

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DEL PERÚ**

Escuela de Posgrado



**Regresión cuantílica bayesiana para un modelo trivariado
autorregresivo**

Tesis para obtener el grado académico de Maestra en
Estadística que presenta:

Edith Chavely Anco Blas

Asesor:

Dr. Cristian Luis Bayes Rodríguez


Lima, 2025

INFORME DE SIMILITUD

Yo, Cristian Luis Bayes Rodríguez, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor de la tesis titulada *Regresión Cuantílica Bayesiana para un Modelo Trivariado Autoregresivo*, de la autora Edith Chavely Anco Blas, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 9 %. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software Turnitin el 22/09/2025.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lima, 22 de setiembre de 2025

Apellidos y nombres del asesor: Bayes Rodríguez, Cristian Luis	
DNI: 40372640	Firma: 
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0474-7921	

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco profundamente a Dios. Todo lo que he logrado ha sido posible gracias a Su guía, Su gracia y Su infinita misericordia. Él ha abierto los caminos y me ha dado la fuerza para continuar, incluso en los momentos más difíciles.

A mis padres, gracias por su amor constante, sus oraciones y su apoyo incondicional durante este camino. Su ejemplo de esfuerzo y fe ha sido fundamental para que hoy pueda alcanzar esta meta.

A Luis Ramos, por estar presente en cada etapa de este proceso. Agradezco profundamente su confianza, su apoyo incondicional y sus palabras de aliento, que me motivaron a seguir adelante con convicción.

Un especial agradecimiento al Dr. Cristian Bayes, mi asesor de tesis, por su acompañamiento, paciencia y valiosos aportes durante todo el proceso de investigación. Su orientación ha sido clave para el desarrollo de este trabajo.

Resumen

Este trabajo presenta un estudio de la regresión cuantílica bayesiana aplicada a modelos autorregresivos vectoriales (VAR), con el objetivo de analizar la dinámica conjunta de series temporales económicas en distintos niveles de la distribución condicional. El enfoque propuesto permite modelar simultáneamente varios cuantiles condicionales asumiendo que el vector de errores sigue una distribución asimétrica de Laplace multivariada (MAL), lo que facilita la estimación conjunta. Se incorpora además una estructura de correlación contemporánea entre los términos de error, utilizando una representación de mezcla normal-exponencial.

La estimación de los parámetros se realiza bajo un marco bayesiano mediante el algoritmo No-U-Turn Sampler (NUTS) en Stan y el muestreador Gibbs en JAGS. El desempeño del modelo se evalúa mediante simulaciones que consideran diferentes tamaños muestrales y estructuras de error, evaluando el ajuste a través de métricas como el error cuadrático medio y la desviación estándar. Los resultados sugieren que el incremento en el tamaño de la muestra tiende a mejorar la precisión de las estimaciones —medida mediante dichas métricas— y que la inclusión de la correlación entre errores se asocia con una reducción en estas medidas de error en varios de los escenarios analizados.

Finalmente, el modelo se aplica al análisis conjunto de las tasas mensuales de variación del Producto Bruto Interno (PBI), el Índice de Precios al Consumidor (IPC) y la Tasa de Desempleo (TD) del Perú, para el periodo enero de 2003 a mayo de 2024. Los resultados permiten identificar diferencias en los parámetros según el nivel cuantílico y sugieren que, en diversos casos, los modelos con correlación ofrecen un mejor ajuste según el criterio DIC.

Palabras clave: regresión cuantílica bayesiana, VAR, distribución asimétrica de Laplace, correlación entre errores, muestreo MCMC.

Abstract

This study presents an application of Bayesian quantile regression to vector autoregressive (VAR) models, aiming to analyze the joint dynamics of economic time series across different levels of the conditional distribution. The proposed approach allows for the simultaneous modeling of multiple conditional quantiles by assuming that the error vector follows a multivariate asymmetric Laplace (MAL) distribution, which facilitates joint estimation. Furthermore, a contemporaneous correlation structure between the error terms is incorporated using a normal–exponential mixture representation. Parameter estimation is carried out within a Bayesian framework using the No-U-Turn Sampler (NUTS) algorithm in Stan and the Gibbs sampler in JAGS. Model performance is assessed through simulations that consider different sample sizes and error structures, with evaluation based on metrics such as the mean squared error and standard deviation. The results suggest that increasing the sample size tends to improve the accuracy of the estimates—measured by these metrics—and that including correlation among errors is associated with a reduction in these error measures in several of the analyzed scenarios. Finally, the model is applied to the joint analysis of the monthly growth rates of Peru’s Gross Domestic Product (GDP), Consumer Price Index (CPI), and Unemployment Rate (UR) for the period January 2003 to May 2024. The results highlight differences in parameter estimates across quantile levels and suggest that, in several cases, models with correlation provide a better fit according to the DIC criterion.

Keywords: Bayesian quantile regression, VAR, Multivariate Asymmetric Laplace, error correlation, MCMC sampling.

Índice general

Lista de Símbolos	VIII
Lista de abreviaturas	IX
1. Introducción	1
1.1. Consideraciones preliminares	1
1.2. Objetivos	3
1.3. Organización del trabajo	4
2. Conceptos y modelos	5
2.1. Regresión cuantílica univariada y distribución asimétrica de Laplace	5
2.1.1. Regresión cuantílica	5
2.1.2. Regresión cuantílica bayesiana	6
2.2. Regresión cuantílica multivariada y su verosimilitud conjunta	9
2.2.1. Regresión cuantílica multivariada	9
2.2.2. Distribución asimétrica multivariada de Laplace	10
2.3. Conceptos para la aplicación	12
2.3.1. Serie de tiempo multivariada	12
2.3.2. Modelo VAR(p)	13
3. Regresión cuantílica bayesiana para un modelo VAR	14
3.1. Inferencia Bayesiana	15
3.1.1. Distribución apriori	16
3.1.2. Distribución a posteriori	17
4. Estudio de simulación	20
4.1. Objetivos	20
4.2. Análisis de simulación con errores no correlacionados	21

4.2.1.	Evaluación inicial del estimador	22
4.2.2.	Análisis del desempeño del estimador bajo distintos tamaños de muestra	39
4.3.	Análisis de simulación con errores correlacionados	49
4.3.1.	Evaluación inicial del estimador	49
4.3.2.	Análisis del desempeño del estimador bajo distintos tamaños de muestra	62
5.	Aplicación del modelo de regresión cuantílica multivariada	97
5.1.	Objetivos	98
5.2.	Datos utilizados	98
5.3.	Consideraciones preliminares para la aplicación empírica	98
5.4.	Descripción de los modelos VAR para simulación	103
5.4.1.	Criterios de evaluación y comparación de los modelos	104
5.5.	Resultados de las simulaciones	106
5.5.1.	Resultados para VAR(1) sin correlación	106
5.5.2.	Resultados para VAR(1) con correlación	107
5.5.3.	Resultados para VAR(2) sin correlación	109
5.5.4.	Resultados para VAR(2) con correlación	112
5.5.5.	Comparación de modelos según el criterio DIC	114
5.6.	Discusión y comparación	115
6.	Conclusiones	118
6.1.	Conclusiones	118
6.2.	Sugerencias para investigaciones futuras	119
A.	Conceptos teóricos	120
A.1.	Distribución Laplace Asimétrica Multivariada	120
A.2.	Distribución Wishart Inversa	121
B.	Códigos en JAGS y Stan	122
B.1.	Estudio de simulación - Código en JAGS para el modelo QVAR(1)	122
B.2.	Estudio de simulación - Código en Stan para el modelo QVAR(1) sin correlación	123
B.3.	Estudio de simulación - Código en Stan para el modelo QVAR(1) con correlación	125
	Bibliografía	129

Lista de Símbolos

\mathcal{S}^k	Espacio de matrices simétricas de orden $k \times k$
$\mathcal{Q}_{y_t}(\tau x_i)$	Cuantil condicional de orden τ de y_t dado x_i
$I(\cdot)$	Función indicadora
\mathcal{S}_{++}^k	Espacio de matrices simétricas, definidas positivas de orden $k \times k$
$\mathcal{Exp}(\cdot)$	Distribución exponencial
\otimes	Producto de Kronecker
$\text{vec}(\cdot)$	Operador Vec
$\mathcal{N}_p(\cdot, \cdot)$	Distribución Normal Multivariada
$\text{GIG}(\cdot, \cdot, \cdot)$	Distribución Gaussiana Inversa Generalizada
$\mathcal{MAL}_p(\cdot, \cdot, \cdot)$	Distribución Asimétrica de Laplace Multivariada.
$\mathcal{IW}_p(\cdot, \cdot)$	Distribución Wishart Inversa
$A^{1/2}$	Factor Cholesky de A .

Lista de abreviaturas

AL	Asimétrica de Laplace.
ECM	Error Cuadrático Medio.
EM	Expectation-Maximization.
HMC	Hamiltonian Monte Carlo.
IPC	Índice de Precios al Consumidor.
JAGS	Just Another Gibbs Sampler.
MAL	Asimétrica de Laplace Multivariada.
MCMC	Muestreo por Cadenas de Markov.
PBI	Producto Bruto Interno.
QR	QR Decomposition (Descomposición QR).
QVAR	Modelo Autorregresivo de Vectores en Cuantiles.
SD	Desviación estándar.
TD	Tasa de Desempleo.
VAR	Modelo Autorregresivo de Vectores.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Consideraciones preliminares

Los modelos vectoriales autorregresivos (VAR) se han consolidado como herramientas fundamentales en diversos campos, incluyendo la macroeconomía, econometría y finanzas. Estos modelos permiten capturar de forma sistemática la dinámica conjunta y las interacciones entre múltiples series de tiempo.

Un modelo VAR de orden p se expresa como:

$$\mathbf{y}_t = B_0 + \sum_{i=1}^p B_i \mathbf{y}_{t-i} + \varepsilon_t, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.1)$$

donde $\mathbf{y}_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{kt})^\top$ es el vector de observaciones de k variables en el tiempo t , \mathbf{y}_{t-i} representa el i -ésimo rezago, B_0 es un vector de dimensión $k \times 1$, B_i son matrices de coeficientes autoregresivos de dimensión $k \times k$, y ε_t denota el término de error aleatorio no observable.

El modelo VAR puede entenderse como un sistema de k ecuaciones lineales, donde cada variable es explicada por sus propios rezagos y por los rezagos de las restantes variables del sistema. Esta estructura multiecuacional permite analizar simultáneamente la evolución conjunta de las variables, en lugar de tratarlas de forma aislada como ocurre en modelos univariados. En consecuencia, el modelo VAR permite analizar cómo los cambios en una variable del sistema influyen en las demás, y cómo estas interacciones se propagan a lo largo del tiempo. Esta capacidad de capturar dinámicas interdependientes entre variables lo convierte en una herramienta especialmente útil para estudiar fenómenos multivariados en series temporales.

En su formulación tradicional, los modelos VAR se estiman mediante métodos como los mínimos cuadrados ordinarios o la máxima verosimilitud. Estos enfoques son computacionalmente accesibles

y permiten obtener estimadores en forma cerrada. No obstante, una desventaja importante es la alta dimensionalidad del modelo, que implica un gran número de parámetros por estimar, lo cual exige tamaños de muestra relativamente grandes para garantizar estimaciones precisas y estables. Para abordar esta limitación, el modelo VAR Bayesiano (BVAR) se presenta como una alternativa eficaz. A diferencia de los enfoques clásicos basados en máxima verosimilitud, el BVAR incorpora información a priori sobre los parámetros del modelo, lo que permite obtener estimaciones más estables en presencia de muestras pequeñas y estructuras multivariadas complejas. Litterman ([13]), pionero en este enfoque, mostró que los modelos BVAR son relativamente simples y, pese a ello, producen pronósticos tan precisos como los generados por métodos más complejos y costosos computacionalmente.

En el enfoque clásico, los modelos lineales se centran en la estimación de la media condicional de la variable respuesta. Sin embargo, este enfoque puede resultar insuficiente en contextos donde se requiere una descripción más detallada del comportamiento de la distribución condicional. La regresión cuantílica, en este sentido, ofrece una alternativa valiosa al permitir modelar distintos cuantiles, lo que posibilita analizar cómo varía el efecto de las covariables a lo largo de toda la distribución de la respuesta.

En el ámbito de la regresión cuantílica multivariada, algunos trabajos recientes han abordado enfoques innovadores que son relevantes para modelar dependencias entre respuestas y explorar distribuciones condicionales complejas. Petrella y Raponi ([15]) desarrollaron un enfoque basado en máxima verosimilitud para la estimación conjunta de cuantiles condicionales marginales en un modelo de regresión lineal multivariada, utilizando la distribución asimétrica de Laplace multivariada. Este trabajo incluye un algoritmo *Expectation-Maximization* (EM) y su versión penalizada para la selección de variables, demostrando su aplicación en la evaluación del riesgo financiero. Waldmann y Kneib ([22]) introdujeron un modelo de regresión cuantílica bayesiana bivariada que incorpora correlaciones condicionales entre respuestas, lo que representa un avance significativo al permitir modelar dependencias en un contexto bayesiano, sentando las bases para extensiones multivariadas. Por su parte, Bhattacharya y Ghosal ([2]) propusieron un enfoque bayesiano para la regresión cuantílica multivariada, utilizando procesos de Dirichlet dependientes para modelar correlaciones entre respuestas y estimar cuantiles condicionales de manera conjunta. Estos estudios resaltan la importancia de incorporar estructuras de dependencia y enfoques probabilísticos avanzados en el área de la regresión cuantílica multivariada.

En el contexto de los modelos VAR, se han explorado enfoques de regresión cuantílica bayesiana que incorporan diversas estructuras y supuestos sobre la correlación de los errores y la frecuencia de los datos. Un ejemplo es el trabajo de Yang et al. ([23]), quienes desarrollan un modelo VAR bivariado bajo la regresión cuantílica bayesiana, asumiendo que los errores siguen una distribución

asimétrica de Laplace (ALD) y no presentan correlación entre sus componentes. Por otro lado, Iacopini et al. ([4]) proponen un modelo que extiende esta idea al considerar la correlación entre los errores en un contexto de datos de diferentes frecuencias, utilizando un enfoque bayesiano que mantiene la flexibilidad de la regresión cuantílica multivariada. Ambos estudios representan avances significativos en la modelización de sistemas dinámicos multivariados, destacando la capacidad de la metodología bayesiana para manejar dependencias complejas y características distribucionales específicas en escenarios multivariados.

En este trabajo se propone un análisis de regresión cuantílica multivariada aplicado a un modelo VAR, asumiendo que los errores siguen una distribución asimétrica de Laplace multivariada con correlación entre sus componentes. Este planteamiento permite explorar de manera más completa la interacción entre variables y la estructura de dependencia contemporánea que las vincula.

La metodología empleada se desarrolla en un marco bayesiano, utilizando técnicas de muestreo MCMC para aproximar la distribución a posteriori de los parámetros del modelo. Para su implementación computacional se recurre a los entornos Stan y JAGS, que facilitan la estimación en modelos complejos como el propuesto.

La aplicación práctica de este modelo se centrará en el estudio de tres variables macroeconómicas: el Producto Interno Bruto (PBI), la tasa de desempleo y el Índice de Precios al Consumidor (IPC). Estas variables están naturalmente correlacionadas debido a su interdependencia en la dinámica económica. Por ejemplo, cambios en el PBI suelen estar relacionados con fluctuaciones en la tasa de desempleo y el IPC, lo que hace que un modelo que capture estas correlaciones sea adecuado para analizar su comportamiento conjunto.

1.2. Objetivos

El objetivo general de esta tesis es estudiar, estimar y aplicar un modelo de regresión cuantílica bayesiana en el contexto de series de tiempo trivariadas, específicamente mediante un modelo autorregresivo vectorial (VAR). Para ello, se plantean los siguientes objetivos específicos:

- Revisar la literatura sobre regresión cuantílica bayesiana, con énfasis en sus desarrollos metodológicos y aplicaciones recientes en contextos multivariados.
- Implementar la estimación bayesiana de un modelo VAR trivariado desde el enfoque de regresión cuantílica, considerando tanto versiones con como sin correlación contemporánea entre los errores.
- Realizar estudios de simulación para evaluar el desempeño del modelo propuesto bajo distintos

tamaños muestrales, estructuras de correlación y distribuciones del término de error.

- Aplicar el modelo estimado al análisis conjunto de tres series macroeconómicas peruanas: Producto Bruto Interno (PBI), Índice de Precios al Consumidor (IPC) y tasa de desempleo, explorando su dinámica condicional en diferentes niveles de la distribución.

1.3. Organización del trabajo

En el Capítulo 2, se presentan los conceptos preliminares necesarios para el modelo de regresión cuantílica multivariada, así como una introducción al modelo VAR. En el Capítulo 3, se desarrolla la inferencia bayesiana del modelo de regresión cuantílico multivariada propuesto por Yang, et al. ([23]) vía el algoritmo MCMC. En el Capítulo 4, se realiza un estudio de simulación con series de tiempo multivariada obtenidas a partir de procesos generadores de datos con una distribución distinta a la ALD y se modela el cuantil condicional para distintos niveles. En el Capítulo 5, se aplica el modelo VAR trivariado. Finalmente, se compara el desempeño del modelo con respecto a modelos comúnmente usados para el análisis sobre las tres variables macroeconómicas. En el Capítulo 6, se presentan las principales conclusiones obtenidas en el presente trabajo de investigación así como sugerencias para futuras investigaciones.

Finalmente, el Apéndice A incluye desarrollos teóricos complementarios al contenido expuesto en el Capítulo 3. Por su parte, en el Apéndice B se recopilan los códigos empleados en JAGS y Stan para la implementación computacional del modelo propuesto.

Capítulo 2

Conceptos y modelos

En este capítulo se presentan los conceptos teóricos y consideraciones metodológicas que sustentan el desarrollo de la regresión cuantílica bayesiana en el contexto de modelos autorregresivos vectoriales (VAR) trivariados.

Se inicia con una revisión concisa del modelo de regresión cuantílica univariada, destacando su relación con la distribución asimétrica de Laplace (AL), con el objetivo de establecer el vínculo conceptual y probabilístico que permite extender esta formulación al caso multivariado mediante la distribución asimétrica de Laplace multivariada (MAL).

Posteriormente, se introducen los elementos necesarios para la construcción del modelo conjunto, incluyendo los supuestos estructurales y la notación que será utilizada en los capítulos siguientes.

2.1. Regresión cuantílica univariada y distribución asimétrica de Laplace

El modelo de regresión cuantílica clásico propuesto por Koenker y Bassett ([16]) es la base sobre la cual se han extendido diversos modelos.

2.1.1. Regresión cuantílica

La regresión cuantil introducida por Koenker y Bassett ([16]) parte del modelo lineal

$$y_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}_\tau + \varepsilon_i \quad (2.1)$$

donde $\mathbf{x}_i = (1, x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki})^\top$ es un vector de k covariables, $\boldsymbol{\beta}_\tau = (\beta_{0\tau}, \beta_{1\tau} \dots \beta_{k\tau})^\top$ y ε_i es el término de error aleatorio que son i.i.d. con funciones de distribuciones y densidad F_ε y f_ε ,

respectivamente.

El objetivo de esta técnica es estimar el vector de parámetros β_τ del modelo asociados al cuantil condicionado de orden τ de y_i . Este se obtiene por medio de la solución del siguiente problema de programación lineal:

$$\hat{\beta}_\tau = \underset{\beta_\tau}{\operatorname{argmín}} \sum_{i: y_i \geq \mathbf{x}_i^\top \beta_\tau} \tau |y_i - \mathbf{x}_i^\top \beta_\tau| + \sum_{i: y_i < \mathbf{x}_i^\top \beta_\tau} (1 - \tau) |y_i - \mathbf{x}_i^\top \beta_\tau| \quad (2.2)$$

A su vez, la ecuación (2.2) se puede reexpresar en los términos de la función de pérdida cuantílica $\rho_\tau(\cdot)$, también conocida como función de chequeo, la cual está definida en \mathbb{R} y, para $\tau \in (0, 1)$ tiene la forma $\rho_\tau(r) = r(\tau - I(r < 0))$ donde $I(\cdot)$ es la función indicadora. La ecuación (2.2) es equivalente a:

$$\hat{\beta}_\tau = \underset{\beta_\tau}{\operatorname{argmín}} \rho_\tau(y_i - \mathbf{x}_i^\top \beta_\tau) \quad (2.3)$$

Es importante notar que el modelo no asume una forma específica para la distribución de los errores aleatorios. Así también, que el proceso de optimización suele resolverse mediante la formulación de un problema de programación lineal, el cual no requiere asumir una distribución de probabilidad. Sin embargo, dado que la función de pérdida cuantílica no es diferenciable en 0, la solución a este problema de minimización no se puede escribir mediante una única fórmula, como en el caso de los mínimos cuadrados ordinarios (MCO). La solución estándar es el uso de técnicas de optimización matemática proporcionadas por la programación lineal. Una implementación que utiliza estas técnicas está disponible a través de la función `rq()` en el paquete `quantreg` (Koenker, [5], [6]).

Por otro lado, si bien los coeficientes pueden ser estimados a partir de la ecuación (2.3), la desventaja de este procedimiento es la dificultad para realizar inferencia estadística sobre el modelo. Una forma de superar este inconveniente es utilizar la teoría de máxima verosimilitud la cual será brevemente comentada a continuación.

2.1.2. Regresión cuantílica bayesiana

Un vínculo paramétrico entre la minimización de la suma de las desviaciones en (2.3) y la teoría de máxima verosimilitud lo proporciona la distribución AL. Esta distribución sesgada apareció en los artículos de Koenker y Machado ([7]) y Yu y Moyeed ([24]), entre otros.

Se define que una variable aleatoria Y sigue una distribución AL, $Y \sim \mathcal{AL}(\mu, \delta, \tau)$, si su función de densidad está dada por:

$$f_Y(y; \mu, \delta, \tau) = \tau(1 - \tau)\delta^{-1} \exp[-\rho_\tau\{(y - \mu)/\delta\}], \quad y \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ es el parámetro de localización, $\delta > 0$ es el parámetro de escala y $\tau \in (0, 1)$ es el parámetro de asimetría.

Considerando el desarrollo de Yu y Zhang ([25]), especificamos la función de distribución acumulada y la función de cuantiles, respectivamente por:

$$F(y | \mu, \delta, \tau) = \begin{cases} \tau \exp \left\{ \frac{1-\tau}{\delta} (y - \mu) \right\}, & \text{si } y \leq \mu \\ 1 - (1 - \tau) \exp \left\{ -\frac{\tau}{\delta} (x - \mu) \right\}, & \text{si } y > \mu \end{cases}$$

y

$$F^{-1}(y | \mu, \delta, \tau) = \begin{cases} \mu + \frac{\delta}{1-\tau} \log \left(\frac{y}{\tau} \right), & \text{si } 0 \leq y \leq \tau \\ \mu - \frac{\delta}{\tau} \log \left(\frac{1-y}{1-\tau} \right), & \text{si } \tau < y \leq 1 \end{cases} \quad (2.5)$$

A partir de (2.5) se puede observar que el cuantil τ de la variable Y es igual al parámetro de localización μ . Asimismo, al igual que la distribución normal, cualquier distribución AL puede ser derivada de la distribución AL estándar $\mathcal{AL}(0, 1, \tau)$. Según Yu y Zhang ([25]) si $X \sim \mathcal{AL}(0, 1, \tau)$, entonces $Y = \mu + \delta X \sim \mathcal{AL}(\mu, \delta, \tau)$.

La distribución AL como se muestra en la fórmula (2.4) no es fácilmente accesible; es por ello que se utiliza una parametrización de escala de locación (Kozubowski y Podgorski,[11] ; Kozumi y Kobayashi, [12]). Este resultado facilita la inferencia bayesiana mediante la utilización de una de las representaciones estocásticas de la distribución AL, en el cual toda distribución AL se puede expresar como mixtura de una variable aleatoria normal y una variable aleatoria exponencial. Este resultado está dado en la siguiente proposición.

Proposición 2.1 *Sea w una variable aleatoria con distribución exponencial con media 1 y z una variable aleatoria con distribución normal estándar, donde ambas son independientes. Si ε sigue una distribución asimétrica de Laplace $\mathcal{AL}(0, 1, \tau)$ cuya función de densidad es:*

$$f_{\varepsilon}(y; \tau) = \tau(1 - \tau) \exp[-\rho_{\tau}(y)], \quad y \in \mathbb{R}, \quad (2.6)$$

entonces ε admite la representación:

$$\varepsilon = \gamma w + \xi \sqrt{w} z \quad (2.7)$$

donde

$$\gamma = \frac{1 - 2\tau}{\tau(1 - \tau)}, \quad y \quad \xi^2 = \frac{2}{\tau(1 - \tau)}$$

En particular, si $Y \sim \mathcal{AL}(\mu, \delta, \tau)$, entonces Y también puede escribirse como

$$Y = \mu + \xi_\tau w + \theta_\tau \sqrt{\delta} w z$$

donde w sigue una distribución exponencial con parámetro de tasa $1/\delta$ y $z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Además, se deben cumplir las siguientes condiciones sobre ξ_τ y θ_τ :

$$\xi_\tau = \frac{1 - 2\tau}{\tau(1 - \tau)}, \quad \theta_\tau^2 = \frac{2}{\tau(1 - \tau)}$$

Esta proposición es una consecuencia del resultado conocido que puede encontrarse en Kotz et al. ([10]).

Después de haber dado la definición de distribución AL y la proposición 2.1 consideramos nuevamente a y_i una variable de respuesta de interés y \mathbf{x}_i el vector de covariables asociadas con la i -ésima observación. Sea $Q_{y_i}(\tau|\mathbf{x}_i)$ la función de regresión cuantil de y_i dado \mathbf{x}_i en un nivel dado $\tau \in (0, 1)$, y supongamos que la relación entre $Q_{y_i}(\tau|\mathbf{x}_i)$ y \mathbf{x}_i se puede modelar como

$$Q_{y_i}(\tau|\mathbf{x}_i) = \mathbf{x}_i^\top \beta_\tau \quad (2.8)$$

Podemos observar que la relación en (2.8) implica el modelo de regresión cuantílica lineal en el que, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$y_i = \mathbf{x}_i^\top \beta_\tau + \varepsilon_i \quad (2.9)$$

donde el término de error ε_i es tal que su distribución está restringida para tener el τ -cuantil igual a cero. Desde el punto de vista bayesiano, los modelos de regresión cuantílica y sus extensiones, se suelen trabajar con la distribución AL de acuerdo a lo propuesto por Yu y Moyeed ([24]), puesto que maximizar la verosimilitud de los datos asumiendo una distribución AL

$$\mathcal{L}(\beta_\tau, \delta|y) = \tau^n (1 - \tau)^n \delta^{-n} \exp \left[- \sum_{i=1}^n \rho_\tau \{ (y_i - \mathbf{x}_i^\top \beta_\tau) / \delta \} \right] \quad (2.10)$$

es equivalente a minimizar la función de pérdida del modelo cuantílico dado en (2.3). Por lo tanto, la distribución AL ofrece una herramienta válida para configurar el modelo de regresión cuantílica en un marco de verosimilitud.

Desde una perspectiva bayesiana, para completar la especificación del modelo es necesario definir distribuciones a priori para los parámetros desconocidos. Siguiendo propuestas comunes en la literatura, como la de Kozumi y Kobayashi ([12]), se suele asignar una distribución normal al vector de coeficientes y una distribución inversa gamma al parámetro de escala. Estas asignaciones facilitan la inferencia

y reflejan la incertidumbre previa sobre los parámetros, permitiendo un ajuste coherente dentro del marco bayesiano de la regresión cuantílica.

2.2. Regresión cuantílica multivariada y su verosimilitud conjunta

Recientemente, Petrella y Raponi ([15]) ampliaron el enfoque de regresión cuantil lineal univariante a un marco multivariado. En particular, generalizaron el enfoque inferencial basado en la distribución AL a un marco multivariado, utilizando la distribución asimétrica multivariada de Laplace (MAL) utilizando el algoritmo EM (Expectation-Maximization). El interés de los autores no era el de definir un cuantil multivariado sino el de realizar una inferencia simultánea sobre los cuantiles condicionales marginales de una variable de respuesta multivariada, teniendo también en cuenta la posible correlación entre los marginales.

2.2.1. Regresión cuantílica multivariada

Consideramos el siguiente modelo de regresión de respuestas múltiples

$$\mathbf{Y}_i = \boldsymbol{\beta}_\tau \mathbf{X}_i + \boldsymbol{\epsilon}_i \quad (2.11)$$

donde $\mathbf{Y}_i = (Y_{1i}, Y_{2i}, \dots, Y_{pi})^\top$ es un vector respuesta p -dimensional para cada individuo $i \in \{1, \dots, n\}$, \mathbf{X}_i es un vector $k \times 1$ de covariables para la i -ésima observación, $\boldsymbol{\beta}_\tau = (\boldsymbol{\beta}_{\tau_1}, \dots, \boldsymbol{\beta}_{\tau_p})$, con $\boldsymbol{\beta}_{\tau_j} = (\beta_{1,\tau_j}, \dots, \beta_{k,\tau_j})^\top$ es una matriz $p \times k$ de parámetros desconocidos a estimar y $\boldsymbol{\epsilon}_i$ es un vector $p \times 1$ de términos de error. Además, se asume que el τ_j -ésimo cuantil del componente de $\boldsymbol{\epsilon}_{ji}$ tienen cuantiles de componentes univariados (en niveles fijos τ_1, \dots, τ_p respectivamente) iguales a cero, es decir, $P(\epsilon_{ji} \leq 0) = \tau_j, j \in \{1, 2, \dots, p\}$.

Estamos interesados en la estimación de los cuantiles conjuntos de \mathbf{Y}_i condicionalmente a las covariables \mathbf{X}_i . Para este propósito, asumiremos que el cuantil de nivel τ_j del j -ésimo componente en \mathbf{Y}_i es una función de las k variables independientes en \mathbf{X}_i para $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ de la siguiente manera

$$Q_{Y_{ij}}(\tau_j | \mathbf{X}_i) = \boldsymbol{\beta}_{\tau_j} \mathbf{X}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.12)$$

donde $Q_{Y_{ij}}(\tau_j | \mathbf{X}_i)$ denota la función de regresión cuantil de nivel τ_j de Y_{ij} dado \mathbf{X}_i . Por lo tanto, el efecto de \mathbf{X}_i sobre los cuantiles conjuntos (condicionales) de la variable de respuesta múltiple \mathbf{Y}_i se

puede expresar como

$$\begin{bmatrix} Q_{Y_{i1}}(\tau_1 | \mathbf{X}_i) \\ \vdots \\ Q_{Y_{ip}}(\tau_p | \mathbf{X}_i) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\beta}_\tau \mathbf{X}_i \quad (2.13)$$

La representación en (2.13) implica el modelo de regresión lineal multivariante. El objetivo es proporcionar una estimación conjunta de los p cuantiles condicionales marginales de $\mathbf{Y}_i \in \mathbb{R}^p$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Con base en la metodología de estimación del modelo de regresión cuantílica univariado, podemos estimar cada β_{τ_j} , $j = 1, 2, \dots, p$ de la matriz de parámetros $\boldsymbol{\beta}_\tau$ marginalmente utilizando la siguiente función objetiva multivariada

$$\min \sum_{i=1}^n \rho_\tau(\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\beta}_\tau \mathbf{X}_i) = \min \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \rho_{\tau_1}(Y_{i1} - \beta_{\tau_1} \mathbf{X}_i) \\ \sum_{i=1}^n \rho_{\tau_2}(Y_{i2} - \beta_{\tau_2} \mathbf{X}_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \rho_{\tau_p}(Y_{ip} - \beta_{\tau_p} \mathbf{X}_i) \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

donde ρ_τ se define como la función de pérdida multivariada

$\rho_\tau(\boldsymbol{\varepsilon}_i) = (\rho_{\tau_1}(\varepsilon_{1i}), \dots, \rho_{\tau_p}(\varepsilon_{pi}))$ y $\rho_{\tau_j}(\cdot)$ denota la función de pérdida univariada de nivel τ_j . La ecuación (2.14) significa que los cuantiles de componentes univariados (en niveles fijos τ_1, \dots, τ_p) de $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ son iguales a cero.

Es importante destacar que los estimadores obtenidos de la función objetivo anterior ignoran totalmente la dependencia entre los componentes en la respuesta multivariada \mathbf{Y}_i para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, que son equivalentes a los estimadores marginales basados en muestras Y_{ji} y \mathbf{X}_i para $i = 1, 2, \dots, n$. El objetivo es estudiar la estimación conjunta de los p cuantiles condicionales marginales de $\mathbf{Y}_i \in \mathbb{R}^p$ incorporando las correlaciones entre los componentes de la respuesta multivariada \mathbf{Y}_i en el modelo (2.14) a través del marco bayesiano. Para ello se impone una distribución MAL al término de error $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ para especificar los cuantiles conjuntos de \mathbf{Y}_i condicionalmente a los covariables \mathbf{X}_i para $i = 1, 2, \dots, n$. La distribución MAL es una extensión de la distribución AL y proporciona una función de probabilidad de trabajo para la regresión conjunta de cuantiles del modelo (2.11).

2.2.2. Distribución asimétrica multivariada de Laplace

La distribución MAL se ha empleado en muchas aplicaciones y tradicionalmente se establece mediante tres parámetros multivariados, uno de los cuales es una matriz para el parámetro de escala mientras que el otro es un vector para el control simultáneo de la forma y la localización. Kotz et al. ([10]). Kollo y Srivastava ([9]) consideraron la estimación y prueba de parámetros en la distribución MAL. Visk ([21]) consideró la estimación de parámetros de la distribución MAL de tres parámetros. En particular,

la función de densidad de probabilidad del vector aleatorio n -variable \mathbf{Y} para la distribución MAL de tres parámetros $\text{MAL}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\delta}, \Sigma)$ viene dada como (Visk, [21])

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\delta}, \Sigma) = \frac{2\exp\left\{\left(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}\right)^{\top} \Sigma^{-1} \boldsymbol{\delta}\right\}}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} \left(\frac{\left(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}\right)^{\top} \Sigma^{-1} \left(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}\right)}{2 + \boldsymbol{\delta}^{\top} \Sigma \boldsymbol{\delta}}\right)^{\nu/2} K_{\nu} \left\{\sqrt{\left(2 + \boldsymbol{\delta}^{\top} \Sigma \boldsymbol{\delta}\right) \left[\left(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}\right)^{\top} \Sigma^{-1} \left(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}\right)\right]}\right\} \quad (2.15)$$

donde $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^n$ son los parámetros de localización y sesgo, respectivamente, $\Sigma \in \mathcal{S}_{++}^n$ es la matriz de parámetros de escala, y $K_{\nu}(\cdot)$ denota la función de Bessel modificada de tercer tipo con parámetro de índice $\nu = (2 - n)/2$. Se observa que la densidad de la distribución de Laplace asimétrica multivariada es demasiado compleja para realizar inferencias estadísticas directas. Sin embargo, al igual que en el caso univariado, donde la distribución MAL se puede descomponer en una mezcla de una variable aleatoria normal y una variable aleatoria exponencial, esta misma descomposición es aplicable a la serie multivariada de Laplace asimétrica (Kotz et al., [17]; Visk, [21]). Esta característica facilita la comprensión y el análisis de la distribución en contextos multivariados.

Caso multivariado.

Un vector aleatorio $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ sigue una distribución Laplace asimétrica multivariada, denotada como $\mathbf{y} \sim \text{MAL}_n(\boldsymbol{\mu}, D\boldsymbol{\theta}_{\tau,1}, D\boldsymbol{\theta}_{\tau,2}\Psi\boldsymbol{\theta}_{\tau,2}D)$, si

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\mu} + wD\boldsymbol{\theta}_{\tau,1} + \sqrt{w}D\boldsymbol{\theta}_{\tau,2}\Psi^{1/2}\mathbf{z}, \quad w \sim \text{Exp}(1), \quad \mathbf{z} \sim \mathcal{N}_n(0, I_n) \quad (2.16)$$

donde Ψ es una matriz de correlación, $D = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n)$, y

$$\boldsymbol{\theta}_{\tau,1} = \left(\frac{1 - 2\tau_1}{\tau_1(1 - \tau_1)}, \dots, \frac{1 - 2\tau_n}{\tau_n(1 - \tau_n)}\right)^{\top}, \quad \boldsymbol{\theta}_{\tau,2} = \text{diag}\left(\sqrt{\frac{2}{\tau_1(1 - \tau_1)}}, \dots, \sqrt{\frac{2}{\tau_n(1 - \tau_n)}}\right) \quad (2.17)$$

Petrella y Raponi ([15]) demostraron que la i -ésima distribución marginal de \mathbf{y} bajo el supuesto de distribución MAL es una distribución $y_i \sim \mathcal{L}(\mu_i, \delta_i, \tau_i)$ proporcionando así

$$y_i = \mu_i + w\delta_i\theta_{\tau,1,i} + \sqrt{w}\delta_i\theta_{\tau,2,i}z_i, \quad w \sim \text{Exp}(1), \quad z_i \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad (2.18)$$

Además, las correlaciones entre los componentes multivariada \mathbf{y} están incluidas en la densidad condicional de la ecuación (2.15) a través de la matriz Σ (o Ψ). Sin embargo, trabajar directamente con la función de densidad de la distribución MAL es complejo. Por esta razón, siguiendo la estrategia propuesta por Petrella and Raponi ([15]), en este trabajo se adopta la descomposición de la distribución

MAL, tal como se expresa en la ecuación (2.16), para el término de error en el modelo de regresión cuantílica multivariada

$$\mathbf{Y}_i = \boldsymbol{\beta}_\tau X_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad \boldsymbol{\varepsilon}_i \sim \text{MAL}_p(\mathbf{0}_p, D\boldsymbol{\theta}_{\tau,1}, D\boldsymbol{\theta}_{\tau,2}\Psi\boldsymbol{\theta}_{\tau,2}D), \quad (2.19)$$

con el objetivo de facilitar la inferencia bayesiana. Esta representación permite simplificar los cálculos en la estimación de los parámetros del modelo mediante técnicas bayesianas. Por lo ya mencionado la representación de la ecuación (2.19) para simplificar la densidad condicional de la respuesta \mathbf{Y}_i está dada por

$$\mathbf{Y}_i = \boldsymbol{\beta}_\tau X_i + D\boldsymbol{\theta}_{\tau,1}w_i + \sqrt{w_i}D\boldsymbol{\theta}_{\tau,2}\Psi^{1/2}\mathbf{z}_i, \quad \mathbf{z}_i \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{0}_p, I_p) \quad (2.20)$$

donde $w_i \sim \text{Exp}(1)$ son variables latentes que siguen la distribución exponencial estándar y \mathbf{z}_i es independiente de w_i . Condicionando sobre w_i la variable \mathbf{Y}_i sigue la distribución normal multivariada con la media $\boldsymbol{\beta}_\tau X_i + D\boldsymbol{\theta}_{\tau,1}w_i$ y la matriz de varianza-covariana $w_i D\boldsymbol{\theta}_{\tau,2}\Psi\boldsymbol{\theta}_{\tau,2}D$ for $i \in 1, \dots, n$.

Verosimilitud

$$L(\mathbf{Y}|\mathbf{w}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}_\tau, \Sigma) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{(2\pi)^{-p/2}}{|w_i\boldsymbol{\theta}_{\tau,2}\Sigma\boldsymbol{\theta}_{\tau,2}|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\mu}_i)^\top (w_i\boldsymbol{\theta}_{\tau,2}\Sigma\boldsymbol{\theta}_{\tau,2})^{-1}(\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\mu}_i) \right\} \cdot \exp\{-w_i\} \right] \quad (2.21)$$

donde $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n)$, $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$, $\Sigma = D\Psi D$ y $\boldsymbol{\mu}_i = \boldsymbol{\beta}_\tau X_i + D\boldsymbol{\theta}_{\tau,1}w_i$.

2.3. Conceptos para la aplicación

A continuación, se desarrollan brevemente los conceptos que se utilizarán en el próximo capítulo, donde se presenta el modelo central de esta tesis

2.3.1. Serie de tiempo multivariada

Una serie de tiempo es una colección de observaciones indexadas secuencialmente, la cual puede ser representada como una sucesión de variables aleatorias, realizadas a través del tiempo de un determinado proceso estocástico. Mientras una serie temporal multivariada (o múltiple) es una colección de varias series temporales univariadas que son observadas simultáneamente y están interrelacionadas. En lugar de estudiar una sola variable a lo largo del tiempo, una serie temporal múltiple analiza

múltiples variables que evolucionan juntas en el tiempo.

2.3.2. Modelo VAR(p)

Los modelos VAR (modelos autorregresivos vectoriales) se utilizan para series temporales multivariadas. La estructura es que cada variable es una función lineal de sus rezagos anteriores y de los rezagos anteriores de las otras variables. Un modelo VAR(p) de orden p es de la siguiente forma

$$\mathbf{y}_t = B_0 + \sum_{j=1}^p B_j \mathbf{y}_{t-j} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.22)$$

donde $\mathbf{y}_t = (y_{1,t}, \dots, y_{n,t})^\top$ es un vector aleatorio n dimensional, $B_i, i = 1, 2, \dots, p$, son matrices coeficientes autoregresivo de orden $n \times n$, B_0 es un vector n dimensional fijo de términos de intersección que permite la posibilidad de una media distinta de cero $\mathbb{E}(\mathbf{y}_t)$. Finalmente, $\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\varepsilon_{1t}, \dots, \varepsilon_{nt})^\top$ es un ruido blanco o proceso de innovación de dimensión $n \times 1$, es decir, $\mathbb{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = 0$, $\mathbb{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t^\top) = \Sigma_\varepsilon$ y $\mathbb{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_s^\top) = 0$ para $s \neq t$. Además, suponemos que la matriz de covarianza Σ_ε no es singular.

Para que un modelo VAR(p) sea válido, es necesario que las series temporales involucradas sean estacionarias. La estacionariedad implica que las propiedades estadísticas del proceso, como la media y la varianza, son constantes en el tiempo, y que la covarianza entre dos períodos solo depende de la distancia entre ellos, no del tiempo específico en que se miden. Una condición importante para la estacionariedad de un modelo VAR es que las raíces del polinomio característico asociado al modelo deben estar fuera del círculo unitario en el plano complejo. Si se cumple esta condición, se puede asegurar que el modelo VAR(p) tiene una solución estable y que los procesos que modela son estacionarios. Para un tratamiento más exhaustivo sobre la estacionariedad en modelos VAR, se puede consultar el libro de Lütkepohl ([14]).

Capítulo 3

Regresión cuantílica bayesiana para un modelo VAR

Consideramos el siguiente modelo autorregresivo vectorial trivariado de orden p :

$$\mathbf{y}_t = B_0 + \sum_{i=1}^p B_i \mathbf{y}_{t-i} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad t = p+1, p+2, \dots, T. \quad (3.1)$$

donde $\mathbf{y}_t = (y_{1t}, y_{2t}, y_{3t})^\top$ es a observación, \mathbf{y}_{t-i} es el i -ésimo rezago de \mathbf{y}_t , $B_0 = (b_{10}, b_{20}, b_{30})^\top$ es el vector de interceptos, $B_i = (b_{jk}^{(i)})$ son matrices con los coeficientes autoregresivos de orden 3×3 ($j, k \in \{1, 2, 3\}$, $i = 1, 2, \dots, p$) $\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \varepsilon_{3t})^\top$ es la perturbación aleatoria no observable en el tiempo t . Además, suponemos que el τ_i -ésimo cuantil del componente ε_{it} es igual a cero, es decir, $\mathbb{P}(\varepsilon_{it} \leq 0) = \tau_i$, $i = 1, 2, 3$.

Siguiendo la literatura sobre series de tiempo multivariadas, definimos el vector

$$\boldsymbol{\beta} = (B_0^\top, \text{vec}(B)_1^\top, \dots, \text{vec}(B)_p^\top)^\top$$

con dimensión $n_\beta = 3 + 9p$, y la matriz de regresores X_t de dimensión $3 \times n_\beta$, definida como $X_t = (\mathbf{1}_3, \mathbf{x}_{t,1}^\top, \dots, \mathbf{x}_{t,p}^\top)$, con $\mathbf{x}_{t,j} = (\mathbf{y}_{t-j} \otimes I_3)$ para cada $j = 1, \dots, p$. Además, reparametrizamos la escala de innovación introduciendo la matriz definida positiva $\Sigma = D\Psi D \in \mathcal{S}_{++}^3$ y con $D = D(\Sigma) = \text{diag}(\Sigma_{11}^{1/2}, \Sigma_{22}^{1/2}, \Sigma_{33}^{1/2})$. Debido a las propiedades de la distribución MAL, la ecuación (3.1) admite una representación como una mezcla de escala de ubicación de distribuciones gaussianas de la

siguiente manera

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_t &= B_0 + \sum_{i=1}^p B_i \mathbf{y}_{t-i} + D\boldsymbol{\theta}_{\tau,1} w_t + \sqrt{w_t} D\boldsymbol{\theta}_{\tau,2} \Psi^{1/2} \mathbf{z}_t, \\ &= X_t \boldsymbol{\beta} + D\boldsymbol{\theta}_{\tau,1} w_t + \tilde{\mathbf{z}}_t\end{aligned}\quad (3.2)$$

donde \mathbf{z}_t sigue una distribución normal multivariada $\tilde{\mathbf{z}}_t \sim \mathcal{N}_3(\mathbf{0}_3, w_t \boldsymbol{\theta}_{\tau,2} \Sigma \boldsymbol{\theta}_{\tau,2})$, w_t es una variable latente que sigue una distribución exponencial estándar $w_t \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Exp}(1)$ y $\tilde{\mathbf{z}}_t$ es independiente de w_t . El vector $\boldsymbol{\theta}_{\tau,1}$ y la matriz diagonal $\boldsymbol{\theta}_{\tau,2}$ se definen previamente en la ecuación (2.17) del Capítulo 2.

Sean $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ los niveles cuantiles. Entonces denotamos el vector de cuantiles de las distribuciones marginales, es decir, $\mathbb{P}(\mathbf{y}_{i,t} \leq \mathcal{Q}_{\mathbf{y}_{it}}(\tau_i) | \mathcal{F}_t) = \tau_i$, donde \mathcal{F}_t es la filtración natural de todo el espacio de estados generados por $\mathbf{y}_{t-1}, \dots, \mathbf{y}_{t-p}$, de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Q}_{\mathbf{y}_{1t}}(\tau_1 | \mathbf{y}_{t-1}, \dots, \mathbf{y}_{t-p}) \\ \mathcal{Q}_{\mathbf{y}_{2t}}(\tau_2 | \mathbf{y}_{t-1}, \dots, \mathbf{y}_{t-p}) \\ \mathcal{Q}_{\mathbf{y}_{3t}}(\tau_3 | \mathbf{y}_{t-1}, \dots, \mathbf{y}_{t-p}) \end{bmatrix} = B_0 + \sum_{i=1}^p B_i \mathbf{y}_{t-i}\quad (3.3)$$

donde indicamos que el vector de cuantiles condicionales dado \mathcal{F}_t es una combinación lineal de los rezagos de la serie \mathbf{y}_t .

La ecuación (3.2) facilita la inferencia bayesiana puesto que condicionado a w_t sigue una distribución normal multivariada con la media $X_t \boldsymbol{\beta} + D\boldsymbol{\theta}_{\tau,1} w_t$ y la matriz de varianza-covarianza $w_t \boldsymbol{\theta}_{\tau,2} \Sigma \boldsymbol{\theta}_{\tau,2}$.

A continuación, derivamos las distribuciones posteriores necesarias para la estimación bayesiana, aprovechando la representación mixta de la distribución MAL.

3.1. Inferencia Bayesiana

Si bien el caso univariado ha sido ampliamente estudiado en los últimos años, las extensiones al contexto multivariado han recibido una atención limitada en la literatura, particularmente en el ámbito bayesiano. Waldmann y Kneib ([22]) desarrollaron un enfoque bayesiano para la regresión cuantil bivariada, mostrando cómo estimar correlaciones condicionales entre dos variables de respuesta. Sin embargo, su propuesta no se extendió a un marco completamente multivariado. Por otro lado, Petrella y Raponi ([15]) utilizaron el algoritmo EM (Expectation-Maximization) para estimar los parámetros de un modelo multivariado, mientras que Tian et al. ([19]) propusieron un enfoque bayesiano basado en una verosimilitud jerárquica conjunta para la regresión cuantil trivariada. Una característica común en estos trabajos es el uso de una representación mezcla de ubicación-escala de la distribución de

Laplace asimétrica para modelar los errores.

Yang et al. ([23]) desarrollaron un modelo de autoregresión vectorial cuantil (Quantile VAR) bivariado, asumiendo que los errores siguen una distribución de Laplace asimétrica multivariada, aunque sin considerar correlación entre ellos. Por su parte, Iacopini et al. ([4]) extendieron el enfoque a un modelo VAR cuantil de frecuencia mixta, incorporando correlación entre los errores para mejorar la flexibilidad del modelo y permitir análisis más detallados en diferentes frecuencias temporales.

En este trabajo, presentamos los resultados de ambos enfoques como referencia para desarrollar nuestro modelo. En particular, seguimos una aproximación basada en la representación mixta de ubicación-escala del Laplace asimétrico multivariado para modelar los errores en el contexto de la regresión cuantílica de un modelo VAR (QVAR). Para ello, utilizamos la ecuación (3.1) e introducimos un conjunto de variables auxiliares $w_t \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Exp}(1)$. A partir de la ecuación (3.2), la verosimilitud toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{Y}, \mathbf{w} \mid \boldsymbol{\beta}, \Sigma) &= \prod_{t=p+1}^T P(\mathbf{y}_t \mid \boldsymbol{\beta}, \Sigma, w_t) P(w_t \mid \boldsymbol{\beta}, \Sigma) \\ &= \prod_{t=p+1}^T \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[(\mathbf{y}_t - X_t \boldsymbol{\beta} - D \boldsymbol{\theta}_{\tau,1} w_t)^\top (w_t \boldsymbol{\theta}_{\tau,2} \Sigma \boldsymbol{\theta}_{\tau,2})^{-1} (\mathbf{y}_t - X_t \boldsymbol{\beta} - D \boldsymbol{\theta}_{\tau,1} w_t) \right] \right\} \\ &\quad \times (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \left| w_t \boldsymbol{\theta}_{\tau,2} \Sigma \boldsymbol{\theta}_{\tau,2} \right|^{-\frac{1}{2}} \exp(-w_t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_T)$ y $\mathbf{w} = (w_{p+1}, w_{p+2}, \dots, w_T)$.

3.1.1. Distribución apriori

Considerando la propuesta de Iacopini et al. [4] se considera las siguientes distribuciones a priori

$$\boldsymbol{\beta} \sim \mathcal{N}_{n_\beta}(\boldsymbol{\mu}_\beta, \boldsymbol{\Omega}_\beta) \quad (3.5)$$

El otro parámetro de interés es la matriz de escala, $\Sigma \in \mathcal{S}_{++}^3$, y en este escenario, se asume una distribución a priori de Wishart inversa

$$\Sigma \sim \mathcal{IW}_3(\nu_0, \Phi_0) \quad (3.6)$$

donde $\nu_0 > 2$ es el parámetro de grados de libertad y $\Phi_0 \in \mathcal{S}_{++}^3$ es una matriz de escala, tal que si $\nu_0 > 4$ entonces $\mathbb{E}[\Sigma] = \frac{\Phi_0}{\nu_0 - 4}$.

La distribución a priori en (3.5) se reexpresa comúnmente para facilitar la derivación de su distribución a posteriori asociada, eliminando todos los elementos que no dependen de $\boldsymbol{\beta}$. En este sentido, a partir

de la ecuación (3.5) se obtiene:

$$f(\boldsymbol{\beta}) \propto -\frac{1}{2} \left\{ \boldsymbol{\beta}^\top \underline{\boldsymbol{\Omega}}_\beta^{-1} \boldsymbol{\beta} - 2 \underline{\boldsymbol{\mu}}_\beta^\top \underline{\boldsymbol{\Omega}}_\beta^{-1} \boldsymbol{\beta} \right\} \quad (3.7)$$

Lo mismo con la distribución a priori de Σ

$$f(\Sigma) \propto |\Sigma|^{-\frac{\mu+4}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \Phi_0 \Sigma^{-1}\right) \quad (3.8)$$

3.1.2. Distribución a posteriori

Tomando en cuenta la verosimilitud (3.4) y la distribución a priori de cada uno de los parámetros, procederemos a obtener las distribuciones condicionales completas para dos de los parámetros del modelo $\boldsymbol{\beta}$ y w_t .

Distribución condicional completa de $\boldsymbol{\beta}$

Comenzaremos reexpresando la verosimilitud (3.4) para luego proceder a la obtención de la distribución condicional completa de $\boldsymbol{\beta}$, que se define como el producto entre la verosimilitud (3.4) y la distribución a priori de $\boldsymbol{\beta}$

$$\begin{aligned} L(\mathbf{Y}, \mathbf{w} \mid \boldsymbol{\beta}, \Sigma) &\propto \prod_{t=p+1}^T \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[(\tilde{\mathbf{e}}_t - X_t \boldsymbol{\beta})^\top (w_t \boldsymbol{\theta}_{\tau,2} \Sigma \boldsymbol{\theta}_{\tau,2})^{-1} (\tilde{\mathbf{e}}_t - X_t \boldsymbol{\beta}) \right] \right\} \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=p+1}^T \left[(\tilde{\mathbf{e}}_t - X_t \boldsymbol{\beta})^\top (w_t \boldsymbol{\theta}_{\tau,2} \Sigma \boldsymbol{\theta}_{\tau,2})^{-1} (\tilde{\mathbf{e}}_t - X_t \boldsymbol{\beta}) \right] \right\} \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=p+1}^T \left[\boldsymbol{\beta}^\top X_t^\top (w_t \boldsymbol{\theta}_{\tau,2} \Sigma \boldsymbol{\theta}_{\tau,2})^{-1} X_t \boldsymbol{\beta} - 2 \boldsymbol{\beta}^\top X_t^\top (w_t \boldsymbol{\theta}_{\tau,2} \Sigma \boldsymbol{\theta}_{\tau,2})^{-1} \tilde{\mathbf{e}}_t \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde $\tilde{\mathbf{e}}_t = \mathbf{y}_t - D \boldsymbol{\theta}_{\tau,1} w_t$ y $D = D(\Sigma) = \text{diag} \left(\Sigma_{11}^{1/2}, \Sigma_{22}^{1/2}, \Sigma_{33}^{1/2} \right)$. A continuación, multiplicamos la expresión (3.9) por la ecuación (3.5). Esto conduce al siguiente núcleo de la distribución a posteriori:

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\beta} \mid \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_p, \Sigma, \mathbf{w}) &\propto \exp \left(-\frac{1}{2} \left[\boldsymbol{\beta}^\top \underline{\boldsymbol{\Omega}}_\beta^{-1} \boldsymbol{\beta} - 2 \underline{\boldsymbol{\mu}}_\beta^\top \underline{\boldsymbol{\Omega}}_\beta^{-1} \boldsymbol{\beta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{t=p+1}^T \left(\boldsymbol{\beta}^\top X_t^\top (w_t \boldsymbol{\theta}_{\tau,2} \Sigma \boldsymbol{\theta}_{\tau,2})^{-1} X_t \boldsymbol{\beta} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - 2 \boldsymbol{\beta}^\top X_t^\top (w_t \boldsymbol{\theta}_{\tau,2} \Sigma \boldsymbol{\theta}_{\tau,2})^{-1} \tilde{\mathbf{e}}_t \right) \right] \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

reordenando la expresión (3.10)

$$p(\boldsymbol{\beta} \mid \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_p, \Sigma, w) \propto \exp \left(-\frac{1}{2} \left[\boldsymbol{\beta}^\top \left(\underline{\Omega}_\beta^{-1} + \sum_{t=p+1}^T X_t^\top (w_t \boldsymbol{\theta}_{\tau,2} \Sigma \boldsymbol{\theta}_{\tau,2})^{-1} X_t \right) \boldsymbol{\beta} - 2 \left(\underline{\Omega}_\beta^{-1} \underline{\boldsymbol{\mu}}_\beta + \tilde{\mathbf{e}}_t^\top (w_t \boldsymbol{\theta}_{\tau,2} \Sigma \boldsymbol{\theta}_{\tau,2})^{-1} X_t \right) \boldsymbol{\beta} \right] \right) \quad (3.11)$$

podemos observar que esta distribución es el núcleo de una distribución normal multivariada $\mathcal{N}_{n_\beta}(\bar{\boldsymbol{\mu}}_\beta, \bar{\Omega}_\beta)$ con media $\bar{\boldsymbol{\mu}}_\beta$ y varianza $\bar{\Omega}_\beta$.

$$\bar{\Omega}_\beta = \left(\underline{\Omega}_\beta^{-1} + \sum_{t=p+1}^T X_t^\top (w_t \boldsymbol{\theta}_{\tau,2} \Sigma \boldsymbol{\theta}_{\tau,2})^{-1} X_t \right)^{-1},$$

$$\bar{\boldsymbol{\mu}}_\beta = \bar{\Omega}_\beta \left(\underline{\Omega}_\beta^{-1} \underline{\boldsymbol{\mu}}_\beta + \sum_{t=p+1}^T \tilde{\mathbf{e}}_t^\top (w_t \boldsymbol{\theta}_{\tau,2} \Sigma \boldsymbol{\theta}_{\tau,2})^{-1} X_t \right).$$

Por lo tanto, se obtiene que $\boldsymbol{\beta}$ tiene una distribución completa normal multivariada con parámetros $\bar{\Omega}_\beta$ y $\bar{\boldsymbol{\mu}}_\beta$.

Distribución condicional completa de w_t

Definimos $\mathbf{u}_t = \mathbf{y}_t - X_t \boldsymbol{\beta}$. La distribución condicional completa de w_t es:

$$p(w_t \mid \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_p, \boldsymbol{\beta}, \Sigma) \propto \exp \{-w_t\} |w_t \boldsymbol{\theta}_{\tau,2} \Sigma \boldsymbol{\theta}_{\tau,2}|^{-\frac{1}{2}}$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{u}_t - D \boldsymbol{\theta}_{\tau,1} w_t)^\top (w_t \boldsymbol{\theta}_{\tau,2} \Sigma \boldsymbol{\theta}_{\tau,2})^{-1} (\mathbf{u}_t - D \boldsymbol{\theta}_{\tau,1} w_t) \right\}$$

$$\propto w_t^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -w_t - \frac{1}{2} \left[\mathbf{u}_t^\top (w_t \boldsymbol{\theta}_{\tau,2} \Sigma \boldsymbol{\theta}_{\tau,2})^{-1} \mathbf{u}_t - 2 \mathbf{u}_t^\top (w_t \boldsymbol{\theta}_{\tau,2} \Sigma \boldsymbol{\theta}_{\tau,2})^{-1} D \boldsymbol{\theta}_{\tau,1} w_t + w_t (D \boldsymbol{\theta}_{\tau,1})^\top (w_t \boldsymbol{\theta}_{\tau,2} \Sigma \boldsymbol{\theta}_{\tau,2})^{-1} D \boldsymbol{\theta}_{\tau,1} w_t \right] \right\}$$

$$\propto w_t^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[2w_t + w_t^{-1} \mathbf{u}_t^\top (\boldsymbol{\theta}_{\tau,2} \Sigma \boldsymbol{\theta}_{\tau,2})^{-1} \mathbf{u}_t + w_t \boldsymbol{\theta}_{\tau,1}^\top D (\boldsymbol{\theta}_{\tau,2} \Sigma \boldsymbol{\theta}_{\tau,2})^{-1} D \boldsymbol{\theta}_{\tau,1} \right] \right\}$$

$$\propto w_t^{\bar{p}_w - 1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\bar{a}_w w_t + \bar{b}_{w,t} w_t^{-1}] \right\}$$

que es el núcleo de una distribución gaussiana inversa generalizada

$$w_t \mid \mathbf{y}^u, \boldsymbol{\beta}, \Sigma \sim \text{GIG}(\bar{p}_w, \bar{a}_w, \bar{b}_{w,t})$$

donde $\bar{p}_w = 1 - \frac{n}{2}$ y

$$\bar{a}_w = 2 + \boldsymbol{\theta}_{\tau,1}^\top D (\boldsymbol{\theta}_{\tau,2} \Sigma \boldsymbol{\theta}_{\tau,2})^{-1} D \boldsymbol{\theta}_{\tau,1}, \quad \bar{b}_{w,t} = \mathbf{u}_t^\top (\boldsymbol{\theta}_{\tau,2} \Sigma \boldsymbol{\theta}_{\tau,2})^{-1} \mathbf{u}_t$$

La matriz de escala Σ

La distribución condicional completa posterior de Σ se obtiene a partir de:

$$\begin{aligned}
p(\Sigma \mid \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_p, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}) &\propto |\Sigma|^{-\frac{\nu_0+n+1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr}(\Phi_0 \Sigma^{-1}) \right\} \\
&\times \prod_{t=p+1}^T |w_t \boldsymbol{\theta}_{\tau,2} \Sigma \boldsymbol{\theta}_{\tau,2}|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{e}_t^\top(\Sigma) (w_t \boldsymbol{\theta}_{\tau,2} \Sigma \boldsymbol{\theta}_{\tau,2})^{-1} \mathbf{e}_t(\Sigma) \right\} \\
&\propto |\Sigma|^{-\frac{\nu_0+n+1}{2}} |\Sigma|^{-\frac{T-p}{2}} \\
&\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\text{tr}(\Phi_0 \Sigma^{-1}) + \sum_{t=p+1}^T \text{tr}(\mathbf{e}_t^\top(\Sigma) (w_t \boldsymbol{\theta}_{\tau,2} \Sigma \boldsymbol{\theta}_{\tau,2})^{-1} \mathbf{e}_t(\Sigma)) \right] \right\} \\
&\propto |\Sigma|^{-\frac{\nu_0+T-p+n+1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\text{tr} \left(\Phi_0 + \sum_{t=p+1}^T \boldsymbol{\theta}_{\tau,2}^{-1} \mathbf{e}_t(\Sigma) \mathbf{e}_t^\top(\Sigma) w_t^{-1} \boldsymbol{\theta}_{\tau,2}^{-1} \right) \Sigma^{-1} \right] \right\}
\end{aligned}$$

La forma funcional de la distribución condicional completa de Σ , que incluye trazas y determinantes dentro de exponentes, impide identificarla con una familia de distribuciones estándar. Por este motivo, Iacopini et al. [4] proponen emplear el algoritmo de muestreo por cortes de Neal (Neal's slice sampler) para generar muestras de Σ en el marco de un esquema MCMC.

Por otro lado, en el trabajo de Yang et al. [23] asume que las componentes de los errores siguen una distribución asimétrica de Laplace, $\varepsilon_{it} \sim \mathcal{AL}(0, 1, \tau_i)$, lo que lleva a la siguiente representación:

$$\varepsilon_{jt} = \xi_j w_{jt} + \sigma_j \sqrt{w_{jt}} z_{jt} \quad (2.5)$$

donde $\xi_j = \frac{1-2\tau_j}{\tau_j(1-\tau_j)}$ y $\sigma_j^2 = \frac{2}{\tau_j(1-\tau_j)}$, $w_{jt} \sim \text{Exp}(1)$ y $z_{jt} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Esta formulación permite encontrar distribuciones completas a posteriori para los parámetros del modelo, lo que facilita la inferencia bayesiana.

En este trabajo utilizamos los entornos de inferencia bayesiana JAGS y Stan para estimar los parámetros del modelo bajo diferentes configuraciones. Inicialmente, implementamos el enfoque propuesto por Yang et al. [23] para el caso más simple, que supone independencia entre los errores. En el capítulo siguiente, abordamos con mayor detalle ambos métodos, considerando tanto el escenario con errores independientes —siguiendo el procedimiento de Yang et al.— como el caso general con correlación entre los errores, cuya estimación se realiza empleando tanto Stan como JAGS. En JAGS la estimación se llevó a cabo mediante el muestreador de Gibbs, mientras que en Stan se utilizó el método Hamiltonian Monte Carlo (HMC) con su implementación No-U-Turn Sampler (NUTS).

Capítulo 4

Estudio de simulación

Este capítulo presenta un estudio de simulación orientado a evaluar el desempeño de dos enfoques bayesianos de regresión cuantílica multivariada aplicados a modelos autorregresivos (VAR), basados en las propuestas de Yang et al. [23] e Iaconi et al. [4]. Ambos modelos permiten estimar cuantiles condicionales de interés en un contexto multivariado, pero difieren en el tratamiento de la dependencia entre las componentes del término de error: el primero asume independencia, mientras que el segundo incorpora correlación explícita entre dichas componentes.

El estudio se estructura en dos grandes bloques: el primero considera escenarios donde no existe correlación entre los errores, mientras que el segundo aborda situaciones más generales con errores correlacionados. En cada parte se exploran diferentes configuraciones, distribuciones del término de error y tamaños muestrales, utilizando como medida de interés los cuantiles condicionales asociados a los niveles $\tau = 0.1, 0.5$ y 0.9 .

Las estimaciones se obtienen mediante inferencia bayesiana implementada en los entornos JAGS y Stan. Además, en algunos escenarios se incorpora una comparación con la regresión cuantílica clásica mediante la función `rq()` del paquete `quantreg` de R [8]

4.1. Objetivos

- Comparar dos modelos bayesianos de regresión cuantílica multivariada, uno con independencia entre errores (Yang et al.,[23]) y otro que incorpora correlación (Iaconi et al.,[4]), bajo distintas condiciones de simulación.
- Evaluar la capacidad del modelo QVAR para recuperar cuantiles condicionales en series de tiempo multivariadas cuyos errores siguen la distribución asimétrica de Laplace, tanto en escenarios con errores independientes como correlacionados.

- Cuantificar el desempeño del modelo QVAR, a partir de 400 réplicas simuladas, mediante métricas como el sesgo, el error cuadrático medio ECM, la media de las medias posteriores y la media de las desviaciones estándar posteriores.

Implementación

A lo largo de las siguientes secciones, se presentarán los experimentos numéricos y los diagnósticos de convergencia de las muestras MCMC realizados para analizar procesos multivariados mediante un modelo regresión VAR cuantílica. Las simulaciones descritas y los análisis empíricos que se presentaran se realizaron en una computadora portátil Lenovo con CPU AMD Ryzen 7 4700U, Radeon Graphics, a 2.00 GHz, utilizando el software R 4.3.3.

Para implementar los algoritmos de simulación MCMC, se utilizaron JAGS y Stan:

- JAGS fue implementado mediante el paquete `rjags` en R, facilitando la automatización de las simulaciones. Además, se utilizó el paquete `coda` para analizar las cadenas MCMC y verificar su convergencia.
- **Stan** fue empleado mediante el paquete `CmdStanR` (Stan Development Team, 2022), aprovechando los algoritmos de muestreo Hamiltonian Monte Carlo (HMC) y No-U-Turn Sampler (NUTS) para la estimación eficiente del modelo regresión VAR cuantílica.

4.2. Análisis de simulación con errores no correlacionados

En esta sección se analiza el desempeño del modelo QVAR bajo un esquema de simulación en el que se asume independencia entre las componentes del término de error. Este planteamiento sigue el enfoque propuesto por Yang et al. [23], quienes modelan errores sin correlación para evaluar la capacidad del modelo en distintos escenarios. Para ello, se generan muestras simuladas a partir de procesos VAR con configuraciones que garantizan la estacionariedad del sistema.

El análisis se estructura en dos etapas. La primera consiste en una evaluación preliminar del estimador mediante una única muestra simulada por escenario. Esta etapa permite visualizar la capacidad del modelo para capturar distintos niveles de cuantiles bajo configuraciones específicas. Posteriormente, se llevará a cabo una evaluación más robusta mediante múltiples réplicas, a fin de cuantificar métricas de desempeño como el sesgo, el error cuadrático medio y la variabilidad de las estimaciones.

4.2.1. Evaluación inicial del estimador

Esta evaluación preliminar considera modelos VAR(1) y VAR(2) simulados con distintos supuestos sobre la distribución del término de error. En el caso del VAR(1), se analizan tres escenarios donde los errores siguen distribuciones AL, skew-normal y normal multivariada con componentes no correlacionadas. Por otro lado, el VAR(2) se estudia únicamente bajo errores MAL. En cada configuración, se genera una sola muestra para observar el comportamiento del estimador ante distintos niveles de cuantiles y estructuras dinámicas. Esta etapa permite identificar patrones generales de ajuste y sirve como base para los análisis posteriores más detallados.

A continuación, presentamos cuatro escenarios de simulación bajo modelos VAR, considerando distintas estructuras para los errores ε_t . En todos los casos, se garantiza que los errores cumplen con la condición del modelo de regresión cuantílica multivariada: para cada componente i , el cuantil τ_i de ε_{it} es igual a cero, es decir,

$$\mathbb{P}(\varepsilon_{it} \leq 0) = \tau_i.$$

Para evaluar el desempeño del modelo propuesto, en los dos primeros escenarios se considera que los errores siguen una distribución asimétrica de Laplace. En los escenarios posteriores, se modifican las distribuciones de los errores con el objetivo de analizar el comportamiento del modelo al incorporar distribuciones normales y skew-normal, con distintos niveles de dispersión y asimetría entre las variables.

Escenario I: Consideramos el siguiente modelo VAR(1)

$$\mathbf{y}_t = B_0 + B_1 \mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t$$

El valor verdadero de B_0 y B_1 se establece en

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0.18 \\ 2.20 \\ 0.55 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0.70 & 0.10 & 0.05 \\ 0.20 & 0.60 & 0.10 \\ 0.10 & 0.20 & 0.50 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Escenario II: Consideramos el siguiente modelo VAR(2)

$$\mathbf{y}_t = B_0 + B_1 \mathbf{y}_{t-1} + B_2 \mathbf{y}_{t-2} + \varepsilon_t$$

El valor verdadero de B_0 , B_1 y B_2 se establece en

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0.18 \\ 2.20 \\ 0.55 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0.30 & 0.20 & 0.10 \\ 0.20 & 0.30 & 0.10 \\ 0.10 & 0.10 & 0.30 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0.10 & 0.10 & 0.05 \\ 0.05 & 0.10 & 0.10 \\ 0.10 & 0.05 & 0.10 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Para cada uno de estos escenarios analizamos tres cuantiles diferentes:

- $\tau = (0.50, 0.50, 0.50)^\top$, lo que implica que:

$$\theta_{\tau_1} = (0, 0, 0)^\top, \quad \theta_{\tau_2} = \text{diag}(2.828, 2.828, 2.828)$$

- $\tau = (0.10, 0.10, 0.10)^\top$, lo que implica que:

$$\theta_{\tau_1} = (-8.899, -8.899, -8.899)^\top, \quad \theta_{\tau_2} = \text{diag}(4.714, 4.714, 4.714)$$

- $\tau = (0.90, 0.90, 0.90)^\top$, lo que implica que

$$\theta_{\tau_1} = (8.899, 8.899, 8.899)^\top, \quad \theta_{\tau_2} = \text{diag}(2.828, 2.828, 2.828)$$

Además de estos dos modelos con errores generados bajo una distribución MAL, se evaluarán otras dos configuraciones donde las distribuciones de los errores se modifican.

Escenario III: Consideramos el siguiente modelo VAR(1)

$$\mathbf{y}_t = B_0 + B_1 \mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t$$

El valor verdadero de B_0 y B_1 se establece en

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 2.2 \\ 4.5 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & -0.3 \\ -0.2 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Para este tercer escenario analizamos el vector de cuantiles $\tau = (0.1, 0.1, 0.1)^\top$, con $\varepsilon_{1t} \sim \mathcal{N}(1.282, 1)$, $\varepsilon_{2t} \sim \mathcal{N}(1.922, 1.5)$, y $\varepsilon_{3t} \sim \mathcal{N}(1.73, 1.35)$. También, el vector de cuantiles $\tau = (0.5, 0.5, 0.5)^\top$ con $\varepsilon_{1t} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\varepsilon_{2t} \sim \mathcal{N}(0, 1.5)$, y $\varepsilon_{3t} \sim \mathcal{N}(0, 1.75)$. Por último, $\tau = (0.9, 0.9, 0.9)^\top$ con $\varepsilon_{1t} \sim \mathcal{N}(-1.282, 1)$, $\varepsilon_{2t} \sim \mathcal{N}(-1.86, 1.45)$, y $\varepsilon_{3t} \sim \mathcal{N}(-1.73, 1.35)$.

Escenario IV: Consideramos el siguiente modelo VAR(1)

$$\mathbf{y}_t = B_0 + B_1 \mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t$$

El valor verdadero de B_0 y B_1 se establece en

$$B_0 = \begin{pmatrix} 2.8 \\ 0.8 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ -0.1 & 0.5 & 0.1 \\ 0.0 & -0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

con $\tau = (0.7, 0.9, 0.1)$, $\varepsilon_{1t} \sim \mathcal{Sn}(0.239, 2, -1)$, $\varepsilon_{2t} \sim \mathcal{Sn}(-0.018, 3, -3)$, $\varepsilon_{3t} \sim \mathcal{Sn}(3.289, 2, -2)$, respectivamente. $\mathcal{Sn}(\xi, \omega, \alpha)$ denota una distribución skew-normal con un parámetro de localización ξ , un parámetro de escala ω y un parámetro de asimetría α , respectivamente.

En las dos siguientes subsecciones se presentan los resultados de la simulación para los modelos VAR(1) y VAR(2), utilizando los entornos de inferencia bayesiana JAGS y Stan.

Dado el alto costo computacional que implica el muestreo en JAGS, en dicho entorno solo se estiman los dos primeros escenarios descritos en las configuraciones 4.1 y 4.2, y únicamente para el modelo VAR(1). En cambio, todos los escenarios —incluidos los correspondientes al modelo VAR(2)— son estimados con Stan, aprovechando su mayor eficiencia computacional y su mejor desempeño al tratar estructuras con correlación entre componentes.

Cabe precisar que en el Apéndice se incluyen los códigos utilizados en ambos entornos: los modelos estimados con JAGS sin correlación y los modelos con y sin correlación ajustados con Stan, todos ellos correspondientes al modelo VAR(1). La exclusión del modelo VAR(2) en el apéndice se debe a que su implementación representa una extensión directa del caso VAR(1), sin mayores cambios estructurales que ameriten su inclusión.

El tamaño muestral utilizado en todas las simulaciones es $T = 256$, valor elegido por su cercanía con la cantidad de observaciones disponibles en los datos reales que serán analizados más adelante en esta tesis. Esta correspondencia permite que los resultados obtenidos en el estudio de simulación representen de forma más realista las condiciones del análisis empírico.

Inferencia Bayesiana con JAGS

En este apartado se detallan los resultados obtenidos al estimar los parámetros del modelo VAR mediante un enfoque bayesiano implementado en JAGS. La estimación se llevó a cabo mediante el algoritmo Gibbs por defecto de JAGS, utilizando la librería `rjags` en R para la especificación del modelo y la ejecución del muestreo MCMC.

Las distribuciones a priori fueron definidas de manera poco informativa, de modo que no condicionen en exceso las estimaciones. En particular, para los coeficientes del modelo se consideró una distribución normal con media cero y varianza amplia: $b \sim \mathcal{N}(0, 10)$.

Para evaluar la convergencia de las muestras, se utilizaron tres cadenas de Markov independientes, cada una con 400,000 iteraciones, un periodo de calentamiento (burn-in) de 40,000 y un thinning de 50. Los diagnósticos de convergencia, incluyendo las pruebas de Gelman-Rubin y Heidelberger-Welch, confirmaron que las cadenas convergieron adecuadamente hacia la distribución posterior.

A continuación se presentan los resultados del modelo de inferencia bayesiana para los diferentes vectores de cuantiles considerados. En los Cuadros 4.1, 4.2 y 4.3 se reportan, para cada parámetro del modelo:

- el valor verdadero utilizado en la simulación,
- la media y la mediana de las estimaciones posteriores,
- la desviación estándar posterior (SD), y
- los percentiles 2.5 % y 97.5 %, que definen el intervalo de credibilidad del 95 %

Resultados del estudio de simulación para el primer escenario

A continuación, se presentan los resultados del modelo de inferencia bayesiana para los diferentes vectores cuantiles. Los cuadros 4.1, 4.2 y 4.3 se reportan el valor teórico, la media y mediana de las estimaciones obtenidas en las simulaciones, la desviación estándar posterior (SD), así como los percentiles 2.5 % y 97.5 % que delimitan el intervalo de credibilidad del 95 %, incluyendo los intervalos de credibilidad al 95 % para cada cuantil. Para $\tau_{0.5} = (0.5, 0.5, 0.5)^\top$, el cual corresponde al Cuadro 4.2, los resultados revelan que se recuperan los parámetros de la matriz de coeficientes autoregresivos esperados teóricamente según la especificación del modelo 4.1, excepto por el primer componente del vector de los interceptos. En el caso de $\tau_{0.1} = (0.1, 0.1, 0.1)^\top$, correspondiente al cuadro 4.1, se observa un comportamiento similar en la recuperación de parámetros, pero en el intercepto, se observa un sesgo importante con el valor teórico. Por último, para $\tau_{0.9} = (0.9, 0.9, 0.9)^\top$, cuadro 4.3, los resultados reflejan lo mismo que se ha obtenido para $\tau_{0.1}$.

Estos hallazgos indican que, aunque los parámetros de la matriz autorregresiva son recuperados con precisión aceptable en los tres casos, el vector de interceptos presenta dificultades en su estimación, particularmente en los cuantiles extremos. No obstante, es relevante destacar que los intervalos de credibilidad obtenidos para los interceptos abarcan los valores verdaderos, lo que sugiere que, a pesar de la desviación en las medias posteriores, las estimaciones no deben considerarse inadecuadas, ya que los valores reales están dentro de los intervalos de credibilidad obtenidos.

Cuadro 4.1*Escenario 1 resultado del modelo ajustado para $\tau_{0.1}$. IC al 95 %,*

Parámetro	Teórico	Media	Mediana	SD	2.5 %	97.5 %
b_{11}^1	0.70	0.72	0.72	0.02	0.69	0.77
b_{21}^1	0.20	0.19	0.19	0.02	0.15	0.23
b_{31}^1	0.10	0.12	0.12	0.02	0.09	0.16
b_{12}^1	0.10	0.12	0.12	0.02	0.08	0.16
b_{22}^1	0.60	0.57	0.57	0.02	0.53	0.61
b_{32}^1	0.20	0.17	0.18	0.02	0.14	0.21
b_{13}^1	0.05	0.04	0.04	0.02	0.00	0.08
b_{23}^1	0.10	0.13	0.13	0.02	0.09	0.17
b_{33}^1	0.50	0.51	0.51	0.02	0.48	0.54
b_{10}	0.18	-2.02	-2.00	1.19	-4.41	0.37
b_{20}	2.20	3.33	3.42	1.54	0.26	6.16
b_{30}	0.55	0.55	0.55	0.98	-1.43	2.46

Cuadro 4.2*Escenario 1, resultado del modelo ajustado para $\tau_{0.5}$. IC al 95 %,*

Parámetro	Teórico	Media	Mediana	SD	2.5 %	97.5 %
b_{11}^1	0.70	0.67	0.67	0.03	0.61	0.73
b_{21}^1	0.20	0.19	0.19	0.03	0.14	0.24
b_{31}^1	0.10	0.09	0.09	0.04	0.01	0.15
b_{12}^1	0.10	0.11	0.11	0.04	0.03	0.19
b_{22}^1	0.60	0.60	0.60	0.04	0.52	0.68
b_{32}^1	0.20	0.20	0.20	0.04	0.12	0.29
b_{13}^1	0.05	0.03	0.03	0.04	-0.04	0.10
b_{23}^1	0.10	0.09	0.09	0.04	0.02	0.17
b_{33}^1	0.50	0.43	0.43	0.04	0.36	0.51
b_{10}	0.18	0.62	0.62	0.30	0.01	1.19
b_{20}	2.20	2.04	2.02	0.41	1.29	2.87
b_{30}	0.55	0.78	0.81	0.43	-0.08	1.59

Cuadro 4.3

Escenario 1, resultado del modelo ajustado para $\tau_{0.9}$. IC al 95 %,

Parámetro	Teórico	Media	Mediana	SD	2.5 %	97.5 %
b_{11}^1	0.7	0.69	0.69	0.02	0.65	0.72
b_{21}^1	0.20	0.19	0.19	0.02	0.16	0.22
b_{31}^1	0.10	0.08	0.08	0.02	0.04	0.12
b_{12}^1	0.10	0.11	0.11	0.02	0.08	0.15
b_{22}^1	0.60	0.58	0.58	0.03	0.53	0.62
b_{32}^1	0.20	0.19	0.19	0.02	0.15	0.23
b_{13}^1	0.05	0.07	0.07	0.02	0.04	0.10
b_{23}^1	0.10	0.12	0.12	0.02	0.08	0.17
b_{33}^1	0.50	0.50	0.50	0.02	0.46	0.55
b_{10}	0.18	1.32	1.27	1.04	-0.79	3.38
b_{20}	2.2	1.80	1.70	1.24	-0.52	4.39
b_{30}	0.55	-1.28	-1.32	1.14	-3.48	0.96

Resultados del estudio de simulación para el segundo escenario

En este apartado se presentan los resultados obtenidos al fijar los tres niveles de vectores cuantiles definidos. El Cuadro 4.4 muestra los resultados obtenidos al fijar los tres niveles de cuantiles en 0.1. En este caso, se aprecia que las estimaciones tienden a presentar mayor dispersión en comparación con configuraciones más centrales. Si bien varios coeficientes autorregresivos se aproximan a los valores reales, algunos elementos de menor magnitud, como b_{13}^2 y b_{11}^2 , exhiben un sesgo más pronunciado y mayor variabilidad. Los interceptos también presentan diferencias más notorias respecto a los valores generadores, especialmente en el primer componente.

En el Cuadro 4.5 se presentan los resultados obtenidos al considerar el vector de cuantiles $\tau_{0.5} = (0.5, 0.5, 0.5)^\top$. En general, las estimaciones de los coeficientes autorregresivos se aproximan razonablemente a los valores teóricos, con medias y medianas relativamente cercanas y desviaciones estándar moderadas. Algunos parámetros, como b_{22}^1 y b_{23}^1 , muestran buena recuperación, mientras que otros, como b_{32}^2 o los interceptos b_{10} y b_{30} , presentan mayor variabilidad y cierto alejamiento respecto a sus valores generadores. En conjunto, los resultados sugieren un desempeño aceptable del modelo para este nivel de cuantiles, con una dispersión que se mantiene controlada en la mayoría de los parámetros.

En el caso del vector $\tau_{0.9} = (0.9, 0.9, 0.9)^\top$, cuyos resultados se presentan en el Cuadro 4.6, se observa un comportamiento heterogéneo en la recuperación de los parámetros. Varios coeficientes principales del modelo, como b_{11}^1 , b_{12}^1 , b_{31}^1 y b_{33}^1 , son estimados con sesgos reducidos y baja variabilidad.

En contraste, otros coeficientes muestran mayor incertidumbre, e incluso signos contrarios al valor

teórico esperado, como ocurre con b_{32}^2 . Los interceptos, en particular b_{10} y b_{30} , presentan estimaciones notablemente alejadas de sus valores teóricos, con alta variabilidad e intervalos amplios. A pesar de ello, los intervalos de credibilidad del 95 % contienen a los valores teóricos, lo que indica una recuperación adecuada de estos componentes estructurales.

Cuadro 4.4

Escenario 2, resultado del modelo ajustado para $\tau_{0.1} = (0.1, 0.1, 0.1)^T$.

Parámetro	Teórico	Media	Mediana	SD	2.5 %	97.5 %
b_{11}^1	0.30	0.32	0.32	0.03	0.27	0.38
b_{12}^1	0.20	0.23	0.23	0.03	0.17	0.30
b_{13}^1	0.10	0.11	0.11	0.03	0.06	0.16
b_{21}^1	0.20	0.17	0.17	0.03	0.12	0.22
b_{22}^1	0.30	0.28	0.28	0.02	0.24	0.32
b_{23}^1	0.10	0.13	0.13	0.03	0.08	0.19
b_{31}^1	0.10	0.13	0.13	0.02	0.08	0.17
b_{32}^1	0.10	0.09	0.09	0.02	0.05	0.12
b_{33}^1	0.30	0.34	0.34	0.02	0.30	0.38
b_{11}^2	0.10	0.15	0.15	0.02	0.10	0.20
b_{12}^2	0.10	0.05	0.06	0.03	0.00	0.11
b_{13}^2	0.05	0.01	0.01	0.02	-0.03	0.06
b_{21}^2	0.05	0.05	0.05	0.03	-0.01	0.10
b_{22}^2	0.10	0.08	0.08	0.02	0.04	0.13
b_{23}^2	0.10	0.11	0.11	0.02	0.06	0.15
b_{31}^2	0.10	0.09	0.09	0.03	0.04	0.14
b_{32}^2	0.05	0.04	0.04	0.02	0.00	0.08
b_{33}^2	0.10	0.07	0.07	0.02	0.02	0.11
b_{10}	0.18	-2.24	-2.21	1.42	-5.09	0.58
b_{20}	2.20	4.42	4.48	1.56	1.33	7.38
b_{30}	0.55	1.09	1.03	1.24	-1.30	3.54

Cuadro 4.5

Escenario 2, resultado del modelo ajustado para $\tau_{0.5} = (0.5, 0.5, 0.5)^T$.

Parámetro	Teórico	Media	Mediana	SD	2.5 %	97.5 %
b_{11}^1	0.30	0.24	0.24	0.04	0.16	0.31
b_{12}^1	0.20	0.17	0.17	0.05	0.07	0.28
b_{13}^1	0.10	0.08	0.08	0.04	0.01	0.16
b_{21}^1	0.20	0.18	0.18	0.04	0.10	0.25
b_{22}^1	0.30	0.30	0.30	0.04	0.21	0.38
b_{23}^1	0.10	0.10	0.10	0.04	0.02	0.18
b_{31}^1	0.10	0.09	0.09	0.04	0.00	0.18
b_{32}^1	0.10	0.13	0.13	0.06	0.01	0.24
b_{33}^1	0.30	0.27	0.27	0.05	0.16	0.37
b_{11}^2	0.10	0.13	0.13	0.04	0.06	0.20
b_{12}^2	0.10	0.13	0.14	0.05	0.03	0.24
b_{13}^2	0.05	0.05	0.05	0.05	-0.03	0.14
b_{21}^2	0.05	0.05	0.04	0.04	-0.03	0.13
b_{22}^2	0.10	0.12	0.12	0.05	0.02	0.21
b_{23}^2	0.10	0.07	0.07	0.05	-0.02	0.17
b_{31}^2	0.10	0.06	0.06	0.05	-0.03	0.16
b_{32}^2	0.05	0.02	0.02	0.06	-0.09	0.13
b_{33}^2	0.10	0.06	0.06	0.04	-0.03	0.14
b_{10}	0.18	0.63	0.62	0.34	-0.05	1.30
b_{20}	2.20	2.10	2.10	0.41	1.30	2.91
b_{30}	0.55	0.86	0.88	0.41	0.04	1.66

Cuadro 4.6

Escenario 2, resultado del modelo ajustado para $\tau_{0.9} = (0.9, 0.9, 0.9)^\top$.

Parámetro	Teórico	Media	Mediana	SD	2.5 %	97.5 %
b_{11}^1	0.30	0.28	0.28	0.02	0.23	0.32
b_{12}^1	0.20	0.21	0.21	0.02	0.17	0.25
b_{13}^1	0.10	0.13	0.13	0.02	0.09	0.16
b_{21}^1	0.20	0.21	0.21	0.02	0.16	0.25
b_{22}^1	0.30	0.26	0.26	0.03	0.20	0.31
b_{23}^1	0.10	0.12	0.12	0.03	0.07	0.17
b_{31}^1	0.10	0.12	0.12	0.03	0.06	0.17
b_{32}^1	0.10	0.10	0.10	0.02	0.06	0.15
b_{33}^1	0.30	0.31	0.31	0.03	0.26	0.36
b_{11}^2	0.10	0.12	0.12	0.02	0.07	0.16
b_{12}^2	0.10	0.11	0.11	0.02	0.07	0.15
b_{13}^2	0.05	0.06	0.06	0.02	0.02	0.09
b_{21}^2	0.05	0.03	0.03	0.02	-0.02	0.07
b_{22}^2	0.10	0.16	0.16	0.03	0.10	0.22
b_{23}^2	0.10	0.08	0.08	0.03	0.02	0.14
b_{31}^2	0.10	0.07	0.07	0.02	0.02	0.11
b_{32}^2	0.05	-0.01	-0.01	0.03	-0.07	0.05
b_{33}^2	0.10	0.10	0.10	0.03	0.05	0.15
b_{10}	0.55	1.94	1.92	1.05	-0.09	4.12
b_{20}	2.20	2.30	2.18	1.46	-0.28	5.48
b_{30}	0.18	-2.29	-2.33	1.20	-4.53	0.19

Inferencia Bayesiana con Stan

En este apartado se presentan los resultados obtenidos mediante la implementación de Stan para la estimación de los parámetros de los modelos VAR(1) y VAR(2), bajo el supuesto de independencia entre los errores. La utilización de Stan, además de JAGS, responde a la necesidad de comparar ambos entornos de inferencia bayesiana en el desempeño del modelo propuesto.

Si bien ambos entornos son adecuados para realizar inferencia bayesiana, Stan ofrece ventajas sustanciales en términos de eficiencia computacional y flexibilidad en la formulación del modelo. Estas ventajas se deben a su uso del algoritmo de Hamiltonian Monte Carlo (HMC) y su extensión adaptativa No-U-Turn Sampler (NUTS), diseñados para explorar con mayor eficiencia espacios de parámetros de alta dimensión. El enfoque HMC simula dinámicas físicas introduciendo variables auxiliares, lo cual permite aprovechar la geometría del espacio paramétrico y mejora la eficiencia del muestreo MCMC.

Para estimar los modelos en Stan, se realizaron 80,000 iteraciones con un periodo de calentamiento (*warm-up*) de 40,000, distribuidas en 3 cadenas ejecutadas en paralelo. Se utilizó un valor inicial estándar para el parámetro `adapt_delta` (0.8), pero fue necesario incrementarlo progresivamente hasta 0.9 y 0.95 para reducir las advertencias por transiciones divergentes. Particularmente en el modelo VAR(2), se llegó a observar un 12 % de divergencias, lo cual evidenciaba dificultades para explorar correctamente la distribución posterior.

Para mitigar este problema, se implementó una descomposición QR en la matriz de diseño y se centraron las covariables. Estas modificaciones lograron reducir las divergencias a menos del 3 % en la mayoría de las simulaciones. Aunque no fue posible eliminarlas por completo, sí se logró una mejora significativa tanto en la estabilidad de las cadenas como en la precisión de las estimaciones.

El código implementado en Stan incorpora la descomposición QR junto con el centrado de las variables. Esta estrategia no solo favorece la estabilidad numérica, sino que también reduce considerablemente el tiempo de ejecución: en comparación con versiones del modelo sin dicha descomposición, se observó una mejora de hasta seis veces en el tiempo de cómputo.

Resultados del modelo VAR(1) estimado con Stan

Los Cuadros 4.7, 4.8 y 4.9 muestran los resultados obtenidos para el primer escenario utilizando Stan. En estas tablas se reportan, para cada parámetro estimado, la media, la mediana, la desviación estándar, los cuantiles 5 y 95 (que conforman el intervalo de credibilidad del 90 % propio de Stan), así como los indicadores de calidad del muestreo MCMC: **Rhat**, **Ess_bulk** y **Ess_tail**.

El **Rhat** es un diagnóstico de convergencia que compara la variabilidad dentro de cada cadena con la variabilidad entre cadenas; valores cercanos a 1 sugieren que las cadenas han mezclado bien. Por su parte, las métricas de tamaño de muestra efectivo (ESS, por sus siglas en inglés) ajustan el número de simulaciones por la autocorrelación presente en ellas. El Tamaño Efectivo de Muestra general, N_{eff} , se define matemáticamente como $N_{eff} = N / (1 + 2 \sum_{t=1}^{\infty} \rho_t)$, donde N es el número total de muestras y ρ_t es la autocorrelación en el retardo t .

El **Ess_bulk** se deriva de este concepto pero se calcula sobre las muestras después de aplicarles una transformación de normalización por rangos (*rank-normalization*). Este preprocesamiento enfoca la métrica en la eficiencia del muestreo en la región central de la distribución, siendo clave para la precisión de la media y la mediana. En cambio, el **Ess_tail**, crucial para la robustez de los intervalos de credibilidad, se enfoca en los extremos y se define formalmente como el mínimo entre el tamaño de muestra efectivo para los cuantiles 5 % y 95 %: $ESS_{tail} = \min(ESS(\theta_{0.05}), ESS(\theta_{0.95}))$. Para una discusión técnica más profunda sobre estas métricas, se recomienda consultar el trabajo de Vehtari et

al. ([20]).

Al comparar los resultados obtenidos con los reportados previamente usando JAGS, se observa una alta concordancia en las estimaciones de los coeficientes autorregresivos para los tres vectores de cuantiles considerados. Las medias y medianas estimadas con Stan son prácticamente idénticas a las obtenidas con JAGS, presentando diferencias mínimas.

En cuanto a los interceptos, aunque los patrones generales también coinciden, se aprecian algunas diferencias más notorias en el caso $\tau_{0.1} = (0.1, 0.1, 0.1)^\top$. En este escenario más extremo, los intervalos de credibilidad de Stan tienden a ser ligeramente más estrechos y a veces más desplazados respecto a los valores generadores, en comparación con los obtenidos con JAGS. No obstante, los valores reales de los interceptos suelen estar contenidos dentro de los respectivos intervalos, lo que respalda la compatibilidad de las estimaciones desde una perspectiva bayesiana.

En síntesis, los resultados obtenidos mediante Stan y JAGS son consistentes entre sí, lo que demuestra que las diferencias en los algoritmos de muestreo empleados por ambos entornos no afectan de manera significativa las estimaciones. Esta coincidencia refuerza la validez de los resultados y confirma la solidez del modelo bajo el enfoque bayesiano propuesto.

Cuadro 4.7

Resultado de modelo ajustado para de los parámetros para el segundo escenario $\tau_{0.1}$.

Parámetro	Teórico	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess.bulk	Ess.tail
b_{11}^1	0.70	0.72	0.72	0.02	0.68	0.75	1.00	51616.39	86421.08
b_{21}^1	0.20	0.19	0.19	0.02	0.16	0.22	1.00	48776.58	70428.34
b_{31}^1	0.10	0.12	0.12	0.02	0.09	0.15	1.00	22178.23	20131.40
b_{12}^1	0.10	0.11	0.11	0.02	0.08	0.15	1.00	35005.73	96278.19
b_{22}^1	0.60	0.57	0.57	0.02	0.53	0.61	1.00	45954.76	78037.51
b_{32}^1	0.20	0.18	0.18	0.02	0.15	0.21	1.00	36055.49	89806.12
b_{13}^1	0.05	0.04	0.04	0.02	-0.00	0.07	1.00	48032.42	99692.14
b_{23}^1	0.10	0.12	0.12	0.02	0.09	0.15	1.00	28644.91	13119.62
b_{33}^1	0.50	0.51	0.51	0.02	0.48	0.54	1.00	48229.45	84354.45
b_{10}	0.18	-1.71	-1.72	1.28	-3.85	0.38	1.00	64369.40	97416.90
b_{20}	2.20	3.15	3.18	1.69	0.37	5.83	1.00	34948.09	69142.90
b_{30}	0.55	0.36	0.38	1.04	-1.38	2.04	1.00	47507.38	27541.12

Cuadro 4.8*Resultado de modelo ajustado para de los parámetros para el primer escenario $\tau_{0.5}$.*

Parámetro	Teórico	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess_bulk	Ess_tail
b_{11}^1	0.70	0.67	0.67	0.03	0.62	0.72	1.00	77812.43	84121.56
b_{21}^1	0.20	0.19	0.19	0.03	0.14	0.23	1.00	68694.78	78500.98
b_{31}^1	0.10	0.08	0.09	0.04	0.02	0.14	1.00	61189.60	110025.90
b_{12}^1	0.10	0.11	0.11	0.04	0.04	0.18	1.00	77896.80	111607.10
b_{22}^1	0.60	0.60	0.60	0.04	0.53	0.67	1.00	51030.26	58246.75
b_{32}^1	0.20	0.20	0.20	0.04	0.13	0.27	1.00	69329.41	126882.96
b_{13}^1	0.05	0.03	0.03	0.04	-0.03	0.09	1.00	67238.18	94231.56
b_{23}^1	0.10	0.09	0.09	0.04	0.03	0.16	1.00	63126.19	111606.49
b_{33}^1	0.50	0.43	0.43	0.04	0.37	0.50	1.00	51793.16	97739.22
b_{10}	0.18	0.62	0.62	0.30	0.12	1.11	1.00	87116.59	110317.18
b_{20}	2.20	2.04	2.02	0.41	1.40	2.74	1.00	54013.64	99830.65
b_{30}	0.55	0.79	0.81	0.43	0.05	1.45	1.00	54348.13	101036.72

Cuadro 4.9*Resultado de modelo ajustado para de los parámetros para el primer escenario $\tau_{0.9}$.*

Parámetro	Teórico	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess_bulk	Ess_tail
b_{11}^1	0.70	0.68	0.68	0.02	0.65	0.71	1.00	77512.06	111470.86
b_{21}^1	0.20	0.19	0.19	0.02	0.16	0.22	1.00	79538.13	68912.09
b_{31}^1	0.10	0.07	0.07	0.02	0.04	0.11	1.00	60127.07	86125.39
b_{12}^1	0.10	0.12	0.12	0.02	0.09	0.15	1.00	81837.61	125990.71
b_{22}^1	0.60	0.56	0.56	0.03	0.52	0.61	1.00	61449.51	94843.77
b_{32}^1	0.20	0.20	0.20	0.02	0.15	0.23	1.00	65046.64	90016.28
b_{13}^1	0.05	0.08	0.08	0.02	0.05	0.10	1.00	89298.43	98458.91
b_{23}^1	0.10	0.12	0.12	0.02	0.08	0.16	1.00	72709.52	105195.40
b_{33}^1	0.50	0.49	0.49	0.02	0.46	0.53	1.00	67108.54	108099.91
b_{10}	0.18	1.45	1.36	1.11	-0.23	3.42	1.00	81779.87	96490.97
b_{20}	2.20	1.31	1.20	1.25	-0.56	3.50	1.00	68439.86	57923.85
b_{30}	0.55	-1.44	-1.50	1.15	-3.22	0.56	1.00	75432.01	122390.77

Resultados del estudio de simulación para el segundo escenario

Los Cuadros 4.10, 4.11 y 4.12 presentan los resultados correspondientes al escenario II. En ellos se observa que las estimaciones obtenidas con Stan para el modelo VAR(2) son muy similares a las reportadas previamente con JAGS.

En particular, las estimaciones de los coeficientes autorregresivos en las matrices B_1 y B_2 son prácticamente idénticas entre ambos enfoques, manteniendo la misma estructura y magnitud de los

efectos a lo largo de los tres vectores de cuantiles considerados. Además, las diferencias en los interceptos son incluso más pequeñas que en el caso VAR(1). Estos resultados respaldan la coherencia de las estimaciones obtenidas con Stan y refuerzan la validez del enfoque bayesiano adoptado para la inferencia conjunta de cuantiles en modelos VAR(2).

Cuadro 4.10

Resultado del modelo ajustado para de los parámetros para el segundo escenario $\tau_{0.1}$.

Parámetro	Teórico	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess_bulk	Ess_tail
b_{11}^1	0.30	0.32	0.32	0.03	0.27	0.37	1.00	58482.43	67595.43
b_{12}^1	0.20	0.23	0.23	0.03	0.17	0.28	1.00	45781.75	25440.77
b_{13}^1	0.10	0.11	0.11	0.03	0.06	0.16	1.00	43643.20	64779.97
b_{21}^1	0.20	0.17	0.17	0.03	0.13	0.22	1.00	45533.30	103536.52
b_{22}^1	0.30	0.28	0.28	0.02	0.24	0.32	1.00	39019.44	112015.24
b_{23}^1	0.10	0.13	0.13	0.03	0.08	0.18	1.00	33957.02	14210.99
b_{31}^1	0.10	0.13	0.13	0.03	0.08	0.17	1.00	29136.77	16981.24
b_{32}^1	0.10	0.09	0.09	0.02	0.06	0.12	1.00	79343.01	119960.00
b_{33}^1	0.30	0.34	0.34	0.02	0.30	0.37	1.00	32539.21	90518.83
b_{11}^2	0.10	0.16	0.16	0.03	0.11	0.20	1.00	54337.47	101181.72
b_{12}^2	0.10	0.05	0.05	0.03	0.00	0.10	1.00	48305.66	107413.07
b_{13}^2	0.05	0.01	0.01	0.02	-0.03	0.05	1.00	55793.50	76773.33
b_{21}^2	0.05	0.04	0.04	0.03	-0.01	0.08	1.00	43077.23	33073.05
b_{22}^2	0.10	0.08	0.08	0.02	0.04	0.12	1.00	29697.38	27003.49
b_{23}^2	0.10	0.11	0.11	0.02	0.07	0.15	1.00	26191.78	8813.41
b_{31}^2	0.10	0.08	0.08	0.03	0.03	0.13	1.00	52320.04	105526.18
b_{32}^2	0.05	0.04	0.04	0.02	0.00	0.08	1.00	37736.53	29001.93
b_{33}^2	0.10	0.07	0.07	0.02	0.03	0.10	1.00	77470.09	124745.68
b_{10}	0.18	-2.13	-2.11	1.46	-4.61	0.23	1.00	52720.00	67642.92
b_{20}	2.20	4.40	4.50	1.79	1.32	7.14	1.00	50802.06	98037.87
b_{30}	0.55	0.84	0.80	1.25	-1.14	2.98	1.00	59918.67	69178.15

Cuadro 4.11*Resultado de modelo ajustado para de los parámetros para el segundo escenario $\tau_{0.5}$.*

Parámetro	Teórico	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess_bulk	Ess_tail
b_{11}^1	0.30	0.24	0.04	0.04	0.18	0.30	1.00	69656.85	31364.73
b_{12}^1	0.20	0.17	0.05	0.05	0.09	0.26	1.00	74192.93	60491.48
b_{13}^1	0.10	0.08	0.04	0.04	0.02	0.14	1.00	116739.78	162828.05
b_{21}^1	0.20	0.18	0.04	0.04	0.12	0.24	1.00	100284.96	131808.34
b_{22}^1	0.30	0.30	0.04	0.04	0.22	0.37	1.00	79129.09	26725.10
b_{23}^1	0.10	0.10	0.04	0.04	0.03	0.16	1.00	80296.47	84353.63
b_{31}^1	0.10	0.09	0.05	0.04	0.01	0.16	1.00	72102.43	44411.01
b_{32}^1	0.10	0.12	0.06	0.06	0.03	0.22	1.00	73663.14	127923.39
b_{33}^1	0.30	0.27	0.05	0.05	0.18	0.35	1.00	65775.13	95237.33
b_{11}^2	0.10	0.13	0.04	0.04	0.07	0.19	1.00	94201.07	64664.76
b_{12}^2	0.10	0.13	0.05	0.05	0.05	0.22	1.00	84784.50	114826.59
b_{13}^2	0.05	0.05	0.04	0.05	-0.02	0.13	1.00	81862.63	146098.31
b_{21}^2	0.05	0.05	0.04	0.04	-0.02	0.12	1.00	83675.36	109244.38
b_{22}^2	0.10	0.12	0.05	0.05	0.04	0.19	1.00	94331.60	93974.83
b_{23}^2	0.10	0.08	0.05	0.05	-0.00	0.16	1.00	76011.92	126972.55
b_{31}^2	0.10	0.06	0.05	0.05	-0.02	0.14	1.00	81486.64	133805.50
b_{32}^2	0.05	0.02	0.06	0.06	-0.07	0.12	1.00	81349.59	142770.02
b_{33}^2	0.10	0.06	0.04	0.04	-0.01	0.13	1.00	102159.86	148808.53
b_{10}	0.18	0.62	0.34	0.33	0.07	1.20	1.00	83809.14	60244.90
b_{20}	2.20	2.09	0.41	0.42	1.42	2.78	1.00	69034.74	124931.03
b_{30}	0.55	0.86	0.41	0.40	0.16	1.51	1.00	73971.47	92485.69

Cuadro 4.12

Resultado de modelo ajustado para de los parámetros para el segundo escenario $\tau_{0.9}$.

Parámetro	Teórico	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess_bulk	Ess_tail
b_{11}^1	0.30	0.27	0.27	0.02	0.24	0.31	1.00	84079.67	137390.45
b_{12}^1	0.20	0.21	0.21	0.02	0.17	0.25	1.00	89494.48	129649.50
b_{13}^1	0.10	0.13	0.13	0.02	0.09	0.16	1.00	79001.60	88927.60
b_{21}^1	0.20	0.20	0.20	0.02	0.17	0.24	1.00	87145.51	116981.88
b_{22}^1	0.30	0.25	0.25	0.03	0.20	0.30	1.00	73465.44	117367.03
b_{23}^1	0.10	0.12	0.13	0.03	0.08	0.17	1.00	65204.91	42836.83
b_{31}^1	0.10	0.12	0.12	0.03	0.06	0.17	1.00	50664.55	95937.62
b_{32}^1	0.10	0.10	0.10	0.02	0.06	0.14	1.00	83587.33	132627.90
b_{33}^1	0.30	0.31	0.31	0.03	0.27	0.35	1.00	81370.69	125815.72
b_{11}^2	0.10	0.11	0.11	0.02	0.08	0.15	1.00	76412.29	121662.19
b_{12}^2	0.10	0.11	0.11	0.02	0.07	0.14	1.00	83829.60	130630.12
b_{13}^2	0.05	0.06	0.06	0.02	0.03	0.09	1.00	79669.26	44795.57
b_{21}^2	0.05	0.03	0.03	0.02	-0.01	0.07	1.00	68712.83	77753.57
b_{22}^2	0.10	0.15	0.16	0.03	0.10	0.21	1.00	68365.77	103437.40
b_{23}^2	0.10	0.07	0.07	0.03	0.02	0.12	1.00	58711.15	93166.74
b_{31}^2	0.10	0.07	0.07	0.02	0.03	0.10	1.00	83434.99	132447.03
b_{32}^2	0.05	-0.01	-0.01	0.03	-0.06	0.04	1.00	65865.23	108823.48
b_{33}^2	0.10	0.10	0.10	0.03	0.05	0.14	1.00	73112.71	124028.11
b_{10}	0.18	1.93	1.90	1.09	0.20	3.78	1.00	88089.54	95016.29
b_{20}	2.20	1.89	1.76	1.49	-0.32	4.54	1.00	64729.29	102305.46
b_{30}	0.55	-2.40	-2.44	1.24	-4.36	-0.31	1.00	75444.58	89397.37

Resultados del estudio de simulación para el tercer escenario

Al analizar los resultados para los vectores cuantiles $\tau_{0.1}$, $\tau_{0.5}$ y $\tau_{0.9}$, se observa que las medias de los parámetros estimados generalmente se encuentran cerca de sus valores teóricos, aunque con ciertas variaciones según el vector cuantil considerado. Para $\tau_{0.1}$, algunas medias muestran un sesgo más pronunciado, especialmente en los interceptos y b_{31}^1 , donde los valores estimados tienden a ser mayores que los valores teóricos. La desviación estándar en estos interceptos es relativamente alta, indicando una mayor incertidumbre en las estimaciones. En contraste, para $\tau_{0.5}$ las medias están más ajustadas a los valores teóricos, y la desviación estándar es menor en la mayoría de los parámetros, lo que sugiere estimaciones más precisas y consistentes. Por último, en el caso de $\tau_{0.9}$, aunque las medias se mantienen en un rango razonable, se observa un ligero aumento en la desviación estándar en comparación con $\tau_{0.5}$, indicando una mayor variabilidad en las estimaciones para este cuantil superior. En conjunto, estos resultados indican que la precisión del modelo es óptima alrededor del vector cuantil

mediano, mientras que en los vectores cuantiles extremos la estimación presenta un mayor sesgo y dispersión.

Cuadro 4.13

Resultado de modelo ajustado para de los parámetros para el tercer escenario para $\tau_{0.1}$.

Parámetro	Teórico	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess.bulk	Ess.tail
b_{11}^1	0.50	0.41	0.41	0.13	0.20	0.62	1.00	40860.40	75328.17
b_{12}^1	-0.20	-0.24	-0.24	0.09	-0.38	-0.09	1.00	64094.49	108125.97
b_{13}^1	0.10	0.13	0.13	0.09	-0.03	0.28	1.00	86698.65	136162.13
b_{21}^1	0.10	0.07	0.07	0.15	-0.18	0.32	1.00	58398.38	54408.22
b_{22}^1	0.40	0.48	0.47	0.11	0.31	0.66	1.00	65563.84	69657.69
b_{23}^1	-0.30	-0.27	-0.27	0.11	-0.45	-0.09	1.00	84434.45	126724.63
b_{31}^1	-0.20	0.06	0.06	0.14	-0.17	0.29	1.00	71448.86	120648.79
b_{32}^1	0.20	0.27	0.27	0.10	0.11	0.44	1.00	49185.26	128834.63
b_{33}^1	0.30	0.33	0.33	0.12	0.14	0.52	1.00	76867.16	117378.83
b_{10}	1.80	2.31	2.32	1.20	0.35	4.26	1.00	68071.04	124935.70
b_{20}	2.20	1.72	1.75	1.44	-0.69	4.03	1.00	65128.20	106484.61
b_{30}	4.50	2.18	2.15	1.41	-0.08	4.55	1.00	76514.73	118254.04

Cuadro 4.14

Resultado de modelo ajustado para de los parámetros para el tercer escenario para $\tau_{0.5}$.

Parámetro	Teórico	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess.bulk	Ess.tail
b_{11}^1	0.50	0.46	0.46	0.09	0.32	0.60	1.00	67882.79	45306.66
b_{12}^1	-0.20	-0.21	-0.21	0.05	-0.30	-0.12	1.00	87382.51	142777.63
b_{13}^1	0.10	0.03	0.03	0.04	-0.04	0.10	1.00	97854.09	154864.43
b_{21}^1	0.10	-0.01	-0.01	0.08	-0.14	0.12	1.00	97914.84	138929.77
b_{22}^1	0.40	0.32	0.32	0.07	0.21	0.43	1.00	79432.31	121538.73
b_{23}^1	-0.30	-0.36	-0.36	0.07	-0.48	-0.26	1.00	68531.89	84891.88
b_{31}^1	-0.20	-0.28	-0.28	0.10	-0.45	-0.11	1.00	76682.64	135679.54
b_{32}^1	0.20	0.23	0.22	0.08	0.10	0.37	1.00	66374.81	108317.08
b_{33}^1	0.30	0.30	0.30	0.07	0.19	0.41	1.00	74600.59	135534.45
b_{10}	1.80	2.41	2.42	0.51	1.57	3.23	1.00	82636.73	52367.87
b_{20}	2.20	3.09	3.08	0.57	2.19	4.07	1.00	81143.42	133831.61
b_{30}	4.50	4.87	4.88	0.73	3.66	6.06	1.00	68496.50	125918.85

Cuadro 4.15

Resultado de modelo ajustado para de los parámetros para el tercer escenario para $\tau_{0,9}$.

Parámetro	Teórico	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess_bulk	Ess_tail
b_{11}^1	0.50	0.48	0.48	0.14	0.24	0.72	1.00	51269.00	53651.60
b_{12}^1	-0.20	-0.22	-0.22	0.08	-0.35	-0.09	1.00	16613.87	109633.09
b_{13}^1	0.10	0.08	0.08	0.11	-0.09	0.26	1.00	17670.12	65811.40
b_{21}^1	0.10	0.04	0.04	0.15	-0.20	0.29	1.00	4091.82	1497.30
b_{22}^1	0.40	0.33	0.33	0.13	0.11	0.53	1.00	2363.10	1082.34
b_{23}^1	-0.30	-0.37	-0.37	0.13	-0.56	-0.15	1.00	47269.77	50841.47
b_{31}^1	-0.20	-0.24	-0.23	0.13	-0.46	-0.03	1.00	66799.49	118699.15
b_{32}^1	0.20	0.28	0.27	0.09	0.13	0.43	1.00	41405.95	67186.19
b_{33}^1	0.30	0.27	0.27	0.12	0.06	0.46	1.00	49129.94	94915.25
b_{10}	1.80	1.80	1.78	0.48	1.04	2.61	1.00	43512.58	46362.45
b_{20}	2.20	2.65	2.67	0.56	1.70	3.55	1.00	37796.03	61889.37
b_{30}	4.50	4.69	4.67	0.50	3.91	5.56	1.00	53405.25	76592.50

Resultados del estudio de simulación para el cuarto escenario

El Cuadro 4.16 presenta un resumen de las distribuciones posteriores de los parámetros estimados para el modelo bajo el vector cuantil $\tau = (0.7, 0.9, 0.1)^T$. En este escenario, los errores se generaron a partir de distribuciones skew-normal con distintos grados de asimetría para cada componente. Los resultados muestran que algunos coeficientes, como b_{11}^1 y b_{31}^1 , se aproximan razonablemente a sus valores teóricos, lo que indica que el modelo logra capturar adecuadamente ciertas relaciones dinámicas. No obstante, otros parámetros, como b_{33}^1 y b_{21}^1 , presentan desviaciones más marcadas, lo cual sugiere que la asimetría en la distribución del error puede tener un efecto desigual sobre la estimación de los coeficientes.

Cuadro 4.16

Resultados del modelo ajustado para los parámetros en el cuarto escenario con $\tau = (0.7, 0.9, 0.1)^\top$.

Parámetro	Teórico	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess_bulk	Ess_tail
b_{11}^1	0.30	0.27	0.27	0.09	0.12	0.42	1.00	46983.17	93019.83
b_{12}^1	0.10	0.15	0.15	0.07	0.04	0.26	1.00	55560.01	104639.69
b_{13}^1	0.20	0.29	0.29	0.08	0.15	0.43	1.00	60244.82	75112.21
b_{21}^1	-0.10	-0.21	-0.21	0.10	-0.38	-0.05	1.00	52577.65	68154.30
b_{22}^1	0.50	0.43	0.43	0.09	0.27	0.58	1.00	46552.61	93178.40
b_{32}^1	0.10	0.16	0.16	0.12	-0.03	0.35	1.00	54723.20	98478.85
b_{31}^1	0	0.03	0.03	0.10	-0.13	0.18	1.00	56336.52	67098.29
b_{32}^1	-0.20	-0.21	-0.21	0.12	-0.41	-0.01	1.00	34067.85	70520.19
b_{33}^1	0.40	0.24	0.24	0.13	0.04	0.47	1.00	43782.49	75152.69
b_{10}	2.80	2.35	2.33	0.63	1.35	3.41	1.00	58532.54	114953.35
b_{20}	0.80	0.77	0.74	0.81	-0.50	2.16	1.00	60183.46	103652.66
b_{30}	1.50	2.42	2.47	0.91	0.82	3.82	1.00	50488.62	81619.70

4.2.2. Análisis del desempeño del estimador bajo distintos tamaños de muestra

Para evaluar el desempeño del enfoque bayesiano en la estimación del modelo VAR(1), se realizaron simulaciones mediante el método Hamiltonian Monte Carlo (HMC) en Stan. Se consideraron tres tamaños de muestra ($T = 50, 100, 200$), y se realizaron 400 réplicas para cada caso. El muestreo en Stan se llevó a cabo utilizando tres cadenas MCMC, cada una con 40,000 iteraciones, de las cuales 15,000 fueron de calentamiento y descartadas para la estimación.

El modelo VAR(1) considerado se expresa como:

$$\mathbf{y}_t = B_0 + B_1 \mathbf{y}_{t-1} + \epsilon_t. \quad (4.5)$$

Los valores reales de los parámetros B_0 y B_1 son:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0.18 \\ 2.20 \\ 0.55 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0.70 & 0.10 & 0.05 \\ 0.20 & 0.60 & 0.10 \\ 0.10 & 0.20 & 0.50 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Se consideraron tres escenarios de cuantiles, definidos como:

$$\tau_{0.1} = (0.1, 0.1, 0.1)^\top, \quad \tau_{0.5} = (0.5, 0.5, 0.5)^\top, \quad \tau_{0.9} = (0.9, 0.9, 0.9)^\top.$$

Para cada uno de estos escenarios, se ajustó un modelo de regresión cuantílica sobre la variable

respuesta $\mathbf{y}_t = (y_{1t}, y_{2t}, y_{3t})$.

A continuación, se presentan los resultados de la estimación de los parámetros B_0 y B_1 , considerando distintos tamaños de muestra. Los cuadros siguientes resumen las estimaciones a posteriori de cada parámetro, junto con las siguientes métricas de evaluación:

- **Media:** Promedio de la media posterior.
- **SD:** Promedio de la desviación estándar posterior.
- **Sesgo:** Diferencia promedio entre la media posterior y el valor real del parámetro.
- **ECM:** Error cuadrático medio de la media posterior.

Cada cuadro muestra los resultados para los vectores cuantiles $\tau_{0.1}$, $\tau_{0.5}$ y $\tau_{0.9}$, lo que permite evaluar el comportamiento del modelo en distintos puntos de la distribución condicional de \mathbf{y}_t . Esto facilita el análisis de cómo varían las estimaciones de los parámetros en función del cuantil y del tamaño muestral.

Cuadro 4.17

Estimaciones de los primeros parámetros del modelo VAR(1) para el escenario $\tau_{0.5}$, con diferentes tamaños de muestra.

T	Resul.	$b_{11}^1 = 0.70$	$b_{12}^1 = 0.10$	$b_{13}^1 = 0.05$	$b_{21}^1 = 0.20$	$b_{22}^1 = 0.60$	$b_{23}^1 = 0.10$
50	Media	0.625	0.091	0.060	0.210	0.539	0.098
	Sesgo	-0.075	-0.009	0.010	0.010	-0.061	-0.002
	ECM	0.364	0.476	0.509	0.387	0.343	0.460
	SD	0.100	0.100	0.106	0.101	0.100	0.107
100	Media	0.667	0.094	0.052	0.203	0.570	0.096
	Sesgo	-0.033	-0.006	0.002	0.003	-0.030	-0.004
	ECM	0.371	0.458	0.499	0.395	0.337	0.469
	SD	0.063	0.065	0.070	0.062	0.064	0.069
200	Media	0.687	0.097	0.053	0.202	0.587	0.098
	Sesgo	-0.013	-0.003	0.003	0.002	-0.013	-0.002
	ECM	0.377	0.454	0.497	0.386	0.343	0.462
	SD	0.041	0.044	0.046	0.042	0.044	0.047

Cuadro 4.18

Estimaciones de los parámetros restantes del modelo VAR(1) para el escenario $\tau_{0.5}$, con diferentes tamaños de muestra.

T	Resul.	$b_{31}^1 = 0.10$	$b_{32}^1 = 0.20$	$b_{33}^1 = 0.50$	$b_{10} = 0.18$	$b_{20} = 2.20$	$b_{30} = 0.55$
50	Media	0.101	0.201	0.448	0.445	2.633	0.759
	Sesgo	0.001	0.001	-0.052	0.265	0.433	0.209
	ECM	0.459	0.396	0.348	1.166	5.967	1.258
	SD	0.100	0.100	0.106	0.854	0.850	0.855
100	Media	0.100	0.202	0.473	0.338	2.404	0.648
	Sesgo	0.000	0.002	-0.027	0.158	0.204	0.098
	ECM	0.454	0.390	0.330	0.767	4.478	0.799
	SD	0.062	0.064	0.069	0.559	0.561	0.555
200	Media	0.102	0.201	0.485	0.233	2.292	0.604
	Sesgo	0.002	0.001	-0.015	0.053	0.093	0.054
	ECM	0.451	0.388	0.329	0.574	3.816	0.533
	SD	0.042	0.043	0.046	0.388	0.385	0.386

Los resultados obtenidos a partir de las 400 réplicas del modelo VAR(1) para el vector cuantil $\tau_{0.5}$, presentados en los Cuadros 4.17 y 4.18, evidencian cómo el tamaño de la muestra influye en la precisión y el sesgo de las estimaciones de los parámetros. En general, se observa que, a medida que el tamaño de la muestra aumenta de $T = 50$ a $T = 200$, tanto el sesgo como la desviación estándar (SD) de las estimaciones tienden a disminuir, lo que indica una mejora en la precisión del modelo. Este comportamiento es coherente con la teoría estadística.

En particular, los parámetros asociados a las primeras filas de la matriz de coeficientes b_{ij}^1 , presentan un sesgo más pronunciado para muestras pequeñas ($T = 50$), especialmente en los coeficientes b_{11}^1 y b_{22}^1 . Sin embargo, conforme aumenta el tamaño de la muestra, el sesgo se reduce de forma notable, alcanzando valores cercanos a cero cuando $T = 200$.

En cuanto al error cuadrático medio (ECM), también se observa una disminución general al incrementar el tamaño de la muestra, lo que refleja mayor estabilidad y menor variabilidad en las estimaciones. Este efecto es más marcado en los interceptos b_{i0} , los cuales presentan valores de ECM más elevados

para $T = 50$, particularmente en b_{10} y b_{20} , lo que indica una mayor dispersión de las estimaciones alrededor del valor real. A medida que el tamaño de la muestra aumenta, estos errores disminuyen progresivamente, sugiriendo que el modelo logra capturar con mayor precisión los valores verdaderos de los parámetros.

En resumen, los resultados para $\tau_{0.5}$ confirman que el modelo VAR(1) proporciona estimaciones más precisas, con menor sesgo y desviación estándar, conforme aumenta el tamaño de la muestra. Sin embargo, los parámetros relacionados con los términos constantes tienden a presentar mayor variabilidad en muestras pequeñas, lo que sugiere la necesidad de utilizar tamaños de muestra más grandes para obtener estimaciones más confiables en estos casos.

Los resultados obtenidos para el vector cuantil $\tau_{0.1}$ muestran un comportamiento similar al observado en $\tau_{0.5}$, en el sentido de que el sesgo, el ECM y SD disminuyen a medida que el tamaño de la muestra aumenta. Sin embargo, se identifican diferencias importantes al comparar ambos casos. Como se observa en los Cuadros 4.19 y 4.20, para tamaños de muestra pequeños ($T = 50$ y $T = 100$), el sesgo en $\tau_{0.1}$ es mayor que en $\tau_{0.5}$, especialmente en los interceptos, donde la magnitud del sesgo es considerablemente más alta. No obstante, al aumentar el tamaño de la muestra a $T = 200$, el sesgo en $\tau_{0.1}$ se reduce significativamente, siendo en varios casos menor o similar al de $\tau_{0.5}$, con la excepción de los interceptos, que continúan mostrando valores elevados.

Un patrón similar se observa en el ECM. Para $T = 50$ y $T = 100$, el ECM en $\tau_{0.1}$ es generalmente mayor que en $\tau_{0.5}$, aunque la diferencia no es muy pronunciada, salvo en los interceptos, donde la brecha es más evidente. En el caso de $T = 200$, el ECM en $\tau_{0.1}$ es menor o comparable al de $\tau_{0.5}$, con excepción nuevamente de los interceptos, que si bien presentan una notable mejora, siguen mostrando errores relativamente altos.

Estos resultados sugieren que, para cuantiles más extremos como $\tau_{0.1}$, la precisión de las estimaciones mejora con tamaños de muestra más grandes. Sin embargo, la estimación de los interceptos continúa siendo más desafiante en comparación con los demás parámetros.

Cuadro 4.19

Estimaciones de los primeros parámetros del modelo VAR(1) para el escenario $\tau_{0,1}$, con diferentes tamaños de muestra.

T	Resul.	$b_{11}^1 = 0.70$	$b_{12}^1 = 0.10$	$b_{13}^1 = 0.05$	$b_{21}^1 = 0.20$	$b_{22}^1 = 0.60$	$b_{23}^1 = 0.10$
50	Media	0.317	0.132	0.094	0.144	0.219	0.115
	Sesgo	-0.383	0.032	0.044	-0.056	-0.381	0.015
	ECM	0.355	0.433	0.490	0.433	0.385	0.471
	SD	0.172	0.150	0.163	0.194	0.197	0.204
100	Media	0.662	0.099	0.049	0.195	0.559	0.098
	Sesgo	-0.038	-0.001	-0.001	-0.005	-0.041	-0.002
	ECM	0.367	0.449	0.501	0.392	0.335	0.462
	SD	0.051	0.047	0.050	0.055	0.060	0.060
200	Media	0.688	0.099	0.049	0.198	0.588	0.101
	Sesgo	-0.012	-0.001	-0.001	-0.002	-0.012	0.001
	ECM	0.376	0.446	0.498	0.387	0.340	0.460
	SD	0.024	0.024	0.026	0.024	0.026	0.027

Cuadro 4.20

Estimaciones de los parámetros restantes del modelo VAR(1) para el escenario $\tau_{0,1}$, con diferentes tamaños de muestra.

T	Resul.	$b_{31}^1 = 0.10$	$b_{32}^1 = 0.20$	$b_{33}^1 = 0.50$	$b_{10} = 0.18$	$b_{20} = 2.20$	$b_{30} = 0.55$
50	Media	0.111	0.173	0.273	7.518	12.520	6.357
	Sesgo	0.011	-0.027	-0.227	7.338	10.320	5.807
	ECM	0.450	0.406	0.386	108.350	215.169	69.827
	SD	0.149	0.147	0.176	4.838	5.366	4.702
100	Media	0.101	0.195	0.471	1.255	3.675	1.364
	Sesgo	0.001	-0.005	-0.029	1.075	1.475	0.814
	ECM	0.445	0.393	0.333	7.938	17.929	6.676
	SD	0.045	0.045	0.052	2.546	2.769	2.427
200	Media	0.098	0.199	0.490	0.566	2.511	0.892
	Sesgo	-0.002	-0.001	-0.010	0.386	0.311	0.342
	ECM	0.449	0.386	0.329	2.835	6.557	2.931
	SD	0.023	0.024	0.026	1.591	1.635	1.574

Para el caso de $\tau_{0,9}$, los resultados obtenidos muestran un comportamiento similar al de $\tau_{0,5}$ y $\tau_{0,1}$ en términos de reducción del sesgo, ECM y SD conforme aumenta el tamaño de la muestra. Sin embargo, se observan algunas diferencias importantes al compararlo con los otros vectores cuantil. Como se muestra en los Cuadros 4.21 y 4.22, el sesgo en $\tau_{0,9}$ tiende a ser mayor que en $\tau_{0,5}$, especialmente en los interceptos, aunque menor que en $\tau_{0,1}$, lo que sugiere que las estimaciones en el cuantil superior presentan menor distorsión que en el cuantil inferior. Además, cuando el tamaño de la muestra alcanza $T = 200$, el sesgo en $\tau_{0,9}$ se reduce notablemente, siendo en general menor o comparable al observado en $\tau_{0,5}$, con excepción de algunos parámetros como b_{33}^1 , donde las diferencias son poco significativas.

Respecto al ECM, se observa una tendencia decreciente a medida que T aumenta, especialmente en los términos constantes. Aunque para $T = 50$ el ECM de los interceptos es particularmente alto, este disminuye de forma progresiva en $T = 100$ y $T = 200$, indicando una mejora en la precisión de las estimaciones. No obstante, incluso con muestras grandes, los ECM de los interceptos permanecen

relativamente elevados en comparación con los de los coeficientes autoregresivos. Aun así, estos valores son considerablemente menores que los reportados para $\tau_{0.1}$, lo que refuerza la conclusión de que el cuantil inferior representa mayores dificultades para estimar correctamente los interceptos.

Además del sesgo y del ECM, la SD de las estimaciones también presenta una disminución consistente conforme se incrementa T , lo que indica una menor variabilidad en los resultados y, por tanto, mayor estabilidad del modelo.

En conjunto, estos resultados respaldan la tendencia general observada en $\tau_{0.1}$ y $\tau_{0.5}$: el aumento en T favorece la mejora en la precisión y estabilidad de las estimaciones. Sin embargo, las diferencias en los niveles de sesgo, ECM y SD entre $\tau_{0.9}$ y $\tau_{0.1}$ también evidencian que los cuantiles inferiores imponen mayores desafíos, particularmente en la estimación de los interceptos.

Cuadro 4.21

Estimaciones de los primeros parámetros del modelo VAR(1) para el escenario $\tau_{0.9}$, con diferentes tamaños de muestra.

T	Resul.	$b_{11}^1 = 0.70$	$b_{12}^1 = 0.10$	$b_{13}^1 = 0.05$	$b_{21}^1 = 0.20$	$b_{22}^1 = 0.60$	$b_{23}^1 = 0.10$
50	Media	0.444	0.108	0.080	0.182	0.395	0.110
	Sesgo	-0.256	0.008	0.030	-0.018	-0.205	0.010
	ECM	0.330	0.437	0.480	0.397	0.327	0.457
	SD	0.141	0.122	0.129	0.128	0.141	0.137
100	Media	0.666	0.099	0.049	0.197	0.570	0.096
	Sesgo	-0.034	-0.001	-0.001	-0.003	-0.030	-0.004
	ECM	0.370	0.448	0.499	0.390	0.337	0.458
	SD	0.046	0.044	0.046	0.043	0.047	0.047
200	Media	0.688	0.100	0.047	0.199	0.589	0.099
	Sesgo	-0.012	0.000	-0.003	-0.001	-0.011	-0.001
	ECM	0.378	0.446	0.500	0.387	0.340	0.463
	SD	0.023	0.024	0.026	0.023	0.024	0.025

Cuadro 4.22

Estimaciones de los parámetros restantes del modelo VAR(1) para el escenario $\tau_{0,9}$, con diferentes tamaños de muestra.

T	Resul.	$b_{31}^1 = 0.10$	$b_{32}^1 = 0.20$	$b_{33}^1 = 0.50$	$b_{10} = 0.18$	$b_{20} = 2.20$	$b_{30} = 0.55$
50	Media	0.092	0.187	0.372	-5.181	-2.745	-2.866
	Sesgo	-0.008	-0.013	-0.128	-5.361	-4.945	-3.416
	ECM	0.457	0.394	0.347	64.552	40.192	31.593
	SD	0.102	0.105	0.128	4.116	3.969	3.716
100	Media	0.099	0.195	0.476	-0.646	1.279	-0.046
	Sesgo	-0.001	-0.005	-0.024	-0.826	-0.921	-0.596
	ECM	0.448	0.391	0.333	5.410	4.994	4.459
	SD	0.040	0.042	0.047	2.138	2.085	2.012
200	Media	0.102	0.198	0.491	-0.216	1.895	0.421
	Sesgo	0.002	-0.002	-0.009	-0.396	-0.305	-0.129
	ECM	0.447	0.388	0.330	2.736	4.174	1.924
	SD	0.022	0.023	0.025	1.350	1.349	1.307

Modelo VAR(2): Comportamiento Asintótico de la Mediana Estimada

Además del modelo VAR(1), se realizó la simulación para el modelo VAR(2), manteniendo las mismas condiciones experimentales previamente descritas. La inclusión de un segundo rezago permite capturar dinámicas más complejas en las relaciones entre las variables, lo que puede mejorar la precisión de las estimaciones en ciertos escenarios. Sin embargo, este aumento en la dimensionalidad también conlleva una mayor complejidad computacional. En este caso, el modelo considerado se expresa como:

$$\mathbf{y}_t = B_0 + B_1\mathbf{y}_{t-1} + B_2\mathbf{y}_{t-2} + \varepsilon_t,$$

donde los valores reales de los parámetros son:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 2.0 \\ 4.1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.6 & 0.1 \\ 0.6 & 0.4 & 0.1 \\ 0.6 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0.3 & -0.7 & 0.6 \\ -0.4 & 0.0 & 0.1 \\ -0.75 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

A continuación, se presentan los resultados obtenidos para los diferentes coeficientes del modelo, organizados en cuatro cuadros para facilitar su interpretación. Los Cuadros 4.23 a 4.26 muestran los resultados correspondientes a distintos grupos de parámetros, donde se resume la media posterior, el sesgo, el error cuadrático medio (ECM) y la desviación estándar, para los tamaños de muestra $T = 50$, 100 y 200.

Cuadro 4.23

Resultados de las estimaciones bayesianas para los primeros cinco parámetros del modelo VAR(2) en el cuantil $\tau_{0.5}$, con diferentes tamaños de muestra.

T	Resul.	$b_{11}^1 = 0.50$	$b_{12}^1 = -0.60$	$b_{13}^1 = 0.10$	$b_{11}^2 = 0.30$	$b_{12}^2 = -0.70$
50	Media	0.464	-0.587	0.094	0.305	-0.716
	Sesgo	-0.036	0.013	-0.006	0.005	-0.016
	ECM	0.011	0.018	0.009	0.014	0.015
	SD	0.098	0.124	0.096	0.114	0.122
100	Media	0.486	-0.591	0.095	0.299	-0.703
	Sesgo	-0.014	0.009	-0.005	-0.001	-0.003
	ECM	0.004	0.007	0.004	0.005	0.006
	SD	0.064	0.079	0.063	0.073	0.079
200	Media	0.492	-0.595	0.101	0.301	-0.697
	Sesgo	-0.008	0.005	0.001	0.001	0.003
	ECM	0.002	0.003	0.002	0.003	0.002
	SD	0.045	0.056	0.046	0.052	0.056

Cuadro 4.24

Resultados para el segundo grupo de cinco parámetros del modelo VAR(2).

T	Resul.	$b_{13}^2 = 0.60$	$b_{21}^1 = 0.60$	$b_{22}^1 = 0.40$	$b_{23}^1 = 0.10$	$b_{21}^2 = -0.40$
50	Media	0.610	0.605	0.352	0.094	-0.365
	Sesgo	0.010	0.005	-0.048	-0.006	0.035
	ECM	0.010	0.009	0.017	0.010	0.015
	SD	0.102	0.098	0.123	0.096	0.114
100	Media	0.602	0.591	0.381	0.095	-0.377
	Sesgo	0.002	-0.009	-0.019	-0.005	0.023
	ECM	0.004	0.004	0.006	0.004	0.006
	SD	0.066	0.063	0.078	0.063	0.073
200	Media	0.596	0.599	0.390	0.095	-0.390
	Sesgo	-0.004	-0.001	-0.010	-0.005	0.010
	ECM	0.002	0.002	0.003	0.002	0.003
	SD	0.047	0.045	0.055	0.045	0.052

Cuadro 4.25

Estimaciones bayesianas para el tercer grupo de cinco parámetros del modelo VAR(2)

T	Resul.	$b_{22}^2 = 0.00$	$b_{23}^2 = 0.10$	$b_{31}^1 = 0.60$	$b_{32}^1 = 0.10$	$b_{33}^1 = 0.30$
50	Media	-0.009	0.097	0.596	0.111	0.271
	Sesgo	-0.009	-0.003	-0.004	0.011	-0.029
	ECM	0.014	0.010	0.010	0.016	0.010
	SD	0.121	0.101	0.097	0.124	0.096
100	Media	-0.014	0.102	0.595	0.103	0.286
	Sesgo	-0.014	0.002	-0.005	0.003	-0.014
	ECM	0.006	0.004	0.004	0.006	0.005
	SD	0.079	0.066	0.064	0.078	0.062
200	Media	-0.007	0.103	0.601	0.103	0.292
	Sesgo	-0.007	0.003	0.001	0.003	-0.008
	ECM	0.003	0.002	0.002	0.003	0.002
	SD	0.056	0.047	0.046	0.055	0.045

Cuadro 4.26

Resultados de los últimos seis parámetros del modelo VAR(2), incluyendo los interceptos de la estructura temporal del proceso.

T	Resul.	$b_{31}^2 = -0.75$	$b_{32}^2 = 0.40$	$b_{33}^2 = 0.10$	$b_{10} = 1.10$	$b_{20} = 2.00$	$b_{30} = 4.10$
50	Media	-0.751	0.398	0.095	1.079	2.373	4.437
	Sesgo	0.007	-0.002	-0.017	-0.021	0.373	0.337
	ECM	0.013	0.014	0.009	1.688	1.811	1.750
	SD	0.114	0.121	0.099	1.187	1.181	1.171
100	Media	0.090	-0.742	0.396	1.094	2.270	4.329
	Sesgo	-0.010	0.008	-0.004	-0.006	0.270	0.229
	ECM	0.005	0.006	0.005	0.735	0.965	0.890
	SD	0.073	0.080	0.066	0.878	0.883	0.879
200	Media	-0.751	0.398	0.095	1.079	2.118	4.212
	Sesgo	-0.001	-0.002	-0.005	-0.021	0.118	0.112
	ECM	0.003	0.002	0.002	0.509	0.473	0.465
	SD	0.052	0.056	0.047	0.682	0.667	0.670

En la estimación bayesiana del modelo VAR(2) para $\tau_{0.5}$, se observa una mejora sistemática en el desempeño de las estimaciones a medida que crece el tamaño muestral ($T = 50, 100, 200$). En general, los sesgos son pequeños y decrecen con T , mientras que el ECM y la desviación estándar disminuyen de forma consistente para todos los coeficientes.

Respecto a los interceptos $b_{10} = 1.10$, $b_{20} = 2.00$ y $b_{30} = 4.10$, se observa un sesgo más marcado,

aunque este disminuye progresivamente a medida que aumenta T . No obstante, incluso con $T = 200$, los interceptos aún presentan un leve sesgo, lo que sugiere una mayor variabilidad relativa en su estimación en comparación con los coeficientes autorregresivos.

4.3. Análisis de simulación con errores correlacionados

En esta sección se analiza el desempeño del modelo QVAR bajo escenarios en los que se incorpora correlación entre las componentes del término de error. Este planteamiento amplía el enfoque considerado previamente para errores no correlacionados, permitiendo evaluar la capacidad del modelo para capturar relaciones dinámicas y dependencias cruzadas entre las series. La configuración de los procesos VAR se mantiene similar a la utilizada en la sección anterior, garantizando la estacionariedad del sistema y la coherencia con los vectores cuantiles. La estructura del análisis retoma y complementa lo expuesto en el trabajo de Iacopini et al. [4], que aborda de manera conjunta la regresión cuantilica multivariada con errores correlacionados mediante un modelo bayesiano basado en procesos dependientes. De forma general, la evaluación se organiza en etapas que van desde una exploración preliminar con una única muestra, hasta análisis más exhaustivos con múltiples réplicas, permitiendo así una caracterización completa del desempeño del estimador bajo distintas distribuciones y niveles de correlación.

4.3.1. Evaluación inicial del estimador

En esta subsección se evalúa el modelo VAR(1) y VAR(2) bajo el enfoque de Iacopini et al. [4], que asume una estructura específica para la matriz de correlación Σ que captura la dependencia entre los errores. Para ello, se ajusta una única muestra generada bajo dicha estructura. Inicialmente, se asumió que la matriz de escala Σ seguía una distribución a priori Wishart inversa, siguiendo dicha metodología. Sin embargo, esta elección presentó desafíos importantes al momento de ejecutar las simulaciones tanto en JAGS como en Stan.

En JAGS, la implementación generó un error crítico relacionado con la imposibilidad de asignar un sampler adecuado a la matriz inversa de correlación. Esto evidenció limitaciones del entorno JAGS al trabajar con la distribución de Wishart inversa para matrices de covarianza en configuraciones complejas como las planteadas en este estudio.

Por otro lado, en Stan, si bien la implementación del modelo fue posible, surgieron problemas significativos en el proceso de convergencia y en la calidad de las estimaciones obtenidas. Las trazas de los parámetros mostraron un comportamiento errático, los valores de \hat{R} resultaron muy elevados y los diagnósticos de convergencia indicaron que las cadenas no lograban estabilizarse. Además, el

algoritmo de No-U-Turn Sampler (NUTS) enfrentó dificultades relacionadas con el parámetro de profundidad máxima (maxtreedepth), lo que limitó aún más la eficiencia del muestreo.

Ante estas limitaciones prácticas en la implementación estándar, se optó por una estrategia alternativa de modelado. En particular, se reparametrizó la matriz de correlación utilizando el enfoque propuesto por Bhat y Mondal [1]. Este enfoque introduce una parametrización alternativa, conocida como reparametrización radial, que garantiza que la matriz de correlación sea definida positiva, lo cual es un requisito fundamental en modelos multivariados.

Al implementar esta reparametrización, tanto en JAGS como en Stan, se obtuvieron resultados aceptables para el modelo VAR(1). Las trazas de los parámetros mostraron un comportamiento estable, los valores de \hat{R} indicaron convergencia adecuada en Stan y los diagnósticos de Gelman-Rubin y Heidelberg-Welch se superaron exitosamente en todos los parámetros analizados. Esto sugiere que la reparametrización radial es una alternativa viable para modelar la matriz de correlación en este tipo de configuraciones.

Sin embargo, en el caso del modelo VAR(2), aunque la implementación también fue posible, se observó un incremento significativo en la demanda computacional. La mayor complejidad del modelo generó un tiempo de simulación más elevado, lo cual podría estar relacionado con el aumento en el número de parámetros y con la estructura de la matriz de correlación. A pesar de este desafío, Los resultados preliminares indican que, pese al aumento en la complejidad, la reparametrización radial sigue siendo una alternativa viable para abordar problemas de dependencia entre errores en modelos VAR cuantílicos multivariados.

Las suposiciones de las distribuciones a priori sobre los coeficientes de las matrices autorregresivas y del término de intercepto siguen siendo las mismas: $b \sim \mathcal{N}(0, 10)$. En cuanto a la matriz diagonal D que contiene las escalas $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{33})$, se ha considerado que Σ_{ii} tiene una distribución Gamma(1, 1).

En los siguientes dos escenarios, asumiremos que los errores ε_t siguen una distribución MAL cuyas componentes son dependientes. Para evaluar el impacto de distintos niveles de correlación en las estimaciones de los cuantiles, se considerarán dos configuraciones para la matriz de correlación Ψ : una con correlación débil (0.3) entre todas las componentes, y otra con una correlación fuerte (0.8). Estas configuraciones permiten analizar el desempeño del modelo bajo escenarios de dependencia débil y fuerte entre los errores.

Se consideraron los vectores de cuantiles $\tau_{0.1} = (0.1, 0.1, 0.1)^\top$, $\tau_{0.5} = (0.5, 0.5, 0.5)^\top$ y $\tau_{0.9} = (0.9, 0.9, 0.9)^\top$, lo que permite evaluar el comportamiento del modelo en los extremos y en el centro de la distribución condicional. Para cada escenario, se evalúa el desempeño del modelo considerando las respectivas estructuras VAR(1) o VAR(2), con diferentes niveles de correlación entre

las componentes del error ε_t .

Escenario I: Caso VAR(1) con correlación débil

En este primer escenario, se asume que las componentes del término de error ε_t tienen una correlación moderada, representada mediante una matriz de correlación Ψ con elementos fuera de la diagonal iguales a 0.3. El modelo VAR(1) considerado es:

$$\mathbf{y}_t = B_0 + B_1\mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t$$

El valor verdadero de B_0 y B_1

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1.18 \\ 2.20 \\ 0.85 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0.70 & 0.10 & 0.05 \\ 0.20 & 0.60 & 0.10 \\ 0.10 & 0.20 & 0.50 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Escenario II: Caso VAR(1) con correlación fuerte

En el segundo escenario, se incrementa la correlación entre las componentes del error ε_t . En este caso, la matriz de correlación Ψ presenta elementos fuera de la diagonal iguales a 0.8, lo que representa una dependencia más fuerte entre las variables. El modelo VAR(1) adoptado tiene la misma estructura:

$$\mathbf{y}_t = B_0 + B_1\mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t$$

Además, en ambos escenarios se considera la matriz $D = I_3$.

Escenario III: Caso VAR(2) con correlación débil:

En este tercer escenario se evalúa un modelo VAR(2), incorporando una estructura más compleja que incluye dos retardos. Se asume que las componentes del error ε_t presentan una correlación moderada, representada por una matriz Ψ con elementos fuera de la diagonal iguales a 0.3. El modelo VAR(2) considerado es:

$$\mathbf{y}_t = B_0 + B_1\mathbf{y}_{t-1} + B_2\mathbf{y}_{t-2} + \varepsilon_t$$

donde:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 3.1 \\ 2.5 \\ 1.85 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0.30 & 0.30 & 0.20 \\ 0.10 & 0.20 & 0.15 \\ 0.0 & 0.10 & 0.20 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0.12 & 0.10 & 0.01 \\ 0.05 & 0.20 & 0.10 \\ 0.01 & 0.0 & 0.10 \end{pmatrix}$$

Escenario IV: VAR(2) con correlación fuerte

En este cuarto escenario se mantiene la misma estructura del modelo VAR(2) descrita en el escenario anterior, pero se incrementa la correlación entre las componentes del término de error ε_t . La matriz de correlación Ψ ahora presenta elementos fuera de la diagonal iguales a 0.8, reflejando una dependencia fuerte entre los componentes. Se utilizan los mismos valores para B_0 , B_1 y B_2 definidos previamente.

Resultados del estudio de simulación para el modelo VAR(1)

Los resultados obtenidos para los distintos niveles de correlación en la estructura de errores se resumen en los Cuadros 4.27, 4.28 y 4.29 para el caso de correlación débil, y en los Cuadros 4.30, 4.31 y 4.32 para el caso de correlación fuerte. A partir de estos cuadros, se identifican patrones diferenciados en la capacidad de recuperación de los parámetros teóricos según el nivel de correlación asumido.

En el escenario de correlación débil (0.3), se observa que las medias de las distribuciones de los coeficientes autorregresivos muestran una adecuada proximidad a los valores teóricos, particularmente para los cuantiles centrales ($\tau_{0.5}$). Los intervalos de credibilidad al 90 % contienen los valores teóricos en todos los casos con excepción de Ψ_{13} con $\tau_{0.1}$.

Respecto a los interceptos (b_{10} , b_{20} , b_{30}), en el caso de correlación débil se observa un comportamiento diferenciado según el cuantil estimado. Para $\tau_{0.5}$, las estimaciones muestran una relativa cercanía a los valores teóricos, aunque con cierta sobreestimación y que el intervalo de b_{30} no contiene al valor teórico. Mientras, que en los cuantiles extremos ($\tau_{0.1}$ y $\tau_{0.9}$), los interceptos presentan mayor variabilidad, con intervalos de credibilidad amplios, pero que incluyen los valores teóricos.

En contraste, el escenario de alta correlación (0.8) muestra desviaciones más pronunciadas entre las estimaciones y los valores teóricos, tanto en los coeficientes autorregresivos como en los interceptos. Los coeficientes de la matriz B_1 presentan diferencias medias de hasta 0.14 unidades en parámetros como b_{11} y b_{32} que es en el caso $\tau_{0.9}$, superiores a las observadas en el caso de correlación débil. Respecto a la correlación en el caso $\tau_{0.1}$ se observa una mayor proximidad a los valores teóricos comparados con el caso de correlación débil.

En cuanto a los interceptos bajo alta correlación, se observan sesgos más marcados, especialmente en $\tau_{0.1}$ el cual presentan sobreestimaciones significativas. Pero, los intervalos de credibilidad contienen a los valores teóricos.

Cuadro 4.27*Resultado del modelo VAR(1) ajustado bajo correlación débil para $\tau_{0.1}$.*

Parámetro	Teórico	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess_bulk	Ess_tail
b_{11}^1	0.70	0.72	0.72	0.04	0.66	0.77	1.00	49796.41	55459.69
b_{12}^1	0.10	0.11	0.11	0.04	0.05	0.18	1.00	64321.57	74378.54
b_{13}^1	0.05	0.02	0.02	0.04	-0.05	0.08	1.00	72373.25	76964.74
b_{21}^1	0.20	0.27	0.27	0.03	0.21	0.32	1.00	48663.89	62603.19
b_{22}^1	0.60	0.56	0.56	0.04	0.49	0.62	1.00	68613.42	72259.45
b_{23}^1	0.10	0.05	0.05	0.04	-0.01	0.12	1.00	61674.89	71003.27
b_{31}^1	0.10	0.13	0.13	0.03	0.07	0.18	1.00	46081.83	66071.01
b_{32}^1	0.20	0.19	0.19	0.04	0.13	0.25	1.00	76363.85	74956.90
b_{33}^1	0.50	0.48	0.48	0.04	0.41	0.55	1.00	47522.10	65465.00
b_{10}	1.18	1.37	1.37	0.87	-0.05	2.81	1.00	55971.64	72642.07
b_{20}	2.20	3.83	3.83	0.80	2.51	5.14	1.00	60069.53	69828.48
b_{30}	0.85	1.14	1.16	0.78	-0.18	2.37	1.00	58685.92	69166.26
Ψ_{12}	0.30	0.27	0.27	0.08	0.14	0.39	1.00	39769.21	61260.22
Ψ_{13}	0.30	0.16	0.16	0.09	0.01	0.29	1.00	34372.12	62142.77
Ψ_{23}	0.30	0.27	0.28	0.08	0.14	0.40	1.00	37088.25	63805.50

Cuadro 4.28*Resultado del modelo VAR(1) ajustado bajo correlación débil para $\tau_{0.5}$.*

Parámetro	Teórico	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess_bulk	Ess_tail
b_{11}^1	0.70	0.66	0.66	0.04	0.60	0.73	1.00	55136.18	75550.61
b_{12}^1	0.10	0.11	0.11	0.04	0.05	0.18	1.00	46473.09	56978.61
b_{13}^1	0.05	0.05	0.05	0.06	-0.04	0.15	1.00	39888.33	53785.99
b_{21}^1	0.20	0.18	0.18	0.04	0.10	0.25	1.00	45609.86	65027.52
b_{22}^1	0.60	0.62	0.62	0.04	0.55	0.69	1.00	50473.19	67374.58
b_{23}^1	0.10	0.03	0.03	0.05	-0.06	0.11	1.00	45571.97	71747.68
b_{31}^1	0.10	0.14	0.13	0.04	0.07	0.20	1.00	50755.66	66129.42
b_{32}^1	0.20	0.16	0.16	0.04	0.09	0.22	1.00	57129.20	73968.68
b_{33}^1	0.50	0.42	0.42	0.05	0.34	0.50	1.00	62978.77	73897.06
b_{10}	1.18	1.28	1.29	0.29	0.79	1.74	1.00	58548.71	71596.30
b_{20}	2.20	2.65	2.68	0.32	2.10	3.13	1.00	51417.92	69957.54
b_{30}	0.85	1.53	1.52	0.32	1.01	2.06	1.00	45696.67	63782.81
Ψ_{12}	0.30	0.34	0.35	0.06	0.24	0.45	1.00	92103.76	82639.57
Ψ_{13}	0.30	0.35	0.35	0.06	0.24	0.45	1.00	92489.59	79833.33
Ψ_{23}	0.30	0.29	0.29	0.07	0.18	0.39	1.00	100866.18	82949.93

Cuadro 4.29*Resultado deL modelo VAR(1) ajustado bajo correlación debil para $\tau_{0.9}$.*

Parámetro	Teórico	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess_bulk	Ess_tail
b_{11}^1	0.70	0.74	0.74	0.04	0.68	0.80	1.00	52297.97	69761.26
b_{12}^1	0.10	0.08	0.08	0.04	0.02	0.15	1.00	53244.85	66121.60
b_{13}^1	0.05	0.03	0.03	0.05	-0.05	0.11	1.00	43109.58	57535.15
b_{21}^1	0.20	0.19	0.19	0.03	0.13	0.25	1.00	51921.02	69613.11
b_{22}^1	0.60	0.56	0.56	0.04	0.49	0.63	1.00	42197.15	62369.29
b_{23}^1	0.10	0.16	0.16	0.05	0.08	0.24	1.00	37934.19	51067.90
b_{31}^1	0.10	0.09	0.09	0.04	0.03	0.15	1.00	50563.63	71168.19
b_{32}^1	0.20	0.21	0.21	0.04	0.14	0.28	1.00	46437.26	63386.23
b_{33}^1	0.50	0.49	0.49	0.05	0.41	0.57	1.00	39627.67	55917.34
b_{10}	1.18	1.69	1.66	0.81	0.41	3.08	1.00	29872.12	56028.25
b_{20}	2.20	2.44	2.43	0.73	1.28	3.67	1.00	32010.02	60089.18
b_{30}	0.85	0.56	0.54	0.77	-0.69	1.85	1.00	31275.14	58756.39
Ψ_{12}	0.30	0.27	0.28	0.08	0.13	0.40	1.00	33125.66	59351.62
Ψ_{13}	0.30	0.32	0.32	0.08	0.19	0.44	1.00	34493.55	59630.69
Ψ_{23}	0.30	0.32	0.33	0.08	0.19	0.44	1.00	35065.93	59669.94

Cuadro 4.30*Resultado deL modelo VAR(1) ajustado bajo correlación fuerte para $\tau_{0.1}$.*

Parámetro	Teórico	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess_bulk	Ess_tail
b_{11}^1	0.70	0.67	0.67	0.07	0.55	0.78	1.00	58972.46	72124.68
b_{12}^1	0.10	0.16	0.16	0.08	0.03	0.28	1.00	44418.01	63927.09
b_{13}^1	0.05	-0.00	-0.00	0.08	-0.13	0.12	1.00	47701.41	64625.13
b_{21}^1	0.20	0.15	0.15	0.07	0.03	0.26	1.00	54984.66	66901.58
b_{22}^1	0.60	0.69	0.69	0.08	0.55	0.82	1.00	40491.56	62617.78
b_{23}^1	0.10	0.04	0.04	0.08	-0.09	0.16	1.00	46460.72	62426.15
b_{31}^1	0.10	0.03	0.03	0.07	-0.09	0.14	1.00	57898.96	69378.96
b_{32}^1	0.20	0.26	0.27	0.08	0.13	0.39	1.00	43479.32	64178.43
b_{33}^1	0.50	0.48	0.48	0.07	0.36	0.60	1.00	50002.88	63416.51
b_{10}	1.18	2.24	2.17	1.01	0.71	4.02	1.00	30465.59	49017.80
b_{20}	2.20	3.07	3.02	0.92	1.64	4.67	1.00	32137.58	54640.69
b_{30}	0.85	2.17	2.12	1.03	0.56	3.94	1.00	29669.72	36033.48
Ψ_{12}	0.80	0.82	0.82	0.02	0.78	0.86	1.00	51975.39	73149.62
Ψ_{13}	0.80	0.82	0.82	0.02	0.78	0.85	1.00	51639.96	70844.16
Ψ_{23}	0.80	0.83	0.83	0.02	0.79	0.86	1.00	55428.11	70472.96

Cuadro 4.31*Resultado de L modelo VAR(1) ajustado bajo correlación fuerte para $\tau_{0.5}$.*

Parámetro	Teórico	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess_bulk	Ess_tail
b_{11}^1	0.70	0.69	0.69	0.07	0.57	0.80	1.00	43183.89	72296.15
b_{12}^1	0.10	0.07	0.07	0.06	-0.04	0.17	1.00	51731.84	67016.95
b_{13}^1	0.05	0.11	0.11	0.07	-0.01	0.23	1.00	52822.97	65373.84
b_{21}^1	0.20	0.09	0.09	0.06	-0.01	0.19	1.00	62951.76	68182.74
b_{22}^1	0.60	0.63	0.63	0.06	0.54	0.72	1.00	58920.40	68206.26
b_{23}^1	0.10	0.17	0.18	0.07	0.06	0.28	1.00	56533.24	66210.21
b_{31}^1	0.10	0.07	0.07	0.06	-0.03	0.18	1.00	61912.38	73179.38
b_{32}^1	0.20	0.17	0.17	0.06	0.07	0.26	1.00	59017.60	68205.72
b_{33}^1	0.50	0.55	0.55	0.07	0.44	0.67	1.00	56301.08	66170.77
b_{10}	1.18	1.05	1.05	0.27	0.61	1.48	1.00	50716.69	39628.43
b_{20}	2.20	2.12	2.11	0.22	1.76	2.48	1.00	61399.11	77551.51
b_{30}	0.85	0.92	0.92	0.23	0.54	1.31	1.00	56963.91	43331.77
Ψ_{12}	0.80	0.79	0.80	0.03	0.75	0.84	1.00	93028.37	82628.37
Ψ_{13}	0.80	0.81	0.81	0.03	0.76	0.85	1.00	74148.80	24614.34
Ψ_{23}	0.80	0.79	0.80	0.03	0.75	0.84	1.00	84961.34	84584.47

Cuadro 4.32*Resultado de L modelo VAR(1) ajustado bajo correlación fuerte para $\tau_{0.9}$.*

Parámetro	Teórico	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess_bulk	Ess_tail
b_{11}^1	0.70	0.56	0.56	0.09	0.40	0.71	1.00	25588.47	37985.22
b_{12}^1	0.10	0.24	0.24	0.08	0.13	0.38	1.00	26151.46	33182.61
b_{13}^1	0.05	0.03	0.03	0.09	-0.12	0.17	1.00	24785.36	39256.24
b_{21}^1	0.20	0.16	0.16	0.09	0.01	0.30	1.00	27519.97	43192.20
b_{22}^1	0.60	0.71	0.71	0.07	0.60	0.83	1.00	31143.31	39744.83
b_{23}^1	0.10	0.01	0.02	0.09	-0.14	0.16	1.00	26835.84	39858.84
b_{31}^1	0.10	-0.00	-0.00	0.09	-0.16	0.15	1.00	25412.25	32376.87
b_{32}^1	0.20	0.34	0.33	0.07	0.23	0.47	1.00	27825.50	36212.64
b_{33}^1	0.50	0.45	0.45	0.09	0.29	0.60	1.00	26466.75	38157.04
b_{10}	1.18	0.47	0.48	0.46	-0.32	1.20	1.00	33281.31	48947.29
b_{20}	2.20	1.58	1.58	0.47	0.79	2.35	1.00	31595.74	46560.76
b_{30}	0.85	0.39	0.40	0.48	-0.40	1.16	1.00	31210.57	49426.89
Ψ_{12}	0.80	0.81	0.81	0.02	0.76	0.84	1.00	34992.22	66226.30
Ψ_{13}	0.80	0.82	0.82	0.02	0.78	0.85	1.00	17611.90	7964.36
Ψ_{23}	0.80	0.80	0.80	0.03	0.76	0.84	1.00	15098.20	8034.34

Resultados del estudio de simulación para el modelo VAR(2)

Los resultados presentados corresponden a la estimación de los vectores cuantiles para un modelo VAR(2) bajo dos escenarios de correlación: fuerte y débil. En términos generales, se observa que las medias posteriores de los parámetros muestran discrepancias variables respecto a los valores teóricos, aunque en todos los casos los intervalos de credibilidad contienen los valores verdaderos.

En el caso de correlación débil (Cuadros 4.33 a 4.35), las estimaciones muestran una mayor variabilidad, particularmente en el intercepto b_{30} donde la media posterior difiere significativamente del teóricos. Los elementos fuera de la diagonal de la matriz de correlación ($\Psi_{1,2}$, $\Psi_{1,3}$, $\Psi_{2,3}$) muestran estimaciones cercanas a los teóricos, aunque con mayor subestimación en $\tau_{0,5}$.

Para el escenario de correlación fuerte (Cuadros 4.36 a 4.38), los coeficientes autoregresivos presentan una ligera mayor precisión en la estimación, especialmente para $\tau_{0,5}$, donde las medias posteriores se acercan más a los valores esperados. Sin embargo, para los cuantiles extremos se detectan desviaciones más marcadas. Esto podría reflejar una mayor sensibilidad del modelo en los cuantiles extremos debido a la asimetría de la distribución de errores. Los interceptos exhiben un comportamiento heterogéneo, cuyas medias posteriores tienden a sobrestimar los valores teóricos, mientras que en correlación débil las discrepancias son ligeramente menos pronunciadas. Respecto a los elementos no diagonales de la matriz de correlación las medias son cercanas a los valores teóricos con intervalos de credibilidad estrechos.

El modelo demuestra ser efectivo para recuperar los parámetros teóricos dentro de los intervalos de credibilidad, aunque con diferencias notables en la precisión puntual según el cuantil y el nivel de correlación. Las mayores discrepancias se observan en los interceptos y en los cuantiles extremos, donde la asimetría de los errores parece influir en la estimación.

Cuadro 4.33*Resultados del modelo VAR(2) para $\tau_{0,1}$ con correlación débil.*

Parámetro	Teórico	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess_bulk	Ess_tail
b_{11}^1	0.30	0.25	0.25	0.05	0.17	0.33	1.00	26807.34	48840.02
b_{12}^1	0.30	0.34	0.34	0.05	0.26	0.43	1.00	17730.99	6631.92
b_{13}^1	0.20	0.20	0.20	0.05	0.12	0.28	1.00	36214.35	52680.47
b_{21}^1	0.10	0.09	0.09	0.05	0.00	0.17	1.00	19707.57	40168.68
b_{22}^1	0.20	0.26	0.26	0.06	0.17	0.36	1.00	15714.71	36971.39
b_{23}^1	0.15	0.07	0.07	0.05	-0.01	0.15	1.00	34461.30	51227.55
b_{31}^1	0.00	-0.02	-0.02	0.04	-0.09	0.05	1.00	9174.49	43994.32
b_{32}^1	0.10	0.17	0.17	0.05	0.09	0.25	1.00	20583.16	52182.16
b_{33}^1	0.20	0.13	0.13	0.05	0.05	0.21	1.00	28089.41	60491.92
b_{11}^2	0.12	0.14	0.14	0.04	0.08	0.20	1.00	30603.00	62253.25
b_{12}^2	0.10	0.10	0.10	0.04	0.03	0.17	1.00	36462.94	59982.62
b_{13}^2	0.01	-0.01	-0.01	0.04	-0.08	0.05	1.00	34164.70	53015.71
b_{21}^2	0.05	0.02	0.02	0.04	-0.04	0.08	1.00	9521.00	55929.91
b_{22}^2	0.20	0.20	0.20	0.05	0.13	0.28	1.00	6630.45	1223.24
b_{23}^2	0.10	0.14	0.14	0.03	0.08	0.19	1.00	34538.44	57245.02
b_{31}^2	0.01	-0.04	-0.04	0.04	-0.10	0.02	1.00	29040.94	55091.73
b_{32}^2	0.00	0.01	0.01	0.04	-0.06	0.07	1.00	54051.60	67509.11
b_{33}^2	0.10	0.14	0.14	0.04	0.08	0.20	1.00	35375.17	55111.56
b_{10}	3.10	3.10	3.09	0.87	1.70	4.56	1.00	33455.11	48314.95
b_{20}	2.50	2.72	2.74	0.83	1.33	4.05	1.00	29046.95	57272.54
b_{30}	1.85	3.19	3.18	0.84	1.82	4.56	1.00	24344.21	60601.35
Ψ_{12}	0.30	0.26	0.26	0.09	0.11	0.39	1.00	24634.90	46251.33
Ψ_{13}	0.30	0.25	0.25	0.09	0.10	0.39	1.00	17146.75	36894.56
Ψ_{23}	0.30	0.35	0.35	0.08	0.21	0.47	1.00	22224.74	48862.92

Cuadro 4.34*Resultados del modelo VAR(2) para $\tau_{0.5}$ con correlación débil.*

Parámetro	Teórico	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess_bulk	Ess_tail
b_{11}^1	0.30	0.24	0.24	0.04	0.17	0.31	1.00	46372.90	19465.80
b_{12}^1	0.30	0.33	0.33	0.04	0.25	0.40	1.00	60234.84	74680.19
b_{13}^1	0.20	0.21	0.21	0.06	0.12	0.30	1.00	56415.68	63745.04
b_{21}^1	0.10	0.10	0.10	0.04	0.02	0.17	1.00	30796.61	19970.94
b_{22}^1	0.20	0.20	0.20	0.05	0.12	0.28	1.00	39835.35	58387.56
b_{23}^1	0.15	0.05	0.06	0.06	-0.04	0.15	1.00	40222.28	31034.22
b_{31}^1	0.00	-0.03	-0.03	0.04	-0.09	0.02	1.00	40485.75	18948.68
b_{32}^1	0.10	0.08	0.08	0.04	0.01	0.14	1.00	44212.53	21079.36
b_{33}^1	0.20	0.14	0.14	0.05	0.07	0.22	1.00	43307.94	19167.93
b_{11}^2	0.12	0.14	0.14	0.04	0.07	0.21	1.00	44354.71	66219.01
b_{12}^2	0.10	0.14	0.14	0.05	0.06	0.22	1.00	50389.61	69878.35
b_{13}^2	0.01	-0.01	-0.01	0.05	-0.08	0.07	1.00	53851.88	52689.25
b_{21}^2	0.05	0.05	0.05	0.04	-0.01	0.11	1.00	44904.85	18836.69
b_{22}^2	0.20	0.24	0.24	0.04	0.17	0.31	1.00	44535.46	28256.65
b_{23}^2	0.10	0.13	0.13	0.04	0.06	0.19	1.00	44306.86	42412.32
b_{31}^2	0.01	-0.01	-0.01	0.03	-0.07	0.05	1.00	35553.99	18881.31
b_{32}^2	0.00	-0.00	-0.00	0.04	-0.07	0.07	1.00	39425.03	23422.20
b_{33}^2	0.10	0.12	0.12	0.04	0.06	0.19	1.00	45682.33	42242.50
b_{10}	3.10	3.07	3.07	0.47	2.29	3.85	1.00	56494.12	65175.53
b_{20}	2.50	2.37	2.36	0.47	1.59	3.15	1.00	34303.28	49359.74
b_{30}	1.85	2.86	2.86	0.39	2.22	3.51	1.00	44018.37	19483.95
Ψ_{12}	0.30	0.24	0.24	0.07	0.12	0.35	1.00	73201.54	60642.80
Ψ_{13}	0.30	0.19	0.19	0.07	0.07	0.31	1.00	84031.00	72144.56
Ψ_{23}	0.30	0.19	0.19	0.07	0.07	0.31	1.00	72956.89	46034.47

Cuadro 4.35*Resultados del modelo VAR(2) para $\tau_{0,9}$ con correlación débil.*

Parámetro	Teórico	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess_bulk	Ess_tail
b_{11}^1	0.30	0.30	0.30	0.05	0.23	0.38	1.00	33344.27	53341.59
b_{12}^1	0.30	0.28	0.28	0.06	0.17	0.38	1.00	31153.56	50243.19
b_{13}^1	0.20	0.19	0.19	0.05	0.11	0.28	1.00	47285.87	64040.29
b_{21}^1	0.10	0.15	0.15	0.04	0.08	0.23	1.00	35430.73	61403.54
b_{22}^1	0.20	0.17	0.17	0.05	0.09	0.25	1.00	36171.70	55815.20
b_{23}^1	0.15	0.11	0.11	0.05	0.02	0.19	1.00	46155.09	62376.05
b_{31}^1	0.00	0.06	0.05	0.04	-0.01	0.13	1.00	33534.86	50949.83
b_{32}^1	0.10	0.08	0.08	0.05	-0.01	0.17	1.00	33188.67	48082.38
b_{33}^1	0.20	0.15	0.15	0.05	0.07	0.23	1.00	45898.54	42384.92
b_{11}^2	0.12	0.12	0.12	0.04	0.05	0.19	1.00	28034.16	62066.33
b_{12}^2	0.10	0.13	0.13	0.05	0.04	0.21	1.00	17197.51	50446.76
b_{13}^2	0.01	0.02	0.02	0.04	-0.05	0.09	1.00	27885.24	42995.46
b_{21}^2	0.05	0.04	0.04	0.04	-0.03	0.10	1.00	23507.79	19267.27
b_{22}^2	0.20	0.20	0.20	0.05	0.12	0.27	1.00	39623.51	60628.71
b_{23}^2	0.10	0.10	0.10	0.04	0.04	0.16	1.00	39424.01	47463.98
b_{31}^2	0.01	-0.01	-0.01	0.04	-0.08	0.05	1.00	27417.64	17277.78
b_{32}^2	0.00	0.02	0.02	0.05	-0.06	0.09	1.00	25326.64	56108.55
b_{33}^2	0.10	0.10	0.10	0.04	0.04	0.16	1.00	30620.29	47501.26
b_{10}	3.10	3.57	3.58	0.57	2.61	4.48	1.00	37749.64	49894.55
b_{20}	2.50	2.25	2.23	0.55	1.39	3.19	1.00	38314.00	63355.12
b_{30}	1.85	1.96	1.97	0.50	1.12	2.78	1.00	43462.40	58953.76
Ψ_{12}	0.30	0.27	0.28	0.08	0.13	0.40	1.00	14249.71	19070.19
Ψ_{13}	0.30	0.30	0.30	0.08	0.16	0.42	1.00	21039.64	24953.15
Ψ_{23}	0.30	0.35	0.35	0.08	0.22	0.46	1.00	22532.14	20185.66

Cuadro 4.36*Resultado del modelo VAR(2) para $\tau_{0,1}$ con correlación fuerte.*

Parámetro	Teórico	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess_bulk	Ess_tail
b_{11}^1	0.30	0.20	0.20	0.11	0.03	0.39	1.00	25790.43	46635.41
b_{12}^1	0.30	0.35	0.35	0.10	0.20	0.51	1.00	1594.79	10709.41
b_{13}^1	0.20	0.21	0.21	0.11	0.02	0.39	1.00	1318.63	13603.40
b_{21}^1	0.10	0.02	0.02	0.11	-0.16	0.21	1.01	26033.79	42975.50
b_{22}^1	0.20	0.30	0.30	0.10	0.13	0.47	1.00	23142.98	43523.71
b_{23}^1	0.15	0.09	0.09	0.11	-0.09	0.27	1.00	17318.48	27348.98
b_{31}^1	0.00	-0.06	-0.06	0.10	-0.23	0.11	1.00	27235.59	42566.86
b_{32}^1	0.10	0.18	0.18	0.10	0.02	0.34	1.00	17949.07	47319.21
b_{33}^1	0.20	0.14	0.14	0.11	-0.04	0.32	1.00	17418.00	28425.64
b_{11}^2	0.12	0.15	0.15	0.08	0.01	0.28	1.00	2721.68	29271.85
b_{12}^2	0.10	0.14	0.14	0.08	0.00	0.28	1.00	36441.89	49420.76
b_{13}^2	0.01	-0.04	-0.04	0.05	-0.13	0.05	1.00	30138.56	48689.46
b_{21}^2	0.05	0.03	0.03	0.08	-0.10	0.16	1.00	25286.99	32527.57
b_{22}^2	0.20	0.25	0.25	0.08	0.11	0.38	1.00	27896.69	35949.22
b_{23}^2	0.10	0.08	0.08	0.05	-0.01	0.17	1.00	27265.91	48929.40
b_{31}^2	0.01	-0.01	-0.02	0.08	-0.15	0.12	1.00	17428.90	31610.66
b_{32}^2	0.00	0.04	0.04	0.08	-0.09	0.17	1.00	2311.78	43410.66
b_{33}^2	0.10	0.07	0.07	0.05	-0.02	0.16	1.00	21620.66	42330.33
b_{10}	3.10	3.36	3.33	0.92	1.89	4.90	1.00	18808.15	14920.11
b_{20}	2.50	2.89	2.85	0.92	1.40	4.44	1.00	25601.72	15364.79
b_{30}	1.85	2.91	2.87	0.90	1.47	4.42	1.00	20221.29	15643.28
$\Psi_{1,2}$	0.80	0.83	0.83	0.02	0.79	0.86	1.00	10204.55	53596.75
$\Psi_{1,3}$	0.80	0.83	0.83	0.02	0.79	0.86	1.00	938.31	8952.45
$\Psi_{2,3}$	0.80	0.84	0.84	0.02	0.80	0.87	1.00	1314.17	5871.48

Cuadro 4.37*Resultados del modelo VAR(2) para $\tau_{0.5}$ con correlación fuerte.*

Parámetro	Teórico	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess_bulk	Ess_tail
b_{11}^1	0.30	0.22	0.22	0.07	0.10	0.33	1.00	42961.38	62479.49
b_{12}^1	0.30	0.32	0.32	0.07	0.19	0.44	1.00	42500.03	62754.50
b_{13}^1	0.20	0.23	0.23	0.09	0.08	0.37	1.00	41642.15	56982.88
b_{21}^1	0.10	0.09	0.09	0.08	-0.04	0.21	1.00	35393.27	55332.42
b_{22}^1	0.20	0.22	0.22	0.07	0.10	0.34	1.00	38303.67	58235.34
b_{23}^1	0.15	0.09	0.09	0.09	-0.05	0.23	1.00	41097.19	62763.86
b_{31}^1	0.00	-0.01	-0.01	0.07	-0.13	0.09	1.00	38023.69	50757.40
b_{32}^1	0.10	0.11	0.11	0.07	-0.00	0.21	1.00	38423.48	48078.06
b_{33}^1	0.20	0.12	0.12	0.07	0.00	0.24	1.00	47269.24	61333.37
b_{11}^2	0.12	0.12	0.12	0.08	-0.00	0.25	1.00	32489.65	51351.14
b_{12}^2	0.10	0.20	0.20	0.09	0.05	0.34	1.00	34493.27	56543.14
b_{13}^2	0.01	-0.05	-0.05	0.06	-0.14	0.05	1.00	45182.84	57050.36
b_{21}^2	0.05	0.00	0.00	0.07	-0.10	0.12	1.00	26288.10	11655.56
b_{22}^2	0.20	0.30	0.30	0.07	0.18	0.42	1.00	26298.88	11366.42
b_{23}^2	0.10	0.08	0.08	0.06	-0.00	0.18	1.00	44336.51	55638.06
b_{31}^2	0.01	-0.01	-0.01	0.06	-0.11	0.10	1.00	35640.00	53022.85
b_{32}^2	0.00	0.03	0.03	0.07	-0.08	0.15	1.00	36004.31	51109.02
b_{33}^2	0.10	0.07	0.07	0.06	-0.02	0.16	1.00	39982.57	47104.93
b_{10}	3.10	3.22	3.22	0.39	2.58	3.85	1.00	51818.85	62809.14
b_{20}	2.50	2.36	2.36	0.39	1.70	2.99	1.00	42645.04	56675.51
b_{30}	1.85	2.28	2.29	0.35	1.69	2.85	1.00	45354.82	59188.72
$\Psi_{1,2}$	0.80	0.80	0.80	0.03	0.75	0.84	1.00	41122.96	15565.54
$\Psi_{1,3}$	0.80	0.80	0.80	0.03	0.76	0.84	1.00	33383.55	12372.43
$\Psi_{2,3}$	0.80	0.78	0.78	0.03	0.73	0.83	1.00	54523.77	30700.72

Cuadro 4.38*Resultados del modelo VAR(2) para $\tau_{0,9}$ con correlación fuerte.*

Parámetro	Teórico	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess_bulk	Ess_tail
b_{11}^1	0.30	0.41	0.41	0.12	0.22	0.62	1.00	11270.87	20240.30
b_{12}^1	0.30	0.16	0.16	0.13	-0.06	0.37	1.00	12154.27	15148.70
b_{13}^1	0.20	0.20	0.20	0.11	0.02	0.38	1.00	30069.53	48198.97
b_{21}^1	0.10	0.24	0.24	0.10	0.07	0.42	1.00	8477.47	2090.09
b_{22}^1	0.20	0.08	0.08	0.11	-0.10	0.26	1.00	5519.50	6427.46
b_{23}^1	0.15	0.10	0.10	0.11	-0.07	0.28	1.00	7097.16	52505.28
b_{31}^1	0.00	0.17	0.17	0.11	-0.01	0.36	1.00	7840.64	1476.22
b_{32}^1	0.10	-0.04	-0.04	0.12	-0.23	0.16	1.00	7657.42	1895.02
b_{33}^1	0.20	0.14	0.14	0.11	-0.04	0.31	1.00	29344.98	49461.71
b_{11}^2	0.12	0.11	0.11	0.08	-0.03	0.23	1.00	20502.30	48476.18
b_{12}^2	0.10	0.13	0.12	0.09	-0.01	0.27	1.00	11181.80	44676.34
b_{13}^2	0.01	0.01	0.01	0.07	-0.10	0.12	1.00	5767.38	39461.67
b_{21}^2	0.05	0.02	0.02	0.08	-0.11	0.14	1.00	3431.98	3441.41
b_{22}^2	0.20	0.22	0.22	0.08	0.09	0.35	1.00	9850.92	10530.57
b_{23}^2	0.10	0.10	0.11	0.06	0.01	0.20	1.00	5123.63	44542.78
b_{31}^2	0.01	-0.01	-0.01	0.08	-0.14	0.12	1.00	8785.09	24649.88
b_{32}^2	0.00	-0.00	-0.01	0.09	-0.15	0.14	1.00	9950.16	5397.06
b_{33}^2	0.10	0.10	0.10	0.06	-0.00	0.20	1.00	2276.20	3428.39
b_{10}	3.10	3.64	3.67	0.57	2.66	4.51	1.00	34628.53	56755.75
b_{20}	2.50	2.72	2.75	0.53	1.82	3.56	1.00	37810.81	54107.09
b_{30}	1.85	2.25	2.27	0.57	1.27	3.14	1.00	35297.44	56089.22
Ψ_{12}	0.80	0.81	0.81	0.02	0.77	0.85	1.00	3833.70	13585.70
Ψ_{13}	0.80	0.83	0.83	0.02	0.79	0.86	1.00	5394.53	65825.10
Ψ_{23}	0.80	0.82	0.82	0.02	0.78	0.85	1.00	3519.84	4378.58

4.3.2. Análisis del desempeño del estimador bajo distintos tamaños de muestra

En este apartado se evalúa el desempeño del estimador bajo distintos tamaños de muestra mediante la realización de 400 réplicas para cada configuración. Debido a la mayor carga computacional que implican las múltiples simulaciones, se ajustaron algunos parámetros del algoritmo de muestreo en Stan en comparación con la configuración utilizada en la subsección anterior, donde se trabajó con una única muestra. En particular, se establecieron $\text{iter_sampling} = 25000$, $\text{iter_warmup} = 15000$ y $\text{adapt_delta} = 0.90$. Ensayos previos mostraron que tanto incrementar como reducir los valores iniciales de iteraciones no impactaba significativamente las estadísticas resumen (media, mediana y desviación estándar) ni el valor de \hat{R} , el cual se mantuvo en 1. Por otro lado, la reducción del parámetro

adapt_delta desde 0.95 a 0.90 no generó problemas en las estadísticas, pero sí se observó un incremento en el número de divergencias durante el muestreo.

Esta parte del análisis se organiza en tres bloques diferenciados, correspondientes a distintas configuraciones del modelo y de los términos de error: primero, se examina el modelo VAR(1) con errores multivariados asimétricos Laplace (MAL); luego, se considera el caso con errores normales y t-Student multivariados; y finalmente, se analiza el modelo VAR(2), en el que se estiman únicamente las medianas. Esta estructura permite evaluar el desempeño del estimador en distintos contextos, bajo variadas formas de dependencia y distribución del error. En todos los casos, se emplean las mismas métricas de evaluación utilizadas en el caso sin correlación —media, desviación estándar, sesgo y error cuadrático medio—, lo que permite realizar comparaciones coherentes entre escenarios.

Estimación de cuantiles en un modelo VAR(1) con errores multivariados asimétricos Laplace

Con el objetivo de cuantificar cómo la correlación entre los errores afecta la precisión y el sesgo en la estimación de los parámetros, se llevaron a cabo 400 réplicas del modelo VAR(1) bajo esta nueva condición. Esta ampliación del estudio permite una comparación directa con el escenario sin correlación, manteniendo constantes las configuraciones de tamaño de muestra y parámetros del algoritmo de muestreo. Para cada réplica y tamaño de muestra ($T = 50$, $T = 100$ y $T = 200$), se calcularon las mismas estadísticas resumen que en el caso de errores no correlacionados, tales como la media, el sesgo y el error cuadrático medio de los estimadores de los parámetros.

El modelo VAR(1) con correlación en los errores se especifica para cada vector de cuantiles $\boldsymbol{\tau}_{0.1} = (0.1, 0.1, 0.1)^\top$, $\boldsymbol{\tau}_{0.5} = (0.5, 0.5, 0.5)^\top$ y $\boldsymbol{\tau}_{0.9} = (0.9, 0.9, 0.9)^\top$ como

$$\mathbf{y}_t = B_0 + B_1 \mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{MAL}_p(\mathbf{0}_p, D\boldsymbol{\theta}_{\tau,1}, D\boldsymbol{\theta}_{\tau,2}\Psi\boldsymbol{\theta}_{\tau,2}D),$$

donde $\boldsymbol{\theta}_{\tau,1}$ y $\boldsymbol{\theta}_{\tau,2}$ dependen del vector de cuantiles considerado.

Los valores verdaderos de los parámetros del modelo son

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0.18 \\ 2.20 \\ 0.55 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0.70 & 0.10 & 0.05 \\ 0.20 & 0.60 & 0.10 \\ 0.10 & 0.20 & 0.50 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.8 \\ 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0.8 & 0.8 & 1 \end{pmatrix},$$

y D corresponde a la matriz identidad. Dado que la correlación entre las componentes del error introduce una mayor complejidad en la estructura del modelo, se analizará si la presencia de esta afecta de manera significativa la precisión de las estimaciones o incrementa la variabilidad de los parámetros estimados.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos para los parámetros de B_0 , B_1 y la matriz de correlación Ψ en el modelo VAR(1) bajo diferentes tamaños de muestra.

En comparación con el caso de no correlación, los coeficientes autorregresivos del modelo VAR(1) mantienen un comportamiento similar en términos de precisión. A medida que el tamaño de la muestra aumenta, el sesgo disminuye y las medias estimadas se acercan a los valores reales. No obstante, los coeficientes de la matriz B_1 muestran un ligero incremento en el error cuadrático medio (ECM) en la mayoría de los casos, excepto en los parámetros b_{11}^1 , b_{22}^1 y b_{33}^1 , donde el ECM es menor que en el caso de no correlación.

En los interceptos, el sesgo es más pronunciado en las muestras pequeñas, especialmente en los parámetros asociados a la segunda y tercera variables. Aun así, el ECM disminuye con tamaños de muestra más grandes y es menor que en el caso de no correlación, lo que refleja una menor variabilidad en las estimaciones.

En cuanto a los parámetros de la matriz de correlación, las estimaciones tienden a subestimar ligeramente los valores reales. Sin embargo, tanto el sesgo como el ECM se reducen conforme aumenta el tamaño de la muestra.

En resumen, la presencia de correlación entre las variables incrementa ligeramente la variabilidad en las estimaciones de los coeficientes autorregresivos, aunque reduce la de los términos constantes. A pesar de esta variabilidad, el modelo mejora su precisión con muestras más grandes, mostrando una convergencia gradual hacia los valores reales.

Cuadro 4.39

Resultados para los parámetros del modelo VAR(1) con $\tau_{0.1}$ y diferentes tamaños de muestra.

T	Resul.	$b_{11}^1 = 0.70$	$b_{12}^1 = 0.10$	$b_{13}^1 = 0.05$	$b_{21}^1 = 0.20$	$b_{22}^1 = 0.60$	$b_{23}^1 = 0.10$
50	Media	0.602	0.102	-0.093	0.167	0.552	-0.056
	Sesgo	-0.098	0.002	-0.143	-0.033	-0.048	-0.156
	ECM	0.336	0.596	0.890	0.558	0.341	0.820
	SD	0.320	0.297	0.320	0.320	0.296	0.319
100	Media	0.669	0.105	0.026	0.193	0.587	0.070
	Sesgo	-0.031	0.005	-0.024	-0.007	-0.013	-0.030
	ECM	0.247	0.519	0.608	0.444	0.251	0.560
	SD	0.142	0.136	0.142	0.142	0.135	0.141
200	Media	0.684	0.108	0.040	0.195	0.599	0.090
	Sesgo	-0.016	0.008	-0.010	-0.005	-0.001	-0.010
	ECM	0.237	0.514	0.584	0.424	0.236	0.534
	SD	0.081	0.077	0.082	0.081	0.077	0.082

Cuadro 4.40

Resultados para los parámetros adicionales del modelo VAR(1) con $\tau_{0,1}$ y diferentes tamaños de muestra.

T	Resul.	$b_{31}^1 = 0.10$	$b_{32}^1 = 0.20$	$b_{33}^1 = 0.50$	$b_{10} = 0.18$	$b_{20} = 2.20$	$b_{30} = 0.55$
50	Media	0.060	0.198	0.301	-7.515	-5.367	-7.029
	Sesgo	-0.040	-0.002	-0.199	-7.695	-7.567	-7.579
	ECM	0.687	0.518	0.469	104.291	73.472	95.091
	SD	0.320	0.296	0.319	2.499	2.481	2.489
100	Media	0.090	0.200	0.459	-1.868	0.182	-1.449
	Sesgo	-0.010	-0.000	-0.041	-2.048	-2.018	-1.999
	ECM	0.534	0.433	0.265	10.585	4.553	8.501
	SD	0.141	0.135	0.141	1.294	1.288	1.290
200	Media	0.093	0.208	0.482	-0.634	1.420	-0.232
	Sesgo	-0.007	0.008	-0.018	-0.814	-0.780	-0.782
	ECM	0.525	0.421	0.259	2.453	1.512	1.601
	SD	0.081	0.077	0.082	0.742	0.744	0.742

Cuadro 4.41

Resultados para los parámetros de la matriz correlación del modelo VAR(1) con $\tau_{0,1}$ y diferentes tamaños de muestra.

T	Resul.	$\Psi_{12} = 0.80$	$\Psi_{13} = 0.80$	$\Psi_{23} = 0.80$
50	Media	0.835	0.833	0.829
	Sesgo	0.035	0.033	0.029
	ECM	0.283	0.280	0.276
	SD	0.053	0.053	0.055
100	Media	0.793	0.791	0.793
	Sesgo	-0.007	-0.009	-0.007
	ECM	0.255	0.258	0.257
	SD	0.043	0.044	0.043
200	Media	0.793	0.791	0.790
	Sesgo	-0.007	-0.009	-0.010
	ECM	0.255	0.256	0.254
	SD	0.029	0.030	0.030

Cuadro 4.42

Resultados para los parámetros del modelo VAR(1) con $\tau_{0.5}$ y diferentes tamaños de muestra.

T	Resul.	$b_{11}^1 = 0.70$	$b_{12}^1 = 0.10$	$b_{13}^1 = 0.05$	$b_{21}^1 = 0.20$	$b_{22}^1 = 0.60$	$b_{23}^1 = 0.10$
50	Media	0.637	0.108	0.056	0.189	0.564	0.098
	Sesgo	-0.063	0.008	0.006	-0.011	-0.036	-0.002
	ECM	0.272	0.546	0.602	0.465	0.281	0.561
	SD	0.183	0.184	0.199	0.183	0.183	0.198
100	Media	0.682	0.094	0.051	0.201	0.580	0.095
	Sesgo	-0.018	-0.006	0.001	0.001	-0.020	-0.005
	ECM	0.249	0.526	0.592	0.441	0.241	0.536
	SD	0.114	0.116	0.122	0.113	0.116	0.121
200	Media	0.688	0.104	0.049	0.202	0.591	0.099
	Sesgo	-0.012	0.004	-0.001	0.002	-0.009	-0.001
	ECM	0.241	0.512	0.578	0.418	0.242	0.524
	SD	0.074	0.076	0.078	0.074	0.076	0.078

Cuadro 4.43

Resultados para los parámetros adicionales del modelo VAR(1) con $\tau_{0.5}$ y diferentes tamaños de muestra.

T	Resul.	$b_{31}^1 = 0.10$	$b_{32}^1 = 0.20$	$b_{33}^1 = 0.50$	$b_{10} = 0.18$	$b_{20} = 2.20$	$b_{30} = 0.55$
50	Media	0.079	0.210	0.458	0.331	2.554	0.748
	Sesgo	-0.021	0.010	-0.042	0.151	0.354	0.198
	ECM	0.570	0.433	0.313	1.143	4.768	1.014
	SD	0.183	0.184	0.197	0.837	0.832	0.836
100	Media	0.105	0.191	0.480	0.311	2.396	0.715
	Sesgo	0.005	-0.009	-0.020	0.131	0.196	0.165
	ECM	0.526	0.433	0.262	0.655	3.636	0.538
	SD	0.114	0.115	0.121	0.537	0.536	0.537
200	Media	0.096	0.204	0.489	0.185	2.268	0.579
	Sesgo	-0.004	0.004	-0.011	0.005	0.068	0.029
	ECM	0.522	0.411	0.258	0.526	3.038	0.357
	SD	0.074	0.076	0.078	0.352	0.351	0.350

Cuadro 4.44

Resultados para los parámetros de la matriz correlación del modelo VAR(1) con $\tau_{0.5}$ y diferentes tamaños de muestra.

T	Resul.	$\Psi_{12} = 0.80$	$\Psi_{13} = 0.80$	$\Psi_{23} = 0.80$
50	Media	0.755	0.755	0.746
	Sesgo	-0.045	-0.045	-0.054
	ECM	0.248	0.246	0.241
	SD	0.072	0.072	0.074
100	Media	0.775	0.774	0.774
	Sesgo	-0.025	-0.026	-0.026
	ECM	0.251	0.257	0.251
	SD	0.047	0.047	0.047
200	Media	0.790	0.788	0.786
	Sesgo	-0.010	-0.012	-0.014
	ECM	0.257	0.257	0.255
	SD	0.031	0.031	0.032

Cuadro 4.45

Resultados para los parámetros del modelo VAR(1) con $\tau_{0.9}$ y diferentes tamaños de muestra.

T	Resul.	$b_{11} = 0.70$	$b_{12} = 0.10$	$b_{13} = 0.05$	$b_{21} = 0.20$	$b_{22} = 0.60$	$b_{23} = 0.10$
50	Media	0.475	0.207	-0.106	0.038	0.656	-0.064
	Sesgo	-0.225	0.107	-0.156	-0.162	0.056	-0.164
	ECM	0.393	0.567	0.889	0.715	0.365	0.802
	SD	0.341	0.307	0.334	0.342	0.308	0.335
100	Media	0.656	0.109	0.030	0.181	0.592	0.074
	Sesgo	-0.044	0.009	-0.020	-0.019	-0.008	-0.026
	ECM	0.250	0.516	0.618	0.458	0.233	0.571
	SD	0.143	0.131	0.142	0.142	0.131	0.141
200	Media	0.687	0.103	0.041	0.200	0.592	0.091
	Sesgo	-0.013	0.003	-0.009	0.000	-0.008	-0.009
	ECM	0.232	0.508	0.579	0.423	0.234	0.529
	SD	0.081	0.077	0.081	0.081	0.076	0.081

Cuadro 4.46

Resultados para los parámetros adicionales del modelo VAR(1) con $\tau_{0,9}$ y diferentes tamaños de muestra.

T	Resul.	$b_{31} = 0.10$	$b_{32} = 0.20$	$b_{33} = 0.50$	$b_{41} = 0.18$	$b_{42} = 2.20$	$b_{43} = 0.55$
50	Media	-0.061	0.294	0.293	9.250	11.449	9.623
	Sesgo	-0.161	0.094	-0.207	9.070	9.249	9.073
	ECM	0.867	0.452	0.473	130.741	175.435	137.803
	SD	0.339	0.305	0.333	2.934	2.950	2.929
100	Media	0.076	0.207	0.462	3.123	5.179	3.476
	Sesgo	-0.024	0.007	-0.038	2.943	2.979	2.926
	ECM	0.559	0.407	0.292	12.622	27.236	14.815
	SD	0.143	0.132	0.142	1.546	1.542	1.543
200	Media	0.096	0.201	0.485	1.195	3.224	1.529
	Sesgo	-0.004	0.001	-0.015	1.015	1.024	0.979
	ECM	0.523	0.424	0.260	1.544	7.931	1.960
	SD	0.081	0.076	0.081	0.919	0.916	0.913

Cuadro 4.47

Resultados para los parámetros de la matriz correlación del modelo VAR(1) con $\tau_{0,9}$ y diferentes tamaños de muestra.

T	Resul.	$\Psi_{12} = 0.80$	$\Psi_{13} = 0.80$	$\Psi_{23} = 0.80$
50	Media	0.849	0.844	0.845
	Sesgo	0.049	0.044	0.045
	ECM	0.280	0.288	0.278
	SD	0.048	0.049	0.049
100	Media	0.791	0.790	0.789
	Sesgo	-0.009	-0.010	-0.011
	ECM	0.254	0.253	0.254
	SD	0.044	0.044	0.044
200	Media	0.792	0.790	0.789
	Sesgo	-0.008	-0.010	-0.011
	ECM	0.255	0.255	0.256
	SD	0.030	0.030	0.030

Comparación de métodos de regresión cuantílica univariada y conjunta bajo errores normales y t-Student multivariados

Con el propósito de evaluar la robustez del modelo VAR(1) estimado mediante regresión cuantílica multivariada, se lleva a cabo un segundo experimento de simulación que introduce variabilidad en la

distribución del término de error. A diferencia del escenario anterior, donde se consideró una distribución asimétrica de Laplace multivariada, en esta sección se examinan dos distribuciones alternativas para los errores: la distribución normal multivariada y la distribución t-Student multivariada con tres grados de libertad. Esta comparación busca analizar el desempeño del modelo tanto en condiciones con colas ligeras (normales) como en presencia de colas pesadas (t-Student), manteniendo una estructura correlacional elevada entre las componentes del vector de error.

El modelo de simulación utilizado está definido por la siguiente ecuación:

$$\mathbf{y}_t = B_0 + B_1 \mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t,$$

donde:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3.1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} -0.382 & -0.372 & 0.715 \\ 1.993 & 0.650 & 0.764 \\ 0.670 & 0.079 & 0.584 \end{pmatrix}.$$

Los vectores de cuantiles y parámetros de las distribuciones utilizados, siguen la especificación planteada en Petrella y Raponi [15], lo cual permite replicar de forma controlada distintos patrones de dependencia y asimetría en los errores.

Las distribuciones consideradas para los errores ε_t son las siguientes:

- **Distribución normal multivariada:** $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}_3(\mathbf{0}_3, \tilde{\Sigma})$, donde la matriz de varianza-covarianza se construye como:

$$\tilde{\Sigma} = D\boldsymbol{\theta}_{\tau,1}\boldsymbol{\theta}_{\tau,1}^\top D + \boldsymbol{\theta}_{\tau,2}\Sigma\boldsymbol{\theta}_{\tau,2}.$$

Los parámetros utilizados son $D = \text{diag}(0.13, 0.30, 0.23)$, y se asume un matriz de correlación

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Distribución t-Student multivariada:** $\varepsilon_t \sim t_3(\mu, \tilde{\Sigma})$, donde se emplea una distribución t multivariada con 3 grados de libertad. El parámetro de no centralidad se define como $\mu = D\boldsymbol{\theta}_{\tau,1}$, y la matriz de escala como $\tilde{\Sigma} = \boldsymbol{\theta}_{\tau,2}\Sigma\boldsymbol{\theta}_{\tau,2}$. Esta especificación permite modelar tanto desplazamientos en la media como colas pesadas.

Se consideran tres configuraciones para el vector de cuantiles, de acuerdo con el diseño propuesto

por Petrella y Raponi [15]:

$$\boldsymbol{\tau} = (0.50, 0.50, 0.50)^\top, \quad \boldsymbol{\tau} = (0.25, 0.50, 0.75)^\top, \quad \boldsymbol{\tau} = (0.90, 0.50, 0.10)^\top.$$

Cada una de estas configuraciones determina un vector $\boldsymbol{\theta}_{\tau,1}$ y una matriz $\boldsymbol{\theta}_{\tau,2}$, definidos a partir del vector de cuantiles como ya se ha descrito anteriormente, y utilizados para construir las distribuciones correspondientes. El proceso de simulación se repite 400 veces para cada configuración, considerando tamaños muestrales $T = 50$, $T = 100$ y $T = 200$.

Se comparan dos metodologías de estimación:

- **Regresión cuantílica multivariada conjunta (J. QR):** Se utiliza un enfoque bayesiano que estima simultáneamente los cuantiles condicionales de las tres componentes de Y_t , incorporando la dependencia entre ellas mediante una estructura conjunta.
- **Regresión cuantílica univariada (S. QR):** Se emplea la función `rq()` del paquete `quantreg` de R, ajustando un modelo cuantílico por separado para cada componente de Y_t , sin capturar explícitamente la dependencia entre las variables.

Para cada parámetro estimado se calculan la media posterior, el sesgo, el error cuadrático medio (ECM) y la desviación estándar (SD). Los resultados correspondientes a la configuración $\boldsymbol{\tau} = (0.5, 0.5, 0.5)^\top$ se presentan en los Cuadros 4.48 a 4.53, que abarcan los diferentes tamaños muestrales y distribuciones de error consideradas.

Cuadro 4.48

Estimación de los primeros seis parámetros del modelo para $\tau = (0.5, 0.5, 0.5)^\top$ y $T = 50$, bajo diferentes estructuras de error. Métodos: regresión cuantílica conjunta (J. QR) y univariada (S. QR).

Error	Mét.	Estad.	$b_{11} = -0.382$	$b_{12} = -0.372$	$b_{13} = 0.715$	$b_{21} = 1.993$	$b_{22} = 0.65$	$b_{23} = 0.764$
t ₃ -Student multivariada	J. QR	Media	-0.384	-0.375	0.713	1.990	0.645	0.747
		Sesgo	-0.002	-0.003	-0.002	-0.003	-0.005	-0.017
		ECM	0.005	0.001	0.006	0.027	0.004	0.028
		DE	0.071	0.030	0.076	0.161	0.067	0.170
Normal multivariada	J. QR	Media	-0.387	-0.377	0.718	1.994	0.639	0.772
		Sesgo	-0.005	-0.005	0.003	0.001	-0.011	0.008
		ECM	0.010	0.001	0.010	0.051	0.009	0.055
		DE	0.090	0.036	0.094	0.203	0.083	0.215
t ₃ -Student multivariada	S. QR	Media	-0.383	-0.375	0.715	1.988	0.646	0.758
		Sesgo	-0.001	-0.003	0.000	-0.005	-0.004	-0.006
		ECM	0.006	0.001	0.008	0.035	0.005	0.036
		DE	0.079	0.035	0.090	0.187	0.072	0.190
Normal multivariada	S. QR	Media	-0.383	-0.375	0.715	1.988	0.646	0.758
		Sesgo	-0.001	-0.003	0.000	-0.005	-0.004	-0.006
		ECM	0.006	0.001	0.008	0.035	0.005	0.036
		DE	0.079	0.035	0.090	0.187	0.072	0.190

Cuadro 4.49

Estimación de los seis parámetros restantes del modelo para $\tau = (0.5, 0.5, 0.5)^T$ y $T = 50$, bajo diferentes estructuras de error. Métodos: regresión cuantílica conjunta (J. QR) y univariada (S. QR).

Error	Mét.	Estad.	$b_{31} = 0.670$	$b_{32} = 0.079$	$b_{33} = 0.584$	$b_{10} = 1.0$	$b_{20} = 3.1$	$b_{30} = 2.0$
t ₃ -Student multivariada	J. QR	Media	0.662	0.082	0.552	1.069	3.303	2.165
		Sesgo	-0.008	0.003	-0.032	0.069	0.203	0.165
		ECM	0.014	0.002	0.017	0.093	0.481	0.283
		DE	0.125	0.052	0.131	0.281	0.633	0.488
Normal multivariada	J. QR	Media	0.656	0.081	0.545	1.073	3.261	2.222
		Sesgo	-0.014	0.002	-0.039	0.073	0.161	0.222
		ECM	0.029	0.005	0.034	0.125	0.727	0.447
		DE	0.156	0.063	0.164	0.318	0.725	0.554
t ₃ -Student multivariada	S. QR	Media	0.659	0.083	0.553	1.062	3.216	2.137
		Sesgo	-0.011	0.004	-0.031	0.062	0.116	0.137
		ECM	0.018	0.003	0.020	0.091	0.469	0.306
		DE	0.132	0.054	0.139	0.295	0.676	0.537
Normal multivariada	S. QR	Media	0.659	0.083	0.553	1.062	3.216	2.137
		Sesgo	-0.011	0.004	-0.031	0.062	0.116	0.137
		ECM	0.018	0.003	0.020	0.091	0.469	0.306
		DE	0.132	0.054	0.139	0.295	0.676	0.537

Cuadro 4.50

Estimación de los primeros seis parámetros del modelo para $\tau = (0.5, 0.5, 0.5)^\top$ y $T = 100$, bajo diferentes estructuras de error. Métodos: regresión cuantílica conjunta (J. QR) y univariada (S. QR).

Error	Mét.	Estad.	$b_{11} = -0.382$	$b_{12} = -0.372$	$b_{13} = 0.715$	$b_{21} = 1.993$	$b_{22} = 0.65$	$b_{23} = 0.764$
t ₃ -Student multivariada	J. QR	Media	-0.382	-0.374	0.714	2.002	0.649	0.755
		Sesgo	0.000	-0.002	-0.001	0.009	-0.001	-0.009
		ECM	0.002	0.000	0.002	0.012	0.002	0.013
		DE	0.046	0.019	0.047	0.107	0.044	0.110
Normal multivariada	J. QR	Media	-0.388	-0.374	0.716	1.985	0.642	0.772
		Sesgo	-0.006	-0.002	0.001	-0.008	-0.008	0.008
		ECM	0.005	0.001	0.005	0.026	0.005	0.029
		DE	0.062	0.025	0.064	0.144	0.059	0.148
t ₃ -Student multivariada	S. QR	Media	-0.378	-0.374	0.716	2.004	0.651	0.757
		Sesgo	0.004	-0.002	0.001	0.011	0.001	-0.007
		ECM	0.003	0.000	0.003	0.016	0.002	0.016
		DE	0.051	0.022	0.056	0.124	0.049	0.125
Normal multivariada	S. QR	Media	-0.388	-0.375	0.719	2.000	0.647	0.770
		Sesgo	-0.006	-0.003	0.004	0.007	-0.003	0.006
		ECM	0.005	0.001	0.006	0.029	0.005	0.031
		DE	0.069	0.029	0.077	0.169	0.069	0.176

Cuadro 4.51

Estimación de los seis parámetros restantes del modelo para $\tau = (0.5, 0.5, 0.5)^\top$ y $T = 100$, bajo diferentes estructuras de error. Métodos: regresión cuantílica conjunta (J. QR) y univariada (S. QR).

Error	Mét.	Estad.	$b_{31} = 0.670$	$b_{32} = 0.079$	$b_{33} = 0.584$	$b_{10} = 1.0$	$b_{20} = 3.1$	$b_{30} = 2.0$
t ₃ -Student multivariada	J. QR	Media	0.668	0.077	0.578	1.045	3.194	2.081
		Sesgo	-0.002	-0.002	-0.006	0.045	0.094	0.081
		ECM	0.007	0.001	0.008	0.042	0.199	0.159
		DE	0.081	0.033	0.083	0.189	0.439	0.333
Normal multivariada	J. QR	Media	0.652	0.078	0.568	1.035	3.186	2.115
		Sesgo	-0.018	-0.001	-0.016	0.035	0.086	0.115
		ECM	0.014	0.002	0.016	0.066	0.352	0.225
		DE	0.109	0.045	0.112	0.233	0.532	0.410
t ₃ -Student multivariada	S. QR	Media	0.671	0.079	0.575	1.030	3.152	2.053
		Sesgo	0.001	0.000	-0.009	0.030	0.052	0.053
		ECM	0.009	0.002	0.010	0.041	0.208	0.174
		DE	0.094	0.040	0.098	0.201	0.453	0.415
Normal multivariada	S. QR	Media	0.652	0.079	0.568	1.028	3.118	2.091
		Sesgo	-0.018	0.000	-0.016	0.028	0.018	0.091
		ECM	0.016	0.003	0.019	0.057	0.306	0.199
		DE	0.126	0.054	0.137	0.238	0.554	0.437

Q1 n=200

Cuadro 4.52

Estimación de los primeros seis parámetros del modelo para $\tau = (0.5, 0.5, 0.5)^T$ y $T = 200$, bajo diferentes estructuras de error. Métodos: regresión cuantílica conjunta (J. QR) y univariada (S. QR).

Error	Mét.	Estad.	$b_{11} = -0.382$	$b_{12} = -0.372$	$b_{13} = 0.715$	$b_{21} = 1.993$	$b_{22} = 0.65$	$b_{23} = 0.764$
t ₃ -Student multivariada	J. QR	Media	-0.383	-0.373	0.716	1.991	0.647	0.766
		Sesgo	-0.001	-0.001	0.001	-0.002	-0.003	0.002
		ECM	0.001	0.000	0.001	0.006	0.001	0.007
		DE	0.031	0.013	0.031	0.071	0.029	0.072
Normal multivariada	J. QR	Media	-0.384	-0.375	0.719	1.986	0.647	0.771
		Sesgo	-0.002	-0.003	0.004	-0.007	-0.003	0.007
		ECM	0.003	0.000	0.002	0.015	0.002	0.014
		DE	0.044	0.018	0.044	0.100	0.041	0.101
t ₃ -Student multivariada	S. QR	Media	-0.384	-0.373	0.716	1.989	0.646	0.770
		Sesgo	-0.002	-0.001	0.001	-0.004	-0.004	0.006
		ECM	0.001	0.000	0.001	0.007	0.001	0.008
		DE	0.036	0.015	0.037	0.085	0.034	0.091
Normal multivariada	S. QR	Media	-0.386	-0.375	0.720	1.988	0.647	0.772
		Sesgo	-0.004	-0.003	0.005	-0.005	-0.003	0.008
		ECM	0.003	0.000	0.003	0.016	0.003	0.016
		DE	0.053	0.021	0.051	0.125	0.051	0.124

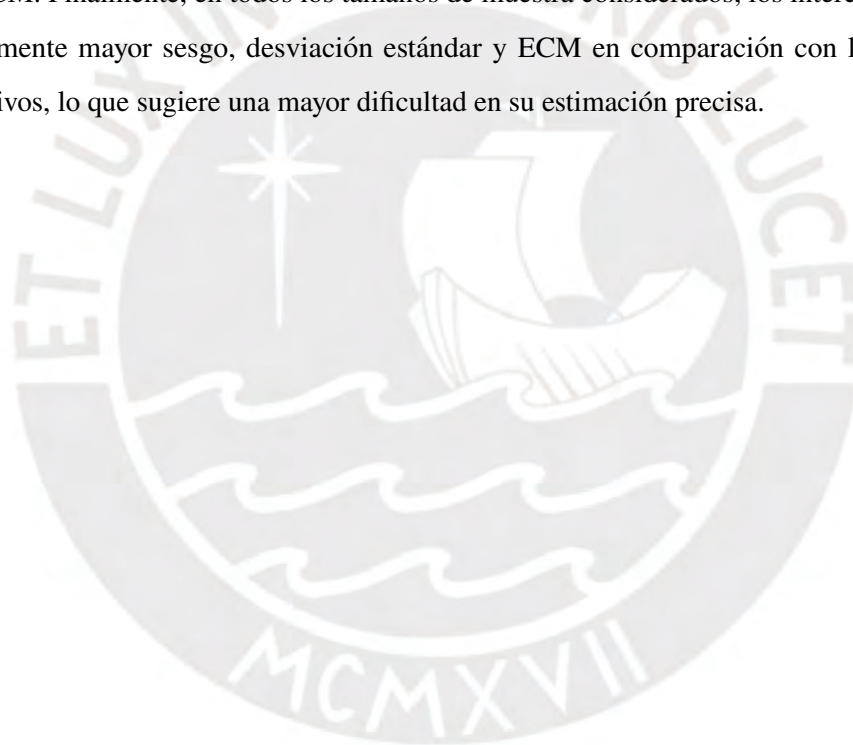
Cuadro 4.53

Estimación de los seis parámetros restantes del modelo para $\tau = (0.5, 0.5, 0.5)^\top$ y $T = 200$, bajo diferentes estructuras de error. Métodos: regresión cuantílica conjunta (J. QR) y univariada (S. QR).

Error	Mét.	Estad.	$\tau = (0.5, 0.5, 0.5)^\top$					
			$b_{31} = 0.670$	$b_{32} = 0.079$	$b_{33} = 0.584$	$b_{10} = 1.0$	$b_{20} = 3.1$	$b_{30} = 2.0$
t ₃ -Student multivariada	J. QR	Media	0.668	0.079	0.579	1.019	3.147	2.029
		Sesgo	-0.002	0.000	-0.005	0.019	0.047	0.029
		ECM	0.003	0.001	0.004	0.021	0.101	0.068
		DE	0.055	0.023	0.055	0.131	0.303	0.232
Normal multivariada	J. QR	Media	0.659	0.078	0.577	1.020	3.109	2.053
		Sesgo	-0.011	-0.001	-0.007	0.020	0.009	0.053
		ECM	0.008	0.001	0.008	0.042	0.239	0.126
		DE	0.077	0.031	0.077	0.174	0.399	0.306
t ₃ -Student multivariada	S. QR	Media	0.668	0.080	0.579	1.021	3.126	2.027
		Sesgo	-0.002	0.001	-0.005	0.021	0.026	0.027
		ECM	0.004	0.001	0.005	0.024	0.113	0.080
		DE	0.065	0.029	0.070	0.152	0.335	0.281
Normal multivariada	S. QR	Media	0.663	0.081	0.570	1.020	3.107	2.056
		Sesgo	-0.007	0.002	-0.014	0.020	0.007	0.056
		ECM	0.009	0.001	0.010	0.039	0.218	0.118
		DE	0.096	0.038	0.097	0.196	0.468	0.339

En este caso, se observa que, a medida que aumenta el tamaño muestral, el sesgo, el error cuadrático medio (ECM) y la desviación estándar (SD) tienden a reducirse en la mayoría de los parámetros cuando se utiliza el método conjunto. Para $T = 50$, bajo errores con distribución normal multivariada (MN), el enfoque univariado presenta un menor ECM y SD en comparación con el enfoque conjunto; sin embargo, esta relación se invierte bajo la distribución t_3 multivariada (Mt3), donde el método conjunto muestra un mejor desempeño. En los tamaños muestrales más grandes ($T = 100$ y $T = 200$), tanto bajo errores MN como Mt3, el enfoque conjunto logra consistentemente menores valores de ECM y SD en casi todos los parámetros.

No obstante, el sesgo permanece comparable o incluso ligeramente superior en los interceptos, particularmente bajo MN. Asimismo, se destaca que, en el caso Mt3, el método conjunto logra las menores SD para los interceptos cuando $T = 100$ y $T = 200$, mientras que bajo MN se obtienen los menores ECM. Finalmente, en todos los tamaños de muestra considerados, los interceptos muestran sistemáticamente mayor sesgo, desviación estándar y ECM en comparación con los coeficientes autorregresivos, lo que sugiere una mayor dificultad en su estimación precisa.



Cuadro 4.54

Estimación de los primeros seis parámetros del modelo para $\tau = (0.25, 0.5, 0.75)^\top$ y $T = 50$, bajo diferentes estructuras de error. Métodos: regresión cuantílica conjunta (J. QR) y univariada (S. QR).

Error	Mét.	Estad.	$b_{11} = -0.382$	$b_{12} = -0.372$	$b_{13} = 0.715$	$b_{21} = 1.993$	$b_{22} = 0.65$	$b_{23} = 0.764$
t ₃ -Student multivariada	J. QR	Media	-0.381	-0.375	0.716	1.993	0.644	0.758
		Sesgo	0.001	-0.003	0.001	0.000	-0.006	-0.006
		ECM	0.008	0.002	0.009	0.024	0.004	0.028
		DE	0.081	0.034	0.085	0.147	0.062	0.152
Normal multivariada	J. QR	Media	-0.378	-0.373	0.721	1.993	0.642	0.774
		Sesgo	0.004	-0.001	0.006	0.000	-0.008	0.010
		ECM	0.009	0.001	0.009	0.020	0.003	0.022
		DE	0.086	0.035	0.088	0.129	0.053	0.132
t ₃ -Student multivariada	S. QR	Media	-0.379	-0.374	0.715	2.001	0.651	0.752
		Sesgo	0.003	-0.002	0.000	0.008	0.001	-0.012
		ECM	0.011	0.002	0.006	0.025	0.005	0.033
		DE	0.099	0.041	0.103	0.157	0.069	0.181
Normal multivariada	S. QR	Media	-0.377	-0.374	0.717	1.994	0.645	0.773
		Sesgo	0.005	-0.002	0.002	0.001	-0.005	0.009
		ECM	0.011	0.002	0.011	0.025	0.004	0.026
		DE	0.103	0.042	0.106	0.160	0.061	0.160

Cuadro 4.55

Estimación de los seis parámetros restantes del modelo para $\tau = (0.25, 0.5, 0.75)^\top$ y $T = 50$, bajo diferentes estructuras de error. Métodos: regresión cuantílica conjunta (J. QR) y univariada (S. QR).

Error	Mét.	Estad.	$b_{31} = 0.670$	$b_{32} = 0.079$	$b_{33} = 0.584$	$b_{10} = 1.0$	$b_{20} = 3.1$	$b_{30} = 2.0$
t ₃ -Student multivariada	J. QR	Media	0.658	0.080	0.549	1.234	3.240	1.840
		Sesgo	-0.012	0.001	-0.035	0.234	0.140	-0.160
		ECM	0.029	0.005	0.032	0.275	0.333	0.787
		DE	0.146	0.061	0.148	0.293	0.527	0.522
Normal multivariada	J. QR	Media	0.649	0.077	0.554	0.597	3.167	2.887
		Sesgo	-0.021	-0.002	-0.030	-0.403	0.067	0.887
		ECM	0.027	0.005	0.034	0.361	0.437	1.509
		DE	0.150	0.062	0.153	0.399	0.598	0.701
t ₃ -Student multivariada	S. QR	Media	0.668	0.081	0.554	1.056	3.165	2.093
		Sesgo	-0.002	0.002	-0.030	0.056	0.065	0.093
		ECM	0.035	0.005	0.034	0.110	0.308	0.364
		DE	0.188	0.070	0.183	0.327	0.551	0.597
Normal multivariada	S. QR	Media	0.661	0.081	0.558	0.667	3.128	2.771
		Sesgo	-0.009	0.002	-0.026	-0.333	0.028	0.771
		ECM	0.033	0.006	0.043	0.266	0.326	1.203
		DE	0.182	0.078	0.205	0.394	0.571	0.782

Cuadro 4.56

Estimación de los primeros seis parámetros del modelo para $\tau = (0.25, 0.5, 0.75)^\top$ y $T = 100$, bajo diferentes estructuras de error. Métodos: regresión cuantílica conjunta (J. QR) y univariada (S. QR).

Error	Mét.	Estad.	$b_{11} = -0.382$	$b_{12} = -0.372$	$b_{13} = 0.715$	$b_{21} = 1.993$	$b_{22} = 0.65$	$b_{23} = 0.764$
t ₃ -Student multivariada	J. QR	Media	-0.385	-0.374	0.715	1.992	0.646	0.763
		Sesgo	-0.003	-0.002	0.000	-0.001	-0.004	-0.001
		ECM	0.003	0.001	0.003	0.011	0.002	0.011
		DE	0.051	0.022	0.053	0.093	0.040	0.096
Normal multivariada	J. QR	Media	-0.380	-0.374	0.719	1.992	0.645	0.768
		Sesgo	0.002	-0.002	0.004	-0.001	-0.005	0.004
		ECM	0.005	0.001	0.004	0.011	0.002	0.010
		DE	0.058	0.025	0.059	0.088	0.038	0.090
t ₃ -Student multivariada	S. QR	Media	-0.381	-0.374	0.715	1.998	0.648	0.761
		Sesgo	0.001	-0.002	0.000	0.005	-0.002	-0.003
		ECM	0.004	0.001	0.004	0.012	0.002	0.013
		DE	0.065	0.026	0.063	0.111	0.046	0.113
Normal multivariada	S. QR	Media	-0.376	-0.375	0.716	1.996	0.646	0.770
		Sesgo	0.006	-0.003	0.001	0.003	-0.004	0.006
		ECM	0.006	0.001	0.005	0.012	0.002	0.012
		DE	0.075	0.030	0.072	0.108	0.043	0.108

Cuadro 4.57

Estimación de los seis parámetros restantes del modelo para $\tau = (0.25, 0.5, 0.75)^\top$ y $T = 100$, bajo diferentes estructuras de error. Métodos: regresión cuantílica conjunta (J. QR) y univariada (S. QR).

Error	Mét.	Estad.	$b_{31} = 0.670$	$b_{32} = 0.079$	$b_{33} = 0.584$	$b_{10} = 1.0$	$b_{20} = 3.1$	$b_{30} = 2.0$
t ₃ -Student multivariada	J. QR	Media	0.665	0.078	0.572	1.223	3.169	1.726
		Sesgo	-0.005	-0.001	-0.012	0.223	0.069	-0.274
		ECM	0.013	0.002	0.012	0.180	0.136	0.538
		DE	0.092	0.039	0.093	0.194	0.348	0.341
Normal multivariada	J. QR	Media	0.666	0.080	0.563	0.643	3.157	2.795
		Sesgo	-0.004	0.001	-0.021	-0.357	0.057	0.795
		ECM	0.014	0.003	0.017	0.248	0.273	1.041
		DE	0.104	0.044	0.105	0.289	0.436	0.516
t ₃ -Student multivariada	S. QR	Media	0.671	0.078	0.575	1.049	3.139	2.034
		Sesgo	0.001	-0.001	-0.009	0.049	0.039	0.034
		ECM	0.015	0.002	0.014	0.058	0.149	0.202
		DE	0.124	0.047	0.117	0.235	0.385	0.449
Normal multivariada	S. QR	Media	0.665	0.081	0.563	0.681	3.143	2.753
		Sesgo	-0.005	0.002	-0.021	-0.319	0.043	0.753
		ECM	0.016	0.004	0.022	0.221	0.234	0.950
		DE	0.128	0.060	0.146	0.346	0.483	0.619

Cuadro 4.58

Estimación de los primeros seis parámetros del modelo para $\tau = (0.25, 0.5, 0.75)^\top$ y $T = 200$, bajo diferentes estructuras de error. Métodos: regresión cuantílica conjunta (J. QR) y univariada (S. QR).

Error	Mét.	Estad.	$b_{11} = -0.382$	$b_{12} = -0.372$	$b_{13} = 0.715$	$b_{21} = 1.993$	$b_{22} = 0.65$	$b_{23} = 0.764$
t ₃ -Student multivariada	J. QR	Media	-0.381	-0.373	0.715	1.994	0.648	0.762
		Sesgo	0.001	-0.001	0.000	0.001	-0.002	-0.002
		ECM	0.001	0.000	0.002	0.005	0.001	0.005
		DE	0.035	0.015	0.035	0.064	0.027	0.064
Normal multivariada	J. QR	Media	-0.385	-0.372	0.713	1.990	0.646	0.770
		Sesgo	-0.003	0.000	-0.002	-0.003	-0.004	0.006
		ECM	0.002	0.000	0.002	0.006	0.001	0.006
		DE	0.040	0.018	0.041	0.062	0.027	0.062
t ₃ -Student multivariada	S. QR	Media	-0.380	-0.374	0.717	1.990	0.647	0.766
		Sesgo	0.002	-0.002	0.002	-0.003	-0.003	0.002
		ECM	0.002	0.000	0.002	0.005	0.001	0.006
		DE	0.045	0.019	0.045	0.073	0.031	0.077
Normal multivariada	S. QR	Media	-0.386	-0.373	0.713	1.991	0.647	0.769
		Sesgo	-0.004	-0.001	-0.002	-0.002	-0.003	0.005
		ECM	0.003	0.000	0.003	0.006	0.001	0.006
		DE	0.054	0.022	0.052	0.078	0.031	0.077

Cuadro 4.59

Estimación de los seis parámetros restantes del modelo para $\tau = (0.25, 0.5, 0.75)^\top$ y $T = 200$, bajo diferentes estructuras de error. Métodos: regresión cuantílica conjunta (J. QR) y univariada (S. QR).

Error	Mét.	Estad.	$b_{31} = 0.670$	$b_{32} = 0.079$	$b_{33} = 0.584$	$b_{10} = 1.0$	$b_{20} = 3.1$	$b_{30} = 2.0$
t ₃ -Student multivariada	J. QR	Media	0.671	0.078	0.581	1.155	3.141	1.799
		Sesgo	0.001	-0.001	-0.003	0.155	0.041	-0.201
		ECM	0.005	0.001	0.005	0.100	0.066	0.255
		SD	0.061	0.026	0.062	0.131	0.239	0.231
Normal multivariada	J. QR	Media	0.664	0.078	0.576	0.638	3.143	2.730
		Sesgo	-0.006	-0.001	-0.008	-0.362	0.043	0.730
		ECM	0.007	0.001	0.007	0.203	0.141	0.743
		SD	0.072	0.031	0.073	0.211	0.322	0.378
t ₃ -Student multivariada	S. QR	Media	0.674	0.078	0.581	1.044	3.137	2.009
		Sesgo	0.004	-0.001	-0.003	0.044	0.037	0.009
		ECM	0.007	0.001	0.007	0.033	0.074	0.089
		SD	0.081	0.034	0.084	0.175	0.269	0.298
Normal multivariada	S. QR	Media	0.666	0.078	0.579	0.668	3.118	2.706
		Sesgo	-0.004	-0.001	-0.005	-0.332	0.018	0.706
		ECM	0.008	0.002	0.009	0.184	0.134	0.724
		SD	0.091	0.042	0.096	0.272	0.366	0.476

Los resultados obtenidos para el vector de cuantiles $\tau = (0.25, 0.5, 0.75)^\top$ se resumen en los Cuadros 4.54 a 4.59, las cuales abarcan los distintos tamaños muestrales y distribuciones de error evaluadas.

En esta configuración, se identifica una mejora progresiva en el desempeño del enfoque conjunto a medida que se incrementa el tamaño de muestra, reflejada en reducciones sistemáticas del sesgo, el error cuadrático medio y la desviación estándar para la mayoría de los parámetros.

Particularmente, los coeficientes autorregresivos muestran un rendimiento notable del método conjunto, con menores valores de ECM y SD en comparación con el enfoque univariado, independientemente de la distribución del error (MN o Mt3) y del tamaño muestral. Este patrón es robusto en todas las configuraciones analizadas.

En el caso de los interceptos (matriz B_0), el método conjunto logra menores SD de manera consistente, aunque presenta un ECM más elevado respecto al enfoque univariado, independientemente del tamaño de muestra.

En términos de sesgo, también se observa una reducción progresiva a medida que aumenta el tamaño muestral en el enfoque conjunto. Para $T = 200$, este logra superar al univariado en la mayoría de los parámetros, aunque los interceptos continúan mostrando menor sesgo bajo el enfoque univariado.

En conjunto, los resultados refuerzan la ventaja del enfoque conjunto para la estimación eficiente de parámetros dinámicos cuando se modela adecuadamente la dependencia entre componentes, si bien revelan ciertas limitaciones en la estimación precisa de los términos constantes.

Cuadro 4.60

Estimación de los primeros seis parámetros del modelo para $\tau = (0.1, 0.5, 0.9)^\top$ y $n = 50$, bajo diferentes estructuras de error. Métodos: regresión cuantílica conjunta (J. QR) y univariada (S. QR).

Error	Mét.	Estad.	$b_{11} = -0.382$	$b_{12} = -0.372$	$b_{13} = 0.715$	$b_{21} = 1.993$	$b_{22} = 0.65$	$b_{23} = 0.764$
t ₃ -Student multivariada	J. QR	Media	-0.387	-0.378	0.720	1.992	0.641	0.758
		Sesgo	-0.005	-0.006	0.005	-0.001	-0.009	-0.006
		ECM	0.016	0.003	0.017	0.014	0.003	0.016
		SD	0.100	0.044	0.101	0.107	0.047	0.109
Normal multivariada	J. QR	Media	-0.378	-0.370	0.724	1.987	0.646	0.764
		Sesgo	0.004	0.002	0.009	-0.006	-0.004	0.000
		ECM	0.012	0.002	0.012	0.004	0.001	0.004
		SD	0.084	0.039	0.085	0.054	0.025	0.055
t ₃ -Student multivariada	S. QR	Media	-0.390	-0.379	0.719	1.997	0.648	0.751
		Sesgo	-0.008	-0.007	0.004	0.004	-0.002	-0.013
		ECM	0.026	0.005	0.025	0.013	0.002	0.013
		SD	0.162	0.069	0.158	0.116	0.045	0.113
Normal multivariada	S. QR	Media	-0.390	-0.379	0.719	1.997	0.648	0.751
		Sesgo	-0.008	-0.007	0.004	0.004	-0.002	-0.013
		ECM	0.026	0.005	0.025	0.013	0.002	0.013
		D	0.162	0.069	0.158	0.116	0.045	0.113

Cuadro 4.61

Estimación de los seis parámetros restantes del modelo para $\tau = (0.10, 0.5, 0.90)^\top$ y $T = 50$, bajo diferentes estructuras de error. Métodos: regresión cuantílica conjunta (J. QR) y univariada (S. QR).

Error	Mét.	Estad.	$b_{31} = 0.670$	$b_{32} = 0.079$	$b_{33} = 0.584$	$b_{10} = 1.0$	$b_{20} = 3.1$	$b_{30} = 2.0$
t ₃ -Student multivariada	J. QR	Media	0.666	0.072	0.543	1.197	3.172	1.849
		Sesgo	-0.004	-0.007	-0.041	0.197	0.072	-0.151
		ECM	0.051	0.009	0.055	0.250	0.155	0.681
		DE	0.175	0.077	0.176	0.359	0.376	0.635
Normal multivariada	J. QR	Media	0.649	0.072	0.543	-0.862	3.169	5.518
		Sesgo	-0.021	-0.007	-0.041	-1.862	0.069	3.518
		ECM	0.043	0.008	0.044	4.036	0.164	14.190
		DE	0.147	0.068	0.150	0.590	0.377	1.038
t ₃ -Student multivariada	S. QR	Media	0.682	0.083	0.528	1.182	3.128	1.820
		Sesgo	0.012	0.004	-0.056	0.182	0.028	-0.180
		ECM	0.082	0.015	0.088	0.337	0.119	1.033
		DE	0.287	0.121	0.292	0.552	0.345	1.002
Normal multivariada	S. QR	Media	0.682	0.083	0.528	1.182	3.128	1.820
		Sesgo	0.012	0.004	-0.056	0.182	0.028	-0.180
		ECM	0.082	0.015	0.088	0.337	0.119	1.033
		DE	0.287	0.121	0.292	0.552	0.345	1.002

Cuadro 4.62

Estimación de los primeros seis parámetros del modelo para $\tau = (0.1, 0.5, 0.9)^\top$ y $T = 100$, bajo diferentes estructuras de error. Métodos: regresión cuantílica conjunta (J. QR) y univariada (S. QR).

Error	Mét.	Estad.	$b_{11} = -0.382$	$b_{12} = -0.372$	$b_{13} = 0.715$	$b_{21} = 1.993$	$b_{22} = 0.65$	$b_{23} = 0.764$
t ₃ -Student multivariada	J. QR	Media	-0.383	-0.374	0.719	1.990	0.647	0.766
		Sesgo	-0.001	-0.002	0.004	-0.003	-0.003	0.002
		ECM	0.009	0.001	0.007	0.006	0.001	0.006
		DE	0.067	0.029	0.067	0.072	0.031	0.071
Normal multivariada	J. QR	Media	-0.379	-0.373	0.723	1.991	0.648	0.763
		Sesgo	0.003	-0.001	0.008	-0.002	-0.002	-0.001
		ECM	0.006	0.001	0.007	0.002	0.000	0.002
		DE	0.058	0.028	0.059	0.036	0.017	0.037
t ₃ -Student multivariada	S. QR	Media	-0.384	-0.375	0.718	1.984	0.648	0.762
		Sesgo	-0.002	-0.003	0.003	-0.009	-0.002	-0.002
		ECM	0.014	0.002	0.013	0.006	0.001	0.007
		DE	0.120	0.048	0.114	0.076	0.036	0.084
Normal multivariada	S. QR	Media	-0.374	-0.373	0.725	1.991	0.649	0.760
		Sesgo	0.008	-0.001	0.010	-0.002	-0.001	-0.004
		ECM	0.009	0.002	0.010	0.002	0.000	0.002
		DE	0.093	0.044	0.099	0.044	0.022	0.044

Cuadro 4.63

Estimación de los seis parámetros restantes del modelo para $\tau = (0.10, 0.5, 0.90)^T$ y $T = 100$, bajo diferentes estructuras de error. Métodos: regresión cuantílica conjunta (J. QR) y univariada (S. QR).

Error	Mét.	Estad.	$b_{31} = 0.670$	$b_{32} = 0.079$	$b_{33} = 0.584$	$b_{10} = 1.0$	$b_{20} = 3.1$	$b_{30} = 2.0$
t ₃ -Student multivariada	J. QR	Media	0.662	0.074	0.574	1.251	3.118	1.666
		Sesgo	-0.008	-0.005	-0.010	0.251	0.018	-0.334
		ECM	0.028	0.004	0.024	0.153	0.075	0.390
		DE	0.120	0.051	0.116	0.235	0.245	0.420
Normal multivariada	J. QR	Media	0.657	0.077	0.563	-0.829	3.140	5.308
		Sesgo	-0.013	-0.002	-0.021	-1.829	0.040	3.308
		ECM	0.019	0.004	0.022	3.693	0.087	11.963
		DE	0.102	0.049	0.104	0.420	0.256	0.734
t ₃ -Student multivariada	S. QR	Media	0.653	0.073	0.565	1.167	3.123	1.828
		Sesgo	-0.017	-0.006	-0.019	0.167	0.023	-0.172
		ECM	0.044	0.008	0.039	0.169	0.074	0.485
		DE	0.210	0.087	0.196	0.376	0.272	0.676
Normal multivariada	S. QR	Media	0.664	0.080	0.562	-0.711	3.142	5.045
		Sesgo	-0.006	0.001	-0.022	-1.711	0.042	3.045
		ECM	0.027	0.007	0.030	3.373	0.096	10.559
		DE	0.163	0.081	0.172	0.668	0.308	1.136

Cuadro 4.64

Estimación de los primeros seis parámetros del modelo para $\tau = (0.1, 0.5, 0.9)^\top$ y $T = 200$, bajo diferentes estructuras de error. Métodos: regresión cuantílica conjunta (J. QR) y univariada (S. QR).

Error	Mét.	Estad.	$b_{11} = -0.382$	$b_{12} = -0.372$	$b_{13} = 0.715$	$b_{21} = 1.993$	$b_{22} = 0.65$	$b_{23} = 0.764$
t ₃ -Student multivariada	J. QR	Media	-0.381	-0.370	0.710	1.990	0.649	0.760
		Sesgo	0.001	0.002	-0.005	-0.003	-0.001	-0.004
		ECM	0.004	0.001	0.003	0.003	0.000	0.003
		DE	0.046	0.019	0.045	0.048	0.021	0.047
Normal multivariada	J. QR	Media	-0.382	-0.374	0.720	1.990	0.648	0.763
		Sesgo	0.000	-0.002	0.005	-0.003	-0.002	-0.001
		ECM	0.003	0.001	0.003	0.001	0.000	0.001
		DE	0.040	0.019	0.040	0.025	0.012	0.025
t ₃ -Student multivariada	S. QR	Media	-0.378	-0.370	0.712	1.989	0.651	0.759
		Sesgo	0.004	0.002	-0.003	-0.004	0.001	-0.005
		ECM	0.006	0.001	0.006	0.003	0.001	0.003
		DE	0.078	0.035	0.078	0.053	0.023	0.057
Normal multivariada	S. QR	Media	-0.382	-0.375	0.720	1.990	0.648	0.765
		Sesgo	0.000	-0.003	0.005	-0.003	-0.002	0.001
		ECM	0.004	0.001	0.005	0.001	0.000	0.001
		DE	0.066	0.031	0.070	0.032	0.015	0.032

Cuadro 4.65

Estimación de los seis parámetros restantes del modelo para $\tau = (0.10, 0.5, 0.90)^T$ y $T = 200$, bajo diferentes estructuras de error. Métodos: regresión cuantílica conjunta (J. QR) y univariada (S. QR).

Error	Mét.	Estad.	$b_{31} = 0.670$	$b_{32} = 0.079$	$b_{33} = 0.584$	$b_{10} = 1.0$	$b_{20} = 3.1$	$b_{30} = 2.0$
t ₃ -Student multivariada	J. QR	Media	0.661	0.070	0.591	1.267	3.103	1.601
		Sesgo	-0.009	-0.009	0.007	0.267	0.003	-0.399
		ECM	0.012	0.002	0.010	0.110	0.028	0.290
		DE	0.082	0.035	0.079	0.160	0.163	0.286
Normal multivariada	J. QR	Media	0.664	0.081	0.570	-0.774	3.137	5.207
		Sesgo	-0.006	0.002	-0.014	-1.774	0.037	3.207
		ECM	0.009	0.002	0.010	3.291	0.046	10.716
		DE	0.071	0.034	0.072	0.291	0.179	0.516
t ₃ -Student multivariada	S. QR	Media	0.667	0.073	0.585	1.141	3.103	1.799
		Sesgo	-0.003	-0.006	0.001	0.141	0.003	-0.201
		ECM	0.021	0.003	0.018	0.090	0.031	0.246
		DE	0.143	0.058	0.134	0.265	0.177	0.454
Normal multivariada	S. QR	Media	0.665	0.082	0.569	-0.653	3.136	5.002
		Sesgo	-0.005	0.003	-0.015	-1.653	0.036	3.002
		ECM	0.013	0.004	0.015	2.938	0.054	9.704
		DE	0.113	0.060	0.121	0.456	0.230	0.833

Para el caso correspondiente a $\tau = (0.10, 0.50, 0.90)^\top$, se observa que, en general, el método conjunto presenta un mejor desempeño a medida que aumenta el tamaño muestral, evidenciado por la reducción progresiva del sesgo, del ECM y de la SD en la mayoría de los parámetros. Los resultados detallados se presentan en los Cuadros 4.60 a 4.3.2, que abarcan los distintos tamaños muestrales y distribuciones de error consideradas.

Para todos los tamaños de muestra, tanto bajo la distribución normal multivariada (MN) como bajo la distribución t_3 (Mt3), el enfoque conjunto obtiene consistentemente menores valores de ECM y SD en los coeficientes autorregresivos (B_1) en comparación con el enfoque univariado. En cuanto a los interceptos (B_0), el método conjunto también logra menores SD en todos los escenarios, con la única excepción del caso $T = 50$ bajo errores MN, donde el enfoque univariado presenta una SD ligeramente inferior.

Cabe destacar que, a diferencia de las configuraciones anteriores, en este caso no se observa una reducción sistemática del sesgo en los interceptos a medida que aumenta el tamaño muestral al emplear el enfoque conjunto. Sin embargo, dado que el modelo propuesto se basa en la estimación conjunta, se prioriza su desempeño global, el cual resulta favorable en términos de ECM y SD para la mayoría de los parámetros estimados.

Estimación de la mediana en un modelo VAR(2) con errores multivariados asimétricos Laplace

En esta etapa del estudio, se realiza una simulación adicional considerando un modelo VAR(2), en el cual se introduce correlación entre las componentes del término de error. El objetivo es evaluar cómo la presencia de dependencia entre las series afecta la estimación de los parámetros bajo el enfoque propuesto. Para ello, se asume que los errores siguen una distribución asimétrica de Laplace multivariada, retomando así el esquema del modelo conjunto desarrollado en esta tesis.

La matriz de covarianza de los errores se define como:

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.8 \\ 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0.8 & 0.8 & 1 \end{pmatrix}.$$

La estructura del modelo sigue la forma estándar de un VAR(2):

$$\mathbf{y}_t = B_0 + B_1\mathbf{y}_{t-1} + B_2\mathbf{y}_{t-2} + \varepsilon_t,$$

donde los coeficientes verdaderos utilizados en la generación de datos son:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 2.0 \\ 4.1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.6 & 0.1 \\ 0.6 & 0.4 & 0.1 \\ 0.6 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0.3 & -0.7 & 0.6 \\ -0.4 & 0 & 0.1 \\ -0.75 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

En esta simulación, el modelo se ajusta exclusivamente para el cuantil $\tau_{0.5}$, es decir, se estima la mediana condicional de cada componente del vector \mathbf{y}_t . Además, los errores ε_t se generan a partir de una distribución de Laplace asimétrica, manteniendo la misma estructura de correlación mencionada anteriormente.

Los resultados obtenidos se presentan a continuación en cuadros separados por tamaño muestral. En cada una se reportan la media de las estimaciones, el sesgo, la SD y el ECM para cada parámetro del modelo.



Cuadro 4.66

Estimaciones de un subconjunto de parámetros de las matrices autoregresivas B_1 y B_2 del modelo VAR(2) bajo distintos tamaños muestrales.

T	Estad.	$b_{11}^1 = 0.50$	$b_{12}^1 = -0.60$	$b_{13}^1 = 0.10$	$b_{11}^2 = 0.30$	$b_{12}^2 = -0.70$	$b_{13}^2 = 0.60$	$b_{21}^1 = 0.60$	$b_{21}^1 = 0.60$
50	Media	0.492	-0.591	0.082	0.301	-0.709	0.594	0.611	0.611
	Sesgo	-0.008	0.009	-0.018	0.001	-0.009	-0.006	0.011	0.011
	ECM	0.019	0.048	0.025	0.017	0.038	0.022	0.021	0.021
	DE	0.139	0.215	0.157	0.130	0.185	0.143	0.140	0.140
100	Media	0.493	-0.596	0.089	0.310	-0.710	0.599	0.603	0.603
	Sesgo	-0.007	0.004	-0.011	0.010	-0.010	-0.001	0.003	0.003
	ECM	0.007	0.017	0.010	0.006	0.013	0.008	0.008	0.008
	DE	0.085	0.135	0.101	0.080	0.117	0.093	0.086	0.086
200	Media	0.502	-0.602	0.096	0.300	-0.697	0.599	0.604	0.604
	Sesgo	0.002	-0.002	-0.004	0.000	0.003	-0.001	0.004	0.004
	ECM	0.003	0.008	0.004	0.003	0.005	0.004	0.003	0.003
	DE	0.055	0.086	0.065	0.052	0.075	0.060	0.055	0.055

Cuadro 4.67

Estimaciones de un segundo subconjunto de parámetros de las matrices autoregresivas B_1 y B_2 del modelo VAR(2) bajo distintos tamaños muestrales.

T	Estad.	$b_{22}^1 = 0.40$	$b_{23}^1 = 0.10$	$b_{21}^2 = -0.40$	$b_{22}^2 = 0.00$	$b_{23}^2 = 0.10$	$b_{31}^1 = 0.60$	$b_{32}^1 = 0.10$
50	Media	0.361	0.101	-0.373	0.003	0.091	0.605	0.091
	Sesgo	-0.039	0.001	0.027	0.003	-0.009	0.005	-0.009
	ECM	0.047	0.025	0.019	0.038	0.024	0.021	0.052
	DE	0.213	0.157	0.130	0.186	0.143	0.139	0.214
100	Media	0.385	0.093	-0.381	-0.004	0.097	0.600	0.102
	Sesgo	-0.015	-0.007	0.019	-0.004	-0.003	0.000	0.002
	ECM	0.019	0.010	0.007	0.015	0.009	0.008	0.020
	DE	0.135	0.101	0.081	0.118	0.093	0.086	0.136
200	Media	0.392	0.100	-0.397	0.005	0.096	0.602	0.098
	Sesgo	-0.008	0.000	0.003	0.005	-0.004	0.002	-0.002
	ECM	0.008	0.004	0.003	0.006	0.004	0.003	0.008
	DE	0.086	0.065	0.051	0.074	0.060	0.055	0.086

Cuadro 4.68

Estimaciones de un tercer subconjunto de parámetros de las matrices autoregresivas B_1 y B_2 del modelo VAR(2) bajo distintos tamaños muestrales.

T	Estad.	b_{33}^1	b_{31}^2	$b_{31}^2 = -0.75$	b_{32}^2	$b_{32}^2 = 0.40$	b_{33}^2	$b_{33}^2 = 0.10$	b_{10}	$b_{10} = 1.10$	b_{20}	$b_{20} = 2.00$	b_{30}	$b_{30} = 4.10$
50	Media	0.285	-0.741	-0.741	0.405	0.405	0.083	0.083	1.254	1.254	2.182	2.182	4.332	4.332
	Sesgo	-0.015	0.009	0.009	0.005	0.005	-0.017	-0.017	0.154	0.154	0.182	0.182	0.232	0.232
	ECM	0.026	0.017	0.017	0.038	0.038	0.020	0.020	1.177	1.177	1.203	1.203	1.267	1.267
	DE	0.157	0.130	0.130	0.185	0.185	0.143	0.143	1.024	1.024	1.026	1.026	1.019	1.019
100	Media	0.283	-0.740	-0.740	0.396	0.396	0.096	0.096	1.225	1.225	2.193	2.193	4.291	4.291
	Sesgo	-0.017	0.010	0.010	-0.004	-0.004	-0.004	-0.004	0.125	0.125	0.193	0.193	0.191	0.191
	ECM	0.010	0.006	0.006	0.015	0.015	0.009	0.009	0.554	0.554	0.638	0.638	0.636	0.636
	DE	0.101	0.081	0.081	0.117	0.117	0.093	0.093	0.728	0.728	0.731	0.731	0.734	0.734
200	Media	0.297	-0.749	-0.749	0.407	0.407	0.092	0.092	1.133	1.133	2.043	2.043	4.166	4.166
	Sesgo	-0.003	0.001	0.001	0.007	0.007	-0.008	-0.008	0.033	0.033	0.043	0.043	0.066	0.066
	ECM	0.004	0.003	0.003	0.006	0.006	0.004	0.004	0.255	0.255	0.248	0.248	0.233	0.233
	DE	0.065	0.051	0.051	0.074	0.074	0.060	0.060	0.503	0.503	0.500	0.500	0.502	0.502

T	Estad.	$\Psi_{12} = 0.80$	$\Psi_{13} = 0.80$	$\Psi_{23} = 0.80$
50	Media	0.753	0.748	0.744
	Sesgo	-0.047	-0.052	-0.056
	ECM	0.008	0.008	0.008
	DE	0.075	0.076	0.077
100	Media	0.779	0.774	0.775
	Sesgo	-0.021	-0.026	-0.025
	ECM	0.003	0.003	0.003
	DE	0.047	0.048	0.047
200	Media	0.789	0.789	0.788
	Sesgo	-0.011	-0.011	-0.012
	ECM	0.001	0.001	0.001
	DE	0.032	0.031	0.032

Cuadro 4.69

Estimaciones de la matriz de correlación Ψ en el modelo VAR(2) con diferentes tamaños muestrales.

A partir de los resultados presentados en los Cuadros 4.66 a 4.68, se observa una mejora sistemática en la calidad de las estimaciones conforme aumenta el tamaño de muestra. En particular, los valores del sesgo, la SD y el ECM tienden a disminuir en todos los parámetros estimados.

Para los coeficientes de B_0 , se aprecia que el sesgo, la SD y el ECM son ligeramente mayores en comparación con los observados para las matrices B_1 y B_2 , aunque en general estos valores siguen siendo pequeños. Las matrices autoregresivas B_1 y B_2 muestran estimaciones con sesgos muy reducidos y alta precisión, particularmente a medida que se incrementa n .

En cuanto a los elementos de la matriz de correlación Ψ , cuyos resultados se presentan en el Cuadro 4.69, también se evidencia que el sesgo, el ECM y la SD disminuyen consistentemente con el aumento del tamaño de muestra, manteniéndose en valores bajos incluso para $T = 50$. Estos resultados reflejan un buen desempeño del modelo conjunto bajo la presencia de correlación en los errores.

Capítulo 5

Aplicación del modelo de regresión cuantílica multivariada

En este capítulo se aplica un modelo de regresión cuantílica multivariada para estudiar la relación dinámica entre tres variables macroeconómicas del Perú: el Producto Bruto Interno (PBI), el Índice de Precios al Consumidor (IPC) y la Tasa de Desempleo (TD). La estimación se realiza mediante un modelo VAR trivariado bajo un enfoque bayesiano, considerando errores con distribución asimétrica de Laplace multivariada (MAL), lo que permite una representación flexible de la dinámica en distintos cuantiles condicionales

Se comparan cuatro especificaciones del modelo VAR —de orden uno y dos— considerando tanto errores independientes como correlacionados. Las estimaciones se obtienen para tres niveles de cuantiles (centrales y extremos), mediante inferencia bayesiana implementada en el software *Stan*. Las series utilizadas cubren el periodo de enero de 2003 a mayo de 2024, con un total de 257 observaciones mensuales, y provienen del Banco Central de Reserva del Perú (BCRP).

Para la estimación bayesiana se utilizó exclusivamente *Stan*. Esta elección se basó en su eficiencia al trabajar con modelos que incluyen estructuras de correlación contemporánea y distribuciones asimétricas como la MAL. Aunque inicialmente se consideró también el uso de *JAGS*, se optó por *Stan* debido a su mejor rendimiento computacional y mayor flexibilidad en la especificación del modelo en este contexto particular.

5.1. Objetivos

- Estimar la dinámica conjunta del PBI, IPC y TD en distintos niveles de cuantiles condicionales:

$$\tau_{0.1} = (0.1, 0.1, 0.1)^{\top}, \quad \tau_{0.5} = (0.5, 0.5, 0.5)^{\top}, \quad \tau_{0.9} = (0.9, 0.9, 0.9)^{\top}.$$

- Comparar el desempeño de modelos con errores independientes (Yang et al., 2023) frente a modelos con errores correlacionados (2023), bajo diferentes órdenes autorregresivos.

5.2. Datos utilizados

Las series seleccionadas incluyen:

- Índice de Precios al Consumidor (IPC): Índice de precios en Lima Metropolitana, base diciembre de 2021 = 100.
- Tasa de Desempleo (TD): Proporción de la población económicamente activa desempleada, desestacionalizada mediante métodos estadísticos previos.
- Producto Bruto Interno (PBI): Serie mensual desestacionalizada, con índice base 2007 = 100.

Estas series fueron transformadas adicionalmente para garantizar la estacionariedad requerida en el análisis econométrico.

5.3. Consideraciones preliminares para la aplicación empírica

A continuación, se presenta el gráfico de las series originales de PBI, IPC y TD, mostrando los valores de las variables, antes de realizar las transformaciones necesarias para el análisis.

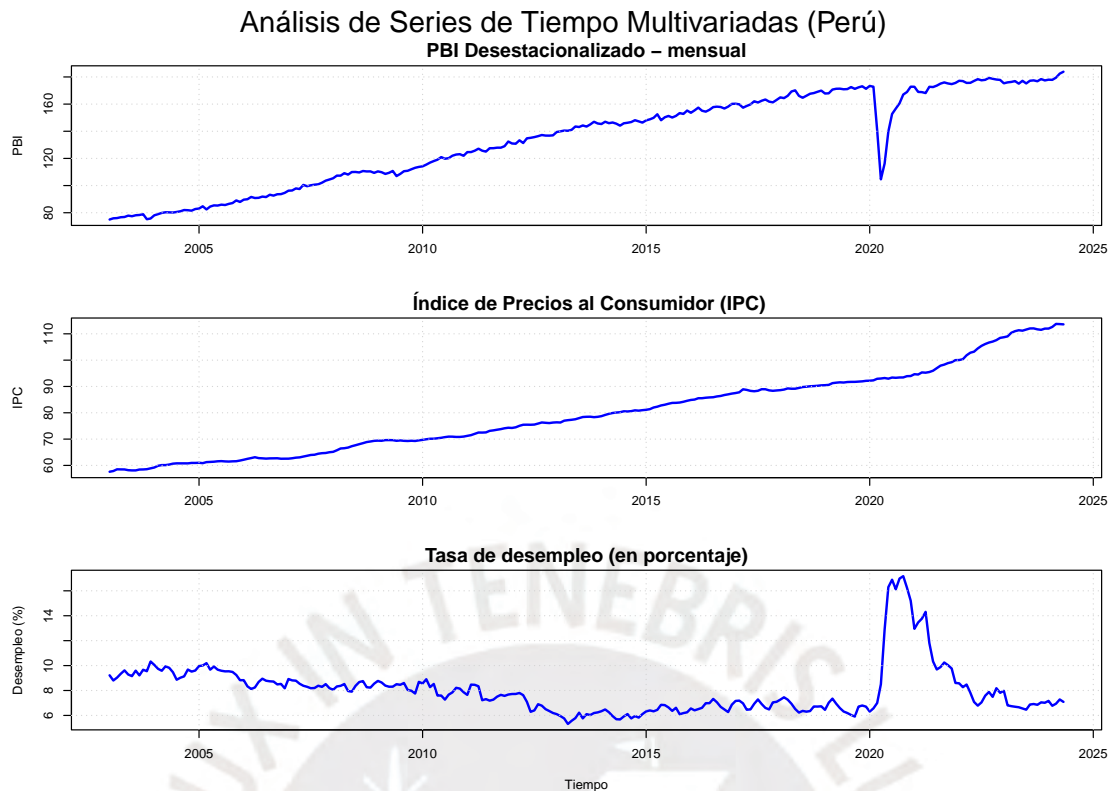


Figura 5.1: Series tiempo del PBI, IPC y TD correspondiente al periodo de enero de 2003 a mayo de 2024

La gráfica revela los siguientes comportamientos:

- PBI: Presenta una tendencia creciente en el tiempo, marcada por caídas abruptas, como la observada durante la pandemia del COVID-19.
- IPC: Exhibe un comportamiento relativamente estable, aunque con episodios de aceleración en la inflación.
- TD: Fluctúa periódicamente, reflejando los ciclos estacionales asociados al mercado laboral en Lima Metropolitana. Estos patrones destacan la influencia de factores económicos y estacionales, haciendo necesario realizar transformaciones y ajustes para cumplir con los supuestos de estacionariedad en el análisis VAR.

Transformación de las series

Para preparar las series para el análisis, se realizaron las siguientes transformaciones:

1. **PBI e IPC:** Se aplicó una transformación logarítmica que calcula la variación porcentual mensual,

definida como:

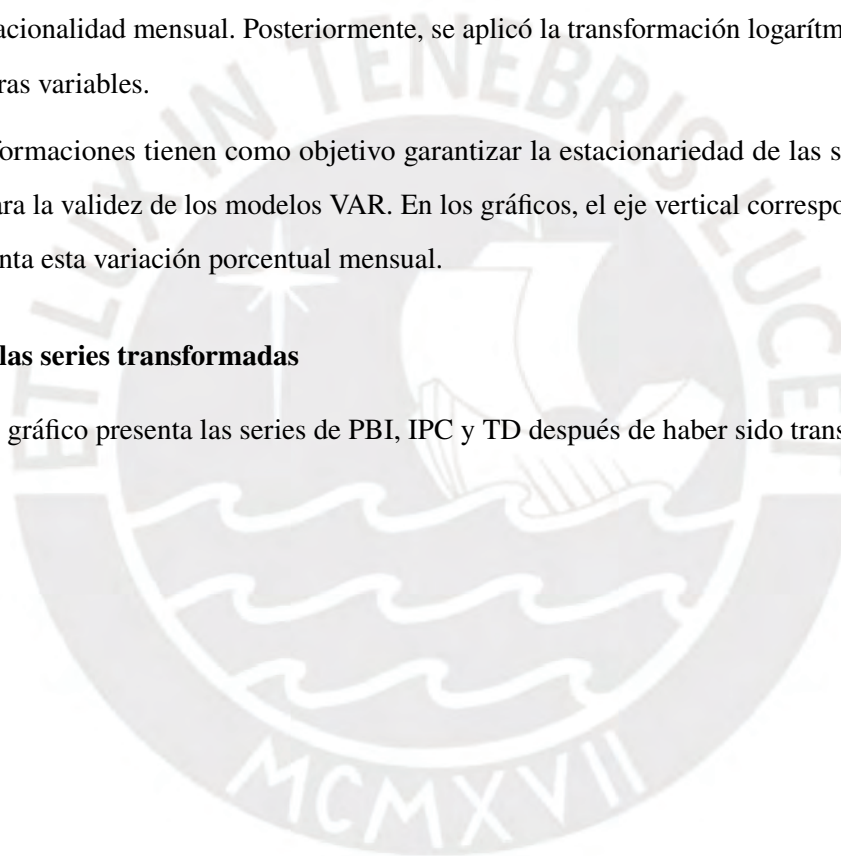
$$\text{Variación porcentual mensual} = [\ln(y_t) - \ln(y_{t-1})] \times 100.$$

2. **TD:** Dado que la serie original presentaba componentes estacionales, se aplicó un procedimiento de desestacionalización con el objetivo de eliminar las fluctuaciones periódicas. En particular, se empleó un método basado en factores estacionales promedio, que consiste en estimar un factor para cada mes como el cociente entre cada observación y el promedio anual correspondiente al mismo mes. Luego, cada valor fue ajustado dividiéndolo por su respectivo factor estacional. Este enfoque, aunque sencillo, resulta efectivo para corregir los patrones recurrentes propios de la estacionalidad mensual. Posteriormente, se aplicó la transformación logarítmica, en línea con las otras variables.

Estas transformaciones tienen como objetivo garantizar la estacionariedad de las series, condición necesaria para la validez de los modelos VAR. En los gráficos, el eje vertical correspondiente al PBI e IPC representa esta variación porcentual mensual.

Gráfico de las series transformadas

El siguiente gráfico presenta las series de PBI, IPC y TD después de haber sido transformadas:



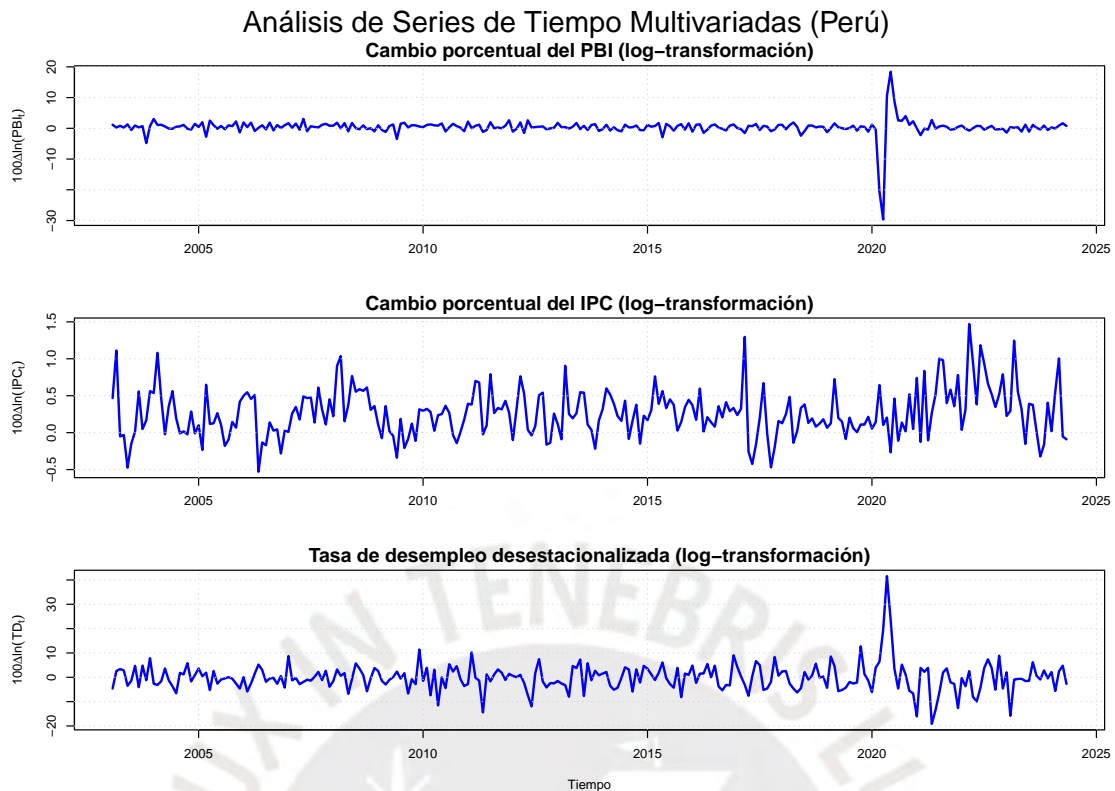


Figura 5.2: Retorno logarítmico en primera diferencia del PBI, IPC y TD

La gráfica de las series transformadas muestra las dinámicas mensuales de las variables:

- PBI e IPC: Las variaciones porcentuales permiten observar cambios relativos mensuales, eliminando las tendencias a largo plazo presentes en las series originales.
- TD: Después de la desestacionalización, se observa una serie más consistente, sin picos recurrentes asociados a patrones estacionales, lo que facilita su análisis dentro del modelo VAR.

Pruebas de estacionariedad

Para garantizar que las series transformadas sean estacionarias, se realizaron pruebas estadísticas ampliamente utilizadas en la literatura económica. En primer lugar, se aplicó la prueba de Dickey-Fuller Aumentada (ADF), la prueba de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS) y la prueba de Phillips-Perron (PP). Los resultados indicaron que las series transformadas cumplen con las condiciones de estacionariedad.

Para complementar este análisis y tener una visión más detallada del comportamiento temporal de las series transformadas, se graficaron las funciones de autocorrelación (ACF) y autocorrelación parcial (PACF). Estas herramientas permiten verificar visualmente si las autocorrelaciones decaen rápidamente, lo cual es una característica esperada en series estacionarias. A continuación, se presentan los gráficos

ACF y PACF para cada serie.

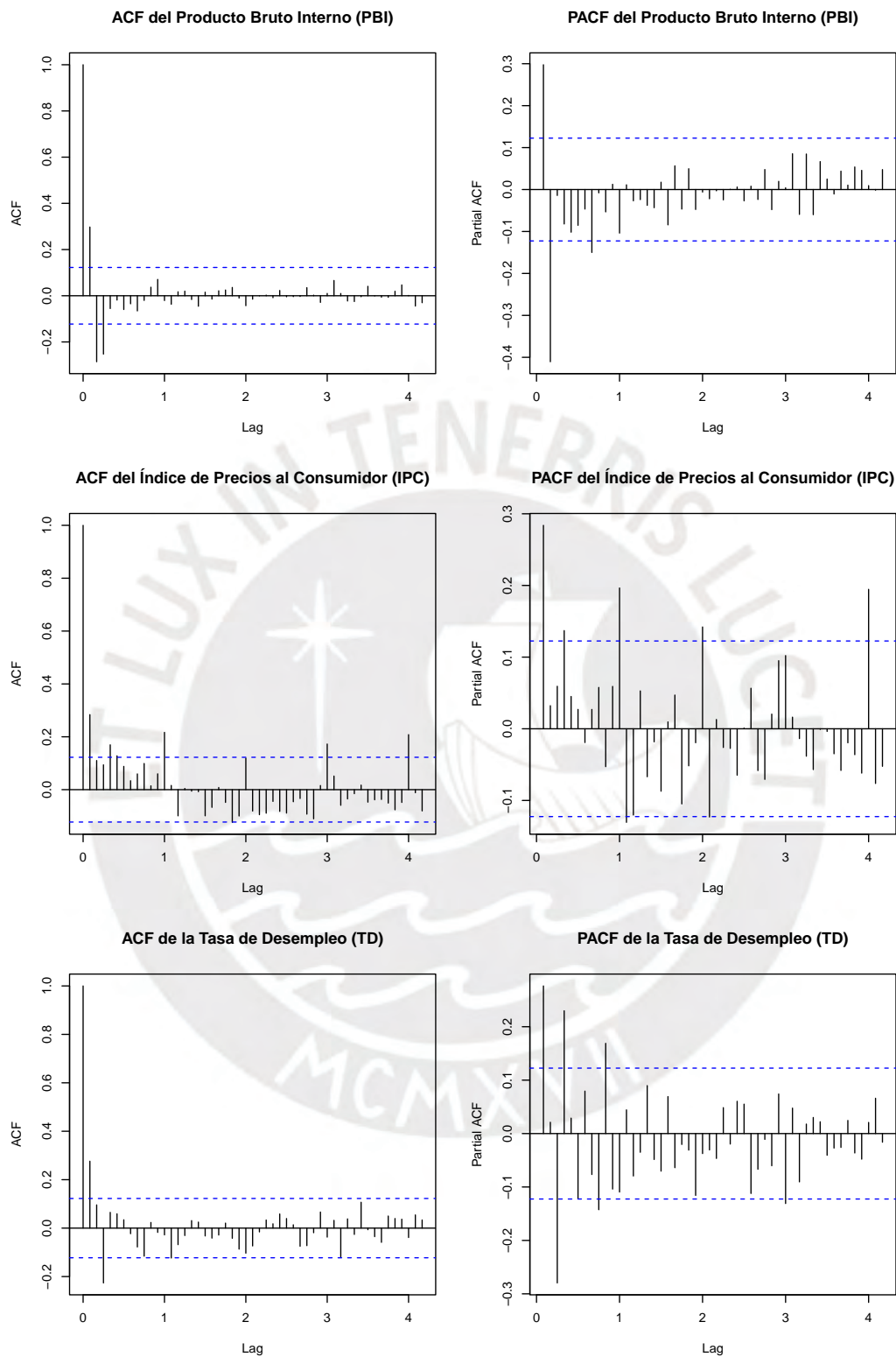


Figura 5.3: Gráficas del ACF y PACF

5.4. Descripción de los modelos VAR para simulación

Después de realizar el análisis exploratorio de las series temporales, se procederá a ajustar cuatro modelos VAR que buscan capturar la dinámica de las series de tiempo bajo distintos enfoques y supuestos sobre los errores. Estos modelos se describen a continuación:

1. **Modelo 1:** VAR(1) bajo el enfoque de Yang et al. ([23]). Se asume un proceso autorregresivo de orden 1, donde los errores ε_t siguen una distribución asimétrica de Laplace multivariada (MAL) con independencia entre sus componentes. El modelo general estimado puede escribirse como:

$$\mathbf{y}_t = B_0 + B_1\mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Este modelo permite evaluar cómo el retardo de orden 1 de cada variable afecta a las demás, pero asume que los errores de una variable no están correlacionados con los de otra en el mismo periodo (por ejemplo, una variación inesperada en el IPC no tiene un efecto inmediato sobre la TD).

2. **Modelo 2:** VAR(2) bajo el enfoque de Yang et al. ([23]). En este caso, el proceso autorregresivo es de orden 2, manteniendo el supuesto de independencia entre los errores con distribución MAL.

$$\mathbf{y}_t = B_0 + B_1\mathbf{y}_{t-1} + B_2\mathbf{y}_{t-2} + \varepsilon_t.$$

Esta especificación captura efectos de mayor persistencia temporal (hasta dos retardos), pero mantiene la suposición de que los errores de las distintas variables no están relacionados entre sí en el mismo momento.

En contraste con los modelos anteriores, el enfoque de Iacopini et al. ([4]) incorpora dependencia contemporánea entre los errores, lo cual resulta crucial para capturar choques simultáneos entre las variables.

3. **Modelo 3:** VAR(1) bajo el enfoque de Iacopini et al. ([4]). Se ajusta un modelo autorregresivo de orden 1, donde se incorpora dependencia contemporánea entre las componentes de los errores, a través de la matriz Ψ . Esta matriz permite modelar relaciones instantáneas entre los errores de las variables (por ejemplo, un cambio inesperado en el IPC puede afectar al mismo tiempo al PBI y a la TD). En este contexto, la matriz Ψ aparece en la varianza-covarianza del término de error de la distribución AL multivariada, permitiendo capturar estructuras de dependencia más realistas:

$$\mathbf{y}_t = B_0 + B_1\mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{donde } \varepsilon_i \sim \mathcal{MAL}_p(\mathbf{0}_p, D\boldsymbol{\theta}_{\tau,1}, D\boldsymbol{\theta}_{\tau,2}\Psi\boldsymbol{\theta}_{\tau,2}D).$$

4. **Modelo 4:** VAR(2) bajo el mismo enfoque. Se ajusta un modelo de orden 2 con la misma estructura para los errores. Nuevamente, la matriz Ψ permite introducir dependencia contemporánea en el modelo, esta vez junto con una dependencia dinámica más amplia al incluir dos rezagos. Esto permite una caracterización más completa de la propagación de shocks económicos, tanto en el tiempo como de forma simultánea entre variables:

$$\mathbf{y}_t = B_0 + B_1\mathbf{y}_{t-1} + B_2\mathbf{y}_{t-2} + \varepsilon_t \quad \text{donde } \varepsilon_i \sim \mathcal{MAL}_p(\mathbf{0}_p, D\boldsymbol{\theta}_{\tau,1}, D\boldsymbol{\theta}_{\tau,2}\Psi\boldsymbol{\theta}_{\tau,2}D)$$

En ambas formulaciones, la matriz Ψ constituye el núcleo de la matriz de varianza-covarianza de los errores, y determina la estructura de correlación contemporánea entre las variables de la serie multivariada.

Para cada modelo se consideran tres niveles de cuantiles:

$$\boldsymbol{\tau}_{0.1} = (0.1, 0.1, 0.1)^\top, \quad \boldsymbol{\tau}_{0.5} = (0.5, 0.5, 0.5)^\top, \quad \boldsymbol{\tau}_{0.9} = (0.9, 0.9, 0.9)^\top,$$

lo que permite capturar posibles asimetrías en la dinámica conjunta de las series.

Estos modelos permiten estimar la dinámica conjunta de las variables bajo distintos supuestos sobre la correlación entre los errores y distintos órdenes autorregresivos. Además, al considerar diferentes cuantiles condicionales, se puede caracterizar el comportamiento de las series más allá de medidas centrales, lo cual resulta útil en contextos económicos donde pueden existir efectos diferenciados en los extremos de la distribución.

Las estimaciones se obtuvieron mediante simulación bayesiana con el software Stan. A continuación, se presentan los resúmenes estadísticos de los parámetros estimados, incluyendo los valores esperados posteriores, desviaciones estándar y cuantiles para los coeficientes de regresión y parámetros de correlación en los modelos que así lo permiten.

5.4.1. Criterios de evaluación y comparación de los modelos

En el contexto bayesiano, los criterios WAIC (Watanabe-Akaike Information Criterion) y LOO (Leave-One-Out cross-validation) se han utilizado ampliamente para evaluar el ajuste predictivo de modelos estadísticos. Sin embargo, su aplicación presenta limitaciones importantes en modelos autorregresivos vectoriales (VAR), debido a la dependencia temporal entre observaciones que infringe el supuesto de independencia condicional requerido por ambos métodos. Por este motivo, y dada la estructura jerárquica del modelo empleado, se opta por utilizar el *criterio de información de la desviación* (DIC) como medida principal para la comparación de modelos.

El DIC fue introducido por Spiegelhalter et al. ([18]) como una medida que combina el ajuste del modelo con su complejidad efectiva. Sea $f(y | \theta)$ la verosimilitud del modelo y θ el vector de parámetros, se define la devianza (D) como

$$D(\theta) = -2 \log f(y | \theta),$$

y la dimensión efectiva del modelo como

$$p_D = \overline{D(\theta)} - D(\bar{\theta}),$$

donde $\overline{D(\theta)}$ es la media posterior de la desviación y $\bar{\theta}$ es un estimador puntual de θ , típicamente la media posterior. Así, el DIC general se define como

$$\text{DIC} = D(\bar{\theta}) + 2p_D = 2 [D(\theta)] - D(\bar{\theta}).$$

En presencia de variables latentes o estructuras complejas -como ocurre en este trabajo debido a la representación tipo mezcla normal-exponencial adoptada para los errores, la definición del Criterio de Información Desviación (DIC) estándar puede requerir modificaciones significativas para su correcta aplicación. En particular, se adopta aquí la formulación propuesta por Celeux et al. ([3]), la cual está diseñada para modelos con datos faltantes o variables latentes, y que utiliza la forma completa de la verosimilitud.

Específicamente, se emplea una versión del DIC basada en la función Q del algoritmo de Expectation-Maximization (EM), la cual considera la esperanza de la log-verosimilitud conjunta de los datos observados y las variables latentes. Esta variante se define como:

$$\text{DIC} = -4 \mathbb{E}_{\theta, Z}[\log f(y, Z | \theta) | y] + 2 \mathbb{E}_Z[\log f(y, Z | \hat{\theta}(y)) | y, \hat{\theta}(y)],$$

donde Z representa el conjunto de variables latentes introducidas en la formulación jerárquica del modelo, y $\hat{\theta}(y)$ es un estimador puntual de los parámetros θ . Si bien la literatura sugiere el uso del estimador de máxima a posteriori (MAP) o un punto fijo del algoritmo EM como elección natural para $\hat{\theta}(y)$, en este trabajo se opta por utilizar la media posterior como estimador, debido a que las distribuciones marginales posteriores de todos los parámetros del modelo no presentan multimodalidad aparente ni asimetrías relevantes. Esta elección es válida bajo dichas condiciones, y facilita el cálculo práctico del DIC al tiempo que mantiene su coherencia teórica. Para una discusión detallada sobre esta formulación del DIC y su justificación en presencia de variables latentes, se remite al lector a Celeux et al.([3]).

5.5. Resultados de las simulaciones

5.5.1. Resultados para VAR(1) sin correlación

Cuadro 5.1

Parámetros estimados del modelo VAR(1) bajo el vector cuantil $\tau_{0.1}$ sin correlación.

Parámetro	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess_bulk	Ess_tail
b_{11}^1	0.22	0.22	0.16	-0.05	0.47	1.00	19857.22	45585.34
b_{12}^1	-0.04	-0.03	0.55	-0.96	0.85	1.00	27875.85	58319.27
b_{13}^1	0.03	0.03	0.04	-0.04	0.10	1.00	22502.81	52833.11
b_{21}^1	0.01	0.00	0.04	-0.05	0.07	1.00	59459.59	67179.59
b_{22}^1	0.16	0.15	0.24	-0.23	0.56	1.00	46075.82	69674.17
b_{23}^1	-0.00	-0.00	0.02	-0.03	0.02	1.00	40205.70	45292.78
b_{31}^1	-0.51	-0.50	0.24	-0.92	-0.13	1.00	21477.24	33169.28
b_{32}^1	-2.94	-2.95	0.75	-4.18	-1.70	1.00	30100.12	40184.36
b_{33}^1	0.18	0.18	0.08	0.06	0.32	1.00	21435.97	39430.73
b_{10}	-1.16	-1.14	0.27	-1.62	-0.74	1.00	22906.96	46428.07
b_{20}	-0.20	-0.19	0.11	-0.40	-0.04	1.00	35126.66	43866.04
b_{30}	-4.39	-4.38	0.48	-5.20	-3.62	1.00	18983.09	40186.87

Cuadro 5.2

Parámetros estimados del modelo VAR(1) bajo el vector cuantil $\tau_{0.5}$ sin correlación.

Parámetro	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess_bulk	Ess_tail
b_{11}^1	-0.08	-0.08	0.09	-0.23	0.08	1.00	45633.27	76547.45
b_{12}^1	0.02	0.01	0.31	-0.48	0.54	1.00	57133.18	91338.59
b_{13}^1	0.02	0.02	0.02	-0.01	0.05	1.00	70527.70	88336.65
b_{21}^1	-0.00	-0.00	0.03	-0.05	0.04	1.00	105082.35	103549.26
b_{22}^1	0.33	0.33	0.18	0.04	0.62	1.00	78614.32	106528.21
b_{23}^1	0.00	0.00	0.01	-0.01	0.02	1.00	82638.99	106399.37
b_{31}^1	-0.62	-0.62	0.16	-0.88	-0.35	1.00	43901.18	65224.91
b_{32}^1	0.06	0.03	0.63	-0.93	1.15	1.00	52295.75	76654.45
b_{33}^1	0.10	0.10	0.05	0.03	0.18	1.00	46658.63	76334.22
b_{10}	0.51	0.52	0.15	0.27	0.75	1.00	46891.06	82992.78
b_{20}	0.16	0.16	0.07	0.05	0.28	1.00	80887.52	104268.22
b_{30}	-0.12	-0.12	0.25	-0.52	0.30	1.00	55462.33	85889.17

Cuadro 5.3*Parámetros estimados del modelo VAR(1) bajo el vector cuantil $\tau_{0.9}$ sin correlación.*

Parámetro	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess_bulk	Ess_tail
b_{11}^1	0.02	0.02	0.11	-0.16	0.20	1.00	29300.91	52031.37
b_{12}^1	0.18	0.16	0.57	-0.71	1.15	1.00	9099.02	3281.46
b_{13}^1	0.11	0.11	0.03	0.06	0.16	1.00	27317.18	57023.77
b_{21}^1	-0.00	-0.00	0.04	-0.07	0.05	1.00	49655.60	57162.98
b_{22}^1	0.43	0.42	0.35	-0.12	1.01	1.00	4169.11	1353.52
b_{23}^1	-0.00	-0.01	0.02	-0.03	0.02	1.00	30182.79	66649.89
b_{31}^1	-0.71	-0.70	0.11	-0.91	-0.56	1.00	35793.97	56515.58
b_{32}^1	-1.33	-1.34	0.82	-2.65	0.01	1.00	16141.73	43047.07
b_{33}^1	0.34	0.34	0.06	0.23	0.43	1.00	24767.94	44253.53
b_{10}	1.99	1.98	0.27	1.57	2.44	1.00	10084.15	6350.16
b_{20}	0.61	0.60	0.14	0.40	0.86	1.00	5911.79	1335.75
b_{30}	6.52	6.51	0.44	5.82	7.26	1.00	16146.87	25347.42

5.5.2. Resultados para VAR(1) con correlación**Cuadro 5.4***Estimaciones posteriores del modelo VAR(1) con correlación en los errores para $\tau_{0.1}$*

Parámetro	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess_bulk	Ess_tail
b_{11}^1	0.32	0.33	0.09	0.17	0.46	1.00	51134.18	85289.06
b_{12}^1	-0.60	-0.60	0.38	-1.22	0.03	1.00	81835.16	104926.72
b_{13}^1	0.04	0.04	0.03	-0.01	0.09	1.00	72500.01	103347.70
b_{21}^1	0.02	0.02	0.01	-0.00	0.03	1.00	99876.61	119159.30
b_{22}^1	0.18	0.18	0.06	0.08	0.28	1.00	93910.78	113134.30
b_{23}^1	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.01	1.00	76805.46	106827.23
b_{31}^1	-0.05	-0.04	0.18	-0.36	0.24	1.00	86147.33	107251.28
b_{32}^1	-3.47	-3.48	1.12	-5.29	-1.62	1.00	82898.69	105533.74
b_{33}^1	0.11	0.11	0.08	-0.02	0.23	1.00	75176.77	105839.06
b_{10}	-1.25	-1.24	0.19	-1.58	-0.95	1.00	33604.46	63767.09
b_{20}	-0.13	-0.13	0.03	-0.18	-0.09	1.00	49406.13	84155.41
b_{30}	-4.31	-4.29	0.51	-5.17	-3.50	1.00	39769.85	72148.87

Cuadro 5.5*Estimaciones posteriores del modelo VAR(1) con correlación entre errores, $\tau_{0.5}$*

Parámetro	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess_bulk	Ess_tail
b_{11}^1	-0.03	-0.04	0.08	-0.16	0.10	1.00	40159.61	33580.80
b_{12}^1	0.02	0.00	0.23	-0.33	0.43	1.00	137411.63	110642.79
b_{13}^1	0.03	0.03	0.02	0.00	0.06	1.00	95483.70	115229.48
b_{21}^1	-0.01	-0.01	0.01	-0.03	0.01	1.00	170379.35	111946.93
b_{22}^1	0.34	0.33	0.05	0.26	0.41	1.00	148847.97	120776.44
b_{23}^1	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.01	1.00	131619.98	52604.65
b_{31}^1	-0.45	-0.45	0.21	-0.80	-0.10	1.00	43796.49	33372.07
b_{32}^1	-0.96	-0.92	0.76	-2.27	0.23	1.00	135158.98	117537.64
b_{33}^1	0.01	0.01	0.06	-0.07	0.11	1.00	45600.34	27681.36
b_{10}	0.47	0.48	0.10	0.31	0.63	1.00	81086.17	43312.80
b_{20}	0.14	0.14	0.02	0.11	0.18	1.00	112743.34	124752.87
b_{30}	0.25	0.25	0.35	-0.33	0.81	1.00	96714.10	122217.53

Cuadro 5.6*Estimaciones posteriores del modelo VAR(1) con correlación en los errores, $\tau_{0.9}$*

Parámetro	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess_bulk	Ess_tail
b_{11}^1	0.11	0.12	0.07	-0.01	0.22	1.00	77014.73	100553.10
b_{12}^1	0.27	0.26	0.38	-0.35	0.91	1.00	72191.33	102910.41
b_{13}^1	0.11	0.11	0.02	0.07	0.15	1.00	43656.25	85660.56
b_{21}^1	-0.01	-0.01	0.01	-0.03	0.01	1.00	177118.66	119520.70
b_{22}^1	0.46	0.46	0.09	0.32	0.61	1.00	73871.82	107130.10
b_{23}^1	0.01	0.01	0.01	0.00	0.02	1.00	87601.82	105826.78
b_{31}^1	-0.58	-0.58	0.14	-0.83	-0.36	1.00	114985.90	120021.69
b_{32}^1	-0.32	-0.35	1.13	-2.14	1.55	1.00	84327.85	110519.31
b_{33}^1	0.26	0.26	0.07	0.15	0.37	1.00	51984.46	86509.29
b_{10}	2.05	2.04	0.20	1.73	2.39	1.00	26663.48	58539.85
b_{20}	0.51	0.51	0.04	0.45	0.59	1.00	30950.71	70512.97
b_{30}	5.77	5.76	0.56	4.89	6.72	1.00	31681.84	67222.52

5.5.3. Resultados para VAR(2) sin correlación

Cuadro 5.7

Resumen de las estimaciones posteriores del modelo VAR(2) para $\tau_{0,1}$ sin correlación.

Parámetro	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess_bulk	Ess_tail
b_{11}^1	0.25	0.24	0.18	-0.03	0.54	1.00	27111.13	59431.61
b_{12}^1	-0.09	-0.08	0.60	-1.09	0.89	1.00	28538.68	64065.19
b_{13}^1	0.02	0.02	0.04	-0.04	0.09	1.00	25575.71	29718.99
b_{21}^1	0.01	0.00	0.04	-0.06	0.09	1.00	69070.49	82582.98
b_{22}^1	0.16	0.15	0.26	-0.27	0.60	1.00	20574.67	4433.33
b_{23}^1	-0.00	-0.00	0.02	-0.03	0.03	1.00	50198.58	60570.52
b_{31}^1	-0.48	-0.49	0.25	-0.90	-0.06	1.00	30802.44	54928.07
b_{32}^1	-2.52	-2.53	0.80	-3.82	-1.18	1.00	20644.39	4897.98
b_{33}^1	0.06	0.06	0.09	-0.08	0.21	1.00	26589.96	46874.09
b_{11}^2	-0.18	-0.18	0.16	-0.45	0.08	1.00	28171.58	40233.74
b_{12}^2	0.00	0.01	0.54	-0.89	0.89	1.00	37851.38	61538.54
b_{13}^2	0.01	0.01	0.04	-0.05	0.08	1.00	37659.54	55569.46
b_{21}^2	0.02	0.02	0.04	-0.05	0.09	1.00	54453.78	94651.75
b_{22}^2	-0.02	-0.01	0.28	-0.49	0.43	1.00	55659.52	85803.76
b_{23}^2	-0.01	-0.01	0.02	-0.05	0.02	1.00	27120.69	9631.45
b_{31}^2	-0.48	-0.48	0.25	-0.87	-0.06	1.00	27633.21	57585.45
b_{32}^2	-2.97	-2.93	0.95	-4.61	-1.49	1.00	39622.78	54160.86
b_{33}^2	0.08	0.08	0.08	-0.05	0.22	1.00	26874.82	52895.71
b_{10}	-1.17	-1.16	0.31	-1.72	-0.69	1.00	27661.08	53460.74
b_{20}	-0.25	-0.24	0.13	-0.49	-0.05	1.00	33169.91	71505.49
b_{30}	-3.77	-3.75	0.43	-4.49	-3.08	1.00	17388.27	5632.91

Cuadro 5.8*Resumen de las estimaciones posteriores del modelo VAR(2) para $\tau_{0.5}$ sin correlación.*

Parámetro	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess_bulk	Ess_tail
b_{11}^1	-0.08	-0.09	0.09	-0.22	0.06	1.00	50343.36	78138.06
b_{12}^1	0.07	0.07	0.32	-0.44	0.61	1.00	27167.18	68864.55
b_{13}^1	0.02	0.02	0.02	-0.01	0.05	1.00	47527.46	75779.19
b_{21}^1	-0.00	-0.00	0.03	-0.05	0.05	1.00	79244.95	90545.08
b_{22}^1	0.31	0.32	0.19	-0.02	0.63	1.00	5499.94	4770.74
b_{23}^1	0.01	0.01	0.01	-0.01	0.03	1.00	71858.89	92586.36
b_{31}^1	-0.64	-0.67	0.15	-0.85	-0.36	1.00	36118.67	53588.18
b_{32}^1	0.71	0.74	0.69	-0.46	1.81	1.00	39145.19	60944.19
b_{33}^1	0.10	0.10	0.04	0.04	0.16	1.00	35038.67	20922.36
b_{11}^2	-0.10	-0.10	0.09	-0.25	0.04	1.00	32833.26	57348.83
b_{12}^2	-0.26	-0.26	0.32	-0.79	0.26	1.00	38492.86	34192.47
b_{13}^2	0.03	0.03	0.02	-0.01	0.07	1.00	27760.74	72863.68
b_{21}^2	0.01	0.01	0.03	-0.04	0.07	1.00	85967.92	103791.43
b_{22}^2	0.05	0.05	0.18	-0.24	0.34	1.00	47833.89	44216.49
b_{23}^2	-0.01	-0.01	0.01	-0.02	0.01	1.00	28980.58	92342.05
b_{31}^2	-0.66	-0.67	0.11	-0.82	-0.47	1.00	13175.34	70854.73
b_{32}^2	-0.24	-0.24	0.68	-1.35	0.88	1.00	10293.22	52104.90
b_{33}^2	0.10	0.10	0.04	0.03	0.17	1.00	17018.41	45269.33
b_{10}	0.62	0.62	0.16	0.35	0.87	1.00	10577.83	19724.09
b_{20}	0.14	0.14	0.08	0.02	0.27	1.00	14009.67	22436.51
b_{30}	0.12	0.11	0.26	-0.30	0.56	1.00	28678.42	41425.37

Cuadro 5.9*Resumen de las estimaciones posteriores del modelo VAR(1) para $\tau_{0,9}$ sin correlación.*

Parámetro	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess_bulk	Ess_tail
b_{11}^1	0.03	0.03	0.10	-0.14	0.21	1.00	5100.65	1349.98
b_{12}^1	0.46	0.45	0.56	-0.44	1.41	1.00	18070.45	39678.57
b_{13}^1	0.09	0.09	0.04	0.03	0.15	1.00	9395.44	4546.07
b_{21}^1	0.00	0.01	0.04	-0.07	0.07	1.00	40423.46	52023.59
b_{22}^1	0.41	0.39	0.36	-0.16	1.00	1.00	35442.10	52843.13
b_{23}^1	-0.00	-0.00	0.02	-0.03	0.03	1.00	10106.34	8411.70
b_{31}^1	-0.64	-0.64	0.07	-0.76	-0.52	1.00	24511.34	15459.56
b_{32}^1	-0.72	-0.73	1.11	-2.53	1.12	1.00	26842.65	48361.88
b_{33}^1	0.19	0.19	0.07	0.07	0.29	1.00	28261.65	52231.09
b_{11}^2	-0.18	-0.19	0.09	-0.32	-0.03	1.00	20397.58	11091.62
b_{12}^2	-0.42	-0.43	0.54	-1.29	0.49	1.00	22799.26	70520.73
b_{13}^2	0.09	0.10	0.04	0.04	0.15	1.00	22917.73	70554.87
b_{21}^2	-0.01	-0.01	0.05	-0.09	0.06	1.00	27899.74	10733.91
b_{22}^2	0.04	0.02	0.36	-0.51	0.66	1.00	40384.82	70295.07
b_{23}^2	-0.00	-0.00	0.02	-0.03	0.03	1.00	35800.19	67305.11
b_{31}^2	-0.46	-0.46	0.09	-0.61	-0.32	1.00	35797.26	70810.32
b_{32}^2	-0.05	-0.06	1.05	-1.76	1.70	1.00	31399.86	59067.02
b_{33}^2	0.14	0.14	0.06	0.05	0.24	1.00	29467.21	53525.41
b_{10}	2.25	2.24	0.29	1.80	2.75	1.00	28858.39	54994.94
b_{20}	0.64	0.63	0.16	0.40	0.92	1.00	35460.88	61958.71
b_{30}	6.54	6.53	0.48	5.77	7.34	1.00	29589.78	58299.47

5.5.4. Resultados para VAR(2) con correlación

Cuadro 5.10

Resultados de la estimación bayesiana para el modelo VAR(2) con correlación, $\tau_{0,1}$.

Parámetro	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess_bulk	Ess_tail
b_{11}^1	0.34	0.34	0.11	0.15	0.51	1.00	28218.69	62205.62
b_{12}^1	-0.33	-0.33	0.40	-1.00	0.33	1.00	64999.86	92108.70
b_{13}^1	0.04	0.04	0.03	-0.01	0.08	1.00	49566.82	84357.32
b_{21}^1	0.02	0.02	0.01	0.00	0.04	1.00	52114.76	87294.07
b_{22}^1	0.19	0.19	0.06	0.09	0.30	1.00	74722.00	105548.97
b_{23}^1	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.01	1.00	48507.84	79919.58
b_{31}^1	0.04	0.04	0.23	-0.35	0.41	1.00	47084.32	82314.03
b_{32}^1	-2.64	-2.65	1.10	-4.42	-0.81	1.00	62647.77	96942.76
b_{33}^1	0.09	0.09	0.08	-0.04	0.22	1.00	50613.03	87220.43
b_{11}^2	-0.20	-0.19	0.10	-0.36	-0.04	1.00	39308.12	56622.60
b_{12}^2	-0.63	-0.61	0.38	-1.28	-0.02	1.00	55931.38	86815.36
b_{13}^2	0.03	0.03	0.03	-0.02	0.07	1.00	48871.99	84581.75
b_{21}^2	0.01	0.01	0.01	-0.00	0.03	1.00	107542.33	106983.77
b_{22}^2	-0.04	-0.04	0.06	-0.14	0.05	1.00	77350.05	96321.81
b_{23}^2	-0.01	-0.01	0.00	-0.02	-0.00	1.00	49341.81	77030.87
b_{31}^2	-0.46	-0.46	0.19	-0.76	-0.15	1.00	53590.66	86811.22
b_{32}^2	-2.42	-2.40	1.01	-4.11	-0.79	1.00	52260.01	91182.56
b_{10}	-1.17	-1.17	0.20	-1.49	-0.84	1.00	22657.72	55591.78
b_{20}	-0.14	-0.14	0.03	-0.18	-0.09	1.00	34225.21	71362.01
b_{30}	-3.83	-3.83	0.47	-4.61	-3.07	1.00	30413.33	69988.87

Cuadro 5.11*Resultados de la estimación bayesiana para el modelo VAR(2) con correlación, $\tau_{0.5}$.*

Parámetro	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess_bulk	Ess_tail
b_{11}^1	-0.08	-0.09	0.07	-0.19	0.03	1.00	71017.06	97002.30
b_{12}^1	0.26	0.26	0.27	-0.17	0.70	1.00	88700.21	101104.95
b_{13}^1	0.02	0.02	0.02	-0.01	0.04	1.00	96998.76	123207.60
b_{21}^1	-0.01	-0.01	0.01	-0.03	0.01	1.00	113335.53	116024.56
b_{22}^1	0.30	0.30	0.06	0.20	0.40	1.00	80692.30	100569.76
b_{23}^1	0.01	0.01	0.00	0.00	0.01	1.00	68467.13	108973.36
b_{31}^1	-0.52	-0.52	0.20	-0.85	-0.18	1.00	89500.11	115524.22
b_{32}^1	-0.57	-0.57	0.91	-2.08	0.91	1.00	84837.46	110419.51
b_{33}^1	0.01	0.01	0.05	-0.07	0.10	1.00	95858.35	104946.92
b_{11}^2	-0.13	-0.13	0.07	-0.24	-0.02	1.00	48620.93	76793.35
b_{12}^2	-0.47	-0.47	0.26	-0.89	-0.04	1.00	80824.23	95837.99
b_{13}^2	0.03	0.03	0.02	0.01	0.06	1.00	70243.87	101860.77
b_{21}^2	0.02	0.02	0.01	0.00	0.04	1.00	89181.24	102656.71
b_{22}^2	0.02	0.02	0.06	-0.08	0.12	1.00	80521.80	105533.74
b_{23}^2	-0.00	-0.00	0.00	-0.01	0.00	1.00	95446.00	110752.30
b_{31}^2	-0.53	-0.53	0.18	-0.82	-0.23	1.00	67557.66	80168.50
b_{32}^2	0.22	0.23	0.93	-1.33	1.72	1.00	83514.87	101254.98
b_{33}^2	0.09	0.09	0.06	-0.01	0.18	1.00	54617.93	102165.56
b_{10}	0.57	0.58	0.10	0.40	0.74	1.00	101720.48	116707.57
b_{20}^1	0.15	0.15	0.02	0.11	0.18	1.00	69750.45	110331.46
b_{30}^1	0.24	0.23	0.34	-0.31	0.81	1.00	92983.43	110053.51

Cuadro 5.12

Resultados de la estimación bayesiana para el modelo VAR(2) con correlación, $\tau_{0.9}$.

Parámetro	Media	Mediana	SD	q5	q95	Rhat	Ess_bulk	Ess_tail
b_{11}^1	0.09	0.08	0.05	0.00	0.17	1.00	67089.73	80479.52
b_{12}^1	0.16	0.16	0.34	-0.39	0.71	1.00	54902.67	92599.67
b_{13}^1	0.08	0.08	0.02	0.05	0.12	1.00	56427.87	86061.38
b_{21}^1	-0.00	-0.00	0.01	-0.02	0.01	1.00	85854.06	106331.07
b_{22}^1	0.33	0.33	0.08	0.20	0.46	1.00	47182.88	86798.63
b_{23}^1	0.00	0.00	0.01	-0.00	0.01	1.00	43308.82	83359.63
b_{31}^1	-0.57	-0.58	0.13	-0.77	-0.35	1.00	49838.84	78376.36
b_{32}^1	-0.70	-0.71	1.01	-2.37	0.97	1.00	61539.30	90921.61
b_{33}^1	0.18	0.18	0.07	0.07	0.29	1.00	63861.49	96809.97
b_{11}^2	-0.24	-0.24	0.05	-0.31	-0.16	1.00	62844.82	93974.86
b_{12}^2	0.10	0.10	0.40	-0.56	0.77	1.00	48329.04	80687.06
b_{13}^2	0.10	0.10	0.02	0.07	0.14	1.00	37032.42	73421.32
b_{21}^2	0.00	0.00	0.01	-0.02	0.03	1.00	42563.25	76944.00
b_{22}^2	0.14	0.14	0.10	-0.02	0.30	1.00	48073.01	80114.34
b_{23}^2	-0.00	-0.00	0.00	-0.01	0.00	1.00	84240.42	81868.45
b_{31}^2	-0.52	-0.52	0.13	-0.74	-0.32	1.00	76459.20	58092.74
b_{32}^2	0.62	0.61	1.15	-1.27	2.52	1.00	60247.01	94354.53
b_{33}^2	0.19	0.19	0.05	0.10	0.28	1.00	58026.33	79546.54
b_{10}	2.52	2.51	0.21	2.18	2.87	1.00	16408.16	37703.38
b_{20}	0.56	0.56	0.04	0.49	0.63	1.00	22614.11	54210.40
b_{30}	6.56	6.55	0.57	5.63	7.51	1.00	20672.66	49546.95

Tras la presentación de los resultados de estimación para cada modelo, a continuación se comparan las distintas especificaciones mediante el criterio DIC, previamente definido. Esta comparación permite evaluar cuál modelo logra un mejor equilibrio entre ajuste y complejidad en cada nivel de cuantiles.

5.5.5. Comparación de modelos según el criterio DIC

Utilizando el criterio DIC adaptado para modelos con variables latentes se comparó el desempeño de las cuatro especificaciones VAR consideradas. Los resultados, resumidos en el Cuadro 5.13, muestran diferencias importantes según el vector de cuantiles y la inclusión o no de correlación entre los errores.

En términos generales, los modelos que incorporan correlación presentan valores de DIC más bajos en los cuantiles inferiores y centrales, lo que sugiere un mejor compromiso entre ajuste y complejidad bajo estas configuraciones. Por ejemplo, en el caso del cuantil $\tau_{0.1}$, el modelo VAR(1) con correlación alcanza el menor valor (2359.768), y un patrón similar se observa para $\tau_{0.5}$, donde también el modelo

VAR(1) con correlación obtiene el mejor resultado (1945.035).

En contraste, para el cuantil superior $\tau_{0.9}$, el modelo VAR(1) sin correlación muestra el menor valor de DIC (1027.935), por debajo de su contraparte con correlación (1962.280). Este resultado indica que, en ciertos casos, asumir independencia entre los errores puede ofrecer un mejor ajuste relativo, posiblemente debido a una menor penalización por complejidad.

Al considerar los modelos VAR(2), los que incluyen correlación retoman ventaja en todos los cuantiles, incluyendo $\tau_{0.9}$, lo cual sugiere que la estructura de dependencia puede resultar más beneficiosa cuando se modelan efectos dinámicos de mayor orden.

En conjunto, los resultados muestran que la utilidad de incorporar correlación entre errores depende tanto del orden del modelo como del nivel cuantílico considerado. Mientras que dicha inclusión mejora el desempeño en la mayoría de los casos, existen escenarios en los que modelos más simples sin correlación pueden resultar competitivos.

Finalmente, los modelos VAR(2) sin correlación presentan los valores más altos de DIC en todos los niveles de cuantiles, con valores particularmente elevados para $\tau_{0.1}$ (3609.118) y $\tau_{0.5}$ (2944.406). Esto sugiere que, en ausencia de una estructura de dependencia entre errores, el incremento en la complejidad por aumentar el orden del modelo no se traduce en una mejora del ajuste.

Cuadro 5.13

Valores del DIC para los modelos VAR bajo distintos vectores cuantílicos

Modelo	$\tau_{0.1}$	$\tau_{0.5}$	$\tau_{0.9}$
VAR(1) sin correlación	2861.544	3598.249	1027.935
VAR(1) con correlación	2359.768	1945.035	1962.280
VAR(2) sin correlación	3609.118	2944.406	1795.185
VAR(2) con correlación	2722.901	2570.946	1429.422

5.6. Discusión y comparación

La aplicación del modelo de regresión cuantílica multivariada a las variaciones porcentuales mensuales de las series macroeconómicas peruanas (PBI, IPC, TD) ha permitido explorar su dinámica conjunta en distintos niveles de la distribución condicional. Los resultados obtenidos del modelo VAR(1) y VAR(2) con y sin correlación, estimados para los vectores cuantílicos $\tau_{0.1}$, $\tau_{0.5}$ y $\tau_{0.9}$ revelan patrones consistentes en cuanto a calidad estimativa, comportamiento de parámetros y diferencias estructurales.

Un hallazgo consistente en todas las estimaciones es la adecuada convergencia de los algoritmos MCMC, evidenciada por valores de Rhat cercanos a 1.00 para todos los parámetros en cada modelo y cuantil. Esto, sumado a los elevados valores de `Ess.bulk` y `Ess.tail`, siendo notablemente mayores

bajo la especificación con correlación, sugiere que se ha obtenido un número suficiente de muestras independientes de la distribución posterior, garantizando la fiabilidad de las inferencias.

Con respecto a los modelos VAR(1), con y sin correlación entre los errores, se observan patrones significativos en su comportamiento. En primer lugar, hay una consistencia general en los signos de los coeficientes a través de los diferentes cuantiles analizados. Esto sugiere estabilidad en la dirección de las relaciones dinámicas entre las tasas de cambio de las variables macroeconómicas consideradas. La excepción notable se presenta en el cuantil $\tau_{0.5}$, específicamente para el coeficiente b_{32}^1 y el intercepto b_{30} . En el modelo sin correlación, b_{32}^1 es 0.06 y b_{30} es -0.12, mientras que en el modelo con correlación, estos valores cambian a 0.96 y 0.25, respectivamente. Si bien la interpretación de los interceptos puede ser menos crítica en el contexto de la dinámica temporal a largo plazo, la inversión de signo y la magnitud del cambio en b_{32}^1 para el cuantil central sugieren que la consideración de la correlación contemporánea entre los errores puede capturar una relación subyacente diferente entre la variación porcentual de la TD y el IPC en condiciones normales del mercado.

Un patrón distintivo en los resultados es que el coeficiente b_{23}^1 (que representa el impacto del retardo de la variación porcentual de la TD sobre la variación porcentual del IPC) es consistentemente cercano a **cero en todas las tablas** de los modelos VAR(1), tanto con como sin correlación. Esto sugiere que, para los cuantiles evaluados, las fluctuaciones pasadas en la tasa de cambio de la TD no tienen un efecto significativo sobre la dinámica de la variación porcentual del IPC. De manera similar, el coeficiente b_{21}^1 (que denota el impacto del retardo de la variación porcentual del PBI sobre la variación porcentual del IPC) también se mantiene muy cercano a cero (0 o 0.01). Estos hallazgos implican que, en el contexto de este modelo VAR(1), la tasa de cambio del PBI rezagada tampoco ejerce una influencia considerable sobre la variación porcentual del IPC. Estos resultados podrían indicar una **independencia condicional** particular en estas relaciones para el periodo y las variables estudiadas.

En los modelos VAR(2) también se observa en general una alta coincidencia en los signos y valores medios de las estimaciones entre los modelos con y sin correlación. Sin embargo, bajo el vector cuantil $\tau_{0.1}$ emergen algunas diferencias significativas en ciertos coeficientes, lo que sugiere que las relaciones dinámicas entre las tasas de cambio de las variables pueden verse más afectadas por la especificación del modelo en los extremos de la distribución condicional. Por ejemplo, se identifican cambios importantes de signo en algunos coeficientes de la matriz de rezago 1 y variaciones marcadas en la magnitud de coeficientes específicos de la matriz de rezago 2. Estos casos ilustran cómo la incorporación de correlación puede alterar de forma no trivial la interpretación de la dinámica entre tasas de cambio de las variables, particularmente en los cuantiles inferiores, donde la sensibilidad del sistema puede ser mayor.

Una observación recurrente en el modelo VAR(2), que también se alinea con lo encontrado en el VAR(1), es que ciertos coeficientes se mantienen cercanos a cero en todos los cuantiles y bajo ambas especificaciones (con y sin correlación). Específicamente, los coeficientes b_{21}^1 (impacto de la variación porcentual del PBI rezagada un período sobre la variación porcentual del IPC), b_{23}^1 (TD rezagada un período sobre IPC), b_{21}^2 (impacto de la variación porcentual del PBI rezagada dos períodos sobre la variación porcentual del IPC) y b_{23}^2 (impacto de la variación porcentual de la TD rezagada dos períodos sobre la variación porcentual del IPC) son sistemáticamente cero o muy cercanos a cero (0.01 o 0.02). Este hallazgo sugiere una independencia condicional persistente de la variación porcentual del IPC respecto a sus propios rezagos relacionados con el PBI y la TD. Esto podría indicar que, en el contexto de estas series macroeconómicas y el período de estudio, la dinámica de la variación porcentual del IPC está predominantemente influenciada por otros factores no capturados por los rezagos de la variación porcentual del PBI y la TD dentro de este marco VAR, o bien que estas relaciones son débiles y no persistentes a lo largo de la distribución condicional.

Finalmente, un hallazgo frecuente es que la desviación estándar (SD) de las medias posteriores tiende a ser menor para casi todos los parámetros en modelos que incorporan correlación. Esto sugiere que incluir la correlación entre los errores, tal como proponen Iacopini et al. ([4]), mejora la precisión en la estimación de los parámetros del modelo. Esta mejora en la precisión es coherente con los valores obtenidos del DIC, que en la mayoría de los casos favorecen las especificaciones con correlación, especialmente en los cuantiles inferiores y centrales. No obstante, también se observó que para el cuantil superior, la versión sin correlación del modelo VAR(1) presenta un mejor DIC, lo cual refuerza la necesidad de evaluar cuidadosamente el desempeño de cada especificación según el nivel cuantílico considerado.

Capítulo 6

Conclusiones

6.1. Conclusiones

En este trabajo se ha desarrollado un análisis exhaustivo del desempeño de modelos de regresión cuantílica multivariada aplicados a series temporales, considerando tanto un enfoque de simulación como un estudio empírico sobre variables macroeconómicas peruanas. Las conclusiones principales se organizan en torno a tres ejes: calidad estimativa de los modelos, impacto de la especificación del error, y utilidad de incorporar correlación entre los términos de error.

- Las simulaciones realizadas, con tamaños muestrales $T = 50$, $T = 100$ y $T = 200$, mostraron de forma consistente que el desempeño de los estimadores mejora al incrementarse el tamaño de la muestra. Este efecto se refleja en la reducción sistemática del sesgo, del error cuadrático medio (ECM) y de la desviación estándar (SD) de los parámetros estimados. En ambos modelos (VAR(1) y VAR(2)), los coeficientes de las matrices autoregresivas presentan mayor precisión que los interceptos, cuyos estimadores tienden a mostrar mayor variabilidad y sesgo, especialmente en muestras pequeñas. En el caso del VAR(2), incluso bajo $T = 50$, los coeficientes autorregresivos se estimaron con un buen nivel de precisión, lo que destaca la capacidad del enfoque conjunto para capturar dinámicas de mayor orden.
- El análisis bajo diferentes distribuciones del error, realizado en el caso de la mediana condicional, permitió evaluar la robustez del enfoque conjunto frente a métodos univariados. En el caso de errores normales multivariados y $T = 50$, el método univariado presentó menores valores de ECM y SD. Sin embargo, en presencia de errores t -Student multivariados, el enfoque conjunto ofreció un mejor desempeño incluso desde tamaños muestrales pequeños. A partir de $T = 100$, el modelo conjunto destacó sistemáticamente por menores valores de ECM y SD en casi todos los parámetros, independientemente de la distribución del error, lo que refuerza su ventaja para

modelar la dependencia entre series y ofrecer estimaciones más precisas en contextos complejos.

- En la aplicación empírica a las series del Producto Bruto Interno (PBI), el Índice de Precios al Consumidor (IPC) y la Tasa de Desempleo (TD), el enfoque cuantílico permitió analizar su comportamiento conjunto en distintos niveles de la distribución condicional. Las estimaciones obtenidas mostraron diferencias en la magnitud y el signo de algunos coeficientes según el cuantil, lo que evidencia la utilidad de este enfoque para capturar posibles cambios en la dinámica de las variables a lo largo de toda la distribución condicional. Además, la comparación mediante el criterio DIC indicó que, en la mayoría de los casos, los modelos que incorporan correlación entre errores ofrecieron un mejor ajuste a los datos reales.

6.2. Sugerencias para investigaciones futuras

- Aunque en este estudio se utilizó la reparametrización radial para la matriz de correlación, futuras investigaciones podrían explorar otras alternativas, como la descomposición de Cholesky o métodos basados en *vine copulas*, los cuales permiten modelar dependencias complejas de forma más flexible. Estas opciones podrían contribuir a mejorar la estabilidad numérica y la eficiencia de los algoritmos de inferencia.
- También podría extender el modelo a estructuras dinámicas más complejas. Entre las alternativas se encuentran los modelos VAR con umbrales, que permiten diferentes dinámicas según el estado de la serie; los modelos VAR con parámetros que varían en el tiempo, útiles para capturar posibles cambios estructurales; y los modelos de mezcla VAR, que representan la serie como una combinación de distintos regímenes. Estas extensiones podrían ser adecuadas para contextos donde la estructura temporal de los datos presenta mayor heterogeneidad y complejidad.

Apéndice A

Conceptos teóricos

A.1. Distribución Laplace Asimétrica Multivariada

Sea $\mathbf{X} \sim \text{MAL}_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \boldsymbol{\alpha})$ un vector aleatorio con distribución Laplace Asimétrica Multivariada, cuya función de densidad está dada por:

$$f(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\mu}, \Sigma, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{2e^{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1} \boldsymbol{\alpha}}}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} \left(\frac{Q(\mathbf{x})}{2 + \boldsymbol{\alpha}^\top \Sigma^{-1} \boldsymbol{\alpha}} \right)^{\frac{2-p}{4}} K_{\frac{p}{2}-1} \left(\sqrt{(2 + \boldsymbol{\alpha}^\top \Sigma^{-1} \boldsymbol{\alpha}) Q(\mathbf{x})} \right),$$

donde:

- $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$: Vector de localización,
- Σ : Matriz de escala definida positiva ($p \times p$),
- $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^p$: Vector de asimetría (si $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, se recupera la versión simétrica),
- $Q(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$,
- $K_\nu(\cdot)$: Función modificada de Bessel de segundo tipo.

De acuerdo con el Teorema 6.3.1 de Kozubowski y Podgórski (2000), la distribución Laplace Asimétrica Multivariada puede expresarse mediante una mixtura de distribuciones normal y exponencial. Sea:

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\alpha}W + W^{1/2}\mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z} \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{0}, \Sigma),$$

donde: $\stackrel{d}{=}$ denota igualdad en distribución y $W \sim \text{Exp}(1)$ independiente de \mathbf{Z} ,

A.2. Distribución Wishart Inversa

La distribución Wishart Inversa es fundamental en estadística multivariante, particularmente en el análisis bayesiano de matrices de covarianza. Sea X una matriz aleatoria definida positiva de dimensión $p \times p$, se dice que sigue una distribución Wishart Inversa con parámetros de escala Ψ y grados de libertad ν , denotado como:

$$X \sim \mathcal{W}^{-1}(\Psi, \nu)$$

donde su función de densidad está dada por:

$$f(X | \Psi, \nu) = \frac{|\Psi|^{\nu/2}}{2^{\nu p/2} \Gamma_p(\frac{\nu}{2})} |X|^{-(\nu+p+1)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{tr}(\Psi X^{-1})\right\},$$

con:

- Ψ : Matriz de escala definida positiva ($p \times p$),
- ν : Grados de libertad ($\nu > p - 1$),
- $\Gamma_p(\cdot)$: Función Gamma multivariante,
- $\text{tr}(\cdot)$: Operador traza.

La relación con la distribución Wishart estándar $\mathcal{W}(\cdot)$ viene dada por:

$$X \sim \mathcal{W}^{-1}(\Psi, \nu) \iff X^{-1} \sim \mathcal{W}(\Psi^{-1}, \nu).$$

Apéndice B

Códigos en JAGS y Stan

B.1. Estudio de simulación - Código en JAGS para el modelo QVAR(1)

```
{
sink("Qvar1jags_multivariado.txt")
cat("
model
{
  for (i in 1:3) {
    mux[1, i] <- y[1,i]
  }
  for(i in 2:N){
    # Ecuaciones de la serie multivariada de 3 componentes
    for (j in 1:3) {
      mu[i, j] <- beta[j,1]+beta[j,2]*y[i-1,1]+beta[j,3]*y[i-1,2]+beta[j
        ,4]*y[i-1,3]
    }
    mux[i, 1] <- mu[i, 1]+ghama[1]*Expo1[i]
    mux[i, 2] <- mu[i, 2]+ghama[2]*Expo2[i]
    mux[i, 3] <- mu[i, 3]+ghama[3]*Expo3[i]
    Expo1[i] ~ dexp(1) # apriori para las latentes
    Expo2[i] ~ dexp(1)
    Expo3[i] ~ dexp(1)
    tau[i, 1, 1] <- 1/(xi[1]*Expo1[i] )
    tau[i, 1, 2] <- 0
    tau[i, 1, 3] <- 0
    tau[i, 2, 2] <- 1/(xi[2]*Expo2[i] )
  }
}
```

```

    tau[i,2,1] <-0
    tau[i,2,3] <-0
    tau[i,3,3] <-1/(xi[3]*Expo3[i] )
    tau[i,3,1] <-0
    tau[i,3,2] <-0
    y[i,1:3] ~ dnorm(mux[i,1:3], tau[i,1:3,1:3])
  }
  for (j in 1:3) {
    for (k in 1:4) {
      beta[j, k] ~ dnorm(0, 0.01) # apriori para las betas
    }
  }
  xi[1] <- 2/(q[1]*(1-q[1]))
  xi[2] <- 2/(q[2]*(1-q[2]))
  xi[3] <- 2/(q[3]*(1-q[3]))
  ghama[1] <- (1 -2*q[1])/(q[1]*(1 - q[1]))
  ghama[2] <- (1 -2*q[2])/(q[2]*(1 - q[2]))
  ghama[3] <- (1 -2*q[3])/(q[3]*(1 - q[3]))
}
", fill = TRUE)
sink()}

```

B.2. Estudio de simulación - Código en Stan para el modelo QVAR(1) sin correlación

```

data {
  int<lower=4> n; // Numero de observaciones
  vector[3] q; // Cuantiles para cada componente
  int<lower=1> K; // numero de predictores
  matrix[n, K] x; // matriz de predictores
  matrix[n, K] y; // vector respuesta
}
transformed data {
  vector[3] xi;
  vector[3] ghama;
  matrix[n, K] Q_ast;
  matrix[K, K] R_ast;
  matrix[K, K] R_ast_inverse;
  matrix[n, K] X_centered;
}

```

```

vector[K] x_means;
  for (i in 1:K) {
    x_means[i] = mean(x[, i]);
    X_centered[, i] = x[, i] - rep_vector(x_means[i], n); // Centrar
                  cada columna
  }
// realizar descomposicion QR
Q_ast = qr_thin_Q(X_centered)*sqrt(n - 1);
R_ast = qr_thin_R(X_centered)/sqrt(n - 1);
R_ast_inverse = inverse(R_ast);
for(i in 1:3){
  xi[i] = 2/(q[i]*(1- q[i]));
  ghama[i]=(1-2*q[i])/(q[i]*(1-q[i]));
}
}
parameters {
  vector[3] alpha; // intercepto
  matrix[K,3] theta; // coeficientes de Q_ast
  vector<lower=0> [n] Expo1; // Parametros latentes para cada
  observacion;
  vector<lower=0> [n] Expo2;
  vector<lower=0> [n] Expo3;
}
model {
  matrix[3,3] Sigma;
  matrix[n,3] mux;
  matrix[n,3] eta;
  to_vector(theta) ~ normal(0,10); // apriori para beta
  alpha~normal(0,10);
  eta=Q_ast*theta;
  Expo1[1:n] ~ exponential(1); // apriori para las latentes
  Expo2[1:n] ~ exponential(1);
  Expo3[1:n] ~ exponential(1);
  for (i in 1:n) {
    Sigma = diag_matrix(to_vector([xi[1]*Expo1[i], xi[2]*Expo2[i], xi[3]*
    Expo3[i]]));
    mux[i, 1]=eta[i,1] +ghama[1]*Expo1[i];
    mux[i, 2]=eta[i,2]+ghama[2]*Expo2[i];
    mux[i, 3]=eta[i,3] +ghama[3]*Expo3[i];
  }
}

```

```

    y[i,1:3]~ multi_normal(mux[i,1:3]+to_row_vector(alpha), Sigma); //
      likelihood
  }
}
generated quantities {
  vector[n] log_lik;
  matrix[3,3] Sigma_gen;
  matrix[n,3] mux_gen;
  matrix[K,3 ] beta;
  matrix[n,3] eta;
  vector[3] alpha_true;
  eta=Q_ast*theta;
  beta = R_ast_inverse*theta; // coeficientes x
  for(i in 1:3){
    alpha_true[i]=alpha[i]-to_row_vector(x_means)*beta[,i];
  }

  for (i in 1:n) {
    Sigma_gen = diag_matrix(to_vector([xi[1]*Expo1[i], xi[2]*Expo2[i], xi
      [3]*Expo3[i]]));
    mux_gen[i, 1] = eta[i,1] + ghama[1]*Expo1[i];
    mux_gen[i, 2] = eta[i,2] + ghama[2]*Expo2[i];
    mux_gen[i, 3] = eta[i,3] + ghama[3]*Expo3[i];
    log_lik[i] = multi_normal_lpdf(y[i,1:3] | mux_gen[i,1:3] +
      to_row_vector(alpha), Sigma_gen);
  }
}

```

B.3. Estudio de simulación - Código en Stan para el modelo QVAR(1) con correlación

```

//modelQVAR1_stan
data {
  int<lower=4> n;           // Numero de observaciones
  int<lower=1> K;          // numero de predictores
  matrix[n, K] y;         // Serie multivariada de 3 componentes
  matrix[n, K] x;         // matriz de predictores
  vector[3] q;            // Cuantiles para cada componente
}

```

```

transformed data {
  vector[3] xi;
  vector[3] ghama;
  matrix[n, K] Q_ast;
  matrix[K, K] R_ast;
  matrix[K, K] R_ast_inverse;
  matrix[n, K] X_centered;
  vector[K] x_means;
  for (i in 1:K) {
    x_means[i] = mean(x[, i]);
    X_centered[, i] = x[, i] - rep_vector(x_means[i], n); // Centrar
    cada columna
  }
  // realizar descomposicion QR
  Q_ast = qr_thin_Q(X_centered)*sqrt(n - 1);
  R_ast = qr_thin_R(X_centered)/sqrt(n - 1);
  R_ast_inverse = inverse(R_ast);
  for(i in 1:3){
    xi[i] = 2/(q[i]*(1- q[i]));
    ghama[i]=(1-2*q[i])/(q[i]*(1-q[i]));
  }
}
parameters {
  vector[3] alpha; // intercepto
  matrix[K,3] theta; // coeficientes de Q_ast
  vector<lower=0> [n] Expo;
  vector<lower=-1, upper=1>[K] h; // descompose cholesky
  vector<lower=0>[K] scale; // prior scale
}
transformed parameters {
  matrix[K, K] L;
  matrix[K,K] Omega; // prior correlation
  L[1,1]=1;
  L[2,1]=h[1];
  L[3,1]=h[2];
  L[1,2]=0;
  L[2,2]=sqrt(1-h[1]^2);
  L[3,2]=h[3]*sqrt(1-h[2]^2);
  L[1,3]=0;

```

```

L[2,3]=0;
L[3,3]=sqrt((1-h[2]^2)*(1-h[3]^2));
    Omega=tcrossprod(L);
}
model {
  matrix[n,K] mux;
  matrix[n,3] eta;
  matrix[K, K] Cov;
  matrix[K, K] omega;
  matrix[K, K] Sigma;
  matrix[K, K] Cov_cho;
  Expo ~ exponential(1);
  to_vector(theta) ~ normal(0,10); // apriori para beta
  alpha~normal(0,10);
  eta=Q_ast*theta;
  scale ~ gamma(1,1);
  omega=quad_form_diag(Omega,sqrt(scale));
  Sigma=quad_form_diag(omega,sqrt(xi));
  for (i in 1:n) {
    mux[i,1] = eta[i,1]+ghama[1]*Expo[i]*sqrt(scale[1]);
    mux[i,2] = eta[i,2]+ghama[2]*Expo[i]*sqrt(scale[2]);
    mux[i,3] = eta[i,3]+ghama[3]*Expo[i]*sqrt(scale[3]);
    Cov=Expo[i]*Sigma;
    Cov_cho=cholesky_decompose(Cov);
    y[i,1:3] ~ multi_normal_cholesky(mux[i,1:3]+to_row_vector(alpha),
      Cov_cho);
  }
}
generated quantities {
  matrix[K,3 ] beta;
  vector[3] alpha_true;
  vector[n] log_lik;
  matrix[K, K] Cov_gen;
  matrix[K, K] Cov_cho_gen;
  row_vector[3] mux_row_gen;
  matrix[K, K] omega_gen;
  matrix[K, K] Sigma_gen;
  matrix[n,3] eta;
  eta=Q_ast*theta;
}

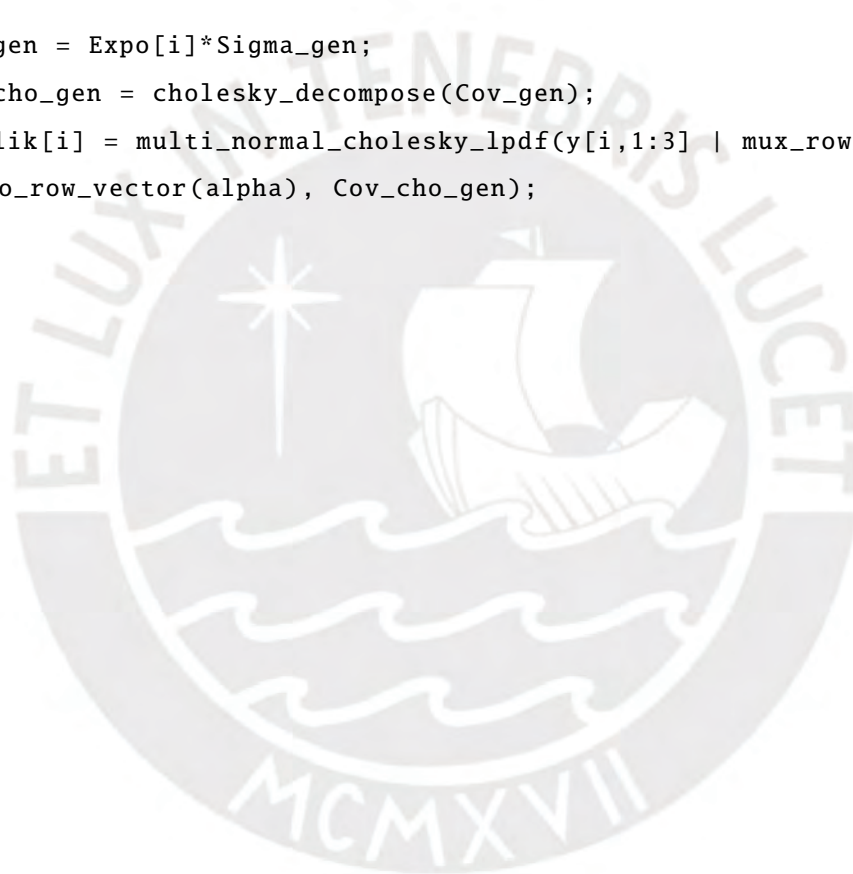
```

```

beta = R_ast_inverse*theta;
omega_gen = quad_form_diag(Omega, sqrt(scale));
Sigma_gen = quad_form_diag(omega_gen, sqrt(xi));
for(i in 1:3){
    alpha_true[i]=alpha[i]-to_row_vector(x_means)*beta[,i];
}
for (i in 1:n) {
    mux_row_gen[1] = eta[i,1] + ghama[1]*Expo[i]*sqrt(scale[1]);
    mux_row_gen[2] = eta[i,2] + ghama[2]*Expo[i]*sqrt(scale[2]);
    mux_row_gen[3] = eta[i,3] + ghama[3]*Expo[i]*sqrt(scale[3]);

    Cov_gen = Expo[i]*Sigma_gen;
    Cov_cho_gen = cholesky_decompose(Cov_gen);
    log_lik[i] = multi_normal_cholesky_lpdf(y[i,1:3] | mux_row_gen +
        to_row_vector(alpha), Cov_cho_gen);
}
}

```



Bibliografía

- [1] Chandra R Bhat y Aupal Mondal. *On the Almost Exact-Equivalence of the Radial and Spherical Unconstrained CholeskyBased Parameterization Methods for Correlation Matrices*. Inf. téc. Department of Civil, Architectural y Environmental Engineering, 2021.
- [2] Indrabati Bhattacharya y Subhashis Ghosal. «Bayesian multivariate quantile regression using dependent Dirichlet process prior». En: *Journal of Multivariate Analysis* 185 (2021), pág. 104763.
- [3] Gilles Celeux et al. «Deviance information criteria for missing data models». En: (2006).
- [4] Matteo Iacopini et al. «Bayesian mixed-frequency quantile vector autoregression: Eliciting tail risks of monthly US GDP». En: *Journal of Economic Dynamics and Control* 157 (2023), pág. 104757.
- [5] R Koenker. «Quantile Regression in R: a Vignette; 2015». En: URL: <https://cran.r-project.org/web/packages/quantreg/vignettes/rq.pdf> (accessed Feb 28, 2018) (2015).
- [6] Roger Koenker. «quantreg: Quantile regression». En: <http://CRAN.R-project.org/package=quantreg> (2009).
- [7] Roger Koenker y Jose AF Machado. «Goodness of fit and related inference processes for quantile regression». En: *Journal of the american statistical association* 94.448 (1999), págs. 1296-1310.
- [8] Roger Koenker et al. *quantreg: Quantile Regression*. R package version 5.97. 2024. URL: <https://CRAN.R-project.org/package=quantreg>.
- [9] Tõnu Kollo y Muni S Srivastava. «Estimation and testing of parameters in multivariate Laplace distribution». En: *Communications in Statistics-Theory and Methods* 33.10 (2005), págs. 2363-2387.
- [10] Kozubowski TJ Kotz S y Podgorski K. *Symmetric multivariate Laplace distribution. Asymmetric multivariate Laplace distribution. In The Laplace distribution and generalizations*. Springer Science, 2012, págs. 239-272.
- [11] Tomasz J Kozubowski y Krzysztof Podgórski. «A class of asymmetric distributions». En: *Actuarial Research Clearing House* 1 (1999), págs. 113-134.

- [12] Hideo Kozumi y Genya Kobayashi. «Gibbs sampling methods for Bayesian quantile regression». En: *Journal of statistical computation and simulation* 81.11 (2011), págs. 1565-1578.
- [13] Robert B Litterman. «Forecasting with Bayesian vector autoregressions—five years of experience». En: *Journal of Business & Economic Statistics* 4.1 (1986), págs. 25-38.
- [14] Helmut Lütkepohl. *New introduction to multiple time series analysis*. Springer Science & Business Media, 2005.
- [15] Lea Petrella y Valentina Raponi. «Joint estimation of conditional quantiles in multivariate linear regression models with an application to financial distress». En: *Journal of Multivariate Analysis* 173 (2019), págs. 70-84.
- [16] R Roger y G Gilbert Bassett. «Regression Quantiles». En: *Econometrica* (1978), págs. 33-50.
- [17] K. Podgorski S. Kotz T. Kozubowski. *The Laplace Distribution and Generalizations: A Revisit with Applications To Communications, Economics, Engineering and Finance*. Basel, 2001.
- [18] David J Spiegelhalter et al. «Bayesian measures of model complexity and fit». En: *Journal of the royal statistical society: Series b (statistical methodology)* 64.4 (2002), págs. 583-639.
- [19] Yu-Zhu Tian, Man-Lai Tang y Mao-Zai Tian. «Bayesian joint inference for multivariate quantile regression model with $L_{1/2}$ penalty». En: *Computational Statistics* 36 (2021), págs. 2967-2994.
- [20] Aki Vehtari et al. «Rank-normalization, folding, and localization: An improved \hat{R} for assessing convergence of MCMC (with discussion)». En: *Bayesian analysis* 16.2 (2021), págs. 667-718.
- [21] Helle Visk. «On the parameter estimation of the asymmetric multivariate Laplace distribution». En: *Communications in Statistics—Theory and Methods* 38.4 (2009), págs. 461-470.
- [22] Elisabeth Waldmann y Thomas Kneib. «Bayesian bivariate quantile regression». En: *Statistical Modelling* 15.4 (2015), págs. 326-344.
- [23] Kai Yang et al. «Bayesian Quantile Regression Analysis for Bivariate Vector Autoregressive Models with an Application to Financial Time Series». En: *Computational Economics* (2023), págs. 1-25.
- [24] Keming Yu y Rana A Moyeed. «Bayesian quantile regression». En: *Statistics & Probability Letters* 54.4 (2001), págs. 437-447.
- [25] Keming Yu y Jin Zhang. «A three-parameter asymmetric Laplace distribution and its extension». En: *Communications in Statistics—Theory and Methods* 34.9-10 (2005), págs. 1867-1879.