

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA



Análisis de estabilidad sísmica de muros históricos peruanos en base a tierra
TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE INGENIERO CIVIL

AUTOR

Arturo Vladimir Torres Acosta

ASESOR

Jorge Marcial Blondet Saavedra

Lima, Junio, 2020

RESUMEN

En varios países altamente sísmicos existen muros simplemente apoyados en el terreno que no se han volcado y se encuentran en buenas condiciones después de varios cientos de años. El Perú es un país de gran potencial sísmico (Tavera, 2019), y existen muros prehispánicos que siguen de pie luego de soportar varios terremotos. Las investigaciones de la respuesta en el tiempo de muros mediante el análisis sísmico rotacional de bloques rígidos ha sido un tema interesante de estudio durante décadas (Housner, 1963); (Pitilakis & Tavouktsi, 2010); (Hogan, 1989); (Makris & Zhang, 1999); (Caliò & Marletta, 2003); (Manos, Petalas, & Demosthenous, 2013). En ese sentido, el objetivo de la tesis es estudiar la estabilidad y el riesgo sísmico de volteo de algunos muros precolombinos peruanos ante futuros terremotos.

Este estudio resume el análisis dinámico de estabilidad sísmica de monumentos históricos peruanos como: un muro del templo de Huiracocha en Raqchi ubicado en la provincia de Cusco y un tramo de muro del camino Inca que atraviesa el campus de la PUCP. Ambos muros fueron modelados numéricamente como bloques rígidos simplemente apoyados sobre el terreno que ante un sismo podrían tambalear alrededor de las esquinas de su base. Se determinó la estabilidad sísmica de estos monumentos históricos peruanos ante un conjunto de sismos sintéticos consistentes a magnitudes de momentos, condiciones de terreno y sismicidad locales. Luego, se graficó la respuesta de rotación en el tiempo de los muros ante los movimientos sintéticos en su base. Y finalmente, se evaluó el riesgo de volteo de los muros a posibles terremotos futuros.

La conclusión principal del estudio es que probablemente el muro del camino inca (del campus PUCP) colapsará durante un sismo futuro de la magnitud 8.5 y periodo de retorno de 1 000 años, mientras que el muro de Huiracocha permanecerá en pie durante muchos siglos más.

Contenido

1. Introducción	5
2. Objetivos	5
3. Justificación e hipótesis.....	6
4. Metodología	6
5. Revisión de la literatura	7
6. Análisis de estabilidad de bloques en traslación ante excitaciones en su base	8
7. Análisis de estabilidad de bloques oscilantes ante excitaciones en su base.....	11
8. Respuesta del bloque oscilante ante excitaciones en su base.....	19
8.1. Método numérico: aceleración angular constante.....	20
8.2. Método numérico: aceleración angular lineal	21
9. Validación del método numérico	26
10. Competencia de parámetros que influye en la estabilidad del bloque: esbeltez y altura .	32
11. Análisis sísmico de los muros incaicos	38
11.1. Metodología	40
11.2. Acelerogramas para Cusco.....	41
11.3. Acelerogramas para Lima	42
11.4. Respuesta sísmica de rotación del muro del templo de Huiracocha	44
11.5. Respuesta sísmica de rotación del muro del Camino Inca PUCP	45

12. Conclusiones y Recomendaciones	48
13. Anexos.....	50
13.1. Anexo 1: Modelo numérico utilizado para resolver la ecuación del comportamiento dinámico del bloque rígido.....	50
13.2. Anexo 2: Modelo numérico utilizado para resolver la ecuación del comportamiento dinámico para el muro de Raqchi ante señales sintéticas	54
14. Referencias	59



1. Introducción

En muchos lugares de alta sismicidad, existen monumentos históricos simplemente apoyados en el suelo que debido a su capacidad de oscilar siguen de pie. En cambio, muchos otros monumentos históricos han colapsado. En el Perú, existen muros precolombinos que han sobrevivido a varios terremotos intensos como: los muros del Qhapaq Ñan y los muros del templo de Huiracocha. Por lo tanto este trabajo evaluó el comportamiento sísmico de los muros mediante la dinámica rotacional de los bloques rígidos.

El estudio presentó el desarrollo de la formulación analítica y de métodos numéricos para estimar la respuesta sísmica rotacional en el tiempo de muros rectangulares rígidos. Estos muros se encuentran simplemente apoyados en el suelo y están sometidos a aceleraciones horizontales en su base. Como caso práctico, se estudió el comportamiento sísmico de tambaleo de un muro del templo de Huiracocha en Cusco y una porción del Camino Inca que atraviesa la PUCP en Lima.

Luego, se evaluó la probabilidad de que los muros se volteen mediante la respuesta rotacional en el tiempo de los muros ante sismos futuros. Los sismos futuros, dada la escasez de acelerogramas históricos en el Perú, fueron generados teniendo en consideración la naturaleza de la sismicidad (subducción, deformaciones corticales, etc) y condiciones locales del terreno (blando, duro, rígido). Asimismo, estos sismos fueron generados para periodos de retorno (T_r), intervalo de tiempo para que ocurran dos eventos de tamaño similar, de: 500, 1 000 y 2 500 años.

2. Objetivos

El objetivo general fue estudiar el comportamiento y el riesgo sísmico de monumentos históricos que se comportan como bloques rígidos apoyados en el suelo que oscilan ante excitaciones horizontales en su base.

Los objetivos específicos fueron:

- Estudiar la dinámica del bloque rígido ante movimientos horizontales en su base.
- Comprender los factores que influyen en la estabilidad sísmica del bloque.

- Estudiar la estabilidad sísmica de muros de tierra precolombinos mediante la evaluación de la respuesta sísmica de tambaleo en el tiempo de bloques rígidos ante sismos futuros.

3. Justificación e hipótesis

Existen muros prehispánicos en el Perú que han sobrevivido a fuertes terremotos luego de varios siglos de haber sido construidos como los muros del templo de Huiracocha y los muros del Camino Inca. Ambos monumentos históricos, fueron construidos durante el siglo XV DC y representan vestigios importantes de la cultura incaica. La presente investigación contribuye con el estudio del comportamiento sísmico de los muros inca y determina el riesgo de volteo de los muros a sismos futuros. De igual manera, alertará en caso sea necesario el uso de algún sistema de protección para conservar los muros por muchos más siglos.

Se asumió que los muros precolombinos escogidos se comportan como bloques rígidos rectangulares de material uniforme que oscilan ante movimientos horizontales en su base.

Asimismo, se asumió que los métodos numéricos de la aceleración angular constante y aceleración angular lineal pueden estimar de manera confiable la respuesta sísmica rotacional en el tiempo de los bloques rígidos.

4. Metodología

Se planteó realizar las siguientes actividades:

- Desarrollar las ecuaciones del movimiento de un bloque rectangular rígido que oscila alrededor de las esquinas de su base ante movimientos horizontales en su base.
- Desarrollar algoritmos para estimar la respuesta sísmica rotacional en el tiempo de un bloque rectangular rígido sometido a movimientos horizontales en su base.
- Investigar las características físicas de un bloque rectangular rígido que influyen en su estabilidad sísmica.

- Proponer un procedimiento para determinar el riesgo de volteo sísmico de monumentos históricos que se pueden comportar como bloques rígidos
 - Generar acelerogramas sintéticos en caso no exista una amplia base de datos de acelerogramas registrados.
 - Adecuar algoritmos para estimar la respuesta sísmica rotacional en el tiempo de un bloque con las características físicas del monumento histórico.
- Determinar el riesgo de volteo sísmico de los muros del templo de Huiracocha y una porción del camino inca que atraviesa la PUCP para los periodos de retorno de 500, 1 000 y 2 500 años.

5. Revisión de la literatura

La resistencia de las columnas ante el volteo, motivó a varios investigadores a desarrollar teorías y modelos matemáticos para estudiar su comportamiento sísmico como bloques rígidos. Unos ejemplos de estas columnas se encuentran en templos griegos ubicados en Rodas y Lindos (Pitilakis & Tavouktsi, 2010). Housner desarrolló las ecuaciones del movimiento dinámico de los bloques rígidos ante excitaciones horizontales en su base producidos por pulsos sinusoidales y sismos (Housner, 1963). Luego, Hogan estudió el comportamiento de los bloques rígidos sometidos a movimientos sinusoidales linealizando el sistema propuesto por Housner (Hogan, 1989). Makris determinó los parámetros como la esbeltez y la frecuencia del pulso que controlan la volcadura de los bloques rígidos ante excitaciones producidas por pulsos (Makris & Zhang, 1999). Calio al analizar estatuas (simuladas como bloques rígidos) consideró la posibilidad de que el bloque al impactar con el suelo rebote respecto de su pivote (Caliò & Marletta, 2003). Manos publicó un gráfico con sus resultados de la estabilidad sísmica de un bloque rígido ante diferentes combinaciones de amplitud y frecuencia de la aceleración sinusoidal de la base (Manos et al., 2013). Por lo tanto, existen varios estudios analíticos, numéricos y experimentales para comprender el comportamiento de los bloques rígidos y extenderlo al análisis sísmico de monumentos históricos.

6. Análisis de estabilidad de bloques en traslación ante excitaciones en su base

Se analizó un bloque rígido rectangular con masa m e inercia rotacional I_o que se encuentra simplemente apoyado sobre el suelo como se muestra en la figura 6.1. Las dimensiones del bloque son $2h$ (altura) y $2b$ (base), y con dimensiones características $R = \sqrt{h^2 + b^2}$ (radio de giro), $\alpha = \tan^{-1} \frac{h}{b}$ (ángulo de esbeltez). El suelo se caracteriza por tener un coeficiente de rozamiento estático (μ_e) lo suficientemente alto para prevenir el deslizamiento del bloque rígido y un coeficiente de rozamiento cinético (μ_k).

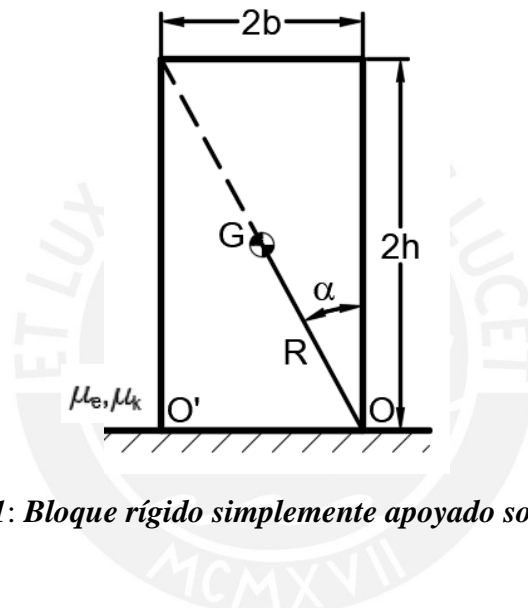


Figura 6.1: Bloque rígido simplemente apoyado sobre el suelo

Se asumió que primero el bloque se trasladará junto al suelo y luego, si la amplitud de la aceleración del suelo es lo suficientemente alta, el bloque empezará a tambalearse.

La figura 6.2 muestra al bloque en su estado inicial en reposo, antes de que ocurra el movimiento del suelo. Y la posición intermedia del bloque en traslación pura en un instante donde el desplazamiento del suelo es u_G .

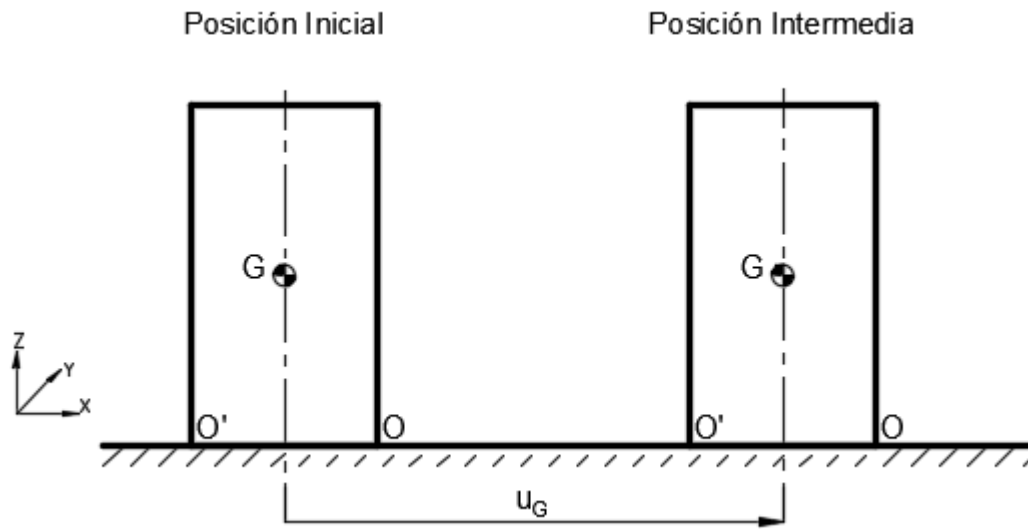


Figura 6.2: Bloque rígido en traslación pura

La figura 6.3 muestra el Diagrama de Cuerpo Libre (DCL) y el Diagrama Cinético del bloque rígido cuando se encuentra en la posición intermedia de la figura 6.2. El bloque está sujeto a la aceleración de la gravedad g (ms^{-2}), a su peso propio mg y a las reacciones del suelo sobre el bloque R_x (N) y R_y (N). Dado que el bloque se traslada con el suelo sin deslizamiento, la aceleración del centro de masa del bloque (a_G) es igual a la aceleración del suelo (\ddot{u}_G).

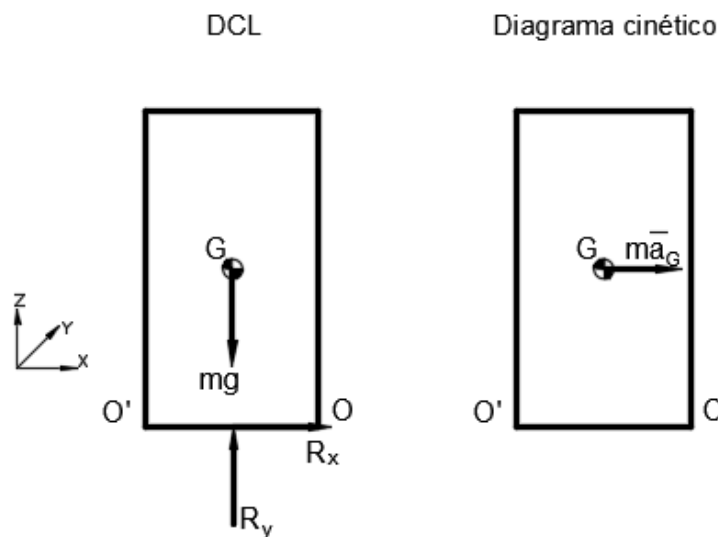


Figura 6.3: DCL y DC del bloque rígido en traslación pura

El equilibrio estático respecto del eje Y se expresa como $\sum F_y = 0$, donde reemplazando los valores identificados en la figura 6.3 se obtiene:

$$mg - R_y = 0 \quad [6.1]$$

Entonces,

$$mg = R_y \quad [6.2]$$

El equilibrio dinámico respecto del eje X se expresa como $\sum F_x = ma_x$. Donde,

$$R_x = ma_G$$

Cuando el bloque se encuentra *a punto* de deslizarse respecto del suelo, la fuerza R_x es igual a la fuerza necesaria para que el bloque comience a deslizarse $F_{r \text{ máx}}$.

$$F_{r \text{ máx}} = ma_G \quad [6.3]$$

Donde $F_{r \text{ máx}} = \mu_e R_y$ y reemplazando en la ec. [6.3]

$$\mu_e R_y = ma_G \quad [6.4]$$

Se reformuló la ec. [6.4] para determinar la aceleración del bloque necesaria para que empiece a deslizarse.

$$a_G = \frac{\mu_e R_y}{m} \quad [6.5]$$

Mientras que el bloque se traslada junto al suelo, la aceleración del bloque a_G es igual a la aceleración del suelo \ddot{u}_G . El bloque empezará a deslizarse respecto del suelo cuando \ddot{u}_G supere la magnitud calculada con la expresión [6.5]. De tal modo, se conoce que el rango de aceleraciones del suelo para que el bloque no se deslice es el siguiente

$$|\ddot{u}_G| \leq \frac{\mu_e R_y}{m} \quad [6.6]$$

El equilibrio dinámico de momentos respecto del punto O, donde $\ddot{\theta}$ es la aceleración angular del bloque (rads^{-2}), se expresa como

$$\sum M = I_o \ddot{\theta} \quad [6.7]$$

Dado que el bloque se encuentra en traslación pura, no existe rotación ni deslizamiento, se obtiene

$$bmg = hma_G \quad [6.8]$$

De la ecuación 6.8, se puede inferir que se necesita una aceleración mínima del suelo para que se inicie la rotación. Donde,

$$|\ddot{u}_G| > \frac{bg}{h} \quad [6.7]$$

La aceleración mínima para que inicie la rotación se identificó durante el texto como,

$$a_m = \frac{bg}{h} \quad [6.8]$$

7. Análisis de estabilidad de bloques oscilantes ante excitaciones en su base

El bloque empezará a tambalear respecto de sus esquinas O u O', cuando la aceleración del suelo supera la aceleración mínima para iniciar la rotación (ec. [6.8]). Debido al movimiento relativo entre el bloque en rotación y el suelo, la aceleración del centro de masa del bloque es distinta a la aceleración del suelo.

La figura 7.1 muestra la posición inicial del bloque rígido previo al movimiento del suelo y la posición intermedia del bloque en un instante cualquiera durante el movimiento del suelo. El

bloque en la posición intermedia ha rotado θ y se traslada con el suelo sin deslizar. La respuesta de rotación del bloque se describe mediante la variación en el tiempo del ángulo de giro θ . La posición del centro de masa en cada instante es descrito por el vector posición $\bar{r}_G = \bar{r}_{G/O} + \bar{r}_O$ teniendo como origen el sistema de referencia fijo y las direcciones positivas de los ejes de coordenadas mostrados en la figura 7.1. Donde \bar{r}_O es el vector posición de la esquina O respecto de sistema de referencia inicial. Asimismo, el movimiento del suelo es representado por el vector u_G .

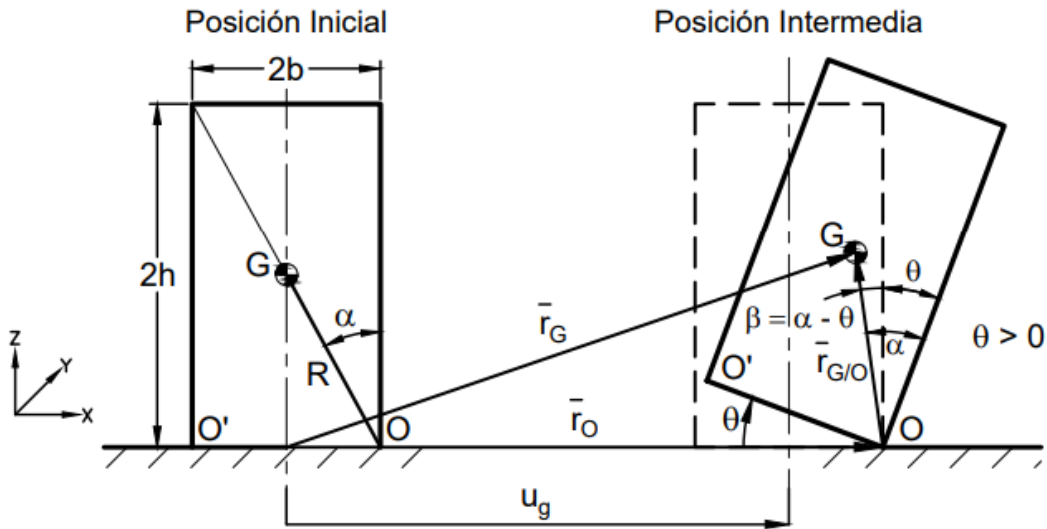


Figura 7.1: Bloque rígido en movimiento de rotación y translación

El vector posición del centro de masa respecto del punto O ($\bar{r}_{G/O}$) se expresa

$$\bar{r}_{G/O} = \left(R \cos(-(90 - \theta + \alpha)), 0, -R \sin(-(90 - \theta + \alpha)) \right) \quad [7.1]$$

De la ecuación 7.1 se obtiene

$$\bar{r}_{G/O} = \left(-R \sin(\alpha - \theta), 0, R \cos(\alpha - \theta) \right) \quad [7.2]$$

Al definir $\beta = \alpha - \theta$, el vector $\bar{r}_{G/O}$ se simplifica a

$$\bar{r}_{G/O} = (-R \sin \beta, 0, R \cos \beta) \quad [7.3]$$

El vector \bar{r}_O se expresa como

$$\bar{r}_O = (u_G + b, 0, 0) \quad [7.4]$$

Al reemplazar la ec. [7.3] y [7.4] en la definición de \bar{r}_G se obtiene

$$\bar{r}_G = (-R \sin \beta + u_G + b, 0, R \cos \beta) \quad [7.5]$$

Al derivar con respecto al tiempo sucesivamente la expresión de \bar{r}_G (ec. [7.5]), resulta en las expresiones de la velocidad del centro de masa \bar{v}_G y la aceleración del centro de masa \bar{a}_G . A continuación se presenta el desarrollo de ambas expresiones.

$$\bar{v}_G = \frac{d\bar{r}_G}{dt} = (R \cos \beta \dot{\theta} + \dot{u}_G, 0, R \sin \beta \dot{\theta}) \quad [7.6]$$

$$\bar{a}_G = \frac{d\bar{v}_G}{dt} = (R \sin \beta \dot{\theta}^2 + R \cos \beta \ddot{\theta} + \ddot{u}_G, 0, -R \cos \beta \dot{\theta}^2 + R \sin \beta \ddot{\theta}) \quad [7.7]$$

La figura 7.2 muestra el Diagrama de cuerpo libre (DCL) y el Diagrama Cinético del bloque rígido cuando gira respecto de la esquina O. El bloque está sometido a su peso propio mg (N) y a las reacciones del suelo sobre la esquina del bloque R_x (N) y R_y (N).

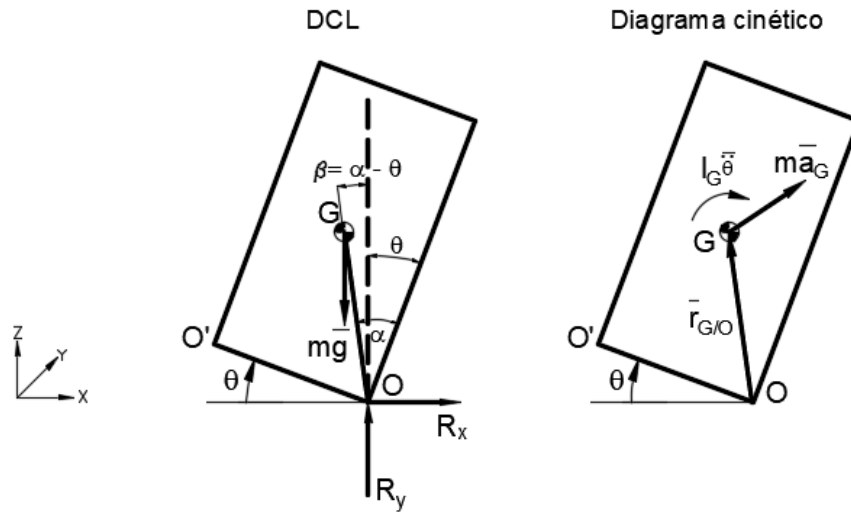


Figura 7.2 DCL y DC del bloque rígido cuando gira respecto de O

El equilibrio dinámico rotacional respecto de la esquina O del bloque se expresa como $\Sigma M_O = I_G \ddot{\theta}$. Es decir,

$$\vec{r}_{G/O} \times m\vec{g} = I_G \ddot{\theta} + \vec{r}_{G/O} \times m\vec{a}_G$$

Entonces, reemplazando las expresiones de los vectores identificados en la ecuación del equilibrio dinámico rotacional, resulta en la ecuación del movimiento del bloque en rotación para ángulos positivos. El desarrollo completo se presenta líneas abajo,

$$(-R \sin(\beta), 0, R \cos(\beta)) \times$$

$$(0, 0, -mg) = I_G \ddot{\theta} (0, 1, 0) + (-R \sin(\beta), 0, R \cos(\beta)) \times m(R \sin(\beta) \dot{\theta}^2 + R \cos(\beta) \ddot{\theta} + \ddot{u}_G, 0, -R \cos(\beta) \dot{\theta}^2 + R \sin(\beta) \ddot{\theta})$$

$$(0, -R \sin(\beta) mg, 0) = (0, I_G \ddot{\theta}, 0) + (0, R \sin(\beta) m (-R \cos(\beta) \dot{\theta}^2 + R \sin(\beta) \ddot{\theta}) + R \cos(\beta) m (R \sin(\beta) \dot{\theta}^2 + R \cos(\beta) \ddot{\theta} + \ddot{u}_G), 0)$$

Finalmente la expresión del movimiento rotacional del bloque para giros positivos es

$$-mgR \sin(\alpha - \theta) = I_O \ddot{\theta} + m\ddot{u}_G R \cos(\alpha - \theta) \quad [7.8 a]$$

Mientras que, cuando el ángulo de rotación del bloque es negativo la ecuación del movimiento del bloque se detalla a continuación. La figura 7.3 muestra al bloque rígido en su posición inicial y al bloque en su posición intermedia cuando se ha desplazado una distancia u_G y un giro de ángulo θ negativo. La posición del centro de masa en cada instante es descrito por el vector posición $\bar{r}_G = \bar{r}_{G/O'} + \bar{r}_{O'}$, teniendo como origen el sistema de referencia fijo y las direcciones positivas de los ejes de coordenadas mostrados en la figura 7.3. Donde $\bar{r}_{O'}$ es el vector posición de la esquina O' respecto de sistema de referencia inicial.

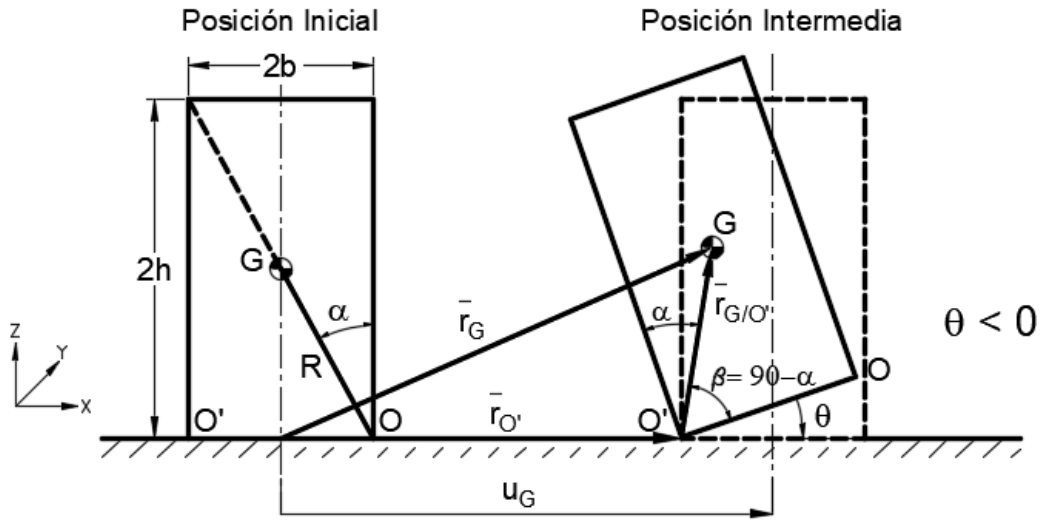


Figura 7.3: Bloque rígido en movimiento de rotación y translación

El vector posición del centro de masa respecto del punto O' ($\bar{r}_{G/O'}$) se expresa

$$\bar{r}_{G/O'} = (R \cos(\theta - \beta), 0, -R \sin(\theta - \beta)) \quad [7.9]$$

La figura 7.3 muestra que $\beta = 90 - \alpha$. Reemplazando y reformulando la ec. [7.9] se genera la siguiente expresión

$$\bar{r}_{G/O'} = (R \sin(\alpha + \theta), 0, R \cos(\alpha + \theta)) \quad [7.10]$$

El vector $\bar{r}_{O'}$, se expresa como

$$\bar{r}_{O'} = (u_G - b, 0, 0) \quad [7.11]$$

Al reemplazar la ec. [7.10] y [7.11] se determina que \bar{r}_G es igual a

$$\bar{r}_G = (R \sin(\alpha + \theta) + u_G - b, 0, R \cos(\alpha + \theta)) \quad [7.12]$$

Al derivar con respecto al tiempo sucesivamente la expresión de \bar{r}_G (ec. [7.12]), resulta en las expresiones de la velocidad del centro de masa \bar{v}_G y la aceleración del centro de masa \bar{a}_G . A continuación se presenta el desarrollo de ambas expresiones.

$$\bar{v}_G = \frac{d\bar{r}_G}{dt} = (R \cos(\alpha + \theta) \dot{\theta} + \dot{u}_G, 0, -R \sin(\alpha + \theta) \dot{\theta}) \quad [7.13]$$

$$\bar{a}_G = \frac{d\bar{v}_G}{dt} = (-R \sin(\alpha + \theta) \dot{\theta}^2 + R \cos(\alpha + \theta) \ddot{\theta} + \ddot{u}_G, 0, -R \cos(\alpha + \theta) \dot{\theta}^2 - R \sin(\alpha + \theta) \ddot{\theta}) \quad [7.14]$$

La figura 7.4 muestra el Diagrama de cuerpo libre (DCL) y el Diagrama Cinético del bloque rígido cuando gira respecto de la esquina O' .

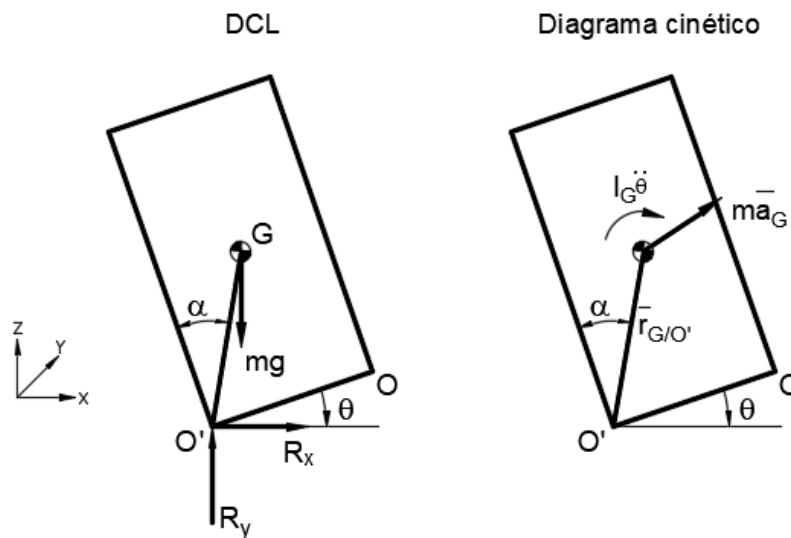


Figura 7.4 DCL y DC del bloque rígido cuando gira respecto de O'

El equilibrio dinámico rotacional respecto de la esquina O' del bloque se expresa como $\sum M_O = I_G \ddot{\theta}$. Es decir,

$$\bar{r}_{G/O'} \times m\bar{g} = I_G \ddot{\theta} + \bar{r}_{G/O'} \times m\bar{a}_G$$

Entonces, reemplazando las expresiones de los vectores identificados en el DCL y DC en la ecuación del equilibrio dinámico rotacional resulta en la ecuación del movimiento del bloque en rotación para ángulos negativos. El desarrollo completo se presenta líneas abajo,

$$(R \sin(\alpha+\theta), 0, R \cos(\alpha+\theta)) \times (0, 0, -mg) = I_G \ddot{\theta} (0, 1, 0) + (R \sin(\alpha+\theta), 0, R \cos(\alpha+\theta)) \times m(-R \sin(\alpha+\theta) \dot{\theta}^2 + R \cos(\alpha+\theta) \ddot{\theta} + \ddot{u}_G, 0, -R \cos(\alpha+\theta) \dot{\theta}^2 - R \sin(\alpha+\theta) \ddot{\theta})$$

$$(0, -R \sin(\beta) mg, 0) = (0, I_G \ddot{\theta}, 0) + (0, -R \sin(\alpha + \theta) m(-R \cos(\alpha + \theta) \dot{\theta}^2 - R \sin(\alpha + \theta) \ddot{\theta}) + R \cos(\alpha + \theta) m(-R \sin(\alpha + \theta) \dot{\theta}^2 + R \cos(\alpha + \theta) \ddot{\theta} + \ddot{u}_G), 0)$$

Finalmente la expresión del movimiento rotacional del bloque para giros negativos es

$$I_G \ddot{\theta} + mgR \sin(-\alpha - \theta) = -m \ddot{u}_G R \cos(-\alpha - \theta) \quad [7.8 \text{ b}]$$

Las ecuaciones desarrolladas en 7.8a y en 7.8b, son las mismas que se encuentran publicadas (Housner, 1963) y describen el comportamiento dinámico de un bloque rígido a través del tiempo que oscila alrededor de las esquinas de su base ante un movimiento horizontal del suelo.

El principio de conservación del momento cinético implica que el bloque pierde energía debido a que el pivote se traslada de una esquina a la otra en cada oscilación. La figura 7.5 muestra un bloque que pivota alrededor de la esquina O' y está a punto de golpear el suelo. Cuando choca, recibe un impacto $F \Delta t$ concentrado en O, y empieza a rotar, ahora alrededor de O.

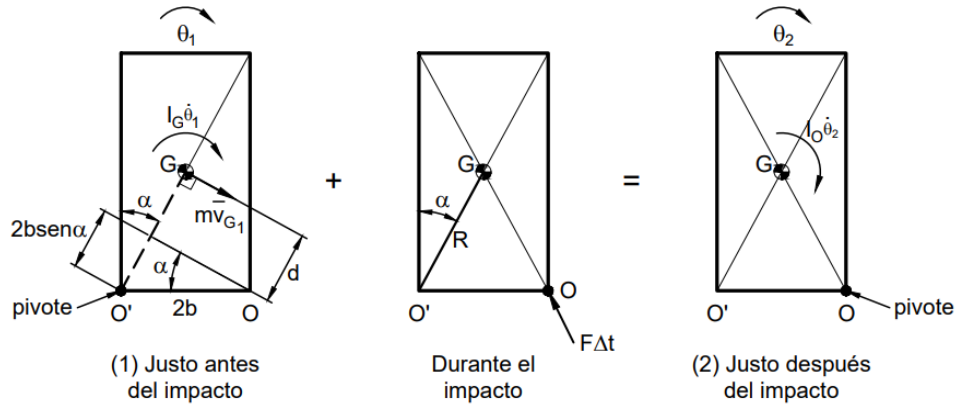


Figura 7.5: Diagrama de cantidad de movimiento e impulso antes, durante y después del impacto con el suelo

El momento cinético alrededor de O se conserva, o sea $H_{O_1} = H_{O_2}$. Se obtiene en este caso

$$I_G \dot{\theta}_1 + m v_{G1} d = I_O \dot{\theta}_2 \quad [7.16]$$

Donde $I_G = \frac{1}{3} m R^2$, $I_O = \frac{4}{3} m R^2$, $d = R - 2b \sin \alpha$ y $v_{G1} = R \dot{\theta}_1$. Si se define el coeficiente de restitución r como la razón entre las energías cinéticas después y antes del impacto, o sea $\sqrt{r} = \frac{\dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_1}$ [7.17], entonces al reemplazar este valor en la ecuación 7.6 resulta en la ecuación publicada por Makris y Zhang (1999):

$$r = \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 (\alpha) \right)^2 \quad [7.17]$$

Existen otras fuentes de pérdida de energía como el calor disipado en cada colisión y la deformación de la base del bloque debido al impacto entre el bloque y el suelo. Sin embargo, estas pérdidas de energía no serán consideradas en esta investigación.

8. Respuesta del bloque oscilante ante excitaciones en su base

Las ecuaciones 7.8a y 7.8b se utilizan para calcular la respuesta rotacional de un bloque ante excitaciones en su base. Estas expresiones tienen soluciones analíticas conocidas para algunas formas de \ddot{u}_G (Makris,2001). No obstante, para las formas de \ddot{u}_G utilizadas en este trabajo no existen soluciones conocidas. Es por ello que se decidió utilizar métodos de integración numérica para resolver las ecuaciones 7.8a y 7.8b y calcular la respuesta de bloques ante excitaciones armónicas y sísmicas. En este estudio, fueron estudiados los métodos numéricos donde se asume la aceleración angular constante y la aceleración angular lineal.

Se pretende resolver numéricamente el caso de un bloque rectangular de masa uniforme m que oscila, sin deslizarse, alrededor de sus esquinas O u O' cuando está sujeto a excitaciones en su base \ddot{u}_G . De este modo, se determinará la respuesta de rotación del bloque θ a través del tiempo.

La aceleración del suelo \ddot{u}_G , o \ddot{u} , debe estar discretizada a intervalos de tiempo iguales de duración Δt . Si para un instante t_i se conoce el ángulo de rotación θ_i , la velocidad angular $\dot{\theta}_i$ y la aceleración angular $\ddot{\theta}_i$, se desea calcular estos valores para el instante siguiente, $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ (θ_{i+1} , $\dot{\theta}_{i+1}$ y $\ddot{\theta}_{i+1}$).

Al inicio del movimiento, es necesario verificar si la aceleración del suelo es suficientemente grande como para iniciar la rotación del bloque. Recordando la ecuación 6.7, el bloque empezará a rotar cuando

$$\ddot{u} > g b/h \quad [8.1]$$

También es necesario tomar en cuenta que el bloque pierde energía en cada impacto con el terreno. Luego del impacto el ángulo cambia de signo, el pivote cambia de una esquina a otra y la velocidad angular disminuye. En ese caso, se ajusta el valor de la velocidad angular con

$$\dot{\theta}_{i+1} = \sqrt{r} \dot{\theta}_i \quad [8.2]$$

Y en caso no exista impacto entre el bloque y suelo, se calculó $\dot{\theta}_{i+1}$ con los métodos explicados líneas abajo.

8.1. Método numérico: aceleración angular constante

El método de la aceleración angular constante (Chopra, 2014) consiste en asumir que en el instante t_{i+1} , la aceleración $\ddot{\theta}_{i+1}$ es igual a la aceleración $\ddot{\theta}_i$ en el instante anterior t_i , o sea

$$\ddot{\theta}_{i+1} = \ddot{\theta}_i \quad [8.3]$$

La figura 8.1 muestra gráficamente esta asunción.

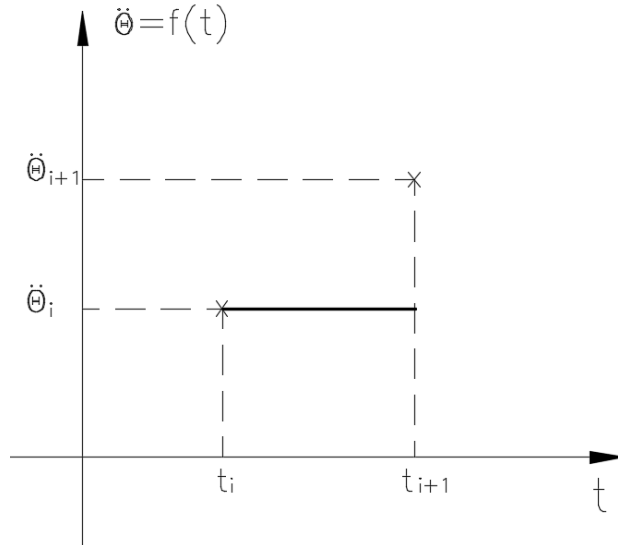


Figura 8.1: Aceleración angular versus tiempo

Al integrar miembro a miembro la ecuación 8.3 en el intervalo Δt se hallan las siguientes ecuaciones para la velocidad angular y el ángulo de rotación del bloque para el instante t_{i+1} .

$$\dot{\theta}_{i+1} = \ddot{\theta}_i \Delta t + \dot{\theta}_i \quad [8.4]$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \dot{\theta}_i \Delta t + \frac{\ddot{\theta}_i \Delta t^2}{2} \quad [8.5]$$

La rotación θ_{i+1} , la velocidad angular $\dot{\theta}_{i+1}$ y la aceleración angular $\ddot{\theta}_{i+1}$ al final del intervalo $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ se calculan utilizando el siguiente algoritmo:

Inicio

Definir propiedades del bloque

Leer aceleración del terreno (\ddot{u}) discretizada a intervalo de tiempo Δt

Especificar condiciones iniciales: [para $i = 1$, $\theta_1 = \dot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_1 = 0$]

Para cada instante $t(i)$: [Mientras que el suelo se mueva]

Si $\ddot{u} < g b/h$ [el bloque se traslada (no rota)] :

$$\theta_i = \dot{\theta}_i = \ddot{\theta}_i = 0$$

$i = i+1$ [avanzar al siguiente instante]

Si $\ddot{u} \geq g b/h$ [el bloque rota]

Si $\theta_i < 90^\circ$ [el bloque no se ha volteado]

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \dot{\theta}_i \Delta t + \frac{\ddot{\theta}_i \Delta t^2}{2}$$

Si $\theta_{i+1} \geq 0$

$$\ddot{\theta}_{i+1} = \frac{1}{I_o} (-mgR \sin(\alpha - \theta_i) - mR \cos(\alpha - \theta_i) \ddot{u}_i)$$

Si $\theta_{i+1} < 0$

$$\ddot{\theta}_{i+1} = -\frac{1}{I_o} (mgR \sin(\alpha + \theta_i) - mR \cos(\alpha + \theta_i) \ddot{u}_i)$$

Si signo (θ_{i+1}) \neq signo (θ_i) [hay impacto]

$$\dot{\theta}_{i+1} = r \dot{\theta}_i$$

Si signo (θ_{i+1}) = signo (θ_i) [no hay impacto]

$$\dot{\theta}_{i+1} = \ddot{\theta}_i \Delta t + \dot{\theta}_i$$

$i = i+1$ [avanzar al siguiente instante]

Imprimir, graficar

Fin

8.2. Método numérico: aceleración angular lineal

El método de aceleración angular lineal consiste en asumir que una aceleración $\ddot{\theta}_t$ en un instante t comprendido en el intervalo de tiempo $[t_i, t_{i+1}]$ puede hallarse mediante la interpolación lineal entre $\ddot{\theta}_{i+1}$ y $\ddot{\theta}_i$. O sea

$$\ddot{\theta}_t = \ddot{\theta}_i + \frac{t}{\Delta t} (\ddot{\theta}_{i+1} - \ddot{\theta}_i) \quad [8.6]$$

que se grafica en la figura 8.2.

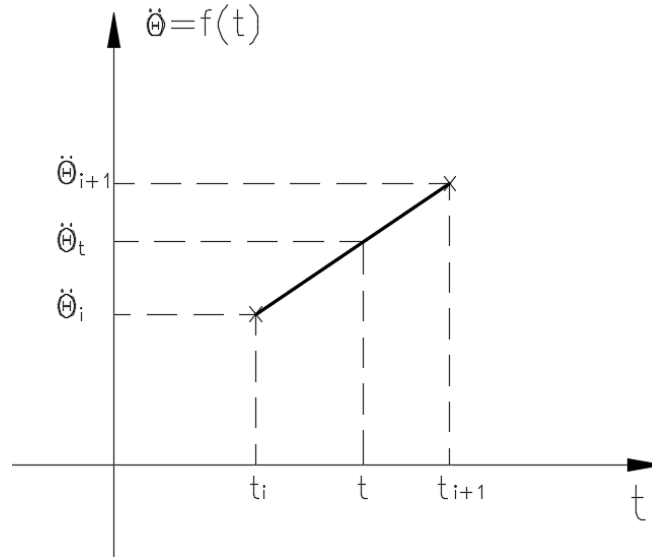


Figura 8.2: Aceleración versus Tiempo del bloque rígido

Al integrar miembro a miembro respecto del tiempo la ecuación [8.6] se hallan las ecuaciones para la velocidad angular y la posición angular en el instante t

$$\dot{\theta}_t = \ddot{\theta}_i t + \frac{t^2}{2\Delta t} (\ddot{\theta}_{i+1} - \ddot{\theta}_i) + \dot{\theta}_i \quad [8.7]$$

$$\theta_t = \frac{\ddot{\theta}_i t^2}{2} + \frac{t^3}{6\Delta t} (\ddot{\theta}_{i+1} - \ddot{\theta}_i) + \dot{\theta}_i t + \theta_i \quad [8.8]$$

Cuando $t = t_{i+1}$, las ecuaciones [8.7] y [8.8] se expresan como

$$\dot{\theta}_{i+1} = \ddot{\theta}_i t_{i+1} + \frac{t_{i+1}^2}{2\Delta t} (\ddot{\theta}_{i+1} - \ddot{\theta}_i) + \dot{\theta}_i \quad [8.9]$$

$$\theta_{i+1} = \frac{\ddot{\theta}_i t_{i+1}^2}{2} + \frac{t_{i+1}^3}{6\Delta t} (\ddot{\theta}_{i+1} - \ddot{\theta}_i) + \dot{\theta}_i t_{i+1} + \theta_i \quad [8.10]$$

Las ecuaciones [8.9] y [8.10] aplicadas a la dinámica rotacional del bloque son difíciles de resolver. Es por ello que se utilizó el método de la secante para hallar la rotación del bloque en el tiempo. El método de la secante tiene como objetivo hallar la raíz de una función. La figura 8.3 muestra la función $y = f(\ddot{\theta})$ donde $\ddot{\theta}^0$, $\ddot{\theta}^1$, $\ddot{\theta}^2$ y $\ddot{\theta}^3$ son los intentos para hallar la raíz.

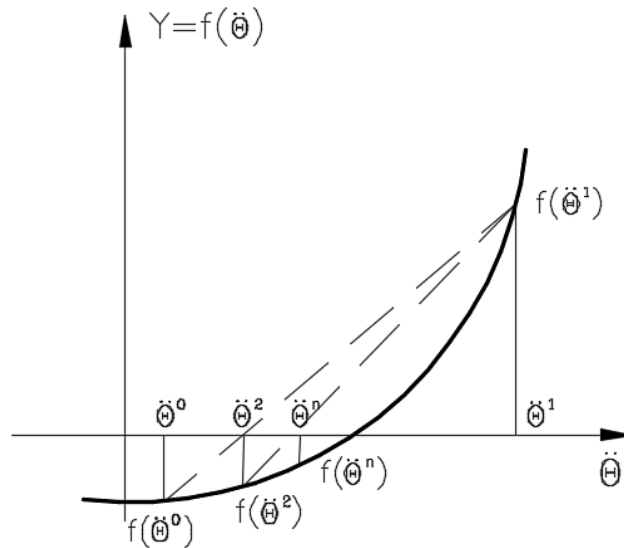


Figura 8.3: Iteraciones del Método de la Secante

Para el caso de la dinámica del bloque oscilante, las ecuaciones que describen el movimiento son [7.8a] y [7.8b]. Se reordenaron estas ecuaciones para que resulten en 0 y se obtiene lo siguiente

$$0 = I_0 \ddot{\theta} + m \ddot{u}_G R \cos(\alpha - \theta) + mgR \sin(\alpha - \theta) \quad [8.11a]$$

$$0 = -I_0 \ddot{\theta} - m \ddot{u}_G R \cos(-\alpha - \theta) - mgR \sin(-\alpha - \theta) \quad [8.11b]$$

Las ecuaciones [8.11a] y [8.11b] calculan las raíces para determinado instante en el tiempo. Se decide llamar a los términos de la mano derecha de las ecuaciones por simplicidad f_1 y f_2 como se muestra

$$f_1 = I_0 \ddot{\theta} + m \ddot{u}_G R \cos(\alpha - \theta) + mgR \sin(\alpha - \theta) \quad [8.12a]$$

$$f_2 = -I_0\ddot{\theta} - m\ddot{u}_G R \cos(-\alpha - \theta) - mgR \sin(-\alpha - \theta) \quad [8.12b]$$

Es decir si evaluás $f_1(\theta^0)$ o $f_2(\theta^0)$ y resulta en 0, se está cumpliendo la igualdad de las ecuaciones [8.11a] y [8.11b]. El método de la secante consiste en realizar el siguiente procedimiento

Cuando $j = 0$ entonces

Escoger un valor para $\ddot{\theta}^j$ (Se recomienda escoger 0.1)

Escoger un valor para $\ddot{\theta}^{j+1}$ cercano a $\ddot{\theta}^j$ (Se recomienda que $\ddot{\theta}^{j+1} = 0.99\ddot{\theta}^j$)

**Evaluar $\ddot{\theta}^j$ ya sea en f_1 o f_2 , es decir $f_1(\ddot{\theta}^j)$ o $f_2(\ddot{\theta}^j)$

Evaluar $\ddot{\theta}^{j+1}$ ya sea en f_1 o f_2 , es decir $f_1(\ddot{\theta}^{j+1})$ o $f_2(\ddot{\theta}^{j+1})$

Calcular $\ddot{\theta}^n = \ddot{\theta}^{j+1} - \frac{f_1(\ddot{\theta}^{j+1}) \times (\ddot{\theta}^{j+1} - \ddot{\theta}^j)}{f_1(\ddot{\theta}^{j+1}) - f_1(\ddot{\theta}^j)}$

Determinar el error de $f_1(\ddot{\theta}^{j+1})$ o $f_2(\ddot{\theta}^{j+1})$ (Debería resultar 0 porque f_1 y f_2 calculan las raíces)

Si el error es mayor a 1×10^{-8} entonces

$$\ddot{\theta}^{j+1} = \ddot{\theta}^j \text{ y } \ddot{\theta}^{j+2} = \ddot{\theta}^n$$

Luego $j = j + 1$

Repita el procedimiento desde ** hasta que el error sea menor a 1×10^{-8}

A continuación se describe el procedimiento para determinar la rotación θ_{i+1} , la velocidad angular $\dot{\theta}_{i+1}$ y la aceleración angular $\ddot{\theta}_{i+1}$ al final del intervalo $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ para un bloque rígido en rotación.

Inicio

Definir propiedades del bloque

Leer aceleración del terreno (\ddot{u}) discretizada a Δt

Especificar condiciones iniciales: [$i = 1, \theta_1 = \dot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_1 = 0$]

Para cada instante $t(i)$: [Mientras que el suelo se mueva]

Si $\ddot{u} < g b/h$ [el bloque se traslada (no rota)]:

$$\theta_i = \dot{\theta}_i = \ddot{\theta}_i = 0$$

$i = i+1$ [avanzar al siguiente instante]

Si $\ddot{u} \geq g b/h$ [el bloque rota]

Si $\theta_i < 90^\circ$ [el bloque no se ha volteado]

$$j = 0$$

$\ddot{\theta}^j = 0.1$ [Método de la Secante]

err = 1

Si $\theta_i \geq 0$

Mientras err $\leq 1 \times 10^{-8}$

$$\text{tet}_j = \frac{\ddot{\theta}_i t_{i+1}^2}{2} + \frac{t_{i+1}^3}{6\Delta t} (\ddot{\theta}^j - \ddot{\theta}_i) + \dot{\theta}_i t_{i+1} + \theta_i$$

$$f_1 = I_0 \ddot{\theta}^j + m\ddot{u}_i R \cos(\alpha - \text{tet}_j) + mgR \sin(\alpha - \text{tet}_j)$$

$$\ddot{\theta}^{j+1} = 0.99 \ddot{\theta}^j$$

$$\text{tet}_{j+1} = \frac{\ddot{\theta}_i t_{i+1}^2}{2} + \frac{t_{i+1}^3}{6\Delta t} (\ddot{\theta}^{j+1} - \ddot{\theta}_i) + \dot{\theta}_i t_{i+1} + \theta_i$$

$$f_2 = I_0 \ddot{\theta}^{j+1} + m\ddot{u}_i R \cos(\alpha - \text{tet}_{j+1}) + mgR \sin(\alpha - \text{tet}_{j+1})$$

$$\ddot{\theta}^n = \ddot{\theta}^{j+1} - \frac{f_2(\ddot{\theta}^{j+1} - \ddot{\theta}^j)}{f_2 - f_1}$$

$$\text{err} = |f_2|$$

Reemplazar

$$\ddot{\theta}^{j+1} = \ddot{\theta}^j$$

$$\ddot{\theta}^{j+2} = \ddot{\theta}^n$$

$$\ddot{\theta}_{i+1} = \ddot{\theta}^{j+2}$$

$$j = j + 1$$

Fin Mientras

Si $\theta_i < 0$

Mientras err $\leq 1 \times 10^{-8}$ [Método de la Secante]

$$\text{tet}_j = \frac{\ddot{\theta}_i t_{i+1}^2}{2} + \frac{t_{i+1}^3}{6\Delta t} (\ddot{\theta}^j - \ddot{\theta}_i) + \dot{\theta}_i t_{i+1} + \theta_i$$

$$f_1 = I_0 \ddot{\theta}^j + m\ddot{u}_i R \cos(\alpha + \text{tet}_j) - mgR \sin(\alpha + \text{tet}_j)$$

$$\ddot{\theta}^{j+1} = 0.99 \ddot{\theta}^j$$

$$\text{tet}_{j+1} = \frac{\ddot{\theta}_i t_{i+1}^2}{2} + \frac{t_{i+1}^3}{6\Delta t} (\ddot{\theta}^{j+1} - \ddot{\theta}_i) + \dot{\theta}_i t_{i+1} + \theta_i$$

$$f_2 = I_0 \ddot{\theta}^{j+1} + m\ddot{u}_i R \cos(\alpha + \text{tet}_{j+1}) - mgR \sin(\alpha + \text{tet}_{j+1})$$

$$\ddot{\theta}^n = \ddot{\theta}^{j+1} - \frac{f_2(\ddot{\theta}^{j+1} - \ddot{\theta}^j)}{f_2 - f_1}$$

$$\text{err} = |f_2|$$

Reemplazar

$$\ddot{\theta}^{j+1} = \ddot{\theta}^j$$

$$\ddot{\theta}^{j+2} = \ddot{\theta}^n$$

$$\ddot{\theta}_{i+1} = \ddot{\theta}^{j+2}$$

$$j = j + 1$$

Fin Mientras

$$\theta_{i+1} = \frac{\ddot{\theta}_i t^2}{2} + \frac{t^3}{6\Delta t} (\ddot{\theta}_{i+1} - \ddot{\theta}_i) + \dot{\theta}_i t + \theta_i$$

$$\begin{aligned} &\text{Si signo } (\theta_{i+1}) \neq \text{signo } (\theta_i) \text{ [hay impacto]} \\ &\quad \dot{\theta}_{i+1} = r \dot{\theta}_i \\ &\text{Si signo } (\theta_{i+1}) = \text{signo } (\theta_i) \text{ [no hay impacto]} \\ &\quad \dot{\theta}_{i+1} = \ddot{\theta}_i t + \frac{t^2}{2\Delta t} (\ddot{\theta}_{i+1} - \ddot{\theta}_i) + \dot{\theta}_i \\ &i = i+1 \quad \text{[avanzar al siguiente instante]} \end{aligned}$$

Imprimir, graficar

Fin }

9. Validación del método numérico

Los métodos numéricos propuestos en la sección anterior para calcular la respuesta de rotación del bloque ante excitaciones en su base fueron validados por el método numérico utilizado por Santa Cruz et al. (2000) que se basa en la interpolación de la excitación (Chopra, 2014).

La aceleración del suelo $u(t)$ debe estar discretizada a intervalos iguales de tiempo de duración Δt . Por facilidad, se consideró que $pt = p \Delta t$, $sh = \sinh(pt)$, y $ch = \cosh(pt)$. Si para el instante t_i se conocen el ángulo de rotación θ_i , la velocidad angular $\dot{\theta}_i$ y la aceleración angular $\ddot{\theta}_i$, se desea calcular estos valores para el instante siguiente, $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ con las siguientes ecuaciones.

$$\theta_{i+1} = A\dot{\theta}_i + B\theta_i + C\ddot{u}_{i+1} + D\ddot{u}_i + K \quad [9.1]$$

$$\dot{\theta}_{i+1} = A'\dot{\theta}_i + B'\theta_i + C'\ddot{u}_{i+1} + D'\ddot{u}_i + K' \quad [9.2]$$

Donde

$$A = sh/p \quad [9.3] \quad A' = ch \quad [9.4]$$

$$B = ch \quad [9.5] \quad B' = p.sh \quad [9.6]$$

$$C = (1 - sh/pt) / g \quad [9.7] \quad C' = (1 - ch) / g\Delta t \quad [9.8]$$

$$D = (\text{sh}/\text{pt} - \text{ch}) / g \quad [9.9] \quad D' = (\text{ch} - \text{pt. sh} - 1) / (g\Delta t) \quad [9.10]$$

$$K = \alpha(1 - \text{ch})\text{sgn}(\theta_i) \quad [9.11] \quad K' = -\alpha \text{p. sh. sgn}(\theta_i) \quad [9.12]$$

Se presenta a continuación unas instrucciones para determinar la rotación θ_{i+1} , la velocidad angular $\dot{\theta}_{i+1}$ y la aceleración angular $\ddot{\theta}_{i+1}$ al final del intervalo $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ para un bloque rígido en rotación.

{Inicio

Definir propiedades del bloque
 Leer aceleración del terreno (\ddot{u}) discretizada a Δt
 Especificar condiciones iniciales: [$i = 1, \theta_1 = \dot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_1 = 0$]
 Calcular constantes A, B, C, D, K, A', B', C', D', K'

Para cada instante t(i) : [Mientras que el suelo se mueva]

Si $\ddot{u} < g b/h$ [el bloque se traslada (no rota)]

$$\theta_i = \dot{\theta}_i = \ddot{\theta}_i = 0$$

$i = i+1$ [avanzar al siguiente instante]

Si $\ddot{u} \geq g b/h$ [el bloque rota]

Si $\theta_i < 90^\circ$ [el bloque no se ha volteado]

$$\theta_{i+1} = A\theta_i + B\dot{\theta}_i + C\ddot{u}_{i+1} + D\ddot{u}_i + K$$

$$\dot{\theta}_{i+1} = A'\dot{\theta}_i + B'\dot{\theta}_i + C'\ddot{u}_{i+1} + D'\ddot{u}_i + K'$$

Si $\theta_{i+1} \geq 0$

$$\ddot{\theta}_{i+1} = \frac{1}{I_0} (-mgR \sin(\alpha - \theta_i) - mR \cos(\alpha - \theta_i) \ddot{u}_i)$$

Si $\theta_{i+1} < 0$

$$\ddot{\theta}_{i+1} = -\frac{1}{I_0} (mgR \sin(\alpha + \theta_i) - mR \cos(\alpha + \theta_i) \ddot{u}_i)$$

Si signo (θ_{i+1}) \neq signo (θ_i) [hay impacto]

$$\dot{\theta}_{i+1} = r \dot{\theta}_i$$

Si signo (θ_{i+1}) = signo (θ_i) [no hay impacto]

$$\dot{\theta}_{i+1} = A'\dot{\theta}_i + B'\dot{\theta}_i + C'\ddot{u}_{i+1} + D'\ddot{u}_i + K'$$

$i = i+1$ [avanzar al siguiente instante]

Imprimir, graficar

Fin }

Para hallar la respuesta de rotación en el tiempo de un bloque rígido ante movimientos en su base, se utilizaron los métodos de la aceleración angular constante y la aceleración angular lineal. Para escoger uno de los métodos numéricos propuestos, el estudio consideró la comparación de los resultados obtenidos con aquellos calculados mediante presentado por Santa Cruz et al. (2000). Como caso de estudio se consideró un bloque rígido ficticio de masa uniforme de 3 metros de altura y 1 metro de base. Dado que la finalidad del presente estudio es analizar monumentos históricos, se decidió escoger estas dimensiones por lo que existen columnas griegas en el rango de 3 a 20 metros de altura y de 0.5 a 2.5 metros de base que tienen la capacidad de oscilar durante un sismo (Makris, 2016).

El bloque ficticio escogido fue sometido ante aceleraciones sinusoidales en su base de amplitud a_{gm} y frecuencia angular ω_g , o sea $a_t(t) = a_{gm}\sin(\omega_g t)$. La aceleración mínima para que el bloque empiece a rotar (ec. [6.8]) es $a_m = 3.27 \text{ ms}^{-2}$, por lo tanto, se eligió un $a_{gm} = 4 \text{ ms}^{-2}$.

La figura 9.1 muestra los resultados de las respuestas de rotación en el tiempo del bloque ficticio para los métodos numéricos presentados. El bloque estuvo sometido a una señal sinusoidal de amplitud 4 ms^{-2} , frecuencia angular 6 rad.s^{-1} e intervalo de discretización del tiempo (Δt) de 0.02 segundos. Se escogió este Δt para obtener al menos 50 puntos por segundo y visualizar una tendencia de la respuesta confiable.

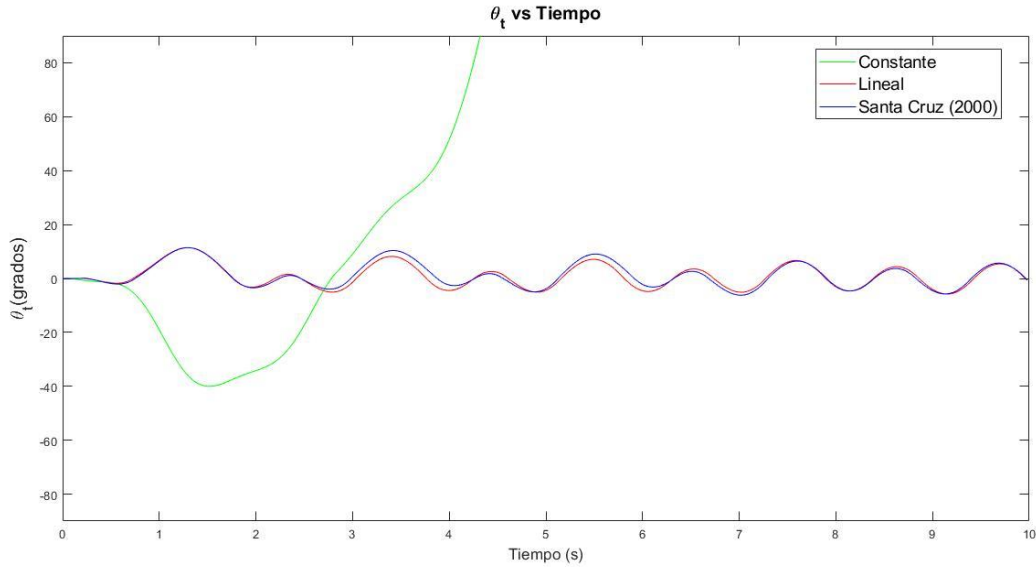


Figura 9.1: Respuesta en el tiempo del ángulo de rotación del bloque para métodos de integración ante señal sinusoidal de $a_{gm} = 4 \text{ m}$ y $\omega_g = 6 \text{ rad. s}^{-1}$

Después del primer segundo, el método de aceleración angular constante calcula respuestas inestables, es decir, respuestas anómalas que no concuerdan con el método de Santa Cruz et al. (2000). Mientras, la respuesta de rotación calculada por el método de la aceleración angular lineal resultó parecida a la respuesta obtenida por el método propuesto por Santa Cruz (2000). En este trabajo se decidió utilizar el método de aceleración angular lineal, por su respuesta aparentemente confiable.

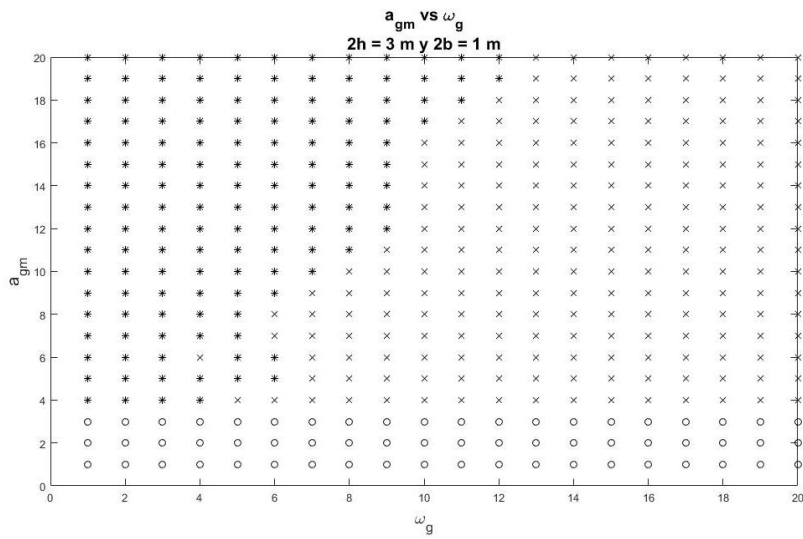
La estabilidad de los métodos numéricos depende de la longitud del intervalo de digitación (Δt). Es por ello que se utilizaron Δt iguales a 0.01 segundos, 0.005 segundos, 0.002 segundos y 0.001 segundos. En cada uno de estos 4 ensayos, se determinaron los tres estados posibles del comportamiento dinámico del bloque (3 m de alto y 1 m de ancho): la traslación, la oscilación y la volcadura (Caliò & Marletta, 2003). Se realizó este procedimiento para encontrar el mayor tamaño de Δt donde las respuestas calculadas por el método numérico no varíen a comparación de respuestas calculadas por menores Δt . De este modo, se precisó el Δt para el cual las respuestas calculadas por el método numérico son estables.

El bloque de estudio estuvo sometido a amplitudes de aceleración que variaron entre 1 m.s^{-2} (0.10

g) y 20 m.s^{-2} (2.00 g). Así como de frecuencias angulares que variaron entre 1 rad.s^{-1} y 20 rad.s^{-1} . Estos intervalos de aceleraciones y frecuencias angulares fueron escogidas porque la volcadura en bloques ocurre durante sismos de frecuencias bajas y aceleraciones bajas a altas (Manos et al., 2013).

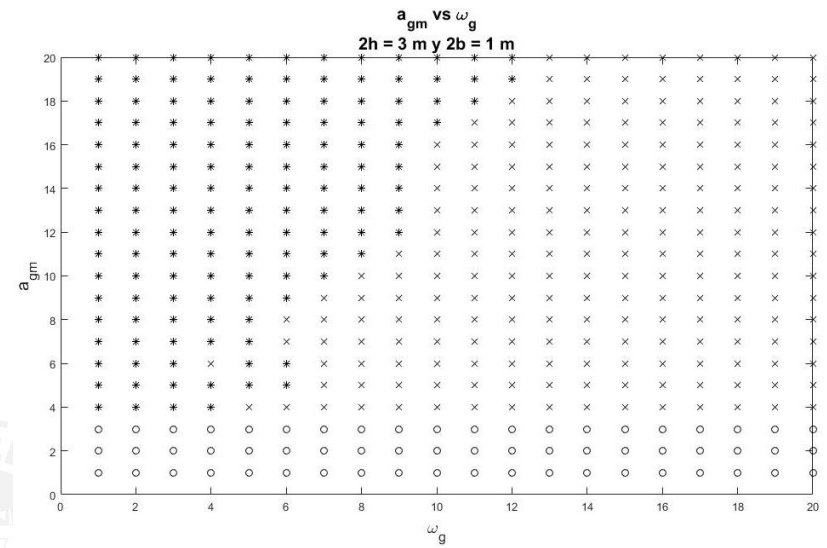
Los gráficos 9.2a y 9.2b muestran los resultados en forma de puntos de los estados del comportamiento dinámico del bloque (“*” volcadura, “x” oscilación y “o” traslación) para la longitud de intervalo de digitación de 0.01 (alternativa menos precisa) y 0.001 segundos (alternativa más precisa) respectivamente.





Precisión (dt)=0.01 s
 ○ Traslación
 × Oscilación
 * Volcadura

a) *Precisión = 0.01 s*



Precisión (dt)=0.001 s
 ○ Traslación
 × Oscilación
 * Volcadura

b) *Precisión = 0.001 s*

Figura 9.2: Mapa del comportamiento dinámico de un bloque ($2h = 3 \text{ m}$)

Los resultados del comportamiento dinámico para la menor precisión (figura 9.2 a) y mayor precisión (figura 9.2 b) muestran que una respuesta es diferente entre ambos gráficos. Por lo tanto, se decidió utilizar el Δt de 0.01 segundos para el desarrollo del estudio debido a que el costo computacional es menor a comparación del Δt de mayor precisión.

10. Competencia de parámetros que influye en la estabilidad del bloque: esbeltez y altura

Durante un movimiento sísmico, el bloque más esbelto ($\tan \alpha = \frac{b}{h}$) entre bloques de igual altura es el menos estable. Al aumentar la esbeltez, la aceleración mínima para el volteo, $a_m = \frac{bg}{h}$, disminuye. Sin embargo, a medida que se incrementa el tamaño (altura y base) del bloque, manteniendo constante la esbeltez, la resistencia sísmica (inercia rotacional) del bloque incrementa proporcional a la sumatoria del cuadrado de la altura y de la base (Makris, 2014). Dado que la esbeltez y el tamaño afectan la estabilidad del bloque, es necesario determinar el parámetro más importante.

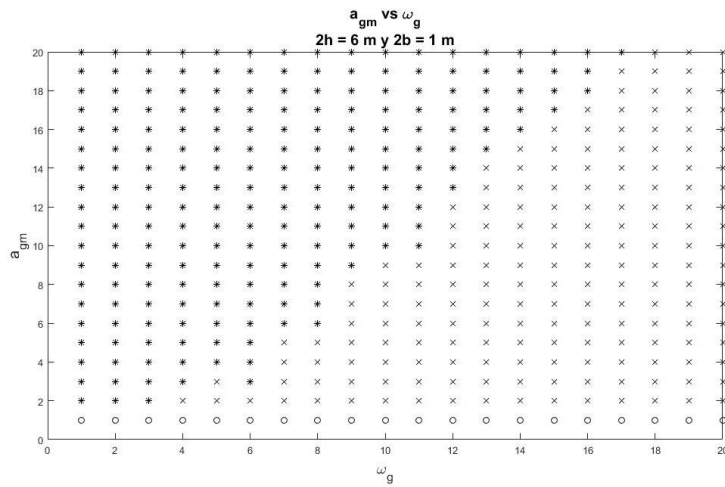
A medida que se aumenta la altura de bloque manteniendo la dimensión de su base constante, existe una competencia entre el incremento de altura (bloque más estable) y el incremento de la esbeltez (bloque menos estable) (Makris, 2016). Se decidió estudiar el comportamiento dinámico de los bloques de 3, 6, 9, 12 y 15 metros de altura manteniendo la base de 1 metro ante aceleraciones sinusoidales en su base. De este modo, se buscó determinar el parámetro más importante en la estabilidad del bloque, ya sea el tamaño o la esbeltez. A continuación, en la tabla 10.1 se muestran las propiedades físicas y mecánicas de las cinco columnas que se estudiaron:

Tabla 10.1: Propiedades físicas y mecánicas de los bloques

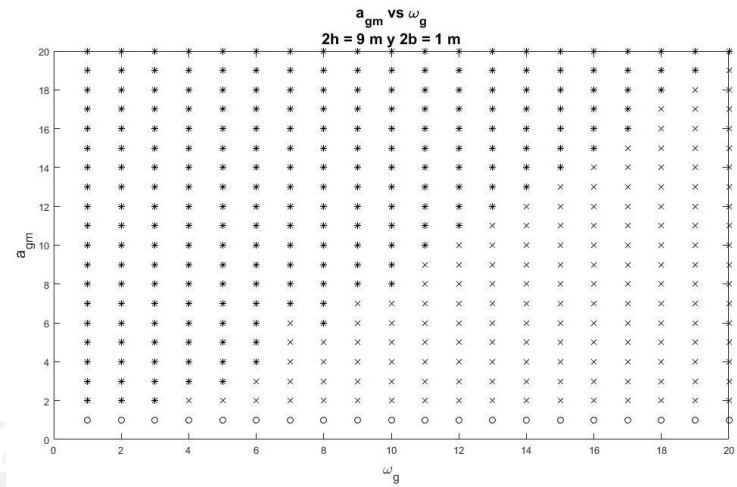
Bloque	Altura (m)	Base (m)	$\tan \alpha$	Parámetro de frecuencia (Hz)	Coefficiente de Restitución
1	3	1	$\frac{1}{3}$	2.15	0.92
2	6	1	$\frac{1}{6}$	1.55	0.97
3	9	1	$\frac{1}{9}$	1.27	0.98
4	12	1	$\frac{1}{12}$	1.10	0.98
5	15	1	$\frac{1}{15}$	0.98	0.99

El método de la aceleración angular lineal resultó estable para un Δt igual a 0.01 segundos para el bloque 1 (Tabla 10.1), como se concluyó en la sección 9. Es por ello que se decidió utilizar esta longitud de Δt para los ensayos de los bloques 2 al 5 (Tabla 10.1) ante aceleraciones sinusoidales. Se asumió que el método numérico utilizado para calcular la respuesta de rotación en el tiempo continuará siendo estable para las diferentes dimensiones de los bloques.

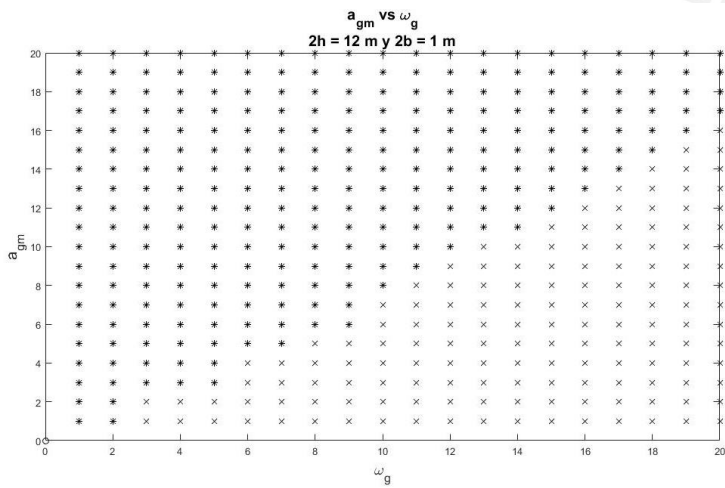
Las figuras 10.1a, 10.1b, 10.1c y 10.1d muestran los mapas del comportamiento dinámico de los bloques de altura de 6, 9, 12 y 15 metros. Los mapas fueron desarrollados utilizando el método numérico donde se asume la aceleración angular lineal con una precisión de Δt igual a 0.01 segundos.



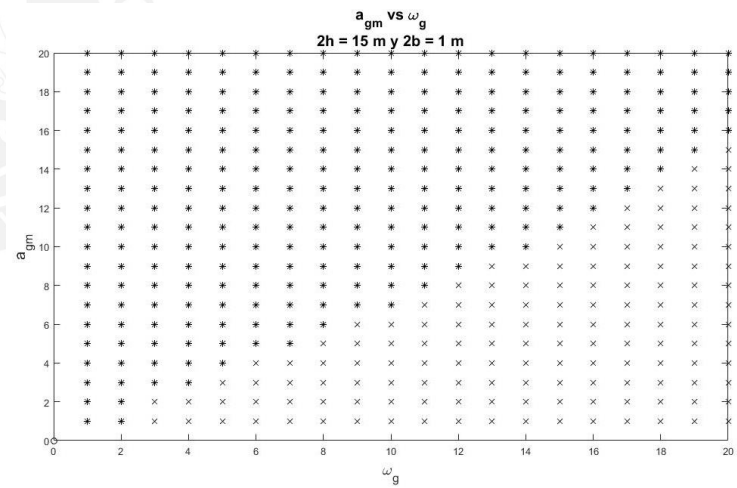
a)



b)



c)



d)

Figura 10.1: Mapa del comportamiento dinámico de bloques ($2h = 15\text{m}$) y precisión de 0.01 segundos

Las figuras 9.2a, 10.1a y 10.1b muestran que existen tres zonas marcadas en el comportamiento dinámico del bloque rígido ante aceleraciones sinusoidales. Estas zonas son: traslación, oscilación y volcadura. Mientras que las figuras 10.1c y 10.1d muestran que existen dos zonas marcadas las cuales son: oscilación y volcadura. La zona de la volcadura se expande a medida que la altura del bloque rígido incrementa. Mientras que la zona de traslación se encoje hasta que no es visible para las figuras 10.1c y 10.1d para las amplitudes de aceleración utilizadas en las pruebas.

Mas aún, los mapas del comportamiento dinámico para las diferentes alturas de bloques muestran que para frecuencias bajas, los bloques rígidos tienden a volcarse ante cualquier amplitud de aceleración. En cambio, ante señales con frecuencias altas, los bloques oscilan para amplitudes de aceleración bajas y vuelcan cuando se someten a amplitudes de aceleración altas. Esta relación entre frecuencia angular y amplitud de aceleración es aproximadamente lineal para los 5 bloques a partir de la zona de traslación.

Makris (2016), estudió el comportamiento de bloques de altura 4, 6, 8 y 10 metros para una misma base de 1 m ante pulsos sinusoidales de aceleración en la base. Mientras que en este estudio se aplicaron aceleraciones sinusoidales continuas durante 10 segundos a bloques de altura 3, 6, 9, 12 y 15 metros para una misma de base de 1 m. De este modo se determinó el parámetro (altura o esbeltez) que más influye en la estabilidad del bloque. Para cada frecuencia angular aplicada se extrajeron las aceleraciones mínimas para que el bloque se voltee de las figuras 10a, 11a, 11b, 11c, y 11d. La figura 10.2 muestra el gráfico de la aceleración mínima de volteo versus frecuencia angular para cada altura de los bloques estudiados.

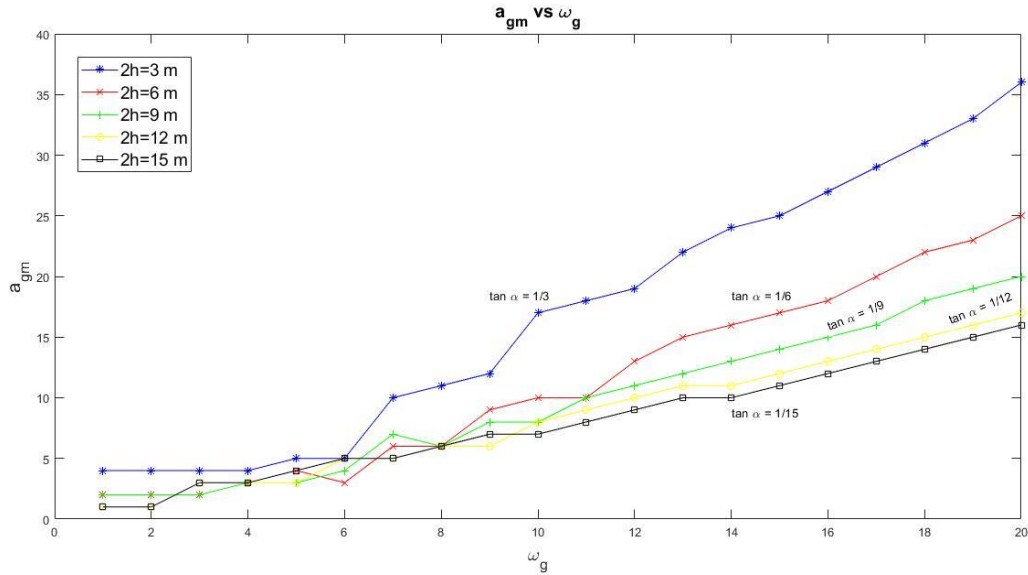


Figura 10.2: Aceleración mínima para el volteo versus frecuencia angular aplicada para bloques de diferentes alturas y base 1 m.

La figura 10.2 evidencia que mientras la altura y la esbeltez aumentan, la aceleración necesaria para el volteo disminuye. De esta manera se comprueba que el incremento de la esbeltez incrementa la inestabilidad en el comportamiento dinámico del bloque rígido.

Sin embargo, cuando las frecuencias angulares aplicadas son bajas se observa que las aceleraciones de volteo de los bloques mas altos (12 m y 15 m) son cercanas a las aceleraciones de volteo de los bloques de altura intermedio (6 m y 9 m). Por lo tanto, al igual que Makris (2016), se puede concluir que el efecto del incremento de altura (mayor estabilidad) contrarresta el efecto del incremento de esbeltez (menor estabilidad).

Este efecto de mayor estabilidad al incrementar la altura ocurre durante frecuencias bajas. Por ejemplo, cuando se aplicó una frecuencia angular de $3 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, la aceleración mínima de volteo para el bloque de altura de 15 m y esbeltez de $\frac{1}{15}$ resultó mayor que la aceleración mínima de volteo del bloque de altura de 9 m y esbeltez de $\frac{1}{9}$. Del mismo modo, para una frecuencia angular aplicada

de $6 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, la aceleración mínima de volteo para el bloque de altura 9 m y esbeltez $\frac{1}{9}$ resultó mayor que la aceleración mínima de volteo del bloque de altura de 6 m y esbeltez de $\frac{1}{6}$.

A continuación se muestra el gráfico del comportamiento dinámico del bloque teniendo como ejes la amplitud de la excitación adimensional $\left(\frac{a_{gm}}{\alpha g}\right)$ versus la relación de frecuencia de excitación $\left(\frac{\omega_g}{p}\right)$ para un bloque de altura de 3 m y base de 1 m.

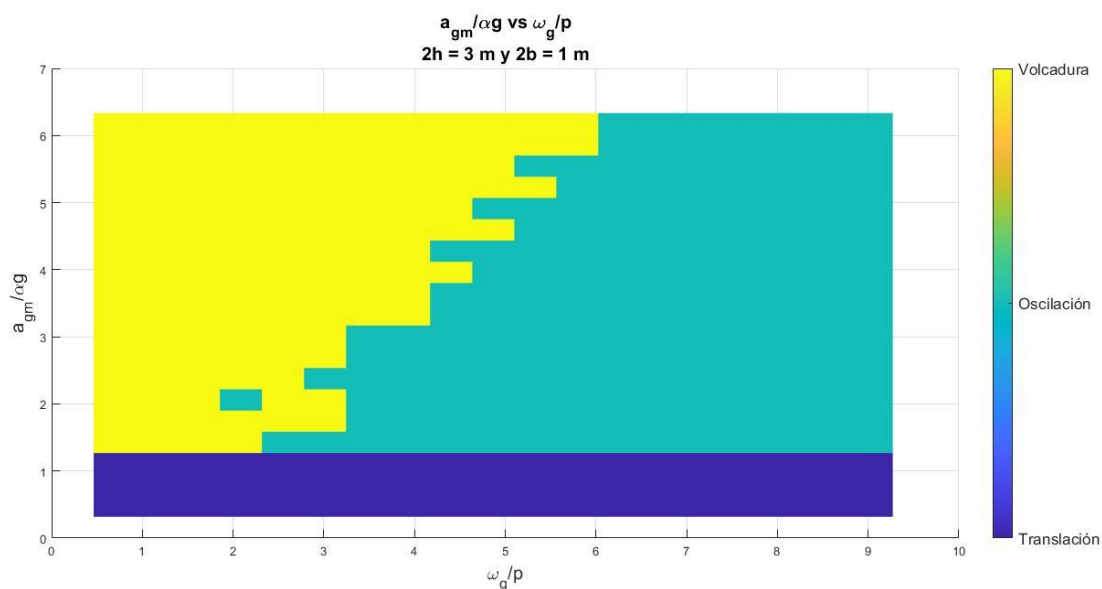


Figura 10.3: Mapa del comportamiento dinámico de un bloque ($2h = 3m$) y precisión de 0.01 segundos

Del mismo modo que los gráficos anteriores, existen tres zonas que caracterizan el comportamiento dinámico del bloque las cuales son: translación, oscilación y volcadura. Mas aún, en todo el rango de frecuencias estudiado, si la amplitud del movimiento armónico es pequeño, los bloques se trasladan sin rotar. Además, existe una amplitud de la excitación adimensional bien definida a partir de la cual los bloques empiezan a oscilar. Para frecuencias bajas los bloques se vuelcan, mientras que para frecuencias altas los bloques oscilan, y solo se vuelcan cuando la intensidad del movimiento aumenta. Conforme se incrementa la intensidad del movimiento en la base, se amplía la zona de frecuencias en la que los bloques se voltean.

11. Análisis sísmico de los muros incaicos

Alrededor del Perú permanecen vestigios de la época precolombina en forma de muros, estatuas, templos y otros; que han sobrevivido a fuertes terremotos. En la presente sección, se decidió estudiar el comportamiento sísmico de los muros del templo de Huiracocha y una porción del camino Inca de la PUCP como bloques rígidos que pueden fallar por volcamiento.

El templo de Huiracocha, como se muestra en la figura 11.1a, se encuentra ubicado en el poblado de Raqchi, a 118 kilómetros de la ciudad de Cusco. Sus muros se caracterizan por ser altos (aprox. 12 metros) y estar compuestos de una base de piedra y encima un muro de adobe.

Su construcción data del siglo XV y cuenta la leyenda que el poblado de Raqchi había dejado de adorar al dios Huiracocha, y éste, para castigarlos, mandó una lluvia de fuego. Es por ello que luego del castigo, los pobladores de Raqchi levantaron este templo para la adoración de este dios. (Orrego, 2009)

En vista que los muros del templo de Huiracocha presentan rajaduras en su estructura, muy probable por los daños producidos por sismos y por los 6 siglos de antigüedad, los pobladores de Raqchi han decidido reforzarlos como se muestra en la figura 11.1a.

Los muros del Camino Inca (Figura 11.1b) a analizar se encuentran dentro del campus universitario de la PUCP en la provincia de Lima en la costa centro del Perú. Los muros son una vía amurallada que formó parte del Camino Inca o Qhapaq Ñan. En la antigüedad conectaba a sitios arqueológicos importantes como las Huacas del Parque de las Leyendas. Muchos tramos del camino fueron destruidos para la construcción de la Avenida Universitaria (Descubre PUCP, 2013). Los 467 metros del Camino Inca que están dentro de la PUCP son conservados con gran celo por la comunidad universitaria.



a) *Templo de Huiracocha*



b) *Muro Camino Inca PUCP*

Figura 11.1 *Los muros históricos de tierra evaluados*

El riesgo de vuelco sísmico de los muros del templo de Huiracocha y del Camino Inca fue evaluado analizando su respuesta rotacional ante movimientos en su base representativos de sismos con períodos de retorno de 500, 1 000 y 2 500 años. Cada muro fue modelado como un sólido rígido rectangular con densidad uniforme sometido únicamente a excitación sísmica horizontal en la base. Las dimensiones de cada muro fueron medidas *in situ* y la densidad de cada material fue estimada a partir de valores conocidos. Con esos datos se estimaron las propiedades geométricas (b y h) e inerciales (m e I_0) de los modelos matemáticos de cada muro. Luego se calculó la respuesta rotacional de cada muro ante excitaciones sísmicas representadas por cada uno de los sismos sintéticos generados para cada sitio. Finalmente se caracterizó el riesgo sísmico de cada muro mediante el período de retorno del sismo capaz de producir la falla por vuelco del muro.

Para evaluar la vulnerabilidad de monumentos históricos es necesario estimar con confianza el peligro sísmico de la región donde estos se ubican, por lo que resulta indispensable contar con una amplia base de datos de registros sísmicos en el tiempo. En el Perú, lamentablemente, estos registros son todavía escasos y el uso de acelerogramas sintéticos toma importancia para estudios de respuesta sísmica de edificaciones importantes como los monumentos históricos (Paper et al., 2016)

11.1. Metodología

Las señales sintéticas adecuadas a los sitios en los que se encuentran los muros del templo de Huiracocha y el Camino Inca fueron generadas de la siguiente manera: primero se estimó la distancia a la fuente sismogénica más cercana y las características de rigidez del suelo de cada sitio (Tavera, 2014). Con esta información se generaron espectros de peligro uniforme (Roncal, 2017), que fueron luego escaladas a la forma espectral del documento FEMA 356 (Federal Emergency Management Agency, 2000). Finalmente, se aplicaron curvas de atenuación (Sadigh et al., 1997; Young et al., 1997) adecuadas a cada mecanismo sismogénico para obtener las magnitudes de momento correspondientes a aceleraciones espectrales para sismos con periodos de retorno de 500 años (sismos raros), 1 000 años (sismos muy raros) y 2 500 años (sismos extraordinarios), respectivamente.

El Perú se encuentra ubicado en una zona de alta actividad sísmica debido al proceso de subducción de la placa de Nazca por debajo de la placa Sudamericana. La figura 11.2 (Tavera, 2014) muestra las fuentes sismogénicas correspondientes a la ciudad capital de Lima y a la ciudad imperial del Cusco. Para generar los acelerogramas sintéticos utilizados en este estudio para cada una de estas ciudades se decidió utilizar el software SeismoArtif 2018 (SeismoApps Technical Information Sheet, 2018).

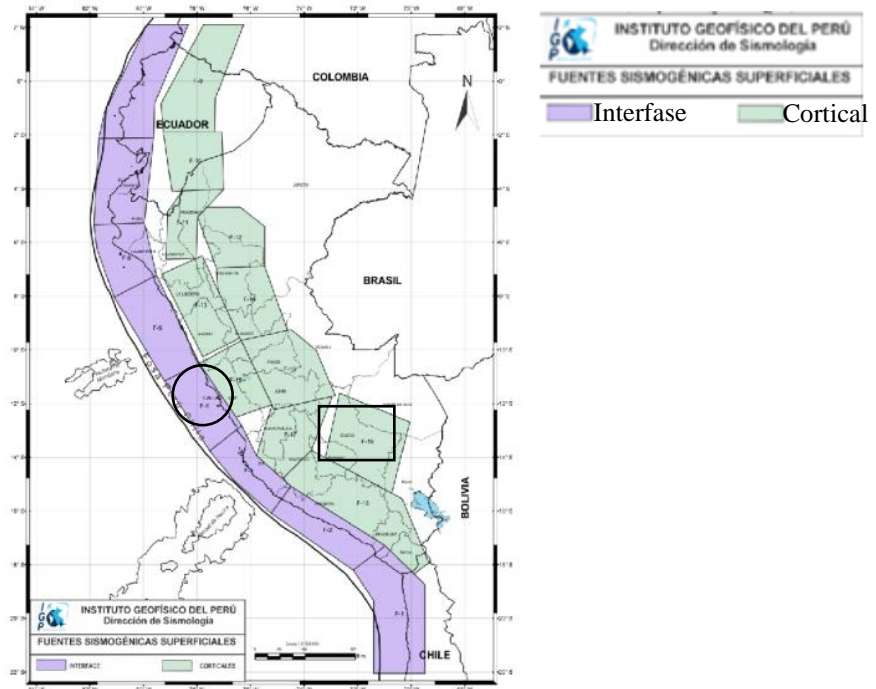


Figura 11.2 Mapa de focos sismogénicos del Perú y ubicación de Lima y Cusco (Tavera 2014)

11.2. Acelerogramas para Cusco

Las fuentes sismogénicas para Cusco provienen de procesos de deformaciones corticales (F-19 en la figura 11.2) y de efectos debidos a la geometría de la placa de Nazca debajo de la placa continental (F-21, F-22 y F-23). En el presente estudio solo consideró la fuente F-19 (por ser la más cercana al Cusco) con una longitud de ruptura de 10 km y se generaron los espectros de respuesta mostrados en la figura 11.3 para periodos de retorno T_r de 475 años (sismo raro), 1 000 años (sismo muy raro) y 2 500 años (sismo extraordinario) y una longitud de ruptura de 10 km. El sismo de 475 años (usualmente referido como sismo de 500 años) corresponde al sismo de diseño especificado en la Norma Sísmica Peruana (SENCICO, 2018). Los espectros generados para el Cusco se muestran en la figura 11.3.

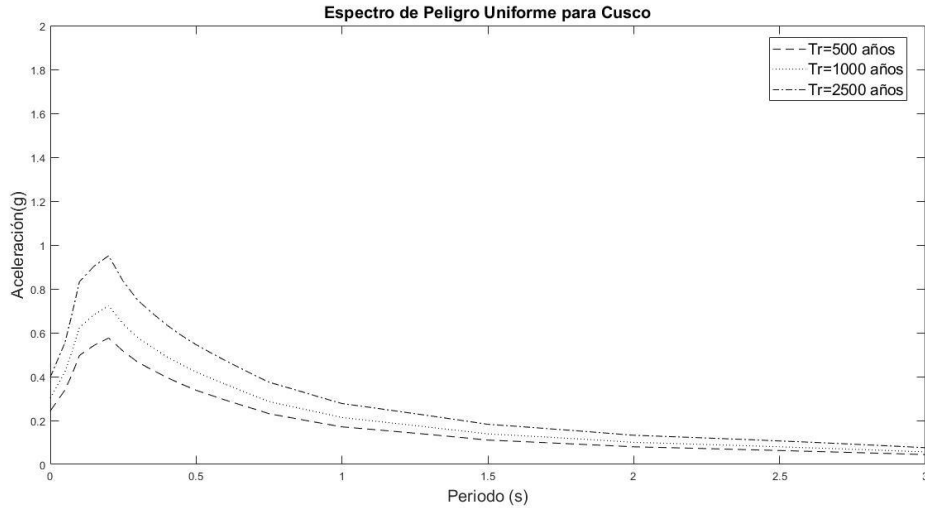


Figura 11.3 Espectros de sismos sintéticos generados para Cusco

La figura 11.4 muestra un juego de acelerogramas sintéticos para la ciudad de Cusco, compatibles con los espectros generados.

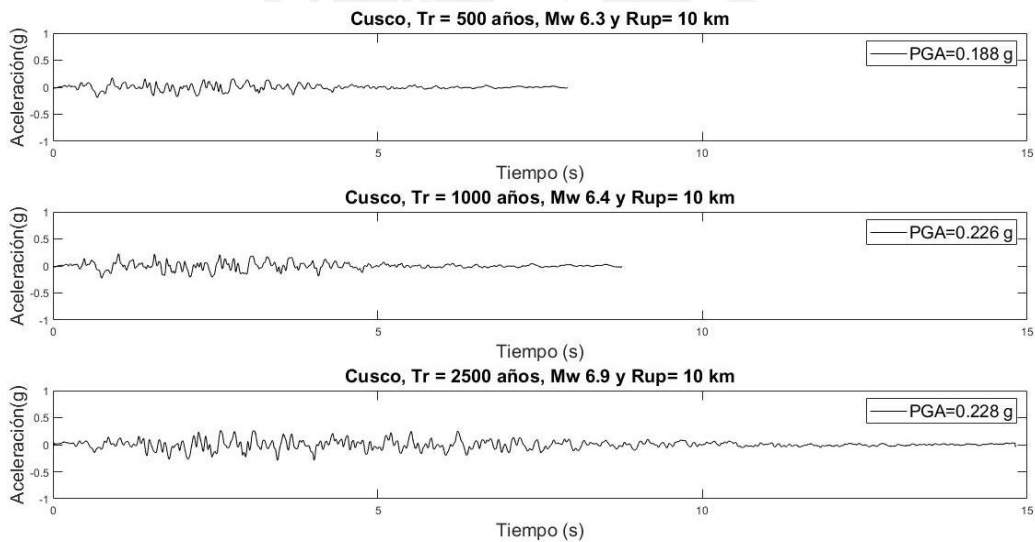


Figura 11.4 Acelerogramas sintéticos para el Cusco

11.3. Acelerogramas para Lima

Las fuentes sismogénicas para Lima mostradas en la figura 11.2 provienen de procesos de subducción (F-24) y de interfase (F-4). Para este estudio solo se consideró la fuente F-4 por ser la

más cercana a Lima, con una longitud de ruptura de 25 km. Los espectros generados para Lima aparecen en la figura 11.5 y un juego de acelerogramas compatible se muestra en la figura 11.6.

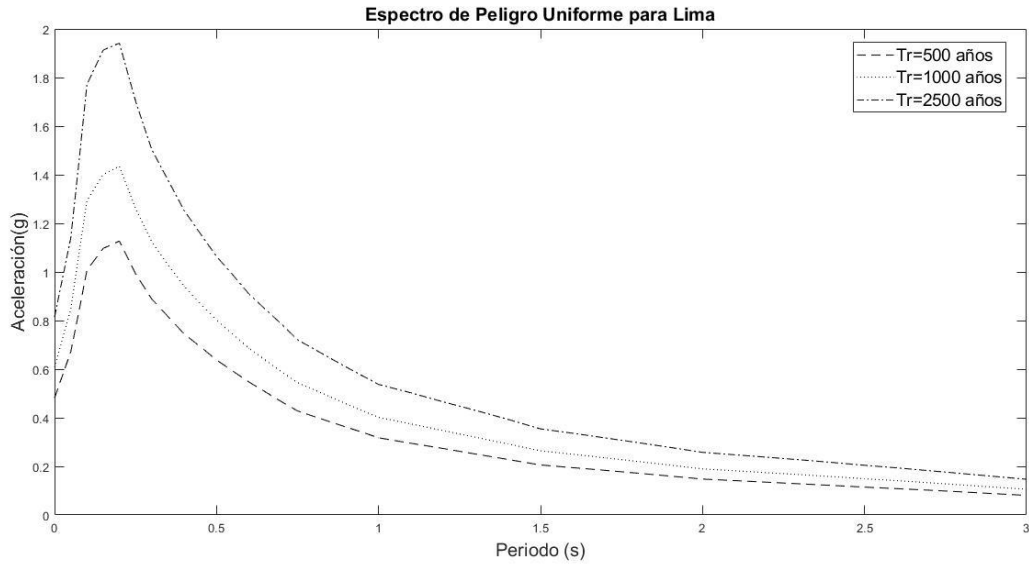


Figura 11.5 Espectros de sismos sintéticos generados para Lima

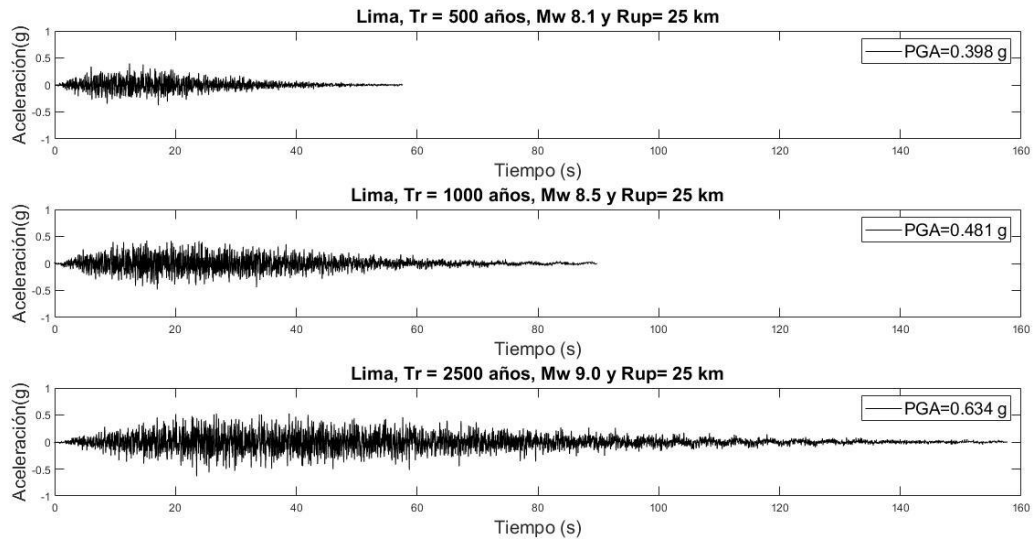


Figura 11.6 Acelerogramas sintéticos para Lima

11.4. Respuesta sísmica de rotación del muro del templo de Huiracocha

Se estudió la respuesta sísmica de rotación fuera del plano de la porción del muro mostrada en la figura 11.7a. El muro está compuesto por una base de piedra de altura total $H_P = 3$ m y masa $m_P = 57\,700$ kg, sobre el que reposa un muro de adobe de altura $H_A = 9$ m y masa $m_A = 106\,500$ kg. El espesor promedio del muro es de 1.5 m y el ancho promedio es de 5 m. Se consideró que la densidad media del muro de piedra es de $2\,600$ kg/m³ y que la densidad media del muro de adobe es de $1\,600$ kg/m³.

Para realizar el análisis sísmico, el muro se modeló como un sólido rígido rectangular de material uniforme, con masa total $m = m_A + m_P = 164\,200$ kg, altura total $H = 2h$ y base $B = 2b$, de forma que el modelo matemático tenga el mismo momento de inercia rotacional $I_o = 7.0 \times 10^6$ que el muro real. Se obtuvieron los siguientes parámetros geométricos para el modelo matemático: $h = 5.71$ m, $b = 0.75$ m, $R = 5.76$ m, y $\alpha = 7.48^\circ$.

La figura 11.7b muestra una foto acotada del muro, y un esquema del modelo matemático utilizado en el análisis sísmico.

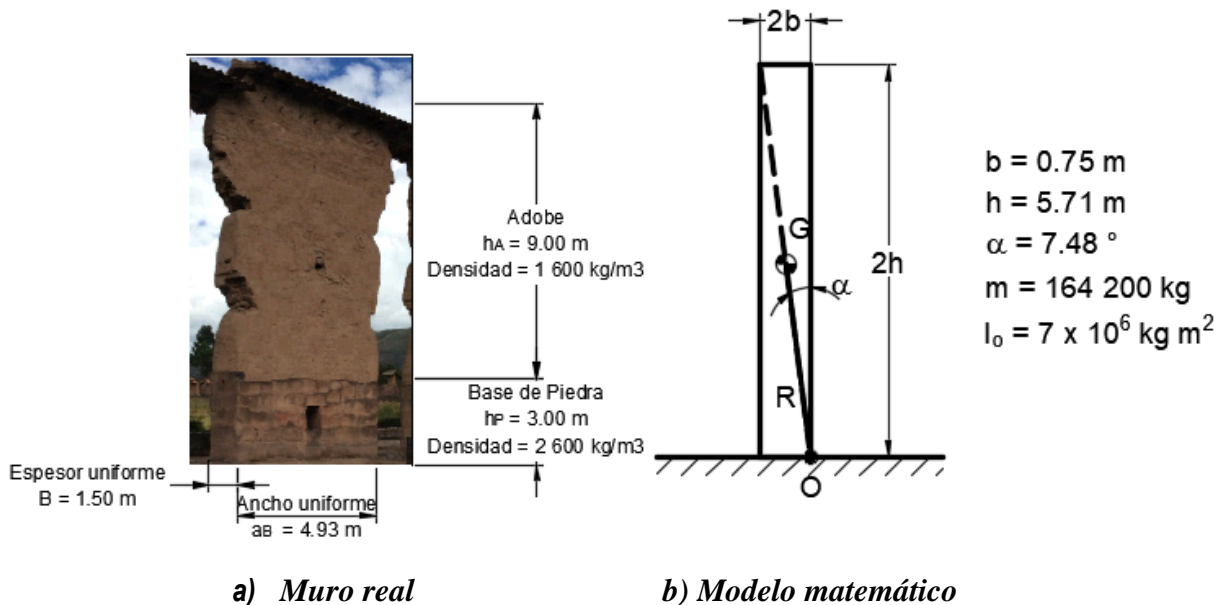


Figura 11.7 Porción estudiada del muro del templo de Huiracocha

Luego de verificar que la aceleración máxima del sismo sintético de mayor intensidad no causaría deslizamiento del muro, se estimó la respuesta rotacional en el tiempo del muro para cada sismo sintético. Se determinó que la rotación máxima que experimentaría el muro ante el sismo de 2 500 años sería de alrededor de 1° , mucho menor que el ángulo requerido para causar el vuelco ($\alpha = 7.48^\circ$), como se muestra en la figura 11.8. Por lo tanto, el muro del templo de Huiracocha no se volcaría ni con el sismo más intenso posible en Raqchi. Asimismo, la figura 11.8 muestra el acelerograma sintético al cual el muro del teplo de Huiracocha fue sometido.

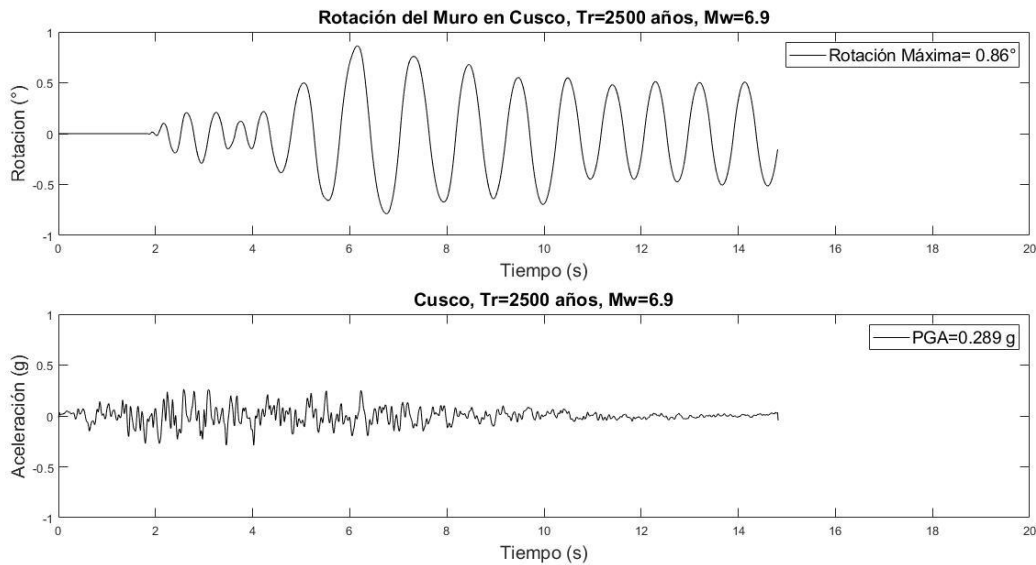


Figura 11.8 *Respuesta de rotación del muro de templo de Huiracocha y señal sintética de $Tr=2\ 500$ años y $Mw= 6.9$*

11.5. Respuesta sísmica de rotación del muro del Camino Inca PUCP

Se estudió la respuesta sísmica de rotación fuera del plano de la porción de muro mostrada en la figura 11.9a. El muro es de tapial y tiene una altura total H de 2.80 m y una masa total m de aproximadamente 10 800 kg. El espesor promedio del muro es de 0.55 m y el ancho promedio es de 4.40 m. Se consideró que la densidad media del material tapial es de $1\ 600\ \text{kg/m}^3$. Entonces las propiedades del modelo matemático correspondiente resultaron ser

$$h = 1.40 \text{ m}, b = 0.28 \text{ m}, R = 1.43 \text{ m}, \alpha = 11.11^\circ, e I_o = 29\,400 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

El muro analizado y su modelo matemático se presentan en la figura 11.9.

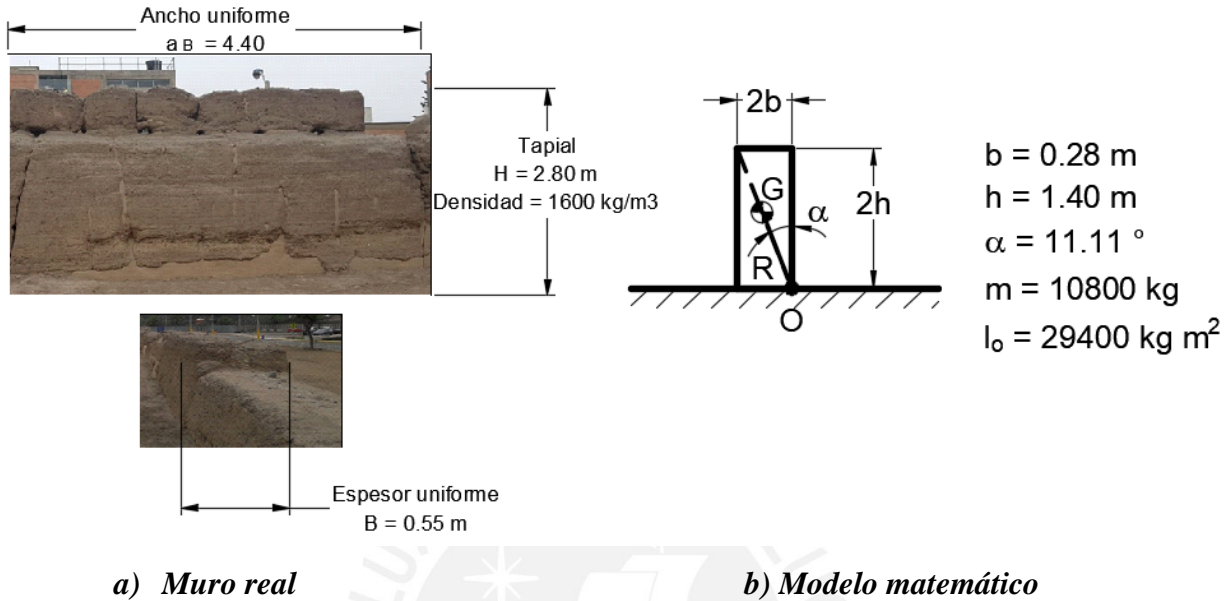


Figura 11.9 Porción estudiada del muro

Luego de verificar que la aceleración máxima del sismo sintético de mayor intensidad no causaría deslizamiento del muro, se estimó la respuesta rotacional en el tiempo del muro para cada sismo sintético. Se determinó que el muro oscilaría sin volcarse durante el sismo de 500 años (Figura 11.10), pero se volcaría ante el sismo de 1 000 años (Figura 11.11) y 2 500 años (Figura 11.12). Las figuras 11.10, 11.11 y 11.12 muestran las señales sintéticas aplicadas para cada caso.

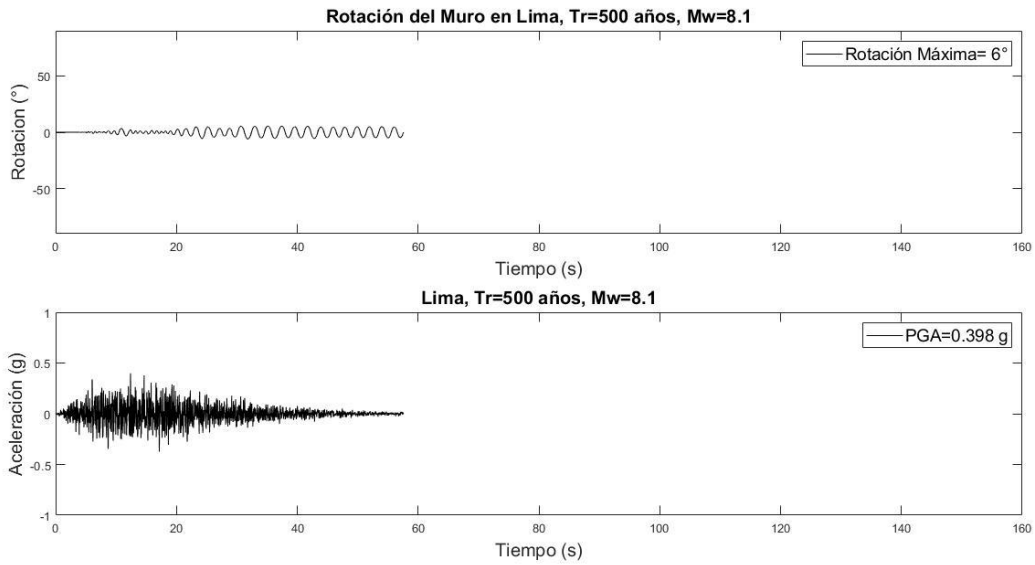


Figura 11.10 Respuesta de rotación del muro del Camino Inca PUCP y señal sintética de $Tr=500$ años y $Mw= 8.1$

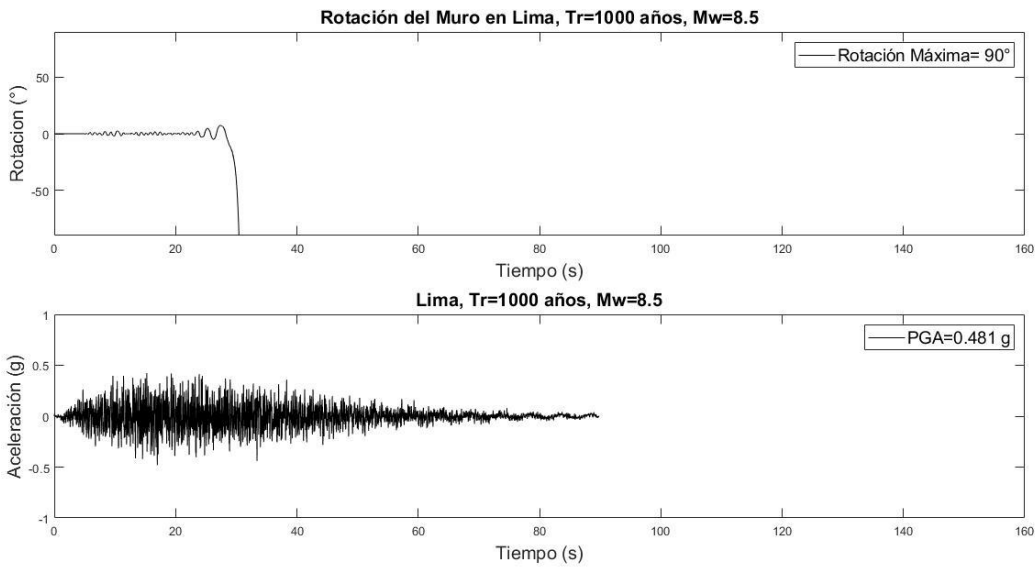


Figura 11.11 Respuesta de rotación del muro del Camino Inca PUCP y señal sintética de $Tr=1\ 000$ años y $Mw= 8.5$

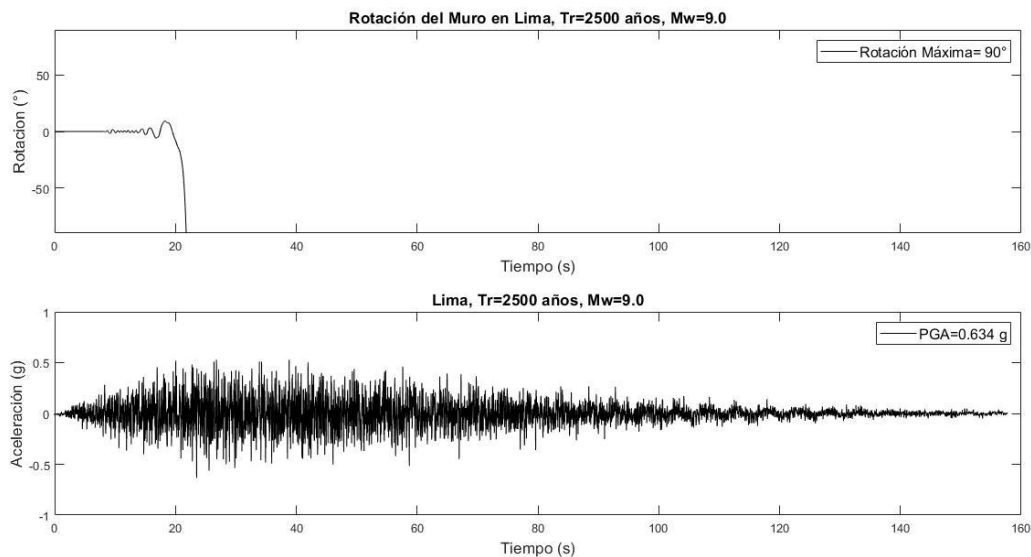


Figura 11.12 Respuesta de rotación del muro del Camino Inca PUCP y señal sintética de $Tr=2\ 500$ años y $Mw= 9.0$

12. Conclusiones y Recomendaciones

A pesar de la dificultad de resolver las ecuaciones dinámicas del bloque, se concluye que es posible resolverlas numéricamente mediante el método de aceleración angular lineal con un paso de tiempo constante de 0.01 segundos. Esto se observó en los resultados aparentemente confiables de los mapas del comportamiento del bloque antes combinaciones de aceleraciones sinusoidales y en los resultados de las respuestas de rotación de los muros del templo de Huiracocha y del Camino Inca ante señales sintéticas.

Mas aún, el incremento de la esbeltez y de la altura afectan la estabilidad de los bloques. Para frecuencias angulares bajas, la estabilidad de los bloques aumenta con el incremento de la altura. De este modo, se contrarresta el efecto de inestabilidad por el aumento de la esbeltez.

Es un dato útil el periodo de retorno de los sismos que causarían el volteo de los muros para tomar decisiones en pro de la conservación de los monumentos históricos. El estudio dio como resultados

que es muy probable que el muro del templo de Huiracocha se mantendrá de pie por muchos más siglos. Mientras que los muros del Camino Inca de la PUCP tienen una probabilidad de volteo ante un sismo de tiempo de retorno de 1 000 años. Por lo tanto, se sugiere a las autoridades tomar alguna medida para el reforzamiento de los muros del Camino Inca.

Finalmente, se recomienda lo siguiente:

- Realizar más ensayos numéricos en la banda entre la volcadura y la oscilación del bloque
- Realizar ensayos numéricos aumentando la base del bloque y manteniendo constante la altura.
- Extender el estudio a más monumentos históricos que se puedan comportar como bloques rígidos.



13. Anexos

13.1. Anexo 1: Modelo numérico utilizado para resolver la ecuación del comportamiento dinámico del bloque rígido

```
clear; clc; close all; % limpia variables, limpia pantalla y cierra figuras

Xao=0; %Posicion angular Inicial
Xpao=0; %Velocidad angular Inicial
dur=10; %Duracion de la señal sintética
tiempoinicial=0; %Tiempo inicial
b=1/2; %Media Base del muro
h=12/2; %Media Altura del muro
dt=0.01; %Diferencial de tiempo
masa=2400*(2*b)*(2*b)*(2*h); %Masa de la columna concreto
centrodemasa=h; %Distancia al centro de masa respecto de la b del muro
Po=36; %Amplitud de la aceleracion del suelo
omegaele=20; %Frecuencia de la Aceleracion
tempo=0:0.01:10
agp=Po*sin(omegaele*tempo)
ag=transpose(agp)

R=((b^2)+(h^2))^(1/2); %Radio de la columna
esbeltez=atan(b/h); %Angulo de esbeltez de la columna
g=9.81; %Aceleracion de la g (m/s^2)
inercia=(4/3)*masa*(R^2); %Inercia para bloques rectangulares (m^4)
r=((1-(3/2)*((sin(esbeltez))^2))); %Coef.de restitution por el impacto Muro-
suelo
pasos=(dur/dt); %Numero de iteraciones
p=(masa*g*R/(inercia))^(1/2); %Frecuencia del muro
structuralPeriod=1/p; %Periodo Estructural del muro
puntosX=1; %Contador
iter=2; %Contador en 2

%%%%%% Metodo de Aceleracion angular LINEAL %%%%%%%%%

tet=zeros(iter,puntosX); %Vector 0's donde se guarda posición
angular (rad)g
ome=zeros(iter,puntosX); %Vector 0's donde se guarda velocidad
angular (rad/s)
alf=zeros(iter,puntosX); %Vecotr 0's donde se guarda aceleración
angular (rad/s^2)
tiempoXi=zeros(iter,puntosX); %Vector 0's donde se guarda el
tiempo (s)
Dlineal=zeros(iter,puntosX); %Vector 0's donde se guarda
posiciones angulares (grados)
posTotallineal=zeros(iter,puntosX); %Vector 0's donde se guarda
posicion total del CM (m)
j=1; %Contador
h=1; %Contador
i=1; %Contador
tiempoXi(i,j)=tiempoinicial; %Tiempo inicial

%Se verifica si el muro de Raqchi se encuentra en translación pura o
%translación con rotación
while 1
    if abs(ag(i,j))<g*tan(esbeltez) %Verificacion para ver si el muro de
Raqchi empieza a oscilar (Makris, 2010)
        tet(i,j)=0; %Vector 0's donde se guarda posición angular
        ome(i,j)=0; %Vector 0's donde se guarda velocidad angular
        alf(i,j)=0; %Vecotr 0's donde se guarda aceleración angular
```

```

        Dlineal(i,j)=0; %Vector 0's donde se guarda
posiciones angulares en grados
    end
    if abs(ag(i,j))>=g*tan(esbeltez) %Verificación para ver si el muro de
Raqchi empieza a oscilar
        break %Si empieza a oscilar se sale de la
iteración de verificación
    end
    i=i+1; %Aumenta el contador
    tiempoXi(i,j)=tiempoXi(i-1,j)+dt; %Aumenta el tiempo en un diferencial de
tiempo
end

%En el siguiente bloque de iteración, el muro ya se encuentra en
%traducción y rotación.
while 1

    tet(i,j)=Xao %Posición Angular inicial (Rad)
    ome(i,j)=Xpao %Velocidad Angular inicial (rad)
    Dlineal(i,j)=rad2deg(tet(i,j)) %Posicion Angular en grados inicial
(grados)

    if ag(i,j)>=0 %Si la aceleracion de la señal sintética
es positiva

alf(i,j)=(masa*g*R*sin(esbeltez)+masa*R*(ag(i,j))*cos(esbeltez))/(inercia)
%Aceleracion angular inicial
    i=i+1; %Aumenta el contador
    tiempoXi(i,j)=tiempoXi(i-1,j)+dt; %Aumenta el tiempo

    syms Xdpilineal %Declaramos la aceleracion
angular como variable

    Xilineal=((dt^2)/6)*(Xdpilineal-alf(i-1,j))+alf(i-1,j)*(dt^2)/2)...
+ome(i-1,j)*dt+tet(i-1,j); %Posición angular asumiendo que la
aceleración es lineal
    equationlineal=-inercia*Xdpilineal-masa*(ag(i,j))*R*cos(-esbeltez-
Xilineal); %Se reemplaza la posicion en la ecuacion del bloque para giros
negativos
    Slineal=vpasolve(equationlineal==masa*R*g*sin(-esbeltez-
Xilineal),Xdpilineal); %Se resuelve la ecuación para la aceleracion angular
    alf(i,j)=Slineal; %Se guarda la
aceleración angular hallada
    tet(i,j)=((dt^2)/6)*(alf(i,j)-alf...
(i-1,j))+alf(i-1,j)*(dt^2/2)+ome(i-1,j)*dt...
+tet(i-1,j); %Halla la posicion
angular en el paso "i+1"

    ome(i,j)=(alf(i,j)-alf(i-1,j))*(dt/2)...
+alf(i-1,j)*dt+ome(i-1,j); %Halla la velocidad angular en el
paso "i+1"

    elseif (ag(i,j))<0 %Si la aceleracion de la señal
sintética es negativa
        alf(i,j)=(-masa*g*R*sin(esbeltez)-
masa*R*(ag(i,j))*cos(esbeltez))/(inercia); %Aceleracion angular inicial
        i=i+1;
        tiempoXi(i,j)=tiempoXi(i-1,j)+dt;

        syms Xdpilineal %Declaramos la aceleracion
angular como variable
        Xilineal=((dt^2)/6)*(Xdpilineal-alf(i-1,j))+alf(i-1,j)*(dt^2)/2)...
+ome(i-1,j)*dt+tet(i-1,j); %Posición angular asumiendo que la
aceleración es lineal

        equationlineal= inercia*Xdpilineal+masa*(ag...

```

```

        (i,j)*R*cos(esbeltez-Xilineal); %Se reemplaza la posicion en la
ecuacion del bloque para giros positivos

        Slineal=vpasolve(equationlineal==masa*R*g*sin(esbeltez-...
Xilineal),Xdpilineal); %Se resuelve la ecuación para la aceleracion
angular

        alf(i,j)=Slineal; %Se guarda la aceleración
angular hallada

        tet(i,j)=((dt^2)/6)*(alf(i,j)-alf...
(i-1,j))+alf(i-1,j)*(dt^2/2)+ome(i-1,j)*dt...
+tet(i-1,j); %Halla la posicion angular
en el paso "i+1"

        ome(i,j)=(alf(i,j)-alf(i-1,j))*(dt/2)...
+alf(i-1,j)*dt+ome(i-1,j) %Halla la velocidad angular en el paso
"i+1"
    end
    i=i+1; %Aumenta el contador
    tiempoXi(i,j)=tiempoXi(i-1,j)+dt; %Aumenta el tiempo

    while i<=pasos %Se realizara n-1 iteraciones cuando el bloque
ya se encuentra en rotación

        syms Xdpilineal %Declaramos la aceleracion
angular como variable

        if tet(i-1,j)>=0 %Se realiza el procedimiento si la
posicion angular es positiva

            Xilineal=((dt^2)/6)*(Xdpilineal-alf(i-1,j))+
(alf(i-1,j)*(dt^2)/2)...
+ome(i-1,j)*dt+tet(i-1,j); %Posición angular asumiendo que la
aceleración es lineal

            equationlineal= inercia*Xdpilineal+masa*(ag... %Se reemplaza la
posicion en la ecuacion del bloque para giros positivos
(i,j))*R*cos(esbeltez-Xilineal);
            Slineal=vpasolve(equationlineal==masa*R*g*sin(esbeltez-...
Xilineal),Xdpilineal); %Se resuelve la
ecuación para la aceleracion angular
            alf(i,j)=Slineal; %Se guarda la aceleración
angular hallada

            tet(i,j)=((dt^2)/6)*(alf(i,j)-alf...
(i-1,j))+alf(i-1,j)*(dt^2/2)+ome(i-1,j)*dt...
+tet(i-1,j); %Halla la posicion
angular en el paso "i+1"

            if tet(i,j)*tet(i-1,j)<0 %Verifica cambio de direccion de
giro debido al impacto en la posicion angular

                ome(i,j)=r*ome(i-1,j); %Velocidad despues del impacto

            else
                ome(i,j)=(alf(i,j)-alf(i-1,j))*(dt/2)...
+alf(i-1,j)*dt+ome(i-1,j); %Halla la velocidad angular en el
paso "i+1" en caso no haya habido impacto
            end

            elseif tet(i-1,j)<0 %Se realiza el procedimiento si la
posicion angular es negativa

```

```

Xilineal=((dt^2)/6)*(Xdpilineal-alf(i-1,j))+(alf(i-1,j)*(dt^2)/2)...
+ome(i-1,j)*dt+tet(i-1,j); %Posición angular asumiendo que la
aceleración es lineal

equationlineal= -inercia*Xdpilineal-masa*(ag...
(i,j))*R*cos(-esbeltez-Xilineal); %Se reemplaza la posición
en la ecuación del bloque para giros positivos

Slineal=vpasolve(equationlineal==masa*R*g*sin(-esbeltez...
-Xilineal),Xdpilineal); %Se resuelve la ecuación
para la aceleración angular
alf(i,j)=Slineal; %Se guarda la aceleración angular
hallada

tet(i,j)=((dt^2)/6)*(alf(i,j)-alf...
(i-1,j))+alf(i-1,j)*(dt^2/2)+ome(i-1,j)*dt...
+tet(i-1,j); %Halla la posición
angular en el paso "i+1"

if tet(i,j)*tet(i-1,j)<0 %Verifica cambio de signo debido
al impacto en la posición angular
ome(i,j)=r*ome(i-1,j); %Velocidad después del impacto
else
ome(i,j)=(alf(i,j)-alf(i-1,j))*(dt/2)...
+alf(i-1,j)*dt+ome(i-1,j);%Halla la velocidad angular en el paso
"i+1" en caso no haya habido impacto
end
end

Dlineal(i,j) = rad2deg(tet(i,j)); %Posición angular en
grados

if (max(abs(ag)))<g*tan(esbeltez) %Si se cumple la desigualdad,
significa que el bloque nunca empieza a rotar
break
elseif abs(tet(i,j))>=pi/2 %Si la posición angular
del muro en algún instante es mayor a 90 grados significa que el muro volcó
tiempoXi(i,j)=tiempoXi(i-1,j)+dt;
break %El movimiento
del muro termina porque volcó
end

if i<=pasos
tiempoXi(i,j)=tiempoXi(i-1,j)+dt; %Halla EL TIEMPO i+1
con la información conocida y lo guarda en la fila i del vector
end

i=i+1 %Contador

end %while

if j==puntosX
break
end

end %while

plot(tiempoXi,Dlineal)

```

13.2. Anexo 2: Modelo numérico utilizado para resolver la ecuación del comportamiento dinámico para el muro de Raqchi ante señales sintéticas

```

%clear; clc;close all; % limpia variables, limpia pantalla y cierra
figuras

Xao=0; %Posicion angular Inicial
Xpao=0; %Velocidad angular Inicial
dur=7.92; %Duracion de la señal sintética
tiempoinicial=0; %Tiempo inicial
b=1.50/2; %Media Base del muro de Raqchi
h=11.41/2; %Media Altura del muro de Raqchi
dt=0.01; %Diferencial de tiempo
masa=2600*3*4.93*1.50+9*1.50*4.93*1600; %Masa del muro de Raqchi
(Adobe y Roca)
centrodemasa=11.41/2; %Distancia al centro de masa respecto de la b del
muro

R=5.76; %Radio del muro de Raqchi
esbeltez=atan((b)/(centrodemasa));%Angulo de esbeltez del muro de Raqchi
g=9.81; %Aceleracion de la g (m/s^2)
ineracia=7*(10^6); %Inercia del muro de Raqchi (m^4)
r=((1-(3/2)*((sin(esbeltez))^2)))^(1/2)); %Coef.de restitution por el
impacto Muro-suelo
pasos=(dur/dt); %Numero de iteraciones
p=(masa*g*R/(ineracia))^(1/2);%Frecuencia del muro de Raqchi
structuralPeriod=1/p; %Periodo Estructural del muro de
Raqchi
puntosX=1; %Contador
iter=2; %Contador en 2

%%%%%% Metodo de Aceleracion angular LINEAL %%%%%%%%%

tet=zeros(iter,puntosX); %Vector 0's donde se guarda
posición angular (rad)g
ome=zeros(iter,puntosX); %Vector 0's donde se guarda
velocidad angular (rad/s)
alf=zeros(iter,puntosX); %Vecotr 0's donde se guarda
aceleración angular (rad/s^2)
tiempoXi=zeros(iter,puntosX); %Vector 0's donde se
guarda el tiempo (s)
Dlineal=zeros(iter,puntosX); %Vector 0's donde se
guarda posiciones angulares (grados)
posTotallineal=zeros(iter,puntosX); %Vector 0's donde se
guarda posicion total del CM (m)
j=1; %Contador
h=1; %Contador
i=1; %Contador
tiempoXi(i,j)=tiempoinicial; %Tiempo inicial
ag=ag*g;

%Se verifica si el muro de Raqchi se encuentra en translación pura o
%translación con rotación
while 1
    if abs(ag(i,j))<g*tan(esbeltez) %Verificacion para ver si el muro
de Raqchi empieza a oscilar (Makris, 2010)
        tet(i,j)=0; %Vector 0's donde se guarda posición
angular

```

```

        ome(i,j)=0; %Vector 0's donde se guarda velocidad
angular
        alf(i,j)=0; %Vecotr 0's donde se guarda aceleración
angular
        Dlineal(i,j)=0; %Vector 0's donde se guarda
posiciones angulares en grados
        end
        if abs(ag(i,j))>=g*tan(esbeltez) %Verificación para ver si el
muro de Raqchi empieza a oscilar
            break %Si empieza a oscilar se sale
de la iteración de verificación
        end
        i=i+1; %Aumenta el contador
        tiempoXi(i,j)=tiempoXi(i-1,j)+dt; %Aumenta el tiempo en un
diferencial de tiempo
    end

%En el siguiente bloque de iteración, el muro ya se encuentra en
%translation y rotación.
while 1

    tet(i,j)=Xao %Posición Angular inicial (Rad)
    ome(i,j)=Xpao %Velocidad Angular inicial (rad)
    Dlineal(i,j)=rad2deg(tet(i,j)) %Posicion Angular en grados
inicial (grados)

    if ag(i,j)>=0 %Si la aceleracion de la señal
sintética es positiva

alf(i,j)=(masa*g*R*sin(esbeltez)+masa*R*(ag(i,j))*cos(esbeltez))/(inerci
a) %Aceleracion angular inicial
        i=i+1; %Aumenta el contador
        tiempoXi(i,j)=tiempoXi(i-1,j)+dt; %Aumenta el tiempo

        syms Xdpilineal %Declaramos la
aceleracion angular como variable

        Xilineal=((dt^2)/6)*(Xdpilineal-alf(i-1,j))+alf(i-
1,j)*(dt^2)/2)...
            +ome(i-1,j)*dt+tet(i-1,j); %Posición angular asumiendo
que la aceleración es lineal
        equationlineal= -inercia*Xdpilineal-masa*(ag(i,j))*R*cos(-
esbeltez-Xilineal); %Se reemplaza la posicion en la ecuacion del bloque
para giros negativos
        Slineal=vpasolve(equationlineal==masa*R*g*sin(-esbeltez-
Xilineal),Xdpilineal); %Se resuelve la ecuación para la aceleracion
angular
        alf(i,j)=Slineal; %Se guarda la
aceleración angular hallada
        tet(i,j)=((dt^2)/6)*(alf(i,j)-alf...
            (i-1,j))+alf(i-1,j)*(dt^2/2)+ome(i-1,j)*dt...
            +tet(i-1,j); %Halla la
posicion angular en el paso "i+1"

        ome(i,j)=(alf(i,j)-alf(i-1,j))*(dt/2)...
            +alf(i-1,j)*dt+ome(i-1,j); %Halla la velocidad
angular en el paso "i+1"

        elseif (ag(i,j))<0 %Si la aceleracion de la
señal sintética es negativa

```

```

    alf(i,j)=(-masa*g*R*sin(esbeltez)-
masa*R*(ag(i,j))*cos(esbeltez))/(inercia); %Aceleracion angular inicial
    i=i+1;
    tiempoXi(i,j)=tiempoXi(i-1,j)+dt;

    syms Xdpilineal %Declaramos la
aceleracion angular como variable
    Xilineal=((dt^2)/6)*(Xdpilineal-alf(i-1,j))+(alf(i-
1,j)*(dt^2)/2)...
    +ome(i-1,j)*dt+tet(i-1,j); %Posición angular asumiendo que la
aceleración es lineal

    equationlineal= inercia*Xdpilineal+masa*(ag...
(i,j))*R*cos(esbeltez-Xilineal); %Se reemplaza la posicion en la
ecuacion del bloque para giros positivos

    Slineal=vpasolve(equationlineal== -masa*R*g*sin(esbeltez-...
Xilineal),Xdpilineal); %Se resuelve la ecuación para la
aceleracion angular

    alf(i,j)=Slineal; %Se guarda la
aceleración angular hallada

    tet(i,j)=((dt^2)/6)*(alf(i,j)-alf...
(i-1,j))+alf(i-1,j)*(dt^2)/2+ome(i-1,j)*dt...
+tet(i-1,j); %Halla la posicion
angular en el paso "i+1"

    ome(i,j)=(alf(i,j)-alf(i-1,j))*(dt/2)...
+alf(i-1,j)*dt+ome(i-1,j) %Halla la velocidad angular en el
paso "i+1"
end
i=i+1; %Aumenta el contador
tiempoXi(i,j)=tiempoXi(i-1,j)+dt; %Aumenta el tiempo

while i<=pasos %Se realizara n-1 iteraciones cuando el
bloque ya se encuentra en rotación

    syms Xdpilineal %Declaramos la
aceleracion angular como variable

    if tet(i-1,j)>=0 %Se realiza el procedimiento
si la posicion angular es positiva

        Xilineal=((dt^2)/6)*(Xdpilineal-alf(i-1,j))+(alf(i-
1,j)*(dt^2)/2)...
        +ome(i-1,j)*dt+tet(i-1,j); %Posición angular asumiendo
que la aceleración es lineal

        equationlineal= inercia*Xdpilineal+masa*(ag... %Se
reemplaza la posicion en la ecuacion del bloque para giros positivos
(i,j))*R*cos(esbeltez-Xilineal);
        Slineal=vpasolve(equationlineal== -masa*R*g*sin(esbeltez-...
Xilineal),Xdpilineal); %Se
resuelve la ecuación para la aceleracion angular
        alf(i,j)=Slineal; %Se guarda la
aceleración angular hallada

```

```

tet(i,j)=((dt^2)/6)*(alf(i,j)-alf...
(i-1,j))+alf(i-1,j)*(dt^2/2)+ome(i-1,j)*dt...
+tet(i-1,j); %Halla la
posicion angular en el paso "i+1"

if tet(i,j)*tet(i-1,j)<0 %Verifica cambio de
direccion de giro debido al impacto en la posicion angular

ome(i,j)=r*ome(i-1,j); %Velocidad despues del
impacto

else
ome(i,j)=(alf(i,j)-alf(i-1,j))*(dt/2)...
+alf(i-1,j)*dt+ome(i-1,j); %Halla la velocidad angular
en el paso "i+1" en caso no haya habido impacto
end

elseif tet(i-1,j)<0 %Se realiza el procedimiento
si la posicion angular es negativa

Xilineal=((dt^2)/6)*(Xdpilineal-alf(i-1,j))+alf(i-
1,j)*(dt^2)/2)...
+ome(i-1,j)*dt+tet(i-1,j); %Posición angular asumiendo
que la aceleración es lineal

equationlineal= -inercia*Xdpilineal-masa*(ag...
(i,j))*R*cos(-esbeltez-Xilineal); %Se reemplaza la
posicion en la ecuacion del bloque para giros positivos

Slineal=vpasolve(equationlineal==masa*R*g*sin(-esbeltez...
-Xilineal),Xdpilineal); %Se resuelve la
ecuación para la aceleracion angular
alf(i,j)=Slineal; %Se guarda la aceleración
angular hallada

tet(i,j)=((dt^2)/6)*(alf(i,j)-alf...
(i-1,j))+alf(i-1,j)*(dt^2/2)+ome(i-1,j)*dt...
+tet(i-1,j); %Halla la
posicion angular en el paso "i+1"

if tet(i,j)*tet(i-1,j)<0 %Verifica cambio de
signo debido al impacto en la posicion angular
ome(i,j)=r*ome(i-1,j); %Velocidad despues del
impacto

else
ome(i,j)=(alf(i,j)-alf(i-1,j))*(dt/2)...
+alf(i-1,j)*dt+ome(i-1,j); %Halla la velocidad angular en
el paso "i+1" en caso no haya habido impacto
end
end

Dlineal(i,j) = rad2deg(tet(i,j)); %Posicion angular
en grados

if (max(abs(ag)))<g*tan(esbeltez) %Si se cumple la
desigualdad, significa que el bloque nunca empieza a rotar
break

```

```

        elseif abs(tet(i,j))>=pi/2 %Si la posición
angular del muro en algun instante es mayor a 90 grados significa que el
muro volcó
            tiempoXi(i,j)=tiempoXi(i-1,j)+dt;
            break %El
movimiento del muro termina porque volcó
        end

        if i<=pasos
            tiempoXi(i,j)=tiempoXi(i-1,j)+dt; %Halla EL
TIEMPO i+1 con la informcion conocida y lo guarda en la fila i del
vector
        end

        i=i+1 %Contador

    end %while

    if j==puntosX
        break
    end

end %while

plot(tiempoXi,Dlineal)

xlswrite('C:\Users\Arturo\Desktop\TESIS\TITULO\UltimoRaqchi\RAQCHITR500M
64.xlsx',tet,1) %Guarda el vector posicion en un archivo de Excel
xlswrite('C:\Users\Arturo\Desktop\TESIS\TITULO\UltimoRaqchi\RAQCHITR500M
64.xlsx',ome,2) %Guarda el vector velocidad en un archivo de Excel
xlswrite('C:\Users\Arturo\Desktop\TESIS\TITULO\UltimoRaqchi\RAQCHITR500M
64.xlsx',alf,3) %Guarda el vector aceleracion en un archivo de Excel
xlswrite('C:\Users\Arturo\Desktop\TESIS\TITULO\UltimoRaqchi\RAQCHITR500M
64.xlsx',Dlineal,4) %Guarda el vector posicion (rad) en un archivo
de Excel
xlswrite('C:\Users\Arturo\Desktop\TESIS\TITULO\UltimoRaqchi\RAQCHITR500M
64.xlsx',tiempoXi,5) %Guarda el vector tiempo en un archivo de
Excel

```

14. Referencias

Bachmann, J. A., Strand, M., Vassiliou, M. F., Broccardo, M., & Stojadinović, B. (2018). Is rocking motion predictable? *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 47:2, 535–552.

Chopra, A. (2014). *Dinámica de Estructuras*. Pearson Educación de México.

Descubre PUCP (2013). Camino Inca. Lima, Perú.: PUCP. Recuperado de <http://descubre.pucp.edu.pe/poi/lug072>

Federal Emergency Management Agency (FEMA), & (ASCE), A. S. of C. E. (2000). *Prestandard and commentary for the seismic rehabilitation of buildings*. Federal Emergency Management Agency.

Harris, F. (1978). On the use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform.

Housner, G. W. (1963). The behavior of inverted pendulum structures during earthquakes. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 53:2, 403–417.

Roncal, M. (2017). Determinación del peligro sísmico en el territorio nacional y elaboración de aplicativo web.

Santa Cruz, S., Ordaz, M., Guerrero del Ángel, R. (2017). Estimación de pérdidas en contenidos ubicados dentro de naves industriales debido a sismos. *Sociedad Mexicana de Ingeniería Estructural*.

SeismoApps Technical Information Sheet (2018). Seismosoft Inc.

SENCICO (2018). Reglamento Nacional de Edificaciones. Norma Técnica E.030 Diseño Sismorresistente. Ministerio de Vivienda, Construcción y Saneamiento.

Makris, N. (2014). A half-century of rocking isolation. *Earthquake and Structures*, 7:6,

1187–1221.

Manos, G. C., & Demosthenous, M. (1995). Models of Ancient Columns and Colonnades Subjected to Horizontal Base Motions-Study of their Dynamic and Earthquake Behaviour. *Transactions on the Built Environment*, 8, 1–3.

Makris, N., & Roussos, Y. S. (2000). Rocking response of rigid blocks under near-source ground motions. *Geotechnique*, 50:3, 243–262.

Orrego (2009). La provincial de Canchis: el Templo de Wiracocha de Raqchi. Lima, Perú.: PUCP. Recuperado de <http://blog.pucp.edu.pe/blog/juanluisorrego/2009/01/26/la-provincia-de-canchis-el-templo-de-wiracocha-de-raqchi/>

Sadigh, K., Chang, C. Y., Egan, J. A., Makdisi, F., & Youngs, R. R. (1997). Attenuation relationships for shallow crustal earthquakes based on California strong motion data. *Seismological Research Letters*, 68(1), 180–189.

Tavera, H. (2014). Re-evaluación del peligro sísmico probabilístico para el Perú, IGP.

Tavera, H. (2019). GEONOTICIAS | PERÚ, UN PAÍS ALTAMENTE SÍSMICO. Lima, Perú.: IGP. Recuperado de <https://www.sgp.org.pe/alerta-peru-un-pais-altamente-sismico/>

Youngs, R. R., Chiou, S. J., Silva, W. J., & Humphrey, J. R. (1997). Strong ground motion attenuation relationships for subduction zone earthquakes. *Seismological Research Letters*, 68(1), 58–73. <https://doi.org/10.1785/gssrl.68.1.58>

Zhang, J., & Makris, N. (2001). Rocking Response of Free-Standing Blocks Under Cycloidal Pulses. *Journal of Engineering Mechanics*, 127(May), 473–483.