

# PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

## Escuela de Posgrado



Tipos de prueba sobre el baricentro y circuncentro del triángulo que realizan estudiantes de 3er grado de secundaria cuando resuelven una secuencia didáctica con el uso del GeoGebra

Tesis para obtener el grado académico de Maestra en Enseñanza de las Matemáticas que presenta:

*Haydee Lucia Palomino Gomez*

Asesor:

*Tito Nelson Peñaloza Vara*


Lima, 2024

## Informe de Similitud

Yo, TITO NELSON PEÑALOZA VARA, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor de la tesis/el trabajo de investigación titulado "Tipos de prueba sobre el baricentro y circuncentro del triángulo que realizan estudiantes de 3er grado de secundaria cuando resuelven una secuencia didáctica con el uso del GeoGebra", de la autora Haydee Lucia Palomino Gomez, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 9 %. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software Turnitin el 28/11/24
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha: Lima, 02 de diciembre de 2024

Apellidos y nombres del asesor: Peñaloza Vara, Tito Nelson	
DNI: 08154677	Firma: 
ORCID: <a href="https://orcid.org/0000-0002-1915-9682">https://orcid.org/0000-0002-1915-9682</a>	



*Dedicado a:*

*A Dios y a la Virgen María, por guiar mis pasos,  
a mi esposo Alfredo y a mi hija Aileen,  
quienes me brindaron su apoyo incondicional en este proceso.*

*A mis padres, mi fortaleza de vida.*

*A mis hermanos, por su cariño y motivación.*

## Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a mi asesor, Mg. Nelson Peñaloza Vara, por su apoyo, enseñanza y valiosas sugerencias que fortalecieron el desarrollo de la presente tesis. Gracias maestro por su paciencia y motivación brindadas durante toda la investigación.

A mis profesores de la Maestría Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por sus valiosas enseñanzas a lo largo de este proceso de estudios.

A la universidad por abrirme las puertas de sus instalaciones para hacer posible mi desarrollo profesional con las enseñanzas adquiridas

A la línea de investigación Tecnologías y Visualización en Educación Matemática TecVEM perteneciente a la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por todo el apoyo brindado.

A los miembros del jurado, la Dra. Jesús Flores y la Dra. Verónica Neira por sus sugerencias y observaciones realizadas de la tesis en cada una de las exposiciones de avance de tesis, lo cual me permitió mejorar mi investigación.

A todos mis amigos y compañeros de la maestría, en especial a mi amiga Martha, con quien inicié este proyecto de estudios, me impulsó a continuar y culminarlo.

A la institución educativa participante en esta investigación, por brindarme todas las facilidades.

A los estudiantes de tercer grado de secundaria quienes participaron de esta investigación, por su entusiasmo, compromiso y dedicación al desarrollar la secuencia didáctica propuesta.

A Dios y a mi familia por su apoyo emocional constante.

## Resumen

Esta investigación tiene como objetivo caracterizar los tipos de prueba sobre el baricentro y circuncentro de un triángulo realizados por estudiantes de 3er grado de educación secundaria cuando resuelven una secuencia didáctica con el uso del GeoGebra. Las edades de los estudiantes oscilan entre 15 y 16 años, son parte de una institución educativa privada de Lima – Perú. La metodología empleada es de tipo cualitativa y el método estudio de caso. La experimentación fue realizada con dos duplas de estudiantes quienes desarrollaron una secuencia didáctica conformada por dos actividades, la primera, probar una conjetura sobre la relación de los segmentos de la mediana de un triángulo, formados por el baricentro; la segunda actividad está conformada por dos partes, una de ellas solicita probar una proposición sobre la concurrencia de las tres mediatrices de un triángulo, y la segunda, probar la concurrencia del circuncentro de un triángulo con el centro de una circunferencia circunscrita al mismo triángulo. Para el análisis de los resultados de nuestro estudio se tomaron en cuenta los Tipos de Pruebas matemáticas de Balacheff (2000), los cuales se clasifican en cuatro tipos, organizados en dos categorías: Prueba Pragmática y Prueba Intelectual. Los resultados muestran los tipos de pruebas identificados en el desarrollo de las actividades, por parte de los estudiantes y fueron desde el tipo de prueba “Empiricismo ingenuo” al tipo de “Ejemplo Genérico” de categoría prueba intelectual, además, se evidencia la poca práctica en realización de procesos de validación de conjeturas, lo cual puede abordarse y potenciarse con el uso las herramientas del GeoGebra, que permiten un mayor análisis y precisión de las propiedades geométricas.

*Palabras clave:* Tipos de prueba, Baricentro, Circuncentro, GeoGebra.

## Abstract

This research aims to characterize the types of proofs about the barycenter and circumcenter of a triangle made by students of 3rd grade of secondary education when they solve a didactic sequence with the use of GeoGebra. The students' ages range between 15 and 16 years old, they are part of a private educational institution in Lima - Peru. The methodology used was qualitative and the method was a case study. The experimentation was carried out with two pairs of students who developed a didactic sequence made up of two activities, the first one, to test a conjecture about the relation of the segments of the median of a triangle, formed by the barycenter; the second activity is made up of two parts, one of them asks to test a proposition about the concurrence of the three medians of a triangle, and the second one, to test the concurrence of the circumcenter of a triangle with the center of a circumscribed circumference to the same triangle. For the analysis of the results of our study, we took into account the Types of mathematical proofs of Balacheff (2000), which are classified into four types, organized into two categories: Pragmatic Proof and Intellectual Proof. The results show the types of proofs identified in the development of the activities, by the students and ranged from the type of proof "Naive Empiricism" to the type of "Generic Example" of intellectual proof category, in addition, there is evidence of little practice in conducting validation processes of conjectures, which can be addressed and enhanced with the use of GeoGebra tools, which allow greater analysis and precision of geometric properties.

Keywords: Types of proof, Barycenter, Circumcenter, GeoGebra.

# Índice

<b>Capítulo I: Problemática de la investigación.....</b>	<b>12</b>
1.1 Antecedentes .....	12
1.2 Justificación.....	24
1.3 Pregunta y objetivos de la investigación .....	31
1.4 Aspectos teóricos de los Tipos de Prueba en matemática de Balacheff. ....	32
1.5 Aspectos Metodológicos.....	45
<b>Capítulo II: Estudio de los puntos notables.....</b>	<b>47</b>
2.1 Aspectos históricos de los puntos notables .....	47
2.2 Aspectos matemáticos de los puntos notables .....	48
2.3 Aspectos didácticos.....	53
<b>Capítulo III: Experimentación y análisis .....</b>	<b>62</b>
3.1 Descripción de los tipos de prueba para el baricentro y circuncentro de un triángulo a partir de la propuesta de Balacheff (2000).....	62
3.2 Descripción del Escenario y Sujetos de la Investigación.....	63
3.3 Descripción de la Secuencia didáctica.....	64
3.4 Análisis de las Actividades .....	66
3.5 Descripción de la implementación y resultados de las actividades .....	81
<b>CONSIDERACIONES FINALES.....</b>	<b>106</b>
<b>Referencias .....</b>	<b>111</b>
<b>Anexos.....</b>	<b>114</b>

## Lista de tablas

<b>Tabla 1.</b> Evaluación muestral implementado por la UMC en el 2022 - 2do de secundaria ..	27
<b>Tabla 2.</b> Registros de representación semiótica del Baricentro.....	33
<b>Tabla 3.</b> Criterios de análisis en base a los tipos de pruebas.....	62
<b>Tabla 4.</b> Descripción de las actividades.....	64
<b>Tabla 5.</b> Resumen de resultados de los Tipos de Prueba matemática.....	104



## Lista de figuras

<b>Figura 1.</b> <i>Uso de la función arrastre</i> .....	19
<b>Figura 2.</b> <i>Naturaleza del cuadrilátero FDEB incluido en el Paralelogramo ABCD</i> .....	22
<b>Figura 3.</b> <i>Resultados de 2° grado de secundaria, Matemática (UMC)</i> .....	28
<b>Figura 4.</b> <i>Problema de la competencia Espacio, forma y visualización del 2° grado de secundaria, Matemática (UMC) - 2016</i> .....	28
<b>Figura 5.</b> <i>Resultados de 2° grado de secundaria, Matemática (PISA)</i> .....	30
<b>Figura 6.</b> <i>Mediatrices del triángulo ABC y su concurrencia en el circuncentro.</i> .....	34
<b>Figura 7.</b> <i>Circuncírculo o circunferencia circunscrita al triángulo ABC.</i> .....	35
<b>Figura 8.</b> <i>Mediatrices <math>l_c</math> y <math>l_b</math> de AB y BC en el triángulo ABC.</i> .....	35
<b>Figura 9.</b> <i>Ejemplo de empiricismo ingenuo: Baricentro en el triángulo ABC</i> .....	37
<b>Figura 10.</b> <i>Ejemplo de empiricismo – Relación en la mediana del triángulo ABC</i> .....	38
<b>Figura 11.</b> <i>Ejemplo de experiencia crucial - Relación en la mediana del triángulo ABC</i> .....	39
<b>Figura 12.</b> <i>Ejemplo de experiencia crucial – Relación en la mediana del triángulo ABC</i> .....	40
<b>Figura 13.</b> <i>Ejemplo Genérico – Baricentro en el triángulo ABC</i> .....	41
<b>Figura 14.</b> <i>Experiencia mental – rectas paralelas en el triángulo ABC</i> .....	42
<b>Figura 15.</b> <i>Experiencia mental – semejanza en los triángulos QEC y FBC</i> .....	42
<b>Figura 16.</b> <i>Experiencia mental – semejanza en los triángulos DJA y FBA</i> .....	43
<b>Figura 17.</b> <i>Experiencia mental – Congruencias en la mediana del triángulo ABC</i> .....	43
<b>Figura 18.</b> <i>Experiencia mental – Relación en la mediana del triángulo ABC</i> .....	43
<b>Figura 19.</b> <i>Tipos de pruebas matemáticas según Balacheff (2000)</i> .....	44
<b>Figura 20.</b> <i>Círculo inscrito en el triángulo ABC: Incentro</i> .....	47
<b>Figura 21.</b> <i>Círculo circunscrito en el triángulo ABC: Circuncentro</i> .....	48
<b>Figura 22.</b> <i>Alturas en el triángulo ABC</i> .....	49
<b>Figura 23.</b> <i>Medianas en el triángulo ABC</i> .....	49
<b>Figura 24.</b> <i>Bisectrices en el triángulo ABC</i> .....	50
<b>Figura 25.</b> <i>Mediatrices en el triángulo ABC</i> .....	50
<b>Figura 26.</b> <i>Prueba sobre la bisectriz en un triángulo isósceles</i> .....	51
<b>Figura 27.</b> <i>Definición y ejercicio sobre las medianas de un triángulo</i> .....	52
<b>Figura 28.</b> <i>Actividad 1 del texto “Resolvamos problemas secundaria 3”</i> .....	55
<b>Figura 29.</b> <i>Actividad 2 del texto “Resolvamos problemas secundaria 3”</i> .....	56
<b>Figura 30.</b> <i>Lección del texto “Libro de actividades - Matemática Compartir”</i> .....	57
<b>Figura 31.</b> <i>Actividades del texto “Libro de actividades - Matemática Compartir”</i> .....	58
<b>Figura 32.</b> <i>Actividad 3 del texto “Libro de actividades - Matemática Compartir”</i> .....	59
<b>Figura 33.</b> <i>Actividad 1 del texto “Matemática 3” de tercer grado de secundaria</i> .....	60

<b>Figura 34.</b> <i>Actividad 2 del texto “Matemática 3” de tercer grado de secundaria</i> .....	61
<b>Figura 35.</b> <i>Actividad 1</i> .....	66
<b>Figura 36.</b> <i>Resultados esperados: Actividad 1, ítem a</i> .....	68
<b>Figura 37.</b> <i>Resultados esperados: Actividad 1, ítem b</i> .....	69
<b>Figura 38.</b> <i>Resultados esperados: Actividad 1, ítem c</i> .....	70
<b>Figura 39.</b> <i>Resultados esperados: Actividad 1, ítem d</i> .....	71
<b>Figura 40.</b> <i>Resultados esperados: Actividad 1, ítem d</i> .....	72
<b>Figura 41.</b> <i>Actividad 2</i> .....	73
<b>Figura 42.</b> <i>Resultados esperados: Actividad 2, ítem a</i> .....	76
<b>Figura 43.</b> <i>Resultados esperados: Actividad 2, ítem b</i> .....	77
<b>Figura 44.</b> <i>Resultados esperados: Actividad 2, ítem b</i> .....	78
<b>Figura 45.</b> <i>Resultados esperados: Actividad 2, ítem c</i> .....	79
<b>Figura 46.</b> <i>Resultados esperados: Actividad 2, ítem d</i> .....	80
<b>Figura 47.</b> <i>Medianas y baricentro de un triángulo, por la primera dupla</i> .....	82
<b>Figura 48.</b> <i>Medianas y baricentro de un triángulo, por la segunda dupla</i> .....	83
<b>Figura 49.</b> <i>Ítem 1b, por la primera dupla</i> .....	84
<b>Figura 50.</b> <i>Ítem 1b, por la segunda dupla</i> .....	85
<b>Figura 51.</b> <i>Ítem 1c, primera dupla</i> .....	87
<b>Figura 52.</b> <i>Ítem 1c, primera dupla</i> .....	87
<b>Figura 53.</b> <i>Ítem 1c, segunda dupla</i> .....	88
<b>Figura 54.</b> <i>Ítem 1d, primera dupla</i> .....	89
<b>Figura 55.</b> <i>Ítem 1d, segunda dupla</i> .....	91
<b>Figura 56.</b> <i>Ítem 2a, primera dupla</i> .....	92
<b>Figura 57.</b> <i>Ítem 2a (1), primera dupla</i> .....	92
<b>Figura 58.</b> <i>Ítem 2a (2), primera dupla</i> .....	93
<b>Figura 59.</b> <i>Ítem 2a, segunda dupla</i> .....	94
<b>Figura 60.</b> <i>Ítem 2b, primera dupla</i> .....	95
<b>Figura 61.</b> <i>Ítem 2b, segunda dupla</i> .....	96
<b>Figura 62.</b> <i>Ítem 2c, primera dupla</i> .....	98
<b>Figura 63.</b> <i>Ítem 2c, segunda dupla</i> .....	99
<b>Figura 64.</b> <i>Ítem 2d, primera dupla</i> .....	101
<b>Figura 65.</b> <i>Ítem 2d, segunda dupla</i> .....	102

## Introducción

En la presente investigación se busca caracterizar los tipos de prueba sobre el baricentro y circuncentro de un triángulo realizados por los estudiantes de 3er grado de educación secundaria cuando resuelven una secuencia didáctica con el uso del GeoGebra. Nuestro interés surge desde nuestra experiencia docente ya que percibimos que los estudiantes tienen poca práctica y dificultades en realizar pruebas que permitan validar conjeturas en una actividad matemática, que debe darse por el mínimo manejo o falta de conocimiento por parte de los profesores en generar actividades que sugieran realizar pruebas de tal manera que el estudiante sienta la necesidad de hacerlo. Por otro lado, el tema de los puntos notables, como el baricentro y circuncentro, es poco abordado en las clases, cuando puede aprovecharse en generar interés de los estudiantes en las propiedades de estos objetos matemáticos.

El primer capítulo, se desarrolla en función a las investigaciones referenciales relacionadas al aprendizaje de puntos y líneas notables con el uso de recursos tecnológicos con software, además, trabajos relacionados a la prueba matemática. Asimismo, presentamos la justificación del estudio considerando aspectos académicos, profesionales y personales, como también la pregunta de investigación, el objetivo general y específicos. Por otro lado, tenemos también los aspectos teóricos de los Tipos de Prueba en matemática de Balacheff (2000) y los aspectos metodológicos del Estudio de casos de Yin (2005).

En el segundo capítulo, tratamos el estudio del baricentro y circuncentro, en el que se describen aspectos históricos, matemáticos y didácticos. Dentro de ellos, presentamos actividades relacionados a nuestro objeto de estudio, contenidas en los libros de textos que se usan habitualmente en las sesiones de clases por estudiantes de tercer grado de secundaria.

En el tercer capítulo, realizamos una descripción de los sujetos de investigación, la organización de la implementación de la experimentación, la descripción de la secuencia de actividades, como también, los criterios de análisis sobre los tipos de prueba. Seguidamente, realizamos el análisis de los resultados esperados y de los resultados reales de los estudiantes, con el fin de contrastarlos y caracterizar los resultados en base a los criterios elaborados.

Por último, presentamos las consideraciones finales de la investigación, en el que se describen las conclusiones, los cuales validan el logro de los objetivos y la pregunta de investigación. Además, se presentamos recomendaciones para futuras investigaciones que puedan iniciarse a partir de nuestra investigación.

# Capítulo I: Problemática de la investigación

En el este capítulo presentamos la problemática de la investigación, de donde parte la investigación. Para ello, consideramos investigaciones referentes, las que se encuentran relacionadas a las pruebas matemáticas y el objeto matemático, baricentro y circuncentro de un triángulo. También, presentamos la justificación, en el que se fundamenta nuestro estudio. Además, se detallan la pregunta de investigación, el objetivo general y específicos, finalmente, los aspectos metodológicos.

## 1.1 Antecedentes

En el apartado hemos considerado seleccionar las siguientes investigaciones como antecedentes, las cuales resultaron de la búsqueda en diferentes repositorios de universidades nacionales e internacionales, revistas indexadas, entre otros.

Las referencias están organizadas en dos criterios, el primero está referido al aprendizaje del objeto de estudio y el uso de recursos tecnológicos con software, y el segundo criterio, abarcan trabajos relacionadas a la prueba matemática.

### ***Investigaciones referidas al aprendizaje del baricentro y circuncentro del triángulo con recursos tecnológicos***

La investigación de Joya y Suárez (2020) ha sido realizada con estudiantes cuyas edades oscilan entre 14 y 17 años, de grado décimo de un colegio de Tunja en Colombia. Los autores proponen un estudio del sistema de puntos y líneas notables de triángulos en base al marco teórico Aprendizaje por descubrimiento planteado por Jerome Bruner. Para ello, los autores se basan en Guilar (2009, como se citó en Joya y Suárez, 2020), quien señala que la persona que guía el aprendizaje, tiene el papel de motivar a los estudiantes a fin de que logren descubrir relaciones entre conceptos y construyan conocimientos. Además, se apoya en la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval para describir actividades cognitivas en el ambiente de representación dinámica, a las que Joya y Suárez (2020) llamaron de formación dinámica, tratamiento dinámico y conversión dinámica.

Por otro lado, la metodología con que se ha desarrollado el estudio es Cualitativa de tipo descriptivo e interpretativo, en el que se buscó describir y analizar la manera en que los estudiantes realicen conjeturas y formalicen conceptos como propiedades de las rectas y puntos notables del triángulo. Los autores realizaron un análisis descriptivo-interpretativo de la información recolectada, la cual fue procesada, además, transcribieron las respuestas de los estudiantes para luego categorizarlas; por último, elaboraron y organizaron redes (organizador visual) respecto a cada línea y puntos notables del triángulo.

Con respecto a la fase experimental del estudio, Joya y Suárez (2020) realizaron talleres con actividades sobre puntos notables de un triángulo mediados por GeoGebra, y para ello se prepararon cinco ambientes virtuales. El primer ambiente consistió en que el estudiante explore el GeoGebra para representar un triángulo cualquiera y modificarlo, luego desarrollar conjeturas y descubrir propiedades relacionadas al triángulo, lo cual sirvió como una prueba diagnóstica. En otros ambientes se formularon preguntas orientadas a que los estudiantes descubran propiedades, formulen conjeturas y lleguen a formalizaciones con respecto a rectas y puntos notables, los cuales se propusieron desarrollarlos en cada ambiente virtual en el orden siguiente: medianas y baricentro, alturas y ortocentro, bisectrices e incentro, mediatrices y circuncentro.

En ese sentido, con el fin de promover el lenguaje natural de los estudiantes, las actividades fueron planteadas de tal manera que ellos mismos descubran las denotaciones de los elementos notables del triángulo, mediante la utilización de términos geométricos acorde a la noción trabajada. Por lo que en un inicio se presentaron a las líneas y puntos notables del triángulo, enumerados como de tipo 1, tipo 2, tipo 3 y tipo 4, como también a la circunferencia inscrita nombrada Circunferencia tipo 1 y a la circunferencia circunscrita denominada Circunferencia tipo 2.

Las actividades de cada ambiente virtual consistieron en presentar, mediante GeoGebra, la construcción de un triángulo con trazos de líneas notables sin nombrarlas, con el fin de solicitar al estudiante describir la construcción de dichas líneas; luego, se solicita analizar si era posible que el punto de intersección se encuentre al exterior o en uno de los vértices del triángulo, después, nombrar a dichas líneas notables y punto de intersección. Finalmente, los estudiantes formularon algunas conjeturas que hayan surgido en la actividad para luego validarlas mediante el uso de las herramientas del GeoGebra, por el cual se permitió la formalización de nociones como propiedades del triángulo y de sus líneas y puntos notables.

Como ejemplo de conjetura, tenemos a las descripciones, de la mayoría de los estudiantes, en las que afirman que el baricentro siempre se encuentra en el interior del triángulo, independientemente de la longitud de lados y la amplitud de sus ángulos internos, a su vez, un estudiante señala que este punto de intersección corresponde al centro del triángulo, con lo que tiene relación con la propiedad del baricentro, esto se validó por medio de la interacción con el GeoGebra.

La información de los resultados de las actividades es analizada de acuerdo a dos categorías que los autores establecieron, sobre el pensamiento espacial y el aprendizaje heurístico. En el primero, se consideraron componentes como la ubicación espacial, movimientos de elementos geométricos, procedimientos, entre otros. Para la segunda categoría, se analizó el proceso de las formulaciones de conjeturas y su validación sobre

propiedades del triángulo y elementos notables del mismo, además del empleo de distintos tipos de lenguaje, como el natural, simbólico y matemático; proceso que fue desarrollado en Joya y Suárez (2020).

Con respecto a los resultados, los autores señalan que, la mayoría de estudiantes desarrollaron conjeturas sobre los diferentes tipos de triángulos, rectas y puntos notables, además de la circunferencia inscrita y circunscrita. Asimismo, se observó una evolución del pensamiento intuitivo de los estudiantes en el desarrollo de las actividades propuestas mediadas por GeoGebra, lo que permitió visualizar representaciones de triángulos, puntos, rectas y circunferencias notables.

La investigación hace referencia al objeto matemático de nuestro interés, dos de los puntos notables de un triángulo, el baricentro y circuncentro, y creemos que es pertinente puesto a que nos proporciona ideas para la elaboración de actividades que nos interesa analizar.

También, Lingefjard y Ghosh (2019), realizan un estudio con el fin de analizar el rol del GeoGebra en la exploración de los centros del triángulo, por estudiantes de 9no grado de India y Suecia. El apartado desarrolla un estudio del objeto matemático la Recta de Euler a través de actividades presentadas a los estudiantes y mediadas por el GeoGebra, recurso con el cual los estudiantes no poseían alguna experiencia previa. Además, dicho estudio expone un enfoque del razonamiento matemático, argumentación y la formulación de conjeturas, basada en la teoría de la variación de Marto.

Para Marto (2004, citado por Lingefjard y Ghosh, 2019), actuamos frente a una situación dada tal como la vemos, y al percibir tal situación de una cierta manera es porque discernimos de aquellas que son esenciales para actuar de manera eficaz y tenerlos a todos en consideración, esto en simultáneo. Por lo que el autor señala que es necesario experimentar la variación, no hay discernimiento sin variación. En tal sentido, el investigador propone cuatro patrones de variación: Contraste, generalización, separación y fusión. Estas funciones, para Lingefjard y Ghosh (2019), actúan como pilares para encontrar sentido en la exploración de la Recta de Euler.

Con respecto al procedimiento metodológico utilizado por los autores, está conformado por los principales componentes de la investigación, enfocándose en la formación matemática de los estudiantes, el contenido de la tarea de investigación, la naturaleza del andamiaje y de las investigaciones, y finalmente las argumentaciones de los estudiantes. Para la investigación participaron estudiantes de noveno grado, veintidós estudiantes de India y veintiocho estudiantes de Suecia.

El proceso de experimentación, se divide en dos partes, la primera, trata de desarrollar una tarea sobre la construcción de un cuadrado en el GeoGebra, cuya finalidad es buscar que el estudiante conozca y manipule las herramientas, permitiendo realizar comparaciones

entre el uso de regla y compás con que tenían experiencia previa, y el GeoGebra. Con lo que los estudiantes logran contrastar, con el uso de la herramienta arrastre, las propiedades del cuadrado, las cuales no cambiaron aun colocándolo en diferentes posiciones, según Lingefjard y Ghosh (2019).

La segunda parte del estudio, se refiere al estudio de los centros (puntos notables) y la Recta de Euler de un triángulo. Previo a las actividades, los estudiantes contaron con información impresa sobre definiciones de baricentro, circuncentro y ortocentro; esto como guía para la construcción de dichos puntos notables proporcionado por los investigadores. Esta parte de la actividad consta de cuatro tareas, donde las tres primeras indican construir el baricentro, circuncentro y ortocentro de un triángulo; asimismo, evaluar la ubicación de los centros construidos para los casos que un triángulo agudo, obtuso y recto. Referente a la cuarta tarea, los autores proponen revisar las relaciones entre los puntos notables construidos, empleando las herramientas de medir y la función arrastre.

En la realización de las tres primeras tareas, los autores notan que una parte menor de estudiantes, de India y Suecia, presentan dificultades para realizar construcciones solicitadas en GeoGebra, quienes luego son ayudados por los profesores a cargo, logrando formular conjeturas y realizar argumentaciones. Respecto a la última tarea, los estudiantes realizan conjeturas sobre la colinealidad de los puntos baricentro, circuncentro y ortocentro, para formar la Recta de Euler, en los diferentes tipos de triángulos mediante el método de arrastre.

Finalmente, entre las conclusiones a las cuales llegaron los autores resaltamos que en las escuelas de ambos países obtuvieron resultados similares, mediante la construcción y arrastre dentro del entorno dinámico GeoGebra, se halla en el razonamiento geométrico de los estudiantes, la tarea fundamental que tienen las cuatro funciones de variación: contraste, generalización, separación y fusión.

Con lo mencionado, consideramos importante la investigación porque nos permite ordenar la secuencia de las actividades que pretendemos analizar en nuestro estudio y tomar de referencia el uso del ambiente de representación dinámica, GeoGebra.

Asimismo, Naveiro y Oliveira (2021), realizan un estudio del concepto y la aplicabilidad de uno de los puntos notables de un triángulo, el circuncentro, considerado a 24 estudiantes del 9° grado de una escuela de Tatuí en Brasil. Además, emplean la metodología Cualitativa, bajo el marco teórico de Enseñanza-Aprendizaje-Evaluación a través de la Resolución de Problemas propuesto desde la perspectiva de Onuchic, que consiste en la utilización de 9 pasos que permiten organizar el trabajo del docente en el aula, considerando la evaluación y a su vez los procesos de enseñanza – aprendizaje, pasos tales como la propuesta del problema, recojo de conocimientos previos, formar grupos pequeños, resolución del problema, plenaria y debate, y formalización del contenido matemático.

Asimismo, Naveiro y Oliveira (2021) consideran presentar los tres primeros pasos de la Resolución de Problemas según Onuchic: formulación de tareas por el docente, lectura individual y luego, lectura colectiva. Respecto a las tareas planteadas por el docente, la primera se basa en responder preguntas teniendo como objetivos, comprender el significado del punto medio de un segmento y emplear las características de un rombo para la construcción de una mediatriz con regla y compás. La siguiente tarea, los autores presentan como objetivos, conjeturar la propiedad de desigualdad triangular a través del uso de cuerdas y nudos, construir las mediatrices de un triángulo rectángulo, isósceles o escaleno con el uso de regla y compás; por último, reconocer el punto de intersección de las mediatrices como circuncentro e identificar sus propiedades. En esta tarea los estudiantes concluyeron en la plenaria, que el circuncentro equidista de los vértices del triángulo.

Para la tercera tarea, el docente propone un problema, en el que plantea a los estudiantes que tres de ellos acordarán encontrarse en un lugar de tal manera que las distancias hasta sus domicilios equidisten. Para esto, se dispone de recursos informáticos como el *Google Maps* con el que cada trío de estudiantes ubica las direcciones de sus casas y las unen con líneas rectas formando un triángulo por medio del editor *Paint*. Posteriormente, la imagen es impresa para luego realizar la construcción del circuncentro con regla y compás. Finalmente, el docente pregunta a sus estudiantes si es conveniente reunirse en el lugar donde se ubicó el punto notable, a lo que dos equipos respondieron afirmativamente por encontrarse lugares públicos cerca del punto de encuentro. En la actividad se evidenció discusiones entre estudiantes, algunas veces con ayuda del docente, buscaron consensuar y validar las afirmaciones.

Entre los resultados, los autores observaron como dificultad el poco manejo de términos geométricos por parte de los estudiantes, además de la complejidad con que les resultó escribir sus respuestas y argumentos. Por otro lado, según los autores, la preparación de las tareas ha sido un gran reto considerando la existencia de diferentes materiales didácticos y el contexto escolar. Además, se rescata la importancia de la plenaria en el que los estudiantes discutieron sobre el desarrollo de cada tarea, logrando mejorar su capacidad de argumentar y llegar a consensos para luego formalizar el contenido matemático.

Asimismo, sobre la investigación de los autores, creemos que es importante porque permite disponer de ideas acerca de la secuencia de una actividad tomando en cuenta nociones necesarias para la construcción del objeto matemático, en este caso el circuncentro; tales como el uso de regla y compás, actividad que consideramos adecuar para emplearlo con el GeoGebra. Además, el análisis del desarrollo de las tareas por parte de los estudiantes en la investigación, es un precedente para la toma de decisiones en la elaboración de la secuencia didáctica para este estudio.

Por su parte, Morales (2022) realiza un análisis de los procesos matemáticos cognitivos de las justificaciones, que realizan los estudiantes de 15 a 17 años de edad, en la construcción geométrica de teselados regulares y semirregulares mediante del uso del GeoGebra en el bachillerato del nivel superior en la ciudad de Querétaro, México, esto bajo el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS). El enfoque metodológico de la investigación fue de corte cualitativo y descriptivo, tomando en cuenta los aspectos de la Ingeniería Didáctica.

También, el autor sostiene que la tecnología digital ha ido complementando a la tecnología tradicional; además, resalta que no se pretende que el rol del docente no sea reemplazado por ambientes digitales, puesto a que tiene un papel importante de implementar estrategias en aras de lograr aprendizajes de la matemática en los estudiantes.

Como resultado, el autor señala la importancia del proceso de visualización cuyo papel fue primordial para el planteamiento de argumentos por parte de los estudiantes, que fueron manifestados mediante el uso del lenguaje natural y en términos de la manipulación de las herramientas del GeoGebra; sin embargo, se presentaron dificultades al realizar justificaciones de construcciones geométricas en GeoGebra, a partir de propiedades y conceptos. Por lo que el autor manifiesta la necesidad de que el estudiante comprenda el papel del GeoGebra al realizar una construcción geométrica, pues para ello se solicita que se maneje propiedades y definiciones referidos a la construcción realizada. Para esto el autor recomienda realizar un seguimiento en los procesos matemáticos-cognitivos que surgen en los estudiantes en la manipulación de un ambiente de representación dinámica.

En vista que las actividades planteadas en la investigación, generaron interés en los estudiantes al explorar programas tecnológicos, y fueron logrando que adquieran destrezas en el uso de la plataforma para movilizar sus conocimientos, para nuestro estudio nos encontramos interesados en hacer uso del GeoGebra como mediador para la propuesta de actividades que realizarán los estudiantes en la fase experimental.

Por su parte, Silva (2017) plantea como objetivo de su tesis, analizar cómo ocurre el proceso de Génesis Instrumental del circuncentro en estudiantes de tercer grado de educación secundaria mediado por el GeoGebra. En dicho estudio, participaron dos estudiantes, de 14 y 15 años, en un colegio particular de Lima. El marco teórico se basa en el Enfoque Instrumental; y fue diseñado bajo la metodología de la Ingeniería Didáctica.

El desarrollo de la investigación consta de tres actividades, donde la actividad inicial consiste en realizar una exploración y manipulación de herramientas del GeoGebra, la siguiente actividad induce a realizar la intersección de mediatrices y la última, presenta un problema que sugiere movilizar la noción de circuncentro.

Por consiguiente, la autora realiza los procesos del análisis a priori y a posteriori en términos del Enfoque Instrumental, sobre las dos últimas actividades mencionadas en el

párrafo anterior. Puesto a que Silva (2017), en su investigación, considera al Circuncentro como el artefacto simbólico y no al GeoGebra, esto es observado claramente en el desarrollo de las dos últimas actividades.

Por lo que se refiere a los resultados de la investigación, se logra lo siguiente: en que los estudiantes movilicen sus esquemas de utilización cuando ubican el punto de intersección de las mediatrices de un triángulo; por otro lado, los estudiantes logran movilizar sus esquemas de utilización en la resolución del problema planteado en la última actividad, por medio de la noción de circuncentro. Con esto, se logra alcanzar el objetivo general de la investigación, puesto a que se asegura la movilización de esquemas de uso, los esquemas de acción instrumentada y el enriquecimiento de la noción del circuncentro.

El objeto de estudio de la investigación tiene relación con los puntos notables del triángulo, puesto a que el circuncentro es uno de estos puntos. Consideramos interesante para nuestro estudio, puesto a que nos permite tomar de referencia el uso del ambiente de representación dinámica, GeoGebra junto a la secuencia de las actividades.

Por otro lado, Salazar y Almouloud (2015) desarrollaron una investigación que tiene como objetivo definir el registro figural dinámico en base a la teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS), con el empleo del Ambiente de Geometría Dinámica, el cual en nuestro estudio será designado como Ambiente de Representación Dinámica (ARD); esto en la enseñanza y aprendizaje de geometría. En el que, en base de la TRRS, parten de tres actividades cognitivas, los cuales con: formación dinámica, tratamiento y conversión dinámica; los cuales surgen en la interacción del sujeto con el ARD.

Además, los autores manifiestan lo siguiente “en la enseñanza de la geometría, la tecnología informática es cada vez más utilizada, especialmente en un ARD, los cuales permiten, mediante las herramientas del arrastre y de la manipulación directa, que los estudiantes puedan conjeturar acerca de las propiedades de los objetos matemáticos” (p. 920). Con ello, los autores afirman que los tres procesos cognitivos para constituir un registro figural, formación, tratamiento y conversión, en un ARD, en comparación con el trabajo en un ambiente no dinámico, las funciones de arrastre y manipulación permiten la construcción de relaciones entre tratamientos figurales y discursivos de la figura de una manera diferente, como en el caso del estudio, en GeoGebra. Por consiguiente, los autores plantean como pregunta de investigación, cómo realizar la formación, tratamiento y conversión de una figura en un ARD.

Los autores sostienen que, la formación figural dinámica sucede cuando el sujeto utiliza una herramienta de un ARD, para representar un objeto matemático. Para ello, la formación se rige por una secuencia dependiendo de las unidades figurativas encontradas en las herramientas del software.

Por otro lado, a manera de ejemplo, Salazar y Almouloud (2015) plantean una situación donde se solicita determinar la relación de proporcionalidad entre los segmentos que determina el Baricentro en un triángulo. Para esto los autores explican que, el sujeto que interactúa con el ambiente de ARD podrá representar un triángulo ABC con la herramienta “polígono”, luego, ubicar el punto medio del polígono empleando la herramienta “punto medio”, después puede utilizar la herramienta “medir” para platear su conjetura sobre la relación de proporcionalidad. Finalmente, puede utilizar la función arrastre que lo ayudará a validar la conjetura formulada, tal como se observa en la figura 1.

**Figura 1. Uso de la función arrastre**



*Fuente.* Tomado de Salazar y Almouloud, 2015, p.938

Con esta actividad, los autores manifiestan que, se realiza la conversión de registro lenguaje natural al registro figural en un ARD, como podemos observar en la figura 1, luego, con la finalidad de buscar solución al problema, se pueden realizar tratamientos figurales dinámicos en el registro figural dinámica como trazos o función de arrastre, mediante las herramientas del GeoGebra, este último permite realizar modificaciones de forma a la representación triangular donde cambian las longitudes de los elementos que lo conforman, sin embargo, no cambian sus propiedades como la relación entre los segmentos cortados por el circuncentro, el cual resulta ser de 2 a 1, según lo manifestado por los autores.

Consideramos que el aporte de esta investigación, con respecto a la configuración del registro figural dinámico, tiene su importancia en nuestro estudio, por permitir orientarnos en el momento de realizar las descripciones de la fase experimental en el que surgen las actividades cognitivas de un registro figural dinámico a partir de la interacción de los estudiantes y el ambiente de representación dinámica.

Por otro lado, tenemos a Motti (2021) quien en su estudio pretende investigar la contribución del uso de construcciones blandas en un ambiente de geometría dinámica como GeoGebra, en el desarrollo de procesos cognitivos en estudiantes de sexto grado. La

investigación contó de cuatro fases que después de la familiarización por parte de los estudiantes, desarrollaron una serie de actividades sobre geometría euclidiana. Durante la experimentación se reunió información mediante fichas y grabaciones de video. Estos datos recogidos fueron analizados bajo una rúbrica de evaluación, tratados bajo una metodología mixta predominando un análisis cualitativo.

La primera fase consistió en la exploración en el GeoGebra, en especial se enseñó a utilizar funciones como el arrastre, esto de manera individual. En las siguientes fases, se organizaron parejas de estudiantes con el fin de lograr el objetivo en trabajo en equipo, aunque hubo momentos en los que se pedía una reflexión personal sobre las construcciones en GeoGebra que se iban realizando.

A modo conclusión, la primera pregunta de investigación pretendía investigar la activación y desarrollo de recursos y procesos cognitivos relacionados con el área matemática utilizando construcciones blandas en un ambiente de geometría dinámica como GeoGebra. En el que pudo notarse una mejora de los recursos cognitivos conocer y reconocer y ejecutar y aplicar. Además, en los procesos cognitivos investigados, se pudo observar una mejora para explorar y ensayar, además de comunicar y argumentar, en contraste con el proceso de Interpretar y reflexionar sobre los resultados, lo que no quiere decir, sostiene el autor, que los estudiantes no fueran capaces de reflexionar, solo que no consiguieron relacionar los conceptos de geometría más abstractos. La segunda pregunta, se enfocaba en los procesos que los estudiantes desarrollaban durante las actividades en GeoGebra haciendo uso de construcciones blandas. Con lo que se pudo observar, a partir del análisis de las grabaciones y otros, una profundización en los conocimientos o una transferencia de estos conocimientos contextos más generales. Además, se promueve la formulación y validación de conjeturas como también, ha favorecido la adquisición de un lenguaje geométrico.

Por nuestra parte, consideramos de interés esta investigación, puesto a que, entre sus conclusiones los estudiantes lograron movilizar sus conocimientos, además de formular y validar conjeturas con el uso del GeoGebra. Esto último, respalda nuestra decisión de implementar actividades con el uso de GeoGebra que desarrollarán los estudiantes en la fase experimental, esto para determinar el tipo de prueba matemática de sus procesos.

### ***Investigaciones relacionadas a las pruebas en matemática***

Tchonang (2022), realiza un estudio en Camerún; considerando que en el país existen dos tipos de subsistemas para los niveles de primaria y secundaria, el inglés y el francófono; el autor centra su trabajo en el subsistema francófono, en estudiantes de entre 15 a 16 años de edad. Por otro lado, Tchonang (2022) presenta como objetivo comprender cómo la figura influye en la construcción del argumento y elaboración de la demostración en el estudio de

cuadriláteros y triángulo, esto por parte de estudiantes que han iniciado la educación secundaria.

Con respecto a las pruebas en matemática, el cual tiene relación con el argumento y demostración, el autor hace mención a Balacheff (1988, citado en Tchonang, 2022), quien plantea organizar las pruebas en dos categorías: pruebas pragmáticas y pruebas intelectuales, en este último presenta tipos como: cálculo proposicional, el cual se refiere a desarrollar relaciones lógicas entre proposiciones; experiencia mental, donde las operaciones y sus relaciones construyen el inicio de una prueba; y la demostración, que es considerada como una evidencia aceptada por la comunidad matemática. Con esto, Tchonang (2022), manifiesta que el aporte de Balacheff, permite identificar el tipo de razonamiento de sus estudiantes, como también, analizar del discurso de los estudiantes desde el argumento y los tipos de prueba señalados.

Por otro lado, el estudio es realizado bajo el marco teórico de diversos autores; como el modelo de Toulmin (1980, citado en Tchonang, 2022), quien ofrece instrumentos para analizar los argumentos planteados por los estudiantes; también, el modelo de Vinner (1981, citado en Tchonang, 2022) quien propone orientar al docente, en comprender a sus estudiantes mediante los conceptos y definiciones que forman a través de imágenes. Por otro lado, el modelo del autor también permite analizar argumentos de los estudiantes a fin de conocer la manera que utilizan los dibujos y figuras; además, comparar los argumentos y pruebas. Otra teoría presentada en la publicación es la Teoría Antropológica de lo didáctico (TAD), por disponer de recursos para el análisis de la conexión entre la institución y objeto. Por lo mencionado, Tchonang (2022) propone la articulación de ambos modelos para el logro del objetivo de su estudio.

En cuanto a las actividades, el autor propone situaciones que ayudan a evidenciar el razonamiento del estudiante; tres de ellas se refiere a resolución de problemas, construcción de una definición y construcción de teoremas; este último busca promover a que los estudiantes elaboren conjeturas, lo que los lleva a exponer argumentos y fundamentar sus afirmaciones, para así validar tales conjeturas.

La metodología empleada por el investigador es de enfoque cualitativo tipo exploratorio. En el cual describen a los estudiantes, a quienes va dirigido la investigación, como también a los objetos matemáticos estudiados, triángulo y cuadrilátero. Luego, el autor prosigue a describir el procedimiento de recolección de datos y los instrumentos a utilizar.

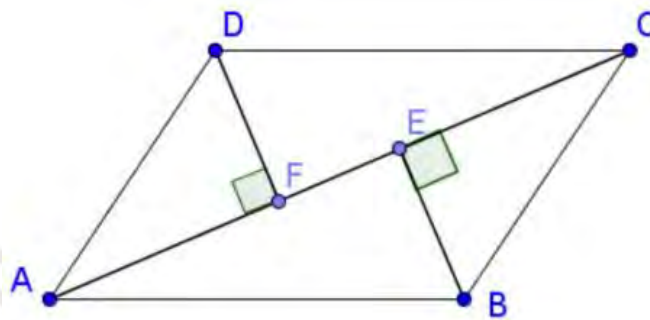
Posteriormente, el estudio implementa la Ingeniería didáctica a fin de explorar el trabajo y comprender cómo se maniobran las figuras en las argumentaciones de los estudiantes.

Para el proceso de la experimentación, el autor ha considerado proponer tres tipos de problemas, uno de ellos presenta una figura, con el fin de que los estudiantes realicen

pruebas; otro problema con una figura con que se busca conducir a realizar definiciones; y el tercero, sin figura, el que llevaría a construir un teorema. Con respecto a la primera situación problemática, se describe una imagen como notamos en la figura 2, en el que se solicita analizar si tal cuadrilátero es un paralelogramo, según Tchonang (2022).

**Figura 2.** Naturaleza del cuadrilátero  $FDEB$  incluido en el Paralelogramo  $ABCD$

**Problème.** Dans le parallélogramme  $ABCD$ , on trace les perpendiculaires  $(DF)$  et  $(BE)$  à la droite  $(AC)$ . Peut-on dire que le quadrilatère  $DFBE$  est un parallélogramme ?



*Fuente.* Tomado de Tchonang, 2022, p. 123-124

La figura 2 muestra un problema que contiene un enunciado y una figura, donde el estudiante, para intentar resolverlo, podría realizar trazos para formar el cuadrilátero  $DFBE$  y establecer relaciones entre los elementos de la figura.

Además, la figura 2 busca incentivar a que el estudiante realice una serie de pasos de deducción a manera de probar que el cuadrilátero sea un paralelogramo. Por lo que el autor refiere que la observación y el trabajo sobre la figura podría movilizar la concepción que tiene el estudiante, sobre el paralelogramo.

El autor señala sobre los estudiantes que, antes del desarrollo de sus argumentos, se espera a que realicen dos pasos de deducción: primero, el paralelismo entre los segmentos  $\overline{DF}$  y  $\overline{BE}$ ; segundo, la congruencia entre los segmentos  $\overline{DF}$  y  $\overline{BE}$ .

Por otro lado, para el análisis a priori sobre las definiciones de un paralelogramo, por ejemplo, el autor propone algunas que son recurrentes en estudios secundarios, tales como, si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan es un paralelogramo o, un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son de igual, organizados en tablas.

Entre los resultados, el autor señala que la articulación de los modelos de Toulmin y Vinner resultaron ser relevantes para el análisis de los argumentos y pruebas de los estudiantes. Por otro lado, se evidencia lo que se esperaba en el estudio de Tchonang (2022), respecto a la construcción de argumentos a través de las relaciones que hallaron entre la

figura y dibujo. Además, el autor concluye que existe una continuidad cognitiva entre los argumentos y validación de pruebas que presentaron los estudiantes. Como también, se hallaron dificultades en las producciones escritas de los estudiantes.

De acuerdo con el investigador, observamos que la referencia teórica en base a los modelos de Toulmin y Vinner, resulta un aporte importante a nuestro estudio, además, el apoyo en Balacheff (2020) para definir las pruebas matemáticas y su relación con la argumentación y demostración, como su incentivar en analizar el razonamiento matemático del estudiante, todo ello contribuye para el análisis que se desea realizar sobre los resultados de nuestra investigación.

En esa misma línea, Conceição (2022) articula las teorías de Balacheff (1998, citado en Conceição, 2022) y Parzysz (2000, citado en Conceição, 2022) para lograr el objetivo de su estudio, definir aspectos cognitivos que permitan medir el análisis de concepciones en pruebas y demostraciones sobre cuadriláteros, de profesores polivalentes en 5to grado de primaria. Respecto a los profesores polivalentes, el autor señala que los aquellos profesores se encuentran a cargo de los estudiantes de educación inicial y de Fundamental 1 en Brasil en escuelas públicas, los cuales comprenden los cinco primeros años de educación, cuyos estudiantes son de edades de 6 a 10 años. La preocupación se encuentra que aquellos profesores que, por la alta demanda de docentes en el país, han sido matriculados en cursos de formación de profesores y sin estudios de educación superior ejercen el rol de docentes en los niveles mencionados.

Además, Conceição (2022) presenta en su estudio los siguientes objetivos específicos:

- Investigar las concepciones de los docentes polivalentes que trabajan en el 5to grado de escuela primaria en la comprensión de pruebas y demostraciones en el estudio de cuadriláteros.
- Proporcionar tareas con el uso de Tecnologías de la Información y la Comunicación Digital que permitan a los docentes polivalentes articular pruebas y demostraciones geométricas que evidencien sus concepciones.  
(Traducción nuestra, p.22)

Entre las conclusiones de la investigación, se comprueba que los profesores no desarrollaron la demostración durante su formación, limitándose a probar la validez de los discursos o realizar justificaciones. Además, se halló que los textos escolares prescinden de actividades en los que se busquen elaborar conjeturas, usar razonamiento deductivo y pruebas matemáticas. Respecto a las concepciones de los docentes en el uso de los textos, se observó poco potencial en la elaboración de conjeturas y aspectos de prueba como las descritas por Balacheff (1988, citado en Conceição, 2022) y niveles de pensamiento geométrico descritos por Parzysz (1988, citado en Conceição, 2022), por lo que, respecto a

este último, Conceição (2022) posiciona la concepción de los docentes, en relación a la articulación de sus pensamientos, en el nivel G0 y G1.

Por otro lado, se evidenció una comprensión superficial del contraejemplo, aunque aún quede por reforzar la concepción sobre su rol en las pruebas. Finalmente, el investigador señala haber contribuido con su investigación en la reflexión sobre el empleo de la prueba y demostración en la formación docente polivalente.

Asimismo, consideramos la investigación del autor importante para nuestro estudio, puesto a que se rige bajo el marco del desarrollo de pruebas y demostraciones de Balacheff, nos interesa implementar a nuestro estudio como marco referencial para identificar y analizar la construcción de puntos notables de un triángulo por parte de estudiantes del nivel de secundaria. Además, tomando en cuenta que los participantes del estudio son profesores, consideramos para nuestro trabajo que los docentes deben encontrarse en la capacidad de analizar los tipos de pruebas además de preparar situaciones que permitan a los estudiantes de 2do de secundaria argumentar respaldándose por pruebas matemáticas.

A continuación, presentamos la justificación de nuestro estudio, a fin de mostrar la relevancia que hallamos en la búsqueda de investigaciones relacionadas con el estudio de los tipos de prueba en la construcción de puntos notables de un triángulo.

## **1.2 Justificación**

Con el presente estudio esperamos identificar y analizar los tipos de prueba que producen los estudiantes de tercer grado de secundaria, en la resolución de situaciones sobre puntos notables mediados por el GeoGebra. Las investigaciones de Lingefjord y Ghosh (2019), Joya y Suárez (2020), como también de Naveiro y Oliveira (2021), coinciden en señalar que los estudiantes tienen poca práctica en el empleo de términos geométricos al escribir sus respuestas y argumentos ante una tarea, sin embargo, el uso de tecnologías como el ambiente de representación dinámica GeoGebra, además de la interacción entre compañeros y guía docente, ayudaron a que los estudiantes movilicen sus conocimientos sobre los puntos notables de un triángulo y fortalezcan sus argumentos mediante la formulación de conjeturas y sus validaciones.

Además, Lingefjord y Ghosh (2019), sostienen que el proceso de probar la colinealidad de los tres puntos notables de un triángulo: ortocentro, baricentro y circuncentro; llevó a los estudiantes a realizar la demostración de la semejanza de triángulos, por lo que, la exploración de los centros de un triángulo condujo, a los estudiantes, vincular con otros conceptos, a su vez se manifiesta que el GeoGebra aceleró el proceso de elaboración y verificación de conjeturas.

Asimismo, rescatamos sobre estas investigaciones de Lingefjord y Ghosh (2019), Joya y Suárez (2020), como también de Naveiro y Oliveira (2021), tener en común el estudio

de los puntos notables de triángulos, reconociendo de esta manera, la importancia de estudiar este objeto matemático en el nivel secundario.

Por otro lado, Joya y Suárez (2020) afirma que “la geometría es una disciplina inmersa en otras ciencias. Por lo tanto, es posible encontrar diferentes situaciones que permitan su estudio, sin dejar de lado su formalidad y rigor” (p. 3). Como también, Liébana et al. (2018) al plantear un problema de una situación real, en caso tengamos que colocar un estacionamiento de bomberos entre tres ciudades de tal manera que la mayor distancia del servicio de bomberos a una ciudad sea la mínima posible, a lo que propone averiguar la ubicación posible del estacionamiento. Como esta situación problemática, se plantean otras, haciendo notar la importancia de conocer y emplear conocimientos relacionados a los puntos notables de un triángulo para resolver situaciones de nuestro contexto real.

Ramírez (2011) señala que el uso de regla y compás beneficia el progreso de las capacidades cognitiva, práctica, comunicativa, interpretativa; además, sostiene que al realizar varios trazos precisos se integran más conceptos geométricos.

En tanto, Morales (2022) sostiene respecto al desarrollo de la competencia digital del profesor de matemática, que está sujeto a la demanda de una sociedad globalizada, lo cual implica el conocer y emplear recursos o tecnologías digitales para brindar soporte en el aprendizaje de sus estudiantes. Por consiguiente, para su investigación sugiere el uso del GeoGebra, a fin de resaltar tipos de argumentos y procesos manifestados en estudiantes al utilizarlo. Además, según el autor GeoGebra es un ambiente de código abierto.

Por su parte Laborde (1992, citado en Iranzo y Fortuny, 2009) manifiesta que, al desarrollar una tarea en un ambiente, como en GeoGebra, requiere diversas estrategias a comparación del uso de lápiz y papel, además que la retroalimentación hacia el estudiante tendría mayor repercusión.

Además, Iranzo y Fortuny, (2009) indican que el GeoGebra facilita diversas representaciones de conceptos geométricos como también, ayuda a evitar obstáculos algebraicos para enfocarse en conceptos geométricos. Por otro lado, los autores sostienen, que el uso de GeoGebra motiva a que se dé un pensamiento más geométrico, como al considerar las intersecciones de circunferencias para formar rombos en vez de construir con segmentos de igual medida, por lo que proporciona a la persona un soporte visual, algebraico y conceptual.

Por consiguiente, para el desarrollo de las tareas planteadas en este estudio, consideramos interesante el uso del ambiente de representación dinámica GeoGebra, con el fin de permitir al estudiante facilitar la manipulación de figuras y el descubrir la conservación de sus propiedades, con ello, conducir al estudiante a evaluar la elaboración de conjeturas y los procesos de prueba en la resolución de situaciones sobre puntos notables del triángulo.

Dadas las investigaciones revisadas, se ha encontrado un reducido estudio en relación a los tipos de prueba en algún contenido de geometría, particularmente en los puntos notables de un triángulo, es por ello nuestro interés en analizar las pruebas que desarrollan los estudiantes en este objeto matemático. En esta línea, Tchonang (2022) afirma que las demostraciones y pruebas generalmente no son objeto de estudio en varios países, sin embargo, es una práctica que los estudiantes deberían desarrollar.

Por otro lado, actualmente la educación básica regular en el Perú es regulada por el Ministerio de Educación (MINEDU), mediante el documento oficial denominado Currículo Nacional de la Educación Básica del Perú (2016), en el cual se detallan los aprendizajes que se espera que logren los estudiantes en el transcurso de su formación escolar.

En el Currículo Nacional (2016), dentro del área de matemática, el contenido de líneas y puntos notables es considerado en la descripción del nivel VII (grados comprendidos de 3ero a 5to de secundaria) del desarrollo de la competencia: Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.

Según el Programa Curricular de Educación Secundaria del Perú (2017), con relación a la competencia mencionada en el anterior párrafo, se pretende que el estudiante desarrolle las siguientes capacidades: el de resolver problemas que les permita modelar características de objetos con formas geométricas y sus transformaciones; además, de expresar su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas, como también seleccionar y adaptar variadas estrategias y procedimientos; por último, plantear afirmaciones y justificarlas, donde se busca comprobar o descartar la validez de la afirmación por medio de contraejemplos o propiedades geométricas.

De acuerdo a las capacidades señaladas en la competencia Resuelve problemas de forma, movimiento y localización, consideramos que nuestro aporte sobre el estudio de tipos de pruebas en la resolución de situaciones sobre puntos notables del triángulo, podrá ser de utilidad por la comunidad educativa, puesto a que la descripción de la capacidad relacionada a comprobar la validez de una afirmación, en el Programa Curricular de Educación Secundaria del Perú (2017), de alguna manera se encuentra relacionada con el desarrollo de pruebas aunque no se describe explícitamente. En el que, en relación a la capacidad mencionada, Balacheff (2000, citado en Conceição, 2022) señala que se atribuye el término de “proceso de validación” a una actividad que tenga como objeto asegurar la validez de una proposición, además, de elaborar una explicación; refiriéndose a las actividades que conciernen a la manipulación de información para generar nueva información a través de un razonamiento.

Por otro lado, el MINEDU, mediante la Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes (UMC), efectuó la Evaluación Muestral de Estudiantes (2022), después de dos años de educación virtual debido a la pandemia. Según el Reporte técnico de la Evaluación

Muestral de Estudiantes (2022), entre las evaluaciones aplicadas se encuentra la evaluación de matemática de 2do grado de secundaria, siendo el único grado del nivel secundaria evaluado, el nivel escolar previo a 3er grado de secundaria, el de interés para nuestro estudio.

En la tabla 1 mostramos las competencias evaluadas en el área de matemática, correspondientes a 2do grado de secundaria.

**Tabla 1**

*Evaluación muestral implementado por la UMC en el 2022 - 2do de secundaria*

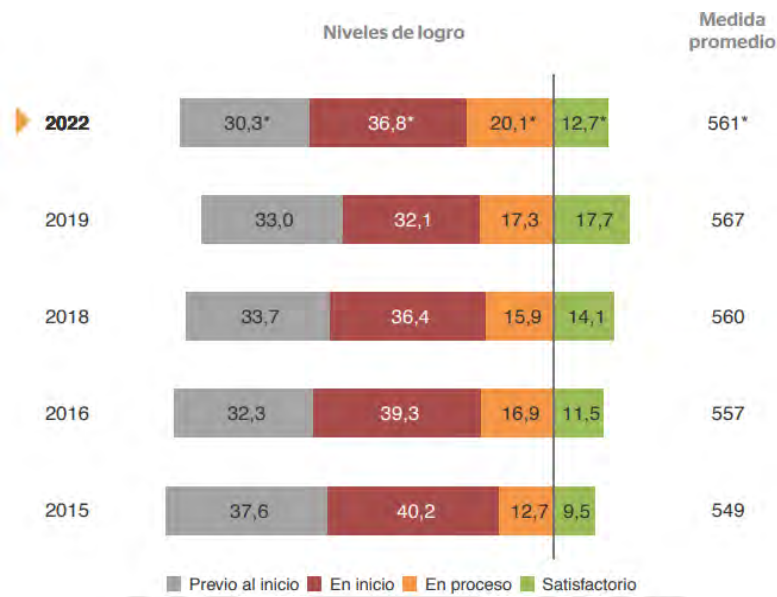
Nivel	Grado	Área	Competencia(s) evaluada(s)	Denominación de la prueba
Secundaria	2.º	Comunicación	Lee diversos tipos de textos escritos en su lengua materna.	Lectura
			Resuelve problemas de cantidad.	
		Matemática	Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.	Matemática
			Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.	
	Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.			

*Fuente.* Tomado de Reporte técnico de la Evaluación Muestral de Estudiantes

En la tabla 1 observamos que las cuatro competencias correspondientes al área de Matemática fueron evaluadas, en particular la cuarta competencia nombrada Resuelve problemas de forma, movimiento y localización. Con ello se evidencia que el estudio de formas, específicamente en relación a los triángulos y todos sus elementos que lo conforman, conlleva su importancia en la competencia, esto sucede de la misma manera para tercer grado de secundaria, según el Diseño Curricular (2016)

A continuación, en la figura 3 mostramos los resultados en matemática obtenidos por estudiantes de 2do de secundaria en el mismo año.

**Figura 3. Resultados de 2° grado de secundaria, Matemática (UMC)**



Fuente. Tomado de Reporte técnico de la Evaluación Muestral de Estudiantes

En la figura 3, el nivel de satisfactorio observamos un decrecimiento de porcentaje en la Evaluación Muestral realizada a 2do grado de secundaria con respecto a la Evaluación Censal del 2019, como también, notamos un aumento de estudiantes en el nivel inicio y en nivel proceso.

A continuación, mostramos un problema relacionado a las propiedades de un triángulo, como se aprecia en la figura 4.

**Figura 4. Problema de la competencia Espacio, forma y visualización del 2° grado de secundaria, Matemática (UMC) - 2016**

¿Cuál es el área de la figura delimitada por las líneas negras?

a) 18 cm<sup>2</sup>       c) 33 cm<sup>2</sup>  
 b) 28 cm<sup>2</sup>       d) 42 cm<sup>2</sup>

**Características de la pregunta**

**Nivel de logro:** Satisfactorio

**Capacidad:** Elabora y usa estrategias

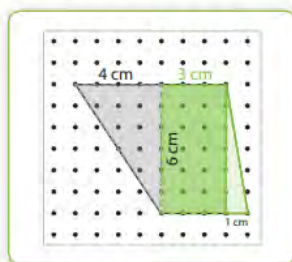
**Contenido:** Área de figuras planas

**Contexto:** Intramatemático

**Respuesta:** c

*Esta pregunta busca que el estudiante halle el área de la figura indicada sin contar con datos explícitos del tipo de figura ni de sus medidas.*

**Estrategia 1:** Los estudiantes descomponen la figura en partes triangulares y rectangulares y determinan el área de cada parte, mediante la aplicación de la fórmula respectiva, para finalmente sumar y hallar el área de la figura dada.



$$\frac{6 \times 4}{2} + 3 \times 6 + \frac{6 \times 1}{2}$$

$$12 + 18 + 3 = 33 \text{ cm}^2$$

*Fuente.* Tomado de Informe para docentes. Evaluación Censal de estudiantes 2016. (p. 26)

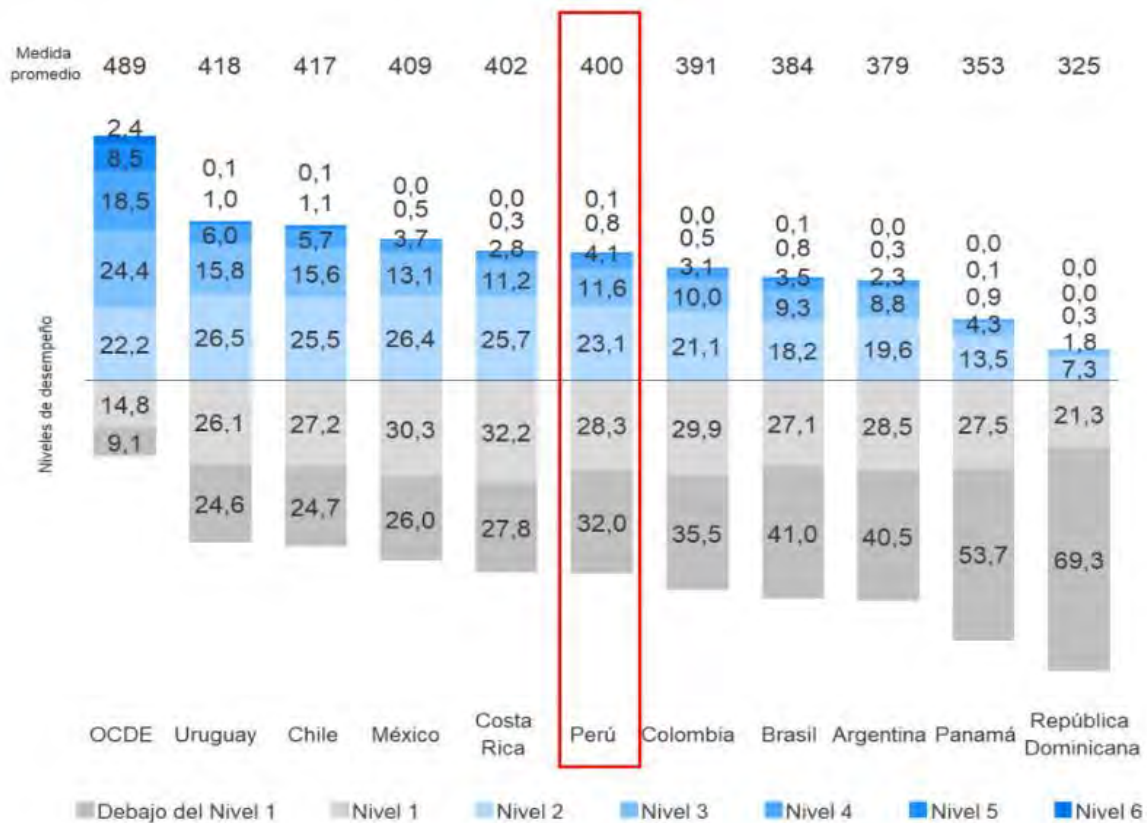
En la figura 4, se muestra una estrategia que posiblemente fue realizado por algún estudiante, descomponer la figura en otras figuras como triángulos y rectángulos, esto con el fin de calcular las áreas de figuras conocidas, como identificando las medidas de la base y altura de un triángulo rectángulo.

Con ello, podemos notar que aún en las evaluaciones censales del país, el contenido de elementos como las líneas y puntos notables no son considerados en el planteamiento de problemas a evaluar. Por lo que, creemos que es importante abordar en las escuelas estos contenidos en situaciones reales como también solicitar realizar pruebas de conjeturas relacionadas al tema, con el fin de comprender su utilidad, además, de medir su aprendizaje mediante las pruebas censales.

Por su parte, el Programa para evaluación Internacional de estudiantes (PISA), realizado por la organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE), evalúa la capacidad de los estudiantes para emplear sus conocimientos y habilidades al enfrentarse a los desafíos en un mundo globalizado. Por su parte, en el Informe nacional de resultados de Pisa 2022 (2024) se describe como competencia matemática lo siguiente:

A continuación, la figura 5 muestra los resultados en Latinoamérica y OCDE del año 2022, según la medida promedio y niveles de desempeño, en matemática.

**Figura 5. Resultados de 2° grado de secundaria, Matemática (PISA)**



*Fuente.* Tomado de Resultados Evaluación PISA

La figura 5 muestra el porcentaje de estudiantes de 2do secundaria que alcanzaron los niveles desde debajo del nivel 1 hasta el nivel 6, de acuerdo al desarrollo que realizaron en la prueba de matemática brindada por PISA. Podemos notar que más de la mitad de estudiantes se encuentran en los niveles de inicio, los que nos llama a preguntarnos sobre las capacidades de la competencia Forma, movimiento y localización, el cual involucra construcciones de figuras geométricas y con ello el descubrimiento de sus propiedades, si tendrán el impacto que se necesita para el aprendizaje de los estudiantes en esta área de la matemática como en otras.

Podemos mencionar que en el levantamiento de información se encontraron pocos estudios referidos al análisis de proceso de prueba en contenidos geométricos, además, de poca producción de aportes de tipo de pruebas dirigidos a estudiantes en investigaciones recientes. En tanto, consideramos resaltar la importancia la resolución de situaciones sobre puntos notables de un triángulo y la realización de pruebas, señalados por diferentes investigaciones en la sección anterior y documentos oficiales del país.

Por otro lado, en el ejercicio de profesión docente, percibimos que los estudiantes tienen poca práctica como también dificultades en realizar pruebas que permitan validar sus

conjeturas en una actividad relacionada con un contenido matemático. De allí nuestro interés en analizar los procesos de prueba que realizan los estudiantes, específicamente en relación a los puntos notables de un triángulo, dado que creemos que se tiene poco conocimiento de su utilidad en el contexto real.

Consideramos que uno de los factores de esta problemática podría darse por el poco manejo o falta de conocimiento por parte de los profesores, de generar actividades que sugieran realizar pruebas de tal manera que el estudiante sienta la necesidad de hacerlo, esto concuerda con lo mencionado por Balacheff (1988, citado en Conceição, 2022), respecto al planteamiento de problemas de prueba, el crear las condiciones de una discusión de prueba cuya resolución será responsabilidad de los estudiantes como los medios de validación que decidan utilizar.

Todo lo anterior, nos lleva a formular nuestra pregunta de investigación y los objetivos que buscaremos alcanzar, los cuales describimos a continuación.

### **1.3 Pregunta y objetivos de la investigación**

Para la realización de esta investigación nos planteamos la siguiente pregunta:

¿Qué tipos de pruebas sobre el baricentro y circuncentro de un triángulo realizan los estudiantes de 3er grado de educación secundaria cuando resuelven una secuencia didáctica con el uso del GeoGebra?

Para responder nuestra pregunta de investigación, planteamos el siguiente objetivo general:

Caracterizar los tipos de prueba sobre el baricentro y circuncentro de un triángulo que realizan los estudiantes de 3er grado de educación secundaria cuando resuelven una secuencia didáctica con el uso del GeoGebra.

Para alcanzar el objetivo general se presentan los objetivos específicos:

- Describir los tipos de prueba según la propuesta de Balacheff, para las actividades sobre el baricentro y circuncentro de un triángulo.
- Identificar en las soluciones de los estudiantes el tipo de prueba, según la propuesta de Balacheff, cuando resuelven una secuencia didáctica sobre el baricentro del triángulo.
- Identificar en las soluciones de los estudiantes el tipo de prueba, según la propuesta de Balacheff, cuando resuelven una secuencia didáctica sobre el circuncentro del triángulo.

A continuación, presentamos aspectos teóricos y metodológicos de Procesos de prueba de Balacheff y del Estudio de casos respectivamente.

#### **1.4 Aspectos teóricos de los Tipos de Prueba en matemática de Balacheff.**

En esta sección presentamos el planteamiento teórico que fundamenta nuestra investigación, en ese sentido definimos aspectos de procesos de validación y los tipos de Prueba según Balacheff.

Según Balacheff (2000), la noción de demostración cobra importancia en la enseñanza de las matemáticas en Francia, el cual se incluía en el primer ciclo de secundaria como un objetivo de enseñanza, donde los estudiantes entendían el desarrollo de una demostración, esto en base a los sumarios ministeriales de abril de 1977; sin embargo, ello se ha ido perdiendo en los próximos años, y fue reemplazado por el entrenamiento en el razonamiento deductivo, de manera progresiva a lo largo de la educación secundaria, esto propuesto bajo las nuevas normativas educativas del país.

El autor menciona que estas reformas pueden deberse a los problemas hallados en la demostración como enseñanza, aun así, los términos “demostrar” y “probar” se encuentran en los textos escolares. Por lo que el autor señala que es fundamental conocer que la demostración no puede ser enseñada de la misma manera en un aula de clase que en un ambiente esencialmente científico. Esto concuerda con Chevallard (1985, citado en Balacheff, 2000), quien señala que la matemática debe sufrir una transformación adaptativa para ser enseñada, a lo que llama una transposición didáctica.

Respecto a la formulación del tipo de problemas, Balacheff (2000) señala sobre aquellas, en el que directamente se solicita al estudiante mostrar la validez de un enunciado, es decir, que desde un inicio se estaría considerando como uno verdadero; se estaría evitando que el estudiante evalúe su veracidad o no, mediante procesos de prueba. De la misma forma, el autor señala la importancia de evaluar la manera en que los estudiantes llegan a la convicción de la validez de la solución de lo que se propone; para esto prioriza la interacción social, con el que se generan debates y se observan los procesos desarrollados a partir de las decisiones tomadas por los estudiantes.

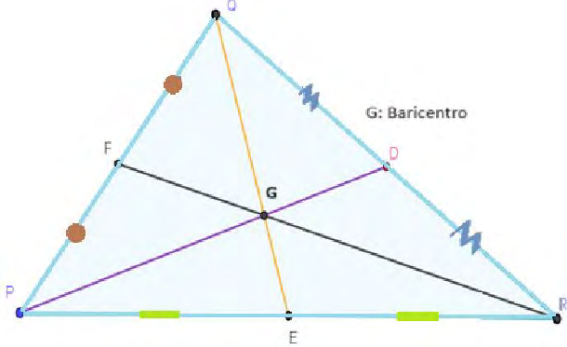
En nuestro estudio pretendemos caracterizar los tipos de pruebas en el baricentro y circuncentro realizadas por los estudiantes con el uso del GeoGebra, en el que según Salazar y Almouloud (2015), podremos identificar los tres procesos cognitivos para constituir un registro figural en un Ambiente de representación dinámica (ARD), en el caso de nuestro estudio se busca que los estudiantes realicen representaciones triangulares y sus respectivos trazos de líneas y puntos notables (formación), además, de trazos auxiliares con el fin de realizar pruebas para determinadas conjeturas formuladas en durante las actividades

(tratamiento), además, las funciones de arrastre y manipulación permiten la construcción de relaciones entre tratamientos figurales y discursivos de la figura de una manera diferente (conversión).

En la tabla 2 presentamos ejemplos de Registros de Representación Semiótica para el objeto matemático Puntos Notables de un triángulo, específicamente para el Baricentro, además de tratamientos, tal como podemos observar en la siguiente tabla.

**Tabla 2**

*Registros de representación semiótica del Baricentro*

Registro de lenguaje natural	Registro figural dinámico
El baricentro G es punto de intersección de las medianas $\overline{PD}$ , $\overline{EQ}$ y $\overline{RF}$ del triángulo PQR.	

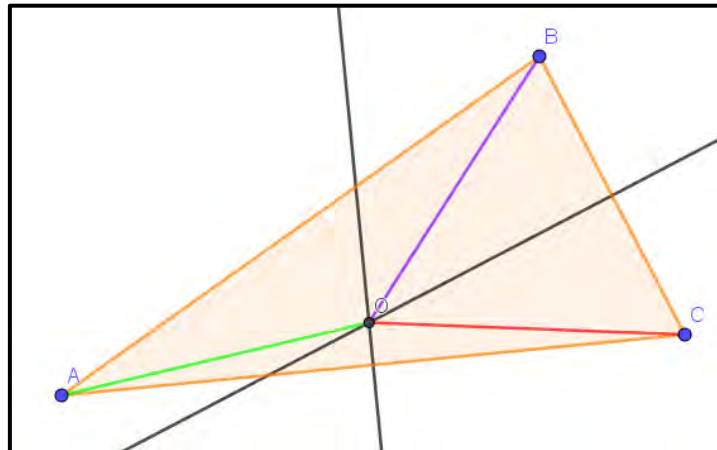
En la tabla 2, podemos observar que la descripción del Baricentro corresponde a una representación en registro de lengua natural, en el que fue necesario denotar al Baricentro, a las medianas y a triángulo PQR. Luego, observamos la conversión del registro de lenguaje natural al registro figural dinámico, en el cual se representan los elementos geométricos que permiten determinar al baricentro G.

### **Explicación, prueba y demostración**

Balacheff (2000) distingue conceptos que generalmente son confundidos con prueba, lo que pudo corroborar revisando textos escolares, estos conceptos son la explicación, prueba y demostración. A continuación, revisemos las siguientes definiciones planteadas por el autor, ejemplificadas a uno de los puntos notables del triángulo, el circuncentro.

Veamos la figura 6, en el que se muestra una representación triangular con los trazos de sus mediatrices y el circuncentro.

**Figura 6.** Mediatrices del triángulo ABC y su concurrencia en el circuncentro.



A continuación, en base a la figura 6, se buscará definir y ejemplificar la explicación, prueba y demostración, dada la afirmación: Las mediatrices de los lados de un triángulo ABC son concurrentes, y este es equidistante de los tres vértices A, B y C.

*Explicación:* validez de una proposición establecida por el locutor en base a sus conocimientos y racionalidad.

Por ejemplo, tenemos trazadas dos mediatrices, a los lados  $\overline{AC}$  y  $\overline{BC}$ , que se intersecan en un punto, al cual llamaremos el punto O. Luego, la mediatriz del lado  $\overline{AB}$ , pasará por el punto O porque esta recta contiene a la altura de la base AB, del triángulo isósceles AOB.

*Prueba:* resultados verificados de una explicación, la cual es reconocida y aceptada por una comunidad; como también, podría ser rechazada por otra. Por otro lado, esta postura puede variar según el avance de los conocimientos por los que se apoya.

Continuamos con el mismo ejemplo:

Probar que las mediatrices de los lados de un triángulo ABC son concurrentes, y éste es equidistante de los tres vértices A, B y C

Sea el triángulo ABC, las mediatrices de lados  $\overline{AC}$  y  $\overline{BC}$ , no son paralelas, los cuales se encuentran en el punto O. Como cualquier punto de la mediatriz equidista de los extremos de un segmento, se tendrá que:

$$OA = OC$$

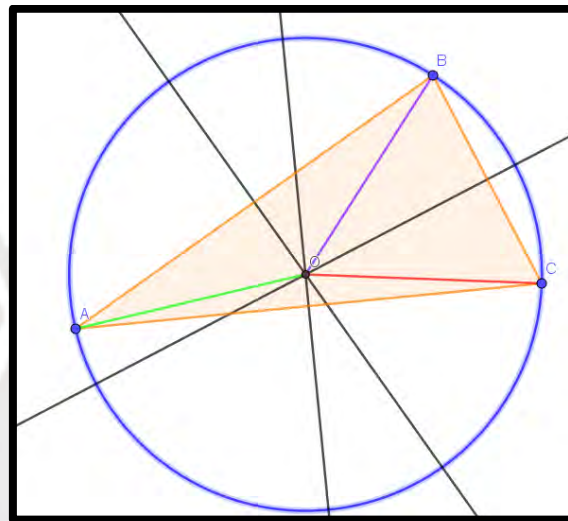
$$OB = OC, \text{ Entonces:}$$

$$OA = OB$$

Es decir que, por la propiedad de transitividad de la igualdad, los segmentos  $\overline{OA}$  y  $\overline{OB}$  son congruentes. Por lo que, la mediatriz del lado  $\overline{AB}$  pasa por el punto  $O$ , es decir, las mediatrices del triángulo son concurrentes cuya intersección, el punto  $O$ , es llamado Circuncentro.

Esto también implica que existe una circunferencia que pasa a través de los tres vértices del triángulo, llamado Circuncírculo, como se puede apreciar en la figura 7.

**Figura 7.** Circuncírculo o circunferencia circunscrita al triángulo  $ABC$ .

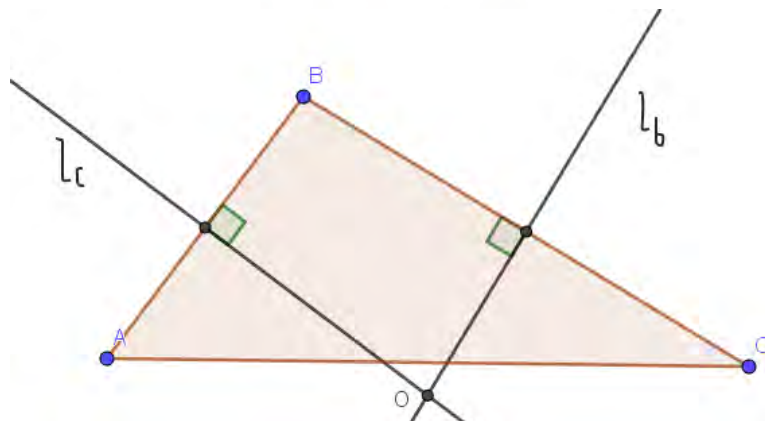


*Demostración:* tipo de prueba con una serie de enunciados organizados y respaldados por un conjunto de reglas definidas, posee un rigor formal.

**Teorema.** Las mediatrices de los lados de todo triángulo son concurrentes.

*Demostración.* Sea  $\Delta ABC$ , consideremos las mediatrices  $l_c$  y  $l_b$  de  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  respectivamente y  $O = l_c \cap l_b$ , tal como se ha representado en la figura 8.

**Figura 8.** Mediatrices  $l_c$  y  $l_b$  de  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  en el triángulo  $ABC$ .



Por la propiedad de la mediatriz de un segmento, cualquier punto de la mediatriz equidista a los puntos extremos del segmento.

Puesto a que  $O \in l_c$  y  $O \in l_b$ , entonces  $OA = OB$  y  $OA = OC \rightarrow OB = OC$

Por lo mencionado,  $OB = OC$  implica que  $O \in l_a$ , la mediatriz de  $BC$ .

Por lo que queda demostrado que las mediatrices de un triángulo son concurrentes.

Por otro lado, Balacheff (2000) también define el término razonamiento matemático, como una actividad intelectual en el que se manipula información para producir nueva información. A lo que el autor añade “Le asignaremos el término procesos de validación a esta misma actividad cuando tenga como fin asegurarse de la validez de una proposición y eventualmente, producir una explicación (una prueba o una demostración)” (p. 13).

### **Procesos de Validación**

El autor señala que se atribuye el término de procesos de validación a una actividad que tenga como objeto asegurar la validez de una proposición, además, de elaborar una explicación; refiriéndose a las actividades que conciernen a la manipulación de información para generar nueva información a través de un razonamiento. Esto conlleva a que las pruebas y demostraciones predominen como productos de un proceso de validación. Por otra parte, según lo mencionado por el autor “nos interesa lo concerniente a los procedimientos de validación de los enunciados que, desde la perspectiva de los alumnos, aparecen como conjeturas”. (p. 54), esto con el fin de realizar la experimentación sobre los procesos de validación que realizan los estudiantes en la primera parte de su estudio, el autor propone que el estudiante realice procesos de validación de una proposición que conoce el docente o investigador, lo que el estudiante formulará a manera de una conjetura.

### **Tipos de prueba**

Balacheff (2000) considera dos categorías: pruebas pragmáticas y pruebas intelectuales. Balacheff (1988, citado en Júnior y Nasser, 2012) refiere que, hacia la validez de una prueba, la prueba pragmática utiliza “recursos de acción” como regularidades y ejemplos para justificar un resultado, por el contrario, la prueba intelectual propone la formulación de propiedades y las relaciones entre ellas. Por lo que Balacheff (2000) relaciona a la prueba pragmática con problemas de eficacia y a la prueba intelectual, con problemas de rigor.

A continuación, detallaremos los tipos de prueba propuestos por el autor.

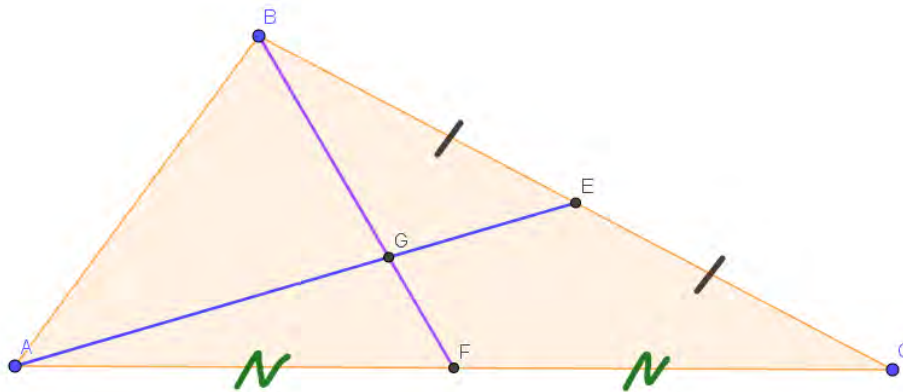
## El empiricismo ingenuo

Procedimiento en el que se formulan conjeturas a partir de la observación de pocos casos, sin evaluar su validez. Estas afirmaciones se toman absolutamente como verdaderas.

Ejemplo de solución:

**Actividad: Determinar la relación entre los segmentos de una mediana cortada por G (Baricentro) en el triángulo ABC. Emplea propiedades geométricas para probar tu conjetura.**

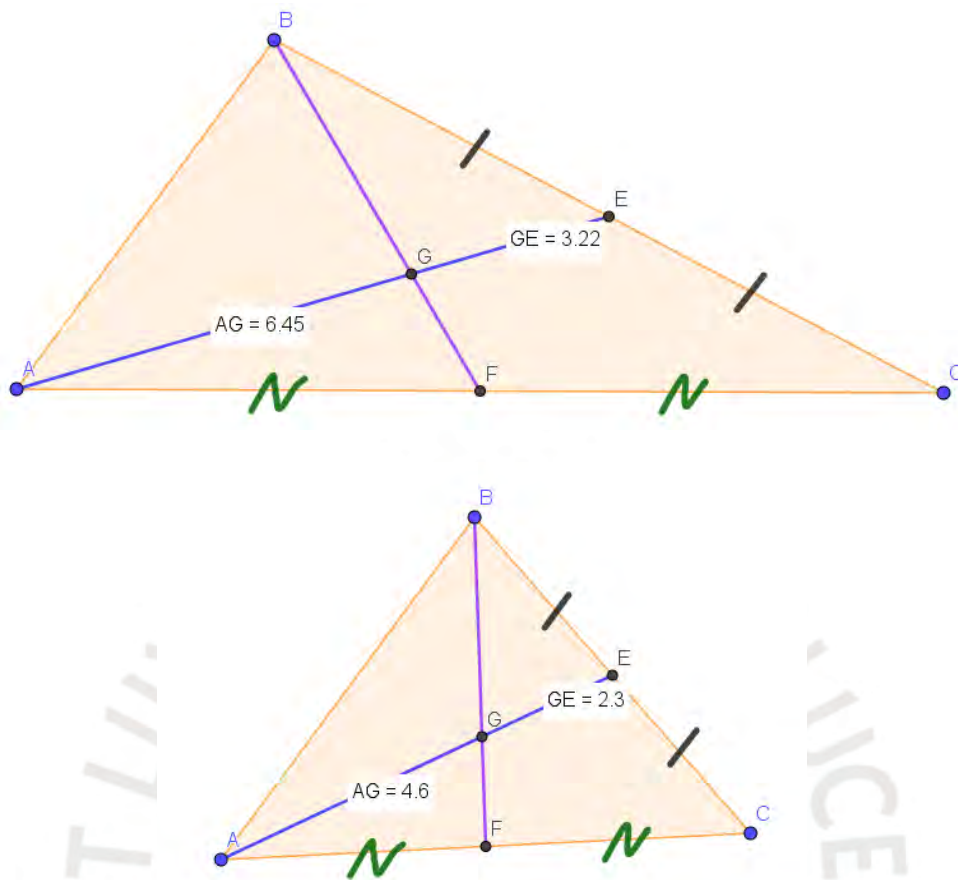
Figura 9. Ejemplo de empiricismo ingenuo: Baricentro en el triángulo ABC



La figura 9 representa a las medianas y el baricentro del triángulo ABC.

Mediante el uso de las herramientas *distancia* y *mueve* del GeoGebra, para medir y formar diferentes tipos de representaciones triangulares respectivamente, resulta que la relación entre  $\overline{AG}$  y  $\overline{GE}$  es imprecisa. En algunos casos, el segmento  $\overline{AG}$  es aproximadamente el doble de  $\overline{GE}$  y en otros casos, exactamente el doble como podemos observar en la figura 10.

**Figura 10.** Ejemplo de empiricismo – Relación en la mediana del triángulo ABC



En la primera representación, de la figura 10, podemos notar que las medidas de los segmentos AG y GE dan la impresión que no tuvieran relación de 2 a 1 respectivamente, aún así al arrastrar C, uno de los vértices de la representación triangular, las medidas de los segmentos tienen una relación exacta de 2 a 1, como se puede apreciar en la figura 10.

En este ejemplo de solución podemos observar, tanto en la descripción como en la figura 10 que, no se emplean procesos para generalizar haciendo uso de nociones matemáticas, solo se toman ejemplos hallando distancias con el beneficio de las herramientas del GeoGebra, tales como *distancia* y *mueve*, con lo que finalmente se formulan conclusiones.

### **La experiencia crucial**

Consiste en verificar una conjetura, al evaluar decidir entre la proposición y su negación. Existe un intento de generalizar el problema y resolución del mismo, en un caso particular.

Para Balacheff (2000), referente a la interacción social, que según sostiene, le da significado a la experiencia crucial:

“Este tipo de validación se manifiesta en todo su apogeo en un conflicto acerca de la validez de un enunciado que no puede ser superado a través del paso a un nivel superior de prueba... La experiencia crucial se situaría en una posición paralela. Determinada en su función por las interacciones sociales, puede aparecer “paralelamente” a otros tipos de prueba cuando la tensión entre los estudiantes no se minimiza en el terreno de las razones” (p. 85).

En base a lo manifestado, la interacción social permite exteriorizar las concepciones y la toma de decisiones.

Ejemplo de solución:

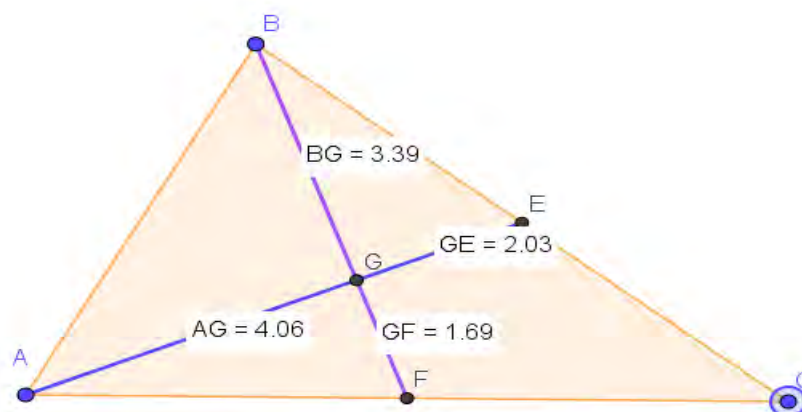
**Actividad: Determinar la relación entre los segmentos de una mediana cortada por G (Baricentro) en el triángulo ABC. Emplea propiedades geométricas para probar tu conjetura.**

Someteremos a prueba la conjetura anterior:

“...resulta que la relación entre  $\overline{AG}$  y  $\overline{GE}$  es imprecisa. En algunos casos, el segmento  $\overline{AG}$  es aproximadamente el doble de  $\overline{GE}$  y en otros casos, exactamente el doble”.

*Para ello evaluaremos la conjetura en diferentes triángulos. Además, de utilizar la opción “redondeo” de GeoGebra para evaluar al valor que se aproxima al relacionar los segmentos que se forman con el punto de corte G en cada mediana.*

**Figura 11.** Ejemplo de experiencia crucial - Relación en la mediana del triángulo ABC

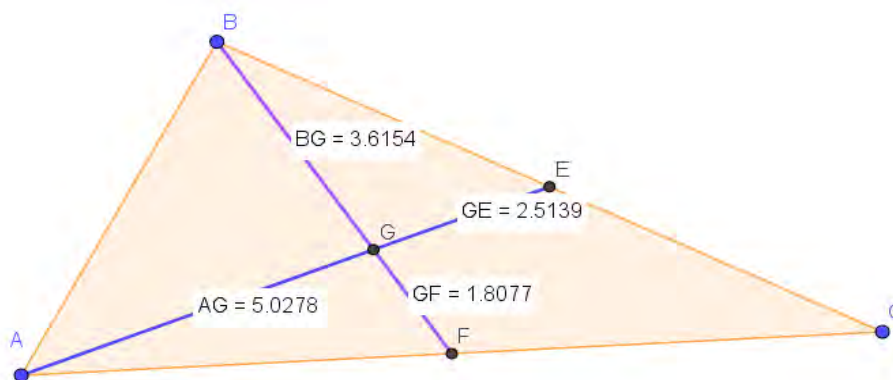


En la figura 11 tenemos que la relación entre los segmentos de las medianas cortadas por G aún no es precisa, esto con el uso de una calculadora.

$$\frac{4.06}{2.03} = 2 \text{ y } \frac{3.39}{1.69} = 2.0059$$

Aunque, para evaluar mejor la relación, podemos aumentar la cantidad de cifras decimales y seguir evaluando, ello modificando el triángulo con la herramienta “mover”.

**Figura 12.** Ejemplo de experiencia crucial – Relación en la mediana del triángulo ABC.



A partir de la figura 12, podemos establecer la relación  $\frac{5.0278}{2.5139} = 2$  y  $\frac{3.6154}{1.8077} = 2$  introduciendo  $r = AG / GE$  y  $z = BG / GF$  respectivamente, en la barra de entrada del GeoGebra. Tenemos que la relación entre los segmentos de una mediana del triángulo es de 2 a 1.

Sobre el ejemplo dado, un estudiante por sí mismo podría tomar la decisión de probar su conjetura con más ejemplos, de otro modo, también podría darse mediante la interacción con un compañero, por lo que estarían recurriendo a una experiencia crucial, para establecer una nueva conjetura. En caso el estudiante persista con su conjetura anterior, según Balacheff (2000), la prueba realizada se mantendría dentro del empiricismo ingenuo.

### Ejemplo genérico

Explicación de las razones de validez de una afirmación para la verificación de operaciones o transformaciones de la representación de un objeto matemático.

Ejemplo de solución:

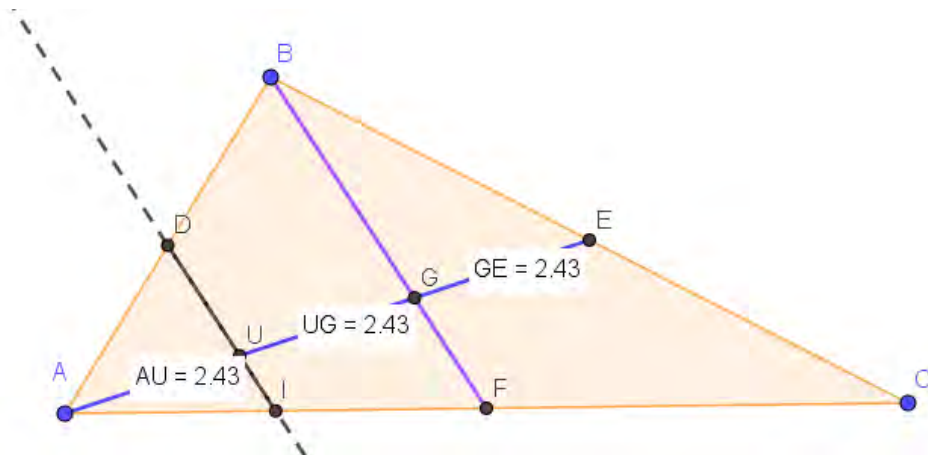
Continuamos con la actividad.

**Actividad: Determinar la relación entre los segmentos de una mediana cortada por G (Baricentro) en el triángulo ABC. Emplea propiedades geométricas para probar tu conjetura.**

Trazamos una recta paralela a  $\overline{BF}$  que pase por el punto D, punto medio de  $\overline{AB}$  (esto con la herramienta paralela del GeoGebra), para luego medir cada segmento de la mediana  $\overline{AE}$  formados por las rectas paralelas (herramienta distancia). De esta manera podemos

verificar que  $AG$  mide el doble de  $GE$ , tal como observamos en la figura 13, con lo que efectivamente la relación entre los segmentos de la una mediana cortada por el baricentro es de 2 a 1.

**Figura 13. Ejemplo Genérico – Baricentro en el triángulo  $ABC$**



En esta actividad, como podemos observar en la figura 13, la solución no se limita a realizar solo mediciones, por el contrario, añade otras nociones geométricas como rectas paralelas trazadas por puntos medios de dos de los lados del triángulo  $ABC$ , a fin de precisar la conjetura. Lo que podría ayudar a realizar generalizaciones y por ende pasar a una experiencia mental.

### La experiencia mental

Fundamento de la validez de las conjeturas, en el que sus razones son explicadas en base al análisis de las propiedades del objeto.

Ejemplo de solución:

Para ello, consideramos que el siguiente proceso sería realizado en una hoja de papel incluso con un applet de GeoGebra, puesto a que, para verificar la conjetura dada, se requiere emplear las propiedades y registrar la utilización de las mismas y sus resultados.

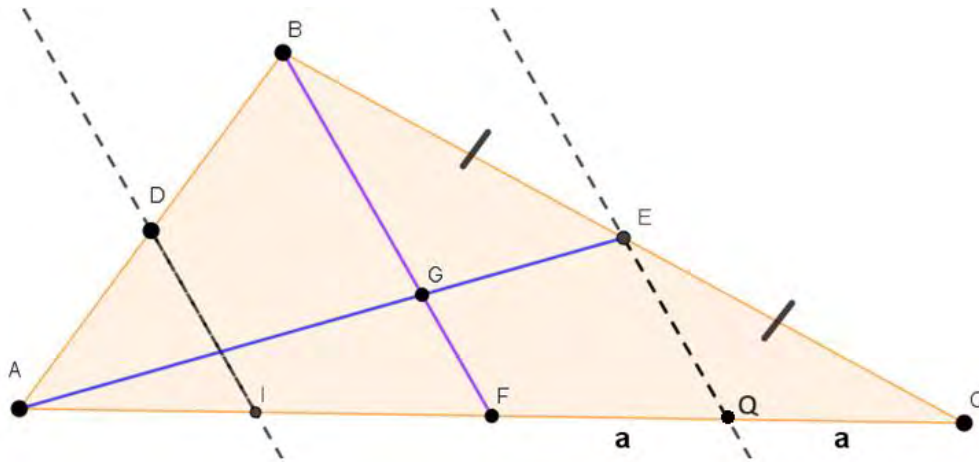
Continuamos con la actividad.

**Actividad: Determinar la relación entre los segmentos de una mediana cortada por  $G$  (Baricentro) en el triángulo  $ABC$ . Emplea propiedades geométricas para probar tu conjetura.**

Utilizamos la herramienta “medio o centro” del GeoGebra para ubicar el punto medio de  $\overline{AB}$ , al cual nombraremos punto  $D$  y al punto medio de  $\overline{BC}$ , al cual nombraremos  $E$ ; después, utilizamos la herramienta “paralela” para trazar las paralelas a  $\overline{BF}$ , una que pase

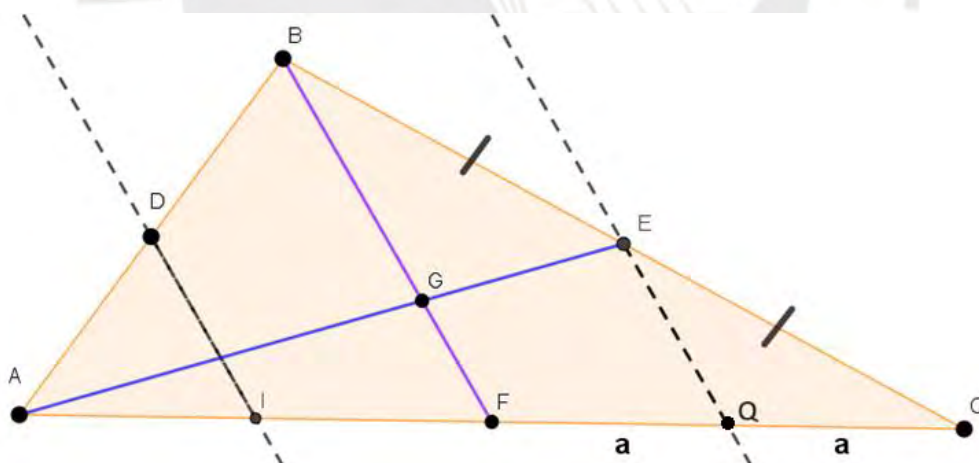
por el punto medio de  $\overline{BC}$ , el punto E y otra paralela que pase por el punto medio de  $\overline{AB}$ , el punto D, tal como se muestra en la figura 14.

**Figura 14.** Experiencia mental – rectas paralelas en el triángulo ABC



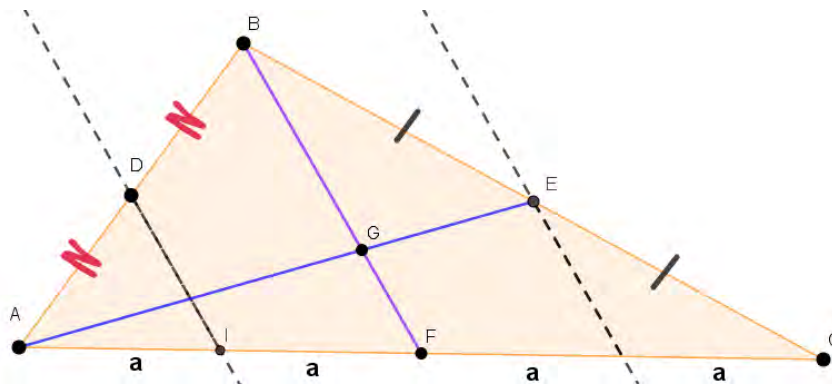
Luego, tenemos que, por el Teorema de Tales en el triángulo FBC existe la proporcionalidad  $\frac{EC}{EB} = \frac{CQ}{QF}$ , además que Q es punto medio de  $\overline{FC}$ , como lo señalado en la figura 15.

**Figura 15.** Experiencia mental – semejanza en los triángulos QEC y FBC



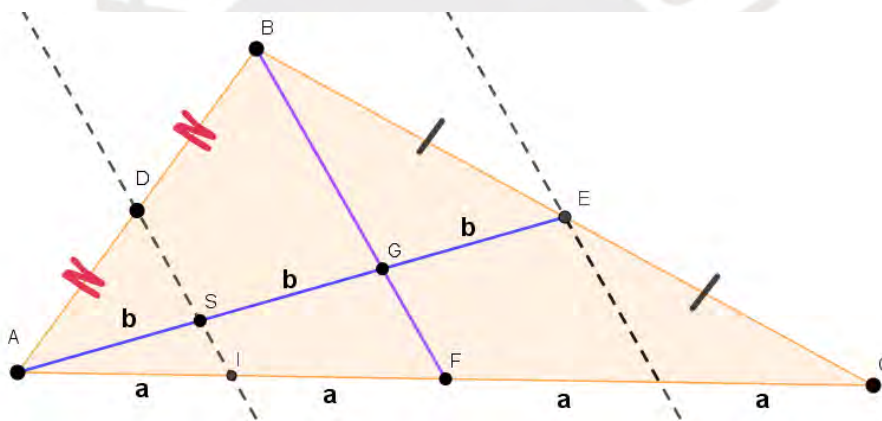
Del mismo modo para el triángulo ABF. Luego, puesto a que I y Q son puntos medios de AF y FC respectivamente, obtenemos que  $AI = IF = FQ = QC$ , lo que podemos notar en la figura 16.

**Figura 16.** Experiencia mental – semejanza en los triángulos DJA y FBA



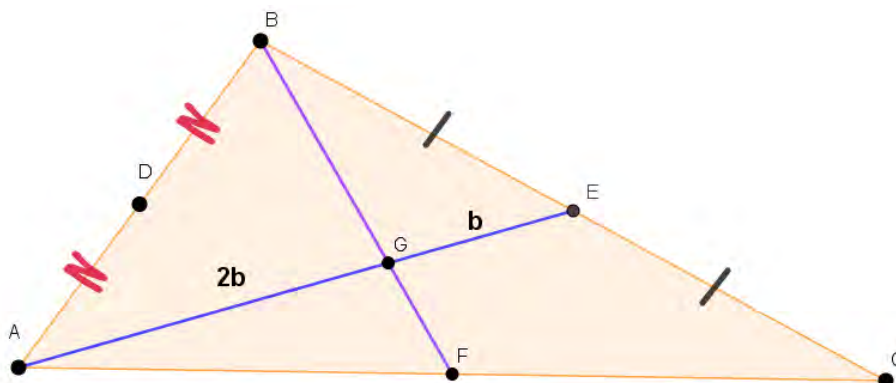
Por consiguiente, empleando el teorema de Tales en el triángulo AEC, tenemos que  $AS=SG=GE$ , cuya longitud es representada con “b” en la figura 17.

**Figura 17.** Experiencia mental – Congruencias en la mediana del triángulo ABC



Finalmente, probamos que  $AG=2GE$ . Es decir, la relación de los segmentos de una mediana es de 2 a 1, tal como podemos notar en la figura 18, del mismo modo se puede probar para cada mediana.

**Figura 18.** Experiencia mental – Relación en la mediana del triángulo ABC



Tal como podemos observar, este ejemplo de solución es independiente a situaciones particulares y descontextualizado. La experiencia mental requiere de movilizaciones cognitivas y lingüísticas elaboradas, por lo que fue primordial presentar, apoyado en representaciones figurales, expresiones operacionales sobre objetos abstractos, como en este caso, a las rectas paralelas, triángulos semejantes o teorema de Thales, proporciones, entre otros.

Por otro lado, para Balacheff (2000), el orden en que se presentan los tipos de prueba, se rige por el nivel de exigencia en cuanto a la generalidad y conceptualización de conocimientos que se involucran en el proceso. Por lo que, la realización de una prueba de tipo experiencia mental, señala una transición de las pruebas pragmáticas a las pruebas intelectuales. Además, respecto al estado intermedio entre las pruebas pragmáticas y pruebas intelectuales, el autor señala que en el tipo de prueba *ejemplo genérico* se decide el carácter de generalización, a partir del uso que se hace del ejemplo, con lo que admite dos posibilidades; el ejemplo puede proporcionar operaciones efectivas con que se busca asegurar la validez de un enunciado o sirva de medio para mostrar tal validez, de esta manera la prueba se incluye dentro de la categoría de las pruebas pragmáticas. Por otro lado, el ejemplo puede brindar un medio para expresar la prueba, con lo que se considerará dentro de la categoría de las pruebas intelectuales. Lo señalado podemos resumirlo en el siguiente esquema, figura 19.

**Figura 19.** Tipos de pruebas matemáticas según Balacheff (2000)



La figura 19, presenta un esquema en el que se muestran los tipos de prueba divididos en dos grupos, como prueba pragmática y prueba intelectual, el tipo de prueba *ejemplo genérico*, como se indicó en el párrafo anterior, puede ser considerado dentro de la categoría Prueba pragmática o Prueba intelectual, de acuerdo a su carácter de generalización.

Cabe mencionar, en base a lo señalado por Balacheff (2000) en el capítulo II denominado Tipos de prueba, en el que muestra ejemplos y los analiza según los tipos de prueba que el mismo autor propone, menciona lo siguiente: “En esta parte nos interesa lo concerniente a los procedimientos de validación de los enunciados que, desde la perspectiva de los alumnos, aparecen como conjeturas” (p. 54). Nuestro estudio tratará a las conjeturas, que formulen los estudiantes, de la misma manera que el autor ha señalado.

En la sección siguiente abordaremos aspectos metodológicos necesarios para permitirnos responder nuestra pregunta de investigación.

### **1.5 Aspectos Metodológicos**

Consideramos emplear, para nuestra investigación, la metodología de tipo cualitativa, en ese sentido Hernández et al. (2010) sostienen que “los estudios cualitativos pueden desarrollar preguntas e hipótesis antes, durante o después de la recolección y el análisis... El énfasis no está en medir las variables involucradas en dicho fenómeno, sino en entenderlo”. Por lo que pretendemos realizar prácticas interpretativas para buscar comprender y formular conclusiones a partir del análisis de la información recogida.

Yin (2005) sostiene que el método Estudio de casos es adecuado para temas considerados relativamente nuevos, puesto a que, según su opinión, una investigación empírica presenta características distintivas. Por lo que, dentro de la investigación cualitativa, hemos considerado utilizar, el método Estudio de casos.

Además, en base a nuestro objetivo de estudio, señalamos que este tiene un propósito exploratorio y descriptivo.

*Propósito descriptivo*, identificaremos y describiremos las características de las soluciones de los estudiantes sobre baricentro y circuncentro de un triángulo, así como las conversaciones que se realizan al respecto.

*Propósito exploratorio*, con la exploración pretendemos relacionar la información obtenida del estudio con los tipos de Prueba en matemática de Balacheff.

A continuación, describimos los componentes del estudio de caso, según Yin (2005).

**Preguntas de investigación:** De donde parte la investigación para la recolección de la información, por lo que las preguntas contienen los conceptos, dimensiones, factores o variables. En nuestro estudio, formulamos la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué tipos de pruebas sobre el baricentro y circuncentro de un triángulo realizan los estudiantes de 3er grado de educación secundaria cuando resuelven una secuencia didáctica con el uso del GeoGebra?

**Proposiciones teóricas:** Del mismo modo que las preguntas de investigación, se consideran un punto de partida de la investigación, el cual se utiliza en el análisis de la información obtenida. En nuestro caso, la investigación se fundamenta en los Tipos de Prueba en matemática de Balacheff.

**Las unidades de análisis:** Elementos que conforman el caso como personas, una institución, documentos o algún acontecimiento. En ese sentido, nuestra investigación presenta como caso de estudio a cada dupla de estudiantes que desarrollan la secuencia de actividades sobre el baricentro y circuncentro con el uso del GeoGebra; por lo que nuestra unidad de análisis, son las actividades desarrolladas, con el fin de obtener información sobre el razonamiento en todo el proceso del desarrollo, las cuales son descritos e interpretados en términos de los Tipos de prueba en matemática de Balacheff.

**La vinculación lógica de los datos a las proposiciones:** Consiste en contrastar la información recolectada con los criterios establecidos por el marco teórico, además, verificar su relación. Por lo que, en nuestro estudio hemos considerado realizar un análisis de las soluciones de los estudiantes para categorizar en base a los tipos de prueba matemática de Balacheff.

Con respecto a la recolección de datos, incluiremos los archivos de GeoGebra, grabaciones de las intervenciones de los estudiantes y entrevistas semiestructuradas, esto último, con el propósito de obtener mayor claridad sobre sus resoluciones. Tales informaciones forman parte de la triangulación según Yin (2005), lo que permite proporcionarnos una visión más completa y confiable de los resultados.

**Los criterios para la interpretación de los datos:** Se refiere a la interpretación y análisis de las relaciones encontradas entre las categorías establecidas con base en el marco teórico y los datos obtenidos, lo cual nos llevará a la comprensión del fenómeno estudiado. En nuestro estudio, consideramos elaborar un conjunto de criterios de análisis, en base a la propuesta de Balacheff, con el fin de caracterizar los tipos de prueba en el baricentro y circuncentro del triángulo que realizan los estudiantes.

En el siguiente capítulo presentamos aspectos teóricos y matemáticos de los puntos notables; como también libros y documentos oficiales que tratan el objeto matemático de estudio.

## Capítulo II: Estudio de los puntos notables

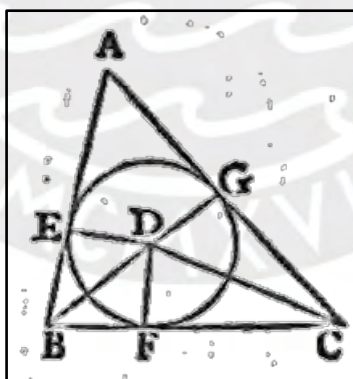
En el presente capítulo, desarrollaremos los aspectos matemáticos e históricos de los puntos notables, además de los aspectos pedagógicos con la revisión de algunos textos escolares actuales, de tercer grado de secundaria. Como aspecto matemático, presentaremos las propiedades y teoremas que caracterizan a los puntos notables. Finalmente, estudiaremos a los puntos notables en el currículo nacional y en los libros didácticos de nivel secundario.

### 2.1 Aspectos históricos de los puntos notables

En el presente estudio consideramos el desarrollo histórico del objeto matemático de nuestro interés, desde lo expuesto por Simson, R. (Ed). (1774), editor del libro “Los elementos” de Euclides, en el cual en el libro IV, se presentan 7 definiciones y 16 proposiciones relacionadas a polígonos regulares inscritos o circunscritos en círculo.

La proposición del Libro IV de Euclides señala lo siguiente en la Proposición IV: Inscribir un círculo en un triángulo dado. El proceso consiste en dividir a los ángulos de un triángulo ABC en dos partes iguales, cuyos segmentos de división hacen referencia a las bisectrices, luego, se trazan perpendiculares desde el punto de intersección, el punto D, hacia cada lado del triángulo, formando así perpendiculares de igual longitud, como notamos en la figura 20.

**Figura 20.** *Círculo inscrito en el triángulo ABC: Incentro*

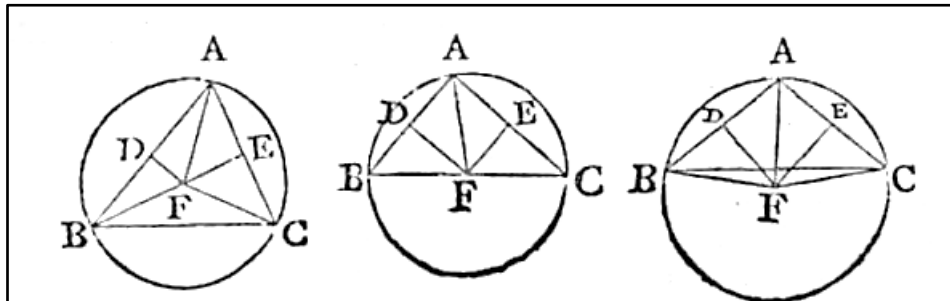


*Fuente.* Tomado de Simson, R. (Ed), 1774, p. 98

Como se puede observar en la figura 20, seguidamente, se traza un círculo con centro D y las perpendiculares como radio, con lo que el círculo queda inscrito en el triángulo ABC.

Por otro lado, en el mismo libro, tenemos como Proposición V: Circunscribir un círculo en un triángulo dado, tal como muestra la figura 21.

**Figura 211.** *Círculo circunscrito en el triángulo ABC: Circuncentro*



*Fuente.* Tomado de Simson, R. (Ed), 1774, p. 99

En la figura 21, se indica trazar perpendiculares a los lados de un triángulo ABC, tales perpendiculares se unen en un punto F, el cual hace referencia al circuncentro. Finalmente, el círculo descrito con centro F pasará por todos los vértices del triángulo ABC, por consiguiente, el triángulo se ha circunscrito.

Según lo señalado por Lingefjard y Ghosh (2019), Euler publica un artículo en el año 1767, en el cual detalla el análisis de los centros de los triángulos y sus relaciones; aunque en un principio tenía como fin construir un triángulo con los puntos notables del triángulo, es donde en el proceso observó la colinealidad de tres puntos notables: el ortocentro, circuncentro y baricentro. Cuyo resultado es uno de los más destacados de la geometría.

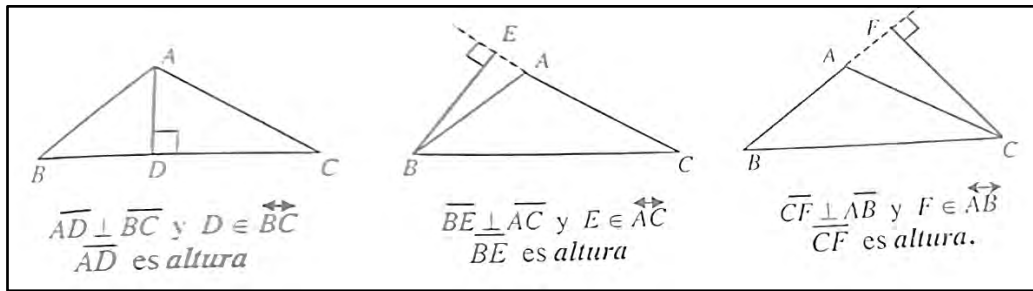
## 2.2 Aspectos matemáticos de los puntos notables

Sobre las definiciones de líneas y puntos notables del triángulo, consideramos lo expuesto por Verástegui (2003). Añadimos las definiciones de las líneas notables puesto a que son los elementos geométricos con que se forman los puntos notables del triángulo. Luego, mostraremos la prueba de un teorema propuesto en Alvarez (2003).

Verastegui (2003) expone las siguientes definiciones.

Definición 1: Dado un triángulo ABC, la **altura** respecto al vértice A es el segmento de recta  $\overline{AD}$  perpendicular con el lado  $\overline{BC}$ , con D un punto en la recta  $\overleftrightarrow{BC}$ . Tal como se observa en la figura 22.

**Figura 22.** Alturas en el triángulo ABC

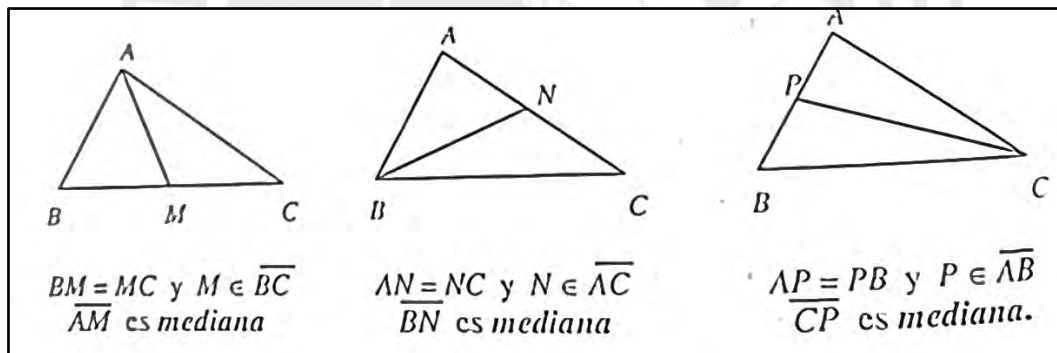


Fuente. Tomado de Verástegui, 2003, p. 55

Análogamente, en la figura 22, se tienen las alturas  $\overline{BE}$  y  $\overline{CF}$  respecto a los otros vértices B y C, respectivamente; es decir todo triángulo admite tres alturas tal que las rectas que las contienen se interceptan en un punto llamado **ortocentro** del triángulo.

Definición 2: Dado un triángulo ABC, la **mediana** respecto al vértice A es el segmento de recta  $\overline{AM}$ , siendo M el punto medio del lado  $\overline{BC}$ . Como se puede observar en la figura 23.

**Figura 23.** Medianas en el triángulo ABC

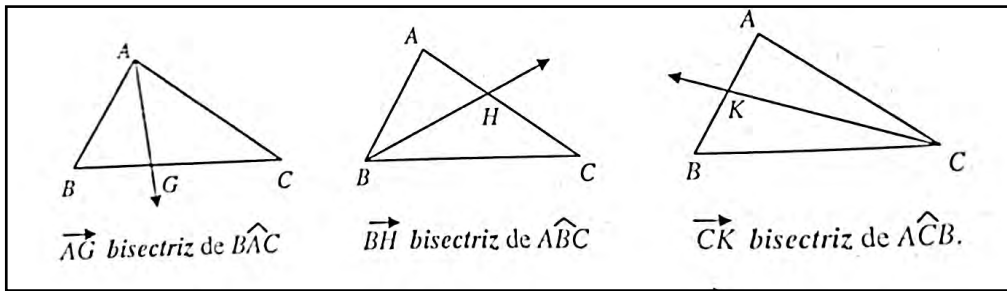


Fuente. Tomado de Verástegui, 2003, p. 56

Análogamente, la figura 23 muestra a las medianas  $\overline{BN}$  y  $\overline{CP}$  respecto a los vértices B y C, siendo N y P puntos medios de  $\overline{AC}$  y  $\overline{AB}$ , respectivamente; es decir todo triángulo admite tres medianas y se interceptan en un punto llamado **baricentro** o **centroide** del triángulo.

Definición 3: Dado un triángulo ABC, la **bisectriz** interior respecto al vértice A, es la bisectriz  $\overline{AG}$ , del ángulo interior  $B\hat{A}C$ , con  $G \in \overline{BC}$ . Tal como se observa en la figura 24.

**Figura 24.** Bisectrices en el triángulo ABC

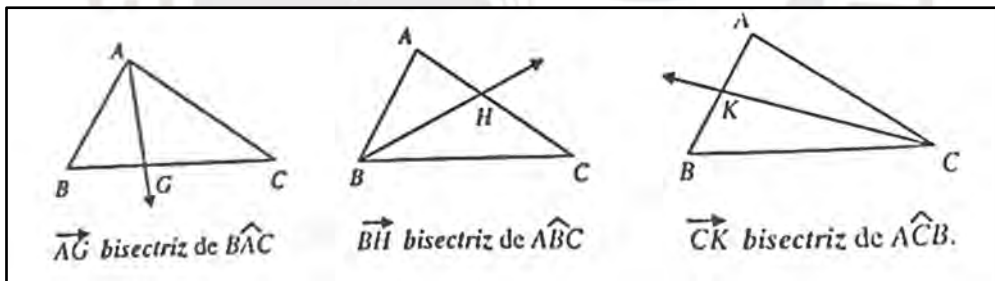


Fuente. Tomado de Verástegui, 2003, p. 56

En la figura 24, análogamente se tienen las bisectrices  $\overrightarrow{BH}$  y  $\overrightarrow{CK}$  respecto a los vértices B y C, con  $H \in \overline{AC}$  y  $K \in \overline{AB}$ , respectivamente; es decir, todo triángulo admite tres bisectrices y se interceptan en un punto llamado **incentro** del triángulo.

Definición 4: Dado un triángulo ABC, la **mediatriz** del lado  $\overline{BC}$  es la recta  $L_M$  perpendicular al lado  $\overline{BC}$  que pasa por el punto medio M de  $\overline{BC}$ , es decir,  $L_M$  es la mediatriz del segmento  $\overline{BC}$ . Como se puede apreciar en la figura 25.

**Figura 25.** Mediatrices en el triángulo ABC



Fuente. Tomado de Verástegui, 2003, p. 57

Análogamente se tienen las rectas  $L_M$  mediatrices de los lados  $\overline{AC}$  y  $\overline{AB}$ , con N y P puntos medios de  $\overline{AC}$  y  $\overline{AB}$ , respectivamente; en la figura 25, es decir, todo triángulo admite tres mediatrices y se interceptan en un punto llamado **circuncentro** del triángulo.

En las figuras 22, 23, 24 y 25, podemos notar que los puntos notables del triángulo no están siendo representados figuralmente en el texto de Verástegui (2003), sin embargo, los define.

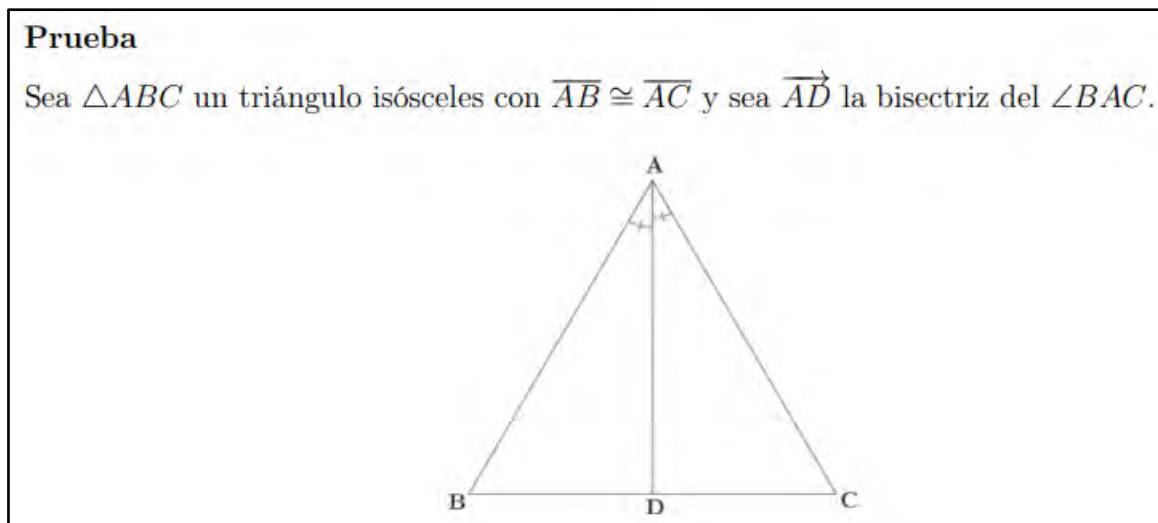
Teorema 11.1 En un triángulo isósceles, la bisectriz del ángulo del vértice es a la vez altura, mediana y mediatriz de la base.

Álvarez (2003), además de las definiciones de líneas y puntos notables, presenta el siguiente teorema y su respectiva prueba.

### Teorema

En un triángulo isósceles, la bisectriz del ángulo del vértice es a la vez altura, mediana y mediatriz de la base.

**Figura 26.** Prueba sobre la bisectriz en un triángulo isósceles



Fuente. Tomado de Álvarez, 2003, p.24

Debemos probar que  $\overrightarrow{AD}$  es altura, mediana y mediatriz de la base.

Como

$\overline{AB} \cong \overline{AC}$  porque  $\triangle ABC$  es isósceles.

$\sphericalangle BAD \cong \sphericalangle CAD$  porque  $\overrightarrow{AD}$  es la bisectriz del  $\sphericalangle BAC$  y

$\overline{AD} \cong \overline{AD}$  porque es el lado común de  $\triangle ADB$  y  $\triangle ADC$ ,

Entonces,

Por criterio de congruencia  $L - A - L$ ,  $\triangle ADB \cong \triangle ADC$ .

Por tanto,  $\overline{BD} \cong \overline{DC}$  y  $\sphericalangle ADB \cong \sphericalangle ADC$ , por ser elementos correspondientes de triángulos congruentes.

Como,  $\overline{BD} \cong \overline{DC}$  entonces D es el punto medio de  $\overline{BC}$ . Por tanto,  $\overrightarrow{AD}$  también es mediana.

Como  $\sphericalangle ADB \cong \sphericalangle ADC$  son ángulos suplementarios y congruentes,

$$\sphericalangle ADB + \sphericalangle ADC = 180^\circ \text{ y por tanto } \sphericalangle ADB = \sphericalangle ADC = 90^\circ$$

Luego,  $\overline{AD} \perp \overline{BD}$  y,  $\overline{AD}$  es altura.

Como  $\overline{AD}$  es perpendicular en el punto medio de  $\overline{BC}$  entonces,  $\overline{AD}$  es mediatriz de la base  $\overline{BC}$ .

La prueba realizada en el texto de Álvarez (2003) para verificar el teorema sobre la bisectriz trazada desde un vértice es a la vez altura, mediana y mediatriz de la base en un triángulo isósceles, como nos indica la figura 27, nos permite conocer y seguir algunas pautas, además, reconocer elementos matemáticos inmersos en la prueba de dicho teorema, todo ello a fin de plantear actividades para nuestra secuencia didáctica.

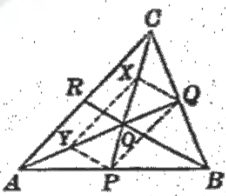
Por su parte, Wentworth y Smith (1915) definen lo siguiente: las bisectrices de un triángulo concurren en un punto equidistante de los lados, las mediatrices se encuentran en un punto equidistante de los vértices del triángulo, las alturas coinciden en un punto y las medianas concurren en un punto cuya distancia a cada vértice es igual a dos tercios de la mediana trazada de ese mismo vértice. Estas definiciones son parte de la descripción de los ejercicios planteados en el libro, donde se solicita demostrar algunas conjeturas como se puede observar en la figura 27.

**Figura 27.** Definición y ejercicio sobre las medianas de un triángulo

**5. Las medianas de un triángulo se encuentran en un punto cuya distancia a cada vértice es igual a dos tercios de la mediana trazada de ese vértice.**

Sea  $O$  el punto de intersección de las medianas  $AQ$ ,  $CP$ . Si  $Y$  es el punto medio de  $AO$ , y  $X$  el de  $CO$ , demuéstrese que  $XY$  y  $PQ$  son paralelas a  $AC$  e iguales a  $\frac{1}{2}AC$ . Demuéstrese luego que  $AY = YO = OQ$ , y  $CX = XO = OP$ . Síguese que la distancia del punto de intersección de una cualquiera de las medianas con otra cualquiera es ¿ qué parte de aquella ?

El punto de intersección de las medianas de un triángulo es el *centro de gravedad* del triángulo.



Fuente. Tomado de Wentworth y Smith, 1915, p. 78

De la figura 27, podemos notar que los autores definen a los puntos notables de un triángulo sin atribuirles alguna denominación como incentro, baricentro, ortocentro o

circuncentro. Adicionalmente, en el caso de las medianas, señala que su punto de intersección es el centro de gravedad del triángulo.

En el libro se plantean ejercicios sobre demostraciones relacionados a las líneas y puntos notables de un triángulo, además presentan algunos de ellos. Creemos que el docente en matemática, debe manejar tales nociones a fin de dar soporte al estudiante en el aprendizaje de estos contenidos, como también plantear actividades que impliquen probar afirmaciones con respecto a las líneas y puntos notables del triángulo, todo esto mediante la contextualización.

A continuación, presentamos los aspectos didácticos de nuestra investigación.

### **2.3 Aspectos didácticos**

En este apartado mostraremos la noción de puntos notables que son presentados en los libros y documentos oficiales del país. Para ello, seleccionamos algunos documentos oficiales y los textos escolares de tercero de secundaria del ministerio de educación y de editoriales Santillana.

En estudio de los puntos notables como objeto matemático se encuentra en la descripción del nivel VII (grados comprendidos de 3ero a 5to de secundaria) del desarrollo de la competencia: *Resuelve problemas de forma, movimiento y localización* en el Currículo Nacional de Educación básica.

Resuelve problemas en los que modela características de objetos con formas geométricas compuestas, cuerpos de revolución, sus elementos y propiedades, líneas, puntos notables, relaciones métricas de triángulos, distancia entre dos puntos, ecuación de la recta y parábola; la ubicación, distancias inaccesibles, movimiento y trayectorias complejas de objetos mediante coordenadas cartesianas, razones trigonométricas, mapas y planos a escala. Expresa su comprensión de la relación entre las medidas de los lados de un triángulo y sus proyecciones, la distinción entre transformaciones geométricas que conservan la forma de aquellas que conservan las medidas de los objetos, y de cómo se generan cuerpos de revolución, usando construcciones con regla y compás. Clasifica polígonos y cuerpos geométricos según sus propiedades, reconociendo la inclusión de una clase en otra. Selecciona, combina y adapta variadas estrategias, procedimientos y recursos para determinar la longitud, perímetro, área o volumen de formas compuestas, así como construir mapas a escala, homotecias e isometrías. Plantea y compara afirmaciones sobre enunciados opuestos o casos especiales de las propiedades de las formas geométricas; justifica, comprueba o descarta la validez de la afirmación mediante contraejemplos o propiedades geométricas. (Ministerio de Educación, 2017, p.265).

Cabe mencionar que, para lograr el nivel descrito en la competencia dada, se debe lograr ciertas habilidades ligadas a la competencia, relacionadas con elementos de formas geométricas, como representaciones, empleo de estrategias, comunicar y argumentar. Esto en base a lo expuesto en el Curricular Nacional de educación Básica (2017) sobre la competencia *Resuelve problemas de forma, movimiento y localización*:

Consiste en que el estudiante se oriente y describa la posición y el movimiento de objetos y de sí mismo en el espacio, visualizando, interpretando y relacionando las características de los objetos con formas geométricas bidimensionales y tridimensionales. Implica que realice mediciones directas o indirectas de la superficie, del perímetro, del volumen y de la capacidad de los objetos, y que logre construir representaciones de las formas geométricas para diseñar objetos, planos y maquetas, usando instrumentos, estrategias y procedimientos de construcción y medida. Además, describa trayectorias y rutas, usando sistemas de referencia y lenguaje geométrico. (Ministerio de Educación, 2017, p.263).

Una de las capacidades requeridas para el logro de esta competencia según el Curricular Nacional de educación Básica (2017), el cual se encontraría relacionado con nuestro estudio, define lo siguiente:

Argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas: es elaborar afirmaciones sobre las posibles relaciones entre los elementos y las propiedades de las formas geométricas a partir de su exploración o visualización. Asimismo, justificarlas, validarlas o refutarlas, basado en su experiencia, ejemplos o contraejemplos, y conocimientos sobre propiedades geométricas; usando el razonamiento inductivo o deductivo. (Ministerio de Educación, 2017, p.263).

De acuerdo a la capacidad mencionada consideramos que nuestro aporte sobre el estudio de tipos de pruebas en la resolución de situaciones sobre puntos notables del triángulo, podrá ser de utilidad por la comunidad educativa, el cual se encuentra relacionada con el desarrollo de pruebas, aunque no se describe explícitamente y no encontramos mayor detalle de su proceso. Por ello consideramos que, el presente estudio permite alentar a nuevas investigaciones al respecto, con el fin de contribuir a la educación en matemática.

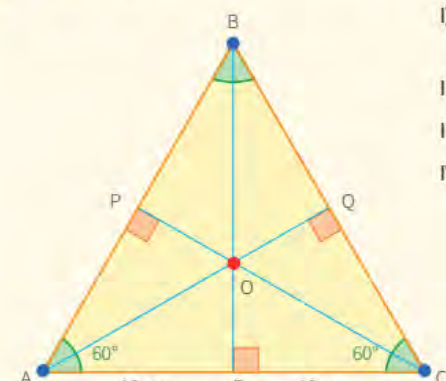
Basados en los documentos oficiales mencionados, generalmente los libros escolares de tercero del nivel secundario en nuestro país, proponen problemas relacionados el objeto matemático de los puntos notables. De los cuales, a continuación, serán presentados algunos de ellos.

- **Libro de texto escolar “Resolvamos problemas secundaria 3, cuaderno de trabajo de Matemática”**

En el texto escolar “Resolvamos problemas secundaria 3, cuaderno de trabajo de Matemática”, presenta una situación que consiste en determinar la validez de enunciados concernientes a líneas y puntos notables. Como se puede ver en la figura 28.

**Figura 28.** Actividad 1 del texto “Resolvamos problemas secundaria 3”

7. Según la figura, determina si los enunciados son verdaderos o falsos.



El diagrama muestra un triángulo ABC con vértices A, B y C. La mediana BR conecta el vértice B con el punto R en el segmento AC. Las alturas AP y CQ se extienden desde los vértices A y C respectivamente hasta los lados opuestos BC y AB. El punto O es el punto de intersección de las mediana BR y las alturas AP y CQ. Se indican ángulos de  $60^\circ$  en los vértices A y C. Los segmentos AR y RC en la base AC están etiquetados como 12 cm. Los puntos P y Q están en los lados AB y BC respectivamente, donde las alturas AP y CQ los intersectan perpendicularmente. El punto O está en la mediana BR.

- I) En el punto O coinciden los puntos notables ortocentro, baricentro, circuncentro e incentro. ( )
- II) El punto O divide a la mediana BR en 8 cm y 4 cm. ( )
- III) El triángulo AQB es isósceles. ( )
- IV) Los triángulos APO y CQO son semejantes. ( )

*Fuente.* Tomado de Resolvamos problemas secundaria 3, cuaderno de trabajo de Matemática, p. 64

En el primer enunciado de la figura 28, respecto a si en el punto O coinciden el ortocentro, baricentro, circuncentro e incentro del triángulo, pensamos que se busca que el estudiante emplee sus nociones de líneas notables y determine si las intersecciones de ellas coinciden, es decir, el estudiante buscará probar la validez del enunciado; aunque a fin de no limitarse a que escriba verdadero o falso, creemos que se podría agregar indicaciones para invitar a elaborar un proceso de validación. En términos de Balacheff (2000), en caso que el estudiante busque ejemplos sin buscar generalizar, la prueba podría ser categorizada como una prueba pragmática.

Sobre el segundo enunciado presentado en la figura 26, creemos que el estudiante, para verificar la validez del enunciado, no considerará emplear nociones sobre la relación de los segmentos de la mediana cortados por el baricentro, puesto que puede verificar las distancias de 8 cm y 4 cm empleando como, por ejemplo, razones trigonométricas en los triángulos formados. A fin de adaptar la situación en base de los procesos de prueba de Balacheff (2000), sugerimos proponer una situación que implique determinar la relación en las medianas del triángulo, mediante nociones de semejanza de triángulos.

Consideramos que la actividad planteada puede resultar de mayor provecho, a fin de lograr en el estudiante que movilice sus nociones y emplee razonamientos para lograr realizar

procesos de validación de un enunciado, con las sugerencias mencionadas en los dos párrafos anteriores.

La siguiente actividad, presentada en la figura 29 muestra un problema contextualizado en el que se propone realizar representaciones gráficas, según el enunciado.

**Figura 29.** Actividad 2 del texto “Resolvamos problemas secundaria 3”

**10.** Cerca de los pueblos de Yauli y Huando pasa la vía del tren. Después de muchas gestiones, los pobladores de ambas localidades consiguen que se construya un paradero, el cual deciden situar a igual distancia de los dos pueblos. Representa gráficamente la situación y señala la ubicación del paradero.

*Fuente.* Tomado de “Resolvamos problemas secundaria 3”, p. 66

El problema de la figura 29, responde a que el estudiante desarrolle su capacidad de modelar la situación mediante representaciones gráficas como también el de utilizar estrategias para identificar el punto notable que dé solución a la situación problemática. Sin embargo, bajo la mirada a las pruebas en matemática de Balacheff, en el problema no se solicitan formular conjeturas a partir de las propiedades que surgen en el desarrollo de la actividad y validarlas.

- **Texto escolar “Libro de actividades - Matemática Compartir”**

El siguiente texto escolar “Libro de actividades - Matemática Compartir” de 3er grado secundaria, en relación con nuestro objeto de estudio, contiene una breve descripción sobre el uso e importancia de la noción de triángulos en diferentes diseños y construcciones de nuestro entorno, esto a manera de despertar interés en el estudiante; luego, presenta un resumen que abarcan la definición del triángulo y su clasificación, como también propiedades básicas. Además, se presenta una tabla, en el que se muestran las líneas notables: bisectriz, altura, mediana y mediatriz en su representación figural. En dicha tabla también se puede visualizar las descripciones sobre los puntos notables, resultantes de la intersección de las líneas notables del triángulo: incentro, ortocentro, baricentro y circuncentro. A continuación, veamos lo señalado en la figura 30.

Figura 30. Lección del texto “Libro de actividades - Matemática Compartir”

Lecciones 8 y 9

RESUELVO PROBLEMAS DE FORMA, MOVIMIENTO Y LO.

## Triángulos. Líneas y puntos notables en un triángulo

Los triángulos se utilizan con frecuencia en el diseño de estructuras, ya que brindan rigidez y equilibrio en la construcción, tal es el caso de las torres de alta tensión, los puentes, las estanterías, etc. Conocer las características de los triángulos te ayudará a comprender su importancia en el diseño y construcción.



**i** **IMPORTANTE**

**Propiedades de los triángulos**

- La suma de sus ángulos internos es  $180^\circ$  y la suma de sus ángulos externos es  $360^\circ$ .
- Un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos internos no adyacentes.
- En un triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo.
- Si un triángulo tiene dos lados congruentes, sus ángulos opuestos también son congruentes.

Los triángulos son figuras planas delimitadas por tres segmentos no alineados. Tres puntos no colineales en el plano determinan un triángulo.

Los triángulos, por la medida de sus lados, se clasifican en equilátero, isósceles y escaleno, y por la medida de sus ángulos, se clasifican en acutángulo, rectángulo y obtusángulo.

Se cumple que la medida de un lado es menor que la suma de las medidas de los otros dos lados y mayor que su diferencia.

### Líneas notables en un triángulo

Bisectriz	Altura	Mediana	Mediatriz
Bisectriz	Altura	Mediana	Mediatriz
			
Las tres bisectrices se cortan en el incentro (I).	Las tres alturas se cortan en el ortocentro (O).	Las tres medianas se cortan en el baricentro (G).	Las tres mediatrices se cortan en el circuncentro (C).

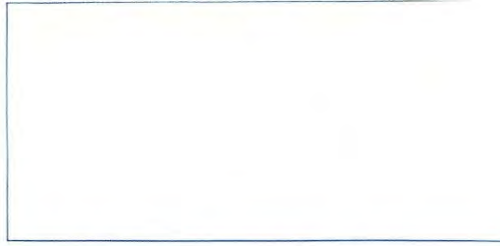
Fuente. Tomado de “Libro de actividades - Matemática Compartir”, p. 58

El texto presenta una teoría resumida del triángulo, sus líneas y puntos notables, como se puede observar en la figura 30, en el que los puntos notables del triángulo no se encuentran representados en un registro figural, solo se muestra el trazo de una línea notable de cada tipo en los triángulos dados. Por lo que, podemos señalar que en el texto no se promueve la construcción de la noción de las líneas y puntos notables de un triángulo, y por ende las propiedades que estos generan, pueden ser planteados en el libro, como un problema que sugiera al estudiante realizar validaciones de proposiciones. En ese sentido, no habría lugar a que el estudiante evidencie algún tipo de prueba relacionados a la formación de los puntos notables.

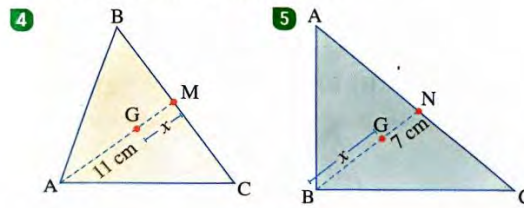
Luego, el mismo texto presenta problemas como los que se visualizan en la figura 31, en el que se propone construir algunos puntos notables de triángulos a partir de sus líneas.

**Figura 31.** Actividades del texto “Libro de actividades - Matemática Compartir”

- 3 Ubica el ortocentro, el baricentro y el circuncentro en un triángulo isósceles.



En las siguientes figuras, el punto G es baricentro. Halla el valor de  $x$ .



Fuente. Tomado de “Libro de actividades - Matemática Compartir”, p. 62

En la actividad 3 de la figura 31, se pretende que el estudiante llegue a conclusiones tales como, la relación que existe entre los puntos ortocentro, baricentro y el circuncentro de un triángulo isósceles; aunque en el texto no se proponen preguntas que lleven a ciertas conclusiones, está en la libertad del docente generar preguntas en caso la actividad sea guiada.

En la cuarta actividad, como se muestra también en la figura 32, se solicita hallar el valor de la distancia de una de las partes de la mediana AM, desde el baricentro hacia el punto M, punto medio del lado BC del triángulo. En este caso, en la actividad se busca que el estudiante emplee la propiedad del baricentro, en cuanto a la relación que se forma entre el baricentro hacia el vértice del triángulo y del baricentro hacia el punto medio del lado opuesto del vértice de donde partió la mediana; por tanto, se infiere que tal propiedad debe ser conocida por el estudiante a fin de resolver la situación. De la misma manera sucede con la quinta actividad.

En términos de los Tipos de prueba en matemática de Balacheff (2000), las actividades descritas no presentan enunciados y preguntas que soliciten probar propiedades con el uso de nociones geométricas. Con lo cual consideramos, aprovechar este tipo de situaciones para generar las capacidades de probar, justificar y argumentar afirmaciones en el estudiante, relacionadas a las propiedades de las líneas y puntos notables.

Posteriormente se encuentra un ejemplo desarrollado, en el que se solicita calcular el ángulo formado por dos bisectrices, partiendo de algunos datos, como se puede ver en la figura 32.

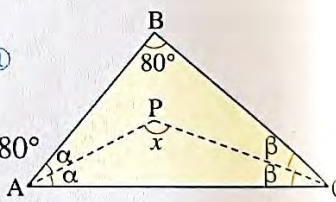
**Figura 32.** Actividad 3 del texto “Libro de actividades - Matemática Compartir”

**EJEMPLO**

En el triángulo ABC,  $m\hat{B} = 80^\circ$ . ¿Cuánto mide el ángulo formado por las bisectrices de  $\hat{A}$  y  $\hat{C}$ ?

- Representamos gráficamente:
- En el  $\triangle APC$ :  
 $\alpha + \beta + x = 180^\circ$  ①
- En el  $\triangle ABC$ :  
 $2\alpha + 2\beta + 80^\circ = 180^\circ$   
 $\alpha + \beta = 50^\circ$  ②
- Reemplazamos ② en ①:  
 $\alpha + \beta + x = 180^\circ \rightarrow 50^\circ + x = 180^\circ \rightarrow x = 130^\circ$

El ángulo formado por las bisectrices de  $\hat{A}$  y  $\hat{C}$  mide  $130^\circ$ .



*Fuente.* Tomado de “Libro de actividades - Matemática Compartir”, p. 62

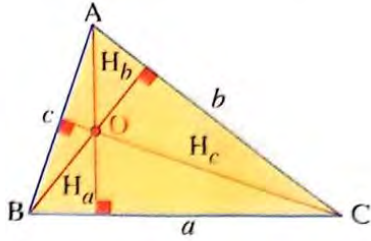
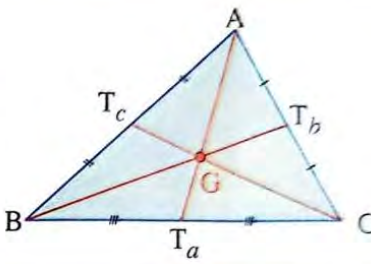
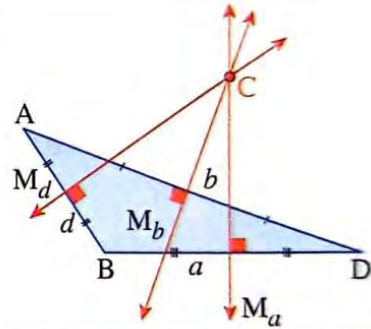
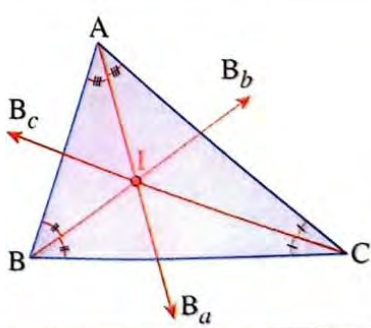
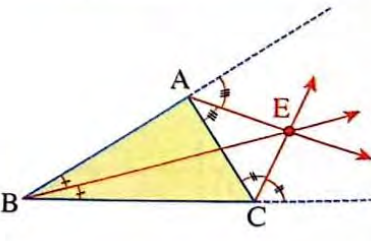
En la figura 32, podemos apreciar la solución propuesta del ejemplo que brinda el texto, donde se emplean propiedades como la suma total de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo, además, utilizan un sistema de ecuaciones para hallar el valor del ángulo solicitado. Por otro lado, notamos que no se ha propiciado generalizar la propiedad del ángulo formado por dos bisectrices interiores de un triángulo, o de otro modo, tampoco se propuso la propiedad desde un primer momento para sugerir probarla a través de nociones que se conozcan u otras propiedades matemáticas, como por ejemplo el incentro (el punto P).

- **Texto escolar “Matemática 3” de tercer grado de secundaria**

Es emitida por el ministerio de educación y distribuida a las instituciones escolares públicas.

El objeto de estudio de nuestro interés es abarcado en el libro mostrando directamente las definiciones de líneas y puntos notables del triángulo, como podemos notar en la figura 33.

**Figura 33.** Actividad 1 del texto “Matemática 3” de tercer grado de secundaria

<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">Altura</p>	<p>Es el segmento perpendicular que se traza desde un vértice del triángulo hacia el lado opuesto o a su prolongación.</p> <p>El punto de intersección de las tres alturas es el <b>ortocentro</b> (O).</p>	
<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">Mediana</p>	<p>Es el segmento que une el punto medio de un lado del triángulo con el vértice opuesto.</p> <p>El punto de intersección de las tres medianas es el <b>baricentro</b> (G).</p>	
<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">Mediatriz</p>	<p>Es la recta perpendicular de cada lado, que pasa por su punto medio.</p> <p>El punto de intersección de las tres mediatrices es el <b>circuncentro</b> (C).</p>	
<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">Bisectriz interior</p>	<p>Es el rayo que divide un ángulo interior en dos ángulos congruentes y que corta el lado opuesto.</p> <p>El punto de intersección de las tres bisectrices interiores es el <b>incentro</b> (I).</p>	
<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">Bisectriz exterior</p>	<p>Es el rayo que divide un ángulo exterior en dos ángulos congruentes.</p> <p>El punto de intersección de dos bisectrices exteriores y la bisectriz interior del tercer ángulo es el <b>excentro</b> (E).</p> <p>Todo triángulo tiene tres excentros.</p>	

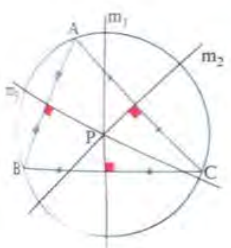
*Fuente.* Tomado de “Matemática 3” de tercer grado de secundaria, p. 106

Las representaciones figurales de los puntos notables en base a la construcción de sus respectivas líneas notables presentadas en la figura 34, apoyan a una mejor visualización de los elementos geométricos de los cuales se están tratando. Sin embargo, también notamos, al igual que en los anteriores textos revisados, no sugiere realizar una construcción

previamente por parte del estudiante, a fin de que evalúe propiedades y pueda formular conjeturas, la información es proporcionada de manera directa.

El libro de texto presenta la siguiente actividad como se observa en la figura 34, donde también se muestran los pasos de su solución y la representación figural en base a las condiciones del problema planteado.

**Figura 34.** Actividad 2 del texto “Matemática 3” de tercer grado de secundaria



**CÓMO HACER**

Tres amigos que van a acampar deciden colocarse en puntos no colineales. ¿Cómo harían para colocar una fogata equidistante a las tres carpas?

- Denotamos las posiciones de los tres amigos por los puntos A, B y C.
- Trazamos el triángulo que los une y ubicamos el circuncentro P, es decir, el punto que une las mediatrices. Para ello, graficamos en el margen con la ayuda de regla y compás siguiendo un proceso similar al que se muestra al inicio de esta página.

La fogata podrá colocarse en la ubicación correspondiente al circuncentro.

*Fuente.* Tomado de “Matemática 3” de tercer grado de secundaria, p. 107

Como se puede apreciar en la figura 34, se propone como solución, ubicar tres puntos y denotarlos como A, B y C, luego indica unirlos para formar un triángulo, posteriormente, se menciona ubicar el circuncentro del triángulo construido, incluso con el apoyo de regla y compás. Como respuesta, menciona la actividad que la ubicación de la fogata coincide con la posición del circuncentro de la representación triangular ABC. Como se puede notar, el proceso y la respuesta carecen de justificaciones, como explicar que el circuncentro es el punto que cumple con las condiciones del problema. Ante ello, consideramos que explicar la elección del punto equidistante a los tres vértices de una representación triangular, permite movilizar y ampliar las nociones de los estudiantes del tema tratado, sobre los puntos notables, incluso ayuda a formular conjeturas sobre la construcción y de propiedades que surjan en la exploración.

Con lo revisado creemos que, según los propósitos planteados en el Currículo Nacional referente a las pruebas, justificación y validaciones de afirmaciones, existen escasas propuestas de problemas en los textos escolares. Por ello, consideramos que nuestro estudio sea el inicio de futuras investigaciones para fomentar las capacidades mencionadas en los textos escolares.

## Capítulo III: Experimentación y análisis

Esta parte de la investigación comprende, en primer lugar, la descripción de los criterios con que se pretende analizar los tipos de prueba según Balacheff (2000), luego, la aplicación de la secuencia de actividades, en el que se describen a los sujetos participantes, el escenario, el diseño de las actividades y sus posibles resultados, los cuales serán contrastados en base de nuestro marco referencial, con el fin de realizar la validación.

### 3.1 Descripción de los tipos de prueba para el baricentro y circuncentro de un triángulo a partir de la propuesta de Balacheff (2000)

A continuación, presentamos los criterios de análisis con el fin de determinar el tipo de prueba que responderán las soluciones de los estudiantes, realizadas en un ambiente de representación dinámica, GeoGebra. Los mismos fueron elaborados de la siguiente manera, un conjunto de criterios sobre el proceso de prueba relacionado con el baricentro y sobre el circuncentro de una representación triangular, como se pueden observar en la tabla 3.

**Tabla 3**

*Criterios de análisis en base a los tipos de pruebas*

CATEGORÍAS		CRITERIOS			
		Identifica Conjetura	Trazos de Construcción	Uso de Teoremas	Justifica Conjetura
PRUEBA PRAGMÁTICA	<b>Empiricismo Ingenuo</b>	Uso de herramientas de medición	No presenta	No presenta	Describe en base a la observación de las medidas
	<b>Experiencia Crucial</b>	Uso de ejemplos particulares	Uso de trazos sin generalizaciones	No presenta	Describe con apoyo de herramientas.
PRUEBA INTELECTUAL	<b>Ejemplo Genérico</b>	Uso de términos matemáticos	Uso de trazos con propósitos	Identifica los Teoremas	Describe en base a los trazos y medidas.
	<b>Experiencia Mental</b>	Uso de propiedades	Realiza trazos apoyado en definiciones	Utiliza los Teoremas	Describe en base a los trazos y teoremas.

La tabla 3 contiene descriptores referidos a los procedimientos que se espera a que los estudiantes realicen para probar la conjetura, inicialmente formulada por ellos; en la primera actividad, sobre que la relación entre los segmentos de la mediana de un triángulo, trazados desde un vértice al punto medio del lado opuesto, al ser cortada por el baricentro, es de 2 a 1. Según la evidencia de estos descriptores en los procesos de prueba de los estudiantes, se pretende determinar el tipo de prueba que presentan sus procesos, tal como muestra la tabla. Para los primeros tres ítems de la segunda actividad, se analizará los procesos que se espera de los estudiantes realicen para probar la conjetura planteada, sobre la concurrencia de las mediatrices de un triángulo. Con los que se determinará el tipo de prueba que presentan los procesos de prueba que desarrollen los estudiantes. Para el cuarto ítem de la segunda actividad, se pretende analizar e identificar el tipo de prueba, en base a los descriptores relacionados a los procesos de prueba que se espera que desarrollen los estudiantes, sobre la circunferencia que tiene como centro al circuncentro del triángulo y pasa por sus tres vértices.

### **3.2 Descripción del Escenario y Sujetos de la Investigación**

El escenario de nuestra experimentación es un aula de una institución educativa privada de Lima, el cual está provisto de computadoras personales y un proyector multimedia, conexión a internet por cable y wifi, pizarra, mota, plumones.

Los sujetos seleccionados para esta investigación son estudiantes de tercer grado de secundaria en una institución privada de Lima, Perú. Dichos estudiantes fueron seleccionados tomando en cuenta un rendimiento académico de nivel promedio y su predisposición. Además, es importante mencionar que los estudiantes poseen nociones sobre líneas y puntos notables de un triángulo además, de conocimientos del teorema de Thales y semejanza de triángulos, trabajados en el grado de escolaridad anterior, donde realizaron construcciones de los mismos con hojas de papel mediante dobleces como también, la construcción de la mediatriz y bisectriz con el uso de regla y compás, aunque aún no profundizaron en sus propiedades; además no se ha propiciado antes, realizar validaciones de conjeturas respecto a los puntos notables.

Por otro lado, los estudiantes cuentan con conocimientos básicos de GeoGebra, por lo que previamente se diseñó y aplicó una actividad de exploración del ambiente de representación dinámica GeoGebra. Para el desarrollo de las actividades se establecieron trabajar en dos duplas, cuya interacción entre los estudiantes favorece el planteamiento de las conjeturas y sus validaciones, mediante pruebas relacionados a nuestro objeto de estudio.

Cada dupla ingresará por medio de un código generado, al applet del GeoGebra conformada por una secuencia de actividades, las que contienen instrucciones para el desarrollo de las tareas con el uso del applet del GeoGebra.

### 3.3 Descripción de la Secuencia didáctica

Para la presente investigación, consideramos agrupar la secuencia didáctica en dos actividades, las cuales están planteadas para realizarlas con el uso del applet GeoGebra, donde también se plantean preguntas relacionadas a las pruebas matemáticas sobre los puntos notables: el baricentro y circuncentro de un triángulo.

En la Tabla 4, presentamos la organización de la secuencia didáctica, además del medio que se usará con sus respectivas descripciones.

**Tabla 4**

*Descripción de las actividades*

Actividad	Medio	Descripción
0	Applet GeoGebra	En este espacio se propone realizar construcciones de nociones básicas de geometría, tales como mediatriz de un segmento, rectas paralelas, y el empleo del teorema de Thales, semejanzas de triángulos.
1	Applet GeoGebra	Se solicita a los estudiantes, construir el baricentro, a partir de las indicaciones señaladas en el applet. A partir de ello, se busca que respondan a preguntas con el fin de direccionarlos a plantear conjeturas sobre la relación entre los segmentos de una mediana cortadas por G (Baricentro) en el triángulo y probarla con el uso de las herramientas del GeoGebra.  Como último requerimiento de la primera actividad se solicita a los estudiantes, describir la prueba sobre la relación entre los segmentos de una mediana cortadas por G (Baricentro) en el triángulo, empleando propiedades matemáticas.
2	Applet GeoGebra	Se muestra una representación triangular con trazos de dos líneas rectas, del cual se solicita

---

identificar el tipo de línea notable que representan.

Después, se propone formular una conjetura relacionada a la concurrencia de las tres mediatrices de un triángulo, donde se solicita a los estudiantes probarla con el empleo de las herramientas del GeoGebra.

También, se pide realizar un procedimiento de prueba, mediante una descripción de paso a paso, sobre la concurrencia de las tres mediatrices de un triángulo, empleando propiedades matemáticas.

Por último, a partir de la figura triangular y sus mediatrices, se propone trazar una circunferencia que pase por los vértices. Luego, se solicita formular una conjetura como también probar la misma.

---

En la tabla 4, se muestran los medios que se consideran implementar, el applet de GeoGebra como un ambiente de representación dinámica, el cual permite al usuario realizar tratamientos dinámicos en los elementos geométricos representados, esto con el fin de establecer conjeturas y posteriormente validarlas mediante la manipulación y empleo de herramientas del GeoGebra.

Las sesiones son de 80 minutos cada una, las actividades se realizarán en dos sesiones, las actividades 0 y 1 en la primera sesión y las actividades en una segunda sesión. Después de cada sesión se designará 15 minutos para la realización de entrevista semiestructurada a algunos estudiantes.

Los instrumentos para la recolección de datos son precisamente los archivos del applet del GeoGebra, además de grabaciones de audio de las intervenciones de los estudiantes y entrevistas semiestructuradas, los cuales forman parte del principio de triangulación.

### 3.4 Análisis de las Actividades

A continuación, analizaremos las dos actividades propuestas, de las cuales se detallan sus objetivos, como también las soluciones esperadas por los estudiantes, con el fin de realizar un contraste con la información obtenida.



#### ACTIVIDAD 1

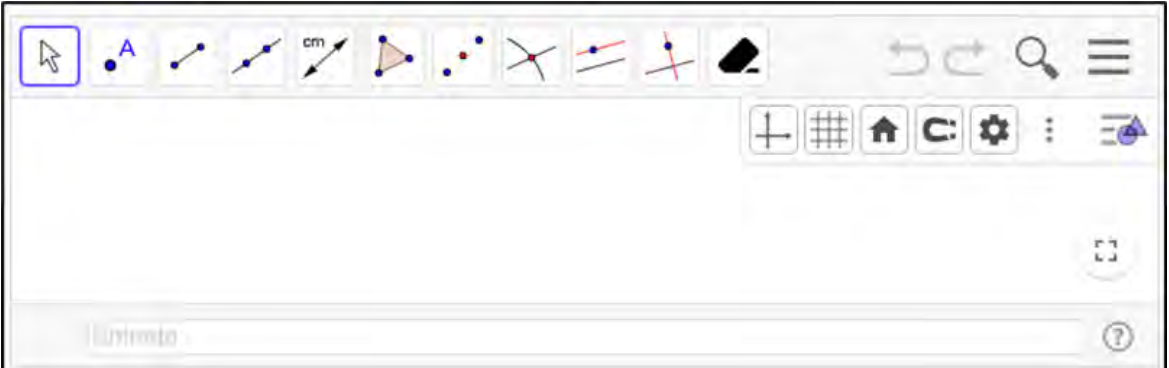
A continuación, en la figura 35 mostramos la actividad 1 en un Applet GeoGebra conjuntamente con las indicaciones y preguntas formuladas.

Figura 35. Actividad 1

### Actividad N°1: Baricentro de un triángulo

a) A partir de las siguientes indicaciones representa las medianas y el baricentro de un triángulo.

1. Construya un triángulo ABC.
2. Ubique el punto medio del lado  $\overline{BC}$  y renombre dicho punto con la letra D (en caso sea necesario).
3. Luego, utilice la herramienta segmento  para trazar la mediana  $\overline{AD}$ , desde el vértice A hasta el punto D.
4. De la misma manera, trace las medianas  $\overline{BE}$  y  $\overline{CF}$ .
5. Seleccione el punto de intersección de las medianas con la herramienta  y renombre dicho punto con la letra G (en caso sea necesario).
6. Mueva los vértices del triángulo ABC para observar lo que sucede con las medianas y el baricentro.



The image shows the GeoGebra software interface. At the top, there is a toolbar with various icons for construction tools like point, line, segment, circle, and triangle. Below the toolbar is a workspace area. At the bottom, there is a status bar with the word 'Baricentro' and a question mark icon.

**b) Mide los segmentos  $\overline{AG}$  y  $\overline{GD}$  para distintas posiciones de los vértices del triángulo ABC.**

**Luego, formula una conjetura (hipótesis) sobre la relación entre los segmentos  $\overline{AG}$  y  $\overline{GD}$ .**

Aa π Ingresar aquí tu respuesta...

**c) Con ayuda del GeoGebra, prueba tu conjetura. Luego, explícalo paso a paso.**

Aa π Ingresar aquí tu respuesta...

**d) A continuación, explica paso a paso la prueba de tu conjetura, solo con propiedades geométricas, es decir, sin utilizar las medidas de los segmentos.**

Aa π Ingresar aquí tu respuesta...

Objetivos de la actividad por parte de los estudiantes:

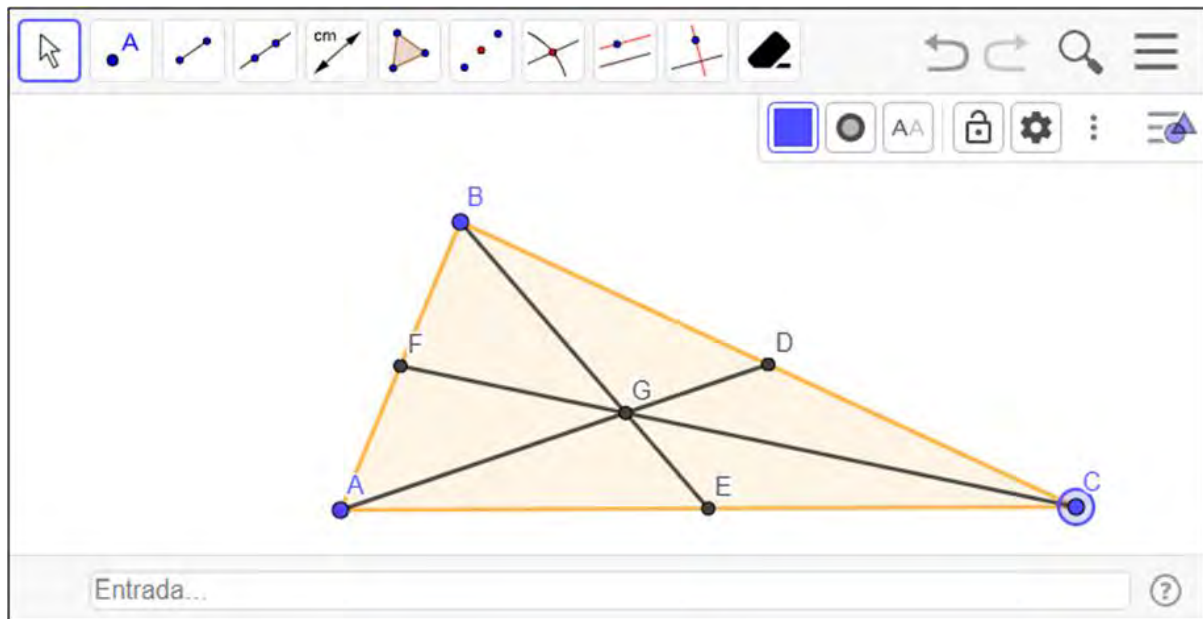
- Describir una conjetura sobre la relación entre los segmentos de una mediana cortada por el Baricentro de un triángulo.
- Probar la conjetura sobre la relación entre los segmentos de una mediana cortada por el Baricentro de un triángulo con el uso de las herramientas del GeoGebra.
- Probar la conjetura sobre la relación entre los segmentos de una mediana cortada por G (Baricentro) en el triángulo con el uso de las herramientas del GeoGebra para identificar y describir propiedades geométricas.

Esta actividad consta de cuatro ítems a, b, c y d, que serán desarrollados en un applet de GeoGebra, cuyo código de acceso se compartirá con los estudiantes. En el primero se solicita la construcción de las medianas y el baricentro de una representación triangular, mediante indicaciones descritas en la misma plataforma, el ítem b tiene como finalidad direccionar al estudiante a formular una conjetura, en el ítem c se solicita describir la prueba de la conjetura planteada en el applet de GeoGebra, los cuales se analizarán para identificar el tipo de prueba al que pertenece en, según Balacheff (2000).




### Resultados esperados del ítem a

La actividad 1a tiene como finalidad, que los estudiantes identifiquen los elementos geométricos y construyan una representación triangular, sus medianas y el baricentro en un ambiente de representación dinámica, el cual les permitirá realizar tratamientos dinámicos en el registro figural. Para ello presentamos el resultado esperado del ítem a, como se muestra en la figura 36.

Figura 36. Resultados esperados: Actividad 1, ítem a



Asumimos que los estudiantes realizarán la construcción de las medianas y el baricentro de un triángulo sin problemas e identificarán los elementos geométricos como segmentos, polígono, vértices, aristas, medianas, baricentro entre otros, tal como se puede apreciar en la figura 36.

Representan un triángulo ABC con el uso de la herramienta *Polígono* , luego ubican el punto medio del lado  $\overline{BC}$  haciendo uso de la herramienta *Medio o Centro* , cuyo punto será nombrado D, así mismo, ubican los puntos medios de  $\overline{BE}$  y  $\overline{CF}$ . Después, seleccionan la herramienta *Intersección* , y a dos de las medianas para determinar su punto de intersección, cuyo punto se nombrará como G.

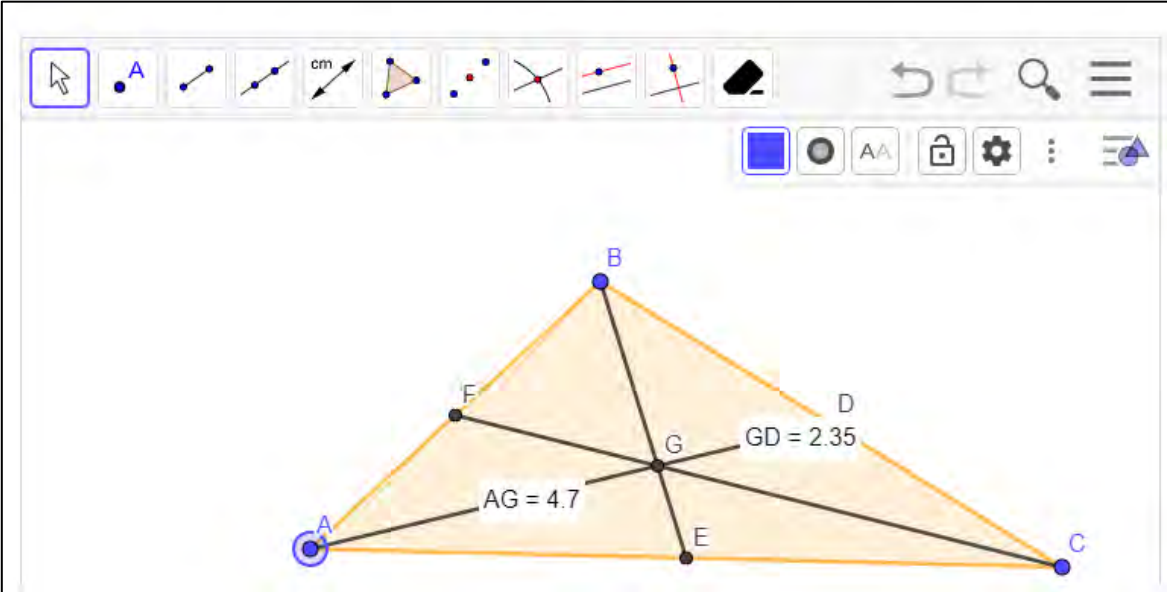
Luego, a manera de conclusión los estudiantes determinan que el Baricentro siempre se encuentra en el interior de la región triangular, esto al arrastrar los vértices del triángulo para cambiar de posición.

### Resultados esperados del ítem 1b

En esta actividad esperamos que los estudiantes formulen una conjetura sobre la relación entre los segmentos de una mediana cortadas por el baricentro de la representación triangular realizada en el ítem a, esto a partir de la medición de ambos segmentos.


Como se indicó, al inicio del capítulo, los estudiantes tienen conocimientos de líneas y puntos notables de un triángulo, para ello, como observamos en la figura 37 planteamos recoger en el ítem b la formulación de una conjetura, como se mencionó en el párrafo anterior.

Figura 37. Resultados esperados: Actividad 1, ítem b



b) Mide los segmentos  $\overline{AG}$  y  $\overline{GD}$  para distintas posiciones de los vértices del triángulo ABC. Luego, formula una conjetura (hipótesis) sobre la relación entre los segmentos  $\overline{AG}$  y  $\overline{GD}$ .

Aa  $\pi$  La relación de los segmentos  $\overline{AG}$  y  $\overline{GD}$  es de 2 a 1. Por ejemplo : AG = 4.7 unidades y GD = 2.35 unidades.

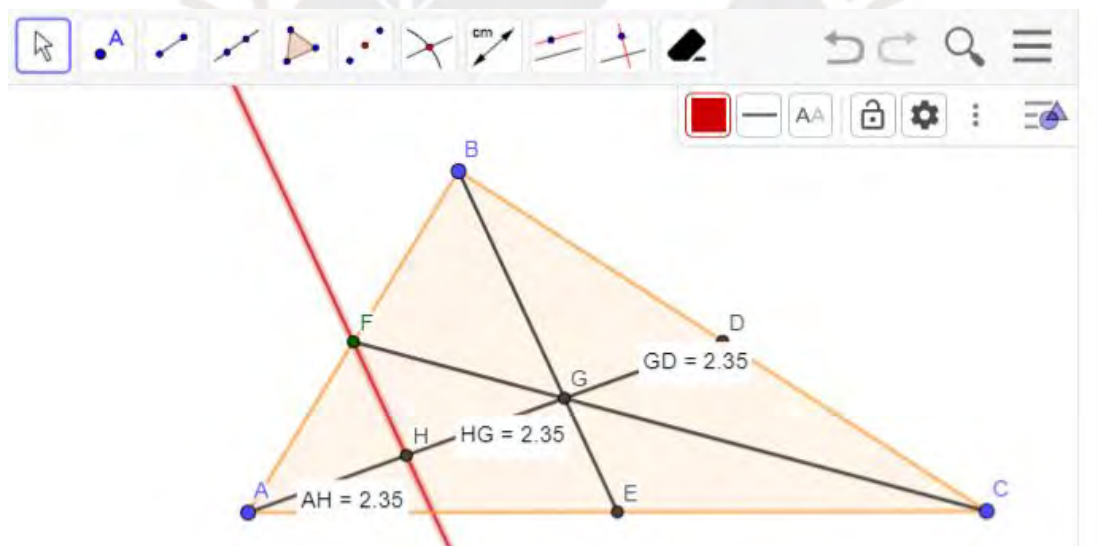
El ítem b, como podemos notar en la figura 37, recoge información sobre las medidas de los segmentos de una mediana cortada por el baricentro del triángulo, esto para orientar posteriormente a los estudiantes a establecer una relación entre ellas, para ello, utilizarían la herramienta *Distancia o Longitud*  para medir  $\overline{AG}$  y  $\overline{GD}$ . Por lo que también se muestra en el ítem que, haciendo uso de concepciones sobre razones, se espera que los estudiantes respondan que la relación de los segmentos  $\overline{AG}$  y  $\overline{GD}$  es de 2 a 1, el cual podrían determinar mediante la observación de las cifras numéricas de las medidas de los segmentos o al emplear una calculadora.

### Resultados esperados del ítem 1c

Esta parte de la actividad tiene como objetivo obtener una prueba matemática, sobre la relación de segmentos de una mediana del triángulo la cual es dividida por el baricentro, prueba que será analizada en base a la propuesta de Tipos de prueba de Balacheff (2000). La prueba obtenida puede partir de las medidas que se obtuvieron en el ítem anterior, con el empleo desde una calculadora hasta con el uso de herramientas del GeoGebra para probar la conjetura planteada por los mismos estudiantes sobre la relación de los segmentos en cuestión.

El ítem c, el que se observa en la figura 38, invita a los estudiantes a que utilicen otros conocimientos geométricos con apoyo de las herramientas del GeoGebra, como pueden ser rectas paralelas, el teorema de Thales o semejanza de triángulos, y logren probar la conjetura explicándolo en el applet.

Figura 38. Resultados esperados: Actividad 1, ítem c



### c) Con ayuda del GeoGebra, prueba tu conjetura. Luego, explícalo paso a paso.

Trazamos una recta paralela a la mediana  $\overline{BE}$ , que pase por el punto medio J. Luego, ubicamos la intersección de la mediana  $\overline{AD}$  y la recta  $\overline{JK}$ , el cual se nombra H. Utilizamos la herramienta medida para  $\overline{AH}$ ,  $\overline{HG}$  y  $\overline{GD}$ . Dando como resultado, que tiene la misma medida  $AH=HG=GD$ , por lo que podemos probar que la relación entre  $\overline{AG}$  y  $\overline{GD}$  es de 2 a 1.

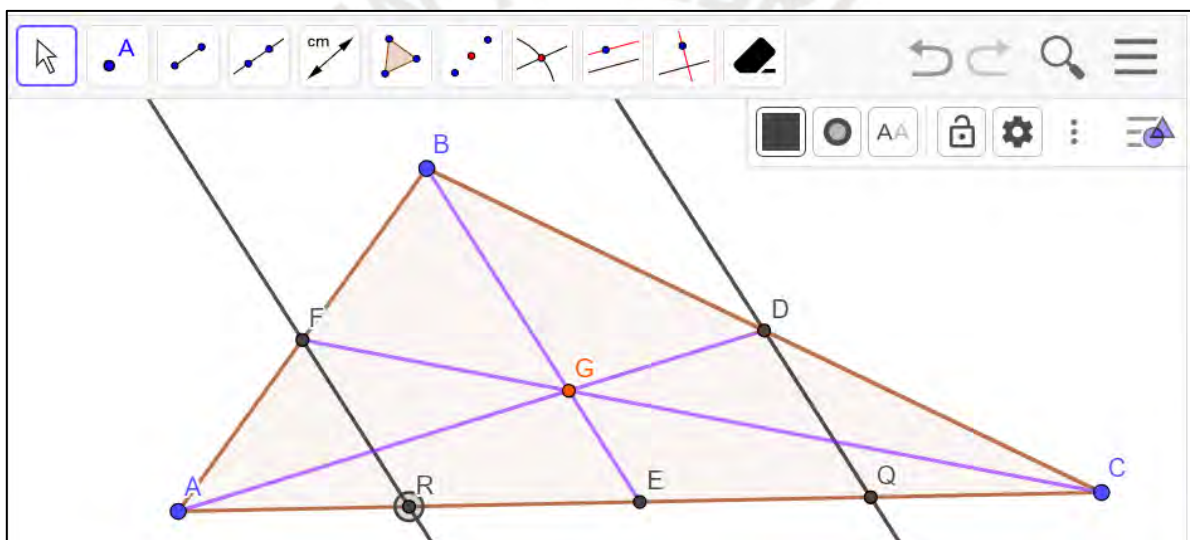
Como se muestra en la figura 38, esperamos que los estudiantes tracen la recta paralela a la mediana  $\overline{BE}$  haciendo uso de la herramienta *Paralela*, de tal forma que pase por el punto medio de AB, por el punto H, luego utilizarían la herramienta *Distancia o Longitud* para medir  $\overline{AH}$  y  $\overline{HG}$ , de esta manera lograrían observar que las medidas de los tres segmentos que forman la mediana AD, son iguales. Por lo que, a partir de este proceso, se

espera que describan paso a paso la prueba que puede resultar como también se muestra en la figura 38.

### Resultados esperados del ítem 1d


Con el último ítem se pretende obtener una prueba matemática realizada en base a propiedades geométricas, sobre la relación de segmentos de una mediana del triángulo la cual es dividida por el baricentro, cuyos procesos también serán analizadas bajo la propuesta de Tipos de prueba de Balacheff (2000). A diferencia del ítem anterior, se pretende que se evite medir de los segmentos propiciando utilizar propiedades como semejanza de triángulos o el teorema de Thales, como se puede apreciar en la figura 39.

Figura 39. Resultados esperados: Actividad 1, ítem d





d) A continuación, explica paso a paso la prueba de tu conjetura, solo con propiedades geométricas, es decir, sin utilizar las medidas de los segmentos.

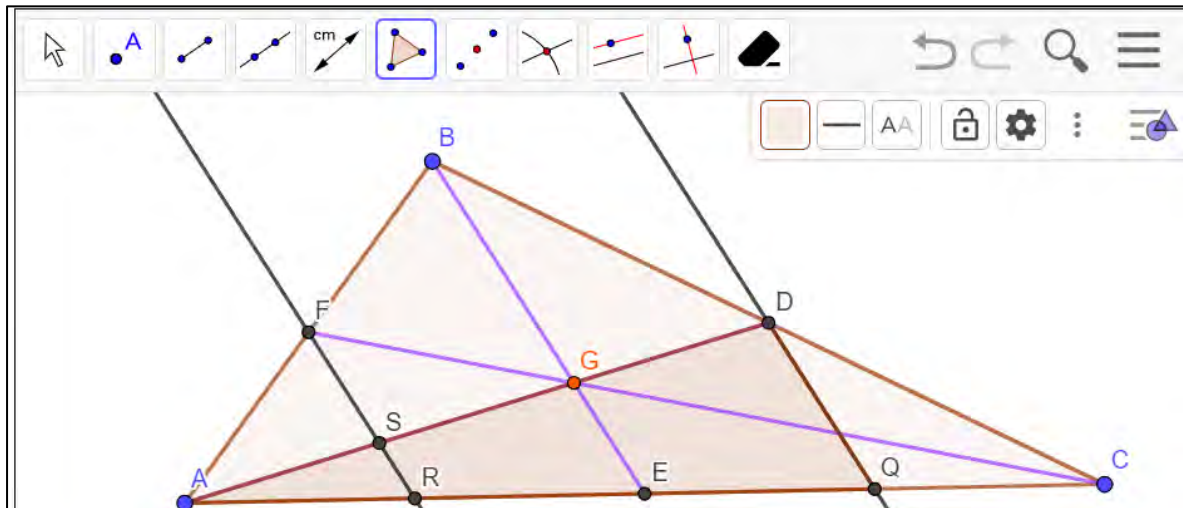
Trazamos las rectas paralelas a la mediana  $\overline{BE}$  que pasen por los puntos medios F y D. Tenemos así, por el Teorema de Thales en el triángulo EBC, existe proporcionalidad:  $DC/DB = CQ/QF$ , donde Q es punto medio de EC. De igual manera, en el triángulo ABE, tenemos la proporcionalidad  $AF/FB = AR/RE$ . Puesto a R y Q son puntos medios de AE y EC respectivamente, tenemos que  $AR = RE = EQ = QC$ . Finalmente, por el Teorema de Thales en el triángulo ADQ, obtenemos que  $AS = SG = GE$ . Por lo que queda probado que  $AG = 2GE$ . Es decir, la relación entre AG y GE es de 2 a 1.

En la figura 39, se muestran los trazos de dos rectas paralelas a la mediana BE, para ello se hace uso de la  herramienta *Paralela*, seleccionando al punto F y luego a la mediana BE o viceversa, lo mismo, al seleccionar el punto D y a la mediana. Luego, se tiene que Q es punto medio de EC por el Teorema de Thales con respecto a  $\overline{DQ}$  y  $\overline{BE}$ , en el que se tiene la proporcionalidad  $DC/DB = CQ/BE$ , es decir  $EQ = QC$ . De la misma manera,

como  $\overline{FR}$  es paralela de  $\overline{BE}$ , tenemos que  $AF/FB=AR/RE$ , por lo que  $AR = RE$ . Se espera que el estudiante identifique que E al ser punto medio de AC, tengamos que  $AR = RE = EQ = QC$ .

Luego, se ubica el punto de intersección de la mediana  $\overline{AD}$  y  $\overline{FR}$ , con el uso de la herramienta intersección , al cual llamaremos S. Por consiguiente, en el triángulo ADQ (en el que haciendo uso de la herramienta triángulo , se puede señalar al triángulo ADQ con un color que permita resaltarlo). Esto se puede observar en la figura 40.

**Figura 40.** Resultados esperados: Actividad 1, ítem d



Por consiguiente, se utilizan a las rectas paralelas  $\overline{FR}$  y  $\overline{DQ}$  para establecer una relación de base media en el triángulo ADQ, como lo observado en la figura 40. De esta manera se llega a probar que  $AG = 2GE$  puesto a que  $AR = RE = EQ$ , y del mismo modo se puede realizar este procedimiento con las otras medianas y con otros tipos de triángulos, esto último se puede visualizar mediante el arrastre en el GeoGebra. Por lo que quedaría probado que la relación entre los segmentos de una mediana, de un triángulo, cortada por el baricentro es de 2 a 1.

### Tipo de prueba

En las respuestas esperadas se pueden evidenciar los siguiente:

- Identifican la conjetura: La relación entre los segmentos de la mediana cortada con el baricentro es de 2 a 1.
- Realizan trazos de rectas paralelas para intersecar una mediana y forman tres segmentos.
- Utilizan la noción de semejanza de triángulos para determinar la relación entre los segmentos de la mediana.
- Justifican la conjetura describiendo las propiedades de recta paralela y la semejanza de triángulos.

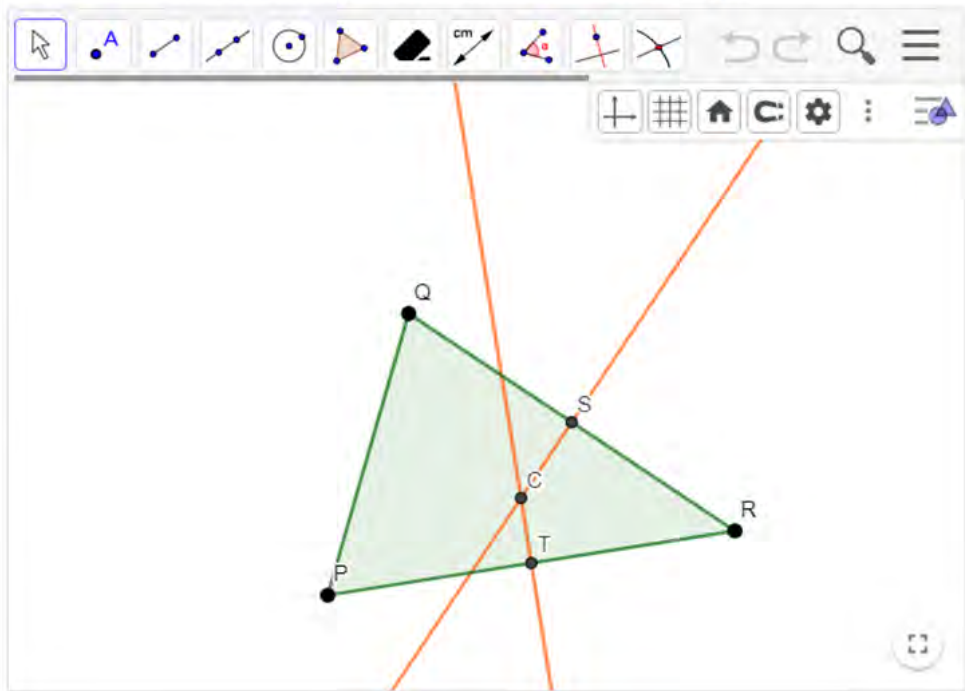
Por lo que, en base a los criterios de análisis, el proceso planteado respondería a la categoría de Prueba de Intelectual, de tipo prueba La experiencia mental.

## ACTIVIDAD 2

Figura 41. Actividad 2

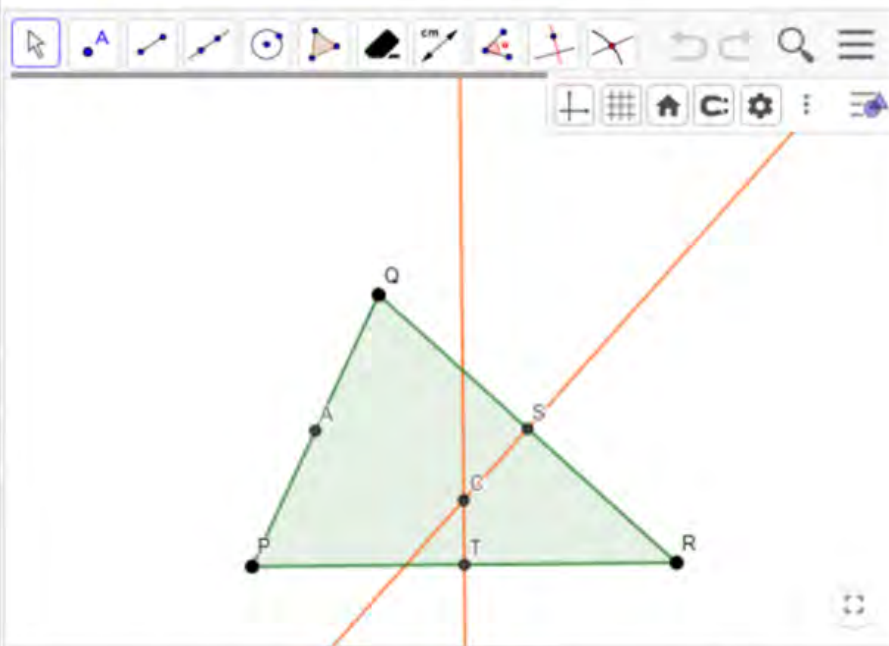
Actividad N°2: Concurrencia de líneas notables

a) Identifique qué líneas notables del triángulo PQR son las rectas que pasan por S y por T. Utilice las herramientas del GeoGebra que crea necesarias. Luego explique.



The image shows a screenshot of the GeoGebra interface. At the top, there is a toolbar with various geometric construction tools. Below the toolbar, a green triangle with vertices P, Q, and R is displayed. Two orange lines are drawn: one passing through points S and T, and another passing through points Q and R. The two lines intersect at point C inside the triangle. The vertices are labeled P, Q, and R. The intersection point is labeled C. The lines are labeled S and T. The interface includes a grid, a home button, a settings gear, and a search icon.

b) Si A es punto medio de  $\overline{PQ}$ , la recta perpendicular a  $\overline{PQ}$  que pase por A es concurrente (coincide) con la intersección de las otras dos rectas del triángulo. Utilice las herramientas necesarias para probar la proposición (afirmación).



c) Empleando propiedades geométricas, pruebe la proposición (afirmación).  
(A partir trazos realizados en el applet de GeoGebra, detalle los pasos de la prueba)

d) En el siguiente applet, represente la circunferencia que pase por P, Q y R y determine el centro de dicha circunferencia. Plantee una conjetura al respecto y realice una prueba.

Aa  $\pi$

Task 7

Objetivos de la actividad 2 por parte de los estudiantes:

- Probar la conjetura sobre la concurrencia de una tercera mediatriz a la intersección de las otras dos mediatrices de un triángulo con el uso de las herramientas del GeoGebra y describir el procedimiento.
- Probar la conjetura sobre la concurrencia de una tercera mediatriz a la intersección de las otras dos mediatrices de un triángulo con el uso de las herramientas del GeoGebra para identificar y describir en base a propiedades geométricas.
- Probar la conjetura sobre la concurrencia del centro de la circunferencia, que pasa por los vértices de un triángulo, con el circuncentro del mismo triángulo con el uso de las herramientas del GeoGebra o solo en base a propiedades geométricas.

La actividad 2 consta de cuatro ítems a, b, c y d, planteados para ser desarrollados en un applet de GeoGebra, cuyo código de acceso será compartido con los estudiantes. En el primer ítem se muestra una representación triangular con trazos de dos rectas de las cuales se solicita identificar el tipo de línea notable y describir sus características. Los ítems b y c proponen probar la concurrencia de una tercera mediatriz a la intersección de las otras dos mediatrices de un triángulo, con el uso del GeoGebra y descripción de propiedades, los cuales se serán desarrollados en el applet de GeoGebra. Dichas pruebas serán analizadas para identificar, según Balacheff (2000), al tipo de prueba que pertenecen.

### **Resultados esperados en el ítem 2a**

La finalidad de la actividad 2a es que, los estudiantes identifiquen el tipo de línea notable que son las rectas trazadas en una representación de triángulo, el cual se encuentra mostrado en el ambiente de representación dinámica GeoGebra, con lo que les permitirá realizar tratamientos dinámicos en el registro figural.

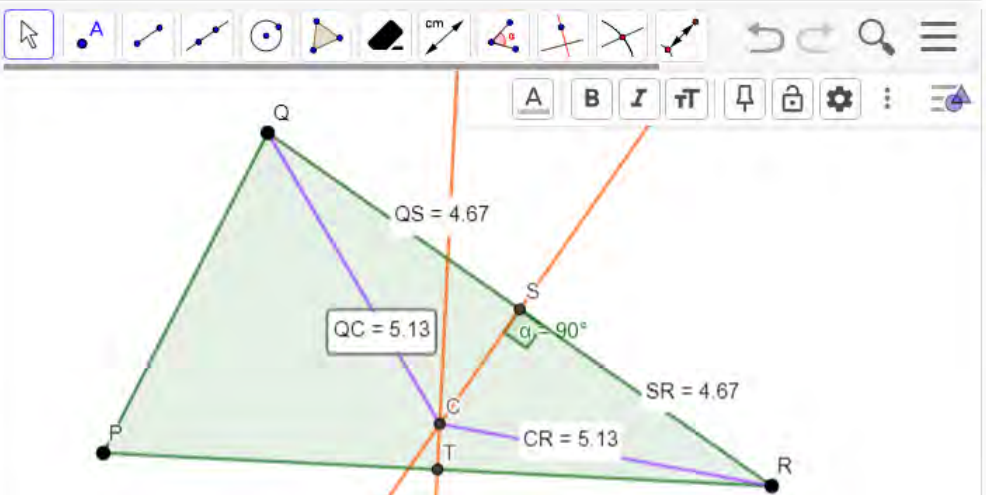
El ítem 2a, el que se observa en la figura 42, invita a los estudiianes a emplear las herramientas del GeoGebra y el arrastre para determinar el tipo de línea notable que son las rectas trazadas en el triángulo PQR.

**Figura 42. Resultados esperados: Actividad 2, ítem a**

a) Identifique qué líneas notables del triángulo PQR son las rectas que pasan por S y por T. Utilice las herramientas del GeoGebra que crea necesarias. Luego explique.

**A** Hemos medido los segmentos cortados por S,  $SR=3.96$  y  $QS=3.96$ . Por lo que S es punto medio de  $\overline{QR}$ .

**f<sub>x</sub>** Luego trazamos los segmentos  $\overline{QC}$  y  $\overline{CR}$ , también los medimos y resultaron que tienen la misma medida. Realizamos este mismo proceso sobre la otra recta, por lo que podemos determinar que las rectas son mediatrices del triángulo PQR. Para confirmar, también medimos los ángulos que forman las rectas sobre cada lado.



The screenshot shows a triangle PQR with vertices P, Q, and R. A vertical line passes through S on QR and T on PR. A diagonal line passes through C on QR and S on PR. A right angle is marked at S. Measurements are shown: QS = 4.67, SR = 4.67, QC = 5.13, and CR = 5.13. The GeoGebra toolbar is visible at the top.

En la figura 42, podemos apreciar una descripción y representación figural esperada. Tomemos en cuenta que el estudiante puede limitarse a medir los segmentos  $\overline{QS}$  y  $\overline{SR}$  y el ángulo RCS, para determinar que la recta que pasa por el punto S es una mediatriz, y no trazar los segmentos desde los vértices Q y R del triángulo hacia el punto C, con el cual determinarían que se trata de una mediatriz según su propiedad, que se refiere a que cualquier punto de una mediatriz de un segmento es equidistante a los extremos de dicho segmento.

### Resultados esperados del ítem 2b

Esta parte de la actividad tiene como objetivo recoger los procedimientos de los estudiantes como una primera versión de prueba de la concurrencia de una tercera mediatriz con el punto de intersección, con el fin de clasificar según los tipos de prueba de Balacheff (2000).

Para el ítem 2b, se han limitado las herramientas a utilizar con el fin de que los estudiantes realicen procedimientos de construcción con circunferencias como lo conocen con el uso del regla y compás, con esto se pretende que los estudiantes puedan acercarse más a la definición de la mediatriz de un segmento, cualquier punto de la mediatriz equidista

de los extremos del segmento. Ello, con el fin de generar esta idea de la mediatriz para el desarrollo del próximo ítem.

### Resultados esperados en el ítem 2b


El ítem 2b tiene como finalidad, a partir de la figura triangular y las dos mediatrices trazadas, que los estudiantes tracen la tercera mediatriz, al lado  $\overline{PQ}$ . Luego, se solicita probar la proposición sobre la concurrencia de las líneas notables al Circuncentro



A continuación se muestra el resultado esperado del ítem 2b en la figura 43.

**Figura 43.** Resultados esperados: Actividad 2, ítem b

**b) Si A es punto medio de  $\overline{PQ}$ , la recta perpendicular a  $\overline{PQ}$  que pase por A es concurrente (coincide) con la intersección de las otras dos rectas del triángulo. Utilice las herramientas necesarias para probar la proposición (afirmación).**

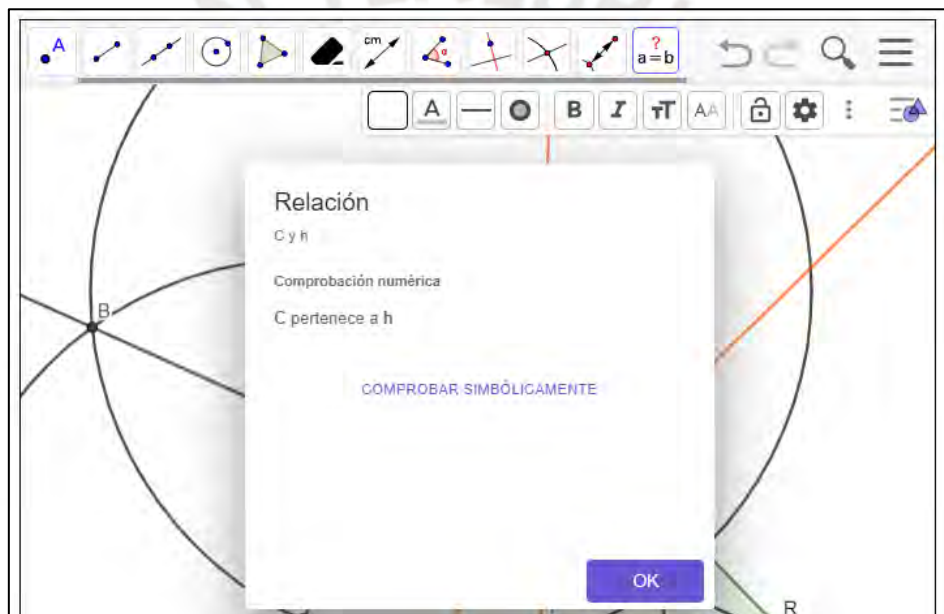
Aa  $\pi$  Utilizamos la herramienta de circunferencia sobre los vértices P y Q para trazar la mediatriz al lado  $\overline{PQ}$ . Usamos la herramienta "Relación" el que nos indicó que el punto C pertenece a la mediatriz. Por lo que la tercera mediatriz de un triángulo es concurrente con las otras dos mediatrices.


Como se muestra en la figura 43, se espera que el estudiante trace una circunferencia con uso de la herramienta *Circunferencia (centro, punto)*  , desde el vértice Q, como

centro de la circunferencia, y con paso de la circunferencia por P, uno de los extremos del lado  $\overline{PQ}$ , luego, el trazo de una segunda circunferencia con centro P y paso de la circunferencia por Q, Después, se interseca las circunferencia con el uso de la herramienta *Intersección* , esto para trazar una recta con la herramienta *Recta*  que pase por las intersecciones de las circunferencias B y D y ubicar al punto medio de  $\overline{PQ}$ , que se nombra como punto A.

Con esto, se tendría como la tercera mediatriz a la recta  $\overline{BD}$ . Luego, se espera que los estudiantes prueben la proposición que las tres mediarices del triángulo PQR son concurrentes, como observamos en la figura 44.

**Figura 44.** Resultados esperados: Actividad 2, ítem b

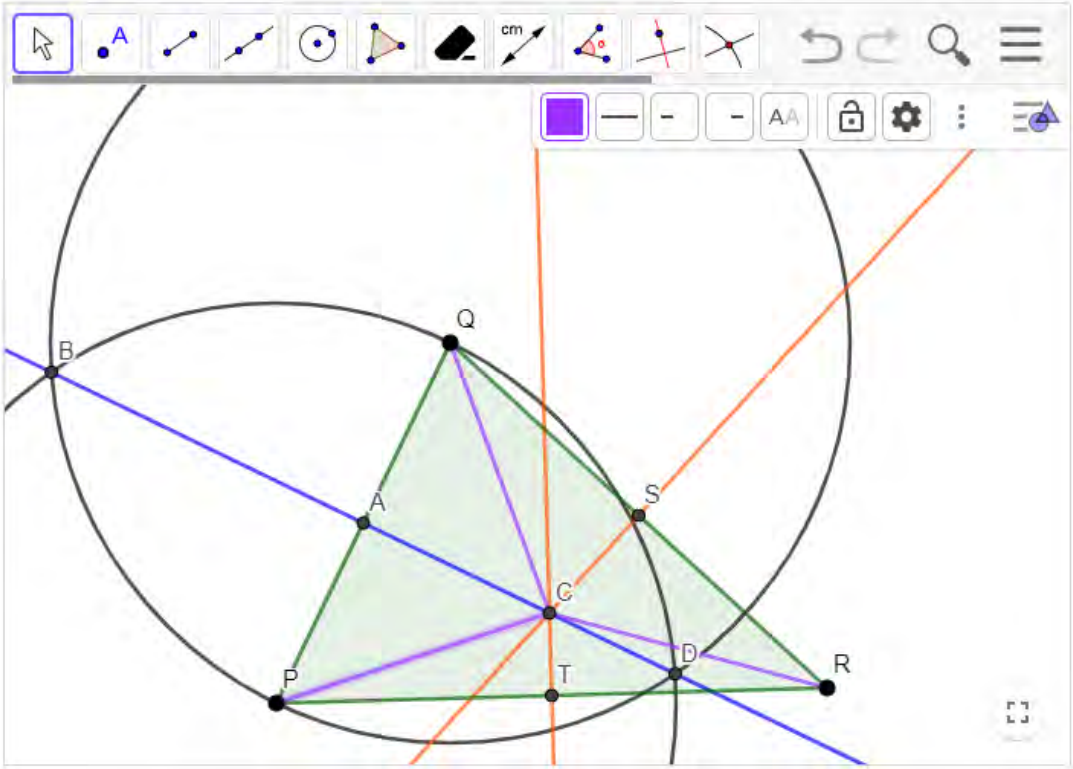


En el applet también se espera que los estudiantes describan los pasos utilizados para validar la conjetura sobre la concurrencia de las tres mediatrices. El siguiente procedimiento consta en verificar que la mediatriz pase por el punto de intersección de las otras dos mediatrices, incluso, mediante la herramienta *Relación*   $a=b$ , podrían notar que el punto de intersección de las dos mediatrices pertenece a la tercera mediatriz y describirlo en el applet, como se observamos en la figura 45.

### Resultados esperados el ítem 2c

El ítem 2c tiene como finalidad obtener los procesos de prueba de los estudiantes en el que detallen las propiedades utilizadas como por ejemplo lo mostrado en la figura 45, esto para determinar si el tipo de prueba, según Balacheff (2000) es el de Experiencia mental, es decir si el desarrollo realizado corresponde a la categoría de Prueba intelectual.

Figura 45. Resultados esperados: Actividad 2, ítem c



**c) Empleando propiedades geométricas, pruebe la proposición (afirmación).  
(A partir trazos realizados en el applet de GeoGebra, detalle los pasos de la prueba)**

Aa  $\pi$  Por la definición de la mediatriz, cualquier punto de la mediatriz es equidistante a los extremos del segmento, notamos que  $PC=CR$ , siendo C cualquier punto de la primera mediana equidistante al lado PR. De la misma manera se cumple con la tercera mediatriz, por lo que los siguientes segmentos son congruentes  $PC=QC$ . Por lo tanto, la tercera mediatriz pasa necesariamente por C, es decir, las mediatrices son concurrentes.

En la figura 45 se muestra lo solicitado en el ítem c de la segunda actividad, en el que se describe la conjetura de la concurrencia de las mediatrices, mediante una descripción de los pasos de la prueba del applet GeoGebra. Esto con la definición de la mediatriz, el que desde cualquier punto de la mediatriz de un segmento equidista a los extremos de dicho segmento, en este caso, se espera que los estudiantes tracen los segmentos que unen los vértices del triángulo a su circuncentro, formando a  $\overline{QC}$ ,  $\overline{PC}$  y  $\overline{RC}$ , esto para determinar la congruencia de estos tres segmentos para luego, probar que la recta  $\overline{BD}$  es la tercera mediatriz del triángulo, y existe una concurrencia de las mediatrices en el punto C, el circuncentro.

#### Tipo de prueba

En las respuestas esperadas se pueden evidenciar los siguientes criterios:

- Identifican las características de la mediatriz: el ángulo que forma con el lado del triángulo y el paso por el punto medio de dicho lado.
- Realizan el trazo de la tercera mediatriz, a partir de sus características.
- Identifica la propiedad de la Mediatriz: desde cualquier punto de la mediatriz de un segmento, es equidistante a los extremos del segmento.
- Justifican la conjetura: las mediatrices de un triángulo son concurrentes en un punto, llamado Circuncentro.

Por lo que el proceso planteado respondería a una Prueba de tipo Intelectual, la experiencia mental. De presentarse indicios de generalización como plantear ejemplos, la prueba correspondería al tipo de Ejemplo genérico.

### Resultados esperados del ítem 2d


Con la actividad del ítem 2d se pretende que el estudiante pruebe la conjetura sobre la concurrencia del centro de la circunferencia, que pasa por los vértices de un triángulo, con el circuncentro del mismo triángulo, y la describa en base a propiedades geométricas como la mediatriz de un segmento, como se muestra en la figura 46.

**Figura 46.** Resultados esperados: Actividad 2, ítem d

**d) En el siguiente applet, represente la circunferencia que pase por P, Q y R y determine el centro de dicha circunferencia. Plantee una conjetura al respecto y realice una prueba.**

Aa  $\pi$  Conjetura: El centro de la circunferencia que pasa por los vértices P, Q y R es el circuncentro del triángulo PQR.

Por definición de la mediatriz, cualquier punto de la mediatriz es equidistante a los extremos del segmento, tenemos que PC, QC y RC son congruentes, por lo que dichos segmentos formarían al radio de una circunferencia con centro C, siendo C el circuncentro del triángulo PQR.

En la figura 46 se muestran los procedimientos que esperamos de los estudiantes. En primer lugar, luego de notar que los segmentos  $\overline{QC}$ ,  $\overline{PC}$  y  $\overline{RC}$  son congruentes, éstos pueden representar el radio de la circunferencia que pase por los vértices del triángulo, para ello esperamos que los estudiantes representen a la circunferencia con centro C y puntos de paso, por los vértices P, Q y R del triángulo, esto con la herramienta *Circunferencia (centro, punto)* . Por lo que concluirían que la circunferencia circunscribe al triángulo, siendo el circuncentro de éste, el centro de la circunferencia.

### Tipo de prueba

En las respuestas esperadas se pueden evidenciar lo siguiente:

- Representa la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo con centro en el punto notable circuncentro.
- Formula la conjetura relacionada al centro de la circunferencia.
- Traza los segmentos desde el circuncentro hacia los vértices y prueba su conjetura mediante la propiedad de la mediatriz.
- Justifica la conjetura: El centro de la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo coincide con el Circuncentro con el empleo de la propiedad de la mediatriz.

En vista que el resultado esperado del ítem 2d cumple con los criterios mencionados, el proceso de prueba se consideraría como de tipo experiencia mental en la categoría Prueba Intelectual. De emplear la propiedad de la mediatriz aun utilizando medidas, la prueba se categoriza de tipo Ejemplo genérico, en la categoría Prueba Pragmática.

### 3.5 Descripción de la implementación y resultados de las actividades

En la aplicación de los instrumentos participaron 28 estudiantes, cuyas edades oscilan entre 15 y 16 años, de los cuales se analizaron los resultados de 4 estudiantes quienes formaron dos duplas.

Duplas	Estudiantes
Primera dupla	Fernanda y Camila
Segunda dupla	María y Diego

La sesión es dirigida por la profesora - investigadora, quien proporcionó el código de acceso del Applet de GeoGebra a las duplas de estudiantes. Luego, se brindó la indicación de seguir los pasos que se muestran en el Applet, que dialoguen sobre las preguntas y respondan.

Cabe mencionar que, durante las sesiones los cuatro estudiantes mostraron entusiasmo y compromiso en la realización de las actividades, tanto en el desarrollo del applet de GeoGebra como en mantener las interacciones en duplas. Las conversaciones y los procesos que realizaron las duplas fueron grabadas mediante una captura de pantalla y de voz por un programa nativo de Windows de las computadoras. Por otro lado, se evidenció que el ambiente de representación dinámica GeoGebra, donde se desarrollaron las actividades, era poco conocido y utilizado por los estudiantes, por lo que el desarrollo de la actividad 0 contribuyó en la exploración y aprendizaje de nociones básicas de la geometría mediante la manipulación de las herramientas del GeoGebra, sin embargo aún durante el desarrollo de las actividades 1 y 2, las cuales se analizarán a continuación, se han generado algunas dudas por parte de los estudiantes debido a que la realización de procesos de pruebas matemáticas no es usual aplicarlas durante las clases, aunque sí desarrollan las capacidades de justificar y argumentar las afirmaciones que formulan al resolver situaciones problemáticas.

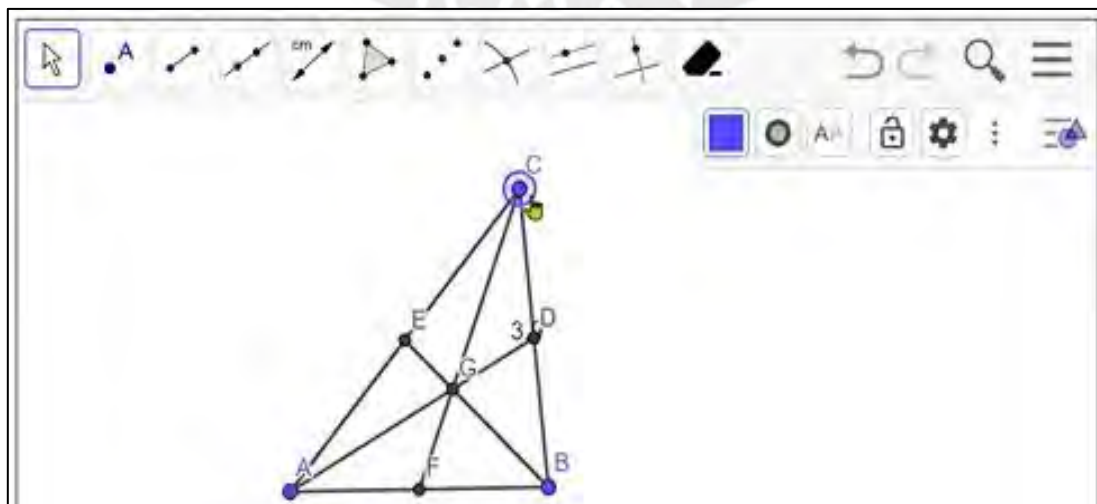
A continuación, se presentarán los siguientes aspectos de cada actividad: descripción, presentación de los resultados y el análisis de los mismos.



### **Actividad 1, ítem a**




En la primera parte de la actividad 1, los estudiantes representaron las medianas y el baricentro de un triángulo, a partir de las indicaciones señaladas en el applet como se encuentra señalado en la figura 36.

A continuación, se presentan las actividades realizadas por las dos duplas de estudiantes, mostradas en las figuras 47 y 48.

**Figura 47.** *Medianas y baricentro de un triángulo, por la primera dupla*

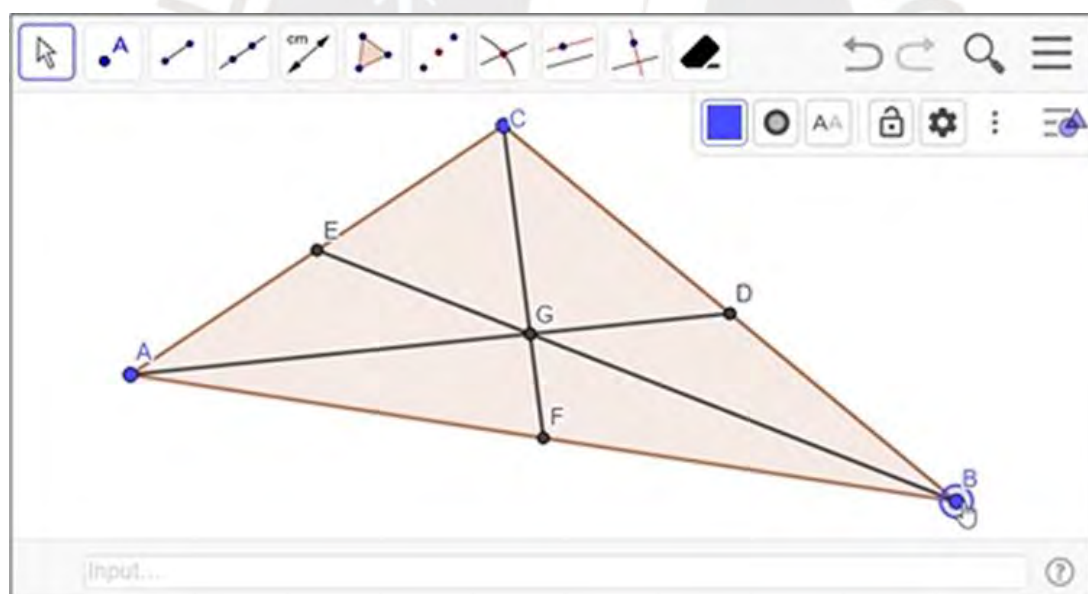





En la figura 47, las estudiantes Fernanda y Camila utilizaron la herramienta *Punto*  para ubicar a los puntos no colineales, A, B y C, luego, seleccionaron la herramienta *segmento*  para unir los puntos logrando trazar los lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  y  $\overline{CB}$ , logrando así representar al triángulo ABC.


Luego, ubican el punto medio del lado  $\overline{BC}$  con la herramienta *Medio o Centro* , formando el punto D. Luego, trazan el segmento  $\overline{AD}$  como mediana del triángulo, con uso de la herramienta *Segmento* . Asimismo, trazan las medianas  $\overline{BE}$  y  $\overline{CF}$ , siguiendo el mismo procedimiento. Para seleccionar el punto de intersección de las medianas construidas, las estudiantes intentan hacerlo seleccionando únicamente en la intersección de las tres medianas. Finalmente, lo logran seleccionando a las medianas  $\overline{AD}$  y  $\overline{CF}$ , haciendo uso de la herramienta *Intersección* . Como indica el ítem, después arrastran al triángulo ABC desde el vértice C.

Por otro lado, en la figura 48 mostramos el desarrollo del ítem 1a, por la segunda dupla.

**Figura 48.** Medianas y baricentro de un triángulo, por la segunda dupla




Como se muestra en la figura 48, los estudiantes María y Diego plasmaron su desarrollo al seguir instrucciones del ítem 1a. En primer lugar, construyeron el triángulo ABC, ubicando los puntos no colineales A, B y C, respectivamente, utilizaron la herramienta *Polígono* . Luego, con la herramienta *Medio o Centro*  ubicaron el punto medio del lado  $\overline{CB}$ , el que se nombró como punto D. Después, realizaron lo mismo de cada lado del triángulo con el uso de la herramienta *punto medio* . Finalmente, trazaron las medianas  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BE}$  y

$\overline{CF}$ , además, ubicaron el punto de intersección G, seleccionando a las medianas  $\overline{AD}$  y  $\overline{CF}$ , esto último con el uso de la herramienta *Intersección* . Para concluir, arrastraron los vértices B, A y C respectivamente.

Sobre el ítem 1a podemos afirmar que la finalidad de que los estudiantes identifiquen los elementos geométricos y construyan una representación triangular como también sus medianas y el baricentro en GeoGebra, se han logrado en ambas duplas.

### Actividad 1, ítem b

En el ítem 1b se solicita medir los segmentos  $\overline{AG}$  y  $\overline{GD}$  de una de las medianas, formados por el baricentro, para distintas posiciones de los vértices del triángulo construido en el ítem 1<sup>a</sup>. A continuación, se propone formular una conjetura sobre la relación entre los segmentos mencionados.

Para esto, presentaremos el desarrollo de la **primera dupla**, Fernanda y Camila, quienes utilizaron la herramienta *Distancia o Longitud*  para medir los segmentos  $\overline{AG}$  y  $\overline{GD}$ , obteniendo las medidas 1.94 y 0.97, respectivamente.

A continuación, se presenta el siguiente diálogo:

**Fernanda:** 0.97 es la mitad de 1.94 no?

**Camila:** Sí

**Camila:** AG tiene el doble de longitud que el segmento  $\overline{GD}$  (escribe)

**Fernanda:** Multiplicamos 1 por 2 y nos salió  $\overline{GA}$  (luego de arrastrar el vértice C y observar las medidas con este nuevo tipo de triángulo)

La formulación de la conjetura, luego del diálogo entre la segunda dupla, se puede observar en la figura 49.

**Figura 49.** Ítem 1b, por la primera dupla

**b) Mide los segmentos  $\overline{AG}$  y  $\overline{GD}$  para distintas posiciones de los vértices del triángulo ABC.**

**Luego, formula una conjetura (hipótesis) sobre la relación entre los segmentos  $\overline{AG}$  y  $\overline{GD}$ .**

Aa  $\pi$  AG tiene el doble de longitud que el segmento GD.

En su descripción de la conjetura, como lo que se observa en la figura 49, identificaron que el segmento AG tiene el doble de longitud que el segmento GD, en lugar de indicar esta relación como una razón, de 2 a 1, como se esperaba antes de la experimentación.

Por otro lado, se presentan los resultados, realizados por la **segunda dupla** al desarrollar el ítem b.

Al inicio, los estudiantes presentaron dudas sobre el significado de una conjetura, a lo que la profesora intervino para aclarar su inquietud.

**María:** profesora, qué significa hipótesis.

**Profesora:** la hipótesis es un enunciado que se considera verdadero en un inicio, hasta probarlo por medio de una investigación científica. Tiene similitud con una conjetura, y éste se da generalmente en matemática, además es probada mediante propiedades.

Ahora observemos, ¿qué relación habrá entre los segmentos  $\overline{AG}$  y  $\overline{GD}$ ?

**Diego:** ahh es el doble

**Profesora:** ¿qué es el doble?

**Diego:** GA es el doble de GD

**María:** hay que apuntar en la pregunta b (escriben la conjetura: GA es el doble de GD).

Como se puede notar en el diálogo que mantiene la profesora y los estudiantes de la segunda dupla, la profesora les pregunta por la relación que observan entre los segmentos  $\overline{AG}$  y  $\overline{GD}$ , a lo que, después de que los estudiantes arrastran desde el vértice B del triángulo y observan que las medidas de los segmentos cambiaban manteniendo una cierta relación, respondieron que  $\overline{AG}$  es el doble de  $\overline{GD}$ , como se visualiza en la figura 50.

**Figura 50.** Ítem 1b, por la segunda dupla

b) Mide los segmentos  $\overline{AG}$  y  $\overline{GD}$  para distintas posiciones de los vértices del triángulo ABC. Luego, formula una conjetura (hipótesis) sobre la relación entre los segmentos  $\overline{AG}$  y  $\overline{GD}$ .

Aa  $\pi$  GD es el doble de AG

La figura 50 muestra la conjetura que formularon los estudiantes de la segunda dupla, que por lo expresado en el diálogo desconocían lo que es una hipótesis y una conjetura, como fue señalado en el capítulo 3.2, los estudiantes no tienen manejo de la realización de procesos de pruebas y conocimiento sobre las conjeturas por lo que no se propicia, sin embargo, lograron formular sus conjeturas.

Sobre el ítem 1b podemos afirmar que la finalidad de que los estudiantes representen e identifiquen los elementos geométricos como las medianas y baricentro de un triángulo. En cuanto a su propósito, se espera que los estudiantes movilicen sus conocimientos previos para establecer una relación entre los segmentos de la mediana dividida por el baricentro, es

de 2 a 1. Podemos notar que ambas duplas lograron este objetivo. Además, sus respuestas evidencian el primer descriptor de los criterios de análisis de Tipos de prueba relacionados con el baricentro de un triángulo, el cual se encuentra en la tabla 4, correspondiente a identificar la conjetura “La relación entre los segmentos de la mediana cortada con el baricentro es de 2 a 1”. Sin embargo, ninguna de las duplas indicó que la relación entre los segmentos de la mediana cortada por el baricentro resulte aproximada de 2 a 1, lo que sugiere que no consideraron o no notaron que, en algunos casos las medidas de uno de los segmentos estaban aproximadas.

### **Actividad 1, ítem c**

Como se puede observar en la Figura 51, en el ítem 1c se solicita que el estudiante pruebe su conjetura formulada en el ítem 1b, luego, explicarlo paso a paso.

Cabe mencionar que no se indicó antes a los estudiantes, de que las actividades consistían en realizar pruebas matemáticas y de cómo realizarlas. Respondieron a manera de justificar sus conjeturas y trataron de detallar lo realizado, además, con preguntas de orientación de la profesora.

En un primer lugar, para responder a la pregunta c, en la **primera dupla**, Camila menciona que ya probaron, refiriéndose a la conjetura, luego Fernanda indica que hay que explicarlo. Luego, empiezan el siguiente diálogo:

**Camila:** A pesar del movimiento de los vértices, la relación entre AG y GD se mantenía, teniendo AG el doble de longitud que GD. (escriben la conjetura formulada, esto respondiendo a la pregunta del ítem c).

Para ello, la profesora interviene y mantienen el siguiente diálogo:

**Profesora:** ¿Cómo saben que  $\overline{AG}$  tiene el doble de longitud que  $\overline{GD}$ ?

**Fernanda:** Porque al mover el vértice, 1.21 por 2 es 2.42.

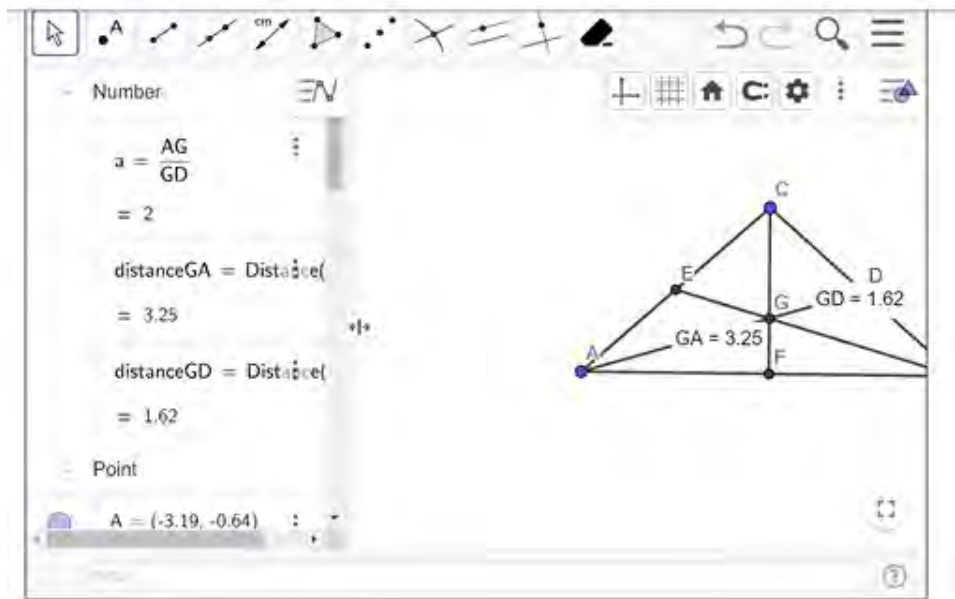
**Profesora:** Pueden continuar arrastrando

**Fernanda:** el doble de 1.62 no es el doble de 3.25

Las estudiantes se percatan que en algunos casos las longitudes de los segmentos  $\overline{AG}$  y  $\overline{GD}$  no resultaban ser de 2 a 1, por lo que dudan por un momento de la conjetura planteada por ellas, a lo que la profesora pregunta de qué manera podrían asegurarse o probar su conjetura.

La profesora motiva a los estudiantes el empleo de la vista algebraica que utilizaron en la actividad 0. A lo que, luego, hallaron el cociente de las medidas de los segmentos  $\overline{AG}$  y  $\overline{GD}$  como se puede apreciar en la figura 51.

**Figura 51. Ítem 1c, primera dupla**



Luego de utilizar la barra de entrada y la vista algebraica como vemos en la figura 51, las estudiantes comentan lo siguiente.

**Camila:** Ahh claro, aquí sale aproximado (refiriéndose a que las medidas en el applet)

**Fernanda y Camila:** Para comprobar la relación entre AG y GD, hemos medido ambos segmentos y hemos comparado las medidas que tomaban conforme al movimiento de los vértices del triángulo ABC. Luego, de verificar que en algunos casos la medida de la relación no era exacta, utilizamos el programa álgebra, para obtener que AG/GD es igual a 2 (comentan y escriben). Esto se puede observar en la figura 52.

**Figura 52. Ítem 1c, primera dupla**

**c) Con ayuda del GeoGebra, prueba tu conjetura. Luego, explícalo paso a paso.**

Para comprobar la relación entre AG y GD, hemos medido ambos segmentos y hemos comparado las medidas que tomaban conforme al movimiento de los vértices del triángulo ABC. Luego de verificar que en algunos casos la medida de la relación no era exacta, utilizamos el programa "álgebra" para

La figura 52, muestra la redacción de los procesos de la prueba que fue realizada en base a la *Vista Algebraica*, realizada por la primera dupla.

La **segunda dupla**, en cambio, luego de arrastrar uno de los vértices del triángulo, describieron lo siguiente para responder el ítem 1c: Si el triángulo aumenta su tamaño, entonces el segmento GD siempre será el doble de AG debido a la medida de sus segmentos, como se muestra en la figura 53.

**Figura 53. Ítem 1c, segunda dupla**

**c) Con ayuda del GeoGebra, prueba tu conjetura. Luego, explícalo paso a paso.**


Aa  $\pi$  Si aumenta el tamaño del triángulo entonces el segmento GD siempre será el doble de AG debido a la medida de sus segmentos.

La figura 53 presenta la explicación proporcionada por la primera dupla, quienes en un inicio también afirmaron haber probado la conjetura, refiriéndose a las medidas de los segmentos que observaron. Por otro lado, la segunda dupla no logró completar la actividad 0, en especial, en el que se indica hacer uso de la Vista Algebraica para hallar la relación entre unos segmentos paralelos, por lo que no lograron aplicar esta parte de la experimentación en la actividad.

Con respecto al ítem 1c, cuyo objetivo era que los estudiantes, con apoyo de las herramientas de GeoGebra, prueben la conjetura que formularon sobre la relación entre los segmentos de la mediana cortada por el baricentro, podemos notar que ambas duplas se esforzaron en buscar los medios para responder al ítem.

#### **Actividad 1, ítem d**

En el ítem 1d se solicita explicar la prueba de la conjetura formulada por los estudiantes en base a propiedades geométricas, sin usar valores numéricos como medidas.

Respecto a las respuestas de la **primera dupla**, para contestar el ítem d, los estudiantes utilizaron la herramienta borrador  para eliminar las medidas de los segmentos de la mediana  $\overline{AD}$ , utilizadas en el ítem anterior, con el fin de buscar propiedades con que puedan validar su conjetura, como el trazo de rectas paralelas y el teorema de Thales, sin embargo, aún utilizan medidas para comprobar.

A continuación, mostramos la solución de la primera dupla, que luego de realizar trazos como rectas paralelas, redactaron la prueba de su conjetura, como se muestra en la siguiente figura 54.



**Fernanda:** esta es la paralela y esta es la mediana.

**Camila:** Sí

**Fernanda:** Tuvimos que trazar la paralela de CB en el punto de E y colocar la mediana del triángulo AEF (escriben)

**Camila:** Así nos damos cuenta de que AK, KG y GD tienen la misma medida, por lo tanto, AG es el doble de G (escriben)

Por medio de la entrevista, la cual se realizó luego de la sesión 1, se obtuvo información con mayor claridad sobre el proceso de prueba de las estudiantes en el ítem 1d.

**Profesora:** ¿Por qué  $\overline{AK}$ ,  $\overline{KG}$  y  $\overline{GD}$  serían congruentes?

**Camila:** Teniendo a  $\overline{EJ}$  como la mediana del triángulo AEF, tenemos también lo que viene a ser la paralela  $\overline{EF}$  de  $\overline{CB}$ , es técnicamente una reducción del triángulo ACB (refiriéndose al triángulo AEF). Por ello podemos decir, al saber que AK es igual a KG y hemos trazado un punto I a la mitad, y al hacer la réplica, lo que sucede es que GD es la mitad de AG.

En el diálogo presentado, se puede observar que las estudiantes notaron que  $\overline{EJ}$  es paralela a  $\overline{CF}$ , y el triángulo AEF es semejante al triángulo ACB, además, que sus medianas,  $\overline{EJ}$  y  $\overline{CF}$  son paralelas, con esto deducen que  $\overline{AK}$  es congruente con  $\overline{KG}$ . Luego, afirman que I es punto medio de  $\overline{AD}$ , de la mediana del triángulo ACB, además, siendo que  $\overline{EF}$  pasa por la mitad de  $\overline{KG}$ , KI es congruente a  $\overline{IG}$ , por lo que  $\overline{AK}$  debe ser congruente a  $\overline{GD}$ . Por lo tanto, AG es el doble de GD.

Al analizar el proceso de prueba desarrollado por las estudiantes de la primera dupla, bajo los criterios de tipos de prueba propuestos en la presente investigación, los cuales son basados en los tipos de prueba de Balacheff (2000), uno de los descriptores se refiere al uso de la noción de la semejanza de triángulos para determinar la relación entre los segmentos de la mediana. Esto se evidencia en el desarrollo realizado por las estudiantes, aunque partiendo de las medidas que registraron inicialmente. Por otro lado, notamos que en la redacción de la prueba de la conjetura no se halla alguna justificación de la afirmación sobre que las medidas de  $\overline{AK}$ ,  $\overline{KG}$  y  $\overline{GD}$  son iguales, cuyo proceso pudimos rescatar de la captura de video de pantalla donde decidieron medir tales segmentos, aunque, luego, durante la entrevista explicaron la relación de los segmentos de la mediana en base a la semejanza de triángulos, después de trazar rectas paralelas. Por lo tanto, podemos determinar que el proceso de prueba realizado por las estudiantes de la primera dupla es de tipo *Ejemplo Genérico*.

Además, consideramos que el proceso de prueba de las estudiantes presenta indicios de ser un tipo de prueba mental, puesto que a pesar que en inicio utilizaron la herramienta longitud para medir los segmentos de  $\overline{AK}$ ,  $\overline{KG}$  y  $\overline{GD}$ , con lo que pudieron notar congruencia

entre estos segmentos, borraron las medidas y posteriormente, después de realizar el trazo de la mediana del triángulo AEF, en la entrevista explican que la relación entre los segmentos de la mediana AD es de 2 a 1, en base a la semejanza de triángulos y el trazo de las paralelas que realizaron. Ciñéndonos a los criterios de análisis, el tipo de prueba Ejemplo Genérico de la primera dupla, correspondería a la categoría de *Prueba Intelectual*.

Por su parte, la **segunda dupla**, después de hacer lectura al ítem 1d, tratan de encontrar alguna explicación, arrastran a la representación triangular ABC. Por un momento Diego comenta lo siguiente: *G siempre es el punto de intersección, aunque se mueva el triángulo, debido a que ... No sé cómo explicarlo*. Luego juntos describen como respuesta al ítem d, como lo observado en la figura 55.

**Figura 55. Ítem 1d, segunda dupla**

**d) A continuación, explica paso a paso la prueba de tu conjetura, solo con propiedades geométricas, es decir, sin utilizar las medidas de los segmentos.**

Aa  $\pi$  ya sea a que se mueva el punto A,B o C el segmento GD siempre sera el doble de AG debido a que G es el punto de intersección de AD,CF y BE

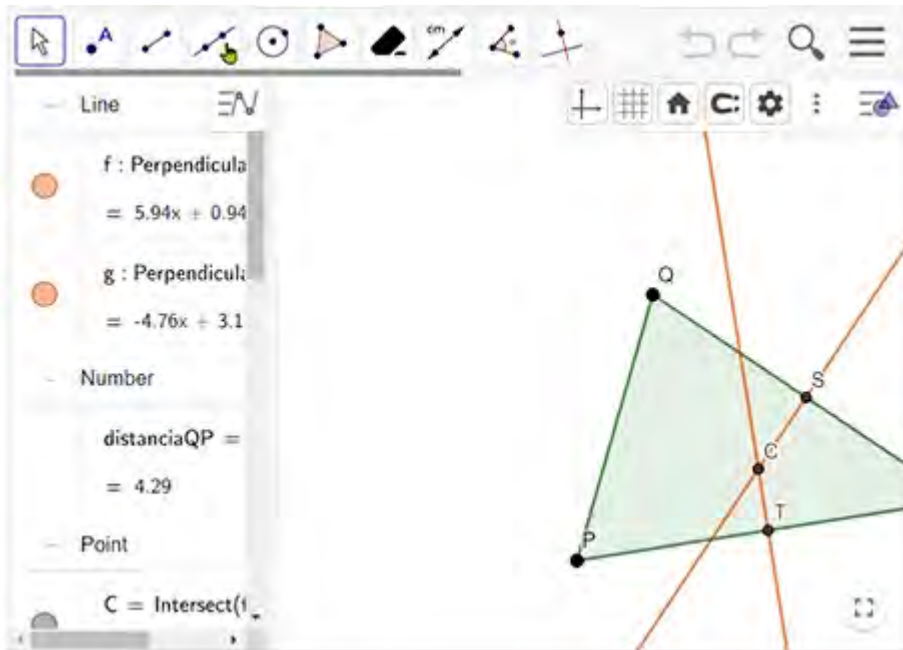
Para el ítem de la figura 55, en algún momento de la sesión, la profesora sugirió emplear propiedades geométricas como rectas paralelas, sin embargo, la segunda dupla optó por describir sus procesos de prueba señalando que, aunque uno de los vértices del triángulo sea arrastrado, el baricentro permanece como punto de intersección de las medianas del triángulo lo que causaría la relación de 2 a 1 de las longitudes de los segmentos. Por lo que no hallamos una coherencia en la afirmación de la segunda dupla al responder el ítem d, continúa afirmando que el segmento  $\overline{GD}$  mide el doble de  $\overline{AG}$  mediante la observación de sus longitudes.

### **Actividad 2, ítem a**

El ítem 2a, muestra una representación triangular en el que se visualizan trazos de dos líneas rectas, a lo que se solicita identificar de qué líneas notables se tratan, con apoyo de las herramientas que ofrece el GeoGebra, esta actividad se puede visualizar completa en la figura 41.

Las estudiantes de la **primera dupla** al empezar con la actividad, deciden revisar la vista algebraica, seleccionan una de las rectas y observan en dicha vista, resaltadas del mismo color que las rectas,  $f$  y  $g$  nombradas como Perpendicular, tal como se puede ver en la figura 56.

Figura 56. Ítem 2a, primera dupla




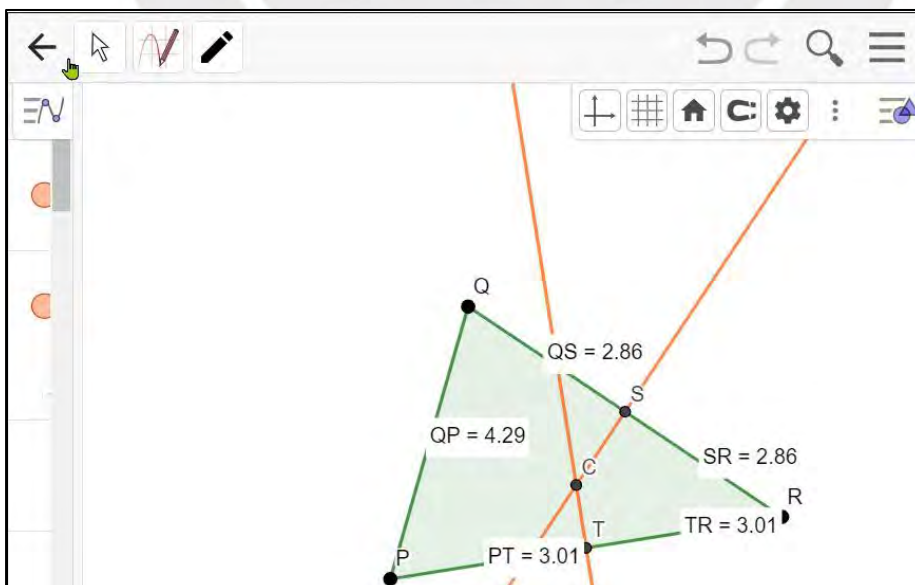

Luego, recordaron que las medianas coincidían en un punto y análogamente asumieron que pasaría lo mismo con este tipo de líneas. Usaron la herramienta *Distancia o Longitud*  para medir los segmentos formados por el punto medio del lado  $\overline{QR}$ , luego hacen lo mismo para medir los segmentos formados por el punto medio del lado  $\overline{PR}$  del triángulo PQR. Además, miden el lado  $\overline{PQ}$ , como se observa en la figura 57.

Figura 57. Ítem 2a (1), primera dupla



La figura 57 muestra las medidas de los segmentos formados por los puntos medios de cada lado del triángulo PQR, los que se obtuvieron con el uso de la herramienta *Distancia* o *Longitud* <sup>cm</sup> .

Luego, las estudiantes de la primera dupla intentan ubicar al punto medio del lado  $\overline{PQ}$ , por lo que se comienza con el siguiente diálogo.

**Fernanda:** Necesito saber el punto medio de éste (refiriéndose al lado PQ)

Acuden a la profesora y le mencionan lo siguiente.

**Camila:** Miss aquí no se encuentra la herramienta para hallar el punto medio.

**Profesora:** Bueno, este applet se diseñó para que busquen otra manera de hallar el punto medio.

**Fernanda y Camila:** Ahh.

Luego, le comentan a la profesora que las dos rectas se tratarían de unas mediatrices.

**Profesora:** ¿por qué es una mediatriz? ¿qué características encontraron de la mediatriz?

**Fernanda:** ¿No es lo que divide a las aristas?

**Profesora:** En este caso tratándose de una figura plana, tiene vértices, lados,...

**Fernanda:** Ah perdón, lados.

**Camila:** La mediatriz divide en dos segmentos iguales al lado

**Profesora:** bien ¿alguna otra característica? Y se retira mientras discuten sobre la pregunta.

Por lo que, deciden medir los ángulos, y encuentran que las líneas rectas pasan por los puntos medios de cada lado formando  $90^\circ$  y describen su respuesta en el Applet del GeoGebra, esto se muestra en la figura 58.

**Figura 58.** Ítem 2a (2), primera dupla

**a) Identifique qué líneas notables del triángulo PQR son las rectas que pasan por S y por T. Utilice las herramientas del GeoGebra que crea necesarias. Luego explique.**

Aa

$\pi$

Las líneas notables del triángulo PQR son mediatrices debido a que se colocan en el punto medio de cada lado del triángulo de forma perpendicular, además de formar dos ángulos iguales en el punto de intersección y tener un ángulo de 90 grados en el punto medio.

Como se observa en la figura 58 y en la descripción de las interacciones de las estudiantes, ellas emplearon sus conocimientos de la mediatriz para identificar el tipo de línea que se representa en el ítem 2a. Cabe resaltar que, en esta actividad antes de revisar el ítem b, discutieron sobre buscar trazar la tercera mediatriz, luego, con la pregunta direccionada de

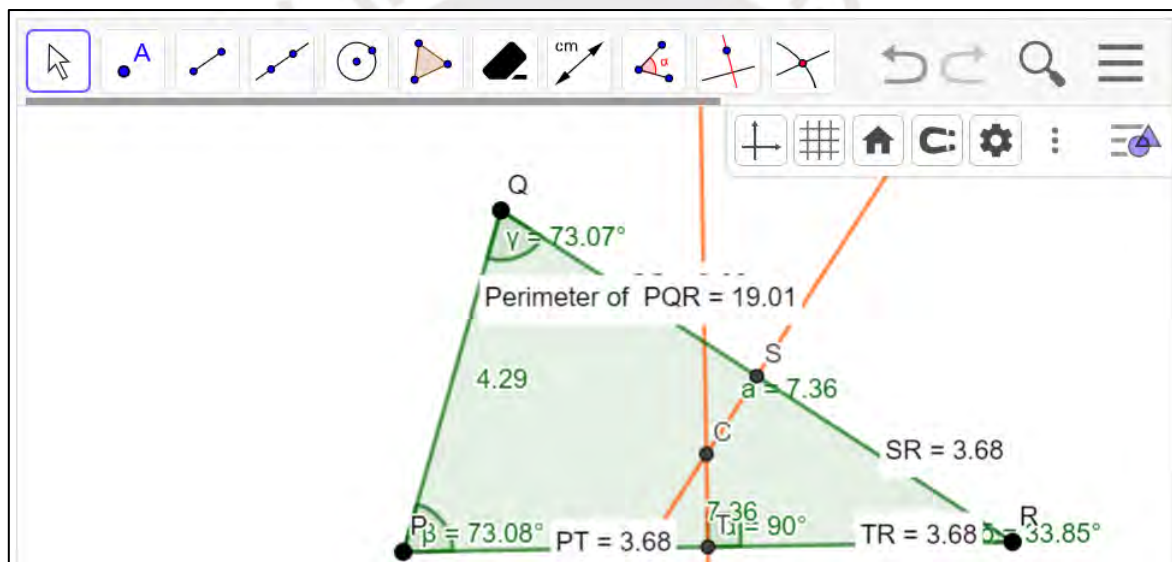
la profesora, recuerdan que el ángulo formado por la mediatriz hacia un segmento se forma un ángulo de  $90^\circ$ , con lo que responden al ítem 2a.

Por su lado, los estudiantes de la **segunda dupla** realizaron varias mediciones, entre medidas de los segmentos que se forman por el punto medio de cada lado, el perímetro y medida de los ángulos internos del triángulo y del que forma una mediatriz con uno de los lados del triángulo, como se aprecia en la figura 59.

**Figura 59.** Ítem 2a, segunda dupla

**a) Identifique qué líneas notables del triángulo PQR son las rectas que pasan por S y por T. Utilice las herramientas del GeoGebra que crea necesarias. Luego explique.**

Aa  $\pi$  Las líneas notables que pasan por la mediatriz s y t su punto de intersección es el punto c






Cabe resaltar que, como se observa en la figura 59, los estudiantes no describieron las características de la mediatriz en GeoGebra, en cambio, las mencionaron en la interacción que mantuvieron. Además, se puede visualizar en el applet de GeoGebra, los usos de las mediciones que realizaron.

Por lo que, podemos afirmar que ambas duplas lograron identificar las características de la mediatriz: el ángulo que forma con el lado del triángulo y el paso por el punto medio de dicho lado.

### **Actividad 2, ítem b**



En el ítem 2b, se muestra otro applet de GeoGebra con la misma estructura del ítem 2a, incluyendo la representación del punto medio de PQ, uno de los lados del triángulo PQR, en el que se plantea la siguiente proposición, que si por dicho punto nombrado como A, pasa

una recta perpendicular, esta será concurrente con la intersección de las otras dos rectas del triángulo. Se solicita utilizar las herramientas del GeoGebra para probar dicha afirmación.

Las estudiantes de la **primera dupla**, trazan una línea recta haciendo uso de la herramienta segmento , el cual, en primer lugar, trazaron sobre el punto A y luego se lo dirigieron al vértice opuesto E. Luego se percataron de que el segmento que trazaron no coincidía con la intersección de las otras dos mediatrices, el punto C, por lo que decidieron eliminar el segmento y probaron trazar la recta haciendo pasar por el punto A y el punto C, tal como indica la proposición, donde notaron que, al arrastrar por uno de los vértices del triángulo, la recta se mantenía en el punto C. Al principio tuvieron dudas como continuar, consideramos que aún les costaba, asumimos por poca familiaridad, con realizar procesos de pruebas matemáticas, luego, intentan buscar conocer las características de la recta que trazaron, haciendo uso de la herramienta longitud  y medida de ángulos , tal como se describe en la figura 60.

**Figura 60. Ítem 2b, primera dupla**

**b) Si A es punto medio de  $\overline{PQ}$ , la recta perpendicular a  $\overline{PQ}$  que pase por A es concurrente (coincide) con la intersección de las otras dos rectas del triángulo. Utilice las herramientas necesarias para probar la proposición (afirmación).**

  Primero trazamos la mediatriz del segmento PQ, luego nos dimos cuenta que las 3 mediatrices coincidían en un mismo punto de intersección, así formando 2 pares de ángulos iguales según la mediatriz.

A partir de la resolución de la figura 60, se puede notar que los integrantes de la primera dupla asumieron que la recta trazada se trataba también de una mediatriz, esto porque comprobaron al medir el ángulo que formaba la recta que pasa por el punto A con el lado  $\overline{PQ}$  aunque no describieron ello como parte de su redacción.



Por su parte los estudiantes de la **segunda dupla**, optaron por utilizar la herramienta perpendicular  para realizar el trazo que pase por el punto medio A y el punto de intersección de las otras mediatrices, el punto C. Además, también decidieron utilizar la herramienta de longitud  y medir los segmentos  $\overline{DA}$  y  $\overline{AB}$ , lo cual se observa en la figura 61.

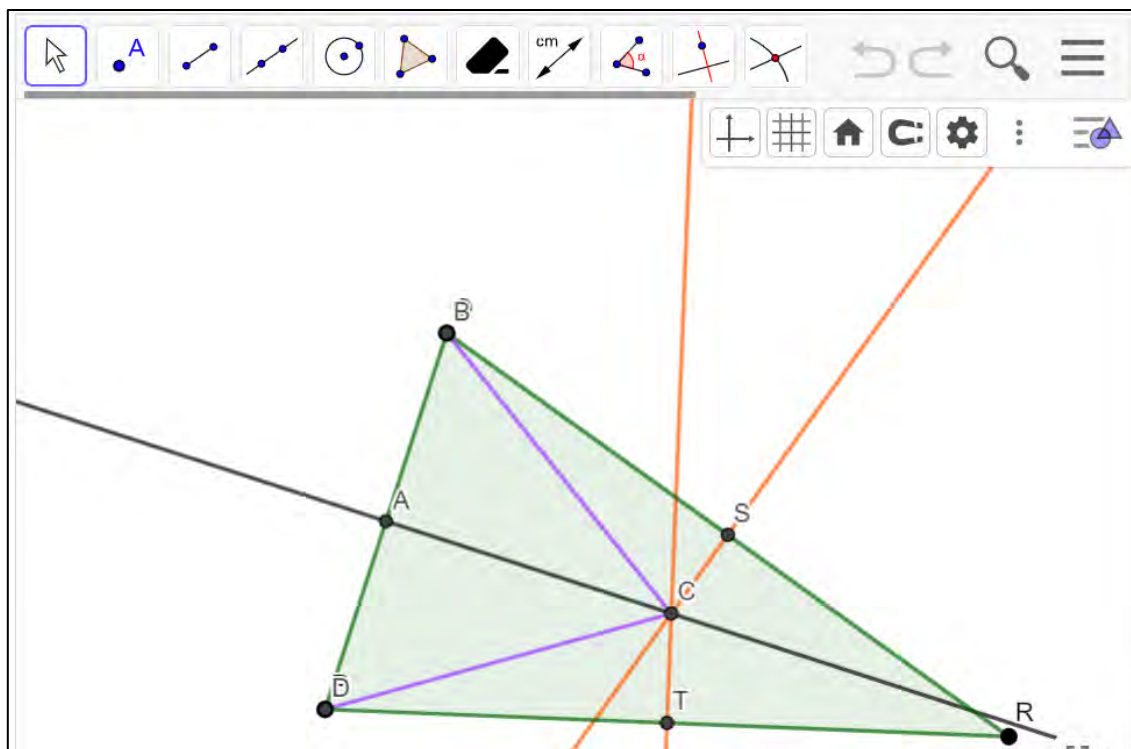
Figura 61. Ítem 2b, segunda dupla


b) Si A es punto medio de  $\overline{PQ}$ , la recta perpendicular a  $\overline{PQ}$  que pase por A es concurrente (coincide) con la intersección de las otras dos rectas del triángulo. Utilice las herramientas necesarias para probar la proposición (afirmación).

Aa

$\pi$

El punto medio A coincide con el punto de intersección, porque se utilizó la recta perpendicular



En la figura 61 se visualiza el trazo de la recta perpendicular al lado DB, con punto de paso por A, el punto medio de DB, esto con el uso de la herramienta *Perpendicular* , seleccionaron la herramienta luego se dirigieron al punto A. Como se puede apreciar, la segunda dupla afirma que el punto A coincide con el punto de intersección, lo que asumimos a que se referían que estos puntos son colineales por donde se pudo trazar una recta perpendicular, es decir la tercera mediatriz.

### Actividad 2, ítem c

En el ítem 2c se solicita utilizar propiedades geométricas para probar la proposición planteada en la actividad, sobre probar la concurrencia de las mediatrices.

Para ello las estudiantes de la **primera dupla**, después de trazar la tercera mediatriz, presentan dificultades para probar la concurrencia de la tercera mediatriz, aún conociendo la propiedad de la mediatriz de que todo punto de la mediatriz de un segmento es equidistante a los extremos de dicho segmento, pues fue tratado en la actividad 0.


Luego, escriben lo siguiente: *Hemos trazado la mediatriz de PQ, luego nos dimos cuenta que las tres mediatrices coinciden en un mismo punto de intersección, así formando dos pares de ángulos iguales según las mediatrices (esto último, refiriéndose a los ángulos opuestos que se generan al intersecar las mediatrices)*. Por lo que la profesora intervino y reforzó la solicitud del ítem 2c, emplear propiedades geométricas y pregunta si recuerdan alguna propiedad de la mediatriz.

**Fernanda:** Las medidas de los lados son iguales (recordando la propiedad de las mediatrices y señalan a los segmentos que se trazan desde el vértice hacia el circuncentro).

Luego, las estudiantes buscan la manera de emplear dicha propiedad en su actividad, mientras intentan escribir.

**Camila:** Allí, ¿dónde estaría el ángulo de 90 grados?

**Fernanda:** aquí está el ángulo (le señala el punto T, punto medio del lado PR del triángulo), aquí y aquí también (señalando el ángulo formado por los otros lados y las mediatrices, sin tratar de medir el ángulo con la herramienta de GeoGebra).

Luego, Camila nota que pueden trazar los segmentos que unen los vértices del triángulo y el circuncentro, a  $\overline{PC}$ ,  $\overline{QC}$ , y  $\overline{RC}$ , con el uso de la herramienta *Segmento* .

**Fernanda:** ohhh, son iguales (nota esta congruencia, sin realizar mediciones)

Después, deciden medir estos segmentos a lo que las estudiantes notaron la veracidad de la propiedad en la actividad que se encontraban realizando.

**Fernanda:** ¡Todos miden 4,3! (cambian de color a estos segmentos)

**Camila:** Y con eso, ¿qué escribimos?

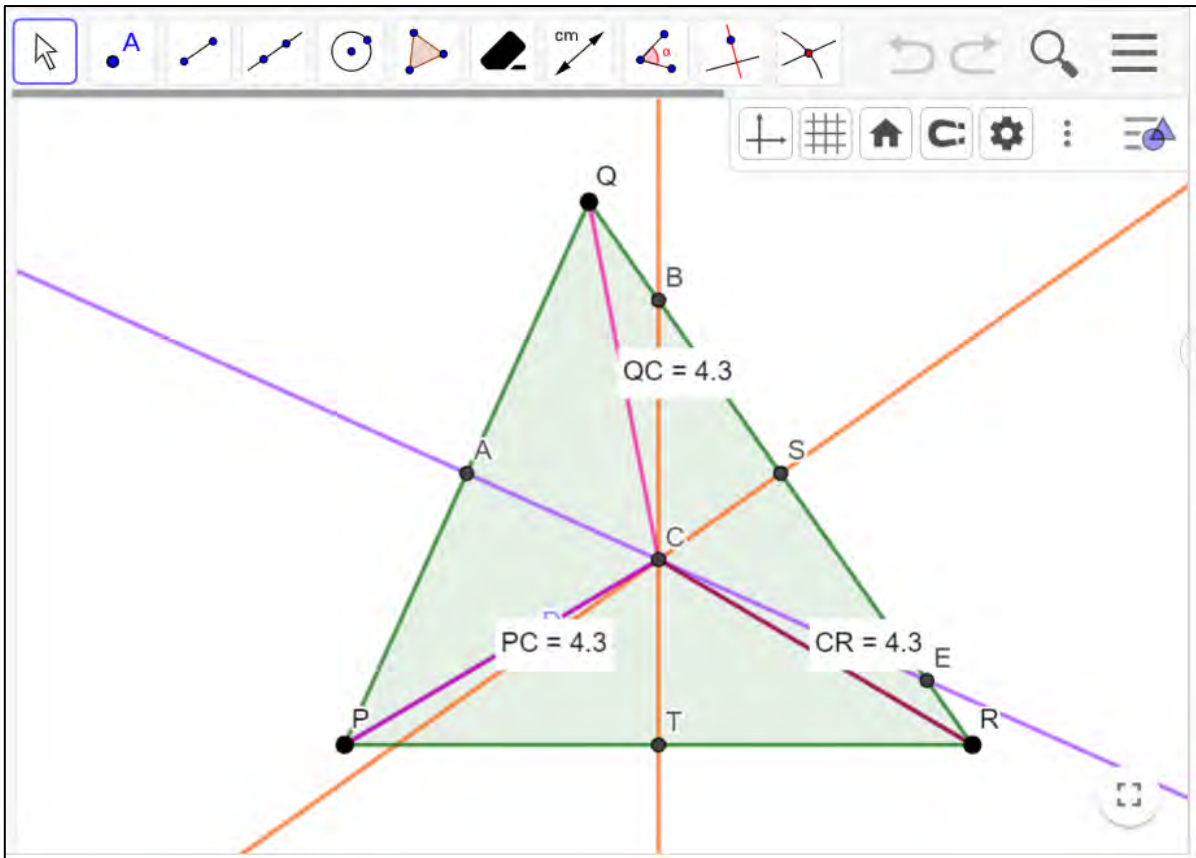
**Fernanda:** El punto de intersección hace de que ... es el punto medio.

**Camila:** Y hace que el, desde el punto del vértice hasta el punto de intersección sean iguales.

**Fernanda:** Osea, que los triángulos que se forman son triángulos isósceles.

El diálogo realizado por la primera dupla, lo realizan en base a la imagen de representación triangular mostrada en la figura 62, además, podemos observar el proceso de prueba que desarrollaron en esta actividad.

Figura 62. Ítem 2c, primera dupla



**c) Empleando propiedades geométricas, pruebe la proposición (afirmación). (A partir trazos realizados en el applet de GeoGebra, detalle los pasos de la prueba)**

Aa  $\pi$  La propiedad de la mediatriz nos indica que al trazarla se forman 2 ángulos de 90 grados y al unir el punto de intersección con cada vértice podemos evidenciar la formación de 3 triángulos isósceles con la misma medida.


En la figura 63, notamos que las estudiantes describieron en el archivo que, evidenciaron la formación de tres triángulos isósceles con la misma medida, con lo que se referirían a triángulos con las mismas dimensiones, sin embargo, podemos notar en la captura de video que no utilizaron el arrastre para revisar a la representación triangular en diferentes posiciones para verificar su afirmación, de esta manera creemos que hubiesen notado que solo dos de los lados de los tres triángulos son congruentes.

Además, una vez que concluyeron la descripción de su proceso de prueba, las estudiantes de la primera dupla no explican como este descubrimiento ayuda a validar la proposición sobre la concurrencia de triángulos. En la entrevista, las estudiantes manifiestan



## Actividad 2, ítem d

La actividad del ítem 2d consiste en que los estudiantes formulen la conjetura sobre la concurrencia del centro de la circunferencia con el circuncentro del triángulo PQR, y que coincida con los vértices del mismo triángulo, luego, describir en base a propiedades geométricas como la mediatriz de un segmento.

La **primera dupla**, en el ítem 2c lograron trazar los segmentos  $\overline{PC}$ ,  $\overline{QC}$  y  $\overline{RC}$  en el triángulo PQR. Aun así, en un principio presentaron problemas para identificar a estos segmentos como posibles radios de la circunferencia que se solicita trazar. Luego, seleccionan la herramienta *Circunferencia (centro, punto)* , seleccionan el vértice Q y al ampliar la circunferencia, notan que no coincide con todos los vértices del triángulo, luego intentan partir del Circuncentro y logran hacer coincidir la circunferencia por los tres vértices y comentan lo siguiente:

**Fernanda:** Sería, del punto central hallamos la figura y del punto central hallamos las mediatrices.

La profesora interviene:

**Profesora:** Cómo se denomina al punto central de la circunferencia

**Camila:** El centro. Para esto el centro de la circunferencia debe coincidir con el punto de intersección de las mediatrices.

**Fernanda:** Ah ya, primero hallamos el punto central del triángulo (Circuncentro) y ese punto central será el centro de la circunferencia.

**Camila:** Primero se trazan las mediatrices. (Empiezan a escribir)

*Primero, se trazan las mediatrices para hallar el punto central del triángulo PQR, este mismo punto central sería el centro de la circunferencia, y así al trazar los PQR para que pase por los vértices, se marca un segmento que pase del centro hacia uno de los vértices del triángulo. Así el segmento sería el radio de la circunferencia.*

A continuación, presentamos el proceso en la siguiente figura 64.

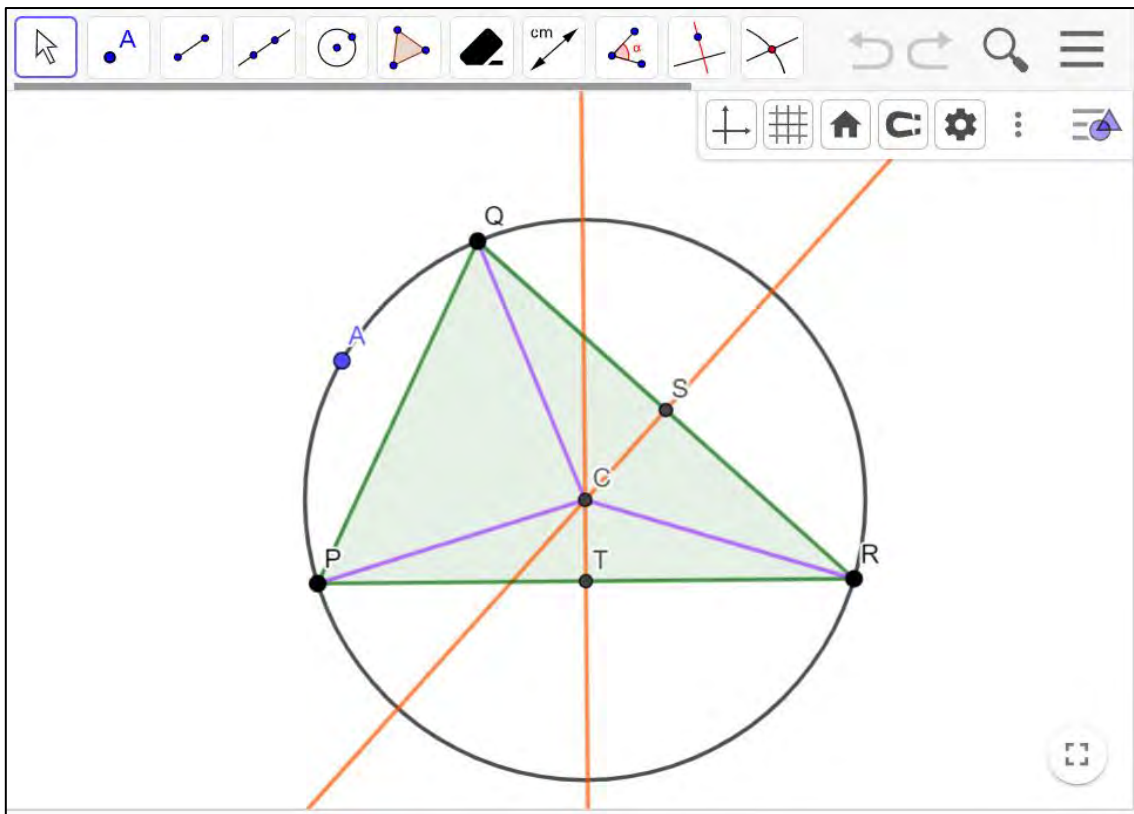
Figura 64. Ítem 2d, primera dupla

d) En el siguiente applet, represente la circunferencia que pase por P, Q y R y determine el centro de dicha circunferencia. Plantee una conjetura al respecto y realice una prueba.


Aa

$\pi$

Primero, se trazan las mediatrices para hallar el punto central del triángulo PQR, este mismo punto central sería el centro de la circunferencia, y así al trazar los PQR para que pase por los vértices, se marca un segmento que pase del centro hacia uno de los vértices del triángulo. Así el segmento sería el radio de la circunferencia.





El desarrollo mostrado en la figura 65, evidencia la comprensión de las estudiantes de la primera dupla sobre, la coincidencia entre el circuncentro del triángulo con el centro de la circunferencia que pasa por los vértices de dicho triángulo, esto al emplear la propiedad de las mediatrices en el que se obtuvo que los segmentos  $\overline{PC}$ ,  $\overline{QC}$  y  $\overline{RC}$  son congruentes.

Por su lado la **segunda dupla**, en primer lugar, seleccionan la herramienta *Circunferencia (centro, punto)* , inmediatamente sitúan el cursor en el vértice Q y al ampliar la circunferencia, la ubican en el vértice R, logrando no coincidir con el vértice P, por lo que descartaron esta opción e intentaron buscar otra manera. En uno de los intentos hicieron coincidir la circunferencia con los vértices del triángulo PQR partiendo del punto C,

como centro de la circunferencia. Cabe mencionar que esta dupla no logró a trazar los otros segmentos desde el circuncentro hasta los vértices en el ítem anterior, por ello, la profesora interviene para preguntar sobre lo que conocen de la propiedad de la mediatriz, y obtiene la respuesta de Diego.

**Diego:** los dos lados de la mediatriz son iguales (en el cual se refiere a los segmentos trazados de cualquier punto de la mediatriz de un segmento hacia los extremos de dicho segmento)

La profesora los motiva a realizar trazos en su applet, en el que podrían emplear la propiedad de la mediatriz.

Después de revisar los elementos de la representación figural mostrada en el applet, Diego y María hacen uso de la herramienta *Segmento*  y trazan los segmentos  $\overline{PC}$ ,  $\overline{QC}$  y  $\overline{RC}$ . Posteriormente, hallan sus longitudes haciendo uso de la herramienta *Distancia o longitud*  .

Luego, notan que los segmentos son congruentes y se preguntan qué escribir como la prueba de su conjetura, por lo que la profesora interviene con la siguiente pregunta.

**Profesora:** ¿Por qué creen que el centro de la circunferencia coincide con el punto G?, ¿cómo podrían describir su prueba?

**Profesora:** ¿Estos segmentos qué vendrían ser de la circunferencia?

Luego, Diego realiza un arrastre desde el vértice R del triángulo, y observan las diferentes posiciones del triángulo, además que los segmentos  $\overline{PC}$ ,  $\overline{QC}$  y  $\overline{RC}$  mantienen medidas iguales entre sí.

**María:** Es el radio.

**Diego:** gracias a la propiedad de la mediatriz podemos decir que sus lados siempre serán iguales.

**María:** Deberíamos incluir que, los segmentos formaron el radio de la circunferencia

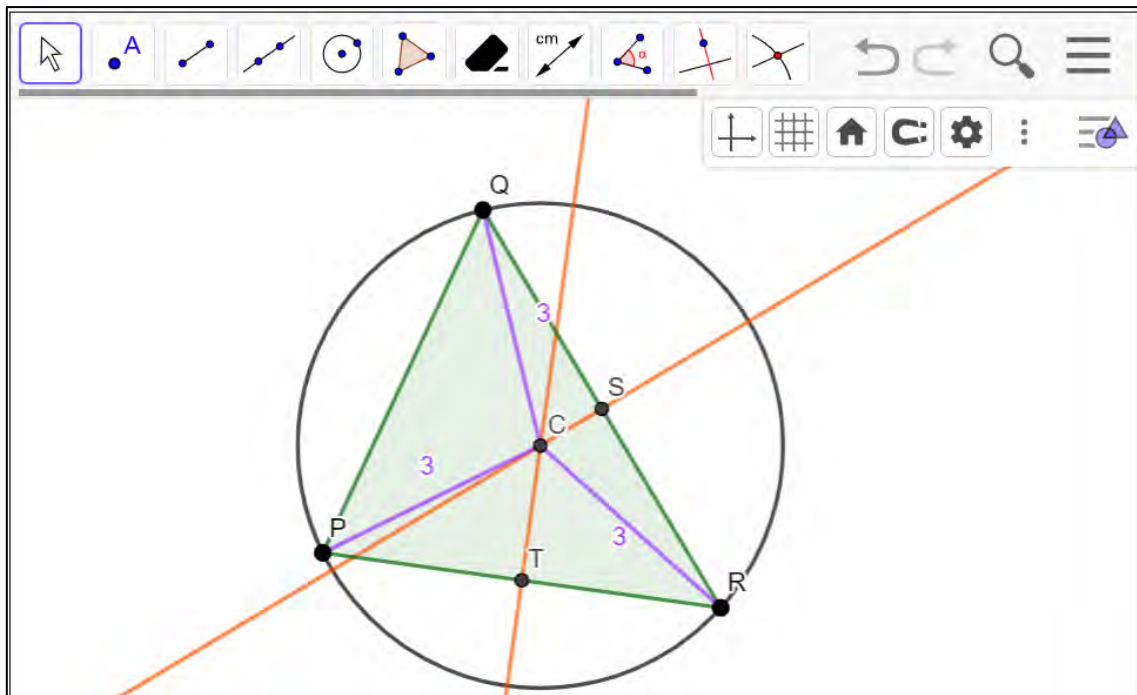
Estos procesos se pueden evidenciar en la figura 65.

**Figura 65.** Ítem 2d, segunda dupla

**d) En el siguiente applet, represente la circunferencia que pase por P, Q y R y determine el centro de dicha circunferencia. Plantee una conjetura al respecto y realice una prueba.**

Aa  $\pi$

el centro de la circunferencia es el punto en común de las mediatrices y que gracias a la propiedad de la mediatriz sus segmentos siempre serán iguales y serán el radio de la circunferencia



La figura 65 presenta el proceso representado en el applet y la redacción de la prueba a la conjetura sobre la concurrencia de una circunferencia con los vértices del triángulo, teniendo como centro de dicha circunferencia al Circuncentro, en el cual se ha observado que Diego y María, interactúan poco por lo que se ha dificultado la organización de ideas, además, que los estudiantes usualmente no se enfrentan a este tipo de actividades en los que tengan que hacer uso de propiedades para justificar o probar conjeturas o proposiciones. Sin embargo, en sus procesos lograron identificar a los segmentos  $\overline{PC}$ ,  $\overline{QC}$  y  $\overline{RC}$  como el radio de la circunferencia trazada.

Tenemos que, ambas duplas no describieron la conjetura en el applet, sin embargo, la mencionaron en sus interacciones y describieron la prueba de la misma. Aún así, observamos que aún tienen poca claridad entre lo que es una conjetura y la prueba de ésta.

Cabe resaltar el uso del applet de GeoGebra ha permitido en los estudiantes formular incluso otras conjeturas, y mostrar la veracidad de ellas a través de las diferentes herramientas, como también realizar arrastres de las figuras y notar que se conservan las propiedades, lo que difícilmente se puede obtener con el uso de lápiz y papel.

### **Resultados de los Tipos de prueba matemática presentados**

A continuación, presentamos la tabla 5 donde se resume los tipos de prueba matemática que identificamos en los procesos de prueba de ambas duplas sobre las actividades didácticas propuestas.

**Tabla 5**

*Resumen de resultados de los Tipos de Prueba matemática*

Actividad	Primera Dupla	Segunda Dupla
<p>1a,1b,1c,1d</p> <p>La relación entre los segmentos de la mediana de un triángulo, cortada con el baricentro es de 2 a 1.</p>	<p>Utilizan nociones de rectas paralelas y emplean la semejanza de triángulos, sin embargo, antes midieron los segmentos de la mediana como guía para elaborar la prueba en base a propiedades geométricas.</p> <p>Su proceso de prueba evidencia el tipo de prueba “Ejemplo Genérico” (<i>Categoría Prueba Intelectual</i>)</p> <p>Presentan indicios de “Prueba Mental”</p>	<p>Describen su prueba en base a la observación de las medidas de los segmentos.</p> <p>Su proceso de prueba evidencia el tipo de prueba “Empiricismo ingenuo” (<i>Categoría Prueba Pragmática</i>)</p>
<p>2a, b y c</p> <p>Concurrencia de las mediatrices de un triángulo</p>	<p>Describen la conjetura en base a las características de la mediatriz. Además, emplean la propiedad de la mediatriz de un segmento: cualquier punto de la mediatriz es equidistante a los extremos del segmento.</p> <p>Evidencian un proceso de prueba de tipo “Experiencia crucial” (<i>Categoría Prueba Pragmática</i>)</p> <p>Indicios al tipo de prueba “Ejemplo genérico”, por el uso de la propiedad de la mediatriz, sin embargo, no logran conectar esta noción con la prueba que se solicitó.</p>	<p>Describen la conjetura en base a las características de la mediatriz. Evidencian un proceso de prueba de tipo “Experiencia crucial” (<i>Categoría Prueba Pragmática</i>)</p>

<p>2d</p> <p>El centro de la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo coincide con el Circuncentro.</p>	<p>Describen la propiedad de la mediatriz sin utilizar medidas para probar la conjetura.</p> <p>Sin embargo, no describen la conjetura en el applet.</p> <p>Su proceso de prueba evidencia el tipo “Experiencia mental” (<i>Categoría Prueba Intelectual</i>)</p>	<p>Describen la propiedad de la mediatriz y a las medidas de los segmentos.</p> <p>Su proceso de prueba evidencia el tipo “Ejemplo genérico” (<i>Categoría Prueba Intelectual</i>), puesto a que realizan el arrastre para verificar que se cumplen en las diferentes posiciones del triángulo.</p>
---	---	---

La tabla 5, presenta la categorización de los procesos de validación del desarrollo de las actividades por parte de los estudiantes, en la que se puede apreciar el tipo de prueba o subcategoría, y la categoría a la que pertenecen.

Con lo revisado en la experimentación, podemos afirmar que la primera dupla, a medida que avanzaban con las actividades, adquirieron mayor seguridad en el manejo de las propiedades geométricas y comprendían la finalidad de las actividades, en las que se esforzaron en describir y justificar sus procesos de validación de las conjeturas formuladas, las cuales categorizamos en tipos de prueba desde “La experiencia crucial” hasta “experiencia mental”.

Por su parte la segunda dupla se esforzó en hallar propiedades que puedan respaldar sus procesos de pruebas, en ocasiones identificaron propiedades geométricas como la de la mediatriz en la representación triangular del applet, sin embargo, la aplicación de este para probar la conjetura fue limitada en la segunda actividad. Los tipos de pruebas identificados en el desarrollo de sus actividades fueron desde el tipo de prueba “Empiricismo ingenuo” al tipo de “Ejemplo Genérico” de categoría prueba intelectual puesto a que presentó indicios a lograr un tipo de prueba “Experiencia mental”, al tratar de verificar en la tercera actividad que se cumplan las condiciones en las diferentes posiciones del triángulo.

## CONCLUSIONES

En esta sección, se exponen las conclusiones referidas a los aspectos relevantes de la investigación, tales como los antecedentes y la justificación del estudio, el marco teórico, y los elementos metodológicos. Asimismo, se abordan la pregunta de investigación, objetivos y la experimentación. Finalmente, se sugieren algunas recomendaciones para investigaciones futuras, en base a los hallazgos obtenidos en este trabajo.

Las investigaciones referentes de nuestro estudio registraron que los estudiantes fortalecen sus argumentos mediante la formulación de conjeturas sobre los puntos notables de un triángulo y la formalización de estos conocimientos, con el apoyo de las herramientas y acciones de arrastre de figura en un ambiente de representación dinámica como es el GeoGebra. Sin embargo, los estudios coinciden en que existe poco manejo de términos geométricos y dificultades en describir respuestas y argumentos por parte de los estudiantes que validen sus conjeturas. Por otro lado, Tchonang (2022) afirma que las demostraciones y pruebas matemáticas generalmente no son objeto de estudio en varios países; esto concuerda con lo observado en el Currículo Nacional, en la descripción de los niveles correspondientes a la competencia Forma, movimiento y localización, en el que se pide que los estudiantes lleguen a elaborar argumentos con niveles de abstracción, razonamiento, deducción y comprobación, en el que podemos notar que la elaboración de pruebas matemáticas propiamente dichas se encuentra muy descuidada. Además, notamos que no se atribuye mayor relevancia a los contenidos de baricentro y circuncentro de un triángulo y sus propiedades, como podemos observar también en las evaluaciones censales.

Cabe señalar que, según lo revisado, existe una escasa producción de contribuciones sobre tipos de pruebas matemáticas sobre el baricentro y circuncentro de un triángulo, dirigidas a estudiantes en investigaciones recientes, por ello consideramos que nuestro estudio contribuirá en abordar esta necesidad. Con nuestras aportaciones, buscamos proporcionar información y herramientas que pueden ser utilizados tanto por educadores como por investigadores, con el propósito de mejorar la comprensión y enseñanza de estos conceptos matemáticas mediante la elaboración de conjeturas y procesos de validación.

En nuestra investigación los estudiantes desarrollaron una secuencia de actividades, en un ambiente de representación dinámica como GeoGebra, en el que tuvieron oportunidad de formular conjeturas sobre el baricentro y circuncentro de un triángulo y realizar procesos de validación de ellas, haciendo uso del arrastre y empleando las herramientas del GeoGebra, lo que favoreció realizar tratamientos de representaciones figurales. A su vez, describieron sus procesos de prueba, en los cuales se evidenció poco manejo de ello, sin embargo, muy

motivados se esforzaron en emplear términos geométricos y en hallar propiedades que validen la prueba.

De acuerdo con el objetivo de nuestro estudio: *Caracterizar los tipos de prueba sobre el baricentro y circuncentro de un triángulo que realizan los estudiantes de 3er grado de educación secundaria cuando resuelven una secuencia didáctica con el uso del GeoGebra*, los resultados y el análisis del estudio de los tipos de prueba, según Balacheff (2000), en los estudiantes se evidencian el logro del objetivo de nuestro estudio, puesto a que, los resultados obtenidos a través del desarrollo de la secuencia didáctica referidos a la formulación de conjeturas y su validación sobre el baricentro y circuncentro, por parte de los estudiantes, presentan criterios suficientes para caracterizar como uno de los tipos de prueba: *Empiricismo Ingenuo, Experiencia crucial, Ejemplo genérico y Experiencia mental*, en las categorías de Prueba Pragmática o Intelectual. Además, el desarrollo de las actividades responde a los objetivos específicos que se han planteado en función del objetivo general.

Conforme al primer objetivo específico, *Describir los tipos de prueba según la propuesta de Balacheff, para las actividades sobre el baricentro y circuncentro de un triángulo*, consideramos establecer un conjunto de criterios de análisis que buscan reconocer los tipos de prueba sobre el baricentro y circuncentro, presentados en el desarrollo de las actividades de la secuencia didáctica realizada por los estudiantes, con el uso del GeoGebra. Los criterios son conformados por los siguientes aspectos a evaluar: Identifica conjetura, trazos de construcción, uso de teoremas y justifica la conjetura; mientras que los tipos de prueba de Balacheff, *Empiricismo Ingenuo, Experiencia crucial, Ejemplo genérico y Experiencia mental* atienden a las categorías, con sus respectivas descripciones, lo que facilitó la interpretación y el análisis del desarrollo de las actividades presentadas por los estudiantes.

Referente al segundo objetivo específico, *Identificar en las soluciones de los estudiantes el tipo de prueba, según la propuesta de Balacheff, cuando resuelven una secuencia didáctica sobre el baricentro del triángulo*, tenemos que, en la sección 1.4, Aspectos teóricos de los Tipos de Prueba en matemática de Balacheff (2000), se plantearon ejemplos sobre los procesos de validación de la conjetura sobre que la relación entre los segmentos de una mediana cortadas por el baricentro es de 2 a 1, para cada uno de los cuatro tipos de prueba, lo que contribuyó en la elaboración de la secuencia de actividades para la experimentación de nuestro estudio con el debido fundamento teórico. Posteriormente, se plantearon los resultados esperados de la primera actividad como también los criterios para el posterior análisis de los resultados, en base a la propuesta del autor. Así mismo, hemos establecido la unidad de análisis y el caso de estudio, según la metodología del Estudio de casos de Yin (2005), los cuales vienen a ser respectivamente, las actividades desarrolladas y cada dupla de estudiantes.

Para alcanzar el segundo objetivo específico se desarrollaron los ítems 1b, 1c y 1d. En estos, los estudiantes de ambas duplas lograron formular la conjetura sobre la relación entre los segmentos de la mediana cortada con el baricentro, que es de 2 a 1. La segunda dupla describe la justificación de la conjetura en base a la observación de las medidas entre los segmentos, mientras que la primera dupla además realizó trazos de rectas paralelas y utilizó la noción de semejanza de triángulos para justificar su conjetura. Estos procesos fueron contrastados con los resultados esperados y los criterios de análisis propuestos para este estudio, con lo que se determinó el tipo de prueba presentada en el desarrollo de cada dupla. En el caso de la primera dupla, se evidenció el tipo de prueba *Ejemplo Genérico*, correspondiente a la categoría Prueba Intelectual, a diferencia de la segunda dupla, donde se evidenció la prueba *Empiricismo Ingenuo*, clasificada dentro de la categoría Prueba Pragmática.

Con respecto al tercer objetivo específico, *Identificar en las soluciones de los estudiantes el tipo de prueba, según la propuesta de Balacheff, cuando resuelven una secuencia didáctica sobre el circuncentro del triángulo*, en la sección 1.4, Aspectos teóricos de los Tipos de Prueba en matemática de Balacheff, ejemplificamos la definición de Prueba con procesos de validación de la proposición de la concurrencia de las mediatrices, lo cual nos permitió contar con el fundamento teórico para el diseño de la segunda actividad de nuestra experimentación. Esta actividad conforma cuatro ítems, de los cuales los tres primeros se orientan a que los estudiantes realicen procesos de prueba de la conjetura sobre la concurrencia de las mediatrices de un triángulo. En los cuales hemos identificado que ambas duplas justificaron la conjetura en base a las características de la mediatriz de un segmento en el triángulo, determinan que la tercera mediatriz es concurrente con las otras dos mediante el arrastre, sin embargo, les ha costado justificar por medio de la propiedad de la mediatriz de un segmento: cualquier punto de la mediatriz es equidistante a los extremos del segmento, aunque la primera dupla identificó la propiedad, no lograron conectar este conocimiento con lo que se solicitó. Por ello, los procesos de validación de ambas duplas evidenciarían el tipo de prueba *Experiencia crucial*, en la categoría Prueba Pragmática, resaltando que el desarrollo de la primera dupla presentó indicios de un tipo de prueba *Ejemplo Genérico*.

El último ítem de la segunda actividad, aborda la justificación de la conjetura sobre la concurrencia del centro de la circunferencia, que pasa por los vértices del triángulo, con el circuncentro del mismo triángulo. En el que con el apoyo de las herramientas del GeoGebra lograron trazar la circunferencia en el triángulo, esto ayudó a identificar, que los segmentos que unen el circuncentro y los vértices tienen la medida del radio de la circunferencia trazada. Con lo que, ambas duplas lograron describir la propiedad de la mediatriz sin utilizar medidas para probar la conjetura. Con esto, consideramos que el tipo de prueba evidenciada es la

Experiencia Mental, en la categoría Prueba Intelectual. Cabe señalar, que se sugirió esta actividad en una sola tarea intencionalmente, la que permitió que los estudiantes formulen la conjetura y profundicen en la comprensión de conceptos geométricos esenciales, desarrollen habilidades críticas de razonamiento y justificación matemática en su exploración en el Applet GeoGebra y la determinación que hallaron en la relación entre la circunferencia y el circuncentro. No obstante, observamos que aún tienen poca claridad en diferenciar una conjetura y la prueba de ésta, puesto que en sus descripciones se evidencian sus procesos de prueba directamente.

Con lo que, se pudo evidenciar que, en base a los criterios de análisis, los tipos de pruebas identificadas en el desarrollo de sus actividades fueron desde el tipo de prueba “Empiricismo ingenuo” de categoría Prueba Pragmática, al tipo de “Ejemplo Genérico” de categoría Prueba Intelectual, esto último puesto a que las estudiantes verificaron en la última actividad que se cumplan las condiciones en las diferentes posiciones del triángulo, lo que les permitió generalizar.

Al lograr el objetivo general de investigación pudimos responder la pregunta de investigación:

*¿Qué tipos de pruebas sobre el baricentro y circuncentro de un triángulo realizan los estudiantes de 3er grado de educación secundaria cuando resuelven una secuencia didáctica con el uso del GeoGebra?*

De este modo, consideramos que hemos conseguido caracterizar los procesos de validación sobre el baricentro y circuncentro de un triángulo, que realizaron los estudiantes.

Con respecto a la metodología de Estudio de casos de Yin, consideramos que fue idónea debido a que nos permitió realizar una comprensión profunda mediante las fuentes de datos establecidos, previamente con la identificación del caso de estudio y la unidad de análisis. En base al marco teórico los Tipos de prueba de Balacheff, se establecieron criterios de análisis, lo que nos ha permitido identificar características de las pruebas que, presentaron las duplas de estudiantes en el desarrollo de las actividades, que a partir del principio de la triangulación del Estudio de casos, obtuvimos información valiosa, para caracterizar el tipo de prueba sobre el baricentro y circuncentro de un triángulo.

Concerniente a los resultados obtenidos en esta tesis, surgen interrogantes como, por ejemplo, qué tipos de prueba realizarían estudiantes que tengan práctica en realizar procesos de validación, lo cual podría servir también como indicio para futuras investigaciones, como también, el implementar propuestas didácticas para fortalecer esta práctica, teniendo en cuenta también, que existen escasas investigaciones nacionales respecto a pruebas matemáticas en contenidos geométricos.

En ese sentido, consideramos que nuestro trabajo puede ser motivo de profundizar investigaciones respecto a los Tipos de pruebas que presentan los estudiantes en el

desarrollo de actividades relacionadas a los puntos notables u otros contenidos dentro de la geometría, con el uso de GeoGebra, potenciando de esta manera la utilidad que presenta al ser un ambiente de representación dinámica, como también se puede proponer el uso de lápiz y papel. Consideramos también que las siguientes investigaciones relacionadas a probar proposiciones y validar conjeturas sobre el baricentro y circuncentro, planteen programar espacios en el que los estudiantes tengan la oportunidad de reforzar contenidos previos referidos a rectas paralelas, congruencia de segmentos, y propiedades geométricas como la semejanza de triángulos, de la mediatriz de un segmento, como también contenidos de proporcionalidad, entre otros.

Como posibles temas de investigación proponemos, por ejemplo, la ampliación del uso de diversas herramientas en Applet GeoGebra en el que hagan uso de situaciones referidas a propiedades geométricas para lograr profundizar en los estudiantes, sus conocimientos, la formulación de conjeturas y razonamientos en la validación de las conjeturas. También, el empleo de los criterios de análisis adaptado para identificar el tipo de prueba que presenta el desarrollo de una secuencia de actividades sobre el baricentro y circuncentro, puede ser replicado o adaptado en futuras investigaciones para tratar otros objetos geométricos. Además, un análisis de los tipos de pruebas presentes en el desarrollo de los docentes en formación continua o futuros profesores en las prácticas matemáticas, al resolver actividades sobre los puntos notables y la recta de Euler. Como también, generar situaciones problemáticas e implementar propuestas didácticas que permitan lograr en los procesos de validación de los estudiantes el tipo de Prueba de experiencia mental.

## Referencias

- Álvarez, E. (2003). Elementos de Geometría: con numerosos ejercicios y geometría del compás (2ª ed.). Editorial Universidad de Medellín.
- Balacheff N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Universidad de los Andes. <https://hal.science/hal-00520133>
- Conceição, G. (2022) *Uso das tecnologias digitais de informação e comunicação para o estudo dos quadriláteros: uma contribuição em tipos de prova e demonstração* [Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo]. <https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/30921>
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación* (5ª ed.). McGraw-Hill Interamericana.
- Iranzo, N. y Fortuny, A. (2009). La Influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 27(3), 433-446. <https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/142075>
- Joya, C. y Suárez, P. (2020). Aprendizaje por descubrimiento en sistemas de puntos y rectas notables del triángulo. *Praxis & Saber*, 11(26), 1-22. <https://doi.org/10.19053/22160159.v11.n26.2020.9880>
- Júnior, C. y Nasser, L. (2012). Analizando justificativas e argumentação matemática de alunos do ensino fundamental. *VIDYA*, 32(2), 133-147. <https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/278>
- Liébana, E., Ramírez, R. & Moreno A. (2018). Identificación de otros puntos notables de un triángulo a partir de la resolución de problemas. *La Gaceta de la RSME*, (23), 589–607. <https://www.researchgate.net/publication/344838582>
- Lingefjard, T., y Ghosh, J. B. (2019). The Euler line: Students' Exploration in a Dynamic Geometry Environment. *Electronic Journal of Mathematics & Technology*, 13(3), 219-236. <https://go.gale.com/ps/i.do?p=AONE&u=anon~6987ddad&id=GALE|A673853526&v=2.1&it=r&sid=googleScholar&asid=97b67cc7>
- Ministerio de Educación del Perú. (2017). *Programa curricular de educación secundaria*. <https://www.ugelsanchezcarrion.gob.pe/wordpress/wp-content/uploads/2019/06/programa-secundaria-17-abril.pdf>
- Ministerio de Educación del Perú. (2016). *Currículo Nacional* <https://www.ugelsanchezcarrion.gob.pe/wordpress/wp-content/uploads/2019/06/programa-secundaria-17-abril.pdf>
- Ministerio de Educación del Perú. (2016). *Matemática 3*. Santillana.

- Ministerio de Educación del Perú. (2016). Informe para docentes. Evaluación Censal de estudiantes 2016. <http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2017/04/Informe-para-Docentes-Matem%C3%A1tica-ECE-2016-2.%C2%B0-grado-de-secundaria.pdf>
- Ministerio de Educación del Perú. (2022). Reporte técnico de la Evaluación Muestral de Estudiantes. <http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2023/06/Reporte-t%C3%A9cnico-de-la-EM-2022.pdf>
- Ministerio de Educación del Perú. (2024). El Perú en PISA 2022. Informe nacional de resultados. Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes. <http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2024/02/Reporte de resultados PISA 2022 Per%C3%BA.pdf>
- Motti, S (2021). *Costruzioni soft/molli in GeoGebra per lo sviluppo di competenze in allievi della scuola media ticinese*. [Tesis de maestría, Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana] <https://tesi.supsi.ch/3676/>
- Morales, G. (2022). *Caracterización de los procesos cognitivo-matemáticos para la validación matemática en el contexto escolar con ambientes de geometría dinámica*. [Tesis de Doctorado, Universidad Autónoma de Querétaro de México]. <https://ri-ng.uaq.mx/handle/123456789/3518>
- Naveiro S. I. y Oliveira, P. C. (2021). Pontos Notáveis do Triângulo: Um Estudo Através da Resolução de Problemas. *Revista Ensin@ UFMS*, 2(número especial), 119-142. <https://doi.org/10.55028/revens.v2iEsp..14467>
- Ramírez, R. (2011). *Construcción de polígonos regulares* [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia] <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/10420>
- Resultados. Evaluación Internacional PISA (2018). <http://umc.minedu.gob.pe/resultadospisa2018/>
- Salazar, J. V. F. y Almouloud, S. (2015). Registro figural no ambiente de geometria dinámica. *Revista Educação Matemática Pesquisa*, 17(5), 919–941. <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/26325>
- Silva, M (2017). *Génesis instrumental del circuncentro con el uso del GeoGebra en estudiantes de nivel secundario. regulares* [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú] <http://hdl.handle.net/20.500.12404/8727>
- Simson, R. (Ed). (1774). *Los seis primeros libros y el undecimo, y duodecimo de los elementos de Euclides*. Universidad Complutense de Madrid. [https://books.google.com.pe/books?id=QqGXRJNg\\_7oC&hl=es&pg=PP5#v=onepage&q&f=false](https://books.google.com.pe/books?id=QqGXRJNg_7oC&hl=es&pg=PP5#v=onepage&q&f=false)

Tchonang P. (2022). *L'apprentissage de la preuve à travers l'étude des quadrilatères et des triangles au début du secondaire: influence de la relation entre la figure et ses dessins sur l'argumentation et la preuve*. [Tesis de doctorado, Universidad de Yaoundé 1]. <https://hal.science/tel-03606688/>

Valverde, C. (2016). *Texto escolar Matemática 3* (1ª ed.). Santillana.

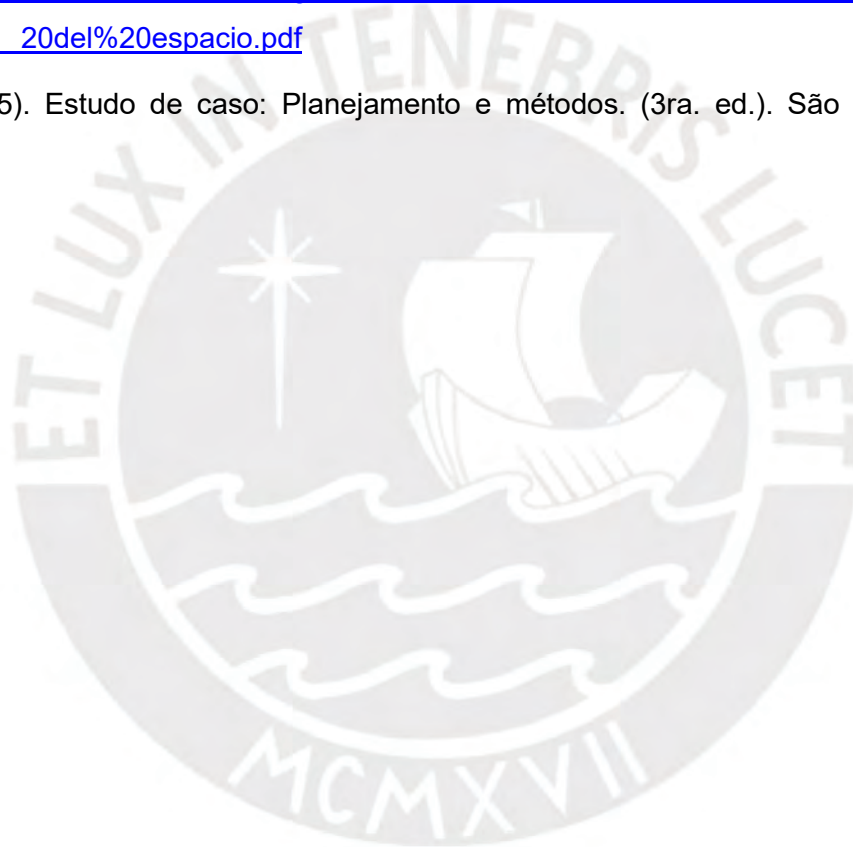
Valverde, C. (2022). *Libro de actividades - Matemática 3 Compartir* (2ª ed.). Santillana.

Verástegui, T. (2003). *Geometría básica* (1ª ed.). Editorial Moshera.

Wentworth, J.y Smith, D. (1915) *Geometría plana y del espacio*. Nueva York: Ginn y compañía.

<https://beceneslp.edu.mx/pagina/sites/default/files/Geometr%C3%ADa%20plana%20y%20del%20espacio.pdf>

Yin, R. (2005). *Estudo de caso: Planejamento e métodos*. (3ra. ed.). São Paulo, Brasil: Bookman.






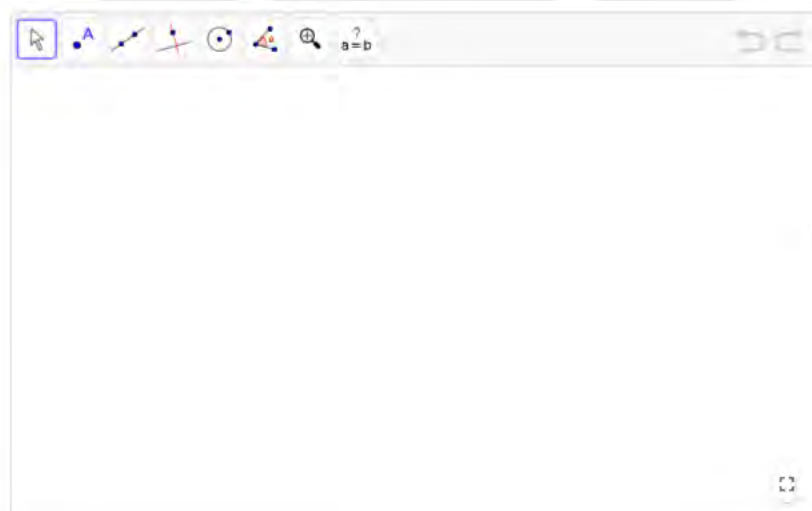
## Anexos

### Anexos 1 - ACTIVIDAD 0

#### Actividad 0

a) Siga los siguientes pasos:

1. Trace el segmento  $\overline{AB}$  utilizando la herramienta .  
Seleccione la herramienta Circunferencia (centro, punto)
2. Seleccione la herramienta Circunferencia (centro, punto) , luego diríjase al punto A y luego al punto B, quedará representada la circunferencia de **centro A** con radio  $\overline{AB}$ .
3. Ahora, trace la circunferencia con **centro B** de radio  $\overline{AB}$ .
4. Marque la intersección de las ambas circunferencias, seleccionando la herramienta  y luego cada una de las circunferencias. Se marcarán los puntos D y C.
5. Finalmente trace una recta que pase por D y C.



b) Contesta a las siguientes preguntas:

¿Qué relación hay entre la recta  $\overleftrightarrow{DC}$  y el segmento  $\overline{AB}$  ? ¿Con qué nombre se conoce al elemento geométrico  $\overleftrightarrow{DC}$  ?


Aa π


Ingresar aquí tu respuesta...

---



Para comprobar lo anterior,

Marque el punto de intersección entre  $\overleftrightarrow{DC}$  y  $\overline{AB}$ . Luego, utilice la herramienta ángulo , seleccionando los puntos en sentido antihorario: B, E y C.

También, utilice la herramienta relación , seleccione dicha herramienta, luego,  $\overleftrightarrow{DC}$  y  $\overline{AB}$ .


Finalmente, ubique cualquier punto en la recta  $\overleftrightarrow{DC}$ , luego trace segmentos desde dicho punto a los extremos del segmento AB. Realice lo mismo con otros puntos ubicados en la recta  $\overleftrightarrow{DC}$ . ¿Qué propiedad se cumple?

Aa  $\pi$  Ingresar aquí tu respuesta...


### UNA ACTIVIDAD MÁS


c) Realice lo siguiente en el applet de GeoGebra, luego conteste a la pregunta:


1. Se tiene al triángulo ABC y el punto medio de  $\overline{BC}$  nombrado como el

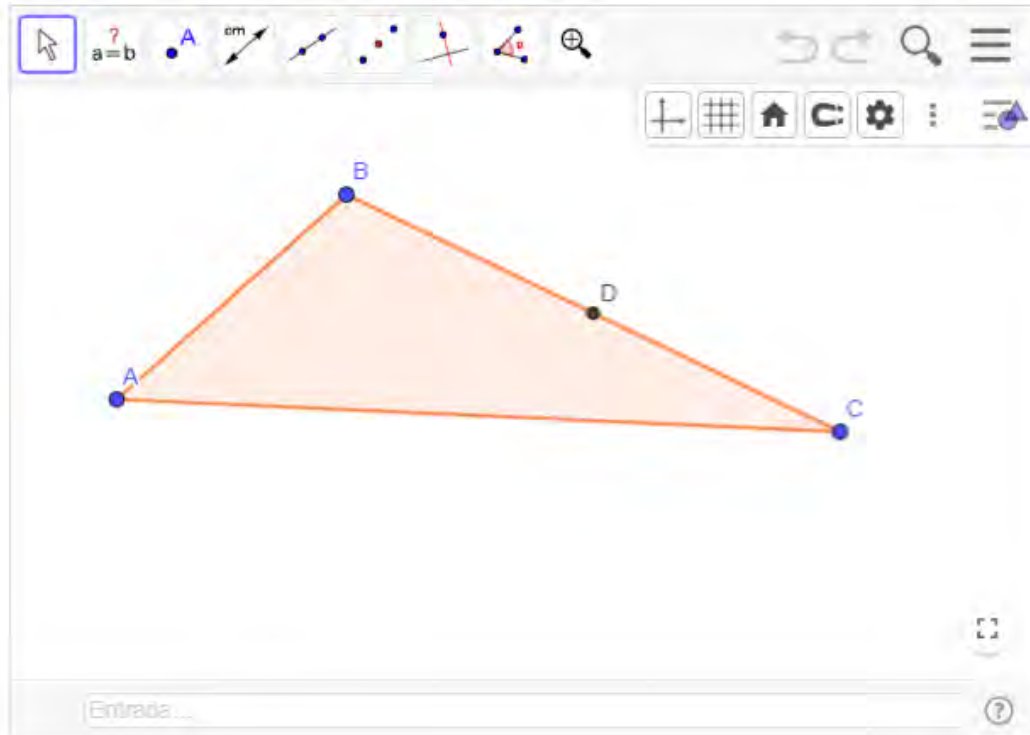
punto D. A continuación, seleccione la herramienta paralela ,

luego haga click en el punto D y después en el lado  $\overline{AB}$ . Quedará representada una recta paralela a  $\overline{AB}$ .

2. Seleccione la herramienta mueve  y después dé click a uno de los vértices del triángulo para arrastarlo en cualquier posición. Observe los cambios.

3. Luego, compruebe que D es punto medio de BC utilizando la herramienta distancia o longitud .

4. También, compruebe que D es punto medio de BC utilizando la herramienta relación .



A través de la semejanza de triángulos o teorema de Thales, establezca la medida del lado AB sin medirlo. Explique.

Aa  $\pi$  Ingrese aquí tu respuesta...

Seleccione  $\vdots$ , luego haga click en vista algebraica.



En la barra de entrada escriba AB/ED y observe el resultado en la vista algebraica. ¿Cuál es la relación entre AB y ED?

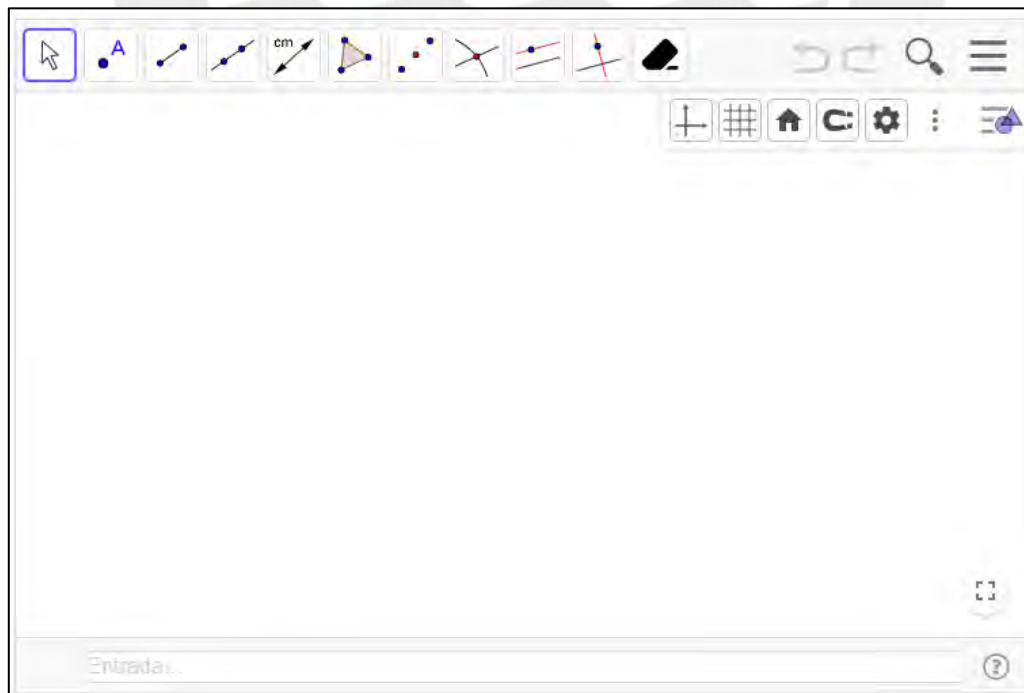
Aa  $\pi$  Ingrese aquí tu respuesta...

## Anexos 2 - ACTIVIDAD 1

### Actividad N°1: Baricentro de un triángulo

**a) A partir de las siguientes indicaciones representa las medianas y el baricentro de un triángulo.**

1. Construya un triángulo ABC.
2. Ubique el punto medio del lado  $\overline{BC}$  y renombre dicho punto con la letra D (en caso sea necesario).
3. Luego, utilice la herramienta segmento  para trazar la mediana  $\overline{AD}$ , desde el vértice A hasta el punto D.
4. De la misma manera, trace las medianas  $\overline{BE}$  y  $\overline{CF}$ .
5. Seleccione el punto de intersección de las medianas con la herramienta  y renombre dicho punto con la letra G (en caso sea necesario).
6. Mueva los vértices del triángulo ABC para observar lo que sucede con las medianas y el baricentro.



b) Mide los segmentos  $\overline{AG}$  y  $\overline{GD}$  para distintas posiciones de los vértices del triángulo ABC.

Luego, formula una conjetura (hipótesis) sobre la relación entre los segmentos  $\overline{AG}$  y  $\overline{GD}$ .

Aa π Ingresar aquí tu respuesta...

c) Con ayuda del GeoGebra, prueba tu conjetura. Luego, explícalo paso a paso.

Aa π Ingresar aquí tu respuesta...

d) A continuación, explica paso a paso la prueba de tu conjetura, solo con propiedades geométricas, es decir, sin utilizar las medidas de los segmentos.

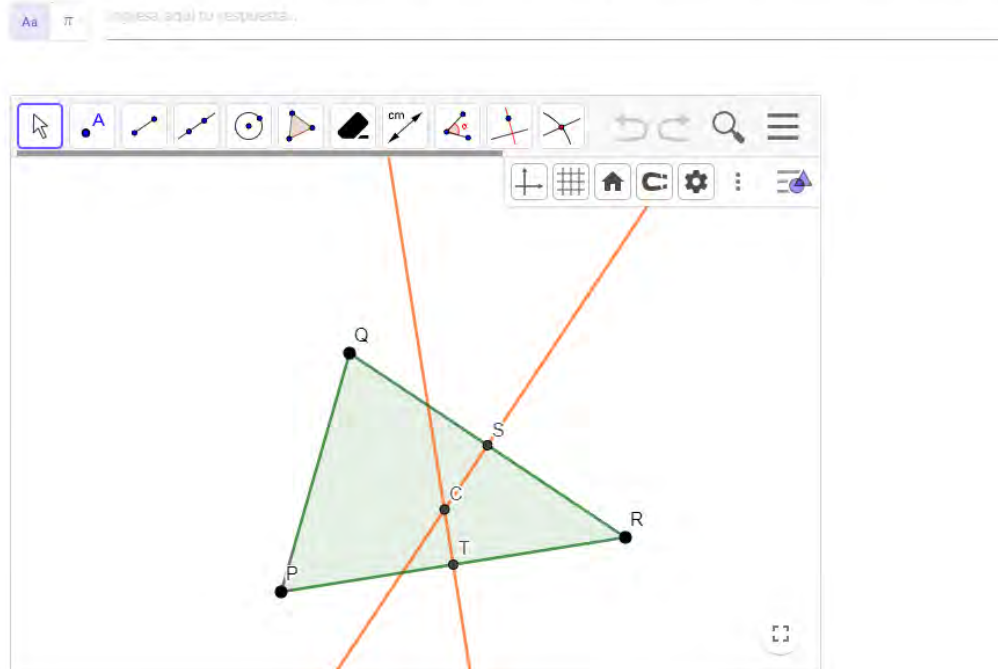
Aa π Ingresar aquí tu respuesta...



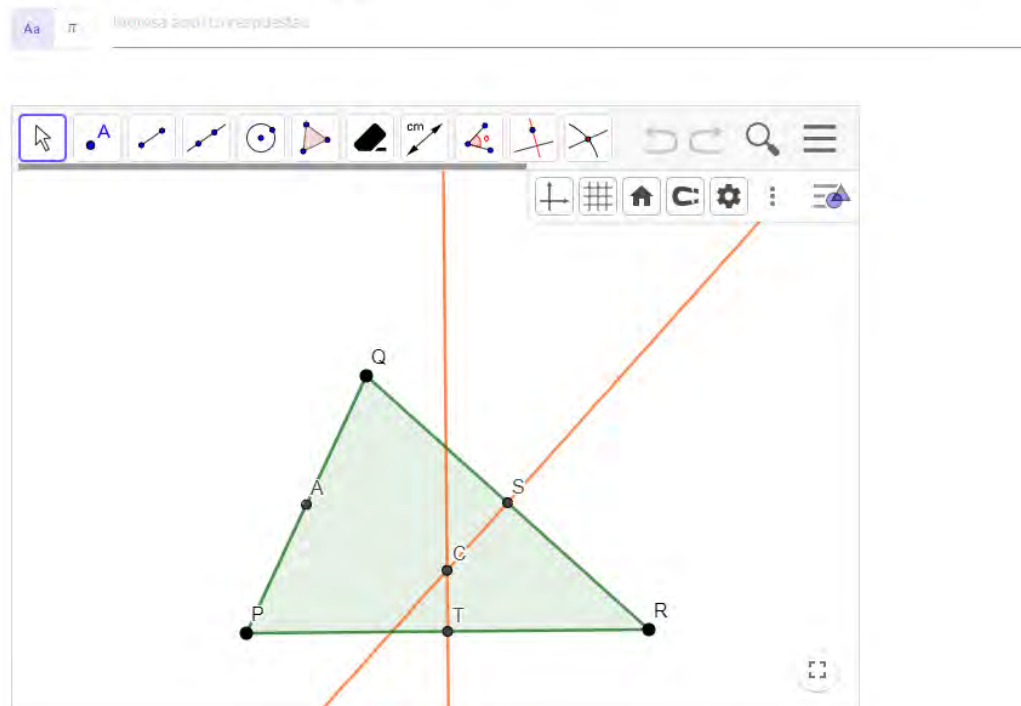
### Anexos 3 - ACTIVIDAD 2

#### Actividad N°2: Concurrencia de líneas notables

a) Identifique qué líneas notables del triángulo PQR son las rectas que pasan por S y por T. Utilice las herramientas del GeoGebra que crea necesarias. Luego explique.



b) Si A es punto medio de  $\overline{PQ}$ , la recta perpendicular a  $\overline{PQ}$  que pase por A es concurrente (coincide) con la intersección de las otras dos rectas del triángulo. Utilice las herramientas necesarias para probar la proposición (afirmación).



c) Empleando propiedades geométricas, pruebe la proposición (afirmación).  
(A partir trazos realizados en el applet de GeoGebra, detalle los pasos de la prueba)

Aa  $\pi$  Ingrese aquí tu respuesta.

d) En el siguiente applet, represente la circunferencia que pase por P, Q y R y determine el centro de dicha circunferencia. Plantee una conjetura al respecto y realice una prueba.

Aa  $\pi$  Ingrese aquí tu respuesta.

