

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DEL PERÚ**

Escuela de Posgrado



**Diseño de un sistema de control no lineal aplicado a un
exoesqueleto de piernas para el movimiento de
levantarse/sentarse**

Tesis para obtener el grado académico de Maestro en Ingeniería
de Control y Automatización que presenta:

César David Gutierrez Amayo

Asesor:

Mg. Luis Miguel Enciso Salas

Lima, 2025

Informe de Similitud

Yo, Luis Miguel Enciso Salas, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor de la tesis titulado Diseño de un Sistema de Control No Lineal Aplicado a un Exoesqueleto de Piernas para el Movimiento de Levantarse/Sentarse, del autor César David Gutiérrez Amayo, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 14%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 08/09/2025.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha:

Lima, 8 de setiembre del 2025

Apellidos y nombres del asesor / de la asesora: Enciso Salas Luis Miguel	
DNI:44345242	Firma 
ORCID: 0000-0002-3929-6385	



DEDICATORIA

Este trabajo lo dedico a Dios, a mis padres y profesores, por su constante apoyo en mi formación académica, con lo cual ha sido posible realizar este proyecto.

Resumen

Las lesiones cerebrales afectan significativamente la salud y condiciones de vida de los individuos afectados. Estas lesiones pueden ser ocasionadas por diversos motivos, tales como; traumatismo craneal, relacionado a golpes fuertes en la cabeza; lesiones cerebrovasculares, debido a hemorragias internas; y lesiones tumorales. Partiendo de la posibilidad en la que ciertos individuos afectados suelen presentar secuelas, en donde en dicho escenario reduce la movilidad, el habla, entre otros; por lo que se formula el problema de investigación con la intención de desarrollar la simulación del movimiento autónomo y controlado para que una persona de tamaño y peso promedio pueda realizar el movimiento de levantarse desde una silla como acción inicial previo al desplazamiento.

El proyecto de investigación desarrollado se realizó considerando el análisis de la marcha humana normal para lograr el diseño teórico y simulado de un exoesqueleto de piernas con la intención de describir el movimiento de levantarse y sentarse desde una silla. La investigación comprende analizar la biomecánica del cuerpo humano para poder determinar las ecuaciones que gobiernan al movimiento de levantarse desde una silla regular. Así mismo, al lograr obtener las ecuaciones de dinámica y cinemática, se analizan según las técnicas de control no lineal para determinar la técnica de control no lineal óptima según la medición del índice de error.

El movimiento biomecánico de levantarse/sentarse desde una silla representa un sistema no lineal por diversos factores, tales como: cantidad de segmentos en movimiento; fuerzas no constantes, tanto de los músculos sobre el cuerpo y la fuerza de la gravedad. Estos elementos hacen que el sistema posea un número de ecuaciones que varía según los autores. En el proyecto de tesis elaborado, se

desarrolla el modelo matemático usando las ecuaciones de Euler-Lagrange, las cuales analizan el movimiento de sistemas dinámicos y su cambio a través del tiempo.

En el análisis elaborado, se encontró que entre los controladores PID No Lineal y Backstepping lograron controlar el sistema de forma eficiente, pudiendo llegar ambos al estado estacionario. Sin embargo, el controlador PID no lineal muestra una respuesta subamortiguada, además de una señal pico en el segundo 0.75 tanto para el control de la cadera, como para el control de la rodilla. Por otro lado, el controlador Backstepping no muestra sobreimpulsos y alcanza el estado estacionario a los 3 segundos en ambos casos.

Con respecto al análisis del error, se estudian las mediciones del RMS (Raíz media cuadrática) y MAE (Error absoluto medio), con lo que se obtuvo que para el control de la cadera el controlador PID no lineal obtuvo un MAE de 69.4974 para el control de cadera y 58.8436 para el control de la rodilla; mientras que el RMSE es de 86.1127 para el control de la cadera y 74.3122 para el control de la rodilla. Mientras que para el controlador Backstepping el MAE es de 69.4885 para el control de cadera y de 58.8315 para el control de la rodilla; mientras que el RMSE es de 86.1056 para el control de la cadera y 74.3025 para el control de la rodilla.

Este estudio permite reconocer que el controlador Backstepping es superior al PID no lineal para el control requerido, por lo que puede permitir a futuros investigadores a discernir entre la elección del controlador no lineal ideal para aplicaciones como la del control de sistemas no lineales.

Índice general

Resumen	iii
Índice general	v
Índice de figuras	viii
Índice de tablas	x
Introducción	11
Capítulo I. Planteamiento del estudio	14
1.1 Formulación del problema y justificación del estudio	14
1.2 Antecedentes relacionados con el tema	16
1.3 Objetivos	19
1.3.1 Objetivo General	19
1.3.2 Objetivos Específicos	20
1.4 Limitaciones del estudio	20
Capítulo II. Marco teórico de la anatomía y biomecánica del cuerpo humano	22
2.1 Introducción	22
2.2 Planos de referencia	22
2.2 Antropometría	23
2.3 Dimensiones del cuerpo humano	25
2.3.1 Modelo cinemático	26
2.3.1.1 Cinemática directa	27
2.3.1.2 Cinemática inversa	33
2.3.2 Modelo dinámico	35
2.3.3 Modelo proporcional de longitudes	38
2.3.4 Modelo proporcional de masas	39
Capítulo III. Modelado Matemático	41
	v

3.1	Modelo dinámico para la actividad de levantarse/sentarse	41
3.2	Modelo dinámico de Lagrange	46
3.3	Generación de trayectorias para el movimiento de levantarse/sentarse	47
Capítulo IV. Control no lineal y análisis comparativo		52
4.1	Introducción	52
4.2	Método de controlador PID no lineal	52
4.3	Diseño de los coeficientes del controlador PID no lineal	53
4.4	Método del controlador Backstepping	56
4.6	Diseño del controlador Backstepping para la acción de levantarse/sentarse y coeficientes	57
4.7	Análisis comparativo de los métodos de control no lineal propuestos.	60
4.7.1	Respuestas de las señales de control (Movimiento de levantarse)	60
4.7.2	Respuestas de las señales de error (Movimiento de levantarse)	64
4.7.3	Respuestas de las señales de control (Movimiento de sentarse)	68
4.7.4	Respuestas de las señales de error (Movimiento de sentarse)	71
4.8	Análisis del error medido	75
4.8.1	Error absoluto medio (MAE)	75
4.8.2	Error cuadrático medio (RMSE)	77
4.9	Programación de controladores PID no lineal y Backstepping	78
4.10	Conclusiones	81
Capítulo V. Propuesta de implementación		84
5.1	Introducción	84
5.2	Diagrama de bloques del sistema de control y descripción general del exoesqueleto	84
5.3	Componentes mecánicos (Componentes de la estructura mecánica)	87
5.4	Componentes electrónicos	88
5.5	Análisis presupuestal	93

5.6 Conclusiones	94
Capítulo VI. Conclusiones y Recomendaciones	95
6.1 Conclusiones	95
6.2 Recomendaciones	98
Bibliografía	100
Anexos	104



Índice de figuras

Figura 1 Estructura ósea de una pierna humana.	15
Figura 2 Planos del cuerpo humano.....	23
Figura 3 Posición antropométrica modificada de un adulto.....	24
Figura 4 Modelo proporcional del cuerpo según Drillis y Contini.....	25
Figura 5 Vectores y rotaciones para una pierna.....	26
Figura 6 Parámetros Denavit-Hartenberg para un par de eslabones.....	30
Figura 7 Ejes de referencia, parámetros Denavit-Hartenber.....	32
Figura 8 Esquema de los modelos cinemáticos/dinámicos.....	35
Figura 9 Modelos simplificados del cuerpo humano.	36
Figura 10 Modelo simplificado del cuerpo humano.	37
Figura 11 El punto de apoyo “P” es el ZMP.	38
Figura 12 Representación del centro de gravedad, longitudes de extremidades de una persona sentada en plano sagital.	41
Figura 13 Gráficos de señales de referencia.....	49
Figura 14 Secuencias del movimiento al levantarse desde una silla de una persona con sus respectivos ángulos por segmentos	50
Figura 15 Controlador PID lineal.....	53
Figura 16 Control PID no lineal adaptado	56
Figura 18 Respuestas de las señales de control para la articulación de la cadera ..	61
Figura 19 Respuestas de las señales de control para la articulación de la rodilla ...	61
Figura 20 Respuestas de las señales de control para la articulación de la cadera ..	62
Figura 21 Respuestas de las señales de control para la articulación de la rodilla ...	62

Figura 22 Señales de error en las posiciones angulares de la articulación de la cadera, además de la señal de velocidad angular.....	64
Figura 23 Señales de error en las posiciones angulares de la articulación de la rodilla, además de la señal de velocidad angular.....	65
Figura 24 Señales de error en las posiciones angulares de la articulación de la cadera, además de la señal de velocidad angular.....	65
Figura 25 Señales de error en las posiciones angulares de la articulación de la rodilla, además de la señal de velocidad angular.....	66
Figura 26 Respuestas de las señales de control para la articulación de la cadera ..	68
Figura 27 Respuestas de las señales de control para la articulación de la rodilla ...	69
Figura 28 Respuestas de las señales de control para la articulación de la cadera ..	69
Figura 29 Respuestas de las señales de control para la articulación de la rodilla ...	70
Figura 30 Señales de error en las posiciones angulares de la articulación de la cadera, además de la señal de velocidad angular.....	72
Figura 31 Señales de error en las posiciones angulares de la articulación de la rodilla, además de la señal de velocidad angular.....	72
Figura 32 Señales de error en las posiciones angulares de la articulación de la cadera, además de la señal de velocidad angular.....	73
Figura 33 Señales de error en las posiciones angulares de la articulación de la rodilla, además de la señal de velocidad angular.....	73
Figura 34 Diagrama de bloques de la programación del controlador PID no lineal..	79
Figura 35 Diagrama de bloques de la programación del controlador Backstepping	80
Figura 36 Diagrama de bloques del sistema de control	85
Figura 37 Prototipo propuesto para el exoesqueleto de piernas	86

Índice de tablas

Tabla 1. Longitudes promedio del cuerpo humano de un ciudadano peruano promedio.....	39
Tabla 2. Masa de cada segmento en función de la masa total del cuerpo humano .	40
Tabla 3. Parámetros de simulación - Control de articulación.	55
Tabla 4. Parámetros de simulación - Control de articulación.	60
Tabla 5. Análisis de los tiempos de respuestas	63
Tabla 6. Análisis de los tiempos de respuestas de la señal de error.....	67
Tabla 7. Análisis de los tiempos de respuestas	71
Tabla 8. Análisis de los tiempos de respuestas de la señal de error.....	74
Tabla 9 Cálculo del Error Absoluto Medio (MAE).....	76
Tabla 10 Cálculo del Error Medio Cuadrático (RMSE)	77
Tabla 11 Aleaciones de aluminio de la serie 6000 con otras similares	87
Tabla 12 Características generales de los microcontroladores STM32 y SMP430..	88
Tabla 13 Clasificación de los tipos de encoders	89
Tabla 14 Drivers recomendados y sus características	91
Tabla 15 Fuentes de energía y características	92
Tabla 16 Análisis presupuestal estimado	93

Introducción

El desarrollo tecnológico a lo largo de la historia de la humanidad ha permitido al ser humano poder realizar tareas cada vez con mayor facilidad, por otro lado, también permite a las personas tener un mejor estilo de vida proporcionando instrumentos tecnológicos a quienes presentan problemas de salud o por un estado de salud delicado. Sin embargo, existen condiciones médicas en donde a los pacientes presentan dificultad en la movilidad de las piernas o tienen un movimiento limitado, esto debido a golpes muy fuertes recibidos en el cráneo, problemas medulares o incluso producto de un derrame cerebral severo.

El presente proyecto pretende servir de sustento y apoyo a un estudio posterior que se desee realizar sobre el exoesqueleto para piernas usado para la asistencia de marcha, el cual, debido a su complejidad (debido a la no linealidad de las ecuaciones, las fuerzas variables en el trayecto, entre otros motivos), requerirá de técnicas de control no lineal. Debido a esto, el objetivo de la tesis es de diseñar técnicas de control no lineal aplicados al modelo de exoesqueleto de piernas, el cual es un sistema que se describe como un conjunto de eslabones, para luego determinar la técnica de control no lineal que se adapte mejor al modelo matemático desarrollado, esto por medio de la medición del índice de error, además de observar los tiempos de respuesta de cada controlador.

La investigación inicia con el análisis biomecánico del cuerpo humano, analizando las proporciones de las partes según diversos autores. Seguidamente, se enfoca en el plano sagital para una persona sentada; luego, durante el desplazamiento desde la posición de sentado en la silla, se miden los ángulos de giro. Finalmente se realiza la descripción del movimiento ideal realizado por una persona con movimiento normal tomando en cuenta los ángulos de giro de la cadera, rodilla y

tobillo. Con esta descripción del movimiento, se realiza la gráfica en MatLab la cual será de referencia para el trayecto que deben seguir los controladores.

El modelado cinemático que se estudia inicialmente es el modelo de Calle L. y Vidal J. (2017), en donde se representa la imagen de una persona de pie en marcha; en esta posición se esbozan tres eslabones sobre la imagen. Sin embargo, y como se mencionó anteriormente, en la presente investigación de tesis, la persona se encontrará en lo que se conoce como “posición antropométrica modificada” en la que está sentado sobre una silla con un ángulo de 90° aproximadamente en las rodillas; de este modo, los eslabones se reducen a únicamente 2, despreciando el eslabón del tobillo, pues el movimiento de este último es menor en comparación al movimiento de desplazamiento en marcha. El movimiento que considera solo 2 eslabones (pierna y canilla), despreciando el movimiento del tobillo, está desarrollada según el modelo de Aguilar (2016), con esto se establecen las ecuaciones necesarias para lograr el movimiento deseado desde la posición inicial de sentado a levantado desde una silla para una persona adulta, considerando para ello valores de torques, medidas angulares, velocidades, energías cinéticas y energías potenciales.

El modelo matemático se desarrolla usando las ecuaciones de Euler-Lagrange, debido a que estas ecuaciones consideran la energía cinética y potencial de un sistema formado por múltiples cuerpos rígidos conectados, lo cual nos facilita obtener la descripción de la trayectoria o movimiento. Una vez desarrollado el modelo matemático, se procede a diseñar las técnicas de control PID no lineal (debido a su uso bastante conocido y sencillez de uso) y el controlador Backstepping (es buena opción en el control no lineal debido a los resultados obtenidos en distintos diseños para controlar sistemas no lineales) para luego aplicarlos al modelo matemático. Los resultados de cada controlador se comparan con la trayectoria descrita inicialmente,

para luego analizar mediante el índice de error el controlador que ofrezca menor error y respuesta.

Finalmente, se propone un prototipo de exoesqueleto de piernas que tiene como objetivo la implementación física de los controladores desarrollados, los cuales harán la acción de levantarse desde una silla para una persona de tamaño y peso promedio. Esta propuesta del prototipo está basado en el estudio desarrollado pero puede ser modificado a criterio de otros investigadores y según las nuevas tecnologías de actuadores que puedan ir apareciendo.



Capítulo I. Planteamiento del estudio

1.1 Formulación del problema y justificación del estudio

En el Perú, según la publicación de la Revista Médica Heredia, de la Universidad Cayetano Heredia (setiembre, 2023), se observa que de una población de 2 780 individuos que han sufrido un accidente cerebrovascular (ACV) o derrame cerebral, y que además presentan secuelas, el 81,7% del total presentan hemiplejía izquierda o hemiplejía derecha (inmovilidad de los miembros del lado izquierdo o derecho según corresponda), mientras que el resto porcentual representan secuelas como: cuadriplejía (inmovilidad de las cuatro extremidades del cuerpo), doble hemiplejía (inmovilidad de las piernas), entre otros tipos de secuelas. Estas secuelas son problemas generalmente relacionados a la motricidad del cuerpo humano, sin embargo, también existen situaciones de problemas de tipo cognitivo y del habla.

Según la investigación mencionada, se observa que la atención de pacientes con secuelas producto del derrame cerebral representa un elevado índice porcentual, por lo que se recomienda poder brindar soporte en la rehabilitación de los pacientes con ayuda de la tecnología. Es por esto, que el presente proyecto de investigación busca desarrollar las técnicas de control no lineal para el movimiento de levantarse desde una silla como movimiento inicial para los pacientes en proceso de recuperación.

El presente proyecto busca realizar un estudio sobre el exoesqueleto para piernas para la asistencia de movimiento de levantarse desde una silla. Al analizar este estudio, se observa que el cuerpo humano puede ser descrito como un conjunto de eslabones unidos entre sí; según el número de uniones, se define el número de grados de libertad (GDL) de este. Según Tibaduiza, Aya y Anaya (2019); en su proyecto desarrollan un exoesqueleto de piernas horizontal para pacientes en

acostados en camilla con el objetivo de ayudarles en la rehabilitación. En la publicación muestran el esqueleto de piernas como se muestra en la figura 1, en la cual se aprecia el esboce similar a la unión de dos eslabones.

Figura 1 Estructura ósea de una pierna humana.



Fuente: Tibaduiza (2019)

Para el sistema de coordenadas mostrado, y teniendo en cuenta que el sistema es de dos eslabones, y, por lo tanto, dos grados de libertad (GDL). En el proyecto de tesis que vengo realizando, se observa que el movimiento y trayectoria que deben seguir la rodilla y cadera deben estar en coordenadas X y Y; aparte, se debe considerar las masas y fuerzas variables de los músculos que afectan el movimiento, además de los torques. Por este motivo se trata de un sistema complejo y no lineal el cual requerirá aplicar técnicas de control no lineal.

Para el desarrollo del proyecto, se considera aplicar las técnicas de control PID no lineal (debido a su uso frecuente y sencillas) y el controlador Backstepping (debido a su versatilidad y por su sabida respuesta positiva para controlar sistemas no lineales). De este modo, podremos establecer cuál controlador podrá manejar de mejor manera el proceso. Esto, a su vez, permitirá identificar el consumo de recursos que se necesitarían para su implementación para investigadores futuros. Por tal

motivo, se justifica desarrollar técnicas de control no lineal para analizar la teoría de control que involucra el movimiento de levantarse y sentarse desde una silla.

1.2 Antecedentes relacionados con el tema

Durante la investigación, se han encontrado a los siguientes autores con estudios similares:

Contreras, Tristancho y Vargas (2012), analizan distintos modelamientos de la marcha humana con el objetivo de desarrollar prótesis (aparato que sustituye una parte del cuerpo) y órtesis (aparato que recubre el miembro y le brinda apoyo externo). Entre los modelamientos, los autores estudian: dinámica lagrangiana, gráficos de unión y simuladores dinámicos computacionales, estos procedimientos se plantearon como alternativas al modelamiento clásico que usa ecuaciones diferenciales.

La dinámica de Lagrange consiste en desarrollar la función de Lagrange como la diferencia entre la Energía Cinética y la Energía Potencial en función de las coordenadas de posición y así obtener la fuerza generalizada como resultado de la operación. Este método describe una alternativa al uso de las ecuaciones newtonianas para la obtención del modelo dinámico.

Los gráficos de unión se describen como una herramienta gráfica para poder analizar el comportamiento dinámico de sistemas físicos, por lo que se puede aplicar sobre mecánica, eléctrico e hidráulico, entre otros sistemas. Los autores plantean diseñar el sistema traslacional y rotacional para describir la marcha humana mediante un modelo de multipuertos en gráficos de unión.

Para el diseño dinámico computacional, usaron el software Solid Edge para modelar un cuerpo humano tridimensional como la unión de segmentos sólidos.

Luego de ingresar datos como las densidades de los segmentos, masas y desplazamientos angulares, se obtuvo el modelo deseado.

Entre los resultados, los autores resaltan la funcionalidad del proyecto para poder desarrollarse en distintos ámbitos, tales como: medicina, rehabilitación y robótica, así como también la funcionalidad de cada método descrito. En el proyecto que yo personalmente estoy desarrollando, se opta por utilizar la dinámica de Lagrange con mayor detalle, ya que este modelamiento se asemeja al método de ecuaciones newtonianas por medio de las inercias, torques y velocidades que deben manejar las piernas en el movimiento de levantarse desde una silla, y que, además, los autores no consideran con precisión. Considero que es necesario desarrollar dicho método porque permitirá un análisis más detallado para el modelamiento.

Arcos, W. (2013), en su proyecto de tesis, analiza la discapacidad motora de pacientes con dificultad para poder caminar de forma regular y destaca dos tipos de movimientos: apoyo simple y apoyo doble, refiriéndose a la cantidad de apoyo por partes de miembros inferiores de los pacientes. Continúa su estudio desarrollando un modelo virtual con la ayuda de la herramienta de simulación de *Simulink* del software MatLab, para luego introducir parámetros de masas, inercias y longitudes al cuerpo diseñado según la bibliografía consultada.

El controlador multivariable que aplica el autor se basa en introducir valores de torques para obtener luego respuestas de ángulos de las articulaciones, esto con el objetivo de describir la trayectoria del exoesqueleto. Los controladores multivariabes diseñados son: PI Vectorial (Proporcional Integrador), LQR (por sus siglas en inglés Linear Quadratic Regulator) y GPI (Proporcional Integral Generalizado). Sin embargo, comenta que previo a la aplicación de estos controladores mencionados, debe diseñar

un controlador de realimentación de estado para poder asegurar la estabilidad del modelo en cada fase de marcha.

Según el estudio, se observa la complejidad de desarrollar controladores para realizar la operación de marcha completa de una persona considerando dos movimientos distintivos, apoyo simple y apoyo doble. Es por este motivo, que el proyecto que estoy presentando se basará únicamente en el movimiento de levantarse desde una silla como paso previo a la marcha, aplicando técnicas de control no lineal y comparándolas para escoger la que pueda desempeñar mejor la labor de control.

Cárdenas, A. (2017), en su investigación plantea como objetivo general implementar una simulación biomecánica a escala para el análisis de marcha mediante un modelo de control neuromuscular empleando el software libre OpenSim.

En el proyecto, analizó a 10 individuos para capturar los movimientos de marcha de cada uno y analizarlos mediante vídeo. Además, aplicó el método de control por optimización dinámica, con ayuda del software OpenSim y realizando una comparativa cuantitativa con MatLab. Sin embargo, dicho software libre cuenta con un modelo pre-diseñado del esqueleto humano, llamado "modelo 2392".

Entre sus resultados, observó que los resultados obtenidos mediante la simulación con el software libre OpenSim tiene un comportamiento muy similar a los calculados experimentalmente. Además, expresa que la flexión de la cadera, rodilla y tobillo presentan poca variabilidad de los datos, dentro del plano sagital. Finalmente, el autor recomienda el uso del software OpenSim como una herramienta eficaz para el análisis de la biomecánica del cuerpo humano, pudiendo adaptarse el modelo 2392 a la realidad.

Sin embargo, en la investigación que presento, también se desarrollará en MatLab pero en un entorno de simulación por código. Esto a su vez permite analizar el modelo matemático introducido con los parámetros de control no lineal para poder estudiar a detalle el modelo matemático introducido.

Tibaduiza, D. et all (2019), en el artículo de investigación científica de la Universidad de la Costa publicado en Colombia, desarrollan un exoesqueleto para rehabilitación del miembro inferior con dos grados de libertad el cual pretende ayudar a pacientes que han sufrido lesiones a causa del ACV (Accidente Cerebro Vascular). Los autores aplican dinámica lagrangiana, aplicando la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial, además del modelo de Drillis & Contini para las longitudes de los segmentos del cuerpo humano. Si bien el modelo llegó a su etapa final mostrando resultados de control autónomo para un sistema MIMO, aplicando PID con realimentación de velocidad, este exoesqueleto no fue puesto a prueba en humanos. Finalmente, lograron llegar al objetivo de automatizar el proceso de monitorización y desarrollar etapas de rehabilitación autónomas aplicando el control sobre el exoesqueleto.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

Diseñar técnicas de control no lineales aplicadas al modelo matemático del exoesqueleto para el movimiento de levantarse/sentarse desde una silla, para ello se modelará matemáticamente el exoesqueleto, y luego de aplicar las técnicas de control se analizará la técnica de control no lineal que mejor respuesta otorgue.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Desarrollar el modelo matemático del exoesqueleto para las piernas para el movimiento de levantarse/sentarse desde una silla para una persona.
- Diseñar un modelo de control no lineal PID, el cual se destaca por su versatilidad en el control de sistemas lineales y no lineales, que permita controlar la trayectoria que seguirá el exoesqueleto de piernas en el movimiento de levantarse/sentarse.
- Diseñar un modelo de control no lineal Backstepping, el cual se destaca por su funcionalidad en el control de sistemas no lineales, que permita controlar la trayectoria que seguirá el exoesqueleto de piernas en el movimiento de levantarse/sentarse.
- Comparar el comportamiento y respuestas del modelo de exoesqueleto de piernas al aplicarle las distintas técnicas de control no lineal, para escoger la técnica de control no lineal más adecuada.

1.4 Limitaciones del estudio

El presente proyecto presenta las siguientes limitaciones de estudio:

- a) Debido a su complejidad por la naturaleza no lineal del sistema y además considerando la variación de masas a lo largo del trayecto, el proyecto se realiza bajo un entorno de simulación.
- b) Se debe desarrollar un exoesqueleto de piernas que simule el movimiento de ponerse de pie desde la posición de sentado en una silla sentarse y pararse de una silla en lugar de modelar completamente el movimiento de las piernas por la cantidad de ecuaciones que se formarían en el sistema.

- c) Los resultados obtenidos están basados en un análisis teórico de la aplicación de las técnicas de control no lineal sobre el modelo matemático del exoesqueleto.
- d) Debido a la variabilidad que existe en los distintos cuerpos humanos, ya sea por género o estatura, se considera desarrollar la simulación de un exoesqueleto
- e) El proyecto requiere de una computadora con el software MatLab para el desarrollo de la simulación y los cálculos matemáticos.



Capítulo II. Marco teórico de la anatomía y biomecánica del cuerpo humano

2.1 Introducción

En el presente capítulo se analizan las proporciones del cuerpo humano en búsqueda del modelamiento matemático que permita simular el movimiento de las piernas para poder levantarse desde la posición de sentado de una silla.

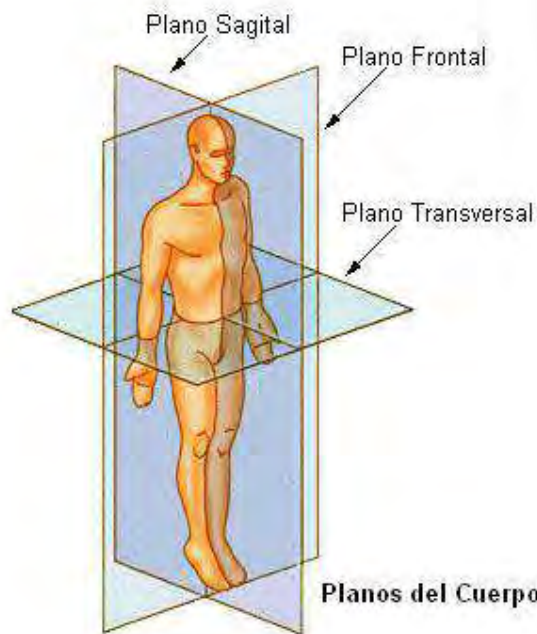
Para esto, se estudian las posiciones que adopta el cuerpo humano según diversos autores, luego se estudian las longitudes de las partes del cuerpo humano con un formato proporcional en torno a la altura del individuo (siendo este modelo capaz de adaptarse a cualquier persona independientemente del sexo y peso).

Luego, se estudia la geometría del cuerpo humano y los métodos de modelamiento matemático que otros autores sugieren para simular el movimiento del cuerpo humano en general.

2.2 Planos de referencia

Iniciamos el estudio analizando los planos de referencia, los cuales permiten colocar el cuerpo humano sobre un plano en particular para estudiar los distintos movimientos realizados por el mismo. Los planos en mención son tres: sagital, frontal y transversal, los cuales se observan en la figura 2, y permitirán una mejor comprensión de la visión que se realiza sobre el cuerpo para el estudio posterior del desplazamiento de ponerse de pie desde la posición de sentado.

Figura 2 Planos del cuerpo humano.



Fuente: Gómez Martínez (2012).

Entre estos planos de referencia, el desplazamiento a estudiar se realizará sobre el plano Sagital, considerando que dicho desplazamiento que realiza el cuerpo humano se desarrolla en forma paralela con dirección frontal.

2.2 Antropometría

La OMS por medio del Informe de un Comité de Expertos de la OMS llamado “El estado físico: uso e interpretación de la antropometría” (2005), afirma que la antropometría evalúa el tamaño, proporciones y la composición del cuerpo humano. Esto a su vez, depende del género, edad, raza como factores que alteran las dimensiones del cuerpo humano. El objetivo de este estudio es tener una referencia de las medidas naturales dentro de un desarrollo sano desde el nacimiento hasta la adultez y vejez.

Alonso B. (2017), en su conferencia sobre Antropometría comenta que existen dos ramas de la misma:

- **Antropometría Estática:** mediciones del cuerpo humano en una posición estática.
- **Antropometría Dinámica:** mediciones del cuerpo humano en movimiento, trayectorias y alcances.

Por otro lado, también hace mención a la posición llamada “antropométrica modificada” en la que la persona se encuentra sentado en una silla, formando 90° entre el tronco y las piernas, muslos en posición horizontal y pies apoyados en forma plana sobre el suelo. En la figura 3 se muestra la posición mencionada en el plano sagital.

Figura 3 Posición antropométrica modificada de un adulto.



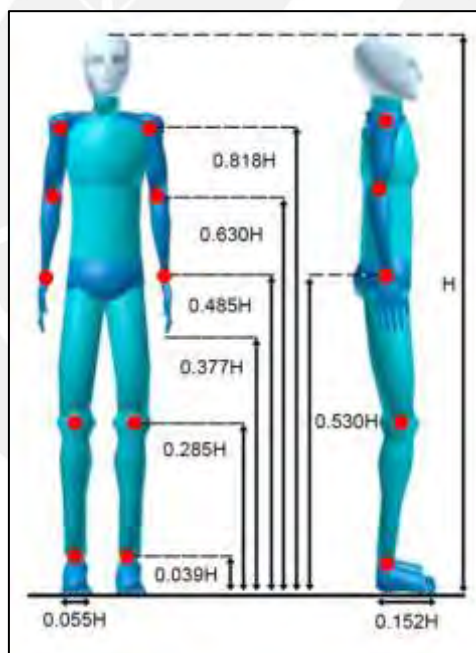
Fuente: Alonso B. (2017)

2.3 Dimensiones del cuerpo humano

El modelo de exoesqueleto propuesto está basado en el modelo anatómico proporcional del cuerpo humano de Drillis & Contini, según Velandia (2016), especificado en su tesis para optar el título de ingeniero electrónico, el cual se muestra en la figura 4.

En este modelo se observa que para una persona de altura "H", las longitudes de las extremidades y demás partes del cuerpo poseen un valor proporcional a dicha altura, por tanto, este modelamiento permitirá diseñar un modelo teórico capaz de adaptarse a adultos en general.

Figura 4 Modelo proporcional del cuerpo según Drillis y Contini.



Fuente: Velandia. (2016)

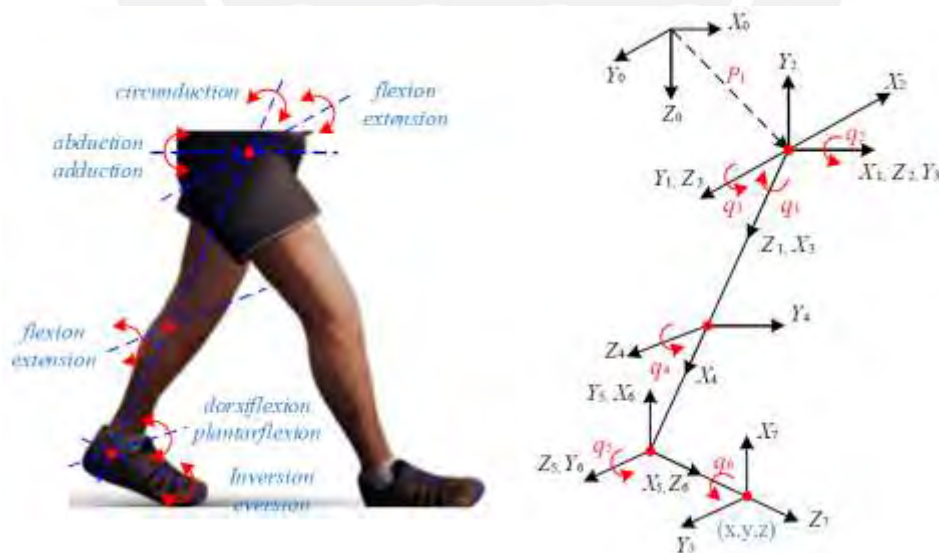
El proyecto de investigación que se plantea desarrollar está orientado a crear un modelo teórico de exoesqueleto de piernas que ayude a futuros investigadores a implementar el modelo físico según sean las necesidades según las alturas relativas del cuerpo humano. Este modelo deberá ser de fácil adaptación a las medidas corporales de los individuos, por lo que se sugiere utilizar el modelo de Drillis y Contini.

2.3.1 Modelo cinemático

Pellicea, F. (2016), quien realiza un estudio sobre la cinemática en su proyecto de investigación, comenta sobre la cinemática que es la rama de la física que se encarga de estudiar las leyes del movimiento considerando la velocidad y aceleración, sin considerar las fuerzas que lo originan, considerando además cómo varía el desplazamiento a través del tiempo. El estudio cinemático sentará las bases de la trayectoria que debe seguir el modelo matemático.

La figura 5 muestra las coordenadas espaciales X, Y y Z, además de las rotaciones “q” y flexiones que realiza el cuerpo humano durante el desplazamiento de marcha normal reflejados sobre la pierna izquierda. Este esquema permite identificar los parámetros necesarios para desarrollar el modelo matemático del movimiento de las piernas considerando, además, su semejanza sobre un conjunto de eslabones unidos.

Figura 5 Vectores y rotaciones para una pierna



Fuente: Calle, L; Vidal, J. (2017)

Para lograr desarrollar la cinemática del modelo, existen dos métodos que veremos a continuación:

2.3.1.1 Cinemática directa

Se considera cinemática directa cuando se tiene información como ángulos y más parámetros del sistema para poder encontrar posiciones y orientaciones de los elementos que componen el sistema.

Calle, L y Vidal, J. (2017), analizan la cinemática directa por medio de los siguientes métodos:

A. Método de Matrices de transformación homogénea:

Este método utiliza matrices cuadradas con las cuales se pretende calcular las coordenadas de un determinado elemento del robot.

Se inicia con la información de las coordenadas articulares, para luego encontrar la localización espacial de los eslabones del robot. Esta información, para un robot de 6 grados de libertad, tendría las siguientes relaciones representadas en la ecuación 2.1:

$$\begin{aligned}x &= f_x(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) \\y &= f_y(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) \\z &= f_z(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) \\\alpha &= f_\alpha(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) \\\beta &= f_\beta(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) \\\gamma &= f_\gamma(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)\end{aligned} \tag{2.1}$$

De estas relaciones, se tiene que:

- a) x, y, z, son coordenadas cartesianas del extremo final de la cadena cinemática.

- b) α, β, γ son las orientaciones del extremo final de la cadena cinemática.
- c) q_i es el ángulo de articulación, donde $i = 1, 2 \dots 6$.

Considerar, además, que un robot de “n” Grados de Libertad, está formado por la unión de “n” eslabones, unidos por “n-1” articulaciones. Cada eslabón-articulación forma el llamado “grado de libertad” del robot.

Luego, el método de Matrices de Transformación Homogénea indica la posición y orientación relativa entre cada par consecutivo de eslabón-articulación representado por la ecuación 2.2, en donde “i” representa el número del eslabón.

$${}^{i-1}A_i \quad 2.2$$

Por lo tanto, para poder representar al sistema en desarrollo, se expresará mediante la matriz T según se muestra en la ecuación 2.3, la cual representa la relación entre eslabones para un robot de 6 grados de libertad, conocida también como Matriz de Homogénea de Transformación.

$$T = {}^0A_1 A_2^1 A_3^2 A_4^3 A_5^4 A_6^5 \quad 2.3$$

Estas matrices, como se observa, permitirán analizar la matriz siguiente con la matriz anterior. Las transformaciones serán las siguientes:

- 1) Rotación alrededor del eje z_{i-1} un ángulo de q_i
- 2) Traslación a lo largo de z_{i-1} una distancia d_i ; vector $d_i(0, 0, d_i)$.

- 3) Traslación a lo largo de x_i una distancia α_i ; vector $\alpha_i(0,0,\alpha_i)$.
- 4) Rotación alrededor del eje x_i un ángulo α_i .

Ya que se trata de matrices, según los autores, estas deberán ser operadas en el siguiente orden (ecuación 2.4):

$${}^{i-1}A_i = T(z, \vartheta_i)T(0,0,d_i)T(a_i,0,0)T(x, \alpha_i) \quad 2.4$$

Operando las matrices indicadas, se obtendrá la expresión general de Danevit-Hartenberg (ecuación 2.5):

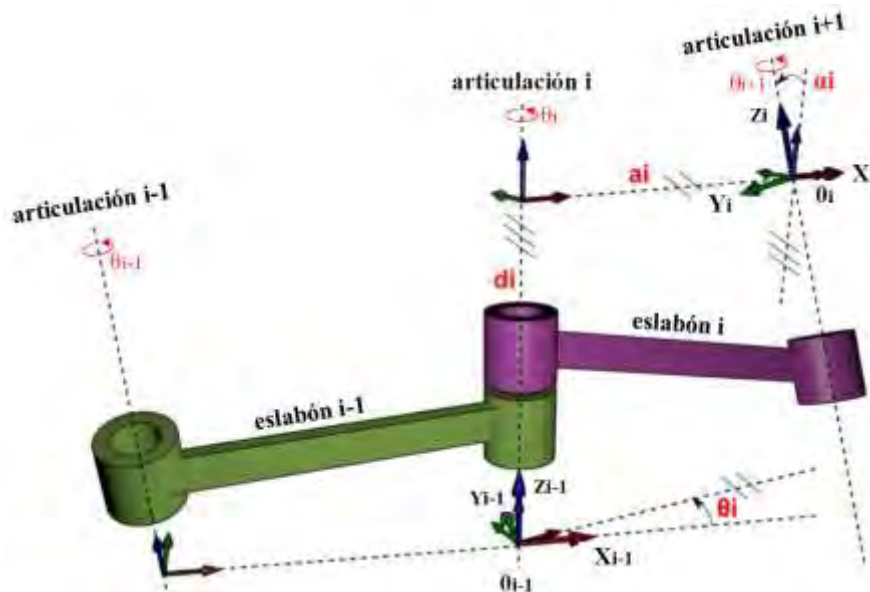
$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_i) & -\cos(\varphi_i)\sin(\vartheta_i) & \cos(\varphi_i)\sin(\vartheta_i) & a_i\cos(\vartheta_i) \\ \sin(\vartheta_i) & -\cos(\varphi_i)\cos(\vartheta_i) & -\sin(\varphi_i)\cos(\vartheta_i) & a_i\sin(\vartheta_i) \\ 0 & \sin(\varphi_i) & \cos(\varphi_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 2.5$$

Donde los parámetros ϑ_i , φ_i , a_i y d_i se conocen como parámetros de Danevit-Hartenberg del eslabón "i". Por lo tanto, al definir y ubicar estos parámetros, se podrá relacionar los eslabones del exoesqueleto completo al obtener las matrices A mencionadas en la ecuación 2.3.

B. Método del Modelo de Denavit-Hartenberg:

Este modelo propone encontrar la relación entre los eslabones y sus elementos geométricos considerando los parámetros que se observan según la figura 6. Observar que la relación entre eslabones cumple de par en par, por lo que este método hace posible analizar una cadena de eslabones de "n" grados de libertad.

Figura 6 Parámetros Denavit-Hartenberg para un par de eslabones.



Fuente: Calle, L y Vidal, J. (2017)

Descripción de parámetros de Denavit-Hartenberg:

- 1) Numerar eslabones, considerando de 0 como valor inicial a “n” como valor final.
- 2) Numerar cada articulación, considerando desde 1 a “n”.
- 3) Ubicar los ejes de cada articulación, si es rotacional, el eje será el propio eje de giro. Si es prismática, será el eje a lo largo del cual produce el desplazamiento.
- 4) Para “i” de “0” a “n-1”, situar el eje z_i sobre el eje de la articulación “i+1”.
- 5) Situar el origen del sistema de la base “ S_0 ” en cualquier punto del eje Z_0 . Los ejes x_0 e y_0 se situarán de modo que formen giren en sentido horario con z_0 .
- 6) Para “i” de “1” a “n-1”, situar el sistema “ S_i ” en la intersección del eje z_i con la línea normal común a z_{i+1} y z_i . Si ambos ejes

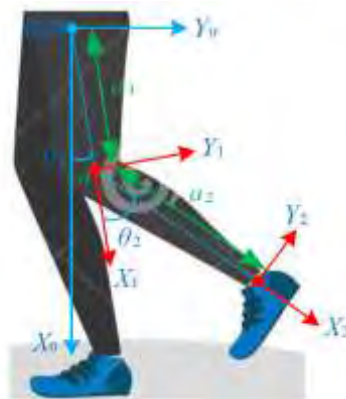
se cortan se situará a “ S_i ” en el punto de corte, si fueran paralelos, se situará en la articulación $i+1$.

- 7) Ubicar a x_i en la línea normal común a z_{i-1} y z_i .
- 8) Ubicar a y_i de modo que forme con giro horario con x_i y z_i .
- 9) Ubicar el sistema “ S_n ” en el extremo del robot de modo que z_0 coincida con la dirección de z_{n-1} y x_0 sea normal a z_{n-1} y z_n .
- 10) Calcular ϑ_i como el ángulo que hay que girar en torno a z_{i-1} para que x_{i-1} y x_i queden paralelos.
- 11) Calcular d_i como la distancia, medida a lo largo de z_{i-1} , que habría que desplazar “ S_{i-1} ” para que x_i y x_{i-1} queden alineados.
- 12) Calcular a_i como la distancia medida a lo largo de x_i que habría que desplazar el nuevo “ S_{i-1} ” para que su origen coincida con “ S_i ”.
- 13) Calcular α_i como el ángulo que gira en torno a x_i , para que el nuevo “ S_{i-1} ” coincida con “ S_i ”.
- 14) Calcular las matrices de transformación homogénea ${}^{i-1}A_i$.
- 15) Calcular la matriz de transformación que relaciona el sistema base con el extremo del robot “ T ”.
- 16) La matriz “ T ” define la orientación y posición del extremo referido a la base en función de las “ n ” coordenadas articuladas.

- θ_i es el ángulo formado por los ejes x_{i-1} y x_i medido en un plano perpendicular al eje z_i , el cual es medido usando la regla de la mano derecha.
- d_i es la distancia a lo largo del eje z_{i-1} desde el origen del sistema de coordenadas i -ésimo hasta la intersección del eje z_{i-1} con el eje x_i .
- a_i es la distancia a lo largo del eje x_i que va desde la intersección del eje z_{i-1} con el eje x_i hasta el origen del sistema i -ésimo en el caso de las articulaciones giratorias.
- α_i es el ángulo de separación del eje z_{i-1} y el eje z_i medido en un plano perpendicular a x_i , utilizando la regla de la mano derecha.

Este método permite trabajar sobre la geometría que describen los cuerpos en general, considerando sus articulaciones y el eslabón que los une midiendo sus longitudes. La figura 7 muestra los parámetros de Denavit-Hartenberg para la marcha humana.

Figura 7 Ejes de referencia, parámetros Denavit-Hartenber.



Fuente: Calle, L y Vidal, J. (2017)

2.3.1.2 Cinemática inversa

En este caso, la posición y orientación finales son datos conocidos y se desea encontrar los ángulos de articulación de tal forma que se ubique al sistema en la posición deseada.

Para la solución del problema de cinemática inversa, el autor Ruíz, O. (2014), sugiere utilizar un método iterativo debido a que la cantidad de ecuaciones es menor al número de variables, además de ser un problema no lineal. Por tanto, el método de Newton-Rhapson se describe en la ecuación 2.6:

$$f_i = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad 2.6$$

Con: $i = 1, 2, \dots, n$, Donde f_i es una función no lineal de la estimación inicial.

La estimación inicial de la solución del sistema de ecuaciones descrito se escribe según la ecuación 2.7:

$$x_j = \hat{x}_j + \Delta x_j \quad 2.7$$

Donde x_j es la estimación inicial y Δx_j es una corrección no conocida.

Analizando la ecuación 2.7 de forma expandida y utilizando la serie de Taylor truncada, se obtendría la ecuación 2.8:

$$\sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Delta x_j = -f_i(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \quad 2.8$$

Donde las derivadas parciales se evalúan con las condiciones iniciales de la ecuación 2.8. En forma de matriz, tendríamos la ecuación 2.9:

$$J\Delta = -f \quad 2.9$$

Donde J es la matriz Jacobiana, expresada en la ecuación 2.10, las derivadas parciales en la ecuación 2.11 y la matriz “f” en la ecuación 2.12.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \end{bmatrix} \quad 2.10$$

$$\Delta x = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} \quad 2.11$$

$$f = \begin{bmatrix} f_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \\ f_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \\ \vdots \\ f_n(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \end{bmatrix} \quad 2.12$$

Las derivadas parciales se pueden expresar como una aproximación siguiendo la ecuación 2.13:

$$\frac{\partial y}{\partial x} \approx \frac{f_i(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_j + \sigma x_j, \dots, \hat{x}_n) - f_i(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_n)}{\sigma x_j} \quad 2.13$$

Utilizando las ecuaciones mencionadas, se puede obtener la matriz Jacobiana según se muestra en la ecuación 2.14, en donde ahora la representación es lineal, el cual permite hallar los ángulos necesarios para la ubicación deseada.

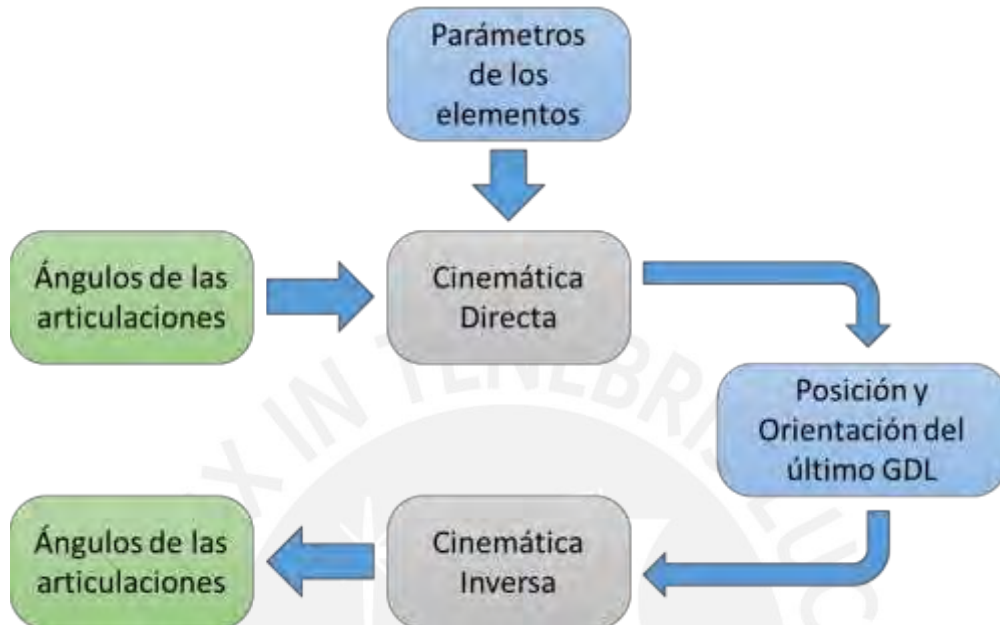
$$J\theta = f \quad 2.14$$

Luego, se aplica el método iterativo haciendo uso de la matriz pseudoinversa de Moore-Penrose, mostrado en la ecuación 2.15:

$$\theta = (J^T J)^{-1} J^T (f) = J^\dagger (f) \quad 2.15$$

La figura 8 muestra un esquema en donde se aprecian los dos métodos cinemáticos explicados previamente.

Figura 8 Esquema de los modelos cinemáticos/dinámicos.



Fuente: elaboración propia.

2.3.2 Modelo dinámico

Pellicena, F. (2016), comenta sobre la dinámica como la rama de la física que se encarga de encontrar las relaciones matemáticas entre las coordenadas “q” de un cuerpo y las fuerzas “Q” que originan el movimiento. De acuerdo con el autor, se consideran dos objetivos:

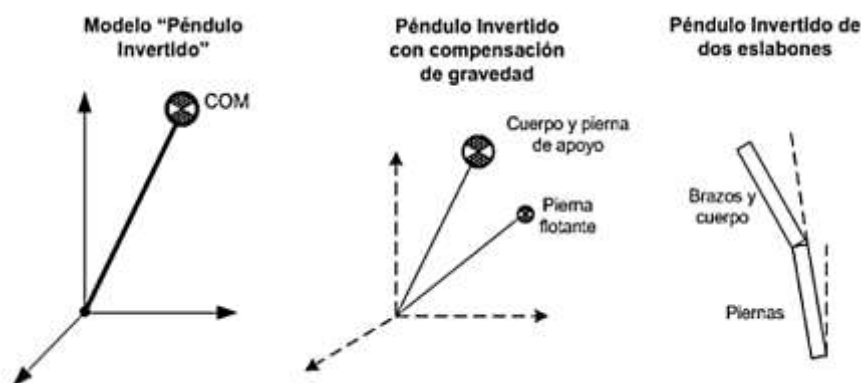
- Obtener ecuaciones de forma cerrada que describa las coordenadas generalizadas en función del tiempo de la forma $q(t)$.
- Conocer las fuerzas generalizadas $Q(t)$ que se deben aplicar el movimiento en $q(t)$, sin necesidad de encontrar una relación funcional entre ambas.

El método de energía de Lagrange-Euler permite encontrar de manera más eficaz el primer objetivo, sin embargo, el método recursivo de Newton-Euler es mejor para alcanzar el segundo objetivo.

En el presente proyecto de investigación, se opta por trabajar un modelo dinámico inverso para obtener los torques necesarios para las articulaciones, y de este modo, trabajar con las ecuaciones de Lagrange-Euler.

Por otra parte, autores como Pellicena (2016) y Ruíz (2014), comentan sobre la desventaja del método de Newton-Euler, que solo funciona para velocidades bajas, sin embargo, en el proyecto que se está elaborando no se considera que el exoesqueleto trabaje a una velocidad muy elevada, además que este método no considera los elementos de Coriolis y Centrífugo, son despreciables. Además, se observa la complejidad del método de Lagrange-Euler para poder analizar y modelar al cuerpo en función. Por tales motivos, los autores comentan sobre modelos simplificados para el modelamiento del cuerpo humano. La figura 8 muestra modelos propuestos por Pellicena (2016) y la figura 9 los modelos de Ruíz (2014).

Figura 9 Modelos simplificados del cuerpo humano.



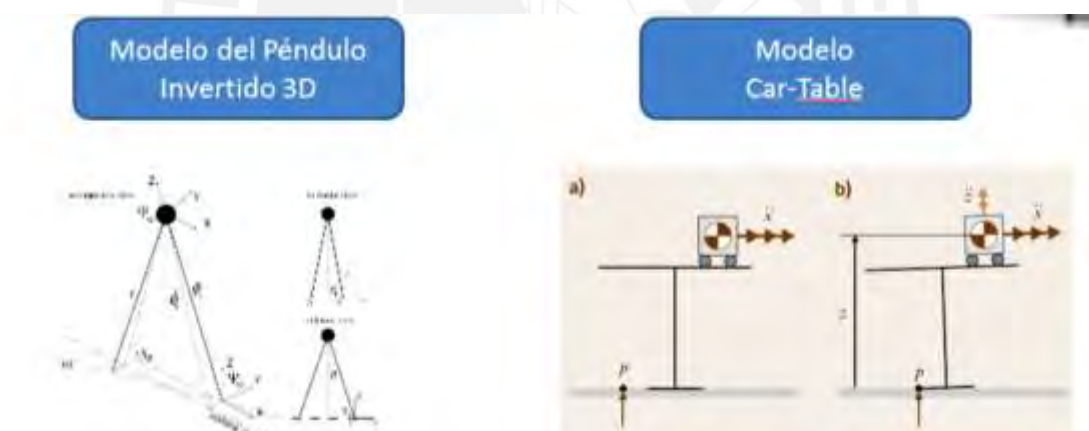
Fuente: Pellicena (2016)

Como se observa en la figura 9, el modelo del "péndulo invertido" es un modelo que simplifica mucho el sistema y la masa se encuentra en un solo punto concentrado

llamado COM. Sin embargo, este primer modelo no considera lo que se conoce como “pierna flotante”, elemento que influye en la dinámica. Mientras que el segundo modelo sí considera la acción de la pierna flotante y el tercer modelo considera al cuerpo humano como dos eslabones y una sola articulación.

Ruíz (2014) muestra dos modelos simplificados, uno de “péndulo invertido”, similar a Pellicea (2016), sin embargo, muestra la realización del mismo en un espacio de tres dimensiones. Por otra parte, está también el modelo de carro-mesa, en el que se observa cómo el centro de gravedad varía según se desplaza el carro. El autor indica que ambos sistemas necesitan un punto de apoyo para evitar caerse al suelo, este parámetro se conoce como “polígono de soporte”. La figura 10 muestra lo expresado por el autor en su trabajo de investigación.

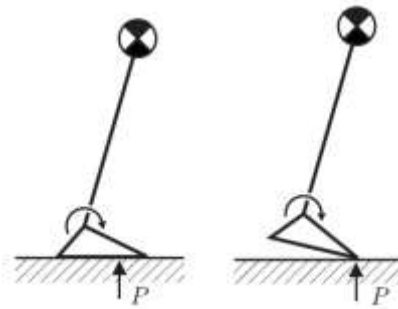
Figura 10 Modelo simplificado del cuerpo humano.



Fuente: Ruíz (2014)

Este punto de apoyo en el suelo, además, se conoce como ZMP (Zero Moment Point), es el punto en el suelo en el que los torques resultantes dan cero. Este ZMP es variable debido a que la masa cambia con el tiempo. La figura 11 muestra cómo varía dicho punto.

Figura 11 El punto de apoyo “P” es el ZMP.



Fuente: Ruíz (2014)

2.3.3 Modelo proporcional de longitudes

El cuerpo humano tiene distintas longitudes en cuanto a las extremidades superiores e inferiores y corporal correspondientes a las diferencias culturales, de sexo, raza, entre otras. Por tal motivo, se considera un modelo de longitudes y pesos promedios que pueda tener el cuerpo humano basado en un estudio desarrollado por Escobar (2020) sobre el “Perfil Antropométrico”, quien comenta que en Perú no existen estudios completos sobre antropometría. Sin embargo, existen estudios realizados por la universidad de Harvard del año 2019 en donde se tomó la medida a una muestra total de 3000 personas, en donde la medida de los varones fue de una altura promedio de 165,3 cm y 152,9 cm para mujeres.

Según el estudio realizado y mencionado anteriormente, y además, haciendo uso del modelo proporcional del cuerpo humano de Drillis y Contini propuesto por Venlandia (2016) en la figura 4, muestro a continuación la tabla 2, con las longitudes promedio de un ciudadano peruano promedio tanto hombre como mujer. Estas longitudes propuestas son resultado de un cálculo aproximado y permitirán establecer los parámetros en las ecuaciones del modelo matemático en el capítulo siguiente.

Tabla 1. Longitudes promedio del cuerpo humano de un ciudadano peruano promedio.

Parte del cuerpo humano	Longitud según modelo Drillis y Contini (H es altura de la persona)	Longitud promedio para Hombres (cm)	Longitud promedio para Mujeres (cm)
1. Canilla	$0,285H - 0,039H = 0,246H$	40,6638	37,6134
2. Muslo	$0,530H - 0,285H = 0,245H$	40,4985	37,4605
3. Tronco	$0,818H - 0,530H = 0,288H$	47,6064	44,0352

Fuente: Elaboración propia.

2.3.4 Modelo proporcional de masas

Conociendo las longitudes promedio, podríamos diseñar parte del modelo matemático, sin embargo, es importante también conocer las masas que corresponden a cada parte del cuerpo, por esto aplicamos el modelo propuesto por Winter (2009), quien sugiere usar un modelo estadístico en que las partes del cuerpo están en proporción a la masa total del cuerpo humano.

Por otro lado, y para determinar las masas de cada elemento, debemos considerar las tallas promedio, tanto del hombre como la mujer propuestos anteriormente. Con ayuda de esta medida, vamos a considerar la ecuación del IMC (Índice de Masa Corporal), propuesto para identificar una talla y peso adecuado, es decir, personas que no presentan sobrepeso o delgadez.

Contreras, M. (2012) señala que un valor de IMC debe ser mayor igual a 18.5 y menor a 25 para que una persona se encuentre en un peso ideal de acuerdo con su talla. Este índice se calcula usando la fórmula 2.16, para lo que consideramos como dato la estatura promedio del hombre peruano de 165,3 cm o 1.653 metros y un IMC de entre 18.5 y 25.

$$IMC = \frac{\text{Peso (Kg)}}{\text{Talla}^2 (\text{m}^2)} \quad 2.16$$

Luego, los valores límites del peso se calculan entre 50,55 Kg y 68,31 Kg. Con ayuda de estos valores, establecemos que un peso promedio sería de 59.43 kg para una persona con 165,3 cm de estatura. En la tabla 2 se muestra la información de los pesos por cada segmento en función a la masa corporal total (M) y la masa promedio calculada para un peso promedio de 59,43 Kg.

Tabla 2. Masa de cada segmento en función de la masa total del cuerpo humano

N°	Parte del cuerpo	Cantidad	Masa en función de la masa del cuerpo humano (M)	Masa calculada (Kg)
1	Mano	2	0.0060	0.7132
2	Antebrazo	2	0.0160	1.9018
3	Brazo superior	2	0.0280	3.3281
4	Pie	2	0.0145	1.7235
5	Pierna	2	0.0465	5.5270
6	Muslo	2	0.1000	11.8860
7	Cabeza y cuello	1	0.0810	4.8138
8	Tronco	1	0.4970	29.5367
TOTAL				59.43

Fuente: Adaptado de Winter (2009)

Según se observa en la tabla 2, tenemos las masas de cada parte del cuerpo que será útil en el modelamiento y, posteriormente, para la simulación. Al sumar las masas proporcionales de cada parte del cuerpo, se observa que la masa total coincide con el valor de masa promedio calculado de 59.43 Kg.

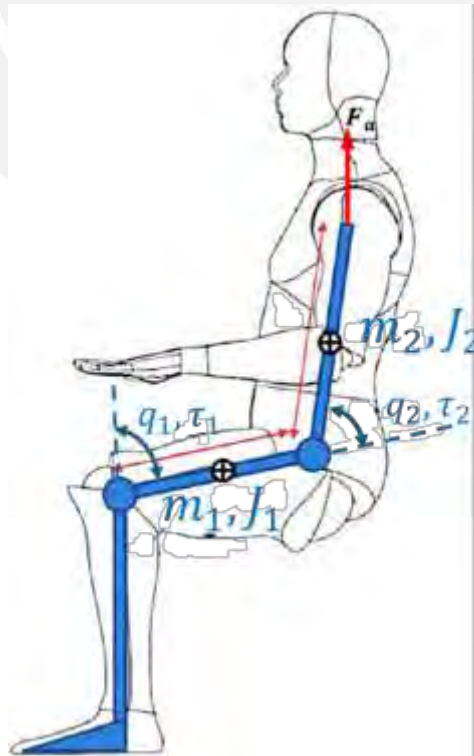
Capítulo III. Modelado Matemático

3.1 Modelo dinámico para la actividad de levantarse/sentarse

Al analizar el movimiento que debe realizar la persona para la actividad de levantarse desde la posición de sentado en una silla, se nota que el plano sagital es el que permite observar la rotación de las articulaciones, ángulos y medidas longitudinales.

Por otro lado, el tobillo no ejerce movimiento ni rotación, además, la posición angular inicial para la rodilla y cadera es de $-\pi/2$ y $\pi/2$ radianes respectivamente. En la figura 12 se observa cómo es que los elementos de tórax, muslo y pierna se encuentran interconectados mediante dos uniones, además de sus centros de masa respectivos.

Figura 12 Representación del centro de gravedad, longitudes de extremidades de una persona sentada en plano sagital.



Fuente: Adaptado de Aguilar (2016)

A partir de la figura 12, se tiene que:

m_1, J_1 : Masa y momento de inercia del muslo.

m_2, J_2 : Masa y momento de inercia del tórax.

θ_1, τ_1 : El ángulo de la rodilla y el par externo del mismo

θ_2, τ_2 : El ángulo de la cadera y el par externo del mismo.

l_1, l_2 : Longitudes del muslo y el tronco

l_{c1}, l_{c2} : Centros de masa de cada segmento

En el desarrollo de esta etapa, se utilizan las ecuaciones de Euler – Lagrange para el primer eslabón, el cual corresponde al muslo, representados en la ecuación 3.1:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_{c1} \text{Sen}(\theta_1) \\ y_1 &= h_0 + l_{c1} \text{Cos}(\theta_1) \end{aligned} \quad 3.1$$

Cuya derivada se expresa en la ecuación 3.2:

$$\begin{aligned} x_1' &= l_{c1} \text{Cos}(\theta_1) \theta_1' \\ y_1' &= -l_{c1} \text{Sen}(\theta_1) \theta_1' \end{aligned} \quad 3.2$$

Por lo tanto, el vector velocidad se expresará según la ecuación 3.3:

$$v_1 = \begin{bmatrix} l_{c1} \text{Cos}(\theta_1) \theta_1' \\ -l_{c1} \text{Sen}(\theta_1) \theta_1' \end{bmatrix} \quad 3.3$$

Obtendremos la ecuación cinética del movimiento, en donde primero elevamos al cuadrado la velocidad en la ecuación 3.4:

$$\begin{aligned} v_1^2 &= v_1^T v_1 \\ v_1^2 &= l_{c1}^2 (\theta_1')^2 (\text{Cos}^2 \theta_1) + l_{c1}^2 (\theta_1')^2 (\text{Sen}^2 \theta_1) \\ v_1^2 &= l_{c1}^2 (\theta_1')^2 \end{aligned} \quad 3.4$$

Y luego, la energía cinética se calcula para obtener la ecuación 3.5:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2$$

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 + \frac{1}{2} I_1 (\theta_1')^2$$

$$K_1 = \frac{1}{2} (m_1 l_{c1}^2 + I_1) (\theta_1')^2$$

$$K_1 = \frac{1}{2} J_1 (\theta_1')^2 \quad 3.5$$

Además, se puede obtener la energía potencial del primer eslabón que se muestra en la ecuación 3.6:

$$P_1 = m_1 g h_1$$

$$P_1 = m_1 g (h_0 + l_{c1} \cos(\theta_1))$$

$$P_1 = m_1 g h_0 + m_1 g l_{c1} \cos(\theta_1) \quad 3.6$$

Del mismo modo, elaboramos las ecuaciones para el eslabón 2, el cual hace referencia al tórax en la ecuación 3.7:

$$x_2 = l_1 \sin(\theta_1) + l_{c2} \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad 3.7$$

$$y_2 = h_0 + l_1 \cos(\theta_1) + l_{c2} \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

Calculamos la derivada con respecto al tiempo y se obtiene la ecuación 3.8:

$$x_2' = l_1 \cos(\theta_1) \theta_1' + l_{c2} \cos(\theta_1 + \theta_2) (\theta_1' + \theta_2') \quad 3.8$$

$$y_2' = -l_1 \sin(\theta_1) \theta_1' - l_{c2} \sin(\theta_1 + \theta_2) (\theta_1' + \theta_2')$$

Seguidamente, se obtiene el vector velocidad para el eslabón 2 como se observa en la ecuación 3.9:

$$v_2 = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\theta_1) \theta_1' + l_{c2} \cos(\theta_1 + \theta_2) (\theta_1' + \theta_2') \\ -l_1 \sin(\theta_1) \theta_1' - l_{c2} \sin(\theta_1 + \theta_2) (\theta_1' + \theta_2') \end{bmatrix} \quad 3.9$$

Elevando al cuadrado la ecuación 3.9 se obtiene la ecuación 3.10 como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 v_2^2 &= v_2^T v_2 \\
 v_2^2 &= \left(\left(\text{Cos}(\theta_1 + \theta_2) l_{c2} (\theta'_1 + \theta'_2) + \theta'_1 l_1 \text{Cos}\theta_1 \right)^2 + \left(\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2) l_{c2} (\theta'_1 + \theta'_2) + \theta'_1 l_1 \text{Cos}\theta_1 \right)^2 \right) \\
 v_2^2 &= l_1^2 (\theta'_1)^2 + 2l_1 l_{c2} \text{Cos}(\theta_2) (\theta'_1)^2 + l_{c2}^2 (\theta'_1)^2 + 2l_1 l_2 (\text{Cos}\theta_2) \theta'_1 \theta'_2 + 2l_{c2}^2 \theta'_1 \theta'_2 + l_{c2}^2 (\theta'_2)^2 \\
 v_2^2 &= l_1^2 (q'_1)^2 + l_{c2}^2 \left((q'_1)^2 + 2q'_1 q'_2 + (q'_2)^2 \right) + 2l_1 l_{c2} \left((q'_1)^2 + q'_1 q'_2 \right) \text{Cos}(q_2) \quad 3.10
 \end{aligned}$$

Luego, se logra obtener la energía cinética del segundo eslabón en la ecuación 3.11 como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 K_2 &= \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 \\
 K_2 &= \frac{1}{2} m_2 \left(l_1^2 (\theta'_1)^2 + 2l_1 l_{c2} (\text{Cos}\theta_2) (\theta'_1)^2 + 2l_1 l_{c2} (\text{Cos}\theta_2) \theta'_1 \theta'_2 + 2l_{c2}^2 \theta'_1 \theta'_2 + l_{c2}^2 (\theta'_2)^2 \right) + \frac{1}{2} I_2 (\theta'_1 + \theta'_2)^2 \\
 K_2 &= \frac{1}{2} m_2 l_1^2 (\theta'_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 \left((\theta'_1)^2 + 2\theta'_1 \theta'_2 + (\theta'_2)^2 \right) + m_2 l_1 l_{c2} \left((\theta'_1)^2 + 2\theta'_1 \theta'_2 \right) \text{Cos}(\theta_2) + \frac{1}{2} I_2 (\theta'_1 + \theta'_2)^2 \quad 3.11
 \end{aligned}$$

Finalmente, la energía potencial del segundo eslabón se calcula y se muestra en la ecuación 3.12:

$$\begin{aligned}
 P_2 &= m_2 g h_2 \\
 P_2 &= m_2 g \left(h_0 + l_1 \text{Cos}(\theta_1) + l_{c2} \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2) \right) \\
 P_2 &= m_2 g h_0 + m_2 g l_1 \text{Sen}(\theta_1) + m_2 g l_{c2} \text{Sen}(\theta_1 + \theta_2) \quad 3.12
 \end{aligned}$$

Ahora, se puede obtener el Lagrangiano haciendo uso de las energías cinéticas y potenciales desarrolladas en las ecuaciones anteriores, el cual se define mediante la ecuación 3.13:

$$L = \sum_{i=1}^n K_i - P_i \quad 3.13$$

Para el eslabón 1 se obtiene la ecuación 3.14, con la derivada parcial con respecto al θ_1 :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L(\theta, \theta')}{\partial \theta_1} &= (m_1 l_{c1}^2) \theta_1' + m_2 l_{c2}^2 (\theta_1' + \theta_2') + m_2 l_1 l_{c2} \text{Cos}(\theta_2) (2\theta_1' + \theta_2') + I_1' \theta_1' + I_2 (\theta_1' + \theta_2') \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\theta, \theta')}{\partial \theta_1} \right) &= (m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 + I_2) \theta_1'' + (m_2 l_{c2}^2 + I_2) \theta_2'' + 2m_2 l_1 l_{c2} (\text{Cos}(\theta_2) \theta_1'' - \text{Sen}(\theta_2) \theta_1' \theta_2') \\
 &\quad + m_2 l_1 l_{c2} (\text{Cos}(\theta_2) \theta_2'' - \text{Sen}(\theta_2) (\theta_2')^2) \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\theta, \theta')}{\partial \theta_1} \right) &= (m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \text{Cos}(\theta_2)) \theta_1'' + (m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \text{Cos}(\theta_2)) \theta_2'' \\
 &\quad - 2m_2 l_1 l_{c2} \text{Sen}(\theta_2) \theta_1' \theta_2' - m_2 l_1 l_{c2} \text{Sen}(\theta_2) (\theta_2')^2 + I_1 q_2'' + I_2 (\theta_1'' + \theta_2'') \\
 \frac{\partial L(\theta, \theta')}{\partial \theta_1} &= -m_1 l_{c1} g \text{Cos}(\theta_1) - m_2 l_1 g \text{Cos}(\theta_1) - m_2 l_{c2} g \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2) \\
 \frac{\partial L(\theta, \theta')}{\partial \theta_1} &= -(m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \text{Cos}(\theta_1) - m_2 l_{c2} g \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2) \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

Mientras que para el eslabón 2 se obtiene la ecuación 3.15:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L(\theta, \theta')}{\partial \theta_2} &= m_2 l_{c2}^2 \theta_2' + m_2 l_{c2}^2 \theta_2' + m_2 l_1 l_{c2} \text{Cos}(\theta_2) \theta_1' + I_2 (\theta_1' + \theta_2') \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\theta, \theta')}{\partial \theta_2} \right) &= m_2 l_{c2}^2 \theta_2'' + m_2 l_{c2}^2 \theta_2'' + m_2 l_1 l_{c2} \text{Cos}(\theta_2) \theta_1'' \\
 &\quad - m_2 l_1 l_{c2} \text{Sen}(\theta_2) \theta_1' \theta_2' + I_2 (\theta_1'' + \theta_2'') \\
 \frac{\partial L(\theta, \theta')}{\partial \theta_2} &= -m_2 l_{c2} g \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2) - m_2 l_1 l_{c2} \text{Sen}(\theta_2) ((\theta_1')^2 + \theta_1' \theta_2') \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

Por último, se pueden obtener las ecuaciones dinámicas de movimiento para desarrollar el movimiento de levantarse/sentarse según las ecuaciones de Euler-Lagrange para generar los torques τ_1 y τ_2 que se muestran en las ecuaciones 3.16 y 3.17 respectivamente:

$$\begin{aligned} \tau_1 = & (m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(\theta_2)) \theta_1'' + (m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(\theta_2)) \theta_2'' \\ & - 2m_2 l_1 l_{c2} \sin(\theta_2) \theta_1' \theta_2' - m_2 l_1 l_{c2} \sin(\theta_2) (\theta_2')^2 + I_1 \theta_1'' + I_2 (\theta_1'' + \theta_2'') \\ & + (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \cos(\theta_1) + m_2 l_{c2} g \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad 3.16$$

$$\begin{aligned} \tau_2 = & m_2 l_{c2}^2 \theta_1'' + m_2 l_{c2}^2 \theta_2'' + m_2 l_1 l_{c2} \cos(\theta_2) \theta_1'' + I_2 (\theta_1'' + \theta_2'') \\ & + m_2 l_1 l_{c2} \sin(\theta_2) (\theta_1')^2 + m_2 l_{c2} g \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad 3.17$$

Con estas ecuaciones de los torques podremos generar el movimiento deseado haciendo uso de las trayectorias propuestas y con ayuda de las ecuaciones 3.18, 3.19 y 3.20 expresadas a continuación:

$$\theta = [\theta_1, \theta_2]^T \quad 3.18$$

$$\theta'' = [\theta_1'', \theta_2'']^T \quad 3.19$$

$$T = (\tau_1, \tau_2)^T \quad 3.20$$

3.2 Modelo dinámico de Lagrange

En forma general, se escribe la ecuación de torque con la ecuación 3.21:

$$T = M_{(q)} \ddot{q} + C_{(q, \dot{q})} \dot{q} + G_{(q)} \quad 3.21$$

Donde:

$$q = [\theta_1, \theta_2]^T$$

$M_{(q)}$: Matriz de inercia

$C_{(q, \dot{q})}$: Matriz centrífuga

$G_{(q)}$: Vector gravitacional

Luego, se describe la ecuación matricial con la ecuación 3.22:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11(q)} & M_{12(q)} \\ M_{21(q)} & M_{22(q)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1'' \\ q_2'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11(q,q')} & C_{12(q,q')} \\ C_{21(q,q')} & C_{22(q,q')} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1' \\ q_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{1(q)} \\ G_{2(q)} \end{bmatrix} \quad 3.22$$

Donde los elementos de cada matriz se expresan como sigue:

$$M_{11} = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_1 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \text{Cos}(q_2) + I_1 + I_2$$

$$M_{12} = m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \text{Cos}(q_2) + I_2$$

$$M_{21} = m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \text{Cos}(q_2) + I_2$$

$$M_{22} = m_2 l_{c2}^2 + I_2$$

$$C_{11} = -m_2 l_1 l_{c2} (\text{Sen}(q_2)) q_2'$$

$$C_{12} = -m_2 l_1 l_{c2} (\text{Sen}(q_2)) (q_1' + q_2')$$

$$C_{21} = m_2 l_1 l_{c2} (\text{Sen}(q_2)) q_1'$$

$$C_{22} = 0$$

$$G_1 = (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \text{Cos}(q_1) + m_2 l_{c2} g \text{Cos}(q_1 + q_2)$$

$$G_2 = m_2 l_{c2} g \text{Cos}(q_1 + q_2)$$

q : Vector de coordenadas

3.3 Generación de trayectorias para el movimiento de levantarse/sentarse

El modelo desarrollado puede generar trayectorias partiendo de funciones escalonadas propuesta para los ángulos de la cadera, rodilla y tobillo. Estos ángulos tienen un cierto límite según se muestra en las ecuaciones propuestas por Aguilar

(2016) indicadas a continuación en las ecuaciones 3.23 para el ángulo de la cadera, 3.24 para el ángulo de la rodilla y 3.25 para el ángulo del tobillo:

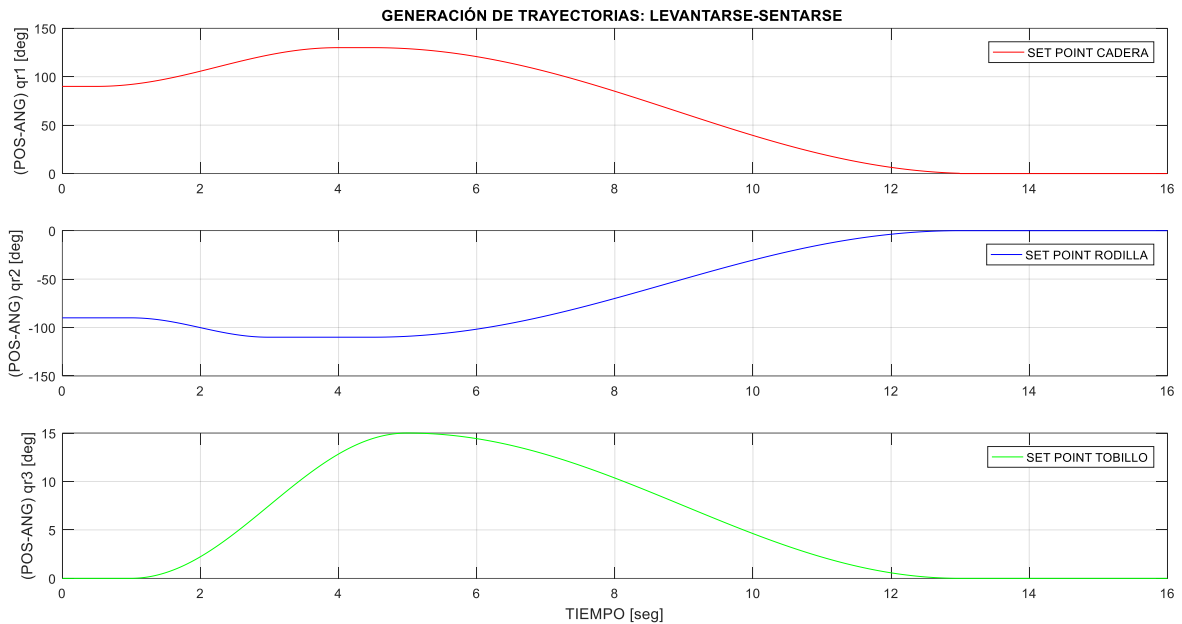
$$\theta_{d,cadera} = \begin{cases} 0 \leq t < 0,5 & ; & 90 \\ 0,5 \leq t < 4 & ; & 20\text{Cos}\left(\frac{2\pi}{7}t + \frac{6\pi}{7}\right) + 110 \\ 4 \leq t < 4,5 & ; & 130 \\ 4,5 \leq t < 13 & ; & 65\text{Cos}\left(\frac{4\pi}{35}t - \frac{19\pi}{35}\right) + 65 \\ 13 \leq t \leq 16 & ; & 0 \end{cases} \quad 3.23$$

$$\theta_{d,rodilla} = \begin{cases} 0 \leq t < 1 & ; & -90 \\ 1 \leq t < 3 & ; & 10\text{Cos}\left(\frac{2\pi}{4}t - \frac{\pi}{2}\right) - 100 \\ 3 \leq t < 4,5 & ; & -110 \\ 4,5 \leq t < 13 & ; & 55\text{Cos}\left(\frac{2\pi}{17}t - \frac{8\pi}{17}\right) - 55 \\ 13 \leq t \leq 16 & ; & 0 \end{cases} \quad 3.24$$

$$\theta_{d,tobillo} = \begin{cases} 0 \leq t < 1 & ; & 0 \\ 1 \leq t < 5 & ; & 7,5\text{Cos}\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{3\pi}{4}\right) + 7,5 \\ 5 \leq t < 13 & ; & 7,5\text{Cos}\left(\frac{\pi}{8}t - \frac{5\pi}{8}\right) + 7,5 \\ 13 \leq t \leq 16 & ; & 0 \end{cases} \quad 3.25$$

Con ayuda de las trayectorias y de las ecuaciones de torque obtenidas se procede a desarrollar los resultados ideales o deseados del movimiento de levantarse/sentarse, estos resultados deseados se observan en la figura 13. El desarrollo del proyecto de investigación tiene como propósito que los controladores PID no lineal y Backstepping puedan seguir la trayectoria deseada con el mínimo error posible, lo cual se analiza en el capítulo siguiente. Sin embargo, y considerando que el ángulo generado por el tobillo presenta una variación de 15° aproximadamente, se ha considerado que para los cálculos futuros no se tome en cuenta dicho ángulo.

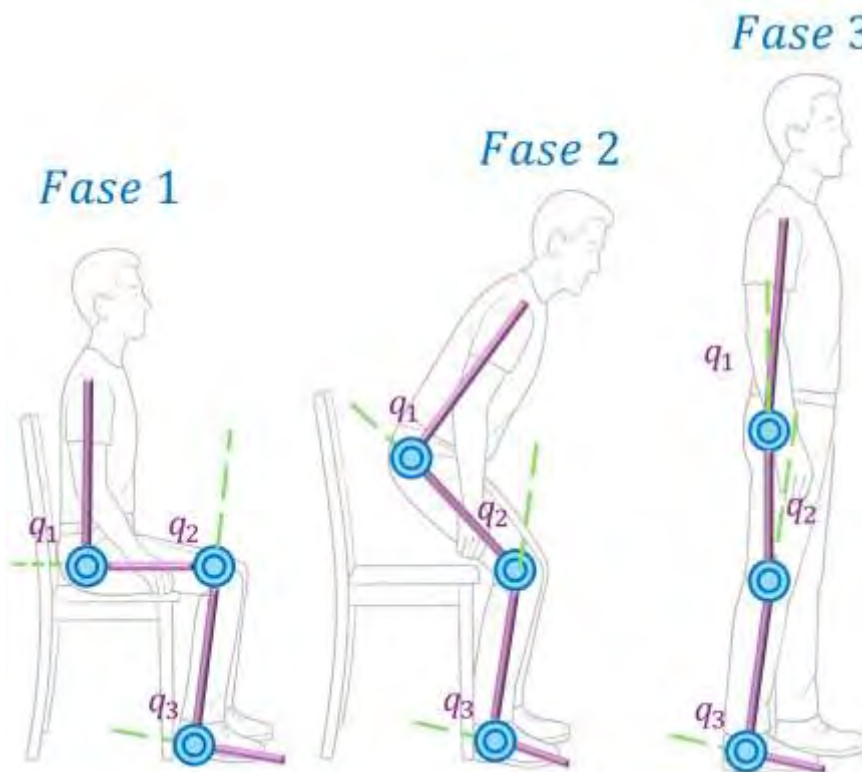
Figura 13 Gráficos de señales de referencia.



Fuente: Elaboración propia.

Para comprender con mejor detalle lo dicho previamente, se ha desarrollado una imagen descriptiva del movimiento de una persona para levantarse desde una silla en tres fases con ayuda de Google y su IA Gemini, en donde se le solicitó graficar a una persona sentada que se ponga de pie en tres fases. Seguidamente, se editó la imagen con software de edición de imágenes para agregar eslabones y sus respectivos ángulos para que coincidan con los ángulos mencionados en la figura 13. La imagen completa se puede apreciar en la figura 14 que se muestra a continuación.

Figura 14 Secuencias del movimiento al levantarse desde una silla de una persona con sus respectivos ángulos por segmentos



Fuente: Adaptado de Google (Gemini IA, 2025)

En la figura 14 se debe observar que:

- q_1 : ángulo de articulación de la cadera.
- q_2 : ángulo de articulación de la rodilla.
- q_3 : ángulo de articulación del tobillo.

Además, se identifican las tres fases a continuación:

- **Fase 1:** durante esta fase, la persona está sentada en una silla en reposo. Los ángulos de articulación son de 90° para la cadera, -90° para la rodilla y 0° para el tobillo (considerando un ángulo de referencia de 0° para solamente medir la variación).

- **Fase 2:** en esta fase la persona se encuentra a medio camino de ponerse de pie. Aquí se observa que el ángulo de la cadera se encuentra superando ligeramente el ángulo de 90° , mientras que el ángulo de la rodilla también aumenta su inclinación, pero en orientación negativa, y finalmente, el ángulo del tobillo ha ejercido un ligero cambio.
- **Fase 3:** Esta es la fase final, en donde la persona se encuentra de pie. Aquí se puede apreciar que los ángulos, tanto de la cadera como de la rodilla, han llegado a una inclinación de 0° , mientras que el ángulo del tobillo ha regresado a su posición inicial, similar a la fase 1.

En conclusión, y según la información observada, se ha considerado que el ángulo del tobillo se desprecie en los cálculos posteriores, pues su variación es menor en comparación a los otros dos ángulos, el de la cadera y el de la rodilla, los cuales se deberán controlar aplicando criterios de control no lineal debido a su naturaleza y según las ecuaciones obtenidas en el presente capítulo.

Capítulo IV. Control no lineal y análisis comparativo

4.1 Introducción

Con el desarrollo del proyecto se busca encontrar la mejor herramienta de control no lineal para poder realizar la actividad de levantarse/sentarse desde la posición de sentado en una silla. Por tal motivo, se considera comparar los controladores PID no lineal y Backstepping, conocidos por su funcionalidad y adaptabilidad, explicando una teoría breve del funcionamiento de cada uno, para luego proceder al diseño de control no lineal respectivo en cada caso.

Seguidamente, se compara el resultado gráfico obtenido de cada controlador, en donde se observa que el PID no lineal presenta mayores sobreimpulsos que el controlador Backstepping. Además, el tiempo estacionario del Backstepping es ligeramente menor.

4.2 Método de controlador PID no lineal

Un controlador PID no lineal es una variante del controlador PID tradicional que modifica las ganancias del controlador de acuerdo con ciertas condiciones o reglas específicas. A diferencia del PID lineal, donde las ganancias son constantes, en el PID no lineal, las ganancias pueden variar según el estado o la dinámica del sistema. Para el estudio del PID no lineal se estudió primeramente el controlador PID basado en el libro de Lewis, Dawson y Abdallah (2004), en su obra llamada "Robot manipulator control", en el que explican distintas configuraciones PID aplicado a la dinámica de robots con dos y tres eslabones.

El controlador PID no lineal tiene la característica que las ganancias K_p , K_d y K_i se ajustan dinámicamente al sistema en función de los estados del sistema (variables q y q'), la propia dinámica no lineal (matrices inercia, centrífuga y coriolis). La ecuación del controlador PID no lineal se representa según la ecuación 4.1

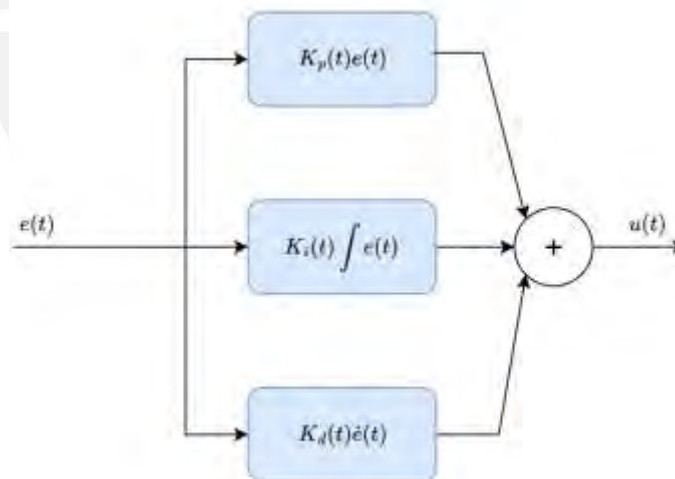
$$u(t) = K_{p(t)} \cdot e(t) + K_{i(t)} \cdot \int_0^t e(t) dt + K_{d(t)} \cdot \dot{e} \quad 4.1$$

Donde:

- $u(t)$ es la señal de control en el tiempo “t”.
- $e(t)$ es el error en el tiempo “t” (diferencia entre la referencia y la salida del sistema).
- $K_p(t)$, $K_i(t)$ y $K_d(t)$ son las ganancias proporcional, integral y derivativa en función del tiempo “t”, respectivamente.
- Además de observarse la integral del error con respecto al tiempo “t” y la derivada del error con respecto al tiempo “t”.

La figura 15 muestra el diagrama del controlador PID lineal con configuración en paralelo, el cual será replanteado y modificado en función al controlador PID no lineal en el punto siguiente.

Figura 15 Controlador PID lineal.



Fuente: Elaboración propia.

4.3 Diseño de los coeficientes del controlador PID no lineal

Reestableciendo el modelo dinámico de Lagrange orientado a control para el sistema de Exoesqueleto, se describe en la ecuación 4.2 siguiente, la cual se obtiene despejando q'' de la ecuación 3.21:

$$q'' = M^{-1}_{(q)} \left(T - C_{(q,q')} q' - G_{(q)} \right) \quad 4.2$$

Operando la ecuación 4.2, se obtiene:

$$q'' = -M^{-1}_{(q)} \left(C_{(q,q')} q' + G_{(q)} \right) + M^{-1}_{(q)} T \quad 4.3$$

La ecuación vectorial 4.3 se convierte luego en la ecuación 4.4, la cual reduce la cantidad de variables para una mejor visualización:

$$q'' = \Gamma_{(q,q')} + \Psi_{(q)} T \quad 4.4$$

Donde, además, se definen las matrices:

$$\Gamma_{(q,q')} = -M^{-1}_{(q)} \left(C_{(q,q')} q' + G_{(q)} \right) \quad 4.4a \text{ y}$$

$$\Psi_{(q)} = M^{-1}_{(q)} \quad 4.4b$$

A partir de la ecuación de salida, se obtienen las ecuaciones 4.5, 4.6 y 4.7 como parámetros de q , siendo esta la matriz de coordenadas de posición, las que se muestran a continuación:

$$y = q \quad 4.5$$

$$y' = q' \quad 4.6$$

$$y'' = q'' \quad 4.7$$

Sustituyendo la ecuación 4.4 con la representación entrada-salida de las ecuaciones 4.5, 4.6 y 4.7, se tiene la ecuación 4.9:

$$y'' = \Gamma_{(y,y')} + \Psi_{(y)} T \quad 4.9$$

Considerando la ecuación 4.9, y despejando la matriz T, tenemos la ecuación 4.10 siguiente:

$$T = \Psi^{-1}_{(y)} \left(y'' - \Gamma_{(y,y')} \right) \quad 4.10$$

Sin embargo, recordando la ecuación 4.4b, tenemos que la ecuación 4.10 se puede expresar simplemente como se muestra en la ecuación 4.11 a continuación:

$$T = M_{(y)} \left(y'' - \Gamma_{(y,y')} \right) \quad 4.11$$

Para el sistema de la ecuación 4.11, el controlador propuesto proporcional-integral-diferencial (PID) propuesto se puede escribir como se muestra en la ecuación 4.12, el cual se le conoce como “Control de par computarizado” como una variación del PID, el cual se explica también en el libro de Lynch, Park y Frank C. (2017).

$$T = M_{(y)} \left[-\Gamma_{(y,y')} + y''_{D(t)} - K_{p(t)} e_{(t)} - K_{I(t)} \int_0^t e_{(t)} d\delta - K_D e'_{(t)} \right] \quad 4.12$$

Donde K_P , K_I y K_D son matrices diagonales de ganancia con dimensiones apropiadas, los ángulos comandados y_D son dadas por el nivel de referencia, además se tiene la ecuación del error de seguimiento: $e = y - y_D$. Entonces, el sistema de lazo cerrado se rige por la ecuación 4.13:

$$e'' + K_p e + K_I \int_0^t e d\tau + K_D e' = 0 \quad 4.13$$

Dadas las matrices de ganancia apropiadas K_P , K_I y K_D , el error de seguimiento de actitud e convergerá eventualmente a 0.

Finalmente, los parámetros de cada controlador son obtenidos y mostrados en la tabla 3 que se calculan de forma heurística o prueba y error mostrada a continuación:

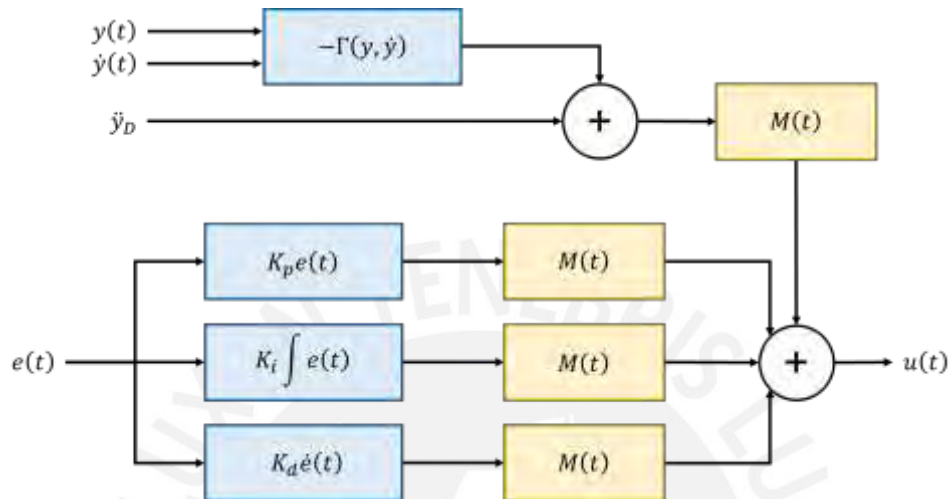
Tabla 3. Parámetros de simulación - Control de articulación.

Controlador No Lineal	Parámetros de articulación de cadera	Parámetros de articulación de rodilla
PID Basado en Modelo	$K_{p1} = 20; T_{i1} = 100; T_{d1} = 0,15$ $K_{i1} = \frac{K_{p1}}{T_{i1}} = 0,2$ $K_{d1} = K_{p1} \times T_{d1} = 3$	$K_{p2} = 20; T_{i2} = 100; T_{d2} = 0,15$ $K_{i2} = \frac{K_{p2}}{T_{i2}} = 0,2$ $K_{d2} = K_{p2} \times T_{d2} = 3$

Fuente: Elaboración propia

El diseño del diagrama de bloques del PID no lineal se muestra en la figura 16, el cual muestra como una variación del modelo PID convencional y adaptándose a los parámetros de diseño y ecuaciones mostradas anteriormente.

Figura 16 Control PID no lineal adaptado



Fuente: Elaboración propia

4.4 Método del controlador Backstepping

El método del controlador Backstepping se desarrolla en base al libro “Nonlinear Systems” de Khalil Hassan (3ra edición). El procedimiento se desarrolla a continuación, considerando el sistema de ecuaciones:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \quad 4.14$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3 \quad 4.15$$

...

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)u \quad 4.16$$

Lo que se busca es una salida $y = x_1$, la cual debe seguir una señal de referencia $y_r(t)$, para lo cual se debe iniciar desde un valor de $i = 1$, hasta $i = n$, siguiendo los siguientes pasos:

1. Se define la señal de error $x_{i+1} z_i = x_i - x_{i,d}$ (Donde $x_{1,d} = y_r$)
2. Reescribir la ecuación usando la señal de error z_i (Para lo cual se aplican las derivadas $\dot{z}_i = \dot{x}_i - \dot{x}_{i,d}$ y sustituimos \dot{x}_i por $\dot{z}_i + \dot{x}_{i,d}$).
3. Tratar x_{i+1} como si fuera la señal de control (a esto se le llama la Señal de Control Virtual).
4. Encontrar la ecuación de Lyapunov para el sistema, para cual se tendría:

$$V_i = \frac{1}{2} z_1^2 + \dots + \frac{1}{2} z_i^2 \quad 4.17$$

5. Usar la ecuación 4.17 para encontrar la expresión $x_{i+1,d}$ (función estabilizadora) para el control virtual x_{i+1}

Finalmente, y aplicando las ecuaciones previas desde $i = 1$ hasta $i = n$, el sistema se estabilizará.

4.6 Diseño del controlador Backstepping para la acción de levantarse/sentarse y coeficientes

Suponiendo que los parámetros del modelo del sistema descritos en las ecuaciones previas se conocen con precisión, el diseño del control Backstepping para el exoesqueleto se describe etapa por etapa de la siguiente manera:

- Se define la siguiente función de error, según la ecuación 4.18, en donde $y_d = q_d$ es el comando de posición angular cadera-rodilla.

$$e_1 = q - q_d = x_1 - y_d \quad 4.18$$

- Derivando la ecuación 4.18 del error e_1 , se obtiene la ecuación 4.19:

$$\dot{e}_1 = \dot{x}_1 - \dot{y}_d = x_2 - \dot{y}_d \quad 4.19$$

- Se define la siguiente función de control virtual según la ecuación 4.20, en donde k_1 se considera una constante positiva:

$$\alpha_1 = -k_1 \dot{e}_1 + \dot{y}_d \quad 4.20$$

- Se define la señal de error e_2 según la ecuación 4.21:

$$e_2 = x_2 - \alpha_1 \quad 4.21$$

- Sustituyendo las ecuaciones 4.20 y 4.21 en la ecuación 4.19 se obtiene la ecuación 4.22:

$$\dot{e}_1 = e_2 + \alpha_1 - \dot{y}_d = e_2 - k_1 e_1 \quad 4.22$$

- Se define la siguiente función candidata de Lyapunov para e_1 en la ecuación 4.23:

$$V_1 = \frac{1}{2} e_1^T e_1 \quad 4.23$$

- Diferenciando la ecuación 4.23 y usando la ecuación 4.22, se obtiene la ecuación 4.24:

$$\dot{V}_1 = e_1^T \dot{e}_1 = e_1^T (e_2 - k_1 e_1) = -k_1 e_1^T e_1 + e_2^T e_2 \quad 4.24$$

Como muestra la ecuación 4.24, si $e_2 = 0$ entonces $\dot{V}_1 < 0$. Por lo tanto, podemos concluir que el sistema descrito en la ecuación 4.24 es estable bajo el supuesto e_2 igual a cero. Sin embargo, e_2 no siempre es igual a cero, y debemos diseñar el sistema de control para asegurar que el error e_2 sea igual a cero.

- Por lo tanto, se debe desarrollar un nuevo nivel, el cual se encuentra diferenciando la ecuación 4.22 para obtener luego la ecuación 4.25:

$$\dot{e}_2 = \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 \quad 4.25$$

- Sustituyendo la ecuación 3.21 en la ecuación 4.25, se obtiene la ecuación 4.26:

$$\dot{e}_2 = M_q^{-1}\tau - M_q^{-1}C_q x_2 - M_q^{-1}G_q - \dot{\alpha}_1 \quad 4.26$$

- La función de Lyapunov candidata se define según la ecuación 4.27 a continuación:

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} e_2^T M_q e_2 \quad 4.27$$

- Diferenciando la ecuación 4.27, se obtiene la ecuación 4.28:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + \frac{1}{2} e_2^T \dot{M}_q e_2 + \frac{1}{2} \dot{e}_2^T M_q e_2 + \frac{1}{2} e_2^T \dot{M}_q e_2 \\ \dot{V}_2 &= -k_1 e_1^T e_1 + e_1^T e_2 + e_2^T M_q \dot{e}_2 + \frac{1}{2} e_2^T \dot{M}_q e_2 \\ \dot{V}_2 &= -k_1 e_1^T e_1 + e_1^T e_2 + e_2^T M_q (\dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1) + \frac{1}{2} e_2^T \dot{M}_q e_2 \end{aligned} \quad 4.29$$

- Sustituyendo la ecuación 3.21 en la ecuación 4.29 se obtiene la función de Lyapunov descrita en la ecuación 4.30:

$$\dot{V}_2 = -k_1 e_1^T e_1 + e_1^T e_2 + e_2^T (-M_q \dot{\alpha}_1 - C_q \alpha_1 - G_q + \tau) \quad 4.30$$

- De acuerdo con la ecuación 4.30, se diseña la ley de control como se escribe en la ecuación 4.31, en donde k_2 es una constante positiva.

$$\tau = M_q \dot{\alpha}_1 + C_q \alpha_1 + G_q - e_1 - k_2 e_2 \quad 4.31$$

- Sustituyendo la ecuación 4.31 en la ecuación 4.30, se obtiene que la función de Lyapunov queda como se muestra en la ecuación 4.32:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -k_1 e_1^T e_1 + e_1^T e_2 + e_2^T (-M_q \dot{\alpha}_1 - C_q \alpha_1 - G_q + M_q \dot{\alpha}_1 + G_q - e_1 - k_2 e_2) \\ \dot{V}_2 &= -k_1 e_1^T e_1 - k_2 e_2^T e_2 \end{aligned} \quad 4.32$$

Como k_1 y k_2 son ambos definidos positivos, se concluye que \dot{V}_2 es menor que cero a partir de la ecuación 4.32. Por lo tanto, la estabilidad del sistema de control se

demuestra a través de la ecuación 4.32. Los coeficientes obtenidos se muestran en la tabla 4.

Tabla 4. Parámetros de simulación - Control de articulación.

Controlador No Lineal	Parámetros de articulación de cadera	Parámetros de articulación de rodilla
Backstepping	$k_1 = 8$ $K_1 = \text{diag}([k_1 \quad k_1])$	$k_2 = 8$ $K_2 = \text{diag}([k_2 \quad k_2])$

Fuente: Elaboración propia

4.7 Análisis comparativo de los métodos de control no lineal propuestos.

Se realiza un análisis comparativo de las respuestas de los controladores diseñados para los casos de las articulaciones de cadera y rodilla en los casos de levantarse y sentarse, asimismo se ensaya un punto de inicio diferente a la referencia (+/- 5 grados) y se prueban casos sin ruido y con ruido en la medición (gaussiano con media 0 y desviación estándar 1 mrad).

4.7.1 Respuestas de las señales de control (Movimiento de levantarse)

Luego de haber desarrollado los controladores PID No Lineal y Backstepping, y simulado los mismos con ayuda de MatLab, se obtienen las siguientes señales de respuesta graficadas en la figura 18, para la señal de control en la cadera, y la figura 19 para la señal de control en la rodilla correspondientes a casos sin considerar el ruido, y asimismo figura 20, para la señal de control en la cadera, y la figura 21 para la señal de control en la rodilla, para el caso de ruido en la medición. Estas señales son comparadas con la señal deseada de la figura 13 (referencia).

Por otro lado, la articulación del tobillo se ha decidido despreciar y reducir el trabajo a solo 2 grados de libertad por cuestiones prácticas.

Figura 17 Respuestas de las señales de control para la articulación de la cadera

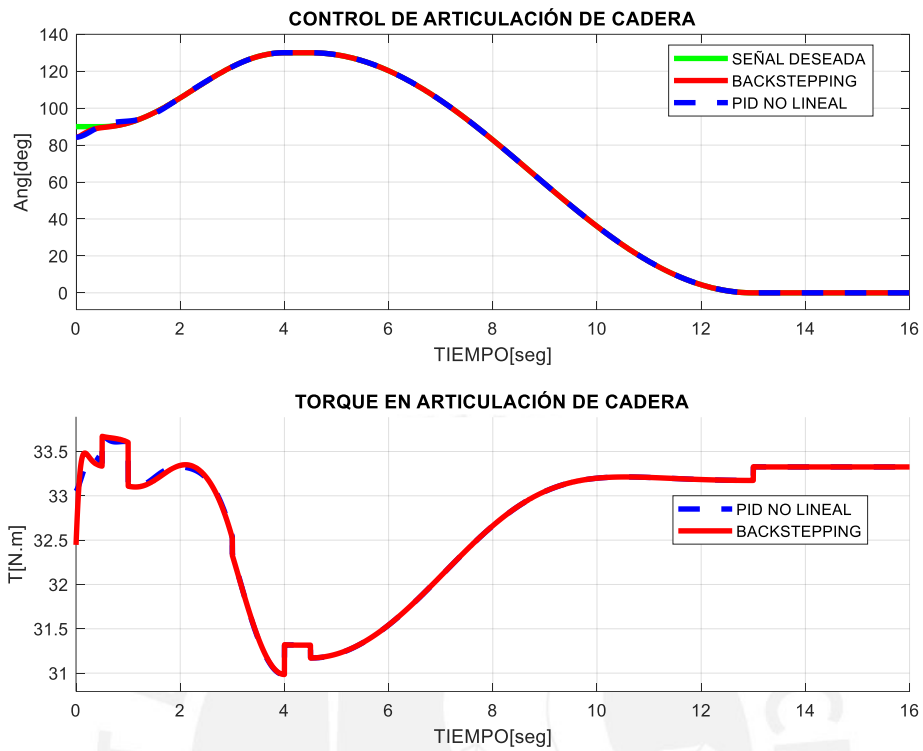


Figura 18 Respuestas de las señales de control para la articulación de la rodilla

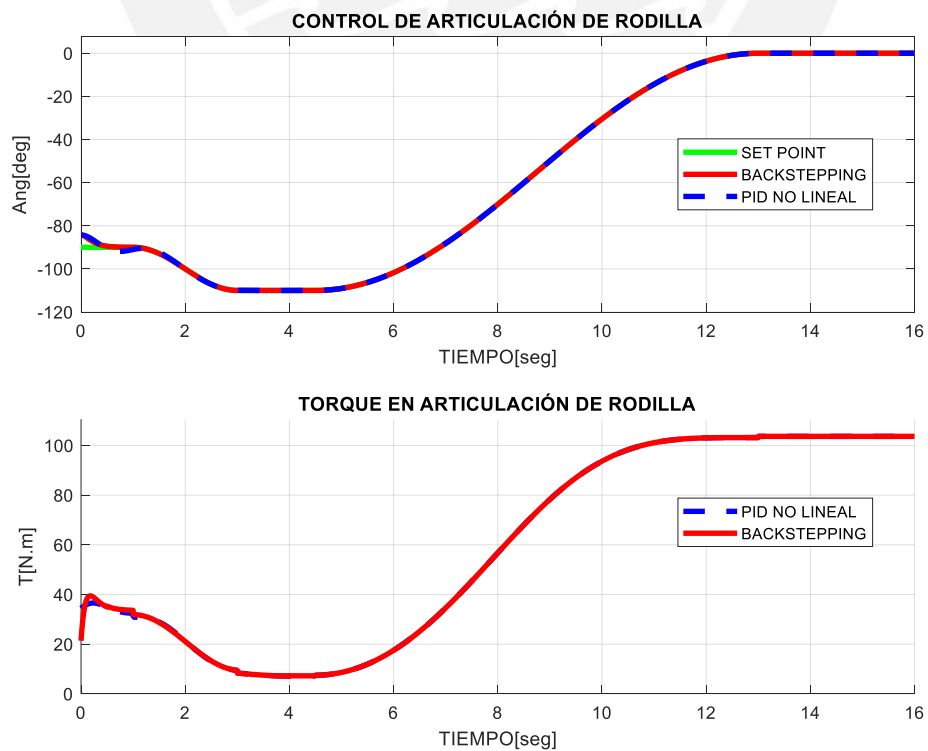


Figura 19 Respuestas de las señales de control para la articulación de la cadera

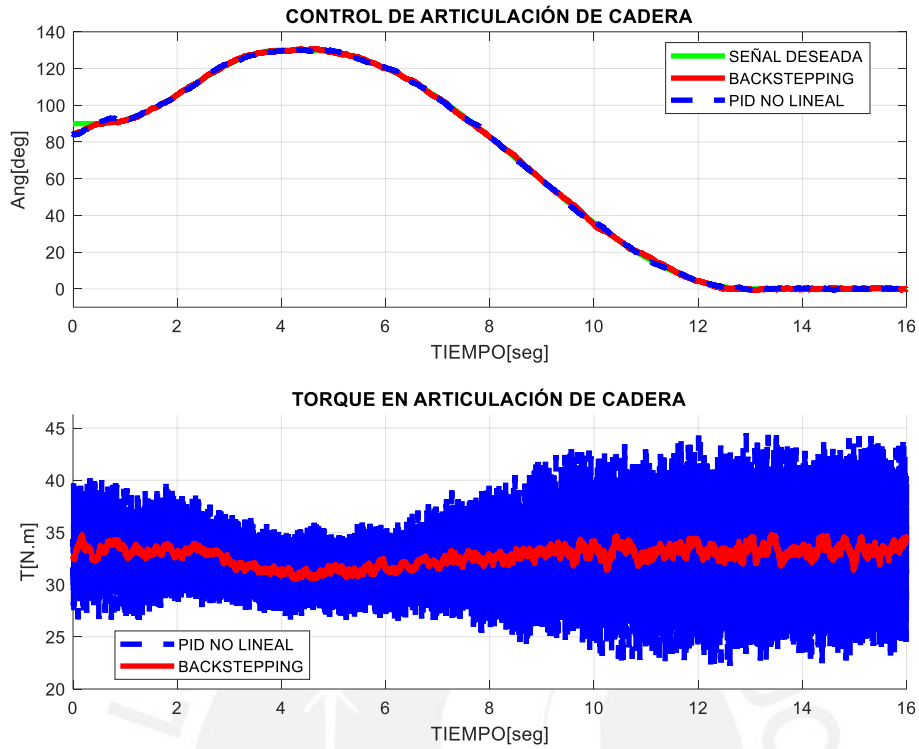
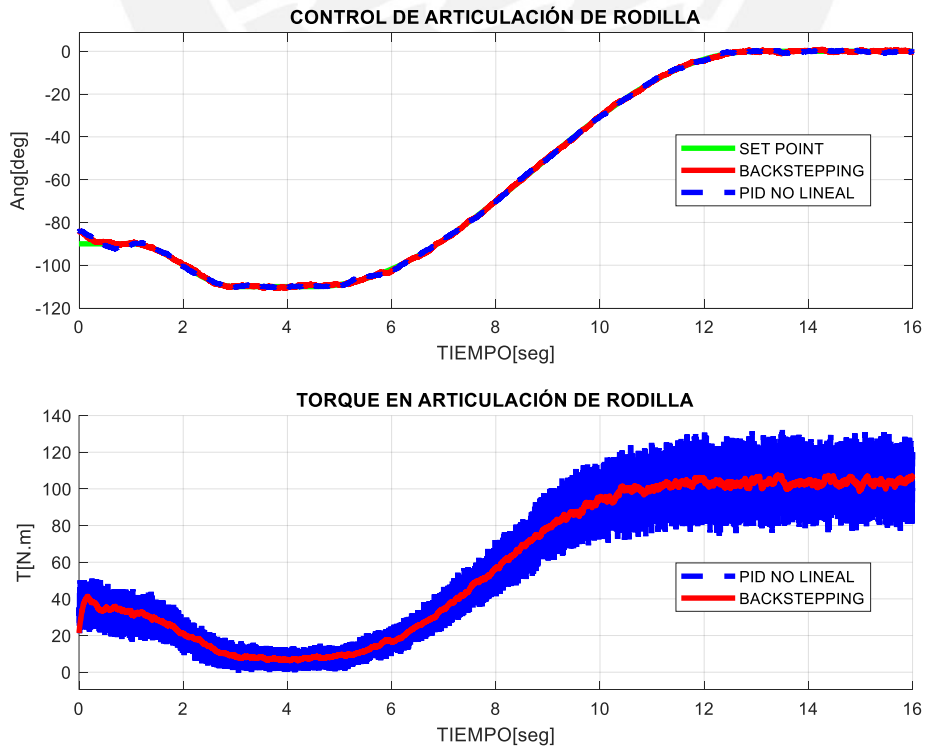


Figura 20 Respuestas de las señales de control para la articulación de la rodilla



Según se puede apreciar en las imágenes 18 a 21, ambos controladores funcionan correctamente, llevando la señal a un estado estacionario. Sin embargo, el torque desarrollado por ambos tiene una gran diferencia lo cual es especialmente notorio en el caso con ruido, se aprecia que en el caso del PID no lineal hay excesiva variación del torque lo que podría tener efectos indeseados en el actuador. Además, hay ciertas variaciones en las respuestas transitorias con respecto a los tiempos de control. Los tiempos de respuesta transitoria y estacionaria se analizan en la tabla 5 que se muestra a continuación.

Tabla 5. Análisis de los tiempos de respuestas

Control de articulación de la Cadera			
	t_{subida}	t_{pico}	$t_{estacionario}$
PID No Lineal (sin ruido):	0,29 segundos	0,775 segundos	1,8 segundos
PID No Lineal (con ruido) :	0,31 segundos	0,779 segundos	2 segundos
Backstepping (sin ruido):	0,25 segundos	–	0,6 segundos
Backstepping (con ruido) :	0,294 segundos	–	0,94 segundo
Control de articulación de la Rodilla			
	t_{subida}	t_{pico}	$t_{estacionario}$
PID No Lineal (sin ruido):	0,237 segundos	0,75 segundos	1,8 segundos
PID No Lineal (con ruido) :	0,262 segundos	0,79 segundos	1,85 segundos
Backstepping (sin ruido):	0,22 segundos	–	0,7 segundos
Backstepping (con ruido) :	0,25 segundos	–	1,0 segundos

Fuente: elaboración propia.

4.7.2 Respuestas de las señales de error (Movimiento de levantarse)

La señal de error en los sistemas de control son la diferencia entre la señal deseada o referencia y el valor medido. En esta sección se analizará gráficamente cómo es que dicha señal afecta en los controladores PID no lineal y Backstepping para llevar a cabo la acción de levantarse desde una silla para una persona.

En las figuras 22 y 23, que se muestran a continuación, se aprecian las señales de error para las posiciones angulares de la articulación de la cadera y la articulación de la rodilla respectivamente; además de las velocidades angulares en cada caso, para el caso de no ruido; y similarmente las figuras 24 y 25 para el caso con ruido.

Figura 21 Señales de error en las posiciones angulares de la articulación de la cadera, además de la señal de velocidad angular.

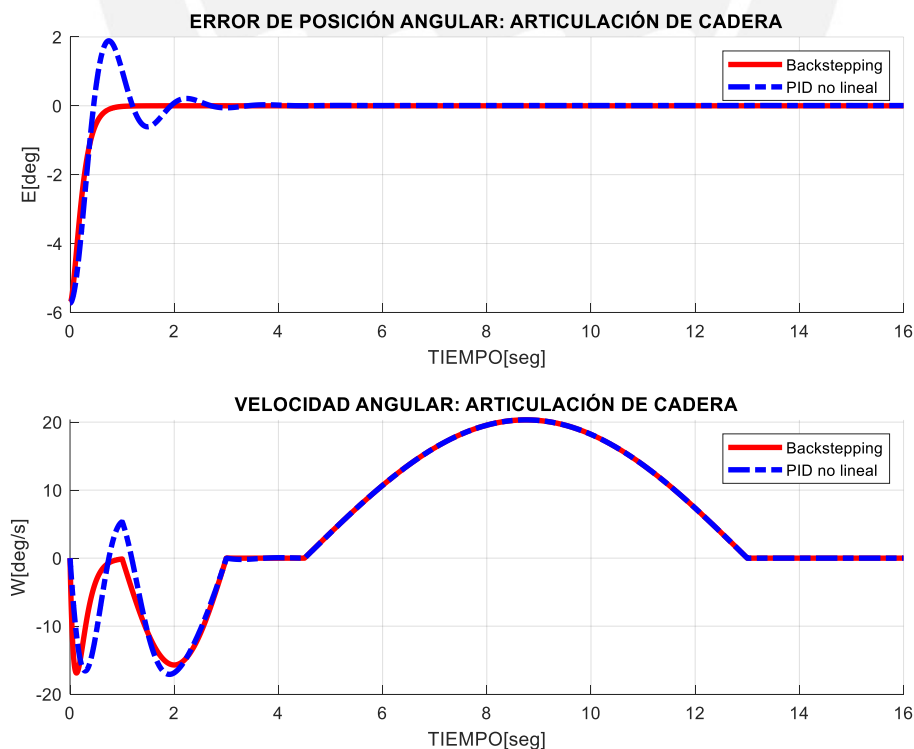


Figura 22 Señales de error en las posiciones angulares de la articulación de la rodilla, además de la señal de velocidad angular.

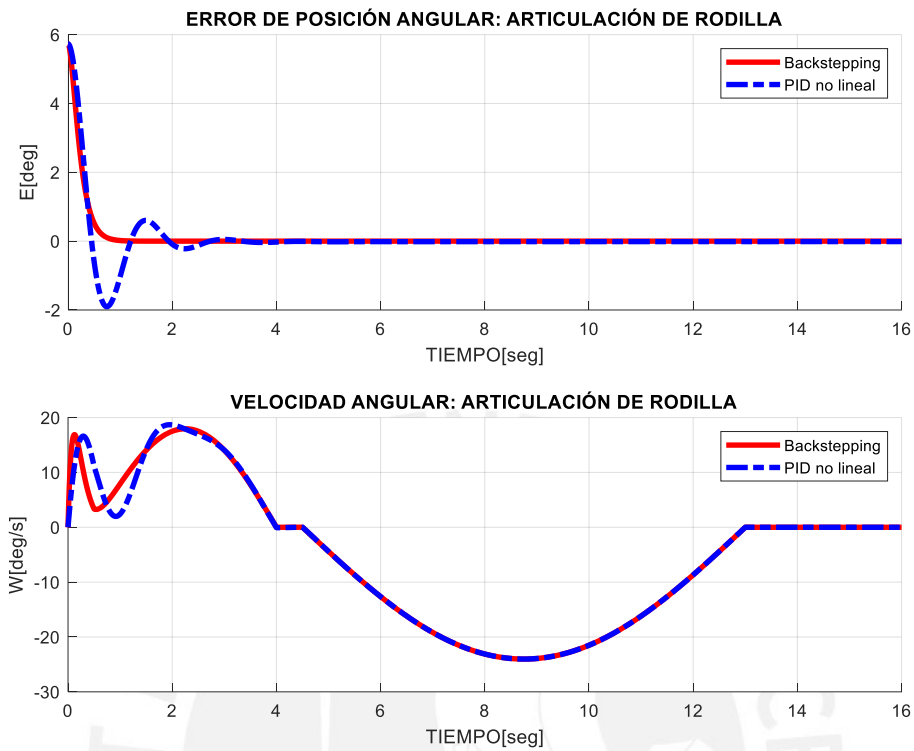


Figura 23 Señales de error en las posiciones angulares de la articulación de la cadera, además de la señal de velocidad angular

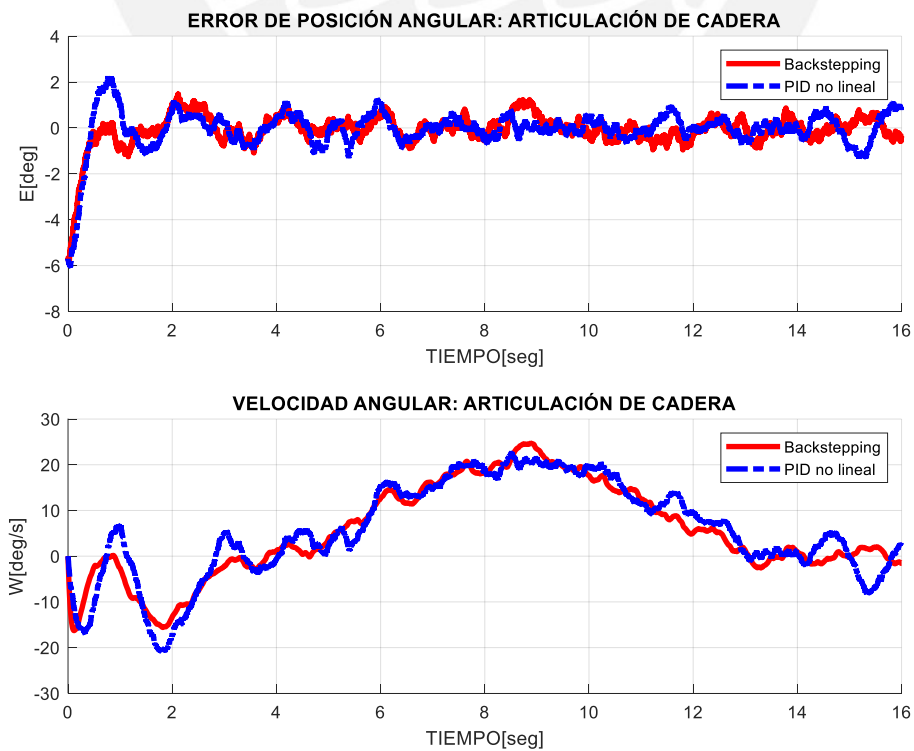
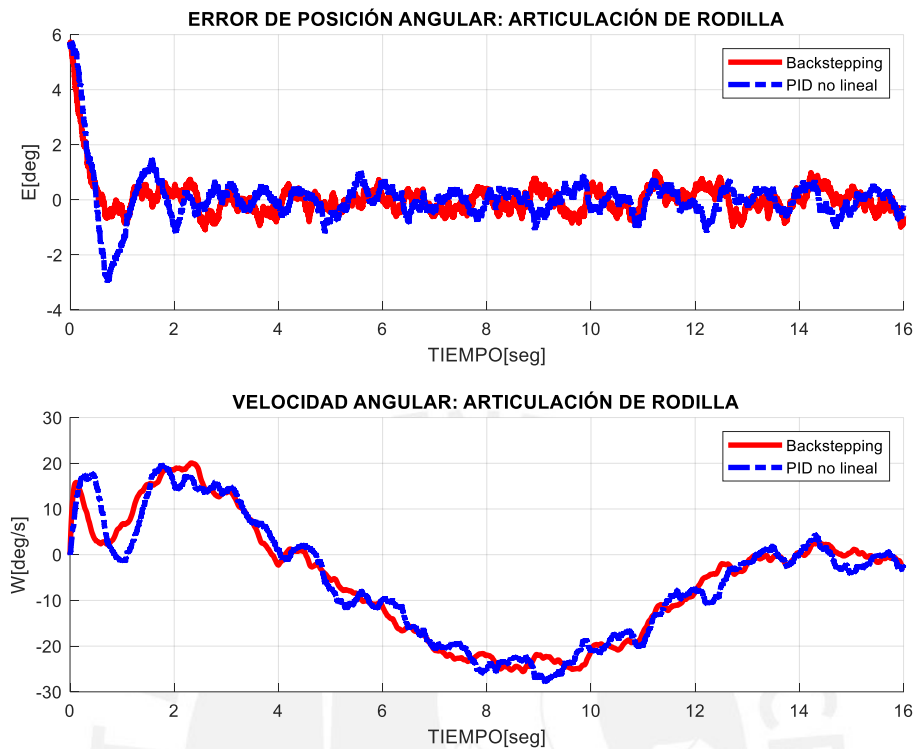


Figura 24 Señales de error en las posiciones angulares de la articulación de la rodilla, además de la señal de velocidad angular.



Según se observa en las figuras 24 y 25, el control por PID No Lineal presenta mayor oscilación que el controlador de Backstepping en cuanto a la señal de error, sin embargo, ambos controladores logran entrar en un estado estable. En las gráficas de velocidad se aprecia que tiene una respuesta más rápida para el caso del controlador Backstepping. Mientras que, en los gráficos con efecto de ruido se aprecia este afecta ambos aproximadamente de la misma manera.

Con respecto a los tiempos de respuesta, estos se analizan con mayor detalle en la tabla 6.

Tabla 6. Análisis de los tiempos de respuestas de la señal de error

Control de articulación de la Cadera				
	t_{subida}	t_{pico}	$t_{estacionario}$	$ e_{estacionario} $
PID No Lineal (sin ruido):	0,29 segundos	0,775 segundos	1,8 segundos	0
PID No Lineal (con ruido):	0,31 segundos	0,779 segundos	2 segundos	1
Backstepping (sin ruido):	0,25 segundos	–	0,6 segundos	0
Backstepping (con ruido):	0,294 segundos	–	0,94 segundo	1
Control de articulación de la Rodilla				
	t_{subida}	t_{pico}	$t_{estacionario}$	$ e_{estacionario} $
PID No Lineal (sin ruido):	0,237 segundos	0,75 segundos	1,8 segundos	0
PID No Lineal (con ruido):	0,262 segundos	0,79 segundos	1,85 segundos	1
Backstepping (sin ruido):	0,22 segundos	–	0,7 segundos	0
Backstepping (con ruido):	0,25 segundos	–	1,0 segundos	1

Fuente: elaboración propia.

Con la información de la tabla obtenida, se observa que el controlador Backstepping y el controlador PID no lineal logran llegar en el mismo tiempo de 0,424 segundos según la señal de error de la articulación de la cadera y en 0,422 segundos para la señal de error de la articulación de la rodilla. Sin embargo, el controlador Backstepping no presenta una señal pico pues se estabiliza al momento de llegar a la señal de referencia deseada al primer segundo tanto para la señal de error de la articulación de la cadera como para la señal de error de la articulación de la rodilla; mientras que el controlador PID no lineal demora 4 segundos en estabilizar la señal de error tanto para la articulación de la cadera como para la articulación de la rodilla.

4.7.3 Respuestas de las señales de control (Movimiento de sentarse)

Se muestran las siguientes señales de respuesta para el movimiento de sentarse, graficadas en la figura 26, para la señal de control en la cadera, y la figura 27 para la señal de control en la rodilla. Estas señales son comparadas con la señal deseada de la figura 13 (referencia) en reversa. De igual manera se presenta en las figuras 28 y 29 las gráficas para la señal de control en la cadera, y para la señal de control en la rodilla respectivamente, pero ensayando la medición con ruido.

Figura 25 Respuestas de las señales de control para la articulación de la cadera

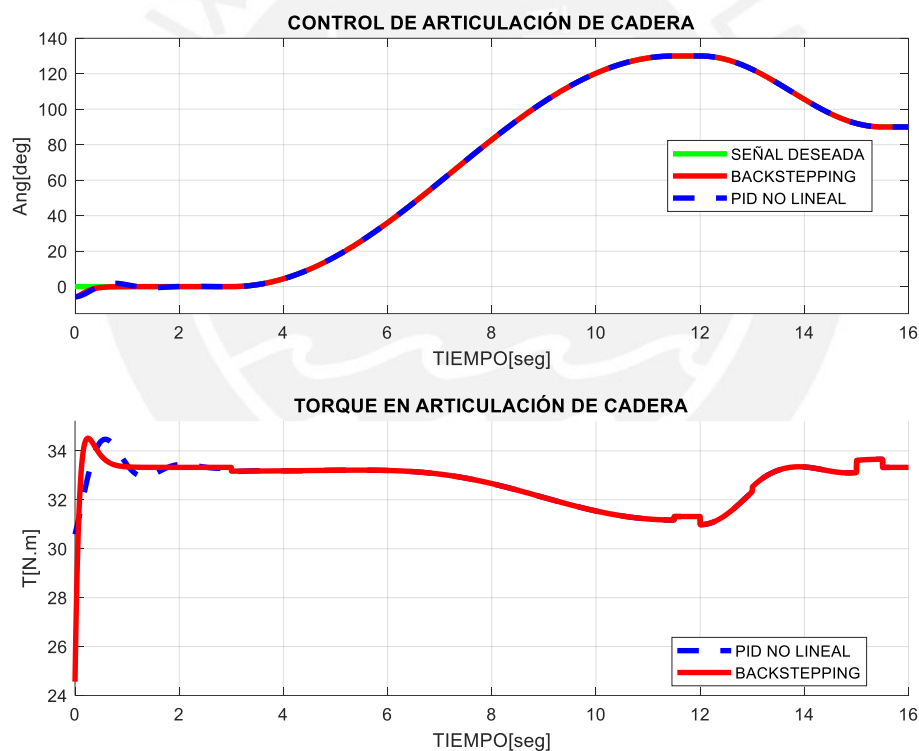


Figura 26 Respuestas de las señales de control para la articulación de la rodilla

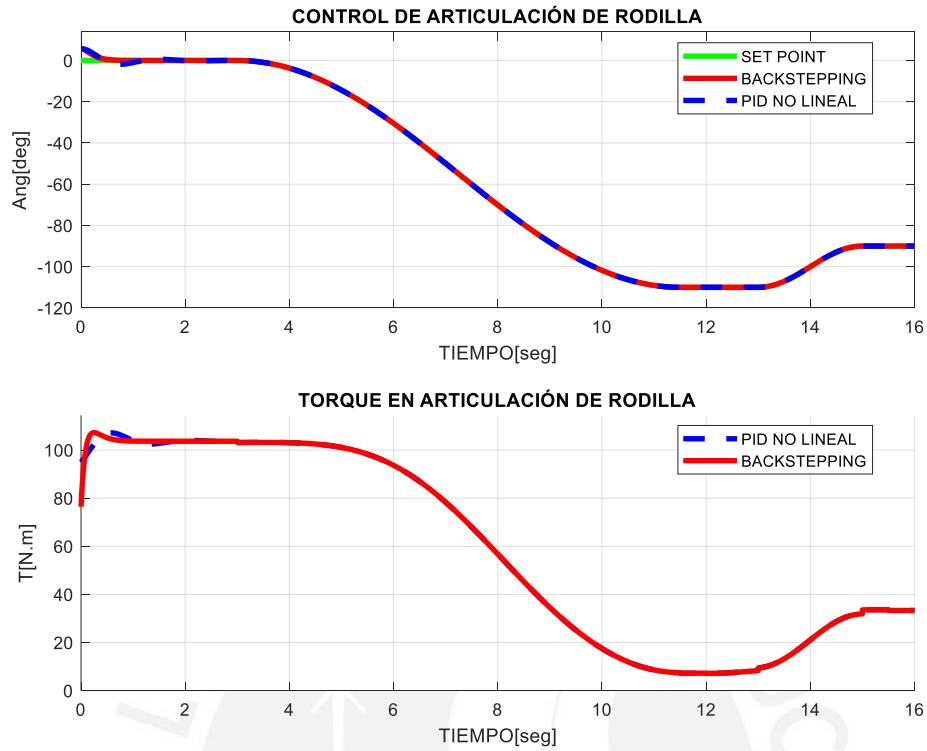


Figura 27 Respuestas de las señales de control para la articulación de la cadera

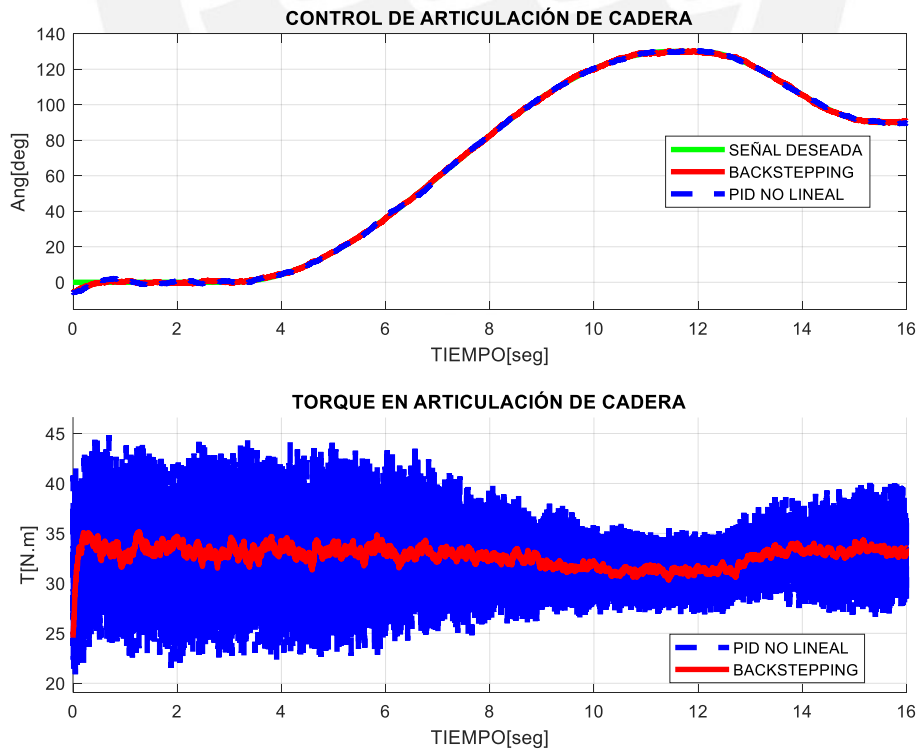
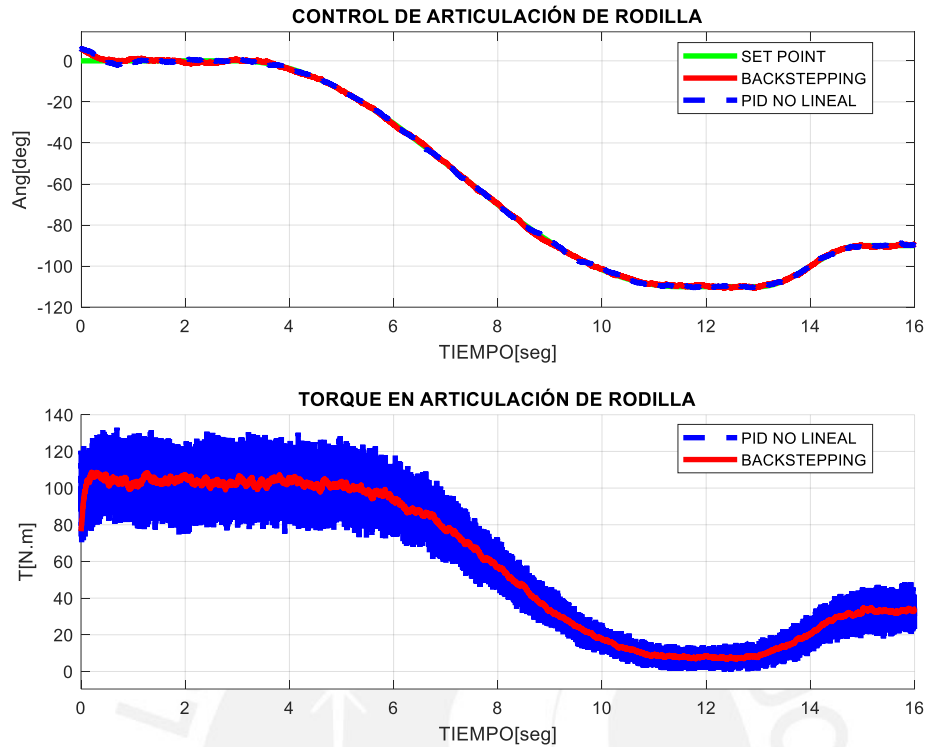


Figura 28 Respuestas de las señales de control para la articulación de la rodilla



Según se puede apreciar en las imágenes 26 a 29, ambos controladores funcionan correctamente, llevando la señal a un estado estacionario al igual que en el caso de movimiento previo. Sin embargo, nuevamente se aprecia que en el caso del PID no lineal hay excesiva variación del torque lo que de la misma manera podría tener efectos indeseados en el actuador. También se observa que el controlador backstepping no tiene oscilaciones al llegar a la referencia y por ende no tiene sobrepico, además su velocidad de respuesta es mayor. En la tabla 7 se presenta un resumen de los tiempos de respuesta encontrados.

Tabla 7. Análisis de los tiempos de respuestas

Control de articulación de la Cadera			
	t_{subida}	t_{pico}	$t_{estacionario}$
PID No Lineal (sin ruido):	0,337 segundos	0,708 segundos	2,1 segundos
PID No Lineal (con ruido):	0,31 segundos	0,817 segundos	2,1 segundos
Backstepping (sin ruido):	0,28 segundos	–	0,8 segundos
Backstepping (con ruido):	0,375 segundos	–	1,3 segundos
Control de articulación de la Rodilla			
	t_{subida}	t_{pico}	$t_{estacionario}$
PID No Lineal (sin ruido):	0,282 segundos	0,711 segundos	2.3 segundos
PID No Lineal (con ruido):	0,338 segundos	0,764 segundos	2,5 segundos
Backstepping (sin ruido):	0,28 segundos	–	0.8 segundos
Backstepping (con ruido):	0,307 segundos	–	1,0 segundos

Fuente: elaboración propia.

4.7.4 Respuestas de las señales de error (Movimiento de sentarse)

En las figuras 30 y 31, que se muestran a continuación, se aprecian las señales de error para las posiciones angulares de la articulación de la cadera y la articulación de la rodilla para el movimiento de sentarse, respectivamente; además de las velocidades angulares en cada caso, ambas para el caso de no ruido; y similarmente las figuras 32 y 33 para el caso con ruido.

Figura 29 Señales de error en las posiciones angulares de la articulación de la cadera, además de la señal de velocidad angular.

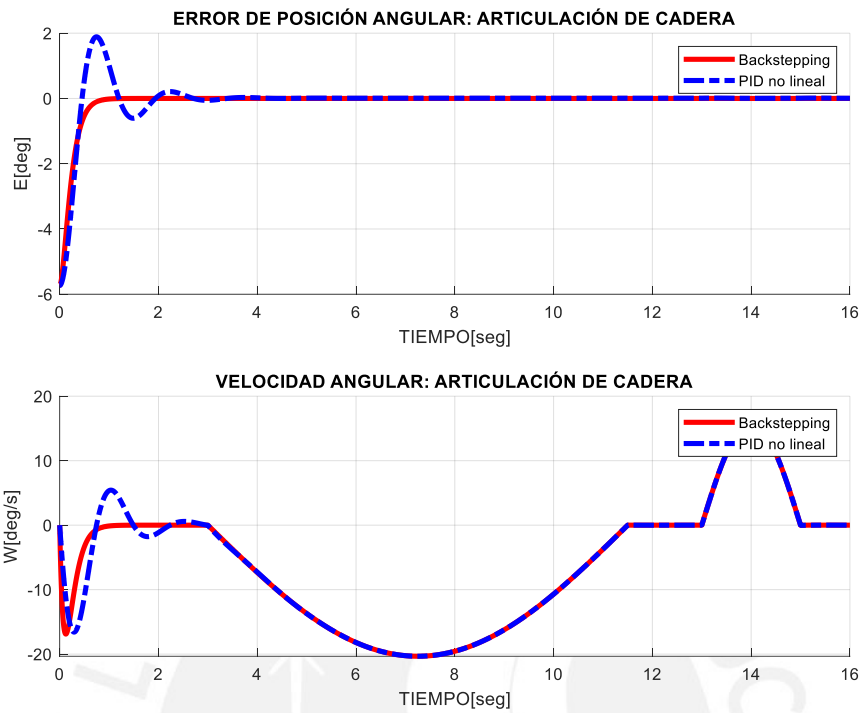


Figura 30 Señales de error en las posiciones angulares de la articulación de la rodilla, además de la señal de velocidad angular.

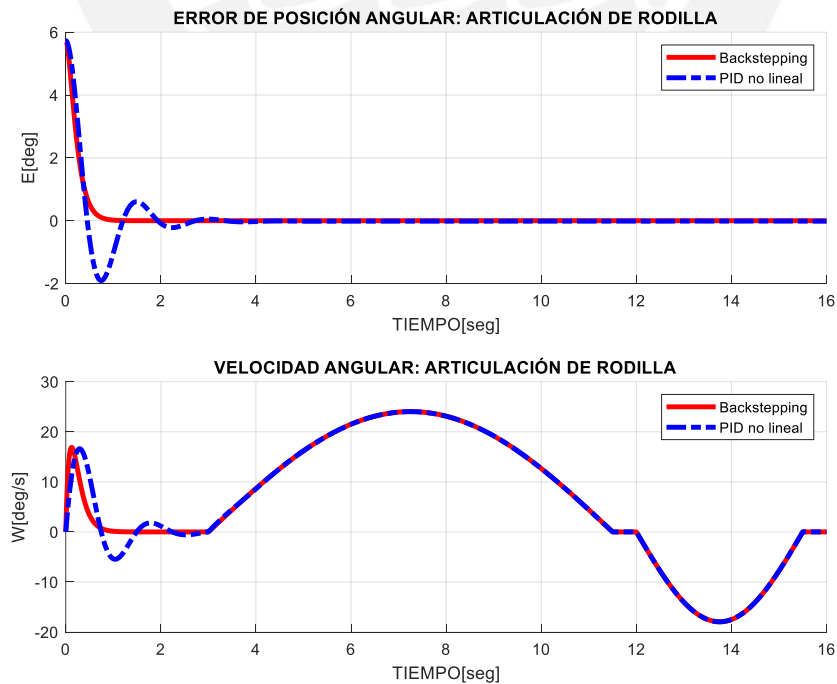


Figura 31 Señales de error en las posiciones angulares de la articulación de la cadera, además de la señal de velocidad angular.

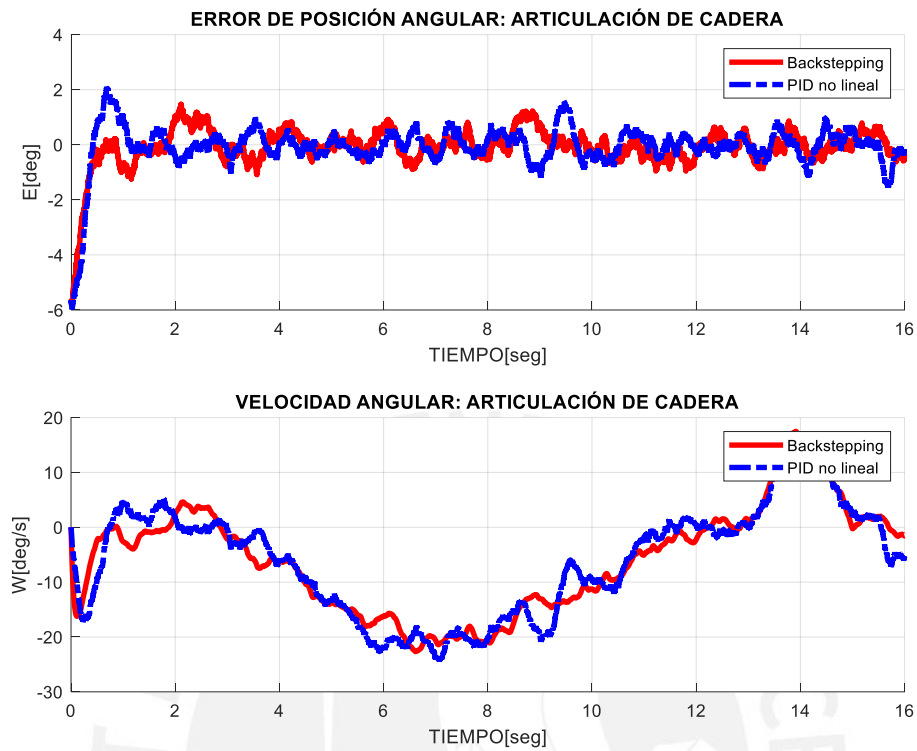
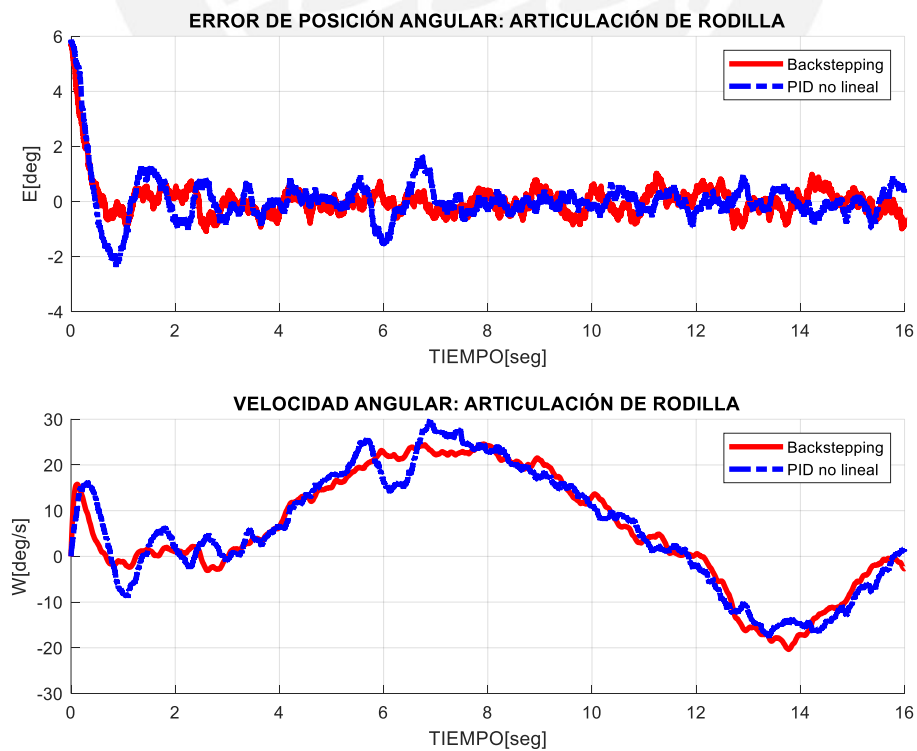


Figura 32 Señales de error en las posiciones angulares de la articulación de la rodilla, además de la señal de velocidad angular.



Según se observa en la figura 20, el control por PID No Lineal presenta mayor oscilación que el controlador de Backstepping en cuanto a la señal de error, y asimismo se aprecia que tiene una respuesta más rápida como se ve en las gráficas de velocidad. En los gráficos con efecto de ruido se aprecia este afecta ambos comportamientos por igual.

Sin embargo, ambos controladores logran entrar en un estado estable. Con respecto a los tiempos de respuesta, estos se analizan con mayor detalle en la tabla 8.

Tabla 8. Análisis de los tiempos de respuestas de la señal de error

Control de articulación de la Cadera				
	t_{subida}	t_{pico}	$t_{estacionario}$	$ e_{estacionario} $
PID No Lineal (sin ruido):	0,337 segundos	0,708 segundos	2,0 segundos	0
PID No Lineal (con ruido):	0,31 segundos	0,817 segundos	2,0 segundos	1
Backstepping (sin ruido):	0,28 segundos	–	0,8 segundos	0
Backstepping (con ruido):	0,375 segundos	–	1,3 segundos	1
Control de articulación de la Rodilla				
	t_{subida}	t_{pico}	$t_{estacionario}$	$ e_{estacionario} $
PID No Lineal (sin ruido):	0,282 segundos	0,711 segundos	2 segundos	0
PID No Lineal (con ruido):	0,338 segundos	0,764 segundos	2,5 segundos	1
Backstepping (sin ruido):	0,28 segundos	–	0.8 segundos	0
Backstepping (con ruido):	0,307 segundos	–	1,0 segundos	1

Fuente: elaboración propia.

Con la información de la tabla obtenida, se observa que el controlador Backstepping y el controlador PID no lineal logran llegar en el mismo tiempo de 0,424 segundos según la señal de error de la articulación de la cadera y en 0,422 segundos para la señal de error de la articulación de la rodilla. Sin embargo, el controlador Backstepping no presenta una señal pico pues se estabiliza al momento de llegar a

la señal de referencia deseada al primer segundo tanto para la señal de error de la articulación de la cadera como para la señal de error de la articulación de la cadera; mientras que el controlador PID no lineal demora 4 segundos en estabilizar la señal de error tanto para la articulación de la cadera como para la articulación de la rodilla.

4.8 Análisis del error medido

Dentro del estudio presentado, se está considerando analizar el error entre las señales de los controladores y las señales de referencia. Anteriormente se desarrolló el análisis de las señales de error, pero en esta sección se estudiará mediante cálculos la medición del error usando las herramientas de: error absoluto medio y error cuadrático medio (MAE y RMSE, por sus siglas en inglés).

4.8.1 Error absoluto medio (MAE)

Es el valor medio de las diferencias absolutas entre el valor real y el valor previsto por el modelo. Se calcula mediante la fórmula 4.39 que se muestra a continuación:

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y_i - \hat{y}_i| \quad 4.33$$

Donde:

- N = número total de datos.
- y_i = valor real, \hat{y}_i = valor previsto

Según la fórmula mencionada anteriormente, se consideraron los datos de la programación en MatLab para los controladores PID no Lineal y Backstepping. Los resultados se muestran en la tabla 9.

Tabla 9 Cálculo del Error Absoluto Medio (MAE)

	Controlador PID no lineal (sin ruido)	Controlador PID no lineal (con ruido)	Controlador Backstepping (sin ruido)	Controlador Backstepping (con ruido)
Cadera (levantarse)	0.1802	0.4101	0.0896	0.3533
Cadera (sentarse)	0.1801	0.4588	0.0896	0.3721
Rodilla (levantarse)	0.1856	0.4688	0.0896	0.3769
Rodilla (sentarse)	0.1857	0.4617	0.0896	0.3728

Fuente: elaboración propia.

Con respecto a la medición del error con la fórmula del Error Absoluto Medio (MAE), tomando en cuenta el caso sin ruido, el controlador PID no lineal presenta un error de 0.1802 - 0.1801 para el control de la cadera y 0.1856 - 0.1857 para el control de la rodilla, mientras que el controlador Backstepping presenta un error de 0.0896 - 0.0896 para el control de la cadera y un error de 0.0896 - 0.0896 para el control de la rodilla. Por tanto, en ambos movimientos de control de la cadera y rodilla, el controlador Backstepping presenta un error considerablemente menor al del PID no lineal cuando no se tiene ruido.

Por otro lado, tomando en cuenta el caso con ruido, el controlador PID no lineal presenta un error de 0.4101 - 0.4588 para el control de la cadera y 0.4688 - 0.4617 para el control de la rodilla, mientras que el controlador Backstepping presenta un error de 0.3533 - 0.3721 para el control de la cadera y un error de 0.3769 - 0.3728 para el control de la rodilla. Luego, en ambos movimientos de control de la cadera y rodilla, el controlador Backstepping presenta un error un poco menor al del PID no lineal cuando se tiene ruido, lo

que demuestra que el ruido afecta en mayor medida al primero, pero aun así tiene un rendimiento superior en media para errores.

4.8.2 Error cuadrático medio (RMSE)

Es la raíz de la diferencia cuadrática media entre el valor real y el valor previsto. Se describe mediante la ecuación 4.40

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2} \quad 4.34$$

Donde:

- n = número total de puntos de datos
- y_i = valor real, \hat{y}_i = valor previsto

Según la fórmula mencionada anteriormente, se consideraron los datos de la programación en MatLab para los controladores PID no Lineal y Backstepping. Los resultados se muestran en la tabla 10.

Tabla 10 Cálculo del Error Medio Cuadrático (RMSE)

	Controlador PID no lineal (sin ruido)	Controlador PID no lineal (con ruido)	Controlador Backstepping (sin ruido)	Controlador Backstepping (con ruido)
Cadera (levantarse)	0.7049	0.7849	0.5657	0.6440
Cadera (sentarse)	0.7048	0.8414	0.5657	0.6343
Rodilla (levantarse)	0.7058	0.7816	0.5657	0.6719
Rodilla (sentarse)	0.7060	0.7693	0.5657	0.6324

Fuente: elaboración propia.

Con respecto a la medición del error con la fórmula del Error Medio Cuadrático (RMSE), tomando en cuenta el caso sin ruido, el controlador PID no lineal presenta un error cuadrático de 0.7049 - 0.7048 para el control de la

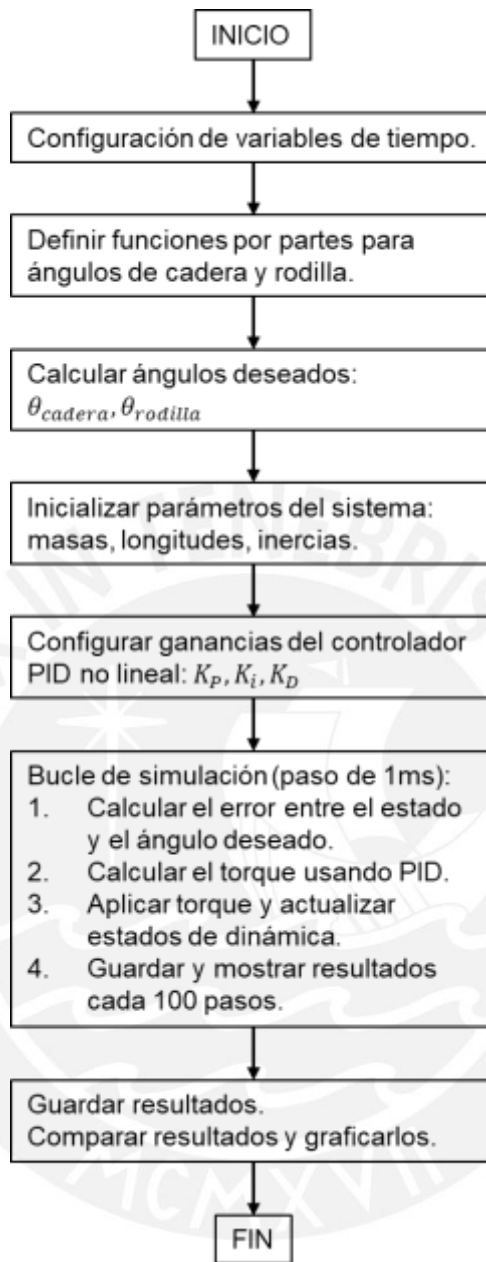
cadera y 0.7058 - 0.7060 para el control de la rodilla, mientras que el controlador Backstepping presenta un error de 0.5657 - 0.5657 para el control de la cadera y un error de 0.5057 - 0.5057 para el control de la rodilla. Por tanto, en ambos movimientos de control de la cadera y rodilla, el controlador Backstepping presenta un error menor al del PID no lineal cuando no se tiene ruido, en este caso las diferencias mayores (penalizadas por el RMSE) están en la zona transitoria.

Por otro lado, tomando en cuenta el caso con ruido, el controlador PID no lineal presenta un error de 0.7849 - 0.8414 para el control de la cadera y 0.7816 - 0.7693 para el control de la rodilla, mientras que el controlador Backstepping presenta un error de 0.6440 - 0.6343 para el control de la cadera y un error de 0.6719 - 0.6324 para el control de la rodilla. Luego, en ambos movimientos de control de la cadera y rodilla, el controlador Backstepping presenta un error RMSE menor al del PID no lineal cuando se tiene ruido, lo cual nuevamente demuestra que el ruido afecta ligeramente más al primero, aunque igualmente este tiene un rendimiento superior.

4.9 Programación de controladores PID no lineal y Backstepping

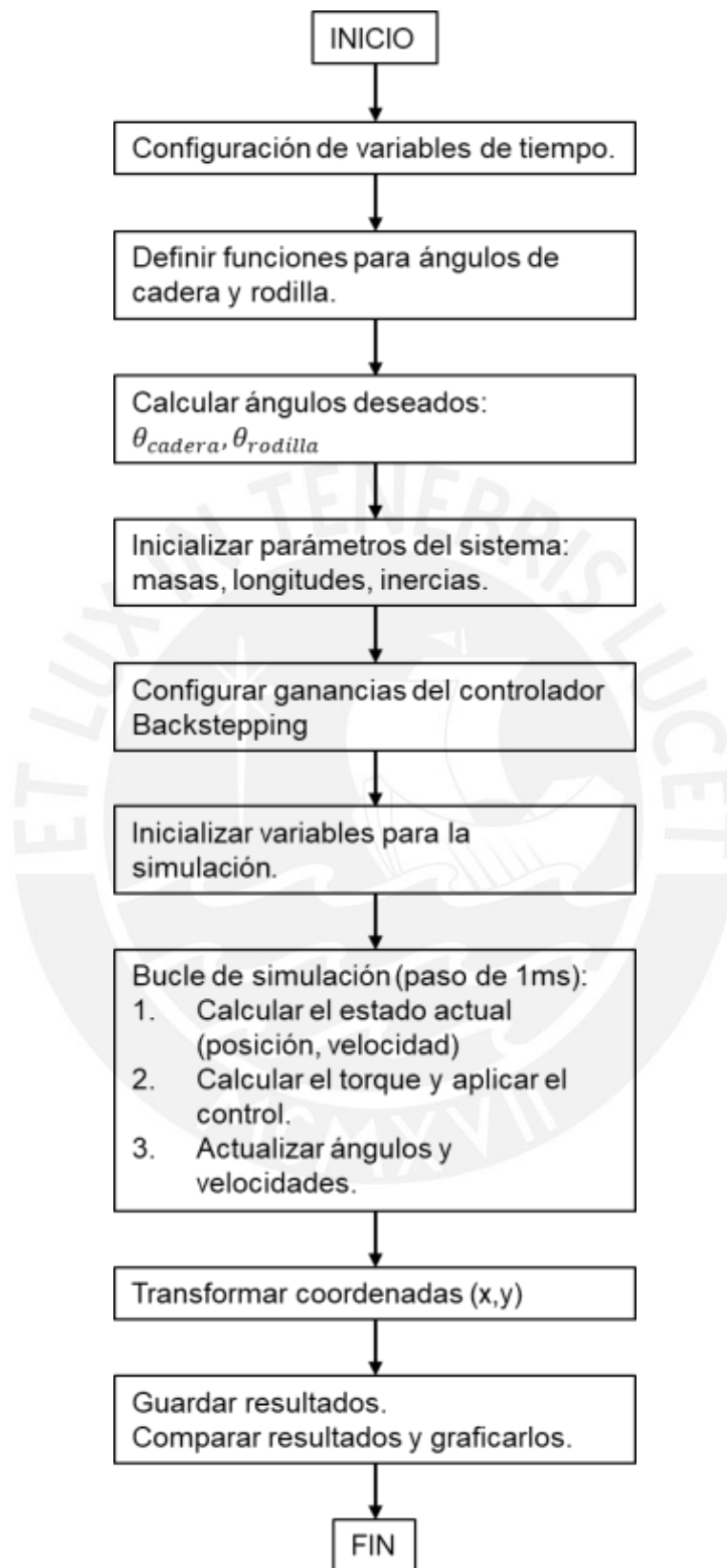
Los controladores no lineales se diseñaron en el software MatLab, esto debido a los cálculos complejos que requieren y la versatilidad del software. A continuación, se muestran los diagramas de bloques de la programación de cada uno.

Figura 33 Diagrama de bloques de la programación del controlador PID no lineal



Fuente: elaboración propia.

Figura 34 Diagrama de bloques de la programación del controlador Backstepping



Fuente: elaboración propia.

4.10 Conclusiones

En el presente capítulo se desarrollaron los controladores no lineales PID y Backstepping para el control del movimiento de levantarse desde una silla, siendo este un sistema no lineal con dos grados de libertad. Luego de analizar las respuestas de control, se concluye lo siguiente:

- En el control de articulación de **cadera**, se observa que el controlador PID no lineal se estabiliza a los 2.0 segundos y el controlador Backstepping se estabiliza luego de 0.6 segundos, aproximadamente para ambos movimientos de **levantarse-sentarse**.
- En el control de la articulación de la **rodilla**, se observa que el controlador PID no lineal se estabiliza a los 2.3 segundos y el controlador Backstepping se estabiliza luego de 0.8 segundos, aproximadamente para ambos movimientos de **levantarse-sentarse**.
- Cuando se considera ruido gaussiano con media 0 y desviación estándar de 0.001 rad. En el control de articulación de **cadera**, se observa que el controlador PID no lineal se estabiliza a los 2.1 segundos y el controlador Backstepping se estabiliza luego de 0.9 segundo, para el movimiento de **levantarse**, asimismo el controlador PID no lineal se estabiliza a los 2.3 segundos y el controlador Backstepping se estabiliza luego de 1.0 segundo para el movimiento de **sentarse**.
- Cuando se considera ruido gaussiano con media 0 y desviación estándar de 0.001 rad. En el control de articulación de **rodilla**, se observa que el controlador PID no lineal se estabiliza a los 2.3 segundos y el controlador Backstepping se estabiliza luego de 1 segundo, para el movimiento de **levantarse**, asimismo el

controlador PID no lineal se estabiliza a los 2.5 segundos y el controlador Backstepping se estabiliza luego de 1 segundo para el movimiento de **sentarse**.

- El controlador PID, tanto en el control de la cadera como en el control de la rodilla, presenta oscilación y además presenta picos en sus respuestas de control, mientras que el controlador Backstepping se mantiene estable una vez alcanzado la señal de referencia. Asimismo, en la señal de error de la posición angular de la cadera y rodilla se observa que el controlador Backstepping no presenta perturbación y alcanza un movimiento estable en ambos casos para tiempos menores a 1 segundo; por otro lado, el controlador PID No Lineal, presenta perturbaciones y se estabiliza en aproximadamente 2 segundos.
- La señal de control desarrollada por el controlador Backstepping tuvo menos variaciones que la desarrollada por el controlador PID no lineal, esto es especialmente notable en el caso de existir ruido en la medición, donde se aprecia que la señal de control para el segundo caso presenta oscilaciones constantes que podrían tener efectos indeseados en el actuador.
- Con respecto a las mediciones del error con las herramientas MAE y RMSE, se observa que el controlador Backstepping presenta menor error en comparación al controlador PID no lineal, tanto para el control del ángulo de la cadera, como para el control del ángulo de la rodilla. La mayor diferencia se da para MAE en el caso sin ruido donde el PID no lineal obtiene en promedio 0.1825, mientras que Backstepping obtiene 0.0896. La diferencia en MAE en caso del ruido se reduce considerablemente, ya que el PID no lineal obtiene en promedio aproximadamente 0.44 y Backstepping obtiene en promedio

aproximadamente 0.37. En el caso de RMSE donde se penalizan mas las mayores diferencias se tuvo un efecto menor ya que sin ruido el Controlador PID no lineal obtuvo 0.70 en promedio aproximadamente, mientras que el controlador Backstepping obtuvo 0.5657 en promedio, luego, con el ruido las diferencias se redujeron sólo ligeramente, ya que el PID no lineal obtuvo en promedio aproximadamente 0.785 y el Backstepping en promedio aproximadamente 0.65.



Capítulo V. Propuesta de implementación

5.1 Introducción

Al haber verificado que los controladores no lineales propuestos funcionan correctamente, reduciendo el error al mínimo en el estado estacionario, el paso que sigue es el de proponer una implementación orientada a la construcción de un prototipo. En el presente capítulo se aborda la propuesta para elaborar un exoesqueleto de piernas que permita realizar la acción de levantarse desde una silla para una persona de estatura y peso promedio. En tal sentido, se muestran los componentes mecánicos, actuadores y sensores necesarios para poder llevar a cabo la tarea mencionada, sin embargo, el usuario es libre de reconsiderar las opciones mostradas.

5.2 Diagrama de bloques del sistema de control y descripción general del exoesqueleto

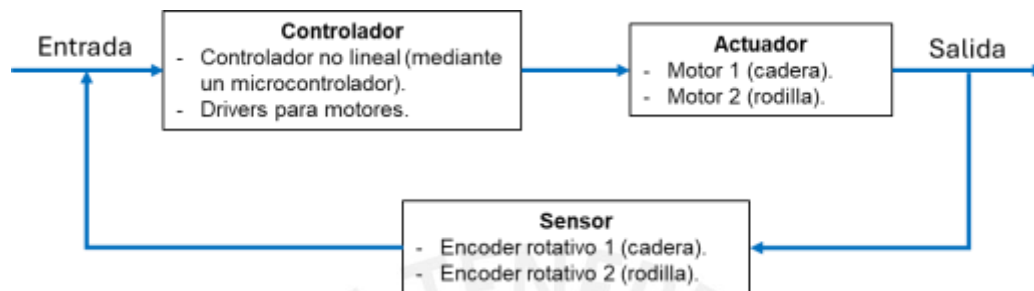
En la figura 35, se muestra el diagrama de bloques del sistema de control. En este diagrama se observa que existen tres partes o elementos:

Controlador: en el cual se colocará el controlador diseñado, ya sea el PID no lineal o el controlador Backstepping, cuya tarea será manejar el sistema y llevarlo a su posición deseada.

Actuadores: aquí es donde se colocarán los motores DC para realizar el movimiento de rotación que simula el movimiento realizado por la rodilla y otro motor para la cadera. En este caso, se recomienda utilizar 2 motores para las rodillas y 2 motores para la cadera, ubicados uno a cada lado, para lograr un movimiento con menor potencia.

Sensor: en este caso se opta por usar encoders rotativos absolutos, uno para medir la rotación angular producida por el motor de la rodilla y otro encoder para medir la rotación angular producida por el motor de la cadera.

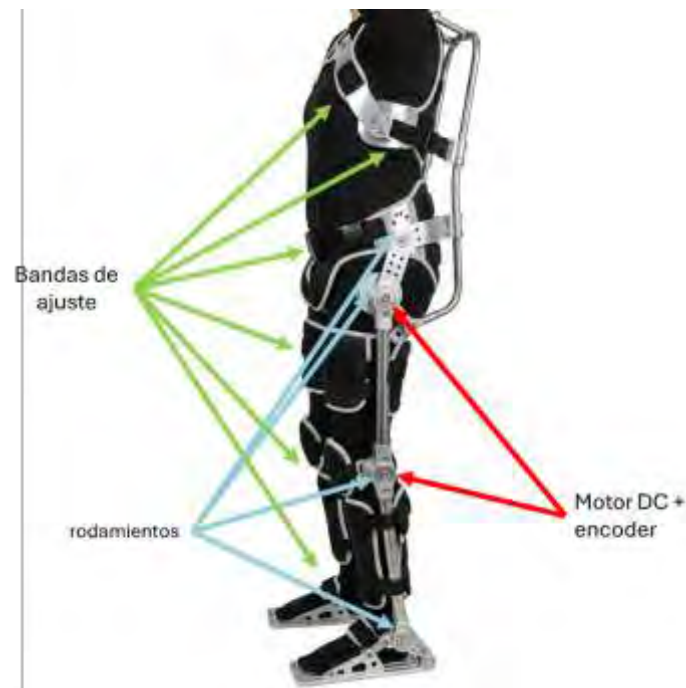
Figura 35 Diagrama de bloques del sistema de control



Fuente: elaboración propia.

En la figura 36 se muestra el modelo propuesto del exoesqueleto de piernas, el cual consta de un cuerpo metálico con uniones compuestas por bisagras, los cuales permiten un movimiento más flexible, bandas elásticas y cintas ajustables. Este modelo fue elaborado con Google (Gemini IA, 2025), en donde se le dio una descripción detallada de la forma que debe tener la estructura del exoesqueleto y los componentes que debe incluir, así como también indicarle que debe contener un soporte para la espalda, ya que ese se considera como un eslabón más en el desarrollo de los controladores y que a su vez sirve de apoyo para sujetar casi completamente el cuerpo de la persona que realiza la acción de levantarse desde la silla.

Figura 36 Prototipo propuesto para el exoesqueleto de piernas



Fuente: elaboración propia, adaptado de Google (Gemini IA, 2025)

Según se observa en la figura 37, la estructura metálica presenta varias intersecciones que serán conectadas mediante bisagras y rodamientos, permitiendo así tener un movimiento más libre articulado y cómodo al usuario. Por otro lado, se observa que en la altura de las rodillas están los encoders y motores, los cuales se encargarán de la acción del movimiento, del mismo modo, en la cadera deberá haber un nuevo par de encoder y motor. Del mismo modo como se mencionó anteriormente, se recomienda que existan dos motores con encoders (uno para cada rodilla) y dos motores con encoders en la cadera (uno en el lado izquierdo y otro en el lado derecho), esto con el objetivo de reducir el esfuerzo realizado por cada motor.

5.3 Componentes mecánicos (Componentes de la estructura mecánica)

Los componentes mecánicos que se describen son:

- **Estructura metálica:** aluminio.

La estructura metálica se recomienda que sea de aluminio debido a sus propiedades de resistencia y funcionalidad. En la tabla siguiente se describen tipos de aleaciones de aluminio de la serie 6000 en comparación a otros y similares, cuya información fue obtenida gracias a la página Wellste (visitado en diciembre del 2024).

Tabla 11 Aleaciones de aluminio de la serie 6000 con otras similares

Propiedad	6061 (T4, T6)	6063 (T4, T6)	5052 (H32, H34, H38)	7075 (T4, T6, T73)
Resistencia a la tracción (psi)	29 000 – 33 000	21 000 – 25 000	25 000 – 32 000	88 000 – 95 000
Límite elástico (psi)	25 000 – 28 000	16 000 – 22 000	16 000 – 25 000	75 000 – 85 000
Elongación (%)	18 – 25	25 – 35	30 – 40	10 – 14
Dureza	65 – 85	50 – 70	50 – 65	130 – 150
Maquinabilidad	Medio	Alto	Alto	Alto
Soldabilidad	Medio	Alto	Alto	Alto
Aplicaciones	Aeronave, automotriz, marina	Extrusión, arquitectónico, chapa metálica	Eléctrica, arquitectónica, alimentaria	Componentes aeroespaciales y deportivos

Fuente: elaboración propia

Según la tabla mostrada, se recomienda utilizar el aluminio 6061, el cual satisface las necesidades de construcción, fortaleza y resistencia del exoesqueleto de piernas; considerar un aluminio de denominación distinta (según la tabla 11) significaría mayor gasto y para los cuales las aplicaciones están por encima de las necesarias para el objetivo de construcción requeridas.

- **Bisagras y articulaciones o rodamientos:** para las uniones de las rodillas y cadera.
- **Bandas de ajuste:** las cuales podrían ser de velcro o similar, y servirán para sujetar las piernas y mantenerlas firmes al exoesqueleto.

5.4 Componentes electrónicos

Los componentes electrónicos necesarios, como mínimo, deben ser:

- **Controladores:** se recomienda utilizar un microcontrolador de la empresa STMicroelectronics que posee una gran variedad de microcontroladores de la familia STM32; o también un microcontrolador de la empresa Texas Instruments con sus microcontroladores de la familia MSP430. A continuación, detallaré a grandes rasgos ambos microcontroladores con sus características generales, la información se encuentra en la tabla 12.

Tabla 12 Características generales de los microcontroladores STM32 y SMP430

	STM32	MSP430
Arquitectura	<ul style="list-style-type: none"> • Basados en ARM Cortex-M (Cortex-M0, M3, M4, M7, M33, etc.) • 32 bits de ancho de palabra. 	<ul style="list-style-type: none"> • Basados en una arquitectura RISC de 16 bits. • Diseño simple y eficiente orientado a bajo consumo.
Rendimiento	<ul style="list-style-type: none"> • Ofrecen altas velocidades de procesamiento (hasta 550 MHz en los modelos más potentes). • Capacidad de realizar operaciones en coma flotante y procesamiento DSP (en Cortex-M4/M7). 	<ul style="list-style-type: none"> • Velocidades moderadas, típicamente entre 8 MHz y 25 MHz. • Optimizado para tareas simples con bajo requerimiento de procesamiento.
Familias	<ul style="list-style-type: none"> • STM32F: Rendimiento general. • STM32L: Ultra bajo consumo. • STM32H: Alto rendimiento. • STM32G: Rendimiento equilibrado y bajo costo. • STM32W: Conectividad inalámbrica integrada. 	<ul style="list-style-type: none"> • MSP430G2: Básicos y económicos. • MSP430FR: Incluye memoria FRAM para mayor eficiencia energética.
Memoria	<ul style="list-style-type: none"> • Memoria flash integrada y SRAM. • Opciones de memoria externa a través de buses como QSPI. 	<ul style="list-style-type: none"> • Flash y SRAM integrados con capacidades típicas entre 2 KB y 128 KB. • Opciones de memoria FRAM (Ferroelectric RAM) en series avanzadas
Periféricos integrados	<ul style="list-style-type: none"> • Timers avanzados (PWM, captura, etc.). 	<ul style="list-style-type: none"> • ADCs de baja resolución (generalmente de 10 o 12 bits).

	<ul style="list-style-type: none"> • ADCs y DACs de alta resolución. • Interfaces de comunicación: I2C, SPI, UART, CAN, USB, Ethernet, etc. • GPIOs configurables con interrupciones. 	<ul style="list-style-type: none"> • Timers flexibles (PWM y captura/compare). • Interfaces de comunicación: SPI, I2C, UART. • GPIOs configurables con capacidades de interrupción.
Consumo de Energía	<ul style="list-style-type: none"> • Optimización para bajo consumo con modos Sleep, Stop y Standby. • La serie STM32L es específica para aplicaciones de bajo consumo. 	<ul style="list-style-type: none"> • Modos de ahorro de energía: LPM0 a LPM4 (Low Power Modes). • Consumo en standby puede ser de apenas < 1 μA. • Rápido tiempo de despertar (< 1 μs).
Aplicaciones comunes	<ul style="list-style-type: none"> • Sistemas embebidos de alto rendimiento. • Control de motores, automatización industrial, IoT, dispositivos médicos y multimedia. 	<ul style="list-style-type: none"> • Dispositivos alimentados por baterías (medidores de energía, relojes, sensores). • Aplicaciones de IoT simples y portátiles. • Control de dispositivos y mediciones.
Herramientas de desarrollo	<ul style="list-style-type: none"> • STM32CubeIDE, STM32CubeMX (configuración de periféricos y generación de código). • Soporte amplio con bibliotecas HAL y LL. 	<ul style="list-style-type: none"> • Code Composer Studio (CCS). • Bibliotecas DriverLib para facilitar el desarrollo

Fuente: elaboración propia. Adaptado de la información de las páginas web:

- **Sensores:** encoders, para medir el movimiento angular que realiza el exoesqueleto; IMU (Unidad de Medición Inercial), para monitorear la inclinación del cuerpo.

Encoders: son sensores que envían una señal digital o analógica como respuesta a un movimiento, el cual puede ser lineal o rotativo. En la tabla 13 se muestra un resumen de los tipos de encoders.

Tabla 13 Clasificación de los tipos de encoders

1. Tipo de movimiento	a. Lineal	Miden desplazamientos en línea recta. Ejemplo: CNC, impresoras 3D.
	b. Rotativo	Miden la rotación en un eje, usados en motores, actuadores y sistemas de movimiento angular.
2. Modo de operación	a. Incrementales	Producen pulsos a medida que el eje o componente se mueve. Solo indican cambios relativos de posición. Requieren un punto de referencia para determinar una posición absoluta.
	b. Absolutos	Cada posición tiene un valor único, incluso después de apagar y encender el sistema. Proporcionan información precisa de posición en todo momento.

3. Según el método del sensor	a. Ópticos	Utilizan un disco con patrones transparentes y opacos iluminados por un LED, un sensor detecta los cambios en la luz para generar pulsos.
	b. Magnéticos	Detectan cambios en el campo magnético mediante sensores Hall o magnetorresistivos.
	c. Inductivos	Usan cambios en campos electromagnéticos para medir movimiento
	d. Capacitivos	Detectan cambios en la capacitancia entre placas mientras el encoder se mueve.
4. Según el tipo de señal	a. Digitales	Generan pulsos o códigos binario.
	b. Analógicos	Generan señales proporcionales, como voltaje o corriente.

Fuente: Elaboración propia.

Para nuestro propósito, el cual consiste en proponer un prototipo de exoesqueleto de piernas, se sugiere utilizar un encoder rotativo absoluto, ya que necesitamos tener con precisión el ángulo de rotación para las rodillas y cadera. El encoder recomendado es el AS5600, cuya información se detalla a continuación:

- **Resolución:** 12 bits
- **Alimentación:** 3.3V
- **Salida:** I2C, PWM y analógica
- **Dimensiones:** 23x23mm
- **Montaje:** Se monta utilizando 4 agujeros ubicados a una distancia de 17mm entre sí.
- **Usos comunes:** Control de posición y velocidad en motores, sistemas de navegación, control de servomotores, automatización industrial, instrumentación de laboratorio y sistemas de control de juegos y simuladores.
- **Drivers:** necesarios para el control de los motores, estos pueden ser variados según las aplicaciones, potencias y requerimientos de los motores.

En la tabla 14 que se muestra a continuación, se detallan algunos drivers recomendados encontrados en las diversas plataformas.

Tabla 14 Drivers recomendados y sus características

Drivers	Características	Ventajas	Aplicación
Pololu G2 18v17 (Puente H)	<ul style="list-style-type: none"> • Corriente continua: 17A. • Voltaje: 6.5V a 30V. • Protección contra sobrecalentamiento y sobrecorriente. 	<ul style="list-style-type: none"> • Compacto y eficiente para motores de corriente continua (DC), como actuadores lineales. • Fácil integración con Arduino y otros microcontroladores. 	Control de actuadores lineales a 12V.
BTS7960	<ul style="list-style-type: none"> • Corriente máxima: 43A. • Voltaje: 6V a 27V. • Doble puente H integrado para controlar motores DC. 	<ul style="list-style-type: none"> • Ideal para motores de alto consumo de corriente, como actuadores robustos. • Control PWM eficiente y pines fáciles de conectar a microcontroladores. 	Recomendado para actuadores que requieran mayor potencia y torque.
L298N	<ul style="list-style-type: none"> • Corriente: 2A por canal (máximo). • Voltaje: 5V a 35V. 	<ul style="list-style-type: none"> • Bajo costo y fácil de usar para prototipos. • Incluye dos canales (puede controlar dos actuadores simultáneamente). 	Adecuado solo para pruebas de actuadores de baja corriente.
DRV8871	<ul style="list-style-type: none"> • Corriente: 3.6A pico. • Voltaje: 6.5V a 45V. • Compatible con control PWM. 	<ul style="list-style-type: none"> • Diseño compacto y eficiente. • Protecciones integradas contra sobrecorriente y sobrecalentamiento. 	Actuadores lineales pequeños a medianos, controlados con Arduino.
VNH5019	<ul style="list-style-type: none"> • Corriente: 12A continua por canal. • Voltaje: 5.5V a 24V. • Control PWM de alta resolución. 	<ul style="list-style-type: none"> • Control preciso y eficiente para motores DC. • Función de freno y dirección integrada. 	Actuadores duales o sistemas con dos grados de libertad (cadera y rodilla).

Fuente: Elaboración propia.

Según la información mostrada en la tabla 12, se recomienda utilizar L298N para pruebas iniciales de control, sin embargo, cuando se requieran hacer pruebas de mayor torque y alta corriente, se recomiendan los drivers Pololu G 18v17, BTS7960 o VNH5019. Sin embargo, la elección del driver dependerá del usuario que entre en detalle para su construcción real.

- **Fuente de energía:** para suministrar energía a los distintos componentes del exoesqueleto. A continuación, en la tabla 15, se muestran distintos tipos de fuentes de energía que podrían ser útiles en la construcción del exoesqueleto.

Tabla 15 Fuentes de energía y características

Tipo de batería	Subtipo	Características
Baterías Recargables de Litio-Ion (Li-Ion)	Batería Li-Ion 12V 10Ah	Voltaje: 12V. Capacidad: 10Ah (alta autonomía para actuadores lineales y microcontrolador). Ventaja: Ligera y con buena densidad energética. Aplicación: Suficiente para mover actuadores pequeños y alimentar el sistema de control durante varias horas.
	Batería Li-Ion 14.8V 5200mAh	Voltaje: 14.8V (útil si tus actuadores necesitan un poco más de potencia). Capacidad: 5200mAh. Ventaja: Ideal para pruebas más livianas.
Baterías LiFePO4 (Fosfato de Hierro-Litio)	Batería LiFePO4 12V 6Ah o 10Ah	Voltaje: 12V nominal. Ventaja: Mayor ciclo de vida útil (más de 2000 ciclos de carga). Desventaja: Ligeramente más pesada que una Li-Ion.
Fuentes de Alimentación de Banco (Para Pruebas en Laboratorio)	KORAD KA3005D	Voltaje ajustable: 0 – 30V. Corriente ajustable: 0 – 5A. Ventaja: Ideal para probar actuadores lineales sin agotar una batería.
Baterías SLA (Ácido-Plomo Sellado)	Batería SLA 12V 7Ah	Ventaja: Bajo costo y alta fiabilidad. Desventaja: Peso elevado, menos adecuado para un sistema portátil.

Fuente: Elaboración propia.

Considerando las opciones mostradas anteriormente, se recomienda utilizar una fuente de alimentación de banco ajustable para pruebas iniciales en laboratorio, y finalmente batería de Li-Ion de 12V y 10Ah (el cual podría variar según el consumo de los dispositivos y requerimiento extra según se

requiera), el cual será necesario para que el prototipo operativo final pueda desplazarse.

5.5 Análisis presupuestal

A continuación, se muestra un presupuesto estimado de los componentes necesarios para el prototipo de exoesqueleto de piernas. Cabe resaltar, que estos componentes pueden variar según el autor que entre en detalle en la construcción de este, además, puede ser que requiera más o menos componentes de los indicados en la tabla 16.

Tabla 16 Análisis presupuestal estimado

N°	Componente	Cantidad Total	Costo Unitario	Costo Total	Fuente
1	Aluminio 6061 (barras)	4	S/ 90.00	S/ 360.00	La casa de los metales
2	Bisagras articuladas (cadera, rodillas y tobillos)	8	S/ 248.00	S/ 1,984.00	Megatiendas peruanas
3	Encoders rotativos (AS5600)	4	S/ 20.00	S/ 80.00	MT Lab Perú
4	Microcontrolador STM32F103C8T6 (de propósito general)	2	S/ 40.00	S/ 80.00	MT Lab Perú
5	Driver BTS7960	4	S/ 40.00	S/ 160.00	Electromanía Perú
6	Motor DC	4	S/ 25.00	S/ 100.00	Ali Express
7	Batería Li-Ion 12V 10Ah	2	S/ 79.00	S/ 158.00	New Electronic Security E.I.R.L.
8	Soportes ajustables (muslo y pantorrilla)	14	S/ 10.00	S/ 140.00	Tiendas de ortopedia en general*
9	Plataforma para el pie de aluminio	2	S/ 20.00	S/ 40.00	-
10	Cables y conectores variados	1	S/ 5.00	S/ 5.00	Hi-Fi Electrónica
TOTAL				S/ 3,107.00	

Fuente: elaboración propia. Precios referenciales tomado de las páginas web de las tiendas virtuales indicadas en la tabla.

El cálculo del presupuesto estimado es de S/ 3,107.00, sin embargo, se está despreciando costos como: mano de obra, software de diseño, herramientas manuales y/o mecánicas de manufactura, entre otros. Estos precios son referenciales

y han sido obtenidos según la página web de cada tienda virtual, los cuales pueden variar según el proveedor, ofertas del mercado, entre otros. Por otro lado, se debe recordar que estos son elementos recomendados que pueden ser reemplazados según se convenga, ya sea por modelos más avanzados o básicos (para reducir costos).

5.6 Conclusiones

- La construcción de un prototipo de exoesqueleto para piernas debe respetar aspectos como la movilidad libre para el usuario, lo cual se logra con un mayor número de articulaciones; considerar que debe contar con un bajo coste energético, y manejo de sensores y control avanzado mediante dispositivos de control y programación adecuada.
- El uso del aluminio 6061 es importante para la estructura, sin embargo, se puede considerar otras opciones para el cuerpo del exoesqueleto con materiales como aleaciones de titanio o impresiones 3D.

Capítulo VI. Conclusiones y Recomendaciones

6.1 Conclusiones

Luego de completar el análisis comparativo entre los controladores PID no lineal y Backstepping para el control del movimiento de sentarse/levantarse desde una silla para una persona, puedo concluir que:

- Se hizo un estudio del arte con respecto a la implementación de exoesqueleto para rehabilitación, en el movimiento de sentarse-levantarse.
- El modelo matemático del movimiento que realizan las piernas para la acción de levantarse desde una silla para una persona de tamaño y peso promedio se desarrolló usando las ecuaciones de Euler-Lagrange, las cuales analizan el movimiento de sistemas dinámicos y su evolución a través de la variable del tiempo por medio de las coordenadas generalizadas.
- El controlador **PID no lineal** que permite controlar la trayectoria que sigue el movimiento de piernas para la acción de **levantarse** desde una silla se logró desarrollar con éxito, pudiendo este alcanzar el estado estacionario a los 1.8 segundos de trayectoria para el control del ángulo de la cadera y para el ángulo de la rodilla. Con respecto a la medición del error, se encontró que el MAE es de 0.1802 para el control de cadera y de 0.1856 para el control de la rodilla; mientras que el RMSE es de 0.7049 para el control de la cadera y 0.7058 para el control de la rodilla. Cuando se ensayo con ruido los nuevos valores fueron, tiempo estacionario a los 2 segundos de trayectoria para el control del ángulo de la cadera y 1.85 segundos para el ángulo de la rodilla. Con respecto a la medición del error, se encontró que el MAE es de 0.4101 para el control de cadera y de 0.4688 para el control de la rodilla; mientras

que el RMSE es de 0.7849 para el control de la cadera y 0.7816 para el control de la rodilla.

- El controlador **PID no lineal** que permite controlar la trayectoria que sigue el movimiento de piernas para la acción de **sentarse** en la silla se logró desarrollar con éxito, pudiendo este alcanzar el estado estacionario a los 2.1 segundos de trayectoria para el control del ángulo de la cadera y 2.3 segundos para el ángulo de la rodilla. Con respecto a la medición del error, se encontró que el MAE es de 0.1801 para el control de cadera y de 0.1857 para el control de la rodilla; mientras que el RMSE es de 0.7048 para el control de la cadera y 0.7060 para el control de la rodilla. Cuando se ensayo con ruido los nuevos valores fueron, tiempo estacionario a los 2 segundos de trayectoria para el control del ángulo de la cadera y 2.5 segundos para el ángulo de la rodilla. Con respecto a la medición del error, se encontró que el MAE es de 0.4588 para el control de cadera y de 0.4617 para el control de la rodilla; mientras que el RMSE es de 0.8414 para el control de la cadera y 0.7693 para el control de la rodilla.
- El controlador **Backstepping** que permite controlar la trayectoria que sigue el movimiento de piernas para la acción de **levantarse** desde una silla se logró desarrollar con éxito, pudiendo este alcanzar el estado estacionario a los 0.6 segundos de trayectoria para el control del ángulo de la cadera y 0.7 segundos para el ángulo de la rodilla. Con respecto a la medición del error, se encontró que el MAE es de 0.0896 para el control de cadera y para el control de la rodilla; mientras que el RMSE es de 0.5657 para el control de la cadera y para el control de la rodilla. Cuando se ensayo con ruido los nuevos valores fueron, tiempo estacionario a los 0.94 segundos de trayectoria para

el control del ángulo de la cadera y 1 segundos para el ángulo de la rodilla. Con respecto a la medición del error, se encontró que el MAE es de 0.3733 para el control de cadera y de 0.3769 para el control de la rodilla; mientras que el RMSE es de 0.6440 para el control de la cadera y 0.6324 para el control de la rodilla.

- El **Backstepping** no lineal que permite controlar la trayectoria que sigue el movimiento de piernas para la acción de **sentarse** en la silla se logró desarrollar con éxito, pudiendo este alcanzar el estado estacionario a los 0.8 segundos de trayectoria para el control del ángulo de la cadera y para el ángulo de la rodilla. Con respecto a la medición del error, se encontró que el MAE es de 0.5657 para el control de cadera y para el control de la rodilla; mientras que el RMSE es de 0.6440 para el control de la cadera y 0.6719 para el control de la rodilla. Cuando se ensayo con ruido los nuevos valores fueron, tiempo estacionario a los 1.3 segundos de trayectoria para el control del ángulo de la cadera y 1.0 segundos para el ángulo de la rodilla. Con respecto a la medición del error, se encontró que el MAE es de 0.3721 para el control de cadera y de 0.3728 para el control de la rodilla; mientras que el RMSE es de 0.6343 para el control de la cadera y 0.6324 para el control de la rodilla.
- El sistema de control basado en el modelo PID no lineal, presenta un sobreimpulso a los 0.75 segundos en la articulación de la cadera, la cual inicia en 90° y el sobreimpulso llega a 120° y luego presenta una ligera oscilación que se estabiliza a los 3.354 segundos para el control de la cadera; mientras que para el control de la rodilla, inicia en -90° y tiene un

sobreimpulso negativo de -120° , el cual nuevamente presenta otra oscilación que se estabiliza a los 3 segundos.

- El modelo de control basado en Backstepping para el control del movimiento de levantarse desde una silla no presenta señal de sobreimpulso, pero se observa que alcanza la señal deseada después de 1 segundo para el control de cadera y 1.15 segundos para el control de rodilla.
- La acción de control desarrollada por el controlador Backstepping es suave cuando no hay ruido y presenta variaciones moderadas cuando se considera ruido. Por otra parte, para el controlador PID no lineal la acción de control es también de forma suave cuando no hay ruido, pero, cuando existe ruido esta se vuelve muy variante y podría hacerse necesario un compensador de perturbaciones para evitar la afectación a los actuadores.
- El comportamiento y respuesta del modelo matemático del movimiento de levantarse desde una silla para una persona promedio ante las señales de control PID no lineal y Backstepping lograron ser efectivos para el propósito deseado. Sin embargo, el controlador Backstepping mostró mejor respuesta lo cual se observa en una respuesta más rápida en el control de la cadera y rodilla en comparación al controlador PID no lineal, además de observarse que la medición del error, tanto el MAE como el RMSE, son menores en comparación.

6.2 Recomendaciones

- Con el fin de desarrollar una implementación del método deseado del sistema de control, se recomienda un análisis profundo en actuadores de tipo “músculo neumático”, ya que es el que actualmente se menciona en la bibliografía mencionada para el desarrollo de exoesqueletos.

- El desarrollo de exoesqueletos se encuentra aún en etapa de desarrollo, por lo que se recomienda analizar más métodos de control de sistemas no lineales para el mismo tipo de movimiento.



Bibliografía

Urcia-Fernández F, Cam-Chiock D. Perfil epidemiológico de los pacientes con secuelas de accidente cerebrovascular atendidos en un instituto de rehabilitación de Lima-Perú. Rev Méd Hered [Internet]. 20 de septiembre de 2023.

Diego Alexander Tibaduiza-Burgos; Maribel Anaya-Vejar; Pedro Antonio Aya-Parra “Exoesqueleto para rehabilitación de miembro inferior con dos grados de libertad orientado a pacientes con accidentes cerebrovasculares” INGE CUC, vol. 15, no. 2, pp. 36-46, 2019.

Contreras L. E.; Trisancho, J. A.; Vargas, L. F. “Análisis biomecánico de marcha humana a través de técnicas de modelaje”. Revista Entre Ciencia e Ingeniería, ISSN 1909-8367, Año 6. No. 12, página 29-35. 2012.

Arcos Legarda, W. “Control automático de un exoesqueleto de marcha para pacientes con discapacidad motora”. Tesis para obtener el grado de Magister. Universidad Nacional de Colombia. 2013.

Cárdenas Borrego, Andrés F. “Simulación de la marcha empleando un modelo de control neuromuscular”. Pasantía de investigación para obtener el título de Ingeniero Biomédico. Universidad Autónoma de Occidente. Santiago de Cali, Colombia. 2017.

Diego Alexander Tibaduiza-Burgos; Maribel Anaya-Vejar; Pedro Antonio Aya-Parra “Exoesqueleto para rehabilitación de miembro inferior con dos grados de libertad orientado a pacientes con accidentes cerebrovasculares” INGE CUC, vol. 15, no. 2, pp. 36-46, 2019.

Gómez Martínez, Luis E. “Soporte de cadera y tórax para órtesis de miembro inferior”. Tesis para obtener el título de Ingeniero Mecatrónico. Universidad Nacional Autónoma de México. 2012.

OMS, Serie de Informes Técnicos 854 (1995). “El estado físico: uso e interpretación de la antropometría”. Informe de un Comité de Expertos de la OMS. Ginebra (2005).

Alonso Becerra, Alicia (2017). “Antropometría”. Conference Paper. Universidad Tecnológica de la Habana, José Antonio Echevarría.

Velandia Cárdenas, Cristian Camilo. “Modelado, control y monitoreo de un exoesqueleto para asistir procesos de rehabilitación en miembro inferior”. Proyecto dirigido de grado para optar por el título de ingeniero electrónico. Universidad Santo Tomás. Bogotá – Colombia. 2016.

Pellicena García, Fernando. “Diseño mecánico de un modelo de robot bípedo: estructura y configuración”. Trabajo de fin de grado. Escuela de Ingeniería y Arquitectura. Universidad de Zaragoza. Zaragoza – España. 2016.

Calle Arévalo, Luis; Vidal Dávila, Juan. “Propuesta de un modelo mecánico y análisis cinemático de un exoesqueleto de seis grados de libertad para personas con daño en la médula espinal”. Proyecto de investigación y desarrollo previo a la obtención del Grado de Magister en Métodos Matemáticos y Simulación Numérica en Ingeniería. Universidad Politécnica Salesiana. Cuenca – Ecuador. 2017.

Ruíz Hernández, Octavio. “Análisis cinemático y dinámico de un robot bípedo de 12 GDL interinos utilizando la formulación Newton-Euler”. Tesis para optar el grado de Maestro en Ingeniería Mecánica-Mecatrónica. Universidad Nacional Autónoma de México. Distrito Federal – México. 2014.

Escobar Galindo, Carlos Manuel. “Perfil antropométrico de trabajadores del Perú utilizando el método de escala proporcional”. Revista Ergonomía, Investigación y Desarrollo 2020; Vol 2(2): 96-111 ISSN 2452-4859. University of Nottingham. Nottingham, Reino Unido.

Aguilar Sierra, Hipólito. “Control de un exoesqueleto para asistir en la bipedestación y marcha de una persona”. Universidad Zacatenco. Tesis para optar el título de Doctor en Ciencias. Ciudad de México – México, 2016.

JOHN WILEY & SONS, INC. "Biomechanics and Motor Control of Human Movement", Fourth Edition David A. Winter Copyright. 2009.

Mariela Contreras Rojas. "Tabla de valoración nutricional según IMC adultas/os". Ministerio de Salud. Instituto Nacional de Salud. 2012

Wellste, E. (2024, January 16). *6061 Aluminum Alloy – decoding Properties and uses, etc.* WELLSTE. https://www.wellste.com/es/6061-aluminum-alloy/#elementor-toc__heading-anchor-0

Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems* (3rd ed.). Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Lewis, F. L., Abdallah, C. T., & Dawson, D. M. (2004). *Control of Robot Manipulators*. Macmillan.

Lynch, Kevin M.; Park, Frank C. (2017). *Modern robotics: mechanics, planning, and control*. Cambridge: Cambridge university press.

Anexos

- Código del controlador PID no lineal en MatLab

```
clear all;
close all;
clc;

% Escoger sentarse o pararse
pararse = 1; % 0 sentarse, 1 pararse

% limites de tiempo
ti = 0; tf = 16; dt = 0.001;
t = ti:dt:tf;

% Escoger ruido en medicion
con_ruido = 1; % 0: sin ruido, 1: con ruido
% ruido para simulacion
if con_ruido == 1
    ruido = 2e-3*(rand(2,length(t))-0.5);
else
    ruido = 0*(rand(2,length(t))-0.5);
end

%Diseño de referencia
pce1 = @(x) x>=0 & x<0.5;
pce2 = @(x) x>=0.5 & x<4.0;
pce3 = @(x) x>=4.0 & x<4.5;
pce4 = @(x) x>=4.5 & x<13;
pce5 = @(x) x>=13 & x<=16;

f_cadera = @(t) 90.*pce1(t) + (20*cos(2*pi/7*t+6*pi/7)+110).*pce2(t)+ ...
    130.*pce3(t) + (65*cos(4*pi*t/34-18*pi/34)+65).*pce4(t)+0.*pce5(t);

pce1 = @(x) x>=0 & x<1;
pce2 = @(x) x>=1 & x<3.0;
pce3 = @(x) x>=3.0 & x<4.5;
pce4 = @(x) x>=4.5 & x<13;
pce5 = @(x) x>=13 & x<=16;

f_rodilla = @(t) -90.*pce1(t) + (10*cos(2*pi/4*t-pi/2)-100).*pce2(t)+ ...
    -110.*pce3(t) + (55*cos(2*pi*t/17+8*pi/17)-55).*pce4(t)+0.*pce5(t);

pce1 = @(x) x>=0 & x<1;
pce2 = @(x) x>=1 & x<5.0;
pce3 = @(x) x>=5 & x<13;
pce4 = @(x) x>=13 & x<=16;

f_tobillo = @(t) 0.*pce1(t) + (7.5*cos(pi/4*t+3*pi/4)+7.5).*pce2(t)+ ...
    (7.5*cos(pi*t/8-5*pi/8)+7.5).*pce3(t)+0.*pce4(t);

theta_cadera = f_cadera(t);
theta_rodilla = f_rodilla(t);
theta_tobillo = f_tobillo(t);

if pararse==0
    theta_cadera = flip(theta_cadera);
```

```

theta_rodilla = flip(theta_rodilla);
theta_tobillo = flip(theta_tobillo);
end

%Inicializacion
m1 = 11.88/2; % peso de 1 muslo
l1 = 0.404985;
lc1 = 0.2;
I1 = 2.59; % Fuente Hipolito
m2 = 29.54/2; % peso del tronco
l2 = 0.476064;
lc2 = 0.23;
I2 = 0.3968; % Fuente Hipolito
g = 9.81;

% Ganancias a usar
% K11 = input('Ganancia K11 (fi1) [10]: '); % Los pesos son mayores
cuando se sigue trayectoria
% K12 = input('Ganancia K12 (fi2) [10]: ');
% K21 = input('Ganancia K21 (fi1p) [25]: ');
% K22 = input('Ganancia K22 (fi2p) [25]: ');
Kp1 = 20; Ti1 = 100; Td1 = 0.15;
Kp2 = 20; Ti2 = 50; Td2 = 0.15;
Ki1 = Kp1/Ti1; Kd1 = Kp1*Td1;
Ki2 = Kp2/Ti2; Kd2 = Kp2*Td2;
Kp = diag([ Kp1 Kp2 ]);
Ki = diag([ Ki1 Ki2 ]);
Kd = diag([ Kd1 Kd2 ]);
v = 0.1;

% Otras variables para la simulacion
r2 = theta_cadera*pi/180;
r1 = theta_rodilla*pi/180;
r1 = real(r1);
r2 = real(r2);
nr = length(r1);
% Variables deseadas (trayectoria)
qd = [ r1' r2' ];
qpd = [ zeros(nr,1) zeros(nr,1) ];

theta1 = zeros(nr,1);
theta2 = zeros(nr,1);
vtheta1 = zeros(nr,1);
vtheta2 = zeros(nr,1);
T1 = zeros(nr,1);
T2 = zeros(nr,1);
M = zeros(2,2);
C = zeros(2,2);
G = zeros(2,1);
% r1 = 60*pi/180;
% r2 = 30*pi/180;
% ti = 0; tf = 3;
% t = ti:dt:tf; t = t';
% nt = length(t);
% angast = [ r1*ones(nt,1) r2*ones(nt,1) ];
% velast = [ zeros(nt,1) zeros(nt,1) ];

% Valores iniciales

```

```

the1 = theta_rodilla(1)*pi/180+0.1;    the2 = theta_cadera(1)*pi/180-0.1;
the1p = 0;    the2p = 0;
q = [ the1  the2 ]'; % Angulos iniciales
qp = [0, 0]'; % Velocidad angular inicial
int_e = 0;
qdp_ant = 0; % Velocidad deseada anterior (memoria)
k = 1;

torque_maximo1 = 200;
torque_maximo2 = 120;

% Simulación por pasos
for tt = t
    the1 = q(1,1);    the2 = q(2,1);
    the1p = qp(1,1);    the2p = qp(2,1);
    % Guardando datos de simulacion
    theta1(k,1) = the1;    theta2(k,1) = the2;
    vtheta1(k,1) = the1p;    vtheta2(k,1) = the2p;

    % Matriz M
    M(1,1) = m1*lc1^2+m2*lc2^2+2*m2*l1*lc2*cos(the2) + I1 + I2;
    M(1,2) = m2*lc2^2+m2*l1*lc2*cos(the2) + I2;
    M(2,1) = m2*lc2^2 + m2*l1*lc2*cos(the2) + I2;
    M(2,2) = m2*lc2^2 + I2;

    % Matriz C
    C(1,1) = -m2*l1*lc2*sin(the2)*the2p;
    C(1,2) = -m2*l1*lc2*sin(the2)*(the1p+the2p);
    C(2,1) = m2*l1*lc2*sin(the2)*the1p;
    C(2,2) = 0;

    % Matriz G
    G(1) = (m1*lc1+m2*l1)*g*cos(the1)+m2*lc2*g*cos(the1+the2);
    G(2) = m2*lc2*g*cos(the1+the2);

    % Torque - accion de control
    e = q - qd(k,:);
    if tt>ti
        % Usando discretización por Euler
        qdp = (qd(k,:)' - qd(k-1,:)' )/dt; % Calculando derivada
        qd2p = (qdp - qdp_ant)/dt; % Calculando segunda derivada
        de = (e - e_ant)/dt; % Calculo de derivada de error
    else
        % Tiempo inicial
        qdp = 0;
        qd2p = 0;
        de = 0;
    end
    int_e = int_e + e*dt; % integral del error

    Rho = -M\C*qp + G);
    T = C*qp + G + M*(qd2p-Kp*e-Ki*int_e-Kd*de); % Torque calculado
    e_ant = e; % Memoria del error
    qdp_ant = qdp; % Memoria de la derivada de q
    % Saturacion
    if (T(1,1)>torque_maximo1) % 1 N.m máximo
        T(1,1) = torque_maximo1;
    elseif (T(1,1)<-torque_maximo1)

```

```

        T(1,1) = -torque_maximo1;
    end
    if (T(2,1)>torque_maximo2)
        T(2,1) = torque_maximo2;
    elseif (T(2,1)<-torque_maximo2)
        T(2,1) = -torque_maximo2;
    end
    T1(k,1) = T(1,1); % guardando T1
    T2(k,1) = T(2,1); % guardando T2
    % Dinamica del exoesqueleto
    q2p = M\(-C*qp-G+T);
    qp = qp + dt*q2p;
    q = q + dt*qp + ruido(:,k);
    k = k + 1;

    % Cada 100 pasos escribir datos (100*dt = 0.1seg):
    if mod(k,100)==0
        fprintf('%d, %f, %f\n',k, theta1(k,1), theta2(k,1));
    end
end
% Transformacion a coordenadas XY
xx = lc1*cos(theta1) + lc2*cos(theta1 + theta2);
yy = lc1*sin(theta1) + lc2*sin(theta1 + theta2);

% Plot de las referencias
figure(1);
subplot(3,1,1); plot(t, theta_cadera, 'r', 'linewidth',1.5)
title('GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS');
legend('SET POINT CADERA')
subplot(3,1,2); plot(t, theta_rodilla, 'b', 'linewidth',1.5)
legend('SET POINT RODILLA')
subplot(3,1,3); plot(t, theta_tobillo, 'g', 'linewidth',1.5)
legend('SET POINT TOBILLO')

% Transformacion a grados sexagesimales
theta1g = theta1*180/pi;
theta2g = theta2*180/pi;
vtheta1g = vtheta1*180/pi;
vtheta2g = vtheta2*180/pi;
r1g = r1*180/pi;
r2g = r2*180/pi;

% Calculo de MAE
MAE1 = sum(abs(theta_cadera - theta1'))./length(theta_cadera);
MAE2 = sum(abs(theta_rodilla - theta2'))./length(theta_rodilla);

% Calculo de RMSE
RMSE1 = sqrt(sum((theta_cadera - theta1').^2)/length(theta_cadera));
RMSE2 = sqrt(sum((theta_rodilla - theta2').^2)/length(theta_rodilla));

% Graficas
figure(2);
subplot(2,1,1);
plot(t,theta1g, '-b', 'Linewidth',1.5); hold on; plot(t,r1g, '--
r', 'Linewidth',1.5);

```

```

title('Control de articulación de cadera'); legend('Ángulo
Cadera','Referencia'); grid
subplot(2,1,2);
plot(t,theta2g,'-b','Linewidth',1.5); hold on; plot(t,r2g,'--
r','Linewidth',1.5);
title('Control de articulación de rodilla'); legend('Ángulo
Rodilla','Referencia'); grid
figure(3);
plot(t,T1,t,T2); title('Torques'); grid
legend('Torque 1','Torque 2');
% figure(3);
% plot(xx,yy,xr,yr); title('Trayectoria')
% legend('Robot','Referencia');
grid
save('resul_pidn1.mat','t','theta1g','theta2g','vtheta1g','vtheta2g','r1g','r
2g','T1','T2');

%% Comparative
load('resul_pidn1.mat')
theta1gpid = theta1g;
theta2gpid = theta2g;
vtheta1gpid = vtheta1g;
vtheta2gpid = vtheta2g;
T1pid = T1;
T2pid = T2;

load('resul_bstep.mat')

close all
fig = figure(4);
set(fig, 'position', [100,100,800,400])
subplot(2,1,1);
plot(t,r1g,'-g','Linewidth',3); hold on;
plot(t,theta1g,'-r','Linewidth',3);
plot(t,theta1gpid,'--b','Linewidth',3); grid on
xlabel("TIEMPO[seg]"); ylabel("Ang[deg]")
ylim('padded');
title('CONTROL DE ARTICULACIÓN DE RODILLA');
legend('SET POINT','BACKSTEPPING','PID NO LINEAL','Location','best');
subplot(2,1,2); hold on
plot(t,T1pid,'--b','Linewidth',3); grid on
plot(t,T1,'-r','Linewidth',3);
xlabel("TIEMPO[seg]"); ylabel("T[N.m]")
ylim('padded');
title('TORQUE EN ARTICULACIÓN DE RODILLA');
legend('BACKSTEPPING','PID NO LINEAL','Location','best');

fig = figure(5);
set(fig, 'position', [100,100,800,400])
subplot(2,1,1);
plot(t,r2g,'-g','Linewidth',3); hold on;
plot(t,theta2g,'-r','Linewidth',3);
plot(t,theta2gpid,'--b','Linewidth',3); grid on
xlabel("TIEMPO[seg]"); ylabel("Ang[deg]")
ylim('padded');
title('CONTROL DE ARTICULACIÓN DE CADERA');

```

```

legend('SEÑAL DESEADA', 'BACKSTEPPING', 'PID NO LINEAL', 'Location', 'best');
subplot(2,1,2);
hold on;
plot(t,T2pid, '--b', 'Linewidth', 3); grid on
plot(t,T2, '-r', 'Linewidth', 3);
xlabel("TIEMPO[seg]"); ylabel("T[N.m]")
ylim('padded');
title('TORQUE EN ARTICULACIÓN DE CADERA');
legend('BACKSTEPPING', 'PID NO LINEAL', 'Location', 'best');

fig = figure(6);
set(fig, 'position', [100,100,800,400])
subplot(2,1,1);
plot(t,r2g, '--g', 'Linewidth', 3); hold on;
plot(t,theta2g, '-r', 'Linewidth', 3);
plot(t,theta2gpid, '--b', 'Linewidth', 3); grid on
xlabel("TIEMPO[seg]"); ylabel("Ang[deg]")

ylim('padded');
title('CONTROL DE ARTICULACIÓN DE CADERA');
legend('SEÑAL DESEADA', 'BACKSTEPPING', 'PID NO LINEAL', 'Location', 'best');
subplot(2,1,2);
plot(t,r1g, '-g', 'Linewidth', 3); hold on;
plot(t,theta1g, '-r', 'Linewidth', 3);
plot(t,theta1gpid, '--b', 'Linewidth', 3); grid on
ylim('padded');
title('CONTROL DE ARTICULACIÓN DE RODILLA');
legend('SEÑAL DESEADA', 'BACKSTEPPING', 'PID NO LINEAL', 'Location', 'best');

fig = figure(7);
set(fig, 'position', [100,100,800,400])
subplot(2,1,1); title("ERROR DE POSICIÓN ANGULAR: ARTICULACIÓN DE RODILLA");
hold on; grid on
plot(t,(r2g-theta2g), '-r', 'Linewidth', 3) % error backstepping
plot(t,(r2g-theta2gpid), '-.b', 'Linewidth', 3) % error pid no lineal
legend('Backstepping', 'PID no lineal')
xlabel("TIEMPO[seg]"); ylabel("E[deg]")
subplot(2,1,2); title("VELOCIDAD ANGULAR: ARTICULACIÓN DE RODILLA"); hold on;
grid on
plot(t,vtheta2g, '-r', 'Linewidth', 3) % vel backstepping
plot(t,vtheta2gpid, '-.b', 'Linewidth', 3) % vel pid no lineal
legend('Backstepping', 'PID no lineal')
xlabel("TIEMPO[seg]"); ylabel("W[deg/s]")

fig = figure(8);
set(fig, 'position', [100,100,800,400])
subplot(2,1,1); title("ERROR DE POSICIÓN ANGULAR: ARTICULACIÓN DE CADERA");
hold on; grid on
plot(t,(r1g-theta1g), '-r', 'Linewidth', 3) % error backstepping
plot(t,(r1g-theta1gpid), '-.b', 'Linewidth', 3) % error pid no lineal
xlabel("TIEMPO[seg]"); ylabel("E[deg]")
legend('Backstepping', 'PID no lineal')
subplot(2,1,2); title("VELOCIDAD ANGULAR: ARTICULACIÓN DE CADERA"); hold on;
grid on
plot(t,vtheta1g, '-r', 'Linewidth', 3) % vel backstepping
plot(t,vtheta1gpid, '-.b', 'Linewidth', 3) % vel pid no lineal
legend('Backstepping', 'PID no lineal')
xlabel("TIEMPO[seg]"); ylabel("W[deg/s]")

```

```

% MAE1
% MAE2
%
% RMSE1
% RMSE2

```

- **Código del controlador Backstepping en MatLab**

```

clear all;
close all;
clc;

% Escoger sentarse o pararse
pararse = 1; % 0 sentarse, 1 pararse

% limites de tiempo
ti = 0; tf = 16; dt = 0.001;
t = ti:dt:tf;

% Escoger ruido en medicion
con_ruido = 1;
% ruido para simulacion
if con_ruido == 1
    ruido = 2e-3*(rand(2,length(t))-0.5);
else
    ruido = 0*(rand(2,length(t))-0.5);
end

%Diseño de referencia
pce1 = @(x) x>=0 & x<0.5;
pce2 = @(x) x>=0.5 & x<4.0;
pce3 = @(x) x>=4.0 & x<4.5;
pce4 = @(x) x>=4.5 & x<13;
pce5 = @(x) x>=13 & x<=16;

f_cadera = @(t) 90.*pce1(t) + (20*cos(2*pi/7*t+6*pi/7)+110).*pce2(t)+ ...
    130.*pce3(t) + (65*cos(4*pi*t/34-18*pi/34)+65).*pce4(t)+0.*pce5(t);

pce1 = @(x) x>=0 & x<1;
pce2 = @(x) x>=1 & x<3.0;
pce3 = @(x) x>=3.0 & x<4.5;
pce4 = @(x) x>=4.5 & x<13;
pce5 = @(x) x>=13 & x<=16;

f_rodilla = @(t) -90.*pce1(t) + (10*cos(2*pi/4*t-pi/2)-100).*pce2(t)+ ...
    -110.*pce3(t) + (55*cos(2*pi*t/17+8*pi/17)-55).*pce4(t)+0.*pce5(t);

pce1 = @(x) x>=0 & x<1;
pce2 = @(x) x>=1 & x<5.0;
pce3 = @(x) x>=5 & x<13;
pce4 = @(x) x>=13 & x<=16;

f_tobillo = @(t) 0.*pce1(t) + (7.5*cos(pi/4*t+3*pi/4)+7.5).*pce2(t)+ ...
    (7.5*cos(pi*t/8-5*pi/8)+7.5).*pce3(t)+0.*pce4(t);

theta_cadera = f_cadera(t);

```

```

theta_rodilla = f_rodilla(t);
theta_tobillo = f_tobillo(t);

if pararse==0
    theta_cadera = flip(theta_cadera);
    theta_rodilla = flip(theta_rodilla);
    theta_tobillo = flip(theta_tobillo);
end

%Inicializacion
% m1 = 0.15;
% l1 = 0.35;
% lc1 = 0.16;
% I1 = 4.1e-3;
% m2 = 0.12;
% l2 = 0.30;
% lc2 = 0.12;
% I2 = 3.2e-3;
% g = 9.81;

m1 = 11.88/2; % peso de 1 muslo
l1 = 0.404985;
lc1 = 0.2;
I1 = 2.59; % Fuente Hipolito
m2 = 29.54/2; % peso del tronco
l2 = 0.476064;
lc2 = 0.23;
I2 = 0.3968; % Fuente Hipolito
g = 9.81;

% Ganancias a usar
% K11 = input('Ganancia K11 (fi1) [10]: '); % Los pesos son mayores
cuando se sigue trayectoria
% K12 = input('Ganancia K12 (fi2) [10]: ');
% K21 = input('Ganancia K21 (fi1p) [25]: ');
% K22 = input('Ganancia K22 (fi2p) [25]: ');
K11 = 8; K12 = 8; K21 = 8; K22 = 8;
K1 = diag([ K11 K12 ]);
K2 = diag([ K21 K22 ]);
v = 0.1;

% Otras variables para la simulacion
r2 = theta_cadera*pi/180;
r1 = theta_rodilla*pi/180;
r1 = real(r1);
r2 = real(r2);
nr = length(r1);
angast = [ r1' r2' ];
velast = [ zeros(nr,1) zeros(nr,1) ];

theta1 = zeros(nr,1);
theta2 = zeros(nr,1);
vtheta1 = zeros(nr,1);
vtheta2 = zeros(nr,1);
des_vtheta1 = zeros(nr,1);
des_vtheta2 = zeros(nr,1);

T1 = zeros(nr,1);

```

```

T2 = zeros(nr,1);
M = zeros(2,2);
C = zeros(2,2);
G = zeros(2,1);
% r1 = 60*pi/180;
% r2 = 30*pi/180;
% ti = 0; tf = 3;
% t = ti:dt:tf; t = t';
% nt = length(t);
% angast = [ r1*ones(nt,1) r2*ones(nt,1) ];
% velast = [ zeros(nt,1) zeros(nt,1) ];

the1 = theta_rodilla(1)*pi/180+0.1; the2 = theta_cadera(1)*pi/180-0.1;
the1p = 0; the2p = 0;
ang = [ the1 the2 ]';
vel = [0, 0]';
angastp_ant = 0;
angastp = zeros(2,1);
k = 1;

torque_maximo1 = 200;
torque_maximo2 = 100;

for tt = t
    the1 = ang(1,1); the2 = ang(2,1);
    the1p = vel(1,1); the2p = vel(2,1);
    % Guardando datos de simulacion
    theta1(k,1) = the1; theta2(k,1) = the2;
    vtheta1(k,1) = the1p; vtheta2(k,1) = the2p;
    des_vtheta1(k,1) = angastp(1); des_vtheta2(k,1) = angastp(2);

    % Matriz M
    M(1,1) = m1*lc1^2+m2*lc2^2+2*m2*l1*lc2*cos(the2) + I1 + I2;
    M(1,2) = m2*lc2^2+m2*l1*lc2*cos(the2) + I2;
    M(2,1) = m2*lc2^2 + m2*l1*lc2*cos(the2) + I2;
    M(2,2) = m2*lc2^2 + I2;

    % Matriz C
    C(1,1) = -m2*l1*lc2*sin(the2)*the2p;
    C(1,2) = -m2*l1*lc2*sin(the2)*(the1p+the2p);
    C(2,1) = m2*l1*lc2*sin(the2)*the1p;
    C(2,2) = 0;

    % Matriz G
    G(1) = (m1*lc1+m2*l1)*g*cos(the1)+m2*lc2*g*cos(the1+the2);
    G(2) = m2*lc2*g*cos(the1+the2);

    % Torque - accion de control
    if tt>ti
        angastp = (angast(k,:) - angast(k-1,:))/dt;
        angast2p = (angastp - angastp_ant)/dt;
    else
        angastp = zeros(2,1);
        angast2p = zeros(2,1);
    end
    % T = C*vel + G + M*(K1*(vel-angastp) - K2*vel - K2*K1*(ang-
    angast(k,:)));

```

```

    T = C*vel + G + M*(-K1*(vel-angastp) + K2*angastp + angast2p - K2*vel -
K2*K1*(ang-angast(k,:))');
    % Saturacion
    if (T(1,1)>torque_maximo1) % 1 N.m máximo
        T(1,1) = torque_maximo1;
    elseif (T(1,1)<-torque_maximo1)
        T(1,1) = -torque_maximo1;
    end
    if (T(2,1)>torque_maximo2)
        T(2,1) = torque_maximo2;
    elseif (T(2,1)<-torque_maximo2)
        T(2,1) = -torque_maximo2;
    end
    angastp_ant = angastp;
    T1(k,1) = T(1,1);
    T2(k,1) = T(2,1);
    % Dinamica
    accel = M\(-C*vel-G+T);
    ang = ang + dt*vel + ruido(:,k);
    vel = vel + dt*accel;
    k = k + 1;

    if mod(k,100)==0
        fprintf('%d, %f, %f\n',k, theta1(k,1), theta2(k,1));
    end
end
% Transformacion a coordenadas XY
xx = lc1*cos(theta1) + lc2*cos(theta1 + theta2);
yy = lc1*sin(theta1) + lc2*sin(theta1 + theta2);
%%
% Plot de las referencias
figure(1);
subplot(3,1,1); plot(t, theta_cadera, 'r', 'linewidth',1.5)
title('GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS');
legend('SET POINT CADERA')
subplot(3,1,2); plot(t, theta_rodilla, 'b', 'linewidth',1.5)
legend('SET POINT RODILLA')
subplot(3,1,3); plot(t, theta_tobillo, 'g', 'linewidth',1.5)
legend('SET POINT TOBILLO')

% Calculo de RMSE
RMSE1 = sqrt(sum((theta_cadera - theta1').^2)/length(theta_cadera));
RMSE2 = sqrt(sum((theta_rodilla - theta2').^2)/length(theta_rodilla));

% Transformacion a grados sexagesimales
theta1g = theta1*180/pi;
theta2g = theta2*180/pi;
vtheta1g = vtheta1*180/pi;
vtheta2g = vtheta2*180/pi;
des_vtheta1g = des_vtheta1*180/pi;
des_vtheta2g = des_vtheta2*180/pi;
r1g = r1*180/pi;
r2g = r2*180/pi;
% Graficas
figure(2);
subplot(2,1,1);
plot(t,theta1g, '-b', 'Linewidth',1.5); hold on; plot(t,r1g, '--
r', 'Linewidth',1.5);

```

```

title('Theta 1 - Rodilla');
legend('Theta1','Referencia');
subplot(2,1,2);
plot(t,theta2g,'-b','Linewidth',1.5); hold on; plot(t,r2g,'--
r','Linewidth',1.5);
title('Theta 2 - Cadera');
legend('Theta2','Referencia');
figure(3);
plot(t,T1,t,T2,'Linewidth',1.5); title('Torques')
legend('Torque 1','Torque 2');
% figure(3);
% plot(xx,yy,xr,yr); title('Trayectoria')
% legend('Robot','Referencia');

save('resul_bstep.mat','t','theta1g','theta2g','r1g','r2g','vtheta1g','vtheta
2g','des_vtheta1g','des_vtheta2g','T1','T2');

```

