

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA



**Implementación de la ecuación de Morison aplicado a
ondas de Tsunami en costas con vegetación con ayuda del
modelo numérico Telemac**

Tesis para obtener el título profesional de Ingeniero Civil

AUTOR:

Julio Cesar Ramirez Paredes

ASESOR:

Ing. Mitchel Jimmy Jara García MSc.

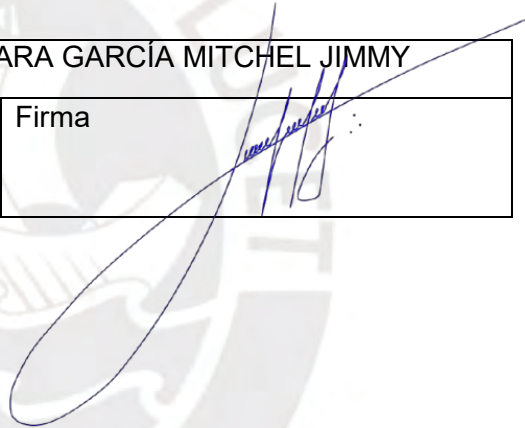
Lima, agosto, 2025

Informe de Similitud

Yo, MITCHEL JIMMY JARA GARCIA, docente de la Facultad de Ciencias e Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor(a) del trabajo de suficiencia profesional titulado "Implementación de la ecuación de Morison aplicado a ondas de Tsunami en costas con vegetación con ayuda del modelo numérico Telemac" del autor Julio Cesar Ramirez Paredes, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 7%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 09/08/2025.
- He revisado con detalle dicho reporte y el Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha: Lima, 09 de agosto de 2025

Apellidos y nombres del asesor / de la asesora: JARA GARCÍA MITCHEL JIMMY	
DNI: 40418282	Firma 
ORCID: 0000-003-4436-2858	

Dedicatoria

A mi madre, prima Kelly y mi abuelo César



Agradecimientos

Me gustaría expresar mi más sincera gratitud a mis supervisores, el MSc. Mitchel Jara y el Dr. Luis Moya, por su constante apoyo, motivación y guía durante el desarrollo de mis estudios. Sus comentarios y sugerencias han sido invaluable y fundamentales para la realización de este trabajo.

En especial, deseo agradecer profundamente a mi asesor, el MSc. Mitchel Jara, por su incansable dedicación, cooperación y estímulo a lo largo de este proceso. Esta tesis no habría sido posible sin su paciencia y la generosa cantidad de tiempo que me ha brindado. Le estaré eternamente agradecido, de todo corazón, por su valioso acompañamiento en este proyecto.

Quisiera también agradecer a los miembros del comité de evaluación de mi tesis, la Dra. Miluska Rosas y el MSc. Richard Pehovaz, por sus valiosas sugerencias y comentarios que enriquecieron significativamente este trabajo.

Extiendo mi más profundo agradecimiento a todos aquellos que me acompañaron y apoyaron durante el desarrollo de esta investigación. En particular, al profesor Daniel Horna, por su enseñanza en mecánica de fluidos avanzada; al profesor Yoch Ponte, por su orientación en modelamiento numérico en ríos; al profesor César Guerra, quien me introdujo a la programación en Fortran; al profesor Manuel Casino, por su ayuda en el uso de QGIS; al profesor Miguel Guanira, quien me enseñó programación en C++; al profesor Francisco Pasquel, por su apoyo en el aprendizaje de ecuaciones diferenciales; al profesor Humberto Pehovaz, por sus lecciones en mecánica de rocas; a los profesores Brígida Molina, Hermes Pantoja y Rósulo Pérez, por compartir sus conocimientos en métodos numéricos; al profesor Luis Chirrinós, quien me inició en tópicos de termodinámica; y a la profesora Estela Assureira, quien me enseñó mecánica de fluidos en aire. Todos ellos han sido fundamentales en mi formación y en la culminación de este proyecto.

También quiero expresar mi agradecimiento a la Universidad Católica del Perú por otorgarme una beca de estudios y brindar un generoso apoyo a lo largo de toda mi formación académica.

Gracias a mis hermanos Carina, Alejandra y Matías por su incondicional apoyo y por estar siempre a mi lado. No encuentro palabras adecuadas para expresar mi gratitud hacia todos los que han sido parte de mi camino académico. Solo puedo decir que estoy profundamente agradecido por todo.

Finalmente, quiero expresar mi más profundo agradecimiento a mis padres por su amor incondicional y sus oraciones a lo largo de este proceso. La ausencia de mi madre Gabriela, de mi prima Kelly y de mi abuelo César, quienes no pudieron estar para ver la culminación de este esfuerzo, ha dejado un vacío profundo. Dedico esta tesis a su memoria, seguros de que habrían compartido con orgullo este logro.

Resumen

Los tsunamis recientes han demostrado su capacidad devastadora, causando numerosas pérdidas humanas y daños materiales. Ejemplos notables incluyen el tsunami de 2004 en el Océano Índico, con 227,898 muertes, y el de Japón en 2011, que causó la muerte de 15,859 personas. Además, el cambio climático y el aumento del nivel del mar incrementan el riesgo de que estos eventos extremos sean más frecuentes y poderosos. Las soluciones convencionales, como diques y muros de concreto, han generado problemas adicionales, tales como la erosión costera, el deterioro de la calidad del agua y la pérdida de biodiversidad. Además, en condiciones extremas, estas estructuras han demostrado ser vulnerables, agravando el impacto en las zonas circundantes.

Ante estos desafíos, surge la necesidad de alternativas sostenibles y ecológicas. Esta tesis investiga el uso de vegetación costera como una solución de defensa natural para disipar la energía de las olas durante eventos extremos. Este enfoque ha sido efectivo en varios países asiáticos en la mitigación de daños causados por tsunamis.

El modelo numérico Telemac-2D se utiliza para simular la interacción de las olas en zonas de bahías, resolviendo las ecuaciones bidimensionales de Saint Venant y Boussinesq. En este trabajo, se implementa y valida un módulo adicional que parametriza la fuerza ejercida por la vegetación a través de las ecuaciones de Morison, lo cual permite comprender con mayor precisión cómo la vegetación disipa la energía de las olas, reduce la altura del agua y disminuye las velocidades de la ola al acercarse a la costa. La validación del modelo se llevó a cabo mediante comparaciones con ensayos físicos en laboratorio y datos de estudios previos. El modelo propuesto ha sido probado que es capaz de simular el amortiguamiento debido a vegetación en playas impermeables.

Se llevaron a cabo numerosos experimentos numéricos para evaluar la efectividad de diferentes niveles y distribuciones de vegetación. Los resultados muestran que es posible optimizar la altura de vegetación para maximizar la atenuación de las olas, logrando una protección similar a la de una distribución uniforme en altura de vegetación.

En conclusión, la vegetación costera se presenta como una estrategia de defensa viable y ecológica, capaz de mitigar el impacto de tsunamis en la costa de manera efectiva y sostenible.

Abstract

Recent tsunamis have demonstrated their devastating power, causing numerous human casualties and material damage. Notable examples include the 2004 Indian Ocean tsunami, with 227,898 deaths, and the 2011 tsunami in Japan, which claimed 15,859 lives. Furthermore, climate change and rising sea levels increase the risk of these extreme events becoming more frequent and powerful. Conventional solutions, such as dikes and concrete walls, have generated additional problems, such as coastal erosion, deterioration of water quality, and loss of biodiversity. Additionally, under extreme conditions, these structures have proven vulnerable, worsening the impact on surrounding areas.

In the face of these challenges, the need arises for sustainable and ecological alternatives. This thesis investigates the use of coastal vegetation as a natural defense solution to dissipate wave energy during extreme events. This approach has been effective in several Asian countries in mitigating damage caused by tsunamis.

The numerical model Telemac-2D is used to simulate wave interaction in bay areas, solving the two-dimensional Saint Venant and Boussinesq equations. In this work, an additional module is implemented that parametrizes the force exerted by vegetation through the Morison equations, allowing for a better understanding of how vegetation dissipates wave energy, reduces water height, and slows wave velocities as they approach the coast. The model validation was carried out through comparisons with laboratory tests and data from previous studies.

Numerous numerical experiments were conducted to evaluate the effectiveness of different vegetation levels and distributions. The results show that it is possible to optimize vegetation height to maximize wave attenuation, achieving protection similar to that of a uniform distribution in vegetation height.

In conclusion, coastal vegetation emerges as a viable and ecological defense strategy capable of effectively and sustainably mitigating the impact of tsunamis on the coast.

Índice general

Dedicatoria

Agradecimientos

Resumen I

Abstract II

Índice general III

Índice de cuadros V

Índice de figuras VI

Glosario VIII

Siglas IX

Símbolos X

1 Introducción 1

1.1 Antecedentes 2

1.1.1 Investigación de tsunamis con Telemac 2

1.1.2 Representación de vegetación mediante la fricción de fondo 4

1.2 Descripción del problema 6

1.2.1 Tsunami debido a terremotos 6

1.2.2 Tsunami por deslizamiento de tierra 7

1.2.3 Tsunamis volcánicos 8

1.3 Motivación 9

1.4 Objetivos de la tesis 9

1.4.1 Objetivo principal 9

1.4.2 Objetivos secundarios 9

1.5 Metodología 10

1.5.1 Fase I 11

1.5.2 Fase II 11

1.5.3 Fase III 11

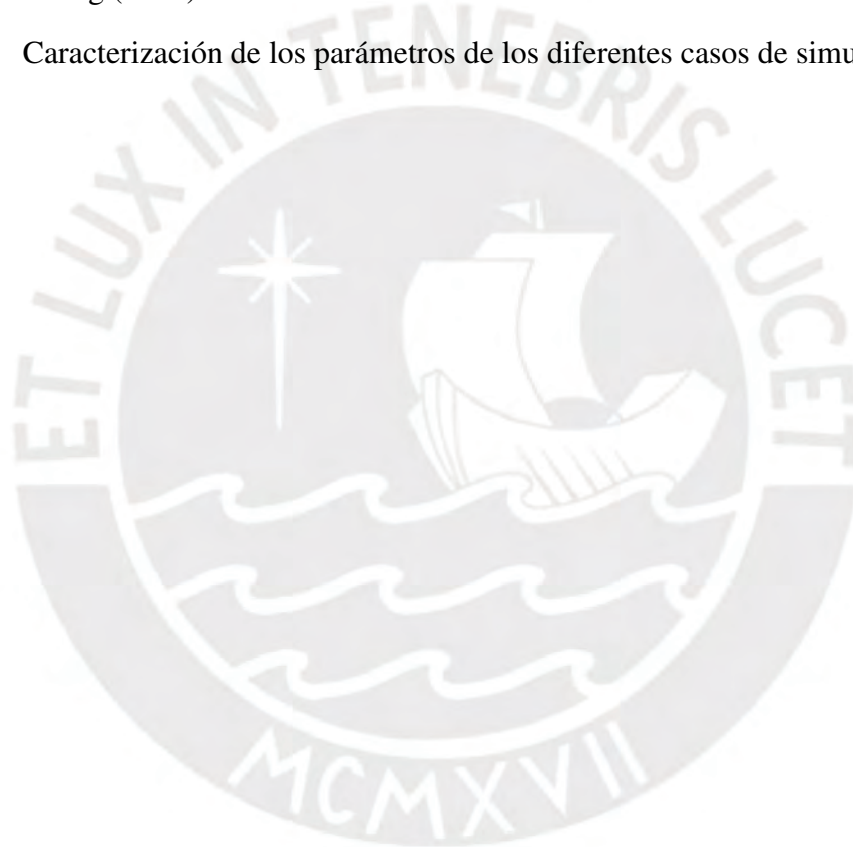
1.5.4 Fase IV 11

1.6 Estructura de la tesis 12

2	Revisión de literatura	14
2.1	Tipos de enfoques para la interacción de la vegetación con tsunamis.	14
2.2	Enfoque microscópico	15
2.3	Comparación entre enfoque microscópico y macroscópico	18
2.4	Enfoque macroscópico	19
2.4.1	Modelo agua poco profundas	20
2.4.2	Modelo Boussinesq	21
3	Modelo numérico y validación	22
3.1	Introducción histórica	22
3.2	Ecuaciones bidimensional de Saint Venant	23
3.3	Términos de dispersión de Boussinesq	24
3.4	Propuesta de implementación del modelo de Morison	24
3.5	Validación del modelo numérico	26
3.5.1	Bahía con pendiente sin vegetación	26
3.5.2	Vegetación con altura fija en bahía sin pendiente	30
3.5.3	Vegetación con altura variable en bahía sin pendiente	31
4	Generación de escenarios del modelo desarrollado con Telemac-2D para predecir vegetación en costas	40
4.1	Alturas mixtas: bajas a altas y altas a bajas	44
4.2	Alturas mixtas: bajas a medias y medias a bajas	45
5	Conclusiones y trabajos futuros	46
5.1	Conclusiones	46
5.2	Trabajos futuros	48
	Bibliografía	49
	Anexos	54
A	Derivación de presión hidrostática	56
B	Derivación de las ecuaciones de Saint Venant	58
C	Módulo de vegetación en Telemac	73
D	Archivos de configuración Telemac	80

Índice de cuadros

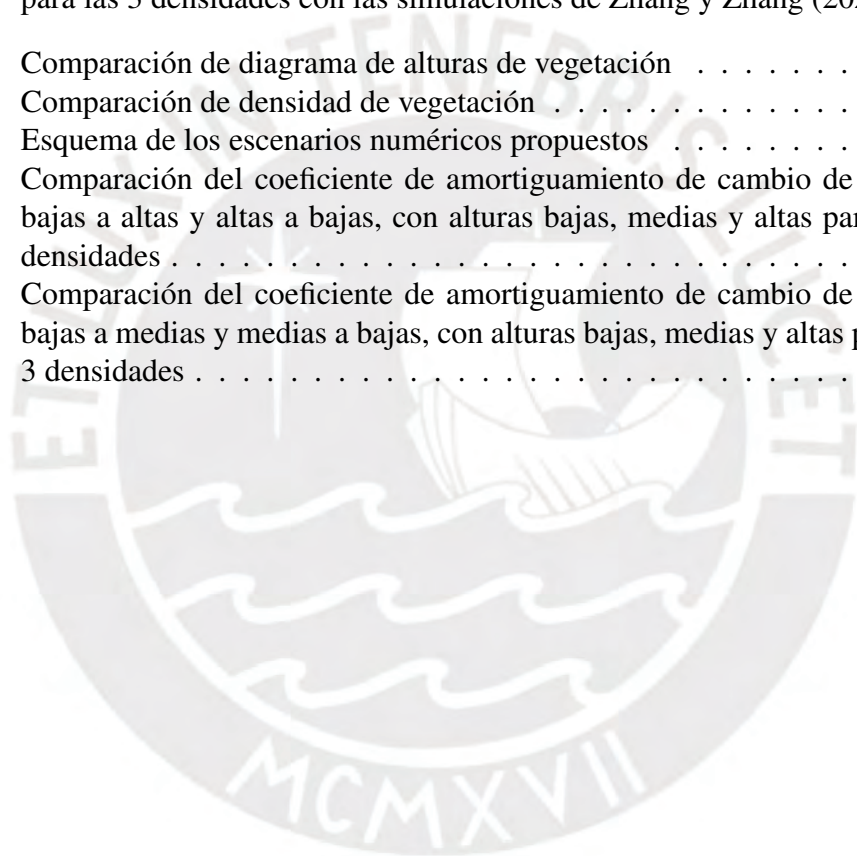
3.1	Caracterización de los parámetros del caso Synolakis	28
3.2	Caracterización de los parámetros del caso Huang	31
3.3	Caracterización de los parámetros de los diferentes casos de Zhang y Zhang (2023)	33
4.1	Caracterización de los parámetros de los diferentes casos de simulación	43



Índice de figuras

1.1	Zona de inundación y carreteras dañadas en Ishinomake en el terremoto de Tohoku del 2011. Reproducido de Williams et al. (2020)	1
1.2	Resultados de velocidades para el tsunami generado por el deslizamiento de la masa de tierra. Donde G2a es la zona de las islas de Orcas, para (a) t=1.8 min (110 s), (b) t=5.5 min (330 s), (c) t=11.8 min (710 s). Donde G2b es la zona de la bahía, (d) t=11.8 min (710 s), (e) t=41.7 min (2500 s), y (f) t=10 min (6000 s). Reproducido de Nematí et al. (2023)	7
1.3	Diagrama de flujo de la presente tesis	10
2.1	Métodos para simular la propagación de onda a través de una zona de vegetación. En (c) se muestra el esquema del enfoque microscópico, mientras que en (b) el enfoque macroscópico. Reproducido de Peng et al. (2024)	15
2.2	Evolución de la superficie de agua para un arreglo de 1.635 m con altura de ola de 0.05m para los resultados con enfoque macroscópico y microscópico. Reproducido de Maza et al. (2015)	18
3.1	Definición del esquema de propagación de onda solitaria con pendiente en la playa. Reproducido de Synolakis (2007)	27
3.2	Comparación de los datos de Synolakis y el modelo Telemac-2d para una onda solitaria de 0.0185 con inclinación de 1:19.85. Se muestran perfiles de nivel de agua en t = 25 , t = 30, t = 35 y t = 40, respectivamente.	29
3.3	Comparación de los datos de Synolakis y el modelo Telemac-2d para una onda solitaria de 0.0185 con inclinación de 1:19.85. Se muestran perfiles de nivel de agua en t = 45, t = 50, t = 55 y t = 60, respectivamente.	29
3.4	Ubicación de puntos de medición para un ancho de 1.090 m. Reproducido de Huang et al. (2011)	30
3.5	Comparación de valores de nivel de agua con nivel de referencia de 0.15 m. 31	
3.6	Esquema del los casos del modelo numérico. (a) Plano general y posición de medidores de nivel de agua (G1 a G7); (b) comparación de diagrama de varios alturas de vegetación, donde el azul representa el cuerpo de agua y el verde la vegetación; (c) representa el diagrama de diferentes densidades de vegetación y modo de distribución. Reproducido de Zhang y Zhang (2023)	32
3.7	Evolución del nivel de agua en los puntos de medición G2 a G6 sin vegetación. Línea azul son los resultados del presente modelo y los puntos negros son datos del modelo de Zhang y Zhang (2023)	34

3.8	Evolución del nivel de agua en los puntos de medición G2 a G6 con vegetación de densidad 546 plantas/m ² , caso C2. Línea azul son los resultados del presente modelo y los puntos negros son datos del modelo de Zhang y Zhang (2023)	35
3.9	Evolución del nivel de agua en los puntos de medición G2 a G6 con vegetación de densidad 1150 plantas/m ² , caso C3. Línea azul son los resultados del presente modelo y los puntos negros son datos del modelo de Zhang y Zhang (2023)	36
3.10	Evolución del nivel de agua en los puntos de medición G2 a G6 con vegetación de densidad 2241 plantas/m ² , caso C4. Línea azul son los resultados del presente modelo y los puntos negros son datos del modelo de Zhang y Zhang (2023)	37
3.11	Comparación del coeficiente de amortiguamiento de las diferentes alturas para las 3 densidades con las simulaciones de Zhang y Zhang (2023)	39
4.1	Comparación de diagrama de alturas de vegetación	41
4.2	Comparación de densidad de vegetación	41
4.3	Esquema de los escenarios numéricos propuestos	42
4.4	Comparación del coeficiente de amortiguamiento de cambio de alturas bajas a altas y altas a bajas, con alturas bajas, medias y altas para las 3 densidades	44
4.5	Comparación del coeficiente de amortiguamiento de cambio de alturas bajas a medias y medias a bajas, con alturas bajas, medias y altas para las 3 densidades	45



Glosario

Anuga Es un software de código abierto para la simulación de la ecuación de aguas poco profundas; en particular, puede utilizarse para modelar tsunamis e inundaciones.

Basement Módulo esta basado en las ecuaciones de Saint Venant para flujo no permanente unidimensional.

CoulWave Un modelo numérico para olas tipo Boussinesq, utilizado para simulación de perturbaciones de superficie libre para dispersividad debil y grado alto de no linealidad, como las olas de viento y tsunamis.

Hydrosed Modelo bidimensional de socavación basado en un sistema acoplado de ecuaciones de aguas poco profundas y transporte de sedimentos en una malla no estructurada mediante el método de volúmenes finitos utilizando el esquema de Godunov.

IHFoam Es un solver de flujo tridimensional numérico bifásico, diseñado para simular costa, offshore y ingeniería hidráulica.

Telemac-2D Módulo de hidrodinámica que resuelve las ecuaciones de Saint-Venant utilizando el método de elementos finitos o el método de volúmenes finitos y una malla de cálculo compuesta por elementos triangulares.

Telemac-3D Módulo de hidrodinámica en 3D que utiliza la misma malla no estructurada en el plano horizontal que TELEMAC-2D. Resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes con una condición de frontera en la superficie libre, así como las ecuaciones de advección-difusión para la temperatura y la salinidad.

Siglas

ANN Artificial Neural Network

FVM Finite Volume Method

K Time average turbulence kinetic energy

MNLR NonLinear Multivariate Regression

NRMSE Normalized Root Mean Square Error

RANS Reynolds averaged Navier Stokes

RMSE Root Mean Square Error

SST Shear Stress Transport

SWE Shallow Water Equations

TKE Energía cinética turbulenta

VOF Volumen of Fluid

Símbolos

cd fuerza de drag

g gravedad

h altura de agua

ν viscosidad cinemática

Nv densidad de vegetación

ϕ fracción de volumen de vegetación

ρ densidad del agua

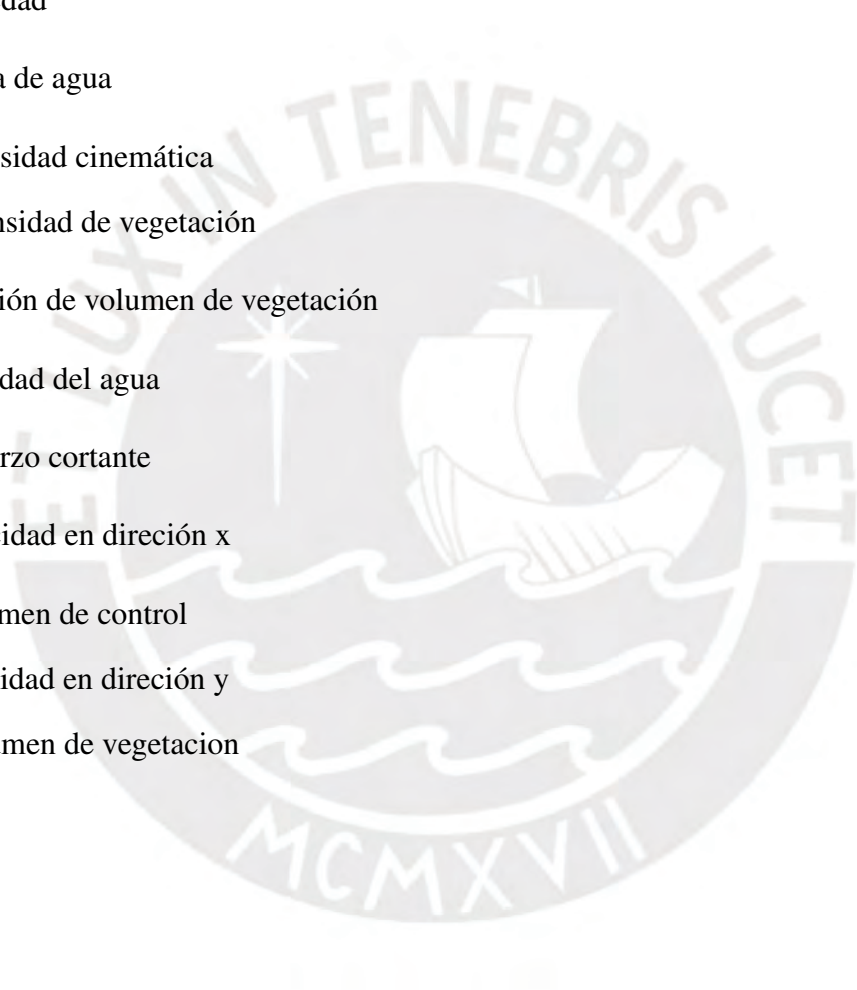
τ esfuerzo cortante

u velocidad en dirección x

V volumen de control

v velocidad en dirección y

V_s volumen de vegetación



Capítulo 1

Introducción

Los tsunamis han generado daños significativos a la sociedad e infraestructura durante estos últimos años. Por ejemplo, el tsunami del 2004 causó daños catastróficos en el sureste de Asia y dejó más de 200,000 fallecidos. En el 2011, otro tsunami ocurrió en las costas de la Prefectura de Tohoku, Japón, y generó olas con alturas de 20 m. Este evento ocasionó grandes daños como deslizamientos, zonas en licuación, incendios e incluso un accidente nuclear.

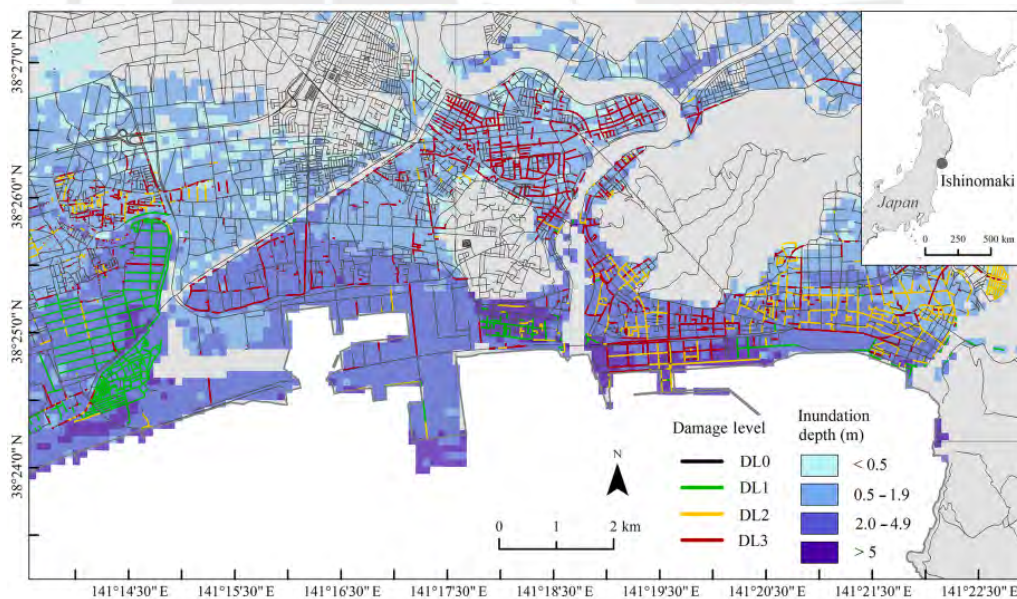


Figura 1.1: Zona de inundación y carreteras dañadas en Ishinomake en el terremoto de Tohoku del 2011. Reproducido de Williams et al. (2020).

En el tsunami de Japón, como muestra la figura 1.1, el mayor daño se encuentra en las zonas cercanas a la costas donde se observa la mayor altura de inundación. En cuanto a las infraestructuras, las vías con mayores daños se encuentran cercanas a la costa.

Soluciones convencionales como la construcción de diques, muros de concretos, colocación de piedras, han traído consigo nuevas problemáticas como la erosión de las bahías, el deterioro de la calidad del agua y del ecosistema. Debido a ello, es necesario un mejor entendimiento del problema. En la actualidad se investigan alternativas menos invasivas, entre ellas se encuentra el uso de la vegetación para la disipación de la energía de las olas producidas por el tsunami.

Los modelos numéricos son ampliamente usados para describir y estudiar el efecto de los tsunamis en zonas costeras. En especial, los modelos SWE que permiten una reducción del coste computacional con resultados precisos. En este estudio se enfoca en agregar al código Telemac-2D un nuevo modelo para estudiar la interacción de la vegetación en costas con ondas de tsunami.

1.1. Antecedentes

1.1.1. Investigación de tsunamis con Telemac

Kilinc et al. (2009) investigó la propagación de tsunamis generados por deslizamientos submarinos en el Mar de Mármara, utilizando dos modelos numéricos. El primer modelo se basa en las ecuaciones de SWE, conocida como modelo no dispersivo, mientras que el segundo utiliza las ecuaciones de Boussinesq para evaluar el efecto de la dispersión.

El estudio revela que la dispersión desempeña un papel fundamental en la propagación de tsunamis, especialmente en regiones con topografía compleja y obstáculos, como islas o cambios abruptos en la batimetría. Para abordar estas diferencias, se adoptó un enfoque híbrido que combina una solución analítica como condición inicial con cada uno de los modelos numéricos cerca de la costa. Los resultados demuestran que las ecuaciones de Boussinesq proporcionan una representación más precisa de la propagación del tsunami, particularmente en áreas de alta complejidad batimétrica, donde las diferencias con los modelos no dispersivos pueden alcanzar hasta un 20 %. Por el contrario, en regiones más homogéneas la superioridad de Boussinesq sigue siendo evidente, aunque las diferencias

sean menores, ofreciendo una mejor captura de los efectos dispersivos, lo que lo convierte en la opción más adecuada para simulaciones precisas de tsunamis en entornos costeros y fluviales complejos.

Por otro lado, el terremoto de Japón en 2011, según lo documentado por Jiang Liu et al. (2013), evidenció que las zonas fluviales presentan una menor resistencia a la propagación de tsunamis en comparación con las áreas urbanas, debido a la menor cantidad de obstrucciones. Ello permitió que la ola avanzara 49 km por el río Kitakami, causando daños significativos en las estructuras hidráulicas.

Para entender mejor este fenómeno, Wuppukondur y Baldock (2022) realizó experimentos con diferentes modelos numéricos como Anuga, Basement, Telemac-2D y Telemac-3D para predecir la altura de onda al sobrepasar las paredes de los canales hidráulicos.

La comparación de estos modelos muestra que Anuga alcanza un NRMSE de 0.29 en la predicción de la altura del nivel del agua, aunque se detecta una sobreestimación en los volúmenes de sobrepaso. En el caso de Telemac-3D, se observa una sobreestimación de la altura de la ola durante las primeras fases de propagación, acompañada de una subestimación de la velocidad de avance de la ola. Por su parte, Telemac-2D, basado en las ecuaciones de Boussinesq, muestra una precisión elevada con un NRMSE de 0.11 en la predicción de las alturas de la ola a lo largo del canal, sin embargo cuando la relación entre la altura de la ola y la profundidad del agua supera el valor de 0.2, el modelo no logra representar adecuadamente la ruptura de la ola.

En relación con el uso de las ecuaciones de Boussinesq, León et al. (2024) estudió el fenómeno de tsunamis a escala real, enfocado en un terremoto de magnitud 8.3 Mw ocurrido en la zona centro-norte de Chile. Para este análisis, se empleó el modelo numérico Telemac-2D, aprovechando datos reales del tsunami como enfoque directo, mientras que el modelo Tsuflind se utilizó para una simulación indirecta del tsunami de Illapel de 2015. La investigación se centró en la dinámica del flujo y el transporte de sedimentos durante el evento, y los resultados fueron validados mediante datos de mareógrafos y depósitos de sedimentos en el estuario de Tongoy.

La comparación entre el uso de las ecuaciones SWE y las ecuaciones de Boussi-

nesq en el modelo Telemac permitió evaluar la capacidad de cada enfoque para simular la propagación del tsunami. Revelando que, aunque las SWE proporcionaron un ajuste razonable con los registros de mareógrafos, presentaron limitaciones al sobreestimar la altura de la superficie libre en la zona de Quintero en aproximadamente 4 m y subestimar en la zona de Huasco alrededor de 0.4 m, debido a la falta de efectos dispersivos. Por otro lado, las ecuaciones de Boussinesq capturaron con mayor precisión la no linealidad y dispersión de las olas, mejorando la representación de la amplitud y las oscilaciones de alta frecuencia, especialmente al acercarse a la costa. En la zona de Coquimbo, por ejemplo, las ecuaciones de Boussinesq reprodujeron la altura máxima observada de 4.7 m, mientras que las SWE tendieron a sobreestimar este valor. Además, las simulaciones con Boussinesq mostraron una mejor representación del perfil de la ola, con oscilaciones de alta frecuencia más precisas y variaciones de amplitud más realistas, lo que justifica la preferencia por este enfoque en estudios que requieren una simulación detallada de la dinámica costera del tsunami.

Ambos modelos, las ecuaciones de aguas someras no lineales SWE y las ecuaciones de Boussinesq, son útiles para simular la propagación de tsunamis, ofreciendo un ajuste razonable con los registros de mareógrafos. Sin embargo, las SWE tienden a sobrestimar o subestimar la altura de la superficie libre en algunas ubicaciones debido a la falta de efectos dispersivos. En contraste, las ecuaciones de Boussinesq proporcionan una representación más precisa de la no linealidad y dispersión de las olas, mejorando la predicción de la amplitud y las oscilaciones de alta frecuencia, especialmente cerca de la costa. Por lo tanto, aunque ambas son efectivas, las ecuaciones de Boussinesq ofrecen una mayor precisión en la simulación de la dinámica costera del tsunami.

1.1.2. Representación de vegetación mediante la fricción de fondo

En el diseño y planificación de obras de protección contra inundaciones, es crucial predecir la altura de las olas que pueden generarse en áreas inundadas. Los métodos anteriores para predecir olas generadas por el viento están basados en ecuaciones desarrolladas para condiciones de baja fricción del fondo. Sin embargo, cuando las olas generadas

por tormentas atraviesan áreas inundadas poco profundas donde la vegetación induce un esfuerzo de fricción moderado o alto, es necesario estimar las alturas y períodos de las olas bajo estas condiciones.

Camfield (1983) estudió las curvas de predicción para profundidades pequeñas y ha propuesto técnicas para estimaciones en estas circunstancias. Las olas que se propagan en áreas con alta fricción del fondo crecen a un ritmo más lento. Para abordar este desafío, se puede ajustar la distancia de recorrido de la ola a una longitud equivalente que represente un crecimiento bajo condiciones de baja fricción. Con este ajuste, es posible aplicar una mayor fricción para representar la vegetación obteniendo predicciones más precisas de las características de las olas.

Augustin et al. (2009) realizó experimentos de laboratorio para medir la atenuación de olas causada por vegetación sintética emergente y casi emergente en humedales bajo una variedad de condiciones de olas y densidades de tallos. Los datos experimentales se analizaron utilizando la teoría lineal de ondas para cuantificar coeficientes de arrastre y un modelo no lineal de Boussinesq para determinar factores de fricción numéricos que representen mejor la vegetación de humedales.

Los resultados mostraron que las condiciones emergentes generaron una mayor atenuación de olas en comparación con las condiciones casi emergentes. Ello se debe a que en las condiciones emergentes, el tallo de la planta ocupa toda la columna de agua, mientras que en condiciones casi emergentes, no se impide el movimiento en la parte superior de la columna, donde las velocidades orbitales son mayores. Las condiciones casi emergentes son relevantes durante inundaciones por marejadas ciclónicas o para vegetación subacuática. La atenuación de la altura de las olas estuvo más influenciada por la relación entre la longitud del tallo y la profundidad del agua, así como por la densidad de tallos. Aunque la rigidez de las plantas es importante, los efectos de atenuación entre vegetación rígida y flexible fueron similares, obteniendo factores de fricción equivalentes. La modelación de la rugosidad de la vegetación mediante un factor de fricción adimensional permitió estimar razonablemente la atenuación de olas en humedales.

1.2. Descripción del problema

1.2.1. Tsunami debido a terremotos

El acoplamiento intersísmico en las zonas de subducción altamente acopladas juega un papel fundamental en la generación de tsunamis, ya que los terremotos submarinos en estas áreas generan deslizamientos verticales significativos en el lecho marino, desplazando grandes volúmenes de agua. Este proceso resulta en olas de gran magnitud que impactan las áreas costeras cercanas. Dado el riesgo inherente, comprender la mecánica del acoplamiento intersísmico es esencial para evaluar de manera precisa la amenaza de tsunamis y mejorar las estrategias de mitigación de riesgos para las poblaciones costeras.

El estudio de Métois et al. (2012) se centra en la evaluación del acoplamiento intersísmico en Chile central, destacando la relación crítica entre el acoplamiento sísmico y la generación de tsunamis en la región. Un mayor acoplamiento intersísmico en la interfaz de subducción implica una acumulación más significativa de deformación elástica, lo cual se traduce en la liberación de energía sísmica sustancial durante un evento telúrico. En particular, el análisis del segmento de Maule en 2010 revela que las áreas de alto acoplamiento coinciden con zonas de deslizamiento cosísmico pronunciado, lo que contribuyó a la generación del tsunami asociado a dicho terremoto. Estos hallazgos refuerzan la importancia de monitorear el acoplamiento intersísmico para anticipar y mitigar los efectos de futuros tsunamis.

El evento sísmico del 26 de diciembre de 2004, con una magnitud de 9.0, ocurrido frente a la costa de Sumatra, ejemplifica el impacto devastador de un gran acoplamiento intersísmico seguido por la generación de un tsunami. El tsunami afectó a numerosos países del Océano Índico, incluyendo Indonesia, Sri Lanka, India y Tailandia, con una pérdida de entre 156000 y 178000 vidas, además de miles de personas desaparecidas. Un estudio exhaustivo llevado a cabo en Sri Lanka por un equipo internacional de investigación incluyó la medición de la altura máxima de las olas, la evolución y la extensión de la inundación (Liu et al., 2005). Los resultados, junto con testimonios de testigos y análisis de depósitos sedimentarios, revelaron la magnitud del impacto y resaltaron la influencia

de modificaciones costeras antropogénicas, como la minería de coral y la remoción de dunas, en el aumento de la vulnerabilidad ante estos desastres.

1.2.2. Tsunami por deslizamiento de tierra

Después de la generación sísmica explicada anteriormente, la generación de tsunamis por deslizamientos de tierra es la más probable. El proceso de deslizamiento consiste en la acumulación de material sedimentario hasta que un evento desencadena la desestabilización de la capa de sedimentos. Entre estos eventos se encuentran la erosión en una pendiente submarina pronunciada, proyectos de construcción costera, lluvias prolongadas que saturan la tierra costera, actividades volcánicas y, a menudo, terremotos. Los tsunamis generados por deslizamientos de tierra se consideran eventos más locales que los sísmicos, con grandes elevaciones cerca de la fuente.

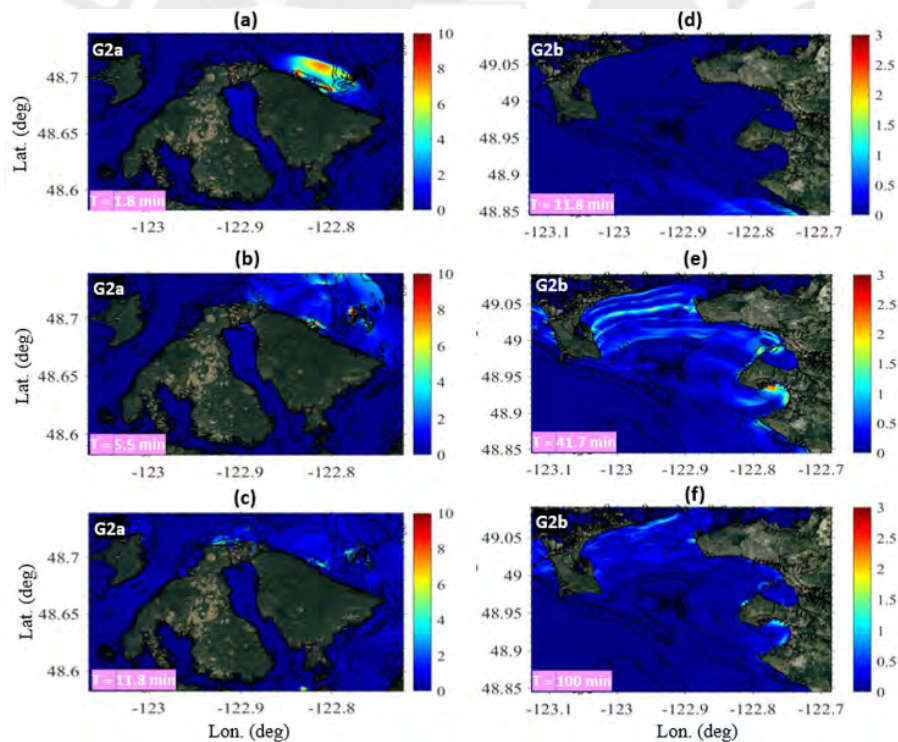


Figura 1.2: Resultados de velocidades para el tsunami generado por el deslizamiento de la masa de tierra. Donde G2a es la zona de las islas de Orcas, para (a) $t=1.8$ min (110 s), (b) $t=5.5$ min (330 s), (c) $t=11.8$ min (710 s). Donde G2b es la zona de la bahía, (d) $t=11.8$ min (710 s), (e) $t=41.7$ min (2500 s), y (f) $t=100$ min (6000 s). Reproducido de Nemati et al. (2023).

Un ejemplo es el estudio de Nemati et al. (2023) que se centra en la modelación numé-

rica de un potencial tsunami generado por un deslizamiento de tierra en la costa noreste de la Isla Orcas, en el Estrecho de Georgia. La simulación asume un escenario de peor caso con un deslizamiento de 0.17 km^3 , que se mueve por una pendiente pronunciada, impulsado por la actividad sísmica en la falla de la isla de Skipjack.

Las simulaciones revelan que las olas alcanzan amplitudes entre 15 y 20 m cerca de la fuente, con velocidades de corriente de hasta 9 m/s y una propagación de hasta 30 m en las costas cercanas, como se muestra en la figura 1.2, pues se aprecia el modelamiento de los resultados de las velocidades en el tiempo. El tsunami alcanza la Bahía de Lummi en 8.5 minutos con una amplitud máxima de 4 m y una propagación de 7.5 m. La simulación destaca la necesidad de una evaluación detallada de tsunamis en la región, dado el riesgo significativo para la población costera.

1.2.3. Tsunamis volcánicos

Los tsunamis volcánicos pueden originarse por diversos mecanismos relacionados con la actividad volcánica, tales como la descarga de material en el agua, el colapso de calderas, deslizamientos de tierra, flujos piroclásticos o terremotos volcánicos. Ejemplos históricos de estos eventos incluyen la erupción de Thera hace 3,500 años, que impactó a la civilización minoica, y la erupción del volcán Krakatau en 1883.

Los deslizamientos volcánicos y los flujos piroclásticos comparten dinámicas similares con los deslizamientos de tierra, generando ondas dispersivas. Los flujos piroclásticos, en particular, presentan un comportamiento complejo, inicialmente son más ligeros que el agua, pero posteriormente se vuelven más pesados, provocando una sobrepresión en la superficie libre del agua. Estos flujos han sido modelados en escenarios como una posible erupción del Vesubio.

Por otro lado, el colapso de una caldera implica el hundimiento del fondo oceánico, lo que se asemeja a una dislocación negativa del lecho marino durante un terremoto, generando así una ola larga.

1.3. Motivación

Tanaka (2009) observó que durante el tsunami de Papúa Nueva Guinea en 1998, los árboles de Casuarina mostraron una mayor resistencia que las palmeras. Sin embargo, el debilitamiento de sus raíces causó erosión significativa, lo que en algunos casos resultó en la volcadura de los árboles. De manera similar, en Tamil Nadu, India, tras el tsunami del Océano Índico en 2004, los manglares redujeron significativamente las muertes humanas. Las aldeas protegidas por densos manglares, como *Rhizophora* spp. y *Avicennia* spp., experimentaron daños moderados, mientras que las aldeas expuestas sin protección vegetal sufrieron mayor destrucción.

En el tsunami de Java de 2006, los árboles de *Pandanus odoratissimus* y *Cocos nucifera* alcanzaron su punto de ruptura cuando la profundidad del agua equivalía al 80 % de la altura del árbol, resultando en la caída de los más pequeños, mientras que los más grandes resistieron mejor. Finalmente, en los proyectos piloto de Matara, Sri Lanka, las barreras de vegetación ofrecieron protección inicial. No obstante, la falta de mantenimiento y las brechas en las plantaciones redujeron su eficacia, generando mayores daños en las áreas más expuestas.

1.4. Objetivos de la tesis

1.4.1. Objetivo principal

- Implementar en la ecuación de momento en el término de fuerza, la ecuación de Morison, para parametrizar costas con vegetación sumergida.

1.4.2. Objetivos secundarios

- Obtener un código que idealice la vegetación en costa con el fin de mejorar la eficiencia computacional.
- Calibrar los parámetros para el modelamiento numérico de un tsunami en zonas costeras con vegetación.

- Comparar los resultados de investigaciones anteriores con la configuración de vegetación de altura mixta para su posterior recomendación y análisis.

1.5. Metodología

En la figura 1.3 se muestra el diagrama flujo de la presente tesis.

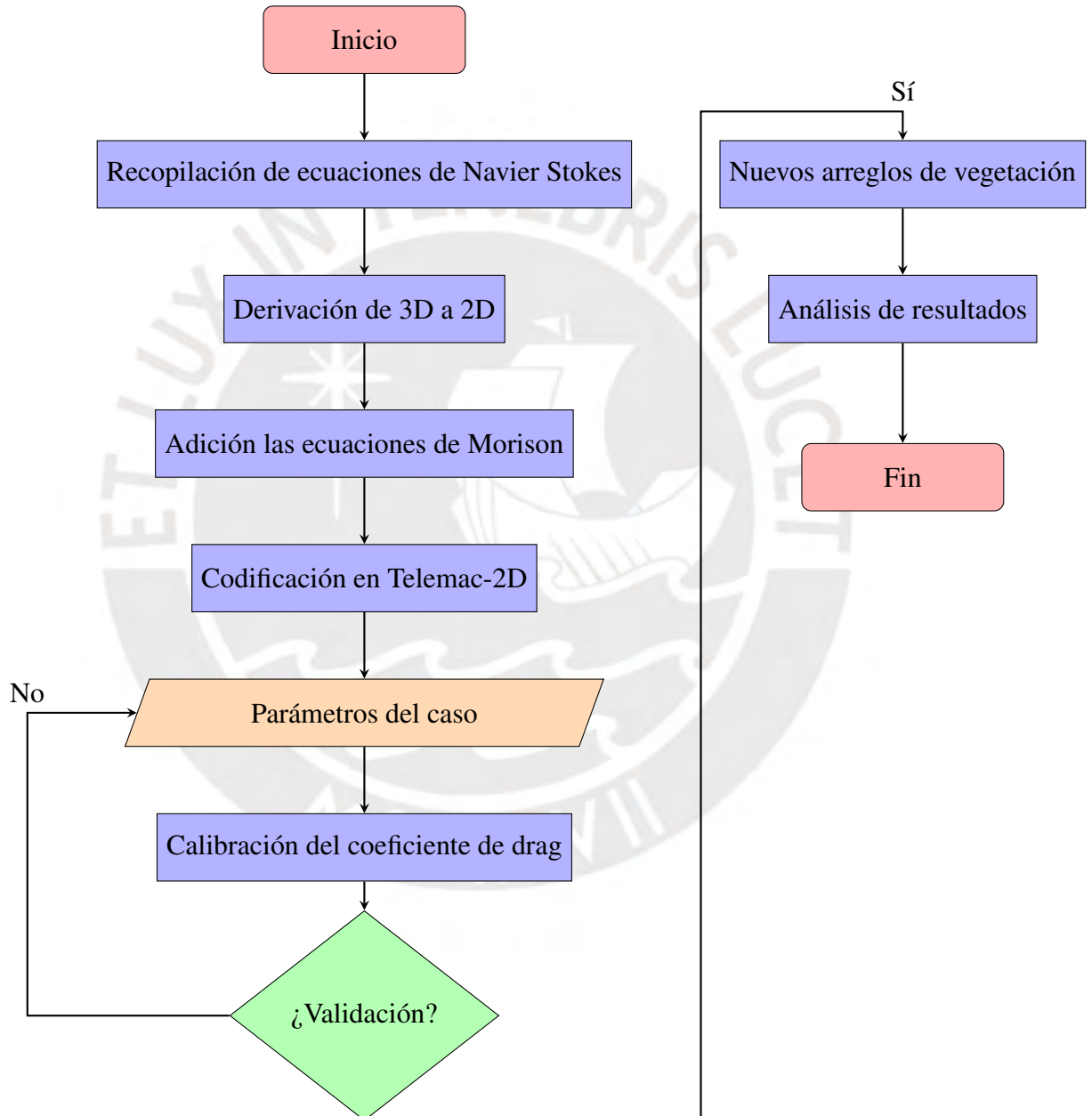


Figura 1.3: Diagrama de flujo de la presente tesis.

En el presente tema de tesis se desarrolla la siguiente metodología:

1.5.1. Fase I

- Recopilación de ecuaciones en 3D: Se realiza la recopilación y se tendrá en consideración las fuerzas tridimensionales de la vegetación.
- Derivación de ecuaciones: Se realiza la derivación de las ecuaciones para convertir de un 3D a 2D.
- Adición de una fuerza a la ecuación de San Venant: Se añadió la fuerza de la vegetación, que es la fuerza de Morison, en la componente de fuerza externa en las ecuaciones en 2D. Se sabe que los modelos actuales no consideran la vegetación.

1.5.2. Fase II

- Codificación de las ecuaciones en el programa de Telemac 2D: Se codificó las ecuaciones de Morison en el programa de Telemac 2D con el fin de que el tiempo de la simulación sea en un menor tiempo.
- Se agregó un módulo para la implementación que permita al usuario agregar la fuerza de vegetación de manera rápida introduciendo parámetros de diámetro de tallo de una vegetación, densidad de la vegetación por m^2 , altura de vegetación y el coeficiente de arrastre.

1.5.3. Fase III

- Calibración del coeficiente de drag: Se calibra el coeficiente de drag con valores de experimento físicos.
- Validación del modelo numérico de San Venant o Boussineq: Se valida el modelo numérico de San Venant y de Boussineq con datos de experiencias físicas.

1.5.4. Fase IV

- Escenarios de zonas con diferentes alturas de vegetación: Se modelará nuevos casos para evaluar la implicancia de la altura de vegetación por zonas.

1.6. Estructura de la tesis

La presente tesis se estructura en varios capítulos que abordan de forma integral el desarrollo, aplicación y validación de un modelo numérico para estudiar la interacción entre tsunamis y vegetación costera. A continuación, se ofrece una descripción detallada de cada capítulo:

El capítulo 1 se introduce los antecedentes relevantes y establece el contexto en el que se desarrolla la investigación. Se detallan la descripción del problema, la motivación que impulsa el estudio, los objetivos específicos y generales, así como la metodología empleada. Este marco conceptual define los cimientos de la tesis, orientando el desarrollo de los capítulos posteriores.

El capítulo 2 se presenta una revisión exhaustiva de la literatura existente sobre los distintos enfoques utilizados para modelar la interacción entre vegetación costera y tsunamis. Se analiza una serie de metodologías y modelos, haciendo especial hincapié en los modelos de Saint Venant y de Boussinesq, destacando las diferencias en su capacidad para representar los efectos de la vegetación sobre la dinámica de los tsunamis. Este análisis establece un marco comparativo que justifica la selección de métodos y modelos empleados en la presente investigación.

El capítulo 3 se centra en el desarrollo del modelo numérico propuesto en esta tesis, basado en los modelos bidimensionales de Saint Venant y de Morison. Se incluyen los principios fundamentales del modelo y se describen detalladamente los procesos de validación a través de tres escenarios representativos: una bahía inclinada sin vegetación, una bahía plana con vegetación de altura fija y una bahía plana con vegetación de altura variable. Cada uno de estos casos sirve para evaluar la precisión del modelo en diferentes condiciones ambientales y de vegetación.

El capítulo 4 se mostrará la aplicación de un modelo desarrollado, analizando la respuesta de la vegetación costera frente al impacto de olas de tsunami. Se evalúa cómo las características sobre la altura de la vegetación influyen en la atenuación de las olas, proporcionando una herramienta para predecir el comportamiento de tsunamis en zonas costeras. Los resultados ofrecen una perspectiva integral sobre la utilidad del modelo para

la mitigación de riesgos en zonas vulnerables.

El capítulo 5, aborda las conclusiones, recomendaciones y propuestas para futuras investigaciones. Este apartado sintetiza los hallazgos principales del estudio, sugiere medidas prácticas basadas en los resultados obtenidos y explora direcciones para el desarrollo y mejora de modelos que fortalezcan la gestión de riesgos asociados a los tsunamis.



Capítulo 2

Revisión de literatura

2.1. Tipos de enfoques para la interacción de la vegetación con tsunamis.

En la imagen 2.1.a de la figura muestra la interacción de la ondas de tsunami con la vegetación, la cual se usará para el estudio de la forma de representar la vegetación. Este consiste en dos formas de caracterizarlas: Enfoque microscópico y macroscópico.

El primer enfoque, conocido como enfoque microscópico, incorpora la geometría de la planta de manera detallada en el modelo numérico. En particular, la simulación directa representa la planta como una serie de cilindros individuales, como se muestra en la figura 2.1.c; en este enfoque, el flujo de agua interactúa directamente con estos cilindros, proporcionando información detallada sobre velocidades y la altura de la superficie del agua en la interacción entre el cilindro y el agua.

Por otro lado, el segundo enfoque, denominado macroscópico (ver imagen 2.1.b), parametriza la vegetación mediante una fórmula matemática que caracteriza sus propiedades. Se tiene como resultado las velocidades de cada punto en zona de vegetación pero no indentifica la ubicación individual del tallo de vegetación como las zonas que no esta presente.

En esta tesis, se empleará la fuerza de arrastre, como muestra la imagen 2.1.b, reemplazada en la ecuación de Morison para modelar la fuerza inducida en las ecuaciones de

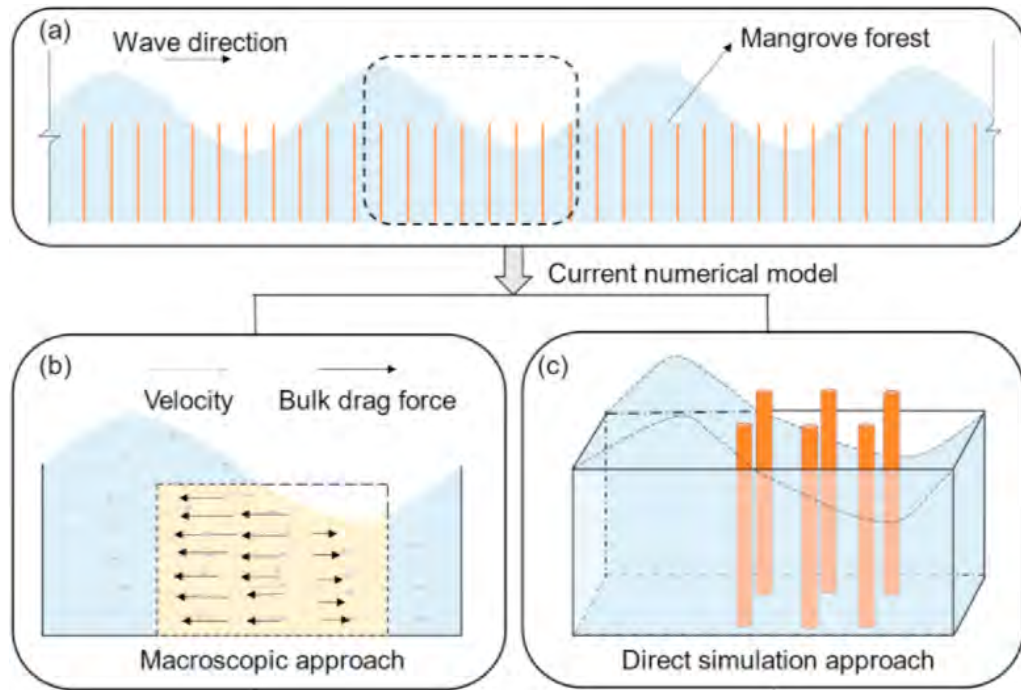


Figura 2.1: Métodos para simular la propagación de onda a través de una zona de vegetación. En (c) se muestra el esquema del enfoque microscópico, mientras que en (b) el enfoque macroscópico. Reproducido de Peng et al. (2024).

gobierno de los fluidos.

2.2. Enfoque microscópico

Maza et al. (2015) desarrolla el código IHFoam, modelo 3D que resuelve las ecuaciones RANS junto a las ecuaciones del modelo de turbulencia k-w SST discretizado con el método de FVM, para estudiar la vegetación en las costas mediante el enfoque de simulación directa para idealizar la vegetación.

En este método se trabajó con configuraciones de alturas de ondas de 0.025, 0.05 y 0.10m, altura de agua de 0.15m, densidades de 2228, 1108 y 560 cilindros/m², y las distribuciones A, B y C, según Huang et al. (2011) y distribución aleatoria. En alturas relativas de onda de 0.33 y 0.67, media y grande, se observa mayor simetría en la onda. Esta tiene una mayor reducción a mayor densidad, en cambio, en densidades bajas el perfil de la onda se mantiene asimétrico. Asimismo, a mayor altura de onda se tiene un mayor incremento de la atenuación de la altura de agua en el borde final de la vegetación.

La densidad tiene un impacto significativo en la reflexión, amortiguamiento y la celeridad. En densidades altas, se observa una mayor reflexión en el borde inicial de la vegetación y una reducción notable de la celeridad, así como, a mayor densidad se obtiene un mayor amortiguamiento. Además, la altura del agua en este borde aumenta con la densidad, alcanzando hasta 1.30 de altura relativa debido a la resistencia inducida por los cilindros. En densidades más bajas, esta altura relativa disminuye a alrededor de 1.20. Sin embargo, para una densidad media de 1108 cilindros/m², se logra una mayor atenuación cuando los cilindros están distribuidos de manera aleatoria en lugar de uniforme, lo que se explica por la generación de un flujo encañonado. También se observa una alta dependencia en la altura relativa del agua entre la densidad y la configuración del arreglo.

En cuanto a las fuerzas máximas, estas mostraron ser mayores en el borde inicial de la vegetación y aumentaron con la altura de la onda. Sin embargo, en el arreglo B, el cual los tallos están ubicados uno detrás de otro en la misma línea, los valores de fuerza máxima se mantuvieron constantes debido a la presencia de un flujo encañonado. Al comparar las distribuciones, se observó que la fuerza máxima en la distribución aleatoria es mayor que en la uniforme. Ello se debe al efecto de protección de los cilindros alineados al frente en la distribución uniforme, lo que reduce la fuerza máxima. Además, en la distribución aleatoria, las fuerzas tienden a ser más altas porque existen cilindros aislados o alejados del resto, lo que genera puntos de mayor concentración de fuerza.

Zhang y Zhang (2023) utiliza el mismo código que Maza, IHFoam, para estudiar la vegetación en las costas, realizando investigaciones numéricas según el arreglo A de Huang et al. (2011), donde los tallos forman un cuadrado con un tallo en el medio. En esa investigación presenta una altura de agua de 0.16 m, vegetación con alturas de 0.04, 0.08 y 0.12 m, densidades de 546, 1150 y 2241 plantas/m² y modo de distribución uniforme, mixto y aleatorio. En la distribución uniforme el coeficiente de asimetría varía de 1.50 a valores cercanos a 1, y sucede cuando se introduce la vegetación y se aumenta la densidad. Lo anterior ocurre porque el perfil de la onda, por naturaleza, es asimétrico, y tiende a ser simétrico cuando es atenuado por la vegetación, teniendo los valores de 1.50 a 1. También se observan dos patrones al inicio y fin de la vegetación, con mayor claridad

en condiciones con índice de vegetación sumergido medianos y altos. Para la sección inicial, existe un aumento en el coeficiente de amortiguamiento del nivel de agua; para el final, se observa una reducción. En particular, en el caso de alto índice de vegetación sumergido, el coeficiente aumenta de 1.01 a 1.07 al inicio, mientras que al final de la vegetación disminuye de 0.9 a 0.79. Bajo un índice alto de vegetación sumergido, en la sección media y final de la vegetación, se observa una reducción de la velocidad en su componente en x al aumentar la densidad, por el aumento de las obstrucciones de cilindros. A medida que el índice de vegetación sumergido aumenta, la zona en la vertical también aumenta en donde la velocidad es reducida.

La distribución mixta presentó menores velocidades que la distribución uniforme. Los valores de K se amplifican cerca de la superficie del agua y a medida que la densidad disminuye esta variable aumenta; esto debido a que la mayor parte de la energía de la ola pasa por encima de la vegetación. La distribución mixta presentó un menor K ; por lo que disipa mejor que la uniforme. Por lo tanto, a mayores densidad y configuración de distribución, menor TKE .

La fuerza de la onda medida en altura cerca a los cilindros se reduce al aumentar la densidad de la vegetación; ello confirma la importancia de la densidad para atenuar la fuerza del tsunami; lo mismo sucede con el incremento del índice de vegetación sumergido. Por lo tanto, la densidad y el índice de vegetación sumergido afectan la fuerza de la onda en distribución uniforme. La onda disipa más energía en distribución no uniforme. La distribución mixta mostró un coeficiente de amortiguamiento de 5.60 % menor que la distribución uniforme, mientras que la distribución aleatoria solo un 2.20 % menos. La distribución uniforme crea un flujo encañonado que reduce la disipación de energía el cual se puede solucionar con las distribuciones no uniformes.

En ambas investigaciones, de Maza et al. (2015) y Zhang y Zhang (2023), se muestra que en el enfoque microscópico se obtiene de manera precisa los valores de altura de nivel de agua y de la fuerza máxima inducidas por los cilindros, asimismo, permite observar el patrón de flujo encañonado que se forma por las distribuciones uniformes.

2.3. Comparación entre enfoque microscópico y macroscópico

Maza et al. (2015) estudia la interacción de ondas con la vegetación mediante el enfoque microscópico y macroscópico, utilizando el código IHFoam. El primer enfoque es el método de fuerza directa, en el cual se representa a la vegetación como cilindros y la malla computacional considera el fluido que pasa por alrededor de estos cilindros. En el segundo enfoque se parametriza la fuerza de la vegetación y es añadida a las ecuaciones de gobierno.

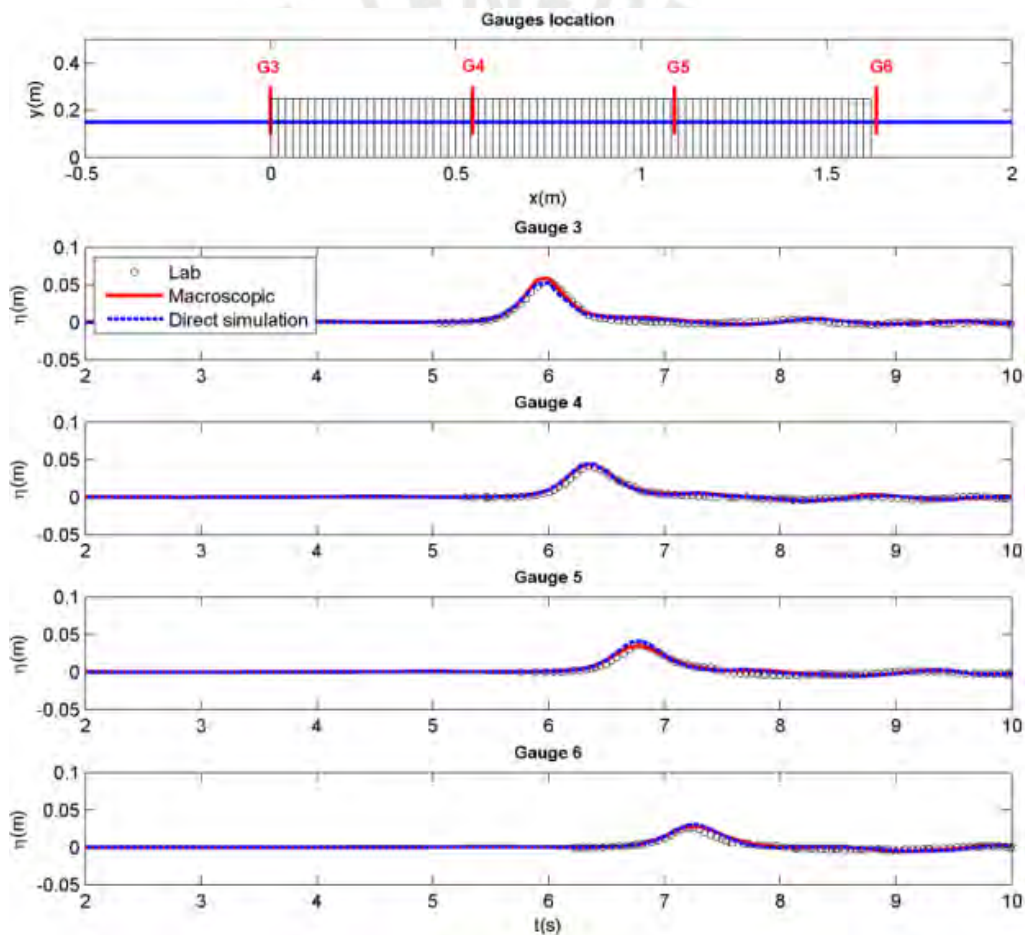


Figura 2.2: Evolución de la superficie de agua para un arreglo de 1.635 m con altura de ola de 0.05m para los resultados con enfoque macroscópico y microscópico. Reproducido de Maza et al. (2015).

En la figura 2.2, se observa una comparación de ambos enfoques, con un ejemplo de modelación de olas. Se observa que el modelamiento de ambos enfoques son muy

similares con los datos reales de un laboratorio (puntos blancos) por lo que será válido trabajar con ambos enfoques y para este tema de tesis se utilizará el modelo macroscópico.

Al comparar los dos enfoques, microscópico y macroscópico, se observa una tendencia general a la disminución de la fuerza máxima de la onda. Sin embargo, el enfoque macroscópico tiende a subestimar este valor. Para una densidad media, el coeficiente fue menor que para densidades bajas, lo cual se atribuye a la presencia de flujo encañonado. En cuanto a la altura del agua, el modelo macroscópico la reproduce con precisión en la mayor parte del dominio, las discrepancias se encuentran en los bordes de la vegetación. Ello se debe a efectos locales y al aumento de la no linealidad de la onda, como se observa en alturas con la densidad.

Se confirma que el enfoque macroscópico puede ser una herramienta útil para obtener resultados coherentes y confiables; asimismo, mejora la eficiencia computacional debido a las simplificaciones de las ecuaciones y esto permite tener menores tiempos en los cálculos a realizar.

2.4. Enfoque macroscópico

Marsooli y Wu (2014) desarrolló un modelo tridimensional de las ecuaciones RANS agregando el término de inercial y de drag, debido a la vegetación, a las ecuaciones de momento, asimismo, para la turbulencia se utiliza el modelo mixing length. Estas ecuaciones son discretizadas mediante volúmenes finitos y se utiliza un esquema bifásico de VOF para capturar la superficie de agua.

Para validar el código se utilizaron datos de 5 laboratorios. Primero, los datos de Shimizu y Tsujimoto (1993) para un caso de un canal con vegetación colocada de forma parcial. Segundo, un caso de vegetación flexible en un fondo irregular llevado a cabo por Stratigaki et al. (2011), donde se observan algunas discrepancias en los valores de nivel de agua esto debido a la deformación del lecho. Tercero, un caso de vegetación flexible en un canal sin pendiente. Por último, un caso de vegetación rígida y otra con flexible, mostrando que el modelo captura correctamente el movimiento oscilatorio de la

superficie de agua, debido a la reflexión y la pendiente. Además, se muestra inexactitud de los tirantes cuando se tiene vegetación flexible, esto debido a que el modelo asume que no existe movimiento de las plantas.

En la investigación numérica se estudió el paso de una onda de propagación por una zona vegetación en un fondo sin pendiente. Se estudiaron casos con ratios de la vegetación sumergida de 0.25, 0.5, 0.75 y 1, y densidades de 100, 1000, 5000, 10000 planta/m², encontrando que el ratio de atenuación aumenta con la densidad y, especialmente, con aumento del ratio de la vegetación sumergida, como los valores de 0.75 en adelante, siendo ambos términos influyentes.

Wang et al. (2023) realiza un MNLR y un ANN para calcular el valor del *cd*. El modelo MNLR genera una fórmula exponencial empírica, válida con 139 casos de 6 laboratorios diferentes y debido a la selección subjetiva de variables a considerar en el modelo, existen varios efectos ignorados, generando un R² de 0.429, un RMSE 10⁻² y con los datos de Hu et al. (2014) y Hu et al. (2021) dan una desviación mayor al 20%. El ANN muestra una mayor precisión con un R² de 0.878, un RMSE de 10⁻³ y con la mayoría de datos dentro de la banda de error del 20%.

2.4.1. Modelo agua poco profundas

Ziaadini-Dashtekhaki et al. (2021) desarrolla un modelo 1D con las expresiones SWE discretizado con FVM y añadiendo en la ecuación de momento el término de fuerza de drag propuesto por Beudin et al. (2017). Así mismo hace uso de la configuración de Yao et al. (2015), realizado en un canal de 40 m de largo, 0.5 m de ancho, con vegetación de 0.3 m ancho y una densidad máxima de 1.9. Concluyendo que, el aumento del ancho de vegetación de 0.3 a 1.2 m genera un decremento del 57% del nivel de onda y 43% en la velocidad. Por otro lado, el aumento de la altura de onda del tsunami para una misma densidad provoca una reduce en el ratio de amortización.

Zhang et al. (2019) propone el código Hydrosed, ver Liu et al. (2008), donde implementa la parametrización de la planta *Pnadanus odoratissimus* en la ecuación de momento de SWE. Utiliza la configuración de Thuy et al. (2018) que considera pendientes variadas

con un máximo de 1/500, una densidad de vegetación de 0.224 plantas/m² y un ancho de 100 m. En resultados evidencia un incremento de la onda antes de llegar a la zona de vegetación mientras que a lo largo de esta disminuye su altura de agua. Asimismo, el aumento de 0.1 a 0.4 en densidad genera una disminución de 5.87 a 5.07 m de la máxima altura de agua y en la distancia de inundación un decremento de 2033 a 1638 m. Por último, la respuesta de la onda con vegetación obedece a un tiempo de retraso de llegada a la orilla a diferencia de la ausencia de la misma.

2.4.2. Modelo Boussinesq

Según Zhao et al. (2020), inicia el modelo haciendo uso de las expresiones de Boussinesq en programa CoulWave añadiendo la fuerza de drag así como un término de rompimiento de ola en presencia de vegetación discontinua. La configuración usada se compone de pendientes con diferentes niveles de densidad en un canal de 30 m de largo y 3 de ancho, encontrando una reducción en la altura de la onda en comparación a un fondo sin vegetación. Adicionalmente, la distribuciones de densidad no uniforme no se atenúan con la misma efectividad que una vegetación uniforme.

Capítulo 3

Modelo numérico y validación

En este capítulo presentamos el desarrollo del modelo numérico basado en las ecuaciones de aguas poco profundas de Saint-Venant, su extensión con términos de dispersión de Boussinesq y la implementación del término de arrastre de Morison para incluir el efecto de la vegetación en código Telemac 2D. A continuación, describimos las ecuaciones fundamentales, las hipótesis asociadas y la forma en que se parametrizan los diferentes términos físicos.

3.1. Introducción histórica

Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797-1886) fue un ingeniero, matemático y físico francés que hizo contribuciones destacadas en la mecánica de fluidos. Ingresó a la École Polytechnique a los 15 años y, en 1825, continuó su formación en la École des Ponts et Chaussées, una institución dedicada al diseño y construcción de infraestructura civil. Su trayectoria profesional coincidió con una época de grandes avances en la aplicación de métodos matemáticos a la ingeniería. Es recordado especialmente por su trabajo en las ecuaciones de aguas poco profundas, conocidas hoy como las ecuaciones de Saint-Venant.

En colaboración indirecta con los trabajos previos de Claude-Louis Navier, Saint-Venant formuló en 1871 las ecuaciones que describen el flujo de aguas poco profundas. Este sistema de ecuaciones en derivadas parciales permitió modelar de manera precisa

fenómenos como las crecidas y bajadas en los ríos, así como la propagación de ondas en áreas de poca profundidad, siendo fundamental para el análisis de tsunamis y oleajes de tormenta en zonas costeras.

3.2. Ecuaciones bidimensional de Saint Venant

El modelo conserva masa y momento en las direcciones horizontal x e y, asumiendo:

- Flujo newtoniano e incompresible.
- Presión hidrostática.
- Densidad constante.
- Velocidades promediadas en vertical.
- Pendientes de fondo suaves.

Para modelar el fluido de agua, se usaron las ecuaciones no lineales de SWE mostradas en las Ecs. 3.1, 3.2 y 3.3, expresando la ecuación de continuidad y momento, que se muestran a continuación:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h\vec{V}) = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{u}\bar{v}}{\partial y} = -gh\frac{\partial z_s}{\partial x} + \nabla \cdot (h\nu\nabla\bar{u}) - \frac{(\tau_{xz})_b}{\rho} + h\bar{f}_x \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{v}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}^2}{\partial y} = -gh\frac{\partial z_s}{\partial y} + \nabla \cdot (h\nu\nabla\bar{v}) - \frac{(\tau_{yz})_b}{\rho} + h\bar{f}_y \quad (3.3)$$

Donde h es la altura de agua [m], \bar{u} es la velocidad promediada en la profundidad en la dirección x [m/s], \bar{v} es la velocidad promediada en la profundidad en la dirección y, t es el tiempo [s], z_s es la elevación de agua en la cota de la superficie, ν es la viscosidad cinemática, τ_{xy} y τ_{yz} son los esfuerzos debido a las fricciones con el fondo y g es la gravedad.

Estas ecuaciones se derivan formalmente en el Apéndice B. Para simplificar su formulación y obtener las ecuaciones 3.2 y 3.3, se asumen flujo newtoniano, flujo incompresible, presión hidrostática, densidad constante, velocidades promediadas en la vertical y pendientes de fondo pequeñas.

3.3. Términos de dispersión de Boussinesq

Para capturar los efectos de dispersión en olas con longitud de onda comparable a la profundidad se añaden términos de Boussinesq:

$$-\frac{H_0^2}{6} \nabla (\nabla \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}) + \frac{H_0}{2} \nabla \left(\nabla \cdot \left(H_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) \right) \quad (3.4)$$

El término de Boussinesq, que es la ecuación 3.4 es añadido en las ecuaciones 3.2 y 3.3. Este término desempeñan un papel fundamental al modificar las ecuaciones de SWE para incluir los efectos de dispersión, permitiendo así modelar cómo las olas se dispersan y cambian de forma a medida que avanzan en aguas poco profundas.

Esta modificación es especialmente relevante en escenarios donde la longitud de onda es comparable a la profundidad del agua, ya que se vuelve esencial capturar tanto la forma de la onda como su velocidad de propagación. La incorporación de los términos de Boussinesq permite, de esta manera, una representación más precisa del comportamiento de las olas, un aspecto crítico en la modelación de fenómenos como la propagación de tsunamis al acercarse a zonas costeras.

3.4. Propuesta de implementación del modelo de

Morison

El enfoque principal de esta tesis es el término de fuerza externa presente en la ecuación de Navier-Stokes, ver Ec. 3.5.A, el cual será sustituido por la ecuación de Morison.

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_i \rho) \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \underbrace{\rho f_i}_A \quad (3.5)$$

Al aplicar las hipótesis de Saint-Venant, incorporamos la fuerza externa en la ecuación de Navier–Stokes mediante su integración en la dirección vertical. Para ello, se considera como límite inferior la cota del fondo y, como límite superior, la cota de la superficie libre del agua. El desarrollo detallado de esta integración, que conduce a la ecuación B.37 se muestra a continuación en la ecuación 3.6:

$$\int_{z_b}^{z_s} \rho f_i dz = \bar{f}_i \rho h \quad (3.6)$$

En propagarse a través de vegetación –como algas, bosques de kelp o praderas de pastos marinos–, las olas pierden energía debido al trabajo que ejercen sobre dichos elementos. Según la teoría lineal de ondas, las ondas que inciden perpendicularmente contra una costa de contornos paralelos sufren una disminución de su energía provocada por la vegetación. Esta pérdida se describe mediante el principio de conservación de la energía, resultando en la siguiente ecuación 3.7:

$$\frac{\partial E c_g}{\partial x} = -\epsilon_v \quad (3.7)$$

Aquí, E es la densidad de energía, H es la altura de la ola, y ϵ_v es la tasa promedio de disipación de energía inducida por la vegetación.

La fuerza horizontal por unidad de volumen se modela mediante una ecuación tipo Morison, que consta de un término de inercia y un término de arrastre. Sin embargo, en este enfoque simplificado, se desprecia el término inercial, centrándose únicamente en la fuerza de arrastre. Esta fuerza depende de la velocidad horizontal, del área de planta por unidad de altura, del número de plantas por unidad de área, y de un coeficiente de arrastre promedio en profundidad. Este enfoque permite aplicar la ecuación ?? tanto a plantas rígidas como flexibles, ajustando el coeficiente de arrastre para compensar la ausencia de modelado del movimiento de balanceo de las plantas.

$$F_x = 0,5 * \rho b_v N_v u |u| \quad (3.8)$$

Como se ve en la ecuación ??, la fuerza de arrastre depende linealmente de la densidad ρ el diámetro del tallo b_v , la densidad de vegetación N_v , el coeficiente c_d y de la velocidad corregida u .

Donde b_v es el diámetro de tallo de vegetación [m], N_v es la densidad de la vegetación [plantas/m²] y c_d es el coeficiente de arrastre y u es la velocidad cuando la vegetación se encuentra sobrepasando el nivel de agua, para caracterizar los tallos de vegetación sumergidos con alturas variables se corrigió la velocidad con las ecuaciones 3.9 y 3.10.

$$u_p = u / (1 - \phi) \quad (3.9)$$

$$\phi = V_s / V \quad (3.10)$$

Por tanto para esta tesis utilizaremos la presente ecuación 3.11 para parametrizar la vegetación donde el término de u_p es la velocidad promediada en vertical corregida por el efecto de vegetación.

$$F_x = 0,5 * \rho b_v N_v u_p |u_p| \quad (3.11)$$

3.5. Validación del modelo numérico

3.5.1. Bahía con pendiente sin vegetación

Synolakis (2007) realizó en el W.M. Keck Laboratory of Hydraulics and Water Resources del California Institute of Technology. El canal de experimentación es un tanque de olas diseñado para generar olas solitarias de diferentes alturas, con una longitud de 40.0 m, una profundidad de 0.78 m, y un ancho de 0.91 m.

El experimento con una ola solitaria de $H/d=0.0185$ se llevó a cabo en un tanque de olas que representaba una playa con una pendiente de 1:19.85. El objetivo principal era

evaluar el comportamiento de la propagación de la ola en la pendiente y comparar los resultados experimentales con los modelos teóricos lineales y no lineales.

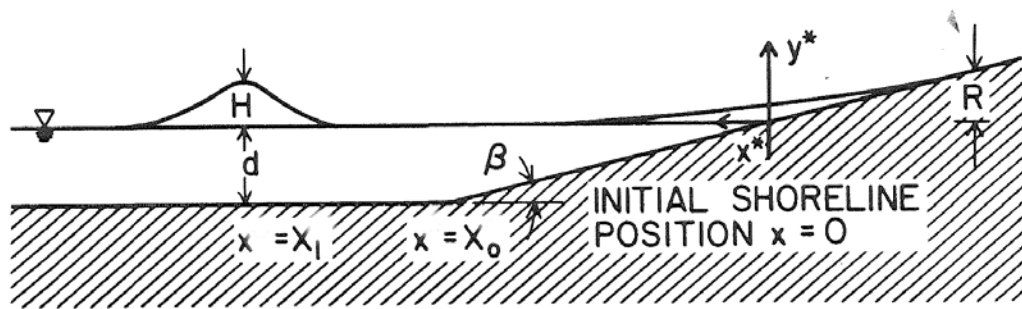


Figura 3.1: Definición del esquema de propagación de onda solitaria con pendiente en la playa. Reproducido de Synolakis (2007).

El procedimiento experimental incluyó la generación de olas solitarias utilizando un pistón controlado por un sistema hidráulico. Se midió la altura de la ola en diferentes puntos utilizando un medidor de la propagación y se compararon los perfiles de la superficie de la ola con las predicciones teóricas. Durante la propagación, se observó que los efectos no lineales se vuelven más importantes cerca de la orilla, y la teoría lineal sobreestimó la altura de la ola en esta región, como se esperaba debido a la disipación de la energía y los efectos viscosos.

El objetivo principal del estudio realizado por Synolakis (2007) es analizar la precisión y robustez de su modelo analítico. Para ello, se simula la propagación de una ola solitaria en una playa inclinada, como se muestra en la figura 3.1 reproduciendo las condiciones experimentales especificadas, es decir, con una relación de altura a profundidad de $H/d = 0,0185$. Los parámetros iniciales de la ola se establecieron con un punto de inicio $X_0 = 19,85$ y un punto de medición $x_1 = 37,35$. Los parámetros iniciales se resumen en el cuadro 3.1.

El análisis incluye la evaluación de la generación, propagación y disipación de la ola, con un enfoque particular en la capacidad del modelo para replicar tanto la forma como la velocidad de la ola observada. De esta manera, se busca validar el modelo propuesto y establecer su potencial aplicación en estudios futuros de dinámica costera y gestión de riesgos asociados a la erosión y la inundación costera.

El presente tema de tesis comparará los resultados de Synolakis (2007) con el modelo

Cuadro 3.1: Caracterización de los parámetros del caso Synolakis.

Parámetro	Valor	Unidades
Altura de onda	0.0185	m
Tirante de agua	1.0	m
Inicio de costa	37.35	m
Ecuación de fricción	Manning	-
Número de manning	0.01	-

Telemac-2D. Para la representación del tsunami, se utiliza como condiciones iniciales las siguientes ecuaciones 3.12 y 3.13:

$$n = d + H_i \operatorname{sech}^2\left[\sqrt{\frac{3H_i}{4d^3}}(x - x_0 - ct)\right] \quad (3.12)$$

$$u = \sqrt{gh} \frac{H_i}{d} \operatorname{sech}^2\left[\sqrt{\frac{3H_i}{4d^3}}(x - x_0 - ct)\right] \quad (3.13)$$

Aquí, los valores de velocidad y cota de agua son condiciones iniciales, donde n se refiere a elevación de la cota de agua, H_i denota la altura de ola, d denota la profundidad de agua y $c = \sqrt{g(h + H)}$ es la velocidad de la ola.

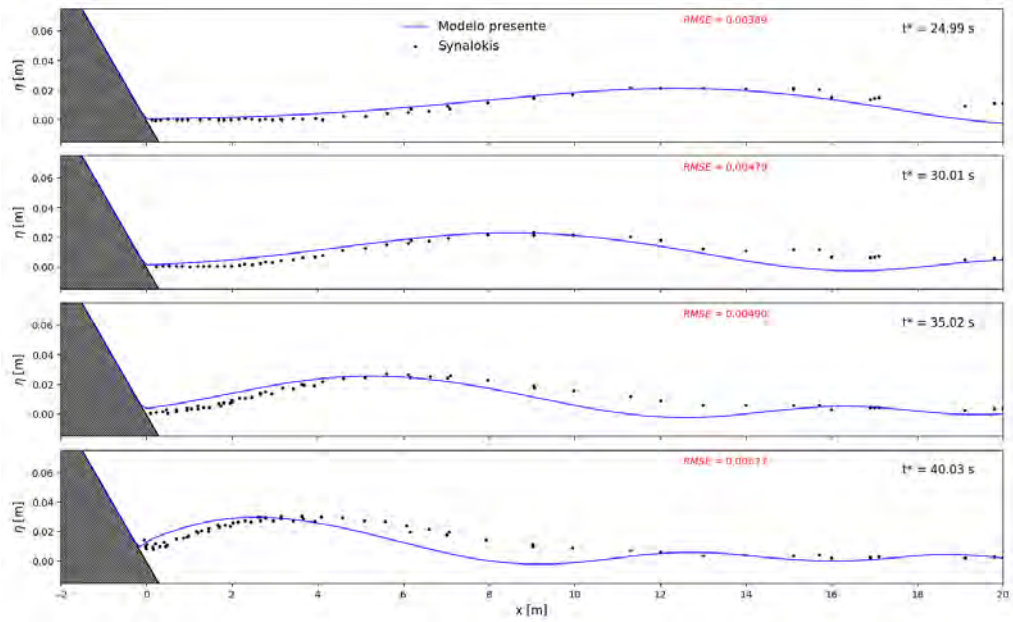


Figura 3.2: Comparación de los datos de Synalokis y el modelo Telemac-2d para una onda solitaria de 0.0185 con inclinación de 1:19.85. Se muestran perfiles de nivel de agua en $t = 25$, $t = 30$, $t = 35$ y $t = 40$, repectivamente..

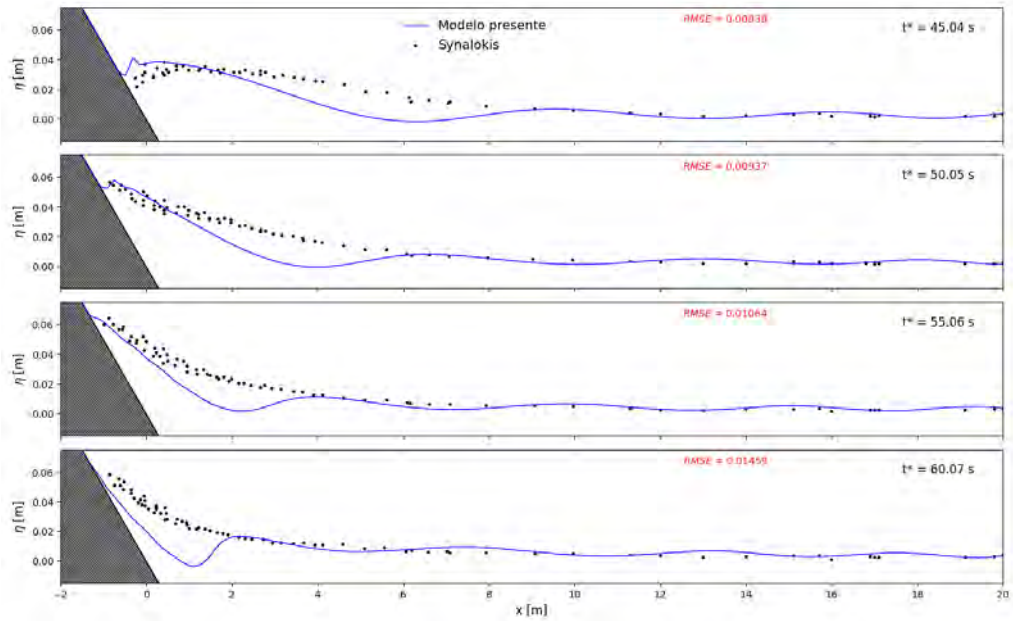


Figura 3.3: Comparación de los datos de Synalokis y el modelo Telemac-2d para una onda solitaria de 0.0185 con inclinación de 1:19.85. Se muestran perfiles de nivel de agua en $t = 45$, $t = 50$, $t = 55$ y $t = 60$, repectivamente..

En las figuras 3.2 y 3.3 se muestran la evolución del cota de agua en todo su dominio y en diferentes tiempos. Se ha obtenido un RMSE inferior a 0.015, lo que indica una alta precisión en la estimación de los datos. Con ello se evidencia que el modelo a utilizar en

esta tesis predice de manera precisa el comportamiento de las olas de un tsunami durante su recorrido hacia la playa.

3.5.2. Vegetación con altura fija en bahía sin pendiente

Huang et al. (2011) realizó experimentos en un canal de oleaje de paredes de vidrio en el Laboratorio de Hidráulica de la Universidad Tecnológica de Nanyang, Singapur. El objetivo fue analizar la interacción entre olas solitarias y modelos de vegetación. El canal tiene 32 m de longitud y 0.55 m de ancho, y se utilizó un generador olas solitarias deseadas. Los tallos de vegetación se fabricaron con tubos de Perspex de 0.01 m de diámetro, se colocaron en el lecho horizontal en el centro del canal.

Los datos recopilados en estos experimentos permiten una mejor comprensión del efecto de la vegetación sumergida en la disipación de la energía de las olas y sirven como base para validar modelos numéricos de interacción ola-vegetación en estudios de protección costera y mitigación de impactos en áreas vulnerables.

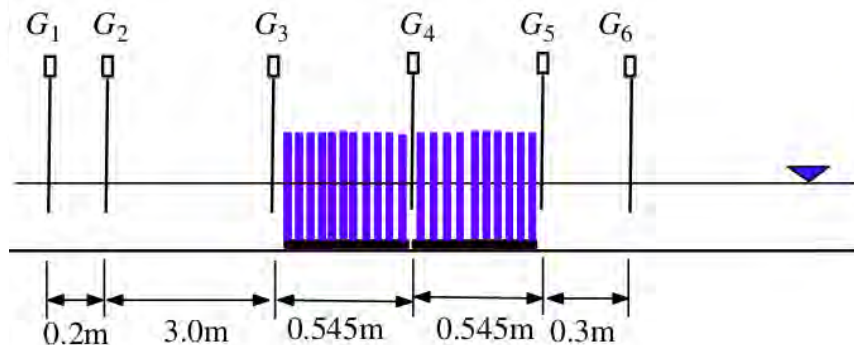


Figura 3.4: Ubicación de puntos de medición para un ancho de 1.090 m. Reproducido de Huang et al. (2011).

Se utilizó un escenario con un ancho de vegetación de 1.090 m y sondas de oleaje colocadas en ubicaciones específicas para registrar la elevación de la superficie. Los datos, que incluyen una profundidad de agua constante de 0.15 m y una altura de ola solitaria de 0.03 m, como muestra la figura 3.4 y fueron empleados para comparar los resultados con los del presente modelo numérico. Los parámetros iniciales se resumen en el cuadro 3.2.

La figura 3.5 muestra una buena precisión en la predicción de la propagación. Sin

Cuadro 3.2: Caracterización de los parámetros del caso Huang.

Parámetro	Valor	Unidades
Altura de onda	0.03	m
Tirante de agua	0.15	m
Inicio de costa	12	m
Ecuación de fricción	Manning	-
Número de manning	0.01	-

embargo, se observa un desfase en el eje x, el cual se considerará para su corrección en el siguiente caso de validación. Además, se nota que el modelo no logra capturar las oscilaciones presentes en las zonas ubicadas antes de la curva de onda.

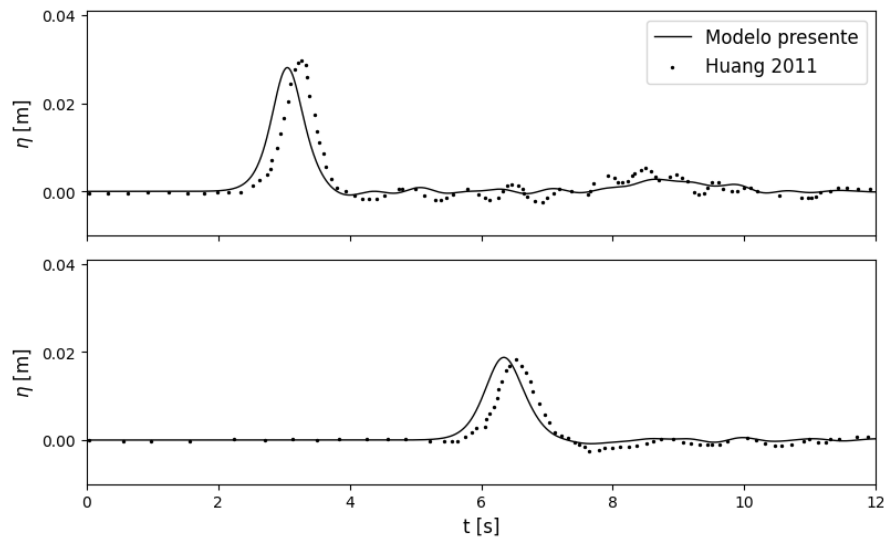


Figura 3.5: Comparación de valores de nivel de agua con nivel de referencia de 0.15 m..

3.5.3. Vegetación con altura variable en bahía sin pendiente

En el estudio de Zhang y Zhang (2023), se exploró de manera exhaustiva cómo la variación de las alturas en zonas de vegetación afecta la propagación y atenuación de las olas, utilizando simulaciones numéricas para analizar diferentes ratios de sumersión y densidades de vegetación. Para ello, los experimentos se basaron en el arreglo A propuesto por Huang et al. (2011), que permite mantener constantes las características del

entorno. Esta configuración permite focalizar el análisis en la influencia de la vegetación en la dinámica de las olas, aislando así otros factores ambientales y obteniendo resultados precisos. Los resultados sugieren la importancia de la variabilidad en las alturas de la vegetación como factor determinante en los patrones de atenuación observados, por tanto se tomará estos casos como base para estudiar esta variante en las alturas.

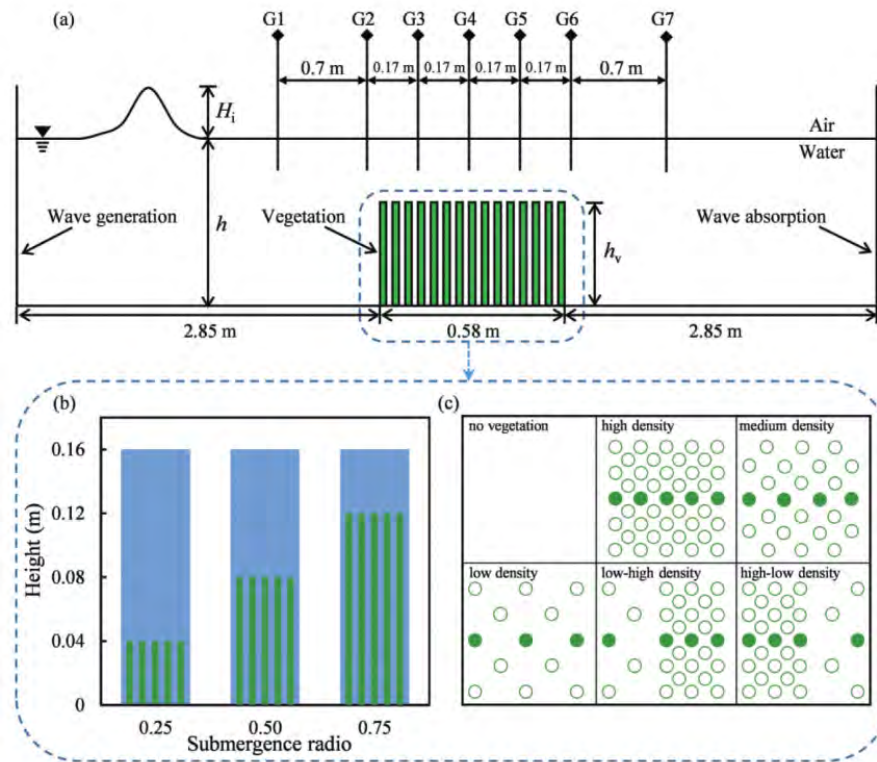


Figura 3.6: Esquema de los casos del modelo numérico. (a) Plano general y posición de medidores de nivel de agua (G1 a G7); (b) comparación de diagrama de varias alturas de vegetación, donde el azul representa el cuerpo de agua y el verde la vegetación; (c) representa el diagrama de diferentes densidades de vegetación y modo de distribución. Reproducido de Zhang y Zhang (2023).

Para el proceso de validación del código propuesto, se implementaron configuraciones de SR (ratio de sumergión) de 0.25, 0.50, 0.75, las cuales corresponden a alturas de vegetación 0.04, 0.08, 0.12 m. Estas configuraciones, como muestra la figura 3.6, permiten observar cómo distintos niveles de sumersión de vegetación (parcial, media y casi completo) influyen en la disipación de la energía de las olas. Este enfoque es esencial para comprender el efecto protector que la vegetación puede tener en entornos costeros y fluviales, donde la mitigación de la energía de las olas es crucial para la estabilidad de los

ecosistemas y la protección contra la erosión.

Cuadro 3.3: Caracterización de los parámetros de los diferentes casos de Zhang y Zhang (2023).

Casos	Densidad	Distribución	Ratios de sumersión
SV	-	-	-
A2	546	Uniforme	0.25
B2	546	Uniforme	0.50
C2	546	Uniforme	0.75
A3	1150	Uniforme	0.25
A3	1150	Uniforme	0.50
C3	1150	Uniforme	0.75
A4	2241	Uniforme	0.25
B4	2241	Uniforme	0.50
C4	2241	Uniforme	0.75

En términos de densidad de la vegetación, se evaluaron arreglos que incluían densidades altas, medias y bajas, correspondientes a 546, 1150 y 2241 tallos por metro cuadrado, respectivamente, como muestra el cuadro 3.3. La distribución de las plantas son colocadas de manera uniforme en área ubicada en medio de canal. Ello permitió estudiar cómo la concentración y dispersión de los elementos vegetales afecta la reducción de la altura de las olas y su energía asociada. La variabilidad en la densidad ayuda a analizar en qué medida una cobertura más densa o más dispersa altera la interacción con la ola y contribuye a la atenuación de su impacto. Además se tiene el caso SV donde no se considera la vegetación.

En el modelo, se representaron los tallos de vegetación mediante cilindros de 0.01 m de diámetro para asegurar una simulación fiel de la interacción entre las olas y los elementos vegetación. Esta configuración emula el papel de la vegetación costera en la disipación de la energía de las olas, reflejando su función como una barrera natural. La

onda de tsunami se inicia en la coordenada $x = 0$, con una altura incidente de 0.02 m y una profundidad de agua de 0.16 m, valores que permiten capturar el impacto inicial de la onda sobre la vegetación. Para parametrizar todos estos valores se utilizan en las ecuaciones 3.12 y 3.13, que es ingresado en el código como condición inicial, donde se imponen estos valores para tiempo cero.

Las mediciones se realizan en los puntos G2, G3, G4, G5 y G6, ver figura 3.6 ,distribuidos estratégicamente para registrar cómo la energía de la ola disminuye a medida que se propaga, proporcionando una visión detallada de los patrones de amortiguación en función de la distancia y la densidad de la vegetación. A continuación, se mostrará los casos SV, C2, C3, C4 en las figuras 3.7 - 3.10 como validación del modelo propuesto.

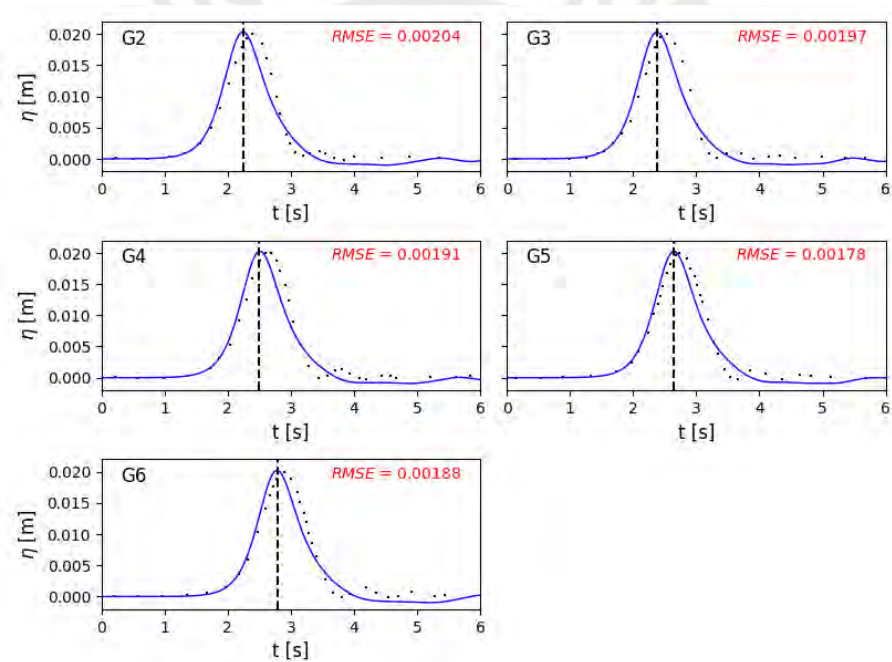


Figura 3.7: Evolución del nivel de agua en los puntos de medición G2 a G6 sin vegetación. Línea azul son los resultados del presente modelo y los puntos negros son datos del modelo de Zhang y Zhang (2023).

La figura 3.7 ilustra el escenario en el que la vegetación no está presente. Los puntos de muestreo son utilizados para obtener valores en tiempo, estos están ubicados en la coordenada 2.25, 2.37, 2.49, 2.65 y 2.79 m, etiquetados con los nombre G2, G3, G4, G5 y G6, respectivamente.

Se observa una menor asimetría en los valores de altura de la onda generados por el

modelo Telemac-2D en comparación a los valores reales. La altura máxima de la onda se representa correctamente en el modelo, aunque presenta un ligero desfase temporal con respecto a los datos observados. En la parte final de la curva (cola), los puntos negros indican los valores experimentales obtenidos en la experiencia física de Zhang y Zhang (2023), que corresponden a una región de reflexión de la onda. En esta zona, se observa que los datos reales presentan oscilaciones que reflejan la complejidad de la interacción entre la onda y los límites del espacio de experimentación. Sin embargo, la línea azul generada por Telemac-2D no logra captar dichas oscilaciones, lo que sugiere una limitación en la capacidad del modelo para reproducir los efectos de reflexión con la misma precisión que los datos experimentales.

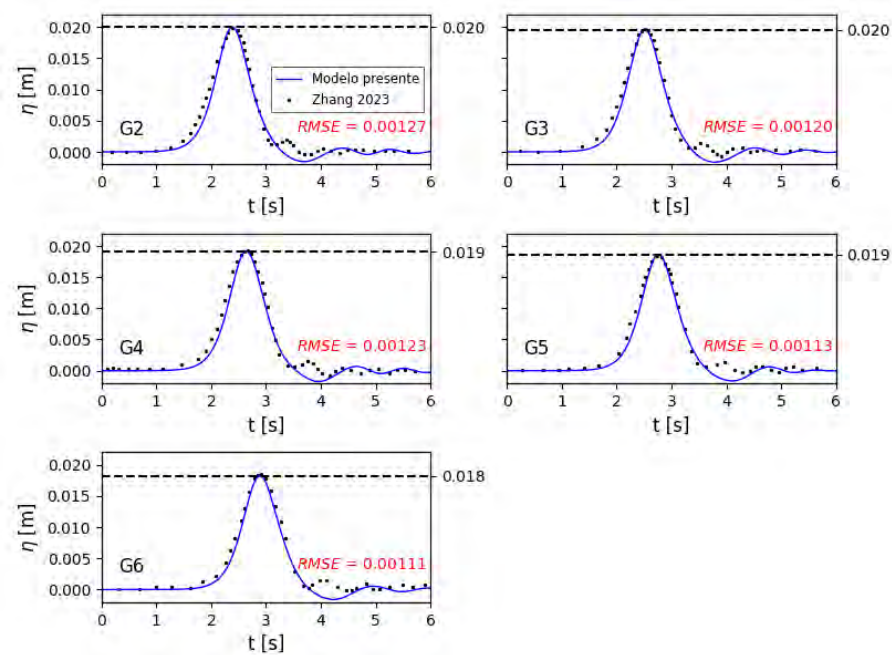


Figura 3.8: Evolución del nivel de agua en los puntos de medición G2 a G6 con vegetación de densidad 546 plantas/m^2 , caso C2. Línea azul son los resultados del presente modelo y los puntos negros son datos del modelo de Zhang y Zhang (2023).

La figura 3.8 es el escenario C2 con vegetación con densidad de 546 plantas/m^2 , la cual es colocada en zona inferior del lecho del mar, empezando en $x = 2.85 \text{ m}$ y terminado en $x = 3.43 \text{ m}$, los tallos son espaciados uniformemente en todo el ancho de dominio y con altura de vegetación tiene un valor de 0.12 m .

Los resultados obtenidos demuestran una atenuación correcta de la onda, como se

observa en la figura 3.8 con los niveles de agua medidos en cinco puntos de toma. En la zona inicial de la cola de la curva, se detecta una ligera subestimación de los valores de nivel de agua, aunque esta discrepancia es menor al 10 %. Por otro lado, en la parte final de la curva, se observa claramente el fenómeno de reflexión, en concordancia con los valores reales. Sin embargo, cabe señalar que el código utilizado en Telemac-2D no logra representar adecuadamente el proceso de reflexión, lo que sugiere que podrían ser necesarias mejoras en el modelado numérico para capturar con mayor precisión estos efectos en simulaciones futuras. El ajuste adecuado de estos parámetros es esencial para mejorar la precisión y la aplicabilidad del modelo en estudios de propagación de olas en entornos complejos.

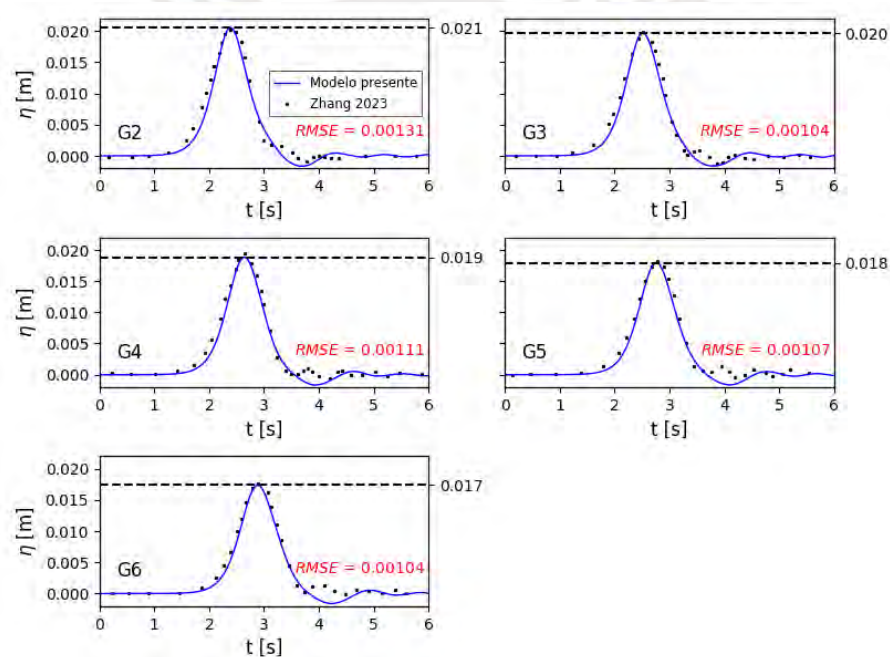


Figura 3.9: Evolución del nivel de agua en los puntos de medición G2 a G6 con vegetación de densidad 1150 plantas/m², caso C3. Línea azul son los resultados del presente modelo y los puntos negros son datos del modelo de Zhang y Zhang (2023).

La figura 3.9 representa el escenario C3 con vegetación de densidad media, configurada a 1150 plantas/m², manteniendo la misma disposición que en el caso anterior. Los resultados obtenidos para esta densidad demuestran una adecuada atenuación de la onda, como se observa en los niveles de agua registrados en todos los puntos de observación. Ello indica que el modelo simula eficazmente la disminución de la energía de la onda al

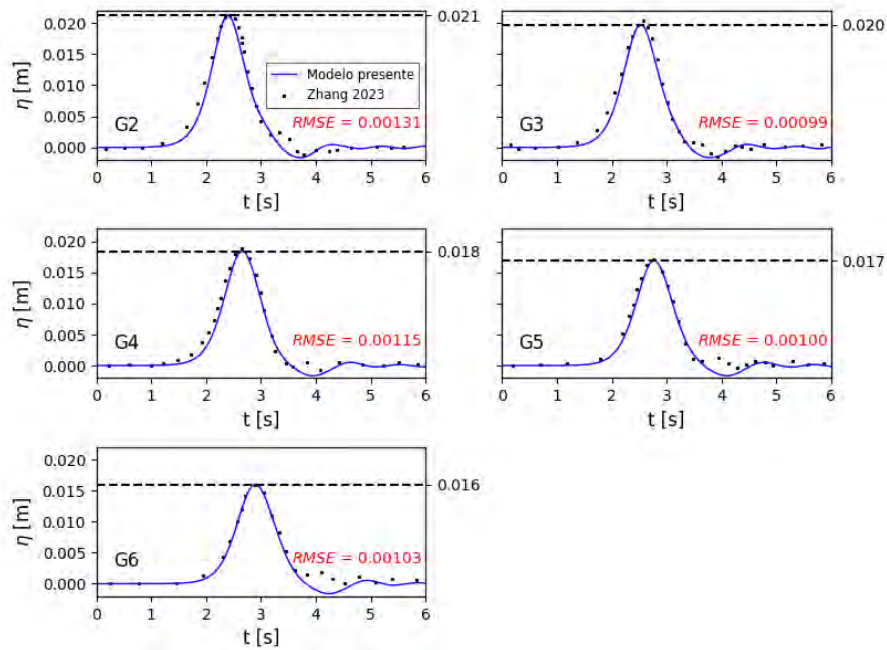


Figura 3.10: Evolución del nivel de agua en los puntos de medición G2 a G6 con vegetación de densidad 2241 plantas/m^2 , caso C4. Línea azul son los resultados del presente modelo y los puntos negros son datos del modelo de Zhang y Zhang (2023).

interactuar con la vegetación, lo que evidencia una disipación progresiva en la zona de estudio.

En todos los puntos de medición se identifica una limitación del modelo en la representación de la reflexión del agua en la zona frontal de la onda. Por lo que el modelo no captura con suficiente precisión el fenómeno de reflexión, lo cual puede impactar en la exactitud de la predicción en escenarios donde este efecto es significativo.

Por otro lado, se observa una correcta predicción en la zona de pendiente negativa de la curva, lo que indica que el modelo es capaz de simular con precisión la disipación de energía en esta sección. Sin embargo, en la zona inicial de la pendiente positiva, el modelo presenta una ligera subestimación de los niveles de agua.

La figura 3.10 representa el escenario de simulación C4 con una densidad de vegetación de 2241 plantas/m^2 , densidad alta. Los resultados muestran cómo el modelo reproduce correctamente la atenuación de la onda, tal como se evidencia en la representación de las alturas del nivel del agua en todos los puntos de observación.

Sin embargo, en todos los puntos de medición, se observa que el modelo presenta

limitaciones para representar adecuadamente la reflexión del agua en la parte frontal de la onda. Ello indica una falta de precisión en la predicción de la interacción entre la onda y la vegetación en esta área de reflexión.

En los instantes finales de la simulación, el modelo Telemac-2D propuesto predice oscilaciones en el nivel del agua, aunque en menor medida en comparación con escenarios de densidad de vegetación media y baja. Este comportamiento sugiere que una mayor densidad de vegetación podría estar amortiguando las oscilaciones, lo que podría ser relevante para futuros ajustes del modelo en entornos con alta densidad vegetal.

En las figuras 3.7, 3.8, 3.9 y 3.10, se observa un RMSE inferior a 0.002, lo que indica un alto grado de ajuste entre los valores simulados y los observados. Dado que el RMSE mide la dispersión de los errores respecto a la media, un valor tan bajo sugiere que las desviaciones son mínimas, validando así la precisión estadística de la predicción.

La Figura 3.11 presenta una visión general de todos los casos, los cuales son el SV, A2, A3, A4, B2, B3, B4, C2, C3 y C4 analizados en la investigación de Zhang y Zhang (2023). Mostrando una tendencia coherente con las expectativas. Se confirma que tanto el aumento en la densidad como en la altura de la vegetación contribuyen a disipar la energía de la onda. En particular, el coeficiente de amortiguamiento, definido como la relación entre la altura de la onda en un punto determinado y la altura incidente de la onda tsunami, permite cuantificar detalladamente la reducción de la energía de la onda al propagarse en la zona de vegetación.

Estos resultados contribuyen a la comprensión de cómo diferentes configuraciones de vegetación pueden ser utilizadas para mitigar el impacto de olas en zonas vulnerables, destacando la importancia de la planificación estratégica de cinturones de vegetación para la protección costera.

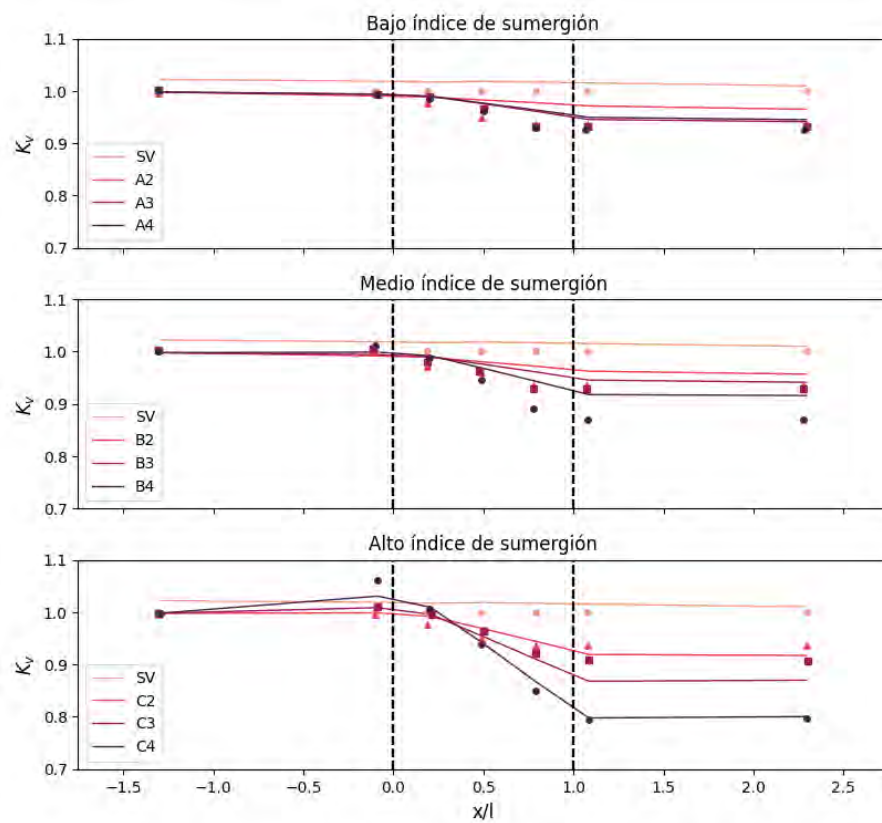


Figura 3.11: Comparación del coeficiente de amortiguamiento de las diferentes alturas para las 3 densidades con las simulaciones de Zhang y Zhang (2023).

Capítulo 4

Generación de escenarios del modelo desarrollado con Telemac-2D para predecir vegetación en costas

Una serie de escenarios numéricos se lleva a cabo para investigar la influencia de la altura de la vegetación en la propagación de ondas. Estos casos se basan en los esquemas propuestos por Zhang y Zhang (2023), con la única variación de que la vegetación se divide en dos partes, cada una con diferentes alturas de tallo. Esta división permite un análisis más detallado del efecto de las variaciones en la altura de la vegetación sobre la dispersión y absorción de las ondas.

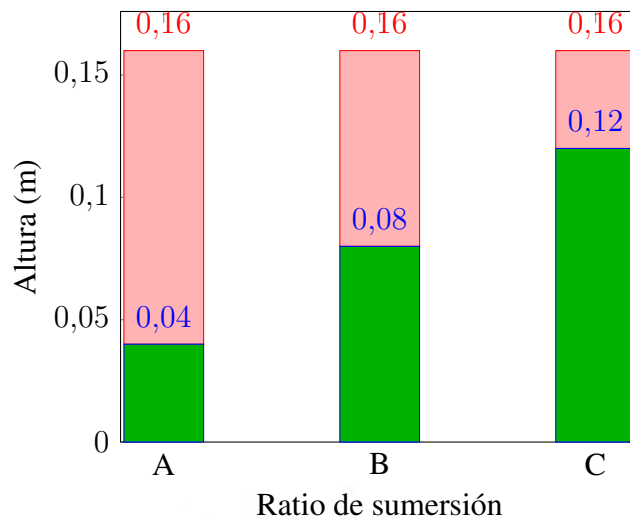


Figura 4.1: Comparación de diagrama de alturas de vegetación.

La figura 4.1 muestra las 3 configuraciones posibles en la vertical, la cual permite tener entendimiento de la altura de vegetación. La opción A es una altura de vegetación baja con una altura de 0.04 m, que representa el 25 % del tirante de agua, la opción B representa una altura de vegetación intermedia con una altura de 0.08 m la cual representa el 50 % del tirante de agua y por ultimo la opción C con una altura de 0.12 m representa una altura de vegetación alta.

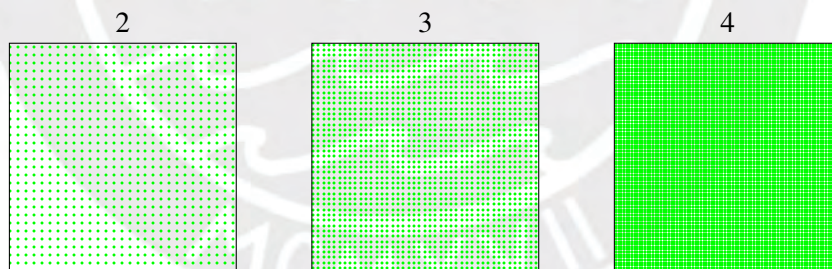


Figura 4.2: Comparación de densidad de vegetación.

Asimismo, se tiene las opciones de variaciones de la densidad como muestra la figura 4.2, también con 3 posibilidades. La primera es la opción 2, que representa un nivel de densidad bajo, con 546 tallos por metro cuadrado, la opción 3 representa un nivel intermedio de densidad de vegetación con 2241 tallos por metro cuadrado y por ultimo la opción 4 con una densidad alta de 2241 tallos por metro cuadrado. Los niveles de densidad hacen referencia a las configuraciones utilizadas por Zhang y Zhang (2023).

En esta tesis se evaluarán seis escenarios específicos, detallados en la cuadro 4.1, para analizar cómo distintas densidades y patrones de vegetación afectan la propagación de ondas.

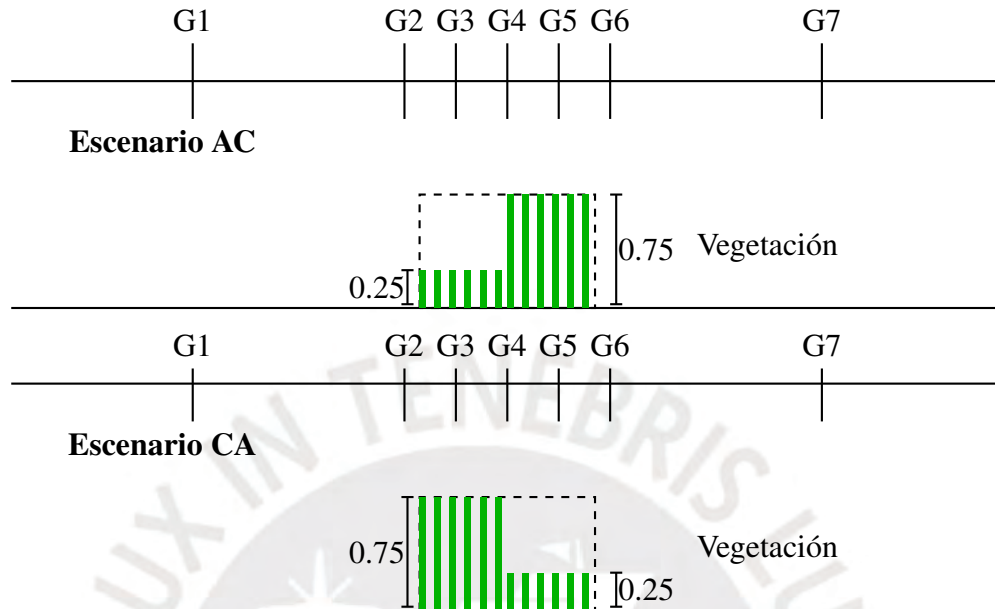


Figura 4.3: Esquema de los escenarios numéricos propuestos.

El caso A representa una zona de vegetación con una densidad baja, de 546 tallos por metro cuadrado, distribuidos de manera uniforme. En la configuración 1, la primera zona de vegetación presenta un índice de sumergimiento de 0.25, seguido de una segunda zona con un índice de 0.75, lo cual representa una transición abrupta de vegetación menos densa a más densa. En la configuración 2, la secuencia se invierte, comenzando con un índice de sumergimiento de 0.75 y reduciéndose a 0.25, simulando un cambio de vegetación densa a menos densa.

El caso B se caracteriza por una densidad de vegetación media, con 1150 tallos por metro cuadrado, manteniendo el mismo patrón de alturas de tallo y los índices de sumergimiento para ambas configuraciones. Esta variación permite analizar cómo una densidad moderada afecta la interacción de las ondas con la vegetación.

El caso C, finalmente, representa una densidad alta de 2241 tallos por metro cuadrado, con el mismo patrón de sumergimiento y disposición de alturas de tallo en ambas configuraciones, permitiendo evaluar cómo una mayor densidad vegetal influye en la dispersión y absorción de las ondas.

Cuadro 4.1: Caracterización de los parámetros de los diferentes casos de simulación.

Casos	Densidad	Distribución	Ratios de sumersión
AC2	546	Uniforme	0.25 / 0.75
CA2	546	Uniforme	0.75 / 0.25
AC3	1150	Uniforme	0.25 / 0.75
CA3	1150	Uniforme	0.75 / 0.25
AC4	2241	Uniforme	0.25 / 0.75
CA4	2241	Uniforme	0.75 / 0.25
AB2	546	Uniforme	0.25 / 0.50
BA2	546	Uniforme	0.50 / 0.25
AB3	1150	Uniforme	0.25 / 0.50
BA3	1150	Uniforme	0.50 / 0.25
AB4	2241	Uniforme	0.25 / 0.50
BA4	2241	Uniforme	0.50 / 0.25

4.1. Alturas mixtas: bajas a altas y altas a bajas

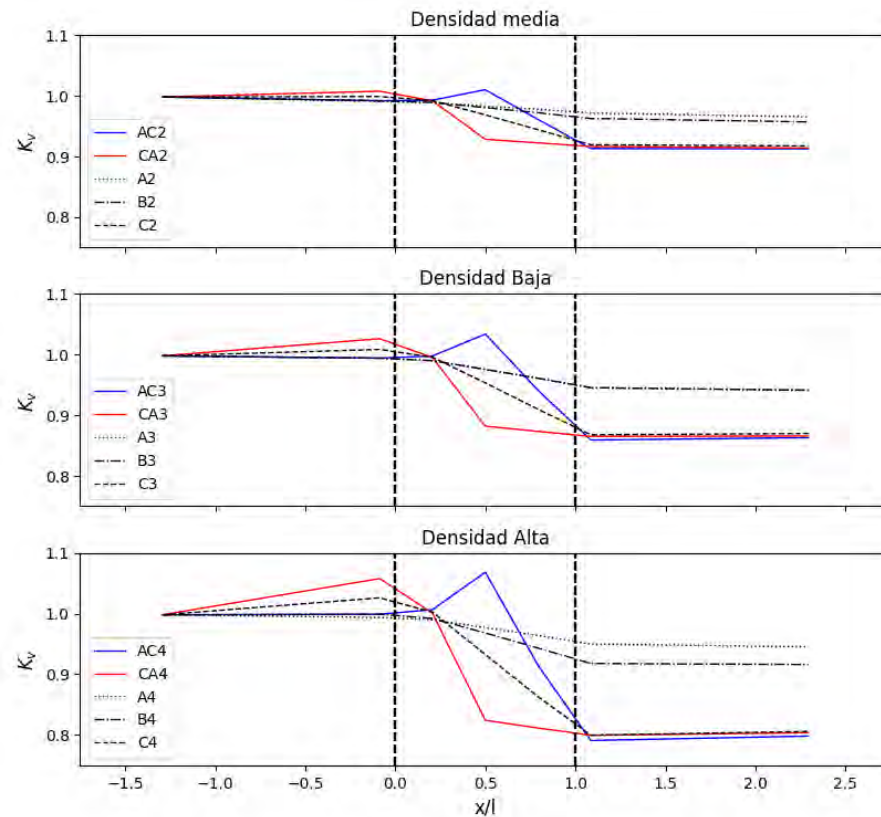


Figura 4.4: Comparación del coeficiente de amortiguamiento de cambio de alturas bajas a altas y altas a bajas, con alturas bajas, medias y altas para las 3 densidades.

La figura 4.4 muestra claramente que el cambio de alturas de vegetación, tanto de bajas a altas, caso AC4, como altas a bajas, caso CA4, tiende a un mismo valor de coeficiente amortiguación, viendo solo una pequeña diferencia entre ellas, donde el esquema de alturas de vegetación empezando con altas a bajas disipa mejor.

En cuanto la comparación con el caso C4, la cual mantiene la misma densidad pero el ratio de amortiguamiento es de 0.75 en todo el ancho, se observa que los dos casos anteriores presentan un valor muy cercano de ratio de amortiguamiento, dando indicios que se puede optimizar el uso de profundidad de vegetación al implementarlo en costas.

Asimismo se observa que el casos AC, en donde la vegetación pasa de bajos a altos tallos de vegetación, un aumento del nivel de agua en zona de interfaz entre el cambio configuración; mientras que se observa lo opuesto el los caso CA, siendo más suavizado el amortiguamiento.

4.2. Alturas mixtas: bajas a medias y medias a bajas

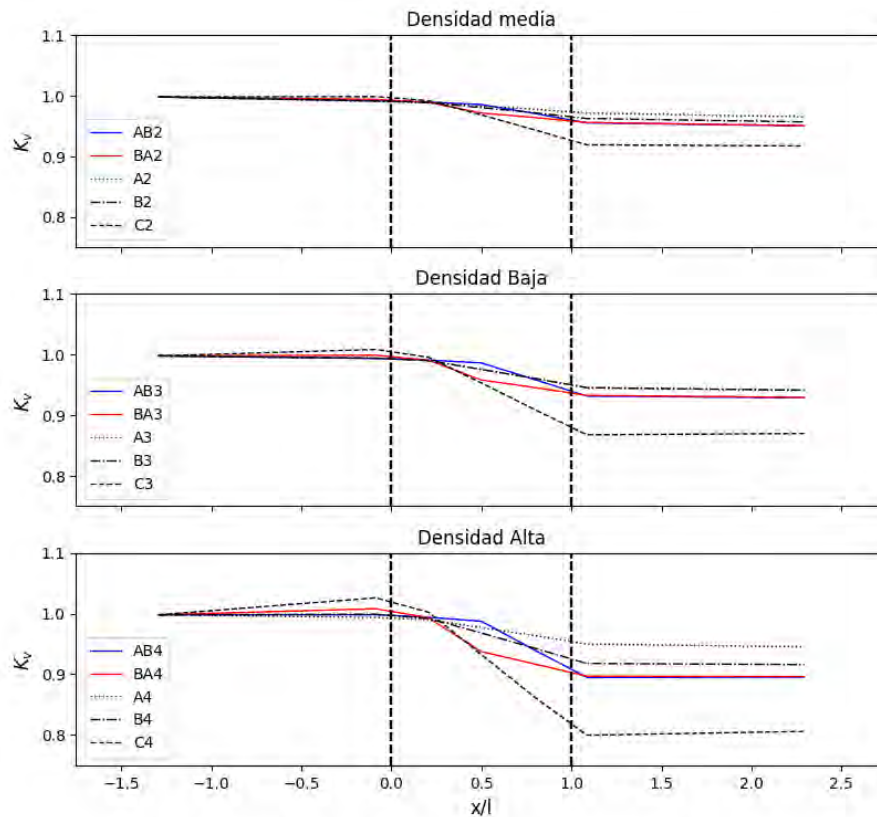


Figura 4.5: Comparación del coeficiente de amortiguamiento de cambio de alturas bajas a medias y medias a bajas, con alturas bajas, medias y altas para las 3 densidades.

Para densidades altas, los casos AB4 y BA4, con por alturas mixtas y ratios de vegetación de 0.25 y 0.50, muestran una mejor amortiguación en comparación con el caso B4, que tiene la misma densidad pero un ratio de sumersión uniforme de 0.50. Este comportamiento también se observa en densidades medias y bajas, donde los casos mixtos presentan una ligera mejora en la amortiguación al incrementarse la densidad.

El caso AB4 tiene un ratio de amortiguación de 0.895; mientras que el caso BA4, un valor de 0.896; el caso B4 un valor de 0.9159. Mostrando que el 50 % de la vegetación puede tener menor altura y se puede obtener valores de amortiguación cercanos a que si estuviera todo la misma altura, con una disminución del volumen de 25 %.

En general, se observa que en todas las densidades, la vegetación con alturas mixtas y ratios de sumersión de 0.25 y 0.50 no alcanza el nivel de amortiguación logrado por el caso de ratio uniforme de 0.75.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajos futuros

5.1. Conclusiones

En este estudio, se realizó un modelado numérico de la interacción entre una onda solitaria y vegetación sumergida mediante un nuevo código desarrollado en Telemac-2D. Este código se basa en la parametrización de las características de las zonas de vegetación utilizando la formulación de Morison, que idealiza las plantas como cilindros verticales y rígidos. Esta simplificación permite representar la vegetación en el modelo de forma adecuada para evaluar sus efectos en la dinámica de las olas.

- La vegetación se idealiza como cilindros verticales rígidos mediante la formulación de Morison, que descompone la fuerza total en componentes de arrastre (C_D).
- Se resolvieron las ecuaciones de Boussinesq en su forma dispersiva, adecuadas para capturar tanto la propagación como la dispersión de la onda en dominios de poca profundidad y longitudes de onda comparables al calado.

A modo de conclusión, se confirma la fiabilidad del código propuesto mediante un proceso de validación exhaustivo frente a ensayos ampliamente reconocidos en la literatura. Los resultados obtenidos demuestran que el modelo reproduce de forma robusta la evolución temporal de la superficie libre, los campos de velocidad y los coeficientes de reflexión y transmisión, manteniendo los errores dentro de márgenes aceptables para aplicaciones de ingeniería costera.

- *Casos de Synolakis (1987)*: 8 experimentos con ondas solitarias rompiendo sobre pendientes planas. El modelo arrojó un RMSE $< 10^{-2}$, evidenciando buena captura de la fase y la amplitud de la onda.
- *Casos de Zhang et al. (2023)*: 10 configuraciones con vegetación uniforme de altura 0.04 m–0.12 m y densidades de hasta 2241 tallos·m⁻². Se obtuvo un RMSE $< 2 \times 10^{-3}$, lo que confirma la precisión bajo condiciones de disipación intensiva.
- En ambos conjuntos se reprodujeron perfiles temporales de superficie libre, campos de velocidad y coeficientes de reflexión/transmisión dentro del 5 % del dato experimental.

El coeficiente *cd* fue calibrado utilizando los resultados de investigaciones pasadas, aplicados a vegetación de altura uniforme en diferentes escenarios de densidad vegetación. Esta calibración asegura que el modelo refleje con precisión las fuerzas de arrastre ejercidas por la vegetación en función de la densidad y la altura de las plantas. Los resultados obtenidos muestran que las ecuaciones de Boussinesq, junto con la formulación de Morison, pueden simular satisfactoriamente la propagación de una onda en una bahía, capturando los efectos de disipación de energía que produce la vegetación sumergida.

Se identificó una relación directa entre las características de las zonas de vegetación y las alturas de las plantas. El código desarrollado permite analizar la influencia de la altura, densidad y disposición de la vegetación en la disipación de energía de la ola, evaluando el efecto de estas variables en la amortiguación de la ola.

A partir de los resultados numéricos y experimentales, se derivan lineamientos prácticos para el diseño de barreras vegetales que maximicen la disipación de energía de las olas y, al mismo tiempo, minimicen los costos de instalación y mantenimiento. Las siguientes recomendaciones constituyen una guía inicial para ingenieros y planificadores costeros:

- Al recortar la altura en la primera o última sección, los coeficientes de amortiguamiento se llegan a un valor cercano a vegetación sin recorte en altura, con diferencias menores al, permitiendo ahorrar hasta un 25 % de biomasa.

- Diseñar franjas de vegetación con altura escaladas que reduzcan el volumen de plantación y los costos de mantenimiento.

Lo que sugiere la posibilidad de optimizar el uso de vegetación en zonas costeras y en la planificación de barreras naturales para mitigar el impacto de olas en áreas específicas. Este hallazgo abre nuevas oportunidades para explorar configuraciones de vegetación más eficientes en términos de costo y recursos naturales sin comprometer la efectividad en la reducción de la energía de las olas.

5.2. Trabajos futuros

- Profundizar en estudiar la altura mixta de vegetación en un modelo tridimensional.

Actualmente, el análisis de la vegetación con alturas mixtas se ha realizado en dos dimensiones, lo cual limita la capacidad de capturar detalles complejos en la interacción vertical de las olas con la vegetación. Extender este estudio a un modelo tridimensional permitiría observar los efectos verticales y las variaciones en la amortiguación de energía que surgen debido a las distintas alturas y densidades de la vegetación. Este enfoque sería fundamental para una representación más realista de los ecosistemas costeros.

- Obtener el valor del coeficiente de drag mediante métodos de predicción estadísticos.

La calibración del coeficiente cd en estudios previos se ha realizado basándose en mediciones experimentales específicas. Sin embargo, la utilización de modelos de predicción estadísticos podría mejorar la precisión en la estimación de este coeficiente al adaptarse a condiciones variadas de vegetación y dinámica de olas. Métodos de aprendizaje automático, como regresión múltiple o redes neuronales, podrían emplearse para identificar patrones en datos experimentales, ofreciendo un coeficiente de drag ajustado a distintas configuraciones de vegetación.

- Adaptar una nueva ecuación de turbulencia para vegetación en costas.

La interacción de olas con vegetación densa genera efectos de turbulencia complejos que las ecuaciones tradicionales pueden no capturar completamente. Adaptar una ecuación de turbulencia que considere la geometría y disposición de la vegetación costera permitiría una mejor predicción de la disipación de energía y las fluctuaciones en el flujo de agua. Esta ecuación podría contribuir a mejorar la precisión de modelos numéricos para entornos costeros y ser útil en proyectos de ingeniería ambiental y restauración de ecosistemas.

- Utilizar el modelo en casos real de interacción costa con vegetación.

Una vez que el modelo haya sido refinado, se propone su aplicación en estudios de casos reales donde la vegetación costera actúa como una barrera natural frente al impacto de olas. Estos casos de estudio ofrecerían una validación del modelo en condiciones prácticas y permitirían obtener datos relevantes sobre su efectividad en la reducción de la energía de las olas. Asimismo, estas aplicaciones podrían aportar información valiosa para el diseño y gestión de barreras vegetales en zonas costeras, facilitando su uso como una herramienta de mitigación de impactos en áreas vulnerables.

- Realizar experimentos físicos del caso de alturas mixtas.

Estos experimentos incluirán la construcción de modelos a escala, la instrumentación para la medición de parámetros clave y la comparación de los resultados experimentales con modelos teóricos. Los datos obtenidos permitirán validar y mejorar los enfoques analíticos y computacionales utilizados en el presente estudio, contribuyendo al desarrollo de estrategias de diseño más eficientes y seguras.

Bibliografía

- Williams, J. H., Wilson, T. M., Horspool, N., Paulik, R., Wotherspoon, L. M., Lane, E. M., & Hughes, M. W. (2020). Assessing transportation vulnerability to tsunamis: utilising post-event field data from the 2011 Tōhoku tsunami, Japan, and the 2015 Illapel tsunami, Chile. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 20, 451-470. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:212787436>
- Kilinc, I., Hayir, A., & Cigizoglu, H. K. (2009). Wave dispersion study for tsunami propagation in the Sea of Marmara. *Coastal Engineering*, 56, 982-991. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:129252898>
- jiang Liu, H., Shimozone, T., Takagawa, T., Okayasu, A., Fritz, H. M., Sato, S., & Tajima, Y. (2013). The 11 March 2011 Tohoku Tsunami Survey in Rikuzentakata and Comparison with Historical Events. *Pure and Applied Geophysics*, 170, 1033-1046. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:129670595>
- Wuppukondur, A., & Baldock, T. E. (2022). Physical and numerical modelling of representative tsunami waves propagating and overtopping in converging channels. *Coastal Engineering*. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:247808231>
- León, T., Wuppukondur, A., Easton, G., Tang, H., & Lau, A. (2024). Improving tsunami hazard assessment in central-north Chile using forward (TELEMAC) and inverse (TSUFLIND) models for the 2015 Illapel tsunami. *Applied Ocean Research*. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:270893819>
- Camfield, F. E. (1983). Wind-Wave Growth with High Friction. *Journal of Waterway Port Coastal and Ocean Engineering-asce*, 109, 115-117. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:128748945>

- Augustin, L., Irish, J. L., & Lynett, P. J. (2009). Laboratory and numerical studies of wave damping by emergent and near-emergent wetland vegetation. *Coastal Engineering*, 56, 332-340. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:15609576>
- Métois, M., Socquet, A., & Vigny, C. (2012). Interseismic coupling, segmentation and mechanical behavior of the central Chile subduction zone. *Journal of Geophysical Research*, 117. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:31800719>
- Liu, P. L.-F., Lynett, P. J., Fernando, H. J. S., Jaffe, B. E., Fritz, H. M., Higman, B., Morton, R. A., Goff, J. R., & Synolakis, C. (2005). Observations by the International Tsunami Survey Team in Sri Lanka. *Science*, 308, 1595 -1595. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:11312069>
- Nemati, F., Leonard, L. J., Thomson, R. E., Lintern, G., & Kouhi, S. (2023). Numerical modeling of a potential landslide-generated tsunami in the southern Strait of Georgia. *Natural Hazards*, 117, 2029-2054. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:257396316>
- Tanaka, N. (2009). Vegetation bioshields for tsunami mitigation: review of effectiveness, limitations, construction, and sustainable management. *Landscape and Ecological Engineering*, 5, 71-79. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:207266608>
- Peng, M., Li, S., Gao, L., Zhu, Y., & Zhang, J. (2024). A novel local-drag-force-based approach for simulating wave attenuation by mangrove forests using a 3D-SPH method. *Ocean Engineering*. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:269683062>
- Maza, M., Lara, J. L., & Losada, I. J. (2015). Tsunami wave interaction with mangrove forests: A 3-D numerical approach. *Coastal Engineering*, 98, 33-54.
- Huang, Z., Yao, Y., Sim, S. Y., & Yao, Y. (2011). Interaction of solitary waves with emergent, rigid vegetation. *Ocean Engineering*, 38(10), 1080-1088.
- Zhang, C., & Zhang, M. (2023). Numerical investigation of solitary wave attenuation and mitigation caused by vegetation using OpenFOAM. *Coastal Engineering Journal*, 65, 198 -216.

- Marsooli, R., & Wu, W. (2014). Numerical investigation of wave attenuation by vegetation using a 3D RANS model. *Advances in Water Resources*, 74, 245-257. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:122654591>
- Shimizu, Y., & Tsujimoto, T. Comparison of flood-flow structure between compound channel and channel with vegetated zone [Cited 21 times]. En: En *Proceedings of 25th IAHR Congress*. Cited 21 times. Delft, The Netherlands, 1993.
- Stratigaki, V., Manca, E., Prinos, P. E., Losada, I. J., Lara, J. L., Sclavo, M., Amos, C. L., Cáceres, I., & Sánchez-Arcilla, A. (2011). Large-scale experiments on wave propagation over *Posidonia oceanica*. *Journal of Hydraulic Research*, 49, 31 -43. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:120116525>
- Wang, Y., Liu, Y. G., Yin, Z., Jiang, X., & Yang, G. (2023). Numerical simulation of wave propagation through rigid vegetation and a predictive model of drag coefficient using an artificial neural network. *Ocean Engineering*.
- Hu, Z., Suzuki, T., Zitman, T. J., Uittewaal, W., & Stive, M. J. F. (2014). Laboratory study on wave dissipation by vegetation in combined current–wave flow. *Coastal Engineering*, 88, 131-142. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:129600401>
- Hu, Z., Lian, S., Wei, H., Li, Y., Stive, M. J. F., & Suzuki, T. (2021). Laboratory data on wave propagation through vegetation with following and opposing currents. *Earth System Science Data*. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:237476284>
- Ziaadini-Dashtekhaki, M., Ghaeini-Hessaroeiyeh, M., & Hamzehei-Javaran, S. (2021). Numerical Simulation of Run-Up and Land Inundation on the Vegetated Sloping Beach. *Journal of Earthquake and Tsunami*. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:234877740>
- Beudin, A., Kalra, T. S., Ganju, N. K., & Warner, J. C. (2017). Development of a coupled wave-flow-vegetation interaction model. *Computers Geosciences*, 100, 76-86. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.cageo.2016.12.010>
- Yao, Y., Du, R., Jiang, C., Tang, Z., & Yuan, W. (2015). Experimental Study of Reduction of Solitary Wave Run-Up by Emergent Rigid Vegetation on a Beach. *Jour-*

nal of Earthquake and Tsunami, 09(05), 1540003. <https://doi.org/10.1142/S1793431115400035>

- Zhang, H., Zhang, M., Ji, Y., Wang, Y., & Xu, T. (2019). Numerical study of tsunami wave run-up and land inundation on coastal vegetated beaches. *Comput. Geosci.*, 132, 9-22. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:198359234>
- Liu, X., Landry, B. J., & García, M. H. (2008). Two-dimensional scour simulations based on coupled model of shallow water equations and sediment transport on unstructured meshes. *Coastal Engineering*, 55, 800-810. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:120761597>
- Thuy, N. B., Nandasena, N., Dang, V. H., & Tanaka, N. (2018). Simplified formulae for designing coastal forest against tsunami run-up: one-dimensional approach. *Natural hazards*, 92, 327-346.
- Zhao, C., Zhang, Y., Tang, J., & Shen, Y. (2020). Numerical investigation of solitary wave run-up attenuation by patchy vegetation. *Acta Oceanologica Sinica*, 39(5), 105–114. <https://doi.org/10.1007/s13131-020-1572-6>
- Synolakis, C. E. (2007). *The runup of long waves* (Tesis doctoral). California Institute of Technology.

Anexos



Índice de anexos

=°

A	Derivación de presión hidrostática	56
B	Derivación de las ecuaciones de Saint Venant	58
C	Módulo de vegetación en Telemac	73
D	Archivos de configuración Telemac	80



Anexos A

Derivación de presión hidrostática

La ecuación de gobierno de Navier Stokes expresadas en su forma indexial, mostrando la conservación de momento como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad (\text{A.1})$$

Donde u_i es la componente velocidad en la dirección i , ρ es la densidad del fluido, f_i es la fuerza externa en dirección i y τ es el tensor de esfuerzo cortante.

Se expande el eje z donde actúa la gravedad y la presión.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho w u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho w v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w w) = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho g \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho w u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho w v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w^2) = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho g \quad (\text{A.3})$$

Para flujos newtonianos, homogéneos y isotrópicos, el tensor de esfuerzos se escribe como:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho w u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho w v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w^2) = \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \mu \frac{\partial w}{\partial z} - \rho g \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho w u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho w v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w^2) = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \rho g \quad (\text{A.6})$$

Debido a que se cumple presión hidroestática, la gradiente de velocidades o la velocidad debe ser 0.

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial t}(\rho w)} + \cancel{\frac{\partial}{\partial x}(\rho w u)} + \cancel{\frac{\partial}{\partial y}(\rho w v)} + \cancel{\frac{\partial}{\partial z}(\rho w^2)} = \cancel{\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}} + \cancel{\mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}} - \frac{\partial p}{\partial z} + \cancel{\mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}} - \rho g \quad (\text{A.7})$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (\text{A.9})$$

$$dp = -\rho g dz \quad (\text{A.10})$$

$$\int_{Z_s}^z dp = - \int_{Z_s}^z \rho g dz \quad (\text{A.11})$$

$$p - p_{Z_s} = -\rho g(z - Z_s) \quad (\text{A.12})$$

Asumo que la presión atmosférica es 0.

$$p = \rho g(Z_s - z) \quad (\text{A.13})$$

Anexos B

Derivación de las ecuaciones de Saint

Venant

La ecuación de gobierno de Navier Stokes expresadas en su forma indexial, mostrando la conservación de momento como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_i \rho) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad (\text{B.1})$$

Donde u_i es la componente velocidad en la dirección i , ρ es la densidad del fluido, f_i es la fuerza externa en dirección i y τ es el tensor de esfuerzo cortante.

La forma expandida de la Ec. B.1 pueden ser reescritos en sus 3 ejes como:

En x

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u w) = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho f_x \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v w) = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho f_y \quad (\text{B.3})$$

En y

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho w u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho w v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w^2) = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho f_z \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v w) = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho f_y \quad (\text{B.5})$$

En z

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho w u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho w v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w w) = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho f_z \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho w u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho w v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w^2) = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho f_z \quad (\text{B.7})$$

Para obtener las ecuación de momento promediada en la vertical para un plano horizontal, se procederá a integrar verticalmente desde el fondo hasta superficie de agua. Este proceso se realizará para cada uno de los ejes correspondientes, representados por las ecuaciones B.2, B.4 y B.6.

En primer lugar, se considerará la ecuación de momento en el eje x (B.2).

$$\int_{z_b}^{z_s} \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u w) \right) dz = \int_{z_b}^{z_s} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho f_x \right) dz \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} & \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) dz + \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) dz + \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v) dz + \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial z}(\rho u w) dz \\ & = \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dz + \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dz + \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz + \int_{z_b}^{z_s} \rho f_x dz \quad (\text{B.9}) \end{aligned}$$

Aplicando la regla integral de Leibniz, definida en la ecuación B.53, se describe como se deriva una integral definida cuando sus límites de integración. El primer término del lado derecho de la ecuación corresponde a la derivada parcial de F respecto a x, integrada en la vertical desde Z_f hasta Z_s . Los términos adicionales representan las contribuciones de las variaciones de los límites superior (Z_s) e inferior (Z_f) de la integral respecto a x.

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{Z_s} F dz = \int_{Z_f}^{Z_s} \frac{\partial F}{\partial x} dz + F(x, y, Z_s) \frac{\partial Z_s}{\partial x} - F(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial x} \quad (\text{B.10})$$

$$\int_{Z_f}^{Z_s} \frac{\partial F}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{Z_s} F dz - F(x, y, Z_s) \frac{\partial Z_s}{\partial x} + F(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial x} \quad (\text{B.11})$$

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \rho u dz - \rho_s u_s \frac{\partial z_s}{\partial t} + \rho_b u_b \frac{\partial z_b}{\partial t} \quad (\text{B.12})$$

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \rho u^2 dz - \rho_s u_s^2 \frac{\partial z_s}{\partial x} + \rho_b u_b^2 \frac{\partial z_b}{\partial x} \quad (\text{B.13})$$

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \rho uv dz - \rho_s u_s v_s \frac{\partial z_s}{\partial y} + \rho_b u_b v_b \frac{\partial z_b}{\partial y} \quad (\text{B.14})$$

Para el siguiente no se aplica Leibniz rule, solo se elimina la derivada parcial con dz.

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} dz = \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} dz = (\rho uw) \Big|_{z_b}^{z_s} = \rho_s u_s w_s - \rho_b u_b w_b \quad (\text{B.15})$$

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{xx} dz - (\tau_{xx})_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + (\tau_{xx})_b \frac{\partial z_b}{\partial x} \quad (\text{B.16})$$

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{xy} dz - (\tau_{xy})_s \frac{\partial z_s}{\partial y} + (\tau_{xy})_b \frac{\partial z_b}{\partial y} \quad (\text{B.17})$$

Para el siguiente no se aplica Leibniz rule, solo se elimina la derivada parcial con dz.

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz = \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz = \tau_{xz} \Big|_{z_b}^{z_s} = (\tau_{xz})_s - (\tau_{xz})_b \quad (\text{B.18})$$

Reemplazando cada término en la ecuación original.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \rho u dz - \rho_s u_s \frac{\partial z_s}{\partial t} + \rho_b u_b \frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \rho u^2 dz - \rho_s u_s^2 \frac{\partial z_s}{\partial x} + \rho_b u_b^2 \frac{\partial z_b}{\partial x} \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \rho u v dz - \rho_s u_s v_s \frac{\partial z_s}{\partial y} + \rho_b u_b v_b \frac{\partial z_b}{\partial y} + \rho_s u_s w_s - \rho_b u_b w_b = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{xx} dz \\
& - (\tau_{xx})_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + (\tau_{xx})_b \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{xy} dz - (\tau_{xy})_s \frac{\partial z_s}{\partial y} + (\tau_{xy})_b \frac{\partial z_b}{\partial y} \\
& + (\tau_{xz})_s - (\tau_{xz})_b + \int_{z_b}^{z_s} \rho f_x dz \quad (\text{B.19})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \rho u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \rho u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \rho u v dz - \rho_s u_s \frac{\partial z_s}{\partial t} - \rho_s u_s^2 \frac{\partial z_s}{\partial x} - \rho_s u_s v_s \frac{\partial z_s}{\partial y} \\
& + \rho_s u_s w_s + \rho_b u_b \frac{\partial z_b}{\partial t} + \rho_b u_b^2 \frac{\partial z_b}{\partial x} + \rho_b u_b v_b \frac{\partial z_b}{\partial y} - \rho_b u_b w_b = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{xx} dz \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{xy} dz - (\tau_{xx})_s \frac{\partial z_s}{\partial x} - (\tau_{xy})_s \frac{\partial z_s}{\partial y} + (\tau_{xz})_s + (\tau_{xx})_b \frac{\partial z_b}{\partial x} \\
& + (\tau_{xy})_b \frac{\partial z_b}{\partial y} - (\tau_{xz})_b + \int_{z_b}^{z_s} \rho f_x dz \quad (\text{B.20})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \rho u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \rho u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \rho u v dz - (\rho_s u_s \frac{\partial z_s}{\partial t} + \rho_s u_s^2 \frac{\partial z_s}{\partial x} + \rho_s u_s v_s \frac{\partial z_s}{\partial y} \\
& - \rho_s u_s w_s) + (\rho_b u_b \frac{\partial z_b}{\partial t} + \rho_b u_b^2 \frac{\partial z_b}{\partial x} + \rho_b u_b v_b \frac{\partial z_b}{\partial y} - \rho_b u_b w_b) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{xx} dz \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{xy} dz - (\tau_{xx})_s \frac{\partial z_s}{\partial x} - (\tau_{xy})_s \frac{\partial z_s}{\partial y} + (\tau_{xz})_s + (\tau_{xx})_b \frac{\partial z_b}{\partial x} \\
& + (\tau_{xy})_b \frac{\partial z_b}{\partial y} - (\tau_{xz})_b + \int_{z_b}^{z_s} \rho f_x dz \quad (\text{B.21})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \rho u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \rho u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \rho u v dz - \rho_s u_s \left(\frac{\partial z_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial z_s}{\partial y} \right. \\
& \quad \left. - w_s \right) + \rho_b u_b \left(\frac{\partial z_b}{\partial t} + u_b \frac{\partial z_b}{\partial x} + v_b \frac{\partial z_b}{\partial y} - w_b \right) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{xx} dz \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{xy} dz - (\tau_{xx})_s \frac{\partial z_s}{\partial x} - (\tau_{xy})_s \frac{\partial z_s}{\partial y} + (\tau_{xz})_s + (\tau_{xx})_b \frac{\partial z_b}{\partial x} \\
& \quad + (\tau_{xy})_b \frac{\partial z_b}{\partial y} - (\tau_{xz})_b + \int_{z_b}^{z_s} \rho f_x dz \quad (B.22)
\end{aligned}$$

Utilizando la condición de borde cinemática en los bordes de aire o lecho del río. Esto me permite modelar matemáticamente a la partícula y la mantiene en la interfase al moverse.

Condición de borde cinemático en la superficie.

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial z_s}{\partial y} - w_s = 0 \quad (B.23)$$

Condición de borde cinemático en el fondo.

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + u_b \frac{\partial z_b}{\partial x} + v_b \frac{\partial z_b}{\partial y} - w_b = 0 \quad (B.24)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \rho u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \rho u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \rho u v dz \\
& \quad - \rho_s u_s \left(\frac{\partial z_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial z_s}{\partial y} - w_s \right) + \rho_b u_b \left(\frac{\partial z_b}{\partial t} + u_b \frac{\partial z_b}{\partial x} + v_b \frac{\partial z_b}{\partial y} - w_b \right) \\
& \quad = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{xx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{xy} dz - (\tau_{xx})_s \frac{\partial z_s}{\partial x} - (\tau_{xy})_s \frac{\partial z_s}{\partial y} \\
& \quad + (\tau_{xz})_s + (\tau_{xx})_b \frac{\partial z_b}{\partial x} + (\tau_{xy})_b \frac{\partial z_b}{\partial y} - (\tau_{xz})_b + \int_{z_b}^{z_s} \rho f_x dz \quad (B.25)
\end{aligned}$$

Esta es la ecuación de momento en x integrada en la profundidad para presiones no hidroestática, densidad variable, flujo newtoniano o no newtoniano, flujo compresible o

incompresible según el modelo de deformación de esfuerzo a usar.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \rho u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \rho u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \rho u v dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{xx} dz \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{xy} dz - (\tau_{xx})_s \frac{\partial z_s}{\partial x} - (\tau_{xy})_s \frac{\partial z_s}{\partial y} + (\tau_{xz})_s + (\tau_{xx})_b \frac{\partial z_b}{\partial x} \\ &+ (\tau_{xy})_b \frac{\partial z_b}{\partial y} - (\tau_{xz})_b + \int_{z_b}^{z_s} \rho f_x dz \quad (\text{B.26}) \end{aligned}$$

Se asume que todas los esfuerzos en la superficie del agua son despreciables.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \rho u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \rho u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \rho u v dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{xx} dz \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{xy} dz - \cancel{(\tau_{xx})_s \frac{\partial z_s}{\partial x}} - \cancel{(\tau_{xy})_s \frac{\partial z_s}{\partial y}} + \cancel{(\tau_{xz})_s} + (\tau_{xx})_b \frac{\partial z_b}{\partial x} \\ &+ (\tau_{xy})_b \frac{\partial z_b}{\partial y} - (\tau_{xz})_b + \int_{z_b}^{z_s} \rho f_x dz \quad (\text{B.27}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \rho u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \rho u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \rho u v dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{xx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{xy} dz \\ &+ (\tau_{xx})_b \frac{\partial z_b}{\partial x} + (\tau_{xy})_b \frac{\partial z_b}{\partial y} - (\tau_{xz})_b + \int_{z_b}^{z_s} \rho f_x dz \quad (\text{B.28}) \end{aligned}$$

Se considera que la pendiente del fondo es bastante pequeña, donde:

$$\frac{\partial z_b}{\partial x} \cong 0 \quad (\text{B.29})$$

$$\frac{\partial z_b}{\partial y} \cong 0 \quad (\text{B.30})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \rho u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \rho u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \rho u v dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{xx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{xy} dz \\ &+ \cancel{(\tau_{xx})_b \frac{\partial z_b}{\partial x}} + \cancel{(\tau_{xy})_b \frac{\partial z_b}{\partial y}} - (\tau_{xz})_b + \int_{z_b}^{z_s} \rho f_x dz \quad (\text{B.31}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \rho u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \rho u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \rho uv dz = & \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{xx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{xy} dz \\ & - (\tau_{xz})_b + \int_{z_b}^{z_s} \rho f_x dz \quad (\text{B.32}) \end{aligned}$$

Ahora utilizaremos suposiciones para llegar a las ecuaciones bidimensionales de SWE. Si el espesor de agua es pequeño en comparación a las longitudes características en el plano xy, la velocidad se considera como constante a lo largo del tirante. En donde las velocidades promediadas en la vertical se denotan como:

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{z_s} u dz \quad (\text{B.33})$$

$$\bar{v} = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{z_s} v dz \quad (\text{B.34})$$

Asimismo se cumple:

$$\bar{f} = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{z_s} f dz \quad (\text{B.35})$$

$$\bar{\tau} = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{z_s} \tau dz \quad (\text{B.36})$$

Por tanto el término de fuerza se convierte en un término promediado en la vertical y con la suposición de incompresibilidad se obtiene:

$$\int_{z_b}^{z_s} \rho f_x dz = \bar{f}_x \rho h \quad (\text{B.37})$$

Obtendremos la ecuación de momento en x promediada en la profundidad.

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho h \bar{u} + \frac{\partial}{\partial x} \rho h \bar{u}^2 + \frac{\partial}{\partial y} \rho h \bar{u} \bar{v} = \frac{\partial}{\partial x} h \bar{\tau}_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} h \bar{\tau}_{xy} - (\tau_{xz})_b + \bar{f}_x \rho h \quad (\text{B.38})$$

Asumiendo flujo newtoniano, isotrópico, homogéneo y incompresible.

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}^{\text{hydrostatic}} + \tau_{ij}^{\text{deviatoric}} \quad (\text{B.39})$$

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}^{\text{deviatoric}} \quad (\text{B.40})$$

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (\text{B.41})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho h \bar{u} + \frac{\partial}{\partial x} \rho h \bar{u}^2 + \frac{\partial}{\partial y} \rho h \bar{u} \bar{v} = -\frac{\partial}{\partial x} h p + \frac{\partial}{\partial x} h \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} h \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) - (\tau_{xz})_b + \bar{f}_x \rho h \quad (\text{B.42})$$

Utilizando la notación de gradiente ∇f y divergente $\nabla \cdot f$.

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho h \bar{u} + \frac{\partial}{\partial x} \rho h \bar{u}^2 + \frac{\partial}{\partial y} \rho h \bar{u} \bar{v} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} p dz + \nabla \cdot h(\mu \nabla \bar{u}) - (\tau_{xz})_b + \bar{f}_x \rho h \quad (\text{B.43})$$

Ingresando el valor de la presión hidroestática según la ecuación A.13, tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho h \bar{u} + \frac{\partial}{\partial x} \rho h \bar{u}^2 + \frac{\partial}{\partial y} \rho h \bar{u} \bar{v} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \rho g (Z_s - z) dz + \nabla \cdot h(\mu \nabla \bar{u}) - (\tau_{xz})_b + \bar{f}_x \rho h \quad (\text{B.44})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho h \bar{u} + \frac{\partial}{\partial x} \rho h \bar{u}^2 + \frac{\partial}{\partial y} \rho h \bar{u} \bar{v} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \rho g (Z_s - z) dz + \nabla \cdot h(\mu \nabla \bar{u}) - (\tau_{xz})_b + \bar{f}_x \rho h \quad (\text{B.45})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho h \bar{u} + \frac{\partial}{\partial x} \rho h \bar{u}^2 + \frac{\partial}{\partial y} \rho h \bar{u} \bar{v} = -\frac{\partial}{\partial x} \rho g (Z_s z \Big|_{z_b}^{z_s} - 0) + \nabla \cdot h(\mu \nabla \bar{u}) - (\tau_{xz})_b + \bar{f}_x \rho h \quad (\text{B.46})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho h\bar{u} + \frac{\partial}{\partial x}\rho h\bar{u}^2 + \frac{\partial}{\partial y}\rho h\bar{u}\bar{v} = -\frac{\partial}{\partial x}\rho g Z_s h + \nabla \cdot h(\mu\nabla\bar{u}) - (\tau_{xz})_b + \bar{f}_x\rho h \quad (\text{B.47})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho h\bar{u} + \frac{\partial}{\partial x}\rho h\bar{u}^2 + \frac{\partial}{\partial y}\rho h\bar{u}\bar{v} = -\rho g h \frac{\partial Z_s}{\partial x} + \nabla \cdot h(\mu\nabla\bar{u}) - (\tau_{xz})_b + \bar{f}_x\rho h \quad (\text{B.48})$$

Dividiendo entre la densidad.

$$\frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{u}\bar{v}}{\partial y} = -gh \frac{\partial Z_s}{\partial x} + \nabla \cdot h(\nu\nabla\bar{u}) - \frac{(\tau_{xz})_b}{\rho} + h\bar{f}_x \quad (\text{B.49})$$

Empezamos con la ecuación de momento en tridimensional en el eje y.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v w) = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho f_y \quad (\text{B.50})$$

Integrando en la vertical.

$$\int_{z_b}^{z_s} \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v w) \right) dz = \int_{z_b}^{z_s} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho f_y \right) dz \quad (\text{B.51})$$

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) dz + \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial x}(\rho v u) dz + \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2) dz + \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial z}(\rho v w) dz &= \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dz \\ &+ \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} dz + \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dz + \int_{z_b}^{z_s} \rho f_y dz \quad (\text{B.52}) \end{aligned}$$

Aplicando la regla de Leibniz en cada término.

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{Z_s} F dz = \int_{Z_f}^{Z_s} \frac{\partial F}{\partial x} dz + F(x, y, Z_s) \frac{\partial Z_s}{\partial x} - F(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial x} \quad (\text{B.53})$$

$$\int_{Z_f}^{Z_s} \frac{\partial F}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{Z_s} F dz - F(x, y, Z_s) \frac{\partial Z_s}{\partial x} + F(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial x} \quad (\text{B.54})$$

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \rho v dz - \rho_s v_s \frac{\partial z_s}{\partial t} + \rho_b v_b \frac{\partial z_b}{\partial t} \quad (\text{B.55})$$

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial(\rho v u)}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \rho v u dz - \rho_s v_s u_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + \rho_b v_b u_b \frac{\partial z_b}{\partial x} \quad (\text{B.56})$$

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \rho v^2 dz - \rho_s v_s^2 \frac{\partial z_s}{\partial y} + \rho_b v_b^2 \frac{\partial z_b}{\partial y} \quad (\text{B.57})$$

Para el siguiente no se aplica regla de Leibniz, solo se elimina la derivada parcial con dz.

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial(\rho v w)}{\partial z} dz = \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial(\rho v w)}{\partial z} dz = (\rho v w) \Big|_{z_b}^{z_s} = \rho_s v_s w_s - \rho_b v_b w_b \quad (\text{B.58})$$

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{yx} dz - (\tau_{yx})_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + (\tau_{yx})_b \frac{\partial z_b}{\partial x} \quad (\text{B.59})$$

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{yy} dz - (\tau_{yy})_s \frac{\partial z_s}{\partial y} + (\tau_{yy})_b \frac{\partial z_b}{\partial y} \quad (\text{B.60})$$

Para el siguiente no se aplica Leibniz rule, solo se elimina la derivada parcial con dz.

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dz = \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dz = \tau_{yz} \Big|_{z_b}^{z_s} = (\tau_{yz})_s - (\tau_{yz})_b \quad (\text{B.61})$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \rho v dz - \rho_s v_s \frac{\partial z_s}{\partial t} + \rho_b v_b \frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \rho v u dz - \rho_s v_s u_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + \rho_b v_b u_b \frac{\partial z_b}{\partial x} \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \rho v^2 dz - \rho_s v_s^2 \frac{\partial z_s}{\partial y} + \rho_b v_b^2 \frac{\partial z_b}{\partial y} + \rho_s v_s w_s - \rho_b v_b w_b = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{yx} dz \\
& - (\tau_{yx})_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + (\tau_{yx})_b \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{yy} dz - (\tau_{yy})_s \frac{\partial z_s}{\partial y} + (\tau_{yy})_b \frac{\partial z_b}{\partial y} \\
& + (\tau_{yz})_s - (\tau_{yz})_b + \int_{z_b}^{z_s} \rho f_y dz \quad (\text{B.62})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \rho v dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \rho v u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \rho v^2 dz - \rho_s v_s \frac{\partial z_s}{\partial t} - \rho_s v_s u_s \frac{\partial z_s}{\partial x} - \rho_s v_s^2 \frac{\partial z_s}{\partial y} \\
& + \rho_s v_s w_s + \rho_b v_b \frac{\partial z_b}{\partial t} + \rho_b v_b u_b \frac{\partial z_b}{\partial x} + \rho_b v_b^2 \frac{\partial z_b}{\partial y} - \rho_b v_b w_b = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{yx} dz \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{yy} dz - (\tau_{yx})_s \frac{\partial z_s}{\partial x} - (\tau_{yy})_s \frac{\partial z_s}{\partial y} + (\tau_{yz})_s + (\tau_{yx})_b \frac{\partial z_b}{\partial x} \\
& + (\tau_{yy})_b \frac{\partial z_b}{\partial y} - (\tau_{yz})_b + \int_{z_b}^{z_s} \rho f_y dz \quad (\text{B.63})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \rho v dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \rho v u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \rho v^2 dz - (\rho_s v_s \frac{\partial z_s}{\partial t} + \rho_s v_s u_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + \rho_s v_s^2 \frac{\partial z_s}{\partial y} \\
& - \rho_s v_s w_s) + (\rho_b v_b \frac{\partial z_b}{\partial t} + \rho_b v_b u_b \frac{\partial z_b}{\partial x} + \rho_b v_b^2 \frac{\partial z_b}{\partial y} - \rho_b v_b w_b) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{yx} dz \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{yy} dz - (\tau_{yx})_s \frac{\partial z_s}{\partial x} - (\tau_{yy})_s \frac{\partial z_s}{\partial y} + (\tau_{yz})_s + (\tau_{yx})_b \frac{\partial z_b}{\partial x} \\
& + (\tau_{yy})_b \frac{\partial z_b}{\partial y} - (\tau_{yz})_b + \int_{z_b}^{z_s} \rho f_y dz \quad (\text{B.64})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \rho v dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \rho v u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \rho v^2 dz - \rho_s v_s \left(\frac{\partial z_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial z_s}{\partial y} \right. \\
& \quad \left. - w_s \right) + \rho_b v_b \left(\frac{\partial z_b}{\partial t} + u_b \frac{\partial z_b}{\partial x} + v_b \frac{\partial z_b}{\partial y} - w_b \right) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{yx} dz \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{yy} dz - (\tau_{yx})_s \frac{\partial z_s}{\partial x} - (\tau_{yy})_s \frac{\partial z_s}{\partial y} + (\tau_{yz})_s + (\tau_{yx})_b \frac{\partial z_b}{\partial x} \\
& \quad + (\tau_{yy})_b \frac{\partial z_b}{\partial y} - (\tau_{yz})_b + \int_{z_b}^{z_s} \rho f_y dz \quad (\text{B.65})
\end{aligned}$$

Asumo la condición de borde cinemática, usando la Ec. B.23 en la interfase aire-agua y la Ec. B.24 para el lecho del río.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \rho v dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \rho v u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \rho v^2 dz \\
& \quad - \rho_s v_s \left(\frac{\partial z_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial z_s}{\partial y} - w_s \right) + \rho_b v_b \left(\frac{\partial z_b}{\partial t} + u_b \frac{\partial z_b}{\partial x} + v_b \frac{\partial z_b}{\partial y} - w_b \right) \\
& \quad = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{yx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{yy} dz - (\tau_{yx})_s \frac{\partial z_s}{\partial x} - (\tau_{yy})_s \frac{\partial z_s}{\partial y} + (\tau_{yz})_s \\
& \quad + (\tau_{yx})_b \frac{\partial z_b}{\partial x} + (\tau_{yy})_b \frac{\partial z_b}{\partial y} - (\tau_{yz})_b + \int_{z_b}^{z_s} \rho f_y dz \quad (\text{B.66})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \rho v dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \rho v u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \rho v^2 dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{yx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{yy} dz \\
& \quad - (\tau_{yx})_s \frac{\partial z_s}{\partial x} - (\tau_{yy})_s \frac{\partial z_s}{\partial y} + (\tau_{yz})_s + (\tau_{yx})_b \frac{\partial z_b}{\partial x} + (\tau_{yy})_b \frac{\partial z_b}{\partial y} \\
& \quad - (\tau_{yz})_b + \int_{z_b}^{z_s} \rho f_y dz \quad (\text{B.67})
\end{aligned}$$

Se asume que todas los esfuerzos en la superficie del agua son despreciables.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \rho v dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \rho v u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \rho v^2 dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{yx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{yy} dz \\
&\quad - \cancel{(\tau_{yx})_s} \frac{\partial z_s}{\partial x} - \cancel{(\tau_{yy})_s} \frac{\partial z_s}{\partial y} + \cancel{(\tau_{yz})_s} + (\tau_{yx})_b \frac{\partial z_b}{\partial x} + (\tau_{yy})_b \frac{\partial z_b}{\partial y} \\
&\quad - (\tau_{yz})_b + \int_{z_b}^{z_s} \rho f_y dz \quad (\text{B.68})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \rho v dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \rho v u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \rho v^2 dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{yx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{yy} dz \\
&\quad + (\tau_{yx})_b \frac{\partial z_b}{\partial x} + (\tau_{yy})_b \frac{\partial z_b}{\partial y} - (\tau_{yz})_b + \int_{z_b}^{z_s} \rho f_y dz \quad (\text{B.69})
\end{aligned}$$

Se utiliza las ecuaciones B.29 y B.30 para pendiente pequeñas del relieve de fondo.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \rho v dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \rho v u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \rho v^2 dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{yx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{yy} dz \\
&\quad + \cancel{(\tau_{yx})_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \cancel{(\tau_{yy})_b} \frac{\partial z_b}{\partial y} - (\tau_{yz})_b + \int_{z_b}^{z_s} \rho f_y dz \quad (\text{B.70})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \rho v dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \rho v u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \rho v^2 dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{yx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{yy} dz \\
&\quad - (\tau_{yz})_b + \int_{z_b}^{z_s} \rho f_y dz \quad (\text{B.71})
\end{aligned}$$

Utilizando las ecuaciones B.33, B.34 y B.36 para agua someras se obtiene la ecuación de momento en y promediada en la profundidad.

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho h \bar{v} + \frac{\partial}{\partial x} \rho h \bar{v} \bar{u} + \frac{\partial}{\partial y} \rho h \bar{v}^2 = \frac{\partial}{\partial x} (h \bar{\tau}_{yx}) + \frac{\partial}{\partial y} (h \bar{\tau}_{yy}) - (\tau_{yz})_b + \rho \bar{f}_y h \quad (\text{B.72})$$

Utilizamos la ecuación B.41 para en tensor de esfuerzos que considera flujo newto-

niano e incompresible.

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho h\bar{v} + \frac{\partial}{\partial x}\rho h\bar{v}\bar{u} + \frac{\partial}{\partial y}\rho h\bar{v}^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(h\mu\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\int_{z_b}^{z_s} pdz + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\mu\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}\right) - (\tau_{yz})_b + \rho\bar{f}_y h \quad (\text{B.73})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho h\bar{v} + \frac{\partial}{\partial x}\rho h\bar{v}\bar{u} + \frac{\partial}{\partial y}\rho h\bar{v}^2 = -\frac{\partial}{\partial y}\int_{z_b}^{z_s} pdz + \frac{\partial}{\partial x}\left(h\mu\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\mu\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}\right) - (\tau_{yz})_b + \rho\bar{f}_y h \quad (\text{B.74})$$

Utilizando la notación de gradiente ∇f y divergente $\nabla \cdot f$.

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho h\bar{v} + \frac{\partial}{\partial x}\rho h\bar{v}\bar{u} + \frac{\partial}{\partial y}\rho h\bar{v}^2 = -\frac{\partial}{\partial y}\int_{z_b}^{z_s} pdz + \nabla \cdot (h\mu\nabla\bar{v}) - (\tau_{yz})_b + \rho\bar{f}_y h \quad (\text{B.75})$$

Ingresando el valor de la presión hidroestática según la ecuación A.13, tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho h\bar{v} + \frac{\partial}{\partial x}\rho h\bar{v}\bar{u} + \frac{\partial}{\partial y}\rho h\bar{v}^2 = -\frac{\partial}{\partial y}\int_{z_b}^{z_s} \rho g(z_s - z)dz + \nabla \cdot (h\mu\nabla\bar{v}) - (\tau_{yz})_b + \rho\bar{f}_y h \quad (\text{B.76})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho h\bar{v} + \frac{\partial}{\partial x}\rho h\bar{v}\bar{u} + \frac{\partial}{\partial y}\rho h\bar{v}^2 = -\frac{\partial}{\partial y}\rho g z_s h + \nabla \cdot (h\mu\nabla\bar{v}) - (\tau_{yz})_b + \rho h\bar{f}_y \quad (\text{B.77})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho h\bar{v} + \frac{\partial}{\partial x}\rho h\bar{v}\bar{u} + \frac{\partial}{\partial y}\rho h\bar{v}^2 = -\rho h g \frac{\partial}{\partial y} z_s + \nabla \cdot (h\mu\nabla\bar{v}) - (\tau_{yz})_b + \rho h\bar{f}_y \quad (\text{B.78})$$

Dividiendo entre la densidad.

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho h\bar{v} + \frac{\partial}{\partial x}\rho h\bar{v}\bar{u} + \frac{\partial}{\partial y}\rho h\bar{v}^2 = -\rho h g \frac{\partial}{\partial y} z_s + \nabla \cdot (h\rho\nu\nabla\bar{v}) - (\tau_{yz})_b + \rho h\bar{f}_y \quad (\text{B.79})$$

$$\frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{v}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}^2}{\partial y} = -gh\frac{\partial z_s}{\partial y} + \nabla \cdot (h\nu\nabla\bar{v}) - \frac{(\tau_{yz})_b}{\rho} + h\bar{f}_y \quad (\text{B.80})$$

A continuación, se presentan las ecuaciones bidimensionales de Saint Venant con presión hidrostática, aplicables a un flujo newtoniano e incompresible:

$$\begin{cases} \frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{u}\bar{v}}{\partial y} = -gh\frac{\partial z_s}{\partial x} + \nabla \cdot (h\nu\nabla\bar{u}) - \frac{(\tau_{xz})_b}{\rho} + h\bar{f}_x \\ \frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{v}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}^2}{\partial y} = -gh\frac{\partial z_s}{\partial y} + \nabla \cdot (h\nu\nabla\bar{v}) - \frac{(\tau_{yz})_b}{\rho} + h\bar{f}_y \end{cases} \quad (\text{B.81})$$




```

XSOM(2) = 3.14D0
XSOM(3) = 3.14D0
XSOM(4) = 2.85D0
YSOM(1) = -0.275D0
YSOM(2) = -0.275D0
YSOM(3) = 0.275D0
YSOM(4) = 0.275D0
!
!-----
!

AIRE=0.D0
DO I=1,BIEF_NBPTS(11,MESH)
  IF(INPOLY(X(I),Y(I),XSOM,YSOM,NSOM)) THEN
    AIRE = AIRE + T1%R(I)
    fi = hv1/HN%R(I)
    CUP = 1.0D0/(1.0D0-fi)
    UP = UN%R(I) * CUP
    VP = VN%R(I) * CUP
    UMAG = SQRT(UP**2+VP**2)
    FUDRAG%R(I) = - 0.5D0 * D * Nv * CD * UP * UMAG
    FVDRAG%R(I) = - 0.5D0 * D * Nv * CD * VP * UMAG
  ENDIF
ENDDO
!
QUASI-BUBBLE POINTS
!
IF(FU%ELM.EQ.12) THEN
!
DISCLIN=11

```

```

CALL CHGDIS (FUDRAG,DISCLIN,12,MESH)
CALL CHGDIS (FVDRAG,DISCLIN,12,MESH)
!
DO IELEM = 1 , NELEM
    I4=IKLE%I (IELEM+3*NELMAX)
    X4=(X (IKLE%I (IELEM
&          X (IKLE%I (IELEM+  NELMAX) ) +
&          X (IKLE%I (IELEM+2*NELMAX) ) ) /3.D0
    Y4=(Y (IKLE%I (IELEM
&          Y (IKLE%I (IELEM+  NELMAX) ) +
&          Y (IKLE%I (IELEM+2*NELMAX) ) ) /3.D0
    IF (INPOLY (X4,Y4,XSOM,YSOM,NSOM) ) AIRE = AIRE + T1
        %R (I4)
ENDDO
!
ENDIF
!
! EN PARALELO EL AREA SE DIVIDI EN SUB-DOMINIOS
!
IF (NCSIZE.GT.0) AIRE=P_SUM(AIRE)
!
! NOW PREPARING THE DIVISION
!
IF (AIRE.GT.1.D-6) THEN
    SOM = 1.D0 / AIRE
ELSE
    WRITE (LU,*) 'DRAGFO:_AREA_OF_ZONE_EQUAL_TO_ZERO'
    CALL PLANTE (1)
STOP

```

```

ENDIF
!
! ZONA 2
!
      NSOM = 4
      XSOM(1) = 3.14D0
      XSOM(2) = 3.43D0
      XSOM(3) = 3.43D0
      XSOM(4) = 3.14D0
      YSOM(1) = -0.275D0
      YSOM(2) = -0.275D0
      YSOM(3) = 0.275D0
      YSOM(4) = 0.275D0
!
      AIRE=0.D0
      DO I=1,BIEF_NBPTS(11,MESH)
          IF (INPOLY(X(I),Y(I),XSOM,YSOM,NSOM)) THEN
              AIRE = AIRE + T1%R(I)
              fi = hv2/HN%R(I)
              CUP = 1.0D0/(1.0D0-fi)
              UP = UN%R(I) * CUP
              VP = VN%R(I) * CUP
              UMAG = SQRT(UP**2+VP**2)
              FUDRAG%R(I) = - 0.5D0 * D * Nv * CD * UP * UMAG
              FVDRAG%R(I) = - 0.5D0 * D * Nv * CD * VP * UMAG
          ENDIF
      ENDDO
!
! QUASI-BUBBLE PUNTOS

```

```

!
      IF (FU%ELM.EQ.12) THEN
!
      DISCLIN=11
      CALL CHGDIS (FUDRAG,DISCLIN,12,MESH)
      CALL CHGDIS (FVDRAG,DISCLIN,12,MESH)
!
      DO IELEM = 1 , NELEM
          I4=IKLE%I (IELEM+3*NELMAX)
          X4=(X (IKLE%I (IELEM
&          X (IKLE%I (IELEM+  NELMAX) ) +
&          X (IKLE%I (IELEM+2*NELMAX) ) ) /3.D0
          Y4=(Y (IKLE%I (IELEM
&          Y (IKLE%I (IELEM+  NELMAX) ) +
&          Y (IKLE%I (IELEM+2*NELMAX) ) ) /3.D0
          IF (INPOLY (X4,Y4,XSOM,YSOM,NSOM) ) AIRE = AIRE + T1
              %R (I4)
      ENDDO
!
      ENDIF
!
      EN PARALELO EL AREA SE DIVIDI EN SUB-DOMINIOS
!
      IF (NCSIZE.GT.0) AIRE=P_SUM(AIRE)
!
      PREPARANDO DIVISION
!
      IF (AIRE.GT.1.D-6) THEN
          SOM = 1.D0 / AIRE

```

```
ELSE
    WRITE (LU, *) 'DRAGFO:_AREA_OF_ZONE_EQUAL_TO_ZERO'
    CALL PLANTE (1)
    STOP
ENDIF
!
! DIVISON ENTRE EL AREA
!
CALL OS ('X=CX', X=FUDRAG, C=SOM)
CALL OS ('X=CX', X=FVDRAG, C=SOM)
!
RETURN
END
```



Anexos D

Archivos de configuración Telemac

```

/-----
/-----
/
/                                ARCHIVOS
/-----
/
FORTRAN FILE                      : 'user_fortran'
BOUNDARY CONDITIONS FILE          : geo_zhang.cli
GEOMETRY FILE                     : geo_zhang.slf
RESULTS FILE                      : r2d_zhang.slf
/
/-----
/
/                                OPTIONS GENERALES
/-----
/
VARIABLES FOR GRAPHIC PRINTOUTS = S,L
TIME STEP                          : 0.01
DURATION                            : 6
GRAPHIC PRINTOUT PERIOD            : 1
LISTING PRINTOUT PERIOD            : 100
MASS-BALANCE                       : YES
/

```

