PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

IDENTIFICACIÓN DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO, EN LA FACETA EPISTÉMICA Y ECOLÓGICA, DEL PROFESOR DE EDUCACIÓN SECUNDARIA SOBRE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Autor:

CARLOS OMAR CÁRDENAS ESTRELLA

Asesora:

Dra. ROSA CECILIA GAITA IPARRAGUIRRE

Lima - Perú

2018

DEDICATORIA

A mis hijos Rodrigo, Matías y Lucas, porque son mi alegría y motivo de superación.

A mi esposa Dagmar, por su cariño, comprensión y apoyo, durante este proceso de aprendizaje y en todos aquellos momentos necesarios, dándome ánimos cuando parecía desfallecer.

A mis padres Carlos y Marleni, quienes me dieron mucho amor e inculcaron valores que me ayudan a ser mejor persona.

A mis hermanos Alan, Saúl y Liz, de quienes tengo los mejores recuerdos de mi niñez, con sus ocurrencias y travesuras.

AGRADECIMIENTOS

De forma muy especial a la Dra. Cecilia Gaita, mi asesora, por su paciencia, apoyo y guía en esta tesis. Además por sus motivaciones y correcciones cuando fueron necesarias. Sus aportes académicos y personales fueron muy importantes para mi desempeño.

A los profesores de la maestría por sus consejos y enseñanzas durante mi formación en esta etapa académica.

A los profesores Miguel Gonzaga y Carlos Vera, quienes motivaron mi participación en esta maestría, dándome aliento siempre para seguir adelante.

RESUMEN

Esta tesis pretende identificar el conocimiento didáctico-matemático que debería tener un profesor de matemática, en relación con los sistemas de ecuaciones lineales, en la secundaria peruana. Para ello, se ha adoptado el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático propuesto por Pino-Fan y Godino (2015), del cual se considerarán la dimensión Matemática y las facetas epistémica y ecológica de la dimensión Didáctica.

De esta manera, se busca poner al alcance de los docentes e investigadores en Didáctica de la Matemática una propuesta concreta, que podrá ser tomada como base en procesos de formación inicial o continua de maestros de matemática.

Una de las etapas fundamentales del trabajo es la construcción de un significado de referencia asociado a los sistemas de ecuaciones lineales, además de la determinación de indicadores sobre el conocimiento didáctico-matemático que debería tener el profesor de secundaria, con respecto al mismo objeto de estudio. Este significado de referencia se relaciona con el conocimiento del profesor de matemática y el contexto en el cual se desenvuelve. Para lograr tal construcción se empleó el análisis de contenido de textos escolares y no escolares, y se revisaron investigaciones que brindaron orientación en cuanto al modelo teórico considerado, así como a la metodología.

La construcción del significado de referencia institucional, acerca de los sistemas de ecuaciones lineales, incluye la identificación de los diversos objetos primarios que emergen de las prácticas matemáticas: situaciones-problema, lenguajes, definiciones, procedimientos, propiedades y argumentaciones, todos ellos relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales. A partir de dicho significado, se proponen cuáles podrían ser los conocimientos del profesor de matemática, en las dimensiones Matemática (conocimiento común y ampliado) y Didáctica (faceta epistémica y ecológica), asociada a los sistemas de ecuaciones lineales.

A partir de esta identificación, se podrían desarrollar nuevos trabajos que exploren las otras facetas de la Dimensión Didáctica, como son la cognitiva, afectiva, mediacional e interaccional, también de los sistemas de ecuaciones lineales, así como la dimensión Metadidáctico-Matemática.

Índice

Lista de Figuras

Lista de Tablas

INTRODUCCIÓN

No hay duda que el rol que ejerce el profesor de matemáticas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática es fundamental; sin embargo, como mencionan Pino-Fan y Godino (2015), uno de los problemas más interesantes en didáctica de la matemática, abordado en los últimos años, es el que se refiere en definir cuáles son los conocimientos del profesor de matemáticas, en cuanto a los aspectos matemáticos y didácticos, ya que estos no habían sido problematizados antes.

Muchos docentes cuentan con los conocimientos matemáticos pero no son capaces de organizar estos conocimientos para el proceso de enseñanza-aprendizaje, por lo que necesitan a la vez de conocimientos didáctico-matemáticos para dicho proceso. Debido a esto, actualmente se necesitan de investigaciones basadas en modelos que analicen los conocimientos del profesor de matemáticas, que permitan organizar, analizar e interpretar dichos conocimientos.

Este trabajo tiene por objetivo reconocer los conocimientos del profesor de matemáticas de secundaria, referente a los sistemas de ecuaciones lineales. Para ello se toma como base el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) propuesto por Pino-Fan y Godino (2015), del cual se desarrollarán las facetas epistémica y ecológica de la faceta Didáctica, de dicho modelo.

El presente trabajo se ha organizado de la siguiente manera:

En el primero, se presentan algunas investigaciones que analizan cuál debería ser el conocimiento que debe tener un profesor de matemáticas, en relación a los sistemas de ecuaciones lineales y otros objetos. Algunas de ellas emplearon el modelo CDM. También se describen los aspectos metodológicos que se consideraron en esta investigación.

En el segundo capítulo, se presentan los principales elementos teóricos considerados en esta investigación, es decir, los relacionados con el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) y el modelo del CDM.

En el tercer capítulo, se propone un significado de referencia institucional para los sistemas de ecuaciones lineales, en la educación secundaria peruana. Para ello, se realizó el análisis de contenido de diversa bibliografía escolar y no escolar, así como de trabajos de investigación en didáctica matemática. En la descripción del significado de referencia, aparecen los objetos primarios que surgen y se emplean en las prácticas.

En el cuarto capítulo, se propone una lista de indicadores del conocimiento que debe tener un profesor de matemática, sobre los sistemas de ecuaciones lineales. Para ello se ha considerado un análisis de contenido de textos escolares y no escolares, el significado de referencia elaborado en el capítulo anterior, además de las consignas o sugerencias que plantean investigaciones en didáctica como las de Godino (2009), y Pino-Fan y Godino (2015). Los aspectos considerados están relacionados con el conocimiento común y ampliado del contenido, los que se desarrollan en la dimensión Matemática del modelo del CDM, y con las facetas epistémica y ecológica de la dimensión Didáctica.

Por último, se proponen algunas consideraciones finales que hacen referencia a los antecedentes considerados, los objetivos planteados, elementos teóricos y metodológicos empleados, así como a los principales resultados de esta tesis. Además, se proponen perspectivas para futuros trabajos de investigación.

A continuación se muestra en la Figura 1, un esquema del trabajo desarrollado en esta investigación. Los rectángulos blancos corresponden a las etapas consideradas en este trabajo:

Inicia con el “Problema de investigación”, en el cual se considerarán investigaciones relacionadas con diversos modelos teóricos, conocimiento que debería tener un profesor de matemáticas, en torno a los sistemas de ecuaciones lineales. Luego de lo cual se plantean la pregunta de investigación y los objetivos del trabajo.

Continúa la “Metodología” que se relaciona con los procedimientos que se seguirán en la investigación, así como aspectos teóricos del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático, que ayudarán a fundamentar y relacionar los procedimientos desarrollados.

Se propone un “Significado de referencia” con respecto a los sistemas de ecuaciones lineales, en la educación secundaria peruana, en el que se identificarán los objetos primarios y se clasificarán según el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático.

Se presenta una propuesta de los "Conocimientos didáctico-matemáticos" en relación a las dimensiones Matemática y Didáctica del modelo teórico adoptado. Para la primera se considerarán los Conocimientos Común y Ampliado, mientras que para la segunda solo las facetas Epistémica y Ecológica.

Finalmente se muestran los "Resultados y Conclusiones" de la investigación realizada.

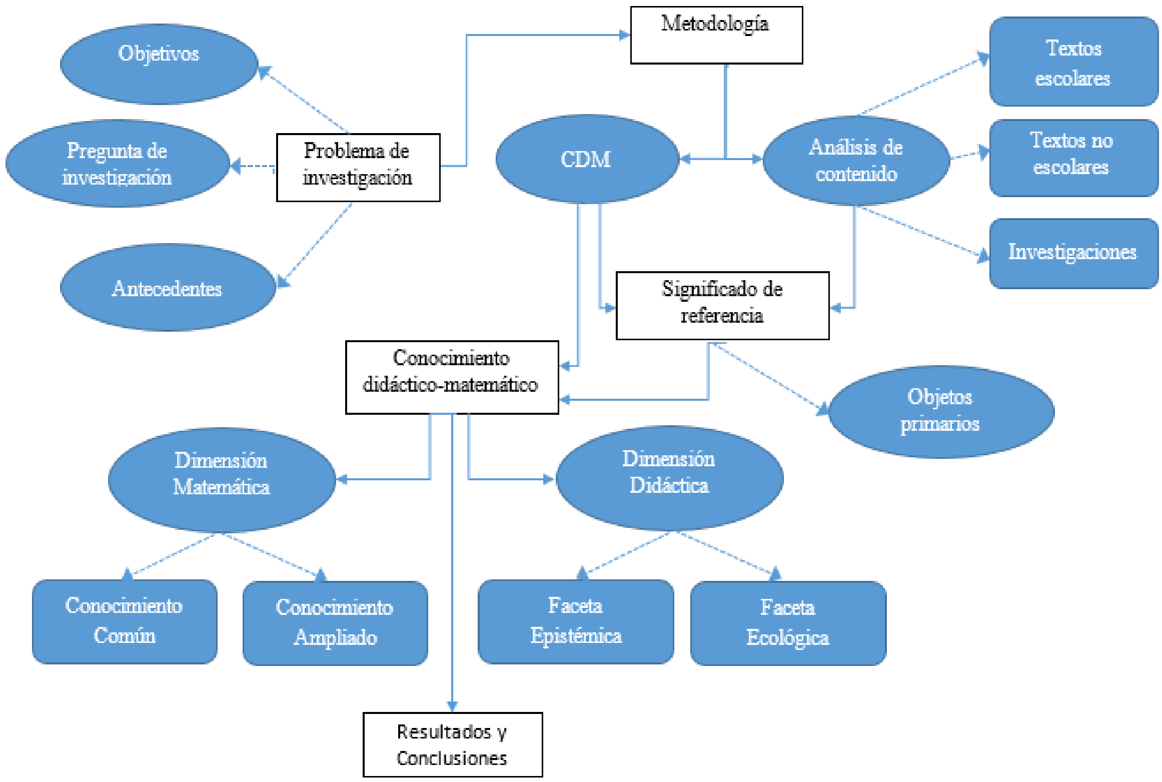


Figura 1 – Esquema de trabajo de la tesis.

CAPÍTULO 1: EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se muestran algunas investigaciones relacionadas con diversos modelos teóricos, algunas de las cuales analizan el conocimiento que debería tener un profesor de matemáticas, en torno a los sistemas de ecuaciones lineales, que es el objeto matemático de estudio de esta investigación. La finalidad es justificar la importancia de este trabajo ante la comunidad científica y matemática y brindar información de lo que se ha desarrollado hasta el momento. De cada una de estas investigaciones, se presenta el objetivo, se señala el marco teórico en que se apoyaron, el objeto matemático de estudio, la metodología empleada, así como los instrumentos de recolección de datos que se utilizaron y los resultados que se obtuvieron. También se hacen explícitos los aspectos metodológicos que se considerarán en este trabajo.

1.1. Investigaciones sobre el conocimiento didáctico-matemático del profesor de matemática

Existen algunos estudios sobre el conocimiento del docente en relación a diferentes temas específicos. En particular, se han realizado investigaciones sobre los conocimientos del profesor, referente a la proporcionalidad (Rivas, Godino y Castro, 2012) o la derivada (Pino-Fan, 2013), por citar algunos ejemplos. Otro de los trabajos analizados es el que desarrollan Ferrini, Floden, McCrory, Burrill y Sandow (s.f.), ellos proponen una metodología basada en el marco teórico que desarrolló Shulman en el año 1986, para el conocimiento pedagógico y del contenido referente al conocimiento del álgebra. El objetivo de Ferrini et al, es comprender y evaluar los conocimientos que presentan los profesores para la enseñanza de álgebra sobre expresiones algebraicas y ecuaciones.

Los autores desarrollan y aplican diferentes instrumentos, como por ejemplo el análisis de textos, entrevistas a profesores y cuestionarios. Estos instrumentos se aplican a un grupo de docente con la finalidad de evaluar sus conocimientos sobre álgebra lineal a través del estudio de las evaluaciones que proponen a sus alumnos. Esto es relevante para esta tesis, puesto que los sistemas de ecuaciones lineales corresponden al campo del álgebra lineal. Ferrini et al (s.f.) proponen que el docente desarrolle tres prácticas matemáticas llamadas Descomprimir, Recortar y De puente.

A continuación se presenta una breve descripción de cada una de ellas:

- Descomprimir, implica utilizar todo su conocimiento para presentar situaciones más difíciles a los alumnos y estos puedan analizar el pensamiento matemático (aciertos y errores), así como seleccionar tareas adecuadas para sus alumnos. Por ejemplo, mostrar la diferencia entre la solución de una ecuación con un conjunto finito de soluciones y la solución de una inecuación con un conjunto infinito de soluciones.
- Recorte, implica reducir la complejidad de la matemática, para lo cual se seleccionan o mantienen los conceptos matemáticos pero con menos nivel de dificultad y así los alumnos entienden mejor las propiedades y características de las expresiones algebraicas y las ecuaciones.
- De puente, se refiere a la conexión de los conceptos matemáticos con la realidad o con la abstracción propia de la matemática, por ejemplo, mencionan que el estudio y comprensión de las fracciones es muy importante para el desarrollo del pensamiento algebraico. Analizan la relaciones que aparecen en algunos textos entre las funciones lineales y las progresiones aritméticas, o entre las funciones lineales y cuadráticas

De esta manera, los autores aplican este cuestionario para analizar el conocimiento matemático del profesor en dos áreas previamente definidas: La primera sobre *Expresiones y ecuaciones algebraicas*, que busca identificar las diversas notaciones, interpretaciones y soluciones, así como las dificultades que pueden surgir. La segunda área se refiere a las relaciones lineales, lo que incluye representaciones (tablas, gráficos, ecuaciones, expresiones verbales), propiedades, y los comportamientos de relaciones y funciones lineales y las situaciones en las cuales son utilizados. A partir de este trabajo, los investigadores identificaron diversas dificultades que tienen los profesores en formación en estas áreas.

Ferrini et al (s.f.) organizan la evaluación con preguntas en función a categorías de conocimiento de álgebra para la enseñanza, como son:

- El conocimiento de contenido principal, que incluye las ideas principales y los conceptos de estudio, los algoritmos aplicados o procedimientos, las estructuras de organización y los marcos que sostienen el dominio matemático.

- La representación, referida a diferentes modelos utilizados para conceptos y procedimientos, así como las diversas formas de organizar la información y los conceptos.
- El contenido de trayectorias, es la comprensión de los orígenes y extensiones de conceptos importantes y procedimientos (el saber, que es la base para ideas en el dominio), así como la comprensión de las ideas que surgen y se hacen más elaboradas y eficientes.
- Las aplicaciones y contextos, se refieren al conocimiento de problemas que provienen de situaciones, contextos, o circunstancias fuera o dentro del álgebra, como por ejemplo circunstancias diarias reales.
- El lenguaje y convenciones, implican al lenguaje matemático y la comprensión de las matemáticas, siendo necesarios en términos de estructuras lógicas y axiomáticas. Los diversos significados usados en el álgebra escolar pueden ser ambiguos para los alumnos ya que no son usados coherentemente y son posiblemente confundidos con los significados diarios de los estudiantes para estas palabras. El álgebra escolar implica ambas definiciones y convenciones de lengua.
- El razonamiento matemático y la prueba, existe una forma especial de razonar, por ejemplo, el uso de analogías o argumentos para justificar respuestas, la aplicación de varias técnicas de prueba para tener argumentos válidos. Se debe ser consciente de la importancia de las definiciones y axiomas en el álgebra, considerando los efectos que pueden tener cambiar definiciones o suposiciones al usar equivalencias de axiomas, y definiciones alternas.

En el estudio de Ferrini et al (s.f.), se pretende mostrar que no es solo necesario el conocimiento matemático para la enseñanza, sino que es necesario utilizar procesos didácticos que permitan esclarecer el conocimiento de expresiones algebraicas y ecuaciones.

Por ello, las prácticas matemáticas que proponen, Descomprimir, Recortar y De puente, permiten organizar los conocimientos que debe tener un profesor de álgebra, donde se abordan los sistemas de ecuaciones lineales, que es el objeto matemático de estudio de esta tesis. Así también, la clasificación del conocimiento para la enseñanza del álgebra, en este trabajo, tiene relación con la tipología de objetos matemáticos primarios propuestos por el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático. Estos aspectos serán considerados en nuestro análisis para guiar qué se debe indagar para reconocer los conocimientos del profesor de secundaria.

Otros autores toman otros modelos teóricos para promover el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. Sosa (2012) desarrolla un artículo que tiene por objetivo identificar y comprender el conocimiento matemático y didáctico del profesor de bachillerato, tomando como marco teórico el modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza, más conocido como MKT, por sus siglas en inglés (Mathematical Knowledge for Teaching). El modelo MKT centra su desarrollo en el saber matemático que debe tener un profesor, para desarrollar el proceso de enseñanza desde su práctica docente. Así también, este modelo se basa en el trabajo de Shulman (citado por Sosa, 2012), adaptando los dominios que este presentó, en dos dimensiones: Conocimiento del contenido y Conocimiento didáctico del contenido. El autor realiza una investigación que adopta una metodología de tipo cualitativa y analiza el aspecto cognitivo de dos profesores bajo el método de estudio de casos. Sosa indaga respecto a las Matrices, Sistemas de ecuaciones lineales y Programación lineal, cual es el conocimiento que deben tener los profesores. Entre otros instrumentos que utiliza para recabar información, se emplean observaciones en el aula, grabaciones de las sesiones que desarrollan los docentes, anotaciones, cuestionarios y entrevistas.

Las preguntas de los cuestionarios se muestran en la tesis de Sosa (2011) y estas han sido agrupadas considerando dos subdominios, sobre las matrices, sistemas de ecuaciones lineales y programación lineal:

En el subdominio Conocimiento Común del Contenido se contemplan:

- Definir conceptos, reglas, propiedades, teoremas o métodos que presenta.
- Usar términos matemáticos y notación matemática.
- Mostrar la importancia de la notación en matemáticas.
- Operatividad, propiedades, utilidad o aplicación de un concepto.
- Demostrar teoremas.

Y en el Conocimiento Especializado del Contenido del profesor, Sosa (2011) propone:

- Conocer el significado de los conceptos.
- Justificación de procedimientos.
- Identificar conceptos, propiedades, reglas, etc., ante una respuesta, pregunta o solución no estándar o inesperada de los estudiantes, lo que le permite saber si su razonamiento matemático funciona en general o no, así como justificar el pensamiento matemático que utiliza el estudiante, o describir matemáticamente el procedimiento que el estudiante está usando.
- Identificar la causa matemática de los errores comunes de los estudiantes.
- Conocer aspectos matemáticos de especial importancia para la enseñanza, lo que le permite distinguir la importancia de un aspecto matemático específico para enseñar el contenido matemático.

Así también Sosa (2011) muestra la Figura 2, donde indica las etapas del análisis de la información recabada:

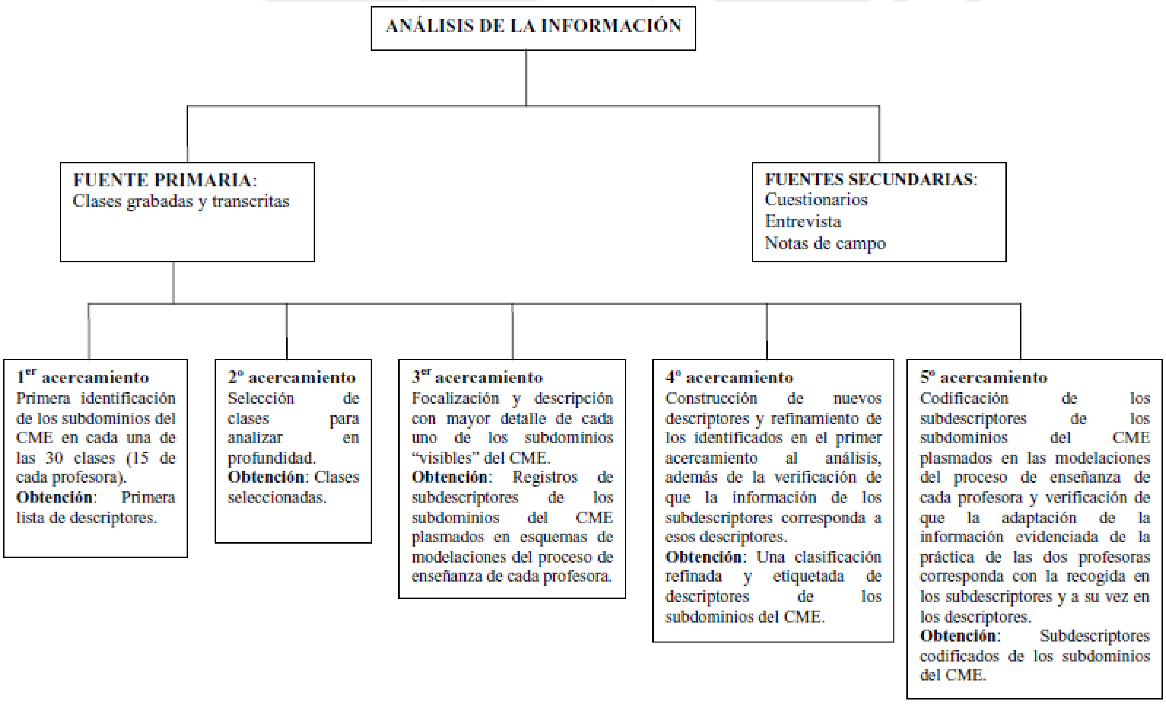


Figura 2 –Análisis de la información.

Fuente: Sosa (2011, p. 62)

Esta figura muestra el análisis de la información que se encuentra desarrollada con base en cinco fases (el autor las llama *acercamientos*): en el primer acercamiento identifica en las clases grabadas a los profesores, qué subdominios del modelo MKT se pueden encontrar y en base a ello define descriptores y los clasifica. Con la información anterior desarrolla un segundo acercamiento, donde selecciona algunas clases para ser analizadas con mayor precisión los conceptos de Matrices, Sistemas de ecuaciones lineales y Programación lineal. Selecciona 8 clases de cada docente, de las 15 que habían sido grabadas, basado en aquellas clases donde haya mayor presencia de indicadores o descriptores identificados en el primer acercamiento. Para el tercer acercamiento, Sosa desarrolla el análisis de las clases elegidas en el acercamiento anterior, en los cuales se consideran el título de la clase, el objetivo de aprendizaje de la sesión, el desarrollo de la clase identificando los descriptores y el cierre de la clase. El cuarto acercamiento permite crear nuevos descriptores hallados en el análisis de las clases y ajustar aquellos ya identificados en el primer acercamiento. También se corrobora que todos los descriptores han sido identificados totalmente. Lo que Sosa (2011) pretende es organizar la información para un fácil acceso. Ya en el quinto acercamiento se codifican los descriptores mejorados según los temas matrices, sistemas de ecuaciones lineales y programación lineal, lo que permitirá especificar con qué indicadores cuenta cada docente, relacionado con los subdominios del modelo teórico del MKT, que tiene que ver con el conocimiento del profesor, en el aspecto matemático y didáctico, así como el curricular.

Los resultados de la investigación indican que los docentes deberían desarrollar el aspecto referente al subdominio Conocimiento del contenido y los estudiantes, pues no identifican con claridad la manera de pensar y aprender de los estudiantes. También, enfatiza en la dificultad que tienen los profesores para identificar los subdominios del MKT, ya que para algunos de ellos, los indicadores y subdominios no coinciden en la misma clasificación personal del conocimiento que debe tener el profesor, según el MKT.

Como conclusión, Sosa (2011) manifiesta que la identificación de los descriptores del conocimiento matemático y didáctico del profesor, permitirá reconocer y analizar el conocimiento que tienen los profesores o de aquellos en formación, así como qué enseñar en determinados temas, al diferenciar entre contenido e instrucción.

Del trabajo de Sosa (2011) se considerarán la lista de descriptores o indicadores de los conocimientos que debe tener un profesor con respecto a los sistemas de ecuaciones lineales, que es interés de este trabajo de investigación. Así también, la clasificación de dichos conocimientos nos permitirá reconocer, de manera más sencilla, los conocimientos del profesor sobre los sistemas de ecuaciones lineales.

Se han citado dos investigaciones, uno basado en el modelo de Shulman y otro en el modelo propuesto por Ball, Hill y Schilling, el MKT. Pero también hay estudios enfocados en otros modelos, como el desarrollado por Vasco (2015) en sus tesis de doctorado, en la cual se hace un análisis tomando como referencia al modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas conocido como MTSK (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge). Su estudio se basa en indagar sobre el conocimiento didáctico-matemático del profesor de álgebra lineal en el nivel universitario, acerca de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales. Emplea una metodología cualitativa y el método de estudio de casos para dos docentes del curso, con la finalidad de identificar cuáles son los conceptos, percepciones, creencias sobre la enseñanza de la matemática, y cómo vincular esas percepciones con el conocimiento especializado. Los datos son recogidos por Vasco (2015), en base a las observaciones de clase y entrevistas semi-estructuradas, cuyos resultados son organizados teniendo en cuenta dos temas: Conocimiento sobre matrices y, Conocimiento sobre determinantes y sistemas de ecuaciones lineales. Analiza las concepciones porque considera que existe un vínculo entre las concepciones del docente, el desempeño en clase del mismo y la instrucción de los alumnos, lo que se refleja en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Para el análisis de las concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de los dos profesores que participan en esta investigación se extrajeron unidades de información, principalmente de su práctica, las cuales permitieron realizar un informe preliminar.

Los cuestionarios propuestos a los docentes buscaron obtener información referente a su experiencia, formación docente y concepciones de enseñanza-aprendizaje sobre matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, así como identificar los conocimientos y dificultades de los alumnos en el desarrollo de estos temas, y su conocimiento sobre el programa de estudio.

Las sesiones fueron grabadas y observadas, y de esos resultados se identificaron aspectos que refieren al conocimiento especializado de los docentes. Así también, se desarrollaron entrevistas a los docentes para indagar y analizar con mayor profundidad qué conocimientos presentan, y así complementar lo observado en las sesiones de clase.

Para el informe definitivo del análisis de las concepciones, Vasco (2015) consideró algunas respuestas de los profesores durante las entrevistas. Las categorías y subdominios del modelo MTSK que se analizaron para los dos docentes se muestran en la Tabla 1:

Tabla 1

Categorías del MTSK de profesores de álgebra lineal.

<table>
<tr><th>Dominio</th><th>Subdominio</th><th colspan="2">Categoría y subcategoría</th></tr>
<tr><td rowspan="13">MK</td><td rowspan="8">KoT</td><td colspan="2">Definiciones</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fenomenología y aplicaciones</td></tr>
<tr><td colspan="2">Registros de representación</td></tr>
<tr><td colspan="2">Propiedades y sus fundamentos</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Procedimientos</td><td>¿Cómo se hace?</td></tr>
<tr><td>¿Cuándo se puede hacer?</td></tr>
<tr><td>¿Por qué se hace así?</td></tr>
<tr><td>Características del resultado</td></tr>
<tr><td rowspan="4">KSM</td><td colspan="2">Conexiones de complejización</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conexiones de simplificación</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conexiones de contenidos transversales</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conexiones auxiliares</td></tr>
<tr><td>KPM</td><td colspan="2">Formas de proceder</td></tr>
<tr><td rowspan="10">PCK</td><td rowspan="3">KMT</td><td colspan="2">Teorías personales o institucionalizadas de enseñanza</td></tr>
<tr><td colspan="2">Recursos materiales y virtuales</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ejemplos para la enseñanza</td></tr>
<tr><td rowspan="4">KFLM</td><td colspan="2">Formas de aprendizaje</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje</td></tr>
<tr><td colspan="2">Formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático</td></tr>
<tr><td colspan="2">Concepciones de los estudiantes sobre matemáticas</td></tr>
<tr><td rowspan="3">KMLS</td><td colspan="2">Contenidos matemáticos que se requieren enseñar</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado</td></tr>
<tr><td colspan="2">Secuenciación de diversos temas</td></tr>
</table>

Fuente: Vasco (2015, p.126)

El cuadro que organiza Vasco (2015) muestra cómo se clasificará el conocimiento con base en el modelo MTSK, considerando dos dominios: Conocimiento Matemático (MK) y

Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK). El MK se refiere a todos los conceptos y procedimientos, organización de ideas, justificación de procedimientos, formas de comprobación (KOT), relación con otros temas (KSM), metodología utilizada, importancia que le da a los temas (KPM) y otros aspectos matemáticos como el lenguaje propio de la matemática. El PCK en tanto se refiere al conocimiento para el proceso de enseñanza-aprendizaje de matemáticas y tiene subdivisiones relacionadas con conocimientos para enseñar matemáticas (KMT), del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), y los patrones de aprendizaje matemático (KMLS).

Luego de las entrevistas y las observaciones de clase, Vasco (2015) continúa con el análisis de datos. Muestra en sus resultados que el conocimiento matemático sobre las matrices y sistemas de ecuaciones lineales está presente en los profesores y lo desarrollan sin dificultad; sin embargo, no siempre logran conectarlo con situaciones en contextos reales (como es el caso de las matrices). En cuanto a la enseñanza de los profesores, se concluye que los conocimientos y concepciones que tienen, posibilitan una mejor comprensión de los temas que enseñan, ya que muestran métodos más eficaces y prácticos, con lo cual los alumnos disminuyen los errores y dificultades al realizar operaciones.

En términos generales, el trabajo de Vasco (2015) permite reconocer el conocimiento que hay detrás de las acciones del profesor en el aula. La clasificación en dominios permite establecer unidades de información que puede organizarse en episodios que refleja el MTSK sobre matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, y estos a su vez en subdominios como KOT, KPM, KMT y KFLM, junto a la descripción del conocimiento matemático del contenido y conocimiento didáctico del contenido detallado para cada una de las categorías para el conocimiento especializado del profesor.

La investigación respalda la validez del modelo MTSK en su aplicación sobre el conocimiento especializado del profesor en el nivel universitario, constituyendo una herramienta valiosa para el análisis de dicho conocimiento. Para Vasco, la replicabilidad de estos cuestionarios resultan ser muy importantes, ya que permiten indagar diferentes temas, en diversos de niveles de educación y en las demás ramas matemáticas.

Del trabajo de Vasco (2015) consideramos que el cuestionario aplicado en la entrevista semi-estructurada y las respuestas a este, permitirán reconocer el conocimiento del profesor, así también, la replicabilidad y adaptación en el tema de sistemas de ecuaciones lineales puede ayudar a identificar dicho conocimiento, lo que forma parte de los objetivos planteados en esta tesis.

Otra investigación que aborda la identificación de los conocimientos que debe poseer un profesor de matemáticas es la realizada por Pino-Fan, Assis y Castro (2015), quienes exploran las dimensiones matemática y didáctica del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor. Dicho trabajo se realiza con profesores en ejercicio de matemáticas de primaria y secundaria, quienes cursan una maestría en la universidad de Los Lagos, en Chile. La investigación es de tipo cualitativa, con metodología de estudio de casos y se plantea una actividad que consiste en relacionar el número de cubos adyacentes que forman una fila y el número de caras visibles en dicha fila de cubos. Los autores plantean un cuestionario a los profesores con la finalidad de analizar el desarrollo de su razonamiento algebraico. Como se indicó, las preguntas están relacionadas con dos de las tres dimensiones del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático, que son la dimensión matemática y la didáctica del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático. Con respecto a la dimensión meta-didáctica-matemática, los autores indican que no surgió análisis en la actividad propuesta por los autores, porque se enfocaron en el aprendizaje y enseñanza de los estudiantes.

A su vez, en cada dimensión se realiza un análisis más exhaustivo de ambas dimensiones. Para la dimensión Matemática analizan los conocimientos común y extendido del profesor; y para la dimensión Didáctica analizan el conocimiento del profesor basados en las seis facetas de dicha dimensión: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interactiva y medicional.

Los investigadores analizan las respuestas y las organizan, llegando a concluir, en cuanto a la dimensión Matemática, que los profesores resuelven problemas invocando al conocimiento común, pero algunos tienen ciertas diferencias cuando se indaga sobre su conocimiento extendido, por ejemplo cuando relacionan tareas en diversos niveles educativos, sin que todos coincidan en uno común, por lo que sugieren realizar estudios sobre ello en futuras investigaciones que permitan establecer una concordancia. En cuanto a la dimensión Didáctica, se analizan las respuestas y se hacen conclusiones sobre cada faceta: En la faceta epistémica, los profesores solicitan desarrollar tareas que permitan generalizar a los alumnos aspectos algebraicos, pero la forma de llegar a esa generalización no es eficiente en algunos casos, inclusive alguno no usa formas algebraicas. Y cuando se les solicita otra forma de solución, en algunos casos manifiestan que no es posible. Para Pino-Fan, Assis y Castro (2015), esto evidencia un bajo nivel de conocimiento respecto a la faceta epistémica por parte de algunos docentes. En la faceta ecológica, los docentes relacionan la actividad con los grados en los cuales desempeñan la profesión, lo que muestra conocimiento del currículo, pero también los autores concluyen, a partir de las respuestas al cuestionario y las entrevistas, que los docentes tienen poca experiencia con aspectos relacionados al razonamiento algebraico. En la faceta cognitiva, los docentes reconocen que los alumnos tienen problemas de generalización, además de manifestar errores al considerar las caras de los cubos que no son visibles. En la faceta afectiva, los docentes afirman que el uso de materiales que puedan manipular o programas computacionales motivarían a los alumnos establecer la relación de los cubos y sus caras visibles. Desafiarlos como si fuese un reto, podría ser otra forma de lograr lo deseado. Además, esta faceta y la cognitiva permiten determinar las dificultades y errores de los alumnos, pero los profesores no saben cómo dar solución a dichos errores, aduciendo a falta de capacidad o habilidad en matemáticas, como el pretender hallar la relación entre el número de cubos en la fila y el número de caras visibles. En la faceta interaccional, indican que los docentes sugieren que, para optar por otras estrategias, los alumnos necesitan manejar generalidades algebraicas, sino tendrán dificultades. Y en la faceta medicional, proponen que el trabajo con material apropiado facilita generar conocimiento en los alumnos.

Los investigadores concluyen que el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático permite un mejor estudio que otros modelos desarrollados hasta aquí, pues brinda herramientas de análisis ámbitos no vistos, por ejemplo, el análisis de las facetas afectiva, interaccional y medicional, lo que permite crear un mejor conocimiento del profesor, para desarrollar un ideal proceso de enseñanza-aprendizaje. También, indican que aun cuando los profesores son capaces de resolver problemas, es necesario promover todas las facetas conocimientos del profesor, en términos del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático para lograr un eficiente proceso de enseñanza-aprendizaje, con mayor énfasis en matemáticas. Algunos conocimientos matemáticos no son asimilados por muchos alumnos debido a las deficiencias en los primeros años de educación. Esto implica seguir en la capacitación y formación continua de los docentes, para que ellos puedan desarrollar las diversas facetas del modelo del Conocimiento Didáctico-matemático.

Del trabajo de Pino-Fan, Assis y Castro (2015) se tomarán en cuenta el cuestionario que aplican, así como el análisis de las respuestas de los profesores participantes en el estudio, ya que ayudan a reconocer el conocimiento de los profesores en las dimensiones matemática y didáctica, desde el punto de vista del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático en relación a los sistemas de ecuaciones lineales.

Otro trabajo es el que presenta Pino-Fan (2013) quien muestra resultados de la aplicación de un cuestionario sobre el conocimiento de la derivada, a un grupo de profesores en México, quienes son evaluados con respecto a la faceta epistémica, del Conocimiento Didáctico-Matemático. Es un trabajo de tipo mixto, es decir, cualitativo por su análisis sobre las configuraciones cognitivas sobre la derivada, en los profesores, y cuantitativo por considerar el nivel de respuesta a las preguntas del cuestionario. Además, para la recolección de datos se aplicó un cuestionario y entrevistas estructuradas y semi-estructuradas, así como el análisis de textos.

Los aspectos relevantes de dicho trabajo son los referidos al diseño del cuestionario que evalúa el conocimiento de los profesores y la construcción del significado de referencia sobre el objeto derivada. Se muestra la construcción del significado de referencia de la derivada a partir de su evolución en el tiempo y considerando aspectos epistemológicos.

Con base en los tres aspectos mencionados anteriormente, de la faceta epistémica, se construyó un cuestionario, relacionado con:

- El significado global de la derivada, que se refiere a la identificación de los conceptos de derivada, tales como: la pendiente de la recta tangente, la razón de cambio instantánea y la tasa instantánea de variación.

- Las representaciones de la derivada, que implican: representar una función en distintas formas, cambiar de representación de una función por su derivada, y representar la derivada de una función en distintas formas. De esta manera, se pueden analizar las representaciones de una función y su derivada través de diversos lenguajes: verbal, gráfico, simbólico y tabular.
- El tipo de conocimiento en la faceta epistémica, es decir, el *conocimiento común*, que permiten solucionar tareas; el *conocimiento especializado*, que permite el uso de diversas representaciones, significados, aplicación de procedimientos, argumentar correctamente, reconocer conocimientos presentes en la solución de tareas; y el *conocimiento ampliado*, que permite la generalización de tareas con respecto al conocimiento común o especializado, como vincular con otros objetos presentes en el currículo.

Para la clasificación de las diversas concepciones de la derivada y la construcción del significado de referencia global de la derivada, Pino-Fan (2013) analiza los hechos históricos-epistémicos respecto a la aparición y evolución de la derivada, por ejemplo: la matemática griega entre los años 300 y 200 a.C., la variación en la Edad Media (entre los siglos XIV y finales del XVI), la creación, desarrollo y rigor del cálculo diferencial (siglo XVII al XIX) y la generalización de la derivada. Estos aspectos históricos permiten al autor, organizar nueve sistemas de prácticas agrupados en tres configuraciones que son las situaciones con tangentes; máximos y mínimos; y velocidades. A partir de ello se organizan las demás situaciones asociadas a un respectivo significado de la derivada. Cabe resaltar que para lograr el estudio de los diversos momentos históricos-epistémicos de la derivada, el autor hace un estudio y análisis de materiales bibliográficos, como manuales, investigaciones didácticas, libros de texto, planes de estudio. En esta investigación también se considerará un análisis de contenido de diversa bibliografía relacionada a los sistemas de ecuaciones lineales.

Pino-Fan (2013) resalta la importancia de elaborar un significado global de referencia en torno a la derivada, ya que, desde el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticas, este significado holístico posibilita comprender los sistemas de prácticas relacionados a las diversas situaciones-problema y determinar cuáles serán los otros significados institucionales, es decir, el pretendido, implementado y el evaluado.

Pino-Fan (2013) también presenta un cuestionario que permitirá evaluar la faceta epistémica de los profesores con respecto a la derivada. Este instrumento ha sido diseñado a partir de un plan piloto y la validación de expertos en cálculo diferencial. Se consideran 3 aspectos importantes para su elaboración: primero, comparar el nivel de significado personal de profesores contra el significado global de la derivada.; segundo, se refiere a las representaciones relacionadas a la derivada, tanto en la conversión y tratamiento entre las diversas formas de representación y; tercero, el conocimiento didáctico-matemático del profesor en cuanto a su conocimiento común, especializado y ampliado. Además, el autor evalúa cuál es el nivel de idoneidad epistémica en el currículo de matemáticas cuando analiza información bibliográfica (textos, respuestas de cuestionarios o entrevistas).

Como resultado de dicha investigación, el autor concluye que algunos profesores manifiestan dificultades en las representaciones de la derivada, a la vez que no establecen conexión entre los diferentes significados de la derivada. También presentan problemas relacionados al conocimiento especializado y ampliado sobre la derivada, ya que encuentran problema al resolver tareas con modelación. Por ello, el autor enfatiza en la necesidad de orientar, desarrollar y potenciar los conocimientos de los profesores de bachillerato, referidos con la derivada y recomienda brindar sesiones adecuadas de enseñanza-aprendizaje a los alumnos.

Este trabajo de Pino-Fan (2013) brinda ideas para construir el significado de referencia de los sistemas de ecuaciones lineales en esta tesis. La clasificación de las configuraciones y la identificación de los objetos matemáticos en cada una de ellas, como son las situaciones-problemas, los lenguajes, los procedimientos o justificaciones, que emergen de las prácticas, permitirán identificar el conocimiento didáctico-matemático del profesor sobre nuestro objeto matemático de estudio. A su vez, el análisis de los libros que hace Pino-Fan en su trabajo, nos orienta sobre la manera de relacionar los resultados del análisis de textos matemáticos y escolares, así como del currículo de matemáticas con respecto a los sistemas de ecuaciones lineales, con las facetas epistémicas y ecológicas del modelo.

Otro estudio que permite identificar los conocimientos del profesor es el que presenta Escudero (2017), basado en el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático, y cuyo centro de atención fue el reconocimiento de dicho conocimiento en la faceta epistémica sobre las funciones lineales y cuadráticas. La investigación es de tipo cualitativo y se hace un análisis teórico, pues es una propuesta sobre los conocimientos del profesor, apoyada en analizar textos escolares y no escolares de matemática, así como investigaciones en didáctica de la matemática. El método de investigación es el análisis de contenido de textos, que según López (2002), es una técnica que permite analizar las ideas de los documentos tratando de cuantificarlas. Se basa en buscar palabras u otras simbologías que aparecen en el contenido de la comunicación, situándose en la lógica de las comunicaciones interhumanas. Este trabajo también analiza el constructo llamado Razonamiento Algebraico Elemental para que ayude en el reconocimiento y valoración de las tareas relacionadas con las funciones lineales y cuadráticas. Este constructo muestra diversos niveles de algebrización que permiten desarrollar progresivamente las características algebraicas, durante las prácticas al solucionar tareas. Cada nivel presenta objetos y procesos que aparecen de las actividades matemáticas. Para lograr estos niveles se analizan los objetos ostensivos (fáciles de percibir o mostrar a otra persona) y objetos intensivos presentes, a la vez que se identifican los símbolos que utilizan, los objetos intensivos que manejan durante los cálculos y la generalización

Escudero (2017) construye el significado institucional de referencia de las funciones lineales y cuadráticas, a partir del estudio de los textos utilizados en secundaria, educación superior e investigaciones, lo que le permite clasificar situaciones y organizar prácticas matemáticas que sean consideradas en la formación de profesores. Luego, presenta listas de indicadores de conocimientos, para la faceta epistémica del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático y en relación al razonamiento algebraico elemental.

Escudero (2017) concluye que no es suficiente solo el conocimiento matemático del profesor para el proceso de enseñanza-aprendizaje, sino que, considerando los análisis de su estudio, es necesario identificar otros aspectos en cuestión de didáctica, por lo que los se muestran una serie de tipologías situacionales y conocimientos ideales. También menciona que al ser el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático muy amplio, es necesario realizar investigaciones sobre las demás facetas del modelo.

Este trabajo orienta en la forma que se podrían analizar los textos para conseguir la construcción del significado de referencia de los sistemas de ecuaciones lineales, así también los elementos que encuentra de dicho análisis y la tipología que define para estos objetos primarios, son muy relevantes para esta tesis. Por otro lado, los indicadores que plantea en su trabajo sobre el conocimiento del acerca de las funciones lineales y cuadráticas, tienen relación con nuestro objeto matemático de estudio, por lo que evaluaremos cuáles podríamos considerar.

1.2.Justificación y Objetivos de la investigación

En los últimos años, se han desarrollado numerosas investigaciones sobre el conocimiento que debe tener el profesor de matemáticas, a partir de diversos modelos teóricos.

Sin embargo, dada la gran variedad de objetos matemáticos, es necesario realizar más investigaciones en Didáctica de la Matemática orientadas a la construcción de instrumentos que permitan identificar el conocimiento didáctico-matemático para temas específicos. Así por ejemplo:

- Gonzato, Godino y Neto (2011) presentan una evaluación del conocimiento didáctico-matemático del profesor sobre la visualización de objetos tridimensionales, explorando la facéta epistémica, desde el marco del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS).
- Rivas, Godino y Castro (2012) hacen un análisis epistémico, desde el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), que permite desarrollar el conocimiento especializado del contenido del profesor con referencia a la proporcionalidad.
- Pino-Fan (2013) realiza una investigación que analiza la faceta epistémica del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor sobre la derivada.
- Vásquez (2014) desarrolla una tesis doctoral sobre la evaluación de los conocimientos del profesor para enseñar probabilidad, donde brinda indicadores

relacionados al conocimiento común, ampliado y especializado, mediante el uso del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS)

- Vasco (2015) realiza un estudio sobre el conocimiento especializado del profesor, acerca del álgebra lineal, basado en el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, acerca de las matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.
- Sepúlveda (2016) hace un análisis del conocimiento del profesor universitario sobre el objeto Campo, en referencia a la faceta epistémica del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático.
- Así también, Escudero (2017) muestra su trabajo basado en reconocer el conocimiento del profesor en la faceta epistémica, sobre las funciones lineales y cuadráticas, con base en el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático.

Este trabajo de tesis pretende indagar por el conocimiento del profesor de matemáticas en la educación secundaria, pero referido a los sistemas de ecuaciones lineales. Este estudio tendrá un alcance sobre los sistemas que están conformados por 2 o 3 ecuaciones lineales, tema que figura en la reciente publicación Currículo Nacional de Educación Básica (PERÚ, 2016), en el cual se considera el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales en la educación secundaria. El estudio de los sistemas de ecuaciones lineales se encuentra en el nivel 7 de los estándares de aprendizaje esperado en los alumnos, asociado con la competencia. En el Currículo Nacional se detalla lo siguiente:

> Resuelve problemas referidos a analizar cambios continuos o periódicos, o regularidades entre magnitudes, valores o expresiones, traduciéndolas a expresiones algebraicas que pueden contener la regla general de progresiones geométricas, sistema de ecuaciones lineales, ecuaciones y funciones cuadráticas y exponenciales. Evalúa si la expresión algebraica reproduce las condiciones del problema. Expresa su comprensión de la regla de formación de sucesiones y progresiones geométricas; la solución o conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales e inecuaciones; la diferencia entre una función lineal y una función cuadrática y exponencial y sus parámetros; las usa para interpretar enunciados o textos o fuentes de información usando lenguaje matemático y gráficos. Selecciona, combina y adapta variados

recursos, estrategias y procedimientos matemáticos para determinar términos desconocidos en progresiones geométricas, solucionar ecuaciones lineales o cuadráticas, simplificar expresiones usando identidades algebraicas; evalúa y opta por aquellos más idóneos según las condiciones del problema. Plantea afirmaciones sobre enunciados opuestos o casos especiales que se cumplen entre expresiones algebraicas; así como predecir el comportamiento de variables; comprueba o descarta la validez de la afirmación mediante contraejemplos y propiedades matemáticas (PERÚ, 2016, p.139).

Como se puede apreciar, la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio, establece algunas consideraciones como usar ecuaciones que permitan establecer relaciones entre magnitudes, así como usar estrategias que permitan resolver problemas. Estas estrategias deben ser proporcionadas por el docente, por lo cual es imprescindible que los profesores de educación secundaria desarrollen herramientas para ser usadas en su labor docente. Es importante considerar que el desarrollo de los sistemas de ecuaciones lineales tiene utilidad en diversos contextos reales, propios de la matemática y fuera de ella, lo que muestra la existencia de conexiones con otros temas de estudio. En los antecedentes, algunas investigaciones desarrollan el conocimiento de los profesores sobre los sistemas de ecuaciones lineales pero desde marcos teóricos diferentes al que se toma en esta investigación, que es el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático.

Del mismo modo, el Currículo Nacional (PERÚ, 2016) brinda orientaciones pedagógicas a los docentes para desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje, en el capítulo VI de dicho documento. Se incluyen entre ellas, el hecho que el profesor cree situaciones significativas que permitan tener elegir algún esquema de solución y que generen interés en los alumnos, pues así ellos sentirán la necesidad de ampliar sus conocimientos. Finalmente, se señala que deben partir de conocimientos previos que son la base del aprendizaje; enseñar a los alumnos desde sus errores, pues es una manera de aprender, lo que permite analizar los factores de decisión que los condujeron a su respuesta errada.

Todo esto implica que el docente tenga la capacidad de seleccionar y organizar de manera acertada el conocimiento que tiene y pueda brindar la información apropiada, a fin que puedan ser asimilado de manera eficiente. Sin embargo, aún existen brechas de desigualdad en aprendizaje tal como ha venido ocurriendo en nuestro país en los últimos 15 años, tal como lo indica UNESCO (2017), que además menciona la importancia que existe sobre la preparación del profesor. En el Perú, la formación inicial de los profesores está a cargo de institutos pedagógicos y facultades de universidades, pero en la última década la cantidad de alumnos en carreras de educación ha descendido y los programas de estudio no han cumplido con las exigencias de la realidad social. Por ello, es urgente la creación de un sistema integral de formación de profesores que permita desarrollar dichos conocimientos en el profesor. Existe una iniciativa y motivación para evitar que siga el descenso de alumnos en carreras de educación, como la del Ministerio de Educación, que ha creado el programa Beca Vocación de Maestro a cargo del Programa Nacional de Becas y Crédito Educativo (PRONABEC).

Motivado por lo anterior y basado en el modelo Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor, este trabajo pretende identificar cuál debería ser el conocimiento que debe poseer el profesor de secundaria con respecto a los sistemas de ecuaciones lineales, desde las facetas epistémica y ecológica del modelo antes descrito, para brindar ayuda que permita organizar el conocimiento del profesor al momento de desarrollar su práctica docente y así pueda brindar herramientas a los alumnos para optimizar el uso de este objeto de estudio.

Ante lo expuesto, se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué conocimientos didáctico-matemáticos, en la faceta epistémica y ecológica, deberían tener los docentes de secundaria de Educación Básica Regular en el Perú, con relación a los sistemas de ecuaciones lineales?

Al responder esta pregunta se pretenden señalar, de manera explícita, los conocimientos didáctico-matemáticos que requiere un profesor en relación con los sistemas de ecuaciones lineales. Es necesario precisar que los sistemas de ecuaciones que se considerarán para el estudio son los que se conforman de 2 o 3 ecuaciones lineales. Además, aunque el modelo considerado tenga diversas dimensiones, en este trabajo solo se considerarán la dimensión Matemática y la dimensión Didáctica, sobre esta última, específicamente, las facetas epistémica y ecológica, en torno a los sistemas de ecuaciones lineales. Esto debido a que se considera muy importante la faceta epistémica, ya que considerado desde "un punto de vista antropológico y semiótico: la matemática como actividad humana adquiere significado mediante la acción de las personas ante situaciones – problemas específicos" (Godino, 2009, p.21). Además, dado que los objetos primarios que identificaremos forman configuraciones epistémicas que surgen de la práctica matemática, estos forman parte del conocimiento especializado que debe tener el profesor sobre los sistemas de ecuaciones lineales. Y con respecto a la faceta ecológica, debido a que se debe analizar cuáles son los lineamientos y el currículo que pretende implementarse en la educación secundaria y que el profesor debe tener conocimiento para la elaboración actividades de la enseñanza-aprendizaje.

De esta manera, se identificarán los conocimientos sobre los sistemas de ecuaciones lineales, que debería tener un profesor de matemáticas de modo que estos le permitan organizar sesiones de clase y relacionar dichos conocimientos con otros temas matemáticos como la programación lineal o matrices, por citar algunos ejemplos.

Así, para esta investigación se ha propuesto el siguiente objetivo general:

O.G.: Identificar conocimientos que debe tener un profesor de educación secundaria en el marco del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático, en la faceta epistémica y ecológica, sobre los sistemas de ecuaciones lineales.

Para lograr este objetivo general se plantea los siguientes objetivos específicos:

O.E. 1: Construir el significado de referencia sobre los sistemas de ecuaciones lineales, en la educación secundaria peruana.

O.E. 2: Reconocer el conocimiento, con respecto a los sistemas de ecuaciones lineales, que deben tener los profesores de secundaria en la Dimensión Matemática del Conocimiento Didáctico-Matemático.

O.E. 3: Identificar, en la Dimensión Didáctica del Conocimiento Didáctico-Matemático, referentes a las facetas epistémica y ecológica, el conocimiento con respecto a los sistemas de ecuaciones lineales, que deben tener los profesores de secundaria.

1.3.Aspectos Metodológicos

Según Martínez (2006), los nuevos procesos metodológicos buscan clarificar las dificultades de la vida moderna y proporcionar procesos con nivel científico, proporcionando "procedimientos rigurosos, sistemáticos y críticos" (Martínez, 2006, p.124). Hoy en día, según el autor, la investigación se da en relación al conocimiento y la ciencia, pero no es posible analizar todas bajo el método científico tradicional, que es muy rígido. La naturaleza hace que las investigaciones científicas se basen en metodologías con una perspectiva cualitativa. Indica también que el término cualitativo es usado bajo dos conceptos, que son la cualidad y la calidad, sin un grado de jerarquía de uno sobre el otro y que la investigación cualitativa procura reconocer la naturaleza como un solo sistema integrado. Lo importante de toda investigación es *recoger* información que permita dar solución a los problemas y *organizar* esta información de manera lógica y coherente. Trata de reconocer la naturaleza esencial de la realidad, como está estructurada y cómo se relacionan los elementos que surgen en la investigación, para cumplir estas dos tareas básicas de toda investigación: recoger datos, clasificarlos e interpretarlos.

El objetivo de este trabajo es identificar el conocimiento didáctico-matemático del profesor de secundaria sobre los sistemas de ecuaciones lineales, por lo que se desea brindar una propuesta metodológica que permita lograr esa identificación. Para ello se analizarán aspectos cualitativos como: el significado de referencia de los sistemas de ecuaciones lineales y la determinación de indicadores sobre el conocimiento didáctico-matemático que debe tener el profesor de secundaria sobre lo mismo. De esta manera, en esta investigación se realizará una metodología de ***tipo cualitativo.***

Martínez (2006) también menciona algunos criterios para el trabajo de una investigación cualitativa que permiten un adecuado trato de la información, validez y confianza en la investigación:

- Buscar información idónea, sincera, que permita luego redireccionar y buscar nueva información.
- No modificar la información real.
- Revisar la información cuantas veces sea necesaria.

- Elegir los datos más significativos de los sujetos y objetos.
- Comparar cómo otros investigadores recolectan datos.
- Desde la perspectiva cualitativa, el investigador es parte del caso de estudio, lo que le permite recabar información para que sea lo más veraz posible.

En este trabajo se identificarán los lenguajes, situaciones, conceptos, procedimientos y propiedades en tareas que involucren a los sistemas de ecuaciones lineales. Con ellos, se podrá construir el significado de referencia de los mismos, lo que permitirá junto a documentación emitida por el Ministerio de Educación del Perú y otras investigaciones en didáctica matemática, reconocer el conocimiento que debe tener el profesor de matemáticas en las facetas epistémica y ecológica, relacionadas con el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático. Estos elementos están presentes en diversos materiales educativos, como textos escolares, textos matemáticos, investigaciones y el Diseño Curricular de Educación Básica (PERÚ, 2016). Por ello, el método que se utilizará para llegar a cumplir los objetivos es el ***análisis de contenido*** de los materiales antes mencionados.

Andréu (2001) menciona que el análisis de contenido consiste en interpretar textos donde haya datos que permitan identificar fenómenos y otros aspectos de la sociedad. La lectura de los textos debe realizarse según el método científico y tomar en cuenta aspectos sistémicos, objetivos, replicables y válidos. En base a esto, para este trabajo se adaptarán algunas fases de manera conveniente y se contemplarán otras:

- Determinar el objeto de análisis: Al definir el problema de investigación se establece en qué línea se encuentra la investigación. De ahí surge la pregunta con la cual el investigador debe buscar bibliografía que ayude a responderla y que sea acorde a un marco teórico (Andréu, 2001). En este trabajo, se pretende indagar sobre conocimiento didáctico-matemático del profesor de educación secundaria acerca del objeto sistema de ecuaciones lineales bajo el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático. Se analizarán textos escolares, matemáticos e investigaciones en didáctica matemática donde se desarrolle el objeto mencionado, por lo que se considerarán a estos materiales como unidades de análisis. El marco teórico en el que se desarrolla este trabajo tiene herramientas del EOS como los sistemas de prácticas (discursivas u operatorias) que permitirán analizar las unidades y a partir de ello, construir el significado de referencia de los sistemas de ecuaciones lineales.

- Determinar el sistema de codificación: La codificación implica transformar los datos de las unidades en información que permitan descubrir y describir características del contenido. Para esta investigación nos referiremos a objetos primarios, en términos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS), en los textos, es decir, cuales se refieren a situaciones-problema, cuales a lenguajes, definiciones, propiedades, procedimientos y argumentaciones. En este estudio se considerará utilizar simbología matemática (verbal, numérica, gráfica o simbólica), lenguaje contemplado en el EOS.
- Determinar el sistema de categorías: Se refiere a clasificar los elementos, agruparlos por similitudes, en base a criterios pre-establecidos. Implica buscar qué de común tienen con respecto a otros. Para este trabajo, el sistema de categorías se relaciona con la clasificación de las situaciones problemas, contempladas por el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático. Esta clasificación se basa en aparición de situaciones consideradas como herramientas o como objetos, adaptando la dialéctica de Douady (2009) a este trabajo. Esto se explicará con mayor precisión cuando se desarrolle la construcción del significado de referencia de los sistemas de ecuaciones lineales. Así también, se considerarán los contextos en los que aparece, siendo estos intra-matemático (aritméticos, algebraicos y geométricos) y extra-matemáticos (físicos y químicos). Así también, se considerarán qué elementos aportan en la identificación del conocimiento del profesor según las Dimensiones Matemática y Didáctica, del modelo teórico considerado. En la Dimensión Matemática se consideran 2 sub-categorías, que son el conocimiento común y ampliado del contenido, mientras que en la Dimensión Didáctica se han considerado, como ya se dijo, solo las facetas epistémica y ecológica, todo ello referente a los sistemas de ecuaciones lineales.
- Inferencias: El investigador llega a concluir o explicar ciertos aspectos, algunos explícitos y otros implícitos del propio contenido del texto. En este trabajo, se pretende reconocer el conocimiento didáctico-matemático del profesor de secundaria,

en la faceta epistémica y ecológica, de la dimensión didáctica. Para eso primero se construirá un significado de referencia institucional sobre los sistemas de ecuaciones lineales. Se considerarán las consignas que presenta Godino (2009), así como las preguntas que proponen Pino-Fan y Godino (2015), ambas casos permitirán deducir dichos indicadores de conocimiento del profesor.

Para recabar información se analizarán textos, algunos escolares y otros no escolares. Rivas (2015) indica que los libros son muy importantes en la educación ya que regulan el conocimiento. También indica que en el Perú, la política del Estado referente a la entrega de libros, permitió mejorar la calidad de la educación secundaria. Los libros son importantes pues en ellos esto muestra la importancia que implica tener un significado institucional de referencia, ya que los textos buscarán cumplir con el significado pretendido por la institución. Debemos analizar las actividades y realizar un estudio epistémico de los textos, ya que ellos son referentes del conocimiento sobre los sistemas de ecuaciones lineales.

Como ya se dijo antes, se propondrá un significado de referencia para los sistemas de ecuaciones lineales. Para ello se seguirán los siguientes pasos:

- Realizar un análisis de contenido de los textos matemáticos y no matemáticos, así como de otros trabajos de investigación en didáctica matemática. Se anotará información donde haya enunciados verbales, definiciones, gráficos, simbología matemática, justificaciones, métodos y todo cuanto se relacione con sistemas de ecuaciones lineales.
- Organizar la información mediante la configuración de los objetos matemáticos primarios, con base en las prácticas discursivas y operatorias del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático, esto es clasificar en situaciones-problema, definiciones, propiedades, procedimientos y argumentaciones, para así lograr la construcción del significado de referencia institucional, sobre los sistemas de ecuaciones lineales, cumpliendo el primer objetivo específico de esta investigación.

Con ello y apoyado en indicadores que existen en otras investigaciones sobre conocimiento del profesor de matemática, referente a sistemas de ecuaciones lineales, podremos identificar los conocimientos matemáticos, común y ampliado, que debe tener un profesor de secundaria sobre el objeto de estudio mencionado. Así se cumplirá con el segundo objetivo específico.

Para cumplir con el tercer objetivo específico, se considerará la configuración de los objetos primarios antes mencionada, para identificar qué representaciones, métodos de solución, propiedades o vinculación con temas avanzados, referente a los sistemas de ecuaciones lineales debería tener el profesor de matemáticas. De esta manera podremos identificar los conocimientos referidos a la faceta epistémica. De la misma manera, se analizará el Currículo Nacional de Educación Básica (PERÚ, 2016) para establecer a través del desarrollo de tareas propuestas, cuáles son los elementos que se realizan, y qué conexiones intra e interdisciplinarias se establecen. Con esto se identificará el conocimiento del currículo y sus contextos educativos.

La secuencia de procedimientos a seguir para cumplir nuestros objetivos se detalla a continuación:

- Seleccionar investigaciones sobre sistemas de ecuaciones lineales y otros documentos referentes al conocimiento didáctico-matemático del profesor.
- Seleccionar textos escolares de secundaria y textos matemáticos no escolares donde se desarrolle el tema de sistemas de ecuaciones lineales. Los textos seleccionados para esta investigación, deben cumplir con los criterios establecidos por el Ministerio de Educación del Perú u otras instancias similares, así como ser evaluados por alguna entidad confiable. Debemos identificar las situaciones-problema, que aparecen en los textos, ya que en ellos surgen los objetos primarios que se analizarán.
- Analizar el contenido de dichos materiales para identificar los objetos primarios que aparecen y que se relacionan con los sistemas de ecuaciones lineales.
- Analizar el Currículo Nacional (PERÚ, 2016), así como las Rutas de Aprendizaje, Mapas de Progreso y Sesiones de Aprendizaje, que son documentos oficiales de la Educación Básica Regular del Perú, los cuales nos mostrarán una visión de qué situaciones-problemas se expresan sobre los sistemas de ecuaciones lineales, en la secundaria. A su vez, permitirá identificar en qué nivel, ciclo y grados, según la

organización de la educación básica regular peruana, se desarrollan los sistemas de ecuaciones lineales, así como las capacidades o competencias que se deben cubrir con este estudio.

- Establecer el sistema de codificación y de categorías, hallados en el análisis de contenido de la bibliografía.
- Determinar la clasificación los objetos primarios sobre los sistemas de ecuaciones lineales, así como describir las características de lenguaje, situaciones, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos.
- Construir un significado de referencia institucional en la escuela secundaria del sistema educativo peruano, sobre los sistemas de ecuaciones lineales. Para ello, se analizarán los diversos materiales bibliográficos antes mencionados, e identificar los distintos sistemas de prácticas referentes a los sistemas de ecuaciones lineales.
- Proponer cuáles deben ser los conocimientos didáctico-matemáticos que debe tener el profesor en relación a su conocimiento común y ampliado del contenido. Para ello, se realizará un análisis de los descriptores o indicadores propuestos por Sosa (2011) y Vasco (2015) sobre el conocimiento matemático acerca de los sistemas de ecuaciones lineales, según el subdominio del marco teórico que aborde cada una de estas investigaciones.
- Proponer qué conocimientos sobre el conocimiento especializado debe tener el profesor sobre los sistemas de ecuaciones lineales, con ayuda de la configuración de objetos primarios y el significado de referencia que se construyó. Con ello presentaremos una lista de indicadores referentes al conocimiento didáctico-matemático del profesor, desde la faceta epistémica del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático.
- Identificar en qué otros niveles de la matemática y en qué otras disciplinas hay presencia de los sistemas de ecuaciones lineales, en el currículo de educación secundaria.
- Proponer cuáles deben ser los conocimientos didáctico-matemáticos que debe tener el profesor en relación a la faceta ecológica sobre los sistemas de ecuaciones lineales. Para ello, nuevamente se analizarán los indicadores propuestos por Sosa (2011) y

Vasco (2015), sobre el conocimiento del currículo, sobre de los sistemas de ecuaciones lineales.

Esta secuencia de actividades se desarrollará aplicando los aspectos que brinda el modelo de Conocimiento Didáctico-Matemático, y aplicando el método de análisis de contenido, los cuales permitirán dar respuesta a nuestra pregunta de investigación y cumplir los objetivos de este trabajo.

Como ha quedado evidenciado, este capítulo muestra antecedentes que son importantes para el estudio del conocimiento del profesor sobre los sistemas de ecuaciones lineales, así como la metodología que se utilizará, y metodología de análisis de contenido, mostrando la secuencia de actividades a desarrollar durante la investigación.

En el siguiente capítulo se desarrollan aquellos aspectos teóricos que se han considerado para el desarrollo de esta tesis.

CAPÍTULO 2: ELEMENTOS TEÓRICOS CONSIDERADOS EN LA INVESTIGACIÓN.

En este capítulo se presentan aspectos teóricos del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor, basado en las herramientas y nociones teóricas que propone el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática (EOS). Este modelo ayudará a identificar cuál es el conocimiento didáctico-matemático del profesor de secundaria sobre los sistemas de ecuaciones lineales, en relación a las facetas epistémica y ecológica, que es el objetivo de este trabajo de investigación. Es por ello que primero se describirán las herramientas y nociones que brinda el EOS, para luego mostrar la ampliación del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor, que corresponde a la propuesta por Pino-Fan y Godino (2015).

2.1. Aspectos teóricos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática (EOS).

El EOS es "una síntesis de supuestos y nociones teóricas" (Godino, Batanero y Font, 2008, p.4), es decir, es la articulación de diferentes modelos teóricos que se utilizan en investigaciones sobre Educación Matemática a partir de presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas y su enseñanza.

El EOS tiene su punto de partida en "la formulación de una ontología de objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado" (Godino, Batanero y Font, 2008, p.4).Las definiciones de prácticas, objetos y significados surgen de las situaciones-problema para comprobar dos aspectos: el triple aspecto de la matemática mencionado y la génesis (institucional y personal) del saber matemático, a la vez que de la recíproca dependencia.

El EOS brinda herramientas teóricas que permiten analizar los procesos de enseñanza-aprendizaje de los diferentes temas matemáticos. Entre ellas se considerarán:

- Sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a tipos de problemas.
- Configuración de objetos y procesos matemáticos.

La primera debido a que se necesita identificar cuáles son los sistemas de prácticas a los que se enfrentan las personas cuando se abordan situaciones sobre sistemas de ecuaciones lineales, para lo cual se tomará como institución de referencia a la educación secundaria peruana. Por ello, se propondrá el significado de referencia institucional de la secundaria, referido a los sistemas de ecuaciones lineales. Y en cuanto a la segunda, se identificarán los elementos que surgen de las prácticas matemáticas, clasificándola en objetos primarios que se relacionen con los sistemas de ecuaciones lineales y así hacer un análisis más exhaustivo que los desarrollados por otros modelos teóricos, dada “la forma particular que adoptan los conocimientos en distintos marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje” (Godino, Batanero y Font, 2008, p.8).

A continuación, se detallan algunas herramientas que se aplicarán en esta tesis.

2.1.1. Sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a tipos de problemas.

Godino, Batanero y Font (2008) indican que la práctica matemática es toda actividad o forma de expresión que realiza alguna persona para resolver situaciones, tareas o problemas de la matemática, esto implica, comunicar a otras personas la solución encontrada, aprobar o generalizar en otros contextos y situaciones. Todo esto se entiende que ocurre en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los diversos temas matemáticos. Así también, los autores definen una institución como el conjunto de personas implicadas en un mismo tipo situaciones problemáticas; lo que conlleva a realizar prácticas sociales de características específicas, que son establecidas por las herramientas, reglas o funcionamientos que se disponen en la misma.

Lo que es de interés a considerar en la matemática son los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) que manifiestan las personas cuando se enfrentan a diversos problemas. En este trabajo se considerarán los problemas referidos a sistemas de ecuaciones lineales. Por ello es necesario proponer una tipología de significados como la presentada en la Figura 3, que se muestra a continuación:

Figura 3 – Tipos de significados institucionales y personales.

Fuente: Godino, Batanero y Font (2008, p.6)

Como se puede apreciar, para el significado institucional se propone considerar la siguiente clasificación:

- Implementado: es el sistema de prácticas que utiliza el profesor en una clase.
- Evaluado: es el sistema de prácticas que utiliza el profesor en la evaluación del aprendizaje.
- Pretendido: es el sistema de prácticas que se planifica la institución en un proceso de estudio.
- Referencial: es el sistema de prácticas que sirve como referencia a la institución para elaborar el significado pretendido. Este significado de referencia es parte del significado holístico del objeto matemático de estudio. Para ello se necesita hacer un estudio histórico-epistemológico del origen y la evolución del objeto en estudio, y considerar los diferentes pasajes donde está dicho objeto.

En este trabajo, se realizarán las acciones y análisis necesarios para identificar, construir y proponer un significado de referencia institucional en la educación básica regular peruana, debido a lo amplio que resultaría determinar los otros significados institucionales, es decir, el pretendido, implantado o evaluado.

Así también el significado personal presenta la siguiente clasificación:

- Global: es la totalidad del sistema de prácticas de la persona con respecto a un objeto matemático.
- Declarado: es el sistema de prácticas respecto a una evaluación propuesta por la institución, que incluye tanto a las correctas como incorrectas.
- Logrado: es el sistema de prácticas expresadas según lo establecido por la institución conforme con la pauta institucional establecida. Es importante tomar en cuenta, de todos los significados que en el proceso adquiere una persona, los significados iniciales y finales alcancen.

2.1.2. Configuración de objetos y procesos matemáticos.

En el EOS se consideran los postulados epistemológicos, así como el hecho que los objetos matemáticos derivan de las prácticas matemática, pero este surgimiento es muy complicado ya que se deben tener en cuenta al menos dos niveles de objetos: el primero relacionado con las entidades que se aprecian en un texto, por ejemplo, las definiciones, los problemas, las proposiciones y otros más; el segundo, la tipología de los objetos que surgen del nivel anterior (hablados, vistos, operados u otras acciones), es decir, los objetos personales o institucionales.

Primer nivel: Configuraciones de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

Es necesario hacer funcionar ciertos conocimientos para llevar a cabo una práctica matemática e interpretar los resultados de forma satisfactoria. Por eso, según Font y Godino (citados por Godino, Batanero y Font, 2008), cuando alguien o algo hace y valora una práctica matemática activará un conjunto de situaciones–problemáticas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulados como se muestra en figura a continuación:

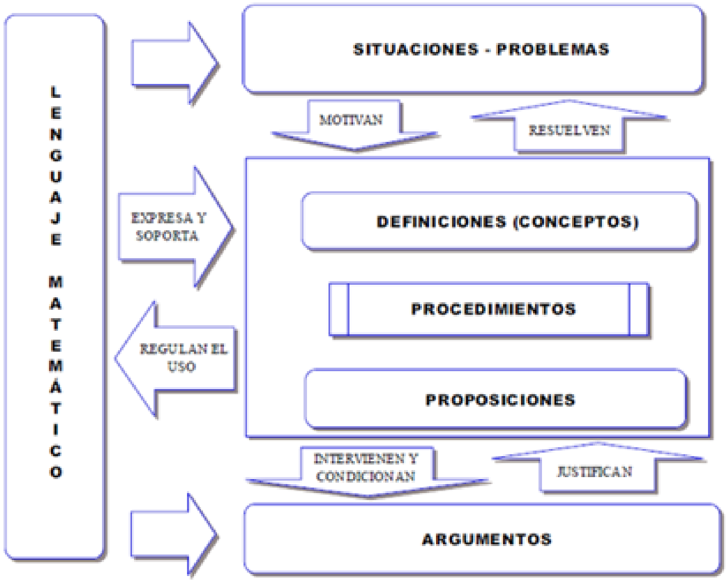


Figura 4 – Configuración de objetos primarios.

Fuente: Godino, Batanero y Font (2008, p.7)

En la Figura 4, se muestra la tipología de objetos matemáticos primarios, con los siguientes elementos:

- Elementos lingüísticos: se refieren a las expresiones, gráficos, notaciones, entre otros, que aparecen en diversos registros, como el oral, escrito, gestual, etc.
- Situaciones-problemas: son las situaciones intra o extra-matemáticas de las tareas que propician una actividad matemática.
- Conceptos-definición: que definen entidades o expresiones matemáticas.
- Proposiciones: declaraciones o atributos de los conceptos.
- Procedimientos: son los métodos, operaciones, técnicas, algoritmos que se utilizan para solucionar una situación específica.
- Argumentos: expresiones para aceptar o revelar las proposiciones y procedimientos.

Para analizar con más especificidad los sistemas de ecuaciones lineales en la educación secundaria peruana, es pertinente implantar las seis categorías de objetos primarios, que permiten ampliar la clásica distinción entre conceptos y procedimientos, que no satisfacen la descripción de los objetos que intervienen y surgen de la actividad.

2.2. Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor.

El EOS muestra las herramientas necesarias para realizar y mostrar la propuesta de esta tesis sobre el conocimiento didáctico-matemática del profesor en torno a los sistemas de ecuaciones lineales. Sin embargo, este modelo ha evolucionado, como lo muestra Godino (2009) donde se propone un sistema de análisis matemático y didáctico del profesor. Godino, Batanero y Font (2008) organizan los componentes en facetas o niveles para analizar el conocimiento del profesor (del contenido matemático y didáctico). En cada una de las facetas se señalan cuatro niveles de análisis.

Las seis facetas se muestran en la siguiente figura:

Figura 5 – Facetas y niveles del conocimiento del profesor.

Fuente: Godino (2009, p.21)

La figura 5, muestra la relación de las seis facetas en el proceso de estudio de un objeto matemático, en general. En este trabajo se referirá a los sistemas de ecuaciones lineales. Las facetas en mención se detallan a continuación:

- Faceta Epistémica: Se refiere a los conocimientos matemáticos referentes a la institución donde se desarrolla el estudio, así como la distribución del tiempo de los componentes del contenido, como pueden ser los problemas, los lenguajes, los procedimientos, las definiciones, las propiedades y los argumentos.

- Faceta Cognitiva: Se refiere a la evolución de los conocimientos personales de los estudiantes y su mejora en el aprendizaje.
- Faceta Afectiva: Se refiere a las actitudes, impresiones, opiniones, valores del alumno respecto al objeto de estudio y el asunto de estudio.
- Faceta Mediacional: Se refiere a forma de distribuir los recursos, tecnológicos, materiales u otros, y la concesión temporal de las acciones y los procesos.
- Faceta Interaccional: Se refiere a cómo interaccionan el profesor y sus alumnos, así como la secuencia sobre la fijación y negociación de los significados.
- Faceta Ecológica: es el sistema que se relaciona con el entorno social, político, económico, que sostiene y determina el proceso de estudio.

Godino (2009) indica que en cada una de las facetas se presentan niveles de análisis que comprenden:

- Prácticas matemáticas y didácticas. Describe las acciones que se desarrollan al solucionar tareas propuestas durante la contextualización de contenidos y la promoción del aprendizaje.
- Configuraciones de objetos y procesos (matemáticos y didácticos). Describe los objetos y procesos que participan en las prácticas, también los que surgen de estas. Lo que se desea es detallar y aclarar cuan complejo son los objetos y los significados de la práctica didáctica-matemática.
- Normas y meta-normas. Identificar las reglas, normas, condiciones que posibilitan el proceso de estudio en las diversas facetas.
- Idoneidad. Reconocer la situación actual y buscar formas de mejorar el estudio con la finalidad de aumentar la pertinencia de los mismos.

El surgimiento del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor destaca la utilización de las dos herramientas diseñadas en base al EOS: las facetas y los niveles de análisis. Sin embargo, a pesar de la organización de estas herramientas, es necesario mejorar y refinarlas para un mejor análisis. Por ello, Pino-Fan y Godino (2015) reorganizan los componentes y características del modelo al considerar tres dimensiones: Matemática, Didáctica y Meta didáctico-matemático, y muestran el modelo anterior pero que permite, además de la reorganización de herramientas, la integración y ampliación de lo desarrollado y avanzado por otros modelos acerca del conocimiento del profesor de matemáticas. A continuación, se muestra en la Figura 6, la nueva organización del modelo en base a estas tres dimensiones:

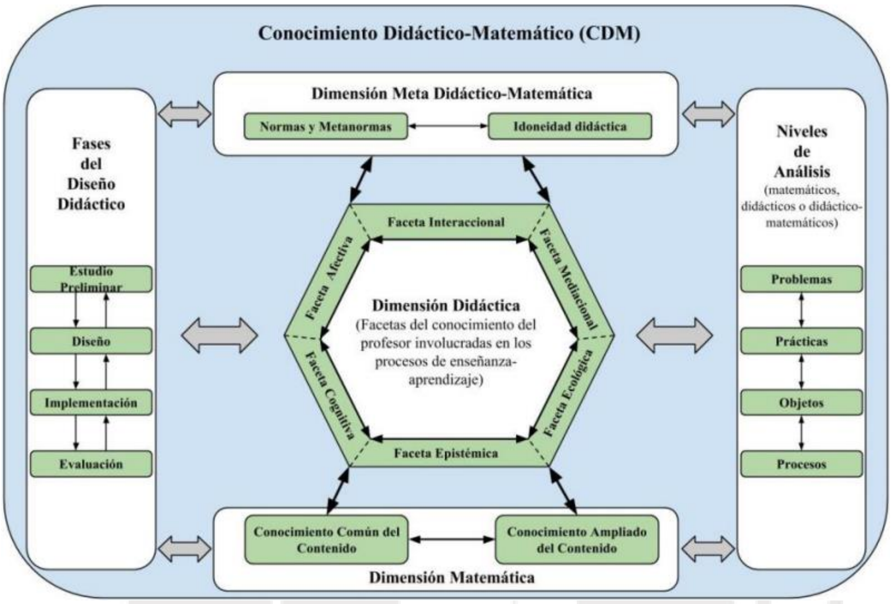


Figura 6 – Dimensiones y componentes del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático.

Fuente: Pino-Fan y Godino (2015, p.98)

La Figura 6 muestra un esquema del conocimiento del profesor, para lo cual se han considerado las tres dimensiones, así como las fases de diseño didáctico y los niveles de análisis que se consideran en cada una de dichas dimensiones. Esta mejora del modelo de Godino (2009) permite analizar de forma más específica las prácticas de índole matemática y didácticas, para los que se han desarrollado subcategorías en el conocimiento del profesor de matemáticas. A continuación, se detallan las características de cada una de estas dimensiones.

2.2.1. Dimensión Matemática:

Esta dimensión se refiere al conocimiento matemático del profesor y se clasifica en dos subcategorías:

a. Conocimiento Común del Contenido, es el conocimiento suficiente para solucionar problemas que están propuestos en el plan de estudio o en los textos de algún nivel educativo específico. En esta investigación, el Conocimiento Común del Contenido se refiere a las habilidades del profesor cuando resuelve situaciones-problema referidos a los sistemas e ecuaciones lineales. Se debe suponer que, para resolver una situación, debe ser capaz de realizar al menos cuatro fases: (i) reconocer si la situación requiriere el uso de los sistemas de ecuaciones lineales, (ii) plantear el problema, es decir, simbolizar el enunciado en forma matemática para su tratamiento en esta representación, (iii) resolver el sistema de ecuaciones lineales que ha planteado, e (iv) interpretar la solución del sistema como solución de la situación inicial.
b. Conocimiento Ampliado del Contenido, es el conocimiento que debe poseer el profesor sobre los conceptos matemáticos que son estudiados en un momento determinado y aparecen posteriormente en el plan de estudio referido o en algún nivel de estudios. Brinda al profesor herramientas necesarias para mostrar desafíos matemáticos en aula, relaciona el objeto en estudio otros objetos, lo que motivaría a los alumnos en el estudio de conceptos matemáticas posteriores a la actual. Como más adelante se planteará, hay temas matemáticos y situaciones que requieren del uso de los sistemas de ecuaciones lineales, tanto en la misma matemática (intra-matemática) como fuera de ella (extra-matemática). El profesor debe ser capaz de reconocer estas situaciones y las condiciones propias de cada tema para lograr resolverlas, ya que en muchos casos para resolver el sistema necesitará que cumpla ciertas propiedades o características, no solo matemáticas.

El reconocimiento de los conocimientos común y ampliado, permitirá construir el significado institucional de referencia del objeto, en particular a proponer un significado de referencia institucional para los sistemas de ecuaciones lineales, en la educación secundaria.

Sin embargo, de acuerdo con Pino-Fan y Godino (2015), para caracterizar el conocimiento didáctico-matemático del profesor se requiere considerar otros aspectos. Por eso surge la necesidad de analizar la segunda dimensión.

2.2.2. Dimensión Didáctica

El conocimiento especializado del profesor que estaba considerado en el conocimiento del contenido, es separado por Pino-Fan y Godino (2015) del conocimiento común y ampliado debido a que se refiere al conocimiento, destrezas y habilidades del profesor de matemáticas que se relacionan con la enseñanza.

La dimensión Didáctica reorganiza las facetas propuestas por Godino (2009) y agrupa de manera conveniente algunas de ellas para facilitar su entendimiento y aplicación. Los nombres que se dan a las facetas de esta dimensión coinciden con las mencionadas en el modelo del EOS expuestas por Godino, pero cabe resaltar que los componentes de esta dimensión son de índole didáctico-matemática, ya que las características cognitivas y afectivas de los alumnos, así como las interacciones o recursos, están fuertemente relacionadas con el objeto de estudio. La adaptación de los criterios de idoneidad didáctica, permiten al profesor reflexionar sobre su propio trabajo en clase.

Dado que este trabajo de maestría solo analizará las facetas epistémica y ecológica, a continuación serán detalladas:

a. **Faceta epistémica:** Esta faceta hace referencia al conocimiento especializado del profesor de matemáticas, que tiene que ver con la forma de representar exactamente ideas propias de la matemática, explicar los procedimientos y propiedades matemáticas que son comunes encontrar en la enseñanza, así como el análisis y entendimiento de los métodos tradicionales que conllevan a dar solución a un problema. Incluye conocer la matemática escolar a profundidad y en amplitud. El profesor debe tener un conocimiento matemático "perfilado" o "especializado" para la enseñanza, tener la capacidad de:

> *"movilizar diversas representaciones de un objeto matemático, resolver la tarea mediante distintos procedimientos, vincular el objeto matemático con otros objetos matemáticos del nivel educativo en el que se enseña o de niveles anteriores y posteriores, comprender y movilizar la diversidad de significados parciales para un mismo objeto matemático (que integran el significado holístico para dicho objeto), proporcionar diversas*

justificaciones y argumentaciones, e identificar los conocimientos puestos en juego durante la resolución de una tarea matemática." (Pino-Fan y Godino, 2015, p. 15)

En esta investigación, el objeto de estudio son los sistemas de ecuaciones lineales, por lo que el profesor debe tener habilidades para identificar los siguientes objetos primarios:

- Definiciones específicas relacionadas con el objeto que pueden tener conexión con otros objetos, como ecuación lineal, conjunto solución, unicidad de la solución, equivalencia, operaciones lineales, entre otros más que sean necesarios.
- Procedimientos o métodos de solución, pero además la eficiencia de uno sobre otro, para poder elegir el más conveniente.
- Lenguajes empleados para desarrollar sistemas de ecuaciones lineales, esto implica tener la capacidad de interpretar cada registro de representación.
- Propiedades en torno al objeto de estudio, por ejemplo, si tiene solución o no, si el sistema tiene 2, 3 o más incógnitas, si tiene o no la misma cantidad de incógnitas y ecuaciones, entre otras.
- Argumentaciones, que permitan justificar la forma de usar y aplicar un método u otro, de las propiedades existentes, a fin que sea convincente en su práctica docente.

Algunas cuestiones que podrían ser resueltas por los profesores, aplicando esta Faceta Epistémica, las enumera Godino (2015):

- ¿Existe otra manera, diferente a nuestra solución, al solucionar una tarea?
- Si un alumno no resolvió la tarea haciendo uso de los procedimientos de clase, ¿Cómo le explicarías dicha solución?
- Al solucionar una tarea, ¿Qué conocimientos se utilizan o activan?
- ¿Qué posibles generalizaciones de tareas se pueden identificar?
- ¿Qué conexiones con temas más avanzados identificas?

Para este trabajo, se tomarán en cuenta estas consignas con la finalidad de evaluar si cumple con las condiciones planteadas.

b. **Faceta ecológica:** Se refiere a los conocimientos acerca del currículo o plan de estudio de matemáticas del nivel educativo donde aparece el objeto matemático, esto es: vínculo con otros planes de estudio, con los cuestiones relacionadas con la sociedad, política y economía, que contempla el proceso de enseñanza-aprendizaje.

   Para este trabajo, se considerarán como plan de estudio oficial al Currículo Nacional (PERÚ, 2016), el cual muestra en que ciclos, niveles y grados aparecen los sistemas de ecuaciones lineales, así como otros temas del área curricular matemática y no matemática, que serán analizados para ver si es necesario el uso de los sistemas de ecuaciones lineales al abordar situaciones de cada una de ellas. Inclusive, determinar su necesidad en el desarrollo de temas pos-escolares, a fin que proporcionen herramientas adecuadas a los alumnos en estudios superiores a futuro.

   Algunas preguntas o aspectos que ayudan a identificar los conocimientos de esta faceta podrían ser:

   - Identifique los elementos del currículo que se aparecen al resolver tareas.
   - Establecer conexiones con otros temas de la misma matemática o de otras materias con respecto al objeto de estudio;
   - ¿Qué factores sociales, materiales o de otra índole, condicionan la solución de las tareas o cumplir con el proyecto educativo?

   Similar a como se procederá para la faceta epistémica, también se considerarán estas consignas a fin de validar los indicadores de conocimiento del profesor, en esta faceta.

El modelo del CDM también considera las siguientes 4 facetas:

c. **Facetas cognitiva**: se refiere a los conocimientos que necesita para “reflexionar y evaluar” el nivel en que se ajustan significados personales y los significados institucionales.

d. **Faceta afectiva**: implica que conocimientos se necesitan para entender y tratar el ánimo de los alumnos. Describe experiencias y sensaciones de los alumnos en una clase respecto a un problema matemático específico. Estas facetas cognitiva y afectiva dan una mejor idea y comprensión del conocimiento que debe poseer el profesor sobre la manera de pensar, conocer, actuar y sentir de los alumnos, en la clase.

e. **Faceta mediacional**: se refiere al conocimiento del profesor para utilizar y analizar el manejo de materiales y recursos tecnológicos, y para desarrollar el aprendizaje de un objeto de estudio determinado.

f. **Faceta interaccional**: relacionada al conocimiento para prevenir, efectuar y valorar las interacciones profesor–alumno, alumno–alumno, alumnos–recursos, y profesor–recursos–alumnos. Aquí se desarrollan las normas y meta-normas. La conexión de estas dos facetas (interaccional y mediacional) propician un mejor entendimiento del conocimiento del contenido y la enseñanza expuesto por Ball y sus colaboradores (citados por Godino, 2009, p.16)

Es así como las seis facetas de la Dimensión Didáctica permiten analizar y describir de una manera más completa el conocimiento de los profesores en formación o permanente.

2.2.3. Dimensión Meta Didáctico-Matemática

Los criterios de idoneidad didáctica son parte de esta dimensión, así como el conocimiento de normas y meta-normas (epistémicas, ecológicas, cognitivas, interaccionales, mediacionales, afectivas), del mismo modo que las escenarios y restricciones contextuales.

Se debe señalar que, en este trabajo, no se realizará un análisis de esta dimensión, pues como se señaló, nos enfocaremos solamente en las facetas epistémica y ecológica, de la Dimensión Didáctica.

En el siguiente capítulo se realizará la construcción del significado de referencia institucional de los sistemas de ecuaciones lineales, en la educación secundaria peruana. Para ello, se considerarán los aportes teóricos que brinda el modelo del CDM, propuesto por Pino-Fan y Godino (2015), que permitirá a clasificar el conocimiento del profesor en cuanto a aspectos matemáticos (conocimiento común y ampliado, de la dimensión Matemática) y aspectos didácticos para la enseñanza (facetas epistémica y ecológica, de la dimensión Didáctica). Así también, para identificar los objetos primarios que emergen de las situaciones con sistemas de ecuaciones lineales, esta tesis se apoya en las herramientas que brinda el EOS:

- Sistemas de prácticas operativas y discursivas, que permitirán considerar aquellas situaciones que corresponden a los sistemas de ecuaciones lineales, considerando como institución la educación secundaria peruana. Para esta institución es que se propondrá un significado de referencia sobre el objeto de estudio.
- Configuración de Objetos, que permitirá organizar dichos objetos primarios (situaciones, definiciones, proposiciones, lenguaje, procedimientos y argumentaciones).

Con todos ellos se podrá analizar qué conocimientos necesita el profesor de matemática sobre este objeto de estudio.

CAPÍTULO 3: CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO DE REFERENCIA INSTITUCIONAL SOBRE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

En este capítulo se propondrá un significado de referencia institucional de la secundaria peruana, referente a los sistemas de ecuaciones lineales. Esto contribuirá a cumplir el primer objetivo específico. Para esta construcción se han revisado diversos estudios y artículos, algunos relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales, otros con la metodología en base al análisis de contenido o con el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor de matemática, así como unos tantos que tienen relación con la construcción del significado de referencia de objetos matemáticos diferentes al abordado en esta tesis. También se han analizado textos escolares de matemática y libros de matemática de educación superior, con la finalidad de identificar cómo aparecen, desarrollan y muestran a los alumnos los sistemas de ecuaciones lineales.

Se identificaron los objetos primarios hallados en las diversas prácticas que requieren del uso de los sistemas de ecuaciones lineales, y se clasifican, para lo cual se ha considerado el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático y aspectos metodológicos antes señalados, entre ellos el desarrollo de un análisis de contenido de la bibliografía considerada para lograr dicha construcción, considerando las etapas necesarias e indicadas en el primer capítulo.

3.1. El significado institucional de referencia de los sistemas de ecuaciones lineales en la educación secundaria peruana.

Como ya se ha establecido, el objetivo de esta investigación es reconocer el conocimiento didáctico-matemático del profesor de matemática, referente a los sistemas de ecuaciones lineales. Para lograrlo se construirá el significado de referencia del objeto indicado, en la institución educación secundaria peruana. Se hará un análisis de contenido de textos escolares para indagar sobre la forma en que se desarrolla actualmente. Así también, dado que no solo debemos considerar el ámbito escolar para explicitar los conocimientos del profesor, los textos matemáticos no escolares e investigaciones asociadas a los sistemas de ecuaciones lineales permitirán ampliar la identificación de estos conocimientos. El análisis de la diversa bibliografía permitirá reconocer los objetos primarios que surgen de las situaciones-problema. La Tabla 2, muestra los textos a analizar para la construcción del significado de referencia institucional:

Tabla 2

Material bibliográfico para realizar analizar

TÍTULO	AUTOR	TIPO	EDITORIAL	AÑO
Matemática 2	Tasayco, Silva, Saavedra.	Texto escolar oficial.	Norma	2016
Matemática 3	Lafosse, Huailla, Torres	Texto escolar oficial.	Santillana	2016
Matemática 4	Mendoza, Lafosse, Vargas	Texto escolar oficial.	Santillana	2016
Matemática 5	Mendoza, Paulino, Vargas.	Texto escolar oficial.	Santillana	2016
Intelectum evolution 3	Ediciones Lexicom	Texto escolar no oficial.	San Marcos	2013
Intelectum evolution 4	Ediciones Lexicom	Texto escolar no oficial.	San Marcos	2013
Intelectum evolution 5	Ediciones Lexicom	Texto escolar no oficial.	San Marcos	2013
Precálculo	Sullivan.	Texto de pre-grado.	Prentice-Hall Latinoamericana	1997
Precálculo. Gráfico, numérico, algebraico	Demana, Waits, Foley, Kennedy.	Texto de pre-grado.	Pearson	2007
Álgebra Lineal.	Jerónimo, Sabia, Tesauri	Texto de pre-grado.	Universidad de Buenos Aires	2008
Precálculo. Matemáticas para el cálculo.	Stewart, Redlin, Watson	Texto de pre-grado.	Cengage Learning Editores	2012
Currículo Nacional de la Educación Básica	MINEDU	Documento oficial de educación secundaria	MINEDU	2016
Sesiones de Aprendizaje – Secundaria	MINEDU	Fascículo escolar oficial.	MINEDU	2016
Resolución de problemas mediante la regla de falsa posición: un estudio histórico	Muñoz	Artículo de investigación didáctica	Suma	2007
Introducción a las ecuaciones diofánticas en secundaria	Chinchilla, Acuña.	Artículo de investigación.	Instituto Tecnológico de Costa Rica	2013

La elección de estos textos se debe a las siguientes consideraciones:

- Los cuatro primeros textos (Matemática 2, 3, 4, 5) son textos oficiales del sistema educativo peruano y que son distribuidos en forma gratuita a todos los estudiantes de entidades escolares públicas. Estos textos siguen los lineamientos estipulados en el Currículo Nacional (PERÚ, 2016) para el área curricular matemática, el cual sirve como raíz para la creación de programas curriculares a nivel nacional.
- Los siguientes tres (Intelectum evolution 3, 4, 5) son textos escolares no oficiales que pertenecen a una colección de libros empleada en diversos centros educativos, los cuales, si se considera como referencia el tiraje de esta edición (15 000 libros) sin contar las anteriores y posteriores, se puede afirmar que tienen un amplio alcance. Son elaborados por editoriales privadas que atienden las exigencias del Currículo Nacional (PERÚ, 2016) pero con ciertas variaciones, como por ejemplo, el desarrollo de más temas que las indicadas en el currículo, muchos de los cuales son considerados en el temario de algunas universidades o centros de estudios superiores cuando realizan sus respectivos procesos de admisión.
- Los libros de educación superior (pre-grado) son importantes porque permitirán relacionar los conocimientos de la educación secundaria con la superior, de esta manera se identificarán algunos aspectos del conocimiento ampliado. En estos textos aparecen objetos primarios que no son muy explícitos en los textos escolares.
- Los dos materiales siguientes (Currículo Nacional y Sesiones de Aprendizaje, 2016) muestran una serie de procesos didácticos que son usados como herramientas o modelos a los profesores, para guiarlos en la elaboración de sus sesiones de clase. Estos documentos brindan ideas del conocimiento que pretende impartir el Ministerio de Educación en la secundaria peruana, así también presentan los temas considerados a desarrollar. Por ello es importante considerarlos en el análisis ya que brindarán ideas de qué conocimiento respecto al currículo deben tener los profesores de matemática y reconocer en qué temas intra y extra-matemáticos necesitan usar los sistemas de ecuaciones lineales.

La intención es analizar esta bibliografía para reconocer los objetos primarios sobre los sistemas de ecuaciones lineales, que surgen de las situaciones-problema.

Del análisis de los textos mencionados, es necesario considerar las fases o procedimientos que se han seguido, en virtud de presentar una metodología que ayude a otros investigadores a desarrollar la construcción de significados institucionales:

- El objeto de análisis de esta tesis es el sistema de ecuaciones lineales, por lo cual se plateo el capítulo 1 la pregunta de investigación, referente a cuál debe ser el conocimiento didáctico-matemático que deberían tener los docentes de secundaria de Educación Básica Regular en el Perú, con relación a la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales, en la faceta epistémica y ecológica.
- Luego de ello, se conviene en determinar el sistema de codificación que se empleará. Es importante por cuanto se deben analizar unidades de información que permitan reconocer aspectos relacionados a los sistemas de ecuaciones lineales. Se considerarán simbología matemática, tales como verbales o simbólicas.
- Una vez identificados los aspectos relacionados a los sistemas de ecuaciones lineales, estos se deberán clasificar, para lo cual será necesario determinar un sistema de categorías. El modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático adopta herramientas del EOS, por lo que se usará una categorización, basada en objetos matemáticos primarios, que surgen de las prácticas. Esta categorización se clasifica en situaciones-problema, lenguajes, definiciones, procedimientos, propiedades y argumentos. Para ello, luego de la revisión de los textos se realizará un listado de las definiciones, propiedades, procedimientos y situaciones-problema que se pueden apreciar y se considera el lenguaje utilizado en cada caso.

De esta manera, se logran seguir las primeras fases del análisis de contenido propuesto en los aspectos metodológicos. La inferencia, que es una de las fases, será retomada en el siguiente capítulo, cuando se precisen los indicadores referentes al conocimiento del profesor en las facetas epistémicas y ecológicas.

A partir del análisis de las fuentes anteriores y de su organización, se pueden identificar los objetos primarios asociados a los sistemas de ecuaciones lineales.

A continuación, se presenta la propuesta para ellos:

3.1.1. Situaciones-problemas

Como se manifestó en capítulo anterior, se refiere a las situaciones intra o extra-matemáticas de las tareas que provocan una actividad matemática, de las cuales surgen los objetos matemáticos. Para clasificar las situaciones-problema, se hace una adaptación basada en la dialéctica Herramienta-Objeto que utiliza Douady (2009). Douady señala que esta dialéctica es un desarrollo periódico donde los objetos matemáticos actúan de dos maneras, alternándose convenientemente: como herramienta cuando se trata de solucionar una situación y como objeto cuando se trata de elaborar un conocimiento organizado. En otras palabras, se trata de usar los conocimientos previos como herramienta al elaborar un nuevo saber matemático, y que una vez evolucionado se convierte en herramienta para un nuevo periodo de esta dialéctica en otra nueva circunstancia. Es por ello que para la clasificación de las situaciones-problema de esta tesis, se ha visto pertinente adaptar esta dialéctica, entendiendo que los sistemas de ecuaciones lineales son utilizados como herramienta cuando se abordan y resuelven otros temas en la matemática y fuera de ella, así como objeto cuando se desarrolla el "concepto matemático, considerado como cultural" (Douady, 2009, p.4) referente al este estudio de los sistemas de ecuaciones lineales. De esa manera, la clasificación se considerará según la Figura 7:

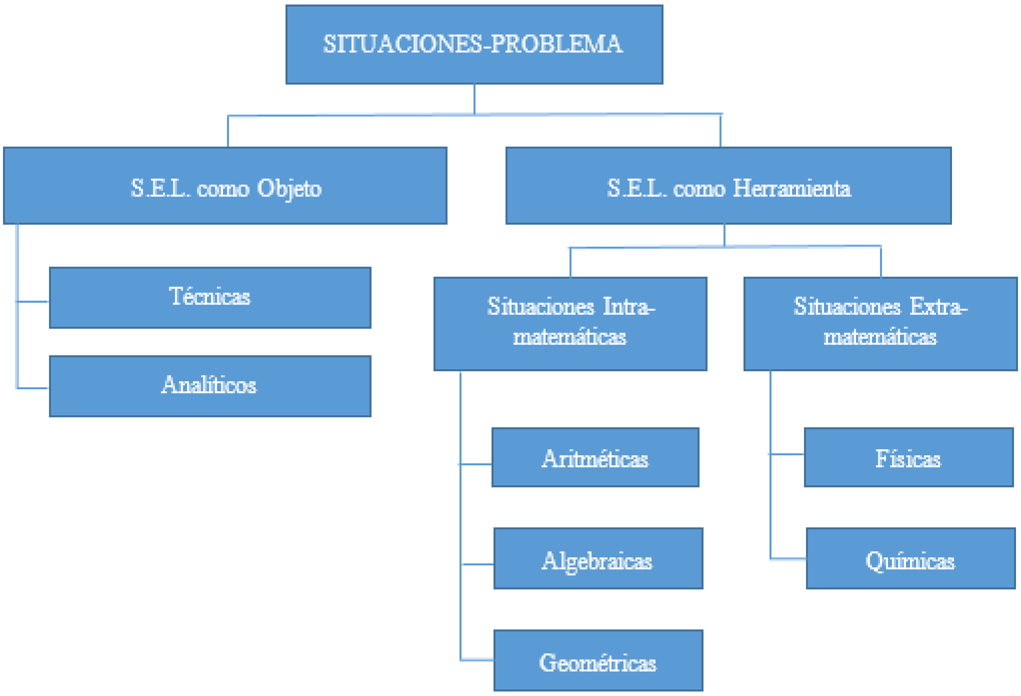


Figura 7 – Clasificación de las situaciones-problema, respecto a los sistemas de ecuaciones lineales (SEL).

Al referirse a situaciones como objeto se considerará una sub-clasificación orientada a aprender diversas técnicas y analizar tipos de sistemas de ecuaciones. Así también, cuando se refiere a Situaciones como Herramienta se sub-clasificará de acuerdo a la situación empleada, esto es, en contextos Intra-matemáticos o Extra-matemáticos, para lo cual se debe entender como Intra-matemático a todas las situaciones que se relacionan con la matemática y que aparecen en el Currículo Nacional (PERÚ, 2016), no siendo el objetivo de aprendizaje específicamente los sistemas de ecuaciones lineales, sino que se requiere de su uso para resolver tales situaciones. En este grupo de problemas, se considerarán situaciones en el ámbito aritmético, algebraico, geométrico y estadístico. Por otro lado, se entiende como Extra-matemático a los problemas que aparecen en el currículo peruano, pero que pertenecen a otras áreas, como por es el caso de Ciencia, Tecnología y Ambiente, específicamente en temas relacionados a la Física y Química, y a temas de carácter social o de situaciones cotidianas.

I. Sistema de ecuaciones lineales como Objeto:

Como se indicó antes, en este grupo de problemas se promueven aspectos teóricos, técnicas y propiedades de los sistemas de ecuaciones lineales. Podemos mencionar diversas situaciones, por ejemplo:

a. Situaciones que desarrollan las técnicas de solución:

Son problemas iniciales en el desarrollo del concepto de sistemas de ecuaciones lineales, que pretenden desarrollar las técnicas de solución. Se muestran problemas con dos y tres incógnitas, como el de la Figura 8:

$$\text{a. } \begin{cases} 4x + 3y = 23 \\ 3x - 4y = 11 \end{cases} \qquad \text{b. } \begin{cases} 5x + 6y = 2 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$$

Figura 8 – Sistema de ecuaciones con dos incógnitas.

Este tipo de problemas tienen la característica de presentar 2 ecuaciones con 2 incógnitas, teniendo cada una la forma $\mathrm{ax} + \mathrm{by} = \mathrm{c}\,;\mathrm{donde}\ \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathrm{R}$. Otro tipo de situaciones son como la que se muestra en la Figura 9:

Resuelve el sistema formado por $\begin{cases} 2x - 3y - 2z = 8 \\ 3x + 2y + 5z = -7 \\ 2x + 2y - 3z = 22 \end{cases}$

Figura 9 – Sistemas de ecuaciones con tres incógnitas.

Los textos escolares contemplan el desarrollo de los sistemas de ecuaciones lineales con 3 incógnitas, las cuales está formadas por 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas, que están caracterizadas por ser de la forma $ax + by + cz = d\,; donde\ a, b, c, d\ \in \mathrm{R}$

En ambos casos se muestra actividad matemática centrada en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, con la aplicación de diversas técnicas de solución que detallaremos más adelante. Se consideran como incógnitas a “x”, ”y” o ”z”. Es común ver en los textos, casi siempre, que se consideran como incógnitas estas letras, lo que podría cambiarse por otras, para que esa manera cuando se desarrollen situaciones donde las incógnitas sean otras no cause confusión, debido a la representación tradicional.

b. Situaciones analíticas:

Estos problemas pretenden identificar ciertas cualidades del sistema de ecuaciones planteado. En ellos se debe usar la estrategia más conveniente y analizar la posibilidad de poder resolver o no el sistema.

Resolver cada ejercicio e indique la solución. De no ser posible, justifique por qué.

a. $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + 2y = 20 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x + y = 7 \\ -x - y = 9 \end{cases}$

Figura 10 – Problema analítico sobre tipo de sistema de ecuaciones lineales.

La Figura 10, muestra una situación que se presentan a su vez 3 ejercicios que permitirán determinar el tipo de sistema de ecuaciones lineales (con solución única o infinita, o sin solución), según los resultados que se obtengan.

También se presentan situaciones donde se analizan gráficamente el tipo de sistema de ecuaciones lineales, como la de la Figura 11:

Grafica los siguientes sistemas de ecuaciones lineales e identifica a qué tipo pertenecen.

a. $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + 2y = 20 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x + y = 7 \\ -x - y = 9 \end{cases}$

Figura 11 - Problema con análisis gráfico sobre sistemas de ecuaciones lineales

La tarea exige representar de forma gráfica cada ejercicio, pues es otra forma de expresar dichas características. De esta manera, puede lograr afianzar lo que algebraicamente logró con las técnicas de resolución.

En la Figura 12, se muestra una situación que tiene como coeficiente de una incógnita un valor desconocido representado por “a”:

$$\begin{cases} ax + y = 13 & (1) \\ x - y = 3 & (2) \end{cases}$$

Figura 12 – Problema con análisis con parámetros sobre sistemas de ecuaciones lineales.

Fuente: Matemática 5 (PERÚ, 2016, p.64)

Esta situación ha reemplazado alguno de los coeficientes del sistema en función de un parámetro “a”, y así determinar los valores que debe tomar para tener solución única, infinitas soluciones o no presentar solución en el conjunto de los números reales.

Además de ello, deberían plantearse situaciones donde se pueda analizar la pertinencia de un método u otro. Por ello, se deben analizar algunas características del sistema de ecuaciones lineales. Este análisis estará en función a los coeficientes del sistema. En ese sentido, se propone como ejemplo el siguiente problema:

Dado el sistema lineal de incógnitas m; n:

$$3m + \beta n = \gamma$$
$$5m + \varepsilon n = \varphi$$

Resuelva con los métodos de igualación, sustitución y eliminación. ¿Cuál fue el método más y menos trabajoso en cada caso? Justifique sus respuestas.

i. Para $\beta = 4;\ \varepsilon = 3;\ \gamma = 24;\ \varphi = 29.$
ii. Para $\beta = 1;\ \varepsilon = 3;\ \gamma = 16;\ \varphi = 23.$
iii. Para $\beta = 1;\ \varepsilon = -1;\ \gamma = 14;\ \varphi = 13$
iv. Para $\beta = 2;\ \varepsilon = 2;\ \gamma = 10;\ \varphi = 12$

Se pretende que el alumno reconozca el método más conveniente para cada caso. Esta situación tiene como incógnitas a “m” y “n”, que no son las incógnitas tradicionales en un sistema de ecuaciones, pero que permitirá ante posibles sistemas que no cuenten con estas incógnitas reconocer el sistema presente y resolverlas sin inconvenientes. El profesor de matemáticas debería proponer estos problemas por que permiten elegir la estrategia más adecuada, no solo resolverla, lo que podrá evidenciar qué método es más efectivo y más económico en función a la cantidad de operaciones realizadas.

II. Sistemas de ecuaciones lineales como Herramienta

Además de las situaciones donde se problematizan los sistemas de ecuaciones lineales en sí mismos, los conceptos matemáticos son utilizados en diversas prácticas o situaciones, no siendo el foco de estudio los sistemas de ecuaciones lineales. En ese sentido, se presenta una clasificación de las situaciones de este tipo en Intra-matemáticos y Extra-matemáticos. Se mostrará una propuesta para clasificar dichas situaciones, al considerar que en todas ellas es necesario el empleo de los sistemas de ecuaciones lineales. Pero además de ello, se deben considerar definiciones, propiedades, condiciones y otros factores necesarios en cada tema, con la finalidad de reconocer y complementar la formulación del sistema de ecuaciones lineales que permita dar la solución al problema. A continuación se detallará dicha clasificación:

A. Situaciones Intra-matemáticas

Se refiere a los problemas que se encuentran en el área curricular Matemática, según el Currículo Nacional (PERÚ, 2016), pero que necesitan de los sistemas de ecuaciones lineales para resolver alguna situación, sin ser estos el foco principal de aprendizaje. En ese sentido, se ha considerado conveniente clasificarlas en tres contextos: aritmético, algebraico y geométrico, en cada uno de los cuales existen temas que utilizan los sistemas de ecuaciones lineales como herramientas y que se detallan a continuación:

i. Situaciones de contexto aritmético

En este grupo se ubican las situaciones que involucran conceptos aritméticos y para cuya solución se necesita utilizar los sistemas de ecuaciones lineales. Cuando se menciona condiciones de cada tema, se hace alusión a las propiedades, argumentos y justificaciones de cada tema propiamente dicho. De la revisión de los textos indicada se ha identificado la necesidad de aplicar resolución de sistemas de ecuaciones lineales en los siguientes temas aritméticos:

Situaciones relacionadas con contexto cotidiano

Son aquellas que implican un contexto matemático, ya que refieren a tratar con operaciones aritméticas elementales y se relaciona con problemas de reparto, distribución, compras o ventas. Se desea que el alumno elija la estrategia o procedimiento más adecuado y determine la solución de la situación. Son situaciones simplificadas de la realidad, que cumplen una función motivadora. A continuación, se muestra una situación de este tipo en la Figura 13:

En una feria agropecuaria realizada en Cajamarca, una familia compró 24 animales entre vacas y ovejas. Se sabe que cada vaca cuesta S/ 250, y cada oveja, S/ 60. Si la familia pagó en total S/ 2960, ¿cuántas vacas y ovejas compró?

Figura 13 – Problema con enunciado sobre sistemas de 2 ecuaciones lineales.

Fuente: Matemática 5 (PERÚ, 2016, p.60)

Este problema se desarrolla con un sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas.

$$\begin{array}{l} v: \textit{número de vacas} \\ j: \textit{número de ovejas} \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} v + c = 24 \\ 250v + 60j = 2960 \end{array}$$

Estos problemas permiten iniciar la capacidad de traducir datos, tal como se indica en el Currículo Nacional (PERÚ, 2016) en la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio, donde se ubica el desarrollo esta capacidad referente al objeto de estudio de esta tesis.

Además, existen situaciones que requieren discriminar datos que no son necesarios para formar el sistema de ecuaciones y encontrar la solución, como el mostrado en la Figura 14:

Resolver la siguiente situación: Los pacientes de un hospital consumen diariamente 3 gramos de proteínas, 150 gramos de carbohidratos y 50 gramos de grasas. La nutricionis solo cuenta con dos mezclas de alimentos disponibles con la composición siguiente:

Nutrientes	Mezcla A	Mezcla B	Cantidad
Proteínas	58x	34y	300
Carbohidratos	29x	17y	150
Grasas	10x	5y	50

Figura 14 - Problema con distractor sobre sistema de 2 ecuaciones lineales

Fuente: Sesión de Aprendizaje (PERÚ, 2016, 5°Sec-Unidad 2- Sesión 2)

En este ejemplo, las filas de "Proteínas" y "Carbohidratos" se refieren ecuaciones equivalentes, lo cual debe ser identificado.

$$\begin{array}{r} 58x + 34y = 300 \\ 29x + 17y = 150 \\ 10x + 5y = 50 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \textit{Multiplicando por } 2 \textit{ a } (29x + 17y = 150) \\ 58x + 34y = 300 \textit{, equivalente a la primera ecuación} \end{array}$$

También existen situaciones de sistemas de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas, como el que se muestra en la Figura 15:

> En su tienda de abarrotes, Cecilia vende tres tipos de conservas de pescado: sardina, caballa y atún. Se sabe que el precio promedio de los tres tipos de conservas es de S/ 5. Hoy un cliente compró 6 unidades de conserva de sardina, 4 unidades de conserva de caballa y 2 unidades de conserva de atún, por lo cual pagó S/ 56. Si otro cliente compró 8 unidades de conserva de sardina y 6 unidades de conserva de caballa, por lo cual pagó S/ 62, ¿cuánto cuesta la unidad de conserva de cada tipo de pescado?

Figura 15- Problema con enunciado sobre sistemas de 3 ecuaciones lineales.

Fuente: Matemática 5 – Cuaderno de trabajo (PERÚ, 2016, p.134)

Se requiere de mayor grado de conocimiento que en los ejemplos anteriores, ya que debe tener la capacidad de reconocer dicho sistema de 3x3, además de resolverlo con el método que más convenga.

$$\left.\begin{array}{l} s\text{: }precio\ de\ una\ conserva\ de\ sardina \\ c\text{: }precio\ de\ una\ conserva\ de\ caballa \\ a\text{: }precio\ de\ una\ conserva\ de\ atún \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{r} \dfrac{s+c+a}{3} = 5 \\ 6a + 4c + 2a = 56 \\ 8s + 6c = 62 \end{array}$$

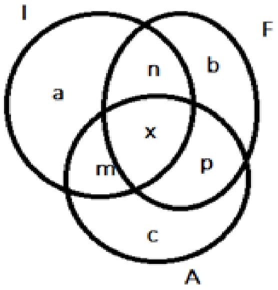
Situaciones relacionadas con Operaciones entre Conjuntos:

Son problemas con enunciados de conjuntos, donde se debe plantear las ecuaciones pertinentes que resuelvan el problema. A continuación un ejemplo de dichas situaciones, se muestra en la Figura 16:

> De un grupo de 55 personas, 25 hablan inglés; 32 francés y 33, alemán. Además, 5 personas hablan los 3 idiomas. ¿Cuántas personas hablan exactamente 2 de estos idomas?

Figura 16 - Problema de sistemas de ecuaciones lineales relacionado con conjuntos

En la solución de esta situación se hace necesario el uso de los sistemas de ecuaciones lineales por la relación lineal entre algunos valores desconocidos. A continuación la Figura 17, que muestra las relaciones formuladas.



$$S1 = a + b + c$$
$$S2 = m + n + p$$
$$S3 = x = 5$$

$$n(I \cup F \cup A) = 55 \longrightarrow S1 + S2 + S3 = 55$$
$$n(I) + n(F) + n(A) = 25 + 32 + 33 \rightarrow S1 + 2.S2 + 3.S3 = 90$$

Figura 17 – Planteo figural de un problema de sistemas de ecuaciones lineales relacionado con Conjuntos

En este enunciado debe considerarse que las incógnitas deben pertenecer a los números enteros no negativos. Además, el sistema que se plantea presenta 5 ecuaciones con 9 incógnitas, lo cual implica un sistema con infinitas soluciones para las demás incógnitas, menos para alguna de ellas que serán posibles de hallar. El profesor debe reconocer que los valores de las incógnitas deben ser enteros no negativos, por tratarse de cantidades de personas.

Entonces, es necesario reconocer nociones propias de este tema como son la cardinalidad de conjuntos (número de elementos de un conjunto), que puede ser vacío, unitario, y con más elementos; operaciones como unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica y complemento; esquemas para plantear y solucionar situaciones con conjuntos como los diagramas de Venn-Euler (figuras cerradas que se intersectan) o de Carrol (tablas de doble entrada, para conjuntos disjuntos) o propiedades entre cardinales de conjuntos.

Situaciones relacionadas con Divisibilidad:

Estos problemas se relacionan con el tema de Teoría de Números, específicamente con criterios de divisibilidad. Como ejemplo se muestra la siguiente situación:

$$\boxed{Si: \overline{ababa} = \dot{8}8, hallar\ a - b}$$

Figura 18 - Problema de sistemas de ecuaciones lineales relacionado con divisibilidad

Este problema, mostrado en la Figura 18, implica aplicar criterios de divisibilidad para 8 y 11 (múltiplo de 88), de la cual se generan 2 ecuaciones con las incógnitas “a” y “b”, como se muestra a continuación.

Por criterio de divisibilidad del 8: $4a + 2b + a = \dot{8} = 8m$

Por criterio de divisibilidad del 11: $3a - 2b = \dot{11} = 11k$

En estos problemas los valores de “a” y “b” son dígitos en el sistema de numeración decimal, es decir enteros no negativos, por lo cual los valores que puede asumir “a” pueden ser desde 1 a 9, mientras que “b” puede tomar valores desde 0 a 9, por no ser primera cifra. De la misma manera, dada la teoría de números, el valor de “a” debe ser par, por ser la última cifra del numeral. Esta es una propiedad de divisibilidad de números. Además de ello, la solución del sistema implica que se consideren algunos valores para los múltiplos de 8 y 11, es decir, antes de resolver el sistema los valores de “m” y “k” son parámetros que podrían tomar diversos valores, lo que llevaría a la posibilidad de tener más de una solución, por existir más de un sistema de ecuaciones lineales no equivalentes.

Entonces, al abordar situaciones sobre divisibilidad, el profesor debería considerar conceptos, como múltiplo (número que contiene a otro) y divisor (número que está contenido en otro); expresar un número como divisor de otro con residuo por defecto o exceso, criterios de divisibilidad de algunos números (divisibilidad por 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 11; 13; 25, entre otros, así como los criterios de números que necesitan de la composición de dos o más criterios); propiedades de la teoría de números (multiplicación, suma; potencia de números no divisibles pero con residuo); justificaciones de los criterios (en base a la descomposición polinómica de los números y su representación como divisor de otro número con residuo) y algunos conceptos más que sean necesarios.

Situaciones relacionadas con Proporcionalidad:

Las situaciones de este grupo se muestran en la solución de problemas de proporcionalidad, como son Razones, Proporciones, Magnitudes Proporcionales o Regla de tres. Se formulan relaciones o igualdades sobre proporcionalidades Directa o Inversamente proporcional. A continuación se presenta un problema en la Figura 19, referente a la proporcionalidad:

$$Si: \frac{a}{6} = \frac{b}{8+n} = \frac{d}{5} = \frac{e}{5-n} \text{ ; } además\ a+b+c = 380. Hallar\ \frac{d}{n}$$

Figura 19 - Problema de sistemas de ecuaciones lineales relacionado con proporcionalidad

En este problema se deben generar más ecuaciones relacionando de forma conveniente los datos más apropiados, como se muestra a continuación.

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{8+n} = \frac{d}{5} = \frac{e}{5-n} = k$$

Entonces: $a = 6k$; $b = (8+n)k$; $d = 5k$; $e = (5-n)k$

$a + b + c = 380$

Dado que el tema de este problema implica desarrollar el tema de Proporcionalidad, los valores de *a*, *b*, *c*, *d*, *n* deben ser números enteros positivos, mientras que k debe ser racional positivo. Estas condiciones son propias del tema en mención, el cual admite propiedades entre sus términos (antecedentes y consecuentes). Se muestra un sistema con 6 incógnitas y se han establecido 6 ecuaciones, lo que permitirá hallar los valores de todas las incógnitas.

Los promedios y mezclas son temas de índole aritmética que hacen referencia a la proporción de elementos, siendo útiles en contextos reales. Por ello, es necesario que el profesor identifique que en su desarrollo se emplean métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales. La Figura 20 que se muestra a continuación, ejemplifica este tipo de situación:

Un kilogramo de café de primera y un kilogramo de café de segunda cuesta S/. 26. Se mezcla 10 kg de primera con 20 kg de segunda. Si se hubiera mezclado 20 kg de primera con 10 kg de segunda, el precio medio hubiera sido S/.2 mayor. ¿Cuál es el precio de un kilogramo de primera?

Figura 20 - Problema de sistemas de ecuaciones lineales relacionado con mezclas

Se plantea para su solución un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, como el que se muestra a continuación

$Siendo\ a: precio\ de\ 1Kg.\ de\ café\ de\ primera\ calidad$

$Siendo\ b: precio\ de\ 1Kg.\ de\ café\ de\ primera\ calidad$

$$a + b = 26$$
$$10a + 20b = M$$
$$20a + 10b = M + 2$$

En este problema los valores de *a, b, M* deben ser positivos, así como el valor de M mayor a *"a"* y *"b"*.

En conclusión, el profesor debe reconocer expresiones que representen razones aritmética (por diferencia) o geométrica (por cociente); magnitudes y proporciones directa e inversa; regla de tres simple (solo 2 magnitudes) o compuesta (más de 2 magnitudes); cuando se refiere a mezclas o promedios, reconocer conceptos como grado de alcohol en una mezcla, precio medio, ley o liga (en metales finos); además de propiedades como suma o productos de antecedentes y consecuentes en razones geométricas equivalentes, proporción discreta o continua, grado de alcohol en el agua o alcohol puro, entre otros.

Situaciones relacionadas con Interés:

Problemas de este tipo muestran la necesidad de resolverlos haciendo uso de los sistemas de ecuaciones lineales. A continuación se muestra un ejercicio de esta clasificación:

> Dos capitales se diferencian en S/.2 000, el primero se impone al 16% anual y el segundo al 10% semestral. Si al cabo de un año los montos son iguales, hallar el mayor capital.

Figura 21 - Problema de sistemas de ecuaciones lineales relacionado con Interés

Al plantear el problema mostrado en la Figura 21, se generan 2 ecuaciones lineales de 2 incógnitas, que se debe resolver de la manera más conveniente:

$$C_1 - C_2 = 2000$$
$$C_1.16\%.1 + C_1 = C_2.20\%.2 + C_2$$

En esta situación se han generado 2 ecuaciones con 2 incógnitas (los capitales). Estos capitales deben ser números reales no negativos. Sin embargo, podría llegar a la solución con valores negativos, los cuales tienen una interpretación: la diferencia asumida está en el orden $C_1 - C_2$, es decir, debería ser $C_2 - C_1$, con lo cual el capital C_1 debe ser mayor a C_2.

Por ello, el profesor debe reconocer términos como capital o inversión, tasa de interés, tiempo de inversión, monto o interés; equivalencia entre tasas de interés (diario, semanal, quincenal, mensual, bimestral, trimestral, cuatrimestral, semestral, anual y otros) o tiempos (entre días, meses o años).

Situaciones relacionadas con Sucesiones:

Existen diversas situaciones sobre sucesiones, entre las que son muy comunes las progresiones aritméticas, cuyos planteamientos en la mayoría de los casos necesita utilizar los sistemas de ecuaciones lineales para dar respuesta a lo solicitado. Por ejemplo, la Figura 22 muestra una situación sobre este tema:

> En una progresión aritmética, se sabe que el término de lugar 27 es 180 y el término de lugar 54 es 342. Hallar el término que ocupa el lugar 63.

Figura 22 - Problema de sistemas de ecuaciones lineales relacionado con progresiones aritméticas

Al plantear las ecuaciones a partir del enunciado presentado en la figura anterior, se obtiene un sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas, en las cuales se debe hallar el primer término y la razón aritmética.

$$t_{54} = 342 = t_1 + r(54 - 1)$$
$$t_{27} = 180 = t_1 + r(27 - 1)$$

Los valores de t_1 y r representan el primer término y la razón de la progresión aritmética, respectivamente. Al corresponder a $t_{54} = 342$ y $t_{27} = 180$, se pueden intuir que la razón debe ser positiva, ya que se refiere a una progresión aritmética creciente.

Debido a todo esto, el profesor debe reconocer cuándo se presenta una sucesión aritmética (con razón aritmética constante o no), propiedades entre términos de una progresión aritmética, número de elementos, suma de términos, sucesiones notables (de números naturales positivos, pares, impares, cuadrados perfectos, cubos perfectos, otros).

ii. Situaciones de contexto algebraico

En este grupo se encuentran las situaciones-problema que involucran conceptos algebraicos que necesitan utilizar los sistemas de ecuaciones lineales para su solución. Aquí también, el profesor de matemática debe ser capaz de reconocer las propiedades, argumentos y justificaciones de cada tema algebraico. A continuación se mostrarán los temas identificados:

Situaciones relacionadas con Polinomios

Son problemas relacionados con grados o coeficientes de polinomios, como por ejemplo el grado absoluto o relativo, así como identidad de polinomios o análisis de coeficientes. Por ejemplo, a continuación se muestra un ejercicio en la Figura 23:

En el siguiente polinomio: $P(x; y) = 5x^{n+3}y^{m-2}z^{6-n} + x^{n+2}y^{m-3}z^{n+m}$ Donde: G.R. (x) – G.R. (y) = 3 ∧ G.A.(P) = 13. Calcular: 2m – n.

Figura 23 - Problema de sistemas de ecuaciones lineales relacionado con grados en polinomios

De esta figura, se obtiene un sistema lineal de ecuaciones que se muestra a continuación:

$$(n+3)-(m-2)=3$$
$$(n+3)+(m-2)=13$$

La solución de este sistema debe considerar que los exponentes de las incógnitas deben ser números enteros no negativos, ya que es el motivo por el que una expresión algebraica se llama polinomio.

El profesor debe reconocer sobre los polinomios algunos conceptos o propiedades como grado relativo de una variable o grado absoluto de un polinomio, polinomios ordenados (creciente o decreciente), completos (según los grados de los términos de un polinomio), polinomios especiales como mónico, idénticos, idénticamente nulos, operaciones entre polinomios, como adición, multiplicación o división, factorizaciones; propiedades entre grados de polinomios cuando se realizan operaciones entre ellos.

Situaciones relacionadas con Fracciones algebraicas

Las fracciones algebraicas son expresiones algebraicas muy comunes. Muchas de ellas se pueden descomponer 2 o más fracciones algebraicas, cuyos denominadores sean factores primos. En la Figura 24 aparece un ejercicio de ese tipo:

Si: $\frac{3x+4}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$

Hallar: A.B

Figura 24 - Problema de sistemas de ecuaciones lineales relacionado con fracciones algebraicas

De lo cual se obtiene estas 2 ecuaciones lineales:

$$\frac{3x+4}{x^2+3x+2} = \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{(A+B)x+(2A+B)}{x^2+3x+2}$$

$$A+B=3\ ;2A+B=4$$

Se deben considerar que los valores de A y B no pueden ser nulos, ya que anularía una de las fracciones algebraicas y no cumplirían la separación en fracciones propias.

Es decir, el profesor debe ser capaz de reconocer definiciones, propiedades y otras características, como reconocer entre fracción algebraica propia (grado absoluto del numerador debe ser menor al del denominador) o impropia (grado absoluto del numerador es mayor al del denominador), factorizar polinomios, operaciones como suma, multiplicación o división, así como la descomposición de fracciones como suma o resta de fracciones propias.

Situaciones relacionadas con Binomio de Newton

En estos ejercicios, las actividades se centran en el análisis de los grados de los términos que forman el binomio de Newton. Son ejercicios netamente matemáticos, que implican un trabajo con expresiones algebraicas. En la Figura 25 se muestra un ejercicio de este tema:

Al desarrollar la expresión $\left(\frac{x^{2m}}{y^{n-10}}+\frac{y^{m+20}}{x^{n}}\right)^{16}$ el término central tiene como parte literal a $x^{64}y^{400}$. Hallar *m.n*

Figura 25 - Problema de sistemas de ecuaciones lineales relacionado con Binomio de Newton

Considerando elementos teóricos y propiedades del tema Binomio de Newton, se plantean el siguiente sistema de 2 ecuaciones lineales:

$$\left(\frac{x^{2m}}{y^{n-10}}\right)^{8}\left(\frac{y^{m+20}}{x^{n}}\right)^{8}=x^{16m-8n}y^{8m+160-8n+80} \Rightarrow \begin{array}{l} 16m-8n=64 \\ 8m-8n=160 \end{array}$$

Los exponentes de las incógnitas “x” e “y” pueden tomar cualquier valor real, ya que el binomio de Newton se ha generalizado para cualquier tipo de exponente en este dominio.

Por eso, el profesor debe reconocer la forma de un binomio de Newton, así como el desarrollo del mismo y la fórmula para hallar el término de alguna posición en particular (llamado también término k-ésimo), reconocer las características de un término en particular como el signo, el desarrollo de una combinación de “n” en “k”, y la relación de esta con los exponentes de los términos y del grado absoluto de aquel término. Así también, reconocer propiedades sobre división y multiplicación de potenciación, cuando trabaje con los elementos de uno o más términos.

Situaciones relacionadas con Números Complejos

La teoría de Números Complejos no está contemplada en el Currículo nacional (PERÚ, 2016), pero se desarrolla en algunas instituciones privadas por ser tema de evaluación en algunos procesos de admisión a instituciones de educación superior. En este tema, se admiten operaciones básicas como las desarrolladas en Números Reales, por lo que se necesita de soluciones utilizando los sistemas de ecuaciones lineales. A continuación, la Figura 26 muestra una situación sobre números complejos:

Sabiendo que $2a - 3b = -3$ y que además que $z = \frac{a+b+2i}{a-b-3i}$ es un número real puro, hallar *a-b*

Figura 26 - Problema de sistemas de ecuaciones lineales relacionado con números complejos

De las propiedades en Números Complejos se realizan operaciones convenientes para transformar z1 y z2 en número real puro e imaginario puro.

$$\frac{a+b+2i}{a-b-3i} \cdot \frac{a-b+3i}{a-b+3i} = \frac{(a^2-b^2-6)+(5a+b)i}{(a-b)^2+9} \Rightarrow \begin{array}{l} 5a+b=0 \\ 2a-3b=-3 \end{array}$$

Para la validez de la solución del sistema de ecuaciones, se debe considerar que el coeficiente real $a^2 - b^2 - 6$, debe ser diferentes de cero, pues sino se anularía la expresión y obtendríamos una incoherencia según las condiciones del tema de los números complejos.

En general, implica reconocer definiciones como módulo y conjugado de un complejo, número real puro y número imaginario puro, ecuaciones con raíces complejas, operaciones aritméticas entre números complejos, racionalizar cuando se divide números complejos, representar de forma algebraica (parte real y parte imaginaria), geométrica (eje real y eje imaginario) o trigonométrica (módulo y argumento) de estos, para su tratamiento en ese ámbito, así también propiedades en cada una de las representaciones antes mencionadas.

Situaciones relacionadas con Ecuaciones cuadráticas:

A pesar de referirse en estas situaciones a ecuaciones de segundo grado, en muchos problemas es evidente el uso de sistemas de ecuaciones lineales. Por ejemplo, la Figura 27 presenta un problema en el que se deben aplicar propiedades sobre la relación de los coeficientes de la ecuación cuadrática:

Dada la ecuación: $2x^2 + (a + b)x - 2a + b = 0$
Si la suma de raíces es 4 y el producto de las mismas es 6. Hallar "$a.b$"

Figura 27 - Problema de sistemas de ecuaciones lineales relacionado con ecuaciones cuadráticas

De la ecuación y datos de la suma y producto se pueden plantear las siguientes ecuaciones:

$$\frac{-(a+b)}{2} = 4 \qquad \frac{-2a+b}{2} = 6 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -a - b &= 8 \\ -2a + b &= 12 \end{aligned}$$

El profesor de matemática debe reconocer una ecuación cuadrática y sus términos (principal, lineal e independiente), así como propiedades como la suma, producto y diferencia de raíces; reconocer la naturaleza de las raíces (cuando son reales y diferentes, reales e iguales o no reales), también métodos de solución como factorización (aspa simple, factor común o producto notable) y fórmula general (completando cuadrados).

Situaciones relacionadas con Matrices:

En el desarrollo de las matrices, se analizan relaciones entre sus elementos, según filas y columnas, así como otras características propias de ellas. A continuación una situación sobre ellas se puede apreciar en la Figura 28, que muestra una matriz de orden 2x2 (2 filas y 2 columnas):

Si en la matriz: $A = \begin{bmatrix} 2x - 3y & 4x \\ 2x + 12 & y + 6 \end{bmatrix}$

se cumple que $a_{21} = 2.a_{22}$ y que Traza(A) = 6.

Calcula: "$x + y$".

Figura 28 - Problema de sistemas de ecuaciones lineales relacionado con matrices

La traza se refiere a la suma de los elementos de la diagonal principal de una matriz, mientras que las expresiones a_{21} y a_{22} se refiere a los elementos de la segunda fila de dicha matriz, de donde obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$(2x - 3y) + (y + 6) = 6$$
$$(2x + 12) = 2(y + 6)$$

Dado que se expresa como dato la relación de $a_{21} = 2a_{22}$, no tendría sentido que ambos valores $(a_{21};\ a_{22})$ sean nulos, a pesar que cumplan la relación. Así también, el alumno debe recordar el concepto de traza de una matriz, como la suma de la diagonal principal de una matriz cuadrada.

Por todo ello, el profesor debe realizar operaciones entre matrices (suma, diferencia, producto por un escalar, producto matricial), métodos para hallar la inversa de una matriz, conceptos como orden de una matriz, diagonal, matriz triangular (superior o inferior) o traza de una matriz, así como las condiciones para cada caso.

Situaciones relacionadas con Funciones:

Existen diversos tipos de funciones, entre ellas las funciones lineales, las cuales requieren de la solución de sistemas de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas. Por ello, se muestra el siguiente tipo de problema en la Figura 29:

Si la producción inicial de una empresa es de 30 artículos y se sabe que en los primeros 12 meses, dicha producción se incrementa en forma lineal. Además, en el cuarto mes se produjeron 190 artículos. Se desea obtener:

a. La expresión que defina la producción P en función al tiempo "x" en meses.
b. La producción anual.

Figura 29 - Problema de sistemas de ecuaciones lineales relacionado con función lineal

Dado que la función lineal tiene la forma general $f(x) = mx + b$, se obtienen las siguientes ecuaciones: $f(0) = m(0) + b = 30$; $f(4) = m.4 + b = 120$

Como se trata de una función lineal el valor de "m" no negativo por ser una función lineal creciente, que se entiende del enunciado del problema, el valor de "b" también debe ser no negativo, ya que representa una cantidad inicial de artículos.

Entonces, el profesor además de los sistemas de ecuaciones lineales debe reconocer características de una función como dominio y rango, interceptos con los ejes, par ordenado, intersección de funciones, así también, reconocer los cuadrantes del plano cartesiano.

Situaciones relacionadas con Programación lineal:

Los problemas de Programación Lineal buscan determinar, en base a inecuaciones lineales, la optimización de expresiones, según lo solicite la situación. Un ejemplo de ello se muestra a continuación, en la Figura 30, donde se busca optimizar un polinomio:

Determina el valor mínimo que toma la función objetivo: P(x, y) = 10x + 15y sujeta a las restricciones. $\begin{cases} x + y \geq 3 \\ x - 3y \leq 3 \\ y \leq x \end{cases}$

Figura 30 - Problema de sistemas de ecuaciones lineales relacionado con programación lineal

Este problema pretenden determinar el punto o los puntos en los cuales la función objetivo dada por P(x, y) se vuelve óptima. Para ello, se cambian las relaciones, de desigualdad de las inecuaciones por igualdades, para delimitar la región factible comprendida entre ellas y buscar entre las infinitas posibilidades aquella que logre la optimización. Se hallan los puntos extremos de la región intersectando las rectas halladas anteriormente:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - 3y &= 3 \\ x &= y \end{aligned}$$

Las soluciones posibles se obtienen de intersectar estas ecuaciones. La solución debe aceptar números reales ya que no existen restricciones en el enunciado, por ser netamente de ámbito matemático. Lo que se desea es que el alumno haga uso de las técnicas para la solución.

Para ello, el profesor debe tener conocimientos previos de funciones, así como reconocer la región factible para delimitar sus posibilidades de solución. También el profesor debe reconocer que este tipo de situaciones originan sistemas de ecuaciones lineales con 2 incógnitas, ya que se trabaja en el plano cartesiano (bidimensional).

iii. Situaciones de contexto geométrico

En este grupo situaciones se encuentran las involucran conceptos geométricos que requieren el uso de sistemas de ecuaciones lineales para su solución. Nuevamente, el profesor de matemática debe ser capaz de reconocer las propiedades, argumentos y justificaciones de cada tema algebraico. Sin embrago, el contexto geométrico implica ciertas condiciones que harán válida la solución del sistema, como solución de la situación planteada A continuación se mostrarán los temas identificados:

Situaciones relacionadas con Ángulos

En la Figura 31, se muestra una situación en lenguaje figural, sobre ángulos entre rectas paralelas y ángulos consecutivos:

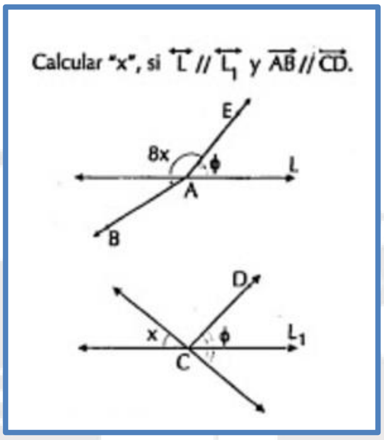


Figura 31 - Problema de sistemas de ecuaciones lineales relacionado con ángulos entre paralelas

La solución de este ejercicio muestra en la Figura 32, donde se formulan 2 ecuaciones lineales con 3 incógnitas, que a pesar de la naturaleza del sistema, se logra hallar lo que deseado.

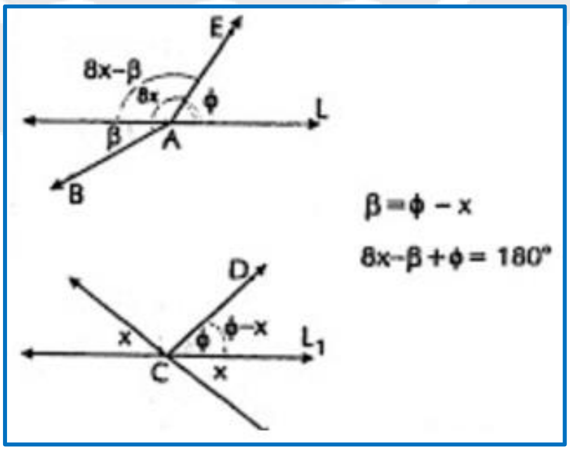


Figura 32 – Solución del problema relacionado con ángulos.

Se muestra un sistema con infinitas soluciones, pero que permiten dar solución a la situación. El profesor de matemáticas debe ser capaz de reconocer y discutir esto, pues a pesar de ser un sistema con infinitas soluciones, las incógnitas que no se pueden hallar actúan como parámetros, los cuales deben cumplir condiciones de existencia, por ejemplo, deben ser no negativos y menores a un ángulo llano (180° sexagesimales). Así también, el valor de "φ" debe ser mayor a "x" y a "β".

El profesor debe reconocer al menos dos sistemas de medida angular (sexagesimal y radial), las equivalencias entre ellos, las propiedades cuando se presentan rectas paralelas y secantes comunes a ellas, como ángulos opuestos por el vértice, conjugados, alternos internos o externos, o consecutivos, entre otros.

Situaciones relacionadas con Triángulos

Cuando se aborda el tema de Triángulos en la geometría, también se hacen operaciones con ángulos, ya que los triángulos pueden ser acutángulos, rectángulos u oblicuángulos, lo que implica que todos los ángulos deben ser convexos, es decir, mayores a 0° y menores a 90°. Deben considerarse características y propiedades de cada tipo, reconocer conceptos sobre líneas notables (bisectriz, mediatriz, altura o mediana), así como trabajar con las longitudes de los lados, al trabajar con triángulos escalenos, isósceles o equiláteros, ya que estos permitirán reconocer y formular el sistema de ecuaciones lineales que permita resolver la situación. A continuación se muestra la Figura 33, donde se plantea un problema aplicado a triángulos:

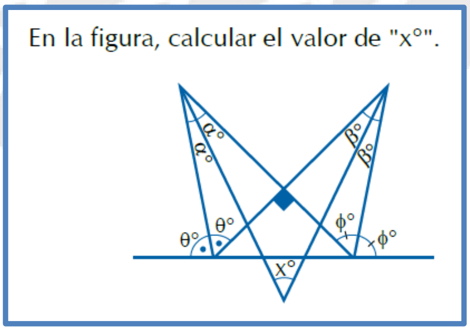


Figura 33 - Problema de sistemas de ecuaciones lineales relacionado con triángulos

La solución como en los demás casos, muestra relaciones entre ángulos de triángulos.

$$\alpha + x + \beta = 90 \qquad\qquad 2\theta + 2\varphi + 90 = 360$$
$$2\alpha + \theta = 90 \qquad\qquad 2\beta + \varphi = 90$$

Los ángulos geométricos son no negativos y los valores de $\alpha, \beta, \varphi, \theta,$ y el mismo “x”, deben ser menores a 90°, por ser ángulos agudos de un triángulo rectángulo. El sistema que se ha obtenido tiene infinitas soluciones, a pesar de ello el problema tiene solución. No se puede dar un valor específico a las demás incógnitas, por lo que el profesor debe tener la capacidad de justificar ello, así como el comportamiento de estas incógnitas, cuya solución se puede expresar en términos de parámetros.

Situaciones relacionadas con Cuadriláteros

El trabajo con cuadriláteros, similar a los triángulos, implica reconocer características y propiedades de estos. Reconocer los tipos de cuadriláteros (paralelogramos, trapecios o trapezoides), ya que en cada caso existen propiedades que se cumplen con sus ángulos o lados. En este grupo se presentan problemas sobre cuadriláteros, como el que se presenta en la Figura 34:

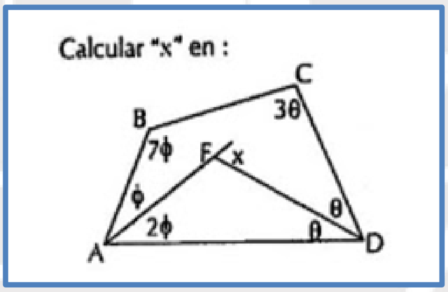


Figura 34 - Problema de sistemas de ecuaciones lineales relacionado con cuadriláteros

Las ecuaciones lineales que se formulan son:

$$x = 2\varphi + \theta \qquad\qquad 7\varphi + 3\varphi + 3\theta + 2\theta = 360$$

Similar a los casos anteriores, el sistema tiene infinitas soluciones, pero es posible dar solución a lo que se pide hallar, sin embargo, se deben expresar las otras incógnitas en términos de un parámetro que permita cumplir las condiciones de la geometría.

Situaciones relacionadas con Polígonos

Las situaciones sobre polígonos requieren de soluciones con uso de diversas técnicas algebraicas, ya que en muchos casos se deben resolver ecuaciones. Se presenta en la Figura 35, un ejercicio sobre este tema:

> La suma de las medidas de 4 ángulos consecutivos de un hexágono es 500°. Hallar el ángulo que forman las bisectrices interiores de los otros 2 ángulos.

Figura 35 - Problema de sistemas de ecuaciones lineales relacionado con polígonos

La Figura 36 muestra un problema cuya solución necesita ser mostrado con una gráfica y en ella determinar algunas ecuaciones:

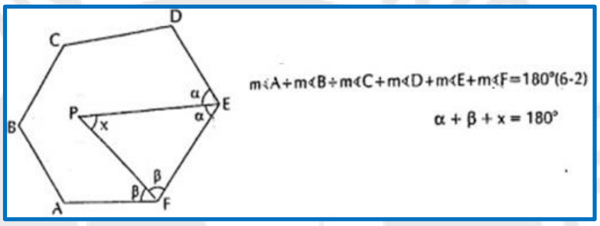


Figura 36 – Solución de un problema relacionado con polígonos

Efectivamente, como se indicó líneas arriba, la Figura 37 muestra el planteamiento en otro lenguaje matemático, algo que el profesor debe ser capaz de hacer. Los polígonos pueden ser convexos o cóncavos, así como equiángulos, equiláteros o regulares. Para las situaciones de este tema se plantean por defecto polígonos convexos, a no ser que el enunciado exprese lo contrario. Por ello el profesor debe manifestar estas condiciones a los alumnos al abordar estas situaciones, para evitar que se obtengan gráficos o expresiones que conlleven a error o incoherencias. También debe tener conocimiento de algunas características generales, como suma de ángulos internos, externos o centrales, cantidad de diagonales o diagonales medias.

Situaciones relacionadas con Geometría Analítica

Estos problemas se encuentran en la competencia “Resuelve problemas de forma, movimiento y localización”. A continuación, se muestra un ejemplo en la Figura 37:

Encuentre la ecuación cartesiana de la circunferencia que pasa por los puntos (3; 1), (1; 6) y (-2; -1). Dé como respuesta la suma de las coordenadas de su centro con su radio.

Figura 37- Problema de sistemas de ecuaciones lineales relacionado con ecuación de circunferencia

Este problema se plantea con la ecuación cartesiana de la circunferencia dada de la siguiente forma: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ Al reemplazar los puntos se obtienen 3 ecuaciones no lineales, pero trabajando de formas conveniente tomadas de 2 en 2, se logran ecuaciones lineales.

$$(3-h)^2+(1-k)^2=r^2$$
$$(1-h)^2+(6-k)^2=r^2 \qquad -4h+10k=27$$
$$(-2-h)^2+(-1-k)^2=r^2 \qquad 3h+7k=16$$

Los valores que puede tomar "h" y "k" deben ser reales, sin importar el signo o si son racionales o no, ya que estos valores constituyen el centro de la circunferencia, en el plano cartesiano. En cambio, el valor de "r" debe ser no negativo, por referirse a la distancia entre 2 puntos, en este caso, entre el centro y un punto que pertenece a la circunferencia.

El profesor debe tener conocimiento de las ecuaciones de recta, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola, además de reconocer sus elementos, como vértice, foco, centro, eje focal, eje transverso, lado recto, según sea el caso, a la vez de reconocer las gráficas y la argumentación de las ecuaciones y las propiedades que existen en estas cónicas.

B. Situaciones Extra-matemáticas

Cuando nos referimos a esta clasificación, se hace alusión a temas que no corresponden propiamente a la matemática, pero que necesitan de los sistemas de ecuaciones lineales para llegar a la solución de la situación. En ese sentido se han identificado situaciones en el área curricular Ciencia y Tecnología, más específicamente en la Física y Química, así como otros que corresponden a la vida cotidiana, que a continuación se detalla:

i. Situaciones en contexto de la Física

De los temas referentes a la Física y coherentes con el Currículo Nacional (PERÚ, 2016) se han considerado algunos temas que utilizan sistemas de ecuaciones lineales:

Situaciones relacionadas con Vectores

Estos problemas se presentan para hallar los módulos de vectores, por ejemplo, la Figura 38 presenta una situación con vectores cuyo punto inicial está en el origen de coordenadas del plano cartesiano:

Dada la gráfica, encontrar los módulos de los vectores A y B, si la resultante es un vector horizontal en el semi-eje positivo "X" igual a 20 u. (│A│=10 u; │B│=15 u)

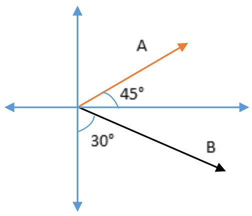


Figura 38 - Problema de sistemas de ecuaciones lineales relacionado con vectores

Este problema implica descomponer los vectores A y B en sus componentes sobre el eje X e Y con los cuales se plantean 2 ecuaciones lineales. Para ello los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos 45° y 30° son constantes y generarán coeficientes.

$$A.\cos(45°) + B.sen(30°) = 20$$

$$A.\text{sen}(45°) - B.cos(30°) = 0$$

Por ello, el profesor de física debe reconocer condiciones de vectores que permitan formular un sistema de ecuaciones lineales, por ejemplo, los vectores tienen módulo y dirección, con lo cual si un módulo es negativo se debe entender que la dirección inicial considerada debe ser contraria; reconocer funciones trigonométricas de ángulos agudos; descomponer un vector en sus componentes en los ejes coordenados; reconocer expresiones como resultante, suma, producto escalar o vectorial, entre otros.

Situaciones relacionadas con Cinemática

La Cinemática es una parte de la física que estudia el movimiento de los cuerpos. Tiene a su vez diversos capítulos. Se mostrarán ejercicios que se relacionan con Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU). El problema mostrado en la Figura 39 es muy común en este tema:

Dos móviles están separados inicialmente 200Km y viajan en sentidos opuestos. Si las velocidades son 8 Km/h y 17 Km/h. Hallar la distancia que recorre cada uno y el tiempo que demoran antes del encuentro

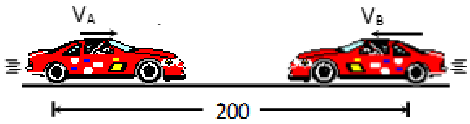
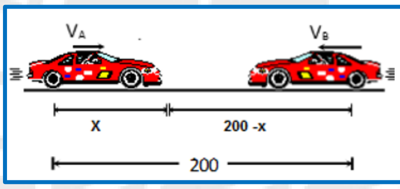


Figura 39 - Problema de sistemas de ecuaciones lineales relacionado con MRU.

En esta situación se utiliza la fórmula de MRU dada por $Espacio = Velocidad\ .Tiempo$. Entonces se considera "t" el tiempo de encuentro y "X" la distancia de uno de los móviles



$Para\ el\ móvil\ A: 8.t = X$

$Para\ el\ móvil\ B:\ 17.t = 200 - X$

Figura 40 – Planteo del problema relacionado con MRU.

Es importante para este problema realizar una gráfica que permita entender y plantear ecuaciones para cada móvil, como se hace en la Figura 40. En los problemas de cinemática, no se consideran factores externos que puedan influir en el recorrido de los móviles, sino por el contrario situaciones ideales, entendiendo estas como aquellas en las que las fuerzas externas no existen. Por otro lado, hay condiciones que el profesor debe considerar como establecer un sistema de referencia para la trayectoria de los móviles, en el caso del tiempo considerarlo como número real no negativo, en tanto los demás elementos de cinemática sí podrían serlo como son la velocidad, aceleración, desplazamientos, ya que dependerán del sistema de referencia considerado.

Situaciones relacionadas con Estática

La Estática estudia el equilibrio de los cuerpos. En este tema también es necesario el uso de los sistemas de ecuaciones lineales para relacionar las diversas fuerzas que actúan en el sistema a fin de cumplir las leyes de equilibrio. A continuación se muestra un problema, en la Figura 41:

Un bloque de 150 N de peso se encuentra colgado según el sistema en equilibrio. Hallar la tensión de las cuerdas.

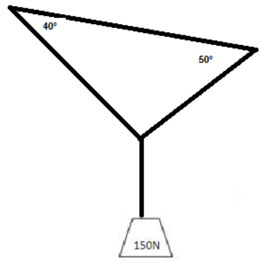
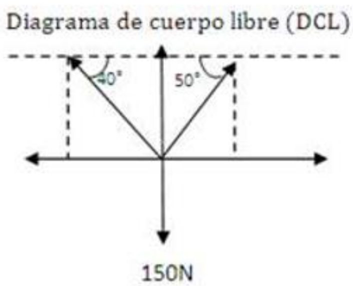


Figura 41 - Problema de sistemas de ecuaciones lineales relacionado con equilibrio estático

En esta situación se realiza un diagrama de cuerpo libre y de ella se plantean las ecuaciones pertinentes.



$\Sigma F_x = 0 \rightarrow T_{1X} - T_{2x} = 0$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow T_{1y} + T_{2y} - 150\ N = 0$

De las cuales se obtienen

$T_1.\cos 50° - T_2.\cos 40° = 0$

$T_1.\text{sen}50° + T_2.\text{sen}40° = 150\ N$

Figura 42 – Diagrama de cuerpo libre relacionado a situación sobre equilibrio estático

Como se puede apreciar en la Figura 42, el sistema que se obtiene está formado por 2 ecuaciones y 2 incógnitas, pero puede darse el caso de tener más incógnitas que ecuaciones o viceversa, lo que puede conllevar a sistemas con solución única o infinita. Los valores de T_1 y T_2, así como de los módulos de los diferentes elementos deberían ser no negativos, pero de darse el caso, se debe interpretar como una dirección contraria a la asumida inicialmente. También debe reconocer situaciones de equilibrio estático.

Situaciones relacionadas con Dinámica

La Dinámica estudia las fuerzas que originan el movimiento de los cuerpos. Estas fuerzas se relacionan entre sí y genera ecuaciones lineales que permiten su solución. La Figura 43 muestra un problema de dinámica con 2 bloques unidos por una cuerda:

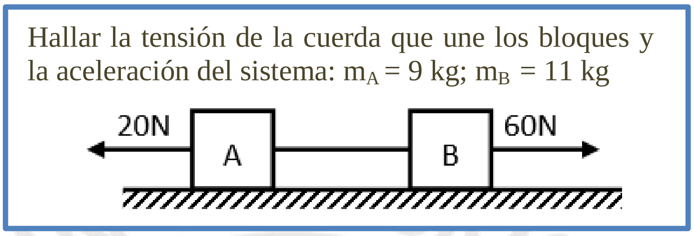


Figura 43 - Problema de sistemas de ecuaciones lineales relacionado con dinámica lineal

Para resolver la situación, en la Figura 44 se muestran los diagramas de cuerpo libre de cada bloque y las fuerzas que actúan sobre cada uno y se formulan las ecuaciones sobre leyes de Dinámica ($\sum F = m.a$)

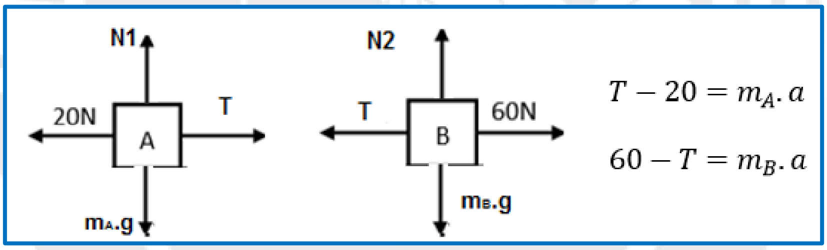


Figura 44 – Diagramas de cuerpo libre de 2 bloques, relacionado a problema sobre dinámica

Se presentan 2 ecuaciones con 2 incógnitas, ya que los valores de las masas A y B ($m_A \; y \; m_B$) son datos conocidos.

ii. Situaciones en contexto de la Química

En la misma área curricular de Ciencia y Tecnología, se desarrollan temas que se relacionan con la Química. A continuación se mostrarán algunos casos.

Situaciones relacionadas con Balanceo de reacciones químicas

Estos problemas se presentan para hallar los coeficientes de los compuestos que intervienen en la reacción, por ejemplo:

Balancear con método algebraico la siguiente reacción química:

$$HNO_3 + SnO \rightarrow NO + SnO_2 + H_2O$$

Figura 45 - Problema de sistemas de ecuaciones lineales relacionado con balanceo químico

Lo que se muestra en la Figura 45 es un problema muy común en este tema. Lo que se debe hacer es anteponer delante de cada componente químico variables que simularán los coeficientes de las ecuaciones. Luego se formulan las ecuaciones lineales necesarias.

$$a.HNO_3 + b.SnO \rightarrow c.NO + d.SnO_2 + e.H_2O \Rightarrow \begin{matrix} a = 2e \\ a = c \\ 3a + b = c + 2d + e \\ b = d \end{matrix}$$

Los coeficientes son valores no negativos. Lo que representan estos valores realmente se refieren a la proporción de dichos elementos. Podría existir la posibilidad de incluir como dato alguna cantidad específica de alguno de ellos y pedir las cantidades de los demás elementos que intervienen, mediante la relación de los coeficientes.

El profesor debe tener conocimiento sobre características de los átomos y de los compuestos formados con ellos como masa molecular, número de moles o molaridad. Así también, debe considerar la valencia de átomos cuando realice enlaces químicos para formar los compuestos.

Situaciones relacionadas con teoría de átomos

Estos problemas se presentan para hallar los coeficientes de los compuestos que intervienen en la reacción química, por ejemplo, la Figura 46 muestra una situación donde se deben identificar algunas definiciones de la Química:

Si dos átomos "A" y "B" tienen igual número de neutrones, la suma de sus protones es 76 y la diferencia de sus números de masa es 4. ¿Cuántos protones tiene "A"?

Figura 46 - Problema de sistemas de ecuaciones lineales relacionado con átomos

Se debe recurrir a propiedades de los átomos para formular las siguientes ecuaciones.

$$n_A = n_B$$

$$p_A + p_B = 76$$

$$m_A - m_B = 4 \rightarrow p_A + n_A - p_B - n_B \;=\; p_A - p_B = 4$$

Los valores de las incógnitas deben ser enteros no negativos, por referirse a cantidades de elementos químicos. El profesor debe considerar cuando un átomo es estable, o ha ganado o perdido electrones (ión), número de neutrones y protones que hay en el núcleo de un átomo, así como los electrones que presenta en la nube electrónica. También se mencionó anteriormente conceptos como número másico o de masa, y número atómico.

De esta manera, se han mostrado algunos temas que requieren del uso de los sistemas de ecuaciones lineales. Ahora serán analizados para identificar los demás objetos primarios que emergen de ellos y así clasificarlos según el lenguaje en que se muestra, las definiciones necesarias, los procedimientos de solución, las propiedades o las argumentaciones sobre los sistemas de ecuaciones lineales.

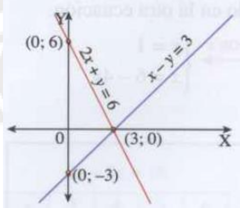
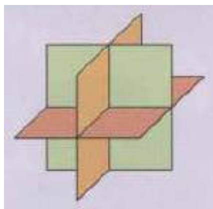
3.1.2. Lenguajes

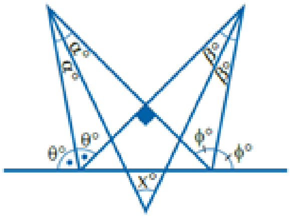
El lenguaje está referido a las formas de expresión gráfica o notaciones, que están presentes diversos registros de representación, como por ejemplo en forma natural o escrita, que sirven para describir las situaciones-problema. Así también "son la parte ostensiva de una serie de conceptos, definiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos" (Godino, Batanero y Font, 2008, p.6), siendo muy importante debido a que en la práctica matemática, los objetos matemáticos son abstractos.

Del análisis de contenido se han identificado diversos términos, notaciones, gráficos o expresiones que se relacionan con los sistemas de ecuaciones lineales. Por ello se ha elaborado una clasificación que se muestra en la Tabla 3:

Tabla 3

Tipo de lenguajes empleados sobre los sistemas de ecuaciones lineales

LENGUAJE	EJEMPLO
Verbal: • Expresiones sobre definiciones: Ecuación lineal, sistema de ecuaciones lineales, sistema de ecuaciones equivalentes, parámetro, incógnita, matriz de coeficientes, matriz triangular, matriz aumentada, determinante, sistema consistente o compatible, sistema compatible determinado, sistema compatible indeterminado, sistema incompatible. • Expresiones sobre propiedades: Relación de coeficientes, intersección de rectas, rectas paralelas, rectas superpuestas, determinante nulo, determinante no nulo, analizar el sistema, intercambiar ecuaciones, multiplicar una ecuación por un escalar. • Expresiones sobre enunciados de problemas: Cuántos elementos de cada tipo hay; entre los 2 tipos hay; halla el C.S.	Sistema de ecuaciones lineales es el conjunto de ecuaciones de primer grado con 2 o más incógnitas. Sistema compatible determinado es aquel sistema que tiene un conjunto finito de soluciones. Sistema compatible indeterminado es aquel sistema que tiene infinitas de soluciones. Si una ecuación de un sistema se reemplaza por la suma de esta ecuación, previamente multiplicada por un número distinto de cero, con otra ecuación del sistema, se obtiene un sistema equivalente al inicial. Un kilogramo de café de primera y un kilogramo de café de segunda cuesta S/. 26. Se mezcla 10 kg de primera con 20 kg de segunda. Si se hubiera mezclado 20 kg de primera con 10 kg de segunda, el precio medio hubiera sido S/.2 mayor. ¿Cuál es el precio de un kilogramo de primera?
Algebraico Incógnitas, parámetros, términos independientes, forma general para 2 incógnitas, forma general para 3 incógnitas.	Sea el sistema de incógnitas $\{m, n\}$. $am + bn = c$ $dm + en = f$ Sea el sistema de incógnitas $\{x, y, z\}$: $ax + by + cz = d$ $ex + fy + gz = h$ $ix + jy + kz = l$
Gráfica: Situaciones que incluyen graficar rectas o planos del sistema de ecuaciones. Pueden ser representados en un plano cartesiano o en el sistema tridimensional.	 
Determinante: Cuando se resuelven situaciones por el método de Cramer.	Para el sistema $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ $\lvert M_p \rvert = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ y $\lvert M_x \rvert = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}$ y $\lvert M_y \rvert = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}$

<table>
<tr>
<td>Tabular:
Muestran información en una tabla y se deben de relacionar de forma conveniente para formar el sistema de ecuaciones que permita resolver el problema</td>
<td>
<table>
<tr><th>N.° total de puntos</th><th>N.° de tiros de 2</th><th>N.° de tiros de 3</th></tr>
<tr><td>17</td><td>7 (14 puntos)</td><td>1 (3 puntos)</td></tr>
<tr><td>17</td><td>4 (8 puntos)</td><td>3 (9 puntos)</td></tr>
<tr><td>17</td><td>1 (2 puntos)</td><td>5 (15 puntos)</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Figural:
Con mucha frecuencia en situaciones geométricas, donde el problema se muestra con un gráfico, donde hay datos presentes en la figura, como ángulos, líneas notables, longitudes de segmentos, entre otros.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Matricial:
En situaciones donde se aplica el método de Gauss-Jordan: transformar una matriz inicial aumentada en otra, mediante operaciones fila.</td>
<td>Matriz aumentada → Matriz triangular
$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$</td>
</tr>
</table>

3.1.3. Definiciones

Son las descripciones de las expresiones matemáticas que intervienen en el desarrollo de un objeto matemático. Las definiciones que se tienen en torno a un objeto pueden ser diversas, dependiendo de la institución en la que se hace referencia. El interés de este trabajo está relacionado con los sistemas de ecuaciones lineales, por lo que, del análisis de textos realizado se propone la Tabla 4, con los conceptos que son necesarios para abordar el tema en la educación secundaria peruana:

Tabla 4

Definiciones sobre los sistemas de ecuaciones lineales

CONCEPTO	DEFINICIÓN
Ecuación lineal	Expresión algebraica cuyo grado es igual a la unidad y presenta al menos una incógnita.
Sistema de ecuaciones lineales	Conjunto de ecuaciones lineales con 2 o más incógnitas.
Conjunto solución	Conjunto de valores que satisfacen simultáneamente las ecuaciones del sistema.
Sistemas de ecuaciones equivalentes	Son aquellos sistemas de ecuaciones lineales que admiten el mismo conjunto solución. La definición dada para sistemas equivalentes es una relación de equivalencia, que implica cumplir con las propiedades transitiva, reflexiva y simétrica.
Interceptos con los ejes	Valores en los cuales la gráfica de la recta o plano asociada a una ecuación intersectan a los ejes coordenados.
Parámetro	Variable que reemplaza el valor de un coeficiente en el sistema de ecuaciones lineales, diferente a las incógnitas del sistema de ecuaciones.
Matriz de coeficientes	Es un arreglo de números ordenados en filas y columnas formado por los coeficientes del sistema de ecuaciones.
Matriz aumentada	Es la matriz de coeficientes, pero con una columna adicional, formada por los términos independientes de cada ecuación.
Matriz triangular	Es la matriz cuyos elementos debajo o por encima de la diagonal principal, son ceros.
Determinante	Valor asociado a una matriz de igual número de filas y columnas, que se obtiene multiplicando cada elemento de la primera fila por su cofactor, sumando luego todos los productos obtenidos.
Cofactor A_{ij} del elemento a_{ij}	Se define $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, siendo M_{ij} el menor determinante que se obtiene al eliminar la i-ésima fila y la j-ésima columna. Por ejemplo, $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \\ 5 & -3 & 3 \end{bmatrix}$, entonces el menor $M_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = (1)(-3) - (5)(6) = -33$
Sistema compatible determinado	Sistema que tiene un conjunto finito de soluciones.
Sistema compatible indeterminado	Sistema que tiene infinitas soluciones
Sistema incompatible	Sistema que no tiene solución. También se le conoce como inconsistente o absurda.

3.1.4. Procedimientos

Para poder resolver un sistema de ecuaciones lineales se debe contar con el enunciado del problema y el profesor debe tener la capacidad de reconocer si la situación requiere o no de la noción de sistemas de ecuaciones lineales. De ser el caso, debe asociar un sistema en su representación algebraica, identificar cuáles serían las incógnitas y organizarlas en ecuaciones lineales, donde las incógnitas se agrupan por términos semejantes. Luego, colocar las ecuaciones, una debajo de otra, de tal manera que los términos de una misma incógnita se ubiquen en una misma columna. En cuanto a las diferentes expresiones que se pueden obtener cuando se plantea una ecuación, se deben considerar expresiones fraccionarias, que si bien no son ecuaciones lineales, con un tratamiento adecuado, que considere restricciones, según el denominador, se puede transformar en un sistema de ecuaciones lineales. Estas expresiones fraccionarias podría ser consideradas de la forma $\frac{ax+by+c}{dx+ey+f} = k$, como por ejemplo $\frac{3x-2y+5}{3x+y-5} = 2$, a la cual se deben aplicar operaciones aritméticas básicas (adición, sustracción, multiplicación o división) y propiedades (como distributiva, conmutativa, asociativa), de tal manera que se exprese como una ecuación lineal con los términos que presentan incógnitas en un lado de la igualdad y los términos independientes en el otro lado. Del ejemplo anterior mostrado, la secuencia de procesos que se podrían realizar sería el siguiente:

$$\frac{3x-2y+5}{3x+y-5} = 2$$

$3x - 2y + 5 = 2\ (3x + y - 5)$ (Multiplicación en aspa)

$3x - 2y + 5 = 6x + 2y - 10$ (Propiedad distributiva)

$3x - 2y - 6x - 2y = -10 - 5$ (Separa términos semejantes

$3x - 6x - 2y - 2y = -10 - 5$ (Propiedad conmutativa)

$-3x - 4y = -15$ (Suma de términos semejantes)

Ya formulado el sistema de ecuaciones lineales, se procede a resolver para lo cual se propone hallar sistemas equivalentes. Esto se puede obtener considerando manejo de expresiones algebraicas, para lo cual se considerarán 2 métodos:

- Reducir un sistema de ecuaciones "$m \; x \; n$" a uno "$m - 1 \; x \; n - 1$"
- Método de Gauss-Jordan.

Luego de resolver el sistema de ecuaciones lineales por algún método, se debe verificar que dicha solución satisfaga como solución de la situación inicial planteada, cumpliendo las condiciones respectivas.

A continuación se detallará cada uno de los métodos, cuyo desarrollo implica hacer uso de procesos algebraicos y otros que no son considerados así:

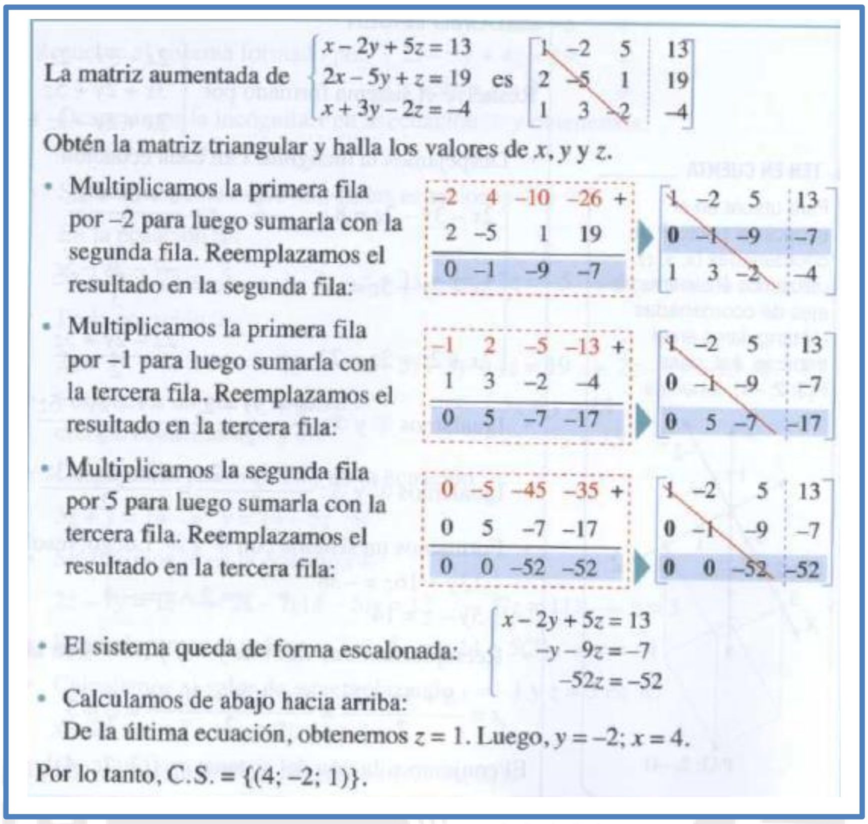
I. Reducir un sistema de "m x n" a uno de "$\mathbf{m - 1}$ x $\mathbf{n - 1}$"

Este método tiene por finalidad reducir el sistema de orden "**m x n**" **(m** ecuaciones con **n** incógnitas) a equivalente de orden "$\mathbf{m - 1}$ **x** $\mathbf{n - 1}$" **(m-1** ecuaciones con **n-1** incógnitas). Esto mediante operaciones de adición, sustracción, multiplicación o división entre las ecuaciones del sistema. Este proceso se realiza cuantas veces sea conveniente hasta obtener una ecuación de primer grado con una incógnita, la cual es más sencilla de resolver. Luego de manera regresiva, se reemplaza el valor de la incógnita, hallada en la ecuación lineal, en el sistema equivalente previo a esta ecuación y así obtener el valor de otra incógnita. Se vuelve a hacer lo mismo cuantas veces sea necesario hasta hallar el valor de cada incógnita del sistema, lo cual se logra en el alguna ecuación lineal del sistema de ecuaciones inicial. Si la ecuación de primer grado final posee más de una incógnita, se procede a asignar a alguna de las incógnitas el valor de un parámetro. Esto implicaría que el sistema no tiene solución única.

II. Método de Gauss - Jordan

Tal como indican Jerónimo, Sabia y Tesauri (2008), este método tiene como objetivo obtener un sistema equivalente al inicial de tal manera que sea más sencillo de resolver, hallando la incógnita que está en la fila (ecuación) con menos valores no nulos. Para ello se forma una matriz aumentada, esto se consigue al agregar una columna a la derecha de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineales. Dicha columna se forma con los términos independientes de las ecuaciones, cada uno en la fila que corresponde a la misma ecuación original. En esta matriz se realizan operaciones entre sus filas para obtener una matriz triangular.

Se muestra en la Figura 47, un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, resuelto por este método:



La matriz aumentada de $\begin{cases} x-2y+5z=13 \\ 2x-5y+z=19 \\ x+3y-2z=-4 \end{cases}$ es $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 13 \\ 2 & -5 & 1 & 19 \\ 1 & 3 & -2 & -4 \end{array}\right]$

Obtén la matriz triangular y halla los valores de x, y y z.

- Multiplicamos la primera fila por -2 para luego sumarla con la segunda fila. Reemplazamos el resultado en la segunda fila: $\begin{array}{cccc} -2 & 4 & -10 & -26 \\ 2 & -5 & 1 & 19 \\ \hline 0 & -1 & -9 & -7 \end{array}$ + $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 13 \\ 0 & -1 & -9 & -7 \\ 1 & 3 & -2 & -4 \end{array}\right]$
- Multiplicamos la primera fila por -1 para luego sumarla con la tercera fila. Reemplazamos el resultado en la tercera fila: $\begin{array}{cccc} -1 & 2 & -5 & -13 \\ 1 & 3 & -2 & -4 \\ \hline 0 & 5 & -7 & -17 \end{array}$ + $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 13 \\ 0 & -1 & -9 & -7 \\ 0 & 5 & -7 & -17 \end{array}\right]$
- Multiplicamos la segunda fila por 5 para luego sumarla con la tercera fila. Reemplazamos el resultado en la tercera fila: $\begin{array}{cccc} 0 & -5 & -45 & -35 \\ 0 & 5 & -7 & -17 \\ \hline 0 & 0 & -52 & -52 \end{array}$ + $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 13 \\ 0 & -1 & -9 & -7 \\ 0 & 0 & -52 & -52 \end{array}\right]$
- El sistema queda de forma escalonada: $\begin{cases} x-2y+5z=13 \\ -y-9z=-7 \\ -52z=-52 \end{cases}$
- Calculamos de abajo hacia arriba:
  De la última ecuación, obtenemos $z=1$. Luego, $y=-2$; $x=4$.

Por lo tanto, C.S. = $\{(4; -2; 1)\}$.

Figura 47 - Aplicación del método de Gauss-Jordan para sistemas de 3 ecuaciones lineales

Fuente: Matemática 5 (Mendoza, Paulino y Vargas, 2016, p. 62)

Se puede apreciar que la matriz final se obtiene de diversas operaciones aritméticas entre las filas para formar la matriz triangular. Entre las ventajas de este método, se puede considerar que siempre se realizan los mismos procedimientos, sin importar si la cantidad de ecuaciones e incógnitas sea iguales (matriz cuadrada), es decir, se aplica a sistemas de ecuaciones lineales de orden "$m_x n$" y permitirá obtener soluciones únicas, infinitas o reconocer cuando no existe solución.

Como un ejemplo de lo antes mencionado, la Figura 48 muestra un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas y su solución por este método:

$$\begin{array}{l} 3x-2y+3z=5 \\ 2x+4y-z=2 \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 3 \\ 0 & 16 & -9 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{16}R_2} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{16} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{6R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{8} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{9}{16} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

donde obtenemos: **despejando x, y**

$$x + \frac{5}{8}z = \frac{3}{2} \qquad\qquad x = \frac{3}{2} - \frac{5}{8}z$$

$$y - \frac{9}{16}z = -\frac{1}{4} \qquad\qquad y = -\frac{1}{4} + \frac{9}{16}z$$

luego x, y dependen de z, si $z = t$, $t \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{2} - \frac{5}{8}t \\ y &= -\frac{1}{4} + \frac{9}{16}t \ ; \quad t \in \mathbb{R}. \\ z &= t \end{aligned}$$

Figura 48 - Aplicación del método de Gauss-Jordan para sistema compatible indeterminado

Se puede notar que las soluciones se obtienen en función a un parámetro “t”, el cual tomará valores en el conjunto de los números reales e irán generando los valores respectivos de “x” e “y”.

Ahora, se mostrará un sistema de ecuaciones lineales formado por 4 ecuaciones y 4 variables, que podría suponer un sistema compatible por la igualdad de la cantidad de ecuaciones e incógnitas. Entonces, analicemos que sucede en la Figura 49:

$$x + y + z - w = 2$$
$$2x - y + w = 5$$
$$3x + z + w = 1$$
$$2x + 2y + 2z - w = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2R_1+R_4]{\substack{-2R_1+R_2 \\ -3R_1+R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_2+R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_3+R_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Del cuarto renglón se tiene $0x + 0y + 0z + 0w = 5$ que da la igualdad $0 = 5$, por lo tanto, el sistema no tiene solución.

Figura 49 - Aplicación del método de Gauss-Jordan para sistema incompatible

En este ejercicio se muestra inicialmente un sistema de ecuaciones lineales con cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, al aplicar el método se obtiene un sistema de ecuaciones equivalente que muestra sus coeficientes y términos independientes en la última matriz aumentada. La última fila formaría la ecuación $0x + 0y + 0z + 0w = 5$, es decir, muestra la igualdad $0 = 5$, lo cual es absurdo. Por ello, se concluye que el sistema no tiene solución.

Con esto se puede apreciar lo útil y eficiente del método para cualquier tipo de sistema, siendo muy apropiado. Este método propone generalizar el método de reducción que se analizó líneas arriba, ya que se realizan eliminaciones de forma sucesiva, hasta lograr una matriz triangular, para lo cual elimina en cada fila (ecuación) una incógnita, hasta reducir la última ecuación en otra con la menor cantidad de incógnitas posibles.

3.1.5. Propiedades

Del análisis de textos, se han reconocido propiedades que se deben considerar al abordan situaciones sobre sistemas de ecuaciones lineales. Se muestran algunas la Tabla 5:

Tabla 5

Propiedades de los sistemas de ecuaciones lineales

PROPIEDAD	PROPOSICIÓN
Para sistemas de ecuaciones lineales $ax + by = c$ $dx + ey = f$	P-01: Si $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$, el sistema es compatible determinado. P-02: Si $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$, el sistema es compatible indeterminado. P-03: Si $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$, el sistema es incompatible.
Si se tiene un sistema de "n" incógnitas con "n" ecuaciones.	P-04. Cuando el determinante del sistema es diferente de cero, el sistema es compatible determinado. P-05. Cuando el determinante del sistema es igual a cero, el sistema puede ser compatible indeterminado o incompatible.
Para 2 rectas $ax + by = c$ $dx + ey = f$	P-06. Si las rectas se intersectan, el sistema es compatible determinado. P-07. Si las rectas se superponen, el sistema es compatible indeterminado. P-08. Si las rectas son paralelas y diferentes, el sistema es incompatible.
Para 3 planos $ax + by + cz = d$ $ex + fy + gz = h$ $ix + jy + kz = l$	P-09. Si las planos se intersectan en un punto, el sistema es compatible determinado. P-10. Si las planos se intersectan en una recta, el sistema es compatible indeterminado. P-11. Si 2 planos coinciden y el otro intersecta, el sistema es compatible indeterminado. P-12. Si los 3 planos coinciden, sistema es compatible indeterminado. P-13. Si al menos 2 planos son paralelos, el sistema es incompatible. P-14. Si los planos se intersectan 2 a 2, el sistema es incompatible.
Sistemas de ecuaciones equivalentes:	P-15. Dos sistemas de ecuaciones lineales, llamados A y B, son equivalentes si sus conjuntos solución son iguales, cumpliendo 3 propiedades: • Transitiva: Sea un sistema de ecuaciones C, si A=B y B=C, entonces A=C. • Reflexiva: Todo sistema de ecuaciones es equivalente a sí mismo, por ello, A = A. • Simétrica: Si A = B, entonces B = A. P-16. Dado un sistema de ecuaciones lineales, las siguientes operaciones generan sistemas equivalentes: • Intercambiar dos ecuaciones de lugar. • Multiplicar una ecuación por una constante no nula. • Reemplazar una ecuación por ella misma más un múltiplo de otra.
Operaciones aritméticas.	Deben considerar propiedades de números reales, como asociativa, conmutativa, distributiva, elemento neutro, inverso aditivo, así como las operaciones básicas de adición, sustracción, multiplicación y división,

	cuando se realizan operaciones de los diversos métodos utilizados cuando se resuelven sistemas de ecuaciones lineales, ya que no siempre se presenta el sistema de forma organizada, en cuanto a las incógnitas y los términos independientes.

3.1.6. Argumentos

Los argumentos son empleados para justificar, comprobar o validar las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales. Los diversos métodos tienen una justificación del algoritmo que realizan. Se expondrán argumentos sobre ellos, así como para algunas propiedades que se han reconocido en este trabajo. En las fuentes bibliográficas analizadas, se pueden apreciar algunas de estas, que se detalla a continuación:

A. Argumentos referente a los métodos

Todos los métodos tienen su fundamento en las proposiciones del álgebra lineal, sobre sistemas equivalentes. Como indican Jerónimo, Sabia y Tesauri (2008) sobre el método de Gauss-Jordan, este método consiste en realizar intercambios u operaciones entre filas (ecuaciones), para formar un sistema de ecuaciones equivalente. Los autores enuncian una proposición que permite este trabajo entre filas, que es si en un sistema de ecuaciones, una de las ecuaciones es reemplazada por ella misma más un múltiplo de otra se obtiene un sistema equivalente.

B. Argumentos referentes a las propiedades

Las propiedades referentes a los sistemas de ecuaciones lineales tienen su fundamento en el álgebra lineal.

Las propiedades que se refieren al análisis de coeficientes del sistema para determinar si tiene o no solución (P-01, P-02, P-03), se justifican así:

Sea: $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$

Multiplicando la primera ecuación por “d” y la segunda por “a”, y restar miembro a miembro se obtendrá: $y(bd - ae) = (cd - af) \ \rightarrow \ y = \frac{cd-af}{bd-ae}$

De forma análoga se despeja “x”: $x(bd - ae) = (ce - bf) \ \rightarrow \ x = \frac{ce-bf}{bf-ae}$

Luego,

- Si $bd - ae \neq 0$, se tiene: $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ (Solución única)
- Si $bd - ae = 0$ ^ $bf - ae = 0$ ^ $cd - af = 0$ ^ $ce - bf = 0$, se tiene: $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ (Infinitas soluciones)
- Si $(bd - ae = 0 \wedge d - af \neq 0) \vee (bf - ae = 0 \wedge ce - bf \neq 0)$, luego: $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ (No hay solución)

Para las propiedades referentes a un sistema de "n" incógnitas con "n" ecuaciones (P-04, P-05), se considera el siguiente sistema de ecuaciones, de incógnitas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 + \cdots + a_{1(n-1)}.x_{n-1} + a_{1n}.x_n = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + a_{23}.x_3 + \cdots + a_{2(n-1)}.x_{n-1} + a_{2n}.x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}.x_1 + a_{n2}.x_2 + a_{n3}.x_3 + \cdots + a_{n(n-1)}.x_{n-1} + a_{nn}.x_n = b_n \end{cases}$$

De la cual se obtiene la determinante del sistema M_s formado por

$$M_s = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- Si el sistema tiene solución única, entonces el valor del determinante del sistema (M_s) debe ser diferente de cero por ser un sistema linealmente independiente, es decir, que ninguna ecuación del sistema es resultado de operar otras 2 del mismo sistema (combinación lineal).
- En tanto, si el valor de dicho determinante es cero, se tiene un sistema que no tiene solución única, por ser un sistema linealmente dependiente, es decir, que alguna ecuación del sistema es resultado de operar otras 2 del mismo sistema (combinación lineal), no pudiendo especificar si tiene infinitas soluciones o no la tiene. Por ejemplo, sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 3z &= 5 \\ 2x + 4y - z &= 2 \\ x + 10y - 5z &= -1 \end{aligned}$$

La última ecuación es resultado de una combinación lineal de las otras dos y esto se puede demostrar de la siguiente manera:

Se restan el doble de la segunda ecuación con la primera columna:

$$\begin{array}{r} 2_x(2x + 4y - z = \ \ 2) \\ 3x - 2y + 3z \ \ = \ 5 \\ \hline x + 10y - 5z = -1 \end{array}$$

Con lo cual se obtiene la tercera ecuación. De esta manera, se demuestra que una de las ecuaciones es combinación lineal de las otras 2, es decir:

De la primera ecuación se obtiene el vector $u = (3; -2;\ 3)$, así también de la segunda ecuación se obtiene $v = (2;\ 4; -1)$, con los cuales, se obtiene una combinación lineal $(-1)u + (2)v = (1; 10;\ -5)$, que corresponde con los coeficientes de la tercera ecuación.

De esta manera se demuestra que, al existir una dependencia, se obtiene el determinante de este sistema igual a cero. Formamos la matriz de coeficientes y así se obtiene:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 10 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$[(4.4.-5) + (2.10.3) + (-2.-1.1)] - [(1.4.3) + (3.10.-1) + (2.-2.-5)] = 0$$

Las propiedades para 2 rectas (P-06 hasta P-14) se demuestran en el plano cartesiano o sistema de 3 ejes coordenados. En el caso de las rectas ocurre lo siguiente:

- Si hay intersección, dicho punto es la solución del sistema, ya que comprueba la igualdad de las 2 rectas.
- Si las rectas están superpuestas, significa que se refiere a la misma recta, coinciden todos sus puntos, por eso hay infinitas coincidencias, lo que comprueba que infinitas soluciones.
- Si las rectas son paralelas, entonces no tienen puntos en común o intersección, lo que indica no hay valores comunes que cumplan la igualdad en cada recta, lo que muestra un sistema sin solución.

Para el caso de los planos, es análogo a lo anterior, por lo que solo existe solución única si los 3 planos se intersectan en un solo punto, ya que ese punto será el único que compruebe la igualdad en las 3 ecuaciones (planos).

Para las proposiciones relacionadas a los sistemas equivalentes (P-15, P-16). Para el caso de las propiedades de la relación de equivalencia de 2 sistemas de ecuaciones lineales:

Sean C.S. (A); C.S. (B); C.S. (C), los conjuntos solución de los sistemas de ecuaciones lineales de A, B y C, respectivamente, definidos por:

$$C.S(A) = (x_1;\ x_2; \dots ;\ x_n);\ C.S(B) = (y_1;\ y_2; \dots ;\ y_n);\ C.S(C) = (z_1;\ z_2; \dots ;\ z_n)$$

- Para la propiedad transitiva:

  Si $C.S(A) = C.S(B)$, es decir, $x_1 = y_1;\ x_2 = y_2; \dots ;\ x_n = y_n$

  Y si $C.S(B) = C.S(C)$, es decir, $y_1 = z_1;\ y_2 = z_2; \dots ;\ y_n = z_n$

  Entonces: $x_1 = z_1;\ x_2 = z_2; \dots ;\ x_n = z_n$, por lo tanto: $C.S(A) = C.S(C)$

- Para la propiedad reflexiva:
  Cumple que $C.S(A) = C.S(A)$, ya que el sistema de ecuaciones lineales A es igual a sí mismo.
- Para la propiedad simétrica:

  Si $C.S(A) = C.S(B)$, es decir, $x_1 = y_1;\ x_2 = y_2; \dots ;\ x_n = y_n$

  Entonces $y_1 = x_1;\ y_2 = x_2; \dots ;\ y_n = x_n$, por lo tanto $C.S(B) = C.S(A)$

Se han identificado los objetos primarios, que surgen en las situaciones-problema, que han permitido reconocer diversos significados de los sistemas de ecuaciones lineales, lo que permitirán un mejor análisis didáctico de los elementos que intervienen, a fin de establecer las relaciones entre ellos y que el profesor de matemáticas debe identificar como parte de su conocimiento didáctico-matemático, sobre los sistemas de ecuaciones lineales. De este significado de referencia se desprenderán los demás significados institucionales (pretendido, evaluado e implementado), pero que no analizarán en esta tesis.

En el siguiente capítulo se hará una propuesta de los conocimientos didáctico-matemáticos que debe tener el profesor de matemáticas, organizados en tablas con indicadores, a partir de la identificación de un significado de referencia institucional, sobre los sistemas de ecuaciones lineales.

CAPÍTULO 4: CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DEL PROFESOR SOBRE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

En este capítulo se presentará una propuesta sobre cuáles deberían ser los conocimientos didáctico-matemáticos que un profesor debe poseer acerca de los sistemas de ecuaciones lineales. Para ello, se complementará el significado de referencia institucional con la información proveniente del análisis de textos escolares y no escolares, así como los documentos emitidos por el Ministerio de Educación del Perú, y algunas investigaciones consideradas en el capítulo 1.

Se propondrán indicadores en las dimensiones Matemática y Didáctica, del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático. De la primera dimensión se ha visto conveniente hacer dos listas de indicadores, uno para el conocimiento común y el otro para el conocimiento ampliado del mismo, ya que este conocimiento se relaciona con aspectos matemáticos de un determinado nivel educativo, que permitirán al profesor solucionar situaciones y tareas matemáticas sobre sistemas de ecuaciones lineales. Para la segunda dimensión, se mostrarán aspectos en dos facetas: la epistémica, que permite al docente utilizar representaciones, procedimientos, relaciones con otros temas que anteceden o prosiguen en el currículo, propiedades o justificaciones al emplear sistemas de ecuaciones lineales; y en la faceta ecológica, se mostrarán aspectos relacionados con el currículo de educación secundaria, de temas considerados en él como de otros de nivel educativo superior, así como aquellos indicadores de conocimiento que se relacionan con los conceptos claves del sistema educativo peruano.

A continuación, la Figura 50, muestra un esquema que ilustra los elementos considerados para la elaboración de los indicadores del conocimiento:

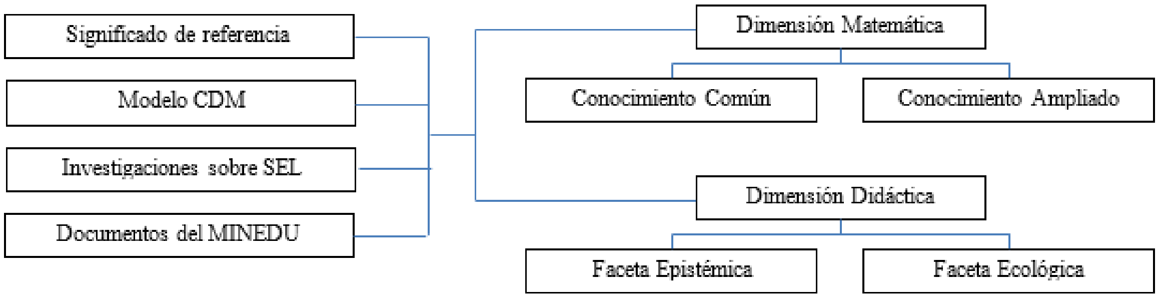


Figura 50 – Relación de elementos para elaboración de indicadores del conocimiento didáctico-matemático del profesor

La anterior figura, muestra los aspectos que se han tomado en cuenta para la identificación de los conocimientos del profesor. Primero, se consideraron las herramientas que brinda el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático para la identificación de los objetos primarios y cómo se organiza el significado de referencia institucional con respecto a los sistemas de ecuaciones lineales, visto en el capítulo anterior. También se analizó cómo algunas investigaciones construyeron el significado de referencia de otros objetos matemáticos, siendo un aspecto muy relevante para esta investigación el análisis de contenido de diversos textos. Ya para complementar el análisis y enfocado en la educación secundaria peruana, se consideró analizar documentación brindada por el Ministerio de Educación del Perú, como el Diseño Curricular Nacional (PERÚ, 2009), el Currículo Nacional (PERÚ, 2016), las Rutas de Aprendizaje (PERÚ, 2015), y las Sesiones de Aprendizaje (PERÚ, 2016) y el Programa Curricular de Educación Básica (PERÚ, 2016). Esta documentación permitió analizar la forma actual que se muestra a los alumnos la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales y de otros temas desarrollados en el nivel escolar, así también, el conocimiento que el Ministerio de Educación pretende inculcar en los mismos.

Con todos estos insumos se clasificó, organizó y analizó la información obtenida para identificar el conocimiento del profesor de matemática en dos dimensiones del modelo teórico en que se apoya esta tesis: la dimensión Matemática y la dimensión Didáctica. Con respecto a la primera se ha clasificado el conocimiento en base a dos subcategorías, como son el conocimiento común y el conocimiento ampliado; para la segunda dimensión, que comprende seis subcategorías o facetas, en este trabajo solo se han considerado las facetas epistémica y ecológica.

4.1. Indicadores del conocimiento didáctico-matemático del profesor sobre los sistemas de ecuaciones lineales.

Como parte de la metodología de esta tesis, se consideran las inferencias que son determinadas por el investigador, luego del análisis de contenido realizado y del significado de referencia construido en el capítulo anterior, sobre los sistemas de ecuaciones lineales.

El modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático presenta en la Dimensión Matemática, dos sub-categorías: el conocimiento común y ampliado del contenido, y en la Dimensión Didáctica, seis facetas, de las cuales se desarrollarán las que se refieren a la facetas epistémica y ecológica.

Para la elaboración de las listas de indicadores que el profesor debe tener para su práctica docente, sobre los sistemas de ecuaciones lineales, se ha considerado analizar otros trabajos de investigación referentes a los sistemas de ecuaciones lineales, como los de Sosa (2011) y Vasco (2015), y otros sobre el modelo teórico como los de Godino, Batanero y Font (2008), Godino (2009) y Pino-Fan y Godino (2015), los cuales ayudarán a lograr los objetivos de esta tesis.

4.1.1. Conocimiento común del profesor en la dimensión Matemática.

Esta subcategoría de la Dimensión Matemática hace referencia a aquel conocimiento que permite solucionar problemas, es decir, por algún medio responder al problema abordado. Para la elaboración de esta lista se consideraron como referencias las investigaciones que realizan Sosa (2011) y Vasco (2015) sobre sistemas de ecuaciones lineales, los cuales presentan indicadores del conocimiento matemático del profesor. También, se consideraron las consignas que muestra Godino (2009), para identificar características del conocimiento del profesor al solucionar problemas. Por último, se ha considerado lo indicado por Pino-Fan y Godino (2015) para reconocer los aspectos relacionados a esta sub-categoría. A continuación, en la Tabla 6, se muestran los indicadores del conocimiento común y una descripción sobre lo que el profesor de matemáticas debe poseer o tomar en cuenta:

Tabla 6

Indicadores del conocimiento común del contenido del profesor, sobre sistemas de ecuaciones lineales.

INDICADOR	DESCRIPCIÓN
Reconocer qué problema requiere el uso de sistemas de ecuaciones lineales.	Significa que el profesor debe identificar el tipo de situación-problema que aparece en la educación secundaria peruana, sea intra o extra-matemáticos, tal como se mostró en el significado de referencia.
Plantear un sistema de ecuaciones lineales.	Significa que el profesor debe plantear una situación como un sistema de ecuaciones lineales, identificar las incógnitas y parámetros o coeficientes. Esto en muchos casos implicará hacer un cambio de representación al algebraico para su tratamiento.
Resolver un sistema de ecuaciones lineales, usando algún método.	Significa que el profesor debe utilizar algún método que permita resolver el sistema de ecuaciones. Puede ser cualquiera de los vistos en el significado de referencia antes construido.
Interpretar la solución del sistema de ecuaciones lineales como solución de la situación inicial.	Significa que el profesor debe concluir en una respuesta a la situación planteada. Existen situaciones en la cual la solución del sistema, no será necesariamente la solución de la situación. Por ello, debe haber la capacidad de interpretar dicha solución, regresar al enunciado y verificar que satisfaga como solución de la situación planteada.

4.1.2. Conocimiento ampliado del profesor en la dimensión Matemática.

Se presentarán indicadores sobre el conocimiento ampliado, otra subcategoría de la Dimensión Matemática. Para esto, se consideraron otra vez los indicadores mostrados por Sosa (2011) y Vasco (2015), el uso del significado de referencia del capítulo 3, donde se muestran los objetos primarios sobre sistemas de ecuaciones lineales, así también el Currículo Nacional (PERÚ, 2016), para identificar qué temas de los vistos en el significado de referencia se contemplaron. La Tabla 7 muestra los indicadores reconocidos:

Tabla 7

Indicadores del conocimiento ampliado del contenido del profesor, sobre sistemas de ecuaciones lineales.

INDICADOR	DESCRIPCIÓN
Identificar qué temas usan los sistemas de ecuaciones lineales.	Significa que el profesor debe relacionar los sistemas de ecuaciones lineales con otros temas de la competencia *Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio*, como las fracciones algebraicas, ecuaciones lineales, función lineal, programación lineal o geometría analítica. Para las nociones matemáticas de índole intra-matemático se consideraron los siguientes contextos: • Aritmético: Situaciones cotidianas, Conjuntos, Divisibilidad, Proporcionalidad, Regla de Interés, Sucesiones. • Algebraicos: Polinomios, Fracciones algebraicas, Binomio de Newton, Números Complejos, Funciones, Programación Lineal. • Geométrico: ángulos, triángulos, Cuadriláteros, Polígonos, Geometría Analítica. Y para las nociones matemáticas de índole extra-matemáticos, se consideraron los siguientes contextos: • Físico: Vectores, Cinemática, Estática, Dinámica. • Químico: Reacciones químicas, Teoría de átomos.
Identificar conocimientos de otros temas que usan sistemas de ecuaciones lineales.	Significa que el profesor debe tener conocimiento de las definiciones y propiedades de otros temas intra o extra-matemáticos que necesitan de los sistemas de ecuaciones lineales cuando resuelve situaciones en dichos temas. Estos conocimientos se mencionaron cuando se identificaron las situaciones-problema en el significado de referencia, ya que existen conceptos, propiedades y otras condiciones que son necesarias que el profesor sea capaz de formular, resolver e indicar la solución de la situación inicial. Debe reconocer condiciones de cada caso. Por ejemplo, para programación lineal, reconocer el gráfico de las ecuaciones lineales y la región factible, que permita optimizar una función objetivo; para geometría analítica, reconocer ecuaciones de elipses, circunferencias, rectas o hipérbolas, en los cuales se plantean ecuaciones no lineales, pero estas conllevan, en la mayoría de casos, a reducirlas a ecuaciones lineales, como parte de la solución.

Como indica Pino-Fan y Godino (2015), el conocimiento ampliado implica relacionar el objeto matemático, en este caso los sistemas de ecuaciones lineales, con otros temas del currículo, además de motivar el estudio de estos temas, en los alumnos. Es importante considerar que existen temas que están explicitados en el Currículo Nacional (PERÚ, 2016), pero que no corresponden a la misma competencia, sin embargo, cuando se plantean situaciones sobre dichos temas, surge la necesidad de resolver sistemas de ecuaciones lineales.

4.1.3. Conocimiento en la faceta Epistémica del profesor en la dimensión Didáctica.

Existe un “conocimiento especializado de la dimensión matemática” (Pino-Fan y Godino, 2015, p.98), el cual se relaciona con el conocimiento didáctico, que es necesario para el proceso de enseñanza-aprendizaje. Este conocimiento se desarrolla en la Dimensión Didáctica que presenta seis facetas como sub-categorías, entre las cuales figura la faceta epistémica. Para la elaboración de la lista de indicadores se consideró el significado de referencia institucional, desarrollado en el capítulo 3, ya que en él se muestran las diversas situaciones-problema donde se hace necesario el uso de los sistemas de ecuaciones lineales, así como los lenguajes, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentaciones, objetos primarios que permitirán tener un significado más amplio de este objeto matemático. Nuevamente, se consideraron los trabajos de Sosa (2011) y Vasco (2015), por algunos descriptores relacionados con esta faceta, a pesar de ser desarrollados en base a otros marcos teóricos, en función al álgebra lineal, específicamente para los sistemas de ecuaciones lineales. A continuación se presentarán aspectos que debe tener el profesor sobre esta faceta:

A. **Identificar los lenguajes para representar los sistemas de ecuaciones lineales.** Reconocer el lenguaje verbal cuando se manifiestan situaciones en forma de enunciados, o cuando se dan definiciones o propiedades de los sistemas de ecuaciones lineales. Reconocer el lenguaje algebraico cuando se presentan ejercicios donde se muestra el sistema de ecuaciones lineales, sea para 2 o 3 incógnitas, así como con única o infinitas solución, o sin solución, donde aplica operaciones básicas en los reales. En este lenguaje debe identificar cuáles son las incógnitas y cuáles los parámetros o coeficientes. Reconocer el lenguaje gráfico cuando se muestran rectas o planos en ejes de coordenadas. Identificar los interceptos con los ejes y entre las gráficas presentes, para interpretar la solución del sistema de ecuaciones lineales. Reconocer el lenguaje tabular cuando se presente información expresada en cuadros o tablas de doble entrada. Interpretar los que implica cada celda de la tabla para plantear el problema en otro lenguaje. Reconocer el lenguaje figural, propio de la geometría, en el cual hay datos que debe considerar para plantear el sistema de ecuaciones lineales. Reconocer el lenguaje matricial cuando forma una matriz de coeficientes o aumentada, para mediante operaciones fila para lograr otro sistema equivalente al sistema de ecuaciones lineales inicial. Reconocer expresiones que muestran determinantes cuando aplique el método de Cramer, pero reconociendo que solo es una notación que permite relacionar los coeficientes del sistema, de forma más conveniente.

B. **Identificar las definiciones sobre sistemas de ecuaciones lineales**. Es decir, reconocer las definiciones de temas previos a los sistemas de ecuaciones lineales, como ecuación lineal, intersecciones con los ejes coordinados, conjunto solución, los cuales son necesarios para abordar el objeto de estudio de esta investigación. Reconocer definiciones relacionadas con sistemas de ecuaciones lineales y con temas que son posteriores a este objeto, ya que necesitará definiciones en estos temas vinculados para plantear el sistema.

C. **Identificar procedimientos para resolver sistemas de ecuaciones lineales.** En el significado de referencia presentado en el capítulo anterior, se mencionan 2 métodos para resolver situaciones sobre sistemas de ecuaciones lineales: Reducción de un sistema de ecuaciones "m x n" a uno "m-1 x n-1" y el Método de Gauss-Jordan.

   Sobre el primero, el profesor debe reconocer 3 métodos tradicionales que aparecen en los textos escolares como diferentes, pero no lo son, pues todos implican realizar operaciones entre las ecuaciones para disminuir el orden del sistema. A continuación se presenta cuál debe ser el proceder en cada caso, para sistemas de 2 x 2 y de 3 x 3.

   i. Método de Igualación.

La secuencia de pasos para resolver por este método se puede definir así:

1º Elegir una incógnita del sistema y despejarla en todas las ecuaciones del sistema.

2º Igualar las expresiones obtenidas y formar otro sistema de ecuaciones lineales. Continuar con este proceso hasta obtener una sola incógnita en una ecuación, la cual se resuelve.

3º Reemplazar el valor hallado en el paso anterior en cualquiera de las expresiones halladas en forma regresiva, hasta hallar todas las incógnitas.

4º Indicar el conjunto solución del sistema.

La Figura 51 aparece en el libro Matemáticas 3 (Lafosse, Huailla, Torres, 2016) se muestra un ejercicio resuelto con este método:

$$\begin{cases} x + y = 58 \\ 2x + 4y = 168 \end{cases}$$

1°. Despejamos x en las ecuaciones: $\begin{array}{l} x = 58 - y \\ x = \frac{168-4y}{2} \end{array}$

2°. Igualamos las ecuaciones: $\frac{168-4y}{2} = 58 - y$

$$y = 26$$

3°. Reemplazamos el valor hallado en una de las ecuaciones:

$$x = 58 - (26) = 32$$

4°. Escribimos el conjunto solución: C.S.= {(32; 26)}

Figura 51 - Solución por método de igualación (2 ecuaciones – 2 incógnitas)

Fuente: Matemática 3 (Lafosse, Huailla, Torres, 2016, p. 73)

Se pueden apreciar aspectos algebraicos en esta solución, como son el par ordenado, ecuación lineal, entre otros. Pero el método es similar para sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. De esta manera, en la Figura 52, extraída del libro Matemática 5 (Mendoza, Paulino y Vargas., 2016) se muestra el procedimiento de solución por este método.

$$\begin{cases} 2x - 3y - 2z = 8 \\ 3x + 2y + 5z = -7 \\ 2x + 2y - 3z = 22 \end{cases}$$

1°. Despejamos "x" de cada ecuación: $x = \frac{8+3y+2z}{2}$; $x = \frac{-7-2y-5z}{3}$; $x = \frac{22-2y+3z}{2}$

2°. Se igualan 2 a 2 las expresiones despejadas:

$$\frac{8+3y+2z}{2} = \frac{-7-2y-5z}{3} \rightarrow 13y + 16z = -38$$

$$\frac{8+3y+2z}{2} = \frac{22-2y+3z}{2} \rightarrow 5y - z = 14$$

Se resuelve el sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$\begin{cases} 13y + 16z = -38 \\ 5y - z = 14 \end{cases} \rightarrow \quad y = 2\,; z = \ -4$$

3°. Se reemplazan en una ecuación: $x = \frac{8+3(2)+2(-4)}{2} = 3$

4°. El conjunto solución del sistema es: C.S. {(3; 2; -4)}

Figura 52 - Solución por método de igualación (3 ecuaciones – 3 incógnitas)

Fuente: Matemática 3 (Mendoza, Paulino y Vargas, 2016, p. 61)

Como se puede apreciar, se trata de transformar el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, reduciendo ecuaciones en uno de 2 ecuaciones lineales con dos incógnitas, método que ya se explicó antes, para reemplazar esos valores en algunas de las ecuaciones iniciales o despejadas.

ii. Método de Sustitución

La secuencia de pasos para resolver por este método se puede definir así:

1º Despejar una de las incógnitas en una ecuación.

2º Reemplazar la expresión obtenida en las otras ecuaciones. Continuar con el proceso hasta obtener una ecuación lineal con una incógnita.

3º Reemplazar el valor hallado en el paso anterior en cualquiera de las expresiones halladas en el primer paso.

4º Indicar el conjunto solución del sistema.

Considerando el sistema de ecuaciones lineales empleado en el método anterior, el sistema resuelto con este método sería el que se muestra a continuación, en la Figura 53:

$$\begin{cases} x + y = 58 \\ 2x + 4y = 168 \end{cases}$$

1° Despejar la incógnita "x" de la primera ecuación:

$$x + y = 58 \ \rightarrow x = 58 - y$$

2° Reemplazar en la segunda ecuación:

$$2x + 4y = 168 \ \rightarrow \ 2(58 - y) + 4y = 168$$

Resolviendo la ecuación $y = 26$

3° Reemplazar el valor de "y" en la expresión del paso 1°

$$x = 58 - (26) \ \rightarrow \ x = 32$$

4° Entonces $C.S. = \{(32; 26)\}$

Figura 53 . Solución por método de sustitución (2 ecuaciones – 2 incógnitas)

Se puede apreciar que al hacer uso de cualquier método se obtiene el mismo conjunto solución, lo que indica la posibilidad de más de un método para la solución.

De la misma manera que el método anterior, se muestra la Figura 54, en la cual se explica el método para sistemas de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas.

$$\begin{cases} 3x + 5y - 2z = -5 \\ 2x - 3y + 4z = 19 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

1° Despejamos "x" de cada ecuación: $x = 3 - 2y - z$

2° Sustituimos esta expresión en las otras ecuaciones:

$$3(3 - 2y - z) + 5y - 2z = -5 \ \rightarrow 5z + y = 14$$

$$2(3 - 2y - z) - 3y + 4z = 19 \ \rightarrow 2z - 7y = 13$$

Se resuelve el sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$\begin{cases} 5z + y = 14 \\ 2z - 7y = 13 \end{cases} \ \rightarrow \ y = -1\,; z = 3$$

3° Se reemplaza en una ecuación: $x = 3 - 2(-1) - (3) = 2$

4° El conjunto solución del sistema es: C.S. {(2; -1; 3)}

Figura 54 - Solución por método de sustitución (3cuaciones - 3 incógnitas

Fuente: Matemática 5 (Mendoza, Paulino y Vargas, 2016, p. 60)

Inicialmente, se convierte el sistema de 3 ecuaciones en 2, lo que se resuelve como se indicó antes para 2 ecuaciones y 2 incógnitas.

iii. Método de Eliminación

Este método es sugerido cuando se cuente con coeficientes opuestos para la misma incógnita en el sistema de ecuaciones lineales. La secuencia de pasos para resolver por este método se puede definir así:

1º Elegir una misma variable en todas las ecuaciones para eliminarla.

2º Verificar que dicha incógnita presente coeficientes opuestos en todas las ecuaciones. De no ser así, obtener ecuaciones equivalentes, multiplicando por factores convenientes en aquellas ecuaciones que se desea tener dichos coeficientes opuestos.

3º Sumar ambas ecuaciones. Se eliminará la incógnita con coeficientes opuestos. Hacer cuantas veces sea necesario estos pasos hasta obtener una ecuación lineal con una incógnita y resolverla.

4º Reemplazar el valor hallado en el paso anterior en las expresiones halladas, en forma regresiva.

5º Indicar el conjunto solución del sistema.

Nuevamente, se considerará como punto de partida, el sistema de ecuaciones lineales empleado en el método anterior. Así, en la Figura 55 se muestra el sistema resuelto con este método:

$$\begin{cases} x + y = 58 \\ 2x + 4y = 168 \end{cases}$$

1° Se elige la incógnita "x" en todas las ecuaciones.

2° Ninguna incógnita tiene coeficientes opuestos, entonces se multiplica la segunda ecuación por -0,5; como también podría ser la primera multiplicada por 2:

$$2x + 4y = 168$$

$$Se\ multiplica\ por - 0{,}5\ y\ se\ obtiene \rightarrow -x - 2y = -84$$

3° Sumar la primera ecuación y la ecuación equivalente hallada:

$$\begin{cases} x + \quad y = \ \ 58 \\ -x - 2y = -84 \end{cases}$$

$$-y = -26 \ \rightarrow y = 26$$

4° Reemplazar el valor de "y" en la expresión la primera ecuación:

$$x + (26) = 58 \ \ \rightarrow \ \ x = 32$$

5° Entonces $C.S. = \{(32; 26)\}$

Figura 55 - Solución por método de eliminación (2 ecuaciones – 2 incógnitas)

Estas técnicas algebraicas, tienen un objetivo en común: hallar sistemas equivalentes. Incluso en aquellas que se expresan como una ecuación con una incógnita, porque luego se deben usar las otras ecuaciones para hallar las demás incógnitas.

$$\begin{cases} 15x + 25y + 20z = 840 & ① \\ 25x + 20y + 20z = 860 & ② \\ 30x + 10y + 40z = 880 & ③ \end{cases}$$

- Eliminamos la incógnita z. Para ello, sumamos las ecuaciones ① con el opuesto de ②:

$$\begin{cases} 15x + 25y + 20z = 840 \\ -25x - 20y - 20z = -860 \end{cases}$$
$$-10x + 5y = -20 \quad ④$$

- Eliminamos la misma incógnita z de las ecuaciones ② y ③. Para ello, multiplicamos la ecuación ③ por $-1/2$. Luego, las sumamos:

$$\begin{cases} 25x + 20y + 20z = 860 \\ 30x + 10y + 40z = 880 \quad \times(-1/2) \end{cases} \blacktriangleright \begin{cases} 25x + 20y + 20z = 860 \\ -15x - 5y - 20z = -440 \end{cases}$$
$$10x + 15y = 420 \quad ⑤$$

- Formamos un nuevo sistema con las ecuaciones ④ y ⑤, y eliminamos la incógnita x para hallar y:

$$\begin{cases} -10x + 5y = -20 \\ 10x + 15y = 420 \end{cases}$$
$$20y = 400 \rightarrow y = 20$$

- Reemplazamos el valor $y = 20$ en la ecuación ⑤ para hallar x:
$10x + 15y = 420 \rightarrow 10x + 15(20) = 420 \rightarrow 10x + 300 = 420 \rightarrow x = 12$
- Para calcular el valor de z, reemplazamos $x = 12$ e $y = 20$ en ①:
$15x + 25y + 20z = 840 \rightarrow 15(12) + 25(20) + 20z = 840 \rightarrow z = 8$

El conjunto solución del sistema es $\{(12; 20; 8)\}$.

Figura 56 - Solución por método de reducción (3cuaciones - 3 incógnitas

Fuente: Matemática 5 (Mendoza, Paulino y Vargas, 2016, p. 59)

Como se puede apreciar en la Figura 56, con este método se reduce el sistema inicial de 3 ecuaciones a uno de 2, para usar el método mostrado nuevamente y conseguir una ecuación con una incógnita.

Como se comentó antes, todos estos métodos hasta aquí vistos, en realidad conllevan a sistemas equivalentes. Por ello, el profesor de matemáticas debe ser capaz de reconocer dicho objetivo y es necesario que lo transmita a los alumnos, los cuales deben aprender al menos uno y así lograr resolver la situación. Sin embargo, es importante reconocer en qué situaciones son más conveniente resolver con uno u otro método, por lo que, como aporte de esta tesis, se brinda las siguientes recomendaciones:

- Si todos los coeficientes de las incógnitas son diferentes de uno, el método de igualación permitirá igualar fracciones, debido a que se obtendrán ecuaciones con coeficientes fraccionarios, para lo cual se resuelve al multiplicar en forma "cruzada", es decir, al tener 2 expresiones iguales con coeficiente fraccionario, se multiplican ambos términos por el mínimo común múltiplo de dichos y se obtiene así una ecuación con coeficientes enteros.

- Si uno de los coeficientes es igual a la unidad, sería preferible el método de sustitución, despejando esa incógnita con coeficiente unitario, ya que evitará muchas operaciones.
- Si para una incógnita los valores absolutos de los coeficientes son iguales, debería aplicarse el método de eliminación o reducción, debido a que al sumar o restar los términos semejantes respectivos, una de las incógnitas será eliminada y se procede a resolver una ecuación lineal con una variable, para lo cual se desarrollan menos operaciones.

Hasta aquí, se han presentado los métodos clásicos. Pero, hay algunas situaciones-problema que se suelen presentar asociadas a los sistemas de ecuaciones lineales, se podrían emplear algoritmos que son considerados provienen de otro campo de la matemática para su solución. A continuación, se mencionan algunas de ellas:

iv. Ecuación Diofántica.

No es un método en sí, pero permite resolver sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes y conjunto solución que pertenecen a los números enteros. Las ecuaciones que son de interés de esta investigación son de la forma:

$$ax + by = c \qquad \text{o} \qquad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c.$$

Para que estas ecuaciones tengan solución deben cumplir que el máximo común divisor de los coeficientes de las incógnitas debe ser divisor del término independiente.

A continuación, la Figura 57 muestra un enunciado que se resolverá con este método:

Un hombre compra 12 trajes, unos negros y otros grises, por 1200 €. Si los trajes negros valen 30 € más que los grises y compró el mínimo posible de estos últimos, ¿cuántos trajes ha comprado de cada color?

Figura 57 - Situación-problema para ecuación Diofántica.

Fuente: Chinchilla y Acuña (2013, p.234)

Las soluciones de estas ecuaciones del tipo $ax + by = c$ tienen la siguiente forma:

$$x = x_0 + k\frac{b}{d}\,;\, y = y_0 - k\frac{a}{d}$$

Donde: $d = mcd(a;b)$ y $(x_0; y_0)$ son los soluciones particulares o primarias.

La solución del enunciado anterior que también está en artículo de Chinchilla y Acuña (2013), se muestra en la Figura 58:

Solución: Sea $x =$ cantidad de trajes negros, $12 - x =$ cantidad de trajes grises,
$y =$ precio de un traje negro $y + 30 =$ precio de un traje gris.

La ecuación asociada es $x(y+30) + (12-x)y = 1200$.

Al simplificar $30x + 12y = 1200$.

Como $mcd(30,12) = 6$ es un divisor de 1200 esta ecuación tiene soluciones.

Mediante una serie de procedimientos, se obtiene la solución particular:

$$x_0 = 200 \text{ y } y_0 = -400$$

$$x = 200 + k \cdot \frac{12}{6} = 200 + 2k \qquad y = -400 - k \cdot \frac{30}{6} = -400 - 5k$$

Teniendo en cuenta que el número de trajes de cada tipo comprados por esta persona debe ser positivo y menor que 12 tenemos lo siguiente:

$$0 < -188 - 2k < 12 \Leftrightarrow 188 < -2k < 200 \Leftrightarrow -100 < k < -94$$

Por tanto, los únicos valores posibles para k son $k = \{-99, -98, -97, -96, -95\}$

se cumple para $t = -95$.

En consecuencia el protagonista de nuestro problema compró

$-188 - 2(-95) =$ 2 trajes grises y $12 - 2 = 10$ trajes negros.

Figura 58 - Solución por ecuación Diofántica.

Fuente: Chinchilla y Acuña (2013, p.235-236)

Este método se evalúa cada conjunto solución y se consideran aquellos que cumplan en el contexto del problema, por lo que se realizan operaciones aritméticas para ello.

Existen problemas que se resuelven por este método pero que necesitan del análisis de ciertos parámetros previamente. A continuación, se presenta una ecuación sobre divisibilidad, $5a + 2b = \dot{8} = 8k$, donde "k" es un parámetro que requiere ser evaluado, pasos previos a la aplicación del método para la ecuación diofántica, de la cual se obtienen todas las posibles soluciones en la siguiente Tabla 8:

Tabla 8

Conjuntos solución de una ecuación diofántica

k	2	3	3	4	4	5	6	5	6	7
a	2	2	4	4	6	6	6	8	8	8
b	3	7	2	6	1	5	9	0	4	8

El profesor debe reconocer este tipo de ecuaciones, ya que se generan soluciones finitas a pesar de tener un sistema de ecuaciones lineales con menos ecuaciones que incógnitas, lo que suponía un sistema de ecuaciones indeterminado. Además, para que esto sea posible debe cumplir ciertas características como es el hecho de admitir solo soluciones enteras, lo que ayuda en el análisis de los tipos de sistema que se han visto.

v. Método de Falsa Suposición

Tal como indica Muñoz (2007), este método es muy antiguo y también se desarrolla en base a operaciones aritméticas, para lo cual se considera un valor cualquiera y a partir de ello se resuelven las ecuaciones. Es aplicable en diversos tipos de ecuaciones, por interés de este trabajo solo analizaremos el método cuando se aplica a sistemas de ecuaciones lineales. Consiste en asignar cualquier valor a las incógnitas y luego a partir del resultado que se obtiene, realizar los ajustes válidos para lograr la respuesta.

Un ejemplo de resolver un sistema de ecuaciones lineales por este método, se muestra a continuación, en la Figura 59:

> "Una persona compró 11 paños por 108 ducados, entre los cuales hay paños que costaban 9 ducados y otros que costaban 12, ¿cuántas piezas hay de cada precio?

Figura 59 - Adaptación de un problema de sistemas de ecuaciones lineales.

Fuente: Muñoz (2007, p. 58)

Para resolver esta situación, se supone lo siguiente:

Si todos los paños son de 12 ducados, deberíamos pagar: $11(12) = 132$ ducados.
Pero el costo real fue de 108, entonces hay un excedente de $132 - 108 = 24$ ducados
Esto se debe a que hay paños cuyo costo es 8 ducados, por lo que por cada paño que asumimos de 12 en lugar de 9 hay un excedente de $12 - 9 = 3$ ducados.

Entonces: El número de paños de 9 ducados será $24 \div 3 = 8$

El número de paños de 12 ducados será paños de $11 - 8 = 3$

Este método no ha necesitado manipular expresiones algebraicas para su desarrollo, a pesar que se podría plantear el siguiente sistema:

Siendo $\begin{array}{l} x: cantidad\ de\ paños\ de\ 9\ ducados. \\ y: cantidad\ de\ paños\ de\ 12\ ducados. \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} x + y = 11 \\ 9x + 12y = 108 \end{array}$

Esto tiene una justificación, que se detallará más adelante en las argumentaciones.

El profesor de matemáticas debe reconocer en qué situaciones es aplicable, teniendo un alcance sobre sistemas de ecuaciones lineales de orden 2_x2. Entre las características de estos problemas, se debe mencionar que presenta 4 datos, de los cuales 2 son referentes a los totales de alguna actividad y los otros 2 corresponden a datos respecto a características de cada uno. Así también, de los 4 datos, 3 de ellos tienen la misma unidad y la cuarta diferente a ellos. En el problema anterior, los valores de 108 ducados y 11 paños se refieren a los totales, mientras que los datos 9 y 12 ducados, a los precios unitarios de cada tipo de paño. Y los valores 108, 9 y 12 tienen como unidades “ducados”, mientras que 11 se refiere a la cantidad de paños.

D. Identificar las propiedades de los sistemas de ecuaciones lineales. Reconocer relaciones de coeficientes del sistema cuando se tiene una representación algebraica, a fin de indicar si es posible o no la solución del sistema. Reconocer la posibilidad de resolver un sistema al analiza el determinante de la matriz de coeficientes. Reconocer la intersección de rectas o planos como la solución del sistema. En caso no haya intersección establecer que el sistema puede tener infinitas soluciones o no tiene solución alguna. Reconocer propiedades de otros temas que necesitan sistemas de ecuaciones lineales, para complementar su solución.

E. **Identificar argumentos que justifiquen procedimientos o propiedades**, al resolver sistemas de ecuaciones lineales. Las justificaciones sobre el algoritmo de un procedimiento o la aplicación de una propiedad o no, implica reconocer conceptos y propiedades de Álgebra Lineal. Con estas argumentaciones, el profesor podrá realizar mejor desempeño en su práctica docente. Argumentar la clasificación de sistemas de ecuaciones lineales, justifica emplear un método u otro al resolver situaciones

De todo esto, se mostrará una lista de indicadores de forma resumida, sobre el conocimiento en la faceta epistémica, en la Tabla 9:

Tabla 9

Indicadores del conocimiento del profesor sobre los sistemas de ecuaciones lineales, en la faceta epistémica.

INDICADOR	DESCRIPCIÓN
Identificar lenguajes sobre SEL.	Significa que el profesor debería reconocer el lenguaje verbal, algebraico, gráfico, tabular, figural, matricial. Reconocer expresiones con determinantes al aplicar el método de Cramer.
Identificar definiciones sobre a SEL.	Reconocer definiciones de temas previos a los sistemas de ecuaciones lineales (ecuación lineal, intercepto, conjunto solución). Reconocer definiciones relacionadas con sistemas de ecuaciones lineales y con temas que son posteriores a este objeto.
Identificar situaciones sobre SEL.	Reconocer situaciones intra-matemáticos (aritmética, álgebra y geometría) y extra-matemáticos (física y química).
Reconocer las variables didácticas.	Identificar elementos necesarios al resolver sistemas de ecuaciones lineales, que al ser modificarlos, propicien situaciones que generen nuevos desafíos. Por ejemplo, los parámetros del sistema (coeficientes de las incógnitas o términos independientes); la cantidad de ecuaciones e incógnitas, para analizar el tipo de sistema mostrado.
Identificar procedimientos sobre SEL.	Aplicar procedimientos, como Sustitución, Igualación, Eliminación o Gauss-Jordan, y otros como ecuaciones diofánticas o la falsa suposición. Reconocer procedimientos más convenientes y explicar la secuencia de pasos en cada método.
Identificar propiedades sobre SEL.	Reconocer las relaciones de coeficientes del sistema, la posibilidad o no de resolver un sistema de ecuaciones lineales. Reconocer propiedades de otros temas que necesitan sistemas de ecuaciones lineales.
Identificar argumentos o justificaciones sobre SEL.	Justificar métodos de Sustitución, Igualación, Eliminación, Gauss-Jordan, Falsa suposición o Ecuaciones Diofánticas. Justificar propiedades del objeto. Justificar el tipo de solución: única (compatible determinado), infinitas (compatible indeterminado) o aquellas que no tienen solución (incompatibles). Justificar elección de un método según las características de las variables didácticas, que se reconocen del significado de referencia.

De esta manera, se presenta de forma explícita los indicadores de conocimiento didáctico-matemático que debe tener el profesor, en la faceta epistémica.

4.1.4. Conocimiento en la faceta Ecológica del profesor en la dimensión Didáctica.

Existen características sobre el conocimiento del profesor en la faceta ecológica. Como indican Pino-Fan y Godino (2015), esta faceta se refiere al conocimiento del currículo de matemáticas que considera al objeto matemático de estudio, así como la relación con otros planes de estudio, además de características de índole social, política o económica, los cuales brindan las condiciones necesarias para el proceso de enseñanza y aprendizaje. Para la elaboración de los indicadores de conocimiento de esta faceta en esta tesis, se han considerado resultados de investigaciones, como las de Sosa (2011) y Vasco (2015), las consignas sobre esta faceta mostradas por Godino (2009) y los aspectos que se debe considerar según Pino-Fan y Godino (2015). Para ello se han considerado analizar el Currículo Nacional (PERÚ, 2016), las Rutas de Aprendizaje (PERÚ, 2015), el Programa Curricular de Educación Secundaria (PERÚ, 2016) y las Sesiones de Aprendizaje (PERÚ, 2016), los cuales brindaron aspectos a tener en consideración por el profesor de matemática cuando realice su práctica docente.

A continuación, se muestran algunos aspectos a tomar en cuenta de este análisis:

Este trabajo busca reconocer el conocimiento didáctico-matemático que debería tener el profesor de matemática de educación secundaria sobre los sistemas de ecuaciones lineales. Por ello es importante explicar el marco en que desarrolla su práctica docente.

El Currículo Nacional (PERÚ, 2016) expresa que la educación básica regular contempla tres niveles educativos: Educación Inicial, Primaria y Secundaria. A su vez, comprende siete ciclos, de los cuales los ciclos VI y VII corresponden a la educación secundaria, y estos ciclos se organizan en grados, los grados 1° y 2° para el ciclo VI, y los grados 3°, 4° y 5° para el ciclo VII, tal como se muestra en la Figura 60:

EDUCACIÓN BÁSICA REGULAR													
NIVELES	Inicial		Primaria						Secundaria				
CICLOS	I	II	III		IV		V		VI		VII		
GRADOS	**años** 0-2	**años** 3-5	1º	2º	3º	4º	5º	6º	1º	2º	3º	4º	5º

Figura 60- Niveles, ciclos y grados de la Educación Básica Regular

Fuente: PERÚ (2016, p.159)

Por otro lado, el Currículo Nacional (PERÚ, 2016) muestra las diversas competencias para medir el aprendizaje de los alumnos. Se entiende por competencia, la habilidad de las personas para combinar sus capacidades frente a alguna situación-problema dada. El área curricular de Matemática contempla las siguientes competencias:

- Resuelve problemas de cantidad
- Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio
- Resuelve problemas de forma, movimiento y localización
- Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre

Cada competencia incluye el desarrollo de capacidades, referidas al uso de recursos, como los conocimientos, habilidades y actitudes, que son utilizados por los alumnos cuando se les presenta un problema específico. Se centrará el análisis en la competencia "Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio", ya que en ella se ubican los sistemas de ecuaciones lineales. En esta competencia se establecen capacidades a desarrollar. De lo mostrado en el Currículo Nacional (PERÚ, 2016) se ha considerado importante lo siguiente:

- **Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas.** Se refiere a la transformación de datos o valores desconocidos sobre enunciados de sistemas de ecuaciones lineales, esto se puede ver en el significado de referencia cuando se muestran los diversos lenguajes empleados, siendo uno de ellos, el lenguaje algebraico, que permite generalizar dicha relación. También debe validar lo formulado y sus resultados de acuerdo a las condiciones iniciales del problema, ya que la solución del sistema debería ser solución de la situación, según el contexto en el que se planteó inicialmente.
- **Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas**, es decir, manifestar la comprensión de los conceptos o propiedades de los sistemas de ecuaciones lineales, mediante lenguaje algebraico u otro contemplado en el significado de referencia institucional, así como la interpretación de las incógnitas o parámetros en la representación algebraico. Hay que destacar que en el significado de referencia se muestran los diversos conceptos y propiedades que el profesor de matemáticas debería conocer.

- **Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales.** Mediante la selección, adaptación, combinación o creación de métodos de solución y propiedades a fin de reducir o transformar el sistema de ecuaciones lineales para solucionarlo. Las estrategias a utilizar son variadas y el profesor debería ser capaz de utilizar el más conveniente, según la situación planteada, a fin de que sea más económico, en términos de cantidad de operaciones. Los procedimientos mostrados en el significado de referencia abordan diferentes situaciones, también mostradas en dicho significado, lo cual puede ser útil al docente en su labor.
- **Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia**, mediante la elaboración de proposiciones respecto a las incógnitas involucradas en el sistema de ecuaciones lineales, sus propiedades algebraicas, así como buscar generalizar de forma inductiva las reglas de este sistema. Las argumentaciones y justificaciones de los procedimientos y propiedades se muestran en el significado de referencia elaborado.

Estas capacidades muestran que el profesor de matemáticas debe conocerlas y desarrollarlas en sus alumnos, para lo cual debe plantear situaciones que permitan lograrlo. No solo es saber resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante la matemática, sino transmitir su interpretación según sea la situación-problema y brindar a los alumnos herramientas y opciones de solución y reconocer las propiedades del mismo. Esta información aparece también en el "Programa Curricular de Educación Secundaria" (PERÚ, 2016) que muestra los desempeños esperados para cada grado, además de las capacidades y niveles de aprendizaje presentes en el Currículo Nacional (PERÚ, 2016).

Las "Rutas de Aprendizaje" (PERÚ, 2015) muestran estándares de aprendizaje acerca del objeto de estudio de esta tesis, por grados, en función a las cuatro capacidades de la competencia que se aborda en esta tesis, las cuales se han adaptado en la Tabla 10:

Tabla 10

Capacidades e indicadores de la competencia "Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio".

	3° SECUNDARIA	4° SECUNDARIA	5° SECUNDARIA
MATEMATIZA SITUACIONES	Organiza datos y expresiones a partir de condiciones de igualdad, al expresar un modelo sobre sistemas de ecuaciones lineales. Selecciona y usa modelos referido a sistemas de ecuaciones lineales, al plantear y resolver problemas.	Organiza datos a partir de fuentes de información, en situaciones de equivalencias al expresar modelos referidos a sistemas de ecuaciones lineales. Reconoce la pertinencia de modelos referidos a sistemas de ecuaciones lineales en determinados problemas.	Determina relaciones no explícitas en situaciones de equivalencias, al expresar modelos referidos a sistemas de ecuaciones lineales. Examina propuestas de modelos referidos a sistemas de ecuaciones lineales para resolver un problema.
COMUNICA Y REPRESENTA IDEAS MATEMÁTICAS	Emplea expresiones y conceptos respecto a los diferentes elementos que componen el sistema de ecuaciones lineales en sus diferentes representaciones. Representa gráficamente un sistema de ecuaciones lineales para clasificar e interpretar las soluciones.	Describe la naturaleza de las soluciones (no tiene solución; una solución; infinitas soluciones) en un sistema de ecuaciones lineales. Relaciona representaciones gráficas, simbólicas y el conjunto solución de un mismo sistema de ecuaciones lineales.	Emplea expresiones y conceptos respecto a un sistema de ecuaciones lineales en sus diferentes representaciones. Emplea la representación simbólica de un sistema de ecuaciones lineales para expresar otras representaciones equivalentes.
ELABORA Y USA ESTRATEGIAS	Emplea propiedades e identidades algebraicas para resolver problemas de sistema de ecuaciones lineales. Ejecuta transformaciones de equivalencias en problemas de sistema de ecuaciones lineales.	Plantea un problema que se expresa a partir de unas soluciones o de un sistema de ecuaciones lineales dado. Aplica los diferentes métodos de resolución de un sistema de ecuaciones lineales.	Emplea procedimientos matemáticos y propiedades para resolver problemas de sistema de ecuaciones lineales. Halla la solución de un problema de sistemas de ecuaciones lineales identificando sus parámetros.

RAZONA Y ARGUMENTA GENERANDO IDEAS	Prueba que los puntos de intersección de dos líneas en el plano cartesiano satisfacen dos ecuaciones simultáneamente. Justifica si dos o más sistemas son equivalentes a partir de las soluciones.	Prueba sus conjeturas sobre los posibles conjuntos soluciones de un sistema de ecuaciones lineales. Justifica conexiones entre la representación gráfica y la representación simbólica de un sistema de ecuaciones lineales.	Analiza y explica el razonamiento aplicado para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

Estos estándares, mostrados en la Tabla 10, se refiere a los indicadores a lograr en los alumnos y tiene relación con los desempeños esperados mostrados en el actual Currículo Nacional (PERÚ, 2016). Se debe mencionar que el documento anterior, Rutas de Aprendizaje (PERÚ, 2015) presenta el desarrollo de los temas de manera más explícita, al mismo tiempo que muestra las capacidades o logros en el desarrollo de cada tema, lo cual no está explícito en el actual Currículo Nacional. Sin embargo, se debería indicar que resolver problemas de sistemas de ecuaciones lineales no es un tema particular solo de la competencia "Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio", sino que está presente en diversos temas de otras competencias, como se mostró en el significado de referencia desarrollado en el capítulo anterior. Por ello, el profesor debe reconocer estas diferencias y seleccionar aquello que sea pertinente para su práctica docente.

Para complementar los documentos del PERÚ, se pone a disposición de los docentes un conjunto de Sesiones de Aprendizaje (PERÚ, 2016) mediante los cuales, los profesores pueden considerar secuencias didácticas y pedagógicas cuando planifiquen sus actividades. En estas sesiones también se encuentra el desarrollo por grado, en 3°, 4° y 5° de secundaria, de los sistemas de ecuaciones lineales. En ellos se puede apreciar que indicadores se deben desarrollar para lograr una capacidad específica, y así la competencia que nos interesa.

A continuación, se muestra la Tabla 11, adaptada a los sistemas de ecuaciones lineales, especificando las capacidades e indicadores que se deben lograr, por grado, según el Currículo nacional (PERÚ, 2016):

Tabla 11

Capacidades e indicadores por grado en las Sesiones de Aprendizaje

SECCIÓN		CAPACIDAD	INDICADORES
3°	**6**	Razona y argumenta generando ideas matemáticas	Prueba que los puntos de intersección de dos líneas en el plano cartesiano satisfacen dos ecuaciones simultáneamente.
		Comunica y representa ideas matemáticas	Emplea expresiones y conceptos respecto a los diferentes elementos que componen el sistema de ecuaciones lineales en sus diferentes representaciones.
	7	Matematiza situaciones	Evalúa si los datos y condiciones que estableció ayudaron a resolver el problema.
		Comunica y representa ideas matemáticas	Representa gráficamente un sistema de ecuaciones lineales para clasificar e interpretar las soluciones.
	8	Elabora y usa estrategias	Ejecuta transformaciones de equivalencias en problemas de sistema de ecuaciones lineales.
		Matematiza situaciones	Organiza datos y expresiones a partir de una a más condiciones de igualdad, al expresar un modelo referido a sistemas de ecuaciones lineales
4	**2**	Comunica y representa ideas matemáticas	Emplea expresiones y conceptos respecto a los diferentes elementos que componen el sistema de ecuaciones lineales en sus diferentes representaciones.
5°	**2**	Matematiza situaciones	Determina relaciones no explícitas en situaciones de equivalencia al expresar modelos referidos a sistemas de ecuaciones lineales
		Comunica y representa ideas matemáticas	Emplea la representación simbólica de un sistema de ecuaciones lineales para expresar otras representaciones.
	3	Comunica y representa ideas matemáticas	Emplea expresiones y conceptos respecto a un sistema de ecuaciones lineales en sus diferentes representaciones.
		Elabora y usa estrategias	Resuelve un sistema de ecuaciones lineales identificando el número de parámetros de la solución.
	4	Elabora y usa estrategias	Emplea procedimientos matemáticos y propiedades para resolver problemas de sistema de ecuaciones lineales.
		Razona y argumenta generando ideas matemáticas	Analiza y explica el razonamiento aplicado para resolver un sistema de ecuación lineal.

Las Sesiones de Aprendizaje (PERÚ, 2016) muestran una serie de secuencias didácticas sobre los sistemas de ecuaciones lineales, donde se indica las capacidades esperadas, pero estas capacidades entendidas en términos del documento previo al Currículo Nacional (PERÚ, 2016). El profesor debe tener la capacidad de aplicar los indicadores de conocimiento en su práctica docente en términos del Currículo Nacional vigente.

El Currículo Nacional (PERÚ, 2016) es la última versión del currículo escolar peruano, que reemplaza al Diseño Curricular Nacional (PERÚ, 2009), pero que considera muchos aspectos del predecesor. En la Tabla 12 se han considerado las siguientes diferencias:

Tabla 12

Comparativo entre Diseño Curricular Nacional y el Currículo Nacional

<table>
<tr><th>Diseño Curricular Nacional</th><th>Currículo Nacional</th></tr>
<tr><td>Organizado en 3 sub-áreas:
• Números, Relaciones y Funciones. <u>Aquí se ubica el tema sistemas de ecuaciones lineales</u>.
• Geometría y Medición.
• Estadística y Probabilidad.</td><td>Organizado en 4 Competencias
• Resuelve problemas de cantidad.
• Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio <u>Aquí se ubica el tema sistemas de ecuaciones lineales</u>
• Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.
• Resuelve problemas de forma, movimiento y localización</td></tr>
<tr><td>Cada sub-área desarrolla 3 capacidades. Menciona explícitamente el desarrollo de los sistemas de ecuaciones lineales solo en la capacidad Resolución de problemas, en los grados 4° y 5° de secundaria.</td><td>Cada competencia desarrolla 4 capacidades, que están interrelacionadas. Debido a esto cuando abordan los sistemas de ecuaciones lineales, se asume que están presentes en todas estas capacidades:
• Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas.
• Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.
• Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales.
• Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia</td></tr>
<tr><td>Especifica en cada grado, los conocimientos y capacidades que se desarrollarán. Considera el desarrollo de los sistemas de ecuaciones lineales en los grados 4° y 5° de secundaria.</td><td>No especifica en qué grados se desarrollan los sistemas de ecuaciones lineales, solo los agrupa por ciclos. Corresponde al ciclo VII, el desarrollo de los sistemas de ecuaciones por lo que se puede asumir que se los grados 3°, 4° y 5° de secundaria. Esto se corrobora con los textos oficiales del MINEDU.</td></tr>
</table>

Por todo ello, se puede afirmar que el Currículo Nacional (PERÚ, 2016) no es muy específico sobre qué conocimientos o temas deben desarrollar en cada grado, lo que puede provocar serios problemas a los docentes, cuando organicen su conocimiento para el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por ello, el profesor de matemáticas debe tener la capacidad de reconocer las similitudes de estos 2 documentos y de todos los conceptos que contemplan cada uno de estos para organizar su conocimiento al momento de la práctica docente. El docente debe darse cuenta que en los 3 grados de secundaria, que corresponden al ciclo VII del nuevo documento se desarrollan los sistemas de ecuaciones lineales, por lo cual debe desarrollar un plan que permita brindar las clases a fin de lograr las capacidades establecidas.

Además, las Rutas de Aprendizaje (PERÚ, 2015) y Sesiones de Aprendizaje (PERÚ, 2016) son desarrolladas en términos del documento del 2009, lo que puede provocar confusiones en el docente, que debe saber relacionar con la actual organización del Currículo Nacional (PERÚ, 2016).

Este análisis, permitirá identificar algunas características del conocimiento del currículo y el contexto en el que se desarrolla. El profesor debe reconocer los objetos primarios, ya que se debe recordar que una de las formas de comprender el significado de los sistemas de ecuaciones lineales se da en función a los sistemas de prácticas operativas y discursivas, ya que estos se relacionan con las diversas situaciones-problema, donde surgen los objetos primarios.

De todo ello, se ha podido notar que en muchos casos, los textos no son muy explícitos en el desarrollo del tema como Objeto (entendiendo esto, según la clasificación de las situaciones-problema en la construcción del significado de referencia). Se detallan algunas observaciones a dicho desarrollo en los textos escolares:

- En casi todos se limitan a desarrollar problemas donde la simbolización de las incógnitas siempre está dadas por las letras “x”, “y” o “z”, dejando de lado otra representación, lo cual puede provocar que el alumno, inclusive podría ser el caso del profesor, solo reconozca sistemas de ecuaciones lineales con estas incógnitas clásicas y cuando deba resolver situaciones con otros símbolos vea truncado su intento de solución porque no se familiarizó con otra notación. Esto es muy perjudicial, pues en otros contextos no se utilizan las clásicas “x”, “y” o “z”, por ejemplo en Física se puede usar la “T” para expresar tensión de un cable o “F” para una fuerza, o en Química cuando desarrollan Teoría atómica y usan variables “n” para expresar el número de neutrones, “A” para expresar el número de masa de un átomo o “Z” para el número atómico.

- No se ven problemas que utilicen coeficientes o términos independientes como parámetros, siempre son valores conocidos, lo que evita el alumno pueda analizar el comportamiento de dicho parámetro para identificar qué tipo de sistema de ecuaciones lineales se presenta o qué procedimiento de solución podría ser el más eficiente de aplicar. Tampoco se ven problemas que analicen un sistema de ecuaciones equivalente cuando se aplica el procedimiento de Gauss-Jordan, siempre se resuelven situaciones que tienen valor diferente de cero para el determinante de la matriz de coeficientes.
- En cuanto a las proposiciones sobre sistemas de ecuaciones lineales, no son explícitas y en algunos casos ni siquiera surgen de las prácticas matemáticas. Por ejemplo, no se muestra la relación de coeficientes de cada incógnita para identificar qué tipo de sistema se tiene. Esto podría despertar inquietud en el alumno a fin de reconocer dicha relación. Tampoco se muestra porqué el determinante de la matriz de coeficientes debe ser diferente de cero para que el sistema tenga solución única, lo que no permite que el alumno memorice simplemente que no debe ser cero y lo entiende como "una regla porque así se dio". Así también, cuando desarrollan el método de Gauss-Jordan solo realizan operaciones filas, pero no explican qué propiedades se cumplen para que ello determine un sistema de ecuaciones equivalente. Y qué sucedería si en una o más filas al final se obtienen puros ceros, o si todos son ceros, menos el último número, que significa.
- Respecto a los procedimientos, la mayoría muestra el desarrollo de los métodos de Igualación, Sustitución o Reducción, no considerando otro método como el de Gauss-Jordan, debido a que se trabajan sistemas de ecuaciones de máximo 3 incógnitas, los cuales son más eficientes por que hacen menos operaciones para llegar un sistema de ecuaciones equivalente. El "método de Cramer" es solo una notación que muestra la relación de los coeficientes del sistema, debido a la facilidad de recordar el orden de los coeficientes y términos independientes, dejando de lado la importancia real del determinante de una matriz, que según el Álgebra Lineal permite asociarla con la inversa de una matriz, tal como lo indican

Jerónimo, Sabia y Tesauri (2008). El método de Gauss-Jordan solo se muestra en el desarrollo del tema, pero porque el enunciado lo indica así, cuando como se expresó líneas arriba, de colocar sistemas de 4 o más variables podrían ver que hacer uso de este procedimiento es más eficiente que los primeros tres mencionados. Y en el caso de los métodos de Falsa Suposición o Ecuaciones Diofánticas, no son desarrollados como tal, ya que no se muestra situaciones que permitan aplicar estos métodos. Erróneamente, se consideran métodos memorísticos como Rombo o Rectángulo, cuyo fondo es el de falsa suposición, pero no lo saben y solo aprenden el método sin conocer la justificación de porqué se hace así.

A continuación, se muestra la Tabla 13, en la que se propone el conocimiento didáctico-matemático del profesor en cuanto a la faceta ecológica, para los sistemas de ecuaciones lineales (SEL)

Tabla 13

Indicadores del conocimiento del profesor, en la faceta ecológica, sobre los sistemas de ecuaciones lineales

INDICADOR	DESCRIPCIÓN
Ubicar los SEL en el sistema educativo.	El profesor debe conocer la organización del sistema educativo escolar peruano, dividido en niveles (inicial, primaria y secundaria), ciclos (I al VIII) y grados. Los SEL aparecen en el ciclo VII (3°, 4°, 5° secundaria).
Reconocer las imprecisiones del currículo escolar con respecto a los SEL.	Reconocer que el currículo no especifica los grados que deben desarrollar los SEL, ni que capacidades específicas lograr. Por eso, el profesor debe organizar el conocimiento y elaborar un plan de estudio que permita desarrollarlas cuando aborde los SEL. Además, dada la necesidad los SEL en otros temas del currículo, tanto matemáticos como no, la organización del conocimiento debe tener un alcance con las demás competencias del currículo, para cumplir con las expectativas cognitivas deseadas.
Conocer definiciones claves del currículo escolar.	Reconocer competencias, capacidades, estándares de aprendizaje y los desempeños, para lograr el perfil de egreso de los alumnos. Es importante, porque el docente debe organizar su conocimiento sobre los SEL para lograr dicho desarrollo en los alumnos.
Organizar los SEL en los libros de texto.	Los libros muestran el significado pretendido y el docente debe implementarlo, pero hay aspectos ausentes: indicar que el “método de gráfico”, no es un método; mostrar ejercicios con incógnitas diferentes a “x”, “y”, “z”; demostrar propiedades; indicar la relación de métodos de solución, para obtener sistemas de ecuaciones equivalentes; mostrar ejercicios sobre sistemas indeterminados o incompatibles; usar parámetros como coeficientes del sistema o términos independientes, para analizar condiciones el tipo de sistemas; indicar en que otros temas necesitarán aplicar SEL.
Reconocer temas intra o extra-matemáticos del currículo.	Reconocer los grados y niveles donde se desarrollen temas que necesiten de SEL, así como otras áreas (Ciencia y Tecnología) que desarrollan temas que las usan (los de contextos físicos o químicos). Las situaciones se muestran en el significado de referencia construido en el capítulo 3.
Conocer objetivos de los temas que emplean los SEL.	En cada tema y qué condiciones tiene cada uno, porque son necesarios, ya que su utilidad es parte de la solución de las situaciones-problema mostradas. No solo en el ámbito escolar, pienso que debería darse también en estudios superiores.
Priorizar temas del relacionado a los SEL.	Priorizar el desarrollo de temas del Currículo Nacional (PERÚ, 2016). Hay temas no contemplados, actualmente, pero podrían serlo en futuras ediciones, como los Números Complejos, Ecuación de Parábola o Hipérbola, no considerados, hoy.

Estos serían la propuesta de indicadores de conocimiento didáctico-matemático del profesor, sobre los sistemas de ecuaciones lineales, considerando las dimensiones

Matemática y Didáctica, específicamente de esta última, sobre las facetas epistémica y ecológica. Es oportuno desarrollar las demás facetas y la dimensión no considerada en este trabajo en trabajos futuros de investigación, de modo que se cuente con una propuesta completa de conocimientos didáctico-matemático que debe tener un profesor.

CONSIDERACIONES FINALES.

En este capítulo se presentan las principales conclusiones de la investigación. Se mostrará en qué medida los antecedentes confirman la validez de esta tesis, concordando con algunas conclusiones de las mismas. En qué medida se pudo responder la pregunta de investigación de este trabajo, a través de la realización de los objetivos planteados. Se señalarán algunos aspectos teóricos del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático considerados aquí y aquellos que no se contemplaron. Para finalizar, algunas posibles líneas de investigaciones a futuro que pueden considerar como base este trabajo de investigación.

Sobre los antecedentes de esta investigación.

En el primer capítulo se presentó una serie de investigaciones que se relacionan con el objeto de estudio de esta tesis. Tal y como afirmaban Ferrini et al (s.f.), Sosa (2011) y Vasco (2015), existe la necesidad de identificar qué conocimiento debe tener un profesor de matemática sobre aspectos algebraico, más específicamente, en los sistemas de ecuaciones lineales, sobre los cuales son importantes mencionar aquellos aspectos referentes a representaciones, lenguajes, definiciones, justificaciones y aplicaciones en contextos dentro de la matemática y fuera de ella. Estas características son consideradas desde diversos marcos teóricos, por lo cual se puede afirmar que también son significativos en esta investigación, dada la importancia en didáctica de la matemática. Estos antecedentes considerados reflejan las inquietudes de la comunidad científica, y han guiado en cierto modo sobre la forma de abordar este trabajo, desde el objeto de estudio, así como la secuencia metodológica que utilizan para lograr sus objetivos.

Los resultados de estos trabajos concuerdan con los hallados en esta investigación acerca de la necesidad de identificar el conocimiento del profesor de matemática, cuando se refiere a temas relacionados a relaciones lineales, dentro de los cuales se encuentran los sistemas de ecuaciones lineales, además de confirmar que el profesor no solo debe poseer conocimientos matemático que le permitan resolver problemas, sino que es necesario de algunos procesos didácticos, para lo cual debe organizar dichos conocimientos y reconocer la tipología de objetos matemáticos primarios presentes en ellos.

Así también, como muestran Pino-Fan (2013) y Escudero (2017), la construcción de un significado de referencia permite reconocer vínculos matemáticos que una institución pretende sean considerados sobre un objeto en particular. En nuestro caso, la construcción del significado de referencia, ayudó a reconocer indicadores de conocimiento del profesor sobre los sistemas de ecuaciones lineales. El análisis de contenido desarrollado por cada autor, guió la forma en que se pudo construir el significado de referencia en esta tesis, el cual es un aporte muy significativo de esta tesis. Es por ello que los resultados y las conclusiones de estas investigaciones, se hallan en la misma dirección que los obtenidos en esta tesis, ya que el significado de referencia de los sistemas de ecuaciones lineales permitirá comprender los sistemas de prácticas que se relacionan con las situaciones-problemas, en todos los contextos que se han considerado. Estos contextos se pudieron identificar gracias al análisis de contenido, tal y como estos investigadores desarrollaron respectivamente en sus trabajos.

Por otro lado, los trabajos de Pino-Fan (2013), Pino-Fan, Assis y Castro (2015), así como el de Escudero (2017), que se desarrollan basados en el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático, muestran que es un modelo teórico que permite realizar un mejor análisis, más minucioso y detallado que en otros existentes, ya que presenta herramientas interconectadas que permiten evaluar y analizar los conocimientos del profesor, que permite describir y caracterizar los objetos primarios, como son las situaciones-problema, lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos. De esta manera, en esta tesis se pudo identificar los objetos primarios sobre los sistemas de ecuaciones lineales, con la utilización de la herramienta de la Configuraciones de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas, así como identificar qué conocimiento matemático y especializado debe tener el profesor, basado en las Dimensiones Matemática y Didáctica, que permite una mejor clasificación del conocimiento total que debe tener un profesor sobre los sistemas de ecuaciones lineales.

Sobre los objetivos de esta investigación.

En esta tesis se plateó un objetivo general:

O.G. Identificar el conocimiento que debe tener un profesor de educación secundaria en el marco del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático, en la faceta epistémica y ecológica, sobre los sistemas de ecuaciones lineales.

Para lograrlo se plantearon los siguientes objetivos específicos:

O.E. 1: Construir el significado de referencia sobre los sistemas de ecuaciones lineales, en la educación secundaria peruana.

Se logró proponer un significado de referencia asociado a los sistemas de ecuaciones lineales. Para ello fueron importantes el análisis de contenido de los textos escolares y no escolares, la metodología empleada y los aspectos teóricos brindados por el modelo teórico considerado. En este significado de referencia se identificaron los diversos objetos primarios, que emergieron de las prácticas matemáticas: situaciones-problema, lenguajes, definiciones, procedimientos, propiedades y argumentaciones, todos ellos relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales. Este significado de referencia es muy útil pues apoyó en la identificación de cuáles deberían ser los conocimientos del profesor de matemática, en las dimensiones Matemática (conocimiento común y ampliado) y Didáctica (faceta epistémica y ecológica), asociada a los sistemas de ecuaciones lineales.

O.E. 2: Reconocer el conocimiento, con respecto a los sistemas de ecuaciones lineales, que deben tener los profesores de secundaria en la Dimensión Matemática del Conocimiento Didáctico-Matemático.

Se logró proponer indicadores de conocimiento didáctico-matemático del profesor de matemáticas, en las dos subcategorías de conocimiento de la Dimensión Matemática del modelo del CDM: conocimiento común y conocimiento ampliado del contenido. Esto se logró, apoyado en el significado de referencia institucional de los sistemas de ecuaciones lineales que se propuso y por las consignas que se presentan en Godino (2009) para reconocer los conocimientos de esta dimensión

En lo referente al conocimiento común se puede explicitar lo que necesita un profesor para resolver una situación planteada, en la cual debe contemplar lo siguiente:

- Reconocer que un problema requiere el uso de sistemas de ecuaciones lineales.

- Plantear un sistema de ecuaciones lineales.
- Resolver un sistema de ecuaciones lineales, usando algún método.
- Interpretar la solución del sistema de ecuaciones lineales como solución de la situación inicial.

De esta manera, se brinda una serie de indicadores que ayudarán a los profesores, tanto en formación como activos, para organizar sus conocimientos y aplicarlos en su labor docente. Existen estudios en otros marcos teóricos pero dada la eficiencia de este modelo, es mucho más eficiente por lo antes expuesto.

Y en cuanto al conocimiento ampliado se pudo organizar la diversa información y mostrar indicadores también de forma explícita, como se menciona a continuación:

- Identificar la pertinencia de un problema.
- Reconocer las variables didácticas, parámetros, cantidad de ecuaciones, cantidad de incógnitas, entre otros.
- Identificar en que otros temas se usan los sistemas de ecuaciones lineales.

En la medida que se han identificado, se puede decir que se ha logrado cumplir el primer objetivo específico.

Ahora, se muestra el segundo objetivo específico, que fue:

O.E. 3: Identificar, en la Dimensión Didáctica del Conocimiento Didáctico-Matemático, referentes a las facetas epistémica y ecológica, el conocimiento con respecto a los sistemas de ecuaciones lineales, que deben tener los profesores de secundaria.

También se logró cumplir con el último objetivo específico, para lo cual se utilizaron los objetos primarios del significado de referencia institucional, que se desarrolló en el capítulo 3, las consignas mostradas por Godino (2009) y las preguntas que presentaron Pino-Fan y Godino (2015), así como del análisis de los documentos oficiales de educación secundaria. Como se mencionó en el capítulo 1, solo se desarrolló lo concerniente a dos facetas. La faceta epistémica, referida al conocimiento especializado del profesor, el que implica aspectos didácticos que permitan una mejor organización y aplicación de sus conocimientos en aula. Los indicadores que en esta faceta se obtuvieron fueron los siguientes:

- Identificar lenguajes usados para representar los sistemas de ecuaciones lineales.
- Identificar definiciones relacionadas a sistemas de ecuaciones lineales.
- Identificar situaciones que usan sistemas de ecuaciones lineales.
- Identificar procedimientos para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
- Identificar propiedades de los sistemas de ecuaciones lineales.
- Identificar argumentos que justifiquen los procedimientos o propiedades, al resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Estos indicadores fueron descritos específicamente en el capítulo anterior. Con esto podemos afirmar lo que se indica en Pino-Fan y Godino (2015) sobre la capacidad que debe tener el profesor para manejar las representaciones de los sistemas de ecuaciones lineales, así como los demás objetos primarios, desarrollados en el significado de referencia institucional, logrando integrar el holo-significado del objeto matemático de esta tesis.

Para identificar los indicadores en la faceta ecológica fue necesario analizar en mayor profundidad los documentos oficiales, ya que ellos muestran el conocimiento pretendido por la institución secundaria peruana que desea implantar en los alumnos. Esta faceta permite conectar el objeto de estudio con todos los temas del currículo escolar como no escolar. Dentro de los indicadores de esta faceta se presentó lo siguiente:

- Identificar la ubicación de los sistemas de ecuaciones lineales en el sistema educativo peruano, en el ciclo VII, desarrollado en 3°, 4° y 5° grado de secundaria.
- Conocer las definiciones claves del currículo escolar, tales como competencias, capacidades, logros esperados, entre otros.
- Organizar el conocimiento mostrado en los libros de texto sobre los sistemas de ecuaciones lineales, definiciones, propiedades, métodos, argumentaciones, tareas, considerando lo que está presentan y lo que falta presentar.

- Reconocer temas intra o extra-matemáticos del currículo que requieren de los sistemas de ecuaciones lineales.
- Reconocer otros temas fuera del currículo escolar que requieran sistemas de ecuaciones lineales.
- Conocer objetivos de estudio de los temas que emplean los sistemas de ecuaciones lineales.

Así, se ha podido cumplir con el segundo objetivo específico. De esta manera, se han hecho explícitos qué conocimientos didácticos-matemáticos del profesor en las dimensiones y sub-categorías desarrolladas.

Sobre los elementos teóricos de esta investigación.

Como se indicó en el segundo capítulo, el modelo teórico adoptado en este trabajo es el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM). Las herramientas que este ofrece para un minucioso análisis para identificar el conocimiento del profesor de matemática, sobre las ecuaciones lineales, tales la configuración de objetos primarios permitió la construcción del significado de referencia institucional, lo mismo que las consignas que presentó Godino (2009) en el marco del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática, y que posteriormente Pino-Fan y Godino (2015) mejoran con preguntas para identificar qué conocimiento debe presentar el profesor en relación a cada faceta del conocimiento especializado del profesor, ayudaron a establecer listas de indicadores de conocimiento que debe tener el profesor en las dimensiones Matemática y Didáctica del modelo del CDM.

Además, el haber seguido la metodología para el análisis de contenido, ha permitido construir el significado de referencia institucional de los sistemas de ecuaciones lineales en la educación peruana. La codificación y categorización de elementos ayudaron en la construcción del significado de referencia, con los cual se logró identificar y organizar el conocimiento del profesor, no solo de la dimensión Matemática, sino también en torno a su conocimiento especializado (faceta epistémica) y sobre el currículo, cuando se analiza la faceta ecológica de la dimensión Didáctica.

Sobre líneas de investigaciones futuras.

El trabajo realizado muestra un método que puede ser replicado para el estudio del conocimiento didáctico-matemático del profesor en otros temas, ya que, como se indicó anteriormente, aún son pocas las investigaciones y trabajos en didáctica matemática que expliquen los conocimientos específicos que debe tener un profesor de matemática. A continuación, se presenta una serie de posibles temas a desarrollar:

- Extender el estudio del conocimiento del profesor sobre los sistemas de ecuaciones lineales en las demás facetas no consideradas: cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional, a fin de obtener una lista completa de los conocimientos del profesor, que permitan desarrollar una mejor práctica docente. Esto podría desarrollarse mediante la elaboración de instrumentos de evaluación, contemplados en el modelo del CDM, los cuales deberían ser aplicados para el análisis respectivo. Se deben considerar para ello los resultados de esta investigación, que ha identificado el conocimiento del profesor de matemática respecto a las facetas epistémica y ecológica. Para el desarrollo de las facetas cognitiva y afectiva acerca de los sistemas de ecuaciones lineales, se pueden elaborar sesiones de aprendizaje, para lo cual se deben considerar las diversas situaciones que necesitan de los sistemas, qué tipo de evaluaciones y qué evaluar respecto a este objeto de estudio (definiciones, propiedades, procedimientos, lenguajes y argumentaciones). Así también, elaborar actividades a los alumnos que permitan identificar las dificultades y errores frecuentes que pueden tener, y las respuestas posibles a estas. Formular estrategias que incentiven a los alumnos, comprometiéndolos en la solución de las tareas y el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales. Por ejemplo, se pueden indicar los diversos contextos en que son útiles, así como procurar conllevar un trabajo colaborativo entre los alumnos, trabajar en grupos, elaborar una escala de incentivos a quienes logren alcanzar los objetivos planteados en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales. Para el desarrollo de las facetas mediacional e interaccional referente a los sistemas de ecuaciones lineales, establecer las funciones del profesor y de los alumnos cuando desarrollen sistemas de ecuaciones lineales, indicando hasta qué punto es oportuna el apoyo del profesor, pudiendo depender de qué propiedades, lenguajes, procedimientos u otro aspecto relacionado con la interacción entre docentes y alumnos. Establecer qué recursos o materiales adicionales debe utilizar el profesor para el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales, como por ejemplo programas computacionales que permiten gráficamente hallar la solución del sistema. Organizar de forma eficiente el tiempo para cumplir cada una de las etapas previstas, en la enseñanza y aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales, pudiendo establecer tantas sesiones como sean necesarias, a fin de cumplir con los objetivos planteados a implantar.

- Extender el estudio del modelo a las demás herramientas contempladas en el modelo del CDM, como por ejemplo, la idoneidad didáctica, la cual permitiría analizar y valorar el desempeño docente con respecto a los sistemas de ecuaciones lineales. Al tener ya indicadores de conocimiento del profesor y algún instrumento de evaluación a los mismos, se puede buscar una aproximación entre que se pretende implementar y lo logrado.
- La metodología desarrollada en esta tesis se puede replicar en el desarrollo de investigaciones sobre las facetas epistémica y ecológica del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático, con respecto a otros objetos, por ejemplo, las inecuaciones lineales, que tiene gran aplicación en administración, economía, física o análisis matemático. La secuencia de acciones metodológicas es aplicable a estas u otros objetos, ya que en cada uno se puede construir su propio significado de referencia y sus propios indicadores de conocimiento. Así también. motivar a otros investigadores a reconocer conocimientos del profesor sobre este objeto, ya que se puede construir un significado de referencia, crear instrumentos de evaluación o crear sesiones de aprendizaje.
- Puede ser útil para organizar programas destinado a la formación de docentes, en formación o activos, para evitar que carezcan de conocimientos al desempeñarse como docentes, así como crear programas en formación y en activo, para consolidar los conocimientos ya existentes.

El trabajo realizado pone en evidencia la relatividad de los conocimientos didáctico-matemáticos, según sea el tema matemático seleccionado y la institución considerada.

Quedan por hacer investigaciones asociadas a otros objetos matemáticos con la intención final de contribuir con propuestas de formación integral de docentes de matemática.

Referencias

Andréu, J. (2001). *Las técnicas del Análisis de Contenido: Una revisión actualizada*. Obtenido de Centro de estudios Andaluces: https://www.centrodeestudiosandaluces.es/index.php?mod=publicaciones&cat=2&id=2431&idm

Chinchilla, J., y Acuña, R. (2013). Introducción a las ecuaciones diofánticas en secundaria. *VII CIBEM* (págs. 232-239). Montevideo: Instituto Tecnológico de Costa Rica. Obtenido de http://cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/304.pdf

Coulange, L. (2000). *Étude des pratiques du professeur du double point de vue écologique et économique.* Grenoble: (Tesis de doctorado) Universite Joseph Fourier. Obtenido de https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00624286/document

Coulange, L. (2000). Évolution du passage arithmétique-algebre dans les manuels et les programmes du 20eme siecle. *Petit X*(57), 61-78. Obtenido de http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/57/57x3.pdf

Demana, F., Waits, B., Foley, G., y Kennedy, D. (2007). *Precálculo. Gráfico, numérico, algebraico.* México: Pearson.

Douady, R. (2009). *SlideShare.* Obtenido de https://www.slideshare.net/favalenc/dialectica-douady

Ediciones Lexicom. (2013). *Intelectum evolution 3.* Lima: San Marcos.

Ediciones Lexicom. (2013). *Intelectum evolution 4.* Lima: San Marcos.

Ediciones Lexicom. (2013). *Intelectum evolution 5.* Lima: San Marcos.

Escudero, P. (2017). *Identificación de Conocimientos Didáctico-matemáticos, en la Faceta Epistémica, del profesor de educación secundaria, sobre funciones lineales y cuadráticas.* Lima: (Tesis de maestría) Pontificia Universidad Católica del Perú. Obtenido de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/8818

Ferrini-Mundy, J., Floden, R., McCrory, R., Burrill, G., y Sandow, D. (s.f.). *A Conceptual Framework for Knowledge for Teaching School Algebra.* (M. S. University, Ed.)

Recuperado el Abril de 2017, de http://education.msu.edu/search/results.asp?q=KNOWLEDGE%20FOR%20TEACHING%20SCHOOL%20ALGEBRA

Figueroa, R. (2013). *Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la Teoría de Situaciones Didácticas.* Lima: (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú. Obtenido de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/4736

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Acta Scientiae*(10), 7-37. Obtenido de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Unión*(20), 13-31. Obtenido de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino%20Union_020%202009.pdf

Godino, J., Neto, T., Wilhelmi, M., Aké, L., Etchegaray, S., y Lasa, A. (2015). *Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica.* Obtenido de http://www.aiem.es/index.php/aiem/article/view/105

Gonzato, M., Godino, J., y Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemática, 23*(3), 5-37. Obtenido de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/gonzato_godino_neto%20visualizacion.pdf

Grcar, J. (2010). How Ordinary Elimination Became Gaussian Elimination. *History and Overview, 38*(2), 163-218. Obtenido de https://arxiv.org/pdf/0907.2397.pdf

Guerra, A. (2015). *Propuesta para la Enseñanza de Sistemas de Ecuaciones Lineales.* Bogotá: (Tesis de maestría) Universidad Nacional de Colombia. Obtenido de http://www.bdigital.unal.edu.co/8842/

Jerónimo, G., Sabia, J., y Tesauri, S. (2008). *Álgebra Lineal.* (Vol. 2). Buenos Aires: Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y

Naturales,Universidad de Buenos Aires. Obtenido de http://cms.dm.uba.ar/depto/public/Curso%20de%20grado/fascgrado2.pdf

Lafosse, R., Huailla, S., y Torres, J. (2016). *Matemáticas 3.* Lima: Santillana.

López, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *XXI: Revista de Educación, 4*(19), 167-179. Obtenido de http://www.uhu.es/publicaciones/ojs/index.php/xxi/article/view/610/933

Luzardo, D., y Peña, A. (2006). Historia del Álgebra Lineal hasta los Albores del Siglo XX. *Divulgaciones Matemáticas, 14*(2), 153-170. Obtenido de https://www.emis.de/journals/DM/v14-2/art6.pdf

Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa (síntesis conceptual). *Revista de investigación en Psicología, 9*(1), 123-146. Obtenido de http://revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe/index.php/psico/article/view/4033/3213

Mendoza, J., Lafosse, R., y Vargas, M. (2016). *Matemática 4.* Lima: Santillana.

Mendoza, J., Paulino, E., y Vargas, M. (2016). *Matemática 5.* Lima: Santillana.

Muñoz, A. (2007). Resolución de problemas mediante la regla de falsa posición: un estudio histórico. *Suma*(56), 55-61. Obtenido de https://revistasuma.es/IMG/pdf/56/055-061.pdf

Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe. (2005). Protagonismo docente en el cambio educativo. (O. R. Caribe, Ed.) *PRELAC*(1). Obtenido de http://unesdoc.unesco.org/images/0014/001446/144666s.pdf

PERÚ, Ministerio de Educación. (2009). *Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular.* Lima: MINEDU. Obtenido de https://es.slideshare.net/tellinos/diseo-curricular-nacional-2009-presentation

PERÚ, Ministerio de Educación del. (2015). *Rutas de Aprendizaje.* Lima, Perú: MINEDU. Obtenido de http://www.minedu.gob.pe/rutas-del-aprendizaje/secundaria.php

PERÚ, Ministerio de Educación del. (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica.* Lima, Perú: MINEDU. Obtenido de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/

PERÚ, Ministerio de Educación del. (2016). *Programa curricular de Educación Secundaria*. Lima: MINEDU. Obtenido de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/03062016-programa-nivel-secundaria-ebr.pdf

PERÚ, Ministerio de Educación del. (2016). *Sesiones de Aprendizaje*. Lima, Perú: MINEDU. Obtenido de http://www.minedu.gob.pe/rutas-del-aprendizaje/sesiones2016/secundaria.php

Pino-Fan, L. (2013). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada.* Granada: (Tesis de doctorado) Universidad de Granada. Obtenido de http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Luis_Pino_tesis.pdf

Pino-Fan, L., y Godino, J. (2015). Perspectiva Ampliada del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor. *Paradigma, XXXVI*(1), 87-109. Obtenido de http://revistas.upel.edu.ve/index.php/paradigma/article/view/2662/1274

Pino-Fan, L., Assis, A., y Castro, W. (2015). Towards a Methodology for the Characterization of Teachers' Didactic-Mathematical Knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11*(6), 1429-1456. Obtenido de http://www.iserjournals.com/journals/eurasia/articles/10.12973/eurasia.2015.1403a

Rivas, A. (2015). *América Latina después de PISA. Lecciones aprendidas de la educación en siete países (2000-2015).* Buenos Aires: CIPPEC, Natura Instituto Natura. Obtenido de http://mapeal.cippec.org/wp-content/uploads/2015/05/Rivas_A_2015_America_Latina_despues_de_PISA.pdf

Rivas, M., Godino, J., y Castro, W. (2012). Desarrollo del Conocimiento para la Enseñanza de la Proporcionalidad en Futuros Profesores de Primaria. *Bolema, 26*(42), 559-588. Obtenido de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/Bolema%2042B_proporcionalidad.pdf

Rosales, A. (2008). Evolución Histórica del Concepto de Matriz. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, 1-20. Obtenido de http://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/2038/1850

Sepúlveda, O. (2016). *Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor universitario para la enseñanza del objeto Grupo.* Tunja-Boyacá: (Tesis de doctorado) Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Sosa, L. (2011). *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato : un estudio de dos casos.* Huelva: (Tesis de doctorado). Universidad de Huelva. Obtenido de http://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/handle/10272/4509/b16167016-1.pdf?sequence=2

Sosa, L. (2012). Conocimiento del profesor para la enseñanza de las matemáticas. Contribución al Conocimiento del Contenido y estudiantes. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 25*, págs. 1151-1159. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa-CLAME. Obtenido de http://www.clame.org.mx/documentos/alme25.pdf

Stewart, J., Redlin, L., y Watson, S. (2012). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo.* México: Cengage Learning Editores.

Sullivan, M. (1997). *Precálculo.* México: Prentice-Hall Hispanoamericana S.A.

Tasayco, M., Silva, A., y Saavedra, J. (2016). *Matemática 2.* Lima: Norma.

UNESCO. (2017). *Revisión de las políticas educativas 2000-2015. Continuidades en las políticas públicas en educación en Perú: aprendizajes, docentes y gestión descentralizada.* Lima: UNESCO Lima.

Vasco, D. (2015). *Conocimiento especializado del profesor de álgebra lineal: un estudio de casos en el nivel universitario.* Huelva, España: (Tesis de doctorado). Universidad de Huelva. Obtenido de http://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/handle/10272/11901/Conocimiento_especializado_del_profesor_de_algebra.pdf?sequence=2

Vasco, D., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Montes, M., y Ribeiro, M. (2016). Conocimiento especializado de un profesor de álgebra lineal y espacios de trabajo Matemático. *Bolema, 30*(54), 222-239. Obtenido de http://www.scielo.br/pdf/bolema/v30n54/1980-4415-bolema-30-54-0222.pdf

Vásquez, C. (2014). *Evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos para la enseñanza de la probabilidad, de los profesores de educación primaria en activo.* Gerona: (Tesis de doctorado) Universitat de Girona.