PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

"TITULO DE LA TESIS TEOREMA FUNDAMENTAL SOBRE VALORACIÒN DE ACTIVOS EN TIEMPO DISCRETO Y FINITO"

Tesis para optar el grado de Magíster en Matemáticas Aplicadas con mención en Procesos Estocásticos

AUTOR

John Dorian Chávez Melgarje

ASESOR

Dr. Alejandro Felipe Lugon Ceruti

JURADOS

Dra. Loretta Betzabe Rosa Gasco Campos

Dr. Luis Hilmar Valdivieso Serrano

LIMA – PERÚ

2015

TESIS:

EL TEOREMA FUNDAMENTAL DE VALORACIÓN DE ACTIVOS BAJO COSTOS DE TRANSACCIÓN PROPORCIONALES EN TIEMPO DISCRETO Y FINITO

Autor: John Chávez Melgarje

Asesor: Alejandro Lugon Ceruti

Maestría en Matemáticas Aplicadas con mención en Procesos Estocásticos

Febrero 2014

Índice general

1

Capítulo 1

Introducción

El teorema fundamental de valoración de activos caracteriza modelos de mercados financieros libre de arbitraje; es decir, aquellos en los que no es posible generar utilidades libres de riesgo sin una inversión inicial.

En términos generales, el teorema fundamental de valoración de activos afirma que un modelo de mercado es libre de arbitraje, sí y solo si, todos los activos en el modelo pueden tener un precio de una manera coherente. Es bien conocido el modelo clásico libre de fricción, que se trabaja en ausencia de costos de transacción y con tasas de interés de depósito y crédito iguales, que fue establecido por Harrison y Pliska en 1981 [5].

Jouini y Kallal en 1995, [6] y [7], fueron los primeros en extender el teorema fundamental de valoración de activos incorporando costos de transacción proporcionales, conteniendo un stock con riesgo y una cuenta de banco libre de riesgo; en este modelo el mercado es libre de arbitraje, sí y solo si, existe una medida de probabilidad $\mathbb{P}$ bajo la cual el proceso de precios del stock descontados por la tasa de interés de la cuenta de banco, es una martingala. La colección de tales medidas de probabilidad juega un rol fundamental en la determinación de los precios del activo.

El propósito del presente trabajo consiste en desarrollar la propuesta de Alet Roux [11], quién extiende el teorema fundamental de valoración de activos hacia un modelo en el cual, el precio de un stock con riesgo S_t está sujeto a costos de transacción proporcionales, en el sentido de que el precio de venta S_t^b de este stock es menor o igual al de compra S_t^a y además la cuenta de banco tiene una tasa de interés de depósito r_t^d menor o igual a la de crédito r_t^c.

En el artículo de Alet Roux [12], el autor extiende el teorema fundamental de valoración de activos para n activos, con costos de transacción proporcionales y tasas de interés y depósitos diferentes. Además, presenta una demostración alternativa a la aquí presentada en una de las implicaciones del teorema.

Será el principal objetivo del presente trabajo presentar con detalle la demostración de que el proceso de precios descontados por la tasa de interés de depósito o crédito es libre de arbitraje sí y solo si éste puede ser expresado como una martingala bajo alguna medida de probabilidad equivalente $\mathbb{P}$.

Este documento está organizado de tal forma que en el capítulo 2, se presentan las definiciones necesarias sobre las estrategias de negociación de activos con la finalidad de maximizar utilidades y algunos lemas y proposiciones que son indispensables para su posterior aplicación en el capítulo siguiente.

En el capítulo 3, se desarrolla la prueba del teorema fundamental de valoración de activos bajo costos de transacción proporcionales en tiempo discreto y finito.

Finalmente, en el apéndice se incluyen algunas definiciones y resultados básicos que se aplican en el desarrollo de los capítulos anteriores.

Capítulo 2

Elementos del mercado

2.1. El modelo

Un activo es un bien intangible cuyo precio en el mercado está en constante cambio a través del tiempo, por lo que es materia de interés el estudio de tal comportamiento aleatorio. Describir su dinámica es un trabajo que viene siendo abordado ya hace buen tiempo por varios autores, pero que cada vez requiere de un mayor análisis para su aplicación real en la comercialización de activos.

En el presente trabajo se considera un modelo de mercado financiero de tiempo discreto y con horizonte finito, en el que, sin pérdida de generalidad, los activos se puedrán negociar en cualquier instante de tiempo en $\mathbb{T} = \{0, ..., \mathrm{t}, ..., \mathrm{T}\}$ siendo T la fecha en la que termina toda actividad comercial en el mercado.

Iniciamos el estudio sobre un conjunto discreto y finito $\Omega = \{w_1, ..., w_n\}$ que es el espacio de estados de la naturaleza, el cual contiene todos los posibles escenarios que puede asumir el proceso de precios de nuestro activo con riesgo. Aquí cada $w \in \Omega$ puede interpretarse como una completa descripción de una posible trayectoria de los precios de este activo a través del tiempo.

Para continuar trabajando sobre este conjunto necesitamos dotarlo de una estructura medible; es decir, definir un conjunto que contiene todos lo subconjuntos de Ω que sean medibles. En este caso específico será un conjunto que contiene toda la información almacenada y conocida por los inversionistas; por ello, establecemos la siguiente definición:

Definición 2.1. *($\sigma-$álgebra)*

Una colección F de subconjuntos de Ω es una $\sigma-$álgebra de Ω, si cumple las siguientes condiciones:

1. *$\Omega \in F$;*

2. *Si $A \in F$ entonces $A^c \in F$;*

3. *Si $A_1, A_2, A_3, ...$ es una sucesión de elementos de F entonces la unión de ellos también pertenece a F.*

Observación 2.2. 1. *Podemos notar que las condiciones 1 y 2 implican que $\emptyset \in F$*

2. *De las condiciones 2 y 3 se puede deducir inmediatamente que la unión e intersección finita de elementos de F también pertenece a F.*

3. *Al par (Ω, F) compuesto de un espacio de estados Ω y una σ-álgebra F se le llamará espacio medible.*

4. *Todo elemento de F se denominará un evento.*

Hablar sobre la información que genera el proceso de precios del activo con riesgo, es establecer una $\sigma-$álgebra en cada instante de tiempo t, el cual estará contenido en la $\sigma-$ álgebra del siguiente instante $t+1$ y así sucesivamente. Para formalizar esto, daremos la siguiente definición:

Definición 2.3. *(Filtración)*

Una secuencia de $\sigma-$ álgebras $(F_t)_{t\in\mathbb{T}}$ sobre Ω, es una filtración, si esta sucesión es creciente, en el sentido que $F_t \subset F_{t+1}$, para $t = 0, 1, ..., T-1$.

Decir que la secuencia es creciente significa que la información no se olvida y se va almacenando conforme pasa el tiempo.

Para cada $t \in \mathbb{T}$, los inversionistas tienen acceso a esta información acumulada observando los precios en el mercado.

Observación 2.4. *En la filtración $(F_t)_{t\in\mathbb{T}}$ se considera que $F_0 = \{\phi, \Omega\}$ es la $\sigma-$álgebra trivial ya que en $t = 0$ no se tiene información de como evolucionarán los precios. Mientras que $F_T = 2^\Omega$, es decir, que en el instante final T se conocerá cual es el verdadero estado del mercado.*

El proceso de precios del activo con riesgo, tiene una cantidad finita de posibles trayectorias en cada instante de tiempo; lo que necesitamos ahora es definir una función que permita cuantificar la probabilidad de que se sigan estas trayectorias.

Definición 2.5. *(Probabilidad)*

Una medida de probabilidad $\mathbb{Q}$ *sobre la* $\sigma-$*álgebra* F *de todos los subconjuntos de* Ω*, es una función*

$$\mathbb{Q} : F \to [0, 1]$$

que satisface las siguientes condiciones:

1. $\mathbb{Q}(\Omega) = 1$

2. *Si* A *y* B *son dos eventos incompatibles* $(A \cap B = \phi)$*, entonces* $\mathbb{Q}(A \cup B) = \mathbb{Q}(A) + \mathbb{Q}(B)$

De aquí en adelante nuestro espacio de trabajo (filtrado) para este mercado financiero estará constituído por $(\Omega,\ F,\ (F_t)_{t\in\mathbb{T}},\ \mathbb{Q})$, donde $\mathbb{Q}$ representa la probabilidad real de las posibles trayectorias del activo con riesgo.

Como el proceso de precios del activo con riesgo manifiesta un comportamiento aleatorio, se requiere establecer claramente los elementos que vienen a constituir el espacio de estados en cada instante de tiempo. Motivados por ello se establece la siguiente definición:

Definición 2.6. *(Conjunto de estados en el instante* t*)*

Para cualquier instante de tiempo $t \in \mathbb{T}$*, denotaremos por* Ω_t *a la colección de todos los eventos incompatibles que genera la* $\sigma-$ *álgebra* F_t*. La existencia de* Ω_t *en la definición anterior se garantiza por la propoción siguiente, cuya demostaración se encuentra en [16]*

Proposición 2.7. *Toda* $\sigma-$ *álgebra posee una única partición generadora.*

Observación 2.8. *Note por lo comentado en la observación* 2,4 *que* $\Omega_0 = \{\Omega, \phi\}$ *y que* Ω_T *está constituida por la colección de todos los subconjuntos unitarios de elementos en* Ω*.*

Definición 2.9. *(Átomo)*

Un átomo es simplemente un elemento $w \in \Omega$ *con* $\mathbb{Q}(\{w\}) > 0$*.*

Observación 2.10. *En el presente trabajo se asumirá que todos los* $w \in \Omega$ *son átomos.*

Definición 2.11. *(Nodo) Fijado* t*, llamaremos a cada elemento de* Ω_t *o miembro de la partición generadora de* F_t*, un nodo en el periodo* t*.*

En el instante inicial el proceso de precios del activo con riesgo solo tiene un valor α_0, que es independiente de los estados de la naturaleza, en tal caso el nodo inicial es Ω; en el instante siguiente, los posibles precios que puede asumir el activo estarán sujetos a los nodos disponibles en dicho instante y así sucesivamente para los demás instantes; con lo que se genera el árbol de nodos.

Observación 2.12. *En concordancia con la observación 2.4, habrá un solo nodo raíz en el instante $t = 0$ y éste es asociado con el evento seguro, así mismo hay una inyectividad evidente entre el número de nodos terminales en el instante T y los posibles resultados $w \in \Omega_T$.*

Es fácil notar que para cada instante $t \in \mathbb{T} \setminus \{T\}$ y para cualquier nodo $v \in \Omega_t$ existe un conjunto de nodos $u \in \Omega_{t+1}$ con la propiedad de que $u \subseteq v$. Este conjunto de nodos que gozan de esta propiedad se les llama nodos sucesores de v, definición que mencionaremos a continuación.

Definición 2.13. *(Nodo sucesor)*

El conjunto

$$succ(v) := \{u \in \Omega_{t+1} | u \subseteq v\}$$

es llamado el conjunto de nodos sucesores de $v \in \Omega_t$ para $t \in \mathbb{T} \setminus \{T\}$.

Se considera solo el conjunto de instantes $t \in \mathbb{T} \setminus \{T\}$ ya que en el instante T, finaliza todas las operaciones sobre el activo con riesgo y por lo tanto no hay nodos sucesores. Para aclarar estos conceptos, presentaremos un ejemplo al respecto.

Ejemplo 2.14. *Sea $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8\}$ dotado de una medida de probabilidad $\mathbb{Q}(\{w\}) > 0$ para cada átomo de Ω, que es el conjunto de estados de la naturaleza sobre el cual se construirá el árbol de nodos. Recordemos que cada átomo representa una posible trayectoria que los precios del activo con riesgo podrían seguir. Solo se trabajará con instantes de tiempo $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, 3\}$. El árbol de nodos correspondiente se ilustra en la Figura 4.2.*

Para $t = 0$ tenemos el nodo inicial Ω con el cual se inicia la construcción del árbol de nodos. Para el siguiente instante $t = 1$ solo habrán dos posibles resultados $\Omega_1 = \{\{w_1, w_2, w_3, w_4\}, \{w_5, w_6, w_7, w_8\}\}$, donde cada uno de estos resultados representa un nodo o posibles trayectorias que podría seguir los precios si conociéramos el precio del activo en ese instante. Cada uno de éstos nodos generan a su vez dos nodos para el siguiente instante. Entonces, para $t = 2$, tenemos cuatro nodos $\Omega_2 = \{\{w_1, w_2\}, \{w_3, w_4\}, \{w_5, w_6\}, \{w_7, w_8\}\}$, y a partir de cada uno de estos

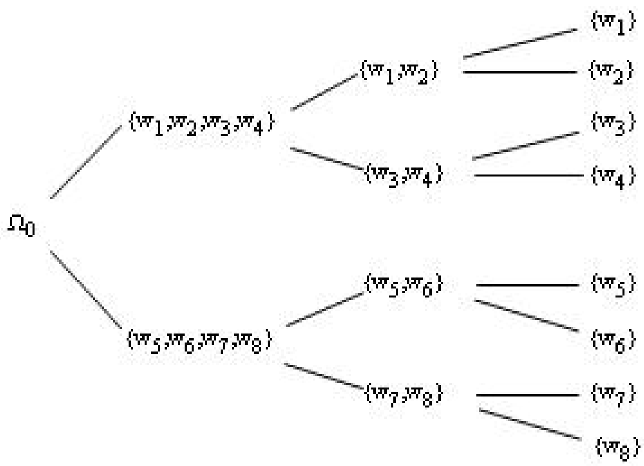

Figura 2.1: Árbol de nodos

nodos se generan nuevamente dos posibles resultados; es decir, en $t = 3$ *tenemos* $\Omega_3 = \{\{w_1\}, \{w_2\}, \{w_3\}, \{w_4\}, \{w_5\}, \{w_6\}, \{w_7\}, \{w_8\}\}$.

Los nodos sucesores para $\{w_3, w_4\} \in \Omega_2$ *son* $\{w_3\}, \{w_4\} \in \Omega_3$ *ya que* $\{w_3\} \subset \{w_3, w_4\}$ *y* $\{w_4\} \subset \{w_3, w_4\}$.

Los precios del activo con riesgo generan en cada instante t una cantidad finita de posibles resultados que son agrupados en los elementos del conjunto Ω_t y que serán analizados posteriormente con la intención de optimizar las utilidades que produzca el activo con riesgo al llegar al instante $t = T$. Para formalizar este concepto necesitamos las siguientes definiciones:

Definición 2.15. *(Variable aleatoria)*

Dada una $\sigma-$*álgebra* F *sobre* Ω*, una variable aleatoria* X *en* (Ω, F) *es cualquier función*

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

que sea $F-$*medible, es decir, tal que para todo número real* $a \in \mathbb{R}$*:*

$$X^{-1}(a) = \{w \in \Omega / X(w) = a\} \in F.$$

Una caracterización interesante de la variable aleatoria S_t*, componente del proceso* *de precios del activo con riesgo, viene dada por*

$$S_t = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i},$$

donde los A_i *son los nodos de* Ω_t *(para más detalle véase la proposición 3 en [16]). Así, cada* S_t *resulta ser constante en cada elemento de* Ω_t*. Formalmente un proceso como el de interés es un caso particular de la definición siguiente:*

Definición 2.16. *(Proceso estocástico)*

Un proceso estocástico de tiempo discreto es una colección de variables aleatorias indexadas por el conjunto de índices $I \subseteq Z$*, que será denotado con* $X = \{X_t\}_{t\in I}$.

Definición 2.17. *(Proceso estocástico adaptado)*

Un proceso estocástico $X = \{X_t\}_{t\in I}$ *es adaptado a la filtración* $(F_t)_{t\in I}$ *si, para cada* $t \geq 0$, X_t *es una variable aleatoria* F_t-*medible.*

Definición 2.18. *(Proceso estocástico predecible)*

Un proceso estocástico $X = \{X_t\}_{t\in I}$ *es predecible a la filtración* $(F_t)_{t\in I}$ *si, para cada* $t > 0$, X_t *es una variable aleatoria* $F_{t-1}-$*medible.*

A partir de ahora consideraremos al proceso de precios del activo con riesgo como un proceso estocástico de tiempo discreto adaptado $S = \{S_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ en el sentido que cada variable aleatoria S_t, será F_t-medible, ya que en el instante t el precio de este activo seerá revelado, pero su valor será desconocido en el instante siguiente $t+1$.

2.2. El modelo de mercado con costos de transacción proporcional

Nuestro modelo de mercado constará de un activo con riesgo en el que los costos de transacción se aplicarán al momento de comercializar este activo. Esto es, para cualquier instante de tiempo $t \in \mathbb{T}$ el activo podrá ser vendido al precio S_t^b y comprado al precio S_t^a. Asumiremos que $\{S_t^b\}$ como $\{S_t^a\}$ serán procesos adaptados a la filtración $(F_t)_{t\in\mathbb{T}}$, es decir que $\{S_t^b\}$ y $\{S_t^a\}$ son variables aleatorias F_t-medibles para $t \in \mathbb{T}$. También asumiremos naturalmente que los precios del activo con riesgo deberán cumplir la desigualdad

$$0 < S_t^b \leq S_t^a, \text{ para cada } t \in \mathbb{T}. \tag{2.1}$$

El modelo de mercado asume tambien una cuenta de banco con diferentes tasas de interés. Estas conforman los procesos estocásticos predecibles con respecto a la filtración $(F_t)_{t\in T}$; $r^d = \{r_t^d\}$ y $r^c = \{r_t^c\}$ los que llamaremos los procesos de tasas de depósito y de crédito, respectivamente. Asumiremos, como es financieramente lógico, que estas tasas cumplen con la desigualdad

$$-1 < r_t^d \leq r_t^c, \text{ para cada } t \in \mathbb{T}. \tag{2.2}$$

Por conveniencia asumiremos que $r_0^c = 0$ y $r_0^d = 0$; es decir, que en el instante inicial no hay aún interés contabilizado. Definiremos ahora la cuenta de banco del agente para un instante de tiempo $t \in \mathbb{T}$ como

$$\varrho_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que

$$\varrho_t(\alpha) = \alpha^+(1 + r_t^d) - \alpha^-(1 + r_t^c)$$

donde

$$\alpha^+ = max\{\alpha, 0\}$$

$$\alpha^- = max\{-\alpha, 0\},$$

siendo α el dinero a invertir en la cuenta de banco en el instante $t-1$. Esto significa que una inversión de α unidades de dinero en una cuenta de banco en el instante $t - 1 \in \mathbb{T} \setminus \{\mathrm{T}\}$ generará $\varrho_t(\alpha)$ unidades de dinero en el instante $t \in \mathbb{T}$.

Por simplicidad, escribiremos $R_t^d = 1 + r_t^d$ y $R_t^c = 1 + r_t^c$ para cada t y definiremos el proceso deflator, el cual se especifica para depósito y crédito de la siguiente manera:

$$B_t^d = \prod_{s=0}^{t}(1 + r_s^d) = \prod_{s=0}^{t} R_s^d,$$

$$B_t^c = \prod_{s=0}^{t}(1 + r_s^c) = \prod_{s=0}^{t} R_s^c,$$

donde $t \in \mathbb{T}$. Note que estos procesos son predecibles ya que r^d y r^c lo son.

Estos procesos deflatores nos permitirán traer cualquier valor futuro a_T, a su valor en t mediante $\frac{B_t a_T}{B_T}$.

Habiendo establecido los elementos del modelo, pasaremos ahora a detallar la dinámica del mismo y describir la forma más apropiada para optimizar el dinero invertido.

2.3. Comercio y arbitraje bajo costos de transacción

En esta sección detallaremos la forma adecuada de elaborar estrategias cuyo objetivo es maximizar las utilidades y en el peor de los casos, minimizar las pérdidas sobre el dinero invertido. Ellas están constituidas por portafolios los cuales se definen seguidamente.

Definición 2.19. *(Portafolio)*

Un portafolio en el instante $t \in \mathbb{T}$, es un vector aleatorio (α_t, β_t), donde α_t denota las unidades de dinero (cuenta de banco) y β_t las unidades del activo con riesgo que el inversionista mantiene hasta el instante de tiempo $t+1$; pero que fueron seleccionados en el instante t.

Un agente del mercado comercializa dinero y activos y por ello le es permitido cambiar su portafolio en cualquier instante. En esta dinámica de mercado, el agente busca en todo momento minimizar los costos de transacción y para ello evita la simultánea entrada y salida del activo. De la misma manera, si la tasa de interés de crédito excede a la de depósito, entonces no es óptimo desde el punto de vista de maximizar la riqueza, retirar dinero al mismo tiempo que se está depositando.

Es de vital importancia entonces saber cuál es la ganancia o pérdida en cada instante $t \in \mathbb{T}$ y para cada átomo $w \in \Omega$; por ello damos la siguiente definición.

Definición 2.20. *(Valor del portafolio)*

Dado el portafolio (α_t, β_t), en el instante $t \in \mathbb{T}$, se define el valor de este portafolio en el instante t mediante la función

$$\vartheta_t : \Omega \to \mathbb{R},$$

tal que

$$\vartheta_t(\alpha_t, \beta_t)(w) = \alpha_t(w) + \beta_t^+(w) S_t^b(w) - \beta_t^-(w) S_t^a(w)$$

Para aclarar esta definición, presentaremos un ejemplo al respecto.

Ejemplo 2.21. *Retomemos el ejemplo 2.13, en el que $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8\}$ es el conjunto de estados sobre el cual se construyó el árbol de nodos, en tres instantes de tiempo $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, 3\}$.*

Para el instante $t = 2$, tenemos cuatro nodos en

$\Omega_2 = \{\{w_1, w_2\}, \{w_3, w_4\}, \{w_5, w_6\}, \{w_7, w_8\}\}$, y a partir de cada uno de estos nodos podemos generar dos posibles resultados. Si $(\alpha_2, \beta_2) = (2, 3)$ es el portafolio que

el agente adquiere en t_2, entonces, el valor de este portafolio es

$$\vartheta_2(2,3)(w) = 2 + 3S_2^b(w)$$

unidades monetarias; pero si en este instante el portafolio fuese $(\alpha_2, \beta_2) = (2, -3)$, *entonces su valor será de*

$$\vartheta_2(2,-3)(w) = 2 - 3S_2^a(w)$$

unidades monetarias.

Puesto que, en este mercado está permitido el reestructurar el portafolio en cualquier instante, ello genera una estrategia de comercio.

Definición 2.22. *(Estrategia de comercio)*

Una estrategia de comercio $\{(\alpha_t, \beta_t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ *es un proceso predecible bidimensional donde para cada t, α_t denota el dinero en efectivo y β_t, las unidades del activo con riesgo que el inversionista mantiene hasta el instante $t+1$. Aqui asumiremos que $\beta_0 = 0$; es decir que, el agente entrará al mercado sin ninguna unidad del activo con riesgo.*

Observación 2.23. *Asumiremos siempre que el inversionista liquida sus unidades del activo en el instante T, es decir, que $\beta_{T+1} = 0$ y*

$$\alpha_{T+1} = \vartheta_T(\varrho_T(\alpha_T), \beta_T). \tag{2.3}$$

Por tanto,

$$\vartheta_T(\alpha_{T+1}, \beta_{T+1}) = \alpha_{T+1} = \vartheta_T(\varrho_T(\alpha_T), \beta_T)$$

Estamos interesados en estrategias de comercio que no requieran el ingreso ni salida adicional de dinero después del instante inicial $t = 0$ sino, que se caractericen por circular lo inicialmente invertido hasta el instante final se genere utilidades. Para ello daremos la siguiente definición:

Definición 2.24. *(Estrategia Autofinanciada)*

Una estrategia autofinanciada es una estrategia de comercio $(\alpha, \beta) = \{(\alpha_t, \beta_t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ *con $\beta_0 = 0$ tal que*

$$\vartheta_t(\varrho_t(\alpha_t) - \alpha_{t+1}, \beta_t - \beta_{t+1}) \geq 0, \text{ para cada } t \in \mathbb{T}. \tag{2.4}$$

Podemos escribir equivalentemente la expresión (2.4) para fines prácticos de aplicación en el trabajo, mediante el siguiente lema:

Lema 2.25. *Una estrategia autofinanciada* (α, β)*, se define equivalentemente por la condición* $\alpha_t R + \beta_t S \geq \alpha_{t+1} + \beta_{t+1} S$*, para todo* $R_t^d \leq R \leq R_t^c$ *y* $S_t^b \leq S \leq S_t^a$*.*

Esto significa que el valor de la estrategia de comercio en el instante $t \in \mathbb{T}$ es su valor inicial más las ganancias o pérdidas del capital acumulado, con lo cual aseguramos que no se requiere de ingreso adicional de dinero en ningún instante.

Demostración.

$\Rightarrow$) Partiremos del hecho que (α, β) con $\beta_0 = 0$ es una estrategia autofinanciada y cumple que

$$\vartheta_t(\varrho_t(\alpha_t) - \alpha_{t+1}, \beta_t - \beta_{t+1}) \geq 0.$$

Desarrollando esta expresión por su definición, tenemos

$$\varrho_t(\alpha_t) - \alpha_{t+1} + (\beta_t - \beta_{t+1})^+ S_t^b - (\beta_t - \beta_{t+1})^- S_t^a \geq 0.$$

Dado que la cuenta de banco en el instante $t \in \mathbb{T}$ fue definida como $\varrho_t(\alpha) = \alpha^+(1 + r_t^d) - \alpha^-(1 + r_t^c)$, reemplazando ella en la expresión anterior tenemos

$$\alpha_t^+ R_t^d - \alpha_t^- R_t^c - \alpha_{t+1} + (\beta_t - \beta_{t+1})^+ S_t^b - (\beta_t - \beta_{t+1})^- S_t^a \geq 0. \tag{2.5}$$

Consideremos ahora las variables aleatorias R y S tales que $R_t^d \leq R \leq R_t^c$ y $S_t^b \leq S \leq S_t^a$, entonces

$$\alpha_t^+ R - \alpha_t^- R - \alpha_{t+1} + (\beta_t - \beta_{t+1})^+ S - (\beta_t - \beta_{t+1})^- S \geq 0;$$

pero por definición $\alpha_t = \alpha_t^+ - \alpha_t^-$ y $\beta_t - \beta_{t+1} = (\beta_t - \beta_{t+1})^+ - (\beta_t - \beta_{t+1})^-$, reemplazando en la ecuación anterior genera el siguiente resultado:

$$\alpha_t R - \alpha_{t+1} + (\beta_t - \beta_{t+1}) S \geq 0,$$

$$\alpha_t R + \beta_t S \geq \alpha_{t+1} + \beta_{t+1} S,$$

para todo $R_t^d \leq R \leq R_t^c$ y $S_t^b \leq S \leq S_t^a$, con lo cual se concluye la prueba de la primera implicación.

$\Leftarrow$) Partiendo de la desigualdad

$$\alpha_t R + \beta_t S \geq \alpha_{t+1} + \beta_{t+1} S,$$

con $R_t^d \leq R \leq R_t^c$ y $S_t^b \leq S \leq S_t^a$, y de que las variables aleatorias α_t y $\beta_t - \beta_{t+1}$ se pueden expresar como $\alpha_t = \alpha_t^+ - \alpha_t^-$ y $\beta_t - \beta_{t+1} = (\beta_t - \beta_{t+1})^+ - (\beta_t - \beta_{t+1})^-$, podemos reemplazar estos valores establecidos en la desigualdad inicial, para obtener

$$\alpha_t^+ R - \alpha_t^- R - \alpha_{t+1} + (\beta_t - \beta_{t+1})^+ S - (\beta_t - \beta_{t+1})^- S \geq 0$$

$$\varrho_t(\alpha_t) - \alpha_{t+1} + (\beta_t - \beta_{t+1})^+ S_t^b - (\beta_t - \beta_{t+1})^- S_t^a \geq 0$$

$$\vartheta_t(\varrho_t(\alpha_t) - \alpha_{t+1}, \beta_t - \beta_{t+1}) \geq 0$$

con lo cual se culmina la prueba.

$\boxdot$

Observación 2.26. *El lema (2.24) equivale a*

$$\alpha_t R + \beta_t S \geq \alpha_{t+1} + \beta_{t+1} S$$

para todo $R \in \{R_t^d, R_t^c\}$ *y* $S \in \{S_t^b, S_t^a\}$.

En efecto evaluando la desigualdad en $R \in \{R_t^d, R_t^c\}$ y $S \in \{S_t^b, S_t^a\}$ tenemos que

$$\alpha_t R_t^d + \beta_t S_t^b \geq \alpha_{t+1} + S_t^b \beta_{t+1},$$

$$\alpha_t R_t^c + \beta_t S_t^a \geq \alpha_{t+1} + S_t^a \beta_{t+1}.$$

Si multiplicamos cada desigualdad por λ y $1-\lambda$, para todo $\lambda \in [0,1]$, y sumamos ambas expresiones, factorizando α_t, β_t y β_{t+1}, tenemos que

$$\alpha_t(\lambda R_s^d + (1-\lambda)R_s^c) + \beta_t(\lambda S_t^b + (1-\lambda)\beta_t S_t^a) \geq \alpha_{t+1}(\lambda + (1-\lambda)) + \beta_{t+1}(\lambda S_t^b + (1-\lambda)S_t^a).$$

Tomando $R = \lambda R_t^d + (1-\lambda)R_t^c$ y $S = \lambda S_t^b + (1-\lambda)S_t^a$ la desigualdad anterior se reduce a

$$\alpha_t R + \beta_t S \geq \alpha_{t+1} + \beta_{t+1} S$$

para todo $R_t^d \leq R \leq R_s^c$ y $S_t^b \leq S \leq S_t^a$, con lo cual podemos invocar al lema 2.24.

Si bien ya hemos dado para nuestros intereses una expresión matemática más apropiada de estrategia autofinanciada, nos detendremos un momento para analizar y probar que el conjunto Φ conformado por todas la estrategias autofinanciadas forman un cono convexo poliedral.

La definición de este tipo de conos y algunos resultados de estos, se encuentran en el apéndice.

Proposición 2.27. *La colección Φ de todas las estrategias autofinanciadas es un cono convexo poliedral en $\mathbb{R}^{2m+1}$, donde m es el número de nodos en el modelo.*

Demostración.
Por el lema 2.22, y la observación 2.23 si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{2m+1}$ es una estrategia predecible con respecto a la filtración $(F_t)_{t\in\mathbb{T}}$, ésta es autofinanciada si y solo si para cada $t \in \mathbb{T}$ se satisface el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\alpha_t R_t^c - \alpha_{t+1} + (\beta_t - \beta_{t+1})S_t^a \geq 0;$$

$$\alpha_t R_t^c - \alpha_{t+1} + (\beta_t - \beta_{t+1})S_t^b \geq 0;$$

$$\alpha_t R_t^d - \alpha_{t+1} + (\beta_t - \beta_{t+1})S_t^a \geq 0;$$

$$\alpha_t R_t^d - \alpha_{t+1} + (\beta_t - \beta_{t+1})S_t^b \geq 0.$$

El conjunto solución de estas inecuaciones que es no vacío, pues contiene al vector cero, constituye el espacio Φ, el cual es un subconjunto convexo poliedral de $\mathbb{R}^{2m+1}$ por una aplicación directa de la definición de conjunto convexo poliedral (Definición 4.27) dada en el apéndice.

$\boxdot$

Teniendo ya establecido nuestro conjunto Φ de estrategias autofinanciadas, es necesario detectar aquellas que generan arbitraje; es decir, que sin inversión inicial terminan generando utilidades libres de riesgo de pérdida. Para esto es necesario, ubicar y excluir tales estrategias de nuestro modelo de mercado a fin de mantener el equilibrio económico.

En la siguiente definición se detalla cuándo una estrategia autofinanciada genera arbitraje.

Definición 2.28. *(Oportunidad de arbitraje)*
Una oportunidad de arbitraje es una estrategia autofinanciada $(\alpha, \beta) \in \Phi$ tal que

$$\alpha_0 \leq 0, \vartheta_T(\alpha_{T+1}, \beta_{T+1}) \geq 0 \quad y\ \mathbb{Q}(\vartheta_T(\alpha_{T+1}, \beta_{T+1}) > 0) > 0 \tag{2.6}$$

De acuerdo a la definición, esta es una oportunidad sin riesgos de obtener ingresos sin haber realizado ninguna inversión inicial. Ella por tanto, no debería existir en un mercado en equilibrio. De allí que éste tendría que entrar a arbitrar en caso ocurra.

Para poder caracterizar situaciones que son libres de arbitraje, necesitamos la siguiente definición:

Definición 2.29. *(Probabilidad equivalente)*

Una medida de probabilidad $\mathbb{P}$ es equivalente a la medida de probabilidad $\mathbb{Q}$ si ambas están definidas sobre el mismo espacio medible y ellas comparten los mismos eventos de probabilidad nula.

En nuestro contexto finito y discreto, esto significa que una medida de probabilidad $\mathbb{P}$ definida sobre (Ω, F) es equivalente a $\mathbb{Q}$, si y solamente si $\mathbb{P}(\{w\}) > 0$ para todo $w \in \Omega$.

Debemos recordar que al principio se asumió $\mathbb{Q}(\{w\}) > 0$ y que se desechó los elementos $w \in \Omega$ con probabilidad cero.

Definición 2.30. *(Martingala) Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, F, \mathbb{Q})$ y una filtración $(F_t)_{t\in\mathbb{T}}$, un proceso estocástico $S = \{S_t\}_{t\in\mathbb{T}}$, cuyos elementos están definidos sobre este espacio es una martingala con respecto a la filtración si*

1. S es adaptado a la filtración $(F_t)_{t\in\mathbb{T}}$; es decir, S_t es F_t medible para $t \in \mathbb{T}$,

2. S es integrable; es decir $E_{\mathbb{Q}}[S_t] < \infty$ para todo $t \in \mathbb{T}$,

3. $E_{\mathbb{Q}}[S_{t+1}/F_t] = S_t$ para todo $t \in \mathbb{T}$.

El proceso estocástico S será una supermartingala o submartingala si cumple las dos primeras condiciones y para la tercera se tiene que $E_{\mathbb{Q}}[S_{t+1}/F_t] \leq S_t$ ó $E_{\mathbb{Q}}[S_{t+1}/F_t] \geq S_t$, respectivamente.

Observación 2.31. *1. La primera condición significa que dada la información hasta el instante t, uno puede saber con certeza cuál es el estado de precios del activo con riesgo en dicho instante.*

2. La segunda condición quiere decir que el promedio de los precios del activo en cada instante t es una cantidad finita, condición que es necesaria para poder aplicar el siguiente ítem.

3. Esta condición significa que el precio del activo en el instante t es igual al esperado del valor del activo en el instante $t+1$ dada la información hasta el instante t.

Ahora se introduce lo que es una terna martingala equivalente.

Definición 2.32. *(Terna martingala)*

Una terna martingala $(\mathbb{P}, S, R)$ *consiste en los siguientes elementos: una medida de probabilidad* $\mathbb{P}$ *sobre* Ω*, un proceso de precios adaptado* S *sobre* $(F_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *y definido sobre* $(\Omega, F, \mathbb{Q})$*, y un proceso predecible de interés* R *definido sobre el espacio de probabilidad* $(\Omega, F, \mathbb{Q})$ *que satisface* $R^d \leq R \leq R^c$ *y* $S^b \leq S \leq S^a$*, siendo el proceso de precios deflatado* $\frac{S}{B}$ *una martingala con respecto a* $\mathbb{P}$*.*

Definición 2.33. *(Terna martingala equivalente)*

Si la medida de probabilidad $\mathbb{P}$ *es equivalente a* $\mathbb{Q}$*,entonces* $(\mathbb{P}, S, R)$ *es llamada una terna martingala equivalente.*

A esta medida de probabilidad $\mathbb{P}$ también se le conoce como una probabilidad de riesgo neutro o medida martingala, ya que su existencia hace posible que el proceso deflatado de precios del activo con riesgo sea una martingala.

Denotaremos con $\overline{\wp}$ el conjunto de ternas martingalas y por $\wp \subset \overline{\wp}$ la colección de ternas martingalas equivalentes definidas sobre un espacio común de probabilidad.

Lema 2.34. *Fijados* $(\mathbb{P}, S, R) \in \overline{\wp}$*, asi como una estrategia autofinanciada* $(\alpha, \beta) \in \Phi$*, el proceso* $\{\frac{1}{B_t}(\alpha_t R_t + \beta_t S_t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ *es una supermartingala con respecto a* $\mathbb{P}$*.*

La expresión $\{\frac{1}{B_t}(\alpha_t R_t + \beta_t S_t)\}_{t\in\mathbb{T}}$, representa la cantidad de dinero en el tiempo; expresado por la cuenta de dinero en el banco con la tasa de interés y la liquidación de activos en cada instante.

Demostración.
Fijamos $t \in \mathbb{T} \setminus \{T\}$, aplicando esperanza condicional al proceso $(\frac{1}{B_t}[\alpha_t R_t + \beta_t S_t])_{t\in\mathbb{T}}$ sobre la $\sigma-$álgebra F_t, por la propiedad de linealidad tenemos

$$\mathrm{E}_{\mathbb{P}}[\tfrac{1}{B_{t+1}}[\alpha_{t+1}R_{t+1} + \beta_{t+1}S_{t+1}]/F_t] = E_{\mathbb{P}}[\tfrac{1}{B_{t+1}}[\alpha_{t+1}R_{t+1}]/F_t] + E_{\mathbb{P}}[\tfrac{1}{B_{t+1}}[\beta_{t+1}S_{t+1}]/F_t].$$

Como α_{t+1}, β_{t+1}, R_{t+1} y B_{t+1} son procesos predecibles, es decir, son F_t medibles, se tiene que

$$\mathrm{E}_{\mathbb{P}}[\tfrac{1}{B_{t+1}}[\alpha_{t+1}R_{t+1} + \beta_{t+1}S_{t+1}]/F_t] = \tfrac{1}{B_{t+1}}\alpha_{t+1}R_{t+1} + E_{\mathbb{P}}[\tfrac{\beta_{t+1}S_{t+1}}{B_{t+1}}/F_t],$$

$$\mathrm{E}_{\mathbb{P}}[\tfrac{1}{B_{t+1}}[\alpha_{t+1}R_{t+1} + \beta_{t+1}S_{t+1}]/F_t] = \tfrac{1}{B_{t+1}}\alpha_{t+1}R_{t+1} + \beta_{t+1}E_{\mathbb{P}}[\tfrac{S_{t+1}}{B_{t+1}}/F_t].$$

Siendo $\frac{S}{B}$ una martingala con respecto a la probabilidad $\mathbb{P}$ y la filtración $(F_t)_{t\in\mathbb{T}}$, asì como $B_{t+1} = B_t.R_{t+1}$ de la ecuación anterior tendremos que

$$\mathrm{E}_{\mathbb{P}}[\tfrac{1}{B_{t+1}}[\alpha_{t+1}R_{t+1} + \beta_{t+1}S_{t+1}]/F_t] = \tfrac{1}{B_t}\alpha_{t+1} + \beta_{t+1}\tfrac{S_t}{B_t},$$

$$\mathrm{E}_{\mathbb{P}}[\frac{1}{B_{t+1}}[\alpha_{t+1}R_{t+1}+\beta_{t+1}S_{t+1}]/F_t] = \frac{1}{B_t}[\alpha_{t+1}+\beta_{t+1}S_t].$$

Ahora aplicando el lema 2.22 que ya fue demostrado obtenemos que

$$\mathrm{E}_{\mathbb{P}}[\frac{1}{B_{t+1}}[\alpha_{t+1}R_{t+1}+\beta_{t+1}S_{t+1}]/F_t] \leq \frac{1}{B_t}[\alpha_t R_t+\beta_t S_t],$$

con lo cual culminamos la prueba.

$\boxdot$

Capítulo 3

Mercado bajo costos de transacción

En este capítulo procedemos a formalizar y demostrar detalladamente el siguiente teorema fundamental sobre la valoración de activos bajo costos de transacción. propuesto por Alet Roux [11]

Teorema 3.1. *El modelo de mercado bajo costos de transacción es libre de arbitraje, si y solo si, éste admite una terna martingala equivalente.*

La prueba de este teorema se hará por separado en cuanto a la condición necesaria y suficiente. En la proposición siguiente procedemos con la condición de suficiencia, que es la más directa de obtener.

Proposición 3.2. *La existencia de una terna martingala equivalente* $(\mathbb{P}, S, B) \in \wp$ *implica que el modelo de mercado bajo costos de transacción sea libre de arbitraje.*

Demostración.
Realizaremos la prueba por reducción al absurdo. Para ello asumiremos que existe una estrategia autofinanciada $(\alpha, \beta) \in \Phi$ que genera arbitraje con un costo inicial $\alpha_0 \leq 0$ satisfaciendo

$$\vartheta_T(\alpha_{T+1}, \beta_{T+1}) \geq 0 \text{ y } \mathbb{Q}(\vartheta_T(\alpha_{T+1}, \beta_{T+1}) > 0) > 0 \tag{3.1}$$

Dado que $B_T = \prod_{s=0}^{T} R_s > 0$, de la primera inecuación en (3.1), se obtiene

$$0 \leq \frac{1}{B_T}\vartheta_T(\alpha_{T+1}, \beta_{T+1}). \tag{3.2}$$

Como $\mathbb{P}$ es equivalente a $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}(\vartheta_T(\alpha_{T+1}, \beta_{T+1}) > 0) > 0$ tenemos que

$$0 < E_{\mathbb{P}}[\frac{1}{B_T}\vartheta_T(\alpha_{T+1}, \beta_{T+1})],$$

y desarrollando ϑ_T

$$0 < E_{\mathbb{P}}[\frac{1}{B_T}(\alpha_{T+1} + \beta^+_{T+1}S^b_T - \beta^-_{T+1}S^a_T)].$$

Dado que $S^b_T \leq S_T \leq S^a_T$ tenemos

$$0 < E_{\mathbb{P}}[\frac{1}{B_T}(\alpha_{T+1} + \beta^+_{T+1}S_T - \beta^-_{T+1}S_T)].$$

Más aún, siendo $\beta_{T+1} = \beta^+_{T+1} - \beta^-_{T+1}$ tenemos la siguiente expresión:

$$0 < E_{\mathbb{P}}[\frac{1}{B_T}(\alpha_{T+1} + \beta_{T+1}S_T)].$$

Aplicando ahora el lema 2.25

$$0 < E_{\mathbb{P}}[\frac{1}{B_T}(\alpha_{T+1} + \beta_{T+1}S_T)] \leq E_{\mathbb{P}}[\frac{1}{B_T}(\alpha_T R_T + \beta_T S_T)]. \tag{3.3}$$

Pero sabemos, por lo demostrado en el lema 2.31 que el proceso

$$\frac{1}{B_t}(\alpha_t R_t + \beta_t S_t)\}_{t\in\mathbb{T}}$$

es una supermartingala, por lo que para cada $t \in \mathbb{T}$

$$0 < E_{\mathbb{P}}[\frac{1}{B_{t+1}}(\alpha_{t+1}R_{t+1} + \beta_{t+1}S_{t+1})] \leq E_{\mathbb{P}}[\frac{1}{B_t}(\alpha_t R_t + \beta_t S_t)]. \tag{3.4}$$

Utilizando la desigualdad (3.3), resulta que

$$0 < E_{\mathbb{P}}[\frac{1}{B_T}(\alpha_T R_T + \beta_T S_T)] \leq E_{\mathbb{P}}[\frac{1}{B_0}(\alpha_0 R_0 + \beta_0 S_0)] \tag{3.5}$$

y como por las condiciones iniciales del modelo $B_0 = R_0 = (1 + r_0)$, con $r_0 = 0$, y $\beta_0 = 0$ se tiene que

$$0 < E_{\mathbb{P}}[\frac{1}{B_T}(\alpha_T R_T + \beta_T S_T)] \leq \alpha_0, \tag{3.6}$$

lo cual contradice el hecho que $\alpha_0 \leq 0$.

$\boxdot$

En lo que resta del trabajo estaremos abocados a probar la otra implicancia del teorema 3.1; para ello necesitamos de tres lemas previos. El primero afirma que si el modelo no admite arbitraje entonces existe un factor de descuento consistente que denotaremos por Z_T. El último de estos, de otro lado, muestra que si el modelo admite este factor de descuento consistente entonces existe un sistema de valoración consistente que lo denotaremos con Z. Para la demostración de este último lema requerimos de un resultado previo que se enuncia y demuestra en el lema intermedio. La prueba se completa finalmente, en la proposición 3.6, que afirma que el modelo admite una terna martingala equivalente, sí y solo si, admite un sistema de valoración consistente. Bajo esta estructura comenzaremos a enunciar y demostrar el siguiente lema.

Lema 3.3. *Si el modelo no admite arbitraje entonces, existe un vector aleatorio F_T medible $Z_T = (Z_T^B, Z_T^S)$ con valores en $(0,\infty)\times(0,\infty)$ tal que*

$$E_{\mathbb{Q}}[Z_T.(\alpha_{T+1}, \beta_{T+1})] - \alpha_0 \leq 0,$$

para todo $(\alpha, \beta) \in \Phi$.

Demostración.
Sea

$$A = \{(-\alpha_0, \alpha_{T+1}, \beta_{T+1})/(\alpha, \beta) \in \Phi\} \subseteq \mathbb{R}^{2n+1},$$

donde n es el número de nodos terminales en el modelo.

Como Φ es un cono convexo poliedral, por la proposición 2.24 de la sección anterior, una aplicación del teorema 4.30 en el apéndice implica que A es también un cono convexo poliedral en $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Definamos el conjunto

$$\mathcal{L}^+ = \text{conv}\{1, \theta, \theta \cup \{(0, 1_{\{w\}}, \theta)/w \in \Omega\} \cup \{(0, \theta, 1_{\{w\}})/w \in \Omega\}\}.$$

donde θ es el vector nulo en $\mathbb{R}^n$. Por definición, $\mathcal{L}^+$ está formado por todas las combinaciones convexas de sus elementos generadores. Recuerde que A es un subconjunto no vacío de un espacio vectorial y que "*convA*" es el conjunto convexo, formado por todas las combinaciones convexas de los elementos de A.

Aquí, valga aclarar, que para cada $w_0 \in \Omega$ la función indicadora $1_{\{w_0\}}$ asigna a $w \in \Omega$ el valor 1 en la componente correspondiente a la posición de w_0, y el valor 0 a cada una de las otras $n-1$ componentes. Como, los generadores de $\mathcal{L}^+$ corresponden a la base canónica de $\mathbb{R}^{2n+1}$, entonces $\mathcal{L}^+$ es un conjunto cerrado y acotado, por el lema 4.34.

Como el modelo no admite arbitraje entonces para toda estrategia de comercio $(\alpha, \beta) \in \Phi$ se cumple

$$\alpha_0 \leq 0, 0 \leq \mathbb{Q}(\vartheta_T(\alpha_{T+1}, \beta_{T+1})) \leq 1 \text{ y } \mathbb{Q}(\vartheta_T(\alpha_{T+1}, \beta_{T+1}) < 0) > 0,$$

donde

$$\vartheta_T(\alpha_{T+1},\beta_{T+1}) = \vartheta_T(\alpha_{T+1},0) = \alpha_{T+1}$$

De la última expresión se puede observar que todas las estrategias libres de arbitraje en A tienen al menos una componente negativa y por lo tanto no pueden pertenecer al conjunto $\mathcal{L}^+$, ya que éste tiene todas sus componentes mayores o iguales a cero. Luego $A\cap\mathcal{L}^+ = \emptyset$. Consecuentemente, por el corolario 4.31 (ver apéndice), existe una variable aleatoria $W_T = (W_T^R, W_T^S) \in \mathbb{R}^{2n}$ que es F_T medible y un número $W_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{(a_R,a_S,a_0)\in A}\{\langle (W_T,W_0),(\alpha_{T+1},\beta_{T+1},a_0)\rangle\} < \inf_{(l_R,l_S,l_0)\in\mathcal{L}^+}\{\langle (W_T,W_0),(l_R,l_S,l_0)\rangle\}$$

En este caso se cumple la desigualdad estricta debido a que A y $\mathcal{L}^+$ son conjuntos convexos, cerrados y además $\mathcal{L}^+$ es compacto. Desarrollando la desigualdad previa se obtiene:

$$0 \leq \sup_{(a_R,a_S,a_0)\in A}\{E_{\mathbb{Q}}[W_T.(\alpha_{T+1},\beta_{T+1})]+W_0a_0\} < \inf_{(l_R,l_S,l_0)\in\mathcal{L}^+}\{E_{\mathbb{Q}}[W_T.(l_R,l_S)]+W_0l_0\} < \infty. \tag{3.7}$$

Como $0\in A$, tenemos que para todo $(l_R,l_S,l_0)\in\mathcal{L}^+$

$$0 < E_{\mathbb{Q}}[W_T.(l_R,l_S)] + W_0l_0. \tag{3.8}$$

Aplicando la definición de valor esperado a la ultima desigualdad tenemos que

$$0 < \sum_{\omega\in\Omega} W_T^R(\omega)l_R(\omega) + \sum_{\omega\in\Omega} W_T^S(\omega)l_S(\omega) + W_0l_0 \tag{3.9}$$

Si $l_R = e_j = (0,0,...,1,..,0)$, $l_S = (0,0,...,0,..,0)$ y $l_0 = 0$ entonces $W_T^R(\omega_j) > 0$ para cada j y $W_T^R > 0$.

Así sucesivamente concluimos que W_0, W_T^R y W_T^S son positivos.

Como A es un cono convexo poliedral se sigue del lema 4.36 (ver apéndice) y de la desigualdad (3.7) que

$$\sup_{(a_R,a_S,a_0)\in A}\{E_{\mathbb{Q}}[W.(\alpha_{T+1},\beta_{T+1})]+W_0a_0\} = 0,$$

$$\sup_{(\alpha,\beta)\in\Phi}\{E_{\mathbb{Q}}[W.(\alpha_{T+1},\beta_{T+1})]-W_0\alpha_0\} = 0,$$

y

$$E_{\mathbb{Q}}[W_T.(\alpha_{T+1}, \beta_{T+1})] - W_0\alpha_0 \leq 0.$$

Dividiendo todo por $W_0 > 0$ y definiendo $Z_T = \frac{W_T}{W_0}$

$$E_{\mathbb{Q}}[Z_T.(\alpha_{T+1}, \beta_{T+1})] - \alpha_0 \leq 0,$$

lo cual concluye la prueba.

$\boxdot$

A la variable aleatoria Z_T que cumple con la desigualdad del lema 3.3 se denomina factor de descuento consistente. Para demostrar el lema 3.5 necesitamos del siguiente resultado:

Lema 3.4. *Sean $t \in T$ y $Z \equiv (Z^R, Z^S) \in \mathbb{R}^{2n}$ un vector aleatorio F_t medible con*

$$E_{\mathbb{Q}}[Z.(\alpha, \beta)] \geq 0, \tag{3.10}$$

para cualquier par de variables aleatorias α y β F_t-medibles en $\mathbb{R}^n$, las cuales satisfacen que

$$\vartheta_t(\alpha, \beta) \geq 0, \tag{3.11}$$

donde n es el número de nodos en el modelo.

Entonces, Z^R y Z^S son no negativas y

$$Z^R S_t^b \leq Z^S \leq Z^R S_t^a.$$

Demostración.

Fijado $t \in T$, para cualquier $w_i \in \Omega_t$ definimos el siguiente conjunto de portafolios

$$K(w_i) = \{(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2 / \vartheta_t(\gamma, \delta)(w_i) \geq 0\}.$$

Por aplicación directa de la definición de valor del portafolio en t tenemos

$$K(w_i) = \{(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2 / \gamma + \delta^+ S_t^b(w_i) - \delta^- S_t^a(w_i) \geq 0\}.$$

Si $\delta \geq 0$, y por tanto $\delta^- = 0$, la desigualdad resulta $0 \leq \gamma + \delta S_t^b(w_i)$. Así usando la desigualdad $S_t^b \leq S_t^a$ obtenemos $0 \leq \gamma + \delta S_t^a(w_i)$. De otro lado, si $\delta < 0$ y por tanto

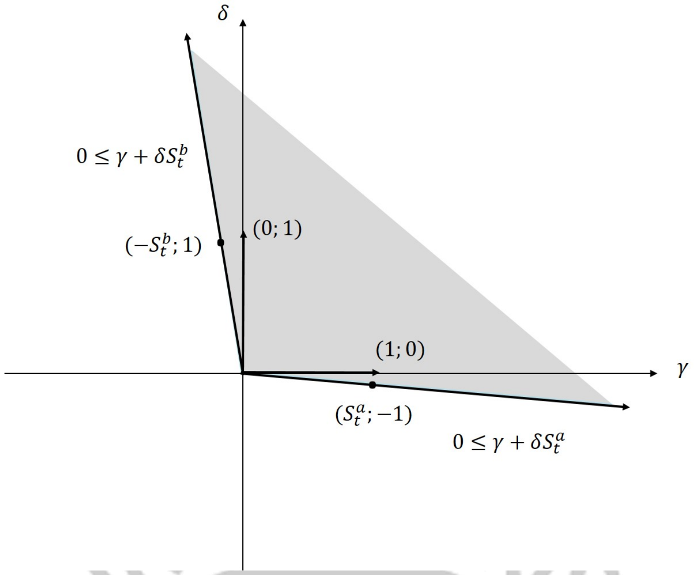

Figura 3.1: Cono convexo poliedral

$\delta^+ = 0$, la desigualdad resulta $0 \leq \gamma + \delta S_t^a(w_i)$. Asi nuestro conjunto $K(w_i)$ quedaría como

$$K(w_i) = \{(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2 / \, 0 \leq \gamma + \delta S_t^b(w_i), \, 0 \leq \gamma + \delta S_t^a(w_i)\}.$$

El conjunto $K(w_i)$ es un cono convexo poliedral, porque es el conjunto solución de la intersección de dos inecuaciones lineales homogéneas, por lo tanto puede ser generado por dos o más vectores. Es posible expresar $K(w_i)$ mediante

$$K(w_i) = \text{conv cone}\{(1, 0), (0, 1), (S_t^a(w_i), -1), (-S_t^b(w_i), 1)\}, \tag{3.12}$$

como se muestra en la Figura 3.1.

Con esta expresión podemos notar que $K(w_i)$ es un cono convexo poliedral en $\mathbb{R}^2$, donde conv cone (C) es la capsula convexa del cono generado por C. El conjunto A de todas las variables aleatorias α y β F_t medibles que satisfacen

$$\vartheta_t(\alpha, \beta) \geq 0$$

puede ser expresado como

$$A = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{2n} / (\alpha, \beta) \text{ es } F_t \text{ medible y } (\alpha(w_i), \beta(w_i)) \in K(w_i) \, \text{para cada} \, w_i \in \Omega_t\}.$$

Luego, A puede ser expresado de la siguiente forma

$$A = K(w_1) \times K(w_2) \times ... \times K(w_n),$$

donde n es el número de nodos en el modelo.

Probaremos que este conjunto A es un cono convexo y poliedral. Sean

$$(\alpha_1, \beta_1) \equiv (\alpha_1(w_1), \beta_1(w_1), ..., \alpha_1(w_n), \beta_1(w_n)) \in A,$$

$$(\alpha_2, \beta_2) \equiv (\alpha_2(w_1), \beta_2(w_1), ..., \alpha_2(w_n), \beta_2(w_n)) \in A.$$

Como

$$(\alpha_1(w_i), \beta_1(w_i)), (\alpha_2(w_i), \beta_2(w_i)) \in K(w_i),$$

donde $w_i \in \Omega_t$; y éste es un cono convexo poliedral, entonces se cumple que

$$(\lambda\alpha_1(w_i) + (1-\lambda)\alpha_2(w_i), \lambda\beta_1(w_i) + (1-\lambda)\beta_2(w_i)) \in K(w_i),$$

para todo $w_i \in \Omega_t$.

Por lo tanto,

$$(\lambda\alpha_1(w_1) + (1-\lambda)\alpha_2(w_1), \lambda\beta_1(w_1) + (1-\lambda)\beta_2(w_1), ..., \lambda\alpha_1(w_n)$$

$$+(1-\lambda)\alpha_2(w_n), \lambda\beta_1(w_n) + (1-\lambda)\beta_2(w_n),$$
$$\equiv (\lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2, \lambda\beta_1 + (1-\lambda)\beta_2) \in A,$$

con lo cual probamos que es convexo. Como el conjunto A es finitamente generado, por aplicación del teorema 4.38 (ver apéndice), el conjunto A es poliedral. Con lo cual concluye la prueba.

El conjunto A tiene la propiedad de poder expresar sus elementos como

$$(\alpha, \beta) = (\alpha_i 1_{\{w_i\}}), \beta_i 1_{\{w_i\}}) \in A,$$

para todo $w_i \in \Omega_t$, o equivalentemente

$$(0, ..., \alpha(w_i), \beta(w_i), ..., 0) \in A.$$

Luego, evaluando en la desigualdad (3.10), nos quedaría

$$E_{\mathbb{Q}}[(Z^R, Z^S).(0, ..., \alpha(w_i), \beta(w_i), ..., 0)] \geq 0,$$

$$\mathbb{Q}(w_i)[(Z^R(w_i), Z^S(w_i)).(\alpha(w_i)), \beta(w_i))] \geq 0.$$

Por lo tanto,

$$[(Z^R(w_i), Z^S(w_i)).(\alpha(w_i)), \beta(w_i))] \geq 0, \tag{3.13}$$

para todo $w_i \in \Omega_t$ y $(\alpha(w_i), \beta(w_i)) \in K(w_i)$. En virtud de la representación (3.12), podemos evaluar esta última inecuación en $(1{,}0), (0, 1) \in K(w_i)$ y obtener $Z^R(w_i) \geq 0$ y $Z^S(w_i) \geq 0$. Ahora, reemplazando en $(S_t^a(w_i), -1), (-S_t^b(w_i), 1) \in K(w_i)$, obtenemos

$$S_t^a(w_i)Z^R(w_i) - Z^S(w_i) \geq 0$$

y

$$-S_t^b(w_i)Z^R(w_i) + Z^S(w_i) \geq 0,$$

para $w_i \in \Omega_t$. Con las dos últimas inecuaciones llegamos a que

$$S_t^b(w_i)Z^R(w_i) \leq Z^S(w_i) \leq S_t^a(w_i)Z^R(w_i),$$

para todo $w_i \in \Omega_t$. Con lo que se concluye la prueba del lema 3.4.

$\boxdot$

Continuando con la secuencia establecida al inicio del presente capítulo, demostraremos el siguiente lema:

Lema 3.5. *Supongamos que el modelo admite un factor de descuento consistente. Entonces,*

1) Existe un proceso adaptado $(0, \infty) \times (0, \infty)$-valuado $Z = (Z^R, Z^S)$ tal que

$$S_t^b \leq \frac{Z_t^S}{Z_t^B} \leq S_t^a, \text{ para todo } t \in \mathbb{T}, \tag{3.14}$$

y Z^S es una martingala bajo $\mathbb{Q}$.

2) Existe un proceso predecible R que satisface

$$R_t^d \leq R_t \leq R_t^c, \text{ para todo } t \in \mathbb{T}, \tag{3.15}$$

tal que BZ^R es una martingala bajo $\mathbb{Q}$, siendo B el proceso deflator asociado a R.

Demostración.

La presente demostración es una adaptación y extensión que Alet Roux [11] hace sobre el trabajo de Dempster en [4]. Para ello introduciremos el vector $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ al cual llamaremos una estrategia de comercio generalizada. En ella, (α, β) es una estrategia de comercio y los procesos $\mathbb{R}-$ valuados y adaptados γ y δ satisfacen para todo $t \in \mathbb{T}$ la condición

$$\varrho(\alpha_t) \geq \gamma_t,\ \beta_t \geq \delta_t \text{ y } \vartheta_t(\gamma_t - \alpha_{t+1}, \delta_t - \beta_{t+1}) \geq 0.$$

La colección de estrategias de comercio generalizadas, la denotaremos por Θ. Una estrategia de comercio generalizada es simplemente una estrategia de comercio autofinanciada con consumo explícito; es decir, para cualquier instante $t \in T$, el dueño de la estrategia $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \Theta$ inicia la dinámica del mercado con su portafolio actual $\varrho(\alpha_t)$ de dinero en efectivo y β_t unidades de su stock (recordemos que $\beta_0 = 0$), luego consume $\varrho(\alpha_t) - \gamma_t \geq 0$ en dinero y $\beta_t - \delta_t \geq 0$ de unidades de stock. El portafolio resultante γ_t de dinero y δ_t de unidades del stock es entonces usado para convertir ésta en una estrategia autofinanciado con un portafolio de α_{t+1} de dinero y β_{t+1} unidades del stock, que se utilizarán en el siguiente instante. Asumimos que el modelo admite por hipótesis del lema un factor de descuento consistente $Z_T = (Z_T^S, Z_T^R)$ y definimos

$$\begin{aligned}\mathbf{A} = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta)/(\alpha, \beta) &\text{ es un proceso predecible con} \beta_0 = 0, \text{ y } (\gamma, \delta)\\ &\text{es un proceso adaptado tal que } \vartheta_t(\gamma_t - \alpha_{t+1}, \delta_t - \beta_{t+1}) \geq 0\}.\end{aligned}$$

Analogamente al Lema 3.4; las ecuaciones que generan el conjunto $\mathbf{A}$, resultan ser inecuaciones lineales homogeneas. Esto implica que $\mathbf{A}$ es un conjunto convexo poliedral de $\mathbb{R}^{4n+1}$, donde n es el número de nodos en el modelo.

Sobre este conjunto definimos un funcional lineal,

$$L : \mathbb{R}^{4n+1} \to \mathbb{R},$$

mediante

$$L(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = E_{\mathbb{Q}}[Z_T.(\alpha_{T+1}, \beta_{T+1})] - \alpha_0.$$

Consideramos ahora el problema de maximizar L sobre $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbf{A}$ sujeto a las siguientes restricciones

$$R_t^d \alpha_t - \gamma_t \geq 0 \text{ y } R_t^c \alpha_t - \gamma_t \geq 0,\ \beta_t - \delta_t \geq 0 \text{ para } t \in \mathbb{T}. \tag{3.16}$$

Observemos que la condición (3.16) es equivalente a

$$\varrho(\alpha_t) - \gamma_t \geq 0 \text{ y } \beta_t - \delta_t \geq 0 \text{ para } t \in \mathbb{T};$$

y por lo tanto, nuestro problema a optimizar será maximizar L sobre el conjunto Θ de estrategias de comercio generalizadas.

Fijaremos ahora una estrategia de comercio generalizada $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \Theta$ y construyamos una estrategia de comercio autofinanciada $(\varepsilon, \eta) \in \Phi$ con $\varepsilon_0 = \alpha_0$ y

$$\eta_t := \beta_t, \text{ para todo } t \in \mathbb{T} \cup \{T+1\},$$

$$\varepsilon_{t+1} := \vartheta_t(\varrho_t(\varepsilon_t), \eta_{t+1} - \eta_t), \text{ para } t \in \mathbb{T}.$$

Afirmamos que $\alpha_t \leq \varepsilon_t$ y $\beta_t \leq \eta_t$, para $t \in \mathbb{T}$.

Para probar esta desigualdad trabajaremos con $t = 0$; es decir, que probaremos $\alpha_1 \leq \varepsilon_1$.

Luego, aplicando la definicion de ε_{t+1} en $t = 0$ tenemos que

$$\varepsilon_1 = \vartheta_0(\varrho_0(\varepsilon_0), \eta_1 - \eta_0),$$

Como $\varepsilon_0 = \alpha_0$ y $\eta_0 = \beta_0 = 0$ tenemos que

$$\varepsilon_1 = \vartheta_0(\varrho_0(\alpha_0), \beta_1),$$

$$\varepsilon_1 = \varrho_0(\alpha_0) + \beta_1^+ S_0^b - \beta_1^- S_0^a$$

y

$$\varepsilon_1 = \alpha_0 + \beta_1^+ S_0^b - \beta_1^- S_0^a \geq \alpha_0 + \beta_1^- S_0^b - \beta_1^+ S_0^a = \alpha_1.$$

Por lo tanto,

$$\alpha_1 \leq \varepsilon_1,$$

De manera similar, se puede probar la desigualdad para cada $t \in \mathbb{T}$.

Luego, aplicando la desigualdad en $T + 1$ tenemos que

$$\alpha_{T+1}(\omega) \leq \varepsilon_{T+1}(\omega) \text{ para } \omega \in \Omega,$$

$$\beta_{T+1}(\omega) \leq \eta_{T+1}(\omega) \text{ para } \omega \in \Omega.$$

Pero como $\mathbb{Q}(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$

$$\alpha_{T+1}(\omega)\mathbb{Q}(\omega) \leq \varepsilon_{T+1}(\omega)\mathbb{Q}(\omega), \text{ para todo } \omega \in \Omega,$$

$$\beta_{T+1}(\omega)\mathbb{Q}(\omega) \leq \eta_{T+1}(\omega)\mathbb{Q}(\omega), \text{ para todo } \omega \in \Omega.$$

Así, por hipótesis sabemos que $Z_T^R(\omega) \geq 0$ y $Z_T^S(\omega) \geq 0$ para $\omega \in \Omega$, con lo cual obtenemos que

$$Z_T^R(\omega)\alpha_{T+1}(\omega)\mathbb{Q}(\omega) \leq Z_T^R(\omega)\varepsilon_{T+1}(\omega)\mathbb{Q}(\omega) \text{ para } \omega \in \Omega,$$

$$Z_T^S(\omega)\beta_{T+1}(\omega)\mathbb{Q}(\omega) \leq Z_T^S(\omega)\eta_{T+1}(\omega)\mathbb{Q}(\omega) \text{ para } \omega \in \Omega.$$

Sumando sobre Ω para cada desigualdad previa tenemos que

$$\sum_{\omega\in\Omega} Z_T^R(\omega)\alpha_{T+1}(\omega)\mathbb{Q}(\omega) \leq \sum_{\omega\in\Omega} Z_T^R(\omega)\varepsilon_{T+1}(\omega)\mathbb{Q}(\omega),$$

$$\sum_{\omega\in\Omega} Z_T^S(\omega)\beta_{T+1}(\omega)\mathbb{Q}(\omega) \leq \sum_{\omega\in\Omega} Z_T^S(\omega)\eta_{T+1}(\omega)\mathbb{Q}(\omega);$$

y luego, sumando miembros de cada desigualdad obtenemos que

$$\sum_{\omega\in\Omega} Z_T^R(\omega)\alpha_{T+1}(\omega)\mathbb{Q}(\omega)+\sum_{\omega\in\Omega} Z_T^S(\omega)\beta_{T+1}(\omega)\mathbb{Q}(\omega) \leq \sum_{\omega\in\Omega} Z_T^R(\omega)\varepsilon_{T+1}(\omega)\mathbb{Q}(\omega)+\sum_{\omega\in\Omega} Z_T^S(\omega)\eta_{T+1}(\omega)\mathbb{Q}(\omega)$$

; es decir,

$$\sum_{\omega\in\Omega}(Z_T^R(\omega)\alpha_{T+1}(\omega)+Z_T^S(\omega)\beta_{T+1}(\omega))\mathbb{Q}(\omega) \leq \sum_{\omega\in\Omega}(Z_T^R(\omega)\varepsilon_{T+1}(\omega)+Z_T^S(\omega)\eta_{T+1}(\omega))\mathbb{Q}(\omega)$$

Equivalentemente,

$$\sum_{\omega\in\Omega}(Z_T^R(\omega)\alpha_{T+1}(\omega)+Z_T^S(\omega)\beta_{T+1}(\omega))\mathbb{Q}(\omega)-\alpha_0 \leq \sum_{\omega\in\Omega}(Z_T^R(\omega)\varepsilon_{T+1}(\omega)+Z_T^S(\omega)\eta_{T+1}(\omega))\mathbb{Q}(\omega)-\alpha_0,$$

y

$$L(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = E_{\mathbb{Q}}[Z_T.(\alpha_{T+1},\beta_{T+1})] - \alpha_0 \leq E_{\mathbb{Q}}[Z_T.(\varepsilon_{T+1},\eta_{T+1})] - \alpha_0.$$

Consecuentemente,

$$\sup_{(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\Theta}\{L(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\} \leq \sup_{(\varepsilon,\eta)\in\Phi}\{E_{\mathbb{Q}}[Z_T.(\varepsilon_{T+1},\eta_{T+1})] - \alpha_0\} \leq 0.$$

Por una aplicación directa del lema 3.3, donde además el supremo del lado izquierdo es alcanzado en $z = \theta \in \Theta \subset \mathbf{A}$.

Extendemos ahora L a $\mathbb{R}^{4n+1}$,

$$L : \mathbb{R}^{4n+1} \to \mathbb{R},$$

mediante

$$L(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = E_{\mathbb{Q}}[Z_T.(\alpha_{T+1},\beta_{T+1})] - \alpha_0,$$

y

$$G : \mathbb{R}^{4n+1} \to \mathbb{R}^{4n}$$

mediante

$$G(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = (R_t^d\alpha_t^1 - \gamma_t^1, R_t^c - \alpha_t^1 - \gamma_t^1, \beta_t^1 - \delta_t^1).$$

Aplicando el lema 4.35 que se encuentra en el apéndice, se garantiza la existencia de un proceso adaptado $[0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)$ valuado $W = (W^d, W^c, W^s)$ tal que

$$L(\alpha,\beta,\gamma,\delta) + \langle W, G(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\rangle \leq L(z) + \langle W, G(z)\rangle = 0,$$

Asi,

$$L(\alpha,\beta,\gamma,\delta) + \sum_{t\in\mathbb{T}} E_{\mathbb{Q}}[W_t.(R_t^d\alpha_t - \gamma_t, R_t^c\alpha_t - \gamma_t, \beta_t - \delta_t)] \leq 0, \tag{3.17}$$

para todo $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in A$. La desigualdad (3.17) puede ser expresada como

$$E_{\mathbb{Q}}[Z_T.(\alpha_{T+1},\beta_{T+1})] - \alpha_0 + \sum_{t\in\mathbb{T}} E_{\mathbb{Q}}[W_t.(R_t^d\alpha_t, R_t^c\alpha_t, \beta_t)] - \sum_{t\in\mathbb{T}} E_{\mathbb{Q}}[W_t.(\gamma_t,\gamma_t,\delta_t)] \leq 0;$$

o más explicitamente como

$$E_{\mathbb{Q}}[Z_T.(\alpha_{T+1},\beta_{T+1})] - \alpha_0 + E_{\mathbb{Q}}[W_0.(R_0^d\alpha_0, R_0^c\alpha_0, \beta_0)]$$

$$+\sum_{t\in\mathbb{T}-\{0\}} E_{\mathbb{Q}}[W_t.(R_t^d\alpha_t, R_t^c\alpha_t, \beta_t)] - \sum_{t\in\mathbb{T}-\{T\}} E_{\mathbb{Q}}[W_t.(\gamma_t,\gamma_t,\delta_t)] - E_{\mathbb{Q}}[W_T.(\gamma_T,\gamma_T,\delta_T) \leq 0.$$

Luego,

$$E_{\mathbb{Q}}[Z_T.(\alpha_{T+1},\beta_{T+1})] - \alpha_0 + E_{\mathbb{Q}}[W_0.(R_0^d\alpha_0, R_0^c\alpha_0, \beta_0)]$$

$$+\sum_{t\in\mathbb{T}-\{T\}} E_{\mathbb{Q}}[W_{t+1}.(R_{t+1}^d\alpha_{t+1}, R_{t+1}^c\alpha_{t+1}, \beta_{t+1})] - \sum_{t\in\mathbb{T}-\{T\}} E_{\mathbb{Q}}[W_t.(\gamma_t,\gamma_t,\delta_t)] - E_{\mathbb{Q}}[W_T.(\gamma_T,\gamma_T,\delta_T) \leq 0,$$

de donde

$$E_{\mathbb{Q}}[W_0.(R_0^d\alpha_0, R_0^c\alpha_0, \beta_0)] - \alpha_0 + \sum_{t\in\mathbb{T}-\{T\}} E_{\mathbb{Q}}[W_{t+1}.(R_{t+1}^d\alpha_{t+1}, R_{t+1}^c\alpha_{t+1}, \beta_{t+1}) - W_t.(\gamma_t,\gamma_t,\delta_t)]$$

$$+E_{\mathbb{Q}}[Z_T.(\alpha_{T+1},\beta_{T+1}] - E_{\mathbb{Q}}[W_T.(\gamma_T,\gamma_T,\delta_T)] \leq 0, \tag{3.18}$$

para todo $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbf{A}$.

Recalcamos que por definición de $\mathbf{A}$ podemos sustituir 0 por cualquier elemento $(\alpha_t,\beta_t,\gamma_t,\delta_t)$ de $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbf{A}$ con $t \in \mathbb{T}$.

Si hacemos esto para todas la componentes excepto para $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ obtenemos que

$$E_{\mathbb{Q}}[W_0.(R_0^d\alpha_0, R_0^c\alpha_0, \beta_0)] - \alpha_0 \leq 0,$$

$$(W_0^d, W_0^c, W_0^s).(R_0^d\alpha_0, R_0^c\alpha_0, \beta_0) - \alpha_0 \leq 0.$$

y

$$(W_0^d + W_0^c - 1)\alpha_0 \leq 0, \tag{3.19}$$

asumiendo que $R_0^d = 1$, $R_0^c = 1$ y $\beta_0 = 0$.

Sea para $t \in \mathbb{T} - \{T\}$ y $\alpha_{t+1}, \beta_{t+1}, \gamma_t, \delta_t$ variables aleatorias F_t medibles tales que

$$\vartheta_t(\gamma_t - \alpha_{t+1}, \delta_t - \beta_{t+1}) \geq 0,$$

con $\alpha_0 = 0$ y $(\alpha_{T+1}, \beta_{T+1}, \gamma_T, \delta_T) = 0$, entonces

$$E_{\mathbb{Q}}[W_{t+1}.(R_{t+1}^d\alpha_{t+1}, R_{t+1}^c\alpha_{t+1}, \beta_{t+1}) - W_t.(\gamma_t,\gamma_t,\delta_t)] \leq 0. \tag{3.20}$$

Finalmente, si $\alpha_{T+1}, \beta_{T+1}, \gamma_T, \delta_T$ son variables aleatorias F_T medibles tales que

$$\varphi_T(\gamma_T - \alpha_{T+1}, \delta_T - \beta_{T+1}) \geq 0,$$

tenemos que

$$E_{\mathbb{Q}}[(Z_T.(\alpha_{T+1}, \beta_{T+1}) - W_T.(\gamma_T, \gamma_T, \delta_T)] \leq 0. \tag{3.21}$$

Luego, por la desigualdad (3.19), si $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ las componentes del vector W_0 son mayores o iguales que cero, esto implica que

$$W_0^d + W_0^c = 1 > 0.$$

Fijemos ahora un $t \in \mathbb{T} - \{T\}$ y una variable aleatoria λ que es F_t medible y tomemos $\alpha_{t+1} = \gamma_t = \lambda, \beta_{t+1} = \delta_t = 0$. Reemplazando en la desigualdad (3.20), obtenemos

$$E_{\mathbb{Q}}[W_{t+1}.(R_{t+1}^d \lambda, R_{t+1}^c \lambda, 0) - W_t.(\lambda, \lambda, 0)] \leq 0,$$

$$E_{\mathbb{Q}}[(W_{t+1}^d, W_{t+1}^c, W_{t+1}^s).(R_{t+1}^d \lambda, R_{t+1}^c \lambda, 0) - (W_t^d, W_t^c, W_t^s).(\lambda, \lambda, 0)] \leq 0,$$

$$E_{\mathbb{Q}}[(W_{t+1}^d R_{t+1}^d + W_{t+1}^c R_{t+1}^c - (W_t^d + W_t^c))\lambda] \leq 0,$$

$$E_{\mathbb{Q}}[\lambda E_{\mathbb{Q}}[(W_{t+1}^d R_{t+1}^d + W_{t+1}^c R_{t+1}^c - (W_t^d + W_t^c))/F_t]] = 0.$$

Aplicando la definición de producto interno como el esperado del producto de dos variables se tiene que

$$E_{\mathbb{Q}}[(W_{t+1}^d R_{t+1}^d + W_{t+1}^c R_{t+1}^c - (W_t^d + W_t^c))/F_t] = 0,$$

ó

$$E_{\mathbb{Q}}[(W_{t+1}^d R_{t+1}^d + W_{t+1}^c R_{t+1}^c)/F_t] = W_t^d + W_t^c. \tag{3.22}$$

De forma análoga, sea λ una variable aleatoria F_t medible y tenemos $\alpha_{t+1} = \gamma_t = 0$, $\beta_{t+1} = \delta_t = \lambda$. Reemplazando en la desigualdad (3.20), obtenemos que

$$E_{\mathbb{Q}}[W_{t+1}.(0,0,\lambda) - W_t.(0,0,\lambda)] \leq 0;$$

es decir,

$$E_{\mathbb{Q}}[(W^d_{t+1}, W^c_{t+1}, W^s_{t+1}).(0,0,\lambda) - (W^d_t, W^c_t, W^s_t).(0,0,\lambda)] \leq 0,$$

y

$$E_{\mathbb{Q}}[(W^s_{t+1} - W^s_t)\lambda] \leq 0;$$

equivalentemente,

$$E_{\mathbb{Q}}[\lambda E_{\mathbb{Q}}[(W^s_{t+1} - W^s_t)/F_t]] \leq 0.$$

para todo λ.

Nuevamente aplicando la definición de producto interno para dos variables se tiene que:

$$E_{\mathbb{Q}}[(W^s_{t+1} - W^s_t)/F_t] = 0,$$

o que

$$E_{\mathbb{Q}}[W^s_{t+1}/F_t] = W^s_t. \tag{3.23}$$

Si en el tiempo T tenemos λ, una variable aleatoria F_t medible y tomamos $\alpha_{T+1} = \gamma_T = \lambda, \beta_{T+1} = \delta_T = 0$, al reemplazar en (3.21), obtenemos

$$E_{\mathbb{Q}}[(Z^R_T, Z^S_T).(\lambda, 0) - (W^d_T, W^c_T, W^s_T).(\lambda, \lambda, 0)] \leq 0,$$

$$E_{\mathbb{Q}}[(Z^R_T - (W^d_T + W^c_T)\lambda] \leq 0,$$

para todo λ.

Entonces,

$$Z^R_T - (W^d_T + W^c_T) = 0,$$

$$Z^R_T = (W^d_T + W^c_T) > 0. \tag{3.24}$$

Finalmente, de manera similar si tenemos λ una variable aleatoria F_t medible y tomamos $\alpha_{T+1} = \gamma_T = 0, \beta_{T+1} = \delta_T = \lambda$, reemplazando en (3.21), obtenemos

$$E_{\mathbb{Q}}[(Z_T^R, Z_T^S).(0,\lambda) - (W_T^d, W_T^c, W_T^s).(0,0,\lambda)] \leq 0,$$

$$E_{\mathbb{Q}}[(Z_T^S - W_T^s)\lambda] \leq 0,$$

$$Z_T^S - W_T^s = 0,$$

$$Z_T^S = W_T^s > 0. \tag{3.25}$$

Ahora podemos definir el proceso $Z = (Z^R, Z^S)$ cuyo valor final es Z_T y que para $t \in \mathbb{T} - \{T\}$ viene dado por

$$Z_t^R = W_t^d + W_t^c,$$

y

$$Z_t^S = W_t^s.$$

Haciendo uso de las ecuaciones (3.23) y (3.25) podemos concluir que Z^S es una martingala estrictamente positiva bajo $\mathbb{Q}$. Por la ecuación (3.22) se muestra que existe un proceso predecible R tal que $R_{t+1}^d \leq R \leq R_{t+1}^c$ y que

$$E_{\mathbb{Q}}[(W_{t+1}^d R_{t+1}^d + W_{t+1}^c R_{t+1}^c)/F_t] = W_t^d + W_t^c = Z_t^R,$$

para $t \in \mathbb{T} - \{T\}$ con $R_0 = 1$. También concluimos por inducción sobre la ecuación (3.24) que Z^R es estrictamente positiva.

Finalmente, tomando $\alpha_{t+1} = 0$ y $\beta_{t+1} = 0$ para $t \in \mathbb{T} - \{T\}$ en la ecuación (3.20) tendriamos que

$$\vartheta_t(\gamma_t, \delta_t) \geq 0,$$

$$E_{\mathbb{Q}}[-W_t.(\gamma_t, \gamma_t, \delta_t)] \leq 0,$$

equivalentemente,

$$E_{\mathbb{Q}}[W_t.(\gamma_t, \gamma_t, \delta_t)] \geq 0,$$

y para $t = T$ en la desigualdad (3.21) quedarìa como

$$\varphi_T(\gamma_T, \delta_T) \geq 0,$$

$$E_{\mathbb{Q}}[-W_T.(\gamma_T, \gamma_T, \delta_T)] \leq 0;$$

equivalentemente,

$$E_{\mathbb{Q}}[W_T.(\gamma_T, \gamma_T, \delta_T)] \geq 0.$$

Luego, aplicando el Lema 3.4 implica que

$$S_t^b \leq \frac{Z_t^S}{Z_t^B} \leq S_t^a \text{ para } t \in \mathbb{T},$$

con lo cual se culmina la prueba.

$\boxdot$

Observación 3.6. *Dempster et al. (2006, Teorema 7.2) [4] muestra que este modelo es libre de arbitraje si y solo sí este contiene un sistema de valoración consistente.*

Proposición 3.7. *El modelo admite una terna martingala equivalente si y solo si éste admite un sistema de precios consistente.*

Demostración.
Primero, suponemos que existe un sistema de precios consistente $Z = (Z^R, Z^S)$ con un proceso predecible asociado R (y proceso deflator B). Definimos ahora una medida de probabilidad $\mathbb{P}$ equivalente a $\mathbb{Q}$ como

$$\mathbb{P}(\omega) = B_T(\omega) Z_T^R(\omega) \mathbb{Q}(\omega) \text{ para } \omega \in \Omega.$$

Por las condiciones iniciales de nuestro modelo de mercado $\mathbb{Q}(\omega) > 0$ para $\omega \in \Omega$, $B_T(\omega) > 0$ y $Z_T^R(\omega) > 0$ en razón del lema 3.4. Luego,

$$\mathbb{P}(\omega) = B_T(\omega) Z_T^R(\omega) \mathbb{Q}(\omega) > 0 \text{ para } \omega \in \Omega,$$

con lo cual se puede afirmar que

$$\mathbb{P}(A) > 0 \text{ para todo } A \in F_t \text{ y } t \in \mathbb{T}.$$

Definimos ahora el proceso

$$S_t := \frac{Z_t^S}{Z_t^R} \text{ para } t \in \mathbb{T}.$$

Demostraremos que $\frac{S_t}{B_t}$ es una martingala bajo $\mathbb{P}$. En efecto, sea $\omega \in \Omega$, el cual pertenece a un único evento $A \in F_t$ de la partición generadora de F_t. Entonces,

$$\begin{aligned}
E_{\mathbb{P}}[S_{t+1}/F_t] &= \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\sum_{\omega\in A} S_{t+1}(\omega)\mathbb{P}(\omega),\\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\sum_{\omega\in \Omega} S_{t+1}(\omega)B_T(\omega)Z_T^R(\omega)\mathbb{Q}(\omega),\\
&= \frac{\sum\limits_{\omega\in A} S_{t+1}(\omega)B_T(\omega)Z_T^R(\omega)\mathbb{Q}(\omega)}{\sum\limits_{\omega\in A} B_T(\omega)Z_T^R(\omega)\mathbb{Q}(\omega)},\\
&= \frac{\frac{1}{\mathbb{Q}(A)}\sum\limits_{\omega\in A} S_{t+1}B_T Z_T^R\mathbb{Q}(\omega)}{\frac{1}{\mathbb{Q}(A)}\sum\limits_{\omega\in A} B_T(\omega)Z_T^R(\omega)\mathbb{Q}(\omega)},
\end{aligned}$$

Así

$$E_{\mathbb{P}}[S_{t+1}/F_t] = \frac{E_{\mathbb{Q}}[S_{t+1}B_T Z_T^R/F_t]}{E_{\mathbb{Q}}[B_T Z_T^R/F_t]}.$$

Aplicando la propiedad de la torre sobre la esperanza condicional,

$$\begin{aligned}
E_{\mathbb{P}}[S_{t+1}/F_t] &= \frac{E_{\mathbb{Q}}[S_{t+1}E_{\mathbb{Q}}[B_T Z_T^R/F_{t+1}]/F_t]}{E_{\mathbb{Q}}[B_T Z_T^R/F_t]},\\
&= \frac{E_{\mathbb{Q}}[S_{t+1}B_{t+1}Z_{t+1}^R/F_t]}{E_{\mathbb{Q}}[B_T Z_T^R/F_t]}.
\end{aligned}$$

Como BZ^R es una martingala bajo la probabilidad $\mathbb{Q}$ y B_{t+1} es F_t medible, se tiene que

$$\begin{aligned}
E_{\mathbb{P}}[S_{t+1}/F_t] &= \frac{B_{t+1}E_{\mathbb{Q}}[S_{t+1}Z_{t+1}^R/F_t]}{B_t Z_t^R},\\
&= \frac{B_{t+1}E_{\mathbb{Q}}[Z_{t+1}^S/F_t]}{B_t Z_t^R}.
\end{aligned}$$

Además, Z^S es una martingala bajo $\mathbb{Q}$, con lo cual

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{P}}[S_{t+1}/F_t] &= \frac{B_{t+1}Z_t^S}{B_t Z_t^R}, \\ E_{\mathbb{P}}[\frac{S_{t+1}}{B_{t+1}}/F_t] &= \frac{S_t}{B_t}, \text{ para } t \in \mathbb{T} - \{T\}. \end{aligned}$$

El hecho que $(\mathbb{P}, S, R) \equiv (\mathbb{P}, S, B) \in \wp$ se sigue de las desigualdades (3.14) y (3.15).

Suponemos que $(\mathbb{P}, S, R) \equiv (\mathbb{P}, S, B) \in \wp$

Mostraremos la otra implicación en la proposición 3.7.

Sea $Z_T^R = \frac{1}{B_T}\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$, $Z_t^R := R_{t+1}E_{\mathbb{Q}}[Z_{t+1}^R/F_t]$ para $t \in \mathbb{T} - \{T\}$ y $Z_t^S := Z_t^R S_t$ para $t \in \mathbb{T}$.

Ahora, probaremos que BZ^Res una martingala bajo $\mathbb{Q}$. En efecto

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{Q}}[B_{t+1}Z_{t+1}^R/F_t] &= B_{t+1}E_{\mathbb{Q}}[Z_{t+1}^R/F_t], \\ &= \frac{B_{t+1}Z_t^R}{R_{t+1}}, \\ &= B_t Z_t^R. \end{aligned}$$

Luego, mostraremos que Z^S es una martingala con respecto a $\mathbb{Q}$ para $t \in \mathbb{T} - \{T\}$ con lo cual quedaría demostrado que el modelo asume un sistema de precios consistente. En efecto,

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{Q}}[Z_{t+1}^S/F_t] &= E_{\mathbb{Q}}[S_{t+1}Z_{t+1}^R/F_t], \\ &= E_{\mathbb{Q}}[\frac{S_{t+1}}{B_{t+1}}B_{t+1}Z_{t+1}^R/F_t]. \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad de la torre y la regla de Bayes (ver apéndice) para la esperanza condicional implica luego que

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{Q}}[Z_{t+1}^S/F_t] &= E_{\mathbb{Q}}[E_{\mathbb{Q}}[\frac{S_{t+1}}{B_{t+1}}B_{t+1}Z_{t+1}^R/F_{t+1}]/F_t], \\ &= E_{\mathbb{Q}}[\frac{S_{t+1}}{B_{t+1}}E_{\mathbb{Q}}[B_T Z_T^R/F_{t+1}]F_t], \\ &= E_{\mathbb{Q}}[\frac{S_{t+1}}{B_{t+1}}B_T Z_T^R/F_t], \\ &= E_{\mathbb{P}}[\frac{S_{t+1}}{B_{t+1}}/F_t]E_{\mathbb{Q}}[B_T Z_T^R/F_t], \end{aligned}$$

donde hemos usamos el hecho que $\frac{S_t}{B_t}$ es una martingala bajo $\mathbb{P}$ y BZ^Res una martingala bajo $\mathbb{Q}$. Por tanto

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{Q}}[Z_{t+1}^S/F_t] &= \frac{S_t}{B_t}E_{\mathbb{Q}}[B_T Z_T^R/F_t], \\ &= S_t Z_t^R, \\ &= Z_t^S. \end{aligned}$$

con lo cual culmina la prueba.

$\boxdot$

Haciendo un resumen de la estructura de cómo se ha desarrollado este capítulo; en la proposición 3.2 se probó una implicación del teorema fundamental de valoración de activos. Para probar la otra implicación del teorema principal, necesitamos de dos lemas previos. El lema 3.3 afirma que si el modelo no admite arbitraje entonces existe un factor de descuento consistente que denotaremos por Z_T. El lema 3.5 muestra que si el modelo admite un factor de descuento consistente entonces existe un sistema de valoración consistente que se denota con Z. Para la demostración del lema 3.5 se requiere de un resultado previo que se enuncia y demuestra en el lema 3.4. Para finalizar, en la proposición 3.6, se afirma que el modelo admite una terna martingala equivalente si y solo si admite un sistema de valoración consistente, con el cual culmina la prueba del teorema 3.1.

Capítulo 4

Apéndice

En el presente capítulo, introduciremos algunos conceptos básicos de análisis convexo, teoría de probabilidades, procesos estocásticos y optimización lineal que se usarán en el presente trabajo. Esta información fue extraida de [1], [2], [8], [9] y [15], descrita en la bibliografía.

Definición 4.1. *(Producto Interno)*

Llamaremos un espacio con producto interno a todo espacio vectorial V provisto de una aplicación

$$\langle , \rangle : V \to \mathbb{R}$$

llamada producto interno que cumple las siguientes condiciones:

1. $\langle x, x\rangle \geq 0$

2. $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

4. $\langle ax + y, z\rangle = a\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ *para* $a \in \mathbb{R}$.

Un espacio V con producto interno puede considerarse un espacio normado, mediante la introducción de la norma

$$||x|| := \langle x, x\rangle^{1/2},$$

para $x \in V$, que satisface:

1. $||x|| \geq 0$

2. $||x|| = 0$ si y solo si $x = 0$

3. $||ax|| = |a|||x||$

4. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

para cada x y y en V y cada $a \in \mathbb{R}$.

Si en la condición b) la palabra «sí y solo si» es reemplazada por «sí» pero las condiciones 1, 3 y 4 permanecen sin cambios, entonces la función $||x||$ es llamada una seminorma.

Uno de los espacios más usados en esta investigación lo constituye $\mathcal{L}^2(\Omega, F, \mathbb{Q})$ que por cuestiones de simplicidad lo denotaremos solamente con $\mathcal{L}^2$. Éste es definido como

$$\mathcal{L}^2 = \{X/X \text{ es una variable aleatoria } F \text{ medible tal que } E_{\mathbb{Q}}[X^2] < \infty\}.$$

Observamos que el espacio $\mathcal{L}^2$ introducido anteriormente fue definido con respecto a la medida de probabilidad $\mathbb{Q}$.

Si definimos el producto interno como

$$\langle X, Y \rangle := E_{\mathbb{Q}}[XY] \text{ para } X, Y \in \mathcal{L}^2,$$

entonces $\mathcal{L}^2$ con las operaciones puntuales usuales de adición de variables aleatorias y multiplicación por un escalar, resulta ser junto a $\langle , \rangle$ un espacio con producto interno. Sin embargo, el espacio $(\mathcal{L}^2, ||x||)$ no es normado porque falta que se cumpla la condición 2 (condición de suficiencia). Para lograr que se cumpla esta condición se recurre a las relaciones entre funciones medibles ($X \sim Y$ si y solo sí $\mathbb{Q}(X = Y) = 1$) a la cual se llama clases de equivalencia. Entonces, se obtiene una partición del espacio L^2 en clases de equivalencias. Cada una de estas clases de equivalencia será denotada con $[X]$, donde $X \in \mathcal{L}^2$. Así cada $Y \in \mathcal{L}^2$ que esté en $[X]$ cumple que $X = Y$ en $\mathbb{Q}$ casi en todo punto.

Definición 4.2. *(Espacios L^2)*

El espacio $L^2(\Omega, F, \mathbb{Q})$ es la colección de todas las clases de equivalencia $[X]$ que se obtienen por la relación $\sim$definida en $\mathcal{L}^2$

Debemos tener en cuenta que en estos espacios L^2 no se trabaja con funciones sino con clases de equivalencia, por lo cual las operaciones vectoriales se realizan entre clases. La suma de la clase de equivalencia de X y la clase de Y para cualquier $X, Y \in L^2$ se define como la clase de equivalencia de la función $X + Y$. Así mismo, el prducto de una constante a por la clase de equivalencia de X se define como la clase de equivalencia de la función aX.

Particularizando la definición de producto interno para un espacio de estados discreto y finito, $\Omega = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$caso sobre el cual estamos trabajando, este se puede expresar de la siguiente forma.

$$\langle X, Y\rangle := \sum_{w_i\in\Omega} X(w_i)Y(w_i)\mathbb{Q}(w_i).$$

Definición 4.3. *(Esperanza condicional a un evento)*

Sea S una variable aleatoria de valor esperado finito sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, F, \mathbb{Q})$ y sea $A \in F$ tal que $(\mathbb{Q}(A) \neq 0)$. La esperanza condicional de S dado A es definido como

$$E_{\mathbb{Q}}[S/A] = \frac{1}{\mathbb{Q}(A)}\sum_{w_i\in A} S(w_i)\mathbb{Q}(w_i).$$

Definición 4.4. *(Esperanza condicional a una σ-álgebra)*

Sea S una variable aleatoria integrable sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, F, \mathbb{Q})$ y consideremos una σ-álgebra G contenida en F. Entonces, la esperanza condicional de S dado G es definida como la variable aleatoria

$$E_{\mathbb{Q}}[S/G] : \Omega \to \mathbb{R},$$

tal que

1. *$E_{\mathbb{Q}}[S/A]$ es G-medible,*

2. *Para cualquier $A \in G$*

$$\int_A E_{\mathbb{Q}}[S/G]d\mathbb{Q} = \int_A Sd\mathbb{Q}.$$

La existencia y unicidad de la variable aleatoria $E_{\mathbb{Q}}[S/G]$ es garantizada por el teorema de Radón-Nykodin.

Ahora enunciaremos algunas de las propiedades que cumple la esperanza condicionada a una sigma álgebra.

Proposición 4.5. *Sean X, Y variables aleatorias integrables sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, F, \mathbb{Q})$. La esperanza condicionada a una sigma álgebra goza de las siguientes propiedades:*

1. *$E_{\mathbb{Q}}[X/\{\phi, \Omega\}] = E_{\mathbb{Q}}[X]$;*

2. *Si X es G-medible, entonces $E_{\mathbb{Q}}[X/G] = X$;*

3. *Si X y G son independientes entonces $E_{\mathbb{Q}}[X/G] = E_{\mathbb{Q}}[X]$;*

4. *$E_{\mathbb{Q}}[(X+Y)/G] = E_{\mathbb{Q}}[X/G] + E_{\mathbb{Q}}[Y/G]$;*

5. *Si $c \in \mathbb{R}$, entonces $E_{\mathbb{Q}}[cX/G] = cE_{\mathbb{Q}}[X/G]$;*

6. *Si Y es una variable aleatoria G-medible, entonces $E_{\mathbb{Q}}[YX/G] = YE_{\mathbb{Q}}[X/G]$;*

7. *Si $G_1 \subset G_2$ son σ-álgebras, entonces $E_{\mathbb{Q}}[E_{\mathbb{Q}}[X/G_2]/G_1] = E_{\mathbb{Q}}[X/G_1]$ (propiedad de la torre);*

8. *Si $X \leq Y$ entonces $E_{\mathbb{Q}}[X/G] \leq E_{\mathbb{Q}}[Y/G]$;*

9. *Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es convexa, entonces $\varphi(E_{\mathbb{Q}}[X/G]) \leq (E_{\mathbb{Q}}[\varphi(X)/G])$ (desigualdad de Jensen).*

Ahora desarrollaremos una caracterización de la esperanza condicionada a una σ-álgebra que será de aplicación en el desarrollo del presente trabajo.

Proposición 4.6. *Sea $(\Omega, F, \mathbb{Q})$ un espacio de probabilidad y sea X una variable aleatoria integrable. Suponemos que $G \subset F$ es una σ-álgebra generada por una partición $\eta = \{A_1, ..., A_k\}$ de Ω. Entonces, $E_{\mathbb{Q}}[X/G]$ es la variable aleatoria definida por*

$$E_{\mathbb{Q}}[S_t/G](w) = \begin{cases} c_1 & si\, w \in A_1, \\ c_2 & si\, w \in A_2, \\ \vdots & \vdots \\ c_k & si\, w \in A_k. \end{cases}$$

donde

$$c_i = \frac{1}{\mathbb{Q}(A_i)} \int_{A_i} X d\mathbb{Q} = \frac{1}{\mathbb{Q}(A_i)} \sum_{w_i \in A_i} X(w_i)\mathbb{Q}(w_i),$$

siempre que $\mathbb{Q}(A_i) > 0$.

Aclaramos que dos medidas de probabilidad $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{P}$ son equivalentes si y solo sí $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{P}$ tienen los mismos conjuntos de medida cero.

Entonces, la densidad $Z := \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$ es una variable aleatoria estrictamente positiva con $E_{\mathbb{Q}}[Z] = 1$. Consecuentemente, dada una variable aleatoria estrictamente positiva Z con $E_{\mathbb{Q}}[Z] = 1$, nosotros podemos definir una medida de probabilidad equivalente $\mathbb{P} := Z\mathbb{Q}$ con esperanza asociada $E_{\mathbb{P}}$ definida por

$$E_{\mathbb{P}}[Y] := E_{\mathbb{Q}}[YZ],$$

para toda variable aleatoria Y con YZ integrable.

En particular, la medida de probabilidad $\mathbb{P}$ es definida por

$$\mathbb{P}(A) := E_{\mathbb{P}}[1_A] = E_{\mathbb{Q}}[Z1_A],$$

para todo $A \in F$.

Finalmente, recalcamos la regla de Bayes para la esperanza condicional bajo $\mathbb{P}$ como

$$E_{\mathbb{P}}[Y/F_t] := \frac{E_{\mathbb{Q}}[YZ/F_t]}{E_{\mathbb{Q}}[Z/F_t]},$$

para todo Y con YZ integrable.

Esto es directamente justificable al probar que la variable aleatoria F_t medible $\xi := \frac{E_{\mathbb{Q}}[YZ/F_t]}{E_{\mathbb{Q}}[Z/F_t]}$ satisface las condiciones

$$E_{\mathbb{P}}[Y1_A] := E_{\mathbb{P}}[\xi 1_A],$$

para todo $A \in F_t$.

Ahora detallaremos algunos de los conceptos sobre análisis convexo. Mayores detalles se encuentran en [1], [8] y [9].

Definición 4.7. *(Conjunto Afín)*

Un subconjunto M de $\mathbb{R}^n$ es llamado conjunto afín si para todo $x, y \in M$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in M.$$

Observación 4.8. *Todo conjunto afín $n-1$ dimensional de $\mathbb{R}^n$ es llamado un hiperplano.*

Teorema 4.9. *Dado $\beta \in \mathbb{R}$ y un vector distinto de cero $b \in \mathbb{R}^n$, el conjunto $H = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle x, b\rangle = \beta\}$ es un hiperplano en $\mathbb{R}^n$.*

Definición 4.10. *(Convexo)*

Un subconjunto C de $\mathbb{R}^n$ es llamado convexo sí

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in C,$$

con $x, y \in C$ y $0 < \lambda < 1$.

Observación 4.11. *Todos los conjuntos afines son convexos incluyendo el vacio y* $\mathbb{R}$ *pero no necesariamente sucede lo contrario.*

Definición 4.12. *(Semi-espacio)*

Para cualquier vector diferente de cero $b \in \mathbb{R}^n$ *y* $\beta \in \mathbb{R}$*; los conjuntos* $\{x \in \mathbb{R}^n / \langle x, b\rangle < \beta\}$ *y* $\{x \in \mathbb{R}^n / \langle x, b\rangle \geq \beta\}$ *son llamados el semi-espacio mitad abierto y cerrado, respectivamente.*

Observación 4.13. *Todos los semi-espacios son convexos.*

Corolario 4.14. *Sea* $b \in \mathbb{R}^n$ *y* $\beta \in \mathbb{R}$ *para* $i \in I$*, donde* I *es un conjunto arbitrario de índices. Entonces, el conjunto* $C = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle x_i, b_i\rangle \leq \beta_i, \forall i \in I\}$ *es convexo.*

Definición 4.15. *Un conjunto que puede ser expresado como la intersección finita de semi-espacios es cerrado en* $\mathbb{R}^n$*.*

Definición 4.16. *(Combinación Convexa)*

El vector $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ *es llamada combinación convexa de* $x_1, \ldots, x_n$ *si los coeficientes* $\lambda_i \geq 0$ *para* $i = 1, \ldots, n$ *satisfacen* $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$*.*

Teorema 4.17. *(Caracterización de conjunto Convexo)*

Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ *es convexo si y solo si éste contiene a todas las combinaciones convexas de sus elementos.*

Definición 4.18. *(Cápsula Convexa) El recubrimiento convexo de un conjunto* S *de* $\mathbb{R}^n$*, es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a* S *y es denotado por* $conv(S)$*.*

Teorema 4.19. *Para cualquier subconjunto* S *de* $\mathbb{R}^n$*,* $conv(S)$ *consiste de todas las combinaciones convexas de elementos de* S*.*

Definición 4.20. *(Cono) Un subconjunto* K *de* $\mathbb{R}^n$ *es llamado un cono si éste es cerrado bajo la multiplicación escalar positiva; es decir,* $\lambda x \in K$ *cuando* $x \in K$ *y* $\lambda > 0$*.*

Un cono convexo es un cono que es un conjunto convexo

Observación 4.21. *Los semi-espacios de* $\mathbb{R}^n$ *son en particular conos convexos.*

Teorema 4.22. *La intersección de una colección arbitraria de conos convexos es un cono convexo.*

Corolario 4.23. *Sea $b_i \in \mathbb{R}^n$ para $i \in I$, donde I es un conjunto arbitrario de índices, entonces, el conjunto $K = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle x_i, b_i \rangle \leq 0, \forall i \in I\}$ es un cono convexo.*

Teorema 4.24. *Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es convexo si y solo si es cerrado bajo la adición y multiplicación por un escalar positivo.*

Definición 4.25. *(Conjunto Poliedral) Un subconjunto C de $\mathbb{R}^n$ es llamado un conjunto poliedral si éste es no vacío y tiene la forma $C = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle x_i, b_i \rangle \leq \beta_i \ i = 1, ..., m\}$ donde $b_i \in \mathbb{R}^n$ y β_i son escalares.*

Observación 4.26. *Todo conjunto afín es poliedral incluyendo el vacio y $\mathbb{R}^n$.*

Proposición 4.27. *Un conjunto convexo poliedral es un cono sí y solo si éste puede ser expresado como la intersección de una colección finita de semi-espacios cerrados, cuyos hiperplanos soporte pasan por el origen.*

Observación 4.28. *Un cono convexo poliedral es el conjunto solución de algún número finito de inecuaciones lineales homogéneas.*

Teorema 4.29. *Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal, entonces TC es un cono convexo poliedral en $\mathbb{R}^m$ para cada cono convexo poliedral C en $\mathbb{R}^n$ y $T^{-1}D$ es un cono convexo poliedral en $\mathbb{R}^n$ para cada cono convexo poliedral D en $\mathbb{R}^m$.*

Teorema 4.30. *(Hiperplano separador) Sean C_1 y C_2 conjuntos no vacíos de $\mathbb{R}^n$. Existe un hiperplano separando C_1 y C_2 si y solo si existe un vector b tal que $inf\{\langle x, b \rangle / x \in C_1\} \geq sup\{\langle x, b \rangle / x \in C_2\}$. Existe un hiperplano que separa fuertemente C_1 y C_2 si y solo si existe un vector b tal que $inf\{\langle x, b \rangle / x \in C_1\} > sup\{\langle x, b \rangle / x \in C_2\}$.*

Corolario 4.31. *Sean C_1 y C_2 conjuntos convexos no vacíos en $\mathbb{R}^n$ cuyas clausuras son disjuntas. Si alguno de los dos conjuntos es acotado, entonces existe un hiperplano que separa fuertemente C_1 y C_2.*

Definición 4.32. *Un punto x es interior al conjunto C si para todo > 0 exite una bola abierta contenida en C*

Teorema 4.33. *Sean A y B conjuntos convexos en un espacio vectorial X, tal que B tiene un punto interior y A no contiene puntos interiores de B entonces, existe un hiperplano cerrado H separando A y B; es decir, existe $x^* \in X^*$ tal que*

$$\sup_{x \in B} \langle x, x^* \rangle \leq \inf_{x \in A} \langle x, x^* \rangle.$$

La demostración de este teorema se encuentra en [9]

En otras palabras, A y B están en dos semiespacios opuestos.

Lema 4.34. *El conjunto*

$$\mathcal{L}^+ = conv\{\{1, \theta, \theta\} \cup \{(0, 1_{\{w\}}, \theta)/w \in \Omega\} \cup \{(0, \theta, 1_{\{w\}})/w \in \Omega\}\},$$

sobre $\mathbb{R}^{2n+1}$ *al cual denominaremos un Simplex, es un conjunto cerrado y acotado.*

Para aclarar la construcción del conjunto $\mathcal{L}^+$, desarrollaremos un ejemplo con $n = 2$. Esto implica que $\theta = (0, 0)$ y $\mathbb{R}^{2n+1} = \mathbb{R}^5$, $\Omega = \{w_1, w_2\}$, luego

$$1_{\{w_i\}} : \Omega \to \mathbb{R}^2$$

es tal que:

$$w \to \{ \begin{array}{ll} 1 & w = w_i \\ 0 & w \neq w_i \end{array},$$

por lo que podemos hacer la identificación $1_{\{w_1\}} = (1, 0)$ y $1_{\{w_2\}} = (0, 1)$.

Luego, como $n = 2$, los elementos generadores de $\mathcal{L}^+$serán

$$(1, \theta, \theta) \equiv \{(1, 0, 0, 0, 0)\},$$

$$(0, 1_{\{w_1\}}, \theta) \equiv \{(0, 1, 0, 0, 0)\},$$

$$(0, 1_{\{w_2\}}, \theta) \equiv \{(0, 0, 1, 0, 0)\},$$

$$(0, \theta, 1_{\{w_1\}}) \equiv \{(0, 0, 0, 1, 0)\},$$

$$(0, \theta, 1_{\{w_2\}}) \equiv \{(0, 0, 0, 0, 1)\},$$

$$\mathcal{L}^+ = \text{conv}\{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}.$$

Entonces, el conjunto $\mathcal{L}^+$ es el simplex que fue generado por la base canónica de $\mathbb{R}^5$.

Una representacion gráfica del Simplex para $n = 1$ se muestra en la Figura 4.1

Demostración.

Probaremos primero que este es un conjunto cerrado , para lo cual daremos una sucesión $(\alpha_1^k, ..., \alpha_{2n+1}^k)$ que pertenece a $\mathcal{L}^+$, y mostraremos que el límite de ella está en $\mathcal{L}^+$

Dado que el conjunto $\mathcal{L}^+$ es convexo y sus elementos son generados por la base canónica de $\mathbb{R}^{2n+1}$, se tiene que

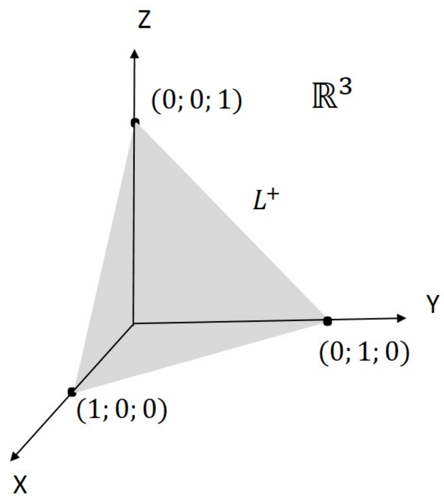

Figura 4.1: Simplex

$$\alpha_i^k \geq 0 \text{ para } i = 1, ..., 2n+1 \text{ y } \sum_{i=1}^{2n+1} \alpha_i^k = 1.$$

Luego, aplicando límite cuando k tiende al infinito a cada expresión tenemos que

$$\text{lím}\alpha_i^k \geq 0 \text{ para } i = 1, ..., 2n+1 \text{ y } \lim(\sum_{i=1}^{2n+1} \alpha_i^k) = 1.$$

Posteriormente desarrollamos el límite de la suma como la suma de límites

$$\text{lím}\,\alpha_i^k \geq 0 \text{ para } i = 1, ..., 2n+1 \text{ y lím } \alpha_1^k + ... + \text{lím}\alpha_{2n+1}^k = 1,$$

con lo cual mostramos que el límite de $(\alpha_1^k, ..., \alpha_{2n+1}^k)$ está en $\mathcal{L}^+$

Ahora probaremos que es acotado, sea $\alpha' = (\alpha_1, ..., \alpha_{2n+1})$ un elemento de $\mathcal{L}^+$ luego

$$\alpha_1 + ... + \alpha_{2n+1} = 1, \; \alpha_i \geq 0 \text{ para } i = 1, ..., 2n+1,$$

$$\alpha_1^2 + ... + \alpha_{2n+1}^2 \leq (\alpha_1 + ... + \alpha_{2n+1})^2 = 1 \text{ ya que } \alpha_i \alpha_j \geq 0 \text{ para cada } i = 1, ..., 2n+1;$$

luego

$$|\alpha'| \leq 1 \text{ para } \alpha' \in \mathcal{L}^+.$$

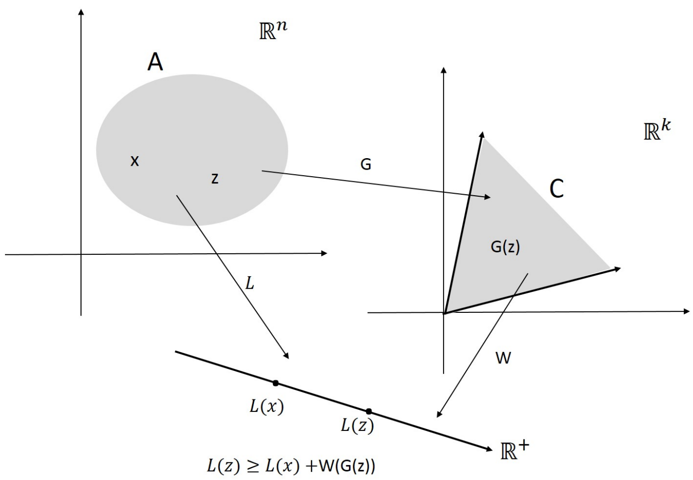

Figura 4.2: Conjuntos convexos

$\boxdot$

Ahora se enunciará un lema que se aplica en la demostración del lema 3.5 del capítulo 3 y por ello se realiza su demostración.

Lema 4.35. *Sean $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ y $C \subseteq \mathbb{R}^k$ conjuntos convexos poliedrales, tal que C es un cono y sean $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ funciones afines. Si existe un elemento $z \in \mathcal{A}$ satisfaciendo que $G(z) \in C$ y $L(z) \geq L(x)$ para todo $x \in \mathcal{A}$, entonces existe un funcional lineal $W : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^+$ con $W(G(z)) \geq 0$ para todo $c \in C$ tal que*

$$L(z) \geq L(x) + W(G(x)), \tag{4.1}$$

para todo $x \in \mathcal{A}$ y z tal que $W(G(z)) = 0$

Demostración.
La demostración que presentamos a continuación es una versión adaptada de la que se desarrolla en el libro de Luenberger (1969, teorema 8.3.1) y Rockafellar (1997, corolario 28.3.1) a las que el autor hace referencia. La idea gráfica del lema se muestra en la Figura 4.2.

En el espacio $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^k$ definimos los siguientes conjuntos:

$$A = \{(r, z) \,|\, r \geq -L(x) \,\text{y}\, z \geq G(x) \,\text{para algún}\, x \in \mathcal{A}\},$$

$$B = \{(r, z) \,|\, r \leq -L(z) \,\text{y}\, z \leq \theta\}.$$

Primero, probaremos que A es un conjunto convexo. Sean los elementos $(r_1, z_1), (r_2, z_2) \in A$, luego por definición del conjunto A tenemos que

$$r_1 \geq -L(x_1) \text{ y } z_1 \geq G(x_1),$$

para algún $x_1 \in \mathcal{A}$ y

$$r_2 \geq -L(x_2) \, \text{y} \, z_2 \geq G(x_2),$$

para algún $x_2 \in \mathcal{A}$. Luego, multiplicamos por $\lambda, (1-\lambda) \in [0,1]$ a cada desigualdad anterior para luego sumarlas, obtenemos

$$\lambda r_1 + (1-\lambda) r_2 \geq -\lambda L(x_1) - (1-\lambda) L(x_2);$$

Factorizando el signo negativo del extremo derecho de la desigualdad

$$\lambda r_1 + (1-\lambda) r_2 \geq -(\lambda L(x_1) + (1-\lambda) L(x_2));$$

de la misma forma operamos con la otra desigualdad

$$\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 \geq \lambda G(x_1) + (1-\lambda) G(x_2).$$

Por ser $L(x)$ y $G(x)$ funciones afines implica que son funciones convexas (demostración que se encuentra en el apéndice del trabajo); además, $\mathcal{A}$ es un conjunto convexo por hipótesis, por lo cual tenemos que

$$\lambda r_1 + (1-\lambda) r_2 \geq -L(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2),$$
$$\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 \geq G(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2),$$

para algún $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in \mathcal{A}$, luego

$$(\lambda r_1 + (1-\lambda) r_2, \lambda z_1 + (1-\lambda) z_2) \in A,$$

con lo cual concluye la demostración.

Ahora probaremos que B es un conjunto convexo.

Sean dos elementos $(r_1, z_1), (r_2, z_2) \in B$ entonces

$$r_1 \leq -L(z) \text{ y } z_1 \leq \theta,$$

$$r_2 \leq -L(z) \text{ y } z_2 \leq \theta.$$

Luego de la misma forma como se trabajó el caso anterior obtenemos que

$$\lambda r_1 + (1-\lambda) r_2 \leq -\lambda L(z) - (1-\lambda) L(z) = -L(z),$$

$$\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 \leq \lambda \theta + (1-\lambda)\theta = \theta,$$

lo cual muestra que

$$(\lambda r_1 + (1-\lambda) r_2, \lambda z_1 + (1-\lambda) z_2) \in B,$$

por lo tanto, A y B son conjuntos convexos.

Ahora probaremos que A no contiene puntos interiores de B.

Sea $(r_p, z_p) \in A \cap B$ entonces

$$r_p \geq -L(x_1) \text{ y } z_p \geq G(x_1), \tag{4.2}$$

para algún $x_1 \in \Omega$,

$$r_p \leq -L(z) \text{ y } z_p \leq \theta; \tag{4.3}$$

De las desigualdades 4.2 y 4.3 obtenemos que

$$r_p = -L(z) \text{ y } z_p = \theta$$

y el único punto de $A \cap B$, es $(-L(z), \theta)$ y está en la frontera de B el cual no es un punto interior de B. Como $N = -C$ contiene un punto interior, $G(x_1) < \theta$ es un punto interior de N. Si elegimos un $r < -L(z)$, entonces $(r, G(x_1))$ es un punto interior de B. Ahora aplicamos el teorema del hiperplano separador (Luenberger), que se menciona en el apéndice (Teorema 4.33), el cual garantiza que existe un $W_0 = (r_0, z_0^*)$ no nulo tal que

$$\sup_{(r_2,z_2)\in B} \langle (r,z), W_0 \rangle \leq \inf_{(r_1,z_1)\in A} \langle (r,z), W_0 \rangle.$$

Pero el supremo de un conjunto es mayor que todos sus elementos y el ínfimo es menor que todos ellos, con lo cual obtenemos

$$\langle (r_2, z_2), (r_0, z_0^*) \rangle \leq \langle (r_1, z_1), (r_0, z_0^*) \rangle,$$

$$r_2 r_0 + \langle z_2, z_0^* \rangle \leq r_1 r_0 + \langle z_1, z_0^* \rangle,$$

para todo $(r_1, z_1) \in A$ y $(r_2, z_2) \in B$; por la forma como se ha definido B esto muestra inmediatamente que $W_0 \geq \theta$ o equivalentemente, $r_0 \geq 0$ y $z_0^* \geq \theta$.

Ahora mostraremos que $r_0 > 0$. El punto $(-L(z), \theta)$ esta en B, de aquí tenemos que

$$-L(z) r_0 \leq r.r_0 + \langle z, z_0^* \rangle,$$

para todo $(r, z) \in A$.

Si $r_0 = 0$ esto muestra en particular que $\langle G(x_1), z_0^* \rangle \geq 0$ y que $z_0^* \neq \theta$; sin embargo, siendo $G(x_1)$ un punto interior de N y $z_0^* \geq \theta$, esto muestra inmediatamente que $\langle G((x_1), z_0^* \rangle < 0$, con lo cual hemos generado una contradicción. Por lo tanto, $r_0 > 0$.

Sin pérdida de generalidad, se puede asumir que $r_0 = 1$ y siendo el punto $(-L(z), \theta)$ perteneciente a A y B , tenemos que

$$-L(z) \leq r + \langle z, z_0^* \rangle$$

para $(r, z) \in A$.

Pero como el siguiente conjunto $D = \{(-L(x), G(x)) \,|\, \text{para algún}\, x \in \mathcal{A}\} \subset A$ entonces

$$-L(z) \leq -L(x) - \langle G((x), z_0^* \rangle,$$

$$-L(z) \leq -L(x) - \langle G(x), z_0^* \rangle \leq -L(x),$$

para todo $x \in \mathcal{A}$,

$$-L(z) \leq -L(x),$$

para todo $x \in \mathcal{A}$ y $G(x) \leq \theta$.

Con lo cual la primera parte del lema esta probado. Como existe un $z_0 \in A$ tal que $G(z_0) \leq \theta$, $-L(z) = -L(z_0)$ entonces reemplazando en la ecuación 4.1 tenemos

$$-L(z) = -L(z_0) - \langle G((z_0), z_0^* \rangle,$$

$$0 = \langle G((z_0), z_0^* \rangle,$$

lo cual completa la prueba.

$\boxdot$

Lema 4.36. *Sea* $b \in \mathbb{R}^n$ *y* K *un cono convexo poliedral en* $\mathbb{R}^n$, *si* $\alpha = \sup_{x \in K} \langle b, x\rangle < \infty$ *entonces* $\alpha = 0$

Demostración.
Realizaremos una prueba por reducción al absurdo suponiendo que $0 < \alpha < \infty$. Entonces existe $x_0 \in K$ tal que $0 < \langle b, x_0\rangle =: y_0$. Luego, como K es un cono, tenemos que $x_n = nx_0 \in K$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $\langle b, x_n\rangle = n\langle b, x_0\rangle = ny_0$. Pero esta sucesión $\{ny_0\}$ no es acotada. con lo cual tenemos una contradicción.

$\boxdot$

Teorema 4.37. *(Minkowski - Weyl)*
Un cono es poliedral, si y solo si, éste es finitamente generado.

Definición 4.38. *(Regla de Bayes para esperanza condicional)*
Sea X *una variable aleatoria,* F *una* σ*-álgebra,* $\mathbb{P}$ *y* $\mathbb{Q}$ *son dos medidas de probabilidad equivalentes sobre el espacio muestral* Ω, *entonces*

$$E_{\mathbb{Q}}\left[X/F\right] E_{\mathbb{P}}\left[f/F\right] = E_{\mathbb{P}}\left[Xf/F\right]$$

donde $f = \dfrac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$ *es la derivad de Radon-Nokodin*

Bibliografía

[1] Beltran, J.(2006). *Mercado Financiero Discreto.* Notas del curso Elementos Cuantitativos en Finanzas, Maestría en Matemáticas Aplicadas, PUCP.

[2] Bertsekas, D. P. (2003). *Convex Analysis and Optimization*, Ed. Athena Scientific, Belmont, Mass.

[3] Brzezniak y Zdzislaw (1999). *Basic Stochastic Processes:A course Through Exercises*, Ed. Springer, London.

[4] Dempster, M. A. H., Evstigneev, I. V. and Tasar, M. I. (2006). Asset pricing and hedging in financial markets with transacction costs: An approach based on the von Neumann-Gale model, Ann Finance 2, 327-355.

[5] Harrison, J. M. and Pliska, S. R. (1981). *Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous tradin*, Stoch. Process. Appl. 11, 215-260.

[6] Jouini, E. and Kallal, H. (1995a). *Arbitrage in securities markets with shortsales constraints*, Math. Finance 5, 197 232.

[7] Jouini, E. and Kallal, H. (1995b). *Martingales and arbitrage in securities markets with transaction costs*, J. Econom. Theory 66, 178 197.

[8] Luemberger, D. G. (1969). *Optimization by Vector Space Methods* Ed. John Wiley, New York.

[9] Rockafellar, R. Tyrrell. (1970). *Convex Analysis*, Ed. Princeton University Press, Princeton.

[10] Roux, A, Tokarz, K. and Zastawniak, T.(2004). *European Options under Proportional Transaction Costs: An Algorithmic Approach to Pricing and Hedging.* Department of Mathematics, University of York Heslington, York.

[11] Roux, A. (2007). *The Fundamental Theorem of Asset Pricing Under Proportional Transaction Costs.* arXiv:0710.2758v1 [q-fm.PR] 15 Oct. 2007.

[12] Roux, A. (2011). *The Fundamental Theorem of Asset Pricing in the Presence of bid-ask and interest rate spread.* Journal of Mathematical Economics 47 159-63.

[13] Schachermayer, W. (2004). *The Fundamental Theorem of Asset Pricing under Proportional Transaction Costs in Finite Discrete Time.* Mathematical Finance 14(1), 19-48.

[14] Touzy, N. (2007). *No Arbitrage Theory For Derivatives Pricing.* Ecole Polytechnique Paris Departament de Mathematiques Appliquees.

[15] Valdivieso, L. Lugon, A. (2009). *La Esperanza Condicional en Espacios de Probabilidad Finitos.* Reporte de investigación N° 1 PUCP.