

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Escuela de Posgrado



Modelo de Respuesta Graduada Logístico de Exponente Positivo
Recíproco aplicado a la medición de la convivencia escolar

Tesis para obtener el grado académico de Maestro en Estadística que presenta:

Wilmer Justo Hernández Cabrera

Asesor:

Mg. Enver Gerald Tarazona Vargas

Lima, 2025

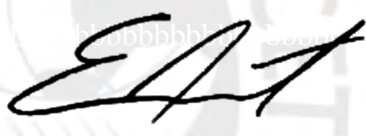
Informe de Similitud

Yo, Mg. Enver Gerald Tarazona Vargas, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor de la tesis titulado Modelo de Respuesta Graduada Logístico de Exponente Positivo Recíproco aplicado a la medición de la convivencia escolar, del autor Wilmer Justo Hernández Cabrera, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 3 %. Así lo consigna el reporte de similitus emitido por el software Turnitin el 25/11/2024.
- He revisado con detalle dicho reporte de la tesis y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y Fecha:

Lima, 15 de Enero del 2025

Apellidos y nombres del asesor: Tarazona Vargas, Enver Gerald	
DNI: 40125923	Firma 
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2415-7649	

Dedicatoria

A Rosmery Medina y Yany Lizana, por ser mi apoyo y parte importante en el logro de todos mis objetivos.

Dedico esta tesis a mis padres, Justo y Matilde por darme los cimientos para poder conseguir todo lo que me propongo.

A mi hermano, Melvin Hernández porque juntos enfrentamos muchas etapas en la vida y logramos salir triunfantes.

A Wilmer de 12 años, que desde ese momento supo que tendría que salir de Ayacucho para lograr ser el profesional que soñó, creo que estás orgulloso de lo que estamos consiguiendo en la vida.

A Kira y Oddy por darme muchas alegrías.



Agradecimiento

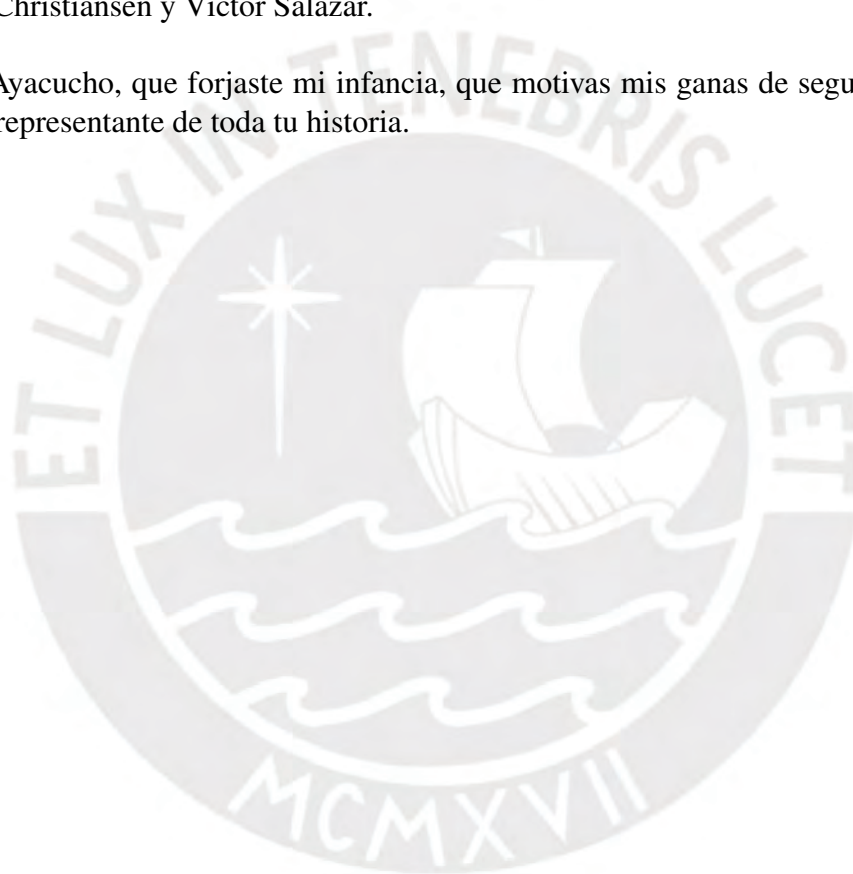
Agradezco al profesor Enver Tarazona por sus enseñanzas, su paciencia y la guía constante en todo el proceso del desarrollo de la presente tesis.

A los docentes de la maestría en Estadística de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP): Dr. Cristian Bayes, Dra. Zaida Quiroz y Dr. Luis Valdivieso por sus observaciones y comentarios.

A la Dra. Giovanna Moreano por confiar en mis capacidades en el ámbito profesional y motivarme en el camino de la investigación en educación.

A mis compañeros de trabajo y amigos de toda la vida, especialmente a Henry Guillen, Sadith Ramos, Andrés Christiansen y Víctor Salazar.

A mi tierra Ayacucho, que forjaste mi infancia, que motivas mis ganas de seguir creciendo para poder ser digno representante de toda tu historia.



Resumen

Los diferentes modelos politómicos de la Teoría de Respuesta al Ítem (TRI) describen la relación que existe entre las personas evaluadas y las preguntas de un cuestionario. Para estos modelos, cada pregunta (ítem) presenta más de dos categorías de respuesta. Entre los diferentes tipos de modelos de teoría de respuesta al ítem politómicos, encontramos a los modelos de respuesta graduada (GRM, por sus siglas en inglés). Los modelos GRM, que fueron propuestos originalmente por Samejima (2016), están diseñados para ser aplicados en ítems politómicos con categorías de respuesta ordinales.

En esta tesis, se describe de manera general el modelo de respuesta graduada logístico con 2 parámetros (2PL-GRM), sus principales características y propiedades. Además, se muestra de manera específica al modelo de respuesta graduada logística de exponente positivo recíproco (RLPE-GRM). El modelo RLPE-GRM es un modelo asimétrico que surge de incorporar un parámetro que penaliza la alta frecuencia de respuestas en las categorías más altas de cada ítem. Este parámetro regula la curvatura de las funciones de respuesta a las etapas de los ítems. La implementación de la estimación del modelo RLPE-GRM se llevó a cabo mediante inferencia bayesiana, específicamente con los métodos Montecarlo con Cadenas de Markov(MCMC), utilizando los programas R y WinBUGS.

Después de describir las principales características y propiedades del modelo RLPE-GRM y realizar la implementación mediante la inferencia bayesiana, se realizó un estudio de simulación, cuya finalidad del estudio de simulación fue determinar el grado de precisión en la recuperación de los parámetros del modelo RLPE-GRM. En este proceso de simulación se obtuvieron resultados apropiados en los indicadores estadísticos que nos brindan información de la precisión del modelo.

Sabiendo que el proceso de simulación brindó resultados óptimos, se realizó la aplicación con los modelos 2PL-GRM y RLPE-GRM. Los modelos fueron aplicados a datos obtenidos de un instrumento de evaluación diseñado para medir la convivencia escolar, elaborado por el Ministerio de Educación del Perú. Este cuestionario contó con 31 ítems que recogieron información sobre aspectos relacionados a la convivencia escolar. Estos ítems están divididos en tres dimensiones. La primera dimensión refleja la percepción de los estudiantes sobre las formas de violencia escolar. La segunda dimensión aborda el nivel de cumplimiento de las normas, mientras que la tercera dimensión se enfoca en la calidad de las relaciones interpersonales entre los miembros de la comunidad educativa.

En los datos de este cuestionario, se observó que en más del 70 % de las respuestas a los ítems relacionados a la tercera dimensión (calidad de las relaciones interpersonales en la escuela) se marcaron las categorías más altas (“De acuerdo” o “Muy de acuerdo”) de cada uno de los ítems. Por lo tanto, la aplicación de los modelos RLPE-GRM y 2PL-GRM se trabajará con los 7 ítems pertenecientes a esta dimensión, ya que teóricamente el modelo RLPE-GRM ajusta mejor a estos datos en comparación con el modelo 2PL-GRM. Después de implementar la aplicación de los modelos RLPE-GRM y 2PL-GRM, se procedió a realizar la comparación entre ambos modelos y se observó que el modelo RLPE-GRM tiene un mejor ajuste a los datos.

Tanto en la simulación como en la aplicación, el modelo RLPE-GRM necesita un mayor tiempo para poder converger correctamente. Sin embargo, su ventaja radica en el mejor ajuste del modelo cuando los datos presentan una alta frecuencia de respuestas en las categorías más altas de cada ítem en comparación con otros modelos. Finalmente, se recomienda llevar a cabo más estudios de simulación con el fin de evaluar diversos escenarios para la inferencia del modelo RLPE-GRM.

Abstract

The different polytomous models of Item Response Theory (IRT) describe the relationship between the individuals being assessed and the questionnaire's items. In these models, each question (item) presents more than two response categories. Among the various types of polytomous IRT models, we find the graded response models (GRM). Originally proposed by Samejima (2016), GRMs are designed to be applied to polytomous items with ordinal response categories.

This thesis provides a general description of the 2-parameter logistic graded response model (2PL-GRM), along with its main characteristics and properties. Furthermore, it specifically introduces the reciprocal logistic positive exponent graded response model (RLPE-GRM). The RLPE-GRM is an asymmetric model that arises from the incorporation of a parameter that penalizes high-frequency responses in the higher categories of each item. This parameter regulates the curvature of the response functions across item stages. The implementation of the estimation of the RLPE-GRM was carried out through Bayesian inference, specifically using Markov chain Monte Carlo (MCMC) methods, employing R and WinBUGS programs.

After describing the main characteristics and properties of the RLPE-GRM model and implementing the Bayesian inference, a simulation study was conducted. The purpose of the simulation was to determine the accuracy of recovering the parameters of the RLPE-GRM model. The results obtained from this simulation were appropriate, based on statistical indicators that provide information about the model's accuracy.

Knowing that the simulation process provided optimal results, the application of the 2PL-GRM and RLPE-GRM models was carried out. These models were applied to data obtained from an evaluation tool designed to measure school coexistence, developed by the Ministry of Education of Peru. The questionnaire contained 31 items that collected information on various aspects related to school coexistence. These items are divided into three dimensions. The first dimension reflects students' perceptions of forms of school violence. The second dimension addresses the level of adherence to rules, while the third dimension focuses on the quality of interpersonal relationships within the educational community.

In the data from this questionnaire, it was observed that more than 70 % of responses to items related to the third dimension (quality of interpersonal relationships in school) marked the highest categories ("Agree" or "Strongly Agree") for each item. Therefore, the application of the RLPE-GRM and 2PL-GRM models was carried out using the seven items from this dimension, as the RLPE-GRM model theoretically fits better to these data compared to the 2PL-GRM model. After implementing both the RLPE-GRM and 2PL-GRM models, a comparison was made, and it was observed that the RLPE-GRM model provided a better fit to the data.

Both in the simulation and the application, the RLPE-GRM model required more time to converge correctly. However, its advantage lies in the better fit it provides when data show a high frequency of responses in the higher categories of each item, compared to other models. Finally, further simulation studies are recommended to assess various scenarios for the inference of the RLPE-GRM model.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Planteamiento y justificación del tema	1
1.2. Objetivos de la tesis	2
2. Modelo de Respuesta Graduada Logístico y RLPE	3
2.1. Modelo de respuesta graduada	3
2.1.1. Definición del modelo	3
2.1.2. Función de enlace	4
2.2. Modelo de respuesta graduada logístico de dos parámetros (2PL-GRM)	5
2.2.1. Definición del modelo	5
2.3. Modelo de respuesta graduada logístico de exponente positivo recíproco (RLPE-GRM)	7
2.3.1. Definición del modelo	7
2.3.2. Características del modelo RLPE-GRM	9
2.3.3. Función de información de Fisher	12
3. Estimación bayesiana del modelo de respuesta graduada	17
3.1. Estimación bayesiana del modelo de respuesta graduada logístico de exponente positivo recíproco (RLPE-GRM)	17
3.1.1. Función de verosimilitud para el modelo RLPE-GRM	17
3.1.2. Distribuciones a priori en el modelo RLPE-GRM	18
3.1.3. Distribución a posteriori de los parámetros del modelo RLPE-GRM	19
3.1.4. Inferencia bayesiana del modelo RLPE-GRM	19
3.2. Implementación computacional	20
4. Estudio de Simulación	21
4.1. Objetivos	21
4.2. Algoritmo para simular los datos	21
4.3. Método para estimar los parámetros	21
4.4. Criterio para evaluar la simulación	22
4.5. Escenarios	22
4.6. Resultados	22
5. Aplicación	30
5.1. Introducción	30
5.2. Instrumentos de medición	32
5.3. Diseño muestral	32
5.4. Evidencias de validez y fiabilidad del instrumento	32
5.4.1. Validez del instrumento	32
5.4.2. Fiabilidad del instrumento	33

5.5. Estimación de los parámetros mediante el modelo 2PL-GRM	33
5.5.1. Análisis de la calidad de las relaciones interpersonales en la escuela	34
5.6. Estimación de los parámetros mediante el modelo RLPE-GRM	41
5.6.1. Análisis de la calidad de las relaciones interpersonales en la escuela	41
5.7. Comparación de los modelos con estimación MCMC	50
6. Conclusiones	53
6.1. Conclusiones	53
6.2. Sugerencias para investigaciones futuras	54
Bibliografía	55
Anexos	57



Índice de figuras

2.1. Representación gráfica de las FREI del modelo RLPE-GRM para 6 ítems con 5 categorías cada uno.	11
2.2. Representación gráfica de las FRCI del modelo RLPE-GRM para 6 ítems con 5 categorías cada uno.	12
2.3. Representación gráfica de la Función de Información del Ítem (FII) del modelo RLPE-GRM para 4 ítems con 5 categorías cada uno	16
4.1. Gráfico de las 2 cadenas, densidad y autocorrelación para el parámetro de discriminación (a_2) del ítem 2 estimado mediante el modelo RLPE-GRM para una de las 25 réplicas	27
4.2. Gráfico de las 2 cadenas, densidad y autocorrelación para el tercer parámetro de dificultad (b_{23}) del ítem 2 estimado mediante el modelo RLPE-GRM para una de las 25 réplicas	28
4.3. Gráfico de las 2 cadenas, densidad y autocorrelación para el parámetro de asimetría (d_j) del ítem 2 estimado mediante el modelo RLPE-GRM para una de las 25 réplicas	29
5.1. Representación gráfica de las FREI del modelo 2PL-GRM para 6 ítems con 4 categorías cada uno	36
5.2. Representación gráfica de las FRCI del modelo 2PL-GRM para 6 ítems con 4 categorías cada uno	37
5.3. Representación gráfica de la Función de Información del Ítem (FII) del modelo 2PL-GRM para 7 ítems con 4 categorías cada uno	38
5.4. Gráfico de 2 cadenas, densidad y autocorrelación para el parámetro de discriminación (a_3) del ítem 3 estimado mediante el modelo 2PL-GRM	39
5.5. Gráfico de 2 cadenas, densidad y autocorrelación para el parámetro de dificultad (b_{31}) del ítem 3 para el primer umbral estimado mediante el modelo 2PL-GRM	39
5.6. Gráfico de 2 cadenas, densidad y autocorrelación para el parámetro de habilidad de un estudiante estimado mediante el modelo 2PL-GRM	40
5.7. Distribución de densidad para las habilidades estimadas mediante el modelo 2PL-GRM	40
5.8. Representación gráfica de las FREI del modelo RLPE-GRM para 6 ítems con 4 categorías cada uno	44
5.9. Representación gráfica de las FRCI del modelo RLPE-GRM para 6 ítems con 4 categorías cada uno	45
5.10. Representación gráfica de la Función de Información del Ítem (FII) del modelo RLPE-GRM para 7 ítems con 4 categorías cada uno	46
5.11. Gráfico de 2 cadenas, densidad y autocorrelación para el parámetro de discriminación (a_3) correspondiente al ítem 3 estimado mediante el modelo RLPE-GRM	47
5.12. Gráfico de 2 cadenas, densidad y autocorrelación para el parámetro de asimetría (d_3) del ítem 3 estimado mediante el modelo RLPE-GRM	47

5.13. Gráfico de 2 cadenas, densidad y autocorrelación para el parámetro de dificultad (b_{31}) del ítem 3 para el primer umbral estimado mediante el modelo RLPE-GRM	48
5.14. Gráfico de 2 cadenas, densidad y autocorrelación para el parámetro de habilidad de un estudiante estimado mediante el modelo RLPE-GRM	49
5.15. Distribución de densidad para las habilidades estimadas mediante el modelo RLPE-GRM	49
5.16. Representación gráfica de la Función de Información del Ítem (FII) de los modelos RLPE-GRM y 2PL-GRM	51
5.17. Representación gráfica de la dispersión de las puntuaciones de los modelos RLPE-GRM y 2PL-GRM	52



Índice de cuadros

2.1. Funciones de enlace logísticos presentes en Bazán y Torres (2016)	5
4.1. Parámetros fijados para la simulación	22
4.2. Sesgo de la recuperación de los parámetros usando la estimación MCMC para el modelo RLPE-GRM con 25 réplicas	23
4.3. Estimación puntual e intervalo de credibilidad al 95 % del parámetro de discriminación usando la estimación MCMC para el modelo RLPE-GRM con 25 réplicas	23
4.4. Estimación puntual e intervalo de credibilidad al 95 % de los parámetro de dificultad usando la estimación MCMC para el modelo RLPE-GRM con 25 réplicas	24
4.5. Estimación puntual e intervalo de credibilidad al 95 % del parámetro de asimetría usando la estimación MCMC para el modelo RLPE-GRM con 25 réplicas	25
4.6. Raíz del error cuadrático medio (RMSE) y Media absoluta del error (MAE) de las estimaciones de los parámetros de los ítems en la simulación del modelo RLPE-GRM	26
5.1. Indicadores de validez de las escalas de convivencia escolar	33
5.2. Indicador de fiabilidad (alfa de Cronbach) para las escalas de convivencia escolar	33
5.3. Estimación puntual e intervalo de credibilidad al 95 % del parámetro de discriminación usando la estimación MCMC para el modelo 2PL-GRM con 25 réplicas	34
5.4. Estimación puntual e intervalo de credibilidad al 95 % de los parámetros de dificultad usando la estimación MCMC para el modelo 2PL-GRM con 25 réplicas	35
5.5. Estimación puntual e intervalo de credibilidad al 95 % del parámetro de discriminación usando la estimación MCMC para el modelo RLPE-GRM con 25 réplicas	41
5.6. Estimación puntual e intervalo de credibilidad al 95 % de los parámetros de dificultad usando la estimación MCMC para el modelo RLPE-GRM con 25 réplicas	42
5.7. Estimación puntual e intervalo de credibilidad al 95 % de los parámetros de asimetría usando la estimación MCMC para el modelo RLPE-GRM con 25 réplicas	43
5.8. Medidas de comparación de los modelos	50

Capítulo 1

Introducción

1.1. Planteamiento y justificación del tema

La convivencia escolar es la interrelación de todos los integrantes de la comunidad escolar. Esto implica que tanto los niños como los jóvenes y los adultos son considerados actores dentro del proceso de convivencia, donde cada uno cuenta con derechos y responsabilidades. La convivencia es una construcción dinámica y colectiva que se adapta y modifica conforme evolucionan las interrelaciones entre los actores a lo largo del tiempo.

En la actualidad, existen estudios (nacionales e internacionales) que abordan las ventajas que ofrece una buena convivencia escolar. Romagnoli (2007) menciona que la convivencia escolar, en su sentido más amplio, tiene efectos comprobados en el rendimiento académico de los estudiantes, su desarrollo ético y socioafectivo, así como en el bienestar personal y colectivo de la comunidad educativa. Por su parte, Cid y Diaz (2008) señalan que la violencia y/o agresión en las escuelas provoca daños físicos y emocionales en los niños, afectando negativamente su rendimiento escolar debido al estrés postraumático que experimentan.

De este modo, se hace necesario no solo el hecho de tener en cuenta la convivencia escolar, sino también desarrollar una forma de poder cuantificarla. La convivencia escolar es una variable que no puede ser medida directamente, por ello será estimada a través de otras variables que se observan directamente. La convivencia escolar se suele medir a través de cuestionarios de autorreporte con ítems politómicos ordinales de acuerdo con Bazan, Mazzon, y Hernani (2012).

La teoría de respuesta al ítem politómicos (TRIP) presenta tres tipos de definiciones respecto de las respuestas de un ítem: pueden ser acumulativas, de créditos parciales y condicional. Estas definiciones están basadas en el cálculo de las probabilidades de pasar de una respuesta del ítem a otra.

Para medir la convivencia escolar, se utilizará el modelo de respuesta graduada (GRM). El GRM es aquel donde las probabilidades de pasar de una respuesta del ítem a otra es acumulativa, Este modelo está diseñado especialmente para ser aplicada en cuestionarios con respuestas politómicas ordinales. Los modelos de respuesta graduada tienen diferentes funciones de enlace tanto simétricas como asimétricas.

En el modelo 2PL-GRM, la función de respuesta a las etapas del ítem (FREI) tiene una forma simétrica, pues se está utilizando una función de enlace logit. No siempre la Función de Respuesta a las

Categorías del Ítem es simétrica, Tarazona (2013) utiliza el modelo de respuesta graduada logística de exponente positivo (LPE-GRM) como caso particular del GRM asimétrico.

En esta tesis se estudiará el modelo de respuesta graduada logística de exponente positivo recíproco (RLPE-GRM), propuesto por Bolfarine y Bazan (2010). Este modelo es otro caso particular de un GRM asimétrico (RLPE-GRM).

La principal ventaja de utilizar el modelo de respuesta graduada logística de exponente positivo recíproco (RLPE-GRM), en comparación con el modelo de respuesta graduada logístico de dos parámetros (2PL-GRM), radica en que el modelo RLPE-GRM se ajusta mejor a las respuestas de los ítems de algunos constructos en particular. Cuando los ítems de un constructo son marcados en su mayoría a las categorías más altas, es posible que el modelo RLPE-GRM se ajuste mejor a los datos.

La implementación computacional de las funciones de enlace asimétricas para el modelo de respuesta graduada logística de exponente positivo recíproco (RLPE-GRM) que se plantea en la tesis se desarrollará con el software libre R y WinBUGS. Para las estimaciones de los parámetros del modelo, se utilizará MCMC.

1.2. Objetivos de la tesis

El objetivo principal de la tesis es describir el modelo de respuesta graduada logístico de exponente positivo recíproco (RLPE-GRM). Esto Abarca el estudio de sus propiedades, la estimación desde una perspectiva bayesiana, la implementación computacional del modelo y su aplicación a un conjunto de datos reales sobre la medición de la convivencia escolar. De manera específica, incluye lo siguiente:

- Revisar literatura acerca de los diferentes tipos de funciones de enlace asimétricas de las curvas de características de los ítems.
- Presentar las propiedades, implementar la estimación computacional del modelo de respuesta graduada con enlaces asimétricos desde la perspectiva bayesiana.
- Implementar métodos de inferencia bayesiana utilizando simulación a través de MCMC.
- Aplicar y comparar el modelo utilizando una función de enlace asimétrica y simétrica con los datos del cuestionario de convivencia escolar recogidos por la Oficina de Medición de la Calidad de los aprendizajes.

Capítulo 2

Modelo de Respuesta Graduada Logístico y RLPE

En este capítulo se definen y exponen las propiedades del modelo de respuesta graduada logístico de dos parámetros (2PL-GRM) y del modelo de respuesta graduada logístico de exponente positivo recíproco (RLPE-GRM). El modelo (RLPE-GRM) es propuesto como alternativa del modelo de respuesta graduada logístico (2PL-GRM), que utiliza una función de enlace simétrica, y al modelo de respuesta graduada logístico de exponente positivo (LPE-GRM), que emplea una función de enlace asimétrica.

2.1. Modelo de respuesta graduada

2.1.1. Definición del modelo

El modelo de respuesta graduada se aplica a escalas con múltiples opciones de respuesta. Este modelo asume que las puntuaciones de un ítem (por ejemplo: 0, 1, 2, 3) están ordenadas, de manera que una puntuación más alta refleja un mayor nivel de la habilidad evaluada. El modelo de respuesta graduada (GRM) en su forma general se plantea en el contexto de que se dispone de un conjunto de i sujetos evaluados en una prueba con j ítems, donde cada uno de los ítems tiene k categorías de respuesta politómica ordinal. Este modelo se define de la siguiente manera:

$$Y_{ij} | u_i, \varepsilon_j \sim \text{Categorica}(P_{ij1}, \dots, P_{ijk}),$$

donde Y_{ij} es la variable aleatoria condicional que modela la respuesta politómica del individuo i en el ítem j para la categoría ordinal k . Adicionalmente, P_{ijk} se define como:

$$P_{ijk} \equiv P_{jk}(u_i) \equiv (Y_{ij} = k | u_i, \varepsilon_j) = P_{ij(k-1)}^+ - P_{ijk}^+,$$

En este contexto, la probabilidad (P_{ijk}^+) se define como:

$$P_{ijk}^+ \equiv P_{jk}^+(u_i) \equiv P(Y_{ij} > k | u_i, \varepsilon_j) = F_{dj}(\eta_{ijk}),$$

y η_{ijk} es el predictor lineal, definido como:

$$\eta_{ijk} = a_j(u_i - b_{jk}),$$

$$-\infty = b_{j0} < b_{j1} < b_{j2} < \dots < b_{j(m-1)} < b_{j(m)} = \infty,$$

$$i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, J, \quad k = 1, \dots, m$$

En síntesis:

- P_{ijk} son las probabilidades condicionales de responder la categoría k en el ítem j .
- P_{ijk}^+ es la probabilidad de responder a cualquier categoría superior k en el ítem j .
- u_i es la variable latente para el sujeto i , la cual puede ser definida como habilidad del individuo.
- $F(\cdot)$ es la función de distribución acumulada (fda), la cual relaciona al predictor latente η_{ijk} con las probabilidades acumuladas condicionales.
- $\varepsilon_j = (a_j, b_{j1}, \dots, b_{j(m-1)})$ es el vector de parámetros del ítem j , a_j es el parámetro de discriminación y b_{jk} son los parámetros de dificultad.

2.1.2. Función de enlace

Los modelos lineales generalizados utilizan una función de enlace que conecta el valor esperado de la variable de respuesta con los predictores lineales del modelo. Esta función transforma las probabilidades de los niveles de una variable categórica en una escala continua. Por ejemplo, una variable dicotómica tiene dos valores posibles, cuyas probabilidades se sitúan entre 0 y 1. Al aplicar una función de enlace adecuada, estas probabilidades se transforman en valores que oscilan entre $-\infty$ hasta $+\infty$.

De acuerdo con el modelo lineal general de variables latentes aplicado a datos binarios, la función de enlace más usada es la logit:

$$g(p_i) = \log\left(\frac{p_i}{1 - p_i}\right) \quad (2.1)$$

donde $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función invertible y diferenciable llamada función de enlace. Además, esta función es la inversa de la función de distribución acumulada $F(\cdot)$.

Propiedades de la función de enlace

Bazán y Torres (2016) definen la propiedad de reversibilidad cuando la función de distribución de $-S$ es una distribución diferente de S , la cual puede ser escrita como $S \sim G(\cdot) \equiv 1 - F(-\cdot)$. Por lo tanto, a la distribución de $G(\cdot)$ se le denomina distribución reversible de $F(\cdot)$. Cuando una variable aleatoria es simétrica, no satisface la propiedad de reversibilidad, es decir S y $-S$ tienen la misma distribución $F(s) = 1 - F(-s)$ o $f(s) = f(-s)$.

Cuando se describen las propiedades de una función de enlace, es importante definir cuándo una variable aleatoria sigue una distribución de potencia. Una variable aleatoria sigue una distribución de potencia cuándo su función de distribución acumulada $F_p(s) = G(s)^\lambda$, donde $G(\cdot)$ es la función de distribución acumulada base y $\lambda > 0$ es un parámetro adicional. Además, $F_p(\cdot)$ satisface la propiedad de reversibilidad con $F_{rp}(s) = 1 - G(-s)^\lambda$.

Principales funciones de enlace logísticas

En Bazán y Torres (2016), se presentan algunas distribuciones logísticas de potencia y sus recíprocas, con sus funciones de enlace correspondientes. En el cuadro 2.1, se muestran las siguientes distribuciones.

Tipos	Nombre de la distribución	Función de distribución acumulada	Función de enlace	Abreviatura
Base	Logística	$P_{ijk} = \frac{1}{1+e^{-\eta_{ijk}}}$	logit	L
Potencia	Logístico generalizado - Tipo I	$P_{ijk} = \left(\frac{1}{1+e^{-\eta_{ijk}}}\right)^\lambda$	logit de potencia	LPE
Potencia recíproca	Logístico generalizado - Tipo II	$P_{ijk} = 1 - \left(\frac{1}{1+e^{\eta_{ijk}}}\right)^\lambda$	logit de potencia recíproco	RLPE

Cuadro 2.1: Funciones de enlace logísticas presentes en Bazán y Torres (2016)

2.2. Modelo de respuesta graduada logístico de dos parámetros (2PL-GRM)

2.2.1. Definición del modelo

Se tienen las respuestas ordinales de i sujetos evaluados en un cuestionario con j ítems. El modelo de respuesta graduada logístico de dos parámetros (2PL-GRM) se presenta como un caso particular dentro de un modelo de respuesta graduada simétrico, el cual se define de la siguiente forma:

$$Y_{ij} \mid u_i, \varepsilon_j \sim \text{Categorica}(P_{ij1}, \dots, P_{ijk}),$$

donde:

- Y_{ij} : Es la variable aleatoria condicional que modela la respuesta politómica del individuo i en el ítem j para la categoría ordinal k .

- u_i : Es la variable latente para el sujeto i , la cual puede ser definida como la habilidad del individuo.
- ε_j : Es un vector de parámetros del ítem j .
- P_{ijk} : Probabilidad condicional de que un i -ésimo individuo responda a la categoría k en el ítem j .

Además la probabilidad:

$$P_{ijk} \equiv P_{jk}(u_i) \equiv (Y_{ij} = k \mid u_i, \varepsilon_j) = P_{ij(k-1)}^+ - P_{ijk}^+,$$

de la ecuación anterior P_{ijk}^+ es la probabilidad de responder a cualquier categoría superior a k en el ítem j definida como:

$$P_{ijk}^+ \equiv P_{jk}^+(u_i) \equiv P(Y_{ij} > k \mid u_i, \varepsilon_j) = F_{dj}(\eta_{ijk}),$$

Para este modelo (2PL-GRM) la función $F_{dj}(-\eta_{ijk})$ es igual a $1 - F_{dj}(\eta_{ijk})$ debido a su distribución simétrica. Por consiguiente, la probabilidad P_{ijk}^+ se define como:

$$P_{ijk}^+(u_i) \equiv P(Y_{ij} \leq k \mid u_i, \varepsilon_j) = F_{dj}(-\eta_{ijk}) = \Psi(-\eta_{ijk}),$$

Esta probabilidad puede ser expresada como la función de distribución acumulada. En el caso específico del modelo de respuesta graduada logística de dos parámetros, dicha función acumulada se define como:

$$F_{dj}(-\eta_{ijk}) = \Psi(-\eta_{ijk}) = \frac{1}{1 + e^{\eta_{ijk}}} \quad -\infty < \eta_{ijk} < \infty \quad (2.2)$$

En los diversos modelos de respuesta graduada, la probabilidad P_{ijk} es expresada de la siguiente manera:

$$P_{ijk} = \begin{cases} 1 - F_{dj}(\eta_{ijk}) & \text{si } k = 1 \\ F_{dj}(\eta_{ij(k-1)}) - F_{dj}(\eta_{ijk}) & \text{si } 2 \leq k < m \\ F_{dj}(\eta_{ij(k-1)}) & \text{si } k = m, \end{cases}$$

La probabilidad P_{ijk} en el modelo 2PL-GRM se puede expresar como:

$$P_{ijk} = \begin{cases} \Psi(-\eta_{ijk}) & \text{si } k = 1 \\ \Psi(-\eta_{ijk}) - \Psi(-\eta_{ij(k-1)}) & \text{si } 2 \leq k < m \\ 1 - \Psi(-\eta_{ij(k-1)}) & \text{si } k = m, \end{cases} \quad (2.3)$$

donde, η_{ijk} es el predictor lineal, definido como:

$$\eta_{ijk} = a_j(u_i - b_{jk}),$$

$$-\infty = b_{j0} < b_{j1} < b_{j2} < \dots < b_{j(m-1)} < b_{jm} = \infty,$$

$$i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, J, \quad k = 1, \dots, m$$

en resumen :

- P_{ijk}^+ : Es la probabilidad condicional acumulada de que un individuo con habilidad u_i logre responder a cualquier categoría inferior o igual a k en el ítem j .
- η_{ijk} : Es el predictor lineal latente relacionado con $u_i \in \mathbb{R}$.
- $\varepsilon_j = (a_j, b_{j1}, \dots, b_{j(m-1)})$: Es el vector de parámetros del ítem j , a_j es el parámetro de discriminación y b_{jk} son los parámetros de dificultad.
- u_i : Es la variable latente para el sujeto i , la cual puede ser definida como habilidad del individuo.

Una característica importante en el modelo de respuesta graduada logística de dos parámetros es la relación que existe entre la probabilidad acumulada y la habilidad del individuo. Esta relación se describe mejor con la Función de Respuesta a las Etapas del Ítem (FREI). La FREI permite representar la probabilidad de que la respuesta de un individuo al ítem j esté por encima de un umbral (b_{jk}) en función de la habilidad que tiene el individuo. Samejima (2016) y Tarazona (2013) nos brindan mayor información de las características del modelo de respuesta graduada logística de dos parámetros (2PL-GRM).

2.3. Modelo de respuesta graduada logístico de exponente positivo recíproco (RLPE-GRM)

2.3.1. Definición del modelo

Se considera i sujetos evaluados en un cuestionario con j ítems, donde cada ítem tiene k categorías con respuestas politómicas ordinales. El modelo de respuesta graduada logístico de exponente positivo Recíproco es un caso particular de un GRM de dos parámetros con función de enlace asimétrica. La formulación del modelo es la siguiente:

$$Y_{ij} | u_i, \varepsilon_j \sim \text{Categorica}(P_{ij1}, \dots, P_{ijk}),$$

donde:

- Y_{ij} : Es la variable aleatoria condicional que modela la respuesta politómica del individuo i en el ítem j para la categoría ordinal k .
- u_i : Es la variable latente para el sujeto i , la cual puede ser definida como la habilidad del individuo.
- ε_j : Es un vector de parámetros del ítem j .

- P_{ijk} : Probabilidad condicional de que un i -ésimo individuo responda a la categoría k en el ítem j .

En el marco de este modelo, la probabilidad condicional (P_{ijk}) se define utilizando la siguiente fórmula::

$$P_{ijk} \equiv P_{jk}(u_i) \equiv (Y_{ij} = k \mid u_i, \varepsilon_j) = P_{ij(k-1)}^+ - P_{ijk}^+,$$

donde P_{ijk}^+ es la probabilidad acumulada definida como:

$$P_{ijk}^+ \equiv P_{jk}^+(u_i) \equiv P(Y_{ij} > k \mid u_i, \varepsilon_j) = F_{dj}(\eta_{ijk}),$$

Esta probabilidad acumulada puede ser expresada como la función de distribución acumulada ($F_{dj}(\eta_{ijk})$). Para el modelo de respuesta logística de exponente positivo recíproco, esta función de distribución acumulada se define como:

$$F_{dj}(\eta_{ijk}) = 1 - \frac{[\Psi(-\eta_{ijk})]^{d_j}}{1 - \frac{1}{(1 + e^{\eta_{ijk}})^{d_j}}} \quad -\infty < \eta_{ijk} < \infty \quad (2.4)$$

En los modelos de respuesta graduada, la probabilidad P_{ijk} es expresada de la siguiente manera:

$$P_{ijk} = \begin{cases} 1 - F_{dj}(\eta_{ijk}) & \text{si } k = 1 \\ F_{dj}(\eta_{ij(k-1)}) - F_{dj}(\eta_{ijk}) & \text{si } 2 \leq k < m \\ F_{dj}(\eta_{ij(k-1)}) & \text{si } k = m, \end{cases}$$

En el contexto específico del modelo RLPE-GRM, la probabilidad P_{ijk} se expresa de la siguiente manera:

$$P_{ijk} = \begin{cases} [\Psi(-\eta_{ijk})]^{d_j} & \text{si } k = 1 \\ [\Psi(-\eta_{ijk})]^{d_j} - [\Psi(-\eta_{ij(k-1)})]^{d_j} & \text{si } 2 \leq k < m \\ 1 - [\Psi(-\eta_{ij(k-1)})]^{d_j} & \text{si } k = m, \end{cases} \quad (2.5)$$

donde, η_{ijk} representa el predictor lineal, definido como:

$$\eta_{ijk} = a_j(u_i - b_{jk}),$$

$$-\infty = b_{j0} < b_{j1} < b_{j2} < \dots < b_{j(m-1)} < b_{jm} = \infty,$$

$$i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, J, \quad k = 1, \dots, m$$

En resumen:

- P_{ijk}^+ : Probabilidad condicional acumulada de que un i -ésimo individuo responda en cualquier categoría inferior o igual a k en el ítem j .

- η_{ijk} : Es el predictor lineal latente relacionado con $u_i \in \mathbb{R}$.
- $\varepsilon_j = (a_j, b_{j1}, \dots, b_{j(m-1)}, d_j)$: Vector de parámetros del ítem j , a_j es el parámetro de discriminación, b_{jk} son los parámetros de dificultad y d_j es el parámetro de asimetría.
- u_i es la variable latente para el sujeto i , la cual puede ser definida como habilidad del individuo.

El parámetro de discriminación a_j , en un modelo TRI con respuestas dicotómicas, mide la capacidad del ítem para distinguir entre personas con distintos niveles de habilidad., la cual es proporcional a la pendiente de la función de respuesta al ítem (FRI) o también llamada curva característica del ítem (CCI). En el caso de los modelos de respuesta graduada (GRM), a_j representa el grado en que las categorías de respuestas se diferencian entre los niveles de habilidad y se mantienen constantes para todos los umbrales de las categorías de un mismo ítem. Se asume que los ítems con valores más altos de a_j discriminan de manera más precisa.

El parámetro de dificultad (b_j) en un modelo TRI con respuestas dicotómica representa el nivel de dificultad del ítem y se define como el nivel de habilidad en el que un individuo tiene una probabilidad de 0.5 de responder correctamente al ítem. En el caso de los modelos de respuesta graduada (GRM), b_{jk} es una serie de parámetros de dificultad que se ubican entre las categorías contiguas de un ítem politómico. Los parámetros b_{jk} nos proporcionan información sobre la probabilidad de cambio de una categoría hacia la siguiente categoría, por ejemplo b_{j1} es la mínima habilidad que necesita un individuo para tener más chance de optar por la segunda categoría o mayor a ella en lugar de elegir la primera.

2.3.2. Características del modelo RLPE-GRM

El modelo RLPE-GRM es un caso particular del 2PL-GRM donde se introduce un nuevo parámetro d_j que controla la asimetría del ítem, además de los parámetros de dificultad y de discriminación explicados anteriormente.

- Si $0 < d_j < 1$ presenta asimetría positiva, ítems menos complejos bonifican las probabilidades o penalizan los niveles de la dificultad. Esto es ideal para modelos con alto nivel de dificultad, ya que cambios menores en la habilidad corresponden con pequeños cambios de la probabilidad de acierto.
- Si $1 < d_j < \infty$ presenta asimetría negativa, ítems más complejos penalizan las probabilidades, o bonifican los niveles de la dificultad. Esto es ideal para modelos con bajos niveles de dificultad, ya que cambios menores en la habilidad corresponden con pequeños cambios de la probabilidad de acierto.
- Si $d_j = 1$ no se cumple ninguno de los principios anteriores y las características del modelo son iguales al logístico de dos parámetros.

Attorreai (2010) menciona que los modelos de respuesta graduada propuestos por Samejima (2016) se basan en la segmentación acumulativa de las categorías de respuesta. Es decir, en el GRM se descompone la respuesta politómica en una serie de dicotomías que separa para cada umbral (b_{jk}), las categorías menores a k de las iguales o mayores a k , lo que permite aplicar los GRM.

Función de respuesta a las etapas del ítem (FREI)

La función de respuesta a las etapas del ítem (FREI) permite representar la probabilidad de que la respuesta de un individuo al ítem j este por encima de un umbral (b_{jk}) en función de la habilidad. La FREI para un ítem j se define como:

$$P_{jk}^+(u_i) = P(Y_{ij} > k \mid u_i, \varepsilon_j) = F_{d_j}(\eta_{ijk}) \quad (2.6)$$

con $k = 1, 2, \dots, m$, donde $P_{jk}^+(u_i)$ es la probabilidad condicional de que el individuo con habilidad u_i logre superar al menos la etapa k (responder a una categoría k o superior a ella).

Esta función es de tipo acumulativo ya que cualquier respuesta que se obtenga da información sobre todas las etapas del ítem.

La FREI para el modelo RLPE-GRM esta definido como:

$$\begin{aligned} P_{jk}^+(u_i) &= F_{d_j}(\eta_{ijk}) \\ P_{jk}^+(u_i) &= 1 - [\Psi(-\eta_{ijk})]^{d_j} \\ P_{jk}^+(u_i) &= 1 - \frac{1}{(1 + e^{\eta_{ijk}})^{d_j}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde : $\eta_{ijk} = a_j(u_i - b_{jk})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, J$, $k = 1, \dots, m$.

Notar que a diferencia del modelo 2PL-GRM $F_{d_j}(-\eta_{ijk}) \neq 1 - F_{d_j}(\eta_{ijk})$ debido a que no es una distribución simétrica.

La FREI es un paso intermedio para llegar a la función de respuesta a las categorías del ítem.

En la figura 2.1 mostramos las FREI para 6 ítems de 5 categorías, con un mismo parámetro de discriminación $a_j = 2.4$, los tres ítems ubicados al lado izquierdo presentan dificultad baja $b_{jk} = -3.0, -1.5, -0.5$, los tres ítems ubicados en la parte derecha presentan dificultad alta $b_{jk} = -1.0, 0.5, 1.5, 3.0$ y con tres valores distintos de asimetría $d_j = 0.3, 1.0, 8.0$ para los ítems ubicados en la parte derecha e izquierda de la figura. Se puede observar claramente que, a medida que la complejidad del ítem incrementa, las curvas se desplazan hacia la derecha y hacia abajo. Cuando el parámetro de asimetría es mayor a 0 y menor a 1 (ítem 1), se nota que los individuos con menor habilidad tienen menos probabilidades de alcanzar las categorías superiores en comparación con el caso simétrico (ítem 2). Cuando el parámetro de asimetría es mayor a 1 (ítem 3) se observa que individuos con habilidades más bajas tienen mayor probabilidad de alcanzar las categorías superiores con respecto al caso simétrico (ítem 2). Los ítems del lado derecho tienen un comportamiento similar a los ítems del lado izquierdo.

Función de respuesta a las categorías del ítem (FRCI)

Attorreai (2010) describe a la función de respuesta a las categorías del ítem j como la probabilidad que tiene un individuo de optar por la categoría k en función de su habilidad, la FRCI esta definida en la figura 2.5, la cual puede ser expresada en términos de la FREI:

$$P_{jk}(u_i) \equiv P(Y_{ij} = k \mid u_i, \varepsilon_j) = P_{j(k-1)}^+(u_i) - P_{jk}^+(u_i), \quad (2.8)$$

con $k = 1, 2, \dots, m$, donde $P_{jk}(u_i)$ modela la probabilidad de responder en una categoría específica

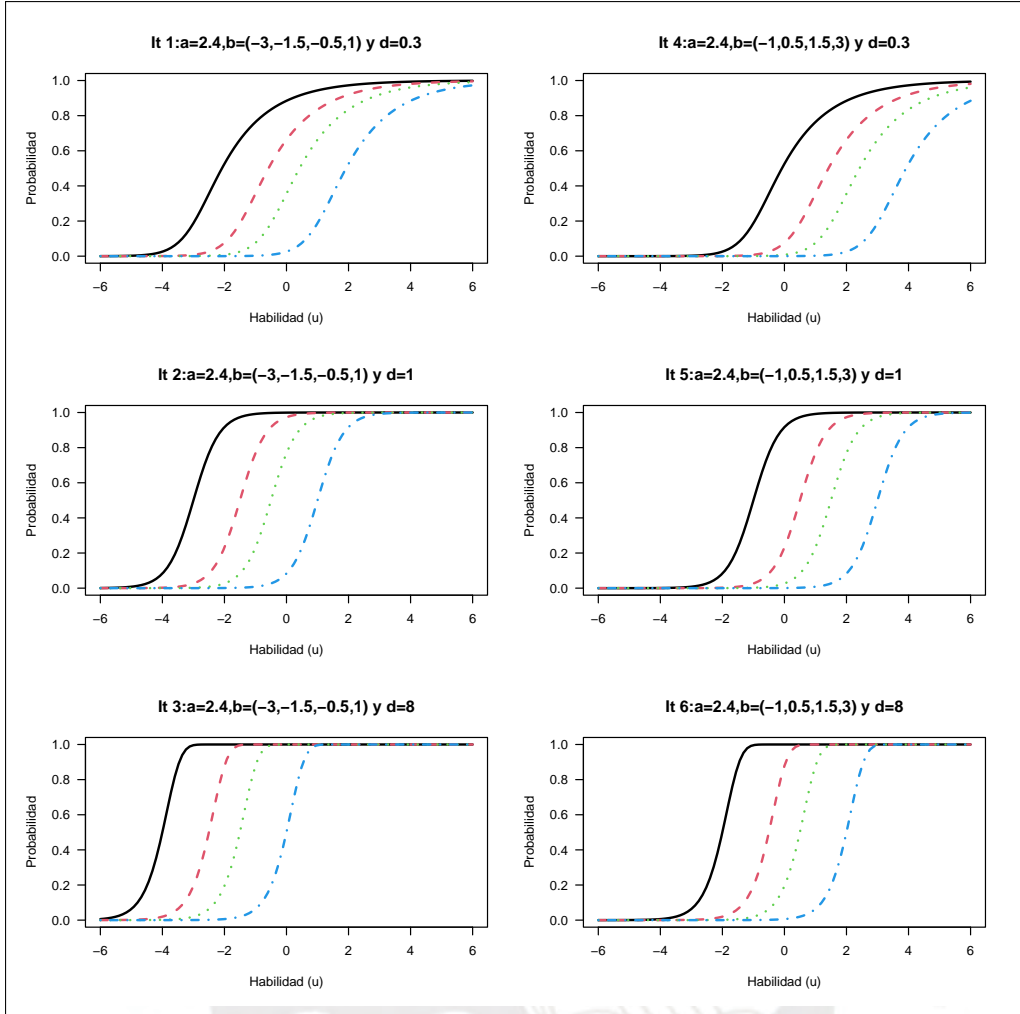


Figura 2.1: Representación gráfica de las FREI del modelo RLPE-GRM para 6 ítems con 5 categorías cada uno.

del ítem como función del nivel de habilidad u_i .

La FRCI para el modelo RLPE-GRM está definida como:

$$P_{jk}(u_i) = 1 - \frac{1}{(1 + e^{\eta_{ij(k-1)}})^{d_j}} - \left(1 - \frac{1}{(1 + e^{\eta_{ijk}})^{d_j}}\right), \quad (2.9)$$

$$\eta_{ijk} = a_j(u_i - b_{jk}), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, J, \quad k = 1, \dots, m,$$

En la figura 2.2 mostramos las FRCI para 6 ítems con 5 categorías cada uno con un mismo parámetro de discriminación $a_j = 2.4$, los tres ítems ubicados en la parte izquierda presentan dificultad baja $b_{jk} = -3.0, -1.5, -0.5, 1.0$, los tres ítems ubicados en la parte derecha presentan dificultad alta $b_{jk} = -1.0, 0.5, 1.5, 3.0$ y con tres valores distintos de asimetría $d_j = 0.3, 1.0, 8.0$ para los ítems ubicados en la parte izquierda y derecha. Puede verse claramente que cuando $d_j = 0.3$ se necesita mayor habilidad para poder responder a una categoría específica del ítem en comparación a $d_j = 1$. Por otro lado, cuando $d_j = 8$ se necesita menor habilidad para poder responder a una categoría específica del ítem en relación a $d_j = 1$.

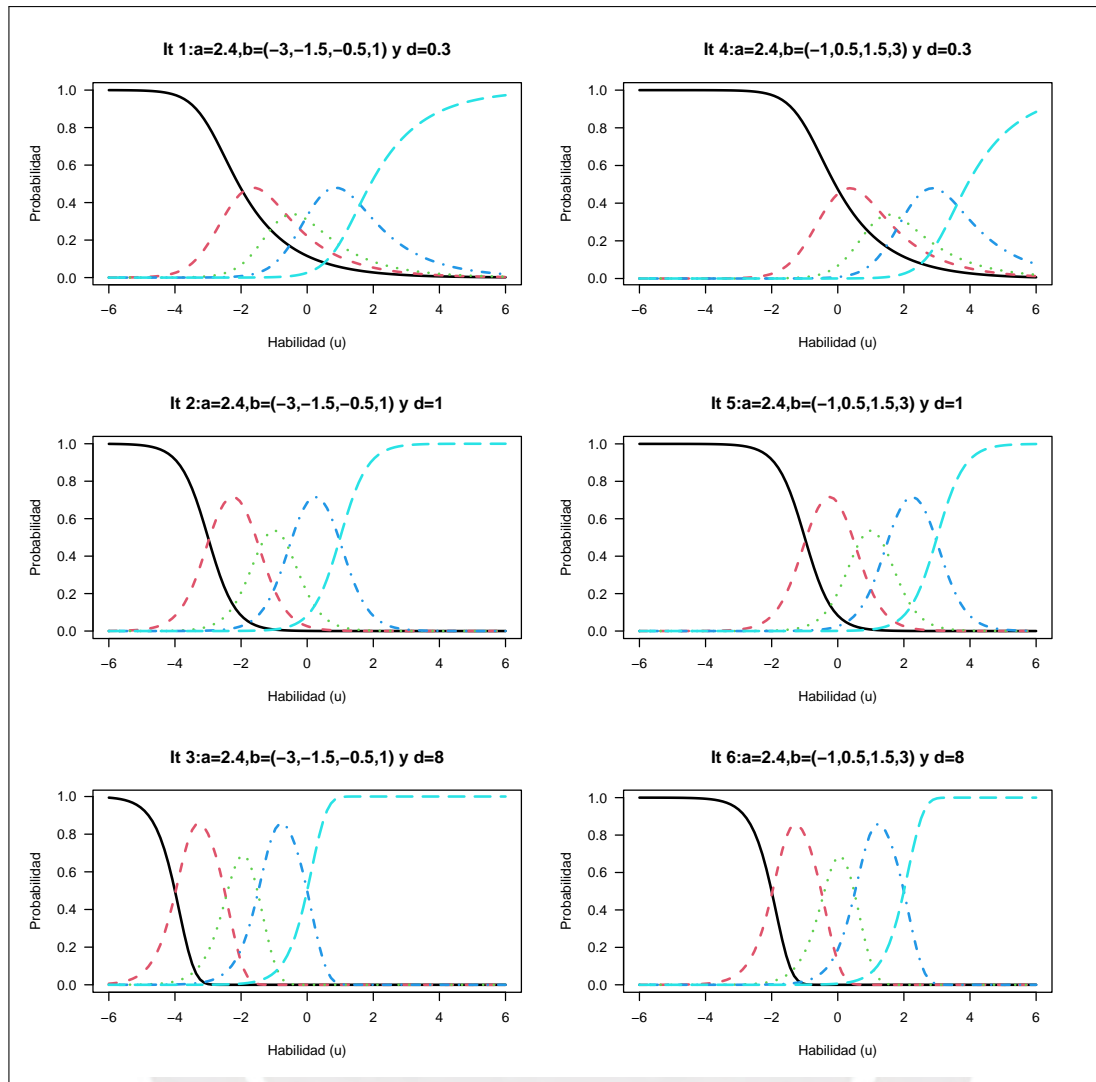


Figura 2.2: Representación gráfica de las FRCI del modelo RLPE-GRM para 6 ítems con 5 categorías cada uno.

2.3.3. Función de información de Fisher

La Función de Información de Fisher (FI) es utilizada como un indicador estadístico para evaluar la calidad de estimación de un parámetro (habilidad), Attorreai (2010) describe a la información de un ítem como la precisión con la que se mide la habilidad a lo largo de todo su rango de valores. La FI no siempre proporciona la misma información a lo largo de todo el rango de valores de la habilidad, puede proporcionar mayor información en algunos intervalos o niveles de la habilidad. En virtud de la aditividad de las FIs de los ítems para todos los niveles del rasgo, es posible obtener una FI del test, así como una función del error típico de la estimación.

La información de Fisher está dado por la función:

$$I(U) = E \left[\left(\frac{\partial}{\partial u} \ln f(y; u) \right)^2 \middle| U = u \right] \quad (2.10)$$

En este contexto, para un sujeto con habilidad u , la ecuación expresada en $E[\dots|U = u]$ describe la esperanza condicional de Y_j con respecto a la función de verosimilitud $f(y; u)$. Esta función se puede expresar como:

$$f(y; u) = \prod_{j=1}^J \prod_{k=1}^m [P_{jk}]^{w_{jk}}, \quad (2.11)$$

donde P_{jk} es la probabilidad de respuesta del sujeto en la categoría $k = 1, \dots, m$ del ítem j y w_{jk} es una parametrización para Y_{jk} :

$$w_{ijk} = \begin{cases} 1, & Y_{ij} = k \\ 0, & \text{otros casos.} \end{cases} \quad (2.12)$$

Entonces se puede expresar:

$$P_{ijk} \equiv P_{jk}(u_i) \equiv (Y_{ij} = k | u_i, \varepsilon_j) = P(w_{ijk} = 1 | u_i, \varepsilon_j), \quad (2.13)$$

donde w_{ijk} tiene una distribución *Bernoulli*(P_{ijk}) y la probabilidad P_{ijk} se encuentra definida en la ecuación 2.5.

Como siguiente paso para el cálculo de la verosimilitud se le tiene que aplicar el logaritmo a la ecuación expresada en 2.10:

$$\ln f(y; u) = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^m w_{jk} \ln [P_{jk}], \quad (2.14)$$

Calculando la primera derivada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \ln f(y; u) &= \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^m w_{jk} \frac{\partial}{\partial u} \ln P_{jk}(u) \\ &= \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^m \frac{w_{jk}}{P_{jk}(u)} \frac{\partial}{\partial u} P_{jk}(u), \end{aligned}$$

reemplazando: $P'_{jk}(u) = \frac{\partial}{\partial u} P_{jk}$:

$$\frac{\partial}{\partial u} \ln f(y; u) = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^m \frac{w_{jk}}{P_{jk}} P'_{jk}(u),$$

Ahora reemplazaremos la expresión anterior en la ecuación 2.10:

$$I(U) = E \left[\left(\sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^m \frac{w_{jk}}{P_{jk}} P'_{jk}(u) \right)^2 \mid U = u \right],$$

$$I(U) = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^m \frac{[P'_{jk}(u)]^2}{P_{jk}(u)^2} E[w_{jk}^2].$$

Como W_{ijk} tiene una distribución *Bernoulli*(P_{ijk}) y $Var[W_{ij}] = E[W_{jk}^2] - E[W_{jk}]^2$:

$$I(U) = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^m \frac{[P'_{jk}(u)]^2}{P_{jk}(u)^2} [P_{jk}(1 - P_{jk}) + P_{jk}^2], \quad (2.15)$$

$$I(U) = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^m \frac{[P'_{jk}(u)]^2}{P_{jk}(u)}.$$

La ecuación 2.15 nos da la suma de las Funciones de Información de todos los ítems, entonces la Función de Información del Ítem (FII) queda expresada de la siguiente manera:

$$I_j(U) = \sum_{k=1}^m \frac{[P'_{jk}(u)]^2}{P_{jk}(u)},$$

$$I_j(U) = \sum_{k=1}^m \frac{[P'_{jk}]^2}{P_{jk}}. \quad (2.16)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 P'_{jk}(U) &= \frac{\partial}{\partial u} \left[[\Psi(-\eta_{ijk})]^{d_j} - [\Psi(-\eta_{ij(k-1)})]^{d_j} \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{1}{(1 + e^{\eta_{ijk}})^{d_j}} - \frac{1}{(1 + e^{\eta_{ij(k-1)})}^{d_j}} \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{1}{(1 + e^{a_j(u_i - b_{jk})})^{d_j}} - \frac{1}{(1 + e^{a_j(u_i - b_{j(k-1)})})^{d_j}} \right] \\
 &= \left[\frac{a_j d_j e^{a_j(u_i - b_{jk})}}{(1 + e^{a_j(u_i - b_{jk})})^{d_j + 1}} - \frac{a_j d_j e^{a_j(u_i - b_{j(k-1)})}}{(1 + e^{a_j(u_i - b_{j(k-1)})})^{d_j + 1}} \right] \\
 &= a_j d_j \left[\frac{1}{(1 + e^{a_j(u_i - b_{jk})})^{d_j}} \frac{e^{a_j(u_i - b_{jk})}}{(1 + e^{a_j(u_i - b_{jk})})} - \frac{1}{(1 + e^{a_j(u_i - b_{j(k-1)})})^{d_j}} \frac{e^{a_j(u_i - b_{j(k-1)})}}{(1 + e^{a_j(u_i - b_{j(k-1)})})} \right] \\
 &= a_j d_j \left[\frac{1}{(1 + e^{\eta_{ijk}})^{d_j}} \frac{1}{(1 + e^{-\eta_{ijk}})} - \frac{1}{(1 + e^{\eta_{ij(k-1)})}^{d_j}} \frac{1}{(1 + e^{-\eta_{ij(k-1)})} } \right] \\
 &= a_j d_j \left[[\Psi(-\eta_{ijk})]^{d_j} [\Psi(\eta_{ijk})] - [\Psi(-\eta_{ij(k-1)})]^{d_j} [\Psi(\eta_{ij(k-1)})] \right]
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Reemplazando el resultado de la ecuación 2.17 en la ecuación 2.16 , tenemos la FII para el modelo RLPE-GRM está dada por:

$$I_j(U) = (a_j d_j)^2 \sum_1^m \frac{\left[[\Psi(-\eta_{ijk})]^{d_j} [\Psi(\eta_{ijk})] - [\Psi(-\eta_{ij(k-1)})]^{d_j} [\Psi(\eta_{ij(k-1)})] \right]^2}{\left[[\Psi(-\eta_{ijk})]^{d_j} - [\Psi(-\eta_{ij(k-1)})]^{d_j} \right]} \tag{2.18}$$

Luego se tiene que calcular la Función de Información del Test (FIT) la cual ya está demostrada en la ecuación 2.15, la cual se simplifica en la expresión:

$$I(U) = \sum_{j=1}^J (I_j(U)) \tag{2.19}$$

La Función para el error estándar esta definida como:

$$SE(U) = \left[\sum_1^J (I_j(U)) \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{I(U)}} \tag{2.20}$$

En la figura 2.3, mostramos la Función de Información del Ítem (FII) para 4 ítems con 5 categorías, con un mismo parámetro de discriminación $a_j = 3$. Los ítems 1 y 2 presentan dificultad baja $b_{jk} = -3.0, -1.5, -0.5, 1.0$; los ítems 3 y 4 presentan dificultad alta $b_{jk} = -1.0, 0.5, 1.5, 3.0$; los ítems 1 y 3 presentan el mismo parámetro de asimetría $d_j = 0.3$; los ítems 2 y 4 presentan el mismo parámetro de asimetría $d_j = 8.0$. El ítem 1 proporciona mayor información en intervalos o niveles de habilidad menores respecto de los demás ítems. Los ítems 2 y 4 con parámetro de asimetría $d_j = 8.0$ son los

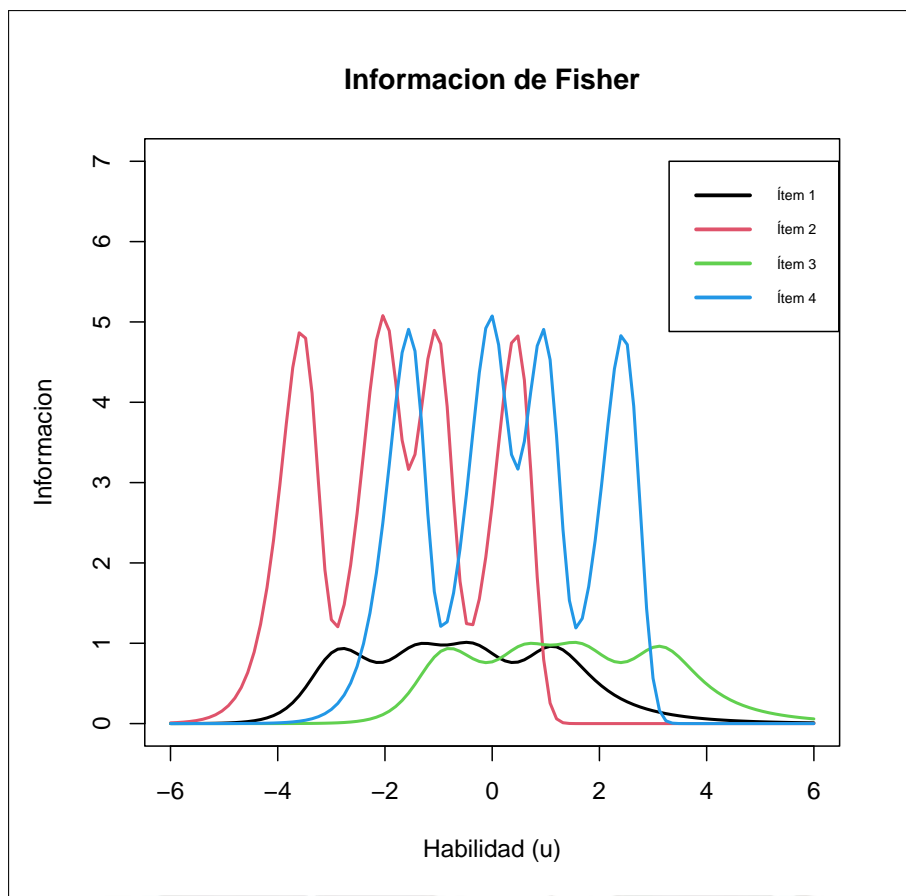


Figura 2.3: Representación gráfica de la Función de Información del Ítem (FII) del modelo RLPE-GRM para 4 ítems con 5 categorías cada uno

que tienen mayor información a lo largo de la escala. Finalmente, el ítem 4, al tener dificultad alta, brinda mayor información en intervalos o niveles de habilidad superiores.

Capítulo 3

Estimación bayesiana del modelo de respuesta graduada

La estimación de los modelos TRI se puede realizar mediante la inferencia clásica o bayesiana. En este capítulo, se abordará la estimación mediante la inferencia Bayesiana utilizando métodos de MCMC.

Cuando se utiliza la inferencia bayesiana, la estimación de los parámetros de habilidad, discriminación, dificultad y asimetría se realizan en simultáneo. Además, la inferencia bayesiana permite implementar con mayor facilidad un modelo tan complejo como el de respuesta graduada logístico de exponente positivo recíproco.

3.1. Estimación bayesiana del modelo de respuesta graduada logístico de exponente positivo recíproco (RLPE-GRM)

3.1.1. Función de verosimilitud para el modelo RLPE-GRM

La matriz de datos $Y = [Y_{ij}]_{n \times J}$ muestra las respuestas politómicas ordinales de n sujetos evaluados en un cuestionario con J ítems, donde w_{ijk} representa una parametrización alternativa de Y_{ij} . Además, considerando que u es el vector de parámetros para los individuos evaluados y que $\varepsilon = (a, b, d)$ es el vector de los parámetros de los ítems, usando la parametrización de la ecuación 2.12 la función de verosimilitud puede ser expresada como:

$$L(y|u, \varepsilon) = f(y|u, a, b, d) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^J \prod_{k=1}^m [P_{ijk}]^{w_{ijk}} \quad (3.1)$$

$$= \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^J \prod_{k=1}^m \left[[\Psi(-\eta_{ijk})]^{d_j} - [\Psi(-\eta_{ij(k-1)})]^{d_j} \right]^{w_{ijk}} \quad (3.2)$$

$$= \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^J \prod_{k=1}^m \left[\frac{1}{(1 + e^{a_j(u_i - b_{jk})})^{d_j}} - \frac{1}{(1 + e^{a_j(u_i - b_{j(k-1)})})^{d_j}} \right]^{w_{ijk}} \quad (3.3)$$

$$= \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^J \prod_{k=1}^m \left[\frac{1}{(1 + e^{(a_j u_i - \kappa_{jk})})^{d_j}} - \frac{1}{(1 + e^{(a_j u_i - \kappa_{j(k-1)})})^{d_j}} \right]^{w_{ijk}}. \quad (3.4)$$

3.1.2. Distribuciones a priori en el modelo RLPE-GRM

La distribución a priori conjunta de los parámetros de las personas y los ítems asumen una estructura de a prioris independientes definidas de la siguiente manera:

$$P(u, a, b, d|y) = P(u)P(a, b, d|w) = \prod_{i=1}^n P(u_i) \prod_{j=1}^J [P(a_j)P(d_j)] \prod_{k=1}^m P(\kappa_{jk}) \quad (3.5)$$

Se sugiere establecer prioris informativas ya que, al utilizar una priori impropia, no se garantiza la existencia de la distribución conjunta a posteriori. A continuación, se presentan las prioris propuestas:

- Para el vector de parámetros de las personas (habilidades), se asume una distribución normal e independiente:

$$u_i \sim N(0, 1). \quad (3.6)$$

- La distribución a priori del parámetro de discriminación se define de la siguiente manera:

$$a_j \sim N_+(u_a, \sigma_a^2), \quad (3.7)$$

la cual denota una distribución normal truncada positiva con parámetros de localización u_a y escala σ_a .

- Bolfarine y Bazan (2010) recomiendan utilizar la reparametrización para el predictor latente lineal ($\eta_{ijk} = a_j(u_i - b_{jk})$) cuando se realice inferencia Bayesiana. Esta reparametrización nos ayuda a disminuir el tiempo de convergencia de los parámetros, por tanto η_{ijk} queda reparametrizado:

$$\eta_{ijk} = a_j u_a - \kappa_{jk} \quad (3.8)$$

Por consiguiente, las prioris para los parámetros de transición deben reflejar la restricción de orden $\kappa_{j1} < \dots < \kappa_{j(m-1)}$. Para cumplir con esta restricción, es posible introducir parámetros auxiliares sin restricciones $\kappa_{j1}^* < \dots < \kappa_{j(m-1)}^*$ de la siguiente manera:

$$\kappa_{jk}^* \sim N(u_k, \sigma_k^2), \quad (3.9)$$

para $k = 1, \dots, m - 1$. Las distribuciones a priori de los parámetros de transición para el j -ésimo ítem son entonces obtenidas haciendo que κ_{jk} sea igual a la k -ésima estadística de orden de las variables auxiliares $\kappa_{j1}^* < \dots < \kappa_{j(m-1)}^*$ para el j -ésimo ítem, es decir:

$$\kappa_{jk} = \kappa_{j,|k|}^*. \quad (3.10)$$

- El parámetro de asimetría se define como:

$$d_j \sim \text{Gamma}(u_g, \sigma_g^2) \quad (3.11)$$

3.1.3. Distribución a posteriori de los parámetros del modelo RLPE-GRM

Utilizando la Función de Verosimilitud expresada en 3.4 y las distribuciones a priori expresadas en 3.6, 3.7, 3.9, 3.10 y 3.11, se define la distribución a posteriori de los parámetros:

$$P(u, a, b, d|y) = P(u, a, b, d)f(y|u, a, b, d) \quad (3.12)$$

$$\propto P(u, a, b, d) \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^J \prod_{k=1}^m [\Psi(-n_{ijk})]^{d_j} - [\Psi(-n_{ij(k-1)})]^{d_j} \Big]^{w_{ijk}} \quad (3.13)$$

$$\propto P(u, a, b, d) \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^J \prod_{k=1}^m \left[\frac{1}{(1 + e^{(a_j u_i - \kappa_{jk})})^{d_j}} - \frac{1}{(1 + e^{(a_j u_i - \kappa_{j(k-1)})})^{d_j}} \right]^{w_{ijk}} \quad (3.14)$$

3.1.4. Inferencia bayesiana del modelo RLPE-GRM

La distribución a posteriori mencionada en 3.14 no es conocida. Por esta razón, para realizar la estimación bayesiana se consideran métodos de generación de distribuciones a partir de Monte Carlo vía Cadenas de Markov(MCMC), específicamente Metropolis - Hastings que se implementa en el software WinBUGS. A continuación, se describe la especificación jerárquica del modelo general:

$$y|u_i, a_j, \kappa_{jk} \sim \text{Categorica}([\Psi(-\kappa_{j(k-1)} + a_j u_i)]^{d_j} - [\Psi(-\kappa_{jk} + a_j u_i)]^{d_j}) \quad (3.15)$$

$$u_i \sim N(0, 1) \quad (3.16)$$

$$a_j \sim N_+(1, 0,5) \quad (3.17)$$

$$\kappa_{jk}^* \sim N(0, 2) \quad (3.18)$$

$$d_j \sim \text{Gamma}(0,25, 0,25) \quad (3.19)$$

3.2. Implementación computacional

La implementación computacional para realizar inferencia bayesiana mediante MCMC en el modelo RLPE-GRM se lleva a cabo en los programas R y WinBUGS. En el WinBUGS, se implementa el algoritmo de Gibbs, donde se simularán algunas distribuciones condicionales utilizando el algoritmo de Metropolis-Hastings.

En el Anexo 6.4, se encuentra el código en R de la función *grmMCMC()*, la cual facilita la preparación de la data que se utilizará en el WinBUGS para la simulación y la aplicación del modelo RLPE-GRM, también ayuda a definir y ordenar las distribuciones a priori de los parámetros a estimar. En este código, se encuentra la función *bugs* que pertenece a la librería R2WinBUGS, la cual exporta los datos y los parámetros necesarios para la estimación en el WinBUGS, y luego importa la estimación, convergencia y la correlación de los parámetros de este modelo.

En el anexo 6.5, se encuentra el código en BUGS con el que se realiza la inferencia Bayesiana bajo MCMC para el modelo RLPE - GRM. Este código se puede ejecutar directamente del WinBUGS. Ambos códigos se encuentran vinculados para facilitar la ejecución de este modelo. El modelo RLPE-GRM requiere un gran número de iteraciones, ya que los parámetros no convergen rápidamente y existe una mayor autocorrelación.

Los parámetros estimados son utilizados en los códigos de los anexos 6.1, 6.2 y 6.3 para graficar la Función de Respuesta a las Etapas de los Ítems (FREI), la Función de Respuesta a las Categorías de los ítems (FRCI) y la Función de Información de los Ítems (FII), de acuerdo con el orden indicado.

Capítulo 4

Estudio de Simulación

4.1. Objetivos

- Simular datos ordinales politómicos generados con el modelo de respuesta graduada logística de exponente positivo recíproco (RLPE-GRM).
- Evaluar la precisión del método MCMC en la recuperación de los parámetros tanto de los ítems como de los individuos en el modelo RLPE-GRM.

4.2. Algoritmo para simular los datos

El procedimiento del algoritmo para la simulación de datos ordinales politómicos es el siguiente:

- Los parámetros de los ítems se fijan empleando estimaciones derivadas de instrumentos previamente calibrados. Además, se simula el parámetro de habilidad (u_i) para cada persona donde $u_i \sim N(0, 1)$.
- Se define el número de individuos n , cantidad de ítems J y la cantidad de categorías por cada ítem m .
- Se calculan las probabilidades de responder correctamente en una categoría específica del ítem j para el individuo i $P_{jk}(u_i)$.
- Con las probabilidades de responder correctamente a una categoría del ítem, se procede a simular las respuestas de los n individuos en cada uno de los J ítems.
- El código utilizado para la simulación de respuestas ordinales politómicas, basado en el modelo RLPE-GRM, está disponible en el Anexo 6.6.

4.3. Método para estimar los parámetros

El método de estimación de los parámetros del modelo RLPE-GRM se empleará mediante el uso de la inferencia bayesiana, mediante MCMC, el cual se encuentra implementado en el software WinBUGS, cuyo algoritmo empleado es Metropolis-Hastings. Este método nos ayudará a calcular las medias de las distribuciones a posteriori de los parámetros estimados. La cantidad de parámetros estimados en cada simulación de este modelo es de $(m + 2)J + n$.

4.4. Criterio para evaluar la simulación

La evaluación de la simulación del modelo RLPE-GRM se realizará en función de la exactitud en la recuperación de los parámetros. Esta exactitud se medirá utilizando la raíz del error cuadrático medio (RMSE) y el promedio del error absoluto (MAE).

La fórmula para calcular el RMSE es:

$$RMSE(\lambda) = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right) \sum_{s=1}^R (\hat{\lambda}_s - \lambda_s)^2} \quad (4.1)$$

donde λ representa los parámetros de discriminación, dificultad, asimetría y habilidad. $\hat{\lambda}$ es el estimado del parámetro en cada una de las réplicas y R representa la cantidad de réplicas en la simulación

La fórmula para el cálculo del MAE es:

$$MAE(\lambda) = \frac{1}{R} \sum_{s=1}^R |\hat{\lambda}_s - \lambda_s| \quad (4.2)$$

4.5. Escenarios

En la simulación se tomaron en cuenta $J = 6$ ítems, cada uno con $m = 4$ categorías de respuesta, aplicados a una muestra de $n = 1000$ personas. Los parámetros establecidos para los ítems se detallan en el cuadro 4.1

Ítem	b_1	b_2	b_3	a	d
1	-1.2	0.9	2.0	1.6	1.5
2	-0.7	1.5	2.6	2.0	1.8
3	-1.0	1.0	2.2	1.8	1.6
4	-0.8	1.2	2.5	2.0	1.8
5	-1.1	1.1	2.1	1.6	1.5
6	-0.9	1.3	2.3	1.8	1.6

Cuadro 4.1: Parámetros fijados para la simulación

En este estudio de simulación el número de réplicas consideradas será de $R = 25$. Para cada réplica, se considera un conjunto de datos diferente. El desarrollo computacional del estudio de simulación y el resumen de resultados obtenidos se muestran en el Anexo 6.2

4.6. Resultados

La estimación de los parámetros de cada réplica se realizó en el software WinBUGS. Antes del estudio de simulación definitivo, se realizaron simulaciones preliminares para poder determinar la

cantidad de cadenas, iteraciones (asegurar la convergencia), iteraciones descartadas y los saltos en cada cadena para reducir la autocorrelación entre iteraciones. Las simulaciones previas mostraron que cuando un cuestionario tiene ítems difíciles, la convergencia es más rápida en comparaciones a un cuestionario con ítems fáciles. Es por ello que en este estudio de simulación se tomaron en cuenta 2 cadenas con 245 000 iteraciones cada una, de las cuales se descartaron (burning) las primera 80 000. Para las 165 000 restantes se consideraron saltos (thin) de 55 en cada cadena, quedando finalmente 3000 iteraciones efectivas para la estimación de los parámetros de las distribuciones a posteriori por cada cadena. En el cuadro 4.2, se muestra el sesgo promedio de los parámetros estimados mediante 25 réplicas.

Ítem	b_1	b_2	b_3	a	d
1	-0.079	-0.100	-0.056	0.007	0.011
2	-0.234	-0.211	-0.208	-0.039	-0.232
3	-0.168	-0.159	-0.210	-0.029	-0.122
4	-0.211	-0.109	-0.201	-0.066	-0.202
5	-0.080	-0.095	-0.111	-0.018	0.010
6	-0.227	-0.129	-0.137	-0.013	-0.200

Cuadro 4.2: Sesgo de la recuperación de los parámetros usando la estimación MCMC para el modelo RLPE-GRM con 25 réplicas

En este capítulo de simulación, también se mostrarán los intervalos de credibilidad generados mediante la estimación de las 25 réplicas. El cuadro 4.3, muestra la estimación puntual de los parámetros de discriminación y sus intervalos de credibilidad (95 % de credibilidad) estimados mediante 25 réplicas. Es importante notar que los intervalos de credibilidad contienen al estimador puntual de cada uno de los parámetros de discriminación.

Ítem	Fijado a	Estimado a	2.5 %	97.5 %
1	1.6	1.61	1.55	2.10
2	2.0	1.96	1.74	2.33
3	1.8	1.77	1.67	2.26
4	2.0	1.93	1.68	2.23
5	1.6	1.58	1.43	1.93
6	1.8	1.79	1.45	1.95

Cuadro 4.3: Estimación puntual e intervalo de credibilidad al 95 % del parámetro de discriminación usando la estimación MCMC para el modelo RLPE-GRM con 25 réplicas

Los intervalos de credibilidad estimados mediante 25 réplicas para los parámetros de dificultad y asimetría se muestran en los cuadros 4.4 y 4.5. Al igual que los intervalos de credibilidad de los parámetros de discriminación, se observa que los intervalos de credibilidad de los parámetros de dificultad y asimetría contienen al estimador puntual de cada uno de los parámetros. Estos intervalos de credibilidad nos brindan evidencias sobre la precisión del método MCMC en la recuperación de los parámetros del modelo RLPE-GRM.

Ítem	Estadístico	b_1	b_2	b_3
Ítem 1	Fijado	-1.2	0.9	2.0
	Media	-1.28	0.80	1.94
	2.5 %	-1.70	0.38	1.44
	97.5 %	-1.02	0.97	2.14
Ítem 2	Fijado	-0.7	1.5	2.6
	Media	-0.93	1.29	2.39
	2.5 %	-1.18	0.95	2.12
	97.5 %	-0.55	1.68	2.76
Ítem 3	Fijado	-1.0	1.0	2.2
	Media	-1.17	0.84	1.99
	2.5 %	-1.52	0.55	1.80
	97.5 %	-0.87	1.16	2.36
Ítem 4	Fijado	-0.8	1.2	2.5
	Media	-1.01	1.09	2.30
	2.5 %	-1.25	0.71	1.86
	97.5 %	-0.59	1.35	2.63
Ítem 5	Fijado	-1.1	1.1	2.1
	Media	-1.18	1.01	1.99
	2.5 %	-1.51	0.62	1.59
	97.5 %	-0.75	1.32	2.29
Ítem 6	Fijado	-0.9	1.3	2.3
	Media	-1.13	1.17	2.16
	2.5 %	-1.48	0.84	1.80
	97.5 %	-0.76	1.53	2.62

Cuadro 4.4: Estimación puntual e intervalo de credibilidad al 95 % de los parámetro de dificultad usando la estimación MCMC para el modelo RLPE-GRM con 25 réplicas

Ítem	Fijado d	Estimado d	2.5 %	97.5 %
1	1.5	1.51	0.93	1.89
2	1.8	1.57	1.30	2.22
3	1.6	1.48	1.23	1.87
4	1.8	1.60	1.25	2.26
5	1.5	1.51	1.13	2.06
6	1.6	1.40	1.01	2.13

Cuadro 4.5: Estimación puntual e intervalo de credibilidad al 95 % del parámetro de asimetría usando la estimación MCMC para el modelo RLPE-GRM con 25 réplicas

En el cuadro 4.6, se presentan las métricas de RMSE y MAE estimadas a partir de 25 réplicas. Estas métricas nos proporcionan información sobre la exactitud en la recuperación de los parámetros de cada ítem. Los resultados muestran que los parámetros de cada ítem se recuperaron de manera satisfactoria.

Medida de Precisión	Ítem	b_1	b_2	b_3	a	d
RSME	1	0.121	0.155	0.185	0.072	0.118
	2	0.212	0.208	0.224	0.119	0.283
	3	0.187	0.114	0.253	0.114	0.213
	4	0.225	0.228	0.240	0.122	0.227
	5	0.163	0.150	0.193	0.092	0.194
	6	0.200	0.143	0.167	0.096	0.240
MAE	1	0.109	0.118	0.165	0.049	0.090
	2	0.234	0.205	0.206	0.093	0.282
	3	0.168	0.189	0.215	0.094	0.162
	4	0.211	0.212	0.260	0.082	0.189
	5	0.123	0.121	0.165	0.072	0.153
	6	0.227	0.229	0.207	0.090	0.222

Cuadro 4.6: Raíz del error cuadrático medio (RMSE) y Media absoluta del error (MAE) de las estimaciones de los parámetros de los ítems en la simulación del modelo RLPE-GRM

Por último, se evalúa la convergencia de los parámetros de las distribuciones a posteriori. El análisis de convergencia que se muestra a continuación es para una de las 25 réplicas que se estimaron. Los resultados para las demás réplicas son similares a los que se describen en este análisis. La convergencia se realizó mediante los gráficos de diagnóstico disponibles en las librerías *mcmcplots* y *R2WinBUGS* del programa R. En la figura 4.1, se muestran los gráficos para el diagnóstico de convergencia del parámetro de discriminación para el ítem 2 de una de las 25 réplicas. El gráfico de densidad nos muestra que las 2 cadenas convergen rápidamente a una misma distribución a posteriori estacionaria, pues se observa la superposición de las 2 cadenas. Por otro lado, el gráfico de autocorrelación nos muestra la no existencia de un problema de autocorrelación grave. Finalmente, el último gráfico nos muestra el histórico de las 2 cadenas para la estimación del parámetro de discriminación, donde se observa la superposición (convergencia) de las 2 cadenas. Los parámetros de discriminación de los ítems restantes mostraron un comportamiento similar.

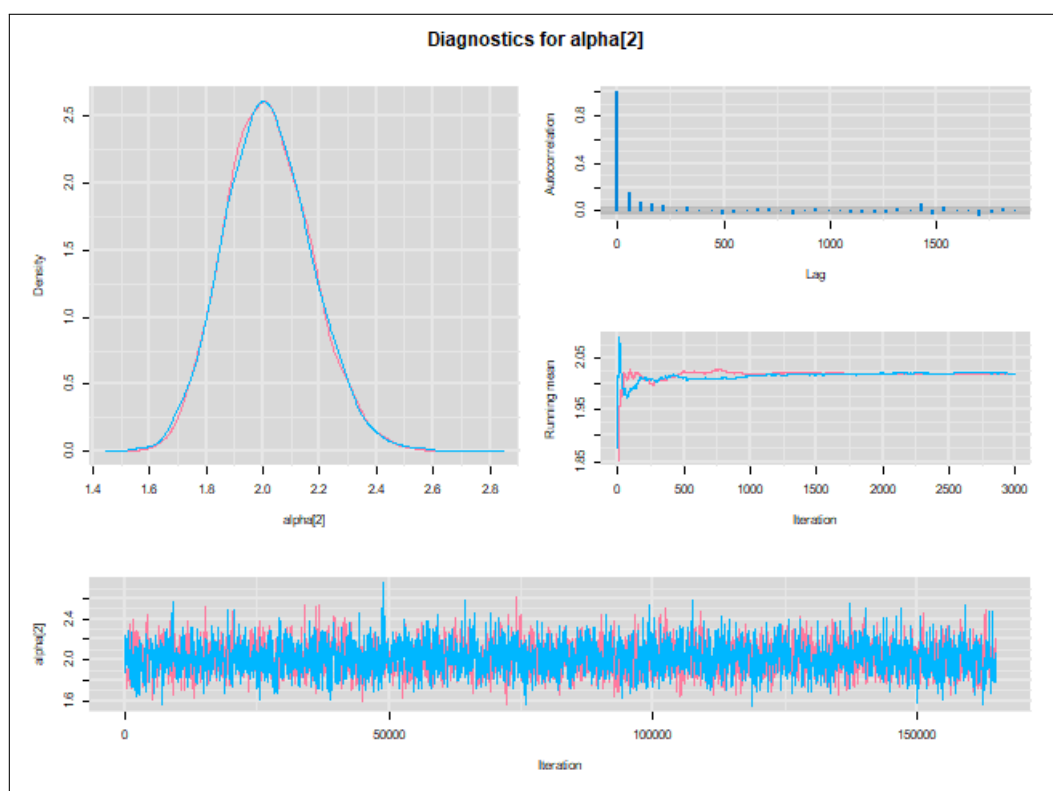


Figura 4.1: Gráfico de las 2 cadenas, densidad y autocorrelación para el parámetro de discriminación (a_2) del ítem 2 estimado mediante el modelo RLPE-GRM para una de las 25 réplicas

En la figura 4.2, se muestran los gráficos de una de las 25 réplicas para el diagnóstico de convergencia del tercer parámetro de dificultad (primer umbral) para el ítem 2. El gráfico de densidad nos muestra que las 2 cadenas convergen rápidamente a una misma distribución a posteriori estacionaria, pues se observa la superposición de las 2 cadenas. Por otro lado, el gráfico de autocorrelación nos muestra la no existencia de un problema de autocorrelación grave y el último gráfico nos muestra el histórico de las 2 cadenas para la estimación del parámetro de dificultad, donde se observa la superposición (convergencia) de las 2 cadenas. Los parámetros de dificultad de los ítems restantes mostraron un comportamiento similar.

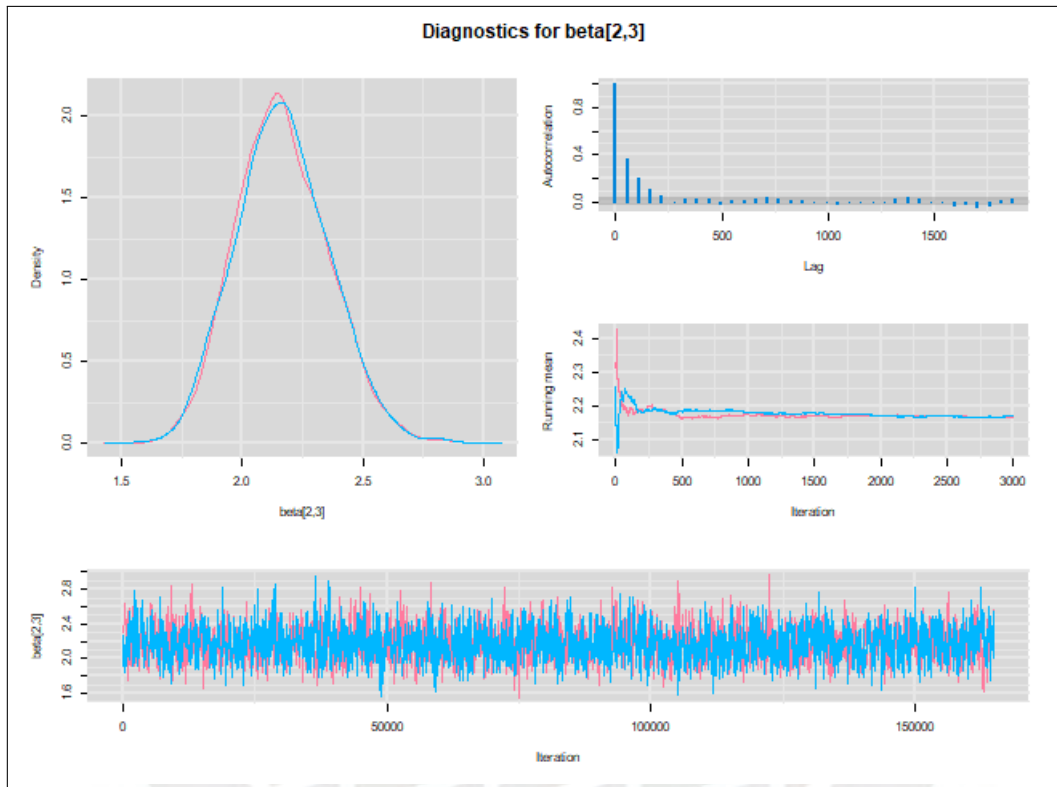


Figura 4.2: Gráfico de las 2 cadenas, densidad y autocorrelación para el tercer parámetro de dificultad (b_{23}) del ítem 2 estimado mediante el modelo RLPE-GRM para una de las 25 réplicas

En la figura 4.3, se muestran los gráficos de una de las 25 réplicas con el diagnóstico de convergencia del parámetro de asimetría para el ítem 2. El gráfico de densidad nos muestra que las 2 cadenas convergen a una misma distribución a posteriori estacionaria, pues se observa la superposición de las 2 cadenas. Por otro lado, el gráfico de autocorrelación nos muestra la no existencia de un problema de autocorrelación grave y el último gráfico nos muestra el histórico de las 2 cadenas para la estimación del parámetro de asimetría, donde se observa la superposición (convergencia) de las 2 cadenas. Los parámetros de asimetría de los ítems restantes mostraron un comportamiento similar.

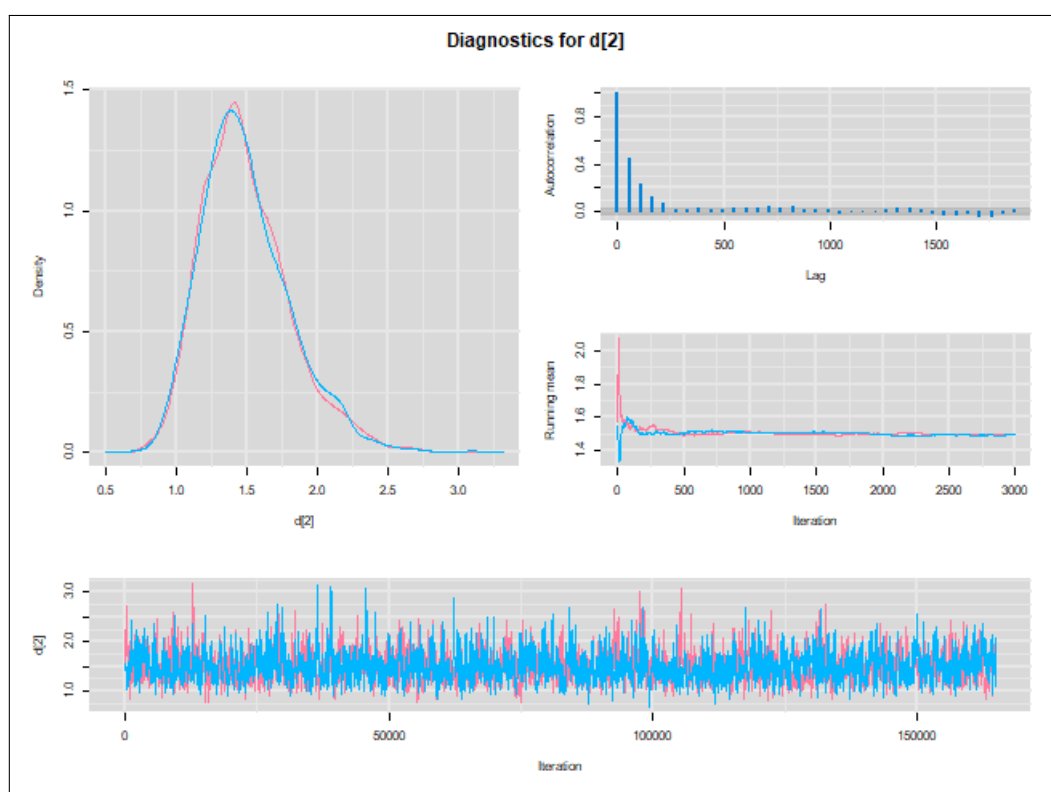


Figura 4.3: Gráfico de las 2 cadenas, densidad y autocorrelación para el parámetro de asimetría (d_j) del ítem 2 estimado mediante el modelo RLPE-GRM para una de las 25 réplicas

Al finalizar el estudio de simulación se pudo concluir:

- En el estudio de simulación, se logró recuperar de manera óptima los parámetros estimados para los ítems y los individuos utilizando inferencia bayesiana a través de MCMC en el software WinBUGS.
- Fue necesario realizar un número alto de iteraciones para poder alcanzar la convergencia de las cadenas.
- Los parámetros convergen de manera óptima para las 25 réplicas realizadas en la simulación.
- Los parámetros con mayor dificultad para lograr la convergencia fueron los parámetros de asimetría.

Capítulo 5

Aplicación

La implementación de este estudio se sitúa en el contexto educativo, centrándose en la cuantificación de las dimensiones de la convivencia escolar. El principal objetivo de esta aplicación es el poder estimar la habilidad (escala de convivencia escolar) mediante el modelo RLPE-GRM implementado en este estudio. Además, comparar los modelos RLPE-GRM y 2PL-GRM.

Los datos utilizados para la aplicación de este estudio fueron extraídos de un cuestionario aplicado a los estudiantes de segundo grado de secundaria en el marco de la ECE 2016, formulado por los metodólogos de la Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes (UMC) del Ministerio de Educación (MINEDU).

5.1. Introducción

Según Chaparro y Caso (2015), la convivencia escolar se comprende como un conjunto de prácticas relacionales realizadas por los agentes que participan en la vida cotidiana de las instituciones educativas. Estas prácticas se manifiestan en diversos procesos dentro de las escuelas, incluyendo la enseñanza, el manejo de normas, la solución de conflictos, el trato con las diferencias, la relación con padres y madres, y la interacción entre estudiantes y docentes. Estos procesos dan lugar a prácticas específicas como la inclusión o exclusión, la participación o segregación, y la resolución pacífica o violenta, entre otras. De esta manera, la convivencia escolar se convierte en un reflejo dinámico y complejo de las relaciones interpersonales en el ámbito educativo.

En la actualidad, muchos estudios nacionales como internacionales nos muestran las ventajas que ofrece una buena convivencia escolar. Romagnoli (2007) y Cid y Diaz (2008) mencionan que la convivencia escolar tiene efectos comprobados sobre el rendimiento de los estudiantes. Alumnos que sufren daños físicos o emocionales tienen efectos negativos en el rendimiento escolar. Estas ventajas que ofrece la convivencia escolar en la educación nos llevan a buscar la forma de cuantificarlas.

El poder cuantificar la convivencia escolar tiene muchas dificultades, por los diferentes enfoques que contribuyen a su conceptualización. Por ello, la UMC ha desarrollado un instrumento que trata de medir la convivencia escolar.

La UMC basa la creación de la escala de convivencia escolar en las perspectivas de la convivencia

inclusiva, convivencia democrática y convivencia pacífica descritas por Chaparro y Caso (2015). Para la elaboración del instrumento, se plantearon 3 dimensiones que recogen información sobre diferentes aspectos relacionados a la convivencia escolar. En la primera dimensión, se indagó sobre la percepción de los estudiantes respecto a las manifestaciones de violencia en el ámbito escolar; la segunda dimensión se centró en el cumplimiento de las normas, la disciplina y el respeto hacia la autoridad en la escuela; mientras que la última dimensión abordó la calidad de las relaciones interpersonales entre los miembros de la comunidad educativa. Estos aspectos son fundamentales para entender el contexto en el que se llevan a cabo los aprendizajes de los estudiantes, ya que buscan el desarrollo de elementos emocionales y sociales que influyen en los procesos de aprendizaje.

Después de la aplicación de este instrumento, los especialistas de la Oficina de Medición de la Calidad de los aprendizajes (UMC) realizaron análisis descriptivo, donde se observaron las tasas de respuesta para los ítems de las tres dimensiones. En la dimensión relacionada a la calidad de las relaciones interpersonales en la escuela, se observó que más del 70 % de los estudiantes marcaban como respuesta las categorías más altas (“De acuerdo” o “Muy de acuerdo”) de cada uno de los ítems. El ver este patrón de marcas en esta tercera dimensión nos hace sospechar que las respuestas de los estudiantes pueden encontrarse sistemáticamente sesgadas, con lo cual los puntajes no reflejan el verdadero rasgo latente que se busca medir.

Furr (2011) menciona que existen diversos tipos de sesgo en las respuestas a los ítems, como la aquiescencia, extremismo, respuestas aleatorias, fingir “estar mal” y deseabilidad social, los cuales implican problemas en la medición de las variables psicológicas, comprometiendo la calidad psicométrica de los instrumentos de medición y la interpretación de los resultados obtenidos.

De todos estos, la deseabilidad social tiene mayores efectos en la medición de variables de la personalidad Kuncel y Tellegen (2009). La deseabilidad social refiere a presentarse de una forma favorable, socialmente aceptable, en lugar de reflejar la forma de ser de la persona. Las personas responden a los cuestionarios considerando las cualidades más deseables y evitando marcar por las alternativas con cualidades negativas. Este sesgo usualmente se presenta bajo dos modalidades: la primera, donde la persona responde un cuestionario de forma intencional para parecer socialmente deseables; en la segunda, la persona tiene autoaceptación positiva sobredimensionada, por este motivo la persona da información imprecisa, pero cree que es precisa.

Con base en la tasa de respuesta de los ítems de la dimensión relacionada a la calidad de las relaciones interpersonales en la escuela y la teoría sobre el sesgo de la deseabilidad social, podemos decir que en esta dimensión los estudiantes marcaron sus respuestas produciendo una sobreestimación. El estudiante pudo responder de manera intencional para parecer socialmente aceptado por su director, profesores y compañeros de estudio o sobreestimó sus respuestas por un tema de no afectar su propia identidad en relación a su escuela.

En este contexto, el modelo RLPE-GRM, desarrollado e implementado en este estudio, nos ayuda a tener una mejor estimación del rasgo latente relacionado a la calidad de las relaciones interpersonales en la escuela, pues el modelo RLPE- GRM penaliza los ítems que tienen una alta tasa de respuesta a las categorías más altas.

5.2. Instrumentos de medición

En el año 2016, la UMC, basándose en las perspectivas de la convivencia inclusiva, convivencia democrática y convivencia pacífica descritas en Chaparro y Caso (2015) elaboró el instrumento de medición de la convivencia escolar. Luego de tener un instrumento, se realizó la validación de juicio de expertos, en la cual participaron especialistas de diferentes Oficinas del Ministerio de Educación (Minedu).

Este cuestionario incluyó 31 ítems que recopilaban información sobre diferentes aspectos de la convivencia escolar. En los primeros 7 ítems, se indagó sobre la percepción de los estudiantes respecto a las manifestaciones de violencia en el entorno escolar. A continuación, los siguientes 17 ítems se enfocaron en el cumplimiento de las normas, la disciplina y el respeto hacia la autoridad en la escuela. Por último, los 7 ítems finales abordaron la calidad de las relaciones interpersonales entre los miembros de la comunidad educativa.

Como se mencionó anteriormente, se observó que más del 70 % los ítems relacionados a la tercera dimensión (calidad de las relaciones interpersonales dentro de la escuela) marcaban como respuesta las categorías más altas (“De acuerdo” o “Muy de acuerdo”) de cada uno de los ítems. Por ello, la aplicación de este estudio trabajará con los 7 ítems pertenecientes a esta dimensión. Los ítems relacionados a esta dimensión fueron:

- Nuestros profesores nos respetan.
- El director o la directora es cercano(a) a los estudiantes.
- La relación entre los profesores y los estudiantes es buena.
- Siento confianza para acercarme a mis profesores cuando tengo algún problema.
- En mi colegio, el ambiente es acogedor y amigable.
- En mi colegio, los profesores se ocupan de sus alumnos.
- En mi colegio, la relación ente estudiantes es buena.

Estos 7 ítems fueron respondidos usando una escala de tipo likert con 5 niveles de puntuaciones (Muy en desacuerdo, En desacuerdo, Ni de acuerdo ni en desacuerdo, De acuerdo, Muy de acuerdo).

5.3. Diseño muestral

El cuestionario fue aplicado a 380 059 estudiantes de escuelas estatales. Para la construcción de esta escala se utilizó una muestra aleatoria de 1825 estudiantes que pertenecen a Lima Metropolitana. Se estableció este tamaño de muestra debido a las limitaciones computacionales del modelo RLPE-GRM.

5.4. Evidencias de validez y fiabilidad del instrumento

5.4.1. Validez del instrumento

Una manera de evaluar la validez de un instrumento es a través del análisis factorial. Este tipo de análisis permite verificar la hipótesis de unidimensionalidad para los tres constructos latentes

relacionados con la convivencia escolar.

Una manera de evaluar la validez de un instrumento es a través del análisis factorial. Este tipo de análisis permite verificar la hipótesis de unidimensionalidad para los tres constructos latentes relacionados con la convivencia escolar. Se realizó análisis factorial confirmatorio basado en el método de estimación WLSMV (*Weighted least squares means and variance adjusted*), pues los ítems son variables ordinales.

Con el análisis factorial confirmatorio, se validaron los 3 constructos latentes. Los índices de ajuste que se muestran en el cuadro 5.1 confirman la estructura factorial propuesta y su funcionamiento adecuado. Además, las cargas factoriales de casi todos los ítems que conforman las escalas oscilan entre 0.44 y 0.803. Estos valores aportan una mayor evidencia sobre la validez de las escalas.

Índices de ajuste	Valor
RMSEA	0.047
CFI	0.953
TLI	0.949

Cuadro 5.1: Indicadores de validez de las escalas de convivencia escolar

5.4.2. Fiabilidad del instrumento

La fiabilidad de un instrumento se entiende como qué tan bien representan los puntajes observados el puntaje real. La fiabilidad puede ser medida mediante la consistencia interna de un instrumento utilizando el alfa de Cronbach (Cronbach (1951)). En el cuadro 5.2, se muestran los valores del alfa de Cronbach para los 3 constructos vinculados a la convivencia escolar.

El primer constructo, definido como percepción que tienen los estudiantes acerca de las manifestaciones de violencia escolar, tuvo un alfa de 0.718; el segundo constructo, relacionado al cumplimiento de las normas, la disciplina y el respeto a la autoridad en la escuela, tuvo un alfa de 0.816; el tercer constructo, el cual está relacionado a la calidad de las relaciones interpersonales, presentó un alfa de 0.773. Como se observa, todos los constructos tuvieron un alfa superior al 0.7, valores que nos garantizan la fiabilidad de los 3 constructos.

Constructo	Valor
Percepción sobre la violencia en la escuela	0.718
Cumplimiento de las normas en la escuela	0.816
Calidad de las relaciones interpersonales en la escuela	0.773

Cuadro 5.2: Indicador de fiabilidad (alfa de Cronbach) para las escalas de convivencia escolar

5.5. Estimación de los parámetros mediante el modelo 2PL-GRM

Realizaremos la comparación entre el modelo 2PL-GRM y RLPE-GRM para poder visualizar las ventajas del modelo RLPE-GRM. Empezaremos estimando la calidad de las relaciones interpersonales en la escuela mediante el modelo 2PL-GRM. Este modelo se estimó con los códigos desarrollados en Tarazona (2013).

5.5.1. Análisis de la calidad de las relaciones interpersonales en la escuela

Esta tercera dimensión (calidad de las relaciones interpersonales en la escuela) relacionada a la convivencia escolar consta de 7 ítems, los cuales fueron debidamente validados por la UMC. En la muestra de los 1825 casos, se observó que la tasa de respuesta a la categoría Muy en desacuerdo es menor al 2 % para los 7 ítems. Por este motivo, fueron colapsados con la categoría En desacuerdo.

El cálculo de la probabilidad de responder a la categoría k en el ítem j (P_{ijk}), utilizando el modelo de respuesta graduada de dos parámetros (2PL-GRM), depende de la percepción del nivel de calidad de las relaciones interpersonales dentro de la escuela (habilidad u_i), de los parámetros de discriminación a_j y parámetro de dificultad b_j . Para observar con mayor detalle las características del modelo 2PL-GRM podemos revisar la sección 2.2

En este análisis, se empieza mostrando la estimación de los parámetros de discriminación (a_j) y dificultad (b_{jk}) junto con los intervalos de credibilidad (95 % de credibilidad) de cada uno de ellos.

En el cuadro 5.3, se muestran los parámetros estimados de discriminación (a) y sus intervalos de credibilidad. Baker y Kim (2017) presentan una categorización sobre el grado de discriminación que tiene cada ítem, si el ítem tiene un valor mayor a 0.65 pero menor a 1.34 presenta un poder de discriminación moderado. Además, si el valor es superior a 1.35, presenta un poder de discriminación alto o muy alto. En torno al constructo de la calidad de las relaciones interpersonales en la escuela, se observa que todos los ítems muestran una discriminación apropiada (Baker y Kim (2017)). Reportando valores entre 1.08 a 2.23, donde los ítems 3 (La relación entre los profesores y los estudiantes es buena) y 6 (En mi colegio, los profesores se ocupan de sus alumnos) son los que presentan mayores valores de discriminación. Por el contrario, el ítem 2 (El director o la directora es cercano(a) a los estudiantes) es el que presenta menor valor de discriminación (1.08).

Ítem	Estimado a	2.5 %	97.5 %
1	1.82	1.63	2.02
2	1.08	0.96	1.21
3	2.02	1.83	2.23
4	1.32	1.18	1.46
5	1.35	1.22	1.50
6	2.23	2.01	2.47
7	1.55	1.40	1.70

Cuadro 5.3: Estimación puntual e intervalo de credibilidad al 95 % del parámetro de discriminación usando la estimación MCMC para el modelo 2PL-GRM con 25 réplicas

Los parámetros de dificultad (b_i) estimados y sus intervalos de credibilidad se muestran en el cuadro 5.4. Podemos observar que los umbrales b_{j1} y b_{j2} para los 7 ítems son negativos, y el umbral b_{j1} para todos los ítems tiene valores entre -2.23 a -1.53. Por otro lado, los 7 ítems que miden la calidad de las relaciones interpersonales en la escuela en su umbral b_{j3} tienen valores entre 0.07 a 1.44. Con estos parámetros de dificultad (umbrales) observamos que el ítem 1 (Nuestros profesores nos respetan) es el ítem más fácil de responder a las categorías más altas, mientras los ítems 2 (El director o la directora es cercano(a) a los estudiantes.) y 4 (Siento confianza para acercarme a mis profesores cuando tengo algún problema) son los ítems más difíciles de responder a las categorías más altas.

Ítem	Estadístico	b_1	b_2	b_3
Ítem 1	Media	-2.23	-1.54	0.07
	2.5 %	-2.44	-1.69	0.00
	97.5 %	-2.04	-1.39	0.16
Ítem 2	Media	-1.62	-0.48	1.44
	2.5 %	-1.82	-0.60	1.28
	97.5 %	-1.45	-0.38	1.61
Ítem 3	Media	-1.84	-0.98	0.64
	2.5 %	-2.00	-1.08	0.56
	97.5 %	-1.69	-0.89	0.73
Ítem 4	Media	-1.53	-0.45	1.31
	2.5 %	-1.70	-0.54	1.18
	97.5 %	-1.37	-0.36	1.48
Ítem 5	Media	-2.02	-0.85	1.08
	2.5 %	-2.21	-0.96	0.96
	97.5 %	-1.83	-0.74	1.20
Ítem 6	Media	-1.84	-1.05	0.64
	2.5 %	-2.00	-1.14	0.56
	97.5 %	-1.70	-0.96	0.73
Ítem 7	Media	-1.85	-0.69	1.06
	2.5 %	-2.04	-0.79	0.96
	97.5 %	-1.68	-0.60	1.18

Cuadro 5.4: Estimación puntual e intervalo de credibilidad al 95 % de los parámetros de dificultad usando la estimación MCMC para el modelo 2PL-GRM con 25 réplicas

Las figuras 5.1 y 5.2 muestran la FREI y FRCI para 6 de los 7 ítems que miden la dimensión de la percepción del nivel de calidad de las relaciones interpersonales al interior de las escuelas.

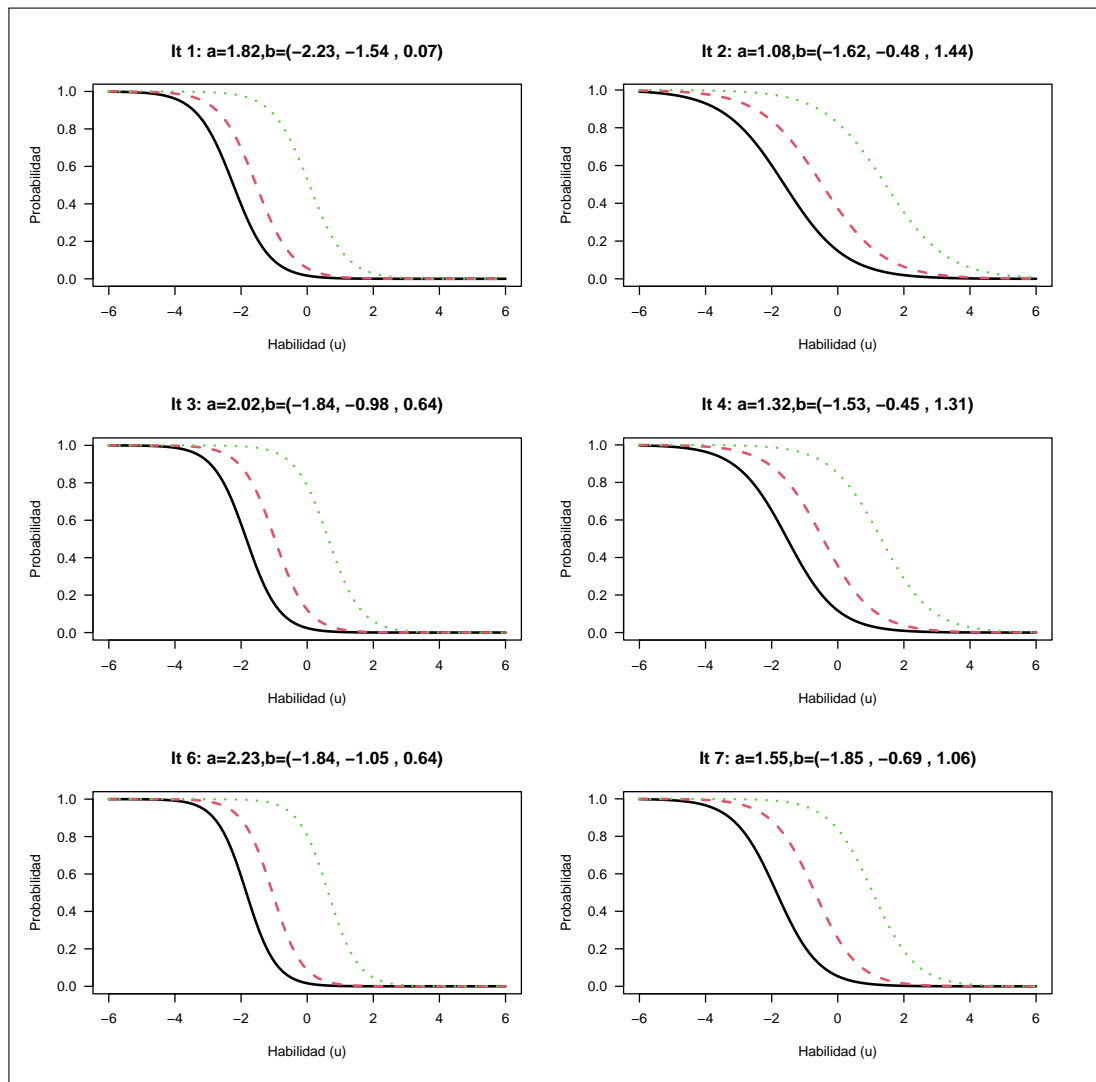


Figura 5.1: Representación gráfica de las FREI del modelo 2PL-GRM para 6 ítems con 4 categorías cada uno

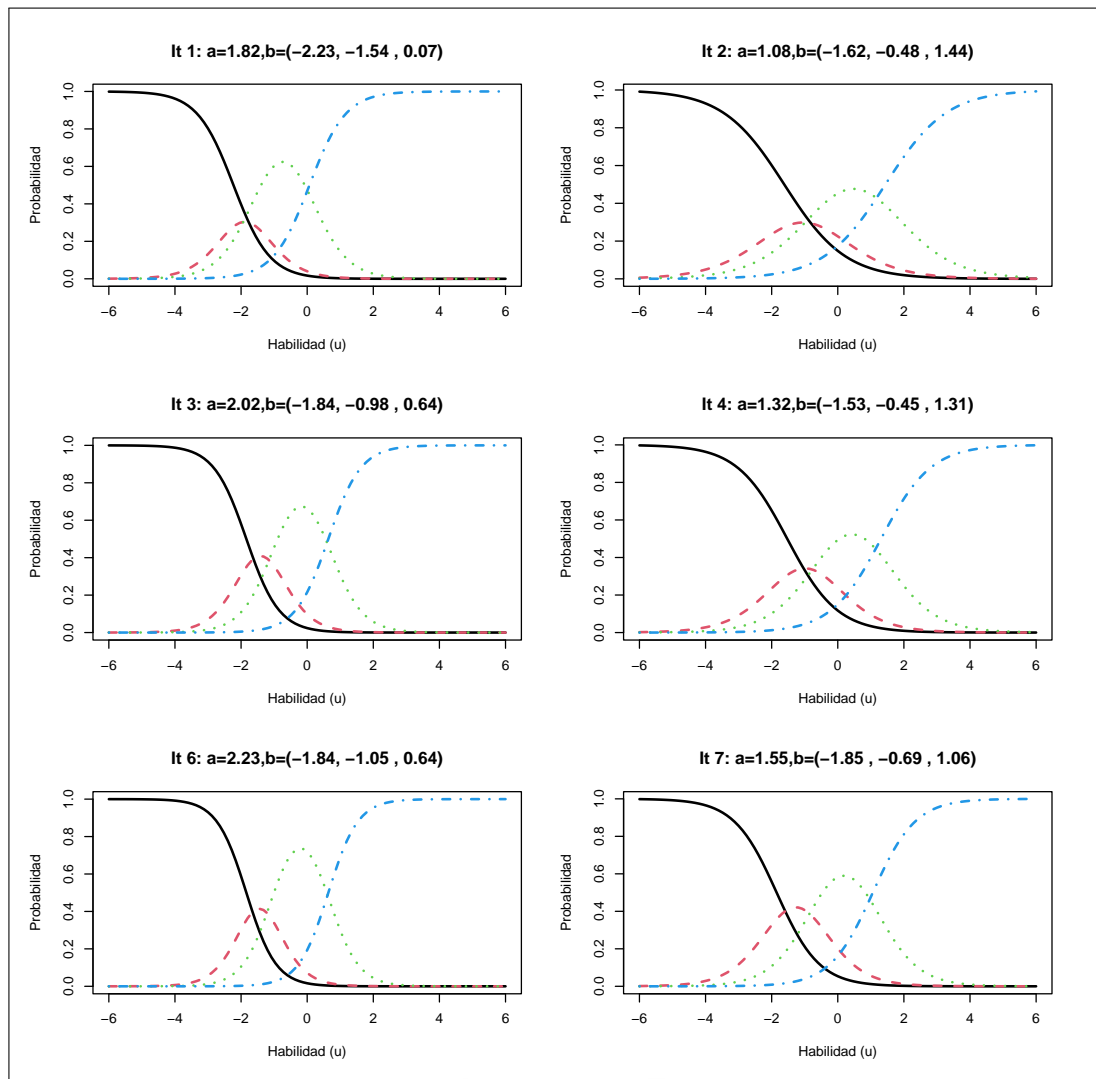


Figura 5.2: Representación gráfica de las FRCI del modelo 2PL-GRM para 6 ítems con 4 categorías cada uno

La función de información de los 7 ítems estimados con el modelo 2PL-GRM se muestra en la figura 5.3. La función de información de los 7 ítems se distribuye a lo largo de la escala de habilidad. Esto brinda evidencias de la correcta medición a lo largo de toda la escala. Además, se observa que los ítems 2 y 4 aportan mayor información, mientras que, los ítems 1, 3 y 6 son los que aportan menor información en la estimación de los parámetros.

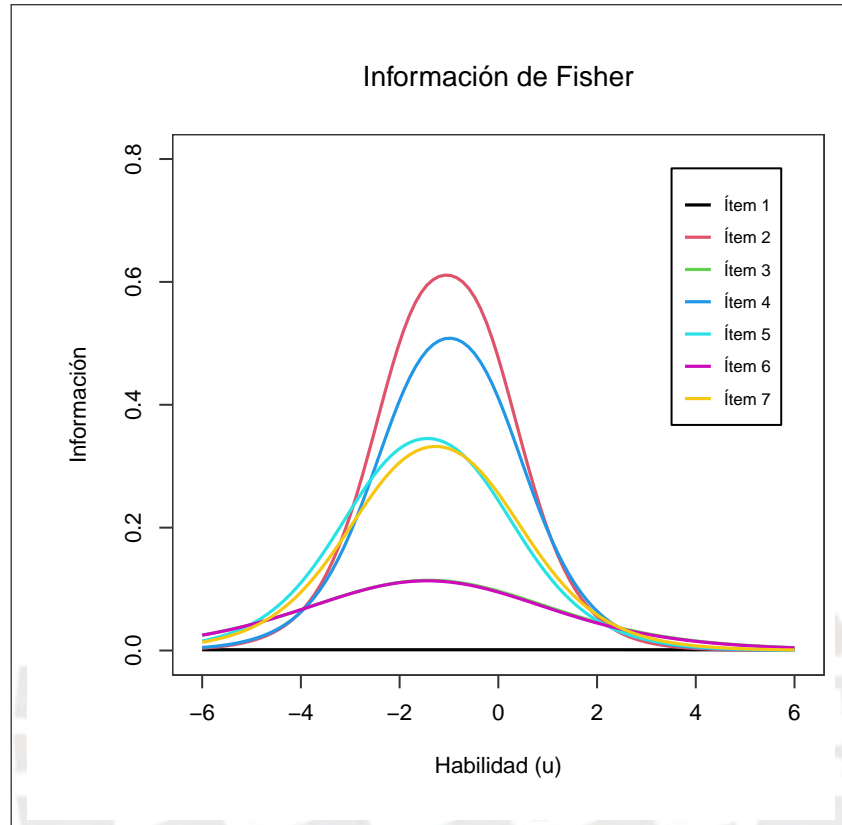


Figura 5.3: Representación gráfica de la Función de Información del Ítem (FII) del modelo 2PL-GRM para 7 ítems con 4 categorías cada uno

Para la estimación del modelo 2PL-GRM, se aplicaron 265 000 iteraciones, las 100 000 primeras iteraciones se descartaron. Para las siguientes 165 000 restantes se consideraron saltos de 55 para las 2 cadenas. En las figuras 5.4 y 5.5, se observa que los parámetros estimados de dificultad y discriminación para el ítem 3 no presentan autocorrelación y las 2 cadenas utilizadas convergen de manera rápida y adecuada. Esta misma tendencia se observan en los otros 6 ítems.

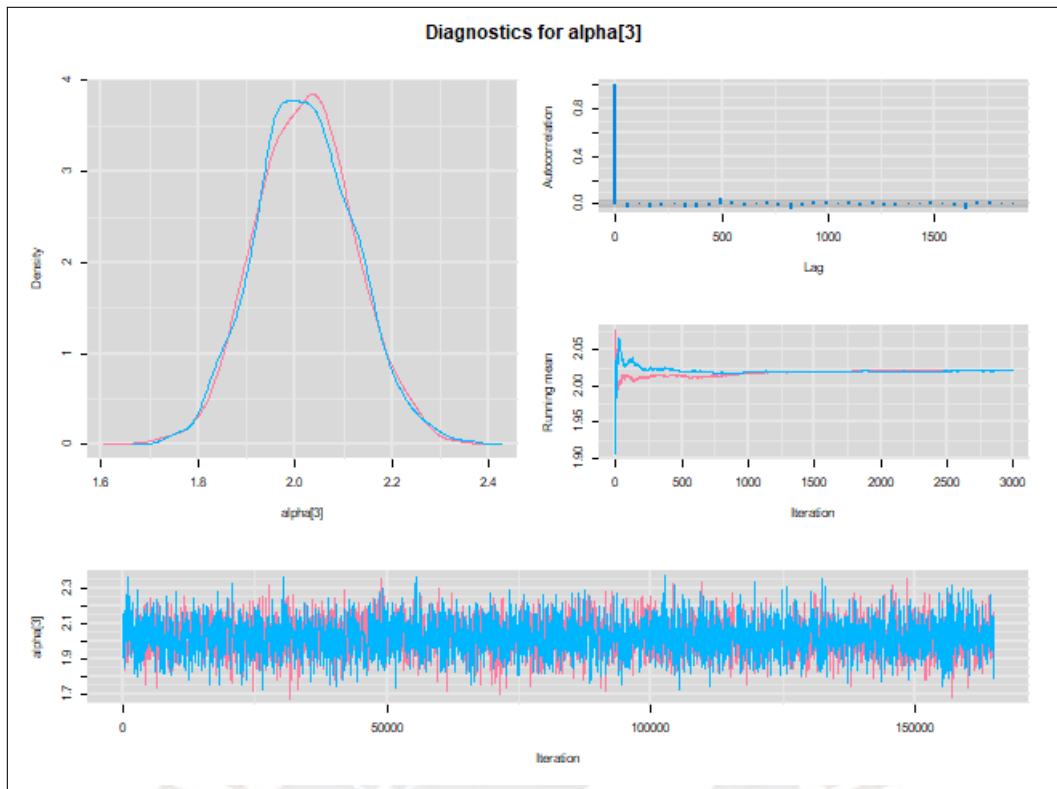


Figura 5.4: Gráfico de 2 cadenas, densidad y autocorrelación para el parámetro de discriminación (a_3) del ítem 3 estimado mediante el modelo 2PL-GRM

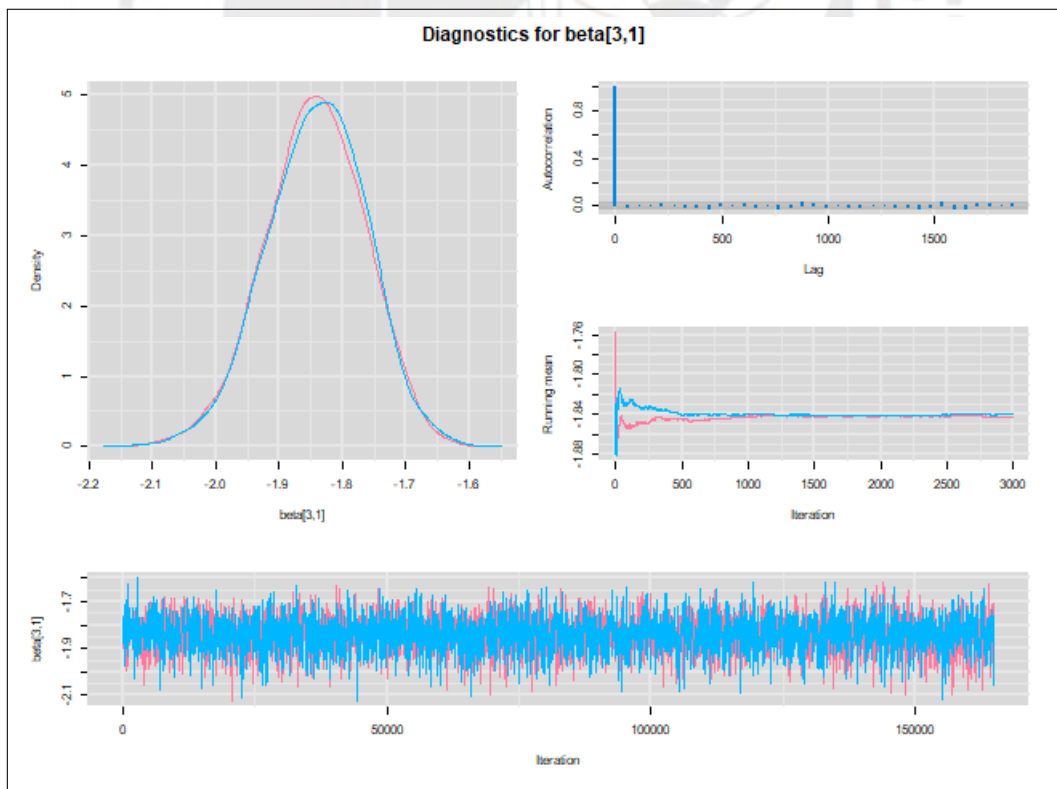


Figura 5.5: Gráfico de 2 cadenas, densidad y autocorrelación para el parámetro de dificultad (b_{31}) del ítem 3 para el primer umbral estimado mediante el modelo 2PL-GRM

El propósito fundamental de implementar el modelo 2PL - GRM es poder cuantificar la Calidad de las relaciones interpersonales dentro de la escuela. La figura 5.6 muestra la estimación del parámetro de habilidad de un estudiante, donde no se observa autocorrelación y las 2 cadenas utilizadas convergen rápido y de manera adecuada, lo mismo que sucede con la estimación de los parámetros de habilidad de los demás estudiantes. Finalmente, la figura 5.7 muestra la distribución de la Calidad de las relaciones interpersonales en la escuela (habilidad u_i). Esta distribución presenta una ligera asimetría a la derecha, es decir existe una mayor proporción (concentración) de estudiantes que puntúan más alto en la escala de la calidad de las relaciones interpersonales en la escuela

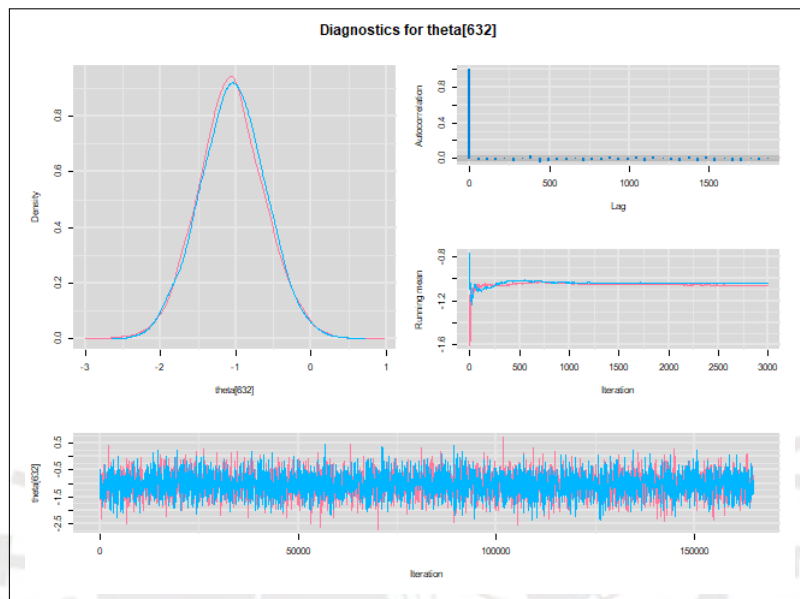


Figura 5.6: Gráfico de 2 cadenas, densidad y autocorrelación para el parámetro de habilidad de un estudiante estimado mediante el modelo 2PL-GRM

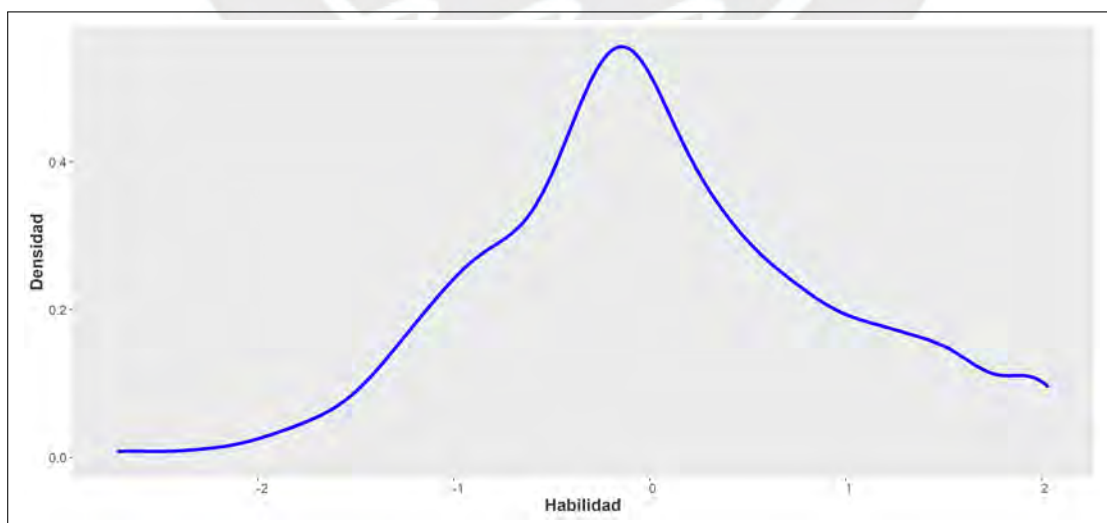


Figura 5.7: Distribución de densidad para las habilidades estimadas mediante el modelo 2PL-GRM

5.6. Estimación de los parámetros mediante el modelo RLPE-GRM

La estimación del modelo RLPE-GRM fue implementada con la librería R2WinBUGS del software R implementado por Sturtz, Ligges, y Gelman (2005) y el programa WinBUGS. Los códigos desarrollados en WinBUGS están basados en Tarazona (2013). Para ejecutar este modelo se aplicaron 265 000 iteraciones. Las 100 000 primeras iteraciones se descartaron, y para los 165 000 restantes se consideraron saltos de 55 para las 2 cadenas. Por ello solo nos quedamos con 3000 iteraciones efectivas.

5.6.1. Análisis de la calidad de las relaciones interpersonales en la escuela

En el modelo de respuesta graduada logística de exponente positivo recíproco (RLPE-GRM), para calcular la probabilidad de responder a una categoría k en el ítem j depende de la percepción del nivel de calidad de las relaciones interpersonales al interior de las escuelas (habilidad u_i), de los parámetros de discriminación a_j , parámetro de dificultad b_j y el parámetro de penalidad d_j que controla la asimetría de las FREI y FRCI.

$$P_{ijk} = \begin{cases} [\Psi(-\eta_{ijk})]^{d_j} & \text{si } k = 1 \\ [\Psi(-\eta_{ijk})]^{d_j} - [\Psi(-\eta_{ij(k-1)})]^{d_j} & \text{si } 2 \leq k < m \\ 1 - [\Psi(-\eta_{ij(k-1)})]^{d_j} & \text{si } k = m, \end{cases}$$

A continuación, se presentará la estimación de los parámetros de discriminación (a_j), dificultad (b_{jk}) y de asimetría (d_j) junto con los intervalos de credibilidad para cada uno de ellos.

Ítem	Estimado a	2.5 %	97.5 %
1	1.48	1.28	1.68
2	1.20	1.02	1.40
3	1.89	1.66	2.15
4	1.53	1.32	1.75
5	1.38	1.20	1.60
6	1.91	1.68	2.17
7	1.55	1.35	1.76

Cuadro 5.5: Estimación puntual e intervalo de credibilidad al 95 % del parámetro de discriminación usando la estimación MCMC para el modelo RLPE-GRM con 25 réplicas

En el cuadro 5.5, se encuentran los valores estimados del parámetro de discriminación (a) y sus intervalos de credibilidad. Según Baker y Kim (2017), los 7 ítems tienen una discriminación apropiada (moderada, alta y muy alta). Reportan valores entre 1.20 a 1.92, siendo los ítems 6 (En mi colegio, los profesores se ocupan de sus alumnos) y 3 (La relación entre los profesores y los estudiantes es buena) los que presentan mayores valores de discriminación. Por otro lado, el ítem 2 (El director o la

directora es cercano(a) a los estudiantes) es el que presenta menor valor (1.2).

Ítem	Estadístico	b_1	b_2	b_3
Ítem 1	Media	-1.62	-0.99	0.64
	2.5 %	-1.97	-1.30	0.33
	97.5 %	-1.24	-0.63	0.99
Ítem 2	Media	-1.97	-0.80	1.08
	2.5 %	-2.37	-1.11	0.76
	97.5 %	-1.57	-0.46	1.48
Ítem 3	Media	-1.70	-0.86	0.77
	2.5 %	-1.94	-1.05	0.57
	97.5 %	-1.45	-0.64	1.00
Ítem 4	Media	-1.94	-0.82	0.90
	2.5 %	-2.25	-1.05	0.67
	97.5 %	-1.64	-0.59	1.16
Ítem 5	Media	-2.09	-0.91	1.01
	2.5 %	-2.44	-1.16	0.76
	97.5 %	-1.76	-0.65	1.32
Ítem 6	Media	-1.40	-0.65	1.05
	2.5 %	-1.69	-0.90	0.80
	97.5 %	-1.08	-0.35	1.35
Ítem 7	Media	-1.88	-0.72	1.04
	2.5 %	-2.21	-0.96	0.79
	97.5 %	-1.57	-0.46	1.33

Cuadro 5.6: Estimación puntual e intervalo de credibilidad al 95 % de los parámetros de dificultad usando la estimación MCMC para el modelo RLPE-GRM con 25 réplicas

La estimación de los parámetros de dificultad (b_i) y sus intervalos de credibilidad de cada uno de los ítems se presenta en el cuadro 5.6. Se observa que los dos primeros umbrales (b_{j1}, b_{j2}) para los 7 ítems son negativos. El primer umbral (b_{j1}) para todos los ítems se encuentra entre -2.01 a -1.62, a su vez el tercer umbral (b_{j3}) de los 7 ítems se encuentra entre 0.77 a 1.09. Con estos umbrales, se puede decir que en su mayoría los ítems de este constructo son fáciles de responder a las categorías más altas.

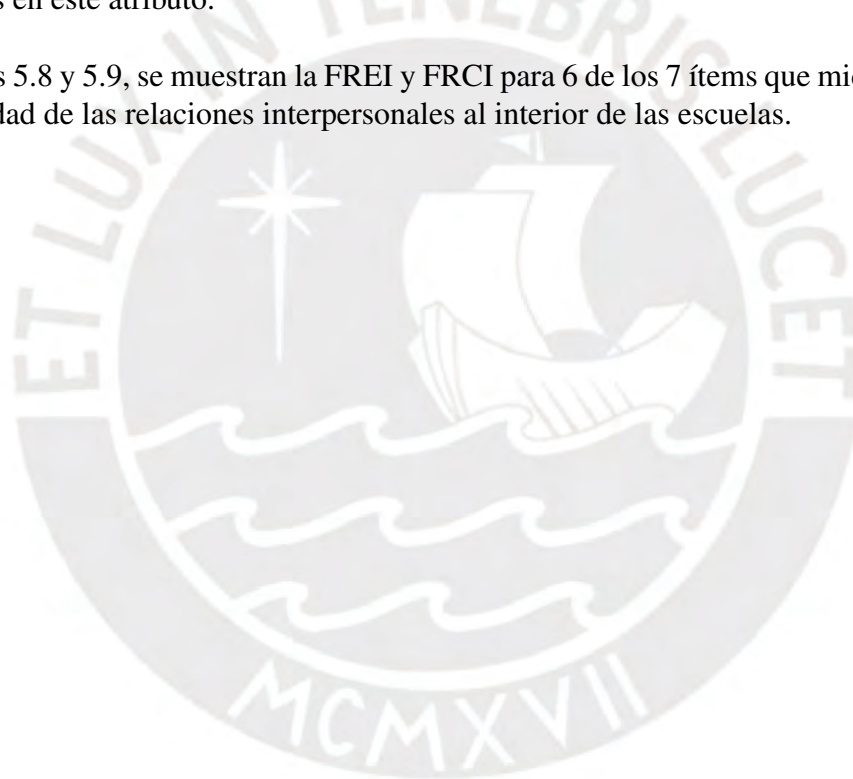
La estimación de los parámetros de asimetría (d_i) junto a sus intervalos de credibilidad son presentados en el cuadro 5.7. Los ítems con mayores valores de asimetría son el 1 (1.91) y 6 (1.78). Por otro lado, el ítem con menor parámetro de asimetría es el 4 (0.7). De los 7 ítems que miden la percepción del nivel de calidad de las relaciones interpersonales al interior de las escuelas, 4 presentan una

Ítem	Estimado d	2.5 %	97.5 %
1	1.91	1.75	2.31
2	0.78	0.60	1.02
3	1.21	1.05	1.45
4	0.70	0.56	0.87
5	0.95	0.86	1.11
6	1.80	1.59	2.00
7	0.99	0.78	1.06

Cuadro 5.7: Estimación puntual e intervalo de credibilidad al 95 % de los parámetros de asimetría usando la estimación MCMC para el modelo RLPE-GRM con 25 réplicas

asimetría menor a 1 ($d_j < 1$). Esto implica que estudiantes con menor percepción del nivel de calidad de las relaciones interpersonales al interior de las escuelas tienen mayor probabilidad de marcar a los niveles más altos en este atributo.

En las figuras 5.8 y 5.9, se muestran la FREI y FRCI para 6 de los 7 ítems que miden la percepción del nivel de calidad de las relaciones interpersonales al interior de las escuelas.



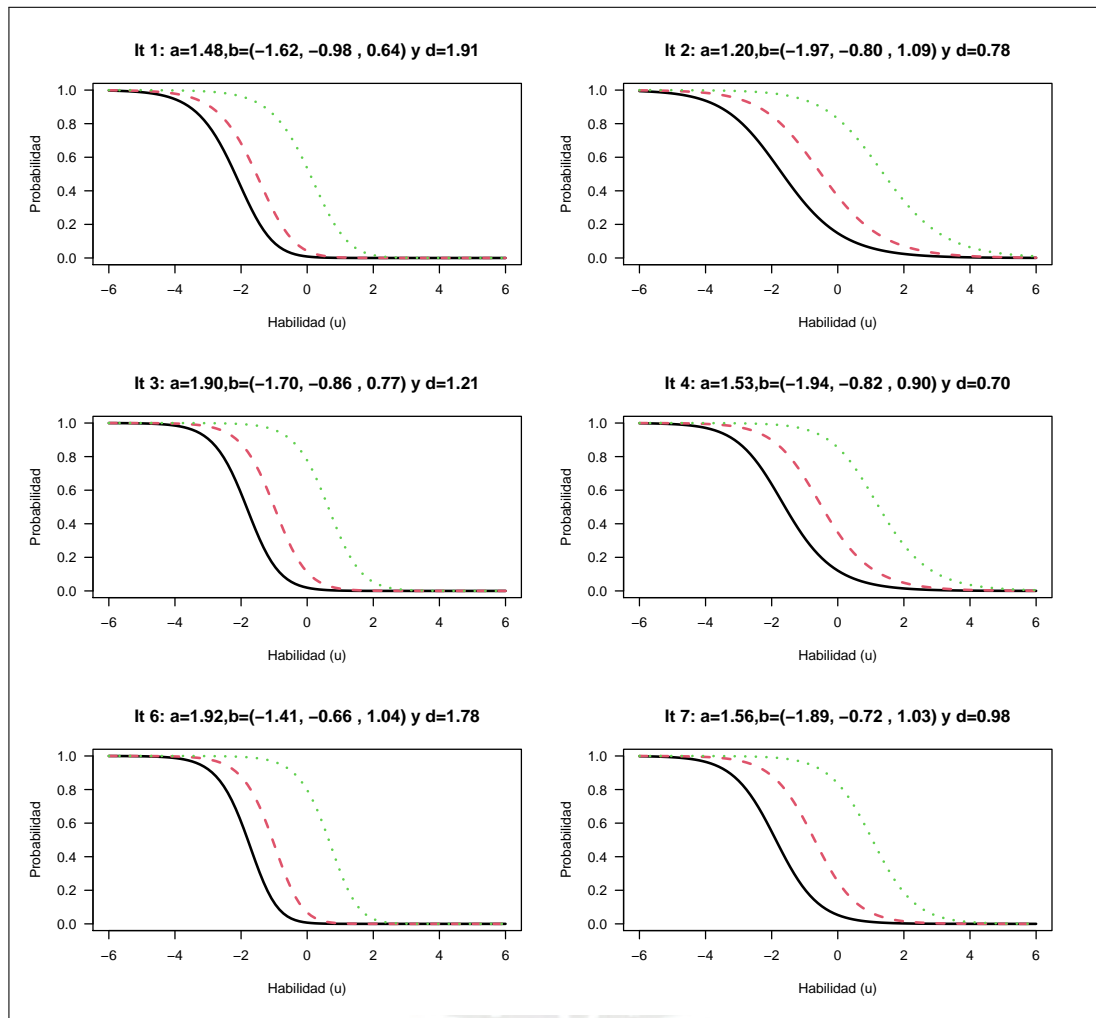


Figura 5.8: Representación gráfica de las FREI del modelo RLPE-GRM para 6 ítems con 4 categorías cada uno

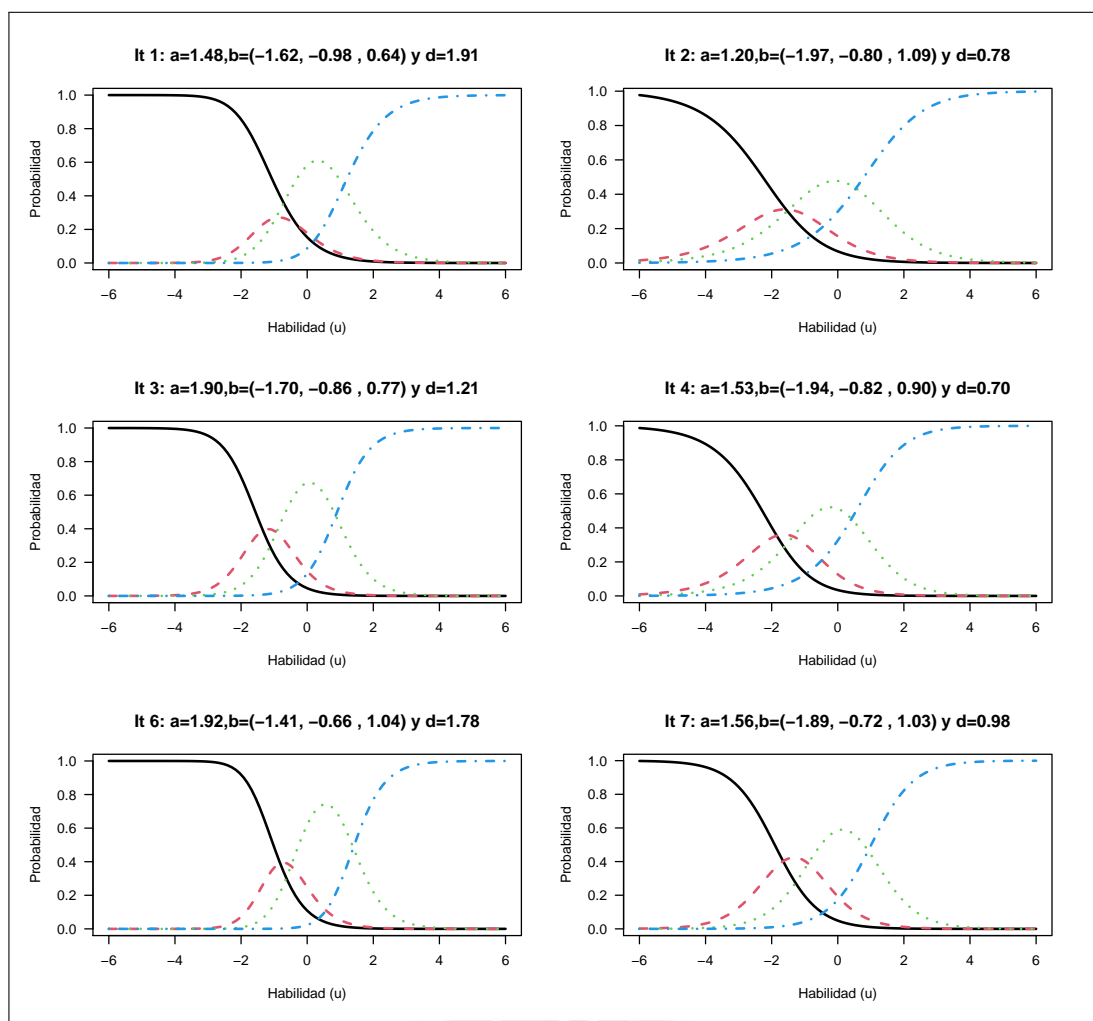


Figura 5.9: Representación gráfica de las FRCI del modelo RLPE-GRM para 6 ítems con 4 categorías cada uno

En la figura 5.10 se muestran las funciones de información de los 7 ítems. Se puede observar que las funciones de información se distribuyen en toda la escala de la habilidad. Esto nos indica que los ítems miden correctamente el constructo (nivel de calidad de las relaciones interpersonales al interior de las escuelas) a lo largo de toda la escala. Además, los ítems 3 y 6 son los que aportan mayor información y, por el contrario, los que presentan menos información son los ítems 2, 4 y 5.

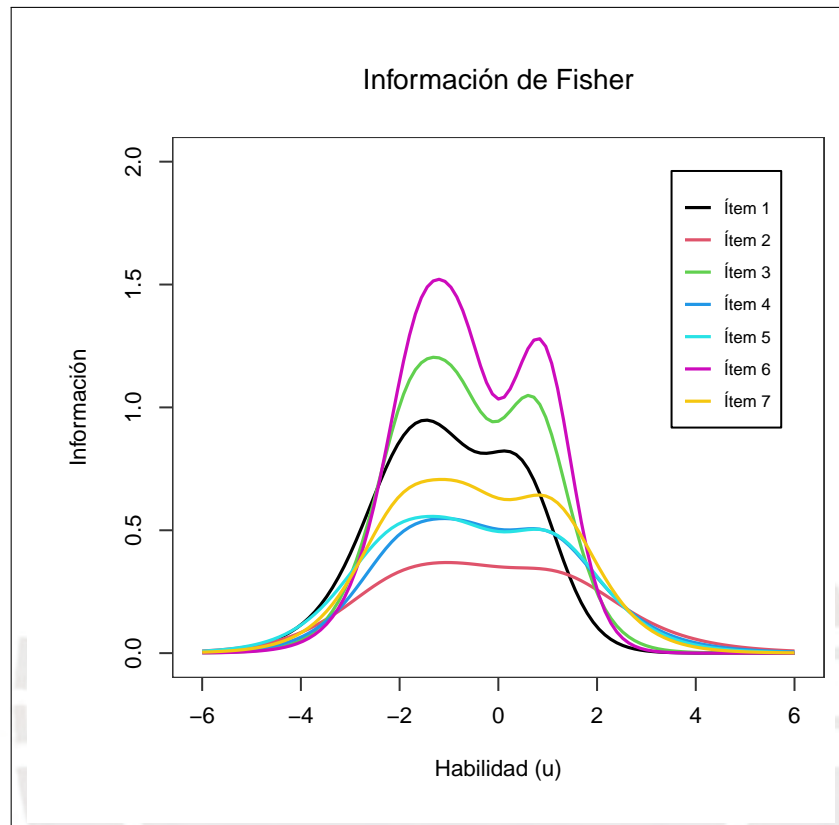


Figura 5.10: Representación gráfica de la Función de Información del Ítem (FII) del modelo RLPE-GRM para 7 ítems con 4 categorías cada uno

Para esta aplicación el modelo necesitó muchas iteraciones (235 000) y saltos de 55. En las figuras 5.11, 5.12 y 5.13, se puede observar que los parámetros estimados para el ítem 3 no tienen presencia de autocorrelación y las 2 cadenas utilizadas convergen de manera adecuada. Esta misma tendencia se observa en los otros 6 ítems. En las estimaciones de los parámetros, se observó que el parámetro de asimetría es el que necesita mayor tiempo para converger correctamente.

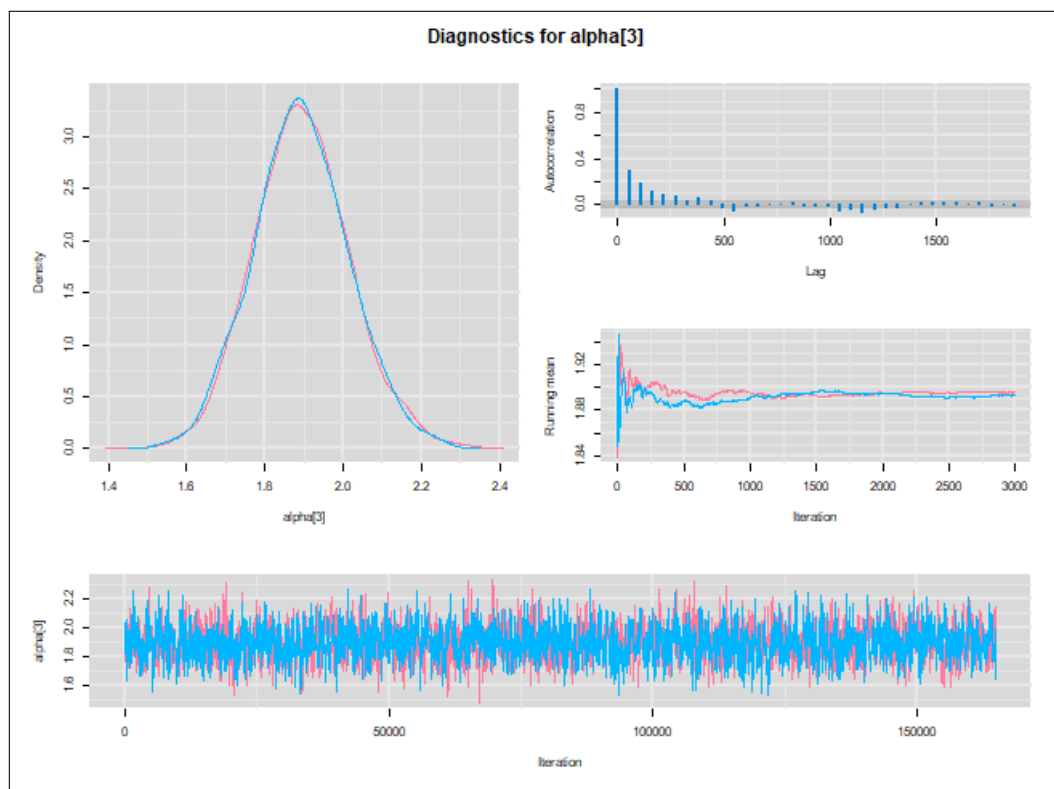


Figura 5.11: Gráfico de 2 cadenas, densidad y autocorrelación para el parámetro de discriminación (a_3) correspondiente al ítem 3 estimado mediante el modelo RLPE-GRM

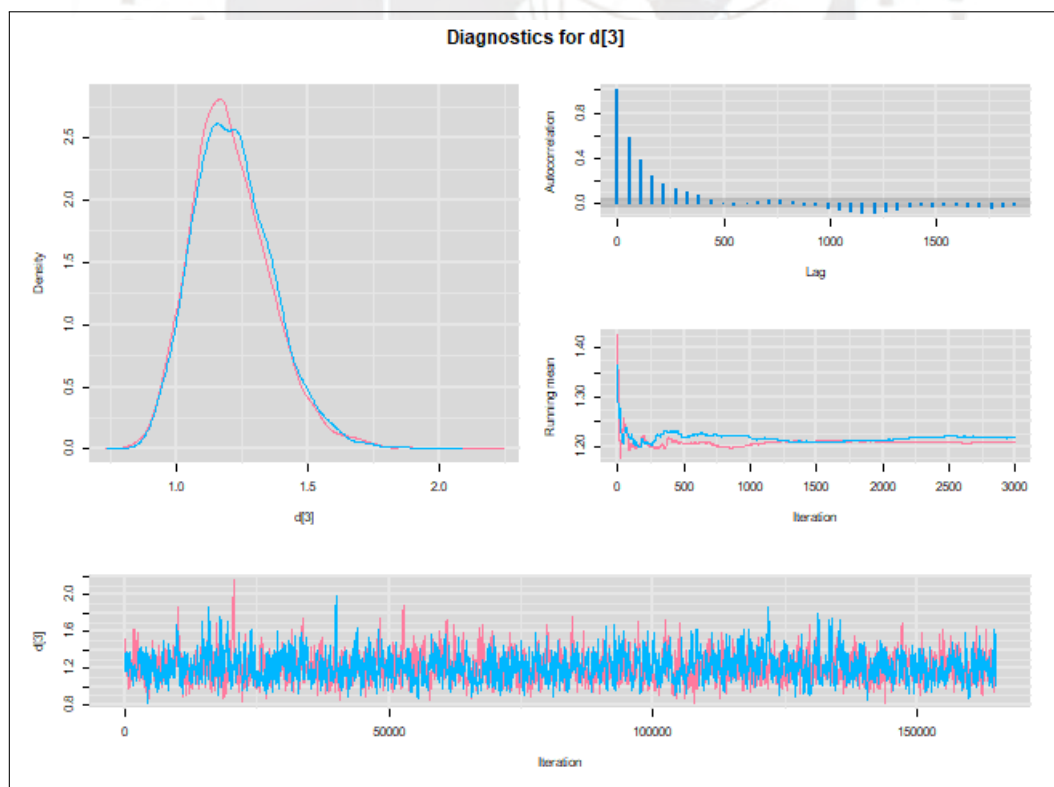


Figura 5.12: Gráfico de 2 cadenas, densidad y autocorrelación para el parámetro de asimetría (d_3) del ítem 3 estimado mediante el modelo RLPE-GRM

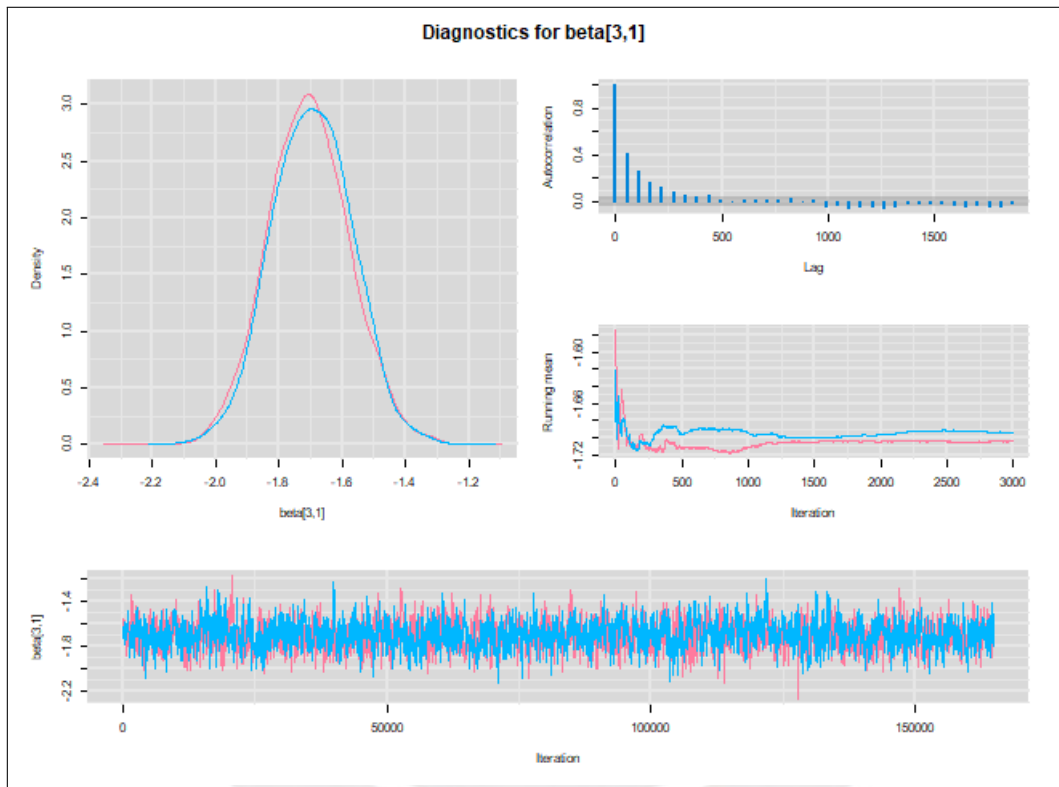


Figura 5.13: Gráfico de 2 cadenas, densidad y autocorrelación para el parámetro de dificultad (b_{31}) del ítem 3 para el primer umbral estimado mediante el modelo RLPE-GRM

Tal como se indicó al comienzo de este capítulo, el objetivo principal es estimar la escala de calidad de las relaciones interpersonales en el entorno escolar. En la figura 5.14, se puede observar que los parámetros estimados para la habilidad de un estudiante no presentan autocorrelación y las 2 cadenas utilizadas convergen de manera adecuada. Esta misma tendencia se observa en la estimación de los parámetros de habilidad de los demás estudiantes. En la figura 5.15, se observa la distribución de densidad de la Calidad de las relaciones interpersonales en la escuela (habilidad u_i). Esta distribución presenta una ligera asimetría a la derecha.

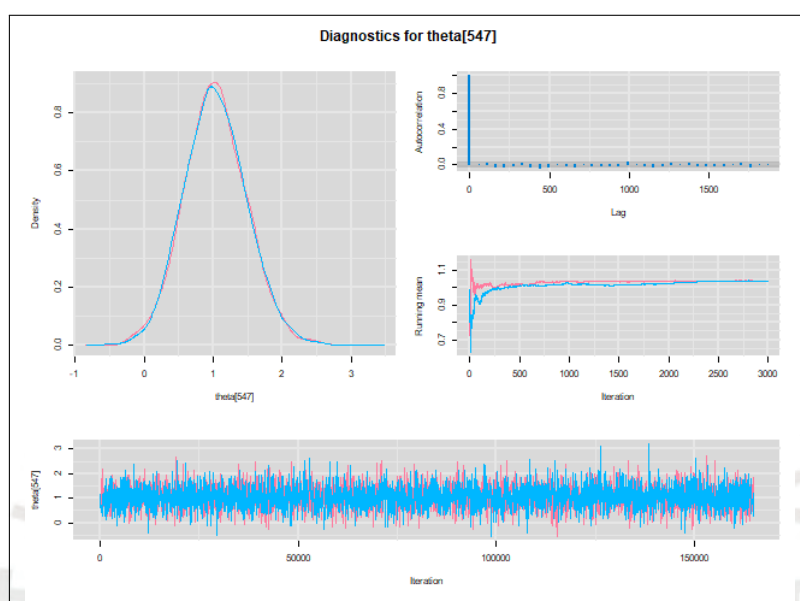


Figura 5.14: Gráfico de 2 cadenas, densidad y autocorrelación para el parámetro de habilidad de un estudiante estimado mediante el modelo RLPE-GRM

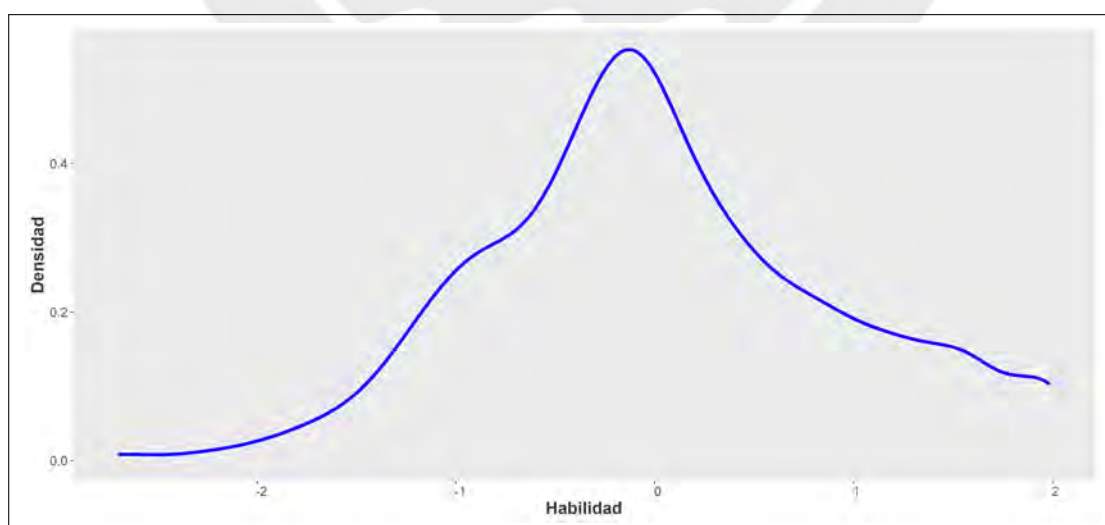


Figura 5.15: Distribución de densidad para las habilidades estimadas mediante el modelo RLPE-GRM

5.7. Comparación de los modelos con estimación MCMC

Después de realizar la estimación de la calidad de las relaciones interpersonales en la escuela mediante los modelos 2PL-GRM y RLPE-GRM, es importante comparar ambos modelos con el propósito de identificar el modelo más apropiado. Un primer criterio de comparación es mediante el ajuste de los modelos bayesianos. Se puede medir el ajuste de estos modelos a través de 3 criterios principales Bazán y Valdivieso (2010). El criterio de información de desvío (DIC, *Deviance Information Criterion*), se basa en la función de desvío, la cual tiene una relación inversa con la función de log-verosimilitud. Un segundo criterio es la información bayesiana de Schwarz (BIC, *Bayesian Information Criterion*). Finalmente, un tercer criterio es el de Akaike (AIC, *Akaike Information Criterion*). Para los 3 criterios mostrados, valores pequeños indican un mejor ajuste de los datos al modelo. Para mayor información sobre estos criterios pueden revisar Bazán y Valdivieso (2010).

En el cuadro 5.8, se observan las medidas de ajuste de los modelos 2PL-GRM y RLPE-GRM. El modelo 2PL-GRM tiene un menor tiempo de estimación en comparación del modelo RLPE-GMR. Sin embargo, observando los criterios DIC, AIC y BIC podemos notar que el modelo RLPE-GRM es el que presenta menores valores en estos tres criterios. Entonces, podemos decir que el modelo RLPE-GRM se ajusta mejor a los datos.

Modelo	Parámetros	DIC	Dbar	AIC	BIC	Horas
2PL-GRM	1853	5121.68	28120.98	31826.98	42037.01	9:15
RLPE-GRM	1860	4028.37	25020.67	28740.67	38989.27	11:25

Cuadro 5.8: Medidas de comparación de los modelos

Un segundo criterio de comparación es mediante la función de información del ítem. En la figura 5.16, se muestra la FII para ambos modelos. El modelo RLPE-GRM tiene una mejor distribución de la FII (7 ítems) a lo largo de toda la escala de habilidad. Además, el modelo RLPE-GRM tiene mayor información de Fisher en sus 7 ítems en comparación del modelo 2PL-GRM. Por ejemplo, el ítem 1 y 6 en el modelo RLPE-GRM tiene una mayor información de Fisher en comparación al modelo 2PL-GRM.

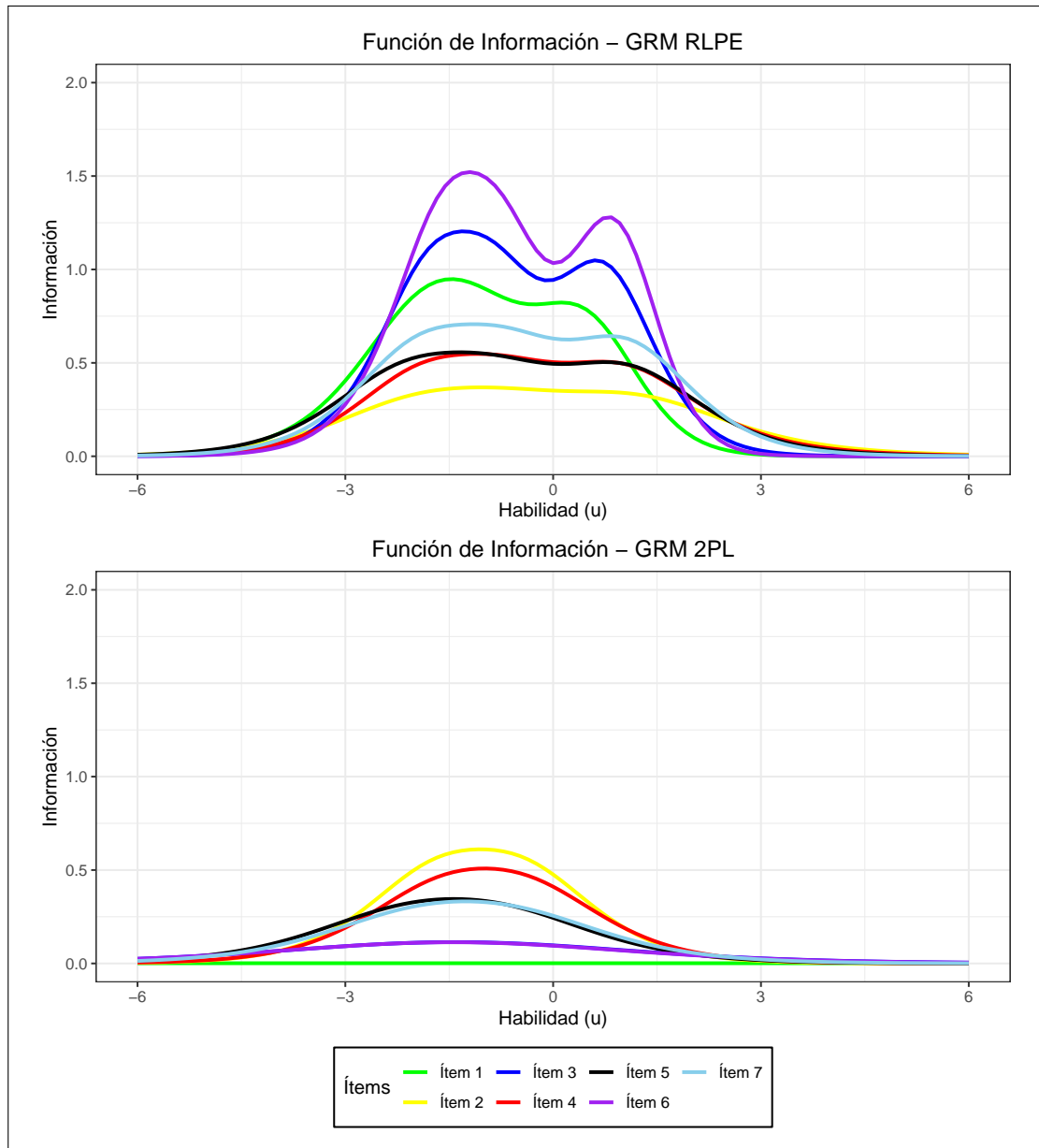


Figura 5.16: Representación gráfica de la Función de Información del Ítem (FII) de los modelos RLPE-GRM y 2PL-GRM

La figura 5.17 muestra la alta relación entre las puntuaciones obtenidas por ambos modelos. Esta relación que se observa de manera gráfica es respaldada por un coeficiente de correlación de 0.999.

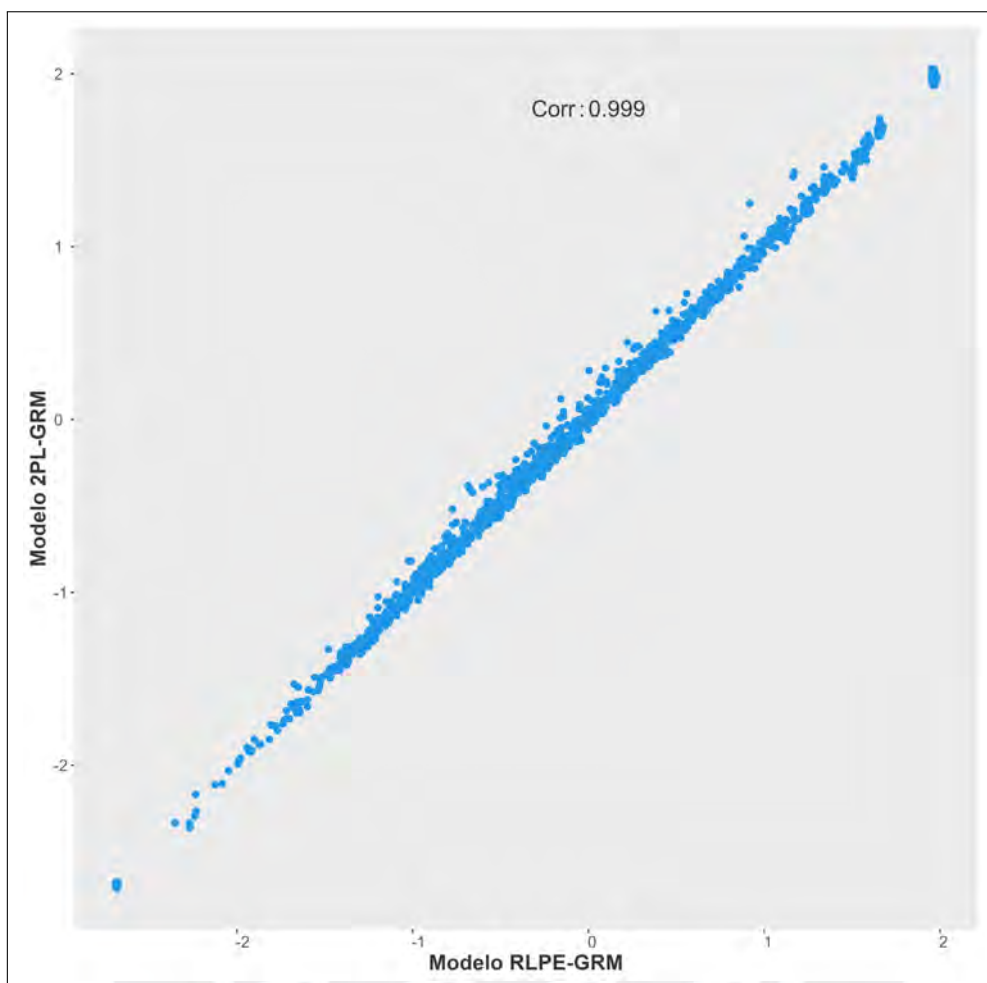


Figura 5.17: Representación gráfica de la dispersión de las puntuaciones de los modelos RLPE-GRM y 2PL-GRM

En resumen, se pudo estimar la calidad de las relaciones interpersonales en la escuela mediante los modelos 2PL-GRM y RLPE-GRM. Cuando realizamos la comparación de ambos modelos mediante los criterios de ajuste (DIC, AIC y BIC), observamos que el modelo que presenta mejor ajuste (valores pequeños en los indicadores) es el RLPE-GRM. El modelo RLPE-GRM, gracias al parámetro de asimetría, nos muestra una mayor función de información en los ítems 1, 3, 5, 6 y 7 a lo largo de toda la escala. Solo en el ítem 1, el modelo 2PL-GRM tiene mayor información en la parte media de la escala. Finalmente pese a que el modelo RLPE-GRM tiene mejores indicadores, las puntuaciones obtenidas del constructo (calidad de las relaciones interpersonales en la escuela) por ambos modelos tienen una correlación muy alta.

Capítulo 6

Conclusiones

6.1. Conclusiones

Se propone y describe el modelo de respuesta graduada logístico de exponente positivo recíproco (RLPE-GRM) como una ampliación del modelo 2PL-GRM con un enlace asimétrico. Posteriormente, se implementó el modelo RLPE-GRM utilizando inferencia bayesiana con MCMC, empleando el software WinBUGS.

Mediante un estudio de simulación, se evaluó la exactitud del método de estimación bayesiana propuesto. Se logró recuperar los parámetros con una alta precisión, pero se necesitó mucho tiempo computacional, debido al elevado número de parámetros que se estimaron. Los parámetros que necesitaron mayor tiempo son los de asimetría.

El modelo RLPE- GRM tuvo un ajuste adecuado a la percepción del nivel de calidad de las relaciones interpersonales al interior de las escuelas. Además, los 7 ítems que comprenden este constructo tuvieron funciones de información altos a lo largo de toda la escala. Además, en la aplicación se realizó la comparación de los modelos 2PL-GMR y RLPE-GRM. Ambos modelos fueron estimados mediante inferencia bayesiana usando métodos de MCMC. En esta comparación, se pudo observar que el modelo con mejor ajuste a los datos es el RLPE-GMR.

Sobre la escala de percepción del nivel de calidad de las relaciones interpersonales al interior de las escuelas estimado con el modelo RLPE-GRM, el ítem 6 (En mi colegio, los profesores se ocupan de sus alumnos) y el 7 (En mi colegio, la relación entre estudiantes es buena) son los más difíciles en alcanzar a las categorías "De acuerdo" y "Muy de acuerdo". Además, el ítem 1 (Nuestros profesores nos respetan) y el 6 (En mi colegio, los profesores se ocupan de sus alumnos) son los que tienen una mayor asimetría.

Finalmente, la escala de percepción del nivel de calidad de las relaciones interpersonales al interior de las escuelas, estimada mediante el modelo RLPE-GRM, presenta una distribución ligeramente asimétrica a la derecha, es decir existe una mayor proporción de estudiantes que puntúan más alto.

6.2. Sugerencias para investigaciones futuras

- Se deben llevar a cabo más estudios de simulación que permitan analizar cómo influyen el tamaño de la muestra, la cantidad de ítems, el nivel de dificultad de los ítems, el grado de discriminación y el número de categorías de respuesta en la estimación y recuperación de los parámetros del modelo RLPE-GRM.
- Estudiar e implementar otros tipos de enlace asimétricos diferentes al RLPE y LPE.
- Estudiar e implementar los modelos de respuesta graduada simétricos y asimétricos considerando multidimensionalidad de los constructos.
- Buscar alternativas computacionales para reducir los tiempos de estimación del modelo RLPE-GRM.
- Seguir explorando y analizando el modelo RLPE-GRM y 2PL-GRM con datos educativos y sociales para fomentar la importancia de la estimación de las habilidades mediante los modelos de respuesta graduada simétricos y asimétricos.



Bibliografía

- Attorreai, F., Horacio.and Abal. (2010). Aplicacion del modelos de respuesta graduada a una escala de voluntad de trabajo.
- Baker, F. B., y Kim, S.-H. (2017). *The basics of item response theory using r*. Springer.
- Bazan, J., Mazzon, J., y Hernani, M. (2012). *Clasificação de modelos de resposta ao item policotômicos com aplicação ao marketing*. Revista Brasileira de Estatística.
- Bazán, J., y Torres, F. (2016). Power and reversal power links for binary regressions: An application for motor insurance policyholders. *The official journal of the International Society for Business and Industrial Statistics*.
- Bazán, J., y Valdivieso, L. (2010). Enfoque bayesiano en modelos de teoria de respuesta al ítem. *Departamento de Ciencias de la Pontificia Universidad Católica del Perú*.
- Bolfarine, H., y Bazan, J. (2010). Bayesian estimation of the logistic positive exponent irt model. *Journal of Educational Behavioral Statistics*, 693-713.
- Chaparro, A. A., y Caso, J. (2015). Desarrollo de un instrumento de evaluación basado en indicadores de convivencia escolar democrático, inclusivo y pacífico. *Instituto de investigaciones sobre la Universidad y la Educación*, 37(149), 20-41.
- Cid, P., y Diaz, A. (2008). Agresion y violencia en la escuela como factor de riesgo del aprendizaje escolar.
- Cronbach, L. (1951). Coeficient alpha and the internal structure of tests. *Psychometrika*(16), 297–334.
- Furr, R. (2011). Scale construction and psychometrics for social and personality psychology. *London, UK: Sage Publications.*
- Kuncel, N. R., y Tellegen, A. (2009). A conceptual and empirical reexamination of the measurement of the social desirability of items: Implications for detecting desirable response style and scale development. *Personnel Psychology*, 62(2), 201–228.
- Romagnoli, C. (2007). Relevancia y beneficios de una buena convivencia escolar. *Educarchile*.

- Samejima, F. (2016, 18 de Aug). Handbook of modern item response theory. En (Vol. Volume One Models, p. 95-107). CRC Press. (0)
- Sturtz, S., Ligges, U., y Gelman, A. (2005). R2winbugs: A package for running winbugs from r. *Journal of Statistical Software*, 12(3), 1–16. Descargado de <http://www.jstatsoft.org>
- Tarazona, E. G. (2013). *Modelos alternativos de respuesta graduada con aplicaciones en la calidad de servicios* (Tesis de Master no publicada). PUCP.



Anexos

Código en R para graficar la Función de Respuesta a las Etapas de los Ítems (FREI) del GRM

```
1 #####
2 # Autor : Wilmer Justo Hernandez Cabrera #
3 # # #
4 # Funcion: frei.grm.pirt() #
5 # # #
6 # Fecha de inicio : 16-07-2018 #
7 # # #
8 # Funcion: Grafica la Funci n de Respuesta a las Etapas de los tems #
9 # (FREI) para los Modelos de Respuesta Graduada (GRM) #
10 # # #
11 # Asesor : Enver Gerald Tarazona Vargas #
12 # # #
13 # Version : 3.0 #
14 # # #
15 # Ultima Modificacion : 16-07-2023 #
16 #####
17
18 frei.grm.pirt<- function(item ,rangex=c(-6,6) ,model=c("2PL" , "LPE" , "RLPE") ,
19 main="")
20 {
21 if(model=="2PL"){
22 m<-length(item)
23 for(k in 1:(m-1)){
24 Pac<-function(x) plogis(-item[m] * (x-item[k]))
25 plot(Pac ,add=k>1,xlim=rangex ,col=k ,xlab="Habilidad (u)" ,
26 ylab="Probabilidad" ,lty=k ,lwd=2, main=main , las=1)
```

```

27 }
28 }
29 if (model=="LPE") {
30   m<-length (item)-1
31   for (k in 1:(m-1)) {
32     Pac<-function (x) (plogis (item [m] * (x-item [k])))^item [m+1]
33     plot (Pac , add=k>1, ylim=c (0, 1) , xlim=rangex , col=k, xlab="Habilidad (u)" ,
34     ylab="Probabilidad" , lty=k, lwd=2, main=main , las =1)
35   }
36 }
37 if (model=="RLPE") {
38   m<-length (item)-1
39   for (k in 1:(m-1)) {
40     Pac<-function (x) 1-(plogis (-item [m] * (x-item [k])))^item [m+1]
41     plot (Pac , add=k>1, ylim=c (0, 1) , xlim=rangex , col=k, xlab="Habilidad (u)" ,
42     ylab="Probabilidad" , lty=k, lwd=2, main=main , las =1)
43   }
44 }
45 }
46 }

```

Código en R para graficar la Función de Respuesta a las Categorias del Ítem (FRCI) del GRM

```

1 #####
2 # Autor : Wilmer Justo Hernandez Cabrera #
3 # # #
4 # Funcion: frci.grm.pirt() #
5 # # #
6 # Fecha de inicio : 16-07-2018 #
7 # # #
8 # Funcion: Grafica la Funci n de Respuesta a las Categor as de los tems #
9 # (FRCI) para los Modelos de Respuesta Graduada (GRM) #
10 # # #
11 # Asesor : Enver Gerald Tarazona Vargas #
12 # # #
13 # Version : 3.0 #

```

```

14 # #
15 # Ultima Modificacion : 25-07-2023 #
16 #####
17
18 frci.grm.pirt<-function(item ,rangex=c(-4,4) ,model=c("2PL" , "LPE" , "RLPE") ,
19     main="")
20 {
21   if(model=="2PL"){
22     m<-length(item)
23     for(k in 1:m){
24       P<-function(x) {
25         if(k==1){
26           plogis(-item[m] * (x-item[k]))
27         }
28         else {
29           if(k< m){
30             plogis(-item[m] * (x-item[k]))-plogis(-item[m] * (x-item[k-1]))
31           }
32           else {
33             1-plogis(-item[m] * (x-item[k-1]))
34           }
35         }
36       }
37       plot(P, add=k>1, xlim=rangex , col=k , xlab="Habilidad (u)" ,
38
39         ylab="Probabilidad" , lty=k , lwd=2, main=main)
40     }
41   }
42   if(model=="LPE"){
43     m<-length(item)-1
44     for(k in 1:m){
45       Pac<-function(x) {
46         if(k==1){
47           1-(plogis(item[m] * (x-item[k])))^item[m+1]
48         }
49         else {
50           if(k< m){
51             (plogis(item[m] * (x-item[k-1])))^item[m+1]-
52             (plogis(item[m] * (x-item[k])))^item[m+1]

```

```

53     }
54     else {
55         (plogis (item [m] * (x-item [k-1])))^item [m+1]
56     }
57 }
58 }
59 plot (Pac , add=k>1, xlim=rangex , col=k, xlab=" Habilidad (u)" ,
60 ylab=" Probabilidad " , lty=k, lwd=2, main=main)
61 }
62 }
63
64 if (model=="RLPE") {
65     m<-length (item)-1
66     for (k in 1:m) {
67         Pac<-function (x) {
68             if (k==1) {
69                 (plogis (-item [m] * (x-item [k])))^item [m+1]
70             }
71             else {
72                 if (k< m) {
73                     (plogis (-item [m] * (x-item [k])))^item [m+1]-
74                     (plogis (-item [m] * (x-item [k-1])))^item [m+1]
75                 }
76                 else {
77                     1-(plogis (-item [m] * (x-item [k-1])))^item [m+1]
78                 }
79             }
80         }
81         plot (Pac , add=k>1, xlim=rangex , col=k, xlab=" Habilidad (u)" ,
82 ylab=" Probabilidad " , lty=k, lwd=2, main=main , las =1)
83     }
84 }
85 }

```

Código en R para graficar la Función de Información de los Ítmes (FII)

```
1 #####
2 # Autor : WIlmer Justo Hernandez Cabrera #
3 # # #
4 # Funcion: fiii.grm.pirt() #
5 # # #
6 # Fecha de inicio : 16-07-2018 #
7 # # #
8 # Funcion: Gr f icar la Funci n de Informaci n de los tems (FII) #
9 # para los Modelos de Respuesta Graduada (GRM) #
10 # # #
11 # Asesor : Enver Gerald Tarazona Vargas #
12 # # #
13 # Version : 3.0 #
14 # # #
15 # Ultima Modificacion : 16-07-2023 #
16 #####
17
18 fii.grm.pirt<-function(item ,rangex=c(-6,6) ,ylim=c(0 ,3.5) ,col=1, lty=1,add=T,
19 model=c("2PL" , "LPE" , "RLPE" ),main="")
20 {
21 if(model=="2PL"){
22 m<-length(item)-1
23 fii<-function(x) {
24 firi<-0
25 for(k in 1:m){
26 if(k==1){
27 Pac<-plogis(item[m] * (item[k]- x))
28 Pac0<-0
29 p<-Pac-Pac0
30 }
31 else{
32 if(k< m){
33 Pac<-plogis(item[m] * (item[k]- x))
34 Pac0<-plogis(item[m] * (item[k-1]- x))
35 p<-Pac-Pac0
```

```

36     }
37     else {
38         Pac<-1
39         Pac0<-plogis (item [m] * (item [k-1]- x))
40         p<-Pac-Pac0
41     }
42 }
43 firi<-firi+((1-Pac)*Pac-(1-Pac0)*Pac0)^2/p
44 }
45 item [m]^2*firi
46 }
47 }
48 if (model=="LPE") {
49     m<-length (item)-1
50     fii<-function (x) {
51         firi<-0
52         for (k in 1:m) {
53             if (k==1) {
54                 Pac<-plogis (item [m] * (item [k]- x))
55                 Pac0<-0
56             }
57             else {
58                 if (k< m) {
59                     Pac<-plogis (item [m] * (item [k]- x))
60                     Pac0<-plogis (item [m] * (item [k-1]- x))
61                 }
62                 else {
63                     Pac<-1
64                     Pac0<-plogis (item [m] * (item [k-1]- x))
65                 }
66             }
67             p<-Pac^item [m+1]-Pac0^item [m+1]
68             firi<-firi+((1-Pac)*Pac^item [m+1]-(1-Pac0)*Pac0^item [m+1])^2/p
69         }
70         (item [m] * item [m+1])^2*firi
71     }
72 }
73
74 if (model=="RLPE") {

```

```

75 m<-length(item)-1
76 fii<-function(x) {
77   firi<-0
78   for(k in 1:m){
79     if(k==1){
80       Pac<-plogis(-item[m] * (x-item[k]))
81       Pac0<-0
82     }
83     else {
84       if(k< m){
85         Pac<-plogis(-item[m] * (x-item[k]))
86         Pac0<-plogis(-item[m] * (x-item[k-1]))
87       }
88       else {
89         Pac<-1
90         Pac0<-plogis(-item[m] * (x-item[k-1]))
91       }
92     }
93     #p<-Pac^item[m+1]-Pac0^item[m+1]
94     #firi<-firi +(((1-Pac)*Pac^item[m+1]-(1-Pac0)*Pac0^item[m+1])^2)/p
95     p<-Pac^item[m+1]-Pac0^item[m+1]
96     firi<-firi +(((1-Pac)*(Pac^item[m+1])-(1-Pac0)*Pac0^item[m+1])^2)/p
97   }
98   ((item[m]*item[m+1])^2)*firi
99 }
100 }
101 plot(fii ,add=add ,xlim=rangex ,col=col ,xlab="Habilidad (u)",
102 ylab="Informacion" ,lty=lty , lwd=2,ylim=yylim ,main=main)
103 }

```

Función en R para realizar la estimación bayesiana usando MCMC

```

1 #####
2 # Autor : Wilmer Justo Hernandez Cabrera #
3 # # #
4 # Funcion: gmMCMC() #
5 # # #
6 # Fecha de inicio : 20-09-2018 #
7 # # #
8 # Funcion: Funci n en R para realizar la estimaci n bayesiana usando #
9 # MCMC en WinBUGS #
10 # # #
11 # Asesor : Enver Gerald Tarazona Vargas #
12 # # #
13 # Version : 3.0 #
14 # # #
15 # Ultima Modificacion : 15/08/2023 #
16 #####
17 #install.packages("mcmcplots")
18 #install.packages("R2WinBUGS")
19 #install.packages("ltm")
20 library(R2WinBUGS)
21 library(mcmcplots)
22 library(ltm)
23
24 gmMCMCL_RLPE <- function (data ,K = NULL, model=c("2PL","LPE","RLPE"),
25     program = c("WinBUGS","JAGS","OpenBUGS"),
26     bugs.dir="D:/tesis PUCP 2020/Tesis PUCP/Sintaxis y simulacion/Bayesiana/
27     WinBUGS14/",
28     m.alpha=1.0, pr.alpha=2.0,
29     m.kappa=0.0, pr.kappa=0.5,
30     m.g = 0.5, pr.g = 0.5,
31     n.iter=10000,
32     n.thin=1,
33     n.burnin=4000,
34     n.chains=2)
35 {
36   library(R2WinBUGS)
37   #Transformaci?n de la data en un objeto matriz

```

```

37 Y<- as.matrix(data)
38 #Número de individuos
39 n <- nrow(Y)
40 #Número de ?tems
41 p <- ncol(Y)
42 #Número de categorías por ?tem
43 K <- if (is.null(K) || length(K) != p) {
44   apply(Y, 2, max)
45 }
46 else {
47   K
48 }
49 model <- match.arg(model)
50
51 if (model == "RLPE") {
52   data<-list("Y", "n", "p", "K",
53   "m.alpha", "pr.alpha",
54   "m.kappa", "pr.kappa", "m.g", "pr.g")
55   #Monitor en BUGS
56   monitor <- c("alpha", "theta", "kappa", "kappa.star", "d", "beta")
57   #Modelo usado en BUGS
58   bugs.file <- file.path(aa, "Bugs/grm_rlpev4.bug")#####MODificado para
        ver lo que pasa
59 }
60 else {
61   data<- list("Y", "n", "p", "K",
62   "m.alpha", "pr.alpha",
63   "m.kappa", "pr.kappa")
64   #Monitor en BUGS
65   monitor <- c("alpha", "theta", "kappa", "kappa.star", "beta")
66   #Modelo usado en BUGS
67   bugs.file <- file.path(aa, "Bugs/grm_1_1.bug")
68 }
69 ## Inferencia en WinBUGS
70 # n.burn <- 25000 #50000
71 # n.thin <- 30 #20
72 # n.sim <- 55000 #80000
73 # n.chains <- 1
74 #iniciales = function(){list(alpha=1.3, theta=1, kappa=1, kappa.star=1,d=1)}

```

```

75 # iniciales = function(){list(alpha=c(0.9,1.5,1.5,1.2,1.6,2.0), theta=2, kappa.
      star=c(-1.5,-0.5,2),d=c(1,1,1,1,1,1))}
76 grm.out <- bugs(data=data,
77   inits=NULL,
78   #inits=iniciales,
79   parameters.to.save=monitor,
80   model.file=bugs.file,
81   bugs.directory= bugs.dir,
82   n.iter=n.iter,
83   n.thin=n.thin,
84   n.burnin=n.burn,
85   n.chains=n.chains,
86   debug=FALSE
87 )
88 }

```

Código en BUGS para el Modelo de Respuesta Graduada Logístico de Exponente Positivo Recíproco

```

1 #####
2 # Autor : Wilmer Justo Hernandez Cabrera #
3 # # #
4 # Funcion: grm.rlpe #
5 # # #
6 # Fecha de inicio : 20-09-2018 #
7 # # #
8 # Funcion: Funci n en BAGS para realizar la inferencia del modelo #
9 # RLPE -GRM #
10 # # #
11 # Asesor : Enver Gerald Tarazona Vargas #
12 # # #
13 # Version : 3.0 #
14 # # #
15 # Ultima Modificacion : 15/08/2023 #
16 #####

```

```

17
18 model{
19   for (i in 1:n){
20     for (j in 1:p){
21       ## Definición del Modelo
22       Y[i, j] ~ dcat(prob[i, j, 1:K[j]])
23       ## Probabilidades acumuladas para las categorías de los ítems
24       for (k in 1:(K[j]-1)){
25         eta[i, j, k] <- alpha[j]*theta[i]-kappa[j, k]
26         #logit(P[i, j, k]) <- eta[i, j, k]
27         P[i, j, k] <- 1-pow(1+exp(eta[i, j, k]),-d[j])
28       }
29       ## Probabilidades para las categorías de los ítems
30       prob[i, j, 1] <- 1-P[i, j, 1]
31       for (k in 2:K[j]-1){
32         prob[i, j, k] <- P[i, j, k-1] - P[i, j, k]
33       }
34       prob[i, j, K[j]] <- P[i, j, K[j]-1]
35     }
36     ## Priori para la habilidad
37     theta[i] ~ dnorm(0.0, 1.0)
38   }
39 }
40
41 ## Prioris para los parámetros de los ítems
42 for (j in 1:p){
43   ## Priori para la discriminación
44   alpha[j] ~ dnorm(m.alpha, pr.alpha) I(0, )
45   ## Priori asimetría
46   d[j] ~ dgamma(m.g, pr.g)
47
48   ## Prioris para los umbrales (dificultades)
49   for (k in 1:(K[j]-1)){
50     kappa.star[j, k] ~ dnorm(m.kappa, pr.kappa)
51     kappa[j, k] <- ranked(kappa.star[j, 1:(K[j]-1)], k)
52     beta[j, k] <- kappa[j, k]/alpha[j]
53   }
54 }
55

```

56 }

Programa en R para realizar el estudio de simulacion

```

1 #####
2 # Autor : Wilmer Justo Hernandez Cabrera #
3 # # #
4 # Funcion: dataRLPE() #
5 # # #
6 # Fecha de inicio : 21-09-2018 #
7 # # #
8 # Funcion : Programa en R para realizar el estudio de simulacion #
9 # # #
10 # # #
11 # Asesor : Enver Gerald Tarazona Vargas #
12 # # #
13 # Version : 3.0 #
14 # # #
15 # Ultima Modificacion : 20/08/2023 #
16 #####
17 #install.packages("boot")
18 library(boot)
19 #install.packages("ltm")
20 library(ltm)
21
22 dataRLPE<-function(betas , p, K, M, n){
23   library(boot)
24   P=matrix( data=NA, nrow=p , ncol=K+1)
25   P
26   cat=matrix( data=NA, nrow=n , ncol=p)
27   cat
28   theta<- rnorm(n,0 ,1)
29
30   for (i in 1:n) {
31
32     for (j in 1:p) {

```

```

33
34 P[j,1]=(inv.logit(betas[j,M]*(betas[j,1]-theta[i])))^betas[j,M+1]
35
36 for (k in 2:(M-1)) {
37
38 P[j,k]=(inv.logit(betas[j,M]*(betas[j,k]-theta[i])))^betas[j,M+1] - (inv.
39 logit(betas[j,M]*(betas[j,k-1]-theta[i])))^betas[j,M+1]
40
41 }
42
43 P[j,M]=1-(inv.logit(betas[j,M]*(betas[j,k]-theta[i])))^betas[j,M+1]
44 }
45
46 for (j in 1:p) {
47 cat[i, j] <- sample(1:M, 1, prob = P[j,])
48 }
49
50 }
51
52 cat=as.data.frame(cat)
53 }
54
55 #####
56 # Ejemplo 1: Simulacion de un conjunto de datos del modelo RLPE
57 #####
58
59 # Definir los parametros de modelo
60
61 betas=matrix(c(
62 -1.2, 0.9, 2.0, 1.6, 1.5,
63 -0.7, 1.5, 2.6, 2.0, 1.8,
64 -1.0, 1.0, 2.2, 1.8, 1.6,
65 -0.8, 1.2, 2.5, 2.0, 1.8,
66 -1.1, 1.1, 2.1, 1.6, 1.5,
67 -0.9, 1.3, 2.3, 1.8, 1.6),nrow=6, ncol=5,byrow=TRUE
68 )
69
70 p=6 #N mero de items

```

```
71 K=3 #Par metros de dificultad
72 M=4 #N mero de categorias
73 n=1000 # Cantidad de evaluados
74 #-----#
75 library (mcmcplots)
76 winbugs.dir<-"D:/Wilmer/tesis PUCP 2020/Tesis PUCP/Sintaxis y simulacion/
      Bayesiana/WinBUGS14/"
77
78 #Prioris para la discriminacion
79 m.alpha <- 1.0
80 #s.alpha <- sqrt(0.5)
81 pr.alpha<-0.5
82
83 #Prioris para las dificultades (umbrales)
84 m.kappa <- 0.0
85 #s.kappa <- sqrt(2)
86 pr.kappa <- 2
87
88 #-----#
89 # Estimacion bayesiana del modelo RLPE-GRM
90 #-----#
91 #Penalizacion
92 m.g <- 0.25 #0.5
93 #s.g <- sqrt(0.5)
94 pr.g <- 0.25
95
96 #Parametros de la estimacion
97 n.burn <- 80000 #100000
98 n.thin <- 55 # 45
99 n.iter <- 3000*n.thin + n.burn
100 n.chains <- 2
101
102
103 ##### Simulaci n #####
104 t <- proc.time()
105 simulacion<-list()
106 for(i in 1:25) {
107
108   data1<-dataRLPE(betas , p, K, M, n)
```

```

109 model.grm.rlpe.time<-system.time(model.grm.rlpe <-
110 gmMCMCL_RLPE(data=data1, bugs.dir=winbugs.dir,
111 #inits=iciales,
112 #parameters=parametros,
113 m.alpha=m.alpha, pr.alpha=pr.alpha,
114 m.kappa=m.kappa, pr.kappa=pr.kappa,
115 m.g = m.g, pr.g = pr.g,
116 n.iter=n.iter,
117 n.thin=n.thin,
118 n.burnin=n.burn,
119 n.chains=n.chains,
120 model="RLPE",
121 program = "WinBUGS"
122 )
123 )
124
125 simulacion[[i]]<-cbind(model.grm.rlpe$mean$beta, model.grm.rlpe$mean$alpha, model
126 .grm.rlpe$mean$d)
127 print(simulacion)
128 }
129
130 proc.time()-t
131
132 m<-list()
133 for(i in 1:25) {
134 m[[i+12]]<-d[[i]]
135 }
136
137 replicas<-m
138
139 library(mcmcplots)
140
141 mcmcplot(model.grm.rlpe, random = 20,
142 dir = "D:/Wilmer/tesis PUCP 2020/Tesis PUCP/Sintaxis y simulacion/Corridas/
143 Ejemplo12_EstimacionGRM_RLPE/",
144 extension = "html", filename = "Ejemplo12RLPE")
145
146 ##### Sesgo #####.
147
148 replicas_suma<-replicas[[1]]
149 for(i in 2:25){
150 replicas_suma<-replicas_suma+replicas[[i]]
151 replicas_suma

```

```
146 }
147
148 Sesgo<-(replicas_suma/(length(replicas))-betas
149 Estimacion<-replicas_suma/(length(replicas))
150
151 #####RMSE Y MAE#####.
152 RMSE<-(betas-replicas [[1]])^2
153 for(i in 2:25){
154   RMSE<-RMSE+((betas-replicas [[i]])^2)
155 }
156 RMSE<-sqrt(RMSE/(25))
157
158 MAE<-abs(betas-replicas [[1]])
159 for(i in 2:25){
160   MAE<-MAE+abs(betas-replicas [[i]])
161 }
162 MAE<-(MAE/(25))
```

