



PONTIFICIA **UNIVERSIDAD CATÓLICA** DEL PERÚ

Esta obra ha sido publicada bajo la licencia Creative Commons  
Reconocimiento-No comercial-Compartir bajo la misma licencia 2.5 Perú.

Para ver una copia de dicha licencia, visite  
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/pe/>



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA  
DEL PERÚ  
ESCUELA DE GRADUADOS



“PROCESOS DE LÉVY: PROPIEDADES  
E INTEGRACIÓN ESTOCÁSTICA”

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE MAGÍSTER  
EN MATEMÁTICAS CON MENCIÓN EN  
PROCESOS ESTOCÁSTICOS

LUIS CARLOS CHÁVEZ BEDOYA MERCADO

LIMA-PERÚ  
2006



*A mis padres por su apoyo y estímulo  
y a Antonio Chávez porque su fuerza y  
voluntad son un ejemplo para todos.*

## Agradecimientos

En primer lugar quisiera agradecer a mi asesora, la Dra. Loretta Gasco Campos, por su dedicada y excelente labor docente en los cursos de la Maestría en Matemáticas Aplicadas, por su acertada asesoría, por su paciencia para revisar las múltiples versiones y por sus oportunas correcciones al presente trabajo. Asimismo, agradezco a mi co-asesor, el Dr. Johel Beltrán, por la voluntad mostrada en la revisión del presente trabajo y por sus excelentes sugerencias y aclaraciones.

Por último quisiera agradecer a la Pontificia Universidad Católica del Perú por la Beca completa de estudios de maestría y al Departamento de Ingeniería por la descarga académica del semestre 2005-2 que permitió acelerar la elaboración de la presente tesis.



# Índice

<b>Introducción</b>	<b>6</b>
<b>1 Conceptos previos relacionados a los procesos de Lévy</b>	<b>8</b>
1.1 Proceso de Poisson . . . . .	8
1.1.1 Variable aleatoria exponencial y distribución de Poisson . . . . .	8
1.1.2 Procesos de Poisson y sus propiedades . . . . .	10
1.1.3 Proceso de Poisson compensado . . . . .	14
1.2 Divisibilidad Infinita . . . . .	16
1.2.1 Convolución de medidas . . . . .	16
1.2.2 Divisibilidad infinita . . . . .	18
1.2.3 Fórmula de Lévy Khintchine . . . . .	20
<b>2 Procesos de Lévy</b>	<b>24</b>
2.1 Definición y propiedades básicas de los procesos de Lévy . . . . .	24
2.2 Saltos de un proceso de Lévy . . . . .	31
2.3 Medida de Salto y Medida de Intensidad . . . . .	33
2.4 Integración de Poisson . . . . .	36
2.5 Descomposición de Lévy-Itô . . . . .	42
2.6 Interlazado . . . . .	50
<b>3 Integración Estocástica</b>	<b>53</b>
3.1 Conceptos previos y motivación . . . . .	53
3.1.1 Medidas aleatorias y medida martingala valuada . . . . .	53
3.1.2 Integradores e Integrandos . . . . .	54
3.2 Integración Estocástica . . . . .	56
3.2.1 La teoría $L^2$ . . . . .	56
3.2.2 La teoría extendida . . . . .	62
3.3 Integrales estocásticas basadas en procesos de Lévy . . . . .	68
3.3.1 Integrales estocásticas brownianas . . . . .	68
3.3.2 Integrales estocásticas de Poisson . . . . .	69
3.3.3 Integrales estocásticas del tipo Lévy . . . . .	70
3.4 La fórmula de Itô . . . . .	72
3.4.1 Fórmula de Itô para integrales brownianas . . . . .	72
3.4.2 Fórmula de Itô para integrales del tipo Lévy . . . . .	76

<b>4</b>	<b>Aplicaciones de Procesos de Lévy en Finanzas</b>	<b>81</b>
4.1	Modelo de Precios . . . . .	81
4.2	Modelos de Retornos en Mercados Ilíquidos . . . . .	85
4.2.1	Movimiento browniano . . . . .	86
4.2.2	Proceso de Poisson Compuesto . . . . .	87
4.2.3	Camino Aleatorio . . . . .	88
4.2.4	Resultados Empíricos . . . . .	89
	<b>Apéndice</b>	<b>91</b>
<b>A</b>	<b>Conceptos y resultados importantes</b>	<b>91</b>
A.1	Teoremas importantes . . . . .	91
<b>B</b>	<b>Martingalas en Tiempo Continuo</b>	<b>93</b>
B.1	Definiciones y Conceptos Previos . . . . .	93
B.2	Propiedades importantes . . . . .	94
B.3	Espacio de Martingalas . . . . .	95
B.4	Propiedad de saltos de una martingala . . . . .	96



# Introducción

Los procesos de Lévy son procesos estocásticos que poseen incrementos estacionarios e independientes, y además son continuos en probabilidad. Muchas de las investigaciones teóricas y aplicaciones actuales de los procesos estocásticos en ingeniería, economía y finanzas están basadas en procesos de Lévy; tomamos esto como motivación para profundizar en el estudio de dichos procesos así como para difundir sus aspectos teóricos y prácticos.

Asimismo, el cálculo estocástico es una de las principales herramientas teóricas en muchos campos, en especial las finanzas y más precisamente la valuación de instrumentos derivados. Uno de los resultados fundamentales del cálculo estocástico es la fórmula de Itô, cuya validez más allá del movimiento browniano, siendo lógica y necesaria su extensión a procesos de Lévy.

Los objetivos de la presente tesis son los siguientes:

- (1) Enunciar y demostrar las principales propiedades de los procesos de Lévy.
- (2) Demostrar la descomposición de Lévy-Itô.
- (3) Desarrollar la teoría básica de integración estocástica cuando se tiene como integrador medidas martingala valuadas.
- (4) Demostrar la fórmula de Itô para procesos de Lévy.
- (5) Describir algunas aplicaciones de los procesos de Lévy en finanzas.

El presente trabajo se encuentra dividido en cuatro capítulos. En el primer capítulo se presentan conceptos y definiciones importantes previos al estudio de los procesos de Lévy, los cuales serán de suma importancia y utilidad en los capítulos siguientes. Se desarrolla el proceso de Poisson y sus propiedades más importantes. Posteriormente, se hace una breve introducción a la convolución de medidas de probabilidad y las variables aleatorias infinitamente divisibles, terminando en la demostración parcial (la prueba se completa en el Capítulo 2, basándose en la descomposición de Itô-Lévy) de la celebrada fórmula de Lévy-Khintchine, la cual establece que toda medida de probabilidad en  $\mathbb{R}$  que es infinitamente divisible tiene una función característica de la siguiente forma:

$$\phi_{\mu}(u) = \exp \left\{ imu - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \int_{\mathbb{R}-\{0\}} [e^{iuy} - 1 - iuy1_{\{|y|<1\}}(y)] \nu^*(dy) \right\},$$

donde  $\nu^*$  es una medida definida en  $\mathbb{R}-\{0\}$ , la cual cumple que  $\int_{\mathbb{R}-\{0\}} (|y|^2 \wedge 1) \nu^*(dy) < \infty$ ,  $m \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^2 > 0$  y  $u \in \mathbb{R}$ . El capítulo concluye con la demostración de un teorema que

afirma que cualquier medida de probabilidad infinitamente divisible puede ser obtenida como el límite en distribución de una sucesión de procesos de Poisson compuestos.

En el Capítulo 2 se demuestran las propiedades más importantes de los procesos de Lévy, algunas de ellas son: divisibilidad infinita, una modificación de un proceso Lévy es un proceso de Lévy, todo proceso de Lévy tiene una modificación cadlag y todo proceso de Lévy es un proceso de Markov fuerte. Posteriormente, se realiza el estudio de los saltos de un proceso de Lévy, se definen y enuncian las propiedades de la medida salto y se define la integración Poisson. Finalmente, y después de resultados previos se demuestra la descomposición de Lévy-Itô, la cual afirma que si  $\eta$  un proceso de Lévy, entonces existe  $b \in \mathbb{R}$ , un movimiento browniano  $B$  y una medida de Poisson  $N$  en  $\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R} - \{0\})$ , independiente de  $B$ , tal que para todo  $t \geq 0$ ;

$$\eta(t) = bt + B(t) + \int_{|x| < a} x \tilde{N}(t, dx) + \int_{|x| \geq a} x N(t, dx),$$

con  $a > 0$ , es decir que un proceso de Lévy se puede descomponer en la suma de un movimiento browniano, saltos compensados menores que  $a$ , saltos mayores que  $a$  y un componente de tendencia  $bt$ .

En el Capítulo 3 se desarrolla la teoría de integración estocástica, pero teniendo como integrador a medidas martingala valuadas. Se desarrolla la teoría  $L^2$ , demostrando las principales propiedades de la integral estocástica, para después extender la teoría de integración a una clase más general de funciones. Posteriormente, se mencionan algunos tipos de integrales basadas en procesos de Lévy, como son las integrales estocásticas brownianas, las integrales estocásticas del tipo Poisson y las integrales estocásticas del tipo Lévy. El principal resultado de este capítulo es la demostración de la fórmula de Itô para integrales del tipo Lévy, habiendo desarrollado antes de ello la fórmula de Itô para integrales brownianas y Poisson.

En el Capítulo 4 se muestran dos aplicaciones de los procesos de Lévy en finanzas. La primera es la descripción y demostración de las principales propiedades de un modelo de precios y la segunda es la comparación de tres modelos de retornos de acciones en un mercado financiero de poca liquidez. Asimismo, en los dos apéndices se demuestran y/o enuncian resultados que son utilizados en las demostraciones de los cuatro capítulos.

Si bien es cierto que los resultados que se presentan han sido demostrados y/o mencionados en la literatura, el principal aporte de la presente tesis consiste en brindar una introducción coherente, accesible, completa y sobre todo autocontenida de los procesos de Lévy y la derivación de la fórmula de Itô para procesos de Lévy. Ésto es importante, debido a que la complejidad y los diversos enfoques sobre el tema hacen difícil que se pueda dar un desarrollo completo y detallado utilizando una notación uniforme. Los resultados de los primeros tres capítulos se encuentran en diverso grado de dificultad y formalismo en Applebaum [1], Protter [14], Cont y Tankov [6], Oksendal y Sulem [13], Sato [16], Bertoin [3] y El Karoui y Méléard [7]. Sólo en los principales resultados de la tesis se indican la(s) fuente(s) de las que han sido tomados y el aporte hecho en cada demostración; aunque varios de los resultados y definiciones han sido completados y/o clarificados respecto a su versión original, sin ser ésto mencionado en el trabajo.

# Capítulo 1

## Conceptos previos relacionados a los procesos de Lévy

El presente capítulo tiene por finalidad hacer un breve resumen de los conceptos que serán necesarios para desarrollar la teoría relacionada con los procesos de Lévy. El capítulo está dividido en dos partes, en la primera parte se estudia el proceso de Poisson y sus variantes y en la segunda parte se estudian la convolución de medidas de probabilidad, la propiedad de divisibilidad infinita y la famosa fórmula de Lévy-Khintchine. Ésta última es pieza angular en el estudio de los procesos de Lévy.

### 1.1 Proceso de Poisson

#### 1.1.1 Variable aleatoria exponencial y distribución de Poisson

**Definición 1.1.1 (Variable aleatoria exponencial)** Una variable aleatoria real positiva  $Y$  se dice que sigue una distribución exponencial con parámetro  $\lambda > 0$  si su función de distribución es de la forma

$$F(y) = (1 - e^{-\lambda y})1_{\{y \geq 0\}}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

En este caso, es fácil ver que la densidad de  $Y$  es de la forma

$$f(y) = \lambda e^{-\lambda y} 1_{\{y \geq 0\}}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

**Proposición 1.1.2 (Ausencia de memoria)** Si  $T$  es una variable aleatoria exponencial entonces  $\forall t, s > 0$  se cumple que

$$\mathbb{P}(T > t + s | T > t) = \mathbb{P}(T > s).$$

*Demostración:* Tomando en cuenta que  $\mathbb{P}(T > x) = 1 - \mathbb{P}(t \leq x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T > t + s | T > t) &= \mathbb{P}(T > t + s, T > t) / \mathbb{P}(T > t) = \mathbb{P}(T > t + s) / \mathbb{P}(T > t) \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(T > s). \end{aligned}$$

□

**Proposición 1.1.3** Sea  $T \geq 0$  una variable aleatoria tal que

$$\mathbb{P}(T > t + s | T > t) = \mathbb{P}(T > s), \quad \forall t, s > 0.$$

Entonces  $T$  tiene distribución exponencial.

*Demostración:* Sea  $g(t) = \mathbb{P}(T > t)$ . Utilizando la regla de Bayes se obtiene que  $g$  es una función multiplicativa:

$$g(t + s) = \mathbb{P}(T > t + s | T > t) \mathbb{P}(T > t) = g(s)g(t), \quad \forall t, s > 0.$$

Esta propiedad implica que  $[g(m/n)]^n = g(m) = [g(1)]^m$  para cualquier par de enteros  $m$  y  $n \neq 0$ . Sea  $a = g(1)$ . Lo que hace que  $g(q) = a^q, \forall q \in \mathbb{Q}$ . Como  $g$  es no creciente,  $0 \leq a \leq 1$  y

$$a^t = \inf_{t > q \in \mathbb{Q}} g(q) \geq g(t) \geq \sup_{t < q \in \mathbb{Q}} g(q) = a^t$$

entonces  $g(t) = a^t$  para cualquier  $t \in \mathbb{R}$ . Como resultado tenemos que  $\mathbb{P}(T > t) = a^t$  para algún  $0 \leq a \leq 1$ . Pero como la función de distribución de una variable aleatoria no puede ser constante, con lo cual  $0 \neq a \neq 1$ . Tomando  $a = e^{-\lambda}$  para algún  $\lambda > 0$  se completa el argumento.  $\square$

**Definición 1.1.4 (La distribución de Poisson)** Una variable aleatoria  $N$  con valores enteros no negativos sigue una distribución de Poisson con parámetro  $\lambda$  si

$$\mathbb{P}(N = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Proposición 1.1.5** La distribución Poisson  $N$  tiene una función generadora de momentos dada por

$$M(u) = E[\exp(uN)] = \exp[\lambda(e^u - 1)]$$

para todo  $u \in \mathbb{R}$ .

*Demostración:*

$$\begin{aligned} E[\exp(uN)] &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp(un) \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{un} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^u \lambda)^n}{n!} \\ &= \exp[\lambda(e^u - 1)]. \end{aligned}$$

$\square$

**Proposición 1.1.6** Sea  $(\tau_i, i \in \mathbb{N})$  una sucesión de variables aleatorias exponenciales independientes con parámetro  $\lambda$ , y sea  $T_n = \sum_{i=1}^n \tau_i$ . Entonces

$$\mathbb{P}(T_n > t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}. \quad (1.1)$$

*Demostración:* Procederemos por inducción. Para  $n = 1$

$$\mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(\tau_1 > t) = e^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

Supongamos que (1.1) se cumple para cierto  $n$ . Luego, expresando  $T_{n+1}$  como la suma de las variables aleatorias independientes  $T_n$  y  $\tau_{n+1}$  calculamos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_{n+1} > t) &= \mathbb{P}(T_n + \tau_{n+1} > t) \\ &= \mathbb{P}(\tau_{n+1} > t) + P(T_n > t - \tau_{n+1}, 0 < \tau_{n+1} \leq t) \\ &= e^{-\lambda t} + \int_0^t \mathbb{P}(T_n > t - s) f_{\tau_{n+1}}(s) ds \\ &= e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} \lambda e^{-\lambda s} ds \\ &= e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \int_0^t (t-s)^k ds \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^n \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \end{aligned}$$

donde  $f_{\tau_{n+1}}(s)$  es la densidad de  $\tau_{n+1}$ . Con lo cual (1.1) se cumple para cualquier  $n$ .  $\square$

### 1.1.2 Procesos de Poisson y sus propiedades

**Definición 1.1.7 (Proceso de conteo)** Dada una sucesión creciente de tiempos aleatorios  $T = (T_n, n \in \mathbb{N})$  tales que  $\mathbb{P}(T_n \rightarrow \infty) = 1$ , se define el proceso de conteo  $X = (X(t), t \geq 0)$  mediante

$$X(t) = \sum_{n \geq 1} 1_{\{T_n \leq t\}} = \#\{n \geq 1 \mid T_n \leq t\}. \quad (1.2)$$

**Definición 1.1.8 (Proceso de Poisson)** Sea  $\tau = (\tau_i, i \in \mathbb{N})$  una sucesión de variables aleatorias exponenciales independientes con parámetro  $\lambda$ , y sea  $T_n = \sum_{i=1}^n \tau_i$ . El proceso  $N = (N(t), t \geq 0)$  definido por

$$N(t) = \sum_{n \geq 1} 1_{\{T_n \leq t\}} \quad (1.3)$$

se denomina proceso de Poisson con intensidad  $\lambda$ .

El proceso Poisson es por ende un proceso de conteo: cuenta el número de tiempos aleatorios  $T_n$  (también denominados tiempos de llegada) que ocurren entre 0 y  $t$ , donde  $(\tau_n = T_n - T_{n-1}, n \in \mathbb{N})$  es una sucesión de variables aleatorias i.i.d.<sup>1</sup> con distribución exponencial de parámetro  $\lambda$ .

A continuación se muestran las principales propiedades de los procesos de Poisson.

<sup>1</sup>La abreviación i.i.d. significa “independientes e idénticamente distribuidas” y generalmente se aplica a sucesiones de variables aleatorias.

**Proposición 1.1.9** Sea  $N = (N(t), t \geq 0)$  un proceso de Poisson.

- (1) Para cualquier  $t > 0$ ,  $N(t)$  es c.s. finito.
- (2) Para cualquier  $\omega$ , el camino muestral  $t \rightarrow N(t)(\omega)$  es constante por tramos y se incrementa en saltos de magnitud 1.
- (3) Para cualquier  $t > 0$ , tenemos  $N(t-) = N(t)$  con probabilidad 1.
- (4)  $N$  es continuo en probabilidad:

$$\forall t > 0, N(s) \xrightarrow[s \rightarrow t]{\mathbb{P}} N(t).$$

- (5) Para cualquier  $t > 0$ , la variable aleatoria  $N(t)$  sigue una distribución de Poisson con parámetro  $\lambda t$ :

$$\mathbb{P}(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

y, dado el evento  $\{N(t) = n\}$ , el vector aleatorio  $(T_1, \dots, T_n)$  tiene la misma distribución que las estadísticas de orden de  $n$  puntos independientes uniformemente distribuidos en  $[0, t]$ .

- (6) La función característica de  $N(t)$  está dada por:

$$E[e^{izN(t)}] = \exp\{\lambda t(e^{iz} - 1)\}, \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

- (7)  $N$  tiene incrementos independientes: para cualquier lista  $t_1 < \dots < t_n$ ,

$$N(t_n) - N(t_{n-1}), \dots, N(t_2) - N(t_1), N(t_1)$$

son variables aleatorias independientes.

- (8) Los incrementos de  $N$  son homogéneos: para  $t > s$  cualesquiera,  $N(t) - N(s)$  tiene la misma distribución que  $N(t - s)$ .

- (9)  $N$  tiene la propiedad de Markov. Es decir que  $\forall t > s$  y  $f \in B_b(\mathbb{R})$ , donde  $B_b(\mathbb{R})$  es el espacio de las funciones de Borel<sup>2</sup> acotadas en  $\mathbb{R}$ , se cumple:

$$E[f(N(t)) | N(u), u \leq s] = E[f(N(t)) | N(s)].$$

*Demostración:* Se ha completado y clarificado la versión de Cont y Tankov [6], pp. 34-36.

- (1) Sea  $\Omega_1 = \{\omega \in \Omega, \frac{T_n(\omega)}{n} \rightarrow \frac{1}{\lambda}\}$ . Por la ley de los grandes números,  $\frac{T_n}{n} \rightarrow \frac{1}{\lambda}$  con probabilidad 1, entonces  $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$ . Para cualquier  $\omega \in \Omega_1$  fijo, tenemos  $T_n(\omega) \rightarrow \infty$ . Entonces, dado cualquier  $t > 0$ , existe  $n_0(\omega) \geq 1$  tal que  $T_n(\omega) > t$  para todo  $n \geq n_0(\omega)$ .

Lo que hace que  $\mathbb{P}(N(t) < \infty) = \mathbb{P}(\Omega_1) = 1$  es decir, el número de términos de la suma (1.3) es c.s. finito.

<sup>2</sup>Ver Definición 1.2.1 y nota al pie de página allí.

- (2) De la definición del proceso de Poisson es obvio que  $N(t)$  es constante en cada intervalo  $]T_n, T_{n+1}[$  y se incrementa en uno en cada  $T_n$ . Como el número de saltos en cada intervalo  $[0, t]$  es c.s. finito, se cumple la propiedad.
- (3) Dado  $\omega \in \Omega$ , los puntos de discontinuidad de  $t \mapsto N(t)(\omega)$  son  $(T_n(\omega), n \geq 1)$ . Pero dado un  $t$  cualquiera,  $\mathbb{P}(t \in \{T_n(\omega), n \geq 1\}) = 0$ . Entonces con probabilidad 1,  $t$  no es un punto de discontinuidad, con lo cual  $N(t-) = N(t)$  con probabilidad 1.
- (4) Consecuencia de lo anterior, pues convergencia casi segura implica convergencia en probabilidad.
- (5) Primeramente, se observa la igualdad de los eventos  $\{N(t) < n\} = \{T_n > t\}$ . Con lo cual sólo basta calcular la probabilidad

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(t) = n) &= \mathbb{P}(N(t) < n + 1) - \mathbb{P}(N(t) < n) \\ &= \mathbb{P}(T_{n+1} > t) - \mathbb{P}(T_n > t). \end{aligned}$$

Luego a partir de (1.1) obtenemos que:

$$\mathbb{P}(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^n \frac{(\lambda t)^k}{k!} - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!},$$

lo cual completa la prueba de la primera parte.

Para probar la segunda parte, dado  $t > 0$  y sean  $t_0 = 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t \leq t_{n+1}$ . Entonces la densidad conjunta  $f_{T_1, \dots, T_{n+1}}(t_1, \dots, t_{n+1})$  de  $T_1, \dots, T_{n+1}$  viene dada por:

$$f_{T_1, \dots, T_{n+1}}(t_1, \dots, t_{n+1}) = \prod_{k=1}^{n+1} \lambda e^{-\lambda(t_k - t_{k-1})} = \lambda^{n+1} e^{-\lambda t_{n+1}},$$

y la densidad conjunta condicional  $f_{T_1, \dots, T_n}(t_1, \dots, t_n | N(t) = n)$  de  $T_1, \dots, T_n$  es:

$$f_{T_1, \dots, T_n}(t_1, \dots, t_n | N(t) = n) = \frac{\int_t^\infty \lambda^{n+1} e^{-\lambda t_{n+1}} dt_{n+1}}{\int_0^t \int_{t_1}^t \dots \int_{t_{n-1}}^t \int_t^\infty \lambda^{n+1} e^{-\lambda t_{n+1}} dt_{n+1} \dots dt_1} = \frac{n!}{t^n}.$$

Pero ésta es la densidad de las estadísticas de orden de  $n$  variables aleatorias independientes uniformemente distribuidas en  $[0, t]$ .

- (6) A partir del resultado anterior tenemos

$$\begin{aligned} E[\exp(izN(t))] &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp(izn) \mathbb{P}(N(t) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{izn} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{iz} \lambda t)^n}{n!} \\ &= \exp[\lambda t(e^{iz} - 1)]. \end{aligned}$$

(7) Sea  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , y calculemos la probabilidad

$$\mathbb{P}(N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2, \dots, N(t_n) - N(t_{n-1}) = k_n). \quad (1.4)$$

Definamos  $j_n = \sum_{i \leq n} k_i$  para  $n \geq 1$ . La probabilidad (1.4) puede volverse a escribir de la siguiente forma

$$\mathbb{P}(T_{j_1} \leq t_1 < T_{j_1+1}, T_{j_2} \leq t_2 < T_{j_2+1}, \dots, T_{j_n} \leq t_n < T_{j_n+1}).$$

Condicionando sobre  $T_{j_n} \leq t_n < T_{j_n+1}$ , el vector  $(T_1, T_2, \dots, T_{j_n})$  se distribuye como las estadísticas de orden de  $j_n$  variables aleatorias uniformes en  $[0, t_n]$ . La probabilidad condicional

$$\mathbb{P}(T_{j_1} \leq t_1 < T_{j_1+1}, T_{j_2} \leq t_2 < T_{j_2+1}, \dots | T_{j_n} \leq t_n < T_{j_n+1}). \quad (1.5)$$

es igual a la probabilidad que dadas  $j_n$  variables aleatorias independientes  $U_1, \dots, U_{j_n}$ , uniformemente distribuidas en  $[0, t_n]$ ,  $k_1$  de ellas caigan en el intervalo  $[0, t_1]$ ,  $k_2$  de ellas caigan en el intervalo  $]t_1, t_2]$ , etc. La probabilidad que  $U_k$  pertenezca a  $[t_{i-1}, t_i]$  es  $(t_i - t_{i-1})/t_n$  y la probabilidad condicional (1.5) está dada por:

$$\frac{j_n! t_1^{k_1}}{t_n^{j_n} k_1!} \prod_{i=2}^n \frac{(t_i - t_{i-1})^{k_i}}{k_i!}. \quad (1.6)$$

Para obtener la probabilidad incondicional (1.4), multiplicamos (1.6) por la densidad de  $N(t_n)$ , la cual es una distribución de Poisson con parámetro  $\lambda t_n$ . Después de simplificar obtenemos

$$\lambda^{j_n} e^{-\lambda t_n} \frac{t_1^{k_1}}{k_1!} \prod_{i=2}^n \frac{(t_i - t_{i-1})^{k_i}}{k_i!}.$$

Finalmente, sustituyendo  $j_n = k_1 + k_2 + \dots + k_n$  podemos apreciar que la probabilidad de interés se factoriza en un producto de  $n$  términos:

$$\mathbb{P}(N(t_1) = k_1, \dots, N(t_n) - N(t_{n-1}) = k_n) = \frac{(\lambda t_1)^{k_1} e^{-\lambda t_1}}{k_1!} \prod_{i=2}^n \frac{(\lambda(t_i - t_{i-1}))^{k_i} e^{-\lambda(t_i - t_{i-1})}}{k_i!}.$$

La ley conjunta de los incrementos tiene forma multiplicativa, lo cual demuestra la independencia.

- (8) En cada término de la expresión anterior se reconoce la distribución de Poisson con parámetro  $\lambda(t_i - t_{i-1})$ , lo cual demuestra la homogeneidad de los incrementos.
- (9) La propiedad de Markov se logra demostrar a partir de la independencia de los incrementos <sup>3</sup>, pues para todo  $t > s$ :

$$\begin{aligned} E[f(N(t)) | N(u), u \leq s] &= E[f(N(t) - N(s) + N(s)) | N(u), u \leq s] \\ &= E[f(N(t) - N(s) + N(s)) | N(s)] \\ &= E[f(N(t)) | N(s)] \end{aligned}$$

pues  $N(t) - N(s)$  es independiente de  $N(u), u \leq s$ . □

<sup>3</sup>Es necesario recordar el siguiente lema de Applebaum [1], p.13. Sea  $\mathcal{G}$  es una sub- $\sigma$ -álgebra de  $\mathcal{F}$ . Si  $X$  e  $Y$  son variables aleatorias en  $\mathbb{R}$  tales que  $X$  es  $\mathcal{G}$ -medible e  $Y$  es independiente de  $\mathcal{G}$  entonces

$$E[f(X, Y) | \mathcal{G}] = G_f(X) \text{ c.s.}$$

para toda  $f \in B_b(\mathbb{R}^2)$ , y donde  $G_f(x) = E[f(x, Y)]$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Proposición 1.1.10 (Suma de dos procesos de Poisson independientes)** Si  $N^1 = (N^1(t), t \geq 0)$  y  $N^2 = (N^2(t), t \geq 0)$  son procesos de Poisson independientes con intensidades  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , respectivamente, definimos un nuevo proceso  $N^{1,2} = (N^{1,2}(t), t \geq 0)$  donde  $N^{1,2}(t) = N^1(t) + N^2(t)$ . Entonces  $N^{1,2}$  es un proceso de Poisson con intensidad  $\lambda_1 + \lambda_2$ .

*Demostración:* Denominemos con  $\tau^1$  y  $\tau^2$  a las sucesiones de tiempos entre llegadas de los procesos  $N^1$  y  $N^2$  respectivamente. Es suficiente con demostrar que el proceso de conteo  $N^{1,2}$  tiene tiempos entre llegadas  $\tau^{1,2}$  distribuidos exponencialmente con parámetro  $\lambda_1 + \lambda_2$ . Sea  $T = (T_n, n \in \mathbb{N})$  los tiempos de llegada del proceso  $N^{1,2}$  y supongamos que  $N^{1,2}(T_n) = n$ , luego se calcula el próximo tiempo aleatorio  $T_{n+1} = T_n + s$  para el cual  $N^{1,2}(T_n + s) = n + 1$ . Debido a la propiedad markoviana del proceso de Poisson, es irrelevante qué proceso, ya sea  $N^1$  o  $N^2$ , causó la llegada en  $T_n$ . Más aún, el evento  $\{\tau^{1,2} > s\}$  es equivalente a  $\{\tau^1 > s\} \cap \{\tau^2 > s\}$  lo cual es equivalente a decir:

$$\mathbb{P}(\tau^{1,2} > s) = \mathbb{P}(\tau^1 > s, \tau^2 > s) = \mathbb{P}(\tau^1 > s)\mathbb{P}(\tau^2 > s) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)s}$$

donde ha sido utilizada la independencia de  $N^1$  y  $N^2$ . □

### 1.1.3 Proceso de Poisson compensado

Como se verá en secciones posteriores, es necesario hacer del proceso de Poisson una martingala<sup>4</sup>. Para ello se le compensa adecuadamente, dando origen a un proceso estocástico muy importante.

**Definición 1.1.11 (Proceso de Poisson compensado)** Sea  $N = (N(t), t \geq 0)$  un proceso de Poisson con intensidad  $\lambda$ . Definimos el proceso de Poisson compensado  $\tilde{N} = (\tilde{N}(t), t \geq 0)$  mediante

$$\tilde{N}(t) = N(t) - \lambda t. \quad (1.7)$$

**Proposición 1.1.12** El proceso de Poisson compensado es una martingala con respecto a la filtración  $\mathcal{F}_t$  generada por la familia de variables aleatorias  $(N(s), s \in [0, t])$ .

*Demostración:* Observamos claramente que  $N(t) - \lambda t$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible. Asimismo, tenemos  $E[|N(t)|] = E[N(t)] = \lambda t < \infty$ , lo que indica que  $N(t)$  es integrable y por tanto también lo es  $N(t) - \lambda t$ . También se sabe que  $N(t) - N(s)$  es independiente de  $\mathcal{F}_s$  para cualquier  $0 \leq s \leq t$ , con lo cual:

$$E[N(t) - N(s) | \mathcal{F}_s] = E[N(t) - N(s)] = E[N(t)] - E[N(s)] = \lambda t - \lambda s.$$

Luego se tiene que

$$\begin{aligned} E[N(t) - \lambda t | \mathcal{F}_s] &= E[N(t) - N(s) + N(s) - \lambda t | \mathcal{F}_s] \\ &= E[N(t) - N(s) | \mathcal{F}_s] + E[N(s) - \lambda t | \mathcal{F}_s] \\ &= E[N(t) - N(s)] + N(s) - \lambda t \\ &= N(s) - \lambda s, \end{aligned}$$

lo que completa la prueba. □

<sup>4</sup>Referirse al Apéndice B para revisar conceptos y propiedades básicas de martingalas en tiempo continuo.

**Proposición 1.1.13** La función característica de  $\tilde{N}(t)$  es:

$$\phi_{\tilde{N}(t)}(z) = \exp[\lambda t(e^{iz} - 1 - iz)].$$

*Demostración:* Se sabe que  $N(t)$  sigue una distribución de Poisson con parámetro  $\lambda t$ . Con lo cual la función característica de  $\tilde{N}(t)$  toma la forma

$$\phi_{\tilde{N}(t)}(z) = E[\exp(iz\tilde{N}(t))] = e^{-iz\lambda t} E[\exp(izN(t))] = \exp[\lambda t(e^{iz} - 1 - iz)],$$

demostrándose así la proposición. □

**Lema 1.1.14** Si  $X = (X(t), t \geq 0)$  es un proceso de conteo con incrementos independientes y estacionarios, entonces  $X$  es un proceso de Poisson.

*Demostración:* A continuación se clarifica la versión que aparece en Cont y Tankov [6], pp. 54-55. Sea  $T_k = \inf\{t \geq 0; X(t) \geq k\}$ . Definimos, para  $n \geq 1$ , las diferencias  $Y_n = T_n - T_{n-1}$ . Luego consideremos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_1 > t + s | Y_1 > t) &= \mathbb{P}(X(t + s) = 0 | X(t) = 0) \\ &= \mathbb{P}(X(t + s) - X(t) = 0 | X(t) = 0) = \mathbb{P}(X(t + s) - X(t) = 0) \\ &= \mathbb{P}(X(s) = 0) = \mathbb{P}(Y_1 > s). \end{aligned}$$

Se ha demostrado que  $Y_1$  tiene la propiedad de falta de memoria, por lo cual es una variable aleatoria exponencial. Ahora demostraremos que  $(X(t + Y_1) - X(Y_1), t \geq 0)$  es independiente de  $Y_1$  y tiene la misma ley que  $(X(t), t \geq 0)$ . Es obvio que  $Y_1$  constituye un tiempo de parada para el proceso  $X(t)$ . Sea  $f(t) = E[e^{iuX(t)}]$  para  $u$  fijo. Incrementos estacionarios e independientes de  $X(t)$  hacen que  $f(s + t) = f(s)f(t)$  para todo  $s, t > 0$  y que

$$M(t) = \frac{e^{iuX(t)}}{f(t)}$$

sea una martingala. Sea  $Y_1^n = n \wedge Y_1$ . Como  $Y_1^n$  es un tiempo de parada acotado, utilizamos el teorema de muestreo opcional (Teorema B.2.2) y obtenemos:

$$E[e^{iu(X(Y_1^n+t)-X(Y_1^n))+ivY_1^n} | \mathcal{F}_{Y_1^n}] = \frac{f(t + Y_1^n)}{f(Y_1^n)} e^{ivY_1^n} = f(t)e^{ivY_1^n}.$$

Entonces:

$$E[e^{iu(X(Y_1^n+t)-X(Y_1^n))+ivY_1^n}] = E[e^{ivY_1^n}]E[e^{iuX(t)}].$$

Por el teorema de la convergencia dominada podemos calcular el límite cuando  $n \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[e^{iu(X(Y_1^n+t)-X(Y_1^n))+ivY_1^n}] = E[e^{ivY_1}]E[e^{iuX(t)}].$$

Este resultado establece que el proceso  $(X(t + Y_1) - X(Y_1), t \geq 0)$  es independiente de  $Y_1$  y que tiene la misma distribución que  $(X(t), t \geq 0)$ . Esta propiedad también nos permite concluir que  $Y_2$  es independiente de  $Y_1$  y que tiene distribución exponencial,  $Y_3$  es independiente de  $Y_2$  e  $Y_1$  y que tiene distribución exponencial, con lo cual la prueba se completa por inducción. □

## 1.2 Divisibilidad Infinita

Esta sección tiene tres partes bien definidas: convolución de medidas de probabilidad, distribuciones infinitamente divisibles y la fórmula de Lévy Khintchine. En esta sección se sigue el enfoque de Applebaum [1], pp. 20-29.

### 1.2.1 Convolución de medidas

La convolución de medidas de probabilidad va a ser útil para caracterizar la propiedad de divisibilidad infinita de una variable aleatoria.

**Definición 1.2.1 (Medida de Borel)** Sea  $S$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$  con la topología inducida de  $\mathbb{R}$ , de tal manera que los abiertos de  $S$  son de la forma  $S \cap U$  donde  $U$  es abierto en  $\mathbb{R}$ . Definimos la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $S$ , denotada  $\mathbb{B}(S)$ , como la menor  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $S$  que contiene a todos los abiertos de  $S$ . Los elementos de  $\mathbb{B}(S)$  se denominan borelianos, y cualquier medida en  $(S, \mathbb{B}(S))$  se denomina medida de Borel o medida boreliana. Finalmente, denotamos como  $\mathbb{M}_1(\mathbb{R})$  al conjunto de todas las medidas borelianas de probabilidad en  $\mathbb{R}$ .

**Definición 1.2.2 (Convolución de Medidas)** Definimos la convolución de dos medidas de probabilidad  $\mu_1$  y  $\mu_2$  que pertenecen a  $\mathbb{M}_1(\mathbb{R})$  como

$$(\mu_1 * \mu_2)(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu_1(A - x) \mu_2(dx) \quad (1.8)$$

para todo  $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ , donde  $A - x = \{y - x \mid y \in A\}$ .

**Teorema 1.2.3** La convolución  $\mu_1 * \mu_2$  es una medida de probabilidad en  $\mathbb{R}$ .

*Demostración:* Es directo que se cumple  $(\mu_1 * \mu_2)(A) \geq 0$  para todo  $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ . Además, si consideramos  $A = \mathbb{R}$ , es cierto que  $(\mu_1 * \mu_2)(\mathbb{R}) = 1$ . Ahora tomemos una sucesión  $(A_n, n \in \mathbb{N})$  de conjuntos disjuntos en  $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ . Luego para todo  $x \in \mathbb{R}$  la sucesión  $(A_n - x, n \in \mathbb{N})$  también es de conjuntos disjuntos, con lo cual

$$\begin{aligned} \mu_1 * \mu_2 \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) &= \int_{\mathbb{R}} \mu_1 \left[ \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) - x \right] \mu_2(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mu_1 \left[ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n - x) \right] \mu_2(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_1(A_n - x) \mu_2(dx) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} \mu_1(A_n - x) \mu_2(dx) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (\mu_1 * \mu_2)(A_n) \end{aligned}$$

el intercambio de la integral por la suma se justifica a través del teorema de la convergencia dominada.  $\square$

A continuación se presentan tres propiedades importantes de la convolución de medidas de probabilidad. Correspondiendo las dos últimas, a la conmutatividad y asociatividad.

**Proposición 1.2.4** Si  $f$  es una función de Borel<sup>5</sup> y acotada en  $\mathbb{R}$ , entonces para toda  $\mu_i \in \mathbb{M}_1(\mathbb{R})$ ,  $i = 1, 2, 3$  se cumple que:

(1)

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)(\mu_1 * \mu_2)(dy) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x + y)\mu_1(dy)\mu_2(dx);$$

(2)

$$\mu_1 * \mu_2 = \mu_2 * \mu_1;$$

(3)

$$(\mu_1 * \mu_2) * \mu_3 = \mu_1 * (\mu_2 * \mu_3).$$

*Demostración:* Para demostrar (1), tenemos en primer lugar que el resultado se verifica fácilmente para funciones indicadoras, porque si  $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$  y  $x, y \in \mathbb{R}$  se cumple:

$$1_A(x + y) = 1_{A-x}(y).$$

Luego extendemos el resultado por linealidad a funciones simples. Ahora, dada una función de Borel  $f$  cualquiera, consideremos  $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ . Fijando  $\epsilon > 0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , hacemos  $b_0^{(n)} < b_1^{(n)} < b_2^{(n)} < \dots < b_{m_n}^{(n)}$  tal que la colección de intervalos  $\{]b_{i-1}^{(n)}, b_i^{(n)}], 1 \leq i \leq m_n\}$  cubra  $[-M, M]$  y tal que  $\max_{1 \leq i \leq m_n} |b_i^{(n)} - b_{i-1}^{(n)}| < \epsilon$ , para  $n$  suficientemente grande. Ahora definimos una sucesión de funciones simples  $f_n = \sum_{i=1}^{m_n} b_{i-1}^{(n)} 1_{B_i^{(n)}}$ , donde  $B_i^{(n)} = f^{-1}(]b_{i-1}^{(n)}, b_i^{(n)}])$ . Luego para  $n$  suficientemente grande

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|(\mu_1 * \mu_2)(dx) &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \\ &= \max_{1 \leq i \leq m_n} \sup_{x \in B_i^{(n)}} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon. \end{aligned}$$

Con lo cual  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  en  $L^1(\mathbb{R}, \mu_1 * \mu_2)$ . Si definimos  $h_n(x + y) = f_n(x + y)$  y  $h(x + y) = f(x + y)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $x, y \in \mathbb{R}$ , un argumento muy similar al anterior concluye que  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = h$  en  $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mu_1 \times \mu_2)$ . Luego, aplicando el teorema de la convergencia dominada se llega al resultado requerido.

Para demostrar (2), aplicamos el teorema de Fubini en (1), con lo cual se tiene

$$\int_{\mathbb{R}} f(s)(\mu_1 * \mu_2)(ds) = \int_{\mathbb{R}} f(s)(\mu_2 * \mu_1)(ds).$$

Posteriormente, hacemos  $f = 1_A$ , con  $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ , lo cual demuestra la igualdad de las medidas.

Finalmente, para demostrar (3), por el teorema de Fubini tenemos que las dos expresiones que se tienen son iguales a

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x + y + z)\mu_1(dx)\mu_2(dy)\mu_3(dz).$$

□

<sup>5</sup>Una función de Borel o función boreliana es una función medible respecto a la  $\sigma$ -álgebra de Borel.

**Corolario 1.2.5** Sean  $X_1$  y  $X_2$  variables aleatorias independientes definidas en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  con distribución conjunta  $p_{X_1, X_2}$  y marginales  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , respectivamente. Entonces para toda función  $f$  boreliana y acotada en  $\mathbb{R}$

$$E[f(X_1 + X_2)] = \int_{\mathbb{R}} f(z)(\mu_1 * \mu_2)(dz).$$

*Demostración:* Usando (1) de la proposición anterior,

$$\begin{aligned} E[f(X_1 + X_2)] &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x_1 + x_2) p_{X_1, X_2}(dx_1, dx_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x_1 + x_2) \mu_1(dx_1) \mu_2(dx_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(z)(\mu_1 * \mu_2)(dz). \end{aligned}$$

□

Debido al Corolario 1.2.5 se aprecia que la convolución da como resultado la distribución de la suma de dos variables aleatorias independientes  $X_1$  y  $X_2$ , es decir,

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 \in A) = E[1_A(X_1 + X_2)] = (\mu_1 * \mu_2)(A).$$

**Definición 1.2.6** Definimos  $\mu^{*n} = \mu * \dots * \mu$  ( $n$  veces) y decimos que  $\mu$  tiene raíz  $n$ -ésima bajo convolución, si existe una medida  $\mu^{1/n} \in \mathbb{M}_1(\mathbb{R})$  para la cual  $(\mu^{1/n})^{*n} = \mu$ .

## 1.2.2 Divisibilidad infinita

En esta sección, se presenta la definición, propiedades y algunos ejemplos de distribuciones infinitamente divisibles.

**Definición 1.2.7 (Divisibilidad Infinita)** Una variable aleatoria  $X$  con valores en  $\mathbb{R}$  y con distribución  $\mu_X$  es infinitamente divisible si para todo  $n \in \mathbb{N}$  existen variables aleatorias i.i.d.  $Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)}, \dots, Y_n^{(n)}$  tales que en distribución se cumple

$$X = Y_1^{(n)} + Y_2^{(n)} + \dots + Y_n^{(n)}. \quad (1.9)$$

Sea  $\phi_X(u) = E[e^{iuX}]$ , la función característica de  $X$ , donde  $u \in \mathbb{R}$  y de manera más general, si  $\mu \in \mathbb{M}_1(\mathbb{R})$  entonces  $\phi_\mu(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iuy} \mu(dy)$ .

**Proposición 1.2.8** Las siguientes proposiciones son equivalentes

- (1)  $X$  es infinitamente divisible;
- (2)  $\mu_X$  tiene raíz  $n$ -ésima bajo convolución, la cual es a su vez la distribución de una variable aleatoria;
- (3) para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\phi_X$  tiene una raíz  $n$ -ésima la cual a su vez es la función característica de una variable aleatoria.

*Demostración:* Primero demostraremos que (1) $\Rightarrow$ (2). Es obvio que la distribución común de las  $Y_j^{(n)}$  es la convolución raíz  $n$ -ésima requerida.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sea  $Z$  una variable aleatoria con distribución  $(\mu_X)^{1/n}$ . Entonces, para todo  $u \in \mathbb{R}$  se tiene

$$\phi_X(u) = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} e^{iu(y_1+\dots+y_n)} (\mu_X)^{1/n}(dy_1) \dots (\mu_X)^{1/n}(dy_n) = \psi_Y(u)^n,$$

donde  $\psi_Y(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iuy} (\mu_X)^{1/n}(dy)$ .

Finalmente (3) $\Rightarrow$ (1). Escogemos  $Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)}, \dots, Y_n^{(n)}$  copias independientes de la variable aleatoria cuya función característica es la raíz  $n$ -ésima de  $\phi_X(u)$ . Luego se tiene

$$E [e^{iuX}] = E [e^{iuY_1^{(n)}}] \dots E [e^{iuY_n^{(n)}}] = E [e^{iu(Y_1^{(n)}+Y_2^{(n)}+\dots+Y_n^{(n)})}],$$

de donde deducimos (1.9). □

La Proposición 1.2.8(2) sugiere que podemos generalizar la definición de divisibilidad infinita de la siguiente forma:  $\mu \in \mathbb{M}_1(\mathbb{R})$  es infinitamente divisible si tiene raíz  $n$ -ésima bajo convolución en  $\mathbb{M}_1(\mathbb{R})$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Corolario 1.2.9**  $\mu \in \mathbb{M}_1(\mathbb{R})$  es infinitamente divisible si y sólo si para todo  $n \in \mathbb{N}$  existe  $\mu^{1/n} \in \mathbb{M}_1(\mathbb{R})$  tal que

$$\phi_\mu(x) = [\phi_{\mu^{1/n}}(x)]^n$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

*Demostración:* Inmediato a partir de la proposición anterior. □

A continuación presentamos algunos ejemplos de distribuciones infinitamente divisibles. Los ejemplos corresponden a la distribución normal, la distribución de Poisson y la distribución de Poisson compuesta. Es importante observar que la función característica tiene un rol fundamental en la propiedad de divisibilidad infinita.

**Proposición 1.2.10** Sea  $X$  una variable aleatoria que sigue una distribución normal con media  $m$  y varianza  $\sigma^2$ , lo cual se denota como  $X \sim N(m, \sigma^2)$ . Entonces,  $X$  es infinitamente divisible.

*Demostración:* La función característica de  $X$  está dada por

$$E [e^{iuX}] = \exp \left[ ium - \frac{\sigma^2 u^2}{2} \right]$$

para todo  $u \in \mathbb{R}$ . Entonces

$$[\phi_X(u)]^{1/n} = \exp \left[ iu \frac{m}{n} - \frac{\sigma^2 u^2}{2n} \right],$$

con lo cual  $X$  es infinitamente divisible tomando  $Y_j^{(n)} \sim N(m/n, \sigma^2/n)$ . □

**Proposición 1.2.11** Sea  $X$  una variable aleatoria con distribución de Poisson con parámetro  $\lambda$ , lo cual se denota como  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ . Entonces,  $X$  es infinitamente divisible.

*Demostración:* Es fácil verificar

$$\phi_X(u) = \exp [\lambda (e^{iu} - 1)],$$

con lo cual,  $X$  es infinitamente divisible tomando  $Y_j^{(n)} \sim \text{Poisson}(\lambda/n)$ . □

**Definición 1.2.12** Sea  $Z = (Z(n), n \in \mathbb{N})$  una sucesión de variables aleatorias i.i.d. tomando valores en  $\mathbb{R}$  con distribución común  $\mu_Z$  y  $N$  es una variable aleatoria independiente de  $Z$  tal que  $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ . Entonces, una variable aleatoria  $X$  sigue una distribución de Poisson compuesta. En este caso, utilizaremos la notación  $X \sim PC(\lambda, \mu_Z)$  si

$$X = \sum_{i=1}^N Z(n).$$

**Proposición 1.2.13** La función característica de una variable aleatoria  $X$  tal que  $X \sim PC(\lambda, \mu_Z)$  es

$$\phi_X(u) = \exp \left[ \int_{\mathbb{R}} (e^{iuy} - 1) \lambda \mu_Z(dy) \right]$$

para todo  $u \in \mathbb{R}$ .

*Demostración:* Sea  $\phi_Z(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iuy} \mu_Z(dy)$  la función característica de cada  $Z(n)$ . Luego por independencia encontramos

$$\begin{aligned} \phi_X(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} E[\exp(iuZ(1) + \dots + iuZ(N)) | N = n] \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E[\exp(iuZ(1) + \dots + iuZ(n))] e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda \phi_Z(u))^n}{n!} \\ &= \exp[\lambda(\phi_Z(u) - 1)]. \end{aligned}$$

□

**Proposición 1.2.14** Una variable aleatoria  $X$  que sigue una distribución de Poisson compuesta con parámetros  $\lambda$  y  $\mu_Z$  es infinitamente divisible.

*Demostración:* Es fácil verificar que  $X$  es infinitamente divisible tomando variables aleatorias  $Y_j^{(n)} \sim PC\left(\frac{\lambda}{n}, \mu_Z\right)$ . □

### 1.2.3 Fórmula de Lévy Khintchine

En esta sección presentaremos una bella fórmula que fue establecida por Paul Lévy y A. Ya. Khintchine en 1930, la cual da una caracterización de las variables aleatorias infinitamente divisibles a través de sus funciones características. Pero primero es necesario presentar una definición importante.

**Definición 1.2.15 (Medida de Lévy)** Una medida de borel  $\nu^*$  definida en  $\mathbb{R} - \{0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$  es una medida de Lévy si

$$\int_{\mathbb{R}-\{0\}} (|y|^2 \wedge 1) \nu^*(dy) < \infty. \quad (1.10)$$

**Proposición 1.2.16** Si  $\mu$  es una medida de Lévy y  $0 < \epsilon \leq 1$ , entonces para todo  $\epsilon > 0$  se cumple

$$\mu((-\epsilon, \epsilon)^c) < \infty.$$

*Demostración:* Como  $|y|^2 \wedge \epsilon \leq |y|^2 \wedge 1$  se concluye de (1.10) que  $\mu((-\epsilon, \epsilon)^c) < \infty$ .  $\square$

**Teorema 1.2.17** Toda medida Lévy en  $\mathbb{R} - \{0\}$  es  $\sigma$ -finita<sup>6</sup>.

*Demostración:* Inmediato a partir de la Proposición 1.2.16.  $\square$

Existen caracterizaciones alternativas para (1.10), siendo una de ellas

$$\int_{\mathbb{R}-\{0\}} \frac{|y|^2}{1 + |y|^2} \nu^*(dy) < \infty. \quad (1.11)$$

**Proposición 1.2.18** Las condiciones (1.10) y (1.11) son equivalentes.

*Demostración:* Basta con verificar que para todo  $y \in \mathbb{R}$

$$\frac{|y|^2}{1 + |y|^2} \leq |y|^2 \wedge 1 \leq 2 \frac{|y|^2}{1 + |y|^2}.$$

$\square$

**Teorema 1.2.19 (La fórmula de Lévy-Khintchine)** Una medida  $\mu \in \mathbb{M}_1(\mathbb{R})$  es infinitamente divisible si existen  $m \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^2 \in \mathbb{R}_{++}$  y una medida Lévy  $\nu^*$  en  $\mathbb{R} - \{0\}$ , tal que para todo  $u \in \mathbb{R}$ ,

$$\phi_\mu(u) = \exp \left\{ imu - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \int_{\mathbb{R}-\{0\}} [e^{iuy} - 1 - iuy 1_B(y)] \nu^*(dy) \right\}; \quad (1.12)$$

donde  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\}$ .

Asimismo, cualquier función de la forma (1.12) es la función característica de una medida de probabilidad infinitamente divisible  $\mu \in \mathbb{M}_1(\mathbb{R})$ .

*Demostración:* Se detalla y clarifica la versión que aparece en Applebaum [1], pp. 28-29. Vamos a demostrar en esta sección únicamente la segunda parte del teorema, la primera parte (la cual es más difícil) será demostrada como una consecuencia de la descomposición de Lévy-Ito que se analizará al detalle en el Capítulo 2.

Para demostrar la segunda parte, primero demostraremos que el lado derecho de (1.12) es

<sup>6</sup>Sea  $(S, \mathcal{F})$  un espacio medible, una medida  $\mu$  en  $(S, \mathcal{F})$  es  $\sigma$ -finita si es posible encontrar una sucesión  $(A_n, n \in \mathbb{N})$  en  $\mathcal{F}$  tal que  $S = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$  donde cada  $\mu(A_n) < \infty$ .

una función característica. Sea  $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$  una sucesión de borelianos en  $\mathbb{R}$  que decrece monótonicamente al vacío. Luego para todo  $u \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$  definimos

$$\phi_n(u) = \exp \left\{ iu \left( m - \int_{U_n^c \cap B - \{0\}} y \nu^*(dy) \right) - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \int_{U_n^c - \{0\}} [e^{iuy} - 1] \nu^*(dy) \right\}$$

Cada  $\phi_n$  representa la convolución de una distribución normal con una distribución de Poisson compuesta independiente<sup>7</sup>, con lo cual es la función característica de una medida de probabilidad  $\mu_n$ . Claramente se tiene

$$\phi_\mu(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(u).$$

Se demuestra a través del teorema de continuidad de Lévy<sup>8</sup> que  $\phi_\mu$  es una función característica. Habría que demostrar la continuidad en cero de  $\psi_\mu$ , donde para cada  $u \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \psi_\mu(u) &= \int_{\mathbb{R} - \{0\}} [e^{iuy} - 1 - iuy 1_B(y)] \nu^*(dy) \\ &= \int_{B - \{0\}} [e^{iuy} - 1 - iuy] \nu^*(dy) + \int_{B^c} [e^{iuy} - 1] \nu^*(dy). \end{aligned}$$

Luego utilizando el teorema de Taylor, la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el teorema de la convergencia dominada obtenemos

$$\begin{aligned} |\psi_\mu(u)| &\leq \frac{1}{2} \int_{B - \{0\}} |uy|^2 \nu^*(dy) + \int_{B^c} |e^{iuy} - 1| \nu^*(dy) \\ &\leq \frac{|u|^2}{2} \int_{B - \{0\}} |y|^2 \nu^*(dy) + \int_{B^c} |e^{iuy} - 1| \nu^*(dy). \end{aligned}$$

La última expresión tiende a cero cuando  $u \rightarrow 0$ . Finalmente, se deduce fácilmente que  $\mu$  es infinitamente divisible.  $\square$

A partir de la demostración anterior, podemos escribir la función característica de una variable aleatoria infinitamente divisible como  $\phi_\mu(u) = e^{\theta(u)}$ . La función  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , se suele llamar *símbolo de Lévy*.

Concluimos este capítulo con un teorema importante relativo a las medidas de probabilidad infinitamente divisibles.

**Teorema 1.2.20** *Cualquier medida de probabilidad infinitamente divisible puede ser obtenida como el límite débil de una sucesión de distribuciones de Poisson compuestas.*

<sup>7</sup>Sea  $X = X_1 + X_2$  donde  $X_1$  y  $X_2$  son independientes con  $X_1 \sim N(m, \sigma^2)$  y  $X_2 \sim PC(\lambda, \mu_Z)$ , entonces para todo  $u \in \mathbb{R}$ :

$$\phi_X(u) = \exp \left\{ imu - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} [e^{iuy} - 1] \lambda \mu_Z(dy) \right\}.$$

<sup>8</sup>Sea  $(\phi_n, n \in \mathbb{N})$  una sucesión de funciones características y supongamos que existe una función  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que para todo  $u \in \mathbb{R}, \phi_n(u) \rightarrow \psi(u)$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y  $\psi$  es continua en 0. Entonces  $\psi$  es la función característica de una distribución de probabilidad.

*Demostración:* Sea  $\phi$  la función característica de una medida de probabilidad infinitamente divisible  $\mu$ , y  $\phi^{1/n}$  la función característica de  $\mu^{1/n}$ . Entonces, para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $u \in \mathbb{R}$ , definimos

$$\phi_n(u) = \exp \{n [\phi^{1/n}(u) - 1]\} = \exp \left[ \int_{\mathbb{R}} (e^{iuy} - 1) n\mu^{1/n}(dy) \right],$$

donde  $\phi_n$  es la función característica de una distribución de Poisson compuesta. Es obvio

$$\phi_n(u) = \exp \left[ n \left( e^{\frac{1}{n} \log[\phi(u)]} - 1 \right) \right],$$

con lo cual es sencillo demostrar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( e^{\frac{1}{n} \log[\phi(u)]} - 1 \right) = \log[\phi(u)].$$

Finalmente, por el teorema de Glivenko<sup>9</sup>,  $\phi_n(u) \rightarrow \phi(u)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . □



<sup>9</sup>Sean  $\phi_n$  y  $\phi$  las funciones características de las distribuciones de probabilidad  $p_n$  y  $p$ , respectivamente, para  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $\phi_n(u) \rightarrow \phi(u)$  para todo  $u \in \mathbb{R}$  entonces  $p_n \rightarrow p$  en distribución cuando  $n \rightarrow \infty$ .

# Capítulo 2

## Procesos de Lévy

En este capítulo, a fin de simplificar la notación, consideraremos procesos estocásticos en  $\mathbb{R}$ , pero los resultados se cumplen para procesos en  $\mathbb{R}^n$ . Asimismo, asumimos la existencia de un espacio de probabilidad filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  satisfaciendo las hipótesis usuales:

- (1)  $\mathcal{F}_0$  contiene todos los conjuntos  $\mathbb{P}$ -nulos de  $\mathcal{F}$ ;
- (2) la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  es continua por derecha, esto es,  $\mathcal{F}_t = \bigcap_{u > t} \mathcal{F}_u$  para todo  $t \geq 0$ .

### 2.1 Definición y propiedades básicas de los procesos de Lévy

En esta sección, se definen los procesos de Lévy y se investigan sus propiedades básicas. Entre las propiedades más importantes se encuentran la divisibilidad infinita, la propiedad fuerte de Markov y la existencia de una modificación con caminos muestrales continuos por derecha y con límite por la izquierda. La elaboración de esta sección ha tenido como base a Protter [14] y Applebaum [1] y marginalmente a Sato [16] y Bertoin [3].

**Definición 2.1.1 (Proceso de Lévy)** *Un proceso adaptado  $\eta = (\eta(t), t \geq 0) = (\eta_t)_{t \geq 0}$  con  $\eta(0) = 0$  c.s. se llama proceso de Lévy si satisface las siguientes condiciones:*

- (1) *tiene incrementos independientes: para toda sucesión creciente de tiempos  $t_0, \dots, t_n$ , las variables aleatorias  $\eta(t_0), \eta(t_1) - \eta(t_0), \dots, \eta(t_n) - \eta(t_{n-1})$  son independientes;*
- (2) *tiene incrementos estacionarios: la ley de  $\eta(t+h) - \eta(t)$  no depende de  $t$ ; y*
- (3) *es continuo en probabilidad:  $\forall \epsilon > 0, \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{P}(|\eta(t+h) - \eta(t)| \geq \epsilon) = 0$ .*

**Proposición 2.1.2** *Si  $\eta$  es un proceso de Lévy, entonces  $\eta(t)$  es infinitamente divisible para cada  $t \geq 0$ .*

*Demostración:* Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\eta(t) = Y_1^{(n)}(t) + \dots + Y_n^{(n)}(t),$$

donde cada  $Y_k^{(n)}(t) = \eta\left(\frac{kt}{n}\right) - \eta\left(\frac{(k-1)t}{n}\right)$ . Como  $\eta$  es un proceso de Lévy, de las condiciones

(1) y (2) se sigue que las variables aleatorias  $Y_k^{(n)}(t)$  son i.i.d. □

**Lema 2.1.3** Si  $H = (H(t), t \geq 0)$  es continuo en probabilidad, entonces la función  $t \mapsto \phi_{H(t)}(u)$  es continua para todo  $u \in \mathbb{R}$ .

*Demostración:* Para todo  $s, t \geq 0$  con  $t \neq s$  definimos  $H(s, t) = H(t) - H(s)$ . Fijamos  $u \in \mathbb{R}$ . La función  $y \rightarrow e^{iuy}$  es continua en el origen, es decir, dado  $\epsilon > 0$  es posible encontrar  $\delta_1 > 0$  tal que

$$\sup_{0 \leq |y| < \delta_1} |e^{iuy} - 1| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por la propiedad (3) de los procesos de Lévy, podemos encontrar  $\delta_2 > 0$  tal que si  $0 < |t - s| < \delta_2$  se tiene  $\mathbb{P}(|H(s, t)| > \delta_1) < \frac{\epsilon}{4}$ . Por consiguiente, si  $0 < |t - s| < \delta_2$  se tiene

$$\begin{aligned} |\phi_{H(t)}(u) - \phi_{H(s)}(u)| &= \left| \int_{\Omega} e^{iuH(s)(\omega)} [e^{iuH(s,t)(\omega)} - 1] \mathbb{P}(d\omega) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |e^{iuy} - 1| p_{H(s,t)}(dy) \\ &= \int_{0 \leq |y| \leq \delta_1} |e^{iuy} - 1| p_{H(s,t)}(dy) + \int_{|y| > \delta_1} |e^{iuy} - 1| p_{H(s,t)}(dy) \\ &\leq \sup_{0 \leq |y| \leq \delta_1} |e^{iuy} - 1| + 2\mathbb{P}(|H(s, t)| > \delta_1) \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

□

**Teorema 2.1.4** Si  $\eta$  es un proceso de Lévy, entonces para todo  $t \geq 0$ ,

$$\phi_{\eta(t)}(u) = e^{t\theta(u)}, \quad u \in \mathbb{R};$$

donde  $\theta$  es el símbolo de Lévy<sup>1</sup> de  $\eta(1)$ .

*Demostración:* Para todo  $u \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$  definimos a  $\phi_u(t) = \phi_{\eta(t)}(u)$ . Como  $\eta$  tiene incrementos estacionarios e independientes, para todo  $s \geq 0$  tenemos

$$\begin{aligned} \phi_u(s + t) &= E [e^{iu\eta(t+s)}] \\ &= E [e^{iu(\eta(t+s) - \eta(s))} e^{iu\eta(s)}] \\ &= E [e^{iu(\eta(t+s) - \eta(s))}] E [e^{iu\eta(s)}] \\ &= \phi_u(t) \phi_u(s). \end{aligned}$$

También se tiene  $\phi_u(0) = 1$  pues  $\eta(0) = 0$  c.s. y debido al Lema 2.1.3 junto con la continuidad en probabilidad de  $\eta$ , se deduce que la función  $t \rightarrow \phi_u(t)$  es continua. Luego, la única solución continua a  $\phi_u(s + t) = \phi_u(t) \phi_u(s)$  y  $\phi_u(0) = 1$  está dada por  $\phi_u(t) = e^{t\theta(u)}$  donde  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Pero, siendo  $\eta(1)$  infinitamente divisible,  $\theta$  es un símbolo de Lévy. □

La fórmula de Lévy-Khintchine para un proceso de Lévy  $(\eta(t), t \geq 0)$  viene dada por

$$E [e^{iu\eta(t)}] = \exp \left( t \left\{ ibu - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \int_{\mathbb{R} - \{0\}} [e^{iuy} - 1 - iuy 1_B(y)] \nu^*(dy) \right\} \right)$$

<sup>1</sup>Ver página 22 dónde se define símbolo de Lévy

para todo  $u \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$  y  $B = \{x \in \mathbb{R}; |x| < 1\}$ . Los elementos  $(b, \sigma, \nu^*)$  se denominan las características de  $\eta(1)$ .

En el siguiente teorema se muestran condiciones para que una sucesión de procesos de Lévy converja a un proceso estocástico que sea Lévy.

**Teorema 2.1.5** *Sea  $\eta = (\eta(t), t \geq 0)$  un proceso estocástico y  $(\eta_n, n \in \mathbb{N})$  una sucesión de procesos de Lévy tales que  $\eta_n = (\eta_n(t), t \geq 0)$ . Si  $\eta_n(t)$  converge en probabilidad a  $\eta(t)$  para todo  $t \geq 0$ , y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{t \rightarrow 0} \mathbb{P}(|\eta_n(t) - \eta(t)| > a) = 0$  para todo  $a > 0$ , entonces  $\eta$  es un proceso de Lévy.*

*Demostración:* Vemos que  $\eta(0) = 0$  c.s. se cumple pues la sucesión  $\eta_n(0)$  tiene una subsucesión que converge a cero casi seguramente.

Para demostrar la estacionariedad de los incrementos, observamos que para  $u \in \mathbb{R}$  y  $0 \leq s < t < \infty$

$$\begin{aligned} E [e^{iu(\eta(t)-\eta(s))}] &= \lim_{n \rightarrow \infty} E [e^{iu(\eta_n(t)-\eta_n(s))}] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} E [e^{iu(\eta_n(t-s))}] \\ &= E [e^{iu\eta(t-s)}] \end{aligned}$$

donde la convergencia de las funciones características se consigue a través del argumento expuesto en el Lema (2.1.3). La independencia de los incrementos se demuestra de manera similar.

Para demostrar la continuidad en probabilidad, notemos que para  $a > 0$ ,  $t \geq 0$  y  $n \in \mathbb{N}$  se cumple

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\eta(t)| > a) &\leq \mathbb{P}(|\eta(t) - \eta_n(t)| + |\eta_n(t)| > a) \\ &\leq \mathbb{P}\left(|\eta(t) - \eta_n(t)| > \frac{a}{2}\right) + \mathbb{P}\left(|\eta_n(t)| > \frac{a}{2}\right). \end{aligned}$$

Por consiguiente, tenemos

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \mathbb{P}(|\eta(t)| > a) \leq \limsup_{t \rightarrow 0} \mathbb{P}\left(|\eta(t) - \eta_n(t)| > \frac{a}{2}\right) + \limsup_{t \rightarrow 0} \mathbb{P}\left(|\eta_n(t)| > \frac{a}{2}\right).$$

Luego, tomando límite cuando  $n \rightarrow \infty$  en la expresión anterior, se llega al resultado requerido pues al ser  $\eta_n$  un proceso de Lévy,

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \mathbb{P}\left(|\eta_n(t)| > \frac{a}{2}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \mathbb{P}\left(|\eta_n(t)| > \frac{a}{2}\right) = 0.$$

□

**Lema 2.1.6** *Si  $X$  es un proceso de Lévy e  $Y$  es una modificación<sup>2</sup> de  $X$ , entonces  $Y$  es un proceso de Lévy con las mismas características de  $X$ .*

<sup>2</sup> $X = (X(t), t \geq 0)$  y  $Y = (Y(t), t \geq 0)$  son dos procesos estocásticos definidos en el mismo espacio de probabilidad. Se dice que  $Y$  es una modificación de  $X$  si para todo  $t \geq 0$ ,  $\mathbb{P}(X(t) \neq Y(t)) = 0$ . Con lo cual,  $X$  e  $Y$  tienen las mismas distribuciones finito-dimensionales.

*Demostración:* Se deduce inmediatamente que  $Y(0) = 0$  casi seguramente. Fijemos  $0 \leq s < t < \infty$  y definamos:

$$\mathcal{N}(s, t) = \{\omega \in \Omega \mid X(s)(\omega) = Y(s)(\omega), X(t)(\omega) = Y(t)(\omega)\}.$$

Luego se demuestra que  $\mathbb{P}(\mathcal{N}(s, t)) = 1$  debido al siguiente argumento:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{N}(s, t)^c) &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega; X(s)(\omega) \neq Y(s)(\omega) \text{ ó } X(t)(\omega) \neq Y(t)(\omega)\}) \\ &\leq \mathbb{P}(X(s) \neq Y(s)) + \mathbb{P}(X(t) \neq Y(t)) = 0. \end{aligned}$$

Para demostrar que  $Y$  tiene incrementos estacionarios, sea  $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ . Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y(t) - Y(s) \in A) &= \mathbb{P}(Y(t) - Y(s) \in A \cap \mathcal{N}(s, t)) + \mathbb{P}(Y(t) - Y(s) \in A \cap \mathcal{N}(s, t)^c) \\ &= \mathbb{P}(X(t) - X(s) \in A \cap \mathcal{N}(s, t)) \\ &\leq \mathbb{P}(X(t) - X(s) \in A) \\ &= \mathbb{P}(X(t-s) \in A) = \mathbb{P}(Y(t-s) \in A) \end{aligned}$$

La desigualdad contraria se obtiene de la misma forma. Argumentos similares se utilizan para demostrar que  $Y$  tiene incrementos independientes y que es continuo en probabilidad. Habiendo demostrado que  $Y$  es un proceso de Lévy es obvio que  $X$  e  $Y$  tienen las mismas funciones características y por lo tanto las mismas características.  $\square$

En vista del Lema 2.1.6 se aprecia que no se pierde nada al reemplazar un proceso de Lévy por una modificación. A veces resulta conveniente tal reemplazo, si dicha modificación tiene propiedades deseables. Por ejemplo, una propiedad deseable en un proceso de Lévy es que tenga caminos muestrales continuos por derecha y con límite por la izquierda, también denominados caminos muestrales cadlag<sup>3</sup>. A continuación, se define qué es una función cadlag y se demuestra una propiedad importante ellas.

**Definición 2.1.7 (Función cadlag)** Una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es cadlag si es continua por derecha con límites izquierdos; i.e. para cada  $t \in ]a, b]$ , los límites

$$f(t-) = \lim_{s \uparrow t} f(s) \quad \text{y} \quad f(t+) = \lim_{s \downarrow t} f(s)$$

existen y  $f(t) = f(t+)$ . Si  $t \in ]a, b]$ , la cantidad

$$\Delta f(t) = f(t) - f(t-)$$

se llama el salto de  $f$  en  $t$ .

**Teorema 2.1.8** Una función cadlag  $f$  puede tener a lo más un conjunto enumerable de discontinuidades; i.e., el conjunto  $S = \{t \in ]a, b], \Delta f(t) \neq 0\}$  es a lo más numerable.

*Demostración:* Se completa y corrige la demostración de Applebaum [1], p. 117. Para cualquier  $k > 0$ , definimos

$$S_k = \{t \in ]a, b], |\Delta f(t)| > k\}.$$

<sup>3</sup>Más adelante estableceremos que todo proceso de Lévy tiene una modificación cadlag (ver Teorema 2.1.11)

Supongamos que  $S_k$  tiene por lo menos un punto de acumulación  $x$ , y escojamos una sucesión  $(x_n, n \in \mathbb{N})$  en  $S_k$  que converja a  $x$ . Se asume, sin pérdida de generalidad, que la convergencia es por la izquierda y que la sucesión es creciente (esto siempre es posible pues de ser necesario se pasaría a una subsucesión). Dado cualquier  $n \in \mathbb{N}$ , y como  $x_n \in S_k$  se sabe que  $f$  tiene límite izquierdo en  $x_n$ . Con lo cual, dado  $\epsilon > 0$ , se puede encontrar  $\delta > 0$  tal que,  $\forall y$  con  $y < x_n$  y que satisface  $x_n - y < \delta$ , se tiene  $f(x_n-) - f(y) = \epsilon_0(y)$  donde  $|\epsilon_0(y)| < \epsilon$ . Ahora, fijemos  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, para todos  $n > m > n_0$ , se cumpla  $x_n - x_m < \delta$ . Entonces se tiene

$$f(x_n) - f(x_m) = f(x_n) - f(x_n-) + f(x_n-) - f(x_m) = k_0 + \epsilon_0(m),$$

donde  $|k_0| > k$ . Con lo cual es claro que  $(f(x_n), n \in \mathbb{N})$  no puede ser de Cauchy, por lo que  $f$  no tiene límite izquierdo en  $x$ . Luego, como  $S_k$  no tiene puntos de acumulación, entonces, es a lo más numerable. Ahora, considerando

$$S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_{1/n},$$

se deduce que  $S$  es numerable. □

Ahora vamos a demostrar que todo proceso de Lévy tiene una modificación cadlag. Pero antes de ello vamos a presentar dos resultados. El primero de ellos se refiere a la martingala exponencial, la cual será muy utilizada a lo largo del capítulo. El segundo resultado es técnico y se utiliza en la demostración de la existencia de la modificación cadlag.

**Proposición 2.1.9** *Si  $\eta$  es un proceso de Lévy con símbolo  $\theta$  entonces para todo  $u \in \mathbb{R}$ ,  $M_u = (M_u(t), t \geq 0)$  es una martingala compleja con respecto a  $\mathcal{F}_t^\eta = \sigma\{\eta(s); 0 \leq s \leq t\}$ , donde*

$$M_u(t) = \exp\{iu\eta(t) - t\theta(u)\}.$$

*Demostración:*  $E[|M_u(t)|] = \exp\{-t\text{Re}(\theta(u))\} < \infty$  para todo  $t \geq 0$ . Para  $0 \leq s \leq t$  escribimos

$$M_u(t) = M_u(s) \exp\{iu(\eta(t) - \eta(s)) - (t - s)\theta(u)\}.$$

Como los incrementos de  $\eta$  son estacionarios e independientes, y  $E[e^{iu\eta(t)}] = e^{t\theta(u)}$ , tenemos

$$\begin{aligned} E[M_u(t)|\mathcal{F}_s^\eta] &= M_u(s)E[iu\eta(t - s)] \exp\{-(t - s)\theta(u)\} \\ &= M_u(s), \end{aligned}$$

tal como se requiere. □

**Lema 2.1.10** *Sea  $x_n$  una sucesión de números reales tal que, para casi todo  $u \in \mathbb{R}$ , la sucesión compleja  $e^{iu x_n}$  converge cuando  $n \rightarrow \infty$ . Entonces  $x_n$  converge a un límite finito.*

*Demostración:* Se clarifica la versión dada en Protter [14], p. 22. La sucesión  $x_n$  converge si para cualquier par de sucesiones crecientes  $n_k$  y  $m_k$  se cumple que  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k} - x_{m_k}) =$

0. Sea una variable aleatoria  $Y \sim U[0, 1]$ . Para todo real  $t$ , por hipótesis  $e^{itYx_{n_k}}$  y  $e^{itYx_{m_k}}$  convergen casi seguramente al mismo límite, por lo cual

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e^{itY(x_{n_k} - x_{m_k})} = 1, \text{ c.s.}$$

Luego, la función característica cumple

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E [e^{itY(x_{n_k} - x_{m_k})}] = 1,$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Consecuentemente,  $(x_{n_k} - x_{m_k})Y$  converge a 0 en probabilidad, por lo que  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k} - x_{m_k}) = 0$ , como se afirmaba inicialmente.  $\square$

**Teorema 2.1.11** *Todo proceso de Lévy tiene una modificación cadlag, la cual es un proceso de Lévy.*

*Demostración:* Se clarifica y completa la versión dada en Protter [14], pp. 21-22. Sea  $\eta$  un proceso de Lévy cualquiera. Para cada  $u \in \mathbb{R}$ , consideremos la martingala  $M_u$  de la Proposición 2.1.9. Sea  $D$  un conjunto denso y numerable en  $\mathbb{R}_+$ , con lo cual debido al Teorema B.2.1(1), en cada  $t > 0$  el límite por izquierda  $M_u(t-)$  y el límite por derecha  $M_u(t+)$  existen y son finitos, casi seguramente, a lo largo de  $D$ . Luego, sea  $u \in \mathbb{Q}$  y sea  $\mathcal{O}_u$  el subconjunto de  $\Omega$  en el cual los límites anteriores no existen; entonces  $\mathcal{O} = \cup_{u \in \mathbb{Q}} \mathcal{O}_u$  es tal que  $\mathbb{P}(\mathcal{O}) = 0$ . Fijemos  $\omega \in \mathcal{O}^c$  y para cada  $t \geq 0$ , sea  $(s_n, n \in \mathbb{N})$  una sucesión en  $D$  que crece hacia  $t$ . Sean  $x^1(t)(\omega)$  y  $x^2(t)(\omega)$  dos puntos diferentes de acumulación del conjunto  $\{\eta(s_n)(\omega), n \in \mathbb{N}\}$ , correspondientes a los límites a lo largo de las subsucesiones  $(s_{n_i}, n_i \in \mathbb{N})$  y  $(s_{n_j}, n_j \in \mathbb{N})$  respectivamente. En razón a la existencia de  $M_u(t-)$ ,  $\lim_{s_n \uparrow t} e^{iu\eta(s_n)(\omega)}$  existe y debido al Lema 2.1.10,  $x^1(t)(\omega)$  y  $x^2(t)(\omega)$  son ambos finitos. Ahora seleccionemos  $u \in \mathbb{Q}$  tal que  $u(x^1(t)(\omega) - x^2(t)(\omega)) \neq 2n\pi$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Luego, por continuidad

$$\lim_{s_{n_i} \uparrow t} e^{iu\eta(s_{n_i})(\omega)} = e^{iu x^1(t)(\omega)} \quad \text{y} \quad \lim_{s_{n_j} \uparrow t} e^{iu\eta(s_{n_j})(\omega)} = e^{iu x^2(t)(\omega)},$$

con lo cual se obtiene una contradicción. Por tanto,  $\eta$  tiene siempre un único límite por la izquierda a lo largo de  $D$ , para todo  $t > 0$  en  $\mathcal{O}^c$ . Un argumento similar se utiliza para demostrar que  $\eta$  siempre tiene límite por la derecha en  $\mathcal{O}^c$ . Ahora definamos un nuevo proceso  $Y = (Y(t), t \geq 0)$ , donde para todo  $t \geq 0$

$$Y(t)(\omega) = \begin{cases} \lim_{s \in D, s \downarrow t} \eta(s)(\omega) & \text{si } \omega \in \mathcal{O}^c, \\ 0 & \text{si } \omega \in \mathcal{O}. \end{cases}$$

De la discusión anterior se deduce que el proceso  $Y$  es cadlag. Para demostrar que  $Y$  es una modificación de  $\eta$ , utilizamos el teorema de la convergencia dominada  $\forall t \geq 0$  para obtener

$$E [e^{iu(Y(t) - \eta(t))}] = \lim_{s \in D, s \downarrow t} E [e^{iu(\eta(s) - \eta(t))}] = 1,$$

debido a los incrementos estacionarios e independientes, la continuidad en probabilidad de  $\eta$  y el Lema 2.1.3. Así  $\mathbb{P}(Y(t) = \eta(t)) = 1$  como se requiere. Finalmente, el hecho que  $Y$  es un proceso de Lévy se deduce del Lema 2.1.6.  $\square$

**Teorema 2.1.12** Sea  $\eta$  un proceso de Lévy y sea  $\tau$  un tiempo de parada. En el conjunto  $\{\tau < \infty\}$ , el proceso  $Z_\tau = (Z_\tau(t), t \geq 0)$  definido por  $Z_\tau(t) = \eta(\tau + t) - \eta(\tau)$  cumple las siguientes propiedades.

- (1)  $Z_\tau$  es un proceso de Lévy independiente de  $\mathcal{F}_\tau$ .
- (2) Para todo  $t \geq 0$ , la variable aleatoria  $Z_\tau(t)$  tiene la misma distribución que  $\eta(t)$ .
- (3)  $Z_\tau$  tiene caminos muestrales cadlag y es  $\mathcal{F}_{\tau+t}$ -adaptada.

*Demostración:* Se clarifica y completa la versión dada en Protter [14], pp. 23-24. Primero, asumamos que  $\tau$  es acotado. Sea  $A \in \mathcal{F}_\tau$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq j \leq n$ , tomemos  $u_j \in \mathbb{R}$ ,  $t_j \in \mathbb{R}_+$ . Recordemos las martingalas definidas en la Proposición 2.1.9,  $M_{u_j}(t) = e^{iu_j\eta(t) - t\theta(u_j)}$ , para todo  $t \geq 0$ . Con lo cual, se tiene

$$\begin{aligned} E \left[ 1_A \exp \left( i \sum_{j=1}^n u_j (\eta(\tau + t_j) - \eta(\tau + t_{j-1})) \right) \right] &= \\ &= E \left[ 1_A \prod_{j=1}^n \frac{M_{u_j}(\tau + t_j)}{M_{u_j}(\tau + t_{j-1})} \prod_{j=1}^n \phi_{t_j - t_{j-1}}(u_j) \right], \end{aligned}$$

donde se ha utilizado la notación  $\phi_t(u) = E[e^{iu\eta(t)}]$ , para  $t \geq 0$ ,  $u \in \mathbb{R}$ . Condicionando, y a través del teorema de muestreo opcional (Teorema B.2.2), se encuentra que para todo  $1 \leq j \leq n$ ,  $0 < a < b < \infty$

$$\begin{aligned} E \left[ 1_A \frac{M_{u_j}(\tau + b)}{M_{u_j}(\tau + a)} \right] &= E \left[ 1_A \frac{1}{M_{u_j}(\tau + a)} E [M_{u_j}(\tau + b) | \mathcal{F}_{\tau+a}] \right] \\ &= E[1_A] = \mathbb{P}(A). \end{aligned}$$

Repetiendo el argumento anterior  $n$  veces se tiene

$$E \left[ 1_A \exp \left( i \sum_{j=1}^n u_j (\eta(\tau + t_j) - \eta(\tau + t_{j-1})) \right) \right] = \mathbb{P}(A) \prod_{j=1}^n \phi_{t_j - t_{j-1}}(u_j). \quad (2.1)$$

Tomando  $A = \Omega$ ,  $n = 1$ ,  $u_1 = u$ ,  $t_1 = t$  en (2.1) se obtiene

$$E [e^{iuZ_\tau(t)}] = E [e^{iu\eta(t)}],$$

con lo cual (2) queda demostrado. Para verificar que  $Z_\tau$  es un proceso de Lévy, primero es necesario notar que  $Z_\tau(0) = 0$  casi seguramente. La independencia y estacionariedad de los incrementos, se demuestra a través de (2.1) tomando  $A = \Omega$  y  $n$  arbitrario. La continuidad estocástica de  $Z_\tau$  se deduce directamente de los incrementos estacionarios e independientes de  $\eta$ . Para demostrar la independencia de  $Z_\tau$  y  $\mathcal{F}_\tau$ , se utiliza (2.1) escogiendo apropiadamente  $u_1, \dots, u_n$  y  $t_1, \dots, t_n$  donde para todo  $A \in \mathcal{F}_\tau$ ,

$$E \left[ 1_A \exp \left( i \sum_{j=1}^n u_j Z_\tau(t_j) \right) \right] = E \left[ \exp \left( i \sum_{j=1}^n u_j Z_\tau(t_j) \right) \right] \mathbb{P}(A),$$

con lo cual

$$E \left[ \exp \left( i \sum_{j=1}^n u_j Z_\tau(t_j) \right) \middle| \mathcal{F}_\tau \right] = E \left[ \exp \left( i \sum_{j=1}^n u_j Z_\tau(t_j) \right) \right].$$

Así, (1) queda establecido. Para demostrar (3), sólo es necesario observar que  $Z_\tau$  hereda los caminos muestrales cadlag de  $\eta$ . Finalmente, si  $\tau$  es no acotado, se utiliza un argumento de localización, definimos  $\tau^n = \min(\tau, n) = \tau \wedge n$ . La fórmula es válida para  $\Lambda_n = A \cap \{\tau \leq n\}$  cuando  $A \in \mathcal{F}_\tau$ , así  $\Lambda_n \in \mathcal{F}_{\tau \wedge n}$ . Tomando límites y utilizando el teorema de la convergencia dominada, se observa que el teorema es válido para  $\tau$  no acotado, así como para eventos  $\Lambda = A \cap \{\tau < \infty\}$ ,  $A \in \mathcal{F}_\tau$ . Lo cual demuestra el resultado requerido.  $\square$

## 2.2 Saltos de un proceso de Lévy

En esta sección, introducimos un proceso muy importante asociado al proceso de Lévy  $\eta$ , el proceso de salto. Asimismo, enunciaremos propiedades importantes sobre los saltos del proceso de Lévy y caracterizamos el proceso de Poisson en base al proceso de salto. Esta sección está basada principalmente en Applebaum [1], Oksendal y Sulem [13] y Protter [14].

**Definición 2.2.1** *Definimos el salto del proceso de Lévy  $\eta$  en  $t \geq 0$  como  $\Delta\eta_t = \Delta\eta(t) = \eta(t) - \eta(t-)$ , donde  $\eta(t-) = \lim_{s \uparrow t} \eta(s)$ . Asimismo, se define el proceso de salto  $\Delta\eta = (\Delta\eta(t), t \geq 0)$ . Si  $\sup_t |\Delta\eta(t)| \leq C < \infty$  c.s. donde  $C \in \mathbb{R}$ , diremos que el proceso  $\eta$  tiene saltos acotados.*

**Teorema 2.2.2** *Sea  $\eta$  un proceso de Lévy con saltos acotados, entonces  $E[|\eta(t)|^m] < \infty$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ .*

*Demostración:* Se clarifica y completa la versión dada en Protter [14], pp. 25-26. Sea  $C$  la cota para los saltos de  $\eta$  y definamos los siguientes tiempos de parada  $\tau_1 = \inf\{t \geq 0 : |\eta(t)| > C\}$  y  $\tau_{n+1} = \inf\{t > \tau_n : |\eta(t) - \eta(\tau_n)| \geq C\}$  para  $n \geq 0$ . Como los caminos muestrales son continuos por derecha, los tiempos de parada  $(\tau_n, n \in \mathbb{N})$  forman una sucesión estrictamente creciente. Más aún,  $|\Delta\eta(\tau)| \leq C$  para todo tiempo de parada  $\tau$  (por hipótesis). Demostraremos por inducción que

$$\sup_s |\eta(s \wedge \tau_n)| \leq 2nC. \quad (2.2)$$

Primero, analizaremos si la expresión anterior se cumple para  $n = 1$ ;

$$\sup_s |\eta(s \wedge \tau_1)| = |\eta(\tau_1)| \leq |\Delta\eta(\tau_1)| + |\eta(\tau_1-)| \leq 2C.$$

Luego, suponemos que  $\sup_s |\eta(s \wedge \tau_n)| \leq 2nC$  se cumple para algún  $n > 1$ . Fijamos  $\omega \in \Omega$  y se observa que  $\sup_s |\eta(s \wedge \tau_{n+1})(\omega)|$  se obtiene ya sea en el intervalo  $[0, \tau_n(\omega)[$  o en el intervalo  $[\tau_n(\omega), \tau_{n+1}(\omega)]$ . Cuando ocurre el primer caso la verificación es inmediata,

y en el segundo caso se procede de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \sup_s |\eta(s \wedge \tau_{n+1})(\omega)| &= \sup_{\tau_n(\omega) \leq s \leq \tau_{n+1}(\omega)} |\eta(s)(\omega)| \\
 &\leq \sup_{\tau_n(\omega) \leq s \leq \tau_{n+1}(\omega)} |\eta(s)(\omega) - \eta(\tau_n)(\omega)| + |\eta(\tau_n)(\omega)| \\
 &\leq |\eta(\tau_{n+1})(\omega) - \eta(\tau_n)(\omega)| + 2nC \\
 &\leq |\eta(\tau_{n+1})(\omega) - \eta(\tau_{n+1}-)(\omega)| + |\eta(\tau_{n+1}-)(\omega) - \eta(\tau_n)(\omega)| + 2nC \\
 &\leq 2(n+1)C.
 \end{aligned}$$

Con lo cual se completa la prueba por inducción. El Teorema 2.1.12 implica que  $\tau_n - \tau_{n-1}$  es independiente de  $\mathcal{F}_{\tau_{n-1}}$  y que la distribución de  $\tau_n - \tau_{n-1}$  es igual a la de  $\tau_1$ . Aplicando repetidas veces el teorema de muestreo opcional (Teorema B.2.2), se tiene

$$E[e^{-\tau_n}] = E[e^{-\tau_1} e^{-(\tau_2 - \tau_1)} \dots e^{-(\tau_n - \tau_{n-1})}] = E[e^{-\tau_1}]^n = \beta^n \quad (2.3)$$

para algún  $0 < \beta < 1$ . Ahora, combinando (2.2) con (2.3), y utilizando la desigualdad de Chebyshev-Markov (Teorema A.1.1), se tiene

$$\mathbb{P}(|\eta(t)| \geq 2nC) \leq \mathbb{P}(\tau_n < t) \leq \frac{E[e^{-\tau_n}]}{e^{-t}} \leq e^t \beta^n, \quad (2.4)$$

para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t \geq 0$ . Lo que implica que  $\eta(t)$  tiene momentos exponenciales y por ende momentos de cualquier orden. También es posible verificar que  $E[|\eta(t)|^m] < \infty$ , pues a partir de (2.4) se tiene

$$\begin{aligned}
 \int_{|y| \geq 2nC} |y|^m p_{\eta(t)} dy &= \sum_{r=n}^{\infty} \int_{2rC \leq |y| < 2(r+1)C} |y|^m p_{\eta(t)} dy \\
 &\leq (2C)^m e^t \sum_{r=n}^{\infty} (r+1)^m \beta^r < \infty.
 \end{aligned}$$

□

**Teorema 2.2.3** *Sea  $N$  un proceso de Lévy de conteo que es casi seguramente creciente y su proceso de saltos  $\Delta N = (\Delta N(t), t \geq 0)$  toma valores en  $\{0, 1\}$ . Entonces  $N$  es un proceso de Poisson.*

*Demostración:* Se cambia ligeramente el enfoque dado por Applebaum [1], pp. 85-86. Definamos recursivamente una sucesión de tiempos de parada con  $\tau_0 = 0$  y  $\tau_n = \inf \{t > \tau_{n-1}; N(t) - N(\tau_{n-1}) \neq 0\}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . A partir del Teorema 2.1.12, la sucesión  $(\tau_n - \tau_{n-1}, n \in \mathbb{N})$  es i.i.d. Luego, para todo  $s, t \geq 0$  se tiene

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\tau_1 > s + t) &= \mathbb{P}(N(s) = 0, N(t+s) - N(s) = 0) \\
 &= \mathbb{P}(\tau_1 > s) \mathbb{P}(\tau_1 > t).
 \end{aligned}$$

Por el hecho que  $N$  es casi seguramente creciente, la función  $t \rightarrow \mathbb{P}(\tau_1 > t)$  es decreciente y por la continuidad en probabilidad, se deduce que la función  $t \rightarrow \mathbb{P}(\tau_1 > t)$  es continua en  $t = 0$ . Con lo cual, la solución de la respectiva ecuación funcional es continua, existiendo  $\lambda > 0$  tal que  $\mathbb{P}(\tau_1 > t) = e^{-\lambda t}$  para todo  $t \geq 0$ . Se aprecia que  $\tau_1$  tiene distribución exponencial con parámetro  $\lambda$  y

$$\mathbb{P}(N(t) = 0) = \mathbb{P}(\tau_1 > t) = e^{-\lambda t}$$

para todo  $t \geq 0$ . Luego, la prueba se completa en razón de la Proposición 1.1.9(5). □

**Lema 2.2.4** Si  $\eta$  es un proceso de Lévy, entonces para  $t > 0$  fijo se tiene que  $\Delta\eta(t) = 0$  c.s.

*Demostración:* Sea  $(t(n), n \in \mathbb{N})$  una sucesión estrictamente creciente, y  $t \in \mathbb{R}_+$  tal que  $t(n) \rightarrow t$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ . Como  $\eta$  tiene caminos muestrales cadlag,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta(t(n)) = \eta(t-)$ . Pero  $\eta$ , al ser proceso de Lévy, hace que la sucesión  $\eta(t(n))$  converja en probabilidad a  $\eta(t)$  y también posea una subsucesión que converge casi seguramente a  $\eta(t)$ . Por la unicidad de límites tenemos que  $\eta(t) = \eta(t-)$  c.s., con lo cual  $\Delta\eta(t) = 0$  c.s.  $\square$

## 2.3 Medida de Salto y Medida de Intensidad

En lugar de explorar todos los saltos  $\Delta\eta$  de un proceso de Lévy  $\eta$ , resulta más favorable contar los saltos del proceso que tengan un cierto tamaño. Sea  $\mathbb{B}_0$  la familia de borelianos  $U \subset \mathbb{R}$  cuya clausura  $\bar{U}$  no contiene a  $\{0\}$ . De manera informal, para  $0 \leq t < \infty$  y  $U \in \mathbb{B}_0$ , en esta sección nos interesa describir y estudiar las propiedades de

$$N(t, U) = \# \{0 \leq s \leq t; \Delta\eta(s) \in U\}.$$

Esta sección se basa en Applebaum [1] y Oksendal y Sulem [13].

**Definición 2.3.1 (Medida de salto)** Dado un proceso de Lévy  $\eta$ , la medida de salto se define como

$$\begin{aligned} N : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{B}_0 &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (\omega, t, U) &\longmapsto N(\omega, t, U) = \sum_{0 \leq s \leq t} 1_U(\Delta\eta_s(\omega)). \end{aligned}$$

Aquí,  $N(\omega, t, U) = N(t, U)$  representa el número de saltos de tamaño  $\Delta(\eta_s) \in U$  que ocurren antes del tiempo  $t$ . La forma diferencial de esta medida se escribe como  $N(dt, dz)$ .

**Teorema 2.3.2** La medida  $N(t, U)$  es finita para todo  $U \in \mathbb{B}_0$ .

*Demostración:* Se completa y aclara la versión dada por Oksendal y Sulem [13], pp. 1-2. Definimos  $\tau_1(\omega) = \inf\{t > 0 \mid \Delta\eta(t)(\omega) \in U\}$  para  $\omega \in \Omega$ . A continuación, se demostrará que  $\tau_1 > 0$  casi seguramente. Como los caminos muestrales son cadlag, se tiene que  $\eta(0+) = \lim_{t \downarrow 0} \eta(t) = \eta(0) = 0$  c.s. Por lo cual,  $\forall \epsilon > 0, \exists t(\epsilon) > 0$  tal que  $|\eta(t)| < \epsilon, \forall t < t(\epsilon)$ . Si  $\epsilon < d(0, U)$  entonces  $\eta(t) \notin U, \forall t < t(\epsilon)$ . Luego, definimos por inducción  $\tau_{n+1}(\omega) = \inf\{t > \tau_n(\omega) \mid \Delta\eta(t)(\omega) \in U\}$ . Siguiendo el razonamiento anterior se tiene que  $\tau_{n+1} - \tau_n > 0$  casi seguramente. A continuación, queremos demostrar que  $\tau_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por contradicción, suponemos la existencia de  $\tau < \infty$  tal que  $\tau_n \rightarrow \tau$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Ésto hace que el límite por la izquierda,  $\lim_{s \uparrow \tau} \eta(s)$ , no exista; contradiciendo la propiedad de la existencia del límite por la izquierda de las funciones cadlag (Teorema 2.1.8).  $\square$

**Corolario 2.3.3** La función de conjuntos  $U \rightarrow N(\omega, t, U)$  define una medida  $\sigma$ -finita para  $\omega$  y  $t$  fijos.

*Demostración:* Está claro que  $N$  es una medida. Para analizar la  $\sigma$ -finitud definimos  $G_n = (-n, -\frac{1}{n}) \cup (\frac{1}{n}, n), n \in \mathbb{N}$ , luego  $N(t, G_n) < \infty$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y además  $\mathbb{R} - \{0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ . Con lo cual  $U \rightarrow N(\omega, t, U)$  define una medida  $\sigma$ -finita.  $\square$

**Definición 2.3.4 (Medida de Intensidad)** Definimos la medida de intensidad de  $\eta$  como la función de conjuntos  $\nu(U) = E[N(1, U)]$ .

**Proposición 2.3.5** La función de conjuntos  $U \rightarrow \nu(U)$  es  $\sigma$ -finita.

*Demostración:* Está claro que  $\nu$  es una medida. Para analizar la  $\sigma$ -finitud definimos  $G_n = (-n, -\frac{1}{n}) \cup (\frac{1}{n}, n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , luego como  $N(t, G_n) < \infty$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  se deduce que  $\nu(G_n) < \infty$ . Además  $\mathbb{R} - \{0\} = \cup_{n=1}^{\infty} G_n$ . Con lo cual  $U \rightarrow \nu(U)$  define una medida  $\sigma$ -finita.  $\square$

**Teorema 2.3.6** Si  $U \in \mathbb{B}_0$  entonces  $N^U = (N(t, U), t \geq 0)$  es un proceso de Poisson con intensidad  $\lambda = \nu(U)$ .

*Demostración:* Se aclara la versión de Applebaum [1], pp. 88-89. La estrategia consiste en demostrar primero que  $N^U$  es un proceso de Lévy de conteo y luego utilizar el Teorema 2.2.3 para determinar que es un proceso de Poisson. Notemos primero, que para  $0 \leq s < t < \infty$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$  se cumple  $N(t, U) - N(s, U) \geq n$  si existen  $t_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  tales que  $s < t_1 < \dots < t_n \leq t$  y con  $\Delta\eta(t_j) \in U$ , para todo  $j$ . Más aún,  $\Delta\eta(u) \in U$  si y sólo si existe  $k \in U$  tal que dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < u - w < \delta \Rightarrow |\eta(w) - \eta(u) - k| < \epsilon.$$

Con lo cual, se deduce que el evento  $\{N(t, U) - N(s, U) \geq n\}$  pertenece a la  $\sigma$ -álgebra  $\{\eta(v) - \eta(u), s \leq u < v \leq t\}$ . Por consiguiente,  $N^U$  tiene incrementos estacionarios e independientes. Para demostrar que  $N^U$  es continuo en probabilidad, notemos que si  $N(t, U) = 0$  para algún  $t > 0$  entonces  $N(s, U) = 0$  para todo  $0 \leq s < t$ . Luego, como  $N^U$  tiene incrementos estacionarios e independientes, para todo  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(t, U) = 0) &= \mathbb{P}\left(N\left(\frac{t}{n}, U\right) = 0, N\left(\frac{2t}{n}, U\right) = 0, \dots, N(t, U) = 0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(N\left(\frac{t}{n}, U\right) = 0, N\left(\frac{2t}{n}, U\right) - N\left(\frac{t}{n}, U\right) = 0, \dots, N(t, U) - N\left(\frac{(n-1)t}{n}, U\right) = 0\right) \end{aligned}$$

de donde

$$\mathbb{P}(N(t, U) = 0) = \left[\mathbb{P}\left(N\left(\frac{t}{n}, U\right) = 0\right)\right]^n.$$

Entonces:

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \mathbb{P}(N(t, U) = 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{t \rightarrow 0} \left[\mathbb{P}\left(N\left(\frac{t}{n}, U\right) = 0\right)\right]^n,$$

$$\liminf_{t \rightarrow 0} \mathbb{P}(N(t, U) = 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \liminf_{t \rightarrow 0} \left[\mathbb{P}\left(N\left(\frac{t}{n}, U\right) = 0\right)\right]^n.$$

No es difícil deducir que  $\lim_{t \rightarrow 0} \mathbb{P}(N(t, U) = 0)$  puede existir (siendo 1 o 0), o puede no existir en cuyo caso,  $\liminf_{t \rightarrow 0} \mathbb{P}(N(t, U) = 0) = 0$  y  $\limsup_{t \rightarrow 0} \mathbb{P}(N(t, U) = 0) = 1$ . Primero, supongamos que  $\liminf_{t \rightarrow 0} \mathbb{P}(N(t, U) = 0) = 0$  y  $\limsup_{t \rightarrow 0} \mathbb{P}(N(t, U) = 0) = 1$ . Es claro que la función  $t \rightarrow \mathbb{P}(N(t, U) = 0)$  es monótonicamente decreciente; con lo cual, si para cierto  $t^* \geq 0$  tenemos que  $\mathbb{P}(N(t^*, U) = 0) = \epsilon > 0$  esto implica que  $\liminf_{t \rightarrow 0} \mathbb{P}(N(t, U) = 0) \geq \epsilon$ . Así, si  $\liminf_{t \rightarrow 0} \mathbb{P}(N(t, U) = 0) = 0$  entonces  $\mathbb{P}(N(t, U) =$

$0) = 0$  para todo  $t \geq 0$  y  $\limsup_{t \rightarrow 0} \mathbb{P}(N(t, U) = 0) = 0$ , lo cual es una contradicción. Ahora, supongamos que  $\lim_{t \rightarrow 0} \mathbb{P}(N(t, U) = 0) = 0$ ; con lo cual  $\lim_{t \rightarrow 0} \mathbb{P}(N(t, U) \neq 0) = 1$ . Sean  $C \in \mathbb{B}_0$  y  $D \in \mathbb{B}_0$  tales que  $C \cap D$  es vacío. Como  $N(t, C \cup D) \neq 0$  si y sólo si  $N(t, C) \neq 0$  ó  $N(t, D) \neq 0$ ; tenemos que  $\lim_{t \rightarrow 0} \mathbb{P}(N(t, C \cup D) \neq 0) = 2$ ; lo cual constituye una contradicción. Así se concluye que  $\lim_{t \rightarrow 0} \mathbb{P}(N(t, U) = 0) = 1$ .  $\square$

**Teorema 2.3.7** Si  $U_1, U_2, \dots, U_m$  pertenecen a  $\mathbb{B}_0$  y son disjuntos, las variables aleatorias  $N(t, U_1), N(t, U_2), \dots, N(t, U_m)$  son independientes.

*Demostración:* Utilizando argumentos similares a los del teorema anterior, se deduce que los eventos:

$$(N(t, U_1) = n_1), \dots, (N(t, U_m) = n_m)$$

pertenecen a  $\sigma$ -álgebras independientes.  $\square$

A continuación, definiremos el proceso de Poisson compuesto, el cual es un proceso de Lévy muy importante y pieza clave para muchos de los conceptos en secciones siguientes. Después de su definición, demostraremos que es un proceso de Lévy y calcularemos su medida de intensidad correspondiente.

**Definición 2.3.8 (Proceso de Poisson compuesto)** Sea  $(X(n), n \in \mathbb{N})$ , una sucesión de variables i.i.d tomando valores en  $\mathbb{R}$  y con distribución  $\mu_{X_n} = \mu_X$ , y sea  $N = (N(t), t \geq 0)$  un proceso de Poisson con intensidad  $\lambda$  e independiente de  $(X(n), n \in \mathbb{N})$ . El proceso de Poisson compuesto,  $Y = (Y(t), t \geq 0)$ , se define como

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X(i), \quad t \geq 0.$$

**Proposición 2.3.9** El proceso de Poisson compuesto es un proceso de Lévy.

*Demostración:* Se utilizan conceptos de Rolski et. al. [15], pp. 160-161. Los incrementos de este proceso están dados por:

$$Y(t) - Y(s) = \sum_{i=1}^{N(t)} X(i) - \sum_{j=1}^{N(s)} X(j) = X_{N(s)+1} + \dots + X_{N(t)} = \sum_{k=N(s)+1}^{N(t)} X(k), \quad t > s.$$

Con lo cual, debemos demostrar que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $h \geq 0$  y  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$  las variables aleatorias:

$$\sum_{i_1=N(t_0+h)+1}^{N(t_1+h)} X(i_1), \dots, \sum_{i_n=N(t_{n-1}+h)+1}^{N(t_n+h)} X(i_n)$$

son independientes y que su distribución no depende de  $h$ . Si definimos  $F_X^{*k}(x) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 + \dots + X_k \leq x)$ , entonces para todo  $x_1, \dots, x_n \geq 0$  tenemos

$$\mathbb{P} \left( \sum_{i_1=N(t_0+h)+1}^{N(t_1+h)} X(i_1) \leq x_1, \dots, \sum_{i_n=N(t_{n-1}+h)+1}^{N(t_n+h)} X(i_n) \leq x_n \right) =$$

$$= \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}} \prod_{j=1}^n F_X^{*k_j}(x_j) \mathbb{P}(N(t_1 + h) - N(t_0 + h) = k_1, \dots, N(t_n + h) - N(t_{n-1} + h) = k_n).$$

Lo cual demuestra la independencia y estacionariedad de los incrementos del proceso de Poisson compuesto. El resultado anterior se obtiene por los incrementos estacionarios e independientes del proceso de Poisson y porque los elementos de la sucesión  $(X_n, n \in \mathbb{N})$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, independientes de los tiempos de arribo  $(\tau_n, n \in \mathbb{N})$  del proceso de Poisson. Finalmente, el hecho de que el proceso de Poisson compuesto sea continuo en probabilidad se deriva directamente de la continuidad del proceso de Poisson.  $\square$

**Proposición 2.3.10** *La medida de intensidad del proceso de Poisson compuesto es  $\nu = \lambda\mu_X$ .*

*Demostración:* Para encontrar la medida de intensidad  $\nu$  de  $Y(t)$ , notemos que si  $U \in \mathbb{B}_0$  entonces se tiene que  $\nu(U) = E[\sum_{0 \leq s \leq 1} 1_U(\Delta Y_s)]$ . Luego, por independencia tenemos

$$\nu(U) = E[N(1, U)]\mathbb{P}(X \in U) = \lambda\mu_X(U).$$

Con lo cual se concluye que  $\nu = \lambda\mu_X$ .  $\square$

## 2.4 Integración de Poisson

A lo largo de esta sección y las siguientes, se considera que el proceso  $(N(t, U), t \geq 0)$ , con  $U \in \mathbb{B}_0$ , es inducido por el proceso de Lévy  $\eta$ . Es decir

$$N(t, U) = \sum_{0 \leq s \leq t} 1_U(\Delta \eta_s).$$

Asimismo, en algunas ocasiones se utilizará  $\nu_U$  para denotar la restricción sobre  $U$  de la medida  $\nu$ . Los resultados de esta sección han sido tomados de Applebaum [1] y Protter [14].

**Definición 2.4.1 (Integral de Poisson)** *Sea  $\eta$  un proceso de Lévy,  $U \in \mathbb{B}_0$  y  $f$  una función boreliana de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  y finita en  $U$ . Entonces, para todo  $t > 0$  y  $\omega \in \Omega$ , definimos la integral de Poisson de  $f$  como*

$$\int_U f(x)N(t, dx)(\omega) = \sum_{x \in U} f(x)N(t, \{x\})(\omega).$$

Como  $N(t, \{x\}) \neq 0 \iff \Delta \eta(s) = x$  para al menos un  $0 \leq s \leq t$ , se tiene

$$\int_U f(x)N(t, dx) = \sum_{0 < s \leq t} f(\Delta \eta_s)1_U(\Delta \eta_s). \tag{2.5}$$

Se puede obtener otra representación útil de las integrales de Poisson utilizando la sucesión de tiempos en que ocurren los saltos del proceso  $N(t, U)$ . Obviamente, dichos tiempos de salto o arribo son inducidos por el proceso de Lévy  $\eta$  subyacente.

**Definición 2.4.2 (Tiempos de arribo de  $N(t, U)$ )** Si  $U \in \mathbb{B}_0$ , la sucesión de tiempos de arribo  $\tau^U = (\tau_n^U, n \in \mathbb{N})$  se define como

$$\begin{aligned}\tau_1^U &= \inf \{t > 0; \Delta\eta(t) \in U\}; \\ \tau_n^U &= \inf \{t > \tau_{n-1}^U; \Delta\eta(t) \in U\}.\end{aligned}$$

Con lo cual, a partir de (2.5), se tiene

$$\int_U f(x)N(t, dx) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(\Delta\eta(\tau_n^U))1_{[0, t]}(\tau_n^U). \quad (2.6)$$

Ahora, enunciaremos algunas propiedades de la integral de Poisson.

**Teorema 2.4.3** Sea  $U \in \mathbb{B}_0$ . Entonces, para todo  $t \geq 0$ ,  $\int_U f(x)N(t, dx)$  tiene una distribución de Poisson compuesta, de tal manera que para todo  $u \in \mathbb{R}$ ,

$$E \left[ \exp \left( iu \int_U f(x)N(t, dx) \right) \right] = \exp \left[ t \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1) \nu_{f,U}(dx) \right],$$

donde  $\nu_{f,U}(A) = \nu(U \cap f^{-1}(A))$ . Además, si  $f \in L^1(U, \nu_U)$

$$E \left[ \int_U f(x)N(t, dx) \right] = t \int_U f(x) \nu(dx),$$

y si  $f \in L^2(U, \nu_U)$  se tiene

$$\text{Var} \left( \left| \int_U f(x)N(t, dx) \right| \right) = t \int_U |f(x)|^2 \nu(dx).$$

*Demostración:* Se clarifica la demostración que aparece en Applebaum [1], pp. 91-92. Por simplicidad, utilizaremos  $f \in L^1(U, \nu_U)$ . Consideremos primero que  $f$  es una función simple, es decir:  $f = \sum_{j=1}^n a_j 1_{U_j}$ , donde  $a_j \in \mathbb{R}$  y  $U_j \in \mathbb{B}_0$  con  $U = \bigsqcup_{j=1}^n U_j$ , la unión disjunta de los  $U_j$ . Ahora, debido a la independencia de  $N(t, U_j)$

$$\begin{aligned}E \left[ \exp \left( iu \int_U f(x)N(t, dx) \right) \right] &= E \left[ \exp \left( iu \sum_{j=1}^n a_j N(t, U_j) \right) \right] \\ &= \prod_{j=1}^n E \left[ e^{iua_j N(t, U_j)} \right] \\ &= \prod_{j=1}^n \exp \{ t [e^{iua_j} - 1] \nu(U_j) \} \\ &= \exp \left[ t \int_U (e^{iuf(x)} - 1) \nu(dx) \right].\end{aligned}$$

Dada una función arbitraria  $f \in L^1(U, \nu_U)$ , se puede encontrar una sucesión de funciones simples que convergen a  $f$  en  $L^1$ , y por lo tanto, una subsucesión que converge a  $f$  casi seguramente. Pasando al límite a través de esta subsucesión y usando el teorema de convergencia dominada se llega al resultado requerido. Las últimas partes de la demostración

se obtienen por diferenciación. Pues, si  $Z$  es una variables aleatoria tal que  $E[|Z|^n] < \infty$  y  $\phi_Z$  es su función característica, entonces

$$E[Z^n] = i^{-n} \frac{\partial^n \phi_Z}{\partial u^n} \Big|_{u=0}.$$

□

El siguiente teorema indica que dos integrales estocásticas de Poisson basadas sobre el mismo proceso de Lévy, pero evaluadas sobre conjuntos disjuntos, dan lugar a procesos estocásticos independientes. Este hecho será importante en la demostración de la descomposición de Lévy-Itô, que se discutirá en la sección siguiente.

**Teorema 2.4.4** Sean  $U_1$  y  $U_2$  conjuntos disjuntos que pertenecen a  $\mathbb{B}_0$ . Entonces los dos procesos  $J^1 = (J^1(t), t \geq 0)$  y  $J^2 = (J^2(t), t \geq 0)$  son procesos de Lévy independientes, donde

$$J^1(t) = \int_{U_1} xN(t, dx) = \sum_{0 < s \leq t} \Delta\eta(s)1_{U_1}(\Delta\eta_s),$$

$$J^2(t) = \int_{U_2} xN(t, dx) = \sum_{0 < s \leq t} \Delta\eta(s)1_{U_2}(\Delta\eta_s).$$

*Demostración:* Se completa y aclara la demostración que aparece en Protter [14], p. 30. Es evidente que  $J^1$  y  $J^2$  son procesos de Lévy. Para demostrar su independencia consideremos los procesos  $V^u = (V^u(t), t \geq 0)$  y  $W^p = (W^p(t), t \geq 0)$  definidos como

$$V^u(t) = \frac{e^{iuJ^1(t)}}{E[e^{iuJ^1(t)}]} - 1 = \frac{e^{iuJ^1(t)}}{e^{t\theta_1(u)}} - 1,$$

$$W^p(t) = \frac{e^{ipJ^2(t)}}{E[e^{ipJ^2(t)}]} - 1 = \frac{e^{ipJ^2(t)}}{e^{t\theta_2(u)}} - 1,$$

donde  $u, p \in \mathbb{R}$  y  $\theta_k$  es el símbolo de Lévy del proceso  $J^k$  con  $k = 1, 2$ . Tanto  $V^u$  y  $W^p$  son martingalas con  $E[V^u(t)] = E[W^p(t)] = 0$ . Para aplicar la Proposición B.4.4 bastaría con mostrar que al menos uno de los procesos  $V^u$  o  $W^p$  tiene variación cuadrado integrable en intervalos finitos. Esto se demuestra fácilmente después de aplicar el teorema del valor medio, pues para todo  $t \geq 0$  existe una variable aleatoria compleja  $\rho(t)$  tal que  $0 \leq |\rho(t)| \leq 1$  para la cual

$$V^u(t) = \rho(t)[iuJ^1(t) - t\theta_1(u)].$$

Ahora, para  $0 \leq s \leq t < \infty$  se tiene

$$E[V^u(t)W^p(s)] = E[V^u(s)W^p(s)] + E[(V^u(t) - V^u(s))W^p(s)].$$

Debido a que  $U_1$  y  $U_2$  son disjuntos,  $V^u$  y  $W^p$  tienen sus saltos en tiempos distintos, con lo cual  $E[V^u(s)W^p(s)] = 0$  por la Proposición B.4.4. Al ser  $V^u$  una martingala, un argumento directo de condicionamiento hace que  $E[(V^u(t) - V^u(s))W^p(s)] = 0$ , con lo cual para todo  $u, p \in \mathbb{R}$  tenemos

$$E[e^{iuJ^1(t)}e^{ipJ^2(s)}] = E[e^{iuJ^1(t)}]E[e^{ipJ^2(s)}],$$

donde las variables aleatorias  $J^1(t)$  y  $J^2(s)$  son independientes en razón del teorema de Kac (Teorema A.1.2).

Debemos demostrar ahora que los procesos son independientes. Para ello, consideremos  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ , y la partición  $(r)_1 = \{0 = t_0^1 < t_1^1 < t_2^1 < \dots < t_{n_1}^1\}$  para el proceso 1. Asimismo, consideramos la partición  $(r)_2 = \{0 = t_0^2 < t_1^2 < t_2^2 < \dots < t_{n_2}^2\}$  para el proceso 2. Luego, se tiene  $u_j \in \mathbb{R}, 0 \leq j \leq n_1$  y  $p_j \in \mathbb{R}, 0 \leq j \leq n_2$  y escribimos  $v_j^1 = u_j + u_{j+1} + \dots + u_{n_1}$  y  $v_j^2 = p_j + p_{j+1} + \dots + p_{n_2}$ . Por la independencia y estacionariedad de los incrementos se tiene

$$\begin{aligned}
 & E \left[ \exp \left( i \sum_{j=1}^{n_1} u_j J^1(t_j^1) \right) \right] E \left[ \exp \left( i \sum_{k=1}^{n_2} p_k J^2(t_k^2) \right) \right] \\
 &= E \left[ \exp \left( i \sum_{j=1}^{n_1} v_j^1 (J^1(t_j^1) - J^1(t_{j-1}^1)) \right) \right] E \left[ \exp \left( i \sum_{k=1}^{n_2} v_k^2 (J^2(t_k^2) - J^2(t_{k-1}^2)) \right) \right] \\
 &= \prod_{j=1}^{n_1} E \left[ \exp (i v_j^1 J^1(t_j^1 - t_{j-1}^1)) \right] \prod_{k=1}^{n_2} E \left[ \exp (i v_k^2 J^2(t_k^2 - t_{k-1}^2)) \right] \\
 &= \prod_{j=1}^{n_1} \prod_{k=1}^{n_2} E \left[ \exp \{ i (v_j^1 J^1(t_j^1 - t_{j-1}^1) + v_k^2 J^2(t_k^2 - t_{k-1}^2)) \} \right] \\
 &= \prod_{j=1}^{n_1} \prod_{k=1}^{n_2} E \left[ \exp \{ i (v_j^1 (J^1(t_j^1) - J^1(t_{j-1}^1)) + v_k^2 (J^2(t_k^2) - J^2(t_{k-1}^2))) \} \right] \\
 &= E \left[ \exp \left\{ i \sum_{j=1}^{n_1} v_j^1 (J^1(t_j^1) - J^1(t_{j-1}^1)) + i \sum_{k=1}^{n_2} v_k^2 (J^2(t_k^2) - J^2(t_{k-1}^2)) \right\} \right] \\
 &= E \left[ \exp \left( i \sum_{j=1}^{n_1} u_j J^1(t_j^1) + i \sum_{k=1}^{n_2} p_k J^2(t_k^2) \right) \right].
 \end{aligned}$$

Luego, utilizando el teorema de Kac (Teorema A.1.2) demostramos la independencia.  $\square$

Para culminar esta sección, vamos a analizar las propiedades de la sucesión formada por los tamaños de salto (distintos de 0) de un proceso de Lévy, y demostraremos que el proceso  $(\int_U f(x)N(t, dx), t \geq 0)$  es un proceso de Poisson compuesto. Asimismo, definiremos y demostraremos las propiedades más importantes cuando la integral anterior es compensada.

**Definición 2.4.5 (Sucesión tamaño de salto)** Sean  $U \in \mathbb{B}_0$  y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función boreliana. La sucesión de variables tamaño de salto  $(Y_f^U(n), n \in \mathbb{N})$  se define como

$$Y_f^U(n) = \int_U f(x)N(\tau_n^U, dx) - \int_U f(x)N(\tau_{n-1}^U, dx). \quad (2.7)$$

Lo que también es equivalente a

$$Y_f^U(n) = f(\Delta\eta(\tau_n^U)), \quad (2.8)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 2.4.6** Las variables aleatorias  $Y_f^U(n), n \in \mathbb{N}$  son i.i.d. con distribución común dada por

$$\mathbb{P}(Y_f^U(n) \in A) = \frac{\nu(U \cap f^{-1}(A))}{\nu(U)}, \quad (2.9)$$

para todo  $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ .

*Demostración:* Utilizaremos el Teorema 2.4.3 y (2.7) junto con el hecho que  $\tau_n^U - \tau_{n-1}^U, n \in \mathbb{N}$  son variables aleatorias i.i.d. distribuidas exponencialmente y con media igual a  $\frac{1}{\nu(U)}$ . Así se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_f^U(n) \in A) &= E[1_A(Y_f^U(n))] \\ &= E[E[1_A(Y_f^U(n)) | \tau_n^U - \tau_{n-1}^U]] \\ &= \int_0^\infty s \int_U 1_A(f(x)) \nu(dx) p_{\tau_n^U - \tau_{n-1}^U}(ds) \\ &= \frac{\nu(U \cap f^{-1}(A))}{\nu(U)}, \end{aligned}$$

lo cual demuestra que las variables son idénticamente distribuidas. Para demostrar que son independientes, consideremos un conjunto finito de números naturales  $\{j_1, j_2, \dots, j_m\}$  y  $A_{j_1}, \dots, A_{j_m} \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ . Luego, calculamos la siguiente probabilidad

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(Y_f^U(j_1) \in A_{j_1}, Y_f^U(j_2) \in A_{j_2}, \dots, Y_f^U(j_m) \in A_{j_m}) \\ &= E \left[ E \left[ \prod_{i=1}^m 1_{A_{j_i}}(Y_f^U(j_i)) | \tau_1^U, \tau_2^U - \tau_1^U, \dots, \tau_n^U - \tau_{n-1}^U \right] \right] \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty s_{j_1} \dots s_{j_m} \prod_{i=1}^m \int_U 1_{A_{j_i}}(f(x)) \nu(dx) \\ &\quad \times p_{\tau_{j_i}^U}(ds_{j_i}) p_{\tau_{j_2}^U - \tau_{j_1}^U}(ds_{j_2}) \dots p_{\tau_{j_m}^U - \tau_{j_{m-1}}^U}(ds_{j_m}) \\ &= \mathbb{P}(Y_f^U(j_1) \in A_{j_1}) \mathbb{P}(Y_f^U(j_2) \in A_{j_2}) \dots \mathbb{P}(Y_f^U(j_m) \in A_{j_m}) \end{aligned}$$

debido a (2.9). □

**Teorema 2.4.7**  $(\int_U f(x)N(t, dx), t \geq 0)$  es un proceso de Poisson compuesto.

*Demostración:* Primeramente, habría que demostrar que  $(Y_f^U(n), n \in \mathbb{N})$  y el proceso de Poisson  $(N(t, U), t \geq 0)$  son independientes. Esto se demuestra porque para todo  $m \in \mathbb{N}$  y  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, t \geq 0$  y  $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_f^U(m) \in A | N(t, U) = n) &= \mathbb{P}(Y_f^U(m) \in A | \tau_n^U \leq t, \tau_{n-1}^U \geq t) \\ &= \mathbb{P}(Y_f^U(m) \in A) \end{aligned}$$

a través de un cálculo similar al realizado en el teorema anterior. Luego, para todo  $t \geq 0$  tenemos

$$\int_U f(x)N(t, dx) = Y_f^U(1) + Y_f^U(2) + \dots + Y_f^U(N(t, U)),$$

donde los sumandos son i.i.d. □

**Corolario 2.4.8** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Borel, y  $U \in \mathbb{B}_0$ . Entonces el proceso estocástico  $(\int_U f(x)N(t, dx), t \geq 0)$  es de variación finita<sup>4</sup> en  $[0, t]$  para todo  $t \geq 0$ .

*Demostración:* Se sabe que  $\sum_{0 \leq s \leq t} |f(\Delta X_s)|1_U(\Delta X_s) < \infty$  casi seguramente. Luego, para todas las particiones  $(r)$  del intervalo  $[0, t]$  se tiene

$$\text{var}_{(r)}(Y) \leq \sum_{0 \leq s \leq t} |f(\Delta X_s)|1_U(\Delta X_s) < \infty \text{ c.s.}$$

□

**Definición 2.4.9 (Integral de Poisson compensada)** Sea  $U \in \mathbb{B}_0$ ,  $f \in L^1(U, \nu_U)$  y para todo  $t \geq 0$ , se define la integral de Poisson compensada como

$$\int_U f(x)\tilde{N}(t, dx) = \int_U f(x)N(t, dx) - t \int_U f(x)\nu(dx).$$

**Proposición 2.4.10** La integral de Poisson compensada posee las siguientes propiedades:

- (1) la integral de Poisson compensada es una martingala;
- (2) la función característica de la integral de Poisson compensada es:

$$\exp \left\{ t \int_U [e^{iux} - 1 - iux] \nu_{f,U}(dx) \right\} \tag{2.10}$$

donde  $\nu_{f,U}(A) = \nu(U \cap f^{-1}(A))$  y  $u \in \mathbb{R}$ ;

- (3) si  $f \in L^2(U, \nu_U)$

$$E \left[ \left| \int_U f(x)\tilde{N}(t, dx) \right|^2 \right] = t \int_U |f(x)|^2 \nu(dx). \tag{2.11}$$

*Demostración:* Para demostrar (1), por el Teorema 2.4.3 tenemos

$$\begin{aligned} E \left[ \int_U f(x)\tilde{N}(t, dx) \right] &= E \left[ \int_U f(x)N(t, dx) \right] - E \left[ t \int_U f(x)\nu(dx) \right] \\ &= t \int_U f(x)\nu(dx) - t \int_U f(x)\nu(dx) = 0. \end{aligned}$$

Luego, se calcula para  $s, t \geq 0$  y  $s \leq t$

$$E \left[ \left( \int_U \tilde{N}(t, dx) \right) \middle| \mathcal{F}_s \right] = E \left[ \left( \int_U \tilde{N}(t, dx) - \int_U \tilde{N}(s, dx) + \int_U \tilde{N}(s, dx) \right) \middle| \mathcal{F}_s \right]$$

al ser  $(\int_U N(t, dx), t \geq 0)$  un proceso de Lévy, y usando el Teorema 2.4.3, del lado derecho se tiene

$$\begin{aligned} &= E \left[ \left( \int_U N(t, dx) - \int_U N(s, dx) \right) \right] - t \int_U f(x)\nu(dx) + s \int_U f(x)\nu(dx) + \int_U \tilde{N}(s, dx) \\ &= t \int_U f(x)\nu(dx) - s \int_U f(x)\nu(dx) - t \int_U f(x)\nu(dx) + s \int_U f(x)\nu(dx) + \int_U \tilde{N}(s, dx); \end{aligned}$$

con lo cual,

$$E \left[ \left( \int_U \tilde{N}(t, dx) \right) \middle| \mathcal{F}_s \right] = \int_U \tilde{N}(s, dx).$$

Finalmente, (2) y (3) pueden derivarse directamente del Teorema 2.4.3. □

<sup>4</sup>Revisar Definición B.4.3

## 2.5 Descomposición de Lévy-Itô

En esta sección se demostrará uno de los resultados clave en la teoría de los procesos de Lévy, denominado *descomposición de Lévy-Itô*. Este resultado permite descomponer los caminos muestrales de un proceso de Lévy en una parte continua y otra de saltos. El primer paso es eliminar del proceso de Lévy los saltos con magnitud mayor que un cierto real (generalmente 1) y demostrar que dicho proceso de saltos acotados es también un proceso de Lévy y puede descomponerse en dos procesos independientes: un proceso continuo y un proceso con saltos compensados. Finalmente, se demuestra que el proceso continuo corresponde a un movimiento browniano.

No está de más recordar que la medida salto  $N$  se encuentra asociada al proceso de Lévy  $\eta$ , el cual se quiere descomponer.

Se ha seleccionado el enfoque de demostración que presentan Applebaum [1] y Protter [14].

**Definición 2.5.1 (Proceso de eliminación de saltos)** Para todo  $a > 0$ , considerando el proceso de Poisson compuesto

$$\left( \int_{|x| \geq a} x N(t, dx), t \geq 0 \right).$$

Definimos un nuevo proceso estocástico  $Y^a = (Y^a(t), t \geq 0)$  donde

$$Y^a(t) = \eta(t) - \int_{|x| \geq a} x N(t, dx).$$

Sean  $\{\tau_n, n \in \mathbb{N}\}$ , los tiempos de llegada del proceso de Poisson  $N(t, A^c), t \geq 0$  donde  $A = \{y \in \mathbb{R} : |y| < a\}$ ; entonces

$$Y^a(t) = \begin{cases} \eta(t) & \text{si } 0 \leq t < \tau_1, \\ \eta(\tau_1-) & \text{si } t = \tau_1, \\ \eta(t) - \eta(\tau_1) + \eta(\tau_1-) & \text{si } \tau_1 < t < \tau_2, \\ Y^a(\tau_2-) & \text{si } t = \tau_2, \end{cases}$$

y así se continua recursivamente.

**Teorema 2.5.2** El proceso estocástico  $Y^a$  es un proceso de Lévy.

*Demostración:* Es claro que  $Y^a(0) = 0$  casi seguramente. Además, tal como se hizo en el caso de teoremas anteriores, tenemos que  $Y^a(t) - Y^a(s)$  es medible con respecto a la  $\sigma$ -álgebra  $\sigma\{\eta(u) - \eta(v); s \leq v \leq u < t\}$ . Entonces  $Y^a$  tiene incrementos estacionarios e independientes. Finalmente para establecer la continuidad en probabilidad, se cumple que para todo  $d > 0$  y  $t \geq 0$

$$\mathbb{P}(|Y^a(t)| > d) \leq \mathbb{P}\left(|\eta(t)| > \frac{d}{2}\right) + \mathbb{P}\left(\left|\int_{|x| \geq a} x N(t, dx)\right| > \frac{d}{2}\right),$$

donde  $\eta(t)$  y  $\int_{|x| \geq a} x N(t, dx)$  son procesos de Lévy, siendo la conclusión inmediata.  $\square$

**Corolario 2.5.3** *Un proceso de Lévy tiene saltos acotados si y solamente si es de la forma  $Y^a$  para cierto  $a > 0$ .*

*Demmostración:* ( $\Rightarrow$ ) Si  $\eta$  es un proceso de Lévy con saltos acotados, entonces  $\sup_t |\Delta\eta_t| \leq C < \infty$  para algún  $C \geq 0$ , entonces  $\eta$  es un proceso del tipo  $Y^a$  con  $a = C$ . Ahora, demostraremos ( $\Leftarrow$ ). Si un proceso de Lévy  $\eta$  es de la forma  $Y^a$  entonces  $\sup_t |\Delta\eta_t| \leq a < \infty$  con lo cual es un proceso de saltos acotados.  $\square$

**Definición 2.5.4 (Proceso compensado de eliminación de saltos)** *Para cualquier  $a > 0$ , definimos el proceso (Lévy) compensado de eliminación de saltos,  $\hat{Y}^a = (\hat{Y}^a(t), t \geq 0)$ , donde*

$$\hat{Y}^a(t) = Y^a(t) - E[Y^a(t)].$$

**Teorema 2.5.5** *El proceso compensado de eliminación de saltos es una martingala cadlag centrada y cuadrado integrable.*

*Demmostración:* Es obvio que  $E[\hat{Y}^a] = 0$ . Demostraremos que  $\hat{Y}^a$  es una martingala. Para  $s \geq 0$  y  $t \geq 0$  tales que  $s \leq t$  se tiene

$$E[\hat{Y}^a(t)|\mathcal{F}_s] = E[\tilde{Y}^a(t) - \hat{Y}^a(s) + \hat{Y}^a(s)|\mathcal{F}_s] = \hat{Y}^a(s) + E[\tilde{Y}^a(t) - \hat{Y}^a(s)] = \hat{Y}^a(s).$$

Además  $E[|\hat{Y}^a(t)|] < \infty$  y  $E[|\hat{Y}^a(t)|^2] < \infty$  por ser  $\hat{Y}^a$  un proceso de Lévy con saltos acotados (existen todos sus momentos finitos). Finalmente, al ser  $\hat{Y}^a$  una martingala tiene una versión con caminos muestrales cadlag.  $\square$

A partir de ahora consideraremos  $a = 1$  y a los procesos  $Y^1$  e  $\hat{Y}^1$  como  $Y$  e  $\hat{Y}$ , respectivamente. Asimismo,  $\hat{Y}$  es la versión centrada de  $Y$ . Por último, utilizaremos la notación

$$M^U(t) = \int_U x \tilde{N}(t, dx) = \int_U x N(t, dx) - t \int_U x \nu(dx)$$

para todo  $U \in \mathbb{B}_0$  y  $t \geq 0$ .

**Teorema 2.5.6** *Para todo  $t \geq 0$*

$$\hat{Y}(t) = Y_c(t) + Y_d(t),$$

*donde  $Y_c$  y  $Y_d$  son procesos de Lévy independientes,  $Y_c$  tiene caminos muestrales continuos y*

$$Y_d(t) = \int_{|x|<1} x \tilde{N}(t, dx).$$

*Demmostración:* Se completa la demostración dada por Protter [14], p. 31. Sea  $U_k = \{\frac{1}{k+1} \leq |x| < \frac{1}{k}\}$  con  $k \in \mathbb{N}$ . Luego, para  $n \in \mathbb{N}$  definimos  $A_n = \cup_{k=1}^n U_k$ . Lo primero que haremos es demostrar la convergencia de  $(M^{A_n}, n \in \mathbb{N})$  a  $Y_d$  en el espacio de martingalas. Se sabe que para todo  $t \geq 0$ , las variables aleatorias  $M^{U_k}(t)$  son mutuamente ortogonales debido a la Proposición B.4.4. Con lo cual, para todo  $n \geq 1$  tenemos

$$E[|M^{A_n}(t)|^2] = \sum_{k=1}^n E[|M^{U_k}(t)|^2]. \tag{2.12}$$

Por argumentos similares a los que se utilizaron en la demostración del Teorema 2.4.4 y la Proposición 2.1.9, se demuestra que los procesos  $\hat{Y} - M^{A_n}$  y  $M^{A_n}$  son independientes. Entonces

$$\text{Var}(\hat{Y}(t)) = \text{Var}(\hat{Y}(t) - M^{A_n}(t)) + \text{Var}(M^{A_n}(t)),$$

y por consiguiente,

$$E[M^{A_n}(t)^2] = \text{Var}(M^{A_n}(t)) \leq \text{Var}(\hat{Y}(t)). \quad (2.13)$$

Además, por (2.12), para todo  $n_1 \leq n_2$ ,

$$E \left[ (M^{A_{n_1}}(t) - M^{A_{n_2}}(t))^2 \right] = E \left[ (M^{A_{n_2}}(t))^2 \right] - E \left[ (M^{A_{n_1}}(t))^2 \right] \geq 0. \quad (2.14)$$

Debido a (2.13) y (2.14), se puede observar que para todo  $t \geq 0$ ,  $(E[M^{A_n}(t)^2], n \in \mathbb{N})$  es creciente y acotada superiormente y por lo tanto, convergente. Luego, se deduce que

$$M^{A_n}(t) = \int_{A_n} x \tilde{N}(t, dx) \xrightarrow{L^2} \int_{|x|<1} x \tilde{N}(t, dx) = Y_d(t),$$

con lo cual,  $Y_d(t)$  es una martingala. Además, debido a la convergencia en  $L^2$ , se tiene convergencia en probabilidad, es decir, que  $M^{A_n}(t) \xrightarrow{P} Y_d(t)$  para todo  $t \geq 0$ . Se demuestra que  $Y_d(t)$  es un proceso de Lévy, utilizando la desigualdad de Chebyshev-Markov (Teorema A.1.1) para deducir que para todo  $\epsilon > 0$

$$\lim_{t \downarrow 0} \mathbb{P} (|Y_d(t) - M^{A_n}(t)| > \epsilon) \leq \frac{E \left[ (Y_d(t) - M^{A_n}(t))^2 \right]}{\epsilon^2} = 0$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Argumentos similares muestran que  $Y_c$  es un proceso de Lévy en el espacio de martingalas, donde para todo  $t \geq 0$

$$\left( \hat{Y}(t) - M^{A_n}(t) \right) \xrightarrow{L^2} Y_c(t).$$

Ahora consideremos las funciones características de  $\hat{Y}(t) - M^{A_n}(t)$  y  $M^{A_n}(t)$ . Por independencia, se tiene que para todo  $t \geq 0$ ,  $u, p \in \mathbb{R}$  y  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} & E \left[ \exp \{iuM^{A_n}(t)\} \exp \left\{ip \left( \hat{Y}(t) - M^{A_n}(t) \right) \right\} \right] \\ &= E \left[ \exp \{iuM^{A_n}(t)\} \right] E \left[ \exp \left\{ip \left( \hat{Y}(t) - M^{A_n}(t) \right) \right\} \right]. \end{aligned}$$

Luego, sabiendo que  $(\hat{Y}(t) - M^{A_n}(t)) \xrightarrow{D} Y_c(t)$  y  $M^{A_n}(t) \xrightarrow{D} Y_d(t)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , se tiene que la expresión anterior toma la forma

$$E \left[ \exp \{iuY_d(t)\} \right] E \left[ \exp \{ipY_c(t)\} \right].$$

Esto se generaliza a  $Y_d$  y  $Y_c$ , demostrando la independencia entre dichos procesos. Finalmente, faltaría demostrar que  $Y_c$  tiene caminos muestrales continuos. Si  $Y_c(t) = 0$  c.s. para todo  $t \geq 0$ , la conclusión acerca de la continuidad de los caminos es obvia. Sea  $S \subset \Omega$  tal que para todo  $\omega \in S$ , el camino muestral del proceso  $Y_c$  no es continuo. Si  $\mathbb{P}(S) = 0$ ,  $Y_c$  se puede reemplazar por una versión con caminos muestrales continuos.

Ahora, por contradicción, supongamos que  $\mathbb{P}(S) > 0$ , con lo cual existiría  $\delta > 0$  y un tiempo de parada  $\tau$  tal que  $\mathbb{P}(|\Delta\eta(\tau)| > \delta) > 0$ . Sea  $B = \{x \in \mathbb{R}; |x| > \delta\}$ . Luego, para todo  $t \geq 0$  y  $f \in L^2(B, \nu_B)$ , aplicando la Proposición (B.4.4), se tiene

$$0 \neq E \left[ Y_c(t) \int_B f(x) \tilde{N}(t, dx) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \left( \hat{Y}(t) - M^{A_n}(t) \right) \int_B f(x) \tilde{N}(t, dx) \right] = 0$$

con lo cual obtenemos la contradicción deseada. □

**Proposición 2.5.7** Para todo  $t \geq 0$  y  $u \in \mathbb{R}$ ,

$$E [e^{iuY_d(t)}] = \exp \left\{ t \int_{|x|<1} [e^{iux} - 1 - iux] \nu(dx) \right\}.$$

*Demostración:* La expresión anterior se obtiene tomando límite cuando  $n \rightarrow \infty$  en

$$\exp \left\{ t \int_{A_n} [e^{iux} - 1 - iux] \nu(dx) \right\}.$$

□

**Proposición 2.5.8**  $\nu$  es una medida de Lévy.

*Demostración:* Es obvio que  $\nu((-1, 1)^c) < \infty$ . Además, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{|x|<1} |x|^2 \nu(dx) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} |x|^2 \nu(dx) = \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ |M^{A_n}(t)|^2 \right] \\ &= E \left[ |Y_d(t)|^2 \right] < \infty. \end{aligned}$$

□

**Teorema 2.5.9**  $Y_c$  es un movimiento browniano.

*Demostración:* Se completa y aclara la versión dada por Applebaum [1], pp. 106-108. Buscaremos demostrar que para todo  $u \in \mathbb{R}$  y  $t \geq 0$ ,

$$E [e^{iuY_c(t)}] = e^{-\frac{u^2 at}{2}}$$

con  $a > 0$ , para usar la caracterización de martingala de Lévy para el movimiento browniano<sup>5</sup>. Notemos que como  $Y_c$  no tiene saltos, todos sus momentos existen debido al Teorema 2.2.2, y además, al ser  $Y_c$  un proceso de Lévy centrado se tiene

$$\phi_t(u) = E [e^{iuY_c(t)}] = e^{t\psi(u)},$$

donde  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$  y  $\psi'(0) = 0$ . Diferenciando repetidamente se tiene que para todo  $t \geq 0$  y  $m \geq 2$ ;

$$E [Y_c(t)^m] = a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{m-1} t^{m-1}, \tag{2.15}$$

<sup>5</sup>Sea  $X = (X(t), t \geq 0)$  es un proceso de Lévy con caminos muestrales continuos c.s. tal que  $E[X(t)] = 0$  para todo  $t \geq 0$  y  $E[X(t)X(s)] = a(s \wedge t)$  con  $a > 0$  y  $s, t \geq 0$ .  $X$  es un movimiento browniano si y solamente si

$$E [e^{iuX(t)}] = e^{-u^2 at/2},$$

para todo  $t \geq 0$  y  $u \in \mathbb{R}$ .

para ciertos  $a_1, a_2, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{R}$ . Tomemos,  $(r) = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$ , una partición de  $[0, t]$ , y definamos  $\Delta Y_c(t_j) = Y_c(t_{j+1}) - Y_c(t_j)$  para todo  $0 \leq j \leq n-1$ . Luego, se tiene

$$E [e^{iuY_c(t)} - 1] = E \left[ \sum_{j=0}^{n-1} (e^{iuY_c(t_{j+1})} - e^{iuY_c(t_j)}) \right].$$

Usando la expansión de Taylor para  $e^{iuY_c(t_{j+1})}$  alrededor de  $Y_c(t_j)$  se tiene

$$e^{iuY_c(t_{j+1})} = e^{iuY_c(t_j)} + iue^{iuY_c(t_j)} \Delta Y_c(t_j) + \frac{u^2}{2} e^{iu[Y_c(t_j) + \theta_j \Delta Y_c(t_j)]} [\Delta Y_c(t_j)]^2 \quad (2.16)$$

donde  $\theta_j \in ]0, 1[$ , con lo cual,  $Y_c(t_j) < Y_c(t_j) + \theta_j \Delta Y_c(t_j) < Y_c(t_{j+1})$ . Luego, si a la ecuación (2.16) le sumamos y restamos  $\frac{u^2}{2} e^{iuY_c(t_j)} [\Delta Y_c(t_j)]^2$ , tenemos que  $e^{iuY_c(t_{j+1})}$  es igual a

$$e^{iuY_c(t_j)} + iue^{iuY_c(t_j)} \Delta Y_c(t_j) - \frac{u^2}{2} e^{iuY_c(t_j)} [\Delta Y_c(t_j)]^2 + \frac{u^2}{2} (e^{iu[Y_c(t_j) + \theta_j \Delta Y_c(t_j)]} - e^{iuY_c(t_j)}) [\Delta Y_c(t_j)]^2,$$

con lo cual se tiene

$$E \left[ \sum_{j=0}^{n-1} (e^{iuY_c(t_{j+1})} - e^{iuY_c(t_j)}) \right] = E[I_1(t)] + E[I_2(t)] + E[I_3(t)],$$

donde

$$\begin{aligned} I_1(t) &= iu \sum_{j=0}^{n-1} e^{iuY_c(t_j)} \Delta Y_c(t_j) \\ I_2(t) &= -\frac{u^2}{2} \sum_{j=0}^{n-1} e^{iuY_c(t_j)} [\Delta Y_c(t_j)]^2 \\ I_3(t) &= -\frac{u^2}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (e^{iu[Y_c(t_j) + \theta_j \Delta Y_c(t_j)]} - e^{iuY_c(t_j)}) [\Delta Y_c(t_j)]^2. \end{aligned}$$

Luego, considerando los incrementos independientes de  $Y_c(t)$  calculamos el valor esperado de  $I_1(t)$ :

$$E[I_1(t)] = iuE \left[ \sum_{j=0}^{n-1} e^{iuY_c(t_j)} \right] E [\Delta Y_c(t_j)] = 0;$$

pues  $E[\Delta Y_c(t_j)] = E[Y_c(t_{j+1})] - E[Y_c(t_j)] = 0$ . Asimismo, utilizando los incrementos independientes de  $Y_c(t)$  y la ecuación (2.15) con  $a_1 = a > 0$ , calculamos el valor esperado de  $I_2(t)$  :

$$\begin{aligned} E[I_2(t)] &= -\frac{u^2}{2} \sum_{j=0}^{n-1} E [e^{iuY_c(t_j)}] E [(\Delta Y_c(t_j))^2] \\ &= -\frac{au^2}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \phi_{t_j}(u)(t_{j+1} - t_j). \end{aligned}$$

Para el cálculo del valor esperado de  $I_3(t)$ , definimos para  $\xi > 0$  el evento

$$V_\xi = \left\{ \omega \in \Omega : \max_{0 \leq j \leq n-1} \sup_{t_j \leq u, v \leq t_{j+1}} |Y_c(v)(\omega) - Y_c(u)(\omega)| \leq \xi \right\}.$$

Utilizando la desigualdad  $|e^{iz} - 1| \leq 2$  para todo  $z \in \mathbb{R}$ , se tiene

$$\left| E \left[ I_3(t) 1_{V_\xi^c} \right] \right| \leq u^2 \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\Omega} 1_{V_\xi^c} [(\Delta Y_c(t_j)(\omega))^2] \mathbb{P}(d\omega), \quad (2.17)$$

y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 1_{V_\xi^c} \left[ \sum_{j=1}^{n-1} (\Delta Y_c(t_j)(\omega))^2 \right] \mathbb{P}(d\omega) \leq \\ & \leq \left[ \int_{\Omega} (1_{V_\xi^c})^2 \mathbb{P}(d\omega) \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{\Omega} \left( \sum_{j=1}^{n-1} (\Delta Y_c(t_j)(\omega))^2 \right)^2 \mathbb{P}(d\omega) \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left[ \int_{\Omega} 1_{V_\xi^c} \mathbb{P}(d\omega) \right]^{\frac{1}{2}} \left[ E \left[ \left( \sum_{j=1}^{n-1} (\Delta Y_c(t_j))^2 \right)^2 \right] \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Luego, reemplazando la expresión anterior en (2.17), se tiene

$$\left| E \left[ I_3(t) 1_{V_\xi^c} \right] \right| \leq u^2 (\mathbb{P}(V_\xi^c))^{\frac{1}{2}} \left[ E \left[ \left( \sum_{j=1}^{n-1} (\Delta Y_c(t_j))^2 \right)^2 \right] \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.18)$$

Utilizando los incrementos estacionarios e independientes de  $Y_c$  y trabajando con el lado derecho de la expresión anterior obtenemos

$$\begin{aligned} E \left[ \left( \sum_{j=1}^{n-1} (\Delta Y_c(t_j))^2 \right)^2 \right] &= E \left[ \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (Y_c(t_{j+1}) - Y_c(t_j))^2 (Y_c(t_{i+1}) - Y_c(t_i))^2 \right] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} E [(Y_c(t_{j+1}) - Y_c(t_j))^4] + \\ & \quad \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0, i \neq j}^{n-1} E [(Y_c(t_{j+1}) - Y_c(t_j))^2] E [(Y_c(t_{i+1}) - Y_c(t_i))^2]. \end{aligned}$$

Luego, utilizando la ecuación (2.15) con  $E[Y_c(t)^4] = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$  y  $E[Y_c(t)^2] = at$  tomando  $b = \max \{|a_1|, a^2 + |a_2 - a^2|, |a_3|\}$  se tiene que la expresión anterior

$$= \sum_{j=0}^{n-1} (a_1(t_{j+1} - t_j) + a_2(t_{j+1} - t_j)^2 + a_3(t_{j+1} - t_j)^3) + a^2 \left( t^2 - \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j)^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= a_1 t + a^2 t^2 + (a_2 - a^2) \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j)^2 + a_3 \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j)^3 \\
 &\leq |a_1| t + a^2 t^2 + |a_2 - a^2| \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j)^2 + |a_3| \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j)^3 \\
 &\leq |a_1| t + (a^2 + |a_2 - a^2|) t^2 + |a_3| t^3 \\
 &\leq b(t + t^2 + t^3).
 \end{aligned}$$

Con lo cual tenemos la desigualdad (2.18) como

$$\left| E \left[ I_3(t) 1_{V_\xi^c} \right] \right| \leq u^2 \left( \mathbb{P}(V_\xi^c) \right)^{\frac{1}{2}} \left[ O(t^2 + t^3) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.19)$$

Utilizando el teorema del valor medio y la ecuación (2.15) tenemos

$$\left| E \left[ I_3(t) 1_{V_\xi} \right] \right| \leq \frac{|u|^3}{2} \int_{\Omega} 1_{V_\xi} \sum_{j=0}^{n-1} |\Delta Y_c(t_j)(\omega)|^3 \mathbb{P}(d\omega) \leq \frac{\xi a t |u|^3}{2}. \quad (2.20)$$

Luego, sea  $((r_n), n \in \mathbb{N})$  una sucesión de particiones del intervalo  $[0, t]$  con abertura  $\delta_n$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ . Hacemos referencia a  $I_1(t)$ ,  $I_2(t)$  y a  $I_3(t)$  como  $I_1^{(n)}(t)$ ,  $I_2^{(n)}(t)$  y  $I_3^{(n)}(t)$ , respectivamente, dependiendo de la partición; y a  $V_\xi$  como  $V_\xi^{(n)}$ . Ahora, la continuidad c.s. de los caminos muestrales de  $Y_c$  implica

$$\max_{1 \leq j \leq m(n)-1} \sup_{t_j^{(n)} \leq u, v \leq t_{j+1}^{(n)}} |Y_c(v)(\omega) - Y_c(u)(\omega)| \leq \sup_{0 \leq u, v \leq t, |u-v| \leq \delta_n} |Y_c(v)(\omega) - Y_c(u)(\omega)|,$$

y el lado derecho de la última expresión tiende a cero c.s cuando  $n \rightarrow \infty$ . Luego, como la función indicadora  $1_{V_\xi^{(n)}}$  converge c.s a  $1_\Omega$  al utilizar el teorema de la convergencia dominada se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(V_\xi^{(n)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} 1_{V_\xi^{(n)}} \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} 1_{V_\xi^{(n)}} \mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{P}(\Omega) = 1,$$

con lo cual,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}((V_\xi^{(n)})^c) = 0$ . Posteriormente, y por (2.19) y (2.20), se obtiene claramente

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E \left[ I_3^{(n)}(t) \right] \leq \frac{\xi a t |u|^3}{2};$$

y como  $\xi$  puede hacerse arbitrariamente pequeño,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ I_3^{(n)}(t) \right] = 0.$$

Tomando límite a  $I_2^{(n)}(t)$ , se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ I_2^{(n)}(t) \right] = -\frac{a u^2}{2} \int_0^t \phi_s(u) ds.$$

Finalmente, las dos expresiones anteriores,

$$\phi_t(u) - 1 = -\frac{a u^2}{2} \int_0^t \phi_s(u) ds,$$

y así

$$\phi_t(u) = e^{-\frac{atu^2}{2}}.$$

□

**Teorema 2.5.10 (Descomposición de Lévy-Itô)** Sea  $\eta$  un proceso de Lévy. Entonces existen  $b \in \mathbb{R}$ , un movimiento browniano  $B_a$  (con  $a$  como en el teorema anterior) y una medida de Poisson  $N$  en  $\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R} - \{0\})$  independiente de  $B_a$ , tal que para todo  $t \geq 0$ ,

$$\eta(t) = bt + B_a(t) + \int_{|x|<1} x\tilde{N}(t, dx) + \int_{|x|\geq 1} xN(t, dx). \quad (2.21)$$

*Demostración:* Este es un resultado directo de combinar los Teoremas 2.5.6 y 2.5.9, pues

$$\eta(t) - \int_{|x|\geq 1} xN(t, dx) - E \left[ \eta(t) - \int_{|x|\geq 1} xN(t, dx) \right] = B_a(t) + \int_{|x|<1} x\tilde{N}(t, dx)$$

con

$$b = E \left[ \eta(1) - \int_{|x|\geq 1} xN(1, dx) \right].$$

□

A continuación se presenta la demostración de la fórmula de Lévy-Khintchine (Teorema 1.2.19).

**Teorema 2.5.11** Sea  $\eta$  un proceso de Lévy, entonces para todo  $u \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$  se tiene

$$E [e^{iu\eta(t)}] = \exp \left\{ t \left( ibu - \frac{u^2a}{2} + \int_{\mathbb{R}-\{0\}} [e^{iuy} - 1 - iuy1_B(y)] \nu(dy) \right) \right\} \quad (2.22)$$

donde  $B = \{x \in \mathbb{R}; |x| < 1\}$ .

*Demostración:* Por independencia, se tiene

$$E [e^{iu\eta(t)}] = e^{itub} E [e^{iuY_c(t)}] E [e^{iuY_d(t)}] E [e^{iu \int_{|x|\geq 1} xN(t,dx)}].$$

De resultados anteriores tenemos

$$\begin{aligned} E [e^{iuY_c(t)}] &= e^{-\frac{atu^2}{2}}; \\ E [e^{iuY_d(t)}] &= \exp \left\{ t \int_{|x|<1} [e^{iux} - 1 - iux] \nu(dx) \right\}; \\ E [e^{iu \int_{|x|\geq 1} xN(t,dx)}] &= \exp \left[ t \int_{|x|\geq 1} (e^{iux} - 1) \nu(dx) \right]; \end{aligned}$$

con lo cual, la deducción es inmediata.

□

## 2.6 Interlazado

En esta sección vamos a utilizar la técnica del interlazado para lograr una mayor profundidad en la descomposición de Lévy-Itô. Sea  $Y = (Y(t), t \geq 0)$ , un proceso de Lévy con saltos acotados por 1, con lo cual, a través de la descomposición de Lévy-Itô, se tiene

$$Y(t) = bt + B_a(t) + \int_{|x|<1} x\tilde{N}(t, dx),$$

para todo  $t \geq 0$ . Para que la siguiente construcción sea no trivial, es conveniente asumir que  $Y$  pueda tener saltos de una dimensión arbitrariamente pequeña, es decir que no exista un número  $a$  tal que  $0 < a < 1$  y que  $\nu((-a, a)) = 0$ . Asimismo, definimos una sucesión  $(\epsilon_n, n \in \mathbb{N})$  que decrece monótonicamente a cero tal que

$$\epsilon_n = \sup \left\{ y \geq 0, \int_{0 < |x| < y} x^2 \nu(dx) \leq \frac{1}{8^n} \right\},$$

donde  $\nu$  es la medida de Lévy asociada a  $Y$ . Luego, definimos una sucesión de procesos de Lévy  $Y_n = (Y_n(t), n \in \mathbb{N})$ , donde en cada uno de ellos su salto es acotado inferiormente por  $\epsilon_n$  y superiormente por 1, de la manera siguiente;

$$Y_n(t) = bt + B_a(t) + \int_{\epsilon_n \leq |x| < 1} x\tilde{N}(t, dx), \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Si separamos el movimiento browniano y la tendencia, y definimos

$$C_n(t) = B_a(t) + t \left[ b - \int_{\epsilon_n \leq |x| < 1} x\nu(dx) \right],$$

el proceso  $Y_n$  quedaría

$$Y_n(t) = C_n(t) + \int_{\epsilon_n \leq |x| < 1} xN(t, dx)$$

para todo  $t \geq 0$ . Ahora,  $\int_{\epsilon_n \leq |x| < 1} xN(t, dx)$  es un proceso de Poisson compuesto con saltos  $\Delta Y(t)$ , tomando lugar en los tiempos  $(\tau_n^m, m \in \mathbb{N})$ . Luego, podemos construir el proceso  $Y_n$  por medio del *interlazado*, de la siguiente manera:

$$Y_n(t) = \begin{cases} C_n(t) & \text{si } 0 \leq t < \tau_n^1, \\ C_n(\tau_n^1) + \Delta Y(\tau_n^1) & \text{si } t = \tau_n^1, \\ Y_n(\tau_n^1) + C_n(t) - C_n(\tau_n^1) & \text{si } \tau_n^1 < t < \tau_n^2, \\ Y_n(\tau_n^2-) + \Delta Y(\tau_n^2) & \text{si } t = \tau_n^2, \end{cases}$$

y así se prosigue recursivamente.

**Teorema 2.6.1** *Para todo  $t \geq 0$ , se cumple casi seguramente que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(t) = Y(t),$$

*y la convergencia es uniforme en intervalos compactos de  $\mathbb{R}_+$ .*

*Demostración:* Se sigue la demostración dada por Applebaum [1], p. 114. Fijemos  $T \geq 0$ , entonces para todo  $t$  tal que  $0 \leq t \leq T$  y todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene

$$Y_{n+1}(t) - Y_n(t) = \int_{\epsilon_{n+1} < |x| < \epsilon_n} x \tilde{N}(t, dx),$$

la cual es una martingala en  $L^2$ . Luego, por la desigualdad de martingalas de Doob (Teorema B.2.3), y considerando el hecho que para  $A \in \mathbb{B}_0$  se cumple

$$E \left[ \left| \int_A x \tilde{N}(t, dx) \right|^2 \right] = t \int_A |x|^2 \nu(dx),$$

obtenemos

$$\begin{aligned} E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |Y_{n+1}(t) - Y_n(t)|^2 \right] &\leq 4E [ |Y_{n+1}(t) - Y_n(t)|^2 ] \\ &= 4T \int_{\epsilon_{n+1} < |x| < \epsilon_n} |x|^2 \nu(dx) \leq \frac{4T}{8^n}. \end{aligned}$$

Luego, por la desigualdad de Chebyshev-Markov (Teorema A.1.1),

$$\mathbb{P} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} |Y_{n+1}(t) - Y_n(t)| \geq \frac{1}{2^n} \right) \leq \frac{4T}{2^n},$$

ahora es posible aplicar el lema de Borel (Lema A.1.4) y se obtiene

$$\mathbb{P} \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} |Y_{n+1}(t) - Y_n(t)| \geq \frac{1}{2^n} \right) = 0,$$

de donde por (A.1)

$$\mathbb{P} \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} |Y_{n+1}(t) - Y_n(t)| < \frac{1}{2^n} \right) = 1.$$

Por consiguiente, dado todo  $\delta > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $m, n > n_0$  se tiene con probabilidad 1,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_n(t) - Y_m(t)| \leq \sum_{i=m}^{n-1} \sup_{0 \leq t \leq T} |Y_{i+1}(t) - Y_i(t)| < \sum_{i=m}^{n-1} \frac{1}{2^i} < \delta,$$

con lo cual se aprecia que  $(Y_n(t), n \in \mathbb{N})$  es c.s. uniformemente de Cauchy en intervalos compactos y por consiguiente, converge casi seguramente y de manera uniforme en intervalos compactos.  $\square$

Concluimos el capítulo con la demostración de que todo proceso de Lévy es una semimartingala.

**Definición 2.6.2 (Semimartingala)** *Se dice que  $X$  es una semimartingala si es un proceso adaptado tal que para todo  $t \geq 0$ ,*

$$X(t) = X(0) + M(t) + C(t)$$

donde  $M = (M(t), t \geq 0)$  es una martingala local<sup>6</sup> y  $C = (C(t), t \geq 0)$  es un proceso adaptado de variación finita.

<sup>6</sup>Ver Definición 3.2.13.

**Proposición 2.6.3** *Todo proceso de Lévy es una semimartingala.*

*Demostración:* Por la descomposición de Lévy-Itô se tiene que para todo  $t \geq 0$ ,

$$X(t) = M(t) + C(t)$$

donde

$$M(t) = B_a(t) + \int_{|x| < 1} x \tilde{N}(t, dx),$$

$$C(t) = bt + \int_{|x| \geq 1} x N(t, dx).$$

$M(t)$  es una martingala y por lo tanto es una martingala local. Como

$$Y(t) = \int_{|x| \geq 1} x N(t, dx)$$

es un proceso de Poisson compuesto, para cualquier partición  $(r)$  de  $[0, t]$  se cumple

$$\text{var}_{(r)}(Y) \leq \sum_{0 \leq s \leq t} |\Delta X_s| 1_{[1, \infty[}(\Delta X_s) < \infty \text{ c.s.,}$$

deduciéndose que  $C(t)$  es un proceso adaptado de variación finita. □

# Capítulo 3

## Integración Estocástica

En este capítulo, a fin de simplificar la notación, consideraremos procesos estocásticos en  $\mathbb{R}$ , pero los resultados se cumplen para procesos en  $\mathbb{R}^n$ . Asimismo, asumimos la existencia de un espacio de probabilidad filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  satisfaciendo las hipótesis usuales:

- (1)  $\mathcal{F}_0$  contiene todos los conjuntos  $\mathbb{P}$ -nulos de  $\mathcal{F}$ ;
- (2) la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  es continua por derecha, esto es,  $\mathcal{F}_t = \bigcap_{u > t} \mathcal{F}_u$  para todo  $t \geq 0$ .

El presente capítulo se basa fundamentalmente en Applebaum [1], pp. 190-230.

### 3.1 Conceptos previos y motivación

#### 3.1.1 Medidas aleatorias y medida martingala valuada

En esta sección se considera la definición de la medida martingala valuada según El Karoui y Méléard [7].

**Definición 3.1.1 (Medidas aleatorias)** *Sea un espacio medible  $(\mathcal{S}, \mathcal{A})$  y un espacio de probabilidad filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ . Una medida aleatoria  $M$  en  $(\mathcal{S}, \mathcal{A})$  es una colección de variables aleatorias  $(M(Q), Q \in \mathcal{A})$ , tal que*

- (1)  $M(\emptyset) = 0$ ;
- (2) *dada una sucesión  $(C_n, n \in \mathbb{N})$  de conjuntos mutuamente disjuntos en  $\mathcal{A}$ , se cumple casi seguramente que*

$$M\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} M(C_n);$$

- (3) *para toda familia de conjuntos disjuntos  $(Q_1, \dots, Q_n)$  en  $\mathcal{A}$ , las variables aleatorias  $M(Q_1), M(Q_2), \dots, M(Q_n)$  son independientes.*

*La segunda propiedad corresponde a la  $\sigma$ -aditividad de la medida aleatoria, y la tercera propiedad, se denomina propiedad de independencia dispersa.*

A continuación introduciremos el concepto de medida martingala valuada, el cual será muy importante en el desarrollo de la teoría de integración estocástica.

**Definición 3.1.2 (Medida martingala valuada)** Sea  $E \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ ; una medida martingala valuada es una función de conjuntos  $M : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{B}(E) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  la cual satisface las siguientes propiedades

- (1)  $M(0, A) = M(t, \emptyset) = 0$  (c.s), para todo  $A \in \mathbb{B}(E)$  y todo  $t \geq 0$ ;
- (2)  $M(t, A \cup B) = M(t, A) + M(t, B)$  (c.s), para todo  $t \geq 0$  y para cualquier par de conjuntos disjuntos  $A, B \in \mathbb{B}(E)$ ;
- (3)  $(M(t, A), t \geq 0)$  es una martingala cuadrado integrable para todo  $A \in \mathbb{B}(E)$ , y es independiente de  $(M(t, B), t \geq 0)$  cuando  $A, B \in \mathbb{B}(E)$  son disjuntos;
- (4)  $\sup \{E[M(t, A)^2] \mid A \in \mathbb{B}(E)\} < \infty$  para todo  $t > 0$ .

Un ejemplo de una medida martingala valuada es la medida de Poisson compensada que definimos en secciones anteriores. Sea un  $X$  un proceso de Lévy con  $N$ , su medida aleatoria de Poisson asociada. Para cada  $t \geq 0$  y  $A \in \mathbb{B}_0$ , tenemos que la medida de Poisson compensada

$$\tilde{N}(t, A) = N(t, A) - t\nu(A)$$

es una martingala; y se demuestra fácilmente que cumple con las propiedades de una medida martingala valuada.

Otro ejemplo lo constituye la medida martingala valuada de Lévy. Sea  $X$  un proceso de Lévy con descomposición de Lévy-Itô dada por (2.21), y consideramos  $E = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\} - \{0\}$ . Si  $A \in \mathbb{B}(E)$  definimos

$$M(t, A) = \alpha \tilde{N}(t, A - \{0\}) + \beta \sqrt{a} B(t) \delta_0(A), \quad (3.1)$$

donde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y

$$\delta_0(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in A \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Es fácil demostrar que (3.1) es una medida martingala valuada. Asimismo, en muchas de las aplicaciones vamos a considerar  $(\alpha, \beta) = (1, 0)$  o  $(0, 1)$ .

### 3.1.2 Integradores e Integrandos

Supongamos que tenemos una medida martingala valuada definida en  $\mathbb{R}^+ \times E$ , donde  $E \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ . Para poder trabajar adecuadamente con la teoría de integración estocástica, se va a necesitar imponer condiciones adicionales sobre la medida martingala valuada  $M$ . Asimismo, se va a utilizar la siguiente notación:

$$M([s, t], A) = M(t, A) - M(s, A) \quad \text{para } 0 \leq s < t < \infty, A \in \mathbb{B}(E).$$

Las condiciones adicionales son

- (1)  $M([s, t], A)$  es independiente de  $\mathcal{F}_s$ ;
- (2) existe una medida  $\sigma$ -finita  $\rho$  definida en  $\mathbb{R}^+ \times E$  para la cual se cumple

$$E [(M(t, A))^2] = \rho(t, A),$$

para todo  $0 \leq s < t < \infty, A \in \mathbb{B}(E)$ .

Adicionalmente, y de manera abreviada, se ha considerado,  $\rho(t, A) = \rho([0, t] \times A)$ .

Medidas martingala valuadas que satisfagan (1) y (2) se van a denominar del tipo  $(2, \rho)$ , es decir medidas que tienen segundo momento finito y que además puede ser expresado en términos de la medida producto  $\rho$ .

Asimismo, a partir de ahora vamos a considerar que la medida producto  $\rho$  toma la siguiente forma:

$$\rho([0, t] \times A) = t\mu(A)$$

para todo  $t \geq 0$  y  $A \in \mathbb{B}(E)$  donde  $\mu$  es una medida  $\sigma$ -finita en  $E$ .

**Definición 3.1.3 (Medida martingala valuada continua)** Una medida martingala valuada es continua si sus caminos muestrales  $t \rightarrow M(t, A)(\omega)$  son continuos para casi todo  $\omega \in \Omega$  y para todo  $A \in \mathbb{B}(E)$ .

**Definición 3.1.4 ( $\sigma$ -álgebra y función predecible)** Fijamos  $E \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$  y  $0 < T < \infty$ . Una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{P}$  es predecible si es la menor  $\sigma$ -álgebra con respecto a la cual son medibles las funciones  $F : [0, T] \times E \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfacen

- (1) para todo  $0 \leq t \leq T$  la función  $(x, \omega) \rightarrow F(t, x, \omega)$  es  $\mathbb{B}(E) \otimes \mathcal{F}_t$  medible; y
- (2) para todo  $x \in E$ ,  $\omega \in \Omega$  la función  $t \rightarrow F(t, x, \omega)$  es continua por izquierda.

Una función  $G : [0, T] \times E \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  se denomina predecible si es medible respecto a  $\mathcal{P}$ .

Es importante notar, debido a (1), que si  $G$  es predecible entonces el proceso  $t \rightarrow G(t, x, \cdot)$  es adaptado para todo  $x \in E$ .

**Definición 3.1.5** Sea  $M$  una medida martingala valuada del tipo  $(2, \rho)$ . Fijamos  $T > 0$  y definimos  $\mathbb{H}_2(T, E)$  como el espacio lineal de todas las clases de equivalencia de las funciones  $F : [0, T] \times E \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  las cuales coinciden casi seguramente con respecto a  $\rho \times \mathbb{P}$  y satisfacen las siguientes condiciones

- (1)  $F$  es predecible;
- (2)  $\int_0^T \int_E E[|F(t, x)|^2] \rho(dt, dx) < \infty$ .

También, definimos el producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{T, \rho}$  en  $\mathbb{H}_2(T, E)$  por:

$$\langle F, G \rangle_{T, \rho} = \int_0^T \int_E E[F(t, x)G(t, x)] \rho(dt, dx),$$

para cada  $F, G \in \mathbb{H}_2(T, E)$ , y obtenemos la norma  $\|\cdot\|_{T, \rho}$  de la manera usual. Asimismo, por el teorema de Fubini podemos expresar la norma como

$$\|F\|_{T, \rho}^2 = E \left[ \int_0^T \int_E |F(t, x)|^2 \rho(dt, dx) \right].$$

Recordar que  $\rho$  es siempre de la forma  $\rho(dt, dx) = \mu(dx)dt$ . En el caso en que  $E = \{0\}$  y  $\mu(\{0\}) = 1$ , tenemos que  $\mathbb{H}_2(T, E) = \mathbb{H}_2(T)$  y la norma en  $\mathbb{H}_2(T)$  está dada por

$$\|F\|_T^2 = E \left[ \int_0^T |F(t)|^2 dt \right].$$

**Lema 3.1.6**  $\mathbb{H}_2(T, E)$  es un espacio de Hilbert real.

*Demostración:* Claramente  $\mathbb{H}_2(T, E)$  es un subespacio de  $L^2([0, T] \times E \times \Omega, \rho \times \mathbb{P})$ , con lo cual sólo haría falta probar que es cerrado. Sea una sucesión  $(F_n, n \in \mathbb{N})$  de funciones en  $\mathbb{H}_2(T, E)$  que converge a  $F \in L^2$ , por lo cual también  $(F_n, n \in \mathbb{N})$  converge a  $F$  en distribución (con respecto a  $(\rho \times \mathbb{P})$ ). Entonces, existe una subsucesión que converge a  $F$  casi seguramente y como dicha subsucesión contiene funciones predecibles se deduce que  $F$  también es predecible, con lo cual  $F \in \mathbb{H}_2(T, E)$ .  $\square$

**Definición 3.1.7** Definimos  $\mathbb{S}(T, E)$  como el espacio lineal de las funciones simples en  $\mathbb{H}_2(T, E)$ . Recordamos que  $F$  es simple si para algunos  $m, n \in \mathbb{N}$ , existen  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{m+1} = T$  y conjuntos Borel disjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  que forman una partición de  $E$  con  $\mu(A_i) < \infty$  para todo  $i = 1, \dots, n$  y tal que:

$$F = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n c_k F(t_j) 1_{]t_j, t_{j+1}] } 1_{A_k}, \quad (3.2)$$

donde  $c_k \in \mathbb{R}$  y  $F(t_j)$  es una variable aleatoria acotada y  $\mathcal{F}_{t_j}$ -medible. Notar que como  $F$  es continua por izquierda y  $\mathbb{B}(E) \otimes \mathcal{F}_t$ -medible, entonces es predecible. En el caso de  $\mathbb{H}_2(T)$ , el espacio de las funciones simples se denota como  $\mathbb{S}(T)$  y las funciones simples son de la forma

$$F = \sum_{j=1}^m F(t_j) 1_{]t_j, t_{j+1}]}. \quad (3.3)$$

Podemos simplificar la notación de las funciones simples en  $\mathbb{S}(T, E)$ , considerando  $F_k(t_j) = c_k F(t_j)$  y

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n c_k F(t_j) 1_{]t_j, t_{j+1}] } 1_{A_k} = \sum_{j,k=1}^{m,n} F_k(t_j) 1_{]t_j, t_{j+1}] } 1_{A_k}.$$

**Lema 3.1.8**  $\mathbb{S}(T, E)$  es denso en  $\mathbb{H}_2(T, E)$ .

*Demostración:* La demostración de este lema puede encontrarse en Applebaum [1], pp. 194-196.  $\square$

## 3.2 Integración Estocástica

### 3.2.1 La teoría $L^2$

El propósito de esta sección es definir, para un  $T \geq 0$  fijo, la integral estocástica

$$I_T(F) = \int_0^T \int_E F(t, x) M(dt, dx)$$

donde  $F \in \mathbb{H}_2(T, E)$  y  $M$  es una medida martingala valuada del tipo  $(2, \rho)$ . Como es usual, se comenzará definiendo la integral estocástica en  $\mathbb{S}(T, E)$  para después realizar su extensión a  $\mathbb{H}_2(T, E)$ .

**Definición 3.2.1 (Integral estocástica en  $\mathbb{S}(T, E)$ )** Sea  $F \in \mathbb{S}(T, E)$  y  $M$  una medida martingala valuada del tipo  $(2, \rho)$ . Se define la integral estocástica de

$$F = \sum_{j,k=1}^{m,n} F_k(t_j) 1_{]t_j, t_{j+1}] } 1_{A_k}$$

con respecto a  $M$ , para un  $T \geq 0$  fijo, como

$$I_T(F) = \sum_{j,k=1}^{m,n} F_k(t_j) M(]t_j, t_{j+1}], A_k). \quad (3.4)$$

El punto clave en la Definición 3.2.1 es que para cada intervalo de tiempo  $[t_j, t_{j+1}]$ , la función  $F_k(t_j)$  es adaptada a la filtración  $\mathcal{F}_{t_j}$  mientras que  $M(]t_j, t_{j+1}], A_k)$  está en el futuro y además es independiente de  $\mathcal{F}_{t_j}$ .

**Proposición 3.2.2** Si  $F, G \in \mathbb{S}(T, E)$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , entonces  $\alpha F + \beta G \in \mathbb{S}(T, E)$ , y además

$$I_T(\alpha F + \beta G) = \alpha I_T(F) + \beta I_T(G).$$

*Demostración:* Primero, se demostrará que si  $F, G \in \mathbb{S}(T, E)$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  entonces  $\alpha F + \beta G \in \mathbb{S}(T, E)$ . Consideremos  $F$  y  $G$  (sobre la misma partición de  $[0, T]$ ) como

$$F = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n c_k F(t_j) 1_{]t_j, t_{j+1}] } 1_{A_k},$$

$$G = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l d_i G(t_j) 1_{]t_j, t_{j+1}] } 1_{B_i}.$$

Como  $\{A_k\}$  y  $\{B_i\}$  son ambas particiones disjuntas de  $E$  se puede formar una nueva partición  $H$ , también disjunta de  $E$ :

$$H = \{ \{A_k \cap B_i\}, k = 1, \dots, n, i = 1, \dots, l, \text{ y } A_k \cap B_i \neq \emptyset \}.$$

Denominamos  $H_r$  a cada elemento de  $H$  y suponemos que  $r = 1, \dots, R$ . Asimismo, definimos  $c_r = c_k$  si  $H_r \subseteq A_k$  y  $d_r = d_i$  si  $H_r \subseteq B_i$  con lo cual

$$F = \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^R c_r F(t_j) 1_{]t_j, t_{j+1}] } 1_{H_r},$$

$$G = \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^R d_r G(t_j) 1_{]t_j, t_{j+1}] } 1_{H_r}.$$

Por las expresiones anteriores tenemos

$$\alpha F + \beta G = \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^R (\alpha c_r F(t_j) + \beta d_r G(t_j)) 1_{]t_j, t_{j+1}] } 1_{H_r}.$$

Si definimos  $L_r(t_j) = \alpha c_r F(t_j) + \beta d_r G(t_j)$  se deduce que  $L_r(t_j)$  es una variable aleatoria acotada y  $\mathcal{F}_{t_j}$ -medible, entonces  $L$  es continua por izquierda y  $\mathbb{B}(E) \otimes \mathcal{F}_t$ -medible, con

lo cual es predecible; demostrando así que  $\alpha F + \beta G \in \mathbb{S}(T, E)$ . Para demostrar que  $I_T(\alpha F + \beta G) = \alpha I_T(F) + \beta I_T(G)$ , (de acuerdo a la nueva representación de  $F$  y  $G$ ), se tiene

$$\begin{aligned}
 I_T(\alpha F + \beta G) &= \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^R (\alpha c_r F(t_j) + \beta d_r G(t_j)) (M(t_{j+1}, H_r) - M(t_j, H_r)) \\
 &= \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^R \alpha c_r F(t_j) M([t_j, t_{j+1}], H_r) + \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^R \beta d_r G(t_j) M([t_j, t_{j+1}], H_r) \\
 &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha c_k F(t_j) M([t_j, t_{j+1}], A_k) + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l \beta d_i G(t_j) M([t_j, t_{j+1}], B_i) \\
 &= \alpha I_T(F) + \beta I_T(G).
 \end{aligned}$$

□

**Lema 3.2.3** Para todo  $T \geq 0$ , y toda  $F \in \mathbb{S}(T, E)$ , se cumple

$$\begin{aligned}
 E [I_T(F)] &= 0; \\
 E [I_T(F)^2] &= \int_0^T \int_E E [|F(t, x)|^2] \rho(dt, dx).
 \end{aligned}$$

*Demostración:* Se ha completado y detallado la versión de Applebaum [1], pp. 197-199. Por propiedad de martingalas se cumple que

$$E [M([t_j, t_{j+1}], A_k)] = 0,$$

para todo  $1 \leq j \leq m$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Luego, por la primera condición adicional de la medida martingala valuada  $M$  se tiene que

$$E [I_T(F)] = \sum_{j,k=1}^{m,n} E [F_k(t_j)] E [M([t_j, t_{j+1}], A_k)] = 0,$$

con lo cual, la primera parte queda demostrada. Para demostrar la segunda parte, tenemos

$$\begin{aligned}
 E [I_T(F)^2] &= E \left[ \sum_{j,k=1}^{m,n} \sum_{l,p=1}^{m,n} F_k(t_j) M([t_j, t_{j+1}], A_k) F_p(t_l) M([t_l, t_{l+1}], A_p) \right] \\
 &= \sum_{j,k=1}^{m,n} \sum_{l,p=1}^{m,n} E [F_k(t_j) M([t_j, t_{j+1}], A_k) F_p(t_l) M([t_l, t_{l+1}], A_p)] \\
 &= \sum_{j,k=1}^{m,n} \sum_{p=1}^n \sum_{l < j} E [F_k(t_j) M([t_j, t_{j+1}], A_k) F_p(t_l) M([t_l, t_{l+1}], A_p)] \\
 &\quad + \sum_{j,k=1}^{m,n} \sum_{p=1}^n E [F_k(t_j) M([t_j, t_{j+1}], A_k) F_p(t_j) M([t_j, t_{j+1}], A_p)] \\
 &\quad + \sum_{j,k=1}^{m,n} \sum_{p=1}^n \sum_{l > j} E [F_k(t_j) M([t_j, t_{j+1}], A_k) F_p(t_l) M([t_l, t_{l+1}], A_p)].
 \end{aligned}$$

Nuevamente, por la primera condición adicional de la medida martingala valuada  $M$  se tiene

$$\begin{aligned} & \sum_{j,k=1}^{m,n} \sum_{p=1}^n \sum_{l < j} E [F_k(t_j)M(]t_j, t_{j+1}], A_k) F_p(t_l)M(]t_l, t_{l+1}], A_p)] \\ &= \sum_{j,k=1}^{m,n} \sum_{p=1}^n \sum_{l < j} E [F_k(t_j)M(]t_l, t_{l+1}], A_p) F_p(t_l)] E [M(]t_j, t_{j+1}], A_k)] = 0; \end{aligned}$$

por un argumento similar, tenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{j,k=1}^{m,n} \sum_{p=1}^n \sum_{l > j} E [F_k(t_j)M(]t_j, t_{j+1}], A_k) F_p(t_l)M(]t_l, t_{l+1}], A_p)] \\ &= \sum_{j,k=1}^{m,n} \sum_{p=1}^n \sum_{l > j} E [F_k(t_j)M(]t_j, t_{j+1}], A_p) F_p(t_l)] E [M(]t_l, t_{l+1}], A_k)] = 0. \end{aligned}$$

Utilizando las condiciones adicionales de la medida martingala valuada

$$\begin{aligned} & \sum_{j,k=1}^{m,n} \sum_{p=1}^n E [F_k(t_j)M(]t_j, t_{j+1}], A_k) F_p(t_j)M(]t_j, t_{j+1}], A_p)] \\ &= \sum_{j,k=1}^{m,n} \sum_{p=1}^n E [F_k(t_j)F_p(t_j)] E [M(]t_j, t_{j+1}], A_k)M(]t_j, t_{j+1}], A_p)] \\ &= \sum_{j,k=1}^{m,n} E [F_k(t_j)^2] E [M(]t_j, t_{j+1}], A_k)^2] \\ &= \sum_{j,k=1}^{m,n} E [F_k(t_j)^2] \{E [M(t_{j+1}, A_k)^2] - E [M(t_j, A_k)^2]\} \\ &= \sum_{j,k=1}^{m,n} E [F_k(t_j)^2] \rho(]t_j, t_{j+1}], A_k), \end{aligned}$$

con lo cual se llega al resultado requerido; demostrándose de esta manera el lema.  $\square$

De la Proposición 3.2.2 y del Lema 3.2.3, se deduce que  $I_T$  es una isometría lineal de  $\mathbb{S}(T, E)$  en  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , y como  $\mathbb{S}(T, E)$  es denso en  $\mathbb{H}_2(T, E)$ , esta isometría se extiende de  $\mathbb{H}_2(T, E)$  a  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Continuaremos denotando esta extensión como  $I_T$  y denominaremos a  $I_T(F)$  la *integral estocástica de Itô* de  $F$  tal que  $F \in \mathbb{H}_2(T, E)$ . Cuando sea conveniente, utilizaremos la notación de Leibniz  $I_T(F) = \int_0^T \int_E F(t, x)M(dt, dx)$ .

Entonces tenemos

$$E [I_T(F)^2] = \|F\|_{T,\rho}^2$$

para todo  $F \in \mathbb{H}_2(T, E)$ , y esta identidad se denomina *isometría de Itô*.

Debido a que  $\mathbb{S}(T, E)$  es denso en  $\mathbb{H}_2(T, E)$ , para cualquier  $F \in \mathbb{H}_2(T, E)$  es posible encontrar una sucesión  $(F_n, n \in \mathbb{N})$  de funciones en  $\mathbb{S}(T, E)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|F - F_n\|_{T,\rho} = 0$

y en  $L^2$  se tiene

$$\int_0^T \int_E F(t, x) M(dt, dx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_E F_n(t, x) M(dt, dx).$$

Si  $0 \leq a \leq b \leq T$ ,  $A \in \mathbb{B}(E)$  y  $F \in \mathbb{H}_2(T, E)$ , es fácil de verificar que  $1_{]a,b[} 1_A F \in \mathbb{H}_2(T, E)$ ; con lo cual es posible definir

$$I_{a,b;A}(F) = \int_a^b \int_A F(t, x) M(dt, dx) = I_T(1_{]a,b[} 1_A F),$$

denotándose  $I_{a,b} = I_{a,b;E}$ , si  $A = E$ .

Si  $\|F\|_{t,\rho} < \infty$  para todo  $t \geq 0$ , es adecuado considerar  $(I_t(F), t \geq 0)$  como un proceso estocástico, y asimismo supondremos que esta condición se satisface siempre que trabajemos de esta forma.

A continuación, se enuncian las propiedades más importantes tanto de  $I_T(F)$  como del proceso  $(I_t(F), t \geq 0)$  cuando  $F \in \mathbb{H}_2(T, E)$ .

**Teorema 3.2.4** Si  $F, G \in \mathbb{H}_2(T, E)$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , entonces

- (1)  $I_T(\alpha F + \beta G) = \alpha I_T(F) + \beta I_T(G)$ ;
- (2)  $E[I_T(F)] = 0$ ;
- (3)  $E[I_T(F)^2] = \int_0^T \int_E E[|F(t, x)|^2] \rho(dt, dx)$ ;
- (4)  $(I_t(F), t \geq 0)$  es  $\mathcal{F}_t$ -adaptada;
- (5)  $(I_t(F), t \geq 0)$  es una martingala cuadrado integrable.

*Demostración:* Se ha completado y clarificado la versión dada por Applebaum [1], p. 200. Para demostrar (1), se sabe que si  $F \in \mathbb{H}_2(T, E)$  entonces existe una sucesión de funciones simples  $(F_n, n \in \mathbb{N})$  en  $\mathbb{S}(T, E)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|F - F_n\|_{T,\rho} = 0$ ; asimismo, también existe una sucesión de funciones simples  $(G_n, n \in \mathbb{N})$  que pertenecen a  $\mathbb{S}(T, E)$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|G - G_n\|_{T,\rho} = 0$  con  $G \in \mathbb{H}_2(T, E)$ . Con lo cual es lógico que  $\alpha F + \beta G$  es aproximada por  $\alpha F_n + \beta G_n$ , es decir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha F + \beta G - \alpha F_n - \beta G_n\|_{T,\rho} = 0,$$

debido a que

$$\|\alpha F + \beta G - \alpha F_n - \beta G_n\|_{T,\rho} \leq \|\alpha F - \alpha F_n\|_{T,\rho} + \|\beta G - \beta G_n\|_{T,\rho},$$

donde el lado derecho de la última expresión tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ . En razón de la proposición anterior, se sabe que

$$I_T(\alpha F_n + \beta G_n) = \alpha I_T(F_n) + \beta I_T(G_n),$$

y tomando límite cuando  $n \rightarrow \infty$  en  $L^2$  en ambos lados se tiene el resultado requerido.

Para demostrar (2), se sabe que si  $F \in \mathbb{H}_2(T, E)$  entonces existe una sucesión de funciones simples  $(F_n, n \in \mathbb{N})$  en  $\mathbb{S}(T, E)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|F - F_n\|_{T, \rho} = 0$ . Luego, por el lema anterior, se tiene que  $E[I_T(F_n)] = 0$ . Con lo cual, si tomamos límite cuando  $n \rightarrow \infty$  en  $L^2$ , en el lado izquierdo, se obtiene como resultado que  $E[I_T(F)] = 0$ , pues la convergencia en  $L^2$  asegura la convergencia en  $L$ .

Para demostrar (3), basta con recordar que para todo  $n$  se cumple

$$\|I_T(F_n)\|_{L^2} = \|F_n\|_{T, \rho},$$

y el resultado se obtiene tomando límite cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Para demostrar (4), consideremos una sucesión  $(F_n, n \in \mathbb{N})$  que está contenida en  $\mathbb{S}(T, E)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|F - F_n\|_{T, \rho} = 0$ ; con lo cual, el proceso  $(I_t(F_n), t \geq 0)$  es claramente adaptado. Debido a que  $I_t(F_n) \rightarrow I_t(F)$  en  $L^2$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , es posible encontrar una subsucesión  $(F_{n_k}, n_k \in \mathbb{N})$  tal que  $I_t(F_{n_k}) \rightarrow I_t(F)$  casi seguramente, luego cuando  $n_k \rightarrow \infty$  se obtiene el resultado requerido.

Para demostrar (5), consideremos  $F \in \mathbb{S}(T, E)$  y escogemos (sin pérdida de generalidad)  $0 < s = t_l < t_{l+1} < t$ . Con lo cual, se tiene que  $I_t(F) = I_s(F) + I_{s,t}(F)$  y por (3)

$$E[I_t(F)|\mathcal{F}_s] = I_s(F) + E[I_{s,t}(F)|\mathcal{F}_s],$$

debido a la propiedad de la torre<sup>1</sup> y a la condición adicional (1) de la medida martingala valuada se tiene

$$\begin{aligned} E[I_{s,t}(F)|\mathcal{F}_s] &= E\left[\sum_{j=l+1}^m \sum_{k=1}^n F_k(t_j)M(]t_j, t_{j+1}], A_k)|\mathcal{F}_s\right] \\ &= \sum_{j=l+1}^m \sum_{k=1}^n E[E[F_k(t_j)M(]t_j, t_{j+1}], A_k)|\mathcal{F}_{t_{j+1}}]| \mathcal{F}_s] \\ &= \sum_{j=l+1}^m \sum_{k=1}^n E[F_k(t_j)E[M(]t_j, t_{j+1}], A_k)|\mathcal{F}_{t_{j+1}}]| \mathcal{F}_s] \\ &= \sum_{j=l+1}^m \sum_{k=1}^n E[F_k(t_j)|\mathcal{F}_s] E[M(]t_j, t_{j+1}], A_k) = 0. \end{aligned}$$

Luego, el resultado se logra debido a la contractibilidad de  $E[\cdot|\mathcal{F}_s]$  en  $L^2$ . Sea  $(F_n, n \in \mathbb{N})$ , una sucesión en  $\mathbb{S}(T, E)$  que converge a  $F$ ; entonces, se tiene

$$\begin{aligned} \|E[I_t(F)|\mathcal{F}_s] - E[I_t(F_n)|\mathcal{F}_s]\|_{L^2} &\leq \|I_t(F) - I_t(F_n)\|_{L^2} \\ &= \|F - F_n\|_{T, \rho}, \end{aligned}$$

donde la última expresión tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ . □

<sup>1</sup>Sea  $X$  una variable aleatoria real tal que  $E[|X|] < \infty$ . Si  $\mathcal{H}$  es una sub- $\sigma$ -álgebra de  $\mathcal{G}$  entonces

$$E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = E[X|\mathcal{H}] \quad c.s.$$

**Proposición 3.2.5** Si  $F, G \in \mathbb{H}_2(T, E)$  entonces

$$E [I_T(F)I_T(G)] = \langle F, G \rangle_{T,\rho}.$$

*Demostración:* Es fácil deducir

$$\langle F, G \rangle_{T,\rho} = \frac{1}{4} \|F + G\|_{T,\rho}^2 - \frac{1}{4} \|F - G\|_{T,\rho}^2$$

$$E [I_T(F)I_T(G)] = \frac{1}{4} E [I_T(F + G)^2] - \frac{1}{4} E [I_T(F - G)^2]$$

y luego, debido a la propiedad de isometría, se demuestra la proposición.  $\square$

### 3.2.2 La teoría extendida

El propósito de esta sección es definir para  $T \geq 0$  fijo, la integral estocástica  $I_T(F)$  pero con  $F$  perteneciendo a un espacio más general que  $\mathbb{H}_2(T, E)$ .

**Definición 3.2.6** Definimos  $\mathbb{P}_2(T, E)$  como el conjunto de todas las clases de equivalencia de funciones  $F : [0, T] \times E \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  las cuales coinciden casi seguramente con respecto a  $\rho \times \mathbb{P}$  y que satisfacen las siguientes condiciones:

- (1)  $F$  es predecible;
- (2)  $\mathbb{P} \left( \int_0^T \int_E |F(t, x)|^2 \rho(dt, dx) < \infty \right) = 1$ .

**Proposición 3.2.7**  $\mathbb{P}_2(T, E)$  es un espacio lineal y  $\mathbb{H}_2(T, E) \subseteq \mathbb{P}_2(T, E)$ .

*Demostración:* Sea  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y  $F, G \in \mathbb{P}_2(T, E)$ , con lo cual se tiene

$$\mathbb{P} \left( \int_0^T \int_E |\alpha F(t, x)|^2 \rho(dt, dx) < \infty \right) = 1$$

$$\mathbb{P} \left( \int_0^T \int_E |\beta G(t, x)|^2 \rho(dt, dx) < \infty \right) = 1.$$

Es fácil deducir que  $H = \alpha F + \beta G$  es predecible, pues las funciones predecibles forman un espacio lineal. Definamos los eventos

$$N_F = \left\{ \omega : \int_0^T \int_E |\alpha F(t, x)(\omega)|^2 \rho(dt, dx) < \infty \right\},$$

$$N_G = \left\{ \omega : \int_0^T \int_E |\alpha G(t, x)(\omega)|^2 \rho(dt, dx) < \infty \right\}.$$

Como  $F, G \in \mathbb{P}_2(T, E)$  se tiene que  $\mathbb{P}(N_F^c) = \mathbb{P}(N_G^c) = 0$ . Además, se verifica que

$$|\alpha F(t, x) + \beta G(t, x)|^2 \leq |\alpha F(t, x)|^2 + |\beta G(t, x)|^2,$$

con lo cual el evento

$$N_H = \left\{ \omega : \int_0^T \int_E |\alpha F(t, x)(\omega) + \beta G(t, x)(\omega)|^2 \rho(dt, dx) < \infty \right\}$$

es igual a  $N_F \cap N_G$ .

Consideremos el conjunto  $(N_F \cap N_G)^c = N_F^c \cup N_G^c$ . Luego, se verifica que  $\mathbb{P}(N_F^c \cup N_G^c) \leq \mathbb{P}(N_F^c) + \mathbb{P}(N_G^c) = 0$ , con lo cual  $\mathbb{P}(N_F \cap N_G) = 1$ . Cumpliéndose que

$$\mathbb{P} \left( \int_0^T \int_E |\alpha F(t, x) + \beta G(t, x)|^2 \rho(dt, dx) < \infty \right) = 1.$$

Para demostrar que  $\mathbb{H}_2(T, E) \subseteq \mathbb{P}_2(T, E)$ , basta mostrar que si  $F \in \mathbb{H}_2(T, E)$  entonces  $F \in \mathbb{P}_2(T, E)$ . Como  $F$  es predecible entonces la primera condición esta satisfecha. Luego faltaría demostrar que

$$E \left[ \int_0^T \int_E |F(t, x)|^2 \rho(dt, dx) \right] < \infty \implies \mathbb{P} \left( \int_0^T \int_E |F(t, x)|^2 \rho(dt, dx) < \infty \right) = 1.$$

Trabajando por contradicción, suponemos que existe un evento  $B \in \mathcal{F}$  tal que  $\mathbb{P}(B) \neq 0$  y para todo  $\omega \in B$ , se cumple que  $\int_0^T \int_E |F(t, x)|^2 \rho(dt, dx) = \infty$ . Entonces

$$\begin{aligned} E \left[ \int_0^T \int_E |F(t, x)|^2 \rho(dt, dx) \right] &= \\ &= \int_{B^c} \int_0^T \int_E |F(t, x)(\omega)|^2 \rho(dt, dx) \mathbb{P}(d\omega) + \int_B \int_0^T \int_E |F(t, x)(\omega)|^2 \rho(dt, dx) \mathbb{P}(d\omega) = \infty \end{aligned}$$

contradiendo el hecho que  $E \left[ \int_0^T \int_E |F(t, x)|^2 \rho(dt, dx) \right] < \infty$ . □

**Definición 3.2.8 (Convergencia en  $\mathbb{P}_2(T, E)$ )** Una sucesión de funciones  $(F_n, n \in \mathbb{N})$  en  $\mathbb{P}_2(T, E)$  converge a  $F$  si

$$\mathbb{P} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_E |F_n(t, x) - F(t, x)|^2 \rho(dt, dx) = 0 \right) = 1$$

**Lema 3.2.9**  $\mathbb{S}(T, E)$  es denso en  $\mathbb{P}_2(T, E)$ .

*Demostración:* La demostración de este lema se encuentra en Applebaum [1], p. 201. □

**Lema 3.2.10** Si  $F \in \mathbb{S}(T, E)$ , entonces para todo  $C, K \geq 0$  se cumple:

$$\mathbb{P} \left( \left| \int_0^T \int_E F(t, x) M(dt, dx) \right| > C \right) \leq \frac{K}{C^2} + \mathbb{P} \left( \int_0^T \int_E |F(t, x)|^2 \rho(dt, dx) > K \right).$$

*Demostración:* Consideremos  $K > 0$  fijo y definamos  $\tilde{F}^K$  como

$$\tilde{F}_p^K(t_j) = \begin{cases} F_p(t_j) & \text{si } \sum_{i,l=1}^{j,p} F_l(t_i)^2 \rho([t_i, t_{i+1}], A_l) \leq K, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Con lo cual  $\tilde{F}^K \in \mathbb{S}(T, E)$  y

$$\int_0^T \int_E |\tilde{F}^K(t, x)|^2 \rho(dt, dx) = \sum_{i=1}^{m_K} \sum_{l=1}^{n_K} F_l(t_i)^2 \rho([t_i, t_{i+1}], A_l),$$

donde  $m_K$  y  $n_K$  son los mayores enteros para los cuales se cumple

$$\sum_{i=1}^{m_K} \sum_{l=1}^{n_K} F_l(t_i)^2 \rho([t_i, t_{i+1}], A_l) \leq K.$$

Por definición, se tiene

$$F = \tilde{F}^K \iff \int_0^T \int_E |F(t, x)|^2 \rho(dt, dx) \leq K.$$

Luego tenemos

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left( \left| \int_0^T \int_E F(t, x) M(dt, dx) \right| > C \right) \\ &= \mathbb{P} \left( \left| \int_0^T \int_E F(t, x) M(dt, dx) \right| > C, F = \tilde{F}^K \right) \\ & \quad + \mathbb{P} \left( \left| \int_0^T \int_E F(t, x) M(dt, dx) \right| > C, F \neq \tilde{F}^K \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left( \left| \int_0^T \int_E \tilde{F}^K(t, x) M(dt, dx) \right| > C \right) + \mathbb{P} (F \neq \tilde{F}^K) \\ &\leq \frac{E [I_T(\tilde{F}^K)^2]}{C^2} + \mathbb{P} \left( \int_0^T \int_E |F(t, x)|^2 \rho(dt, dx) > K \right) \\ &\leq \frac{K}{C^2} + \mathbb{P} \left( \int_0^T \int_E |F(t, x)|^2 \rho(dt, dx) > K \right), \end{aligned}$$

donde el penúltimo paso se justifica a través de la desigualdad de Chebyshev-Markov (Teorema A.1.1).  $\square$

Sea  $F \in \mathbb{P}_2(T, E)$ , y como  $\mathbb{S}(T, E)$  es denso en  $\mathbb{P}_2(T, E)$  se puede encontrar una sucesión  $(F_n, n \in \mathbb{N})$  en  $\mathbb{S}(T, E)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(F_n) = 0$  c.s., donde para todo  $n \in \mathbb{N}$  se define  $\alpha(F_n) = \int_0^T \int_E |F_n(t, x) - F(t, x)|^2 \rho(dt, dx)$ . Entonces, también  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(F_n) = 0$  en probabilidad, y  $(\alpha(F_n), n \in \mathbb{N})$  es una sucesión de Cauchy en probabilidad. Debido al Lema 3.2.10, para todo  $m, n \in \mathbb{N}$  y  $K, \beta > 0$ , se tiene

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left( \left| \int_0^T \int_E [F_n(t, x) - F_m(t, x)] M(dt, dx) \right| > \beta \right) \\ &\leq \frac{K}{\beta^2} + \mathbb{P} \left( \int_0^T \int_E |F_n(t, x) - F_m(t, x)|^2 \rho(dt, dx) > K \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Con lo cual, para todo  $\theta > 0$ , dado  $\epsilon > 0$  es posible encontrar  $m_0 \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $m, n > m_0$  es cierto

$$\mathbb{P} \left( \int_0^T \int_E |F_n(t, x) - F_m(t, x)|^2 \rho(dt, dx) > \theta \beta^2 \right) < \epsilon.$$

Ahora, seleccionamos  $K = \theta \beta^2$  en (3.5), para deducir que la sucesión

$$\left( \int_0^T \int_E F_n(t, x) M(dt, dx), n \in \mathbb{N} \right)$$

es de Cauchy en probabilidad y por lo tanto tiene un único límite en probabilidad (debido a la convergencia casi segura de la subsucesión). Denotamos este límite como

$$\hat{I}_T(F) = \int_0^T \int_E F(t, x)M(dt, dx);$$

de tal manera que, en probabilidad, se cumple

$$\int_0^T \int_E F(t, x)M(dt, dx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E F_n(t, x)M(dt, dx).$$

Llamaremos a  $\hat{I}_T(F)$ , la *integral estocástica (extendida)*, y se dejará de utilizar *extendida* cuando el contexto sea claro.

A continuación, presentamos la generalización del Lema 3.2.10 para una  $F$  arbitraria en  $\mathbb{P}_2(T, E)$ .

**Proposición 3.2.11** Si  $F \in \mathbb{P}_2(T, E)$ , entonces para todo  $C, K \geq 0$  se cumple

$$\mathbb{P} \left( \left| \int_0^T \int_E F(t, x)M(dt, dx) \right| > C \right) \leq \frac{K}{C^2} + \mathbb{P} \left( \int_0^T \int_E |F(t, x)|^2 \rho(dt, dx) > K \right).$$

*Demostración:* Consideremos una sucesión  $(F_n, n \in \mathbb{N})$  en  $\mathbb{S}(T, E)$  que converge a  $F \in \mathbb{P}_2(T, E)$ , es decir,

$$\mathbb{P} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_E |F_n(t, x) - F(t, x)|^2 \rho(dt, dx) = 0 \right) = 1. \quad (3.6)$$

Asimismo, en probabilidad se tiene

$$\int_0^T \int_E F(t, x)M(dt, dx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E F_n(t, x)M(dt, dx). \quad (3.7)$$

Además para toda  $F_n$  y para todo  $C, K \geq 0$  se cumple

$$\mathbb{P} \left( \left| \int_0^T \int_E F_n(t, x)M(dt, dx) \right| > C \right) \leq \frac{K}{C^2} + \mathbb{P} \left( \int_0^T \int_E |F_n(t, x)|^2 \rho(dt, dx) > K \right).$$

Tomando límite cuando  $n \rightarrow \infty$  en la expresión anterior y utilizando las convergencias (3.6) y (3.7), se demuestra la proposición.  $\square$

Análogamente a lo que se hizo en la integración  $L^2$  podemos considerar las integrales estocásticas (extendidas) como procesos estocásticos  $(\hat{I}_t(F), t \geq 0)$ , imponiendo la condición

$$\mathbb{P} \left( \int_0^t \int_E |F(t, x)|^2 \rho(dt, dx) < \infty \right) = 1, \quad t \geq 0.$$

Tal como se hizo en la sección anterior se van a enunciar las propiedades más importantes de  $I_T(F)$  y del proceso  $(\hat{I}_t(F), t \geq 0)$  cuando  $F \in \mathbb{P}_2(T, E)$ . Como se verá a continuación, muchas propiedades se mantienen; pero el hecho de extender el espacio de las funciones integrables hace que  $(\hat{I}_t(F), t \geq 0)$  no sea necesariamente un martingala, sino una martingala local.

**Teorema 3.2.12** Si  $F, G \in \mathbb{P}_2(T, E)$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , entonces

$$(1) \hat{I}_T(\alpha F + \beta G) = \alpha \hat{I}_T(F) + \beta \hat{I}_T(G);$$

(2)  $(\hat{I}_t(F), t \geq 0)$  es  $\mathcal{F}_t$ -adaptada.

*Demostración:* Se ha clarificado la versión dada por Applebaum [1], p. 204. Para demostrar (1), se sabe que si  $F \in \mathbb{P}_2(T, E)$ , entonces existe una sucesión de funciones simples  $(F_n, n \in \mathbb{N})$  en  $\mathbb{S}(T, E)$  tal que

$$\mathbb{P} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_E |F(t, x) - F_n(t, x)|^2 \rho(dt, dx) = 0 \right) = 1.$$

Asimismo, si  $G \in \mathbb{P}_2(T, E)$  también existe una sucesión de funciones simples  $(G_n, n \in \mathbb{N})$  que pertenecen a  $\mathbb{S}(T, E)$  tal que

$$\mathbb{P} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_E |G(t, x) - G_n(t, x)|^2 \rho(dt, dx) = 0 \right) = 1.$$

Con lo cual es lógico que  $\alpha F + \beta G$  es aproximada por  $\alpha F_n + \beta G_n$ , es decir

$$\mathbb{P} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_E |\alpha F(t, x) + \beta G(t, x) - \alpha F_n(t, x) - \beta G_n(t, x)|^2 \rho(dt, dx) = 0 \right) = 1.$$

Esto se deduce del hecho de que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left( \int_0^T \int_E |\alpha F(t, x) + \beta G(t, x) - \alpha F_n(t, x) - \beta G_n(t, x)|^2 \rho(dt, dx) \neq 0 \right) \leq \\ & \leq \mathbb{P} \left( \int_0^T \int_E |F(t, x) - F_n(t, x)|^2 \rho(dt, dx) \neq 0 \right) \\ & \quad + \mathbb{P} \left( \int_0^T \int_E |G(t, x) - G_n(t, x)|^2 \rho(dt, dx) \neq 0 \right). \end{aligned}$$

En razón de las propiedades de la integral estocástica para las funciones simples se sabe que

$$\hat{I}_T(\alpha F_n + \beta G_n) = \alpha \hat{I}_T(F_n) + \beta \hat{I}_T(G_n),$$

y tomando límite cuando  $n \rightarrow \infty$  en probabilidad en ambos lados se tiene el resultado requerido.

Para demostrar (2), consideremos una sucesión  $(F_n, n \in \mathbb{N})$  en  $\mathbb{S}(T, E)$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_E |F(t, x) - F_n(t, x)|^2 \rho(dt, dx) = 0;$$

con lo cual el proceso  $(\hat{I}_t(F_n), t \geq 0)$  es claramente adaptado. Debido a que  $\hat{I}_t(F_n) \rightarrow \hat{I}_t(F)$  en probabilidad cuando  $n \rightarrow \infty$ , es posible encontrar una subsucesión  $(F_{n_k}, n_k \in \mathbb{N})$  tal que  $\hat{I}_t(F_{n_k}) \rightarrow \hat{I}_t(F)$  casi seguramente, luego cuando  $n_k \rightarrow \infty$  se obtiene el resultado requerido.  $\square$

**Definición 3.2.13 (Martingala Local)** Una martingala local es un proceso adaptado  $M = (M(t), t \geq 0)$  para el cual existe una sucesión de tiempos aleatorios  $(\tau_n, n \in \mathbb{N})$  tales que  $\tau_1 \leq \dots \leq \tau_n \rightarrow \infty$  c.s. y tal que cada uno de los procesos  $(M(t \wedge \tau_n), t \geq 0)$  es una martingala.

**Teorema 3.2.14** Sea  $F \in \mathbb{P}_2(T, E)$ . Entonces

- (1)  $(\hat{I}_t(F), t \geq 0)$  es una martingala local;
- (2)  $(\hat{I}_t(F), t \geq 0)$  tiene una modificación cadlag.

*Demostración:* Para demostrar (1), consideremos una sucesión de tiempos de parada  $(\tau_n, n \in \mathbb{N})$  dada por

$$\tau_n(\omega) = \inf \left\{ t \geq 0; \int_0^t \int_E |F(t, x)(\omega)|^2 \rho(dt, dx) > n \right\},$$

para todo  $\omega \in \Omega$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \infty$  (c.s). Luego definimos  $F_n(t, x) = F(t, x)1_{\{\tau_n \geq t\}}$  para todo  $x \in E$ ,  $t \geq 0$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Con lo cual tenemos

$$\int_0^t \int_E |F_n(s, x)(\omega)|^2 \rho(ds, dx) \leq n.$$

Consecuentemente,  $F_n \in \mathbb{H}_2(t, E)$  para todo  $t \geq 0$ . Luego, el proceso  $(\hat{I}_t(F_n), t \geq 0)$  es una martingala, pero  $\hat{I}_t(F_n) = \hat{I}_{t \wedge \tau_n}(F)$ , con lo cual se obtiene el resultado requerido.

Para demostrar (2), sabemos que  $(\tau_n, n \in \mathbb{N})$  es creciente c.s., entonces para todo  $\omega \in \Omega$ , podemos encontrar  $n_0(\omega) \in \mathbb{N}$  tal que  $t_0 = t_0 \wedge \tau_{n_0}(\omega)$ . Pero sabemos que  $(\hat{I}_{t \wedge \tau_n}(F), t \geq 0)$  es una martingala y por lo tanto, tiene una modificación cadlag.  $\square$

Terminamos esta sección analizando el caso especial en el cual la medida martingala valuada es continua.

**Teorema 3.2.15** Si  $M$  es continuo y  $F \in \mathbb{P}_2(T, E)$ , entonces  $\hat{I}_t(F)$  es continuo en  $[0, T]$ .

*Demostración:* Es fácil de verificar que si  $M$  es continuo y  $F \in \mathbb{S}(T, E)$ , entonces  $\hat{I}_t(F)$  es continuo en  $[0, T]$ . Comenzaremos por el caso en que  $F \in \mathbb{H}_2(T, E)$ . Sea  $(F_n, n \in \mathbb{N})$  una sucesión en  $\mathbb{S}(T, E)$  la cual converge a  $F$ ; luego, por la desigualdad de Chebyshev-Markov (Teorema A.1.1) y la desigualdad de martingalas de Doob (Teorema B.2.3) se tiene que, para todo  $\epsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} |I_t(F_n) - I_t(F)| > \epsilon \right) &\leq \frac{1}{\epsilon^2} E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |I_t(F_n) - I_t(F)|^2 \right] \\ &\leq \frac{4}{\epsilon^2} E [ |I_t(F_n) - I_t(F)|^2 ], \end{aligned}$$

donde el lado derecho tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ . Como la convergencia en probabilidad está demostrada, entonces existe una subsucesión  $(F_{n_k}, n_k \in \mathbb{N})$  tal que

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} |I_t(F_{n_k}) - I_t(F)| = 0, \text{ c.s.}$$

Luego, para demostrar la continuidad de los caminos muestrales de  $I_t(F)$  tenemos que para todo  $t_1 \in [0, T]$ ;

$$\lim_{t \rightarrow t_1} |I_t(F) - I_{t_1}(F)| \leq \lim_{t \rightarrow t_1} |I_t(F) - I_t(F_{n_k}) - (I_{t_1}(F) - I_{t_1}(F_{n_k})) + I_t(F_{n_k}) - I_{t_1}(F_{n_k})|.$$

Fijamos  $\epsilon > 0$ , luego existe  $r$  tal que para todo  $k > r$  se cumple que  $|I_t(F) - I_t(F_{n_k})| < \frac{\epsilon}{3}$ . Asimismo, existe  $h$  tal que para todo  $k > h$  se cumple que  $|I_{t_1}(F) - I_{t_1}(F_{n_k})| < \frac{\epsilon}{3}$ . Luego, debido a la continuidad de los caminos muestrales en  $\mathbb{S}(T, E)$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $|t_1 - t| < \delta$ , se tiene que  $|I_t(F_{n_k}) - I_{t_1}(F_{n_k})| < \frac{\epsilon}{3}$ , con lo cual la proposición queda demostrada para  $F \in \mathbb{H}_2(T, E)$ . La extensión a  $F \in \mathbb{P}_2(T, E)$  se hace a través del mismo argumento de la parte (2) del Teorema 3.2.14.  $\square$

### 3.3 Integrales estocásticas basadas en procesos de Lévy

En esta parte, vamos a examinar rápidamente algunas integrales estocásticas en las que el integrador es un proceso de Lévy. Asimismo, utilizaremos la notación de sumas de Einstein, donde por ejemplo si  $x, y \in \mathbb{R}^d$  y  $A = (A_j^i)$  es una matriz  $d \times d$  entonces

$$A_j^i x_i y^j = \sum_{i,j} A_j^i x_i y^j = (x, Ay).$$

#### 3.3.1 Integrales estocásticas brownianas

En este caso, vamos a considerar  $E = \{0\}$ ,  $\mathbb{P}_2(T, \{0\}) = \mathbb{P}_2(T)$ , el espacio que contiene a todas las funciones predecibles  $F : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  para las cuales  $\mathbb{P} \left( \int_0^T |F(t)|^2 dt < \infty \right) = 1$  y tomemos cualquiera de las componentes  $(B^1, B^2, \dots, B^m)$  de un movimiento browniano estándar  $m$ -dimensional  $B = (B(t), t \geq 0)$  como la medida martingala valuada  $M$ . Luego, se pueden considerar integrales del tipo

$$Y^i(t) = \int_0^t F_j^i(s) dB^j(s)$$

para  $1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq m, 0 \leq t \leq T$  donde  $F = (F_j^i)$  es una matriz  $d \times m$  con entradas en  $\mathbb{P}_2(T)$ . Esta integral estocástica genera el proceso estocástico  $Y = (Y(t), 0 \leq t \leq T)$  con valores en  $\mathbb{R}^d$  y componentes  $(Y^1, Y^2, \dots, Y^d)$ . Claramente,  $Y$  es continuo en  $0 \leq t \leq T$  debido al Teorema 3.2.15. Más aún, si  $G = (G(t), 0 \leq t \leq T)$  es un proceso predecible en  $\mathbb{R}^d$  y cada componente de  $G$  pertenece a  $L^1[0, T]$  entonces  $M = (M(t), 0 \leq t \leq T)$  es adaptado y con caminos muestrales continuos, donde para cada  $1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq m$ ,

$$M^i(t) = \int_0^t F_j^i(s) dB^j(s) + \int_0^t G^i(s) ds. \tag{3.8}$$

En secciones posteriores, vamos a tener la siguiente situación: sea  $((r)_n, n \in \mathbb{N})$  una sucesión de particiones de la forma

$$(r)_n = \left\{ 0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_{m(n)}^{(n)} < t_{m(n)+1}^{(n)} = T \right\},$$

y supongamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta((r)_n) = 0$ , donde la abertura de la partición  $\delta((r)_n)$  está dada por  $\max_{0 \leq j \leq m(n)} |t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)}|$ . Luego, sea  $(F(t), t \geq 0)$  un proceso adaptado y continuo por derecha y definimos una sucesión de procesos simples  $(F_n(t), n \in \mathbb{N})$  donde

$$F_n(t) = \sum_{j=0}^{m(n)} F(t_j^{(n)}) 1_{]t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}]}(t),$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $0 \leq t \leq T$ .

Se verifica fácilmente que  $F_n \rightarrow F$  en  $\mathbb{P}_2(T)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Con lo cual, se tiene inmediatamente que  $\hat{I}_t(F_n) \rightarrow \hat{I}_t(F)$  en probabilidad cuando  $n \rightarrow \infty$ , para todo  $0 \leq t \leq T$ .

### 3.3.2 Integrales estocásticas de Poisson

En este caso, vamos a considerar  $E = B - \{0\}$  con  $B = \{x \in \mathbb{R}, |x| < 1\}$ . Sea  $N$  una medida aleatoria de Poisson en  $\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^d - \{0\})$  con medida de intensidad  $\nu$ , la cual asumimos medida de Lévy. Luego, consideremos como  $M$  a la medida aleatoria de Poisson compensada  $\tilde{N}$ . En este caso,  $\mathbb{P}_2(T, E)$  es el espacio de todas las funciones predecibles  $F : [0, T] \times E \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  para las cuales  $\mathbb{P} \left( \int_0^T \int_E |F(t, x)|^2 \nu(dx) dt < \infty \right) = 1$ . Sea  $H$  un vector cuyas componentes  $(H^1, H^2, \dots, H^d)$  toman valores en  $\mathbb{P}_2(T, E)$ ; con lo cual, podemos contruir el proceso  $Z = (Z(t), 0 \leq t \leq T)$  con valores en  $\mathbb{R}^d$  cuyas componentes  $(Z^1, Z^2, \dots, Z^d)$  son

$$Z_i(T) = \int_0^T \int_{|x| < 1} H^i(t, x) \tilde{N}(dt, dx).$$

Sea  $A \in \mathbb{B}_0$  e introducimos el proceso de Poisson compuesto  $P = (P(t), t \geq 0)$ , donde  $P(t) = \int_A x N(t, dx)$ . Sea  $K$  un proceso predecible, y presentemos la siguiente generalización,

$$\int_0^T \int_A K(t, x) N(dt, dx) = \sum_{0 \leq u \leq T} K(u, \Delta P_u) 1_A(\Delta P_u)$$

como una suma aleatoria finita. En particular, si  $H$  es cuadrado integrable, podemos definir, para cada  $1 \leq i \leq d$ ,

$$\int_0^T \int_A H^i(t, x) \tilde{N}(dt, dx) = \int_0^T \int_A H^i(t, x) N(dt, dx) - \int_0^T \int_A H^i(t, x) \nu(dx) dt.$$

Los siguientes resultados permiten extender la técnica de interlazado a integrales estocásticas.

**Teorema 3.3.1** *Si  $F \in \mathbb{P}_2(T, E)$ , entonces para cada sucesión  $(A_n, n \in \mathbb{N})$  en  $\mathbb{B}(E)$  con  $A_n \uparrow E$  cuando  $n \rightarrow \infty$  se tiene*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{A_n} F(t, x) \tilde{N}(dt, dx) = \int_0^T \int_E F(t, x) \tilde{N}(dt, dx),$$

en probabilidad.

*Demostración:* Utilizando la Proposición 3.2.11, podemos encontrar que para cualesquiera  $\delta, \epsilon > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left( \left| \int_0^T \int_E F(t, x) \tilde{N}(dt, dx) - \int_0^T \int_{A_n} F(t, x) \tilde{N}(dt, dx) \right| > \epsilon \right) \\ & \leq \frac{\delta}{\epsilon^2} + \mathbb{P} \left( \int_0^T \int_{E-A_n} |F(t, x)|^2 \nu(dx) dt > \delta \right) \end{aligned}$$

con lo cual el resultado se deduce inmediatamente.  $\square$

**Teorema 3.3.2** Si  $F \in \mathbb{H}_2(T, E)$ , entonces existe una sucesión  $(A_n, n \in \mathbb{N})$  en  $\mathbb{B}(E)$  con  $\nu(A_n) < \infty$  y  $A_n \uparrow E$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , tal que casi seguramente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{A_n} F(t, x) \tilde{N}(dt, dx) = \int_0^T \int_E F(t, x) \tilde{N}(dt, dx) \quad c.s.,$$

y la convergencia es uniforme en los intervalos compactos de  $[0, T]$ .

*Demostración:* Definimos una sucesión  $(\epsilon_n, n \in \mathbb{N})$  que decrece monóticamente a cero, con  $\epsilon_1 = 1$  y para  $n \geq 2$ ,

$$\epsilon_n = \sup \left\{ y \geq 0, \int_0^T \int_{0 < |x| < y} E [|F(t, x)|^2] \nu(dx) dt \leq \frac{1}{8^n} \right\}.$$

Definimos  $A_n = \{x \in E; \epsilon_n < |x| < 1\}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Luego, por la desigualdad de martingalas de Doob (Teorema B.2.3), para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} & E \left[ \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s \int_{A_{n+1}} F(u, x) \tilde{N}(du, dx) - \int_0^s \int_{A_n} F(u, x) \tilde{N}(du, dx) \right|^2 \right] \\ & \leq 4E \left[ \left| \int_0^t \int_{A_{n+1}-A_n} F(u, x) \tilde{N}(du, dx) \right|^2 \right] \\ & = 4 \int_0^t \int_{A_{n+1}-A_n} E [|F(u, x)|^2] \nu(dx) du. \end{aligned}$$

Luego, el resultado se obtiene con el mismo argumento del Teorema 2.6.1.  $\square$

### 3.3.3 Integrales estocásticas del tipo Lévy

**Definición 3.3.3 (Integral estocástica del tipo Lévy)** Decimos que un proceso estocástico  $Y = (Y(t), t \geq 0)$  con valores en  $\mathbb{R}^d$  es una integral estocástica del tipo Lévy si puede escribirse de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} Y^i(t) &= Y^i(0) + \int_0^t G^i(s) ds + \int_0^t F_j^i(s) dB^j(s) \\ &+ \int_0^t \int_{|x| < 1} H^i(s, x) \tilde{N}(ds, dx) \end{aligned}$$

$$+ \int_0^t \int_{|x| \geq 1} K^i(s, x) N(ds, dx) \quad (3.9)$$

donde, para todo  $1 \leq i \leq d$ ,  $1 \leq j \leq m$ ,  $t \geq 0$  se tiene que  $|G^i|^{\frac{1}{2}}$ ,  $F_j^i \in \mathbb{P}_2(T)$ ,  $H^i \in \mathbb{P}_2(T, E)$  con  $E = \{x \in \mathbb{R}, |x| < 1\} - \{0\}$  y  $K$  es predecible. Aquí,  $B$  es un movimiento browniano  $m$ -dimensional y  $N$  es una medida de Poisson independiente de  $B$  en  $\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^d - \{0\})$  con compensador  $\tilde{N}$  y medida de intensidad  $\nu$ , la cual se asume que es una medida de Lévy y  $Y(0)$  es una variable aleatoria  $\mathcal{F}_0$  medible.

Sea  $(\tau_n, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$  la sucesión de tiempos de llegada del proceso de Poisson  $N(t, E^c)$ . Ahora, el proceso con valor  $\int_0^t \int_{|x| \geq 1} K^i(s, x) N(ds, dx)$  en el tiempo  $t$  es una variable aleatoria con valor constante en el intervalo  $[\tau_n, \tau_{n+1}[$  y, por tanto, tiene caminos cadlag. Luego, por el Teorema 3.2.14,  $Y$  tiene una modificación cadlag y a partir de ahora identificaremos a  $Y$  con esta modificación. Asimismo, podemos simplificar las expresiones utilizando la notación de los *diferenciales estocásticos* para representar las integrales del tipo Lévy. Entonces, podemos escribir (3.9) como

$$dY(t) = G(t)dt + F(t)dB(t) + H(t, x)\tilde{N}(dt, dx) + K(t, x)N(dt, dx).$$

Podemos construir integrales estocásticas del tipo Lévy por medio del interlazado. Sea  $(A_n, n \in \mathbb{N})$  en  $\mathbb{B}(E)$  con  $A_n \uparrow E$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ; podemos considerar la sucesión de procesos  $(Y_n, n \in \mathbb{N})$  definida por

$$Y_n^i(t) = \int_0^t G^i(s)ds + \int_0^t F_j^i(s)dB^j(s) + \int_0^t \int_{A_n} H^i(s, x)\tilde{N}(ds, dx) + \int_0^t \int_{|x| \geq 1} K^i(s, x)N(ds, dx)$$

para todo  $1 \leq i \leq d$ ,  $1 \leq j \leq m$ ,  $t \geq 0$ ; y a partir de los Teoremas 3.3.1 y 3.3.2 se derivan inmediatamente los siguientes dos corolarios.

**Corolario 3.3.4** Si  $H \in \mathbb{P}_2(T, E)$ , entonces para cada sucesión  $(A_n, n \in \mathbb{N})$  en  $\mathbb{B}(E)$  con  $A_n \uparrow E$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(t) = Y(t),$$

en probabilidad.

**Corolario 3.3.5** Si  $H \in \mathbb{H}_2(T, E)$ , entonces existe una sucesión  $(A_n, n \in \mathbb{N})$  en  $\mathbb{B}(E)$  con  $\nu(A_n) < \infty$  y  $A_n \uparrow E$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(t) = Y(t) \quad c.s.,$$

y la convergencia es uniforme en los intervalos compactos de  $[0, T]$

A partir de la construcción de  $Y_n$  a través del interlazado, se puede lograr un mayor detalle en los resultados anteriores. Pero para ello necesitamos imponer una restricción adicional en el Corolario 3.3.4, pues la sucesión  $(A_n, n \in \mathbb{N})$  necesita además que  $\nu(A_n) < \infty$ . Sea  $C = (C(t), t \geq 0)$  el proceso con diferencial estocástico  $dC(t) = G(t)dt + F(t)dB(t)$ ; sea

$dW(t) = dC(t) + K(t, x)N(dt, dx)$ . Se puede construir  $W$  a partir de  $C$  interlazándolo con los saltos del proceso de Poisson compuesto  $P = (P(t), t \geq 0)$  con  $P(t) = \int_{|x| \geq 1} xN(t, dx)$  de la forma siguiente. Sea  $(\xi^n, n \in \mathbb{N})$  la sucesión de saltos que genera  $P$ , entonces

$$W(t) = \begin{cases} C(t) & \text{si } 0 \leq t < \xi^1, \\ C(\xi^1) + K(\xi^1, \Delta Y(\xi^1)) & \text{si } t = \xi^1, \\ W(\xi^1) + C(t) - C(\xi^1) & \text{si } \xi^1 < t < \xi^2, \\ W(\xi^2-) + K(\xi^2, \Delta P(\xi^2)) & \text{si } t = \xi^2, \end{cases}$$

y se prosigue recursivamente. Para construir la sucesión  $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ , se requiere una sucesión de procesos de Poisson compuestos  $Q_n = (Q_n(t), n \in \mathbb{N})$  para el cual  $Q_n(t) = \int_{A_n} xN(t, dx)$  y denotaremos por  $(\tau_n^m, m \in \mathbb{N})$  la correspondiente sucesión de tiempos de salto. Asimismo, se requiere una sucesión de integrales estocásticas del tipo Lévy  $(Z_n, n \in \mathbb{N})$ , donde

$$Z_n^i(t) = W^i(t) - \int_0^t \int_{A_n} H^i(s, x)\nu(dx)ds.$$

Luego construimos la sucesión  $(Y_n, n \in \mathbb{N})$  que aparece en los Corolarios 3.3.4 y 3.3.5 como sigue:

$$Y_n(t) = \begin{cases} Z_n(t) & \text{si } 0 \leq t < \tau_n^1, \\ Z_n(\tau_n^1) + H(\tau_n^1, \Delta Q_n(\tau_n^1)) & \text{si } t = \tau_n^1, \\ Y_n(\tau_n^1) + Z_n(t) - Z_n(\tau_n^1) & \text{si } \tau_n^1 < t < \tau_n^2, \\ Y_n(\tau_n^2-) + H(\tau_n^2, \Delta Q_n(\tau_n^2)) & \text{si } t = \tau_n^2, \end{cases}$$

y se prosigue recursivamente.

### 3.4 La fórmula de Itô

Vamos a introducir la notación de las funciones que se utilizarán en esta sección.

Para  $1 \leq n \leq \infty$ , denotamos por  $C^n(\mathbb{R}^d)$  al conjunto de todas las funciones  $n$  veces diferenciables de  $\mathbb{R}^d$  a  $\mathbb{R}$  y cuyas derivadas son continuas. La  $j$ -ésima derivada parcial de  $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$  en  $x \in \mathbb{R}^d$  la denotaremos como  $\partial_j f(x)$ . De manera similar, si  $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$  denotamos como

$$\partial_i \partial_j f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

Asimismo,  $C^{1,2}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$  denota las funciones de  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$  en  $\mathbb{R}$  que tienen primera derivada continua respecto a la primera variable, y que tienen segunda derivada continua respecto a la segunda variable.

#### 3.4.1 Fórmula de Itô para integrales brownianas

Sea  $M = (M(t), t \geq 0)$  una integral browniana de la forma

$$M^i(t) = \int_0^t F_j^i(s)dB^j(s)$$

para  $1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq m$ , donde  $F = (F_j^i)$  es una matriz  $d \times m$  tomando valores en  $\mathbb{P}_2(T)$  y  $B = (B^1, \dots, B^m)$  un movimiento browniano estándar en  $\mathbb{R}^m$ . La finalidad

es encontrar la estructura de  $(f(M(t)), t \geq 0)$ , donde  $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ . Asimismo, vamos a considerar  $((r)_n, n \in \mathbb{N})$ , una sucesión de particiones de la forma

$$(r)_n = \left\{ 0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_{m(n)}^{(n)} < t_{m(n)+1}^{(n)} = T \right\},$$

y supongamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta((r)_n) = 0$ , donde la abertura de la partición  $\delta((r)_n)$  está dada por  $\max_{0 \leq j \leq m(n)} |t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)}|$ .

**Proposición 3.4.1** *Si  $H_{kl} \in \mathbb{H}_2(T)$  para todo  $1 \leq k, l \leq m$ , entonces en  $L^2$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{m(n)} H_{kl}(t_j^{(n)}) \left[ B^k(t_{j+1}^{(n)}) - B^k(t_j^{(n)}) \right] \left[ B^l(t_{j+1}^{(n)}) - B^l(t_j^{(n)}) \right] = \sum_{k=1}^m \int_0^T H_{kk}(s) ds.$$

*Demostración*<sup>2</sup>: Se ha completado la versión dada por Applebaum [1], pp. 219-220. En primer lugar vamos a simplificar la notación eliminando  $n$ , con lo cual  $H_{kl}(t_j^{(n)}) = H_{kl}^j$ . Además,  $\Delta B_j^k = B^k(t_{j+1}^{(n)}) - B^k(t_j^{(n)})$  y  $\Delta t_j = t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)}$ . Ahora, como  $B^k$  es independiente de  $B^l$  para  $l \neq k$ , se tiene

$$\begin{aligned} & E \left[ \left( \sum_j H_{kl}^j (\Delta B_j^k) (\Delta B_j^l) - \sum_j \sum_k H_{kk}^j \Delta t_j \right)^2 \right] \\ &= E \left[ \left( \sum_j H_{kk}^j (\Delta B_j^k)^2 - \sum_j \sum_k H_{kk}^j \Delta t_j \right)^2 \right] \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k E [H_{kk}^i H_{kk}^j [(\Delta B_i^k)^2 - \Delta t_i] [(\Delta B_j^k)^2 - \Delta t_j]]. \end{aligned}$$

Como en la demostración del Lema 3.2.3, el último término se puede separar en tres partes:  $i < j$ ,  $j > i$  e  $i = j$ . Por la segunda condición adicional de la medida martingala valuada  $M$  y por los incrementos independientes, los dos primeros casos se hacen cero. Ahora, utilizando el hecho conocido que  $\Delta B_j^k \sim N(0, \Delta t_j)$  y  $E [(\Delta B_j^k)^4] = 3(\Delta t_j)^2$ , y la segunda condición adicional de la medida martingala valuada  $M$ ,

$$\begin{aligned} & \sum_i \sum_j \sum_k E [H_{kk}^i H_{kk}^j [(\Delta B_i^k)^2 - \Delta t_i] [(\Delta B_j^k)^2 - \Delta t_j]] = \\ &= \sum_j \sum_k E \left[ (H_{kk}^j)^2 [(\Delta B_j^k)^2 - \Delta t_j]^2 \right] \\ &= \sum_j \sum_k E \left[ (H_{kk}^j)^2 \right] E \left[ [(\Delta B_j^k)^2 - \Delta t_j]^2 \right] \\ &= \sum_j \sum_k E \left[ (H_{kk}^j)^2 \right] E \left[ (\Delta B_j^k)^4 - 2(\Delta B_j^k)^2 \Delta t_j + (\Delta t_j)^2 \right] \\ &= 2 \sum_j \sum_k E \left[ (H_{kk}^j)^2 \right] (\Delta t_j)^2 \end{aligned}$$

<sup>2</sup>En términos simples y sin utilizar la notación de sumas de Einstein se busca demostrar que

$$\sum_{k,l} H_{kl} dB^k dB^l = \sum_{k=1}^m \int_0^T H_{kk}(s) ds.$$

donde el último término tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ . □

La siguiente proposición se deriva inmediatamente de la proposición anterior.

**Corolario 3.4.2** *Si  $B$  es un movimiento browniano unidimensional, entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{m(n)} \left[ B(t_{j+1}^{(n)}) - B(t_j^{(n)}) \right]^2 = T$$

en  $L^2$ .

Consideremos ahora  $M$ , una integral browniana con tendencia de la forma

$$M^i(t) = \int_0^t F_j^i(s) dB^j(s) + \int_0^t G^i(s) ds, \quad (3.10)$$

para  $1 \leq i \leq d$ ,  $1 \leq j \leq m$ ,  $t \geq 0$ , donde  $F = (F_j^i)$  es una matriz  $d \times m$  tomando valores en  $\mathbb{P}_2(T)$  y  $(G^i)^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{P}_2(T)$ .

**Definición 3.4.3 (Proceso de variación cuadrática)** *Para todo par de índices  $i, j$  tales que  $1 \leq i, j \leq d$ , definimos el proceso de variación cuadrática  $([M^i, M^j](t), t \geq 0)$  como*

$$[M^i, M^j](t) = \sum_{k=1}^m \int_0^t F_k^i(s) F_k^j(s) ds.$$

**Teorema 3.4.4 (Teorema de Itô 1)** *Si  $M = (M(t), t \geq 0)$  es una integral browniana con tendencia de la forma de (3.10), entonces para toda  $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $t \geq 0$ , con probabilidad 1 se tiene*

$$f(M(t)) - f(M(0)) = \int_0^t \partial_i f(M(s)) dM^i(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_i \partial_j f(M(s)) d[M^i, M^j](s).$$

*Demostración:* Se ha clarificado la versión dada por Applebaum [1], pp. 221-222. Asumiremos que  $M(t)$ ,  $F_j^i(t)$  y  $G^i(t)$  son variables aleatorias acotadas para todo  $t \geq 0$ . Sea  $((r)_n, n \in \mathbb{N})$  una sucesión de particiones de  $[0, t]$ . Por el teorema de Taylor, tenemos que para cada una de dichas particiones (se ha suprimido el índice  $n$ ):

$$\begin{aligned} f(M(t_{k+1})) - f(M(t_k)) &= \partial_i f(M(t_k)) [M^i(t_{k+1}) - M^i(t_k)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_i \partial_j f(N_{ij}^k) [M^i(t_{k+1}) - M^i(t_k)] [M^j(t_{k+1}) - M^j(t_k)], \end{aligned}$$

donde  $N_{ij}^k$  son variables aleatorias  $\mathcal{F}_{t_{j+1}}$ -medibles en  $\mathbb{R}^d$  y satisfacen  $|N_{ij}^k - M(t_k)| \leq |M(t_{k+1}) - M(t_k)|$ . Luego,

$$f(M(t)) - f(M(0)) = \sum_{k=0}^m [f(M(t_{k+1})) - f(M(t_k))] = T_1(t) + \frac{1}{2} T_2(t),$$

donde

$$\begin{aligned} T_1(t) &= \sum_{k=0}^m \partial_i f(M(t_k)) [M^i(t_{k+1}) - M^i(t_k)], \\ T_2(t) &= \sum_{k=0}^m \partial_i \partial_j f(N_{ij}^k) [M^i(t_{k+1}) - M^i(t_k)] [M^j(t_{k+1}) - M^j(t_k)]. \end{aligned}$$

Observemos que, cuando  $n \rightarrow \infty$ , se tiene

$$T_1(t) \rightarrow \int_0^t \partial_i f(M(s)) dM^i(s)$$

en probabilidad. Entonces, escribimos  $T_2(t) = S_1(t) + S_2(t)$ , donde

$$S_1(t) = \sum_{k=0}^m \partial_i \partial_j f(M(t_k)) [M^i(t_{k+1}) - M^i(t_k)] [M^j(t_{k+1}) - M^j(t_k)],$$

$$S_2(t) = \sum_{k=0}^m [\partial_i \partial_j f(N_{ij}^k) - \partial_i \partial_j f(M(t_k))] [M^i(t_{k+1}) - M^i(t_k)] [M^j(t_{k+1}) - M^j(t_k)].$$

Luego, se tiene que cuando  $n \rightarrow \infty$ ,

$$S_1(t) \rightarrow \int_0^t \partial_i \partial_j f(M(s)) d[M^i, M^j](s),$$

en probabilidad. Posteriormente, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$|S_2(t)| \leq \max_{0 \leq k \leq m} |\partial_i \partial_j f(N_{ij}^k) - \partial_i \partial_j f(M(t_k))| \left\{ \sum_{k=0}^m [M^i(t_{k+1}) - M^i(t_k)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=0}^m [M^j(t_{k+1}) - M^j(t_k)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Cuando  $n \rightarrow \infty$  y por continuidad, se cumple

$$\max_{0 \leq k \leq m} |\partial_i \partial_j f(N_{ij}^k) - \partial_i \partial_j f(M(t_k))| \rightarrow 0 \text{ c.s.},$$

y además

$$\sum_{k=0}^m [M^i(t_{k+1}) - M^i(t_k)]^2 \rightarrow [M^i, M^i](t), \text{ en } L^2.$$

Con lo cual  $S_2(t) \rightarrow 0$  en probabilidad<sup>3</sup>.

Para establecer el resultado general introducimos una sucesión de tiempos de parada  $(\tau(n), n \in \mathbb{N})$  definida por

$$\tau(n) = \inf \{t \geq 0 \mid \max \{|M^i(t)|, |G^i(t)|, |F_j^i(t)|; 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq m\} > n\} \wedge n,$$

con lo cual  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(n) = \infty$  (c.s.). Luego, la demostración anterior se aplica con  $(M(t \wedge \tau(n)), t \geq 0)$  y el resultado requerido se obtiene por la continuidad de  $f$  cuando se toman límites.  $\square$

**Corolario 3.4.5** Si  $M = (M(t), t \geq 0)$  es una integral browniana con tendencia de la forma de (3.10), entonces para toda  $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ ,  $t \geq 0$ , con probabilidad 1, se tiene

$$\begin{aligned} f(t, M(t)) - f(0, M(0)) &= \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, M(s)) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, M(s)) dM^i(s) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(s, M(s)) d[M^i, M^j](s). \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Si  $(X(n), n \in \mathbb{N})$  y  $(Y(n), n \in \mathbb{N})$  son sucesiones de variables aleatorias donde  $X(n) \rightarrow X$  en probabilidad y  $Y(n) \rightarrow 0$  casi seguramente se tiene que  $X(n)Y(n) \rightarrow 0$  en probabilidad.

*Demostración:* Utilizando la misma notación del teorema anterior, podemos escribir:

$$\begin{aligned} f(t, M(t)) - f(0, M(0)) &= \sum_{k=0}^m [f(t_{k+1}, M(t_{k+1})) - f(t_k, M(t_{k+1}))] \\ &\quad + \sum_{k=0}^m [f(t_k, M(t_{k+1})) - f(t_k, M(t_k))] . \end{aligned}$$

Por el teorema del valor medio, se puede encontrar  $t_k < s_k < t_{k+1}$ , para todo  $0 \leq k \leq m - 1$  tal que

$$\sum_{k=0}^m [f(t_{k+1}, M(t_{k+1})) - f(t_k, M(t_{k+1}))] = \sum_{k=0}^m \frac{\partial f}{\partial s}(s_k, M(t_{k+1}))(t_{k+1} - t_k)$$

y el lado derecho tiende a

$$\int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, M(s)) ds \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Los términos faltantes se analizan se la misma forma que en el Teorema 3.4.4. □

### 3.4.2 Fórmula de Itô para integrales del tipo Lévy

Se iniciará el desarrollo de este punto considerando las integrales del tipo Poisson,

$$W^i(t) = W^i(0) + \int_0^t \int_A K^i(s, x) N(ds, dx), \quad (3.11)$$

para  $1 \leq i \leq d$  donde  $t \geq 0$ ,  $A \in \mathbb{B}_0$  y  $K^i$  es predecible.

**Lema 3.4.6** *Si  $W$  es una integral de Poisson de la forma de (3.11), entonces para todo  $f \in C(\mathbb{R}^d)$  y para todo  $t \geq 0$ , con probabilidad 1, se cumple*

$$f(W(t)) - f(W(0)) = \int_0^t \int_A [f(W(s-) + K(s, x)) - f(W(s-))] N(ds, dx).$$

*Demostración:* Sea  $Y(t) = \int_A x N(t, dx)$  y con los tiempos de salto definidos recursivamente como  $\tau_0^A = 0$ , y para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\tau_n^A = \inf \{t \geq 0 : t > \tau_{n-1}^A; \Delta Y(t) \in A\}.$$

Con lo cual se encuentra

$$\begin{aligned} f(W(t)) - f(W(0)) &= \sum_{0 \leq s \leq t} [f(W(s)) - f(W(s-))] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [f(W(t \wedge \tau_n^A)) - f(W(t \wedge \tau_{n-1}^A))] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [f(W(t \wedge \tau_n^A-) + K(t \wedge \tau_n^A, \Delta Y(t \wedge \tau_n^A))) - f(W(t \wedge \tau_n^A-))] \\ &= \int_0^t \int_A [f(W(s-) + K(s, x)) - f(W(s-))] N(ds, dx). \quad \square \end{aligned}$$

Ahora, consideremos una integral del tipo Lévy de la forma

$$Y^i(t) = Y^i(0) + Y_c^i(t) + \int_0^t \int_A K^i(s, x) N(ds, dx), \quad (3.12)$$

donde

$$Y_c^i(t) = \int_0^t F_j^i(s) dB^j(s) + \int_0^t G^i(s) ds$$

para todo  $t \geq 0$ ,  $1 \leq i \leq d$ ,  $1 \leq j \leq m$ .

**Lema 3.4.7** Si  $Y$  es una integral de Poisson de la forma de (3.12), entonces para todo  $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$  y para todo  $t \geq 0$ , con probabilidad 1, se cumple

$$\begin{aligned} f(Y(t)) - f(Y(0)) &= \int_0^t \partial_i f(Y(s-)) dY_c^i(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_i \partial_j f(Y(s-)) d[Y_c^i, Y_c^j](s) \\ &+ \int_0^t \int_A [f(Y(s-) + K(s, x)) - f(Y(s-))] N(ds, dx). \end{aligned}$$

*Demostración:* Utilizando los mismos tiempos de parada del lema anterior, se tiene

$$\begin{aligned} f(Y(t)) - f(Y(0)) &= \sum_{n=0}^{\infty} [f(Y(t \wedge \tau_{n+1}^A)) - f(Y(t \wedge \tau_n^A))] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [f(Y(t \wedge \tau_{n+1}^A -)) - f(Y(t \wedge \tau_n^A))] \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} [f(Y(t \wedge \tau_{n+1}^A)) - f(Y(t \wedge \tau_{n+1}^A -))]. \end{aligned}$$

Utilizando interlazado, se aprecia que para cada  $\tau_n^A < t < \tau_{n+1}^A$  tenemos

$$Y(t) = Y(\tau_n^A -) + Y_c(t) - Y_c(\tau_n^A).$$

Luego, el resultado se deduce aplicando el Teorema 3.4.4 a la primera suma y el Lema 3.4.6 a la segunda.  $\square$

Ahora, se va a deducir la fórmula de Itô para integrales estocásticas del tipo Lévy más general. Sea  $Y$ , con diferencial estocástico

$$dY(t) = G(t)dt + F(t)dB(t) + \int_{|x|<1} H(t, x) \tilde{N}(dt, dx) + \int_{|x|\geq 1} K(t, x) N(dt, dx), \quad (3.13)$$

donde para cada  $1 \leq i \leq d$ ,  $1 \leq j \leq m$ ,  $t \geq 0$ ,  $|G^i|^{\frac{1}{2}}$ , tenemos  $F_j^i \in \mathbb{P}_2(T)$  y  $H^i \in \mathbb{P}_2(T, E)$ , y  $K$  es predecible. Asimismo, vamos a seguir considerando:

$$dY_c(t) = G(t)dt + F(t)dB(t),$$

y vamos a referirnos a la parte discontinua de  $Y$  como  $Y_d(t)$ , la cual está definida como

$$dY_d(t) = \int_{|x|<1} H(t, x) \tilde{N}(dt, dx) + \int_{|x|\geq 1} K(t, x) N(dt, dx).$$

Con lo cual, para todo  $t \geq 0$  podemos escribir

$$Y(t) = Y(0) + Y_c(t) + Y_d(t).$$

**Teorema 3.4.8 (Teorema de Itô 2)** Si  $Y$  es una integral estocástica del tipo Lévy de la forma dada por (3.13), entonces para toda  $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$  y  $t \geq 0$ , con probabilidad 1, se tiene

$$\begin{aligned} f(Y(t)) - f(Y(0)) &= \int_0^t \partial_i f(Y(s-)) dY_c^i(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_i \partial_j f(Y(s-)) d[Y_c^i, Y_c^j](s) \\ &+ \int_0^t \int_{|x| \geq 1} [f(Y(s-) + K(s, x)) - f(Y(s-))] N(ds, dx) \\ &+ \int_0^t \int_{|x| < 1} [f(Y(s-) + H(s, x)) - f(Y(s-))] \tilde{N}(ds, dx) \\ &+ \int_0^t \int_{|x| < 1} [f(Y(s-) + H(s, x)) - f(Y(s-)) \\ &\quad - H^i(s, x) \partial_i f(Y(s-))] \nu(dx) ds. \end{aligned}$$

*Demostración:* Se ha clarificado la versión dada por Applebaum [1], pp. 226-227. Asumiremos que  $Y(s)$  y  $H(s, x)$  son variables aleatorias acotadas para todo  $0 \leq s \leq t$  y  $|x| \leq 1$ ; con lo cual, todos los términos de la fórmula están bien definidos. Consideremos la sucesión de conjuntos  $(A_n, n \in \mathbb{N})$  de la misma forma que en el Teorema 3.3.1, y la sucesión de procesos interlazados  $(Y_n, n \in \mathbb{N})$  definida por

$$\begin{aligned} Y_n^i(t) &= \int_0^t G^i(s) ds + \int_0^t F_j^i(s) dB^j(s) + \int_0^t \int_{A_n} H^i(s, x) \tilde{N}(ds, dx) \\ &+ \int_0^t \int_{|x| \geq 1} K^i(s, x) N(ds, dx) \end{aligned}$$

para todo  $1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq m, t \geq 0$ . Luego, por el Lema 3.4.7 se tiene

$$\begin{aligned} f(Y_n(t)) - f(Y_n(0)) &= \int_0^t \partial_i f(Y(s-)) dY_c^i(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_i \partial_j f(Y(s-)) d[Y_c^i, Y_c^j](s) \\ &+ \int_0^t \int_{|x| \geq 1} [f(Y(s-) + K(s, x)) - f(Y(s-))] N(ds, dx) \\ &+ \int_0^t \int_{A_n} [f(Y(s-) + H(s, x)) - f(Y(s-))] N(ds, dx) \\ &- \int_0^t \int_{A_n} H^i(s, x) \partial_i f(Y(s-)) \nu(dx) ds \\ &= \int_0^t \partial_i f(Y(s-)) dY_c^i(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_i \partial_j f(Y(s-)) d[Y_c^i, Y_c^j](s) \\ &+ \int_0^t \int_{|x| \geq 1} [f(Y(s-) + K(s, x)) - f(Y(s-))] N(ds, dx) \\ &+ \int_0^t \int_{A_n} [f(Y(s-) + H(s, x)) - f(Y(s-))] \tilde{N}(ds, dx) \\ &+ \int_0^t \int_{A_n} [f(Y(s-) + H(s, x)) - f(Y(s-)) \\ &\quad - H^i(s, x) \partial_i f(Y(s-))] \nu(dx) ds. \end{aligned}$$

Ahora, por el Corolario 3.3.4, se tiene que  $Y_n(t) \rightarrow Y(t)$  en probabilidad, cuando  $n \rightarrow \infty$ ; con lo cual existe una subsucesión que converge a  $Y(t)$  de manera casi segura. El resultado requerido se logra pasando al límite en la expresión anterior a través de dicha subsucesión. El caso general para  $Y$  y  $H$  se logra a través del argumento del tiempo de parada utilizado en teoremas previos.  $\square$

**Proposición 3.4.9** Si  $H^i \in \mathbb{P}_2(T, E)$  para todo  $1 \leq i \leq d$  entonces se cumple, casi seguramente,

$$\int_0^t \int_{|x|<1} |H^i(s, x)H^j(s, x)| N(ds, dx) < \infty$$

para todo  $1 \leq i, j \leq d, t \geq 0$ .

*Demostración:* En primer lugar, se demostrará que casi seguramente

$$\int_0^t \int_{|x|<1} |H^i(s, x)|^2 N(ds, dx) < \infty,$$

para cualquier  $1 \leq i \leq d$ . Supongamos primero que  $H^i \in \mathbb{H}_2(T, E)$ , entonces

$$E \left[ \int_0^t \int_{|x|<1} |H^i(s, x)|^2 N(ds, dx) \right] = \int_0^t \int_{|x|<1} E \left( |H^i(s, x)|^2 \right) \nu(dx) ds.$$

Consecuentemente,  $\int_0^t \int_{|x|<1} |H^i(s, x)|^2 N(ds, dx) < \infty$  (c.s.). Ahora si  $H^i \in \mathbb{P}_2(T, E)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  definimos

$$\tau_n = \inf \left\{ t > 0 : \int_0^t \int_{|x|<1} |H^i(s, x)|^2 \nu(dx) ds > n \right\},$$

de tal manera que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \infty$  (c.s.). Entonces, casi seguramente

$$\int_0^{t \wedge \tau_n} \int_{|x|<1} |H^i(s, x)|^2 N(ds, dx) < \infty \text{ para cada } n,$$

y el resultado requerido se obtiene tomando límite. Para finalizar, si consideramos la desigualdad  $2|xy| \leq |x|^2 + |y|^2$ , para  $x, y \in \mathbb{R}$  y junto con el resultado anterior, la proposición queda demostrada.  $\square$

**Corolario 3.4.10** Si  $Y$  es una integral estocástica del tipo Lévy, entonces se cumple, casi seguramente, para  $1 \leq i \leq d$  y  $t \geq 0$

$$\sum_{0 \leq s \leq t} \Delta Y^i(s)^2 < \infty$$

*Demostración:* Por la Proposición 3.4.9, casi seguramente, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta Y^i(s)^2 &= \left[ \sum_{0 \leq s \leq t} H^i(s, \Delta Y(s)) 1_{\{\Delta Y(s) \in E\}} + \sum_{0 \leq s \leq t} K^i(s, \Delta Y(s)) 1_{\{\Delta Y(s) \in E^c\}} \right]^2 \\ &= \sum_{0 \leq s \leq t} H^i(s, \Delta Y(s))^2 1_{\{\Delta Y(s) \in E\}} + \sum_{0 \leq s \leq t} K^i(s, \Delta Y(s))^2 1_{\{\Delta Y(s) \in E^c\}} \\ &= \int_0^t \int_E H^i(s, x)^2 N(ds, dx) + \int_0^t \int_{E^c} K^i(s, x)^2 N(ds, dx) < \infty. \quad \square \end{aligned}$$

**Teorema 3.4.11 (Teorema de Itô 3)** Si  $Y$  es una integral estocástica del tipo Lévy de la forma dada por (3.13), entonces para toda  $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$  y  $t \geq 0$ , con probabilidad 1, se tiene

$$\begin{aligned} f(Y(t)) - f(Y(0)) &= \int_0^t \partial_i f(Y(s-)) dY^i(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_i \partial_j f(Y(s-)) d[Y_c^i, Y_c^j](s) \\ &\quad + \sum_{0 \leq s \leq t} [f(Y(s)) - f(Y(s-)) - \Delta Y^i(s) \partial_i f(Y(s-))]. \end{aligned}$$

*Demostración:* En primer lugar, mostraremos que la suma aleatoria es casi seguramente finita. Utilizaremos la Proposición 3.4.9, después de aplicar una expansión de Taylor y la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{0 \leq s \leq t} [f(Y(s)) - f(Y(s-)) - \Delta Y^i(s) \partial_i f(Y(s-))] \right| \leq \\ &\leq \left| \int_0^t \int_{E^c} [f(Y(s-) + K(s, x)) - f(Y(s-)) - K^i(s, x) \partial_i f(Y(s-))] N(ds, dx) \right| \\ &\quad + \left| \int_0^t \int_E [f(Y(s-) + H(s, x)) - f(Y(s-)) + H^i(s, x) \partial_i f(Y(s-))] N(ds, dx) \right| \\ &\leq \int_0^t \int_{E^c} |K^i(s, x) K^j(s, x) \partial_i \partial_j f(Y(s-)) + \theta(s, x) K(s, x)| N(ds, dx) \\ &\quad + \int_0^t \int_E |H^i(s, x) H^j(s, x) \partial_i \partial_j f(Y(s-)) + \phi(s, x) H(s, x)| N(ds, dx) \\ &\leq \sup_{0 \leq s \leq t} |\partial_i \partial_j f(Y(s-))| \left( \int_0^t \int_{E^c} |K^i(s, x) K^j(s, x)| N(ds, dx) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \int_E |H^i(s, x) H^j(s, x)| N(ds, dx) \right) \\ &< \infty \text{ c.s} \end{aligned}$$

para todo  $0 \leq s \leq t$ ,  $0 < \theta(s, x) < 1$  y  $0 < \phi(s, x) < 1$ . Luego el teorema se completa por manipulaciones algebraicas del Teorema 3.4.8.  $\square$

## Capítulo 4

# Aplicaciones de Procesos de Lévy en Finanzas

En este capítulo se muestran dos aplicaciones de los procesos de Lévy en Finanzas. La primera aplicación consiste en la descripción y demostración de algunas de las propiedades del modelo propuesto por Merton [11]. La segunda aplicación consiste en un breve resumen de Chávez Bedoya y Rosales [5], en el cual se proponen modelos de retornos alternativos al movimiento browniano con el propósito de modelar retornos de acciones en mercados poco líquidos.

### 4.1 Modelo de Precios

En esta sección vamos a considerar un proceso de precios en tiempo continuo con caminos muestrales continuos por derecha y con límites por la izquierda (cadlag), el modelo presentado es bastante general y un caso particular de él lo constituye el movimiento browniano geométrico. Asimismo, se encuentran las condiciones que hacen que el proceso de precios descontados sea una martingala.

Consideremos que el precio de una acción es gobernado por un proceso estocástico  $S = (S(t), t \geq 0)$  del tipo Lévy que satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS(t) = \mu S(t-)dt + \sigma S(t-)dB(t) + S(t-)dJ(t) \quad (4.1)$$

donde  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}_{++}$ ,  $B$  es un movimiento browniano unidimensional y  $J$  es un proceso independiente de  $B$ , el cual tiene caminos muestrales constantes por tramos. La notación  $S(t-)$  significa límite por la izquierda de  $S(t)$  en  $t$ , es decir  $S(t-) = \lim_{u \uparrow t} S(u)$ , obviamente este límite se aplica a los caminos muestrales de  $S$ . El proceso de saltos de  $S$  se define como  $\Delta S = (\Delta S(t), t \geq 0)$  donde  $\Delta S(t) = S(t) - S(t-)$ , dicho proceso puede tomar valor cero salvo que haya habido un salto de  $J(t)$  en  $t$ . De (4.1) podemos observar que el incremento  $dS(t)$  en el tiempo  $t$  depende del valor de  $S$  justo antes del posible salto en  $t$  y no del valor de  $S$  después de que el salto se haya realizado.

En particular,  $J = (J(t), t \geq 0)$  puede estar dado por

$$J(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} (\xi_i - 1) \quad (4.2)$$

donde  $N = (N(t), t \geq 0)$  es un proceso de conteo, es decir que existe una sucesión  $(\tau_n, n \in \mathbb{N})$  de tiempos de arribo de tal forma que

$$N(t) = \sum_{n \geq 1} 1_{\{\tau_n \leq t\}} = \# \{n \geq 1 \mid \tau_n \leq t\}$$

cuenta el número de llegadas en el intervalo  $[0, t]$ . Asimismo, la sucesión  $\xi = (\xi_i, i \in \mathbb{N})$  está formada por variables aleatorias i.i.d. e independientes de  $B$  y  $N$ , tales que  $\xi_i > 0$ ,  $E[\xi_i^2] < \infty$  y  $E[\xi_i] = \mu_\xi < \infty$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ .

Podemos reescribir (4.1) cuando  $J(t)$  sigue el proceso especificado en (4.2) como:

$$\frac{dS(t)}{S(t-)} = \mu dt + \sigma dB(t) + (\xi - 1)dN(t) \quad (4.3)$$

**Proposición 4.1.1** *La solución de la ecuación diferencial estocástica (4.3) viene dada por:*

$$S(t) = S(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t)} \prod_{i=1}^{N(t)} \xi_i \quad (4.4)$$

*Demostración:* Consideremos  $X(t) = \ln S(t)$  y aplicamos la fórmula de Ito para integrales del tipo Lévy (Teorema 3.4.8):

$$\begin{aligned} dX(t) &= \frac{1}{S(t-)} (\mu S(t-)dt + \sigma S(t-)dB(t)) - \frac{1}{2} \frac{1}{S(t-)^2} (\sigma^2 S(t-)^2 dt) + \\ &\quad [\ln(S(t-) + (\xi - 1)S(t-)) - \ln S(t-)] dN(t) \\ &= \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB(t) + \ln(\xi) dN(t), \end{aligned}$$

con lo cual

$$X(t) = X(0) + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B(t) + \sum_{i=1}^{N(t)} \ln \xi_i.$$

Finalmente  $S(t) = e^{X(t)}$ , con lo cual se demuestra la proposición. □

El modelo propuesto por Merton [11] considera a  $N$  como un proceso de Poisson con intensidad  $\lambda$ , es decir, considera que los tiempos entre arribos  $\tau_{n+1} - \tau_n$  son independientes y tienen distribución exponencial con media  $\frac{1}{\lambda}$ , es decir,

$$\mathbb{P}(\tau_{n+1} - \tau_n \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

A continuación se presentan tres proposiciones que serán útiles en la identificación del proceso del precio de la acción bajo una medida de probabilidad neutral al riesgo. Dichas proposiciones se encuentran sin demostración en Glasserman [8].

**Proposición 4.1.2 (Martingala exponencial)** *El proceso  $M_1 = (M_1(t), t \geq 0)$  definido como*

$$M_1(t) = e^{\sigma B(t) - \frac{\sigma^2 t}{2}}$$

*con  $\sigma \neq 0$  es una martingala para todo  $t > 0$ .*

*Demostración:* Resulta obvio que  $M_1$  es un proceso adaptado a  $\mathcal{F}_t$  y además  $E[|M_1(t)|] < \infty$  para todo  $t \geq 0$ . Luego debido a la independencia de los incrementos de  $B$  y considerando  $0 \leq s < t$ :

$$\begin{aligned} E \left[ e^{\sigma B(t) - \frac{\sigma^2 t}{2}} \middle| \mathcal{F}_s \right] &= E \left[ e^{\sigma(B(t)-B(s))} e^{\sigma B(s)} \middle| \mathcal{F}_s \right] e^{\frac{\sigma^2 t}{2}} \\ &= e^{\frac{\sigma^2 t}{2}} e^{\sigma B(s)} E \left[ e^{\sigma(B(t)-B(s))} \right] \\ &= e^{\frac{\sigma^2 t}{2}} e^{\sigma B(s)} e^{\frac{\sigma^2(t-s)}{2}} \\ &= e^{\sigma B(s) - \frac{\sigma^2 s}{2}}, \end{aligned}$$

con lo cual se logra el resultado requerido.  $\square$

**Proposición 4.1.3** *Sea  $N$  es un proceso de Poisson con intensidad  $\lambda$ ,  $\xi = (\xi_i, i \in \mathbb{N})$  una sucesión de variables i.i.d. e independientes de  $N$  tal que  $E[\xi_i] < \infty$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ , y  $h$  una función tal que  $E[h(\xi)] < \infty$ . Entonces el proceso  $M_2 = (M_2(t), t \geq 0)$  con*

$$M_2(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} h(\xi_i) - \lambda t E[h(\xi)]$$

es una martingala para todo  $t > 0$ .

*Demostración:* Es conocido que  $N(t) - \lambda t$  es una martingala, por consiguiente esta proposición es una generalización de dicha propiedad. Es claro que  $M_2$  es un proceso adaptado a  $\mathcal{F}_t$  y además  $E[|M_2(t)|] < \infty$ . Utilizando los incrementos independientes y estacionarios del proceso de Poisson, para  $0 \leq s < t$  tenemos

$$\begin{aligned} E[M_2(t) | \mathcal{F}_s] &= E \left[ \sum_{i=1}^{N(t)} h(\xi_i) - \lambda t E[h(\xi)] \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= E \left[ \sum_{i=1}^{N(s)} h(\xi_i) + \sum_{i=1}^{N(t)-N(s)} h(\xi_i) \middle| \mathcal{F}_s \right] - \lambda t E[h(\xi)] \\ &= E \left[ \sum_{i=1}^{N(t)-N(s)} h(\xi_i) \right] + \sum_{i=1}^{N(s)} h(\xi_i) - \lambda t E[h(\xi)] \\ &= \lambda(t-s) E[h(\xi)] + \sum_{i=1}^{N(s)} h(\xi_i) - \lambda t E[h(\xi)] \\ &= \sum_{i=1}^{N(s)} h(\xi_i) - \lambda s E[h(\xi)], \end{aligned}$$

demostrando de esta forma la proposición.  $\square$

**Proposición 4.1.4** *Si  $N$  es un proceso de Poisson con intensidad  $\lambda$  y los  $\xi_i$  son como en la Proposición 4.1.3, entonces se cumple que:*

$$E \left[ \prod_{i=1}^{N(t)} \xi_i \right] = e^{\lambda t (\mu_\xi - 1)}.$$

*Demostración:* Debido a la independencia de  $N$  y  $\xi$  y como el producto toma valor uno al no haber salto ( $N(t) = 0$ ), se tiene:

$$\begin{aligned} E \left[ \prod_{i=1}^{N(t)} \xi_i \right] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[\xi^n] \mathbb{P}(N(t) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{\xi}^n \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \\ &= \frac{e^{-\lambda t}}{e^{-\mu_{\xi} \lambda t}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu_{\xi} \lambda t} (\mu_{\xi} \lambda t)^n}{n!} \\ &= e^{\lambda t (\mu_{\xi} - 1)}, \end{aligned}$$

estableciendo el resultado requerido. □

Ahora se establecerán las condiciones para que el proceso de precios descontados de  $S$  sea una martingala.

**Proposición 4.1.5** *Si en la ecuación (4.3)  $N$  es un proceso de Poisson con intensidad  $\lambda$ , los  $\xi_i$  son como en las Proposiciones 4.1.3 y 4.1.4 y  $\mu = r - \lambda(\mu_{\xi} - 1)$ , entonces el proceso  $S_Q = (S_Q(t), t \geq 0)$  con*

$$S_Q(t) = S(t)e^{-rt}$$

*es una martingala.*

*Demostración:* Vamos a presentar dos métodos de demostración, el primero es trabajando con (4.4) y el segundo es trabajando con el cociente  $\frac{dS(t)}{S(t)}$  en (4.3). En el primer caso se tiene que para  $0 \leq s < t$

$$\begin{aligned} &E \left[ S(0)e^{-rt} e^{\left\{r - \lambda(\mu_{\xi} - 1) - \frac{\sigma^2}{2}\right\}t + \sigma B(t)} \prod_{i=1}^{N(t)} \xi_i \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= S(0)e^{\left\{-\lambda(\mu_{\xi} - 1) - \frac{\sigma^2}{2}\right\}t} E \left[ e^{\sigma B(t)} \prod_{i=1}^{N(t)} \xi_i \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= S(0)e^{\left\{-\lambda(\mu_{\xi} - 1) - \frac{\sigma^2}{2}\right\}t} E \left[ e^{\sigma(B(t) - B(s))} e^{\sigma B(s)} \prod_{i=1}^{N(s)} \xi_i \prod_{i=1}^{N(t) - N(s)} \xi_i \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= S(0)e^{\left\{-\lambda(\mu_{\xi} - 1) - \frac{\sigma^2}{2}\right\}t} e^{\sigma B(s)} \prod_{i=1}^{N(s)} \xi_i E \left[ e^{\sigma(B(t) - B(s))} \right] E \left[ \prod_{i=1}^{N(t) - N(s)} \xi_i \right] \\ &= S(0)e^{\left\{-\lambda(\mu_{\xi} - 1) - \frac{\sigma^2}{2}\right\}t} e^{\sigma B(s)} \prod_{i=1}^{N(s)} \xi_i e^{\frac{\sigma^2(t-s)}{2}} e^{\lambda(\mu_{\xi} - 1)(t-s)} \\ &= S(0)e^{\left\{-\lambda(\mu_{\xi} - 1) - \frac{\sigma^2}{2}\right\}s + \sigma B(s)} \prod_{i=1}^{N(s)} \xi_i, \end{aligned}$$

donde los últimos pasos se justifican a través de las proposiciones 4.1.2 y 4.1.4.

El segundo método de demostración es más sencillo, pues si se tiene que:

$$\frac{dS(t)}{S(t-)} = rdt + \sigma dB(t) + (\xi - 1)dN(t) - \lambda(\mu_\xi - 1)dt$$

entonces en (4.3) se ha hecho  $\mu = r - \lambda(\mu_\xi - 1)$  con lo cual los dos términos de la derecha son martingalas centradas (revisar proposición 4.1.3 para el caso del último término) y por lo tanto la tasa de crecimiento neta de  $S(t)$  es justamente  $r$ .  $\square$

A partir de las proposiciones anteriores se verifica inmediatamente que cuando  $\mu = r - \lambda(\mu_\xi - 1)$ ,

$$E[S(t)] = S(0)e^{r-\lambda(\mu_\xi-1)+\lambda(\mu_\xi-1)t} = S(0)e^{rt}$$

con lo cual

$$E[S(t)e^{-rt}] = S(0).$$

Conociendo el proceso de precios bajo una medida neutral al riesgo, es posible valorar instrumentos derivados. La fórmula del precio de una opción europea bajo el modelo de precios especificado en esta sección se puede encontrar en la sección final de Merton [11].

## 4.2 Modelos de Retornos en Mercados Ilíquidos

Al observar los precios de cierre de las acciones que cotizan en mercados poco líquidos, se puede apreciar que existen muchos días en los cuales el precio de la acción permanece inalterado. Por ejemplo, en un mercado típicamente ilíquido, como el de la Bolsa de Valores de Lima (BVL), gran parte de las acciones cotizadas sólo muestra cambios en sus precios al rededor del 50% de los días de negociación. La Tabla 4.1 resume algunas de las características básicas de los datos<sup>1</sup> utilizados y muestra que en acciones como Volcan, el 73% de las veces no se registra movimiento. Esto contrasta en gran medida con lo que ocurre en mercados en los que el nivel de negociación es mucho más elevado, como por ejemplo, el NYSE. Aquí una acción típica, como Halliburton<sup>2</sup>, muestra cambios en sus precios el 99.96% de las veces. La Figura 4.1 muestra las trayectorias de los precios de Volcan y Halliburton entre los años 2001 y 2003. Mientras que en el segundo caso la hipótesis Browniana parece natural, en el primero la presencia de saltos abruptos, y abundantes periodos de estancamiento la hacen cuestionable.

Así, la conjetura de que un proceso estocástico con saltos, o con caminos muestrales discontinuos, caracteriza la conducta de los precios en mercados ilíquidos de mejor manera que en la hipótesis Browniana, parece natural. Chávez Bedoya y Rosales [5] proponen los siguientes tres modelos para los retornos de acciones poco líquidas que cotizan en la Bolsa de Valores de Lima (BVL). El primer modelo corresponde a un movimiento browniano con tendencia, el segundo modelo es un proceso de Poisson compuesto (recordar que ambos procesos se definen en tiempo continuo) y el tercer modelo es un camino aleatorio

<sup>1</sup>Fuente: Economática.

<sup>2</sup>Fuente: Yahoo finance.

Tabla 4.1: Descripción Preliminar de los Datos

Acción	# Obs.	1era. Obs.	Obs. sin Mov.	%
Brocal	1484	30/05/2000	900	61%
Milpo	586	07/11/2003	176	30%
Morococha	3678	02/01/1992	1557	42%
Volcan	2245	30/06/1997	1641	73%

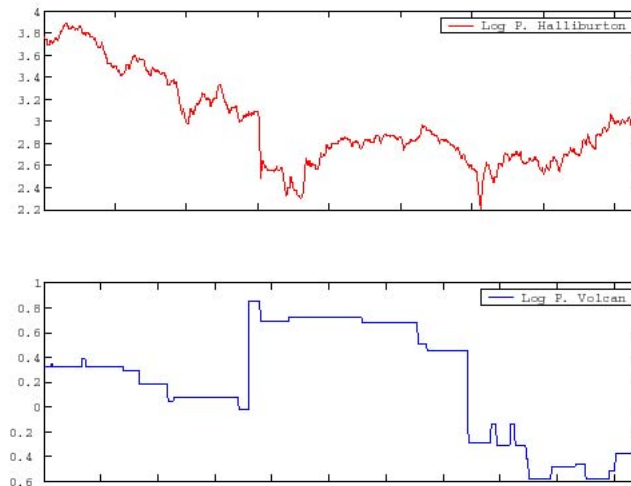


Figura 4.1: Volcan y Halliburton. El gráfico muestra la trayectoria de precios logaritmizados para las acciones Volcan (arriba) y Halliburton (abajo) entre 01/01/2001 y 01/01/2003.

en tiempo discreto.

Para los dos primeros modelos denominaremos al proceso de retornos como  $Y = (Y(t), t \geq 0)$  donde  $Y(t) = \frac{\ln S(t)}{\ln S(0)}$ .

### 4.2.1 Movimiento browniano

Para modelar el proceso de retornos  $Y$  asumimos un movimiento browniano con tendencia  $\mu$  y coeficiente de difusión  $\sigma^2$ . Es decir que  $Y(t)$  resuelve la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dY(t) = \mu dt + \sigma dB(t) \tag{4.5}$$

donde  $B$  es un movimiento browniano unidimensional. Es inmediato inferir que la solución de (4.5) está dada por

$$Y(t) = \mu t + \sigma B(t). \tag{4.6}$$

Es importante mencionar que el precio de la acción  $S(t)$ , que presenta un proceso de retornos como el de (4.6), satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS(t) = \left( \mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) S(t)dt + \sigma S(t)dB(t). \tag{4.7}$$

No es difícil deducir a partir de (4.6) que  $Y(t) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$ , con lo cual  $E[Y(t)] = \mu t$  y  $\text{Var}(Y(t)) = \sigma^2 t$ .

Para simular el proceso de retornos dado por (4.6) es necesario enfocarse en simular los valores  $(B(t_1), \dots, B(t_m))$  y  $(Y(t_1), \dots, Y(t_m))$  para un conjunto fijo de puntos  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_m = t$ . Debido a que el movimiento browniano tiene incrementos independientes y normalmente distribuidos, simular  $B(t_i)$  ó  $Y(t_i)$  por medio de sus incrementos es inmediato. Si  $Z_1, \dots, Z_m$  son variables aleatorias normales estándar independientes y sabiendo que  $B(t_0) = B(0) = 0$ , los valores siguientes del movimiento browniano pueden generarse de la siguiente forma

$$B(t_{i+1}) = B(t_i) + \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1} \quad (4.8)$$

para  $i = 0, \dots, m - 1$ . Luego para generar  $Y$ , sabiendo que  $Y(0) = 0$ , se tiene que

$$Y(t_{i+1}) = Y(t_i) + \mu(t_{i+1} - t_i) + \sigma \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1} \quad (4.9)$$

para,  $i = 0, \dots, m - 1$ . Es importante mencionar que los métodos en (4.8) y (4.9) replican exactamente la distribución conjunta de los vectores aleatorios  $(B(t_1), \dots, B(t_m))$  y  $(Y(t_1), \dots, Y(t_m))$ . En el caso en que  $t_{i+1} - t_i = 1$  para todo  $i$  y  $t$  es entero (4.8) y (4.9) toman formas particularmente sencillas como el lector podrá apreciar.

## 4.2.2 Proceso de Poisson Compuesto

Se asume que el retorno de una acción sigue un proceso de Poisson compuesto, el cual es un proceso en tiempo continuo pero tiene caminos muestrales discontinuos cadlag. Es decir que

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \ln \xi_i \quad (4.10)$$

donde  $N$  es un proceso de Poisson con parámetro  $\lambda$  y la sucesión  $\xi = (\xi_i, i \in \mathbb{N})$  está formada por variables aleatorias i.i.d. e independientes de  $N$ , tales que  $\xi_i > 0$ ,  $E[\xi_i] = \mu_\xi < \infty$ ,  $E[\xi_i^2] < \infty$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ , finalmente se asume que  $\sum_{i=1}^0 \ln \xi_i = 0$ . Si  $E[\ln \xi_i] = \mu_{\xi^*}$  y  $\text{Var}(\ln \xi_i) = \sigma_{\xi^*}^2$ , se verifica inmediatamente que  $E[Y(t)] = \lambda t \mu_{\xi^*}$  y  $\text{Var}(Y(t)) = \lambda t \sigma_{\xi^*}^2$ .

El proceso de precios  $S$  que induce (4.10) es tal que

$$S(t) = S(0) \prod_{i=1}^{N(t)} \xi_i, \quad (4.11)$$

donde se asume que  $\prod_{i=1}^0 \xi_i = 1$ . Luego, se verifica que

$$E[S(t)] = e^{\lambda t (\mu_\xi - 1)}. \quad (4.12)$$

Para simular caminos muestrales del proceso de retornos dado por (4.10), definimos al igual que en el caso del movimiento browniano un conjunto finito de puntos  $t_0 = 0 <$

$t_1 \cdots < t_m = t$  y para simular (4.10) de  $t_i$  a  $t_{i+1}$  nos basamos en dos propiedades fundamentales del proceso de Poisson  $N$ , las cuales afirman que la distribución de  $N(t_{i+1}) - N(t_i)$  es de Poisson con parámetro  $\lambda(t_{i+1} - t_i)$  y que es independiente de los incrementos de  $N$  ocurridos de 0 a  $t_i$ . Por lo tanto, para simular  $Y(t_{i+1})$  dado el valor de  $Y(t_i)$  bastaría con simular una variable aleatoria  $X \sim \text{Poisson}(\lambda(t_{i+1} - t_i))$ , luego simular  $X$  variables aleatorias  $\xi$  y hacer  $P = \sum_{i=1}^X \ln \xi_i$ . Si el valor simulado de  $X$  fuera igual a 0 se hace  $P = 0$ . Luego, como  $Y(0) = 0$ , se tendría

$$Y(t_{i+1}) = Y(t_i) + P \tag{4.13}$$

donde  $i = 0, \dots, n - 1$ .

### 4.2.3 Camino Aleatorio

Ahora se presenta un modelo en tiempo discreto para modelar el proceso de retornos. El proceso de retornos  $Y = (Y(n), n \in \mathbb{N})$  es tal que:

$$Y(n) = \ln(S(n)/S(0)) = \ln \beta_1 X_1 + \cdots + \ln \beta_n X_n \tag{4.14}$$

donde  $X = (X_i, i \in \mathbb{N})$  es una sucesión de variables i.i.d. tal que

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } p \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - p \end{cases}$$

y la sucesión  $\beta = (\beta_i, i \in \mathbb{N})$  está formada por variables aleatorias i.i.d. e independientes de  $X$ , tales que  $\beta_i > 0$ ,  $E[\beta_i] = \mu_\beta < \infty$ ,  $E[\beta_i^2] < \infty$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Podemos escribir (4.14) de una manera más simple, al notar que  $V(n) = \sum_{i=0}^n X_i \sim \text{Binomial}(n, p)$ , con lo cual

$$Y(n) = \sum_{i=1}^{V(n)} \ln \beta_i, \tag{4.15}$$

donde asumimos, al igual que en el proceso de Poisson compensado, que  $\sum_{i=1}^0 \beta_i = 0$ . Asimismo, es obvio que  $V(n)$  va a ser independiente de  $\beta$ . Si  $E[\ln \beta_i] = \mu_{\beta^*}$  y  $\text{Var}(\ln \beta_i) = \sigma_{\beta^*}^2$  se verifica inmediatamente que  $E[Y(n)] = np\mu_{\beta^*}$  y  $\text{Var}(Y(n)) = np(1 - p)\sigma_{\beta^*}^2$ .

El proceso de precios  $S$  que induce tanto (4.14) como (4.15) es tal que

$$S(n) = S(0) \prod_{i=1}^{V(n)} \xi_i, \tag{4.16}$$

donde se asume que  $\prod_{i=1}^0 \beta_i = 1$ . No es difícil verificar que

$$E[S(n)] = (1 - p)^n \left( 1 + \frac{\mu_{\beta^*} p}{1 - p} \right)^n. \tag{4.17}$$

Si hacemos  $\lambda t = np$ ,  $\xi = \beta$ , tomamos  $n$  grande y hacemos  $p$  tender a cero, (4.17) toma la forma de (4.12). Lo anterior se justifica por debido a la aproximación de la distribución binomial a la de Poisson.

Para simular caminos muestrales del proceso de retornos dado por (4.15) de un tiempo  $n$  a un tiempo  $n + 1$ , basta con simular una variable aleatoria  $Q \sim \text{Binomial}(n, p)$  luego simular  $Q$  variables aleatorias  $\beta$  y hacer  $P = \sum_{i=1}^Q \ln \xi_i$ . Si el valor simulado de  $Q$  fuera igual a 0 se hace  $P = 0$ . Luego como  $Y(0) = 0$  se tendría

$$Y(i + 1) = Y(i) + P \tag{4.18}$$

donde  $i = 0, \dots, n - 1$ . El método anterior se justifica debido a que  $\ln \beta_n X_n$  es independiente de  $Y(n - 1)$ .

#### 4.2.4 Resultados Empíricos

En Chávez Bedoya y Rosales [5] se estiman los parámetros de los modelos de retornos a través del método MCMC<sup>3</sup> y la Figura 4.2 muestra un ejemplo gráfico de los procesos simulados para Volcan en el periodo comprendido entre 01/01/2001 y 01/01/2003.

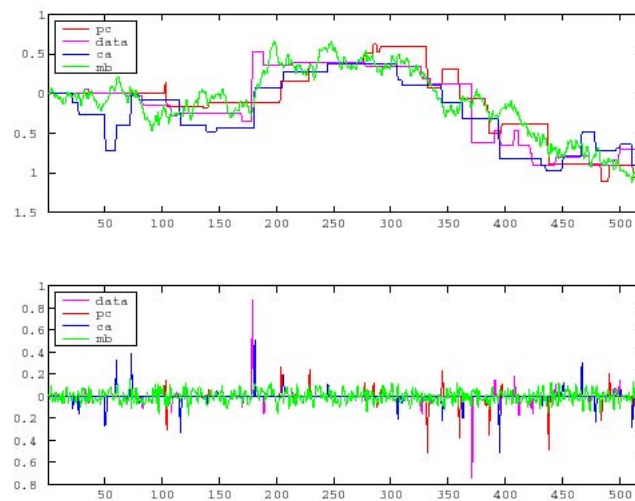


Figura 4.2: Procesos Estocásticos Simulados. Los gráficos muestran los caminos muestrales resultantes del cálculo por MCMC del camino aleatorio (ca), el movimiento browniano (mb) y el proceso de Poisson compensado (pc) para la acción Volcan (data). El gráfico superior muestra la estimación para el proceso de retornos acumulados, mientras que el inferior lo hace para el caso de retornos punto a punto.

Se denomina como  $Z(i)$  a  $Y(i) - Y(i - 1)$  con lo cual  $Z = (Z(i), i \in T)$  con  $T = \{1, 2, \dots, n\}$  es el proceso de retornos puntuales. Para la estimación de  $\xi$  y  $\beta$  los autores trabajaron con la información de los retornos puntuales sin el cero y con dos distribuciones tentativas, la primera es  $LN(\mu, \sigma^2)$  y la segunda es una  $\text{Gamma}(a_1, a_2)$ .

Los criterios seleccionados en el artículo para analizar la preferencia de un modelo sobre otro son:

<sup>3</sup>Siglas de Markov Chain Monte Carlo.

(1) El error cuadrático medio esperado (ECME)

$$E \left[ \sum_{i=1}^n (\text{Retorno}(i) - Z(i))^2 / n \right].$$

(2) El error absoluto medio esperado (EAME)

$$E \left[ \sum_{i=1}^n |\text{Retorno}(i) - Z(i)| / n \right].$$

(3) El estadístico obtenido por la prueba ajuste de Chi-cuadrado ( $\chi^2$ ).

A partir de los modelos estimados y las simulaciones realizadas por los autores, se puede apreciar que todos los modelos tienen un valor de ECME muy similar, debido a que la media estimada por cada modelo es prácticamente la misma. Bajo este criterio no es posible concluir si tanto el proceso de Poisson compuesto como el camino aleatorio en tiempo discreto se comportan mejor que el movimiento browniano.

Bajo el criterio EAME se observa un mejor desempeño del proceso de Poisson compuesto y del camino aleatorio en tiempo discreto sobre el movimiento browniano. Asimismo, no existe una diferencia significativa entre utilizar la distribución Lognormal o Gamma.

Finalmente, se nota una marcada superioridad de los procesos de Poisson Compuesto y el camino aleatorio discreto sobre el movimiento browniano al comparar los estadísticos de la prueba chi-cuadrado (debido en su mayoría a la acumulación de retornos puntuales con valor 0). Finalmente, el uso de la variable aleatoria Gamma genera resultados ligeramente superiores bajo este criterio.

A manera de conclusión, Chávez Bedoya y Rosales afirman que los modelos alternativos al movimiento browniano producen resultados superiores en las pruebas que se seleccionaron; pero el ajuste de dichos modelos a los datos reales es no es del todo satisfactorio.

# Apéndice A

## Conceptos y resultados importantes

### A.1 Teoremas importantes

Los siguientes teoremas son importantes en algunas de las demostraciones de este trabajo.

**Teorema A.1.1 (Desigualdad de Chebyshev-Markov)** Si  $X$  es una variable aleatoria tal que  $E[X] = \mu < \infty$  se cumple

$$\mathbb{P}(|X - \alpha\mu| \geq C) \leq \frac{E[(X - \alpha\mu)^n]}{C^n},$$

donde  $C > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demostración:* Ver Applebaum [1], p. 7. □

**Teorema A.1.2 (Teorema de Kac)** Las variables aleatorias  $X_1, \dots, X_n$  son independientes si y solo si:

$$E \left[ e^{i \sum_{j=1}^n u_j X_j} \right] = E \left[ e^{iu_1 X_1} \right] \dots E \left[ e^{iu_n X_n} \right]$$

para todo  $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$ .

*Demostración:* Ver Applebaum [1], p. 17. □

**Definición A.1.3 (Límite de eventos)** Sea  $(B_n, n \in \mathbb{N})$ , una sucesión de eventos en  $\mathcal{F}$ . Definimos los siguientes eventos

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} B_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} B_k,$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} B_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k.$$

Una manipulación elemental conlleva a

$$\mathbb{P} \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} B_n^c \right) = 1 - \mathbb{P} \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} B_n \right). \quad (\text{A.1})$$

**Lema A.1.4 (Lema de Borel)** Sea  $(B_n, n \in \mathbb{N})$  una sucesión de eventos para los cuales se cumple  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) < \infty$ , entonces  $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} B_n) = 0$ .

*Demostración:* Para todo  $\epsilon > 0$  se puede encontrar un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $m > n_0$ , se tiene  $\sum_{n=m}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) < \epsilon$ . Consecuentemente

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} B_n\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} B_n\right) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) < \epsilon,$$

con lo cual se obtiene el resultado requerido. □



# Apéndice B

## Martingalas en Tiempo Continuo

Se asume que trabajamos en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  con una filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ . Por filtración se entiende una familia de  $\sigma$ -álgebras  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  creciente, o sea  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$  si  $s \leq t$ . Entonces  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  denotará a un espacio de probabilidad filtrado.

### B.1 Definiciones y Conceptos Previos

**Definición B.1.1 (Filtración continua por derecha)** Definimos la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_{t+}$  como  $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$ . Si  $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$  para todo  $t \geq 0$ , decimos que la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  es continua por derecha.

**Definición B.1.2** Se dice que un espacio de probabilidad filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  satisface las hipótesis usuales si

- (1)  $\mathcal{F}_0$  contiene todos los conjuntos  $\mathbb{P}$ -nulos de  $\mathcal{F}$ ;
- (2) la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  es continua por derecha.

**Definición B.1.3 (Proceso estocástico)** Un proceso estocástico  $X$  es una colección  $(X(t), t \in \mathbb{T})$  de variables aleatorias indexadas por el parámetro  $t \in \mathbb{T}$  y definidas en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Además, dada una filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , el proceso  $X$  se dice que es adaptado si  $X(t)$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible para cada  $t \in \mathbb{T}$ .

En el presente trabajo asumiremos  $\mathbb{T} = [0, \infty[$ .

**Definición B.1.4** Sean  $X$  e  $Y$  dos procesos estocásticos.  $Y$  es una modificación de  $X$  si, para todo  $t \geq 0$ , se tiene que  $\mathbb{P}[X(t) = Y(t)] = 1$ .

**Definición B.1.5** Sean  $X$  e  $Y$  dos procesos estocásticos.  $X$  e  $Y$  se denominan indistinguibles si casi todos sus caminos muestrales coinciden:

$$\mathbb{P}[X(t) = Y(t); \forall t \geq 0] = 1.$$

**Teorema B.1.6** Sean  $X$  e  $Y$  procesos estocásticos con  $X$  una modificación de  $Y$ . Si  $X$  e  $Y$  tienen caminos muestrales continuos por derecha c.s. entonces  $X$  e  $Y$  son indistinguibles.

*Demostración:* Sea  $A$  el conjunto de medida nula donde  $X$  no es continuo por derecha y sea  $B$  el conjunto análogo en  $Y$ . Definimos los eventos  $N(t) = \{\omega, X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$ , y sea  $N = \bigcup_{t \in \mathbb{Q}} N(t)$ . Entonces  $\mathbb{P}(N) = 0$  y si definimos  $M = A \cup B \cup N$ , obviamente,  $\mathbb{P}(M) = 0$ . Se tiene  $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$  para todo  $t \in \mathbb{Q}$  si  $\omega \notin M$ . Sea  $t_n$  una sucesión de racionales que se aproximan por derecha al número no racional  $t$ . Para  $\omega \notin M$ , se tiene  $X_{t_n}(\omega) = Y_{t_n}(\omega)$ , para cada  $n$ , y  $X_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{t_n}(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_{t_n}(\omega) = Y_t(\omega)$ . Como  $\mathbb{P}(M) = 0$ , los procesos  $X$  e  $Y$  son indistinguibles.  $\square$

**Corolario B.1.7** Sean  $X$  e  $Y$  procesos estocásticos cuyos caminos muestrales son cadlag casi seguramente. Si  $X$  es una modificación de  $Y$ , entonces  $X$  e  $Y$  son indistinguibles.

*Demostración:* Por la definición de cadlag, los procesos  $X$  e  $Y$  tienen casi seguramente caminos muestrales continuos por derecha. De allí la conclusión es una aplicación directa del teorema anterior.  $\square$

**Definición B.1.8 (Martingala, submartingala y supermartingala)** Suponemos que el proceso estocástico  $X = (X(t), t \geq 0)$  es adaptado a  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  y  $E[|X(t)|] < \infty$  para todo  $t \geq 0$ . Entonces, para todo  $0 \leq s < t$ ,  $X$  es

(1) una martingala si

$$E[X(t)|\mathcal{F}_s] = X(s) \quad c.s.;$$

(2) una submartingala si

$$E[X(t)|\mathcal{F}_s] \geq X(s) \quad c.s.;$$

(3) una supermartingala si

$$E[X(t)|\mathcal{F}_s] \leq X(s) \quad c.s.;$$

## B.2 Propiedades importantes

A continuación se presentan las principales propiedades que presentan las martingalas. Estos resultados son utilizados en muchas de las demostraciones del presente trabajo.

**Teorema B.2.1** Sea  $X = (X(t), t \geq 0)$  una submartingala.

(1) Sea  $D \subset \mathbb{R}_+$  cualquier conjunto denso y numerable. Entonces casi seguramente, los siguientes límites

$$X(t-) = \lim_{s \in D, s \uparrow t} X(s); \quad X(t+) = \lim_{s \in D, s \downarrow t} X(s)$$

existen y son finitos para todo  $t > 0$ .

(2) Si la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  satisface las hipótesis usuales y la función  $t \rightarrow E[X(t)]$  es continua por derecha, entonces  $X$  tiene una modificación cadlag.

(3) Si  $X$  es una martingala con respecto a una filtración que cumple las hipótesis usuales entonces  $X$  tiene una modificación cadlag.

*Demostración:* Ver Protter [14], pp. 8-9.  $\square$

**Teorema B.2.2 (Teorema de muestreo opcional)** Si  $X = (X(t), t \geq 0)$  es una martingala y  $\tau_1, \tau_2$  son tiempos de parada acotados con  $\tau_2 \geq \tau_1 \geq 0$  c.s. entonces  $X(\tau_1)$  y  $X(\tau_2)$  son integrables, cumpliéndose

$$E[X(\tau_2)|\mathcal{F}_{\tau_1}] = X(\tau_1) \quad \text{c.s.}$$

*Demostración:* Ver Rolski et. al. [15], p. 419. □

**Teorema B.2.3 (Desigualdad de martingalas de Doob)** Si  $X = (X(t), t \geq 0)$  es una submartingala positiva, entonces para cualquier  $p > 1$ ,

$$E \left[ \sup_{0 \leq s \leq t} X(s)^p \right] \leq q^p E[X(t)^p],$$

donde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

*Demostración:* Ver Rolski et. al. [15], p. 415. □

### B.3 Espacio de Martingalas

Ahora se tratará de imponer una métrica a un subconjunto del espacio de las martingalas a fin de demostrar la completión de dicho subconjunto.

**Definición B.3.1 (Martingala Cuadrado Integrable)** Sea  $X = (X(t), t \geq 0)$  una martingala continua por derecha. Decimos que  $X$  es cuadrado integrable si  $E[X(t)^2] < \infty$  para todo  $t \geq 0$ . Si además  $X(0) = 0$  c.s., escribimos  $X \in \mathcal{M}_2$ .

**Definición B.3.2** Para todo  $X \in \mathcal{M}_2$  y  $t \geq 0$ , se define

$$\|X(t)\| = E [X(t)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad y$$

$$\|X\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|X(n)\| \wedge 1}{2^n}.$$

Observemos que la función  $t \rightarrow \|X(t)\|$  en  $[0, \infty[$  es creciente porque  $X^2$  es una submartingala. Además  $\|X - Y\|$  es una pseudo-métrica en  $\mathcal{M}_2$ , la cual se convierte en una métrica si identificamos los procesos indistinguibles. Supongamos que para  $X, Y \in \mathcal{M}_2$  se tiene  $\|X - Y\| = 0$ ; esto implica  $X(n) = Y(n)$  c.s. para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $X(t) = E[X(n)|\mathcal{F}_t] = E[Y(n)|\mathcal{F}_t] = Y(t)$  c.s. para todo  $0 \leq t \leq n$ . Debido a que si  $X$  e  $Y$  son continuas por derecha entonces son indistinguibles.

**Proposición B.3.3** Bajo la métrica anterior, el espacio  $\mathcal{M}_2$  es completo.

*Demostración:* Consideremos una sucesión Cauchy  $(X^{(n)}, n \in \mathbb{N})$  en  $\mathcal{M}_2$ , es decir que  $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|X^{(n)} - X^{(m)}\| = 0$ . Para cada  $t$  fijo, la sucesión  $(X^{(n)}(t), n \in \mathbb{N})$  es Cauchy en  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  y tiene límite  $X(t)$  en  $L^2$ . Para  $0 \leq s < t < \infty$  y  $A \in \mathcal{F}_s$ , se obtiene a partir de la convergencia en  $L^2$  y la desigualdad de Cauchy-Schwarz que  $\lim_{n \rightarrow \infty} E [1_A(X^{(n)}(s) - X(s))] = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} E [1_A(X^{(n)}(t) - X(t))] = 0$ . Consecuentemente,  $E[1_A X^{(n)}(t)] = E[1_A X^{(n)}(s)]$  implica  $E[1_A X(t)] = E[1_A X(s)]$  y se observa que  $X$  es una martingala; por lo tanto se puede escoger una modificación que sea continua por derecha de tal forma que  $X \in \mathcal{M}_2$ . Con lo cual se tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|X^{(n)} - X\| = 0$ . □

## B.4 Propiedad de saltos de una martingala

En esta sección se va a demostrar una proposición muy importante de la covarianza de dos martingalas cadlag centradas. Esta proposición es clave en la demostración de la descomposición de Lévy-Itô en el Capítulo 2. Antes de enunciar la proposición se hará una breve exposición de definiciones relacionadas con la variación de una función cadlag.

**Definición B.4.1 (Variación de una función cadlag)** Sea  $(r) = \{a = t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} = b\}$  una partición del intervalo  $[a, b]$  en  $\mathbb{R}$ . Definimos la separación de la partición  $(r)$  como  $\delta = \max_{1 \leq i \leq n} |t_{i+1} - t_i|$ . Definimos la variación  $var_{(r)}(f)$  de una función cadlag  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sobre la partición  $(r)$  como

$$var_{(r)}(f) = \sum_{i=1}^n |f(t_{i+1}) - f(t_i)|.$$

**Definición B.4.2 (Función cadlag de variación finita)** Decimos que una función cadlag  $f$  tiene variación finita en el intervalo  $[a, b]$  si  $V(f) = \sup_{(r)} var_{(r)}(f) < \infty$ . Si la función  $f$  está definida en todo  $\mathbb{R}$  (o en  $\mathbb{R}_+$ ); tenemos que es de variación finita si  $f$  tiene variación finita en cada intervalo compacto.

**Definición B.4.3 (Proceso estocástico de variación finita)** Un proceso estocástico  $X = (X(t), t \geq 0)$  es de variación finita si los caminos muestrales  $(X(t)(\omega), t \geq 0)$  son de variación finita para casi todo  $\omega \in \Omega$ .

Si tenemos un proceso estocástico  $M = (M(t), t \geq 0)$  se puede encontrar su proceso de saltos  $\Delta M = (\Delta M(t), t \geq 0)$  donde  $\Delta M(t) = M(t) - M(t-)$  con  $M(t-) = \lim_{s \uparrow t} M(s)$ .

Finalmente, para terminar esta sección del apéndice, se enuncia y demuestra la siguiente proposición, la cual se encuentra parcialmente desarrollada en Protter [14], p. 29.

**Proposición B.4.4** Sean  $M^1$  y  $M^2$  dos martingalas cadlag tales que  $E[M^1(t)] = E[M^2(t)] = 0$ ,  $\forall t \geq 0$ ,  $M^1(0) = 0$  c.s y  $M^2(0) = 0$  c.s.. Si la martingala  $M^1$  es  $L^2$  y para todo  $t \geq 0$ ,  $E[|V(M^2(t))|^2] < \infty$  entonces

$$E[M^1(t)M^2(t)] = E \left[ \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta M_s^1 \Delta M_s^2 \right].$$

*Demostración:* Por simplicidad notacional consideremos  $M_{t_k}^j = M^j(t_k)$  y supongamos que  $M^1$  es  $L^2$  y que  $M^2$  tiene variación cuadrado integrable. Sea  $(r) = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = t\}$  una partición de  $[0, t]$ , luego por la propiedad de martingalas tenemos que

$$\begin{aligned} E[M(t)^1 M(t)^2] &= E \left[ \sum_{i=0}^{m-1} (M_{t_{i+1}}^1 - M_{t_i}^1) \sum_{j=0}^{m-1} (M_{t_{j+1}}^2 - M_{t_j}^2) \right] \\ &= E \left[ \sum_{i=0}^{m-1} (M_{t_{i+1}}^1 - M_{t_i}^1) (M_{t_{i+1}}^2 - M_{t_i}^2) \right] \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} E \left[ (M_{t_{i+1}}^1 - M_{t_i}^1) (M_{t_{i+1}}^2 - M_{t_i}^2) \right]. \end{aligned}$$

Sea  $((r_n), n \in \mathbb{N})$  una sucesión de particiones tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq i(n) \leq m(n)-1} |t_{i(n)+1}^{(n)} - t_{i(n)}^{(n)}| = 0.$$

Ahora afirmamos con probabilidad 1 que se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i(n)=0}^{m(n)-1} \left( M_{t_{i(n)+1}}^1 - M_{t_{i(n)}}^1 \right) \left( M_{t_{i(n)+1}}^2 - M_{t_{i(n)}}^2 \right) = \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta M_s^1 \Delta M_s^2.$$

Para demostrar lo anterior, fijemos  $\omega \in \Omega$  y asumamos sin pérdida de generalidad que  $M_t^1(\omega)$  y  $M_t^2(\omega)$  con  $t \geq 0$  tienen puntos comunes de discontinuidad,  $A = (t_n, n \in \mathbb{N})$ . Luego, consideremos el conjunto  $A^c$  y sea  $((r_n), n \in \mathbb{N})$  una sucesión de particiones en  $[0, t]$  tales que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A \cap [t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}] = \emptyset$  para todo  $0 \leq j \leq m(n) - 1$ . Eliminando  $\omega$  por simplicidad notacional, tenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{m(n)-1} \left| \left( M_{t_{i(n)+1}}^1 - M_{t_{i(n)}}^1 \right) \left( M_{t_{i(n)+1}}^2 - M_{t_{i(n)}}^2 \right) \right| \leq \\ & \leq \max_{0 \leq i(n) \leq m(n)-1} \left| \left( M_{t_{i(n)+1}}^1 - M_{t_{i(n)}}^1 \right) \right| \text{var}_{(r)_n}(M^2), \end{aligned}$$

donde la última expresión tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ . Luego, trabajando con  $A$ , fijamos  $\epsilon > 0$  y escogemos  $\delta = (\delta_n, n \in \mathbb{N})$  tal que

$$\max \left\{ |M_{t_n}^1 - M_{t_n - \delta_n}^1 - \Delta M_{t_n}^1|, |M_{t_n}^2 - M_{t_n - \delta_n}^2 - \Delta M_{t_n}^2| \right\} < \frac{\epsilon}{K2^n},$$

donde  $K = 2 \sup_{0 \leq s \leq t} |M_s^1| + 2 \sup_{0 \leq s \leq t} |M_s^2|$ . Luego, definimos:

$$S(\delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (M_{t_n}^1 - M_{t_n - \delta_n}^1)(M_{t_n}^2 - M_{t_n - \delta_n}^2) - \Delta M_{t_n}^1 \Delta M_{t_n}^2 \right\}.$$

Entonces se tiene

$$\begin{aligned} |S(\delta)| & \leq \sum_{n=1}^{\infty} |M_{t_n}^1 - M_{t_n - \delta_n}^1 - \Delta M_{t_n}^1| |M_{t_n}^2 - M_{t_n - \delta_n}^2| \\ & \quad + \sum_{n=1}^{\infty} |M_{t_n}^2 - M_{t_n - \delta_n}^2 - \Delta M_{t_n}^2| |\Delta M_{t_n}^1| \\ & \leq 2 \left( \sup_{0 \leq s \leq t} |M_s^1| + \sup_{0 \leq s \leq t} |M_s^2| \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{K2^n} < \epsilon. \end{aligned}$$

El resultado del teorema se consigue a través del teorema de la convergencia dominada, utilizando el hecho que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\left| \sum_{i(n)=0}^{m(n)-1} \left[ M_{t_{i(n)+1}}^1 - M_{t_{i(n)}}^1 \right] \left[ M_{t_{i(n)+1}}^2 - M_{t_{i(n)}}^2 \right] \right| \leq 2 \sup_{0 \leq s \leq t} |M_s^1| V(M_t^2)$$

y utilizando la desigualdad de martingalas de Doob (Teorema B.2.3),

$$\begin{aligned} E \left[ \sup_{0 \leq s \leq t} |M_s^1| V(M_t^2) \right] & \leq E \left[ \sup_{0 \leq s \leq t} |M_s^1|^2 \right] + E [ |V(M_t^2)|^2 ] \\ & \leq 4E [ |M_t^1|^2 ] + E [ |V(M_t^2)|^2 ] < \infty. \end{aligned}$$

□

# Bibliografía

- [1] D. Applebaum. *Lévy processes and stochastic calculus*. Cambridge University Press, 2004.
- [2] R. Ash and C. Doleans-Dade. *Probability and measure theory*. Academic Press, second edition, 2000.
- [3] J. Bertoin. *Lévy processes*. Cambridge University Press, 1996.
- [4] Z. Brzezniak and T. Zastawniak. *Basic stochastic processes : a course through exercises*. Springer-Verlag, 1999.
- [5] L. Chávez Bedoya and F. Rosales. Notes on the adequacy of the brownian motion hypothesis in non-liquid markets: Are jump processes or discrete time ones a better alternative? *Artículo en elaboración*, 2005.
- [6] R. Cont and P. Tankov. *Financial modelling with jump processes*. Chapman and Hall, 2004.
- [7] N. El Karoui and S. Méléard. Martingale measures and stochastic calculus. *Probability Theory and Related Fields*, 84:83, 1990.
- [8] P. Glasserman. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer Verlag, 2003.
- [9] G. Grimmett and D. Stirzaker. *Probability and random processes*. Oxford University Press, third edition, 2001.
- [10] I. Karatzas and S. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer-Verlag, second edition, 1991.
- [11] R. Merton. Option pricing when the underlying returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3:323, 1976.
- [12] B. Oksendal. *Stochastic differential equations : an introduction with applications*. Springer-Verlag, fifth edition, 1998.
- [13] B. Oksendal and A. Sulem. *Applied stochastic control of jump diffusions*. Springer-Verlag, 2004.
- [14] P. Protter. *Stochastic integration and differential equations*. Springer-Verlag, 1990.
- [15] T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt, and J. Teugels. *Stochastic processes for insurance and finance*. Wiley, 1999.

- [16] K. Sato. *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge University Press, 1999.
- [17] H. Tucker. *A graduate course in probability*. Academic Press, 1967.
- [18] P. Ulyánov and M. Dyachenko. *Análisis real : medida e integración*. Addison-Wesley, 2000.

