidenciando un progreso de la etapa esquemática espacial en el grupo de 9 y 10 años de edad. Además que para realizar representaciones planas de objetos tridimensionales se requiere de habilidades de visualización por la dificultad que se evidencia al pasar del plano al espacio tridimensional.

Esta investigación aporta a la nuestra en cuanto a las representaciones planas de cuerpos tridimensionales en este caso del cubo, ya que la autora experimenta con material concreto y hace uso del lápiz y papel para las representaciones planas de los sólidos que observan. Nosotros tomaremos estos aportes para nuestra investigación en vista que nosotros analizaremos el cubo en el Desarrollo del Pensamiento Geométrico.

Antecedentes que guardan relación con el objeto matemático en material concreto

Por otro lado la Biblioteca Pedagógica del estado de México (2008) realizó un estudio acerca del origami como recurso didáctico para la enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria. Esta investigación tuvo como objetivos diseñar ejercicios de origami en los que se pueda visualizar los conceptos y propiedades de las figuras y sólidos geométricos a través de la manipulación y el doblado del papel. La teoría que se desarrolló fue la teoría de Van Hiele. La investigación se llevó a cabo en la escuela telesecundaria N° 165 “Quetzalcoatl” en Tejupilco México. Los contenidos considerados para la investigación fueron trazos y construcciones geométricas, conocimiento y uso didáctico de los diferentes instrumentos de medida, la exploración de simetría de una figura, el conocimiento, manipulación y representación plana de sólidos comunes, la aplicación de fórmulas de cálculo de perímetro, áreas y volúmenes, así como el teorema de Pitágoras y la iniciación del método deductivo.

El estudio desarrolló 31 actividades. Nosotros nos centraremos en describir la actividad 30, ya que desarrolla la construcción del cubo en origami. Esta actividad lleva por nombre construcción de un cubo. Su objetivo es que el alumno identifique el número de caras, vértices y aristas que tiene este poliedro. Los alumnos deben recortar 24 cuadros de papel América de 4 colores diferentes, 5 de cada color y 24 de papel bond blanco de 21 cm cada uno para construir paso a paso el cubo. Luego se realizan preguntas, como por ejemplo: ¿Cuántas caras pueden verse? Los autores observaron que, según la posición en que se encuentran, los niños verán distinto número de caras. Otra pregunta fue: ¿Qué datos pueden encontrar en el cubo con la regla? Se espera que los alumnos midan las aristas y contesten que todas miden igual. Con esta actividad, se concluye que, a partir de la observación y la manipulación del material concreto los alumnos llegan a descubrir que el cubo tiene 6 caras y 12 aristas, todo centrado en un nivel perceptivo.

Esta investigación nos muestra la importancia del uso de material concreto como el papel, ya que, a partir del doblado, se pueden reconocer nociones geométricas y sus propiedades en especial, en el estudio del cubo.

Cabe notar que el uso del papel como material didáctico ha sido reafirmado en Perú (2004), por la Unidad de Medición de la Calidad Educativa (UMC), según se lee en la siguiente cita.

Entre otras actividades puede ser muy útil el uso del origami como elemento motivador. Este antiguo arte no solo contribuirá al desarrollo de la psicomotricidad fina sino que, con un enfoque adecuado, puede ayudar al estudiante en el proceso de identificación de formas básicas y en la incorporación del lenguaje geométrico. Por ejemplo, si un docente está enseñando a hacer un vaso a partir de una hoja de papel cuadrada, debería utilizar términos geométricos apropiados como cuadrado, diagonal, ángulo, lado, simetría, entre otros. (Perú, 2004, p.101).

Consideramos importante el uso del material concreto como el papel para desarrollar nociones matemáticas geométricas y reconocer a través de ellas elementos y propiedades de objetos matemáticos, para lo cual nosotros estamos interesados en desarrollar en nuestra investigación ya que nuestro estudio se desarrollará con estudiantes entre los 9 y 10 años de edad y es a través de la manipulación de material concreto que el estudiante interiorizará características del cubo y sus elementos.

Por otro lado Villarroel y Grecia (2011) realizaron un estudio sobre los materiales concretos didácticos para geometría en el 1er año de secundaria, el estudio propone identificar y caracterizar los materiales didácticos concretos que pueden utilizarse para identificar las habilidades geométricas que desarrolla la utilización de cada uno de ellos. Este trabajo se desarrolló dentro de la corriente didáctica de la escuela de Hans Freudenthal conocida como Matemática Realista ya que afirman las autoras que esta corriente concibe la matemática escolar como un conjunto de actividades progresivas y reflexivas, entendidas como razonables, realizables o imaginables en forma concreta. Adicionalmente este estudio se adhiere a esta postura ya que en cuanto a la manipulación de objetos concretos permite hacer descubrimiento geométrico propio y construir mentalmente los objetos matemáticos. La metodología que se empleó fue el enfoque cualitativo ya que el estudio procura brindar aportes a la comprensión de la forma en que se usa el material didáctico concreto, así como fomentar el desarrollo de habilidades geométricas. Los datos recolectados en el estudio se tabularon en un registro de

Materiales didácticos concretos, teniendo en cuenta 3 dimensiones de análisis que describimos a continuación:

Dimensión 1 “Descripción del material” Dimensión 2 “Interés Didáctica matemática Dimensión 3 “Versatilidad del material” se identificaron siete grupos de materiales didácticos concretos que pueden ser utilizados en la enseñanza de la geometría como son: los bloques lógicos de Dienes, rompecabezas geométricos, el tangram, el Geoplano, transformaciones dinámicas, el origami o papiroflexia, los criterios para agrupar los materiales concretos fueron siete criterios: criterios de calidad, criterio de materia prima, criterio de disponibilidad del material, criterio de movilidad, criterio de contenidos conceptuales y criterio de versatilidad del material. Las autoras concluyen que la manipulación responsable de los materiales didácticos concretos con pleno conocimiento de sus potencialidades y limitaciones presentadas favorece la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Antecedentes que guardan relación con el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D y el referencial teórico

La investigación de Salazar (2009) analizó como los estudiantes del segundo año de enseñanza media entre los 13 y 14 años de edad, se apropian de las nociones de transformaciones geométricas en el espacio, cuando se interactúa con el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D. La investigadora afirma,

La geometría dinámica despierta en los estudiantes, los aspectos exploratorios y estratégicos a lo largo de sus construcciones geométricas, ayuda a que los estudiantes analicen las propiedades geométricas. Además de promover cambios en el aprendizaje de la geometría, ya que abre la posibilidad para que los estudiantes construyan y exploren figuras y establezcan relaciones entre ellas (p. 38).

La investigación tuvo como referencial teórico el enfoque instrumental, y la Teoría de Registros de Representación Semiótica para comprender como los alumnos interactúan con el Cabri 3D, la investigadora afirma que esta teoría fue de gran apoyo para comprender como los estudiantes ven o visualizan una figura geométrica, para ello definió el Registro Figural Dinámico porque le permitió reconocer las diferentes aprehensiones de los estudiantes en la interacción con el Cabri 3D, la investigación utilizó la Ingeniería Didáctica como metodología y concluye que el uso del software Cabri 3D facilitó la aprehensión perceptiva de las figuras y permitió dinamizarlas.

Esta investigación nos parece importante porque utiliza el ambiente de geometría dinámica y nosotros usaremos en nuestro estudio el software Cabri 3D un software favorable en la enseñanza y aprendizaje de la geometría porque funciona como un simulador en la representación de los objetos tridimensionales como lo muestran numerosos estudios.

También Salazar y Gaita (2012) iniciaron un estudio de objetos elementales en la geometría espacial con ayuda del software Cabri 3D con estudiantes de Arquitectura de la Pontificia Universidad Católica del Perú, donde los estudiantes tuvieron la oportunidad de manipular representaciones de objetos como el punto la recta, el plano, y la esfera, el estudio aprovechó las potencialidades que ofrece el Cabri 3D como la opción de cambiar de punto de vista para cambiar un objeto, la determinación de posiciones relativas como el paralelismo etc.

Para el desarrollo de las actividades las investigadoras utilizaron el modelo teórico DPG. La experiencia se planteó cinco actividades en la cual en relación a la tercera actividad los estudiantes debían manipular un cubo previamente construido y determinar el tipo de figura, las autoras manifiestan que la mayoría de estudiantes logró realizar con éxito esta tarea, los estudiantes también manipularon uno de los vértices, afirmando que crecía el cubo y también sus caras, con esta actividad se evidencia que los estudiantes se encuentran el nivel G1.

Las investigadoras concluyeron que las actividades propuestas en las que se hizo uso del Cabri 3D favorecieron la evolución de las etapas del pensamiento G0 a G1 y en algunos casos del G1 al G2 manifiestan que lo que contribuyó a este hecho fue la posibilidad de manipular objetos, así como el poder posicionarse en distintas ubicaciones cambiando de perspectiva en la observación de los objetos, así mismo el Cabri 3D facilita la comprensión de componentes teóricos y el paso entre dichos niveles de pensamiento geométrico.

Consideramos relevante las investigación de Salazar (2009) y Salazar y Gaita (2012) ya que nosotros tomaremos el software Cabri 3D, en el desarrollo de algunas actividades donde se muestra la graduación del paso de las etapas del pensamiento geométrico donde se evidencia el paso de G0 al G1 y en algunos caso de G1 a G2.

1.2. Ambiente de geometría dinámica Cabri 3D

Como estamos interesados en trabajar con el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D y lápiz y papel, esta parte del trabajo se focalizará en presentar aspectos del Cabri 3D como geometría dinámica.

Ya que pensamos que la matemática, en particular los temas de geometría, deben estar a la par con los cambios tecnológicos que se vive en el mundo, durante años la forma clásica de presentar la geometría, presenta las figuras estáticas cuando se presentan en una posición en particular, una concepción particular una figura particular, esto conlleva a que el alumno prevalezca las figuras geométricas de una manera estática.

En relación con lo anterior cuando las figuras geométricas adquieren movimiento, es decir adquieren **dinamismo**, estamos en presencia de la geometría dinámica y esto permitirá que el estudiante se forme una idea más general de las figuras geométricas y no asocie las propiedades a una forma particular de las figuras.

Por otro lado, otra ventaja de la geometría dinámica es que el alumno puede “**mover la representación de la figura geométrica**” a través de la función de arrastre y así la figura seguirá conservando ciertas propiedades.

Elegimos el Cabri 3D ya que según Fernández (2013) “permite que los estudiantes manipulen, arrastren, y exploren los objetos tridimensionales como el cubo y visualicen sus elementos y características, en este caso el de la representación del cubo” (p.32).

Por lo antes mencionado, consideramos apropiado el uso del Cabri 3D. Este software ofrece una amplia variedad de opciones para desarrollar contenidos no solo de geometría sino también de álgebra y estadística. Es sencillo de utilizar, lo que facilita desarrollar actividades a través de las herramientas y recursos que ofrece a través de la experimentación y la manipulación de distintos elementos, favoreciendo la realización de construcciones para deducir resultados y propiedades a partir de la observación directa.

La ventana inicial del Cabri 3D, en su versión 2, presenta la barra de herramienta y el área de trabajo, la figura 1 muestra el área de trabajo que es un plano.

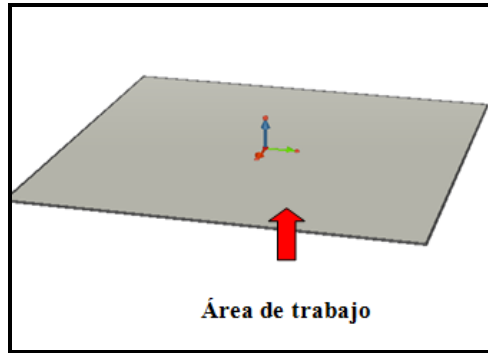


Figura 1. Ventana de inicio del Cabri 3D versión 2.1

A continuación presentamos en la figura 2 la barra de herramientas que utilizaremos en nuestras actividades.

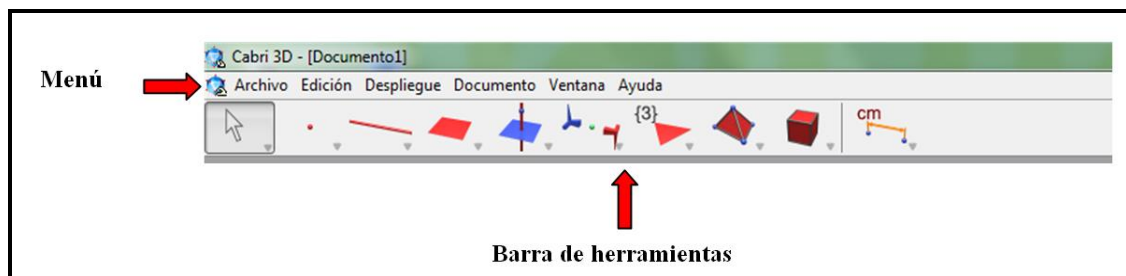


Figura 2. Barra de herramientas del Cabri 3D

Además, el Cabri 3D presenta en su barra de herramientas una opción denominada Poliedros de la cual se despliega una caja de herramientas donde se seleccionará el cubo como observamos en la figura 3.

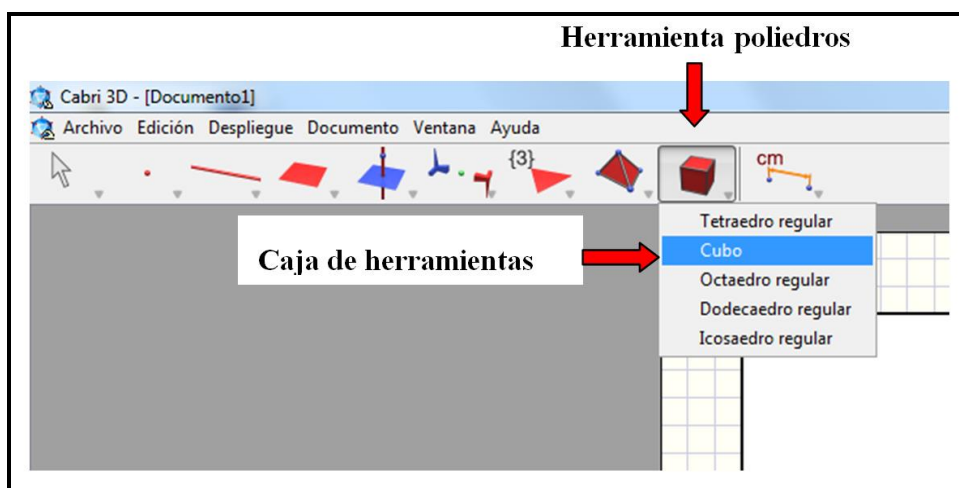







Figura 3. Herramienta poliedros

Ya que en nuestra investigación realizaremos un estudio de los elementos del cubo, consideramos pertinente presentar otras opciones de la barra de herramientas como punto, segmento, longitud, polígono, cara del cubo, ya que los estudiantes pueden usar otras herramientas que le permitan apropiarse de las propiedades del cubo mediante la manipulación del Cabri 3D.

Cuadro 1. Especificaciones de las herramientas del Cabri

Herramienta	Ícono	Construcción
Manipulación		Permite seleccionar puntos y objetos.
Punto		Permite construir puntos sobre la parte visible del objeto.
Segmento		Permite construir un segmento definido por 2 puntos.
Polígono		Permite construir un polígono definido por 3 puntos o más.
Longitud		Permite medir la longitud de objetos y partes de los objetos siguientes: segmentos, lados de polígonos, aristas de poliedros.

Fuente: Adaptado del manual del usuario Cabri 3D v2 (2007, pp. 16-29)

A continuación presentaremos algunos ejemplos del uso de estas herramientas que serán utilizadas en el desarrollo de actividades que propondremos en la parte experimental:

1. *Herramienta manipulación:* esta herramienta permitirá a los estudiantes seleccionar puntos y objetos, así como desplazarlos en el área de trabajo. Además permite activar y desactivar cualquier herramienta del Cabri 3D.



Figura 4. Herramienta manipulación

2. *Herramienta punto*: Permite construir puntos sobre la parte visible del objeto.

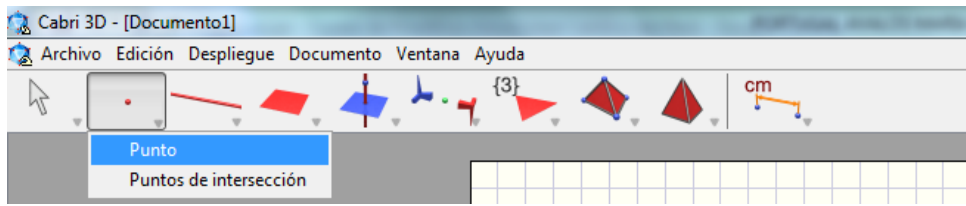


Figura 5. Herramienta punto

3. *Herramienta segmento*: Permite construir un segmento definido por 2 puntos.

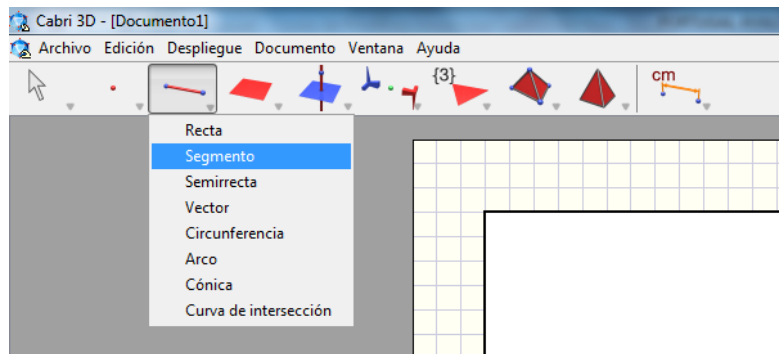


Figura 6. Herramienta segmento

4. *Herramienta polígono*: Permite construir un polígono definido por 3 puntos o más.

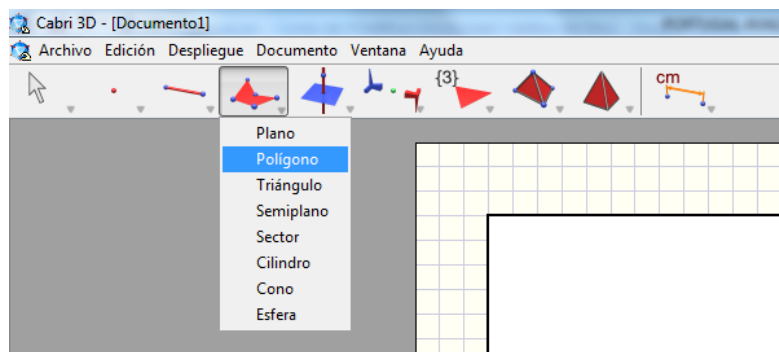


Figura 7. Herramienta polígono

5. *Herramienta longitud*: Permite medir la longitud de objetos y partes de los objetos siguientes: segmentos, lados de polígonos, aristas de poliedros.

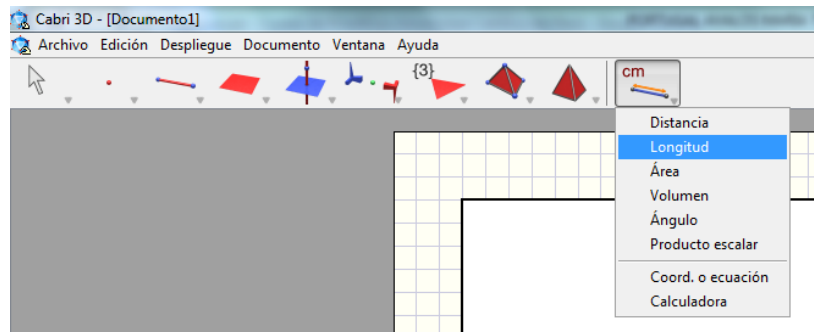


Figura 8. Herramienta longitud

6. *Función atributos-color*: esta función del Cabri 3D permite modificar el color de fuente de los objetos, en nuestro trabajo la modificación del color de las aristas del cubo.

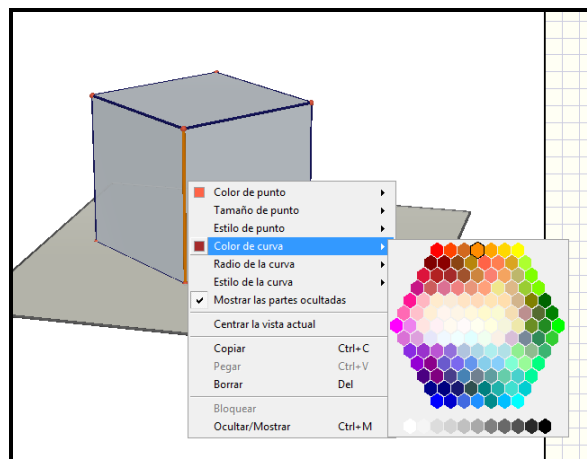


Figura 9. Función atributos para el color de curva

7. *Función atributos-fuente*: esta función del Cabri 3D permite modificar el color de fuente de los objetos, en nuestro trabajo modificación del color de la superficie del cubo.

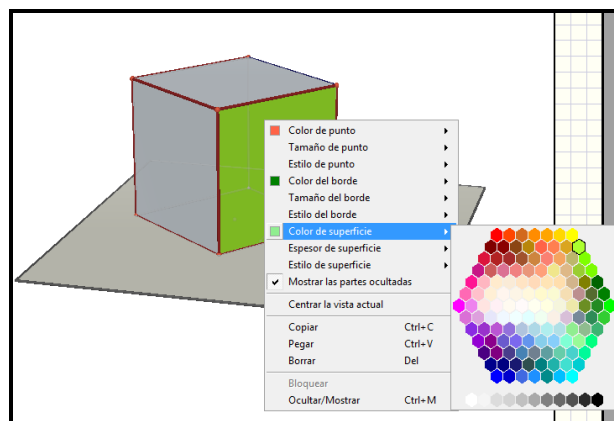


Figura 10. Función atributos para el color de la superficie

Después de la presentación de las herramientas del Cabri 3D que utilizaremos en la parte experimental en las actividades de nuestra investigación presentamos la justificación de nuestro trabajo.

1.3. Justificación de la investigación

De acuerdo a nuestra experiencia profesional hemos observado que en educación primaria la enseñanza de la geometría está relegada a pocos temas que son tratados en pocas clases. A esto se le suma que en los pocos casos que se desarrollan estos contenidos, los estudiantes presentan dificultades al representar figuras tridimensionales a través de representaciones planas, pensamos que esto se debe al poco tiempo que se le dedica en las aulas la enseñanza de la geometría espacial o se tiene carencia en los contenidos que se enseña, así lo menciona Perú (2005):

Se ha observado que los docentes desarrollan en menor tiempo y con menor profundidad las capacidades referidas a la geometría. Si consideramos que las experiencias de aprendizaje no se circunscriben únicamente al último grado que se está cursando, sino que son la acumulación integradora de las experiencias a lo largo de toda la escolaridad, el que no se trabaje la geometría con el tiempo y la profundidad requeridas desde los grados anteriores puede ser una de las causas que influye negativamente en el aprendizaje de los estudiantes en este eje (Perú, 2005, p.98)

Creemos que los temas de geometría están siendo relegados en las aulas, postergándolos para fin de año, y sabemos que el aprendizaje es un conjunto integrador de experiencias vividas durante todo el año, en consecuencia sea esto una de las causas que influyen negativamente en el aprendizaje de la geometría.

Por otro lado Perú (2004) a través de la Unidad de la Medición de la Calidad Educativa (UMC) tomó la prueba nacional aplicada a 850 instituciones educativas de primaria, arrojó que sólo el 9,6% de estudiantes que finalizaban el 2do grado de primaria se encontraban en el nivel suficiente en el área de matemática, que es el nivel que se espera que los estudiantes logren al culminar el 2do grado. Las capacidades que se consideraron en esta prueba en el aspecto de comunicación matemática fueron: Identifican figuras y cuerpos geométricos (rectángulo, cuadrado, triángulo, círculo, cubo y cilindro) y sus elementos (lados, caras, vértices o esquinas), relacionándolos con objetos de su entorno.

Asimismo para el sexto grado la prueba nacional 2004 arrojó también que los estudiantes que culminan la primaria solo un 7,9% están en el nivel suficiente, las capacidades que se consideraron en el área de geometría para el sexto grado en el aspecto de comunicación matemática son: identifica, gráfica y compara figuras y cuerpos geométricos.

Asimismo la Perú (2004) UMC., afirma que:

La iniciación a la geometría fue evaluada en el 2004 mediante preguntas referidas al reconocimiento de figuras elementales planas y del espacio. Por lo general se empleó el lenguaje geométrico convencional y se utilizaron preguntas de respuesta corta de respuesta extensa y de opción múltiple.

Las principales dificultades de los estudiantes a la iniciación a la geometría fueron: los estudiantes no manejan el vocabulario geométrico convencional, los estudiantes no identifican figuras geométricas elementales (cuadrado, rectángulo, triángulo, pirámide, cubo etc.), ni a partir de las formas ni de las propiedades. (Perú, 2004, p. 202).

Esto es evidencia que el área de geometría ha estado descuidado y es una de las áreas que necesita trabajar con mayor profundidad, tal vez uno de los motivos sea como manifiesta Perú (2004) a través del cuestionario Oportunidades de aprendizajes del sexto grado (ODA6PM) donde:

De acuerdo con los resultados del cuestionario Oportunidades De Aprendizaje de sexto grado (ODA6PM) más del 60% de los estudiantes tiene docente que han dedicado poco tiempo o que no han trabajado la iniciación a la geometría durante todo el año. La razón principal por la que no se ha hecho es por la falta de tiempo y la postergación para la final del año escolar, según manifestaron los docente investigadoras encuestados, sin embargo, dado que el cuestionario ODA 6to PM se aplicó en la segunda semana de noviembre, es muy probable que el tiempo disponible a partir de esa fecha y en lo que queda del año, no haya sido suficiente para el desarrollo de estas capacidades. (Perú, 2004, p.203).

El documento, presenta algunas sugerencias para el trabajo de la geometría, presentamos a continuación algunas sugerencias que consideramos de interés para nuestro estudio:

En primer lugar propiciar una exploración activa de los objetos que se presentan en el espacio lo que inicialmente despertará el interés en los estudiantes y estarán motivados. Manifiesta que el entorno tiene una gran fuente de objetos a ser observados y manipulados y que es partir de estas acciones donde los estudiantes van a construir imágenes mentales que les permitirá razonar sobre los objetos.

En segundo lugar propone el diseño de actividades con material concreto (plegado y corte de papel, modelos, utilización de palitos y bolitas de masilla) ya que esto propiciará el desarrollo de diferentes habilidades cognitivas, perceptivas y comunicativas.

Asimismo, en Perú (2009) Diseño Curricular Nacional (DCN) en el área de matemática, en el organizador geometría y medición se precisan claramente los conocimientos “vértices, aristas, caras de un cubo” como contenido matemático para el cuarto grado de primaria a ser trabajado en todas las escuelas del país, evidenciado la falta de continuidad de este tema y dejando un vacío entre el primer grado y cuarto grado de primaria donde

los estudiantes recién conocen los elementos del cubo, no contando con los conocimientos previos acerca de este objeto matemático.

En el cuadro N° 2 mostramos los contenidos que considera Perú (2009) Diseño Curricular Nacional para el organizador de Geometría desde el primer grado de primaria hasta el sexto grado.

Cuadro 2. Contenidos de geometría de 1° a 4to grado de primaria

1er grado	2do grado	3er grado	4to grado
Formas geométricas básicas: rectángulo, triángulo, cuadrado, círculo, cubo , cilindro y esfera	Figuras planas en el prisma recto, cubo , pirámide.	Rectas paralelas y perpendiculares en cuerpos geométricos.	<u>Vértices, caras, aristas de un cubo</u> , prisma recto de base poligonal.

Fuente: Adaptado de Perú (2009, pp. 192-198)

Las capacidades que deben desarrollar los estudiantes son las que mostramos en el cuadro 3:

Cuadro 3. Capacidades de geometría de 1° a 4to grado de primaria

1er grado	2do grado	3er grado	4to grado
Establecer relaciones con los objetos de su entorno como el cubo .	Identificar figuras planas en el cubo .	Identificar rectas paralelas y perpendiculares en cuerpos geométricos.	Identificar <u>vértices, caras, aristas de un cubo</u> , en prismas.

Fuente: Adaptado de Perú (2009, pp. 192-198)

Como se observa en el cuadro 2 en el primer grado se debe enseñar el cubo como forma básica ¿A qué se refiere en su forma básica? Es tal vez a que los estudiantes deban manipular representaciones de objetos tridimensionales como el cubo a través de material concreto? O tal vez a que deban reconocer algunas características elementales del cubo y llegar por intuición a reconocer algunas propiedades del cubo? Parece no precisar claramente los contenidos deseados para este objeto matemático. Por otro lado en el 2do grado nos hablan de figuras planas en el cubo y en el 3er grado ya de rectas paralelas y perpendiculares para llegar al cuarto grado que es el interés de nuestro estudio donde afirma se debe abordar vértices, aristas y caras de un cubo, pensamos que he aquí la importancia de enseñar de manera progresiva a los estudiantes la geometría donde se

evidencien las fases con características propias del DPG. que estudiaremos en esta investigación.

En el mismo sentido la NCTM, *National Council of Teachers of Mathematics* en los Principios y Estándares para la Educación Matemática (2000) considera para el área de Geometría lo siguiente,

En la etapa 3-5, deberían desarrollar formas más precisas de describir las figuras, centrándose en identificar describir sus propiedades y aprendiendo el correspondiente vocabulario especializado. Para consolidar sus ideas, deberían dibujar y construir figuras, comparar y discutir sus atributos, clasificarlas, y elaborar y considerar definiciones basadas en sus propiedades (NCTM, 2000, p.169).

Asimismo para el uso de la tecnología en el área de geometría la afirmación antes señalada se refuerza con Los Principios y Estándares para la Educación Matemática (2003) de la *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), que afirma:

En los programas que han adoptado las recomendaciones de los Principios y Estándares, los alumnos de los niveles medios habrán explorado y descubierto relaciones entre figuras geométricas, usando frecuentemente programas de geometría dinámica. Basándose en las características de los polígonos y poliedros. (p.313).

En la actualidad contamos con Perú (2013) Mapas de Progreso, que son nuestros estándares nacionales y son las metas que esperamos que los estudiantes de todo el país logren al término de cada ciclo.

Cuadro 4. Estándares Nacionales del Perú de Geometría por ciclos

III CICLO (1 y 2do grado)	IV CICLO (3er y 4to grado)	V CICLO (5to y 6to grado)
Relaciona objetos de su entorno con formas bidimensionales y tridimensionales, nombra y describe sus elementos, las clasifica, explica el criterio utilizado y las representa con material concreto o con dibujos. Interpreta e identifica la longitud, superficie y capacidad como atributos medibles, diferentes.	Clasifica y representa formas bidimensionales y tridimensionales tomando en cuenta sus características geométricas comunes y describe el criterio utilizado.	Describe y representa formas bidimensionales y tridimensionales de acuerdo a las propiedades de sus elementos básicos y las construye a partir de la descripción de sus elementos.

Fuente: Adaptado Perú (2013, p. 9)

En el cuadro 4 podemos observar que hay similitudes con los estándares internacionales donde se precisa identificar, describir propiedades, construir o representar figuras geométricas por medio del dibujo, así como comparar y clasificar y construir definiciones

a partir de las propiedades. Nuestro estudio sobre el cubo es pertinente ya que se evidencia nuestro objeto matemático en los estándares internacionales (NCTM), Diseño Curricular Nacional (DCN) y Mapas de Progreso.

Las investigaciones de Fernández (2013) Cozzolino (2008), Salazar (2009), Abascal (2014), Guillen (1992), el Perú (2009), Perú (2013) que describimos muestran la importancia del uso del material concreto para el desarrollo del pensamiento geométrico asimismo el Diseño Curricular Nacional a pesar del desfase que se ha mostrado considera el uso de material concreto en los primeros ciclos de educación básica, también es pertinente el uso del material concreto porque la NCTM considera el material concreto de manera implícita en los estándares internacionales.

Por todo lo anterior expuesto, es que estamos interesados en analizar por un lado, como se desarrolla el Pensamiento Geométrico por medio del material concreto.

Asimismo, las investigaciones también muestran la importancia del uso de un ambiente de geometría dinámica como el Cabri 3D para la enseñanza y el aprendizaje del cubo. Sin embargo, nosotros estamos interesados en estudiar la representación y elementos del cubo en el nivel primario por medio de material concreto y con el uso del Cabri 3D porque pensamos que estas herramientas permiten que los estudiantes de cuarto grado de primaria aprendan estas nociones de manera intuitiva. Sabemos que los niños entre los 9 y 10 años se encuentran en el nivel del pensamiento de las operaciones concretas, es decir que su pensamiento está ligado todavía a sus experiencias concretas y necesitan manipular objetos para ayudar a su proceso de aprendizaje, es por ello que consideramos pertinente utilizar en primer lugar material concreto para pasar al uso de herramientas tecnológicas.

Estamos interesados en que los estudiantes del Cuarto grado de primaria movilicen la noción de cubo, con todos sus aspectos, sus características, elementos, propiedades, usando el material concreto y el Cabri 3D y para analizar esto usamos como herramienta teórica el Desarrollo del Pensamiento Geométrico, para el estudio de como los estudiantes movilizan la noción del cubo.

En base a los antecedentes presentados, la pertinencia del Cabri 3D y la justificación de la investigación presentaremos la pregunta de investigación y los objetivos general y específicos.

1.4. Pregunta y objetivos de la investigación

Pregunta de la investigación

¿Estudiantes del 4to grado de educación primaria desarrollan su Pensamiento Geométrico, en las etapas G0 y G1, cuando estudian la noción de cubo y sus elementos en una secuencia didáctica con material concreto y Cabri 3D?

Objetivos de investigación

A continuación presentamos los objetivos que guían nuestra pesquisa.

Objetivo general

Analizar las etapas G0 y G1 del Desarrollo del Pensamiento Geométrico en estudiantes del 4to grado de educación primaria cuando estudian la noción de cubo y sus elementos en una secuencia didáctica con material concreto y Cabri 3D.

Objetivos específicos

- Identificar las etapas G0 y G1 del Desarrollo del Pensamiento Geométrico en estudiantes de 4to de educación primaria cuando estudian el cubo en una secuencia didáctica en la que se utiliza material concreto.
- Distinguir las etapas G0 y G1 y el tránsito del Desarrollo del Pensamiento Geométrico en estudiantes de 4to de educación primaria cuando estudian el cubo en una secuencia didáctica en la que se utiliza Cabri 3D.

En el siguiente capítulo para alcanzar los objetivos planteados presentamos el marco teórico y aspectos metodológicos.

CAPITULO II: DESARROLLO DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO DE PARZYSZ Y APECTOS DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

En este capítulo presentaremos los aspectos teóricos y metodológicos de nuestra investigación, los aspectos teóricos están dados por el Desarrollo del Pensamiento Geométrico según Parzysz, en cuanto a la metodología nos centraremos en aspectos de la Ingeniería Didáctica.

2.1. Desarrollo del Pensamiento Geométrico

Para desarrollar nuestro trabajo de investigación utilizaremos como subsidio teórico el enfoque de Parzysz (1988) que es llamado Desarrollo del Pensamiento Geométrico. Cabe aclarar que el autor se basó en las teorías de Van Hiele, Houdement y Kusnial y de Henry, que han desarrollado aspectos de Geometría, de los cuales realizó una articulación de las mismas y realizó una propuesta teórica diferente de esas teorías. Ver figura 11.

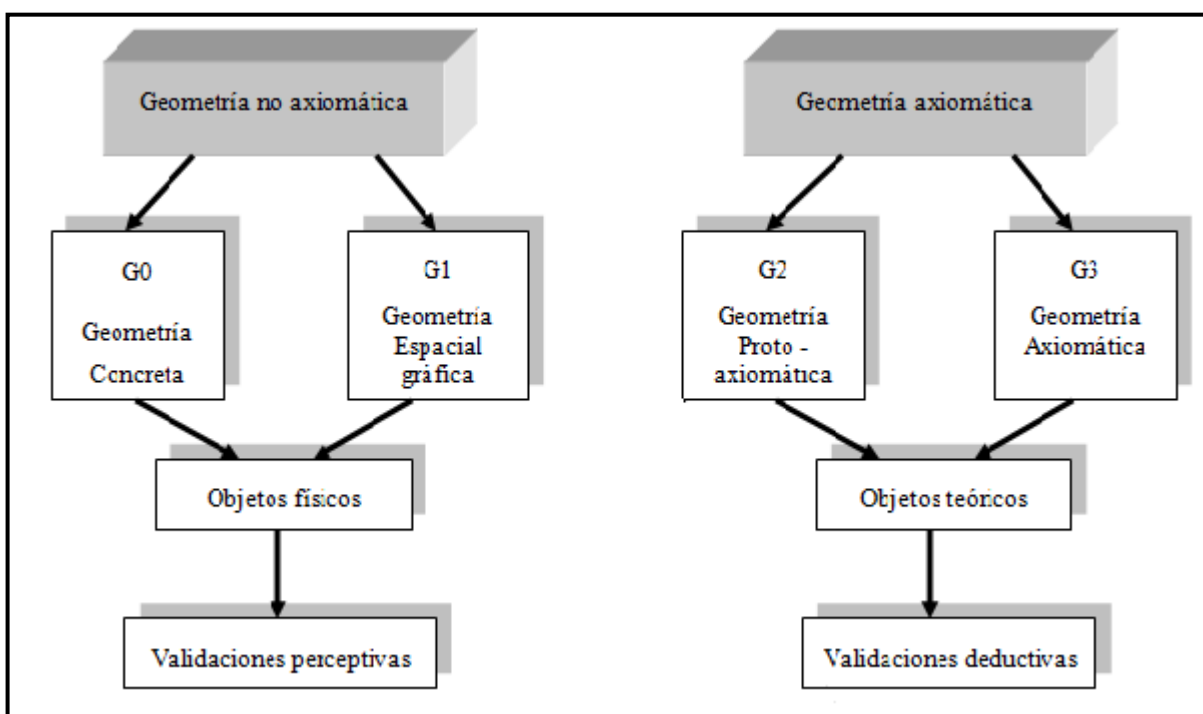


Figura 11. Adaptado de Maciel (2004, p.73)

En la figura 11 mostramos la clasificación que propone el autor sobre el Desarrollo del Pensamiento Geométrico, el autor realiza una clasificación del Pensamiento Geométrico en dos grandes grupos: Geometría no axiomática y Geometría axiomática.

En la Geometría no axiomática están los niveles G_0 (Geometría concreta) y G_1 (Geometría espacio gráfica) es decir donde los objetos son físicos y las validaciones son perceptivas. En la geometría axiomática Parzysz (1988) propone dos etapas, G_2 (Geometría proto- axiomática) y G_3 (Geometría axiomática) en ambos los objetos son teóricos y las validaciones son deductivas en base a los objetos teóricos. A seguir especificaremos con más detalle el primer grupo del Desarrollo Pensamiento Geométrico.

Geometría concreta (G_0): en esta etapa, el estudiante todavía parte de la “realidad”, de lo “concreto” y los objetos son físicos donde se pueden observar sus características como el tipo de material por ejemplo madera, pajillas y diferentes colores, etc.). Las validaciones que realizan los estudiantes acerca de los objetos matemáticos parten de su percepción al observar o manipularlos.



Figura 12. Estructura de Cubo construido en varitas

Por ejemplo, observar las características de la estructura del cubo construido en varitas como mostramos en la figura 12 (cuando se asume que tiene caras transparentes).

Geometría espacial-gráfica (G_1): de acuerdo con el investigador, en esta etapa el estudiante todavía confunde “geometría y realidad” es decir confunde la noción del objeto ideal con el objeto representado que está en la realidad, sin embargo comienza a discernir las propiedades de las figuras más todavía sin poder explicarlas.

Asimismo según el autor, las técnicas utilizadas para que el estudiante resuelva una actividad, pueden ser utilizados instrumentos como: regla, compás, escuadra, transportador, etc.

Además, es la Geometría espacio gráfica, en este nivel los objetos son bidimensionales, como por ejemplo representaciones del cubo hechos con lápiz y papel. En esta etapa de geometría espacio-gráfica (ver figura 13), la justificación de las propiedades del cubo son

realizadas por lo que se “ve”, por lo que es visible, cuyas validaciones continúan siendo perceptivas.

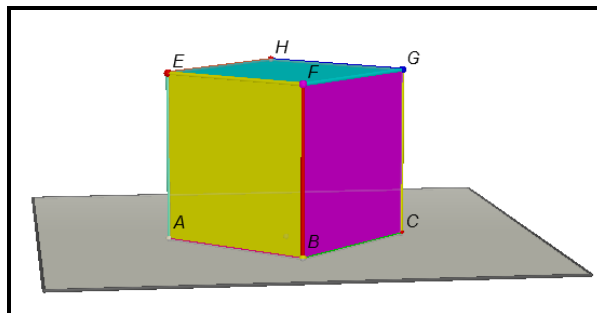


Figura 13. Caras del cubo construido en Cabri 3D

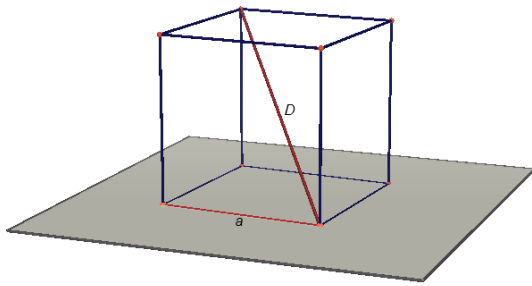
Por ejemplo en la figura 13 observamos las caras del cubo representado en el software Cabri 3D.

El otro grupo que presenta Parzysz (1988), es el de la Geometría axiomática, donde se encuentran las etapas G2 (Geometría Proto - axiomática) y G3 o (Geometría axiomática).

A continuación presentamos la etapa proto-axiomática y axiomática.

Geometría Proto-axiomática (G₂): en esta etapa, según el autor ocurre la concepción de un esquema de esa realidad, en este momento las definiciones cobran sentido y los resultados obtenidos empíricamente pueden ser utilizados en conjunto con técnicas deductivas. Las técnicas utilizadas se refieren a objetos geométricos en los cuales la existencia es asegurada por las definiciones, axiomas y propiedades consideradas.

Los conceptos son objetos teóricos y las demostraciones de los teoremas son hechas a partir de condiciones aceptadas por los estudiantes de manera intuitiva. Por ejemplo, a nivel secundario cuando se enseña que la longitud de la diagonal del cubo se puede calcular en función de la longitud de su arista, se usa el Teorema de Pitágoras.



Diagonal del cubo

Dónde:

D es la diagonal del cubo y

a es la arista del cubo

Entonces, $D = a\sqrt{3}$

Figura 14. Diagonal del cubo construido en Cabri 3D

Desarrollo de la diagonal principal del cubo

<p>A square with vertices labeled A (bottom-left), B (bottom-right), C (top-right), and D (top-left). The side length is 'a'. The diagonal is 'd'. A right angle symbol is shown at vertex A.</p>	<p>$d = ?$</p> <p>Por el Teorema de Pitágoras</p> $d^2 = a^2 + a^2$ $d^2 = 2a^2$ $\sqrt{d^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2}$ $d = \sqrt{2}a$ $\boxed{d = a\sqrt{2}}$
<p>A right-angled triangle with vertices B (bottom-left), D (bottom-right), and H (top-right). The vertical leg is 'a', the horizontal leg is 'd', and the hypotenuse is 'D'. A right angle symbol is shown at vertex D.</p>	<p>$D = ?$</p> <p>Por el Teorema de Pitágoras</p> $D^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2$ $D^2 = a^2 + a^2 \cdot \sqrt{2}^2$ $D^2 = a^2 + a^2 \cdot 2$ $D^2 = a^2 + 2a^2$ $D^2 = 3a^2$ $\sqrt{D^2} = \sqrt{3a^2}$ $D = \sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2}$ $D = \sqrt{3} \cdot a$ $\boxed{D = a \cdot \sqrt{3}}$

Figura 15. Diagonal del cubo construido en Cabri 3D

La figura 15 muestra que para hallar la diagonal del cubo ABCD-EFGH, primero se halla la diagonal de la base ABCD del cubo, por medio del teorema de Pitágoras, que es $a\sqrt{2}$, luego para hallar la diagonal BH también se usa el Teorema de Pitágoras obteniéndose $D = a\sqrt{3}$. En este ejemplo observamos que se moviliza la etapa G2 por que se tienen que usar el teorema de Pitágoras dos veces.

Geometría Axiomática (G₃): llamada por Parzysz (1988) etapa axiomática. En esta etapa, de acuerdo con esta teoría, los axiomas son demostrados completamente. Por ejemplo, presentamos la demostración de Pogorelov (1972) en donde muestra las diagonales del cubo llamados por él paralelepípedo.

El prisma se denomina paralelepípedo si tiene como base un paralelogramo, todas las caras del paralelepípedo son paralelogramos. Se llama diagonal del paralelepípedo todo segmento que une dos vértices no pertenecientes a una misma cara. El paralelepípedo tiene 4 diagonales A₁ A₃ A₂ A₄ A₃ A₁ y A₄ A₂.

Teorema 24.2 las diagonales del paralelepípedo se cortan en un punto que las divide por la mitad.

Demostración: consideremos dos diagonales cualesquiera digamos A₁ A₃ y A₂ A₄, puesto que los cuadriláteros A₁ A₂ A₃ A₄ y A₂ A₂ A₃ A₃ son paralelogramos, el cuadrilátero A₄ A₁ A₂ A₃ es también un paralelogramo. Las diagonales del paralelepípedo A₁ A₃ A₄ A₂ del paralelepípedo son también diagonales del paralelogramo por eso se cortan en un punto de intersección o las divide por la mitad.

Análogamente se demuestra que las diagonales A₁ A₃ y A₂ A₄ así como las diagonales A₁ A₃ A₁ A₃ y A₂ A₄ se cortan y el punto de intersección las divide por la mitad. Es así que queda demostrado el teorema (p. 176-177).

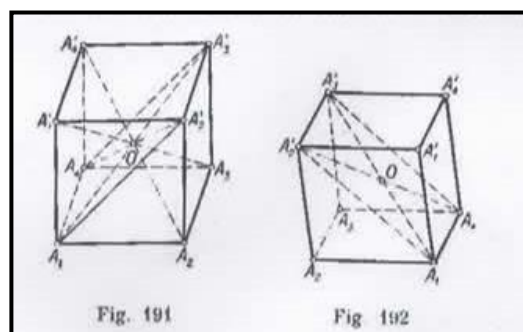


Figura 16. Demostración de las diagonales del cubo

Fuente: Pogorelov (1974, p. 177)

La figura 16, presenta la representación figural de la demostración de las diagonales de un cubo.

Según Parzysz, podemos hacer que el estudiante consiga Desarrollar su Pensamiento Geométrico cuando se trabaja con modelos espacio físico, espacio-gráfico, proto-axiomático, e hipotético-deductivo. Ya que de acuerdo con el investigador Parzysz citado en Maciel (2004 p. 75) “el inicio de la geometría espacial puede ser hecha teniendo el recorrido no solamente de las representaciones diseñadas sino también de maquetas tridimensionales y eso hace que cualquier alumno pueda hacerlo”.

Adaptación al nivel de Educación Primaria

Nuestra investigación se desarrolla en el nivel primaria específicamente con estudiantes del cuarto grado entre 9 y 10 años de edad, consideramos pertinente desarrollar las etapas de la geometría no axiomática (G0 y G1) propuestos por Parzysz (1988), y desarrolladas también en la investigación de Maciel (2004), porque las validaciones que realizarán los estudiantes serán basados en su percepción, a través de la manipulación del material concreto donde percibirán características propias de los objetos físicos para relacionarlos con el Cabri 3D.

Nos centraremos en el grupo de la geometría no axiomática del Desarrollo del Pensamiento Geométrico, donde se encuentran las etapas G0 (Geometría concreta) y G1 (Geometría espacio-gráfico), de acuerdo con el investigador la etapa G0 que propone el autor será tomada como lo define el autor porque es adecuado para nuestra investigación. Sin embargo para efectos de nuestra investigación al nivel G1 lo llamaremos *Geometría figural* porque la representación de las figuras serán dadas en material concreto y el software Cabri 3D nuestras actividades trabajaremos básicamente con figuras geométricas como el cuadrado.

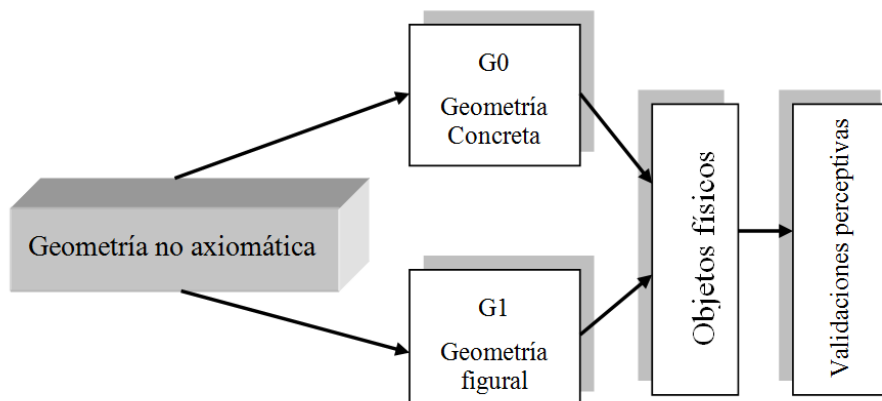


Figura 17. Geometría no axiomática

Fuente: Adaptado de Maciel (2004, p.73)

Otra de las razones en que nos basaremos para investigar los dos primeros niveles (G0 y G1) es porque de acuerdo con Almoloud (2015) en el paso del nivel G1 y G2 se pasa de la geometría concreta que se basa en la percepción, a la geometría proto-axiomática (nivel G2) que se basa en teoremas definiciones y axiomas para hacer demostraciones matemáticas.

2.2 Metodología de investigación: aspectos de la Ingeniería Didáctica

La presente investigación tiene características de una investigación cualitativa. Nos basamos en Hernández, Fernández y Baptista (2010) y Taylor y Bogdan (1986).

Para Hernández, Fernández y Baptista (2010) definen investigación cualitativa como “La recolección de datos sin medición numérica para descubrir o afinar preguntas de investigación en el proceso de interpretación” (p.7). Asimismo los investigadores consideran las situaciones, eventos, las personas y sus interacciones como conductas observadas y sus manifestaciones.

En el mismo sentido Taylor y Bogdan (1986) consideran en un sentido amplio, la investigación cualitativa como “aquello que produce datos descriptivos: con las propias palabras de las personas habladas o escritas y la conducta observable” (p.20).

Asimismo, los investigadores consideran como componentes importantes de la investigación cualitativa: la observación y selección de escenarios-

En Educación Matemática, Borba (2004) describe las características de una investigación cualitativa en Educación Matemática y manifiesta que:

- 1.- Una investigación cualitativa tiene la fuente directa de los datos en el medio natural.
- 2.- Una investigación cualitativa es descriptiva.
- 3.- Los investigadores cualitativos tienen más interés por el proceso que simplemente por los resultados o productos.
- 4.- Los investigadores cualitativos tienden a analizar sus datos inductivamente.
- 5.- El significado es de vital importancia en el enfoque cualitativo. (p. 6).

Nosotros tomamos la postura de investigación cualitativa descrita por Borba. Y tomaremos dentro de esta aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) como metodología de investigación que presentamos a seguir.

Aspectos de Ingeniería Didáctica

Según Artigue (1995), “La Ingeniería Didáctica como Metodología de investigación, se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase, es decir sobre la concepción, realización, observación y análisis de enseñanza” (p.36). En este sentido, nosotros desarrollaremos un trabajo experimental en el ámbito de la enseñanza y aprendizaje en clase con estudiantes del cuarto grado de educación primaria sobre los elementos del cubo como objeto matemático.

Cabe resaltar que nuestra investigación se ubica dentro de la *micro ingeniería*, porque es “puntual” y nos permite de manera local observar la complejidad de los fenómenos ocurridos en clase, es así que en nuestro estudio, estamos desarrollando una secuencia de actividades para aprender un contenido determinado en nuestro caso el estudio del cubo y sus elementos en un aula de cuarto grado de educación primaria.

De acuerdo con la investigadora la Ingeniería Didáctica tiene las siguientes fases:

1. Análisis preliminar
2. Análisis a priori
3. Experimentación
4. Análisis a posteriori

A continuación desarrollaremos aspectos de cada una de las fases para efectos de nuestra investigación.

Análisis preliminar

La autora en esta fase considera:

- El análisis *epistemológico* de los contenidos contemplados en la enseñanza.
En nuestro estudio tomaremos aspectos del objeto matemático.
- El análisis *cognitivo* concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.

En nuestro estudio se presentarán las investigaciones que anteceden nuestra investigación como Fernández (2013), Cozzolino (2008), Guillén (1992) y Abascal (2014) ya que estas investigaciones toman nuestro objeto matemático en

estudio, hacen uso del Cabri 3D que nosotros trabajaremos, y propician el uso de material concreto.

- El análisis *didáctico* análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.

En nuestro estudio realizaremos un análisis de los documentos oficiales que proporciona Perú (2012) como son los textos didácticos que utilizan los estudiantes del primer al cuarto grado de primaria con relación al objeto matemático cubo.

Concepción y análisis a priori

Después de haber realizado el análisis preliminar es decir de haber analizado: los antecedentes, el objeto matemático cubo, los libros de textos del primer al cuarto grado de educación primaria, se han generado condiciones para crear las actividades. En este sentido, Artigue (1995) distingue dos tipos de *variables de comando* que interfieren en el desarrollo de la actividad y que el investigador considera *pertinentes*, que pueden ser: variables macro didácticas (organización global de la Ingeniería) y variables micro didácticas (organización local de la secuencia o fase).

En nuestra investigación, las variables macro didácticas son los sujetos de la investigación, el uso del ambiente de geometría dinámica Cabri 3D, el uso del material concreto, el tiempo de las actividades, el lugar o medio donde se realizará la experimentación, los equipos de trabajo, etc. Estas variables macro didácticas serán desarrolladas en la parte experimental de nuestra investigación que constará en una secuencia de dos actividades donde se movilizará nuestro objeto matemático cubo y el reconocimiento de sus elementos con material concreto y a través del uso del Cabri 3D.

Y las variables micro didácticas o locales, en nuestra investigación se encuentran implícitas, cabe recordar que estamos tomando aspectos de la ingeniería didáctica.

Luego de haber concebido la secuencia de actividades, se realizará el análisis a priori, que son las posibles soluciones o respuestas esperadas de los estudiantes en relación con el marco teórico utilizado. Para la autora, el objetivo del análisis a priori es determinar en qué las selecciones hechas de las variables van a permitir controlar los comportamientos de los estudiantes y sus significados. Este análisis a priori comprende dos partes: una parte descriptiva y otra predictiva en la cual se centra las características de una situación a didáctica que se ha querido diseñar y que se va a tratar de enseñar a los alumnos. Por lo

tanto el análisis a priori es el análisis de las repuestas de los estudiantes a la luz de la teoría.

Experimentación

La experimentación es la puesta en práctica de los instrumentos, es el contacto entre la docente investigadora y los sujetos de la investigación, aquí se realizará un registro de la observación de las actividades. En nuestro estudio desarrollaremos una secuencia didáctica, esta secuencia didáctica consta de dos actividades, en la primera actividad pretendemos que los estudiantes observen, manipulen y describan el cubo en material concreto, en la segunda actividad pretendemos que los estudiantes exploren el cubo y sus elementos en Cabri 3D y finalmente realizaremos un cierre de cada actividad formalizando las nociones matemáticas del cubo y sus elementos.

Análisis a posteriori y validación

Para Artigue (1995) esta fase se basa en el conjunto de datos recogidos durante la fase de la experimentación y de todas las observaciones registradas durante la secuencia de actividades de enseñanza aprendizaje, al igual que los resultados o productos que obtenemos de las actividades. Asimismo esta fase se caracteriza por realizar una contratación entre el análisis a priori y a posteriori de las actividades referidas al cubo con el uso del material concreto y el Cabri 3D, básicamente la validación de la Ingeniería Didáctica es en esencia interna.

En el siguiente capítulo presentaremos a nuestro objeto matemático cubo, los aspectos matemáticos donde consideramos nociones generales pertinentes y los análisis didácticos de los libros de texto de cuarto grado.

CAPÍTULO III: EL CUBO

En este capítulo presentaremos aspectos matemáticos referidos al objeto matemático cubo y algunos conceptos fundamentales para su mayor comprensión, así como aspectos didácticos del libro del cuarto grado de primaria de Perú (2012).

3.1. Aspectos matemáticos

Como nuestra investigación se centra en el estudio del cubo, en este capítulo tomaremos los aportes de Gonzales y Sánchez (1999) para presentar el objeto matemático en estudio. Antes de presentar el cubo explicaremos algunos conceptos fundamentales. A continuación presentaremos la definición de poliedros que usaremos en nuestra investigación.

Poliedros

El Lima (2000) define poliedro como, “Poliedro es una reunión de un número finito de polígonos planos llamados caras donde:

- a) Cada lado de uno de esos polígonos es también lado de, un y solo un, otro polígono.
- b) La intersección de dos caras cualesquiera o es un lado común o un vértice.

Cada lado de un polígono común a dos caras, es llamado una arista del poliedro y cada vértice de una cara es un vértice del poliedro.

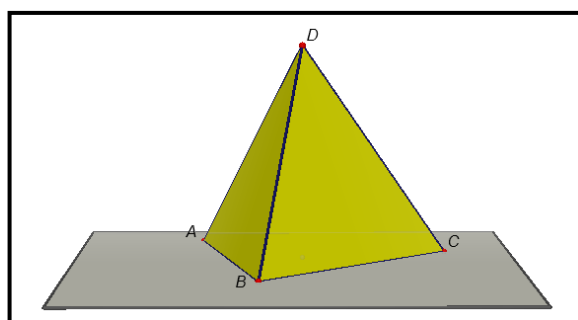


Figura 18. Tetraedro

Para explicar los elementos del poliedro nos basaremos en los aportes de Fernández (2013, p. 44). En La representación del poliedro de la figura 1 identificamos los siguientes elementos:

Vértices del poliedro : A, B, C, D.

Aristas del poliedro : AB, BC, CA, AD, DC, DB

Caras del poliedro : ABC, ADC, ADB, DBC

Asimismo, Rangel (1982) realiza una clasificación de poliedros que consideramos nos ayudará a ubicar nuestro objeto matemático cubo, dentro de los poliedros regulares como muestra la figura 19.

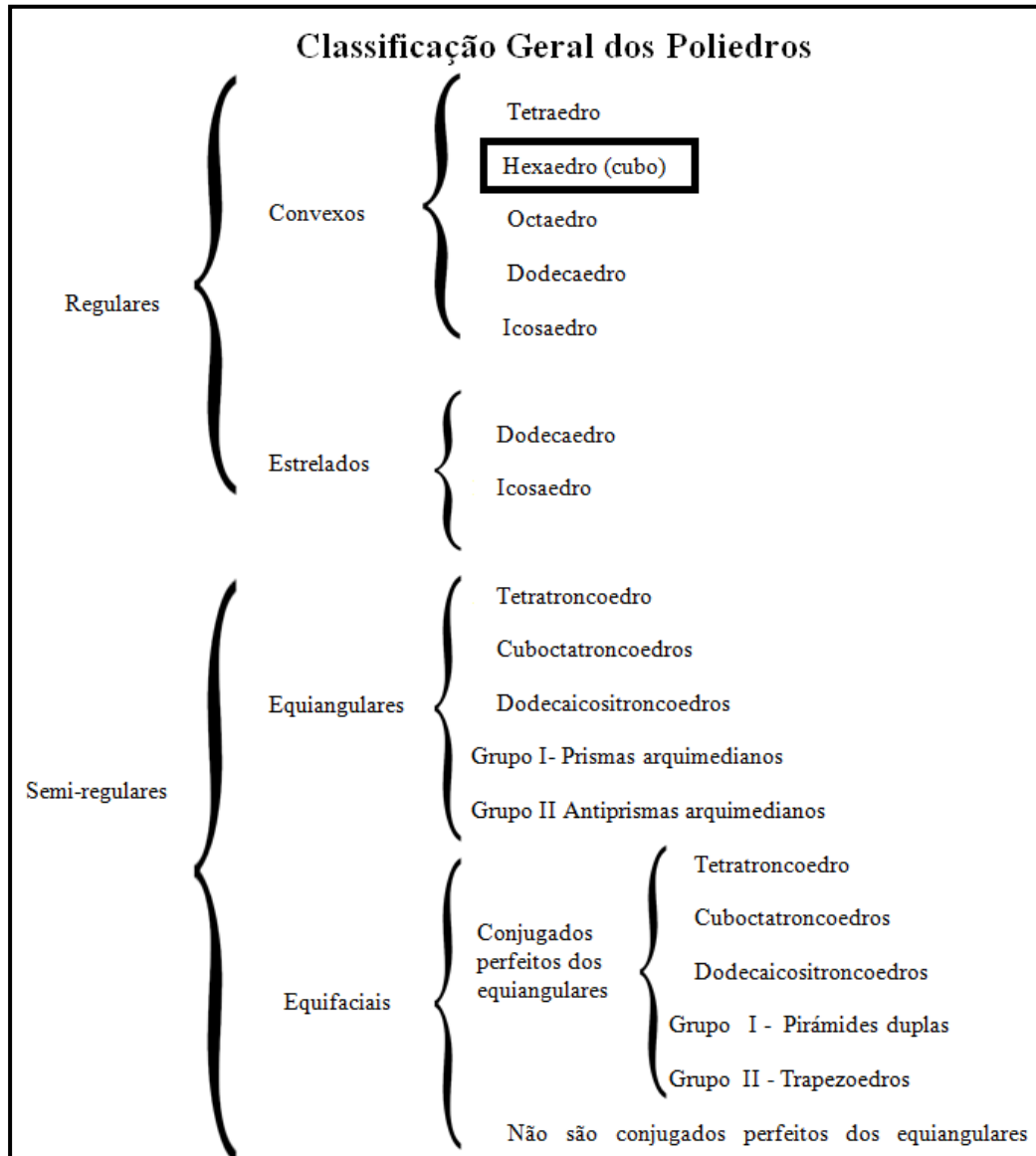


Figura 19. Clasificación de los poliedros

Fuente: Adaptado de Rangel (1982, p. 12).

También Gonzales y Sánchez (1999), definen al cubo como: “Poliedro regular formado por seis caras cuadradas que concurren tres en cada vértice. Tiene 8 vértices y 12 aristas” (p.10).

Por ejemplo, en la figura 20 presentamos la representación del cubo y sus elementos en Cabri 3D:

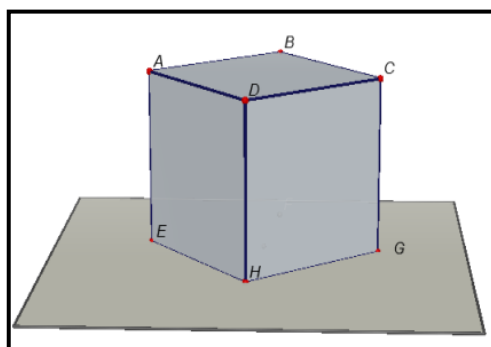


Figura 20. Cubo ABCD-EFGH

El cuadro 5 muestra los elementos del cubo: vértices, aristas, caras del cubo.

Cuadro 5. Elementos del cubo

El cubo ABCD-EFGH, presenta los siguientes elementos:	
Vértices	A, B, C, D, E, F, G, H
Aristas	AB, BC, CD, DA, CG, GF, FB, DH, HG, HE, EA, EF
Caras	ABCD, ADHE, DCGH, BCGF, ABFE, EFGH

Tomaremos los aportes de Gonzales y Sánchez para el estudio del objeto matemático cubo, ya que tiene relación con el estudio que realizaremos en los libros de texto del cuarto grado de primaria que reciben los estudiantes de Perú (2012).

Nosotros tomaremos los aportes de Lima (2000) para la definición de poliedro en el desarrollo de nuestra investigación, porque en los libros de textos que utilizan los estudiantes del primer al cuarto grado de primaria en la unidades donde se aborda nuestro objeto matemático cubo, hemos podido constatar que utilizan el término “sólido” como un vocabulario varias veces repetido durante el desarrollo de la enseñanza del cubo, a pesar de que en realidad la definición que se usa es de poliedro como una superficie. A continuación realizaremos la definición de sólido.,

Y en nuestro trabajo nosotros tomaremos los aportes de Gonzáles y Sánchez (1999) para el estudio del objeto matemático cubo como superficie plana, ya que es pertinente y tiene relación con el estudio que realizaremos en los libros de textos de cuarto grado de primaria que reciben los estudiantes de Perú (2012).

3.2. Aspectos didácticos del libro del cuarto grado de primaria

Interesados en conocer los contenidos que se imparten acerca de nuestro objeto matemático cubo, en las escuelas de nuestro país, realizaremos un estudio de los textos de matemática del primer al cuarto grado de educación primaria que utilizan los estudiantes y que son repartidos a nivel nacional en las instituciones públicas.

A seguir mostramos los textos que analizaremos.

Cuadro 6. Textos analizados

GRADO	TÍTULO DE LA UNIDAD	PÁGINAS	Editorial
1°	“Reconocemos sólidos geométricos”	134-135	Norma 2012
2°	“Conocemos sólidos geométricos”	165-166	Norma 2012
3°	“Reconocemos sólidos geométricos”	122-123	Santillana 2012
4°	“Identificamos sólidos geométricos”	96-98	Santillana 2012

A partir de los libros mencionados en el cuadro 6, analizaremos cada uno de los capítulos donde presenta la noción de cubo.

En Perú (2012a) libro “Matemática 1” de la editorial Norma en el capítulo 8, presenta en la sección de proceso el título “Reconocemos sólidos geométricos” como muestra la figura 21.



Figura 21. Reconocemos sólidos geométricos

Fuente: Perú (2012a, p. 162).

En primer lugar podemos notar que en la parte superior de la imagen se solicita a los estudiantes elaborar “figuras de navidad” con objetos reciclados, sin embargo, observamos claramente que se aprecian objetos navideños contruidos a partir de otros objetos, entonces el uso de la palabra “figura” en el lenguaje matemático en este contexto no es el más adecuado.

Asimismo, en la misma figura 21, podemos observar aparentemente una imagen que representa “La navidad” se presenta un muñeco de nieve, árbol de navidad, la estrella y una vela navideña. Podemos notar que cada uno de los objetos presentados son contruidos a parir de la unión de diversos cuerpos geométricos como por ejemplo: conos, esferas y cubos.

Luego se solicita a los estudiantes preparar tarjetas enumeradas del 0 al 5 para luego colocarlas en cada uno de las “figuras” contruidas a partir de material reciclado considerando el número de objetos reciclados que presenta esa “figura” como se observa en la figura 22.

A partir de ello, nos hacemos las siguientes preguntas ¿En qué momento se explica a los estudiantes que esos objetos reciclados tiene nombres de cilindro, esfera, cubo como se presenta en la figura 22? Además no se evidencia la explicación o definición de sólido geométrico como se muestra en el título, o es acaso que los autores llaman sólidos geométricos al cilindro, la esfera, al cubo y al cono. De ser así habría una incoherencia de

definiciones entre sólido como “denso, macizo, fuerte” no vacío (R.A.E. 2015), y como superficie como se puede visualizar claramente en la figura 22.

En la figura 22 también asumimos que el cilindro, la esfera, el cubo se presentan con líneas discontinuas por lo que inferimos que están vacíos, que no tiene contenido alguno es decir presentan solo la superficie o la “cáscara” del poliedro.

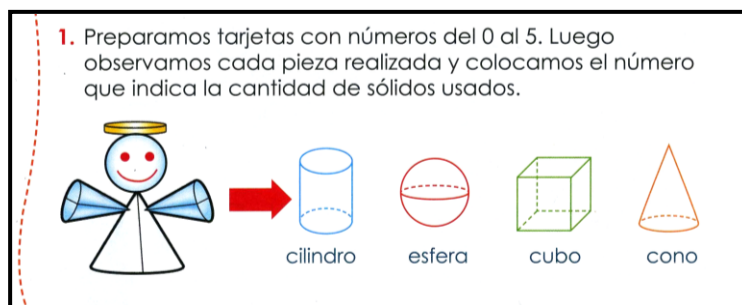


Figura 22. Reconocemos sólidos geométricos

Fuente: Perú (2012a, p. 162).

En segundo lugar, el texto del segundo grado de primaria está organizado en ocho unidades, donde cada unidad será desarrollada aproximadamente en un mes de clases.

Para nuestra investigación nos centraremos en el capítulo 8.

Como podemos observar en la figura 23, se presenta el título introductorio al tema “Conocemos los sólidos geométricos”, en esta parte se muestra una imagen donde los niños construyen los personajes del nacimiento de Jesús haciendo uso de diversos materiales como cajas, latas de leche, etc., seguido de algunas preguntas.

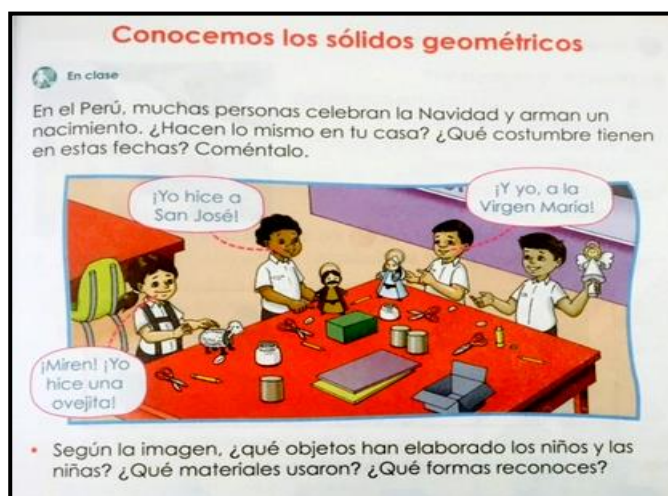


Figura 23. Conocemos los sólidos geométricos

Fuente: Perú (2012b, p.165)

Se presenta a los estudiantes una actividad donde harán uso de cajas, latas u objetos parecidos a los que se muestran en la figura 24. Como podemos observar los objetos se muestran como la superficie del poliedro, “reunión de número finito de polígonos”(Lima 2000), sin embargo en el título lo llaman sólido, y como hemos definido anteriormente un sólido es macizo, denso y fuerte (R.A.E., 2015) y cómo podemos observar los autores definen estos cuerpos como sólidos a la unión de figuras planas, evidentemente existe una incoherencia entre la definición de un sólido y las figuras que se muestran, ya que se muestran vacías, transparentes como se puede observar en la figura 24.

Luego en la misma figura 24 se puede observar un prisma, un cubo, una esfera, un cono, un cilindro y una pirámide claramente como superficie, sin embargo a todos ellos lo titulan como sólidos geométricos, claramente existe nuevamente incoherencia entre sólido como “denso macizo, fuerte” y poliedro que es claramente lo que se visualiza “reunión de número finito de polígonos”.

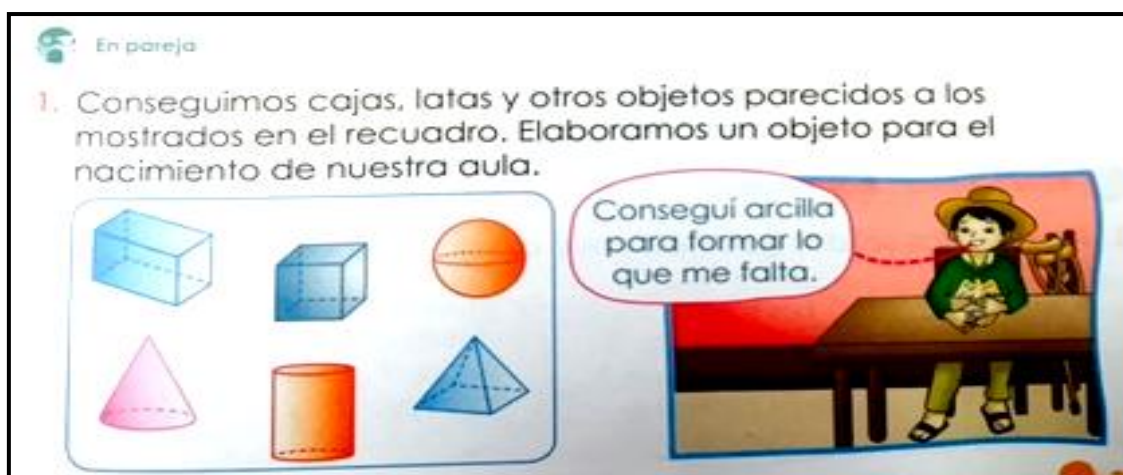


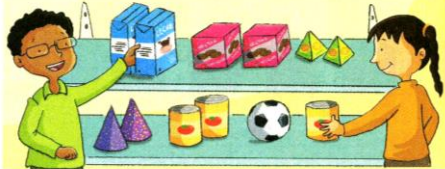
Figura 24. Conocemos los sólidos geométricos

Fuente: Perú (2012b, p.165).

En tercer lugar el texto del tercer grado de primaria en la octavo unidad, presenta tema introductorio titulado “Identificamos sólidos geométricos” para el tercer grado de primaria. Podemos observar que aparentemente se realiza una clasificación de sólidos geométricos donde los clasifican en cuerpos redondos, como la esfera y el cono, y cuerpos no redondos como la pirámide y el cubo.

Reconocemos sólidos geométricos


Laura y Pedro ordenan cajas a partir de las características que tienen en común.
 Laura ordena la repisa inferior, y Pedro, la superior.





» ¿En qué se parecen las cajas que ordena Pedro? ¿Y las que ordena Laura?


En grupos


a) Entregamos a cada grupo 5 o más envases que tengan las siguientes formas geométricas:


Cono


Esfera


Cubo


Prisma


Cilindro




Pirámide


Figura 25. Reconocemos los sólidos geométricos


Fuente: Perú (2012c, p.165)


b) Observamos sus características y las clasificamos de acuerdo con diferentes criterios.


1.ª clasificación



Cono


Pirámide



Cubo



Esfera



Cilindro



Prisma


2.ª clasificación



Cilindro


Esfera


Pirámide


Cubo


Cono


Prisma

• ¿Qué criterios aplicamos en la primera clasificación? ¿Y en la segunda?

c) En la primera clasificación, los cuerpos están agrupados por su parecido. No hay un criterio definido.
 En la segunda clasificación, los sólidos están agrupados según tengan o no caras planas.

Los sólidos geométricos se clasifican en cuerpos redondos, como la esfera y el cono, y cuerpos no redondos, como la pirámide y el cubo.

Figura 26. Reconocemos los sólidos geométricos

Fuente: Perú (2012c, p.165)

En la investigación utilizaremos algunos aspectos positivos de esta parte del libro de texto, porque nos da algunas ideas para crear las actividades referidas al uso de material concreto como la relación que se hace con las cajas elaboradas en material concreto.

Asimismo en la figura 27 se presenta tema introductorio titulado "Identificamos sólidos geométricos" para el cuarto grado de primaria

Podemos observar que a partir de situaciones de su entorno se presentan los prismas, siendo éstas, cajas de regalo de diferentes formas, aquí se utiliza la palabra prisma, es decir que ya debería ser parte del conocimiento previo del estudiante el significado del prisma, sin embargo no lo es porque no se realiza una definición de lo que es un prisma.

Observamos que se utilizan también términos de geometría sin embargo, en el Diseño Curricular Nacional D.C.N (2009) y en los años anteriores de acuerdo al DCN no se aborda este contenido matemático.

En la misma figura 27, se presenta el cubo de manera muy general, porque observamos que en una misma página se abordan varios términos y contenidos geométricos que no son explicados adecuadamente, como a continuación detallamos.

Primero presentan un título sobre los sólidos geométricos, a pesar de ello no hay explicación alguna sobre los sólidos geométricos, luego presentan cajas de regalo de diferentes formas y seguidamente se refieren a estas cajas como prismas pero no se ha definido lo que son los prismas, luego se pasa a reconocer las caras del cubo, las aristas del cubo y vértices.

Podemos observar que el texto no presenta un articulación entre lo que son cajas de regalo (material concreto) y las representaciones ideales del cubo y sus elementos, ya que como se muestra en la figura 27 el cubo es presentado como un objeto ideal sin embargo no se realizó la explicación de lo que es un cubo ni la relación que tienen con las cajas de regalo.

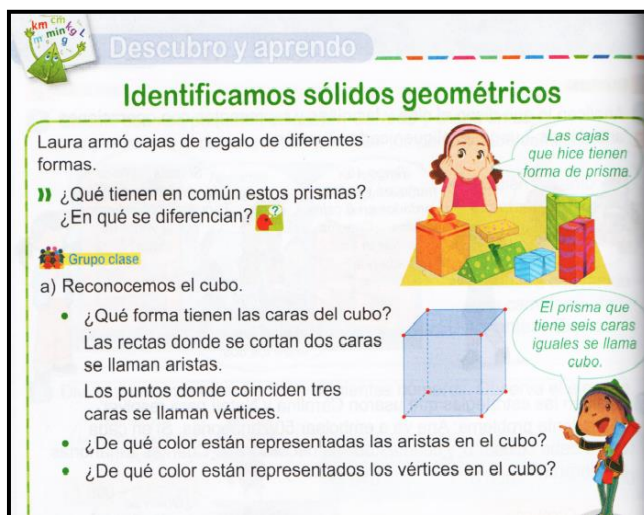


Figura 27. Identificamos sólidos geométricos

Fuente: Perú (2012d, p. 96)

Tomando la teorías del Desarrollo Pensamiento Geométrico y en relación con el contenido del texto, se hablan de cajas de regalo donde los estudiantes manipulan material concreto, aquí nos encontramos en el nivel G0, luego se presentan características de objetos ideales como aristas, lados, vértices, mostrando un cubo transparente y dando

un salto agigantado al nivel G2 en una misma página (96) ya que la presentación que se transmite es de un objeto ideal.

A continuación presentamos el cuarto capítulo, el cual contiene el experimento de la investigación, la descripción de las actividades y análisis a priori y posteriori, finalmente los resultados y consideraciones finales.

CAPÍTULO IV: EXPERIMENTO Y ANÁLISIS

En este capítulo describiremos el desarrollo de la investigación, es decir haremos una descripción de los sujetos de investigación, escenario, organización de la investigación y cada una de las dos actividades propuestas con sus respectivos análisis a priori y a posteriori.

4.1. Desarrollo de la investigación

A continuación presentaremos a los sujetos de la investigación así como el escenario donde se desarrollará la parte experimental.

Escenario

El lugar donde se desarrollará la investigación es el colegio Domingo Faustino Sarmiento N° 1143 es una institución educativa del nivel primaria que cuenta con dos turnos mañana y tarde líder a nivel del distrito de Ate, Lima-Perú que cuenta con una plana docente investigadora sólida comprometida por la excelencia académica de sus estudiantes. Añadimos que el colegio cuenta con ocho secciones por grado del 1° a 6° con treinta a cuarenta estudiantes por aula en cada turno.

Para el desarrollo de las actividades, utilizaremos un aula de clase y la sala de Innovación Pedagógica (sala de informática) del colegio.

Para el desarrollo de la primera actividad, los seis estudiantes trabajarán en un aula habilitada especialmente para el estudio con material concreto y para la segunda actividad trabajarán en la Sala de Innovación Pedagógica (sala de informática).

Sujetos

Los sujetos de la investigación son seis estudiantes de 9 y 10 años de edad del cuarto grado de Educación Primaria.

Para el análisis de las dos actividades analizaremos los trabajos desarrollados por dos estudiantes que llamaremos Daniel y Josué ya que han asistido con responsabilidad a todas las sesiones programadas y han demostrado interés y empeño durante el desarrollo del experimento. A seguir describiremos a los dos estudiantes.

Daniel y Josué han estudiado en la misma sección desde el primer grado hasta el cuarto grado en la I.E. Domingo Faustino Sarmiento de Ate donde se desarrollará la investigación. En el primer y segundo grado tuvieron una misma profesora como responsable de enseñar todas las áreas y en el tercer y cuarto grado se les asignó otra profesora como su tutora. Los tres estudiantes mencionados han recibido la misma formación académica basada en el currículo nacional establecido para cada ciclo y grado respectivamente. Asimismo los contenidos referidos al área de Matemática del primer grado al cuarto grado han sido desarrollados en los libros de texto que proporciona Perú (2012) a todos los estudiantes de manera gratuita.

Los estudiantes trabajarán de manera individual en las dos actividades programadas para esta parte experimental.

Además de los sujetos de investigación, participarán en la parte experimental la profesora investigadora y un observador.

4.2. Descripción de las actividades y análisis

El cuadro 7 muestra la descripción de las actividades propuestas que serán realizadas en dos encuentros, de una hora y media y dos horas de duración respectivamente.

Las actividades se desarrollarán en un taller extra curricular, fuera del horario de clase por lo cual la participación de los estudiantes será voluntaria.

Cuadro 7. Descripción de las actividades de la investigación

Encuentro	Actividad	Contenido de la actividad	Duración
I	Actividad 1	Reconociendo el cubo en material concreto.	1h 30 min.
II	Actividad 2	Elementos del cubo en Cabri 3D.	2h

Para el desarrollo de las dos actividades de la investigación utilizaremos los siguientes medios de recolección de datos: fichas de trabajo que contienen las preguntas de las

actividades de cada encuentro; material concreto (material hecho en cartulina y varitas de madera para cada uno de los estudiantes), software de geometría dinámica Cabri 3D v2 y grabación de los trabajos de los estudiantes cuando trabajan con el software Cabri 3D, por medio del programa *Camtasia* que permite capturar el área de trabajo.

Análisis de las actividades

A continuación presentamos los análisis a priori y a posteriori de las dos actividades trabajadas por los estudiantes.

Recordemos que para el análisis utilizamos el marco teórico de Parzysz (1988) del Desarrollo del Pensamiento Geométrico, con la adaptación que hemos realizado para el nivel primario debido a que esta teoría ha sido desarrollada a nivel secundario y es el primer trabajo de investigación que se hace con este nivel. Por lo tanto, cuando en este trabajo usamos las denominaciones *G0* y *G1*, lo hacemos de acuerdo a la redefinición que hemos realizado del Desarrollo del Pensamiento Geométrico (ver la página 39).

Actividad 1: Reconociendo el cubo en material concreto

Esta actividad consta de cuatro preguntas las cuales apuntan a lograr como objetivo que los estudiantes reconozcan la representación del cubo por medio del material concreto hechos de cartulina, cubos en varitas y transiten por el nivel *G0* y *G1* del desarrollo del pensamiento geométrico. Esta actividad está organizada en cuatro preguntas y cada pregunta se desenvolverá de manera progresiva, donde los estudiantes podrán interactuar entre ellos y manipular el material concreto.

A continuación presentamos las cuatro preguntas de la **actividad 1** con sus respectivos análisis a priori y a posteriori.

Pregunta 1

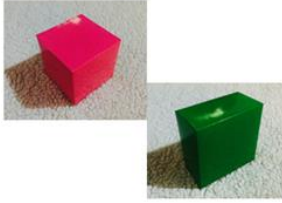
<p>Observa y manipula los modelos de color verde y rosado que tienes en tu mesa y responde:</p> <p>¿Qué figuras geométricas observas en los dos modelos?</p>	
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------

Figura 28. Manipulación del cubo y prisma

Análisis a priori

En esta primera pregunta esperamos que los estudiantes al observar el material concreto y manipularlo identifiquen las figuras geométricas cuadrado y rectángulo en los dos modelos presentados: cubo y prisma.

De esta manera, pensamos que los estudiantes se encuentran en el nivel G0, dado que por medio de la percepción (observar y manipular los dos modelos), puedan relacionar sus caras con las figuras geométricas cuadrado y rectángulo.

Análisis a posteriori de la pregunta 1: estudiante Daniel

El estudiante Daniel, luego de recibir el material concreto elaborado en cartulina de color rojo y verde (cubo y prisma respectivamente) y después de manipular cada uno por unos minutos y observar sus características, levantó la mano voluntariamente y participó para responder a la pregunta que la docente investigadora realizó al grupo: *¿qué figuras geométricas observan en el modelo verde?* Daniel respondió que en el modelo verde hay rectángulos (señaló con su dedo el rectángulo) y hay cuadrados (señaló con su dedo el cuadrado). *¿Por qué crees eso?*, preguntó la docente. El estudiante explicó que *este es más largo* (señaló al rectángulo), *pero esto es largo tiene los dos largos y es más grande que el rectángulo* (señaló al cuadrado). La docente investigadora intervino diciendo *¿entonces ambas figuras son iguales?* Daniel respondió *No son iguales uno es rectángulo y el otro es cuadrado.*

En la figura 29, mostramos que el estudiante Daniel respondió, en la ficha de actividad 1, que las figuras geométricas que observa en los dos modelos tienen las formas de cuadrados y rectángulos.

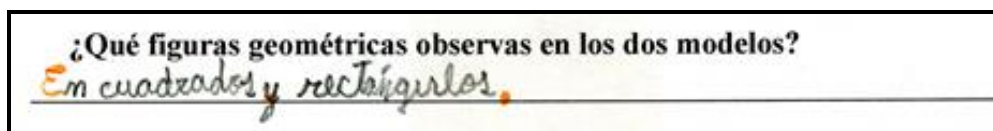


Figura 29. Respuesta de Daniel en la Actividad 1

Esto confirma que realizó lo mismo que habíamos supuesto en el análisis a priori. De esta manera, basados en las etapas del Pensamiento Geométrico de Parzysz (1988), pensamos que el estudiante se encuentra en el nivel G0 porque se vale de sus sentidos para reconocer las figuras geométricas cuadrado y rectángulo.

Análisis a posteriori de la pregunta 1: estudiante Josué

De la misma manera, luego de haber manipulado los dos modelos verde y rojo (prisma y cubo respectivamente) el estudiante Josué afirmó que observa cuadrados en ambos modelos (colocó ambos modelos juntos en sus dos manos) y solo en el modelo verde (prisma) hay rectángulos. En la figura 30 mostramos la respuesta escrita de Josué: *las dos caras son cuadradas y en el cuadrado verde su superficie es rectángulo.*

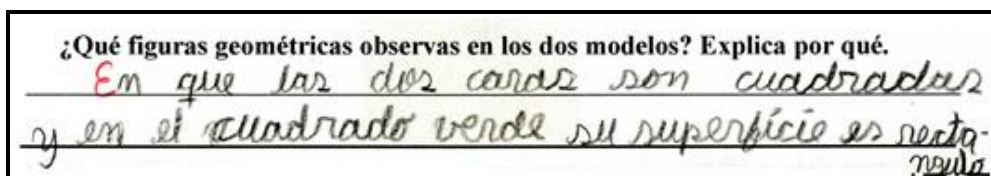





Figura 30. Respuesta de Josué en la Actividad 1

Lo que nos indica que se encuentra en el nivel G0, porque lo que él pudo percibir por medio de la observación y manipulación del material fue que en ambos modelos existen cuadrados, pues señaló con su mano los cuadrados en ambos modelos. Entonces, tanto su afirmación como lo que escribió es coherente, eso nos indica que se encuentra en el nivel G0, porque se basa en lo que observa. De esta manera se afirma lo que habíamos previsto a priori.

Pregunta 2

Ahora usa tu regla y mide los lados de cada modelo y anótalos en la tabla.

Objeto verde													
Objeto rojo													

Luego observa las medidas que anotaste de cada modelo y explica las diferencias que encuentras entre las medidas de cada modelo.

verde	rojo

Figura 31. Pregunta N° 2 de la Actividad 1 con material concreto

Análisis a priori

En esta segunda pregunta, esperamos que los estudiantes sigan las indicaciones de la ficha y registren en la tabla la medida de la longitud de cada arista de los dos modelos, para lo cual usarán una regla graduada de 30 cm . Además, esperamos que realicen comparaciones entre las medidas tomadas en el modelo del cubo y del prisma. También, suponemos que cuando midan la longitud de las aristas del modelo del cubo perciban que estas miden 10cm.


De esta manera, creemos que esta actividad favorecerá a que los estudiantes transiten cognitivamente del nivel G0 al nivel G1 ya que realizarán mediciones haciendo uso de la regla graduada, de las aristas del cubo y prisma para luego compararlas.

Análisis a posteriori de la pregunta 2: estudiante Daniel

Para el desarrollo de esta segunda pregunta se les proporcionó a cada estudiante una regla graduada de 30cm. y se les pidió que midan cada uno de los modelos verde y rojo (prisma y cubo) para verificar si los modelos presentados tienen caras formadas por figuras geométricas diferentes como ellos han manifestado y explicar por qué son diferentes, además deberán registrar las medidas en la tabla. Se les da unos minutos para que realicen la actividad. Luego de que acabaron de completar la tabla la docente investigadora preguntó *¿Por qué son diferentes el rectángulo y el cuadrado?* Les pidió que observen sus anotaciones registradas en la tabla, entonces Daniel levantó la mano y respondió, *son diferentes en su cantidad, porque el rectángulo mide por acá 12 y por acá 6 y el cuadrado todos sus lados tienen la misma cantidad 10.* (Refiriéndose por cantidad a la medida de longitud de las aristas de los modelos).

Como podemos observar en la figura 32, en la primera parte de esta pregunta, Daniel completó la tabla con las medidas de longitud de las aristas del prisma (modelo verde) que es de 12cm. Asimismo, en el caso del modelo del cubo (modelo rojo) completó las medidas con 10cm., como lo habíamos previsto en el análisis a priori.

Ahora usa tu regla y mide los lados de cada modelo y anótalos en la tabla.



Objeto verde	12	12	6	6	12	12	6	6	12	12	12	12
Objeto rojo	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

Figura 32. Respuesta de Daniel de la actividad 1 pregunta 2

En la segunda parte de la pregunta en la que se le pide a Daniel que explique las diferencias entre las medidas de cada modelo, el estudiante escribió que en el modelo verde: *son diferentes sus partes tiene rectángulos y cuadrados y miden diferente*, y en el modelo rojo escribió que: *todos sus lados son iguales porque todos miden 10 cm.* Ver figura 33.

Luego observa las medidas que anotaste de cada modelo y explica las diferencias que encuentras entre las medidas de cada modelo.

verde	rojo
<i>Son diferentes sus partes tiene rectángulos y cuadrados y miden diferente.</i>	<i>Todos sus lados son iguales porque todos miden 10 cm.</i>

Figura 33. Respuesta de Daniel de la pregunta 2

De esta manera creemos que el estudiante se encuentra en el nivel G1 como planificamos en nuestro análisis a priori, porque explica la relación de las medidas de longitud de las aristas de la estructura del cubo y percibió que son semejantes.


Análisis a posteriori de la pregunta 2: estudiante Josué

El estudiante Josué hizo uso de la regla graduada de 30 cm. que proporcionamos para el desarrollo de esta pregunta y realizó las medidas de longitud de las aristas de ambos modelos con mucho interés y concentración. Lo que observamos en el momento que él

completó la tabla con el modelo verde (prisma) fue que el estudiante tomó la medida de longitud de todas las aristas del prisma, y contó lado por lado para verificar que no le falte ni un lado por medir y registró a su vez en la ficha. Por el contrario, cuando realizó las medidas de longitud del modelo rojo (cubo) el estudiante ya no terminó de medir todos los lados, lo que hizo fue medir algunos lados y luego como se dio cuenta que el modelo estaba formado por cuadrados completó el resto de la tabla con 10 cm. La docente investigadora intervino preguntándole: *porque no mides todo?* A lo que el estudiante le contestó: *todos van a medir igual porque este* (señalando el modelo rojo) *tiene puros cuadrados, todos son cuadrados.*

En base a su respuesta y a la tabla llenada, podemos decir que Josué se encuentra en el tránsito del nivel G0 al G1, porque al contestar *que todos sus lados van a medir igual porque son cuadrados* quiere decir que percibió que el modelo está formado por cuadrados y al estar formado por cuadrados deben tener todos sus lados las mismas medidas (G1) además conectó con sus conocimientos previos acerca de la noción de cuadrado. Esto nos parece importante ya que es una evidencia clara de la relación que él realizó de las medidas con las con la figura geométrica cuadrado (G1). De esta manera se confirma lo que pensamos en nuestro análisis a priori.

Ahora usa tu regla y mide los lados de cada modelo y anótalos en la tabla.



Objeto verde	6	6	6	6	6	6	12	12	12	12	12	12
Objeto rojo	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

Figura 34. Respuesta de Josué completando la tabla de la pregunta 2

En la segunda parte de la misma pregunta donde se le pidió explicar las diferencias entre las medidas de cada modelo Josué respondió que: *tiene cuadrados, rectángulos y sus lados son diferentes.* Ver figura 35.

Pensamos que Josué al responder que el modelo verde (prisma) tiene cuadrados, rectángulos y sus lados son diferentes, está en el nivel G0 porque responde en base a los que el observa y valida su respuesta con las medidas de longitud de las aristas, confirmó que sus lados tienen diferentes medidas.

Luego observa las medidas que anotaste de cada modelo y explica las diferencias que encuentras entre las medidas de cada modelo.

verde	rojo
Tiene cuadrados y rectángulos y sus lados son diferentes.	Tiene cuadrado y todos sus lados son iguales porque sus medidas son iguales.

Figura 35. Respuesta de Josué de la pregunta 2

En el caso del modelo rojo, pensamos que Josué al responder que tiene cuadrados y todos sus lados son iguales porque sus medidas son iguales está en el nivel G0 en el tránsito al nivel G1 al relacionar las medidas iguales con el cuadrado.

Pregunta 3

Ahora explica la relación que hay entre las medidas del modelo verde y el modelo rojo ¿En qué se parecen? Explica

Figura 36. Pregunta 3 de la actividad 1

Análisis a priori

En esta pregunta esperamos que los estudiantes perciban que el cuadrado es la figura geométrica que se repite en ambos modelos y que solo en el prisma rectangular además de cuadrados hay rectángulos.

Suponemos que esta actividad debería permitir que la mayoría de los estudiantes transiten del nivel G0 al G1, porque pensamos que podría relacionar las medidas de las aristas de los modelos del prisma (verde) y del cubo (rojo).

Análisis a posteriori de la pregunta 3: estudiante Daniel

Para esta pregunta se les pide a los estudiantes que de ser necesario manipulen nuevamente los modelos rojo y verde y los observen y también observen las medidas que registraron en la tabla, la docente investigadora pregunta *¿Qué figuras geométricas se repiten en los dos modelos? ¿En qué se relacionan ambas figuras y por qué?* La respuesta de Daniel, que presentamos en la figura 37, muestra que tanto en el modelo rojo como el modelo verde hay cuadrados de 10cm. y 12cm. Respectivamente.

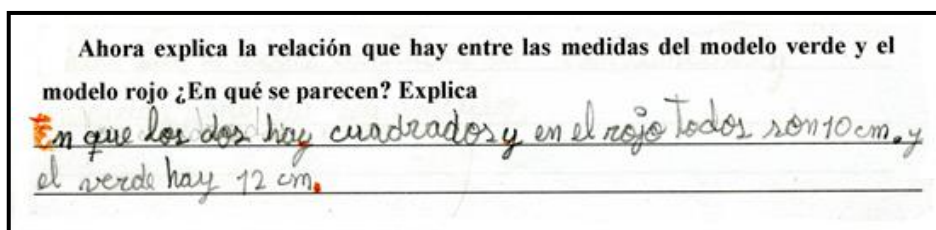


Figura 37. Respuesta de Daniel de la pregunta 3

Pensamos que el estudiante logró transitar entre los niveles G0 y G1 al relacionar las medidas de longitud de las aristas de los modelos. La docente investigadora preguntó a los estudiantes *¿por qué es un cuadrado?* A lo que Daniel respondió verbalmente *porque aquí todos tienen la misma cantidad 10 cm. Por acá y por acá y por todos lados tiene 10cm.* (señalando al cubo) *Y en este todos tienen 12cm.* (señalando al prisma) la profesora vuelve a realizar la pregunta entonces por qué dices que es un cuadrado? Daniel responde *Porque es un cuadrado porque tienen la misma cantidad* (refiriéndose por cantidad a la medida de longitud de las aristas). De esta manera se evidencia que el estudiante logra lo que pensamos a priori.

Análisis a posteriori de la pregunta 3: estudiante Josué

De igual forma para el desarrollo de esta pregunta la docente investigadora mostró a los estudiantes los dos modelos (verde y rojo) y les pidió que también cojan los dos modelos en sus manos la docente investigadora dice: *mira y piensa ¿en qué figura geométrica se parecen los dos modelos? ¿por qué?* Como podemos ver en la figura 38 Josué compara los dos modelos buscando la semejanza de figuras geométricas entre rectángulo y cuadrado, la docente investigadora vuelve a preguntar. *Alguien tiene una respuesta?* Entonces Josué responde: *se parecen en que son cuadrados en esta parte (tocando con mano los dos cuadrados) ver figura 38.*



Figura 38. Manipulación del material concreto prisma y cubo

La respuesta de Josué se confirma en la ficha donde él responde: *se parecen en las caras son cuadradas de las dos figuras*. Podemos afirmar que el estudiante se encuentra en el nivel G0 porque todavía se vale de lo que percibe con los sentidos para validar su respuesta de esta manera el estudiante logra parcialmente lo que lo pensamos a priori.


Ahora explica la relación que hay entre las medidas del modelo verde y el modelo rojo ¿En qué se parecen? Explica

Se parecen en que las caras son cuadradas de las dos figuras.

Figura 39. Respuesta de Josué pregunta 3

Pregunta 4

Observa la estructura del modelo que está sobre la mesa.



Ahora usa el material que tienes sobre tu mesa y construye un modelo semejante al que está al frente. Una vez terminado colócalo en la mesa delante de la pizarra.

Ahora usa tu regla mide los 3 modelos y anota las medidas en la tabla.

Modelo 1																		
Modelo 2																		
Modelo 3																		

Explica la relación que encuentras entre las medidas de los modelos y escribe lo que observas.

Los modelos se parecen en:	Los modelos no se parecen en:

Figura 40. Pregunta 4 de la actividad 1

Análisis a priori

En esta pregunta, pensamos que los estudiantes después de observar la estructura del cubo hecho en varitas de madera seguirán las indicaciones de la ficha.

Cuando pedimos que expliquen la relación entre las medidas de las aristas de los tres modelos, deseamos que alcancen el nivel G1, porque pretendemos que perciban que las longitudes de las aristas de cada estructura del cubo son diferentes: 10cm., 20cm., y 30cm. respectivamente.

Además, creemos que si ellos perciben que si los modelos son semejantes eso comprueba también que se encuentran en el nivel G1.

Análisis a posteriori de la pregunta 4: estudiante Daniel

Para el desarrollo de esta pregunta se facilitó a los estudiantes un material diferente hecho en madera para ensamblar y formar un modelo igual al que se presenta en la figura 41. A cada estudiante se le entregó un juego para armar de tres medidas distintas cada juego de 10cm., 20cm., y 30cm., todos los estudiantes se mostraron rápidamente muy motivados en armar el modelo, les llamó la atención los colores y los tamaños de las varitas, cada uno estaba muy atento armando su objeto. Luego de armarlo lo colocaron todos en frente de la pizarra, la docente investigadora preguntó: *¿qué observan? ¿Son iguales los modelos que han armado?* Daniel respondió que no son iguales porque este es más grande y este es mediano y este mas pequeñito, entonces la docente investigadora les muestra el cubo de cartulina que manipularon al inicio de las actividades y pide que respondan si ambos objetos son iguales, Daniel responde que no son iguales (y se lo pone dentro de su cabeza la estructura del cubo más grande) la docente investigadora pregunta *¿por qué no son iguales?* Daniel responde: *porque este* (señalando al cubo de cartulina) *tiene una parte dura y este* (por la estructura del cubo en varitas) *es como su esqueleto.*

La docente investigadora pide a los estudiantes que con la ayuda de su regla midan los tres modelos que armaron y completen la tabla con las medidas respectivas.


Los estudiantes rotaban el material de mesa en mesa para realizar las medidas de los tres objetos de 30cm, 20cm. y 10cm. Respectivamente.



Figura 41. Estructura del cubo en madera (30cm)

En la figura 42 observamos que Daniel completó la tabla con las medidas de longitud de las aristas de los tres modelos presentados (estructura del cubo) 10cm. 20cm. y 30cm. respectivamente como estaba previsto a priori.

Indicaciones: observa la estructura del modelo que esta sobre la mesa.



Ahora usa el material que tienes sobre tu mesa y construye un modelo semejante al que está al frente. Una vez terminado colócalo en la mesa delante de la pizarra.

Ahora usa tu regla mide los 3 modelos y anota las medidas en la tabla.

Modelo 1	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
Modelo 2	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
Modelo 3	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

Explica la relación que encuentras entre las medidas de los modelos y escribe lo que observas.

Los modelos se parecen en:	Los modelos no se parecen en:
Se parecen en que todos tienen la misma cantidad de lados y medidas.	No se parecen en sus tamaños ni en medidas.

Figura 42. Respuesta de Daniel de la pregunta 4

En la segunda parte de la pregunta en la que se le pide a Daniel que explique la relación entre las medidas de los modelos del cubo y escriba lo que observa, el estudiante escribe: *se parecen porque tienen la misma cantidad de lados y medidas.*

Pensamos que el estudiante se encuentra en el nivel G1 como planificamos en el análisis a priori porque explica la relación de las medidas de longitud de las aristas de los tres modelos y percibe que son estructuras de cubos semejantes. Lo que significa que entendió que la longitud de las aristas puede variar y que la estructura del cubo seguirá manteniendo las mismas características.

Análisis a posteriori de la pregunta 4: estudiante Josué


De la misma manera para el desarrollo de esta pregunta, Josué armó el modelo con las varitas de madera, lo colocó sobre la mesa con los demás modelos. La docente investigadora preguntó: *¿qué observan? ¿Son iguales los modelos que han armado?* La docente investigadora le pidió a Josué que opinara, Josué dijo: *sí son iguales en sus cuadrados, porque todos tienen cuadrados, pero uno grande, otro más pequeño y este más chiquitito.*

Luego, la docente investigadora les pide que con ayuda de la regla graduada de 30 cm., realicen las medidas de longitud de los tres modelos y los registren en la tabla.

En la figura 43 podemos observar que Josué completa la tabla con 10cm, 20 cm. y 30 cm. respectivamente.

En la segunda parte de la misma pregunta donde se les pidió a los estudiantes que escriban en qué se parecen los modelos y en que no se parecen, Josué respondió que se parecen en que cada figura (entendemos que se refiere a figura por el modelo de 10cm, 20 cm. y 30 cm.) tienen cantidad de lados, (asumimos que quiso decir la misma cantidad de lados) y tienen la misma medida, pensamos que Josué al referirse a la misma cantidad contó las aristas de cada modelo (12 aristas), aunque él no lo escribió textualmente entendemos que lo entendió así porque hizo referencia a las medidas y dice tienen la misma medida, refiriéndose a que en cada modelo se repite la misma medida de longitud de las aristas. De esta manera se confirma lo que estaba previsto a priori.

Indicaciones: observa la estructura del modelo que esta sobre la mesa.



Ahora usa el material que tienes sobre tu mesa y construye un modelo semejante al que está al frente. Una vez terminado colócalo en la mesa delante de la pizarra.

Ahora usa tu regla mide los 3 modelos y anota las medidas en la tabla.

Modelo 1	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
Modelo 2	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
Modelo 3	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

Explica la relación que encuentras entre las medidas de los modelos y escribe lo que observas.

Los modelos se parecen en:	Los modelos no se parecen en:
Se parecen en que cada figura tienen cantidad de lados y tienen la misma medida.	No se parecen en las medidas.

Figura 43. Respuesta de Josué de la pregunta 4

Formalización de la Actividad 1

Al término de toda la actividad con material concreto, de la manipulación de los cubos en cartulina, cubos en madera de 10cm., 20cm., y 30cm., y de haber usado la regla graduada de 30cm. y completar las fichas correspondientes a esta actividad, realizamos la formalización para la noción de cubo, y sus características, ya que es importante para la actividad 2 con Cabri 3D.

Luego de que los estudiantes completaron sus fichas, la docente investigadora realizó las siguientes preguntas: *¿Qué figuras geométricas forman el cubo?* Los estudiantes respondieron en coro: *cuadrados*, la docente investigadora dijo: *¿sólo cuadrados?* En coro: *sí ¿y cómo es el cuadrado?* Los estudiantes respondieron *tiene cuatro lados*, docente investigadora: *¿Qué más?* Los niños responden, *todos sus lados son iguales, se repite el mismo número*. Entonces la docente investigadora realiza una representación del cuadrado en la pizarra a mano alzada (aparentemente el cuadrado tenía las mismas medidas) la docente investigadora preguntó *¿esto será un cuadrado?* Entonces los niños respondieron que parece un cuadrado, y otro dijo hay que usar la regla para ver si son iguales.

Bien hasta aquí la docente investigadora recogió lo que los estudiantes habían aprendido en el desarrollo de la actividad, y formalizó el concepto de cubo y explicó que: *El objeto que está formado por seis caras cuadradas donde todos los cuadrados tienen la misma*

medida se llama cubo. Cabe resaltar que para la formalización de esta parte nos basamos en la definición del objeto matemático cubo que definimos en el capítulo anterior.

Hasta aquí se terminó con la 1era actividad, invitando a los niños a asistir al día siguiente para trabajar con el software Cabri 3D en las computadoras, los niños se alegraron y dijeron que asistirán, se fueron contentos de la clase.

Actividad 2: Elementos del cubo en Cabri 3D

El objetivo de esta actividad es que los estudiantes estudien los elementos del cubo cuando utilizan el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D y transiten por los niveles G0 y G1 del desarrollo del pensamiento geométrico.

Al desarrollar la actividad los estudiantes podrán manipular la representación del cubo en el Cabri 3D por medio de las funciones de arrastre y modificación de posición del observador, que son las funciones que caracterizan a este tipo de software.

Además, esperamos que los estudiantes al observar la representación del cubo y manipularla, por medio del uso de herramientas como *punto*, *polígono* y *segmento* relacionen: punto con vértice, segmento con arista y polígono con la cara del cubo.

A continuación presentamos las cuatro preguntas de la actividad con sus respectivos análisis.

Pregunta 1


Abre el archivo Cabri 3D que está en el escritorio y escucha con atención las indicaciones, después realiza las siguientes actividades:		
Ahora con el cursor arrastra una de las esquinas del cubo ¿Qué sucede con el cubo cuando arrastras la esquina con el cursor? Explora desde diferentes posiciones. Explica con tus propias palabras lo que observas (siempre trabaja dentro del área de trabajo).		
<hr/> <hr/>		
¿Qué pasa con la forma del modelo cambian o no cambian. Elige una respuesta y explica por qué.		
SI CAMBIAN	NO CAMBIAN	
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	

Figura 44. Pregunta 1 de la actividad 2

Análisis a priori

Para esta primera pregunta los estudiantes observarán la representación del cubo en el área de trabajo de la pantalla de inicio del software, y que cuando arrastren un vértice cualquiera de la figura percibirán que esta se “aleja” o se “acerca” (ver figura 45).

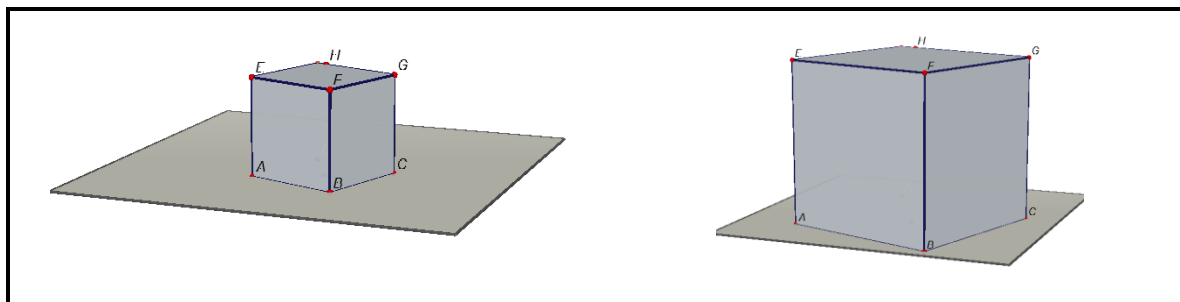


Figura 45. Uso de la función arrastre en el cubo

También pensamos que al explorar el cubo desde diferentes posiciones, por medio de la manipulación directa del Cabri 3D, observarán que las caras del cubo tienen la forma de cuadrados (ver figura 46).

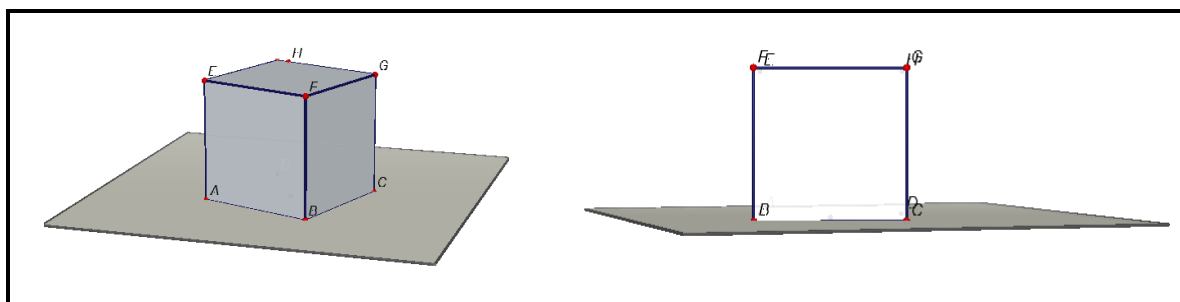


Figura 46. Uso de la función manipulación directa en el cubo

En la segunda parte de la pregunta, esperamos que los estudiantes logren alcanzar el nivel G1. Para ello, deberían ser capaces de explicar, después de haber arrastrado un vértice cualquiera del cubo, que a pesar que la longitud de las aristas varía, la “forma” no cambia.

Análisis a posteriori de la pregunta 1: estudiante Daniel

En esta primera parte de la pregunta 1 donde se le pide al grupo de estudiantes que arrastre uno de los vértices del cubo, Daniel realizó la actividad sin problemas arrastrando una de los vértices del cubo con ayuda del cursor moviéndolo lentamente. Al utilizar la función de arrastre él pudo percibir que las medidas de longitud de las aristas aumentan (ver figura 47).

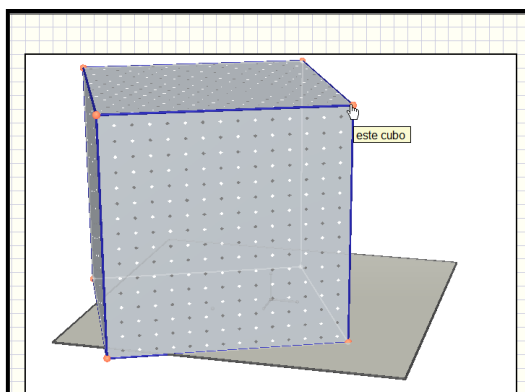


Figura 47. Arrastre de un vértice para aumentar la longitud de la arista

Asimismo, Daniel realizó lo contrario haciendo que la longitud de las aristas disminuyan (ver figura 48).

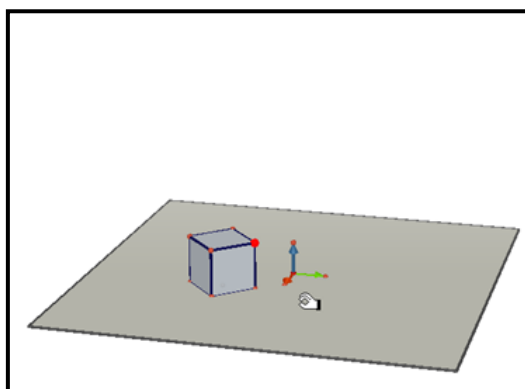


Figura 48. Arrastre de un vértice para disminuir la longitud de la arista

Además de hacer uso inicialmente de la función de arrastre, él utilizó la función de manipulación directa para ver el cubo de diferentes puntos de vista del observador.

En la figura 49 el estudiante respondió a la primera pregunta de la actividad 2: *se agrandó, se achicó y se movió.*

Abre el archivo Cabri 3D que está en el escritorio y escucha con atención las indicaciones, después realiza las siguientes actividades:

Ahora con el cursor arrastra una de las esquinas del cubo ¿Qué sucede con el cubo cuando arrastras la esquina con el cursor? Explora desde diferentes posiciones. Explica con tus propias palabras lo que observas (siempre trabaja dentro del área de trabajo).

Se agrandó, se achicó y se movió.

Figura 49. Respuesta de Daniel actividad 2

Luego de la manipulación de la representación del objeto en el software y de su respuesta en la ficha, podemos decir que Daniel está en el nivel G0, porque él está manipulando el objeto matemático, explorando lo que sucede con él y todo eso es en base a su observación.

En la segunda parte de la pregunta donde se pide a Daniel que explique lo que sucede con el modelo si cambian o no cambian y por qué cree eso, el estudiante respondió: *Cuando aplastas en el vértice y arrastras cambia su tamaño. Cambia todas sus medidas.*

¿Qué pasa con la forma del modelo cambian o no cambian. Elige una respuesta y explica por qué.

SI CAMBIAN	NO CAMBIAN
<p><i>Cuando aplastas en la vértice y arrastras cambia su tamaño. Cambia todas sus medidas.</i></p>	

Figura 50. Respuesta de Daniel actividad 2

Podemos deducir de la respuesta de Daniel que él se encuentra en el tránsito del nivel del G0 al G1 ya que al responder “*cambia todas sus medidas*” pudo percibir que al arrastrar un vértice del cubo cambian todas las aristas de medida, y hay indicios en la respuesta de que indiferentemente de la longitud de la arista la forma no varía y mantiene las mismas medidas.

Es importante recordar que estamos tomando las etapas del DPG (G0 y G1) que hemos adaptado para el nivel de educación primaria como se muestra en la página 38.

Análisis a posteriori de la pregunta 1: estudiante Josué

De igual manera para esta actividad con Cabri 3D se ha podido ver en las grabaciones de pantalla que hemos realizado con el programa Camtasia, que Josué no tiene problema al manipular el cursor y realizar las indicaciones de la ficha.

Inicialmente Josué coloca el cursor en uno de los vértices del cubo, arrastra con cuidado lentamente, pero al cabo de uno segundos se familiariza y demuestra más rapidez, se observa en la figura 51 como las aristas del cubo aumentan.

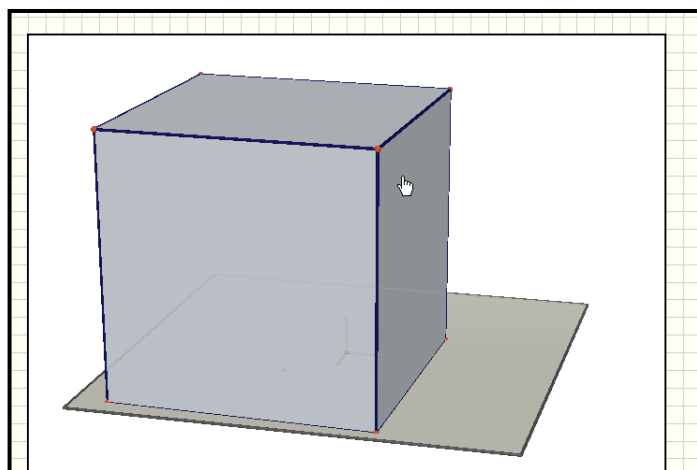


Figura 51. El cubo cuando aumenta la longitud de sus aristas

En la figura 52 se ve como Josué exploró el cubo haciendo que las aristas disminuyan.

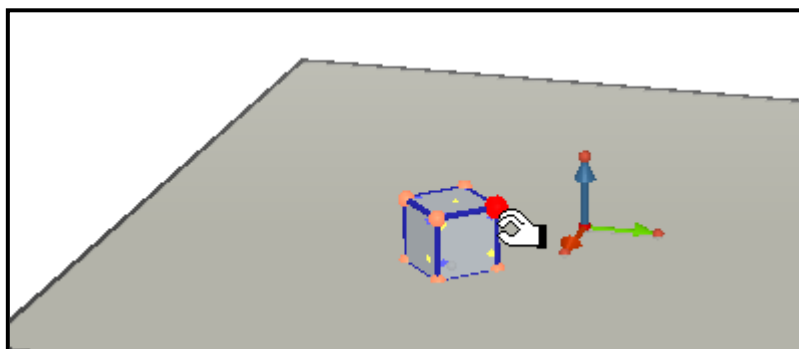


Figura 52. El cubo cuando la longitud de sus aristas disminuyen

Esta función de arrastre es realizada por varios minutos, se puede ver que Josué cada vez es más diestro en manipular el objeto matemático en el software.

Además Josué utilizó la función de manipulación directa para ver el cubo de diferentes puntos de vista del observador (ver figura 53).

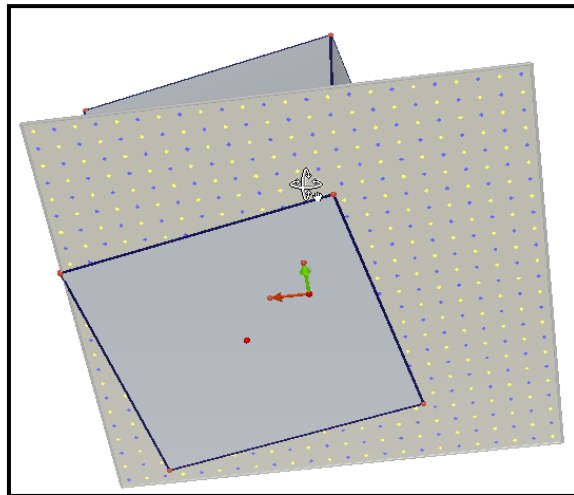


Figura 53. Manipulación del cubo haciendo uso de la función manipulación directa

Hacer uso de la función manipulación directa le permitió a Josué ver el cubo de desde distintas posiciones, y reconocer el cuadrado.

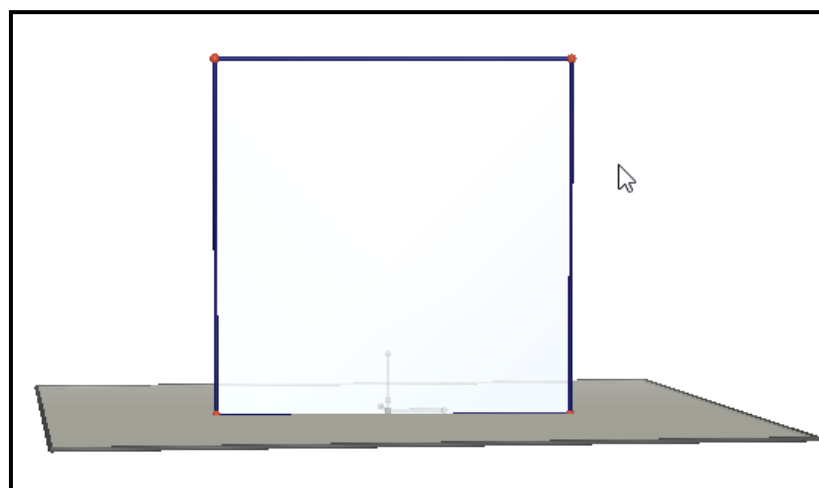


Figura 54. El cuadrado cuando se hace uso de la función manipulación directa

Después de la manipulación y exploración en el Cabri 3D, Josué completó la ficha (ver figura 55) donde podemos concluir que Josué continúa en el nivel G0 al escribir como

respuesta: *se agrandó, se achicó y se movió* porque él valida su respuesta a partir de su percepción de lo que ve que sucede con el cubo al arrastrar sus vértices.

Abre el archivo Cabri 3D que está en el escritorio y escucha con atención las indicaciones, después realiza las siguientes actividades:

Ahora con el cursor arrastra una de las esquinas del cubo ¿Qué sucede con el cubo cuando arrastras la esquina con el cursor? Explora desde diferentes posiciones. Explica con tus propias palabras lo que observas (siempre trabaja dentro del área de trabajo).

Se agranda y se achica y se mueve.


¿Qué pasa con la forma del modelo cambian o no cambian. Elige una respuesta y explica por qué.

SI CAMBIAN DE MEDIDA	NO CAMBIAN DE MEDIDA
<i>Los lados y las medidas se agranda y se achica.</i>	

Figura 55. Josué resuelve la tabla de la actividad con Cabri 3D

Asimismo podemos decir que Josué está en el tránsito al G1 al responder *los lados y las medidas se agrandan y se achican*. Lo que señala que Josué realizó lo que habíamos previsto a priori.


Pregunta 2

Para verificar tu respuesta utiliza la herramienta de medida del Cabri 3D y selecciona la opción longitud , luego lleva el cursor a cada uno de los lados del cubo ¿Qué medidas observas en todos los lados? Explica lo que observas.

Sí NO

Figura 56. Pregunta 2 de la actividad 2

Análisis a priori

En esta pregunta esperamos que los estudiantes activen la herramienta longitud  y arrastren el cursor hacia una de las aristas del cubo, por ejemplo la arista AB y con botón derecho validen la medida, a partir de ese momento observarán que aparece la medida, en este caso es 5 cm. Y esperamos que realicen este procedimiento para cada una de las aristas restantes del cubo como muestra la figura 57.

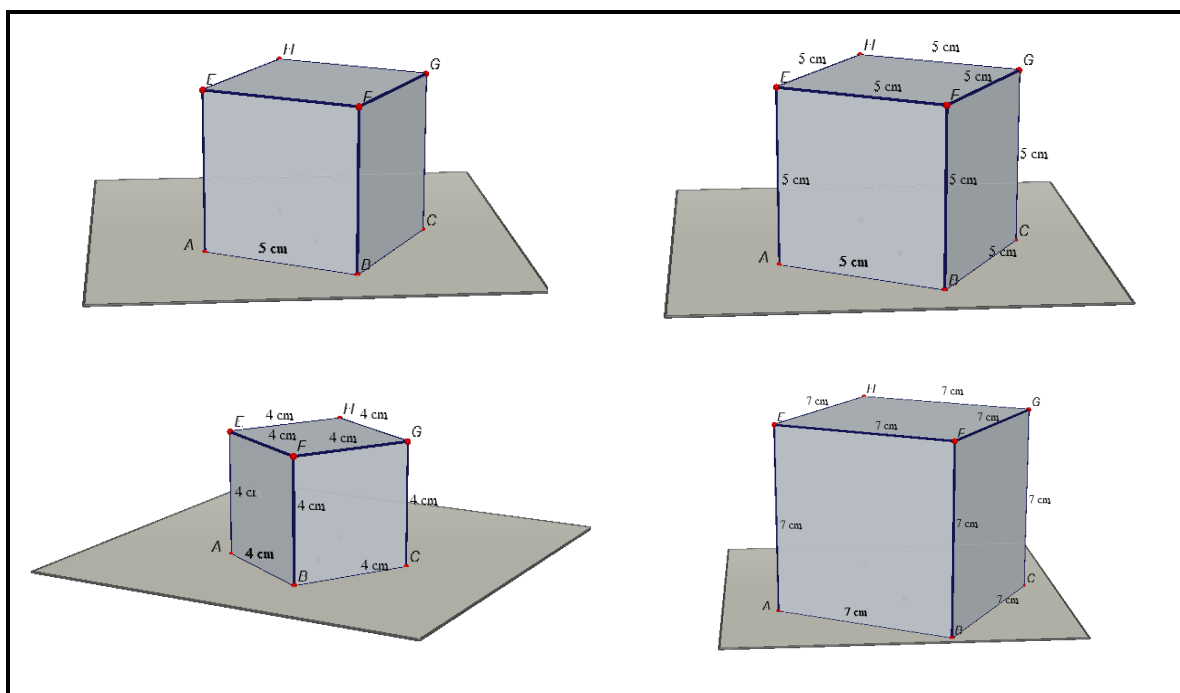


Figura 57. Uso de la herramienta longitud para las aristas del cubo

Además, podrían arrastrar uno de los vértices del cubo y percibir que todas las medidas de las aristas del cubo son iguales.

Pensamos que si eligen la opción **SÍ** escribirán que la medida de longitud de todas las aristas es igual. De esta manera podemos decir que los estudiantes se encuentran en el nivel G1 del desarrollo del pensamiento geométrico ya que validarán su percepción a través del uso de la herramienta longitud.

Por otro lado, pensamos que es poco probable que los estudiantes marquen la opción **NO**, porque se les ha dado la secuencia de pasos para el uso de la herramienta medida del Cabri 3D.

Análisis a posteriori de la pregunta 2: estudiante Daniel

Para el desarrollo de esta pregunta Daniel hizo uso de la herramienta longitud, hizo un click en las aristas del cubo y pudo visualizar la medida de longitud 2.7 cm., además Daniel percibió que cambiaba de color una de las caras del cubo (ver figura 58) apareciendo por defecto del Software perímetro de esta caras. Gracias a las grabaciones de pantalla se observa como Daniel no se distrae de su objetivo en colocar medida de longitud a las aristas.

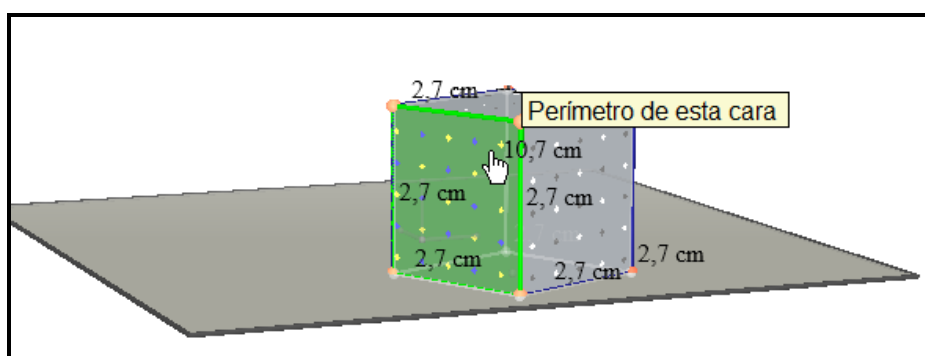


Figura 58. Daniel ubicando el cursor en las aristas del cubo

Finalmente después de varios intentos observamos que el estudiante logró manipular con mayor fluidez la herramienta del software y verificó lo solicitado en nuestro análisis a priori (ver figura 59).

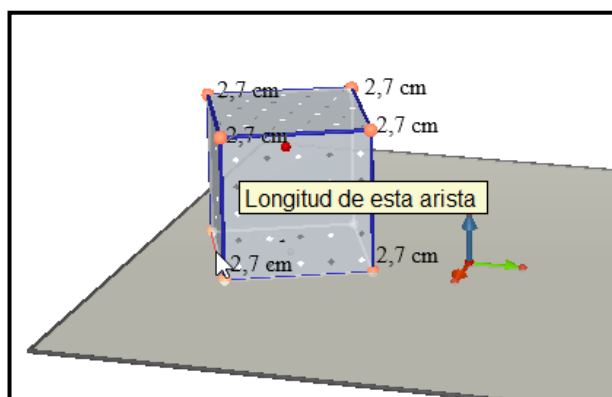


Figura 59. Longitud de la arista del cubo por Daniel

En la misma figura 59 podemos ver que Daniel realizó la medida para cada una de las aristas del cubo en el Cabri. Además Daniel verificó con la herramienta longitud la medida de todas las aristas marcando Sí como respuesta y respondiendo: *Observo que*

todas las medidas miden 2.7 cm. Porque es un cubo y los cubos tienen todas sus medidas iguales. (ver figura 60).

Pensamos que el estudiante se encuentra en el nivel G1 porque relaciona las medidas de longitud de las aristas 2.7 cm. con la figura geométrica cuadrado y luego verifica que en los otros cuadrados que observa, la medida de las aristas también se repiten. Luego el estudiante relaciona de manera global las medidas de longitud de todos los cuadrados y comprueba que son iguales, es por ello que su respuesta *porque es un cubo*, es una afirmación rotunda de que él ha comprendido que el cubo tiene todas las medidas de longitud de sus aristas iguales.

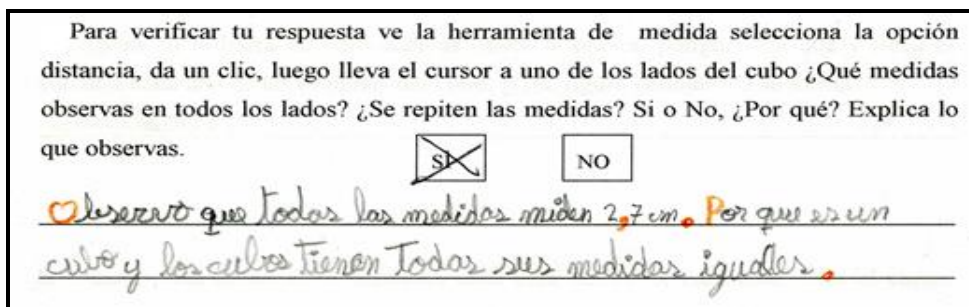


Figura 60. Respuesta de Daniel de la actividad 2

Análisis a posteriori de la pregunta 2: estudiante Josué

Para esta pregunta Josué sigue las indicaciones y hace uso de la herramienta longitud y busca una de las aristas del cubo para validar la medida, sin embargo por defecto el software aparece perímetro de esta cara, podemos ver en la figura 61 que Josué valida la medida del perímetro de la cara.

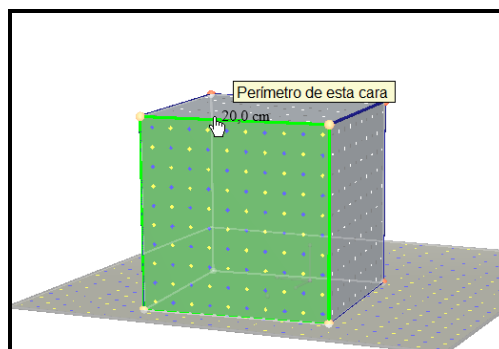


Figura 61. Josué ubica el cursor en la arista del cubo

Luego de varios intentos Josué logra encontrar la arista del cubo validando su respuesta (ver figura 62).

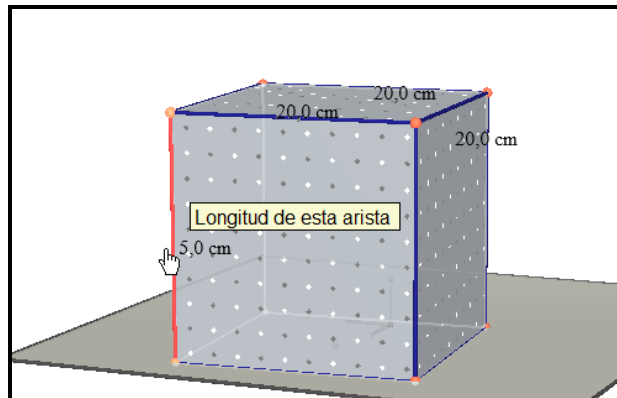


Figura 62. Medida de la arista por Josué

Como podemos ver en la figura 63 Josué se muestra más hábil en el uso de la herramienta longitud y hace uso de la función manipulación directa moviendo el cubo en distintas posiciones.

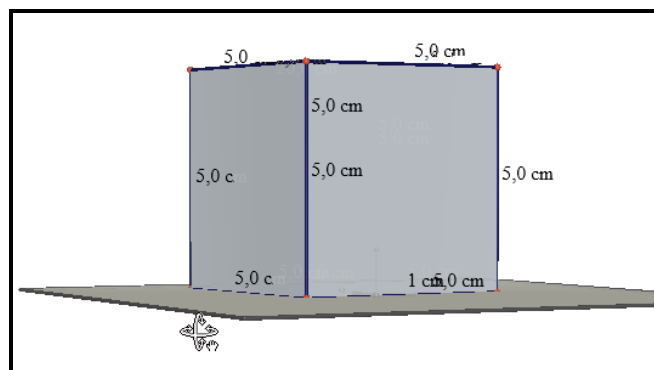


Figura 63. Uso de la función manipulación directa

El uso de la función manipulación directa le permitió a Josué percibir el cuadrado y observar que la medida de longitud de las cuatro aristas son las mismas. (ver figura 64).

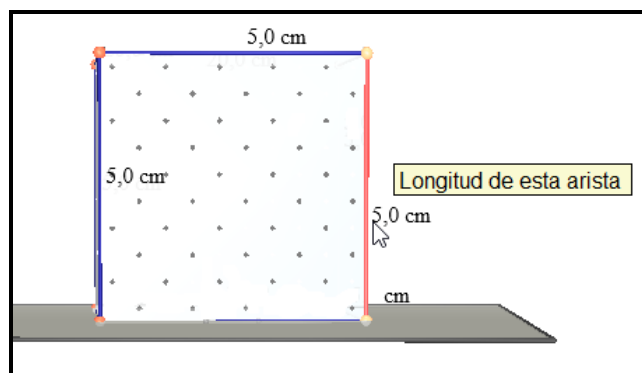


Figura 64. Vista del cuadrado con el uso de la función manipulación directa

Esto nos lleva a confirmar lo que estaba previsto priori, ya que el estudiante relacionó las medidas de longitud de las aristas del cubo con el cuadrado.

En la figura 65 podemos observar que Josué responde que SI se repiten las medidas y explica: *porque es un cubo y todas los lados tienen las mismas medidas*. Lo que nos lleva a concluir que después de la manipulación en el software y la exploración con las herramientas de longitud, Josué pasó de un nivel G0 al G1 porque ya no solo se vale de lo que observa si no que, relaciona las medidas de longitud del cuadrado con los otros cuadrados del cubo, afirmando textualmente *Porque es un cubo porque todas los lados tienen las mismas medidas*.

Para verificar tu respuesta ve la herramienta de medida selecciona la opción distancia, da un clic, luego lleva el cursor a uno de los lados del cubo ¿Qué medidas observas en todos los lados? ¿Se repiten las medidas? Si o No, ¿Por qué? Explica lo que observas.


SI NO


Por que es un cubo y todas los lados tiene las mismas medidas.

Figura 65. Respuesta de Josué en la pregunta 2

De esta manera pensamos que el estudiante sí logró de lo que habíamos previsto en nuestro análisis a priori.

Pregunta 3

Ahora ve a la barra de herramienta y ubica la herramienta segmento , luego clicas sobre todos los “lados” del cubo, cuéntalos y responde ¿Cuántos “lados” tiene el cubo? _____

Luego, selecciona la herramienta punto , luego clicas sobre la palabra y coloca un punto sobre cada esquina del cubo. Luego nombra cada punto con una letra mayúscula, después cuéntalos y responde:

¿Cuántas esquinas tiene el cubo?: _____.

Después, observa el cubo desde distintas posiciones (usa el botón derecho del mouse).

Figura 66. Pregunta 3 de la actividad 2

Análisis a priori

En esta pregunta suponemos que los estudiantes están en el nivel G0 porque activarán la herramienta segmento, arrastrarán el cursor hacia cada una de las aristas del cubo y con botón derecho validarán su construcción, luego harán clic derecho sobre una arista y seleccionarán color de curva validarán la elección de color, repetirán esta acción para cada una de las aristas del cubo coloreando las aristas de distintos colores (ver figura 67), al finalizar la acción esperamos que los estudiantes ante la pregunta *¿cuántos lados tiene el cubo?* respondan *12 lados*.

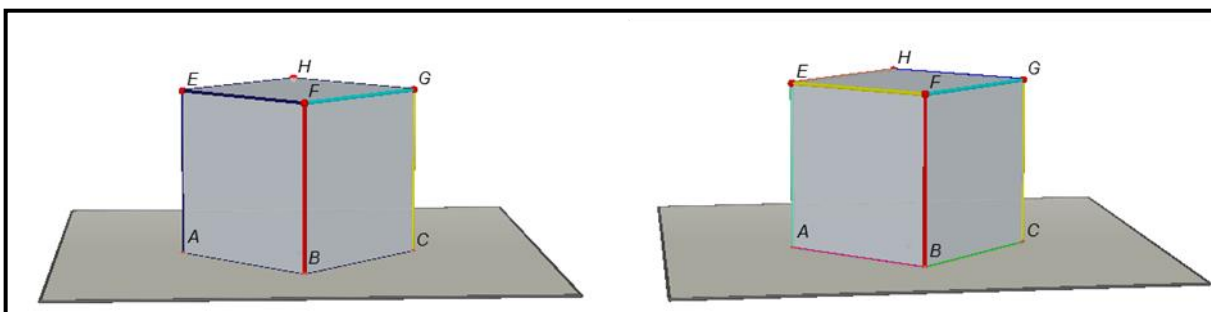


Figura 67. Color de la arista del cubo

Para identificar los vértices del cubo pensamos que elegirán la herramienta punto y seguirán los mismos pasos que realizaron con las aristas del cubo, para darle color a los vértices harán uso de los atributos del Cabri y ante la pregunta *¿cuántas esquinas tiene el cubo?* esperamos que los estudiantes respondan *tiene 8 esquinas*.

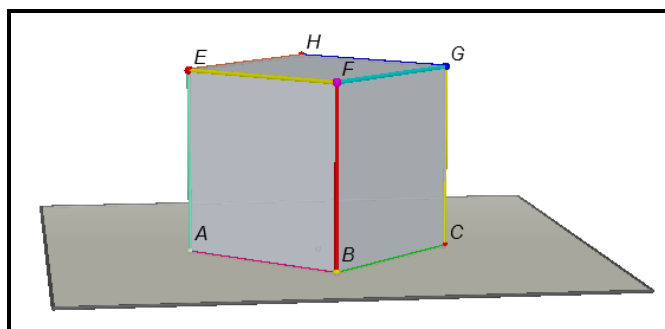


Figura 68. Color de los vértices del cubo

Al igual que la primera parte de la pregunta creemos que los estudiantes se encuentran en el nivel G0 por que se valen de su percepción y de las herramientas del software para responder la pregunta.

Análisis a posteriori de la pregunta 3: estudiante Daniel

Para el desarrollo de esta pregunta Daniel, hizo uso de la herramienta segmento en cada una de las aristas del cubo (ver figura 69), para luego proceder a colocarle un color distinto a cada una de ellas como se muestra en la misma figura.

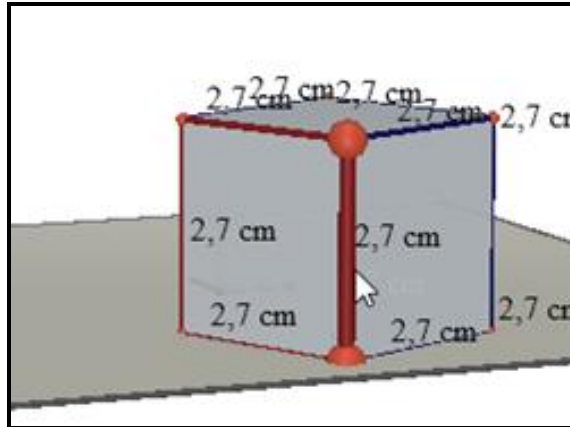


Figura 69. Medida de longitud de las aristas del cubo

En la figura 70 podemos apreciar que el estudiante no presenta dificultad para manipular el cursor ni para seleccionar correctamente el color de curva para las aristas, por el contrario se observa que elige distintos colores para cada una de las aristas del cubo.

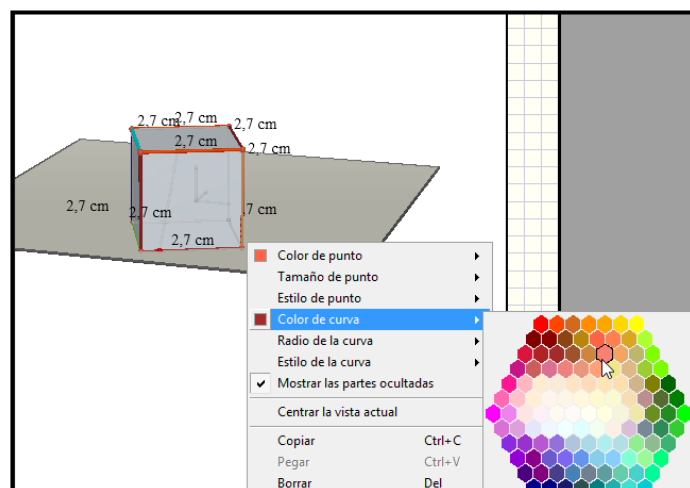


Figura 70. Uso de la herramienta color de curva

Se puede ver en la figura 71, que Daniel verificó que todas las aristas estén debidamente coloreadas haciendo uso de la función manipulación directa desde diferentes puntos del observador, apareciendo así el cuadrado en la base del cubo.

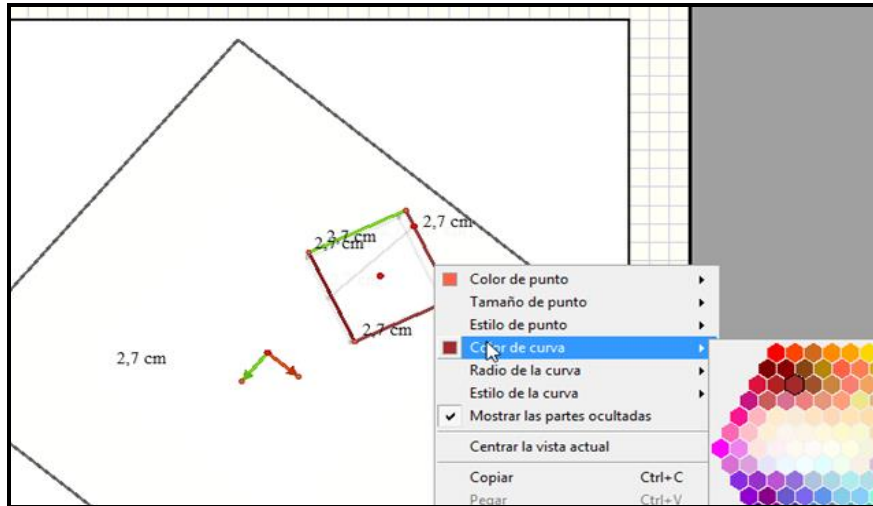


Figura 71. Vista del cubo con el uso de manipulación directa

Ante la pregunta ¿cuántos lados tiene el cubo? El estudiante respondió: *tiene 12 lados o aristas*. Lo que nos indica que él todavía confunde “lado” con “arista”, pensamos que para el estudiante ambas palabras tienen el mismo significado,

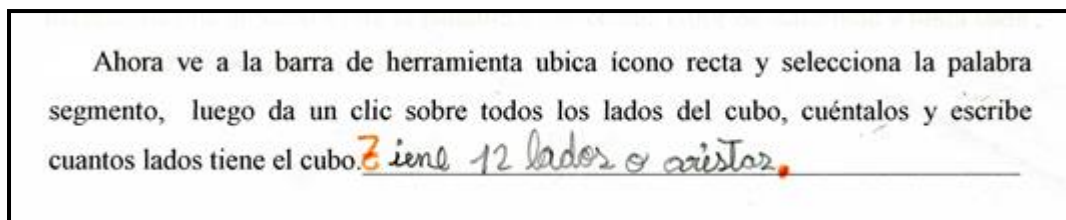


Figura 72. Respuesta de Daniel

En la pregunta sobre cuántas esquinas tiene el cubo respondió. *Tiene 8 esquinas*.

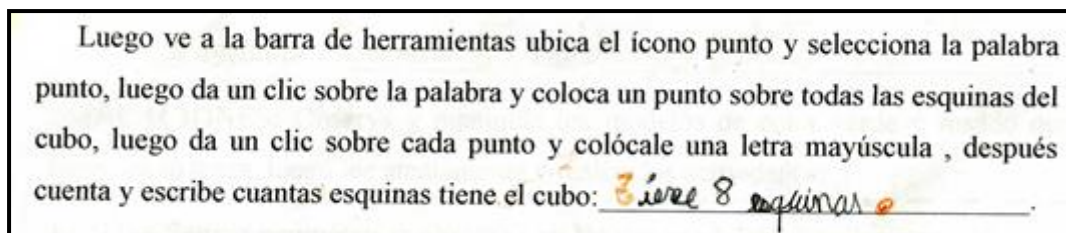


Figura 73. Respuesta de Daniel

Podemos decir que el estudiante se encuentra en el nivel G0 porque para responder a la pregunta ¿cuántas esquinas tiene el cubo? se valió de su percepción realizando un

conteo de las vértices del cubo, para ello también usó la función de manipulación directa del Cabri.

Análisis a posteriori de la pregunta 3: estudiante Josué

Para el desarrollo de esta pregunta Josué hizo uso de la herramienta longitud teniendo como medidas de longitud a todas las aristas 5cm., luego procedió a colorear cada arista del cubo con un color diferente ver figura 74.

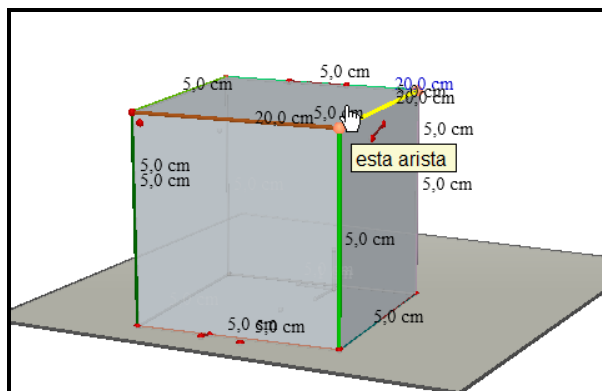


Figura 74. Josué ubica el cursor en una arista

El estudiante hace uso de los atributos del Cabri (ver figura 75) y coloca distintos colores a cada uno de las aristas del cubo (color de curva).

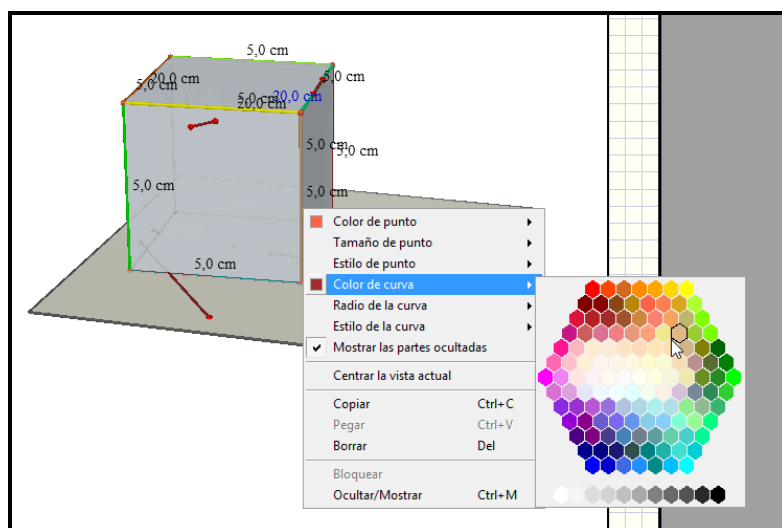


Figura 75. Color de curva de una de las aristas por Josué

Ante la pregunta *¿cuántos lados tiene el cubo?* Josué respondió: *tiene 12 lados.* El estudiante respondió como habíamos previsto a priori.

Ahora ve a la barra de herramienta ubica icono recta y selecciona la palabra segmento, luego da un clic sobre todos los lados del cubo, cuéntalos y escribe cuantos lados tiene el cubo. Tiene 12 lados

Figura 76. Respuesta de Josué sobre el número de aristas del cubo


Asimismo en la figura 77 vemos la respuesta de Josué referente al número de vértices del cubo respondiendo: *Tiene 8 esquinas*.

Luego ve a la barra de herramientas ubica el icono punto y selecciona la palabra punto, luego da un clic sobre la palabra y coloca un punto sobre todas las esquinas del cubo, luego da un clic sobre cada punto y colócale una letra mayúscula, después cuenta y escribe cuantas esquinas tiene el cubo: Tiene 8 esquinas.

Figura 77. Respuesta de Josué sobre el número de vértices del cubo

De esta manera podemos afirmar que el estudiante se encuentra en el nivel G0 del desarrollo del pensamiento geométrico, porque las respuestas que emite, son dadas en base a su percepción.

Pregunta 4


Después, activa la herramienta polígono  da clic y lleva el cursor a cada una de las esquinas del cubo, ¿Qué figura geométrica se forma?

Finalmente, pinta de un color diferente cada cara del cubo, Para eso ubica el cursor sobre la herramienta polígono y da un clic sobre la superficie que deseas pintar.

Luego, da clic derecho sobre la pantalla y selecciona color de superficie (usa los atributos del Cabri 3D) y pinta cada cara del cubo con color diferente.

Figura 78. Pregunta 4 de la actividad 4

Análisis a priori

En esta pregunta los estudiantes deberán usar la herramienta polígono  después, llevarán el cursor hacia las cuatro esquinas de la figura e identificarán que la figura geométrica que se forma es un cuadrado (ver figura 79).

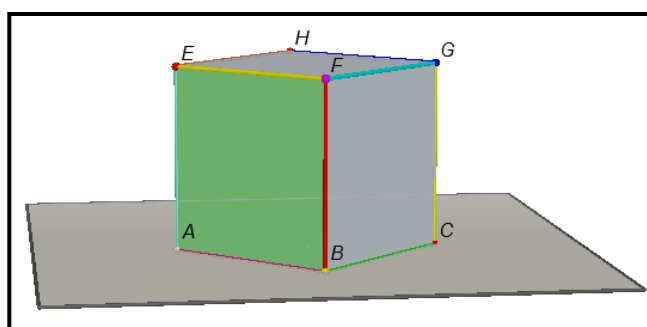


Figura 79. Reconocimiento de una de las caras cuadradas del cubo

En la segunda parte de la pregunta deberán colorear el cuadrado haciendo clic derecho sobre él y seleccionar la palabra color de superficie y validarán su construcción, como mostramos en la figura 80.

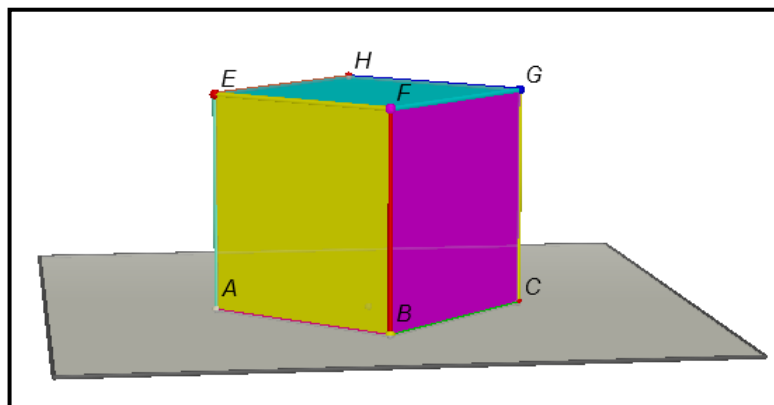


Figura 80. Coloreado de las caras del cubo con la función superficie del objeto

Pensamos que los estudiantes al constatar la medida de las aristas de los cuadrados y reconocerlo como figura geométrica se encuentran en el nivel G1 del desarrollo del pensamiento geométrico porque relacionarán las medidas de la longitud de las aristas y verificarán que todas tienen la misma medida.

Análisis a posteriori de la pregunta 4: estudiante Daniel

Como podemos ver en la figura 81, Daniel hizo uso de la herramienta polígono en cada una de las caras del cubo valiéndose de la herramienta manipulación directa para ver desde distintos puntos de vista del observador.

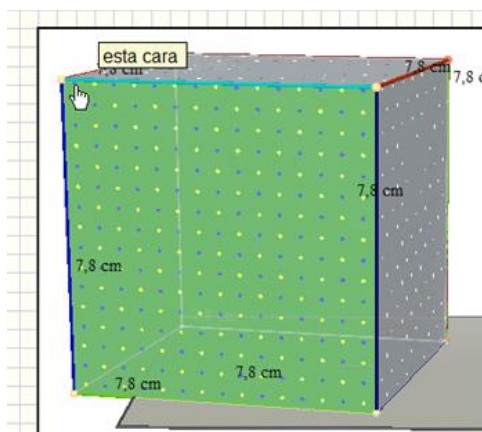


Figura 81. Coloreado de una de las caras del cubo por Daniel

Es así como Daniel percibió las figuras geométricas de conforman al cubo son cuadrados (ver figura 82).

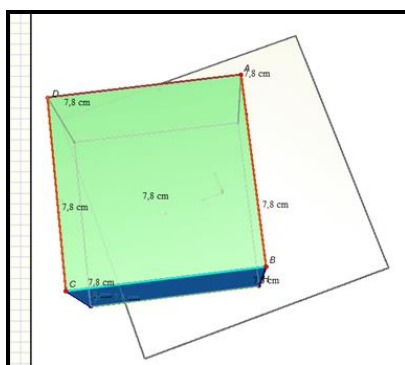


Figura 82. El cuadrado al hacer uso de la función manipulación directa

Ante la pregunta *¿qué figura geométrica se forma?* El estudiante respondió *Cuadrados*.

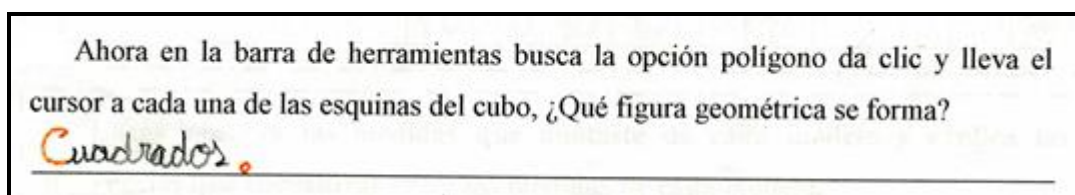


Figura 83. Respuesta de Daniel reconociendo las caras del cubo

Podemos decir que el estudiante se encuentra en el nivel G1 ya que realiza representaciones figurales con ayuda del software y los relaciona. Daniel hizo lo que pensamos a priori.

Finalmente se solicitó a los estudiantes que coloquen a cada una de vértices del cubo una letra mayúscula en orden alfabético. De esta forma hacemos que los estudiantes usen el

lenguaje matemático de manera muy natural y espontánea como parte de su proceso de aprendizaje de los elementos del cubo.

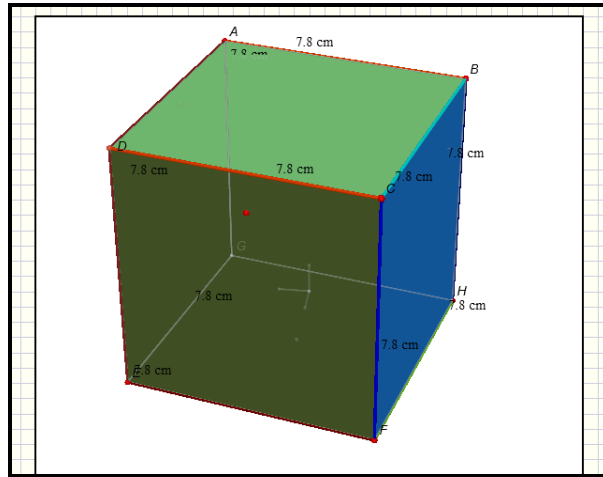


Figura 84. Cubo ABCD-EFGH construido por Daniield

Análisis a posteriori de la pregunta 4: estudiante Josué

En esta última pregunta Josué hizo uso de la herramienta polígono para formar el cuadrado y luego darle color a la superficie. (ver figura 85).

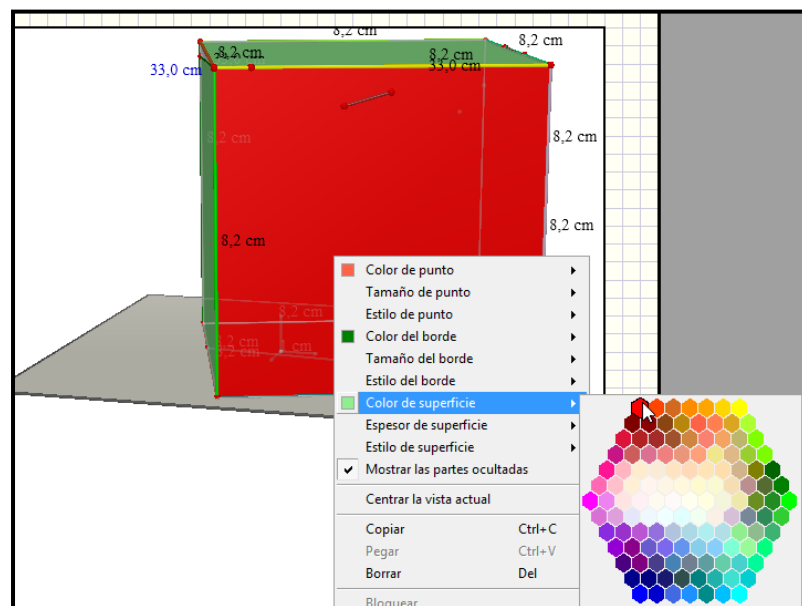


Figura 85. Coloreado de las caras del cubo por Josué

En la figura 86 se puede ver que el estudiante Josué respondió textualmente que la figura geométrica que se formó es un cuadrado.

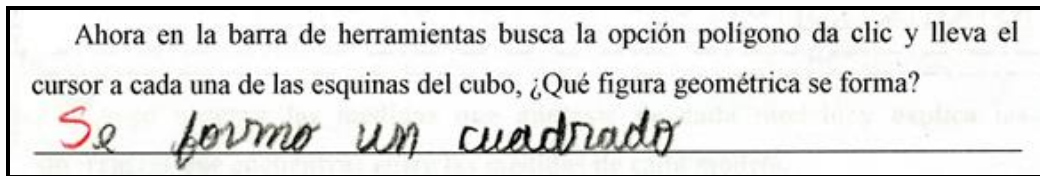


Figura 86. Respuesta de Josué

De esta manera se valida el estudiante valida su respuesta escribiendo que el cubo está formado por cuadrados que tienen la longitud de sus aristas iguales. De esta manera se confirma lo que estaba previsto a priori.

Finalmente de igual manera Josué coloca a cada una de los vértices una letra mayúscula de manera que usa el lenguaje matemático de manera natural y espontánea como parte de su proceso de aprendizaje.

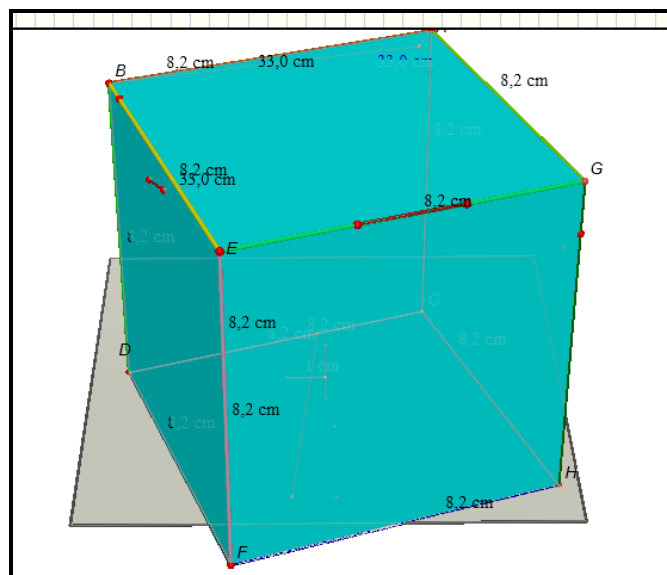


Figura 87. Cubo ABCD-EFGH

Formalización de la actividad 2 con Cabri 3D

Al término de esta actividad con Cabri 3D, y de haber completado las preguntas de las fichas, se cerró la actividad realizando la formalización de los elementos del cubo.

La docente investigadora explicó a los estudiantes: *las superficies del cubo se llaman caras, las esquinas se llaman vértices y son nombrados con letras y los lados no son lados porque es un objeto y se llaman aristas*, luego los estudiantes usaron tanto el material concreto (cubo hecho en cartulina de color rojo) y el Cabri 3D para responder las preguntas que la docente investigadora les presentó en un cuadro en la proyección y juntos completaron la tabla:

Cuadro 8. Los elementos del cubo

Los elementos del cubo presentan las siguientes características	
Caras	6
Vértices	8
Aristas	12

Finalmente, la docente investigadora cerró la actividad explicando que las caras del cubo tienen forma de cuadrado, tienen aristas, vértices y cada superficie se llaman caras no son cuadrados, además se nombra el cubo como ABCD-EFGH porque así como cada uno de nosotros tenemos un nombre también el cubo se llama:

El cubo: ABCD-EFGH.

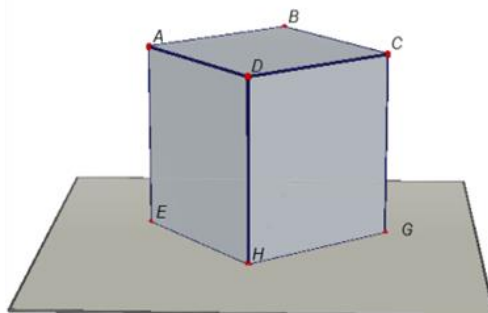


Figura 88. Cubo ABCD-EFGH

En la siguiente parte presentamos los resultados de la investigación.

RESULTADOS DEL EXPERIMENTO

En la actividad 1, la secuencia didáctica planteada requería la manipulación de los materiales concretos como cubos hecho de cartulina y la estructura del cubo hecha en madera, la cual despertó el interés en los estudiantes por desarrollar la actividad de manera natural, participaron y respondieron a las preguntas de manera voluntaria, estaban atentos realizaron medidas, compararon, observaron características propias del material (color, forma, medida), esto demuestra que los materiales concretos son muy importantes en el desarrollo de una secuencia didáctica, y sobre todo que permitió desarrollar el nivel G0.

En esta actividad con material concreto los estudiantes realizaron las medidas de longitud de las aristas del cubo, y del prisma con el uso de la regla graduada, ello permitió que comparen ambos objetos y reconozcan que en la figura geométrica cuadrado la medida de todos sus lados son iguales. De esta manera los estudiantes desarrollaron su pensamiento geométrico y transitaron del nivel G0 al G1.

Cuando los estudiantes armaron las estructuras del cubo en madera de 10cm. 20cm. y 30cm. lograron percibir que en cada estructura de cubo la medida de longitud de las aristas no es la misma, sin embargo manifestaron que sigue siendo la representación del cubo porque la característica esencial es que todas sus aristas tienen la misma medida de longitud, indistintamente del tamaño, esto nos permite afirmar que los estudiantes validaban sus respuestas por lo que percibían a través de los sentidos y de la manipulación del material concreto.

En la actividad 2, los estudiantes utilizaron el Cabri 3D y lograron identificar los elementos del cubo cuando hicieron uso de las herramientas segmento, punto y polígono con apoyo del Cabri 3D. Observamos que a pesar de ser la primera vez que los estudiantes usaron este ambiente de geometría dinámica lograron familiarizarse rápidamente y ubicar y utilizar las herramientas: punto, segmento, longitud, polígono, atributos de color de curva y color de superficie, así como hacer uso de las funciones de arrastre y manipulación directa para ver la figura desde diferentes posiciones.

CONSIDERACIONES FINALES

A continuación, presentamos las consideraciones finales sobre los aspectos que consideramos relevantes en la tesis como: objetivos y pregunta de investigación, marco teórico y metodológico utilizado, principales resultados y perspectivas futuras de investigación.

Con relación a los objetivos y pregunta de investigación

En nuestro objetivo general nos propusimos: **analizar las etapas G0 y G1 del Desarrollo del Pensamiento Geométrico en estudiantes del 4to grado de educación primaria cuando estudian la noción de cubo y sus elementos en una secuencia didáctica con material concreto y Cabri 3D.** Podemos afirmar que hemos logrado nuestro objetivo general, dado que alcanzamos los objetivos específicos que nos planteamos en la investigación.

En cuanto a nuestro primer objetivo específico identificar las etapas G0 y G1 del Desarrollo del Pensamiento Geométrico en estudiantes de cuarto grado de educación primaria cuando estudian el cubo en una secuencia didáctica en la que se utiliza material concreto, podemos decir que sí lo hemos alcanzado, dado que en la actividad 1 los estudiantes lograron reconocer y mencionar características del cubo. Al manipularlo en el material concreto (cubos hechos de cartulina y de varitas de madera) identificaron que el cubo está formado por seis cuadrados donde todos sus lados tienen la misma medida de longitud, aquí identificamos la etapa G0 del Desarrollo del Pensamiento Geométrico.

De la misma manera, los estudiantes hicieron uso de la regla graduada de 30cm. como herramienta, para medir la longitud de las aristas del cubo, aquí relacionaron las medidas de las aristas del cubo de 10, 20 y 30cm, respectivamente. Además afirmaron que a pesar de que las medidas de longitud de las tres estructuras del cubo varían, las características que identificaron antes son las mismas, por ello afirmamos que se encuentran en la etapa G1 de acuerdo a la teoría del Desarrollo Pensamiento Geométrico.

En cuanto a nuestro segundo objetivo específico: Distinguir las etapas G0 y G1 del Desarrollo del Pensamiento Geométrico en estudiantes de cuarto grado de educación primaria cuando estudian el cubo en una secuencia didáctica en la que se utiliza Cabri 3D, los estudiantes lograron identificar los elementos del cubo al manipular, al arrastrar pintar las aristas del cubo de diferentes colores, así como los vértices y las caras del cubo.

Por lo explicado anteriormente y en vista de que alcanzamos responder nuestro primer y segundo objetivo por lo tanto respondimos a nuestra pregunta de investigación **¿Estudiantes del 4to grado de educación primaria desarrollan su Pensamiento Geométrico, en las etapas G0 y G1, cuando estudian la noción de cubo y sus elementos en una secuencia didáctica con material concreto y Cabri 3D?**

Los resultados de esta investigación nos permiten afirmar que es importante usar primero el material concreto con niños entre 9 y 10 años de edad, además también nos permite afirmar la pertinencia del uso de una herramienta tecnológica como el caso que hemos mostrado en nuestra investigación con el uso del Cabri 3D, y que estas herramientas permiten el desarrollo de la percepción es decir ir entendiendo y percibiendo cuales son los elementos de cualquier objeto geométrico no solo en lápiz y papel, y con material concreto sino además el uso de la tecnología .

Con relación al marco teórico y metodológico

Consideramos que la teoría del Desarrollo del Pensamiento Geométrico, fue la base para identificar las etapas G0 y G1 y el tránsito entre una etapa y otra. De la misma manera el aporte que hemos realizado de la adaptación de la teoría para efectos de nuestra investigación fue indispensable para caracterizar el grupo de la geometría no axiomática es decir G0 y G1 del Desarrollo del Pensamiento Geométrico para el nivel primario.

En cuanto a los aspectos de la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación ella permitió predecir las posibles acciones de los estudiantes al realizar el análisis a priori, así como reestructurar en algunos momentos antes de la aplicación las actividades y conectarlo esto con nuestro marco teórico; además también nos permitió contrastar cuando fue hecha la experimentación en el análisis a posteriori, si lo que habíamos previsto era coherente o no con lo que los estudiantes hicieron para poder validar nuestra investigación .

Además la Ingeniería Didáctica fue muy importante para nuestra investigación ya que su estructura nos obligó a realizar un análisis preliminar, el cual incluye un análisis epistemológico y cognitivo de nuestro objeto matemático cubo, además el haber escogido esta metodología fue pertinente ya que su característica principal es que el trabajo experimental se desarrolla en el ámbito de la enseñanza aprendizaje con estudiantes.

Investigaciones futuras

A partir de esta investigación nos despertó el interés por realizar otras investigaciones en el futuro en el nivel primario, donde se pueda considerar lo siguiente:

- Trabajar otros objetos de geometría plana y del espacio con estudiantes del nivel primario, y usar como base las actividades propuestas en la investigación con el uso del material concreto y Cabri 3D.
- Estudiar los libros de textos específicamente los contenidos de geometría que se plantean en los libros de texto en el nivel primario, donde se comenten errores en los términos empleados como hemos podido evidenciar en nuestro estudio con el uso de "sólido".
- Introducir otras herramientas tecnológicas para estudiar los contenidos de geometría en el nivel primario, como el Logo, el Súper Logo, el Crash, Cinderella, Geogebra etc. porque son herramientas poderosas cuando se trabajan de manera coherente como lo hemos demostrado en nuestras actividades con el uso del Cabri 3D, con niños entre 9 y 10 años de edad.
- Realizar otra investigación en formación de profesores y realizar esta investigación con el uso de la tecnología ya que carecemos en el sistema educativo de una formación actualizada en el uso de herramientas tecnológicas para geometría plana y del espacio.

REFERENCIAS

- Almouloud, S. A y Silva M. J. F. (2015). Material para formação de professores de ensino secundário de Peru (de 18 a 27 de maio de 2015). *En: processos de ensino e aprendizagem de matemática em ambientes tecnológicos PEA-MAT/DDIMAT parceria PUCP-SP E PUCP-PERU*. Pontificia Universidad Católica Del Perú. Escuela de Posgrado Maestría en Enseñanza de las Matemáticas.
- Abascal, M. (2014). *Representaciones planas de sólidos geométricos por alumnos de Educación Primaria de Cantabria*. Universidad de Cantabria. Cantabria, España. Recuperado de: <http://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/5667/AbascalMoralejaMyriam.pdf?sequence=1>
- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Borba, M., (2004). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Brasil.
- Cozzolino, A. (2008). *O ensino da perspectiva usando o Cabri 3D: Uma experiência com alunos do ensino médio*. (Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo. São Paulo, Brasil. Recuperado de: <http://www.sapientia.pucsp.br/>
- Fernández, M. (2013). *La representación del cubo y el Cabri 3D: un estudio con alumnos del primer grado de educación secundaria*. (Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú. Recuperado de: <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/>
- García, D. (2014). *Simetría Axial Mediado por el Geogebra: un estudio con alumnos del primer grado de educación secundaria*. (Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú.
- Guillén, G., Gutiérrez. A., Jaime. A., Cáceres. M. (1992). La enseñanza de la Geometría de sólidos en E.G.B. En: *Memoria final de proyecto de investigación*. Valencia,

España. Recuperado de:

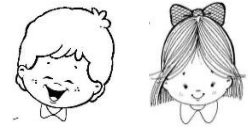
<file:///C:/Users/Pc/Downloads/GUILLEN%201992%20ANTECEDENTES.pdf>

- Gonzales, M. y Sánchez R. (2007). Construcciones Geométricas en tres dimensiones empleando Cabri 3D. En: *II Coloquio Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas*. Lima, Perú.
- Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista EMA*, 3 (3), pp. 93-220.
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México, Mc Graw-Hill/ Interamericana Editores, S.A. Recuperado de: http://www.academia.edu/6399195/Metodologia_de_la_investigacion_5ta_Edicion_Sampieri.
- Lima, E., Pinto, P., Wagner, E. y Morgado, A. (1999). *A Matemática do Ensino Medio*. Sociedad Brasileira de Matemática. Río de Janeiro, Brasil.
- Maciel, A. (2004). *O Conceito de Semelhanca: Uma Proposta de Ensino. Mestrado em educação Matemática*. (Tesis de maestría en enseñanza de las matemáticas). Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil.
- México, (2008). *El origami como recurso didáctico para la enseñanza y aprendizaje de la Geometría en secundaria*. Tejupilco, México. Recuperado de: <http://es.calameo.com/read/001013128770b5c42ae13>
- EE.UU., (2000). National Council of Teachers of Mathematics. *Principles and standards for school mathematics*.
- Parzysz, B. (1988). Knowing vs seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19, pp. 79-82.
- Perú, (2004). Unidad de Medición de la Calidad Educativa (UMC). *Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil. informe pedagógico de resultados*. Recuperado de: http://www2.minedu.gob.pe/umc/admin/images/en2004/MatematicaP2_6.pdf
- Perú, (2008). *Diseño Curricular Nacional Básica Regular (DCN)*. Lima. Recuperado de <http://ebr.minedu.gob.pe/>
- Perú, (2012a). Matemática 1, Primaria. Lima. Editorial Norma.
- Perú, (2012b). Matemática 2, Primaria. Lima. Editorial Norma.

- Perú, (2012c). Matemática 3, Primaria. Lima. Editorial Santillana.
- Perú, (2012d). Matemática 4, Primaria. Lima. Editorial Santillana.
- Perú, (2013). Mapas de progreso del aprendizaje Matemática: Geometría. *Instituto Peruano de Evaluación Acreditación y Certificación de la Calidad de la Educación Básica. IPEBA*. Lima- Perú. Recuperado de:
<http://www.minedu.gob.pe/minedu/archivos>
- Pogorelov, A. (1974). *Geometría elemental*. Moscú: Editorial Mir. Recuperado de:
https://geometriaunicaes.files.wordpress.com/2012/04/geometria_elemental_archivo_1.pdf
- Salazar, J. V. F. (2009). *Gênese Instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de Transformações Geométricas no Espaço* (Tesis de doctorado en Educación Matemática). Pontificia Universidad Católica de São Paulo. São Paulo, Brasil.
- Salazar, J. V. F., Gaita, C. (2012). Introducción a la Geometría analítica espacial con Cabri 3D. En: *Actas del VI Congreso Iberoamericano de Cabri (IBEROCABRI)*. Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Manual de Cabri 3D v2. (2007). Recuperado de:
<http://download.cabri.com/data/pdfs/manuals/>
- Taylor, S. y Bogdan, R. (1986). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Barcelona, España. Paidós Ibérica S. A. Recuperado de: <http://mastor.cl/blog/wp-content/uploads/2011/12/Introduccion-a-metodos-cualitativos-de-investigaci%C3%B3n-Taylor-y-Bogdan.-344-pags-pdf.pdf>
- Villarroel, S. y Sgreccia, N. (2011). Materiales didácticos concretos en Geometría en primer año de secundaria. *Revista de Didáctica de las Matemáticas NÚMEROS*, 78, pp.73-94. Recuperado de:
http://www.sinewton.org/numeros/numeros/78/Articulos_04.pdf

ANEXOS

ACTIVIDAD 1



Nombres y apellidos: _____

INDICACIONES: Observa y manipula los modelos de color verde y rosado que tienes en tu mesa, luego lee atentamente y realiza las actividades:

1.- ¿Qué figuras geométricas observas en los dos modelos? Explica por qué.

2.- Ahora usa tu regla y mide los lados de cada modelo y anótalos en la tabla.



Objeto verde													
Objeto rojo													

3.- Luego observa las medidas que anotaste de cada modelo y explica las diferencias que encuentras entre las medidas de cada modelo.

verde	rojo

4.- Ahora explica la relación que hay entre las medidas del modelo verde y el modelo rojo ¿En qué se parecen? Explica

ACTIVIDAD 1

Nombres y apellidos: _____

Indicaciones: observa la estructura del modelo que esta sobre la mesa.



1.- Ahora usa el material que tienes sobre tu mesa y construye un modelo semejante al que está al frente. Una vez terminado colócalo en la mesa delante de la pizarra.

2.- Ahora usa tu regla mide los 3 modelos y anota las medidas en la tabla.

Modelo 1													
Modelo 2													
Modelo 3													

3.- Explica la relación que encuentras entre las medidas de los modelos y escribe lo que observas.

Los modelos se parecen en:	Los modelos no se parecen en:

4.- ¿Qué medida deben tener la longitud los palitos para que al construir el modelo tengan la misma característica del modelo que está en la mesa? Explica

ACTIVIDAD 2



Nombres y apellidos: _____

INDICACIONES: Abre el archivo Cabri 3D que está en el escritorio y escucha con atención las indicaciones, después realiza las siguientes actividades:

1.- Ahora con el cursor arrastra una de las esquinas del cubo ¿Qué sucede con el cubo cuando arrastras la esquina con el cursor? Explora desde diferentes posiciones. Explica con tus propias palabras lo que observas (siempre trabaja dentro del área de trabajo).

2.- ¿Qué pasa con la forma del modelo cambian o no cambian. Elige una respuesta y explica por qué.

SI CAMBIAN DE MEDIDA	NO CAMBIAN DE MEDIDA

3.-Para verificar tu respuesta ve la herramienta de medida selecciona la opción distancia, da un clic, luego lleva el cursor a uno de los lados del cubo ¿Qué medidas observas en todos los lados? ¿Se repiten las medidas? Si o No, ¿Por qué? Explica lo que observas.

SÍ

NO

4.- Ahora ve a la barra de herramienta ubica ícono recta y selecciona la palabra segmento, luego da un clic sobre todos los lados del cubo, cuéntalos y escribe cuantos lados tiene el cubo. _____

5.- Luego ve a la barra de herramientas ubica el ícono punto y selecciona la palabra punto, luego da un clic sobre la palabra y coloca un punto sobre todas las esquinas del cubo, luego da un clic sobre cada punto y colócale una letra mayúscula , después cuenta y escribe cuantas esquinas tiene el cubo:_____.

6.- Observa bien el cubo y manipula desde distintas posiciones, ahora dibuja el cubo

Y colócale medida a cada uno de sus lados.



7.- Ahora en la barra de herramientas busca la opción polígono da clic y lleva el cursor a cada una de las esquinas del cubo, ¿Qué figura geométrica se forma?

8.- Ahora pinta de un color diferente cada cara del cubo, Para esto ubica el cursor sobre el ícono polígono y da un clic sobre la superficie que deseas pintar, luego derecho da clic derecho sobre la pantalla y selecciona color de superficie y pinta cada cara del cubo con un color diferente.